排列（一）

Permutations (I)

刘铎

liuduo@bjtu.edu.cn

排列

- 问题：设集合 S 包含 n 个元素，从 S 中选取 r 个元素有多少种取法？
- 根据取出的元素是否允许重复、取出的过程是否有序可以将该问题分为四个子类型：

	不重复选取	重复选取
有序选取	排列	可重排列
无序选取	组合	可重组合

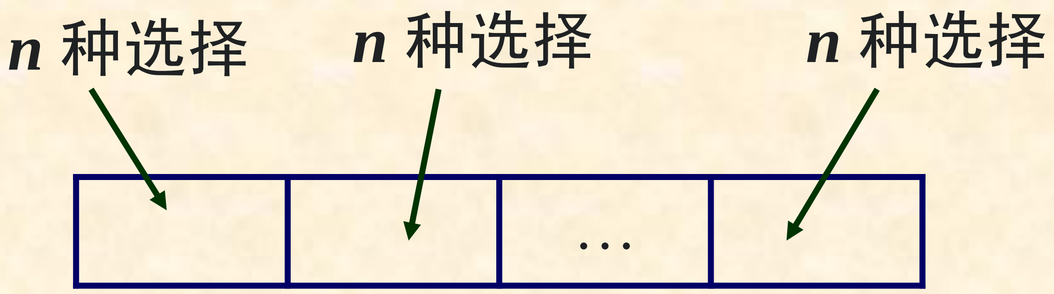
排列

- 从 n 个不同的对象中，取 r 个可重复的对象，按次序排列，称为**n取r的可重排列**。
- 此也即当 $|A|=n$ 时，A^* 中长为 r 的串的个数。

排列

- 定理1

  n 取 r 的可重排列数目为 n^r 。



排列

- 从 n 个不同的对象中，取 r 个不重复的对象，按次序排列，称为 **n 取 r 的排列（permutation of n objects taken r at a time）**。n 取 r 排列的全体构成的集合用 $\mathbf{P}(n, r)$表示，排列的个数用 $P(n, r)$ 表示；
- 当 $r = n$ 时称为**全排列**或**置换（permutation）**。
- 此也即当 $|A|=n$ 时，A^* 中长为 r 且各项彼此不同的串的个数。

排列

- A = { a, b, c, d }
- A 上的所有4取3的排列是：

abc,	bac,	acb,	bca,	cab,	cba,
abd,	bad,	adb,	bda,	dab,	dba,
bcd,	bdc,	cbd,	cdb,	dbc,	dcb,
acd,	adc,	cad,	cda,	dac,	dca

排列

- A = { a, b, c, d }
- A 上的所有全排列是:

abcd, abdc, acbd, acdb, adbc, adcb,

bacd, badc, bcad, bcda, bdac, bdca,

cabd, cadb, cbad, cbda, cdab, cdba,

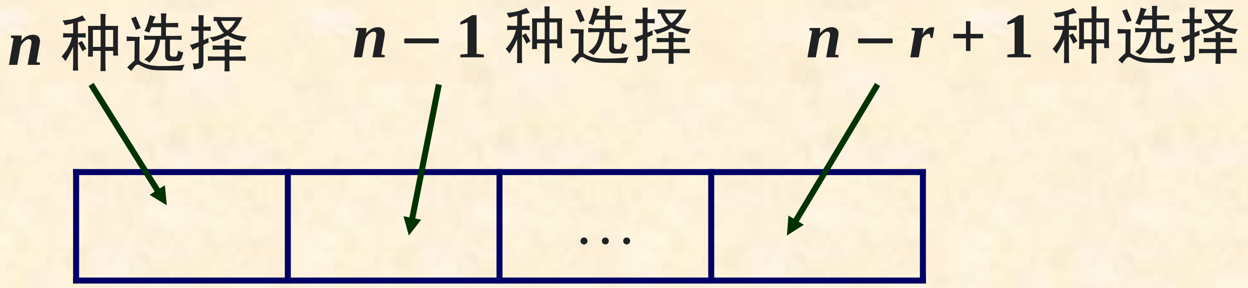
dabc, dacb, dbac, dbca, dcab, dcba

排列

- 定理2

$n < r$ 时， $P(n, r) = 0$；

$n \geq r$ 时， $P(n, r) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)$。



排列

- 全排列经常被理解为是包含某个有限集合中的所有元素一次且仅一次的序列。
- 设 A 是集合，如果$|A|=n$，则 A 的全排列的个数为

$$n \times (n-1) \times \ldots \times 1$$

这个值也经常被写作 $n!$，称作n 的**阶乘**（**factorial**）。

排列

- 可以给出 ***P*(*n*, *r*)** 的一个更紧凑的表达式：

$$P(n,r)=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-r+1)$$

$$=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-r+1)\cdot(n-r)\cdot(n-r-1)\cdot\cdots\cdot2\cdot1}{(n-r)\cdot(n-r-1)\cdot\cdots\cdot2\cdot1}$$

$$=\frac{n!}{(n-r)!}$$

排列

- 例
  - 一个社团共有 10 名成员，从中选出一名主席、一名副主席、一名书记，则共有 $P(10, 3)=720$ 种方法

排列

- 例
  - 如果有4个男孩和4个女孩坐成一排，每个人的旁边都可以随便坐，那么共有多少种坐的方式？

$8!$

排列

- 例
  - 如果有4个男孩和4个女孩坐成一排，每个人旁边都只能坐着异性，那么共有多少种坐的方式？

$$2\times4!\times4!$$

B	G	B	G	B	G	B	G

G	B	G	B	G	B	G	B

下一讲 ——

排列(二)