数列极限的四则运算

本段内容要点:

(1). 和差的极限=极限的和差

(2). 积的极限=极限的积

(3). 商的极限=极限的商

(4). 相关例题

定理: (极限的四则运算)

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$,则

① $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \pm b;$

② $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \lim\limits_{n\to\infty} y_n = ab;$

③ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \dfrac{a}{b}(b \neq 0).$

定理: (极限的四则运算)

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$,则

① $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \pm b$;

② $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \lim\limits_{n\to\infty} y_n = ab$;

③ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \dfrac{a}{b}(b \neq 0)$.

所有这些运算的前提是:

涉及的每一个极限都是存在的!

定理: (极限的四则运算)

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$,则

① $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \boxed{\lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n} = a \pm b;$

② $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = \boxed{\lim\limits_{n\to\infty} x_n \lim\limits_{n\to\infty} y_n} = ab;$

③ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \boxed{\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}} = \dfrac{a}{b}(b \neq 0).$

所有这些运算的前提是:

涉及的每一个极限都是存在的!

$$[1+(-1)^n n] + [1-(-1)^n n] \equiv 2, \forall n,$$

但不能

$$2 = \lim_{n\to\infty}[1+(-1)^n n] + \lim_{n\to\infty}[1-(-1)^n n].$$

证明：(1). 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$,

往证: $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$.

证明：(1). 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b,$

往证: $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b.$

对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 是否存在N使得

$|(x_n \pm y_n) - (a \pm b)| < \varepsilon, \ \ n > N.$

证明：(1). 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$,

往证: $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$.

对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 是否存在N使得

$|(x_n \pm y_n) - (a \pm b)| < \varepsilon,\ \ n > N$.

就$\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$来说, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,

所以$\exists N_1\ \ s.t.\ |x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2},\ \ n > N_1$;

证明：(1). 已知 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$,

往证: $\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$.

对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 是否存在N使得
$|(x_n \pm y_n) - (a \pm b)| < \varepsilon,\ n > N.$

就$\frac{\varepsilon}{2} > 0$来说, 因为 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$,

所以$\exists N_1\ s.t.\ |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},\ n > N_1;$

又因为 $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, 所以$\exists N_2\ s.t.\ |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2},\ n > N_2;$

证明：(1). 已知 $\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim_{n\to\infty} y_n = b,$

往证: $\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b.$

对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 是否存在 N 使得
$|(x_n \pm y_n) - (a \pm b)| < \varepsilon,\ \ n > N.$

就 $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ 来说，因为 $\lim_{n\to\infty} x_n = a,$

所以 $\exists N_1\ \ s.t.\ \boxed{|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},}\ \ n > N_1;$

又因为 $\lim_{n\to\infty} y_n = b,$ 所以 $\exists N_2\ \ s.t.\ \boxed{|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2},}\ \ n > N_2;$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$ 后, 一旦 $n > N$, 就有

证明：(1). 已知 $\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim_{n\to\infty} y_n = b,$

往证: $\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b.$

对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 是否存在N使得
$|(x_n \pm y_n) - (a \pm b)| < \varepsilon,\ \ n > N.$

就$\frac{\varepsilon}{2} > 0$来说, 因为 $\lim_{n\to\infty} x_n = a,$

所以$\exists N_1\ \ s.t.\ \boxed{|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},}\ \ n > N_1;$

又因为 $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, 所以$\exists N_2\ \ s.t.\ \boxed{|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2},}\ \ n > N_2;$

取$N = \max\{N_1, N_2\}$后, 一旦$n > N$, 就有

$$|(x_n \pm y_n) - (a \pm b)| = |(x_n - a) \pm (y_n - b)|$$
$$< |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

证明：(1). 已知 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$,

往证: $\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$.

对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 是否存在N使得
$|(x_n \pm y_n) - (a \pm b)| < \varepsilon,\ \ n > N$.

就$\frac{\varepsilon}{2} > 0$来说，因为 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$，所以$\exists N_1$ $s.t.$ $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},\ \ n > N_1$;

又因为 $\lim_{n\to\infty} y_n = b$，所以$\exists N_2$ $s.t.$ $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2},\ \ n > N_2$;

取$N = \max\{N_1, N_2\}$后, 一旦$n > N$, 就有

$$
\begin{aligned}
&|(x_n \pm y_n) - (a \pm b)| = |(x_n - a) \pm (y_n - b)| \\
&< |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 存在$N = \max\{N_1, N_2\}$使得, $|(x_n \pm y_n) - (a \pm b)| < \varepsilon,\ \ n > N$.
所以 $\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$.

证明：(2)已知$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$,

往证: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = ab.$

证明：(2)已知 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$,

往证: $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab.$

对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 是否存在N使得

$|x_n y_n - ab| < \varepsilon,\ \ n > N.$

证明： (2)已知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b,$

往证: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = ab.$

对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 是否存在N使得

$|x_n y_n - ab| < \varepsilon,\ \ n > N.$

$|x_n y_n - ab| =$

证明： (2)已知 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$,

往证: $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab$.

