Difuzija tekočin

Samo Krejan

december 2025

1 Uvod

1.1 Lom

Če pri lomu žarka na eni meji sredstva velja med kotoma, ki ga žarek objema z optično osjo zveza

$$\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} = \frac{n_2}{n_1},$$

pri čemer sta n_1 in n_2 lomna količnika. Če ta produkt zapišemo za N plasti, lahko z logaritmiranjem produkt prevedemo na vsoto. Ko N pošljemo proti neskončno, dobimo zvezo

$$d(\log\cos\varphi) = -d(\log n). \tag{1}$$

V našem primeru je lomni količnik odvisen le od koordinate z. Torej lahko izraz (1) integriramo po x. Z dodatnim upoštevanjem meje na robu kivete (glej sliko 1) dobimo

$$\alpha_Z = d\frac{dn}{dz}.$$

To se na zaslonu pokaže kot odmik h, ki je za majhne kote α in $d \ll b$ enak

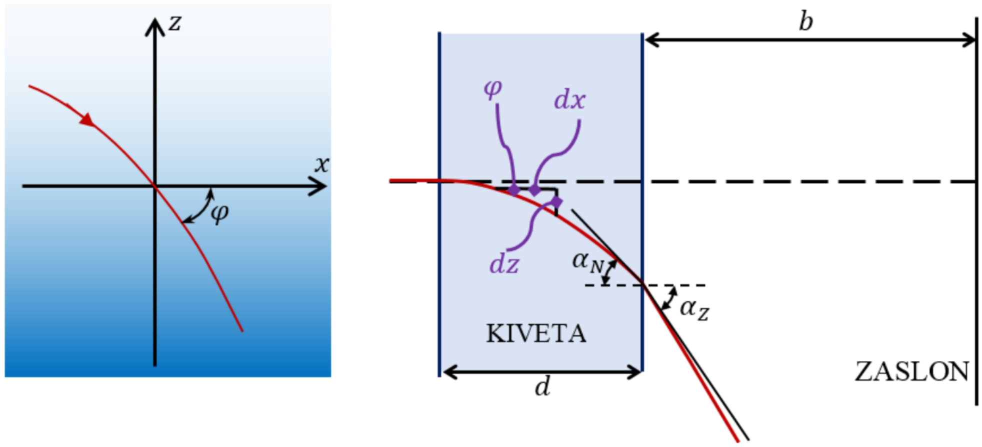
$$y(z) = bd\frac{dn}{dz}. \tag{2}$$

1.2 Difuzija

V kiveti za koncentracijo etanola $f(z)$ velja eno-dimenzionalna difuzijska enačba

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial t}\right] f = 0$$

Osnovna rešitev te enačbe je $f = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{-\frac{z^2}{4Dt}}$, kar predstavlja rešitev za začetno koncentracijo $f \propto \delta(z)$. Če z integriranjem te Greenove formule enčbe rešimo pri naših začetnih pogojih, dobimo



Slika 1: Lom žarka znotraj sredstva (levo) in pot žarka skozi kiveto proti zaslonu (desno).

odvisnost lomnega količnika, ki ga narekuje mešanje vode z količnikom n_0 in etanola z lomnim količnikom n_1

$$n(z) = \frac{n_0 + n_1}{2} + \frac{n_1 - n_0}{2}\theta\left(\frac{z}{\sqrt{4Dt}}\right).$$

Če to vstavimo v enačbo (2), dobimo odmik na zaslonu

$$y(z) = bd(n_1 - n_0)\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{-\frac{z^2}{4Dt}}.$$

Ploščina pod to krivuljo je konstantna s časom in je enaka

$$S = kbd(n_1 - n_0), \tag{3}$$

pri čemer je $k = \frac{a+b}{a}$, a pa razdalja med stekleno paličico in kiveto. Maksimalen odmik y je sorazmeren z $1/\sqrt{t}$

$$h = \frac{bd(n_1 - n_0)}{\sqrt{4\pi Dt}}. \tag{4}$$

2 Potrebščine

- Zaslon,
- optična klop,
- kiveta z alkoholom in vodo,
- steklena palčka,
- laser,

- milimeterski papir.

