Zürcher Hochschule
für Angewandte Wissenschaften

School of Engineering
IDP Institut für Datenanalyse und Prozessdesign

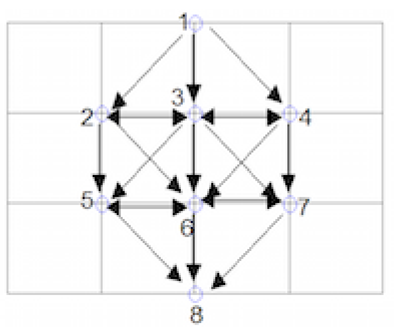
FS 2016

Stochastische Prozesse

Woche 4

Aufgabe 1 Vergnügungspark

Sie haben die Aufgabe, einen Vergnügungspark zu planen. Ziel ist es, pro Besucher einen möglichst grossen Profit zu erwirtschaften. Sie haben 6 verschiedene Attraktionen, die Sie im Park lokalisieren können. Dabei stehen folgende Plätze zur Verfügung:



Platz 1 ist für den Eingang reserviert, Platz 8 für den Ausgang. Die anderen Plätze werden mit den Attraktionen belegt. Nehmen Sie an, dass sich die Besucher entlang der eingezeichneten Pfeile bewegen. Die Wahrscheinlichkeiten für eine der möglichen Richtungen sind umgekehrt proportional zur zurückzulegenden Entfernung. Nehmen Sie weiter an, dass schon einmal besuchte Attraktionen genauso gern angelaufen werden wie noch nicht besuchte.

a) Modellieren Sie den Prozess als Markov-Kette, d. h. geben Sie die Übergangsmatrix P und den Startwert an. Vervollständigen Sie die ersten 2 Zeilen der untenstehenden Übergangsmatrix.

```
library("expm")
P <- matrix(byrow= TRUE, ncol=8, data=c(
    x,  x,  x,    x,  x,  x,  x,  x,
    x,  x,  x,    x,  x,  x,  x,  x,
    0,  0.22654,  0,  0.22654,    0.16019,    0.22654,    0.16019,    0,
    0,  0,    0.3694, 0,  0,  0.2612, 0.3694, 0,
    0,  0,    0,  0,  0,  0.58579,    0,  0.41421,
    0,  0,    0,  0,  0.33333,    0,  0.33333,    0.33333,
    0,  0,    0,  0,  0,  0.58579,    0,  0.41421,
    0,  0,    0,  0,  0,  0,  0,  1
  )
)
```

```r
P <- rbind( c(0,1/sqrt(2),1,1/sqrt(2),0,0,0,0),
             c(0,0,1,0,1,1/sqrt(2),0,0),
             c(0,1,0,1, 1/sqrt(2),1,1/sqrt(2), 0),
             c(0,0,1,0,0,1/sqrt(2),1,0),
             c(0,0,0,0,0,1,0,1/sqrt(2)),
             c(0,0,0,0,1,0,1,1),
             c(0,0,0,0,0,1,0,1/sqrt(2)),
             c(0,0,0,0,0,0,0,1)
             )
P<-sweep(x=P,MARGIN=1,STATS=rowSums(P),FUN="/")
P
```

```
##      [,1]      [,2]      [,3]      [,4]      [,5]      [,6]      [,7]
## [1,]    0 0.2928932 0.4142136 0.2928932 0.0000000 0.0000000 0.0000000
## [2,]    0 0.0000000 0.3693981 0.0000000 0.3693981 0.2612039 0.0000000
## [3,]    0 0.2265409 0.0000000 0.2265409 0.1601886 0.2265409 0.1601886
## [4,]    0 0.0000000 0.3693981 0.0000000 0.0000000 0.2612039 0.3693981
## [5,]    0 0.0000000 0.0000000 0.0000000 0.0000000 0.5857864 0.0000000
## [6,]    0 0.0000000 0.0000000 0.0000000 0.3333333 0.0000000 0.3333333
## [7,]    0 0.0000000 0.0000000 0.0000000 0.0000000 0.5857864 0.0000000
## [8,]    0 0.0000000 0.0000000 0.0000000 0.0000000 0.0000000 0.0000000
##           [,8]
## [1,] 0.0000000
## [2,] 0.0000000
## [3,] 0.0000000
## [4,] 0.0000000
## [5,] 0.4142136
## [6,] 0.3333333
## [7,] 0.4142136
## [8,] 1.0000000
```

b) Wie viele Stationen läuft ein Besucher im Mittel an? Wählen Sie dazu ein T, welches hinreichend gross ist. Wie können Sie sicher sein, dass T gross genug gewählt wurde.

```r
library("expm")

 getM <- function(Tmax){
   M <- P
   for (i in 2:Tmax) {
     M <- M + P %^% i
   }
   return (M)
 }

 cost <- c(0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0)
 c(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)  %*% getM(5) %*% cost
```

```
##          [,1]
## [1,] 3.685752
```

```r
c(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)  %*% getM(10) %*% cost
```

```
##          [,1]
## [1,] 4.27774
```

```r
c(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)  %*% getM(100) %*% cost
```

```
##          [,1]
## [1,] 4.343146
```

```r
c(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)  %*% getM(1000) %*% cost
```

```
##          [,1]
## [1,] 4.343146
```

