Rapport de Stage de M1
Carrés Latins Parfaits

UNIVERSIDAD DE CHILE

Patrice Coudert
Sous la direction de Martín Matamala

Table des matières

Introduction

Á l'issue de ma première année de Master, mon stage s'est déroulé sur une durée de douze semaines à l'Université du Chili à Santiago. J'étais sous la direction de Martín Matamala. Ainsi, j'ai pu découvrir et me familiariser avec le monde de la recherche au Chili à travers un problème de combinatoire.

Ce problème s'intéresse aux carrés latins et plus particulièrement aux cycles que l'on peut créer. On veut que deux lignes ne donne qu'un seul cycle. Pour ce faire on part d'une base connue (carré latin parfait) et on essaye de construire un carré latin plus grand.

Dans ce rapport, on commencera par introduire le problème. Après avoir défini un problème de graphe on montrera l'équivalence des deux. On présentera en détail deux constructions.

Ce stage a contenu une très grande partie d'implémentation et d'expérience. L'adresse suivante est celle du git où les programmes sont stockés :

https ://github.com/hypallage/stageM1.

On a donc deux gros programmes tous deux présentés dans une annexe. Le premier servira surtout dans la première partie (Annexe A). Le deuxième par contre est présent partout (Annexe B). Il servira tout simplement à vérifier le caractère parfait d'un carré latin et surtout à comprendre pourquoi il l'est (ou pourquoi il ne l'est pas). Une partie des fichier est en relation avec la seconde itéré de la première construction. Le rapport de stage ne l'explique pas. En revanche, la présentation en parlera.

Chapitre 1

Presentation du problème et définition

1.1 Carré latin parfait

Nous allons présenter le problème qui nous intéresse et un problème équivalent. Pour commencer nous allons définir ce qu'est un carré latin.

Définition 1. *Dans un ensemble de symboles, un carré latin est une matrice dans laquelle chaque symbole (ici des nombres) apparaît une fois et une seule dans chaque ligne et dans chaque colonne.*

Ainsi dans le cadre d'un carré latin chaque nombre apparaît une seule fois par ligne. De ce fait, si l'on prend deux lignes on peut considérer ceci comme une fonction. Le nombre de la première ligne donne celui de la deuxième ligne. Dans l'exemple, on a donc 2 donne 1 qui donne 0 qui donne 3 qui donne 2. On a donc une permutation cyclique. De plus la formulation précédente fait penser à des cycles. D'où les définitions et le problèmes suivant :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Définition 2. *Deux lignes sont dites parfaites si et seulement si la permutation définie par celle-ci n'a qu'un seul cycle.*

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

L'exemple initial ne contient qu'un seul cycle (2 1 0 3). L'exemple précédent, lui, contient deux cycles : (2 1) et (0 3). Les deux premières lignes étaient parfaites et les deux précédentes ne le sont pas.

Définition 3. *Un carré latin est parfait si, et seulement si tous les couples de lignes sont parfaits.*

Des carrés latins parfaits existent pour n premier. Le carré latin cyclique marche pour tout n premier. Celui juste après est le carré latin d'ordre 5. Le cycle entre les lignes i et j avec ($j > i$) sont de la forme :

$0[n]$ -> $n-(j-i)[n]$ -> ... -> $k(n-(j-i))[n]$ -> $n(n-(j-i))[n]$. Ceci est effectivement un cycle car $n-(j-i)$ est un générateur de $[1, n-1]$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

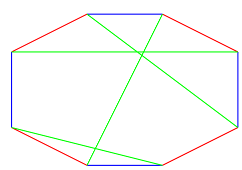
Conjecture 1. $\forall n$ *impair*

Il existe un carré latin parfait de taille n.

1.2 1-factorisation parfaite

Définition 4. *Dans un graphe $G = (V, E)$, un 1-facteur est un couplage parfait.*

Définition 5. *Une 1-factorisation d'un graphe est une partition de ces arrêtes en couplage parfait (1-facteur).*

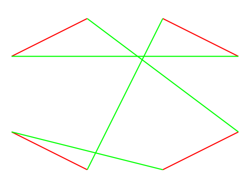


Dans l'exemple précédent, les couleurs représentent chacune un 1-facteur. Tous les 1-facteurs sont donc des couplages parfaits. Ainsi l'exemple précédent est 1-factorisé.

Définition 6. *Un cycle hamiltonien est un cycle qui passe par tous les sommets une fois et une seule.*

Définition 7. *Deux 1-facteurs sont dits parfaits si et seulement si les deux 1-facteurs forment un cycle hamiltonien.*

Définition 8. *Une 1-factorisation parfaite est une factorisation où tout couple de 1-facteurs est parfait.*



L'exemple est le même que le précédent mais on a retiré le 1-facteur bleu. Les 1-facteurs verts et rouges forment un cycle hamiltonien. Ils sont donc parfaits. Les trois 1-facteurs du premier exemple forment une 1-factorisation parfaite.

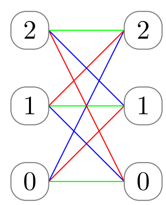
Conjecture 2. *$\forall n$ impair*
Le graphe bipartie complet $K_{n,n}$ admet une 1-factorisation parfaite[2][3].

