Politechnika Warszawska

Informatyka II

Projekt 3

Tomasz Chyliński 333551

Prowadzący: dr hab. inż. Tomasz Wacławczyk

Data oddania: **11.06.2024 r.**

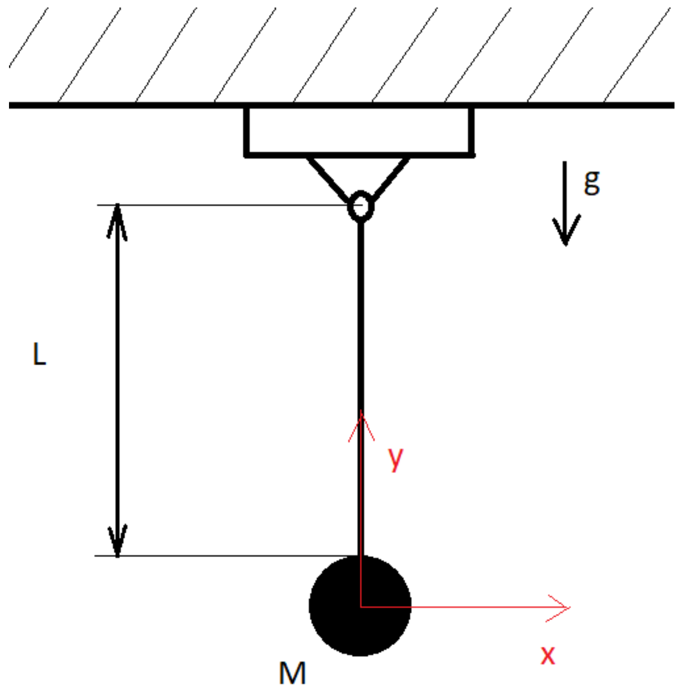

Figure 1: Wahadło w równowadze

1 Opis Problemu

Celem analizy jest wyznaczenie zależności pomiędzy:

- kątem wychylenia $\alpha(t)$,
- prędkością kątową $\omega(t)$,
- prędkością kątową jako funkcją kąta $\omega(\alpha)$,
- energią mechaniczną w czasie $E_{\text{mech}}(t)$.

Rozważmy wahadło matematyczne składające się z punktowej masy m zawieszonej na nierozciągliwej nici o długości l. Kąt wychylenia wahadła od pionu oznaczymy jako $\alpha(t)$. Analizując siły działające na masę, możemy wyprowadzić równanie ruchu.

2 Równanie Ruchu z Efektem Tłumienia

Równanie ruchu dla wahadła z tłumieniem wyprowadzamy korzystając z drugiej zasady dynamiki Newtona wzdłuż toru ruchu:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_{\text{d}},$$

