有限状态自动机

Finite State Automata

刘 铎

liuduo@bjtu.edu.cn

有限状态自动机

- （确定性）有限状态自动机（finite state automata，FSA）是一种计算模型，表示有限个状态以及在这些状态之间的转移行为，最终判断一系列行为是否符合“可接受”的要求

- 有限状态自动机指五元组$M=(S, I, f, A, S_0)$，其中
  - S 是一个有限的状态集合
  - I 是一个有限的输入符号集合
  - f 表示状态的转换是从 $S\times I$ 到 S 的函数
  - 接受状态的非空集合 $A\subseteq S$
  - 初始状态 $S_0\in S$

有限状态自动机

- 例
  - $M=(\{S_0, S_1\}, \{a, b\}, f, \{S_1\}, S_0)$ 构成一个有限状态自动机，其中
  - $f(S_0, a) = S_0$，$f(S_0, b) = S_1$
    $f(S_1, a) = S_1$，$f(S_1, b) = S_0$
- M 可接受的语言 $L(M)$ 为包含奇数个 b 的 a-b 串

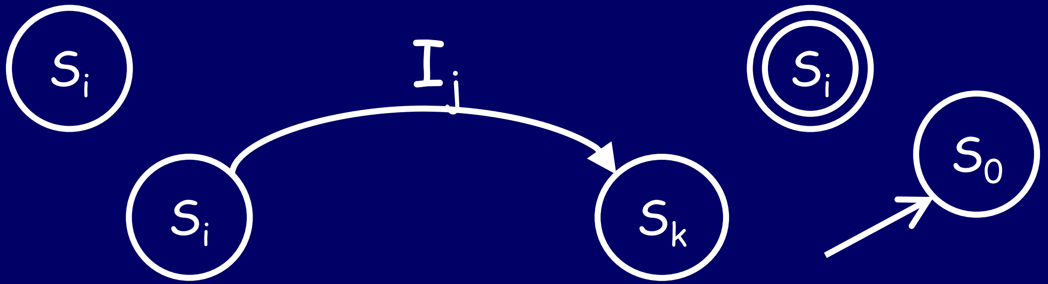
有限状态自动机

- 例
  - $M=(\{S_0, S_1\}, \{a, b\}, f, \{S_1\}, S_0)$ 构成一个有限状态自动机，其中
  - $f(S_0, a) = S_0$， $f(S_0, b) = S_1$
    $f(S_1, a) = S_1$， $f(S_1, b) = S_0$

	f	
S \ I	a	b
S_0	S_0	S_1
S_1	S_1	S_0

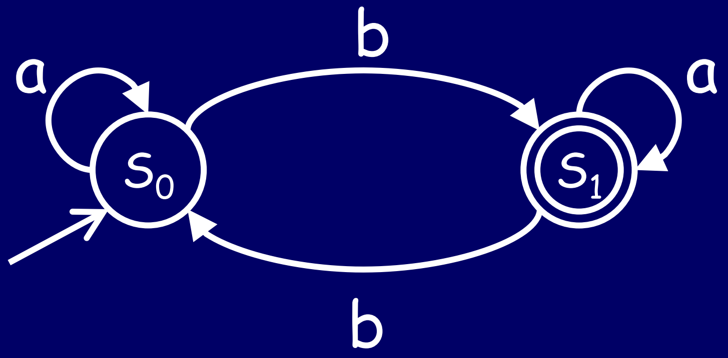
有限状态自动机

- 有限状态自动机的状态转移图是一个有向图
  - 顶点表示状态集合 S 中各个元素
  - 通过在有向边上标明输入符号表示 f
    - 例如图中表示"$S_k = f(S_i, I_j)$"
  - 接受状态用双圈表示
  - 使用一个箭头指向表示开始状态的顶点



