Zwischenprüfung StoP
FS 2014

8. April 2014

Name:	Klasse:

Erlaubte Hilfsmittel:

- Zwei DINA-4 Blätter Aufschrieb
- Taschenrechner, R und in RStudio geöffnete R-Skripte mit kommentierten R-Befehlen

Hinweise:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 75 Minuten.
- Falsche Antworten bei Multiple Choice Aufgaben geben 0.5 Punkte Abzug.
- Bearbeiten Sie die Aufgaben auf den ausgegebenen Blättern.
- Falls Sie Zusatzblätter verwenden sollten, versehen Sie alle Zusatzblätter mit Ihrem Namen und verwenden Sie pro Aufgabe ein extra Zusatzblatt.
- Lesen Sie die Aufgabenstellung sorgfältig durch und achten Sie darauf, keine Frage zu übersehen.
- Für Aufgabenteile die mit R zu lösen sind: Übertragen Sie den R-Code und die Ergebnisse
- Erfragte Begründungen müssen in ganzen Sätzen ausformuliert werden und nachvollziehbar sein.
- Die angegebenen Punkte können sich noch leicht ändern.

Punkte:

Note:

Viel Erfolg ! !

Aufgabe 1 (Multiple Choice) *5*1.5=7.5 Punkte*

Bitte beachten Sie, falsche Lösungen geben einen halben Punkt Abzug.

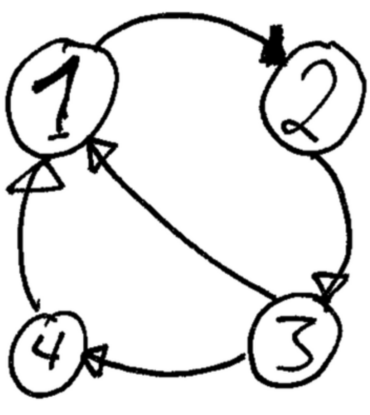
a) Wenn eine Markovkette zwei Eigenvektoren mit Eigenwert 1 hat, ist sie reduzibel.
☐ Richtig ☐ Falsch
Lösung: Richtig

b) Eine reduzible Markovkette hat genau einen Eigenvektor mit Eigenwert 1.
☐ Richtig ☐ Falsch
Lösung: Falsch

c) Ist die unten abgebildete Markovkette irreduziblel?
☐ Richtig ☐ Falsch
Lösung: Richtig

d) Ist die unten abgebildete Markovkette aperiodisch?
☐ Richtig ☐ Falsch
Lösung: Richtig

e) Eine irreduzible periodische Markovkette hat mindestens zwei Eigenwerte mit Betrag 1.
☐ Richtig ☐ Falsch
Lösung: Richtig



Aufgabe 2 *Je 2 Punkte 16*

Eine Markov-Kette mit dem Zustandsraum $S = 1, 2, 3$ habe die Übergangsmatrix:

$$P = \begin{pmatrix} x & 0 & 1-x \\ 0.1 & 0 & 0.9 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Wobei x aus dem Anfangsbuchstaben Ihres Vornamens aus folgender Tabelle berechnet wird:

```
##      A    B    C    D    E    F    G    H    I   J    K    L    M    N
## x 0.03 0.06 0.09 0.12 0.15 0.18 0.21 0.24 0.27 0.3 0.33 0.36 0.39 0.42
##      O    P    Q    R    S    T    U    V   W    X    Y    Z
## x 0.45 0.48 0.52 0.55 0.58 0.61 0.64 0.67 0.7 0.73 0.76 0.79
```

Tragen Sie hier Ihren Vornamen und das daraus resultierende x ein:

Vorname (Ausgeschrieben): $x =$

Beispiel: Mein Vorname ist Oliver, er beginnt mit O, somit schreibe ich $x = 0.45$

Der Anfangszustand für $t = 0$ sei $X(0) = 1$. Berechnen Sie folgende Grössen mit R. Bitte denken Sie daran den R-Code und die Ergebnisse zu übertragen.

a) Zeigen Sie, dass P eine Übergangsmatrix ist:

```r
library(Matrix, quietly=TRUE)
x <- 0.45 #Siehe oben
P = matrix(c(x, 0.0, 1-x, 0.1, 0, 0.9, 0.3, 0.4, 0.3), byrow=TRUE, nrow=3)
#Die Eintraege von P liegen zwischen 0 und 1
#Die Zeilensumme von P
rowSums(P)

## [1] 1 1 1
```

b) Ist dieser Prozesse aperiodisch und irreduzibel? Geben Sie eine kurze Begründung.

