교 육 일 지

교육 제목	미분, 머신러닝 기초 (선형회귀)
교육 일시	2021.10.12
교육 장소	YGL-C6
교육 내용	

1. 도함수

함수 $y = f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 f의 미분가능한 모든 점 x를 정의역으로 하여 다음과 같이 정의되는 함수이다.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

또 주어진 함수의 도함수를 구하는 것을 "미분한다"라고 한다.

예제 5.1.4 함수 $f(x) = \sqrt{x}$의 도함수를 정의에 의하여 구하고, 함수의 그래프 위의 점 $(4, 2)$와 점 $(1,1)$에서 접선의 기울기를 구하라.

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} \qquad f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2x}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2x}$$

미분가능한 조건

(1) 함수 f가 개구간 (a, b)의 모든 점에서 미분가능이면 함수 f는 구간 (a, b)에서 미분가능이라 한다.

(2) 함수 f가 개구간 (a, b)의 모든 점에서 미분가능하고 a에서 우도함수와 b에서 좌도함수가 존재하면 f는 폐구간 $[a, b]$에서 미분가능이라 한다.

2. 미분법

정리 5.2.1

$f(x) = k$(k는 상수)이면 $f'(x) = 0$이다. $f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

[증명] $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k - k}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0.$ ■

예제 5.2.1 다음 함수를 미분하라.

(1) $f(x) = e$ (2) $f(x) = 4$ (3) $f(x) = \pi^3$

$f'(x) = 0$ $f'(x) = 0$ $f'(x) = 0$

n이 임의의 정수일 때 다음이 성립한다.

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

여러가지 미분법

$f(x)$와 $g(x)$가 미분가능한 함수이고 k가 상수일 때 다음이 성립한다.

(1) $(kf)'(x) = kf'(x)$

(2) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

(3) $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$

(4) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

(5) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

예제 5.2.3 주어진 함수의 도함수를 구하라.

(1) $y = 3x^4$ $y' = 12x^3$

(2) $y = 5x^4 - 2x^3$ $y' = 20x^3 - 6x^2$

예제 5.2.4 주어진 함수의 도함수를 구하라.

(1) $y = (4x^3 - 1)(x^2 + 3x)$

$f(x) = 4x^3 - 1 \qquad g(x) = x^2 + 3x$

$$\{f(x) \cdot g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
$$= (12x^2)(x^2+3x) + (4x^3-1)(2x+3)$$
$$= 12x^4 + 36x^3 + 8x^4 + 12x^3 - 2x - 3$$
$$= 20x^4 + 48x^3 - 2x - 3$$

(2) $y = \dfrac{x^2 + 1}{3x - 2}$

$f(x) = x^2 + 1 \qquad g(x) = 3x - 2$

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$
$$= \frac{(2x)(3x-2) - (x^2+1)\cdot 3x}{(3x-2)^2}$$
$$= \frac{6x^2 - 4x - 3x^3 - 3x}{9x^2 - 12x + 4}$$
$$= \frac{-3x^3 + 6x^2 - 7x}{9x^2 - 12x + 4}$$

연쇄법칙 (Chain Rule)

정리 5.3.1 **합성함수의 미분법(연쇄법칙)**

함수 $g(x)$가 미분가능하고 $f(x)$가 $g(x)$의 치역을 포함하는 영역에서 미분가능하면 합성함수 $y = (f \circ g)(x)$도 미분가능하고, $y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$에서 $u = g(x)$라 놓으면

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

또는

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

이다.

예제 5.3.1 $y = (x^2 - 5x + 10)^{30}$의 도함수를 구하라.

예제 5.3.2 $f(x) = \dfrac{1}{3x^4 + x^2 - 4}$일 때 $f'(x)$를 구하라.

1. $y = a^{30}$ $\quad a = x^2 - 5x + 10$

$\dfrac{dy}{da} = 30a^{29}$.

