

4. naloga: Fourierova analiza

Samo Krejan, 28231092

Pri numeričnem izračunavanju Fourierove transformacije

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(2\pi ift) dt \quad (1)$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) \exp(-2\pi ift) df \quad (2)$$

je funkcija $h(t)$ običajno predstavljena s tablico diskretnih vrednosti

$$h_k = h(t_k), \quad t_k = k\Delta, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1. \quad (3)$$

Pravimo, da smo funkcijo vzorčili z vzorčno gostoto (frekvenco) $f = 1/\Delta$. Za tako definiran vzorec obstaja naravna meja frekvenčnega spektra, ki se imenuje Nyquistova frekvenca, $f_c = 1/(2\Delta)$: harmonični val s to frekvenco ima v vzorčni gostoti ravno dva vzorca v periodi. če ima funkcija $h(t)$ frekvenčni spekter omejen na interval $[-f_c, f_c]$, potem ji z vzorčenjem nismo odvzeli nič informacije, kadar pa se spekter razteza izven intervala, pride do *potujitve (aliasing)*, ko se zunanji del spektra preslika v interval.

Frekvenčni spekter vzorčene funkcije (3) računamo samo v N točkah, če hočemo, da se ohrani količina informacije. Vpeljemo vsoto

$$H_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_k \exp(2\pi i kn/N), \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}, \quad (4)$$

ki jo imenujemo diskretna Fourierova transformacija in je povezana s funkcijo v (1) takole:

$$H(\frac{n}{N\Delta}) \approx \Delta \cdot H_n.$$

Zaradi potujitve, po kateri je $H_{-n} = H_{N-n}$, lahko pustimo indeks n v enačbi (4) teči tudi od 0 do N . Spodnja polovica tako definiranega spektra ($1 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1$) ustreza pozitivnim frekvencam $0 < f < f_c$, gornja polovica ($\frac{N}{2} + 1 \leq n \leq N - 1$) pa negativnim, $-f_c < f < 0$. Posebna vrednost pri $n = 0$ ustreza frekvenci nič ("istosmerna komponenta"), vrednost pri $n = N/2$ pa ustreza tako f_c kot $-f_c$. Količine h in H so v splošnem kompleksne, simetrija v enih povzroči tudi simetrijo v drugih. Posebej zanimivi so trije primeri:

če je	h_k realna	tedaj je	$H_{N-n} = H_n^*$
	h_k realna in soda		H_n realna in soda
	h_k realna in liha		H_n imaginarna in liha

(ostalih ni težko izpeljati). V tesni zvezi s frekvenčnim spektrom je tudi moč. Celotna moč nekega signala je neodvisna od reprezentacije, Parsevalova enačba pove

$$\sum_{k=0}^{N-1} |h_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |H_n|^2$$

(lahko preveriš). Pogosto pa nas bolj zanima, koliko moči je vsebovane v frekvenčni komponenti med f in $f + df$, zato definiramo enostransko spektralno gostoto moči (*one-sided power spectral density*, PSD)

$$P_n = |H_n|^2 + |H_{N-n}|^2.$$

Pozor: s takšno definicijo v isti koš mečemo negativne in pozitivne frekvence, vendar sta pri realnih signalih h_k prispevka enaka, tako da je $P_n = 2|H_n|^2$.

Z obratno transformacijo lahko tudi rekonstruiramo h_k iz H_n

$$h_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H_n \exp(-2\pi i kn/N) \quad (5)$$

(razlika glede na enačbo (4) je le predznak v argumentu eksponenta in utež $1/N$).

