数値解析が乱(み)数(だ)れる

13024156 藤原 渓亮

October 21, 2016

今日やること

乱数で定積分を解く.
準乱数で定積分を解く.

数値積分とは

定積分を解析的にではなく数値的に解く

普通の積分

定積分 $\rightarrow$ 不定積分 $\rightarrow$ 解

数値積分

定積分 $\rightarrow$ アルゴリズム $\rightarrow$ 近似解

数値積分の例

区分求積法

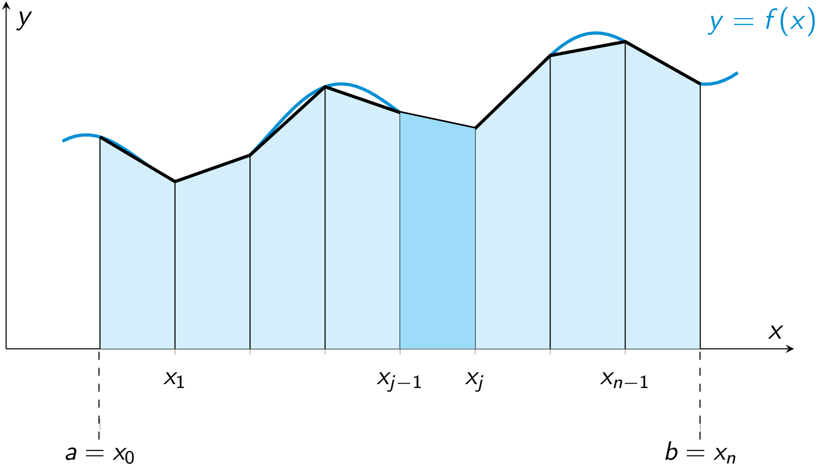
- 台形公式
- シンプソンの公式
- シンプソンの 3/8 公式

区分求積法

連続値 $\rightarrow$ 離散値
ex. 台形公式

$$\int_b^a f(x)dx \fallingdotseq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\{f(x_{k+1}) + f(x_k)\}(x_{k+1} - x_k)}{2}$$

区分求積法



区分求積法なら計算機で計算できる.
モンテカルロ積分の存在意義は？

区分求積法なら計算機で計算できる.
モンテカルロ積分の存在意義は?
$\rightarrow$ 重積分

$$\int \cdots \int f(x_1, x_2, \ldots x_L) dx_1 dx_2 \cdots dx_L$$

計算量

区分求積法

L 重積分を N 個に分割する,
計算量は
$\rightarrow O(N^L)$

モンテカルロ法

L 重積分に対し N 個の点をプロット,
計算量は
$\rightarrow O(NL)$

乱数 (列) とは

出力が一意的ではない数字のこと，法則性がない数列のこと

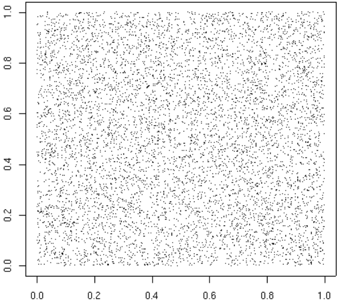
- 予測不可能性
- 一様性
- 非周期性
- 非再現性

予測不可能性

$x_0, x_1 \ldots x_n$ から x_{n+1} は予測できない.

一様性

$$P(x = X) = \frac{1}{\beta - \alpha}(\alpha \leq x \leq \beta)$$



非周期性

同じパターンの数列が現れない.

非再現性

初期値が同じでも異なる数列が出現する.

疑似乱数

厳密には決定的であるが乱数列のように見える数列

- 予測不可能性 $\to$ △
- 一様性 $\to$ △
- 非周期性 $\to$ x
- 非再現性 $\to$ x

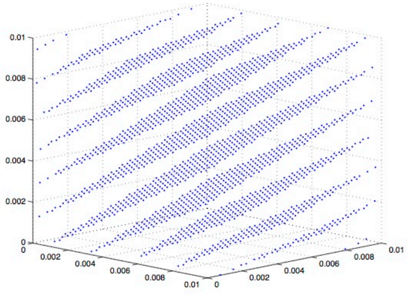
予測不可能性 $\to \triangle$

ex) 線形合同法

$$\boldsymbol{x} = \{x_0, x_1, \ldots x_n, \ldots\}$$
$$x_{n+1} = (Ax_n + B) \bmod M (A, B, M \in \mathbb{Z})$$

x_0, A, B, M が分かれば予測可能

一様性 → △



粗悪なアルゴリズム → 高次元にて偏る.

