数列极限的四则运算

本段内容要点:

- (1). 和差的极限=极限的和差
- (2). 积的极限=极限的积
- (3). 商的极限=极限的商
- (4). 相关例题

定理: (极限的四则运算)

设
$$\lim_{n o \infty} x_n = a, \lim_{n o \infty} y_n = b,$$
则

- $\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n = a \pm b;$
- $2\lim_{n\to\infty}(x_ny_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\lim_{n\to\infty}y_n=ab;$
- $\Im\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} x_n}{\lim\limits_{n \to \infty} y_n} = \frac{a}{b} (b \neq 0).$

定理: (极限的四则运算) $2\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b,$ ① $\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n = a \pm b;$ ② $\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n = ab;$ ③ $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n} = \frac{a}{b} (b \neq 0).$

所有这些运算的前提是: 涉及的每一个极限都是存在的! 定理: (极限的四则运算)

设
$$\lim_{n \to \infty} x_n = a, \lim_{n \to \infty} y_n = b,$$
则

- $\begin{array}{cccc}
 \textcircled{1} \lim_{n \to \infty} (x_n \pm y_n) &= \overline{\lim_{n \to \infty} x_n \pm \lim_{n \to \infty} y_n} = a \pm b; \\
 \textcircled{2} \lim_{n \to \infty} (x_n y_n) &= \overline{\lim_{n \to \infty} x_n \lim_{n \to \infty} y_n} = ab; \\
 \overrightarrow{3} &= \overline{\lim_{n \to \infty} x_n \lim_{n \to \infty} y_n} = ab;
 \end{array}$

$$\Im\lim_{n o\infty}rac{x_n}{y_n}=\left|rac{\lim\limits_{n o\infty}x_n}{\lim\limits_{n o\infty}y_n}
ight|=rac{a}{b}(b
eq0).$$

所有这些运算的前提是:

涉及的每一个极限都是存在的!

$$[1+(-1)^n n] + [1-(-1)^n n] \equiv 2, \forall n,$$
 但不能

$$2 = \lim_{n \to \infty} [1 + (-1)^n n] + \lim_{n \to \infty} [1 - (-1)^n n].$$

证明: (1). 已知
$$\lim_{n\to\infty}x_n=a,\lim_{n\to\infty}y_n=b,$$
 往证: $\lim_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=a\pm b.$

证明: (1). 已知
$$\lim_{n\to\infty}x_n=a,\lim_{n\to\infty}y_n=b,$$
往证: $\lim_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=a\pm b.$

对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 是否存在N使得 $|(x_n \pm y_n) - (a \pm b)| < \varepsilon, n > N$.

证明: (1). 已知 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$,

往证:
$$\lim_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=a\pm b$$
.

对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 是否存在N使得 $|(x_n \pm y_n) - (a \pm b)| < \varepsilon, n > N$.

就
$$\frac{\varepsilon}{2} > 0$$
来说,因为 $\lim_{n \to \infty} x_n = a$,

所以 $\exists N_1 \ s.t. \ |x_n-a|<rac{arepsilon}{2}, \ n>N_1;$

证明: (1). 已知 $\lim_{n\to\infty}x_n=a,\lim_{n\to\infty}y_n=b,$

往证:
$$\lim_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=a\pm b$$
.

对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 是否存在N使得 $|(x_n \pm y_n) - (a \pm b)| < \varepsilon, n > N$.

就
$$\frac{\varepsilon}{2} > 0$$
来说,因为 $\lim_{n \to \infty} x_n = a$,

所以
$$\exists N_1 \ s.t. \ |x_n-a|<rac{arepsilon}{2}, \ n>N_1;$$

又因为
$$\lim_{n \to \infty} y_n = b$$
,所以习 $N_2 \ s.t. \ |y_n - b| < rac{arepsilon}{2}, \ n > N_2;$

证明: (1). 已知
$$\lim_{n\to\infty}x_n=a,\lim_{n\to\infty}y_n=b,$$
往证: $\lim_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=a\pm b.$

对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 是否存在N使得 $|(x_n \pm y_n) - (a \pm b)| < \varepsilon, n > N$.

