



Universidad Internacional de la Rioja
(UNIR)

Escuela Superior de Ingeniería y Tecnología

Máster Ingeniería Matemática y Computación

Absorción de ondas escalares por agujeros de gusano de tipo membrana fina.

Trabajo Fin de Máster

presentado por: José María Sirvent

Dirigido por: Dr Gonzalo J. Olmo Alba y Dr Marc Jorba Cuscó

Ciudad: Jijona

Fecha: February 13, 2022

Ohne Musik wäre das Leben ein Irrtum.

(“Sin música la vida sería un error.”)

Friedrich Wilhelm Nietzsche

Índice de Contenidos

Índice de Ilustraciones

Resumen

En este TFM ha desarrollado una serie de programas que permiten caracterizar de forma teórica diferentes objetos extremadamente compactos mediante el espectro de absorción de campos escalares sin masa. Aquí concretamente se han estudiado las diferencias entre agujeros negros y dos tipos de agujeros de gusano. Para ello se ha hecho uso de diferentes métodos numéricos como: Runge-Kutta Prince-Dormand, método en forma Nordsieck mediante fórmula de diferenciación hacia atrás de varios pasos y funciones hipergeométricas de Gauss. En el desarrollo de estos programas se ha utilizado principalmente C y librerías como GSL, GMP y GLib. Las gráficas se han obtenido utilizando gnuplot y la interfaz gráfica se ha implementado mediante Tcl. Una pequeña porción del código está escrita usando Wolfram mediante Jupyter.

Gracias a este estudio se puede diferenciar exactamente un agujero negro de un agujero de gusano puesto que sus espectros de absorción son diferentes. Esto podría llevar a descartar en un futuro ciertos modelos o ideas sobre gravitación

Palabras Clave: Objetos astrofísicos compactos; Agujeros negros; Agujeros de gusano; Puente de Einstein-Rosen; Absorción de ondas escalares; Algoritmo de Numerov; Coordenada tortuga; Funciones hipergeométricas de Gauss.

Abstract

This Master's Thesis has developed a series of programs that allow the theoretical characterization of different extremely compact objects through the absorption spectrum of scalar massless fields. Here specifically we've studied the differences between black holes and two wormholes types. For them, different numerical methods have been used, such as: Runge-Kutta Prince-Dormand, method in Nordsieck form by means of backward differentiation formula of several steps and Gaussian hypergeometric functions. In the development of these programs, C and libraries such as GSL, GMP and GLib have been used mainly. The graphs have been obtained using gnuplot and the graphical interface has been implemented using Tcl. A small portion of the code is written using Wolfram via Jupyter.

Thanks to this study, a black hole can be exactly differentiated from a wormhole since their absorption spectra are different. This could lead to discarding certain models or ideas about gravitation in the future.

Key words: Compact astrophysical objects; black holes; worm holes; Einstein-Rosen Bridge; Scalar wave absorption; Numerov algorithm; coordinated turtle; Gaussian hypergeometric functions.

Capítulo 1

Introducción

La astronomía de ondas gravitacionales es una realidad que ha sido posible gracias a los avances tecnológicos que los observatorios LIGO y VIRGO han llevado a cabo a lo largo de los últimos treinta años. Las detecciones actuales [?, ?] ponen de manifiesto la existencia de objetos muy compactos cuyas características observacionales son compatibles con los agujeros negros predichos por la relatividad general. No obstante, la precisión actual de estas y de otras observaciones de tipo electromagnético (Event Horizon Telescope) [?] no son suficientes para descartar otros tipos posibles de objetos compactos. Es por ello que en la actualidad existen grandes esfuerzos teóricos destinados a comprender mejor las signaturas observacionales que otros objetos exóticos podrían manifestar [?].

Una de las posibles alternativas a los agujeros negros la encontramos en los agujeros de gusano [?], que consistirían en estructuras compactas de tamaño astrofísico y geometría no euclíadiana capaces de conectar regiones distantes del universo. Estos objetos compartirían similitudes astrofísicas con los agujeros negros (propiedades orbitales) pero serían atravesables, careciendo de horizonte de sucesos, lo que los distinguiría de éstos. En particular, tanto las sombras como los espectros de absorción de ondas de los agujeros de gusano deberían ser manifiestamente distintos de los de los agujeros negros.

En este Trabajo de Fin de Máster estudiaremos la propagación de ondas sobre geometrías que son soluciones de las ecuaciones de la gravedad de Einstein y de otras teorías como las geometrías de black bounce y que representan tanto agujeros

negros como agujeros de gusano. En particular, estudiaremos los espectros de absorción de ondas escalares en diferentes configuraciones (con y sin carga eléctrica). Esto exigirá resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de tipo hiperbólico en 3+1 dimensiones, para lo que se utilizarán herramientas analíticas (separación de variables, funciones hipergeométricas de gauss) y numéricas.

En este trabajo conseguiremos reproducir algunos resultados bien conocidos en la literatura especializada en objetos compactos, mostrando de esta manera que hemos adquirido conocimientos sólidos y destreza en el uso de técnicas numéricas de vanguardia. También nos enfrentaremos a problemas técnicos de difícil solución que implican la combinación de métodos analíticos con numéricos. No siempre llegamos a buen puerto en esa lucha pero el esfuerzo nos ha recompensado con muchos aprendizajes y ganas de seguir trabajando en estos temas.

El trabajo está estructurado de la siguiente forma: en la sección ?? nos familiarizamos con la ecuación de Schrödinger y el método de Numerov, como problema inicial simplificado que nos servirá de base para ir atacando los siguientes problemas de dificultad creciente que nos llevarán a nuestro problema final. En la sección ?? ya empezamos a atacar un problema real, un agujero negro de Schwarzschild, que nos permitirá desarrollar todas las herramientas necesarias para el estudio de la propagación de ondas sobre diferentes geometrías de agujeros de gusano. En la sección ?? estudiaremos una geometría parecida a la utilizada en el agujero negro de Schwarzschild pero que nos permite pasar del estudio de un agujero negro a un agujero de gusano con el cambio de un parámetro. Finalmente, en la sección ?? estudiaremos nuestro problema final, un agujero de gusano de membrana fina.

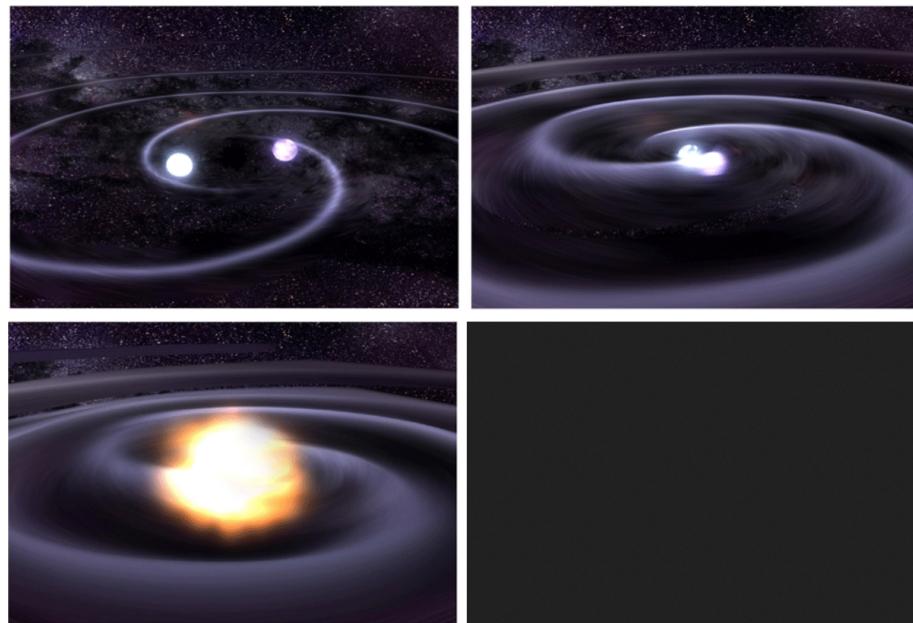
Capítulo 2

Contexto y Estado del Arte

2.1. LIGO y VIRGO

LIGO ?? y VIRGO ?? son 2 interferómetros localizados en EE.UU. y Europa que han hecho posible la detección de ondas gravitatorias. Veamos de qué estamos hablando.

Figura 2.1: Fuente:www.ligo.org - Dos estrellas colisionando



Como se ve en la representación artística Fig. ?? donde vemos dos estrellas de neutrones girando muy cerca para finalmente colisionar, éstas crean unas ondas gravitacionales muy intensas que transportan energía e información sobre los detalles

de la colisión por todo el espacio-tiempo.

Figura 2.2: Fuente: Veritasium?? - Ondas gravitacionales viajando



Estas ondas gravitacionales viajan a lo largo de todo el universo como se ilustra en la Fig. ???. Hay que hacer notar que las señales que se detectaron en septiembre de 2015 y cuyos resultados fueron publicados en 2016 [?] tenían una energía equivalente a 50 veces la energía de todo el universo visible. Para ponerlo en contexto, en $1/4$ de segundo se transformaron 3 masas solares en energía pura. Para hacernos una idea, el Sol produce en 1s aproximadamente la energía suficiente para cubrir nuestras necesidades durante los próximos 500.000 años, con la demanda actual del planeta. El Sol fusiona unas 600 millones de toneladas de hidrógeno en helio cada segundo, convirtiendo 4 millones de toneladas de materia en energía. Esa diferencia de masa, es decir, fusionamos 600 millones de toneladas de hidrógeno que se convierten en 596 millones de toneladas de helio, se transforma según la famosa ecuación de Einstein, $E = mc^2$, en energía. En este caso, tras la fusión de los dos agujeros negros, de unas 36 y 29 masas solares respectivamente, obtuvimos un agujero negro con una masa de 62 masas solares, con lo que el resto, 3 masas solares, se convirtió en energía en apenas unas milésimas de segundo.

Las ondas gravitacionales estiran y comprimen el espaciotiempo como se aprecia en esta representación artística exagerada Fig. ??.

Las ondas, representadas por un frente de onda de color verde, crean una distor-



Figura 2.3: Fuente: Veritasium - Ondas gravitacionales llegan a la Tierra

sión en el espaciotiempo de una parte en 10^{21} o $10^{-21}m$, que equivale a la distancia de una milésima del diámetro de un protón.

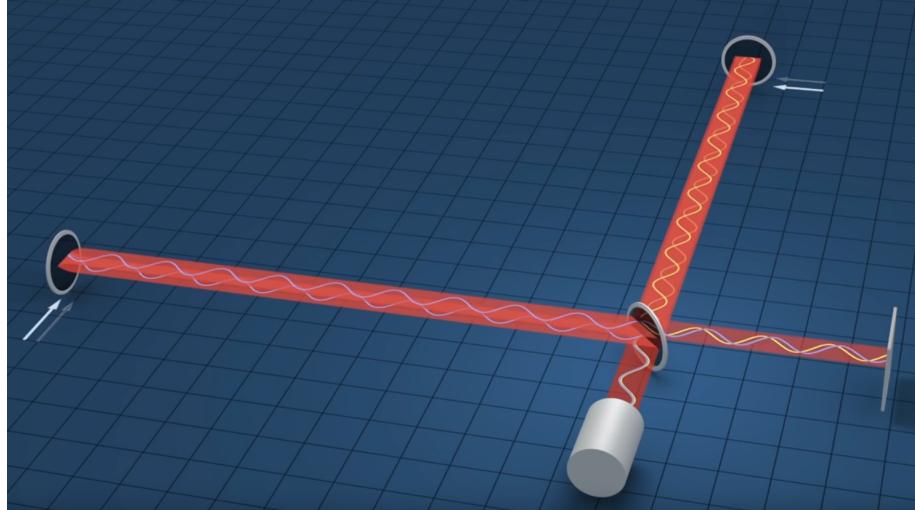
Es aquí donde entran en juego los interferómetros LIGO y VIRGO.

Figura 2.4: Fuente: Veritasium - LIGO de Hanford Site



Estos interferómetros Fig. ?? son enormes debido a la precisión que se necesita alcanzar, pero esto solo es una parte de la ecuación ya que se necesita un láser muy preciso y potente para detectar estas minúsculas variaciones. Se necesita un láser que sea lo más próximo a usar una y solo una longitud de onda porque si ésta varía se interferirá con la medición. Si nos imaginamos una regla que varía su longitud expandiéndose y contrayéndose, vemos claro que nos será imposible dar

Figura 2.5: Fuente: Veritasium - Interferómetro



una medida de algo. Pero además necesitamos una gran cantidad de fotones porque a más fotones menos incertidumbre en la medida, por eso este láser es de 1MW de potencia, añadido a esto puesto que no queremos que nada colisione con el haz láser e interfiera con él, está en unos tubos al vacío que tardan la friolera de 40 días en llegar a una mil millonésima de atmósferas.

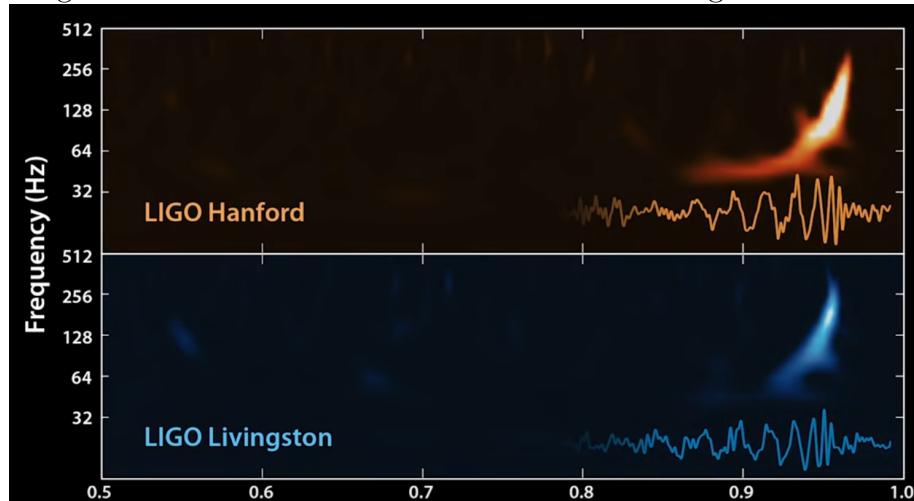
Ahora bien, si una onda gravitacional lo expande / contrae todo ¿cómo se puede medir una contracción expansión en el espaciotiempo? Es decir, si el espaciotiempo se contrae el láser tardará menos y no habrá patrón de interferencia. La clave está en que el láser recorre los 8km en muy poco tiempo mientras que las ondas gravitacionales vibran en torno a los 100Hz. Entonces, si una onda gravitacional contrae el espaciotiempo, un cuarto de luz que hayamos enviado tarda un cierto tiempo, pero el que venía justo detrás cuando el espaciotiempo vuelva a su posición normal, tardará más. Es ahí donde veremos los patrones de interferencia.

Además, para estar seguros de que esa señal no está creada por algún tipo de ruido terrestre, tenemos 2 LIGO Fig. ?? separados lo suficiente que detectarán la señal casi instantáneamente, ya que las ondas gravitacionales viajan a la velocidad de la luz. Contar con dos o más detectores también ayuda a localizar el origen de la fuente emisora.

Figura 2.6: Fuente: Veritasium - 2 LIGOs



Figura 2.7: Fuente: Veritasium - Detección ondas gravitacionales



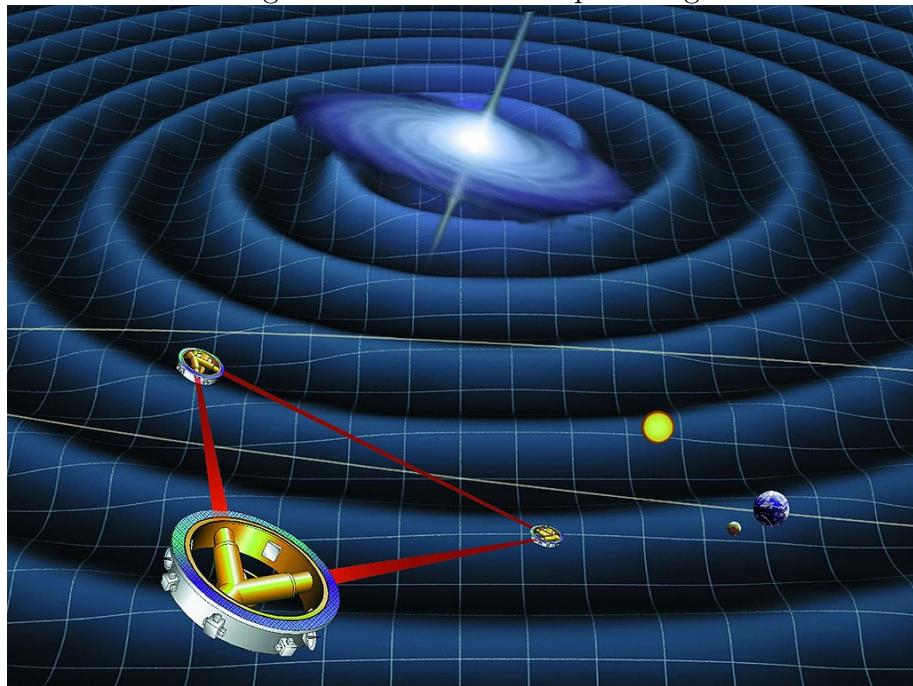
2.1.1. LISA

Simplemente para terminar esta sección apuntar el gran interés que suscita este campo. En 2017 se propuso a LISA (Laser Interferometer Space Antenna) ?? como misión candidata de la ESA (European Space Agency) ?? . Se espera ejecutar la misión en la década de los 30. LISA es un interferómetro espacial con brazos de la friolera de 2.5 millones de kilómetros. Aunque suene a ciencia-ficción la ESA ya ha puesto fecha a su ejecución y además ya desde 2015 existe una misión, LISA Path Finder (LPF) ?? que está sirviendo para testear la tecnología necesaria para la realización del proyecto.

