Ejercicios de Lógica

Héctor Olvera Vital

2 de octubre de 2023

7.7

Como A, B, C, D son los únicos proposiciones, existen 2^4 modelos.

a) $B \vee C$

B	C	$B \vee C$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Hay 3 modelos que satisface la fórmula. Como A y D no aparecen en la formula, entonces en total hay $3 * 2^2 = 12$ modelos en total.

b) $\neg A \vee \neg B \vee \neg C \vee \neg D$

La fórmula es equivalente a $\neg(A \wedge B \wedge C \wedge D)$.

Si un modelo no satisface la fórmula, entonces satisface $A \wedge B \wedge C \wedge D$, entonces el modelo es $s(A) = T$, $s(B) = T$, $s(C) = T$ y $s(D) = T$

Por lo que, todos los demás modelos satisfacen la fórmula. En total $2^4 - 1 = 15$

c) $(A \to B) \wedge A \wedge \neg B \wedge C \wedge D$

Supongamos que s una asignación de verdad que satisface la fórmula.

Entonces,

$$\begin{aligned} s(A \to B) &= T \\ s(A) &= T \\ s(\neg B) &= T \\ s(C) &= T \\ s(D) &= D \end{aligned}$$

Pero $s(A) = T$ y $s(\neg B) = T$, por lo que $s(A \to B) = F$. Lo cual es una contradicción.

Por lo tanto no existe la asignación.

Entonces existen 0 modelos para la fórmula.

7.4

a) $False \models True$

Verdadero.
$\{False, \neg True\}$ no es satisfactible.

b) $True \models False$

Falso. $\{True, \neg False\}$ es satisfactible. Sea $w = \{\}$, $I(True \wedge \neg False, w) = 1$

c) $A \wedge B \models A \leftrightarrow B$

Verdadero.
Sea w un modelo. Si $I(A \wedge B, w) = 1$, entonces $I(A, w) = 1$ y $I(B, w) = 1$. Por lo tanto, $I(A \leftrightarrow B, w) = 1$.

d) $A \leftrightarrow B \models A \vee B$

Falso. $\{A \leftrightarrow B, \neg(A \vee B)\}$ es satisfactible.
Sae $w = \{A : F, B : F\}$. Entonces $I(A \leftrightarrow B, w) = 1$ y $I(A \vee B, w) = 0$. Por lo tanto, $I(\neg(A \vee B), w) = 1$ y el conjunto es satisfactible.

e) $A \leftrightarrow B \models \neg A \vee B$

Verdadero.
Veamos que $\{A \leftrightarrow B, \neg(\neg A \vee B)\}$ no es satisfactible.
Si $I(\neg(\neg A \vee B), w) = 1$, entonces $I(A \wedge \neg B, w) = 1$. Por lo que, $I(A, w) = 1$ y $I(B, w) = 0$. Entonces $I(A \leftrightarrow B, w) = 0$.
Por lo que, el conjunto no es satisfactible.

f) $(A \wedge B) \rightarrow C \models (A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)$

Verdadero.
Veamos que $\{(A \wedge B) \rightarrow C, \neg((A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C))\}$ no es satisfactible.
Sea w un modelo. Si $I(\neg((A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)), w) = 1$, entonces $I(\neg(A \rightarrow C), w) = 1$ y $I(\neg(B \rightarrow C), w) = 1$.
Entonces, $I(A \wedge \neg C, w) = 1$ y $I(B \wedge \neg C, w) = 1$. Por lo tanto, $I(A, w) = 1$, $I(B, w) = 1$ y $I(C, w) = 0$.
Entonces $I((A \wedge B) \rightarrow C) = 0$. Por lo tanto el conjunto no es satisfactible.

g) $C \vee (\neg A \wedge \neg B) \equiv A \rightarrow C \wedge B \rightarrow C$

Sae w tal que $I(C \vee (\neg A \wedge \neg B), w) = 1$. Entonces, $I(C, w) = 1$ o $I(\neg A \wedge \neg B, w) = 1$
Si $I(C, w) = 1$, $I(A \rightarrow C, w) = 1$ y $I(B \rightarrow C, w) = 1$. Por lo que, $I(A \rightarrow C \wedge B \rightarrow C, w) = 1$.
Si $I(\neg A \wedge \neg B, w) = 1$, entonces $I(A) = 0$ y $I(B) = 0$. Por lo que, $I(A \rightarrow C, w) = 1$ y $I(B \rightarrow C, w) = 1$. Así, $I(A \rightarrow C \wedge B \rightarrow C, w) = 1$.
En ambos casos, $I(A \rightarrow C \wedge B \rightarrow C, w) = 1$.
Por lo que, $C \vee (\neg A \wedge \neg B) \models A \rightarrow C \wedge B \rightarrow C$
Sea w tal que $I(A \rightarrow C \wedge B \rightarrow C, w) = 1$. Entonces $I(A \rightarrow C, w) = 1$ y $I(B \rightarrow C, w) = 1$. Por lo que, $I(\neg A \vee C, w) = 1$ y $I(\neg B \vee C, w) = 1$.