就
$$rac{arepsilon}{2}>0$$
来说,因为 $\lim_{n o\infty}x_n=a$, $\|x_n-a\|<rac{arepsilon}{2},\ n>N_1$;

又因为 $\lim_{n \to \infty} y_n = b$,所以习 $N_2 \ s.t. \ |y_n - b| < rac{arepsilon}{2}, \ n > N_2;$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$ 后, 一旦n > N, 就有

证明: (1). 已知
$$\lim_{n\to\infty}x_n=a,\lim_{n\to\infty}y_n=b,$$
往证: $\lim_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=a\pm b.$

对于任意给定的 $\varepsilon > 0$ 是否存在N使得 $|(x_n \pm y_n) - (a \pm b)| < \varepsilon, \ n > N.$

就
$$\frac{\varepsilon}{2}>0$$
来说,因为 $\lim_{n\to\infty}x_n=a$,所以 $\exists N_1\ s.t.\ |x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2},\ n>$

所以日
$$N_1$$
 $s.t.$ $|x_n-a|<rac{arepsilon}{2},\ n>N_1;$ 又因为 $\lim_{n o\infty}y_n=b$,所以日 N_2 $s.t.$ $|y_n-b|<rac{arepsilon}{2},\ n>N_2;$

取
$$N = \max\{N_1, N_2\}$$
后,一旦 $n > N$,就有 $|(x_n \pm y_n) - (a \pm b)| = |(x_n - a) \pm (y_n - b)|$ $< |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

证明: (1). 已知 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$,

往证:
$$\lim_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=a\pm b$$
.

对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 是否存在N使得 $|(x_n \pm y_n) - (a \pm b)| < \varepsilon, n > N$.

就
$$rac{arepsilon}{2}>0$$
来说,因为 $\lim_{n o\infty}x_n=a$,所以 $\exists N_1\;s.t.\;|x_n-a|<rac{arepsilon}{2},\;n>N_1;$

又因为
$$\lim_{n\to\infty}y_n=b$$
,所以习 N_2 s.t. $|y_n-b|<rac{arepsilon}{2},\ n>N_2;$

取
$$N = \max\{N_1, N_2\}$$
后,一旦 $n > N$,就有

$$|(x_n \pm y_n) - (a \pm b)| = |(x_n - a) \pm (y_n - b)|$$

 $< |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $N=\max\{N_1,N_2\}$ 使得, $|(x_n\pm y_n)-(a\pm b)|<\varepsilon,\ n>N.$ 所以 $\lim_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=a\pm b.$

证明: (2)已知 $\lim_{n\to\infty}x_n=a,\lim_{n\to\infty}y_n=b,$

往证: $\lim_{n\to\infty}x_ny_n=ab$.

证明: (2)已知 $\lim_{n \to \infty} x_n = a, \lim_{n \to \infty} y_n = b,$ 往证: $\lim_{n \to \infty} x_n y_n = ab.$

证明: (2)已知 $\lim_{n \to \infty} x_n = a, \lim_{n \to \infty} y_n = b,$ 往证: $\lim_{n \to \infty} x_n y_n = ab.$

$$|x_n y_n - ab| =$$

证明: (2)已知 $\lim_{n \to \infty} x_n = a, \lim_{n \to \infty} y_n = b,$ 往证: $\lim_{n \to \infty} x_n y_n = ab.$

$$|x_ny_n - ab| = |x_ny_n - x_nb + x_nb - ab|$$

证明: (2)已知 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$,

往证: $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab$.

$$|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - x_n b + x_n b - ab|$$

 $\leq |x_n| |y_n - b| + |b| |x_n - a|$

证明:
$$(2)$$
已知 $\lim_{n \to \infty} x_n = a, \lim_{n \to \infty} y_n = b,$ 往证: $\lim_{n \to \infty} x_n y_n = ab.$

对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 是否存在N使得 $|x_ny_n - ab| < \varepsilon, \ n > N$.

$$ert |x_ny_n-ab| = ert x_ny_n - x_nb + x_nb - ab ert \ \leqslant ert x_n ert ert y_n - b ert + ert b ert ert x_n - a ert$$

由收敛数列的有界性,

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \implies \exists A > 0 \ s.t. \ |x_n| < A, \ n \in \mathbb{N}.$$

证明: (2)已知 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$,

往证: $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab$.