Con este enorme interferómetro se podrán detectar colisiones de agujeros negros

supermasivos (con millones de veces la masa del Sol) que son imposibles de detectar por LIGO/VIRGO, ya que las frecuencias de la fusión de este tipo de objetos es muy baja y se necesitan brazos mucho más largos.

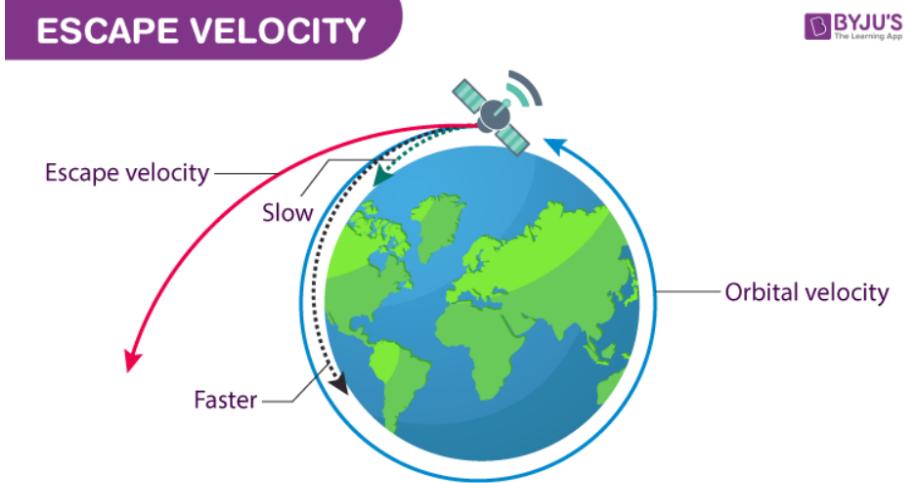
Figura 2.8: Fuente: Wikipedia.org



2.2. Agujeros negros

¿Qué es un agujero negro o black hole (BH) ??? Grosso modo, es una región del espaciotiempo resultado de un colapso gravitatorio provocado por la materia, donde la atracción gravitatoria es tan fuerte que ni siquiera la luz puede escapar. Para hacernos una idea imaginemos, utilizando la noción de *velocidad de escape*, el experimento de lanzar una piedra. Obviaremos el efecto de la resistencia del aire y por tanto la energía cinética aplicada a la piedra se utilizará enteramente para convertirla en energía potencial con respecto al suelo, es decir para subir una cierta altura. Si conseguimos una velocidad que supere el valor $\sqrt{\frac{2GM}{R}}$ donde G es la constante gravitatoria de Newton, M y R son la masa y radio de la Tierra, podremos escapar de la Tierra Fig. ??.

Figura 2.9: Velocidad de escape terrestre

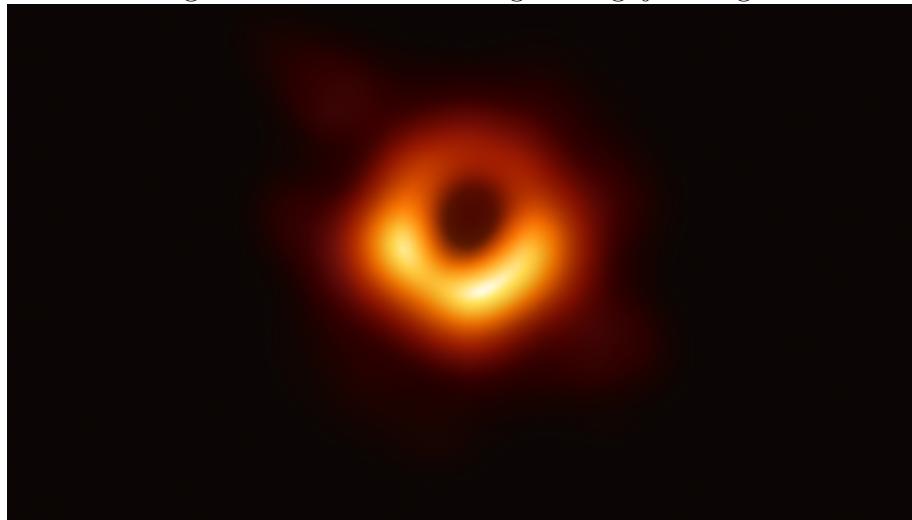


Si aumentamos la relación $\frac{M}{R}$ podríamos llegar a tener una velocidad de escape que superara la velocidad de la luz y en este caso ni siquiera ésta podría escapar, esto se conoce como el radio de Schwarzschild. En el caso de la Tierra, necesitaríamos concentrar toda su masa en algo menos de 1cm de radio. Aquí podríamos llegar a la imagen de una *estrella negra* como hicieron John Michel en 1784 y Pierre-Simon Laplace en 1799. Sin embargo en esa época la velocidad de la luz no era un límite de la naturaleza como ahora sabemos pero ya teníamos la idea precursora de agujero negro. La idea de *agujero negro* viene cuando nos encontramos con una estrella suficiente

cientemente masiva que ha agotado todas sus fuentes internas de energía disponibles y no puede mantener la presión suficiente para evitar el colapso gravitatorio. Esta masa es aproximadamente de $2M_{\odot}$ (es decir, 2 veces la masa de nuestro Sol), resultado obtenido por Subrahmanyan Chandrasekhar en 1931. Estos objetos colapsan hacia dentro, de ahí el término de *agujero negro*. La solución de Schwarzschild de la ecuación de Einstein descubierta en 1916 describe el campo gravitatorio que rodea un cuerpo con simetría esférica. El horizonte ocurre a la distancia $r = \frac{2MG}{c^2}$ del punto de colapso. Como veremos más adelante cuando estudiemos las soluciones exactas de Schwarzschild a las ecuaciones de Einstein, para este radio (tomado en unidades naturales en las que las constantes universales se igualan a 1) $r = 2M$, se produce una singularidad matemática. Una singularidad es un punto en el cual un objeto matemático no está definido o no se comporta bien en algún aspecto particular. Por tanto, no podremos estudiar de forma continua el interior de esa esfera.

Pero aunque los agujeros negros tienen un horizonte de sucesos del cual nada puede escapar también tienen lo que se conoce como fotosfera Fig. ??, que es una

Figura 2.10: Fuente: nasa.gov - Agujero negro



región en la cual los fotones son forzados a orbitar. Los fotones que se acercan a la fotosfera pero consiguen escapar tras un número finito de órbitas son capaces de alcanzarnos y regalarnos la evidencia de la existencia de este tipo de superficies.

Aún así, el gran problema de los agujeros negros son sus singularidades espaciotemporales [[?]] [?] que no sabemos si son un artefacto matemático o son reales.

Una de las posibilidades que elude estas singularidades son los agujeros de gusano o wormholes (WH) ?? puesto que carecen de ellas.

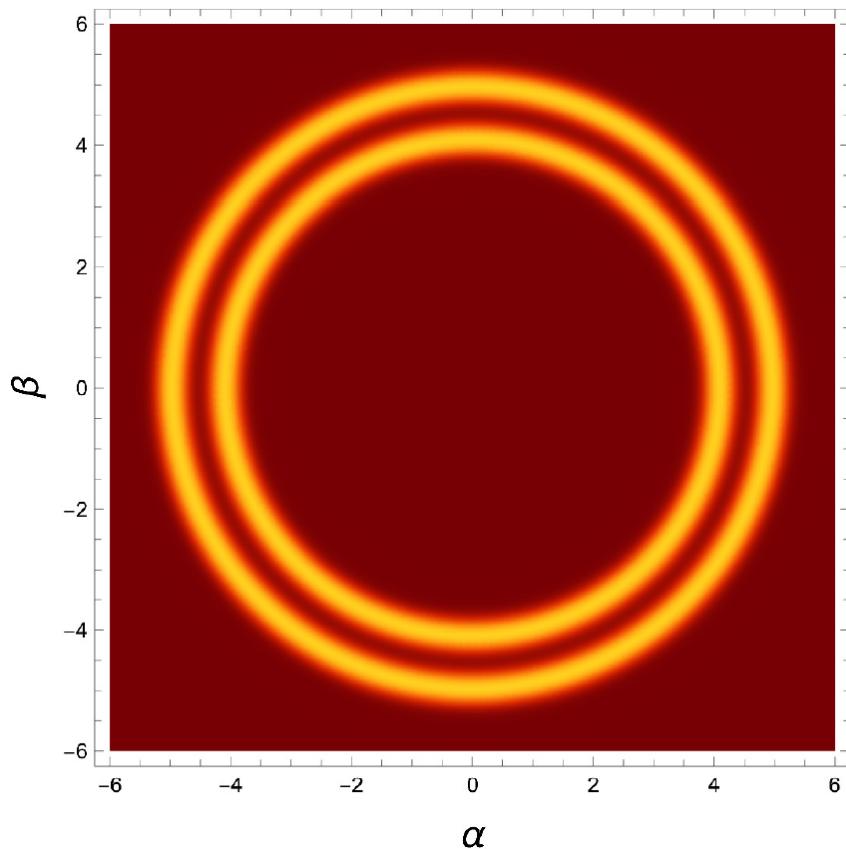
2.3. Agujeros de gusano

Los *agujeros de gusano* son lo que podríamos decir una conexión espaciotemporal entre un agujero negro (que se traga todo por su garganta) y un agujero blanco (que expulsa todo lo que el agujero negro del otro lado se ha tragado) en los que conectamos dos puntos espaciotemporales. Estos agujeros se conocen como puentes de Einstein-Rosen [?] y en ellos se puede viajar instantáneamente. Una notable distinción entre los agujeros negros y los agujeros de gusano es que éstos carecen de horizonte de sucesos, por lo que las ondas y la información pueden fluir en los dos sentidos. En consecuencia, tanto las sombras como los espectros de absorción de ondas deben ser distintos. Por ejemplo, en la Fig. ?? podemos observar la doble sombra de un agujero de gusano desde uno de sus lados [?], donde α y β son coordenadas celestes.

2.4. Limitaciones técnicas actuales

Actualmente gracias a los observatorios LIGO y VIRGO se han detectado objetos muy compactos cuyas características son compatibles con los agujeros negros predichos por la relatividad general. No obstante, la precisión de estas observaciones no son suficientes para descartar otro tipo de objetos compactos. Algo similar ocurre con la observación de sombras de agujeros negros. Cabe notar que la observación de ondas gravitacionales o de sombras compatibles con las predicciones de un agujero negro no implica que no existan otro tipo de objetos, por lo que es importante explorar las características de objetos alternativos que permitan interpretar correctamente las observaciones.

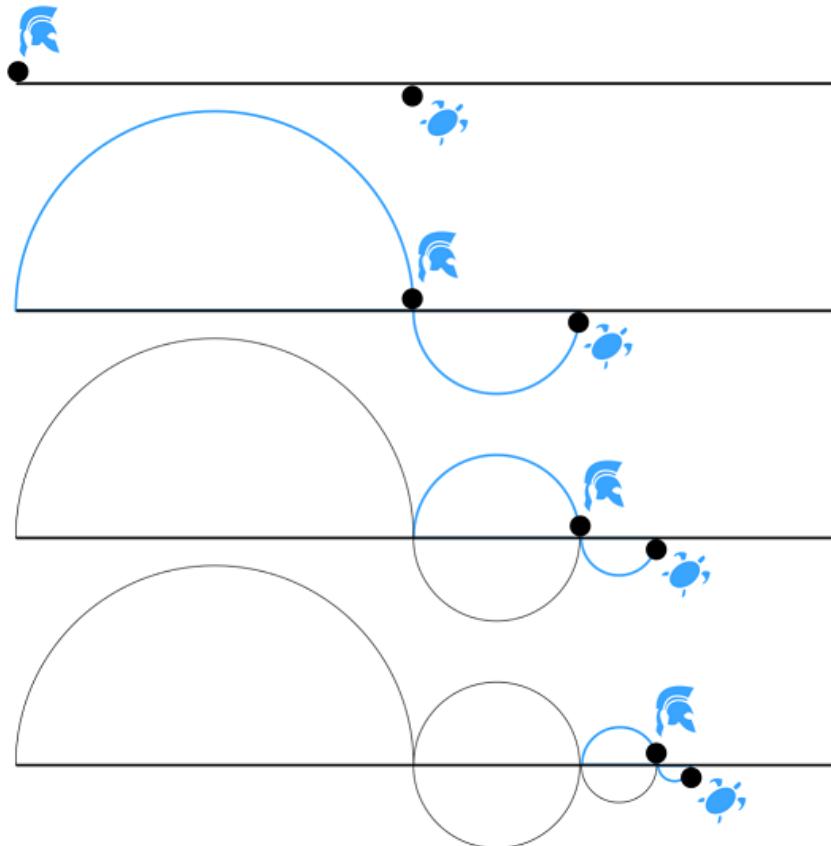
Figura 2.11: Sombra doble agujero de gusano[?]



2.5. De la antigua grecia a Sgr A*

2.5.1. Aquiles y la tortuga

Figura 2.12: Fuente: wikipedia.org - Paradoja de Zenón



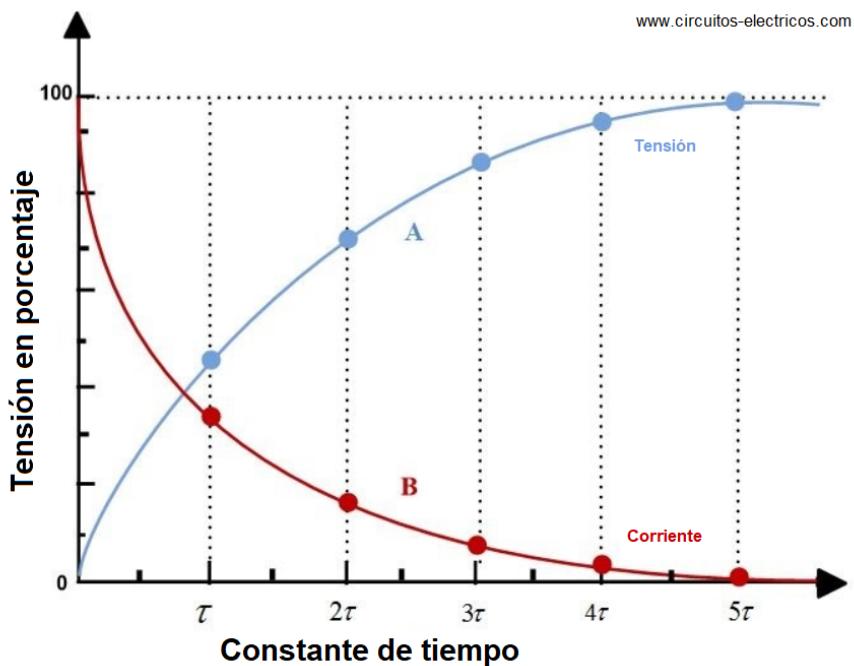
Una de las paradojas de Zenón, 490-430 a.C., trata sobre una carrera entre el gran Aquiles, héroe de la guerra de Troya, y una pobre tortuga. Según Zenón, Aquiles sabiendo de su superioridad deja a la tortuga una cierta distancia de ventaja. Ambos contrincantes tienen una velocidad finita constante. Empieza la carrera y cuando Aquiles llega donde estaba la tortuga, ésta ha recorrido una pequeña distancia y la tortuga seguirá estando por delante de Aquiles. En el siguiente instante de tiempo Aquiles vuelve a alcanzar la anterior posición donde se encontraba la tortuga, pero ésta nuevamente ha recorrido una pequeña distancia así que continúa estando por delante del héroe. Si extendemos este razonamiento ad infinitum, Aquiles no llegará nunca a coger a la tortuga (al menos aparentemente...) Fig. ?? De esta paradoja

toman su nombre las coordenadas tortuga que usaremos en breve.

En realidad se está definiendo una asíntota¹. Hagamos un experimento mental. Nos colocamos a una distancia x de una puerta. En cada paso vamos a recorrer la mitad de la distancia que nos queda para llegar a la puerta. Ahora nos preguntamos ¿cuándo llegaremos a la puerta? La respuesta es nunca, puesto que siempre estaremos a la mitad de la distancia que nos separa de la puerta, aunque vamos a poder estar tan cerca de la puerta como queramos. Poniéndolo en forma matemática tenemos algo como $d = (\frac{1}{2})^n$ que solo es 0 cuando 'n' tiende a infinito.

En la vida real, como nadie dispone de un tiempo infinito lidiamos con este tipo de problemas asumiendo cierto tipo de simplificaciones y aun sabiendo de que la respuesta que damos no es correcta del todo, la asumimos como tal.

Figura 2.13: Tensión condensador



Tal vez uno de los primeros ejemplos de esto en la escuela de ingeniería sea la tensión de carga de un condensador Fig. ???. Sabiendo que la tensión de carga tiene la forma $v_c(t) = V(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$ si nos preguntan ¿cuándo estará el condensador cargado? solemos decir que cuando $t = 5\tau^2$ que equivale a un valor de más de un 99 % de V.

