Zürcher Hochschule
für Angewandte Wissenschaften

School of
Engineering
IDP Institut für Datenanalyse
und Prozessdesign

FS 2016

Stochastische Prozesse

Woche 3

Aufgabe 1 Wettervorhersage mit Markov-Ketten

Betrachten Sie als Beispiel eine stündliche Wettervorhersage. Die Markov-Kette mit dem Zustandsraum $S = 1, 2, 3$ (sonning, bewölkt, regnerisch) hat die Übergangsmatrix:

```
P <- matrix(c(0.9, 0.1, 0, 0.05, 0.9, 0.05, 0, 0.1, 0.9), ncol = 3, byrow = TRUE)
```

$$P = \begin{pmatrix} 0.90 & 0.10 & 0.00 \\ 0.05 & 0.90 & 0.05 \\ 0.00 & 0.10 & 0.90 \end{pmatrix}$$

a) Der Prozess sei zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand $X_0 = 1$ (sonnig). Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass es zum Zeitpunkt $t = 5$ regnet ($X_5 = 3$)? Lösen Sie dies mit zwei Methoden:

- Mittels Simulation von 10000 Realisierungen des Prozesses. Verwenden Sie dazu die Funktion `markov()` von letzter Woche. Falls Sie die Aufgabe nicht gelöst haben, können Sie die Funktion wie folgt einbinden.

```
source("markov.r")
P <- matrix(c(0.5, 0.5, 0.5, 0.5), ncol = 2)  # <U+00DC>bergangsmatrix Matrix
markov(P = P, Tmax = 10, x0 = 2)  # Erzeugt eine Realisation der Markov-Kette
# 1 2 1 2 2 2 1 1 2 2
```

- Mittels einer Berechung mit der Übergangsmatrix P wie in der Vorlesung gezeigt.

```
P <- matrix(c(0.9, 0.1, 0, 0.05, 0.9, 0.05, 0, 0.1, 0.9), ncol = 3, byrow = TRUE)


runs <- 10000
erg <- replicate(runs, markov(P, Tmax = 5, x0 = 1)[5] == 3)
sum(erg)/runs
```

```
[1] 0.035
```

```r
### Simulation # Berechnung
(P %*% P %*% P %*% P %*% P)[1, 3]
```

```
[1] 0.036675
```

```r
library("expm")
(P %^% 5)[1, 3]
```

```
[1] 0.036675
```

b) Es scheint die Sonne bei $t = 0$: $X_0 = 1$. Wir betrachten das Wetter für die nächsten 5 Stunden. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es jeweils an den Zeitpunkten $t = 1, 2, 3, 4, 5$ regnet.

```r
Pt <- P
for (i in 1:5) {
    print(c(i, Pt[1, 3]), digits = 4)
    Pt <- Pt %*% P
}
```

```
[1] 1 0
[1] 2.000 0.005
[1] 3.0000 0.0135
[1] 4.00000 0.02435
[1] 5.00000 0.03668
```

c) Unter der Vorraussetzung wie in b): Wie gross ist die erwartete Anzahl von Regenstunden (Aufenthalte im Zustand 3)? Lösen Sie dieses Problem wieder durch Simulation.

```r
### Alternative Berechnung # Simulation
runs <- 10000
erg <- replicate(runs, sum(markov(P, Tmax = 5, x0 = 1) == 3))
mean(erg)
```

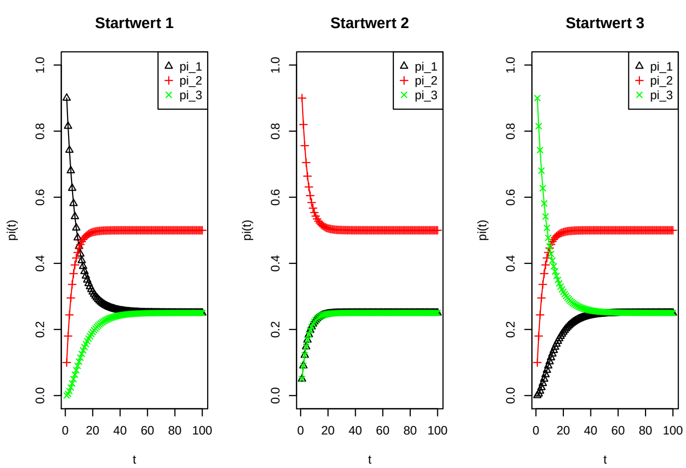
```
[1] 0.0767
```

d) Plotten Sie, mittels der n-Schritt-Übergangsmatrix, die Wahrscheinlichkeiten sich in den Zuständen 1,2,3 für Zeitpunkte $t = 0 \dots 100$ zu befinden. Der Startwert sei wieder $X_0 = 1$ (*Sonnig*). Wiederholen Sie den Plot für die Anfangszustände *bewölkt* und *Regen*. Hängt das Wetter nach 100 Stunden noch signifikant vom Anfangszustand ab?

```r
plotWetter <- function(xS = 1) {
    Pt <- P
    tmax <- 100
    p1 <- rep(0, tmax)
    p2 <- rep(0, tmax)
    p3 <- rep(0, tmax)
    for (i in 1:tmax) {
        p1[i] <- Pt[xS, 1]
```

```
        p2[i] <- Pt[xS, 2]
        p3[i] <- Pt[xS, 3]
        Pt <- Pt %*% P
    }
    plot(1:tmax, p1, t = "o", ylim = c(0, 1), pch = 2, main = paste("Startwert",
        xS), xlab = "t", ylab = "pi(t)", col = "black")
    lines(1:tmax, p2, col = "red", t = "o", pch = 3)
    lines(1:tmax, p3, col = "green", t = "o", pch = 4)
    legend(x = "topright", col = c("black", "red", "green"), legend = c("pi_1",
        "pi_2", "pi_3"), pch = c(2, 3, 4))

}
par(mfrow = c(1, 3))
plotWetter(xS = 1)
plotWetter(xS = 2)
plotWetter(xS = 3)
```



Aufgabe 2 Ampelproblem

Das Ampelproblem: Sie fahren mit dem Wagen durch Zürich. Auf Ihrem Weg müssen Sie viele Ampeln passieren. Die Ampeln sind aufeinander abgestimmt ("Grüne Welle"). Aus langjährigen Beobachtungen wissen Sie folgendes: Wenn Sie eine Ampel bei grün passieren, haben Sie eine Wahrscheinlichkeit von 40 Prozent, dass Sie bei der nächsten Ampel wieder grün haben. Falls Sie bei rot an eine Ampel fahren, haben Sie mit 90 prozentiger Wahrscheinlichkeit grün an der nächsten Ampel. Sie fahren an der Ampel 0 los.

a) Modellieren Sie den Prozess als Markov-Kette. Stellen Sie die Übergangsmatrix auf und zeichnen Sie ein Übergangsdiagramm.

```
P <- matrix(c(0.4, 0.6, 0.9, 0.1), ncol = 2, byrow = TRUE)
```

b) Berechnen und plotten Sie die Wahrscheinlichkeit, an der k-ten Ampel rot zu haben, wenn Sie an der nullten Ampel bei grün losfahren ($k = 1, 2, \dots, 30$).

```r
P <- matrix(c(0.4, 0.6, 0.9, 0.1), ncol = 2, byrow = TRUE)
Pt <- c(1, 0)
pRot <- rep(0, 30)
for (i in 1:30) {
    Pt <- Pt %*% P
    pRot[i] <- Pt[2]
}
plot(pRot, type = "l")
points(pRot)
abline(h = 0.4)
```