5. 向量的混合积

定义3 已知三向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ， 称数量 $(\vec{a}\quad\vec{b})\ \vec{c}$ 为 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 的**混合积**, 记作 $[\vec{a}\ \ \vec{b}\ \ \vec{c}]$

几何意义： 记 $\theta = (\vec{a}\times\vec{b},\ \vec{c})$

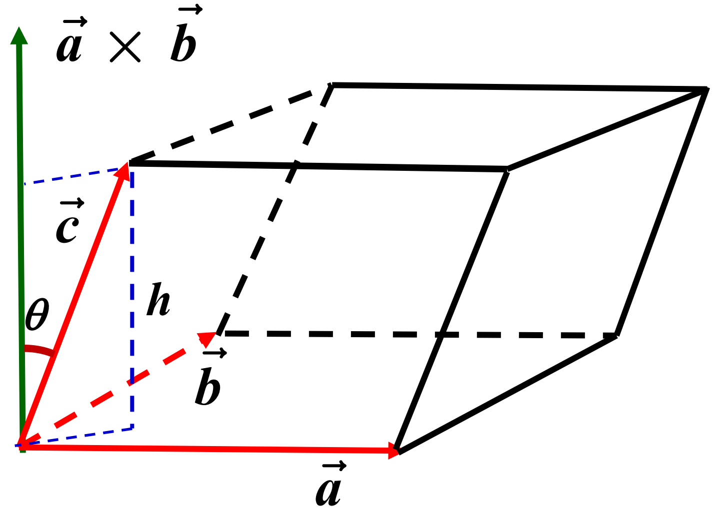
θ 为锐角时,

$$\left(\vec{a}\quad\vec{b}\right)\ \vec{c} = \left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|\ (\vec{c})_{\vec{a}\times\vec{b}}$$

$$= \left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|\ \left\|\vec{c}\right\|\cos\ \theta\ = V_{\text{六面体}}$$

θ 为钝角时,

$$-\left(\vec{a}\quad\vec{b}\right)\ \vec{c} = V_{\text{六面体}}$$



混合积的坐标表示

设 $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$,

$\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$,

则 $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = (\vec{a} \quad \vec{b})\ \vec{c}$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z$$

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

6. 混合积的性质

（1） $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}.$

即 $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}]=[\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{b}]$

(2) 互换混合积中任意两个向量的位置，则混合积变号，

例如，$[\vec{b}\ \vec{a}\ \vec{c}]=-[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$

(3) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=0.$