# 通信系统原理 Project

Yinghui

# 1 问题描述

对于 2FSK, 在的数字通带传输系统中加性高斯信道条件下, 用 MATLAB 仿真采用相干解调与非相干解调接收时的误码率, 并与理论结果进行比较.

# 2 基本原理

## 2.1 2FSK

2FSK 的两个信号如下:

$$s_1(t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{T_b}}\cos(2\pi f_1 t + \phi_1), \quad 0 \le t < T_b, \tag{1}$$

$$s_2(t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{T_b}}\cos(2\pi f_2 t + \phi_2), \quad 0 \le t < T_b, \tag{2}$$

其中 $\mathcal{E}_b$ 为 $s_1(t), s_2(t)$ 的能量, $f_1 = k_1/(T_b), f_2 = k_2/(T_b)$, $k_1, k_2$ 为正整数.(由于此处相位不一定一致)

其对应的概率为 $p_1, p_2$, 并且 $p_1 + p_2 = 1$.

对应的基信号为:

$$\varphi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T_b}}\cos(2\pi f_1 t + \phi_1), \quad 0 \le t < T_b, \tag{3}$$

$$\varphi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T_b}}\cos(2\pi f_2 t + \phi_2), \quad 0 \le t < T_b, \tag{4}$$

故原信号对应的矢量如下:

$$\mathbf{s_1} = (\sqrt{\mathcal{E}_b}, 0), \tag{5}$$

$$\mathbf{s_1} = (0, \sqrt{\mathcal{E}_b}), \tag{6}$$

## 2.2 相干解调

### 2.2.1 基本框图

相干解调的主要结构如下图 (1) 所示, 其中由于锁相环 (PLL) 的实现较难, 故在此处认为估计的相位就是为实际的相位, 也就是 $\hat{\phi}_i = \phi_i$, 在仿真中也如此处理, 但是考虑到之后非相干解调的实现, 所以认为此处 $\phi_i \neq 0$.

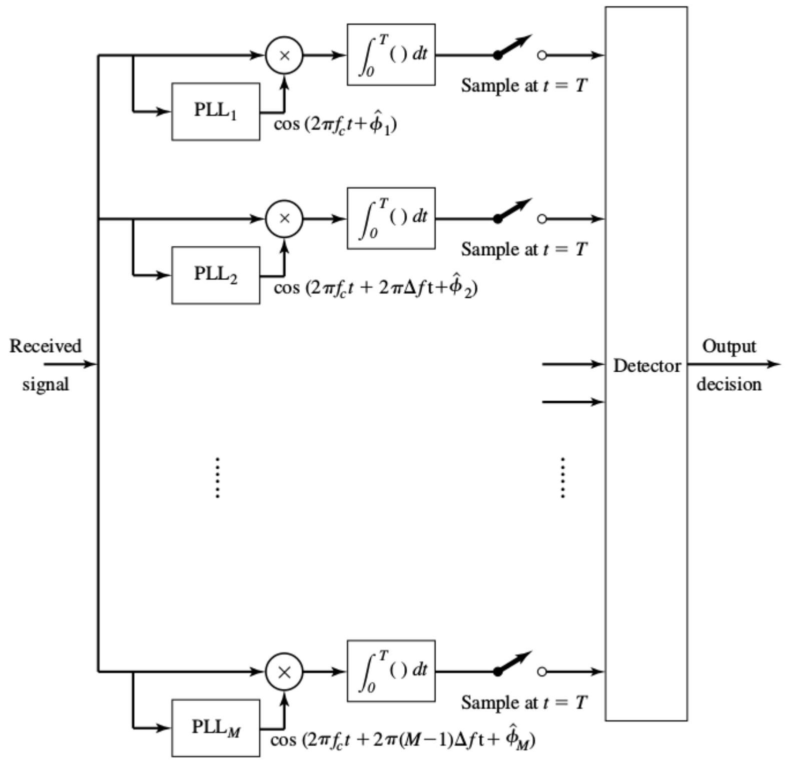



Figure 1: 相干解调基本框图

#### 2.2.2 最佳判决器

接收到的信号如下:

$$r(t) = y(t) + n(t), \tag{7}$$

由于两个相关器正交, 则两个信号对应的输入矢量对应的输出矢量如下:

