교 육 일 지

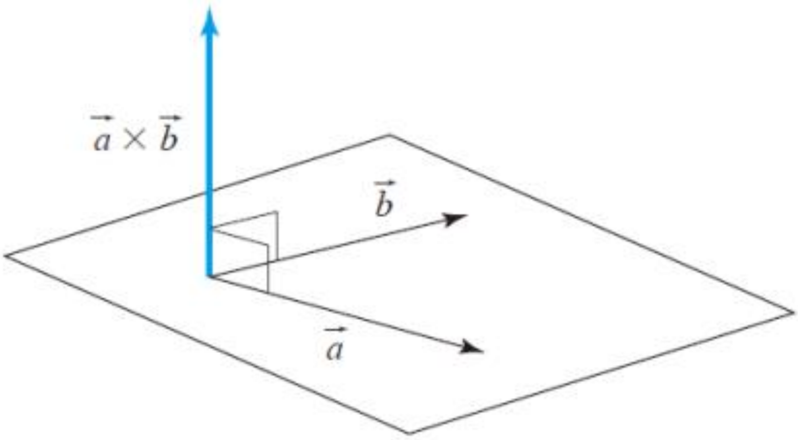
교육 제목	**벡터, 도함수**
교육 일시	2021.10.07
교육 장소	YGL-C6
교육 내용	

1. 벡터의 외적

두 벡터 $\vec{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$, $\vec{b} = b_1 i + b_2 j + b_3 k$에 대하여 $\vec{a} \times \vec{b}$는 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 외적 (cross product)이라 하고 다음과 같이 정의 된다.

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)i + (a_3 b_1 - a_1 b_3)j + (a_1 b_2 - a_2 b_1)k$$

1. (1)에서 $\vec{a} \times \vec{b}$는 그림과 같이 $\vec{a}$와 $\vec{b}$를 품는 평면에 직교하는 벡터이다.



외적의 기하학적 의미

벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 공간벡터일 때 다음이 성립한다.

(1) $\vec{a} \times \vec{b}$는 $\vec{a}$와 $\vec{b}$에 동시에 직교한다.

(2) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$, (단 θ는 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 사잇각)

(3) $|\vec{a} \times \vec{b}|$는 $\vec{a}$와 $\vec{b}$를 이웃 변으로 하는 평행사변형의 넓이이다.

(4) $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 평행하기 위한 필요충분조건은 $\vec{a} \times \vec{b} = 0$.

$\vec{a} = 2i - j + k$, $\vec{b} = 4i + 2j - k$ 모두에 직교하는 벡터를 구하라.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} k$$

$$= -i + 6j + 8k$$

예제 2.3.4 다음 두 벡터를 이웃 변으로 하는 평행사변형의 넓이를 구하라.

(1) $\vec{a} = 2i + 3j - k$, $\vec{b} = -i + 2j + k$

(2) $\vec{a} = i - j$, $\vec{b} = i + k$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (3+2)i - (2-1)j + (4+3)k$$

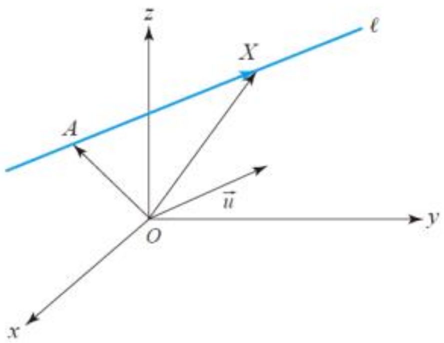
$$= 5i - j + 7k$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{25 - 1 + 49} = 5\sqrt{3}$$

2. 직선과 평면의 방정식

좌표평면 또는 공간에서 특정한 조건을 만족하는 직선 위에 있는 점들에 관한 식을 "직선의 방정식"이라고 하고, 주어진 직선에 평행한 벡터를 방향벡터라 한다. 평면에서와 같이 공간에서도 "지나는 한 점과 방향벡터" 또는 "지나는 두 점"에 의해 유일한 직선이 결정된다.

