

行列式的性质

设 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 则转置行列式为

$$D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质1: $D = D^T$

由行列式的定义即可证明这条性质。

在行列式中，行和列的位置是对称的，
对行成立的，对列也成立。

因此下面只介绍关于行列式的行的性质。

性质2: 互换两行, 行列式变号。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论：若行列式中有两行元素完全相同，
则行列式为零。

设 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式，则有：

$$a_{j1}A_{i1} + a_{j2}A_{i2} + \cdots + a_{jn}A_{in} = 0 \quad (i \neq j)$$

$$a_{1j}A_{1i} + a_{2j}A_{2i} + \cdots + a_{nj}A_{ni} = 0 \quad (i \neq j)$$

$$a_{j1}A_{i1} + a_{j2}A_{i2} + \cdots + a_{jn}A_{in} = \begin{cases} D, & (i = j). \\ 0, & (i \neq j). \end{cases}$$

$$a_{1j}A_{1i} + a_{2j}A_{2i} + \cdots + a_{nj}A_{ni} = \begin{cases} D, & (i = j). \\ 0, & (i \neq j). \end{cases}$$

这是非常有用的两个公式，应该记住。

性质3: 用数 k 乘行列式某一行中所有元素, 等于用 k 乘此行列式。即:

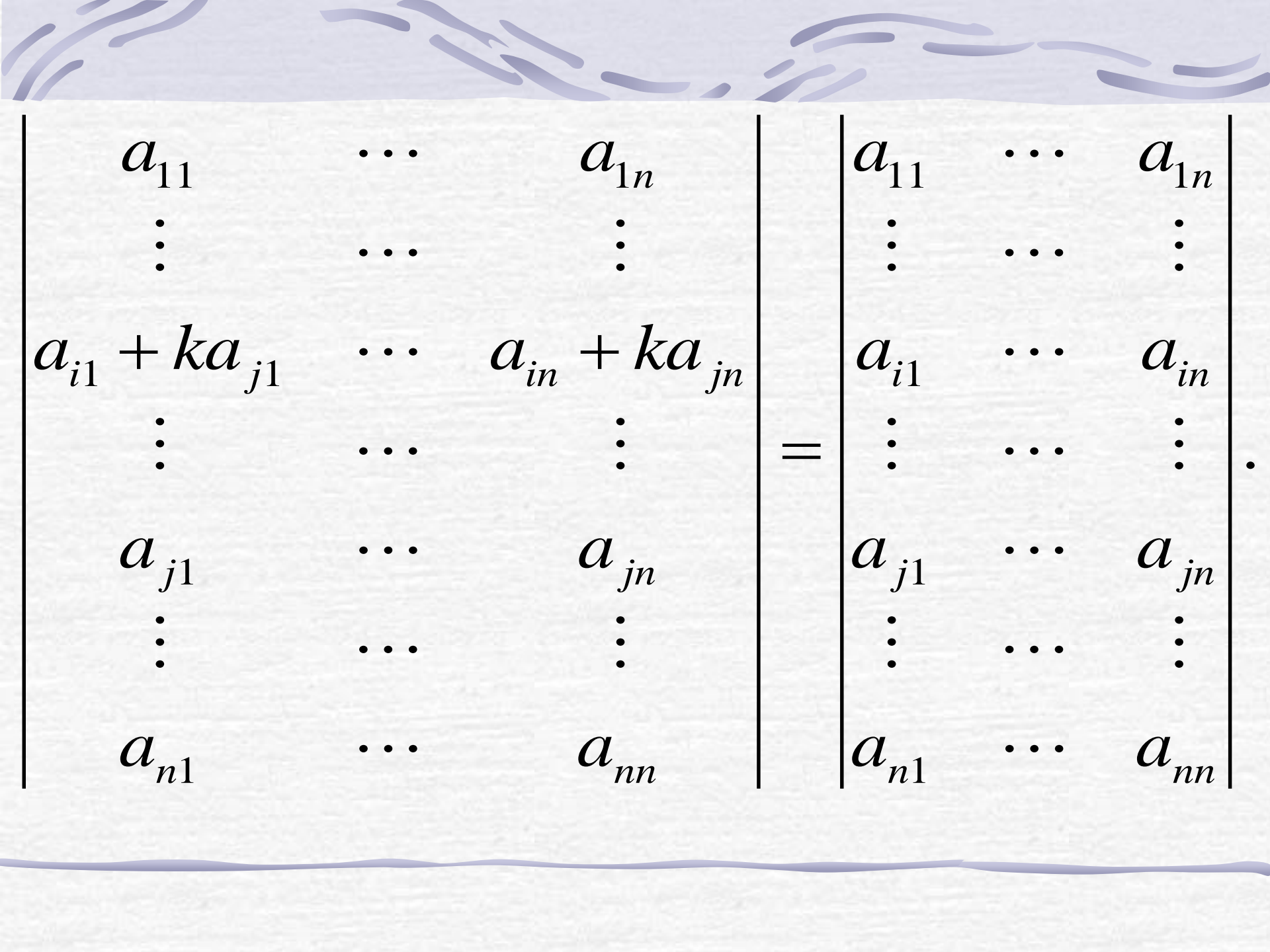
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论：某一行的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面。

$$\begin{vmatrix} -8 & 4 & -6 \\ 2 & 1 & -1 \\ 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -4 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \begin{vmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 8 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

性质4：行列式某一行元素加上另一行对应元素的 k 倍，行列式的值不变。即：



$$\left| \begin{array}{ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} + ka_{j1} & \cdots & a_{in} + ka_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right| .$$

性质5：若行列式某一行的元素是两数之和，则行列式可拆成两个行列式的和。

推论：若行列式某一行的元素都是 m 个元素的和，则行列式可以写成 m 个行列式的和。

性质2: 互换两行, 行列式变号。

性质3: 用数 k 乘行列式某一行中所有元素, 等于用 k 乘此行列式。

性质4: 行列式某一行元素加上另一行对应元素的 k 倍, 行列式的值不变。

最重要的三个性质。