교 육 일 지

교육 제목	**행렬(Matrix)**
교육 일시	2021.10.06
교육 장소	YGL-C6
교육 내용	

1. 행렬

수나 문자를 직사각형 모양으로 배열하여 ( )나 [ ]로 묶은 것을 뜻한다.
배열의 가로줄은 행(row), 배열의 세로줄을 열(column)이라 한다.

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} 1\text{열} & & & j\text{열} & & \end{array} \\
\begin{array}{c} 1\text{행} \\ \\ \\ i\text{행} \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{i1} & a_{j2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

1.1 행렬의 형태

영행렬 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \cdots$

대각행렬 $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \cdots$

단위행렬 $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \cdots$

m
n

m=n 이고 대각선상 모든 원소가 "1"

전치 행렬 : 행렬에서 행과 열의 원소의 위치를 바꾼 행렬

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix} \text{일 때,} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \text{일 때, } A^t = (a^t_{ij})_{n \times m} \text{이면 } a^t_{ij} = a_{ji}$$

상삼각행렬 : 대각선 아래쪽 부분들의 원소들만 0 일 경우
하삼각행렬 : 대각선 위쪽 부분들의 원소들만 0 일 경우

1.2 행렬의 상등

크기가 같은 두 행렬, A 와 B 가 존재할 때, 두 행렬의 모든 요소가 같으면 두행렬은 '같다' 라고 하고 A = B 로 나타낸다.

1.3 행렬의 연산

상수의 곱 : 행렬 A와 실수 r에 대하여 A에 r을 곱했을 때, A의 모든 원소들에 r의 곱한 것과 같고 $rA = (ra_{ij})$ 라 나타낸다.

합과 차: 크기가 같은 두 행렬 A와 B가 있을 때, 합과 차는 $A + B = (a_{ij} + b_{ij}), A - B = (a_{ij} - b_{ij})$ 로 나타낸다.

행렬 연산의 성질

행렬 A, B, C의 크기가 모두 같고 α, β가 실수 일 때, 다음이 성립한다.

(1) $A + B = B + A$

(2) $(A + B) + C = A + (B + C)$

(3) $A + O = O + A = A$

(4) $A - A = O$

(5) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

(6) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$

(7) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

행렬의 곱

두 행렬 $A = (a_{ij})_{ml}, B = (b_{ij})_{ln}$에 대하여 두 행렬의 곱 AB는 다음과 같다.

$$AB = (c_{ij})_{mn}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{il}b_{lj}$$

앞 행렬의 열과 뒤 행렬의 행의 수가 같아야 곱을 할 수가 있고, 결과 값의 크기는 앞 행*뒤 열, n*m이 나온다.

예제 1.1.4 다음 행렬의 곱을 계산하라.

(1) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 12+10 \\ 3+40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 43 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 6 & 1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 16+18+7 \; 34 & 0+3+9 \\ 0+24+35 & 4+45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 12 \\ 59 & 49 \end{pmatrix}$

행렬의 결합법칙과 분배 법칙

곱과 합이 정의되는 행렬 A, B, C와 실수 k에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $(AB)C = A(BC)$ (결합법칙)

(2) $A(B+C) = AB + AC$, $(A+B)C = AC + BC$ (분배법칙)

(3) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$

- 행렬의 곱에서는 교환법칙이 성립하지 않는다.

행렬과 연립일차 방정식

일반적으로 m개의 방정식과 n개의 미지수를 포함하는 연립일차방정식, 즉

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mj}x_j + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

은 다음 행렬

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

에 대하여

$$AX = B$$

기약 행제형 (Reduced row Echelm Form)

- 각 행의 선두요소는 1이다.
- 위 행의 선두요소는 다음 행의 선두요소 보다 앞선다.
- 각 행의 선두요소 위, 아래 행은 모두 0이다 .

⇨ 행제형 : 기약행제형의 조건중 마지막 조건만 해당하지 않는 행렬

기약행제형 : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\cdots$

행제형 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\cdots$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

위 행렬과 같은 행렬을 계수 확대행렬(Augmented Matrix)라함

가우스-조단 소거법(Gauss-Jordan elimination)

- 계수 확대 행렬로 연립일차방적식을 만들어 준디 기약행제형 행렬로 만들어서 방정식을 풀어나가는 방법이다 .

