Zürcher Hochschule
für Angewandte Wissenschaften

School of Engineering
IDP Institut für Datenanalyse und Prozessdesign

FS 2016

Stochastische Prozesse

Woche 9

Aufgabe 1 Wieso nennt man Poisson-Prozesse Poisson-Prozesse?

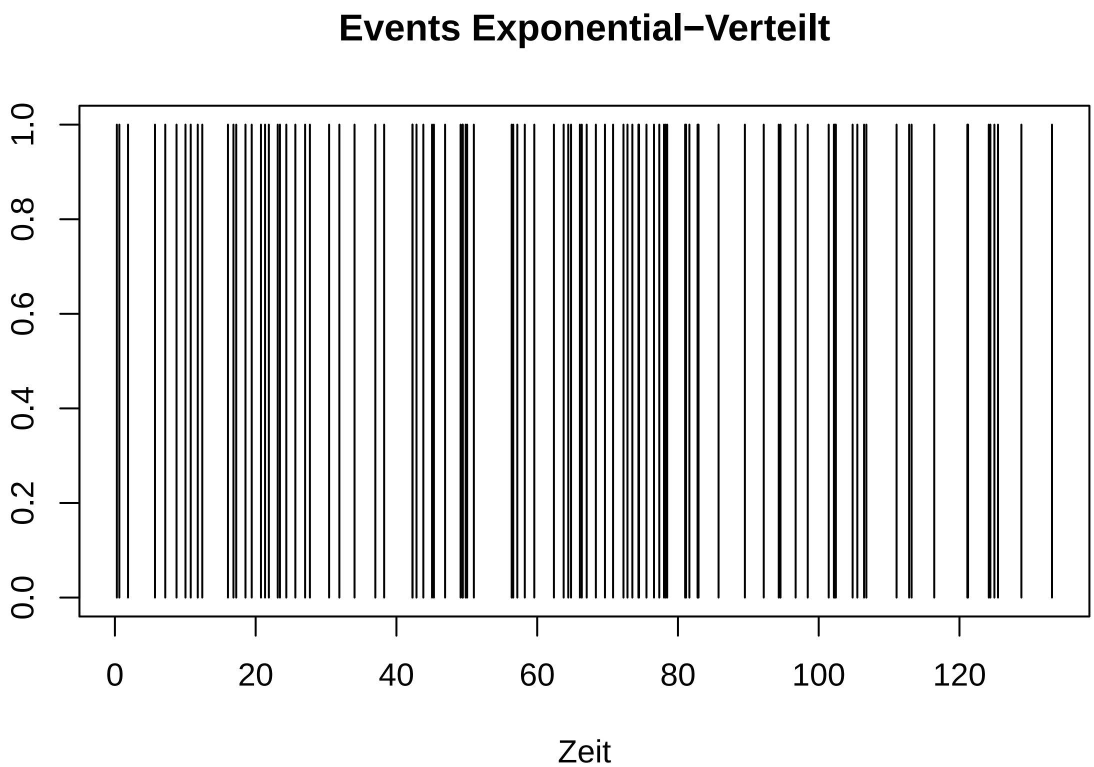
Hintergrund: Wir haben die Poisson-Prozesse, als Prozesse bei denen die Wartezeit exponentiell Verteilt ist definiert. Wie so nennt man solche Prozesse, Poisson-Prozesse und nicht etwa Exponential-Prozesse?

a) Ziehen Sie 100 Wartezeiten aus eine Exponentialverteilung mit der Rate $\lambda = 0.8$. Plotten Sie die Zeitpunkte der Ereignisse als Striche auf der X-Achse. R-Tipps: rexp, cumsum

```
t <- rexp(100, rate=0.8)
  s <- cumsum(t)
  head(s)
```

