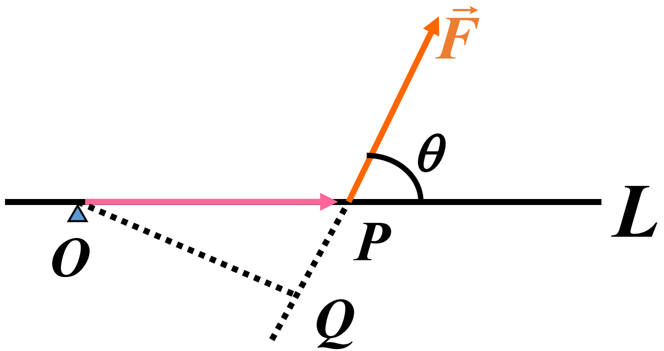
3. 向量积（外积、叉积）

实例 设 O 为一根杠杆 L 的支点，有一力 $\vec{F}$ 作用于这杠杆上 P 点处 .力 $\vec{F}$ 与 OP 的夹角为 θ,力 $\vec{F}$ 对支点 O 的力矩是一向量，其模



$$\|\vec{M}\| = |OQ|\,\|\vec{F}\|$$
$$= \|\overrightarrow{OP}\|\,\|\vec{F}\|\sin\theta$$

$\vec{M}$ 的方向垂直于 OP 与 $\vec{F}$ 所决定的平面，指向符合右手系 。

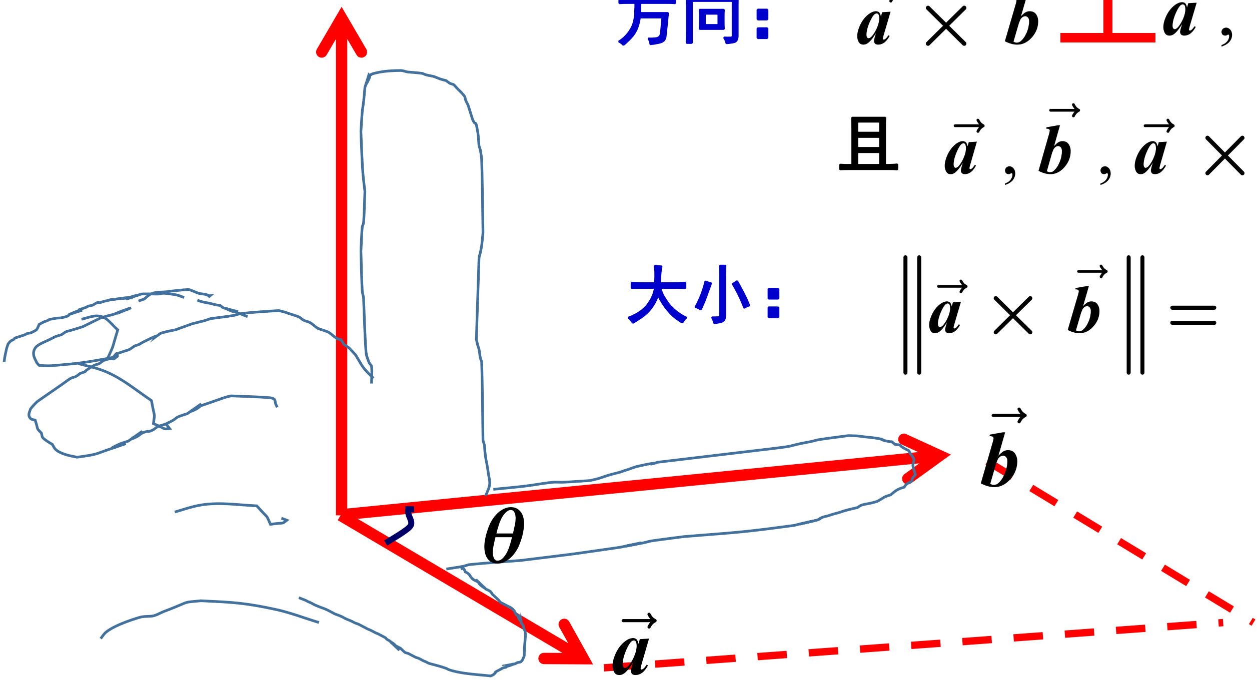
定义2（向量积） $\vec{a} \times \vec{b}$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

方向： $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$， $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$

且 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ 构成右手系.

大小： $\left\| \vec{a} \times \vec{b} \right\| = \left\| \vec{a} \right\| \left\| \vec{b} \right\| \sin\theta$



向量积的基本性质

（1） $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}.$

（2）分配律： $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}.$

$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}.$

（3）若λ为数： $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b}).$

关于向量积的说明：

(1) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}.$ $(\because\ \theta=0\Rightarrow\sin\theta=0)$

(2) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\ \Leftarrow\Rightarrow\vec{a}\,//\,\vec{b}\ (\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0})$

向量积的坐标表示

设 $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k})$$

$$\because \quad \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0},$$

$$\because \quad \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j},$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}.$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$$

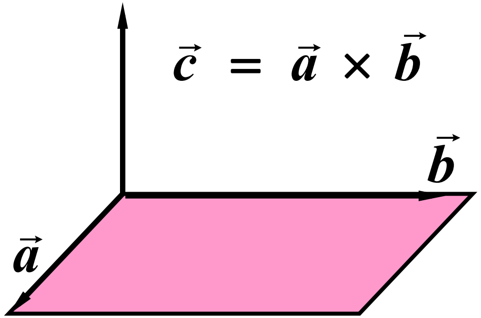
$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

4. 向量积的应用

（1）求平行四边形的面积

$\|\vec{a}\times\vec{b}\|$表示以 $\vec{a}$和$\vec{b}$为邻边的平行四边形的面积 .



（2）判定向量共线

$$a_x : b_x = a_y : b_y = a_z : b_z$$

$$\vec{a} \,//\, \vec{b} \Longleftrightarrow \sin(\vec{a},\vec{b})=0$$

$$\Longleftrightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}. \quad (\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0})$$

$$\Longleftrightarrow a_y b_z - a_z b_y = a_z b_x - a_x b_z = a_x b_y - a_y b_x = 0$$

$$\Longleftrightarrow a_x : b_x = a_y : b_y = a_z : b_z \Longleftrightarrow \vec{a}=\lambda\vec{b}$$

（3）求与两个不共线的向量都垂直的向量