¹Que en nuestro caso es perfecto porque asíntota significa 'que no cae'.

² 4τ también es muy habitual y equivale a un 98 % de V

En realidad, examinando la ecuación sabemos que la respuesta $t = 5\tau$ es incorrecta ya que $v_c(t)$ será igual a V en un tiempo infinito, pero es que la respuesta correcta carece de interés porque aunque es correcta para cualquier configuración del circuito de carga no podemos esperar un tiempo infinito.

La idea importante sobre las coordenadas tortuga que habremos de recordar es que nunca se llegará a alcanzar la meta puesto que ésta es una asymptota.

2.5.2. Pinceladas básicas de las ideas de Einstein

Por contexto, vamos a plasmar aquí unas pinceladas básicas sobre las ideas de Einstein sobre la relatividad y algunas herramientas que usó para implementar sus teorías.

Un concepto que vamos a usar mucho y muy frecuentemente en este TFM es el de ‘métrica’. Para medir longitudes en pasos infinitamente pequeños, necesitaremos una regla que mida la distancia entre puntos infinitamente próximos. Esta regla de determinación de la medida de distancias se llama métrica. El caso más habitual es el de nuestra regla del colegio que es la misma con la que medimos distancias en el espacio euclíadiano, aunque llevado ésto al límite solo es cierto en dominios infinitamente pequeños ya que no encontraremos una superficie tan plana como la idea y definición de plano. De hecho, esta exageración nos lleva a nuestra siguiente definición en la que este tipo de regla es del tipo riemanniano y la geometría de tal espacio se llama riemanniana, que es un espacio euclíadiano en lo infinitamente pequeño.

Otra idea clave y que vamos a usar frecuentemente es que por geometría diferencial sabemos que la longitud de una curva no depende de la parametrización dada.

Para el caso de la relatividad especial, en el que los campos gravitatorios están ausentes, la métrica natural es la llamada métrica de Minkowski, que explicaremos en la siguiente sección.

Una vez llegados a este punto, Einstein pensó que esta descripción geométrica debería continuar siendo válida en presencia de un campo gravitatorio solo que habría que cambiar la métrica de Minkowski por otra similar a una métrica pseudo-

riemanniana (no es definida positiva al tener el -1 correspondiente a la coordenada temporal) con la propiedad de que en cada espacio tangente existiera una base $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ cuyos productos escalares pudieran representarse por

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La métrica debería venir determinada de alguna forma por la materia que crea el campo gravitatorio... ¿pero cómo? En mecánica clásica se sabe que el potencial gravitatorio V originado por la materia de un medio continuo de densidad ρ , verifica la ecuación de Poisson $\Delta V = 4\pi G\rho$, donde G es la constante de gravitación universal y Δ es el operador de Laplace $\partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2 + \partial^2/\partial x_3^2$, así que debería existir una ley parecida. Einstein pensó que la ecuación de Poisson debería sustituirse por una ecuación tensorial de la forma $G = \chi\tau^3$. Finalmente, y sin entrar en detalles porque esto ya queda fuera del propósito de este TFM y tampoco lo enriquece, Einstein se dió cuenta de que con el tensor de Ricci R_{ab} se puede construir la combinación $R_{ab} - (1/2)Rg_{ab}$ más una constante Λg_{ab} ³, que cumple una ley de conservación de tipo covariante (conocida como identidad de Bianchi). Igualando esa combinación a las fuentes de materia, se obtiene una ecuación consistente con las leyes de conservación de la materia y energía y que relaciona geometría con materia/energía:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} - \Lambda g_{ab} = 8\pi GT_{ab},$$

que representa las (diez) ecuaciones de Einstein de la gravitación.

³Es IMPORTANTE recalcar que aquí G no hace referencia a la constante de gravitación universal sino a los potenciales gravitacionales

⁴Einstein añadió esta constante para tener un modelo de universo estático. Aún no se sabía que el universo está en expansión y él mismo renegó de ella calificándola como un gran error. Hoy día esa constante se toma en cuenta aunque solo para cosmología, donde sí es relevante.

2.5.3. Sinergia profesor-alumno: Minkowski-Einstein

En 1908 Minkowski⁵ se dió cuenta de que la teoría especial de la relatividad, descrita por su alumno Albert Einstein en 1905, se podía entender mejor en un espacio 4-dimensional (3 + 1: las tres dimensiones espaciales + 1 temporal). Esta idea de espaciotiempo aportó un punto de vista fundamental para el desarrollo de la nueva teoría y cambiaría para siempre nuestra visión del mundo que nos rodea.

El espaciotiempo de Minkowski se define como

$$ds^2 = -dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2; \quad (2.1)$$

que en coordenadas polares equivale a $ds_M^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2$, que veremos también de la forma $ds_M^2 = \zeta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ donde

$$\zeta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El signo negativo de ‘ dt^2 ’ da una expresión formal de la radical diferencia entre la coordenada del tiempo y las espaciales.

Partiendo de la idea en 3D de diferencial de longitud de arco $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ y sabiendo por geometría diferencial que la longitud de la curva no depende de la parametrización que se haga, cambiamos a coordenadas polares $ds^2 = dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2$.

En 4D sería $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$ que habitualmente veremos escrito como $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ utilizando lo que se conoce como ‘notación de convenio de suma de Einstein’.

Imaginemos que tenemos el siguiente sumatorio: $y = \sum_{i=1}^3 c_i x^i = c_1 x^1 + c_2 x^2 + c_3 x^3$ esto se simplifica usando este convenio quedando: $y = c_i x^i$, como vemos, los superíndices no son exponentes sino índices de coordenadas.

⁵No solo fué profesor de Einstein sino que también fué amigo de David Hilbert

2.5.4. Solución exacta a las ecuaciones de Einstein

En diciembre de 1915 Karl Schwarzschild estando en el frente ruso, obtiene una solución exacta donde Einstein ‘solo’ pudo encontrar una solución aproximada que según se indica en⁶ Einstein responde “... I had not expected that one could formulate the exact solution of the problem in such a simple way...”

La métrica que usó Schwarzschild es la siguiente

$$ds_{sch}^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (2.2)$$

donde $M \equiv \frac{GM}{c^3}$ y $r_s \equiv \frac{2GM}{c^3}$, quedando $ds_M^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ donde ahora

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

con $dx^\mu = (dt, dr, d\theta, d\varphi)$. Si nos fijamos en la ecuación ?? vemos que podemos sacar factor común a $\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)$ quedando el elemento de línea como

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left[-dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^2} dr^2 \right] + r^2 d\Omega \quad (2.3)$$

Este mismo factor común que aparece en la ecuación anterior ?? lo podemos integrar $dr_*^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^2} dr^2$, quedando $r_* = r + 2M \ln \frac{r-2M}{2M}$, o también

$$r_* = r + r_s \ln \frac{r - r_s}{r_s}, \quad (2.4)$$

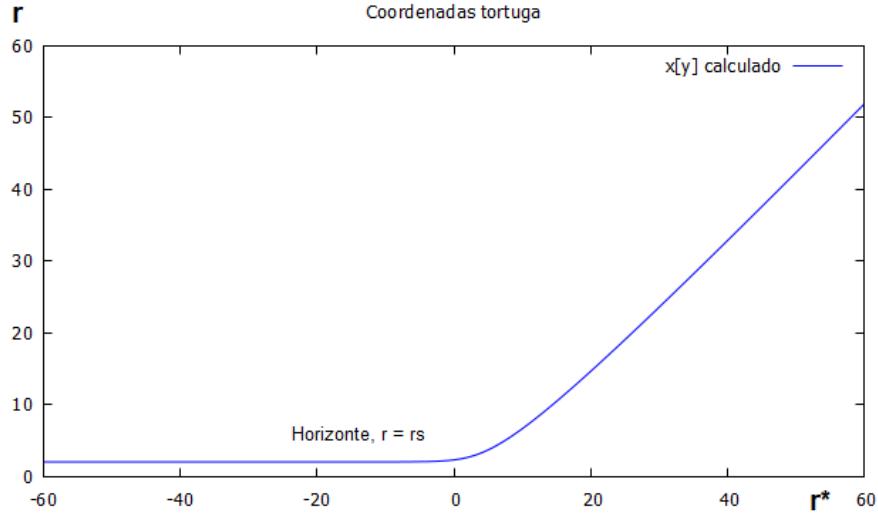
que es la expresión usual de la coordenada tortuga⁷. Para una referencia más completa sobre las coordenadas tortuga y otros espaciotiempo esféricos podemos consultar [?, ?, ?]. De aquí en adelante será habitual referirnos a las coordenadas tortuga como: y . Así pues $r(r_*)$ será expresado como xy o $x[y]$.

Si dibujamos r respecto de r_* tenemos la Fig.??

⁶Eisenstaedt, “The Early Interpretation of the Schwarzschild Solution,” in D. Howard and J. Stachel (eds), Einstein and the History of General Relativity: Einstein Studies, Vol. 1, pp. 213-234. Boston: Birkhauser, 1989.

⁷En inglés existe un sustantivo diferente para las tortugas de tierra, tortoise, y las tortugas marinas, turtle. En nuestro caso la carrera de la tortuga era en tierra así que son tortoise coordinates.

Figura 2.14: Coordenadas tortuga



Que si analizamos la ecuación ?? vemos que coincide con la idea intuitiva. Cuando r se acerca a r_s el $r_* \rightarrow -\infty$ por el logaritmo. Si $r > r_s$ y puesto que r_s es muy pequeño $r_* \approx r$. El codo exponencial, que en la figura se observa cerca del valor 0, se explica definiendo $r = r_s + \Delta r$ y jugando un poco llegamos a $r \approx r_s(1 + e^{\frac{r_* - r_s}{r_s}})$

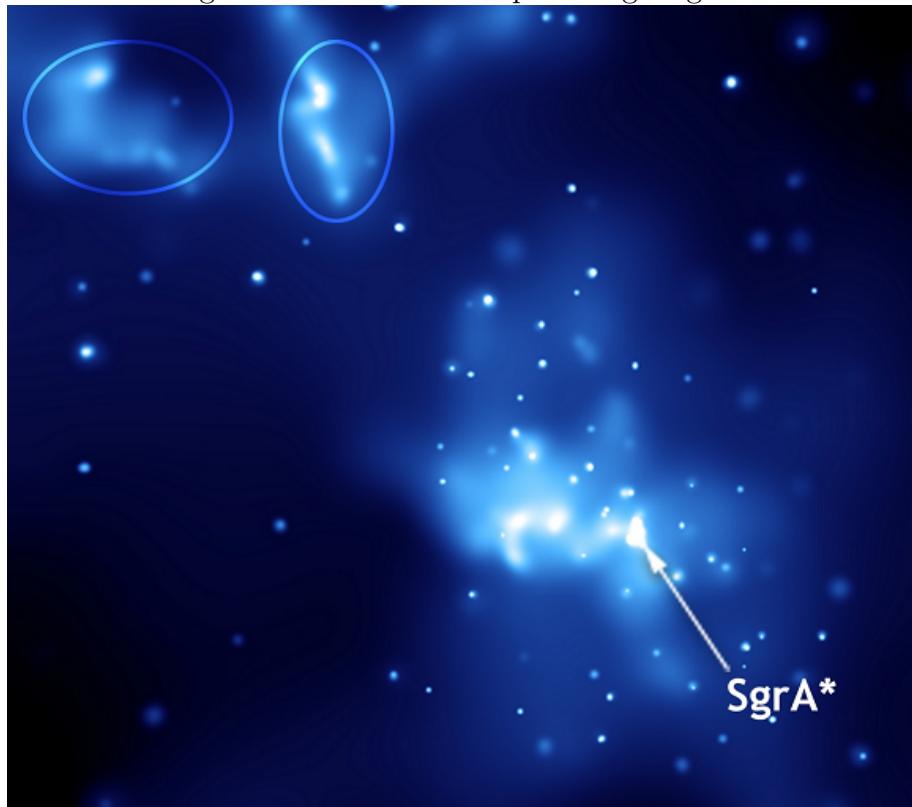
Mirando la Fig. ?? ya tenemos claro el porqué del nombre de coordenadas tortuga. Viniendo de la derecha, $r_* > 0$, si lanzamos un objeto hacia el agujero negro veríamos como se acerca a éste y, llegados al horizonte de sucesos, su velocidad disminuye tendiendo a cero cuando r tiende a r_s , sin poder atravesar el horizonte, quedando ‘inmóvil’⁸ sin llegar a tocar el agujero negro ya que r nunca llega a 0. Esta visión se debe al efecto de corrimiento al rojo extremo que sufre la luz emitida por el objeto que se acerca al horizonte. Para un observador externo, la luz emitida desde las proximidades del horizonte tarda un tiempo creciente (asintóticamente infinito conforme se alcanza el horizonte) en llegarle, lo que crea la ilusión de que dicho objeto nunca cruza el horizonte.

⁸Desde fuera del horizonte de sucesos... porque el objeto será tragado por el agujero negro sin ninguna piedad.

2.5.5. Sgr A*

No podíamos terminar esta introducción sin hablar del posible agujero negro que gobierna nuestra galaxia: Sgr A* o Sagitario A* Fig. ??

Figura 2.15: Fuente: wikipedia.org - Sgr A*



En 2020 Reinhard Genzel y Andrea Ghez fueron galardonados con el Premio Nobel en Física por el descubrimiento de este objeto supermasivo cuya única explicación a día de hoy es un ECO (Extreme / Exotic Compact Objects) ???.⁹

⁹Se piensa que es un agujero negro supermasivo, ya que tiene millones de veces la masa de nuestro Sol

2.6. Estado del arte

El punto de partida de este TFM es el artículo *Absorption by black hole remnants in metric-affine gravity* [?]. en él, se hace hincapié en que

Las capacidades actuales de observación son insuficientes para confirmar o descartar la existencia del horizonte de eventos de los BH. Una de las propiedades interesantes de los agujeros de gusano es que evitan las singularidades de los BH y además las soluciones se extraen naturalmente del campo gravitacional. Consideraremos a los agujeros de gusano como ECO Podemos ir más allá en su clasificación y subclasificar en UCOs (Ultra-Compact Objects)?? y ClePhOs (Clean Photonsphere Objects)?? Puesto que los ClePhos tienen una cavidad efectiva entre su superficie y la fotosfera podemos caracterizar éstos mediante el su espectro de absorción debidos a la resonancia.[?] (p.1 Introduction)

Otro artículo importante en el desarrollo de este TFM es *Reissner-Nordström Black Holes in Extended Palatini Theories* [?] donde hemos querido evitar el uso de hipergeométricas usando aproximaciones de éstas utilizando como referencia las ecuaciones (37-45). Hablaremos más adelante sobre los problemas que he tenido con las hipergeométricas.

Finalmente, otro artículo clave ha sido *Shadows and optical appearance of black bounces illuminated by a thin accretion disk* [?] que me ha permitido estudiar de una forma más sencilla los agujeros de gusano gracias a utilizar el elemento de línea de la ecuación (2).

Tal vez el mayor esfuerzo por estudiar y hacer llegar al gran público cómo se vería un BH y su horizonte de sucesos fué la película Interstellar (2014). El artículo *Gravitational Lensing by Spinning Black Holes in Astrophysics, and in the Movie Interstellar*[?] trata extensamente sobre los métodos que utilizaron para una representación lo más rigurosa posible de este ECO.

Puesto que las observaciones electromagnéticas del horizonte de sucesos parecen extremadamente difíciles de utilizar en la práctica, se pueden aprovechar las ondas gravitacionales GW (Gravitational Waves) ?? para estudiar la estructura de los BHs

Figura 2.16: Fuente: www.huffpost.com - Interstellar

y su horizonte de sucesos esta es una vía de estudio que se toma en *Exotic Compact Objects and How to Quench their Ergoregion Instability*[?].

Sobre la aplicación de métodos numéricos en la caracterización de ECOs el artículo *Quasinormal modes of black holes and black branes*[?] es una extensísima revisión de los métodos numéricos utilizados.

Si hablamos de código en la resolución de problemas similares encontramos *A public code for calculating the Hawking evaporation spectra of any black hole distribution*[?] donde además advierten de los problemas que se han encontrado en la búsqueda de soluciones numéricas.

Nuestra intención es aplicar ciertos potenciales a nuestro modelo para obtener su comportamiento. Para ello revisamos publicaciones que van en una línea similar como *General recursive solution for one dimensional quantum potentials: a simple tool for applied physics*[?], *Scattering and absorption of electromagnetic waves by a Schwarzschild black hole* [?] o *Resolution of the one-dimensional scattering problem by a finite element method*[?].

Por lo general, he encontrado que el método utilizado en el campo es el método de Numerov así que he ido revisando dónde y cómo se ha utilizado. Un buen ejemplo lo encontramos en *Numerov's Method for Approximating Solutions to Poisson's Equation*[?]

Usando también el método de Numerov para la resolución de la ecuación de Schrödinger tenemos *Practical points concerning the solution of the Schrödinger equation*[?].

