

## 1. naloga: Airyjevi funkciji

Samo Krejan, 28231092

### 1 Uvod

Airyjevi funkciji Ai in Bi se v fiziki pojavljata predvsem v optiki in kvantni mehaniki [3]. Definirani sta kot neodvisni rešitvi enačbe

$$y''(x) - xy(x) = 0$$

in sta predstavljeni v integralni obliki

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos(t^3/3 + xt) dt, \quad \text{Bi}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[ e^{-t^3/3+xt} + \sin(t^3/3 + xt) \right] dt.$$

Za majhne  $x$  lahko funkciji Ai in Bi izrazimo z Maclaurinovima vrstama

$$\text{Ai}(x) = \alpha f(x) - \beta g(x), \quad \text{Bi}(x) = \sqrt{3} \left[ \alpha f(x) + \beta g(x) \right],$$

kjer v  $x = 0$  veljata zvezi  $\alpha = \text{Ai}(0) = \text{Bi}(0)/\sqrt{3} \approx 0.355028053887817239$  in  $\beta = -\text{Ai}'(0) = \text{Bi}'(0)/\sqrt{3} \approx 0.258819403792806798$ . Vrsti za  $f$  in  $g$  sta

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{3} \right)_k \frac{3^k x^{3k}}{(3k)!}, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{2}{3} \right)_k \frac{3^k x^{3k+1}}{(3k+1)!},$$

kjer je

$$(z)_n = \Gamma(z+n)/\Gamma(z), \quad (z)_0 = 1.$$

Za velike vrednosti  $|x|$  Airyjevi funkciji aproksimiramo z njunima asimptotskima razvojem. Z novo spremenljivko  $\xi = \frac{2}{3}|x|^{3/2}$  in asimptotskimi vrstami

$$L(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} \frac{u_s}{z^s}, \quad P(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{u_{2s}}{z^{2s}}, \quad Q(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{u_{2s+1}}{z^{2s+1}},$$

s koeficienti

$$u_s = \frac{\Gamma(3s + \frac{1}{2})}{54^s s! \Gamma(s + \frac{1}{2})}$$

za velike pozitivne  $x$  izrazimo

$$\text{Ai}(x) \sim \frac{e^{-\xi}}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}} L(-\xi), \quad \text{Bi}(x) \sim \frac{e^{\xi}}{\sqrt{\pi}x^{1/4}} L(\xi),$$

za po absolutni vrednosti velike negativne  $x$  pa

$$\begin{aligned} \text{Ai}(x) &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi}(-x)^{1/4}} \left[ \sin(\xi - \pi/4) Q(\xi) + \cos(\xi - \pi/4) P(\xi) \right], \\ \text{Bi}(x) &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi}(-x)^{1/4}} \left[ -\sin(\xi - \pi/4) P(\xi) + \cos(\xi - \pi/4) Q(\xi) \right]. \end{aligned}$$

## 2 Naloga

Z uporabo kombinacije Maclaurinove vrste in asimptotskega razvoja poišči čim učinkovitejši postopek za izračun vrednosti Airyjevih funkcij  $Ai$  in  $Bi$  na vsej realni osi z **absolutno** napako, manjšo od  $10^{-10}$ . Enako naredi tudi z **relativno** napako in ugotovi, ali je tudi pri le-tej dosegljiva natančnost, manjša od  $10^{-10}$ . Pri oceni napak si pomagaj s programi, ki znajo računati s poljubno natančnostjo, na primer z MATHEMATICO in/ali paketi MPMATH in DECIMAL v programskem jeziku PYTHON.

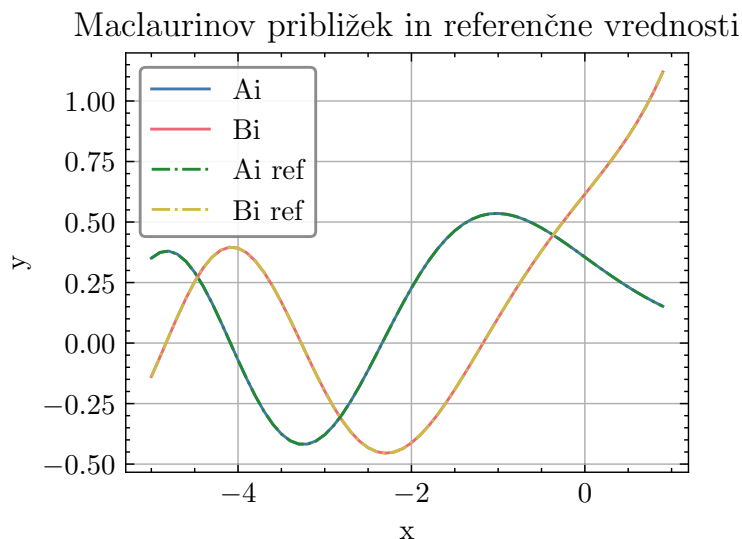
### 2.1 Maclaurinov približek

Člene vrst  $f$  in  $g$  zapišemo rekurzivno, in  $n$ -ti člen zapišemo kot produkt prejšnjega in količnika:

$$f_n = f_{n-1} \cdot \frac{f_n}{f_{n-1}} = f_{n-1} \cdot \frac{x^3}{3n(3n-1)}, \quad f_0 = 1$$

$$g_n = g_{n-1} \cdot \frac{g_n}{g_{n-1}} = g_{n-1} \cdot \frac{x^3}{3n(3n+1)}, \quad g_0 = x$$

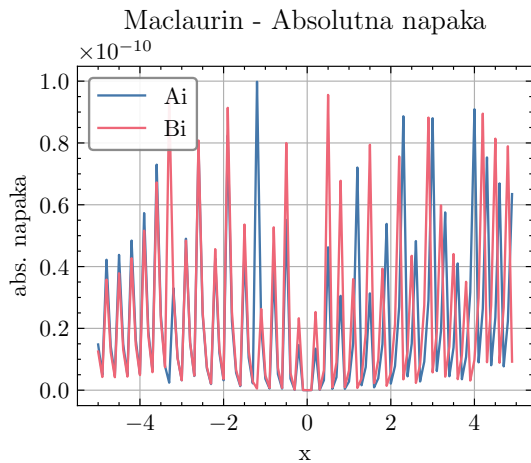
Dobljene rezultate bomo skozi nalogo primerjali z vgrajenima funkcijama `mpmath.airyai()` in `mpmath.airybi()`, ki gotovo od dejanske vrednosti odstopata manj kot  $\cdot 10^{-20}$  [4].



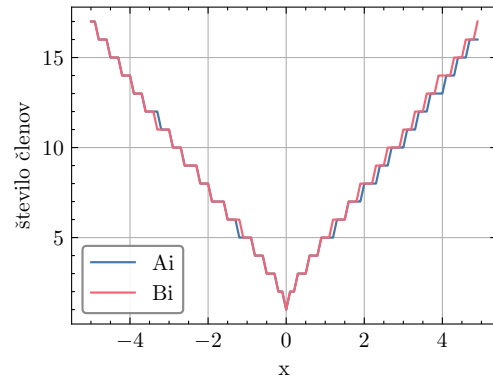
Slika 1: Maclaurinov približek  $Ai$  in  $Bi$  primerjan z vgrajenima funkcijama

Že na prvi pogled, ko grafiramo dobljene vrednosti za obe funkciji in jih primerjamo z vgrajenima funkcijama vidimo (slika: 1), da je Maclaurinov približek precej uspešen. To še dodatno potrđita sliki 2 in 3, kjer vidimo, da nam je na območju  $(-4, 4)$  uspelo *ujet* tako željeno absolutno kot relativno napako z manj kot dvajsetimi členi.

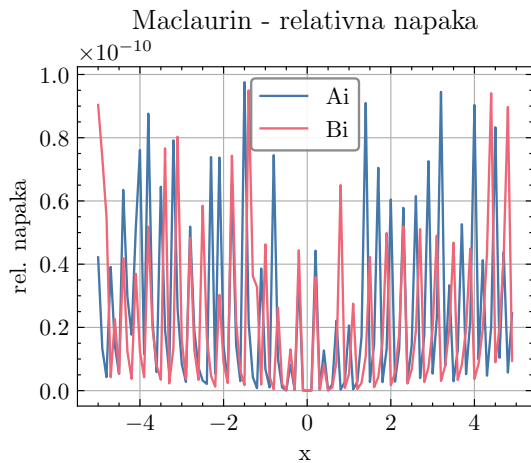
Zanimivost, ki se mi jo zdi vredno omeniti lahko opazimo na desni sliki 3, kjer vidimo, da se število potrebnih členov funkcije  $Ai$  hitro večja. To je seveda smiselno, ko pomislimo, da tam  $Ai$  dosega vrednosti zelo blizu 0 in je tako seveda za enako relativno natančnost, potrebna veliko boljša absolutna natančnost.