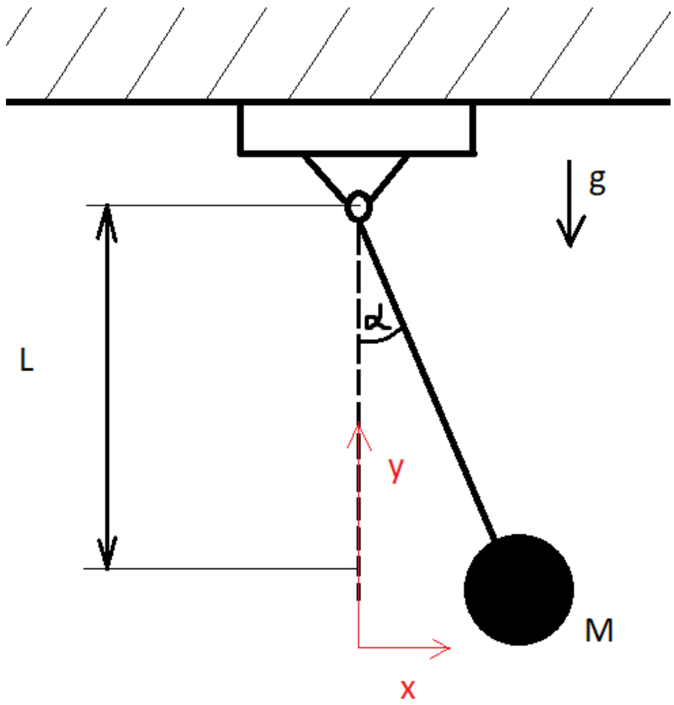

Figure 2: Wahadło w ruchu

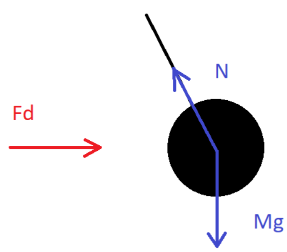

Figure 3: Siły działające na wahadło

gdzie s to droga przebyta przez wahadło po łuku, $\mathbf{F}_g$ to składowa siły grawitacji wzdłuż toru ruchu, a $\mathbf{F}_{\mathrm{d}}$ to siła tłumiąca.

Dla wahadła matematycznego droga s związana jest z kątem wychylenia α przez zależność:

$$s = l\alpha.$$

Przyspieszenie styczne wynosi:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = l\frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

Składowa siły grawitacji wzdłuż toru ruchu to:

$$\mathbf{F}_g = -mg\sin\alpha.$$

Siła tłumiąca, proporcjonalna do prędkości kątowej, jest modelowana jako:

$$\mathbf{F}_{\mathrm{d}} = -b\frac{ds}{dt} = -bl\frac{d\alpha}{dt}.$$

Podstawiając te zależności do równania ruchu, otrzymujemy:

$$ml\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mg\sin\alpha - bl\frac{d\alpha}{dt}.$$

Po uproszczeniu przez m i l:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{b}{ml}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{g}{l}\sin\alpha = 0.$$

3 Sprowadzenie do Równań Pierwszego Rzędu

Aby przekształcić powyższe równanie do układu równań różniczkowych pierwszego rzędu, wprowadzamy zmienne:

$$\omega(t) = \frac{d\alpha}{dt},$$

która jest prędkością kątową.

Wtedy, możemy zapisać:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega.$$

Dla prędkości kątowej otrzymujemy:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

Podstawiając to do pierwotnego równania, otrzymujemy układ równań pierwszego rzędu:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega, \tag{1}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l}\sin\alpha - \frac{b}{ml}\omega. \tag{2}$$

Powyższy układ równań można rozwiązać numerycznie, aby uzyskać zależności $\alpha(t)$, $\omega(t)$, $\omega(\alpha)$, oraz energię mechaniczną $E_{\text{mech}}(t)$.

4 Rozwiązanie Numeryczne Układu za Pomocą Metody RK4

Aby rozwiązać układ równań różniczkowych pierwszego rzędu dla wahadła matematycznego, używamy metody Rungego-Kutty czwartego rzędu (RK4). Przyjęte wartości parametrów oraz stałe używane w obliczeniach są następujące:

- **Przyspieszenie ziemskie** (g): 9.81 m/s^2
- **Długość wahadła** (l): 1.5 m
- **Masa wahadła** (m): 1.0 kg
- **Współczynnik tłumienia** (b): 0.2 Ns/m
- **Liczba próbek** (N): 512
- **Zakres czasowy** (t): od 0 do 40 sekund
- **Początkowy kąt wychylenia** (α_0): 10° (radiany: $\alpha_0 = \frac{\pi \times 10}{180} \approx 0.1745$ rad)
- **Początkowa prędkość kątowa** (ω_0): 1 rad/s

