Zürcher Hochschule
für Angewandte Wissenschaften

School of
Engineering
IDP Institut für Datenanalyse
und Prozessdesign

FS 2016

Stochastische Prozesse

Woche 12

Aufgabe 1 Simulation eines Markov-Prozesses

Simulation eines Markov-Prozesses: Gegeben sei ein zeitkontinuierlicher Markov-Prozess mit $S = 1, 2, 3$. Die Wartezeitparameter λ_i sind gegeben durch $\lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = 0.05, \lambda_3 = 0.1$. Die Sprungwahrscheinlichkeiten sind durch folgende Matrix gegeben:

$$P = \begin{pmatrix} 0.00 & 0.20 & 0.80 \\ 0.10 & 0.00 & 0.90 \\ 0.50 & 0.50 & 0.00 \end{pmatrix}$$

a) Simulieren und plotten Sie den Prozess für den Anfangszustand $X(0) = 1$ bis zur Zeit $t = 12$ für einige Realisierungen.

Hinweise zur Lösung: Eine exponentialverteilte Zufallsvariable kann man durch den R-Befehl `rexp()` ziehen. Um den neuen Zustand zu bestimmen kann man ähnlichen Code wie füher bei den zeitdiskreten Markov-Ketten verwenden.

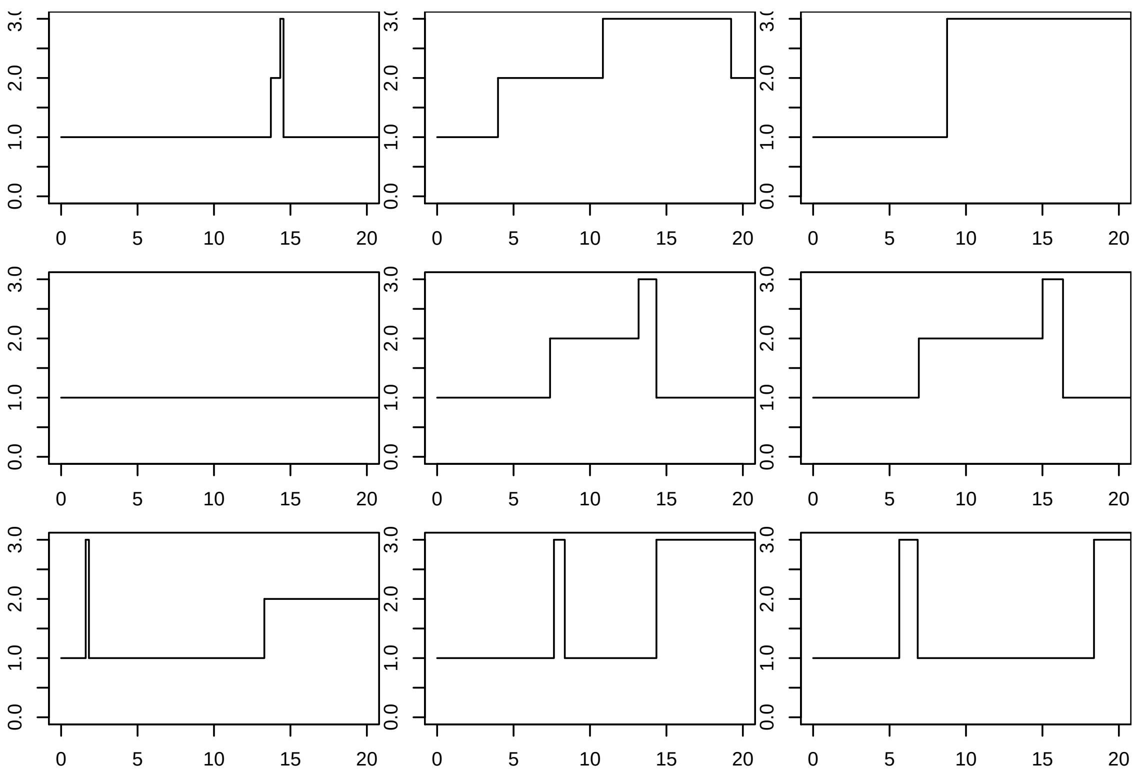
```
P <- matrix(c(0, 0.2, 0.8, 0.1, 0.0, 0.9, 0.5, 0.5, 0.0), ncol=3, byrow=TRUE)

  lambda <- c(0.5, 0.05, 0.1);
  par(mfrow=c(3,3), mar=c(3,2,0,0), oma=c(0,0,0,0))

  for (run in 1:9) {
    plot(NULL, xlim=c(0, 20), ylim=c(0, 3), ylab="Zustand", xlab="Zeit", main=NULL)
    z <- 0;
    state <- 1; #Anfangszustand
    repeat{
      oldState <- state
      state <- 1
      sum

      #Siehe auch Aufgabe zur Simulation einer Markov-Kette
      cum <- 0
      num <- runif(1)
      for (i in 1:dim(P)[1]) {
        cum <- cum + P[oldState,i]
        if (num <= cum) {
```

```
        state <- i;
        break
      }
    }
    delta <- rexp(1, rate=lambda[state]);
    lines(matrix(c(z, oldState, z + delta, oldState, z + delta, state), ncol=2, byrow=T))
    z <- z + delta;
    if (z > 20) {
      break
    }
  }
}
```