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2), \tag{8}$$

$$\mathbf{y_1} = (\sqrt{\mathcal{E}_b} + n_1, n_2), \tag{9}$$

$$\mathbf{y_1} = (n_1, \sqrt{\mathcal{E}_b} + n_2), \tag{10}$$

其中 $n_1, n_2$ 为不相关的两个高斯白噪声, 方差均为 $N_0/2$.

根据 MAP 原则, 此时的最佳判决方式为: 最大化测度 $C(\mathbf{y}, \mathbf{s_m})$ 的信号为发送信号:

$$C(\mathbf{y}, \mathbf{s_m}) = 2\mathbf{y} \cdot \mathbf{s_m} - ||\mathbf{s_m}||^2 + \frac{N_0}{2} \ln p_m, \tag{11}$$

同时由于两个信号的能量也是一致的, 故只需比较 $\mathbf{y} \cdot \mathbf{s_m} + \frac{N_0}{4} \ln p_m$ 的大小即可:

1. 当 $y_1 - y_2 > \frac{N_0}{4\sqrt{\mathcal{E}_b}} \ln \frac{p_2}{p_1}$ 时, 发送信号为 $s_1$;

2. 当 $y_1 - y_2 < \frac{N_0}{4\sqrt{\mathcal{E}_b}} \ln \frac{p_2}{p_1}$ 时, 发送信号为 $s_2$;

若采用 $p_1 = p_2 = 0.5$ 的情况, 即在先验概率一致的情况下, 则检测如下:

1. 当 $y_1 > y_2$ 时, 发送信号为 $s_1$;

2. 当 $y_1 < y_2$ 时, 发送信号为 $s_2$;

#### 2.2.3 误码率计算

对于 $s_1(t)$ 而言, 故其错误概率的计算如下:

$$e_1 = P\left(n_1 - n_2 < \frac{N_0}{4\sqrt{\mathcal{E}_b}} \ln \frac{p_2}{p_1} - \sqrt{\mathcal{E}_b}\right) \tag{12}$$

由于 $n_1 - n_2$ 满足均值为 0, 方差为 $N_0$ 的高斯分布, 故:

$$\begin{aligned} e_1 &= \int_{-\infty}^{\frac{N_0}{4\sqrt{\mathcal{E}_b}} \ln \frac{p_2}{p_1} - \sqrt{\mathcal{E}_b}} \frac{1}{\sqrt{\pi 2 N_0}} e^{-\frac{x^2}{2N_0}} dx & (13) \\ &= Q(-\frac{\sqrt{N_0}}{4\sqrt{\mathcal{E}_b}} \ln \frac{p_2}{p_1} + \sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}}), & (14) \end{aligned}$$

同样的:

$$e_2 = Q(\frac{\sqrt{N_0}}{4\sqrt{\mathcal{E}_b}} \ln \frac{p_2}{p_1} + \sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}}), \tag{15}$$

总的差错概率 (误码率) 如下:

$$P_e = p_1 Q\left(-\frac{\sqrt{N_0}}{4\sqrt{\mathcal{E}_b}} \ln \frac{p_2}{p_1} + \sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}}\right) + p_2 Q\left(\frac{\sqrt{N_0}}{4\sqrt{\mathcal{E}_b}} \ln \frac{p_2}{p_1} + \sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}}\right). \tag{16}$$

若采用 $p_1 = p_2 = 0.5$ 的情况, 则误码率如下:

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{N_0}}\right). \tag{17}$$

## 2.3 非相干解调

### 2.3.1 基本框图

非相干解调的主要结构如图 (2) 所示, 与前者的不同之处在于, 此次没有利用锁相环得到对应的相位, 直接利用相位为 0 的基信号 $(\sin, \cos)$ 进行处理, 此时基信号的个数为之前的两倍.

