Lineární algebra 2 – cvičení

Skalární součin

Ondřej Pangrác

5.3.2021

Příklad 1:
Je následující zobrazení ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ skalární součin?

a) $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$

b) $\langle x, y \rangle = x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + y_3$

c) $\langle x, y \rangle = (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3)$

d) $\langle x, y \rangle = (x_1 + y_1)(x_2 + y_2)(x_3 + y_3)$

e) $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$

Příklad 2:
Definice kolmosti: $x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$.

Norma indukovaná skalárním součinem: $||x|| = \langle x, x \rangle$.

Pythagorova věta. Dokažte, že v reálném vektorovém prostoru platí:
$x \perp y$ právě tehdy, když $||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$.

Příklad 3:
Rovnoběžníkové pravidlo. Dokažte, že pro normu indukovanou skalárním součinem platí $||x - y||^2 + ||x + y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$

Příklad 4:
Ověřte, že $||x|| = |x_1 - 2x_2| + |3x_1 - 4x_2| + |5x_1 - 6x_2|$ je normou na prostoru $\mathbb{R}^2$.

Příklad 5:
Pro normy v prostoru $\mathbb{R}^n$ definované jako

$$
\begin{aligned}
||x||_1 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i| \\
||x||_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \\
||x||_\infty &= \max_{i=1,\dots,n} |x_i|
\end{aligned}
$$

rozhodněte, zda jsou indukované skalárním součinem.

Ukažte následující vztahy:

$$
\begin{aligned}
||x||_\infty \leq \; & ||x||_1 \leq n||x||_\infty \\
||x||_\infty \leq \; & ||x||_2 \leq \sqrt{n}||x||_\infty \\
||x||_2 \leq \; & ||x||_1 \leq \sqrt{n}||x||_2
\end{aligned}
$$

Příklad 6:
Pro neprázdnou množinu X a $n \in \mathbb{N}$ definujme vzdálenost dvou prvků $a, b \in X^n$ jako počet souřadnic, v kterých se liší. Formálně $d(a, b) = |\{i = 1, \dots, n; a_i \neq b_i\}|$. Ukažte, že se jedné o metriku.