

# Nota 001 – Cálculo do ângulo $\alpha$ ao arco GSO visível (referência: ITU-R S.1503-4)

Hygson A. P. da Rocha

6 de fevereiro de 2026

## Resumo

Esta nota consolida (i) a definição geométrica do ângulo  $\alpha$  da Recomendação ITU-R S.1503-4, (ii) a caracterização do arco GSO visível a partir de uma estação terrena (ES) no modelo esférico, e (iii) uma estratégia prática para obter  $|\alpha|$  e  $\text{Long}_\alpha$  (longitude do ponto do arco que minimiza  $\alpha$ ), incluindo o critério de sinal da própria Recomendação.

## Escopo e reproduzibilidade

Este documento foi pensado para acompanhar uma implementação reproduzível:

- Código Python: `src/alpha_angle.py`
- Notebook de demonstração: `notebooks/alpha_angle_demo.ipynb`

A ideia é manter esta nota *sem* a colagem integral de código-fonte (para reduzir redundância, evitar divergências e simplificar a compilação em L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X). A implementação de referência do algoritmo está no arquivo `src/alpha_angle.py`, enquanto o notebook serve como roteiro executável, com exemplos de uso e checagens numéricas.

### Compilação

Este `main.tex` compila com LuaL<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X. Ele não depende de `minted`/Pygments, pois não embute código.

## Definição de $\alpha$ e notação

**Definição (módulo).** O ângulo  $\alpha$  é a separação angular instantânea, medida no receptor (ES), entre a linha de visada ES→NGSO e a família de linhas de visada ES→ponto no arco GSO visível. Em termos do módulo,

$$|\alpha| = \min_{\lambda \in \mathcal{I}} \arccos(\mathbf{u}_N \cdot \mathbf{u}_G(\lambda)) = \arccos\left(\max_{\lambda \in \mathcal{I}} \mathbf{u}_N \cdot \mathbf{u}_G(\lambda)\right),$$

onde  $\mathcal{I}$  é o intervalo de longitudes do arco GSO visível a partir da estação terrena.

**Definição (sinal) e longitudes associadas.** Conforme a S.1503,  $\alpha$  é *assinado*. Após determinar  $|\alpha|$  e o ponto do arco GSO que o minimiza, defina:

$$\text{Long}_\alpha \equiv \text{Long}_{\text{GSO}}(\lambda^\star) = \lambda^\star, \quad \Delta\text{Long} = \text{wrap}_\pi(\text{Long}_\alpha - \text{Long}_{\text{NGSO}}),$$

onde  $\text{Long}_{\text{NGSO}}$  é a longitude geocêntrica do satélite NGSO. O sinal de  $\alpha$  é obtido por um teste geométrico com base na interseção da reta ES→NGSO com o plano equatorial XY (Seção ).

**Notação (vetores).** Sejam:

- $\mathbf{r}_E \in \mathbb{R}^3$ : posição geocêntrica (ECEF) da estação terrena GSO vítima;
- $\mathbf{r}_N \in \mathbb{R}^3$ : posição geocêntrica (ECEF) do satélite NGSO;
- $\mathbf{r}_G(\lambda) \in \mathbb{R}^3$ : ponto no anel GEO (círculo equatorial de raio  $R_{\text{geo}}$ ) na longitude geocêntrica  $\lambda$ :

$$\mathbf{r}_G(\lambda) = R_{\text{geo}} \begin{bmatrix} \cos \lambda \\ \sin \lambda \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Defina os vetores unitários de visada:

$$\mathbf{u}_N = \frac{\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_E}{\|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_E\|}, \quad \mathbf{u}_G(\lambda) = \frac{\mathbf{r}_G(\lambda) - \mathbf{r}_E}{\|\mathbf{r}_G(\lambda) - \mathbf{r}_E\|}.$$

Para uma longitude  $\lambda$  no anel GEO, a separação é

$$\alpha(\lambda) = \arccos(\mathbf{u}_N \cdot \mathbf{u}_G(\lambda)), \quad |\alpha| = \min_{\lambda \in \mathcal{J}} \alpha(\lambda).$$

## Arco GSO visível a partir da ES

**Latitude/longitude geocêntricas da ES.** Seja  $\varphi_E$  a latitude geocêntrica da ES e  $\lambda_E$  sua longitude geocêntrica:

$$\varphi_E = \arcsin\left(\frac{z_E}{\|\mathbf{r}_E\|}\right), \quad \lambda_E = \text{atan2}(y_E, x_E).$$

