# Σημειωσεις
# Γραμμικης Αλγεβρας

Θ. Κεχαγιας

Σεπτεμβρης 2010, $v$.0.91

# Περιεχόμενα


**Εισαγωγη** **vi**

## I Βασικες Εννοιες 1

**1 Πινακες** **2**
- 1.1 Θεωρια . . . 2
- 1.2 Λυμενα Προβληματα . . . 5
- 1.3 Αλυτα Προβληματα . . . 14

**2 Αντιστροφος Πινακας και Δυναμεις Πινακων** **18**
- 2.1 Θεωρια . . . 18
- 2.2 Λυμενα Προβληματα . . . 20
- 2.3 Αλυτα Προβληματα . . . 35

**3 Μερικοι Ειδικοι Τυποι Πινακων** **38**
- 3.1 Θεωρια . . . 38
- 3.2 Λυμενα Προβληματα . . . 40
- 3.3 Αλυτα Προβληματα . . . 48

**4 Οριζουσες και Αντιστροφοι Πινακες** **53**
- 4.1 Θεωρια . . . 53
- 4.2 Λυμενα Προβληματα . . . 56
- 4.3 Αλυτα Προβληματα . . . 70

**5 Οριζουσες και Συστηματα Γραμμικων Εξισωσεων** **77**
- 5.1 Θεωρια . . . 77
- 5.2 Λυμενα Προβληματα . . . 79
- 5.3 Αλυτα Προβληματα . . . 86

**6 Απαλοιφη Gauss και Συστηματα Γραμμικων Εξισωσεων** **90**
- 6.1 Θεωρια . . . 90
- 6.2 Λυμενα Προβληματα . . . 93
- 6.3 Αλυτα Προβληματα . . . 110

**7 Διανυσματικοι Χωροι** **115**
7.1 Θεωρια . . . 115
7.2 Λυμενα Προβληματα . . . 118
7.3 Αλυτα Προβληματα . . . 137

**8 Διανυσματικοι Χωροι και Συστηματα Γραμμικων Εξισωσεων** **141**
8.1 Θεωρια . . . 141
8.2 Λυμενα Προβληματα . . . 143
8.3 Αλυτα Προβληματα . . . 154

**9 Ορθογωνιοτητα Διανυσματων** **159**
9.1 Θεωρια . . . 159
9.2 Λυμενα Προβληματα . . . 161
9.3 Αλυτα Προβληματα . . . 170

**10 Ορθογωνιοτητα Διανυσματικων Χωρων** **173**
10.1 Θεωρια . . . 173
10.2 Λυμενα Προβληματα . . . 175
10.3 Αλυτα Προβληματα . . . 192

**11 Μιγαδικοι Πινακες** **198**
11.1 Περιληψη . . . 198
11.2 Θεωρια και Παραδειγματα . . . 199
11.3 Αλυτα Προβληματα . . . 213

**12 Ιδιοτιμες και Ιδιοδιανυσματα** **217**
12.1 Θεωρια . . . 217
12.2 Λυμενα Προβληματα . . . 218
12.3 Αλυτα Προβληματα . . . 229

**13 Διαγωνιοποιηση και Συναρτησεις Πινακων** **234**
13.1 Θεωρια . . . 234
13.2 Λυμενα Προβληματα . . . 235
13.3 Αλυτα Προβληματα . . . 255

**II Συμπληρωματικα Θεματα** **261**

**14 Οριζουσες : Θεωρητικη Θεμελιωση** **262**
14.1 Θεωρια . . . 262
14.2 Λυμενα Προβληματα . . . 266
14.3 Αλυτα Προβληματα . . . 291

**15 Επαναληπτικη Λυση Συστηματων Γραμμικων Εξισωσεων** **294**

**16 Πινακες, Εξισωσεις Διαφορων και Διαφορικες Εξισωσεις** **295**

**17 Στοχαστικοι Πινακες** **296**

**18 Πινακες και Ηεκτρικα Κυκλωματα** **297**

**19 Γενικευσεις** **298**
19.1 Περιληψη . . . 298
19.2 Θεωρια και Παραδειγματα . . . 302
19.3 Αλυτα Προβληματα . . . 318

**20 Πινακες και Θεωρια Γραφων** **320**

# Προλογος

Αγαπητε αναγνωστη,

το παρον τευχος περιεχει συντομη θεωρια καθως και λυμενα και αλυτα προβληματα *Γραμμικης Αλγεβρας* και προοριζεται για χρηση απο τους φοιτητες της Πολυτεχνικης Σχολης του Αριστοτελειου Πανεπιστημιου Θεσσαλονικης. Κατα πασα πιθανοτητα εισαι ενας απο αυτους τους φοιτητες. Σε αυτο τον συντομο προλογο δινω μερικες οδηγιες για την χρηση αυτου του τευχους.

Κατα τη γνωμη μου, για τους περισσοτερους ανθρωπους, *ο μονος τροπος εξοικειωσης με τα μαθηματικα ειναι η επιλυση προβληματων* – **οσο περισσοτερα προβληματα λυσεις τοσο πιο πολλα μαθηματικα θα μαθεις!** Συμφωνα με αυτη την αποψη, στο παρον τευχος η θεωρια παρουσιαζεται σε μεγαλη συντομια, αλλα υπαρχει μεγαλος αριθμος λυμενων και αλυτων προβληματων. Χρησιμοποιησε τα λυμενα προβληματα ως ενα ενδιαμεσο βοηθημα για την επιλυση των αλυτων. Με αλλα λογια, δεν αρκει να μελετησεις τα ηδη λυμενα προβληματα. **Αν δεν λυσεις ο ιδιος μεγαλο αριθμο των αλυτων προβληματων δεν θα ωφεληθεις ιδιαιτερα και η πιθανοτητα να περασεις το αντιστοιχο μαθημα θα ειναι μικρη.**

Το παρον τευχος δεν εχει παρει ακομη την τελικη του μορφη και ειναι πιθανον καποιες λυσεις και απαντησεις να περιεχουν σφαλματα. Η παρουσα εκδοση εχει τον κωδικο $v.0.91$ – επομενες εκδοσεις θα χαρακτηριζονται απο μικροτερο αριθμο σφαλματων και μεγαλυτερους κωδικους[1]. Στην διαδικασια της διορθωσης σημαντικο ρολο εχουν παιξει φοιτητες προηγουμενων ετων, τους οποιους ευχαριστω θερμα. Παντως πιστευω οτι η παρουσα μορφη θα σου φανει *πολυ* χρησιμη, ιδιαιτερα σε συνδυασμο με το διδακτικο βιβλιο το οποιο θα σου δοθει κατα την διαρκεια του εξαμηνου.

Το τευχος περιεχει 20 κεφαλαια. Τα Κεφαλαια 1-13 πραγματευονται βασικα θεματα τα οποια πρεπει να διδαχτει καθε μελετητης της Γραμμικης Αλγεβρας. Τα Κεφαλαια 14-20 πραγματευονται ειδικοτερα θεματα, τα οποια συνηθως παραλειπονται στο εισαγωγικο μαθημα Γραμμικης Αλγεβρας για μηχανικους[2].

Καθε κεφαλαιο αποτελειται απο τρια υποκεφαλαια (Συντομη Θεωρια, Λυμενα Προβληματα, Αλυτα Προβληματα) και καθε υποκεφαλαιο περιεχει εναν αριθμο *εδαφιων*. Τα εδαφια ειναι αριθμημενα με ενα κωδικο της μορφης $k.m.n$, δηλ. το $n$-στο εδαφιο του $m$-στου υποκεφαλιαου του $k$-στου κεφαλαιου. Επισης, μετα τον αριθμο καθε εδαφιου μπορει να εμφανιζεται ενα σημα. με την εξης σημασια.

1. $\boxplus$: Το εδαφιο ειναι δυσκολο.

[1] Ακολουθω την ονοματολογια της *αναπτυξης* $software$: το τευχος ειναι ακομα σε μορφη $beta$· η πρωτη ¨τελικη¨ εκδοση θα ειναι η $v.1.00$.

[2] Στην παρουσα εκδοση δεν εχω ακομη γραψει τα Κεφαλαια 14-19.

2. ⊠: Το εδαφιο περιεχει ενα θεμα το οποιο δεν ανηκει στην ¨βασικη υλη¨ του μαθηματος.

3. ⊠⊞: Το εδαφιο περιεχει ενα θεμα το οποιο δεν ανηκει στην ¨βασικη υλη¨ του μαθηματος *και* ειναι δυσκολο.

Σε μια πρωτη αναγνωση λοιπον, αρκει να διαβασεις τα μη προσημασμενα εδαφια. Με απλα λογια, *αυτα τα εδαφια ειναι τα μονα απαραιτητα για την εξεταση του μαθηματος*. Μπορεις να ασχοληθεις με τα προσημασμενα εδαφια σε μια δευτερη αναγνωση το τευχους. Ιδιαιτερα, δεν ειναι απαραιτητο να διαβασεις τα *αποδεικτικα* προβληματα.

Θανασης Κεχαγιας

Θεσσαλονικη, Σεπτεμβρης 2010

# Εισαγωγη

Η *Γραμμικη Αλγεβρα* εχει τρια κυρια αντικειμενα μελετης (τα οποια ειναι στενα συνδεδεμενα μεταξυ τους, οπως θα φανει παρακατω):

1. τους πινακες,
2. τα συστηματα γραμμικων εξισωσεων,
3. την γεωμετρια του $N$-διαστατου χωρου, οπου $N = 1, 2, 3, ...$ [3].

Θεωρουμε γνωστη την εννοια ¨συστημα γραμμικων εξισωσεων", οπως επισης και τις στοιχειωδεις μεθοδους επιλυσης τετοιων συστηματων. Επισης θεωρουμε γνωστα τα βασικα στοιχεια των διανυσματων και της αναλυτικης γεωμετριας του επιπεδου. Οι πινακες ειναι μαθηματικα αντικειμενα τα οποια μπορουμε να σκεφτουμε ως μια *γενικευση των πραγματικων αριθμων*. Οι πινακες παρεχουν εναν ευχερη και συμπαγη συμβολισμο για την διατυπωση και επιλυση ενος ευρεως φασματος μαθηματικων προβληματων. Ενα απο αυτα τα προβληματα ειναι και η επιλυση συστηματων γραμμικων εξισωσεων. Επιπλεον, επειδη οι πινακες μπορουν επισης να θεωρηθουν γενικευση των διανυσματων, η γραμμικη αλγεβρα μπορει να χρησιμοποιηθει για την γενικευση στις $N$ διαστασεις της γεωμετριας του επιπεδου (2 διαστασεις) και του χωρου (3 διαστασεις). Με αυτο τον τροπο μπορουμε να κατανοησουμε καλυτερα και βαθψτερα την Γεωμετρια και να την χρησιμοποιησουμε για να αποκτησουμε εποπτικη αντιληψη των συστηματων γραμμικων εξισωσεων. Επιπλεον, η Γραμμικη Αλγεβρα χαρακτηριζεται, οπως φανερωνει το ονομα, απο την *αλγεβρικη* προσεγγιση[4].

Το παρον τευχος περιεχει 20 κεφαλαια. Τα Κεφαλαια 1 ως13 πραγματευονται βασικα θεματα τα οποια πρεπει να διδαχτει καθε μελετητης της Γραμμικης Αλγεβρας. Τα Κεφαλαια 14 ως 20 πραγματευονται ειδικοτερα θεματα, τα οποια συνηθως παραλειπονται στο εισαγωγικο μαθημα Γραμμικης Αλγεβρας για μηχανικους[5].

Χρησιμοποιουμε τον τυπικο μαθηματικο συμβολισμο, γνωστο και απο το Λυκειο. Σημειωνουμε ιδιατερα τα εξης.

---

[3] Ακομη και $N = 0$ περιλαμβανεται ως μια πολυ ειδικη και τετριμμενη περιπτωση.

[4] Η ειδικη περιπτωση στην οποια $N = 2$ η 3 (δηλ. η μελετη της γεωμετριας του επιπεδου και του *τριδιαστατου* χωρου) ειναι επισης αντικειμενο μιας αλλης μαθηματικης θεωριας, της *Αναλυτικης Γεωμετριας*. Η Αναλυτικη Γεωμετρια χρησιμοποιει πολλες εννοιες και εργαλεια της Γραμμικης Αλγεβρας, αλλα επεκτεινεται και σε *μη γραμμικες* μαθηματικες οντοτητες (π.χ. τις *δευτεροβαθμιες επιφανειες*).

[5] Η συγγραφη των Κεφαλαιων 14-19 δεν εχει ακομη ολοκληρωθει (στην παρουσα εκδοση $v.091$ του τευχους).

1. Το συνολο των πραγματικων αριθμων συμβολιζεται με $\mathbb{R}$ και αυτο των μιγαδικων αριθμων με $\mathbb{C}$.

2. Ο *συμβολισμος αθροισματος* ειναι ο εξης

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_N.$$

   Αντιστοιχα, ο *συμβολισμος γινομενου* ειναι ο εξης

$$\prod_{n=1}^{N} a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_N.$$

3. Η λεξη ¨ανν¨ σημαινει ¨αν και μονο αν¨. Η συντομογραφια ¨τ.ω.¨ σημαινει ¨τετοιο ωστε¨.

# Μέρος I

# Βασικες Εννοιες

# Κεφάλαιο 1

# Πινακες

Στα μαθηματικα (οπως και στην καθομιλουμενη) ¨*πινακας*¨ σημαινει μια *ορθογωνια διαταξη* (αριθμων ή αλλων οντοτητων). Αυτο που κανει του ¨μαθηματικους¨ πινακες ιδιαιτερα χρησιμους ειναι οτι αφου τους εφοδιασουμε με *πραξεις* μπορουμε να τους χρησιμοποιησουμε ως ¨**γενικευμενους αριθμους**¨ οι οποιοι (οπως θα φανει σε επομενα κεφαλαια) διευκολυνουν την επιλυση πολλων μαθηματικων προβληματων.

## 1.1 Θεωρια

**1.1.1.** Ενας *πινακας* $\mathbf{A}$ ειναι μια ορθογωνια διαταξη αριθμων:

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{M1} & a_{M2} & \dots & a_{MN} \end{array}\right].$$

Το στοιχειο του $\mathbf{A}$ στην $m$-στη γραμμη και στην $n$-στη στηλη συμβολιζεται με $a_{mn}$ ή $(\mathbf{A})_{mn}$ (και λεμε οτι εχει *συντεταγμενες* $m,n$).

**1.1.2.** Πιο αυστηρα, ενας $M\times N$ πινακας ειναι μια *συναρτηση* με *πεδιο ορισμου* το συνολο $\{1,2,...,M\}\times\{1,2,...,N\}$ και *πεδιο τιμων* το $\mathbb{R}$:

$$\mathbf{A}:\{1,2,...,M\}\times\{1,2,...,N\}\rightarrow\mathbb{R}.$$

Δηλ. σε καθε ζευγαρι $(m,n)\in\{1,2,...,M\}\times\{1,2,...,N\}$ αντιστοιχιζουμε εναν αριθμο $a_{mn}$, που ειναι το *στοιχειο* του πινακα στην θεση με *συντεταγμενες* $m,n$.

**1.1.3.** Ο παραπανω ορισμος του πινακα μπορει να *γενικευτει*. Π.χ. τα στοιχεια του πινακα μπορει να ειναι *μιγαδικοι* αριθμοι[1].

**1.1.4.** Για το τυχον στοιχειο $a_{mn}$ του πινακα , λεμε οτι $m$ ειναι ο *δεικτης γραμμης* και $n$ ειναι ο *δεικτης στηλης*.

**1.1.5.** Οταν ο $\mathbf{A}$ εχει $M$ γραμμες και $N$ στηλες, λεμε οτι εχει *διασταση* $M\times N$.

[1] Θα εξετασουμε αυτην και αλλες γενικευσεις στο Κεφαλαιο 11.

**1.1.6.** Οταν ο $\mathbf{A}$ εχει διασταση $N \times N$ (δηλ. ισο αριθμο γραμμων και στηλων) τοτε λεμε οτι ειναι *τετραγωνικος*.

**1.1.7.** Δυο $M \times N$ πινακες $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ ειναι *ισοι* (γραφουμε $\mathbf{A} = \mathbf{B}$) ανν για $m \in \{1, ..., M\}$ και $n \in \{1, ..., N\}$ ισχυει $m_{mn} = b_{mn}$.

**1.1.8.** Οταν ο $\mathbf{A}$ εχει 1 στηλη (εχει διασταση $M \times 1$) λεμε οτι ειναι *πινακας-στηλη*:

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{c} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{M1} \end{array} \right].$$

**1.1.9.** Οταν ο $\mathbf{A}$ εχει 1 γραμμη (εχει διασταση $1 \times N$) λεμε οτι ειναι *πινακας-γραμμη*:

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \end{array} \right].$$

**1.1.10.** Οι πινακες-γραμμες και οι πινακες-στηλες λεγονται και *διανυσματα*.

**1.1.11.** Μπορουμε να γραψουμε ενα πινακα ως συνδυασμο των γραμμων του:

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{c} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \dots \\ \mathbf{r}_M \end{array} \right],$$

οπου (για $m \in \{1, ..., M\}$ ):

$$\mathbf{r}_m = \left[ \begin{array}{cccc} a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mN} \end{array} \right].$$

**1.1.12.** Επισης μπορουμε να γραψουμε τον πινακα ως συνδυασμο των στηλων του:

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{cccc} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \dots & \mathbf{c}_N \end{array} \right],$$

οπου (για $n \in \{1, ..., N\}$ ):

$$\mathbf{c}_n = \left[ \begin{array}{c} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{Mn} \end{array} \right].$$

**1.1.13.** Η *προσθεση πινακων* οριζεται ως εξης. Εστω οτι εχουμε πινακες $\mathbf{A}$ (διαστασης $M \times N$) και $\mathbf{B}$ (διαστασης $M \times N$). Τοτε

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})_{mn} = a_{mn} + b_{mn} \qquad (\mathbf{A} - \mathbf{B})_{mn} = a_{mn} - b_{mn}.$$

**Προσοχη!** Η προσθεση $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ ειναι δυνατη μονο αν οι $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ εχουν ιδιες διαστασεις!

**1.1.14.** Ενας πινακας $\mathbf{A}$ με διαστασεις $M \times N$, λεγεται *μηδενικος* ανν για $m = 1, 2, ..., M$, $n = 1, 2, ..., N$ εχουμε $a_{mn} = 0$, δηλ.

$$\mathbf{0}_{M,N} = \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & 0 \end{array} \right].$$

Ο μηδενικος πινακας συμβολιζεται με $\mathbf{0}_{M,N}$ η και απλα με $\mathbf{0}$ (δηλ. οταν η διασταση $M \times N$ προκυπτει απο τα συμφραζομενα, παραλειπεται ο συμβολισμος της)..

**1.1.15.** Ο *πολλαπλασιασμος πινακα επι αριθμο* οριζεται ως εξης:

$$(\kappa \cdot \mathbf{A})_{mn} = \kappa \cdot a_{mn}.$$

**1.1.16.** Για ολους τους πινακες $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ ισχυουν τα εξης (αρκει οι διαστασεις αυτων να ειναι τετοιες ωστε οι πραξεις ειναι δυνατες).

1. $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$. (Το $\mathbf{0}$ ειναι το *ουδετερο στοιχειο* της προσθεσης).
2. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$. (*Αντιμεταθετικοτητα.*)
3. $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$. (*Προσεταιριστικοτητα.*)
4. $\mathbf{A} + ((-1) \cdot \mathbf{A}) = ((-1) \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} = \mathbf{0}$. (Ο *αντιθετος* του $\mathbf{A}$ ειναι ο $-\mathbf{A} = (-1) \cdot \mathbf{A}$.)
5. $\kappa \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \kappa \cdot \mathbf{A} + \kappa \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \kappa$. (*Επιμεριστικοτητα.*)
6. $(\kappa + \lambda) \cdot \mathbf{A} = \kappa \cdot \mathbf{A} + \lambda \cdot \mathbf{A}$.(*Επιμεριστικοτητα.*)
7. $(\kappa \cdot \lambda) \cdot \mathbf{A} = \kappa \cdot (\lambda \cdot \mathbf{A})$.

**1.1.17.** Ο *πολλαπλασιασμος πινακα επι πινακα* οριζεται ως εξης. Εστω οτι εχουμε πινακες $\mathbf{A}$ (διαστασης $M \times K$) και $\mathbf{B}$ (διαστασης $K \times N$). Τοτε

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})_{mn} = \sum_{k=1}^{K} a_{mk} b_{kn}.$$

**Προσοχη!** Ο πολλαπλασιασμος $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ειναι δυνατος μονο αν ο αριθμος των στηλων του $\mathbf{A}$ ειναι ισος με αυτο των γραμμων του $\mathbf{B}$!

**1.1.18.** Ενας πινακας $\mathbf{A}$ με διαστασεις $N \times N$, λεγεται *μοναδιαιος* ανν για $m, n = 1, 2, ..., N$ εχουμε $a_{mm} = 1$ και $a_{mn} = 0$ οταν $m \neq n$, δηλ.

$$\mathbf{I}_N = \left[ \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & ... \\ 0 & 0 & 1 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & ... & 1 \end{array} \right].$$

Ο μοναδιαιος πινακας συμβολιζεται με $\mathbf{I}_N$ η και απλα με $\mathbf{I}$ (δηλ. οταν η διασταση $N$ προκυπτει απο τα συμφραζομενα, παραλειπεται ο συμβολισμος της).

**1.1.19.** Για ολους τους πινακες $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ ισχυουν τα εξης (αρκει οι διαστασεις αυτων να ειναι τετοιες ωστε οι πραξεις ειναι δυνατες).

1. $\mathbf{I} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{A}$. (Το $\mathbf{I}$ ειναι το *ουδετερο στοιχειο* του πολλαπλασιασμου πινακων).
2. Υπαρχουν πινακες $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ για τους οποιους $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.
3. $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$. (*Προσεταιριστικοτητα.*)
4. $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$. (*Επιμεριστικοτητα.*)
5. $(\mathbf{B} + \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}$. (*Επιμεριστικοτητα.*)
6. $\kappa \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\kappa \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (\kappa \cdot \mathbf{B})$.
7. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$.

**1.1.20.** Για καθε $N \times N$ (τετραγωνικο) πινακα $\mathbf{A}$, μπορουμε να ορισουμε τις *δυναμεις* του: $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ κ.τ.λ. Συμβατικα οριζουμε $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$. Ισχυουν οι συνηθισμενες ιδιοτητες των δυναμεων: $\mathbf{A}^m \mathbf{A}^n = \mathbf{A}^{m+n}$, $(\mathbf{A}^m)^n = \mathbf{A}^{mn}$. Μπορουμε να επεκτεινουμε τον ορισμο ωστε να εχουμε *αρνητικες ακεραιες* δυναμεις, *κλασματικες* δυναμεις (π.χ. $\mathbf{A}^{1/2}$, την *τετραγωνικη ριζα* του $\mathbf{A}$ κ.ο.κ.[2]).

## 1.2 Λυμενα Προβληματα

**1.2.1.** Ποια ειναι η διασταση των παρακατω πινακων; Ποιοι εξ αυτων ειναι τετραγωνικοι;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = [3], \qquad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

**Απαντηση.** Ο $\mathbf{A}$ ειναι $2 \times 2$, τετραγωνικος· ο $\mathbf{B}$ ειναι $1 \times 2$· ο $\mathbf{C}$ ειναι $2 \times 3$· ο $\mathbf{D}$ ειναι $1 \times 1$, τετραγωνικος· ο $\mathbf{B}$ ειναι $3 \times 1$.

**1.2.2.** Δινεται πινακας

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 6 \\ -8 & 7 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ποια ειναι η τιμη του στοιχειου $a_{11}$; Του $a_{23}$; Του $a_{31}$; Ποιοι ειναι οι δεικτες γραμμης και στηλης του 5; Του $-8$;

**Απαντηση.** $a_{11} = 1$, $a_{23} = 6$, $a_{31} = -8$. Το 5 εχει δεικτη γραμμης 1 και στηλης 2· το $-8$ εχει δεικτη γραμμης 3 και στηλης 1.

**1.2.3.** Οι πινακες

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x & 2 \\ y & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & z \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

ειναι ισοι. Ποιες ειναι οι τιμες των $x, y, z$;

**Απαντηση.** $\mathbf{A} = \mathbf{B} \Rightarrow \forall i, j : a_{ij} = b_{ij}$. Αρα ειναι $x = 3, y = 4$ και $z = 2$.

[2] Αυτα τα θεματα εξεταζονται σε περισσοτερη λεπτομερεια στο Κεφαλαιο **;;**.

**1.2.4.** Συγκρινετε τα ¨διανυσματα¨ της Γραμμικης Αλγεβρας με τα διανυσματα που μας ειναι γνωστα απο τον Διανυσματικο Λογισμο.

**Απαντηση.** Καταρχην τονιζουμε οτι στον Διανυσματικο Λογισμο υπαρχουν *τρια* ειδη διανυσματων: *ελευθερα*, *ολισθαινοντα* και *εφαρμοστα*. Εμεις θα ασχοληθουμε με τα ελευθερα διανυσματα. Ενα ελευθερο διανυσμα ειναι ενα *¨βελος¨* 'η *προσανατολισμενο ευθυγραμμο τμημα* (στο επιπεδο ή στον 3-διαστατο χωρο)· η **θεση** *του ελευθερου διανυσματος δεν ειναι προσδιορισμενη!* Αυτα τα οποια προσδιοριζονται ειναι το μηκος, η φορα και η διευθυνση αυτου.Μπορουμε να πουμε οτι ενα ελευθερο διανυσμα αντιστοιχει σε μια **απειρια** βελων, τα οποια εχουν τηο ιδιο μηκος, φορα και διευθυνση. Δειτε και το σχημα.

**Σχημα 1.2.1**

Οι πληροφοριες αυτες (μηκος, φορα και διευθυνση) προσδιοριζονται πληρως απο δυο αριθμους στον χωρο και τρεις αριθμους στο επιπεδο. Π.χ. στον χωρο, το διανυσμα $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ προσδιοριζεται απο την τριαδα $(x, y, z)$. Αν επιλεξουμε απο την οικογενεια των προσανατολισμενων ευθυγραμμων τμηματων (που αντιστοιχουν στο $\overrightarrow{\mathbf{a}}$) αυτο το οποιο εχει την αρχη του στην αρχη των αξονων $(0, 0, 0)$, τοτε προσδιοριζουμε μονοσημαντα και το περας του $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, το οποιο ειναι ενα σημειο με συντεταγμενες $(x, y, z)$. Γραφουμε $\overrightarrow{\mathbf{a}} = (x, y, z)$ και εχουμε μια 1-προς-1 αντιστοιχια μεταξυ ελευθερων διανυσματων και σημειων. *Θυμομαστε ομως οτι σε αυτη την αντιστοιχια καθε προσανατολισμενο ευθυγραμμο τμημα παραλληλο σε αυτο που εχει αρχη το* $(0, 0, 0)$ *και περας το* $(x, y, z)$ *ταυτιζεται επισης με το σημειο* $(x, y, z)$.

Στην Γραμμικη Αλγεβρα ενα διανυσμα ειναι ενας πινακας. Αν εχουμε το διανυσμα $\overrightarrow{\mathbf{a}} = (x, y, z)$ και κατασκευασουμε τον πυνακα

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

με $a_1 = x$, $a_2 = y$, $a_3 = z$, τοτε το διανυσμα $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ και ο πινακας $\mathbf{a}$ ταυτιζονται. Μπορουμε ομως να ταυτισουμε το $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ και με τον πινακα $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$. Με αλλα λογια, καθε διανυσμα μπορει να ταυτιστει ειτε με εναν πινακα-στηλη ειτε με εναν πινακα-γραμμη· οποιοσδηποτε απο τους δυο πινακες μπορει να ταυτιστει με ενα σημειο (το περας του $\mathbf{a}$ οταν η αρχη αυτου βρισκεται στην αρχη των αξονων). Απο εδω και περα θα χρησιμοποιουμε τον συμβολισμο $\mathbf{a}$ για να δηλωσουμε οποιοδηποτε απο τα εξης: το διανυσμα, το σημειο, τον πινακα-γραμμη ή τον πινακα-στηλη.[3]

**1.2.5.** Γραψτε τον πινακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

με συμβολισμο γραμμων και συμβολισμο στηλων. Το ιδιο για τον πινακα

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 & 3 \\ 6 & -2 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

[3] Το αν ο $\mathbf{a}$ ειναι πινακας-γραμμη ή στηλη θα προκυπτει απο τα συμφραζομενα.

**Απαντηση.** Θετουμε

$$\mathbf{r}_1 = \left[\begin{array}{ccc} 4 & 2 & 3 \end{array}\right], \quad \mathbf{r}_2 = \left[\begin{array}{ccc} -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

και εχουμε

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{array}\right].$$

Θετουμε τωρα

$$\mathbf{c}_1 = \left[\begin{array}{r} 4 \\ -2 \end{array}\right], \quad \mathbf{c}_2 = \left[\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array}\right], \quad \mathbf{c}_3 = \left[\begin{array}{c} 3 \\ 0 \end{array}\right]$$

και εχουμε $\mathbf{A} = [\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3]$.

**1.2.6.** Δινονται οι πινακες

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{array}\right], \qquad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{cr} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{array}\right], \qquad \mathbf{C} = \left[\begin{array}{crc} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Υπολογιστε τα $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $\mathbf{A}-\mathbf{B}$, $\mathbf{A}+\mathbf{C}$.

**Απαντηση.**

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{cr} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1+1 & 2+2 \\ 4+3 & 3-1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 7 & 2 \end{array}\right].$$

$$\mathbf{A}-\mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{array}\right] - \left[\begin{array}{cr} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1-1 & 2-2 \\ 4-3 & 3+1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{array}\right].$$

Η προσθεση $\mathbf{A}+\mathbf{C}$ δεν ειναι δυνατη.

**1.2.7.** Αποδειξτε οτι $\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A}$.

**Απαντηση.** Εχουμε για καθε $m, n$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{0})_{mn} = (\mathbf{A})_{mn} + (\mathbf{0})_{mn} = a_{mn} + 0 = a_{mn} = (\mathbf{A})_{mn}.$$

Αφου αυτο ισχυει για καθε $m, n$, εχουμε $\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A}$.

**1.2.8.** Αποδειξτε οτι $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$.

**Απαντηση.** Εχουμε για καθε $m, n$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{mn} = (\mathbf{A})_{mn} + (\mathbf{B})_{mn} = a_{mn} + b_{mn} = b_{mn} + a_{mn} = (\mathbf{B}+\mathbf{A})_{mn}.$$

Αφου αυτο ισχυει για καθε $m, n$, εχουμε $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$.

**1.2.9.** Αποδειξτε οτι $\kappa\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \kappa\cdot\mathbf{A}+\kappa\cdot\mathbf{B} = (\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\kappa$.

**Απαντηση.** Εχουμε για καθε $m, n$

$$\begin{aligned}(\kappa\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}))_{mn} &= \kappa\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{mn} = \kappa\cdot((\mathbf{A})_{mn} + (\mathbf{B})_{mn}) \\ &= \kappa\cdot a_{mn} + \kappa\cdot b_{mn} = (\kappa\cdot\mathbf{A})_{mn} + (\kappa\cdot\mathbf{B})_{mn}.\end{aligned}$$

Αφου αυτο ισχυει για καθε $m, n$, εχουμε $\kappa\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \kappa\cdot\mathbf{A}+\kappa\cdot\mathbf{B}$.

**1.2.10.** Δινονται οι πινακες

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Υπολογιστε τα **AB, BA, AC, CA**.

**Απαντηση.**

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 & 1\cdot 2 + 2\cdot(-1) \\ 4\cdot 1 + 3\cdot 3 & 4\cdot 2 + 3\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 13 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \text{ ειναι διαφορο του } \mathbf{AB}.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{AC} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot 3 & 1\cdot(-1) + 2\cdot 1 & 1\cdot 3 + 2\cdot 2 \\ 4\cdot 2 + 3\cdot 3 & 4\cdot(-1) + 3\cdot 1 & 4\cdot 3 + 3\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 7 \\ 17 & -1 & 18 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ο πολλαπλασιασμος **CA** δεν μπορει να γινει.

**1.2.11.** Αποδειξτε οτι $\mathbf{I}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{I} = \mathbf{A}$

**Απαντηση.** Θα δειξουμε οτι για καθε $m, n$ εχουμε $(\mathbf{I}\cdot\mathbf{A})_{mn} = (\mathbf{A})_{mn}$. Πραγματι

$$(\mathbf{I}\cdot\mathbf{A})_{mn} = \sum_{k=1}^{N} i_{mk} a_{kn} = i_{mm} a_{mn} = 1\cdot a_{mn} = a_{mn} = (\mathbf{A})_{mn}.$$

Χρησιμοποιησαμε το γεγονος οτι $i_{mk} = 0$ για $m \neq k$.

Παρομοια δειχνουμε οτι για καθε $m, n$ εχουμε $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{I})_{mn} = (\mathbf{A})_{mn}$.

**1.2.12.** Βρειτε δυο πινακες $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ για τους οποιους $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$.

**Απαντηση.** Τετοιοι ειναι, π.χ., οι πινακες $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ του προβληματος 1.2.10.

**1.2.13.** Βρειτε δυο πινακες $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ για τους οποιους $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$.

**Απαντηση.** Π.χ. για τους πινακες

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},$$

εχουμε

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \mathbf{BA}.$$

Δεν ειναι αναγκη να ειναι και οι δυο πινακες διαγωνιοι. Π.χ., για τους πινακες

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

εχουμε

$$\mathbf{CD} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} = \mathbf{DC}.$$

Μπορειτε να βρειτε *δυο* μη διαγωνιους πινακες $\mathbf{E}, \mathbf{F}$ τ.ω. $\mathbf{EF} = \mathbf{FE}$;

**1.2.14.** Βρειτε μια αναγκαια και ικανη συνθηκη ωστε να ισχυει

$$(\mathbf{A}-\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\mathbf{A}^2-\mathbf{B}^2.$$

**Απαντηση.** Εχουμε $(\mathbf{A}-\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\mathbf{A}^2+\mathbf{AB}-\mathbf{BA}-\mathbf{B}^2$. Για να ειναι λοιπον $(\mathbf{A}-\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\mathbf{A}^2-\mathbf{B}^2$ πρεπει και αρκει να ειναι $\mathbf{AB}-\mathbf{BA}=\mathbf{0}$, δηλ. $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$, δηλ. οι πινακες να αντιμετατιθενται.

**1.2.15.** Αποδειξτε οτι $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$

**Απαντηση.** Εστω οτι οι διαστασεις των $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ ειναι $K\times L$, $L\times M$, $M\times N$ αντιστοιχα. Εχουμε, για καθε $k,n$:

$$(\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}))_{kn}=\sum_{l=1}^{L}\mathbf{A}_{kl}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})_{ln}=\sum_{l=1}^{L}\mathbf{A}_{kl}\cdot\left(\sum_{m=1}^{M}\mathbf{B}_{lm}\cdot\mathbf{C}_{mn}\right)=\sum_{l=1}^{L}\sum_{m=1}^{M}\mathbf{A}_{kl}\cdot\mathbf{B}_{lm}\cdot\mathbf{C}_{mn},$$

$$((\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C})_{kn}=\sum_{m=1}^{M}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})_{km}\cdot\mathbf{C}_{mn}=\sum_{m=1}^{M}\left(\sum_{l=1}^{L}\mathbf{A}_{kl}\cdot\mathbf{B}_{lm}\right)\cdot\mathbf{C}_{mn}=\sum_{m=1}^{M}\sum_{l=1}^{L}\mathbf{A}_{kl}\cdot\mathbf{B}_{lm}\cdot\mathbf{C}_{mn}.$$

Ομως

$$\sum_{l=1}^{L}\sum_{m=1}^{M}\mathbf{A}_{kl}\cdot\mathbf{B}_{lm}\cdot\mathbf{C}_{mn}=\sum_{m=1}^{M}\sum_{l=1}^{L}\mathbf{A}_{kl}\cdot\mathbf{B}_{lm}\cdot\mathbf{C}_{mn},$$

δηλ. μπορουμε να αλλαξουμε την σειρα της προσθεσης (να προσθεσουμε ειτε πρωτα ως προς $m$ και μετα ως προς $l$ ειτε, αντιστροφα, πρωτα ως προς $l$ και μετα ως προς $m$. Αυτο συμβαινει γιατι, και στις δυο περιπτωσεις, προσθετουμε τους ιδιους αριθμους.

**1.2.16.** Δινονται $N\times N$ πινακες $\mathbf{A},\mathbf{B}$. Ο *αντιμεταθετης* του ζευγους $(\mathbf{A},\mathbf{B})$ ειναι ο πινακας $[\mathbf{A},\mathbf{B}]=\mathbf{AB}-\mathbf{BA}$. Δειξτε οτι

$$[\mathbf{A},\mathbf{B}]=-[\mathbf{B},\mathbf{A}] \text{ και } [\mathbf{A},[\mathbf{B},\mathbf{C}]]+\mathbf{B},[\mathbf{C},\mathbf{A}]+[\mathbf{C},[\mathbf{A},\mathbf{B}]]=\mathbf{0}.$$

**Απαντηση.** Εχουμε

$$[\mathbf{A},\mathbf{B}]=\mathbf{AB}-\mathbf{BA}=-(\mathbf{AB}-\mathbf{BA})=-[\mathbf{B},\mathbf{A}].$$

Επισης εχουμε

$$[\mathbf{A},[\mathbf{B},\mathbf{C}]]=[\mathbf{A},[\mathbf{BC}-\mathbf{CB}]]=[\mathbf{A},[\mathbf{BC}]]-[\mathbf{A},[\mathbf{CB}]]=\mathbf{ABC}-\mathbf{BCA}-\mathbf{ACB}+\mathbf{CBA}.$$

Αντιστοιχα παιρνουμε

$$\begin{aligned}[\mathbf{B},[\mathbf{C},\mathbf{A}]]&=\mathbf{BCA}-\mathbf{CAB}-\mathbf{BAC}+\mathbf{ACB},\\ [\mathbf{C},[\mathbf{A},\mathbf{B}]]&=\mathbf{CAB}-\mathbf{ABC}-\mathbf{CBA}+\mathbf{BAC}.\end{aligned}$$

Οποτε

$$[\mathbf{A},[\mathbf{B},\mathbf{C}]]+\mathbf{B},[\mathbf{C},\mathbf{A}]+[\mathbf{C},[\mathbf{A},\mathbf{B}]]=$$

$$\begin{aligned}&\mathbf{ABC}-\mathbf{BCA}-\mathbf{ACB}+\mathbf{CBA}+\\ &\mathbf{BCA}-\mathbf{CAB}-\mathbf{BAC}+\mathbf{ACB}+\\ &\mathbf{CAB}-\mathbf{ABC}-\mathbf{CBA}+\mathbf{BAC}\\ &=\mathbf{0}.\end{aligned}$$

**1.2.17.** Δινεται το *συστημα γραμμικων εξισωσεων*

$$\begin{aligned} 5x - 3y + z &= 2 \\ 2x + y - 3z &= -1 \\ 7x + z &= 8 \end{aligned}$$

Γραψτε το συστημα αυτο ως *μια* εξισωση πινακων.

**Απαντηση.** Μπορουμε ευκολα να ελεγξουμε οτι το συστημα ειναι ισοδυναμο με την εξισωση

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x - 3y + z \\ 2x + y - 3z \\ 7x + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Αν λοιπον θεσουμε

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix},$$

τοτε το αρχικο συστημα ειναι ισοδυναμο με την εξισωση $\mathbf{Au} = \mathbf{b}$, οπου $\mathbf{u}$ ειναι ο αγνωστος *πινακας* και $\mathbf{A}, \mathbf{b}$ ειναι γνωστοι συντελεστες.

**1.2.18.** Σε ενα ζαχαροπλαστειο κατασκευαζονται τρια ειδη γλυκισματων. Τα συστατικα (σε $kgr$) για ενα κεικ του καθε τυπου ειναι ως εξης:

| | Αλευρι | Ζαχαρη | Βουτυρο | Καρυδια | Σταφιδες |
|---|---|---|---|---|---|
| Κεικ | 0.500 | 0.100 | 0.050 | 0.000 | 0.000 |
| Σταφιδοψωμο | 0.500 | 0.150 | 0.050 | 0.000 | 0.050 |
| Παντεσπανι | 0.800 | 0.200 | 0.100 | 0.050 | 0.050 |

.

Και οι τιμες ανα $kgr$ των συστατικων (σε $Euro$) ειναι

| Αλευρι | Ζαχαρη | Βουτυρο | Καρυδια | Σταφιδες |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 5 | 10 | 20 | 25 |

.

Χρησιμοποιειστε πολλαπλασιασμο πινακων για να βρειτε το κοστος ενος κεικ του καθε τυπου.

**Απαντηση.** Μπορουμε να υπολογισουμε το κοστος ενος τεμαχιου του καθε τυπου γλυκισματος ως εξης (χωρις χρηση πινακων):

$$\begin{aligned} \text{Κεικ} &: 0.500 \cdot 3 + 0.100 \cdot 5 + 0.050 \cdot 10 + 0.000 \cdot 20 + 0.000 \cdot 25 = 2.500, \\ \text{Σταφιδοψωμο} &: 0.500 \cdot 3 + 0.150 \cdot 5 + 0.050 \cdot 10 + 0.000 \cdot 20 + 0.050 \cdot 25 = 4.000, \\ \text{Παντεσπανι} &: 0.800 \cdot 3 + 0.200 \cdot 5 + 0.100 \cdot 10 + 0.050 \cdot 20 + 0.050 \cdot 25 = 6.650. \end{aligned}$$

Αυτες οι πραξεις θυμιζουν σαφως πολλαπλασιασμο πινακων. Πραγματι, αν ορισουμε πινακες

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.500 & 0.100 & 0.050 & 0.000 & 0.000 \\ 0.500 & 0.150 & 0.050 & 0.000 & 0.050 \\ 0.800 & 0.200 & 0.100 & 0.050 & 0.050 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \\ 20 \\ 25 \end{bmatrix},$$

τοτε ο πολλαπλασιασμος πινακων

$$\mathbf{Ab} = \left[\begin{array}{ccccc} 0.500 & 0.100 & 0.050 & 0.000 & 0.000 \\ 0.500 & 0.150 & 0.050 & 0.000 & 0.050 \\ 0.800 & 0.200 & 0.100 & 0.050 & 0.050 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 3 \\ 5 \\ 10 \\ 20 \\ 25 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 2.50 \\ 4.00 \\ 6.65 \end{array}\right]$$

δινει σε ενα διανυσμα την τιμη ενος τεμαχιου του καθε τυπου γλυκισματος.

**1.2.19.** Στο παρακατω σχημα βλεπουμε την κατοψη ενος σπιτιου· σε καθε δωματιο αντιστοιχιζουμε ενα αριθμο. Μια *διαδρομη* μεσα στο σπιτι ειναι μια σειρα αριθμων που δειχνουν απο ποια δωματια περναμε. Π.χ. η διαδρομη $5261$ δειχνει οτι παμε απο το δωματιο 5 στο 2, μετα στο 6 και καταληγουμε στο 1. Η συγκεκριμενη διαδρομη εχει *μηκος* 4, δηλ. περναει απο τεσσερα δωματια. Χρησιοποιειστε τον πολλαπλασιασμο πινακων για να βρειτε τον συνολικο αριθμο διαδρομων μηκους 3 απο τον χωρο 1 στον χωρο 3. Το ιδιο για να βρειτε τον συνολικο αριθμο διαδρομων μηκους 3 απο τον χωρο 5 στον χωρο 2.

**Σχημα 1.2.2**

**Απαντηση.** Μπορουμε να αναπαραστησουμε την *συνδεσμολογια* του σπιτιου με τον παρακατω *γραφο*. Καθε δωματιο αντιστοιχει σε ενα *κομβο* (κυκλο) και αν τα αντιστοιχα δωματια επικοινωνουν, τοτε οι κομβοι συνδεονται με *ακμες* (γραμμες).

**Σχημα 1.2.3**

Μπορουμε επισης να παραστησουμε την συνδεσμολογια του γραφου με ενα *πινακα γειτνιασης* της παρακατω μορφης

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Τα στοιχεια του $\mathbf{A}$ ειναι $0$ η $1$. Εχουμε $a_{mn} = 1$ ανν τα δωματια $m$ και $n$ επικοινωνουν *απ' ευθειας*, και $a_{mn} = 0$ στην αντιθετη περιπτωση. Βλεπουμε οτι ο $\mathbf{A}$ ειναι συμμετρικος – αυτο δεν ειναι τυχαιο, μπορειτε να εξηγησετε γιατι ισχυει;

Καθε μια απο τις αναπαραστασεις (αυτη του Σχηματος 1.2.2, αυτη του γραφου του Σχηματος 1.2.3 και αυτη του πινακα γειτνιασης $\mathbf{A}$) μεταφερουν ακριβως την ιδια πληροφορια σχετικα με την συνδεσμολογια των δωματιων. Απο την κατασκευη του $\mathbf{A}$ βλεπουμε οτι καθε διαδρομη μηκους 1 μεταξυ καθε ζευγους δωματιων εμφανιζεται στον $\mathbf{A}$. Τι συμβαινει ομως με τις διαδρομες μηκους, π.χ., $2$; Θεωρειστε το γινομενο της πρωτης σειρας και της τεταρτης στηλης του **A**:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2.$$

Μπορειτε να ελεγξετε οτι το αποτελεσμα, 2, ειναι ισο με τον αριθμο των διαδρομων μηκους 2 που αρχιζουν στο δωματιο 1 και καταληγουν στο 4. Αυτο δεν ειναι τυχαιο, οπως θα εξηγησουμε τωρα. Θεωρειστε το γινομενο της $m$-στης σειρας επι την $n$-στη στηλη του **A**. Αυτο θα ειναι το $(m, n)$ στοιχειο του $\mathbf{A}^2$:

$$\left(\mathbf{A}^2\right)_{mn} = \sum_{k=1}^{7} a_{mk} a_{kn}.$$

Εστω οτι το αποτελεσμα ειναι $x$ (ενας μη αρνητικος ακεραιος αριθμος). Αυτο σημαινει οτι στο παραπανω αθροισμα υπαρχουν ακριβως $x$ οροι $a_{mk}a_{kn}$ ισοι με 1, το οποιο με την σειρα του σημαινει οτι $a_{mk}a_{kn} = 1$, το οποιο σημαινει οτι $a_{mk} = a_{kn} = 1$ και τελικα αυτο σημαινει οτι το $m$-στο δωματιο επικοινωνει με το $k$-στο και το $k$-στο δωματιο επικοινωνει με το $n$-στο· δηλ. τελικα, οτι υπαρχει μια διαδρομη μηκους 2 απο το $m$-στο δωματιο στο $n$-στο. Ο δε ορος $\left(\mathbf{A}^2\right)_{mn} = \sum_{k=1}^{7} a_{mk}a_{kn}$ αθροιζει *ολες* τις διαδρομες μηκους 2 απο το $m$-στο δωματιο στο $n$-στο. Ετσι λοιπον, για καθε $(m, n)$ το στοιχειο $\left(\mathbf{A}^2\right)_{mn}$ περιεχει τον *συνολικο* αριθμο διαδρομων μηκους 2 απο το $m$-στο δωματιο στο $n$-στο. Μπορειτε να το ελγξετε αυτο συγκρινοντας τον γραφο με το γινομενο:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Μπορουμε να επεκτεινουμε τον συλλογισμο για τις δυναμεις $\mathbf{A}^j$, $j = 1, 2, 3, \ldots$ . Π.χ.

$$\mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 & 2 & 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 2 & 2 & 4 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 5 & 5 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 7 & 2 & 4 & 5 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

και ετσι βλεπουμε οτι ο συνολικος αριθμος διαδρομων μηκους 3 απο τον χωρο 1 στον χωρο 3 ειναι 7 και απο τον χωρο 5 στον χωρο 2 ειναι 4. Μπορειτε να ελεγξετε την κατοψη του σπιτιου για να βεβαιωθειτε οτι αυτο ισχυει πραγματικα.

**1.2.20.** Δειξτε οτι

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2N} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{M1} & ... & ... & a_{MN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ ... \\ \kappa_N \end{bmatrix} = \kappa_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{M1} \end{bmatrix} + \kappa_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ ... \\ a_{M2} \end{bmatrix} + ... + \kappa_N \begin{bmatrix} a_{1N} \\ a_{2N} \\ ... \\ a_{NN} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

και

$$[\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad ... \quad \mathbf{a}_N] \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ ... \\ \kappa_N \end{bmatrix} = \kappa_1 \mathbf{a}_1 + \kappa_2 \mathbf{a}_2 + ... + \kappa_N \mathbf{a}_N. \tag{1.2}$$

**Απαντηση.** Εχουμε

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2N} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{M1} & ... & ... & a_{MN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ ... \\ \kappa_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_1 a_{11} + \kappa_2 a_{12} + ... + \kappa_N a_{1N} \\ \kappa_1 a_{21} + \kappa_2 a_{22} + ... + \kappa_N a_{2N} \\ ... \\ \kappa_1 a_{M1} + \kappa_2 a_{M2} + ... + \kappa_N a_{MN} \end{bmatrix}$$

$$= \kappa_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{M1} \end{bmatrix} + \kappa_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ ... \\ a_{M2} \end{bmatrix} + ... + \kappa_N \begin{bmatrix} a_{1N} \\ a_{2N} \\ ... \\ a_{NN} \end{bmatrix}$$

Ετσι εχουμε αποδειξει την (1.1). Η (1.2) ειναι απλα μια ισοδυναμη γραφη της (1.1).