먼저 한 점 $A(a_1, a_2, a_3)$를 지나고 방향벡터 $\vec{u} = u_1 i + u_2 j + u_3 k$인 직선 ℓ의 방정식을 구하여 보자. 이 직선 ℓ 위의 임의의 점을 $X(x, y, z)$라 하면



예제 2.4.1 점 (2, −3, 1)을 지나고 $\overbrace{2i + 3j - k}^{\vec{u}}$에 평행한 직선에 대하여 벡터방정식을 구하라.

$\vec{AX} = t\vec{u}$

A (2, -3, 1) X (x, y, z)

$\vec{OX} = \vec{OA} + \vec{AX}$

$= \vec{OA} + t\vec{u}$

$xi + yj + zk = (2+2t)i + (-3+3t)j + (1-t)k$

$\Rightarrow x = 2+2t$

$y = -3+3t$

$z = 1-t$

$\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-1}{-1}$

예제 2.4.2 점 (3, −2, 4)를 지나고 $-2i + 3k$에 평행한 직선의 매개정식을 구하라.

A(3, -2, 4) X(x, y, z)

$\vec{AX} = t\vec{u}$

$\vec{OX} = \vec{OA} + \vec{AX}$

$= \vec{OA} + t\vec{u}$

$xi + yj + zk = (3-2)i + (-2)j + (4+3)k$

$= (3-2t)i - 2j + (4+3t)k$

$x = 3-2t$

$y = -2$

$z = 4+3t$

x,y,z　(2 -1 1)　(1,-1,2)　x(x,y,z)

A　X (x,y,z)

예제 2.4.3 두 점 (2, −1, 1), (1, −1, 2)를 지나는 직선의 대칭방정식을 구하라.

$\vec{AB} = (-1, 0, 1)$　　$xi + yj + zk = (2-t)i - j + (1+t)k$　　$\vec{ox} = \vec{oA} + \vec{Ax} = \vec{oA} + t\vec{u}$

대칭 Eq ⇒ $-(x-2) = \frac{z-1}{t}$, $y = -1$

예제 2.4.4 두 직선 $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$와 $\frac{x}{-1} = y-3 = \frac{x-4}{5}$가 이루는 사잇각을 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하라.

$\vec{u_1} = 3i - j + 2$　　$\vec{u_2} = -i + j + 5k$

$(3, -1, 2)$　　$(-1, 1, 5)$

$|\vec{v_1}| = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$　　$|\vec{v_2}| = \sqrt{1+1+25} = \sqrt{27}$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\overset{6}{\cancel{-3-1+10}}}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{27}} = \frac{6}{\sqrt{14}\sqrt{27}} = \frac{6}{3\sqrt{3}\sqrt{14}} = \frac{6}{3\sqrt{31}} = \frac{2}{\sqrt{31}}$$

3. 평면의 방정식

좌표공간에서 일정한 조건을 만족하는 평면의 위의 점을 나타내는 식을 평면의 방정식이라 하고, 주어진 평면에 직교하는 벡터를 법선벡터라 한다. 평면은 다음 요소에 의해 결정 된다.

“지나는 한 점과 법선벡터” 또는 포함하는 세점” 의해 결정된다

에 의하여 유일하게 결정된다.

$A(a_1, a_2, a_3)$

$\vec{n}(n_1, n_2, n_3)$

$X(x, y, z)$

$\vec{Ax}\cdot\vec{n} = 0$

$(\vec{ox} - \vec{oA})\cdot\vec{n} = 0$

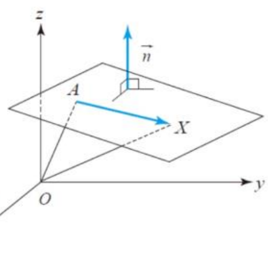
$[(x,y,z) - (a_1,a_2,a_3)]\cdot\vec{n} = 0$

$[(x,y,z)\cdot\vec{n} - (a_1,a_2,a_3)\cdot\vec{n}] = 0$

$(n_1x + n_2y + n_3z) - \underbrace{(n_1a_1 + n_2a_2 + n_3a_3)}_{d} = 0$

$n_1x + n_2y + n_3z = d$

↳ 평면의 방정식



예제 2.4.5 점 $A(2,\ 3,\ -2)$을 지나고 $4i-3j+2k$에 수직인 평면의 방정식을 구하라.

