교 육 일 지

교육 제목	**행렬(Matrix) 과 백터**
교육 일시	2021.10.07
교육 장소	YGL-C6

교육 내용

- 정방행렬 A와 B의 역행렬을 각각 A^{-1}, B^{-1} 라고 하면 다음이 성립한다.

  1. $(A^{-1})^{-1} = A$

  2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

- 역행렬과 연립방정식의 해

  정방행렬 $A = (a_{ij})$에 대하여 $|A| \neq 0$일 때, 연립일차방정식 $AX = B$의 해 X는

  $$A^{-1}AX = A^{-1}B$$
  $$X = A^{-1}B$$

  이다.

- 크래머 법칙

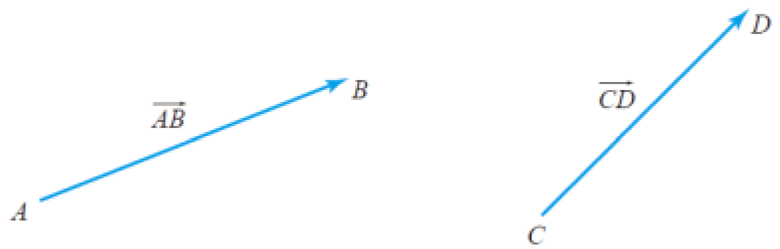
  연립일차방정식 $AX = B$에서 $|A| \neq 0$일 때, A_j는 계수행렬 A에서 j열의 원소가 B의 원소로 바뀐 행렬이라 하자. 그러면 구하는 해는

  $$x_j = \frac{|A_j|}{|A|}, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

  이다.

벡터

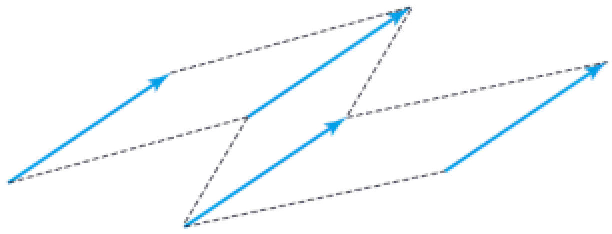
크기와 방향이 주어진 물리량을 벡터(vector)라 한다. 벡터를 나타내는 기호로는 화살표를 이용하고 화살의 길이가 벡터의 크기, 화살표가 지시하는 쪽이 벡터의 방향이다. 벡터를 논하는 환경에서 실수는 스칼라(scalar)라고 부른다.



출발점 A, 종점 B인 벡터는 $\overrightarrow{AB}$로 나타내고, 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 크기는 $|\overrightarrow{AB}|$로 나타낸다. 크기가 1인 벡터를 **단위벡터**라 하고, 크기가 0인 벡터를 **영벡터**라 하고 $\vec{0}$으로 나타낸다.

- 벡터의 상등

벡터는 위치와는 관계없이 크기와 방향이 같으면 같은 벡터이다. 즉 평행이동하여 시점과 종점이 일치될 수 있는 벡터는 모두 같은 벡터이다.



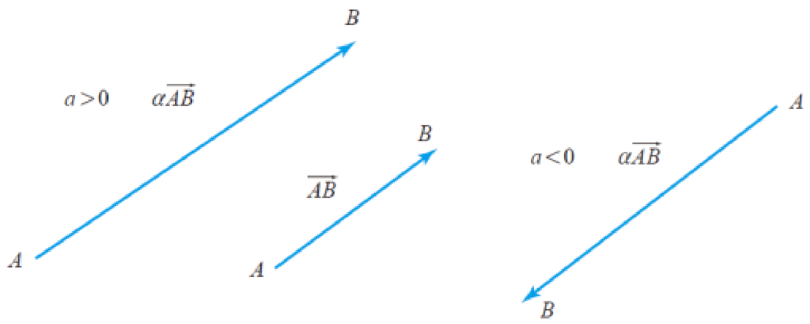
- 벡터의 스칼라 곱

스칼라 α에 대하여 주어진 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 크기를 α배, 즉 $\alpha\overrightarrow{AB}$는

