

# 关系的性质 —— 对称性

## Properties of Relations — Symmetry

刘 铎

[liuduo@bjtu.edu.cn](mailto:liuduo@bjtu.edu.cn)



## 对称性

- 自反关系、非自反关系
  - 涉及“1个”元素
- 对称关系、非对称关系、反对称关系
  - 涉及“2个”元素
- 传递关系
  - 涉及“3个”元素



# 对称性

- ② 假设  $R$  为集合  $A$  上的关系，
  - 如果对于任意  $a, b \in A$ ，若  $(a, b) \in R$  必然有  $(b, a) \in R$ ，则称  $R$  是对称的 (symmetric)，或称  $R$  满足对称性；
  - 如果对于任意  $a, b \in A$ ，若  $(a, b) \in R$  必然有  $(b, a) \notin R$ ，则称  $R$  是非对称的 (asymmetric)，或称  $R$  满足非对称性；
  - 如果对于任意  $a, b \in A$ ，若  $(a, b) \in R$  且  $(b, a) \in R$  必然有  $a = b$ ，则称  $R$  是反对称的 (antisymmetric)，或称  $R$  满足反对称性。



## 反对称性

- 另一等价定义

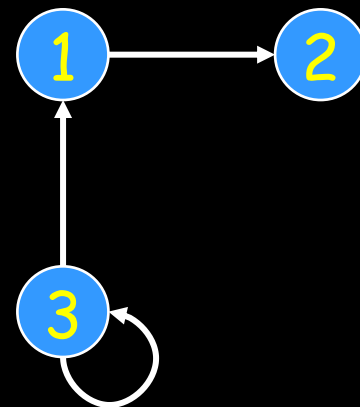
$$\begin{aligned} & \forall a \forall b ( (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a=b ) \\ \equiv & \forall a \forall b ( \sim((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R) \vee a=b ) \\ \equiv & \forall a \forall b ( \sim(a, b) \in R \vee \sim(b, a) \in R \vee a=b ) \\ \equiv & \forall a \forall b ( \sim((a, b) \in R \wedge a \neq b) \vee \sim(b, a) \in R ) \\ \equiv & \forall a \forall b ( (a, b) \in R \wedge a \neq b \Rightarrow (b, a) \notin R ) \end{aligned}$$



# 对称? 非对称? 反对称?

●  $A=\{1, 2, 3\}, R=\{(1, 2), (3, 1), (3, 3)\}$

$a$	$b$	$aRb$	$bRa$	$aRb \Rightarrow bRa$
1	1	F	F	T
1	2	T	F	F
1	3	F	T	T
2	1	F	T	T
2	2	F	F	T
2	3	F	F	T
3	1	T	F	F
3	2	F	F	T
3	3	T	T	T



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

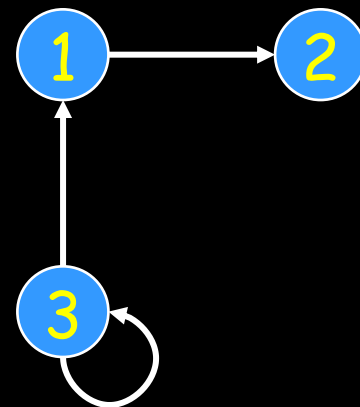
不具有对称性



# 对称? 非对称? 反对称?

●  $A=\{1, 2, 3\}, R=\{(1, 2), (3, 1), (3, 3)\}$

$a$	$b$	$aRb$	$bRa$	$aRb \Rightarrow \sim bRa$
1	1	F	F	T
1	2	T	F	T
1	3	F	T	T
2	1	F	T	T
2	2	F	F	T
2	3	F	F	T
3	1	T	F	T
3	2	F	F	T
3	3	T	T	F



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

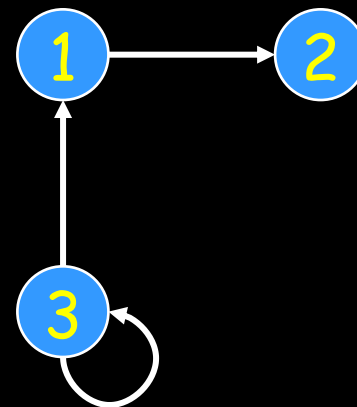
不具有非对称性



# 对称? 非对称? 反对称?

●  $A=\{1, 2, 3\}, R=\{(1, 2), (3, 1), (3, 3)\}$

$a$	$b$	$aRb$	$bRa$	$aRb \wedge bRa \Rightarrow b=a$
1	1	F	F	T
1	2	T	F	T
1	3	F	T	T
2	1	F	T	T
2	2	F	F	T
2	3	F	F	T
3	1	T	F	T
3	2	F	F	T
3	3	T	T	T