Théorème 1. *Les deux conjectures précédentes sont équivalentes.*

Démonstration. Soit M un carré latin. On va prouver que le carré latin est bien une 1-factorisation.

Pour ce faire on prend le graphe bipartie $K_{n,n}$ et on numérote les sommets de 0 à $n-1$ de chaque coté. L'exemple ci dessous nous servira d'illustration. La traduction d'une 1-factorisation à un carré latin parfait se fait ainsi : l'arrête entre le sommet i et l de la couleur j donne le caractère défini ainsi $M(j,i) = l$.

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{vert} \\ \text{bleu} \\ \text{rouge} \end{array} \end{array}$$



Les couleurs de l'exemple sont 0 pour le vert , 1 pour le bleu et 2 pour le rouge. Les sommets de gauche sont les sommets "colonne" et les sommets de droite les sommets "symbole". Ainsi le 1 en marron représente l'arrête rouge entre le 0 de gauche et le 1 de droite. Ainsi chaque couleur correspond à une ligne de la matrice. Les sommets de gauche sont une colonne et le nombre de droite le chiffre intérieur. Ainsi un carré latin est une 1-factorisation.

On va maintenant prouver l'équivalence des caractères parfaits. Si on prend deux lignes, on prend ainsi deux 1-facteurs. Lorsqu'on parcourt un cycle du carré latin,on suit dans le graphe l'arrête de la première ligne puis de la deuxième. Ainsi on revient au côté de départ ce qui permet de suivre l'arrête donnée par la première ligne. Ce déroulement est celui des cycle ou plutôt du cycles qui n'est finalement que décrit de deux façons différentes. Sur l'exemple en prenant les lignes 1 et 2, on part de 2 qui donne 1 ce qui nous fait arriver au 1 de droite pour aller au 0 de gauche puis au 2 de droite par l'arrête bleue. Ensuite on trouve 1 donne 0 qui nous fait aller au 1 par l'arrête rouge puis 0 par la bleue. Enfin 0 donne 2 qui nous envoie en 2 pour finir à notre point de départ 1 à droite. Ainsi il y a équivalence stricte entre un cycle du carré latin et un cycle de nos 1-facteur. □

1.3 Résultats précédents

Cette partie résume les résultats précédant le stage. Comme nous l'avons déja mentionné, pour n premier cette conjecture est vraie par la matrice cyclique.

Résultat 1. *La matrice définit formellement ainsi :* $M(i, j) = i - j[n]$ *est un carré latin parfait pour* n *premier.*

Les résultats suivants sont cités avec leur référence. Certains viennent de la partie graphe comme le premier et d'autres de la partie matrice. La partie matrice a l'avantage de rester très lisible même si le nombre de sommets devient très grand.

Résultat 2. *Pour* $n = 2p - 1$*, il existe un carré latin parfait (ou une 1-factorisation).*

Résultat 3. *Pour* $n = p^2$*, il existe un carré latin parfait (ou une 1-factorisation)[1].*

Résultat 4. *Pour* n *pair, il n'existe pas de carré latin parfait pour* $n \geq 4$*.*

Ces trois résultats sont les trois seuls existant avant le début du stage et notre but était de construire à l'aide des carrés latins existants un carré latin de plus grande taille.

1.4 Format de matrice

Pour nos constructions, on impose à nos matrices d'être sous la forme décrite ci-dessous. Un carré latin parfait reste parfait si on renomme nos symboles ou si on permute deux lignes ou colonnes. Ainsi on choisit un format nous facilitant certains points.

La diagonale est remplie de 0. La première ligne est constituée des nombres $0, 1, 2...n - 1$ dans cet ordre. On définit également un fonction π qui associe à un nombre j la ligne qui commence par le premier nombre de la colonne j qui est j par notre convention.

Propriété 1. *Pour tout* i $\pi^{-1}(i)$ *est le nombre de la première colonne de la ligne* i*.*

Démonstration. Pour prouver ceci, il suffit d'écrire la définition formelle de π. $(j =)M(0, j) = M(\pi(j), 0)$. D'où $M(i, 0) = M(0, \pi^{-1}(i)) = \pi^{-1}(i)$ ce qui conclut la preuve. □

On va maintenant définir des constructions que l'on étudieras avec notre programme. On a étudié non seulement le nombre mais aussi la structure des cycles. La capture d'écran de l'annexe est le résultat de notre programme qui nous permettait de travailler sur la structure des cycles (voir annexe B).

Chapitre 2

Première construction

2.1 Définition et exemple

On va donc définir une construction à partir d'un carré latin M de taille n et construire un carré C de taille $2n-1$. Pour ce faire, on va utiliser le carré de départ et procéder en trois étapes. Pour illustrer la construction, on va le faire par étapes sur l'exemple suivant. La première colonne et la première ligne ont été démarquées. En effet, l'idée est de faire quatre copies différentes de la matrice et de remplacer le symbole 0 pour attacher les cycles.

Ainsi l'alphabet sera $0, 1, n-1$ et $\overline{1}, \overline{2}, ..., \overline{n-1}$. Le symbole $\overline{0}$ sera placé dans l'exemple en symbole temporaire. Ce symbole sera remplacé par la première ligne pour coller les cycles.

$$\left(\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 0 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

2.1.1 Première étape

La première étape sera assez simple. Les chiffres sont des références à la définition formelle ci dessous. L'état de la matrice exemple à la fin de la première étape se situe après la définition formelle. Cette étape va définir les lignes de $0, ..., n-1$.

