Zürcher Hochschule
für Angewandte Wissenschaften

zh
aw

School of
Engineering
IDP Institut für Datenanalyse
und Prozessdesign

FS 2016

Stochastische Prozesse

Woche 7

Aufgabe 1 Würfelspiel

Betrachten Sie folgendes Würfelspiel: Sie haben ein Spielfeld aus 10 aufeinanderfolgenden Plätzen:

Start	2	3	4	5	6	7	8	9	Ziel

Ihre Figur steht am Anfang auf dem Startfeld. Pro Spielzug würfeln Sie einmal mit einem Würfel. Sie rücken die Figur um die Augenanzahl des Würfels nach vorne, aber nicht über das Ziel hinaus. Wenn Sie eine zu grosse Zahl würfeln, bleibt die Figur stehen. Das Spiel ist beendet, wenn Ihre Figur das Ziel erreicht hat.

a) Modellieren Sie das Spiel als Markov-Kette. Geben Sie Zustandsraum und die Übergangsmatrix an.

```
# Das Spiel hat 10 Zust<U+00E4>nde (Start, 2,..9, Ende)
P <- matrix(rep(0, 100), ncol = 10)
for (i in 1:10) {
    zugross <- 0
    for (w in 1:6) {
        if (i + w <= 10) {
            P[i, i + w] <- 1/6
        } else {
            zugross <- zugross + 1/6
        }
    }
    P[i, i] <- zugross
}
rowSums(P)  #Check, sollte eins ergeben
```

```
##  [1] 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
```

```r
P
```

```
##       [,1]      [,2]      [,3]      [,4]      [,5]      [,6]      [,7]
##  [1,]    0 0.1666667 0.1666667 0.1666667 0.1666667 0.1666667 0.1666667
##  [2,]    0 0.0000000 0.1666667 0.1666667 0.1666667 0.1666667 0.1666667
##  [3,]    0 0.0000000 0.0000000 0.1666667 0.1666667 0.1666667 0.1666667
##  [4,]    0 0.0000000 0.0000000 0.0000000 0.1666667 0.1666667 0.1666667
##  [5,]    0 0.0000000 0.0000000 0.0000000 0.1666667 0.1666667 0.1666667
##  [6,]    0 0.0000000 0.0000000 0.0000000 0.0000000 0.3333333 0.1666667
##  [7,]    0 0.0000000 0.0000000 0.0000000 0.0000000 0.0000000 0.5000000
##  [8,]    0 0.0000000 0.0000000 0.0000000 0.0000000 0.0000000 0.0000000
##  [9,]    0 0.0000000 0.0000000 0.0000000 0.0000000 0.0000000 0.0000000
## [10,]    0 0.0000000 0.0000000 0.0000000 0.0000000 0.0000000 0.0000000
##            [,8]      [,9]     [,10]
##  [1,] 0.0000000 0.0000000 0.0000000
##  [2,] 0.1666667 0.0000000 0.0000000
##  [3,] 0.1666667 0.1666667 0.0000000
##  [4,] 0.1666667 0.1666667 0.1666667
##  [5,] 0.1666667 0.1666667 0.1666667
##  [6,] 0.1666667 0.1666667 0.1666667
##  [7,] 0.1666667 0.1666667 0.1666667
##  [8,] 0.6666667 0.1666667 0.1666667
##  [9,] 0.0000000 0.8333333 0.1666667
## [10,] 0.0000000 0.0000000 1.0000000
```

b) Wie viele Spielzüge hat dieses Spiel im Mittel? Nehmen Sie dazu an, dass das Spiel nach spätestens 1000 Spielzügen beendet ist und berechnen Sie die Aufenthaltsdauermatrix M. Sie stehen auf dem Feld 4 ihr Spielpartner auf dem Feld 8, wer hat grössere Chancen zu gewinnen?

```r
require(expm)
M = 0 * P  #Trick von Herr Grob
T = 1000
for (i in 0:(T - 1)) {
    M = M + P %^% i
}
dauer = rowSums(M[, 1:9])
dauer[1]  #Falls Start bei 1
```

```
## [1] 7.361111
```

```r
dauer[4]  #Falls Start bei 4
```

```
## [1] 6
```

```r
dauer[8]  #Falls Start bei 8
```

```
## [1] 6
```

```
# Beide haben die gleichen Chancen.
```

c) Wie häufig müssen Sie im Mittel Ihre Figur stehen lassen, weil Sie eine zu grosse Zahl gewürfelt haben? Tipp: Verwenden Sie dazu geeignete Übergangsabhänigen Kosten und wählen Sie T gross genug.

```
# Spr<U+00FC>nge in den gleichen Zustand kosten
U <- diag(10)
U[10, 10] <- 0
ctilde <- rowSums(P * U)
(M %*% ctilde)[1]
```

```
## [1] 3.915046
```

d) Berechnen Sie die mittlere Anzahl der Spielzüge mit Übergangsabhängigen Kosten. Tipp: Ein Wechsel von 10 (Ziel) nach 10 Kostet nichts und vergleichen Sie Ihr Ergebniss mit b).

```
# Spr<U+00FC>nge in den gleichen Zustand kosten
U <- (matrix(rep(1, 100), ncol = 10))
U[10, 10] <- 0
ctilde <- rowSums(P * U)
(M %*% ctilde)
```

```
##           [,1]
##  [1,] 7.361111
##  [2,] 7.166667
##  [3,] 7.000000
##  [4,] 6.000000
##  [5,] 6.000000
##  [6,] 6.000000
##  [7,] 6.000000
##  [8,] 6.000000
##  [9,] 6.000000
## [10,] 0.000000
```

e) Nehmen Sie folgende Spielregeln an: Sie würfeln insgesamt 6 mal, falls Sie beim 1., 3. oder 6. Wurf auf dem Feld 6 landen müssen sie 10 CHF zahlen. Falls Sie es bis zum Ziel geschafft haben bekommen Sie 10 CHF. Was ist der erwartete Gewinn bzw. Verlust.

```
-10 * (P[1, 6] + (P %^% 3)[1, 6] + (P %^% 6)[1, 6]) + 10 * (P[1, 10] + (P %^%
    2)[1, 10] + (P %^% 3)[1, 10] + (P %^% 4)[1, 10] + (P %^% 5)[1, 10] + (P %^%
    6)[1, 10])
```

```
## [1] 15.36544
```