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

具有反对称性



# 对称? 非对称? 反对称?

## ● 练习

- $A=\{1, 2, 3\}, R=\{ (1, 1), (3, 3) \}$
- $A=\{1, 2, 3\}, R=\{ (1, 1), (1, 3), (3, 1) \}$
- $A=\{1, 2, 3\}, R=\{ (1, 2), (3, 3) \}$
- $A=\{1, 2, 3\}, R=\{ (1, 2), (1, 3), (3, 1) \}$





# 对称性

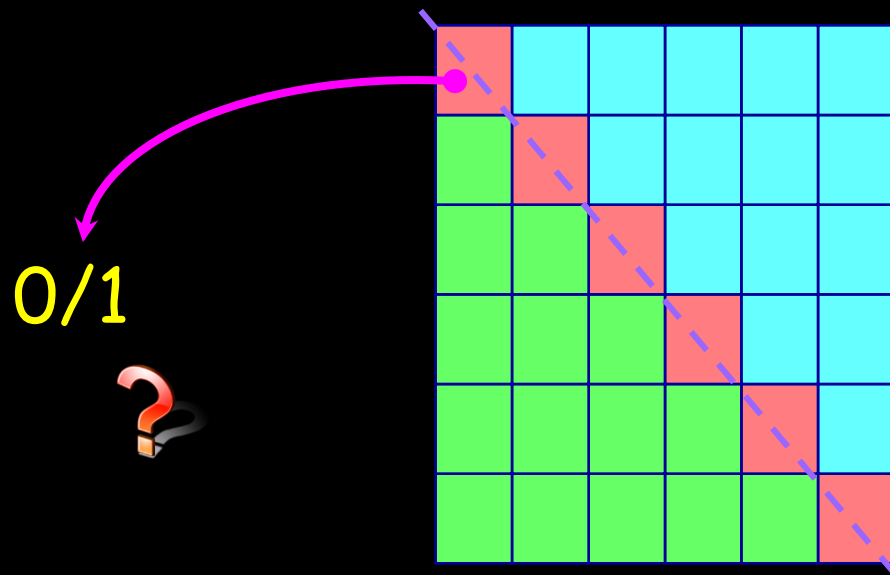
	关系矩阵 的特点	关系图 的特点
对称关系 $\forall a \forall b ((a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R)$	?	?
非对称关系 $\forall a \forall b ((a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \notin R)$ , 或 $\forall a \forall b ((a, b) \notin R \vee (b, a) \notin R)$ , 或 $\sim \exists a \exists b ((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R)$	?	?
反对称关系 $\forall a \forall b ((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow b = a)$ , 或 $\forall a \forall b ((a, b) \in R \wedge a \neq b \Rightarrow (b, a) \notin R)$ , 或 $\sim \exists a \exists b ((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \wedge a \neq b)$	?	?



# 对称性

- 对称关系

- 若  $aRa$  则  $aRa$





# 对称性

- 对称关系

- 若  $aRb$  则  $bRa$

- 若  $m_{ij} = 1$  则  $m_{ji} = 1$

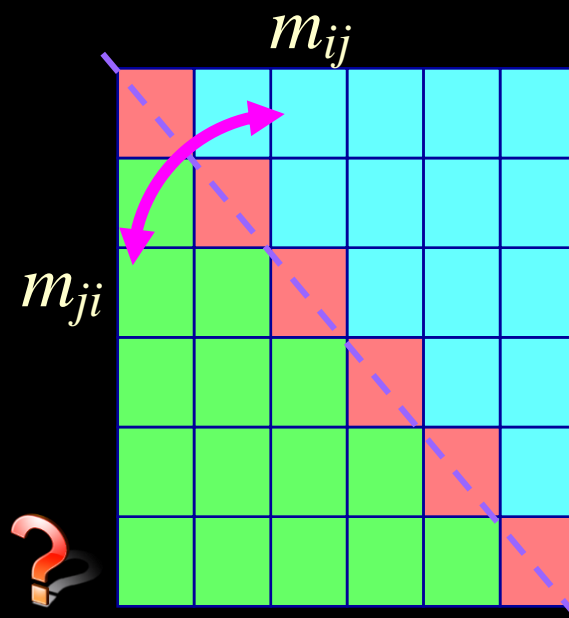
- ~~● 若  $m_{ij} = 0$  则  $m_{ji} = 1$~~

- 则有  $m_{ij} = 1$

- 产生矛盾!