On va définir tout d'abord le symbole zéro dans le coin en haut à gauche (ligne 1). Ensuite on définit la première ligne et la première colonne de la même manière : la première partie de la première ligne (respectivement colonne) est la première ligne (resp. colonne) avec des barres ; la seconde est une autre copie cette fois sans barre (ligne 2-5).

La matrice C aura donc quatre blocs principaux. Le premier bloc qui est celui en haut à gauche dans l'exemple sera une simple copie du bloc principal (ligne 6). Le deuxième bloc est construit à partir d'un copie avec barre (ligne 7). Par contre comme zéro n'existe pas, il faut remplacer zéro barre par la première ligne sans barre. En effet ce sont les seuls chiffres qui manquent à la ligne (ligne 8). Ces chiffres sont en bleu sur l'exemple. Ils sont situés sur la diagonale de notre bloc grâce à notre format de matrice.
$\forall (i,j) \in [1, n-1]^2$
1. $C(0,0) = 0$
2. $C(0,j) = \overline{M(0,j)}$
3. $C(0, j+n-1) = M(0,j) = j$
4. $C(j,0) = \overline{M(j,0)}$
5. $C(j+n-1, 0) = M(j,0)$
6. $C(i,j) = M(i,j)$
7. $C(i, j+n-1) = \overline{M(i,j)}$ pour $i \neq j$
8. $C(i, i+n-1) = M(i,0) = \pi^{-1}(i)$

$$\left(\begin{array}{c|cccc|cccc}
0 & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
\bar{2} & 0 & 4 & 1 & 3 & \color{blue}{2} & \bar{4} & \bar{1} & \bar{3} \\
\bar{1} & 3 & 0 & 4 & 2 & \bar{3} & \color{blue}{1} & \bar{4} & \bar{2} \\
\bar{4} & 2 & 3 & 0 & 1 & \bar{2} & \bar{3} & \color{blue}{4} & \bar{1} \\
\bar{3} & 4 & 1 & 2 & 0 & \bar{4} & \bar{1} & \bar{2} & \color{blue}{3} \\
\hline
2 & & & & & & & & \\
1 & & & & & & & & \\
4 & & & & & & & & \\
3 & & & & & & & &
\end{array}\right)$$

2.1.2 Deuxième étape

La deuxième étape est la définition du troisième bloc. C'est le bloc en bas à droite. Pour ceci on va encore faire une copie du bloc intérieur (ligne 1). On obtient alors la matrice donnée en premier. Il existe donc un problème sur les colonnes. Les nombres en rouge ont déjà été placés sur la diagonale. Il faut donc remplacer les nombres en rouge par les nombres qui manquent sur la colonne.

$$\left(\begin{array}{c|cccc|cccc}
0 & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
\bar{2} & 0 & 4 & 1 & 3 & 2 & \bar{4} & \bar{1} & \bar{3} \\
\bar{1} & 3 & 0 & 4 & 2 & \bar{3} & 1 & \bar{4} & \bar{2} \\
\bar{4} & 2 & 3 & 0 & 1 & \bar{2} & \bar{3} & 4 & \bar{1} \\
\bar{3} & 4 & 1 & 2 & 0 & \bar{4} & \bar{1} & \bar{2} & 3 \\
\hline
2 & & & & & 0 & 4 & 1 & \color{red}{3} \\
1 & & & & & 3 & 0 & \color{red}{4} & 2 \\
4 & & & & & \color{red}{2} & 3 & 0 & 1 \\
3 & & & & & 4 & \color{red}{1} & 2 & 0
\end{array}\right)$$

Pour cela, il faut définir une fonction σ qui pour une colonne j donnée renvoie la ligne $\sigma^{-1}(j)$ où le premier nombre de la ligne j $(\pi^{-1}(j))$ apparaît dans la colonne j de la matrice de départ. Par exemple pour $j = 3$, le premier nombre de la ligne 3 est 4. 4 apparaît en position 2 de la colonne 3 dans la matrice de départ. D'où $\sigma^{-1}(3) = 2$.

Formellement, on définit σ ainsi : $\forall i \in [0, n-1]$ $M(i, 0) = M(\sigma^{-1}(i), i)$. Pour des raisons d'utilisations futures, il est plus simple de définir σ^{-1}. Pour notre construction on requiert que σ^{-1} soit une permutation.Pour finir cette étape il ne reste plus qu'à mettre les nombres manquants c'est à dire la première ligne avec barre.
$\forall (i, j) \in [1, n-1]^2$
1. $C(i+n-1, j+n-1) = M(i, j)$ si $j \neq \sigma(i)$
2. $C(i+n-1, \sigma(i)+n-1) = \overline{M(0, \sigma(i))} = \overline{\sigma(i)}$

$$\left(\begin{array}{c|cccc|cccc}
0 & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
\overline{2} & 0 & 4 & 1 & 3 & 2 & \overline{4} & \overline{1} & \overline{3} \\
\overline{1} & 3 & 0 & 4 & 2 & \overline{3} & 1 & \overline{4} & \overline{2} \\
\overline{4} & 2 & 3 & 0 & 1 & \overline{2} & \overline{3} & 4 & \overline{1} \\
\overline{3} & 4 & 1 & 2 & 0 & \overline{4} & \overline{1} & \overline{2} & 3 \\
\hline
2 & & & & & 0 & 4 & 1 & \overline{4} \\
1 & & & & & 3 & 0 & \overline{3} & 2 \\
4 & & & & & \overline{1} & 3 & 0 & 1 \\
3 & & & & & 4 & \overline{2} & 2 & 0
\end{array}\right)$$

