



# **Stochastische Prozesse**

**StoP im Studiengang Wirtschaftsingenieurwesen**

**FS 2016**

**Stand: 15. Februar 2016**

**Oliver Dürr**

Autoren Peter Biller, Oliver Dürr, Christop Heitz und Thoralf Mildenerger

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>4</b>
1.1	Allgemeines . . . . .	4
1.2	Stochastische Prozesse . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Markov-Ketten</b>	<b>10</b>
2.1	Zeit- und zustandsdiskrete stochastische Prozesse . . . . .	10
2.2	Markov-Ketten . . . . .	11
2.3	Zustandsverteilungen . . . . .	17
2.4	Klassifikation von Zuständen . . . . .	21
2.5	Aufenthaltsdauern für endlichen Zeithorizont . . . . .	27
2.6	Kostenmodelle für endlichen Zeithorizont . . . . .	30
2.7	Asymptotisches Verhalten . . . . .	35
2.8	Stationäre Verteilungen und Eigenwerte . . . . .	41
2.9	Asymptotische Besetzung . . . . .	45
2.10	Asymptotische Kostenmodelle . . . . .	47
2.11	First-Passage-Probleme . . . . .	53
2.12	Schätzung der Übergangswahrscheinlichkeiten . . . . .	57
<b>3</b>	<b>Punktprozesse</b>	<b>62</b>
3.1	Einführung . . . . .	62
3.2	Poisson-Prozesse . . . . .	64
3.3	Lebensdauerverteilungen . . . . .	69
3.4	Erneuerungsprozesse . . . . .	76
3.5	Kumulative Prozesse . . . . .	81
<b>4</b>	<b>Zeitkontinuierliche Markov-Prozesse</b>	<b>86</b>
4.1	Definition . . . . .	86
4.2	Aufenthaltsdauer- und Wartezeitverteilung eines Markov-Prozesses . . . . .	88
4.3	Raten- und Generatorenmatrizen . . . . .	89
4.4	Zustandsverteilungen . . . . .	91
4.5	Aufenthaltsdauern und Kosten für endlichen Zeithorizont . . . . .	93
4.6	Grenzwertverhalten . . . . .	95
4.7	Kostenmodelle asymptotisch . . . . .	96

## *Inhaltsverzeichnis*

<b>5</b>	<b>Spezielle Themen</b>	<b>98</b>
5.1	Markov Chain Monte Carlo . . . . .	98
5.1.1	Markov Chain Monte Carlo in der bayesianischen Statistik . . . . .	104
<b>6</b>	<b>Anhang</b>	<b>108</b>
6.1	Markov-Ketten in R . . . . .	108

# 1 Einführung

## 1.1 Allgemeines

Der Kurs “Stochastische Prozesse” befasst sich mit der Analyse von dynamischen Prozessen, deren zeitliche Entwicklung nicht vollständig festgelegt ist, sondern eine Zufallskomponente beinhaltet. Im Gegensatz dazu stehen deterministische Prozesse (oder Systeme) wie Masseblöcke, Pendel, Planeten, Billardkugeln, usw.. Bei den deterministischen Prozessen reicht (im Prinzip) die Kenntnis des Anfangszustandes aus, um das weitere zeitliche Verhalten des Systems vorherzusagen. Betrachten wir das Federpendel in Abbildung 1. Kennen wir seine Auslenkung und seine Geschwindigkeit zu einem Zeitpunkt, so können wir die Auslenkung und Geschwindigkeit zu allen weiteren Zeitpunkten  $t$  vorhersagen.

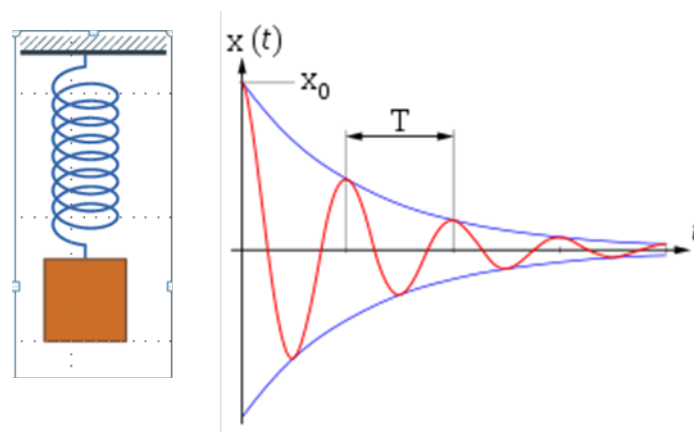


Abbildung 1.1: Ein deterministischer Prozess

Bei den stochastischen Prozessen hingegen kann man nur Wahrscheinlichkeitsaussagen machen. Würde zusätzlich eine zufällige Kraft auf das Pendel wirken, so wüssten wir nicht mehr genau, wohin sich das Pendel in der Zukunft bewegt. Wir wären dann nur noch zu Wahrscheinlichkeitsaussagen fähig. Ein typisches Beispiel für so einen stochastischen Prozess ist ein Aktienkurs. Kennen wir den Wert einer Aktie zu einem Zeitpunkt, so können wir für die Zukunft nur Wahrscheinlichkeitsaussagen machen.

Wir nehmen an, dass sich in der nächsten Minute der Wert nicht bedeutend ändert, aber den genauen Wert kennen wir nicht. Man beachte allerdings, dass einem die Kenntnis der Vergangenheit schon etwas nützt: Der Kurs in den unmittelbar darauffolgenden Zeitpunkten hängt vom momentanen Kurs und im Allgemeinen noch von früheren Kursen ab, aber eben nicht „zu 100%“.

## 1 Einführung

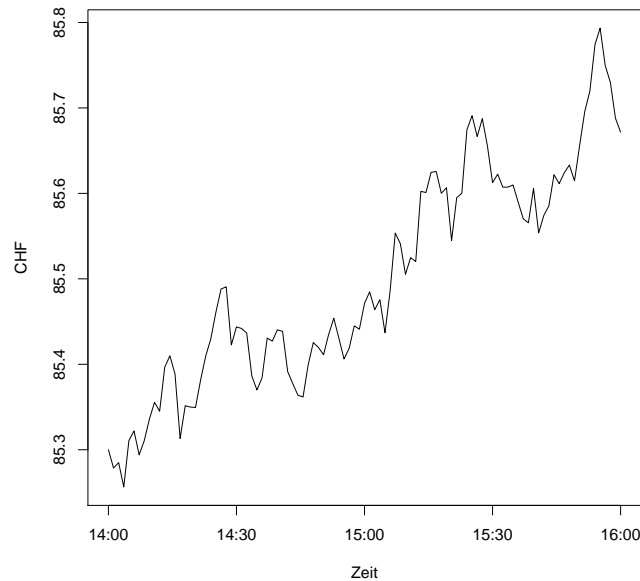


Abbildung 1.2: Eine Realisierung eines stochastischen Prozesses

### 1.2 Stochastische Prozesse

*Stochastische Prozesse* sind *Familien von Zufallsvariablen*  $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$  (andere Schreibweise:  $\{X_t : t \in \mathcal{T}\}$ ), d.h. für jedes  $t \in \mathcal{T}$  haben wir eine Zufallsvariable. Dies ist eine sehr allgemeine Definition, wir werden uns hier auf die Fälle  $\mathcal{T} = \mathbb{N}_0$  und  $\mathcal{T} = [0, \infty)$  beschränken. Die Interpretation ist dann meistens, dass  $t$  einen Zeitpunkt angibt, wobei die Zeit entweder diskret (z.B. in Tagen oder in Schritten) oder kontinuierlich gemessen wird<sup>1</sup>.  $\mathcal{T}$  ist dann die Menge der betrachteten Zeitpunkte.  $X_t$  gibt dann den Zustand eines Systems zum Zeitpunkt  $t$  an. Dieser Zustand ist in der Regel nicht deterministisch, d.h. meist können wir keine *exakten* Aussagen darüber machen, in welchen Zustand sich das System zu einem in der Zukunft liegenden Zeitpunkt befinden wird, sondern höchstens, mit welcher Wahrscheinlichkeit es in welchem Zustand sein wird. Die Zustände sind auch – im Gegensatz zu den Stichprobenvariablen  $X_1, \dots, X_n$  aus WaSt 3 – in der Regel nicht unabhängig.

Wir gehen davon aus, dass alle  $X_t$  Werte in der selben Menge  $S$  annehmen.  $S$  wird auch als *Zustandsraum* bezeichnet und gibt die Menge der möglichen Zustände des Systems an.  $S$  kann zum Beispiel eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^3$  sein, wenn die Zustände dreidimensionale Koordinaten sind, aber auch z.B. eine endliche Menge wie  $S = \{\text{defekt, funktionsfähig}\}$ .

Im Fall  $\mathcal{T} = \mathbb{N}_0$  erhalten wir eine Folge von (im Allgemeinen abhängigen) Zufallsvariablen  $X_0, X_1, X_2, \dots$ . Eine konkrete *Realisation* des Prozesses besteht dann in einer Folge  $x_0, x_1, x_2, \dots$  von Zuständen (z.B. Zahlen). Im Fall  $\mathcal{T} = [0, \infty)$  haben wir für jeden der

---

<sup>1</sup>Z.B. in der räumlichen Statistik kann der Index aber auch räumliche Koordinaten enthalten

## 1 Einführung

überabzählbar vielen Zeitpunkte eine Zufallsvariable. Jede Realisation ist dann eine *Funktion*  $x(t)$ , die jedem  $t \in [0, \infty)$  einen Zustand zuordnet. Natürlich erhält man für verschiedene Realisationen verschiedene Funktionen. Der stochastische Prozess  $(X_t)_{t \in [0, \infty)}$  kann also als *zufällige Funktion* interpretiert werden. Man beachte die Grossschreibung von  $X_t$ .  $X_t$  ist also eine Zufallsvariable, welche man durch Verteilungen beschreibt. Besonders im stetigen Fall bezeichnet man eine Realisierung des gesamten Prozesses (wie den Aktienkursverlauf in Abb. 1.2) auch als *Trajektorie*.

### Beispiele

1.  $X_t$  sei die Temperatur in °C um 6:00 Uhr jeden Tages an einer meteorologischen Wetterstation. Der Index  $t$  bezeichne den Tag der Messung. Dann ist  $\{X_t, t = 0, 1, 2, \dots\}$  ein stochastischer Prozess. Der Zustandsraum  $S$  besteht aus dem Temperaturbereich  $[-40^\circ\text{C}, 60^\circ\text{C}]$ . Dies impliziert, dass niemals Temperaturen höher als  $60^\circ\text{C}$  oder tiefer als  $-40^\circ\text{C}$  gemessen werden können. (Theoretisch können natürlich auch tiefere oder höhere Temperaturen auftreten, aber es ist in der Praxis üblich, einen begrenzten Wertebereich anzugeben, der unter normalen Umständen nicht verlassen wird.)
2. Sei  $X_t$  die Herzfrequenz eines Patienten, die jede Minute gemessen wird. Der Index  $t$  zählt dann die Minuten. Ein sinnvoller Zustandsraum wäre etwa  $S = [0, 300]$ .
3. Sei  $X_t$  die Menge von Fahrzeugen, die pro Stunde den Gotthardtunnel durchqueren. Der Index  $t$  zähle dabei die Stunden. Der Zustandsraum ist  $S = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ .
4. Sei  $X_t$  die Anzahl von Versicherungsfällen, die einer Versicherungsgesellschaft in der  $t$ -ten Woche gemeldet werden. Der Zustandsraum dieses Prozesses ist  $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ .
5. Sei  $Y_t$  die Gesamtschadenshöhe aller Schadensfälle der Versicherung, die in der  $t$ -ten Woche gemeldet werden. Der Zustandsraum dieses Prozesses ist  $S = [0, \infty)$ .
6. Sei  $X_t$  die Geldmenge, die ein Spieler in der  $t$ -ten Runde im Roulette gewinnt oder verliert. Da nur ganze Geldeinheiten gesetzt werden können, ist  $S = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ , wobei negative Zahlen einen Verlust bedeuten, und positive einen Gewinn.
7. Sei  $Y_t$  das Kapital des Roulettespielers nach der  $t$ -ten Runde. Es dürfen nur ganzzahlige Beträge gesetzt werden, und der Spieler hat keinen Kredit, muss also sein Spiel beenden, wenn er kein Geld mehr hat. Der Zustandsraum des Prozesses ist  $S = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ .
8. Ein kleines Teilchen schwimmt auf der Oberfläche einer Flüssigkeit in einem Behälter. Die Koordinaten des Teilchens zum Zeitpunkt  $t$  können durch Zufallsvektoren  $X_t = (X_{1,t}, X_{2,t})$  beschrieben werden. Der Zustandsraum ist  $S = \mathbb{R}^2$  (oder eine Teilmenge davon.)

## 1 Einführung

9. Sei  $X_t$  der Zustand einer Maschine. Der Zustandsraum besteht aus der Menge  $S = \{\text{“in Ordnung”}, \text{“defekt”}, \text{“in Reparatur”}\}$ . Zu jedem Zeitpunkt ist das System in einem genau definierten Zustand, also ist  $X_t$  für alle  $t \in [0, \infty)$  definiert.
10.  $X_t$  bezeichne den Tabellenstand eines Fussballclubs in der Super League, die aus 10 Mannschaften besteht. Der Zustandsraum ist dann  $S = \{1, 2, \dots, 10\}$ . Die Zeit  $t$  ist wieder nicht diskret, sondern kontinuierlich. Zu jeder Zeit  $t \in [0, \infty)$  ist der Tabellenplatz  $X_t$  eindeutig definiert. Änderungen gibt es nur bei den Spielen. Verwendet man allerdings anstelle der Zeit den Spieltag, so hat man wieder diskrete Zeitschritte.
11. Sie surfen im Internet. Ihren Browserverlauf können Sie als einen stochastischen Prozess ansehen, bei dem zu jedem Zeitpunkt  $t$   $X_t$  die von Ihnen gerade aufgerufene Webseite angibt. Die Zustandsmenge  $S$  besteht hier aus allen Webseiten im Internet, was sicherlich eine diskrete, endliche (wenn auch unüberschaubar grosse) Menge ist. Ausserdem könnte man noch einen Zustand für “keine Internetverbindung” einführen.
12. Kunden eines Telekommunikationsunternehmens können einen Vertrag für Telefon, Internet, TV oder eine Kombination dieser Produkte haben, und im Verlaufe der Zeit weitere Produkte hinzubestellen oder einzelne (bzw. alle) Angebote kündigen. Für einen festen Kunden beschreibe  $X_t$  die von diesem Kunden bezogene Produktkombination. Der Zustandsraum ist dann
$$S = \{\emptyset, \{Tel.\}, \{Int.\}, \{TV\}, \{Tel., Int.\}, \{Tel., TV\}, \{Int., TV\}, \{Tel., Int., TV.\}\}.$$
13. Die DNA einer zufällig ausgewählten Person wird betrachtet. Sei  $X_t$  für  $t \in \mathcal{T} = \{0, 1, \dots, \approx 3 \cdot 10^9\}$  die Base an der  $t$ -ten Stelle. Hier ist  $S = \{C, G, A, T\}$ .  $t$  ist kein Zeitpunkt, auch wenn es eine feste Ordnung in der DNA gibt.

Wir sehen an diesen Beispielen, dass es bezüglich des Zustandsraumes zwei verschiedene Prozesstypen gibt:

- *Zustandsdiskrete Prozesse:* Hier ist der Zustandsraum zu jedem Zeitpunkt  $t$  diskret, d.h. die einzelnen Zufallsvariablen  $X_t$  besitzen eine diskrete Verteilung. Diese kann man durch die Wahrscheinlichkeiten  $p_{t,k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  für die verschiedenen Zustände  $x_k$  beschreiben.  $S$  kann hier eine Teilmenge  $\mathbb{N}$  oder  $\mathbb{N}$  sein, oder eine andere endliche bzw. höchstens abzählbar unendliche Menge.
- *Zustandskontinuierliche Prozesse:* Hier ist der Zustandsraum ein Intervall oder  $\mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{R}^p$ . Die Zufallsvariablen  $X_t$  sind (für jedes  $t$ ) stetige Zufallsvariablen. Sie werden für jedes  $t$  durch eine Wahrscheinlichkeitsdichte  $f_t(x)$  beschrieben.

Wie bereits oben gesehen, können wir Prozesse aber auch nach der Zeit unterscheiden:

- *Zeitdiskrete Prozesse:* Hier ist der Zustand des Systems nur zu bestimmten diskreten Zeitpunkten  $t$  definiert. Anstelle von  $t$  verwendet man dann oft den Index  $n$  oder  $k$  und schreibt  $X_n$  bzw.  $X_k$ , um diese Diskretheit anzuzeigen. Hier ist meist  $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{T} = \mathbb{N}_0$  oder  $\mathcal{T} = \{1, \dots, T\}$ .

## 1 Einführung

- *Zeitkontinuierliche Prozesse:* Hier ist der Zustand des Prozesses zu jedem Zeitpunkt  $t \in [0, \infty)$  definiert. Manchmal ist auch  $\mathcal{T} = \mathbb{R}$  oder  $\mathcal{T} = [a, b]$ .

Insgesamt kann man also vier verschiedene Typen von stochastischen Prozessen unterscheiden:

- Zeitdiskret und Zustandsdiskret
- Zeitdiskret und Zustandskontinuierlich
- Zeitkontinuierlich und Zustandsdiskret
- Zeitkontinuierlich und Zustandskontinuierlich

Wir werden in diesem Kurs nur Zustandsdiskrete Prozesse betrachten, zunächst im einfachsten Fall, in dem auch die Zeit diskret ist, später dann auch für kontinuierliche Zeit.

Anders als z.B. in WaSt 2 und 3 sind die verschiedenen Zufallsvariablen  $X_t$  im Allgemeinen nicht unabhängig voneinander. Ganz im Gegenteil: der (Zufalls-)Prozess wird gerade durch die Art der Abhängigkeit beschrieben. Ein Beispiel für eine solche Abhängigkeit ist

$$X_{t+1} = X_t + \varepsilon_{t+1}$$

wobei die  $\varepsilon_t$  unabhängig identisch standardnormalverteilte Zufallsvariable seien. Für einen gegebenen Wert  $x_t$  ist dann  $X_{t+1}$  eine Zufallsvariable, die um den Wert  $x_t$  streut. Damit sind die zwei Zufallsvariablen nicht mehr unabhängig voneinander (obwohl die *Innovationen*  $\varepsilon_t$  unabhängig sind!). Die Gleichung definiert die Dynamik des Prozesses. Dieser stochastische Prozess ist zeitdiskret, aber Zustandskontinuierlich. Es handelt sich um einen Spezialfall eines sogenannten Autoregressiven Prozesses der Ordnung 1 (AR(1)-Prozess). Diese Prozesse spielen in der Zeitreihenanalyse eine grosse Rolle, wir werden sie aber in dieser Vorlesung nicht behandeln.

Ein anderes Beispiel für einen Zustandsdiskreten Prozess sei der folgende: Der Zustandsraum sei gegeben durch die Menge  $S = \{-1, 0, 1\}$ . Das dynamische Gesetz, das den Prozess definiert, sei gegeben durch die folgende Vorschrift:

$$X_{t+1} = \text{sign}(X_t + X_{t-1} + 6(\varepsilon_{t+1} - 0.5)),$$

wobei die  $\varepsilon_t$  nun unabhängig identisch gleichverteilte Zufallsvariable im Intervall  $[0, 1]$  seien. Die Anfangsbedingung sei gegeben durch  $x_0 = -1, x_1 = -1$ .

Auch in diesem Fall ist klar, dass es eine stochastische Abhängigkeit des Wertes  $X_{t+1}$  von vergangenen Werten geben muss. In diesem Beispiel hängt der Wert  $X_{t+1}$  von zwei Zeitpunkten ( $t$  und  $t-1$ ) ab, wohingegen  $X_{t+1}$  im vorherigen Beispiel nur vom letzten Zeitpunkt  $t$  abhängt.

Die Modellierung eines stochastischen Prozesses besteht häufig in der Formulierung von Gleichungen, die die Dynamik des Prozesses beschreiben. Hat man einmal eine solche Formulierung gefunden, die die relevanten Eigenschaften des Prozesses genau genug abbildet,



## 1 Einführung

kann man den Prozess anhand des Modells analysieren, simulieren, wichtige Prozessgrößen berechnen, optimieren, etc..

Dabei können sehr unterschiedliche Fragen an einen Prozess gestellt werden. Betrachten wir etwa das Beispiel 2 (Herzfrequenz). Hier könnte es ein Ziel sein, den Verlauf der Herzfrequenz in der nächsten Minute vorherzusagen. Diese Vorhersage kann verschiedene Formen annehmen. Man kann etwa den Erwartungswert der Herzfrequenz vorhersagen, oder aber die Wahrscheinlichkeit, dass die Frequenz unter 30 sinkt.

Im Beispiel 9 (Zustand einer Maschine) wird man nicht so sehr an einer Vorhersage des Maschinenzustandes in der nächsten Stunde interessiert sein. Hier sind eher Fragen wichtig wie: *“Welchen Anteil der Zeit ist die Maschine auf lange Sicht nicht verfügbar?”*, *“Wie oft muss die Maschine während eines Jahres repariert werden?”* oder *“Wie lange ist sie durchschnittlich in Reparatur?”*. Hier interessieren also *asymptotische* Eigenschaften des Prozesses bzw. das *Langzeitverhalten*.

In der Theorie der stochastischen Prozesse sind eine Reihe von Methoden entwickelt worden, in der Fragen dieser Art beantwortet werden können. Einige dieser Methoden werden wir im vorliegenden Kurs kennenlernen. Da viele stochastische Prozesse nicht mehr oder nur asymptotisch analytisch behandelt werden können, sind auch *Simulationen* ein unverzichtbares Hilfsmittel in der Analyse stochastischer Prozesse.

## 2 Markov-Ketten

### 2.1 Zeit- und zustandsdiskrete stochastische Prozesse

Wir betrachten in diesem Kapitel ausschliesslich zeit- und zustandsdiskrete stochastische Prozesse, wobei wir die Indexmenge als  $\mathcal{T} = \mathbb{N}_0$  annehmen. Statt  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$  schreibt man dann manchmal auch  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ . Wir beginnen bei der Nummerierung der Zeitpunkte mit  $t = 0$ , dies ist aber in der Literatur nicht einheitlich, teilweise wird mit  $t = 1$  begonnen. Auch muss  $t$  nicht unbedingt im strengen Sinne ein Zeitpunkt sein, es kann auch z.B. ein Arbeitsschritt, die Position eines Buchstabens oder Wortes in einem Text oder die Position einer Base im Genom sein. Wichtig ist, dass es eine Reihenfolge gibt, d.h. mathematisch gesprochen, dass die Indexmenge  $\mathcal{T}$  (total) geordnet ist.

Wir haben bereits in den Beispielen im letzten Kapitel gesehen, dass der Zustandsraum  $S$  aus Objekten ziemlich unterschiedlicher Art bestehen kann. Wir nehmen hier an, dass der Zustandsraum entweder endlich oder höchstens abzählbar unendlich ist. In jedem Fall können wir die Zustände durchnummerieren, wobei wir mit 1 beginnen. Es reicht also, die Zustandsräume  $S = \{1, 2, \dots, N\}$  (für endlich viele Zustände) und  $S = \mathbb{N}$  (für abzählbar unendlich viele Zustände) zu betrachten. Auch dies ist in der Literatur nicht einheitlich, manchmal wird z.B. die Nummerierung der Zustände mit 0 begonnen.

Betrachten wir nun eine konkrete Realisation eines stochastischen Prozesses mit 3 Zuständen, also mit  $S = \{1, 2, 3\}$ . Eine Realisation bezeichnet man oft auch als eine *Trajektorie*. Die Trajektorie startet z. B. zum Zeitpunkt  $t = 0$  in dem Zustand  $x_0 = 3$  und folgt einer zeitlichen Entwicklung, wie sie in Abbildung 2.1 durch die rote durchgezogene Linie dargestellt ist. Würden wir das ganze Experiment wiederholen und zum Zeitpunkt  $t = 0$  wieder im Zustand  $x_0 = 3$  starten, so würde, da es sich um einen stochastischen Prozess handelt, eine neue Trajektorie entstehen (z.B. die blaue gepunktete Kurve).

Wir stellen uns nun vor, dass wir eine Realisation des Prozesses bis zum Zeitpunkt  $t = 5$

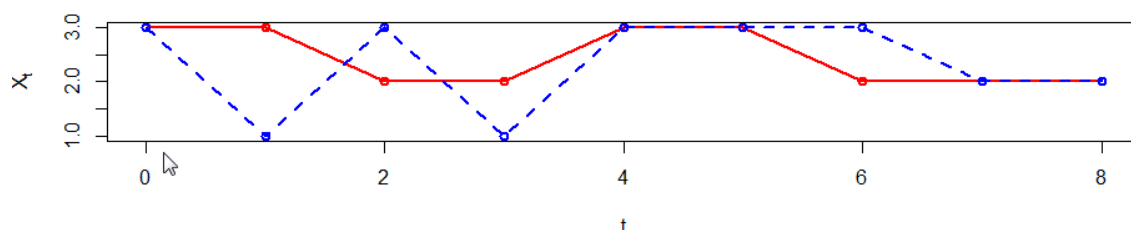


Abbildung 2.1: Zwei Trajektorien eines zeitdiskreten Prozesses mit drei Zuständen

## 2 Markov-Ketten

beobachtet haben, wir kennen also  $x_0, x_1, \dots, x_5$ . Können wir daraus nun eine (probabilistische) Aussage über den Zustand  $X_6$  zum Zeitpunkt  $t = 6$  machen? Im Allgemeinen werden die Wahrscheinlichkeiten für  $X_6$  von der ganzen Vorgeschichte  $x_0, \dots, x_5$  abhängen.

Wir müssen hier sauber zwischen bedingten und unbedingten Wahrscheinlichkeiten unterscheiden, da die Zufallsvariablen in der Regel nicht unabhängig sind. So bezeichnet

$$P(X_6 = 1)$$

die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Prozess zum Zeitpunkt  $t = 6$  im Zustand 1 befindet. Dies ist eine *unbedingte Wahrscheinlichkeit*, in die keine Information über die bisherigen tatsächlich realisierten Zustände zu den Zeitpunkten  $t = 0, 1, \dots, 5$  eingeht. Haben wir ein vollständig spezifiziertes Modell des Prozesses, so kann  $P(X_6 = 1)$  schon vor dem Start des Prozesses berechnet werden. Haben wir nun die Zustände  $x_0, x_1, \dots, x_5$  bereits beobachtet, so sind wir vermutlich eher an Wahrscheinlichkeiten

$$P(X_6 = 1 | X_5 = x_5, X_4 = x_4, \dots, X_0 = x_0) \quad (2.1)$$

interessiert, also an der *bedingten Wahrscheinlichkeit*, dass sich der Prozess zum Zeitpunkt  $t = 6$  im Zustand 1 befindet, wenn man bereits weiss, in welchen Zuständen er sich zu allen vorherigen Zeitpunkten befunden hat. Wissen wir hingegen nur, dass der momentane Zustand  $x_5$  ist und kennen die vorherigen Zustände  $x_0, x_1, \dots, x_4$  nicht, so können wir statt (2.1) nur

$$P(X_6 = 1 | X_5 = x_5) \quad (2.2)$$

berechnen, also eine bedingte Wahrscheinlichkeit für den nächsten Zustand gegeben den aktuellen Zustand. In der Regel stimmen (2.1) und (2.2) nicht überein. Vorhersagen, in die mehr relevante Informationen eingeht, werden natürlich nicht schlechter sein als Vorhersagen auf Basis von weniger Informationen. Wenn wir also die gesamte Vergangenheit kennen, wird (2.1) in der Regel nützlicher sein als (2.2). Allerdings ist die Berechnung von (2.1) meist auch wesentlich aufwändiger, ausserdem muss man für Prognosen die gesamte Vergangenheit des Prozesses speichern.

Glücklicherweise lassen sich viele Systeme und Phänomene (zumindest in guter Näherung) durch stochastische Prozesse beschreiben, bei denen (2.1) und (2.2) gleich sind, d.h. bei denen die vollständige Kenntnis aller vergangenen Zustände gegenüber der blossen Kenntnis des gegenwärtigen Zustands keine zusätzliche Information über die Zukunft bringt.

## 2.2 Markov-Ketten

**Definition** (*Markov-Kette*) Ein zeitdiskreter stochastischer Prozess  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$  mit diskretem Zustandsraum  $S$  heisst (*diskrete*) *Markov-Kette*, (englisch: *Discrete Time Markov Chain*, kurz: *DTMC*) wenn gilt:

$$P(X_{t+1} = x_{t+1} | X_t = x_t, X_{t-1} = x_{t-1}, \dots, X_0 = x_0) = P(X_{t+1} = x_{t+1} | X_t = x_t)$$

## 2 Markov-Ketten

Die *bedingte Verteilung* gegeben die komplette Vergangenheit ist also stets gleich der bedingten Verteilung gegeben den aktuellen Zustand. Dies kann man auch so ausdrücken, dass die zukünftige Entwicklung des Prozesses nur vom augenblicklichen Zustand abhängt, aber nicht von irgendwelchen vergangenen Zuständen: *Der Prozess hat kein Gedächtnis*. Oder noch anders ausgedrückt: Die Zukunft des Prozesses hängt davon ab, in welchem Zustand er sich gerade befindet – aber nicht mehr davon, wie er dort hingekommen ist.

Nehmen wir nun an, der oben dargestellte Prozess sei eine Markov-Kette, und fragen wieder nach der Wahrscheinlichkeit, dass wir uns im Zeitschritt  $t = 6$  im Zustand 1 befinden. Auch wenn wir die komplette Vergangenheit kennen, so hängt diese bedingte Wahrscheinlichkeit nur von der letzten Realisation  $x_5$  ab. Da diese bei beiden Trajektorien, der gestrichelten blauen und der durchgezogenen roten, denselben Wert hat ( $x_5 = 3$ ), hat die Zufallsvariable  $X_6$  die den Zustand im 6-ten Zeitschritt (1, 2 oder 3) beschreibt, für beide Fälle dieselben (bedingten) Wahrscheinlichkeiten für die drei möglichen Zustände.

**Beispiel** (*Markov-Ketten*) Einige Beispiele für Markov-Ketten:

- Betrachten wir einen betrunkenen Seiltänzer, der mit der gleichen Wahrscheinlichkeit einen Schritt nach rechts oder links torkelt, aber nie herunterfällt. Wir interessieren uns für die Position des Seiltänzers auf dem Seil nach dem  $n$ -ten Schritt. Solche Prozesse sind als “Random Walk” bekannt. Wir nehmen vereinfachend an, dass die Schrittweite immer gleich lang ist. Wir können so die Zufallsvariable  $X_n$  als Anzahl Schritte nach rechts minus Anzahl der Schritte nach links zum  $t$ -ten Zeitschritt auffassen, wenn wir die Startposition mit 0 bezeichnen.
- Wir betrachten das Spiel eines Roulettespielers, der nur Schwarz oder Rot setzt. Sei  $X_n$  der Besitz des Spielers (in Einheiten Jetons) nach der  $n$ -ten Spielrunde. Der Einsatz sei in jeder Runde 1 Jeton. Der Besitz  $X_{n+1}$  bei der nächsten Runde ist nun eine Zufallsvariable. Ihr Wert bzw. die Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen möglichen Werte hängt aber nur vom gegenwärtigen Wert  $X_n$ , nicht aber von der Geschichte, d. h. den Werten  $X_{n-1}, X_{n-2}, \dots$  ab.
- Wir betrachten die Anzahl von Versicherungsfällen, die einer Versicherung im Laufe einer Woche gemeldet werden. Sei  $X_t, t = 0, 1, 2, \dots$ , wobei  $t$  die Wochen durchnummeriert, der zugehörige stochastische Prozess. Der Zustandsraum ist  $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ . Die Anzahl von gemeldeten Fällen ist in jeder Woche unabhängig von der Anzahl der Fälle in der vorherigen Woche. Also handelt es sich auch hier um einen Markov-Prozess. Unabhängige Prozesse sind also Spezialfälle von Markov-Prozessen.
- Wir betrachten die Anzahl von Pannen, die ein Auto in Abhängigkeit von seiner Lebenszeit erlebt. Der Prozess  $X_t, t = 0, 1, 2, 3, \dots$  bezeichne die Anzahl von Pannen bis zur Woche  $t$ . Es ist  $X_0 = 0$  (Auslieferungszustand). Dann ist der Zustandsraum  $S = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ . Von einer Woche zur anderen kann  $X_t$  steigen, und zwar mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit um 1, mit einer deutlich kleineren Wahrscheinlichkeit um 2, usw. Dies ist ein Markov-Prozess, weil der Wert  $X_{t+1}$  nur von  $X_t$  abhängt, nicht aber von vorherigen Werten.

## 2 Markov-Ketten

*Vorsicht:* Die Aussage, dass der Zustand  $X_{n+1}$  nur vom Zustand  $X_n$  abhängt, aber nicht von vorherigen Zuständen, bedeutet nicht, dass etwa die Zufallsvariablen  $X_{n+1}$  und  $X_{n-1}$  unabhängig voneinander sind. Denn  $X_{n+1}$  ist abhängig von  $X_n$ ,  $X_n$  ist aber wiederum abhängig von  $X_{n-1}$ . Deshalb ist in der Regel auch  $X_{n+1}$  abhängig von  $X_{n-1}$ . Unabhängig sind  $X_{n+1}$  und  $X_{n-1}$  gegeben  $X_n$ , d.h. wenn  $X_n$  bekannt ist, liefert  $X_{n-1}$  keine weiteren Informationen über  $X_{n+1}$  mehr. Die Markov-Eigenschaft bedeutet also nicht, dass  $X_{n+1}$  unabhängig ist von  $X_{n-1}$ , sondern sie bedeutet, dass  $X_n$  alle benötigte Information über  $X_{n+1}$  enthält, und die Kenntnis der Realisationen von  $X_{n-1}, X_{n-2}, \dots$  keinen Gewinn bringt. Kurz: Es reicht zu wissen, in welchem Zustand sich der Prozess gerade befindet, um Aussagen über seine Zukunft zu machen. Zu wissen, wie er dort hingekommen ist, liefert keinerlei Verbesserung.

**Gegenbeispiel** (*kein Markov-Prozess*):

- Ein Kunde geht jede Woche  $n = 1, 2, \dots, 52$  in einem Jahr in eines von zwei möglichen Lebensmittelgeschäften. Sei  $X_n$  der zugehörige stochastische Prozess,  $S = \{1, 2\}$ , wobei  $X_n = 1$  bedeutet, dass der Kunde in der Woche  $n$  ins Geschäft 1 geht. Je öfter er in einem der beiden Geschäfte war, desto grösser ist die Wahrscheinlichkeit, dass er wieder in dieses Geschäft geht. Dieser Prozess ist *kein* Markov-Prozess. Um für die nächste Woche die Wahrscheinlichkeit für Geschäft 1 bzw. 2 zu berechnen reicht es nicht aus zu wissen, in welchem Geschäft der Kunde in der aktuellen Woche  $n$  war. Hier ist die gesamte Vergangenheit wichtig (wie oft war der Kunde schon im Geschäft 1 bzw. 2?).

Dieses Beispiel könnte man so umformulieren, dass man eine Markov-Kette erhält. Dazu führt man die Anzahl der bisherigen Besuche in den Geschäften 1 und 2 als neue Zustände ein. Man erhält dann den Zustandsraum

$$S = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (2, 0), (1, 1), \dots, (1, 50), (0, 51)\}$$

Insgesamt hat man in dieser Formulierung dann  $1 + 2 + \dots + 52 = \frac{52 \cdot 53}{2} = 1378$  verschiedene Zustände. Natürlich kann man sich in jedem Zustand nur in einer bestimmten Woche befinden, da der Zustand  $(3, 17)$  ja angibt, dass man insgesamt bisher genau 20 mal einkaufen gegangen sein muss. Ob man allerdings erst 3 mal in Geschäft 1 und dann 17 mal in Geschäft 2 war oder die Geschäfte in einer anderen Reihenfolge besucht hat, ist (zumindest in diesem Modell) dann egal. Die Wahrscheinlichkeiten für den nächsten Besuch hängen nur von den Anzahlen der bisherigen Besuche ab, nicht von der Reihenfolge. Es kommt also auf die genaue Formulierung eines Problems an, ob es sich um eine Markov-Kette handelt oder nicht. Wie das Beispiel zeigt, kann man manchmal zunächst nicht markovsche Prozesse markovsch machen, indem man den Zustandsraum vergrößert bzw. einen Teil der Vergangenheit in die Definition der Zustände aufnimmt.

Bisher haben wir nur vorausgesetzt, dass die Übergangswahrscheinlichkeiten nicht davon abhängen, ob man nur den aktuellen Zustand oder die vollständige Vergangenheit kennt. Das schliesst nicht aus, dass die Übergangswahrscheinlichkeiten vom Zeitpunkt  $t$  abhängen.

## 2 Markov-Ketten

Zum Glück ist es so, dass häufig über die Zeit konstante Übergangswahrscheinlichkeiten angenommen werden können.

**Definition** (*homogene Markov-Kette*) Eine Markov-Kette heisst *homogen*, wenn für alle  $t$  gilt:

$$P(X_{t+1} = j | X_t = i) = P(X_1 = j | X_0 = i).$$

Das bedeutet, dass die Übergangswahrscheinlichkeiten nicht von der Zeit abhängen.

Wir werden im Weiteren nur homogene Markov-Ketten betrachten. Zur Vereinfachung bezeichnen wir die *Ein-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeit vom  $i$ -ten zum  $j$ -ten Zustand* mit  $p_{ij}$ , also

$$p_{ij} = P(X_{t+1} = j | X_t = i) = P(X_1 = j | X_0 = i).$$

Für  $i, j \in S$  gibt  $p_{ij}$  also die Wahrscheinlichkeit an, zum Zeitpunkt  $t + 1$  den Zustand  $j$  zu beobachten, wenn der Zustand  $i$  beim vorherigen Schritt gegeben war, bzw. die Wahrscheinlichkeit, im nächsten Schritt vom Zustand  $i$  in den Zustand  $j$  zu springen. Für nicht homogene Markovketten würden die  $p_{ij}$  nicht nur von  $i$  und  $j$ , sondern auch noch von  $t$  abhängen.