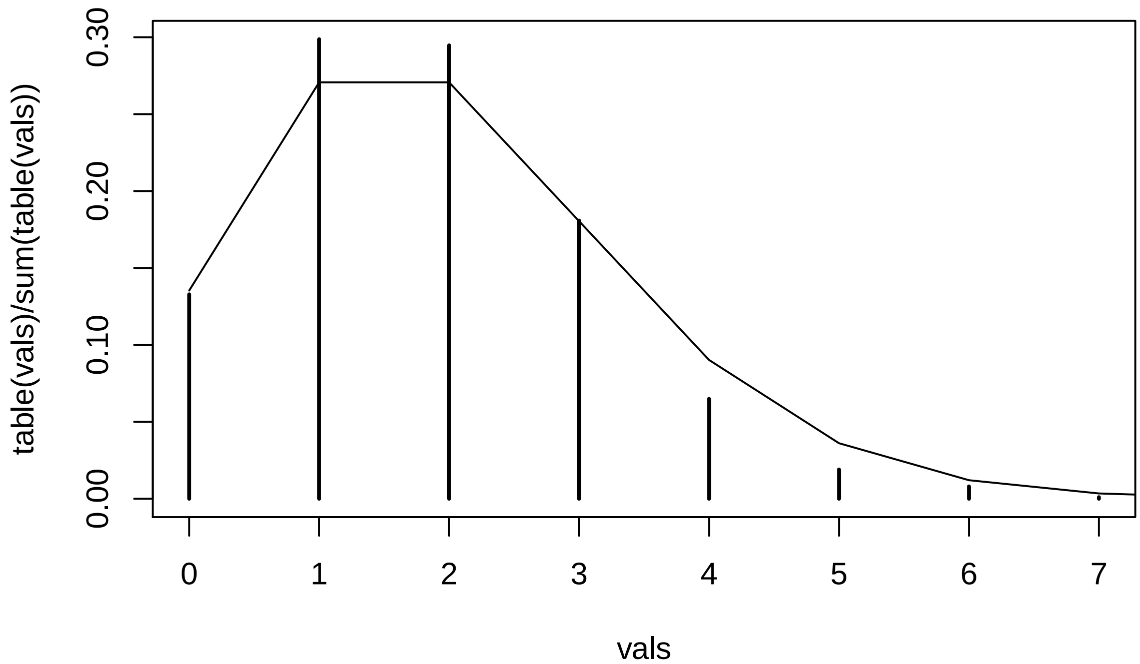
```
## [1] 0.2765502 0.6310309 1.8646449 5.6945302 7.1555335 8.7592157
```

```
  plot(s,rep(1,length(s)), pch="l", main="Events Exponential-Verteilt", ylab="", xlab="Zeit", type="
```



b) Betrachten Sie nun ein Zeitintervall der Länge 2.5. Bestimmen Sie die Anzahl der Events, die jeweils nach einem Event, in dem Zeitfenster liegen. Plotten Sie die relativen Häufigkeiten. Wie sind diese verteilt? Um eine bessere Statistik zu bekommen, verwenden Sie nun mindestens 1000 Wartezeiten, anstelle der 100 aus a). Welcher Verteilung genügt die Anzahl der Ereignise im Zeitintervall?

```r
t <- rexp(1000, rate=0.8)
  s <- cumsum(t)
  deltaT <- 2.5;
  vals <- 0
  for (i in 1:length(s)) {
    t0 <- s[i]
    t1 <- s[i] + deltaT
    vals <- append(vals, sum(s[t0 < s] < t1)) #Der Event an der Stelle
  }
  plot(table(vals)/sum(table(vals)))
  lines(0:20, dpois(0:20, lambda=0.8 * 2.5))
```



