无向图与有向图

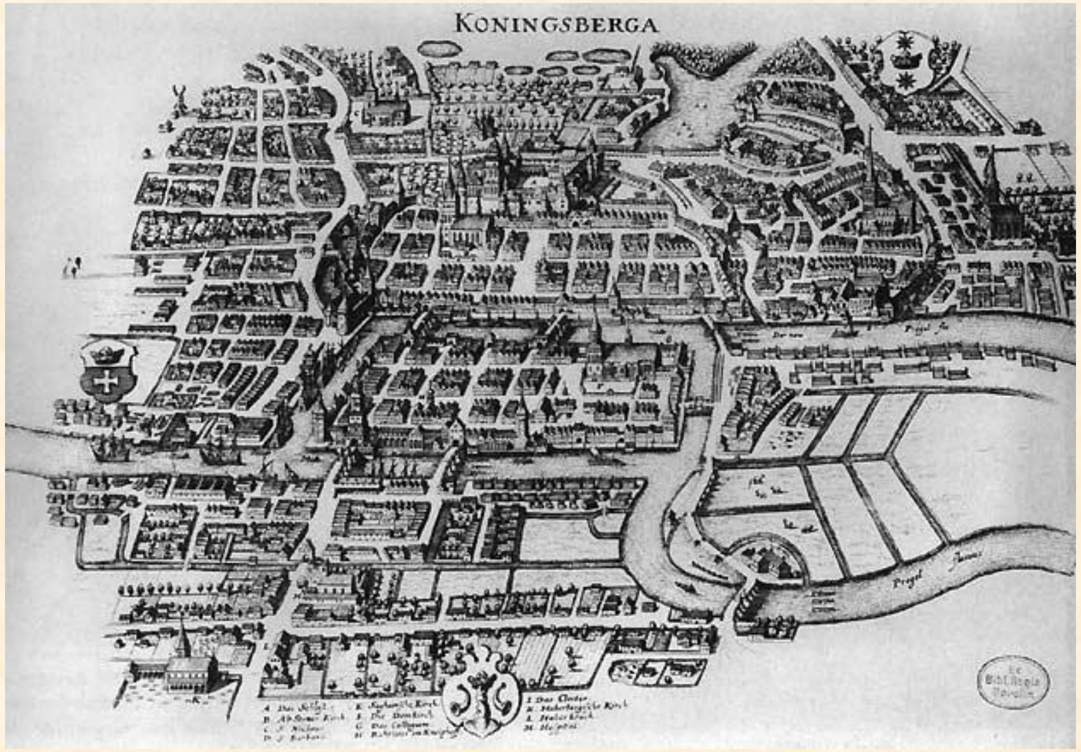
Graphs and Digraphs

刘铎

liuduo@bjtu.edu.cn

无向图与有向图

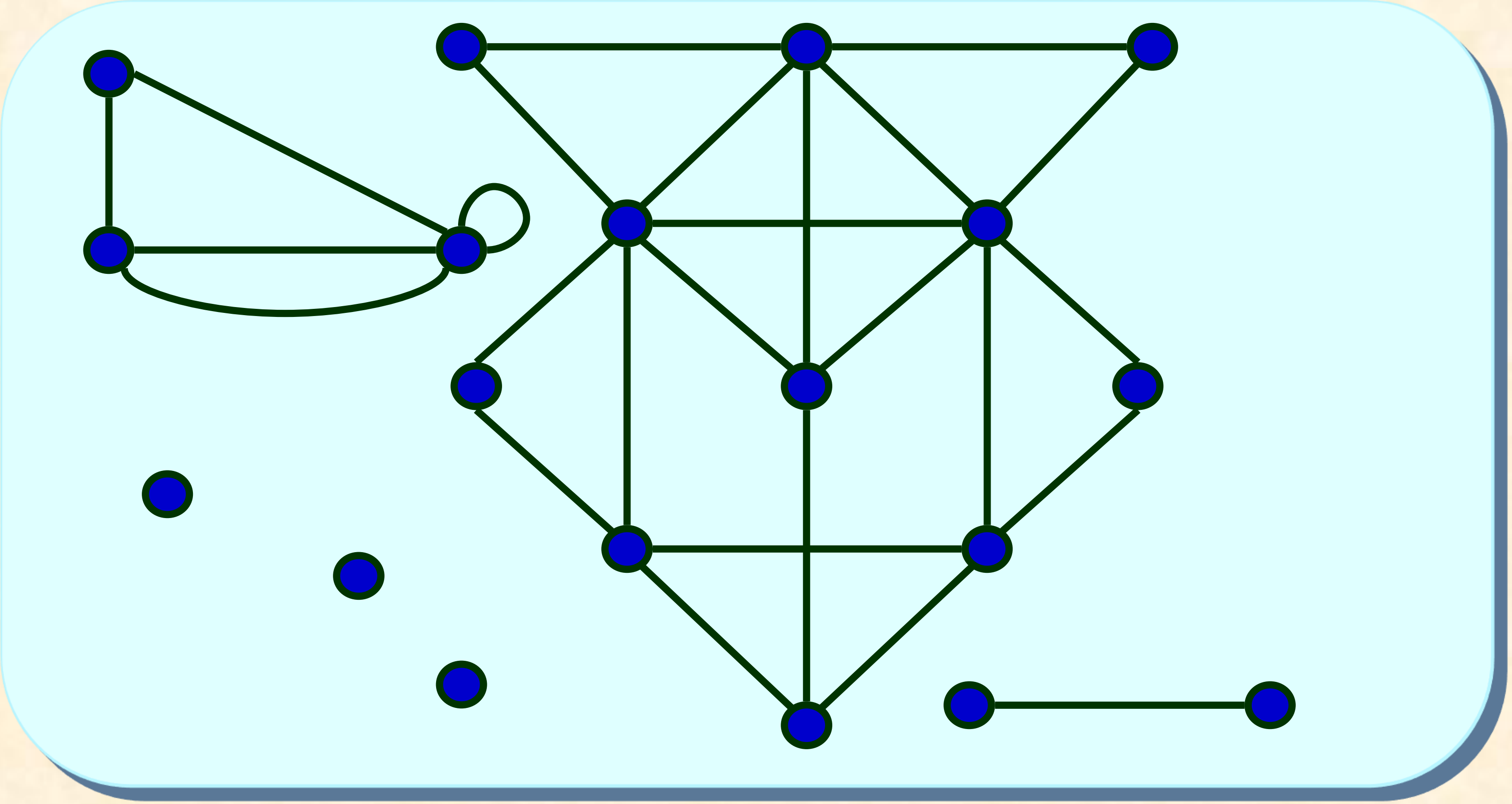
Leonhard Euler [1707-1783]



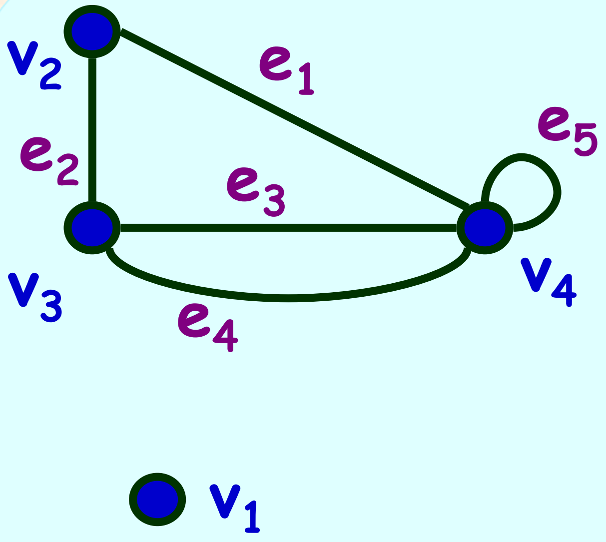
无向图与有向图

- 一个**无向图**（**undirected graph，或graph**）G 指一个三元组 (V, E, γ)，其中
  - (1) $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ 是一个有限集合，称作**顶点集**，其元素称作**顶点**（**vertex/node/point**）或**结点**，$|V|$ 称作为 G 的**阶**；
  - (2) $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ 是一个有限集合，称作**边集**，其元素称作**边**（**edge/arc/line**）；
  - (3) γ 是 E 到 V 的元素个数为1或2的子集全体的一个函数，即对于任意 $e \in E$，有 $\gamma(e)=\{u, v\} \subseteq V$（$u$ 和 v 不必互异），此时 u 和 v 称作边 e 的**端点**（**end points**）

