Multiplication Principle and Addition Principle

刘铎

liuduo@bjtu.edu.cn

- 加法法则:
 - 设事件A有m种产生方式,事件B有n种产生方式,则当A与B产生的方式不重叠时,"事件A或B之一"有m+n种产生方式。
- · 加法法则又称作加法原理(addition principle)
- 适用于分类选取问题

• 例

• 某班选修《古代诗歌鉴赏》的有8人, 不选的有15人,则该班共有8+15=23 人。

- 加法法则的推广:
 - 事件 A_1 有 p_1 种产生方式,事件 A_2 有 p_2 种产生方式……事件 A_k 有 p_k 种产生的方式,则当其中任何两个事件产生的方式都不重叠时,"事件 A_1 或 A_2 或… A_k "有 $p_1+p_2+…+p_k$ 种产生的方式。

- 乘法法则:
 - 设事件A有m种产生方式,事件B有n种产生方式,则当A与B产生的方式彼此独立时,"事件A与B"有 $m \cdot n$ 种产生方式。
- 乘法法则又称**乘法原理**(multiplication principle)
- 适用于分步选取问题
- 适用条件:
 - 无论事件A 采用何种方式产生,都不影响事件B。

- 假如一个实验分两步骤进行:
 - · 步骤一有 m 种可能结果
 - 无论步骤一的结果是什么,步骤二 都有 n 种可能结果
 - 那么这个实验就共有 $m \times n$ 种可能的结果

• 例

• 某种字符串由两个字符组成,第一个字符可选自 $\{a, b, c, d, e\}$,第二个字符可选自 $\{1, 2, 3, 4\}$,则这种字符串共有 $5\times 4=20$ 个。

- 乘法法则的推广:
 - 事件 A_1 有 p_1 种产生方式,事件 A_2 有 p_2 种产生方式……事件 A_k 有 p_k 种产生的方式,则当其中任何两个事件产生的方式都彼此独立时,"事件 A_1 与 A_2 与… A_k "有 p_1 · p_2 ·… p_k 种产生的方式。

- 例
 - 求1400的不同的正因子个数。
 - 解.
 - $1400 = 2^35^27^1$ 的正因子为: $2^i5^j7^k$
 - 其中 $0 \le i \le 3, 0 \le j \le 2, 0 \le k \le 1$
 - 于是,1400的不同的因子数是 N=(3+1)(2+1)(1+1)=24

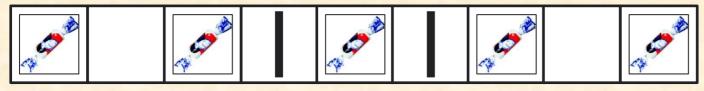
- 例
 - 设A 是集合,如果|A|=n,则 $|\mathcal{F}(A)|=2^n$ 。
 - 证明.
 - 假设 $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$
 - 考虑 A 的任一个子集 B
 - 则对于每一个元素 a_i 都有 $a_i \in B$ 和 $a_i \notin B$ 两种可能
 - 由乘法法则,B的可能数目一共为 2^n

- 例
 - 苗苗有 *n* 块大白兔奶糖,从生日那天开始,她每天 至少吃一块,吃完为止。一共有多少种安排方案?
- 解. 方案数目为 2ⁿ⁻¹
 - 以 n=5 的情况来说明计算方法: 将5块糖按下图所示方式放入9个格子内



空白的4个格子可以填入"|"或保留空白 (共两种可能)。

- · 解. 方案数目为 2ⁿ⁻¹
 - 则每种填法都对应一种吃糖的安排方案
 - · 例如下图表示第一天吃2块、第二天吃1 块、第三天吃2块



• 而下图表示第一天吃1块、第二天吃4块



- 在实际问题中,分类(加法法则)与分步(乘法法则)通常都结合使用
- 例
 - A, B, C 是3个城市,从A到B有4条道路,从B到C有2条道路,从A直接到C有3条道路,则从A到C共有4×2+3=11种不同的方式。(先分类,类内再分步)
 - 某种样式的套装上装有T恤和衬衫两种,下装为长裤。T恤可选红色、蓝色和橙色,衬衫可选白色、黄色和粉色,长裤可选黑色、棕色,则共有(3+3)×2=12种着色方案。(先分步,每步再分类)

排到(一)