$\alpha > 0$ 일 때, $\overrightarrow{AB}$와 방향이 같고 크기는 $|\alpha\overrightarrow{AB}| = |\alpha||\overrightarrow{AB}|$,

$\alpha < 0$일 때, $\overrightarrow{AB}$와 방향이 반대이고 크기는 $|\alpha\overrightarrow{AB}| = |\alpha||\overrightarrow{AB}|$

$|\alpha|$에서 $|\ \ |$는 절댓값 기호이고, $|\overrightarrow{AB}|$와 $\alpha|\overrightarrow{AB}|$에서 $|\ \ |$은 벡터의 크기의 기호이다.

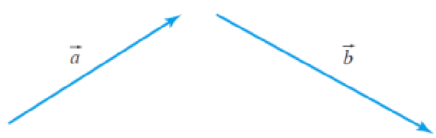


영벡터가 아닌 벡터 $\overrightarrow{AB}$를 자신의 크기로 나누면 같은 방향의 단위벡터가 된다. 즉

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{|\overrightarrow{AB}|}\overrightarrow{AB}$$

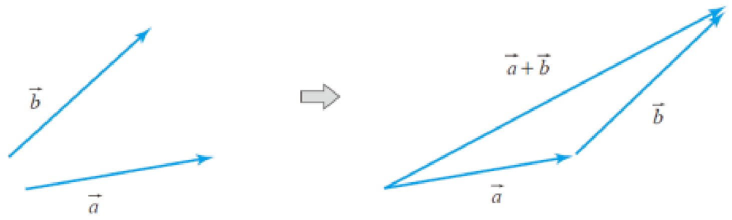
는 $\overrightarrow{AB}$와 방향이 같은 단위벡터이다.

일반적으로 시점과 종점을 아는 것으로 하고 벡터를 나타낼 때는 $\vec{a}$와 같이 문자위에 화살표를 그려서 나타낸다.



● 백터의 합

두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 합 $\vec{a}+\vec{b}$는 벡터 $\vec{a}$의 종점에 $\vec{b}$의 시점을 평행이동 하여 맞추고 $\vec{a}$의 시점과 $\vec{b}$의 종점을 연결한 벡터이다.

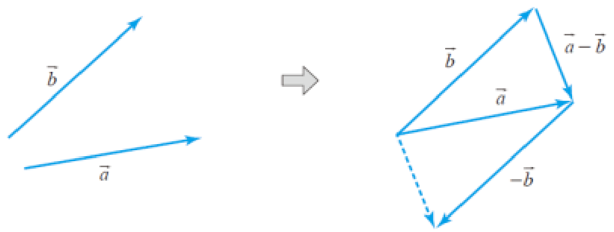


● 백터의 차

두 벡터의 차 $\vec{a}-\vec{b}$는 벡터의 합을 이용하여 다음과 같이 정의된다.

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-1)\vec{b}$$

벡터의 실수 곱의 정의로 부터 $(-1)\vec{b}$는 $\vec{b}$와 방향이 반대이고 크기가 같은 벡터임을 안다. 따라서 $\vec{a}+(-1)\vec{b}$는 $\vec{a}$의 종점에 $(-1)\vec{b}$의 시점을 평행이동하여 맞추고 $\vec{a}$의 시점과 $(-1)\vec{b}$의 종점을 연결한 벡터이다.



● 백터의 연산정리

벡터 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$와 스칼라 α, β에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
(2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$
(3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$
(4) $\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}$
(5) $\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}$
(6) $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$
(7) $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$
(8) $1\vec{a}=\vec{a}$, $0\vec{a}=\vec{0}$

예제 2.1.1 다음 벡터의 연산을 간단히 하라.