Si $I(C, w) = 1$, entonces $I(C \vee (\neg A \wedge \neg B), w) = 1$.
Si $I(C, w) = 0$, entonces $I(\neg A, w) = 1$ y $I(\neg B, w) = 1$. Por lo que, $I(C \vee (\neg A \wedge \neg B), w) = 1$.
En ambos casos $I(C \vee (\neg A \wedge \neg B), w) = 1$
Entonces, $A \rightarrow C \wedge B \rightarrow C \models C \vee (\neg A \wedge \neg B)$
Por lo tanto, $C \vee (\neg A \wedge \neg B) \equiv A \rightarrow C \wedge B \rightarrow C$

h) $(A \vee B) \wedge (\neg C \vee \neg D \vee E) \models A \vee B$

Verdadero.
Veamos que $\{(A \vee B) \wedge (\neg C \vee \neg D \vee E), \neg(A \vee B)\}$ no es satisfactible.
Sea w un modelo. Si $I((A \vee B) \wedge (\neg C \vee \neg D \vee E), w) = 1$, $I(A \vee B, w) = 1$. Por lo que, $I(\neg(A \vee B), w) = 0$.
Entonces el conjunto no es satisfactible.

i) $(A \vee B) \wedge (\neg C \vee \neg D \vee E) \models (A \vee B) \wedge (\neg D \vee E)$

Falso.
Sae $w = \{A : V, B : V, C : F, D : V, E : F\}$.

$(A$	$\vee$	$B)$	$\wedge$	$(\neg$	C	$\vee$	$\neg$	D	$\vee$	$E)$
V	V	V	**V**	V	F	V	F	V	F	F

$(A$	$\vee$	$B)$	$\wedge$	$(\neg$	D	$\vee$	$E)$
V	V	V	**F**	F	V	F	F

j) $(A \vee B) \wedge \neg(A \rightarrow B)$

Verdadero.
Sae $w = \{A : V, B : F\}$.

$(A$	$\vee$	$B)$	$\wedge$	$\neg$	$(A$	$\rightarrow$	$B)$
V	V	F	**V**	V	V	F	F

k) $(A \leftrightarrow B) \wedge (\neg A \vee B)$

Verdadero.
Sae $w = \{A : V, B : V\}$.

$(A$	$\leftrightarrow$	$B)$	$\wedge$	$(\neg$	A	$\vee$	$B)$
V	V	V	**V**	F	V	V	V

l)

Verdadero.
Por inducción sobre el número de símbolos proposicionales adicionales a A, B, C.
Paso base $n = 0$

A	B	C	$(A \leftrightarrow B)$	$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	F	F
V	F	F	F	V
F	V	V	F	F
F	V	F	F	V
F	F	V	V	V
F	F	F	V	F

Existen 4 modelos que satisface $(A \leftrightarrow B)$ y 4 modelos que satisface $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$.

H.I.: Supongamos para $n = k$ que tiene la misma cantidad de modelos.

Sean A_1, A_2,..., A_k, A_{k+1}, los símbolos proposicionales adicionales a A, B, C. Por hipótesis de inducción, existen la misma cantidad de modelos para $(A \leftrightarrow B)$ y $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$ con A, B, C, A_1, A_2,..., A_k. Al agregar A_{k+1}, se multiplica por 2 la cantidad de modelos posibles. Ya que como A_{k+1} no aparece en $(A \leftrightarrow B)$ ni $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$, si w es un modelo que satisface alguna de las dos fórmulas, $w \cup \{A_{k+1} : True\}$ y $w \cup \{A_{k+1} : Falso\}$ son también modelos.

Entonces, existen la misma cantidad de model para $(A \leftrightarrow B)$ y $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$ con A, B, C, A_1, A_2,..., A_k, A_{k+1}.

Por el principio de inducción, el se cumple para toda n.