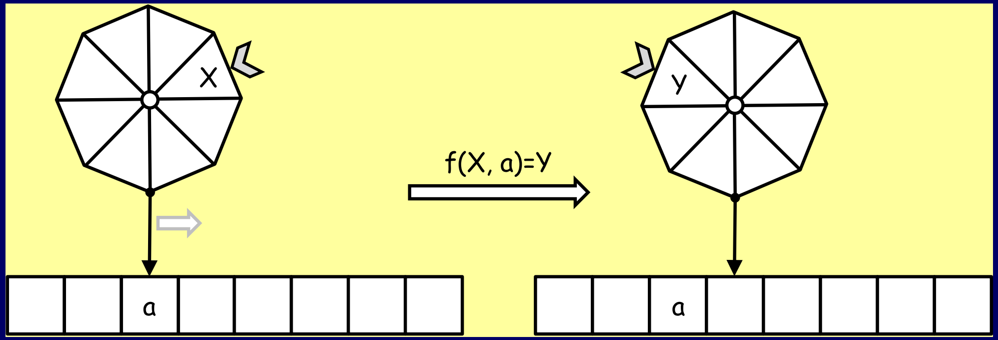
有限状态自动机

- 例
  - $M=(\{S_0, S_1\}, \{a, b\}, f, \{S_1\}, S_0)$ 构成一个有限状态自动机，其中
  - $f(S_0, a) = S_0$， $f(S_0, b) = S_1$
    $f(S_1, a) = S_1$， $f(S_1, b) = S_0$



有限状态自动机

- 可以把有限状态自动机 $M=(S, I, f, A, S_0)$ 看作一台机器，读写头从最左端开始自左而右逐位读入 x，然后由当前状态和当前读入的位，根据 f 得到下一个状态，读写头向右移动一位，直到读完 x 的所有位，最后判断最终状态是否属于可接受状态集合。如果最终状态属于可接受状态集合，则称 M **可接受** x。



有限状态自动机

- 可以给出一个形式化的定义：

- 假设 $M=(S, I, f, A, S_0)$ 是一个有限状态自动机， $x = x_1x_2\ldots x_n \in I^n$ 。定义

$$f^{(0)}(x) = S_0,\quad f^{(k+1)}(x) = f(f^{(k)}(x), x_{k+1}),$$

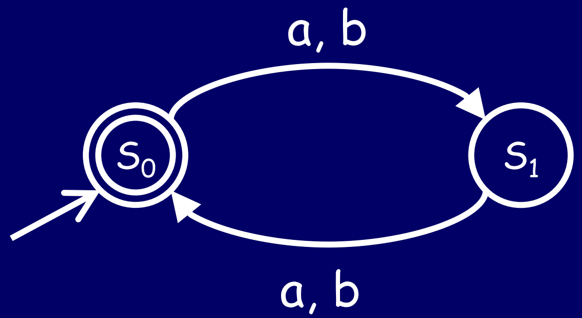
其中 $0\le k\le n-1$，如果 $f^{(|x|)}(x)\in A$，则称 x **可以被M接受**。

- I 上所有可被 M 接受的串全体记作 $Ac(M)$，也称作 M **可接受的（定义的）语言**，记作 $L(M)$

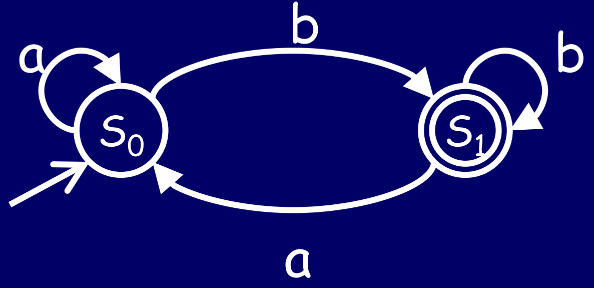
- 从直观上讲，x 可以被 M 接受是指：在 M 的状态转换图中，从顶点 S_0 出发，存在一条到一个接受状态顶点的道路，途经的各条有向边上的符号之连接恰好是 x