- 若  $m_{ij} = 0$  则  $m_{ji} = 0$

- $m_{ij} = m_{ji}$





# 对称性

- 非对称关系

- 若  $aRa$  则  $a\cancel{R}a$

?

0					
	0				
		0			
			0		
				0	
					0



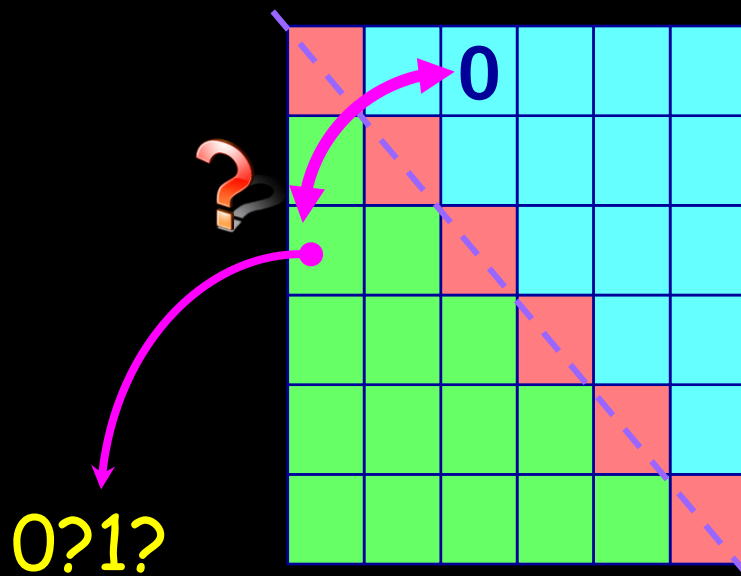
# 对称性

- 非对称关系

- 若  $aRb$  则  $b \not R a$

- 若  $m_{ij} = 1$  则  $m_{ji} = 0$

- 若  $m_{ij} = 0$ ,  $m_{ji}$  的值有什么特点?