2.1.3 Troisième étape

Le but de cette troisième étape est de définir ce dernier carré. Pour cela on va présenter deux méthodes différentes. La construction sera définie si ces deux méthodes donnent le même résultat. L'ensemble des lignes à placer est l' ensemble des lignes du bloc intérieur avec barre. Il faut cependant remplacer les 0 barres par la première colonne avec barre. Ici 2 sur la première ligne est le 2 de la première colonne. De même, pour le 1 sur la ligne 2. Les lignes qu'on peut mettre sont donc les suivantes. Les couleurs servent aux explications ci-dessous.

$$\begin{pmatrix}
\overline{2} & \overline{4} & \overline{1} & \overline{3} \\
\overline{3} & \overline{1} & \overline{4} & \overline{2} \\
\overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{1} \\
\overline{4} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3}
\end{pmatrix}$$

On va devoir permuter les lignes pour faire que le carré soit latin. La première méthode est la suivante : comme on va devoir placer sur la ligne le nombre qu'on a enlevé dans la deuxième étape, il faut mettre ce nombre dans ce carré. De plus, comme ce nombre est déjà placé dans toutes les colonnes sauf celle qui commence par celui-ci dans la matrice initiale. Ce nombre devra être placé dans cette colonne. Par exemple, sur la deuxième ligne (du bloc du bas, la septième au total), on a enlevé 4 pour mettre $\overline{3}$ à sa place. On va donc devoir mettre quatre sur la quatrième colonne. De plus il faut placer la ligne qui a un $\overline{3}$ à cette place. Si deux lignes sont possibles alors on prend celle où notre nombre n'est pas sur la diagonale. Ainsi dans l'exemple $\overline{3}$ (en violet) apparait sur la colonne 4 deux fois : la ligne 1 et la ligne 4. 4 est la ligne de la diagonale donc on choisit la ligne 1 (en vert).D'où $\phi(2) = 1$. Cette permutation sera donc appelée ϕ et définit formellement ainsi : $M(\phi(i), \pi^{-1} \circ \sigma(j)) = M(0, \sigma(j))(= \sigma(j))$.

Il existe une autre méthode plus simple à expliquer. Comme on a rajouté un nombre barre il va falloir le supprimer. Comme il doit toujours apparaître dans la colonne où il apparaissait, alors il faut choisir une des deux lignes où ce nombre apparaît dans la même colonne. Par exemple pour la ligne 1, on a déjà placé $\overline{4}$. Sur les lignes à prendre $\overline{4}$ (en rouge) apparait deux fois dans les lignes 2 et 3. On choisit la ligne 2 (en bleu) car la ligne 3 est celle de la diagonale. D'où $\phi(1) = 2$.Cette permutation sera également appelée ϕ et sera définie formellement ainsi : $M(\phi(i), \pi \circ \sigma(j)) = M(0, \sigma(j))(= \sigma(j))$.

On requiert que les deux définitions soient les mêmes. Avec ϕ définit ainsi, les lignes (1-3) finissent la définition formelle. Et le résultat de cette construction est juste après. Une capture d'écran de la construction faite par le programme a aussi été placée en Annnexe A.
$\forall (i, j) \in [1, n-1]^2$
1. $C(i, j) = \overline{M(\phi(i), j)}$ pour $j \neq \phi(i), \sigma^{-1}(i)$
2. $C(i, \phi(i)) = \overline{M(\phi(i), 0)}$
3. $C(i, \sigma(i)) = M(\phi(i), 0)$

$$\left(\begin{array}{c|cccc|cccc}
0 & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
\overline{2} & 0 & 4 & 1 & 3 & 2 & \overline{4} & \overline{1} & \overline{3} \\
\overline{1} & 3 & 0 & 4 & 2 & \overline{3} & 1 & \overline{4} & \overline{2} \\
\overline{4} & 2 & 3 & 0 & 1 & \overline{2} & \overline{3} & 4 & \overline{1} \\
\overline{3} & 4 & 1 & 2 & 0 & \overline{4} & \overline{1} & \overline{2} & 3 \\
\hline
2 & \overline{3} & \overline{1} & 3 & \overline{2} & 0 & 4 & 1 & \overline{4} \\
1 & \overline{2} & \overline{4} & \overline{1} & 4 & 3 & 0 & \overline{3} & 2 \\
4 & \overline{4} & 2 & \overline{2} & \overline{3} & \overline{1} & 3 & 0 & 1 \\
3 & 1 & \overline{3} & \overline{4} & \overline{1} & 4 & \overline{2} & 2 & 0
\end{array}\right)$$

2.2 Résultats et petite preuve

Théorème 2. *Si σ est une permutation, la construction précédente est bien définie et un carré latin si et seulement si $\pi = \pi^{-1}$.*

Démonstration. Premièrement, si σ est une permutation alors les trois premières parties sont bien définies. Pour la dernière si $\pi = \pi^{-1}$ alors la permutation des lignes ϕ est bien définie d'où le fait que la construction soit bien définie.

