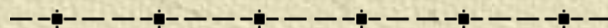


函数的性质

Properties of Functions

刘 铎

liuduo@bjtu.edu.cn



函数的性质

✦ 设函数 $f: A \rightarrow B$,

- 若 $\text{Ran}(f) = B$, 则称 f 是**满射** (surjection) 或**映上的** (onto) ;
- 若任意 $y \in \text{Ran}(f)$ 都存在**唯一的** $x \in A$ 使得 $f(x) = y$, 则称 $f: A \rightarrow B$ 是**单射** (injection) 或**一一的** (one-to-one) ;
- 若 f 既是满射又是单射, 则称 f 是**双射** (bijection) 或**一一对应** (one-to-one correspondence) 。

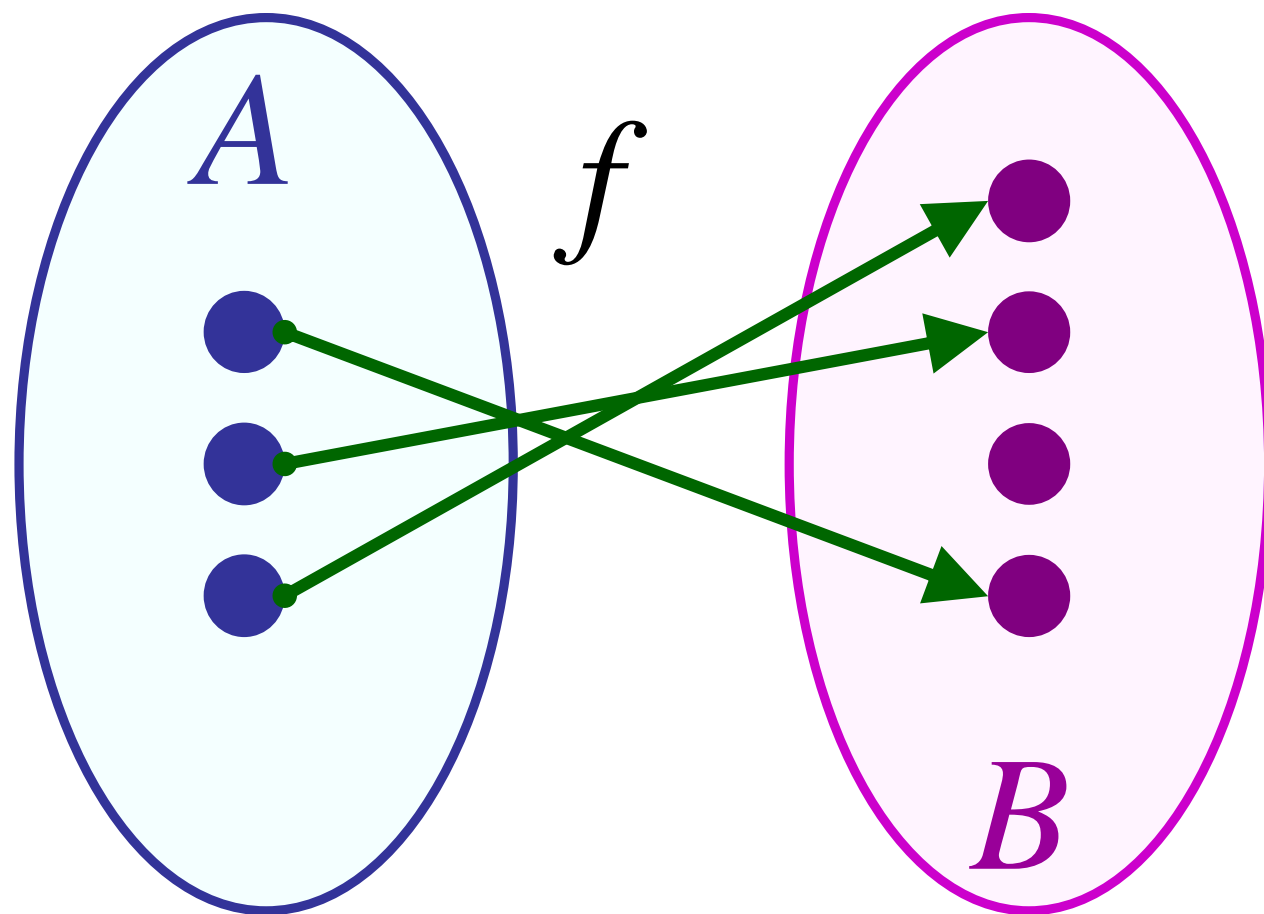
函数的性质

✧ f 是满射意味着：对于任意 $y \in B$ ，都存在 $x \in A$ 使得 $f(x) = y$

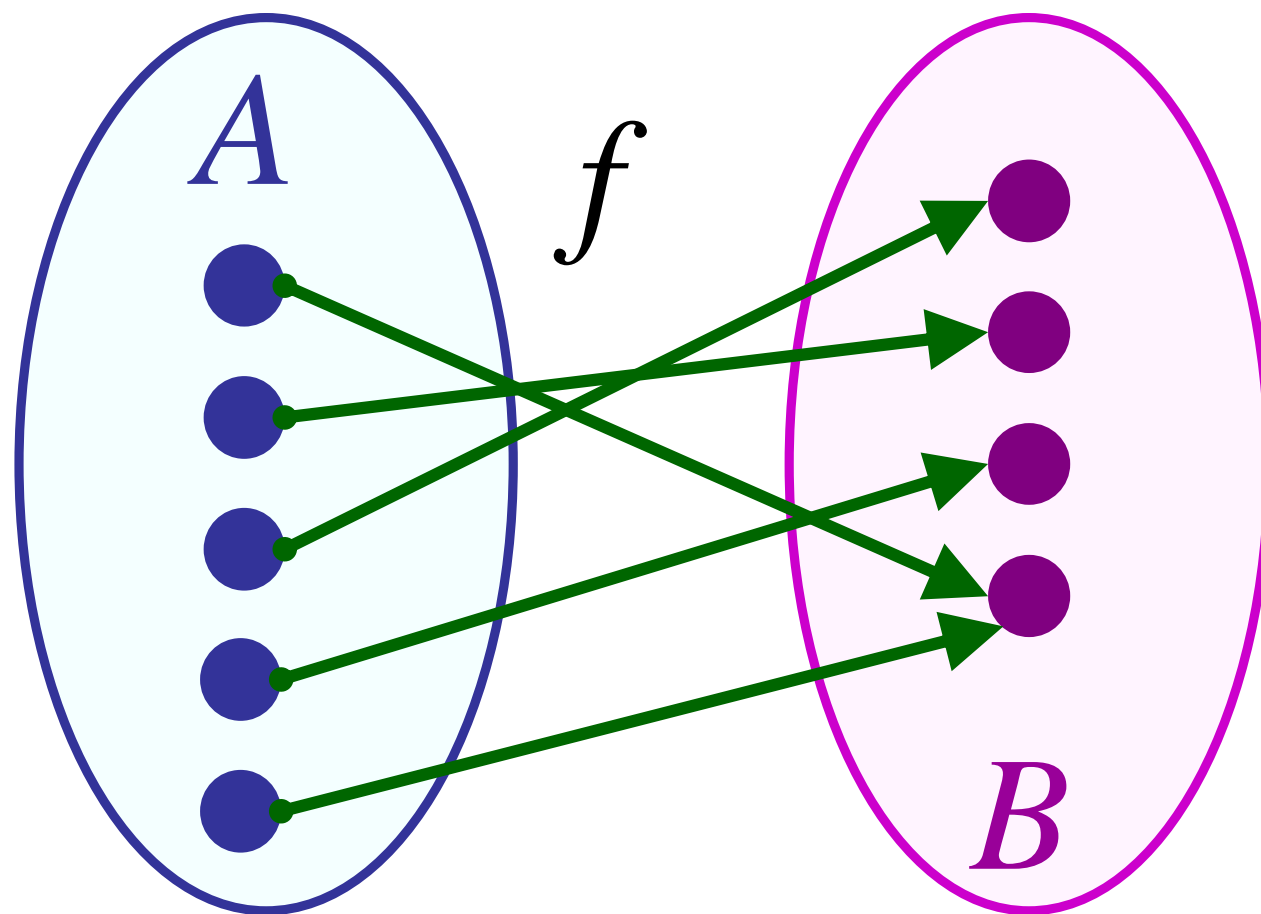
✧ f 是单射另有如下两个等价定义：

- 对于任意 $a, b \in A$ 满足 $a \neq b$ ，均有 $f(a) \neq f(b)$
- 如果 $a, b \in A$ 满足 $f(a) = f(b)$ ，则 $a = b$

