3.1 Introduction to detedmenants

$n \geq 2$ 이상일때 [n*n]행렬 A_{ij}의 행렬식은 $\pm a_{1j} * detA_{1j}$와 같다.
즉 첫번째 행에서 $a_{11}, -a_{12}, ...a_{1n}$에 위의 연산을 연산을 반복하면 A의 determinant 구할 수 있다.
($detA_{ij}$: 행렬 A에서 i행, j열을 제외하고 계산한 행렬식)

$detA = a_{11}detA_{11} - a_{12}detA_{12}... + (-1)^{n+1}a_{1n}detA_{1n}$
$= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}detA_{1j}$

Cofactor: 위의 연산에서 Cofactor C_{ij}는 $(-1)^{i+j}detA_{ij}$이다.(그냥det를 쉽게 표기하는 방식이라 보면 된다)
즉 $detA = "a_{11}detA_{11} - a_{12}detA_{12} + ... + (-1)^{n+1}a_{1n}detA_{1n}"$은
$"a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + ... + a_{1n}C_{1n}"$처럼 표현할 수 있다.

Theorem 1

[n*n]행렬의 행렬식은 어떠한 행이나 열의 cofactor expansion으로도 구할 수 있다.

- 위와 같이 1번행이 아니라 어떠한 행에 cofactor expansion을 취해도 결과는 동일하다.
  $detA = a_{i1}detA_{i1} + a_{i2}detA_{i2}...a_{in}detA_{in}$
- 아래와 같이 특정 열에 취해도 결과는 동일하다.
  $detA = a_{1j}detA_{1j} + a_{2j}detA_{2j}...a_{nj}detA_{nj}$

Theorem 2

행렬 A가 triangular matrix일때 $detA$는 A의 주대각 원소의 곱이다.

Properties of Determinants

Theorem 3

정방행렬 A에 한번의 행연산(scailing, replacement, interchange)을 하여 행렬 B를 만든다고 생각해보자

- Scailing: $detB = k \cdot detA$
- Replacement: $detB = detA$
- Interchange: $detB = -detA$

이는 $detEA = (detE)(detA)$이기 때문이다.

Theorem 4

$detA \neq 0$이라면 A는 invertible하다.

Theorem 5

A가 정방행렬일때 $detA^T = detA$
사이즈가 2일때 $C_{j,1} = C_{1,j}$이고 3이상일때도 cofactor expansion으로 전개하면 [2*2]행렬의 집합으로 쪼개지므로

Theorem 6. Multiplicative property

A와 B가 정방행렬일때
$detAB = (detA)(detB)$

Cramer's Rule, Volume, and Linear Transformations

$A_i(\mathbf{b})$: 행렬 A의 i번째 column을 vector $\mathbf{b}$로 변경한 것이다.

$$A_i(\mathbf{b}) = [\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{b}, \mathbf{...}, \mathbf{a_n}]$$

Theorem 7 Cramer's Rule

invertible한 [n*n]행렬 A와 $\mathbb{R}^n$에 속한 b에 대하여 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$를 만족하는 unique solution $\mathbf{x}$의 각 원소는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{x_i} = \frac{\mathbf{detA_i(b)}}{\mathbf{detA}}$$

x를 구하는게 아니라 x의 각 entry를 구하는 방법임을 주의하자

1. $AI_i(\mathbf{x}) = \mathbf{A}[\mathbf{e_1}, \mathbf{...}, \mathbf{x}, \mathbf{...e_n}]$
2. $[Ae_1, ..., Ax, ..., Ae_n]$
3. $[a_1, ..., Ax, ..., a_n]$
4. $A_i(\mathbf{b})$

$(detA)(detI_i(\mathbf{x})) = \mathbf{detA_i(b)}$
$\therefore \mathbf{x_i} = \frac{\mathbf{detA_i(b)}}{\mathbf{detA}}$

여기서 $detI_i(\mathbf{x})$는 $\mathbf{x_i}$와 같다.(replacement를 이용해 echelon form만들고 주대각의 곱)

Using Cramer's Rule to know A^{-1}

- $A\mathbf{x} = \mathbf{e_j}$, $\mathbf{x} = \mathbf{A^{-1}e_j}$ 여기서 x는 A^{-1}의 j번째 column임을 알 수 있다.
- A^{-1}의 (i, j) entry = $\mathbf{x_i}$ = $\frac{detA_i(e_j)}{detA}$, 크래머 법칙을 사용해 A^{-1}의 특정 entry를 구할 수 있다.
- $detA_i(e_j) = (-1)^{j+i}detA_{ji} = C_{ji}$ A의 (j, i) enrty는 1, 그 column의 나머지는 0이므로 cofactor expansion이 간략화된다.

$\therefore A^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & ... & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & ... & C_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ C_{1n} & C_{2n} & ... & C_{nn} \end{bmatrix}$ 이러한 형태를 classical adjoint of A 혹은 $adjA$로 칭한다.(얼핏 봐도 시간복잡도가 구리고 적용분야도 한정적이라 한다)

Theorem 8.

정방행렬 A에 대하여
$A^{-1} = \frac{1}{detA}adjA$

Theorem 9.

[2*2]행렬 A에 대하여 A의 column들로 이루어진 평행사변형의 넓이는 $|detA|$이다.
똑같은 방법으로 평행육면체의 부피도 구할 수 있다.

ex) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ 의 넓이를 구해보자

replacement는 determinant를 변화시키지 않는데 이를 통해 적당히 바꾸면 $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}$요로코롬 되고 이 두 column으로 만들어진 사각형의 넓이는 18이다.
처음 $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$행렬의 행렬식 역시 |2*3 - (24)| = 18으로 동일한 것을 알 수 있다.

Theorem 10.

$\mathbb{R}^2$->$\mathbb{R}^2$로 보내는 행렬 A와 $\mathbb{R}^2$에 평행사변형 S가 있을때
{area of T(S)} = $|det(A)|\cdot$ {area of S}
평행사변형과 A 둘다 정방행렬이므로 정리 6($detAB = (detA)(detB)$)이 성립하기때문