无向图与有向图



无向图与有向图

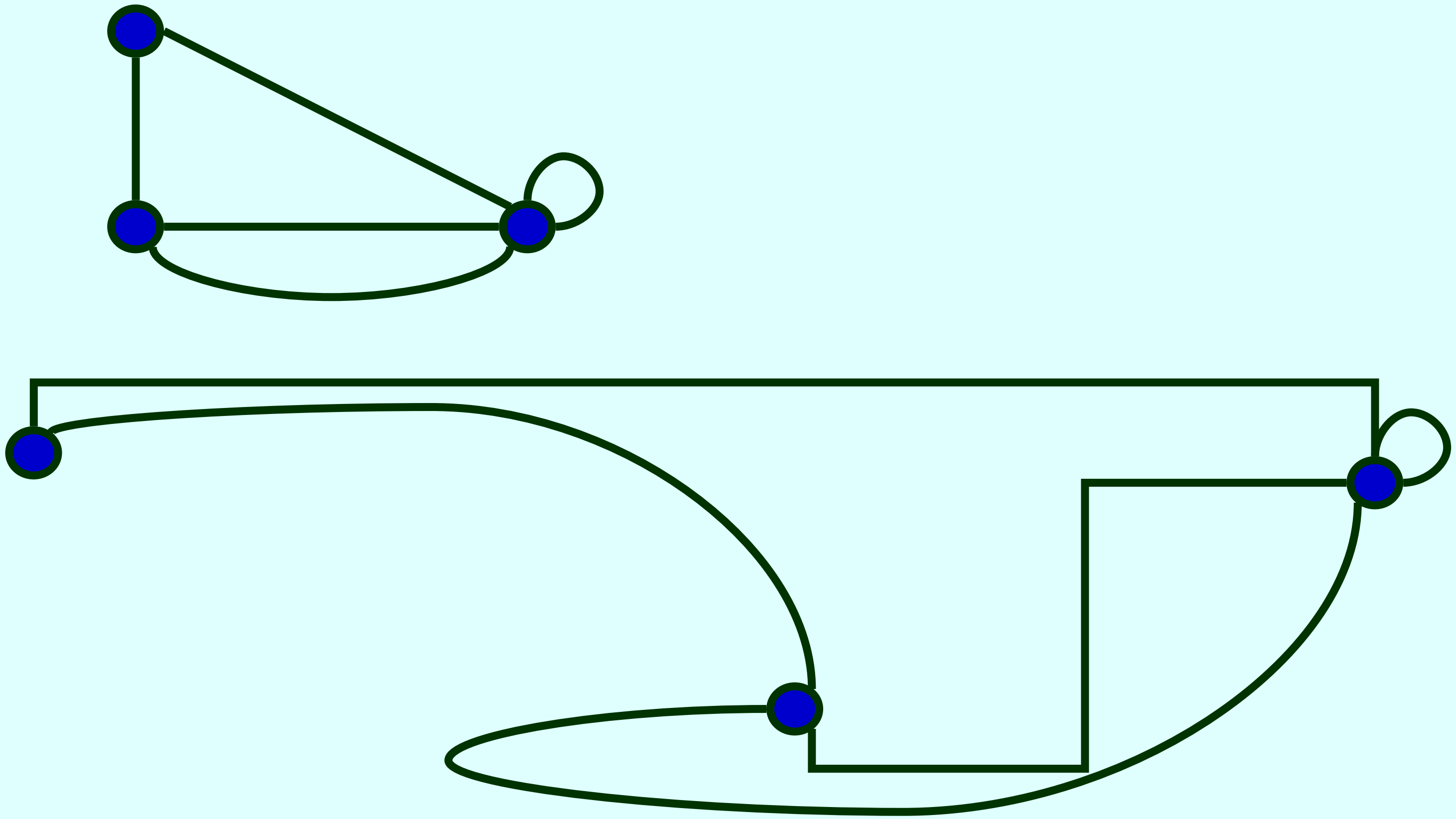


$\gamma(e_1)=\{ v_2, v_4 \}$
$\gamma(e_2)=\{ v_2, v_3 \}$
$\gamma(e_3)=\{ v_3, v_4 \}$
$\gamma(e_4)=\{ v_3, v_4 \}$
$\gamma(e_5)=\{ v_4 \}$

