数値解析が乱数れる

13024156 藤原 渓亮

October 19, 2016

今日やること

数値解析と乱数の関係を紹介していきます.

数値解析とは

代数学的に解けない解析学の問題に対して代数式を用いて近似的に解を得る学問.

$$\Downarrow$$

得られた解は単純な数値のみで扱う

$$\Downarrow$$

数値のみで扱うということは計算機のアルゴリズムで記述可能

- 代数方程式
- 逆行列
- 微分方程式
- 積分，重積分
- etc...

- 代数方程式
- 逆行列
- 微分方程式
- 積分，重積分
- etc...

代数方程式

$$\Downarrow$$

$f(x) = 0$ となるような解 x を求める問題

代数的に解くことは可能

$$\Downarrow$$

解の公式 (多項式の次数に依存する)

代数方程式を数値解析で解く

$\Downarrow$

代表例) ニュートン法

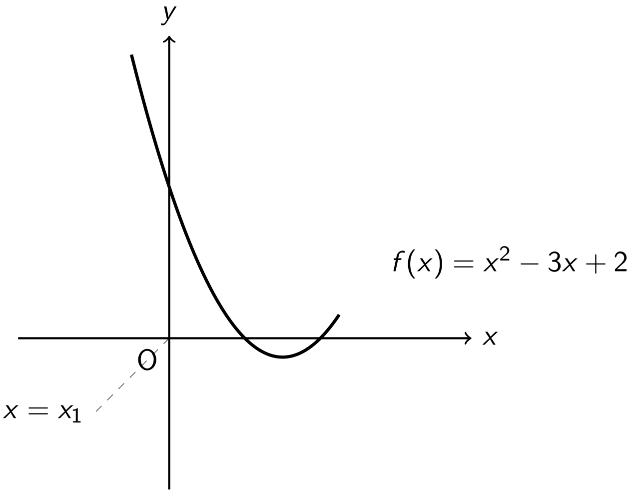
ニュートン法

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 \tag{1}$$

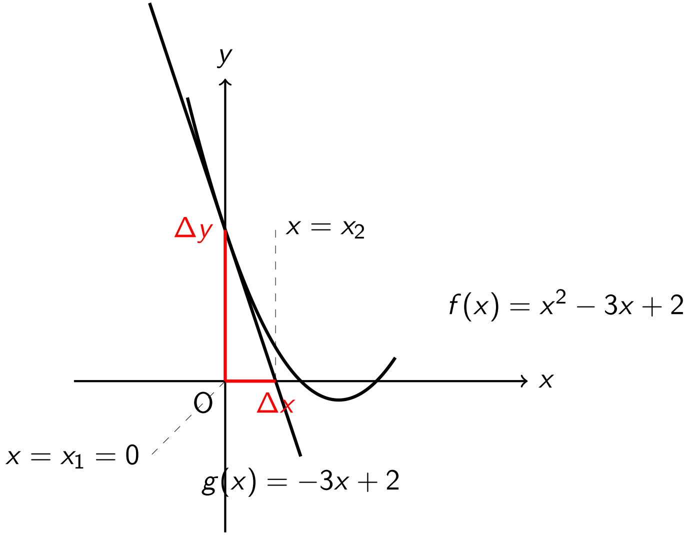
$$f'(x) = 2x - 3 \tag{2}$$

$$x = 1, 2 \tag{3}$$

ニュートン法



ニュートン法



ニュートン法

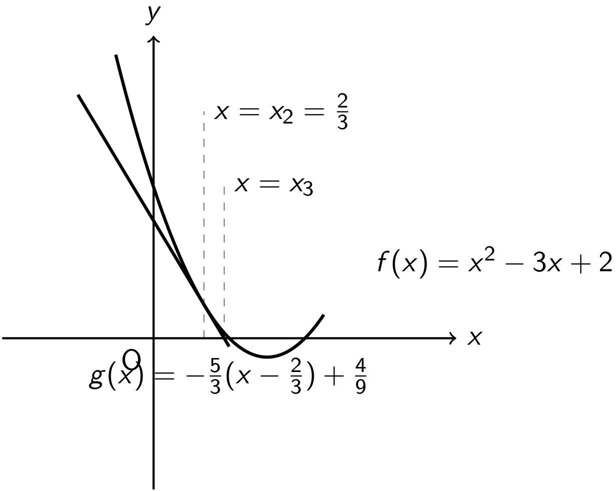
$$f'(x_1) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{4}$$

$$= \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} \tag{5}$$

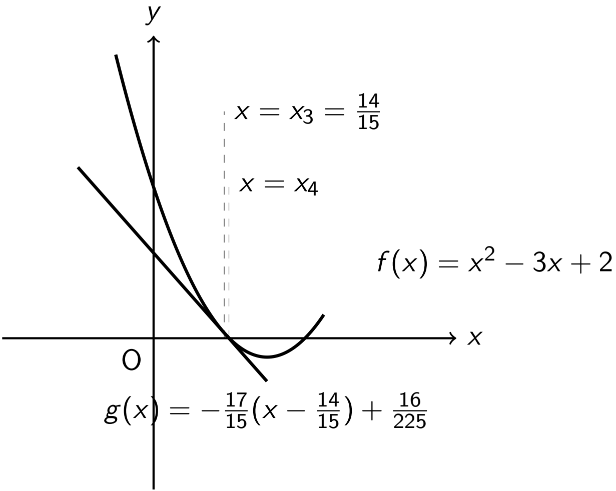
$$x_1 - x_2 = \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \tag{6}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \tag{7}$$