3 Naloga

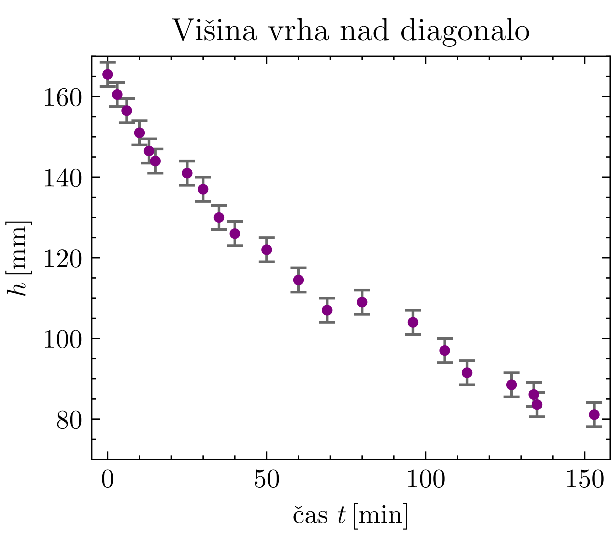
1. Izmeri časovno odvisnost maksimalne višine h, krivulje na zaslonu nad diagonalo.
2. Iz enačbe (4) izrazi Dt in s prilagajanjem premice izračunaj difuzijsko konstanto D.

4 Meritve

Prvo izmerimo razdaljo med stekleno paličico (s katero razpršimo snop) in kiveto, debelino kivete in razdaljo med kiveto in zalonom

$$
\begin{aligned}
a &= (49 \pm 1)\,\mathrm{cm},\\
d &= (12 \pm 1)\,\mathrm{mm},\\
b &= (87 \pm 1)\,\mathrm{cm}.
\end{aligned}
$$

V kiveto nalijemo etanol, nato pa na dno z cevko previdno nalijemo destilirano vodo. Začnemo štoparico in na zaslonu na milimeterski papir beležimo maksimalne odmike (glej sliko 2)



Slika 2: Potek maksimalnega odmika h po času.

Ob treh različnih časih orišemo tudi obliko krivulje. Njeno površino izračunamo tako, da jo orišemo s trikotniki (slika 3). Izračunane površine so

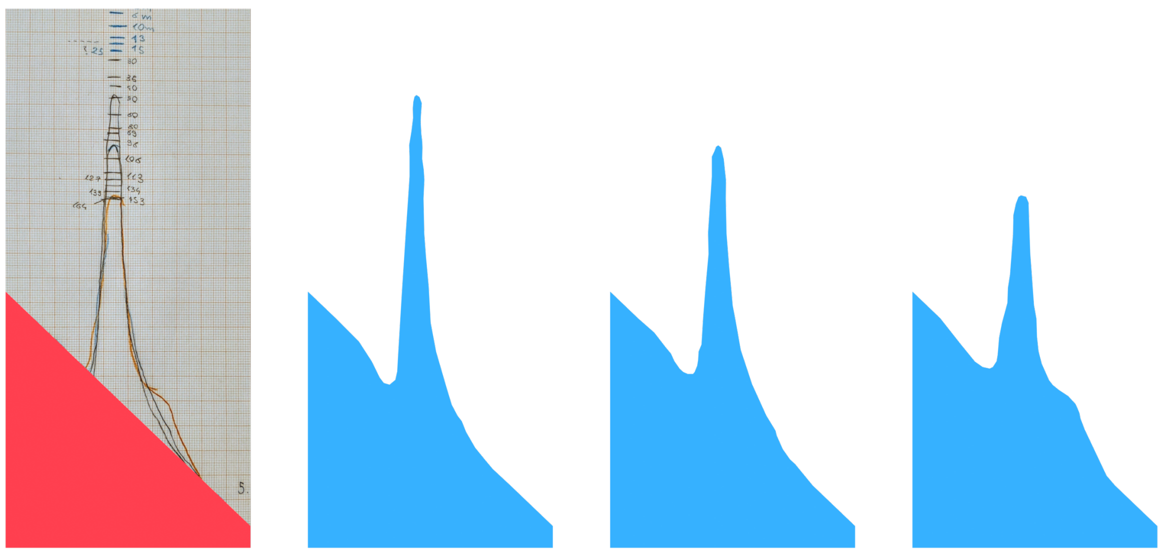
$$
\begin{aligned}
S_1 &= 1392\,\mathrm{mm}^2,\\
S_2 &= 1395\,\mathrm{mm}^2,\\
S_3 &= 1395\,\mathrm{mm}^2.
\end{aligned}
$$

