Zürcher Hochschule
für Angewandte Wissenschaften

School of Engineering
IDP Institut für Datenanalyse und Prozessdesign

FS 2016

Stochastische Prozesse

Woche 2

Aufgabe 1 Diskreter stochastischer Prozess

Betrachten Sie folgenden stochastischen Prozess:

$$X_t = \text{sign}(X_{t-1} + X_{t-2} + 6(\epsilon_t - 0.5)),$$

wobei die ϵ_t unabhängig identisch standardnormalverteilte Zufallsvariable seien. `R`-Tipp: Eine standardnormalverteilte Zufallszahl bekommt man mit `rnorm()`.

a) Was hat Prozess für einen Zustandsraum?
b) Ist dieser Prozess ein Markov-Prozess?
c) Erzeugen Sie mittels Simulation Trajektorien dieses Prozesses. Plotten Sie drei verschiedene Trajektorien, die alle im Zustand $x_1 = 1$ und $x_0 = 1$ starten.

Tipp: In `R` können Sie mehrere Kurven wie folgt plotten:

```
x <- seq(1, 2 * 3.131, 0.1)
plot(x, sin(x), t = "o")
lines(x, cos(x), col = "red", t = "o")
```

d) Schätzen Sie mittels Simulation die Wahrscheinlichkeit, zum Zeitpunkt $t = 4$ im Zustand $X_{t=4} = 1$ zu sein, wenn der Anfangszustand ($t = 0$ und $t = 1$) durch $x_0 = 1$ und $x_1 = 1$ gegeben ist.

Aufgabe 2 Simulation einer Markov-Kette

a) Schreiben Sie eine `R`-Funktion `markov(P, T, x0)`, die eine Realisation einer Markov-Kette mit Laufzeiten $t = 0, \ldots, T$ für eine beliebige Übergangsmatrix P und Startwert x_0 simuliert. Die Rückgabe soll ein Vektor der Länge T sein, der eine Trajektorie eines Markov-Prozesses (ohne den Startzustand) beschreibt.

b) Schätzen Sie mittels Simulation die Wahrscheinlichkeit, dass der Prozess zum Zeitpunkt $t = 3$ im Zustand 3 ist, der Startwert sei $X_0 = 1$. Verwenden Sie dazu folgende Übergangsmatrix:

```r
(P = matrix(c(0, 0.1, 0.9, 0.2, 0.5, 0.3, 0, 0.5, 0.5), ncol = 3, byrow = T))
```

```
     [,1] [,2] [,3]
[1,]  0.0  0.1  0.9
[2,]  0.2  0.5  0.3
[3,]  0.0  0.5  0.5
```

c) Der Prozess laufe bis zum Zeitpunkt $t = 5$. Wie hoch ist für diese Laufzeit die erwartete Anzahl von Aufenthalten im Zustand 1?