对于任意给定的 $\varepsilon>0$,是否存在N使得

 $|x_ny_n-ab|<\varepsilon,\ n>N.$

$$|x_ny_n - ab| = |x_ny_n - x_nb + x_nb - ab|$$

$$\leq |x_n||y_n-b|+|b||x_n-a|$$

由收敛数列的有界性,

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \implies \exists A > 0 \ s.t. \ |x_n| < A, \ n \in \mathbb{N}.$$

取
$$C = \max\{A, |b|\}, 则$$

$$|x_ny_n - ab| \leqslant C(|y_n - b| + |x_n - a|)$$

证明: (2)已知 $\lim_{n\to\infty}x_n=a,\lim_{n\to\infty}y_n=b,$

往证: $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab$.

对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 是否存在N使得

 $|x_ny_n-ab|<\varepsilon,\ n>N.$

$$|x_ny_n-ab|\leqslant C(|y_n-b|+|x_n-a|)$$

证明:
$$(2)$$
已知 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$,

往证:
$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab$$
.

对于任意给定的 $\varepsilon>0$,是否存在N使得

$$|x_ny_n-ab|<\varepsilon,\ n>N.$$

$$|x_ny_n - ab| \leqslant C(|y_n - b| + |x_n - a|)$$

对
$$\frac{\varepsilon}{2C} > 0$$
来说

$$egin{align} 2C \ \lim_{n o\infty} x_n = a \ \Rightarrow \ \exists N_1 \, s.t. \, |x_n-a| < rac{arepsilon}{2C}, \ n > N_1 \ \lim_{n o\infty} y_n = b \ \Rightarrow \ \exists N_2 \, s.t. \, |y_n-b| < rac{arepsilon}{2C}, \ n > N_2 \ \end{pmatrix}$$

证明:
$$(2)$$
已知 $\lim_{n\to\infty}x_n=a,\lim_{n\to\infty}y_n=b,$

往证: $\lim_{n \to \infty} x_n y_n = ab$.

$$|x_n y_n - ab| \leqslant C(|y_n - b| + |x_n - a|)$$

対
$$\dfrac{arepsilon}{2C}>0$$
来说 $\lim_{n o\infty}x_n=a\Rightarrow\exists N_1\,s.t. \ |x_n-a|<\dfrac{arepsilon}{2C},\ n>N_1 \ \lim_{n o\infty}y_n=b\Rightarrow\exists N_2\,s.t. \ |y_n-b|<\dfrac{arepsilon}{2C},\ n>N_2 \$ 取 $N=\max\{N_1,N_2\},$ 则 $n>N$ 时

证明:
$$(2)$$
已知 $\lim_{n \to \infty} x_n = a$, $\lim_{n \to \infty} y_n = b$,

往证:
$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab$$
.

对于任意给定的 $\varepsilon>0$,是否存在N使得

$$|x_ny_n-ab|<\varepsilon,\ n>N.$$

$$|x_ny_n - ab| \leqslant C(|y_n - b| + |x_n - a|)$$

对
$$\dfrac{arepsilon}{2C}>0$$
来说 $\lim_{n o\infty}x_n=a\Rightarrow\exists N_1\,s.t. \ |x_n-a|<\dfrac{arepsilon}{2C},\ n>N_1 \ \lim_{n o\infty}y_n=b\Rightarrow\exists N_2\,s.t. \ |y_n-b|<\dfrac{arepsilon}{2C},\ n>N_2$

$$|x_n y_n - ab| \leqslant C(|y_n - b| + |x_n - a|)$$

 $\leqslant C(\frac{\varepsilon}{2C} + \frac{\varepsilon}{2C}) = \varepsilon.$

证明: (3). 呂知
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$
, $\lim_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$,

往证
$$\lim_{n o\infty}rac{x_n}{y_n}=rac{a}{b}.$$

证明: (3). 已知
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$
, $\lim_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$,

(3). 呂知
$$\lim_{n \to \infty} x_n = a$$
, $\lim_{n \to \infty} y_n = b \neq 0$, 往证 $\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$.

$$\frac{a}{-}$$
 $\frac{a}{-}$ $|$ $-$

证明: (3). 已知
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$
, $\lim_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$,