Haben wir einen endlichen Zustandsraum mit  $N$  Zuständen, so gibt es  $N^2$  mögliche Übergänge (auch das Verweilen in einem Zustand wird als Übergang gezählt). Wir können diese in einer quadratischen Matrix  $\mathbf{P}$  zusammenfassen:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1} & p_{N2} & \dots & p_{NN} \end{pmatrix}$$

Diese Matrix bezeichnet man auch als *Übergangsmatrix*. Dabei steht die *Zeile  $i$*  für den augenblicklichen Zustand, die *Spalte  $j$*  für den (potenziellen) nächsten Zustand. Bei abzählbar unendlichem  $S$  können wir die Übergangswahrscheinlichkeiten in einer "unendlichen" Matrix (mit unendlich vielen Zeilen und Spalten) anordnen. Rein mathematisch kann man mit solchen Objekten in vielen Fällen ähnlich rechnen wie mit gewöhnlichen Matrizen. Wir werden im folgenden aber nur Beispiele mit endlichem  $S$  betrachten.

Eine konkrete Übergangsmatrix für eine Markov-Kette mit 3 Zuständen könnte zum Beispiel so aussehen:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0.3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

## 2 Markov-Ketten

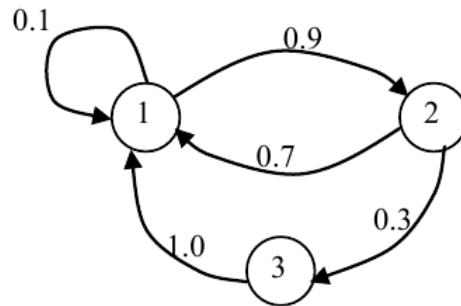


Abbildung 2.2: Der durch die Matrix (2.3) definierte Übergangsgraph

Mit dieser Matrix  $\mathbf{P}$  und der Angabe eines Anfangszustandes ist der Markov-Prozess vollständig beschrieben. Startet man zum Beispiel zum Zeitpunkt  $t = 0$  im Anfangszustand 1, so ist man zum Zeitpunkt  $t = 1$  mit der Wahrscheinlichkeit  $p_{11} = 0.1$  immer noch im Zustand 1; mit der Wahrscheinlichkeit  $p_{12} = 0.9$  befindet man sich im Zustand 2. Den Zustand 3 kann man im ersten Zeitschritt nicht erreichen ( $p_{13} = 0$ ). Der Anfangszustand kann als fest angenommen werden, oder er kann selbst stochastisch sein, d.h. man kann verschiedenen Wahrscheinlichkeiten in verschiedenen Zuständen starten.

Eine andere (vollkommen äquivalente) Möglichkeit, einen Markov-Prozess zu visualisieren, besteht im Aufstellen eines *Übergangsdiagramms* oder *Übergangsgraphen*. Jeder Zustand wird durch einen Kreis symbolisiert. Die Übergangswahrscheinlichkeiten werden an den Pfeilen von einem zum anderen Zustand angeschrieben. Es sind auch Pfeile von einem Zustand auf sich selbst möglich. Pfeile werden weggelassen, wenn die zugehörige Wahrscheinlichkeit 0 beträgt. Das *Übergangsdiagramm* ist also ein gerichteter und gewichteter Graph. Man bezeichnet diese Darstellung auch als *Zustandsraumdarstellung*. Abbildung 2.2 zeigt den zur Matrix (2.3) gehörenden Übergangsgraphen.

Nach der Definition muss jede Übergangsmatrix für eine Markov-Kette mit Zustandsraum  $S = \{1, 2, \dots, N\}$  folgende beiden Eigenschaften besitzen:

- Da alle Einträge Wahrscheinlichkeiten sind, muss gelten:

$$0 \leq p_{ij} \leq 1 \quad \text{für alle } i, j \in S$$

- Da sich die Wahrscheinlichkeiten, zum nächsten Zeitpunkt im Zustand  $1, 2, \dots, N$  zu sein, zu 1 aufsummieren müssen, gilt:

$$\sum_{j=1}^N p_{ij} = 1 \quad \text{für alle } i \in S. \quad (2.4)$$

Die Einträge der Übergangsmatrix sind liegen also alle zwischen 0 und 1 und summieren

## 2 Markov-Ketten

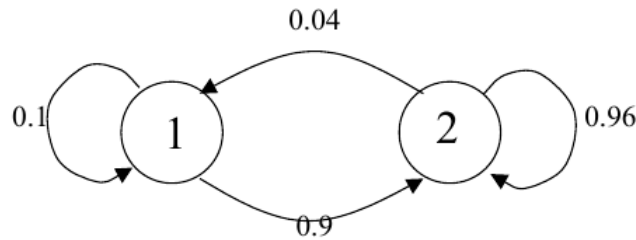


Abbildung 2.3: Der Übergangsgraph für das Beispiel zur Maschinenzuverlässigkeit

sich *zeilenweise* zu 1 (*spaltenweise* muss dies keineswegs gelten!). Jede Matrix mit diesen Eigenschaften bezeichnet man als *stochastische Matrix*<sup>1</sup>.

### Beispiel (*Beispiele für Übergangsmatrizen*)

1. **Maschinenzuverlässigkeit:** Wir betrachten eine Maschine, die entweder funktionsfähig ist oder defekt. Wenn sie am Anfang eines Tages funktioniert, dann funktioniert sie am nächsten Tag wieder mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.96. Wenn die Maschine defekt ist, wird sie von der Herstellerfirma repariert. Eine Maschine, die am Morgen eines Tages defekt ist, ist am Morgen des nächsten Tages mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.90 repariert. Eine reparierte Maschine ist genauso zuverlässig wie eine neue. Dieses System soll als Markov-Kette modelliert werden.

Sei  $X_n$  der Zustand der Maschine am Morgen des Tages  $n$ . Dann hat  $X_n$  zwei Zustände:

$$X_n = \begin{cases} 1, & \text{wenn die Maschine defekt ist} \\ 2, & \text{wenn die Maschine funktioniert} \end{cases}.$$

Die Folge  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  ist dann eine Markov-Kette. Die Übergangsmatrix ist gegeben durch

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.04 & 0.96 \end{pmatrix}$$

Der Übergangsgraph des Prozesses ist in Abbildung 2.3 angegeben.

2. **Wetter:** Wir betrachten das Wetter. Es sei beschrieben durch einen stochastischen Prozess  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ , wobei  $n = 0, 1, 2, \dots$  die Tage zählt. Der Zustandsraum sei  $S =$

<sup>1</sup>Damit ist nicht gemeint, dass die Matrix selbst zufällig ist. Die Terminologie ist historisch begründet.



## 2 Markov-Ketten

$\{1, 2, 3\}$ , mit

$$X_n = \begin{cases} 1, & \text{Sonne} \\ 2, & \text{bewölkt} \\ 3, & \text{Regen} \end{cases}$$

Aus langjähriger Beobachtung wissen wir, dass es nach einem sonnigen Tag mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.3 bewölkt ist, und mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.5 wieder sonnig ist. Wenn es bewölkt ist, ist die Wahrscheinlichkeit für Regen am folgenden Tag 0.3. Die Wahrscheinlichkeit für Sonne ist ebenfalls 0.3. Falls es regnet, ist die Wahrscheinlichkeit für Sonne am folgenden Tag 0.1, für Wolken 0.4. Dieses System soll (näherungsweise) als Markov-Kette modelliert werden.

Aus den Angaben kann man schliessen:

$$\begin{aligned} p_{12} &= 0.3, & p_{11} &= 0.5 \\ p_{23} &= 0.3, & p_{21} &= 0.3 \\ p_{31} &= 0.1, & p_{32} &= 0.4 \end{aligned}$$

Die fehlenden Wahrscheinlichkeiten erhält man aus (2.4). Die resultierende Übergangsmatrix ist:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Damit ist der Markov-Prozess vollständig bestimmt.

### 2.3 Zustandsverteilungen

Bisher haben wir uns für die Wahrscheinlichkeit von Übergängen aus einem Zustand  $i$  in einen Zustand  $j$  interessiert, d.h. für die *bedingte Wahrscheinlichkeit*  $P(X_t = j | X_{t-1} = i)$ . Natürlich ist es häufig auch von Interesse, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich der Prozess zu einem Zeitpunkt im Zustand  $j$  befindet, ohne dass man den vorherigen Zustand kennt.

Betrachten wir als Beispiel wieder die Markov-Kette, die durch die Übergangsmatrix (2.3) bzw. den Übergangsgraphen in Abb. 2.2 gegeben ist. Falls wir bei  $t = 0$  im Zustand 1 starten, sind wir zum Zeitpunkt  $t = 1$  mit der Wahrscheinlichkeit  $p_{11} = 0.5$  immer noch im Zustand 1 und mit der Wahrscheinlichkeit  $p_{12} = 0.3$  im Zustand 2.

Wir bezeichnen nun die Wahrscheinlichkeit, mit der sich der Prozess zum Zeitpunkt  $t$  im Zustand  $i$  befindet, als

$$\pi_i(t) = P(X_t = i).$$

## 2 Markov-Ketten

Wir fassen  $\pi_1(t), \dots, \pi_N(t)$  in einem *Zeilenvektor*<sup>2</sup>

$$\vec{\pi}(t) = (\pi_1(t), \dots, \pi_N(t))$$

zusammen.  $\vec{\pi}(t)$  bezeichnen wir auch als *Zustandsverteilung* zum Zeitpunkt  $t$  bzw. als *Zustandsvektor*.  $\vec{\pi}(t)$  gibt genau die Verteilung der diskreten Zufallsvariable  $X_t$  an. Es handelt sich hier nicht um eine bedingte Verteilung, allerdings hängt sie vom Startzustand ab, der deterministisch sein kann oder selbst stochastisch mit einer bestimmten Verteilung.

Für das obige Beispiel ist der Anfangszustand deterministisch, nämlich immer gleich 1. Damit ist die Zustandsverteilung zum Zeitpunkt 0 gegeben durch:

$$\vec{\pi}(0) = (\pi_1(0), \pi_2(0), \pi_3(0)) = (1, 0, 0).$$

Für den Zeitpunkt  $t = 1$  erhalten wir die Zustandsverteilung

$$\vec{\pi}(1) = (\pi_1(1), \pi_2(1), \pi_3(1)) = (0.1, 0.9, 0).$$

Auch wenn der Startzeitpunkt bekannt ist, befindet sich der Prozess bereits zum folgenden Zeitpunkt im Allgemeinen in einem Zustand, über den man nur noch eine Wahrscheinlichkeitsaussage machen kann.

Im Folgenden werden wir uns mit der zeitlichen Entwicklung von  $\vec{\pi}(t)$  für eine bekannte Anfangsverteilung befassen. So könnten wir uns z. B. fragen, wie wahrscheinlich es ist, dass es nach 5 Tagen regnet, wenn am Tag 0 die Sonne geschienen hat.

Später im Kapitel 2.7 werden wir dann sehen, dass  $\vec{\pi}(t)$  unter gewissen Bedingungen (Aperiodizität und Irreduzibilität) für grosse Zeiten  $t$  konstant wird, d.h. nach einer gewissen "Einschwingzeit" nicht mehr von der Zeit abhängt. Zum Beispiel hängt die Wahrscheinlichkeit, dass es nach 1000 Tagen regnet, extrem vernachlässigbar vom heutigen Wetter ab.

Wir interessieren uns nun zunächst für die Zeitentwicklung von  $\vec{\pi}(t)$  zu endlichen Zeiten. Gegeben sei eine homogene Markov-Kette  $\{X_t, t = 0, 1, 2, 3, \dots\}$  mit Zustandsraum  $S = \{1, 2, \dots, N\}$ . Die Anfangsverteilung sei gegeben durch den Vektor

$$\vec{\pi}(0) = (\pi_1(0), \dots, \pi_N(0)).$$

Der Anfangszustand muss also nicht deterministisch sein, aber wir setzen seine Verteilung als bekannt voraus. Die Übergangsmatrix des Markov-Prozesses sei  $\mathbf{P}$ .

Zunächst betrachten wir den Zustand zum Zeitpunkt  $t = 1$ . Aus dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

$$\pi_i(1) = P(X_1 = i) = \sum_{j=1}^N P(X_0 = j) \cdot P(X_1 = i | X_0 = j) = \sum_{j=1}^N \pi_j(0) p_{ji}$$

---

<sup>2</sup>Dies ist die in der Theorie der Markov-Ketten übliche Schreibweise. Vektoren sind im gesamten Skript – im Gegensatz zur Standardkonvention der linearen Algebra – Zeilenvektoren und keine Spaltenvektoren, wenn nichts anderes gesagt wird.

## 2 Markov-Ketten

ergibt sich sofort die Gleichung

$$\begin{aligned}
 \vec{\pi}(1) &= (\pi_1(1), \pi_2(1), \dots, \pi_N(1)) \\
 &= \left( \sum_{j=1}^N \pi_j(0)p_{j1}, \sum_{j=1}^N \pi_j(0)p_{j2}, \dots, \sum_{j=1}^N \pi_j(0)p_{jN} \right) \\
 &= (\pi_1(0), \pi_2(0), \dots, \pi_N(0)) \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1} & p_{N2} & \dots & p_{NN} \end{pmatrix} \\
 &= \vec{\pi}(0) \cdot \mathbf{P}
 \end{aligned}$$

Auf die selbe Weise erhält man auch

$$\begin{aligned}
 \vec{\pi}(2) &= \vec{\pi}(1) \cdot \mathbf{P} \\
 &= (\vec{\pi}(0) \cdot \mathbf{P}) \cdot \mathbf{P} \\
 &= \vec{\pi}(0) \cdot \mathbf{P}^2
 \end{aligned}$$

und allgemein

$$\vec{\pi}(t) = \vec{\pi}(0) \cdot \mathbf{P}^t \quad (2.5)$$

Die Matrix  $\mathbf{P}^t$  heisst auch die *t-Schritt-Übergangsmatrix*, denn sie gibt die Übergangswahrscheinlichkeiten aus einem Zustand zum Zeitpunkt 0 zu einem Zustand zum Zeitpunkt  $t$  an. Sie kann durch einfache Potenzierung der 1-Schritt-Übergangsmatrix gewonnen werden. Wegen der Homogenität der Markovkette gilt dies auch für den Übergang vom Zeitpunkt  $s$  zum Zeitpunkt  $s + t$  für alle  $s \in \mathbb{N}_0$ . Man beachte, dass auch der Spezialfall  $t = 0$  richtig wiedergegeben wird, denn wie für jede Matrix ergibt

$$\mathbf{P}^0 = I$$

die Einheitsmatrix. Gleichung (2.5) ist die grundlegende Gleichung für die Dynamik einer homogenen Markov-Kette mit endlichem Zustandsraum. Aus dieser Gleichung lassen sich alle wesentlichen Eigenschaften eines Markov-Prozesses ableiten.

**Beispiel** Wir betrachten wieder die Markov-Kette, die durch die Übergangsmatrix (2.3) gegeben ist. Wir interessieren uns nun für die Verteilung der Zustände zum Zeitpunkt  $t = 5$ , gegeben eine beliebige Anfangsverteilung. Da wir nicht 5 Matrixmultiplikationen ausführen wollen, überlassen wir das R. Matrizenmultiplikationen können in R mit `%%` durchgeführt werden<sup>3</sup>. Potenzen einer Matrix können mit `%^` berechnet werden, wenn zuvor das Paket `expm` geladen wird.

---

<sup>3</sup>Nur so erhält man eine Matrixmultiplikation im Sinne der linearen Algebra. Der Operator `*` multipliziert Matrizen komponentenweise, genauso wie `^` komponentenweise Potenzen bildet.

## 2 Markov-Ketten

```
> library(expm)
> P <- rbind(c(0.1, 0.9, 0), c(0.7, 0, 0.3), c(1, 0, 0))
> P5 <- P %^% 5
> P5
      [,1] [,2] [,3]
[1,] 0.46990 0.42291 0.10719
[2,] 0.44803 0.42291 0.12906
[3,] 0.46990 0.35730 0.17280
```

Wir können ausserdem mit `rowSums()` überprüfen, dass  $\mathbf{P}^5$  eine stochastische Matrix ist:

```
> rowSums(P5)
[1] 1 1 1
```

Das gilt natürlich auch für höhere Potenzen von  $\mathbf{P}$ :

```
> rowSums(P %^% 1000)
[1] 1 1 1
```

Wollen wir nun die Zustandsverteilung für  $t = 5$  bei Start im Zustand 1 zum Zeitpunkt  $t = 0$  berechnen, so müssen wir eine Vektor-Matrix-Multiplikation durchführen. Dazu empfiehlt es sich, den Vektor zunächst mit `t()` zu transponieren, um einen Zeilenvektor zu erhalten<sup>4</sup>.

```
> t(c(1,0,0)) %*% P5
      [,1] [,2] [,3]
[1,] 0.4699 0.42291 0.10719
```

Es ist wichtig zu bemerken, dass die grundlegende Gleichung (2.5) die zeitliche Entwicklung einer *Wahrscheinlichkeitsverteilung* beschreibt, nicht aber die zeitliche Entwicklung einer Realisierung (Trajektorie).

Gleichung (2.5) hat die Form

$$\text{Zeilenvektor} = \text{Zeilenvektor} \cdot \text{Matrix},$$

während man sonst (zum Beispiel in der linearen Algebra) meistens Gleichungen des Typs

$$\text{Spaltenvektor} = \text{Matrix} \cdot \text{Spaltenvektor}$$

---

<sup>4</sup>Vektoren sind in R ein eigener Datentyp und zunächst kein Spezialfall einer Matrix. Sie werden jedoch bei Verwendung in Matrixoperationen automatisch in Matrizen umgewandelt, normalerweise in Spaltenvektoren. Wenn die Matrixoperation nur für einen Zeilenvektor definiert ist, wird allerdings teilweise auch eine Konvertierung in einen Zeilenvektor vorgenommen. Im folgenden Beispiel führt die Rechnung ohne `t()` zum selben Ergebnis. Da automatische Typenkonvertierungen auch unerwartete Effekte haben können, empfiehlt es sich, lieber eine explizite Konvertierung mit `t()` durchzuführen.

## 2 Markov-Ketten

behandelt. In der Theorie der Markov-Ketten ist es allerdings üblich, mit Zeilenvektoren zu arbeiten. Transponieren von (2.5) liefert

$$(\vec{\pi}(t))' = (\vec{\pi}(0) \cdot \mathbf{P}^t)'$$

bzw.

$$\vec{\pi}(t)' = (\mathbf{P}^t)' \cdot \vec{\pi}(0)'$$

oder

$$\vec{\pi}(t)' = (\mathbf{P}')^t \cdot \vec{\pi}(0)',$$

d.h. man könnte genausogut auch die Übergangsmatrix transponieren und dann wie gewohnt mit von Rechts mit der Zustandsverteilung multiplizieren, die man dann als Spaltenvektor definieren würde. Wir folgen hier – wie auch die meisten Bücher zum Thema – der üblichen Konvention und arbeiten mit Zeilenvektoren und Multiplikation von links.

## 2.4 Klassifikation von Zuständen

Wir wollen nun die einzelnen Zustände einer Markov-Kette nach ihrer Erreichbarkeit klassifizieren. Dazu betrachten wir die durch den Übergangsgraphen in Abbildung 2.4 gegebene Markov-Kette. Man sieht sofort, dass der Übergangsgraph in zwei Teile zerfällt – startet die Kette in einem der Zustände 1 – 4, so wird sie niemals einen der Zustände 5 – 8 erreichen, und umgekehrt. Schaut man genauer hin, sieht man auch, dass man den Zustand 1 höchstens ein einziges Mal besuchen kann, nämlich nur, wenn die Kette dort startet. Im nächsten Schritt springt die Kette dann zu 2, und es gibt keine Möglichkeit, jemals wieder zum Zustand 1 zurückzukehren. Zwischen den Zuständen 3 und 4 kann die Kette hingegen beliebig oft hin- und herspringen, vorausgesetzt sie erreicht überhaupt einen der beiden Zustände (was bei einem Start in Zustand 5 zum Beispiel nicht der Fall ist). Zustand 8 kann, wenn er einmal erreicht wurde, niemals wieder verlassen werden.

**Definition** (*Erreichbarkeit*) Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine homogene Markov-Kette mit Zustandsraum  $S$ . Ein Zustand  $j \in S$  heisst vom Zustand  $i \in S$  aus *erreichbar*, wenn ein  $t \in \mathbb{N}_0$  existiert, so dass die Wahrscheinlichkeit, sich nach  $t$  Schritten im Zustand  $j$  zu befinden, wenn man sich aktuell im Zustand  $i$  befindet, grösser als 0 ist. Mathematisch: Es existiert ein  $t \in \mathbb{N}_0$ , so dass

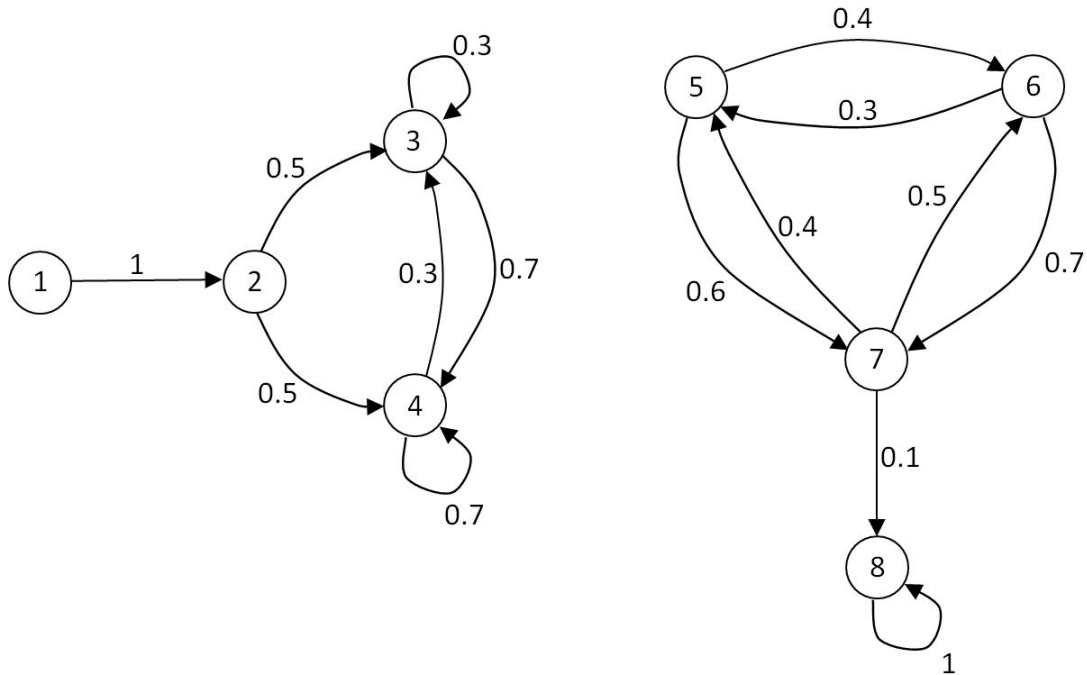
$$P(X_t = j | X_0 = i) > 0,$$

bzw. äquivalent dazu, es existiert ein  $t \in \mathbb{N}_0$  mit

$$(\mathbf{P}^t)_{ij} > 0.$$

Wir schreiben kurz auch  $i \rightarrow j$ , wenn  $j$  von  $i$  erreichbar ist und  $i \nrightarrow j$ , wenn  $j$  nicht von  $i$  aus erreichbar ist.

## 2 Markov-Ketten



Abbildungung 2.4: Übergangsgraph einer Markov-Kette

Es ist zu beachten, dass  $t = 0$  zugelassen ist, d.h. es gilt wegen

$$P(X_s = i | X_s = i) = 1$$

auch stets  $i \rightarrow i$ . Jeder Zustand ist also von sich selbst aus erreichbar. Wir verlangen ausserdem *nicht*, dass  $j$  von  $i$  aus in einem Schritt erreichbar sein muss, d.h. es muss im Übergangsgraphen nicht unbedingt einen Pfeil von  $i$  nach  $j$  geben, damit  $i \rightarrow j$ . Es reicht, dass man  $j$  von  $i$  aus über andere Zustände erreichen kann. Es gilt für  $i \rightarrow j$  und  $j \rightarrow k$  auch  $i \rightarrow k$ .  $i \rightarrow j$  gilt also, wenn Zustände  $i_1, i_2, \dots, i_\ell$  existieren mit

$$i \rightarrow i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_\ell \rightarrow j.$$

Dies gilt wiederum dann, wenn

$$p_{i,i_1} > 0, \quad p_{i_1,i_2} > 0, \quad \dots, \quad p_{i_\ell,j} > 0$$

gilt.

**Definition** (*Wechselseitige Erreichbarkeit*) Gilt für  $i, j \in S$   $i \rightarrow j$  und  $j \rightarrow i$ , so nennt man  $i$  und  $j$  *wechselseitig erreichbar* und schreibt kurz  $i \leftrightarrow j$ . Auch hier gilt mit  $i \leftrightarrow j$  und  $j \leftrightarrow k$  auch  $i \leftrightarrow k$ .

## 2 Markov-Ketten

**Definition** (*Absorbierender Zustand*) Gilt für ein  $i \in S$

$$i \nrightarrow j$$

für alle  $j \neq i$ , so nennt man  $i$  einen *absorbierenden Zustand*.

Ein absorbierender Zustand ist also ein Zustand, den man niemals wieder verlässt, wenn man ihn einmal erreicht hat. Ein Zustand  $i$  ist also genau dann absorbierend, wenn

$$p_{ii} = 1$$

gilt.

Der Zustandsraum  $S$  einer Markovkette lässt sich eindeutig in Klassen von Zuständen aufteilen, so dass zwei Zustände  $i, j$  genau dann in der selben Klasse liegen, wenn  $i \leftrightarrow j$  gilt<sup>5</sup>. Jeder Zustand ist dabei genau in einer Klasse, wobei auch Klassen aus nur einem Zustand bestehen oder alle Zustände in einer einzigen Klasse sein können. Ein absorbierender Zustand bildet immer eine Klasse für sich allein, da man von ihm aus keinen weiteren Zustand erreichen kann.

**Definition** (*Irreduzibilität*) Gilt für alle  $i, j \in S$

$$i \leftrightarrow j,$$

ist also jeder Zustand von jedem anderen aus erreichbar, so nennt man die Markov-Kette *irreduzibel*, ansonsten *reduzibel*.

Irreduzibilität bedeute also genau, dass der Zustandsraum  $S$  nur aus einer Äquivalenzklasse von Zuständen besteht. Die Markov-Kette ist reduzibel, wenn es Zustände  $i, j$  gibt, für die  $i \nrightarrow j$  gilt bzw. für die

$$P(X_t = j | X_0 = i) = 0$$

für alle  $t \in \mathbb{N}$ . Die Markov-Kette in Abbildung 2.5 ist reduzibel, da man z.B. nicht von 1 nach 2 gelangt.

Da man von einem absorbierenden Zustand aus keinen anderen Zustand mehr gelangen kann, sind Markov-Ketten mit mindestens einem absorbierenden Zustand automatisch reduzibel. Abbildung 2.6 zeigt zwei Markov-Ketten mit einem bzw. zwei absorbierenden Zuständen, die daher ebenfalls reduzibel sind.

Irreduzibilität ist eine wichtige Eigenschaft für die Untersuchung des Langzeitverhaltens einer Markov-Kette. Wir gehen in Kapitel 2.7 näher darauf ein.

Ein weitere Eigenschaft eines Zustands ist seine *Periode*. Da wir es hier mit stochastischen Prozessen zu tun haben, ist die Periode eines Zustands nicht definiert als Anzahl Schritte, nach denen jeweils sicher eine Rückkehr in einen Zustand stattfindet, sondern als Anzahl Schritte, nach denen dies minimal möglich ist. Formal:

---

<sup>5</sup>Mathematisch handelt es sich bei der gegenseitigen Erreichbarkeit um eine *Äquivalenzrelation*, was die Zerlegung von  $S$  in Äquivalenzklassen impliziert.

## 2 Markov-Ketten

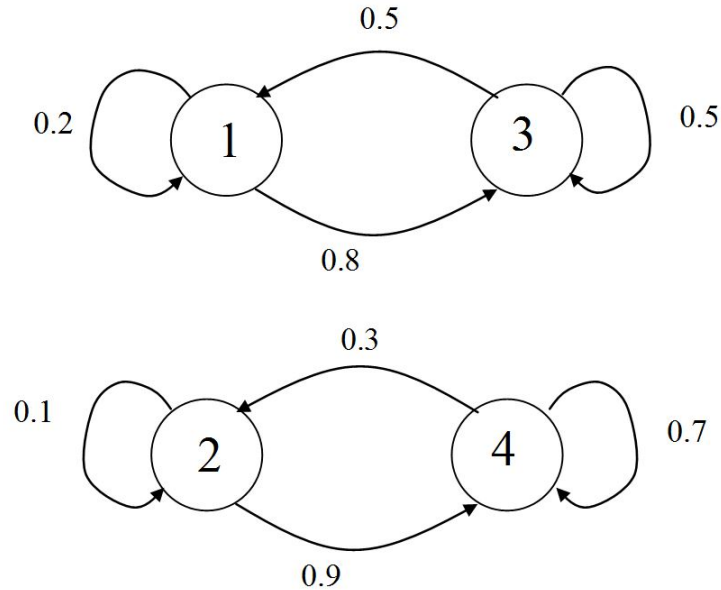


Abbildung 2.5: Reduzible Markov-Kette

**Definition** (*Periode eines Zustands*) Ist  $d \in \mathbb{N}$  die grösste Zahl, für die gilt, dass

$$P(X_n = i | X_0 = i) = 0$$

bzw. (äquivalent)

$$(\mathbf{P}^n)_{ii} = 0$$

für alle  $n$ , die nicht durch  $d$  teilbar sind, so nennt man  $d$  die Periode des Zustands  $i$ . Ist  $d = 1$ , so nennt man den Zustand  $i$  *aperiodisch*, ist  $d > 1$ , so heisst der Zustand *periodisch*.

Ein Zustand  $i$  ist genau dann aperiodisch, wenn  $p_{ii} > 0$  ist. Ist ein Zustand periodisch, so gilt stets  $p_{ii} = 0$ , da eine Rückkehr nach 1 Zeitschritt nicht möglich ist. Periodizität bedeutet nicht, dass man von  $i$  ausgehend alle  $d$  Schritte  $i$  wieder besucht, sondern nur, dass dies höchstens nach  $d, 2d, 3d, \dots$  Schritten überhaupt möglich ist.

Alle Zustände in einer Klasse haben die selbe Periode. Ist die Markov-Kette irreduzibel, d.h. fallen alle Zustände in eine Klasse, so spricht man auch von der Periode der Markov-Kette bzw. bezeichnet die Kette als periodisch oder aperiodisch. Eine irreduzible Markov-Kette ist also automatisch aperiodisch, wenn ein  $i$  existiert mit  $p_{ii} > 0$ . Bei reduzierbaren Markov-Ketten ist die Lage etwas komplizierter, da hier unterschiedliche Klassen Zustände mit unterschiedlichen Perioden haben können bzw. Zustände in einigen Klassen aperiodisch, in anderen periodisch sein können.

Wie erkennt man periodische Prozesse? Am einfachsten geht das im Übergangsgraphen. Man verfolgt die Übergangspfeile von einem Zustand über die anderen Zustände zu sich



## 2 Markov-Ketten

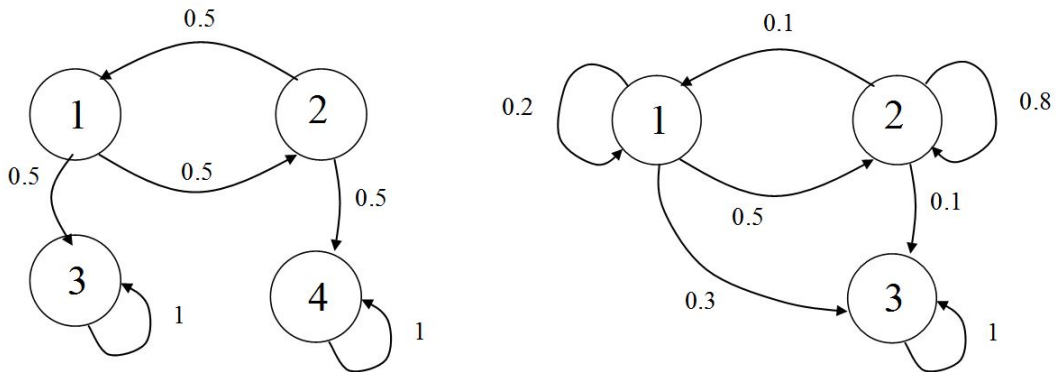


Abbildung 2.6: Zwei reduzierbare Markov-Ketten mit einem bzw. zwei absorbierenden Zuständen

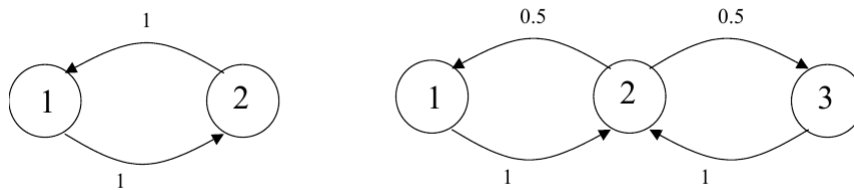


Abbildung 2.7: Übergangsgraphen für zwei periodische Markov-Ketten

selbst zurück. Dies sind gerichtete Zyklen. Falls die Längen aller diese Zyklen ein Vielfaches einer Zahl  $d > 1$  sind, ist der Prozess periodisch. In Abbildung 2.7 sind die Übergangsgraphen von Markov-Ketten mit Übergangsmatrizen

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dargestellt. Die Zyklen mit  $d = 2$  sind einfach zu erkennen.

Eine andere Möglichkeit ist es, die Diagonalelemente von  $\mathbf{P}$  zu betrachten. Falls irgendeines dieser Elemente ungleich Null ist, dann ist eine irreduzible Markov-Kette sicher aperiodisch. Für eine irreduzible Markov-Kette mit der Periode  $d$  müssen alle Diagonalelemente

## 2 Markov-Ketten

der Matrizen  $\mathbf{P}, \mathbf{P}^2, \mathbf{P}^3, \dots, \mathbf{P}^{d-1}$  gleich Null sein. Ausserdem müssen alle Diagonalelemente der Matrizen  $\mathbf{P}^{d+1}, \mathbf{P}^{d+2}, \mathbf{P}^{d+3}, \dots, \mathbf{P}^{2d-1}$  gleich Null sein, usw.

**Beispiel (Ehrenfest-Modell)** Paul und Tatjana Ehrenfest veröffentlichten 1909 ein sehr einfaches Modell aus der Thermodynamik: Zwei Gefässe sind durch eine dünne Membran verbunden. In beiden Gefässen befinden sich zusammen  $m$  Teilchen. In jedem (diskreten) Zeitschritt wird eines der Teilchen zufällig ausgewählt. Es wandert in das jeweils andere Gefäss. Wir betrachten die Markov-Kette  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$  mit Zustandsraum  $S = \{0, 1, \dots, m\}$ .  $X_t$  gebe dabei die Anzahl zum Zeitpunkt  $t$  im ersten Gefäss befindlichen Teilchen an.

Befindet sich im ersten Gefäss zum Zeitpunkt  $t$  genau ein Teilchen, so wird es beim Übergang zum Zeitpunkt  $t + 1$  mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{m}$  ausgewählt. In diesem Fall hat man zum Zeitpunkt  $t + 1$  kein Teilchen mehr im ersten Gefäss. Mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{m-1}{m}$  wird jedoch eines der Teilchen aus dem zweiten Gefäss ins erste verschoben. Allgemeiner hat man für  $i = 1, \dots, m-1$  Teilchen im  $t$ -ten Schritt mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{i}{m}$  im nächsten Schritt  $i-1$  Teilchen im ersten Gefäss und mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{m-i}{m}$  im nächsten Schritt  $i+1$  Teilchen. Im Fall  $i = 0$  wird in jedem Fall eines der Teilchen aus dem zweiten Gefäss in das erste versetzt, und man hat im nächsten Schritt 1 Teilchen. Genauso wird bei  $i = m$  in jedem Fall ein Teilchen vom ersten ins zweite Gefäss verschoben, also verbleiben dann  $m-1$  Teilchen im ersten Gefäss. Wir erhalten also eine Übergangsmatrix mit Einträgen.

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & i = 0, j = 1 \\ \frac{i}{m} & i = 1, \dots, m-1, j = i-1 \\ \frac{m-i}{m} & i = 1, \dots, m-1, j = i+1 \\ 1, & i = m, j = m-1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

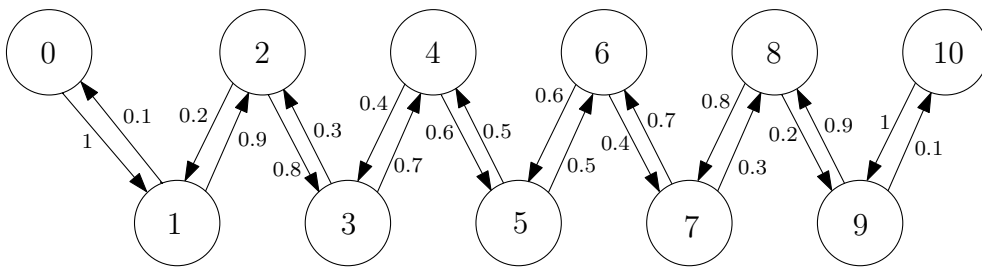


Abbildung 2.8: Übergangsgraph für das Ehrenfest-Modell mit  $m = 10$

Zur Veranschaulichung gehen wir von  $m = 10$  aus. Wir erhalten dann  $S = \{0, 1, \dots, 10\}$

## 2 Markov-Ketten

und die folgende Übergangsmatrix

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Übergangsgraph ist in Abbildung 2.8 dargestellt. Die Kette besitzt keine absorbierenden Zustände, und alle Zustände sind rekurrent. Die Markov-Kette ist auch irreduzibel, denn jeder Zustand kann von jedem anderen aus erreicht werden.

Startet man mit einer gerade Anzahl Teilchen im ersten Gefäß, so hat man im nächsten Schritt stets eine ungerade Anzahl Teilchen, da ja immer genau eines verschoben wird. Erst im übernächsten Schritt hat man wieder eine gerade Anzahl. Eine Rückkehr in genau den selben Zustand ist also (frühestens) in zwei Schritten möglich, ansonsten nur nach vier, sechs, acht usw. Schritten. Analog hat man bei Start mit einer ungeraden Anzahl Teilchen nach zwei, vier, sechs, acht usw. Schritten erreichen. Alle Zustände haben also die Periode 2. Dies sieht man auch am Übergangsgraphen in Abbildung 2.8 – man springt immer zwischen dem “oberen” (gerade Anzahl) und dem “unteren” Teil (ungerade Anzahl) hin- und her, man kann also nicht in einem Schritt in einen Zustand zurückkehren. Dies sieht man auch daran, dass die Übergangsmatrix auf der Diagonale nur Nullen hat. Am Übergangsgraphen sieht man aber auch, dass man in jeden Zustand nach 2 zurückkehren kann (wegen der Irreduzibilität reicht es, das für einen Zustand zu überprüfen!).