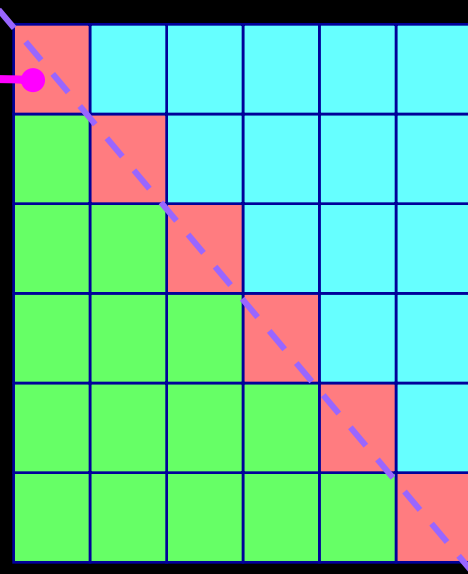


# 对称性

- 反对称关系

- 若  $aRa$  且  $aRa$  则  
 $a=a$

0/1





# 对称性

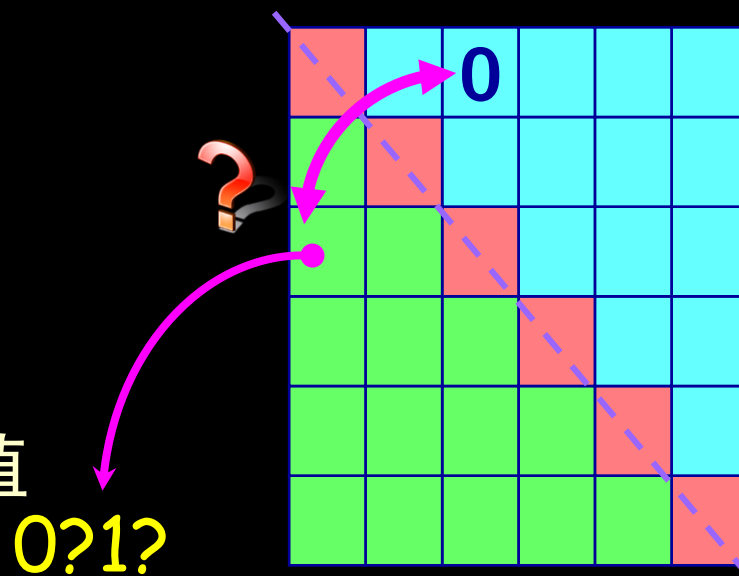
- 反对称关系

- 若  $aRb$  且  $a \neq b$  则  $b \not R a$

- 若  $m_{ij} = 1$  则  $m_{ji} = 0$

- 若  $m_{ij} = 0$  则  $m_{ji}$  的值有什么特点?

- $(i \neq j)$





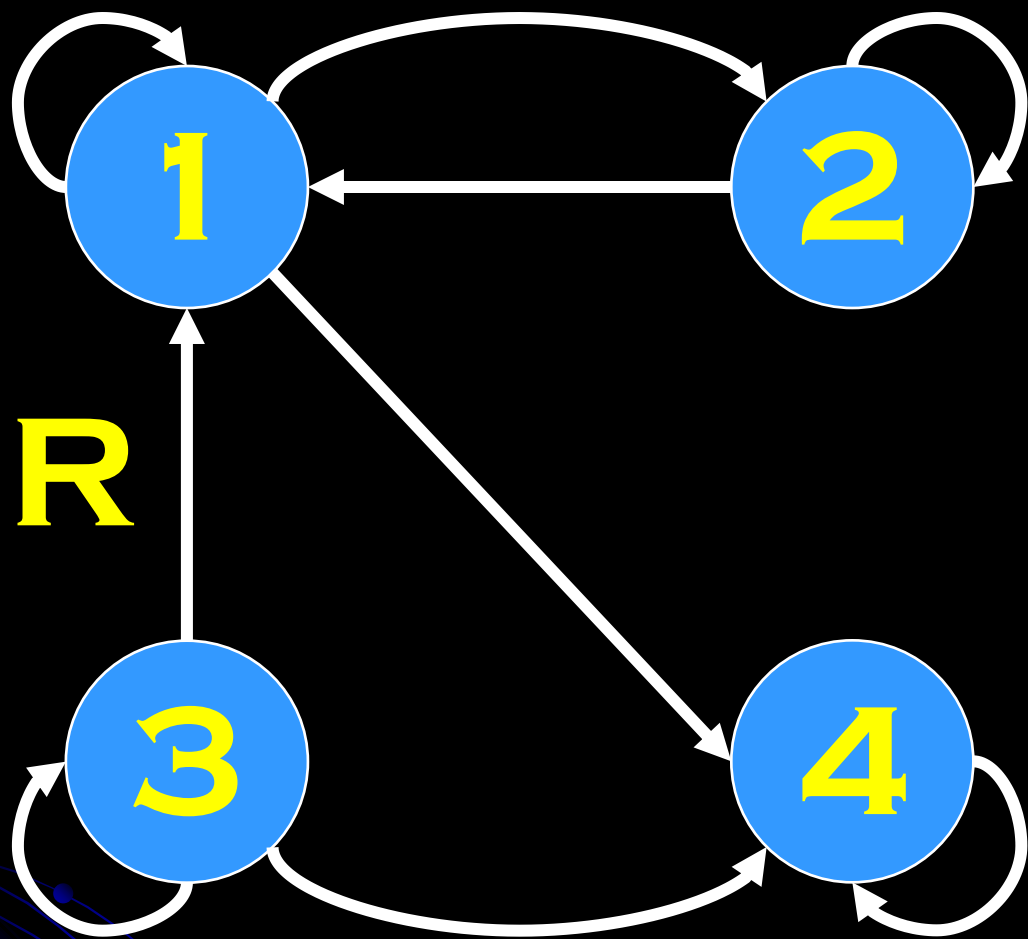
# 对称性

	关系矩阵的特点	关系图的特点
对称关系	矩阵是对称矩阵，即 对于所有 $i, j$ , $M_R(i, j) = M_R(j, i)$	如果两个顶点之间有边， 一定是一对方向相反的边
非对称关系	对于所有 $i, j$ , 若 $M_R(i, j) = 1$ 则 $M_R(j, i) = 0$	两顶点之间至多存在一条 有向边，每个顶点都无自环
反对称关系	对于所有 $i, j$ , 若 $i \neq j$ 且 $M_R(i, j) = 1$ 则 $M_R(j, i) = 0$	两互异顶点之间至多存在 一条有向边，允许存在自环





