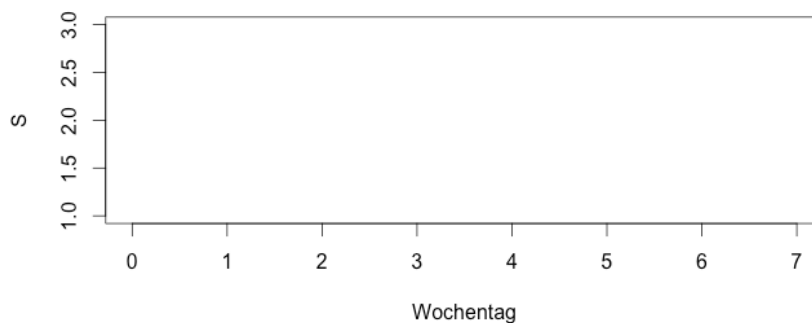


## StoP: Handout Woche 2

### Aufgabe 1 Stochastische Prozesse

$X_t$  ist ein stochastischer Prozesse, der das Wetter zu jedem Tag (um 8 Uhr) beschreibt.  $X_t=1$  deutet Sonne,  $X_t=2$  bewölkt und  $X_t=3$  Regen. Am (ersten) Montag ist  $t=0$ , am Dienstag  $t=1$  usw.

a) Es gilt die Anfangsbedingung  $X_0=1$  (was bedeutet das?). Zeichnen Sie 2 *Trajektorien* in das untere Diagramm ein.



b) Beschreiben Sie in eigenen Wort, was die folgenden Ausdrücke bedeuten:

- $P(X_6 = 3)$
- $P(X_6 = 3 | X_5 = 1, X_4 = 1, X_3 = 1, X_2 = 1, X_1 = 1, X_0 = 1)$
- $P(X_6 = 3, X_5 = 1 | X_4 = 1, X_3 = 1, X_2 = 1, X_1 = 1, X_0 = 1)$

### Aufgabe 2 Markov-Eigenschaft / Homogenität in der Zeit

a) Beschreiben Sie in eigenen Worten, was die Markov-Eigenschaft

$$P(X_{t+1} = x_{t+1} | X_t = x_t, X_{t-1} = x_{t-1}, \dots, X_0 = x_0) = P(X_{t+1} = x_{t+1} | X_t = x_t)$$

für das Wetterbeispiel aus Aufgabe 1 bedeutet.

Was denken Sie? Besitzt das Wetter die Markov-Eigenschaft, oder anders formuliert: Ist der stochastische Prozess aus Aufgabe 1 eine Markov-Kette?

b) Beschreiben Sie in eigenen Worten was die Homogenität in der Zeit für das Wetterbeispiel bedeutet. Ist der stochastische Prozess eine homogene Markov-Kette?

### Aufgabe 3 Maschinenzuverlässigkeit

Wir betrachten eine Maschine, die entweder funktionsfähig ( $S=1$ ) ist oder defekt ( $S=2$ ) ist für verschiedene Tage  $t=0,1,\dots$ . Falls die Maschine funktioniert, funktioniert sie mit der Wahrscheinlichkeit  $p_{11}=0.96$  auch am nächsten Tag. Falls die Maschine nicht funktioniert so wird sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% bis zum nächsten Tag repariert. Wir modellieren diesen Prozess als eine homogene Markov-Kette.

Geben Sie alle

$$p_{ij} = P(X_{t+1} = j | X_t = i) = P(X_1 = j | X_0 = i).$$

an

- $p_{11} =$
- $p_{12} =$
- $p_{21} =$
- $p_{22} =$

#### Aufgabe 4 Wetter (Lösung z.B. mit Baumdiagramm)

Es ist Dienstag (t=1) und es scheint die Sonne. Das Wetter wird als Markov-Kette mit folgendem Übergangsmatrix behandelt

$$P = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0.0 \\ 0.05 & 0.9 & 0.05 \\ 0.00 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$$

Wie wahrscheinlich ist es, dass

1. am Mittwoch die Sonne scheint
2. es am Mittwoch regnet
3. es am Mittwoch bewölkt ist
4. am Donnerstag die Sonne scheint
5. es am Donnerstag regnet
6. es am Donnerstag bewölkt ist

Sie können die Ergebnisse in folgendes Baumdiagramm eintragen