Ensuite les lignes de 0 à $n-1$ sont latines car les nombres sans barre sauf la première colonne se situent dans les colonnes 1 à $n-1$ et le dernier est placé pour remplacer le zéro barre. Les nombres barres se situent dans les colonnes de n à $2n-2$ et la colonne 0. Pour la colonne 0 c'est évident. La deuxième étape rend les colonnes de n à $2n-2$ latines.

Pour le reste, la première définition de cette partie met le nombre sans barre qu'on a enlevé à la place qu'il faut pour que les colonnes restantes et les lignes contiennent une fois et une seule les nombres sans barre. La deuxième définition place la ligne qui garde le symbole enlevé sur la colonne. Les colonnes sont donc latines. Les lignes le sont aussi car on a seulement permuté les lignes.

Ces deux définitions sont les mêmes si et seulement si $\pi = \pi^{-1}$. En effet comme M est latin s'il existe j tel que $\pi(j) \neq \pi^{-1}(j)$ alors $\phi(j) \neq \phi^{-1}(j)$. $\square$

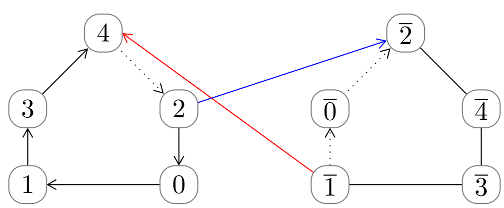
On va maintenant prouver des résultats sur le coté parfait de notre matrice. Premièrement, on va montrer que le rectangle formé par les lignes de 0 à $n-1$ est parfaits. Ensuite on montrera une condition pour que le bloc de n à $2n-1$ soit latin. On finira par montrer que dans le cas où la matrice de départ est la matrice cyclique, alors le carré latin est parfait.

Théorème 3. *Le bloc formé des lignes de* 0 *à* $n-1$ *est un rectangle latin parfait.*

Démonstration. Cette propriété est finalement assez simple. La preuve graphique ci-dessous résume la situation. On part au départ de deux cycles : le cycle barre et le cycle sans barre. On va illustrer la preuve sur l'exemple précédent en prenant les lignes 1 et 3. Les deux lignes sont rappelées ci dessous.

Dans les cycles qui suivent, les flèches en pointillé sont les flèches que l'on modifie. En effet on casse la liaison entre la première ligne sans barre (ici la flèche de 2 à 4). On enlève le zéro barre d'où les deux liaisons qui disparaissent. Enfin on met le nombre de la première ligne (2) qui s'envoie sur le seul nombre possible ($\overline{2}$) et de même pour le nombre de la deuxième ligne ($\overline{1}$) qui s'envoie sur le nombre restant (4).

$$\left(\begin{array}{c|cccc|cccc} \overline{2} & 0 & 4 & 1 & 3 & \color{blue}{2} & \overline{4} & \overline{1} & \overline{3} \\ \overline{4} & 2 & 3 & 0 & 1 & \overline{2} & \overline{3} & \color{blue}{4} & \overline{1} \end{array}\right)$$



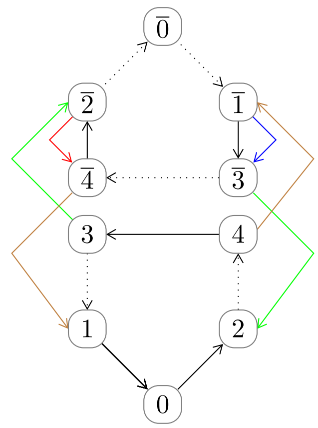
$\square$

Propriété 2. *Les lignes du bloc formé par les lignes de* n *à* $2n-2$ *sont parfaites si et seulement si les nombres déplacés appartiennent tous deux à un cycle différent.*

Démonstration. Tout d'abord on va montrer que les lignes avec barres forment exactement deux cycles. On va de même illustrer sur un exemple. On prend donc les lignes 7 et 8. La première partie est le cycle de départ barre avec lequel on travaille. Ensuite on a les cycles où on a remplacé les zéros par la première colonne. On va prouver que cette opération crée exactement deux cycles. Pour exemple de notre démonstration, la situation a été représentée. On enlève les $\overline{0}$. On enlève aussi l'arrête entre les deux nombres de la première colonne. Donc le nombre (2) qui donnait $\overline{0}$ va donner le nombre de la première colonne 4. De même, le nombre 1 dont l'arrête venait de 0 va donc donner le nombre de la première colonne 3. On a donc prouver qu'on construit exactement deux cycles.

$$\left(\begin{array}{c|cccc} \overline{3} & \overline{4} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{0} \\ \overline{4} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{0} & \overline{1} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc} \overline{4} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} \\ \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{1} \end{array}\right)$$



$$\left(\begin{array}{c|cccc|cccc} 4 & \overline{4} & 2 & \overline{2} & \overline{3} & \overline{1} & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & \overline{3} & \overline{4} & \overline{1} & 4 & \overline{2} & 2 & 0 \end{array}\right)$$