## 对称性



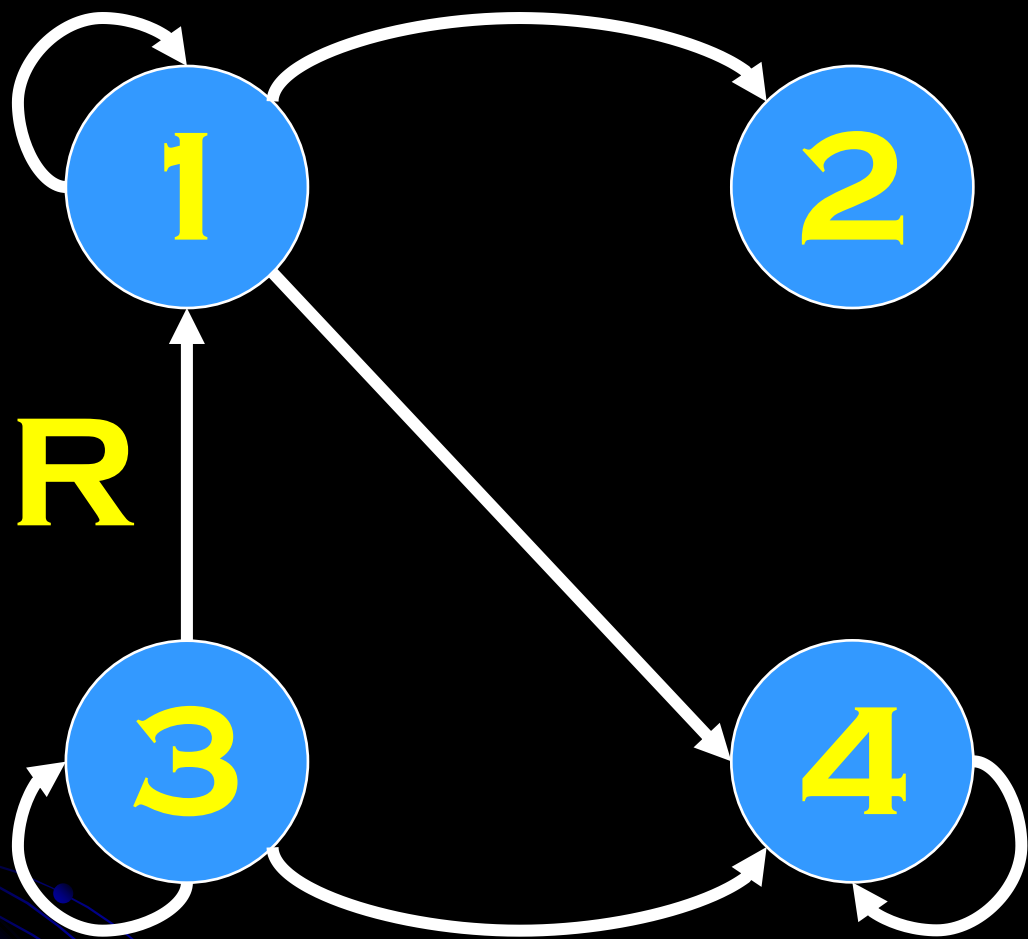
不满足 对称性

不满足 非对称性

不满足 反对称性



## 对称性



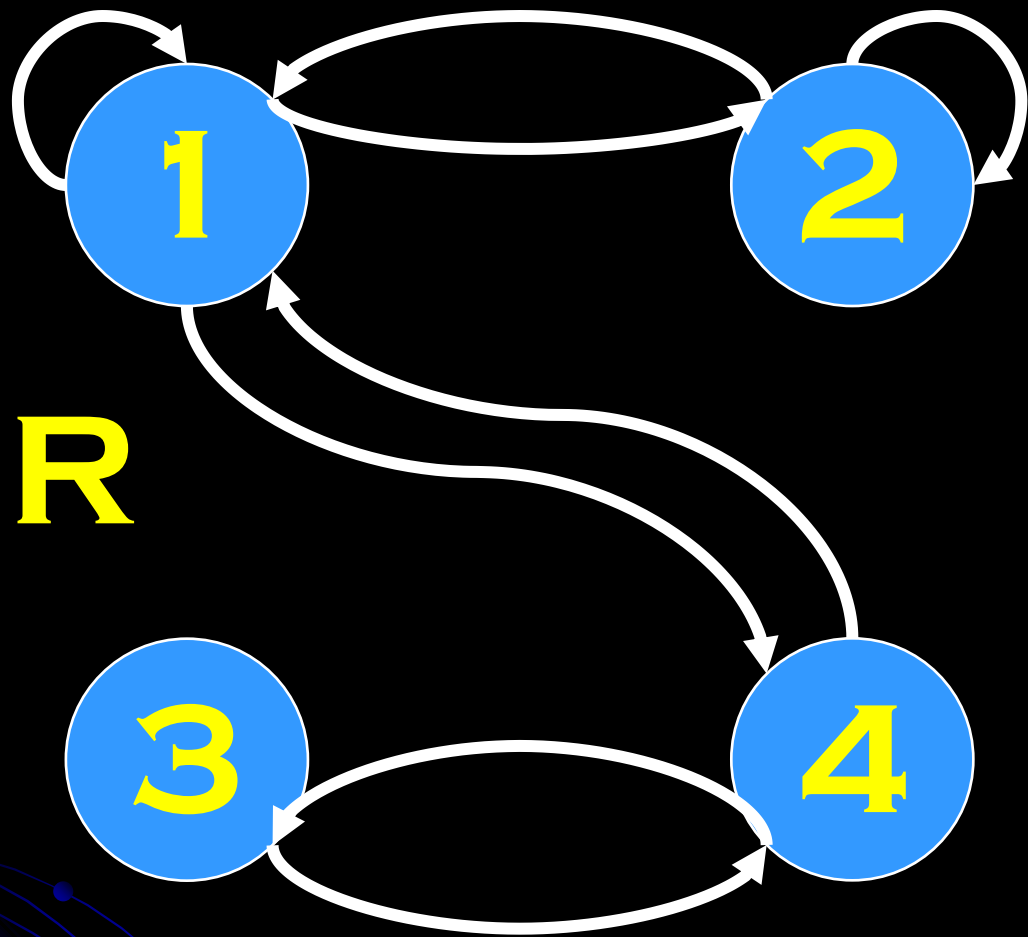
不满足 对称性

不满足 非对称性

满足 反对称性



## 对称性



满足 对称性

不满足 非对称性

不满足 反对称性



