Cauchy收敛准则

数列收敛的意义

定义: 对数列$\{x_n\}$, 如果

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ s.t.\ \ |x_n - x_m| < \varepsilon,\ \ n, m > N,$$

则称$\{x_n\}$为一个Cauchy列.

另一种描述

对数列$\{x_n\}$, 如果

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ s.t.$$
$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon,\ \ \forall n > N,\ \forall p \in \mathbb{N},$$

则称$\{x_n\}$为一个Cauchy列.

定理[Cauchy收敛准则]

$\boxed{\{x_n\}\text{收敛} \Leftrightarrow \{x_n\}\text{是一个Cauchy列.}}$

证明:

(1)必要性. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 往证$\{x_n\}$Cauchy.

即往证: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N\ \ s.t.\ |x_n - x_m| < \varepsilon,\ \ n, m > N.$

现在, 对给定的$\varepsilon > 0$, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,

所以就$\dfrac{\varepsilon}{2}$来说, $\exists N\ \ s.t.\ |x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2},\ \ n > N.$

从而,$n, m > N$时,

$$|x_n - x_m| \leqslant |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

所以$\{x_n\}$Cauchy.

定理[Cauchy收敛准则]

$\boxed{\{x_n\}\text{收敛} \Leftrightarrow \{x_n\}\text{是一个Cauchy列.}}$

(2)充分性.　　设$\{x_n\}$Cauchy, 往证$\{x_n\}$收敛.

其思路是:

$\{x_n\}$Cauchy $\Rightarrow$ $\{x_n\}$有界 $\Rightarrow$ $\{x_n\}$有聚点.

然后证$\{x_n\}$的聚点唯一, 其即为数列的极限.

由于用到聚点原理, 超出本课程范围, 此段证明从略.