非周期性 → x

線形合同法

$2^{32} - 1$

n ビット線形帰還シフトレジスタ

$2^n - 1$

メルセンヌ・ツイスタ

$2^{19937} - 1$

必ず，周期はある

非再現性 → x

計算機の出力は決定的

モンテカルロ積分

定積分をモンテカルロ法で解くこと

モンテカルロ法とは

図 1: モナコ公国モンテカルロ地区

モンテカルロ法とは

乱数を用いて数値計算を行う方法
乱択アルゴリズム

- モンテカルロ法
- ラスベガス法

モンテカルロ法とは

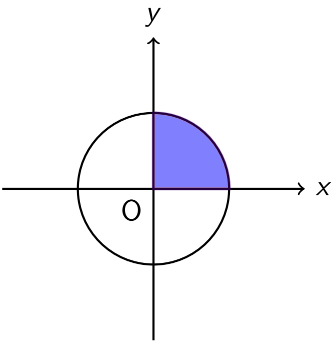
乱数を用いて数値計算を行う方法
乱択アルゴリズム

- モンテカルロ法 $\rightarrow$ 一定の確率で誤る
- ラスベガス法 $\rightarrow$ いつでも正答する

例題

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$$

を解け



$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$$

$x = \cos\theta$ と置く

$$= \int_0^1 \sqrt{1-\cos^2\theta}dx$$

$dx = -\sin\theta d\theta$ より

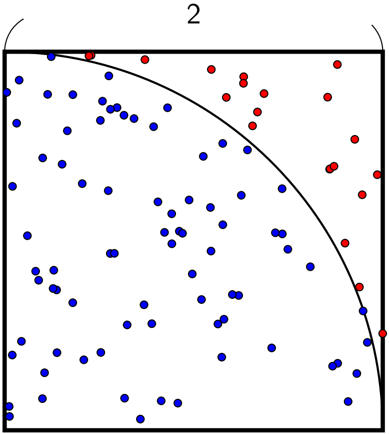
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos^2\theta}(-\sin\theta)d\theta$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta$$

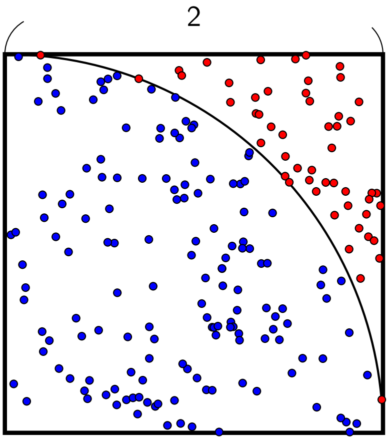
半角の公式より

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - 2\cos 2\theta d\theta$$
$$= -\frac{1}{2}[\theta + \sin 2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

