一个特殊数列的极限

例: 证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 存在.

记 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$, $n\in\mathbb{N}$.

$$x_n=(1+\frac{1}{n})^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(\frac{1}{n})^k$$

$$=1+1+\frac{n(n-1)}{2!}(\frac{1}{n})^2+\cdots+\frac{n!}{n!}(\frac{1}{n})^n$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\frac{n(n-1)}{nn}+\cdots+\frac{1}{n!}\frac{n(n-1)\cdots(n-(n-1))}{n\cdots n}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}1(1-\frac{1}{n})+\cdots+\frac{1}{n!}1(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$$

例: 证明极限 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$存在.

记$x_n=(1+\frac{1}{n})^n$, $n\in\mathbb{N}$.

$$x_n=1+1+\frac{1}{2!}1(1-\frac{1}{n})+\cdots+\frac{1}{n!}1(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$$

同理:

$$x_{n+1}=(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k(\frac{1}{n+1})^k$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}1(1-\frac{1}{n+1})+\cdots+\frac{1}{n!}1(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n-1}{n+1})$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}1(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1}).$$

所以, $x_n<x_{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$. 单调上升.

例: 证明极限 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$存在.

下证x_n有上界.

$$x_n = 1+1+\frac{1}{2!}1(1-\frac{1}{n})+\cdots+\frac{1}{n!}1(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$$

$$< 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\cdots+\frac{1}{n!}$$

$$< 1+1+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\times n}$$

$$= 1+1+(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})$$

$$= 1+1+1-\frac{1}{n} < 3,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

例: 证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n$存在.

$x_n < x_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. 单调上升.

x_n有上界. $x_n < 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$存在

记其极限为e, $e \approx 2.718$,

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e.$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e.$$

推广: $$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{-n} = e^{-1}$$

$$(1+\frac{1}{n})^{-n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e.$$

推广: $$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{-n} = e^{-1}$$

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n = e^{-1}.$$

$$(1-\frac{1}{n})^n = (\frac{n-1}{n})^n = (\frac{n}{n-1})^{-n} = (1+\frac{1}{n-1})^{-n}$$

$$= \boxed{(1+\frac{1}{n-1})^{-(n-1)}} / \boxed{(1+\frac{1}{n-1})}$$

而 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n-1})^{-(n-1)} = e^{-1}$ $\quad \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n-1}) = 1$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e.$$

推广:
$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{-n} = e^{-1}$$

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n = e^{-1}.$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{kn} = e^k.$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{k}{n})^n = e^k,\ \ k \in \mathbb{R}.$$