## 对称性



满足 对称性

不满足 非对称性

不满足 反对称性

# R



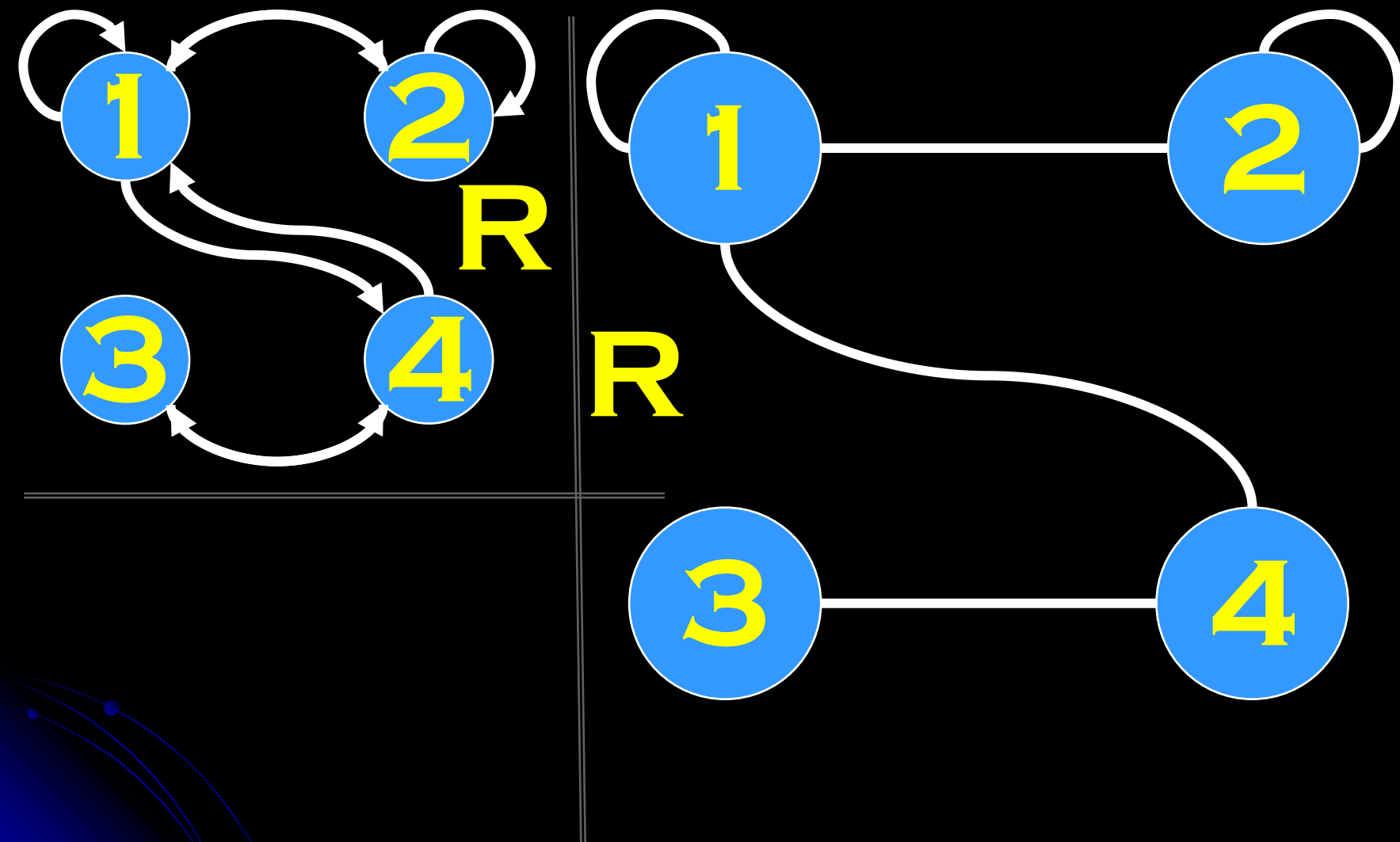


## 对称性

- 保留对称关系的有向图中的顶点，且将所有有向边改作无向边，其结果称作该关系的**图**（**graph**）。



# 对称性

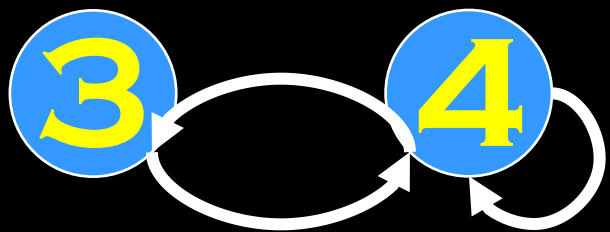




