1 Dcv. 1

Matici upravíme do RREF tvaru, abychome našli názi $R(A)$ a $S(A)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Báze $R(A)$ je $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Báze $S(A)$ je $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Abychom zjistil průnik ptáme se, kdy platí rovnice:

$$a * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b * \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = c * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + d * \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\forall a, b, c, d \in R.$$

Odečteme pravou stranu od levé a přepíšeme do matice.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & -4 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 30 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

Řešením matice je

$$\begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \\ \frac{5d}{4} \\ -\frac{5d}{2} \\ d \end{pmatrix}.$$

Dosadíme řešení do rovnice:

$$\frac{-d}{2} * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{5d}{4} * \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{-5d}{2} * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + d * \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A upravíme(upravujeme pouze jednotlivé strany !!)

$$\frac{d}{2} * \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{d}{2} * \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Kromě toho, že jsme si ověřili, že nám řešení vyšlo dobře, tak vidíme, že průnik musí být tvaru

$$x \in \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Tedy tento vektor je bazí průniku(určitě je LN).

2 Dcv. 2

Z přednášky víme, že

$$rank(X) + dim(Ker(X)) = n$$

$$dim(S(X)) = dim(R(X)) = dim(S(X^T)) = rank(X) \text{Pro X} \in R^{m,n}.$$

První rovnost upravíme na

$$dim(Ker(X)) = n - rank(X).$$

Dosazením A za X dostáváme

$$dim(Ker(A)) = n - rank(A).$$

Dosazením A^T za X dostáváme

$$dim(Ker(A^T)) = n - rank(A^T) = n - S(A^T) = n - R(A) = n - rank(A).$$

Spojením rovnic dostaneme

$$dim(Ker(A)) = n - rank(A) = dim(Ker(A)).$$