b) Schätzen Sie durch Simulation die Wahrscheinlichkeit, zur Zeit $t = 10.2$ im Zustand 3 zu sein, wenn $X(0) = 1$ (Genauigkeit 1000 runs).

```
# Simulation fast dass Gleiche wie oben.
lambda <- c(0.5, 0.05, 0.1)
states_at_102 <- c(0, 0, 0)
runs <- 100000

for (run in 1:runs) {
  # plot(NULL, xlim=c(0, 20), ylim=c(0, 3), ylab="Zustand", xlab="Zeit", main=NULL)
  z <- 0;
  state <- 1; #Anfangszustand

  repeat{
    oldState <- state
```

```
    delta <- rexp(1, rate=lambda[state]);
    sum

    # Siehe auch Aufgabe zur Simulation einer Markov-Kette
    cum <- 0;
    num <- runif(1)
    for (i in 1:dim(P)[1]) {
      cum <- cum + P[state,i]
      if (num <= cum) {
        state <- i;
        break
      }
    }

    #lines(matrix(c(t, oldState, t + delta, oldState, t + delta, state), ncol=2, byrow=T))
    z <- z + delta;
    if (z > 10.2) {
      states_at_102[oldState] <- states_at_102[oldState] + 1;
      break
    }
  }
}

states_at_102 / sum(states_at_102)
```

```
## [1] 0.06445 0.38181 0.55374
```

c) Behandeln Sie nun obigen Markov-Prozess analytisch. Zeichnen Sie dazu das Ratendiagram und berechnen Sie die Generatormatrix $\mathbf{Q}$.

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit vom Zustand 1 zum Zeitpunkt $t = 0$ in den Zustand 2 zum Zeitpunkt $t = 10.2$ zu gelangen mittels:

$$\vec{\pi}(t) = \vec{\pi}(0)e^{\mathbf{Q}t}$$

Hinweise zur Lösung: Um die Exponentialfunktion einer Matrix zu berrechnen müssen Sie erst das package `expm` laden. Die Exponentialfunktion einer Matrix M berrechnet sich dann als `expm(M)`. Achtung `exp(M)` wendet die Exponentialfunktion auf jede Komponente an, was natürlich etwas anderes ist.

```
library(expm)
```

```
## Loading required package: Matrix
##
## Attaching package: 'expm'
##
## The following object is masked from 'package:Matrix':
##
##     expm
```

```r
lambda <- c(0.5, 0.05, 0.1);
R <- lambda * P
Q <- R
Q[1,1] = -sum(R[1,])
Q[2,2] = -sum(R[2,])
Q[3,3] = -sum(R[3,])
Q
```

```
##        [,1]  [,2]   [,3]
## [1,] -0.500  0.10  0.400
## [2,]  0.005 -0.05  0.045
## [3,]  0.050  0.05 -0.100
```

```r
expm(Q * 10.2)
```

```
##            [,1]      [,2]      [,3]
## [1,] 0.06615084 0.3791587 0.5546904
## [2,] 0.03154883 0.6870298 0.2814213
## [3,] 0.06618858 0.3406701 0.5931413
```

```r
c(1,0,0) %*% expm(Q * 10.2)
```

```
##            [,1]      [,2]      [,3]
## [1,] 0.06615084 0.3791587 0.5546904
```