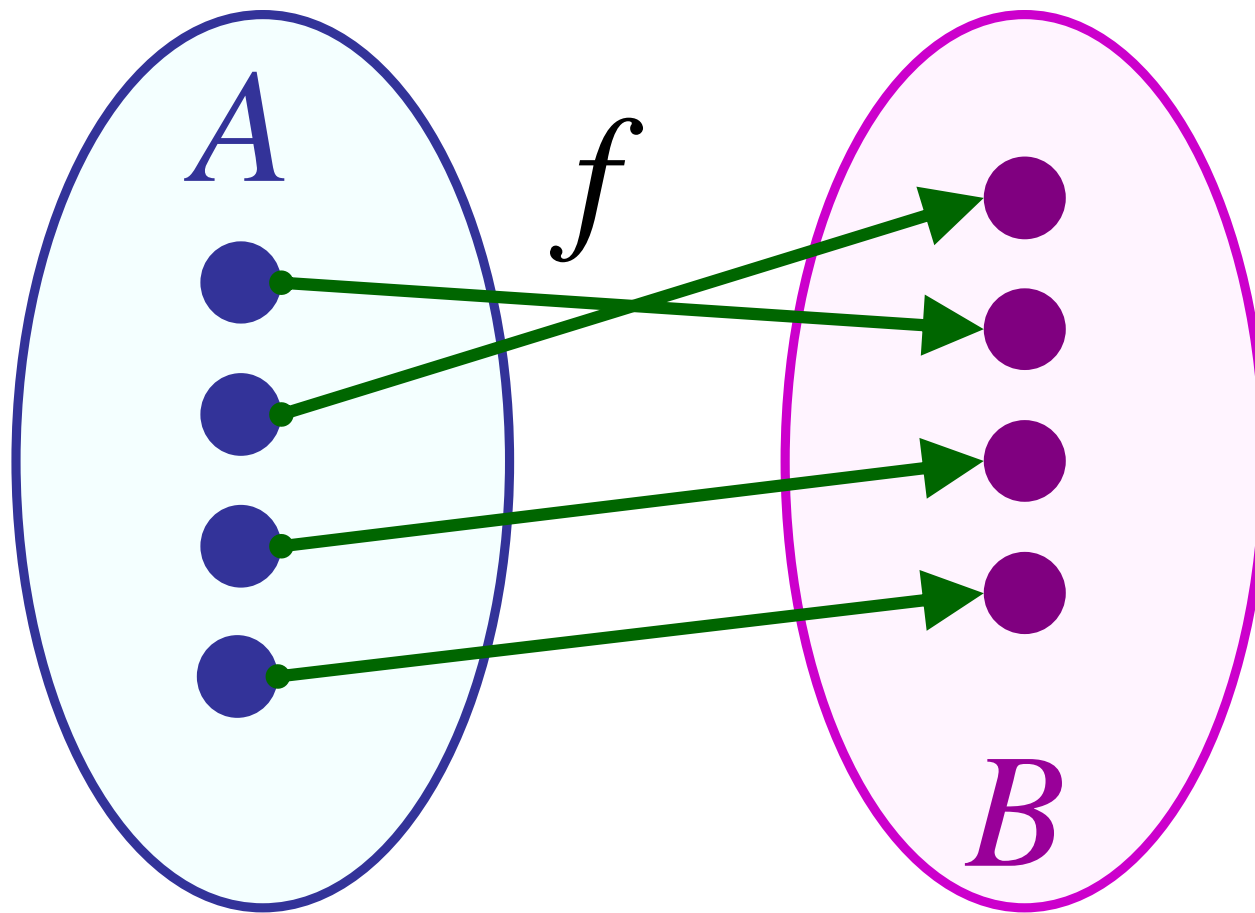
函数的性质



函数的性质



函数的性质



函数的性质

✦例

- 设 A 是非空集合， A 上的恒等函数 1_A 既是单射又是满射，从而是双射
- 函数 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ，定义为 $g(x) = x^2 - 2x + 1$
 - g 不是单射—— $g(0) = g(2) = 1$
 - g 也不是满射—— g 在 $x=1$ 取得最小值 0
 - 从而 g 不是双射。

函数的性质

✧练习

$$-f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+,$$

$$-f(1) = 1, f(n) = n-1 \quad (n > 1)$$

– 单射?

– 满射?

– 双射?

函数的性质

✧对于有限集合上的函数，有如下主要结果：

✧定理

假设 A 和 B 是两个有限集合且满足 $|A| = |B|$ ，则函数 $f: A \rightarrow B$ 是单射当且仅当 f 是满射。

函数的性质

★定理

假设 A 和 B 都是有限集合，则：

(a) 若 $|A| < |B|$ ，则必然存在从 A 到 B 的单射函数、必然不存在从 A 到 B 的满射函数；

(b) 若 $|A| > |B|$ ，则必然存在从 A 到 B 的满射函数、必然不存在从 A 到 B 的单射函数；

(c) 若 $|A| = |B|$ ，则必然存在从 A 到 B 的双射函数。

函数的性质

★推论

假设 A 是有限集合， B 是无限集合，则：

- (a) 必然不存在从 A 到 B 的满射函数
- (b) 必然不存在从 B 到 A 的单射函数

下一讲——

函数的复合