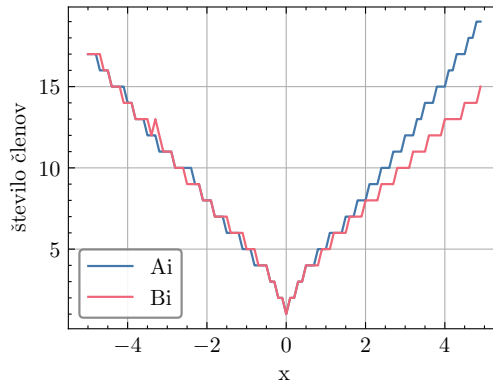
Maclaurin - Število členov za fiksno absolutno napako



Slika 2: Absolutna napaka naše implementacije in število členov potrebnih, da le ta ostane pod  $10^{-10}$ . Iz grafov vidimo, da se napaka sicer z oddaljenostjo od izhodišča strmo večja, a vsakič ko bi le ta zgrešila željeno natančnost se vrsti doda en člen. To pojasni močno zobničasto naravo napake.



Maclaurin - Število členov za fiksno relativno napako



Slika 3: Relativna napaka in potrebno število členov vrste za doseg te napake. Karakteristika je ekvivalentna tisti pri absolutni napaki. Tudi potrebno število členov se ne spremeni znatno, le pri večjih pozitivnih vrednostih opazimo, da potrebujemo vedno več členov za funkcijo  $Ai$ .

## 2.2 Asimptotski približek za velike negativne $x$

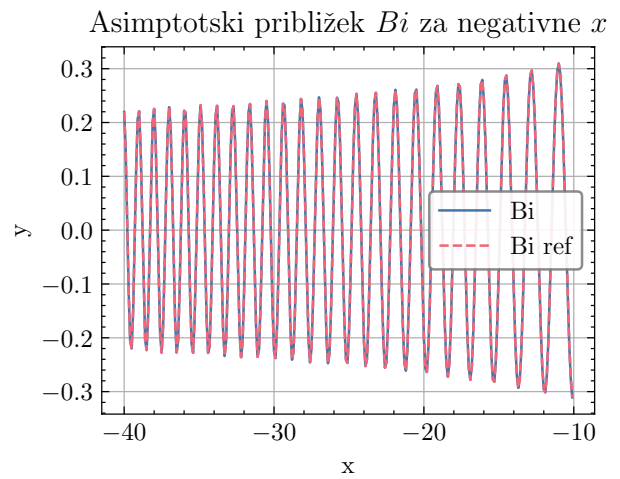
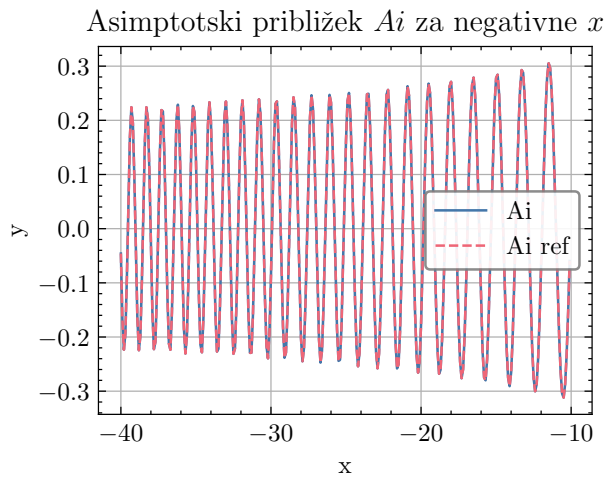
Člene vrst razvoja funkcij  $P$  in  $Q$  prav tako, kot pri Maclaurinovem razvoju zapišemo rekurzivno, saj tako močno izboljšamo hitrost algoritma.

$$p_n = p_{n-1} \cdot \frac{p_n}{p_{n-1}} = -p_{n-1} \cdot \frac{(6n - 1/2)(6n - 5/2)(6n - 7/2)(6n - 11/2)}{(2n - 1)(2n)18^2 x^2}, \quad p_0 = 1$$

