

二元关系

Relations

刘 铎

liuduo@bjtu.edu.cn



二元关系

- 实际的选课情况只是笛卡尔积
 $\{\text{张, 白, 宋, 方}\} \times \{\text{离散数学, 数据结构, 计算机网络}\}$
的一部分。
- 在羽毛球比赛中,
 - 不可能出现(张, 张)
 - 也不可能同时出现(张, 白)和(白, 张)



二元关系

- “关系”是一个基本而且普遍的概念。
- 数学上讲——
- 假设 A 、 B 是集合， $A \times B$ 的子集 R 称为 A 到 B 的一个二元关系，简称为关系 (relation)。



二元关系

- 若 $R \subseteq A \times B$, 当 $(a, b) \in R$ 时, 称 a 与 b 具有关系 R (a is related to b by R) , 记为 aRb ;
- 若 $(a, b) \notin R$, 则称 a, b 不具有关系 R , 记为 $a \not R b$ 。
- 如果 $A=B$ 则称 R 为 A 上的一个二元关系。



二元关系

- 例:

- $A = \{1, 2, 3, 4\}$

- $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (3, 2), (3, 4)\}$

- “选课” 的例子:

- $R = \{(张, 数据结构), (张, 离散数学), (白, 数据结构), (方, 计算机网络)\}$

- $\subseteq \{张, 白, 宋, 方\} \times \{离散数学, 数据结构, 计算机网络\}$

- “羽毛球赛” 的例子:

- $\{(张, 白), (宋, 张), (张, 方), (白, 宋), (方, 白), (宋, 方)\}$



二元关系

- 对于任意集合 A ，可以在其幂集 $\mathcal{P}(A)$ 上定义包含关系为：

$$R_{\subseteq} = \{ (x, y) \mid x \in \mathcal{P}(A) \wedge y \in \mathcal{P}(A) \wedge x \subseteq y \}$$

- 假设 A 是非零整数集的任一子集，则可以定义 A 上的整除关系为：

$$D_A = \{ (x, y) \mid x, y \in A \text{ 且 } x \mid y \}$$

- 假设 B 是实数集的任一子集，则可以定义 B 上的小于等于关系为：

$$L_B = \{ (x, y) \mid x, y \in A \text{ 且 } x \leq y \}$$



恒等关系

- 假设 A 是任一个集合，则可定义 A 上的恒等关系 (equality relation) 为：
 $I_A = \{ (a, a) \mid a \in A \}$ 。
- 即 $(a, b) \in I_A$ 当且仅当 $a = b$ 。

二元关系



- 思考

- 如果 $|A|=n$, 那么可以在 A 上定义多少个不同的关系?

- $R \subseteq A \times A$

- $|\mathcal{P}(A \times A)| = 2^{|A \times A|}$

- $|A \times A| = |A| \times |A| = n^2$





二元关系

- 假设 A 、 B 是集合， $R \subseteq A \times B$ 是 A 到 B 的一个二元关系， $C \subseteq A$ ，则定义关系 R 在集合 C 上的限制（restriction of R to C ）为集合

$$\{ (a, b) \mid (a, b) \in R \text{ 且 } a \in C \},$$

记之为 $R|_C$ 。

End