**1.2.21.** Δειξτε οτι

$$\begin{bmatrix} \kappa_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \kappa_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & \kappa_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2N} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{N1} & ... & ... & a_{NN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_1 a_{11} & \kappa_1 a_{12} & ... & \kappa_1 a_{1N} \\ \kappa_2 a_{21} & \kappa_2 a_{22} & ... & \kappa_2 a_{2N} \\ ... & ... & ... & ... \\ \kappa_N a_{N1} & ... & ... & \kappa_N a_{NN} \end{bmatrix}. \tag{1.3}$$

**Απαντηση.** Εχουμε για καθε $m, n$:

$$\left( \begin{bmatrix} \kappa_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \kappa_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & \kappa_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2N} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{N1} & ... & ... & a_{NN} \end{bmatrix} \right)_{mn}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & ... & 0 & \kappa_m & 0 & ... & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1n} \\ ... \\ a_{m-1,n} \\ a_{mn} \\ a_{m+1,n} \\ ... \\ a_{mN} \end{bmatrix} = \kappa_m a_{mn}$$

και αυτο αποδεικνυει την (1.3).

## 1.3 Αλυτα Προβληματα

**1.3.1.** Υπολογιστε την διασταση των παρακατω πινακων.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1+i & 2-1 \\ 3 & -i \end{bmatrix}.$$

**Απ.** $2 \times 2$, $2 \times 3$, $1 \times 2$, $2 \times 1$, $2 \times 2$.)

**1.3.2.** Γραψτε τον πινακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

με συμβολισμο γραμμων και συμβολισμο στηλων.

**1.3.3.** Οι πινακες

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x & y \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ z & u \end{bmatrix}$$

ειναι ισοι. Ποιες ειναι οι τιμες των $x, y, z, u$;

**Απ.** $x = 3$, $y = 9$, $z = 4$, $u = 1$.

**1.3.4.** Υπολογιστε το $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ και το $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ για τους πινακες

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Απ.** $\begin{bmatrix} 0 & 7 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$

**1.3.5.** Υπολογιστε το $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ και το $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ για τους πινακες

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

**Απ.** Οι πραξεις αυτες δεν ειναι δυνατες.

**1.3.6.** Δινονται οι πινακες

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Υπολογιστε τους $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BA}$, $\mathbf{CD}$, $\mathbf{DC}$.

**Απ.** $\begin{bmatrix} 17 & 11 \\ 33 & 29 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 16 & 25 \\ 14 & 30 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -4 & 15 \\ -9 & 3 & -8 \\ 17 & 0 & 29 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 27 & 14 & 19 \\ 5 & 7 & 4 \\ 13 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$

**1.3.7.** Δινονται οι πινακες

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&5\\4&2\end{bmatrix},\qquad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{bmatrix},\qquad \mathbf{D}=\begin{bmatrix}3&-2&4\\7&4&5\\3&2&1\end{bmatrix}.$$

Υπολογιστε τους $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BA}$, $\mathbf{CD}$, $\mathbf{DC}$. Τι παρατηρειτε;

**Απ.** $\begin{bmatrix}2&10\\8&4\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}2&10\\8&4\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}12&-8&16\\21&12&15\\6&4&2\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}12&-6&8\\28&12&10\\12&6&2\end{bmatrix}$.

**1.3.8.** Δινονται οι πινακες

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{bmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}6&3&4\\-1&1&8\\8&0&4\end{bmatrix}.$$

Υπολογιστε τους $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BA}$. Τι παρατηρειτε;

**Απ.** $\begin{bmatrix}24&12&16\\-3&3&24\\16&0&8\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}24&9&8\\-4&3&16\\32&0&8\end{bmatrix}$ **.**

**1.3.9.** Αποδειξτε (οταν οι παρακατω πραξεις ειναι δυνατες) οτι

$$\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}.$$

**1.3.10.** Αποδειξτε οτι

$$(\kappa+\lambda)\cdot\mathbf{A}=\kappa\cdot\mathbf{A}+\lambda\cdot\mathbf{A}.,\qquad (\kappa\cdot\lambda)\cdot\mathbf{A}=\kappa\cdot(\lambda\cdot\mathbf{A}).$$

**1.3.11.** Αποδειξτε (οταν οι παρακατω πραξεις ειναι δυνατες) οτι

$$\kappa\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=(\kappa\cdot\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}.$$

**1.3.12.** Αποδειξτε οτι $\mathbf{A}\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{0}$.

**1.3.13.** Αποδειξτε οτι $(\mathbf{A}+\mathbf{I})\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{I})=\mathbf{A}^2+2\mathbf{A}+\mathbf{I}$.

**1.3.14.** Αποδειξτε οτι, γενικα, δεν ισχυει $(\mathbf{A}+\mathbf{I})\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{I})=(\mathbf{A}+\mathbf{I})\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{I})$. Ποτε ισχυει η ισοτητα;

**1.3.15.** Δειξτε με ενα παραδειγμα οτι, γενικα, $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})\neq\mathbf{A}^2+2\mathbf{AB}+\mathbf{B}^2$.

**1.3.16.** Οριζω

$$\mathbf{A}(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$$

Δειξτε οτι $\mathbf{A}(\theta)\mathbf{A}(\phi)=\mathbf{A}(\theta+\phi)$.

**1.3.17.** Δινεται ο πινακας

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Δειξτε οτι για καθε

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

εχουμε

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} b_{12} & b_{11} & b_{13} \\ b_{22} & b_{21} & b_{23} \\ b_{32} & b_{31} & b_{33} \end{bmatrix}.$$

Διατυπωστε τις παραπανω ισοτητες με λογια.

**1.3.18.** Δινεται $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$ ο οποιος προκυπτει απο τον $N \times N$ μοναδιαιο πινακα $\mathbf{I}$, με εναλλαγη των γραμμων $i$ και $j$. Δινεται επισης τυχον $N \times N$ πινακας $\mathbf{B}$. Δειξτε οτι ο $\mathbf{AB}$ ειναι ο $\mathbf{B}$ με εναλλαγη των γραμμων $i$ και $j$· επισης οτι ο $\mathbf{BA}$ ειναι ο $\mathbf{B}$ με εναλλαγη των στηλων $i$ και $j$.

**1.3.19.** Βρειτε ολους τους πινακες $\mathbf{A}$ τετοιους ωστε

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Απ**. Υπαρχουν δυο τετοιοι πινακες: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1/2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

**1.3.20.** Εστω $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$.Οριζουμε το *ιχνος* αυτου

$$tr\left(\mathbf{A}\right) = \sum_{n=1}^{N} a_{nn}.$$

Αν $\mathbf{B}$ ειναι $M \times N$ και $\mathbf{C}$ ειναι $N \times M$, δειξτε οτι $tr\left(\mathbf{BC}\right) = tr\left(\mathbf{CB}\right)$.

**1.3.21.** Αν $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ ειναι $N \times N$ πινακες, δειξτε οτι η σχεση $\mathbf{AB} - \mathbf{BA} = \mathbf{I}$ ειναι αδυνατη.

**1.3.22.** Δινεται το *συστημα γραμμικων εξισωσεων*

$$\begin{aligned} x - 3y + z + 2u &= 2 \\ x + y - 3u &= -1 \\ 7x + z + u &= 0 \end{aligned}$$

Γραψτε το συστημα αυτο ως *μια* εξισωση πινακων.

**Απ**.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \\ 7 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**1.3.23.** Βρειτε στο παρακατω σχημα ποσες διαδρομες υπαρχουν πουν συνδεουν τον χωρο 1 με τον χωρο 3 και εχουν μηκος 4.

**Σχημα 1.2.2**

**1.3.24.** Τι μαθατε απο τα προβληματα 1.2.17, 1.2.18, 1.2.19;

# Κεφάλαιο 2

# Αντιστροφος Πινακας και Δυναμεις Πινακων

Εχουμε ηδη πει οτι οι πινακες ειναι ¨γενικευμενοι αριθμοι¨. Στο προηγουμενο κεφαλαιο ειδαμε πως να εκτελουμε πραξεις μεταξυ πινακων (αντιστοιχες με τις πραξεις μεταξυ αριθμων). Στο παρον κεφαλαιο θα δουμε οτι οι *τετραγωνικοι* πινακες, οπως και οι αριθμοι, μπορουν να εφοδιαστουν με *δυναμεις*.

Οπως ακριβως στο συστημα των πραγματικων αριθμων εχουμε $aa^{-1} = 1$, ετσι και για τους *τετραγωνικους* πινακες εχουμε $\mathbf{AA}^{-1}= \mathbf{I}$, οπου $\mathbf{A}^{-1}$ ειναι ο αντιστροφος του $N \times N$ πινακα $\mathbf{A}$. Για να υπαρχει ο αντιστροφος ενος αριθμου $a$, πρεπει να εχουμε $a \neq 0$. Παρομοια, για να εχει ο τετραγωνικος πινακας $\mathbf{A}$ αντιστροφο, πρεπει να ικανοποιειται καποια συνθηκη, η οποια ειναι γενικευση (για το συνολο των τετραγωνικων πινακων) της $a \neq 0$.

Οπως θα φανει και απο τις επομενες προτασεις, **δυναμεις και αντιστροφος οριζονται μονο για τετραγωνικους πινακες!** Καθε πινακας που εμφανιζεται σε αυτο το κεφαλαιο ειναι τετραγωνικος εκτος αν το αντιθετο λεγεται ρητα.

## 2.1 Θεωρια

**2.1.1.** Εστω $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$. Αν υπαρχει $N \times N$ πινακας $\mathbf{B}$ τετοιος ωστε $\mathbf{BA} = \mathbf{AB} = \mathbf{I}$, τοτε ο $\mathbf{B}$ ειναι μοναδικος.

**2.1.2.** Τον μοναδικο πινακα $\mathbf{B}$ που εχει την ιδιοτητα $\mathbf{BA} = \mathbf{AB} = \mathbf{I}$ (αν αυτος υπαρχει!) τον ονομαζουμε *αντιστροφο* του $\mathbf{A}$ και τον συμβολιζουμε με $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}$.

**2.1.3.** Υπαρχουν τετραγωνικοι πινακες που δεν εχουν αντιστροφο. Π.χ. ο μηδενικος πινακας δεν εχει αντιστροφο. Αν υπαρχει ο $\mathbf{A}^{-1}$, ο $\mathbf{A}$ λεγεται *ομαλος*· σε αντιθετη περιπτωση ο $\mathbf{A}$ λεγεται *ανωμαλος* η *ιδιαζων*.

**2.1.4.** Εστω πινακες $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ οι οποιοι εχουν αντιστροφους $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{B}^{-1}$. Ισχυουν τα εξης.

1. $(\mathbf{A}^{-1})^{-1}= \mathbf{A}$ (δηλ. ο αντιστροφος του $\mathbf{A}^{-1}$ ειναι ο $\mathbf{A}$).

2. $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$.

**2.1.5.** Ο γενικος $1 \times 1$ πινακας $\mathbf{A} = [a_{11}]$ εχει τον αντιστροφο $\mathbf{A}^{-1} = \left[a_{11}^{-1}\right]$ ανν $a_{11} \neq 0$· ο $\mathbf{A}$ ειναι ανωμαλος ανν $a_{11} = 0$.

**2.1.6.** Ο γενικος $2 \times 2$ πινακας

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

εχει τον αντιστροφο

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

ανν $a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} \neq 0$· ο $\mathbf{A}$ ειναι ανωμαλος ανν $a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = 0$.

**2.1.7.** Οταν ο $\mathbf{A}$ ειναι $N \times N$, $N \in \{3, 4, ...\}$, ο $\mathbf{A}^{-1}$ μπορει να υπολογιστει ειτε λυνοντας ενα συστημα γραμμικων εξισωσεων, ειτε χρησιμοποιωντας ενα τυπο παρομοιο με τον (2.1) – ομως ο τυπος αυτος εμπλεκει *οριζουσες* και γι' αυτο θα τον παρουσιασουμε στο Κεφαλαιο 4.

**2.1.8.** Δινεται ενας $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$· συμβολιζουμε με $\mathbf{A}^2$ τον πινακα $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ (το *τετραγωνο* του $\mathbf{A}$).

**2.1.9.** Δινεται ενας $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$· συμβολιζουμε με $\mathbf{A}^3$ τον πινακα $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$· λογω προσεταιριστικοτητας εχουμε

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \left(\mathbf{A}^2\right) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \left(\mathbf{A}^2\right).$$

**2.1.10.** Γενικοτερα, για καθε $N \times N$ πινακα $\mathbf{A}$ και για καθε $n \in \{1, 2, ...\}$ οριζουμε την $n$-στη δυναμη του $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}^n = \underbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot .. \cdot \mathbf{A}}_{n \text{ φορες}}.$$

Εξ ορισμου,

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}.$$

**2.1.11.** Οι μη αρνητικες *ακεραιες* δυναμεις των πινακων συμπεριφερονται οπως οι ακεραιες δυναμεις αριθμων. Δηλ. για καθε $N \times N$ πινακα $\mathbf{A}$ εχουμε

$$\forall m, n \in \{0, 1, 2, ...\} : \mathbf{A}^m \cdot \mathbf{A}^n = \mathbf{A}^{m+n}, \qquad (\mathbf{A}^m)^n = \mathbf{A}^{mn}.$$

**2.1.12.** Αν υπαρχει ο $\mathbf{A}^{-1}$ μπορουμε να ορισουμε αρνητικες δυναμεις του $\mathbf{A}$: για $n \in \{1, 2, ...\}$ οριζουμε

$$\mathbf{A}^{-n} = \underbrace{\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot .. \cdot \mathbf{A}^{-1}}_{n \text{ φορες}}.$$

**2.1.13.** Οι *ακεραιες* δυναμεις των πινακων συμπεριφερονται οπως οι ακεραιες δυναμεις αριθμων. Δηλ. για καθε $N \times N$ πινακα $\mathbf{A}$ εχουμε:

$$\forall m, n \in \{0, \pm 1, \pm 2, ...\} : \mathbf{A}^m \cdot \mathbf{A}^n = \mathbf{A}^{m+n}, \qquad (\mathbf{A}^m)^n = \mathbf{A}^{mn}$$

(με την επιφυλαξη οτι ο $\mathbf{A}$ πρεπει να ειναι ομαλος για να εχει αρνητικες δυναμεις).

**2.1.14.** Ενας $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$ λεγεται *ταυτοδυναμος* ανν $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$.

**2.1.15.** Για καθε ταυτοδυναμο πινακα ισχυει $\mathbf{A}^k = \mathbf{A}$ για καθε $k \in \{1, 2, 3...\}$.

**2.1.16.** Ενας $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$ λεγεται *μηδενοδυναμος* ανν υπαρχει $k \in \{1, 2, 3...\}$ τετοιο ωστε $\mathbf{A}^k = \mathbf{0}$. Το μικροτερο τετοιο $k$ το ονομαζουμε *ταξη* του $\mathbf{A}$.

**2.1.17.** Ενας $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$ λεγεται *ενελικτικος* ανν $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$.

## 2.2 Λυμενα Προβληματα

**2.2.1.** Επαληθευστε οτι ο

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

εχει τον αντιστροφο

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση.** Εχουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1\cdot3+2\cdot1}{5} & \frac{-1\cdot2+2\cdot1}{5} \\ \frac{-1\cdot3+3\cdot1}{5} & \frac{(-1)(-2)+3\cdot1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3\cdot1+(-2)\cdot(-1)}{5} & \frac{3\cdot2-2\cdot3}{5} \\ \frac{1\cdot1-1\cdot1}{5} & \frac{1\cdot2+1\cdot3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**2.2.2.** Επαληθευστε οτι ο

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

εχει τον αντιστροφο

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{5}{7} & -2 \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -1 \\ -\frac{1}{7} & -\frac{4}{7} & 2 \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση.** Εχουμε

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{5}{7} & -2 \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -1 \\ -\frac{1}{7} & -\frac{4}{7} & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{5}{7} & -2 \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -1 \\ -\frac{1}{7} & -\frac{4}{7} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**2.2.3.** Υπολογιστε τον αντιστροφο του

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση.** Εστω οτι

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}.$$

Πρεπει να εχουμε

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Εκτελωντας τον παραπανω πολλαπλασιασμο παιρνουμε τις εξισωσεις

$$3x_{11} - 5x_{21} = 1$$
$$-x_{11} + 2x_{21} = 0$$

και

$$\begin{aligned} 3x_{12} - 5x_{22} &= 0 \\ -x_{12} + 2x_{22} &= 1. \end{aligned}$$

Λυνοντας το πρωτο συστημα (με αντικατασταση) εχουμε $x_{11} = 2$ και $x_{21} = 1$· λυνοντας το δευτερο συστημα εχουμε $x_{22} = 3$, $x_{12} = 5$. Αρα

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Αυτο το επαληθευουμε κανοντας τον πολλαπλασιασμο

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**2.2.4.** Υπολογιστε τον αντιστροφο του

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση.** Εστω οτι

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}.$$

Πρεπει να εχουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Εκτελωντας τον παραπανω πολλαπλασιασμο παιρνουμε τις εξισωσεις

$$\begin{aligned} x_{11} + 2x_{31} &= 1 \\ x_{21} - x_{11} + x_{31} &= 0 \\ x_{11} + 2x_{21} &= 0 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} x_{12} + 2x_{32} &= 0 \\ x_{22} - x_{12} + x_{32} &= 1 \\ x_{12} + 2x_{22} &= 0 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} x_{13} + 2x_{33} &= 0 \\ x_{23} - x_{13} + x_{33} &= 0 \\ x_{13} + 2x_{23} &= 1. \end{aligned}$$

Εχουμε τρια συστηματα, το καθενα εκ των οποιων εχει τρεις εξισωσεις και τρεις αγνωστους. Μπορουμε λοιπον να λυσουμε το καθε συστημα ξεχωριστα. Μετα απο αρκετες πραξεις παιρνουμε

$$\begin{aligned} x_{11} &= \frac{1}{4}, \quad x_{21} = -\frac{1}{8}, \quad x_{31} = \frac{3}{8} \\ x_{12} &= -\frac{1}{2}, \quad x_{22} = \frac{1}{4}, \quad x_{32} = \frac{1}{4} \\ x_{13} &= \frac{1}{4}, \quad x_{23} = \frac{3}{8}, \quad x_{33} = -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

οποτε

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}.$$

Μπορουμε λοιπον να υπολογισουμε τον αντιστροφο ενος $3\times 3$ πινακα λυνοντας συστηματα γραμμικων εξισωσεων. Ομως αυτος ο τροπος ειναι επιπονος. Στο Κεφαλαιο 4 θα δουμε εναν γενικο τυπο ο οποιος διευκολυνει τον υπολογισμο του αντιστροφου. Επισης, στα επομενα προβληματα θα δουμε μερικες ειδικες περιπτωσεις υπολογισμου αντιστροφου.

**2.2.5.** Δινονται οι

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Δειξτε οτι ο $\mathbf{A}$ ειναι αντιστροφος του $\mathbf{B}$. Μπορειτε να εξηγησετε διαισθητικα γιατι συμβαινει αυτο; (Υποδειξη: υπολογιστε το γινομενο του με ενα τυχαιο πινακα).

**Απαντηση.** Παρατηρουμε οτι

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Οντως λοιπον $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}$. Γιατι συμβαινει αυτο;

Παιρνουμε τυχοντα πινακα $\mathbf{C}$ και εκτελουμε τον πολλαπλασιασμο

$$\mathbf{CA} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{13} & c_{11} & c_{12} \\ c_{23} & c_{21} & c_{22} \\ c_{33} & c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}.$$

Παρατηρουμε οτι ο πολλαπλασιαζοντας τον $\mathbf{C}$ επι $\mathbf{A}$ εναλλαξαμε τις στηλες του $\mathbf{C}$: η πρωτη στηλη εγινε δευτερη, η δευτερη τριτη και η τριτη πρωτη. Παρομοια παιρνουμε τυχοντα πινακα $\mathbf{D}$ και εκτελουμε τον πολλαπλασιασμο

$$\mathbf{DB} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{12} & d_{13} & d_{11} \\ d_{22} & d_{23} & d_{21} \\ d_{32} & d_{33} & d_{31} \end{bmatrix}.$$

Παρατηρουμε οτι ο πολλαπλασιαζοντας τον $\mathbf{D}$ επι $\mathbf{B}$ εναλλαξαμε τις στηλες του $\mathbf{D}$: η πρωτη στηλη εγινε τριτη, η δευτερη πρωτη και η τριτη δευτερη.

Τι συμβαινει αν εκτελεσουμε και τους δυο πολλαπλασιασμους;

$$\mathbf{CAB} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}.$$

Παιρνουμε τον αρχικο πινακα $\mathbf{C}$. Αυτο δεν ειναι απροσδοκητο, αφου

$$\mathbf{CAB} = \mathbf{CAA}^{-1} = \mathbf{CI} = \mathbf{C}.$$

Αλλα τωρα εχουμε και μια διαισθητικη εξηγηση: η πρωτη στηλη του $\mathbf{C}$ εγινε καταρχην δευτερη (στον πρωτο πολλαπλασιασμο) και κατοπιν η δευτερη εγινε πρωτη, δηλ. επανηλθε στην αρχικη της θεση. Το ιδιο συμβαινει και μετις αλλες στηλες. Ο πινακας $\mathbf{B}$ αντιστρεφει την *μεταθεση* στηλων που προξενει ο πινακας $\mathbf{A}$.

Οι πινακες $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ ειναι *πινακες μεταθεσης* (δες Κεφ. 14). *Καθε* πινακας που προκυπτει απο τον μοναδιαιο πινακα με μεταθεση των στηλων του υλοποιει, με *εκ δεξιων* πολλαπλασιασμο, την αντιστοιχη μεταθεση σε τυχοντα πινακα.

Τι επιδραση εχει σε τυχαιο πινακα ο πολλαπλασιασμος *εξ αριστερων* με ενα πινακα μεταθεσης; Πειραματιστε με τους $\mathbf{A}, \mathbf{B}$.

**2.2.6.** Δειξτε οτι ο

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ειναι αντιστροφος του εαυτου του. Μπορειτε να εξηγησετε διαισθητικα γιατι συμβαινει αυτο;

**Απαντηση.** Πραγματι

$$\mathbf{AA} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

δηλ. $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$ (ο $\mathbf{A}$ ειναι *αυτοαντιστροφος*). Διασθητικα, ο $\mathbf{A}$ εναλλασσει την πρωτη και δευτερη στηλη καθε $3 \times 3$ πινακα· αν αυτο επαναληφθει δυο φορες παιρνουμε τον αρχικο πινακα.

**2.2.7.** Υπολογιστε τον αντιστροφο του

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση.** Ο $\mathbf{A}$ προκυπτει απο προς τα δεξια (κυκλικη) μεταθεση ολων των στηλων του μοναδιαιου. Αρα περιμενουμε οτι αντιστροφος του θα προκυπτει απο προς τα αριστερα κυκλικη μεταθεση ολων των στηλων του μοναδιαιου. Δηλ. περιμενουμε

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Πραγματι

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**2.2.8.** Υπολογιστε τον αντιστροφο του

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση.** Εστω οτι

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}.$$

Πρεπει να εχουμε

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Εκτελωντας τον παραπανω πολλαπλασιασμο παιρνουμε τις εξισωσεις

$$a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = 1$$
$$a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = 0$$

και

$$a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = 0$$
$$a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = 1.$$

Θα λυσουμε το πρωτο συστημα με αντικατασταση. Απο τη πρωτη εξισωση εχουμε

$$x_{11} = \frac{1 - a_{12}x_{21}}{a_{11}}$$

οποτε στην δευτερη εξισωση παιρνουμε

$$a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = 0 \Rightarrow a_{21}\frac{1 - a_{12}x_{21}}{a_{11}} + a_{22}x_{21} = 0 \Rightarrow$$
$$x_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \text{ και } x_{11} = \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Με αντιστοιχο τροπο παιρνουμε

$$x_{22} = \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \text{ και } x_{12} = -\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Επισης εχουμε

$$\frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \left[ \begin{array}{cc} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right].$$

Οποτε εχουμε επαληθεσυει τον γενικο τυπο του $2 \times 2$ αντιστροφου, που ειναι: Τελικα

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \left[ \begin{array}{cc} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{array} \right]. \tag{2.2}$$

Στην παραπανω επιλυση υποθεσαμε οτι $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Αν ειχαμε $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$, τοτε ο αντιστροφος του $\mathbf{A}$ δεν θα υπηρχε (δες και την παρακατω ασκηση).

**2.2.9.** Δειξτε οτι (για καθε $N$) ο $N \times N$ μηδενικος πινακας δεν εχει αντιστροφο.

**Απαντηση.** Πρεπει να εχουμε

$$\left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} x & y \\ z & u \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right]$$

το οποιο δινει το συστημα

$$\begin{aligned} 0x + 0z &= 1 \\ 0y + 0u &= 0 \\ 0x + 0z &= 0 \\ 0y + 0u &= 1 \end{aligned}$$

Αλλα, προφανως, οι πρωτη και τεταρτη εξισωση ειναι αδυνατες και ετσι το συστημα ειναι αδυνατο, δηλ. δεν υπαρχει ο αντιστροφος του μηδενικου πινακα.

**2.2.10.** Δειξτε οτι ο

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{array} \right]$$

δεν εχει αντιστροφο.

**Απαντηση.** Πρεπει να εχουμε

$$\left[ \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} x & y \\ z & u \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right]$$

το οποιο δινει το συστημα

$$\begin{aligned} x + 2z &= 1 \\ y + 2u &= 0 \\ x + 2z &= 0 \\ y + 2u &= 1 \end{aligned}$$

Αλλα, προφανως, η πρωτη εξισωση ειναι ασυμβατη με την τριτη (και η δευτερη με την τεταρτη) και ετσι το συστημα ειναι αδυνατο, δηλ. δεν υπαρχει ο αντιστροφος του $\mathbf{A}$.

**2.2.11.** Δειξτε οτι ο

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{cc}1 & 2\\ 2 & 4\end{array}\right]$$

δεν εχει αντιστροφο.

**Απαντηση.** Πρεπει να εχουμε

$$\left[\begin{array}{cc}1 & 2\\ 2 & 4\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}x & y\\ z & u\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}1 & 0\\ 0 & 1\end{array}\right]$$

το οποιο δινει το συστημα

$$\begin{aligned}x+2z&=1\\ y+2u&=0\\ 2x+4z&=0\\ 2y+4u&=1\end{aligned}$$

Αλλα η πρωτη εξισωση πολλαπλασιασμενη επι $2$ δινει $2x+4z=2$ και αυτη ειναι ασυμβατη με την τριτη (το ιδιο συμβαινει με την δευτερη και την τεταρτη εξισωση) και ετσι το συστημα ειναι αδυνατο, δηλ. δεν υπαρχει ο αντιστροφος του $\mathbf{A}$.

**2.2.12.** Εστω $2\times 2$ πινακας

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{cc}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{array}\right].$$

Αποδειξτε οτι ο $\mathbf{A}^{-1}$ υπαρχει ανν $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$.

**Απαντηση.** Εχουμε ηδη δειξει οτι, οταν $|\mathbf{A}|\neq 0$ υπαρχει ο $\mathbf{A}^{-1}$ και δινεται απο τον τυπο (2.2). Ας υποθεσουμε τωρα οτι

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0 \tag{2.3}$$

και ας θεσουμε τον αντιστροφο

$$\mathbf{A}^{-1}=\left[\begin{array}{cc}x & y\\ z & u\end{array}\right].$$

Ας εξετασουμε πρωτα την περιπτωση $a_{11}=0$. Τοτε απο την (2.3) παιρνουμε και $a_{12}a_{21}=0$. Αν $a_{12}=0$, τοτε εχουμε

$$\left[\begin{array}{cc}1 & 0\\ 0 & 1\end{array}\right]=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\left[\begin{array}{cc}x & y\\ z & u\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}0 & a_{12}\\ 0 & a_{22}\end{array}\right]\Rightarrow 0x+0y=1$$

το οποιο ειναι αδυνατο· παρομοια βλεπουμε οτι το $a_{21}$ οδηγει σε αντιφαση. Αρα δεν μπορει ουτε και το $a_{11}$ να ειναι μηδενικο.

Ας υποθεσουμε λοιπον οτι $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$ και $a_{11}\neq 0$. Τοτε οπως ειδαμε στο Εδαφιο 2.2.8, εχουμε

$$x_{11}=\frac{1-a_{12}x_{21}}{a_{11}}$$

και

$$\left(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\right)x_{21}=-a_{21}\Rightarrow a_{21}=0\Rightarrow a_{11}a_{22}=0\Rightarrow a_{22}=0.$$

Τοτε ομως
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{AA^{-1}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix} \Rightarrow 0x + 0z = 1$$
το οποιο επισης ειναι ατοπο. Αρα λοιπον, κακως υποθεσαμε οτι υπαρχει ο $\mathbf{A}^{-1}\cdot$ αυτο ειναι ασυμβιβαστο με την συνθηκη $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$.

**2.2.13.** Εστω $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$. Αποδειξτε οτι αν υπαρχει $N \times N$ πινακας $\mathbf{B}$ τετοιος ωστε $\mathbf{BA} = \mathbf{AB} = \mathbf{I}$, τοτε ο $\mathbf{B}$ ειναι μοναδικος.

**Απαντηση.** Εχουμε Εστω πινακας $\mathbf{A}$ που εχει δυο αντιστροφους, τους $\mathbf{B}$ και $\mathbf{C}$. Τοτε πρεπει να εχουμε

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$$
$$\mathbf{AC} = \mathbf{CA} = \mathbf{I}$$

Πολλαπλασιαζοντας την πρωτη εξισωση απο δεξια με $\mathbf{C}$ παιρνουμε $\mathbf{CAB} = \mathbf{CBA} = \mathbf{C}$. Αλλα απο την δευτερη εχουμε $\mathbf{CA} = \mathbf{I}$, αρα $\mathbf{IB} = \mathbf{C}$ δηλ. $\mathbf{B} = \mathbf{C}$. *Δηλαδη, αν ενας πινακας εχει αντιστροφο, εχει* **μοναδικο** *αντιστροφο.*

**2.2.14.** Αποδειξτε οτι $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$.

**Απαντηση.** Εχουμε Εστω $\mathbf{B} = (\mathbf{A}^{-1})^{-1}$. Θα πρεπει να εχουμε

$$\mathbf{BA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{I}.$$

Αλλα ενας πινακας που ικανοποιει την παραπανω ειναι ο $\mathbf{B} = \mathbf{A}$. Επειδη ο αντιστροφος του $\mathbf{A}^{-1}$ ειναι (αν υπαρχει) μοναδικος, εχουμε $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{B} = \mathbf{A}$.

**2.2.15.** Αποδειξτε οτι $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$.

**Απαντηση.** Αρκει να παρατηρησουμε οτι

$$\left(\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}\right) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}$$
$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \left(\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}\right) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

**2.2.16.** Εστω πινακες $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ τετοιοι ωστε $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. Δειξτε οτι

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}, \quad \mathbf{BA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}, \quad \mathbf{AB}^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}.$$

**Απαντηση.** Εχουμε

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} \Rightarrow (\mathbf{AB})^{-1} = (\mathbf{BA})^{-1} \Rightarrow \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$$

και ετσι εχουμε αποδειξει την πρωτη ζητουμενη. Τωρα

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1} \Rightarrow \mathbf{BB}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{BA}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{BA}^{-1}$$

και εχουμε αποδειξει την δευτερη. Η τριτη αποδεικνυεται παρομοια.

**2.2.17.** Εστω $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$. Αποδειξτε οτι

$$\forall m, n \in \{0, 1, 2, ...\} : \mathbf{A}^m \cdot \mathbf{A}^n = \mathbf{A}^{m+n}, \qquad (\mathbf{A}^m)^n = \mathbf{A}^{mn}$$

**Απαντηση**. Για το πρωτο ζητουμενο εχουμε

$$\mathbf{A}^m \cdot \mathbf{A}^n = \underbrace{\mathbf{A} \cdot ... \cdot \mathbf{A}}_{m \text{ φορες}} \cdot \underbrace{\mathbf{A} \cdot ... \cdot \mathbf{A}}_{n \text{ φορες}} = \underbrace{\mathbf{A} \cdot ... \cdot \mathbf{A}}_{m+n \text{ φορες}} = \mathbf{A}^{m+n}.$$

Για το δευτερο ζητουμενο εχουμε

$$(\mathbf{A}^m)^n = \underbrace{\left( \underbrace{\mathbf{A} \cdot ... \cdot \mathbf{A}}_{m \text{ φορες}} \right) \cdot ... \cdot \left( \underbrace{\mathbf{A} \cdot ... \cdot \mathbf{A}}_{m \text{ φορες}} \right)}_{n \text{ φορες}} = \underbrace{\mathbf{A} \cdot ... \cdot \mathbf{A}}_{m \cdot n \text{ φορες}} = \mathbf{A}^{mn}.$$

**2.2.18.** Υπολογιστε τους $\mathbf{A}^2$ , $\mathbf{A}^3$ οταν

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση**. Εχουμε

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}.$$

**2.2.19.** Υπολογιστε τους $\mathbf{B}^2$ , $\mathbf{B}^3$ για

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση**. Ομοια με την προηγουμενη ασκηση εχουμε

$$\mathbf{B}^2 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & -7 & 6 \\ 2 & -2 & 6 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}^3 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -15 & -11 & 3 \\ -2 & -14 & 12 \\ -8 & 2 & -11 \end{bmatrix}.$$

**2.2.20.** Υπολογιστε το το $\mathbf{A}^K$ για καθε θετικο ακεραιο $K$ οταν

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Απαντηση**. Υπολογιζουμε μερικες απο τις παραπανω δυναμεις:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Καθε αριθμος $K$ μπορει να γραφτει στην μορφη $K = 4n + k$, οπου $k = 0, 1, 2, 3$. Αρα εχουμε $\mathbf{A}^K = \mathbf{A}^{4n+k} = \mathbf{A}^k$ και

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^{4n+k} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ οταν } k = 0 \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ οταν } k = 1 \\
&= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ οταν } k = 2 \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ οταν } k = 3.
\end{aligned}$$

Παρατηρειτε την ομοιοτητα με τις δυναμεις του $i = \sqrt{-1}$;

**2.2.21.** Δειξτε οτι ο

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

ειναι ταυτοδυναμος.

**Απαντηση**. Εχουμε

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \mathbf{A}.$$

:

**2.2.22.** Ποιος απο τους πινακες

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix},$$

ειναι ταυτοδυναμος, ποιος μηδενοδυναμος και ποιος ενελικτικος;

**Απαντηση**. Εχουμε

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

και αρα ο $\mathbf{A}$ ειναι ταυτοδυναμος.

Επισης εχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \\
\mathbf{B}^3 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

και αρα ο $\mathbf{B}$ ειναι μηδενοδυναμος ταξεως 3.

Τελος

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

και αρα ο $\mathbf{C}$ ειναι ενελικτικος.

**2.2.23.** Αποδειξτε οτι για καθε ταυτοδυναμο πινακα ισχυει $\mathbf{A}^k = \mathbf{A}$ για καθε $k \in \{1, 2, 3...\}$.

**Απαντηση**. Εστω $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$. Τοτε

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^3 &= \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}, \\ \mathbf{A}^4 &= \mathbf{A}^3 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \text{ κ.τ.λ.} \end{aligned}$$

**2.2.24.** Αν οι πινακες $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ ειναι μηδενοδυναμοι και $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{0}$ αποδειξτε οτι ο $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ ειναι μηδενοδυναμος.

**Απαντηση.** Εχουμε

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = (\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 + \mathbf{AB} + \mathbf{BA} + \mathbf{B}^2 = \mathbf{0}$$

και εχουμε αποδειξει το ζητουμενο.

**2.2.25.** Να δειχτει οτι: αν $\mathbf{AB} = \mathbf{A}$ και $\mathbf{BA} = \mathbf{B}$, τοτε οι $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ ειναι ταυτοδυναμοι.

**Απαντηση.** Εχουμε

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{AB} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{BA} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A}.$$

Παρομοια δειχνουμε οτι $\mathbf{B}^2 = \mathbf{B}$.

**2.2.26.** Βρειτε τα $x, y$ ωστε ο

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & x & y \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

να ειναι ταυτοδυναμος.

**Απαντηση.** Εχουμε

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} -1 & x & y \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & x & y \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y + 1 & 3y - 4x & 4y - 5x \\ 1 & x - 6 & y - 10 \\ -1 & 6 - x & 10 - y \end{bmatrix}$$

Για να ειναι λοιπον ο $\mathbf{A}$ ταυτοδυναμος θα πρεπει να εχουμε $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$, δηλ.

$$\begin{aligned} x - y + 1 &= -1 \\ 3y - 4x &= x \\ 4y - 5x &= y \\ x - 6 &= -3 \\ y - 10 &= -5 \\ 6 - x &= 3 \\ 10 - y &= 5, \end{aligned}$$

Λυνοντας τις δυο τελευταιες εξισωσεις βρισκουμε $x = 3$, $y = 5$. Κατοπιν ελεγξουμε οτι οι πρωτες πεντε επαληθευονται. Αρα ο πινακας

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

ειναι ταυτοδυναμος.

**2.2.27.** Βρειτε τα $x, y$ ωστε ο

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & x & y \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

να ειναι ενελικτικος.

**Απαντηση.** Θα πρεπει να εχουμε

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 4 & x & y \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 16-4y-x & 4x-4y & y-x \\ 0 & 4-x & 3-y \\ 0 & 12-4x & 13-4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Οποτε εχουμε το συστημα

$$\begin{aligned} 16-4y-x &= 1 \\ 4x-4y &= 0 \\ y-x &= 0 \\ 4-x &= 1 \\ 3-y &= 0 \\ 12-4x &= 0 \\ 13-4y &= 1 \end{aligned}$$

το οποιο εχει λυση $x = 3$, $y = 3$. Αρα ο πινακας

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

ειναι ενελικτικος.

**2.2.28.** Δειξτε οτι: ο $\mathbf{A}$ ειναι ενελικτικος ανν $(\mathbf{I}-\mathbf{A})(\mathbf{I}+\mathbf{A}) = \mathbf{0}$.

**Απαντηση.** Εστω οτι ο $\mathbf{A}$ ειναι ενελικτικος , δηλ. $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$. Τοτε

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})(\mathbf{I}+\mathbf{A}) = \mathbf{I}-\mathbf{A}+\mathbf{A}-\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}-\mathbf{A}^2 = \mathbf{0}.$$

Αν τωρα $(\mathbf{I}-\mathbf{A})(\mathbf{I}+\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, θα εχουμε και

$$\mathbf{I}-\mathbf{A}^2 = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$$

οποτε ο $\mathbf{A}$ ειναι ενελικτικος.

**2.2.29.** Αν ο $\mathbf{A}$ ειναι ενελικτικος, δειξτε οτι οι $\frac{1}{2}(\mathbf{I}+\mathbf{A})$ και $\frac{1}{2}(\mathbf{I}-\mathbf{A})$ ειναι μηδενοδυναμοι.

**Απαντηση.** Εχουμε

$$\left(\frac{1}{2}(\mathbf{I}+\mathbf{A})\right)^2=\frac{1}{4}\left(\mathbf{I}+2\mathbf{A}+\mathbf{A}^2\right)=\frac{1}{4}(\mathbf{I}+2\mathbf{A}+\mathbf{I})=\frac{1}{4}(2\mathbf{I}+2\mathbf{A})=\frac{1}{2}(\mathbf{I}+\mathbf{A}).$$

Η περιπτωση $\frac{1}{2}(\mathbf{I}-\mathbf{A})$ αποδεικνυεται παρομοια.

**2.2.30.** Βρειτε εναν ανω τριγωνικο πινακα $\mathbf{A}$ τετοιο ωστε

$$\mathbf{A}^3=\begin{bmatrix} 8 & -57 \\ 0 & 27 \end{bmatrix}$$

**Απαντηση.** Ο $\mathbf{A}$ θα ειναι προφανως $2\times 2$. Εστω

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & u \end{bmatrix}.$$

Τοτε

$$\mathbf{A}^3=\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & u \end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix} x^3 & x(uy+xy)+u^2y \\ 0 & u^3 \end{bmatrix}$$

οποτε πρεπει να εχουμε

$$\begin{aligned} x^3 &= 8 \\ u^3 &= 27 \\ x(uy+xy)+u^2y &= -57. \end{aligned}$$

Βλεπουμε αμεσως οτι μια λυση ειναι $x=2$, $u=3$, $y=-3$ (υπαρχουν και αλλες, μιγαδικες λυσεις). Οποτε ενας πινακας που ικανοποιει το ζητουμενο ειναι ο

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

**2.2.31.** Μπορουμε να ορισουμε και *ρητες* δυναμεις πινακων, π.χ. ο $\mathbf{A}^{1/2}$ (δηλ. η *τετραγωνικη ριζα* ενος πινακα $\mathbf{A}$) ειναι ενας πινακας $\mathbf{B}$ που εχει την ιδιοτητα $\mathbf{B}^2=\mathbf{A}$. Ομως δεν εχουν ολοι οι πινακες τετραγωνικη ριζα και οταν εχουν αυτη δεν ειναι παντα μοναδικη. Γενικα, ο ορισμος ρητων δυναμεων $\mathbf{A}^{m/n}$ ειναι αρκετα πολυπλοκη υποθεση, με την οποια δεν θα ασχοληθουμε προς το παρον, πλην μερικων παραδειγματων που δινονται παρακατω.

**2.2.32.** Δινεται ο πινακας

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Βρειτε *ολους* τους πινακες

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}^{1/2},$$

δηλ. ολους τους πινακες $\mathbf{B}$ που ικανοποιουν

$$\mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση.** Εστω

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}.$$

Τοτε

$$\mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} x^2+yz & uy+xy \\ uz+xz & u^2+yz \end{bmatrix}.$$

Θα πρεπει να εχουμε

$$\begin{aligned} x^2+yz &= 1 \\ (u+x)\,y &= 0 \\ (u+x)\,z &= 4 \\ u^2+yz &= 1. \end{aligned}$$

Απο την δευτερη εξισωση εχουμε $u+x=0$ ή $y=0$. Αλλα αν $u+x=0$ δεν μπορει να ικανοποιηθει η τριτη εξισωση. Αρα εχουμε $y=0$ και τοτε οι υπολοιπες εξισωσεις γινονται

$$\begin{aligned} x^2 &= 1 \\ (u+x)\,z &= 4 \\ u^2 &= 1. \end{aligned}$$

Βλεπουμε λοιπον αμεσως οτι $x=\pm 1$ και $u=\pm 1$. Οποτε τελικα εχουμε τις εξης δυνατες λυσεις.

$$u=-1, x=-1, z=-2, \text{ και } u=1, x=1, z=2$$

και οι ζητουμενοι πινακες ειναι

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ή, με αλλα λογια,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}^{1/2} = \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

**2.2.33.** Δινεται ο πινακας

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Βρειτε ολους τους πινακες

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}^{1/2}.$$

**Απαντηση.** Εδω εχουμε

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} x^2+yz & uy+xy \\ uz+xz & u^2+yz \end{bmatrix}$$

και

$$\begin{aligned} x^2+yz&=9\\ (u+x)\,y&=4\\ (u+x)\,z&=8\\ u^2+yz&=9 \end{aligned}$$

Ας υποθεσουμε $u+x\neq 0$. Τοτε

$$\frac{y}{z}=\frac{4}{8}\Rightarrow z=2y.$$

Αντικαθιστωντας παιρνουμε

$$\begin{aligned} x^2+2y^2&=9\\ (u+x)\,y&=4\\ u^2+2y^2&=9 \end{aligned}$$

Οποτε απο την 1η και 3η εξισωση βλεπουμε οτι $x^2=u^2$ και αφου $u\neq -x$ εχουμε $u=x$. Οποτε τελικα λυνουμε το συστημα

$$\begin{aligned} x^2+2y^2&=9\\ 2xy&=4 \end{aligned}$$

Το οποιο εχει τεσσερις λυσεις

$$\begin{aligned} &x=1,y=2,\\ &x=-1,y=-2,\\ &x=2\sqrt{2},y=\frac{1}{2}\sqrt{2}\\ &x=-2\sqrt{2},y=-\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{aligned}$$

απο τις οποιες προκυπτουν και οι λυσιες $(x,y,z,u)$ να ειναι

$$\begin{aligned} &u=-1,x=-1,y=-2,z=-4,\\ &u=1,x=1,y=2,z=4,\\ &u=2\sqrt{2},x=2\sqrt{2},y=\frac{1}{2}\sqrt{2},z=\sqrt{2},\\ &u=-2\sqrt{2},x=-2\sqrt{2},y=-\frac{1}{2}\sqrt{2},z=-\sqrt{2} \end{aligned}$$

Με αλλα λογια, ο $\mathbf{A}$ εχει *τεσσερις* τετραγωνικες ριζες.

**2.2.34.** Αποδειξτε οτι: $(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\mathbf{I}+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\mathbf{A}^3+\ldots$ .

**Απαντηση.** Παρατηρουμε οτι

$$\left(\mathbf{I}+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\mathbf{A}^3+\ldots\right)(\mathbf{I}-\mathbf{A})=\mathbf{I}+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\mathbf{A}^3+\ldots-\mathbf{A}-\mathbf{A}^2-\mathbf{A}^3+\ldots=\mathbf{I}$$

επειδη για καθε $+\mathbf{A}^n$ υπαρχει το αντιστοιχο $-\mathbf{A}^n$ .(*Παρατηρηση*: αυτη η αποδειξη **δεν** ειναι αυστηρη· μια αυστηρη αποδειξη θα αρξιζε οριζοντας τους πινακες

$$\mathbf{B}_n = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + ... + \mathbf{A}^n$$

και θα εδειχνε οτι $\mathbf{B}_n \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{I} - \mathbf{A}^{n+1}$. Κατοπιν θα επρεπε να δειξουμε οτι $\mathbf{A}^n \to 0$. Ποτε συμβαινει αυτο ;)

## 2.3 Αλυτα Προβληματα

**2.3.1.** Δινονται οι

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Υπολογιστε τους $\mathbf{A}^2$ , $\mathbf{A}^3$, $\mathbf{B}^2$ , $\mathbf{B}^3$.

**Απ.**

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}, \mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} -1 & -7 & 6 \\ 2 & -2 & 6 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}^3 = \begin{bmatrix} -15 & -11 & 3 \\ -2 & -14 & 12 \\ -8 & 2 & -11 \end{bmatrix}$$

**2.3.2.** Δειξτε οτι ο

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

**2.3.3.** Δειξτε οτι ο

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**2.3.4.** Υπολογιστε τον αντιστροφο των παρακατω πινακων, οταν αυτος υπαρχει.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

**Απ.**

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \text{ ο } \mathbf{C}^{-1} \text{ δεν υπαρχει.}$$

**2.3.5.** Υπολογιστε τον αντιστροφο των παρακατω πινακων, οταν αυτος υπαρχει.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Απ.**

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

**2.3.6.** Δειξτε οτι ο

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Μπορειτε να εξηγησετε διαισθητικα γιατι συμβαινει αυτο; (Υποδειξη: υπολογιστε το γινομενο του με ενα τυχαιο πινακα).

**2.3.7.** Δειξτε οτι ο

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ειναι αντιστροφος του εαυτου του. Μπορειτε να εξηγησετε διαισθητικα γιατι συμβαινει αυτο;

**2.3.8.** Βρειτε τον αντιστροφο του

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Απ.**

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**2.3.9.** Αποδειξτε οτι: $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$, $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$, $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$.

**2.3.10.** Αποδειξτε οτι: $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 + \ldots$ .

**2.3.11.** Υπολογιστε τα

$$\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}^K, \qquad \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}^K$$

για τυχοντα θετικο ακεραιο $K$.

**2.3.12.** Αποδειξτε οτι

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}^K = \begin{bmatrix} a^K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d^K \end{bmatrix}.$$

**2.3.13.** Υπολογιστε το

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}^K$$

για τυχοντα θετικο ακεραιο $K$.

**2.3.14.** Αποδειξτε οτι

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{bmatrix}^K = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^K \end{bmatrix},$$

οπου $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ ειναι τετραγωνικοι πινακες.

**2.3.15.** Εστω οτι $\mathbf{A}$ ειναι $N \times N$ και $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$. Θετουμε $\mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} + \mathbf{A})$, $\mathbf{C} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Δειξτε οτι $\mathbf{B}^2 = \mathbf{C}^2 = \mathbf{I}$ και οτι $\mathbf{BC} = \mathbf{0}$.

**2.3.16.** Εστω οτι $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ ειναι $N \times N$ και υπαρχει ο $\mathbf{A}^{-1}$. Δειξτε οτι

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\,\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = (\mathbf{A} - \mathbf{B})\,\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{B}).$$

**2.3.17.** Δειξτε οτι ο

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

ειναι μηδενοδυναμος ταξεως 3.

**2.3.18.** Να δειχτει οτι: αν ο $\mathbf{A}$ ειναι μηδενοδυναμος ταξεως 2, τοτε $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{A})^k = \mathbf{A}$ για καθε $k \in \{1, 2, ...\}$.