V našem modelu je površina konstantna, torej lahko iz treh meritev dobimo povprečno vrednost in oceno napake

$$S = (1394 \pm 1)\,\mathrm{mm}^2.$$

To se ujema s površino, ki jo predvideva enačba (3)

$$S_{\mathrm{predvidena}} = (1330 \pm 90)\,\mathrm{mm}^2$$



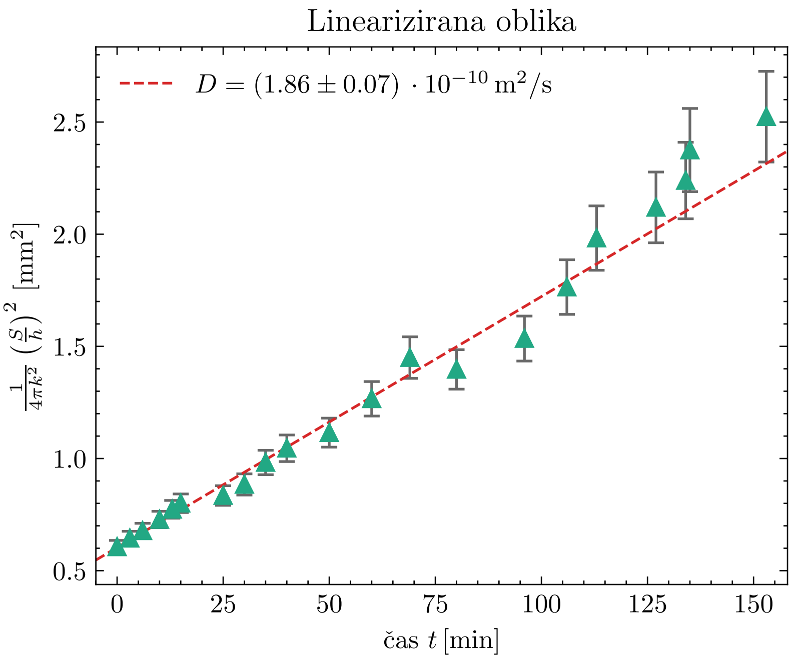
Slika 3: Krivulje, ki jih razberemo iz $10 \times 22\,\mathrm{cm}$ področja zaslona, orisane z n-kotnikom. Površino n-kotnika izračunamo tako, da seštejemo površino trikotnikov, ki ga sestavljajo. Z rdečo je narisana površina pod diagonalo, ki jo odštejemo modrim ploskvam, da dobimo površine S_1, S_2 in S_3.

Iz enačbe (4) lahko izrazimo časovno odvisen

$$Dt = \frac{1}{4\pi k^2}\left(\frac{S}{h}\right)^2.$$

Vse količine na desni strani izraza so znane iz meritev. Torej lahko na dano količino prilagodimo premico in kot njen naklon dobimo difuzijsko konstanto D (slika 4). Izračunana vrednost konstante je

$$D = (1.86 \pm 0.07)\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}.$$



Slika 4: Meritve $\frac{1}{4\pi k^2}\left(\frac{S}{h}\right)^2$, ki so po izrazu (4) preprosto premica z naklonom D.