**Ideia física (horizonte local).** No modelo esférico, a direção radial  $\mathbf{r}_E$  é a normal do plano tangente (horizonte local) na estação. Um ponto  $\mathbf{r}$  no espaço está *acima do horizonte* (elevação  $\geq 0$ ) se o vetor linha-de-visada ( $\mathbf{r} - \mathbf{r}_E$ ) forma ângulo agudo (ou reto) com a normal  $\mathbf{r}_E$ , i.e.:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_E) \cdot \mathbf{r}_E \geq 0 \iff \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_E \geq \|\mathbf{r}_E\|^2.$$

**Condição de visibilidade no anel GEO.** Para um ponto no anel GEO,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_G(\lambda)$ , a visibilidade equivale a:

$$\mathbf{r}_G(\lambda) \cdot \mathbf{r}_E \geq \|\mathbf{r}_E\|^2.$$

Escrevendo  $\mathbf{r}_E$  em termos de  $\varphi_E, \lambda_E$ :

$$\mathbf{r}_E = \|\mathbf{r}_E\| \begin{bmatrix} \cos \varphi_E \cos \lambda_E \\ \cos \varphi_E \sin \lambda_E \\ \sin \varphi_E \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_G(\lambda) = R_{\text{geo}} \begin{bmatrix} \cos \lambda \\ \sin \lambda \\ 0 \end{bmatrix},$$

obtém-se:

$$\mathbf{r}_G(\lambda) \cdot \mathbf{r}_E = R_{\text{geo}} \|\mathbf{r}_E\| \cos \varphi_E \cos(\lambda - \lambda_E).$$

Portanto,

$$\cos(\lambda - \lambda_E) \geq \frac{\|\mathbf{r}_E\|}{R_{\text{geo}} \cos \varphi_E}.$$

**Semi-extensão  $\theta_{\max}$  e intervalo  $\mathcal{I}$ .** A condição de visibilidade acima define as *longitudes do anel GEO que estão acima do horizonte da ES*. No uso usual do modelo esférico, toma-se  $\|\mathbf{r}_E\| \approx R_e$ . Assim:

$$\cos(\lambda - \lambda_E) \geq \frac{R_e}{R_{\text{geo}} \cos \varphi_E}.$$

Essa desigualdade define um intervalo simétrico em torno de  $\lambda_E$ :

$$\mathcal{I} = [\lambda_E - \theta_{\max}, \lambda_E + \theta_{\max}], \quad \theta_{\max} = \arccos\left(\frac{R_e}{R_{\text{geo}} \cos \varphi_E}\right),$$

desde que  $\cos \varphi_E > R_e/R_{\text{geo}}$ . A minimização de  $|\alpha|$  (equivalentemente, a maximização de  $f(\lambda)$ ) é realizada *somente* para  $\lambda \in \mathcal{I}$ ; fora desse intervalo, os pontos do anel GEO não são visíveis a partir da ES.

**Caso sem arco visível.** Se  $\cos \varphi_E \leq R_e/R_{\text{geo}}$ , não há solução para a condição de visibilidade (nenhum ponto do anel GEO está acima do horizonte da ES). Nesse caso, adota-se a convenção operacional  $|\alpha| = \pi$ .