**2.3.19.** Αν για τους πινακες $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ ισχυει $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{I}$, δειξτε οτι αυτοι ειναι μηδενοδυναμοι ανν $\mathbf{AB} = \mathbf{BC} = \mathbf{CA} = \mathbf{0}$.

**2.3.20.** Εστω

$$\mathbf{A}_N = \begin{bmatrix} \frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \cdots & \frac{1}{N} \\ \frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{N} & \cdots & \cdots & \frac{1}{N} \end{bmatrix}.$$

Δειξτε οτι για καθε $k \in \{1, 2, ...\}$ εχουμε $(\mathbf{A}_N)^k = \mathbf{A}_N$.

**2.3.21.** Δειξτε οτι ο

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

ειναι ενελικτικος.

**2.3.22.** Αν ο $\mathbf{A}$ ειναι ενελικτικος, δειξτε οτι $(\mathbf{I} + \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{0}$.

**2.3.23.** Δινεται ο πινακας

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Βρειτε ολους τους πινακες $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{1/2}$.

# Κεφάλαιο 3

# Μερικοι Ειδικοι Τυποι Πινακων

## 3.1 Θεωρια

**3.1.1.** Ο *αναστροφος* του $\mathbf{A}$ συμβολιζεται $\mathbf{A}^T$ και προκυπτει αν μετατρεψουμε τις γραμμες του $A$ σε στηλες και τις στηλες σε γραμμες:

$$\left(\mathbf{A}^T\right)_{mn} = \mathbf{A}_{nm}.$$

Δηλ.

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ ... \\ \mathbf{r}_M \end{array}\right] \Leftrightarrow \mathbf{A}^T = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{r}_1^T & \mathbf{r}_2^T & ... & \mathbf{r}_M^T \end{array}\right].$$

**3.1.2.** Αν οι παρακατω πραξεις ειναι δυνατες τοτε ισχυουν τα εξης:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T, \qquad (\mathbf{C}\cdot\mathbf{D})^T = \mathbf{D}^T \cdot \mathbf{C}^T.$$

**3.1.3.** Ενας τετραγωνικος πινακας $\mathbf{A}$ λεγεται *συμμετρικος* αν $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ (δηλ. ο $\mathbf{A}$ εχει ιδιες γραμμες και στηλες).

**3.1.4.** Ενας τετραγωνικος πινακας $\mathbf{A}$ λεγεται *αντισυμμετρικος* ανν $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$.

**3.1.5.** Για καθε *τετραγωνικο* πινακα ισχυουν τα παρακατω .

1. Ο $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ ειναι συμμετρικος και ο $\mathbf{A} - \mathbf{A}^T$ ειναι αντισυμμετρικος.
2. $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\cdot\left(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(\mathbf{A}-\mathbf{A}^T\right)$.

**3.1.6.** Ενας τετραγωνικος πινακας $\mathbf{A}$ με διαστασεις $N \times N$, λεγεται *διαγωνιος* ανν (για $m = 1, 2, ..., N$, $n = 1, 2, ..., N$) εχουμε $m \neq n \Rightarrow a_{mn} = 0$. Δηλ.

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccccc} a_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & ... & ... \\ 0 & 0 & a_{33} & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & ... & a_{NN} \end{array}\right].$$

**3.1.7.** Ενας τετραγωνικος πινακας $\mathbf{A}$ με διαστασεις $N \times N$, λεγεται *ανω τριγωνικος* ανν (για $m = 1, 2, ..., N$, $n = 1, 2, ..., N$) εχουμε $m > n \Rightarrow a_{mn} = 0$. Δηλ.

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1N} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & ... & ... \\ 0 & 0 & a_{33} & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & ... & a_{NN} \end{array} \right].$$

**3.1.8.** Ενας τετραγωνικος πινακας $\mathbf{A}$ με διαστασεις $N \times N$, λεγεται *κατω τριγωνικος* ανν (για $m = 1, 2, ..., N$, $n = 1, 2, ..., N$) εχουμε $m < n \Rightarrow a_{mn} = 0$. Δηλ.

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{ccccc} a_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & ... & ... \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{N1} & ... & ... & ... & a_{NN} \end{array} \right].$$

**3.1.9.** Καθε $M \times N$ πινακας $\mathbf{A}$ μπορει να γραφτει ως *διαμερισμενος* πινακας, στην μορφη

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{cccc} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & ... & \mathbf{A}_{1L} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{A}_{K1} & ... & ... & \mathbf{A}_{KL} \end{array} \right]$$

οπου $\mathbf{A}_{kl}$ ($k = 1, 2, ..., K$ και $l = 1, 2, ..., L$) ειναι πινακας διαστασης $M_k \times N_l$ και $M_1 + ... + M_K = M$, $N_1 + ... + N_L = N$.

**3.1.10.** Εστω *διαμερισμενοι* πινακες $\mathbf{A}, \mathbf{B}$:

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{cccc} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & ... & \mathbf{A}_{1L} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{A}_{K1} & ... & ... & \mathbf{A}_{KL} \end{array} \right], \qquad \mathbf{B} = \left[ \begin{array}{cccc} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} & ... & \mathbf{B}_{1L} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{B}_{K1} & ... & ... & \mathbf{B}_{KL} \end{array} \right]$$

οπου οι διαστασεις του $\mathbf{A}_{kl}$ και του $\mathbf{B}_{kl}$ ειναι ισες για $k = 1, 2, ..., K$ και $l = 1, 2, ..., L$. Τοτε

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \left[ \begin{array}{cccc} \mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_{11} & \mathbf{A}_{12} + \mathbf{B}_{12} & ... & \mathbf{A}_{1L} + \mathbf{B}L \\ \mathbf{A}_{21} + \mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{22} + \mathbf{B}_{22} & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{A}_{K1} + \mathbf{B}_{K1} & ... & ... & \mathbf{A}_{KL} + \mathbf{B}_{KL} \end{array} \right].$$

**3.1.11.** Εστω *διαμερισμενοι* πινακες $\mathbf{A}, \mathbf{B}$:

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{cccc} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & ... & \mathbf{A}_{1L} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{A}_{K1} & ... & ... & \mathbf{A}_{KL} \end{array} \right], \qquad \mathbf{B} = \left[ \begin{array}{cccc} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} & ... & \mathbf{B}_{1L} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{B}_{K1} & ... & ... & \mathbf{B}_{KL} \end{array} \right]$$

οπου οι διαστασεις του $\mathbf{A}_{kp}$ και του $\mathbf{B}_{pl}$ ειναι τετοιες ωστε ολοι οι παρακατω πολλαπλασιασμοι ειναι δυνατοι. Τοτε

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\left[\begin{array}{cccc}\sum_{p=1}^{P}\mathbf{A}_{1p}\cdot\mathbf{B}_{p1} & \sum_{p=1}^{P}\mathbf{A}_{1p}\cdot\mathbf{B}_{p2} & ... & \sum_{p=1}^{P}\mathbf{A}_{1p}\cdot\mathbf{B}_{pL}\\ \sum_{p=1}^{P}\mathbf{A}_{2p}\cdot\mathbf{B}_{p1} & \sum_{p=1}^{P}\mathbf{A}_{2p}\cdot\mathbf{B}_{p2} & ... & ...\\ ... & ... & ... & ...\\ \sum_{p=1}^{P}\mathbf{A}_{Kp}\cdot\mathbf{B}_{p1} & ... & ... & \sum_{p=1}^{P}\mathbf{A}_{Kp}\cdot\mathbf{B}_{pL}\end{array}\right].$$

Δηλαδη μπορουμε να υπολογισουμε τους *υποπινακες* του $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ θεωρωντας τους υποπινακες των $\mathbf{A},\mathbf{B}$ ως στοιχεια του πινακα και εκτελωντας πολλαπλασιασμο πινακων.

**3.1.12.** Αν ο $N\times N$ πινακας $\mathbf{A}$ ειναι *διαμερισμενος διαγωνιος*, δηλ. εχει την μορφη

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{cccc}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} & ... & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} & ... & ...\\ ... & ... & ... & ...\\ \mathbf{0} & ... & ... & \mathbf{A}_{KK}\end{array}\right]$$

και οι $\mathbf{A}_{kk}$ ειναι τετραγωνικοι ομαλοι πινακες (για $k\in\{1,2,...,K\}$) τοτε

$$\mathbf{A}^{-1}=\left[\begin{array}{cccc}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{0} & ... & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22}^{-1} & ... & ...\\ ... & ... & ... & ...\\ \mathbf{0} & ... & ... & \mathbf{A}_{KK}^{-1}\end{array}\right]$$

## 3.2 Λυμενα Προβληματα

**3.2.1.** Γραψτε τους αναστροφους των παρακατω πινακων

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{cc}1 & 2\\ 4 & 1\\ 6 & 7\end{array}\right],\qquad \mathbf{B}=\left[\begin{array}{cc}a & b\\ c & d\end{array}\right]$$

**Απαντηση**.

$$\mathbf{A}^T=\left[\begin{array}{ccc}1 & 4 & 6\\ 2 & 1 & 7\end{array}\right],\qquad \mathbf{B}^T=\left[\begin{array}{cc}a & c\\ b & d\end{array}\right].$$

**3.2.2.** Ποιοι απο τους παρακατω πινακες ειναι συμμετρικοι και ποιοι αντισυμμετρικοι;

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{cc}3 & 2\\ 2 & 1\end{array}\right],\quad \mathbf{B}=\left[\begin{array}{cc}3 & 0\\ 0 & 5\end{array}\right],\quad \mathbf{C}=\left[\begin{array}{ccc}3 & 3 & 4\\ -3 & 1 & 2\\ -4 & -2 & 1\end{array}\right],\quad \mathbf{D}=\left[\begin{array}{ccc}0 & 3 & 4\\ -3 & 0 & 2\\ -4 & -2 & 0\end{array}\right],$$

$$\mathbf{E}=\left[\begin{array}{ccc}3 & 6 & 1\\ 6 & 3 & 2\end{array}\right],\quad \mathbf{F}=\left[\begin{array}{cc}3 & 6\\ 6 & 3\\ -1 & 5\end{array}\right],\quad \mathbf{G}=\left[\begin{array}{cc}3 & 6\\ 6 & 3\end{array}\right],\quad \mathbf{H}=\left[\begin{array}{cc}0 & -6\\ -6 & 0\end{array}\right].$$

**Απαντηση**. Οι $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{G}$ ειναι συμμετρικοι· οι $\mathbf{D},\mathbf{H}$ ειναι αντισυμμετρικοι.

**3.2.3.** Να βρεθουν οι τιμες των $x, y, z$ ωστε ο πινακας

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & x & z^2 \\ 2x - y & 4 & y \\ y & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

να ειναι συμμετρικος.

**Απαντηση**. Θα πρεπει να εχουμε

$$2x - y = x, \quad y = z^2, \quad y = 1.$$

Λυνοντας το συστημα παιρνουμε $x = 1$, $y = 1$, $z = \pm 1$. Δηλ. ο ζητουμενος πινακας ειναι

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

**3.2.4.** Αποδειξτε οτι: αν $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ ειναι συμμετρικοι πινακες, τοτε ο $\mathbf{AB}$ ειναι συμμετρικος ανν $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

**Απαντηση**. Για να ειναι ο $\mathbf{AB}$ συμμετρικος θα πρεπει να εχουμε $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{AB}$. Αλλα $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T = \mathbf{BA}$. Δηλ. θα πρεπει να εχουμε $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. Αντιστροφα, $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} \Rightarrow \mathbf{AB} = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T = (\mathbf{AB})^T$, δηλ. ο $\mathbf{AB}$ ειναι συμμετρικος.

**3.2.5.** Αποδειξτε οτι $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$.

**Απαντηση**. Εστω οτι οι πινακιες $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ εχουν διασταση $M \times N$. Τωρα,

$$\left((\mathbf{A} + \mathbf{B})^T\right)_{mn} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})_{nm} = a_{nm} + b_{nm} = \left(\mathbf{A}^T\right)_{mn} + \left(\mathbf{B}^T\right)_{mn}$$

και αυτο ισχυει για καθε $m \in \{1, 2, ..., M\}$ και $n \in \{1, 2, ..., N\}$. Οποτε $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$.

**3.2.6.** Με ενα παραδειγμα ελεγξτε οτι ο $\mathbf{A} - \mathbf{A}^T$ ειναι αντισυμμετρικος (υποθετουμε οτι ο $\mathbf{A}$ ειναι τετραγωνικος).

**Απαντηση**. Π.χ. θετω

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Τοτε

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{A} - \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

που ειναι αντισυμμετρικος.

**3.2.7.** Αποδειξτε οτι ο $\mathbf{A} - \mathbf{A}^T$ ειναι αντισυμμετρικος (υποθετουμε οτι ο $\mathbf{A}$ ειναι τετραγωνικος).

**Απαντηση**. $\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}^T - \left(\mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}^T - \mathbf{A} = -\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right)$. Δηλαδη, αν θεσουμε $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \mathbf{A}^T$, δειξαμε οτι $\mathbf{B}^T = -\mathbf{B}$, οποτε ο $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \mathbf{A}^T$ ειναι αντισυμμετρικος.

**3.2.8.** Αποδειξτε οτι καθε πινακας $\mathbf{A}$ μπορει να γραφτει ως αθροισμα ενος συμμετρικου και ενος αντισυμμετρικου πινακα.

**Απαντηση**. Εστω οτι υπαρχουν συμμετρικος πινακας $\mathbf{C}$ και αντισυμμετρικος πινακας $\mathbf{D}$ τετοιοι ωστε

$$\mathbf{A} = \mathbf{C} + \mathbf{D}. \tag{3.1}$$

Τοτε εχουμε και

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{C}^T + \mathbf{D}^T = \mathbf{C} - \mathbf{D}. \tag{3.2}$$

Προσθετοντας και αφαιρωντας τις (3.1) και (3.2) εχουμε

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right), \qquad \mathbf{D} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right)$$

δηλ.

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right)$$

που ειναι ακριβως το δευτερο μερος της 3.1.5.

**3.2.9.** Με ενα παραδειγμα ελεγξτε οτι $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

**Απαντηση**. Π.χ. θετω

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Τοτε

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 14 \\ 30 & 40 \end{bmatrix}$$

και

$$\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 30 \\ 14 & 40 \end{bmatrix} = (\mathbf{AB})^T.$$

**3.2.10.** Αποδειξτε οτι $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

**Απαντηση**. Εστω οτι ο $\mathbf{A}$ ειναι $M \times K$ και ο $\mathbf{B}$ ειναι $K \times N$. Τοτε

$$\left((\mathbf{AB})^T\right)_{mn} = (\mathbf{AB})_{nm} = \sum_{k=1}^{K} a_{nk}b_{km} = \sum_{k=1}^{K} b_{km}a_{nk} = \sum_{k=1}^{K} \left(\mathbf{B}^T\right)_{mk}\left(\mathbf{A}^T\right)_{kn} = \left(\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T\right)_{mn}.$$

Αφου αυτο ισχυει για καθε $m \in \{1,2,...,M\}$ και $n \in \{1,2,...,N\}$, εχουμε $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

**3.2.11.** Ποιοι απο τους παρακατω πινακες ειναι ανω τριγωνικοι, κατω τριγωνικοι, διαγωνιοι;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση**. Οι $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{G}$ ειναι ανω τριγωνικοι. Ο $\mathbf{D}$ ειναι κατω τριγωνικος. Ο $\mathbf{B}$ ειναι διαγωνιος.

**3.2.12.** Δινεται ο πινακας

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc} 1 & x \\ y & 4 \end{array}\right].$$

Βρειτε τις τιμες των $x, y$ ωστε το $\mathbf{B}^2$ να ειναι τριγωνικος πινακας.

**Απαντηση**. Εχουμε

$$\mathbf{B}^2 = \left[\begin{array}{cc} 1 & x \\ y & 4 \end{array}\right]^2 = \left[\begin{array}{cc} 1+xy & 5x \\ 5y & xy+16 \end{array}\right].$$

Αρα αν $x = 0$, $y$ αυθαιρετο, ο $\mathbf{B}^2$ ειναι κατω τριγωνικος· Αν $x$ αυθαιρετο, $y = 0$, ο $\mathbf{B}^2$ ειναι ανω τριγωνικος.

**3.2.13.** Δινεται ο πινακας

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc} x+y & x+1 \\ y^2+1 & 4+y \end{array}\right].$$

Βρειτε τις τιμες των $x, y$ ωστε το $\mathbf{B}^2$ να ειναι τριγωνικος πινακας.

**Απαντηση**. Εχουμε

$$\mathbf{B}^2 = \left[\begin{array}{cc} x+y & x+1 \\ y^2+1 & 4+y \end{array}\right]^2 = \left[\begin{array}{cc} (x+y)^2 + (x+1)(y^2+1) & (4+x+2y)(x+1) \\ (4+x+2y)(y^2+1) & (x+1)(y^2+1) + (4+y)^2 \end{array}\right].$$

Για να ειναι ο $\mathbf{B}^2$ ανω τριγωνικος πρεπει να εχουμε

$$(4+x+2y)\left(y^2+1\right) = 0$$

οποτε πρεπει να εχουμε $4 + x + 2y = 0 \Rightarrow x = -4 - 2y$. Δηλ. για καθε πινακα της μορφης

$$\mathbf{B}(y) = \left[\begin{array}{cc} -4-y & -3-2y \\ y^2+1 & 4+y \end{array}\right]$$

ισχυει οτι ο $(\mathbf{B}(y))^2$ ειναι ανω τριγωνικος – και μαλιστα τοτε ειναι *και* κατω τριγωνικος (γιατι;).

Για να ειναι ο $\mathbf{B}^2$ κατω τριγωνικος μπορει επισης να εχουμε

$$x + 1 = 0$$

οποτε πρεπει να εχουμε $x = -1$. Δηλ. για καθε πινακα της μορφης

$$\mathbf{B}(y) = \left[\begin{array}{cc} -1-y & 0 \\ y^2+1 & 4+y \end{array}\right]$$

ισχυει επισης οτι ο $(\mathbf{B}(y))^2$ ειναι ανω τριγωνικος.

**3.2.14.** Βρειτε *ολους* τους *ανω τριγωνικους* πινακες $\mathbf{A}$ τετοιους ωστε

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση**. Εστω οτι ο ζητουμενος πινακας ειναι

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}.$$

Θα πρεπει να εχουμε

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} x^2+yz & xy+yu \\ zx+uz & yz+u^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

δηλ.

$$\begin{aligned} x^2+yz &= 1 \\ xy+yu &= 2 \\ zx+uz &= 0 \\ yz+u^2 &= 4 \end{aligned}$$

Απο την τριτη εξισωση βλεπουμε οτι $z=0$ η $x=-u$. Στην πρωτη περιπτωση το συστημα γινεται

$$\begin{aligned} x^2 &= 1 \\ y\cdot(x+u) &= 2 \\ u^2 &= 4 \end{aligned}$$

το οποιο εχει τεσσερις διαφορετικες λυσεισ:

$$\begin{gathered} x=1, z=0, u=2, y=\frac{2}{3}, \\ z=0, u=2, x=-1, y=2, \\ x=1, z=0, u=-2, y=-2, \\ z=0, u=-2, x=-1, y=-\frac{2}{3} \end{gathered}$$

Στην δευτερη περιπτωση το συστημα γινεται

$$\begin{aligned} x^2+yz &= 1 \\ y\cdot 0 &= 2 \\ 0 &= 0 \\ yz+u^2 &= 4 \end{aligned}$$

το οποιο ειναι αδυνατο. Αρα τελικα υπαρχουν τεσσερις πινακες $\mathbf{A}$ που ικανοποιουν το ζητουμενο:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2/3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -1 & -2/3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρουμε οτι ολοι ειναι ανω τριγωνικοι.

**3.2.15.** Βρειτε ολους τους $2 \times 2$ πινακες $\mathbf{A}$ τετοιους ωστε ο $\mathbf{A}^2$ να ειναι διαγωνιος.

**Απαντηση**. Εστω

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{cc} x & y \\ z & u \end{array} \right].$$

Τοτε

$$\mathbf{A}^2 = \left[ \begin{array}{cc} x & y \\ z & u \end{array} \right]^2 = \left[ \begin{array}{cc} x^2+yz & xy+yu \\ zx+uz & yz+u^2 \end{array} \right]$$

Για να ειαι ο $\mathbf{A}^2$ διαγωνιος, πρεπει να εχουμε

$$\begin{aligned} y \cdot (x+u) &= 0 = 0 \\ z \cdot (x+u) &= 0. \end{aligned}$$

Το συστημα εχει τεσσερις δυνατες οικογενειες λυσεων.

1. $x = -u$, $y$, $z$ αυθαιρετα.

2. $x = -u$, $y = 0$, $z$ αυθαιρετο.

3. $x = -u$, $z = 0$, $y$ αυθαιρετο.

4. $y = 0, z = 0$, $x, u$ αυθαιρετα.

   Αλλα οι περιπτωσεις 2 και 3 ειναι υποπεριπτωσεις της 1. Οποτε τελικα οι ζητουμενοι πιανκες θα εχουν μια πο τις δυο παρακατω μορφεσ:

$$\mathbf{A}(x,y,z) = \left[ \begin{array}{cc} x & y \\ z & -x \end{array} \right], \quad \mathbf{A}(x,u) = \left[ \begin{array}{cc} x & 0 \\ 0 & u \end{array} \right].$$

**3.2.16.** Να δειχτει οτι το γινομενο δυο κατω τριγωνικων πινακων ειναι κατω τριγωνικος πινακας.

**Απαντηση**. Εστω οτι οι πινακες $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ ειναι $N \times N$ και κατω τριγωνικοι. Δηλ. για $m \in \{1, 2, ..., N\}$, $n \in \{1, 2, ..., N\}$ εχουμε $m < n \Rightarrow a_{mn} = 0$. Παιρνουμε τωρα το $(m, n)$ στοιχειο του $\mathbf{AB}$ με $m < n$. Εχουμε

$$(\mathbf{AB})_{mn} = \sum_{k=1}^{N} a_{mk} b_{kn} = \sum_{k=1}^{m} a_{mk} b_{kn} + \sum_{k=m+1}^{N} a_{mk} b_{kn}.$$

Στο $\sum_{k=m+1}^{N} a_{mk} b_{kn}$ για καθε $a_{mk}$ εχουμε $m < k$ (γιατι;) οποτε $a_{mk} = 0$. Στο $\sum_{k=1}^{m} a_{mk} b_{kn}$ για καθε $b_{mk}$ εχουμε $k \leq m < n$ (γιατι;) οποτε $b_{kn} = 0$. Οποτε, τελικα, για καθε $(m, n)$ με $m < n$ εχουμε $(\mathbf{AB})_{mn} = 0$, δηλ. ο $\mathbf{AB}$ ειναι κατω τριγωνικος.

**3.2.17.** Δινεται ο πινακας

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array} \right]$$

ο οποιος γραφεται και ως διαμερισμενος πινακας

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

οπου

$$\mathbf{A}_{11}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{12}=\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{21}=\begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{22}=\begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix}.$$

Κανοντας τις πραξεις, επαληθευστε οτι

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{12} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{12} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση**. Εχουμε

$$\mathbf{A}^2=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 30 & 36 & 42 \\ 66 & 81 & 96 \\ 102 & 126 & 150 \end{bmatrix}$$

και

$$\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{11}+\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{12}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 24 & 33 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 21 & 24 \\ 42 & 48 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 30 & 36 \\ 66 & 81 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{12} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}[9]=\begin{bmatrix} 15 \\ 42 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 27 \\ 54 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 42 \\ 96 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}+\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{21}=\begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 39 & 54 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 63 & 72 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 102 & 126 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{12} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} + [9]\,[9] = [69] + [81] = [150]$$

Οποτε

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{12} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{12} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 36 & 42 \\ 66 & 81 & 96 \\ 102 & 126 & 150 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^2.$$

**3.2.18.** Εστω

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Υπολογιστε τον $\mathbf{A}^{-1}$.

**Απαντηση**. Παρατηρουμε οτι ο $\mathbf{A}$ ειναι διαμερισμενος διαγωνιος, με

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιωντας την 3.1.12 εχουμε

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Χρησιμοποιωντας την 3.1.12 εχουμε

$$\mathbf{A}_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Οποτε

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

**3.2.19.** Αποδειξτε οτι, οταν ο $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$ ειναι *διαμερισμενος διαγωνιος*, δηλ. εχει την μορφη

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} & ... & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{0} & ... & ... & \mathbf{A}_{KK} \end{bmatrix}$$

και οι $\mathbf{A}_{kk}$ ειναι τετραγωνικοι ομαλοι πινακες (για $k \in \{1, 2, ..., K\}$) τοτε

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{0} & ... & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22}^{-1} & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{0} & ... & ... & \mathbf{A}_{KK}^{-1} \end{bmatrix}$$

**Απαντηση**. Θετουμε

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{0} & ... & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22}^{-1} & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{0} & ... & ... & \mathbf{A}_{KK}^{-1} \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιωντας την 3.1.12 εχουμε

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} & ... & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{0} & ... & ... & \mathbf{A}_{KK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{0} & ... & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22}^{-1} & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{0} & ... & ... & \mathbf{A}_{KK}^{-1} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{p=1}^{P} \mathbf{A}_{1p} \cdot \mathbf{B}_{p1} & \sum_{p=1}^{P} \mathbf{A}_{1p} \cdot \mathbf{B}_{p2} & ... & \sum_{p=1}^{P} \mathbf{A}_{1p} \cdot \mathbf{B}_{pL} \\ \sum_{p=1}^{P} \mathbf{A}_{2p} \cdot \mathbf{B}_{p1} & \sum_{p=1}^{P} \mathbf{A}_{2p} \cdot \mathbf{B}_{p2} & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ \sum_{p=1}^{P} \mathbf{A}_{Kp} \cdot \mathbf{B}_{p1} & ... & ... & \sum_{p=1}^{P} \mathbf{A}_{Kp} \cdot \mathbf{B}_{pL} \end{bmatrix}.$$

Για το στοιχειο $(1,1)$ του γινομενου πινακων εχουμε

$$\sum_{p=1}^{P} \mathbf{A}_{1p} \cdot \mathbf{B}_{p1} = \mathbf{A}_{11} \cdot \mathbf{A}_{11}^{-1} + \mathbf{0} \cdot \mathbf{0} + ... + \mathbf{0} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{I}.$$

Για το στοιχειο $(1,2)$ του γινομενου πινακων εχουμε

$$\sum_{p=1}^{P} \mathbf{A}_{1p} \cdot \mathbf{B}_{p2} = \mathbf{A}_{11} \cdot \mathbf{0} + \mathbf{0} \cdot \mathbf{A}_{22}^{-1} + ... + \mathbf{0} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Αντιστοιχα πραγματα ισχυουν και για τα υπολοιπα στοιχεια του $\mathbf{AB}$. Τελικα

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} & ... & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{0} & ... & ... & \mathbf{A}_{KK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{0} & ... & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22}^{-1} & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{0} & ... & ... & \mathbf{A}_{KK}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & ... & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{0} & ... & ... & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \mathbf{I}.$$

Παρομοια αποδεικνυουμε οτι

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{0} & ... & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22}^{-1} & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{0} & ... & ... & \mathbf{A}_{KK}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} & ... & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{0} & ... & ... & \mathbf{A}_{KK} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & ... & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{0} & ... & ... & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

οποτε τελικα

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{0} & ... & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22}^{-1} & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{0} & ... & ... & \mathbf{A}_{KK}^{-1} \end{bmatrix}.$$

## 3.3 Αλυτα Προβληματα

**3.3.1.** Να δειχτει οτι το γινομενο δυο ανω τριγωνικων πινακων ειναι ανω τριγωνικος πινακας.

**3.3.2.** Υπολογιστε τους αναστροφους των παρακατω πινακων:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ -2 & -8 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

**Απ.**

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -8 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

**3.3.3.** Αποδειξτε οτι: για καθε $k \in \{1,2,3...\}$ο $2 \times 2$ πινακας $\mathbf{A}^k$ ειναι ανω (κατω) τριγωνικος ανν ο $\mathbf{A}$ ειναι ανω (κατω) τριγωνικος.

**3.3.4.** Αποδειξτε οτι: για καθε $N \in \{1, 2, 3...\}$ο $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}^2$ ειναι ανω (κατω) τριγωνικος ανν ο $\mathbf{A}$ ειναι ανω (κατω) τριγωνικος.

**3.3.5.** Γραψτε τους αναστροφους των παρακατω πινακων

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 6 & -1 & -1 \\ 6 & 7 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$$

**Απ.**

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 2 & -1 & 7 \\ 8 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix}$$

**3.3.6.** Ποιοι απο τους παρακατω πινακες ειναι συμμετρικοι και ποιοι αντισυμμετρικοι;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 8 & -9 \\ 8 & 0 & 2 \\ 9 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 4 \\ -3 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Απ.** Οι $\mathbf{A}, \mathbf{F}$ ειναι συμμετρικοι. Ο $\mathbf{H}$ ειναι αντισυμμετρικος.

**3.3.7.** Να βρεθουν οι τιμες των $x, y, z$ ωστε ο πινακας

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & x^2 & z \\ 2x - y & 4 & y \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

να ειναι συμμετρικος.

**Απ.** $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$.

**3.3.8.** Ποιοι απο τους παρακατω πινακες ειναι ανω τριγωνικοι, κατω τριγωνικοι, διαγωνιοι;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = [3], \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -6 \\ -6 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Απ.** Ο $\mathbf{A}$ ειναι κατω τριγωνικος. Οι $\mathbf{B}, \mathbf{D}$ ειναι ανω τριγωνικοι.

**3.3.9.** Αποδειξτε οτι, για καθε $\mathbf{A}$, ο $\mathbf{AA}^T$ ειναι συμμετρικος.

**3.3.10.** Με τι ισουται το γινομενο $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \cdot ... \cdot \mathbf{U})^T$;

**Απ.** $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \cdot ... \cdot \mathbf{U})^T = \mathbf{U}^T \cdot ... \cdot \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$.

**3.3.11.** Εστω αντισυμμετρικοι πινακες $\mathbf{A}, \mathbf{B}$. Αποδειξτε οτι ο $\mathbf{AB}$ ειναι συμμετρικος ανν $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

**3.3.12.** Για $N \times N$ πινακες $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ , αποδειξτε οτι ο $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ειναι συμμετρικος ανν $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

**3.3.13.** Για $N \times N$ πινακα $\mathbf{A}$ και $M \times N$ πινακα $\mathbf{B}$, αποδειξτε οτι ο $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ειναι συμμετρικος ανν ο $\mathbf{A}$ ειναι συμμετρικος.

**3.3.14.** Δινεται ο πινακας

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Βρειτε τις τιμες των $x, y$ ωστε ο $\mathbf{A}^2$ να ειναι διαγωνιος πινακας.

**Απ.** $x = -3$ και $y \in \mathbb{R}$, ή $y = -3$ και $x \in \mathbb{R}$.

**3.3.15.** Βρειτε τις τιμες των $x, y$ ωστε το τετραγωνο $\mathbf{B}^2$ του πινακα

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & x \\ y & 6 \end{bmatrix}^2$$

να ειναι κατω τριγωνικος πινακας.

**Απ**. $x = 0$, $y$ αυθαιρετο.

**3.3.16.** Βρειτε τις τιμες των $x, y$ ωστε το τετραγωνο $\mathbf{B}^2$ του πινακα της προηγουμενης ασκησης να ειναι διαγωνιος πινακας.

**Απ**. $x = 0$, $y = 0$.

**3.3.17.** Βρειτε *ολους* τους *ανω τριγωνικους* πινακες $\mathbf{A}$ τετοιους ωστε

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Απ**. Ειναι οι

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

**3.3.18.** Βρειτε *ολους* τους *ανω τριγωνικους* πινακες $\mathbf{A}$ τετοιους ωστε

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Απ**. Ειναι οι

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

**3.3.19.** Δινεται ο πινακας

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}.$$

Βρειτε αναγκαιες και ικανες συνθηκες για τα $x, y, z, u$ ωστε ο $\mathbf{C}^2$ να ειναι διαγωνιος.

**Απ**. $u = -x$ ή ($y = 0$ και $z = 0$).

**3.3.20.** Να δειχτει οτι το γινομενο δυο κατω τριγωνικων πινακων ειναι κατω τριγωνικος πινακας.

**3.3.21.** Δινεται ο πινακας

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

ο οποιος γραφεται και ως διαμερισμενος πινακας

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

οπου

$$\mathbf{A}_{11}= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{12}= \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{21}= \begin{bmatrix} 7 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{22}= \begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix}.$$

Κανοντας τις πραξεις, επαληθευστε οτι

$$\mathbf{A}^2= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{12} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{12} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}.$$

**3.3.22.** Εστω οτι $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$, οπου ο $\mathbf{A}$ ειναι $N \times N$, ο $\mathbf{A}_{11}$ ειναι $N_1 \times N_1$ και ο $\mathbf{A}_{22}$ ειναι $N_2 \times N_2$ ($N = N_1 + N_2$). Εστω επισης οτι $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix}$, οπου ο $\mathbf{B}$ ειναι $N \times N$, ο $\mathbf{B}_{11}$ ειναι $N_1 \times N_1$ και ο $\mathbf{B}_{22}$ ειναι $N_2 \times N_2$. Αποδειξτε οτι

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{12}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11}+\mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{12}+\mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{22} \end{bmatrix}.$$

**3.3.23.** Δινεται ο *γενικος* $3 \times 3$ πινακας

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ο οποιος γραφεται και ως διαμερισμενος πινακας

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

οπου

$$\mathbf{A}_{11}= \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{12}= \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{21}= \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{22}= \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Κανοντας τις πραξεις, επαληθευστε οτι

$$\mathbf{A}^2 = = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{12} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{12} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}.$$

**3.3.24.** Δειξτε οτι

$$\left[\begin{array}{cccc} \kappa_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \kappa_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & \kappa_N \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2N} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{N1} & ... & ... & a_{NN} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc} \kappa_1 a_{11} & \kappa_1 a_{12} & ... & \kappa_1 a_{1N} \\ \kappa_2 a_{21} & \kappa_2 a_{22} & ... & \kappa_2 a_{2N} \\ ... & ... & ... & ... \\ \kappa_N a_{N1} & ... & ... & \kappa_N a_{NN} \end{array}\right].$$

**3.3.25.** Εστω $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ κατω τριγωνικοι πινακες. Δειξτε οτι και οι $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BA}$ ειναι κατω τριγωνικοι.

**3.3.26.** Βρειτε ολους τους πινακες $\mathbf{A}$ τετοιους ωστε

$$\mathbf{A}^2 = \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$$

**Απ.**. Υπαρχουν δυο τετοιοι πινακες:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \text{ και } \mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc} -1 & 1/2 \\ 0 & -1 \end{array}\right].$$

**3.3.27.** Αν $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ ειναι $N \times N$ πινακες, ο $\mathbf{A}$ ειναι διαγωνιος με στοιχεια διαφορα αλληλων και $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, δειξτε οτι και ο $\mathbf{B}$ ειναι διαγωνιος.

**3.3.28.** Δειξτε οτι, για $K = 1, 2, ...$ εχουμε

$$\left[\begin{array}{ccc} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{array}\right]^K = \left[\begin{array}{ccc} a^K & Ka^{K-1} & \frac{(K-1)K}{2}a^{K-2} \\ 0 & a^K & Ka^{K-1} \\ 0 & 0 & a^K \end{array}\right].$$

**3.3.29.** Δειξτε οτι για

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

και για $K = 1, 2, ...$ εχουμε $\mathbf{A}^{K+2} = \mathbf{A}^K + \mathbf{A}^2 - \mathbf{I}$.

**3.3.30.** Δειξτε οτι, για $K = 1, 2, ...$ εχουμε

$$\left[\begin{array}{cc} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{array}\right]^{2K} = \left[\begin{array}{cc} 3^{2K} & 0 \\ 0 & 3^{2K} \end{array}\right].$$

**3.3.31.** Εστω πινακας

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Δειξτε οτι $\mathbf{A} = \mathbf{I} + \mathbf{B}$, οπου ο $\mathbf{B}$ ειναι μηδενοδυναμος.

# Κεφάλαιο 4

# Οριζουσες και Αντιστροφοι Πινακες

Σε καθε *τετραγωνικο* πινακα αντιστοιχει μια ποσοτητα η οποια λεγεται *οριζουσα*. Και πραγματι αυτη καθ*οριζει* μερικες πολυ σημαντικες ιδιοτητες του πινακα! Στο παρον κεφαλαιο θα μελετησουμε την οριζουσα κυριως απο *υπολογιστικη* σκοπια: πως υπολογιζουμε την οριζουσα ενος πινακα, πως την χρησιμοποιουμε για να βρουμε τον αντιστροφο πινακα κτλ. Επισης θα παραθεσουμε χωρις αποδειξη πολλες ιδιοτητες της οριζουσας. (Οι ιδιοτητες αυτες θα αποδειχτουν στο Κεφαλαιο 14.)

*Μονο* οι τετραγωνικοι πινακες εχουν οριζουσα· εκτος απο ελαχιστες εξαιρεσεις, *σε αυτο το κεφαλαιο ολοι οι εμφανιζομενοι πινακες ειναι τετραγωνικοι*, εκτος αν λεμε ρητα το αντιθετο.

## 4.1 Θεωρια

**4.1.1.** Σε καθε $N \times N$ (*τετραγωνικο*) πινακα $\mathbf{A}$ αντιστοιχει ενας **αριθμος**, η *οριζουσα* του $\mathbf{A}$. Αυτη συμβολιζεται με $D(\mathbf{A})$ η με $|\mathbf{A}|$ και οριζεται ως εξης.

1. Αν ο $\mathbf{A}$ ειναι $1 \times 1$, δηλ. $\mathbf{A} = [a_{11}]$, τοτε $|\mathbf{A}| = a_{11}$.
2. Αν ο $\mathbf{A}$ ειναι $N \times N$ και $N > 1$, τοτε

$$|\mathbf{A}| = (-1)^{1+1} a_{11}A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12}A_{12} + ... + (-1)^{1+N} a_{1N}A_{1N}, \tag{4.1}$$

   οπου $A_{1n}$ (για $n = 1, 2, ..., N$) ειναι η **οριζουσα** του *υποπινακα* που προκυπτει απο τον $\mathbf{A}$ αν διαγραψουμε την πρωτη γραμμη και την $n$-στη στηλη.

**4.1.2.** Βλεπουμε οτι η οριζουσα ταξης $N$ οριζεται *αναδρομικα*, χρησιμοποιωντας οριζουσες ταξης $N-1$.

**4.1.3.** Εφαρμοζοντας την (4.1) στον $2 \times 2$ πινακα $\mathbf{A}$ παιρνουμε

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{4.2}$$

**4.1.4.** Προσεξτε οτι ο συμβολισμος στο αριστερο μελος της (4.2) της δεν ειναι αυστηρα συμβατος με αυτα που γραψαμε παραπανω· το σωστο θα ηταν να γραψουμε

$$\left| \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{4.3}$$

Ομως συνηθως θα παραλειπουμε, χαριν απλοτητας, τις εσωτερικες αγκυλες που δηλωνουν τον πινακα.

**4.1.5.** Εφαρμοζοντας την (4.1) στον $3 \times 3$ πινακα $\mathbf{A}$ παιρνουμε

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

**4.1.6.** Μια *απλη* περιγραφη της οριζουσας ειναι η εξης: η οριζουσα ενος $N \times N$ πινακα ειναι ενα *αθροισμα γινομενων*, οπου καθε γινομενο περιεχει $N$ ορους, *ακριβως εναν απο καθε σειρα και στηλη του πινακα.* Αν και αυτη η περιγραφη ειναι χρησιμη, δεν μας λεει τιποτα για το *προσημο* του καθε ορου· για να καθοριστει αυτο ειναι απαραιτητος ο τυπος (4.1).

**4.1.7.** Για καθε $N \times N$ πινακα $\mathbf{A}$ εχουμε

$$|\mathbf{A}| = \left|\mathbf{A}^T\right|. \tag{4.4}$$

(Αρα ολες οι επομενες ιδιοτητες ισχυουν οχι μονο για στηλες αλλα και για γραμμες.)

**4.1.8.** Εστω ενας $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$, τον οποιο θα γραφουμε σε μορφη στηλων:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \ldots & \mathbf{a}_N \end{bmatrix}.$$

Τοτε ισχυουν οι παρακατω **θεμελιωδεις** ιδιοτητες της οριζουσας.

1. Αν *εναλλαξουμε* δυο στηλες του πινακα, το προσημο της οριζουσας αλλαζει:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \ldots & \mathbf{a}_m & \ldots & \mathbf{a}_n & \ldots & \mathbf{a}_N \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \ldots & \mathbf{a}_n & \ldots & \mathbf{a}_m & \ldots & \mathbf{a}_N \end{vmatrix}. \tag{4.5}$$

2. Αν *αναλυσουμε* μια στηλη $\mathbf{a}_n$ του πινακα στον *γραμμικο συνδυασμο* $\mathbf{a}_n = \kappa\mathbf{a}'_n + \lambda\mathbf{a}''_n$, το ιδιο συμβαινει και στην οριζουσα:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \ldots & \kappa'\mathbf{a}'_n + \kappa''\mathbf{a}''_n & \ldots & \mathbf{a}_N \end{vmatrix} = \kappa' \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \ldots & \mathbf{a}'_n & \ldots & \mathbf{a}_N \end{vmatrix} + \kappa'' \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \ldots & \mathbf{a}''_n & \ldots & \mathbf{a}_N \end{vmatrix}. \tag{4.6}$$

3. Η οριζουσα του μοναδιαιου πινακα ισουται με 1:

$$|\mathbf{I}| = 1. \tag{4.7}$$

**4.1.9.** Εστω ενας $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$, τον οποιο θα γραφουμε σε μορφη στηλων:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \ldots & \mathbf{a}_N \end{bmatrix}.$$

Τοτε ισχυουν οι παρακατω ιδιοτητες.

1. Αν δυο στηλες (γραμμες) του πινακα ειναι ισες, τοτε η οριζουσα ειναι μηδεν:
$$\left|\begin{array}{ccccccc} \mathbf{a}_1 & ... & \mathbf{a}_m & ... & \mathbf{a}_m & ... & \mathbf{a}_N \end{array}\right| = 0. \tag{4.8}$$

2. Αν πολλαπλασιασουμε μια στηλη (γραμμη) επι εναν αριθμο $\kappa$, η οριζουσα πολλαπλασιαζεται επι $\kappa$:
$$\left|\begin{array}{ccccc} \mathbf{a}_1 & ... & \kappa\mathbf{a}_n & ... & \mathbf{a}_N \end{array}\right| = \kappa \cdot \left|\begin{array}{ccccc} \mathbf{a}_1 & ... & \mathbf{a}_n & ... & \mathbf{a}_N \end{array}\right|. \tag{4.9}$$

3. Αν σε μια στηλη (γραμμη) προσθεσουμε ενα πολλαπλασιο αλλης στηλης, η τιμη της οριζουσας παραμενει αμεταβλητη:
$$\left|\begin{array}{ccccccc} \mathbf{a}_1 & ... & \mathbf{a}_m + \kappa\mathbf{a}_n & ... & \mathbf{a}_n & ... & \mathbf{a}_N \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccccccc} \mathbf{a}_1 & ... & \mathbf{a}_m & ... & \mathbf{a}_n & ... & \mathbf{a}_N \end{array}\right|. \tag{4.10}$$

4. Αν μια στηλη (γραμμη) του πινακα ειναι μηδενικη, τοτε η οριζουσα ειναι μηδεν:
$$\left|\begin{array}{ccccc} \mathbf{a}_1 & ... & \mathbf{0} & ... & \mathbf{a}_N \end{array}\right| = 0. \tag{4.11}$$

**4.1.10.** Αν ο $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$ ειναι (ανω η κατω) τριγωνικος, η οριζουσα ισουται με το γινομενο των διαγωνιων στοιχειων:
$$\left|\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1N} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2N} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{NN} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccc} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{N1} & a_{N2} & ... & a_{NN} \end{array}\right| = a_{11}a_{22}...a_{NN}. \tag{4.12}$$

**4.1.11.** Εστω $N \times N$ πινακες $\mathbf{A}, \mathbf{B}$. Τοτε
$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|. \tag{4.13}$$

**4.1.12.** Εστω $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$ ο οποιος ειναι *διαγωνιος διαμερισμενος*:
$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} & ... & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{0} & ... & ... & \mathbf{A}_{NN} \end{array}\right]$$

Τοτε
$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}_{11}| \cdot |\mathbf{A}_{22}| \cdot ... \cdot |\mathbf{A}_{NN}|$$

**4.1.13.** Ενας $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$ εχει αντιστροφο $\mathbf{A}^{-1}$ ανν $|\mathbf{A}| \neq 0$.

**4.1.14.** Συμβολιζουμε τον *συμπληρωματικο* πινακα του $\mathbf{A}$ με $adj(\mathbf{A})$ και τον οριζουμε ως εξης
$$adj(\mathbf{A}) = \left[\begin{array}{cccc} (-1)^{1+1} A_{11} & (-1)^{2+1} A_{21} & ... & (-1)^{N+1} A_{N1} \\ (-1)^{1+2} A_{12} & (-1)^{2+2} A_{22} & ... & (-1)^{N+2} A_{N2} \\ ... & ... & ... & ... \\ (-1)^{1+N} A_{1N} & (-1)^{2+N} A_{2N} & ... & (-1)^{N+N} A_{NN} \end{array}\right],$$

οπου $A_{mn}$ ειναι η "**υπο**οριζουσα" του υποπινακα που προκυπτει απο τον $\mathbf{A}$ αν διαγραψουμε απο αυτον την $m$-στη γραμμη και την $n$-στη στηλη.

**4.1.15.** Εστω $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$ με $|\mathbf{A}| \neq 0$. Τοτε ο αντιστροφος του $\mathbf{A}$ δινεται απο τον τυπο

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} adj\left(\mathbf{A}\right) = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \left[ \begin{array}{llll} (-1)^{1+1} A_{11} & (-1)^{2+1} A_{21} & ... & (-1)^{N+1} A_{N1} \\ (-1)^{1+2} A_{12} & (-1)^{2+2} A_{22} & ... & (-1)^{N+2} A_{N2} \\ ... & ... & ... & ... \\ (-1)^{1+N} A_{1N} & (-1)^{2+N} A_{2N} & ... & (-1)^{N+N} A_{NN} \end{array} \right]. \quad (4.14)$$

## 4.2 Λυμενα Προβληματα

**4.2.1.** Υπολογιστε την οριζουσα του

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array} \right].$$

**Λυση**. Συμφωνα με τον τυπο (4.2) εχουμε

$$|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 3 = -2.$$

**4.2.2.** Υπολογιστε τις οριζουσες των

$$\mathbf{A} = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 0 \end{array} \right|, \qquad \mathbf{B} = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{array} \right|.$$

**Απαντηση**. Για τον $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 0 \end{array} \right| &= +1 \cdot \left| \begin{array}{cc} 5 & 6 \\ 2 & 0 \end{array} \right| - 2 \cdot \left| \begin{array}{cc} 4 & 6 \\ 3 & 0 \end{array} \right| + 3 \cdot \left| \begin{array}{cc} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{array} \right| \\ &= 1 \cdot (-12) - 2 \cdot (-18) + 3 \cdot (-7) = 3. \end{aligned}$$

Για τον $\mathbf{B}$:

$$\begin{aligned} |\mathbf{B}| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{array} \right| &= +1 \cdot \left| \begin{array}{cc} 5 & 6 \\ 0 & 4 \end{array} \right| - 2 \cdot \left| \begin{array}{cc} 0 & 6 \\ 0 & 4 \end{array} \right| + 3 \cdot \left| \begin{array}{cc} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{array} \right| \\ &= 1 \cdot 20 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 20. \end{aligned}$$

Μπορουσαμε να υπολογισουμε κατευθειαν $|\mathbf{B}| = 1 \cdot 5 \cdot 4 = 20$, αφου ο $\mathbf{B}$ ειναι ανω τριγωνικος.

**4.2.3.** Υπολογιστε την οριζουσα του

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array} \right].$$

**Απαντηση**. Η οριζουσα του $\mathbf{A}$ ειναι ιση με αυτη του $\mathbf{A}^T$ , η οποια υπολογιζεται πιο ευκολα γιατι εχει πολλα μηδενικα στην πρωτη γραμμη:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 0 - 0 + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -6 \end{vmatrix} - 0$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} - 3 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} + 0 = 336.$$

**4.2.4.** Υπολογιστε την οριζουσα του

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση**. Η οριζουσα του $\mathbf{A}$ ειναι ιση με μειον αυτη του πινακα που προκυπτει απο μεταθεση της πρωτης και τριτης γραμμης του $\mathbf{A}$:

$$|\mathbf{A}| = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -336.$$

**4.2.5.** Υπολογιστε την οριζουσα του

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση**. Ο πινακας ειναι ανω τριγωνικος, αρα $|\mathbf{A}| = 6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1 = 210$.