7.18

$[(Food \rightarrow Party) \vee (Drinks \rightarrow Party)] \rightarrow [(Food \wedge Drinks) \rightarrow Party]$

a)

$[(Food$	$\rightarrow$	$Party)$	$\vee$	$(Drinks$	$\rightarrow$	$Party)]$	$\rightarrow$	$[(Food$	$\wedge$	$Drinks)$	$\rightarrow$	$Party]$
V	V	V	V	V	V		V		V		V	
V	V	V	V	F	V		V		F		V	
V	F	F	F	V	F		V		V		F	
V	F	F	V	F	V		V		F		V	
F	V	V	V	V	V		V		F		V	
F	V	V	V	F	V		V		F		V	
F	V	F	V	V	F		V		F		V	
F	V	F	V	F	V		V		F		V	

Es válida.

b)

$[(Food \rightarrow Party) \vee (Drinks \rightarrow Party)] \rightarrow [(Food \wedge Drinks) \rightarrow Party]$
$[(\neg Food \vee Party) \vee (\neg Drinks \vee Party)] \rightarrow [\neg(Food \wedge Drinks) \vee Party]$
$(\neg Food \vee Party \vee \neg Drinks \vee Party) \rightarrow (\neg Food \vee \neg Drinks \vee Party)$

Se confirma la a) ya que el consecuente de la implicación es el antecedente quitando la redundancia de Party.

c)

$\vdash (\neg Food \vee Party \vee \neg Drinks \vee Party) \rightarrow (\neg Food \vee \neg Drinks \vee Party)$
$\{\neg Food \vee Party \vee \neg Drinks \vee Party\} \vdash \neg Food \vee \neg Drinks \vee Party$
Apliquemos resolución
$\{\neg Food \vee Party \vee \neg Drinks \vee Party, \neg(\neg Food \vee \neg Drinks \vee Party)\}$
$\{\neg Food \vee Party \vee \neg Drinks \vee Party, Food \wedge Drinks \wedge \neg Party\}$
$\{\neg Food \vee Party \vee \neg Drinks \vee Party, Food, Drinks, \neg Party\}$
$Food$, $\neg Food \vee Party \vee \neg Drinks \vee Party$ ->$Party \vee \neg Drinks \vee Party$
$\neg Party$, $Party \vee \neg Drinks \vee Party$ ->$\neg Drinks \vee Party$
Drinks, $\neg Drinks \vee Party$ ->$Party$
$Party$, $\neg Party$ ->False
Por lo tanto, no es satisfactible.

Entonces $\{\neg Food \vee Party \vee \neg Drinks \vee Party\} \vdash \neg Food \vee \neg Drinks \vee Party$

7.4

a) $\exists x(Parent(Joan, x) \wedge Female(x))$
b) $\exists^1 x(Parent(Joan, x) \wedge Female(x))$
c) $\exists^1 x Parent(Joan, x) \wedge \forall x(Parent(Joan, x) \rightarrow Female(x))$
d) $\exists^1 x(Parent(Joan, x) \wedge Parent(Kevin, x))$
e) $\exists x(Parent(Joan, x) \wedge Parent(Kevin, x)) \wedge \forall x(Parent(Joan, x) \rightarrow Parent(Kevin, x))$

8.10

a. $Occupation(Emily, Surgeon) \vee Occupation(Emily, Lawyer)$
b. $Occupation(Joe, Actor) \wedge \exists x(\neg x = Actor \wedge Occupation(Joe, x)$
c. $\forall x(Occupation(x, Surgeon) \rightarrow Occupation(x, Doctor))$
d. $\forall x(Occupation(x, Lawyer) \rightarrow \neg Customer(Joe, x))$
e. $\exists x(Boss(x, Emily) \wedge Occupation(x, Lawyer))$
f. $\exists x(Occupation(x, Lawyer) \wedge \forall y(Customer(y, x) \rightarrow Occupation(y, Doctor))$
g. $\forall x(Occupation(x, Surgeon) \rightarrow \exists y(Occupation(y, Lawyer) \wedge Customer(x, y)))$

9.6

a. $\forall x(horse(x) \rightarrow mammal(x)), \forall x(Cow(x) \rightarrow mammal(Cows)), \forall x(pig(x) \rightarrow mammal(Pigs))$
b. $\forall x \forall y(horse(x) \wedge offspring(y, x) \rightarrow horse(y))$
c. $horse(Bluebeard)$
d. $parent(Bluebeard, Charlie)$
e. $\forall x \forall y(offspring(x, y) \rightarrow parent(y, x))$, $\forall x \forall y(parent(y, x) \rightarrow offspring(x, y))$
f. $\forall x \exists y(mammal(x) \rightarrow parent(y, x))$