

实验3 线性系统的根轨迹

一、实验目的

1. 熟悉 MATLAB 用于控制系统中的一些基本编程语句和格式。
2. 利用 MATLAB 语句绘制系统的根轨迹。
3. 掌握用根轨迹分析系统性能的图解方法。
4. 掌握系统参数变化对特征根位置的影响。

二、基础知识及 MATLAB 函数

根轨迹是指系统的某一参数从零变到无穷大时，特征方程的根在 s 平面上的变化轨迹。这个参数一般选为开环系统的增益 K 。课本中介绍的手工绘制根轨迹的方法，只能绘制根轨迹草图。而用 MATLAB 可以方便地绘制精确的根轨迹图，并可观测参数变化对特征根位置的影响。

假设系统的对象模型可以表示为

$$G(s) = KG_o(s) = K \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

系统的闭环特征方程可以写成

$$1 + KG_o(s) = 0$$

对每一个 K 的取值，我们可以得到一组系统的闭环极点。如果我们改变 K 的数值，则可以得到一系列这样的极点集合。若将这些 K 的取值下得出的极点位置按照各个分支连接起来，则可以得到一些描述系统闭环位置的曲线，这些曲线又称为系统的根轨迹。

绘制系统的根轨迹 `rlocus()`

MATLAB 中绘制根轨迹的函数调用格式为：

<code>rlocus(num,den)</code>	开环增益 k 的范围自动设定
<code>rlocus(num,den,k)</code>	开环增益 k 的范围人工设定
<code>rlocus(p,z)</code>	依据开环零极点绘制根轨迹
<code>r=rlocus(num,den)</code>	不作图，返回闭环根矩阵
<code>[r,k]=rlocus(num,den)</code>	不作图，返回闭环根矩阵 r 和对应的开环增益向量 k

其中，`num`，`den` 分别为系统开环传递函数的分子、分母多项式系数，按 s 的降幂排列。 K 为根轨迹增益，可设定增益范围。

例 3.1：已知系统的开环传递函数 $G(s) = K * \frac{(s+1)}{s^3 + 4s^2 + 2s + 9}$ ，绘制系统的根轨迹的 matlab 的调用语句如下：

```
num=[1 1]; % 定义分子多项式
den=[1 4 2 9]; % 定义分母多项式
rlocus(num,den) % 绘制系统的根轨迹
grid % 画网格标度线
xlabel('Real Axis'),ylabel('Imaginary Axis') % 给坐标轴加上说明
```

```
title('Root Locus') % 给图形加上标题名
```

则该系统的根轨迹如图 3.1(a)所示。

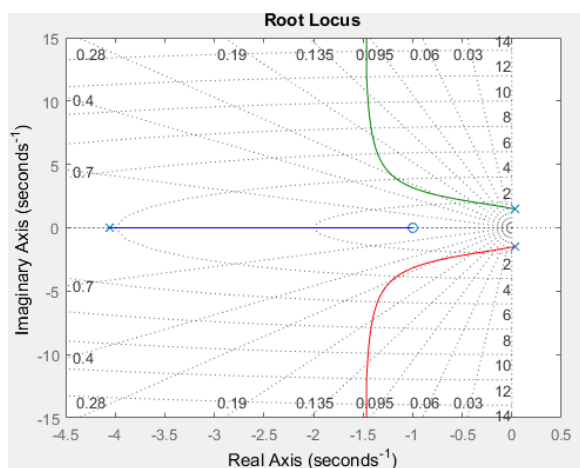
若上例要绘制 K 在 (1, 10) 的根轨迹图, 则此时的 matlab 的调用格式如下, 对应的根轨迹如图 3.1(b)所示。

```
num=[1 1]; den=[1 4 2 9];
```

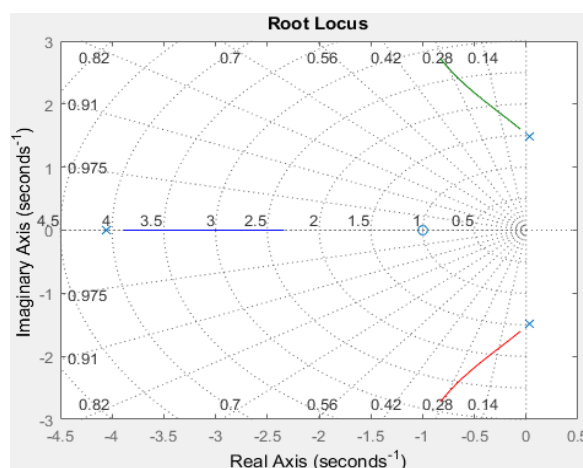
```
k=1:0.5:10;
```

```
rlocus(num,den,k)
```

```
grid
```