无向图与有向图

- 若无特殊说明，约定用 n 表示图 G 的顶点数，用 m 表示图 G 的边数，一个边数为 m 的 n 阶图可简称为 (n, m)-图
- 现实世界中的很多问题都可以表示为图，
  - 例如用顶点来表示城市，如果两个城市之间有火车可以直达，就用边将表示这两个城市的点连接起来，就形成了一个图
  - 再如将工厂表示为顶点，两个工厂之间若存在业务联系则用边将它们对应的顶点相连，就构成了工厂间的业务联系图

无向图与有向图



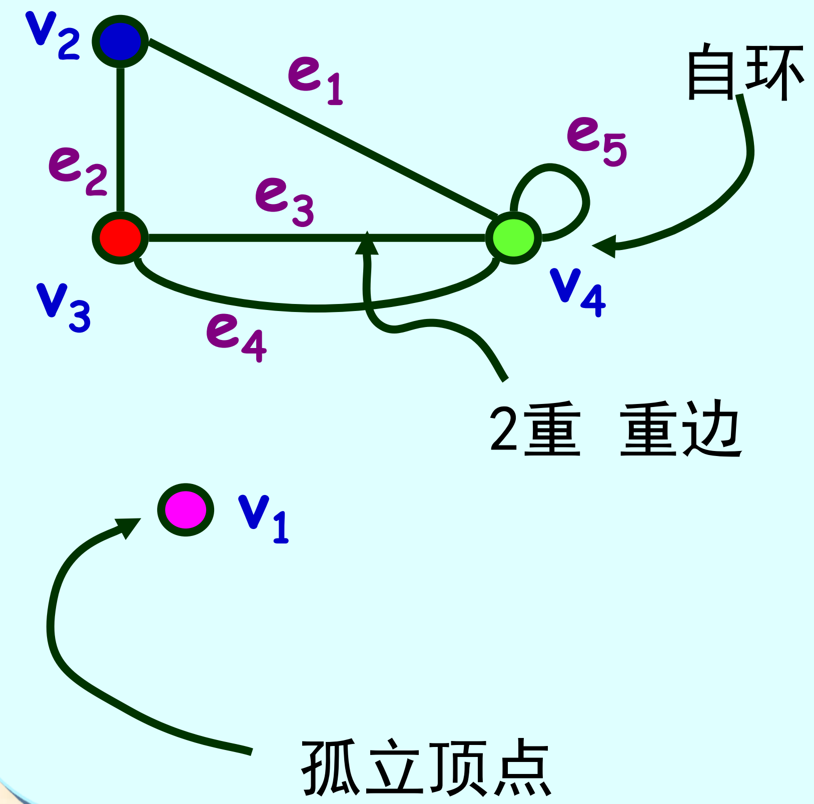
无向图与有向图

- 假设 $G=(V, E, \gamma)$ 为无向图，$e \in E$，若 $\gamma(e)=\{u, v\}$，则称 e 是 u 与 v 之间的一条边，称 u 和 v 是**相邻顶点（adjacent vertices）**，并称边 e 分别与 u 和 v **相关联**；若 $u=v$，则称 e 为一个**自环**或简称**环（loop）**
- 假设 $G=(V, E, \gamma)$ 为无向图，若 G 的两条边 e_1 和 e_2 都与同一个顶点关联，则称 e_1 和 e_2 是**邻接的（adjacent）**或**相邻的**
- 假设 $G=(V, E, \gamma)$ 为无向图，若 G 中关联同一对顶点（允许相同）的边多于一条，则称这些边为**重边**或**平行边（parallel edges）**，这些边的条数称作重边的**重数**

无向图与有向图

- 假设 $G=(V, E, \gamma)$ 为无向图，$v\in V$，顶点 v 的**度数**（**degree**）**deg(v)** 是 G 中与 v 关联的边的数目（自环在计度数时为2）。图 G 中最大的点度数和最小的点度数分别记为 $\Delta(G)$ 和 $\delta(G)$
- 假设 $G=(V, E, \gamma)$ 为无向图，G 中度数为零的顶点称为**孤立顶点**（**isolated vertex**）；图中度数为1的顶点称为**悬挂点**（**pendant vertex**），与悬挂点相关联的边称为**悬挂边**（**pendant edge**）；图中度数为 k 的顶点称为***k*度点**；图中度数为奇数的顶点称为**奇度点**，图中度数为偶数的顶点称为**偶度点**