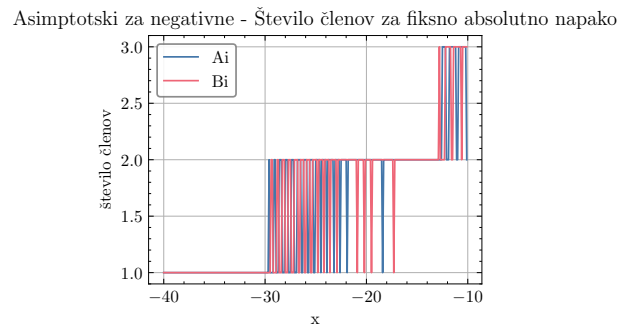
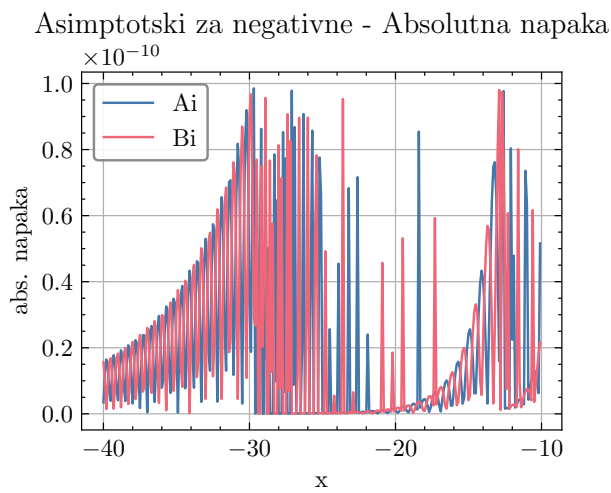
$$q_n = q_{n-1} \cdot \frac{q_n}{q_{n-1}} = -q_{n-1} \cdot \frac{(6n - 1/2)(6n - 5/2)(6n + 1/2)(6n + 5/2)}{(2n + 1)(2n)18^2 x^2}, \quad q_0 = \frac{5}{72x}$$

Pri obeh asimptotskih približkih moramo sicer paziti, da ne uporabimo preveč členov v vrsti. Izkaže se namreč, da se začne napaka pri nekem členu nazaj večati. Iz tega razloga vrsto odrežemo, ko naslednji člen postane večji od prejšnjega. Poraja se vprašanje, če je to res najboljša meja za *odsek* vrste:

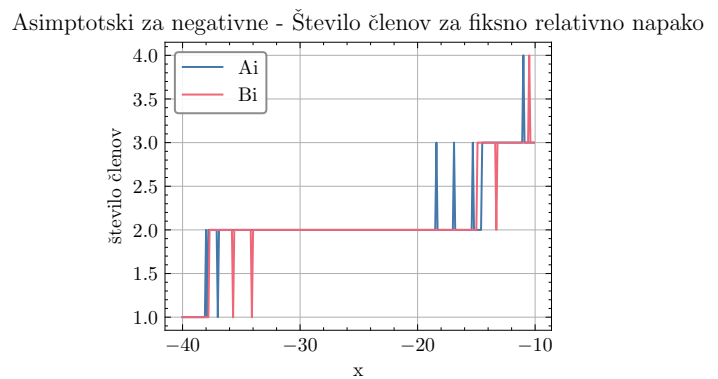
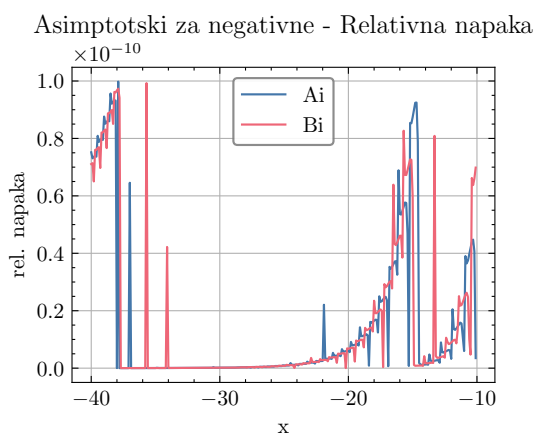
Odgovor je da je to tok blizu, da je praktično optimalno. (Jakob Kralj, 2025)



Slika 4: Asimptotski približek za  $Ai$  (levo) in  $Bi$  (desno) primerjan z vgrajenima funkcijama.



Slika 5: Absolutna napaka (levo) in število členov asimptotske vrste potrebnih za doseg le te. Zanimivo vidimo, da bolj kot je negativen  $x$  manjša je napaka in je zato posledično potrebnih manj členov.



