加法法则与乘法法则

Multiplication Principle and Addition Principle

刘铎

liuduo@bjtu.edu.cn

加法法则与乘法法则

- 加法法则：
  - 设事件 *A* 有 *m* 种产生方式，事件 *B* 有 *n* 种产生方式，则当 *A* 与 *B* 产生的方式不重叠时，“事件 *A* 或 *B* 之一”有 *m*+*n* 种产生方式。
- 加法法则又称作**加法原理（addition principle）**
- 适用于分类选取问题

加法法则与乘法法则

- 例
  - 某班选修《古代诗歌鉴赏》的有8人，不选的有15人，则该班共有8+15=23人。

加法法则与乘法法则

- 加法法则的推广：
  - 事件 A_1 有 p_1 种产生方式，事件 A_2 有 p_2 种产生方式……事件 A_k 有 p_k 种产生的方式，则当其中任何两个事件产生的方式都不重叠时，“事件 A_1 或 A_2 或… A_k” 有 $p_1+p_2+\ldots+p_k$ 种产生的方式。

加法法则与乘法法则

- 乘法法则：
  - 设事件 A 有 m 种产生方式，事件 B 有 n 种产生方式，则当 A 与 B 产生的方式彼此独立时，“事件 A 与 B ”有 $m\cdot n$ 种产生方式。
- 乘法法则又称**乘法原理（multiplication principle）**
- 适用于分步选取问题
- 适用条件：
  - 无论事件 A 采用何种方式产生，都不影响事件 B 。

加法法则与乘法法则

- 假如一个实验分两步骤进行：
  - 步骤一有 m 种可能结果
  - 无论步骤一的结果是什么，步骤二都有 n 种可能结果
  - 那么这个实验就共有 $m \times n$ 种可能的结果

加法法则与乘法法则

- 例
  - 某种字符串由两个字符组成，第一个字符可选自{a, b, c, d, e}，第二个字符可选自{1, 2, 3, 4}，则这种字符串共有5×4=20个。

加法法则与乘法法则

- 乘法法则的推广：
  - 事件 A_1 有 p_1 种产生方式，事件 A_2 有 p_2种产生方式……事件 A_k 有 p_k 种产生的方式，则当其中任何两个事件产生的方式都彼此独立时，“事件 A_1 与 A_2 与…A_k” 有 $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ 种产生的方式。

加法法则与乘法法则

- 例
  - 求1400的不同的正因子个数。
  - 解.
    - $1400 = 2^3 5^2 7^1$ 的正因子为：$2^i 5^j 7^k$
    - 其中 $0 \le i \le 3,\ 0 \le j \le 2,\ 0 \le k \le 1$
    - 于是，1400的不同的因子数是 $N=(3+1)(2+1)(1+1)=24$

加法法则与乘法法则

- 例
  - 设 A 是集合，如果$|A|=n$，则$|\mathscr{P}(A)|=2^n$。
  - 证明.
    - 假设 $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$
    - 考虑 A 的任一个子集 B
    - 则对于每一个元素 a_i 都有 $a_i \in B$ 和 $a_i \notin B$ 两种可能
    - 由乘法法则，B 的可能数目一共为 2^n

加法法则与乘法法则

- 例
  - 苗苗有 n 块大白兔奶糖，从生日那天开始，她每天至少吃一块，吃完为止。一共有多少种安排方案？
- 解. 方案数目为 2^{n-1}
  - 以 n=5 的情况来说明计算方法：将5块糖按下图所示方式放入9个格子内

空白的4个格子可以填入“|”或保留空白（共两种可能）。

加法法则与乘法法则

- 解. 方案数目为 2^{n-1}
  - 则每种填法都对应一种吃糖的安排方案
  - 例如下图表示第一天吃2块、第二天吃1块、第三天吃2块

  - 而下图表示第一天吃1块、第二天吃4块

加法法则与乘法法则

- 在实际问题中，分类（加法法则）与分步（乘法法则）通常都结合使用
- 例
  - ***A*, *B*, *C* 是3个城市，从*A*到*B*有4条道路，从*B*到*C*有2条道路，从*A*直接到*C*有3条道路，则从*A*到*C*共有4×2+3=11种不同的方式。（先分类，类内再分步）**
  - **某种样式的套装上装有T恤和衬衫两种，下装为长裤。T恤可选红色、蓝色和橙色，衬衫可选白色、黄色和粉色，长裤可选黑色、棕色，则共有(3+3)×2=12种着色方案。（先分步，每步再分类）**

下一讲 ——

排列(一)