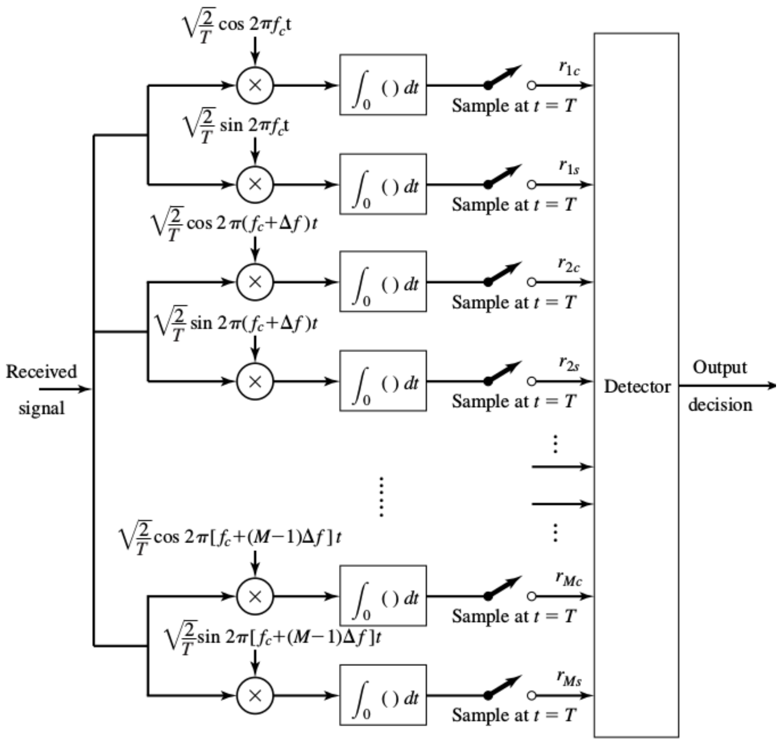



Figure 2: 非相干解调框图

此时相当于有 4 个基函数如下:

$$\varphi_{1c}(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\cos(2\pi f_1 t), \quad 0 \le t < T_b, \tag{18}$$

$$\varphi_{1s}(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\sin(2\pi f_1 t), \quad 0 \le t < T_b, \tag{19}$$

$$\varphi_{2c}(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\cos(2\pi f_2 t), \quad 0 \le t < T_b, \tag{20}$$

$$\varphi_{2s}(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\sin(2\pi f_2 t), \quad 0 \le t < T_b, \tag{21}$$

则 $s_1(t), s_2(t)$ 对应的输出矢量为:

$$\mathbf{s_1} = (\sqrt{\mathcal{E}_b}\cos\phi_1, \sqrt{\mathcal{E}_b}\sin\phi_1, 0, 0), \tag{22}$$

$$\mathbf{s_2} = (0, 0, \sqrt{\mathcal{E}_b}\cos\phi_2, \sqrt{\mathcal{E}_b}\sin\phi_2), \tag{23}$$

### 2.3.2 最佳检测器

由于两个相关器正交, 则两个信号对应的输入矢量对应的输出矢量如下:

$$\mathbf{y} = (y_{1c}, y_{1s}, y_{2c}, y_{2s}), \tag{24}$$

$$\mathbf{y_1} = (\sqrt{\mathcal{E}_b}\cos\phi_1 + n_{1c}, \sqrt{\mathcal{E}_b}\sin\phi_1 + n_{1s}, n_{2c}, n_{2s}), \tag{25}$$

$$\mathbf{y_1} = (n_{1c}, n_{1s}, \sqrt{\mathcal{E}_b}\cos\phi_2 + n_{2c}, \sqrt{\mathcal{E}_b}\sin\phi_2 + n_{2s}), \tag{26}$$

其中 $n_{1c}, n_{1s}, n_{2c}, n_{2s}$ 为不相关的四个高斯白噪声, 方差均为 $N_0/2$.