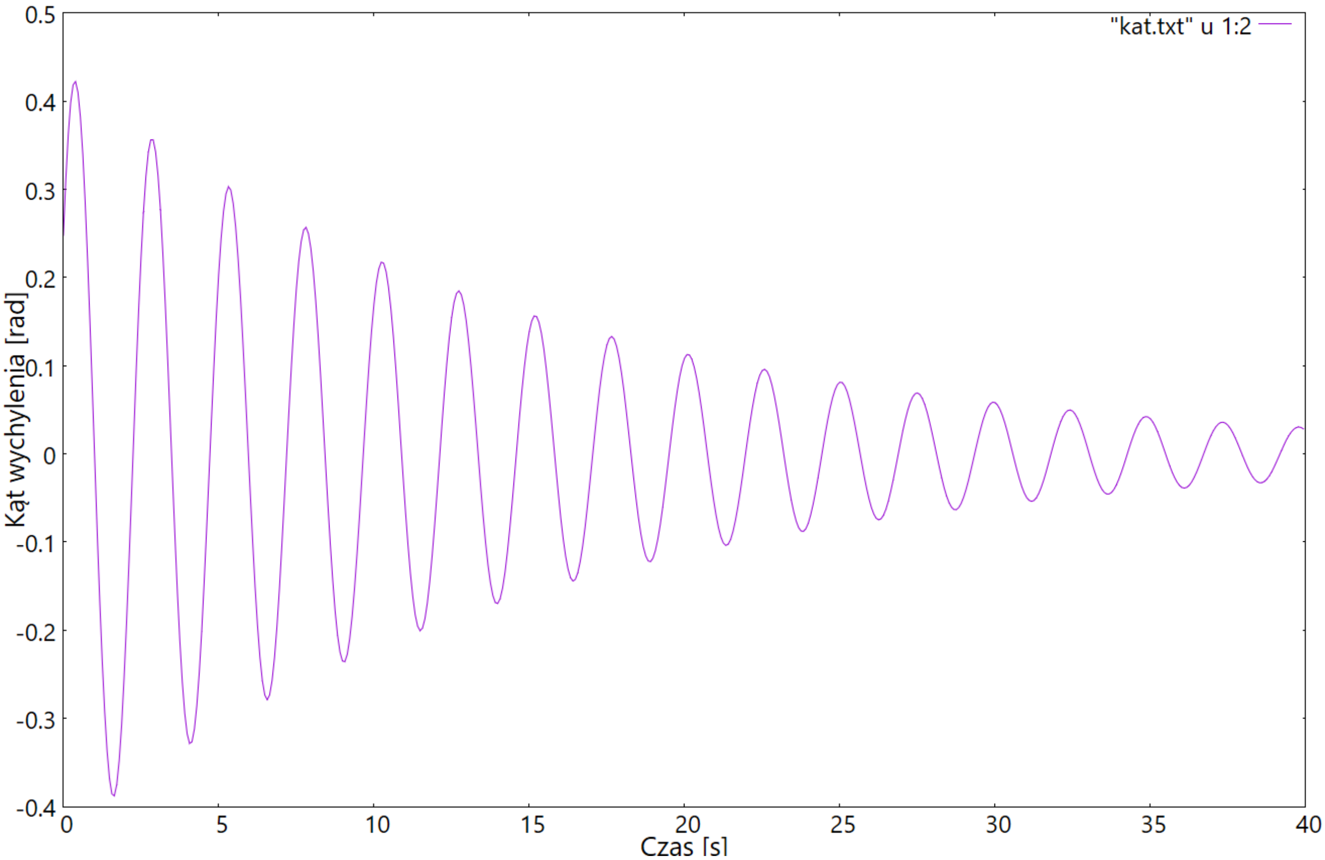

Figure 4: Wykres zależności kąta wychylenia od czasu

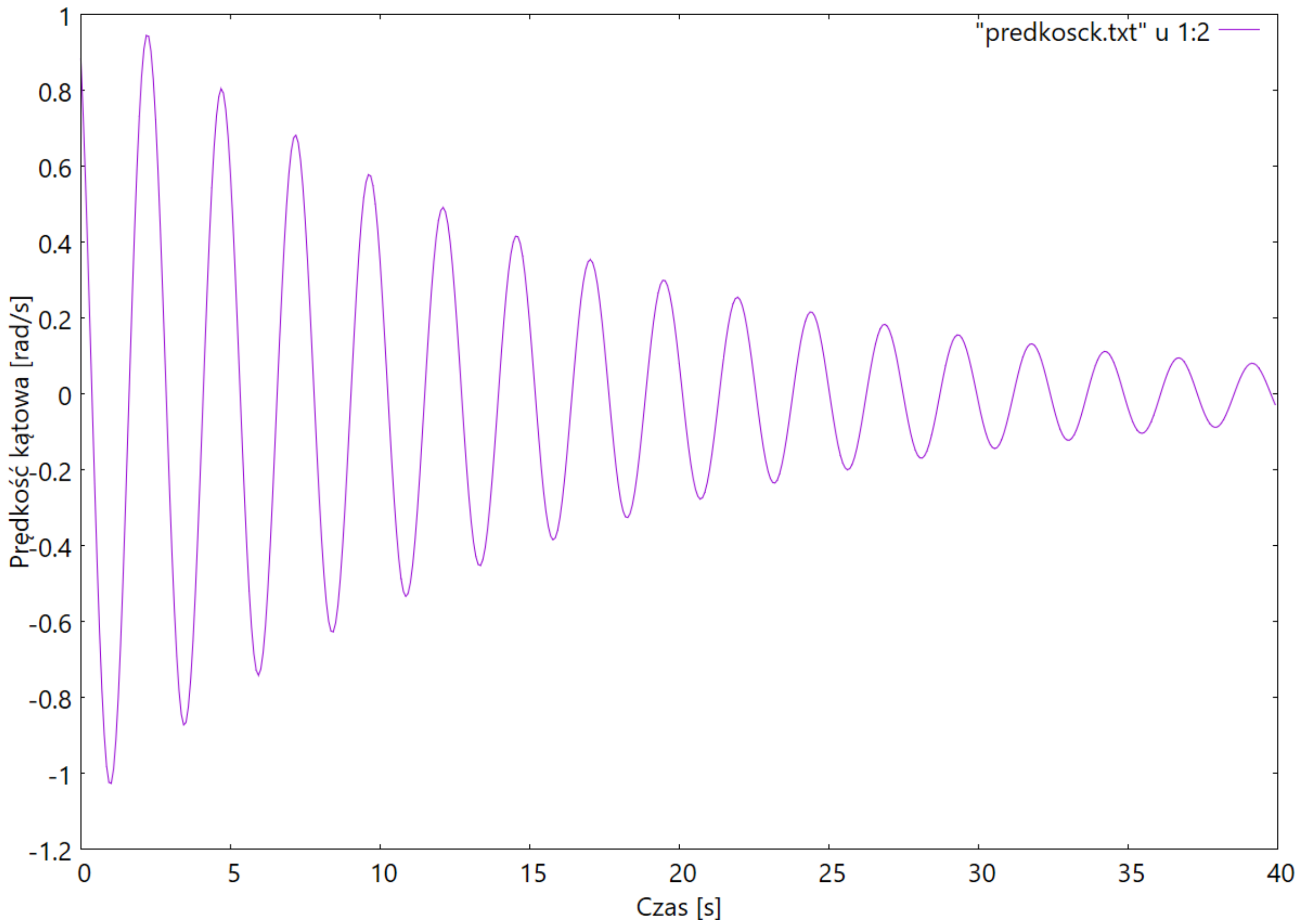

Figure 5: Wykres zależności prędkości kątowej od czasu

