

11. naloga: Reševanje PDE z metodo Galerkina

Pri opisu enakomernega laminarnega toka viskozne in nestisljive tekočine po dolgi ravni cevi pod vplivom stalnega tlačnega gradienta p' se Navier-Stokesova enačba poenostavi v Poissonovo enačbo

$$\nabla^2 v = \Delta v = -\frac{p'}{\eta},$$

kjer je v vzdolžna komponenta hitrosti, odvisna samo od koordinat preseka cevi, η pa je viskoznost tekočine. Enačbo rešujemo v notranjosti preseka cevi, medtem ko je ob stenah hitrost tekočina enaka nič. Za pretok velja Poiseuillov zakon

$$\Phi = \int_S v \, dS = C \frac{p' S^2}{8\pi\eta},$$

kjer je koeficient C odvisen samo od oblike preseka cevi ($C = 1$ za okroglo cev). Določili bomo koeficient za polkrožno cev z radijem R . V novih spremenljivkah $\xi = r/R$ in $u = v\eta/(p'R^2)$ se problem glasi

$$\begin{aligned} \Delta u(\xi, \phi) &= -1, & u(\xi = 1, \phi) &= u(\xi, 0) = u(\xi, \phi = \pi) = 0, \\ C &= 8\pi \iint \frac{u(\xi, \phi) \xi \, d\xi \, d\phi}{(\pi/2)^2}. \end{aligned}$$

Če poznamo lastne funkcije diferencialnega operatorja za določeno geometrijo¹ se reševanje parcialnih diferencialnih enačb včasih lahko prevede na razvoj po lastnih funkcijah. Da bi se izognili računanju lastnih (za ta primer Besselovih) funkcij in njihovih ničel, ki jih potrebujemo v razvoju, lahko zapišemo aproksimativno rešitev kot linearno kombinacijo nekih poskusnih (*trial*) funkcij

$$\tilde{u}(\xi, \phi) = \sum_{i=1}^N a_i \Psi_i(\xi, \phi), \quad (1)$$

za katere ni nujno, da so ortogonalne, pač pa naj zadoščajo robnim pogojem, tako da jim bo avtomatično zadoščala tudi vsota (1). Ta pristop nam pride prav v kompleksnejših geometrijah, ko je uporabnost lastnih funkcij izključena in potrebujemo robustnejši pristop. Približna funkcija \tilde{u} seveda ne zadosti Poissonovi enačbi: preostane majhna napaka ε

$$\Delta \tilde{u}(\xi, \phi) + 1 = \varepsilon(\xi, \phi).$$

Pri metodi Galerkina zahtevamo, da je napaka ortogonalna na vse poskusne funkcije Ψ_i ,

$$(\varepsilon, \Psi_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

V splošnem bi lahko zahtevali tudi ortogonalnost ε na nek drug sistem utežnih (*weight*) oziroma testnih (*test*) funkcij Ψ_i . Metoda Galerkina je poseben primer takih metod (*Methods of Weighted Residuals*) z izbiro $\Psi_i = \Psi_i$. Omenjena izbira vodi do sistema enačb za koeficiente a_i

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} a_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

¹Spomni se na primer na vodikov atom v sferični geometriji, kjer smo imeli $\hat{L}^2 Y_{lm}(\vartheta, \phi) = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}(\vartheta, \phi)$ in $\hat{L}_z Y_{lm}(\vartheta, \phi) = m\hbar Y_{lm}(\vartheta, \phi)$.

$$A_{ij} = (\Delta\Psi_j, \Psi_i), \quad b_i = (-1, \Psi_i),$$

tako da je koeficient za pretok enak

$$C = -\frac{32}{\pi} \sum_{ij} b_i A_{ij}^{-1} b_j.$$

Za kotni del poskusne funkcije obdržimo eksaktne funkcije $\sin((2m+1)\phi)$, Besselove funkcije za radialni del pa nadomestimo s preprostejšimi funkcijami $\xi^{2m+1}(1-\xi)^n$. Pozor: indeks i pomeni seveda dvojni indeks (šteje obenem m in n)². Zaradi ortogonalnosti po m razpade matrika A v bloke, obrneš pa jo lahko s kako pripravljeno rutino, npr. s spodnjim in zgornjim trikotnim razcepom `ludcmp` in `lubksb` iz NRC.

Naloga: Izračunaj koeficient C . V ta namen moraš dobiti matriko A in vektor b ; preuči, kako je natančnost rezultata (vsote za koeficient C) odvisna od števila členov v indeksih m in n . Zaradi ortogonalnosti po m lahko oba učinka preučuješ neodvisno.

Dodatna naloga: V praksi je metoda Galerkina primerna v zapletenih geometrijah, ko grobe ocene dobimo že z eno samo (ali le nekaj) dobro izbranimi poskusnimi funkcijami, in ko še ni pretežko obrniti sistema (2). če pa želimo uporabiti metodo izčrpneje, za večjo natančnost, si težko izmislimo dovolj bogat izbor funkcij Ψ .

Da ima metoda Galerkina določene prednosti celo pred preprostimi diferenčnimi metodami, opazujmo še na primeru linearne hiperbolične valovne enačbe v eni dimenziji

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$$

za $\xi \in [0, 2\pi]$ s periodičnimi robnimi pogoji. Začetni pogoj naj bo $u(\xi, 0) = \sin(\pi \cos \xi)$; analitična rešitev enačbe je $u(\xi, t) = \sin(\pi \cos(\xi+t))$. Približno rešitev formalno razvijemo po poskusnih funkcijah

$$\tilde{u}(\xi, t) = \sum_{j=-N/2}^{N/2} a_j(t) \Psi_j(\xi) \quad (3)$$

in po Galerkinu zahtevamo

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} \right] \Psi_k^*(\xi) d\xi = 0. \quad (4)$$

Najočitnejša izbira je ravni val po kraju $\Psi_j(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ij\xi}$ in skalarni produkt v kompleksnem

$$(\Psi_k, \Psi_j) = \int_0^{2\pi} \Psi_k^*(\xi) \Psi_j(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\xi} e^{ij\xi} d\xi = \delta_{jk}, \quad (5)$$

tako da imamo obenem tudi ortonormalnost. Funkcijo $u(\xi, t)$ seveda še iščemo: določi jo ravno Galerkinova zahteva (4), iz katere sledi sistem sklopljenih enačb za koeficiente $a_k(t)$

$$\frac{da_k}{dt} - ika_k = 0, \quad k = -N/2, \dots, N/2. \quad (6)$$

Začetni pogoj za ta sistem so vrednosti

$$a_k(0) = \int_0^{2\pi} u(\xi, 0) \Psi_k^*(\xi) d\xi.$$

²Glej tudi prilogo na spletni učilnici.

Za izračun $a_k(0)$ in časovni razvoj sistema enačb (6) uporabi kak preverjeni integrator, na primer RK4, in ob izbranih časih poišči rešitev (3). Za kontrolo imaš lahko koeficiente razvoja analitične rešitve, ki so

$$a_k(t) = \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) J_k(\pi) e^{ikt}.$$

Za negativne indekse Besselovih funkcij uporabi zvezo $J_{-\nu} = \cos(\nu\pi)J_\nu - \sin(\nu\pi)Y_\nu$. Primerjaj dobljeni rezultat s tistim, ki ga dobiš, če prvotno parcialno diferencialno enačbo diskretiziraš v prvem redu

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{k} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h}$$

in to rešuješ v času naprej eksplisitno kot $u_{i+1,j} = u_{i,j} + (k/h)(u_{i,j+1} - u_{i,j})$.