

Stochastische Prozesse

Woche 11

Aufgabe 1 Optimaler Austausch

Der deutsche Wurstfabrikant Uli H. hat viele Wurstmaschinen. Die Lebenserwartung dieser Wurstmaschinen ist gleichmässig zwischen 0 und 2 Jahre verteilt. Uli lässt die Maschinen immer Laufen, bis sie kaputt gehen. Ein Austausch kostet dann 2000 CHF. Würde er sie frühzeitig ersetzen, würde ihn das 500 CHF kosten. Nach welcher Zeit würden Sie Uli raten, seine Wurstmaschinen vorzeitig zu erneuern? Was würde er im Mittel pro Jahr und Wurstmaschine sparen?

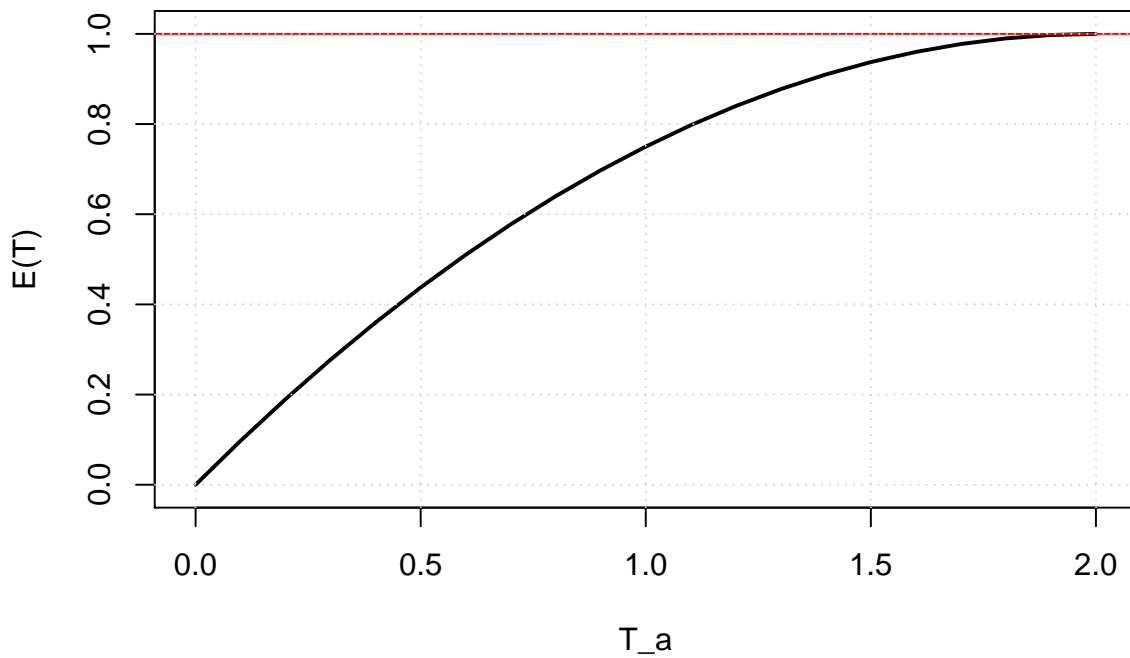
T_a Austauschzeit
Zeit

$$E(T) = \int_0^{T_a} \frac{t}{2} dt + T_a \int_{T_a}^2 \frac{dt}{2} = -\frac{1}{4}(T_a - 4)T_a$$

```
T_a = seq(0, 2, 0.1)
E_T = (4 - T_a) * T_a/4

plot(T_a, E_T,
      xlab = "T_a",
      ylab = "E(T)",
      xlim = c(-0.01, 2.01),
      ylim = c(-0.01, 1.01),
      type = "l",
      lwd = 2)

abline(h = 1, col="red")
grid()
```



