Zürcher Hochschule
für Angewandte Wissenschaften

School of Engineering
IDP Institut für Datenanalyse und Prozessdesign

FS 2016

Stochastische Prozesse

Woche 8

Aufgabe 1 Customer Lifetime Value

Die Abo-Abteilung des Winterthurer Tagesanzeigers möchte ihren Kundenbestand in Bezug auf das *Customer Lifetime Value* untersuchen. Ein Monatsabo des Winterthurer Tagesanzeigers bringt dem Verlag 50 CHF Gewinn, ein Monatsabo inklusive der Winterthurer Sonntagspost 60 CHF. Kündigungen sind nur jeweils zum Jahresende möglich. Eine Analyse verschiedener Kundensegmente ergab, dass die Treue zur abonnierten Zeitung in verschiedenen Segmenten unterschiedlich ist. Beispielhaft werden Frau A und Herr B untersucht. Frau A bezieht nur den Winterthurer Tagesanzeiger und gehört einer Gruppe an, in der jährlich 30% der Abonnenten kündigen. Herr B hat das Abo mit Sonntagszeitung, gehört aber einem Kundensegment an, in dem pro Jahr 36% kündigen.

a) Wie hoch sind die zu erwartenden Gesamtgewinne durch Frau A und Herrn B, wenn zukünftige Gewinne *nicht* diskontiert werden?

Das CLV bei Zahlungen pro Zeitschritt C, einer *retention rate* (Wahrscheinlichkeit, Kunde zu bleiben) r und Diskontierungsfaktor α ist

$$CLV(C, r, \alpha) = C\frac{1}{1-\alpha r}$$

Da im Text Monatspreise gegeben sind, die Zeitschritte, nach denen Kündigungen möglich sind, aber Jahre sind, sind die Gewinne von Frau A pro Zeitschritt also $12 \cdot 50 = 600$ CHF und entsprechend für Herrn B $12 \cdot 60 = 720$ CHF. Die nicht diskontierten Gesamtgewinne entsprechen dem CLV mit Diskontierungsfaktor $\alpha = 1$. Nach der Vorlesung ist das CLV auch dann definiert, wenn entweder r oder α gleich 1 ist, aber nicht wenn beide gleich 1 sind. Wir erhalten hier für Frau A

$$CLV(600, 0.7, 1) = \frac{600}{1-0.7} = 2000$$

und für Herrn B

$$CLV(720, 0.64, 1) = \frac{720}{1-0.64} = 2000$$

Die erwarteten Gesamtgewinne sind also für beide Kunden gleich. Herr B ist der Zeitung zwar weniger treu, bringt aber pro Zeiteinheit mehr Gewinn als Frau A.

b) Wie hoch sind die zu erwartenden Gesamtgewinne durch Frau A und Herrn B, wenn zukünftige Zahlungen mit dem Faktor 0.95 diskontiert werden? Wie hoch bei einem Diskontierungsfaktor von 0.90?

Mit $\alpha = 0.95$ erhalten wir hier für Frau A

$$CLV(600, 0.7, 0.95) = \frac{600}{1 - 0.95 \cdot 0.7} = 1791.045$$

und für Herrn B

$$CLV(720, 0.64, 0.95) = \frac{720}{1 - 0.95 \cdot 0.64} = 1836.735$$

Bei diskontierten Gewinnen ist also Herr B der bessere Kunde – die erwarteten Gesamtgewinne sind zwar ohne Diskontierung die selben für Frau A und Herrn B, aber von Herrn B erhält man das Geld schneller. Noch deutlicher wird dies, wenn zukünftige Gewinne noch stärker heruntergewichtet werden ($\alpha = 0.9$). Dann erhalten wir für Frau A

$$CLV(600, 0.7, 0.9) = \frac{600}{1 - 0.9 \cdot 0.7} = 1621.622$$

und für Herrn B

$$CLV(720, 0.64, 0.9) = \frac{720}{1 - 0.9 \cdot 0.64} = 1698.113$$

c) Wenn eine Werbemassnahme zur Leserbindung die Kündigungswahrscheinlichkeit um 3 Prozentpunkte senken kann, wäre dann eine Senkung bei Frau A oder bei Herrn B lukrativer? Wie viel dürfte die Massnahme jeweils maximal kosten? Gehen Sie wieder von einem Diskontierungsfaktor $\alpha = 0.95$ aus.

Ein Senkung der Kündigungswahrscheinlichkeit bei Frau A um 3 Prozentpunkte bedeutet $r = 0.73$, und wir erhalten

$$CLV(600, 0.73, 0.95) = \frac{600}{1 - 0.95 \cdot 0.73} = 1957.586,$$

d.h. ihr CLV steigt mit dieser Massnahme um 166.5409 CHF. Gleichzeitig lohnt sich die Massnahme nur, wenn sie höchstens 166.5409 CHF kostet. Bei Herrn B. würde sich r auf 0.67 erhöhen, und wir erhalten

$$CLV(720, 0.67, 0.9) = \frac{720}{1 - 0.95 \cdot 0.67} = 1980.743,$$

d.h. das CLV steigt um 144.0081 CHF, d.h. die Massnahme darf auch nicht mehr als diesen Betrag kosten. Eine Senkung der Kündigungswahrscheinlichkeit von Frau A ist hier also lukrativer.