c) Nehmen Sie an, dass der Besucher an den Stationen 2-4 je 40 Fr. ausgibt, an den Stationen 5-7 je 30 Fr. Wieviel Geld geben die Besucher im Mittel aus?

```r
library("expm")
cost <- c(0, 40, 40, 40, 30, 30, 30, 0)
c(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)  %*% getM(5) %*% cost
```

```
##          [,1]
## [1,] 127.2432
```

```r
c(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)  %*% getM(10) %*% cost
```

```
##          [,1]
## [1,] 145.1929
```

```r
c(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)  %*% getM(100) %*% cost
```

```
##          [,1]
## [1,] 147.1573
```

```r
c(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)  %*% getM(1000) %*% cost
```

```
##          [,1]
## [1,] 147.1573
```

```r
c(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)  %*% getM(10000) %*% cost
```

```
##          [,1]
## [1,] 147.1573
```

d) Nehmen Sie nun an, dass Sie 6 verschiedene Attraktionen A,B,C,D,E,F haben. Sie wissen aus der Erfahrung von anderen Parks, dass Besucher im Mittel folgendes ausgeben: A 10, B 20, C 30, D 40, E 50, F 60. Wo platzieren Sie die Attraktionen, damit die Besucher im Mittel möglichst viel Geld ausgeben?

```r
getM(10000)[1,]
```

```
## [1]    0.0000000    0.4644661    0.7573593    0.4644661    0.7071068
## [6]    1.2426407    0.7071068 9995.6568542
```

Die meisten Aufenthalte sind also im Zustand 6 dann 3 dann 5,7 und schliesslich 2 und 4, also:

```r
cost <- c(
  0,   #1
  10,  #0.4644
  50,  #0.757
  20,  #0.4644
  40,  #0.707
  60,  #1.242
  30,  #0.7070
  0)
```

e) Wieviel Geld gibt ein durchschnittlicher Besucher dann (mit der optimierten Platzbelegung) aus?

```r
c(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)  %*% getM(10000) %*% cost
```

```
##          [,1]
## [1,] 175.8579
```

Aufgabe 2 Wetter Wechsel

Betrachten Sie als Beispiel eine stündliche Wettervorhersage. Die Markov-Kette mit dem Zustandsraum $S = 1, 2, 3$ (sonning, bewölkt, regnerisch) hat die Übergangsmatrix:

```r
P <- matrix(c(0.9, 0.1, 0, 0.05, 0.9, 0.05, 0,0.1,0.9), ncol=3, byrow=TRUE)
```

$$P = \begin{pmatrix} 0.90 & 0.10 & 0.00 \\ 0.05 & 0.90 & 0.05 \\ 0.00 & 0.10 & 0.90 \end{pmatrix}$$

a) Der Prozess sei zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand $X_0 = 1$ (sonnig). Wie viel Regenstunden erwarten Sie bis zum Zeitpunkt $t = 5$?

```r
P =  matrix(c(0.9, 0.1, 0, 0.05, 0.9, 0.05, 0,0.1,0.9), ncol=3, byrow=TRUE)
M = P %^% 0
for (l in 1:5) {
  M = M +  P%^%l
}
M[1,3]
```

```
## [1] 0.079525
```

b) Der Prozess sei zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand $X_0 = 2$ (bewölkt). Wie viele Wetterwechsel von bewölkt nach sonnig erwarten Sie bis zum Zeitpunkt $T = 1$, wie viele bis zum Zeitpunkt T=5? Tipp: Verwenden Sie eine geeignete Kostenmatrix U

```
M = P %^% 0 #M(T-1) = M(0)
U = matrix(rep(0,9), nrow=3)
U[2,1] = 1
cost = rowSums(U * P)
c(0,1,0) %*% M %*% cost
```

```
##      [,1]
## [1,] 0.05
```

```
for (l in 1:4) { #Achtung nur bis T-1
  M = M +  P%^%l
}
c(0,1,0) %*% M %*% cost
```

```
##         [,1]
## [1,] 0.20904
```

c) Wie viele Wetterwechsel beobachten Sie in 1000 Stunden, falls wie oben $X_0 = 2$. Begründen Sie das Ergebniss anderweitig.

```
U = matrix(rep(1,9), nrow=3)
U[1,1] = U[2,2] = U[3,3] = 0
cost = rowSums(U * P)
M = P %^% 0
for (l in 1:999) { #Achtung
  M = M +  P%^%l
}
c(0,1,0) %*% M %*% cost
```

```
##      [,1]
## [1,]  100
```

Die Wahrscheinlichkeit für einen Wechsel beträgt aus jedem Zustand heraus 0.1.