Zürcher Hochschule
für Angewandte Wissenschaften

School of Engineering
IDP Institut für Datenanalyse und Prozessdesign

FS 2016

Stochastische Prozesse

Woche 1

Aufgabe 1 Zufallsvariablen (ohne R)

Sei X eine Zufallsvariable auf dem Intervall $]-\infty, +\infty[$ mit der Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1-x^2), & \text{falls } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

1. Zeigen Sie, dass $f(x)$ tatsächlich ein Wahrscheinlichkeitsdichte ist (also dass das Integral 1 ist) und berechnen Sie die Verteilungsfunktion.

   Normierung:

   $$\int_0^1 \frac{3}{2}(1-x^2)\,dx = \left[-\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x\right]_0^1 = 1$$

   Verteilungsfunktion auf $[0,1]$:

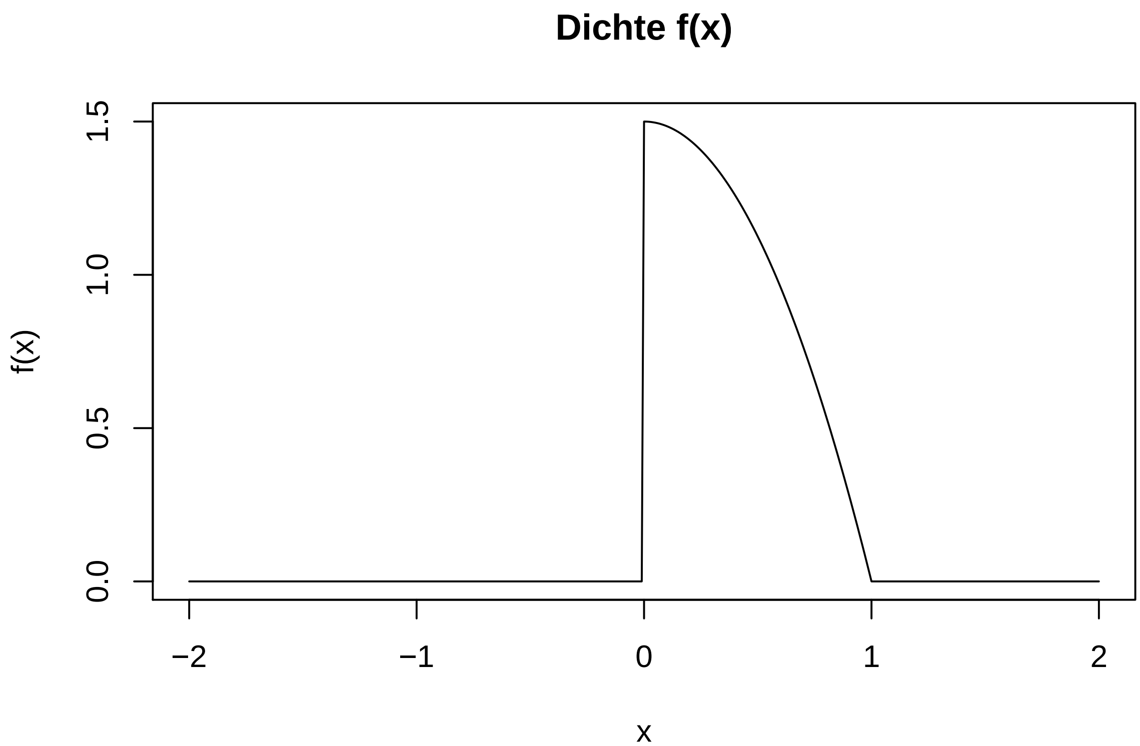
   $$\int_0^x \frac{3}{2}(1-t^2)\,dt = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x,$$

   also:

