数列极限的性质(1)

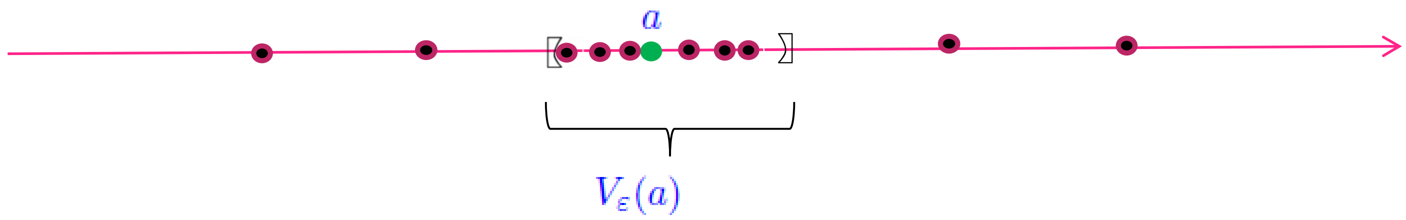
数列极限的邻域意义(聚点意义)

数列有限项的改变不影响敛散性和极限值

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$的几何意义：

$$\forall \varepsilon > 0,\quad \exists N \in \mathbb{N}\quad s.t.\quad a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon,\quad \forall n > N.$$

即在a的ε 邻域$V_\varepsilon(a)$之外,至多只有只有数列的N项.



$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow a$的任意邻域外只有$x_n$的有限项.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \quad \Rightarrow \quad a$的任意邻域内都有$x_n$的无限多项.

定理. 数列$\{x_n\}$的极限是指n充分大之后x_n的变化趋势，所以改变$\{x_n\}$的有限项，并不影响其收敛性和其极限.

数列极限的性质(2)

收敛数列之极限唯一确定.

数列极限具有保序性---大数列的极限大，极限大的数列最终全大.

数列极限的保号性----正数列的极限非负，负数列的极限非正；极限为正的数列最终全正，极限为负的数列最终全负.

定理(极限唯一性). 若数列$\{x_n\}$有极限(收敛)，则其极限是唯一确定的.

反设: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, 且$a<b$, 则对于$\varepsilon_0 = \dfrac{b-a}{2}$,

因为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 所以$\exists N_1 \;\; s.t. \;\; |x_n - a| < \varepsilon_0, \;\; n > N_1$

$$\text{即} -\frac{b-a}{2} < x_n - a < \frac{b-a}{2}, \quad n > N_1, \qquad \boxed{\frac{3a-b}{2} < x_n < \frac{a+b}{2}, \quad n > N_1.}$$

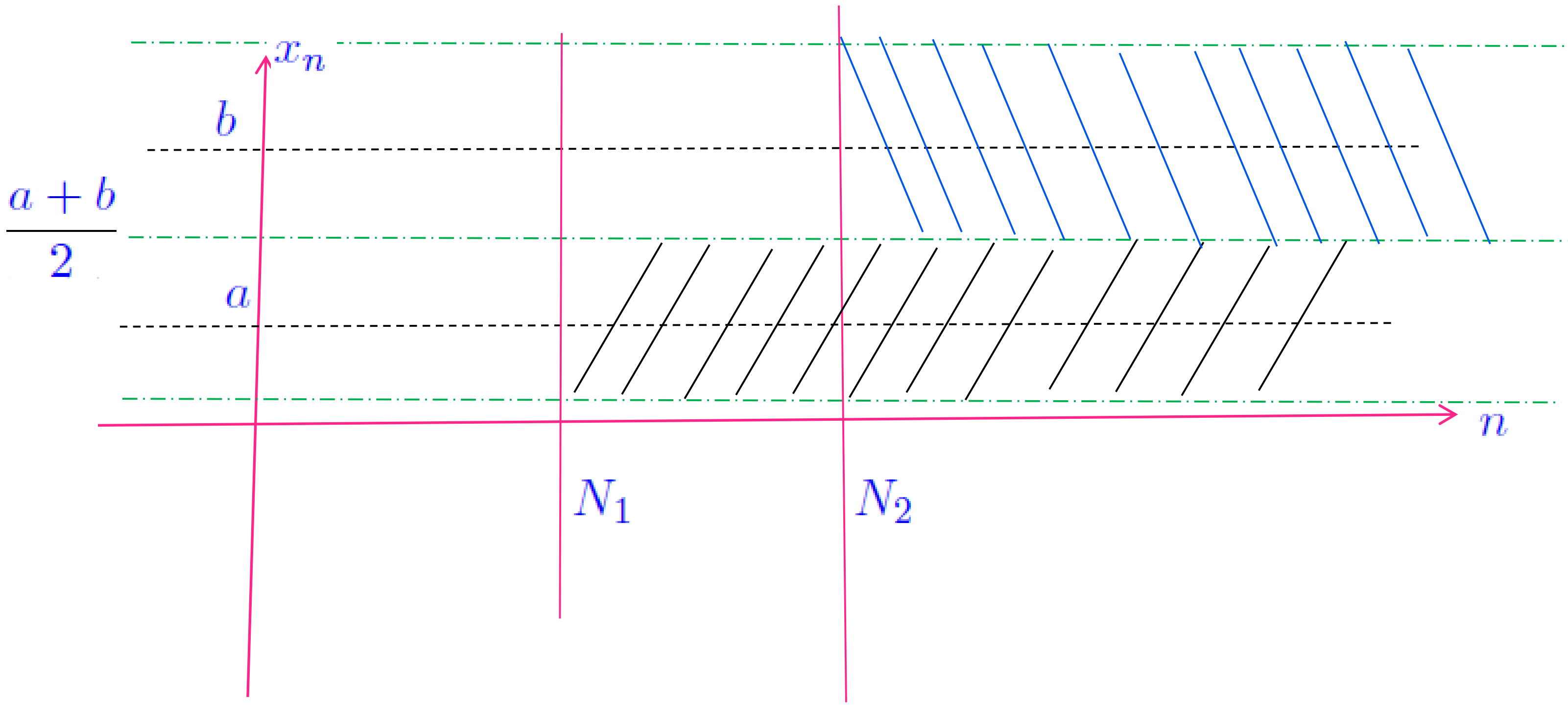
另一方面, 因为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, 所以$\exists N_2 \;\; s.t. \;\; |x_n - b| < \varepsilon_0, \;\; n > N_2$