## 2.5 Aufenthaltsdauern für endlichen Zeithorizont

Bei vielen Fragestellungen ist man an der Aufenthaltsdauer in einem bestimmten Zustand interessiert. Für einen Markov-Kette entspricht dies der Anzahl der Zeitschritte, während derer der Prozess im gesuchten Zustand ist. Diese Anzahl ist natürlich eine Zufallsvariable und wird durch eine Verteilung beschrieben. Im Folgenden betrachten wir aber nur ihren Erwartungswert.

Es ist klar, dass die erwartete Aufenthaltsdauer in der Regel vom Anfangszustand abhängt. Wir haben auch schon festgestellt, dass man rekurrente Zustände mit Wahrscheinlichkeit 1 unendlich oft besucht, weshalb die Frage nach der absoluten Anzahl der Aufenthalte in einem Zustand nicht unbedingt interessant ist. Wir werden später den Anteil der Aufenthalte in einem Zustand betrachten, in diesem Abschnitt untersuchen wir aber zunächst die absolute Anzahl für einen endlichen Zeithorizont.

## 2 Markov-Ketten

Wir betrachten dazu Markovketten  $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$  mit  $\mathcal{T} = \{0, 1, 2, \dots, T\}$  mit einer vorgegebenen endlichen Gesamtlaufzeit und einer vorgegebenen Anfangsverteilung  $\vec{\pi}(0)$ .

Die Anzahl der Aufenthalte im Zustand  $j$  im Zeitraum  $t = 0, \dots, T$  bezeichnen wir mit  $Z_j(T)$ . Dies können wir wiederum darstellen als

$$Z_j(T) = \sum_{t=0}^T Y_j(t)$$

mit

$$Y_j(t) = \begin{cases} 1, & X_t = j \\ 0, & X_t \neq j \end{cases}.$$

Es gilt

$$\mathbb{E}(Y_j(t)) = 1 \cdot P(Y_j(t) = 1) + 0 \cdot P(Y_j(t) = 0) = \pi_j(t)$$

und damit

$$\mathbb{E}(Z_j(T)) = \mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^T Y_j(t)\right) = \sum_{t=0}^T \mathbb{E}(Y_j(t)) = \sum_{t=0}^T \pi_j(t).$$

Jeder Zeitschritt trägt also zum Erwartungswert den Beitrag  $\pi_j(t)$  bei. Mit dem (Zeilen-)Einheitsvektor  $\vec{e}_j = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  (die 1 steht an der  $j$ -ten Stelle) kann man auch

$$\pi_j(t) = \vec{\pi}(t) \cdot \vec{e}_j'$$

schreiben und erhält wegen

$$\vec{\pi}(t) = \vec{\pi}(0) \cdot \mathbf{P}^t$$

auch

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_j(T)) &= \sum_{t=0}^T \pi_j(t) \\ &= \sum_{t=0}^T \vec{\pi}(t) \cdot \vec{e}_j' \\ &= \sum_{t=0}^T \vec{\pi}(0) \cdot \mathbf{P}^t \cdot \vec{e}_j' \\ &= \vec{\pi}(0) \cdot \underbrace{\left(\sum_{t=0}^T \mathbf{P}^t\right)}_{:= \mathbf{M}(T)} \cdot \vec{e}_j' \end{aligned}$$

## 2 Markov-Ketten

oder kurz

$$\mathbb{E}(Z_j(T)) = \vec{\pi}(0) \cdot \mathbf{M}(T) \cdot \vec{e}_j'$$

Die Matrix  $\mathbf{M}(T)$  wird auch *Aufenthaltsdauermatrix* genannt, denn ihre Komponenten  $m_{ij}$  geben die erwarteten Aufenthaltsdauern im Zustand  $j$  an, vorausgesetzt der Anfangszustand bei  $t = 0$  war  $X_0 = i$ :

$$m_{ij} = \vec{e}_i \cdot \mathbf{M}(T) \cdot \vec{e}_j'$$

Die Zeilensummen der Aufenthaltsmatrix sind  $T + 1$ , also

$$\sum_{j=1}^N m_{ij} = T + 1,$$

da sich die erwarteten Aufenthalte in allen Zuständen gerade zur Anzahl Zeitschritte addieren müssen. Für eine feste Anfangsverteilung  $\vec{\pi}(0)$  kann man ausserdem den *Vektor der erwarteten Aufenthaltsdauern*

$$\vec{N} = \vec{\pi}(0) \cdot \mathbf{M}(T)$$

definieren. Die Summe seiner Komponenten  $N_1(T), \dots, N_N(T)$  ergibt wieder  $T + 1$ :

$$\sum_{j=1}^N N_j(T) = T + 1.$$

**Beispiel** Wir betrachten ein Zuverlässigkeitsmodell für eine Maschine. Falls die Maschine zum Zeitpunkt  $t$  in Ordnung ist, ist sie das auch zum Zeitpunkt  $t + 1$  mit einer Wahrscheinlichkeit von 90%. Eine defekte Maschine ist beim nächsten Zeitpunkt mit Sicherheit wieder repariert. Die Maschine funktioniert für  $t = 0$ . Wir sind interessiert an der erwarteten Anzahl der Ausfalltage im Zeitraum  $\mathcal{T} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .

Der Zustandsraum ist hier  $S = \{1, 2\}$  mit der Interpretation, dass Zustand 1 bedeutet, dass die Maschine funktioniert und Zustand 2, dass sie defekt ist. Als Übergangsmatrix erhalten wir dann:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir benötigen nun  $\mathbf{M}(T)$  für  $T = 4$ , also:

$$\mathbf{M}(4) = \sum_{t=0}^4 \mathbf{P}^t$$

Berechnung in  $\mathbb{R}^6$  ergibt:

---

<sup>6</sup>Das geht natürlich auch mit einer Schleife...

## 2 Markov-Ketten

```
> P <- rbind(c(0.9,0.1),c(1,0))
> f <- function(t) P %^% t
> l <- lapply(0:4, f) # Liste mit Matrixpotenzen erzeugen
> M4 <- Reduce("+",l) # Die Elemente der Liste addieren
> M4
      [,1] [,2]
[1,] 4.6281 0.3719
[2,] 3.7190 1.2810
```

Bei Start in 1 erhalten wir also

$$E(Z_2)(4) = \vec{\pi}(0) \cdot \mathbf{M}(4) \cdot \vec{e}_2' = (1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 4.6281 & 0.3719 \\ 3.7190 & 1.2810 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.3719,$$

was wir natürlich auch direkt aus  $\mathbf{M}(4)$  hätten ablesen können. Man beachte, dass die Zeilensummen von  $\mathbf{M}(4)$  beide  $T + 1 = 5$  sind!

## 2.6 Kostenmodelle für endlichen Zeithorizont

Oft sind Prozesse mit bestimmten Prozesskosten gekoppelt. Die Aufgabe der Prozessbeschreibung ist dann, die Prozesskosten zu bestimmen. Eine Prozessoptimierung versucht, die Prozesskosten zu minimieren, indem beeinflussbare Parameter des Prozesses entsprechend festgelegt werden. Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt nur mit der Berechnung der erwarteten Kosten bei endlichem Zeithorizont, wobei wir unterscheiden zwischen *zustandsabhängigen* und *übergangsabhängigen* Kosten. Die selben Überlegungen kann man statt für Kosten auch für Gewinne oder sonstige Bewertungen durchführen, weshalb man manchmal auch von *bewerteten Markov-Ketten* spricht.

Wir betrachten zunächst ein Kostenmodell für *zustandsabhängige* Kosten: Zu jedem Zeitpunkt  $t = 0, 1, 2, \dots$  fallen Kosten  $K_t$  an, die nur vom Zustand des Prozesses zur Zeit  $t$  abhängen. Zu jedem Zustand  $j$  des Zustandsraumes gehört dabei eine Kostenzahl  $c_j$ , die Kosten angibt, die für jeden Zeitschritt anfallen, in dem der Prozess im Zustand  $j$  ist. Die Gesamtkosten  $K$  setzen sich aus der Summe der Einzelkosten zusammen:

$$K = \sum_{t=0}^T K_t.$$

Kostenmodelle dieses Typs können in häufig angewendet werden.

Wir fassen die Kosten der einzelnen Zustände zu einem Kostenvektor  $\vec{c}$  zusammen:

$$\vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_N)$$

wobei der Zustandsraum durch  $S = \{1, 2, \dots, N\}$  gegeben sei.

Im Folgenden interessieren wir uns für die Gesamtkosten  $K$  in der Laufzeit  $0, \dots, T$  bei gegebener Anfangsverteilung  $\vec{\pi}(0)$ .  $K$  ist eine Zufallsvariable und für jede Prozessrealisierung unterschiedlich. Wir fragen uns, wie gross der Erwartungswert dieser Zufallsvariablen ist.

## 2 Markov-Ketten

Wir betrachten zunächst die erwarteten Kosten zum Zeitpunkt  $t$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(K_t) &= \sum_{j=1}^N c_j \cdot P(X_t = j) \\ &= \sum_{j=1}^N \pi_j(t) \cdot c_j \\ &= \vec{\pi}(t) \cdot \vec{c}' \end{aligned}$$

$\vec{\pi}(t)$  kann wiederum – wie oben bei den Aufenthaltsdauern – als

$$\vec{\pi}(t) = \vec{\pi}(0) \cdot \mathbf{P}^t$$

berechnet werden. Wir erhalten damit:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(K_t) &= \vec{\pi}(t) \cdot \vec{c}' \\ &= \vec{\pi}(0) \cdot \mathbf{P}^t \cdot \vec{c}' \end{aligned}$$

Die erwarteten Gesamtkosten ergeben sich dann durch Addition der erwarteten Einzelschrittkosten:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(K) &= \mathbb{E} \left( \sum_{t=0}^T K_t \right) \\ &= \sum_{t=0}^T \mathbb{E}(K_t) \\ &= \sum_{t=0}^T \vec{\pi}(0) \cdot \mathbf{P}^t \cdot \vec{c}' \\ &= \vec{\pi}(0) \cdot \left( \sum_{t=0}^T \mathbf{P}^t \right) \cdot \vec{c}' \\ &= \vec{\pi}(0) \cdot \mathbf{M}(T) \cdot \vec{c}' \\ &= \vec{N}(T) \cdot \vec{c}' \end{aligned}$$

Hier tritt also wieder die Aufenthaltsdauermatrix  $\mathbf{M}(T)$  auf. Dies ist anschaulich klar, denn die Aufenthaltsdauermatrix von links multipliziert mit der Anfangsverteilung sagt ja gerade, wie viele Zeitschritte (im Erwartungswert) der Prozess in den verschiedenen Zuständen  $j = 1, 2, \dots, N$  ist. Multipliziert mit den Einzelschrittkosten  $c_j$  für diese Zustände und aufsummiert ergeben sich gerade die Gesamtkosten.

**Beispiel** Eine Versicherung plant, eine Reiseversicherung anzubieten. Die Versicherung soll während einer Reisezeit von 7 Tagen 100 CHF pro Krankheitstag bezahlen. Die Bedingung ist, dass der Versicherungsnehmer gesund ist am Tage vor Reiseantritt. Wie teuer muss die Police sein, damit die Versicherung keinen Verlust macht?

## 2 Markov-Ketten

Wir setzen folgendes markovsches Krankheitsmodell voraus: Eine Person, die heute gesund ist, ist morgen krank mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.05. Eine kranke Person ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.6 am folgenden Tag wieder gesund. Der Prozess hat den Zustandsraum  $S = \{1, 2\}$ , wobei 1 bedeute, dass der Versicherungsnehmer gesund ist, und 2 dass er krank ist. Die Übergangsmatrix ist dann

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Der Kostenvektor ist:

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 100 \end{pmatrix}.$$

Die Anfangsverteilung ist gegeben durch  $\vec{\pi}(0) = (1, 0)$ , denn die Versicherung soll ja nur für Personen gelten, die vor Antritt der Reise gesund sind. Wir können den Tag vor Reiseantritt ( $t = 0$ ) mit in den Betrachtungszeitraum miteinbeziehen, denn an diesem Tag entstehen für die Versicherung mit Sicherheit keine Kosten. Der Erwartungswert der Gesamtkosten für den Zeitraum  $\{0, 1, 2, \dots, 7\}$  ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} E(K) &= \vec{\pi}(0) \cdot \mathbf{M}(T) \cdot \vec{c}' \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{M}(T) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mit

$$\mathbf{M}(T) = \sum_{t=0}^7 \mathbf{P}^t = \begin{pmatrix} 7.5029 & 0.4971 \\ 5.9648 & 2.0352 \end{pmatrix}$$

ergibt sich:

$$E(K) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7.5029 & 0.4971 \\ 5.9648 & 2.0352 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \end{pmatrix} = 49.71$$

Die Versicherung muss also mindestens 49.7 CHF für die Police verlangen, wenn sie keinen Verlust machen will.

Bisher haben wir Kosten betrachtet, die in Abhängigkeit vom Zustand in jedem Zeitschritt auflaufen. Nun betrachten wir dagegen Kosten, die bei *Übergängen* von einem Zustand in den anderen entstehen: Immer dann, wenn der Prozess von Zustand  $i$  in den Zustand  $j$  wechselt, mögen die Kosten  $u_{ij}$  anfallen. Dabei kann man natürlich auch Übergänge vom Zustand  $i$  in sich selbst betrachten.

Die Kosten für alle Übergänge ordnen wir in der *Übergangskostenmatrix*  $\mathbf{U}$  an:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1N} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{N1} & u_{N2} & \dots & u_{NN} \end{pmatrix}$$



## 2 Markov-Ketten

Sofern bei einem Übergang keine Kosten auftreten, ist das entsprechende Matrixelement Null zu setzen.

Die bei einem solchen Modell während einer endlichen Laufzeit  $t = 0, 1, 2, \dots, T$  anfallenden Kosten sind natürlich wieder eine Zufallsvariable, die davon abhängt, wie die jeweilige Trajektorie des Prozesses verläuft. Im Folgenden werden wir den Erwartungswert der anfallenden Kosten berechnen.

Wir betrachten zunächst einen Übergang von  $t$  nach  $t+1$ . Sei zunächst der Zustand des Systems zum Zeitpunkt  $t$  als bekannt vorausgesetzt, also etwa  $X_t = i$ . Was ist nun der Erwartungswert der im nächsten Zeitschritt anfallenden Kosten? Prinzipiell sind Übergänge in alle Zustände  $j = 1, \dots, N$  möglich. Die Wahrscheinlichkeiten werden durch die Matrixelemente  $p_{ij}$  der Übergangsmatrix gegeben. Der Erwartungswert der Kosten (gegeben den Zustand zum Zeitpunkt  $t$ ) berechnet sich damit als mit den Wahrscheinlichkeiten gewichtete Summe der möglichen Kosten:

$$\mathbb{E}(K_{t,t+1}|X_t = i) = \sum_{j=1}^N u_{ij}p_{ij}$$

Damit gilt nun

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(K_{t,t+1}) &= \sum_{i=1}^N \mathbb{E}(K_{t,t+1}|X_t = i)P(X_t = i) \\ &= \sum_{i=1}^N \pi_i(t)\mathbb{E}(K_{t,t+1}|X_t = i) \\ &= \sum_{i=1}^N \pi_i(t) \left( \sum_{j=1}^N u_{ij}p_{ij} \right) \end{aligned}$$

Mit

$$\vec{c} = \left( \sum_{j=1}^N u_{1j}p_{1j}, \sum_{j=1}^N u_{2j}p_{2j}, \dots, \sum_{j=1}^N u_{Nj}p_{Nj} \right)$$

können wir dies schreiben als:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(K_{t,t+1}) &= \sum_{i=1}^N \pi_i(t) \left( \sum_{j=1}^N u_{ij}p_{ij} \right) \\ &= \vec{\pi}(t) \cdot \vec{c}' \end{aligned}$$

Die übergangsabhängigen Kosten können wir also auch als zustandsabhängige Kosten interpretieren, wobei die Kosten eines Zustandes dann der Summe der mit den Übergangswahrscheinlichkeiten gewichteten Kosten der von diesem Zustand aus möglichen Übergänge entsprechen.

## 2 Markov-Ketten

Die Komponenten von  $\vec{c}$  entsprechen den Zeilensummen der Matrix, die entsteht, wenn man  $P$  und  $U$  *komponentenweise* miteinander multipliziert<sup>7</sup>.

Für die erwarteten Gesamtkosten erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 E(K) &= E\left(\sum_{t=0}^{T-1} K_{t,t+1}\right) \\
 &= \sum_{t=0}^{T-1} E(K_{t,t+1}) \\
 &= \sum_{t=0}^{T-1} \vec{\pi}(t) \cdot \vec{c}' \\
 &= \sum_{t=0}^{T-1} \vec{\pi}(0) \cdot \mathbf{P}^t \cdot \vec{c}' \\
 &= \vec{\pi}(0) \cdot \left(\sum_{t=0}^{T-1} \mathbf{P}^t\right) \cdot \vec{c}' \\
 &= \vec{\pi}(0) \cdot \mathbf{M}(T-1) \cdot \vec{c}'
 \end{aligned}$$

Dies entspricht fast genau den erwarteten Gesamtkosten für zustandsabhängige Kosten, nur dass die Kosten jedes Zustands als Summe der mit den Übergangswahrscheinlichkeiten gewichteten Kosten der von diesem Zustand aus möglichen Übergänge gebildet werden. Da der Übergang von  $T$  zu  $T+1$  nicht mehr betrachtet wird, fallen bei dieser Interpretation im letzten Zustand keine Kosten mehr an, d.h. die Summe geht nur bis  $T-1$ .

Die Struktur der zustandsabhängigen oder übergangsabhängigen Kosten kann ausser zur konkreten Berechnung von Kosten auch dazu verwendet werden, bestimmte Eigenschaften des Prozesses zu bestimmen. Zum Beispiel kann man die erwarteten Anzahl Aufenthalte in einem bestimmten Zustand  $i$  berechnen, indem man formal  $c_i = 1$  und  $c_k = 0$  für  $k \neq i$  setzt. Die erwarteten Kosten sind dann gleich der Anzahl der erwarteten Aufenthalte in  $i$ .

Ebenso kann man die erwartete Anzahl Sprünge von einem Zustand  $i$  in einen anderen Zustand  $j$  berechnen, indem man  $u_{ij} = 1$  setzt und die Kosten für alle anderen Übergänge auf 0. Interessiert man sich beispielsweise bei einem Prozess mit vier Zuständen für die Anzahl von Sprüngen von Zustand 2 in Zustand 3, verwendet man die Kostenmatrix

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

---

<sup>7</sup>Dies wird manchmal auch als *Hadamard-* oder *Schur-Produkt* der Matrizen bezeichnet und als  $P \circ U$  geschrieben. In R entspricht dies der Multiplikation von zwei Matrizen mit `*` statt mit `%*%`.

## 2 Markov-Ketten

Die Berechnung der erwarteten Anzahl Sprünge in Zustand  $j$  unabhängig vom Ausgangszustand kann analog durchgeführt werden, indem alle Elemente  $u_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  auf 1 gesetzt werden. Im obigen Beispiel mit dem interessierenden Zustand  $j = 3$  erhielte man<sup>8</sup>:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zur Berechnung der erwarteten Anzahl Sprünge von einem Zustand in einen anderen verwendet man eine Kostenmatrix, die aus lauter Einsen besteht mit Ausnahme der Hauptdiagonalen:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man sieht also, dass mit den Konzepten von zustands- und übergangsabhängigen Kosten eine ganze Reihe von interessierenden Prozesseigenschaften behandelt werden können, zumindest was deren Erwartungswert angeht.

## 2.7 Asymptotisches Verhalten

Häufig interessiert das Verhalten eines Prozesses auf lange Sicht. Interessant sind dann nicht mehr *transiente* Eigenschaften, also solche die das *Einschwingverhalten* des Prozesses (engl. *burn in*) betreffen, sondern *stationäre Eigenschaften* des Prozesses, also solche die das “normale” Verhalten des Prozesses nach der Einschwingphase betreffen.

Insbesondere interessieren die folgenden Fragen:

1. Gibt es eine *Grenzverteilung*  $\vec{\pi}(\infty)$  ?
2. Falls diese Grenzverteilung existiert, ist diese eindeutig? Wird sie unabhängig von den Startwerten erreicht?
3. Wie kann man die Grenzverteilung berechnen?

Es wird sich herausstellen, dass die Berechnung einer Grenzverteilung einfach ist, aber die Fragen nach Existenz und Eindeutigkeit schwerer sind. Zur Beantwortung dieser Fragen müssen wir erst einige neue Begriffe einführen.

---

<sup>8</sup>Dies ist nicht ganz genau dasselbe wie die Anzahl Besuche in  $j$ . Ein Start in  $j$  zählt als Besuch in  $j$ , aber nicht als Sprung nach  $j$ .

## 2 Markov-Ketten

**Definition** (*Asymptotische Verteilung*) Gibt es eine Zustandsverteilung  $\vec{\pi}(\infty)$ , so dass *unabhängig vom Anfangszustand* gilt, dass:

$$\pi_j(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_j(t)$$

für alle  $j \in S$ , so bezeichnet man  $\vec{\pi}(\infty)$  als *asymptotische Verteilung* oder (*eindeutige*) *Grenzverteilung*.

In der Literatur werden Markov-Ketten mit eindeutiger Grenzverteilung auch als *ergodisch* bezeichnet.

**Definition** (*Stationäre Verteilung*) eine Zustandsverteilung  $\vec{\pi}^*$  heisst *stationär*, wenn gilt:

$$\vec{\pi}^* = \vec{\pi}^* \cdot \mathbf{P}.$$

Für stationäre Verteilungen gilt für alle  $s \in \mathbb{N}_0$ :

$$\vec{\pi}^* \cdot \mathbf{P}^s = (\vec{\pi}^* \cdot \mathbf{P}) \cdot \mathbf{P}^{s-1} = \vec{\pi}^* \cdot \mathbf{P}^{s-1} = \dots = \vec{\pi}^* \cdot \mathbf{P}^2 = \vec{\pi}^* \cdot \mathbf{P} = \vec{\pi}^*$$

D.h., wenn die Verteilung zu einem Zeitpunkt  $t$  stationär ist, so ändert sie sich in den weiteren Schritten nicht mehr. Wählt man eine stationäre Verteilung als Startverteilung  $\vec{\pi}(0)$ , so gilt  $\vec{\pi}(t) = \vec{\pi}(0)$  für alle  $t$ .

Da sich eine asymptotische Verteilung auch zumindest für sehr grosse  $t$  nicht mehr ändern darf, müssen asymptotische Verteilungen stets stationär sein. Leider ist nicht in allen Fällen eine stationäre Verteilung auch eine asymptotische Verteilung – für eine solche fordern wir ja, dass sie für alle Startwerte (uns somit auch für *alle* Startverteilungen) erreicht wird, was nicht immer gewährleistet ist.

**Beispiel** (*Grenzverteilung existiert und ist eindeutig*) Wir betrachten wieder die Markov-Kette, die durch die Übergangsmatrix (2.3)

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0.3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bzw. den Übergangsgraphen in Abbildung 2.2 gegeben ist. Wir betrachten die zeitliche Entwicklung eines Zustands für grösser werdende Zeiten  $t$ . Wegen  $\vec{\pi}(t) = \vec{\pi}(0) \cdot \mathbf{P}^t$  genügt es daher,  $\mathbf{P}^t$  zu betrachten. Wir berechnen einige Potenzen:

```
> P
      [,1] [,2] [,3]
[1,]  0.1  0.9  0.0
[2,]  0.7  0.0  0.3
[3,]  1.0  0.0  0.0
```

## 2 Markov-Ketten

```
> P%^%4
      [,1] [,2] [,3]
[1,] 0.4699 0.3573 0.1728
[2,] 0.4699 0.4302 0.0999
[3,] 0.3970 0.5760 0.0270

> P%^%34
      [,1] [,2] [,3]
[1,] 0.4608295 0.4147465 0.124424
[2,] 0.4608295 0.4147465 0.124424
[3,] 0.4608295 0.4147465 0.124424

> P%^%35
      [,1] [,2] [,3]
[1,] 0.4608295 0.4147465 0.124424
[2,] 0.4608295 0.4147465 0.124424
[3,] 0.4608295 0.4147465 0.124424
```

Wie wir sehen, ändert sich zwischen  $t = 34$  und  $t = 35$  nichts mehr. Wir können also davon ausgehen, dass der Grenzwert nahe an  $(0.4608, 0.4147, 0.1244)$  liegt, und zwar unabhängig vom Ausgangszustand. In diesem Fall existiert also eine eindeutige Grenzverteilung.

**Beispiel** (*Stationäre Verteilung ist keine Grenzverteilung*) Betrachten wir die Markov-Kette mit der Übergangsmatrix

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der zugehörige Übergangsgraph ist in Abb. 2.7 (rechts) dargestellt.

$$\vec{\pi}^* = \left( \frac{1}{4} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \right)$$

ist eine stationäre Verteilung, denn:

```
> P <- rbind(c(0,1,0), c(0.5,0,0.5), c(0,1,0))
> P
      [,1] [,2] [,3]
[1,]  0.0    1  0.0
[2,]  0.5    0  0.5
[3,]  0.0    1  0.0

> v <- c(1/4,1/2,1/4)

> v
```

## 2 Markov-Ketten

```
[1] 0.25 0.50 0.25
```

```
> t(v)%*%P
      [,1] [,2] [,3]
[1,] 0.25 0.5 0.25
```

Wir bilden Potenzen von  $\mathbf{P}$ :

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist  $\mathbf{P}^3 = \mathbf{P}$  und damit

$$\mathbf{P}^4 = \mathbf{P}^3 \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P}^2.$$

Analog erhält man

$$\mathbf{P}^t = \begin{cases} \mathbf{P}, & t \text{ ungerade} \\ \mathbf{P}^2, & t \text{ gerade} \end{cases}$$

Allerdings existiert keine Grenzverteilung, denn  $\mathbf{P}^t$  oszilliert zwischen zwei Matrizen. Es gilt damit zwar

$$\vec{\pi}(t+2) = \vec{\pi}(t),$$

aber ein Grenzwert existiert nicht.

Die in diesem Beispiel betrachtete Markov-Kette ist periodisch mit  $d = 2$ , d.h. man kann jeden Zustand nur zu den geraden oder ungeraden Zeitpunkten erreichen (je nachdem, wo man gestartet ist).

**Beispiel** (*keine eindeutige Grenzverteilung*) Wir betrachten die Markov-Kette mit der Übergangsmatrix

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{9}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und dem Übergangsgraphen in Abb. 2.9. Wir können numerisch verifizieren, dass  $P^t$  für grosse Zeiten gegen:

## 2 Markov-Ketten

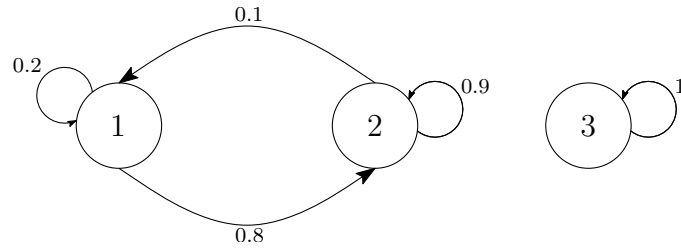


Abbildung 2.9: Übergangsgraph einer reduzierbaren Markov-Kette

$$P^\infty = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

konvergiert. Wir können dies auch analytisch zeigen, dazu verwenden wir die sogenannte Spektralzerlegung von  $P$ .

Anmerkung: Der folgende Beweis dient nur zur Illustration und kann beim ersten Lesen wegelassen werden.

Spektralzerlegung Die Übergangsmatrix ist diagonalisierbar, und es gilt:

$$\mathbf{P} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{S}^{-1},$$

wobei  $\mathbf{D}$  eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten von  $\mathbf{P}$  ist und die Spalten von  $\mathbf{S}$  die zugehörigen Eigenvektoren enthalten. Konkret ergibt sich hier:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{9}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{8} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & -\frac{8}{9} & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^t &= (\mathbf{S} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{S}^{-1})^t \\ &= \mathbf{S} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{S}^{-1} \dots \mathbf{S} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{S}^{-1} \\ &= \mathbf{S} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{I} \dots \mathbf{D} \cdot \mathbf{S}^{-1} \\ &= \mathbf{S} \cdot \mathbf{D}^t \cdot \mathbf{S}^{-1} \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}^t &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{S} \cdot \mathbf{D}^t \cdot \mathbf{S}^{-1} \\ &= \mathbf{S} \cdot \underbrace{\left( \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{D}^t \right)}_{=: \mathbf{D}^\infty} \cdot \mathbf{S}^{-1}. \end{aligned}$$

## 2 Markov-Ketten

Wir erhalten

$$\mathbf{D}^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{D}^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} (\frac{1}{10})^t & 0 & 0 \\ 0 & 1^t & 0 \\ 0 & 0 & 1^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^\infty &:= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}^t \\ &= \mathbf{S} \cdot \mathbf{D}^\infty \cdot \mathbf{S}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{8} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & -\frac{8}{9} & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für eine beliebigen Startverteilung  $\vec{\pi}(0) = (a_1, a_2, a_3)$  gilt nun:

$$\vec{\pi}(0) \cdot \mathbf{P}^\infty = \begin{pmatrix} \frac{1}{9}(a_1 + a_2) & \frac{8}{9}(a_1 + a_2) & a_3 \end{pmatrix}$$

Es existiert also eine Grenzverteilung, die allerdings von der Anfangsverteilung  $\vec{\pi}(0)$  abhängt und daher nicht eindeutig ist. Betrachten wir den Übergangsgraphen (Abb. 2.9), so ist auch direkt ersichtlich, dass die Markov-Kette reduzibel ist und die Zustände in die zwei Klassen  $\{1, 2\}$  und  $\{3\}$  zerfallen. Starten wir sicher in 3 ( $\vec{\pi}(0) = (0, 0, 1)$ ), so erhalten wir als Grenzverteilung

$$\vec{\pi}(0) \cdot \mathbf{P}^\infty = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

starten wir sicher in einem der beiden Zustände 1 und 2 ( $\vec{\pi}(0) = (a_1, a_2, 0)$  mit  $a_1 + a_2 = 1$ ), so erhalten wir als Grenzverteilung

$$\vec{\pi}(0) \cdot \mathbf{P}^\infty = \begin{pmatrix} \frac{1}{9}(a_1 + a_2) & \frac{8}{9}(a_1 + a_2) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & 0 \end{pmatrix}.$$

Bei einer Anfangsverteilung, die einen Start in beiden Klassen zulässt, erhalten wir eine Mischung dieser beiden Grenzverteilungen. Für eine reduzible Markov-Kette kann es also mehrere Grenzverteilungen geben. Es gilt aber

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{9}(a_1 + a_2) & \frac{8}{9}(a_1 + a_2) & a_3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9}(a_1 + a_2) & \frac{8}{9}(a_1 + a_2) & a_3 \end{pmatrix},$$

d.h. alle möglichen Grenzverteilungen sind auch stationäre Verteilungen.

Es gilt: Jede Markov-Kette hat mindestens eine stationäre Verteilung. Diese ist dann ein potenzieller Kandidat für die asymptotische Verteilung. Die Frage ist nur noch, ob die Zustandsverteilung  $\vec{\pi}(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  auch tatsächlich gegen diese Verteilung konvergiert. Wir



## 2 Markov-Ketten

haben in zwei der drei Beispiele gesehen, dass dies nicht der Fall sein muss. Die Markov-Ketten ohne eindeutige Grenzverteilung waren dabei periodisch (2. Beispiel) bzw. reduzibel (3. Beispiel)<sup>9</sup>, während die Markov-Kette aus Beispiel 1 aperiodisch und irreduzibel ist, wie man sich leicht überlegt.

Der folgende Satz ist die zentrale Aussage über die Existenz einer asymptotischen Verteilung:

**Satz 2.7.1.** (*Eindeutige Grenzverteilung*) Sei  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$  eine aperiodische, irreduzible Markov-Kette mit endlichem Zustandsraum. Dann gilt:

1.  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$  besitzt eine eindeutige stationäre Verteilung,
2.  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$  besitzt eine eindeutige Grenzverteilung und diese ist gleich der stationären Verteilung.

Jede aperiodische und irreduzible Markov-Kette konvergiert also gegen ihre (eindeutige) stationäre Verteilung, und zwar unabhängig von ihrer Startverteilung.

## 2.8 Stationäre Verteilungen und Eigenwerte

Der Satz im letzten Abschnitt besagt, dass jede aperiodische irreduzible Markov-Kette eine eindeutige Grenzverteilung besitzt, und dass diese mit der – in diesem Falle ebenfalls eindeutigen – stationären Verteilung übereinstimmt. In diesem Abschnitt wollen wir einige Methoden aus der linearen Algebra benutzen, um stationäre Verteilungen zu berechnen. Stationäre Verteilungen sind – wie oben eingeführt – definiert als Zustandsverteilungen  $\vec{\pi}^*$  mit der Eigenschaft

$$\vec{\pi}^* = \vec{\pi}^* \cdot \mathbf{P}$$

oder

$$1 \cdot \vec{\pi}^* = \vec{\pi}^* \cdot \mathbf{P}, \tag{2.6}$$

d.h. eine stationäre Verteilung  $\vec{\pi}^*$  ist ein *linker Eigenvektor* zum *Eigenwert* 1. In der linearen Algebra werden üblicherweise *rechte* Eigenvektoren betrachtet. Transponieren wir (2.6), so erhalten wir

$$1 \cdot (\vec{\pi}^*)' = \mathbf{P}'(\vec{\pi}^*)',$$

d.h. ein linker Eigenvektor von  $\mathbf{P}$  ist ein (transponierter) rechter Eigenvektor von  $\mathbf{P}'$  zum selben Eigenwert. Suchen wir eine stationäre Verteilung, so müssen wir also einen rechten Eigenvektor zum Eigenwert 1 von  $\mathbf{P}'$  berechnen. Allerdings ist ein solcher Eigenvektor  $(\vec{\pi}^*)'$  nur dann eine stationäre Verteilung, wenn

---

<sup>9</sup> Für Markov-Prozesse mit kontinuierlichem oder abzählbar unendlichem Zustandsraum gibt es weitere Situationen, in denen keine oder keine eindeutige Grenzverteilung existiert. Dies wird hier aber nicht weiter betrachtet.

## 2 Markov-Ketten

1.  $\sum_{i=1}^N \pi_i^* = 1$  und
2.  $\pi_i^* \geq 0$  für alle  $i = 1, \dots, N$ .

Haben wir einen Eigenvektor zum Eigenwert 1 mit nur nichtnegativen Komponenten, so können wir stets die erste Bedingung erzwingen, in dem wir durch die Summe der Komponenten teilen, denn skalare Vielfache von Eigenvektoren sind wieder Eigenvektoren. Aus dem selben Grund können wir auch aus einem Eigenvektor mit nichtpositiven Komponenten einen mit nichtnegativen Komponenten machen, indem wir ihn mit  $-1$  multiplizieren. Eigenvektoren mit wechselnden Vorzeichen lassen sich nicht zu einer Zustandsverteilung machen, da man nicht erreichen kann, dass alle Komponenten nichtnegativ werden!

Die Suche nach einer stationären Verteilung reduziert sich also auf die Berechnung einer linken Eigenvektors von  $\mathbf{P}$  bzw. rechten Eigenvektors von  $\mathbf{P}'$  zum Eigenwert 1, der nur Komponenten mit dem selben Vorzeichen hat.

Dass jede Markov-Kette eine stationäre Verteilung besitzt, kann man wie folgt einsehen: Der Spaltenvektor  $\vec{1}'$ , bei dem alle Komponenten 1 sind, ist ein rechter Eigenvektor von  $\mathbf{P}$  zum Eigenwert 1, denn

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P} \cdot \vec{1}' &= \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} p_{11} + p_{12} + \cdots + p_{1N} \\ p_{21} + p_{22} + \cdots + p_{2N} \\ \vdots \\ p_{N1} + p_{N2} + \cdots + p_{NN} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= 1 \cdot \vec{1}'.
 \end{aligned}$$

Jeder Eigenwert zu einem rechten Eigenvektor von  $\mathbf{P}$  ist auch Eigenwert zu einem linken Eigenvektor, also muss  $\vec{\pi}^*$  existieren, mit

$$1 \cdot \vec{\pi}^* = \vec{\pi}^* \cdot \mathbf{P}.$$

Damit ist nicht ausgeschlossen, dass 1 ein mehrfacher Eigenwert ist und mehrere linear unabhängige Eigenvektoren existieren. Man kann allerdings zeigen, dass mindestens ein Eigenvektor  $\vec{\pi}^*$  existiert, dessen Komponenten keine gemischten Vorzeichen haben. Man kann ausserdem zeigen, dass  $\mathbf{P}$  keine Eigenwerte mit Betrag grösser als 1 haben kann.

Übergangsmatrizen von irreduziblen, aperiodischen Markov-Ketten mit endlichem Zustandsraum besitzen (bis auf skalare Vielfache) nur einen Eigenvektor zum Eigenwert 1,

## 2 Markov-Ketten

und (nach Normierung auf die Komponentensumme 1) erhalten wir aus diesem die (einzige) stationäre Verteilung, die nach dem Satz im letzten Abschnitt dann auch die eindeutige Grenzverteilung ist. Erhalten wir beim Berechnen der Eigenwerte von  $\mathbf{P}$  einen mehrfachen Eigenwert 1, so kann die Markov-Kette nicht mehr (gleichzeitig) irreduzibel und aperiodisch sein.

Irreduzibilität ist allerdings nicht notwendig für die Existenz einer eindeutigen Grenzverteilung. Wir betrachten die Übergangsmatrix

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte dieser Matrix sind 0 und 1, 1 ist also einfacher Eigenwert.  $(0, 1)$  ist linker Eigenvektor zum Eigenwert 1 und ausserdem die (einzige) stationäre Verteilung. Da 1 ein transienter und 2 ein absorbierender Zustand ist, ist  $(0, 1)$  auch unabhängig von der Ausgangsverteilung die Grenzverteilung. Da 2 absorbierend ist, ist die Markov-Kette allerdings nicht irreduzibel. Reduzible Markov-Ketten können also durchaus eine eindeutige Grenzverteilung haben<sup>10</sup>.

**Beispiel** Wir betrachten die Markov-Kette mit der Übergangsmatrix  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.9 & 0.1 \end{pmatrix}$ .