(a) 完整根轨迹图形



(b) 特定增益范围内的根轨迹图形

图 3.1 系统的根轨迹图形

1) 确定闭环根位置对应增益值 K 的函数 `rlocfind()`

在 MATLAB 中, 提供了 `rlocfind` 函数获取与特定的复根对应的增益 K 的值。在求出的根轨迹图上, 可确定选定点的增益值 K 和闭环根 r (向量) 的值。该函数的调用格式为:

```
[k,r]=rlocfind(num,den)
```

执行前, 先执行绘制根轨迹命令 `rlocus(num,den)`, 做出根轨迹图。执行 `rlocfind` 命令时, 出现提示语句 “Select a point in the graphics window”, 即要求在根轨迹图上选定闭环极点。将鼠标移至根轨迹图选定的位置, 单击左键确定, 根轨迹图上出现 “+” 标记, 即得到了该点的增益 K 和闭环根 r 的返回变量值。

例 3-2: 系统的开环传递函数为 $G(s) = K \frac{s^2+5s+6}{s^3+8s^2+3s+25}$, 试求: (1) 系统的根轨迹; (2) 系统稳定的 K 的范围;

(3) $K=1$ 时闭环系统阶跃响应曲线。则此时的 matlab 的调用格式为:

```
G=tf([1,5,6],[1,8,3,25]);
```

```
rlocus(G); %绘制系统的根轨迹
```

```
[k,r]=rlocfind(G) %确定临界稳定时的增益值 k 和对应的极点 r
```

```
G_c=feedback(G,1); %形成单位负反馈闭环系统
```

```
step(G_c) %绘制闭环系统的阶跃响应曲线
```

则系统的根轨迹图和闭环系统阶跃响应曲线如图 3.2 所示。

其中，调用 `rlocfind()`函数，求出系统与虚轴交点的 K 值，可得与虚轴交点的 K 值为 0.0264，故系统稳定的 K 的范围为 $K \in (0.0264, \infty)$ 。

2) 绘制阻尼比 ζ 和无阻尼自然频率 ω_n 的栅格线 `sgrid()`

当对系统的阻尼比 ζ 和无阻尼自然频率 ω_n 有要求时，就希望在根轨迹图上作等 ζ 或等 ω_n 线。`matlab` 中实现这一要求的函数为 `sgrid()`，该函数的调用格式为：

<code>sgrid(ζ, ω_n)</code>	已知 ζ 和 ω_n 的数值，做出等于已知参数的等值线。
<code>sgrid(' new')</code>	做出等间隔分布的等 ζ 和 ω_n 网格线。

例 3.3: 系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$ ，由 `rlocfind` 函数找出能产生主导极点阻尼 $\zeta = 0.707$ 的合适增益，如图 3.3(a)所示。

```
G=tf(1,[conv([1,1],[1,2]),0]);  
zet=[0.1:0.2:1];wn=[1:10];  
sgrid(zet,wn);hold on;rlocus(G)  
[k,r]=rlocfind(G)
```