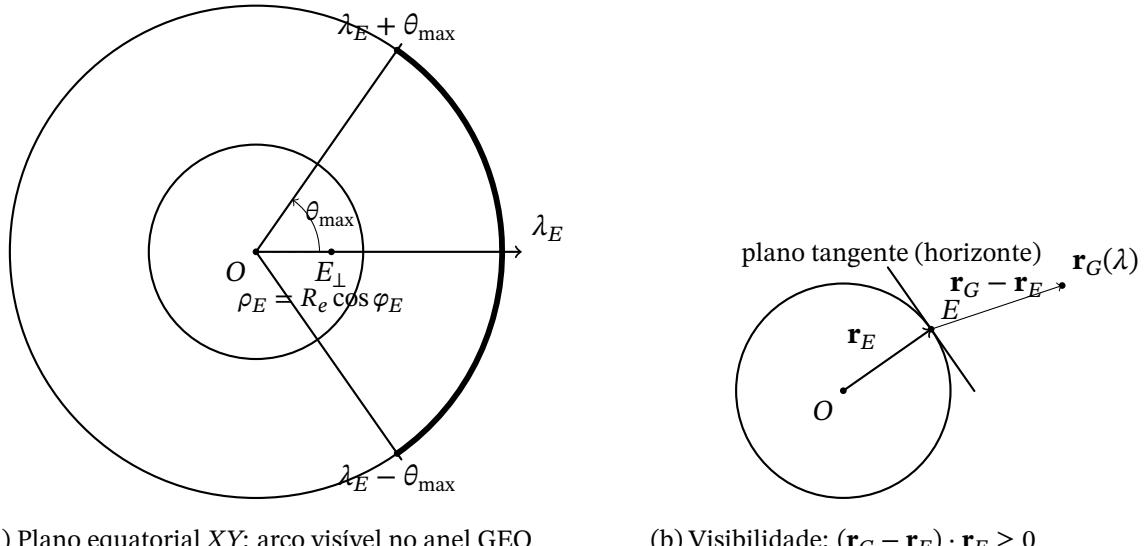


Figura 1: Interpretação geométrica do arco GEO visível a partir da ES no modelo esférico.

## Minimização de $\alpha(\lambda)$ como maximização

Minimizar  $\alpha(\lambda)$  equivale a maximizar o produto escalar:

$$f(\lambda) = \mathbf{u}_N \cdot \mathbf{u}_G(\lambda) = \frac{(\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_E) \cdot (\mathbf{r}_G(\lambda) - \mathbf{r}_E)}{\|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_E\| \|\mathbf{r}_G(\lambda) - \mathbf{r}_E\|}.$$

A implementação em `src/alpha_angle.py` usa uma formulação analítica no frame rotacionado por  $-\lambda_E$ , gerando um conjunto finito de candidatos (bordas do arco, ponto central e raízes de uma quartica associada à condição de estacionariedade), seguido de desempate por  $\Delta\text{Long}$  quando houver empates numéricos.

#### Regra de desempate por $\Delta\text{Long}$

Se existirem múltiplos  $\lambda^*$  que produzam o mesmo  $|\alpha|$  (ou indistinguíveis dentro de uma tolerância numérica), escolha aquele que minimiza  $|\Delta\text{Long}|$ . Persistindo empate, escolha  $\Delta\text{Long} > 0$ .

## Critério de sinal de $\alpha$

O critério operacional (S.1503, Anexo/Apêndice D, §D6.4.4.3) pode ser implementado assim:

1. Considere a reta  $P(t) = \mathbf{r}_E + t(\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_E)$ .
2. Interseção com  $z = 0$ : se  $(r_{N,z} - r_{E,z}) \neq 0$ , então  $t_0 = -r_{E,z}/(r_{N,z} - r_{E,z})$ .
3. Se  $t_0 < 0$ , a interseção está “atrás” da ES; trate como  $\rho = \infty$ .
4. Caso contrário, compute  $P(t_0)$  e  $\rho = \sqrt{P_x(t_0)^2 + P_y(t_0)^2}$ .
5. Então:
  - se  $r_{E,z} > 0$  (hemisfério norte),  $\alpha > 0$  se  $\rho < R_{\text{geo}}$ , caso contrário  $\alpha < 0$ ;
  - se  $r_{E,z} < 0$  (hemisfério sul),  $\alpha > 0$  se  $\rho > R_{\text{geo}}$ , caso contrário  $\alpha < 0$ .

#### Observação (casos degenerados)

A rotina de referência inclui tratamentos numéricos para casos degenerados (por exemplo, ES no equador e/ou visada quase paralela ao plano XY).

## Como usar o código

**Arquivos.** No repositório, mantenha:

- `src/alpha_angle.py`: implementação de referência do algoritmo;
- `notebooks/alpha_angle_demo.ipynb`: exemplos de uso, validações e reprodução dos resultados.

#### Constantes esféricas

Defina e documente explicitamente os valores de  $R_e$  e  $R_{\text{geo}}$  adotados na implementação. Na prática, ambos aparecem na literatura/implementações:  $R_e = 6371$  km ou  $6378,145$  km;  $R_{\text{geo}} \approx 42\,164$  km.