Linear_algebra/Matrix Algebra.md

2.1 Matrix Operations

Matrix multiplication

$A(B\mathbf{x}) = (\mathbf{AB})(\mathbf{x})$
행렬곱은 분배가 가능하고 벡터의 집합으로 볼 수 있으니 성립

Theorem 1, 2

대부분 행렬연산의 선형 연산 법칙들의 나열이다.(분배 법칙과 같은 선형성의 특징들)
$AB! = BA$ 정도만 주의하고 넘어갈 것

Transpose of a Matrix

$$[m * n]행렬A의전치행렬은[n * m]크기이며A^T로표기한다.$$

각 행이 열로 열이 행으로 변하는 것이며 양 대각 끄터머리를 잡고 회전시킨다고 생각하면 된다.

Treorem 3

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$
3. $모든실수r에대해, (rA)^T = rA^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$

$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j}... + a_{in}b_{nj}$
$(AB)_{ij}^T = a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i}... + a_{jn}b_{ni}$

첫번째식 결과 행렬의 1행 2열 원소 ->i:1, j:2을 예로 생각해보자
얘는 transpose하면 2행 1열로 이동하겠지? 이건 A의 2번행과 B의 1번열의 결과이다.
즉 i, j위치만 바꿔주면 된다는 뜻

$(BA)_{ij} = b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j}... + b_{in}a_{nj}$
$(B^T A^T)_{ij} = b_{1i}a_{j1} + b_{2i}a_{j2}... + b_{ni}a_{jn}$

2.2 The Inverse of a Matrix

Invertible Matrix

$$CA = I \ and \ AC = I$$

[nxn] 크기의 행렬 A에 대해 위와 같은 성질을 만족하는 [nxn] 행렬 C를 A에 대해 Invertible 하다고 말한다.

Theorem 4

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 에서 $ad - bc \neq 0$ 일때 A는 invertible하다.

또한$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$이다.

$a:b=c:d \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow ad=bc$ ∴ $ad=bc$라면 행벡터 간에 scaling시 0벡터

즉 ad-bc는 두 벡터가 독립이어야할 조건이라고 볼 수 있다.

Theorem 5

A가 invertible한 [nxn]행렬일때 행렬방정식 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 의 unique solution은 $\mathbf{x} = \mathbf{A^{-1}b}$ 이다. (A^{-1}이 달라붙는 위치 주의)

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$A^{-1}A\mathbf{x} = \mathbf{A^{-1}b}$$

$$I\mathbf{x} = \mathbf{x} = \mathbf{A^{-1}b}$$

Theorem 6

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ 아래와 같이 생각하면 된다.
   $B^{-1}A^{-1} * (AB) = I$
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
   $(A^T)^{-1} * A^T = I$
   $(A^{-1})^T * A^T = (AA^{-1})^T = I^T = I$
   정리 5에서 inverse matrix의 uniquness를 증명했으니 두항의 inverse는 같다->두 항이 같다

Elementary Matrices

기본행렬이라 부르는 놈인데 항등행렬(I)에 한번의 행연산을 적용한 행렬을 말한다.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

왼쪽부터 replacement, interchange, scailing을 적용한 기본행렬이다.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E를 I로 만드는 E의 역행렬 E^{-1}은 E와 반대의? 연산이다.

- [mxn] 행렬 A에 한번의 행연산 적용
- [mxm] 행렬 E에 같은 행연산 적용 후 EA
  이 둘의 결과는 같다

Theorem 7

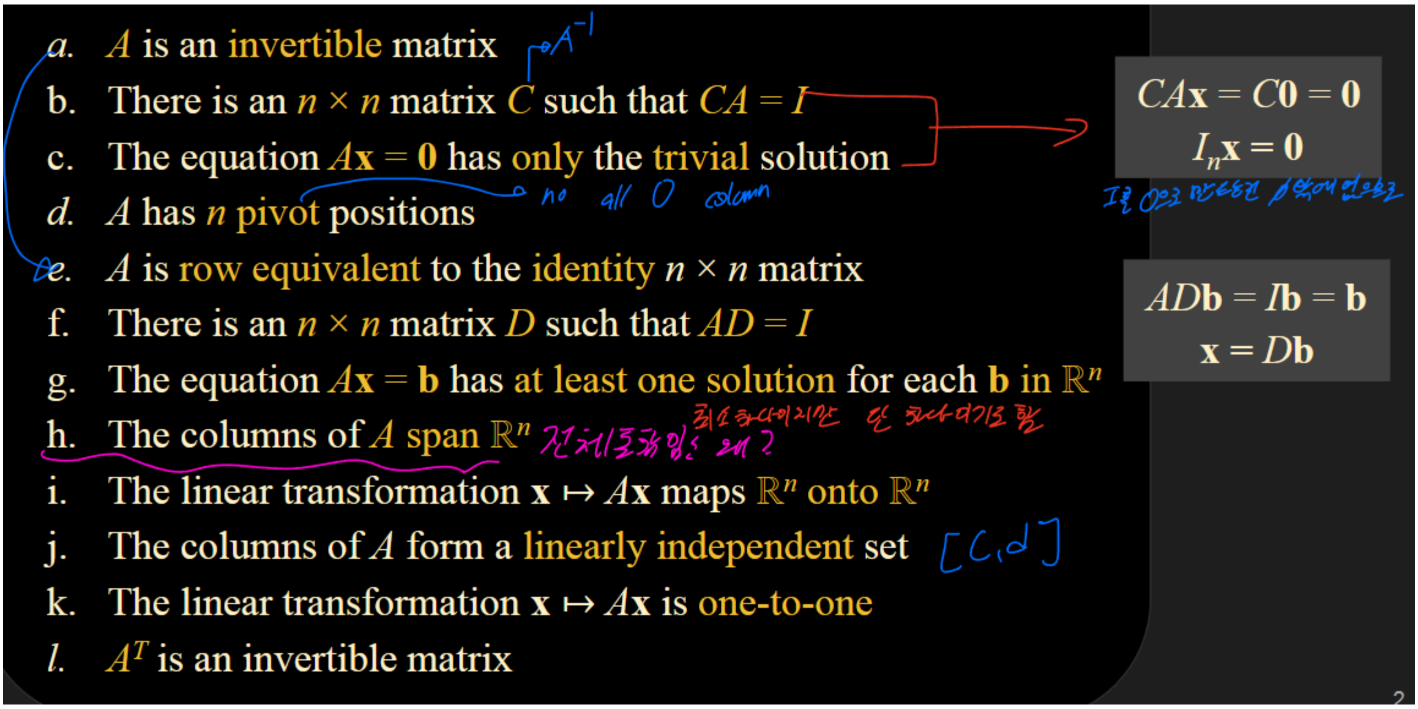
[nxn] 행렬 A가 I와 행상등하다면 A는 invertible하다.
A를 I로 보내는 행연산의 집합 E_1, E_2, E_n이 있다고 가정해보자

