Difuzija tekočin

Martin Šifrar

8. februar 2023

1 Uvod

1.1 Lom

Če pri lomu žarka na eni meji sredstva velja med kotoma, ki ga žarek objema z optično osjo zveza

$$\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} = \frac{n_2}{n_1},$$

pri čemer sta n_1 in n_2 lomna količnika. Če ta produkt zapišemo za N plasti, lahko z logaritmiranjem produkt prevedemo na vsoto. Ko N pošljemo proti neskončno, dobimo zvezo

$$\mathrm{d}(\log\cos\varphi) = -\mathrm{d}(\log n). \tag{1.1}$$

V našem primeru je lomni količnik odvisen le od koordinate z. Torej lahko izraz (1.1) integriramo po x. Z dodatnim upoštevanjem meje na robu kivete (glej sliko 1) dobimo

$$\alpha_Z = d\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z}.$$

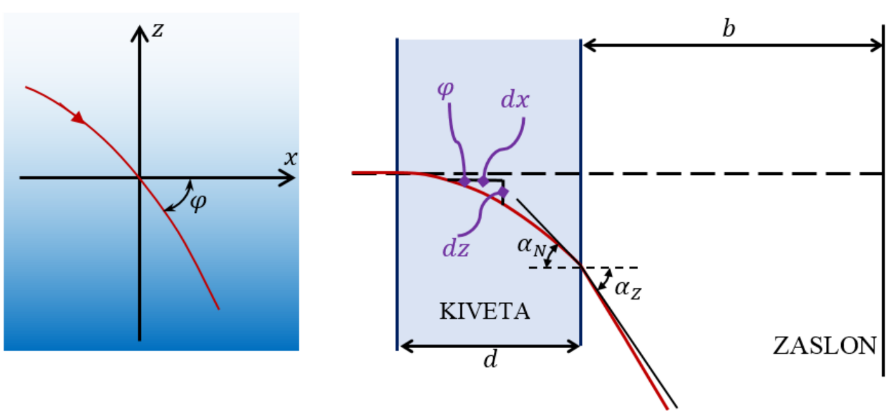
To se na zaslonu pokaže kot odmik h, ki je za majhne kote α in $d \ll b$ enak

$$y(z) = bd\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z}. \tag{1.2}$$

1.2 Difuzija

V kiveti za koncentracijo etanola $f(z)$ velja eno-dimenzionalna difuzijska enačba

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial t}\right] f = 0$$



Slika 1: Lom žarka znotraj sredstva (levo) in pot žarka skozi kiveto proti zaslonu (desno).

Osnovna rešitev te enačbe je $f = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{z^2}{4Dt}}$, kar predstavlja rešitev za začetno koncentracijo $f \propto \delta(z)$. Če z integriranjem te Greenove formule enčbe rešimo pri naših začetnih pogojih, dobimo odvisnost lomnega količnika, ki ga narekuje mešanje vode z količnikom n_0 in etanola z lomnim količnikom n_1

$$n(z) = \frac{n_0 + n_1}{2} + \frac{n_1 - n_0}{2} \theta \left(\frac{z}{\sqrt{4Dt}} \right).$$

Če to vstavimo v enačbo (1.2), dobimo odmik na zaslonu

$$y(z) = bd(n_1 - n_0) \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{z^2}{4Dt}}.$$

Ploščina pod to krivuljo je konstantna s časom in je enaka

$$S = kbd(n_1 - n_0), \tag{1.3}$$

pri čemer je $k = \frac{a+b}{a}$, a pa razdalja med stekleno paličico in kiveto. Maksimalen odmik y je sorazmeren z $1/\sqrt{t}$

$$h = \frac{bd(n_1 - n_0)}{\sqrt{4\pi Dt}}. \tag{1.4}$$

2 Naloga

1. Izmeri časovno odvisnost maksimalne višine h, krivulje na zaslonu nad diagonalo.
2. Iz enačbe (1.4) izrazi Dt in s prilagajanjem premice izračunaj difuzijsko konstanto D.

