定义:

设$\boldsymbol{E} \subset \mathbb{R}$为一个非空集合. 若有$\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}$满足:

$$\begin{aligned}&(1)\ \boldsymbol{M}\text{是}\boldsymbol{E}\text{的一个上界, 即}x \leqslant \boldsymbol{M},\ \ \forall x \in \boldsymbol{E}.\\&(2)\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 \in \boldsymbol{E}\ \ s.t.\ \ x_0 > \boldsymbol{M} - \varepsilon.\end{aligned}$$

则称$\boldsymbol{M}$为$\boldsymbol{E}$上确界, 记作$\boldsymbol{M} = \sup \boldsymbol{E} = \sup\limits_{x \in E}\{x\}$.

设$\boldsymbol{E} \subset \mathbb{R}$为一个非空集合. 若有$\boldsymbol{m} \in \mathbb{R}$满足:

$$\begin{aligned}&(1)\ \boldsymbol{m}\text{是}\boldsymbol{E}\text{的一个下界, 即}x \geq \boldsymbol{m},\ \ \forall x \in \boldsymbol{E}.\\&(2)\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 \in \boldsymbol{E}\ \ s.t.\ \ x_0 < \boldsymbol{m} + \varepsilon.\end{aligned}$$

则称$\boldsymbol{m}$为$\boldsymbol{E}$下确界, 记作$\boldsymbol{m} = \inf \boldsymbol{E} = \inf\limits_{x \in E}\{x\}$.

注意

$\max E=\max\limits_{x\in E}\{x\}$与$\sup E=\sup\limits_{x\in E}\{x\}$的区别.

$\min E=\min\limits_{x\in E}\{x\}$与$\inf E=\inf\limits_{x\in E}\{x\}$的区别.

$\max E$表示集合E中的最大数,

$\min E$表示集合E中的最小数.

例如,$E=(0,1)$时, $\max E$, $\min E$不存在, 而$\sup E=1$, $\inf E=0$.

$E=[0,1]$时, $\max E=1$, $\min E=0$, $\sup E=1$, $\inf E=0$.

定理: [确界存在定理]

非空有上界的实数集必有上确界;

非空有下界的实数集必有下确界.

定理:

单调上升且有上界的数列必有极限,

单调下降且有下界的数列必有极限.