Da alle Einträge von  $\mathbf{P}$  strikt positiv sind, ist die Markov-Kette aperiodisch und irreduzibel, besitzt also genau eine stationäre Verteilung, die gleichzeitig die eindeutige Grenzverteilung ist. Wir berechnen die Eigenwerte und zugehörigen (rechten) Eigenvektoren der Matrix  $\mathbf{P}'$  in R mit der Funktion `eigen()`:

```
> P <- rbind(c(0.4, 0.6), c(0.9, 0.1))
> eigen(t(P))
$values
[1] 1.0 -0.5

$vectors
      [,1]      [,2]
[1,] 0.8320503 -0.7071068
[2,] 0.5547002  0.7071068
```

Die Komponenten des Eigenvektors zum Eigenwert 1 sind beide positiv, addieren sich aber nicht zu 1. Dies können wir beheben, indem wir durch ihre Summe teilen:

```
> v <- eigen(t(P))$vectors[,1]
> v <- v/sum(v)
> v
[1] 0.6 0.4
```

---

<sup>10</sup>Irreduzibilität bedeutet ja, dass die Zustände alle wechselseitig erreichbar sind, bzw. dass die Zustände alle in der selben Klasse liegen. In unserem Beispiel zerfallen die Zustände zwar in die Klassen  $\{1\}$  und  $\{2\}$ , aber nur die Klasse  $\{2\}$  enthält rekurrente Zustände (bzw. einen rekurrenten Zustand). Wichtig für die Existenz einer eindeutigen Grenzverteilung ist, dass nur eine Klasse mit rekurrenten Zuständen existiert, was im Falle nur einer Klasse immer gegeben ist

## 2 Markov-Ketten

Wir erhalten also  $\begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}$  als rechten Eigenvektor von  $\mathbf{P}'$  zum Eigenwert 1, was wir noch transponieren müssen, um einen linken Eigenvektor von  $\mathbf{P}$  zu erhalten. Die stationäre Verteilung bzw. eindeutige Grenzverteilung ist also

$$\vec{\pi}^* = (0.6, 0.4).$$

Bei einer numerischen Eigenwertanalyse muss beachtet werden, dass aufgrund der endlichen Rechengenauigkeit auch ein Eigenwert auftauchen kann, der nicht exakt 1 ist, sondern vielleicht 1.000001. Die Suche nach einem Eigenwert 1 durch Programmzeilen wie

```
eigenwert == 1
```

sollte also vermieden werden. Da alle Eigenwerte kleiner gleich eins sind, reicht es in der Regel, den grössten Eigenwert zu nehmen. In R gibt es auch die Funktion `all.equal()`, die Vergleiche innerhalb einer Toleranz durchführen kann.

Wir nehmen für den Rest des Abschnittes an, dass  $\mathbf{P}'$  diagonalisierbar ist<sup>11</sup>. Dann bilden die zu den Eigenwerten  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ <sup>12</sup> gehörenden (rechten) Eigenvektoren  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N$  eine Basis des  $\mathbb{R}^N$ , und wir können insbesondere jede Startverteilung  $\vec{\pi}(0)$  darstellen als

$$\vec{\pi}(0) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \vec{v}_i. \quad (2.7)$$

Die  $\alpha_i$  erhalten wir als

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} = \mathbf{S}^{-1} (\vec{\pi}(0))',$$

wobei  $\mathbf{S}$  die Matrix ist, die spaltenweise die Eigenvektoren von  $\mathbf{P}'$  enthält. Im Falle mehrfach auftretender Eigenwerte muss diese Darstellung nicht eindeutig sein. Da ein rechter Eigenvektor  $v_i'$  ein linker Eigenvektor zu  $\mathbf{P}$  ist, gilt

$$\vec{v}_i \cdot \mathbf{P} = \lambda_i \cdot \vec{v}_i$$

und damit auch

$$\vec{\pi}(0) \cdot \mathbf{P} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot \vec{v}_i \cdot \mathbf{P} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot \lambda_i \cdot \vec{v}_i$$

<sup>11</sup>Dies ist durchaus nicht immer der Fall – die geometrische und algebraische Vielfachheit von Eigenwerten muss nicht die selbe sein, in diesem Fall gibt es dann keine Diagonalform der Matrix sondern nur eine Jordan-Form. Ein Beispiel für eine nicht diagonalisierbare stochastische Matrix ist

$$P = \begin{pmatrix} 5/12 & 1/4 & 1/3 \\ 5/12 & 1/4 & 1/3 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

<sup>12</sup> $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{P}'$  besitzen die selben Eigenwerte, aber im Allgemeinen nicht die selben Eigenvektoren.

## 2 Markov-Ketten

bzw. für  $t \in \mathbb{N}$

$$\vec{\pi}(t) = \vec{\pi}(0) \cdot \mathbf{P} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot \vec{v}_i \cdot \mathbf{P}^t = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot \lambda_i^t \cdot \vec{v}_i. \quad (2.8)$$

Wir erhalten also die gesamte zeitliche Entwicklung der Zustandsverteilung  $\vec{\pi}(t)$  aus der Eigenwertdarstellung (2.7) von  $\vec{\pi}(0)$ , wobei wir noch mit Potenzen der Eigenwerte multiplizieren müssen. Wie bereits oben erwähnt, kann eine stochastische Matrix keine Eigenwerte mit Betrag grösser als 1 besitzen, während 1 mindestens einfacher Eigenwert ist. Ist die zugehörige Markov-Kette aperiodisch und irreduzibel, so ist 1 nur einfacher Eigenwert und aus dem zugehörigen Eigenvektor lässt sich die eindeutige stationäre Verteilung gewinnen. Die Terme, die zu den Eigenwerten mit Betrag kleiner als 1 gehören, verschwinden auf der rechten Seite von (2.8) für grosse  $t$ . Ist 1 also einfacher Eigenwert, so bleibt auf der rechten Seite für grosse  $t$  nur noch die stationäre Verteilung stehen. Ist die Markov-Kette nicht irreduzibel, so kann 1 mehrfacher Eigenwert sein und die Darstellung (2.7) ist nicht mehr eindeutig. Der Grenzwert von (2.8) muss dann auch nicht mehr existieren, wie wir bereits gesehen haben bzw. man kann für verschiedene Startverteilungen unterschiedliche Grenzwerte erhalten. Eigenwerte  $\lambda_i \neq 1$  mit  $|\lambda_i| = 1$  (die Eigenwerte können auch komplex sein!) können bei periodischen Ketten auftreten, und führen zu Oszillationen auf der rechten Seite von (2.8). In diesem Fall existiert gar keine Grenzverteilung, wenn für die Startverteilung die mindestens ein zu so einem  $\lambda_i$  gehörendes  $\alpha_i$  nicht 0 ist.

## 2.9 Asymptotische Besetzung

Bisher haben wir uns mit der asymptotischen Entwicklung von

$$\vec{\pi}(t)$$

für  $t \rightarrow \infty$  beschäftigt, und haben gesehen, dass zumindest für aperiodische und irreduzible Markov-Ketten ein Grenzwert existiert, der auch nicht mehr von  $\vec{\pi}(0)$  abhängt. Für grosse  $t$  sollte bei irreduziblen und aperiodischen Markov-Ketten  $\vec{\pi}(t)$  ja gegen die eindeutige Grenzverteilung  $\vec{\pi}(\infty)$  konvergieren, d.h. wenn  $t$  gross genug ist, sollte sich  $\vec{\pi}(t)$  kaum noch ändern. Es ist wichtig, zu verstehen, dass  $\vec{\pi}(t)$  eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, d.h. wir können uns vorstellen, dass wir den gesamten Prozess bis zum einem (weit in der Zukunft liegenden) Zeitpunkt  $t$  sehr häufig simulieren ( $n$  mal, zum Beispiel  $n = 10000$ ) und für jede Realisierung feststellen, in welchem Zustand wir uns zum Zeitpunkt  $t$  befinden. Wir erhalten damit eine Stichprobe vom Umfang  $n$  der Zustände zum Zeitpunkt  $t$ . Ist  $n$  gross, sollten die relativen Häufigkeiten ungefähr den durch  $\vec{\pi}(t)$  angegebenen Wahrscheinlichkeiten entsprechen.  $\vec{\pi}(t)$  gibt also Wahrscheinlichkeiten für verschiedene Zustände bei einem *Querschnitt* an, d.h. bei der Beobachtung vieler Realisationen zum selben Zeitpunkt  $t$ .

Etwas anderes ist eine Beobachtung im *Längsschnitt*, also bei Beobachtung vieler Zeitpunkte  $t$  für eine Realisation. Die Zufallsvariable

$$Z_j(T) = \#\{t \in \{0, 1, \dots, T\} : X_t = j\}$$

## 2 Markov-Ketten

zählt die Anzahl der Zeitpunkte von 0 bis  $T$ , zu denen die Markov-Kette im Zustand  $j$  war.  $Z_j(T)$  ist eine Zufallsvariable, denn zwei Realisationen des Prozesses werden im Allgemeinen bis zum Zeitpunkt  $T$  unterschiedlich viele Besuche in den einzelnen Zuständen aufweisen. Wir definieren weiter die *asymptotische Besetzung*

$$\hat{\pi}_j = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{Z_j(T)}{T+1},$$

also den Anteil der Besuche in Zustand  $j$  für die gesamte Realisation. Wir fassen nun die  $\hat{\pi}_j$  zu einem Vektor

$$\vec{\hat{\pi}} = (\hat{\pi}_1, \dots, \hat{\pi}_N)$$

zusammen.

Für aperiodische und irreduzible Markov-Ketten kann man nun zeigen, dass mit Wahrscheinlichkeit 1

$$\vec{\hat{\pi}} = \vec{\pi}(\infty)$$

gilt, d.h. für fast jede Realisation des Prozesses ist die asymptotische Besetzung gleich der eindeutigen Grenzverteilung. Diese Aussage ist auch als *Ergodensatz für Markov-Ketten* bekannt, und man nennt manchmal auch aperiodische und irreduzible Markov-Ketten *ergodisch*, da sie diese Eigenschaft besitzen. Bei solchen Ketten gilt also, dass die Zustandshäufigkeiten *einer* Trajektorie (und zwar fast jeder) den Wahrscheinlichkeiten der Grenzverteilung entsprechen. Wir können also eine Betrachtung im *Querschnitt* (Beobachtung oder Simulation vieler Trajektorien und Auswertung an einem festen, weit in der Zukunft liegenden, Zeitpunkt  $t$ ) durch eine Betrachtung im *Längsschnitt*, also Beobachtung einer einzigen (allerdings genügend langen) Trajektorie ersetzen.

Dies lässt sich noch verallgemeinern: Bildet man den Mittelwert einer Funktion  $g$ , die von den Zuständen abhängt, so kann man entweder eine einzelne Trajektorie verfolgen und die relevante Grösse über einen sehr langen Zeithorizont mitteln (Zeitmittel) oder aber die Grösse zu einem festen Zeitpunkt (nachdem die Kette sich eingeschwungen hat) als Mittelwert über sehr viele Trajektorien bestimmen (Scharmittel). Für aperiodische und irreduzible Ketten gilt mit Wahrscheinlichkeit 1

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T+1} \sum_{t=0}^T g(X_t) = \sum_{i=1}^N g(i) \pi_i(\infty),$$

oder kurz der Lehrsatz

$$\text{“Zeitmittel = Scharmittel”},$$

der als Ergodenhypothese für Fragestellungen der statistischen Physik von Boltzmann 1887 formuliert wurde.

## 2.10 Asymptotische Kostenmodelle

Wir haben bisher Kostenmodelle nur für einen endlichen Zeithorizont betrachtet. In diesem Abschnitt werden Kostenmodelle für Prozesse mit unendlicher Laufzeit behandelt. Da man bei unendlich langer Laufzeit in der Regel auch einige Zustände unendlich oft besucht, macht es in diesem Fall keinen Sinn, nach den Gesamtkosten zu fragen, die in der Regel unendlich sein werden. Bei unendlicher Laufzeit kann man sich aber durchaus für die *durchschnittlichen Kosten* pro Zeitschritt interessieren. Am Ende des Abschnittes werden wir noch eine alternative Möglichkeit kennenlernen, bei der später anfallende Kosten geringer gewichtet werden als früher anfallende.

Zur Betrachtung der durchschnittlichen Kosten setzen wir voraus, dass eine eindeutige Besetzungsverteilung  $\vec{\pi}$  existiert, die unabhängig vom Anfangszustand ist. Dies ist bei aperiodischen und irreduziblen Markov-Ketten immer gegeben. Bei diesen entsprechen die Anteile der Zustände in einer genügend langen Trajektorie genau den durch die (eindeutige) stationäre Verteilung vorgegebenen Wahrscheinlichkeiten.

Wir betrachten zunächst wieder *zustandabhängige Kosten*, die durch einen Vektor

$$\vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_N)$$

gegeben seien, wobei  $c_j$  jeweils die Kosten, die bei einem Aufenthalt in  $j \in S$  anfallen, angebe. Die konkret für den  $t$ -ten Zeitschritt anfallenden Kosten sollen wieder mit  $K_t$  bezeichnet werden. Wir interessieren uns nun für die durchschnittlich pro Zeitschritt anfallenden Kosten

$$\tilde{K} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T+1} \sum_{t=0}^T K_t.$$

$\tilde{K}$  ist – wie die  $K_t$  – eine Zufallsvariable. Definieren wir die Funktion  $g$  als

$$g(i) = c_i,$$

so gilt

$$K_t = g(X_t),$$

d.h.  $g$  bildet jeden Zustand auf die anfallenden Kosten ab. Nach dem Ergodensatz gilt nun mit Wahrscheinlichkeit 1:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T+1} \sum_{t=0}^T g(X_t) = \sum_{i=1}^N g(i) \pi_i(\infty),$$

## 2 Markov-Ketten

also

$$\begin{aligned}
 \tilde{K} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T+1} \sum_{t=0}^T K_t \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T+1} \sum_{t=0}^T g(X_t) \\
 &= \sum_{i=1}^N g(i) \pi_i(\infty) \\
 &= \vec{\pi}(\infty) \cdot \vec{c}'.
 \end{aligned}$$

D.h., für (fast) jede Trajektorie gilt, dass die auf lange Sicht pro Schritt auflaufenden Kosten sich ergeben durch

$$\vec{\pi}(\infty) \cdot \vec{c}',$$

also als Produkt der stationären Verteilung mit dem Kostenvektor.

Zur Berechnung der erwarteten Kosten pro Zeitschritt bei übergangsabhängigen Kosten gehen wir analog vor wie in Abschnitt 2.6.

Die *Übergangskostenmatrix*  $\mathbf{U}$  ist wieder definiert durch die Matrix aller möglichen Übergangskosten:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1N} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{N1} & u_{N2} & \dots & u_{NN} \end{pmatrix}.$$

Wir können wieder die übergangsabhängigen Kosten  $K_{t,t+1}$  als zustandsabhängige Kosten auffassen, wobei sich die Kosten im Zustand  $i$  ergeben als die mit den Übergangswahrscheinlichkeiten  $p_{ij}$  gewichteten Kosten  $u_{ij}$ . Wir setzen also

$$c_i = \mathbb{E}(K_{t,t+1} | X_t = i) = \sum_{j=1}^N u_{ij} p_{ij}$$

Dabei machen wir allerdings einen Übergang zu Erwartungswerten, d.h. die Summe der so definierten Zustandskosten ist für eine konkrete Trajektorie nicht mehr unbedingt gleich den tatsächlich aufgelaufenen Übergangskosten. Für den Erwartungswert der Übergangskosten erhalten wir

$$\mathbb{E}(K_{t,t+1}) = \sum_{i=1}^N \pi_i(t) \mathbb{E}(K_{t,t+1} | X_t = i) = \sum_{i=1}^N \pi_i(t) \sum_{j=1}^N u_{ij} p_{ij} = \vec{\pi}(t) \cdot \vec{c}'.$$



## 2 Markov-Ketten

Für die durchschnittlichen Kosten

$$\tilde{K} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T+1} \sum_{i=0}^T K_{t,t+1}$$

erhalten wir dann im Erwartungswert wegen  $\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{\pi}(t) = \vec{\pi}(\infty)$ <sup>13</sup>

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\tilde{K}) &= \mathbb{E}\left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T+1} \sum_{i=0}^T K_{t,t+1}\right) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T+1} \sum_{i=0}^T \mathbb{E}(K_{t,t+1}) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T+1} \sum_{i=0}^T \vec{\pi}(t) \cdot \vec{c}' \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T+1} \left( \sum_{i=0}^T \vec{\pi}(t) \right) \cdot \vec{c}' \\ &= \vec{\pi}(\infty) \cdot \vec{c}'. \end{aligned}$$

Die (erwarteten) Kosten pro Zeitschritt erhalten wir also wieder als Skalarprodukt aus der stationären Verteilung und dem Vektor der Zustandskosten, wobei die Kosten eines Zustands den erwarteten Übergangskosten von diesem Zustand aus entsprechen.

Statt Durchschnittskosten bei sehr langer Laufzeit zu betrachten, werden manchmal *diskontierte Gesamtkosten* betrachtet. Dazu müssen wir *nicht* voraussetzen, dass die Markov-Kette aperiodisch und irreduzibel ist! Einerseits wird man in vielen Fällen bei unendlich langer Laufzeit Zustände in einer Markov-Kette unendlich oft besuchen, wobei dann natürlich auch unendlich hohe Gesamtkosten auflaufen. Andererseits sind in vielen Anwendungen Kosten oder Gewinne in naher Zukunft relevanter als solche in ferner Zukunft. Eine Zahlung von einem Kunden über 1000 CHF jetzt ist mehr wert, als den selben Betrag in einem Jahr zu erhalten. Man könnte ja das Geld auf ein Konto legen, und Zinsen kassieren oder es produktiv reinvestieren und damit später seinen Gewinn steigern. Auch wenn das Geld konsumptiv verausgabt werden soll, wird man (zumindest solange die Inflationsrate positiv ist) in einem Jahr weniger für das Geld kaufen können als heute. Umgekehrt sind sofort anfallende Kosten schlechter als solche, die in einem Jahr fällig werden, auch hier kann man das Geld ja z.B. solange anderweitig anlegen und Zinsen kassieren. Es gibt also in vielen Anwendungen gute Gründe, spätere Zahlungen (Kosten oder Gewinne) herunterzugewichten (oder zu *diskontieren*). Im einfachsten Fall gewichtet man pro Zeitschritt jede Zahlung um einen konstanten Faktor  $0 < \alpha < 1$  (der z.B. Inflation, entgangene Zinsen oder ähnliches abbilden soll) herunter. Soll zum Beispiel nur die Inflation abgebildet werden und beträgt diese 2% p.a., so ist eine Auszahlung von 1000 CHF in einem Jahr gegenüber dem

---

<sup>13</sup>Aus  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a$  folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = a$  (sog. *Cesàro-Summe*)

## 2 Markov-Ketten

Erhalt der selben Summe heute nur

$$\frac{1}{1 + 0.02} \cdot 1000 \text{ CHF} \approx 0.980392 \cdot 1000 \text{ CHF} \approx 980.39 \text{ CHF}$$

wert, da man in einem Jahr für 1000 CHF nur so viel kaufen kann, wie heute für 980.39 CHF. In zwei Jahren sind die 1000 CHF nur noch soviel Wert wie heute

$$\left(\frac{1}{1 + 0.02}\right)^2 \cdot 1000 \text{ CHF} \approx 0.961169 \cdot 1000 \text{ CHF} \approx 961.16 \text{ CHF}$$

und nach  $t$  Jahren

$$\left(\frac{1}{1 + 0.02}\right)^t \cdot 1000 \text{ CHF} .$$

In diesem Fall ist also  $\alpha = \frac{1}{1.02} \approx 0.980392$ .

Betrachten wir nun wieder zustandsabhängige Kosten<sup>14</sup> (oder Gewinne), die durch einen Vektor

$$\vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_N)$$

gegeben sind. Wir interessieren uns für die mit dem Faktor  $\alpha \in (0, 1)$  *diskontierten Gesamtkosten*  $K_\alpha$ , also für

$$K_\alpha = \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t K_t.$$

Betrachten wir nun wieder den Erwartungswert (mit Startverteilung  $\vec{\pi}(0)$ ), so erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(K_\alpha) &= \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t \mathbb{E}(K_t) \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t \cdot \vec{\pi}(0) \cdot \mathbf{P}^t \cdot \vec{c}' \\ &= \vec{\pi}(0) \cdot \left( \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t \cdot \mathbf{P}^t \right) \cdot \vec{c}' \end{aligned}$$

Die  $i$ -te Komponente des Vektors  $\vec{v}_\alpha$  mit

$$\vec{v}_\alpha' = \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t \cdot \mathbf{P}^t \cdot \vec{c}' \tag{2.9}$$

---

<sup>14</sup>Man kann übergangsabhängige Kosten ähnlich behandeln, aber wir verzichten darauf.

## 2 Markov-Ketten

gibt also die erwarteten diskontierten Gesamtkosten bei Start in  $i$  an. Wie erhält man nun  $\vec{v}_\alpha$ ? Aus (2.9) erhält man direkt:

$$\begin{aligned}
 \vec{v}_\alpha' &= \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t \cdot \mathbf{P}^t \cdot \vec{c}' \\
 &= \alpha^0 \cdot \mathbf{P}^0 \cdot \vec{c}' + \sum_{t=1}^{\infty} \alpha^t \cdot \mathbf{P}^t \cdot \vec{c}' \\
 &= 1 \cdot \mathbf{I} \cdot \vec{c}' + \sum_{t=1}^{\infty} \alpha^t \cdot \mathbf{P}^t \cdot \vec{c}' \\
 &= \vec{c}' + \sum_{t=1}^{\infty} \alpha^t \cdot \mathbf{P}^t \cdot \vec{c}' \\
 &= \vec{c}' + \alpha \cdot \mathbf{P} \cdot \sum_{t=1}^{\infty} \alpha^{t-1} \cdot \mathbf{P}^{t-1} \cdot \vec{c}' \\
 &= \vec{c}' + \alpha \cdot \mathbf{P} \cdot \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t \cdot \mathbf{P}^t \cdot \vec{c}' \\
 &= \vec{c}' + \alpha \cdot \mathbf{P} \cdot \vec{v}_\alpha'
 \end{aligned}$$

und damit

$$\vec{v}_\alpha' - \alpha \cdot \mathbf{P} \cdot \vec{v}_\alpha' = \vec{c}'$$

bzw.

$$(\mathbf{I} - \alpha \cdot \mathbf{P}) \vec{v}_\alpha' = \vec{c}'$$

bzw.<sup>15</sup>

$$\vec{v}_\alpha' = (\mathbf{I} - \alpha \cdot \mathbf{P})^{-1} \vec{c}'.$$

Wir erhalten also für eine beliebige Startverteilung  $\vec{\pi}(0)$  die erwarteten diskontierten Gesamtkosten als

$$\mathbb{E}(K_\alpha) = \vec{\pi}(0) \cdot \vec{v}_\alpha' = \vec{\pi}(0) \cdot (\mathbf{I} - \alpha \cdot \mathbf{P})^{-1} \vec{c}'. \quad (2.10)$$

**Beispiel** (*Customer Lifetime Value*) Im Marketing ist das sog. *Customer Lifetime Value* (kurz: *CLV*) eine wichtige Kenngrösse, die messen soll, wie viel Umsatz oder Gewinn ein Kunde in der Zukunft noch beitragen wird. Es gibt zahlreiche Varianten des CLV, wir werden nur eine sehr einfache betrachten. In dem Modell geht man davon aus, dass ein Kunde

---

<sup>15</sup>Man kann zeigen, dass für jede stochastische Matrix  $\mathbf{P}$  und jedes  $\alpha \in (0, 1)$  die Matrix  $(\mathbf{I} - \alpha \cdot \mathbf{P})$  invertierbar ist

## 2 Markov-Ketten

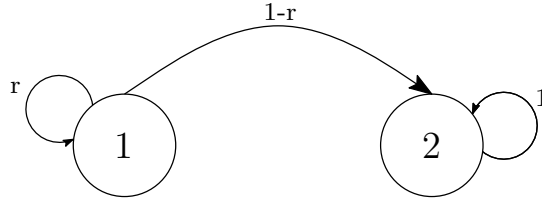


Abbildung 2.10: Übergangsgraph für das CLV-Modell

in der nächsten Periode mit einer festen Wahrscheinlichkeit  $r \in (0, 1)$  immer noch Kunde ist und mit Wahrscheinlichkeit  $1 - r$  kündigt.  $r$  wird auch als *retention rate* bezeichnet. Ein Kunde, der einmal gekündigt hat, kann nicht wieder zurückgewonnen werden. Das Verhalten des Kunden kann also durch eine Markov-Kette mit Zustandsraum  $S = \{1, 2\}$  modelliert werden, wobei 1 bedeutet, dass die Person noch Kunde ist und 2, dass sie es nicht mehr ist. Die Übergangsmatrix ist dann

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} r & 1 - r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und der Übergangsgraph ist in Abb. (2.10) dargestellt.

Wir gehen weiter davon aus, dass wir in jeder Periode von diesem Kunden einen festen Betrag  $C$  erhalten (Umsatz oder Gewinn). Zukünftige Gewinne werden mit einem (ebenfalls konstanten) Faktor  $\alpha \in (0, 1)$  diskontiert; häufig hat  $\alpha$  die Form

$$\alpha = \frac{1}{1 + z},$$

wobei  $z$  die Infaltionsrate, die bei Anlage des Geldes am Kapitalmarkt zu erreichenden Zinsen o.ä. angibt. Während  $\alpha$  für alle Kunden gleich gewählt wird, können sich  $C$  und  $r$  für einzelne Kunden individuell oder zumindest für unterschiedliche Kundensegmente unterscheiden.

Das CLV eines Kunden ist nun der erwartete diskontierte Gewinn, also (unter Verwendung von (2.10)):

$$\begin{aligned} \text{CLV} &= \vec{\pi}(0) \cdot \left( \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t \cdot \mathbf{P}^t \right) \cdot \vec{c}' \\ &= \vec{\pi}(0) \cdot \vec{v}_{\alpha}' \\ &= \vec{\pi}(0) \cdot (\mathbf{I} - \alpha \cdot \mathbf{P})^{-1} \vec{c}'. \end{aligned}$$

Da die Person zu Beginn ( $t = 0$ ) sicher Kunde ist, ist die Startverteilung

$$\vec{\pi}(0) = (1, 0),$$

## 2 Markov-Ketten

und da die Gewinne nur anfallen, solange die Person Kunde ist, ist

$$c = (C, 0).$$

Weiter ist

$$(\mathbf{I} - \alpha \mathbf{P}) = \begin{pmatrix} 1 - \alpha r & -\alpha(1 - r) \\ 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix}$$

und damit<sup>16</sup>

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} - \alpha \mathbf{P})^{-1} &= \frac{1}{(1 - \alpha r)(1 - \alpha)} \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha(1 - r) \\ 0 & 1 - \alpha r \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{1 - \alpha r} & \frac{\alpha(1 - r)}{(1 - \alpha r)(1 - \alpha)} \\ 0 & \frac{1}{1 - \alpha} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir erhalten dann:

$$\begin{aligned} \text{CLV} &= \vec{\pi}(0) \cdot (\mathbf{I} - \alpha \cdot \mathbf{P})^{-1} \vec{c}' \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{1 - \alpha r} & \frac{\alpha(1 - r)}{(1 - \alpha r)(1 - \alpha)} \\ 0 & \frac{1}{1 - \alpha} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= C \cdot \frac{1}{1 - \alpha r} \end{aligned}$$

Man sieht direkt, dass das CLV gross wird, wenn  $(1 - \alpha r)$  klein ist, d.h. wenn  $\alpha$  nahe 1 liegt (zukünftige Zahlungen werden nicht stark heruntengewichtet) und  $r$  möglichst gross ist (d.h. der Kunde bleibt mit hoher Wahrscheinlichkeit Kunde). Das CLV ist sogar noch dann definiert, wenn entweder  $\alpha = 1$  oder  $r = 1$  ist, d.h. wenn entweder zukünftige Zahlungen nicht diskontiert werden aber Kunden irgendwann abspringen ( $\alpha = 1$  und  $r < 1$ ) oder wenn der Zahlungsstrom nicht abbricht aber zukünftige Zahlungen diskontiert werden ( $r = 1$  und  $\alpha < 1$ ). Gilt gleichzeitig  $\alpha = 1$  und  $r = 1$ , so ist das CLV unendlich, da unendlich oft eine konstante, nicht diskontierte Summe gezahlt wird.

## 2.11 First-Passage-Probleme

Häufig stellt man sich die Frage, wie lange es – ausgehend von einem Startzustand  $i$  – dauert, bis eine Markov-Kette zum ersten Mal im Zustand  $j$  ist. Fragen dieser Art bezeichnet man als *First-Passage-Probleme*. Eine solche First-Passage-Zeit ist natürlich nicht deterministisch, sondern ist bei jeder Prozessrealisation anders. Sie ist damit eine Zufallsvariable. Meist interessiert nur der Erwartungswert dieser Zufallsvariable.

---

<sup>16</sup>Man kann hier die *Cramersche Regel* in der Form  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$  anwenden

## 2 Markov-Ketten

Wir betrachten das Problem des ersten Besuchs in einem Zustand  $j$  gegeben den Zustand  $i$ . Wir betrachten hier nur *irreduzible Ketten*, denn die Berechnung ist nur sinnvoll, wenn sichergestellt ist, dass man von  $i$  überhaupt irgendwann nach  $j$  kommt. Die *Eintrittszeit in den Zustand  $j$*  (engl. *first passage time*) ist

$$T(j) = \min\{t > 0 : X_t = j\}.$$

$T(j)$  ist eine Zufallsvariable. Ihr Wert ist mindestens 1.

Wir interessieren uns nun für

$$m_i(j) = \mathbb{E}(T(j) | X_0 = i),$$

also die *erwartete Eintrittszeit in  $j$  bei Start in  $i$* . Für  $i = j$  ist die Bedeutung folgendermassen:  $m_j(j)$  bezeichnet die erwartete Anzahl der Schritte, um bei einem Anfangszustand  $j$  das erste Mal wieder in den Zustand  $j$  zu kommen (den Anfangszeitpunkt  $t = 0$  natürlich nicht mitgerechnet). Diese Zahl ist typischerweise grösser als 1, weil es meist eine positive Wahrscheinlichkeit gibt, im nächsten Schritt in einem anderen Zustand als  $j$  zu landen.

Wir können  $m_i(j)$  wie folgt berechnen:

**Satz 2.11.1.** (*erwartete First-Passage-Zeit*): Sei  $j \in S$  ein gegebener Zielzustand, und  $m_i(j)$  die mittlere First-Passage-Zeit für Anfangszustand  $i$ . Dann gilt:

$$m_i(j) = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} m_k(j). \quad (2.11)$$

*Beweis.* Wir betrachten einen festen Anfangszustand  $X_0 = i$  und einen Zielzustand  $j$  (der Zielzustand  $i = j$  ist mit inbegriffen). Nun gibt es zwei Fälle:

1. Entweder, der Prozess springt direkt von  $i$  nach  $j$ , d. h.  $X_1 = j$ . In diesem Fall ist  $T(j) = 1$ .
2. Oder es ist  $X_1 \neq j$ . Sei der Zustand zum Zeitpunkt  $t = 1$  mit  $k$  bezeichnet (d. h.  $k \neq j$ ). Die erwartete Zeit, um von diesem Zustand  $k$  zum gewünschten Zielzustand  $j$  zu kommen, ist  $m_k(j)$ . Da schon ein Zeitschritt vergangen ist, gilt in diesem Fall also:

$$E(T(j) | X_0 = i, X_1 = k) = 1 + E(T(j) | X_1 = k) = 1 + m_k(j).$$

Zusammengefasst:

$$E(T(j) | X_0 = i, X_1 = k) = \begin{cases} 1, & k = j \\ 1 + m_k(j) & k \neq j. \end{cases}$$

## 2 Markov-Ketten

Wir erhalten dann insgesamt:

$$\begin{aligned}
 m_i(j) &= \mathbb{E}(T(j)|X_0 = i) \\
 &= \sum_{k=1}^N \mathbb{E}(T(j)|X_0 = i, X_1 = k)P(X_1 = k|X_0 = i) \\
 &= 1 \cdot p_{ij} + \sum_{k \neq j} (1 + m_k(j))p_{ik} \\
 &= p_{ij} + \sum_{k \neq j} p_{ik} + \sum_{k \neq j} m_k(j)p_{ik} \\
 &= 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik}m_k(j).
 \end{aligned}$$

□

Die Rekursionsgleichung (2.11) kann man mit

$$\begin{aligned}
 \vec{m}(j) &= (m_1(j), m_2(j), \dots, m_N(j)) \\
 \vec{1} &= (1, 1, \dots, 1)
 \end{aligned}$$

vektoriell schreiben als:

$$\vec{m}(j)' = \vec{1}' + \mathbf{P}(j) \cdot \vec{m}(j)', \quad (2.12)$$

wobei  $\mathbf{P}(j)$  die Matrix ist, die aus  $\mathbf{P}$  hervorgeht, wenn man die  $j$ -te Spalte gleich 0 setzt<sup>17</sup>. Durch Umformen der Gleichung (2.12) ergibt sich:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P}(j)) \cdot \vec{m}(j)' = \vec{1}'$$

bzw.

$$\vec{m}(j)' = (\mathbf{I} - \mathbf{P}(j))^{-1} \cdot \vec{1}'$$

Dies kann in R einfach berechnet werden<sup>18</sup>.

**Beispiel** Wir betrachten zwei Maschinen des selben Typs. Für jede der beiden Maschinen gilt, dass sie, wenn sie an einem Tag funktioniert, am nächsten Tag mit Wahrscheinlichkeit 0.98 immer noch funktioniert. Wenn sie defekt ist, funktioniert sie am nächsten Tag mit Wahrscheinlichkeit 0.97. Die beiden Maschinen seien unabhängig. Wir betrachten nun beide Maschinen, und der Zustandsraum unserer Markov-Kette sei  $S = \{1, 2, 3\}$  mit

<sup>17</sup>In R: `P[, j] <- 0`.

<sup>18</sup>Wie oben erwähnt, setzen wir voraus, dass die Markov-Kette irreduzibel ist. Ansonsten kann  $(\mathbf{I} - \mathbf{P}(j))^{-1}$  singulär sein!

## 2 Markov-Ketten

- 1: beide Maschinen defekt
- 2: eine Maschine funktioniert, die andere ist defekt
- 3: beide Maschinen funktionieren

Sind an einem Tag beide Maschinen defekt, so sind mit Wahrscheinlichkeit

$$p_{11} = (1 - 0.97)(1 - 0.97) = 0.0009$$

beide am nächsten Tag noch defekt. Sind an einem Tag beide defekt, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass am nächsten Tag genau eine der beiden wieder läuft, gleich der Wahrscheinlichkeit, dass Maschine 1 läuft und Maschine 2 noch defekt ist plus die Wahrscheinlichkeit, dass Maschine 2 läuft und Maschine 1 noch defekt ist, also

$$p_{12} = 0.97 \cdot (1 - 0.97) + (1 - 0.97) \cdot 0.97 = 0.0582.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass beide wieder funktionieren, ist

$$p_{13} = 0.97 \cdot 0.97 = 0.9409.$$

Ist eine der beiden Maschinen defekt, so ist für unsere Betrachtung nicht relevant, welche dies ist. Wir nehmen also an, dass heute Maschine 1 defekt ist und Maschine 2 funktioniert. Die Wahrscheinlichkeit, dass morgen beide defekt sind, ergibt sich als:

$$p_{21} = (1 - 0.97) \cdot (1 - 0.98) = 0.0006.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass morgen wieder genau eine Maschine defekt ist, setzt sich zusammen aus den Möglichkeiten, dass 1 immer noch defekt ist und 2 immer noch funktioniert, oder 1 wieder funktioniert und dafür 2 defekt ist.

$$p_{22} = (1 - 0.97) \cdot 0.98 + 0.97 \cdot (1 - 0.98) = 0.0488.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Maschinen funktionieren, ergibt sich als:

$$p_{23} = 0.97 \cdot 0.98 = 0.9506.$$

Die restlichen Wahrscheinlichkeiten erhält man mit ähnlichen Überlegungen. Insgesamt ergibt sich folgende Übergangsmatrix:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.0009 & 0.0582 & 0.9409 \\ 0.0006 & 0.0488 & 0.9506 \\ 0.0004 & 0.0392 & 0.9604 \end{pmatrix}$$

Der Anfangszustand sei  $X_0 = 3$ . Wie lange dauert es im Mittel, bis beide Maschinen zum ersten Mal gleichzeitig defekt sind? Wir sind also am ersten Besuch im Zustand 1 bei Start in Zustand 3 interessiert. Wir berechnen den Vektor  $\vec{m}(1)$ :

$$\vec{m}(1)' = (\mathbf{I} - \mathbf{P}(1))^{-1} \cdot \vec{1}'.$$



## 2 Markov-Ketten

$\mathbf{P}(1)$  ergibt sich durch Nullsetzen der ersten Spalte in  $\mathbf{P}$ :

$$\mathbf{P}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0.0582 & 0.9409 \\ 0 & 0.0488 & 0.9506 \\ 0 & 0.0392 & 0.9604 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir:

$$\vec{m}(1) = ( \ 2450.250 \quad 2450.990 \quad 2451.485 \ ).$$

Die erste Komponente gibt dabei die *First-Passage-Zeit* ausgehend vom Zustand 1, die zweite ausgehend von Zustand 2 und die dritte ausgehend vom Zustand 3 an. Sind zu Beginn beide Maschinen funktionsfähig, so dauert es im Mittel also 2451.485 Tage (= ungefähr 6 Jahre und achteinhalb Monate), bis die Maschinen zum ersten Mal gleichzeitig defekt sind. Man sieht auch, dass es hier (da eine defekte Maschinen mit hoher Wahrscheinlichkeit am nächsten Tag wieder funktioniert) selbst bei Start mit zwei defekten Maschinen im Mittel fast genauso lange dauert, bis wieder beide defekt sind.

## 2.12 Schätzung der Übergangswahrscheinlichkeiten

Kennt man die Übergangswahrscheinlichkeiten einer Markov-Kette nicht, so kann man diese aus Beobachtungen schätzen. Im Gegensatz zu den klassischen iid-Stichproben, wie sie aus WaSt 3 bekannt sind, gibt es hier viele verschiedene Szenarien: Es kann eine Trajektorie bis zu einem bestimmten Zeitpunkt vorliegen, aber auch mehrere Trajektorien (bzw. Stücke davon). Durch die Abhängigkeit zwischen den Beobachtungen braucht man im Vergleich zu iid-Stichproben in der Regel mehr Beobachtungen um eine vernünftige Genauigkeit zu erreichen. Auch kann es von Interesse sein, aufgrund von Beobachtungen einer oder mehrerer Realisationen eines Prozesses zu testen, ob es sich überhaupt um eine Markov-Kette handelt bzw. ob diese homogen ist.