$$\text{即} -\frac{b-a}{2} < x_n - b < \frac{b-a}{2}, \quad n > N_2, \qquad \boxed{\frac{a+b}{2} < x_n < \frac{3b-a}{2}, \quad n > N_2.}$$

这样, 对于$n > max\{N_1, N_2\}$, 上述两不等式同时成立.

这是矛盾的.

定理(极限唯一性). 若数列$\{x_n\}$有极限(收敛), 则其极限是唯一确定的.



定理. 若数列$\{x_n\}$收敛，则数列是有界的，即$\exists M > 0$, $s.t.\ |x_n| \leqslant M, \forall n \in \mathbb{N}$.

设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,

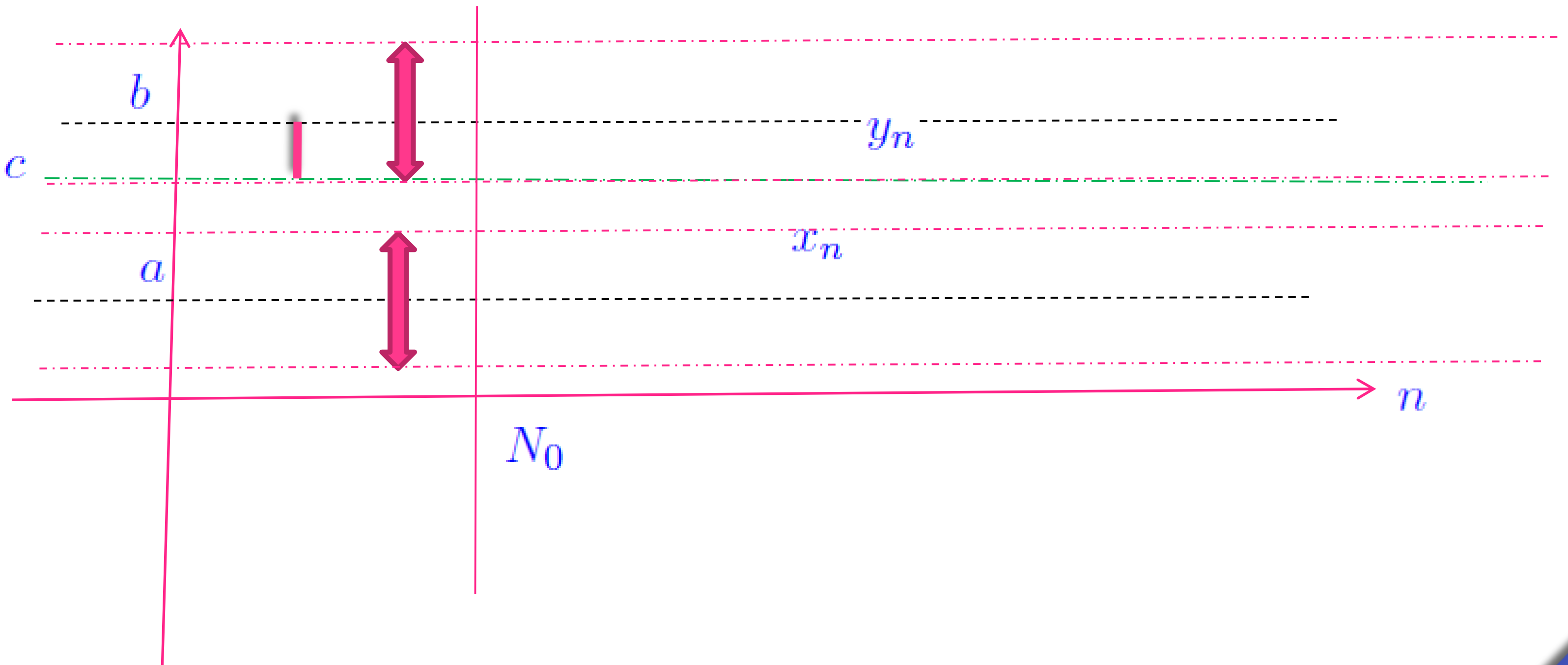
则对于$\varepsilon = 1, \exists N \in \mathbb{N}\ s.t.\ |x_n - a| < 1, \forall n > N$,　　即$|x_n| < |a| + 1, \forall n > N$,

