StoP: Handout Woche 6

Zusammenfassung verschiedene Verteilungen

Für eine aperiodische irreduzible Markov-Kette mit endlichem Zustandsraum gilt:

1. Es existiert **eine asymptotische Grenzverteilung**, die **unabhängig vom Anfangszustand** erreicht wird.
$$\vec{\pi}(\infty) := \lim_{t\to\infty} \vec{\pi}(t)$$
2. Die **asymptotische Besetzung existiert**
$$\hat{\pi}_j := \lim_{T\to\infty} \frac{Z_j(T)}{T}$$
3. **Eine eindeutige stationäre Verteilung existiert,** welche durch folgende Gleichung und Normierungsbedingung gegeben ist.
$$\vec{\pi}^* = \vec{\pi}^* \cdot \mathbf{P} \text{ und } \sum_{i=1}^{N} \pi_i^* = 1$$

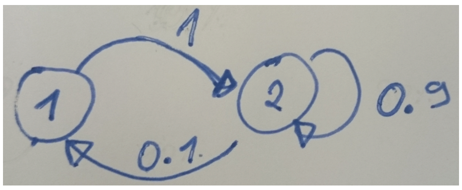
Die Lösung π^* ist also durch den auf eins normierten Eigenvektor zum Eigenwert 1 der transponierten Übergangsmatrix **P'** gegeben.

Und es gilt:

$$\vec{\pi}(\infty) = \hat{\vec{\pi}} = \vec{\pi}^*$$

Aufgabe 1 (Eigenvektoren / Stationärer Zustand)

Betrachten Sie folgendes Übergangsdiagram



a) Wie lautet die Übergangsmatrix?
b) Ist der Prozess irreversible und aperiodisch?
c) Bestimmen Sie den stationären Zustand in dem Sie den Eigenvektor zum Eigenwert 1 raten.
d) Zu wie viel Prozent befindet sich der Prozess für lange Zeiten im Zustand 2?

Aufgabe 2 (Kostenvektoren asymptotisch)

Betrachten Sie die Übergangsmatrix des Wetters (sonnig, bewölkt, regnerisch):

$$P = \begin{pmatrix} 0.90 & 0.10 & 0.00 \\ 0.05 & 0.90 & 0.05 \\ 0.00 & 0.10 & 0.90 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die langfristigen Kosten pro Tag, falls Ihnen ein Regentag 500 CHF und ein Wolkentag 100 CHF kostet. Es gilt $\vec{\pi}^* = (0.25, 0.5, 0.25)$

b) Berechnen Sie die langfristige Anzahl der Wetterwechsel pro Tag. Nehmen Sie dazu geeignete übergangsabhängige Kosten an.