注证
$$\lim_{n o \infty} \frac{x_n}{y_n} = rac{a}{b}.$$

$$|rac{x_n}{y_n}-rac{a}{b}|=\;rac{|x_nb-ay_n|}{|by_n|}$$

证明: (3). 已知
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$
, $\lim_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$,

(3). 呂知
$$\lim_{n \to \infty} x_n = a, \lim_{n \to \infty} y_n = b \neq 0,$$
 往证 $\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$

$$|rac{x_n}{y_n}-rac{a}{b}|= rac{|x_nb-ay_n|}{|by_n|}$$

$$=\frac{|x_nb-ab+ab-ay_n|}{|b||y_n|}$$

证明: (3). 已知
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b \neq 0,$$
 往证 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$

$$|rac{x_n}{y_n}-rac{a}{b}|=\;rac{|x_nb-ay_n|}{|by_n|}$$

$$=rac{|x_n b - ab + ab - ay_n|}{|b||y_n|} \leqslant rac{|x_n - a||b| + |a||y_n - b|}{|b||y_n|}$$

证明: (3). 已知
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$
, $\lim_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$, 往证 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$.

$$|rac{x_n}{y_n}-rac{a}{b}|= rac{|x_nb-ay_n|}{|by_n|}$$

$$=rac{|x_nb-ab+ab-ay_n|}{|b||y_n|}\leqslant rac{|x_n-a||b|+|a||y_n-b|}{|b||y_n|}$$

证明: (3). 已知 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$,

注证
$$\lim_{n o \infty} x_n = a, \lim_{n o \infty} y_n = b,$$

$$|rac{x_n}{u_n} - rac{a}{b}| = rac{|x_n b - ay_n|}{|bu_n|}$$

$$=rac{|x_nb-ab+ab-ay_n|}{|b||y_n|}\leqslant rac{|x_n-a||b|+|a||y_n-b|}{|b||y_n|}$$

由于 $\lim y_n = b \neq 0$, 根据极限保序性,

$$\exists N_0 \; s.t. \; |y_n| \geq rac{|b|}{2}, \; n > N_0,$$

证明: (3). 已知 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$,

注证
$$\lim_{n o \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

$$|rac{x_n}{y_n} - rac{a}{b}| = rac{|x_n b - ay_n|}{|by_n|}$$

$$= \frac{|x_n b - ab + ab - ay_n|}{|b||y_n|} \leqslant \frac{|x_n - a||b| + |a||y_n - b|}{|b||y_n|}$$

由于 $\lim_{n\to\infty}y_n=b\neq 0$, 根据极限保序性,

$$\exists N_0 \; s.t. \; |y_n| \geq rac{|b|}{2}, \; n > N_0,$$

从而,
$$|rac{x_n}{y_n}-rac{a}{b}|<rac{|x_n-a||b|+|a||y_n-b|}{|b|^2/2} = rac{2}{|b|}|x_n-a|+rac{2|a|}{|b|^2}|y_n-b|,\quad n>N_0.$$

$$=rac{2}{|b|}|x_n-a|+rac{2|a|}{|b|^2}|y_n-b|, \quad n>N_0$$

证明: (3). 已知 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$,

: (3). 巨知
$$\displaystyle \lim_{n o \infty} x_n = a, \lim_{n o \infty} y_n = b \neq 0,$$
 往证 $\displaystyle \lim_{n o \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$

$$\left|\frac{x_n}{u_n} - \frac{a}{b}\right| = \frac{\left|x_n b - a y_n\right|}{\left|b u_n\right|}$$

$$= \frac{|x_n b - ab + ab - ay_n|}{|b||y_n|} \leqslant \frac{|x_n - a||b| + |a||y_n - b|}{|b||y_n|}$$

由于 $\lim y_n = b \neq 0$, 根据极限保序性,

$$\exists N_0 \; s.t. \; |y_n| \geq rac{|b|}{2}, \; n > N_0,$$

从而,
$$|rac{x_n}{y_n} - rac{a}{b}| < rac{|x_n - a||b| + |a||y_n - b|}{|b|^2/2}$$
 $= rac{2}{|b|}|x_n - a| + rac{2|a|}{|b|^2}|y_n - b|, \quad n > N_0.$

