Matematično-fizikalni praktikum 2025/26

# 7. naloga: Newtonov zakon

Samo Krejan, 28231092

Gibanje masne točke v polju sil v eni dimenziji opišemo z diferencialno enačbo drugega reda, z Newtonovim zakonom

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F\,.$$

Enačba je seveda enakovredna sistemu enačb prvega reda

$$m\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = p\,, \qquad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = F$$

in tako jo tudi rešujemo: kot sistem dveh enačb prvega reda.

Seveda morajo biti na voljo tudi ustrezni začetni pogoji, tipično $x(t=0)=x_0$ in $dx/dt = v(t=0) = v_0$. Splošnejše gre tu za sistem diferencialnih enačb drugega reda:

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = f(x, y, y', y'', ...),$$

ki ga lahko prevedemo na sistem enačb prvega reda z uvedbo novih spremenljivk v slogu gibalne količine pri Netwonovi enačbi ($y' = v, y'' = z, ...$).

Z nekaj truda se da eksplicitno dokazati, mi pa lahko privzamemo, da so metode za reševanje enačb hoda (Runge-Kutta 4. reda, prediktor-korektor... ) neposredno uporabne za reševanje takšnih sistemov enačb in torej aplikabilne v poljubno dimenzijah, kar naj bi v principu zadovoljilo večino naših zahtev.

Obstaja še posebna kategorija tako imenovanih *simplektičnih* metod, za enačbe, kjer je $f$ le funkcija koordinat, $f(y)$, ki (približno) ohranjajo tudi Hamiltonian, torej energijo sistema. Najbolj znana metoda je Verlet/Störmer/Encke metoda, ki je globalno natančna do drugega reda in ki točno ohranja tudi vrtilno količino sistema (če je ta v danem problemu smiselna). Rešujemo torej za vsak diskretni korak $n$ velikosti $h$, $x_n = x_0 + n \cdot h$:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = f(y)$$

in pri diskretizaciji dobimo recept za korak $y_n$ in $v_n = y'_n$:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \cdot v_n + \frac{h^2}{2} \cdot f(y_n) \\ v_{n+1} &= v_n + \frac{h}{2} \cdot \left[ f(y_n) + f(y_{n+1}) \right]. \end{aligned}$$

Alternativno lahko to shemo zapišemo tudi s pomočjo dodatnih vmesnih točk in preskakujemo med lego in hitrostjo z zamikom h/2 (od tod angleško ime 'leapfrog' za ta zapis):

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \cdot v_{n+1/2} \\ v_{n+3/2} &= v_{n+1/2} + h \cdot f(y_{n+1}). \end{aligned}$$

V še enem drugačnem zapisu je metoda poznana tudi kot metoda "Središčne razlike" (Central Difference Method, CDM), če nas hitrost ne zanima:

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2 \cdot f(y_n),$$

kjer prvo točko $y_1$ izračunamo po originalni shemi. Metodo CDM lahko uporabljamo tudi za primere, ko je f tudi funkcija 'časa' x, f(x,y), le da tu simplektičnost ni zagotovljena (in tudi verjetno ne relevantna). Za simplektične metode višjih redov je na voljo na primer Forest-Ruth metoda ali Position Extended Forest-Ruth Like (PEFRL) metoda, ki sta obe globalno četrtega reda in enostavni za implementacijo.