Aufgabe 2 Maschinenausfall

Gegeben sei eine Maschine mit zwei Zuständen „funktionierend“ und „defekt“. Der zugehörige Prozess soll als Markov-Prozess beschrieben werden. Sie wissen folgendes: Die Ausfallwahrscheinlichkeit ist zu jeder Zeit gleich, unabhängig davon, wie lange die Maschine schon läuft. Die mittlere Laufzeit bis zum nächsten Ausfall beträgt 200 Stunden. Die Reparaturzeit ist exponentialverteilt mit Mittelwert 10 Stunden.

a) Begründen Sie, dass der Prozess ein Markov-Prozess ist und bestimmen Sie die Übergangsraten und zeichnen Sie das Ratendiagramm.

Die Übergangswahrscheinlichkeiten hängen nicht von der bisherigen Aufenthaltsdauer oder der sonstigen vergangenheit ab. Also handelt es sich um einen Markov-Prozess. Da die Raten auch über die Zeit konstant beleiben, ist der Prozess homogen. Raten: $\lambda_1 = 1/200$, $\lambda_2 = 1/10$

b) Eine neue Version der Maschine unterscheidet sich von der alten dadurch, dass sie neu eine elektronische Steuerung hat. Die Mechanik ist gleich geblieben. Für den Ausfall dieser Maschine bedeutet das: Es gibt zwei Möglichkeiten eines Ausfalls: Die Mechanik kann ausfallen, oder die Elektronik kann ausfallen. Für die Mechanik ist die Ausfallwahrscheinlichkeit identisch mit derjenigen der alten Maschine. Für die Elektronik ist folgendes bekannt: Die Ausfallwahrscheinlichkeit ist nicht zeitabhängig (d.h. Alterung spielt keine Rolle), und die mittlere Zeit zwischen zwei Ausfällen beträgt 1000 Stunden. Die Reparatur der Elektronik ist identisch verteilt wie die Reparatur der Mechanik. Modellieren Sie den Ausfall- und Reparaturprozess der Maschine wieder als Markovprozess mit zwei Zuständen. Bestimmen Sie die Übergangsraten.

Die Gesamtausfallrate ist die Summe der Ausfallraten $\lambda = 1/1000 + 1/200$. Für den Zusatnd "Defekt gibt es keine Unterscheidung, wie dieser erreicht wurde. Er wird immernoch mit einer Rate verlassen also ist dies weiterhin ein Markov-Prozess.

```
matrix(c(0,0.006,0.1,0), nrow=2, byrow=T)
```

```
##      [,1]  [,2]
## [1,]  0.0 0.006
## [2,]  0.1 0.000
```

c) Nehmen Sie nun an, dass die Reparatur der Elektronik Exp-verteilt mit Mittelwert 2 h ist. Wieso kann man dann den Prozess nicht mehr als Markov-Prozess mit zwei Zuständen beschreiben? Modellieren Sie den Prozess als Markov-Prozess mit drei Zuständen.

Jetzt können wir nicht mehr nur einen Zustand für "Defektännehmen, denn der Zustand wird unterschiedlich schnell verlassen. Es gelten folgende Raten für die Zustände ("Ganz", "Mechanik kaputt, Ëlektronik kaputt")

- Zustand 1 $\rightarrow$ 2, 1/200
- Zustand 1 $\rightarrow$ 3, 1/1000
- Zustand 2 $\rightarrow$ 1, 1/10
- Zustand 3 $\rightarrow$ 1, 1/2

Also insgesamt

```r
matrix(c(0, 1/200, 1/1000, 1/10, 0, 0, 1/2, 0, 0), nrow=3, byrow=T)
```

```
##      [,1]  [,2]  [,3]
## [1,]  0.0 0.005 0.001
## [2,]  0.1 0.000 0.000
## [3,]  0.5 0.000 0.000
```