数列的子列

一个数列$\{x_n\}$中可以按一定规则抽出无穷多个位置上的元素（项），不改变前后顺序，构成一个新数列，称为$\{x_n\}$的子列.

如偶数项列$\{x_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$，奇数项列$\{x_{2k+1}\}_{k=1}^{\infty}$.

一个数列有无穷多个子列. 子列记作$\boxed{\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}}$

注意子列$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$的下标（在子列中的位置）是$k$，而$n_k$则是元素$x_{n_k}$在原数列中的位置.

显然，$n_k \geq k$，$k \in \mathbb{N}$.

例如, $x_n = \frac{1}{n}, \ n \in \mathbb{N}$是数列

$\boxed{x_{3k} = \frac{1}{3k}, \ k \in \mathbb{N}}$是其一个子列, 由$x_n$中的第$3, 6, 9, \cdots$项组成, 这里$\underline{n_k = 3k}$;

$\boxed{x_{3k+1} = \frac{1}{3k+1}, \ k \in \mathbb{N}}$是其另一个子列, 由$x_n$中的第$1, 4, 7, \cdots$项组成, 这里$\underline{n_k = 3k+1}$;

$\boxed{x_{3k+2} = \frac{1}{3k+2}, \ k \in \mathbb{N}}$是其另一个子列, 由$x_n$中的第$2, 5, 8, \cdots$项组成, 这里$\underline{n_k = 3k+2}$;

定理: 数列$\{x_n\}$有极限$a \Leftrightarrow \{x_n\}$的任何子列均以$a$为极限.

定理: 若数列中有两个具不同极限的子序列, 则该数列无极限.

例: $x_n = (-1)^n$

$$x_{2k} = 1, k = 1, 2, \cdots, \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_{2k} = 1,$$

$$x_{2k+1} = -1, k = 1, 2, \cdots, \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_{2k+1} = -1.$$

所以$\lim\limits_{k\to\infty} x_n$不存在.

定理: 数列$\{x_n\}$有极限$a \Leftrightarrow \{x_n\}$的任何子列均以$a$为极限.

定理: 若数列中有两个具不同极限的子序列, 则该数列无极限.

例: $x_n = \sin \frac{n\pi}{2}$

$n = 4k+1, k \in \mathbb{N}$时, $x_{4k+1} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$;

$n = 2k, k \in \mathbb{N}$时, $x_{2k} = 0$,

两子列极限不同, 所以$\lim\limits_{k\to\infty} x_n$不存在.

定理: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = a \\ \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1} = a \end{cases}$.

证明:

(1)必要性: 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 往证

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k} = a, \quad \lim_{k\to\infty} x_{2k+1} = a.$$

即证, $\forall\varepsilon > 0, \exists K \ \ s.t.$

$$|x_{2k} - a| < \varepsilon, |x_{2k+1} - a| < \varepsilon, \ \ k > K.$$

对于给定的$\varepsilon > 0$, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,

所以$\exists N \ \ s.t. \ n > N$时, $|x_n - a| < \varepsilon$.

现取$K = [\frac{N}{2}] + 1$, 则$k > K$时, $2k > N, \ 2k + 1 > N$.

从而, $\forall\varepsilon > 0, \exists K = [\frac{N}{2}] + 1 \ \ s.t.$

$$|x_{2k} - a| < \varepsilon, |x_{2k+1} - a| < \varepsilon.$$

定理: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = a \\ \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1} = a \end{cases}$.

(2)充分性: $\forall \varepsilon > 0$,

因为 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = a$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1} = a$,

所以, $\exists K_1 \ s.t. \ |x_{2k} - a| < \varepsilon, \ k > K_1$;

$\exists K_2 \ s.t. \ |x_{2k+1} - a| < \varepsilon, \ k > K_2$.

取$N = \max\{2K_1 + 1, 2K_2 + 1\}$, 则$n > N$时,

$|x_n - a| < \varepsilon$.

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

定理: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = a \\ \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1} = a \end{cases}$.

