初等矩阵

定义：对单位阵进行一次初等变换后得到的矩阵称为初等矩阵。

三种初等行变换得到的初等矩阵分别为：

$$E(i,j) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$E(i(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & k & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$E(i, j(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & \\ & & & \ddots & \vdots & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

对单位阵作一次列变换得到的矩阵也包括在上面的三类矩阵之中。

初等矩阵的性质

1.

$$E(i, j)^T = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} = E(i, j)$$

$$\boxed{E^T(i, j) = E(i, j)}$$

$$E(i(k))^T = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & k & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{E^T(i(k)) = E(i(k))}$$

$$= E(i(k))$$

$$E(i, j(k))^T = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & & k & \cdots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} = E(j, i(k))$$

$$\boxed{E^T(i, j(k)) = E(j, i(k))}$$

初等矩阵的转置仍为同类型的初等矩阵.

2. $\left|E(i, j)\right| = -1$ $\quad$ $\left|E(i(k))\right| = k$ $\quad$ $\left|E(i, j(k))\right| = 1$

初等矩阵都是非奇异的.

初等矩阵与初等变换的关系

先看一个例子

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad E(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E(1,2)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$AE(1,2) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

行变换相当于左乘初等矩阵;

列变换相当于右乘初等矩阵.

问题

$$A \quad \rightarrow \quad B, 有: B = PA. \quad P = ?$$

初等列变换

$$A \quad \rightarrow \quad B, 有: B = AQ. \quad Q = ?$$

$$T_{行}(A_{m \times n}) = T_{行}(E_{m \times m})A_{m \times n}$$

$$T_{列}(A_{m \times n}) = A_{m \times n}T_{列}(E_{n \times n})$$