3 Meritve

Prvo izmerimo razdaljo med stekleno paličico (s katero razpršimo snop) in kiveto, debelino kivete in razdaljo med kiveto in zalonom

$$a = (49 \pm 1)\,\mathrm{cm},$$
$$d = (12 \pm 1)\,\mathrm{mm},$$
$$b = (87 \pm 1)\,\mathrm{cm}.$$

V kiveto nalijemo etanol, nato pa na dno z cevko previdno nalijemo destilirano vodo. Začnemo štoparico in na zaslonu na milimeterski papir beležimo maksimalne odmike (glej sliki 3 in 2)

Ob treh različnih časih orišemo tudi obliko krivulje. Njeno površino izračunamo tako, da jo orišemo s trikotniki (slika 4). Izračunane površine so

$$S_1 = 1392\,\mathrm{mm}^2,$$
$$S_2 = 1395\,\mathrm{mm}^2,$$
$$S_3 = 1395\,\mathrm{mm}^2.$$

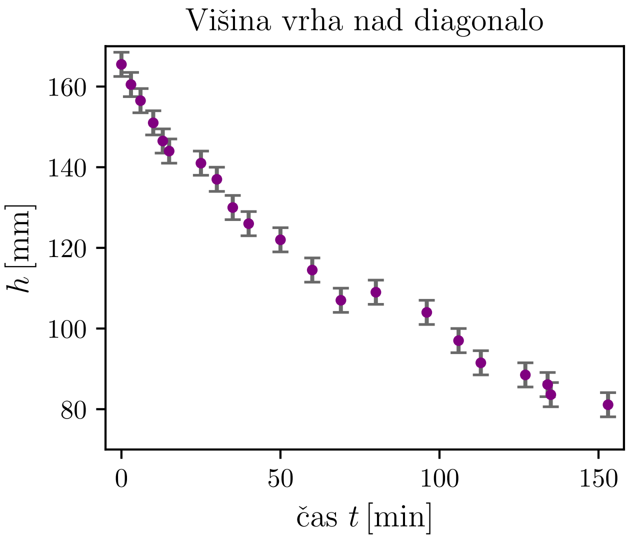
V našem modelu je površina konstantna, torej lahko iz treh meritev dobimo povprečno vrednost in oceno napake

$$S = (1394 \pm 1)\,\mathrm{mm}^2.$$

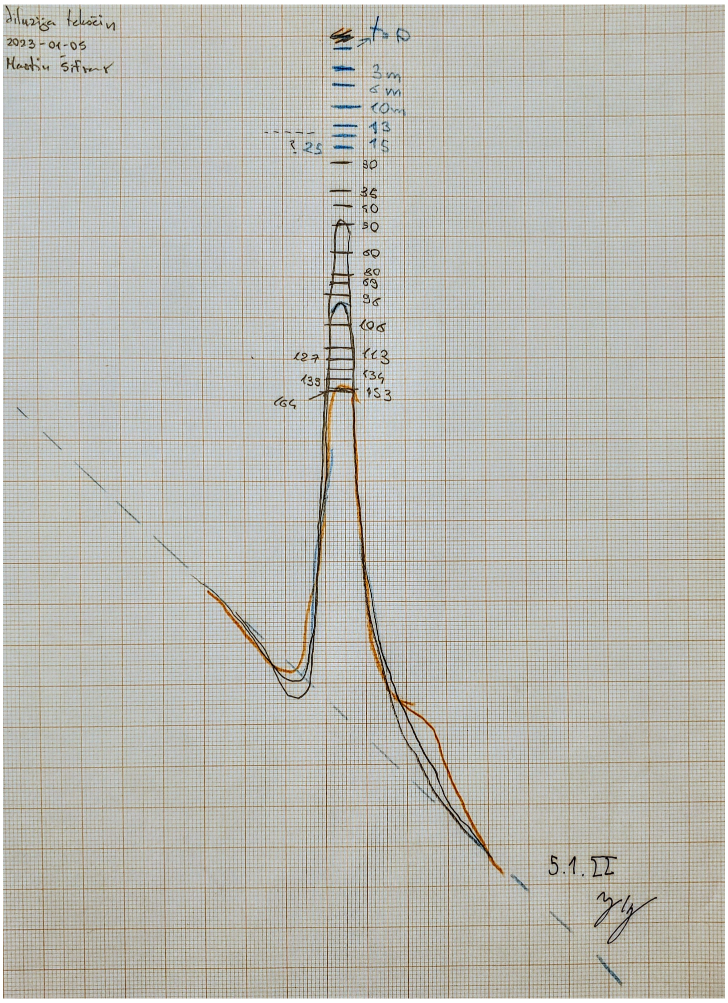
To se ujema s površino, ki jo predvideva enačba (1.3)