d) Bisher haben wir nur den Fall betrachtet, dass Kunden entweder ein Abo mit oder ohne Sonntagszeitung haben und dies kündigen können oder nicht. Ein etwas komplexeres Modell geht davon aus, das auch Wechsel von einem Normalabo zum Abo mit Sonntagszeitung und umgekehrt vorkommen können. Für Kunden in einem bestimmten Segment soll gelten, dass sie ein Normalabo mit Wahrscheinlichkeit 35% kündigen, aber mit 10% den Sonntagsboten dazubestellen. Kunden mit Abo der Sonntagszeitung kündigen mit Wahrscheinlichkeit 30% ganz, mit Wahrscheinlichkeit 10% wechseln sie zum Normalabo ohne Sonntagszeitung. Kündigungen und Änderungen des Abonnements sollen wieder nur zum Jahresende möglich sein. Kunden, die einmal komplett gekündigt haben, werden nicht wieder Abonnenten. Wie hoch ist der durchschnittliche Gesamtgewinn für einen Kunden, der mit einem Normalabo startet, wenn zukünftige Zahlungen mit dem Faktor $\alpha = 0.95$ diskontiert werden?

Für dieses Modell können wir nicht mit einer fertigen Formel rechnen. Wir haben aber eine Markov-Kette mit 3 Zuständen, wobei Zustand 1 bedeuten soll, dass die Person kein Kunde mehr ist, 2 soll bedeuten, dass die Person nur die Tageszeitung und 3, dass sie Tages- und Sonntagszeitung abonniert hat. Wir erhalten die Übergangsmatrix

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.35 & 0.55 & 0.10 \\ 0.30 & 0.10 & 0.60 \end{pmatrix}$$

Die erwarteten diskontierten Gesamtkosten (bzw. hier Gesamtgewinne) erhalten wir als

$$\vec{\pi}(0) \cdot (\mathbf{I} - \alpha \cdot \mathbf{P})^{-1} \cdot \vec{c},$$

wobei der Kostenvektor hier

$$c = (0, 600, 720)$$

ist und

$$\vec{\pi}(0) = (0, 1, 0),$$

da Start mit Normalabo vorausgesetzt wurde. Insgesamt erhalten wir ein CLV von 1662.761 CHF:

```
P <- rbind( c(1, 0, 0), c(0.35, 0.55, 0.1), c(0.3, 0.1, 0.6) )
cost <- c(0, 600, 720)
pi_0 <- c(0,1,0)
clv <- t(pi_0) %*% solve(diag(3) - 0.95*P) %*% cost
clv
```

```
##          [,1]
## [1,] 1662.761
```

Aufgabe 2 Karriereleiter mit Markov-Ketten

Ein Unternehmen hat 100 Mitarbeiter in 4 verschiedenen Hierarchiestufe. Jedes Jahr werden Mitarbeiter um eine Stufe befördert, und zwar 20% von Stufe 1, 10% von Stufe 2 und 5% von Stufe 3. Von Stufe 1 verlassen pro Jahr durchschnittlich 10% der Mitarbeiter die Firma, von Stufe 2 sind es 5%, von Stufe 3 sind es 2%, und von Stufe 4 sind es 4%. Wenn ein Mitarbeiter die Firma verlässt, wird sofort ein neuer in Stufe 1 angestellt.

a) Modellieren Sie den Aufstieg als Markov-Kette (Übergangsmatrix).
Wir betrachten die Stufe 1. 20 % Prozent werden befördert, der Rest kündigt oder bleibt in Stufe 1. Das hat den gleichen Effekt. D.h. $P_{11} = 0.8$. In der Stufe 2 bedeutet Verlassen einen Wechsel in den Zustand 1.

```
P <- matrix(c(0.8, 0.2, 0, 0, 0.05, 0.85, 0.1, 0, 0.02, 0, 0.93, 0.05, 0.04,
    0, 0, 0.96), byrow = TRUE, nrow = 4)
P
```

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4]
## [1,] 0.80 0.20 0.00 0.00
## [2,] 0.05 0.85 0.10 0.00
## [3,] 0.02 0.00 0.93 0.05
## [4,] 0.04 0.00 0.00 0.96
```

b) Wie gross ist die Chance, dass Sie nach 20 Jahren nach der Einstellung die Hierarchiestufe 4 erreicht haben?

```
library(expm, quietly = TRUE)
```

```
##
## Attaching package: 'expm'
##
## The following object is masked from 'package:Matrix':
##
##     expm
```

```r
(P %^% 20)[1, 4]
```

```
## [1] 0.1868123
```

c) Wie lange dauert es im Mittel bis man die Hierarchiestufe 4 erreicht hat?

```r
P4 <- P
P4[, 4] <- 0
solve(diag(4) - P4) %*% rep(1, 4)
```

```
##       [,1]
## [1,] 44.50
## [2,] 39.50
## [3,] 27.00
## [4,]  2.78
```

Es dauert also im Mittel 44.5 Jahre von Stufe 1.