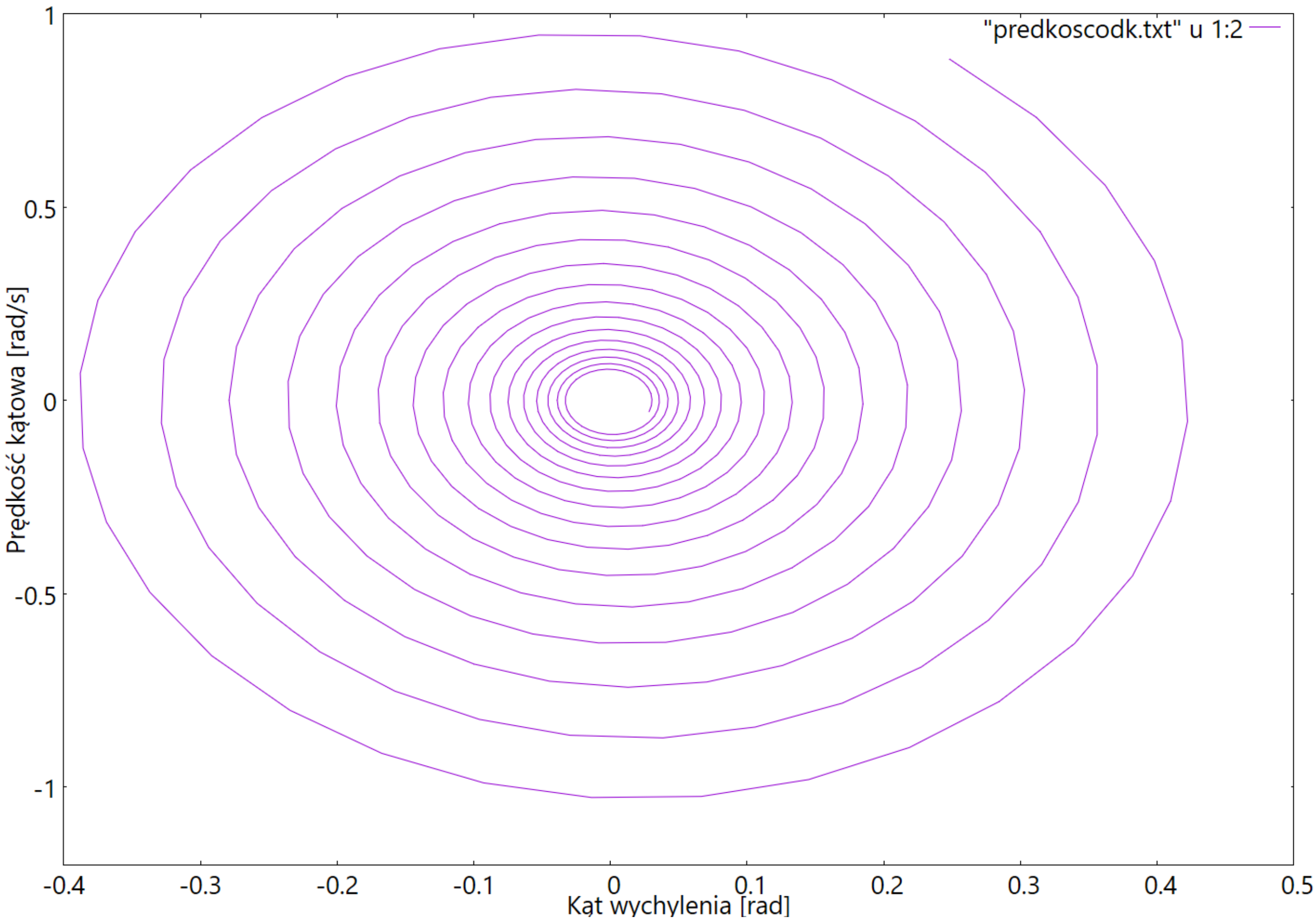

Figure 6: Wykres zależności prędkości kątowej od kąta wychylenia

5 Energia Mechaniczna

Energia mechaniczna wahadła jest sumą energii kinetycznej i potencjalnej:

$$E_{\mathrm{mech}} = E_k + E_p,$$

gdzie:

$$E_k = \frac{1}{2} m l^2 \omega^2, \tag{3}$$
$$E_p = m g l (1 - \cos \alpha). \tag{4}$$

Zatem całkowita energia mechaniczna w czasie t wynosi:

$$E_{\mathrm{mech}}(t) = \frac{1}{2} m l^2 \omega^2 + m g l (1 - \cos \alpha).$$

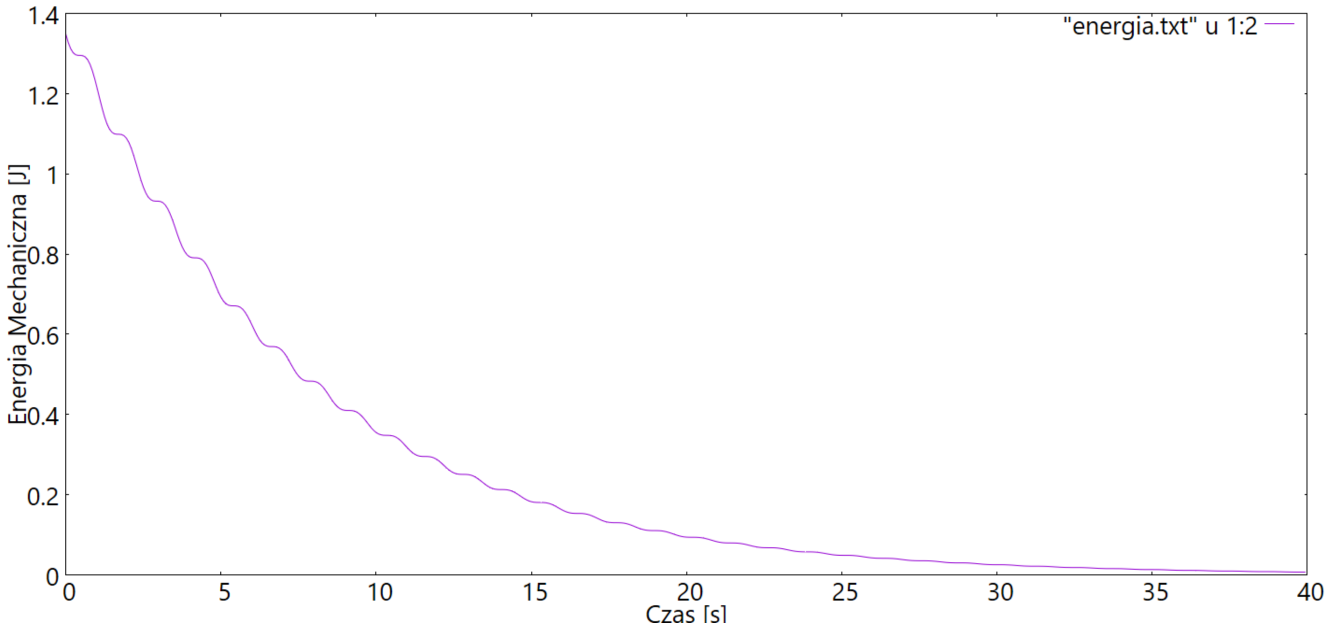

Figure 7: Wykres zależności energii mechanicznej od czasu

6 Podsumowanie wyników

6.1 Wnioski z Analizy Kąta Wychylenia od Czasu

Na wykresie *kąta wychylenia* $\alpha(t)$ od czasu t obserwujemy zmniejszanie się amplitudy drgań wahadła w miarę upływu czasu. Jest to wynikiem efektu tłumienia, który powoduje stopniowe rozpraszanie energii mechanicznej układu na skutek działania sił oporu. W rezultacie, każde kolejne maksymalne wychylenie jest mniejsze niż poprzednie, a układ dąży do ustania w pozycji równowagi (tzn. $\alpha = 0$).

6.2 Wnioski z Analizy Prędkości Kątowej od Czasu

Wykres *prędkości kątowej* $\omega(t)$ od czasu t pokazuje, że prędkość kątowa wahadła również maleje z czasem. Zmniejszająca się prędkość kątowa odpowiada zmniejszającej się amplitudzie wychylenia. Tłumienie powoduje, że maksymalne wartości prędkości kątowej maleją w czasie, co jest zgodne z trendem zmniejszania się energii układu. Tłumienie spowalnia ruch wahadła, aż do momentu, gdy ostatecznie osiąga stan spoczynku.

6.3 Wnioski z Analizy Prędkości Kątowej od Kąta Wychylenia

Wykres *prędkości kątowej* $\omega(\alpha)$ od kąta wychylenia α obrazuje zależność pomiędzy tymi dwiema wielkościami. Efekt tłumienia sprawia, że orbity w przestrzeni fazowej, które początkowo mają formę elips, stopniowo zbliżają się do środka. Oznacza to, że prędkość kątowa maleje wraz z malejącym kątem wychylenia, a system stopniowo traci energię i zmierza do stanu równowagi ($\alpha = 0$ oraz $\omega = 0$).