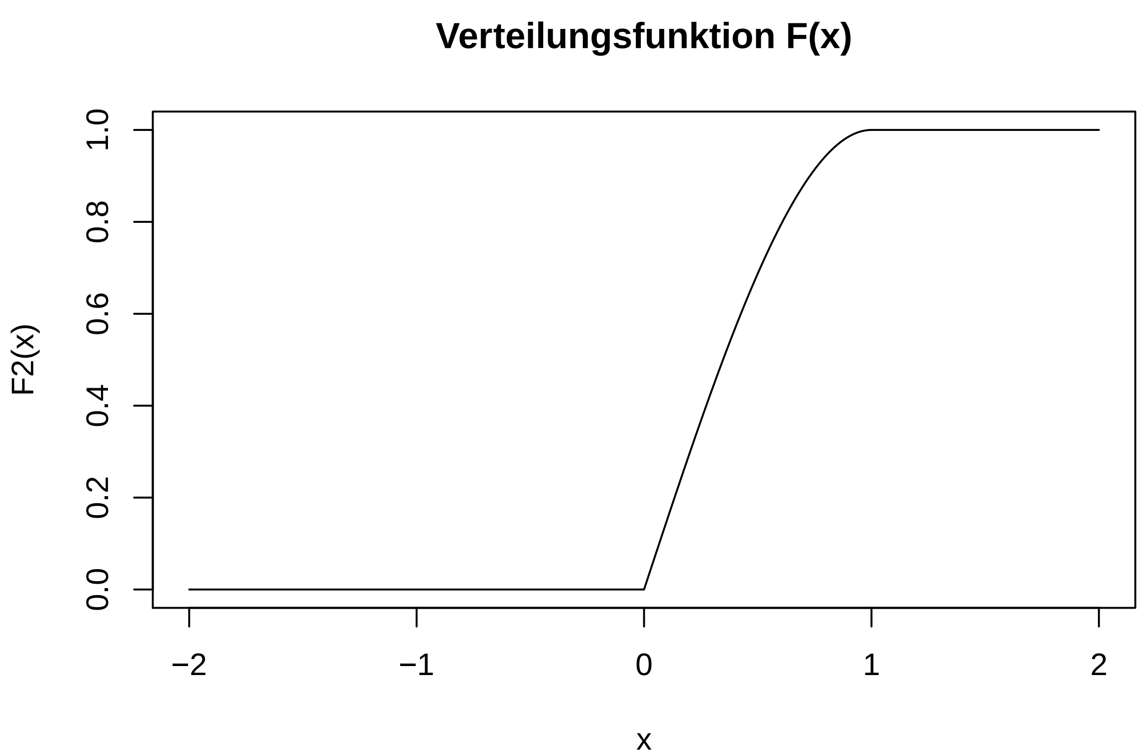
   $$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}.$$

2. Skizzieren Sie Dichte- und Verteilungsfunktion auf dem Intervall $[-2, 2]$

```
f <- function(z) (3/2*(1 - z^2))*((z>=0)&(z<=1))
x<-seq(-2,2,0.01)
plot(x,f(x),type="l",main="Dichte f(x)")
```




```
F2 <- function(z) (-1/2*z^3 + 3/2*z)*((z>=0)&(z<=1))+(z>1)
plot(x,F2(x),type="l",main="Verteilungsfunktion F(x)")
```



3. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass X grösser als 0.5 ist?

$$P(X > 0.5) = 1 - F(0.5) = 1 - \left(-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)\right) = 1 - \frac{11}{16} = \frac{5}{16} = 0.3125$$

4. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass X zwischen -0.5 und 0.5 liegt? Da $P(X \geq 0) = 1$ gilt

$$P(-0.5 \leq X \leq 0.5) = P(-\inf < X \leq 0.5) = F(0.5) = \frac{11}{16} = 0.6875$$

5. Berechnen Sie den Erwartungswert.

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 x \cdot f(x)\, dx \\ &= \frac{3}{2} \int_0^1 x \cdot (1 - x^2)\, dx \\ &= \frac{3}{2} \int_0^1 x - x^3\, dx \\ &= \frac{3}{2} \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 \\ &= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

