Aufgabe 1 (Realisierung eines Markovprozesses)

Eine Furby kann in den 3 Zuständen genannt Personalities (Warrior=1, Diva=2 und Jocker=3) sein.[1]

Beschreiben Sie den Zustand des Furbys als ein MP. Folgende 4 Übergange sind erlaubt und finden gleich wahrscheinlich statt.

Warrior <-> Diva
Diva <-> Jocker

Die Übergange haben eine Rate von λ=2/Tag.

a) Geben Sie folgende Übergangsmatrixen für den in Prozess:

- Sprungmatrix P
- Ratenmatrix R
- Generatormatrix Q

an und

- zeichnen Sie das Ratendiagram.

Wie oft wechselt der Furby im Mittel in 2 bzw. 20 Tagen seinen Zustand.

b) Gegen ist folgender R-Output:

```
> require("expm")
> Q <- matrix(c(-2,2,0, 2,-4,2, 0,2,-2), nrow=3, byrow=TRUE)
> expm(Q*0.5)
          [,1]      [,2]      [,3]
[1,] 0.5255709 0.3167376 0.1576915
[2,] 0.3167376 0.3665247 0.3167376
[3,] 0.1576915 0.3167376 0.5255709
> expm(Q*100)
          [,1]      [,2]      [,3]
[1,] 0.3333333 0.3333333 0.3333333
[2,] 0.3333333 0.3333333 0.3333333
[3,] 0.3333333 0.3333333 0.3333333
```

Ihr Furby started im Zustand 1 = Warrior wie lautet $\overrightarrow{\pi(t)}$ nach einem halben Tag, wie nach 100 Tagen.

c)Bestimmen Sie die stationäre Verteilung aus folgendem R-Output, ist dies gleich der asymptotischen Verteiltung.

```
> eigen(t(Q))
$values
[1]  0 -2 -6

$vectors
          [,1]          [,2]       [,3]
[1,] 0.5773503 -7.071068e-01 -0.4082483
[2,] 0.5773503 -4.710277e-16  0.8164966
[3,] 0.5773503  7.071068e-01 -0.4082483
```

[1] Die Personalities Jocker, Chatterbox, und Default werden vernachlässigt.

Formelsammlung

	Markov-Kette (Zeit diskret)	**Markov-Prozess (Zeit kontin.)**
Definiert durch	Übergangsmatrix **P** mit: $0 \le p_{ij} \le 1 \ \mathit{für\ alle}\, i, j$ $\sum_{j=1}^{N} p_{ij} = 1$ für alle i (Zeilensumme in **P** ist 1)	Ratenmatrix **R**, bzw. Generatormatrix **Q** mit: $0 \le r_{ij} \ \mathit{für\ alle}\, i \ne j, r_{ii} = 0 \ \mathit{für\ alle}\, i$ $q_{ij} = r_{ij} \ \mathit{für\ alle}\, i \ne j$ $q_{ii} = -\sum_{j=1}^{N} r_{ij} \ \mathit{für\ alle}\, i$ (Zeilensumme in **Q** ist 0)
Dynamik ergibt sich aus und hat als Lösung	$\vec{\pi}(1) = \vec{\pi}(0) \cdot \mathbf{P}$ $\vec{\pi}(t) = \vec{\pi}(0) \cdot \mathbf{P}^t$	$\frac{d}{dt}\vec{\pi}(t) = \vec{\pi}(t) \cdot \mathbf{Q}$ $\vec{\pi}(t) = \vec{\pi}(0) \cdot e^{\mathbf{Q}t}$
Aufenthalts-dauermatrix	$\mathbf{M}(T) = \sum_{t=0}^{T} \mathbf{P}^t$	$\mathbf{M}(T) = \int_0^T e^{\mathbf{Q}t} dt$
Aufenthalts-dauervektor für Zeithorizont T	$\vec{N}(T) = \vec{\pi}(0) \cdot \mathbf{M}(T)$ **M** wie oben	$\vec{N}(T) = \vec{\pi}(0) \cdot \mathbf{M}(T)$ **M** wie oben
Zustandsabh. Kosten endl. Horizont	$E(K) = \vec{\pi}(0) \cdot \mathbf{M}(T) \cdot \vec{c}\,'$ **M** wie oben	$E(K) = \vec{\pi}(0) \cdot \mathbf{M}(T) \cdot \vec{c}\,'$ **M** wie oben
Übergangsabh. Kosten endl. Horizont	$E(K) = \vec{\pi}(0) \cdot \mathbf{M}(T-1) \cdot \tilde{c}$ **M** wie oben, $\tilde{c}_i = \sum_j p_{ij} u_{ij}$	$E(K) = \vec{\pi}(0) \cdot \mathbf{M}(T) \cdot \tilde{c}$ **M** wie oben, $\tilde{c}_i = \sum_j r_{ij} u_{ij}$
Stationäre Verteilung	(falls irreduzibel und aperiod.) Aus LGS $\vec{\pi}^* = \vec{\pi}^* \cdot \mathbf{P}$ Oder normierten EV von $\mathbf{P}'$ zum EW 1	(falls irreduzibel) Aus LGS $\vec{\pi}^*(t) \cdot \mathbf{Q} = \vec{0}$ Oder normierten EV von $\mathbf{Q}'$ zum EW 0
Zustandsabh. Kosten stationär	Pro Zeitschritt: $E(K) = \vec{\pi}^* \cdot \vec{c}\,'$	Pro Zeiteinheit: $E(\frac{dK}{dt}) = \vec{\pi}^* \cdot \vec{c}\,'$
Übergangsabh. Kosten stationär	Pro Zeitschritt: $E(K) = \vec{\pi}^* \cdot \tilde{c}$	Pro Zeiteinheit: $E(\frac{dK}{dt}) = \vec{\pi}^* \cdot \tilde{c}$