$\dfrac{da}{dx} = 2x - 5$ $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{da} \cdot \dfrac{da}{dx}$

$= 30a^{29} \cdot (2x - 5)$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = 30(x^2 - 5x + 10)^{29} \cdot (2x - 5)$

2. $f(x) = (3x^4 + x^2 - 4)^{-1}$

$\dfrac{dy}{da} = -a^{-2}$

$a = 3x^4 + x^2 - 4 \Rightarrow \dfrac{da}{dx} = 12x^3 + 2x$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{da} \cdot \dfrac{da}{dx} = -a^{-2} \cdot (12x^3 + 2x)$

$= -(3x^4 + x^2 - 4)^{-2}(12x^3 + 2x)$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-(12x^3 + 2x)}{(3x^4 + x^2 - 4)^2}$

3. 음함수의 미분

> 음함수 $F(x, y) = 0$에서 $\dfrac{dy}{dx}$를 구할 때는 y를 x의 함수로 보고 양변을 x에 관하여 미분한 다음 $\dfrac{dy}{dx}$를 좌변으로 분리하면 된다.

예제 5.3.4 방정식 $y^3 + 2y - x^2 = 0$에서 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하라.

$\dfrac{d}{dx}(y^3 + 2y - x^2) = 0$

$\dfrac{dy^3}{dx} + \dfrac{d}{dx} \cdot 2y - 2x = 0$

$3y^2 \cdot \dfrac{dy}{dx} + 2 \cdot \dfrac{dy}{dx} - 2x = 0$

$(3y^2 + 2)\dfrac{dy}{dx} = 2x$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{3y^2 + 2}$

$(a,b), m \quad y-b=m(x-a)$

예제 5.3.4 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 (3, 4)에서 접선의 기울기와 접선의 방정식을 구하라.

$m \times \frac{4}{3} = -1$

$\therefore m = -\frac{3}{4}$

예제 5.3.5 $x^2-xy+y^2=1$에서 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하라.

1. $x^2+y^2=25$

$\frac{d}{dx}(x^2+y^2)=0$

$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$

$x=3 \quad y=4$

$\therefore -\frac{3}{4}$

$\therefore (y-4)=-\frac{3}{4}(x-3)$

2. $x^2-xy+y^2=1$

$\frac{d}{dx}(x^2-xy+y^2)=0$

$2x-(y+x\cdot\frac{dy}{dx})+2y\frac{dy}{dx}=0$

$2x-y+(-x+2y)\frac{dy}{dx}=0$

$\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y}{x-2y}$

4. 역함수의 미분

미분가능한 함수 $y=f(x)$의 역함수 $x=f^{-1}(y)$가 존재하고 $f'(x)\neq 0$이면, $x=f^{-1}(y)$도 미분가능이고 다음이 성립한다.

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}, \quad \text{즉 } (f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}, \quad (\text{단 } y=f(x))$$

5. 매개함수의 미분

$x=f(t)$와 $y=g(t)$가 t에 관하여 미분가능이고 $f'(t)\neq 0$이면,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

이다.

예제 5.3.7 $x = \sqrt{t+1}$, $y = t^2 - 3t + 2$일 때, $\frac{dy}{dx}$를 구하고 $t = 3$에서 접선의 기울기를 구하라.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = 2t - 3 \quad , \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(t+1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{(2t-3)}{\frac{1}{2}(t+1)^{-1/2}} = 2(2t-3)\cdot(\sqrt{t+1})$$

$t=3$ 일때 $\quad 2\cdot(2\cdot 3-3)\sqrt{3+1}$

$$= 2(3)\cdot 2 = 12$$

예제 5.3.8 $y = \sqrt{x^2 - x + 4}$에서 y'를 구하라.