最佳检测准则如下:

$$P(\mathbf{s_1}|\mathbf{y}) \underset{s_2}{\overset{s_1}{\gtrless}} P(\mathbf{s_2}|\mathbf{y}), \tag{27}$$

同时在认为相位是成均匀分布的情况下, 则由此可以得到如下判决条件:

$$\frac{I_0\left(2\sqrt{\mathcal{E}_b(y_{1c}^2 + y_{1s}^2)}/N_0\right)}{I_0\left(2\sqrt{\mathcal{E}_b(y_{2c}^2 + y_{2s}^2)}/N_0\right)} \underset{s_1}{\overset{s_2}{\gtrless}} \frac{p_1}{p_2}. \tag{28}$$

当 $p_1 = p_2 = 0.5$ 时, 由于 $I_0(x)$ 单调递增, 检测准则可以简化为:

$$y_1 = \sqrt{y_{1c}^2 + y_{1s}^2} \underset{s_2}{\overset{s_1}{\gtrless}} y_2 = \sqrt{y_{2c}^2 + y_{2s}^2}. \tag{29}$$

故亦被称为包络检测器.

### 2.3.3 误码率计算

信号等概率时, 并且认为相位是成均匀分布的, 此时对于 $s_1$ 出错的概率如下:

$$e_1 = P\{y_2 > y_1 | r_1\} \tag{30}$$

$$= \frac{1}{2}e^{-\mathcal{E}_b/(2N_0)}, \tag{31}$$

对于 $s_2$ 也亦是如此:$e_1 = e_2$, 故总的误码率如下:

$$P_e = \frac{1}{2}e^{-\mathcal{E}_b/(2N_0)}. \tag{32}$$

# 3 代码设计

## 3.1 设计框图

设计框图如图 (3):

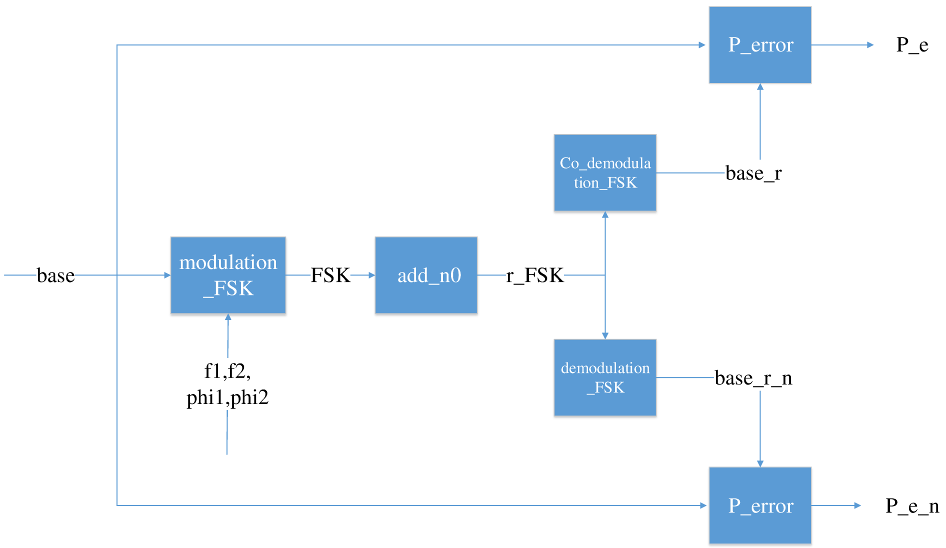



Figure 3: 算法设计框图

其中各个功能如下所示:

1. *modulation_FSK*: 对输入的基带信号进行调制, 输出对应的 2FSK 信号;
2. *add_n0*: 对 2FSK 信号加上高斯白噪声;
3. *Co_demodulation_FSK*: 对输入的有高斯白噪声的 2FSK 信号进行相干解调;
4. *demodulation_FSK*: 对输入的有高斯白噪声的 2FSK 信号进行非相干解调;
5. *P_error*: 将解调出的信号与输入信号进行比较, 计算误码率.