证明: (3). 已知 $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b \neq 0$,

注证
$$\lim_{n o\infty}rac{x_n}{y_n}=rac{a}{b}.$$

令
$$A = \max\{\frac{2}{|b|}, \frac{2|a|}{|b|^2}\}$$
,则
$$|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}| < A(|x_n - a| + |y_n - b|), \quad n > N_0.$$

由于
$$\lim_{n\to\infty}y_n=b\neq 0$$
, 根据极限保序性,

$$\exists N_0 \; s.t. \; |y_n| \geq rac{|b|}{2}, \; n > N_0,$$

从雨,
$$|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}| < \frac{|x_n - a||b| + |a||y_n - b|}{|b|^2/2}$$
 $= \frac{2}{|b|}|x_n - a| + \frac{2|a|}{|b|^2}|y_n - b|, \quad n > N_0.$

$$=\frac{2}{|b|}|x_n-a|+\frac{2|a|}{|b|^2}|y_n-b|, \quad n>N$$

证明: (3). 已知
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$
, $\lim_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$, 往证 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{u} = \frac{a}{b}$

令
$$A = \max\{\frac{2}{|b|}, \frac{2|a|}{|b|^2}\}$$
,则 $|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}| < A(|x_n - a| + |y_n - b|), \quad n > N_0.$

证明: (3). 已知
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$
, $\lim_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$, 往证 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{u} = \frac{a}{b}$

令
$$A=\max\{rac{2}{|b|},rac{2|a|}{|b|^2}\}$$
,则 $|rac{x_n}{y_n}-rac{a}{b}|< A(|x_n-a|+|y_n-b|),\quad n>N_0.$

对
$$\dfrac{1}{2A}>0$$
来说 $\lim_{n o\infty}x_n=a \Rightarrow \exists N_1\,s.t.\,|x_n-a|<\dfrac{arepsilon}{2A},\,\,n>N_1; \ \lim_{n o\infty}y_n=b \Rightarrow \exists N_2\,s.t.\,|y_n-b|<\dfrac{arepsilon}{2A},\,\,n>N_2;$

证明: (3). 已知
$$\lim_{n\to\infty}x_n=a,\lim_{n\to\infty}y_n=b\neq 0,$$
 往证 $\lim_{n\to\infty}rac{x_n}{y_n}=rac{a}{b}.$

令
$$A=\max\{rac{2}{|b|},rac{2|a|}{|b|^2}\}$$
,则 $|rac{x_n}{y_n}-rac{a}{b}|< A(|x_n-a|+|y_n-b|),\quad n>N_0.$

对
$$\dfrac{arepsilon}{2A}>0$$
来说 $\lim_{n o\infty}x_n=a\Rightarrow\exists N_1\,s.t. \ |x_n-a|<\dfrac{arepsilon}{2A},\ n>N_1; \ \lim_{n o\infty}y_n=b\Rightarrow\exists N_2\,s.t. \ |y_n-b|<\dfrac{arepsilon}{2A},\ n>N_2;$

取 $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$, 则n > N时

证明: (3). 已知
$$\lim_{n\to\infty}x_n=a,\lim_{n\to\infty}y_n=b\neq 0,$$
往证 $\lim\frac{x_n}{n}$

令
$$A=\max\{rac{2}{|b|},rac{2|a|}{|b|^2}\}$$
,则 $|rac{x_n}{y_n}-rac{a}{b}|< A(|x_n-a|+|y_n-b|),\quad n>N_0.$

对
$$rac{arepsilon}{2A}>0$$
来说 $\lim_{n o\infty}x_n=a\Rightarrow\exists N_1\,s.t. egin{align*} |x_n-a|<rac{arepsilon}{2A},\ n>N_1;\ \lim_{n o\infty}y_n=b\Rightarrow\exists N_2\,s.t. egin{align*} |y_n-b|<rac{arepsilon}{2A},\ n>N_2; \end{aligned}$

取
$$N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$$
,则 $n > N$ 时 $|rac{x_n}{y_n} - rac{a}{b}| < A(rac{arepsilon}{2A} + rac{arepsilon}{2A}) = arepsilon.$

定理证毕