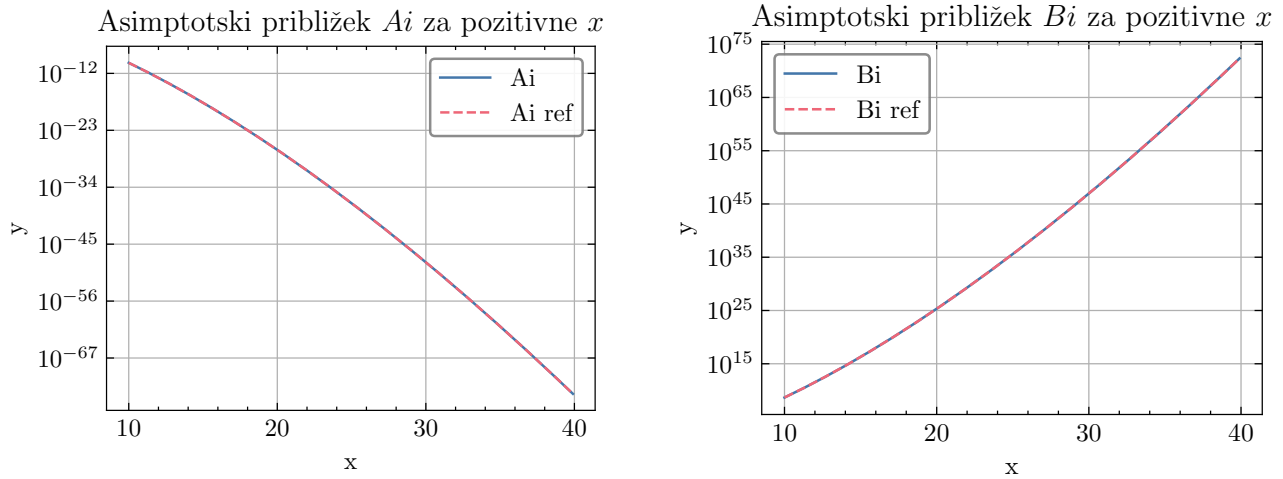
Slika 6: Relativna napaka (levo) in število členov potrebnih za doseg le te (desno). Sama karakteristika je seveda zelo podobna kot pri absolutni napaki (glej sliko 5) a lahko opazimo, da je v splošnem za konstantno relativno napako potrebnih nekoliko več členov

### 2.3 Asimptotski približek za velike pozitivne $x$

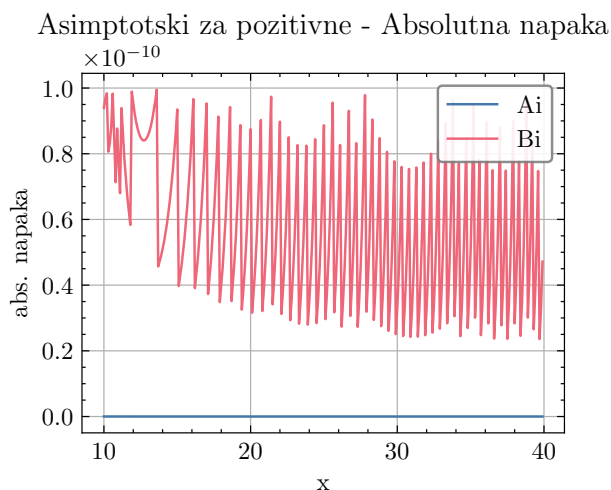
Za velike pozitivne  $x$  uporabimo vrsto  $L$  opisano v poglavju 1. Katere člene lahko spet zapišemo rekurzivno za potrebe optimizacije:

$$l_n = l_{n-1} \cdot \frac{l_n}{l_{n-1}} = l_{n-1} \cdot \frac{(3n + 1/2)(3n + 5/2)}{(n + 1)18x}, \quad l_0 = 1$$

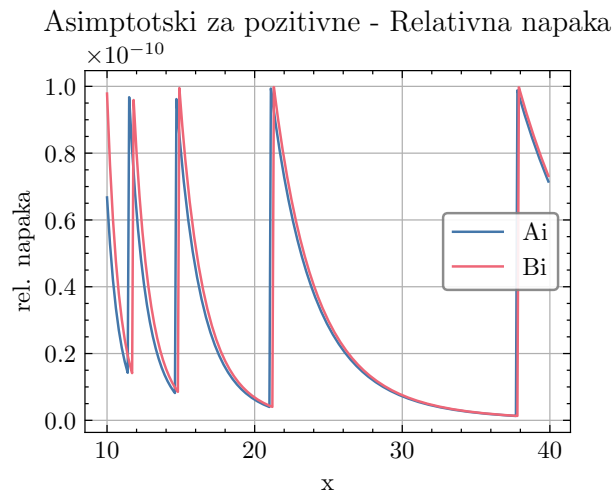
Pristop od tu naprej je seveda ekvivalenten tistemu za velike negativne  $x$ .