对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 是否存在N使得

$|x_n y_n - ab| < \varepsilon,\ n > N$.

$$|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - x_n b + x_n b - ab|$$

证明： (2)已知 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$,

往证: $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab$.

对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 是否存在N使得

$|x_n y_n - ab| < \varepsilon,\ \ n > N.$

$$
\begin{aligned}
|x_n y_n - ab| &= |x_n y_n - x_n b + x_n b - ab| \\
&\leqslant |x_n||y_n - b| + |b||x_n - a|
\end{aligned}
$$

证明：(2)已知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b,$

往证: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = ab.$

对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 是否存在N使得
$|x_n y_n - ab| < \varepsilon,\ n > N.$

$$|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - x_n b + x_n b - ab|$$
$$\leqslant |x_n||y_n - b| + |b||x_n - a|$$

由收敛数列的有界性,
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \ \Rightarrow\ \exists A > 0\ s.t.\ |x_n| < A,\ n \in \mathbb{N}.$

证明：(2)已知 $\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim_{n\to\infty} y_n = b,$

往证: $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab.$

对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 是否存在N使得

$|x_n y_n - ab| < \varepsilon,\ \ n > N.$

$$|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - x_n b + x_n b - ab|$$

$$\leqslant |x_n||y_n - b| + |b||x_n - a|$$

由收敛数列的有界性,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \ \Rightarrow\ \exists A > 0\ \ s.t.\ |x_n| < A,\ \ n \in \mathbb{N}.$$

取$C = \max\{A, |b|\}$, 则

$$|x_n y_n - ab| \leqslant C(|y_n - b| + |x_n - a|)$$

证明：(2)已知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b,$

往证: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = ab.$

对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 是否存在N使得

$|x_n y_n - ab| < \varepsilon, \ n > N.$

$$|x_n y_n - ab| \leqslant C(|y_n - b| + |x_n - a|)$$

证明：(2)已知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b,$

往证: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = ab.$

对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 是否存在N使得

$|x_n y_n - ab| < \varepsilon,\ \ n > N.$

$|x_n y_n - ab| \leqslant C(|y_n - b| + |x_n - a|)$

对$\dfrac{\varepsilon}{2C} > 0$来说

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \exists N_1\ s.t.\ |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2C},\ \ n > N_1$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = b \Rightarrow \exists N_2\ s.t.\ |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2C},\ \ n > N_2$$

证明：(2)已知 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$,

往证: $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab$.

对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 是否存在N使得

$|x_n y_n - ab| < \varepsilon,\ \ n > N$.

$$|x_n y_n - ab| \leqslant C(|y_n - b| + |x_n - a|)$$

对$\dfrac{\varepsilon}{2C} > 0$来说

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \exists N_1\ s.t.\ |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2C},\ \ n > N_1$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = b \Rightarrow \exists N_2\ s.t.\ |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2C},\ \ n > N_2$$

取$N = \max\{N_1, N_2\}$, 则$n > N$时

证明：(2)已知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$,

往证: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = ab.$

对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 是否存在 N 使得

$|x_n y_n - ab| < \varepsilon,\ \ n > N.$

$|x_n y_n - ab| \leqslant C(|y_n - b| + |x_n - a|)$

对 $\dfrac{\varepsilon}{2C} > 0$ 来说

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \ \Rightarrow\ \exists N_1\ s.t.\ \boxed{|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2C}},\ \ n > N_1$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = b \ \Rightarrow\ \exists N_2\ s.t.\ \boxed{|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2C}},\ \ n > N_2$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则 $n > N$ 时

$$|x_n y_n - ab| \leqslant C(|y_n - b| + |x_n - a|)$$
$$\leqslant C\left(\frac{\varepsilon}{2C} + \frac{\varepsilon}{2C}\right) = \varepsilon.$$

证明： (3). 已知 $\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b \neq 0,$

$$往证 \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

证明： (3). 已知 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$,

往证 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$.

$$|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}| =$$

证明： (3). 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$,

往证 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$.

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| = \frac{|x_n b - a y_n|}{|b y_n|}$$

证明： (3). 已知 $\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b \neq 0,$

往证 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| = \frac{|x_n b - a y_n|}{|b y_n|}$$

$$= \frac{|x_n b - ab + ab - a y_n|}{|b||y_n|}$$

证明： (3). 已知 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$,

往证 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$.

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| = \frac{|x_n b - a y_n|}{|b y_n|}$$

$$= \frac{|x_n b - ab + ab - a y_n|}{|b||y_n|} \leqslant \frac{|x_n - a||b| + |a||y_n - b|}{|b||y_n|}$$

证明： (3). 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$,

往证 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$.

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| = \frac{|x_n b - a y_n|}{|b y_n|}$$

$$= \frac{|x_n b - ab + ab - a y_n|}{|b||y_n|} \leqslant \frac{|x_n - a||b| + |a||y_n - b|}{|b|\boxed{|y_n|}}$$

证明： (3). 已知 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$,

往证 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$.

