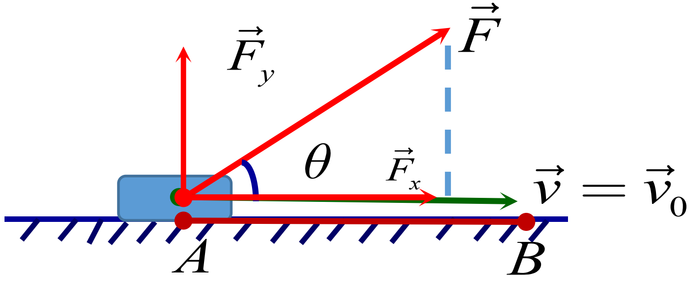
1. 数量积（内积、点积）

例： 常力沿直线做功

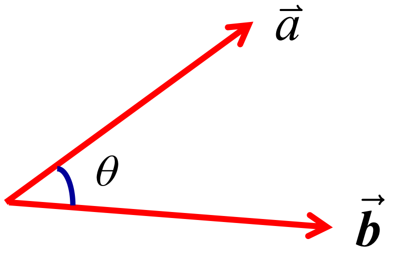
$$W = \left\|\vec{F}_x\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\vec{F}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cos\theta,$$

其中 $\overrightarrow{AB} = \vec{v}_0 t$.



定义1（数量积）

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \cos\theta = \|\vec{a}\| \left(\vec{b}\right)_{\vec{a}} = \|\vec{b}\| \left(\vec{a}\right)_{\vec{b}}$$



性质: （1） $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

（2） $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

（3） $\left(k\vec{a}\right) \cdot \vec{b} = k\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$

（4） $\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2 \geq 0$ 且 $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

数量积的坐标表示

设 $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k})$$

$\because \vec{i}\perp\vec{j}\perp\vec{k}$, $\therefore \vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0$,

$\because \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$,

$\therefore \vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1.$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$$

数量积的坐标表达式

2. 数量积的应用

(1) 求向量的模

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2}}$$

(2) 求非零向量间的夹角

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\ \|\vec{b}\|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2}}\sqrt{b_x^{\ 2} + b_y^{\ 2} + b_z^{\ 2}}}$$

$$\Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$

(3) 求射影

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{b}\|(\vec{a})_{\vec{b}} = \|\vec{a}\|(\vec{b})_{\vec{a}}$$

$$\Rightarrow (\vec{a})_{\vec{b}} = \frac{\vec{a}\quad\vec{b}}{\|\vec{b}\|}, \qquad (\vec{b})_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}\quad\vec{b}}{\|\vec{a}\|}$$