

Stochastische Prozesse

Woche 13

Aufgabe 1

Generatormatrix

Gegeben sei eine Generatormatrix

$$Q = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 2 & -8 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\text{Minuten}}$$

a) Beantworten Sie folgenden Fragen:

i) Wie gross sind die mittleren Aufenthaltszeiten in den verschiedenen Zuständen?

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_1} &= \frac{1}{4} ZE \\ \frac{1}{\lambda_2} &= \frac{1}{8} ZE \\ \frac{1}{\lambda_3} &= 1 ZE \end{aligned}$$

ii) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, vom Zustand 2 aus in den Zustand 3 zu wechseln?

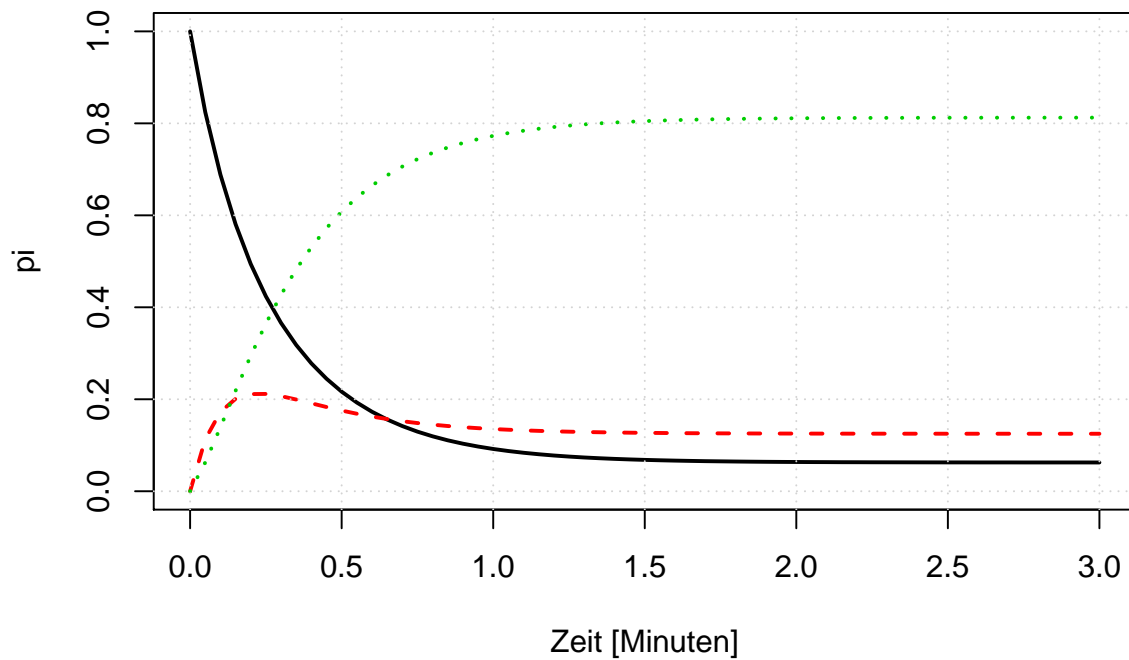
$$\begin{aligned} r_{ij} &= \lambda_i \cdot p_{ij} \\ p_{23} &= \frac{r_{23}}{\lambda_2} = \frac{6}{8} = 0.75 \end{aligned}$$

