

Nota 001 – Cálculo do ângulo α ao arco GSO visível (referência: ITU-R S.1503-4)

Hygson A. P. da Rocha

6 de fevereiro de 2026

Resumo

Esta nota consolida (i) a definição geométrica do ângulo α da Recomendação ITU-R S.1503-4, (ii) a caracterização do arco GSO visível a partir de uma estação terrena (ES) no modelo esférico, e (iii) uma estratégia prática para obter $|\alpha|$ e Long_α (longitude do ponto do arco que minimiza α), incluindo o critério de sinal da própria Recomendação.

Escopo e reprodutibilidade

Este documento foi pensado para acompanhar uma implementação reprodutível:

- Código Python: `src/alpha_angle.py`
- Notebook de demonstração: `notebooks/alpha_angle_demo.ipynb`

A ideia é manter esta nota *sem* a colagem integral de código-fonte (para reduzir redundância, evitar divergências e simplificar a compilação em \LaTeX). A implementação de referência do algoritmo está no arquivo `src/alpha_angle.py`, enquanto o notebook serve como roteiro executável, com exemplos de uso e checagens numéricas.

Compilação

Este `main.tex` compila com $\text{Lua}\text{\LaTeX}$. Ele não depende de `minted`/`Pygments`, pois não embute código.

Definição de α e notação

Definição (módulo). O ângulo α é a separação angular instantânea, medida no receptor (ES), entre a linha de visada $\text{ES} \rightarrow \text{NGSO}$ e a família de linhas de visada $\text{ES} \rightarrow \text{ponto}$ no arco GSO visível. Em termos do módulo,

$$|\alpha| = \min_{\lambda \in \mathcal{I}} \arccos(\mathbf{u}_N \cdot \mathbf{u}_G(\lambda)) = \arccos\left(\max_{\lambda \in \mathcal{I}} \mathbf{u}_N \cdot \mathbf{u}_G(\lambda)\right),$$

onde \mathcal{I} é o intervalo de longitudes do arco GSO visível a partir da estação terrena.

Definição (sinal) e longitudes associadas. Conforme a S.1503, α é assinado. Após determinar $|\alpha|$ e o ponto do arco GSO que o minimiza, defina:

$$\text{Long}_\alpha \equiv \text{Long}_{\text{GSO}}(\lambda^\star) = \lambda^\star, \quad \Delta\text{Long} = \text{wrap}_\pi(\text{Long}_\alpha - \text{Long}_{\text{NGSO}}),$$

onde $\text{Long}_{\text{NGSO}}$ é a longitude geocêntrica do satélite NGSO. O sinal de α é obtido por um teste geométrico com base na interseção da reta ES→NGSO com o plano equatorial XY (Seção).

Notação (vetores). Sejam:

- $\mathbf{r}_E \in \mathbb{R}^3$: posição geocêntrica (ECEF) da estação terrena GSO vítima;
- $\mathbf{r}_N \in \mathbb{R}^3$: posição geocêntrica (ECEF) do satélite NGSO;
- $\mathbf{r}_G(\lambda) \in \mathbb{R}^3$: ponto no anel GEO (círculo equatorial de raio R_{geo}) na longitude geocêntrica λ :

$$\mathbf{r}_G(\lambda) = R_{\text{geo}} \begin{bmatrix} \cos \lambda \\ \sin \lambda \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Defina os vetores unitários de visada:

$$\mathbf{u}_N = \frac{\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_E}{\|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_E\|}, \quad \mathbf{u}_G(\lambda) = \frac{\mathbf{r}_G(\lambda) - \mathbf{r}_E}{\|\mathbf{r}_G(\lambda) - \mathbf{r}_E\|}.$$

Para uma longitude λ no anel GEO, a separação é

$$\alpha(\lambda) = \arccos(\mathbf{u}_N \cdot \mathbf{u}_G(\lambda)), \quad |\alpha| = \min_{\lambda \in \mathcal{J}} \alpha(\lambda).$$