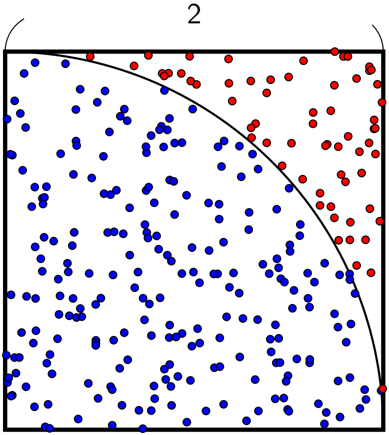
モンテカルロ積分



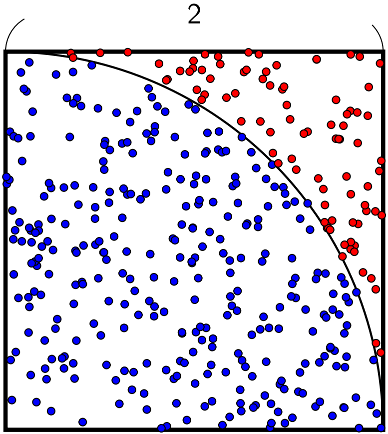
モンテカルロ積分



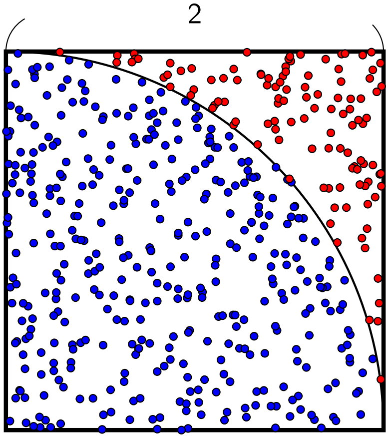
モンテカルロ積分



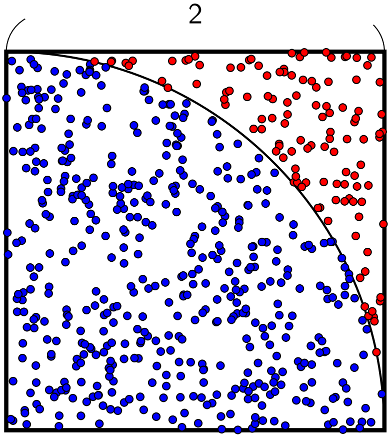
モンテカルロ積分



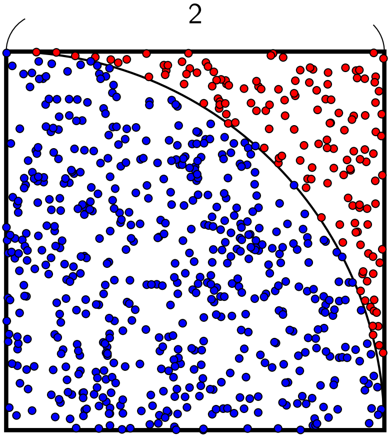
モンテカルロ積分



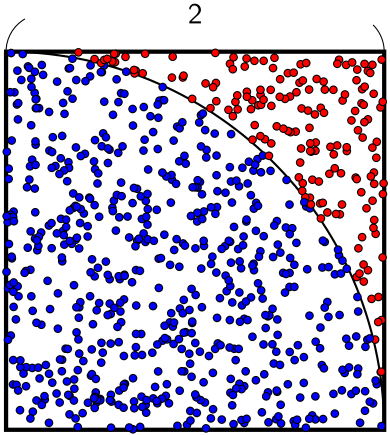
モンテカルロ積分



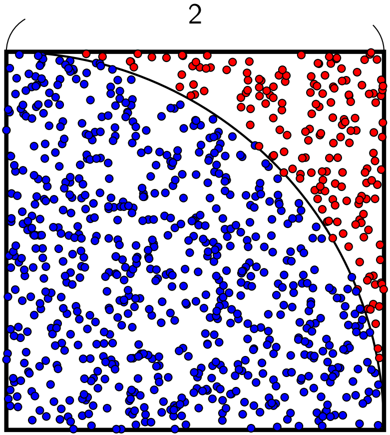
モンテカルロ積分



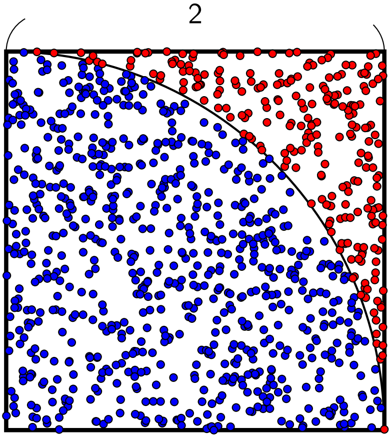
モンテカルロ積分



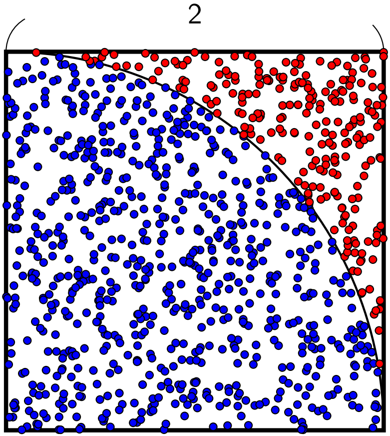
モンテカルロ積分



モンテカルロ積分



モンテカルロ積分



青い点数 $= m$

赤い点数 $= n$

全体的な面積 $= 4$

求めたい面積 $= x$

$m : n \fallingdotseq x : 4$

演習 1

モンテカルロ積分のプログラムを
完成させよ.