ニュートン法

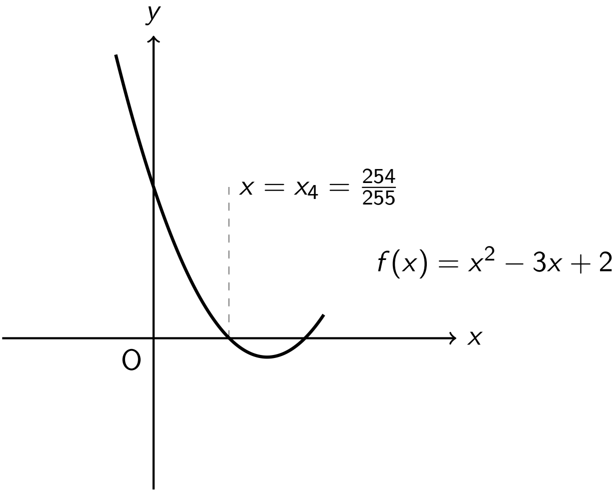


ニュートン法



y
$x = x_3 = \frac{14}{15}$
$x = x_4$
$f(x) = x^2 - 3x + 2$
x
O
$g(x) = -\frac{17}{15}(x - \frac{14}{15}) + \frac{16}{225}$

ニュートン法



乱数 (列) とは

出力が一意的ではない数字のこと，法則性がない数列のこと

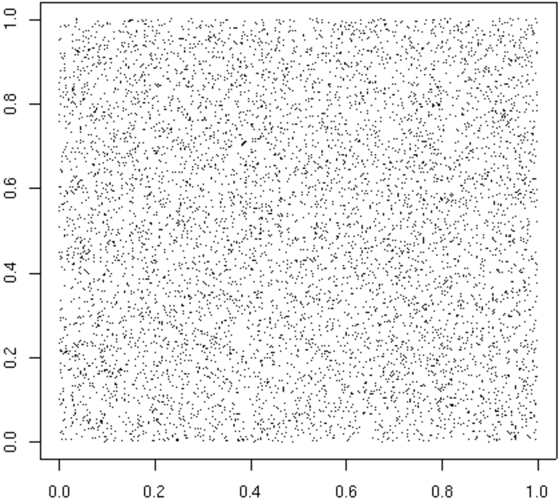
- 予測不可能性
- 一様性
- 非周期性
- 非再現性

予測不可能性

$$\boldsymbol{x} = \{x_0, x_1, \ldots x_n, \ldots\} \tag{8}$$

$$x_{n+1} = ? \tag{9}$$

一様性



非周期性

$f(x+P)=f(x)$ となるような P は存在しない

非再現性

$$f(\boldsymbol{x_0}) \neq f(\boldsymbol{x_0})$$

疑似乱数

厳密には決定的であるが乱数列のように見える数列

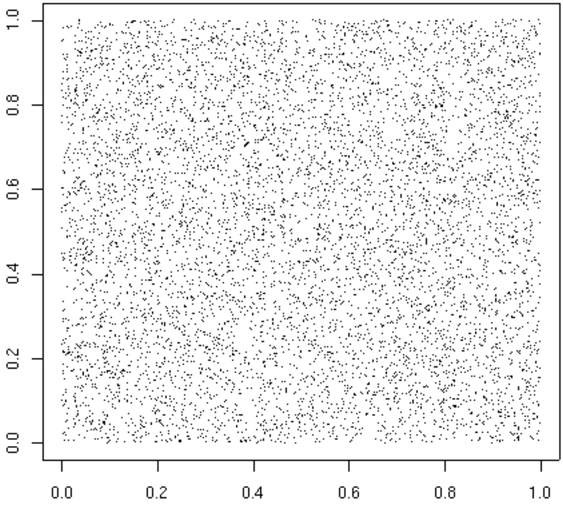
- 予測不可能性 $\to$ △
- 一様性 $\to$ △
- 非周期性 $\to$ x
- 非再現性 $\to$ x

予測不可能性 → △

$$\boldsymbol{x} = \{x_0, x_1, \ldots x_n, \ldots\} \tag{10}$$

$$x_{n+1} = (Ax_n + B) \mod M (A, B, M \in \mathbb{Z}) \tag{11}$$

一様性 → △



非周期性 $\rightarrow$ x

線形合同法 $P = 2^{32} - 1$

n ビット線形帰還シフトレジスタ $P = 2^n - 1$

メルセンヌ・ツイスタ $P = 2^{19937} - 1$

非再現性 $\rightarrow$ x

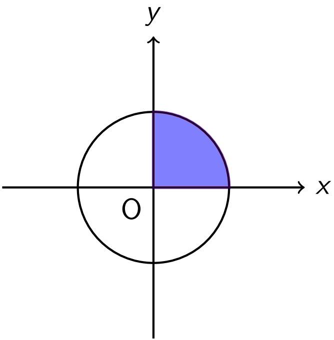
$$f(\boldsymbol{x_0}) = f(\boldsymbol{x_0})$$

