# 压缩映射原理用于数列极限

# 定义

设定义于$[a,b]$上的函数$f(x)$满足$f([a,b]) \subset [a,b]$,
如果存在常数$q \in (0,1)$使得
$|f(x)-f(y)| \leq q|x-y|, \ \forall x,y \in [a,b]$,
则称$f(x)$为$[a,b]$上的一个压缩映射.

定理:[压缩映像原理]

设$f(x)$为$[a,b]$上的一个压缩映射,则对任意$x_0 \in [a,b]$,
数列$x_{n+1} = f(x_n)$收敛.
进一步,若记$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$,则必有$f(c) = c$,而且这样
的$c \in [a,b]$是唯一的.

证明:
首先证明$\{x_n\}$是一个Cauchy列,
并且其极限$c$满足$f(c) = c$,然后证明$c$唯一.

定理:[压缩映像原理] 设$f(x)$为$[a,b]$上的一个压缩映射,则对任意$x_0 \in [a,b]$,数列$x_{n+1} = f(x_n)$收敛.

进一步,若记$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$,则必有$f(c) = c$,而且这样的$c \in [a,b]$是唯一的.

由于$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \le q|x_n - x_{n-1}|, \quad n = 1, 2, \cdots$

所以$|x_{n+1} - x_n| \le q^n |x_1 - x_0|, \quad n = 1, 2, \cdots$

从而对任意的正整数$n, p$有 $|x_{n+p} - x_n| = |\sum\limits_{k=1}^{p}(x_{n+k} - x_{n+k-1})|$

$$\le \sum_{k=1}^{p} |x_{n+k} - x_{n+k-1}| \le \sum_{k=1}^{p} q^{n+k-1}|x_1 - x_0|$$

$$= \frac{q^n - q^{n+p}}{1-q}|x_1 - x_0| < Lq^n$$

其中$L = \dfrac{|x_1 - x_0|}{1-q}$为常数.

定理:[压缩映像原理] 设$f(x)$为$[a,b]$上的一个压缩映射,则对任意$x_0\in[a,b]$,数列$x_{n+1}=f(x_n)$收敛.

进一步,若记$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$,则必有$f(c)=c$,而且这样的$c\in[a,b]$是唯一的.

由于$|x_{n+1}-x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})|\le q|x_n-x_{n-1}|,\quad n=1,2,\cdots$

所以$|x_{n+1}-x_n|\le q^n|x_1-x_0|,\quad n=1,2,\cdots$

从而对任意的正整数$n,p$有 $|x_{n+p}-x_n|<Lq^n$

要想$|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$,只须$Lq^n<\varepsilon$, 即$q^n<\dfrac{\varepsilon}{L}$, $n>\log\frac{\varepsilon}{L}/\log q$

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists N=[\log\frac{\varepsilon}{L}/\log q+1],\ s.t.\quad |x_{n+p}-x_n|<Lq^n<\varepsilon,\ \ n>N.$$

所以$\{x_n\}$是一个Cauchy列.

定理:[压缩映像原理] 设$f(x)$为$[a,b]$上的一个压缩映射,则对任意$x_0 \in [a,b]$,数列$x_{n+1} = f(x_n)$收敛.

进一步,若记$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$,则必有$f(c) = c$,而且这样的$c \in [a,b]$是唯一的.

---

记$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$,由于 $|x_{n+1} - f(c)| = |f(x_n) - f(c)| \le q|x_n - c|$

而$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$,即$\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - c| = 0$,所以据夹逼原理,$\lim\limits_{n\to\infty} |x_{n+1} - f(c)| = 0$,即

$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = f(c)$,亦即,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = f(c)$  由数列极限的惟一性,$f(c) = c$.

下面证明$[a,b]$上满足$f(c) = c$的$c$是唯一的.

事实上,如果存在$c_1, c_2 \in [a,b]$使得$f(c_1) = c_1$,$f(c_2) = c_2$,

则$|c_1 - c_2| = |f(c_1) - f(c_2)| \le q|c_1 - c_2|$,这是不可能的,因为$q < 1$.

注:

对于迭代型数列$x_{n+1} = f(x_n)$，$n \in \mathbb{N}$, 要使用压缩映射原理, 只须验证

$\exists q \in (0,1)\ s.t.\ |x_{n+1}-x_n| \le q|x_n-x_{n-1}|$，$n>2$

即可.

例: 设$x_1 > 0, x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$. 证明数列$\{x_n\}$收敛并求其极限.

证: 首先, $x_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, 从而$x_n > 1$, $n > 1$.

从而$x_n < 2$, $n > 1$.

$\boxed{从而x_n > \frac{3}{2}, \quad n > 1.}$

又由于$|x_{n+1} - x_n| = |\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}}| = \frac{|x_n - x_{n-1}|}{x_n x_{n-1}} < \frac{4}{9}|x_n - x_{n-1}|$, $n > 2$.

所以$y = f(x) = 1 + \frac{1}{x}$, $(x > 1)$是一个压缩映射,

$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$是由该压缩映射所定义的数列(迭代). 据压缩映射原理, 数列$\{x_n\}$收敛.

若记其极限为$x$, 则$x = 1 + \frac{1}{x}$, 即$x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. 所以$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.