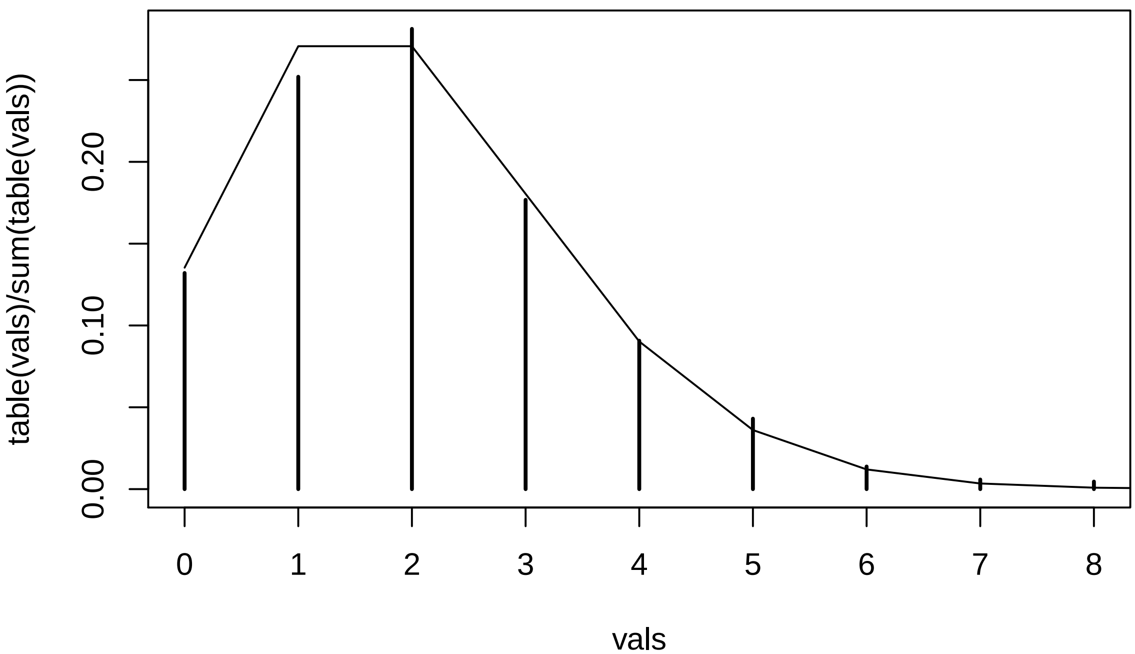
Die Anzahl der Ereignisse in einem Interall ist Poisson verteilt mit $\lambda_{\mathrm{P}oiss} = 2.5 * \lambda$

c) Schieben Sie nun das Zeitfenster über die Ereignisse (Schrittweite 0.1) und zählen Sie jeweils die Anzahl der Events in dem Intervall. Ändert sich etwas an der Verteilung gegenüber b)? Gilt Ihre Beobachtung auch für beliebige Erneuerungsprozesse?

```
t <- rexp(1000, rate=0.8)
s <- cumsum(t)
1 / mean(t)
```

```
## [1] 0.8355992
```

```
deltaT <- 2.5;
vals <- 0
for (i in seq(1,s[length(s)], 0.5)) {
  t0 <- i
  t1 <- i + deltaT
  vals <- append(vals, sum(s[t0 <= s] < t1))
}
plot(table(vals)/sum(table(vals)))
lines(0:20, dpois(0:20, lambda=0.8 * 2.5))  #Die Rate in den Poissonverteilung ist die Rate mal de
```



Die Anzahl der Ereignisse in einem Interall ist wieder Poisson verteilt den gleichen Parametern, wie in b). Die Unabhängigkeit vom Startzeitpunkt (egal ob nach letzem Ereigniss oder nicht), folgt aus der Gedächnisslosigkeit von Poisson-Prozessen.

d) Nehmen Sie nun an, dass Sie sich in einem Land befinden, in dem die Busse als Poisson-Prozess ankommen. Hätten Sie einen Grund sich darüber aufzuregen, dass Ihnen gerade ein Bus vor der Nase weggefahren ist? Nein egal wann ich ankomme, die Wahrscheinlichkeitsverteilung das in den nächsten X-Minuten ein Bus kommt ändert sich nicht.

Aufgabe 2 Busmanagement

An einer Bushaltestelle kommt (exakt) alle halbe Stunde ein Bus an. Die Fahrgäste kommen zur Bushaltestelle in einem Poissonprozess mit Rate 0.5/min. Nehmen Sie an, dass Fahrgäste, die wegen Busüberfüllung nicht mitgenommen werden, die Bushaltestelle sofort verlassen und nicht auf den nächsten Bus warten.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit p_{Full}, dass ein Bus mit 15 Sitzplätzen nicht alle Wartenden mitnehmen kann?