Kosten

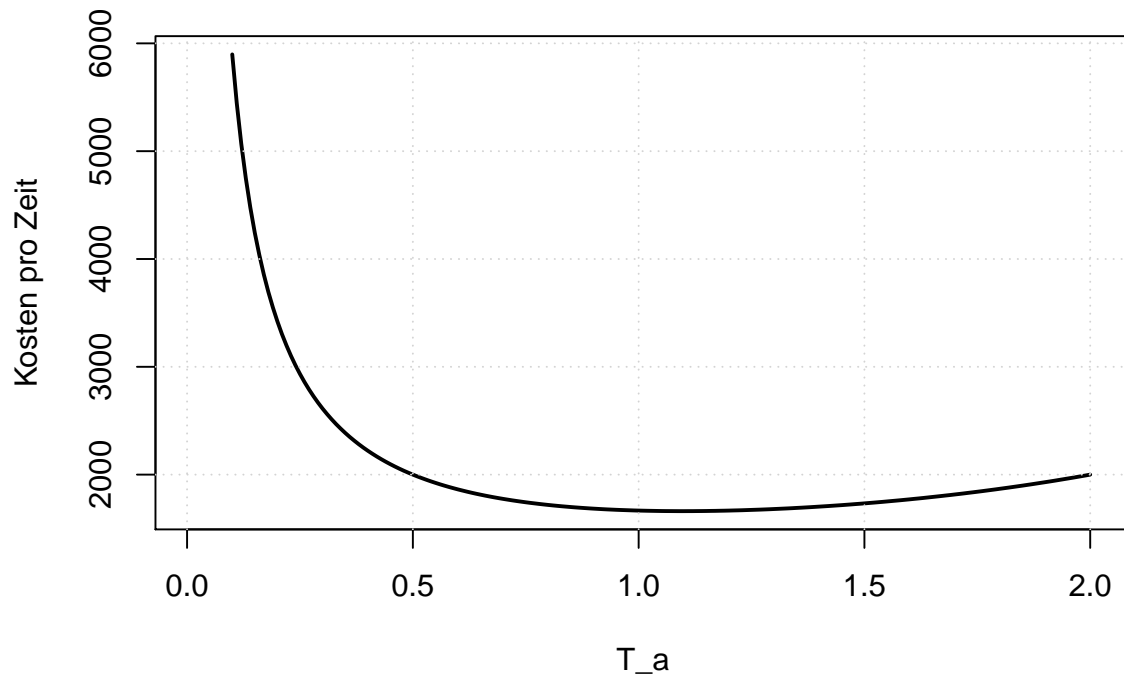
$$E(K) = \int_0^{T_a} \frac{1}{2} 2000 dt + T_a \int_{T_a}^2 \frac{500}{2} dt = -\frac{1}{4}(T_a - 4)T_a = 250(2 - T_a) + 1000T_a$$

Kosten pro Zeit

$$\frac{E(K)}{E(T)} = \frac{250(2 - T_a) + 1000T_a}{\frac{(4 - T_a)T_a}{4}}$$

```
T_a = seq(0.1, 2, 0.01)
k.T = 4*( 250 * (2-T_a) + 1000*T_a )/( 4*T_a - (T_a)^2 )

plot(T_a, k.T,
     xlab = "T_a",
     ylab = "Kosten pro Zeit",
     xlim = c(0.01,2.01),
     type = "l",
     lwd = 2)
grid()
```



$$\frac{d}{dT_A} \frac{E(K)}{E(T)} \stackrel{!}{=} 0 \implies T_a = \frac{2}{3}(-1 \pm \sqrt{7})$$

$$\text{In Definition} \implies T_a = \frac{2}{3}(\sqrt{7} - 1) \approx 1.09$$

$$\frac{E(K(T_a))}{E(T(T_a))} \approx 1661 \text{ CHF/a}$$

Ohne Austausch

$$\frac{E(K(T_a))}{E(T(T_a))} = \frac{2000 \text{ CHF}}{1a}$$

man spart etwa 339 CHF/A