**4.2.6.** Υπολογιστε την οριζουσα του

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

**Απαντηση**. Χρησιμοποιουμε τον αναδρομικο ορισμο. Εχουμε

$$|\mathbf{A}| = (-1)^{1+1} a_{11}A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12}A_{12}.$$

Η $A_{11}$ ισουται με $a_{22}$, την υποοριζουσα που προκυπτει αν απο τον $\mathbf{A}$ διαγραψουμε την πρωτη γραμμη και την πρωτη στηλη. Παρομοια α $A_{12}$ ισουται με $a_{21}$, την υποοριζουσα που προκυπτει αν απο τον $\mathbf{A}$ διγραψουμε την πρωτη γραμμη και την δευτερη στηλη. Ετσι

$$|\mathbf{A}| = +a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

**4.2.7.** Υπολογιστε την οριζουσα του

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

**Απαντηση**. Εχουμε

$$|\mathbf{A}| = (-1)^{1+1} a_{11}A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12}A_{12} + (-1)^{1+3} a_{13}A_{13}.$$

Οι υποοριζουσες $A_{11}, A_{12}, A_{13}$ προκυπτουν διαγραφοντας τις αντιστοιχες γραμμες στηλες και υπολογιζοντας τις $2 \times 2$ οριζουσες:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32},$$

$$A_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31},$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}.$$

Οποτε η οριζουσα γινεται

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= (-1)^{1+1} a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + (-1)^{1+2} a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + (-1)^{1+3} a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

**4.2.8.** Στα παρακατω προβληματα δινουμε τις αποδειξεις μερικων απο τις ιδιοτητες των οριζουσων. **Δεν** θα αποδειξουμε την 4.1.7 στο παρον κεφαλαιο· θα δωσουμε ομως την αποδειξη για την ειδικη περιπτωση των πινακων $2 \times 2$. Το ιδιο ισχυει για τις 4.1.8, 4.1.10, 4.1.11 και 4.1.12, **;;**. Θεωρωντας αυτες τις ιδιοτητες δεδομενες (οι αποδειξεις αυτων θα δοθουν στο Κεφαλαιο 14) και χρησιμοποιωντας επισης τον ορισμο της οριζουσας (4.1.1), θα αποδειξουμε τις υπολοιπες ιδιοτητες που αναφερονται στο Εδαφιο 4.1[1].

**4.2.9.** Ελεγξτε οτι $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T|$ για τον πινακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

**Απαντηση**. Εχουμε

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-26) + 2 \cdot 7 = -12$$

και

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-26) - 3 \cdot (-10) + 2 \cdot (-8) = -12.$$

[1] Οπως θα δουμε στο Κεφαλαιο 14, οι θεμελιωδεις ιδιοτητες αρκουν για να αποδειξουμε οχι μονο ολες τις υπολοιπες ιδιοτητες της οριζουσας, αλλα και τοι η *μονη* συναρτηση η οποια μπορει να εχει αυτες ειναι η οριζουσα.

**4.2.10.** Ελεγξτε οτι $|\mathbf{A}| = \left|\mathbf{A}^T\right|$ για τον πινακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

**Απαντηση**. Εχουμε

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

τα οποια ειναι ισα.

**4.2.11.** Για τον πινακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Ελεγξτε οτι $|\mathbf{A}| = -|\mathbf{A}'|$ οπου $\mathbf{A}'$ ειναι ο πινακας που προκυπτει με εναλλαγη των στηλων του $\mathbf{A}$.

**Απαντηση**. Πραγματι

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \text{ και } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2.$$

**4.2.12.** Για τον πινακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Ελεγξτε οτι $|\mathbf{A}| = -|\mathbf{A}'|$ οπου $\mathbf{A}'$ ειναι ο πινακας που προκυπτει με εναλλαγη των στηλων του $\mathbf{A}$.

**Απαντηση**. Πραγματι

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \text{ και } \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -\left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right).$$

**4.2.13.** Για τους πινακες

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}'' = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2\kappa + 5\lambda \\ 3 & 4\kappa + 6\lambda \end{bmatrix},$$

Ελεγξτε οτι $|\mathbf{A}| = \kappa\,|\mathbf{A}'| + \lambda\,|\mathbf{A}''|$.

**Απαντηση**. Πραγματι

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -9$$

και

$$\begin{vmatrix} 1 & 2\kappa + 5\lambda \\ 3 & 4\kappa + 6\lambda \end{vmatrix} = 1 \cdot (4\kappa + 6\lambda) - 3 \cdot (2\kappa + 5\lambda)$$

$$= \kappa \cdot (1 \cdot 4 - 3 \cdot 2) + \lambda \cdot (1 \cdot 6 - 3 \cdot 5) = \kappa \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \lambda \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

**4.2.14.** Αποδειξτε οτι

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \kappa \cdot a'_{12} + \lambda \cdot a''_{12} \\ a_{21} & \kappa \cdot a'_{22} + \lambda \cdot a''_{22} \end{vmatrix} = \kappa \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a'_{22} \end{vmatrix} + \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a''_{12} \\ a_{21} & a''_{22} \end{vmatrix}.$$

**Απαντηση**. Πραγματι, με απλη εκτελεση πραξεων εχουμε

$$\begin{aligned} \kappa \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a'_{22} \end{vmatrix} &= \kappa \left( a_{11} a'_{22} - a'_{12} a_{21} \right), \\ \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a''_{12} \\ a_{21} & a''_{22} \end{vmatrix} &= \lambda \left( a_{11} a''_{22} - a''_{12} a_{21} \right), \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \kappa \cdot a'_{12} + \lambda \cdot a''_{12} \\ a_{21} & \kappa \cdot a'_{22} + \lambda \cdot a''_{22} \end{vmatrix} &= \kappa a_{11} a'_{22} + \lambda a_{11} a''_{22} - \kappa a_{21} a'_{12} - \lambda a_{21} a''_{12} \\ &= \kappa \left( a_{11} a'_{22} - a_{21} a'_{12} \right) + \lambda \left( a_{11} a''_{22} - a_{21} a''_{12} \right). \end{aligned}$$

**4.2.15.** Ελεγξτε οτι

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

**Απαντηση**. Πραγματι

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) - 0 + 0 = 1. \end{aligned}$$

**Απαντηση**.

**4.2.16.** Ελεγξτε με ενα παραδειγμα οτι η οριζουσα ενος πινακα με δυο ισες στηλες ισουται με 0.

**Απαντηση**. Π.χ. εχουμε

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (-10) - 2 \cdot (6 - 6) + 1 \cdot 10 = 0. \end{aligned}$$

**4.2.17.** Αποδειξτε οτι η οριζουσα ενος πινακα με δυο ισες στηλες ισουται με 0.

**Απαντηση**. Θα χρησιμοποιησουμε την πρωτη βασικη ιδιοτητα της 4.1.8. Πραγματι αν εχουμε ενα πινακα με δυο ιδιες στηλες και τις εναλλαξουμε, θα ισχυει

$$|\mathbf{a}_1 ... \mathbf{a}_m ... \mathbf{a}_m ... \mathbf{a}_N| = - |\mathbf{a}_1 ... \mathbf{a}_m ... \mathbf{a}_m ... \mathbf{a}_N| \Rightarrow |\mathbf{a}_1 ... \mathbf{a}_m ... \mathbf{a}_m ... \mathbf{a}_N| = 0.$$

Δηλ. ο ιδιος ο πινακας δεν αλλαζει (αφου εναλλαξαμε δυο ιδιες στηλες) αλλα το προσημο της οριζουσας του πρεπει να αλλαζει προσημο, αφου εγινε εναλλαγη στηλων.

**4.2.18.** Ελεγξτε με ενα παραδειγμα οτι αν πολλαπλασιασουμε μια στηλη ενος πινακα με αριθμο $\kappa$, η οριζουσα πολλαπλασιαζεται επι $\kappa$.

**Απαντηση**. Π.χ. εχουμε

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -4$$

και

$$\begin{vmatrix} 1\cdot\kappa & 2 & 1 \\ 2\cdot\kappa & 0 & 2 \\ 3\cdot\kappa & 5 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot\kappa \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2\cdot\kappa & 2 \\ 3\cdot\kappa & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2\cdot\kappa & 0 \\ 3\cdot\kappa & 5 \end{vmatrix}$$
$$= -10\kappa - 4\kappa + 10\kappa = -4\kappa.$$

**4.2.19.** Αποδειξτε οτι αν πολλαπλασιασουμε μια στηλη ενος πινακα με αριθμο $\kappa$, η οριζουσα πολλαπλασιαζεται επι $\kappa$.

**Απαντηση**. Θα χρησιμοποιησουμε την δευτερη βασικη ιδιοτητα της 4.1.8. Πραγματι αν εχουμε ενα πινακα του οποιου η $n$-στη στηλη ειναι γραμμικος συνδυασμος $\mathbf{a}_n = \kappa\mathbf{a}_n' + \lambda\mathbf{a}_n''$, και παρουμε $\lambda = 0$, τοτε εχουμε

$$\left|\mathbf{a}_1...\kappa\cdot\mathbf{a}_n' + 0\cdot\mathbf{a}_n''...\mathbf{a}_N\right| = \kappa\cdot\left|\mathbf{a}_1...\mathbf{a}_n'...\mathbf{a}_N\right| + 0\cdot\left|\mathbf{a}_1...\mathbf{a}_n''...\mathbf{a}_N\right| = \kappa\cdot\left|\mathbf{a}_1...\mathbf{a}_n'...\mathbf{a}_N\right|.$$

Δηλ. ο ιδιος ο πινακας δεν αλλαζει (αφου εναλλαξαμε δυο ιδιες στηλες) αλλα το προσημο της οριζουσας του πρεπει να αλλαζει προσημο, αφου εγινε εναλλαγη στηλων.

**4.2.20.** Ελεγξτε με ενα παραδειγμα οτι αν σε μια στηλη μιας οριζουσας προσθεσουμε $\kappa$ φορες μια αλλα στηλη, τοτε η τιμη της οριζουσας παραμενει η ιδια.

**Απαντηση**. Π.χ. εχουμε

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -4$$

και

$$\begin{vmatrix} 1 & 2+1\cdot\kappa & 1 \\ 2 & 0+2\cdot\kappa & 2 \\ 3 & 5+3\cdot\kappa & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0+2\kappa & 2 \\ 5+3\kappa & 4 \end{vmatrix} - (2+\kappa)\cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0+2\cdot\kappa \\ 3 & 5+\cdot\kappa \end{vmatrix}$$
$$= (-10-6\kappa) - (2+\kappa)\cdot 2 + (10+2\kappa) = -4.$$

**4.2.21.** Αποδειξτε οτι αν πολλαπλασιασουμε μια στηλη ενος πινακα με αριθμο $\kappa$, η οριζουσα πολλαπλασιαζεται επι $\kappa$.

**Απαντηση**. Θα χρησιμοποιησουμε την δευτερη βασικη ιδιοτητα της 4.1.8. Πραγματι αν εχουμε ενα πινακα

$$[\mathbf{a}_1...\mathbf{a}_m...\mathbf{a}_n...\mathbf{a}_N]$$

και δημιουργησουμε εναν νεο πινακα

$$[\mathbf{a}_1...1\cdot\mathbf{a}_m + \kappa\cdot\mathbf{a}_n...\mathbf{a}_n...\mathbf{a}_N]$$

θα εχουμω

$$\begin{aligned}|\mathbf{a}_1 ... 1 \cdot \mathbf{a}_m + \kappa \cdot \mathbf{a}_n ... \mathbf{a}_n ... \mathbf{a}_N| &= 1 \cdot |\mathbf{a}_1 ... \mathbf{a}_m ... \mathbf{a}_n ... \mathbf{a}_N| + \kappa \cdot |\mathbf{a}_1 ... \mathbf{a}_n ... \mathbf{a}_n ... \mathbf{a}_N| \\ &= |\mathbf{a}_1 ... \mathbf{a}_m ... \mathbf{a}_n ... \mathbf{a}_N|\end{aligned}$$

αφου $|\mathbf{a}_1 ... \mathbf{a}_n ... \mathbf{a}_n ... \mathbf{a}_N| = 0$ (ο πινακας εχει δυο ιδιες στηλες).

**4.2.22.** Ελεγξτε με ενα παραδειγμα οτι η οριζουσα ενος πινακα με μια μηδενικη στηλη ισουται με 0.

**Απαντηση**. Π.χ. εχουμε

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot 0 - 0 \cdot (8-6) + 1 \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

**4.2.23.** Αποδειξτε οτι η οριζουσα ενος πινακα με μια μηδενικη στηλη ισουται με 0.

**Απαντηση**. Θα χρησιμοποιησουμε την δευτερη βασικη ιδιοτητα της 4.1.8.

$$|\mathbf{a}_1 ... 0 \cdot \mathbf{a}'_m + 0 \cdot \mathbf{a}''_m ... \mathbf{a}_N| = 0 \cdot |\mathbf{a}_1 ... \mathbf{a}'_m ... \mathbf{a}_N| + 0 \cdot |\mathbf{a}_1 ... \mathbf{a}''_m ... \mathbf{a}_N| = 0.$$

**4.2.24.** Ελεγξτε οτι η οριζουσα του

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

ισουται με $4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 10$.

**Απαντηση**.

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{vmatrix} &= 4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 0 \\ 7 & 9 & 10 \end{vmatrix} - 0 + 0 - 0 \\ &= 4 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 9 & 10 \end{vmatrix} - 0 + 0 - 0 \\ &= 4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot |10| - 0 + 0 - 0 = 4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 10.\end{aligned}$$

**4.2.25.** Ελεγξτε οτι $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$ για τους πινακες

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

**Απαντηση**.

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 2 & 6 \\ 7 & 1 & 4 \\ 9 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad |\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad |\mathbf{AB}| = \begin{vmatrix} 12 & 2 & 6 \\ 7 & 1 & 4 \\ 9 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 10.$$

**4.2.26.** Ελεγξτε οτι $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$ για τους πινακες

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}$$

**Απαντηση**.

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+bz & ay+bu \\ cx+dz & cy+du \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \quad |\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} x & y \\ z & u \end{vmatrix} = xu - yz$$

$$|\mathbf{AB}| = \begin{vmatrix} ax+bz & ay+bu \\ cx+dz & cy+du \end{vmatrix} = axdu + bzcy - aydz - bucx$$

και, τελος,

$$|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| = (ad - bc)(xu - yz) = axdu + bzcy - aydz - bucx.$$

**4.2.27.** Ελεγξτε οτι $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}_{11}| \cdot |\mathbf{A}_{22}| \cdot ... \cdot |\mathbf{A}_{NN}|$ για τον πινακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

**Απαντηση**. Εχουμε

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -48.$$

Χρησιμοποιουμε τους πινακες

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ με } |\mathbf{A}_{11}| = 2,$$

$$\mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \text{ με } |\mathbf{A}_{22}| = -24$$

οποτε, προφανως, το ζητουμενο ισχυει.

**4.2.28.** Εστω $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$. Δειξτε οτι $|\kappa\mathbf{A}| = \kappa^N |\mathbf{A}|$.

**Απαντηση**. Αυτο προκυπτει επειδη

$$\kappa\mathbf{A} = [\kappa\mathbf{a}_1 \quad \kappa\mathbf{a}_2 \quad ... \quad \kappa\mathbf{a}_N]$$

οποτε

$$\begin{aligned} \kappa\mathbf{A} &= |\kappa\mathbf{a}_1 \quad \kappa\mathbf{a}_2 \quad ... \quad \kappa\mathbf{a}_N| \\ &= \kappa\cdot|\mathbf{a}_1 \quad \kappa\mathbf{a}_2 \quad ... \quad \kappa\mathbf{a}_N| \\ &= \kappa^2\cdot|\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad ... \quad \kappa\mathbf{a}_N| \\ &= ... \\ &= \kappa^N\cdot|\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad ... \quad \mathbf{a}_N|\,. \end{aligned}$$

**4.2.29.** Εστω $N\times N$ αντισυμμετρικος πινακας $\mathbf{A}$, οπου $N=2M+1$. Δειξτε οτι $|\mathbf{A}|=0$.

**Απαντηση**. Για καθε $\mathbf{A}$ ισχυει $|\mathbf{A}|=\left|\mathbf{A}^T\right|$. Αφου ο $\mathbf{A}$ ειναι αντισυμμετρικος, ισχυει $\mathbf{A}^T=-\mathbf{A}$. Αλλα

$$-\mathbf{A}=[(-1)\cdot\mathbf{a}_1 \quad (-1)\cdot\mathbf{a}_2 \quad ... \quad (-1)\cdot\mathbf{a}_N]$$

οποτε, συμφωνα με το προηγουμο προβλημα $|-\mathbf{A}|=(-1)^{2M+1}|\mathbf{A}|=-|\mathbf{A}|$. Οποτε τελικα

$$|\mathbf{A}|=\left|\mathbf{A}^T\right|=|-\mathbf{A}|=(-1)^{2M+1}|\mathbf{A}|=-|\mathbf{A}|$$

το οποιο ισχυει μονο για $|\mathbf{A}|=0$.

**4.2.30.** Εστω $N\times N$ αντισυμμετρικος πινακας $\mathbf{A}$, τετοιος ωστε $\mathbf{A}\mathbf{A}^T=\mathbf{I}$. Δειξτε οτι $|\mathbf{A}|=1$ η $|\mathbf{A}|=-1$

**Απαντηση**. Εχουμε

$$\begin{aligned} \left|\mathbf{A}\mathbf{A}^T\right| &= |\mathbf{A}|\cdot\left|\mathbf{A}^T\right|=|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{A}|=|\mathbf{A}|^2 \\ \left|\mathbf{A}\mathbf{A}^T\right| &= |\mathbf{I}|=1 \end{aligned}$$

Αρα $|\mathbf{A}|^2=1$ που δινει αμεσως το ζητουμενο.

**4.2.31.** Χρησιμοποιωντας τον τυπο (για $3\times 3$ πινακα)

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{bmatrix} A_{11} & -A_{21} & A_{31} \\ -A_{12} & A_{22} & -A_{32} \\ A_{13} & -A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

υπολογιστε τον αντιστροφο των

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C}=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση**. Για τον $\mathbf{A}$ εχουμε

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=5$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1, \qquad A_{12}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1, \qquad A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1,$$

$$A_{21}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1, \qquad A_{22}=\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=4, \qquad A_{23}=\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=4,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-2, \qquad A_{32}=\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-7, \qquad A_{33}=\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-2,$$

Οποτε

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 7 \\ 1 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

Για τον $\mathbf{B}$ εχουμε

$$|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 24$$

$$B_{11} = 6, \qquad B_{12} = 0, \qquad B_{13} = 0,$$
$$B_{21} = 0, \qquad B_{22} = 12, \qquad B_{23} = 0,$$
$$B_{31} = 0, \qquad B_{32} = 0, \qquad B_{33} = 0,$$

Οποτε

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

(Παρατηρειστε οτη ο $\mathbf{B}^{-1}$ ειναι, οπως και ο $\mathbf{B}$, διαγωνιος· τι αλλο παρατηρειτε;) Με την ιδια διαδικασια για τον $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ βρισκουμε

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 12$$

και

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3, \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4, \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4,$$
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -4, \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8,$$

οποτε

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Αξιζει να παρατηρησουμε οτι οι υποπινακες

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ειναι αμοιβαια αντιστροφοι.

**4.2.32.** Αποδειξτε οτι ανν $|\mathbf{A}| = 0$ τοτε δεν υπαρχει ο $\mathbf{A}^{-1}$.

**Απαντηση**. Εστω οτι $|\mathbf{A}| = 0$ και υπαρχει ο $\mathbf{A}^{-1}$. Ειναι γνωστη η ιδιοτητα $|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$, οποτε θα ειχαμε

$$1 = |\mathbf{I}| = \left|\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}\right| = 0 \cdot \left|\mathbf{A}^{-1}\right| = 0$$

το οποιο ειναι ατοπο.

**4.2.33.** Εστω $N \times N$ ομαλος πινακας $\mathbf{A}$ για τον οποιο ισχυει $|3\mathbf{A}| = 27\,|\mathbf{A}|$. Ποια ειναι η τιμη του $N$;

**Απαντηση**. Απο την 4.2.28 εχουμε οτι $|3\mathbf{A}| = 3^N\,|\mathbf{A}|$. Αρα

$$3^N\,|\mathbf{A}| = 27\,|\mathbf{A}|$$

το οποιο ισχυει αν $N = 3$ η αν $|\mathbf{A}|$ (στην δευτερη περιπτωση δεν μπορουμε να υπολογισουμε την τιμη του $N$).

**4.2.34.** Βρειτε την παραγωγο ως προς $x$ της οριζουσας

$$\begin{vmatrix} 1 & x^2 \\ x & 2x+1 \end{vmatrix}.$$

**Απαντηση**. Αν υπολογισουμε την οριζουσα εχουμε

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & x^2 \\ x & 2x+1 \end{vmatrix} = 2x + 1 - x^3$$

και $df/dx = 2 - 3x^2$. Εχει ομως ενδιαφερον οτι

$$\begin{vmatrix} \frac{d}{dx}1 & x^2 \\ \frac{d}{dx}x & 2x+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \frac{d}{dx}x^2 \\ x & \frac{d}{dx}(2x+1) \end{vmatrix} =$$
$$\begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ 1 & 2x+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2x \\ x & 2 \end{vmatrix} = -x^2 + 2 - 2x^2 = 2 - 3x^2.$$

Μπορειτε να γενικευσετε το παραπανω αποτελεσμα;

**4.2.35.** Βρειτε την παραγωγο ως προς $x$ της οριζουσας

$$\begin{vmatrix} \sin x & x^3 & x^2 \\ x & e^x & 2x+1 \\ x+1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

**Απαντηση**. Αν υπολογιασουμε την οριζουσα εχουμε

$$\begin{vmatrix} \sin x & x^3 & x^2 \\ x & e^x & 2x+1 \\ x+1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left(\sin x - x^3 - x^2\right) \cdot e^x + x^3 \cdot \left(2x^2 + 2x + 1\right)$$

και

$$D = \frac{d}{dx}\begin{vmatrix} \sin x & x^3 & x^2 \\ x & e^x & 2x+1 \\ x+1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left(\cos x - 4x^2 - 2x + (\sin x) - x^3\right) e^x + 10x^4 + 8x^3 + 3x^2$$

Επισης

**4.2.36.**

$$D_1 = \begin{vmatrix} \frac{d}{dx}\sin x & x^3 & x^2 \\ \frac{d}{dx}x & e^x & 2x+1 \\ \frac{d}{dx}(x+1) & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & x^3 & x^2 \\ 1 & e^x & 2x+1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = e^x \cos x + 2x^4 - x^2 e^x$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \sin x & \frac{d}{dx}x^3 & x^2 \\ x & \frac{d}{dx}e^x & 2x+1 \\ x+1 & \frac{d}{dx}0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x & 3x^2 & x^2 \\ x & e^x & 2x+1 \\ x+1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\sin x)\, e^x + 6x^3 + 6x^4 - x^3 e^x + 3x^2 - x^2 e^x$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} \sin x & x^3 & \frac{d}{dx}x^2 \\ x & e^x & \frac{d}{dx}(2x+1) \\ x+1 & 0 & \frac{d}{dx}1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x & x^3 & 2x \\ x & e^x & 2 \\ x+1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (x+1)\left(2x^3 - 2e^x x\right).$$

Μετα απο αρκετες πραξεις επαληθευουμε οτι

$$D = D_1 + D_2 + D_3.$$

Μπορειτε να γενικευσετε το παραπανω αποτελεσμα;

**4.2.37.** Δειξτε οτι

$$\begin{vmatrix} b+c & a-b & a \\ c+a & b-c & b \\ a+b & c-a & c \end{vmatrix} = 3abc - a^3 - b^3 - c^3.$$

**Απαντηση**. Απο την δευτερη στηλη αφαιρουμε την τριτη και στην νεα οριζουσα προσθετουμε την δευτερη στηλη στην πρωτη:

$$\begin{vmatrix} b+c & a-b & a \\ c+a & b-c & b \\ a+b & c-a & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b+c & -b & a \\ c+a & -c & b \\ a+b & -a & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & -b & a \\ a & -c & b \\ b & -a & c \end{vmatrix}$$
$$= c\left(-c^2 + ab\right) + b\left(ac - b^2\right) + a\left(-a^2 + bc\right)$$
$$= 3abc - a^3 - b^3 - c^3.$$

**4.2.38.** Δειξτε οτι

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

**Απαντηση**. Στην πρωτη γραμμη προσθετουμε την δευτερη και την τριτη:

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$
$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}.$$

Τωρα απο την δευτερη και την τριτη στηλη αφαιρουμε την πρωτη:

$$(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -c-a-b & 0 \\ 2c & 0 & -a-b-c \end{vmatrix}$$
$$= (a+b+c)(a+b+c)(a+b+c).$$

**4.2.39.** Υπολογιστε την

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix}.$$

**Απαντηση**. Αφαιρωντας απο την πρωτη, δευτερη και τριτη στηλη την πρωτη παιρνουμε:

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & a-x & a-x & a-x \\ a & x-a & 0 & 0 \\ a & 0 & x-a & 0 \\ a & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix}.$$

Η δευτερη, τριτη και τεταρτη στηλη εχουν κοινο παραγοντα το $(x-a)$:

$$\begin{vmatrix} x & a-x & a-x & a-x \\ a & x-a & 0 & 0 \\ a & 0 & x-x & 0 \\ a & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} = (x-a)^3 \begin{vmatrix} x & -1 & -1 & -1 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$(x-a)^3 \cdot \left\{ \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a & 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & -1 & -1 \\ a & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} \right\} = (x-a)^3 (3a+x).$$

**4.2.40.** Εστω $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$ της μορφης

$$\mathbf{A}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 0 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & ... & ... & 0 \end{bmatrix}$$

Δειξτε οτι $|\mathbf{A}_N| = (-1)^{N-1}$.

**Απαντηση**. Απο την πρωτη γραμμη αφαιρουμε την δευτερη και μετα αναπτυσσουμε κατα τα στοιχεια της πρωτης γραμμης:

$$|\mathbf{A}_N| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 0 & 1 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & ... & ... & ... & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 0 & 1 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & ... & ... & ... & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 0 & 1 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & ... & ... & ... & 0 \end{vmatrix} = |\mathbf{A}_{N-1}|.$$

Δηλ. $|\mathbf{A}_N| = -|\mathbf{A}_{N-1}|$ οπου η $|\mathbf{A}_{N-1}|$ ειναι ταξης $N-1$. Αν επαναλαβουμε $N-1$ φορες τελικα προκυπτει το ζητουμενο.

**4.2.41.** Εστω $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$ της μορφης

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & -1 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & ... & ... & -1 \end{bmatrix}$$

Δειξτε οτι $|\mathbf{A}| = (-1)^{N-1} 2^{N-1} (N-2)$.

**Απαντηση**. Απο την πρωτη γραμμη αφαιρουμε την δευτερη και μετα αναπτυσσουμε κατα τα στοιχεια της πρωτης γραμμης:

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}_N| &= \begin{vmatrix} -1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & -1 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & ... & ... & -1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & -1 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & ... & ... & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & -1 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & ... & ... & -1 \end{vmatrix} \\ &= -2 |\mathbf{A}_{N-1}| - 2 |\mathbf{B}_{N-1}|, \end{aligned}$$

οπου

$$|\mathbf{B}_{N-1}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & -1 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & ... & ... & -1 \end{vmatrix}.$$

Τωρα, απο την πρωτη γραμμη της $|\mathbf{B}_{N-1}|$ αφαιρουμε την δευτερη και μετα αναπτυσσουμε κατα τα στοιχεια της πρωτης γραμμησ:

$$|\mathbf{B}_{N-1}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & -1 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & ... & ... & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & ... & 0 \\ 1 & -1 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & ... & ... & -1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & -1 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & ... & ... & -1 \end{vmatrix} = -2 |\mathbf{B}_{N-2}|.$$

Αρα λοιπον, $|\mathbf{B}_{N-1}| = (-2)^{N-2} |\mathbf{B}_1| = (-2)^{N-2}$, οποτε για την $|\mathbf{A}_N|$ εχουμε

$$|\mathbf{A}_N| = -2 |\mathbf{A}_{N-1}| + (-2)^{N-1}. \tag{4.15}$$

Η λυση της (4.15) ειναι $|\mathbf{A}_N| = (-1)^{N-1} 2^{N-1} (N-2)$. Αυτο μπορει να αποδειχτει με χρηση της θεωριας των *εξισωσεων διαφορων*, και μπορειτε να ελεγξετε οτι ισχυει θετοντας $N = 2, 3, ...$ .

**4.2.42.** Δειξτε οτι

$$D(x, y, z) = \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2 & y & 1 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix} = (x-y)(x-z)(y-z).$$

**Απαντηση**. Μπορουμε φυσικα να βρουμε το αποτελεσμα με τον συνηθη υπολογισμο οριζουσας και παραγοντοποιηση του αποτελεσματος. Εδω ομως θα χρησιμοποιησουμε μια αλλη προσεγγιση. Αφου η $D(x, y, z)$ ειναι αθροισμα γινομενων 3 ορων, με ενα ορο απο καθε γραμμη και ενα απο καθε στηλη, η $D(x,y,z)$ θα ειναι πολυωνυμο δευτερου βαθμου ως προς το $x$ (και επισης ως προς το $y$ και $z$). Τωρα, αν θεσουμε $x = y$, δυο σειρες της $D(x,y,z)$ γινονται ιδιες· δηλ. $D(x,x,z) = 0$, αρα στο πολυωνυμο $D(x,y,z)$ θα υπαρχει ενας ορος $(x-y)$ και το ιδιο θα ισχυει και για τον ορο $(x-z)$. Με αντιστοιχη σκεψη για την $D(x,y,z)$ ως πολυωνυμο του $y$ βλεπουμε οτι και ο $(y-z)$ πρεπει να ειναι ορος της $D(x,y,z)$. Επισης, αν θεωρησουμε την $D(x,y,z)$ ως πολυωνυμο των *τριων* μεταβλητων $x, y, z$, αυτο θα πρεπει να ειναι τριτου βαθμου. Αρα

$$D(x,y,z) = (x-y)(x-z)(y-z) \text{ η } D(x,y,z) = -(x-y)(x-z)(y-z).$$

Επειδη ομως ο ορος $x^2y$ στο πολυωνυμο πρεπει να εχει θετικο προσημο (γιατι; ελεγξτε το αναπτυγμα της οριζουσας!), συμπεραινουμε τελικα οτι $D(x,y,z) = (x-y)(x-z)(y-z)$.

Γενικευστε και υπολογιστε με αντιστοιχο τροπο την οριζουσα

$$D(x_1, x_2, ..., x_N) = \begin{vmatrix} x_1^{N-1} & x_1^{N-2} & ... & 1 \\ x_2^{N-1} & x_2^{N-2} & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ x_N^{N-1} & x_N^{N-2} & ... & 1 \end{vmatrix}.$$

**4.2.43.** Να υπολογιστει η

$$D_N(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1 & 1-2x & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & 1 & ... & N-1-x \end{vmatrix}. \tag{4.16}$$

**Απαντηση**. Αφου η οριζουσα ειναι αθροισμα γινομενων $N$ ορων, η $D_N(x)$ ειναι πολυωνυμο $N-1$ βαθμου ως προς $x$ και η εξισωση $D_N = 0$ ειναι $N-1$ βαθμου και αρα εχει $N-1$ ριζες. Παρατηρουμε οτι, για $x = 0, 1, ..., N-2$, η δευτερη, τριτη, ..., $N$-στη στηλη της οριζουσας ισουται με την πρωτη. Αρα οι $N-1$ ριζες της εξισωσης ειναι $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, ..., $x_{N-1} = N-2$. Οποτε και

$$D_N(x) = x \cdot (x-1) \cdot ... \cdot (x-N+2).$$

## 4.3 Αλυτα Προβληματα

**4.3.1.** Υπολογιστε τις παρακατω οριζουσες.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 99 & 1 & 2 \\ 373 & 3 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

**Απ.** $-2, -6, 7, 0, 24, 60.$

**4.3.2.** Αποδειξτε οτι

$$\left|\begin{array}{cccc} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{NN} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccc} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{N1} & a_{N2} & ... & a_{NN} \end{array}\right| = a_{11}a_{22}...a_{NN}.$$

**4.3.3.** Αποδειξτε οτι

$$\left|\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}\right| + \left|\begin{array}{cc} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{array}\right| \neq \left|\begin{array}{cc} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{array}\right|.$$

**4.3.4.** Αποδειξτε οτι

$$\left|\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}\right| + \left|\begin{array}{cc} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} \end{array}\right|.$$

**4.3.5.** Αποδειξτε οτι

$$\left|\begin{array}{cc} a_{11} & \kappa\cdot a_{12} \\ a_{21} & \kappa\cdot a_{22} \end{array}\right| = \kappa\cdot\left|\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}\right|.$$

Με τι ισουται

$$\left|\begin{array}{cc} \kappa\cdot a_{11} & \kappa\cdot a_{12} \\ \kappa\cdot a_{21} & \kappa\cdot a_{22} \end{array}\right|;$$

**4.3.6.** Ελεγξτε αν

$$\left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right| = -\left(a_{21}\left|\begin{array}{cc} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{array}\right| - a_{22}\left|\begin{array}{cc} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{array}\right| + a_{23}\left|\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}\right|\right)$$

**4.3.7.** Αποδειξτε οτι

$$\left|\begin{array}{ccc} x & y+z & z \\ x+1 & y+z+2 & z+1 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right| = 0.$$

**4.3.8.** Αποδειξτε οτι

$$\left|\begin{array}{ccc} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{array}\right| = 3a^2 + a^3.$$

**4.3.9.** Αποδειξτε οτι

$$\left|\begin{array}{cccc} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right| \cdot \left|\begin{array}{cc} e & f \\ g & h \end{array}\right|.$$

**4.3.10.** Αποδειξτε οτι

$$\left|\begin{array}{cccc} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right| = 1.$$

**4.3.11.** Αποδειξτε οτι

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = 0.$$

**4.3.12.** Αποδειξτε οτι για $N \in \{2,3,...\}$ εχουμε

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 0 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & .. & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{N-1}(N-1).$$

**4.3.13.** Αποδειξτε οτι

$$\begin{vmatrix} b+c & a-b & a \\ c+a & b-c & b \\ a+b & c-a & c \end{vmatrix} = 3abc - a^3 - b^3 - c^3.$$

**4.3.14.** Αποδειξτε οτι

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = (a+b+c+d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)(a+b-c-d).$$

**4.3.15.** Αποδειξτε οτι

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2^2, \qquad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2^4.$$

Μπορειτε να γενικευσετε αυτα τα αποτελεσματα για $N \times N$ οριζουσα;

**4.3.16.** Αποδειξτε οτι

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c & d \\ -a & 0 & a & b & c \\ -b & -a & 0 & a & b \\ -c & -b & -a & 0 & a \\ -d & -c & -b & -a & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

**4.3.17.** Αποδειξτε οτι

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a(b-c)(d-c)(a-b).$$

**4.3.18.** Για $M \times M$. πινακες $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$ αποδειξτε οτι

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{C}| .$$

**4.3.19.** Βρειτε την παραγωγο ως προς $x$ της οριζουσας

$$\begin{vmatrix} 1 & x^2 \\ x & 2x+1 \end{vmatrix} .$$

**Απ**. $2 - 3x^2$.

**4.3.20.** Βρειτε την παραγωγο ως προς $x$ της οριζουσας

$$\begin{vmatrix} x+2 & x & e^x \\ x+1 & e^x & x+3 \\ e^x & x-7 & x^4 \end{vmatrix}$$

**Απ**. $7x^4e^x + x^5e^x - 3x^2 + 4x + 29 + 8x^3e^x - 6x^5 + 2e^xx^2 + e^xx - 10e^x - 5x^4 - 3e^{3x}$.

**4.3.21.** Αν για τον πινακα $\mathbf{A}$ ισχυει $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$ (οπου $\overline{z}$ ειναι ο μιγαδικος συζυγης του $z$), αποδειξτε οτι $|\mathbf{A}|$ ειναι πραγματικος αριθμος.

**4.3.22.** Αποδειξτε οτι

$$(\mathbf{I}+\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I} - (\mathbf{I}+\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A} \text{ και } (\mathbf{I}+\mathbf{PQ})^{-1}\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{I}+\mathbf{QP})^{-1} .$$

**4.3.23.** Αποδειξτε οτι

$$(\mathbf{A}+\mathbf{UCV})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{C}^{-1}+\mathbf{VAU}\right)^{-1}\mathbf{VA}^{-1}.$$

**4.3.24.** Εστω $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$ της μορφης

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 0 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & ... & ... & 0 \end{bmatrix}$$

Δειξτε οτι $|\mathbf{A}| = (-1)^{N-1}(N-1)$.

**4.3.25.** Εστω $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$ της μορφης

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a+b & a & ... & a \\ a & a+b & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ a & ... & ... & a+b \end{bmatrix}$$

Δειξτε οτι $|\mathbf{A}| = b^{N-1}(Na+b)$.

**4.3.26.** Δειξτε οτι

$$\begin{vmatrix} 0 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ -a_1 & 0 & a_2 & b_2 & c_2 \\ -b_1 & -a_2 & 0 & a_3 & b_3 \\ -c_1 & -b_2 & -a_3 & 0 & a_4 \\ -d_1 & -c_2 & -b_3 & -a_4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

**4.3.27.** Δειξτε οτι

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & ... & a_N \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & ... & a_N \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 & ... & a_N \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_1 & a_2 & a_3 & ... & 1+a_N \end{vmatrix} = 1 + a_1 + a_2 + ... + a_N.$$

**4.3.28.** Για την παρακατω οριζουσα ταξεως $2N$ δειξτε οτι

$$\begin{vmatrix} a & 0 & ... & 0 & b \\ 0 & a & ... & b & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & b & ... & a & 0 \\ b & 0 & ... & 0 & a \end{vmatrix} = \left(a^2 - b^2\right)..$$

**4.3.29.** Δειξτε οτι

$$\begin{vmatrix} a & -b & -a & b_1 \\ b & a & -b & -a \\ c & -d & c & -d \\ d & c & d & c \end{vmatrix} = 4 \cdot \left(a^2 + b^2\right) \cdot \left(c^2 + d^2\right).$$

**4.3.30.** Δειξτε οτι

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix} = x^2 z^2.$$

**4.3.31.** Δειξτε οτι

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & y \\ 1 & x & 0 & z \\ 1 & y & z & 0 \end{vmatrix} = x^2 + y^2 + z^2 - 2 \cdot (xy + yz + zx).$$

**4.3.32.** Δινεται $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$ που ικανοποιει:

$$\mathbf{A}_{mn} = a \text{ για } m = n, \quad \mathbf{A}_{mn} = b \text{ για } m \neq n.$$

(α) Δειξτε οτι αν υπαρχει ο $\mathbf{A}^{-1}$ τοτε $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)_{mn} = x$ για $m = n$ και $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)_{mn} = y$ για $m \neq n$·
(β) βρειτε ικανη και αναγκαια συνθηκη μεταξυ των $a, b$ ωστε να υπαρχει ο $\mathbf{A}^{-1}$.

**4.3.33.** Δειξτε οτι

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & ... & N-1 \\ 1 & 0 & 1 & ... & N-2 \\ 2 & 1 & 0 & ... & N-3 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ N-1 & N-2 & N-3 & ... & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{N-1} \cdot 2^{N-2} \cdot (N-1) .$$

**4.3.34.** Δειξτε οτι

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4\,(-1)^4$$

Γενικευστε για οριζουσα $N$-στης ταξης.

**4.3.35.** Δειξτε οτι

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^4$$

Γενικευστε για οριζουσα $N$-στης ταξης.

**4.3.36.** Δειξτε οτι

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & ... & a \\ 1 & 1 & a & 1 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & 1 & 1 & ... & a \end{vmatrix} = (a-1)^{N-1}\,(a+N-1) .$$

**4.3.37.** Εστω οτι $a_1 a_2 .... a_N \neq 0$. Δειξτε οτι

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & 1 & ... & a \\ 1 & 1 & 1+a_3 & 1 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1+a_N \end{vmatrix} = a_1 a_2 ... a_N \cdot \left(1 + \frac{1}{a_1} + ... + \frac{1}{a_N}\right) .$$

**4.3.38.** Δινεται ο $N \times N$ πινακας

$$\mathbf{A}_N = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & a \end{bmatrix} .$$

Δειξτε οτι $|\mathbf{A}_N| = a\,|\mathbf{A}_{N-1}| - |\mathbf{A}_{N-2}|$. Κατοπιν βρειτε την τιμη της $|\mathbf{A}_N|$.

**4.3.39.** Δειξτε οτι

$$\begin{vmatrix} (a_2+a_3)^2 & a_1^2 & a_2^2 \\ a_2^2 & (a_3+a_1)^2 & a_2^2 \\ a_3^2 & a_3^2 & (a_1+a_2)^2 \end{vmatrix} = 2a_1a_2a_3 \cdot (a_1+a_2+a_3)^2 .$$

Γενικευστε για οριζουσα $N$-στης ταξης.

**4.3.40.** Δειξτε οτι

$$\begin{vmatrix} x_1+y_1 & y_1+z_1 & z_1+x_1 \\ x_2+y_2 & y_2+z_2 & z_2+x_2 \\ x_3+y_3 & y_3+z_3 & z_3+x_3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} .$$

**4.3.41.** Δειξτε οτι

$$\begin{vmatrix} x & a & b & x \\ a & x & x & b \\ b & x & x & a \\ x & b & a & x \end{vmatrix} = (a+b-2x)(a+b+2x)(b-a)^2 .$$

**4.3.42.** Δειξτε οτι

$$\begin{vmatrix} \sum_{n=1}^{1} & \sum_{n=1}^{1} & \sum_{n=1}^{1} & \cdots & \sum_{n=1}^{1} \\ \sum_{n=1}^{1} & \sum_{n=1}^{2} & \sum_{n=1}^{2} & \cdots & \sum_{n=1}^{2} \\ \sum_{n=1}^{1} & \sum_{n=1}^{2} & \sum_{n=1}^{3} & \cdots & \sum_{n=1}^{3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{n=1}^{1} & \sum_{n=1}^{2} & \sum_{n=1}^{3} & \cdots & \sum_{n=1}^{N} \end{vmatrix} = N!.$$

**4.3.43.** Αποδειξτε οτι

$$\begin{bmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Γενικευστε για $N \times N$ πινακες.

**4.3.44.** Αποδειξτε οτι

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a+1}{a^2+a-2} & -\frac{1}{a^2+a-2} & -\frac{1}{a^2+a-2} \\ -\frac{1}{a^2+a-2} & \frac{a+1}{a^2+a-2} & -\frac{1}{a^2+a-2} \\ -\frac{1}{a^2+a-2} & -\frac{1}{a^2+a-2} & \frac{a+1}{a^2+a-2} \end{bmatrix} .$$

Γενικευστε για $N \times N$ πινακες.

**4.3.45.** Εστω $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$ τετοιος ωστε $\mathbf{I}+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\ldots+\mathbf{A}^K=\mathbf{0}$. Αποδειξτε οτι $\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^K$.

# Κεφάλαιο 5

# Οριζουσες και Συστηματα Γραμμικων Εξισωσεων

## 5.1 Θεωρια

**5.1.1.** Εστω το συστημα $N$ γραμμικων εξισωσεων με $N$ αγνωστους

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1N}x_N &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2N}x_N &= b_2 \\ &... \\ a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + ... + a_{NN}x_N &= b_N \end{aligned} \tag{5.1}$$

Το συστημα μπορει να γραφτει και στην μορφη

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2N} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{N1} & a_{N2} & ... & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_N \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

ή και

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}. \tag{5.3}$$

οπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2N} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{N1} & a_{N2} & ... & a_{NN} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_N \end{bmatrix}.$$

**5.1.2.** Αν $|\mathbf{A}| \neq 0$, τοτε η *μοναδικη* λυση της (5.3) ειναι

$$\mathbf{x} = \mathbf{A^{-1}b}. \tag{5.4}$$

**5.1.3.** (Κανονας του $Cramer$) Αν $|\mathbf{A}| \neq 0$, τοτε η *μοναδικη* λυση της (5.3) ειναι:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & ... & a_{1N} \\ b_2 & a_{22} & ... & a_{2N} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_N & a_{N2} & ... & a_{NN} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2N} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{N1} & a_{N2} & ... & a_{NN} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & ... & a_{1N} \\ a_{21} & b_2 & ... & a_{2N} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{N1} & b_N & ... & a_{NN} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2N} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{N1} & a_{N2} & ... & a_{NN} \end{vmatrix}}, ..., x_N = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & b_2 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{N1} & a_{N2} & ... & b_N \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2N} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{N1} & a_{N2} & ... & a_{NN} \end{vmatrix}}. \tag{5.5}$$

**5.1.4.** Εστω οτι ο $\mathbf{A}$ ειναι $M \times N$, και $M < N$. Το συστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, δηλ.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2N} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{M1} & a_{M2} & ... & a_{MN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_M \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

ειναι *μη τετραγωνικο* και μαλιστα εχει περισσοτερους αγνωστους αποτι εξισωσεις. Ωστοσο, μπορει να λυθει με τον κανονα του $Cramer$, ως εξης. Το ξαναγραφουμε στην μορφη

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1M} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2M} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{M1} & a_{M2} & ... & a_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{b}_1 \\ \widehat{b}_2 \\ ... \\ \widehat{b}_M \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

οπου

$$\begin{bmatrix} \widehat{b}_1 \\ \widehat{b}_2 \\ ... \\ \widehat{b}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_M \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{1,M+1} & a_{1,M+2} & ... & a_{1,N} \\ a_{2,M+1} & a_{2,M+2} & ... & a_{2,N} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{M,M+1} & a_{M,M+2} & ... & a_{M,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{M+1} \\ x_{M+2} \\ ... \\ x_N \end{bmatrix}. \tag{5.8}$$

Οποτε μπορουμε να λυσουμε την (5.7), αρκει να ισχυει

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1M} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2M} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{M1} & a_{M2} & ... & a_{MM} \end{vmatrix} \neq 0,$$

και να υπολογισουμε τους αγνωστους $x_1, x_2, ..., x_M$ *συναρτησει των* $x_{M+1}, ..., x_N$. Ετσι παιρνουμε απειρες λυσεις, που εξαρτωνται απο τις *ελευθερες μεταβλητες* $x_{M+1}$, $x_{M+2}$, $x_N$, οι οποιες μπορουν να παρουν αυθαιρετες τιμες.

**5.1.5.** Για το τετραγωνικο συστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ισχυουν τα εξης.

1. Αν $|\mathbf{A}| \neq 0$, το συστημα εχει *μοναδικη* λυση αυτη που δινεται απο τον κανονα του Cramer. Στην ειδικη περιπτωση που το συστημα ειναι *ομογενες* ($\mathbf{b} = \mathbf{0}$) η μοναδικη λυση ειναι η μηδενικη: $x_1 = x_2 = ... = x_N = 0$.

2. Αν $|\mathbf{A}| = 0$ και $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ (ομογενες συστημα) το συστημα εχει *απειρες* λυσεις, εκ των οποιων μια ειναι η μηδενικη.

3. Αν $|\mathbf{A}| = 0$ και $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ (μη ομογενες συστημα) το συστημα θα εχει ή απειρες ή καμμια λυση.

**5.1.6.** Το τετραγωνικο *ομογενες* συστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ εχει *μη μηδενικη* λυση ανν $|\mathbf{A}| = 0$.

## 5.2 Λυμενα Προβληματα

**5.2.1.** Αποδειξτε οτι, αν υπαρχει ο $\mathbf{A}^{-1}$, τοτε η μοναδικη λυση της $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ειναι $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

**Απαντηση**. Αφου ο $\mathbf{A}^{-1}$ υπαρχει εχουμε

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{Ix} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

**5.2.2.** Λυστε με χρηση του αντιστροφου πινακα το συστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 &= -3 \end{aligned}$$

**Απαντηση**. Θα γραψουμε το συστημα στην μορφη $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ και θα βρουμε την λυση απο την σχεση $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. Εχουμε

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**5.2.3.** Λυστε με χρηση του αντιστροφου πινακα το συστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 5 \\ x_1 - x_2 &= -1 \end{aligned}.$$

**Απαντηση**. Εχουμε

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

**5.2.4.** Λυστε με χρηση του αντιστροφου πινακα το συστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 0 \end{aligned}$$

**Απαντηση**. Παρατηρουμε οτι

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

οποτε ο $\mathbf{A}^{-1}$ δεν υπαρχει και το συστημα δεν μπορει ναλυθει με τον αντιστροφο πινακα.

**5.2.5.** Λυστε με χρηση του αντιστροφου πινακα το συστημα

$$\begin{gathered} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{gathered}$$

**Απαντηση**. Εχουμε

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 1 \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 1 \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**5.2.6.** Λυστε με χρηση του αντιστροφου πινακα το συστημα

$$\begin{gathered} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{gathered}.$$

εχουμε

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

αρα ο $\mathbf{A}^{-1}$δεν υπαρχει και το συστημα δεν μπορει να λυθει με τον αντιστροφο.