Da es sich um einen Poissonprozess handelt ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich k Personen zum Zeitpunkt t an der Bushaltestelle befinden durch

$$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

gegeben. Die Wahrscheinlichkeit, dass alle (0 bis 15) mitgenommen werden ist $P(N(30) \leq 15)$. Hier gilt $\lambda = 0.5$ und $t = 30$. Wir erhalten:

```
pfull <- 1-ppois(15, lambda=30*0.5)
pfull
```

```
## [1] 0.4319104
```

b) Wie viele Fahrgäste nimmt der Bus im Mittel mit?
Hätte der Bus unbegrenzt viele Plätze, so wäre die Anzahl mitgenommener Fahrgäste Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda \cdot t = 0.5 \cdot 30 = 15$. Warten mehr als 15 Personen an der Haltestelle, so werden allerdings nur 15 mitgenommen. Wir erhalten also (wenn $N(30)$ die Anzahl wartender und Y die Anzahl mitgenommener Fahrgäste ist)

$$E(Y) = 1 \cdot P(Y = 1) + \cdots + 15 \cdot P(Y = 15) = 1 \cdot P(N(30) = 1) + \cdots + 15 \cdot P(N(30) \geq 15).$$

In R:

```
k <- 0:15
sum( k*dpois( k, lambda = 15), 15 * pfull )
```

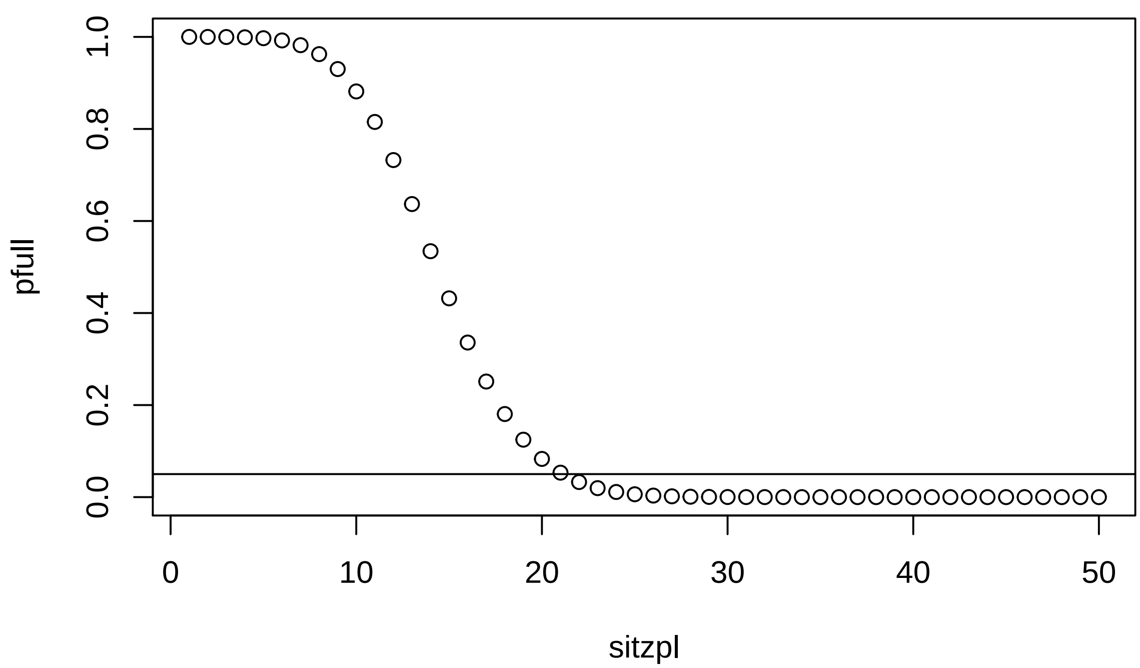
```
## [1] 13.46346
```

Es werden also durchschnittlich 13.46 Fahrgäste mitgenommen.

c) Wie viele Sitzplätze muss der Bus mindestens haben, damit die Wahrscheinlichkeit für Überfüllung kleiner als 5 Prozent ist? Plotten Sie dazu die Überfüllungswahrscheinlichkeit gegen die Anzahl der Sitzplätze.

```
sitzpl <- 1:50
pfull <- 1-ppois( sitzpl, lambda = 15 )

plot( sitzpl, pfull )
abline( h = 0.05 )
```




```
min( which( pfull <= 0.05 ) )
```

```
## [1] 22
```

Man benötigt also mindestens 22 Sitzplätze. Kürzer:

```r
qpois( 0.95, lambda = 15 )
```

```
## [1] 22
```