除此以外, *test.m*为两种方式的共同测试文件, 仅限 $p_1 = p_2 = 0.5$, *test_co.m*为相干解调的不同先验概率下的测试文件,

## 3.2 仿真参数

仿真设计参数设置:

1. 对于一组特定的 $E_b/N_0$ 下, 理论的误码率为 $P_e$, 则对于仿真设置了 $\lceil 100/P_e \rceil$ 个数据作为测试, 以便到达较好的效果;

2. 采样时间为 $T_b = 1ms$;

3. 连续时间数值化采用的宽度 $T_b \times$ space, 其中 space$= 10^{-3}$;

4. 两组频率的选择为 $f_1 = \frac{k_1}{T_b}, f_1 = \frac{k_1}{T_b}$, 其中 $k_1 = 6, k_2 = 10$.

5. 相位由 $rand()$ 函数生成均匀分布的在 $[0, 2\pi)$ 上的相位;

6. 在制作高斯白噪声时, 加上均值为 0, 方差为 $\sigma^2$ 的高斯噪声. 由于数值无法做到冲激函数, 故按照以下推导对 $\sigma^2$ 进行处理.

   在相关器进行解调时, 输出为如下:

$$y_n = \int_0^{T_b} n(t)\varphi(t)dt, \tag{33}$$

   其方差与 $n(t)$ 去除冲击函数时一致:$N_0/2$.
   但是在仿真中无冲激函数, 即 $n(t)$ 的方差为 $\sigma^2$, 数值积分也只是求和, 即:

$$y_n \approx \frac{T_b}{K}\sum_{i=1}^{K} n\left(\frac{T_b}{K}i\right)\varphi\left(\frac{T_b}{K}i\right) \tag{34}$$

   则其方差也是如下:

$$E\{y_n^2\} = E\left\{\left(\frac{T_b}{K}\sum_{i=1}^{K} n\left(\frac{T}{K}i\right)\varphi\left(\frac{T}{K}i\right)\right)^2\right\} \tag{35}$$

$$= E\left\{\frac{T_b^2}{K^2}\sigma^2\sum_{i=1}^{K}\varphi\left(\frac{T}{K}i\right)^2\right\} \tag{36}$$

$$\approx \frac{T_b}{K}\sigma^2 \tag{37}$$

   其中 (37) 是由于 $\int_0^{T_b}\varphi(t)^2dt = 1 \approx \frac{T_b}{K}\sum_{i=1}^{K}\varphi\left(\frac{T_b}{K}i\right)^2$.
   故为了达到使得最后判决的噪声实现理论上的效果, 故在 $add_n0$中加入噪声的方差为:

$$\sigma^2 = \frac{K}{T_b}\frac{N_0}{2}. \tag{38}$$

## 3.3 代码

具体代码请参考附件. 文件列表如下:

| | |
|---|---|
| *test.m* | *test_co.m* |
| *modulation_FSK.m* | *add_n0.m* |
| *Co_demodulation_FSK.m* | *demodulation_FSK.m* |
| *P_error.m* | |

# 4 仿真结果与分析[1]

## 4.1 相干解调先验概率仿真

本仿真文件为 *test_co.m*, 是在 $E_b = 10^{-7.5}W, N_0/2 = 0.5 \times 10^{-8}W$ 情况下进行的仿真, 结果如图 (4) 所示. 图中两条分别为理论计算值和仿真结果, , 们可以发现, , 真结果在理论结果附件, , 理论分析结果十分吻合。除此以外, , 以发现当 $p_1 = p_2 = 0.5$ 时, 为误码率最高的时候, , 后向两边递减.

