

Abschlussprüfung StoP  
FS 2014

**17. Juni 2014**

---

Name:	Klasse:
-------	---------

**Erlaubte Hilfsmittel:**

- Open-book: Aufschriebe, Bücher, Ausdrücke usw. auf Papier **aber keine Dateien** wie pdfs.
- Auf dem Bildschirm darf nur RStudio offen sein, WLAN muss ausgeschaltet sein.
- Taschenrechner, R und in RStudio geöffnete R-Skripte mit kommentierten R-Befehlen

**Hinweise:**

- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Falsche Antworten bei Multiple-Choice-Aufgaben geben 0.5 Punkte Abzug.
- Bearbeiten Sie die Aufgaben auf den ausgegebenen Blättern und verwenden Sie, wenn möglich, keine Zusatzblätter.
- Falls Sie dennoch Zusatzblätter verwenden sollten, versehen Sie alle Zusatzblätter mit Ihrem Namen und verwenden Sie pro Aufgabe ein extra Zusatzblatt.
- Bei Aufgabenteilen die mit R zu lösen sind: Übertragen Sie den R-Code und die Ergebnisse.
- Erfragte Begründungen müssen in ganzen Sätzen ausformuliert werden und nachvollziehbar sein.
- Die angegebenen Punkte können sich noch leicht ändern.

**Punkte:**

**Note:**

Viel Erfolg !!



**Aufgabe 1 (Multiple Choice)***5\*1.5=7.5 Punkte*

---

Bitte beachten Sie, falsche Lösungen geben einen halben Punkt Abzug.

1. Hat ein Markov-Prozess die stationären Verteilung erreicht, so gilt immer  $\frac{d}{dt}\vec{\pi}(t) = 0$ ?  
☐ Richtig ☐ Falsch
2. Eine Realisierung einer irreduziblen MK befindet sich zu den Zeiten  $t = 0, 2, 4, 5, 6, 8$  im Zustand 1. Handelt es sich um eine periodische Kette?  
☐ Richtig ☐ Falsch
3. Die transponierte Übergangsmatrix  $P'$  einer Markov-Kette hat die Eigenwerte 1,  $0.5 - i$  und  $0.5 + i$ . Ist diese Markov-Kette aperiodisch?  
☐ Richtig ☐ Falsch
4. Eine Markov-Kette hat die Eigenwerte 1 und 0.1, eine andere die Eigenwerte 1 und 0.9. Konvergiert die erste Markov-Kette EW(1,0.1) schneller gegen die stationäre Lösung, als die zweite mit EW(1,0.9)?  
☐ Richtig ☐ Falsch
5. Ist eine Markov-Kette zum Zeitpunkt  $t = 0$  und  $t = 1$  im Zustand 1, d.h. ihre Verteilung ist jeweils  $\vec{\pi} = (1, 0, 0)$ , so ist die Verteilung zum Zeitpunkt  $t = 42$  auch stets  $\vec{\pi} = (1, 0, 0)$ ?  
☐ Richtig ☐ Falsch

## Aufgabe 2

Je 2 Punkte 6

---

Ein Bauteil geht mit einer Wahrscheinlichkeit von  $p_1 = 0.8$  nach 4 Stunden defekt, ansonsten nach einer Zeit von 6 Stunden. Hinweis: Für diese Aufgabe benötigen Sie kein R.

- a) (2 Punkte) Die Gesamtkosten für einen ungeplanten Austausch betragen 100 CHF. Bestimmen Sie die mittleren Kosten pro Stunde.

**Resultat :** \_\_\_\_\_  
**Begründung / Rechenweg**

- b) (2 Punkte) Sie haben nun die Wahl, einen Vertrag mit der Lieferfirma des Bauteils abzuschliessen. Diese zahlt Ihnen 200 CHF, falls das Bauteil vor 5h defekt gegangen ist und kostet 100 CHF am Tag, was sind die erwarteten Kosten pro Stunde?