无向图与有向图



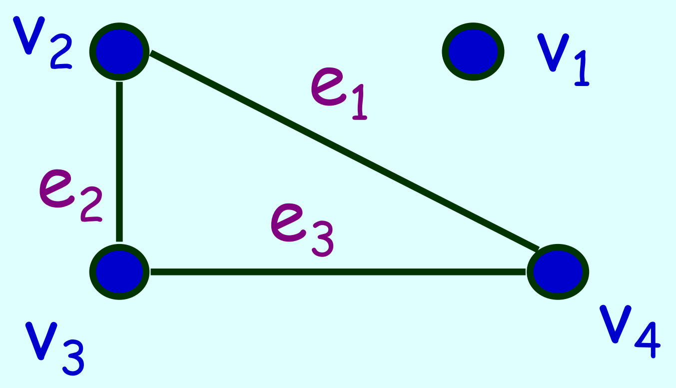
$\deg(v_3) = 3$
$\deg(v_4) = 5$
$\deg(v_1) = 0$

v_3 与 v_4 相邻

v_1 与 v_4 不相邻

无向图与有向图

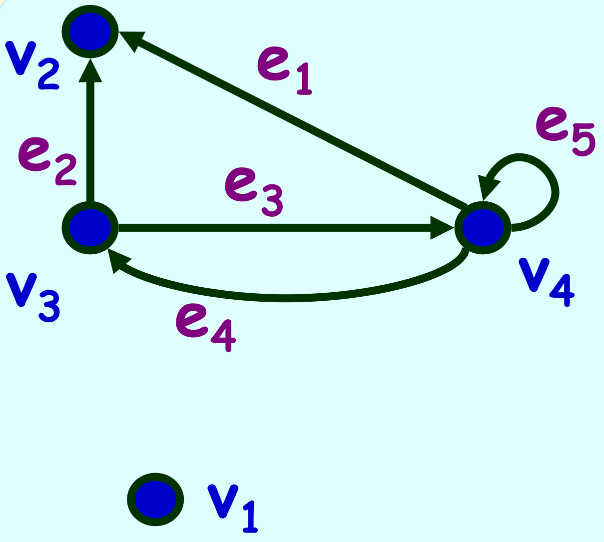
- 不存在自环和重边的无向图称为**简单图**
- 对于无向简单图而言，由于每条边可以使用顶点对唯一表示，因此可以用 $\gamma(e)$ 代表 e



无向图与有向图

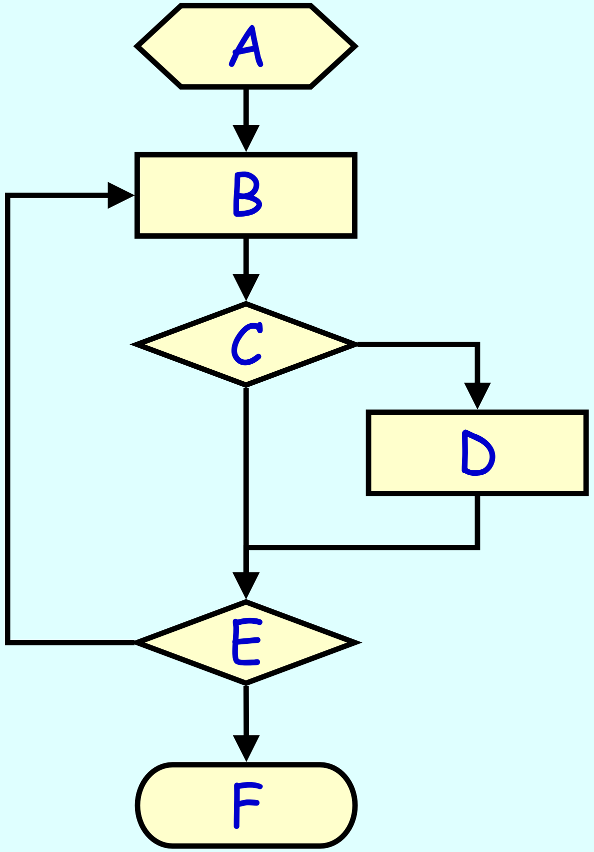
- 一个**有向图**（**directed graph, 或digraph**）G 指一个三元组 (V, E, γ)，其中
  - (1) $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ 是一个有限集合，称作**顶点集**，其元素称作**顶点**（**vertex/node/point**）或**结点**，$|V|$ 称作为 G 的**阶**；
  - (2) $E=\{e_1,e_2, \ldots, e_m\}$ 是一个有限集合，称作**边集**，其元素称作**边**（**edge/arc/line**）；
  - (3) γ 是 E 到 $V\times V$ 的一个函数，对于任意 $e\in E$，若 $\gamma(e)=(u, v)\in V\times V$，则 u 称作边 e 的**始点**，v 称作边 e 的**终点**