Lösung: Der Prozess ist irreduzible: Aus dem Übergangsdiagram wird ersichtlich, dass sie von jedem in jeden Zustand kommen. Der Prozess ist aperiodische: es gibt mindestens ein Diagonalelement mit $P_{ij} > 0$

c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Prozess bei $t = 5$ nicht im Zustand 3 ist?

Resultat : ______________________________

R-Code:

```r
library(expm, quietly=TRUE)

##
## Attaching package: 'expm'
##
## The following object is masked from 'package:Matrix':
##
##     expm

P = matrix(c(0.1, 0.3, 0.6, 0.1, 0, 0.9, 0.3, 0.4, 0.3), byrow=TRUE, nrow=3)
1 - (P %^% 5)[1,3]

## [1] 0.4752
```

d) Wieviel Zeit verbringt der Prozess während der Gesamtlaufzeit $t = 0...10$ im Mittel in Zustand 1?

Resultat : ____________________________
R-Code:

```r
library(expm, quietly=TRUE)
M <- P %^% 0
for (i in 1:10) M <- M + P %^% i
M[1,1]

## [1] 2.956
```

e) Nehmen Sie an, dass ein Aufenthalt im Zustand 1 genau 1 Fr., im Zustand 2 genau 2 Fr. und im Zustand 3 genau 3 Fr. kostet. Nehmen Sie ferner an, dass die Kosten nur während den Zeiten $t = 2, 3, 4$ anfallen. Wie hoch sind dann die erwarteten Kosten in der Gesamtlaufzeit?

Resultat : ______________________________

R-Code:

```
library(expm, quietly=TRUE)
(P%^%2 + P%^%3 + P%^%4)[1,] %*% 1:3

##        [,1]
## [1,] 6.933
```

f) Berechnen Sie die stationäre Verteilung.

Resultat : ______________________________

R-Code:

```r
library(expm, quietly=TRUE)
 v <- eigen(t(P))$vectors[,1] #EW +1 ist in der ersten Position
 (pi <- v / sum(v))

## [1] 0.2048 0.2711 0.5241
```

g) Wie oft wechselt der Prozess in den Zeitraum $t = 0...10$ den Zustand, falls er zum Zeitpunkt $t = 0$ im stationären Zustand ist.

Resultat : ______________________________
R-Code:

```r
library(expm, quietly=TRUE)
U <- matrix(rep(1,9), ncol=3)
U <- U - diag(3)
M <- P %^% 0
for (i in 1:9) M <- M + P %^% i
pi %*% M %*% rowSums(P * U)
```

```
##        [,1]
## [1,] 8.223
```

h) Wie oft wechselt der Prozess langfristig ($t \to \infty$) pro Zeitschritt den Zustand?

Resultat : ______________________________
R-Code:

```
  library(expm, quietly=TRUE)
  pi %*% rowSums(P * U)

##         [,1]
## [1,] 0.8223
```

Aufgabe 3 *6 Punkte*

Sie als Veranstalter einer riesen Party müssen am Mittwoch entscheiden, ob die Party am Samstag (der gleichen Woche) in einer Halle oder im Freien stattfindet. In der Halle: Gewinn 20'000 CHF in jedem Fall. Im Freien: Dann gewinnen Sie 40'000 CHF, falls die Sonne scheint, 35'000, falls es bewölkt ist und nichts, falls es regnet. Die Übergangsmatrix der 3 Zustände des Wetters (1=sonnig, 2=bewölkt, 3=regnerisch) ist:

$$P = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.05 & 0.9 & 0.05 \\ 0.0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie den erwarteten Gewinn für beide Fälle, falls es am Mittwoch regnet. Wie würden Sie entscheiden?

Resultat :____________________________
R-Code:

```
    library(expm, quietly=TRUE)
    P <- matrix(c(0.9,0.1,0.0, 0.05,0.9,0.05,0.0,0.1,0.9), nrow=3, byrow=TRUE)
    P3 <- P %^% 3#Donnerstag, Freitag, Samstag
    P3[3,]  %*% c(20000, 20000, 20000)

##       [,1]
## [1,] 20000

    P3[3,]  %*% c(40000, 35000, 0)
```

```
##      [,1]
## [1,] 9080

    # Also lieber in der Halle
```