Diskrétní matematika, úkol 1

Hynek Kydlíček

October 5, 2020

Příklad 1

Dokážeme pomocí indukce. Pro $n = 8$ je to jednoduché, vezmeme $1*3+1*5$, pro $n = 9$ také, vezmeme $3 * 3 + 0 * 5$. Předpokládejme nyní, že jsme schopni takto vytvořit číslo n, dokážeme, že poté jsme schopni vytvořit i číslo n+1. Číslo n musí být tvořeno buďto a) alespoň $3*3$ b) alespoň $1*5$, žádný jiný případ nastat nemůže. Toto určitě platí, protože jak jsme ukázali, již první číslo (8) splňuje bod a) a již druhé číslo (9) splňuje bod b), ostatní čísla jsou již větší, a tak musí nastat alespoň jeden z těchto případů. Pokud číslo n splňuje podmínku a) $\rightarrow$ číslo n+1 vytvoříme tak, že $+2 * 5 - 3 * 3$. Pokud splňuje podmínku b) $\rightarrow$ číslo n+1 vytvoříme tak, že $+2 * 3 - 1 * 5$. Tím je tvrzení dokázáno.

Příklad 3

a)

$$\sum_{k=1}^{n}(6k-7) = 3n^2 - 4n$$

Dokážeme indukcí. Pro n=0 platí:

$$\sum_{k=1}^{0}(6k-7) = 0 = 0 = 3 * 0^2 - 4 * 0$$

Předpokládejme, že rovnost platí pro n, dokážeme ji tedy pro n+1

$$\sum_{k=1}^{n+1}(6k-7) = \sum_{k=1}^{n}(6k-7) + 6(n+1) - 7 = 3n^2 - 4n + 6n + 6 - 7$$
$$= 3n^2 + 2n - 1 = (3n^2 + 6n + 3) + (-4n - 4) = 3(n+1)^2 + -4(n+1)$$

Tedy podle indukčního předkpokladu platí pro všechna n $\in \mathbb{N}$

b)

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k} = \frac{1}{n}$$

Dokážeme indukcí. Pro n=1 platí:

$$\prod_{k=1}^{1} \frac{k-1}{k} = \frac{1-1}{1} = 1 = 1 = \frac{1}{1} = \frac{1}{n}$$

Předpokládejme, že rovnost platí pro n, dokážeme ji tedy pro n+1

$$\prod_{k=1}^{n+1} \frac{k-1}{k} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k} * \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n} * \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

Tedy podle indukčního předkpokladu platí pro všechna n $\in \mathbb{N} \setminus 0$