モンテカルロ積分

定積分を乱数を用いた乱択アルゴリズムで解くこと

例題

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}dx \tag{12}$$



を解け

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \tag{13}$$

$x = \cos\theta$ と置く

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos^2\theta}dx \tag{14}$$

$dx = -\sin\theta d\theta$ より

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos^2\theta}(-\sin\theta)d\theta \tag{15}$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta \tag{16}$$

半角の公式より

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - 2\cos 2\theta d\theta \tag{17}$$

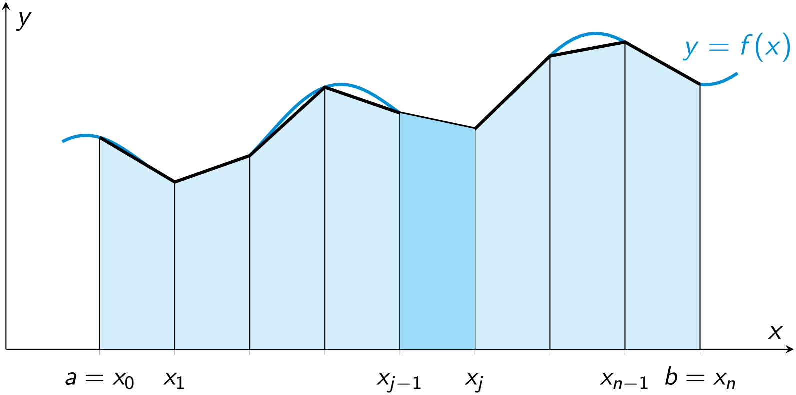
$$= -\frac{1}{2}[\theta + \sin 2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \tag{18}$$

$$= \frac{\pi}{4} \tag{19}$$

計算機で不定積分を介しての解答は不可能 (えっ，wolfr(ry)
だけど...

区分求積法というものがある.

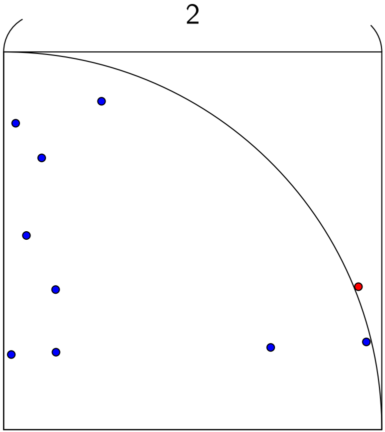
区分求積法



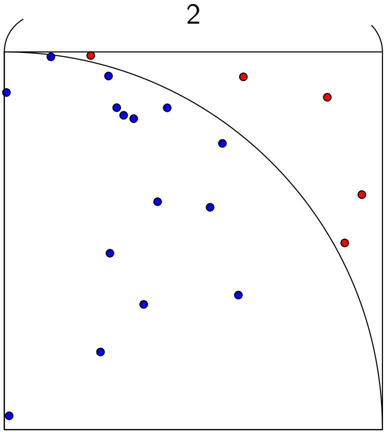
区分求積法なら計算機で計算できる.
モンテカルロ積分の存在意義は？

区分求積法なら計算機で計算できる.
モンテカルロ積分の存在意義は？
$\to$ 重積分

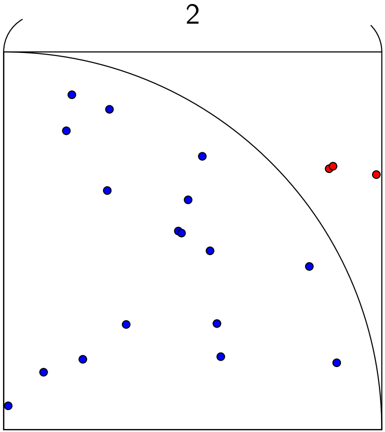
モンテカルロ積分



モンテカルロ積分



モンテカルロ積分



青い点数 $= m$

赤い点数 $= n$

全体的な面積 $= 2 \times 2 = 4$

求めたい面積 $= x$

$m : n \approx x : 4$

$\Game\mho\eth\eqsim\beth\gimel\daleth\lessdot\gtrdot\ltimes\rtimes\shortmid\shortparallel\smallsetminus\thicksim\thickapprox\approxeq\succapprox\precapprox\curvearrowleft\curvearrowright\digamma$

$\mathbb{ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ}$

$\nVdash\nvDash\nVDash\ntrianglerighteq\ntrianglelefteq\ntriangleleft\ntriangleright\nleftarrow\nrightarrow\nvdash$

$< > + - / *$