み　だ

数値解析が乱数れる

13024156 藤原 渓亮

October 19, 2016

今日やること

乱数で定積分を解く.
準乱数で定積分を解く.

数値積分とは

定積分を解析的にではなく数値的に解く

普通の積分

定積分 $\rightarrow$ 不定積分 $\rightarrow$ 解

数値積分

定積分 $\rightarrow$ アルゴリズム $\rightarrow$ 近似解

数値積分の例

区分求積法台形公式シンプソンの公式シンプソンの3/8公式

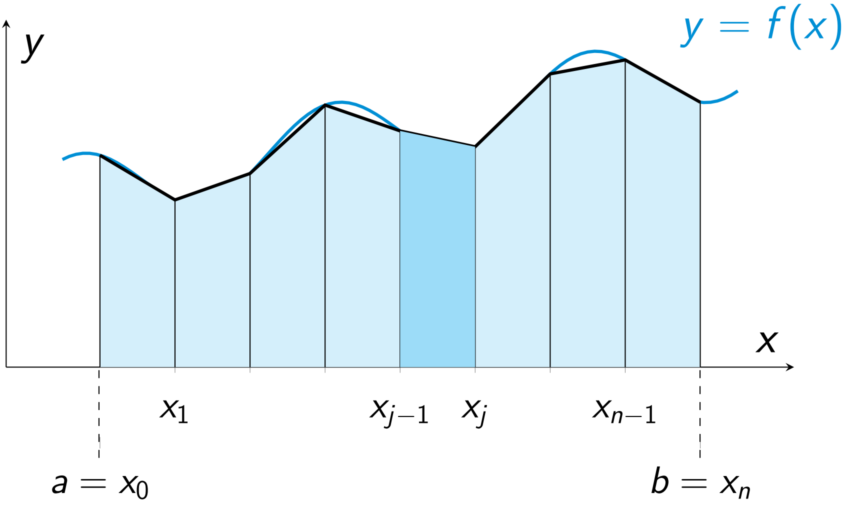
区分求積法

連続値 $\to$ 離散値

ex. 台形公式

$$\int_b^a f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\{f(x_{k+1}) + f(x_k)\}(x_{k+1} - x_k)}{2} \tag{1}$$

区分求積法



区分求積法なら計算機で計算できる.
モンテカルロ積分の存在意義は？

区分求積法なら計算機で計算できる.
モンテカルロ積分の存在意義は？
$\rightarrow$ 重積分

区分求積法なら計算機で計算できる.
モンテカルロ積分の存在意義は？
$\rightarrow$ 重積分

$$\int \cdots \int f(x_1, x_2, \ldots x_L) dx_1 dx_2 \cdots dx_L \quad (2)$$

区分求積法の計算量

L 重積分を N 個に分割するとき，計算量は
$\rightarrow O(N^L)$

乱数(列)とは

出力が一意的ではない数字のこと，法則性がない数列のこと

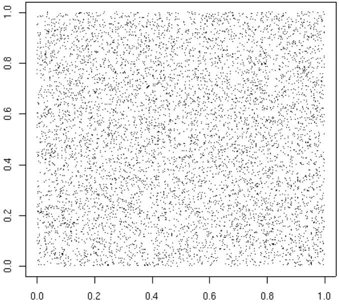
- 予測不可能性
- 一様性
- 非周期性
- 非再現性

予測不可能性

$x_0, x_1 \ldots x_n$ から x_{n+1} は予測できない.

一様性

$$P(x = X) = \frac{1}{\beta - \alpha}(\alpha \leq x \leq \beta) \tag{3}$$



非周期性

同じパターンの数列が現れない.

非再現性

初期値が同じでも異なる数列が出現する.

疑似乱数

厳密には決定的であるが乱数列のように見える数列

- 予測不可能性 $\rightarrow$ △
- 一様性 $\rightarrow$ △
- 非周期性 $\rightarrow$ x
- 非再現性 $\rightarrow$ x

予測不可能性 $\rightarrow \triangle$

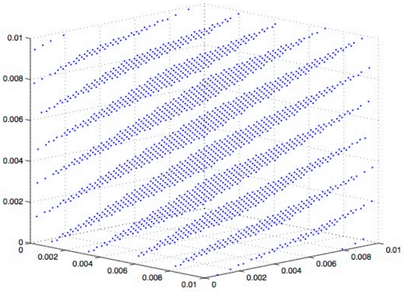
ex) 線形合同法

$$\boldsymbol{x} = \{x_0, x_1, \ldots x_n, \ldots\} \tag{4}$$

$$x_{n+1} = (Ax_n + B) \bmod M (A, B, M \in \mathbb{Z}) \tag{5}$$

x_0, A, B, M が分かれば予測可能

一様性 → △



粗悪なアルゴリズム → 高次元にて偏る.