现取$M = \max\{|x_1|, \cdots, |x_N|, |a| + 1\}$,则$|x_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$.

定理: *(保序性)*给定两个数列x_n, y_n,若$\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$,则

(1) $a < b \Rightarrow \forall c \in (a,b), \exists N_0 \in \mathbb{N}\ s.t.\ \ x_n < c < y_n,\ \ n > N_0.$

(2) $\exists N \in \mathbb{N}\ s.t.\ x_n \leq y_n,\ n > N_0. \quad \Rightarrow \quad a \leq b.$



定理: (保序性)给定两个数列x_n, y_n,若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$,则

(1) $a < b \Rightarrow \forall c \in (a,b), \exists N_0 \in \mathbb{N}\ s.t.\ \ x_n < c < y_n,\quad n > N_0.$

(2) $\exists N \in \mathbb{N}\ s.t.\ x_n \le y_n,\ n > N_0. \quad \Rightarrow \quad a \le b.$

---

①$a < b$时,$\forall c \in (a,b)$,取$\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\min\{c-a, b-c\}$,

$\because \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \therefore$ 对于$\varepsilon_0 > 0, \exists N_1\ s.t.\ n > N_1$ 时 $|x_n - a| < \varepsilon_0,\ \ i.e.\ \ x_n < a + \varepsilon_0,\ \ \forall n > N_1.$

$\because \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b, \therefore$ 对于$\varepsilon_0 > 0, \exists N_2\ s.t.\ n > N_2$ 时 $|y_n - b| < \varepsilon_0,\ \ i.e.\ \ b - \varepsilon_0 < y_n,\ \ \forall n > N_2.$

由ε的取法知,$a + \varepsilon_0 \le a + \frac{c-a}{2} = \frac{a+c}{2} < c < \frac{b+c}{2} = b - \frac{b-c}{2} \le b - \varepsilon_0.$

取$N_0 = \max\{N_1, N_2\}$, 则$n > N_0$ 时,$x_n < c < y_n.$

②用上一条即可证.

反设$a > b$,则$\exists N_0\ s.t.\ n > N_0$时$x_n > \frac{a+b}{2} > y_n$,此与条件$x_n \le y_n$ 矛盾

定理: (保序性)给定两个数列x_n, y_n,若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$,则

(1) $a < b \Rightarrow \forall c \in (a,b), \exists N_0 \in \mathbb{N}\ s.t.\ \ x_n < c < y_n,\quad n > N_0.$

(2) $\exists N \in \mathbb{N}\ s.t.\ x_n \le y_n,\ n > N_0. \quad \Rightarrow \quad a \le b.$

注: $x_n < y_n, \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 　　但是$\not\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n < \lim\limits_{n\to\infty} y_n.$

例如, $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, $\quad y_n = 1 + \frac{1}{n}$.

推论: 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$,则$\forall c \in (0,a), \exists N_c \in \mathbb{N}\ s.t.\ x_n > c > 0, \forall n > N_c.$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b < 0$,则$\forall c \in (b,0), \exists N_c \in \mathbb{N}\ s.t.\ n > N_c$ 时,$x_n < c < 0.$