1 Naloga

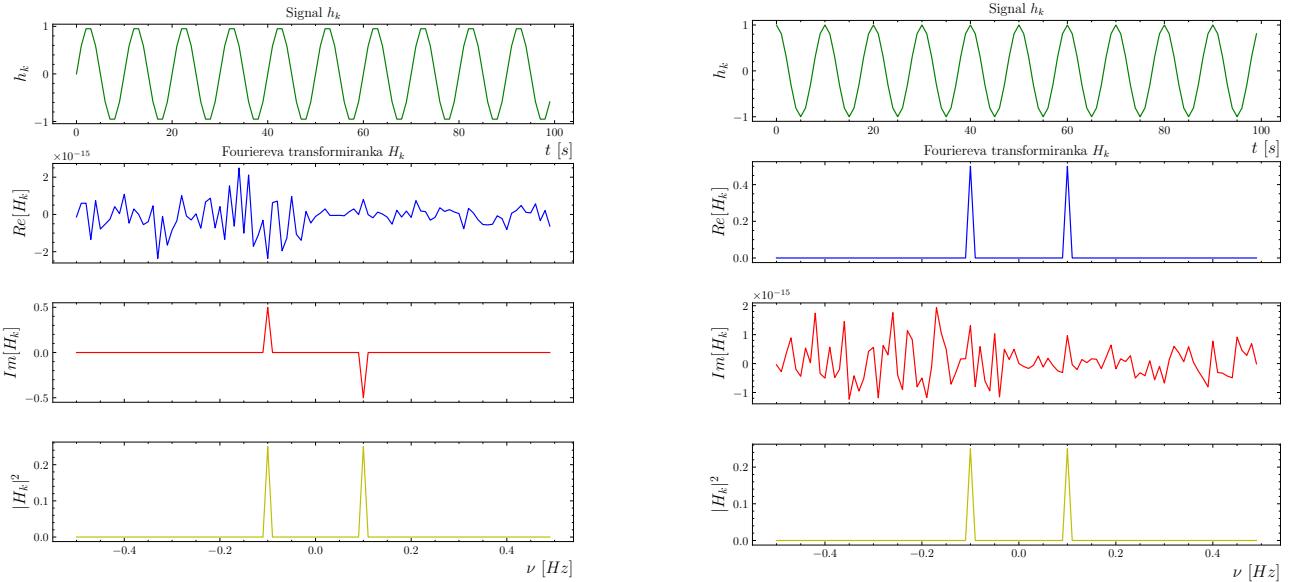
1. Izračunaj Fourierov obrat Gaussove porazdelitve in nekaj enostavnih vzorcev, npr. mešanic izbranih frekvenc. Za slednje primerjaj rezultate, ko je vzorec v intervalu periodičen (izbrane frekvence so mnogokratniki osnovne frekvence), z rezultati, ko vzorec ni periodičen (kako naredimo Gaussovovo porazdelitev ‘periodično’ za FT?). Opazuj pojav potujitve na vzorcu, ki vsebuje frekvence nad Nyquistovo frekvenco. Napravi še obratno transformacijo (5) in preveri natančnost metode. Poglej, kaj se dogaja z časom računanja - kako je odvisen od števila vzorčenj?
2. Po Fourieru analiziraj 2.3 s dolge zapise začetka Bachove partite za violino solo, ki jih najdeš na spletni strani Matematičnofizikalnega praktikuma. Signal iz začetnih taktov partite je bil vzorčen pri 44 100 Hz, 11 025 Hz, 5512 Hz, 2756 Hz, 1378 Hz in 882 Hz. S poslušanjem zapisov v formatu .mp3 ugotovi, kaj se dogaja, ko se znižuje frekvanca vzorčenja, nato pa s Fourierovo analizo zapisov v formatu .txt to tudi prikaži.

1.1 Osnovni primeri

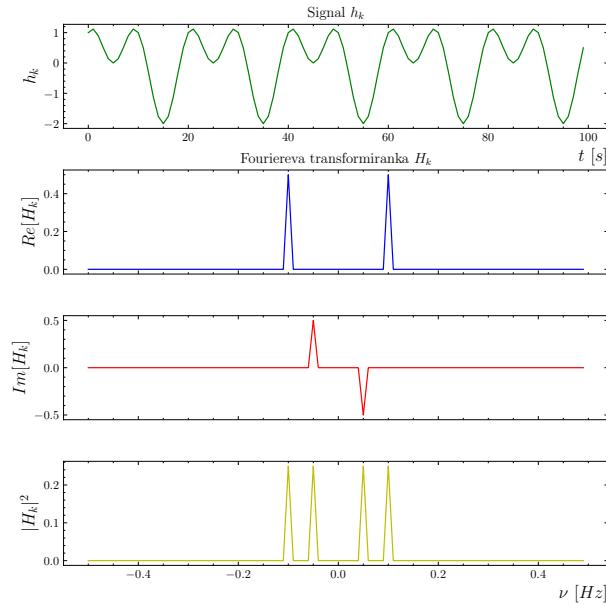
Zaradi časovne zahtevnosti Fourierove transformacije sem se odločil za implementacijo DFT algoritma v RUST programskem jeziku. Metodo sem nato najprej preveril na nekaterih osnovnih primerih, kjer iz teorije vem kaj pričakovati. To sta bila v prvi vrsti čisti realni sinusni in kosinusni signal, kjer sem med drugim namenil veliko pozornosti temu, da sem poskrbel, da je signal vzorčen periodično: torej, če bi kopijo signala ”prilepil” na njegovo levo ali desno stran ne bi bilo opaziti nobenih skokov. Za to sem poskrbel tako da sem *numpy* funkciji `linspace` dodal parameter `endpoint = False`. Na ta način sem dobil grafe (1, 2)