$$S_{\mathrm{predvidena}} = (1330 \pm 90)\,\mathrm{mm}^2$$

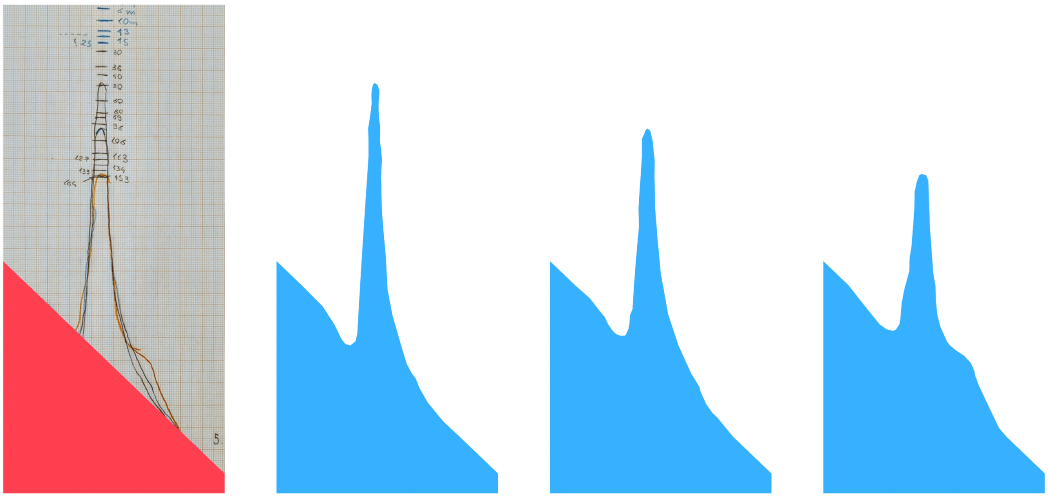
Iz enačbe (1.4) lahko izrazimo časovno odvisen



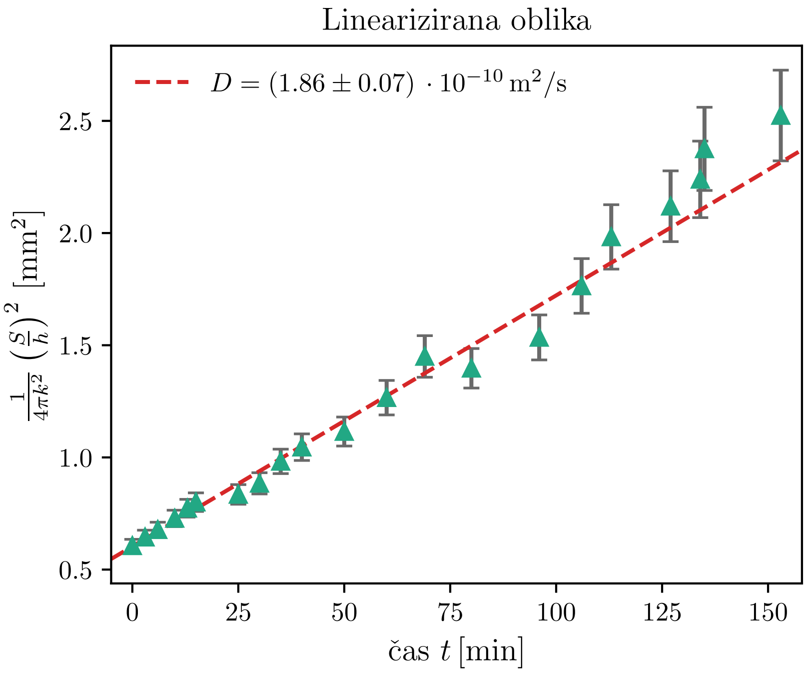
Slika 2: Potek maksimalnega odmika h po času.



Slika 3: Zaslon, na katerega beležimo maksimalen odmik h ob različnih časih. Dodatno so na papir orisane oblike krivulje ob treh različnih časih.



Slika 4: Krivulje, ki jih razberemo iz 10×22 cm področja slike 3, orisane z n-kotnikom. Površino n-kotnika izračunamo tako, da seštejemo površino trikotnikov, ki ga sestavljajo. Z rdečo je narisana površina pod diagonalo, ki jo odštejemo modrim ploskvam, da dobimo površine S_1, S_2 in S_3.



Slika 5: Meritve $\frac{1}{4\pi k^2}\left(\frac{S}{h}\right)^2$, ki so po izrazu (1.4) preprosto premica z naklonom D.

$$Dt = \frac{1}{4\pi k^2}\left(\frac{S}{h}\right)^2 .$$

Vse količine na desni strani izraza so znane iz meritev. Torej lahko na dano količino prilagodimo premico in kot njen naklon dobimo difuzijsko konstanto D (slika 5). Izračunana vrednost konstante je

$$D = (1.86 \pm 0.07)\,\mathrm{m^2/s}.$$