Wir beschränken uns in diesem Abschnitt auf das Problem, aus einer einzigen Trajektorie (die bis zu einem Zeitpunkt  $T$  vorliegt) die unbekannte Übergangsmatrix

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN} \end{pmatrix}$$

zu schätzen. Ohne weitere Voraussetzungen können wir nicht erwarten, dass sich aus einer Trajektorie (selbst wenn sie unendlich lange beobachtet würde) überhaupt alle Elemente einer Übergangsmatrix rekonstruieren lassen. Betrachten wir noch einmal die Markov-Kette mit dem Übergangsgraphen in Abbildung 2.11. Wie wir früher gesehen haben, ist diese Markov-Kette reduzibel, und wenn wir in der linken Hälfte des Graphen (Zustände 1-4) starten, erreichen wir niemals die rechte Hälfte (Zustände 5-8) und umgekehrt. Aus

## 2 Markov-Ketten

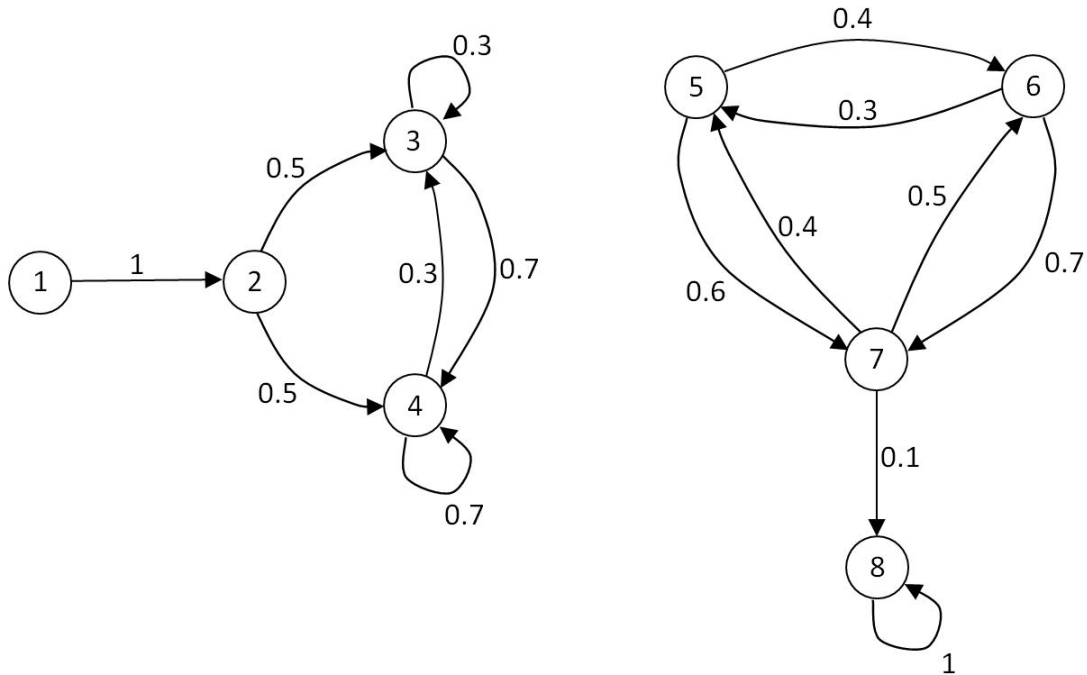


Abbildung 2.11: Übergangsgraph einer Markov-Kette

der Beobachtung einer Trajektorie, die in 1 startet (selbst wenn wir sie unendlich lange verfolgen), können wir also niemals die Übergangswahrscheinlichkeit von 6 nach 7 schätzen. Eine Chance haben wir nur, wenn der Prozess überhaupt alle Zustände erreicht und unser Stück der Trajektorie so lang ist, dass auch alle Übergänge tatsächlich beobachtet werden.

Setzen wir nun voraus, dass unsere Markov-Kette aperiodisch und irreduzibel ist. Auch bevor man die Übergangswahrscheinlichkeiten kennt, ist es in vielen Fällen möglich, sicher sagen zu können, dass alle Zustände wechselseitig erreichbar sind. Haben wir nun den Anfang einer Trajektorie  $x_0, x_1, \dots, x_T$  vorliegen, so können wir nicht nur zählen, wie oft wir in welchem Zustand waren, sondern auch für alle  $i, j \in S$ , wie oft ein Übergang von  $i$  nach  $j$  stattgefunden hat. Wir bezeichnen nun die Anzahl dieser Übergänge mit  $n_{ij}$  und definieren die Anzahl der von  $i$  ausgehenden Sprünge<sup>19</sup> als

$$n_i = \sum_{j=1}^N n_{ij}.$$

<sup>19</sup>Das ist nicht ganz dasselbe wie die Anzahl der Aufenthalte in  $i$ . Befinden wir uns zum letzten beobachteten Zeitpunkt  $T$  in  $i$ , so ist dies ein Aufenthalt, aber da wir den Übergang von dort aus nicht kennen, geht er nicht in  $n_i$  ein.

## 2 Markov-Ketten

Die unbekannte Übergangsmatrix  $\mathbf{P}$  schätzen wir nun durch

$$\hat{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} \hat{p}_{11} & \hat{p}_{12} & \dots & \hat{p}_{1N} \\ \hat{p}_{21} & \hat{p}_{22} & \dots & \hat{p}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{p}_{N1} & \hat{p}_{N2} & \dots & \hat{p}_{NN} \end{pmatrix}$$

mit

$$\hat{p}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_i}. \quad (2.13)$$

Wir schätzen also die Wahrscheinlichkeit für einen Übergang von  $i$  nach  $j$  durch die relative Häufigkeit, d.h. durch den Anteil der Übergänge von  $i$  nach  $j$  an den Übergängen von  $i$  in irgendeinen Zustand. Man kann zeigen, dass dies der *Maximum-Likelihood-Schätzer* in dieser Situation ist.

Ein Problem haben wir allerdings, wenn für ein oder mehrere  $i \in S$   $n_i = 0$  ist, d.h. wenn wir in unserer Trajektorie überhaupt keinen von  $i$  ausgehenden Sprung beobachten (das ist auch dann der Fall, wenn  $i$  zum ersten Mal zum Zeitpunkt  $T$  erreicht wird). In diesem Fall ist der Nenner in (2.13) 0 für dieses  $i$  und alle  $j = 1, \dots, N$ . Man sollte dann  $\hat{p}_{i1}, \dots, \hat{p}_{iN}$  so festlegen, dass  $\hat{\mathbf{P}}$  eine stochastische Matrix ist. Die neutralste Möglichkeit ist wohl, anzunehmen, dass man von  $i$  aus mit gleicher Wahrscheinlichkeit in jeden Zustand (inkl.  $i$  selbst) übergeht, in diesem Fall wäre

$$\hat{p}_{i1} = \dots = \hat{p}_{iN} = \frac{1}{N}. \quad (2.14)$$

Je nach Kontext kann aber auch eine andere Festlegung sinnvoll sein.

Im `markovchain`-Paket für R kann die Schätzung mit der Funktion `markovchainFit()` durchgeführt werden. Übergeben wird die Trajektorie, mit `method="mle"` erhält man die beschriebene ML-Schätzung. Tritt ein Zustand  $i$  nur im letzten Schritt auf, so wird so verfahren wie in (2.14). Treten Zustände in der Trajektorie gar nicht auf, so werden sie auch nicht berücksichtigt, d.h. die Funktion nimmt die Menge möglicher Zustände als die Menge aller verschiedenen in der Trajektorie auftretenden Zustände an. Ausgabe von `markovchainFit()` ist eine Liste, der Eintrag `estimate` ist ein `markovchain`-Objekt mit der geschätzten Übergangsmatrix.

**Beispiel** Wir betrachten die Markov-Kette mit Übergangsmatrix

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.01 & 0.99 \\ 0.99 & 0.01 \end{pmatrix}$$

Die Markov-Kette ist aperiodisch und irreduzibel. Wir erzeugen ein `markovchain`-Objekt und simulieren eine Trajektorie der Länge  $T = 50$ :

## 2 Markov-Ketten

```
> library(markovchain)
> set.seed(2)
> P <- rbind(c(0.01,0.99),c(0.99,0.01))
> kette <- new("markovchain", transitionMatrix=P)
> x <- rmarkovchain(50, kette, 1)
> x
[1] "2" "1" "2" "1" "2" "1" "2" "1" "2" "1"
[11] "2" "1" "2" "1" "2" "1" "2" "1" "2" "1"
[21] "2" "1" "2" "1" "2" "1" "2" "1" "2" "1"
[31] "2" "1" "2" "1" "2" "1" "2" "1" "2" "1"
[41] "2" "1" "2" "1" "2" "1" "2" "1" "2" "1"
```

Schätzung der Übergangsmatrix:

```
> markovchainFit(x)
$estimate
  1 2
1 0 1
2 1 0
```

Man sieht, dass die Schätzung nahe an den wahren Werten liegt – da sich in der realisierten Trajektorie aber die Zustände 1 und 2 immer genau abwechseln, ist die geschätzte Matrix die Übergangsmatrix einer periodischen Markov-Kette, während die wirkliche Markov-Kette aperiodisch ist. Die geschätzte Übergangsmatrix weicht also nicht nur im Allgemeinen von der wahren Matrix etwas ab, sie kann auch unter Umständen andere Eigenschaften haben, da z.B. Nullen auftreten können an Stellen, an denen bei der echten Matrix kleine, aber positive Werte stehen.

Mithilfe der sogenannten *Laplace-Korrektur*, die auch in anderen Kontexten (z.B. in der Bayes-Statistik) eine Rolle spielt, kann man erzwingen, dass alle Einträge der geschätzten Matrix strikt positiv sind. Gleichzeitig kann auch kein Eintrag mehr exakt 1 sein, da die Zeilensummen der Matrix ja 1 ergeben müssen. Die Korrektur wird häufig damit begründet, dass ausser bei rein logischen Aussagen möglichst nicht angenommen werden solle, irgend-  
etwas sei zu 100% sicher oder zu 100% ausgeschlossen.

Zur Korrektur wird zu jedem der tatsächlich beobachteten  $n_{ij}$  eine Konstante  $\alpha > 0$  hinzugefügt. Damit ergeben sich die *Laplace-korrigierten Schätzungen*

$$\hat{p}_{ij}^{\text{Laplace}} = \frac{n_{ij} + \alpha}{\sum_{j=1}^N (n_{ij} + \alpha)}.$$

Für sehr kleines  $\alpha$  liegen die Laplace-korrigierten Schätzungen nahe bei den Maximum-Likelihood-Schätzungen, sind aber immer echt grösser als 0, auch wenn ein Übergang überhaupt nicht beobachtet wurde. Für  $\alpha = 1$  addiert man für jeden möglichen Übergang 1 zu der beobachteten Häufigkeit, d.h. ein nicht beobachteter Übergang wird als einmal

## 2 Markov-Ketten

aufgetreten, ein einmal beobachteter Übergang als zweimal aufgetreten gewertet usw. Wird  $\alpha$  im Vergleich zu den beobachteten  $n_{ij}$  sehr gross gewählt, so gilt

$$\hat{p}_{ij}^{Laplace} \approx \frac{\alpha}{N\alpha} = \frac{1}{N},$$

d.h. für grosse  $\alpha$  sind für jeden Zustand  $i$  Sprünge in jeden Zustand  $j$  ungefähr gleich wahrscheinlich. Die Laplace-Korrektur führt also zu Verzerrungen, und sollte nur angewandt werden, wenn Nullen in der geschätzten Matrix ein Problem sind. Wie gross  $\alpha$  genau gewählt werden sollte, ist nicht einfach zu entscheiden. Im Zweifel reicht aber schon ein kleines  $\alpha$ , um Nullen zu vermeiden.

**Beispiel** (*Fortsetzung*): Wir schätzen für unsere Trajektorie die Übergangsmatrix mit der Laplace-Korrektur. Dazu verwenden wir `markovchainFit` mit `method="laplace"`.  $\alpha$  wird als `laplacian` übergeben. Wir wählen hier  $\alpha = 0.1$ :

```
> markovchainFit(x, method="laplace", laplacian=0.1)
$estimate
      1      2
1 0.004132231 0.995867769
2 0.996031746 0.003968254
```

Diese Korrektur führt schon dazu, dass die geschätzten Wahrscheinlichkeiten für Übergänge von 1 nach 1 und 2 nach 2 jetzt positiv sind, d.h. die geschätzte Matrix ist jetzt die Matrix einer aperiodischen irreduziblen Markov-Kette. Für grössere Werte von  $\alpha$  erhalten wir bereits zu grosse Werte auf der Hauptdiagonalen:

```
> markovchainFit(x, method="laplace", laplacian=1)
$estimate
      1      2
1 0.03846154 0.96153846
2 0.96296296 0.03703704
```

```
> markovchainFit(x, method="laplace", laplacian=10)
$estimate
      1      2
1 0.2272727 0.7727273
2 0.7777778 0.2222222
```

In der Praxis weiss man natürlich nicht, was die wahre Lösung ist, d.h. die genaue Wirkung von  $\alpha$  ist schwer einzuschätzen. Im Zweifel sollte  $\alpha$  eher klein gewählt werden.

# 3 Punktprozesse

## 3.1 Einführung

In diesem Kapitel werden Prozesse betrachtet, die die Abfolge von einzelnen *Ereignissen* (engl. *events*) beschreiben. Manchmal nennt man eine solche Abfolge auch einen *Strom von Ereignissen*. Dabei werden wir zunächst davon ausgehen, dass es nur eine Sorte von (gleichartigen) Ereignissen gibt.

Beispiele für solche Prozesse sind etwa:

- Das Eintreffen von Kunden an einem Postschalter. Dieser Prozess besteht aus einer Folge von Ankunftsereignissen, d. h. das Ereignis, das diesem Prozess zugrunde liegt, ist das Ereignis “Ankunft eines Kunden”.
- Das Ausfallverhalten einer Maschine, die nach einem Ausfall wieder repariert wird. Das interessierende Ereignis ist hier “Ausfall der Maschine”.

Ein Ereignis ist gekennzeichnet durch seinen *Eintrittszeitpunkt*. Jedes Ereignis hat genau einen solchen Zeitpunkt.

Wir setzen im Folgenden immer voraus, dass nie zwei Ereignisse gleichzeitig auftreten können<sup>1</sup>. Dies ist eine vernünftige Voraussetzung, wenn man eine kontinuierliche Zeit betrachtet. Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Ereignisse *exakt* zum gleichen Zeitpunkt eintreffen, ist hier in der Regel gleich Null.

Punktprozesse kann man beschreiben, indem man Aussagen über die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ereignissen trifft, die sogenannte *Zwischenankunftszeit* (engl. *inter-arrival time*). Ein anderer gebräuchlicher Ausdruck ist *Wartezeit*. Gegeben sei also eine Folge von Ereignissen. Mit  $S_n$  bezeichnen wir den Eintrittszeitpunkt des  $n$ -ten Ereignisses (für  $n = 1, 2, \dots$ ). Wir setzen weiterhin formal  $S_0 = 0$ . Die Wartezeiten zwischen den Ereignissen sind damit durch

$$T_n = S_n - S_{n-1}$$

bezeichnet. Man beachte, dass die Zwischenankunftszeit eine Zufallsvariable ist. Es können also in der Regel nur Aussagen über die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zwischenankunftszeit gemacht werden.

Abbildung 3.1 (a) zeigt eine typische Realisation eines Zählprozesses mit Eintrittszeiten  $S_1, S_2, \dots$  und Zwischenankunftszeiten  $T_1, T_2, \dots$ .

---

<sup>1</sup> In der mathematischen Literatur werden solche Punktprozesse auch als *einfache Punktprozesse* bezeichnet.

### 3 Punktprozesse

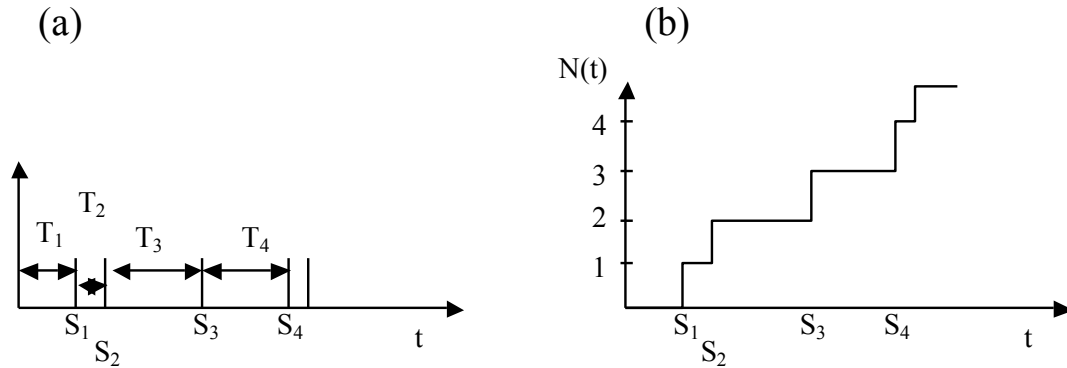


Abbildung 3.1: Typische Realisation eines Punktprozesses (a) und des zugehörigen Zählprozesses (b)

Alternativ kann man Punktprozesse auch beschreiben, indem man zählt, wie oft eine Ankunft stattgefunden hat. Wir betrachten also den Prozess  $N(t)$ , wobei  $N(t)$  die Anzahl der Ereignisse im Intervall  $(0, t]$  ist. Normalerweise sind die Zwischenankunftszeiten stetig verteilt, d.h. die Wahrscheinlichkeit für  $T_1 = 0$  ist 0, d.h. es gilt mit Wahrscheinlichkeit 1  $N(0) = 0$ . Man bezeichnet  $N(t)$  auch als den zum Punktprozess zugehörigen Zählprozess. In Abbildung 3.1 (b) ist eine typische Trajektorie eines Zählprozesses gezeigt. Ein Zählprozess ist monoton steigend. Seine Werte sind ganzzahlig. Man beachte, dass Zähl- und Punktprozesse äquivalente Beschreibungen sind.

Es gibt Prozesse, bei denen eine stochastische Abhängigkeit zwischen verschiedenen Zwischenankunftszeiten besteht. Betrachtet man etwa einen Prozess, bei dem jede Sekunde eine Folge von zwei kurz nacheinander auftretenden Ereignissen produziert wird (1 ms), dann besteht dieser Prozess aus einer Folge von Zwischenankunftszeiten, die durch einen Wechsel zwischen sehr kurzen (1 ms) und längeren Wartezeiten (etwas unter einer Sekunde) gekennzeichnet ist. Wir werden in diesem Kapitel zunächst nur Prozesse betrachten, bei denen keine stochastische Abhängigkeit zwischen den verschiedenen Wartezeiten auftritt. In Abschnitt 3.5 lassen wir dann Abhängigkeiten zu, beschäftigen uns aber hauptsächlich mit dem asymptotischen Verhalten. Die Zufallsvariablen, die die einzelnen Wartezeiten beschreiben, sind also zunächst unabhängig voneinander. Weiter nehmen wir an, dass die Zufallsvariablen immer die selbe Verteilung haben. Die Wartezeiten sind also iid (independent identically distributed). Solche speziellen Prozesse heißen *Erneuerungsprozesse*. *Poisson-Prozesse* sind spezielle Erneuerungsprozesse, bei denen die Wartezeiten iid exponentialverteilt sind. Es gilt also folgende Hierarchie:

**Punktprozesse:** Werden durch eine Folge von zufälligen Wartezeiten beschrieben.

**Erneuerungsprozesse:** Die Wartezeiten sind iid.

**Poisson-Prozesse:** Die Wartezeiten sind iid-exponentialverteilt.

Poisson-Prozesse werden in Abschnitt 3.2, allgemeine Erneuerungsprozesse in Abschnitt

### 3 Punktprozesse

3.4 behandelt. Versieht man Erneuerungsprozesse mit einer speziellen Kostenstruktur, erhält man die sogenannten *Kumulativen Prozesse*. Diese werden in Abschnitt 3.5 behandelt. Da Punkt- und Zählprozesse äquivalente Beschreibungen sind, verzichten wir hier auf die in manchen Lehrbüchern gemachte Unterscheidung von Erneuerungspunktprozess und Erneuerungszählprozess bzw. Poisson-Punktprozess und Poisson-Zählprozess und sprechen allgemein von Erneuerungsprozess und Poisson-Prozess.

## 3.2 Poisson-Prozesse

Eine besonders häufig verwendete Art von Erneuerungsprozessen sind die sogenannten *Poissonprozesse*. Diese Prozesse sind dadurch charakterisiert, dass die Zeiten zwischen den Ereignissen iid-exponentialverteilt sind. Im Folgenden werden wir diese Art von Prozess genauer studieren und einige wichtige Eigenschaften kennenlernen.

**Definition** (*Poisson-Prozess*) Ein Punktprozess heisst *Poisson-Prozess mit Rate  $\lambda > 0$*  (kurz:  $PP(\lambda)$ ), wenn die Wartezeiten  $T_n$  zwischen den Ereignissen eine Folge von iid- $\text{Exp}(\lambda)$  verteilten Zufallsvariablen bilden.

Ein Poisson-Prozess ist also ein Zählprozessen bei dem die Wartezeiten zwischen den Sprüngen unabhängig exponentialverteilt sind, und zwar alle Wartezeiten mit derselben Verteilung  $\text{Exp}(\lambda)$ . Es ist wichtig sich klarzumachen, dass die Exponentialverteilung eine sehr starke Annahme über den Ereignisstrom darstellt. Es gilt nämlich, dass eine exponentialverteilte Wartezeit gleichbedeutend ist mit der *Gedächtnislosigkeit* des Prozesses: Das zukünftige Auftreten eines Ereignisses hängt nicht davon ab, wie lange man schon gewartet hat.

Nicht alle Prozesse haben diese Eigenschaft. So ist etwa die Ankunft von Bussen an einer Bushaltestelle, zumindest in der Schweiz, kein Poisson-Prozess. Hier ist die Wartezeit zwischen zwei Ankünften zwar im Prinzip eine stochastische Grösse, aber diese ist nicht exponentialverteilt, sondern etwa normalverteilt um den Mittelwert 30 Minuten mit einer Standardabweichung von geschätzt 3 Minuten. Wenn der Bus gerade angekommen ist, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass der nächste Bus sofort folgt gering. Hier handelt es sich also nicht um einen Poisson-Prozess.

Die Poisson-Eigenschaft ist aber für viele Ereignisströme in der Praxis erfüllt und kann auch relativ einfach erkannt werden. In der Regel kommt die Gedächtnislosigkeit daher, dass das nächste Ereignis von vielen gleichartigen und unabhängigen Individuen erzeugt werden kann, oder dadurch, dass das Eintreten eines Ereignisses nicht von der Vorgeschichte abhängt.

**Beispiele** 1. Wir betrachten den Eingang eines Supermarktes. Das Eintreten von Kunden in den Supermarkt kann in der Regel als Poisson-Prozess angenommen werden, weil jeder Kunde unabhängig von anderen Kunden in den Supermarkt geht (einkaufende Familien oder Paare sind natürlich ausgenommen; solche Gruppen können für die meisten Betrachtungen als *ein* Kunde betrachtet werden).



### 3 Punktprozesse

2. Telefonzentrale eines telefonischen Auskunftssystems oder einer Hotline. Das Eintreffen von Anrufen kann als Poisson-Prozess angenommen werden, weil die einzelnen Kunden unabhängig voneinander anrufen. Aus diesem Grund sind die Wartezeiten zwischen aufeinanderfolgenden Anrufen exponentialverteilt.
3. Das Auftreffen von Regentropfen auf einer Platte kann als Poisson-Prozess angenommen werden, weil die einzelnen Regentropfen sich unabhängig voneinander bewegen und unabhängig voneinander auf der Platte aufkommen. Deshalb wird sich hier eine exponentialverteilte Wartezeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ereignissen ergeben.
4. Das Eintreffen von Bestellungen in einer Firma kann oft als Poisson-Prozess angenommen werden, weil die unterschiedlichen Kunden ihre Bestellungen nicht miteinander koordinieren. Deshalb gibt es zu jedem Zeitpunkt eine konstante Wahrscheinlichkeitsdichte für das Auftreten eines Ereignisses.

Wir sehen schon an diesen wenigen Beispielen, dass die Bedeutung der Poisson-Prozesse in technischen, wirtschaftlichen, sozialen und weiteren Zusammenhängen enorm ist.

Die Wartezeiten  $T_i$  bei den Poisson-Prozessen sind, nach ihrer Definition, iid-exponentialverteilt. Da alle  $T_i$  aus der selben Verteilung stammen, lassen wir den Index weg und bezeichnen die Wartezeiten allgemein als  $T$ . Wir betrachten als erstes die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable  $T$ . Die Verteilungsfunktion beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zufallsvariable  $X$  einen Werte kleiner gleich  $x$  annimmt. Auf Wartezeiten bezogen ist die Verteilungsfunktion also die Wahrscheinlichkeit, dass die Wartezeit  $T$  kleiner oder gleich einem gewissen Wert  $t$  ist bzw. die Wahrscheinlichkeit, dass das nächste Ereignis bis zum Zeitpunkt  $t$  eingetreten ist, falls das letzte bei  $t = 0$  war. Die Verteilungsfunktion einer  $Exp(\lambda)$ -Verteilung ist gegeben als

$$F_T(t) = P(T \leq t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}.$$

Ihre Ableitung, die *Dichtefunktion* ist gegeben durch:

$$f_T(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}.$$

Der Erwartungswert ist

$$E(T) = \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) dt = \dots = \frac{1}{\lambda}.$$

Eine zentrale Eigenschaft der Poisson-Prozesse ist ihre Gedächtnislosigkeit. Wir stellen uns vor, wir haben eine Zeit  $t$  gewartet (und es sei nichts passiert) und wollen wissen

### 3 Punktprozesse

wie wahrscheinlich es dann ist, dass innerhalb nächsten kleinen Zeitschritt  $\Delta t$  das nächste Ereignis stattfindet. Wir fragen uns also nach der bedingten Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis im Intervall  $(t, t + \Delta t]$  liegt ( $t < T \leq t + \Delta t$ ), falls bis  $t$  nichts passiert ist ( $T > t$ ). Gesucht ist also

$$P(t < T \leq t + \Delta t | T > t).$$

nach der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit ergibt sich

$$\begin{aligned} P(t < T \leq t + \Delta t | T > t) &= \frac{P(\{t < T \leq t + \Delta t\} \cap \{T > t\})}{P(T > t)} \\ &= \frac{P(t < T \leq t + \Delta t)}{P(T > t)} \\ &= \frac{F_T(t + \Delta t) - F_T(t)}{1 - F_T(t)} \end{aligned}$$

Bis hierhin gilt die Umformung allgemein. Speziell für die Exponentialverteilung erhalten wir:

$$\begin{aligned} P(t < T \leq t + \Delta t | T > t) &= \frac{F_T(t + \Delta t) - F_T(t)}{1 - F_T(t)} \\ &= \frac{1 - e^{-\lambda(t+\Delta t)} - (1 - e^{-\lambda t})}{1 - (1 - e^{-\lambda t})} \\ &= \frac{-e^{-\lambda(t+\Delta t)} + e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} \\ &= \frac{e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda \Delta t})}{e^{-\lambda t}} \\ &= 1 - e^{-\lambda \Delta t} \\ &= P(T \leq \Delta t) \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck hängt nicht von der Zeit  $t$  ab. Für  $\Delta t \rightarrow 0$  gilt<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t < T \leq t + \Delta t | T > t)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\lambda \Delta t}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{d\Delta t}(1 - e^{-\lambda \Delta t})}{\frac{d}{d\Delta t}(\Delta t)} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\lambda e^{-\lambda \Delta t}}{1} \\ &= \lambda, \end{aligned}$$

d.h. für kleine  $\Delta t$  gilt:

$$P(t < T \leq t + \Delta t | T > t) \approx \lambda \Delta t.$$

---

<sup>2</sup>Nach der Regel von l'Hospital

### 3 Punktprozesse

Die Konstante  $\lambda$  beschreibt also die Rate mit der etwas passiert, falls bis jetzt noch kein Ereignis stattgefunden hat.

Der Poisson-Prozess ist ein stochastischer Prozess. Deshalb ist  $N(t)$  eine Zufallsvariable für jedes  $t$ . Da der Prozess charakterisiert ist durch den Parameter  $\lambda$  der Wartezeitverteilung, hängt also die Verteilung der Zufallsvariablen  $N(t)$  von  $t$  und der Rate  $\lambda$  ab. Dies wird in folgendem Satz näher spezifiziert:

**Satz 3.2.1.** (*Poisson-Prozess: Verteilung*) Sei  $(N(t))_{t \geq 0}$ , ein Poisson-Prozess mit Parameter  $\lambda$ . Dann gilt: Für jedes  $t$  ist  $N(t)$  eine Poisson-verteilte Zufallsvariable mit Parameter  $\lambda t$ , d.h. für  $k \in \mathbb{N}_0$  gilt:

$$P(N(t) = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

Aus diesem Satz wird die Bezeichnung *Poisson-Prozess* klar.

**Beispiel** Auf eine Internetseite wird zugegriffen mit einer Rate von durchschnittlich 10 Zugriffen pro Minute. Da die Zugriffe als unabhängig voneinander und unabhängig von der Vorgeschichte betrachtet werden können, kann man diese Zugriffe als Poisson-Prozess mit Rate  $10/\text{min}$  bzw.  $\frac{1}{6}/\text{sec}$  modellieren. Der Server bearbeitet die Zugriffe im Sekundentakt. Er stürzt ab, wenn innerhalb einer Sekunde mehr als 3 Zugriffe erfolgen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Server innerhalb der nächsten Sekunde abstürzt? Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er innerhalb des nächsten Tages abstürzt?

Die Wahrscheinlichkeit für einen Absturz innerhalb der nächsten Sekunde ist gegeben durch

$$\begin{aligned} P(N(1) > 3) &= 1 - \sum_{k=0}^3 P(N(1) = k) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^3 e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \\ &= 1 - \sum_{k=0}^3 e^{-\frac{1}{6} \cdot 1} \frac{(\frac{1}{6} \cdot 1)^k}{k!} \\ &= 1 - \sum_{k=0}^3 e^{-\frac{1}{6}} \frac{(\frac{1}{6})^k}{k!} \\ &= 2.814753 \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass es einen Absturz innerhalb der nächsten 24 Stunden gibt, ergibt sich aus der Wahrscheinlichkeit, dass es innerhalb der nächsten  $24 \cdot 60 \cdot 60 = 86400$

### 3 Punktprozesse

Ein-Sekunden-Intervalle niemals mehr als 3 Zugriffe in einem Intervall gibt<sup>3</sup>:

$$\begin{aligned}
 P(\text{Absturz innerhalb 24 Stunden}) &= 1 - P(\text{kein Absturz innerhalb 24 Stunden}) \\
 &= 1 - (P(\text{kein Absturz innerhalb 1 Sekunde}))^{24 \cdot 60 \cdot 60} \\
 &= 1 - (1 - P(\text{Absturz innerhalb 1 Sekunde}))^{24 \cdot 60 \cdot 60} \\
 &= 1 - (1 - 2.814753 \cdot 10^{-5})^{86400} \\
 &= 0.9121373.
 \end{aligned}$$

Der Server stürzt also mit 91.2% Wahrscheinlichkeit ab.

Man hat oft die Situation, dass man eine Addition verschiedener Ereignisströme hat. Beispielsweise betrachte man eine Warteschlange, an die Männer oder Frauen treten können. Beide Ankunftsprozesse seien Poisson-Prozesse mit bekannten Parametern. Wenn nun das Geschlecht nicht interessiert, dann würde man gerne die beiden Ströme zusammenfassen zu einem einzigen Strom. Der folgende Satz zeigt diese Addition:

**Satz 3.2.2.** (*Addition unabhängiger Poisson-Prozesse*) Seien  $(N_1(t))_{t \geq 0}$  und  $(N_2(t))_{t \geq 0}$  zwei unabhängige Poisson-Prozesse mit Raten  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ . Sei weiter

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t)$$

der Zählprozess, der durch die Addition der beiden Poisson-Prozesse entsteht. Dann gilt:  $(N(t))_{t \geq 0}$  ist ein Poisson-Prozess mit Rate  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ .

*Beweis.* Wir werden zeigen, dass die Wartezeit zwischen zwei Ereignissen  $\text{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2)$ -verteilt ist. Sei nun zu einem Zeitpunkt  $s$  ein Ereignis aufgetreten, egal ob vom Typ 1 oder 2. Nun ist die Wartezeit  $T_1$  für das nächste Ereignis von Prozess 1  $\text{Exp}(\lambda_1)$ -verteilt, und zwar (da  $N_1(t)$  gedächtnislos ist) unabhängig davon, ob zum Zeitpunkt  $s$  ein Ereignis vom Typ 1 oder 2 aufgetreten ist. Ebenso ist die Wartezeit  $T_2$  für das nächste Ereignis vom Typ 2  $\text{Exp}(\lambda_2)$ -verteilt. Die Wartezeit auf das nächste überhaupt auftretende Ereignis bezeichnen wir mit  $T$ , und es gilt

$$T = \min\{T_1, T_2\}.$$

Im Folgenden berechnen wir die Verteilungsfunktion von  $T$ :

$$\begin{aligned}
 F_T(t) &= P(T \leq t) \\
 &= 1 - P(T > t) \\
 &= 1 - P(\min\{T_1, T_2\} > t) \\
 &= 1 - P(T_1 > t, T_2 > t) \\
 &= 1 - P(T_1 > t) \cdot P(T_2 > t) \\
 &= 1 - \exp(-\lambda_1 t) \cdot \exp(-\lambda_2 t) \\
 &= 1 - \exp(-(\lambda_1 + \lambda_2)t)
 \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>Wichtig ist hier die Annahme, dass der Server im Sekundentakt arbeitet – sonst würden z.B. auch zwei Zugriffe am Ende eines 1-Sekunden-Intervalls und einer direkt am Beginn des nächsten Intervalls zu einem Absturz führen!

### 3 Punktprozesse

Die Verteilungsfunktion der Wartezeit auf das nächste Ereignis ist also die Verteilungsfunktion einer  $Exp(\lambda_1 + \lambda_2)$ -Verteilung.  $\square$

Zwei unabhängige Poisson-Prozesse können also addiert werden, indem man einfach die zugehörigen Raten miteinander addiert. Die Eigenschaft der exponentialverteilten Wartezeiten überträgt sich auf den addierten Prozess.

**Beispiel** An einer stark frequentierten Haltestelle treffen Busse und S-Bahnen ohne Fahrplan ein. Die Ankunftsprozesse können als Poisson-Prozesse mit den Raten  $0.3/min$  und  $0.1/min$  modelliert werden. Ein Passagier hat eine Fahrkarte, die zur Fahrt mit beiden Verkehrsmitteln berechtigt. Wie lange muss er im Mittel an der Haltestelle warten? Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass er länger als 1 Minute warten muss? Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb einer Minute mindestens zwei Busse fahren?

Die Addition der beiden Poisson-Prozesse ergibt wieder einen Poisson-Prozess mit Rate  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 0.1/min + 0.3/min = 0.4/min$ . Damit folgt eine mittlere Wartezeit von  $\frac{1}{\lambda} = 1/0.4min = 2.5min$ .

Die Wahrscheinlichkeit, länger als 1 Minute warten zu müssen, ist identisch mit der Wahrscheinlichkeit, dass  $N(1) = 0$ . Diese Wahrscheinlichkeit ergibt sich aus der Poisson-Verteilung mit Parameter  $\lambda t = 0.4 \cdot 1 = 0.4$ :

$$P(N(1) = 0) = e^{-0.4} \frac{0.4^0}{0!} = e^{-0.4} = 0.67032.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb einer Minute mindestens zwei Busse fahren, ergibt sich als:

$$\begin{aligned} P(\text{mehr als zwei Busse}) &= 1 - P(\text{kein Bus}) - P(\text{ein Bus}) \\ &= 1 - e^{-0.3} \frac{0.3^0}{0!} - e^{-0.3} \frac{0.3^1}{1!} \\ &= 1 - e^{-0.3} - e^{-0.3} \cdot 0.3 \\ &= 0.03693631. \end{aligned}$$

## 3.3 Lebensdauerverteilungen

Im folgenden Abschnitt werden wir allgemeinere Prozesse als den Poisson-Prozess, nämlich sogenannte *Erneuerungsprozesse*, betrachten. Diese Prozesse werden häufig dazu benutzt, die Erneuerung ausgefallener Bauteile zu beschreiben. Auch hier kann man mit einem Punktprozess zählen, wie viele Teile bisher defekt waren und ausgetauscht wurden. Die Wartezeiten für das nächste Ereignis entsprechen dann der *Lebensdauer* des jeweiligen Bauteils. Was allerdings unrealistisch ist, ist die Annahme, dass die Lebensdauer exponentialverteilt ist. Die erwartete Restlebensdauer eines Bauteils hängt nämlich in der Regel sehr wohl davon ab, wie lange es schon arbeitet – die Exponentialverteilung hingegen ist gedächtnislos.

### 3 Punktprozesse

Aus diesem Grund wollen wir in diesem Abschnitt Verteilungen einführen, die häufig zur Modellierung der Lebensdauer von Bauteilen verwendet werden. Auch in der Biologie und Medizin werden diese Verteilungen häufig verwendet, um die Lebensdauer von Menschen und anderen Lebewesen zu beschreiben. Wir denken hier aber hauptsächlich an die Lebensdauer von Bauteilen, Geräten etc.

Betrachtet man sehr viele Bauteile, so ist man daran interessiert, welcher Anteil zum Zeitpunkt  $t$  noch funktioniert. Dieser Anteil als Funktion der Zeit wird als *Überlebensfunktion* (engl. *survival function* oder *survivor function*)  $S(t)$  bezeichnet. Da die Verteilungsfunktion der Lebensdauer  $F(t)$  ja die Wahrscheinlichkeit angibt, dass ein Bauteil bis zum Zeitpunkt  $t$  kaputt geht, ist

$$S(t) = 1 - F(t).$$

Häufig interessiert man für die Wahrscheinlichkeit, dass das Bauteil in einem kurzen Zeitintervall  $[t, \Delta t]$  kaputt geht, wenn bekannt ist, dass das Bauteil bis zum Zeitpunkt  $t$  gehalten hat. Wir bezeichnen die Lebensdauer (=Wartezeit bis zum Ausfall) mit  $T$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} P(t < T \leq t + \Delta t | T > t) &= \frac{P(t < T \leq t + \Delta t, T > t)}{P(T > t)} \\ &= \frac{P(t < T \leq t + \Delta t)}{1 - P(T \leq t)} \\ &= \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{1 - F(t)}. \end{aligned}$$

Teilen wir nun die Wahrscheinlichkeit durch die Intervallbreite  $\Delta t$  und lassen diese gegen 0 gehen, erhalten wir

$$\begin{aligned} h(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t < T \leq t + \Delta t | T > t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{1 - F(t)} \\ &= \frac{f(t)}{1 - F(t)} \\ &= \frac{f(t)}{S(t)}. \end{aligned}$$

$h(t)$  bezeichnet man auch als *Ausfallrate* (engl. *failure rate* oder *hazard rate*). Dabei handelt es sich um die *bedingte Dichte der Lebensdauer zum Zeitpunkt  $t$  gegeben Funktionsfähigkeit zum Zeitpunkt  $t$* . Für kleine  $\Delta t$  gilt:

$$h(t)\Delta t \approx P(t < T \leq t + \Delta t | T > t),$$

d.h.,  $h(t)\Delta t$  ist ungefähr die Wahrscheinlichkeit, dass das Bauteil innerhalb der nächsten  $\Delta t$  Zeiteinheiten ausfällt, wenn es zum Zeitpunkt  $t$  noch funktioniert.