休憩

続きは午後から

準乱数

ランダム性

$$\downarrow$$

$$\times$$

準乱数

ランダム性	一様性
↓	↓
×	◎

疑似乱数と準乱数

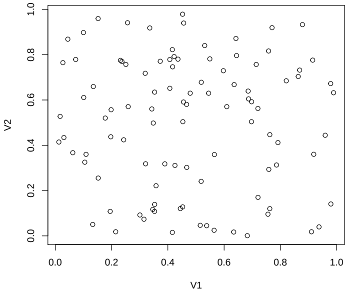


図 2: MT

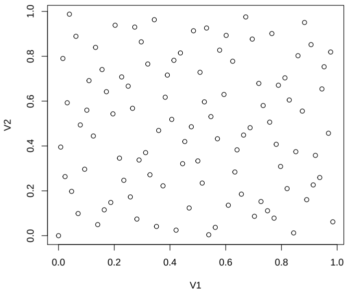


図 3: Halton

van der corput 列

基底 b の逆基底関数 ϕ_b で定義される.

$$\phi_b(n) = \sum_{i \leq 0} d_i b^{-i-1} = \sum_{i \leq 0} \frac{d_i}{b^{i+1}}$$

$$\{\phi_b(0), \phi_b(1), \phi_b(2), \ldots, \phi_b(n)\}$$

d_i は n を b 進表記した時の i ビット目.

$$
\begin{aligned}
10_{(10)} &= 1010_{(2)} \\
d_0 &= 0 \\
d_1 &= 1 \\
d_2 &= 0 \\
d_3 &= 1
\end{aligned}
$$

d_i は n を b 進表記した時の i ビット目.

$$10_{(10)} = 1010_{(2)}$$
$$d_0 = 0$$
$$d_1 = 1$$
$$d_2 = 0$$
$$d_3 = 1$$

d_i は n を b 進表記した時の i ビット目.

$$\begin{aligned} 10_{(10)} &= 1010_{(2)} \\ d_0 &= 0 \\ d_1 &= 1 \\ d_2 &= 0 \\ d_3 &= 1 \end{aligned}$$

d_i は n を b 進表記した時の i ビット目.

$$10_{(10)} = 1010_{(2)}$$

$$d_0 = 0$$

$$d_1 = 1$$

$$d_2 = 0$$

$$d_3 = 1$$

$$
\begin{aligned}
\phi_2(10) &= 1 \times 2^{-3-1} + 0 \times 2^{-2-1} \\
&\quad + 1 \times 2^{-1-1} + 0 \times 2^{-0-1} \\
&= \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^2} \\
&= \frac{3}{8}
\end{aligned}
$$

Halton 列

van der corput 列を高次元にしたもの

$$X_n = \{\phi_{b1}(n), \phi_{b2}(n), \phi_{b3}(n), \ldots, \phi_{b4}(n)\}$$

ただし，$b1, b2, \ldots, bn$ は全て素数

演習 2

van der corput 列を実装せよ.

ヒント

$$vdc(b, n, i) = \frac{(n \bmod b)}{b^{i+1}} + vdc(b, \frac{n}{b}, i+1)$$

演習 3

準モンテカルロ法を完成させよ.

演習 4

以下の (近似) 解を求めよ.

$$\int_0^3\int_0^2\int_0^1 x^2y^2z^2exp(-(x^2+y^2+z^2))dxdydz$$

演習 4

以下の (近似) 解を求めよ.

$$\int_0^3\int_0^2\int_0^1 x^2y^2z^2 exp(-(x^2+y^2+z^2))dxdydz$$

$\fallingdotseq 0.0354754$