Capítulo 3

Objetivos

El objetivo de este TFM es ser capaces de caracterizar los ECO por su absorción de campos escalares sin masa, como se hace en nuestro texto de referencia [?], y replicar sus resultados gráficos para permitirnos distinguir entre BH y WH. En particular, hemos de ser capaces de obtener el espectro de absorción de:

1. Un agujero negro de Schwarzschild
2. Un agujero de gusano utilizando geometría de Black Bounce
3. Un agujero de gusano de membrana fina

Capítulo 4

Desarrollo del trabajo

Aunque todo el código que hemos escrito durante el Máster está realizado en Matlab siempre he tenido la sensación de que es difícil la reproducción por parte de otras personas de los experimentos numéricos. El primer gran problema es que Matlab es un software de pago y aunque hay alternativas libres como Octave o Scilab, seguro que el código no es compatible al 100% lo que representa un problema a la hora de que otros puedan comprobar tus resultados ya que se tendrían que hacer las respectivas traducciones. Por este motivo hemos decidido, aún a sabiendas de que es arriesgado, utilizar unas librerías y un lenguaje que se utiliza mucho en el ámbito científico como son: GSL (GNU Scientific Library) ??, GMP (GNU Multiple Precision Arithmetic Library) ?? y C.

Finalmente y fuera de mis previsiones, también utilizaremos el lenguaje Wolfram ?? mediante el uso de la herramienta gratuita WolframEngine y Jupyter de Python.

GSL está escrita en C que es seguramente el lenguaje ‘de alto nivel’ (es decir por encima de lenguajes como ensamblador) más universal, lo encontramos desde diminutos microcontroladores hasta mainframes. Además C es un lenguaje de alto rendimiento. Usaremos esta librería para poder utilizar diferentes métodos de integración: Runge-Kutta (en diferentes variables), Bulirsch-Stoer, Adams-Bashforth / Adams-Moulton, Nordsieck, etc... Manejo de números complejos y sistemas de resolución lineal como: descomposición LU, descomposición QR, descomposición LQ, etc...

La utilización de GMP ha venido forzada porque la precisión de un double no

es suficiente para estudiar una región asintótica suficientemente grande. En nuestro caso hemos tenido que trabajar con números de una precisión de 130 bits. En realidad a posteriori ha quedado claro que el uso de la librería no aporta realmente ningún dato interesante que no se pueda obtener mediante aritmética normal, realizando eso sí la integración de forma cuidadosa.

También en el ámbito de C, hemos utilizado la librería GLib ?? porque teníamos que realizar búsquedas en arreglos ordenados y esta librería cuenta con un algoritmo de búsqueda dicotómica (entre muchísimas más utilidades).

Para las gráficas también vamos a utilizar un software libre como es ?? Gnuplot, que también se usa en el ámbito científico.

Para la creación de una interfaz gráfica amigable en la realización de los experimentos numéricos, hemos utilizado el lenguaje de programación Tcl ?? ya que desde bien pronto nos hemos dado cuenta de la inmensa necesidad de poder ir variando nuestros parámetros para hacer los experimentos.

4.1. Numerov

Este método numérico parte de la ecuación en diferencias de orden 2

$$\Delta_2 = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} \quad (4.1)$$

y está especialmente indicado para ecuaciones diferenciales de segundo grado que no contienen a la primera derivada. De forma general lo expresaremos como

$$[p(x)u'(x)]' + q(x)u(x) = s(x) \quad (4.2)$$

Tras aplicar ?? en la derivada de orden 2 y 4 de la ecuación ?? llegamos a

$$u^{(4)}(x) = \frac{d^2}{dx^2}[-q(x)u(x) + s(x)]$$

que aplicando otra vez ?? pero esta vez sobre la parte derecha obtenemos

$$u^4 = \frac{(s_{i+1} - q_{i+1}u_{i+1}) - 2(s_i - q_iu_i) + (s_{i-1} - q_{i-1}u_{i-1})}{h^2}$$

que combinando con la ecuación $\Delta_2 = (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}/h^2 = u''_i + h^2u^{(4)}/12)$ y $u''_i = s_i - q_i u_i$ obtenemos el algoritmo de Numerov de la forma

$$c_{i+1}u_{i+1} + c_{i-1}u_{i-1} = c_iu_i + d_i + O(h^6)$$

con los correspondientes coeficientes

$$\begin{aligned} c_{i+1} &= 1 + \frac{h^2}{12}q_{i+1} \\ c_{i-1} &= 1 + \frac{h^2}{12}q_{i-1} \\ c_i &= 2 - \frac{5h^2}{6}q_i \\ d_i &= \frac{h^2}{12}(s_{i+1} + 10s_i + s_{i-1}) \end{aligned}$$

Este método mantiene los términos de orden h^4 eliminando los términos de orden h^6 y superiores. Por tanto este método es localmente de $O(6)$ [?] pero globalmente es de $O(4)$ aunque se sigue prefiriendo este método para la resolución de la ecuación de Schrödinger porque en la práctica tiene un rendimiento superior a otros algoritmos del mismo orden ya que tiene un mayor intervalo de periodicidad [?].

4.2. Prueba del algoritmo: Ecuación 1-dimensional de Schrödinger

Vamos a probar nuestro algoritmo con un problema similar en lo referente a la forma de sus ecuaciones diferenciales: la ecuación 1-dimensional de Schrödiger. Para ello partimos de diversos papers, libros y publicaciones como las explicaciones del capítulo 3 de [?] donde se usa explícitamente el método de Numerov, la Revista Brasileira de Ensino de Física [?] donde se explica más gráficamente el problema y un ejemplo de física computacional donde tratar el tema An Introduction to Computational Physics [?].

$$\phi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2}[\epsilon - V(x)]\phi(x) = 0$$

de la que tenemos la solución exacta con el siguiente potencial

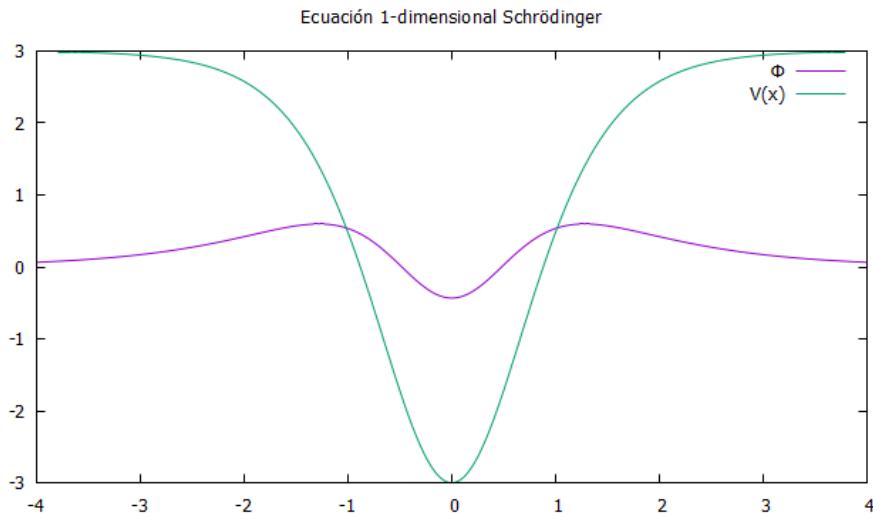
$$V(x) = \frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2\lambda(\lambda - 1) \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{cosh^2(\alpha x)} \right]$$

y esta energía

$$\epsilon_n = \frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2 \left[\frac{\lambda(\lambda - 1)}{2} - (\lambda - 1 - n)^2 \right]$$

Si dibujamos los resultados obtenidos utilizando como valores de parámetros $\hbar = m = \alpha = 1, \lambda = 4, n = 2$ vemos que los resultados arrojados concuerdan con los esperado

Figura 4.1: Ecuación de onda



Para la resolución de las ecuaciones hemos de tener en cuenta que en el sistema físico la función de onda $\phi(x) \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$ por tanto, podemos integrar de izquierda a derecha o de derecha a izquierda. La integración pues requiere integrar desde una región exponencialmente creciente, a una región osculatoria y finalmente una región exponencialmente decreciente.

El error acumulado será significativo si integramos la solución desde la región osculatoria hacia la región exponencial decreciente. Esto es así porque una solución exponencialmente creciente es una solución posible, lo que podría enterrar la solución en los errores crecientes del método de integración.

Para evitar este riesgo, obtenemos las soluciones desde ambos lados y las unimos en la región del pozo potencial. Usualmente la unión se realiza cuando el potencial empieza a cambiar y se encuentra con el nivel de energía.

La región de unión se ajusta de forma que la solución integrada de la derecha, $\phi_r(x_r)$, coincide con la solución integrada de la izquierda, $\phi_l(x_l)$, y además se satisfagan las condiciones de continuidad que en este caso son

$$\phi_r(x_r) = \phi_l(x_l)$$

$$\phi'_r(x_r) = \phi'_l(x_l)$$

combinando ambas, tenemos

$$\frac{\phi_r(x_r)}{\phi'_r(x_r)} = \frac{\phi_l(x_l)}{\phi'_l(x_l)}$$

y usando diferencias centrales

$$f(\epsilon) = \frac{[\phi_l(x_r + h) - \phi_l(x_r - h)] - [\phi_r(x_r + h) - \phi_r(x_r - h)]}{2h\phi(x_r)} = 0$$

¿Por qué hemos utilizado la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para probar el algoritmo de Numerov? La respuesta es que las soluciones de la ecuación de Schrödinger se comportan correctamente solo para ciertos valores de energía. Para valores muy pequeños de U_0 , existe solo una energía permitida. Por tanto, si obtenemos los resultados esperados con el algoritmo de Numerov podemos estar más que seguros de su correcto funcionamiento.

El código desarrollado en C implementa el método de Numerov para la integración de la función de onda, el método de la secante para la obtención de los autovalores, la función de onda, la función ‘f’ y la función del potencial tenemos que implementar también el método de Simpson para la normalización de la función.

La traducción de las ecuaciones es sorprendentemente directa y la única cosa que me parece extraña es la normalización de la función de onda mediante la regla de Simpson (también de traducción directa). En esta primera aproximación se ha realizado el código de los métodos numéricos a mano, pero la intención es hacerlo mediante GSL ya que daría una flexibilidad enorme.

Una vez observados los primeros resultados se ha hecho obvia la conveniencia de poder realizar experimentos numéricos de forma rápida, sencilla y eficaz. Aunque la compilación de un programa tan minúsculo tarda apenas unos segundos es a todas luces un proceso engorroso. Nuestra elección ha sido crear una interfaz gráfica para simplificar el proceso. Así pues, cada vez que quiera modificar un parámetro y ver el resultado se puede hacer de forma fácil y sencilla. Esto a su vez posibilita a quien no quiera usar la interfaz la misma funcionalidad cambiando los datos de entrada. La interfaz gráfica que hemos realizado en Tcl ?? nos permite cambiar variables del método numérico, variables físicas del problema y algunas variables de la graficación de los resultados.

4.3. Aproximación a nuestro problema real

4.3.1. Absorción de ondas escalares en el caso del agujero negro de Schwarzschild

En una primera aproximación a nuestro problema vamos a ver si somos capaces de graficar el espectro de absorción transversal de campos escalares sin masa en el caso de Schwarzschild. Para ello, contamos con la referencia de la Fig.6 de [?]. El proceso es un proceso iterativo en el que vamos a ir calculando los coeficientes de reflexión y transmisión de la ecuación 27 [?], $\phi(x) = R_{lm}e^{-iwr_*} + T_{lm}e^{iwr_*}$, donde R (Reflexión) y T (Transmisión) son números complejos. La ecuación que vamos a resolver es la ecuación 26 [?] reproducida aquí por comodidad, $\left(\frac{\delta^2}{\delta r_*^2} + \omega^2 - V_\phi(r_*)\right)\phi(x, t) = 0$, que como vemos es como nuestra vieja conocida ecuación de Schrödinger.

Lo primero que haremos será resolver la siguiente EDO:

$$\begin{cases} x'[y] = 1 - \frac{r_s}{x[y]} \\ x[y_L] = r_s(1 + e^{(y_L/r_s-1)}) \end{cases}$$

Aprovechamos que este caso es sencillo y disponemos de la expresión analítica de x y de y .

$$x = r_s(1 + e^{(y_L/r_s-1)})$$

$$y = x + r_s \ln(x/r_s - 1)$$

para ver si nuestros valores calculados son correctos.

Una vez obtenidas las coordenadas tortuga, ya podemos calcular el potencial efectivo

$$V_{eff} = \frac{l(1+l)(r_s - x[y])}{x[y]^3}$$

En este punto estamos en disposición de calcular los coeficientes de Reflexión y Transmisión. Nuestro sistema de ecuaciones es el siguiente:

$$\phi = \begin{cases} e^{ikx} + Re^{-iwr_*}, & x \rightarrow -\infty \\ Te^{iwr_*}, & x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (4.3)$$

que dividiendo por el factor desconocido T, obtenemos las condiciones iniciales:

Las condiciones de contorno vienen dadas en la ecuación 33 [?]

$$\phi = \begin{cases} e^{-iwr_*}, & x \rightarrow -\infty \\ e^{iwr_*}, & x \rightarrow \infty \end{cases}$$

Y con ellos calcular la absorción parcial de la sección transversal

$$\sigma_l = \pi(2l+1)(1 - |Rw|^2)$$

4.3.2. Abrazando GSL y abandonando Numerov

Para la obtención de los coeficientes R y T de nuestro sistema de ecuaciones que nos permitirán no solo comprobar que los cálculos son correctos (puesto que por definición $R + T = 1$) sino que son imprescindibles para obtener la sección transversal de la absorción parcial, σ_l , nos hace falta trabajar con: matrices, vectores, números complejos, descomposiciones LU e integración numérica; vemos que nuestra implementación de Numerov es un estorbo pues no está adaptada al API de GSL ?? que es quien nos ofrece todas las facilidades que acabo de comentar más una infinidad más. Además, como comenté en ?? finalmente el método de Numerov tiene un $O(4)$ global y GSL ?? ofrece métodos de hasta $O(8)$ como es el método Runge-Kutta

Prince-Dormand ?? pero además nos permite experimentar con un variado abanico de algoritmos¹.

Para la resolución de la integración numérica de las diferentes EDOs he utilizado el método Runge-Kutta Prince-Dormand (8, 9) pero en realidad no he visto diferencia en el tiempo de cálculo o las formas de las gráficas con el clásico Runge-Kutta-Fehlberg (4, 5).

Lo primero que debemos hacer es resolver la ecuación 36 de [?] que viene dada por su derivada y la condición inicial en un punto muy alejado, $-\infty$ (en nuestro caso -150). Aquí, $x[y]$ son las coordenadas tortuga:

$$\begin{cases} x'[y] = 1 - \frac{r_s}{x[y]} \\ x[-\infty] = r_s(1 + e^{\frac{-\infty}{r_s}-1}) \end{cases}$$

Una vez obtenido el valor de $x[y]$ ya podemos obtener los valores de ‘q’ en la función de Sturm-Liouville, $[p(x)u'(x)]' + q(x)u(x) = s(x)$.

$$q(x) = w^2 - \frac{l(1+l)(r_s - x[y])}{x[y]^3}$$

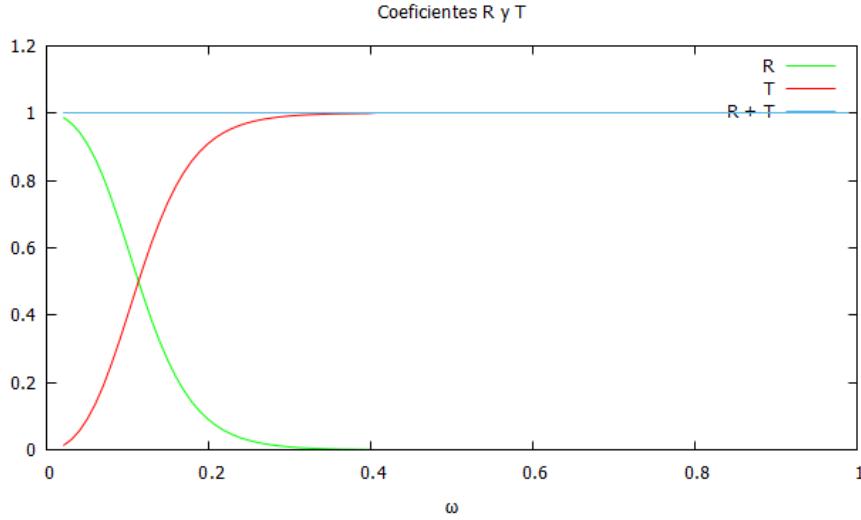
Ahora ya podemos proceder a la integración hacia atrás de la ecuación de Schrödinger con la forma $\phi'' = (V(x) - w^2)u(x)$, lo que nos permite resolver el sistema de ecuaciones ?? y obtener los coeficientes R y T, donde para obtener una curva iremos variando la frecuencia w obteniendo la Fig. ??

Que como vemos se confirma que la suma de ambos coeficientes es igual a la unidad.

Tal vez se nos haya pasado por alto un aspecto muy significativo de esta simple gráfica. Como vemos, a frecuencias bajas tenemos que el coeficiente de reflexión, R, es distinto de 0. Esto es: las ondas que enviamos al agujero negro son reflejadas. Por tanto, un agujero negro no lo absorbe todo. Cómo absorbe un agujero negro una onda depende de la frecuencia/longitud de onda de ésta. Si la frecuencia es muy alta (longitud de onda mucho menor que el tamaño del horizonte) entonces la onda es completamente absorbida y la sección eficaz de absorción es constante (no cambia con la frecuencia). En cambio, para longitudes de onda mucho mayores,

¹ver apartado: Ordinary Differential Equations, Stepping Functions

Figura 4.2: Coeficientes R y T



la absorción será mínima. Para longitudes de onda del tamaño del horizonte se observarán oscilaciones, como veremos en breve. Y es este hecho el que nos va a permitir diferenciar entre diferentes ECOs. En nuestro caso, nos interesa distinguir un BH de un WH.