6.4 Wnioski z Analizy Energii Mechanicznej od Czasu

Na wykresie *energii mechanicznej* $E_{\text{mech}}(t)$ od czasu t widać wyraźne zmniejszanie się całkowitej energii mechanicznej układu w miarę upływu czasu. Efekt tłumienia powoduje, że energia jest stopniowo rozpraszana w postaci ciepła lub innych form energii, a suma energii kinetycznej i potencjalnej wahadła maleje. W dłuższym okresie czasu, energia mechaniczna dąży do zera, co oznacza zatrzymanie się ruchu wahadła.

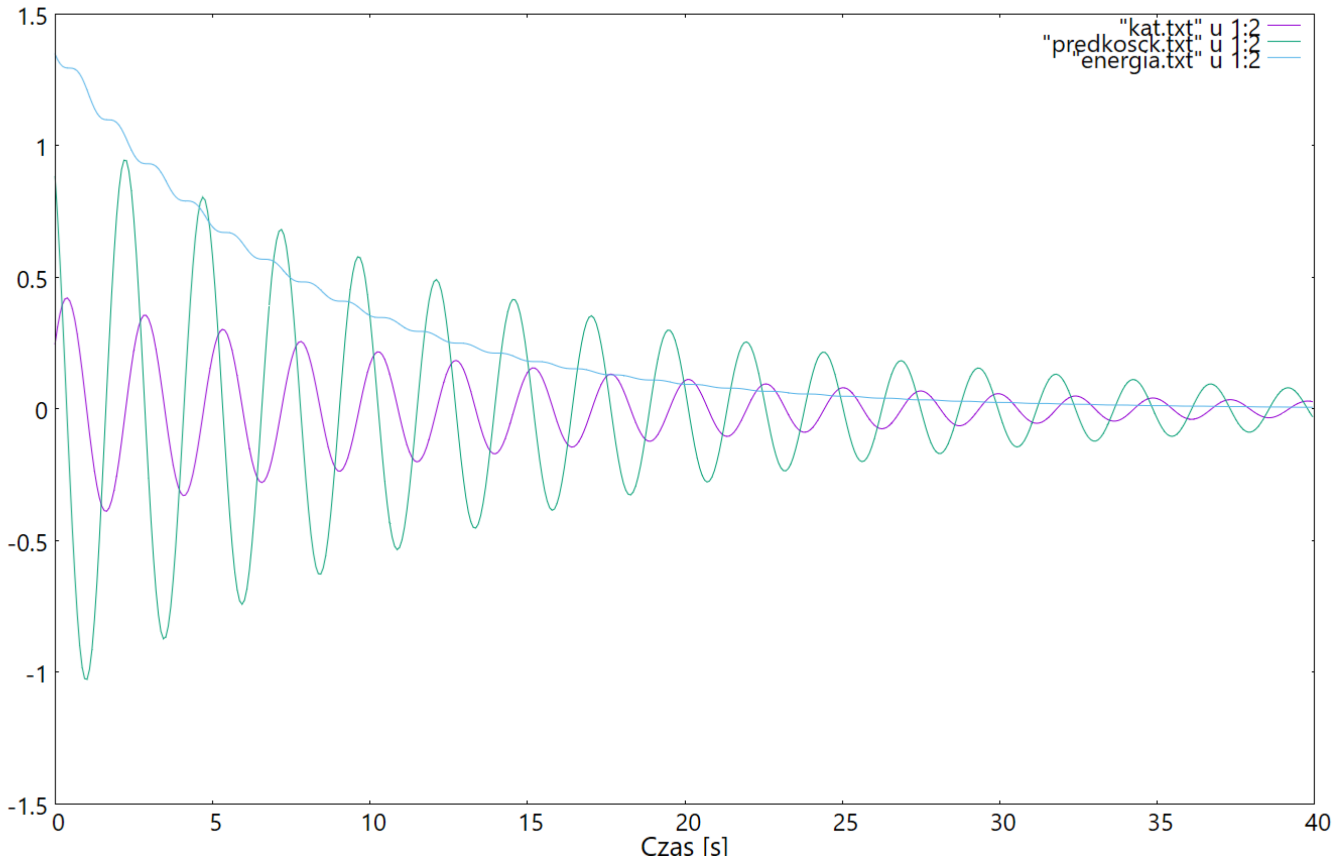

Figure 8: Wykres wszystkich wartości zależnych od czasu