b) Plotten Sie die Zeitentwicklung, wenn Sie im Zustand 1 starten.

```
library(expm)

Q <- matrix( c(-4,3,1, 2,-8,6, 0,1,-1), ncol=3, byrow=T)
time <- seq(0, 3, 0.05)

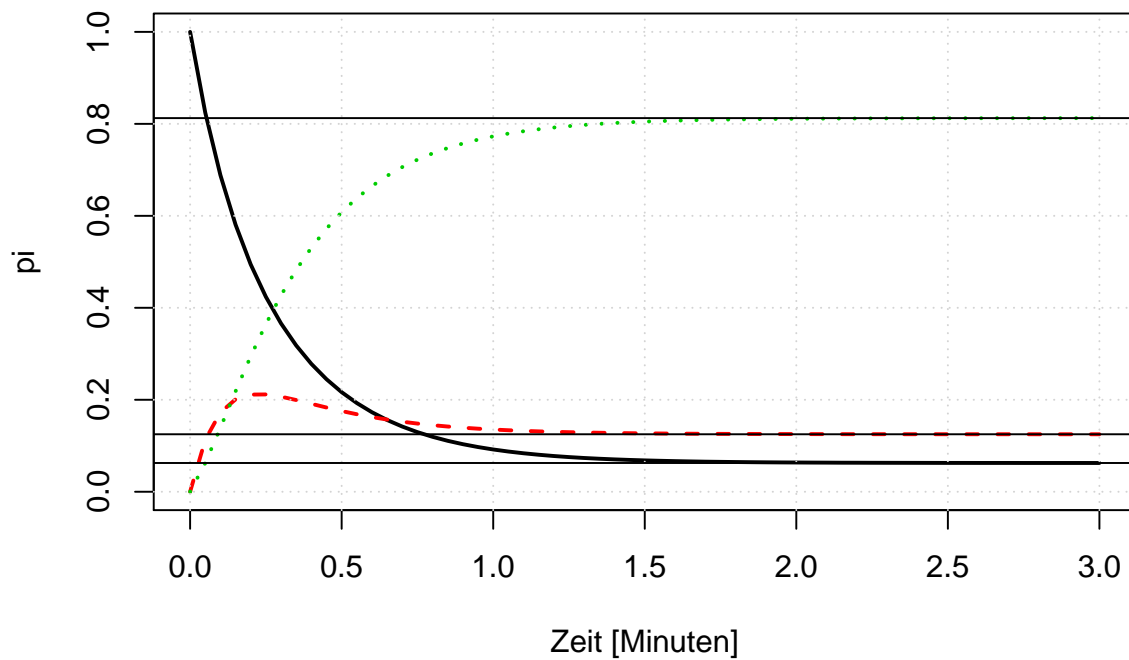
verteilung <- t(sapply(time, function(z) c(1,0,0) %*% expm(Q*z) ))
matplot(time, verteilung, type="l", lwd=2, xlab="Zeit [Minuten]", ylab="pi")
grid()
```



c) Berechnen Sie die asymptotische Entwicklung und zeichnen Sie diese in b) ein.

```
es <- eigen(t(Q))
vv <- es$vectors[,3]
ev <- vv/sum(vv)

matplot(time, verteilung, type="l", lwd=2, xlab="Zeit [Minuten]", ylab="pi")
grid()
abline(h=ev)
```



Aufgabe 2

Kontinuierlicher Markovprozess mit Kosten

Gegeben sei ein Markovprozess mit

$$Q = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 & 1 \\ 10 & -11 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & -15 \end{pmatrix} \frac{1}{h}$$

a) Wieviel Zustandwechsel pro Zeiteinheit gibt es?

```
Q <- matrix(c(-5, 1, 3, 1, 10, -11, 0, 1, 0, 0, -3, 3, 5, 5, 5, -15), byrow=T, ncol=4)
es <- eigen(t(Q))
ev <- es$vectors[,4]
piStern <- ev / sum(ev)

# Anzahl der Zustandswechsel.
U <- matrix(1, nrow=4, ncol=4)
diag(U) <- 0

# Nehmen Q statt Ratenmatrix in der Diagonalen von U stehen sowieso nur Nullen
piStern %*% rowSums(Q * U) #5.75

##      [,1]
## [1,] 5.75
```

b) Immer wenn das System in Zustand 2 wechselt, gewinnen Sie 100 Fr. Sie verlieren 100 Fr., wenn das System in Zustand 3 wechselt. Wie hoch ist Ihre asymptotische Gewinn- oder Verlustrate in Fr./h?

```
# Wechsel in Zustand 2 => 100 CHF, in Zustand 3 => -100 CHF
U <- matrix(0, nrow=4, ncol=4)
U[,2] <- c(100, 0, 100, 100)
U[,3] <- c(-100, -100, 0, -100)
piStern %*% rowSums(Q * U) #-58.33

##      [,1]
## [1,] -58.33333
```