

n 维向量

n 维向量及其线性运算

一、 n 维向量的概念

1.定义1: 由数 a_1, a_2, \cdots, a_n 组成的有序数组, 称为
 n 维向量, 简称为向量。

向量通常用斜体希腊字母 α, β, γ 等表示。

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n),$$

行向量

a_i

第 i 个分量

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$$

列向量

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$$

$$i = 1, 2, \cdots, m.$$

矩阵 A 的行向量

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

矩阵 A 的列向量

$$= (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj})^T$$

$$j = 1, 2, \cdots, n$$

$$\mathbf{0} = (0, 0, \cdots, 0)$$

零向量

$$-\alpha = (-a_1, -a_2, \cdots, -a_n)$$

负向量

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \text{维数相同, 即同型。} \\ a_i = b_i, i = 1, 2, \cdots, n. \end{cases}$$

2.定义2: $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, 数值 $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$ 称为向量 α 的长度或范数或模, 记为 $\|\alpha\|$.

$$\|\alpha\| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \quad \alpha \neq 0 \Rightarrow \|\alpha\| > 0$$

$\|\alpha\| = 1$ 称 α 为单位向量。

$$\alpha = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \beta = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \gamma = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

$$e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1).$$

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1).$$

二、 n 维向量的线性运算 设向量

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n), \quad \beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n),$$

1.加法: $\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)$

2.减法: $\alpha - \beta = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \cdots, a_n - b_n)$

3.数乘: $k\alpha = (ka_1, ka_2, \cdots, ka_n)$

线性运算满足8条运算规律.

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha,$$

$$k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta,$$

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma),$$

$$(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha,$$

$$\alpha + 0 = \alpha = 0 + \alpha,$$

$$k(l\alpha) = (kl)\alpha,$$

$$\alpha - \alpha = 0.$$

$$1\alpha = \alpha.$$

4.线性组合

定义：设向量 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ，若存在一组数
 k_1, k_2, \dots, k_m 使

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m$$

则称向量 β 可由向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示，

或称向量 β 是向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的线性组合。

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1e_1 + a_2e_2 + \dots + a_ne_n$$

向量组的等价

1.定义1: 设有两个 n 维向量组 $(I): \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$

$(II): \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$

若向量组 (I) 中每个向量都可由向量组 (II) 线性表示, 则称向量组 (I) 可由向量组 (II) 线性表示;

若向量组 (I) 与向量组 (II) 可以互相线性表示, 则称向量组 (I) 与向量组 (II) 等价。

向量组的等价关系具有自反性、对称性、传递性。