

Sklopljena nihajna kroga

Samo Krejan

maj 2025

1 Uvod

Zelo pogosto se v naravi srečamo s pojavni, kjer gre za dva ali več nihal, ki so med seboj sklopljena. Zaradi omenjene skloplitvije nihal ne moremo več obravnavati ločeno temveč kot en sistem.

Sistem n enakih in enostavnih oscilatorjev ima n lastnih nihanj. V prvem letniku smo že spoznali obnašanje dveh sklopljenih fizičnih nihal; tam sta lastni frekvenci ko nihali nihata točno v fazi in ko nihata iz faze. Prva lastna frekvenca je kar enaka lastni frekvenci posameznega nihala, druga pa je hitrejša, če je sklopitev močnejša.

Pri tej vaji smo opazovali električna nihajna kroga sklopljena s kondenzatorjem. En sam nihajni krog sestavljen iz kondenzatorja s kapaciteto C in tuljave z induktivnostjo L niha s krožno frekvenco;

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Če je v nihajnjem krogu prisoten še upor R , nastopi dušenje, ki ga opišemo s koeficientom $\beta = R/2L$. Sistem opisujejo enačbe za dušeno nihanje z rešitvijo;

$$I(t) = e^{-\beta t} (I_1 \sin \omega' t + I_2 \cos \omega' t)$$

Kjer je $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

Če k prvemu krogu vežemo še drugi preko kondenzatorja C_0 potem dobimo sklopljen sistem nihajnih krogov. zaradi dveh prostorskih stopenj imamo torej dva lastna načina nihanja; prvi je enak kot prej, ko oba nihata v fazi, drugi lasten način pa je:

$$U_{1,2} = \pm U_0 e^{-\beta t} \cos(\omega'' t)$$

kjer je $\omega'' = \sqrt{\frac{C}{C+C_0}\omega_0^2 - \beta^2}$.

Splošno obnašanje sistema lahko opišemo kot linearne kombinacije obeh lastnih nihanj:

$$U_{1,2} = e^{-\beta t} (U' \cos(\omega' t) \pm U'' \cos(\omega'' t + \delta))$$

2 Potrebščine

- Digitalni osciloskop,
- funkcionalni generator napetosti, namizni multimeter,

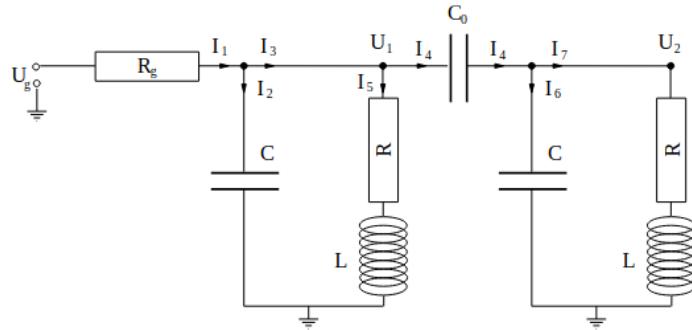
- nihajna kroga in kabli, USB ključek,
- prenosnik z ustrezno programsko opremo.

3 Naloga

1. Izmerite časovni potek napetosti na obeh krogih pri vzbujanju s stopničastim signalom za vse različne sklopite,
2. Izmerite frekvenčno karakteristiko enega nihajnega kroga in določite dobroto Q
3. Izmerite frekvenčno karakteristiko sklopljenih nihajnih krovov z meritvijo odziva drugega kroga za vsak C_0 in izmerite razliko lastnih krožnih frekvenc

4 Rezultati in analiza

Nihajna kroga sta sestavljena iz tuljave z induktivnostjo L , kondenzatorja s kapacitivnostjo $C = 5.6 \text{ nF}$ in upornostjo $R = 7.5 \Omega$. Najprej smo priklopili nihajna kroga na osciloskop in vir stopničaste napetosti (glej sliko vezja). Izmerili smo odziv prvega in drugega kondenzatorja pri vseh različnih sklopitvah.