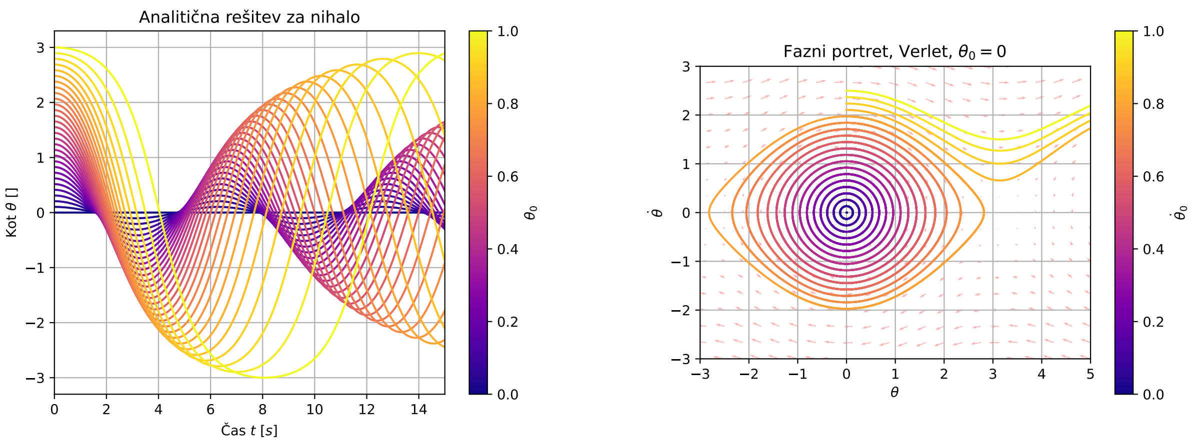
# 1 Naloga

Čim več metod uporabi za izračun nihanja matematičnega nihala z začetnim pogojem $\vartheta(0) = \vartheta_0 = 1$,$\dot{\vartheta}(0) = 0$. Poišči korak, ki zadošča za natančnost na 3 mesta. Primerjaj tudi periodično stabilnost shem: pusti, naj teče račun čez 10 ali 20 nihajev in poglej, kako se amplitude nihajev sistematično kvarijo. Pomagaš si lahko tudi tako, da občasno izračunaš energijo $E \propto 1 - \cos\vartheta + \frac{\dot{\vartheta}^2}{2\omega_0^2}$. Nariši tudi ustrezne fazne portrete!. Z analitično rešitvijo dobimo za nihajni čas $\frac{4}{\omega_0} K\left(\sin^2 \frac{\vartheta_0}{2}\right)$, kjer je $K(m)$ popolni eliptični integral prve vrste, ki je v SciPy knjižnici in v članku na spletni učilnici podan z:

$$K(m) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-mz^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{(1-m\sin^2 u)}}$$

## 1.1 Rešitve DE

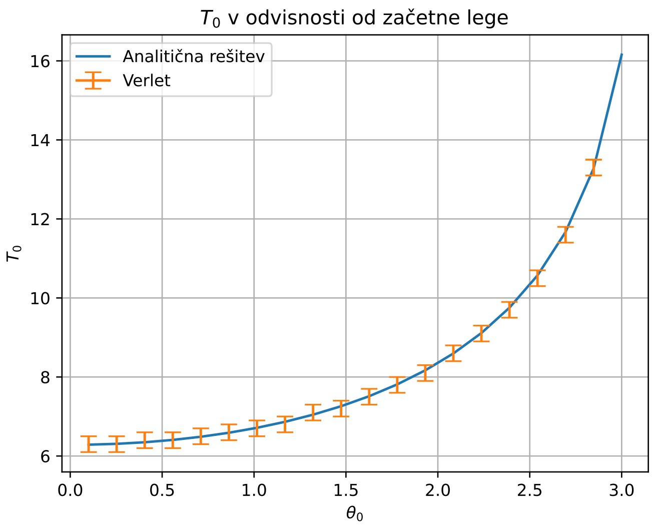
Za začetek sem si ogledal, kako sploh izgledajo analitične rešitve danega problema. Pri temu sem si, kot omenjeno, pomagal z vgrajeno SciPy funkcijo popolnega eliptičnega intehgrala. Na ta način sem lahko za različne začetne kote (in začetno hitrost enako 0) dobil fazni portret in graf analitične rešitve, prikazana na sliki 1.1




Slika 1: Analitična rešitev (eliptični integral) in fazni portret (Verlet metoda)

Na slikah lahko opazimo dve zanimivi - povezani stvari, na levi vidimo, da se nihajni čas z večanjem začetnega kota veča, in da parametrična krivulja v faznem prostoru izgleda manj in manj kot krožnica in vedno bolj podobna obliki očesa, dokler se le ta ne pretrga. Slednje krivulje pripadajo ne-periodičnim rešitvam - kroženju.

Kot omenjeno je nihajni čas odvisen od začetne lege, kar sem preveril tako z analitično rešitvijo kot tudi z Verlet metodo in rezultate prikazal na sliki 2




Slika 2: Nihajni čas v odvisnosti od začetnega kota