Na slik 1 vidimo že vse lastnosti Fourierjevega obrata, ki so opisane v uvodu. Ker je kosinusni signal realen in sod je tak tudi Fourierjev obrat in ker je sinusni signal realen in lih, je njegov Fourierjev obrat imaginaren in lih.

Slika 2 je super ponazoritev uporabnosti Fourierjevega obrata, saj smo z njim uspeli nek čuden signal dekonstruirati nazaj v njegove harmonične komponente

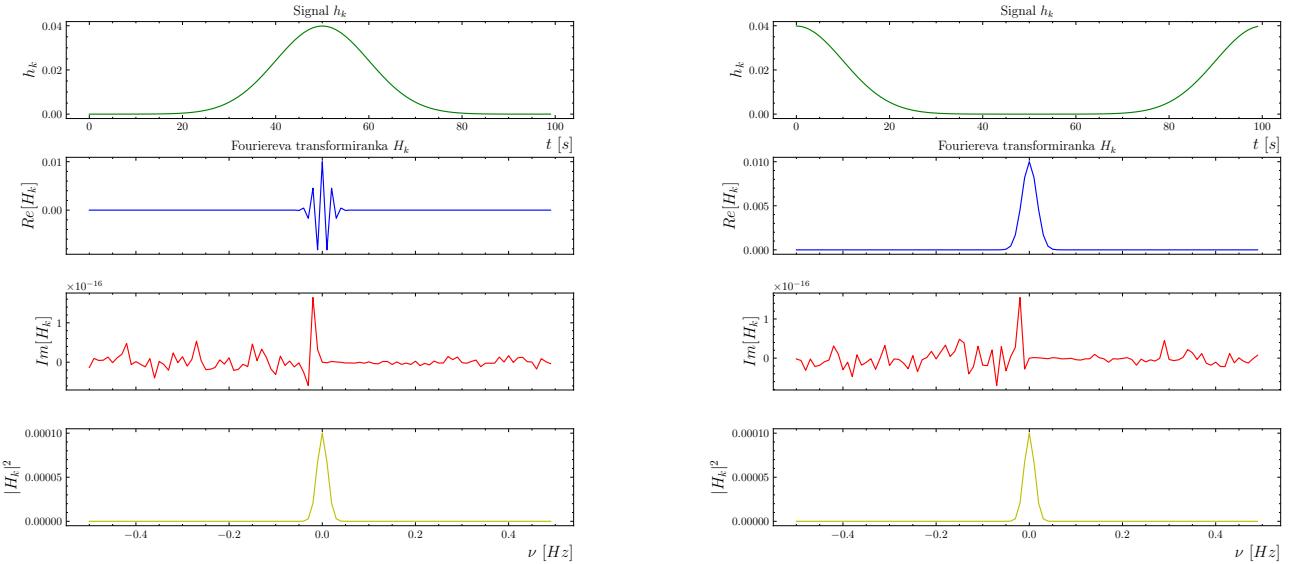


Slika 1: Fourierev obrat H_k sinusnega signala h_k (levo) in cosinusnega signala h_k (desno)



Slika 2: Fourierev obrat H_k kombinacije sinusnega in kosinusnega signala h_k z različnima frekvencama

Naslednji pomemben osnoven primer, ki sem si ga pogledal je DFT Gaussove funkcije. Ta je nekoliko specifičen, saj če ga želimo narediti periodičnega v smislu da je prva točka vzorčenja tista, ki ustreza vrednosti $x = 0$, moramo vzorčenje pravzaprav presekati na polovici in nato desno polovico premakniti na levo stran, levo pa na desno. Temu je tako, saj DFT predvideva, da se naše vzorčenje vendo začne v izhodišču. Razlika med upoštevanjem tega detajla in ne je prikazana na sliki 3