**5.2.7.** Αποδειξτε τον κανονα του $Cramer$ ( 5.1.3).

**Απαντηση**. Εστω $\mathbf{A}_n$ ο πινακας που προκυπτει απο τον $\mathbf{A}$ αν αντικαταστησουμε την $i$-στη στηλη με την $\mathbf{b}$. Ομως, με αναπτυξη της οριζουσας κατα την $n$-στη στηλη εχουμε

$$|\mathbf{A}_n| = \sum_{k=1}^{N} b_k A_{kn}. \tag{5.9}$$

(Εδω χρησιμοποιησαμε το γεγονος οτι οι $\mathbf{A}_n$ και $\mathbf{A}$ εχουν ιδια ελασσονα $A_{kn}$ - γιατι ισχυει αυτο;). Πρεπει να ελεγξουμε οτι το διανυσμα $\mathbf{x}$ του κανονα του $Cramer$ ειναι οντως μια λυση του $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Θετουμε λοιπον (για $n = 1, 2, ..., N$)

$$x_n = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \sum_{k=1}^{N} b_k A_{kn} \tag{5.10}$$

και πρεπει (χρησιμοποιωντας την (5.9) ) να εχουμε για $i = 1, 2, .., N$:

$$\sum_{n=1}^{N} a_{in} x_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{a_{in}}{|\mathbf{A}|} \sum_{k=1}^{N} b_k A_{kn} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \sum_{k=1}^{N} \left( \sum_{n=1}^{N} a_{in} A_{kn} \right) b_k.$$

Αρκει τωρα να δειξουμε οτι

$$\sum_{n=1}^{N} a_{in}A_{kn} = \begin{cases} |\mathbf{A}| & \text{οταν } i = k, \\ 0 & \text{οταν } i \neq k. \end{cases}$$

Αλλα $\sum_{n=1}^{N} a_{in}A_{in} = |\mathbf{A}|$ ειναι απλα ο τυπος της οριζουσας υπολογισμενης ως προς την $i$-στη στηλη. Και $\sum_{n=1}^{N} a_{in}A_{kn} = 0$, $i \neq k$, λεει απλα οτι η οριζουσα ενος πινακα (ποιου;) που εχει δυο ιδιες γραμμες ισουται με μηδεν. Αρα το διανυσμα $\mathbf{x}$ της (5.10) ειναι μια (η μοναδικη!) λυση του $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

**5.2.8.** Λυστε τα παρακατω συστηματα (οπου αυτο ειναι δυνατο) χρησιμοποιωντας τον κανονα του $Cramer$.

$$\begin{array}{c} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = -3 \end{array}, \qquad \begin{array}{c} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{array}, \qquad \begin{array}{c} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{array}$$

**Απαντηση**. Για το

$$\begin{array}{c} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = -3 \end{array}$$

εχουμε

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = -1, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = 1.$$

Για το

$$\begin{array}{c} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{array}$$

εχουμε

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = 2, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = 3.$$

Για το

$$\begin{array}{c} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{array}$$

παρατηρουμε οτι

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

οποτε ο κανονα στου $Cramer$ δεν εφαρμοζεται. Επισης παρατηρουμε οτι οι δυο εξισωσεις ειναι ασυμβατες, αρα το συστημα ειναι αδυνατο.

**5.2.9.** Λυστε το παρακατω συστημα χρησιμοποιωντας τον κανονα του $Cramer$.

$$\begin{array}{c} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{array}. \tag{5.11}$$

**Απαντηση**.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0}{5} = 0, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{5}{5} = 1, x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0}{5} = 0.$$

**5.2.10.** Λυστε το παρακατω συστημα χρησιμοποιωντας τον κανονα του $Cramer$.

$$\begin{array}{c} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{array} .$$

**Απαντηση**. Εχουμε

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

αρα καταρχην δεν μπορουμε να εφαρμοσουμε τον κανονα του $Cramer$. Ομως μπορουμε να εφαρμοσουμε το εξης τεχνασμα. Παιρνουμε τις δυο πρωτες εξισωσεις και εχουμε το υπο-συστημα

$$\begin{array}{c} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{array}$$

το οποιο ξαναγραφουμε ως

$$\begin{array}{c} x_1 + 2x_2 = -x_3 \\ 2x_1 - x_2 = -2x_3 \end{array} .$$

Για το συστημα αυτο εχουμε

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -x_3 & 2 \\ -2x_3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = -x_3, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -x_3 \\ 2 & -2x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = 0.$$

*Επαληθευουμε την τριτη εξισωση.* Πραγματι, αντικαθιστωντας τις τιμες των $x_1$, $x_2$ στην τριτη εξισωση της (5.11), εχουμε

$$x_1 + x_2 + x_3 = -x_3 + 0 + x_3 = 0.$$

Οποτε η λυση του αρχικου συστηματος ειναι

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ 1 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Φαινεται δηλαδη οτι το $x_3 = t$ επιλεγεται αυθαιρετα και εχουμε απειρια λυσεων (μια για καθε τιμη του $x_3$). Η λυση μπορει γραφτει και ως εξης:

$$\mathbf{x} = t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

**5.2.11.** Λυστε το παρακατω συστημα χρησιμοποιωντας τον κανονα του $Cramer$.

$$\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{array} .$$

**Απαντηση**. Εχουμε

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

αρα δεν μπορουμε να εφαρμοσουμε τον κανονα του $Cramer$ αμεσα. Παιρνουμε τις δυο πρωτες εξισωσεις και εχουμε το υπο-συστημα

$$\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{array}$$

το οποιο ξαναγραφουμε ως

$$\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 = 2 - x_3 \\ 2x_1 - x_2 = -1 - 2x_3 \end{array} .$$

Για το συστημα αυτο εχουμε

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 - x_3 & 2 \\ -1 - 2x_3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = -x_3, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 - x_3 \\ 2 & -1 - 2x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = 1.$$

*Επαληθευουμε την τριτη εξισωση.* Πραγματι εχουμε

$$x_1 + x_2 + x_3 = -x_3 + 1 + x_3 = 1.$$

Οποτε η λυση του αρχικου συστηματος ειναι

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

για τυχον $t \in \mathbb{R}$ (απειρια λυσεων). Ποια ειναι η σχεση του συστηματος με αυτο της προηγουμενης ασκησης; Πια ειναι η σχεση των λυσεων;

**5.2.12.** Υπολογιστε τον αντιστροφο του

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

με χρηση του κανονα του $Cramer$.

**Απαντηση**. Για

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$$

πρεπει να εχουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

το οποιο μπορει να ξαναγραφτει ως τρια χωριστα υποσυστηματα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Για το πρωτο συστημα εχουμε

$$x_{11} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}, \qquad x_{21} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{1}{2}, \qquad x_{31} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}$$

Με αντιστοιχο τροπο υπολογιζουμε τα $x_{21}, x_{22}$, ..., $x_{33}$ και τελικα παιρνουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}.$$

**5.2.13.** Αποδειξτε την 5.1.5.

**Απαντηση**. Αν $|\mathbf{A}| \neq 0$, τοτε υπαρχει ο (μοναδικος) $\mathbf{A}^{-1}$ και αρα η μοναδικη λυση της $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ειναι η $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. Αν $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, τοτε $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Αν $|\mathbf{A}| = 0$ και $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, βρισκουμε τον μεγαλυτερο τετραγωνικο υποπινακα του $\mathbf{A}$, εστω $\mathbf{A}'$, ο οποιος εχει μη μηδενικη οριζουσα. Ενας τετοιος πινακας πρεπει να υπαρχει γιατι γιατι σε αντιθετη περιπτωση ολα τα στοιχεια του $\mathbf{A}$ ειναι μηδενικα (αποδειξτε το!) και το συστημα ειναι τετριμμενο. Χρησιμοποιωντας τον $\mathbf{A}'$, λυνουμε το αντιστοιχο υποσυστημα, στο οποιο θα εμφανιζονται ελευθερες μεταβλητες $x_{n_1}$, $x_{n_2}$, ..., αρα θα εχουμε απειρες λυσεις. Μια απο αυτες τις λυσεις θα ειναι η μηδενικη, επειδη ισχυει $\mathbf{A0} = \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Εστω τωρα οτι $|\mathbf{A}| = 0$ και $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ και το συστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ εχει μια λυση $\mathbf{u}$, δηλ.

$$\mathbf{Au} = \mathbf{b}.$$

Θεωρειστε τωρα το συστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ το οποιο εχει απειρες λυσεις (αφου $|\mathbf{A}| = 0$). Ας παρω δυο τυχουσες λυσεις, τις $\mathbf{x}'$ και $\mathbf{x}''$ , $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}''$. Τοτε

$$\left. \begin{array}{c} \mathbf{Au} = \mathbf{b} \\ \mathbf{Ax}' = \mathbf{0} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{A} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{x}') = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b},$$

δηλ. το $\mathbf{z}' = \mathbf{u} + \mathbf{x}'$ ειναι μια λυση του $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$· με ιδιο τροπο βρισκουμε οτι το $\mathbf{z}'' = \mathbf{u} + \mathbf{x}''$ ειναι μια *αλλη* λυση του $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, διαφορετικη της $\mathbf{z}'$ (διοτι $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}'' \Rightarrow \mathbf{x}' + \mathbf{b} \neq \mathbf{x}'' + \mathbf{b}$). Ετσι, για καθε μια απο τις απειρες λυσεις του $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ παιρνω μια λυση του $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ και ολες αυτες ειναι διαφορετικες μεταξυ τους. Με αλλα λογια, αν το $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ εχει *μια* λυση, τοτε εχει *απειρες*· εναλλακτικα το $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ δεν εχει *καμμια* λυση.

**5.2.14.** Δωστε μια γεωμετρικη ερμηνεια της 5.1.5 σε σχεση με συστηματα $2 \times 2$.

**Απαντηση**. Οταν το συστημα ειναι $2 \times 2$ εχει την μορφη

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \tag{5.12}$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \tag{5.13}$$

και οι εξισωσεις (5.12)-(5.13) ειναι οι εξισωσεις δυο ευθειων. Ενα σημειο που ικανοποιει και τις δυο εξισωσεις ειναι η τομη των δυο ευθειων. Τωρα,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \frac{a_{11}}{a_{21}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}}$$

που σημαινει οτι οι δυο ευθειες δεν ειναι παραλληλες, αρα τεμονται σε ενα μοναδικο σημειο – δηλ. το συστημα εχει μοναδικη λυση. Επισης

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}}$$

που σημαινει οτι οι δυο ευθειες ειναι *παραλληλες* (αρα δεν τεμνονται σε κανενα σημειο ), η συμπιπτουν (αρε τεμονται σε απειρα σημεια). Στην ειδικη περιπτωση που $b_1 = b_2 = 0$, και οι δυο ευθειες περνουν απο το σημειο $(0, 0)$ αρα το συστημα εχει τουλαχιστον μια λυση· αν δε επιπλεον η οριζουσα μηδενιζεται, οι ευθειες περνουν απο το $(0, 0)$ *και* συμπιπτουν – δηλ. το συστημα εχει απειρες λυσεις.

**5.2.15.** Δωστε μια γεωμετρικη ερμηνεια της 5.1.5 σε σχεση με συστηματα $3 \times 3$.

**Απαντηση**. Οταν το συστημα ειναι $3 \times 3$ εχει την μορφη

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \tag{5.14}$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \tag{5.15}$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \tag{5.16}$$

και αυτες ειναι οι εξισωσεις τριων επιπεδων. Η αναλυση ειναι πιο πολυπλοκη αποτι στο $2 \times 2$ συστημα, αλλα ουσιαστκα και παλι οι περιπτωσεις ειναι τρεις: (α) τα δυο επιπεδα τεμνονται σε μια ευθεια η οποια τεμνει το τριτο επιπεδο σε ενα μοναδικο σημειο ($|\mathbf{A}| \neq 0$, μοναδικη λυση), (β) τα επιπεδα ειτε συμπιπτουν ειτε περνουν ολα απο μια ευθεια ($|\mathbf{A}| = 0$, απειρες λυσεις), (γ) τα δυο τουλαχιστον επιπεδα ειναι παραλληλα ($|\mathbf{A}| = 0$, καμμια λυση).

**5.2.16.** Αποδειξτε οτι το τετραγωνικο *ομογενες* συστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ εχει *μη μηδενικη* λυση ανν $|\mathbf{A}| = 0$.

**Απαντηση**. $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ εχει *παντα* την μηδενικη λυση. Αν εχει και μη μηδενικη λυση, τοτε θα εχει απειρια λυσεων. Αυτο φαινεται απο την 5.1.5 αλλα μπορουμε να το δουμε και ως εξης: αν $\widehat{\mathbf{x}}$ ειναι μια λυση $\mathbf{A}\widehat{\mathbf{x}}= \mathbf{0}$, τοτε για καθε $\kappa \in \mathbb{R}$ εχουμε

$$\mathbf{A}\cdot (\kappa\widehat{\mathbf{x}}) = \kappa \cdot \mathbf{A}\widehat{\mathbf{x}}=\kappa \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

δηλ. το συστημα εχει απειρες λυσεις (μια για καθε $\kappa \in \mathbb{R}$). Ξερουμε δε απο την 5.1.5 οτι το συστημα εχει απειρες λυσεις ανν $|\mathbf{A}| = 0$.

**5.2.17.** Βρειτε για ποιες τιμες του $\kappa$ το συστημα

$$\begin{aligned} \kappa x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + \kappa x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + \kappa x_3 &= 3 \end{aligned}$$

εχει μοναδικη λυση.

**Απαντηση**. Αν γραψουμε το συστημα στην μορφη $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, τοτε

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \kappa & 1 & 1 \\ 1 & \kappa & 1 \\ 1 & 1 & \kappa \end{vmatrix} = \kappa^3 - 3\kappa + 2 = (\kappa + 2)(\kappa - 1)^2 .$$

Για να εχει το συστημα μοναδικη λυση, πρεπει $|\mathbf{A}| = (\kappa + 2)(\kappa - 1)^2 \neq 0$, δηλ $\kappa \in \mathbb{R} - \{-2, 1\}$.

**5.2.18.** Βρειτε για ποιες τιμες του $\kappa$ το συστημα

$$\begin{aligned} \kappa x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 3x_1 + \kappa x_2 &= 2 \end{aligned}$$

εχει απειρες λυσεις.

**Απαντηση**. Αν γραψουμε το συστημα στην μορφη $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, τοτε

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \kappa & 2 \\ 3 & \kappa \end{vmatrix} = \kappa^2 - 6.$$

Αφου το συστημα ειναι ομογενες, θα εχει απειρες λυσεις οταν $|\mathbf{A}| = \kappa^2 - 6 = 0$, δηλ. οταν $\kappa = \pm\sqrt{6}$.

## 5.3 Αλυτα Προβληματα

**5.3.1.** Λυστε τα παρακατω συστηματα (οπου αυτο ειναι δυνατο) χρησιμοποιωντας τον κανονα του *Cramer*.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 &= -3 \end{aligned}, \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 5 \\ x_1 - x_2 &= -1 \end{aligned}, \qquad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 5 \\ x_1 - 2x_2 &= -1 \end{aligned}$$

**Απ**. $(x_1 = -1, x_2 = 1)$, $(x_1 = 2, x_2 = 3)$, $(x_1 = \frac{9}{5}, x_2 = \frac{7}{5})$.

**5.3.2.** Λυστε τα παρακατω συστηματα (οπου αυτο ειναι δυνατο) χρησιμοποιωντας τον κανονα του $Cramer$.

$$\begin{matrix} x_1+3x_2-x_3=2 \\ 3x_2+2x_3-x_4=5 \\ x_3+x_4=1 \\ x_4=2 \end{matrix}, \qquad \begin{matrix} x_1+2x_2+x_3=2 \\ 2x_1-x_2+2x_3=-1 \\ x_1+x_2+x_3=1 \end{matrix}, \qquad \begin{matrix} x_1+3x_2-x_3=2 \\ 3x_1-x_2=5 \\ x_1+x_2-x_3=1 \end{matrix}.$$

**Απ**. $(x_4=2, x_3=-1, x_2=3, x_1=-8)$, $(x_2=1, x_3=x_3, x_1=-x_3)$, $x_1=\frac{11}{6}, x_2=\frac{1}{2}, x_3=\frac{4}{3})$.

**5.3.3.** Λυστε τα παρακατω συστηματα (οπου αυτο ειναι δυνατο) χρησιμοποιωντας τον κανονα του $Cramer$.

$$\begin{matrix} x_1+x_2-2x_3=5 \\ x_1-x_2+x_3=-1 \\ -2x_1+x_2+x_3=4 \end{matrix}, \qquad \begin{matrix} x_1+x_2-2x_3=5 \\ x_1+x_3=-1 \\ -2x_1+x_2+x_3=4 \end{matrix}, \qquad \begin{matrix} x_1+x_2-x_3=1 \\ x_1-x_2+x_3=1 \\ -x_1+x_2+x_3=1 \end{matrix}.$$

**Απ**. $\left(x_1=\frac{11}{3}, x_2=8, x_3=\frac{10}{3}\right)$, $(x_1=-\frac{1}{3}, x_2=4, x_3=-\frac{2}{3})$, $(x_1=1, x_2=1, x_3=1)$.

**5.3.4.** Λυστε τα παρακατω συστηματα (οπου αυτο ειναι δυνατο) χρησιμοποιωντας τον κανονα του $Cramer$.

$$\begin{matrix} x_1+3x_2-4x_3=0 \\ x_1+x_2-x_3=0 \\ 2x_1+4x_2-5x_3=0 \end{matrix}, \qquad \begin{matrix} x_1+3x_2-4x_3=1 \\ x_1+x_2-x_3=3 \\ 2x_1+4x_2-5x_3=4 \end{matrix}, \qquad \begin{matrix} x_1+3x_2-4x_3=1 \\ x_1+x_2-x_3=2 \\ 2x_1+4x_2-5x_3=4 \end{matrix}.$$

**Απ**. $\left(x_2=\frac{3}{2}x_3, x_1=-\frac{1}{2}x_3, x_3=x_3\right)$, $(x_2=\frac{3}{2}x_3-1, x_3=x_3, x_1=-\frac{1}{2}x_3+4)$, δεν εχει λυση.

**5.3.5.** Λυστε τα συστηματα των Προβληματων 5.3.1 - 5.3.4 με χρηση του αντιστροφου πινακα.

**5.3.6.** Λυστε τα παρακατω συστηματα (οπου αυτο ειναι δυνατο) χρησιμοποιωντας τον κανονα του $Cramer$.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ **Απ**. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{10}{9} \\ \frac{17}{18} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$.

2. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ **Απ**. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} \\ \frac{7}{18} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ **Απ**. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \hat{t}_1 \\ -\frac{7}{4}\hat{t}_1+1 \\ -\frac{3}{2}\hat{t}_1+1 \end{bmatrix}$.

4. $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ **Απ**. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$.

5. $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ **Απ**. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$..

6. $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ **Απ**. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

**5.3.7.** Λυστε τα συστηματα της Ασκησης 5.3.6 με χρηση του αντιστροφου πινακα.

**5.3.8.** Λυστε τα παρακατω συστηματα.

1. $\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & a \\ a+1 & a+1 & a+b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ **Απ**. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{-1+b\hat{t}_1+a-a^2\hat{t}_1}{-1+a^2} \\ -\frac{-a+ab\hat{t}_1+1-a\hat{t}_1}{-1+a^2} \\ \hat{t}_1 \end{bmatrix}$.

2. $\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ a+b & b+c & c+a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ **Απ**. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\frac{c-c^2\hat{t}_1+ab\hat{t}_1}{b^2-ac} \\ -\frac{-b+bc\hat{t}_1-a^2\hat{t}_1}{b^2-ac} \\ \hat{t}_1 \end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ **Απ**. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \hat{t}_1 \\ -2\hat{t}_1 + \frac{1}{2} \\ \hat{t}_1 \end{bmatrix}$.

**5.3.9.** Λυστε τα παρακατω συστηματα.

1. $\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & a \\ b & a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ **Απ**. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\frac{a-1}{b-2a^2+1} \\ \frac{-2a+b+1}{b-2a^2+1} \\ -\frac{a-1}{b-2a^2+1} \end{bmatrix}$.

2. $\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ **Απ**. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\frac{a}{c^2+bc-ab-a^2} \\ -\frac{a}{c^2+bc-ab-a^2} \\ \frac{b+c}{c^2+bc-ab-a^2} \end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix} -1 & a & 0 \\ 0 & -1 & a \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ **Απ**. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -a^2 \\ -a \\ -1 \end{bmatrix}$.

4. $\begin{bmatrix} 1 & a & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & a & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & a \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ... \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 3 \end{bmatrix}$ **Απ**. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3a^{N-1} \\ ... \\ 3a^2 \\ -3a \\ 3 \end{bmatrix}$.

**5.3.10.** Για ποιες τιμες του $a$ το παρακατω συστημα εχει απειρια λυσεων;

$$\begin{bmatrix} a & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Απ**. Για $a = 1$ ή $a = \frac{1}{2}$.

**5.3.11.** Για ποιες τιμες των $a, b$ το παρακατω συστημα εχει απειρια λυσεων;

$$\begin{bmatrix} a & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Απ**. Για $a = 1$ και $b$ αυθαιρετο, ή για $a \neq 1$ και $b = -1$ , ή για $a \neq 1$ και $b = 1$. .

**5.3.12.** Διερευνηστε το πληθος των λυσεων του παρακατω συστηματος σε σχεση με τις τιμες του $a$.

$$\begin{bmatrix} a & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**Απ**. Για $a = 1$ το συστημα εχει απειρες λυσεις. Για $a = \frac{1}{2}$ ειναι αδυνατο. Για $a \notin \{1, 1/2\}$ εχει μοναδικη λυση.

# Κεφάλαιο 6

# Απαλοιφη Gauss και Συστηματα Γραμμικων Εξισωσεων

## 6.1 Θεωρια

**6.1.1.** Εστω το (γενικα μη τετραγωνικο) συστημα

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1N}x_N = b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2N}x_N = b_2 \\ ... \\ a_{M1}x_1+a_{M2}x_2+...+a_{MN}x_N = b_M \end{array} . \tag{6.1}$$

**6.1.2.** Ο *επαυξημενος* πινακας του συστηματος ειναι ο

$$\left[ \begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1N} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2N} & b_2 \\ .. & .. & ... & ... & ... \\ a_{M1} & a_{M2} & ... & a_{MN} & b_N \end{array} \right].$$

**6.1.3.** Λεμε οτι ο $M \times N$ πινακας $\mathbf{C}$ ειναι σε *κλιμακωτη μορφη* αν υπαρχουν αριθμοι $n_1$, $n_2$, ..., $n_M$ τετοιοι ωστε

1. $1 = n_1 < n_2 < ... < n_M$.
2. Για $m = 1, 2, ..., M$ εχουμε $c_{mn} = 0$ οταν $n < n_m$ και $c_{mn_m} \neq 0$.

**6.1.4.** Τα στοιχεια $c_{11}, c_{2n_2}, ..., c_{2n_M}$ λεγονται *κομβοι*. Αν $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 3$, ... , $n_M = M$, τοτε λεμε οτι ο πινακας ειναι σε *τριγωνικη μορφη*.

**6.1.5.** Απο το συστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ σχηματιζουμε τον επαυξημενο πινακα $\left[ \begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{array} \right]$. Αν αυτος ειναι σε κλιμακωτη (τριγωνικη) μορφη, λεμε οτι και το συστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ειναι σε *κλιμακωτη (τριγωνικη)* μορφη. *Βασικες* μεταβλητες του συστηματος ειναι αυτες που αντιστοιχουν σε κομβους (δηλ. οι $x_{n_1}$, $x_{n_2}$, ... συμφωνα με τον συμβολισμο της προηγουμενης παραγραφου) και *ελευθερες* μεταβλητες οι υπολοιπες.

**6.1.6.** Υπαρχουν τρεις *στοιχειωδεις γραμμοπραξεις* που μπορουμε να εφαρμοσουμε σε καθε $M \times N$ πινακα

$$\mathbf{C} = \left[ \begin{array}{c} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \dots \\ \mathbf{r}_M \end{array} \right].$$

Οι τρεις *στοιχειωδεις γραμμοπραξεις* ειναι:

1. **εναλλαγη Γραμμων: ε**ναλλαγη των $\mathbf{r}_m$ και $\mathbf{r}_n$, συμβολιζεται $\mathbf{r}_m \leftrightarrow \mathbf{r}_n$·
2. **πολλαπλασιασμος γραμμης επι αριθμο**: αντικατασταση της $\mathbf{r}_m$ απο ενα πολλαπλασιο του εαυτου της, συμβολιζεται $\mathbf{r}_m \leftarrow k\mathbf{r}_m$, οπου $k \neq 0$·
3. **προσθεση γραμμων**: αντικατασταση της $\mathbf{r}_m$ απο το αθροισμα του εαυτου της και ενος πολλαπλασιου της $\mathbf{r}_n$, συμβολιζεται $\mathbf{r}_m \leftarrow \mathbf{r}_m + k\mathbf{r}_n$.

**6.1.7.** Καθε στοιχειωδης γραμμοπραξη εχει και την *αντιστροφη* της, δηλ. μια αλλη στοιχειωδη γραμμοπραξη η οποια, οταν εφαρμοστει στον νεο πινακα, δινει τον αρχικο. Οι αντιστροφες πραξεις ειναι οι εξης:

1. η αντιστροφη της $\mathbf{r}_m \leftrightarrow \mathbf{r}_n$ ειναι η $\mathbf{r}_m \leftrightarrow \mathbf{r}_n$·
2. η αντιστροφη της $\mathbf{r}_m \leftarrow k\mathbf{r}_m$ ειναι η $\mathbf{r}_m \longleftarrow \frac{1}{k}\mathbf{r}_m$·
3. η αντιστροφη της $\mathbf{r}_m \leftarrow \mathbf{r}_m + k\mathbf{r}_n$ ειναι η $\mathbf{r}_m \longleftarrow \mathbf{r}_m - k\mathbf{r}_n$.

**6.1.8.** Αν στον αρχικο πινακα $\mathbf{C}$ εφαρμοσουμε μια στοιχειωδη γραμμοπραξη και λαβουμε εναν νεο πινακα $\mathbf{C}'$, τοτε ισχυει $\mathbf{C}' = \mathbf{EC}$, οπου ο $\mathbf{E}$ ειναι ο πινακας που προκυπτει αν εφαρμοσουμε στον μοναδιαιο πινακα $\mathbf{I}$ την αντιστοιχη στοιχειωδη γραμμοπραξη. Ονομαζουμε τους πινακες $\mathbf{E}$ *στοιχειωδεις πινακες*.

**6.1.9.** Καθε στοιχειωδης πινακας $\mathbf{E}$ που αναφερεται στο προηγουμενο εδαφιο εχει αντιστροφο $\mathbf{E}' = \mathbf{E}^{-1}$ που προκυπτει απο τον $\mathbf{I}$ αν σε αυτον εφαρμοσουμε την αντιστροφη γραμμοπραξη. Ισχυει

$$\mathbf{C}' = \mathbf{EC} \Leftrightarrow \mathbf{C} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{C}.$$

**6.1.10.** Εστω συστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Σχηματιζουμε τον επαυξημενο πινακα $\mathbf{C} = \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{array} \right]$, εφαρμοζουμε σε αυτον μια σειρα γραμμοπραξεων και τελικα τον φερνουμε σε κλιμακωτη μορφη $\mathbf{C}' = \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{A}' & \mathbf{b}' \end{array} \right]$. Το συστημα $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ ειναι ισοδυναμο με το $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, δηλ. καθε $\mathbf{x}$ που ικανοποιει το πρωτο συστημα ικανοποιει και το δευτερο και αντιστροφα.

**6.1.11.** Ο *Αλγοριθμος Απαλοιφης του Gauss* για επιλυση του συστηματος $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, ειναι ο εξης:

1. Με χρηση γραμμοπραξεων φερνουμε τον επαυξημενο πινακα $\mathbf{C} = \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{array} \right]$ σε κλιμακωτη μορφη $\mathbf{C}' = \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{A}' & \mathbf{b}' \end{array} \right]$.
2. Κατοπιν λυνουμε το συστημα $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$, το οποιο ειναι ευκολο να λυθει με *προς τα πισω αντικατασταση* και εχει τις ιδιες λυσεις με το αρχικο.

**6.1.12.** Εστω συστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Σχηματιζουμε τον επαυξημενο πινακα $\mathbf{C} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{array}\right]$, εφαρμοζουμε σε αυτον μια σειρα γραμμοπραξεων και τελικα τον φερνουμε σε κλιμακωτη μορφη $\mathbf{C}' = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{A}' & \mathbf{b}' \end{array}\right]$. Το συστημα $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ ειναι ισοδυναμο με το $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, δηλ. καθε $\mathbf{x}$ που ικανοποιει το πρωτο συστημα ικανοποιει και το δευτερο και αντιστροφα.

**6.1.13.** Το συστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ μπορει *παντα* να μετασχηματιστει σε κλιμακωτη μορφη, για την οποια θα ισχυει ενα απο τα εξης ενδεχομενα.

1. Αν η κλιμακωτη μορφη εχει μια η περισσοτερες εξισωσεις της μορφης $0 = b_m \neq 0$ το συστημα δεν εχει καμμια λυση (ειναι *αδυνατο*).

2. Αν η κλιμακωτη μορφη δεν εχει εξισωσεις της μορφης $0 = b_m \neq 0$ και δεν ειναι τριγωνικη το συστημα εχει απειρες λυσεις.

3. Αν η κλιμακωτη μορφη ειναι τριγωνικη το συστημα εχει μοναδικη λυση.

**6.1.14.** Εστω $M \times N$ πινακας $\mathbf{A}$ και συστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Εστω $\mathbf{C} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{array}\right]$ ο επαυξημενος πινακας του συστηματος και $\mathbf{C}' = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{A}' & \mathbf{b}' \end{array}\right]$ μια κλιμακωτη μορφη του $\mathbf{C}$. Εστω $K_1$ ο αριθμος των κομβων του $\mathbf{A}'$ και $K_2$ *ο αριθμος των κομβων του* $\mathbf{C}'$. Ισχυουν τα εξης ενδεχομενα.

1. $K_1 < K_2$: το συστημα δεν εχει καμμια λυση (ειναι *αδυνατο*).

2. $K_1 = K_2 < N$: το συστημα εχει απειρες λυσεις.

3. $K_1 = K_2 = N$: το συστημα εχει μοναδικη λυση.

**6.1.15.** Δινονται τα συστηματα: $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ (ομογενες) και $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, με $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ (μη ομογενες). Εστω οτι $\widehat{\mathbf{x}}$ ειναι μια λυση του μη ομογενους συστηματος. Τοτε

1. Καθε διανυσμα της μορφης $\widetilde{\mathbf{x}} = \widehat{\mathbf{x}} + \mathbf{u}$ ειναι λυση του μη ομογενους συστηματος, αν το $\mathbf{u}$ ειναι μια λυση του ομογενους συστηματος.

2. Καθε λυση $\widetilde{\mathbf{x}}$ του μη ομογενους συστηματος μπορει να γραφτει στην μορφη $\widetilde{\mathbf{x}} = \widehat{\mathbf{x}} + \mathbf{u}$, οπου το $\mathbf{u}$ ειναι μια λυση του ομογενους συστηματος.

**6.1.16.** Λεμε οτι ο $M \times N$ πινακας $\mathbf{C}$ ειναι σε **ανηγμενη** *κλιμακωτη μορφη* αν ειναι σε κλιμακωτη μορφη και επιπλεον, για καθε γραμμη η οποια περιεχει κομβο, ισχυουν τα εξης.

1. Ο κομβος ειναι ισος με 1.

2. Ο κομβος ειναι το μονο μη μηδενικο στοιχειο της στηλης του.

**6.1.17.** Μπορουμε να φερουμε καθε $M \times N$ πινακα $\mathbf{A}$ σε ανηγμενη κλιμακωτη μορφη χρησιμοποιωντας γραμμοπραξεις.

**6.1.18.** Εστω $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$. Οι παρακατω συνθηκες ειναι ισοδυναμες.

1. Υπαρχει ο $\mathbf{A}^{-1}$.

2. $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2...\mathbf{E}_K$, οπου $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, ...$\mathbf{E}_K$ ειναι στοιχειωδεις πινακες.

## 6.2 Λυμενα Προβληματα

**6.2.1.** Λυστε το συστημα

$$\begin{array}{rcr} 2x_1+x_2+x_3 &=& 1 \\ 4x_1+x_2 &=& -2 \\ -2x_1+x_2+x_3 &=& 7 \end{array}.$$

**Απαντηση**. Αφαιρουμε απο την δευτερη εξισωση 2 φορες την πρωτη και προσθετουμε στην τριτη εξισωση 2 φορες την πρωτη :

$$\left.\begin{array}{rcr} 2x_1+x_2+x_3 &=& 1 \\ 4x_1+x_2-2\cdot(2x_1+x_2+x_3) &=& -2-2\cdot 1 \\ -2x_1+x_2+x_3+(2x_1+x_2+x_3) &=& 7+1\cdot 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcr} 2x_1+x_2+x_3 &=& 1 \\ -x_2-2x_3 &=& -4 \\ 2x_2+2x_3 &=& 8 \end{array}.$$

Κατοπιν προσθετουμε στην τριτη εξισωση δυο φορες την δευτερη

$$\left.\begin{array}{rcr} 2x_1+x_2+x_3 &=& 1 \\ -x_2-2x_3 &=& -4 \\ 2x_2+2x_3+2\cdot(-x_2-2x_3) &=& 8+2\cdot(-4) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcr} 2x_1+x_2+x_3 &=& 1 \\ -x_2-2x_3 &=& -4 \\ -2x_3 &=& 0 \end{array}.$$

Το τελικο συστημα ειναι *ισοδυναμο* με το αρχικο, δηλ. εχει τις ιδιες λυσεις (γιατι;). Τωρα λυνω το τελικο συστημα ως εξης.

$$\begin{aligned} -2x_3 = 0 &\Rightarrow x_3 = 0, \\ -x_2-2x_3 = -4 &\Rightarrow x_2 = 4, \\ 2x_1+x_2+x_3 = 1 &\Rightarrow 2x_1 = 1-4-0 \Rightarrow x_1 = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Δηλ. η λυση (του τελικου *και* του αρχικου συστηματος) ειναι $x_1 = -\frac{3}{2}, x_2 = 4, x_3 = 0$.

**6.2.2.** Λυστε το ιδιο συστημα γραμμενο σε μορφη πινακων

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

και χρησιμοποιωντας γραμμοπραξεις.

**Απαντηση**. Ο επαυξημενος πινακας ειναι

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}. \tag{6.2}$$

Χρησιμοποιουμε τις γραμμοπραξεις $\mathbf{r}_2 \leftarrow \mathbf{r}_2 + (-2)\cdot\mathbf{r}_1$ και $\mathbf{r}_3 \leftarrow \mathbf{r}_3 + 1\cdot\mathbf{r}_1$ (το $-2$ προεκυψε απο τους συντελεστες 2 και 4: $-2 = -\frac{4}{2}$· το 1 προεκυψε απο τους συντελεστες 2 και $-2$: $1 = -\frac{-2}{2}$· γενικα, οταν θελουμε να απαλειψουμε τον ορο $a_{in}x_n$ χρησιμοποιωντας την γραμμοπραξη $\mathbf{r}_3 \leftarrow \mathbf{r}_3 + k\cdot\mathbf{r}_1$, θα παιρνουμε $k = -\frac{a_{in}}{a_{jn}}$ ).Ο (6.2) γινεται

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4+(-2)\cdot 2 & 1+(-2)\cdot 1 & 0+(-2)\cdot 1 & -2+(-2)\cdot 1 \\ -2+1\cdot 2 & 1+1\cdot 1 & 1+1\cdot 1 & 7+1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \end{bmatrix} \tag{6.3}$$

Με την γραμμοπραξη $\mathbf{r}_3 \leftarrow \mathbf{r}_3 + 2 \cdot \mathbf{r}_2$ το δεξι μελος της (6.3) γινεται

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0+2\cdot 0 & 2+2\cdot(-1) & 2+2\cdot(-2) & 8+2\cdot(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.4}$$

Απο τον επαυξημενο πινακα στο δεξι μελος της (6.4) παιρνουμε τους πινακες

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

και το αρχικο συστημα ειναι ισοδυναμο με την εξισωση πινακων

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

δηλ.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_2 - 2x_3 &= -4 \\ -2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

το οποιο μπορει να λυθει με *προς-τα-πισω-αντικατασταση*:

$$\begin{aligned} -2x_3 = 0 &\Rightarrow x_3 = 0, \\ -x_2 - 2x_3 = -4 &\Rightarrow x_2 - 2\cdot 0 = 4 \Rightarrow x_2 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 &\Rightarrow 2x_1 = 1 - 4 - 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Δηλ. η λυση (του τελικου *και* του αρχικου συστηματος) ειναι $x_1 = -\frac{3}{2}, x_2 = 4, x_3 = 0$.

**6.2.3.** Υπολογιστε τον πινακα που υλοποιει την στοιχειωδη γραμμοπραξη $\mathbf{r}_m \leftrightarrow \mathbf{r}_n$ και τον αντιστροφο του.

**Απαντηση.** Ο αντιστοιχος πινακας $\mathbf{E}$ προκυπτει απο την αντιμεταθεση των γραμμων $m$ και $n$ στον μοναδιαιο πινακα. Ο $\mathbf{E}$ ειναι αυτοαντιστροφος: $\mathbf{E}^{-1} = \mathbf{E}$. Π.χ. για ενα συστημα τεσσαρων εξισωσεων, η γραμμοπραξη $\mathbf{r}_2 \leftrightarrow \mathbf{r}_4$ αντιστοιχει στον πινακα

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$\mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ελεγξτε τα παραπανω εφαρμοζοντας τις γραμμοπραξεις και τους πολλαπλασιασμους πινακων στον επαυξημενο του συστηματος

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4 &= 1 \\ x_3+2x_4 &= 1 \\ x_2+x_3-3x_4 &= 2 \\ 2x_1+3x_3+x_4 &= 4. \end{aligned}$$

**6.2.4.** Υπολογιστε τον πινακα που υλοποιει την στοιχειωδη γραμμοπραξη $\mathbf{r}_m \leftarrow k\mathbf{r}_m$ ($k \neq 0$) και τον αντιστροφο του.

**Απαντηση.** Ο αντιστοιχος πινακας $\mathbf{E}$ προκυπτει απο τον πολλαπλασιασσμο της γραμμης $m$ στον μοναδιαιο πινακα επι τον αριθμο $k$ , δηλ. η $m$-στη γραμμη του $\mathbf{E}$ ειναι

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & k & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}.$$

Ο δε $\mathbf{E}^{-1}$ προκυπτει απο τον πολλαπλασιασσμο της γραμμης $m$ στον μοναδιαιο πινακα επι τον αριθμο $1/k$ , δηλ. η $m$-στη γραμμη του $\mathbf{E}$ ειναι

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & \frac{1}{k} & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}.$$

Π.χ. για ενα συστημα τεσσαρων εξισωσεων, η γραμμοπραξη $\mathbf{r}_2 \leftarrow 3\mathbf{r}_2$ αντιστοιχει στον πινακα

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και

$$\mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ελεγξτε τα παραπανω εφαρμοζοντας τις γραμμοπραξεις και τους πολλαπλασιασμους πινακων στον επαυξημενο του συστηματος

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4 &= 1 \\ x_3+2x_4 &= 1 \\ x_2+x_3-3x_4 &= 2 \\ 2x_1+3x_3+x_4 &= 4. \end{aligned}$$

**6.2.5.** Υπολογιστε τον πινακα που υλοποιει την στοιχειωδη γραμμοπραξη $\mathbf{r}_m \leftarrow \mathbf{r}_m + k\mathbf{r}_n$ και τον αντιστροφο του.

**Απαντηση.** Ο αντιστοιχος πινακας $\mathbf{E}$ προκυπτει απο την προσθηκη ενος $k$ στην γραμμη $m$ του μοναδιαιου πινακα, δηλ. η $m$-στη γραμμη του $\mathbf{E}$ ειναι

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & k & 0 & ... & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}.$$

Ο δε $\mathbf{E}^{-1}$ προκυπτει απο την προσθηκη ενος $-k$ στη γραμμη $m$ του μοναδιαιου πινακα, δηλ. η $m$-στη γραμμη του $\mathbf{E}$ ειναι

$$[0 \quad 0 \quad ... \quad 0 \quad -k \quad 0 \quad ... \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad ... \quad 0] .$$

Π.χ. για ενα συστημα τεσσαρων εξισωσεων, η γραμμοπραξη $\mathbf{r}_2 \leftarrow \mathbf{r}_2 + 5\mathbf{r}_1$ αντιστοιχει στον πινακα

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και στον αντιστροφο

$$\mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Ελεγξτε τα παραπανω εφαρμοζοντας τις γραμμοπραξεις και τους πολλαπλασιασμους πινακων στον επαυξημενο του συστηματος

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ -5x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 &= 2 \\ x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_3 + x_4 &= 4. \end{aligned}$$

**6.2.6.** Λυστε το συστημα του Εδαφιου 6.2.1 γραμμενο σε μορφη πινακων

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix} .$$

και υλοποιωντας τις γραμμοπραξεις με πολλαπλασιασμο πινακων.

**Απαντηση**. Ο επαυξημενος πινακας ειναι

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix} . \tag{6.5}$$

Για την γραμμοπραξη $\mathbf{r}_2 \leftarrow \mathbf{r}_2 + (-2) \cdot \mathbf{r}_1$ παιρνουμε το γινομενο

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Για την $\mathbf{r}_3 \leftarrow \mathbf{r}_3 + 1 \cdot \mathbf{r}_1$ παιρνουμε το γινομενο

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Για την $\mathbf{r}_3 \leftarrow \mathbf{r}_3 + 2 \cdot \mathbf{r}_2$ παιρνουμε το γινομενο

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Με αλλα λογια, ο αρχικος πινακας γινεται:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.6}$$

και το ισοδυναμο συστημα ειναι

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Η λυση με προς-τα-πισω-αντικατασταση ειναι ιδια οπως και στην προηγουμενη ασκηση.

**6.2.7.** Λυστε το συστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 8 \\ x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}.$$

**Απαντηση**. Ο επαυξημενος πινακας ειναι

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Με γραμμοπραξεις εχουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_2 \leftarrow r_2 + (-2) \cdot r_1 \\ \rightarrow \\ r_3 \leftarrow r_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_2 \leftrightarrow r_3 \\ \rightarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ισοδυναμα, με γραμμοπραξεις εχουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

Το τελικο συστημα, που ειναι ισοδυναμο με το αρχικο, ειναι:

$$\left. \begin{matrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ -4x_3 = -4 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{matrix}$$

**6.2.8.** Λυστε το συστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση**. Ο επαυξημενος πινακας ειναι

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Με εφαρμογη των $r_2 \leftarrow r_2 - 2 \cdot r_1$ , $r_3 \leftarrow r_3 - 3 \cdot r_1$ παιρνουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 2-2\cdot 1 & 2-2\cdot 1 & -3-2\cdot(-2) & 1-2\cdot 4 & 3-2\cdot 5 \\ 3-3\cdot 1 & 3-3\cdot 1 & -4-3\cdot(-2) & -2-3\cdot 4 & 1-3\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -14 & -14 \end{bmatrix}$$

Με εφαρμογη της $r_3 \leftarrow r_3 - 2 \cdot r_2$ παιρνουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0-2\cdot 0 & 0-2\cdot 0 & 2-2\cdot 1 & -14-2\cdot(-7) & -14-2\cdot(-7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Οι παραπανω γραμμοπραξεις αντιστοιχουν στους αντιστοιχους πολλαπλασιασμους με σ-τοχειωδεις πινακεσ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -4 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Το αντιστοιχο συστημα ειναι

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix},$$

αλλα η τελευταια εξισωση δεν επηρεαζει την λυση και ετσι εχουμε ισοδυναμα

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Οι αντιστοιχες εξισωσεις ειναι

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 5 \\ x_3 - 7x_4 &= -7 \end{aligned}$$

απο τις οποιες προκυπτει

$$
\begin{aligned}
&x_3 = -7 + 7x_4 \\
&x_1 = 5 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 5 - x_2 + 2 \cdot (7x_4 - 7) - 4x_4 = -9 - x_2 + 10x_4
\end{aligned}
$$

Η τελικη λυση ειναι $x_1 = -9 - a$, $x_2 = 10b$, $x_3 = a$, $-7 + 7b$, $x_4 = b$, οπου $a, b$ αυθαιρετες σταθερες. Δηλαδη το συστημα εχει *απειρες* λυσεις που μπορουν να γραφουν και με την μορφη:

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix} + a \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}.
$$

**6.2.9.** Λυστε το συστημα

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \\ 5 & 7 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.
$$

**Απαντηση**. Ο επαυξημενος πινακας ειναι

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & -1 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}
$$

Με τις $r_2 \leftarrow r_2 - 2 \cdot r_1$ και $r_3 \leftarrow r_3 - 5 \cdot r_1$ παιρνουμε

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 - 2 \cdot 1 & 3 - 2 \cdot 1 & 3 - 2 \cdot (-2) & -1 - 2 \cdot 3 & 3 - 2 \cdot 4 \\ 5 - 5 \cdot 1 & 7 - 5 \cdot 1 & 4 - 5 \cdot (-2) & 1 - 5 \cdot 3 & 5 - 5 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -14 & -15 \end{bmatrix}
$$

Με την $r_3 \leftarrow r_3 - 2 \cdot r_2$ παιρνουμε

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 - 2 \cdot 0 & 0 - 2 \cdot 0 & 14 - 2 \cdot 7 & -14 - 2 \cdot (-7) & -15 - 2 \cdot (-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.
$$

Οι αντιστοιχοι πολλαπλασιασμοι πινακων ειναι

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & -1 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}
$$

Το αντιστοιχο συστημα ειναι

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 5 \end{bmatrix}
$$

και βλεπουμε οτι η τελευταια εξισωση ειναι $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 5$, η οποια ειναι *αδυνατη*. Το τελικο (αρα και το αρχικο) συστημα *δεν* εχει λυση.

**6.2.10.** Λυστε το συστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση**. Ο επαυξημενος ειναι

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Εχουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\mathbf{r}_3 \leftarrow \mathbf{r}_3 - \mathbf{1} \cdot \mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_2 \leftarrow \mathbf{r}_2 - \mathbf{2} \cdot \mathbf{r}_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -4 & 5 & -4 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

και

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -4 & 5 & -4 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\mathbf{r}_3 \leftarrow \mathbf{r}_3 - \mathbf{1} \cdot \mathbf{r}_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Οποτε οι εξισωσεις γινονται

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 3 \\ -2x_2 - 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 &= -4 \\ 2x_3 + 3x_4 - 3x_5 &= 2 \end{aligned}$$

Η τριτη δινει οτι $2x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 2$

$$x_3 = -\frac{3}{2}x_4 + \frac{3}{2}x_5 + 1.$$

Αντικαθιστωντας στην δευτερη παιρνουμε

$$-2x_2 - 3\left(-\frac{3}{2}x_4 + \frac{3}{2}x_5 + 1\right) - 4x_4 + 5x_5 = -4$$

οποτε

$$x_2 = \frac{1}{4}x_4 + \frac{1}{4}x_5 + \frac{1}{2}.$$

Τελος, αντικαθιστωντας στην πρωτη εχουμε

$$x_1 + \left(\frac{1}{4}x_4 + \frac{1}{4}x_5 + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{3}{2}x_4 + \frac{3}{2}x_5 + 1\right) + x_4 - x_5 = 3$$

οποτε

$$x_1 = \frac{1}{4}x_4 - \frac{3}{4}x_5 + \frac{3}{2}.$$

Τελικα

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}x_4 - \frac{3}{4}x_5 + \frac{3}{2} \\ \frac{1}{4}x_4 + \frac{1}{4}x_5 + \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2}x_4 + \frac{3}{2}x_5 + 1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ -3/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -3/4 \\ 1/4 \\ 3/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**6.2.11.** Λυστε το συστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -13 \\ -14 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση**. Ο επαυξημενος ειναι

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -13 \\ 2 & 4 & 2 & -14 \\ 1 & 2 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

και με γραμμοπραξεις γινεται

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 3 & 4 & -13 \\ 0 & -2 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}$$

οποτε οι εξισωσεις ειναι

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= -13 \\ -2x_2 - 6x_3 &= 12 \\ -x_3 &= 1 \end{aligned}$$

και αρα $x_3 = -1$, $x_2 = (12 - 6) / (-2) = -3$ και $x_1 = 0$. Τελικα

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

**6.2.12.** Λυστε το συστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 10 & 10 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 26 \end{bmatrix}$$

**Απαντηση**. Ο επαυξημενος ειναι

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 2 & 10 \\ 4 & 10 & 10 & 26 \end{bmatrix}$$

και με γραμμοπραξεις γινεται

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & -2 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Η τριτη εξισωση δεν δινει καμμια πληροφορια ($0 = 0$) και μπορουμε να την απαλειψουμε απο το συστημα χωεις να επηρεαστει η λυση. Οι δυο πρωτες γινονται

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 8 \\ -2x_2 - 6x_3 &= -6 \end{aligned}$$

οποτε $x_2 = (6 - 6x_3)/2 = 3 - 3x_3$ και $x_1 = -1 + 5x_3$. Τελικα

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + a \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

**6.2.13.** Λυστε το συστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 10 & 10 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 24 \end{bmatrix}$$

**Απαντηση**. Εχουμε, μετα απο γραμμοπραξεις,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 2 & 10 \\ 4 & 10 & 10 & 24 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & -2 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Αυτο σημαινει οτι η τελευταια εξισωση ειναι

$$0 = 4$$

που ειναι αδυνατη. Αρα το συστημα ειναι αδυνατο.

