1 Dcv. 1

Ověříme z definice:

1.1 Součet vektorů($f(x) + f(y) = f(x + y)$

$$x = (a, b), y = (c, d).$$

a)

$$\begin{aligned} f(x+y) = f(a+c, b+d) &= (a+c+4b+4d, 2a+2c-b-d) \\ &= (a+4b, 2a-b) + (c+4d, 2c-d) = f(x) + f(y). \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f(x+y) = f(a+c, b+d) &= ((a+c)*(b+d), 2b+2d-a-c) \\ &= (ab+ad+cb+cd, 2b+2d-a-c) \\ &= (ab, 2b-a) + (cd, 2d-c) + (ad+cd, 0) = f(x) + f(y) + (ad+cd, 0). \end{aligned}$$

Zobrazení b) podmínku nesplňuje, protipřílad budiž $x = (1, 1), y = (1, 1)$.

$$f(1,1) + f(1,1) = (2,2) \neq (4,2) = f(2,2) = f((1,1) + (1,1)).$$

1.2 Násobení vektorů($f(a * x) = a * f(x)$)

$$x = (a, b).$$

a)

$$f(u*x) = f(u*a, u*b) = (u*a + u*4b, u*2a - u*b) = u*(a+4b, 2a-b) = f(u).$$

Zobrazení a) splňuje obě podmínky, proto je lineární. Zobrazení b) nesplňuje první, lineární není.

2 Dcv. 2

Pouze a) je lineární, najdeme jeho matici a obraz. Zobrazíme si kanonickou bázi.

$$f(1, 0) = (1, 2), f(0, 1) = (4, -1).$$

Jelikož souřadnice v kanonické bázi korespondují se samotnými vektory, matice vzhledem ke kanonické bázi vypadá následovně:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nyní stačí vynásobit vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, abychom dostali jeho obraz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$