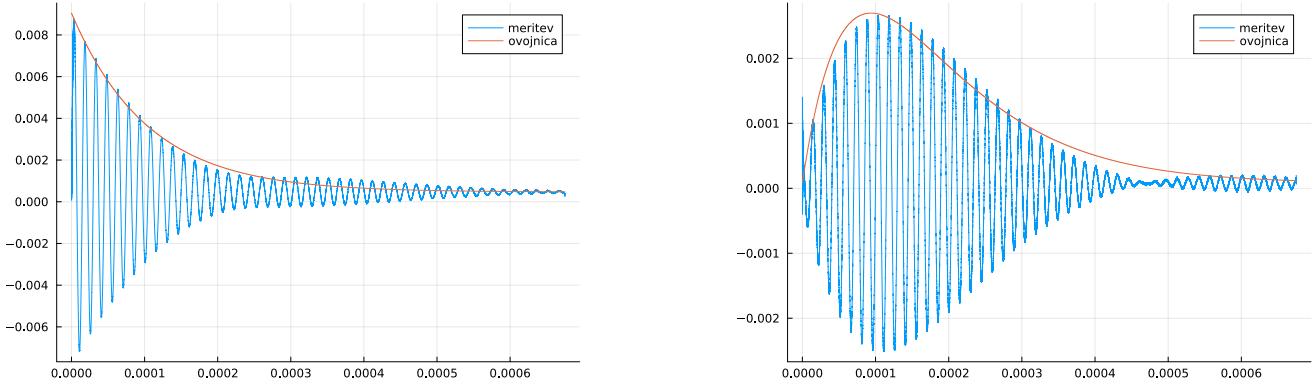
Slika 1: Skica vezja uporabljenega pri eksperimentu

Najprej smo merili odziv brez sklopite $C_0 = 0$, a se je že tu izkazalo, da je prišlo do nekaj sklopite. Tako smo že tu na grafa U_1, U_2 že na tej točki *fitali* funkcij:

$$U_1(t) = U_0 e^{-\beta t} \sin\left(\frac{\omega' + \omega''}{2}t\right) \cos((\omega' - \omega'')t)$$

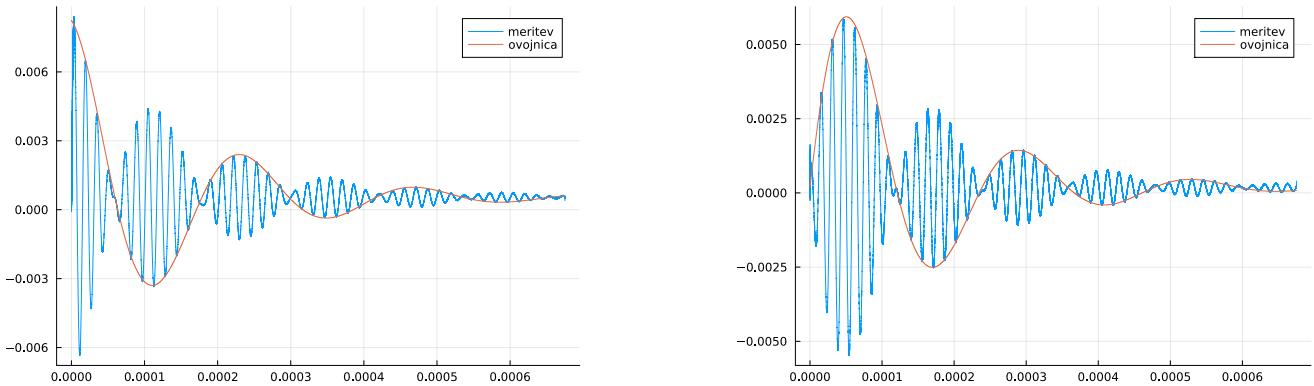
$$U_2(t) = U_0 e^{-\beta t} \sin\left(\frac{\omega' + \omega''}{2}t\right) \sin((\omega' - \omega'')t)$$

Če bi na grafe risali tudi fite funkcij bi nastal kaos, tako da smo poleg izmerjenih podatkov risali zgolj ovojnico. Na ta način smo dobili naslednja grafa:



Slika 2: U_1, U_2 izmerjena, ter njuni ovojnici pri minimalni sklopitevi

Iz fita dobimo vrednosti parametra $\omega' = 4.2 \cdot 10^5 \text{ } 1/\text{s}$, napake fita pa tu ne bom navajal, saj je manjša od procenta. Če predpostavimo $\omega \gg \beta$ (kar lahko naredimo saj mo daleč od kritičnega dušenja), dobimo $L = 9.9 \cdot 10^{-4} \text{ H}$. Za tem smo praktično isti postopek ponovili še za ostale sklopiteve. Primer meritve in ovojnici fita vidimo na naslednjih dveh grafih:



Slika 3: U_1, U_2 izmerjena, ter njuni ovojnici pri minimalni sklopitevi

Ko smo tako fitali omenjeno funkcijo na podatke smo dobili naslednje vrednosti predstavljene v tabeli:

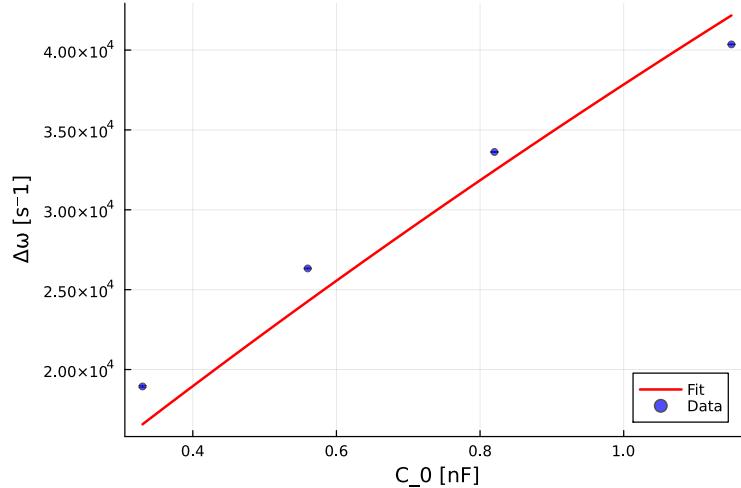
$C \text{ [pF]}$	krog	$\beta \text{ [s}^{-1}]$	$\Delta\omega \text{ [s}^{-1}]$
330	U_1	6262 ± 2	18996 ± 2
	U_2	6585 ± 2	18887 ± 1
560	U_1	6080 ± 2	26368 ± 2
	U_2	6347 ± 2	26302 ± 1
820	U_1	5976 ± 2	33644 ± 2
	U_2	6200 ± 2	33600 ± 1
1150	U_1	6252 ± 1	40368 ± 1
	U_2	6430 ± 2	40338 ± 1
povprečje		6300 ± 300	

Tabela 1: Tabela izmerjenih vrednosti

kjer je $\Delta\omega = \omega' - \omega''$. Če β izračunamo iz podanega upora in prej izračunane induktivnosti dobimo:

$$\beta' = \frac{R}{2L} = 3787 \text{ s}^{-1}$$

kar zelo močno odstopa od izmerjene vrednosti. Razlog za to je v morda večjem uporu, ali kakšni drugi neidealizaciji. Frekvence utripanja smo nato nanesli na graf v odvisnosti od sklopitvenega kondenzatorja:



Slika 4: Frekvenca utripanja v odvisnosti od sklopitvenega kondenzatorja s fitom

Na grafu je poleg meritev tudi fit, ki smo ga dobili s teoretično funkcijo:

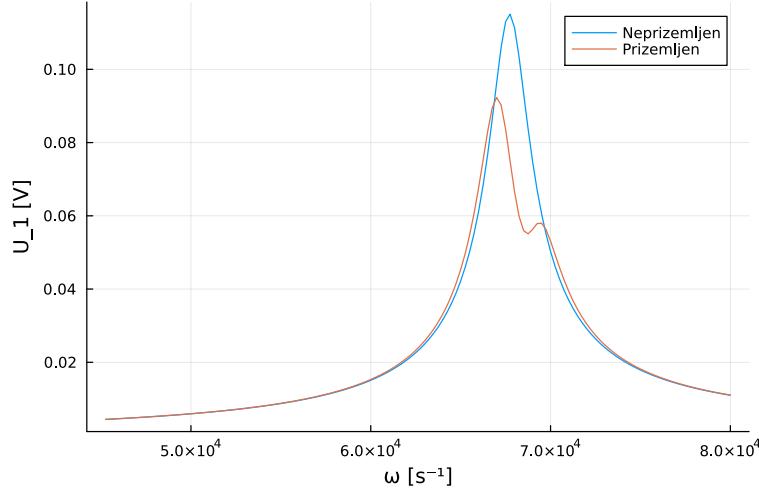
$$\Delta\omega = \omega' - \omega'' + (\omega)_I$$

kjer je ω' izmerjena z veliko natančnostjo, ω'' izračunana iz sklopitvenega kondenzatorja, kot je opisano v uvodu in $(\omega)_I$ je parameter, ki verjetno pride zaradi induktivnosti sklopitve. Glede na fit znaša $(\omega)_I = (5000 \pm 1000) \text{ s}^{-1}$

Za tem smo opazovali resonančni odziv na vsiljeno nihanje brez sklopitvenega kondenzatorja. Merili smo na dva načina; ko je bil drugi krog prizemljen, in ko je bil neprizemljen. Ko je bil drugi krog neprizemljen vidimo dva vrhova, ki ustrezata dvema različnima nihajnjima načinoma. Tega načeloma ne bi smeli opaziti, saj nismo imeli nobene sklopitve, a to vseeno lahko razložimo, z neko induktivno sklopitvijo, kot smo to storili tudi v prejšnjem delu vaje.