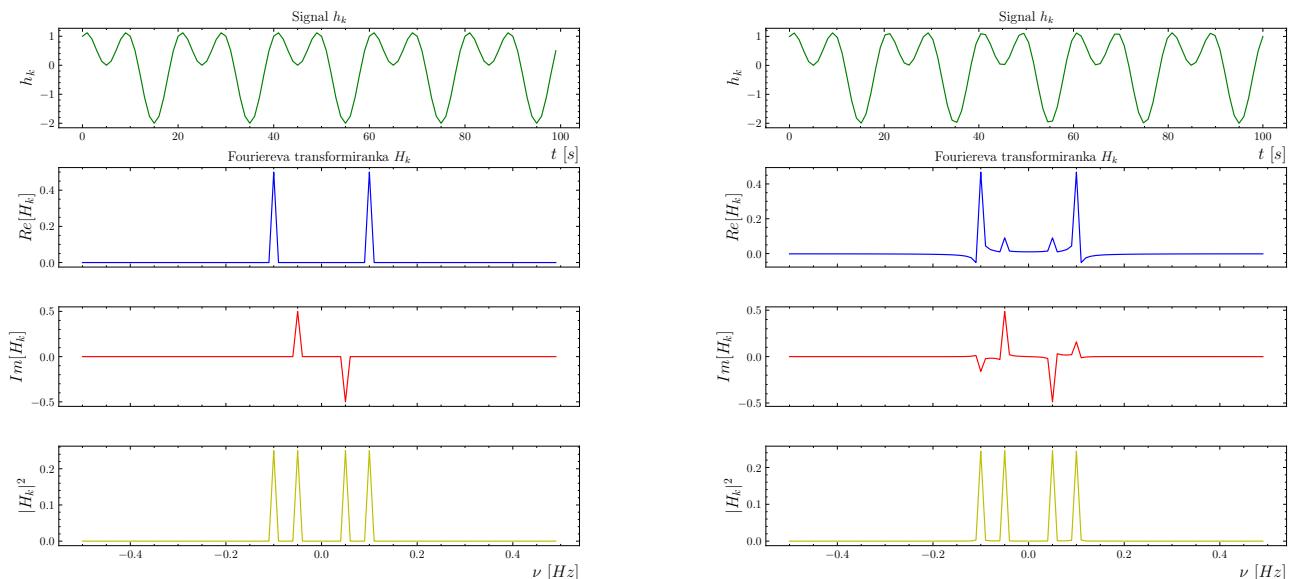


Slika 3: Fourierev obrat H_k Gaussove funkcije h_k ki je periodična (desno) in ne-periodična (levo)

Vidimo, da na levem delu slike 3 pri Fourierevem obratu pride do nekih "dodatnih sinusov" kar se da teoretično razložiti kot Fourierjev obrat Gaussove funkcije prestavljene v desno, na desni pa vidimo (kot je pričakovati), da je obrat Gaussove funkcije Gaussova funkcija.

1.2 Problem neperiodičnosti

V prejšnjem poglavju sem omenil, da sem namenil kar nekaj pozornosti namenil ohranjanju periodičnosti signala (tako, da sem uporabil zastavico `endpoint = False` pri numpy `linspace`). A kaj bi se zgodilo, če na to ne bi bil pozoren? Izkaže se, da pride do pojava *puščanja* (ang: leakage). Zaradi le tega višine vrhov niso več sorazmerne z jakostjo signala in sam signal ni več omejen na eno samo frekvenco. Vizualno se to lepo vidi na skili 4, kjer je signalu iz slike 2 dodana zgolj ena točka, ki uniči periodičnost a zaradi nje že vidimo puščanje.



Slika 4: Fourierev obrat H_k kombiniranega signala (glej sliko 2) h_k ki je periodična (desno) in ne-periodična (levo)

Vidimo, da na srečo težava s periodičnostjo ne vpliva na $|H_k|^2$, tako kot smo to lahko opazili že pri

Gaussovi funkciji na sliki 3

1.3 Potujitev

Do naslednjega izziva sem prišel, ko sem poskusil narediti Fourierev obrat za harmonične signale s frekvenco