无向图与有向图



$\gamma(e_1)=(v_4, v_2)$
$\gamma(e_2)=(v_3, v_2)$
$\gamma(e_3)=(v_3, v_4)$
$\gamma(e_4)=(v_4, v_3)$
$\gamma(e_5)=(v_4, v_4)$

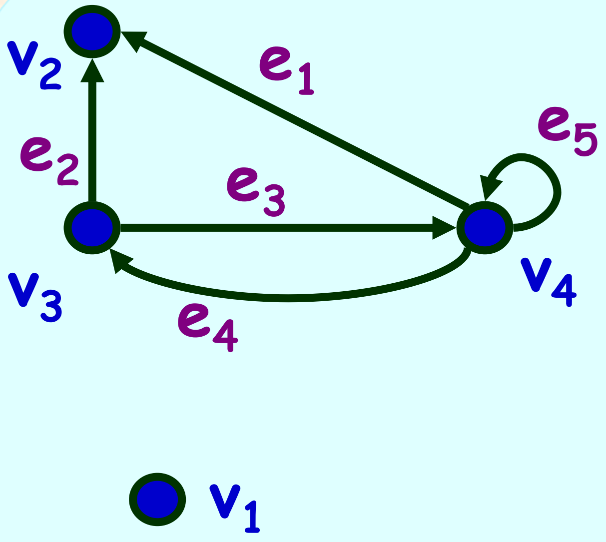
无向图与有向图



无向图与有向图

- 在有向图中，由于边存在方向性，因此点的度数的概念稍有不同。
- 假设 $G=(V, E, \gamma)$ 为有向图，$v\in V$，顶点 v 的**入度**（**in-degree**）$\deg^-(v)$ 是以 v 为终点的有向边的数目，**出度**（**out-degree**）$\deg^+(v)$ 是以 v 为始点的有向边的数目，顶点 v 的**度数** $\deg(v)=\deg^-(v)+\deg^+(v)$

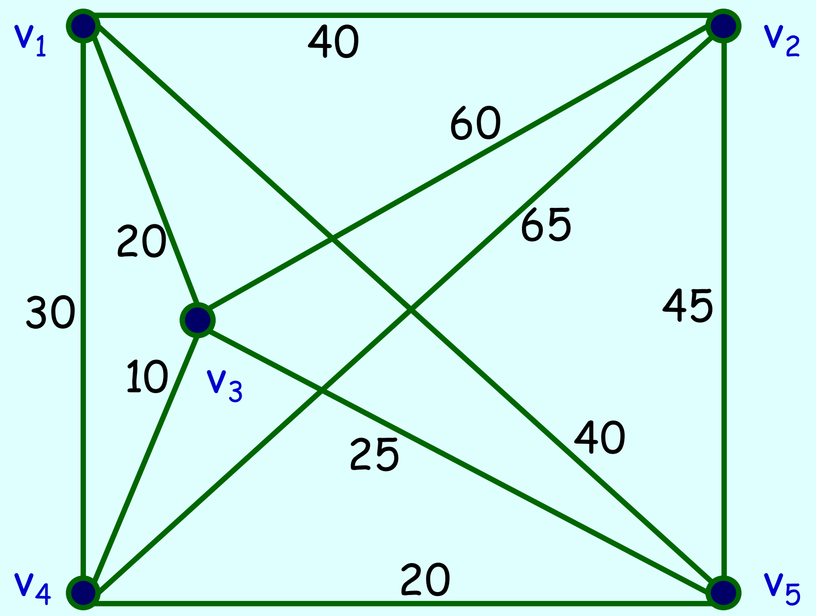
无向图与有向图



$\deg^+(v_3) = 2$
$\deg^-(v_3) = 1$
$\deg(v_3) = 3$

无向图与有向图

- 假设 $G=(V, E, \gamma)$ 为图，W 是 E 到 $\mathbb{R}$ 的一个函数，则称（G, W）是一个**赋权图**（**weighted graph**），对于$e\in E$，$W(e)$ 称作边 e 的**权重**（**weight**）或简称**权**



End