**6.2.14.** Λυστε το συστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix}$$

**Απαντηση**. Εχουμε, μετα απο γραμμοπραξεις,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 4 & 1 & 15 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

οποτε

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 6 \\ 2x_2 + x_4 &= 3 \end{aligned}$$

και τελικα

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 9/2 \\ 3/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a \cdot \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 3/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**6.2.15.** Δειξτε οτι τα συστηματα

$$\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}', \qquad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

ειναι ισοδυναμα (δηλ. εχουν τισι ιδιες λυσεις) αν ο πινακας (σε κλιμακωτη μορφη) $\mathbf{C}' = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{A}' & \mathbf{b}' \end{array}\right]$προεκυψε απο τον $\mathbf{C} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{array}\right]$ με εφαρμογη $K$ γραμμοπραξεων.

**Απαντηση**. Για να δειχτει το ζητουμενο αρκει να εξετασουμε την περιπτωση $K = 1$, δηλ. την εφαρμογη *μιας* γραμμοπραξης. Διοτι, αν με την εφαρμογη μιας γραμμοπραξης, το συστημα που προκυπτει ειναι ισοδυναμο με το αρχικο, τοτε με την εφαρμογη δυο γραμμοπραξεων το πρωτο συστημα θα ειναι ισοδυναμο με το δευτερο και το δευτερο με το τριτο, το οποιο σημαινει οτι και το πρωτο θα ειναι ισοδυναμο (θα εχει τις ιδιες λυσεις) με το πρωτο.

Ας θεωρησουμε λοιπον το αρωκιο συστημα και ας υποθεσουμε οτι εφαρμοζουμε σε αυτο μια γραμμοπραξη. Εξεταζουμε τις τρεις δυνατες περιπτωσεις.

1. Αν η γραμοπραξη ειναι **εναλλαγη γραμμων**, τοτε το νεο συστημα εχει τις ιδιες εξισωσεις με το αρχικο, απλα γραμμενες σε διαφορετικη σειρα και αρα εχουν τις ιδιες λυσεις.

2. Αν η γραμοπραξη ειναι **πολλαπλασιασμος γραμμης επι αριθμο**, τοτε στο νεο συστημα μια εξισωση εχει αντικατασταθει απο ενα πολλαπλασιο αυτης, π.χ.

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \to \kappa x_1 + 2\kappa x_2 - \kappa x_3 = 4\kappa.$$

   Προφανως οι δυο εξισωσεις ειναι ισοδυναμες, αρκει $\kappa \neq 0$.

3. Αν η γραμοπραξη ειναι **προσθεση γραμμων,** της μορφης $\mathbf{r}_m \leftarrow \mathbf{r}_m + \kappa \cdot \mathbf{r}_n$, τοτε στο παλιο συστημα υπηρχαν δυο εξισωσεις της μορφης

$$\begin{aligned} a_{m1}x_1 + .... + a_{mN}x_N &= b_m \\ a_{n1}x_1 + .... + a_{nN}x_N &= b_n \end{aligned} \tag{6.7}$$

   οι οπιες στο νεο συστημα εχουν αντικατασταθει απο δυο εξισωσεις της μορφης

$$\begin{aligned} a_{m1}x_1 + .... + a_{mN}x_N &= b_m \\ (a_{n1} + \kappa a_{m1})\, x_1 + .... + (a_{nN} + \kappa a_{mN})\, x_N &= b_n \end{aligned} \tag{6.8}$$

   Πρεπει να δειξουμε οτι οι (6.7) ειναι ισοδυναμες με τις (6.8). Ειναι προφανες οτι (6.7)⇒(6.8). Για να δειξουμε οτι (6.8)⇒(6.7) εφαρμοζουμε στην δευτερη των (6.8) την αντιστροφη γραμμοπραξη: $\mathbf{r}_m \leftarrow \mathbf{r}_m - \kappa \cdot \mathbf{r}_n$, και παιρνουμε

$$\begin{aligned} a_{m1}x_1 + .... + a_{mN}x_N &= b_m \\ (a_{n1} + \kappa a_{m1} - \kappa a_{m1})\, x_1 + .... + (a_{nN} + \kappa a_{mN} - \kappa a_{mN})\, x_N &= b_n \end{aligned} \tag{6.9}$$

   οποτε, προφανως, οι (6.9) ειναι *ιδιες* με τις (6.7).

**6.2.16.** Δινονται τα συστηματα: $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (ομογενες) και $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, **με** $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ (μη ομογενες). Εστω οτι $\widehat{\mathbf{x}}$ ειναι μια λυση του μη ομογενους συστηματος. Δειξτε οτι

1. Καθε διανυσμα της μορφης $\widetilde{\mathbf{x}} = \widehat{\mathbf{x}} + \mathbf{u}$ ειναι λυση του μη ομογενους συστηματος, αν το $\mathbf{u}$ ειναι μια λυση του ομογενους συστηματος.

2. Καθε λυση $\widetilde{\mathbf{x}}$ του μη ομογενους συστηματος μπορει να γραφτει στην μορφη $\widetilde{\mathbf{x}} = \widehat{\mathbf{x}} + \widetilde{\mathbf{u}}$, οπου το $\widetilde{\mathbf{u}}$ ειναι μια λυση του ομογενους συστηματος.

**Απαντηση.** Δινεται οτι το $\widehat{\mathbf{x}}$ ειναι μια λυση του μη ομογενους συστηματος, δηλ. $\mathbf{A}\widehat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$.

Εστω επιπλεον οτι το $\mathbf{u}$ ειναι μια λυση του ομογενους συστηματος, δηλ. $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Τοτε

$$\mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{A}\widehat{\mathbf{x}} + \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{A}\cdot\left(\widehat{\mathbf{x}} + \mathbf{u}\right),$$

δηλ. $(\widehat{\mathbf{x}} + \mathbf{u})$ ειναι μια λυση του $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Εστω μια ακομη λυση $\widetilde{\mathbf{x}}$ του $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Δηλ. εχουμε $\mathbf{A}\widehat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$ και $\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$. Τοτε

$$\mathbf{0} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{A}\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\cdot\left(\widehat{\mathbf{x}} - \widetilde{\mathbf{x}}\right).$$

Δηλ. το $\widehat{\mathbf{x}} - \widetilde{\mathbf{x}}$ ειναι μια λυση του $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, την οποια μπορουμε να συμβολιζουμε και με $\widetilde{\mathbf{u}} = \widehat{\mathbf{x}} - \widetilde{\mathbf{x}}$. Αλλα τοτε $\widetilde{\mathbf{x}} = \widehat{\mathbf{x}} + \widetilde{\mathbf{u}}$, οπου το $\widetilde{\mathbf{u}}$ ειναι μια λυση του ομογενους συστηματος.

**6.2.17.** Δινονται τυχοντες θετικοι ακεραιοι $M, N$ τους οποιους θεωρουμε σταθερους στα παρακατω. Συμβολιζουμε με $\mathcal{M}_{M,N}$ το συνολο των $M \times N$ πινακων. Για $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{M,N}$ θα γραφουμε $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ ανν υπαρχουν στοιχειωδεις πινακες $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, ..., $\mathbf{E}_L$ τετοιοι ωστε

$$\mathbf{B} = \mathbf{E}_L \cdot \mathbf{E}_{L-1} ... \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{A}.$$

Δειξτε οτι τα παρακατω ισχυουν για καθε $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathcal{M}_{M,N}$:

$$\mathbf{A} \sim \mathbf{A}. \tag{6.10}$$

$$\mathbf{A} \sim \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{B} \sim \mathbf{A}. \tag{6.11}$$

$$(\mathbf{A} \sim \mathbf{B} \text{ και } \mathbf{B} \sim \mathbf{C}) \Rightarrow \mathbf{A} \sim \mathbf{C}. \tag{6.12}$$

**Απαντηση**. Ειναι προφανες οτι $\mathbf{A} \sim \mathbf{A}$· αρκει να παρουμε $L = 1$, $\mathbf{E}_1 = \mathbf{I}$. Εστω οτι $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$· δηλ. υπαρχουν στοιχειωδιες πινακες $\mathbf{E}_L$, $\mathbf{E}_{L-1}$, ..., $\mathbf{E}_1$ τετοιοι ωστε

$$\mathbf{B} = \mathbf{E}_L \cdot \mathbf{E}_{L-1} ... \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{A}.$$

Ομως καθε στοιχειωδης πινακα εχει και τον αντιστροφο του, ο οποιος ειναι επισης στοιχειωδης πινακας (αντιστοιχει σε στοιχειωδη γραμμοπαρξη), αρα

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}_1^{-1} \cdot \mathbf{E}_2^{-1} ... \cdot \mathbf{E}_{L-1}^{-1} \cdot \mathbf{E}_L^{-1} \cdot \mathbf{B}$$

που δειχνει οτι $\mathbf{B} \sim \mathbf{A}$. Τελος, εστω οτι $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ και $\mathbf{B} \sim \mathbf{C}$· δηλ. υπαρχουν στοιχειωδεις πινακες $\mathbf{E}_L$, $\mathbf{E}_{L-1}$, ..., $\mathbf{E}_1$ και $\mathbf{F}_K$, $\mathbf{F}_{K-1}$, ..., $\mathbf{F}_1$ τετοιοι ωστε

$$\mathbf{B} = \mathbf{E}_L \cdot \mathbf{E}_{L-1} ... \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{A}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}_L \cdot \mathbf{F}_{L-1} ... \cdot \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{B}$$

οποτε

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}_L \cdot \mathbf{F}_{L-1} \ldots \cdot \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{E}_L \cdot \mathbf{E}_{L-1} \ldots \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{A}$$

δηλ. $\mathbf{B} \sim \mathbf{C}$.

Καθε σχεση που ικανοποιει τις (6.10)–(6.12) λεγεται *σχεση ισοδυναμιας* και μπορουμε να την σκεφτουμε σαν μια μορφη ϊσοτητασ¨ (πραγματι, η σχεση ισοτητας ικανοποιει τις (6.10)–(6.12) αν αντικαταστησουμε το ¨$\sim$¨ με το ¨=¨[1]). Μπορει να αποδειχτει οτι καθε σχεση ισοδυναμιας πανω σε ενα συνολο $\mathcal{A}$ *διαμεριζει* το $\mathcal{A}$ σε υποσυνολα – ονομαζουμε καθε τετοιο υποσυνολο *κλαση ισοδυναμιας*. Στο συγκεκριμενο παραδειγμα, το $\mathcal{M}_{M,N}$, δηλ. το συνολο των $M \times N$ πινακων, διαμεριζεται σε κλασεις ισοδυναμιας (υποσυνολα $M \times N$ πινακων) με το εξης χαρακτηριστικο: αν οι $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ ανηκουν στην ιδια κλαση ισοδυναμιας, τοτε ο $\mathbf{A}$ μπορει να μετασχηματιστει στον $\mathbf{B}$ με μια σειρα στοιχειωδων γραμμοπραξεων και, αντιστροφα, ο $\mathbf{B}$ μπορει να μετασχηματιστει στον $\mathbf{A}$. Η μελετη των σχεσεων ισοδυναμιας ειναι αντικειμενο της Ανωτερης Αλγεβρας.

**6.2.18.** Μετασχηματιστε τον πινακα

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -13 \\ 2 & 4 & 2 & -14 \\ 1 & 2 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

σε ανηγμενη κλιμακωτη μορφη.

**Απαντηση**. Χρησιμοποιουμε τις παρακατω γραμμοπραξεις:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -13 \\ 2 & 4 & 2 & -14 \\ 1 & 2 & 0 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{r}_2 \leftarrow \mathbf{r}_2 - 2\cdot\mathbf{r}_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -13 \\ 0 & -2 & -6 & 12 \\ 1 & 2 & 0 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{r}_3 \leftarrow \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -13 \\ 0 & -2 & -6 & 12 \\ 0 & -1 & -4 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{r}_3 \leftarrow \mathbf{r}_2 - \frac{1}{2}\cdot\mathbf{r}_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

για να φερουμε το συστημα σε κλιμακωτη μορφη. Τωρα χρησιμοποιουμε τις παρακατω γραμμοπραξεις:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -13 \\ 0 & -2 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{r}_2 \leftarrow -\frac{1}{2}\mathbf{r}_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -13 \\ 0 & 1 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{r}_3 \leftarrow -\mathbf{r}_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -13 \\ 0 & 1 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

για να μετατρεψουμε τους κομβους σε μοναδες. Τελος, χρησιμοποιουμε τις παρακατω γραμμοπραξεις:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -13 \\ 0 & 1 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{r}_1 \leftarrow \mathbf{r}_1 - 3\mathbf{r}_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{r}_1 \leftarrow \mathbf{r}_1 + 5\mathbf{r}_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{r}_2 \leftarrow \mathbf{r}_2 - 3\mathbf{r}_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

και εχουμε τον

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

σε ανηγμενη κλιμακωτη μορφη: προφανως ειναι σε κλιμακωτη μορφη, οι κομβοι ειναι ολοι ισοι με 1 και η στηλη καθε κομβου δεν περιεχει αλλα μη μηδενικα στοιχεια.

[1] Αλλες σχεσεις ισοδυναμιας ειναι ...

**6.2.19.** Μετασχηματιστε τον πινακα του προηγουμενου προβληματος σε ανηγμενη κλιμακωτη μορφη *χρησιμοποιωντας στοιχειωδεις πινακες*.

**Απαντηση**. Παρακατω δινουμε τους πινακες που αντιστοιχουν στις γραμμοπραξεις. Χρησιμοποιουμε τις παρακατω γραμμοπραξεισ:

$$\mathbf{r}_2 \leftarrow \mathbf{r}_2 - 2\cdot\mathbf{r}_1 : \mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_3 \leftarrow \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 : \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_3 \leftarrow \mathbf{r}_2 - \frac{1}{2}\cdot\mathbf{r}_2 : \mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_2 \leftarrow -\frac{1}{2}\mathbf{r}_2 : \mathbf{E}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_3 \leftarrow -\mathbf{r}_3 : \mathbf{E}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{r}_1 \leftarrow \mathbf{r}_1 - 3\mathbf{r}_2 : \mathbf{E}_6 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_1 \leftarrow \mathbf{r}_1 + 5\mathbf{r}_3 : \mathbf{E}_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 \leftarrow \mathbf{r}_2 - 3\mathbf{r}_3 : \mathbf{E}_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Αν εκτελεσουμε τους πολλαπλασιασμους $\mathbf{E}_8\mathbf{E}_7\mathbf{E}_6\mathbf{E}_5\mathbf{E}_4\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{C}$ παιρνουμε, για την κλιμακωτη μορφη

$$\mathbf{E}_1\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -13 \\ 2 & 4 & 2 & -14 \\ 1 & 2 & 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -13 \\ 0 & -2 & -6 & 12 \\ 1 & 2 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -13 \\ 0 & -2 & -6 & 12 \\ 1 & 2 & 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -13 \\ 0 & -2 & -6 & 12 \\ 0 & -1 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -13 \\ 0 & -2 & -6 & 12 \\ 0 & -1 & -4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -13 \\ 0 & -2 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

για να μετατρεψουμε τους κομβους σε μοναδες

$$\mathbf{E}_4\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -13 \\ 0 & -2 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -13 \\ 0 & 1 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & .1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_5\mathbf{E}_4\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -13 \\ 0 & 1 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -13 \\ 0 & 1 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

και για την ανηγμενη κλιμακωτη μορφη

$$\mathbf{E}_6\mathbf{E}_5\mathbf{E}_4\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{C}= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -13 \\ 0 & 1 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_7\mathbf{E}_6\mathbf{E}_5\mathbf{E}_4\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{C}= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_8\mathbf{E}_7\mathbf{E}_6\mathbf{E}_5\mathbf{E}_4\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{C}= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

**6.2.20.** Λυστε το συστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -13 \\ -14 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση**. Ο επαυξημενος του συστηματος ειναι

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -13 \\ 2 & 4 & 2 & -14 \\ 1 & 2 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Απο το 6.2.19 ξερουμε οτι η ανηγμενη κλιμακωτη μορφη ειναι

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Αυτο σημαινει οτι ενα συστημα ισοδυναμο του αρχικου ειναι

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Αυτη ειναι η λυση του συστηματος οπως την ειχαμε βρει στο Εδαφιο **;;**. Βλεπουμε λοιπον πως μπορουμε να χρησιμοποιησουμε ανηγμενη κλιμακωτη μορφη για να λυσουμε ενα γραμμικο συστημα.

**6.2.21.** Λυστε το συστημα

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση**. Ο επαυξημενος του συστηματος ειναι

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Θα χρησιμοποιησουμε στοιχειωδεις πινακες για να βρουμε την ανηγμενη κλιμακωτη μορφη. Εχουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Εχουμε λοιπον την ανγμενη κλιμακωτη μορφη, η οποια αντιστοιχει στο συστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{9}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

δηλ.

$$\begin{aligned} x_1 - x_4 &= 0 \\ x_2 + \frac{7}{2}x_4 &= \frac{9}{2} \\ x_3 + \frac{1}{2}x_4 &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Παιρνοντας την $x_4 = t$ ως ανεξαρτητη μεταβλητη, τελικα η λυση ειναι

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{9}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{7}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**6.2.22.** Υπολογιστε τον αντιστροφο του πινακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

χρησιμοποιωντας την ανγμενη κλιμακωτη μορφη.

**Απαντηση**. Μπορουμε να βρουμε τον $\mathbf{A}^{-1}$ λυνοντας το συστημα

$$\mathbf{AX} = \mathbf{A}\left[\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{x}_3\right] = \mathbf{I}.$$

Αλλα αυτο αναγεται στημ λυση τριων υποσυστηματων:

$$\mathbf{Ax}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Ax}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Ax}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Μπορουμε να βρουμε την ανηγμενη κλιμακωτη μορφη των $[\mathbf{A} \quad \mathbf{x}_1]$, $[\mathbf{A} \quad \mathbf{x}_2]$, $[\mathbf{A} \quad \mathbf{x}_3]$ ξεχωριστα. Αλλα οι πραξεις που αφορουν το κομματι του $\mathbf{A}$ στον $[\mathbf{A} \quad \mathbf{x}_i]$ ειναι παντα οιδ ιδιες (για $i = 1, 2, 3$). Οποτε μπορουμε να βρουμε απευθειας την ¨συνολικη¨ ανηγμενη κλιμακωτη μορφη του

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Με εφαρμογη γραμμοπραξεων βρισκουμε οτι

$$\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}.$$

Αυτο αντιστοιχει στο συστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

δηλ.

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{X} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}.$$

**6.2.23.** Εστω $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$. Αποδειξτε οτι ο $\mathbf{A}^{-1}$ υπαρχει ανν

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 ... \mathbf{E}_K,$$

οπου $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, ...$\mathbf{E}_K$ ειναι στοιχειωδεις πινακες.

**Απαντηση**. Εστω οτι ο $\mathbf{A}^{-1}$ υπαρχει. Τοτε $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$ ειναι λυση του συστηματος (με $N^2$ εξισωσεις και αγνωστους)

$$\mathbf{AX} = \mathbf{I}.$$

Ο επαυξημενος του συστηματος ειναι $[\mathbf{A} \quad \mathbf{I}]$ και, οπως ειδαμε στο προηγουμενο εδαφιο, μπορουμε να τον φερουμε σε ανηγμενη κλιμακωτη μορφη πολλαπλασιαζοντας με στοιχειωδεις πινακεσ:

$$\mathbf{F}_K \mathbf{F}_{K-1} ... \mathbf{F}_2 \mathbf{F}_1 \cdot [\mathbf{A} \quad \mathbf{I}] = [\mathbf{I} \quad \mathbf{B}]$$

οπου $\mathbf{F}_K$, $\mathbf{F}_{K-1}$, ..., $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_1$ οι οποιοι ειναι ολοι ομαλοι (επειδη οι αντιστοιχες γραμμοπραξεις ειναι αντιστρεψιμες). Το ισοδυναμο συστημα ειναι

$$\mathbf{IX} = \mathbf{B}.$$

δηλ. $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{X} = \mathbf{B}$. Με αλλα λογια ισχυει

$$\mathbf{F}_K \mathbf{F}_{K-1} ... \mathbf{F}_2 \mathbf{F}_1 \cdot [\mathbf{A} \quad \mathbf{I}] = \left[\mathbf{I} \quad \mathbf{A}^{-1}\right] \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F}_K \mathbf{F}_{K-1} ... \mathbf{F}_2 \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I} \\ \mathbf{F}_K \mathbf{F}_{K-1} ... \mathbf{F}_2 \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1} \end{array} \right. .$$

Θετοντας $\mathbf{E}_1 = \mathbf{F}_K^{-1}$, $\mathbf{E}_2 = \mathbf{F}_{K-1}^{-1}$, ..., $\mathbf{E}_{K-1}^{-1} = \mathbf{F}_2^{-1}$, $\mathbf{E}_K = \mathbf{F}_1^{-1}$ εχουμε

$$\mathbf{F}_1^{-1} \mathbf{F}_2^{-1} ... \mathbf{F}_{K-1}^{-1} \mathbf{F}_K^{-1} \cdot \mathbf{F}_K \mathbf{F}_{K-1} ... \mathbf{F}_2 \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{F_1^{-1} F_2^{-1} ... F_{K-1}^{-1} F_K^{-1}} \cdot \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 ... \mathbf{E}_K.$$

Αντιστροφα, αν $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 ... \mathbf{E}_K$, τοτε

$$\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 ... \mathbf{E}_K)^{-1} = \mathbf{E}_K^{-1} \mathbf{E}_{K-1}^{-1} ... \mathbf{E}_2^{-1} \mathbf{E}_1^{-1}.$$

αφου α αντιστροφος του καθε στοιχειωδη πινακα $\mathbf{E}_k$ υπαρχει

## 6.3 Αλυτα Προβληματα

**6.3.1.** Μετασχηματιστε τους παρακατω πινακες σε κλιμακωτη μορφη .

1. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ **Απ.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$.

2. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ **Απ.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & -3 & -8 & -5 & -17 \\ 0 & 0 & -9 & 6 & 6 \end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & 4 \end{bmatrix}$ **Απ.** $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

4. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & -5 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ **Απ.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -16 & -2 & 14 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 36 & 6 & -29 & -18 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 113 & -234 & 242 \end{bmatrix}$.

5. $\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & a^2 & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{bmatrix}$ **Απ.** $\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1-a^3 & a-a^4 \\ 0 & 0 & 1-2a^3+a^6 \end{bmatrix}$.

**6.3.2.** Λυστε τα παρακατω συστηματα με απαλοιφη $Gauss$.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix}$ **Απ.** $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

2. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \end{bmatrix}$ **Απ.** $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix} + a \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -13 \\ -14 \\ -6 \end{bmatrix}$ **Απ.** $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

4. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 10 & 10 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ **Απ.** $\mathbf{x} = a \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

5. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 10 & 10 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 26 \end{bmatrix}$ **Απ.** $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + a \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

6. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 10 & 10 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 24 \end{bmatrix}$ **Απ.** Το συστημα ειναι αδυνατο.

7. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ -5 \end{bmatrix}$ **Απ.** $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + a \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

8. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix}$ **Απ.** $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + a \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

9. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -6 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ **Απ.** $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ -5 \\ 19 \\ 0 \end{bmatrix} + a \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ -10 \\ 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 4 \\ -17 \\ 1 \end{bmatrix}$.

10. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ **Απ**. Το συστημα ειναι αδυνατο.

**6.3.3.** Λυστε τα παρακατω συστηματα με απαλοιφη $Gauss$ και με τον κανονα του $Cramer$. Συγκρινετε τις απαντησεις.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix}$ **Απ**. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

2. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -13 \\ -14 \\ -6 \end{bmatrix}$ **Απ**. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ -5 \end{bmatrix}$ **Απ**. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + a \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ **Απ**. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

5. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ **Απ**. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

**6.3.4.** Λυστε τα συστηματα του Εδαφιου **;;** με απαλοιφη $Gauss$ χρησιμοποιωντας στοιχειωδεις πινακες.

**6.3.5.** Λυστε τα συστηματα του Εδαφιου **;;** χρησιμοποιωντας την ανηγμενη κλιμακωτη μορφη.

**6.3.6.** Δινεται ο πινακας

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Για καθεμια απο τις παρακατω γραμμοπραξεις βρειτε τον αντιστοιχο στοιχειωδη πινακα και εφαρμοστε τον στον $\mathbf{A}$. Κατοπιν βρειτε την αντιστροφη γραμμοπραξη και τον αντιστοιχο πινακα. Με πολλαπλασιασμο πινακων ελεγξτε οτι η διαδοχικη εφαρμογη της γραμμοπραξης και της αντιστροφης γραμμοπραξης δινει τον αρχικο πινακα $\mathbf{A}$.

1. $\mathbf{r}_2 \leftarrow \mathbf{r}_2 - 2 \cdot \mathbf{r}_1$ **Απ**. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. $\mathbf{r}_4 \leftarrow -5 \cdot \mathbf{r}_4$ **Απ.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}.$

3. $\mathbf{r}_2 \longleftrightarrow \mathbf{r}_3$ **Απ.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

4. $\mathbf{r}_4 \leftarrow \mathbf{r}_4 + 6 \cdot \mathbf{r}_3$ **Απ.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \end{bmatrix}.$

5. $\mathbf{r}_1 \leftarrow \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1$ **Απ.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

**6.3.7.** Βρειτε τον αντιστροφο των παρακατα πινακων χρησιμοποιωντας την ανηγμενη κλιμακωτη μορφη.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Απ.**

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{11}{21} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{21} \\ \frac{8}{21} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{21} \\ -\frac{2}{21} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{21} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{24} & -\frac{1}{12} & -\frac{7}{24} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{12} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{8} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**6.3.8.** Γραψτε τον πινακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ως γινομενο στοιχειωδων πινακων.

**Απ**. Ο $\mathbf{A}$ ισουται με

$$= \Bigg( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

# Κεφάλαιο 7

# Διανυσματικοι Χωροι

Το παρον κεφαλαιο συζητα την αλγεβρικη διατυπωση ορισμενων γεωμετρικων εννοιων (διανυσμα, ευθεια, επιπεδο, χωρος) και τις γενικευει στον $N$-*διαστατο χωρο*. Η βασικη αλγεβρικη εννοια που ενοποιει ολα τα παραπανω ειναι ο *διανυσματικος χωρος*. Οπως θα δουμε, η αλγεβρικη διατυπωση των γεωμετρικων εννοιων βασιζεται στα συστηματα γραμμικων εξισωσεων και στους πινακες[1].

## 7.1 Θεωρια

**7.1.1.** Ενα *διανυσμα* στο επιπεδο $\mathbb{R}^2$ ειναι ενα ζευγος αριθμων $(x_1, x_2)$. Γεωμετρικα, ενα τετοιο διανυσμα μπορει να ερμηνευτει ως ενα ευθυγραμμο τμημα το οποιο αρχιζει στην αρχη των αξονων και τελειωνει στο σημειο του επιπεδου $(x_1, x_2)$. Ακριβεστερα ομως, το $(x_1, x_2)$ δεν αντιπροσωπευει μονο το συγκεκριμενο ευθυγραμμο τμημα, αλλα *ολα* τα ευθυγραμμα τμηματα με το ιδιο μηκος, διευθυνση και φορα – δηλ. στο παρον τευχος μιλαμε για *ελευθερα* διανυσματα.

**7.1.2.** Με ομοιο τροπο μπορουμε να αντιστοιχισουμε σε καθε τριαδα $(x_1, x_2, x_3)$ ενα διανυσμα στο (τριδιαστατο) *χωρο* $\mathbb{R}^3$.

**7.1.3.** Γενικοτερα, ενα διανυσμα στον $N$-διαστατο χωρο ειναι μια $N$-αδα $(x_1, x_2, x_3, ..., x_N)$. Θα συμβολιζουμε το συνολο των $N$-διαστατων διανυσματων με $\mathbb{R}^N$:

$$\mathbb{R}^N = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_N)\,,\ \text{με } x_1, x_2, ..., x_N \in \mathbb{R}\}\,.$$

**7.1.4.** Μπορουμε ακομη να συμβολιζουμε τα διανυσματα με πινακες-γραμμες ή πινακες-στηλες. Δηλ. αντι για $(x_1, x_2, ..., x_N)$ θα γραφουμε

$$\mathbf{x} = \left[\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & ... & x_N \end{array}\right] \qquad \text{ή} \qquad \mathbf{x} = \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_N \end{array}\right].$$

[1] Στο επομενο κεφαλαιο θα δουμε και την "αντιστροφη" θεωρηση, δηλ. την χρηση γεωμετρικων εννοιων για την μελετη συστηματων γραμμικων εξισωσεων.

**7.1.5.** Το *μηδενικο* διανυσμα ειναι

$$\mathbf{0} = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & ... & 0 \end{array}\right] \qquad \text{ή} \qquad \mathbf{0} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{array}\right]$$

και αντιστοιχει στην αρχη των αξονων.

**7.1.6.** Εστω δυο οποιαδηποτε διανυσματα του $N$-διαστατου χωρου: $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$, και δυο οποιοιδηποτε αριθμοι $x, y \in \mathbb{R}$. Τοτε η εκφραση $x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$ λεγεται *γραμμικος συνδυασμος* των $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$. Προφανως, ο γραμμικος συνδυασμος δυο διανυσματων ειναι και αυτος ενα διανυσμα. Δηλ. για οποιοδηποτε $N$ ισχυει

$$\forall x, y \in R, \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^N : x\mathbf{a} + y\mathbf{b} \in \mathbb{R}^N.$$

**7.1.7.** Γενικοτερα, εστω $K$ διανυσματα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_K$. Τοτε το διανυσμα

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + ... + x_K\mathbf{a}_K,$$

οπου οι $x_1, x_2, ..., x_K$ ειναι αριθμοι, λεγεται *γραμμικος συνδυασμος* των $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_K$.

**7.1.8.** Ενα συνολο διανυσματων $U \subseteq \mathbb{R}^N$ λεγεται *διανυσματικος χωρος* αν εχει την ιδιοτητα

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in U, \forall x, y \in \mathbb{R} : x\mathbf{a} + y\mathbf{b} \in U.$$

δηλ. αν ειναι *κλειστος* ως προς γραμμικους συνδυασμους.

**7.1.9.** Εστω ενας διανυσματικος χωρος $U$ και ενα συνολο διανυσματων $V \subseteq U$. Λεμε οτι το ο $V$ ειναι ενας *διανυσματικος υποχωρος του* $U$ αν εχει την ιδιοτητα

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V, \forall x, y \in \mathbb{R} : x\mathbf{a} + y\mathbf{b} \in V.$$

**7.1.10.** Εστω ενας διανυσματικος χωρος $U$ και τα διανυσματα $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_M \in U$. Το *αναπτυγμα* των $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_M$ γραφεται $span\left(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_M\right)$ και οριζεται ως εξης:

$$span\left(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_M\right) = \left\{\mathbf{b} : \mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + ... + x_M\mathbf{a}_M \text{ με } x_1, x_2, ..., x_M \in \mathbb{R}\right\}.$$

Δηλ. το *αναπτυγμα* των $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_M$ ειναι το συνολο ολων των γραμμικων συνδυασμων των $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_M$. Λεμε και οτι τα $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_M$ *γεννουν* το $span\left(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_M\right)$.

**7.1.11.** Εστω ενας διανυσματικος χωρος $U$ και ενα συνολο διανυσματων $V \subseteq U$.Το *αναπτυγμα* του $V$ γραφεται $span\left(V\right)$ και οριζεται ως εξης:

$$span\left(V\right) = \left\{\mathbf{b} : \mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + ... + x_M\mathbf{a}_M \text{ με } x_1, ..., x_M \in \mathbb{R} \text{ και με } \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_M \in V\right\}.$$

Δηλ. το *αναπτυγμα* του $V$ ειναι το συνολο ολων των *πεπερασμενων* γραμμικων συνδυασμων διανυσματων που ανηκουν στο $V$.

**7.1.12.** Εστω τα διανυσματα $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_M \in U$. Εχουμε

$$\{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_M\} \subseteq span\,(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_M) \subseteq U$$

και το $span\,(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_M)$ ειναι ενας διανυσματικος υποχωρος του $U$.

**7.1.13.** Λεμε οτι το συνολο διανυσματων $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_M\}$ ειναι *γραμμικα ανεξαρτητο* ανν

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{x}_2 + ... + x_M\mathbf{a}_M = \mathbf{0} \Rightarrow x_1 = x_2 = ... = x_M = 0. \tag{7.1}$$

Λεμε οτι το $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_M\}$ ειναι *γραμμικα εξαρτημενο* ανν υπαρχουν αριθμοι $x_1, x_2, ..., x_M$, *οχι ολοι ισοι με μηδεν*, τετοιοι ωστε $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{x}_2 + ... + x_M\mathbf{a}_M = \mathbf{0}$.

**7.1.14.** Αν θεσουμε $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & ... & \mathbf{a}_M \end{bmatrix}$ και $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_M \end{bmatrix}^T$, τοτε η (7.1) μπορει να γραφτει ισοδυναμα ως

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Δηλ. το $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_M\}$ ειναι *γραμμικα ανεξαρτητο* ανν το συστημα $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ εχει μονο την μηδενικη λυση· αλλιως ειναι γραμμικα εξαρτημενο.

**7.1.15.** Εστω οτι $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\} \subseteq \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$ (τα διανυσματα ειναι διδιαστατα). Τοτε αυτα ειναι γραμμικα εξαρτημενα ανν ειναι συγγραμικα.

**7.1.16.** Εστω οτι $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\} \subseteq \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$ (τα διανυσματα ειναι τριδιαστατα). Τοτε αυτα ειναι γραμμικα εξαρτημενα ανν ειναι συνεπιπεδα.

**7.1.17.** Το συνολο $\{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_N\}$ (οπου τα τα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_N$ ειναι διανυσματα του $\mathbb{R}^N$) ειναι γραμμικα εξαρτημενο ανν $|\mathbf{A}| = 0$ (οπου $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & ... & \mathbf{a}_N \end{bmatrix}$).

**7.1.18.** Το συνολο $\{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_M\}$ ειναι γραμμικα εξαρτημενο ανν τουλαχιστον ενα απο τα $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_M$ μπορει να εκφραστει σαν γραμμικος συνδυασμος των υπολοιπων, δηλ. υπαρχει $m \in \{1, 2, ..., M\}$ και αριθμοι $x_1, ..., x_{m-1}, x_{m+1}, ..., x_M$ τετοιοι ωστε

$$\mathbf{a}_m = x_1\mathbf{a}_1 + ... + x_{m-1}\mathbf{a}_{m-1} + x_{m+1}\mathbf{a}_{m+1} + ... + x_M\mathbf{a}_M.$$

**7.1.19.** Ενα συνολο $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_M\} \subseteq \mathbb{R}^N$ λεγεται *βαση* του διανυσματικου χωρου $U \subseteq \mathbb{R}^N$ ανν (α) ειναι γραμμικα ανεξαρτητο και (β) καθε $\mathbf{b} \in U$ μπορει να γραφτει ως

$$\mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + ... + x_M\mathbf{a}_M.$$

**7.1.20.** Αν τα $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_M$ ειναι μια βαση του $U$, τοτε $U = span\,(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_M)$. Δηλαδη μια *οποιαδηποτε* βαση του $U$ γεννα τον $U$.

**7.1.21.** Αν τα συνολα $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_K\}$ και $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_M\}$ ειναι *βασεις* του διανυσματικου χωρου $U \subseteq \mathbb{R}^N$ τοτε $K = M$. Δηλ. *ολες οι βασεις του $U$ περιεχουν τον ιδιο αριθμο διανυσματων.*

**7.1.22.** Η *διασταση* ενος διανυσματικου χωρου $S$ συμβολιζεται με $\dim(S)$ και οριζεται ως εξης

$$\dim(S) \doteq \text{¨ο αριθμος των στοιχειων καθε βασης του } S\text{¨}.$$

**7.1.23.** Δινονται διανυσματα $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_M$. Μπορουμε να βρουμε μια βαση του $span\left(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_M\right)$ (και αρα και την διασταση του) με τον εξης αλγοριθμο.

1. Σχηματιζουμε τον πινακα $\mathbf{A}$ με *γραμμες* τα διανυσματα $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_M$.
2. Φερνουμε τον $\mathbf{A}$ σε πινακα κλιμακωτης μορφης $\mathbf{A}'$.
3. Η βαση του $span\left(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_M\right)$ ειναι οι μη μηδενικες *γραμμες* του $\mathbf{A}'$.

**7.1.24.** Δινονται διανυσματα $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_M$. Μπορουμε να βρουμε μια βαση του $span\left(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_M\right)$ (και αρα και την διασταση του) με τον εξης αλγοριθμο.

1. Σχηματιζουμε τον πινακα $\mathbf{A}$ με *στηλες* τα διανυσματα $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_M$.
2. Φερνουμε τον $\mathbf{A}$ σε πινακα κλιμακωτης μορφης $\mathbf{A}'$.
3. Αφαιρουμε απο τον $\mathbf{A}'$ τις στηλες που δεν εχουν κομβο.
4. Η βαση του $span\left(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_M\right)$ ειναι οι υπολοιπες *στηλες* του $\mathbf{A}'$.

**7.1.25.** Εστω οτι ο διανυσματικος χωρος $U$ εχει διασταση $M$. Τοτε καθε συνολο $\left\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_M, \mathbf{a}_{M+1}\right\}$ ειναι γραμμικα εξαρτημενο.

**7.1.26.** Εστω οτι ο διανυσματικος χωρος $U$ εχει διασταση $M$. Τοτε καθε γραμμικα ανεξαρτητο συνολο $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_M\}$ *με $M$ στοιχεια* ειναι μια βαση του $U$.

**7.1.27.** Μπορουμε να συνδυασουμε τις δυο προηγουμενες παρατηρησεις και να δωσουμε εναν εναλλακτικο ορισμο της βασης ενος διανυσματικου χωρου $U$: μια βαση του $U$ ειναι ενα γραμμικα ανεξαρτητο συνολο με μεγιστο αριθμο στοιχειων.

**7.1.28.** Εστω οτι ο διανυσματικος χωρος $U$ ειναι υποχωρος του διανυσματικου χωρου $V$. Τοτε $dim\,(U) \leq dim\,(V)$. Αν $dim\,(U) = dim\,(V)$ τοτε $U = V$.

## 7.2 Λυμενα Προβληματα

**7.2.1.** Σχεδιαστε τα διανυσματα

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}=\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση**.

**Σχημα**

**7.2.2.** Σχεδιαστε τα διανυσματα

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}=\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}=\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση**.

**Σχημα**

**7.2.3.** Εστω τα 3-διαστατα διανυσματα

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}=\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}=\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Υπολογιστε τους γραμμικους συνδυασμους $\mathbf{x}+2\mathbf{y}$, $2\mathbf{z}-\mathbf{y}$, $2\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}$.

**Απαντηση**. Εχουμε

$$\mathbf{x}+2\mathbf{y}=\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}+2\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 11 \\ -4 \end{bmatrix},$$

$$2\mathbf{z}-\mathbf{y}=2\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$2\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}=2\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

**7.2.4.** Δειξτε οτι το επιπεδο $\mathbb{R}^2$ ειναι ενας διανυσματικος χωρος. Βρειτε μερικους διανυσματικους υποχωρους αυτου.

**Απαντηση**. Για καθε $a,b\in\mathbb{R}$ και τυχοντα $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^2$ τετοια ωστε

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

εχουμε

$$a\mathbf{x}+b\mathbf{y}=\begin{bmatrix} ax_1+by_1 \\ ax_2+by_2 \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2.$$

Αρα ο $\mathbb{R}^2$ ειναι διανυσματικος χωρος.

Θεωρειστε τωρα τον "πρωτο αξονα"· αυτος μπορει να οριστει ως εξης

$$U=\left\{\mathbf{x}:\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}.$$

Ο $U$ ειναι ενας διανυσματικος υποχωρος του $\mathbb{R}^2$. Διοτι, αν θεωρησουμε $\mathbf{x},\mathbf{y}\in U$, θα εχουμε

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

και τοτε για καθε $a,b\in\mathbb{R}$ θα εχουμε

$$a\mathbf{x}+b\mathbf{y}=a\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}+b\cdot\begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax_1+by_1 \\ 0 \end{bmatrix}\in U.$$

Ο "δευτερος αξονας", ο οποιος μπορει να οριστει ως εξης:

$$V=\left\{\mathbf{x}:\mathbf{x}=\begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix}\right\},$$

ειναι επισης ενας διανυσματικος υποχωρος του $\mathbb{R}^2$ (γιατι;).

Γενικοτερα, μια ευθεια του $\mathbb{R}^2$ που περναει απο την αρχη των αξονων μπορει να γραφτει ως εξης

$$W = \left\{ \mathbf{x} : \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ kx_1 \end{bmatrix} \right\}$$

(γιατι;) και ειναι ενας διανυσματικος υποχωρος του $\mathbb{R}^2$. Διοτι, αν θεωρησουμε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$, θα εχουμε

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ kx_1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ ky_1 \end{bmatrix}$$

και τοτε για καθε $a, b \in \mathbb{R}$ θα εχουμε

$$a\mathbf{x} + b\mathbf{y} = a \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ kx_1 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ ky_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + by_1 \\ k\,(ax_1 + by_1) \end{bmatrix} \in W.$$

Τελος, αξιζει να σημειωσουμε οτι το συνολο $X$ που περιεχει μονο το μηδενικο διανυσμα (την αρχη των αξονων) δηλ. $X = \{\mathbf{0}\}$ ειναι επισης ενας υποχωρος του $\mathbb{R}^2$. Διοτι αν παρουμε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$, τοτε θα πρεπει να εχουμε $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{0}$, οποτε για καθε $a, b \in R$ θα εχουμε

$$a\mathbf{x} + b\mathbf{y} = a\mathbf{0} + b\mathbf{0} = \mathbf{0} \in X.$$

**7.2.5.** Δωστε παραδειγματα αναλογα με αυτα της προηγουμενης ασκηση για τον $\mathbb{R}^3$.

**Απαντηση**. Για προφανεις λογους, ο τριδιαστατος χωρος $\mathbb{R}^3$ ειναι ενας διανυσματικος χωρος. Επισης, οι τρεις του αξονες ειναι διανυσματικοι υποχωροι. Π.χ. αν θεσουμε

$$U = \left\{ \mathbf{x} : \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} \right\}$$

ειναι ευκολο να δειχτει οτι ολοι οι γραμμικοι συνδυασμοι στοιχειων του $U$ ειναι επισης στοιχεια του $U$ (δηλ. αν σχηματισουμε οποιοδηποτε γραμμικο συνδυασμο διανυσματων του $U$, ο γραμμικος συνδυασμος ανηκει επισης στον $U$). Αρα ο $U$ ειναι ενας διανυσματικος υποχωρος του $\mathbb{R}^3$. Παρομοια, θεωρειστε το επιπεδο του $\mathbb{R}^3$ που οριζεται ως εξης:

$$V = \left\{ \mathbf{x} : \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

(γιατι ειναι αυτο ενα επιπεδο; ποιο επιπεδο ειναι;). Τοτε για οποιαδηποτε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ και $a, b \in \mathbb{R}$ εχουμε

$$a\mathbf{x}+b\mathbf{y} = a \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + by_1 \\ ax_2 + by_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in V$$

(δηλ. αν σχηματισουμε οποιοδηποτε γραμμικο συνδυασμο διανυσματων απο αυτο το επιπεδο, ο γραμικος συνδυασμος ανηκει στον επιπεδο επισης). Αρα το $V$ ειναι ενας διανυσματικος υποχωρος του $\mathbb{R}^3$. Το ιδιο ισχυει για το επιπεδο

$$W = \left\{ \mathbf{x} : \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} \right\}$$

οπως και για το επιπεδο

$$X = \left\{ \mathbf{x} : \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right\}.$$

Γενικοτερα, εστω ενα επιπεδο $Y$ του $\mathbb{R}^3$ το οποιο μπορει να γραφτει ως εξης:

$$Y = \left\{ \mathbf{x} : \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ kx_1 + \lambda x_2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Καθε τετοιο επιπεδο περναει απο την αρχη των αξονων (γιατι;). Τοτε για οποιαδηποτε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Y$ και $a, b \in \mathbb{R}$ εχουμε

$$a\mathbf{x}+b\mathbf{y} = a \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ kx_1 + \lambda x_2 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ky_1 + \lambda y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + by_1 \\ ax_2 + by_2 \\ k(ax_1 + by_1) + \lambda(ax_2 + by_2) \end{bmatrix} \in Y,$$

Αρα ο $Y$ ειναι ενας διανυσματικος υποχωρος του $\mathbb{R}^3$. Και τελος το $Z = \{\mathbf{0}\}$ ειναι ενας υποχωρος του $\mathbb{R}^3$.

Υπαρχουν και αλλοι υποχωροι του $\mathbb{R}^3$, συγκεκριμενα ολες οι ευθειες και ολα τα επιπεδα που περνανε απο το $\mathbf{0}$. Η αποδειξη αυτου του γεγονοτος αφηνεται ως ασκηση στον αναγνωστη.

**7.2.6.** Δειξτε οτι το υποσυνολο $U$ του $\mathbb{R}^2$ που οριζεται απο την σχεση

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \right\}$$

*δεν* ειναι ενας διανυσματικος υποχωρος του $\mathbb{R}^3$. Δωστε μια γεωμετρικη ερμηνεια του συνολου $U$ και εξηγειστε γεωμετρικα γιατι δεν ειναι ενας διανυσματικος υποχωρος.

**Απαντηση**. Ευκολα βλεπουμε οτι τα $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T \in U$. Ομως το $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}^T$ *δεν* ανηκει στον $U$, αρα ο $U$ δεν ειναι διανυσματικος χωρος. Το $U$ ειναι το πρωτο τεταρτημοριο του επιπεδου. Οπως φαινεται και στο παρακατω σχημα, γραμμικοι συνδυασμοι διανυσματων του $U$ μπορει να δινουν διανυσμα εκτος του $U$.

**Σχημα**

**7.2.7.** Δειξτε οτι το υποσυνολο $U$ του $\mathbb{R}^3$ που οριζεται απο την σχεση

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1 \right\}$$

*δεν* ειναι ενας διανυσματικος υποχωρος του $\mathbb{R}^3$. Δωστε μια γεωμετρικη ερμηνεια του συνολου $U$ και εξηγειστε γεωμετρικα γιατι δεν ειναι ενας διανυσματικος υποχωρος.

**Απαντηση**. Τα $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \in U$. Ομως το $\mathbf{x}+\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}^T$ *δεν* ανηκει στον $U$, αρα ο $U$ δεν ειναι διανυσματικος χωρος. Το $U$ ειναι η σφαιρα (και το εστερικο της) με κεντρο την αρχη των αξονων και ακτινα 1. Οπως φαινεται και στο παρακατω σχημα, γραμμικοι συνδυασμοι διανυσματων του $U$ μπορει να δινουν διανυσμα εκτος του $U$.

**7.2.8.** Θεωρειστε τα διανυσματα

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Δειξτε οτι

$$span\left(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\right) = \mathbb{R}^3.$$

**Απαντηση**. Θεωρειστε τυχον διανυσμα $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$. Θα πρεπει να δειξουμε οτι το $\mathbf{x}$ μπορει να γραφτει ως γραμμικος συνδυασμος των $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$. Πραγματι εχουμε

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{x}.$$

Αρα καθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ μπορει να γραφτει σαν γραμμικος συνδυασμος των $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, οποτε $\mathbb{R}^3 \subseteq span\left(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\right)$. Επειδη (προφανως) και $span\left(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\right) \subseteq \mathbb{R}^3$, τελικα εχουμε $\mathbb{R}^3$= $span\left(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\right)$.

**7.2.9.** Θεωρειστε τα διανυσματα

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Δειξτε οτι

$$span\left(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\right) = \mathbb{R}^3.$$

**Απαντηση**. Θεωρειστε τυχον διανυσμα $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Θα πρεπει να δειξουμε οτι το $\mathbf{x}$ μπορει να γραφτει ως γραμμικος συνδυασμος των $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$. Δηλ. θα πρεπει να υπαρχουν $y_1, y_2, y_3$ τετοια ωστε

$$y_1\mathbf{a}_1 + y_2, \mathbf{a}_2 + y_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{x} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

η ισοδυναμα

$$y_1 + y_2 + y_3 = x_1 \tag{7.2}$$

$$y_2 + y_3 = x_2 \tag{7.3}$$

$$y_3 = x_3 \tag{7.4}$$

Το συστημα αυτο εχει λυση $y_3 = x_3$, $y_2 = x_2 - x_3$, $y_1 = x_1 - x_2$. Αρα καθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ μπορει να γραφτει σαν γραμμικος συνδυασμος των $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ και, παρομοια με το προηγουμενο προβλημα, συμπεραινουμε οτι $\mathbb{R}^3$= $span\left(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\right)$. Μπρουσαμε να καταληξουμε στο ιδιο συμπερασμα και πιο απλα, παρατηρωντας οτι για ο πινακας

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

εχει οριζουσα $|\mathbf{A}| = 1$ και αρα το συστημα (7.2)-(7.4) εχει λυση.