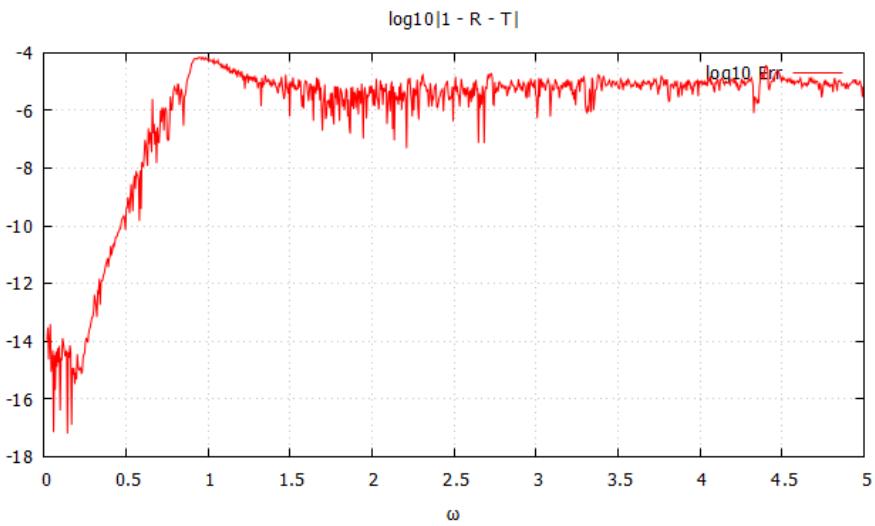
Por lo general se tiene la idea intuitiva de que un agujero negro lo absorbe completamente todo pero esto no es así como acabamos de ver. Aquí, podemos realizar un símil con algo que nos es mucho más cercano y conocido como son las ondas de radio y su recepción según la orografía. Nuestro agujero negro serán las montañas que nos rodean, y las ondas que enviamos son ondas de TV (que están sobre decenas o centenares de MHz) y las ondas AM de radio (que están sobre las decenas o centenares de kHz).

Si estamos encerrados en un valle será altamente probable que no seamos capaces de ver la televisión a no ser que haya un repetidor cerca. De hecho, los repetidores se colocan en lo alto de las montañas para que estas no absorban las ondas y para proyectarlas hacia el valle. Esto es debido a que las altas frecuencias de la señal de televisión son absorbidas por la montaña, impidiendo su recepción. En cambio con las ondas de radio, especialmente en AM, no es necesario ningún repetidor para la correcta recepción de la señal. Las ondas de AM tienen una longitud de onda tal que son capaces de ‘bordear’ las montañas y llegar a su destino. Las montañas no

las absorben o lo hacen en una pequeña proporción.

Si examinamos el error del valor obtenido en la suma de los coeficientes R y T con su valor esperado, obtenemos la Fig. ??

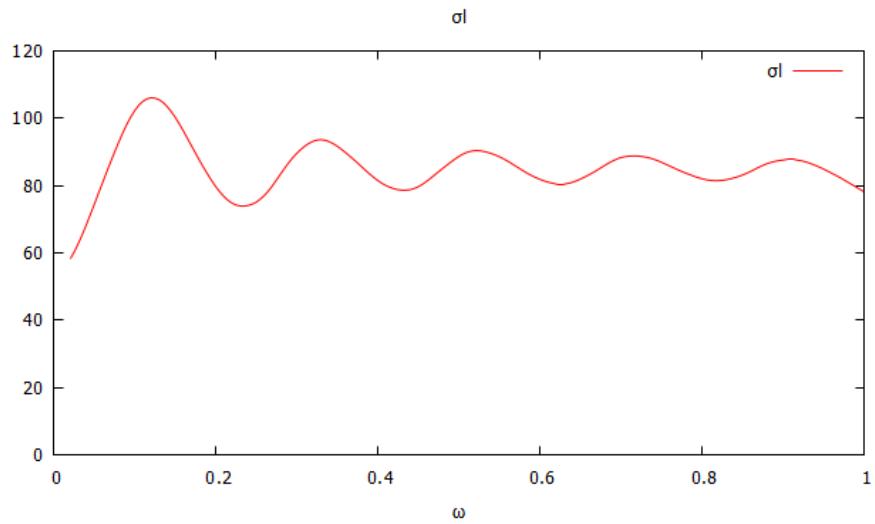
Figura 4.3: $\log_{10}|1 - R - T|$



Que como vemos va aumentando con la frecuencia pero se estabiliza alrededor del quinto decimal.

Si vamos obteniendo gráficas para distintos momentos angulares obtenemos las siguientes absorciones parciales Fig. ?? para $l = 0, l = 1, l = 2, l = 3, l = 4$:

Figura 4.4: Absorción parcial de la sección transversal respecto a la frecuencia



Que como vemos, concuerda con la gráfica de la absorción parcial de la sección Absorción de ondas escalares por agujeros de gusano de tipo membrana fina.

transversal para un determinado momento angular según la Fig. 6 de [?], habiendo usado la ecuación 33: $\sigma_l = \frac{\pi}{\omega^2}(2l + 1)$.

Para obtener la gráfica a una distancia tan alejada del objeto de estudio se utilizó la librería, GMP ?? como explicaremos a continuación, aunque realmente la región asintótica está entorno a $[-60, 60]$ y la precisión de los doubles nos es suficiente como se explica a continuación.

Ampliando nuestra región asintótica

Hasta ahora estábamos trabajando en la región $[-40, 40]$ e incluso $[-60, 60]$ pero no era ‘suficiente’ para llegar a ver completamente la región asintótica, estamos muy cerca pero hay que alejarse un poco más de nuestro agujero negro. Es entonces, cuando intentando ir hasta una región $[-150, 150]$ nos hemos encontrado con que ya no obteníamos ningún resultado. Tras mucho investigar porqué en una región obteníamos resultados y en otra más alejada no, nos dimos cuenta de que a cierta distancia las coordenadas tortuga, que son asintóticas, la aritmética estándar de coma flotante no era suficiente... es decir: se llegaba a su límite de resolución y todos los valores eran constantes con lo que la derivada era 0.

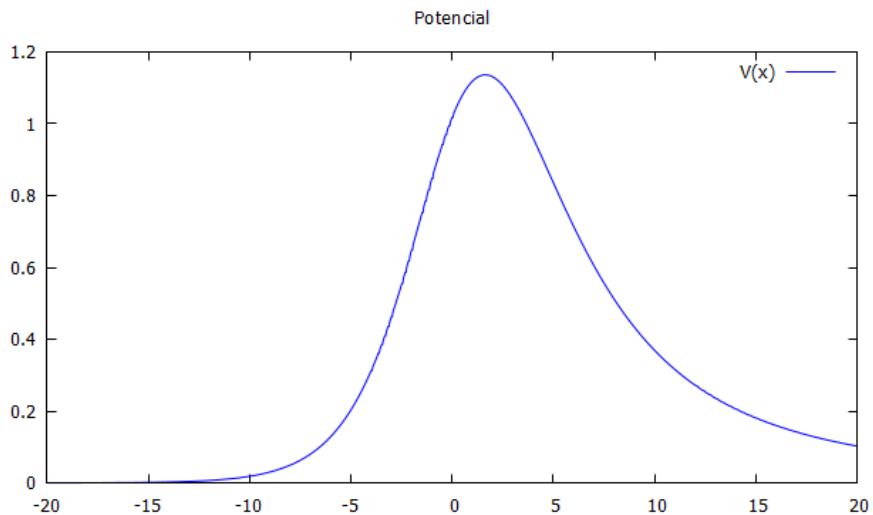
Como quería ir un poco más allá porque necesitaba ampliar la región para visualizar toda la región asintótica, nos vimos obligados a utilizar una librería de precisión múltiple variable, GMP ??, que es el equivalente a vpa, variable-precision arithmetic, en Matlab.

Con esta nueva herramienta bajo el brazo, ya pudimos llegar a regiones mucho más alejadas y con un rango de $[-150, 150]$ ya se podía observar la región asintótica sobradamente, pero ¿era ésta la única opción? Desgraciadamente la respuesta es no. El tiempo que dedicamos a ver porqué el programa que funcionaba bien en rangos de $[-20, 20]$ o incluso $[-60, 60]$ pero no para por ejemplo $[-150, 150]$ fué enorme. Al final solucionamos el problema usando GMP pero por una parte, la región $[-60, 60]$ es más que suficiente para el estudio de σ_l y por otro el problema real era que estaba integrando por la izquierda desde la región asintótica donde cada uno de los puntos es prácticamente igual y por tanto los doubles no llegan a diferenciar entre ellos, cuando podía haber integrado por la derecha donde este problema no existe.

Echando la vista atrás este ha sido sin lugar a dudas nuestro mayor error, aunque no todo ha sido baldío, ya que hemos aprendido a usar la librería GMP que es ciertamente una fantástica librería pero puesto que lo dificulta todo un poco más, ya que los cálculos son de por sí complicados y aún habiendo creado un envoltorio para el uso de GMP, el código es más oscuro y difícil de entender. Por eso y porque los resultados son totalmente correctos no hemos vuelto a usar la librería en el resto del TFM.

Para hacernos una idea de qué estamos hablando, voy a mostrar el potencial en dos regiones de estudio. En la primera $[-20, 20]$ Fig. ?? vemos que el potencial no llega a 0 cuando vamos hacia $+\infty$, aunque está realmente cerca.

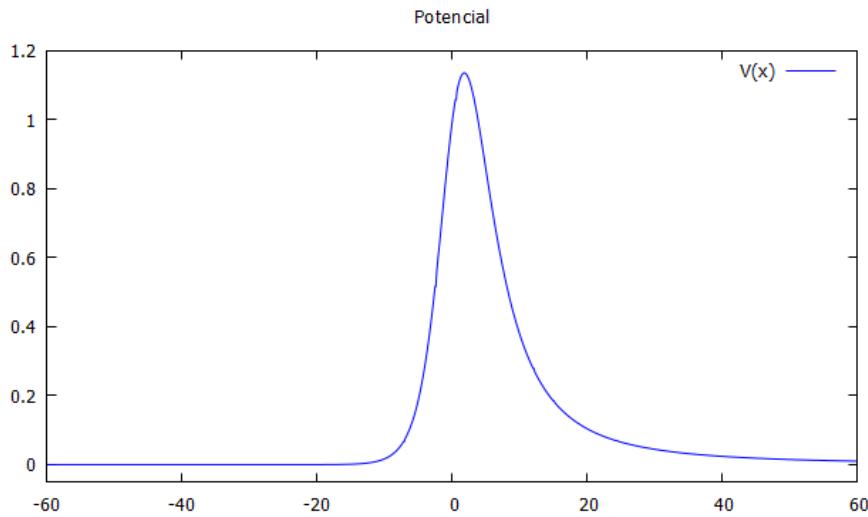
Figura 4.5: $V(x)$



Si nos vamos a la región de $[-60, 60]$ Fig. ?? la cosa cambia y ya podemos afirmar que tenemos una región asintótica

4.3.3. Miguitas en el camino

El caso de Schwarzschild ha cumplido el papel de referencia imprescindible para tener la certeza de que vamos por buen camino al realizar nuestros cálculos. Recordemos que esta materia es un **punto importante de la física que sigue abierta** en el que ciertamente últimamente se están haciendo importantes esfuerzos por comprender mejor. El hecho de ser un mundo aún por explorar lo hace aún más atractivo

Figura 4.6: $V(x)$ 

y es en parte la razón por la que me decanté por este tema.

Relacionado en cierta forma con este estudio del espaciotiempo, recientemente se ha ‘comprobado’ en laboratorio ² la existencia real de un motor de Alcubierre [?] que básicamente consiste en comprimir el espaciotiempo delante nuestro, expandiéndolo por detrás para permitirnos viajar a velocidades mayores que la de la luz sin romper ninguna ley física. Un clásico sobre el tema de los viajes espaciales en el espaciotiempo mediante agujeros de gusano sería [?]. Por tanto, lo que hoy nos parece ciencia ficción mañana puede que no lo sea (recordemos al grandísimo Jules Verne).

La primera gráfica que tenemos que obtener son las coordenadas tortuga, y éstas han de tener una forma similar a la de la Fig.??.

De hecho en este caso particular tenemos por una parte las coordenadas tortuga calculadas, analíticas inversas y calculadas inversas. Como vemos las 3 coinciden y por tanto sabemos a ciencia cierta que el resultado está bien. Pero el caso de Schwarzschild es el más simple y no vamos a tener la suerte de tener una expresión analítica para las coordenadas tortuga.

El siguiente paso es graficar las ondas transmitidas y reflejadas junto con el potencial en estudio, como se muestra en la Fig. ??.

²<https://www.extremetech.com/extreme/329631-scientists-havent-created-a-warp-bubble-but-theyre-a-bit-closer-to-testing-one>

Figura 4.7: Coordenadas tortuga

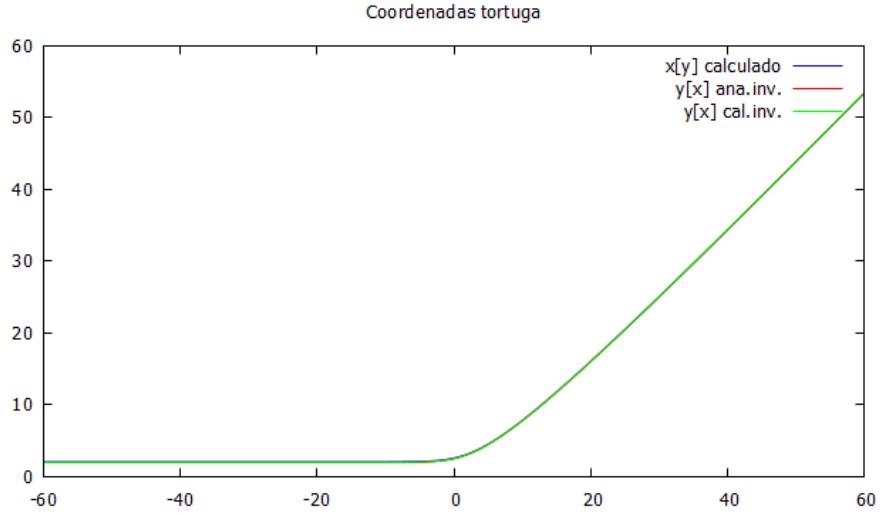
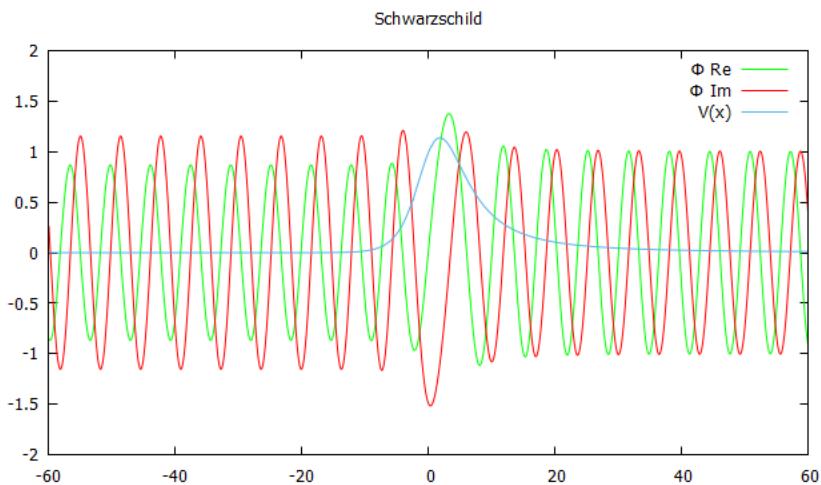


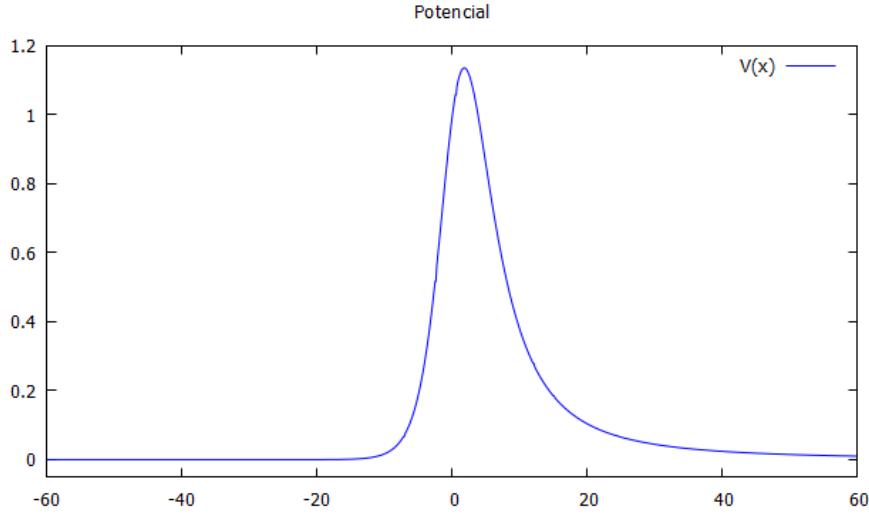
Figura 4.8: Ondas y potencial



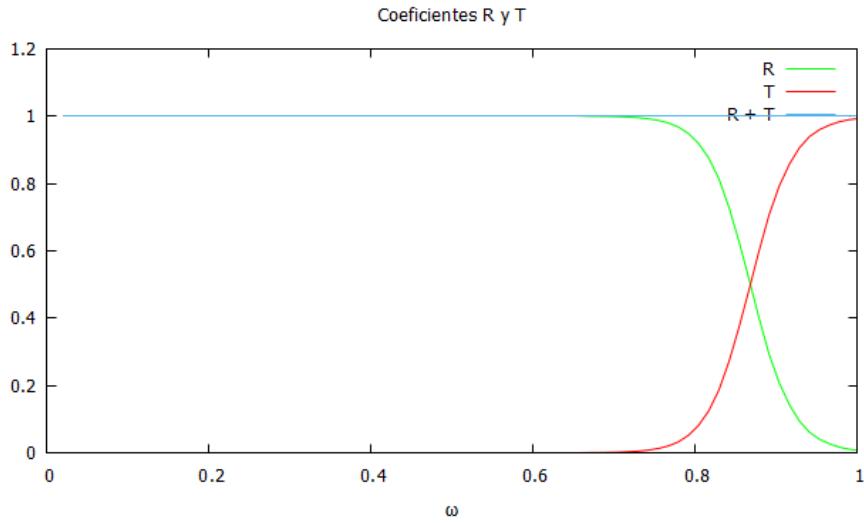
Como vemos, la interacción con el potencial provoca el desfase entre la parte real y la parte imaginaria. También vemos la interacción entre la onda y el potencial dónde éste no es nulo. Finalmente vemos cómo la onda es capaz de superar el potencial y ser transmitida. La onda se envía desde la parte izquierda en dirección a la parte derecha. Por tanto, en la parte izquierda tenemos la onda reflejada y en la parte derecha tenemos la onda transmitida.

