Lin 9

Hynek Kydlicek

4. prosince 2020

1 Dcv. 1

Zjistíme, zda lze vektor $\begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}$ zapsat jako linearní kombinaci vektorů z báze B.

$$\left(\begin{array}{cc|c}3 & 6 & 4\\2 & 1 & 4\\4 & 5 & 2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}3 & 6 & 4\\0 & 4 & 6\\0 & 4 & 6\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}3 & 6 & 4\\0 & 4 & 6\\0 & 0 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}3 & 0 & 2\\0 & 4 & 6\\0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

Z matice vidíme, že rovnice má právě jedno řešení $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$. Toto řešení jsou zároveň souřadnice vektoru v bázi B, což můžeme ověřit:

$$\begin{pmatrix}3 & 6\\2 & 1\\4 & 5\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}.$$

2 Dcv. 2

Úlohu můžeme převést na nalezení dimenze prostoru vektorů T^4, kde jednotlivé složky vektoru(a,b,c,d) jsou koeficienty polynomu a zároveň platí, že $a+b+c+d=0$. Stačí tedy zjisti pro jaké $a,b,c,d \in T$ rovnost platí. Tedy stačí zjisti, kolik má rovnice $a+b+c+d=0$ řešení. Tedy jaká je dimenze Ker(A),

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Z Frobienovy věty dostáváme, že dimenze jádra je $n-k$, kde k je počet bazických sloupců. Tedy dimenze je 3. Nejsem si jist, zda je Frobienova věta již dokázána, proto naleznu bázi o velikost 3. Z matice $(A|0)$ dostáváme řešení:

$$\begin{pmatrix}-x-y\\x\\y\\z\end{pmatrix}, x \in T, y \in T, z \in T.$$

lze zapsat jako

$$x \times \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + y \times \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + z \times \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Tedy vidíme, že jádro matice lze zapsat jako množinu všech lineární kombinací vektorů $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$

Tyto vektoru tedy generují prostor ker(A), že jde o LN vektory můžeme nahlédnout z definice, popřípadě okometricky :).

3 Dcv. 3

3.1 a) podprostor

Ověříme 3 podmínky býti podprostorem, neboť S je zajisté podmnožina M.

1. $\theta \in S$
   Triviálně z definice je i matice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ symetrická, tedy je opravdu S obsahuje θ.

2. $x, y \in S \implies x + y \in S$
   Tedy máme ukázat, že součet symetrických matic 2×2 je sym. matice.

$$(x + y)_{ij} = x_{ij} + y_{ij} = \text{(sym. matice)} x_{ji} + y_{ji} = (x + y)_{ji}.$$

3. $x \in S, \alpha \in T \implies \alpha y \in S$
   Tedy máme ukázat, že násobení skalárem zachováva vlastnot být symetrická matice.

$$(\alpha x)_{ij} = \alpha x_{ij} = \text{(sym. matice)} \alpha x_{ji} = (\alpha x)_{ji}.$$

Tedy se skutečně o podprostor jedná.

3.2 b) Báze

Podobně jako v příkladu 2, najdeme všechny matice, které splnůjí podmínku být symetrické. Tedy hledáme matice tvaru $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in T \wedge b = c$, lze zapsat jako $b - c = 0$. Znovu hledáme jádro matice A, kde $A =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení matice $(A|0)$ je:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ y \\ z \end{pmatrix} x, y, z \in T.$$

Tedy jádro matice lze napsat ve tvaru

$$x \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vektory jsou zajisté LN(první vektor má jako jediný nenulový první index, poslední má jako nenulový poslední index, prostřední zbytek) a generují ker(A). Nyní stačí vektory bází ker(A) přepsat zpět do hledaného maticového tvaru. Tedy báze prostoru symetrických matic jsou matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

3.3 c) dimzenze

Jelikož jsme našli bázi o 3 vektorech, tedy je dimenze 3.