**Resultat :** \_\_\_\_\_  
**Begründung / Rechenweg**

- c) (2 Punkte) Sie haben den Verdacht, dass das Model in a) zu einfach ist. Sie nehmen an, dass eine Weibullverteilung besser geeignet ist, die Ausfälle zu beschreiben. Dazu haben Sie in einem Teststand 10 Bauteile getestet. Diese sind zu den Zeiten  $T_i$  mit  $i = 1, \dots, 10$  ausgefallen. Sie haben dann eine lineare Regression  $y \sim x$  mit  $y = \log \log(\frac{1}{S(T_i)})$  an den logarithmierten Ausfallzeiten  $x_i = \log(T_i)$  durchgeführt und folgendes Ergebnis bekommen:

```
res
##
## Call:
## lm(formula = y ~ x)
##
## Coefficients:
## (Intercept)          x
##      -3.78         5.59
```

Bestimmen Sie die Parameter  $\beta$  und  $\lambda$  der Weibullverteilung.

**Resultat :** \_\_\_\_\_

**Begründung / Rechenweg**

**Aufgabe 3***Punkte 17*

Gegeben Sie eine Markov-Kette mit den Zuständen  $X = 1, 2, 3$  und folgender Übergangsmatrix  $P$ .

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0.2 & 0 & 0.8 \\ 0.1 & 0.9 & 0.0 \end{pmatrix}$$

a) (1 Punkt) Zeichnen Sie das Übergangsdiagramm dieser Matrix.

b) (2 Punkte) Ist die Markov-Kette irreduzibel und aperiodisch (Begründung)?

c) (2 Punkte) Der Prozess starte im Zustand 3, wann ist er das erste mal im Mittel wieder im Zustand 3.

**Resultat :** \_\_\_\_\_

**R-Code**

d) (2 Punkte) Geben Sie die asymptotische Lösung an.

**Resultat :** \_\_\_\_\_

**R-Code**

e) (1 Punkte) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, nach genau 3 Schritten wieder im Zustand 3 zu sein, wenn Sie aus diesem gestartet sind?

**Resultat :** \_\_\_\_\_

**R-Code**

- f)* (3 Punkte) Wie gross ist die Verbundwahrscheinlichkeit nach 3 Schritten im Zustand 3 und nach 5 Schritten im Zustand 1 zu sein, wenn Sie aus 2 gestartet sind?

**Resultat :** \_\_\_\_\_

**R-Code**

- g)* (3 Punkte) Es werden die Kosten 1,2,3 CHF für den Aufenthalt in den Zuständen 1,2,3 verlangt. Die Kosten werden nur zu den Zeiten  $t = 0, 2, 4, 6, \dots$ , nicht aber zu den Zeiten  $t = 1, 3, 5, 7, \dots$ , verlangt. Bestimmen Sie die asymptotischen Kosten pro Zeiteinheit.

**Resultat :** \_\_\_\_\_

**R-Code**



h) (3 Punkte) Sie haben nun folgende Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$$

die asymptotischen Verteilung ist  $\vec{\pi}(\infty) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , wie lauten  $a$  und  $b$ ?

**Resultat :** \_\_\_\_\_

**Begründung / Rechnung**

**Aufgabe 4***Punkte 9*

Gegeben Sie ein Markov-Prozess mit den Zuständen  $X = 1, 2, 3$  und folgender Übergangsmatrix  $P$ .

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0.2 & 0 & 0.8 \\ 0.1 & 0.9 & 0.0 \end{pmatrix}$$

Die mittleren Aufenthaltsdauern in den Zuständen sind 1,2,3 Minuten.

a) (2 Punkt) Geben Sie das Ratendiagramm des Prozesses an.

b) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung  $\vec{\pi}(t)$  nach  $t = 3$  Minuten, wenn zur Zeit  $t = 1.2$  Minuten galt:  $\vec{\pi}(t) = (0.5, 0.5, 0)$

**Resultat :** \_\_\_\_\_

**R-Code**

*c)* (2 Punkte) Bestimmen Sie die asymptotische Verteilung

**Resultat :** \_\_\_\_\_

**R-Code**

*d)* (2 Punkte) Bestimmen Sie für lange Zeiten die erwartete Anzahl der Zustandswechsel pro Minute vom Zustand 2 in den Zustand 1

**Resultat :** \_\_\_\_\_

**R-Code**