**7.2.10.** Θεωρειστε τα διανυσματα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

και βρειτε το $span\left(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\right)$.

**Απαντηση**. Σχηματιζουμε τον πινακα $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}$ και υπολογιζουμε $|\mathbf{A}| = 4$. Αρα, για καθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, το συστημα $\mathbf{Ay} = \mathbf{x}$ εχει λυση, δηλαδη υπαρχουν $y_1, y_2, y_3$ τετοια ωστε $\mathbf{x} = y_1\mathbf{a}_1 + y_2, \mathbf{a}_2 + y_3\mathbf{a}_3$ και αρα (οπως και στα προηγουμενα προβληματα) $\mathbb{R}^3$= $span\left(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\right)$.

**7.2.11.** Θεωρειστε τα διανυσματα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

και βρειτε το $span\left(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\right)$.

**Απαντηση**. Σχηματιζουμε τον πινακα $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}$ και υπολογιζουμε $|\mathbf{A}| = 0$. Αρα θα υπαρχουν $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ για τα οποια το συστημα $\mathbf{Ay} = \mathbf{x}$ δεν εχει λυση, οποτε το $span\left(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\right)$ ειναι γνησιο υποσυνολο του $\mathbb{R}^3$. Παρατηρουμε επισης οτι το $\mathbf{a}_3 = 2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$, οποτε καθε διανυσμα $\mathbf{x} = y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + y_3\mathbf{a}_3$ γραφεται και ως

$$\mathbf{x} = y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + y_3\mathbf{a}_3 = (y_1 + 2) \cdot \mathbf{a}_1 + 2y_2\mathbf{a}_2$$

και οι αριθμοι $y_1 + 2, 2y_2$ μπορουν να ληφθουν ισοι με οποιοδηποτε ζευγος $z_1, z_2$ (γιατι;). Οποτε τελικα

$$span\left(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\right) = \left\{ \mathbf{x} : \mathbf{x} = z_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + z_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, z_1, z_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

το οποιο ειναι ενα επιπεδο στο $\mathbb{R}^3$.

**7.2.12.** Δινονται διανυσματα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_M \in U \subseteq \mathbb{R}^N$. Δειξτε οτι το $span\left(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_M\right)$ ειναι διανυσματικος υποχωρος του $U$.

**Απαντηση**. Παιρνουμε τυχοντα $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in span\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_M)$ , οποτε θα εχουμε

$$\mathbf{x} = p_1\mathbf{a}_1 + ... + p_M\mathbf{a}_M, \qquad \mathbf{y} = q_1\mathbf{a}_1 + ... + q_M\mathbf{a}_M,$$

και τυχοντα $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Τοτε

$$\begin{aligned} \kappa\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y} &= \kappa \cdot (p_1\mathbf{a}_1 + ... + p_M\mathbf{a}_M) + \lambda \cdot (q_1\mathbf{a}_1 + ... + q_M\mathbf{a}_M) \\ &= (\kappa p_1 + \lambda q_1)\,\mathbf{a}_1 + ... + (\kappa p_M + \lambda q_M)\,\mathbf{a}_M \in span\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_M) \end{aligned}$$

και αρα το $span\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_M)$ ειναι διανυσματικος χωρος του $U$· επειδη και

$$span\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_M) \subseteq U,$$

τελικα το $span\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_M)$ ειναι διανυσματικος υποχωρος του $U$.

**7.2.13.** Δινονται διανυσματα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_N \in U \subseteq \mathbb{R}^N$. Δειξτε οτι

$$span\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_N) = span\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_N, \mathbf{0})$$

**Απαντηση**. Εστω $\mathbf{x} \in span\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_M)$. Τοτε

$$\mathbf{x} = p_1\mathbf{a}_1 + ... + p_M\mathbf{a}_M = p_1\mathbf{a}_1 + ... + p_M\mathbf{a}_M + p_{M+1}\mathbf{0}$$

(αφου $p_{M+1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$) οποτε $\mathbf{x} \in span\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_N, \mathbf{0})$· αρα

$$span\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_N) \subseteq span\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_N, \mathbf{0})\,. \tag{7.5}$$

Απο την αλλη, εστω $\mathbf{x} \in span\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_M, \mathbf{0})$. Τοτε

$$\mathbf{x} = p_1\mathbf{a}_1 + ... + p_M\mathbf{a}_M + +p_{M+1}\mathbf{0} = p_1\mathbf{a}_1 + ... + p_M\mathbf{a}_M$$

οποτε $\mathbf{x} \in span\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_N)$· αρα

$$span\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_N) \subseteq span\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_N, \mathbf{0})\,. \tag{7.6}$$

Οποτε τελικα $span\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_N) = span\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_N, \mathbf{0})$.

**7.2.14.** Δινονται διανυσματα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_M \in U \subseteq \mathbb{R}^N$ και $\mathbf{w} \in span\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_N)$. Δειξτε οτι

$$span\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_M) = span\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_N, \mathbf{w})$$

**Απαντηση**. Ειναι προφανες οτι $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_M\} \subseteq \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_M, \mathbf{w}\}$ (γιατι;) οποτε

$$span\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_M) \subseteq span\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_M, \mathbf{w}) \tag{7.7}$$

Απο την αλλη, αφου $\mathbf{w} \in span\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_M)$ θα εχουμε

$$\mathbf{w} = q_1\mathbf{a}_1 + ... + q_M\mathbf{a}_M.$$

Εστω τωρα $\mathbf{x} \in span\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_M, \mathbf{w})$. Τοτε

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= p_1\mathbf{a}_1 + ... + p_M\mathbf{a}_M + p_{M+1}\mathbf{w} = p_1\mathbf{a}_1 + ... + p_M\mathbf{a}_M + p_{M+1}\cdot (q_1\mathbf{a}_1 + ... + q_M\mathbf{a}_M) \\ &= (p_1 + p_{M+1}q_1) \cdot \mathbf{a}_1 + ... + (p_M + p_{M+1}q_M) \cdot \mathbf{a}_M \end{aligned}$$

οποτε $\mathbf{x} \in span\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_M, \mathbf{w})$· αρα

$$span\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_M, \mathbf{w}) \subseteq span\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_M)\,. \tag{7.8}$$

Απο τις (7.7) και (7.8) εχουμε $span\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_M) = span\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_N, \mathbf{w})$.

**7.2.15.** Δινονται διανυσματα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_N \in U \subseteq \mathbb{R}^N$ και $\mathbf{a}_n = x_1\mathbf{a}_1 + ... + x_{n-1}\mathbf{a}_{n-1} + x_{n+1}\mathbf{a}_{n+1} + ... + x_N\mathbf{a}_N$. Δειξτε οτι

$$span\left(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_N\right) = span\left(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{a}_{n+1}, ..., \mathbf{a}_N\right)$$

**Απαντηση**. Το ζητουμενο στην ουσια ειναι μια επαναδιατυπωση του προηγουμενου προβληματος, με το $\mathbf{a}_n$ να παιζει τον ρολο του $\mathbf{w}$.

**7.2.16.** Δειξτε οτι τα διανυσματα

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

του $\mathbb{R}^3$ ειναι γραμμικα ανεξαρτητα.

**Απαντηση**.Πραγματι, αν εχουμε αριθμους $x_1, x_2, x_3$ τετοιους ωστε

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

τοτε θα ισχυει το συστημα

$$\begin{aligned} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 &= 0 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 &= 0 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 &= 0 \end{aligned}$$

που εχει μοναδικη λυση $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

**7.2.17.** Δειξτε οτι τα διανυσματα

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

του $\mathbb{R}^3$ ειναι γραμμικα ανεξαρτητα.

**Απαντηση**. Πραγματι, αν εχουμε αριθμους $x_1, x_2, x_3$ τετοιους ωστε

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

τοτε θα ισχυει το συστημα

$$\begin{aligned} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 &= 0 \\ 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 &= 0 \\ 3 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Απο την πρωτη εξισωση εχουμε $x_1 = 0$. Αντικαθιστωντας στην δευτερη εχουμε $2 \cdot x_1 + x_2$= $2 \cdot 0 + x_2$= 0, οποτε $x_2 = 0$. Τελος, αντικαθιστωντας στην τριτη, εχουμε $3 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3$= $3 \cdot 0 - 1 \cdot 0 - 3 \cdot x_3$= 0, οποτε $x_3 = 0$.

**7.2.18.** Δειξτε οτι τα τα

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\-2\\-3\end{bmatrix}$$

ειναι γραμμικα εξαρτημενα.

**Απαντηση**. Αν εχουμε αριθμους $x_1, x_2, x_3$ τετοιους ωστε

$$x_1 \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix}-1\\-2\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

τοτε θα ισχυουν οι εξισωσεις

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0\\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 0\\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Το συστημα αυτο εχει λυση $x_1 = -2a + b$, $x_2 = a$, $x_3 = b$. Π.χ., μια λυση ειναι $x_1 = -2 \cdot 1 + 1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$. Δηλαδη

$$-\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\-2\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

και τα διανυσματα ειναι γραμμικα εξαρτημενα. Παρατηρειστε στο **Σχημα** οτι, γεωμετρικα, τα διανυσματα ειναι *συγγραμικα*.

**Σχημα**

**7.2.19.** Δειξτε οτι τα

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\1\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\5\\4\end{bmatrix}$$

ειναι γραμμικα εξαρτημενα.

**Απαντηση**. Αν εχουμε αριθμους $x_1, x_2, x_3$ τετοιους ωστε

$$x_1 \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix}3\\1\\-2\end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix}5\\5\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

τοτε θα ισχυει το συστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 0\\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 &= 0\\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 0. \end{aligned}$$

το οποιο εχει λυσεις της μορφης $x_1 = -2a$, $x_2 = -a$, $x_3 = a$. Π.χ., μια λυση ειναι $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$. Δηλαδη

$$-2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

και τα διανυσματα ειναι γραμμικα εξαρτημενα. Παρατηρειστε στο **Σχημα** οτι, γεωμετρικα, τα διανυσματα ειναι *συνεπιπεδα.*

**Σχημα**

**7.2.20.** Δειξτε οτι τα

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ειναι γραμμικα ανεξαρτητα

**Απαντηση**. Αυτο ισχυει επειδη

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

**7.2.21.** Δειξτε οτι τα

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

ειναι γραμμικα ανεξαρτητα.

**Απαντηση**. Αυτο ισχυει διοτι

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -8 \neq 0.$$

**7.2.22.** Δειξτε οτι τα

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ειναι γραμμικα εξαρτημενα.

**Απαντηση**. Αυτο ισχυει διοτι

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

**7.2.23.** Δινονται διανυσματα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \subseteq \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$. Δειξτε οτι αυτα ειναι γραμμικα εξαρτημενα ανν ειναι συγγραμικα.

**Απαντηση**. Τα διανυσματα ειναι της μορφης

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}.$$

Εστω οτι ειναι συγγραμικα, τοτε υπαρχει $x \neq 0$ τετοιο ωστε

$$\mathbf{a}_2 = x \cdot \mathbf{a}_1 \Rightarrow -x\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = \mathbf{0}.$$

και αρα το $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ ειναι γραμμικα εξαρτημενο.

Εστω τωρα οτι το $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ ειναι γραμμικα εξαρτημενο. Τοτε υπαρχουν αριθμοι $x_1, x_2$ (οχι ολοι ισοι με το 0) τετοιοι ωστε

$$x_1 \cdot \mathbf{a}_1 + x_2 \cdot \mathbf{a}_2 = \mathbf{0}. \tag{7.9}$$

Απο το $x_1 x_2 \neq 0$ προκυπτει οτι $x_1 \neq 0$· γιατι αλλιως θα ειχαμε $0 \cdot \mathbf{a}_1 + x_2 \cdot \mathbf{a}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow x_2 \mathbf{a}_2 = 0 \Rightarrow \mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$ αλλα εχουμε υποθεσει $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \subseteq \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$. Αρα λοιπον $x_1 \neq 0$ και τοτε, διαιρωντας την (7.9) με $x_1$, παιρνουμε

$$\mathbf{a}_1 + \frac{x_2}{x_1} \cdot \mathbf{a}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a}_1 = -\frac{x_2}{x_1} \cdot \mathbf{a}_2$$

που δειχνει οτι τα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ ειναι συγγραμικα.

**7.2.24.** Δειξτε οτι το συνολο $\{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_N\}$ (οπου τα τα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_N$ ειναι διανυσματα του $\mathbb{R}^N$) ειναι γραμμικα εξαρτημενο ανν $|\mathbf{A}| = 0$ (οπου $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & ... & \mathbf{a}_N \end{bmatrix}$).

**Απαντηση**. Προσεξτε οτι εχουμε $N$ διανυσματα το καθενα εκ των οποιων εχει $N$ συνιστωσες. Εξ ορισμου, το συνολο $\{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_N\}$ ειναι γραμμικα εξαρτημενο ανν το *τετραγωνικο* συστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ εχει μη μηδενικη λυση. Αλλα αυτο συμβαινει ανν $|\mathbf{A}| = 0$.

**7.2.25.** Δειξτε οτι το συνολο $\{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_M\}$ ειναι γραμμικα εξαρτημενο ανν τουλαχιστον ενα απο τα $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_M$ μπορει να εκφραστει σαν γραμμικος συνδυασμος των υπολοιπων, δηλ. υπαρχει $m \in \{1, 2, ..., M\}$ και αριθμοι $y_1, ..., y_{m-1}, y_{m+1}, ..., y_M$ τετοιοι ωστε

$$\mathbf{a}_m = y_1 \mathbf{a}_1 + ... + y_{m-1} \mathbf{a}_{m-1} + y_{m+1} \mathbf{a}_{m+1} + ... + y_M \mathbf{a}_M.$$

**Απαντηση**. Εστω οτι το συνολο $\{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_M\}$ ειναι γραμμικα εξαρτημενο. Τοτε το (οχι υποχρεωτικα τετραγωνικο) συστημα

$$\mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_M \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

εχει μη μηδενικη λυση ή, με αλλα λογια, υπαρχουν αριθμοι $x_1, x_2, ..., x_M$, οχι ολοι μηδενικοι, τετοιοι ωστε

$$x_1 \mathbf{a}_1 + ... + x_M \mathbf{a}_M = \mathbf{0}. \tag{7.10}$$

Εστω οτι $x_m$ ειναι το πρωτο μη μηδενικο $x$. Τοτε η (7.10) μπορει να ξαναγραφει

$$\begin{gathered}x_m\mathbf{a}_m=-x_1\mathbf{a}_1-...-x_{m-1}\mathbf{a}_{m-1}-x_{m+1}\mathbf{a}_{m+1}-...-x_M\mathbf{a}_M\Rightarrow\\ \mathbf{a}_m=y_1\mathbf{a}_1+...+y_{m-1}\mathbf{a}_{m-1}+y_{m+1}\mathbf{a}_{m+1}+...+y_M\mathbf{a}_M\end{gathered}$$

με $y_1=-x_1/x_m$, ..., $y_M=-x_M/x_m$.

Εστω τωρα οτι υπαρχουν αριθμοι $y_1,...,y_{m-1},y_{m+1},...,y_M$ τετοιοι ωστε

$$\begin{gathered}\mathbf{a}_m=y_1\mathbf{a}_1+...+y_{m-1}\mathbf{a}_{m-1}+y_{m+1}\mathbf{a}_{m+1}+...+y_M\mathbf{a}_M\Rightarrow\\ \mathbf{0}=y_1\mathbf{a}_1+...+y_{m-1}\mathbf{a}_{m-1}-1\cdot\mathbf{a}_m+y_{m+1}\mathbf{a}_{m+1}+...+y_M\mathbf{a}_M.\end{gathered}$$

Τοτε η εξισωση $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ εχει την *μη μδενικη* λυση

$$\mathbf{x}=\left[\begin{array}{cccccccc} y_1 & y_2 & ... & y_{m-1} & -1 & y_{m+1} & ... & x_M\end{array}\right]^T$$

και αρα το συνολο $\{\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_M\}$ ειναι γραμμικα εξαρτημενο.

**7.2.26.** Βρειτε δυο βασεις του $\mathbb{R}^3$.

**Απαντηση**. Ας θεωρησουμε το συνολο $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ οπου

$$\mathbf{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\qquad \mathbf{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\qquad \mathbf{e}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Καθε διανυσμα $\mathbf{x}=\left[\begin{array}{ccc}x_1 & x_2 & x_3\end{array}\right]^T\in\mathbb{R}^3$ μπορει να γραφτει στην μορφη

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+x_3\mathbf{e}_3.$$

Επισης το $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ ειναι ενα γραμμικα ανεξαρτητο συνολο αφου $|\mathbf{e}_1\quad\mathbf{e}_2\quad\mathbf{e}_3|=1$. Αρα το $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ ειναι μια βαση του $\mathbb{R}^3$, η λεγομενη *κανονικη* βαση.

Μια αλλη βαση ειναι το συνολο $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\}$ οπου

$$\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\mathbf{a}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\mathbf{a}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

Πραγματι, το $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\}$ ειναι ενα γραμμικα ανεξαρτητο συνολο αφου $|\mathbf{a}_1\quad\mathbf{a}_2\quad\mathbf{a}_3|=1$. Και καθε $\mathbf{x}=\left[\begin{array}{ccc}x_1 & x_2 & x_3\end{array}\right]^T\in\mathbb{R}^3$ μπορει να γραφτει στην μορφη

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=y_1\mathbf{a}_1+y_2\mathbf{a}_2+y_3\mathbf{a}_3=\mathbf{Ay}$$

(με $\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1\quad\mathbf{a}_2\quad\mathbf{a}_3]$ και $\mathbf{y}=\left[\begin{array}{ccc}y_1 & y_2 & y_3\end{array}\right]^T$) επειδη το συστημα $\mathbf{Ay}=\mathbf{x}$ εχει παντα λυση (αφου $|\mathbf{A}|=1$).

Βλεπουμε οτι ενας διανυσματικος χωρος μπορει να εχει περισσοτερες απο μια βασεις.

**7.2.27.** Βρειτε δυο βασεις του $\mathbb{R}^4$.

**Απαντηση**. Τα διανυσματα

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ειναι η κανονικη βαση του $\mathbb{R}^4$. Μια αλλη βαση ειναι τα

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(γιατι;).

**7.2.28.** Δειξτε οτι $dim\left(\mathbb{R}^2\right) = 2$ και $dim\left(\mathbb{R}^3\right) = 3$.

**Απαντηση**. Εχουμε ηδη δει οτι τα $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ ειναι μια βαση του $\mathbb{R}^2$, αρα $dim\left(\mathbb{R}^2\right) = 2$. Παρομοια, εχουμε ηδη δει οτι τα $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ ειναι μια βαση του $\mathbb{R}^3$, αρα $dim\left(\mathbb{R}^3\right) = 3$.

**7.2.29.** Αποδειξτε οτι αν τα συνολα $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_K\}$ και $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_M\}$ ειναι *βασεις* του διανυσματικου χωρου $U \subseteq \mathbb{R}^N$ τοτε $K = M$. Δηλ. *καθε βαση του $U$ εχει τον ιδιο αριθμο διανυσματων.*

**Απαντηση**. Αν το $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_K\}$ ειναι μια βαση του $U$, τοτε εχουμε

$$\forall m \in \{1, ..., M\} : \mathbf{b}_m = x_{m1}\mathbf{a}_1 + ... + x_{mK}\mathbf{a}_K.$$

Η παραπανω σχεση μπορει να γραφτει και ως $\mathbf{B} = \mathbf{AX}$ οπου

$$\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \quad ... \quad \mathbf{b}_M], \quad \mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \quad ... \quad \mathbf{a}_K], \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & ... & x_{K1} \\ x_{21} & x_{22} & ... & x_{K2} \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{K1} & x_{K2} & ... & x_{KM} \end{bmatrix}.$$

Ο $\mathbf{B}$ ειναι $N \times M$, ο $\mathbf{A}$ ειναι $N \times K$ και ο $\mathbf{X}$ ειναι $K \times M$.

Ας υποθεσουμε τωρα οτι $K < M$ και ας θεωρησουμε το συστημα $\mathbf{Xz} = \mathbf{0}$. Ο επαυξημενος πινακας του συστηματος ειναι $[\mathbf{X} \quad \mathbf{0}]$ και (αφου εχει $K$ γραμμες) μπορει να εχει *το πολυ* $K$ κομβους. Επειδη $K < M$ και $M$ ειναι ο αριθμος των μεταβλητων (αγνωστων) το συστημα εχει ελευθερες μεταβλητες. Επισης το συστημα δεν ειναι αδυνατο, γιατι καμμια γραμμοπραξη δεν μπορει να δημιουργησει κομβο στην τελευταια στηλη – αυτη θα μενει παντα ιση με $\mathbf{0}$. Αρα το συστημα εχει απειρια λυσεων, και αρα τουλαχιστον μια μη μηδενικη λυση $\widehat{\mathbf{z}}$. Τοτε, πολλαπλασιαζοντας τα δυο μελη του $\mathbf{X}\widehat{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$ με $\mathbf{A}$ παιρνουμε

$$\mathbf{B}\widehat{\mathbf{z}} = \mathbf{AX}\widehat{\mathbf{z}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

η, με αλλα λογια, υπαρχουν αριθμοι (οχι ολοι μηδενικοι) $\widehat{z}_1, ..., \widehat{z}_M$ τετοιοι ωστε

$$\widehat{z}_1\mathbf{b}_1 + ... + \widehat{z}_M\mathbf{b}_M = \mathbf{0}$$

το οποιο ειναι ατοπο, αφου το $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_M\}$ ειναι γραμμικα ανεξαρτητο. Αρα $K \geq M$.

Αν τωρα υποθεσουμε $K > M$ και επαναλαβουμε τον συλλογισμο με τους ρολους των $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ ανεστραμμενους, οδηγουμαστε σε αντιφαση. Αρα συμπεραινουμε οτι $M = K$.

**7.2.30.** Θεωρειστε τα διανυσματα

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Βρειτε μια βαση του $span\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ και την διασταση αυτου.

**Απαντηση**. Το $span\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ ειναι ενας γραμμικος υποχωρος του $\mathbb{R}^3$. Επειδη $|\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3| = 0$, τα $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ δεν ειναι γραμμικα ανεξαρτητο. Τοτε ενα απο αυτα θα μπορει να γραφτει σαν γραμμικος συνδυασμος των αλλων δυο. Π.χ. ας βρουμε $x_1$, $x_2$ τετοια ωστε

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρουμε οτι οι λυσεις του

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &= 8 \\ x_1 &= 2 \end{aligned}$$

ειναι $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ και αυτες επαληθευουν και την

$$3x_1 + 2x_2 = 8.$$

Οποτε εχουμε

$$a_3 = 2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2.$$

Τωρα θεωρειστε οποιοδηποτε $\mathbf{b} \in span\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$. Θα εχουμε

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} &= y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + y_3\mathbf{a}_3 = y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + y_3 \cdot (2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \\ &= (y_1 + 2) \cdot \mathbf{a}_1 + (y_2 + 1) \cdot \mathbf{a}_2. \end{aligned}$$

Δηλ. οποιοδηποτε $\mathbf{b} \in span\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ μπορει να γραφτει σαν γραμμικος συνδυασμος των $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$. Επισης τα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ ειναι γραμμικα ανεξαρτητα (ελεγξτε το!). Οποτε τα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ ειναι μια βαση του $span\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$.

**7.2.31.** Βρειτε μια βαση και την διασταση του

$$U = span\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

**Απαντηση**. Εχουμε
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$
Αρα τα
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
ειναι γραμμικα ανεξαρτητα. Αφου (εξ ορισμου) καθε $\mathbf{b} \in U$ μπορει να γραφτει ως γραμμικος συνδυασμος των τριων παραπανω διανυσματων, αυτα αποτελουν μια βαση του $U$. Αρα $\dim(U) = 3$.

Μπορουμε να οδηγηθουμε στο ιδιο συμπερασμα εφαρμοζοντας τον αλγοριθμο της 7.1.23. Σχηματιζουμε τον πινακα με γραμμες τα δοθεντα διανυσματα:
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
Με γραμμοπραξεις παιρνουμε τον ισοδυναμο $\mathbf{C}'$ ο οποιος ειναι σε κλιμακωτη μορφη:
$$\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$
Αρα μια βαση του $U$ ειναι τα
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$
και $\dim(U) = 3$.

**7.2.32.** Βρειτε μια βαση και την διασταση του
$$U = span\left( \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right).$$

**Απαντηση**. Εφαρμοζουμε τον αλγοριθμο της 7.1.23. Σχηματιζουμε τον πινακα με γραμμες τα δοθεντα διανυσματα:
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$
Με γραμμοπραξεις παιρνουμε τον ισοδυναμο $\mathbf{C}'$ ο οποιος ειναι σε κλιμακωτη μορφη:
$$\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Αρα μια βαση του $U$ ειναι τα

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

και $\dim(U) = 2$.

**7.2.33.** Βρειτε μια βαση και την διασταση του

$$U = span\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}\right).$$

**Απαντηση**. Εφαρμοζουμε τον αλγοριθμο της 7.1.23. Σχηματιζουμε τον πινακα με γραμμες τα δοθεντα διανυσματα:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 7 & 4 \end{bmatrix}.$$

Με γραμμοπραξεις παιρνουμε τον ισοδυναμο $\mathbf{C}'$ ο οποιος ειναι σε κλιμακωτη μορφη:

$$\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Αρα μια βαση του $U$ ειναι τα

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

και $\dim(U) = 3$.

**7.2.34.** Αποδειξτε οτι ο αλγοριθμος της 7.1.23 δινει μια βαση του $span(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_M) \subseteq \mathbb{R}^N$.

**Απαντηση**. Το αρχικο συνολο των γραμμων του πινακα $\mathbf{A}^{(0)} = \mathbf{A}$ ειναι $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_M\} \subseteq \mathbb{R}^N$ (ειναι $M$ διανυσματα διαστασης $N \times 1$). Εστω οτι στο πρωτο βημα εφαρμογης του αλγοριθμου παιρνουμε το συνολο $\mathbf{A}^{(1)} = \left\{\mathbf{a}_1^{(1)}, \mathbf{a}_1^{(1)}, ..., \mathbf{a}_M^{(1)}\right\}$. Το Τα $\mathbf{A}^{(0)}$, $\mathbf{A}^{(1)}$ περιεχουν μονο ενα διαφορετικο στοιχειο (διανυσμα), που προεκυψε απο εφαρμογη μιας γραμμοπραξης σε μια γραμμη του $\mathbf{A}^{(0)}$. Αρα καθε στοιχειο του $\mathbf{A}^{(1)}$ ειναι γραμμικος συνδιασμος των στοιχειων του $\mathbf{A}^{(0)}$ και ετσι

$$span\left(\mathbf{a}_1^{(1)}, \mathbf{a}_2^{(1)}, ..., \mathbf{a}\left(1\right)_M\right) \subseteq span\left(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_M\right).$$

Επειδη καθε γραμμοπραξη που χρησιμοποιουμε ειναι αντιστρεπτη, ισχυει και οτι καθε στοιχειο του $\mathbf{A}^{(0)}$ ειναι γραμμικος συνδιασμος των στοιχειων του $\mathbf{A}^{(1)}$ και ετσι

$$span\left(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,...,\mathbf{a}_M\right)\subseteq span\left(\mathbf{a}_1^{(1)},\mathbf{a}_2^{(1)},...,\mathbf{a}_M^{(1)}\right)$$

(αυτο σημαινει και οτι καθε $\mathbf{a}_m$ μπορει να γραφτει ως γρ. συνδ. των $\mathbf{a}_1^{(1)},\mathbf{a}_2^{(1)},...,\mathbf{a}_M^{(1)}$). Αρα

$$span\left(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,...,\mathbf{a}_M\right)= span\left(\mathbf{a}_1^{(1)},\mathbf{a}_2^{(1)},...,\mathbf{a}_M^{(1)}\right).$$

Συνεχιζοντας κατα τον ιδιο τροπο, βλεπουμε οτι για $k=1,2,...,K$ (οπου $K$ ειναι τα βηματα του αλγοριθμου) εχουμε

$$span\left(\mathbf{a}_1^{(k-1)},\mathbf{a}_2^{(k-1)},...,\mathbf{a}_M^{(k-1)}\right)= span\left(\mathbf{a}_1^{(k)},\mathbf{a}_2^{(k)},...,\mathbf{a}_M^{(k)}\right)$$

και αρα τελικα

$$span\left(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,...,\mathbf{a}_M\right)= span\left(\mathbf{a}_1^{(K)},\mathbf{a}_2^{(K)},...,\mathbf{a}_M^{(K)}\right).$$

Δηλ., οι γραμμες του $\mathbf{A}$ και του κλιμακωτου πινακα $\mathbf{A}'$ εχουν το ιδιο $span$. Καθε στοιχειο $\mathbf{b}\in span\left(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,...,\mathbf{a}_M\right)$ που μπορει να γραφτει ως γρ. συνδ.

$$\mathbf{b}=x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+...+x_M\mathbf{a}_M$$

μπορει επισης να γρατει και ως

$$\mathbf{b}=y_1\mathbf{a}'_1+y_2\mathbf{a}'_2+...+y_M\mathbf{a}'_M$$

(οπου $\mathbf{a}'_1,\mathbf{a}'_2,...,\mathbf{a}'_M$ ειναι οι γραμμες του $\mathbf{A}'$), επειδη καθε $\mathbf{a}_m$ μπορει να γραφτει ως γρ. συνδ. των $\mathbf{a}'_1,\mathbf{a}'_2,...,\mathbf{a}'_M$. Εστω οτι οι μη μηδενικες γραμμες του $\mathbf{A}'$ ειναι οι $\mathbf{a}'_1,\mathbf{a}'_2,...,\mathbf{a}'_N$ (με $N\leq M$). Αρα τελικα καθε $\mathbf{b}\in span\left(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,...,\mathbf{a}_M\right)$ μπορει να γραφτει ως γρ. συνδ.

$$\mathbf{b}=y_1\mathbf{a}'_1+y_2\mathbf{a}'_2+...+y_N\mathbf{a}'_N$$

αφου οι μηδενικες γραμμες δεν συνεισφερουν στο αθροισμα.

Μενει να δειξουμε οτι τα $\mathbf{a}'_1,\mathbf{a}'_2,...,\mathbf{a}'_J$ ειναι γραμμικα ανεξαρτητα. Εστω οτι υπαρχουν $z_1,z_2,...,z_J$ τ.ω.

$$z_1\mathbf{a}'_1+z_2\mathbf{a}'_2+...+z_J\mathbf{a}'_J=\mathbf{0}.$$

Αυτο ειναι ενα συστημα $N$ εξισωσεων με $J$ αγνωστους. Αν εξετασουμε την 1η εξισωση βλεπουμ εοτι αυτη θα εχει την μορφη

$$z_1\cdot 1+z_2\cdot 0+...+z_J\cdot 0=0\Rightarrow z_1=0$$

(το μονο διανυσμα με μη μηδενικο πρωτο στοιχειο ειναι το $\mathbf{a}'_1$ - γιατι;). Προχωρωντας με παρομοιο τροπο για $j=2,3,...,J$ βλεπουμε οτι $z_1=z_2=...=z_J=0$, δηλ. οτι το συνολο $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,...,\mathbf{a}_M\}$ ειναι γρ. αν. και αρα ειναι μια βαση του $span\left(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,...,\mathbf{a}_M\right)$, οποτε εχουμε αποδειξει το ζητουμενο.

**7.2.35.** Εστω οτι το συνολο $\{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_M\}$ ειναι γραμμικα εξαρτημενο και δεν περιεχει το μηδενικο διανυσμα. Τοτε ενα εκ των $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_M$ ειναι γραμμικος συνδυασμος των *προηγουμενων* διανυσματων.

**Απαντηση**. Υπαρχουν $x_1, ..., x_M$ (οχι ολα μηδενικα) τετοια ωστε

$$x_1\mathbf{a}_1 + .... + x_M\mathbf{a}_M = \mathbf{0}.$$

Εστω $m$ ο μεγαλυτερος ακεραιος τ.ω. $x_m \neq 0$. Δηλ.

$$x_1\mathbf{a}_1 + .... + x_m\mathbf{a}_m + 0\mathbf{a}_{m+1} + ...0\mathbf{a}_M = \mathbf{0} \Rightarrow x_1\mathbf{a}_1 + .... + x_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0}.$$

Ειναι $m > 1$ διοτι αλλιως θα ειχαμε $x_1\mathbf{a}_1 = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$ που αντιβαινει στην αρχικη υποθεση. Οποτε μπορουμε να γραψουμε

$$\mathbf{a}_m = -\frac{x_1}{x_m}\mathbf{a}_1 - ... - \frac{x_{m-1}}{x_m}\mathbf{a}_{m-1}$$

που αποδεικνυει το ζητουμενο.

**7.2.36.** Εστω οτι το $span\,(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_M) = U$, οπου $U$ διανυσματικος χωρος. Αποδειξτε οτι για καθε $\mathbf{b} \in \mathbf{U}$ το συνολο $\{\mathbf{b}, \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_M\}$ ειναι γρ. εξ. και $span\,(\mathbf{b}, \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_M) = U$.

**Απαντηση**. Προφανως

$$U = span\,(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_M) \subseteq span\,(\mathbf{b}, \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_M) \subseteq U$$

οποτε $span\,(\mathbf{b}, \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_M) = U$. Εξαλλου, αφου $\mathbf{b} \in U = span\,(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_M)$, το συνολο $\{\mathbf{b}, \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_M\}$ ειναι γραμμικα εξαρτημενο.

**7.2.37.** Εστω οτι το $span\,(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_M) = U$, οπου $U$ διανυσματικος χωρος. Αποδειξτε: αν το $\mathbf{a}_m$ ειναι γρ. συνδ. των $\{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_{m-1}, \mathbf{a}_{m+1}, ..., \mathbf{a}_M\}$ τοτε $span\,(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_{m-1}, \mathbf{a}_{m+1}, ..., \mathbf{a}_M) = U$.

**Απαντηση**. Θα ειναι

$$\mathbf{a}_m = x_1\mathbf{a}_1 + ... + x_{m-1}\mathbf{a}_{m-1} + x_{m+1}\mathbf{a}_{m+1} + ... + x_M\mathbf{a}_M.$$

Εστω τυχον $\mathbf{b} \in U$. Θα ειναι

$$\begin{aligned}
\mathbf{b} &= y_1\mathbf{a}_1 + ... + y_{m-1}\mathbf{a}_{m-1} + y_m\mathbf{a}_m + y_{m+1}\mathbf{a}_{m+1} + ... + y_M\mathbf{a}_M \\
&= y_1\mathbf{a}_1 + ... + y_{m-1}\mathbf{a}_{m-1} + y_m\left(x_1\mathbf{a}_1 + ... + x_{m-1}\mathbf{a}_{m-1} + x_{m+1}\mathbf{a}_{m+1} + ... + x_M\mathbf{a}_M\right) + y_{m+1}\mathbf{a}_{m+1} + ... + y_M\mathbf{a}_M \\
&= \left(y_1 + y_m x_1\right)\mathbf{a}_1 + ... + \left(y_{m-1} + y_m x_{m-1}\right)\mathbf{a}_{m-1} + \left(y_{m+1} + y_m x_{m+1}\right)\mathbf{a}_{m+1} + ... + \left(y_M + y_m x_M\right)\mathbf{a}_M
\end{aligned}$$

οποτε $\mathbf{b} \in span\,(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_{m-1}, \mathbf{a}_{m+1}, ..., \mathbf{a}_M)$.

**7.2.38.** Δινεται ο διανυσματικος χωρος $U$ και τα συνολα $\{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_K\}$, $\{\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_M\}$ οπου

1. $span\,\{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_K\} = U$.
2. Το $\{\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_M\}$ ειναι γραμμικα ανεξαρτητο.

Δειξτε οτι $M \leq K$ και υπαρχουν $i_1, ..., i_{K-M}$ τετοια ωστε

$$span\left\{\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_M, \mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, ..., , \mathbf{a}_{i_{K-M}}\right\} = U.$$

**Απαντηση**. Μπορουμε να υποθεσουμε οτι κανενα εκ των $\mathbf{a}_k$ δεν ειναι $\mathbf{0}$ (γιατι;). Αφου $span\{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_K\} = U$, το $\mathbf{b}$ ειναι γραμμικος συνδυασνιος των $\{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_K\}$ και τοτε, απο την 7.2.37, εχουμε οτι

$$span\{\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_K\} = U$$

και το $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_K\}$ ειναι γραμμικα εξαρτημενο. Οποτε, απο την 7.2.25, καποιο $\mathbf{a}_j$ ειναι γραμμικος συνδυασμος των $\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_{j-1}$ και, απο την 7.2.37, μπορουμε να απαλειψουμε το $\mathbf{a}_j$ και να εχουμε

$$span\{\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_{j+1}, ..., \mathbf{a}_K\} = U.$$

Με ομοιο τροπο μπορουμε να προσθεσουμε το $\mathbf{b}_2$, ν αφαιρεσουμε καποιο $\mathbf{a}_k$ και να εχουμε

$$span\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_{j+1}, ..., \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k+1}, ..., \mathbf{a}_K\} = U.$$

Συνεχιζοντας ετσι αφαιρουμε διαδοχικα $M$ απο τα διανυσματα $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_K$ και τα αντικαθιστουμε με τα $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_M$. Τελικα εχουμε οτι

$$span\left\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_M, \mathbf{a}_{i_1}, ..., \mathbf{a}_{i_{K-M}}\right\} = U. \tag{7.11}$$

οπου τα $\mathbf{a}_{i_1}, ..., \mathbf{a}_{i_{K-M}}$ ειναι τα $\mathbf{a}$ διανυσματα που ¨περισσεψαν¨. Αυτο βεβαια προυποθετει οτι $K \geq M$ (αν $K = M$ τοτε *ολα* τα $\mathbf{a}$ διανυσματα αντικαθιστανται απο $\mathbf{b}$ στο τελικο βημα). Δεν ειναι δυνατον να εχουμε $K < M$ γιατι, σε αυτη την περιπτωση, μετα $K$ βηματα θα ειχαμε οτι $span\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_K\} = U$ και τοτε απο το $\mathbf{b}_{K+1} \in U$ θα ειχαμε γραμμικη εξαρτηση του $\mathbf{b}_{K+1}$ απο τα $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_K$ που δεν συμβιβαζεται μ ετην αρχικη υποθεση οτι το $\{\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_M\}$ ειναι γραμμικα ανεξαρτητο.

**7.2.39.** Δινεται ο διανυσματικος χωρος $U$. Αποδειξτε οτι αν $\dim(U) = K$, καθε συνολο $\{\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_{K+1}\}$ ειναι γραμμικα εξαρτημενο.

**Απαντηση**. Αυτο προκυπτει απο την 7.2.29. Διοτι $\dim(U) = K$ σημαινει οτι υπαρχει συνολο $\{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_K\}$ που ειναι βαση του $U$ και τοτε, αν το $\{\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_{K+1}\}$ ηταν γραμμικα ανεξαρτητο θα ειχαμε $K + 1 = K$, το οποιο φυσικα ειναι ατοπο.

**7.2.40.** Εστω οτι ο διανυσματικος χωρος $U$ εχει διασταση $M$. Δειξτε οτι καθε γραμμικα ανεξαρτητο συνολο $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_M\}$ ειναι μια βαση του $V$.

**Απαντηση**. Αυτο προκυπτει απο την 7.2.38. Διοτι ξεκινωντας με μια τυχουσα βαση $\{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_M\}$ και εφαρμοζοντας την διαδικασια αντικαταστασης των $\mathbf{a}$ απο τα $\mathbf{b}$ καταληγουμε στο οτι

$$span(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_M) = U$$

(συγκρινε με την (7.11) )και, αφου το $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_M\}$ ειναι και γραμμικα ανεξαρτητο, ειναι μια βαση του $U$.

**7.2.41.** Δινεται οι διανυσματικος χωρος $U, V$ με $U \subseteq V$. Αποδειξτε οτι $\dim(U) \leq \dim(V)$ και, αν $\dim(U) \leq \dim(V)$ τοτε $U = V$.

**Απαντηση**. Εστω $K = \dim(V)$. Εστω επισης $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_M\}$ μια τυχουσα βαση του $U$· αφου ειναι βαση, ειναι και γραμμικα ανεξαρτητο συνολο· αλλα δεν μπορει να υπαρχει μεσα στο $V$ γραμμικα ανεξαρτητο συνολο με περισσοτερα απο $K$ στοιχεια. Αρα $\dim(U) = M \leq K = \dim(V)$. Αν τωρα $\dim(U) = M = K$, τοτε το $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_M\}$ ειναι μια βαση του $V$. Αρα

$$U = span(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_M) = V.$$

**7.2.42.** Δινονται διανυσματικοι χωροι $U \subseteq \mathbb{R}^N$, $V \subseteq \mathbb{R}^N$. Δειξτε οτι $W = U \cap V$ ειναι διανυσματικος υποχωρος των $U, V, \mathbb{R}^N$.

**Απαντηση**. Εστω τυχοντα $a, b \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U \cap V$. Τοτε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$ και $a\mathbf{x} + b\mathbf{y} \in U$. Ομοια $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ και $a\mathbf{x} + b\mathbf{y} \in V$. Οποτε $a\mathbf{x} + b\mathbf{y} \in U \cap V$ και ο $U \cap V$ ειναι διανυσματικος χωρος, ο οποιος προφανως ειναι και υπουσνολο των $U, V$ και $\mathbb{R}^N$.

**7.2.43.** Δινονται μια οικογενεια διανυσματικων χωρων $\{U_t : t \in T\}$ οπου $T$ ειναι ενα τυχον (πεπερασμενο η απειρο) *συνολο-δεικτης* και για καθε $t \in T$ εχουμε $U_t \subseteq \mathbb{R}^N$. Δειξτε οτι $W = \cap_{t \in T} U_t$ ειναι διανυσματικος υποχωρος του $\mathbb{R}^N$.

**Απαντηση**. Η αποδειξη ειναι ιδια με αυτη του προηγουμενου προβληματος, ακομη και αν το $T$ ειναι απειρο συνολο.

## 7.3 Αλυτα Προβληματα

**7.3.1.** Δινονται διανυσματα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_N \in S \subseteq \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$. Δειξτε οτι αυτα ειναι γραμμικα εξαρτημενα ανν ειναι συνεπιπεδα.

**7.3.2.** Δειξτε οτι το υποσυνολο $U$ του $\mathbb{R}^3$ που οριζεται απο την σχεση

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} x & x & x \end{bmatrix}^T : x \in \mathbb{R} \right\}$$

ειναι ενας διανυσματικος υποχωρος του $\mathbb{R}^3$.

**7.3.3.** Δειξτε οτι το υποσυνολο $T$ του $\mathbb{R}^4$ που οριζεται απο την σχεση

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 & 2x & x \end{bmatrix}^T : x \in \mathbb{R} \right\}$$

ειναι ενας ενας διανυσματικος υποχωρος του $\mathbb{R}^4$.

**7.3.4.** Δειξτε οτι το υποσυνολο $U$ του $\mathbb{R}^3$ που οριζεται απο την σχεση

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} : x_1, x_2, x_3 \in R, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1 \right\}$$

*δεν* ειναι ενας διανυσματικος υποχωρος του $\mathbb{R}^3$. Δωστε μια γεωμετρικη ερμηνεια του συνολου $U$ και εξηγειστε γεωμετρικα γιατι δεν ειναι ενας διανυσματικος υποχωρος.

**7.3.5.** Δειξτε οτι το υποσυνολο $U$ του $\mathbb{R}^3$ που οριζεται απο την σχεση

$$T = \left\{ \left[ \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \right] : x_1, x_2, x_3 \in R, \quad |x_1| + |x_2| + |x_3| \leq 1 \right\}$$

*δεν* ειναι ενας διανυσματικος υποχωρος του $\mathbb{R}^3$. Δωστε μια γεωμετρικη ερμηνεια του συνολου $U$ και εξηγειστε γεωμετρικα γιατι δεν ειναι ενας διανυσματικος υποχωρος.

**7.3.6.** Ειναι τα παρακατω συνολα διανυσματων γραμμικα εξαρτημενα η ανεξαρτητα;

1. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. **Απ**. Γρ. αν.

2. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$. **Α**π. Γρ. εξ.

3. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$ **Απ**. Γρ. αν.

4. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$ **Απ**. Γρ. αν.

**7.3.7.** Εστω οτι το συνολο $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ ειναι γραμμικα ανεξαρτητο. Δειξτε οτι το συνολο $\{\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{b}+\mathbf{c}, \mathbf{c}+\mathbf{a}\}$ ειναι επισης γρ. αν.

**7.3.8.** Ειναι τα $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ βαση του $\mathbb{R}^2$; **Απ**. Ναι.

**7.3.9.** Ειναι τα $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ βαση του $\mathbb{R}^2$; **Απ**. Ναι.

**7.3.10.** Ειναι τα $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ βαση του $\mathbb{R}^3$; **Απ**. Οχι

**7.3.11.** Ειναι τα $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ βαση του $\mathbb{R}^3$; **Απ**. Οχι.

**7.3.12.** Βρειτε την διασταση και μια βαση του

$$span \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

**Απ**. $\dim = 3$, βαση:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

**7.3.13.** Βρειτε την διασταση και μια βαση του

$$span \left( \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} \right).$$

**Απ**. $\dim = 3$, βαση

$$\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}.$$

**7.3.14.** Βρειτε την διασταση και μια βαση του

$$span \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

**Απ**. $\dim = 2$, βαση

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

**7.3.15.** Βρειτε την διασταση και μια βαση του

$$span \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} \right).$$

**Απ**. $\dim = 2$, βαση $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

**7.3.16.** Αποδειξτε οτι ο αλγοριθμος της 7.1.24 δινει μια βαση του $span\left(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_M\right)$.

**7.3.17.** Εστω $V_1$, $V_2$ διανυσματικοι υποχωροι του $\mathbb{R}^N$. Δειξτε οτι $V = V_1 \cap V_2$ ειναι επισης ενας διανυσματικος υποχωρος του $\mathbb{R}^2$.

**7.3.18.** Μπορειτε να γενικευσετε το προηγουμενο προβλημα για $K$ υποχωρους; Για εναν *απειρο* αριθμο υποχωρων;

**7.3.19.** Εστω οτι καθενα απο τα συνολα διανυσματων $U_1$, $U_2$ ειναι ενας διαν. υποχωρος του $\mathbb{R}^N$ και επισης $U_1 \cup U_2$ ειναι διαν. υποχωρος του $\mathbb{R}^N$ .Δειξτε οτι ειτε $U_1 \subseteq U_2$ ειτε $U_2 \subseteq U_1$.

**7.3.20.** Εστω οτι καθενα απο τα συνολα διανυσματων $U_1$, $U_2$, ..., $U_K$ ειναι γραμμικα ανεξαρτητο και επιπλεον ισχυει

$$U_1 \subseteq U_2 \subseteq ... \subseteq U_K.$$

Δειξτε οτι το και το συνολο $U_1 \cup U_2 \cup ... \cup U_K$ ειναι γρ. αν.

**7.3.21.** Εστω διανυσματα $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_M$. Δειξτε οτι

$$span\left(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_M\right) = span\left(span\left(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_M\right)\right).$$

**7.3.22.** Εστω συνολα διανυσματων $U, V$ τ.ω. $U \subseteq V$. Δειξτε οτι

$$span\left(U\right) \subseteq span\left(V\right).$$

# Κεφάλαιο 8

# Διανυσματικοι Χωροι και Συστηματα Γραμμικων Εξισωσεων

Στο παρον κεφαλαιο χρησιμοποιουμε την ¨αντιστροφη¨ διαδικασια απο αυτη του Κεφαλαιου 7, δηλ. την χρηση γεωμετρικων εννοιων για την μελετη συστηματων γραμμικων εξισωσεων.

## 8.1 Θεωρια

**8.1.1.** Ο *βαθμος* του $M \times N$ πινακα $\mathbf{A}$ συμβολιζεται με $rank(\mathbf{A})$ και οριζεται ως εξης

$$rank(\mathbf{A}) = \text{¨ο μεγιστος αριθμος γραμμικα ανεξαρτητων στηλων του } \mathbf{A}\text{¨}.$$

**8.1.2.** Εστω οτι $\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{cccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & ... & \mathbf{a}_N \end{array} \right]$. Τοτε $rank(\mathbf{A}) = \dim\left(span\left\{\mathbf{a}, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_N\right\}\right)$.