### 3 Punktprozesse

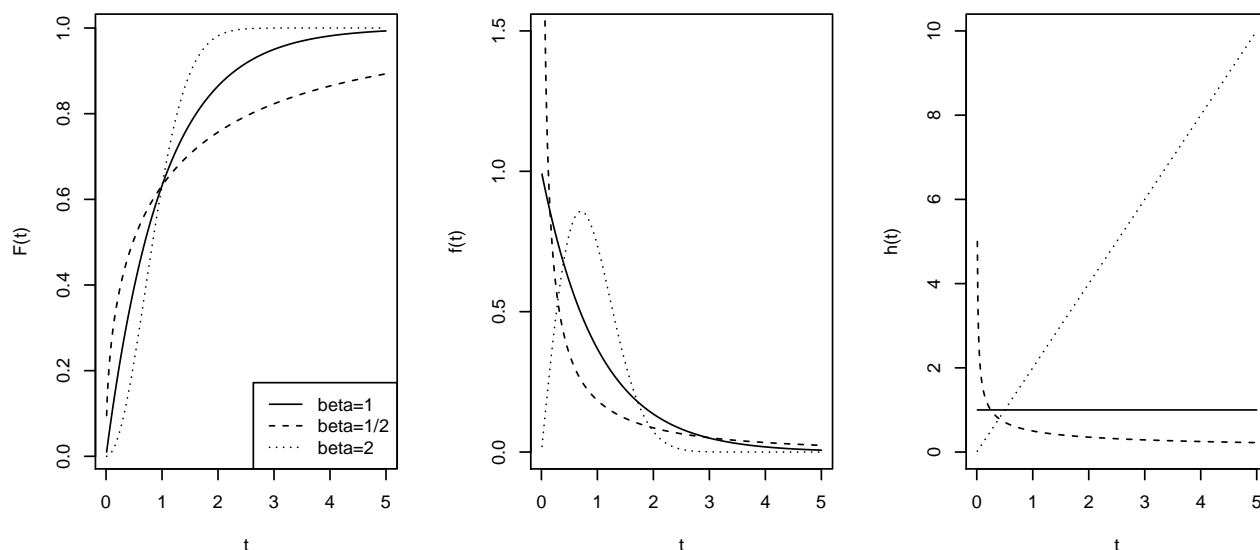


Abbildung 3.2: Verteilungsfunktion, Dichte und Ausfallrate für Weibullverteilungen mit  $\lambda = 1$  und verschiedenen Werten für  $\beta$ .

Für einen Poisson-Prozess gilt, dass die Wartezeiten exponentialverteilt sind mit Parameter  $\lambda$ . Die Ausfallrate der Exponentialverteilung ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \frac{f(t)}{1 - F(t)} \\
 &= \frac{\lambda \exp(-\lambda t)}{1 - (1 - \exp(-\lambda t))} \\
 &= \frac{\lambda \exp(-\lambda t)}{\exp(-\lambda t)} \\
 &= \lambda.
 \end{aligned}$$

Die Ausfallrate hängt also nicht von  $t$  ab, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass das Bauteil im nächsten kurzen Zeitintervall ausfällt, wenn es bis jetzt funktioniert hat, hängt nicht davon ab, wie lange es schon funktioniert. Das ist natürlich nur eine weitere Möglichkeit, die Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung zu beschreiben.

Hat man es allerdings mit Bauteilen zu tun die Kinderkrankheiten oder Altersschwäche zeigen können, so ist die Ausfallrate nicht mehr konstant und eine Beschreibung durch die Exponentialverteilung nicht mehr angebracht.

Eine einfache Verallgemeinerung der Exponentialverteilung, die auch nicht konstante Ausfallraten erlaubt, ist die sogenannte *Weibull-Verteilung*. Diese Verteilung wird in der Analyse der Lebenszeit von Bauteilen sehr erfolgreich eingesetzt. Dazu führt man einen

### 3 Punktprozesse

weiteren Parameter  $\beta$  ein. Die Überlebensfunktion  $S(t)$  der Weibull-Verteilung mit Parametern  $\lambda$  und  $\beta$  ist gegeben durch:

$$S(t) = \exp\left(-(\lambda t)^\beta\right)$$

für  $t \geq 0$ . Die Verteilungsfunktion  $F(t)$  ist dann:

$$F(t) = 1 - S(t) = 1 - \exp\left(-(\lambda t)^\beta\right),$$

die Dichte ist dann durch

$$f(t) = \lambda\beta(\lambda t)^{\beta-1}e^{-(\lambda t)^\beta}$$

und die Ausfallrate durch

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \lambda\beta(\lambda t)^{\beta-1}$$

gegeben (jeweils für  $t \geq 0$ ). Die Exponentialverteilung ergibt sich als Spezialfall für  $\beta = 1$ . Für  $\beta > 1$  ist  $h(t)$  monoton steigend, d.h. die Bauteile altern und fallen mit der Zeit mit höherer Wahrscheinlichkeit aus. Für  $\beta < 1$  ist  $h(t)$  monoton fallend, d.h. die Ausfallrate nimmt mit der Zeit ab. Dieser Fall ist nützlich zur Modellierung von “Kinderkrankheiten” – das Bauteil hat am Anfang eine hohe Ausfallwahrscheinlichkeit, die jedoch mit der Zeit abnimmt. Die Weibull-Verteilung kann jedoch nicht gleichzeitig Alterung und Kinderkrankheiten abbilden – dazu sind weitere Verallgemeinerungen nötig, die wir hier nicht behandeln. Abbildung 3.2 zeigt Verteilungsfunktion, Dichtefunktion und Ausfallrate für 3 Weibull-Verteilungen mit  $\lambda = 1$  und verschiedene Werte von  $\beta$ .

In **R** sind Dichte, Verteilungsfunktion, Quantile und Zufallszahlen aus der Weibull-Verteilung implementiert als `dweibull()`, `pweibull()`, `qweibull()` und `rweibull()`. Die Parameter `shape` und `scale` entsprechen unseren  $\beta$  und  $1/\lambda$ .

Hat man nur eine Stichprobe  $T_1, T_2, \dots, T_n$  von Lebensdauern von Bauteilen des selben Typs vorliegen, so möchte man häufig die Parameter der Weibull-Verteilung schätzen bzw. vielleicht erst einmal feststellen, ob die Lebensdauern überhaupt sinnvoll durch eine Weibull-Verteilung modelliert werden können. Ein häufig auftretendes Problem ist hierbei, dass zu Ende der Untersuchung einige Bauteile noch funktionieren, da man nicht warten kann, bis alle ausgefallen sind. Man spricht in diesem Fall von *zensierten Daten*, da von einigen Beobachtungen nur bekannt ist, dass sie nach einer bestimmten Zeit noch funktionierten, nicht wann sie ausfielen. Wir werden auf dieses Problem nicht weiter eingehen, und davon ausgehen, dass wir von allen Bauteilen den Ausfallzeitpunkt kennen.

Die Parameter der Weibull-Verteilung können mit der Maximum-Likelihood-Methode geschätzt werden, allerdings existieren hier keine geschlossenen Formeln, so dass die Likelihood numerisch maximiert werden muss. Eine alternative Methode verwendet einen Regressionsansatz; dies wollen wir hier kurz vorstellen.

Die Überlebensfunktion  $S(t)$  der Weibull-Verteilung hat eine sehr einfache Gestalt:

$$S(t) = \exp\left(-(\lambda t)^\beta\right).$$



### 3 Punktprozesse

Logarithmieren wir  $1/S(t)$  zweimal, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 \log(\log(1/S(t))) &= \log(\log(1/\exp(-(\lambda t)^\beta))) \\
 &= \log(\log(\exp((\lambda t)^\beta))) \\
 &= \log((\lambda t)^\beta) \\
 &= \beta \log(\lambda t) \\
 &= \beta(\log \lambda + \log t) \\
 &= \beta \log \lambda + \beta \log t
 \end{aligned}$$

Die Punkte  $(\log t, \log(\log(1/S(t))))$  liegen also auf einer Geraden mit Steigung  $\beta$  und Achsenabschnitt  $\beta \log(\lambda)$ .

Nun ist die Überlebensfunktion  $S(t)$  nicht bekannt. Analog zur empirischen Verteilungsfunktion kann aber auch eine empirische Überlebensfunktion definiert werden. Dazu sortieren wir unsere beobachteten Lebenszeiten  $t_1, t_2, \dots, t_n$  der Grösse nach, d.h., wir bilden die *geordnete Stichprobe*

$$t_{(1)}, t_{(2)}, \dots, t_{(n)},$$

wobei  $t_{(1)}$  der kleinste und  $t_{(n)}$  der grösste Wert ist. Wir müssen die Überlebensfunktion in den Zeitpunkten schätzen, die wir tatsächlich beobachtet haben. Ein einfacher Weg wäre die Verwendung der empirischen Verteilungsfunktion  $\hat{F}$ :

$$\begin{aligned}
 \hat{S}(t_{(i)}) &= 1 - \hat{F}(t_{(i)}) \\
 &= 1 - \frac{i}{n}
 \end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass man bessere Resultate erhält, wenn man die leicht korrigierte Version

$$\hat{S}(t_{(i)}) = 1 - \frac{i - 0.3}{n + 0.4}$$

verwendet. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned}
 \log\left(\log\left(\frac{1}{\hat{S}(t_{(i)})}\right)\right) &= \log\left(\log\left(\frac{1}{1 - \frac{i-0.3}{n+0.4}}\right)\right) \\
 &= \log\left(\log\left(\frac{1}{\frac{n+0.4}{n+0.4} - \frac{i-0.3}{n+0.4}}\right)\right) \\
 &= \log\left(\log\left(\frac{1}{\frac{n+0.4-i+0.3}{n+0.4}}\right)\right) \\
 &= \log\left(\log\left(\frac{n+0.4}{n-i+0.7}\right)\right)
 \end{aligned}$$

### 3 Punktprozesse

Wir können nun also für alle tatsächlich beobachteten (und der Grösse nach geordneten) Ausfallzeiten die Punkte

$$\left( \log(t_{(1)}), \log \left( \log \left( \frac{n+0.4}{n-1+0.7} \right) \right) \right), \dots, \left( \log(t_{(n)}), \log \left( \log \left( \frac{n+0.4}{n-n+0.7} \right) \right) \right)$$

in ein Koordinatensystem einzeichnen. Stammen die Daten tatsächlich aus einer Weibull-Verteilung mit Parametern  $\beta$  und  $\lambda$ , so sollten die Punkte ungefähr auf einer Geraden mit Steigung  $\beta$  und Achsenabschnitt  $\beta \log \lambda$  liegen. Die Schätzungen für  $\beta$  und  $\lambda$  erhält man nun, indem man eine einfache lineare Regression für die erhaltenen Punkte durchführt und eine geschätzte Gerade

$$y = \hat{a} + \hat{b}x$$

erhält. Die Schätzungen für die Parameter sind dann:

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= \hat{b} \\ \hat{\lambda} &= \exp \left( \frac{\hat{a}}{\hat{b}} \right). \end{aligned}$$

**Beispiel** Wir simulieren eine Stichprobe vom Umfang  $n = 50$  aus einer Weibull-Verteilung mit  $\beta = 2$  und  $\lambda = 1.5$ . Dann sortieren wir die beobachteten Zeitpunkte der Grösse nach und berechnen

$$y_i = \log \left( \log \left( \frac{n+0.4}{n-i+0.7} \right) \right)$$

für alle  $i = 1, \dots, 50$ .

```
> set.seed(0)
> beta <- 2
> lambda <- 1.5
> n <- 50

> x <- rweibull(n, shape=beta, scale=1/lambda )
> x <- sort(x)
> y <- log(log((n+0.4)/(n-(1:n)+0.7)))
> plot(log(x),y)

> lm.erg <- lm(y ~ log(x))
> lm.erg
```

Call:

```
lm(formula = y ~ log(x))
```

Coefficients:

### 3 Punktprozesse

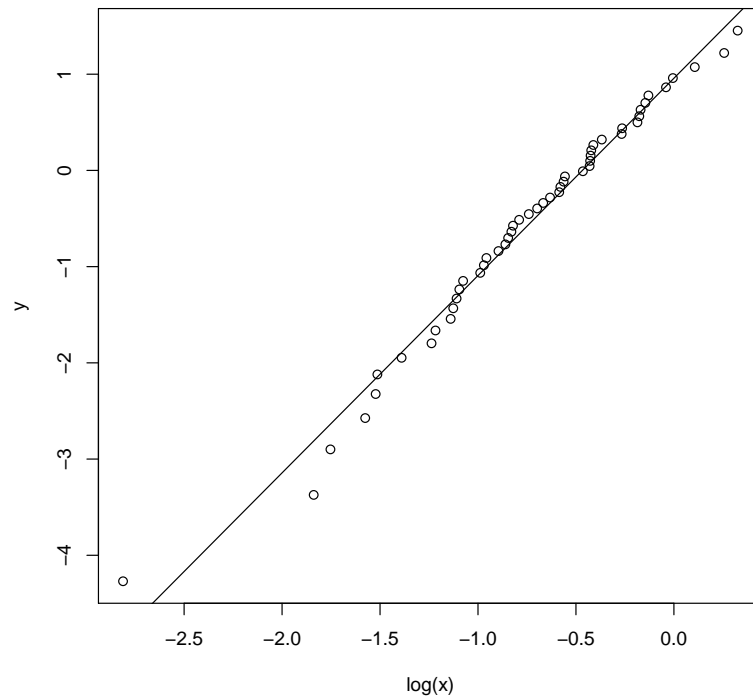


Abbildung 3.3: Schätzung der Weibull-Parameter mit Hilfe des Regressionsansatzes

(Intercept)	log(x)
0.9578	2.0506

```
> abline(lm.erg)

> betahat <- coef(lm.erg)[2]
> lambdahat <- exp(coef(lm.erg)[1]/coef(lm.erg)[2])
> betahat
  log(x)
2.050616
> lambdahat
(Intercept)
  1.5953
```

Wir erhalten vernünftige Schätzungen für  $\beta$  und  $\lambda$ . Abbildung 3.3 zeigt, dass die Punkte  $(x_{(i)}, y_i)$  gut auf der angepassten Gerade liegen.

Neben der Exponential- und Weibull-Verteilung können natürlich die Lebenszeiten  $T$

### 3 Punktprozesse

auch aus weiteren Verteilungen stammen. Wichtig ist, dass diese iid-verteilt sind. Im folgenden Beispiel verwenden wir eine Gleichverteilung.

**Beispiel (Autobatterie):** Eine Autobatterie halte zwischen 1 und 5 Jahre. Wie gross ist der Erwartungswert von  $T$  und was ergibt sich für die Ausfallrate?

Wir nehmen  $T \sim \text{Unif}([1, 5])$  an. Damit gilt

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{4} & t \in [1, 5] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ \frac{1}{4}t - \frac{1}{4} & t \in [1, 5] \\ 1 & t > 5 \end{cases}.$$

Für den Erwartungswert erhalten wir

$$\mathbb{E}(T) = \frac{1+5}{2} = 3 \quad (3.1)$$

und für die Hazardrate  $h(t)$  ( $t \in [1, 5]$ ):

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{f(t)}{1 - F(t)} \\ &= \frac{\frac{1}{4}}{1 - (\frac{1}{4}t - \frac{1}{4})} \\ &= \frac{1}{4 - (t - 1)} \\ &= \frac{1}{5 - t}. \end{aligned}$$

Man beachte, dass  $h(t)$  für  $t \rightarrow 5$  divergiert.

## 3.4 Erneuerungsprozesse

In diesem Abschnitt werden wir nun allgemeine Erneuerungsprozesse betrachten, bei denen die Wartezeiten beliebig (aber iid) verteilt sein können. Wir werden einige wichtige Techniken zur Analyse solcher Prozesse kennenlernen. Alle diese Techniken sind natürlich auch auf Poisson-Prozesse (als Spezialfall von Erneuerungsprozessen) anwendbar.

Wir betrachten das zufällige Auftreten von Ereignissen zu Zeiten  $S_n > 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Ausserdem sei  $S_0 = 0$  definiert. Wie bei den Poisson-Prozessen definiert man die Wartezeit zwischen zwei Ereignissen (engl. *inter arrival time*)  $T_n$ , wobei

$$T_n = S_n - S_{n-1}$$

### 3 Punktprozesse

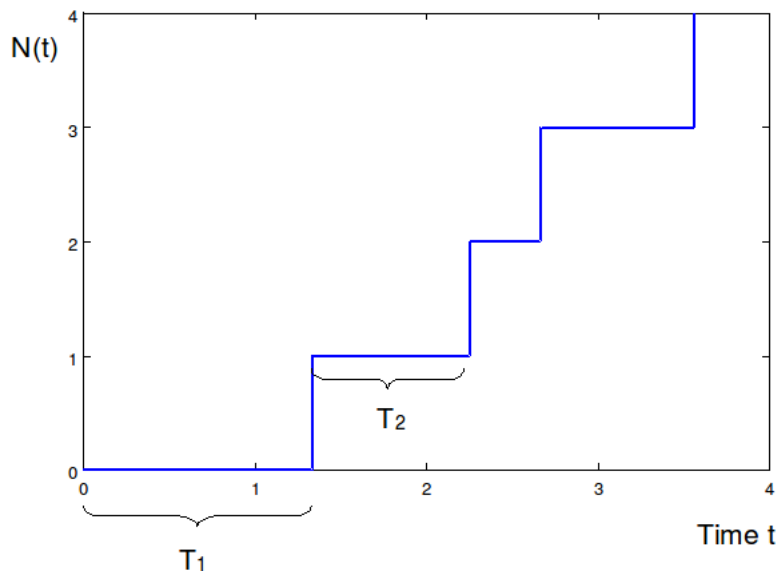


Abbildung 3.4: Typische Trajektorie eines Erneuerungsprozesses.

Damit ist  $T_n$  die Wartezeit zwischen Ereignis  $n$  und  $n - 1$ . Man beachte, dass  $T_n$  eine Zufallsvariable ist.

Sei  $N(t)$  die Anzahl der Ereignisse, die im Intervall  $(0, t]$  gezählt werden<sup>4</sup>. Dann ist  $N(t)$  ein stochastischer Prozess.

**Definition** (*Erneuerungsprozess*): Ein Zählprozess  $(N(t))_{t \geq 0}$ , der durch die Wartezeitfolge  $(T_n)_{n \geq 1}$ , erzeugt wird, heisst ein *Erneuerungsprozess*, wenn die Folge  $(T_n)_{n \geq 1}$  der Wartezeiten eine Folge von nichtnegativen iid-Zufallszahlen ist.

In Abbildung 3.4 ist eine typische Trajektorie eines Erneuerungsprozesses gezeigt. Das Wichtige an den Erneuerungsprozessen ist, dass die Wartezeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ereignissen iid-verteilt ist.

**Beispiele** 1. Poisson-Prozess. Hier ist die Wartezeit exponentialverteilt.

2. Batteriewechsel: Wenn die Batterie kaputt geht, wird sie ausgewechselt.  $T_1, T_2, \dots$  sind die Lebensdauern der ersten, zweiten, ... Batterie und  $N(t)$  die Anzahl der Batterieaustausche (Erneuerungen) bis zum Zeitpunkt  $t$ .
3. Batteriewechsel: Die Batterie wird ausgewechselt, wenn sie kaputt geht oder spätestens nach drei Jahren.
4. Austausch eines Bauteils mit Ausfallrate in Form einer "Badewannen-Kurve": Bauteile gehen am Anfang schnell kaputt (Kinderkrankheiten), dann halten Sie recht

<sup>4</sup>Ein eventuell zum Zeitpunkt  $t = 0$  auftretendes Ereignis wird nicht mitgezählt.

### 3 Punktprozesse

lange, um am Ende wieder vermehrt kaputt zu gehen (Altersschwäche). Solche Verteilungen können mithilfe mehrerer Weibull-Verteilungen beschrieben werden.

5. Das Ticken einer Uhr. Dies ist auch ein Erneuerungsprozess. Die Wartezeit ist hier deterministisch, dies kann als Grenzfall einer Zufallsvariable gesehen werden.

Im Vergleich zu den Poisson-Prozessen (die ein Spezialfall von Erneuerungsprozessen sind) können allgemeine Erneuerungsprozesse also eine weit grössere Vielfalt von Ereignisströmen beschreiben. Die Poisson-Prozesse können als Prozesse mit einem hohen Anteil von Zufall gesehen werden; es können aber auch Prozesse modelliert werden, die vorwiegend deterministisch sind, etwa Wartezeiten, die “ungefähr” konstant sind. Auch ganz deterministische Prozesse lassen sich als Erneuerungsprozesse interpretieren, solange die Wartezeit zwischen aufeinanderfolgenden Ereignissen immer gleich ist.

Bei Erneuerungsprozessen ist meist das Langzeitverhalten von besonderer Wichtigkeit. Mit Langzeitverhalten ist die Rate von Ereignissen pro Zeiteinheit “auf lange Sicht” gemeint. Diese Rate ist grundsätzlich eine Zufallsvariable. Für den Grenzfall  $t \rightarrow \infty$  konvergiert diese allerdings gegen eine feste Zahl, welche mit dem Erwartungswert der Wartezeiten  $E(T)$  zusammenhängt. Dies ist eine Anwendung des Gesetzes der grossen Zahlen:

**Satz 3.4.1.** (*Starkes Gesetz der grossen Zahlen*): Sei  $(T_n)_{n \geq 1}$  eine Folge von iid-Zufallsvariablen mit Erwartungswert  $\tau = E(T_n)$  für alle  $n$ . Sei weiter

$$S_N = \sum_{n=1}^N T_n.$$

Dann gilt:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S_N}{N} = \tau$$

mit Wahrscheinlichkeit 1<sup>5</sup>.

Für den Beweis des Gesetzes der grossen Zahlen sei auf die statistische Literatur verwiesen. Wir können also die mittlere Wartezeit bestimmen, indem wir hinreichend lange warten und dann die Gesamtzeit  $S_N$  beim Eintreffen des  $N$ -ten Ereignisses durch die Anzahl der Ereignisse  $N$  teilen. Das starke Gesetz der grossen Zahlen kann nun auf die Wartezeiten eines Erneuerungsprozesses angewandt werden. Dies führt zu folgendem Satz:

---

<sup>5</sup>Der Ausdruck “konvergiert mit Wahrscheinlichkeit 1” bedeutet, dass in fast allen Fällen diese Konvergenz gegeben ist. Grundsätzlich kann es möglich sein, dass in einem konkreten Fall diese Konvergenz nicht vorhanden ist, aber die Wahrscheinlichkeit dafür ist Null. Man nennt eine solche Konvergenz auch “fast sichere Konvergenz”. Für den Praktiker sind die mathematischen Feinheiten dieser Konvergenz irrelevant; man macht keinen Fehler, wenn man sich vorstellt, dass die Folge immer konvergiert. Allerdings muss man im Kopf behalten, dass dies ein *asymptotisches* Resultat ist. Im konkreten Einzelfall ist immer nachzuprüfen, ob die betrachtete Folge auch tatsächlich lang genug ist, damit man schon im asymptotischen Grenzfall ist.

### 3 Punktprozesse

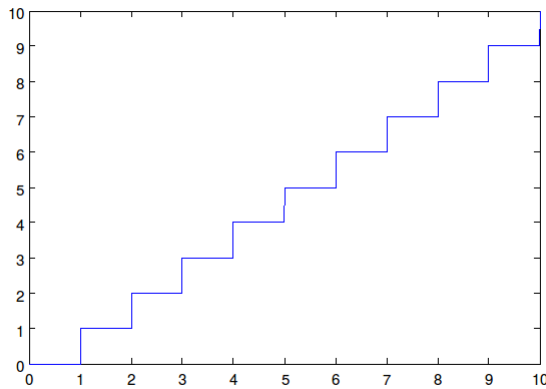


Abbildung 3.5:  $N(t)$  für die Uhr.

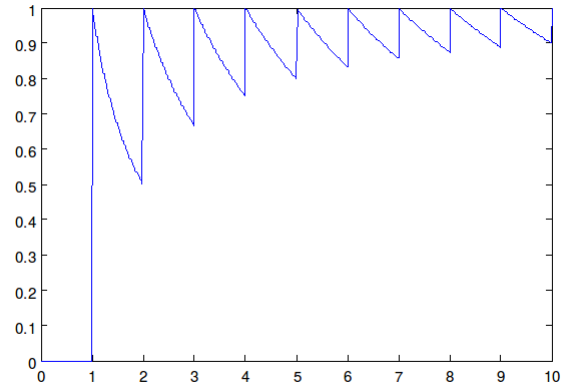


Abbildung 3.6:  $\frac{N(t)}{t}$  für die Uhr.

**Satz 3.4.2.** (*Asymptotische Erneuerungsrate*): Im Gegensatz zum starken Gesetz der grossen Zahlen betrachten wir nicht mehr die Asymptotik der Anzahl  $N$  der Ereignisse, sondern wir betrachten den Grenzwert einer grossen Gesamtzeit  $t$ . Sei  $(N(t))_{t \geq 0}$  ein Erneuerungsprozess, der von einer iid Folge von nichtnegativen Wartezeiten  $(T_n)_{n \geq 1}$  mit Erwartungswert  $\tau$  erzeugt wird ( $0 < \tau < \infty$ ). Dann gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\tau} \quad (3.2)$$

mit Wahrscheinlichkeit 1.

Für lange Zeiten ist also die Anzahl der Ereignisse geteilt durch die Gesamtlaufzeit gegeben durch den einfachen Ausdruck  $\frac{1}{\tau}$ , was als mittlere Rate interpretiert werden kann. Dies ist der Kehrwert der mittleren Wartezeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ereignissen. Es sei noch einmal betont, dass dies ein asymptotisches Resultat ist. Für kurze Zeiten gilt dies nicht.

Um dies zu sehen, betrachten wir das Ticken einer Uhr im Sekundentakt. Die Zeit  $t = 0$  bezeichne einen Zeitpunkt direkt nach einem Ticken. Das erste Ticken für  $t > 0$  findet also bei  $t = 1$  statt, das zweite bei  $t = 2$ , usw. Der Zählprozess  $N(t)$  ist ein regelmässiger Stufenprozess (siehe Abb. 3.5). Die Grösse  $\frac{N(t)}{t}$  ist in Abb. 3.6 gezeigt. Man sieht, dass für kleine  $t$  diese Grösse stark abweicht von der Rate 1. Erst für grosse  $t$  konvergiert diese Grösse gegen die Rate 1. Dies ist unabhängig davon, wie oft man das Experiment wiederholt.

Im Folgenden wollen wir einige Beispiele für dieses (asymptotische) Resultat betrachten.

**Beispiele** 1. Poisson-Prozess: Bei einem  $PP(\lambda)$ -Prozess ist die mittlere Wartezeit gegeben durch  $\tau = 1/\lambda$ . Damit ist nach (3.2) die mittlere Rate auf lange Sicht  $\frac{1}{\tau} = \lambda$ . Dies ist natürlich ein bekanntes Ergebnis.

### 3 Punktprozesse

2. Erneuerungsprozess mit Weibull-Verteilung. Der Erwartungswert  $E(T)$  einer Weibull-Verteilung ist

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

wobei  $\Gamma$  die Gammafunktion ist.

3. Batterie-Wechsel: Die Autobatterie werde immer dann gewechselt, wenn sie defekt ist. Sei die Lebensdauer einer Batterie eine Zufallsvariable, die gleichverteilt ist im Intervall  $[1, 5]$  Jahre. Dann definiert die Folge der Batteriewechsel einen Erneuerungsprozess. Wie gross ist die Ersetzungsrate? Dafür muss der Erwartungswert der Lebensdauer berechnet werden, der sich zu 3 Jahren ergibt (vgl. (3.1)). Damit ist die Ersetzungsrate  $1/3$  pro Jahr.

Oft möchte man nicht immer so lange warten bis ein Bauteil kaputt gegangen ist, da ungeplante Wechsel meist mit hohen Kosten verbunden sind. Man wechselt daher bei der *vorbeugenden Instandhaltung* (engl. *preventive maintenance* nach einer festgelegten Zeit das Bauteil aus.

**Beispiel (Autobatterie)** Wir betrachten noch einmal die Autobatterie mit auf  $[1, 5]$  gleichverteilter Lebensdauer. Die Batterie wird ausgewechselt, wenn sie defekt ist, aber spätestens nach drei Jahren. Wie gross ist die Erneuerungsrate?

Dazu muss der Erwartungswert der Funktionsdauer berechnet werden. Die Funktionsdauer endet entweder, wenn die Batterie defekt ist, oder wenn sie nach drei Jahren ausgebaut wird. Formal können wir die Funktionsdauer  $T_a$  als eine Funktion  $g(T)$  der Zufallsvariable  $T$  wie folgt definieren:

$$g(t) = \begin{cases} t, & t < 3 \\ 3, & t \geq 3 \end{cases}.$$

Sei  $f(t)$  die Dichtefunktion der Lebensdauer, d.h.

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{4} & t \in [1, 5] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Damit ergibt sich der Erwartungswert der Funktionsdauer durch Mittelung über alle Lebenszeiten

$$E(g(T)) = \int_0^\infty g(t) \cdot f(t) dt = \int_1^3 \frac{t}{4} dt + \int_3^5 \frac{3}{4} dt = \frac{1}{4} \left( \frac{8}{2} + 3 \cdot 2 \right) = 2.5$$

Damit ist die mittlere Erneuerungsrate  $\frac{1}{2.5} = 0.4$  pro Jahr. Dies ist höher als die Erneuerungsrate bei der ersten Strategie ( $1/3$ ). Wieso sollte man also eine solche Strategie anwenden? Der Grund liegt darin, dass man erwartet, dass sich die Anzahl der (teuren) ungeplanten Wechsel verringert und daher sich die erwarteten Kosten pro Zeit verringern. Dies werden wir im Folgenden berechnen.



### 3.5 Kumulative Prozesse

Wir betrachten Systeme, bei denen Kosten und Gewinne auflaufen. Wenn man Gewinne als negative Kosten interpretiert, kann man beides in einen generalisierten Kostenprozess  $K(t)$  integrieren, wobei  $K(t)$  die totalen aufgelaufenen Nettokosten (Kosten – Gewinn) im Intervall  $[0, t]$  sind. Da  $K(t)$  im Verlauf der Zeit sowohl steigen als auch fallen kann, können wir  $K(t)$  als einen zeitkontinuierlichen und wertekontinuierlichen stochastischen Prozess interpretieren.

Wir betrachten wieder die Wartezeiten  $T_n$ , die in diesem Kontext auch oft *Zyklen* (engl. *cycles*) genannt werden. Die Zyklen können konstant sein oder eine zufällige (aber immer nicht-negative) Länge haben. Wir definieren  $S_0 = 0$ , und

$$S_n = \sum_{i=1}^n T_i$$

Damit ist der  $n$ -te Zyklus durch das Intervall  $(S_{n-1}, S_n]$  definiert. Mit dieser Diskretisierung kann man auch den Kostenprozess diskretisieren:

$$K_n = K(S_n) - K(S_{n-1})$$

d.h.  $K_n$  bezeichnet gerade die im Zyklus  $n$  aufgelaufenen Kosten.

**Definition** (*kumulativer Prozess*) Der stochastische Prozess  $K(t)$ ,  $t \geq 0$ , heisst *kumulativer Prozess*, wenn die Folge  $(T_n, K_n)$ ,  $n \geq 1$ , eine Folge von iid-bivariaten Zufallsvariablen ist.

Dabei meint man mit iid-bivariat, dass die zwei Zufallsvariablen  $(T_n, K_n)$ , die zu jedem  $n$  gehören, unabhängig von den Zufallsvariablen zu anderen  $n$  sind, und die gleiche bivariate Verteilungsfunktion haben. Die beiden Zufallsvariablen für ein- und denselben Zyklus  $n$  können also stochastisch abhängig sein, sind aber unabhängig von den anderen Zyklen. Wegen dieser Möglichkeit der Abhängigkeit sind kumulative Prozesse ein starkes Werkzeug zur Modellierung. Dies soll im nächsten Beispiel klar werden. Kumulative Prozesse werden verwendet, um die Kosten-Gewinn-Bilanz für das Langzeitverhalten von nicht-Markov'schen Systemen zu studieren.

**Beispiel** (*Autobatterie, Fortsetzung*): Wir betrachten das Batterieaustauschproblem wie oben beschrieben, mit einer Erneuerung nach spätestens 3 Jahren. Wir nehmen an, dass eine geplante Erneuerung CHF 50 kostet, eine ungeplante dagegen CHF 150. Damit sind die Zusatzkosten bei einem nicht geplanten Austausch CHF 100. Seien  $K(t)$  die Gesamtaustauschkosten bis zur Zeit  $t$ . Ist  $K(t)$  ein kumulativer Prozess?

Sei die Zufallsvariable  $T$  die Lebensdauer der Batterien, und  $T_a = g(T)$  die Austauschzeit der Batterie. Mit  $T_n$  bezeichnen wir konkret die Austauschzeit im  $n$ -ten Zyklus.  $T_a$  ist 3 Jahre (wenn die realisierte Lebensdauer  $t \geq 3$ ) und gleich der realisierten Lebensdauer  $t$ , wenn die realisierte Lebensdauer  $t < 3$  ist. Die Kosten sind  $K(t) = 150$ , falls ein

### 3 Punktprozesse

ungeplanter Austausch stattfindet, d.h. die realisierte Lebensdauer  $t < 3$  Jahre ist und  $K(t) = 50$ , falls ein geplanter Austausch (nach drei Jahren) stattfindet (realisierte Lebensdauer  $t \geq 3$  Jahre). Damit ist  $K$  eine Zufallsvariable, die von der Zufallsvariable  $T$ , welche die Lebensdauer beschreibt, abhängig ist.

Die Variable  $T$  muss nun nicht unbedingt mit der physikalischen Zeit übereinstimmen. Das soll folgendes Beispiel verdeutlichen:

**Beispiel (Garantie):** Eine Reifenfirma verkauft Reifen zum Preis von 150 CHF pro Stück. Eine Lebensdauer von 50000 km wird garantiert in folgendem Sinne: Wenn der Reifen nach  $L$  km kaputtgeht, und  $L < 50000$ , dann erhält der Käufer eine Rückzahlung im Wert von

$$\frac{50000 - L}{50000} \cdot 150 \text{ CHF}$$

Wir nehmen an, dass der Käufer immer die gleiche Sorte Reifen kauft. Seien  $K(t)$  die aufgelaufenen Reifenkosten für die ersten  $t$  Kilometer (wir betrachten dabei nur einen Reifen, nicht mehrere).

Dann ist  $K(t)$  ein kumulativer Prozess. Wieder diskretisieren wir, wobei  $K_n$  die Kosten für den  $n$ -ten Reifen sind. Diese Kosten sind wieder abhängig von der Lebensdauer  $T_n$  dieses Reifens. Gleichzeitig ist die Austauschzeit  $T_a = g(T)$  abhängig von der Lebensdauer. Folglich sind die zwei Zufallsvariablen  $K$  und  $T_a$  stochastisch abhängig.

Im allgemeinen Fall ist es schwierig, den Kostenprozess  $K(t)$  eines kumulativen Prozesses zu berechnen. Wir werden uns auf das asymptotische Verhalten beschränken, d.h. wir fragen nach der *mittleren Rate, mit der Kosten auflaufen*, für den Grenzwert einer unendlich langen Laufzeit. In diesem Fall ist die Kostenrate unabhängig von eventuellen stochastischen Abhängigkeiten von Zykluskosten  $K$  und Zykluszeit  $T_a$ .

**Satz 3.5.1.** (*Asymptotische Kostenrate eines kumulativen Prozesses*): Sei  $K(t), t \geq 0$ , ein kumulativer Prozess mit einer entsprechenden Folge von iid-bivariaten Zufallsvariablen  $(T_n, K_n)$ ,  $n \geq 1$ . Dann gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K(t)}{t} = \frac{E(K)}{E(T_a)} \quad (3.3)$$

mit Wahrscheinlichkeit 1.

Die asymptotische Kostenrate ergibt sich also aus dem Quotienten der (nicht-bedingten) Erwartungswerte der Zykluskosten und der Zykluszeiten. Eine eventuelle stochastische Abhängigkeit der beiden Grössen ist hier irrelevant. Da der Prozess homogen ist, reicht es, die Erwartungswerte des ersten Zyklus zu berechnen.

**Beispiele** 1. Wir kehren zum Batterieaustauschproblem zurück und wenden (3.3) an. Bei Erneuerung nach spätestens 3 Jahren ergibt sich wie bereits vorhin berechnet

### 3 Punktprozesse

$E(T_a) = 2.5$  Jahre. Mit der Kostenstruktur von 150 CHF für einen ungeplanten Austausch (Lebensdauer kleiner 3 Jahre) und 50 CHF für einen geplanten Austausch (Lebensdauer grösser gleich 3 Jahre) ergibt sich:

$$\begin{aligned} E(K) &= P(T \leq 3) \cdot 150\text{CHF} + P(T > 3) \cdot 50\text{CHF} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 150\text{CHF} + \frac{1}{2} \cdot 50\text{CHF} = 100\text{CHF} \end{aligned}$$

Damit werden (auf lange Sicht) die mittleren Kosten pro Zykluszeit  $\frac{E(K)}{E(T)} = 40$  CHF/Jahr. Dies ist besser, als wenn man nicht vorzeitig erneuern würde:  $\frac{E(K)}{E(T)} = 150$  CHF / 3 Jahre = 50 CHF/Jahr.