Arco GSO visível a partir da ES

Latitude/longitude geocêntricas da ES. Seja φ_E a latitude geocêntrica da ES e λ_E sua longitude geocêntrica:

$$\varphi_E = \arcsin\left(\frac{z_E}{\|\mathbf{r}_E\|}\right), \quad \lambda_E = \text{atan2}(y_E, x_E).$$

Ideia física (horizonte local). No modelo esférico, a direção radial \mathbf{r}_E é a normal do plano tangente (horizonte local) na estação. Um ponto \mathbf{r} no espaço está *acima do horizonte* (elevação ≥ 0) se o vetor linha-de-visada $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_E)$ forma ângulo agudo (ou reto) com a normal \mathbf{r}_E , i.e.:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_E) \cdot \mathbf{r}_E \geq 0 \iff \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_E \geq \|\mathbf{r}_E\|^2.$$

Condição de visibilidade no anel GEO. Para um ponto no anel GEO, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_G(\lambda)$, a visibilidade equivale a:

$$\mathbf{r}_G(\lambda) \cdot \mathbf{r}_E \geq \|\mathbf{r}_E\|^2.$$

Escrevendo \mathbf{r}_E em termos de φ_E, λ_E :

$$\mathbf{r}_E = \|\mathbf{r}_E\| \begin{bmatrix} \cos \varphi_E \cos \lambda_E \\ \cos \varphi_E \sin \lambda_E \\ \sin \varphi_E \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_G(\lambda) = R_{\text{geo}} \begin{bmatrix} \cos \lambda \\ \sin \lambda \\ 0 \end{bmatrix},$$

obtém-se:

$$\mathbf{r}_G(\lambda) \cdot \mathbf{r}_E = R_{\text{geo}} \|\mathbf{r}_E\| \cos \varphi_E \cos(\lambda - \lambda_E).$$

Portanto,

$$\cos(\lambda - \lambda_E) \geq \frac{\|\mathbf{r}_E\|}{R_{\text{geo}} \cos \varphi_E}.$$

Semi-extensão θ_{\max} e intervalo \mathcal{I} . A condição de visibilidade acima define as *longitudes do anel GEO que estão acima do horizonte* da ES. No uso usual do modelo esférico, toma-se $\|\mathbf{r}_E\| \approx R_e$. Assim:

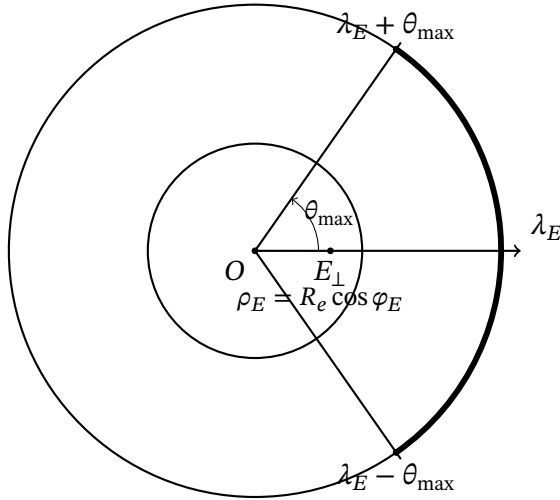
$$\cos(\lambda - \lambda_E) \geq \frac{R_e}{R_{\text{geo}} \cos \varphi_E}.$$

Essa desigualdade define um intervalo simétrico em torno de λ_E :

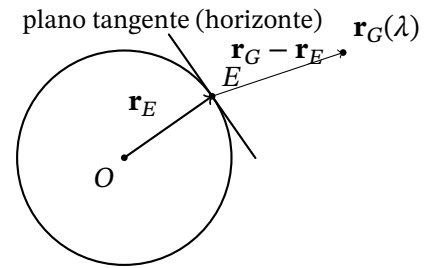
$$\mathcal{I} = [\lambda_E - \theta_{\max}, \lambda_E + \theta_{\max}], \quad \theta_{\max} = \arccos\left(\frac{R_e}{R_{\text{geo}} \cos \varphi_E}\right),$$

desde que $\cos \varphi_E > R_e/R_{\text{geo}}$. A minimização de $|\alpha|$ (equivalentemente, a maximização de $f(\lambda)$) é realizada *somente* para $\lambda \in \mathcal{I}$; fora desse intervalo, os pontos do anel GEO não são visíveis a partir da ES.