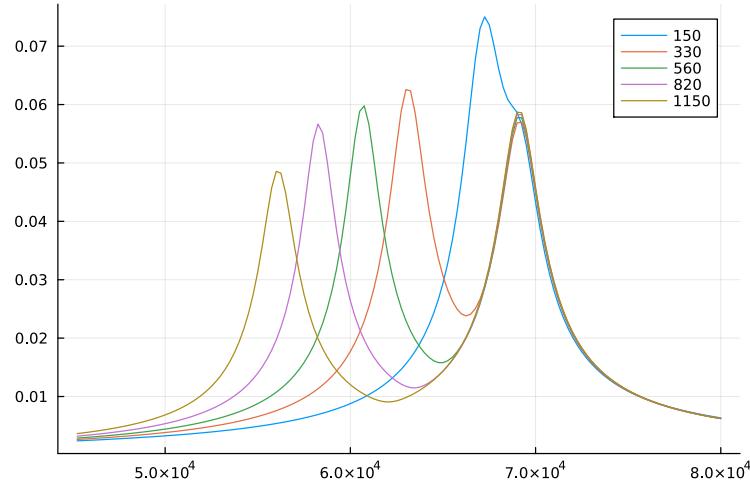
Če se osredotočimo samo na graf neprizemljenega drugega kroga, lahko določimo dobroto Q prvega nihajnjega kroga. Ta je definirana kot $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$, kjer je ω_0 resonančna frekvenca in $\Delta\omega$ širina resonančne krivulje. Na ta način dobimo:

$$Q = 33.8 \pm 8.5$$



Slika 5: resonančni odziv nesklopljenih nihal, ko je drugo (ne)ozemljeno

Za tem smo nadaljevali z drugim nihajnim krogom prizemljenim, in opazovali odziv. Pri vsaki meritve smo dobili dva maksimuma, kjer je vsak predstavljal eno izmed lastnih nihanj sistema. Opazimo, da je en stalno na istem mestu, to je nihanje ki je ekvivalentno nihanju enega samega nihajnjega kroga in ni odvisno od skloplitve, medtem ko drugo je odvisno od skloplitve. Zanima nas odvisnost razlike teh maksimumov od skloplitve.

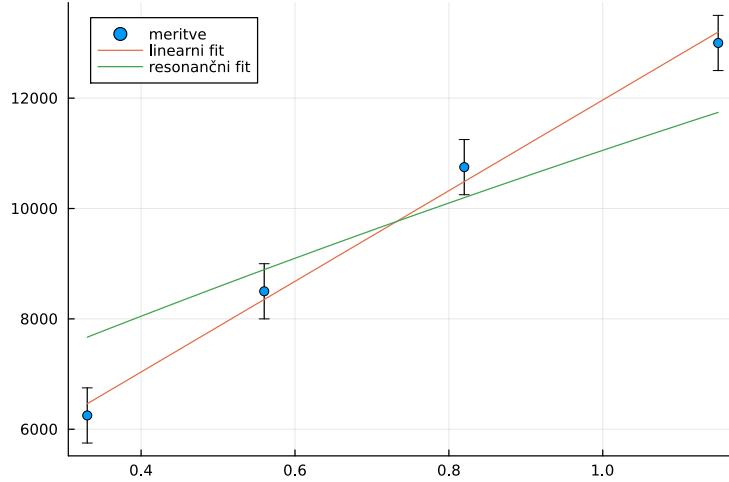


Slika 6: Resonančni odziv sklopljenih krogov pri drugačnih skloplitvah

$C_0 [pF]$	$\nu_1 [\pm 250 Hz]$	$\nu_2 [\pm 250 Hz]$	$\Delta\nu [\pm 500 Hz]$
330	63000.0	69250.0	6250.0
560	60750.0	69250.0	8500.0
820	58250.0	69000.0	10750.0
1150	56000.0	69000.0	13000.0

Tabela 2: tabela meritve maksimumov in razlik med njimi

V tabeli takoj vidimo, da je drugi maksimum res konstanten in torej neodvisen od sklopitev. Čeprav nismo morali vključiti sklopitev $150 pF$ zaradi neizraženega drugega vrha, se iz grafa lepo vidi, da se tudi tista ujema.



Slika 7: $\Delta\nu$ v odvisnosti od sklopitvenega kondenzatorja

Na meritve lahko fitamo funkcijo:

$$\Delta\nu = \frac{1}{2\pi}(\omega' - \omega'' + (\omega)_I)$$

kjer je $(\omega)_I$ parameter, kot prej, ki nam bo povedal nekaj o induktivni sklopitevi. Enačba zaradi svoje kompleksnosti ne ustreza ravno merilom za fit, zato jo lahko lanižiramo kot:

$$\Delta\nu = \frac{\omega'}{2\pi} \frac{C_0}{2C} + \frac{(\omega)_I}{2\pi}$$

Na ta način dobimo vrednost:

$$(\omega)_I = (23600 \pm 2400) s^{-1}$$

To nam sicer da tudi

$$\omega' = (3.3 \pm 0.1) \cdot 10^5 s^{-1}$$

kar se seveda ne sklada s prejšnjimi rezultati, a če naredimo enako prilagoditev, se tudi resonančni fit sklada z meritvami, tako da je tu verjetno prišlo do nekih novih napak in odstopanj.