

## Stochastische Prozesse

# Woche 12

### Aufgabe 1 Simulation eines Markov-Prozesses

Simulation eines Markov-Prozesses: Gegeben sei ein zeitkontinuierlicher Markov-Prozess mit  $S = 1, 2, 3$ . Die Wartezeitparameter  $\lambda_i$  sind gegeben durch  $\lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = 0.05, \lambda_3 = 0.1$ . Die Sprungwahrscheinlichkeiten sind durch folgende Matrix gegeben:

$$P = \begin{pmatrix} 0.00 & 0.20 & 0.80 \\ 0.10 & 0.00 & 0.90 \\ 0.50 & 0.50 & 0.00 \end{pmatrix}$$

- a) Simulieren und plotten Sie den Prozess für den Anfangszustand  $X(0) = 1$  bis zur Zeit  $t = 12$  für einige Realisierungen.

*Hinweise zur Lösung:* Eine exponentialverteilte Zufallsvariable kann man durch den R-Befehl `rexp()` ziehen. Um den neuen Zustand zu bestimmen kann man ähnlichen Code wie früher bei den zeitdiskreten Markov-Ketten verwenden.

- b) Schätzen Sie durch Simulation die Wahrscheinlichkeit, zur Zeit  $t = 10.2$  im Zustand 3 zu sein, wenn  $X(0) = 1$  (Genauigkeit 1000 runs).
- c) Behandeln Sie nun obigen Markov-Prozess analytisch. Zeichnen Sie dazu das Ratendiagramm und berechnen Sie die Generatormatrix  $\mathbf{Q}$ .
- d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit vom Zustand 1 zum Zeitpunkt  $t = 0$  in den Zustand 2 zum Zeitpunkt  $t = 10.2$  zu gelangen mittels:

$$\vec{\pi}(t) = \vec{\pi}(0)e^{\mathbf{Q}t}$$

*Hinweise zur Lösung:* Um die Exponentialfunktion einer Matrix zu berechnen müssen Sie erst das package `expm` laden. Die Exponentialfunktion einer Matrix  $M$  berechnet sich dann als `expm(M)`. Achtung `exp(M)` wendet die Exponentialfunktion auf jede Komponente an, was natürlich etwas anderes ist.

## Aufgabe 2 Maschinenausfall

Gegeben sei eine Maschine mit zwei Zuständen „funktionierend“ und „defekt“. Der zugehörige Prozess soll als Markov-Prozess beschrieben werden. Sie wissen folgendes: Die Ausfallwahrscheinlichkeit ist zu jeder Zeit gleich, unabhängig davon, wie lange die Maschine schon läuft. Die mittlere Laufzeit bis zum nächsten Ausfall beträgt 200 Stunden. Die Reparaturzeit ist exponentialverteilt mit Mittelwert 10 Stunden.

- a) Begründen Sie, dass der Prozess ein Markov-Prozess ist und bestimmen Sie die Übergangsraten und zeichnen Sie das Ratendiagramm.
- b) Eine neue Version der Maschine unterscheidet sich von der alten dadurch, dass sie neu eine elektronische Steuerung hat. Die Mechanik ist gleich geblieben. Für den Ausfall dieser Maschine bedeutet das: Es gibt zwei Möglichkeiten eines Ausfalls: Die Mechanik kann ausfallen, oder die Elektronik kann ausfallen. Für die Mechanik ist die Ausfallwahrscheinlichkeit identisch mit derjenigen der alten Maschine. Für die Elektronik ist folgendes bekannt: Die Ausfallwahrscheinlichkeit ist nicht zeitabhängig (d.h. Alterung spielt keine Rolle), und die mittlere Zeit zwischen zwei Ausfällen beträgt 1000 Stunden. Die Reparatur der Elektronik ist identisch verteilt wie die Reparatur der Mechanik. Modellieren Sie den Ausfall- und Reparaturprozess der Maschine wieder als Markovprozess mit zwei Zuständen. Bestimmen Sie die Übergangsraten.
- c) Nehmen Sie nun an, dass die Reparatur der Elektronik Exp-verteilt mit Mittelwert 2 h ist. Wieso kann man dann den Prozess nicht mehr als Markov-Prozess mit zwei Zuständen beschreiben? Modellieren Sie den Prozess als Markov-Prozess mit drei Zuständen.