Mit der Theorie lässt sich auch der optimale Erneuerungszeitpunkt  $\xi$  bestimmen. Dazu wird die Funktion  $\frac{E(K)}{E(T_a)}$  für beliebige Werte des Erneuerungszeitpunkts  $1 \leq \xi \leq 5$  berechnet. Es ergibt sich:

$$E(T) = \int_0^\infty g(t) \cdot f_T(t) dt = \int_1^\xi t \cdot f_T(t) dt + \int_\xi^5 \xi \cdot f_T(t) dt = \frac{1}{8}(10\xi - \xi^2 - 1)$$

$$E(K) = P(T \leq \xi) \cdot 150\text{CHF} + P(T > \xi) \cdot 50\text{CHF} = 25 \text{ CHF} \cdot (\xi + 1)$$

und damit das in Abbildung 3.7 gezeigte Verhalten für die (asymptotischen) mittleren Kosten pro Zeit. Der optimale Ersetzungszeitpunkt ergibt sich aus dem Minimum der Kurve zu etwa 2.5 Jahre (analytisch exakt  $\sqrt{12} - 1 \approx 2.46$  Jahre).

- Wir betrachten eine allgemeine 2-Zustands-Maschine (Zustand in Ordnung und defekt). Die Zeiten in beiden Zuständen seien nun nicht mehr exponentialverteilt, sondern irgendwie. Sei  $U$  die Zufallsvariable, die die Lebensdauer repräsentiert, und  $D$  die Zufallsvariable, die die Reparaturzeit repräsentiert. Beide Zeiten seien voneinander unabhängig und wir fragen uns nach dem Anteil der Zeit, in dem die Maschine arbeitet.

Zu diesem Zweck können wir (3.3) verwenden. Die Zykluslänge definieren wir als die Zeit, die vom Ende einer Reparatur bis zum Ende der nächsten Reparatur geht. Ein Zyklus enthält also zwei Anteile: die Lebenszeit und die Reparaturzeit. Die mittlere Zykluslänge ist dann

$$E(T) = E(U + D) = E(U) + E(D)$$

### 3 Punktprozesse

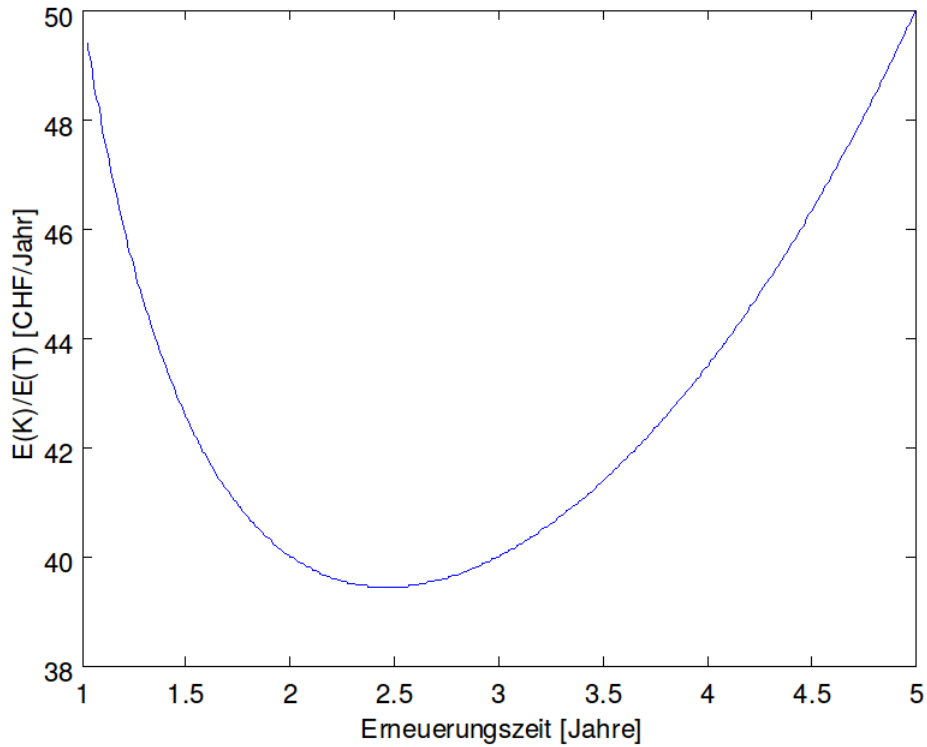


Abbildung 3.7: Erwartete Kosten pro Zyklus in Abhängigkeit von der Erneuerungszeit

Um die mittlere Zeit in der die Maschine arbeitet abzuschätzen, definieren wir die Kosten als  $K_n = U_n$ , d.h. die Kosten sind gerade die Lebenszeit. Dann gilt nach (3.3), dass (auf lange Sicht) die Kostenrate gegeben ist durch

$$\frac{E(K)}{E(T)} = \frac{E(U)}{E(U) + E(D)}$$

Das bedeutet, dass der Anteil der Zeit, während der die Maschine arbeitet, gegeben ist durch das Verhältnis von Lebenszeit zur Summe von Lebens- und Reparaturzeit. Dies ist ein intuitiv einleuchtendes Ergebnis.

Als numerisches Beispiel betrachten wir eine Maschine, deren Lebenszeit gleichverteilt ist im Intervall  $[4, 6]$  Wochen. Die Reparaturzeit sei exakt 20% der vorhergehenden Laufzeit, d.h.  $D_n = 0.2 \cdot U_n$ . Hier folgt:

$$E(T) = E(U) + E(D) = 5 + 0.2 \cdot 5 = 6$$

$$E(K) = E(U) = 5$$

### 3 Punktprozesse

Dann ist der Anteil der Zeit, während dem die Maschine up ist, gerade  $5/6$ .

Man bemerke, dass diese Aussage unabhängig von Annahmen über die Form der Aufenthaltszeitverteilungen ist; in das Resultat fließt nur der Erwartungswert ein. Dies bedeutet, dass sich etwa für ein Markov-Modell mit exponentialverteilten Aufenthaltszeiten dasselbe Resultat ergibt. Hier könnte man das Ergebnis aber auch mit den Mitteln der Markov-Theorie berechnen.

# 4 Zeitkontinuierliche Markov-Prozesse

## 4.1 Definition

In diesem Kapitel betrachten wir Markov-Prozesse in stetiger Zeit, d. h. der Zeitparameter  $t$  soll kontinuierlich sein. Der Zustandsraum  $S$  soll weiterhin diskret und endlich sein:  $S = \{1, 2, \dots, N\}$ . Wir betrachten also zeitkontinuierliche stochastische Prozesse  $X(t)$  mit diskretem und endlichem Zustandsraum, die weiterhin noch die Markov-Eigenschaft (s.u.) haben.

- Beispiele**
1. Gegeben sei eine Maschine, die ausfallen kann. Der Prozess  $X(t)$  gebe den Zustand der Maschine an, wobei die Zustände “funktionierend”, “ausgefallen” und “in Reparatur” seien. Zu jedem Zeitpunkt  $t$  ist die Maschine in genau einem der Zustände. Zu gewissen Zeiten ändert sich der Zustand sprunghaft.
  2. Sei  $X(t)$  die Länge einer Warteschlange an einem Bankschalter. Der Zustandsraum ist  $S = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ . Der Zustand ändert sich, wenn eine neue Person sich an die Warteschlange anreihet (dann erhöht sich der Zustand um 1), oder eine Person die Warteschlange verlässt, weil sie genug vom Warten hat, oder weil sie bedient worden ist.

Die Gedächtnislosigkeit eines Markov-Prozesses ist auch im kontinuierlichen Fall die definierende Eigenschaft. Hier gibt es allerdings nicht mehr eine festgelegte Folge von betrachteten Zeitpunkten. Deshalb fordert man die Gedächtnislosigkeit bzgl. aller möglichen Zeitpunkte in der Vergangenheit:

**Definition** (*Zeitkontinuierlicher Markov-Prozess*): Ein stochastischer Prozess  $X(t)$ ,  $t \geq 0$ , auf einem Zustandsraum  $S$  heisst *zeitkontinuierlicher Markov-Prozess*, wenn für alle  $i, j$  aus  $S$  und für alle Zeiten  $s + t > s > s_n > s_{n-1} > \dots > s_0 \geq 0$  gilt:

$$\begin{aligned} P(X(s+t) = j | X(s) = i, X(s_n) = i_n, X(s_{n-1}) = i_{n-1}, \dots, X(s_0) = i_0) \\ = P(X(s+t) = j | X(s) = i) \end{aligned}$$

Der Prozess heisst weiter *homogen*, wenn

$$P(X(s+t) = j | X(s) = i) = P(X(t) = j | X(0) = i)$$

#### 4 Zeitkontinuierliche Markov-Prozesse

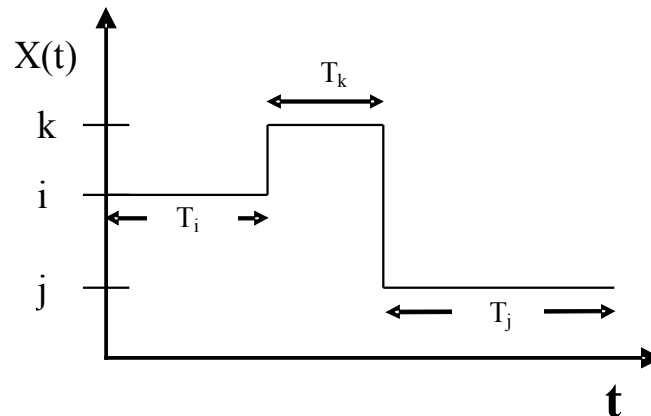


Abbildung 4.1: Typische Trajektorie für einen zustandsdiskreten Markov-Prozess.

Ein Prozess ist also ein Markov-Prozess, wenn sein Zustand zum Zeitpunkt  $s + t$  nur von dem Zustand  $X(s)$  abhängt, nicht aber von der ganzen Vorgeschichte für Zeiten *vor*  $s$ , wenn  $X(s)$  bekannt ist. Da der Zeitschritt  $t$  beliebig klein sein kann, gilt also wieder, dass die zeitliche Fortentwicklung eines Systems ausschliesslich von seinem momentanen Zustand abhängt, nicht von den früheren Zuständen. Man erhält keine zusätzliche Information, wenn man Zustände vor dem Zeitpunkt  $s$  kennt. Die Kenntnis von  $X(s)$  schirmt die Vergangenheit ab.

In diesem Kapitel werden wir immer voraussetzen, dass der Prozess homogen ist, dass also die Prozesscharakteristik nicht von der Zeit selber abhängt. Ein gegebener Systemzustand führt immer zu derselben weiteren zeitlichen Entwicklung, egal wann dieser Zustand eintritt.

Einen kontinuierlichen Markov-Prozess kann man sich also so vorstellen: Das System bleibt eine gewisse Wartezeit  $T_i$  im Zustand  $i$ , dann springt es zu einem neuen Zustand  $k$ , verbleibt dort wieder eine Wartezeit  $T_k$ , springt wieder in den nächsten Zustand, etc. Abbildung 4.1 zeigt eine typische Trajektorie eines Markov-Prozesses.

Die Übergänge von einem Zustand  $i$  in einen anderen Zustand  $j$  können wir nun, ganz analog wie im Falle von Markov-Ketten, mit einer Übergangswahrscheinlichkeit  $p_{ij}$  versehen. Dabei bezeichnet  $p_{ij}$  die Wahrscheinlichkeit, beim nächsten Übergang vom Zustand  $i$  in den Zustand  $j$  überzugehen, unabhängig davon, *wann* dieser Übergang stattfindet. Es gilt wieder  $\sum_j p_{ij} = 1$ . Im Gegensatz zu Markov-Ketten setzt man aber  $p_{ii} = 0$  für alle  $i$ , denn *wenn* wir den Zustand wechseln, können wir ja nicht im Zustand selber bleiben.

Als zusätzliches Element für einen zeitkontinuierlichen Prozess muss Information über die Wartezeiten  $T_i$  bereitgestellt werden. Dies geschieht durch sog. Wartezeitparameter  $\lambda_i = 1/E(T_i)$ , d.h. die Kehrwerte der mittleren Wartezeiten. Die Einheit von  $\lambda_i$  ist also  $1/\text{Zeit}$  und  $\lambda_i$  ist eine *Rate*, mit der der Zustand  $i$  verlassen wird. Für kleine  $\Delta t$  ist  $\lambda_i \cdot \Delta t$  approximativ die Wahrscheinlichkeit, den Zustand  $i$  zu verlassen.

Zusammenfassend braucht man für die Beschreibung des Markov-Prozesses also

1. die Angabe der Sprungwahrscheinlichkeiten  $p_{ij}$ . Dies ist eine  $N \times N$ -Matrix
2. die Angabe der Wartezeitparameter  $\lambda_i, i = 1, \dots, N$

## 4.2 Aufenthaltsdauer- und Wartezeitverteilung eines Markov-Prozesses

Bevor wir die Dynamik des Markov-Prozesses näher untersuchen, möchten wir noch kurz die Frage untersuchen, welche Verteilung die Aufenthaltsdauer in einem bestimmten Zustand, respektive die Wartezeit bis zum nächsten Sprung, hat.

Wir betrachten dazu einen beliebigen vorgegebenen Zustand. Sei  $\lambda$  die Rate, mit der dieser Zustand verlassen wird und  $T$  die Aufenthaltsdauer in diesem Zustand.  $T$  ist eine Zufallsvariable, von der wir bereits wissen, dass ihr Mittelwert  $E(T) = 1/\lambda$  ist.

Wir nehmen an, dass seit dem Sprung in den Zustand hinein schon eine Zeit  $t > 0$  vergangen ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass unter dieser Voraussetzung der Sprung aus dem Zustand hinaus im folgenden Zeitintervall  $[t, t + \Delta t]$  stattfinden wird, wobei  $\Delta t$  ein endlicher Zeitschritt ist, und damit die Aufenthaltsdauer  $T$  im Zustand im Intervall  $[t, t + \Delta t]$  liegt ist

$$P(T \leq t + \Delta t | T > t) = \frac{P(\{T \leq t + \Delta t\} \cap \{T > t\})}{P(T > t)} = \frac{P(t < T \leq t + \Delta t)}{P(T > t)}$$

Markov-Prozesse sind gedächtnislos: Die Zukunft gegeben die Gegenwart hängt nicht von der Vergangenheit ab. Daher darf die Wahrscheinlichkeit mit der man den Zustand verlässt nicht von der bisherigen Zeit abhängen:  $P(T \leq t + \Delta t | T > t)$  muss also unabhängig von der Zeit  $t$  sein. Für kleine  $\Delta t$  ist (für eine Konstante  $c$ ):  $P(T \leq t + \Delta t | T > t) \approx c\Delta t$ .

Dies lässt sich unter Zuhilfenahme der Verteilungsfunktion  $F$  der Zufallsvariablen  $T$  auch schreiben als

$$\frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{1 - F(t)} \approx c\Delta t,$$

bzw.

$$\frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \approx c(1 - F(t))$$

Für infinitesimal kleine  $\Delta t$  ergibt sich die folgende gewöhnliche Differentialgleichung für  $F(t)$ :

$$\frac{dF(t)}{dt} = c(1 - F(t))$$

mit der Lösung

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - e^{-ct}, & t \geq 0 \end{cases}$$



## 4 Zeitkontinuierliche Markov-Prozesse

Dies ist gerade die Verteilungsfunktion einer exponentialverteilten Zufallszahlen  $Exp(c)$ . Da wir ausserdem angenommen haben, dass  $E(T) = \frac{1}{\lambda}$ , gilt  $c = \lambda$ .

Für einen Markov-Prozess gilt wegen der Gedächtnislosigkeit ferner, dass es keine Rolle spielt, wie lange der Prozess schon im beobachteten Zustand ist. Deswegen ist auch, völlig unabhängig davon, wann der Sprung in den Zustand stattgefunden hat, die Wartezeit bis zum nächsten Sprung aus dem Zustand heraus, ebenfalls eine Exponentialverteilung  $Exp(\lambda)$ : die nach einer bestimmten Wartezeit *noch verbleibende* Wartezeit hat die selbe Verteilung wie die Wartezeit selbst.

Zusammengefasst: Aus der Gedächtnislosigkeit eines Markov-Prozesses folgt, dass die Aufenthaltsdauer in einem beliebigen Zustand  $i$ , respektive die Wartezeit bis zum nächsten Sprung aus dem Zustand  $i$  heraus, exponentialverteilt mit dem oben eingeführten Wartezeitparameter  $\lambda_i$  ist, wobei  $1/\lambda_i$  die mittlere Aufenthaltsdauer im Zustand  $i$ , respektive die mittlere Wartezeit bis zum Sprung aus dem Zustand  $i$ , bezeichnet.

### 4.3 Raten- und Generatorenmatrizen

Die beiden Grössen  $\lambda_i$  (Rate mit der Zustand  $i$  verlassen wird) und  $p_{ij}$  (Wahrscheinlichkeit, dass ein Sprung von  $i$  nach  $j$  stattfindet, wenn  $i$  verlassen wird) beschreiben (mit dem Anfangszustand) vollständig einen Markov-Prozess. Beide Grössen können zusammengefasst werden. Die *Übergangsrate*  $r_{ij}$  ist definiert durch

$$r_{ij} = p_{ij}\lambda_i$$

und bezeichnet die Rate, mit der der Prozess von  $i$  nach  $j$  springt. Die Wahrscheinlichkeit, in einem Zeitintervall  $\Delta t$  von  $i$  nach  $j$  zu springen, ist dann für kleines  $\Delta t$  ungefähr  $r_{ij} \cdot \Delta t$ . Alle Übergangsraten zusammen ergeben die *Ratenmatrix*

$$\mathbf{R} = (r_{ij})$$

Man beachte dass die Hauptdiagonalelemente von  $\mathbf{R}$  verschwinden, d.h.  $r_{ii} = 0$  für alle  $i$ .

Mit der Angabe der Ratenmatrix ist der Markov-Prozess vollständig bestimmt<sup>1</sup>. Alle kontinuierlichen Markov-Prozesse auf endlichen Zustandsräumen mit nichtverschwindenden Aufenthaltszeiten können so beschrieben werden.

Ein zeitkontinuierlicher Markov-Prozess kann in einem *Ratendiagramm* auf einfache Weise graphisch dargestellt werden (vgl. Abb. 4.2). Mögliche Übergänge werden durch Pfeile gekennzeichnet. Die Übergangsraten  $r_{ij}$  werden als Parameter an die Pfeile geschrieben. Übergänge mit  $r_{ij} = 0$  werden weggelassen. Im Unterschied zu den zeitdiskreten Markov-Prozessen gibt es hier keine Pfeile, die von einem Zustand auf sich selbst zeigen.

---

<sup>1</sup> Strikt genommen ist noch nicht nachgewiesen, dass ein so beschriebener Prozess auch tatsächlich ein Markov-Prozess nach der ursprünglichen Definition ist. Dieser Beweis ist nicht ganz einfach. Es wird auf die weiterführende Literatur verwiesen.

#### 4 Zeitkontinuierliche Markov-Prozesse

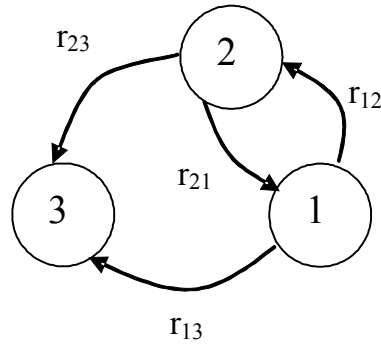


Abbildung 4.2: Graphische Darstellung eines kontinuierlichen Markov-Prozesses mit drei Zuständen. In diesem Beispiel ist der Zustand 3 ein sog. absorbierender Zustand: es gibt Übergänge in den Zustand 3 hinein, aber keine mehr aus ihm heraus.

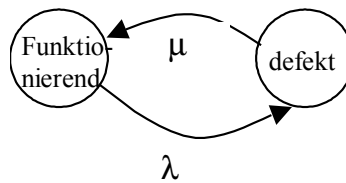


Abbildung 4.3: Ratendiagramm einer Maschine mit den Zuständen “funktionierend” und “defekt”

Die Dynamik eines solchen Prozesses kann man sich veranschaulichen, indem man sich ein Teilchen vorstellt, das in diesem Ratendiagramm wandern kann. Zu jedem Zeitpunkt befindet es sich in genau einem Zustand. Die Übergangsrate zu einem anderen Zustand ist durch die Matrixelemente  $r_{ij}$  ( $i \neq j$ ) gegeben.

**Beispiel** Wir betrachten eine Maschine, die die zwei Zustände “funktionierend” und “defekt” hat. Die mittlere Aufenthaltsdauer im Zustand “funktionierend” sei durch einen Wartezeitparameter  $\lambda$  beschrieben. Wenn die Maschine defekt ist, wird sie repariert. Die mittlere Reparaturzeit sei durch einen Wartezeitparameter  $\mu$  beschrieben. Dieses System soll als zeitkontinuierlicher Markov-Prozess modelliert werden.

Die Ratenmatrix dieses Prozesses ist gegeben durch

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$$

Das Ratendiagramm ist in Abbildung 4.3 dargestellt.

Aus der Ratenmatrix  $\mathbf{R}$  eines Markov-Prozesses lässt sich die sogenannte *Generatormatrix*  $\mathbf{Q}$  ableiten. Sie ergibt sich, indem man bei der Ratenmatrix die Diagonalelemente, die

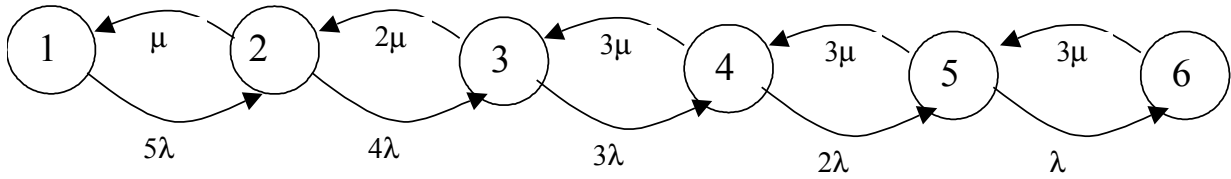


Abbildung 4.4: Ratendiagramm eines Maschinenparks mit 5 Maschinen und 3 Monteuren.

ja Null sind, ersetzt durch

$$q_{ii} = -\sum_{j \neq i} r_{ij} = -\sum_{j \neq i} p_{ij} \lambda_i = -\lambda_i$$

Damit hat die Generatormatrix die Eigenschaft, dass in jeder Zeile die Summe der Matrixelemente gerade 0 ergibt.

**Beispiele** 1. Die Generatormatrix zum Prozess aus Abb. 4.3 ist gegeben durch

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

2. Wir betrachten einen Maschinenpark aus fünf identischen, unabhängigen Maschinen, die jeweils mit einer Ausfallrate  $\lambda$  defekt werden. Eine defekte Maschine wird von Monteuren mit einer Reparaturrate  $\mu$  wieder in Gang gesetzt. Es stehen drei Monteure zur Verfügung; an einer defekten Maschine kann jeweils nur ein einzelner Monteur arbeiten. Die Abbildung 4.4 zeigt das Ratendiagramm des Prozesses. Im Zustand 1 sind alle Maschinen intakt, im Zustand 2 ist eine Maschine defekt, ..., im Zustand 6 sind alle fünf Maschinen defekt.

In diesem Beispiel lautet die Generatormatrix:

$$\begin{pmatrix} -5\lambda & 5\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & -\mu - 4\lambda & 4\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & -2\mu - 3\lambda & 3\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\mu & -3\mu - 2\lambda & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3\mu & -3\mu - \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3\mu & -3\mu \end{pmatrix}$$

## 4.4 Zustandsverteilungen

Nachdem das Verhalten einer einzelnen Trajektorie bekannt ist, untersuchen wir nun, wie sich das System insgesamt dynamisch verhält. Wir nehmen an, dass der Markov-Prozess homogen ist, einen diskreten Zustandsraum  $S = \{1, 2, \dots, N\}$  besitzt, und durch eine Ratenmatrix  $\mathbf{R}$  beschrieben wird. Genau wie bei den Markov-Ketten interessiert uns die

#### 4 Zeitkontinuierliche Markov-Prozesse

zeitabhängige Zustandsverteilung des Prozesses, gegeben durch den Wahrscheinlichkeitsvektor  $\vec{\pi}(t)$ , wobei die Komponenten  $\pi_i(t)$  angeben, mit welcher Wahrscheinlichkeit das System zur Zeit  $t$  im Zustand  $i$  ist. Die Anfangsverteilung sei durch einen Vektor  $\vec{\pi}(0)$  gegeben.

Die Herleitung ist am anschaulichsten in einem Teilchenbild. Wir nehmen eine sehr grosse Anzahl  $M$  von Teilchen und verteilen diese gemäss der Anfangsverteilung  $\vec{\pi}(0)$  zur Zeit 0 auf die einzelnen Zustände. Im Zustand  $i$  befinden sich dann  $M_i(0) = M\pi_i(0)$  Teilchen. Stellvertretend für alle anderen Zustände analysieren wir nun, wie sich die Anzahl Teilchen im Zustand 1 über einen kleinen Zeitschritt  $\Delta t$  ändert:

$$\begin{aligned}\Delta M_1 &= M_1(\Delta t) - M_1(0) \\ &= \Delta t (r_{21}M_2(0) + r_{31}M_3(0) + \cdots + r_{N1}M_N(0) - r_{12}M_1(0) - r_{13}M_1(0) - \cdots - r_{1N}M_1(0)) \\ &= \Delta t (q_{21}M_2(0) + q_{31}M_3(0) + \cdots + q_{N1}M_N(0) + q_{11}M_1(0))\end{aligned}$$

In der zweiten Zeile geben die Terme mit Pluszeichen den Fluss von Teilchen aus anderen Zuständen in den Zustand 1 an, die Terme mit Minuszeichen den Abfluss von Teilchen aus Zustand 1 in andere Zustände. Analoge *Bilanzgleichungen* gelten, analog zum Zustand 1, auch für alle anderen Zustände.

Dividiert man nun die Bilanzgleichungen durch die Gesamtanzahl  $M$  von Teilchen und führt einen Grenzübergang  $\Delta t \rightarrow 0$  zu infinitesimalen Zeitschritten durch, so erhält man das folgende System von Differentialgleichungen:

$$\frac{d}{dt}\vec{\pi}(t) = \vec{\pi}(t)\mathbf{Q} \quad (4.1)$$

Mittels Integration ergibt sich die Lösung einfach als

$$\vec{\pi}(t) = \vec{\pi}(0) \exp(\mathbf{Q}t) \quad (4.2)$$

Dabei benötigen wir die *Matrix-Exponentialfunktion*. Für eine symmetrische Matrix  $A$  definieren wir:

$$e^A = \exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

Für eine  $1 \times 1$ -Matrix erhalten wir wieder die gewöhnliche Exponentialfunktion. In **R** ist die Matrix-Exponentialfunktion als `expm()` im Paket `expm` implementiert. Einfaches Anwenden von `exp()` auf eine Matrix exponentiert die Elemente der Matrix komponentenweise!

Gleichung (4.2) beschreibt die Dynamik des homogenen Markov-Prozesses mit endlichem Zustandsraum vollständig. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung zu einem beliebigen Zeitpunkt errechnet sich aus der Anfangsverteilung und Kenntnis der Generatormatrix  $\mathbf{Q}$  mittels (4.2).

Die Lösung (4.2) kann auch auf anderem Wege abgeleitet werden. Dazu teilen wir die Zeit  $[0, t]$  in sehr viele kleine Intervalle mit Länge  $\Delta t = t/n$  (mit grossem  $n$ ) ein und modellieren den eigentlich zeitkontinuierlichen Markov-Prozess als eine Markov-Kette. Zunächst wird

die Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix  $\mathbf{P}(\Delta t)$  für einen kleinen Zeitschritt berechnet. Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{für } i \neq j : p_{ij} &= r_{ij}\Delta t = q_{ij}\Delta t \\ \text{für } i = j : p_{ii} &= 1 - \sum_{j \neq i} p_{ij} = 1 - \sum_{j \neq i} r_{ij}\Delta t = 1 - \sum_{j \neq i} q_{ij}\Delta t = 1 + q_{ii}\Delta t \end{aligned}$$

also zusammengefasst:  $\mathbf{P}(\Delta t) = \mathbf{I} + \Delta t \cdot \mathbf{Q}$  mit der  $N \times N$ -Einheitsmatrix  $\mathbf{I}$ .

Für eine Markov-Kette kennen wir die Lösung für die Zeitentwicklung bei gegebener Anfangsverteilung  $\vec{\pi}(0)$ :

$$\vec{\pi}(t) = \vec{\pi}(n \cdot \Delta t) = \vec{\pi}(0) \cdot (\mathbf{P}(\Delta t))^n$$

Mit dem oben abgeleiteten Ausdruck für  $\mathbf{P}(\Delta t)$  ergibt sich dann

$$\vec{\pi}(t) = \vec{\pi}(0) \cdot \left( \mathbf{I} + \mathbf{Q} \cdot \left( \frac{t}{n} \right) \right)^n$$

und im Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  gerade wieder die Formel 4.2.

## 4.5 Aufenthaltsdauern und Kosten für endlichen Zeithorizont

Wir betrachten hier einen homogenen Markov-Prozess mit vorgegebener Anfangsverteilung  $\vec{\pi}(0)$  und Generatormatrix  $\mathbf{Q}$  über einen endlichen Zeitraum  $[0, T]$ . Die Aufenthaltsdauer  $T_j$  in einem bestimmten Zustand  $j$  ist eine interessante Zufallsvariable, deren Erwartungswert im Folgenden bestimmt werden soll. Wir gehen dazu vor wie im Fall der diskreten-Markov-Ketten. Dann ergibt sich in völlig analoger Weise, unter Benutzung der dynamischen Gleichung (4.2), der Aufenthaltsdauervektor:

$$\vec{N}(T) = \vec{\pi}(0) \cdot \mathbf{M}(T) \quad (4.3)$$

mit einer Aufenthaltsdauermatrix  $\mathbf{M}(T)$ , die im kontinuierlichen Fall definiert ist als

$$\mathbf{M}(T) = \int_0^T e^{\mathbf{Q}t} dt. \quad (4.4)$$

Die Exponentialfunktion einer Matrix liefert wieder eine Matrix. Das Integral in (4.4) ist komponentenweise zu lesen.

**Beispiel** Gegeben sei wieder eine Maschine mit den zwei Zuständen 1 = “funktionierend” und 2 = “defekt”. Eine Trajektorie des Markov-Prozesses ist eine Abfolge von zufälligen Zeiten, in denen die Maschine funktioniert (Laufzeit) und zufälligen Zeiten, in denen die

#### 4 Zeitkontinuierliche Markov-Prozesse

Maschine defekt ist (Reparaturzeit). Die Laufzeit sei exponentialverteilt mit einem Mittelwert von 20 Tagen, die Reparaturzeit exponentialverteilt mit einem Mittelwert von 2 Tagen. Zur Zeit  $t = 0$  funktioniert die Maschine. Gesucht ist die erwartete Laufzeit der Maschine in den nächsten 50 Tagen.

Die Generatormatrix des Problems lautet

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -0.05 & 0.05 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

Man kann ausrechnen – zum Beispiel mit einem Computeralgebrasystem<sup>2</sup> – dass

$$\exp(t \cdot \mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{11} e^{-\frac{11}{20}t} + \frac{10}{11} & -\frac{1}{11} e^{-\frac{11}{20}t} + \frac{1}{11} \\ -\frac{10}{11} e^{-\frac{11}{20}t} + \frac{10}{11} & \frac{10}{11} e^{-\frac{11}{20}t} + \frac{1}{11} \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe von (4.4) ergibt sich die Aufenthaltsdauermatrix

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(T) &= \int_0^T e^{\mathbf{Q}t} dt \\ &= \begin{pmatrix} \int_0^T \frac{1}{11} e^{-\frac{11}{20}t} + \frac{10}{11} dt & \int_0^T -\frac{1}{11} e^{-\frac{11}{20}t} + \frac{1}{11} dt \\ \int_0^T -\frac{10}{11} e^{-\frac{11}{20}t} + \frac{10}{11} dt & \int_0^T \frac{10}{11} e^{-\frac{11}{20}t} + \frac{1}{11} dt \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{10}{11} T - \frac{20}{121} e^{-\frac{11}{20}T} + \frac{20}{121} & \frac{1}{11} T + \frac{20}{121} e^{-\frac{11}{20}T} - \frac{20}{121} \\ \frac{10}{11} T + \frac{200}{121} e^{-\frac{11}{20}T} - \frac{200}{121} & \frac{1}{11} T - \frac{200}{121} e^{-\frac{11}{20}T} + \frac{200}{121} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Konkret für  $T = 50$  ergibt sich:

$$\mathbf{M}(50) = \begin{pmatrix} 45.6 & 4.4 \\ 43.8 & 6.2 \end{pmatrix}$$

Die gesuchte Laufzeit in den nächsten 50 Tagen bei funktionierendem Anfangszustand ist demnach 45.6 Tage.

Auch für zeitkontinuierliche Markov-Prozesse können wieder Kostenmodelle entwickelt werden, die analog zu den Kostenmodellen für diskrete Markov-Prozesse sind.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass Kosten pro Zeit anfallen, die nur vom Zustand des Systems zur Zeit  $t$  abhängen, d.h. zu jedem Zustand  $j$  des Zustandsraumes gehört eine Kostenzahl  $c_j$ , die dort anfallenden Kosten pro Zeiteinheit. Die Gesamtkosten  $K$  ergeben sich, in dem man die Aufenthaltsdauern in den verschiedenen Zuständen mit den zugehörigen Kosten pro Zeiteinheit multipliziert und über alle Zustände addiert. Dann ergibt sich, in völliger Analogie zum entsprechenden Kapitel für Markov-Ketten für die mittleren erwarteten Kosten im endlichen Zeitraum  $[0, T]$ :

$$E(K) = \vec{N}(T) \cdot \vec{c}' \quad (4.5)$$

---

<sup>2</sup> Man erhält allgemein für  $A = \begin{pmatrix} -a & a \\ b & -b \end{pmatrix}$ , dass  $\exp(t \cdot A) = \begin{pmatrix} \frac{ae^{-at-bt}}{a+b} + \frac{b}{a+b} & -\frac{ae^{-at-bt}}{a+b} + \frac{a}{a+b} \\ -\frac{be^{-at-bt}}{a+b} + \frac{b}{a+b} & \frac{be^{-at-bt}}{a+b} + \frac{a}{a+b} \end{pmatrix}$

## 4 Zeitkontinuierliche Markov-Prozesse

Zu beachten ist, dass  $\vec{N}(T)$  jetzt aber nach (4.3) mithilfe der Aufenthaltsdauermatrix  $\mathbf{M}(T)$  nach (4.4) berechnet wird, wie sie für den zeitkontinuierlichen Fall gilt.

Ausserdem können wir wieder die Kosten, die bei *Übergängen* von einem Zustand in einen anderen entstehen, betrachten. Diese seien wieder durch eine Übergangskostenmatrix  $\mathbf{U}$  definiert, wobei das Matrixelement  $u_{ij}$  die Kosten eines Übergangs vom Zustand  $i$  in den Zustand  $j$  beschreibt.

Die bei einem solchen Modell während einer endlichen Laufzeit  $t = [0, T]$  anfallenden Kosten sind natürlich wieder eine Zufallsvariable, die davon abhängt, wie die jeweilige Trajektorie des Prozesses verläuft. Wir interessieren uns für den Erwartungswert der anfallenden Kosten.

Ohne alle Zwischenschritte anzugeben, skizzieren wir hier nur den Lösungsweg. Der Prozess ist während der Zeit  $N_i(T)$  im Zustand  $i$ . Dabei wird der Aufenthaltsdauervektor aus (4.3) bestimmt und hängt von der Anfangsverteilung und der Aufenthaltsdauermatrix  $\mathbf{M}(T)$  aus (4.4) ab. Während der Aufenthaltszeit im Zustand  $i$  springt der Prozess mit einer Rate  $r_{ij}$  in den Zustand  $j$ . Dabei entstehen jedes Mal die Kosten  $u_{ij}$ . Die gesamten Kosten ergeben sich, wenn man über alle Zustände  $i, j$  summiert. Damit erhält man als Endresultat:

$$E(K) = \vec{\pi}(0) \cdot \mathbf{M}(T) \cdot \vec{c}' = \vec{N}(T) \vec{c}'$$

wobei  $\vec{c}'$  ein *Spaltenvektor* ist, der sich durch die Zeilensummen der Matrix

$$R \circ U = (r_{ij} u_{ij})$$

ergibt. Mit anderen Worten: Man bilde zunächst die komponentenweise Multiplikation  $R \circ U$  der Ratenmatrix  $\mathbf{R}$  mit der Kostenmatrix  $\mathbf{U}$ . Von der so erhaltenen Matrix bilde man die Summe jeder Zeile. Dies ergibt den Kostenvektor  $\vec{c}'$ , der benutzt wird, um mit der Gleichung (4.5) die erwarteten Kosten in der Gesamtlaufzeit  $[0, T]$  zu berechnen.

## 4.6 Grenzwertverhalten

In diesem Abschnitt interessieren wir uns für das Langzeitverhalten des Markov-Prozesses. Von spezieller Bedeutung ist die asymptotische Verteilung, d.h. der Grenzwert

$$\vec{\pi}(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \vec{\pi}(t)$$

Wieder sind die drei Fragen wichtig:.

1. Unter welchen Umständen existiert dieser Grenzwert?
2. Ist dieser Grenzwert eindeutig?
3. Wie kann der Grenzwert berechnet werden?

## 4 Zeitkontinuierliche Markov-Prozesse

Für die Existenz gilt: Es existiert eine eindeutige asymptotische Verteilung, wenn der Markovprozess irreduzibel ist. Ein Markovprozess ist dann irreduzibel, wenn je zwei Zustände durch eine Folge von Ratenpfeilen verbunden sind. Bei den Markov-Prozessen in kontinuierlicher Zeit gibt es keine periodischen Lösungen, daher reicht hier die Irreduzibilität aus. Wieder ist die asymptotische Verteilung dann gleich der (einzigen) stationären Verteilung  $\vec{\pi}^*$ . Diese ist dadurch charakterisiert, dass sie sich nicht mehr mit der Zeit ändert. Im Teilchenbild sind dann alle Bilanzen im Gleichgewicht: in jeden Zustand fließen genauso viele Teilchen hinein wie hinaus. Man kann also in Gleichung (4.1) die linke Seite einfach Null setzen und erhält damit das folgende lineare Gleichungssystem

$$\vec{\pi}^* \mathbf{Q} = \vec{0}$$

Wie bei den zeitdiskreten Markov-Ketten erhält man keine eindeutige Lösung. Durch Normierung auf Gesamtwahrscheinlichkeit 1 ergibt sich die stationäre Verteilung.