(1) $2\vec{a}+3\vec{b}-5\vec{a}+\vec{b}$ $= -3\vec{a}+4\vec{b}$
(2) $3(\vec{a}-2\vec{b})-4(\vec{a}-3\vec{b})$ $= -\vec{a}+6\vec{b}$
(3) $2(\vec{a}+2\vec{b})+\vec{c}+3\vec{a}-(2\vec{a}-4\vec{c})$ $= 3\vec{a}+4\vec{b}+5\vec{c}$

● 3차원 공간백터

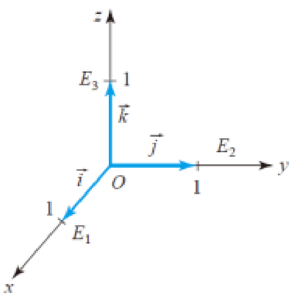
3차원 직교좌표 공간에서 모든 벡터의 출발점을 원점 O로 하고 공간상의 한 점 P를 종점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{OP}$를 원점 O에 대한 P의 위치벡터(position vector)라 한다. 이제 위치벡터를 대수적으로 표현하는 방법을 생각해보자. 원점 O를 시점으로 하고

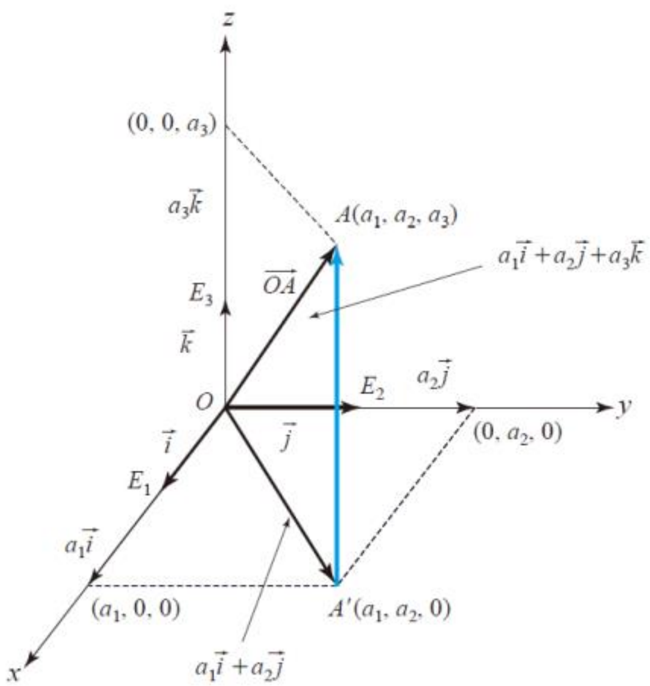
x축 위의 점 $E_1(1, 0, 0)$를 종점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{OE_1} = \vec{i}$,

y축 위의 점 $E_2(0, 1, 0)$를 종점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{OE_2} = \vec{j}$,

z축 위의 점 $E_3(0, 0, 1)$를 종점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{OE_3} = \vec{k}$

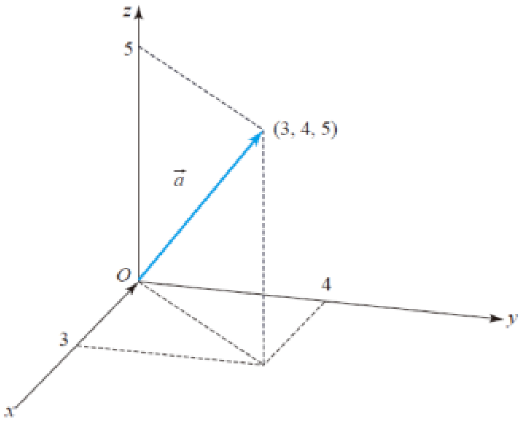
라 하자.