L'exemple nous montre ensuite comment le fait de mettre deux nombres barres pris dans deux cycles différents. On a enlevé la flèche entres $\overline{4}$ et $\overline{2}$ pour la remplacer en partie par la flèche verte et en partie par la flèche marron. Le schéma, même si il est fait sur un exemple ne s'appuie pas sur cet exemple. En effet, la flèche verte devra arriver là où on vient de créer un trou. La marron fait de même. Ainsi la propriété est vraie. □

Théorème 4. *Pour la matrice cyclique d'ordre n, le résultat est un carré latin parfait.*

La preuve par faute de place n'est pas présentée dans le rapport mais est disponible sur le git. La preuve est appelé "preuve.pdf".

Chapitre 3

Deuxième construction

Pour la deuxième construction, on va travailler avec trois copies de la matrice départ. De même on enlèvera la première ligne et la première colonne pour avoir une liberté de construction. Ensuite, on prend un carré latin C de taille 3 avec la diagonale qui contient tous les nombres et par choix $M(i,i) = i$. Cette première matrice sera appelée matrice des blocs. Le choix de matrice possible est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Pour l'exemple suivant :

$$\left(\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 0 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

En mettant 1 devant la copie 1, 2 devant la 2 et 3 devant la 3. On a donc la matrice suivante :

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc|c}
0 & 14 & 11 & 13 & 0 & 34 & 31 & 33 & 0 & 24 & 21 & 23 & 0 \\
13 & 0 & 14 & 12 & 33 & 0 & 34 & 32 & 23 & 0 & 24 & 22 & 0 \\
12 & 13 & 0 & 11 & 32 & 33 & 0 & 31 & 22 & 23 & 0 & 21 & 0 \\
14 & 11 & 12 & 0 & 34 & 31 & 32 & 0 & 24 & 21 & 22 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 34 & 31 & 33 & 0 & 24 & 21 & 23 & 0 & 14 & 11 & 13 & 0 \\
33 & 0 & 34 & 32 & 23 & 0 & 24 & 22 & 13 & 0 & 14 & 12 & 0 \\
32 & 33 & 0 & 31 & 22 & 23 & 0 & 21 & 12 & 13 & 0 & 11 & 0 \\
34 & 31 & 32 & 0 & 24 & 21 & 22 & 0 & 14 & 11 & 12 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 24 & 21 & 23 & 0 & 14 & 11 & 13 & 0 & 34 & 31 & 33 & 0 \\
23 & 0 & 24 & 22 & 13 & 0 & 14 & 12 & 33 & 0 & 34 & 32 & 0 \\
22 & 23 & 0 & 21 & 12 & 13 & 0 & 11 & 32 & 33 & 0 & 31 & 0 \\
24 & 21 & 22 & 0 & 14 & 11 & 12 & 0 & 34 & 31 & 32 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

Maintenant pour placer les premières lignes et colonnes on va utiliser une permutation cyclique. Ainsi la matrice des blocs devient après application du cycle (1 2 3). Cette matrice sera appelée matrice des diagonales.

$$
\begin{pmatrix}
2 & 1 & 3 \\
1 & 3 & 2 \\
3 & 2 & 1
\end{pmatrix}
$$

Maintenant on met sur la diagonale les premières lignes à part sur la diagonale de la matrice où l'on envoie ces nombres en dernière colonne.

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc|c}
0 & 14 & 11 & 13 & 12 & 34 & 31 & 33 & 32 & 24 & 21 & 23 & 22 \\
13 & 0 & 14 & 12 & 33 & 11 & 34 & 32 & 23 & 31 & 24 & 22 & 21 \\
12 & 13 & 0 & 11 & 32 & 33 & 14 & 31 & 22 & 23 & 34 & 21 & 24 \\
14 & 11 & 12 & 0 & 34 & 31 & 32 & 13 & 24 & 21 & 22 & 33 & 23 \\
\hline
12 & 34 & 31 & 33 & 0 & 24 & 21 & 23 & 22 & 14 & 11 & 13 & 32 \\
33 & 11 & 34 & 32 & 23 & 0 & 24 & 22 & 13 & 21 & 14 & 12 & 31 \\
32 & 33 & 14 & 31 & 22 & 23 & 0 & 21 & 12 & 13 & 24 & 11 & 34 \\
34 & 31 & 32 & 13 & 24 & 21 & 22 & 0 & 14 & 11 & 12 & 23 & 33 \\
\hline
32 & 24 & 21 & 23 & 22 & 14 & 11 & 13 & 0 & 34 & 31 & 33 & 12 \\
23 & 31 & 24 & 22 & 13 & 21 & 14 & 12 & 33 & 0 & 34 & 32 & 11 \\
22 & 23 & 34 & 21 & 12 & 13 & 24 & 11 & 32 & 33 & 0 & 31 & 14 \\
24 & 21 & 22 & 33 & 14 & 11 & 12 & 23 & 34 & 31 & 32 & 0 & 13 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

Propriété 3. *Les symboles apparaissent une fois et une seule sur chaque ligne des blocs. Ce qui veut dire toute les lignes sauf la dernière (qui est encore vide).*