6. Berechnen Sie den Erwartungswert von X^2.

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_0^1 x^2 \cdot f(x)\, dx \\ &= \frac{3}{2} \int_0^1 x^2 \cdot (1 - x^2)\, dx \\ &= \frac{3}{2} \int_0^1 x^2 - x^4\, dx \\ &= \frac{3}{2} \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 \\ &= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \\ &= \frac{3}{15} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

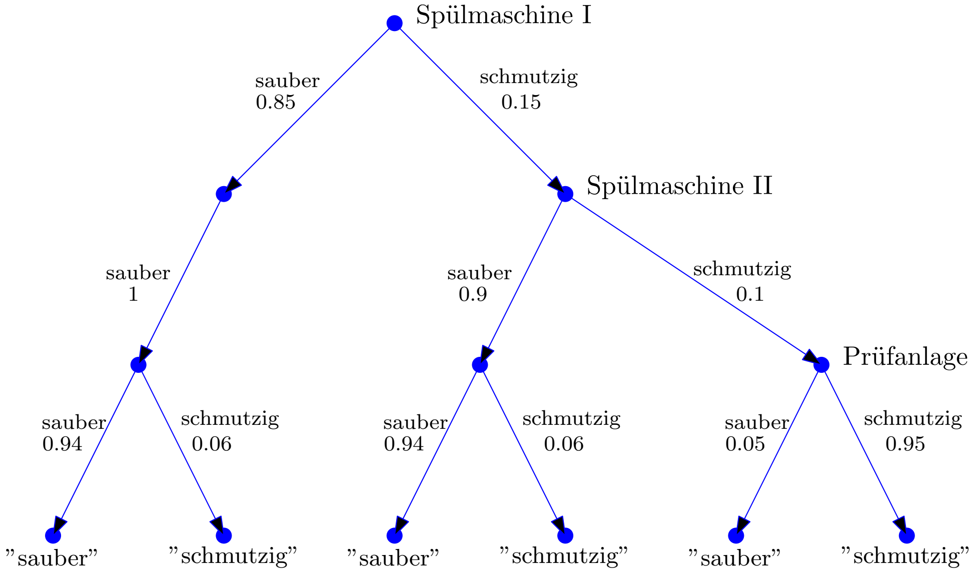
Aufgabe 2 Getränkeabfüllanlage

In einer Getränkeabfüllanlage wird jede gesammelte Pfandflasche zunächst zweimal gespült und dann nochmals auf Sauberkeit überprüft. Von der Reinigungsanlage ist bekannt:

- Die Zuverlässigkeit der Spülmaschine I beträgt 85%, d.h., sie spült 85% der Flaschen sauber.
- Die Zuverlässigkeit der Spülmaschine II beträgt 90%.
- Die Prüfanlage lässt 5% aller schmutzigen Flaschen irrtümlich als sauber durch.
- Die Prüfanlage sortiert 6% aller sauberen Flaschen als schmutzig aus.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit verlässt eine Flasche beide Spülmaschinen immer noch schmutzig?

Am einfachsten sind die Fragen mithilfe eines Baumdiagramms zu beantworten:



Formal:

$$\begin{aligned}P(\text{schmutzig nach II}) &= P(\text{schmutzig nach II}|\text{schmutzig nach I}) \cdot P(\text{schmutzig nach I})\\ &+ P(\text{schmutzig nach II}|\text{sauber nach I}) \cdot P(\text{sauber nach I})\\ &= 0.1 \cdot 0.15 + 0 \cdot 0.85\\ &= 0.015\end{aligned}$$

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine Flasche von der Prüfanlage als schmutzig aussortiert?

