6. naloga: Enačbe hoda

Za opis najpreprostejših fizikalnih procesov uporabljamo navadne diferencialne enačbe, ki povezujejo vrednosti spremenljivk sistema z njihovimi časovnimi spremembami. Tak primer je na primer enačba za časovno odvisnost temperature v stanovanju, ki je obdano s stenami z neko toplotno prevodnostjo in določeno zunanjo temperaturo. V najpreprostejšem primeru ima enačba obliko

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k\,(T - T_{\mathrm{zun}}) \tag{1}$$

z analitično rešitvijo

$$T(t) = T_{\mathrm{zun}} + \mathrm{e}^{-kt}\,(T(0) - T_{\mathrm{zun}}) \ .$$

Enačbam, ki opisujejo razvoj spremenljivk sistema y po času ali drugi neodvisni spremenljivki x, pravimo *enačbe hoda*. Pri tej nalogi bomo proučili uporabnost različnih numeričnih metod za reševanje enačbe hoda oblike $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = f(x, y)$, kot na primer (1). Najbolj groba prva inačica, tako imenovana osnovna Eulerjeva metoda, je le prepisana aproksimacija za prvi odvod $y' \approx (y(x+h) - y(x))/h$, torej

$$y(x+h) = y(x) + h\,\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_x \ . \tag{2}$$

Diferencialno enačbo smo prepisali v diferenčno: sistem spremljamo v ekvidistantnih korakih dolžine h. Metoda je večinoma stabilna, le groba: za večjo natančnost moramo ustrezno zmanjšati korak. Za red boljša ($\mathcal{O}(h^3)$, t.j. lokalna natančnost drugega reda) je simetrizirana Eulerjeva (ali sredinska) formula, ki sledi iz simetriziranega približka za prvi odvod, $y' \approx (y(x+h) - y(x-h))/2h$. Računamo po shemi

$$y(x+h) = y(x-h) + 2h\,\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_x \ , \tag{3}$$

ki pa je praviloma nestabilna. Želeli bi si pravzaprav nekaj takega

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{2}\,\left[\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_x + \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x+h}\right] \ , \tag{4}$$

le da to pot ne poznamo odvoda v končni točki intervala (shema je implicitna). Pomagamo si lahko z iteracijo. Zapišimo odvod kot:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_x = f(x, y)$$

ter

$$x_{n+1} = x_n + h, \quad y_n = y(x_n)$$

Heunova metoda ($\mathcal{O}(h^3)$ lokalno) je približek idealne formule z:

$$\hat{y}_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n) \tag{5}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\,[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \hat{y}_{n+1})] \tag{6}$$

Izvedenka tega je nato Midpoint metoda (tudi $\mathcal{O}(h^3)$ lokalno):

$$k_1 = f(x_n, y_n) \tag{7}$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}\,h\,k_1) \tag{8}$$

$$y_{n+1} = y_n + h\,k_2 \tag{9}$$

Le-to lahko potem izboljšamo kot modificirano Midpoint metodo itd...

V praksi zahtevamo natančnost in numerično učinkovitost, ki sta neprimerno boljši kot pri opisanih preprostih metodah. Uporabimo metode, zasnovane na algoritmih prediktor-korektor, metode višjih redov iz družine Runge-Kutta (z adaptivnimi koraki), ali ekstrapolacijske metode. Brez dvoma ena najbolj priljubljenih je metoda RK4,

$$\begin{aligned} k_1 &= f\left(x,\, y(x)\right)\,, \\ k_2 &= f\left(x + \tfrac{1}{2}h,\, y(x) + \tfrac{h}{2}k_1\right)\,, \\ k_3 &= f\left(x + \tfrac{1}{2}h,\, y(x) + \tfrac{h}{2}k_2\right)\,, \\ k_4 &= f\left(x + h,\, y(x) + hk_3\right)\,, \\ y(x+h) &= y(x) + \tfrac{h}{6}\,\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) + \mathcal{O}(h^5)\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Naloga: preizkusi preprosto Eulerjevo metodo ter nato še čim več naprednejših metod(Midpoint, Runge-Kutto 4. reda, Adams-Bashfort-Moultonov prediktor-korektor ...) na primeru z začetnima temperaturama $y(0) = 21$ ali $y(0) = -15$, zunanjo temperaturo $y_{\mathrm{zun}} = -5$ in parametrom $k = 0.1$. Kako velik (ali majhen) korak h je potreben? Izberi metodo (in korak) za izračun družine rešitev pri različnih vrednostih parametra k.

Dodatna naloga: temperatura prostora se lahko še dodatno spreminja zaradi denimo sončevega segrevanja skozi okna, s 24-urno periodo in nekim faznim zamikom δ, kar opišemo z dva- ali triparametrično enačbo

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k\left(T - T_{\mathrm{zun}}\right) + A\sin\left(\frac{2\pi}{24}(t-\delta)\right)\,. \tag{11}$$

Poišči še družino rešitev te enačbe pri $k = 0.1$ in $\delta = 10$! Začni z $A = 1$, kasneje spreminjaj tudi to vrednost. V premislek: kakšno metodo bi uporabil, če bi posebej natančno želel določiti maksimalne temperature in trenutke, ko nastopijo?