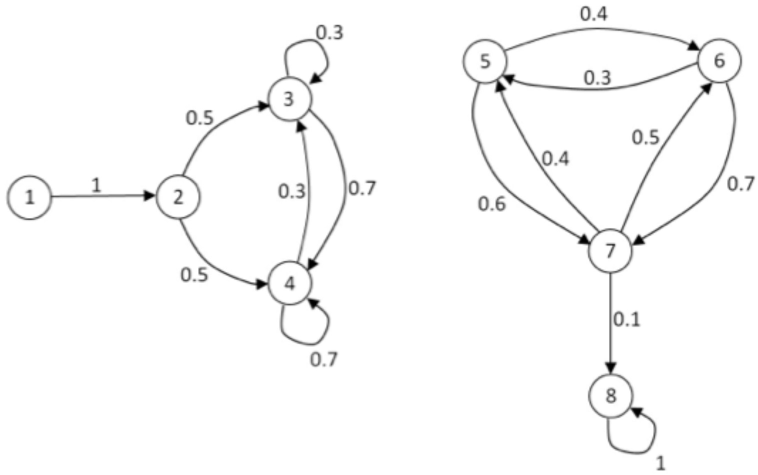
StoP: Handout Woche 5

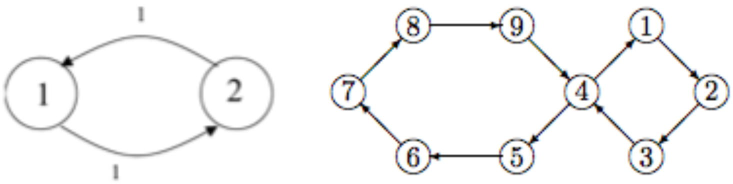
Aufgabe 1 Wechselseitige Erreichbarkeit

Malen Sie in der Abbildung unten alle Gruppen von Zuständen mit der gleichen Farbe an, die Wechselseitig erreichbar sind. Gibt es einen absorbierenden Zustand?



Aufgabe 2

Geben Sie für die zwei unten abgebildeten Markov-Ketten an, ob es sich um irreduzible Ketten handelt und ob die Ketten periodisch sind. Welche Perioden haben die Ketten.



Aufgabe 3 Stationär, asymptostische Verteilung

Beschreiben Sie in eigenen Worten:

a) Lange Zeiten, $t \to \infty$

I. Gibt es für jede MK eine Grenzverteilung $\vec{\pi}(\infty)$ in die der Zustand strebt? Wann ist das z.B. nicht der Fall, geben Sie ein Beispiel (Übergangsdiagram)?

II. Ist diese (wenn Sie existiert) immer eindeutig? Geben Sie ein Gegenbeispiel?

III. Wann bezeichnet man ein Grenzverteilung als *asymptotische Verteilung*

IV. Sie haben für zwei Markov-Ketten P^1000 berechnet, P^999 ergibt die gleichen Werte und 1000 sei schon gross genug. Welche Kette hat eine asymptotische Verteilung, und wie lautet diese.

$$P^{1000} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix} \qquad P^{1000} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.5 & 0.0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

b) Stationäre Verteilung $\vec{\pi}^*$

I. Was ist eine stationäre Verteilung $\vec{\pi}^*$?

II. Geben Sie, wenn möglich $\vec{\pi}^*$ für die zwei (Gegen)-Beispiele von oben an.

III. Wie lautet die stationäre Verteilung für das Wetterbeispiel?

$$P = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0.0 \\ 0.05 & 0.9 & 0.05 \\ 0.00 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$$

IV. Existiert immer eine stationäre Verteilung?

c) Was gilt für irreduzible aperiodische Markov-Ketten in Bezug auf die asymptotische und stationäre Verteilung? Wie kann man also in diesem Fall die asymptotische Verteilung berechnen?

Aufgabe 4 Eigenwerte mit R

Gegen sei folgender Output, für die Übergangsmatrix P des „Wetterproblems“. Wie lautet der stationäre Zustand. Verwenden Sie nur einen Taschenrechner (oder zu Not Ihr Handy).

```
> P <- matrix(c(0.9,0.1,0.00, 0.05, 0.9,0.05, 0.0,0.1,0.9), nrow = 3, byrow = TRUE)

> eigen(t(P))

$values

[1] 1.0 0.9 0.8

$vectors

      [,1]        [,2]       [,3]

[1,] 0.4082483  7.071068e-01  0.4082483

[2,] 0.8164966 -1.680786e-15 -0.8164966

[3,] 0.4082483 -7.071068e-01  0.4082483
```