Wie im Fall der diskreten Markov-Ketten kann das asymptotische Verhalten auch aufgrund einer Eigenwertanalyse abgeleitet werden. Die stationäre Verteilung entspricht einem Eigenvektor von  $\mathbf{Q}'$ , der Transponierten der Generatormatrix zum Eigenwert 0 (wieder so normiert, dass die Summe der Komponenten eins ergibt). Dies ist auch aus der allgemeinen Lösung (4.2) zu sehen. Die Generatormatrix hat die Eigenschaft, dass ihre Eigenwerte höchstens 0 sind (ohne Beweis). Führt man eine Eigenwertbasis ein, so sterben dann in der Lösung (4.2) für lange Zeiten  $t$  alle Beiträge mit einem negativen Eigenwert aus und nur der Anteil entlang des Eigenvektors zum Eigenwert 0 überlebt in der Exponentialfunktion. Übrigens erlaubt das Eigenwertspektrum von  $\mathbf{Q}'$  auch eine Abschätzung, wie schnell der stationäre Zustand erreicht wird. Dies wird durch den (negativen) Eigenwert  $\tilde{\lambda}$  beeinflusst, der am nächsten bei 0 liegt. Er liefert einen Anteil, der wie  $\exp(-|\tilde{\lambda}|t)$  abfällt und nach einer Faustregel nach einer Zeit  $5/|\tilde{\lambda}|$  vernachlässigt werden kann.

## 4.7 Kostenmodelle asymptotisch

Kosten für einen unendlichen Zeithorizont behandeln wir analog zum Fall von Markov-Ketten mit diskreter Zeit. Der Fall zustandsabhängiger Kosten wird wieder durch einen Vektor  $\vec{c}$  beschrieben, wobei die Komponenten  $c_i$  die Kosten sind, die pro Zeit anfallen, wenn der Prozess in dem Zustand  $i$  ist. Im stationären Grenzfall sind dann die mittleren Kosten pro Zeiteinheit  $K_t$  gegeben durch

$$\mathbb{E} \left( \frac{dK_t}{dt} \right) = \vec{\pi}^* \cdot \vec{c}'$$

Dies ist die gewichtete Summe der Einzelzustandskosten pro Zeiteinheit, gewichtet mit ihren Wahrscheinlichkeiten. Die Einheit von  $\frac{dK_t}{dt}$  ist Fr/Zeit.

Für den Fall von übergangsabhängigen Kosten mit einer Übergangskostenmatrix  $U$  er-



#### 4 Zeitkontinuierliche Markov-Prozesse

geben sich in analoger Weise mittlere Kosten pro Zeiteinheit

$$\mathbb{E} \left( \frac{dK_t}{dt} \right) = \vec{\pi}^* \cdot \vec{c}'$$

mit dem wie am Ende von Abschnitt 4.5 aus  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{U}$  berechneten Vektor  $\vec{c}'$ .

# 5 Spezielle Themen

## 5.1 Markov Chain Monte Carlo

Man kann mit Hilfe von Markov-Ketten nicht nur Prozesse mit Abhängigkeiten untersuchen, man kann auch Markov-Ketten dazu benutzen, aus Verteilungen zu simulieren, bei denen eine direkte Erzeugung von iid-Zufallszahlen schwierig ist. Dies ist zum Beispiel dann der Fall, wenn die Wahrscheinlichkeitsfunktion oder Dichte nur bis auf eine Konstante bekannt ist. Häufig tritt dieser Fall in der *Bayes-Statistik* auf, wo man zur vollständigen Bestimmung einer A-Posteriori-Verteilung häufig eine komplizierte Summe oder ein Integral ausrechnen müsste. Mithilfe von *Markov-Chain-Monte-Carlo-Methoden* (kurz: *MCMC*) kann man aber (in der Regel abhängige) Zufallszahlen aus einer Verteilung simulieren, ohne die Konstante kennen zu müssen.

MCMC-Methoden sind sehr weit verbreitet und wurden u.a. von den Herausgebern der Zeitschrift *Computing in Science and Engineering* im Jahre 2000 als einer der zehn Algorithmen ausgewählt, die ihrer Ansicht nach die grösste Bedeutung für die Wissenschaft und Technik im 20. Jahrhundert hatten.

Wir werden uns hier nur mit dem Fall einer diskreten Zufallsvariable mit nur endlich vielen Werten beschäftigen, obwohl die Methode auch für diskrete Zufallsvariablen mit abzählbarem Wertebereich und für stetige Zufallsvariablen (auch in höheren Dimensionen) anwendbar ist.

Die Grundidee ist folgende: Für eine Verteilung  $\vec{\pi}$  auf der endlichen Menge  $S = \{1, \dots, N\}$  möchte man gerne

$$E(g(X)) = \sum_{i=1}^N g(i)\pi_i$$

berechnen, wobei  $X$  eine Zufallsvariable mit Verteilung  $\vec{\pi}$  ist. Kann man das Problem nicht analytisch lösen (was bei Verteilungen auf endlichen Mengen meistens leicht ist), so kann man aus der Verteilung  $\vec{\pi}$  vielleicht eine unabhängig identisch verteilte Stichprobe  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ziehen und wegen des (*starken*) *Gesetzes der grossen Zahlen*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g(X_k) = E(g(X))$$

konvergiert das arithmetische Mittel der  $X_k$  mit Wahrscheinlichkeit 1 gegen  $E(g(X))$ , wenn die Stichprobe nur gross genug ist. Nehmen wir nun an, wir kennen  $\vec{\pi}$  nicht vollständig,

## 5 Spezielle Themen

sondern nur bis auf eine Konstante  $c > 0$ , d.h. wir kennen nur

$$\tilde{\pi} = (\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \dots, \tilde{\pi}_N),$$

so dass

$$\begin{aligned}\vec{\pi} &= (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N) \\ &= (c\tilde{\pi}_1, c\tilde{\pi}_2, \dots, c\tilde{\pi}_N) \\ &= c\tilde{\pi}\end{aligned}$$

gilt. Da  $c$  nur die Funktion hat, die Verteilung so zu normieren, dass die Summe der Komponenten 1 ergibt, lässt sich im Falle nur endlich vieler möglicher Werte natürlich  $c$  direkt bestimmen als:

$$c = \left( \sum_{i=1}^N \tilde{\pi}_i \right)^{-1}.$$

Im Falle abzählbar vieler verschiedener Werte oder einer stetigen Verteilung wäre aber bereits eine unendliche Reihe oder ein Integral zu berechnen, was schwierig sein kann.

**Beispiel** Wir betrachten eine Verteilung auf  $S = \{1, 2, \dots, 10\}$  für die die Wahrscheinlichkeit, dass ein Wert  $i$  realisiert wird, proportional zu  $i$  sein soll, also

$$\pi_i = P(X = i) = c \cdot i$$

für  $i = 1, \dots, 10$ . Interessiert sind wir an  $E(X^2)$ . Gegeben ist also nur

$$\begin{aligned}\tilde{\pi} &= (\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \dots, \tilde{\pi}_N) \\ &= (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10).\end{aligned}$$

$c$  muss nun so gewählt werden, dass

$$\pi_i = c\tilde{\pi}_i$$

und

$$\sum_{i=1}^N \pi_i = \sum_{i=1}^N c\tilde{\pi}_i = 1.$$

Man kann in diesem Fall leicht ausrechnen, dass  $c = 1/55$  sein muss, und damit erhalten wir

$$E(X^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{55} + 2^2 \cdot \frac{2}{55} + \dots + 10^2 \cdot \frac{10}{55} = \frac{3025}{55} = 55.$$

Wir wollen nun annehmen, dass wir nicht in der Lage sind,  $c$  auszurechnen. Können wir trotzdem  $E(X^2)$  durch Simulationen bestimmen?

## 5 Spezielle Themen

Erinnern wir uns nun an den *Ergodensatz für Markov-Ketten* aus dem letzten Abschnitt. Dieser besagt, dass für die Grenzverteilung einer aperiodischen und irreduziblen Markov-Kette mit Wahrscheinlichkeit 1 gilt:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T+1} \sum_{t=0}^T g(X_t) = \sum_{i=1}^N g(i) \pi_i(\infty),$$

d.h. wenn wir eine Markov-Kette konstruieren können, die die gesuchte Verteilung als Grenzverteilung besitzt, so können wir  $E(g(X))$  schätzen, in dem wir einen genügend langen Längsschnitt einer Realisation der Markov-Kette betrachten.

Natürlich sind die Zustände einer Markov-Kette nicht unabhängig, weshalb man in der Regel im Vergleich zu einem iid-Sample eine wesentlich grössere Anzahl Beobachtungen braucht. Ausserdem wird die stationäre Verteilung nur für grosse Zeitpunkte erreicht, d.h. Abhängig vom Startzustand kann es eine mehr oder weniger lange Einschwingphase (engl. *burn in*) geben, während derer man noch weit von der stationären Verteilung entfernt ist. Der grosse Vorteil ist, dass man eine irreduzible aperiodische Markov-Kette mit gewünschter stationärer Verteilung konstruieren kann, ohne die Normierungskonstante  $c$  zu kennen, d.h. wenn man nur  $\tilde{\pi}$  und nicht  $\vec{\pi}$  kennt.

Gesucht ist also eine aperiodische, irreduzible Markov-Kette mit stationärer Verteilung  $\vec{\pi}$ . In diesem Fall konvergieren die  $\vec{\pi}(t)$  unabhängig vom Startzustand gegen  $\vec{\pi}$ , wobei allerdings die Geschwindigkeit, mit der dies geschieht, in der Regel schon von der Startverteilung abhängt. Gesucht ist also eine Übergangsmatrix  $\mathbf{P}$  mit

$$\vec{\pi} \cdot \mathbf{P} = \vec{\pi}, \quad (5.1)$$

so dass die zugehörige Markov-Kette aperiodisch und irreduzibel ist. Wir können sogar eine Markov-Kette konstruieren, die die sogenannte *Detailed-Balance-Bedingung* erfüllt. Diese verlangt, dass für alle  $i, j \in S$  gilt:

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}, \quad (5.2)$$

was man auch als

$$P(X_t = i) \cdot P(X_{t+1} = j | X_t = i) = P(X_t = j) \cdot P(X_{t+1} = i | X_t = j)$$

oder

$$P(X_t = i, X_{t+1} = j) = P(X_t = j, X_{t+1} = i)$$

schreiben kann. Diese Bedingung bedeutet also, dass (nach der Einschwingphase) zu jedem Zeitpunkt und für alle  $i$  und  $j$  die (unbedingte) Wahrscheinlichkeit, dass ein Sprung von  $i$  nach  $j$  stattfindet, genau so gross ist wie die Wahrscheinlichkeit für einen Sprung von  $j$  nach  $i$ . Bedingung (5.2) impliziert (5.1), denn für festes  $j$  erhält man bei Summation von (5.2) über alle  $i$

$$\sum_{i=1}^N \pi_i p_{ij} = \sum_{i=1}^N \pi_j p_{ji},$$

## 5 Spezielle Themen

bzw.

$$\pi_j = \pi_j \sum_{i=1}^N p_{ji},$$

und damit (nach Zusammenfassen in einem Vektor für alle  $j$ ):

$$\vec{\pi} \cdot \mathbf{P} = \vec{\pi}.$$

Kann man also eine Matrix  $\mathbf{P}$  finden, so dass (5.2) erfüllt ist, so hat man eine Markov-Kette mit der gewünschten stationären Verteilung. Es gibt im Allgemeinen viele Möglichkeiten, ein  $\mathbf{P}$  zu konstruieren, so dass (5.2) gilt. Wir beschränken uns hier auf eine Konstruktion, die von einer beliebigen<sup>1</sup> aperiodischen, irreduziblen Markov-Kette mit dem selben Zustandsraum  $S$  ausgeht, die aber selbst nicht die gewünschte asymptotische Verteilung besitzen muss. Sei  $\mathbf{Q}$  die Übergangsmatrix so einer Markov-Kette. Wir betrachten nun eine Übergangsmatrix  $\mathbf{P}$ , die aus  $\mathbf{Q}$  hervorgeht, in dem man für  $i \neq j$  geeignete  $\alpha_{ij} \in [0, 1]$  wählt, so dass

$$p_{ij} = q_{ij} \cdot \alpha_{ij}, \quad (5.3)$$

und (5.2) erfüllt ist.  $p_{ii}$  wird dann so gewählt, dass die Zeilensumme 1 ergibt. Man muss  $p_{ii}$  aber gar nicht konkret ausrechnen, denn man kann (5.3) auch so interpretieren:  $q_{ij}$  gibt für die Markov-Kette mit Übergangsmatrix  $\mathbf{Q}$  die Wahrscheinlichkeit an, von  $i$  nach  $j$  zu springen. Für  $p_{ij}$  wird nun  $q_{ij}$  noch mit  $\alpha_{ij}$  multipliziert, d.h. ein Sprung von  $i$  nach  $j$  findet mit kleinerer Wahrscheinlichkeit statt. Dies kann man sich so vorstellen, dass zunächst aus der Markov-Kette mit Übergangsmatrix  $\mathbf{Q}$  ein *Vorschlag* für den nächsten Zustand generiert wird, der dann mit Wahrscheinlichkeit  $\alpha_{ij}$  angenommen wird. Wird er nicht angenommen, verbleibt man in  $i$ .

Es gibt nun verschiedene Ansätze, die  $\alpha_{ij}$  so zu wählen, dass (5.2) gilt. Der einfachste und älteste führt zum sogenannten *Metropolis-Algorithmus*:

$$\alpha_{ij} = \min \left\{ 1, \frac{\pi_j q_{ji}}{\pi_i q_{ij}} \right\}. \quad (5.4)$$

Dieses Verfahren wurde erstmals 1953 von den Physikern Metropolis, Rosenbluth und Teller und deren Ehefrauen veröffentlicht. Hierbei ist zu beachten, dass in (5.4) zwar  $\pi_j$  und  $\pi_i$  auftauchen, man aber nur ihren Quotienten benötigt, der sich wegen

$$\frac{\pi_j}{\pi_i} = \frac{c \cdot \tilde{\pi}_j}{c \cdot \tilde{\pi}_i} = \frac{\tilde{\pi}_j}{\tilde{\pi}_i}$$

auch *ohne Kenntnis von  $c$*  berechnen lässt! Man erhält also folgenden Algorithmus:

---

<sup>1</sup>Die Konstruktion funktioniert für beliebige aperiodische irreduzible Markov-Ketten – allerdings hängen viele Eigenschaften des Verfahrens von der Wahl ab, so z.B. die Geschwindigkeit, mit der die stationäre Verteilung erreicht wird. Wir gehen nicht weiter darauf ein.

## 5 Spezielle Themen

1. Initialisiere  $x_0$  beliebig mit einem der Zustände aus  $S$ .
2. Generiere ausgehend von  $x_t$  einen Vorschlag  $x^*$  aus der Markov-Kette mit Übergangsmatrix  $\mathbf{Q}$ .
3. Setze mit Wahrscheinlichkeit  $\min \left\{ 1, \frac{\pi_{x^*} q_{x_t, x^*}}{\pi_{x_t} q_{x_t, x^*}} \right\}$   $x_{t+1} = x^*$ , ansonsten  $x_{t+1} = x_t$ .
4. Wiederhole Schritte 2 und 3, bis die Realisation der Kette die gewünschte Länge  $T$  hat.

Häufig kann man  $\mathbf{Q}$  als symmetrische Matrix mit  $q_{ij} = q_{ji}$  wählen, d.h. für die zugehörige Markov-Kette ist die bedingte Wahrscheinlichkeit für einen Sprung nach  $j$  bei aktuellem Aufenthalt in  $i$  gleich der bedingte Wahrscheinlichkeit für einen Sprung nach  $i$  bei aktuellem Aufenthalt in  $j$ . In diesem Fall vereinfacht sich (5.4) zu

$$\alpha_{ij} = \min \left\{ 1, \frac{\pi_j}{\pi_i} \right\}.$$

**Beispiel (Fortsetzung):** Wir führen den Algorithmus nun für unser Beispiel von oben durch. Zunächst benötigen wir eine aperiodische, irreduzible Markov-Kette mit Zustandsraum  $S = \{1, 2, \dots, 10\}$ , die die Vorschläge generiert. Wir können folgende Matrix benutzen:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Von den Zuständen 2, 3, ..., 9 aus wird jeweils mit Wahrscheinlichkeit 1/2 der linke oder rechte Nachbarzustand vorgeschlagen, von 1 bzw. 10 aus wird der einzige Nachbar mit Wahrscheinlichkeit 1/2 vorgeschlagen und mit Wahrscheinlichkeit 1/2 wieder der selbe Zustand. Da jeder Zustand von jedem anderen aus erreichbar ist, ist die Markov-Kette irreduzibel, und da einige Werte auf der Diagonale grösser 0 sind, auch aperiodisch. Diese Markov-Kette ist also geeignet, um Vorschläge zu generieren. Ausserdem ist die Matrix  $\mathbf{Q}$  symmetrisch, was eine Vereinfachung bedeutet. Die Matrix kann generiert werden mit:

```
N <- 10
```

```
Q <- matrix(0, nrow=N, ncol=N)
```

## 5 Spezielle Themen

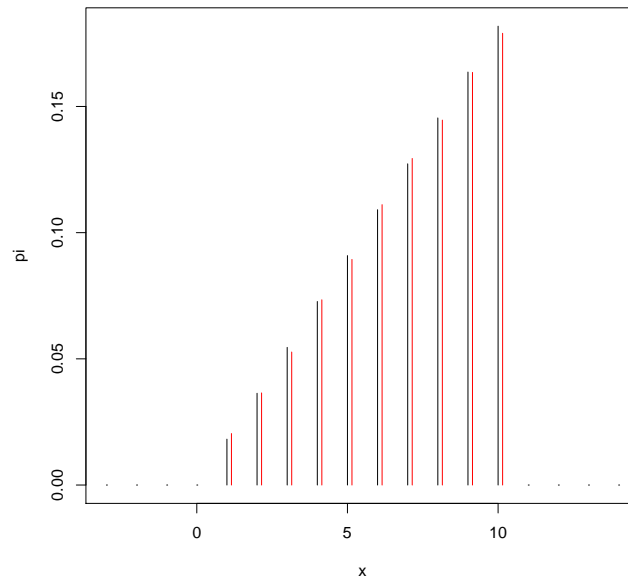


Abbildung 5.1: Stabdiagramm: theoretische Wahrscheinlichkeiten (schwarz) und geschätzte Wahrscheinlichkeiten aus einer Trajektorie (rot)

```
Q[1,1:2] <- 0.5
Q[N,(N-1):N] <- 0.5
for (i in 2:(N-1)) {
  Q[i,i-1] <- 0.5
  Q[i,i+1] <- 0.5
}
```

und wir können Vorschläge erzeugen mit der Funktion:

```
proposal <- function(i) sample(1:N, size=1, prob=Q[i,])
```

$\tilde{\pi} = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$  können wir implementieren durch:

```
unnormalized <- function(x) x*(x<=N)*(x>0)
```

Wir können nun eine Trajektorie der Länge `Nmcmc` generieren, wobei wir den Startwert zufällig aus  $S$  ziehen:

```
Nmcmc <- 10000
mcmc <- rep(NA, Nmcmc)
u <- runif(Nmcmc)
mcmc[1] <- sample(1:N, 1)
```

```

for (i in 2:Nmcmc) {
  xnew <- proposal(mcmc[i-1])
  mcmc[i] <- ifelse( u[i] < min(1, unnormalized(xnew)/unnormalized(mcmc[i-1])) ,
                    xnew,
                    mcmc[i-1])
}

```

Wir erhalten nun eine Trajektorie einer Markov-Kette mit der gewünschten stationären Verteilung. Abbildung 5.1 zeigt die theoretischen Wahrscheinlichkeiten (schwarz) sowie die aus einer Realisation unserer Markov-Kette erhaltenen Schätzungen (rot). Man sieht hier eine recht gute Übereinstimmung. Diese wird in der Regel noch besser, wenn man am Anfang ein Stück der Trajektorie entfernt, um die Burn-In-Phase, in der die Markov-Kette noch von ihrer stationären Verteilung entfernt ist, nicht mit zu berücksichtigen. Allerdings ist es meist nicht so einfach zu sagen, wie lange die Burn-In-Phase dauert.

Um nun  $E(X^2)$  zu schätzen, setzen wir die erhaltenen Zustände unserer Trajektorie in die Funktion  $g(x) = x^2$  ein, summieren die Ergebnisse auf und teilen durch  $Nmcmc$ :

```

> sum(mcmc^2)/Nmcmc
[1] 54.7882

```

Wir erhalten also ein relativ gutes Ergebnis (der theoretische Wert ist 55).

Der oben angegebene Algorithmus lässt sich sehr einfach auch auf den Fall von diskreten Verteilungen mit abzählbar unendlichem Zustandsraum oder stetigen Verteilungen (im letzteren Fall benutzt man Dichten statt Wahrscheinlichkeiten) übertragen. Man muss nur in der Lage sein, aus einem aperiodischen, irreduziblen Markov-Prozess sinnvolle Vorschläge generieren und die für die Bestimmung der Annahmewahrscheinlichkeit nötigen Größen ausrechnen können.

### 5.1.1 Markov Chain Monte Carlo in der bayesianischen Statistik

Wir wollen nun zeigen, wie man die MCMC-Methode verwenden kann um die a-posterior Wahrscheinlichkeit  $P(\Theta|X)$  zu bestimmen. Wir erinnern uns: In der bayesianischen Statistik sind die Parameter Zufallsvariablen und wir sind an der Wahrscheinlichkeit (oder Wahrscheinlichkeitsdichte)  $P(\Theta|X)$  interessiert. Also der Wahrscheinlichkeit, dass ein Parameter bei gegebenen Daten und entsprechenden Vorwissen einen bestimmten Wert hat. Bis zur Anwendung des MCMC-Verfahrens konnte die bayesianische Statistik nur auf einfache Probleme angewendet werden. In den neuziger Jahren des letzten Jahrhunderts wurde dann, auch aufgrund der immer einfacheren Verfügbarkeit von Computern, die MCMC-Methode vermehrt in der bayesianischen Statistik angewendet. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von der MCMC-Revolution. Die fundamentale Gleichung der bayesianischen Statistik, hier für einen eindimensionalen Parameter  $\Theta$ , der die diskreten Werte  $i = 0, \dots, N$



## 5 Spezielle Themen

annehmen kann, ist:

$$P(\Theta = \Theta_i | X = x) = \frac{P(X = x | \Theta = \Theta_i) P(\Theta = \Theta_i)}{P(X)}$$

Wir sind an der Verteilung  $P(\Theta = \Theta_i | X = x)$  für die verschiedenen  $\Theta_i$ s bei gegebenen Daten  $X = x$  interessiert. In der Regel ist die Likelihood  $P(X = x | \Theta = \Theta_i)$  bekannt und  $P(X = x)$  ist schwer zu bestimmen. Der Prior  $P(\Theta = \Theta_i)$  beschreibt unser Vorwissen für die Wahrscheinlichkeit, dass der Parameter den Wert  $\Theta_i$  annimmt.

Wir betrachten nun die möglichen Werte  $\Theta_i$  als Zustände einer Markovkette und können mit der MCMC Methode  $P(\Theta_i | X)$  bestimmen in dem wir nach Gleichung (5.4) folgende Akzeptanzrate wählen:

$$\alpha_{ij} = \min \left\{ 1, \frac{P(\Theta_i | X) q_{ij}}{P(\Theta_j | X) q_{ji}} \right\} = \min \left\{ 1, \frac{q_{ij} P(X | \Theta_i) P(\Theta_i)}{q_{ji} P(X | \Theta_j) P(\Theta_j)} \right\} \quad (5.5)$$

wählen. Um das Prinzip zu verstehen, wollen wir nun einfaches Beispiel simulieren. Ihre Stärke zeigt die MCMC-Methode allerdings erst bei komplexeren Problemen, bei denen viele Parameter zu bestimmen sind, die sogar komplizierte hierarchische Abhängigkeiten haben können. Auch wird man MCMC Methoden nicht mehr selbst programmieren sondern eines der spezielle Pakete für MCMC-Methoden verwenden. Zum Beispiel **WinBUGS** und **JAGS**.

**Beispiel** Sie finden eine Münze, von der Sie annehmen, dass diese manipuliert ist und eher Kopf zeigt. Sie haben die Münze 4 mal geworfen und zweimal ist Kopf gefallen. Der Parameter der Verteilung  $\Theta$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Münzwurf Kopf fällt. Aus irgendeinem seltsamen Grund<sup>2</sup> kann  $\Theta$  nur die 101 Werte  $\Theta = 0, 0.01, \dots, 0.99, 1.00$  annehmen. Wir beschreiben dies durch eine Markov-Kette mit den Zuständen 1 bis 101 und verwenden wieder die gleiche symmetrische Vorschlagsmatrix  $Q$ , wie im vorigen Beispiel. D.h wir springen mit der Wahrscheinlichkeit von 0.5 in benachbarte Zustände und verweilen mit der Wahrscheinlichkeit von 0.5 an den Rändern. Wegen der Symmetrie von  $Q$  ( $q_{ij} = q_{ji}$ ) kürzt sich  $q_{ij}$  in Eq.(5.5). Da wir annehmen, dass die Münze eher Kopf zeigt, nehmen wir folgenden Prior an (siehe auch linke Seite von Abbildung 5.2).

```
# Wir halten es für möglich, dass Kopf häufiger vorkommt und nehmen folgenden prior an
prior <- function(theta) {
  ifelse(theta < 0.8,  theta, 0.8 + (0.8-theta))
}
```

Man beachte, dass der Prior nicht auf 1 normiert sein muss. Die Likelihood, also die Wahrscheinlichkeit  $P(2 \text{ mal Kopf bei } 4 \text{ Würfeln} | \Theta_i)$  ist

---

<sup>2</sup>Der wahre Grund ist, dass wir in StoP nur diskrete Zustände betrachten. Die Verallgemeinerung auf kontinuierliche Zustände ist allerdings einfach, wenn man das Prinzip verstanden hat.

## 5 Spezielle Themen

```
# p(X | Theta) = Wahrscheinlichkeit, dass man Kopf wirft
likelihood <- function (theta) dbinom(x = 2, size = 4, prob = theta)
```

Ausgehend von einem beliebigen Zustand  $\Theta_i = 0.5$  simulieren wir eine Markov-Kette, die wir in der Variable `mcmc` speichern, 1 bedeutet  $\Theta_i = 0.0$  und 101  $\Theta_i = 1.0$ . Die Trajektorie ist in der Mitte der Abbildung 5.2 dargestellt.

```
theta = 0.5 # Wir starten in einem beliebigen Zustand
mcmc = rep(0, 100000)
mcmc[1] = 100 * theta + 1 #von 1 bis 101
pold = prior(theta) * likelihood(theta)
for (t in 2:length(mcmc)){
  if (mcmc[t-1] == 1) { # Auswahl eines probeweisen Zustandes
    mcnew = sample(1:2,1)
  } else if (mcmc[t-1] == 101) {
    mcnew = sample(100:101,1)
  } else {
    mcnew = sample(c(mcmc[t-1]-1,mcmc[t-1]+1),1)
  }
  theta_new = (mcnew - 1) / 100
  pnew = prior(theta_new) * likelihood(theta_new)
  alpha_ij = pnew / pold
  if (runif(1) < alpha_ij) { #Annahme des probemoves mit W'keit min(alpha_ij, 1)
    pold = pnew
    mcmc[t] = mcnew
  } else{
    mcmc[t] = mcmc[t-1]
  }
}
```

In der Grafik 5.2 ist auf der rechten Seite das Histogramm der Variablen `mcmc` dargestellt, es schätzt den Posterior  $P(\Theta_i | 2 \text{ mal Kopf bei } 4 \text{ Würfeln})$  unter dem gegebenen Prior. Auf Grund des Priors ist es nicht symmetrisch, obwohl gleich viel Kopf wie Zahl gefallen ist. Der Median der Posterior-Verteilung wird oft als Punktschätzer für den Parameter verwendet. Er ist 59 und entspricht somit einem Wert von  $\Theta = 0.58$ .

## 5 Spezielle Themen

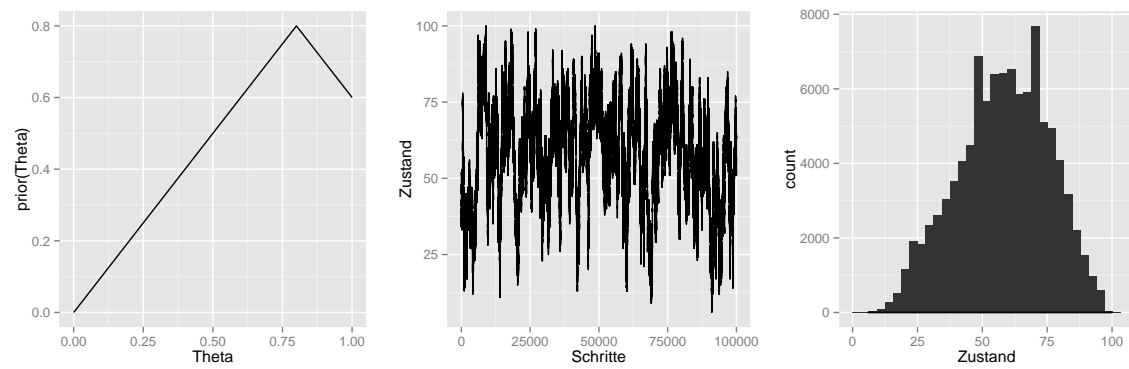


Abbildung 5.2: MCMC für das Beispiel. Prior (links), Trajektorie einer Realisierung (mitte) und Histogramm der besuchten Zustände (rechts)

## 6 Anhang

### 6.1 Markov-Ketten in R

In R gibt es ein eigenes Paket `markovchain`, das eine Objektklasse und einige nützliche Methoden zur Analyse und Simulation für Markov-Ketten bereitstellt. Neben der Hilfsfunktion gibt es auch eine ausführliche *Vignette* mit einer Einführung und vielen Beispielen. Die bereitgestellte Klasse ist eine sogenannte S4-Klasse, d.h. der Zugriff auf Einträge des Objekts verläuft ein bisschen anders als bei den meisten anderen R-Objekten.

Nach dem Laden des Pakets können wir eine Übergangsmatrix definieren und aus dieser ein `markovchain`-Objekt erzeugen. Man kann auch Namen für die Zustände vergeben:

```
> library(markovchain)
> P <- rbind(c(0.1, 0.9, 0), c(0.7, 0, 0.3), c(1, 0, 0))
> kette<-new("markovchain", states=c("A","B","C"),
            transitionMatrix=P)

> kette
Unnamed Markov chain
A 3 - dimensional discrete Markov Chain with following states
A B C
The transition matrix (by rows) is defined as follows
  A   B   C
A 0.1 0.9 0.0
B 0.7 0.0 0.3
C 1.0 0.0 0.0
```

Mit `summary()` erhält man einige weitere Informationen über die Markov-Kette, unter anderem eine Zerlegung in Klassen gegenseitig erreichbarer Zustände, Angaben zu absorbierenden Zuständen, Irreduzibilität usw.:

```
> summary(kette)
Unnamed Markov chain Markov chain that is composed by:
Closed classes:
A B C
Transient classes:
NONE
The Markov chain is irreducible
The absorbing states are: NONE
```

## 6 Anhang

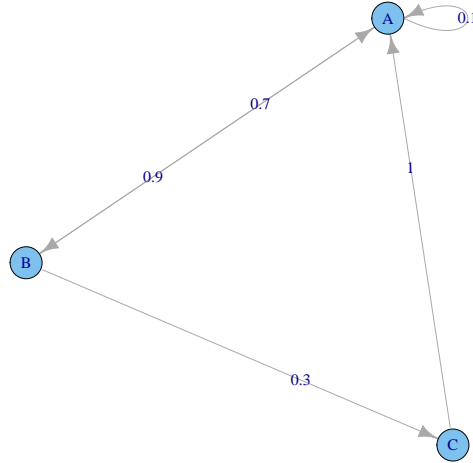


Abbildung 6.1: Plot eines Übergangsgraphen mit dem `markovchain`-Paket

Wir werden weiter unten näher auf den Output eingehen. Anwenden von `plot()` auf ein Markov-Ketten-Objekt

```
> plot(kette)
```

liefert einen Plot des Übergangsgraphen (Abb. 6.1). Zwischen zwei Zuständen wird jeweils nur ein Pfeil gezeichnet, evtl. mit zwei Spitzen, wenn die Zustände gegenseitig in einem Schritt erreichbar sind. Beschriftungen beziehen sich jeweils auf die nähergelegene Pfeilspitze, d.h. in Abb. 6.1 ist die Wahrscheinlichkeit für einen Übergang von *A* nach *B* 0.9, von *B* nach *A* 0.7.

Mit dem Befehl `rmarkovchain()` können wir auch aus einer Markov-Kette simulieren. Wir übergeben dazu die gewünschte Länge, das Markov-Ketten-Objekt und den Startzustand:

```
> rmarkovchain(n = 50, object = kette, t0 = "A")
[1] "B" "A" "B" "C" "A" "A" "B" "A" "B" "C" "A" "B" "A" "B"
[15] "A" "B" "A" "B" "A" "B" "A" "B" "C" "A" "B" "A" "B" "C"
[29] "A" "B" "A" "B" "A" "B" "A" "B" "A" "B" "A" "B" "A" "B"
[43] "A" "B" "A" "B" "C" "A" "B" "A"
```

Wir erhalten nun als Output den Vektor der Zustände  $x_1, \dots, x_n$ . Der Anfangszustand  $x_0$  selbst ist nicht Teil dieses Vektors! Dies hat aber den Vorteil, dass wir die Kette fortsetzen

## 6 Anhang

können, indem wir die letzte Komponente des Vektors der schon realisierten Zustände als `t0` übergeben und dann den Output an den bereits existierenden Vektor anhängen.

Haben wir keinen deterministischen Startzustand, sondern eine Anfangsverteilung, so müssen wir den Startzustand selbst ziehen, z.B. mit `sample()`. Einen Vektor mit den Namen der Zustände bekommen wir mit `states()`:

```
> pi_0 <- c(0.1, 0.7, 0.2)
> zustaende <- states(kette)
> x_0<-sample(zustaende, 1, prob = pi_0)
> x_0
[1] "B"
> rmarkovchain(50, kette, t0=x_0)
[1] "A" "B" "A" "A" "B" "A" "B" "C" "A" "A" "B" "A" "B" "C"
[15] "A" "B" "A" "B" "A" "B" "C" "A" "B" "A" "B" "C" "A" "A"
[29] "B" "A" "B" "A" "B" "A" "B" "C" "A" "B" "A" "B" "C" "A"
[43] "A" "B" "A" "B" "C" "A" "B" "A"
```

Produkte und Potenzen der Übergangsmatrix können direkt durch Anwendung von `*` und `^` auf das `markovchain`-Objekt gebildet werden<sup>1</sup>:

```
> c(1,0,0)*kette^5
      A      B      C
[1,] 0.4699 0.42291 0.10719
```

Auf Einträge des S4-Objekts kann man ähnlich wie bei S3-Objekten direkt zugreifen, auch wenn dies nicht empfohlen wird. Man muss allerdings statt `$` ein `@` verwenden. Die Übergangsmatrix eines `markovchain`-Objektes (oder auch die 5-Schritt-Übergangsmatrix) kann man dann zum Beispiel wie folgt extrahieren:

```
> kette@transitionMatrix
      A      B      C
A 0.1 0.9 0.0
B 0.7 0.0 0.3
C 1.0 0.0 0.0
> (kette^5)@transitionMatrix
      A      B      C
A 0.46990 0.42291 0.10719
B 0.44803 0.42291 0.12906
C 0.46990 0.35730 0.17280
```

Auch die Klassifikation von Zuständen erhält man mit Funktionen des Pakets. Betrachten wir noch einmal die Markov-Kette mit Übergangsgraph 2.4<sup>2</sup>. Mit `summary()` erhalten wir direkt die Aufteilung der Zustände in Klassen:

---

<sup>1</sup>Vorsicht! Dies funktioniert nur bei Anwendung auf ein `markovchain`-Objekt, bei direkter Anwendung auf eine Matrix werden die Operationen komponentenweise ausgeführt!

<sup>2</sup>Im File `markov.beispiel.klassifikation.Rdata` finden Sie das zugehörige `markovchain`-Objekt `mc`.

## 6 Anhang

```
> summary(mc)
Unnamed Markov chain Markov chain that is composed by:
Closed classes:
3 4
8
Transient classes:
1
2
5 6 7
The Markov chain is not irreducible
The absorbing states are: 8
```

Zuerst werden die Klassen mit rekurrenten Zuständen ausgegeben (`Closed classes`), dann die Klassen transienter Zustände. Wir erhalten auch noch die Information, dass die Markov-Kette reduzibel und 8 ein absorbierender Zustand ist.

Man kann auch mit `period()` die Periode einer irreduziblen Markov-Kette bestimmen. Die Kette aus dem Beispiel ist jedoch reduzibel. Betrachten wir noch einmal das (irreduzible) Ehrenfest-Modell<sup>3</sup> mit  $m = 10$ .

```
> ehrenfest
Unnamed Markov chain
A 11 - dimensional discrete Markov Chain with following states
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
The transition matrix (by rows) is defined as follows
  0  1  2  3  4  5  6  7  8  9 10
0  0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
1  0.1 0.0 0.9 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
2  0.0 0.2 0.0 0.8 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
3  0.0 0.0 0.3 0.0 0.7 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
4  0.0 0.0 0.0 0.4 0.0 0.6 0.0 0.0 0.0 0.0
5  0.0 0.0 0.0 0.0 0.5 0.0 0.5 0.0 0.0 0.0
6  0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.6 0.0 0.4 0.0 0.0
7  0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.7 0.0 0.3 0.0
8  0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.8 0.0 0.2
9  0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.9 0.1
10 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0
```

```
> summary(ehrenfest)
Unnamed Markov chain Markov chain that is composed by:
Closed classes:
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Transient classes:
```

---

<sup>3</sup>Im File `markov.beispiel_ehrenfest.Rdata` finden Sie das zugehörige `markovchain`-Objekt `ehrenfest`.

## 6 Anhang

```
NONE
```

```
The Markov chain is irreducible
```

```
The absorbing states are: NONE
```

Da die Kette irreduzibel ist, erhalten wir mit `period()` die korrekte Periode<sup>4</sup>:

```
> period(ehrenfest)
```

```
[1] 2
```

---

<sup>4</sup>Die Funktion gibt nur für irreduzible Markov-Ketten die korrekte Periode aus. Für reduzible Markov-Ketten wird stets 0 (zusammen mit einer Warnung) ausgegeben, auch wenn alle Zustände die selbe Periode besitzen.