Abschlussprüfung StoP
FS 2014

17. Juni 2014

Name:	Klasse:

Erlaubte Hilfsmittel:

- Open-book: Aufschriebe, Bücher, Ausdrucke usw. auf Papier **aber keine Dateien** wie pdfs.
- Auf dem Bildschirm darf nur RStudio offen sein, WLAN muss ausgeschaltet sein.
- Taschenrechner, R und in RStudio geöffnete R-Skripte mit kommentierten R-Befehlen

Hinweise:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Falsche Antworten bei Multiple Choice Aufgaben geben 0.5 Punkte Abzug.
- Bearbeiten Sie die Aufgaben auf den ausgegebenen Blättern und verwenden Sie wenn möglich keine Zusatzblätter.
- Falls Sie dennoch Zusatzblätter verwenden sollten, versehen Sie alle Zusatzblätter mit Ihrem Namen und verwenden Sie pro Aufgabe ein extra Zusatzblatt.
- Bei Aufgabenteile die mit R zu lösen sind: Übertragen Sie den R-Code und die Ergebnisse
- Erfragte Begründungen müssen in ganzen Sätzen ausformuliert werden und nachvollziehbar sein.
- Die angegebenen Punkte können sich noch leicht ändern.

Punkte:

Note:

Viel Erfolg ! !

Aufgabe 1 (Multiple Choice) *5*1.5=7.5 Punkte*

Bitte beachten Sie, falsche Lösungen geben einen halben Punkt Abzug.

1. Hat ein Markov-Prozess die stationären Verteilung erreicht, so gilt immer $\frac{d}{dt}\vec{\pi}(t) = 0$?
   ☐ Richtig ☐ Falsch
   Lösung: Richtig

2. Eine Realisierung einer irreduzible MK befindet sich zu den Zeiten $t = 0, 2, 4, 5, 6, 8$ im Zustand 1. Handelt es sich um eine periodische Kette?
   ☐ Richtig ☐ Falsch
   Lösung: Falsch

3. Die transponierte Übergangsmatrix P' einer Markov-Kette hat die Eigenwerte 1, $0.5 - i$ und $0.5 + i$. Ist diese Markov-Kette aperiodisch?
   ☐ Richtig ☐ Falsch
   Lösung: Richtig

4. Eine Markov-Kette hat die Eigenwerte 1 und 0.1, eine andere die Eigenwerte 1 und 0.9. Konvergiert die erste Markov-Kette EW(1,0.1) schneller geben die stationäre Lösung, als die zweite EW(1,0.9)?
   ☐ Richtig ☐ Falsch
   Lösung: Richtig

5. Ist eine Markov-Kette zum Zeitpunkt $t = 0$ und $t = 1$ im Zustand 1, d.h. ihre Verteilung ist jeweils $\vec{\pi} = (1, 0, 0)$ so ist die Verteilung zum Zeitpunkt $t = 42$ auch stets $\vec{\pi} = (1, 0, 0)$?
   ☐ Richtig ☐ Falsch
   Lösung: Richtig

Aufgabe 2 *Je 2 Punkte 6*

Ein Bauteil geht mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_1 = 0.8$ nach 4 Stunden defekt, ansonsten nach einer Zeit von 6 Stunden. Hinweis: Für diese Aufgabe benötigen Sie kein R.

a) (2 Punkte) Die Gesamtkosten für einen ungeplannten Austausch betragen 100 CHF. Bestimmen Sie die mittleren Kosten pro Stunde.
Lösung: Es gilt : $E(T) = 0.8 * 4h + 0.2 * 6h = 4.4h$ und $E(K) = 100$ somit $\frac{E(K)}{E(T)} = 100CHF/4.4h \approx 22.72$

b) (2 Punkte) Sie haben nun die Wahl einen Vertrag mit der Lieferfirma des Bauteils abzuschliessen, diese zahlt Ihnen 200 CHF, falls das Bauteil vor 5h defekt gegangen ist und kostet 100 CHF am Tag. Lohnt sich diese Versicherung für Sie?
Lösung: Es gilt : $E(T) = 0.8 * 4h + 0.2 * 6h = 4.4h$ (wie oben) und $E(K) = 0.8 * 0 + 0.2 * 300$ somit $\frac{E(K)}{E(T)} = 60CHF/4.4h \approx 13.63$. Die Versicherung lohnt sich also.

c) (2 Punkte) Sie haben den Verdacht, dass das Model in a) zu einfach ist. Sie nehmen an, dass eine Weibull-Verteilung besser geeignet ist die Ausfälle zu beschreiben. Dazu haben Sie in einem Teststand 10 Bauteile getestet. Diese sind an den Zeiten T_i mit $i = 1, \ldots, 10$ ausgefallen. Sie haben dann eine lineare Regression $y \sim x$ mit $y = \log\log(\frac{1}{S(T_i)})$ an den logarithmierten Ausfallzeiten $x_i = \log(T_i)$ durchgeführt und folgendes Ergebniss bekommen:

```
  res

##
## Call:
## lm(formula = y ~ x)
##
## Coefficients:
## (Intercept)            x
##       -3.78         5.59
```