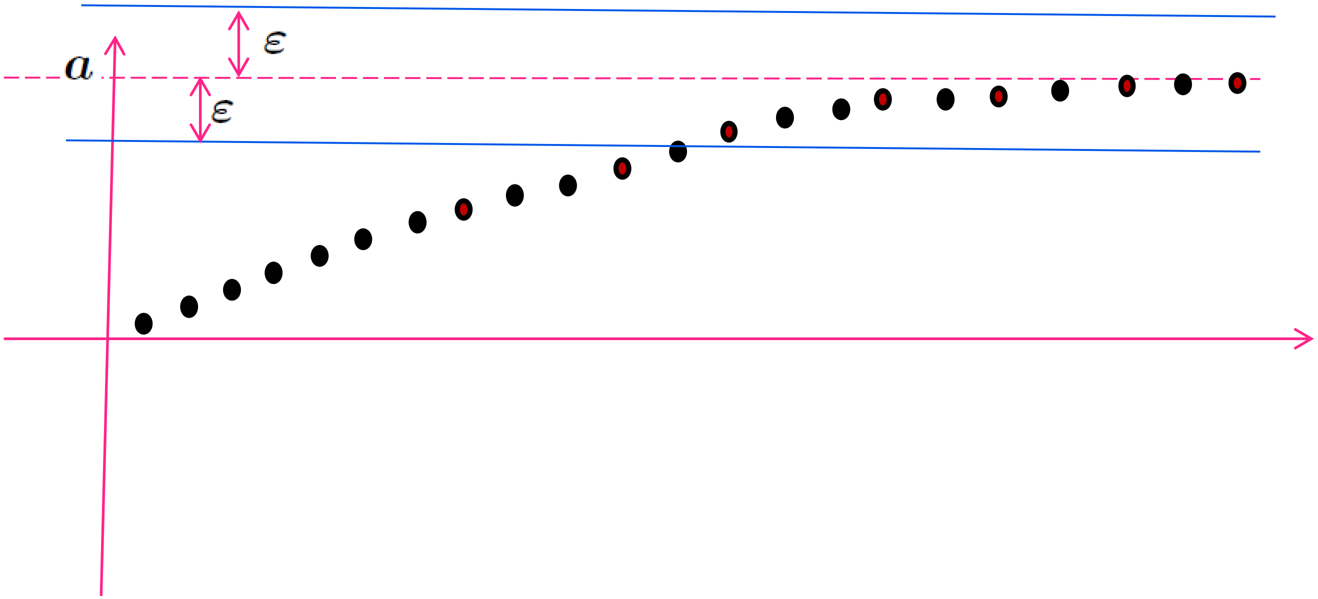
定理: 设$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$和$\{x_{n_l}\}_{l=1}^{\infty}$是$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$的两个子序列且满足:

(1)$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \cup \{x_{n_l}\}_{l=1}^{\infty}$,

(2) $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim\limits_{l\to\infty} x_{n_l} = a$,

则 $\lim\limits_{n\to\infty} = a$.

定理: 单调数列收敛当且仅当其某一子列收敛



定理: 单调数列收敛当且仅当其某一子列收敛

证明: ” $\Rightarrow$ ”显然: 数列收敛则其每一子列收敛.

定理: 单调数列收敛当且仅当其某一子列收敛

证明: ” $\Leftarrow$ ”: 设$\{x_{n_k}\}$为单调上升数列$\{x_n\}$的一个子列,

且$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$, 往证$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

$\forall \varepsilon > 0$, 因为$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$, 所以$\exists K$ $s.t.$

$|x_{n_k} - a| < \varepsilon, \quad \forall k > K,$ $\boxed{-\varepsilon < x_{n_k} - a < \varepsilon, \quad \forall k > K,}$

记$n_K = N$, 则对于任意的$n > N$, 由$\{x_{n_k}\}$的单调上升性质, 一定存在$n_{k_1} < n_{k_2}$ $s.t.$ $x_{n_{k_1}} \leqslant x_n \leqslant x_{n_{k_2}}$,

但$\underline{-\varepsilon < x_{n_{k_1}} - a < \varepsilon}$, $\underline{-\varepsilon < x_{n_{k_2}} - a < \varepsilon}$

$$x_{n_{k_1}} - a \leqslant x_n - a \leqslant x_{n_{k_2}} - a$$

所以, $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$,

即$|x_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n > N = n_K$.

所以$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.