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| = \frac{|x_n b - a y_n|}{|b y_n|}$$

$$= \frac{|x_n b - ab + ab - a y_n|}{|b||y_n|} \leqslant \frac{|x_n - a||b| + |a||y_n - b|}{|b|\boxed{|y_n|}}$$

由于 $\lim_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$, 根据极限保序性,

$\exists N_0\ s.t.\ |y_n| \geq \frac{|b|}{2},\ n > N_0,$

证明： (3). 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0,$

往证 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}.$

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| = \frac{|x_n b - a y_n|}{|b y_n|}$$

$$= \frac{|x_n b - ab + ab - a y_n|}{|b||y_n|} \leqslant \frac{|x_n - a||b| + |a||y_n - b|}{|b|\boxed{|y_n|}}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$, 根据极限保序性,

$$\exists N_0 \ \ s.t. \ |y_n| \geq \frac{|b|}{2}, \ \ n > N_0,$$

从而, $\left|\dfrac{x_n}{y_n} - \dfrac{a}{b}\right| < \dfrac{|x_n - a||b| + |a||y_n - b|}{|b|^2/2}$

$$= \frac{2}{|b|}|x_n - a| + \frac{2|a|}{|b|^2}|y_n - b|, \quad n > N_0.$$

证明：(3). 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$,

往证 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$.

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| = \frac{|x_n b - a y_n|}{|b y_n|}$$

$$= \frac{|x_n b - ab + ab - a y_n|}{|b||y_n|} \leqslant \frac{|x_n - a||b| + |a||y_n - b|}{|b|\boxed{|y_n|}}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$, 根据极限保序性,

$\exists N_0 \ s.t. \ |y_n| \geq \dfrac{|b|}{2}, \ n > N_0,$

从而, $\left|\dfrac{x_n}{y_n} - \dfrac{a}{b}\right| < \dfrac{|x_n - a||b| + |a||y_n - b|}{|b|^2/2}$

$$= \boxed{\frac{2}{|b|}}|x_n - a| + \boxed{\frac{2|a|}{|b|^2}}|y_n - b|, \quad n > N_0.$$

证明：(3). 已知 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$,

往证 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$.

令 $A = \max\{\frac{2}{|b|}, \frac{2|a|}{|b|^2}\}$, 则

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| < A(|x_n - a| + |y_n - b|), \quad n > N_0.$$

由于 $\lim_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$, 根据极限保序性,

$\exists N_0$ $s.t.$ $|y_n| \geq \frac{|b|}{2}$, $n > N_0$,

从而, $\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| < \frac{|x_n - a||b| + |a||y_n - b|}{|b|^2/2}$

$$= \boxed{\frac{2}{|b|}}|x_n - a| + \boxed{\frac{2|a|}{|b|^2}}|y_n - b|, \quad n > N_0.$$

证明： (3). 已知 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$,

往证 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$.

令$A = \max\{\frac{2}{|b|}, \frac{2|a|}{|b|^2}\}$, 则

$$|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}| < A(|x_n - a| + |y_n - b|), \quad n > N_0.$$

证明：(3). 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$,

往证 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$.

令 $A = \max\{\dfrac{2}{|b|}, \dfrac{2|a|}{|b|^2}\}$, 则

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| < A(|x_n - a| + |y_n - b|), \quad n > N_0.$$

对 $\dfrac{\varepsilon}{2A} > 0$ 来说

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \exists N_1 \; s.t. \; |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2A}, \; n > N_1;$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = b \Rightarrow \exists N_2 \; s.t. \; |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2A}, \; n > N_2;$$

证明： (3). 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$,

往证 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$.

令$A = \max\{\dfrac{2}{|b|}, \dfrac{2|a|}{|b|^2}\}$, 则

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| < A(|x_n - a| + |y_n - b|), \quad n > N_0.$$

对$\dfrac{\varepsilon}{2A} > 0$来说

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \exists N_1\, s.t. \boxed{|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2A},} \quad n > N_1;$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = b \Rightarrow \exists N_2\, s.t. \boxed{|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2A},} \quad n > N_2;$$

取$N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$, 则$n > N$时

证明： (3). 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$,

往证 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$.

令 $A = \max\{\dfrac{2}{|b|}, \dfrac{2|a|}{|b|^2}\}$, 则

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| < A(|x_n - a| + |y_n - b|), \quad n > N_0.$$

对 $\dfrac{\varepsilon}{2A} > 0$ 来说

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \exists N_1\ s.t.\ |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2A}, \quad n > N_1;$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = b \Rightarrow \exists N_2\ s.t.\ |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2A}, \quad n > N_2;$$

取 $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$, 则 $n > N$ 时

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| < A\left(\frac{\varepsilon}{2A} + \frac{\varepsilon}{2A}\right) = \varepsilon.$$

定理证毕.