Por claridad y para ser capaces de fijarnos más en el potencial, ya que es parte importante de los siguientes cálculos, dibujamos al potencial solo Fig. ??

Seguidamente dibujamos los coeficientes R y T. La corrección de estos es clave

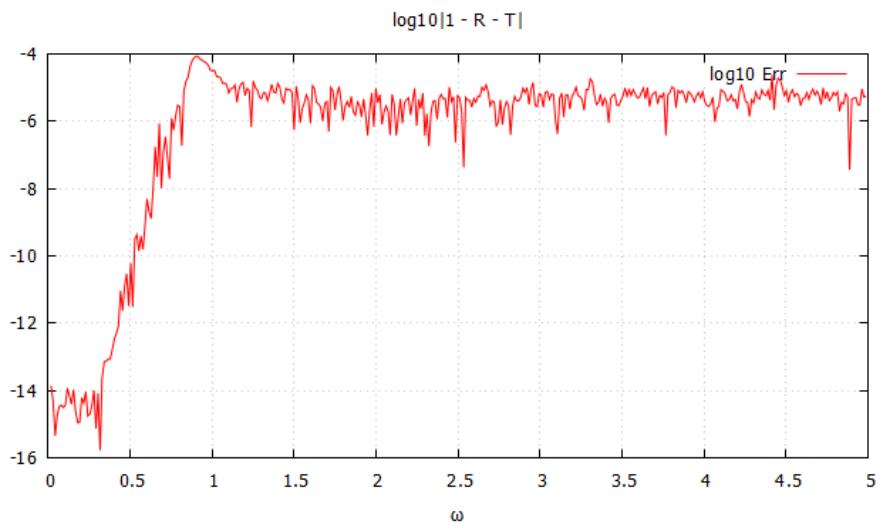
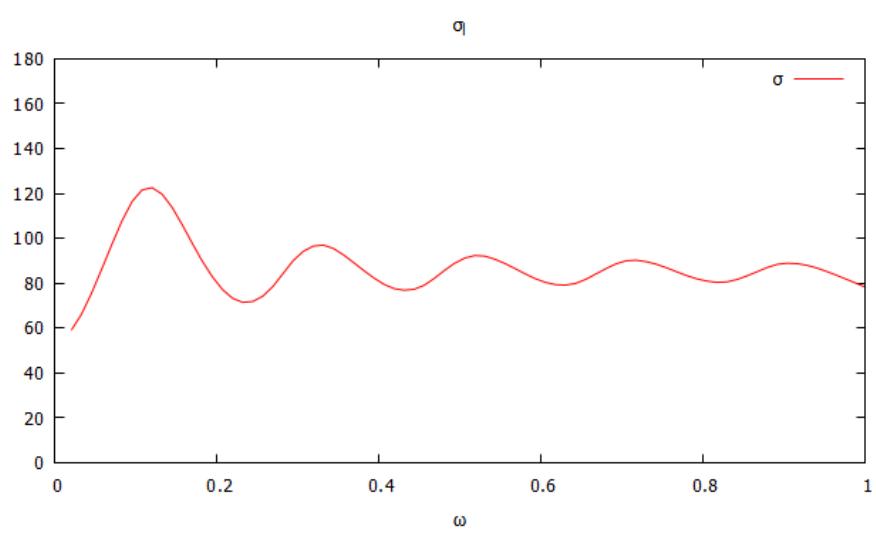
Figura 4.9: $V(x)$ 

para llegar al punto final. Por definición, $R + T = 1$ en todo el rango de frecuencias. Es decir, la suma de la onda reflejada y transmitida es igual a la onda que hemos enviado Fig. ??.

Figura 4.10: R y T 

También graficaremos el error en el cálculo teórico de los coeficientes como $\log_{10} |1 - R - T|$ Fig. ??

Finalmente dibujamos σ_l y ésta ha de coincidir con las gráficas del Dr Olmo si hemos hecho todo el trabajo previo correctamente Fig.??.

Figura 4.11: $\log_{10}|1 - R - T|$ Figura 4.12: σ_l 

4.4. Black Bounce: Pasando de un BH de Schwarzschild a un WH.

Vamos a pasar de estudiar un BH a estudiar un WH usando la misma métrica pero ajustando algún parámetro. Si cambiamos la métrica de la ecuación ?? que reescribiremos aquí por comodidad como

$$ds^2 = -A(x)dt^2 + B(x)dx^2 + r^2(x)d\Omega^2$$

con

$$A(x) = B^{-1} = 1 - \frac{r_s}{r(x)} ; \quad r^2(x) = x^2 + a^2$$

como se indica en [?], podremos con un simple parámetro ‘ a ’ pasar de estar estudiando un BH (valores $a < r_s$) a un WH (valores $r_s < a < 3M$). Es decir, podemos interpolar de manera continua entre estos dos ECOs.

En una primera aproximación, hemos de ser capaces de reproducir las siguientes gráficas del BH de Schwarzschild:

Coordenadas tortuga, potencial, coeficientes de Reflexión y Transmisión, espectro de absorción transversal. Es decir para BH: $a = 0$ hasta $a = 1,5$, estaríamos aún en el dominio de comportamiento de un BH.

Puesto que hemos cambiado r^2 ahora tenemos

$$x'(y) = 1 - \frac{rs}{\sqrt[2]{x^2 + a^2}} \tag{4.4}$$

pero esta vez no tenemos una expresión que nos dé una condición inicial, para ello tendremos que resolver primero

$$\begin{cases} y'[x] &= \frac{1}{1 - \frac{r_s}{\sqrt[2]{x^2 + a^2}}} \\ y[b] &= b + r_s \cdot \ln(b) - \frac{r_s^2}{b} \end{cases}$$

cuando $b \rightarrow +\infty$. Una vez resuelto el problema de valor inicial, PVI, ya disponemos de $y_0 = y[x_0]$ con lo que ya podemos resolver el PVI ?? al disponer de x_0 .

El siguiente paso es resolver la función de onda de la misma manera que hacíamos en ?? pero esta vez el potencial efectivo tiene la forma

$$V_{eff(y,l)} = \frac{l(1+l)A}{r(y)^2} + \frac{r''(y)}{r(y)}$$

donde

$$r''(y) = \sqrt[2]{AB} \frac{d(r'(x)\sqrt[2]{AB})}{dx}$$

con lo que ya podemos calcular los coeficientes RT y a su vez obtener la gráfica del espectro de absorción transversal. Que como vemos concuerda exactamente con los resultados esperados. Fig. ?? y Fig. ??

Figura 4.13: Coeficientes R y T

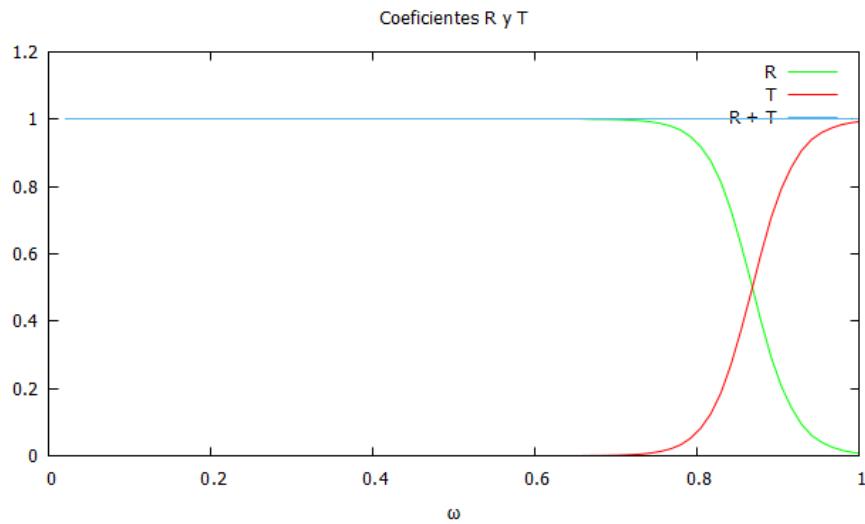
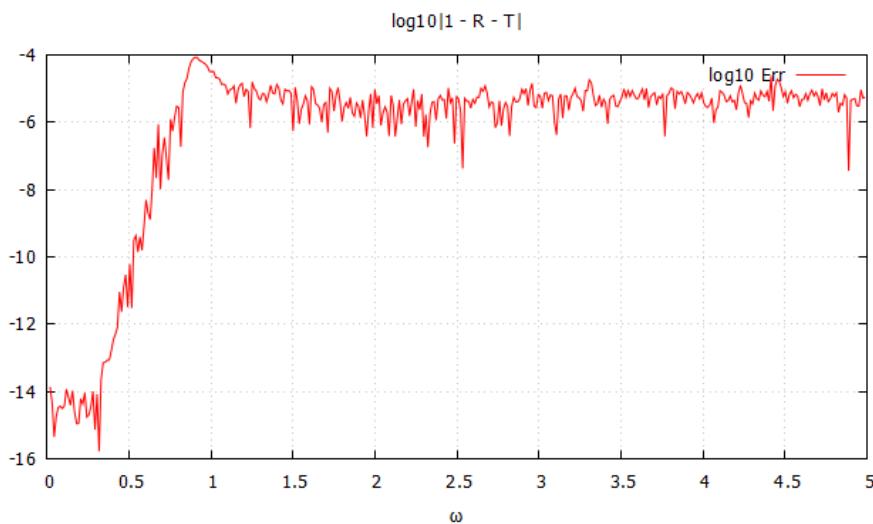


Figura 4.14: $\log_{10}|1 - R - T|$



Ahora solo tenemos que probar a reproducir el comportamiento de un WH simplemente cambiando nuestro parámetro ‘a’ de $a = 0$ a $a = 2,5$. Donde obtenemos las siguientes gráficas Fig. ?? - ??.

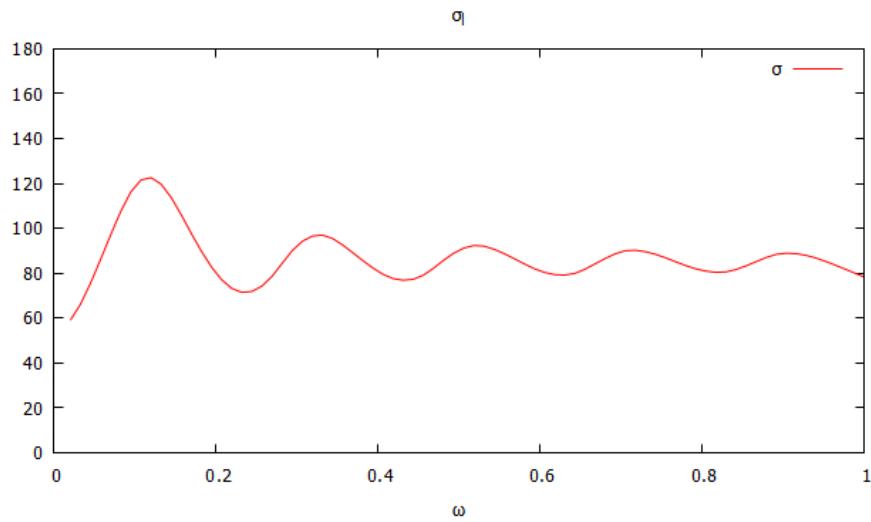
Figura 4.15: σ_l 

Figura 4.16: Tortuga

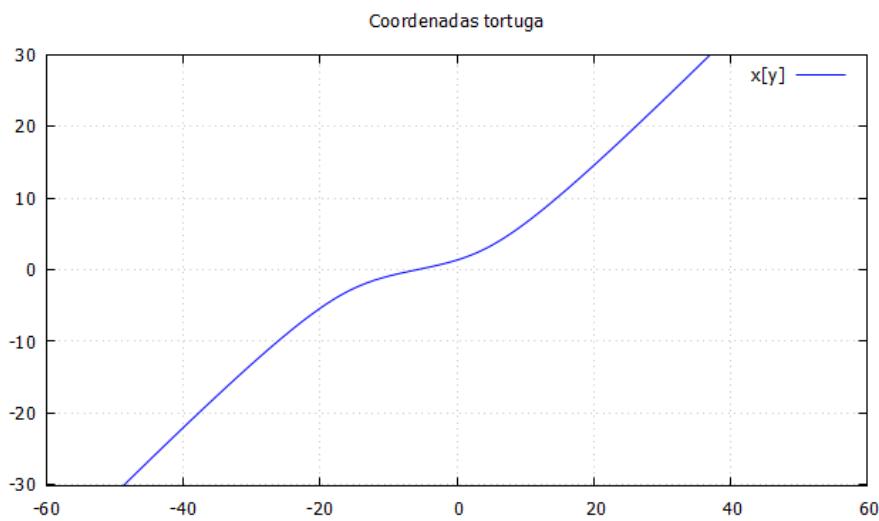


Figura 4.17: Onda y potencial

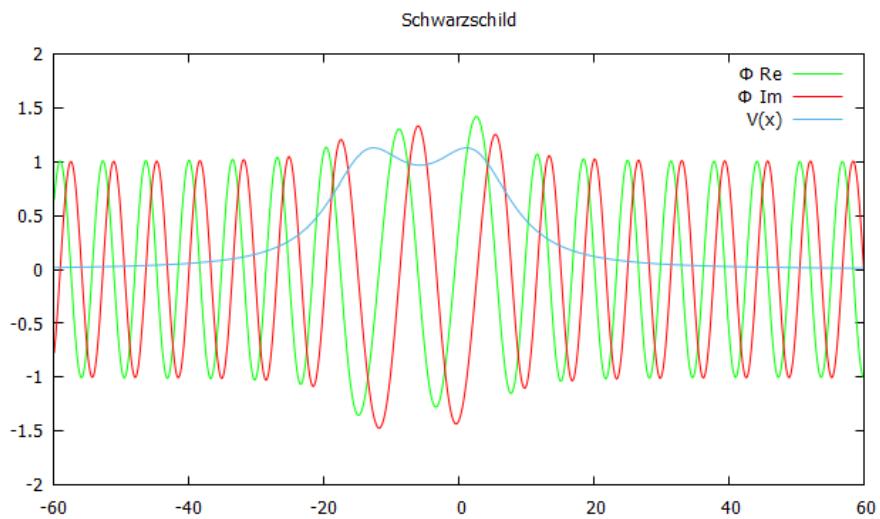
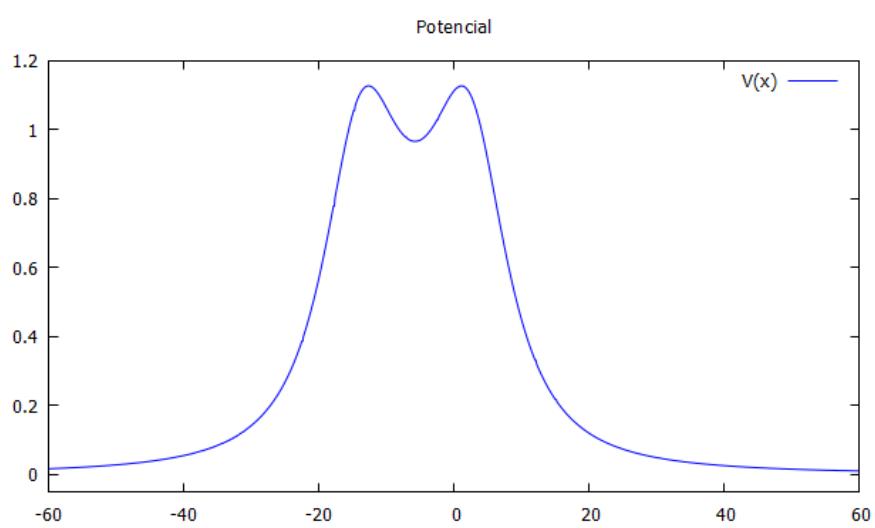
Figura 4.18: $V(x)$ 