예제 5.3.9 $y = \dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$에서 y'를 구하라.

$$y = \sqrt{a} \qquad a = x^2 - x + 4$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{da}\cdot\frac{da}{dx}$$

$$\frac{dy}{da} = \frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}} \qquad \frac{da}{dx} = 2x - 1$$

$$y' = \frac{dy}{da}\cdot\frac{da}{dx} = \frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x-1)$$

$$= \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+4}}$$

6. 삼각함수의 미분

정리 5.4.1

(1) $\lim_{h\to 0} \sin h = 0$ (2) $\lim_{h\to 0} \cos h = 1$

(3) $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ (4) $\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$

정리 5.4.2

(1) $(\sin x)' = \cos x$ (2) $(\cos x)' = -\sin x$

(3) $(\tan x)' = \sec^2 x$ (4) $(\cot x)' = -\csc^2 x$

(5) $(\sec x)' = \sec x \tan x$ (6) $(\csc x)' = -\csc x \cot x$

예제 5.4.1 다음 함수의 도함수를 구하라.

(1) $y = \sin 4x$ $y' = 4\cos 4x$ (2) $y = \sin(\sqrt{x} + x)$ $y' = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1\right) \cos(\sqrt{x} + x)$

7. 로그함수의 도함수

(1) $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$ (2) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

(1) $\frac{d}{dx}\{\log_a f(x)\} = \frac{f'(x)}{f(x)} \log_a e$ (2) $\frac{d}{dx}\{\ln f(x)\} = \frac{f'(x)}{f(x)}$

예제 5.5.1 $y = \log_2(x^3 - 2x + 4)$일 때 $\frac{dy}{dx}$를 구하라.

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e \cdot \frac{dy}{dx} x$$

$$y' = \frac{1}{x^3 - 2x + 4} \log_a e \cdot (3x - 2)$$

$$= \frac{3x - 2}{x^3 - 2x + 4} \log_a e$$

예제 5.5.2 다음에서 $\frac{dy}{dx}$를 구하라.

(1) $y = \ln(x^2+4)$ (2) $\log_3 \sin x$

(1) $y = \ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)$ (2) $y = \ln\left(x^2\sqrt{\frac{x+3}{x+1}}\right)$

$y = \log_e x^2+4$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2+4} \log_e e$

$= \frac{2x}{x^2+4}$

$y = \ln u$

$u = x^2+4$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$y = \log_3 \sin x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x} \log_3 e$

$y = \ln(1+x^2) - \ln(1-x^2)$

$= \frac{2x}{x^2+1} - \frac{-2x}{1-x^2}$

$= \frac{2x}{x^2+1} - \frac{+2x}{x^2-1}$

8. 지수함수의 미분

(1) $(a^x)' = a^x \ln a$ (2) $(e^x)' = e^x$

$(e^x)' = e^x \ln e$

$= e^x$

예제 5.5.6 다음에서 도함수 $\frac{dy}{dx}$를 구하라.

(1) $y = \pi^{\sin x}$ (2) $y = e^{\cos 2x}$

$y' = \pi^{\sin x} \cdot \cos x \ln \pi$

$y' = e^{\cos 2x}(-\sin 2x) \cdot 2$

$= -2\sin 2x \cdot e^{\cos 2x}$

(1) $\frac{d}{dx}\{a^{f(x)}\} = a^{f(x)} f'(x) \ln a$ (2) $\frac{d}{dx}\{e^{f(x)}\} = e^{f(x)} f'(x)$

$f'g + fg'$

예제 5.5.7 $y = e^{-3x} \ln x$일 때, y'를 구하라. $y' = e^{-3x}(-3)\ln x + e^{-3x} \cdot \frac{1}{x}$

예제 5.5.8 $y = x^x$일 때 y'을 구하라. $y' = x^{2x} \cdot 2 = 2x^{2x}$

9. 머신러닝

   A. 선형회귀 (Linear Regresion)

      - 지도학습

        1) 분류

        2) 회귀

           A. 연속형 ex) 부동산 가격, 몸무게 예측

           B. 범주형 ex) target, 성별

      - 목적변수가 연속형인 경우

      - 정규성, 독립성, 등분산성을 만족

      - Feature가 하나일 경우 단순회귀(Simple Linear Regression)

$$f(x_i) = Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \epsilon_i, \quad for\ i = 1, 2, \ldots, n$$

      - Feature가 여러개일 경우 중회귀(Multiple Linear Regression)

      - 2차항 이상이 포함된 경우 다항회귀(Polynomial Regression)