非周期性 $\rightarrow$ x

線形合同法

$2^{32} - 1$

n ビット線形帰還シフトレジスタ

$2^{n} - 1$

メルセンヌ・ツイスタ

$2^{19937} - 1$

必ず，周期はある

非再現性 $\rightarrow$ x

計算機の出力は決定的

モンテカルロ積分

定積分をモンテカルロ法で解くこと

モンテカルロ法とは

図 1: モナコ公国モンテカルロ地区

モンテカルロ法とは

乱数を用いて数値計算を行う方法乱択アルゴリズムモンテカルロ法

ラスベガス法

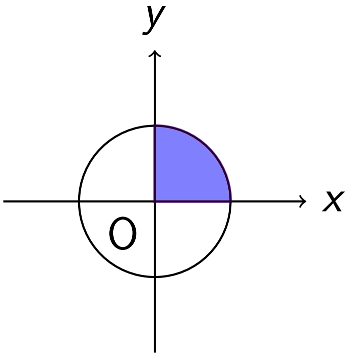
モンテカルロ法とは

乱数を用いて数値計算を行う方法乱択アルゴリズムモンテカルロ法 一定の確率で誤るラスベガス法 いつでも正答する

例題

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \tag{6}$$

を解け



$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \tag{7}$$

$x = \cos\theta$ と置く

$$= \int_0^1 \sqrt{1-\cos^2\theta}dx \tag{8}$$

$dx = -\sin\theta d\theta$ より

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos^2\theta}(-\sin\theta)d\theta \tag{9}$$

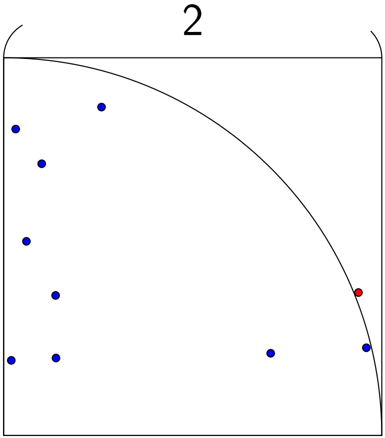
$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta \tag{10}$$

半角の公式より

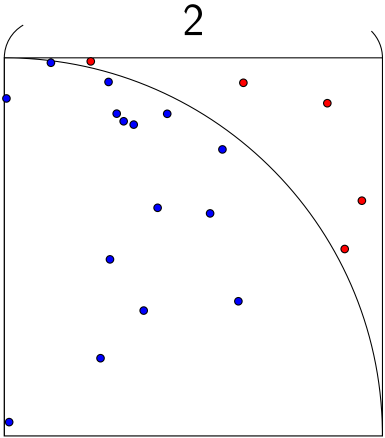
$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - 2\cos 2\theta d\theta \tag{11}$$

$$= -\frac{1}{2}[\theta + \sin 2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} \tag{12}$$

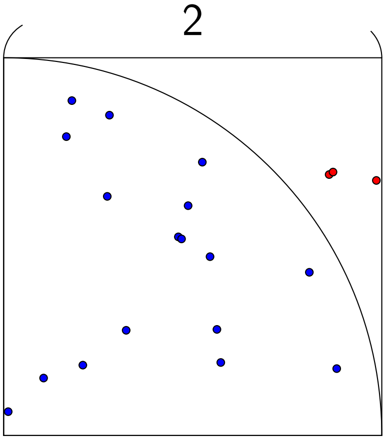
モンテカルロ積分



モンテカルロ積分



モンテカルロ積分



$$青い点数 = m$$

$$赤い点数 = n$$

$$全体的な面積 = 4$$

$$求めたい面積 = x$$

$$m : n \approx x : 4$$

演習

モンテカルロ積分のプログラムを
完成させよ.

休憩

続きは午後から

準乱数

準乱数はランダム性を犠牲に一様性に特化した乱数の一種.

van der corput列

基底 b の逆基底関数 ϕ_b で定義される.

$$\phi_b(n) = \sum_{i \leq 0} d_i b^{-i-1} \tag{13}$$

$$\{\phi_b(0), \phi_b(1), \phi_b(2), \ldots, \phi_b(n)\} \tag{14}$$

d_i は n を b 進表記した時の i ビット目.

$$
\begin{aligned}
10_{(10)} &= 1010_{(2)} \quad (15) \\
d_0 &= 0 \quad (16) \\
d_1 &= 1 \quad (17) \\
d_2 &= 0 \quad (18) \\
d_3 &= 1 \quad (19)
\end{aligned}
$$

$$\phi_2(10) = 1 \times 2^{-3-1} + 0 \times 2^{-2-1} + 1 \times 2^{-1-1} + \tag{20}$$

$$= \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^2} \tag{21}$$

$$= \frac{3}{8} \tag{22}$$

Halton列

van der corput列を高次元にしたもの

$$X_n = \{\phi_{b1}(n), \phi_{b2}(n), \phi_{b3}(n), \dots, \phi_{b4}(n)\} \tag{23}$$

ただし，$b1, b2, \dots, bn$は全て素数

$$\tag{24}$$

今，求める積分はx, yの二次元なので二次元のHalton列($b = \{2, 3\}$)

演習 2

van der corput 列を実装せよ．
ヒント

$$vdc(b, n, i) = \frac{(n \bmod b)}{b^{i+1}} + vdc(b, \frac{n}{b}, i+1) \tag{25}$$

演習3

準モンテカルロ法を完成させよ.