Figura 4.19: R y T

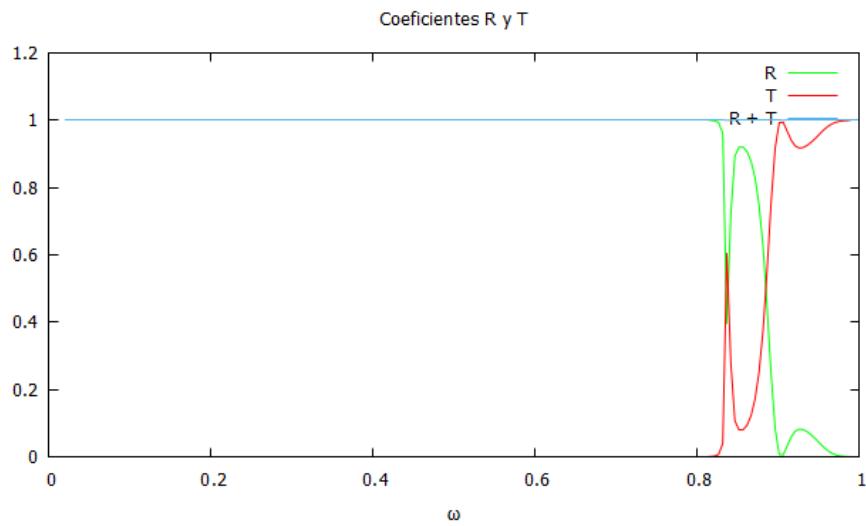
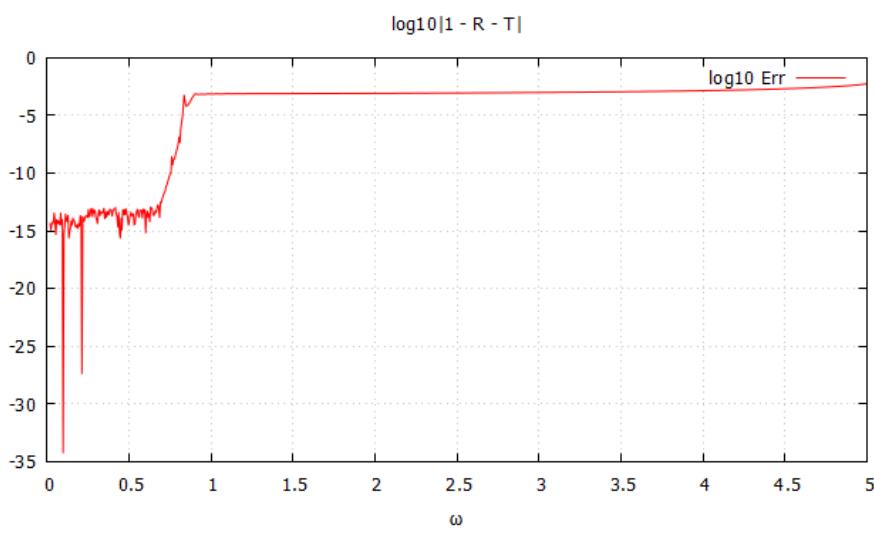
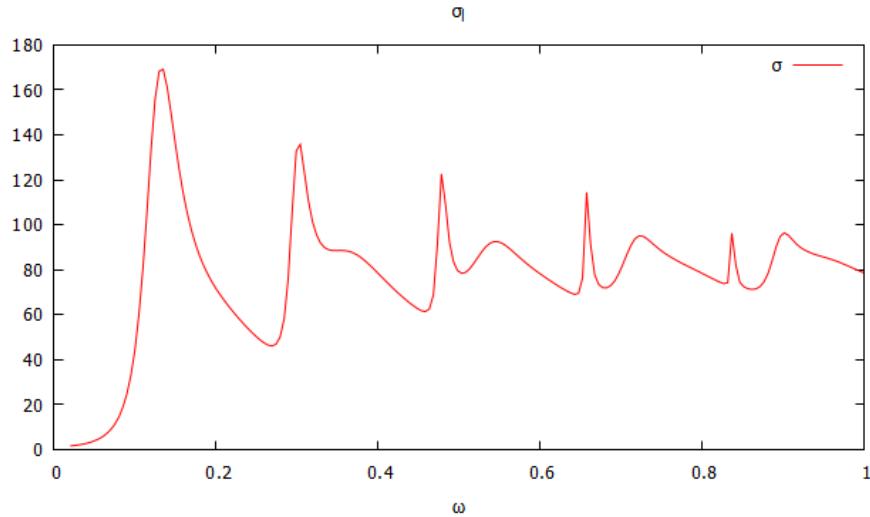
Figura 4.20: σ_l 

Figura 4.21: σ_l 

Como vemos en la Fig. ?? esta vez podemos pasar atravesando el WH, cosa que no podíamos hacer en el caso de BH. Es decir, podemos pasar de las ordenadas positivas a las negativas. Compárese esta gráfica con la Fig. ?? en la que no solo no podemos pasar al otro lado sino que además nuestro valor mínimo era r_s .

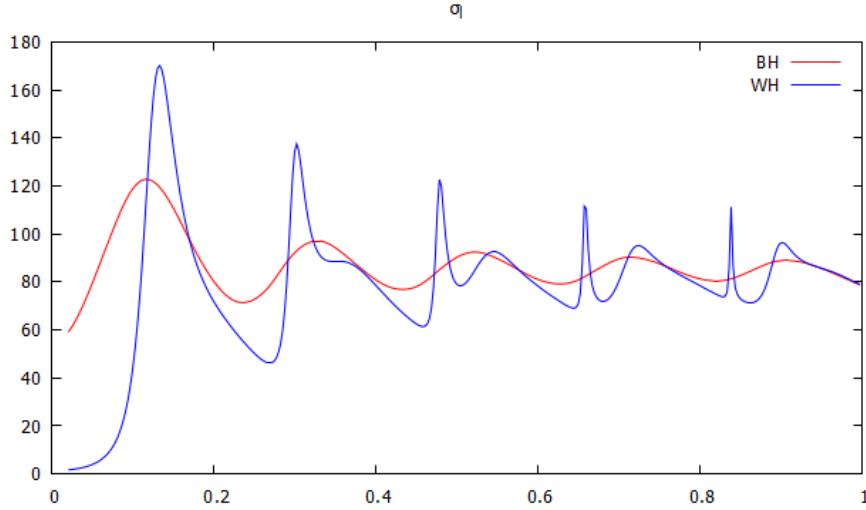
Si examinamos el potencial Fig. ?? vemos las dos partes del WH con sus dos máximos en las diferentes regiones del espaciotiempo y su mínimo relativo en la garganta. Esta gráfica concuerda con la Fig. 3 de [?] que es nuestro texto de referencia principal.

La Fig. ?? donde comprobamos los coeficientes R y T , también vemos que es correcta con su suma igual a 1 aún cuando su forma es bastante intrincada.

En el cálculo del error de los coeficientes también se observa la estabilidad de éste en torno a las 3 cifras conforme aumenta la frecuencia ??

Finalmente, la Fig. ?? nos muestra unos picos de resonancia que se dan en la garganta del WH y claramente este espectro de absorción es diferente al del BH como obtuvimos en Fig. ??, con lo cual podemos diferenciar un BH de un WH mediante este tipo de estudio. También esta vez nuestra figura concuerda con la Fig. 6 de nuestro texto de referencia [?].

Si unimos las gráficas de BH y WH vemos más claramente la diferencia Fig. ??.

Figura 4.22: σ_l 

4.5. Absorción de ondas escalares por agujeros de gusano de tipo membrana fina

En este último objetivo el elemento de línea con el que vamos a trabajar esta vez será

$$ds^2 = -A(x)dt^2 + \frac{1}{A(x)\mathcal{Z}_+^2(x)}dx^2 + r^2(x)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

donde

$$A(x) \equiv \frac{1}{\mathcal{Z}_+(x)} \left[1 - \frac{r_s}{r_c} \frac{(1 + \delta_1 H(x))}{z(x) \mathcal{Z}_-^{1/2}(x)} \right]$$

$$z(x) \equiv \frac{r(x)}{r_c}, \quad \mathcal{Z}_\pm \equiv 1 \pm \frac{1}{z^4(x)}$$

$$r^2(x) = 1/2(x^2 + \sqrt{x^2 + 4r_c^2})$$

$$r_c \equiv \sqrt{l_\epsilon r_q}, \quad \delta_1 \equiv \frac{1}{2r_s} \left[\frac{r_q^3}{l_\epsilon} \right]^{1/2}, \quad r_q^2 \equiv 2q^2$$

$$H(x) = -\frac{1}{\delta_c} + 1/2\sqrt{z^4(x) - 1}[f_{3/4}(x) + f_{7/4}(x)]$$

$$f_\lambda(x) = {}_2F_1[1/2, \lambda, 3/2, 1 - z^4(x)]$$

Sin lugar a dudas estamos tratando con un problema mucho más complicado que los anteriores.

Una simplificación que nos da el paper [?] es que $\delta_c = \frac{3\Gamma[3/4]^2}{\sqrt{2}\pi^{3/2}} \approx 0,572069$.

Empezamos con las coordenadas tortuga y es ahí donde empiezan nuestros problemas. Tenemos

$$\begin{cases} x'[y] &= A(y)\mathcal{Z}_+(y) \\ x[+\infty] &= r(y) \end{cases}$$

4.5.1. Hipergeométricas

Pero nuestro programa no funciona ¿por qué? ${}_2F_1$ es la función hipergeométrica gaussiana cuya definición es

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, |z| < 1; \quad (4.5)$$

Tenemos pues un grave problema puesto que nuestra z va mucho más allá del círculo unidad. Es por eso que la función `gsl_sf_hyperr_2F1()` de GSL es incapaz de procesar valores $|z| \geq 1$. Nos ponemos a leer referencias sobre las funciones hipergeométricas [[?] - [?]] e incluso encontramos referencias a tablas como Digital Library of Mathematical Functions, DLMF ³ u otras definiciones útiles como en Wolfram ⁴

Aún viendo la complejidad del tema, nos atrevemos a realizar alguna prueba de implementación usando la tabla 13 implementamos la (Ec.4.20) de [?] y vemos que los resultados, aunque correctos, son pobres.

Por ejemplo, comparándolo con Wolfram tenemos $\text{Hypergeometric2F1}[2., 3., 4., 5, 0] = 0,156542 + 0,150796I$ y nuestro resultado es 0.15625 . Con $\text{Hypergeometric2F1}[2., 3., 4., 10, 0] = 0,03985 + 0,0188496I$ obtengo 0.0341796875 . Está claro que no podemos seguir por este camino ya que el tiempo se acaba y el tema es complejo de verdad.

Aún no podemos tirar la toalla. Recordamos (de forma vaga) haber visto una simplificación para este caso concreto. Y encontramos la respuesta en la (Ec.37) de [?]. Podemos usar un sumatorio. Realizamos la sustitución... pero los resultados no son los esperados. Sí, obtenemos unas coordenadas tortuga similares a la Fig. ?? pero su forma no es tan suave. Decidimos seguir adelante aún cuando no estamos

³<https://dlmf.nist.gov/15.8#E2>

⁴<https://functions.wolfram.com/HypergeometricFunctions/Hypergeometric2F1/02/02/>

contentos del todo. Vamos a graficar el potencial que en este caso tiene la forma

$$V_{eff}(y, l) = \frac{l(1 + l)A(y)}{z^2(y)} + \frac{z''(y)}{z(y)}$$

pero el resultado es horrible. Obtenemos la ‘forma de fantasma’ como en la Fig. ?? pero está llena de aristas e incluso la garganta es mucho más profunda de lo que debiera. Hemos llegado a un callejón sin salida ¿o no?

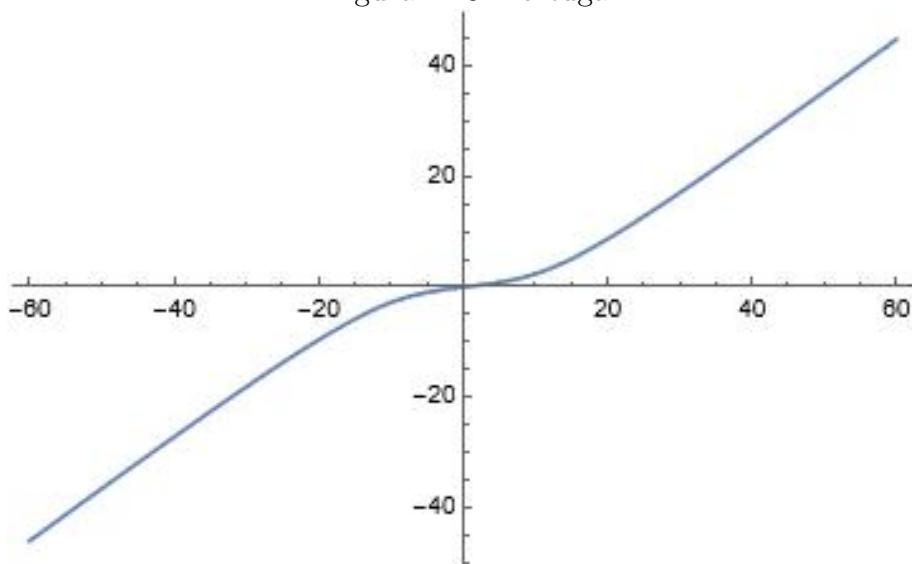
Estamos fuera de tiempo pero... ¿por qué no utilizar Wolfram para este último objetivo si éste maneja bien las extensiones analíticas de la hipergeométrica? Bueno, no hay otra salida. Tendremos que aprender los rudimentos de otro lenguaje en un tiempo récord.

4.5.2. WolframEngine & Jupyter

Afortunadamente para nosotros existe la posibilidad de utilizar de forma gratuita el motor de Wolfram incluso con interfaz gráfica⁵. En mi caso, y puesto que hice el curso de la UNIR de Python, utilizaré Jupyter para ello.

Calculamos como siempre las coordenadas tortuga, obteniendo la Fig. ??

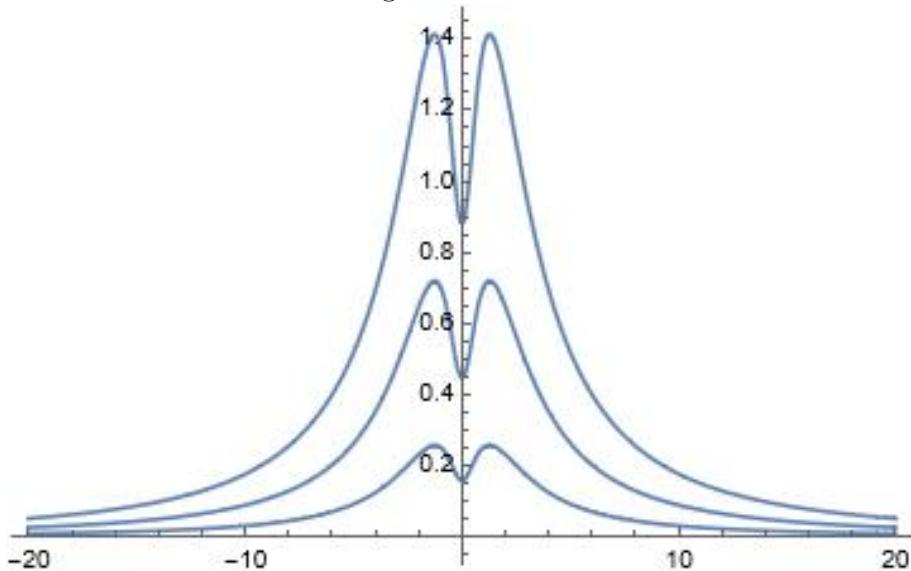
Figura 4.23: Tortuga



Son perfectas. Veamos ahora el potencial para diferentes momentos angulares Fig. ??

⁵<https://www.wolfram.com/engine/>

Figura 4.24: Veff



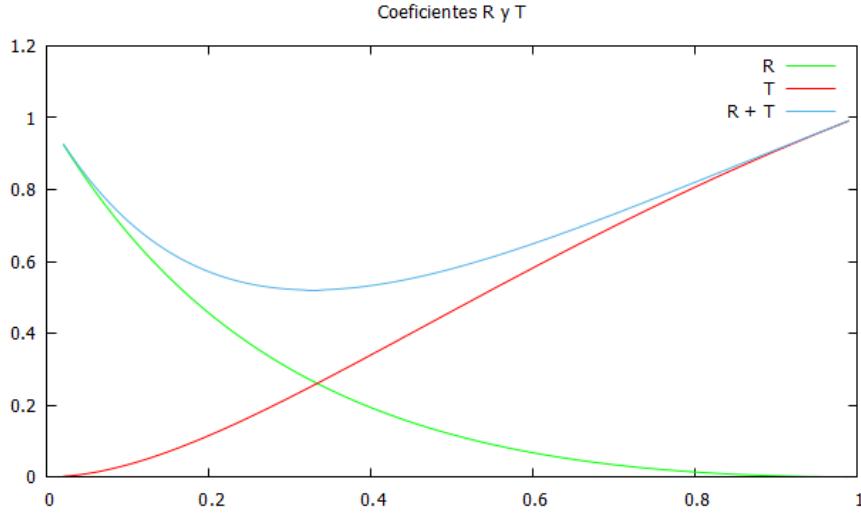
Seguimos por el buen camino. Vemos ahora si podemos graficar σ_l . No... no somos capaces. Esta es la parte más complicada del código pero hemos seguido nuestra receta de igual forma que en C. Aún estamos a tiempo de terminar el estudio así que no vamos a cesar hasta que no nos quedemos sin oportunidades.

