有序对与笛卡儿积

ordered pairs & Cartesian product

刘铎

liuduo@bjtu.edu.cn

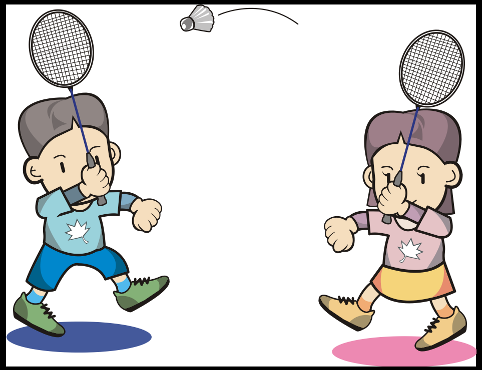
有序对

- 四名学生——{张, 白, 宋, 方}
- 三门课程——{离散数学, 数据结构, 计算机网络}
- 可以使用什么样的数学结构来表示学生选课的情况？

- 一个选择
  - 集合
  - 例如{张, 离散数学}

有序对

- 再考虑另一个问题：
  - 他们四人进行单循环羽毛球赛，
  - 希望使用一种数学结构来表示各场比赛的胜负关系。
  - 使用集合——
    - {白, 方}和{方, 白}
    - 谁是胜者？
  - 需要在数学结构中体现出序 (**order**)



有序对

- 由两个对象 a, b 按照一定次序组成的二元组称为一个**有序对**或**序偶**（**ordered pair**），记作 (a, b)，其中 a 是它的**第一元素**或**第一座标**，b 是它的**第二元素**或**第二座标**。
  - $(a, b) = (c, d)$ 当且仅当 $a = c$ 且 $b = d$
- 例：
  - 平面直角坐标系上，每一个点的坐标都是一个有序对。

笛卡尔积

- 设 A、B 为两个集合，定义它们的**笛卡尔积**（**Cartesian product**）$A \times B$ 为

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ 且 } b \in B \},$$

- 它也称作**直积**（**direct product**）。
  - $A \times \emptyset = \emptyset \times B = \emptyset$
  - 一般来讲 $A \times B \neq B \times A$
- 例：
  - 平面直角坐标系就是笛卡尔积 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

笛卡尔积

- 所有可能的选课情况：
  - {张, 白, 宋, 方} × {离散数学, 数据结构, 计算机网络} =

{(张, 离散数学), (张, 数据结构), (张, 计算机网络)
(白, 离散数学), (白, 数据结构), (白, 计算机网络),
(宋, 离散数学), (宋, 数据结构), (宋, 计算机网络),
(方, 离散数学), (方, 数据结构), (方, 计算机网络) }

笛卡尔积

- 定理

  若 A、B 都是有限集，则 $A\times B$ 也是有限集，且

$$|A\times B| = |A| \times |B|$$

- 证明：

  考虑$A\times B$中的每一个元素(a, b)的产生方式，由乘法法则即得。

笛卡尔积

- 定理

　　笛卡儿积对于并或交运算满足分配律，即若A、B、C都是集合，则

  - $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$;
  - $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$;
  - $(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$;
  - $(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$。

笛卡尔积

- 笛卡尔积的推广：

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$$

$$= \{ (a_1, a_2, \ldots, a_m) \mid a_i \in A_i,\ i = 1, 2, \ldots, m \}$$

End