예제 2.4.6 세 점 $A(2,\ 0,\ 0)$, $B(1,\ 2,\ 4)$, $C(1,\ -2,\ -1)$을 포함하는 평면의 방정식을 구하라.

예제 2.4.7 평면 $2x-y-z=3$와 $2x+3z=5$가 만나서 이루는 사잇각을 구하라.

$\vec{n} = 4i-3j+2k$

$A(2,3,-2)$

$\vec{AX}\cdot\vec{n}=0$

$(\vec{OX}-\vec{OA})\cdot\vec{n}=0$

$[(x,y,z)-(2,3,-2)]\cdot(4,-3,2)=0$

$(4x-3y+2z)-(8-9-4)=0$

$\therefore 4x-3y+2z=-5$

$\vec{AB}=(-1,2,4)\quad \vec{AC}=(-1,-2,-1)$

$\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} k$

$=(-2+6)i-(1+4)j+(2+2)k$

$=4i-5j+4k \quad \therefore \vec{n}=(4,-5,4)$

$A(2,0,0)\quad X(x,y,z)\quad \vec{n}=(4,-5,4)$

$\vec{AX}=\vec{OX}-\vec{OA}$

$(\vec{OX}-\vec{OA})\cdot\vec{n}=0$

$[(x,y,z)-(2,0,0)](4,-5,4)=0$

$4x-5y+4z=8$

$2(x-\frac{3}{2})-(y+3)-(z-3)=0$

$2(x-\frac{5}{2})+3(z-\frac{5}{3})=0$

$\vec{n_1}=(2,-1,-1)$

$\vec{n_2}=(2,0,3)$

$\cos\theta=\dfrac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}$

$=\dfrac{4+0-3}{\sqrt{4+2}\cdot\sqrt{4+9}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{12}}=\dfrac{1}{\sqrt{6\cdot6\cdot2}}$

$=\dfrac{1}{6\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{12}$

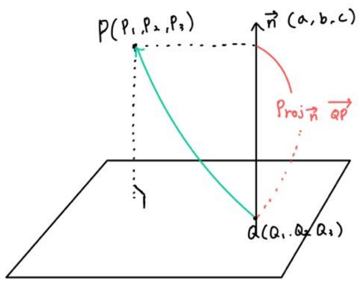
$\therefore \theta=\cos^{-1}\dfrac{\sqrt{2}}{12}$

4. 점과 평면과의 거리

정리 2.4.2 점과 평면과의 거리

점 $P(p_1,\ p_2,\ p_3)$와 평면 $ax+by+cz=d$ 사이의 거리는 다음과 같다.

$$\frac{|ap_1+a_2p_2+ap_3-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$



$\mathrm{Proj}_{\vec{n}}\,\vec{QP}=\dfrac{|\vec{QP}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|^2}\cancel{|\vec{n}|}$

$=\dfrac{|\vec{QP}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$

$|\vec{n}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$\therefore \mathrm{Proj}_{\vec{n}}\,\vec{QP}=\dfrac{|\vec{QP}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$

$\vec{QP}=(P_1-Q_1,\ P_2-Q_2,\ P_3-Q_3)$

$|\vec{QP}\cdot\vec{n}|=|(\vec{OP}-\vec{OQ})\cdot\vec{n}|$

$=|(P_1-Q_1,\ P_2-Q_2,\ P_3-Q_3)\cdot\vec{n}|$

$=a(P_1-Q_1)+b(P_2-Q_2)+c(P_3-Q_3)$

$=aP_1+bP_2+cP_3-(\underbrace{aQ_1+bQ_2+cQ_3}_{=d})$

$=aP_1+bP_2+cP_3-d$

$=\dfrac{aP_1+bP_2+cP_3-d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

예제 2.4.8 점 $(3, -1, 2)$와 평면 $x - 2y + 3z = 4$ 사이의 거리를 구하라.

