

命题与命题联结词

Propositions and Logical Operations

刘铎

liuduo@bjtu.edu.cn

命题与命题联结词

■ 逻辑

- 如何表示？
- 如何“操作”？

- 非真即假的陈述句称为**命题 (proposition)**。
- 一个命题如果是对的或正确的，则称为真命题，其真值为“真” (true)，常用T或1表示；
- 一个命题如果是错的或不正确的，则称为假命题，其真值为“假” (false)，常用F或0表示。

命题与命题联结词

■ 例 判断下列句子哪些是命题，哪些不是

- 这门课程题为“离散数学”。 ✓
- 这门“离散数学”讲得好吗？ ✗
- 这门“离散数学”讲得真好！ ✗
- 请学习“离散数学”。 ✗
- 5是素数。 ✓
- 太阳从西方升起。 ✓
- 如果明天晴，而且我有空，我就去踢球。 ✓
- 天王星上没有生命。 ✓
- $x + 3 > 5$ 。 ✗
- 本命题是假的。 ✗

命题与命题联结词

- 通常用小写英文字母 p, q, r, \dots 或带有下标的小写字母 p_1, p_2, p_3, \dots 来表示命题，称为**命题变元**或**命题变项**（**propositional variables**）
- 严格地讲，命题变项与命题不同
 - 命题有具体的含意和确定的真值
 - 而命题变项只有明确表示某个命题时才有具体的含意和确定的真值
 - 命题变项一般只表示一个抽象的命题，其真值可能是T也可能是F
- 但通常也简称命题变项为命题

命题与命题联结词

- 不能再分解的命题称为简单命题（simple proposition）或原子命题（atom proposition）。

- 一般形式是“.....是.....”

- 由原子命题组合而成的命题称为复合命题（compound proposition）。

- 例如：

- π 和 e 都是无理数。
 - 6和8至少有一个是合数。
 - 说刘老师讲课不好是不正确的。
 - 不下雨我就去买书。

命题与命题联结词

- 将命题连接起来的方式叫做**命题联结词**（**proposition connective**）或**命题运算符**（**proposition operator**），主要有以下几种：

■ 否定词 (not)	$\sim p$
■ 合取词 (and)	$p \wedge q$
■ 析取词 (or)	$p \vee q$
■ 异或词	$p \oplus q$
■ 蕴涵词	$p \Rightarrow q$
■ 等价词	$p \Leftrightarrow q$

命题与命题联结词

- 设 p 为命题，否定词（negation）“ \sim ”是一元联结词

- $\sim p$ 读作“非 p ”或“ p 的否定”。
- 若 p 的真值为真，则 $\sim p$ 的真值为假；反之，若 p 为假，则 $\sim p$ 为真。
- 否定联结词的含意相当于自然语言中的“不”、“没有”、“无”、“否定”、“并非”、“取反”等。

■ 例

- 用 p 表示命题“3是素数”
- 则 $\sim p$ 即为命题“3不是素数”

命题与命题联结词

- 设 p, q 为命题，**合取词 (conjunction)**
“ \wedge ”是二元联结词
 - $p \wedge q$ 读作“ p 与 q ”或“ p, q 的合取”
 - 当且仅当 p, q 的真值均为真时， $p \wedge q$ 的真值为真。
 - 合取联结词的含意相当于自然语言中的“ p 和 q ”、“ p 与 q ”、“ p 且 q ”、“ p ，同时 q ”、“ p 并且 q ”、“ p 以及 q ”、“ p 而且 q ”、“既 p ，又 q ”、“不但 p ，而且 q ”、“尽管 p ，依然 q ”、“虽然 p ，但是 q ”等。

命题与命题联结词

■ 例

- p 表示命题“3是素数”
- q 表示命题“5是素数”
- 则“3和5都是素数”可以表示为 $p \wedge q$

命题与命题联结词

- 设 p, q 为命题，析取词 (disjunction)
“ \vee ”是二元联结词
 - $p \vee q$ 读作 “ p 或 q ” 或 “ p, q 的析取”
 - 当且仅当 p, q 的真值均为假时， $p \vee q$ 的真值为假。
 - 析取联结词的含意相当于自然语言中的 “ p 或者 q ”、“要么 p ，要么 q ”、“不是 p ，就是 q ”等。

命题与命题联结词

- 析取联结词 \vee 与自然语言中的“或者”类似但又有所不同。例如：
 - (a) 苗苗在看电视或者在吃饭。
 - (b) 苗苗今天上午十时在清华大学或者在北京大学。
- 通常称命题(a)中的“或者”为“可兼或”，命题(b)中的“或者”为“不可兼或”。
- 自然语言中的“可兼或”与析取联结词 \vee 相对应，而“不可兼或”与下面介绍的异或联结词相对应。

命题与命题联结词

- 设 p, q 为命题，**异或词** (exclusive or)
“ \oplus ”是二元联结词
 - $p \oplus q$ 读作 “ p 异或 q ”
 - 当且仅当 p, q 的真值相同时， $p \oplus q$ 的真值为假。
 - “异或”也称“**不可兼或**”。

命题与命题联结词

- 设 p, q 为命题，**蕴涵词 (implication)** “ \Rightarrow ” 是二元联结词
 - $p \Rightarrow q$ 读作 “若 p 则 q ”
 - 当且仅当 p 的真值为真、 q 的真值为假时， $p \Rightarrow q$ 的真值为假
 - p 称作 **前提 (premise)**， q 称作 **结论 (conclusion)**。
 - 蕴涵联结词的含意相当于自然语言中的“如果 p ，则 q ”、“因为 p ，所以 q ”、“只要 p ，就 q ”、“只有 q ，才 p ”、“仅当 q ，则 p ”、“ p 是 q 的充分条件”、“ q 是 p 的必要条件”、“既然 p ，那么 q ”等。

命题与命题联结词

■ 例

- p 表示命题“今天晴”
- q 表示命题“苗苗去图书馆”
- 则“因为今天晴，所以苗苗去图书馆了”可以表示为 $p \Rightarrow q$

■ 例

- p 表示命题“ $2+2=4$ ”
- q 表示命题“北京是中国的首都”
- 则 $p \Rightarrow q$ 表示“因为 $2+2=4$ ，所以北京是中国的首都”

命题与命题联结词

■ 例

- 对于 $p \Rightarrow q$ ，当 p 为假时， q 不论为真为假，蕴涵式的真值均为真。
- “如果周五地震，那么下次课考试”。
- 对于命题 $p \Rightarrow q$ ，称命题“ $q \Rightarrow p$ ”为其**逆命题**，命题“ $\sim p \Rightarrow \sim q$ ”为其**否命题**，命题“ $\sim q \Rightarrow \sim p$ ”为其**逆否命题**。

命题与命题联结词

■ 设 p, q 为命题，**等价词 (equivalence)**

“ \Leftrightarrow ”是二元联结词

■ $p \Leftrightarrow q$ 读作 “ p 当且仅当 q ” 或 “ p, q 等价”

■ 当且仅当 p, q 的真值相同时， $p \Leftrightarrow q$ 的真值为真。

■ “等价”也称作“**双条件**” (**biconditional**)。

■ 等价联结词的含意相当于自然语言中的 “ p ，当且仅当 q ”、“ p 是 q 的充分必要条件”、“ p, q 含义相同”等。

命题与命题联结词

■ 例

- p 表示“3是奇数”
- q 表示“太阳从东方升起”，
- 则命题“3是奇数，当且仅当太阳从东方升起”可符号化为 $p \Leftrightarrow q$ 。



E_{nd}