Slika 7: Asimptotski približek za  $Ai$  (levo) in  $Bi$  (desno) primerjan z vgrajenima funkcijama.

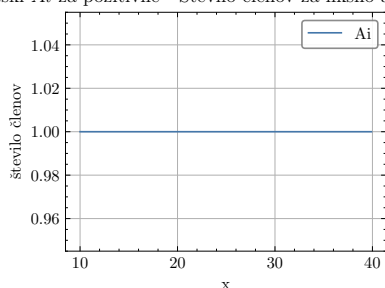


(a) First subfigure.



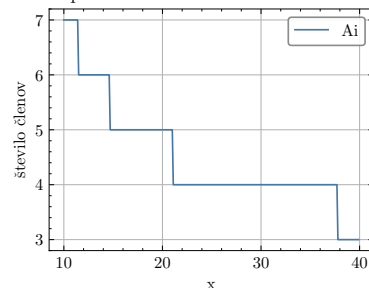
(b) Second subfigure.

Asimptotski  $A_i$  za pozitivne - Število členov za fiksno absolutno napako



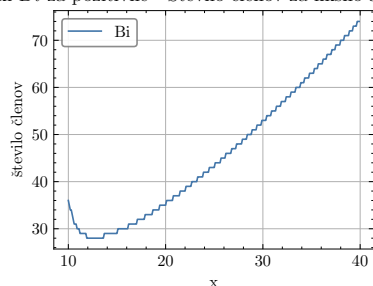
(c) Third subfigure.

Asimptotski  $A_i$  za pozitivne - Število členov za fiksno relativno napako



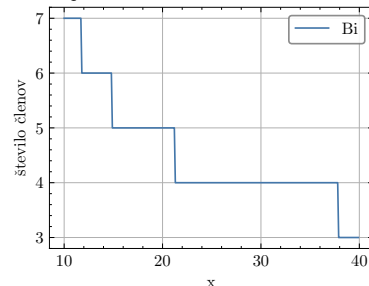
(d) Fourth subfigure.

Asimptotski  $B_i$  za pozitivne - Število členov za fiksno absolutno napako



(e) Third subfigure.

Asimptotski  $B_i$  za pozitivne - Število členov za fiksno relativno napako



(f) Fourth subfigure.

Slika 8: Overview of all four cases: (a)–(d).

## 2.4 Zlepek

Hitro postane očitno, da nobena izmed metod ni učinkovita po celotni realni osi.

## 3 Dodatna naloga

Ničle funkcije  $A_i$  pogosto srečamo v matematični analizi pri določitvi intervalov ničel specialnih funkcij in ortogonalnih polinomov [5] ter v fiziki pri računu energijskih spektrov kvantnomehanskih sistemov [1]. Poišči prvih sto ničel  $\{a_s\}_{s=1}^{100}$  Airyjeve funkcije  $A_i$  in prvih sto ničel  $\{b_s\}_{s=1}^{100}$  funkcije  $B_i$  pri  $x < 0$  ter dobljene vrednosti primerjaj s formulama

$$a_s = -f\left(\frac{3\pi(4s-1)}{8}\right), \quad b_s = -f\left(\frac{3\pi(4s-3)}{8}\right), \quad s = 1, 2, \dots,$$

kjer ima funkcija  $f$  asimptotski razvoj [2]

$$f(z) \sim z^{2/3} \left( 1 + \frac{5}{48} z^{-2} - \frac{5}{36} z^{-4} + \frac{77125}{82944} z^{-6} - \frac{108056875}{6967296} z^{-8} + \dots \right).$$

## Literatura

- [1] E. M. Lifshitz L. D. Landau. *Course in theoretical physics, Vol. 3: Quantum mechanics*. Pergamon Press, Oxford 1991.
- [2] I. A. Stegun M. Abramowitz. *Handbook of mathematical functions*. Dover Publications, Mineola 1972.
- [3] M. Soares O. Vallée. *Airy functions and applications to physics*. Imperial College Press, 2004.
- [4] Luka Skeledžija. Airyjevi funkciji, 2023. Accessed: github 12. 10. 2025.
- [5] G. Szegő. Orthogonal polynomials. *AMS*, Providence 1939.