Démonstration. Le carré latin des blocs nous assure d'avoir posé le corps de chaque bloc dans une ligne. Le carré latin des diagonales nous assure d'avoir placé chaque première ligne. On a donc placé tous les nombres qui n'apparaissent donc qu'une seul fois. □

On a donc déjà réglé le problème des lignes. Pour finir il va falloir déplacer les colonnes pour faire disparaître les problèmes. Pour ceci on requiert que $\pi = \pi^{-1}$, ainsi on rotationne les blocs en rouge. La rotation est tout simplement π. Ainsi en demandant $\pi = \pi^{-1}$, la rotation que l'on fait met le bloc des 3 en accord avec le bloc 1. Ensuite pour mettre le bloc des deux, il faudrait le permuter par rapport au bloc des 3 mais permuter deux fois revient à ne pas permuter. Un cas particulier est celui de la diagonale, on va laisser les zéros sur la diagonale et la diagonale part sur la dernière colonne.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & \color{red}{2} \\ \color{red}{3} & 2 & 1 \\ 2 & \color{red}{1} & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc|c}
0 & 14 & 11 & 13 & 12 & 34 & 31 & 33 & 24 & 32 & 23 & 21 & 22 \\
13 & 0 & 14 & 12 & 33 & 11 & 34 & 32 & 31 & 23 & 22 & 24 & 21 \\
12 & 13 & 0 & 11 & 32 & 33 & 14 & 31 & 23 & 22 & 21 & 34 & 24 \\
14 & 11 & 12 & 0 & 34 & 31 & 32 & 13 & 21 & 24 & 33 & 22 & 23 \\
\hline
34 & 12 & 33 & 31 & 0 & 24 & 21 & 23 & 22 & 14 & 11 & 13 & 32 \\
11 & 33 & 32 & 34 & 23 & 0 & 24 & 22 & 13 & 21 & 14 & 12 & 31 \\
33 & 32 & 31 & 14 & 22 & 23 & 0 & 21 & 12 & 13 & 24 & 11 & 34 \\
31 & 34 & 13 & 32 & 24 & 21 & 22 & 0 & 14 & 11 & 12 & 23 & 33 \\
\hline
32 & 24 & 21 & 23 & 14 & 22 & 13 & 11 & 0 & 34 & 31 & 33 & 12 \\
23 & 31 & 24 & 22 & 21 & 13 & 12 & 14 & 33 & 0 & 34 & 32 & 11 \\
22 & 23 & 34 & 21 & 13 & 12 & 11 & 24 & 32 & 33 & 0 & 31 & 14 \\
24 & 21 & 22 & 33 & 11 & 14 & 23 & 12 & 34 & 31 & 32 & 0 & 13 \\
\hline
21 & 22 & 23 & 24 & 31 & 32 & 33 & 34 & 11 & 12 & 13 & 14 & 0
\end{array}\right)$$

Théorème 5. *La construction est un carré latin si et seulement si $\pi = \pi^{-1}$.*

Démonstration. La rotation met la diagonale en accord avec la première ligne. Pour la première colonne (la démonstration est la même pour les autres), on a permuté le bloc des 3. Cette permutation met les premières colonnes bonnes pour les 1. Pour les colonnes du bloc 2 elle sont aussi en accord car on les a permuter avec $\pi^2 = id$ □

Théorème 6. *Les blocs sont des rectangles parfaits.*

Démonstration. La preuve est assez évidente en partant de 0 (sur la diagonale). On parcourt le cycle de la diagonale. Ensuite le fait que la permutation qu'on applique soit cyclique nous fait boucler sur les différents cycles de départ d'où le résultat. □

Conjecture 3. *Les seuls couples de lignes qui ne sont pas parfaits sont les lignes correspondant à la même ligne de départ.*

Cette conjecture est malheureusement fausse. Les lignes 0 et 6 ne sont pas parfaites. Le cycle est (0 33 21 11 31).

Conclusion

Pour conclure, on a deux constructions qui semblent intéressantes mais des résultats qui ne sont pas à la hauteur. Dans les deux cas, on construit un carré latin en réglant les problèmes. La difficulté que je ressens est que nos cycles sont peu variés au départ. En effet dans les matrices de départ (qui sont généralement cycliques), on a alors, en appelant $\sigma_{i,j}$ la permutation entre les lignes i et j, que $\forall i, j \in [0, n-1], \exists p \in [1, n-1] \sigma_{i,j} = \sigma_{0,1}^{p}$. Ainsi il me semble difficile de construire à partir de si peu de cycles les structures complexes des cycles pouvant créer un carré latin parfait pour une taille non première.

Ce stage a été l'occasion d'étudier un problème durant une période assez longue. Il a aussi permis de tester de nombreuses hypothèses qui n'ont malheureusement pas abouti à des résultats. Le problème reste donc ouvert.

Bibliographie

[1] I.M. Wanless D. Bryant, B. Maenhaut. A family of perfect one factorisations of complete bipartite graphs. 2002.

[2] D. R. Stinson J. H. Dinitz. Some new perfect one-factorisations of complete bipartite graphs. *J. Combin. TTheory*, 1989.

