Matematično-fizikalni praktikum 2025/26

1. naloga: Airyjevi funkciji

Samo Krejan, 28231092

1 Uvod

Airyjevi funkciji Ai in Bi se v fiziki pojavljata predvsem v optiki in kvantni mehaniki [3]. Definirani sta kot neodvisni rešitvi enačbe

$$y''(x) - xy(x) = 0$$

in sta predstavljivi v integralski obliki

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos(t^3/3 + xt)\,\mathrm{d}t\,, \quad \mathrm{Bi}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\mathrm{e}^{-t^3/3+xt} + \sin(t^3/3 + xt)\right]\mathrm{d}t\,.$$

Za majhne x lahko funkciji Ai in Bi izrazimo z Maclaurinovima vrstama

$$\mathrm{Ai}(x) = \alpha f(x) - \beta g(x)\,, \qquad \mathrm{Bi}(x) = \sqrt{3}\left[\alpha f(x) + \beta g(x)\right],$$

kjer v $x = 0$ veljata zvezi $\alpha = \mathrm{Ai}(0) = \mathrm{Bi}(0)/\sqrt{3} \approx 0.355028053887817239$ in $\beta = -\mathrm{Ai}'(0) = \mathrm{Bi}'(0)/\sqrt{3} \approx 0.258819403792806798$. Vrsti za f in g sta

$$f(x) = \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{1}{3}\right)_k \frac{3^k x^{3k}}{(3k)!}\,, \qquad g(x) = \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{2}{3}\right)_k \frac{3^k x^{3k+1}}{(3k+1)!}\,,$$

kjer je

$$(z)_n = \Gamma(z+n)/\Gamma(z)\,, \qquad (z)_0 = 1\,.$$

Za velike vrednosti $|x|$ Airyjevi funkciji aproksimiramo z njunima asimptotskima razvojema. Z novo spremenljivko $\xi = \frac{2}{3}|x|^{3/2}$ in asimptotskimi vrstami

$$L(z) \sim \sum_{s=0}^\infty \frac{u_s}{z^s}\,, \qquad P(z) \sim \sum_{s=0}^\infty (-1)^s \frac{u_{2s}}{z^{2s}}\,, \qquad Q(z) \sim \sum_{s=0}^\infty (-1)^s \frac{u_{2s+1}}{z^{2s+1}}\,,$$

s koeficienti

$$u_s = \frac{\Gamma(3s + \frac{1}{2})}{54^s s!\,\Gamma(s + \frac{1}{2})}$$

za velike pozitivne x izrazimo

$$\mathrm{Ai}(x) \sim \frac{\mathrm{e}^{-\xi}}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}}\,L(-\xi)\,, \qquad \mathrm{Bi}(x) \sim \frac{\mathrm{e}^{\xi}}{\sqrt{\pi}x^{1/4}}\,L(\xi)\,,$$

za po absolutni vrednosti velike negativne x pa

$$\mathrm{Ai}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}(-x)^{1/4}}\left[\ \ \sin(\xi - \pi/4)\,Q(\xi) + \cos(\xi - \pi/4)\,P(\xi)\right],$$

$$\mathrm{Bi}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}(-x)^{1/4}}\left[-\sin(\xi - \pi/4)\,P(\xi) + \cos(\xi - \pi/4)\,Q(\xi)\right].$$

2 Naloga

Z uporabo kombinacije Maclaurinove vrste in asimptotskega razvoja poišči čim učinkovitejši postopek za izračun vrednosti Airyjevih funkcij Ai in Bi na vsej realni osi z **absolutno** napako, manjšo od 10^{-10}. Enako naredi tudi z **relativno** napako in ugotovi, ali je tudi pri le-tej dosegljiva natančnost, manjša od 10^{-10}. Pri oceni napak si pomagaj s programi, ki znajo računati s poljubno natančnostjo, na primer z Mathematico in/ali paketi mpmath in decimal v programskem jeziku Python.

2.1 Maclaurinov približek

Člene vrst f in g zapišemo rekurzivno, in n-ti člen zapišemo kot produkt prejšnjega in količnika:

$$f_n = f_{n-1} \cdot \frac{f_n}{f_{n-1}} = f_{n-1} \cdot \frac{x^3}{3n(3n-1)} , \qquad f_0 = 1$$

$$g_n = g_{n-1} \cdot \frac{g_n}{g_{n-1}} = g_{n-1} \cdot \frac{x^3}{3n(3n+1)} , \qquad g_0 = x$$

Dobljene rezultate bomo skozi nalogo primerjali z vgrajenima funkcijama *mpmath.airyai*() in *mpmath.airybi*(), ki od dejanske vrednosti odstopata manj kot $\cdot 10^{-20}$ [4].

2.2 Asimptotski približek za velike negativne x

2.3 Asimptotski približek za velike pozitivne x

3 Dodatna naloga

Ničle funkcije Ai pogosto srečamo v matematični analizi pri določitvi intervalov ničel specialnih funkcij in ortogonalnih polinomov [5] ter v fiziki pri računu energijskih spektrov kvantnomehanskih sistemov [1]. Poišči prvih sto ničel $\{a_s\}_{s=1}^{100}$ Airyjeve funkcije Ai in prvih sto ničel $\{b_s\}_{s=1}^{100}$ funkcije Bi pri $x < 0$ ter dobljene vrednosti primerjaj s formulama

$$a_s = -f\left(\frac{3\pi(4s-1)}{8}\right) , \qquad b_s = -f\left(\frac{3\pi(4s-3)}{8}\right) , \qquad s = 1, 2, \dots ,$$

kjer ima funkcija f asimptotski razvoj [2]

$$f(z) \sim z^{2/3}\left(1 + \frac{5}{48}\, z^{-2} - \frac{5}{36}\, z^{-4} + \frac{77125}{82944}\, z^{-6} - \frac{108056875}{6967296}\, z^{-8} + \dots\right) .$$

Literatura

[1] E. M. Lifshitz L. D. Landau. *Course in theoretical physics, Vol. 3: Quantum mechanics.* Pergamon Press, Oxford 1991.

[2] I. A. Stegun M. Abramowitz. *Handbook of mathematical functions.* Dover Publications, Mineola 1972.

[3] M. Soares O. Vallée. *Airy functions and applications to physics.* Imperial College Press, 2004.

[4] Luka Skeledžija. Airyjevi funkciji, 2023. Accessed: github 12. 10. 2025.

[5] G. Szegö. Orthogonal polynomials. *AMS*, Providence 1939.