Diskrétka 8

Hynek Kydlicek

24. listopadu 2020

1 Úkol 1 těžší verze

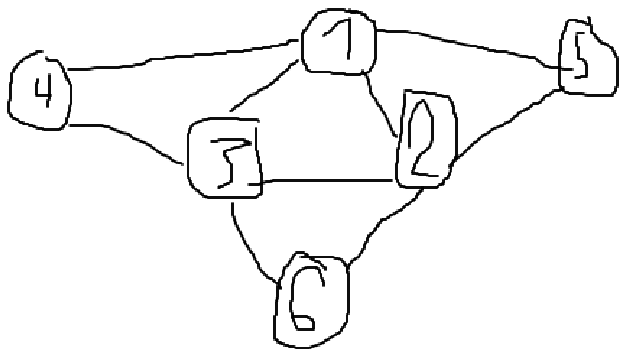
Z obr. 1 vidíme, že graf je eulerovský a zároveň existuje hranově disjunktní rozklad na 3 a 2 kružnice.

1.1 3 kružnice

Kružnice jsou indukované podgrafy s vrcholy $\{1, 3, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{2, 3, 6\}$.

1.2 2 kružnice

Kružnice jsou indukovaný podgraf s vrcholy $\{1, 2, 3\}$ a graf s vrcholy $\{1, 5, 2, 6, 3, 4\}$ a hranami $\{1, 5\}, \{5, 2\}, \{2, 6\}, \{6, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}$.



Obrázek 1: Graf

2 Úkol 2

Stačí dokázat, že pro dva eulerovské grafy $G(V, E), H(V', E')$ je $F = G \times H$ eulerovský. Z definice pokud mezi vrcholy $v_1, v_2 \in V'$ vedla hrana v V' povede hrana mezi vrcholy $(u \in V)\{(u, v_1), (u, v_2)\}$ v F. Obdobně, pokud pokud mezi vrcholy $u_1, u_2 \in V$ vedla hrana v V povede hrana mezi vrcholy $(v \in V')\{(v, u_1), (v, u_2)\}$ v F. Celkově dostáváme že, do každého vrcholu $\{u, v\} \in F,\ u \in V,\ v \in V'$ povede tolik hrana kolik vedlo hran v V do u + kolik vedlo hran v V' do v. Jelikož jsou G, H eulerovské, musí do každého vrcholu v F vést sudý počet hran(sudé číslo + sudé číslo = sudé číslo). Zároveň protože oba grafy G, H jsou souvislé, musí být i F souvislý. Mějme dva vrcholy z $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in F$. Z definice a souvislosti G víme, že existuje sled z (a_1, b_1) do (a_2, b_1). Z definice a souvislosti H víme, že existuje sled z (a_2, b_1) do (a_2, b_2). Tedy spojením sledů dostáváme sled z (a_1, b_1) do (a_2, b_2). Z přednášky víme, že existuje sled právě když existuje cesta a tedy F je souvislý graf. F je proto eulerovské.