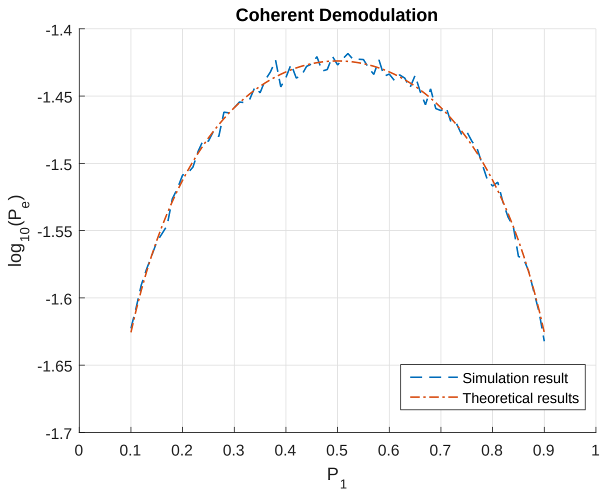



Figure 4: 不同先验概率下相干解调效果

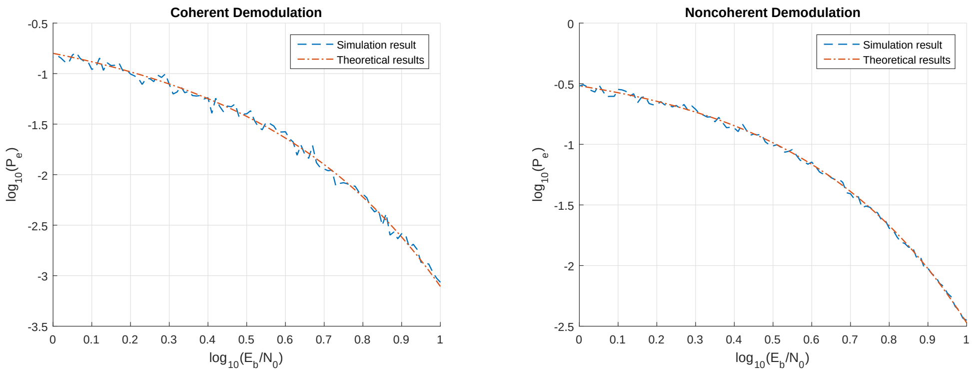
## 4.2 相干解调与非相干解调仿真

本仿真文件为 *test.m*, 仿真环境为 $p_1 = p_2 = 0.5$, 结果如 (5) 图所示.

类似于之前我们可以看到无论是相干解调还是非相干解调, 实验结果和理论结果都十分吻合. 两者统一表现出随着 $\frac{E_b}{N_0/2}$ 的增加, 其误码率不断减小. 若是我们将 (5(a)) 和 (5(b)) 结合在一起,

[1] 生成的图片亦保存在附件中.

如图 ([6](#)), 我们发现在相同的 $\frac{E_b}{N_0/2}$ 下, 相干解调的性能好于非相干解调, 也就是相干解调的优点, 但是为了达到这个效果, 在电路结构上加入了锁相环, 使电路复杂化.




(a) 相干解调 (b) 非相干解调

Figure 5: 相干解调与非相干解调

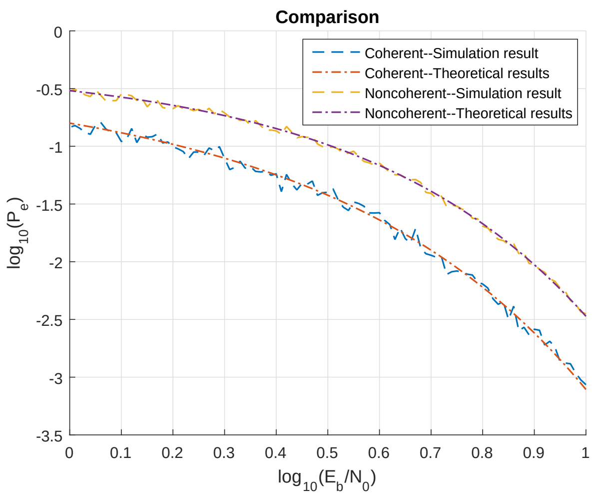



Figure 6: 相干解调与非相干解调比较

# 5 总结

就仿真结果而言, 成功地实现了整个 FSK 系统的相干解调与非相干解调的仿真测试, 并且从结果上验证了理论上的结论.