Decimos que, puesto que solo falla la resolución del sistema de ecuaciones cuando calculamos la forma de onda, solo tenemos que exportar los datos a un fichero csv y usarlos en nuestro programa C como hemos hecho anteriormente. Así lo hacemos y evidentemente las gráficas de las coordenadas tortuga y potencial son exactamente iguales a las obtenidas en Wolfram. Ahora graficamos los coeficientes R y T para ver que todo está bien y nos encontramos con la Fig. ??

Evidentemente este resultado es incorrecto puesto que no tenemos que la suma de $R+T = 1$ y por tanto no vamos a poder graficar σ_l . Ya no tenemos más opciones y hemos de finalizar este TFM al que solo le falta obtener las gráficas de los coeficientes de reflexión / transmisión y el espectro de absorción para el caso de estudio del agujero de gusano de membrana fina.

Este TFM ha abierto ante nosotros todo un océano de cosas nuevas a aprender puesto que hemos descubierto para nosotros mismos las funciones hipergeométricas y su importancia. También hemos descubierto que se pueden resolver ecuaciones diferenciales mediante series de potencias. Nos hemos dado cuenta de que podemos

Figura 4.25: Coeficientes R y T



realizar toda serie de experimentos físicos desde casa con nuestro ordenador y que estos experimentos pueden ser interactivos. Por ejemplo, con las ecuaciones de movimiento de un péndulo, podemos dibujarlo y animarlo haciendo que éste siga las leyes de la física (lo que sería un rudimentario motor de física en un juego). Y todo ello gracias a los métodos numéricos y las bases que hemos estudiado en el máster.

Capítulo 5

Conclusiones y Trabajo Futuro

Hemos visto que es posible diferenciar entre un BH y un WH mediante la técnica de absorción de ondas escalares sobre modelos teóricos, por tanto en un futuro se puede utilizar todo este conocimiento para que cuando obtengamos información de un ECO lo podamos caracterizar. Esto podría llevar también en un futuro a descartar, en principio, ciertos modelos o ideas actuales sobre gravitación.

También vemos que hemos obtenido 2 de nuestros 3 objetivos concretos, obtener el espectro de absorción mediante ondas escalares de:

1. Un agujero negro de Schwarzschild
2. Un agujero de gusano utilizando geometría de Black Bounce

quedando únicamente pendiente la obtención del espectro de absorción en el caso del agujero de gusano de membrana fina

La primera tarea pendiente claramente es obtener σ_l usando el programa escrito en Wolfram, es decir, cumplir nuestro tercer objetivo. Está claro que la solución está ahí, solo que nos ha esquivado. Una mayor profundización en el lenguaje se hace necesaria para ver dónde está el error.

Sin lugar a dudas una de las tareas pendientes que deja este TFM es la integración del algoritmo de Numerov en la API de GSL porque históricamente es el método que se ha utilizado para la resolución de todo lo que tiene que ver con la ecuación de Schrödinger y parece natural resolver estos problemas también mediante este método numérico.

También, a colación de este trabajo se hace necesaria alguna forma de realizar y manejar de forma sencilla la extensión analítica de la hipergeométrica gaussiana, pero queda claro que hace falta una comprensión profunda de la función y no una superficial como tenemos ahora mismo. Tal vez habría que explorar la librería de precisión arbitraria de aritmética de bola, Arb¹ ya que parece prometedora.

¹<https://arblib.org/>

Bibliografía

- [1] B. P. Abbott *et al.* [LIGO Scientific and Virgo], *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*, Phys. Rev. Lett. 116 (2016) 061102. Esta publicación se hace eco de los resultados observacionales obtenidos por LIGO.
- [2] B. P. Abbott *et al.* [LIGO Scientific and Virgo], *GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral*, Phys. Rev. Lett. 119 (2017) 161101. Publicación que da a conocer los resultados de la observación de ondas gravitacionales producidas por un par de estrellas de neutrones en girando es espiral.
- [3] K. Akiyama *et al.* [Event Horizon Telescope], *First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole*, Astrophys. J. Lett. 875 (2019) L1. En este artículo se hace referencia a las diferentes técnicas utilizadas para obtener la primera imagen de un ECO.
- [4] V. Cardoso and P. Pani, *Testing the nature of dark compact objects: a status report*, Living Rev. Rel. 22 (2019) 4. Este paper trata sobre la naturaleza de diferentes ECO y como su entendimiento permitirá a la física ir más allá.
- [5] M. Visser, *Lorentzian wormholes* (Springer-Verlag, New York, 1996). Este libro lleva las teorías de la física a sus límites y deduce la física de objetos exóticos como los agujeros de gusano.
- [6] A. Einstein and N. Rosen, Phys. Rev. 48, 73 (1935). Este artículo de solo 5 hojas menciona la posibilidad de un ‘puente’ entre dos hojas del espacio: un agujero de gusano atravesable.

- [7] F. S. N. Lobo, G. J. Olmo, E. Orazi, D. Rubiera-Garcia and A. Rustam, *Structure and stability of traversable thin-shell wormholes in Palatini $f(\mathcal{R})$ gravity*, Phys. Rev. D 102, no.10, 104012 (2020) doi:10.1103/PhysRevD.102.104012 [arXiv:2009.10997 [gr-qc]]. Este artículo se estudia la estructura y estabilidad de agujeros de gusano de membrana fina.
- [8] LIGO SCIENTIFIC COLLABORATION, *An improved analysis of GW150914 using a fully spin-precessing waveform model* arXiv:1606.01210 [gr-qc] 10.1103/PhysRevX.6.041014 Se estudian los datos del GW150914 del choque de un agujero negro binario obtenidos por LIGO
- [9] ADRIA DELHOM, CAIO F. B. MACEDO, GONZALO J. OLMO, LUÍS C. B. CRISPINO (2019), *Absorption by black hole remnants in metric-affine gravity*. arXiv:1906.06411v1 [gr-qc] DOI 10.1103/PhysRevD.100.024016 Usando métodos numéricos, se investigan las propiedades de absorción de una familia de soluciones no singulares. El espectro obtenido está caracterizado por una serie de estados cuasi ligados de excitación, asociados con la existencia de una esfera fotoestable.
- [10] GONZALO J. OLMO1, D. RUBIERA-GARCIA, *Reissner-Nordström Black Holes in Extended Palatini Theories* arXiv:1207.6004v1 [gr-qc] DOI 10.1103/PhysRevD.86.044014 En este paper se estudian soluciones estáticas esféricamente simétricas con un campo eléctrico.
- [11] MERCE GUERRERO, GONZALO J. OLMO, DIEGO RUBIERA-GARCIA, Y DIEGO SÁEZ-CHILLÓN GÓMEZ, *Shadows and optical appearance of black bounces illuminated by a thin accretion disk* arXiv:2105.15073v2 [gr-qc] DOI 10.1088/1475-7516/2021/08/036 En el que se estudian los anillos de luz y sombras de una familia de geometrías esféricas simétricas interpolando entre una solución de Schwarzschild, un agujero negro habitual, y un agujero de gusano atravesable.
- [12] OLIVER JAMES, EUGÉNIE VON TUNZELMANN, PAUL FRANKLIN, KIP S THORNE (2015), *Gravitational Lensing by Spinning Black Holes in Astrophysics, and in the Movie Interstellar* arXiv:1502.03808v2 [gr-qc] DOI 10.1088/0264-

9381/32/6/065001 Este artículo describe el esfuerzo de Hollywood para caracterizar de forma rigurosa cómo se vería un agujero negro.

- [13] ROBERT GEROCH, *What is a singularity in general relativity?* DOI 10.1016/0003-4916(68)90144-9 Aquí se explica mediante ejemplos el paso intuitivo de singularidad como .^algo que se hace infinito.^a la noción de completitud geodésica.
- [14] ABBAS ASKAR, KRZYSZTOF BELCZYNSKI, GIANFRANCO BERTONE..., *Black holes, gravitational waves and fundamental physics: a roadmap* Este es un larguísimos paper de 217 páginas en el que se tratan aspectos de agujeros negros, ondas gravitacionales...
- [15] ELISA MAGGIO, PAOLO PANI, VALERIA FERRARI (2017), *Exotic Compact Objects and How to Quench their Ergoregion Instability* arXiv:1703.03696v3 [gr-qc] DOI 10.1103/PhysRevD.96.104047 Las ondas gravitacionales nos da acceso a las estructuras de los agujeros negros. Se investiga un modelo simple de perturbaciones en la geometría de Kerr con una superficie reflectiva cerca del horizonte.
- [16] EMANUELE BERTI1, VITOR CARDOSO1, ANDREI O. STARINETS (2009), *Quasinormal modes of black holes and black branes* arXiv:0905.2975v2 [gr-qc] DOI 10.1088/0264-9381/26/16/163001 Este es un extenso artículo donde se recopila información sobre modos cuasinormales en agujeros negros y branadas negras.
- [17] ALEXANDRE ARBEY, JÉRÉMY AUFGINGER (2020), *BlackHawk: A public code for calculating the Hawking evaporation spectra of any black hole distribution* arXiv:1905.04268v2 [gr-qc] DOI 10.1140/epjc/s10052-019-7161-1 Este paper describe un código C (también hay código en Mathematica) entre otros sobre la distribución en los agujeros negros y habla también de los problemas que han encontrado al realizar las simulaciones numéricas.
- [18] SÉRGIO L. MORELHÃO, ANDRÉ V. PERROTTA, *General recursive solution for one dimensional quantum potentials: a simple tool for applied physics* (2007) arXiv:quant-ph/0605115 Este artículo realiza una revisión de una versión simplificada sobre el cómputo de funciones de onda en un potencial 1-dimensional.

- [19] KARL MARTEL, ERIC POISSON, *Regular coordinate systems for Schwarzschild and other spherical spacetimes* (2000) arXiv:gr-qc/0001069 Este artículo pretende introducir nuevos sistemas de coordenadas, pero habla inicialmente de las coordenadas Eddington-Finkelstein.
- [20] PER KRAUS, FRANK WILCZEK, *A Simple Stationary Line Element for the Schwarzschild Geometry, and Some Applications* (1994) arXiv:gr-qc/0001069 En este artículo se habla sobre las coordenadas tortuga y geometría de Reissner-Nordstrom (que será importante para tratar el WH) entre otras.
- [21] JUN REN, ZHENG ZHAO, *Hawking Radiation via Tunnelling from Black Holes by Using Eddington–Finkelstein Coordinates* (2006) DOI: 10.1007/s10773-006-9101-8 El artículo trata sobre el efecto túnel de los BBHH usando las coordenadas tortuga.
- [22] MATTHIAS TROYER (2012), *The quantum one-body problem. Chapter 03 Computational Quantum Physics* <https://edu.itp.phys.ethz.ch/fs12/cqp/> FS 2012 Donde se trata la ecuación 1-dimensional independiente del tiempo de la ecuación de Schrödinger.
- [23] SÉRGIO L. MORELHÃO1 ANDRÉ V. PERROTTA, *General recursive solution for one-dimensional quantum potentials: a simple tool for applied physics* Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 29, n. 3, p. 331-339, (2007) www.sbfisica.org.br Este artículo describe ecuaciones simplificadas para computar ecuaciones de onda unidimensionales dado un potencial usando el método de Numerov.
- [24] TAO PANG (2006), *An Introduction to Computational Physics. Ed. Cambridge* Este libro trata diferentes métodos numéricos directamente aplicados a problemas físicos.
- [25] R. FABBRI (1975), *Scattering and absorption of electromagnetic waves by a Schwarzschild black hole* Phys. Rev. D 12, 933 DOI <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.12.933> El artículo trata sobre la dispersión y absorción de ondas electromagnéticas por un agujero negro simétrico

no en rotación en el fondo de Schwarzschild, y muestra que un agujero negro no es capaz de absorber ondas electromagnéticas cuando la longitud de onda de la radiación es mayor que el radio de Schwarzschild.

- [26] TH LALOYAUX, PH LAMBIN, J.-P VIGNERON, A.A LUCAS (1989), *Resolution of the one-dimensional scattering problem by a finite element method* Journal of Computational Physics, Volume 83, Issue 2 DOI [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(89\)90126-5](https://doi.org/10.1016/0021-9991(89)90126-5) El artículo trata sobre el método de elementos finitos para obtener las soluciones de dispersión tunelamiento de la ecuación de Schrödinger 1-dimensional.
- [27] NORTON, M. (2009), *Numerov's Method for Approximating Solutions to Poisson's Equation*. <https://www.siue.edu/~mnorton/Numerov.pdf> Artículo donde se hace un somero resumen de diferentes métodos numéricos usando como excusa la ecuación de Poisson. Los métodos usados en la comparativa son: Euler, Euler-Cromer, Feynman-Newton y Numerov.
- [28] JOHN M BLATT (1967), *Practical points concerning the solution of the Schrödinger equation* Journal of Computational Physics, Volume 1, Issue 3; DOI [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(67\)90046-0](https://doi.org/10.1016/0021-9991(67)90046-0) En el artículo se consideran soluciones numéricas a la ecuación uno-dimensional de Schrödinger usando Numerov y dando algunos consejos útiles en su uso.
- [29] MERCE GUERRERO, GONZALO J. OLMO, Y AND DIEGO RUBIERA-GARCIA (2021), *Double shadows of reflection-asymmetric wormholes supported by positive energy thin-shells* arXiv:2102.00840 [gr-qc] DOI 10.1088/1475-7516/2021/04/066 Artículo que trata sobre una de las características que diferencia a los agujeros de gusano de los agujeros negros: su sombra. Específicamente se habla de agujeros de gusano con doble sombra.
- [30] T.E.SIMOS, P.S.WILLIANS (1997), *A family of Numerov-type exponentially fitted methods for the numerical integration of the Schrödinger equation* 10.1016/0377-0427(94)00126-X Artículo que trata sobre diferentes métodos predictor-corrector de tipo Numerov. En él se da cuenta de que el orden global

del algoritmo es $O(4)$ pero aún así suele ser mejor que otros algoritmos del mismo orden.

- [31] PABLO BUENO, PABLO A. CANO, FREDERIK GOELEN, THOMAS HERTOG, BERT VERCNOCKE, *Echoes of Kerr-like wormholes* DOI <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.97.024040> Estudio sobre ECOs gracias a las ondas gravitacionales.
- [32] MERCE GUERRERO, GONZALO J. OLMO, DIEGO RUBIERA-GARCIA, DIEGO SÁEZ-CHILLÓN GÓMEZ, *Shadows and optical appearance of black bounces illuminated by a thin accretion disk* arXiv:2105.15073v2 [gr-qc] DOI 10.1088/1475-7516/2021/08/036 Trabajo sobre las sombras y rayos de luz que tendrían los agujeros negros y agujeros de gusano. Se usan los Black Bounces para pasar de una forma suave entre BH y WH.
- [33] MIGUEL ALCUBIERRE, FRANCISCO S. N. LOBO, *Warp drive basics* arXiv:2103.05610v1 [gr-qc] DOI 10.1007/978-3-319-55182-1 Fundamentos básicos del motor de Alcubierre
- [34] MICHAEL S. MORRIS, KIP S. THORNE, *Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity* DOI 10.1119/1.15620 Utiliza la posibilidad de usar agujeros de gusano para viajar en el espacio-tiempo como una forma para enseñar relatividad general de forma elemental.
- [35] W.BECKEN, P.SCHMELCHER, *The analytic continuation of the Gaussian hypergeometric function ${}_2F_1(a,b;c;z)$ for arbitrary parameters* DOI 10.1016/S0377-0427(00)00267-3 Muestra una completa tabla de fórmulas para la continuación analítica de la función hipergeométrica.
- [36] ROBERT C.FORREY, *Computing the Hypergeometric Function* DOI 10.1006/jcph.1997.5794 Explica cómo calcular la hipergeométrica de variable real para parámetros reales arbitrarios.

- [37] JOHN PEARSON, WORCESTER COLLEGE, *Computation of Hypergeometric Functions* Da unas tablas y pautas para calcular la hipergeométrica para diferentes parámetros en el plano complejo.
- [38] GEORGE E. ANDREWS, *Problems and Prospects for Basic Hypergeometric Functions* DOI 10.1016/B978-0-12-064850-4.50008-2 Analiza ciertos problemas y perspectivas de las funciones hipergeométricas básicas.

Capítulo 6

Glosario

LIGO Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory

VIRGO Interferómetro europeo llamado así por la constelación de Virgo (se juega con la palabra similar LIGO)

BH Black Hole

WH Worm Hole

Veritasium www.youtube.com/c/veritasium

ECO Extreme / Exotic Compact Objects

UCO Ultra-Compact Objects

ClePhOs Clean Photonsphere Objects

GW Gravitational Waves

Brana Objeto extendido con cualquier número de dimensiones en los cuales una cuerda en teoría de cuerdas es un ejemplo de dimensión uno.

GSL GNU Scientific Library, www.gnu.org/software/gsl

GNUpot GNU Plot, gnuplot.info

GMP GMP, gmplib.org

GLib GLib, gitlab.gnome.org/GNOME/glib

TCL Tool Command Language, www.tcl.tk

LISA Laser Interferometer Space Antenna

ESA European Space Agency

LPF LISA PathFinder

Wolfram Wolframgram, wolfram.com

Apéndice A

Apéndices

A.1. Código fuente

El código fuente de este TFM se puede encontrar en el repositorio de GitHub