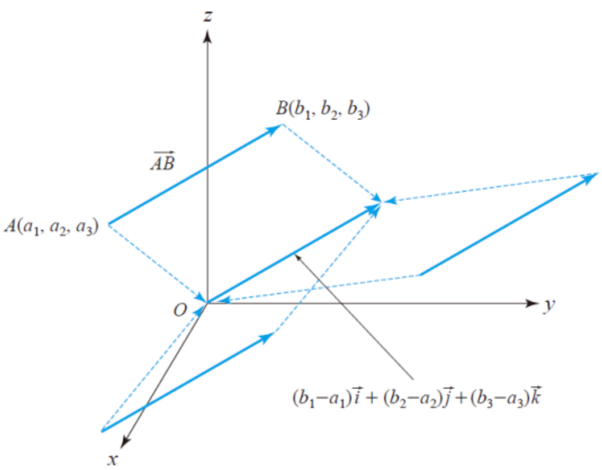


결국 좌표공간에서 원점을 시점으로 하는 모든 벡터는 세 벡터의 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 의 결합으로 표시되고, 한 벡터의 성분을 알면 원점을 시점으로 하고 그 성분을 종점으로 하는 한 개의 화살표가 그려진다.

예를 들어, 벡터 $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$ 는 다음과 같은 화살표이다.



● 위치벡터



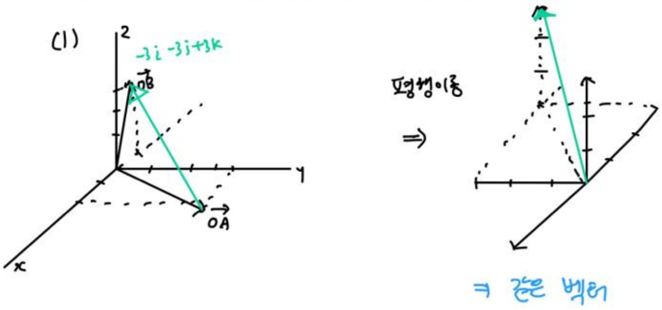
예제 2.1.2 다음 두 점을 연결하는 벡터 $\overrightarrow{AB}$를 i, j, k를 이용하여 나타내라.

(1) $A(2, 3, 0)$, $B(-1, 0, 3)$　　　(2) $A(-3, 0, 2)$, $B(0, 3, -1)$

[풀이] (1) $\overrightarrow{AB} = (-1-2)i + (0-3)j + (3-0)k = -3i - 3j + 3k$.

(2) $\overrightarrow{AB} = (0+3)i + (3+0)j + (-1-2)k = 3i + 3j - 3k$.

ex) (1)



- 3차원 공간벡터 정리

주어진 실수 α와 두 벡터 $\vec{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$, $\vec{b} = b_1 i + b_2 j + b_3 k$에 대하여 다음을 정의한다.

(1) 영벡터 $\vec{O}$는 모든 성분이 0인 벡터 즉, $\vec{O} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$

(2) 두 벡터의 상등: $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ a_3 = b_3$

(3) 벡터 $\vec{a}$의 크기 $|\vec{a}|$: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

(4) 스칼라 곱 $\alpha\vec{a}$

$$\alpha\vec{a} = \alpha a_1 i + \alpha a_2 j + \alpha a_3 k$$
$$-\vec{a} = (-1)\vec{a}$$

(5) 두 벡터의 합

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)i + (a_2 + b_2)j + (a_3 + b_3)k$$

(6) 두 벡터의 차

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\vec{b} = (a_1 - b_1)i + (a_2 - b_2)j + (a_3 - b_3)k$$

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 0이 아닌 실수 c에 대하여 $\vec{a} = c\vec{b}$일 때, $\vec{a}$와 $\vec{b}$는 평행이다. $c > 0$이면 두 벡터는 같은 방향이고, $c < 0$이면 두 벡터는 반대 방향이다.