1.4 행렬의 위수

행렬 A를 행제형/기약행제형으로 나타내었을 때, 행의 모든 요소가 0이 아닌 행의 수를 그 행렬의 위수(rank)라 하고 rank(A)로 나타낸다.

예제 1.2.6 다음 행렬의 위수를 구하라.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R2 \leftrightarrow R3} \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R1+2R2} \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R2-R3} \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

0이 아님

$\therefore$ rank(A) = 2

18/116

1.5 행렬의 성질

n 개의 미지수와 m 개의 방정식으로 된 연립일차방정식의 계수 행렬을 A, 계수확대행렬을 C 라 할 때

- 해를 가질 필요충분조건 rank(A) = rank(C)

- rank(A) = rank(C) = n이면 유일한 해를 가진다.

- rank(A) = rank(C) = r < n이면 r개의 변수가 나머지 n-r개의 변수로 표시되어 해는 무수히 많다.

예제 1.2.7 다음 연립방정식의 해의 존재성에 대하여 논하라.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 2 & -3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R2 \leftrightarrow R3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{3R1-R2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 5 & 10 & 40 \\ 2 & -3 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2R1-R3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 5 & 10 & 40 \\ 0 & 7 & 4 & 26 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{7}{5}R2-R3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 30 \end{array}\right) \xrightarrow{R2-\frac{2}{10}R3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R1-2R_2-3R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

계수행렬의 rank = 3

계수확대행렬의 rank = 3 이므로

해가 하나 존재한다.

20/116

-

1.6 소행렬

주어진 정방행렬 A에서 i행과 j열을 제거하고 남은 행렬을 소행렬이라 하고 $M_{ij}(A)$또는 M_{ij} 로 나타낸다.

1.7 행렬식

n정방행렬 $A = (a_{ij})$에 다음과 같은 정의에 의하여 대응하는 실수 $|A|$ 또는 $\det(A)$를 A의 행렬식이라 한다.

(1) $n = 1$일 때, $|A| = a_{11}$.

(2) $n \geq 2$일 때,

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} |M_{1j}|$$
$$= a_{11}|M_{11}| - a_{12}|M_{12}| + \cdots + (-1)^{1+n}|M_{1n}|.$$

행렬식의 성질

(1) $|A| = |A^t|$

(2) B가 A의 한 행을 k배하여 얻은 행렬이면 $|B| = k|A|$이다.

(3) $B = kA$이면 $|B| = k^n|A|$이다.

(4) B가 A의 임의의 두 행을 교환하여 얻은 행렬이면 $|B| = -|A|$이다.

(5) B가 A의 한 행을 상수배 하여 다른 행에 더하여 얻은 행렬이면 $|B| = |A|$이다.

(6) 어느 한 행의 원소가 모두 0인 행렬의 행렬식은 0이다.

(7) 어느 두 행이 같거나, 두 행이 비례하면 그 행렬의 행렬식은 0이다.

(8) 삼각행렬의 행렬식은 대각에 있는 원소들의 곱이다.

(9) $|AB| = |A||B|$

1.8 역행렬과 크래머 법칙

n정방행렬 A에 대하여, n 정방행렬 B가 존재하여 AB = BA = I_N 일 때

A를 가역행렬이라 하고, B를 A의 역행렬이라 부르며 B = A^{-1}로 나타낸다.

1.9 행렬의 여인수(cofactor)

정방행렬 $A = (a_{ij})$에서 A_{ij}를 a_{ij}의 여인수라 하고 다음과 같이 정의한다.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

$A = (a_{ij})$가 정방행렬일 때 다음이 성립한다.

(1) A가 가역이기 위한 필요충분조건은 $|A| \neq 0$이다.

(2) A가 가역일 때, A의 역행렬 A^{-1}은 다음과 같이 주어진다.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ij})^t, \quad i \cdot j = 1, 2, \cdots, n$$

정리 1.4.3을 이용하여 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$의 역행렬을 구하라.

$|A| = 2 \cdot 3 - 4 \cdot 1 = 6 - 4 = 2$

$a_{11} = 3$

$a_{12} = -4$

$a_{21} = -1$

$a_{22} = 2$

여인수

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ij})^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$