相关性的判定及有关重要结论

1.线性相关与线性组合的关系定理

定理1：向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m (m \geq 2)$线性相关的充要条件是其中至少有一个向量可由其余$m-1$向量线性表示。

证："$\Rightarrow$" 若向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m (m \geq 2)$线性相关，则一定存在一组不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_m$，使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = \mathbf{0}$$

不妨设$k_1 \neq 0$，于是有：

$$\alpha_1 = -\frac{k_2}{k_1}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_m}{k_1}\alpha_m$$

"$\Leftarrow$" 不妨设

$$\alpha_1 = k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$$

$$\Rightarrow -\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$$

即向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m (m \geq 2)$线性相关。

定理2：设向量组 α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_m 线性无关，而向量组 β，α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_m 线性相关，则β 可由α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_m 线性表示且表示式惟一。

证：$\because$向量组β,α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_m线性相关，则一定存在一组不全为零的数k,k_1，$k_2,\cdots$，k_m，使

$$k\beta+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}$$

这里必有$k\neq 0$，否则，有

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}$$

由向量组α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_m线性无关知：

$$k_1=k_2=\cdots=k_m=0$$

矛盾

故β 可由α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_m线性表示。

下面证明表示式惟一。

$$\text{设}\left.\begin{aligned}\beta &= k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m \\ \beta &= l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_m\alpha_m\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$(k_1 - l_1)\alpha_1 + (k_2 - l_2)\alpha_2 + \cdots + (k_m - l_m)\alpha_m = 0.$$

由向量组α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_m线性无关知：

$$k_i = l_i, i = 1,2,\cdots,m.$$

所以表示式惟一。

2.相关性的判定定理

定理3： 在一个向量组中，若有一个部分向量组线性相关，则整个向量组也必定线性相关。

你能举个反例吗？

反之不对。

$$\alpha_1=(1,2,-1),\alpha_2=(2,-3,1),\alpha_3=(4,1,-1).$$

推论： 一个线性无关的向量组的任何非空的部分向量组都线性无关。

2.相关性的判定定理

定理4: m个n维向量$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})\ (i=1,2,\cdots m)$线性相关的充要条件是由$\alpha_i\,(i=1,2,\cdots m)$构成的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

的秩$r(A)<m$.

推论1： 当$m>n$时，m个n维向量线性相关。

推论2： 任意 m 个 n 维向量线性无关的充要条件是由它们构成的矩阵$A=A_{m\times n}$的秩$r(A)=m$。

推论3： 任意 n 个 n 维向量线性无关的充要条件是由它们构 成的方阵 A的行列式不等于零。或$r(A)=n$.

推论4： 任意 n 个 n 维向量线性相关的充要条件是由它们构 成的方阵 A的行列式等于零。或$r(A)<n$.

定理5： 若 m 个 r 维向量

$$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{ir})\quad(i=1,2,\cdots,m)$$

线性无关，则对应的 m 个r+1 维向量

$$\beta_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{ir},a_{i,r+1})\quad(i=1,2,\cdots,m)$$

也线性无关。

用语言叙述为：

线性无关的向量组，添加分量后仍旧线性无关。

推论： r 维线性无关的向量，添加 n-r 个相应分量组成的 n维向量组仍旧线性无关。