- 벡터의 내적

벡터 $\vec{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$와 $\vec{b} = b_1 i + b_2 j + b_3 k$에 대하여 $\vec{a}\cdot\vec{b}$을 두 벡터의 내적 (inner product)이라 하고 다음과 같이 정의 된다.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

정리 2.2.1 내적의 성질

벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$와 스칼라 α, β에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

(2) $\vec{a}\cdot(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$

(3) $(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b} = \alpha(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot(\alpha\vec{b})$

(4) $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$, $\vec{a}\cdot\vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

- 내적의 기하학적 의미

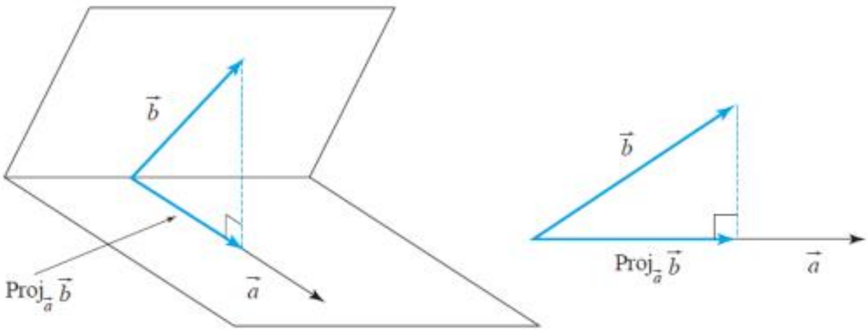
영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$, $\vec{b} = b_1 i + b_2 j + b_3 k$가 시점에서 이루는 사잇각을 θ라 하면 다음이 성립한다.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}\|\vec{a}|\cos\theta$$

(1) 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 직교하기 위한 필요충분조건은 $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$이다.
(2) 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 교각 θ의 크기가 $\frac{\pi}{2} < \theta \le \pi$이기 위한 필요충분조건은 $\vec{a}\cdot\vec{b} < 0$.

정의 2.2.3

영벡터가 아니고 평행하지 않은 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 벡터 $\vec{b}$를 벡터 $\vec{a}$로 투사시킨 벡터를 "벡터 $\vec{b}$의 $\vec{a}$ 위로의 **정사영벡터**(projection)"라 하고 $\mathrm{Pro}\,j_{\vec{a}}\vec{b}$로 나타낸다.



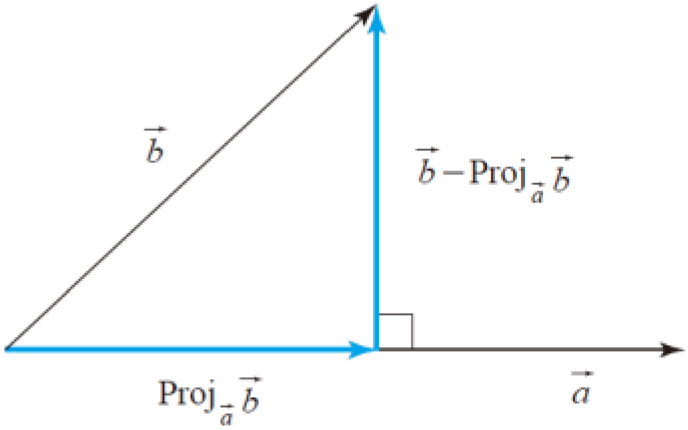
영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\mathrm{Proj}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\,\vec{a}$$

- 벡터의 분해

$$\vec{b} = Proj_{\vec{a}}\vec{b} + (\vec{b} - Proj_{\vec{a}}\vec{b})$$

$$\vec{a} = Proj_{\vec{b}}\vec{a} + (\vec{a} - Proj_{\vec{b}}\vec{a})$$



- 벡터의 외적

두 벡터 $\vec{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$, $\vec{b} = b_1 i + b_2 j + b_3 k$에 대하여 $\vec{a} \times \vec{b}$는 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 외적 (cross product)이라 하고 다음과 같이 정의 된다.

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) i + (a_3 b_1 - a_1 b_3) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k$$

정리 2.3.1 외적의 대수적 성질

벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$가 공간벡터이고 α가 상수일 때, 다음이 성립한다.

(1) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

(2) $(\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha\vec{b}) = \alpha\vec{a} \times \vec{b}$

(3) $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$

(4) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

(5) $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$