$$\begin{aligned}&P(\text{als schmutzig sortiert})\\ =&P(\text{als schmutzig sortiert} \mid \text{schmutzig nach II}) \cdot P(\text{schmutzig nach II})\\ &+ P(\text{als schmutzig sortiert} \mid \text{sauber nach II}) \cdot P(\text{sauber nach II})\\ =&0.95 \cdot 0.015 + 0.06 \cdot (1 - 0.015)\\ =&0.0735\end{aligned}$$

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine Flasche von der Prüfanlage als sauber sortiert, die die Spülmaschine I noch schmutzig verlassen hat?
Am besten betrachtet mandazu wieder den Baum. Man muss nur noch den Teilbaum

betrachten, der sich ergibt, wenn die Flasche schmutzig die Maschine II ankommt. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
&P(\text{als sauber sortiert} \mid \text{nach I schmutzig})\\
=&P(\text{als sauber sortiert und nach II schmutzig} \mid \text{nach I schmutzig})\\
&+P(\text{als sauber sortiert und nach II sauber} \mid \text{nach I schmutzig})\\
=&P(\text{sb. sort.} \mid \text{n. II schm. und n. I schm.}) \cdot P(\text{n. II schm.} \mid \text{n. I schm.})\\
&+P(\text{sb. sort.} \mid \text{n. II sb. und n. I schm.}) \cdot P(\text{n. II sb.} \mid \text{n. I schm.})\\
&=0.05 \cdot 0.1 + 0.94 \cdot 0.9\\
&=0.851
\end{aligned}$$

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine als sauber sortierte Flasche sauber? Hinweis: Verwenden Sie $P(\text{sb. sort.} \mid \text{sb. n. II})$ und den Satz von Bayes. Wir benutzen den Satz von Bayes:

$$\begin{aligned}
&P(\text{saub. nach II} \mid \text{als saub. sort.})\\
=&\frac{P(\text{sb. sort.} \mid \text{sb. n. II}) \cdot P(\text{sb. n. II})}{P(\text{sb. sort.} \mid \text{sb. n. II}) \cdot P(\text{sb. n. II}) + P(\text{sb. sort.} \mid \text{schm. n. II}) \cdot P(\text{schm. n. II})}\\
=&\frac{0.94 \cdot 0.985}{0.94 \cdot 0.985 + 0.05 \cdot 0.015}\\
=&0.9991906
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 Lastwagen

Ein Lastwagen muss täglich von Winterthur nach Chiasso fahren. Je nach Situation gibt es unterschiedliche Fahrzeiten:

1. Normaler Verkehr: Hier ist die Fahrzeit normalverteilt mit Mittelwert 5 Stunden und Standardabweichung 30 Minuten.
2. Stau am Gotthard: Hier ist die Fahrzeit gleichverteilt im Intervall $[5, 10]$ Stunden
3. Panne: Hier ist die normale Fahrzeit nach 1) zu rechnen plus die Zeit für die Reparatur. Die Reparaturzeit sei exponentialverteilt mit Mittelwert 6 Stunden.

Die Wahrscheinlichkeit für einen Stau am Gotthard sei 10 Prozent, die Wahrscheinlichkeit für eine Panne sei 3 Prozent.

a) Schreiben Sie eine `R`-Funktion, die die Zufallsvariable „Fahrzeit von Winterthur nach Chiasso“ erzeugt und schätzen Sie die mittlere Fahrzeit durch Simulation.

```r
fahrzeit <- function(n=10) {
    situation<-sample(1:3, size=n, replace=T, prob=c(0.87, 0.1, 0.03) )
    #Wir haben jetzt einen Vektor der Länge n mit den Einträgen 1,2,3
    out <- rep(NA, n)
    #Für die 1 gilt.
    out[situation==1] <- rnorm(sum(situation==1), mean=5, sd=0.5)
    out[situation==2] <- runif(sum(situation==2), min=5, max=10)
```

```
    out[situation==3] <- rnorm(sum(situation==3), mean=5, sd=0.5) +
      rexp(sum(situation==3), rate=1/6)
    out
    }
mean(fahrzeit(10000))
```

```
## [1] 5.433356
```

b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion der Fahrzeit empirisch, indem Sie viele Realisierungen der Zufallsvariable erzeugen und die empirische Verteilungsfunktion bestimmen. Plotten Sie die empirische Verteilungsfunktion. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Fahrzeit länger als 7 Stunden ist?