$\vec{n} = (1, -2, 3)$ $\quad P(3, -1, 2)$ $\quad d = 4$ $\quad 9+\cancel{2}\cancel{4}\cancel{6}+\cancel{4}$ $\;7\;$ -4

$$\frac{|\vec{QP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{aP_1 + bP_2 + cP_3 - d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 6 - 4}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{7}{\sqrt{14}}$$

$$= \frac{7}{14}\sqrt{14} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

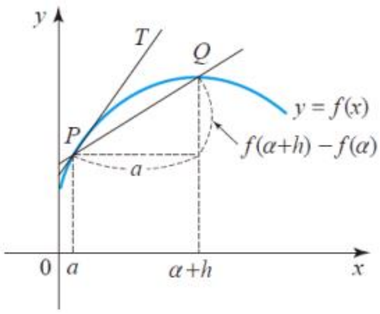
5. 평균변화률

정의 5.1.1

함수 f에서 x의 값이 정의역의 한 점 a에서 $a + h$까지 변할 때, f의 **평균변화율**은

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

로 정의된다.



미분계수 또는 순간 변화률

> **정의 5.1.2**
>
> 함수 f의 정의역에 속하는 a에 대하여 극한
>
> $$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
>
> 가 존재하면 f는 a에서 **미분가능**하다고 하고, 이 극한 값을 a에서 f의 **미분계수** 또는 **순간변화율**이라 하고 $f'(a)$로 쓴다. 또 함수 f의 정의역의 모든 점에서 미분가능할 때 f를 **미분가능한 함수**라 부른다.

참고 $a+h=x$로 치환하면 다음이 성립함을 안다.

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

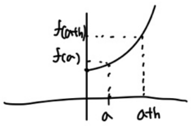
예제 5.1.1 $f(x)=x^2-3$일 때, $x=1$에서 $x=1.5$까지 변할 때 f의 평균변화율을 구하라.

$f(1.5)=\frac{9}{4}-\frac{12}{4}=-\frac{3}{4}$ $\quad f(1.5)-f(1)=-\frac{3}{4}+\frac{8}{4}=\frac{5}{4}$

$f(1)=-2=-\frac{8}{4}$

$1.5-1=0.5=\frac{1}{2}$ $\quad \therefore \frac{\frac{5}{4}}{\frac{2}{4}}=\frac{5}{2}$

예제 5.1.2 $f(x)=x^2+1$ 위의 점 $P(2,\ 5)$에서 접선의 기울기를 구하고, 곡선에 접하는 접선의 방정식을 구하라.



$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(h+2)^2+1-5}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+4h+4+1-5}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+4h}{h}=\lim_{h\to 0}h+4=4$

$y=ax+b$

$y=4x+b$

$f(2)=5 \Rightarrow 5=4\cdot 2+b$

$b=5-8=-3$ $\quad \therefore y=4x-3$

6. 도함수

함수 $y=f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 f의 미분가능한 모든 점 x를 정의역으로 하여 다음과 같이 정의되는 함수이다.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

또 주어진 함수의 도함수를 구하는 것을 "**미분한다**"라고 한다.

예제 5.1.4 함수 $f(x)=\sqrt{x}$ 의 도함수를 정의에 의하여 구하고, 함수의 그래프 위의 점 $(4,\ 2)$ 와 점 $(1,1)$ 에서 접선의 기울기를 구하라.

$$f(x)=x^{\frac{1}{2}} \qquad f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{2x}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{2x}$$