有限状态自动机

- 例
  - 接受所有偶数长度的串的有限状态自动机

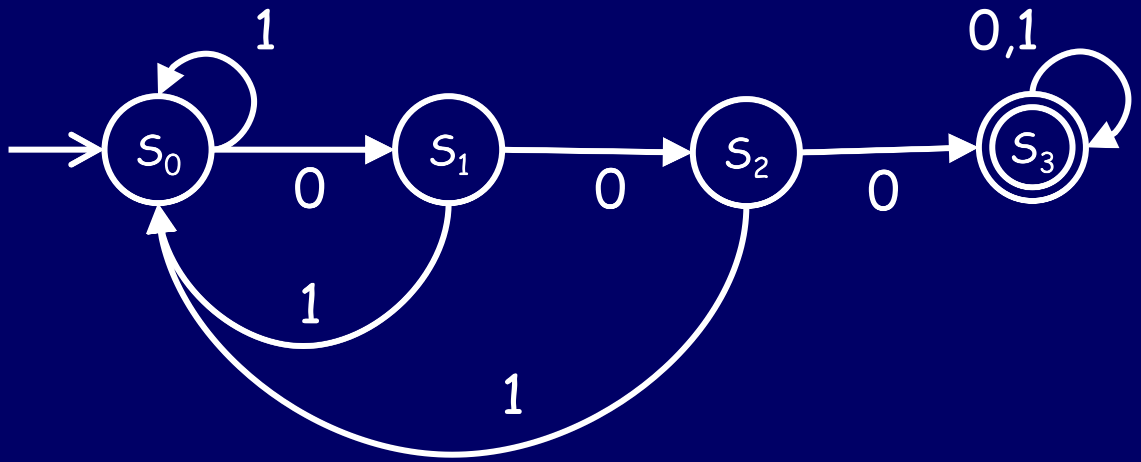


  - 接受所有以“*b*”结尾的串的有限状态自动机



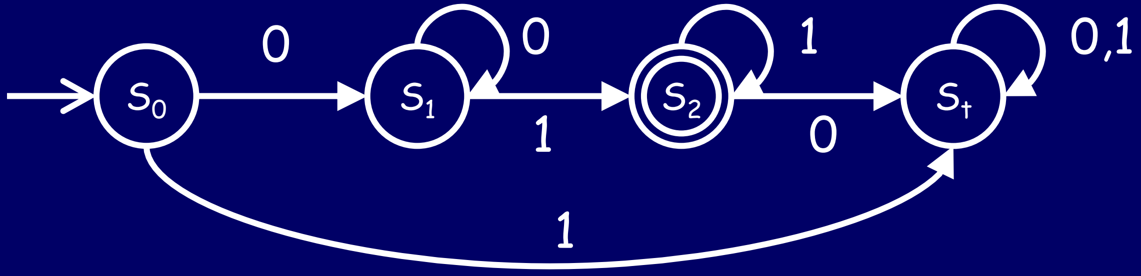
有限状态自动机

- 例　构造一个有限状态自动机*M*，它接受的语言为$\{\, x000y \mid x, y \in \{0, 1\}^* \,\}$



有限状态自动机

- 例　构造一个有限状态自动机M，它接受的语言为$\{ 0^n1^m \mid n, m\geq 1 \}$



有限状态自动机

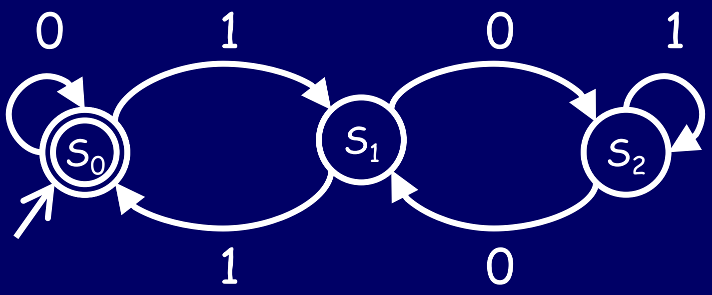
- 例
  - 构造一个有限状 言为 { x | $x \in \{0, 1\}^*$，且 x 能被3整除 }
- 解
  - 假设 $x = b_1 b_2 \ldots$ 入 x是
  - 当M在读入 b_i 位形成的值 $y = b_1 b_2 \ldots b_{i-1}$（最初情况值为0），在读过 b_i 后，形成的值为 $2y+b_i$
  - 于是 y 和 $2y+b_i$ 模3的余数之间存在如表所示关系

y mod 3	b_i	$2y+b_i$ mod 3
0	0	0
0	1	1
1	0	2
1	1	0
2	0	1
2	1	2

有限状态自动机

- 例
  - 构造一个有限状态自动机*M*，它接受的语言为 $\{\, x \mid x \in \{0, 1\}^* ,$ 且当把 x 看成二进制数时，x 能被3整除 $\}$

y mod 3	b_i	$2y+b_i$ mod 3
0	0	0
0	1	1
1	0	2
1	1	0
2	0	1
2	1	2



End