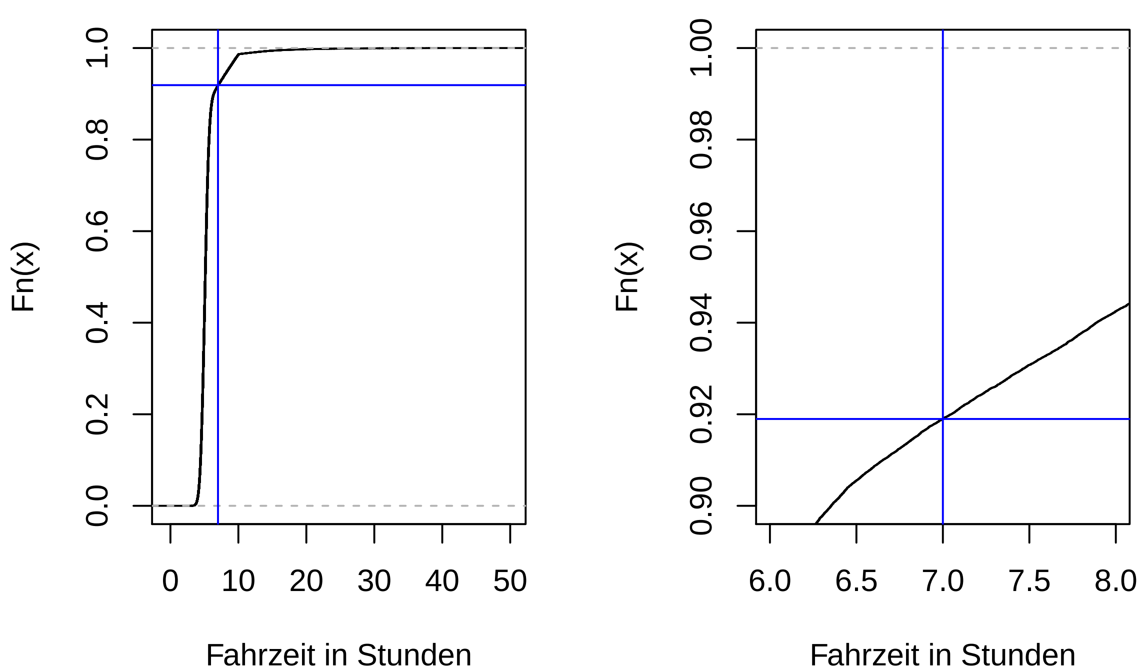
```
runs <- 100000
fz <- fahrzeit(runs)
pg7 <- sum(fz > 7) / runs
pg7
```

```
## [1] 0.08103
```

```
par(mfrow = c(1,2))

plot(ecdf(fz), xlab="Fahrzeit in Stunden", main="")
abline(h=(1-pg7),col='blue')
abline(v=7,col='blue')

plot(ecdf(fz), xlab="Fahrzeit in Stunden", xlim=c(6,8),ylim=c(0.9,1),main="")
abline(h=(1-pg7),col='blue')
abline(v=7,col='blue')
```



```
par(mfrow = c(1,1))
```

Aufgabe 4 Lineare Algebra

Ziel dieser Aufgabe ist die Wiederholung einiger Konzepte aus der linearen Algebra, insbesondere Eigenwerte und Eigenvektoren.

a) Erstellen Sie eine symmetrische 4×4-Matrix mit zufälligen Einträgen. Es gibt mindestens drei verschiedene Möglichkeiten, eine symmetrische Matrix zu erzeugen:

- Sie können eine Schleife benutzen, und eine leere Matrix so mit Zufallszahlen auszufüllen, dass sie symmetrisch ist.
- Sie können mit `upper.tri()` oder `lower.tri()` in `R` untere oder obere Dreiecksmatrizen erzeugen, und dann mit `t()` transponieren.
- Für eine beliebige Matrix $\mathbf{B}$ ist $\mathbf{B}'\mathbf{B}$ stets symmetrisch. Wählen Sie eine (oder auch mehrere) dieser Möglichkeiten aus. Symmetrische Matrizen mit reellen Einträgen haben stets reelle Eigenwerte.
  Wir wenden hier die dritte Methode an:

```
set.seed(1)
mat1 <- matrix(runif(16), nrow = 4, ncol = 4)
(A <- t(mat1) %*% mat1)
```

```
          [,1]      [,2]      [,3]     [,4]
[1,] 1.3619734 1.5291627 0.4683708 1.218365
[2,] 1.5291627 2.1768447 0.4936365 1.539764
[3,] 0.4683708 0.4936365 0.4731998 0.702388
[4,] 1.2183653 1.5397636 0.7023880 1.459896
```

b) Berechnen Sie nun die Eigenwerte und Eigenvektoren für Ihre Matrix. Sie können hierzu die Funktion `eigen()` benutzen.

```
eig <- eigen(A)
(eig.vectors <- eig$vectors)
```

```
           [,1]       [,2]        [,3]        [,4]
[1,] -0.5054416  0.1312864  0.85224037 -0.03128974
[2,] -0.6470958  0.5127032 -0.47399711 -0.30615232
[3,] -0.2147151 -0.7099999 -0.04254134 -0.66931889
[4,] -0.5288604 -0.4645422 -0.21726326  0.67624251
```

```
(eig.values <- eig$values)
```

```
[1] 4.7934800 0.4896916 0.1775073 0.0112355
```

c) Zeigen Sie, dass die Vektoren aus b) tatsächlich Eigenvektoren zu den jeweiligen Eigenwerten sind, d.h. überprüfen Sie, dass jeweils die Gleichung

$$\mathbf{A}\vec{v_i} = \lambda_i \vec{v_i}$$

erfüllt ist.
Wir berechnen beide Seiten der Gleichung getrennt und stellen fest, dass sich (numerisch) das selbe ergbit:

```r
(A1 <- A %*% eig.vectors)
```

```
          [,1]        [,2]         [,3]         [,4]
[1,] -2.422824  0.06428983  0.151278903 -0.000351556
[2,] -3.101841  0.25106644 -0.084137956 -0.003439776
[3,] -1.029232 -0.34768098 -0.007551398 -0.007520135
[4,] -2.535082 -0.22748239 -0.038565819  0.007597925
```

```r
# Elementweise Multiplikation der Eigenvektoren mit den Eigenwerten:
(A2 <- matrix(rep(eig.values, each = 4), ncol = 4) * eig.vectors)
```

```
          [,1]        [,2]         [,3]         [,4]
[1,] -2.422824  0.06428983  0.151278903 -0.000351556
[2,] -3.101841  0.25106644 -0.084137956 -0.003439776
[3,] -1.029232 -0.34768098 -0.007551398 -0.007520135
[4,] -2.535082 -0.22748239 -0.038565819  0.007597925
```

```r
A2 - A1
```

```
              [,1]          [,2]         [,3]          [,4]
[1,] -4.440892e-16 -2.220446e-16 6.383782e-16  3.366990e-16
[2,]  1.332268e-15 -2.220446e-16 9.575674e-16  5.715914e-16
[3,]  2.220446e-16  0.000000e+00 3.755676e-16 -7.285839e-17
[4,] -4.440892e-16  2.775558e-17 8.118506e-16  9.974660e-17
```