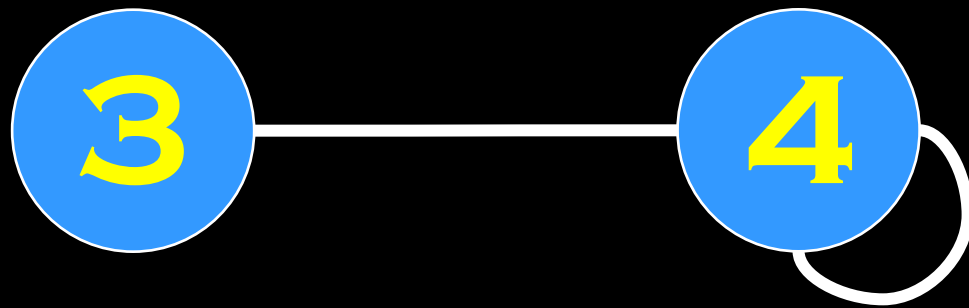
## 对称性



R



R





# 对称？ 非对称？ 反对称？

- 练习与思考

- “握手”
- 平面上三角形的“相似”关系
- “同班同学”关系
- 恒等关系
- 集合的“包含”关系
- 实数的“大于”关系
- 实数的“大于等于”关系
- 整数的“整除”关系



**End**