Caso sem arco visível. Se $\cos \varphi_E \leq R_e/R_{\text{geo}}$, não há solução para a condição de visibilidade (nenhum ponto do anel GEO está acima do horizonte da ES). Nesse caso, adota-se a convenção operacional $|\alpha| = \pi$.



(a) Plano equatorial XY: arco visível no anel GEO



(b) Visibilidade: $(\mathbf{r}_G - \mathbf{r}_E) \cdot \mathbf{r}_E \geq 0$

Figura 1: Interpretação geométrica do arco GEO visível a partir da ES no modelo esférico.

Minimização de $\alpha(\lambda)$ como maximização

Minimizar $\alpha(\lambda)$ equivale a maximizar o produto escalar:

$$f(\lambda) = \mathbf{u}_N \cdot \mathbf{u}_G(\lambda) = \frac{(\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_E) \cdot (\mathbf{r}_G(\lambda) - \mathbf{r}_E)}{\|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_E\| \|\mathbf{r}_G(\lambda) - \mathbf{r}_E\|}.$$

A implementação em `src/alpha_angle.py` usa uma formulação analítica no frame rotacionado por $-\lambda_E$, gerando um conjunto finito de candidatos (bordas do arco, ponto central e raízes de uma quartica associada à condição de estacionariedade), seguido de desempate por ΔLong quando houver empates numéricos.

Regra de desempate por ΔLong

Se existirem múltiplos λ^* que produzam o mesmo $|\alpha|$ (ou indistinguíveis dentro de uma tolerância numérica), escolha aquele que minimiza $|\Delta\text{Long}|$. Persistindo empate, escolha $\Delta\text{Long} > 0$.

Critério de sinal de α

O critério operacional (S.1503, Anexo/Apêndice D, §D6.4.4.3) pode ser implementado assim:

1. Considere a reta $P(t) = \mathbf{r}_E + t(\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_E)$.
2. Interseção com $z = 0$: se $(r_{N,z} - r_{E,z}) \neq 0$, então $t_0 = -r_{E,z}/(r_{N,z} - r_{E,z})$.
3. Se $t_0 < 0$, a interseção está “atrás” da ES; trate como $\rho = \infty$.
4. Caso contrário, compute $P(t_0)$ e $\rho = \sqrt{P_x(t_0)^2 + P_y(t_0)^2}$.
5. Então:
 - se $r_{E,z} > 0$ (hemisfério norte), $\alpha > 0$ se $\rho < R_{\text{geo}}$, caso contrário $\alpha < 0$;
 - se $r_{E,z} < 0$ (hemisfério sul), $\alpha > 0$ se $\rho > R_{\text{geo}}$, caso contrário $\alpha < 0$.

Observação (casos degenerados)

A rotina de referência inclui tratamentos numéricos para casos degenerados (por exemplo, ES no equador e/ou visada quase paralela ao plano XY).

Como usar o código

Arquivos. No repositório, mantenha:

- `src/alpha_angle.py`: implementação de referência do algoritmo;
- `notebooks/alpha_angle_demo.ipynb`: exemplos de uso, validações e reprodução dos resultados.

Constantes esféricas

Defina e documente explicitamente os valores de R_e e R_{geo} adotados na implementação. Na prática, ambos aparecem na literatura/implementações: $R_e = 6371$ km ou $6378,145$ km; $R_{\text{geo}} \approx 42\,164$ km.