Bestimmen Sie die Parameter β und λ der Weibullverteilung.
Lösung:
Die Steigung a ist β, also $\beta = 5.59$ der Parameter λ ergibt sich zu $\lambda = e^{b/a} = e^{-3.78/5.59} = 0.508542$

Aufgabe 3 *Punkte 16*

Gegeben Sie eine Markov-Kette mit den Zuständen $X = 1, 2, 3$ und folgender Übergangsmatrix P.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0.2 & 0 & 0.8 \\ 0.1 & 0.9 & 0.0 \end{pmatrix}$$

a) (1 Punkt) Zeichnen Sie das Übergangsdiagram dieser Matrix. trivial

b) (1 Punkt) Ist die Markov-Kette irreduzible und aperiodisch? ...ja.

c) (2 Punkte) Der Prozess starte im Zustand 3, wann ist er das erste mal im Mittel wieder im Zustand 3.

```
    P <- matrix(c(0,0.3,0.7, 0.2,0, 0.8, 0.1,0.9,0), byrow=TRUE, ncol=3)
    PP <- P
    PP[, 3] <- 0
    solve((diag(3) - PP)) %*% c(1, 1, 1) #2.287234

##       [,1]
## [1,] 1.383
## [2,] 1.277
## [3,] 2.287
```

d) (2 Punkte) Geben Sie die asymptotische Lösung an.

```
    ev <- eigen(t(P))$vectors[,1]
    ev / sum(ev)

## [1] 0.1302 0.4326 0.4372
```

e) (2 Punkte) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit nach genau 3 Schritten wieder im Zustand 3 zu sein, wenn Sie aus diesem gestartet sind.

```
    library(expm, quietly=TRUE)

##
## Attaching package: 'expm'
##
## The following object is masked from 'package:Matrix':
##
##    expm

    (P%^%3)[3,3]

## [1] 0.15
```

f) (2 Punkte) Wie gross ist die Verbundwahrscheinlichkeit nach 3 Schritten im Zustand 3 und nach 5 Schritten im Zustand 1 zu sein, wenn Sie aus 2 gestartet sind?

```
    (P%^%3)[2,3] * (P%^%2)[3,1]

## [1] 0.1224
```

g) (3 Punkte) Es werden die Kosten 1,2,3 CHF für den Aufenthalt in den Zuständen $1, 2, 3$ verlangt. Die Kosten werden nur zu den Zeiten $t = 0, 2, 4, 6, \ldots$ nicht aber zu den Zeiten $t = 1, 3, 5, 7, \ldots$ verlangt. Bestimmen Sie die asymptotischen Kosten pro Zeiteinheit.

```
    P2 = (P%^%2)
    ev <- eigen(t(P2))$vectors[,1]
    ev <- ev / sum(ev)
    ev %*% c(1,2,3)

##       [,1]
## [1,] 2.307
```

h) (3 Punkte) Sie haben nur folgende Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$$

die asymptotischen Verteilung ist $\vec{\pi}(\infty) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, wie lautet a und b?

Lösung Aus der Eigenwertgleichung folgt: $a = 1$ und $b = 0.2$). Probe

```
    P <- matrix(c(0, 1, 1, 0), byrow=TRUE, ncol=2)
    ev <- eigen(t(P))$vectors[,1]
    ev / sum(ev)

## [1] 0.5 0.5
```

Aufgabe 4 *Punkte 8*

Gegeben Sie ein Markov-Prozess mit den Zuständen $X = 1, 2, 3$ und folgender Übergangsmatrix P.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0.2 & 0 & 0.8 \\ 0.1 & 0.9 & 0.0 \end{pmatrix}$$

Die mittleren Aufenthaltsdauern in den Zuständen sind 1,2,3 Minuten.

a) (1 Punkt) Geben Sie das Ratendiagram des Prozesses an.
trivial

b) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\vec{\pi}(t)$ nach $t = 3$ Minuten, wenn zur Zeit $t = 1.2$ Minuten galt: $\vec{\pi}(t) = (0.5, 0.5, 0)$

```
P <- matrix(c(0,0.3,0.7, 0.2,0, 0.8, 0.1,0.9,0), byrow=TRUE, ncol=3)
R <- P / c(1,2,3)
Q <- R - diag(rowSums(R))
library(expm, quietly=TRUE)
c(0.5, 0.5, 0) %*% expm(Q*1.8)

##        [,1]   [,2]  [,3]
## [1,] 0.1284 0.4046 0.467
```

c) (2 Punkte) Bestimmen Sie die asymptotische Verteilung

```
#Zur Probe expm(Q*1000)
ev.d <- eigen(t(Q))$vectors[,3]
(pi.ass <- ev.d / sum(ev.d))

## [1] 0.05645 0.37500 0.56855
```

d) (2 Punkte) Bestimmen Sie für lange Zeiten die erwartete Anzahl der Zustandswechsel pro Minute vom Zustand 2 in den Zustand 1

```
c.tilde <- c(0,R[2,1]*1,0)
c.tilde %*% pi.ass

##        [,1]
## [1,] 0.0375
```