Select a point in the graphics window

selected_point =

-0.3791 + 0.3602i

k =

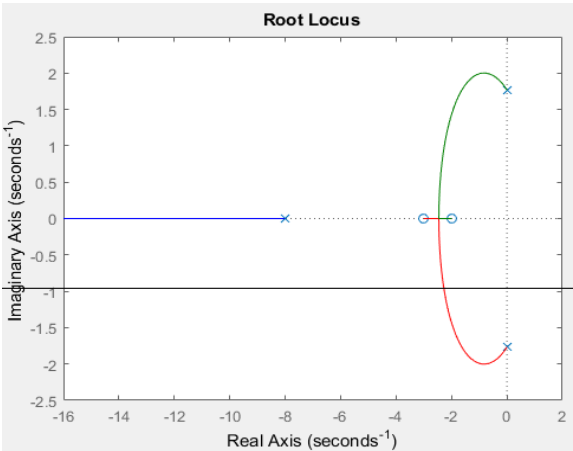
0.6233

r =

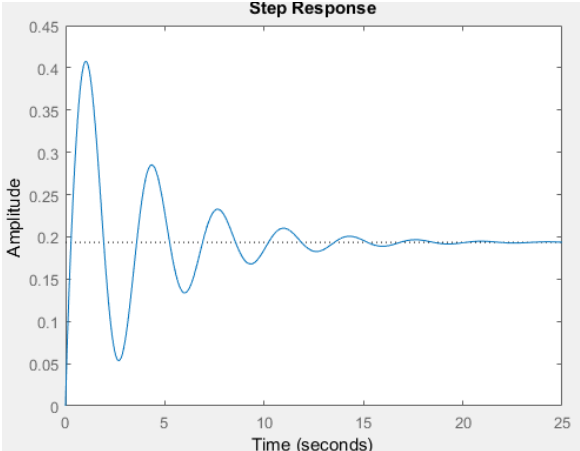
-2.2279

-0.3861 + 0.3616i

-0.3861 - 0.3616i

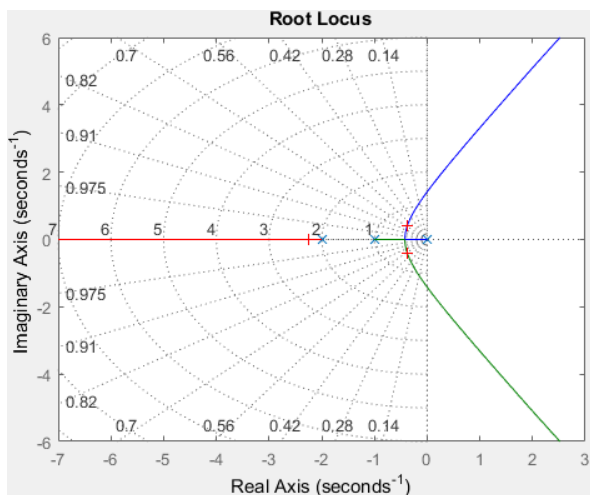


(a) 根轨迹图形

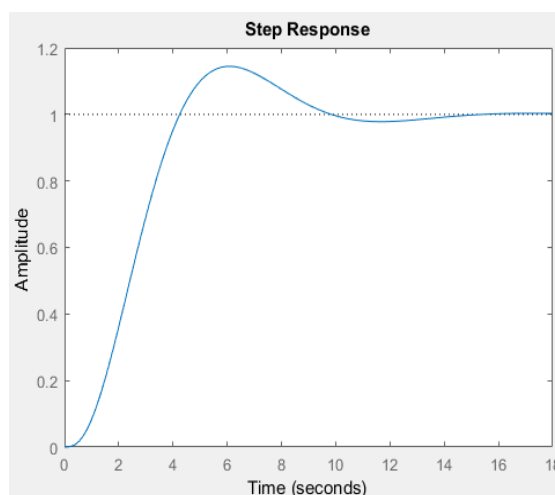


(b) $K=1$ 时的阶跃响应曲线

图 3.2 系统的根轨迹和阶跃响应曲线



(a) 根轨迹上点的选择



(b) 闭环系统阶跃响应

图 3.3 由根轨迹技术设计闭环系统

同时我们还可以绘制出该增益下闭环系统的阶跃响应，如图 3.3(b)所示。事实上，等 ζ 或等 ω_n 线在设计系补偿器中是相当实用的，这样设计出的增益 $K=0.6233$ 将使得整个系统的阻尼比接近 0.707。由下面的 MATLAB 语句可以求出主导极点，即 r(2,3)点的阻尼比和自然频率为：

```
G_c=feedback(G,1);
step(G_c)
dd0=poly(r(2:3,:));
wn=sqrt(dd0(3));zet=dd0(2)/(2*wn);[zet,wn]
ans =
0.7172  0.5351
```

我们可以由图 3.3(a)中看出，主导极点的结果与实际系统的闭环响应非常接近，设计的效果是令人满意的。

三、实验内容

1. 请绘制下面系统的根轨迹曲线

$$G(s) = \frac{K}{s(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 6s + 13)}$$

$$G(s) = \frac{K(s + 12)}{(s + 1)(s^2 + 12s + 100)(s + 10)}$$

$$G(s) = \frac{K(0.05s + 1)}{s(0.0714s + 1)(0.012s^2 + 0.1s + 1)}$$

同时得出在单位阶跃负反馈下使得闭环系统稳定的 K 值的范围。

四、实验报告

1. 根据内容要求，写出调试好的 MATLAB 语言程序，及对应的结果。
2. 记录显示的根轨迹图形，根据实验结果分析根轨迹的绘制规则。
3. 根据实验结果分析闭环系统的性能，观察根轨迹上一些特殊点对应的 K 值，确定闭环系统稳定的范围。
4. 根据实验分析增加极点或零点对系统动态性能的影响。
5. 写出实验的心得与体会。