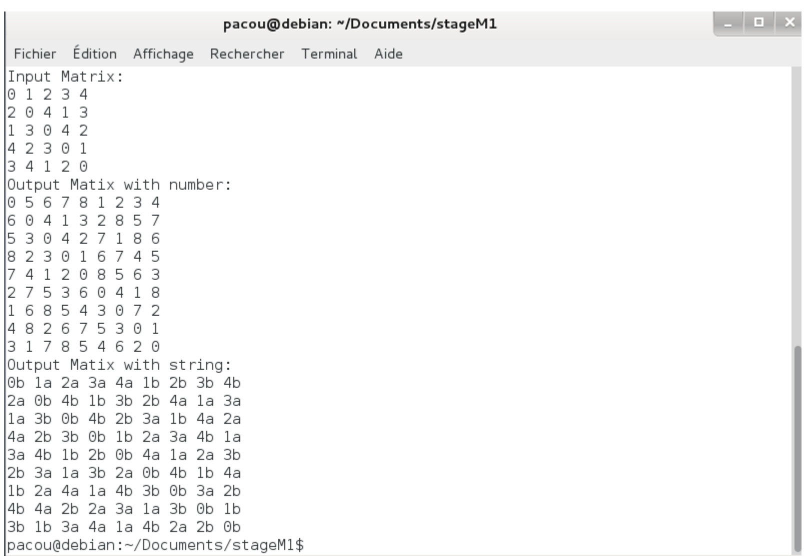
[3] A. Kotzig. Hamilton grpahs and hamilton circuits. *Theory of graphs and its applications*, 1964.

Annexe A

Exemple du programme de la première construction

La première partie est la matrice d'entrée. Ici la matrice est celle de l'exemple. Ensuite le programme renvoie deux forme de la réponse. La première est la matrice réponse où avec des nombres. Les nombres avec barre sont les nombres de 5 à 8. Il suffit d'enlever 4 pour trouver le nombre sans barre.

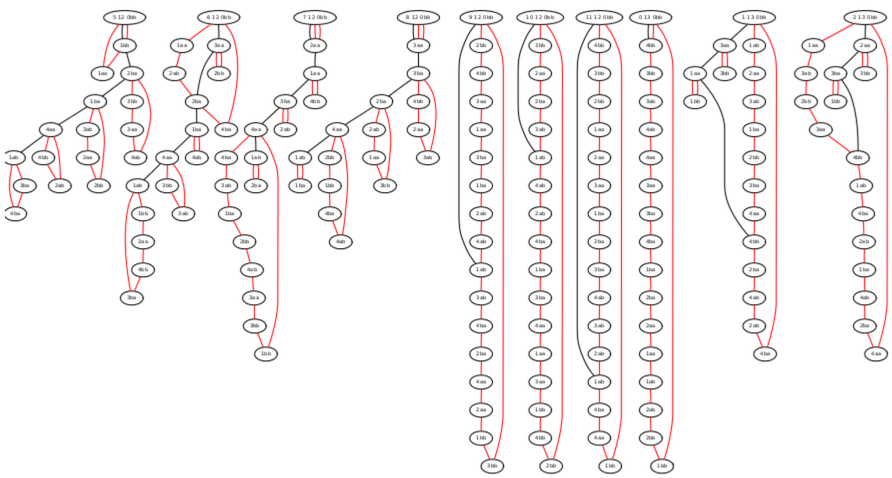
La deuxième forme est avec des lettres. Les nombres barres sont suivis de a et ceux sans barre sont b. Cette forme est celle qui est écrit dans le fichier réponse. Cette forme est très utile pour le deuxième itéré. En effet le programme ouvre ce fichier et renvoie une forme assez agréable.




```
Input Matrix:
0 1 2 3 4
2 0 4 1 3
1 3 0 4 2
4 2 3 0 1
3 4 1 2 0
Output Matix with number:
0 5 6 7 8 1 2 3 4
6 0 4 1 3 2 8 5 7
5 3 0 4 2 7 1 8 6
8 2 3 0 1 6 7 4 5
7 4 1 2 0 8 5 6 3
2 7 5 3 6 0 4 1 8
1 6 8 5 4 3 0 7 2
4 8 2 6 7 5 3 0 1
3 1 7 8 5 4 6 2 0
Output Matix with string:
0b 1a 2a 3a 4a 1b 2b 3b 4b
2a 0b 4b 1b 3b 2b 4a 1a 3a
1a 3b 0b 4b 2b 3a 1b 4a 2a
4a 2b 3b 0b 1b 2a 3a 4b 1a
3a 4b 1b 2b 0b 4a 1a 2a 3b
2b 3a 1a 3b 2a 0b 4b 1b 4a
1b 2a 4a 1a 4b 3b 0b 3a 2b
4b 4a 2b 2a 3a 1a 3b 0b 1b
3b 1b 3a 4a 1a 4b 2a 2b 0b
pacou@debian:~/Documents/stageM1$
```

Annexe B

Programme des cycles



Cette annexe sert à présenter le programme servant à construire les cycles. Les flèches en rouge sont les flèches de cycles c'est à dire celle qui sont définies par notre permutation. Les flèches noires servent à lier les différents cycles définis par les même lignes. Pour une matrice de taille n, on a donc $n(n+1)/2$ graphes. La bulle avec trois symboles sert à identifier les cycles. Les deux premiers numéros sont les numéros des deux lignes.