# 3.1 Introduction to Determinant

$n \geq 2$ 이상일때 [n*n]행렬 $A_{ij}$의 행렬식은 $\pm a_{1j} * detA_{1j}$와 같다.
즉 첫번째 행에서 $a_{11}, a_{12}, ... a_{1n}$에 위의 연산을 연산을 반복하면 A의 determinant 구할 수 있다.
($detA_{ij}$: 행렬 A에서 i행, j열을 제외하고 계산한 행렬식)

$detA = a_{11}detA_{11} - a_{12}detA_{12} ... + (-1)^{n+1}a_{1n}detA_{1n}$
$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} detA_{1j}$

Cofactor: 위의 연산에서 Cofactor $C_{ij}$는 $(-1)^{i+j}detA_{ij}$이다.(det를 쉽게 표기하는 방식이라 보면 된다)
즉 $detA =$ "$a_{11}detA_{11} - a_{12}detA_{12} + ... + (-1)^{n+1}a_{1n}detA_{1n}$"은
"$a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + ... + a_{1n}C_{1n}$"처럼 표현할 수 있다.

## Theorem 1

[n*n]행렬의 행렬식은 어떠한 행이나 열의 cofactor expansion으로도 구할 수 있다.

- 위와 같이 1번행이 아니라 어떠한 행에 cofactor expansion을 취해도 결과는 동일하다.
  $detA = a_{i1}detA_{i1} + a_{i2}detA_{i2} ... a_{in}detA_{in}$
- 아래와 같이 특정 열에 취해도 결과는 동일하다.
  $detA = a_{1j}detA_{1j} + a_{2j}detA_{2j} ... a_{nj}detA_{nj}$

## Theorem 2

행렬 A가 triangular matrix일때 $detA$는 A의 주대각 원소의 곱이다.
$\because$ replacement는 det에 영향 x-> reduced echlon은 주대각 빼고 전부 0

# Properties of Determinants

## Theorem 3

정방행렬 A에 한번의 행연산(scailing, replacement, interchange)을 하여 행렬 B를 만든다고 생각해보자

- Scailing: $detB = k \cdot detA$
- Replacement: $detB = detA$
- Interchange: $detB = -detA$

이는 $detEA = (detE)(detA)$이기 때문이다.

## Theorem 4

$detA \neq 0$이라면 A는 invertible하다.

## Theorem 5

A가 정방행렬일때 $detA^T = detA$detAT = detA
사이즈가 2일때 $C_{j,1} = C_{1,j}$Cj,1 = C1,j이고 3이상일때도 cofactor expansion으로 전개하면 [2*2]행렬의 집합으로 쪼개지므로

## Theorem 6. Multiplicative property

A와 B가 정방행렬일때
$detAB = (detA)(detB)$detAB = (detA)(detB)

# Cramer’s Rule, Volume, and Linear Transformations

$A_i(b)$Ai(b): 행렬 A의 i번째 column을 vector $b$b로 변경한 것이다.

$$A_i(b) = [a_1, a_2, b, ..., a_n]$$

Ai(b) = [a1, a2, b, …, an]

## Theorem 7 Cramer's Rule

invertible한 [n*n]행렬 A와 $R^n$Rn에 속한 b에 대하여 $Ax = b$Ax = b를 만족하는 unique solution $x$x의 각 원소는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$x_i = \frac{detA_i(b)}{detA}$$

xi = detAdetAi(b)

x를 구하는게 아니라 x의 각 entry를 구하는 방법임을 주의하자

1. $AI_i(x) = A[e_1, ..., x, ...e_n]$AIi(x) = A[e1, …, x, …en]
2. $[Ae_1, ..., Ax, ..., Ae_n]$[Ae1, …, Ax, …, Aen]
3. $[a_1, ..., Ax, ..., a_n]$[a1, …, Ax, …, an]
4. $A_i(b)$Ai(b)

$(detA)(detI_i(x)) = detA_i(b)$(detA)(detIi(x)) = detAi(b)
$\therefore x_i = \frac{detA_i(b)}{detA}$∴ xi = detAdetAi(b)

여기서 $detI_i(x)$detIi(x)는 $x_i$xi와 같다.(replacement를 이용해 i row 원소만 남기고 나머지 제거)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Using Cramer's Rule to know $A^{-1}$A−1

- $Ax = e_j$Ax = ej, $x = A^{-1}e_j$x = A−1ej 여기서 x는 $A^{-1}$A−1의 j번째 column임을 알 수 있다.

- $A^{-1}$A−1의 (i, j) entry = $x_i$xi = $\frac{detA_i(e_j)}{detA}$detAdetAi(ej), 크래머 법칙을 사용해 $A^{-1}$A−1의 특정 entry를 구할 수 있다.
- $detA_i(e_j) = (-1)^{j+i}detA_{ji} = C_{ji}$detAi(ej) = (−1)j+idetAji = Cji A의 (j, i) enrty는 1, 그 column의 나머지는 0이므로 cofactor expansion이 간략화된다.

$\therefore A^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$∴ A−1 = detA1 [C11C12...C1nC21C22...C2n..........Cn1Cn2...Cnn] 이러한 형태를 classical adjoint of A 혹은 $adjA$adjA로 칭한다.(얼핏 봐도 시간복잡도가 구리고 적용분야도 한정적이라 한다)

## Theorem 8.

정방행렬 A에 대하여
$A^{-1} = \frac{1}{detA}adjA$A−1 = detA1adjA

## Theorem 9.

[2*2]행렬 A에 대하여 A의 column들로 이루어진 평행사변형의 넓이는 $|detA|$|detA|이다.
똑같은 방법으로 평행육면체의 부피도 구할 수 있다.

ex) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$[2463] 의 넓이를 구해보자

replacement는 determinant를 변화시키지 않는데 이를 통해 적당히 바꾸면 $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}$[200−9]요로코롬 되고 이 두 column으로 만들어진 사각형의 넓이는 18이다.
처음 $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$[2463]행렬의 행렬식 역시 |2*3 - (24)| = 18으로 동일한 것을 알 수 있다.

## Theorem 10.

$R^2$R2->$R^2$R2로 보내는 행렬 A와 $R^2$R2에 평행사변형 S가 있을때
{area of T(S)} = $|det(A)|\cdot$|det(A)|· {area of S}
평행사변형과 A 둘다 정방행렬이므로 정리 6($detAB = (detA)(detB)$detAB = (detA)(detB))이 성립하기때문