1. $(E_1, E_2, E_n)A = I_n$
2. $(E_1, E_2, E_n)^{-1}(E_1, E_2, E_n)A = (E_1, E_2, E_n)^{-1}I_n$
3. $A = (E_1, E_2, E_n)^{-1}$
4. $A^{-1} = ((E_1, E_2, E_n)^{-1})^{-1} = (E_1, E_2, E_n)$

첫줄의 좌항 = 마지막줄의 우항
$\therefore (E_1, E_2, E_n)$는 A를 I로 보내는 연산임과 동시에 I를 A^{-1}로 보내는 연산이다.

2.3 Characterizations of Invertible Matrices

Theorem8 The Invertible Matrix Theorem



위 모든 항은 동치이다.
c: $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 가 trivial solution을 가지지 않았다면 $CA\mathbf{x} = \mathbf{0}, \mathbf{I}\mathbf{x} = \mathbf{0}$를 만족할 수 없다.
d: all 0 column을 가지면 linearly dependent->nontrivial solution
e: A^{-1}이 존재하는가? 와 동치 저 위에 4번에서 A^{-1}도 결국 행연산의 집합임을 알 수 있다.
g랑 h는 나중에

2.4 Partitioned Matrices

좀 Trivial한 파트라 생각된다.
행렬곱 AB하려면 A의 col 수와 B의 row수가 같아야 하는데 이를 쪼개서 연산해도 결과는 같다.

2.5 Matrix Factorization

Factorization은 두개 이상의 행렬의 곱을 뜻한다.
$ex)A = BC$

LU Factorization

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 \\ * & * & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & * & * & * \\ 0 & x & * & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \end{bmatrix}$$
A를 [nxn] 행렬 L과 [nxm]행렬 U로 만드는 행위를 LU 분해라고 한다.
L은 unit lower traingular matrix이고 U는 echelon form을 만족해야한다.

U를 만드는 과정만 알면 자연스레 L 구할 수 있다.
A를 replacement만을 사용해 echelon form을 만든다고 생각해보자
$E_p ... E_2 E_1 A = U$
$A = (E_p ... E_2 E_1)^{-1} U = LU$ 즉 L은 A를 U로 보내는 연산들의 집합이다.
echelon form을 만드는 과정에서 replacement만을 사용했으므로 E_n의 주대각 위로는 전부0이다. 이러한 연산의 집합 역시 동일한 성질을 가지므로 L이 주대각 위로 전부 0인것

2.6 Subspace of $\mathbb{R}^n$

아래 세가지 속성을 만족하는 set H를 R^n의 subspace라 한다.

1. Zero vecotr가 H에 속해있다.
2. H에 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$가 속해있을때 $\mathbf{u} + \mathbf{v}$역시 H에 속해있다.
3. H에 $\mathbf{u}$가 속해있을때 scalar c에 대해 $c\mathbf{u}$ 역시 H에 속해있다.

2, 3번 성질을 closed under addition and scalar multiplication이라 하고 선형성을 가진다고도 한다.

Column space

행렬A의 column space는 A의 모든 열의 선형조합이며 $colA$로 표기한다.

$A = \begin{bmatrix} a_1 & ... & a_n \end{bmatrix}$
$colA = Span\{a_1, ..., a_n\}$

즉 "Ax=b에 해가 있는가"는 "$\mathbf{b}$는 $ColA$에 속하는가"와 동일하다.

Null space

homogenous equation $Ax = 0$를 만족하는 모든 해를 A의 null space라 하고 Nul A로 표기한다.
이 부분 영상 체크

Basis for a Subspace

$\mathbb{R}^n$차원 subspace H에 대해 선형독립 즉, H를 span하는 set을 H의 basis라 한다.

standard basis for $\mathbb{R}^n$ basis 중 identity mat의 column vector를 Standard basis라 한다.
$\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ example 자유변수 구하는것도 영상 체크 다 까먹음...