**8.1.3.** Ο βαθμος του $\mathbf{A}$ ειναι ισος με την ταξη της μεγαλυτερης μη μηδενικης υποοριζουσας του $\mathbf{A}$.

**8.1.4.** Οι $\mathbf{A}$ και $\mathbf{A}^T$ εχουν ιδιο βαθμο. Ακριβεστερα, για καθε $M \times N$ πινακα $\mathbf{A}$ εχουμε

$$rank(\mathbf{A}) = rank(\mathbf{A}^T) \leq \min(M, N).$$

**8.1.5.** Για καθε $M \times K$ πινακα $\mathbf{A}$ και για καθε $K \times N$ πινακα $\mathbf{B}$ εχουμε εχουμε

$$rank(\mathbf{AB}) \leq \min(rank(\mathbf{A}), rank(\mathbf{B})).$$

**8.1.6.** Ο βαθμος του $\mathbf{A}$ ειναι ισος με των αριθμο των κομβων του ισοδυναμου κλιμακωτου πινακα.

**8.1.7.** Η *εικονα* του $M \times N$ πινακα $\mathbf{A}$ συμβολιζεται με $im(\mathbf{A})$ και οριζεται ως εξης

$$im(\mathbf{A}) = \{\mathbf{y} : \mathbf{y} = \mathbf{Ax}\} \subseteq \mathbb{R}^M.$$

**8.1.8.** Η *εικονα* του $\mathbf{A}$ ειναι διανυσματικος χωρος.

**8.1.9.** Ο βαθμος του $M \times N$ πινακα $\mathbf{A}$ ικανοποιει: $rank(\mathbf{A}) = \dim(im(\mathbf{A}))$.

**8.1.10.** Ο *πυρηνας* του $M \times N$ πινακα $\mathbf{A}$ συμβολιζεται με $\ker(\mathbf{A})$ και οριζεται ως εξης

$$\ker(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \subseteq \mathbb{R}^N.$$

**8.1.11.** Ο *πυρηνας* του $\mathbf{A}$ ειναι διανυσματικος χωρος.

**8.1.12.** Η *μηδενικοτητα* του $\mathbf{A}$ συμβολιζεται με $null\,(\mathbf{A})$ και οριζεται ως

$$null(\mathbf{A}) = \dim(ker(\mathbf{A})).$$

**8.1.13.** Για καθε $M \times N$ πινακα $\mathbf{A}$ εχουμε: $rank(\mathbf{A}) + null(\mathbf{A}) = N$.

**8.1.14.** Τα παρακατω ειναι ισοδυναμα.

1. Το συστημα $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ εχει λυση.
2. Το $\mathbf{b}$ ειναι γραμμικος συνδυασμος των στηλων του $\mathbf{A}$.
3. $rank(\mathbf{A}) = rank([\ \mathbf{A} \quad \mathbf{b}\ ])$.

**8.1.15.** Εστω το $M \times N$ συστημα $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Ισχυουν τα εξης.

1. Το συστημα δεν εχει καμμια λυση. ανν $rank(\mathbf{A}) < rank([\ \mathbf{A} \quad \mathbf{b}\ ])$
2. Το συστημα εχει απειρες λυσεις ανν $rank(\mathbf{A}) = rank([\ \mathbf{A} \quad \mathbf{b}\ ]) < N$.
3. Το συστημα εχει μοναδικη λυση ανν $rank(\mathbf{A}) = rank([\ \mathbf{A} \quad \mathbf{b}\ ]) = N$

**8.1.16.** Εστω $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$. Οι παρακατω συνθηκες ειναι ισοδυναμες.

1. Το συστημα $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ εχει μοναδικη λυση.
2. $rank(\mathbf{A}) = N$.
3. $|\mathbf{A}| \neq 0$.
4. Υπαρχει ο $\mathbf{A}^{-1}$.

## 8.2 Λυμενα Προβληματα

**8.2.1.** Βρειτε τον βαθμο του

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Λυση**. Επειδη $|\mathbf{A}|=-21\neq 0$, το συστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

εχει μοναδικη $x_1=x_2=x_3=0$, δηλ. οι στηλες $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ ειναι γραμμικα ανεξαρτητες Αρα $rank\,(\mathbf{A})=3$.

Εναλλακτικα, μπορουμε να φερουμε τον $\mathbf{A}$ σε κλιμακωτη μορφη:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}\rightarrow \mathbf{A}'=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -21 \end{bmatrix}$$

Βλεπουμε οτι ο $\mathbf{A}'$ εχει τρεις κομβους, αρα $rank\,(\mathbf{A})=3$.

**8.2.2.** Βρειτε τον βαθμο του

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Λυση**. Θεωρειστε το συστημα $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{0}$, δηλ.

$$x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8.1}$$

η και

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{8.2}$$

Αυτο εχει (μη μηδενικες) λυσεις της μορφης

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=a\cdot\begin{bmatrix} -16 \\ \frac{64}{5} \\ 1 \\ -\frac{14}{5} \end{bmatrix}.$$

Αρα οι τεσσερις στηλες του $\mathbf{A}$ δεν ειναι γρ. αν. και $rank\,(\mathbf{A})<4$. Θα μπορουσαμε να προσδιορισουμε τον $rank\,(\mathbf{A})$ συμφωνα με τον ορισμο, δηλ. να εξετασουμε αν ο $\mathbf{A}$ εχει τρεις, δυο κτλ. γρ. αν. στηλες. Η θα μπορουσαμε να ψαξουμε για τον μεγαλυτερο υποπινακα του $A$ με μη μηδενικη οριζουσα. Π.χ. ο υποπινακας $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ εχει οριζουσα $-14$, αρα $rank\,(\mathbf{A}) = 3$. Πιο απλο ειναι να φερουμε τον $\mathbf{A}$ σε κλιμακωτη μορφη:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 1 \\ 0 & 0 & -14 & -5 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρουμε οτι ο αριθμος των κομβων ειναι 3, οποτε και $rank\,(\mathbf{A}) = 3$.

**8.2.3.** Εστω οτι $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & ... & \mathbf{a}_N \end{bmatrix}$. Αποδειξτε οτι $rank(\mathbf{A}) = \dim\left(im\,(\mathbf{A})\right)$.

**Απαντηση**. Ξερουμε οτι το $im\,(A) = span\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_N)$ ειναι διανυσματικος χωρος. Εστω οτι εχει διασταση $\dim\left(span\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_N)\right) = K$. Τοτε $K$ απο τις $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_N$ θα ειναι μια βαση του $span\,(\mathbf{a}, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_N)$ και αρα θα ειναι (εκ του ορισμου της βασης) γραμμικα ανεξαρτητες. Δεν μπορει να υπαρχουν περισσοτερες (εστω $K+1$) γραμμικα ανεξαρτητες στηλες διοτι τοτε θα ηταν και αυτες μια βαση, αλλα ολες οι βασεις του $span\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_N)$ πρεπει να εχουν ισο αριθμο στοιχειων. Αρα ο μεγιστος αριθμος γραμμικα ανεξαρτητων στηλων του $\mathbf{A}$ (δηλ. το $rank\,(\mathbf{A})$ ) ειναι $K$.

**8.2.4.** Αποδειξτε οτι, για καθε $M \times N$ πινακα $\mathbf{A}$ εχουμε

$$rank(\mathbf{A}) = rank(\mathbf{A}^T) \leq \min(M, N).$$

**Απαντηση**. Εστω

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2N} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{M1} & a_{M2} & ... & a_{MN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ ... \\ \mathbf{r}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & ... & \mathbf{a}_N \end{bmatrix}.$$

Εστω οτι $\dim\left(span\,(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_M)\right) = J$ και οτι τα $\mathbf{r}_{m_1}, \mathbf{r}_{m_2}, ..., \mathbf{r}_{m_J}$ ειναι μια βαση του $span\,(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_M)$. Τοτε καθε γραμμη γραφεται ως γραμμικος συνδυασμος των $\mathbf{r}_{m_1}, \mathbf{r}_{m_2}, ..., \mathbf{r}_{m_J}$ :

$$[a_{m1} \quad a_{m2} \quad ... \quad a_{mN}] = \mathbf{r}_m = k_{m1}\mathbf{r}_{i_1} + k_{m2}\mathbf{r}_{i_2} + ... + k_{mJ}\mathbf{r}_{i_J}$$

και, εξισωνοντας την $n$ συνιστωσα της καθε γραμμης παιρνουμε (για $n = 1, 2, ..., N$)

$$\begin{aligned} a_{1n} &= k_{11}a_{i_1 n} + k_{12}a_{i_2 n} + ... + k_{1J}a_{i_J n} \\ a_{2n} &= k_{21}a_{i_1 n} + k_{22}a_{i_2 n} + ... + k_{2J}a_{i_J n} \\ &... \\ a_{Mn} &= k_{M1}a_{i_1 n} + k_{M2}a_{i_2 n} + ... + k_{MJ}a_{i_J n} \end{aligned}$$

Δηλ. (για $n = 1, 2, ..., N$)

$$\mathbf{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{Mn} \end{bmatrix} = a_{i_1 n} \cdot \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ ... \\ k_{M1} \end{bmatrix} + a_{i_2 n} \cdot \begin{bmatrix} k_{12} \\ k_{22} \\ ... \\ k_{M2} \end{bmatrix} + ... + a_{iJ} \cdot \begin{bmatrix} k_{1J} \\ k_{2J} \\ ... \\ k_{MJ} \end{bmatrix}.$$

Με αλλα λογια, καθε στηλη $\mathbf{a}_n$ του $\mathbf{A}$ ειναι γραμμικος συνδυασμος των $J$ διανυσματων

$$\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ ... \\ k_{M1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} k_{12} \\ k_{22} \\ ... \\ k_{M2} \end{bmatrix}, \quad ..., \quad \mathbf{k}_J = \begin{bmatrix} k_{1J} \\ k_{2J} \\ ... \\ k_{MJ} \end{bmatrix},$$

δηλ. $\dim(span(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_N)) \leq J = \dim(span(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_M))$. Αφου οι γραμμες του $\mathbf{A}$ ειναι οι στηλες του $\mathbf{A}^T$, συμπεραινουμε οτι

$$rank(\mathbf{A}) \leq rank\left(\mathbf{A}^T\right) \tag{8.3}$$

Εφαρμοζοντας τον παραπανω συλλογισμο στον $\mathbf{A}^T$ παιρνουμε

$$rank\left(\mathbf{A}^T\right) \leq rank(\mathbf{A}) \tag{8.4}$$

και με συνδυασμο των (8.3) και (8.4) εχουμε αποδειξει

$$rank\left(\mathbf{A}^T\right) = rank(\mathbf{A}) \tag{8.5}$$

Επισης, αφου ο $\mathbf{A}$ εχει $M$ γραμμες

$$rank(\mathbf{A}) \leq M \tag{8.6}$$

και αφου ο $\mathbf{A}^T$ εχει $N$ γραμμες

$$rank(\mathbf{A}) \leq N \tag{8.7}$$

οποτε, με συνδυασμο των (8.5), (8.6), (8.7) παιρνουμε το ζητουμενο.

**8.2.5.** Δινεται πινακας $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & ... & \mathbf{a}_N \end{bmatrix}$. Εστω τυχον πινακας $\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \mathbf{a}'_1 & \mathbf{a}'_2 & ... & \mathbf{a}'_N \end{bmatrix}$ ο οποιος προκυπτει απο εφαρμογη στοιχειωδων γραμμοπραξεων στον $\mathbf{A}$. Αποδειξτε οτι

$$span(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_N) = span(\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, ..., \mathbf{a}'_N)$$

**Απαντηση**. Αφου οι $\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, ..., \mathbf{a}'_N$ προκυπτουν απο γραμμικους συνδυασμους των $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_N$, εχουμε

$$span(\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, ..., \mathbf{a}'_N) \subseteq span(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_N). \tag{8.8}$$

Ομως και οι $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_N$ προκυπτουν απο γραμμικους συνδυασμους των $\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, ..., \mathbf{a}'_N$ (αρκει να εφαρμοσουμε στις $\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, ..., \mathbf{a}'_N$ τις αντιστροφες γραμμοπραξεις αυτων που εφαρμοσαμε στις $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_N$ ) αρα εχουμε και

$$span(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_N) \subseteq span(\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, ..., \mathbf{a}'_N). \tag{8.9}$$

Απο τις (8.8) και (8.9) προκυπτει το ζητουμενο.

**8.2.6.** Αποδειξτε οτι ο βαθμος του $\mathbf{A}$ ειναι ισος με των αριθμο των κομβων του ισοδυναμου κλιμακωτου πινακα.

**Απαντηση**. Αφου $rank\left(\mathbf{A}\right) = rank\left(\mathbf{A}^T\right)$, αρκει να αποδειξουμε οτι ο βαθμος του $\mathbf{A}^T$ ειναι ισος με των αριθμο των κομβων του κλιμακωτου πινακα $\mathbf{A}'$ ισοδυναμου του $\mathbf{A}$. Εστω λοιπον $\mathbf{r}_1$, ..., $\mathbf{r}_M$ οι γραμμες του $\mathbf{A}$ (δηλ. οι στηλες του $\mathbf{A}^T$). Ξερουμε οτι μια βαση του $span\left(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_M\right)$ ειναι οι μη μηδενικες γραμμες $\mathbf{r}'_1, ..., \mathbf{r}'_K$ του ισοδυναμου κλιμακωτου $\mathbf{A}'$ και οτι, σε αυτη την περιπτωση,

$$K = \dim\left(span\left(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_M\right)\right) = rank\left(\mathbf{A}^T\right) = rank\left(\mathbf{A}\right).$$

Αλλα οι μη μηδενικες γραμμες του $\mathbf{A}'$ ειναι ακριβες αυτες που εχουν κομβους, δηλ. $K$ ειναι ο αριθμος των κομβων του $\mathbf{A}'$.

**8.2.7.** Αποδειξτε οτι για καθε $M \times K$ πινακα $\mathbf{A}$ και για καθε $K \times N$ πινακα $\mathbf{B}$ εχουμε

$$rank(\mathbf{AB}) \leq \min(rank(\mathbf{A}), rank(\mathbf{B})).$$

**Απαντηση**. Γραφουμε τους πινακες $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ ως προς τις γραμμες αυτων:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ ... \\ \mathbf{a}_M \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ ... \\ \mathbf{b}_M \end{bmatrix}.$$

Τωρα παιρνουμε τυχουσα γραμμη $\mathbf{a}_m$ και εχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_m\mathbf{B} &= \left[\begin{array}{cccc} a_{m1}b_{11} + ...a_{mK}b_{K1} & a_{m1}b_{12} + ...a_{mK}b_{K2} & ... & a_{m1}b_{1N} + ...a_{mK}b_{KN} \end{array}\right] \\ &= \sum_{k=1}^{K} a_{mk} \cdot \left[\begin{array}{cccc} b_{k1} & b_{k2} & ... & b_{kN} \end{array}\right] = \sum_{k=1}^{K} a_{mk} \cdot \mathbf{b}_k \end{aligned}$$

δηλ. καθε γραμμη $\mathbf{a}_m\mathbf{B}$ ειναι γραμικος συνδυασμος των γραμμων $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_K$. Τωρα

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1\mathbf{B} \\ \mathbf{a}_2\mathbf{B} \\ ... \\ \mathbf{a}_M\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

αρα το συνολο των γραμμων του $\mathbf{AB}$ ειναι υποσυνολο του $span\left(\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_K\right)$. Αρα

$$rank\left(\mathbf{AB}\right) \leq rank\left(\mathbf{B}^T\right) = rank\left(\mathbf{B}\right). \tag{8.10}$$

Επαναλαμβανοντας τον συλλογισμο στο γινομενο $\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ παιρνουμε

$$rank\left(\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T\right) \leq rank\left(\mathbf{A}^T\right) = rank\left(\mathbf{A}\right). \tag{8.11}$$

Απο τις (8.10)-(8.11) προκυπτει το ζητουμενο.

**8.2.8.** Ποιος ειναι ο πυρηνας του

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}?$$

**Απαντηση**. Ο πυρηνας του $\mathbf{A}$ ειναι τα $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$ τετοια ωστε

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Για την παραπανω εξισωση εχουμε

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow \text{η μοναδικη λυση ειναι } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Οποτε $\ker(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$.

**8.2.9.** Ποιος ειναι ο πυρηνας του

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}?$$

**Απαντηση**. Ο πυρηνας του $\mathbf{A}$ ειναι τα $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$ τετοια ωστε

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Λυνοντας το συστημα παιρνουμε

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \kappa \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

Οποτε

$$\ker(\mathbf{A}) = \left\{ \mathbf{x} : \mathbf{x} = \kappa \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -\frac{5}{2} \end{bmatrix}, \kappa \in \mathbb{R} \right\}.$$

**8.2.10.** Αποδειξτε οτι ο *πυρηνας* του $\mathbf{A}$ ειναι διανυσματικος χωρος.

**Απαντηση**. Πραγματι, εστω οτι $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \ker(\mathbf{A})$. Τοτε για καθε $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ ισχυει

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{0} = \mathbf{A}\mathbf{x}_1 \\ \mathbf{0} = \mathbf{A}\mathbf{x}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{0} = k_1\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \mathbf{A} \cdot (k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2).$$

Αρα για καθε $k_1, k_2 \in R$ εχουμε $k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 \in \ker(\mathbf{A})$.

**8.2.11.** Αποδειξτε οτι για καθε $M \times N$ πινακα $\mathbf{A}$ εχουμε: $rank(\mathbf{A}) + null(\mathbf{A}) = N$.

**Απαντηση**. Εστω οτι $J = rank\,(\mathbf{A})$ και $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_J$ ειναι μια βαση του $span\,(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_N)$. Αφου $\mathbf{u}_j \in span\,(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_N)$ το συστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{u}_j$ θα εχει μια λυση, εστω $\mathbf{v}_j$. Δηλ.

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1, \quad ..., \mathbf{A}\mathbf{v}_J = \mathbf{u}_J$$

Εστω επισης $K = null\,(\mathbf{A})$ και $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_K$ ειναι μια βαση του $\ker(\mathbf{A})$. Θετουμε

$$B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_J, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_K\}$$

Θα δειξουμε τωρα οτι το $B$ ειναι μια βαση του $\mathbb{R}^N$. Πρεπει να δειξουμε οτι το $span\,(B) = \mathbb{R}^N$ και οτι το $B$ ειναι γραμμικα ανεξαρτητο.

Εστω τυχον $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ και $\mathbf{u} = \mathbf{Av}$. Τοτε $\mathbf{u} \in span\,(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_N)$ αρα

$$\mathbf{u} = \mathbf{Av} = k_1\mathbf{u}_1 + ... + k_J\mathbf{u}_J.$$

Θετουμε $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - k_1\mathbf{v}_1 - ... - k_J\mathbf{v}_J$. Αρα

$$\begin{aligned}
\mathbf{Av}' &= \mathbf{A}\cdot(\mathbf{v} - k_1\mathbf{v}_1 - ... - k_J\mathbf{v}_J) \\
&= \mathbf{A}\cdot\mathbf{v} - k_1\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}_1 - ... - k_J\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}_J \\
&= \mathbf{A}\cdot\mathbf{v} - k_1\mathbf{u}_1 - ... - k_J\mathbf{A}\cdot\mathbf{u}_J = \mathbf{Av} - \mathbf{Av} = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Αρα $\mathbf{v}' \in \ker(\mathbf{A})$ και μπορει να γραφτει ως γραμμικος συνδυασμος των $\mathbf{w}_k$: $\mathbf{v}' = c_1\mathbf{w}_1 + ... + c_K\mathbf{w}_K$ οποτε

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + k_1\mathbf{v}_1 + ... + k_J\mathbf{v}_J = c_1\mathbf{w}_1 + ... + c_K\mathbf{w}_K + k_1\mathbf{v}_1 + ... + k_J\mathbf{v}_J \in span\,(B)\,.$$

Εστω

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + ... + a_J\mathbf{v}_J + b_1\mathbf{w}_1 + ... + b_K\mathbf{w}_K = \mathbf{0}. \tag{8.12}$$

Τοτε για καθε $k$ εχουμε $\mathbf{Aw}_k = \mathbf{0}$ οποτε

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= \mathbf{A}\cdot(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + ... + a_J\mathbf{v}_J + b_1\mathbf{w}_1 + ... + b_K\mathbf{w}_K) \\
&= a_1\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}_2 + ... + a_J\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}_J + b_1\mathbf{A}\cdot\mathbf{w}_1 + ... + b_K\mathbf{A}\cdot\mathbf{w}_K \\
&= a_1\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}_2 + ... + a_J\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}_J \\
&= a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + ... + a_J\mathbf{u}_J.
\end{aligned}$$

Αφου τα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_J$ ειναι γραμμικα ανεξαρτητα, εχουμε $a_1 = ... = a_J = 0$. Οποτε, αντικαθιστωντας στην (8.12) παιρνουμε

$$b_1\mathbf{w}_1 + ... + b_K\mathbf{w}_K = \mathbf{0}. \tag{8.13}$$

Αλλα και τα $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_K$ ειναι γραμμικα ανεξαρτητα, οποτε και $b_1 = ... = b_K = 0$. Αρα το $B$ ειναι γραμμικα ανεξαρτητο.ρ

Αρα το $B$ ειναι μια βαση του $\mathbb{R}^N$ και αρα περιεχει ακριβως $N$ στοιχεια. Δηλαδη $J + K = N$. Αλλα $J = rank(\mathbf{A})$, $K = null\,(\mathbf{A})$ αρα

$$rank(\mathbf{A}) + null(\mathbf{A}) = N.$$

**8.2.12.** Ποιος ειναι ο πυρηνας, η εικονα, η μηδενικοτητα και ο βαθμος του $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$;

**Απαντηση**. Θεωρειστε την συναρτηση $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. Ο πυρηνας του $\mathbf{A}$ ειναι τα $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ τετοια ωστε

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Λυνοντας την παραπανω εξισωση βρισκουμε οτι εχει λυσεις της μορφης

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Οποτε

$$\ker(\mathbf{A}) = \left\{ \mathbf{x} = a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Η εινονα ειναι απλα

$$im(\mathbf{A}) = \left\{ \mathbf{x} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Παρατηρουμε οτι η μηδενικοτητα ειναι $null(\mathbf{A}) = \dim(\ker(\mathbf{A})) = 1$. Οποτε $rank(\mathbf{A}) = N - null(\mathbf{A}) = 2 - 1 = 1$.

**8.2.13.** Βρειτε τον βαθμο του

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -8 \\ 1 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

και επιβεβαιωστε οτι $rank(\mathbf{A}) + null(\mathbf{A}) = 3$.

**Απαντηση**. Ο $\mathbf{A}$ εχει κλιμακωτη μορφη

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και αρα ο βαθμος του ειναι 3. Για την μηδενικοτητα, πρεπει να βρουμε τις λυσεις του

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Αυτες εχουν την μορφη

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

οποτε η μηδενικοτητα του $\mathbf{A}$ ειναι 0. Εχουμε $rank(\mathbf{A}) + null(\mathbf{A}) = 3 + 0 = 3$.

**8.2.14.** Βρειτε τον βαθμο του

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -8 \\ 1 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

και επιβεβαιωστε οτι $rank(\mathbf{A}) + null(\mathbf{A}) = 3$.

**Απαντηση**. Ο $\mathbf{A}$ εχει κλιμακωτη μορφη

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και αρα ο βαθμος του ειναι 3. Για την μηδενικοτητα, πρεπει να βρουμε τις λυσεις του

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Αυτες εχουν την μορφη

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

οποτε η μηδενικοτητα του $\mathbf{A}$ ειναι 0. Εχουμε $rank(\mathbf{A}) + null(\mathbf{A}) = 3 + 0 = 3$.

**8.2.15.** Βρειτε τον βαθμο του

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

και επιβεβαιωστε οτι $rank(\mathbf{A}) + null(\mathbf{A}) = 5$.

**Λυση**. Ο $\mathbf{A}$ εχει κλιμακωτη μορφη

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

και αρα ο βαθμος του ειναι 3. Για την μηδενικοτητα, πρεπει να βρουμε τις λυσεις του

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Αυτες εχουν την μορφη

$$t_1 \cdot \begin{bmatrix} -24 \\ 8 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + t_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

οποτε η μηδενικοτητα του $\mathbf{A}$ ειναι 2. Εχουμε $rank(\mathbf{A}) + null(\mathbf{A}) = 3 + 2 = 5$.

**8.2.16.** Βρειτε τον βαθμο του

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{rrrrrr} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -8 & 8 & 1 \end{array}\right]$$

και επιβεβαιωστε οτι $rank(\mathbf{A}) + null(\mathbf{A}) = 6$.

**Λυση**. Ο $\mathbf{A}$ εχει κλιμακωτη μορφη

$$\left[\begin{array}{rrrrrr} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

και αρα ο βαθμος του ειναι 3. Για την μηδενικοτητα, πρεπει να βρουμε τις λυσεις του

$$\left[\begin{array}{rrrrrr} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -8 & 8 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right].$$

Αυτες εχουν την μορφη

$$t_1 \cdot \left[\begin{array}{r} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right] + t_2 \cdot \left[\begin{array}{r} -24 \\ 8 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right] + t_3 \cdot \left[\begin{array}{r} -19 \\ 7 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right],$$

οποτε η μηδενικοτητα του $\mathbf{A}$ ειναι 3. Εχουμε $rank(\mathbf{A}) + null(\mathbf{A}) = 3 + 3 = 6$.

**8.2.17.** Αφου πρωτα υπολογισετε τον αριθμο των λυσεων του συστηματος

$$\left[\begin{array}{rrr} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & -7 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 8 \end{array}\right]$$

συγκρινοντας τον βαθμο των $\mathbf{A}$ και $[\mathbf{A} \quad \mathbf{b}]$, κατοπιν επαληθευστε τα αποτελεσματα που βρηκατε λυνοντας το συστημα.

**Απαντηση**. Ο επαυξημενος ειναι

$$\left[\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 8 \end{array}\right]$$

με κλιμακωτη μορφη

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & -20 & 3 \end{bmatrix}$$

Εχουμε $rank(\mathbf{A}) = rank\left([\mathbf{A} \quad \mathbf{b}]\right) = 3 = N$. Αρα το συστημα εχει *μοναδικη* λυση. Πραγματι, λυνοντας βλεπουμε οτι η λυση ειναι

$$\begin{bmatrix} -\frac{117}{20} \\ \frac{16}{5} \\ -\frac{3}{20} \end{bmatrix}.$$

**8.2.18.** Αφου πρωτα υπολογισετε τον αριθμο των λυσεων του συστηματος

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 24 \\ 22 \end{bmatrix}$$

συγκρινοντας τον βαθμο των $\mathbf{A}$ και $[\mathbf{A} \quad \mathbf{b}]$, κατοπιν επαληθευστε τα αποτελεσματα που βρηκατε λυνοντας το συστημα.

**Απαντηση**. Ο επαυξημενος πινακας ειναι

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 6 & 4 & 0 & 24 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 1 & 22 \end{bmatrix}$$

ο οποιος εχει κλιμακωτη μορφη

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

Εχουμε $rank(\mathbf{A}) = rank\left([\mathbf{A} \quad \mathbf{b}]\right) = 3 < 5 = N$. Αρα το συστημα εχει *διπλη απειρια* λυσεων. Πραγματι, λυνοντας βλεπουμε οτι οι λυσεις εχουν την μορφη

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} + a \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**8.2.19.** Αφου πρωτα υπολογισετε τον αριθμο των λυσεων του συστηματος

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & -4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

συγκρινοντας τον βαθμο των $\mathbf{A}$ και $[\mathbf{A} \quad \mathbf{b}]$, κατοπιν επαληθευστε τα αποτελεσματα που βρηκατε λυνοντας το συστημα.

**Απαντηση**. Ο επαυξημενος πινακας ειναι

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 5 & 3 \\ 3 & -4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

ο οποιος εχει κλιμακωτη μορφη

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Εχουμε $rank(\mathbf{A}) = 2 < rank([\mathbf{A} \quad \mathbf{b}]) = 3 = N$. Αρα το συστημα ειναι αδυνατο, πραγμα που διαπιστωνουμε αν προσπαθησουμε να το λυσουμε.

**8.2.20.** Για καθε $M \times N$ πινακα τα παρακατω ειναι ισοδυναμα.

1. Το συστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ εχει λυση.
2. Το $\mathbf{b}$ ειναι γραμμικος συνδυασμος των στηλων του $\mathbf{A}$.
3. $rank(\mathbf{A}) = rank\left(\left[\begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{array}\right]\right)$.

**Απαντηση**. Εστω $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_N \end{array}\right]$. Τοτε, αν υπαρχει $\widehat{\mathbf{x}}$ τετοιο ωστε $\mathbf{A}\widehat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$, θα εχουμε

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\widehat{\mathbf{x}} = \widehat{x}_1\mathbf{a}_1 + \dots + \widehat{x}_N\mathbf{a}_N$$

που δειχνει οτι η ιδιοτητα 1 συνεπαγεται την 2. Επισης, αν το $\mathbf{b}$ ειναι γραμμικος συνδυασμος των στηλων του $\mathbf{A}$, τοτε ο αριθμος των γραμμικα ανεξαρτητων στηλων στους $\mathbf{A}$ και $\left[\begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{array}\right]$ ειναι ιδιος, αρα η ιδιοτητα 2 συνεπαγεται την 3. Τελος, αν $rank(\mathbf{A}) = rank\left(\left[\begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{array}\right]\right)$, το $\mathbf{b}$ πρεπει να ανηκει στο $span\left(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N\right)$ οποτε υπαρχει

$$\widehat{\mathbf{x}} = \left[\begin{array}{cccc} \widehat{x}_1 & \widehat{x}_2 & \dots & \widehat{x}_N \end{array}\right]^T$$

τετοιο ωστε

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\widehat{\mathbf{x}} = \widehat{x}_1\mathbf{a}_1 + \dots + \widehat{x}_N\mathbf{a}_N.$$

Δηλ. η ιδιοτητα 3 συνεπαγεται την 1.

**8.2.21.** Εστω το $M \times N$ συστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Αποδειξτε οτι ισχυουν τα εξης.

1. Το συστημα δεν εχει καμμια λυση ανν $rank(\mathbf{A}) < rank\left(\left[\begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{array}\right]\right)$.
2. Το συστημα εχει απειρες λυσεις ανν $rank(\mathbf{A}) = rank\left(\left[\begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{array}\right]\right) < N$.
3. Το συστημα εχει μοναδικη λυση ανν $rank(\mathbf{A}) = rank([\begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{array}]) = N$.

**Απαντηση**. Απο την προηγουμενη ασκηση ξερουμε οτι το συστημα εχει μια η περισσοτερες λυσεις ανν $rank(\mathbf{A}) = rank\left(\left[\begin{array}{cc}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{array}\right]\right)$ και αρα δεν εχει καμμια λυση ανν $rank(\mathbf{A}) < rank\left(\left[\begin{array}{cc}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{array}\right]\right)$. Αυτο αποδεικνυει την ιδιοτητα 1. Οπως εχουμε δει στο Κεφαλαιο 6, το συστημα απειρες λυσεις ανν περιεχει μια η περισσοτερες ελευθερες μεταβλητες, δηλ. αν ο αριθμος των κομβων, ο οποιος ειναι $rank(\mathbf{A})$, ειναι μικροτερος απο τον αριθμο των μεταβλητων, ο οποιος ειναι $N$. Αυτο αποδεικνυει αμεσα την ιδιοτητα 2 και εμμεσα την 3.

**8.2.22.** Εστω $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$. Αποδειξτε οτι οι παρακατω συνθηκες ειναι ισοδυναμες.

1. $rank(\mathbf{A}) = N$.
2. $|\mathbf{A}| \neq 0$.
3. Υπαρχει ο $\mathbf{A}^{-1}$.
4. Το συστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ εχει μοναδικη λυση.

**Απαντηση**. Αν $rank(\mathbf{A}) = N$, τοτε οι $N$ στηλες του $\mathbf{A}$ ειναι γραμμικα ανεξαρτητες, αρα $|\mathbf{A}| \neq 0$. Αν τωρα $|\mathbf{A}| \neq 0$, εχουμε δει στο Κεφαλαιο 5 οτι υπαρχει ο $\mathbf{A}^{-1}$. Αν υπαρχει ο $\mathbf{A}^{-1}$ θα ειναι μοναδικος και τοτε το συστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ εχει μοναδικη λυση την $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

Τελος, αν $rank(\mathbf{A}) < N$, αυτο σημαινει οτι το συστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ σε κλιμακωτη μορφη γινεται $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ και εχει ελευθερες μεταβλητες· αρα εχει απειρες λυσεις. Αρα, αντιστροφα, αν το $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ εχει μοναδικη λυση, τοτε $rank(\mathbf{A}) = N$.

## 8.3 Αλυτα Προβληματα

**8.3.1.** Να βρεθει ο βαθμος των παρακατω πινακων

1. $\left[\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{array}\right]$ **Απ**. 2.
2. $\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 1 \end{array}\right]$ **Απ**. 2.
3. $\left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{array}\right]$ **Απ**. 1.
4. $\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{array}\right]$ **Απ**. 3.
5. $\left[\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$ **Απ**. 2.

6. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ **Απ.** 2.

7. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ **Απ.** 2.

8. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **Απ.** 3.

9. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 14 & 17 & 3 \end{bmatrix}$ **Απ.** 2.

**8.3.2.** Ποσες λυσεις εχει το καθενα απο τα παρακατω συστηματα; Απαντειστε με πληρη επιλυση και με χρηση της σχεσης μεταξυ των $rank(\mathbf{A})$ και $rank([\ \mathbf{A}\quad \mathbf{b}\ ])$.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -13 \\ -14 \\ -6 \end{bmatrix}$ **Απ.** 1 λυση, $rank(\mathbf{A})$=3 , $rank([\ \mathbf{A}\quad \mathbf{b}\ ])$=3.

2. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ -5 \end{bmatrix}$ **Απ.** $\infty$ λυσεις, $rank(\mathbf{A})$=2 , $rank([\ \mathbf{A}\quad \mathbf{b}\ ])$=2.

3. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix}$ **Απ.** 0 λυσεις, $rank(\mathbf{A})$=2 , $rank([\ \mathbf{A}\quad \mathbf{b}\ ])$=3.

4. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix}$ **Απ.** $\infty$ λυσεις, $rank(\mathbf{A})$=2 , $rank([\ \mathbf{A}\quad \mathbf{b}\ ])$=2.

5. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$ **Απ.** $\infty$ λυσεις, $rank(\mathbf{A})$=2 , $rank([\ \mathbf{A}\quad \mathbf{b}\ ])$=2.

6. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -7 \\ -1 \end{bmatrix}$ **Απ.** $\infty$ λυσεις, $rank(\mathbf{A})$=2 , $rank([\ \mathbf{A}\quad \mathbf{b}\ ])$=2.

7. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -6 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ **Απ.** $\infty$ λυσεις, $rank(\mathbf{A})$=3 , $rank([\ \mathbf{A}\quad \mathbf{b}\ ])$=3.

**8.3.3.** Ελεγξτε οτι $rank(\mathbf{A})+null(\mathbf{A}) = N$ και βρειτε μια βαση του μια βαση του $im(\mathbf{A})$ και μια βαση του $\ker(\mathbf{A})$.

1. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&3\\2&2\end{bmatrix}$.

   **Απ**. $rank\,(\mathbf{A})$=2, $null\,(\mathbf{A})$ =0, βαση του $im(\mathbf{A})$:
$$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

2. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&2&0\\2&4&4&1\end{bmatrix}$.

   **Απ**. $rank\,(\mathbf{A})$=2, $null\,(\mathbf{A})$ =2, βαση του $im(\mathbf{A})$:
$$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\right\}$$

   βαση του $\ker(\mathbf{A})$:
$$\left\{\begin{bmatrix}-2\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\-2\end{bmatrix}\right\}$$

3. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1\\3&0\\2&1\end{bmatrix}$.

   **Απ**. $rank\,(\mathbf{A})$=2, $null\,(\mathbf{A})$ =0, βαση του $im(\mathbf{A})$:
$$\left\{\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

4. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&2&2\end{bmatrix}$.

   **Απ**. $rank\,(\mathbf{A})$=3, $null\,(\mathbf{A})$ =0, βαση του $im(\mathbf{A})$:
$$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

5. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&2\\1&2&2\end{bmatrix}$.

   **Απ**. $rank\,(\mathbf{A})$=2, $null\,(\mathbf{A})$ =1, βαση του $im(\mathbf{A})$:
$$\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}\right\}$$

βαση του $\ker(\mathbf{A})$ :

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

6. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

**Απ.** $rank\,(\mathbf{A})$=3, $null\,(\mathbf{A})$ =2, βαση του $im(\mathbf{A})$ :

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

βαση του $\ker(\mathbf{A})$ :

$$\left\{ \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 0 \\ -\frac{11}{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \\ -\frac{10}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

**8.3.4.** Ο βαθμος του $\mathbf{A}$ ειναι ισος με την ταξη της μεγαλυτερης μη μηδενικης υποοριζουσας του $\mathbf{A}$.

**8.3.5.** Εστω $M \times K$ πινακας $\mathbf{A}$ και $K \times N$ πινακας $\mathbf{B}$. Αποδειξτε οτι

$$rank\,(\mathbf{AB}) \leq \min\left(rank\,(\mathbf{A})\,, rank\,(\mathbf{B})\right).$$

**8.3.6.** Εστω $M \times K$ πινακας $\mathbf{A}$ και $K \times N$ πινακας $\mathbf{B}$. Αποδειξτε οτι

$$rank\,(\mathbf{AB}) = rank\,(\mathbf{A}) \Rightarrow \exists \mathbf{B}^{-1}.$$

Τι σημαινει αυτο για τα $K, N$;

**8.3.7.** Εστω $M \times N$ πινακες $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$. Αποδειξτε οτι

$$|rank\,(\mathbf{A}) - rank\,(\mathbf{B})| \leq rank\,(\mathbf{A} - \mathbf{B})\,.$$

**8.3.8.** Εστω $M \times N$ πινακας $\mathbf{A}$. Αποδειξτε οτι

$$rank\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^T\right) = rank\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right) = rank\,(\mathbf{A})\,.$$

**8.3.9.** Εστω $M \times N$ πινακας $\mathbf{A}$. Αποδειξτε οτι

$$rank\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^T\right) = 0 \Rightarrow rank\,(\mathbf{A}) = 0.$$

**8.3.10.** Εστω $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$ τ.ω. $\mathbf{A} = \mathbf{A}^2$. Αποδειξτε οτι $rank\,(\mathbf{A}) + rank\,(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = N$.

**8.3.11.** Δινονται οι πινακες

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & -37 \end{bmatrix}.$$

Δειξτε οτι $im(\mathbf{A}) = im(\mathbf{B})$.

**8.3.12.** Να βρειτε $3 \times 3$ πινακες $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ τ.ω. (α) $rank(\mathbf{A}+\mathbf{B}) < \min(rank(\mathbf{A}), rank(\mathbf{B}))$, (β) $rank(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = rank(\mathbf{A}) = rank(\mathbf{B})$, (γ) $rank(\mathbf{A}+\mathbf{B}) > (rank(\mathbf{A}), rank(\mathbf{B}))$.

**8.3.13.** Ενα επιπεδο στον $\mathbb{R}^3$ οριζεται απο την εξισωση $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$. Εστω τρια επιπεδα, $E_1$, $E_2$ και $E_3$ τα οποια οριζονται, αντιστοιχα, απο τις εξισωσεις

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Οριζουμε τους πινακες

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = [\mathbf{A} \quad \mathbf{b}].$$

Αποδειξτε οτι αναγκαια και ικανη συνθηκη για να τεμνονται τα τρια επιπεδα σε ενα ακριβως σημειο ειναι

$$rank(\mathbf{A}) = rank(\mathbf{C}) = 3.$$

Εξεταστε αλλες πιθανες σχεσεις μεταξυ των $rank(\mathbf{A})$ και $rank(\mathbf{C})$ και ερμηνευστε τις γεωμετρικα, σε σχεση με την τομη των επιπεδων.

**8.3.14.** Αν ο $\mathbf{a}$ ειναι $N \times 1$ και ο $\mathbf{b}$ ειναι $1 \times N$, δειξτε οτι $rank(\mathbf{ab}) = 1$.

# Κεφάλαιο 9

# Ορθογωνιοτητα Διανυσματων

Η ορθογωνιοτητα ειναι χρησιμη σε πολλες εφαρμογες. Ειναι μια εννοια κατα βαση γεωμετρικη, αλλα στο παρον κεφαλαιο θα την μελετησουμε κυριως αλγεβρικα. Το βασικο εργαλειο για την μελετη της ορθογωνιοτητας ειναι το *εσωτερικο γινομενο* δυο διανυσματων.

## 9.1 Θεωρια

**9.1.1.** Για καθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$, το *εσωτερικο γινομενο* των $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ γραφεται ως $\mathbf{x} \circ \mathbf{y}$ και οριζεται ως εξης

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_N y_N. \tag{9.1}$$

Αν θεωρησουμε τα $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ως $N \times 1$ πινακες (στηλες), τοτε ισοδυναμα με την (9.1) εχουμε

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y},$$

και αν θεωρησουμε τα $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ως $1 \times N$ πινακες (γραμμες), τοτε ισοδυναμα με την (9.1) εχουμε

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}^T.$$

**9.1.2.** Για καθε $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^N$ και $a, b \in \mathbb{R}$ εχουμε

1. $\mathbf{x} \circ \mathbf{x} \geq 0$.
2. $\mathbf{x} \circ \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
3. $\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = \mathbf{y} \circ \mathbf{x}$.
4. $\mathbf{x} \circ (a \cdot \mathbf{y} + b\mathbf{z}) = a \cdot (\mathbf{x} \circ \mathbf{y}) + b \cdot (\mathbf{x} \circ \mathbf{z})$.
5. $(a \cdot \mathbf{x}) \circ \mathbf{y} = \mathbf{x} \circ (a \cdot \mathbf{y}) = a \cdot (\mathbf{x} \circ \mathbf{y})$.

**9.1.3.** Το *μηκος* του $\mathbf{x}$ γραφεται $||\mathbf{x}||$ και οριζεται ως εξης

$$||\mathbf{x}|| = \mathbf{x} \circ \mathbf{x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_N^2}.$$

**9.1.4.** (*Ανισοτητα Cauchy-Schwarz*) Για καθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ εχουμε:

$$|\mathbf{x} \circ \mathbf{y}| \leq ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||.$$

**9.1.5.** Για καθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ και $a \in \mathbb{R}$ εχουμε:

1. $||\mathbf{x}|| \geq 0$.
2. $||\mathbf{x}|| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
3. $||a \cdot \mathbf{x}|| = |a| \cdot ||\mathbf{x}||$.
4. $||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$

   (*τριγωνικη ανισοτητα*· η ισοτητα ισχυει ανν υπαρχει *μη αρνητικο* $a \in \mathbb{R}$ τετοιο ωστε $\mathbf{x} = a \cdot \mathbf{y}$ ).

**9.1.6.** Για $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ , η γωνια μεταξυ των διανυσματων $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ συμβολιζεται με $\widehat{\mathbf{x}, \mathbf{y}}$ και ικανοποιει

$$\cos(\widehat{\mathbf{x}, \mathbf{y}}) = \frac{\mathbf{x} \circ \mathbf{y}}{||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||}.$$

**9.1.7.** Για $N > 3$ και για καθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ υπαρχει γωνια $\phi \in [0, \pi]$ τετοια ωστε

$$\cos\phi = \frac{\mathbf{x} \circ \mathbf{y}}{||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||}.$$

*Οριζουμε* αυτην την $\phi$ να ειναι η γωνια μεταξυ των $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ και γραφουμε $\phi = \widehat{\mathbf{x}, \mathbf{y}}$. Εχουμε λοιπον

$$\cos(\widehat{\mathbf{x}, \mathbf{y}}) = \frac{\mathbf{x} \circ \mathbf{y}}{||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||}.$$

**9.1.8.** Για καθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ λεμε οτι τα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ ειναι *ορθογωνια* (γραφουμε και $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$) ανν $\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = 0$ (δηλ. $\widehat{\mathbf{x}, \mathbf{y}} = \pi/2$).

**9.1.9.** Εστω ενα συνολο $V$· λεμε οτι μια συναρτηση $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ειναι μια *γενικευμενη αποσταση* ανν ικανοποιει τις εξης ιδιοτητες για καθε $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$.

1. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$
2. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.
3. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.
4. $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ (τριγωνικη ανισοτητα).

**9.1.10.** Για καθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ οριζουμε την *αποσταση* των $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ να ειναι το μηκος του διανυσματος $\mathbf{x} - \mathbf{y}$, δηλ.

$$||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| = (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_N - y_N)^2}.$$

**9.1.11.** Για καθε $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^N$ εχουμε

1. $||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| \geq 0$
2. $||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.
3. $||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| = ||\mathbf{y} - \mathbf{x}||$.
4. $||\mathbf{x} - \mathbf{z}|| \leq ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| + ||\mathbf{y} - \mathbf{z}||$ (τριγωνικη ανισοτητα).

   Με αλλα λογια, η $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ εχει τις ιδιοτητες της *γενικευμενης αποστασης*.

**9.1.12.** Για καθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$, η *προβολη* του $\mathbf{x}$ στο $\mathbf{y}$ γραφεται $proj(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ και οριζεται να ειναι το διανυσμα $c\mathbf{y}$, οπου το $c$ επιλεγεται ετσι ωστε να ελαχιστοποιει την αποσταση $||\mathbf{x} - c\mathbf{y}||$ (ως συναρτηση του $c$).

**9.1.13.** Για καθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$, η προβολη του $\mathbf{x}$ στο $\mathbf{y}$ ειναι

$$proj(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathbf{x} \circ \mathbf{y}}{||\mathbf{y}||^2} \cdot \mathbf{y}.$$

Δηλαδη, το $c$ της προηγουμενης προτασης ειναι $c = \mathbf{x} \circ \mathbf{y} / ||\mathbf{y}||^2$. Για αυτην την τιμη του $c$, το διανυσμα $\mathbf{x} - c\mathbf{y}$ ειναι ορθογωνιο στο $\mathbf{y}$.

**9.1.14.** Μπορουμε να δωσουμε εναν πιο γενικο ορισμο του εσωτερικου γινομενου. Εστω διανυσματικος χωρος $V\cdot$ ονομαζεται *γενικευμενο εσωτερικο γινομενο* καθε πραξη $* : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ η οποια ικανοποιει τις παρακατω συνθηκες για καθε $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ και καθε $a, b \in \mathbb{C}$.

1. $\mathbf{x} * \mathbf{x} \geq 0$.
2. $\mathbf{x} * \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
3. $\mathbf{x} * \mathbf{y} = \mathbf{y} * \mathbf{x}$.
4. $\mathbf{x} * (a \cdot \mathbf{y} + b\mathbf{z}) = a \cdot (\mathbf{x} * \mathbf{y}) + b \cdot (\mathbf{x} * \mathbf{z})$.
5. $(a \cdot \mathbf{x}) * \mathbf{y} = \mathbf{x} * (a \cdot \mathbf{y}) = a \cdot (\mathbf{x} * \mathbf{y})$.

   Χρησιμοποιωντας αυτον τον ορισμο μπορουμε να ορισουμε διαφορες πραξεις (καταλληλες για συγκεκριμενες εφαρμογες) και να δειξουμε οτι αυτες ειναι γενικευμενα εσωτερικα γινομενα.

## 9.2 Λυμενα Προβληματα

**9.2.1.** Υπολογιστε ολα τα δυνατα εσωτερικα γινομενα των διανυσματων

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

**Απαντηση**.

$$\mathbf{x}\circ\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 = \mathbf{y}\circ\mathbf{x}$$
$$\mathbf{y}\circ\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 1 = \mathbf{z}\circ\mathbf{y}$$
$$\mathbf{z}\circ\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 = \mathbf{x}\circ\mathbf{z}.$$

Τα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{z}$ ειναι μεταξυ τους ορθογωνια.

**9.2.2.** Υπολογιστε ολα τα δυνατα εσωτερικα γινομενα των διανυσματων

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}= \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}= \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

**Απαντηση**.

$$\mathbf{x}\circ\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = 3 = \mathbf{y}\circ\mathbf{x}$$
$$\mathbf{y}\circ\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 = \mathbf{z}\circ\mathbf{y}$$
$$\mathbf{z}\circ\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 = \mathbf{x}\circ\mathbf{z}.$$

Τα $\mathbf{y}$ και $\mathbf{z}$ ειναι μεταξυ τους ορθογωνια.

**9.2.3.** Υπολογιστε ολα τα δυνατα εσωτερικα γινομενα των διανυσματων

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}= \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση**.

$$\mathbf{x}\circ\mathbf{y}=\left[\begin{array}{cccc}1&0&-1&1\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}2\\-3\\2\\-1\end{array}\right]=-1=\mathbf{y}\circ\mathbf{x}$$

$$\mathbf{y}\circ\mathbf{z}=\left[\begin{array}{cccc}2&-3&2&-1\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}0\\1\\1\\1\end{array}\right]=-2=\mathbf{z}\circ\mathbf{y}$$

$$\mathbf{z}\circ\mathbf{x}=\left[\begin{array}{cccc}0&1&1&1\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}1\\0\\-1\\1\end{array}\right]=0=\mathbf{x}\circ\mathbf{z}.$$

Τα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{z}$ ειναι μεταξυ τους ορθογωνια.

**9.2.4.** Αποδειξτε οτι για καθε $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbb{R}^N$ και $a,b\in\mathbb{R}$ εχουμε

1. $\mathbf{x}\circ\mathbf{x}\geq 0$.
2. $\mathbf{x}\circ\mathbf{x}=0\Leftrightarrow\mathbf{x}=\mathbf{0}$.
3. $\mathbf{x}\circ\mathbf{y}=\mathbf{y}\circ\mathbf{x}$.
4. $\mathbf{x}\circ(a\cdot\mathbf{y}+b\mathbf{z})=a\cdot(\mathbf{x}\circ\mathbf{y})+b\cdot(\mathbf{x}\circ\mathbf{z})$.
5. $(a\cdot\mathbf{x})\circ\mathbf{y}=\mathbf{x}\circ(a\cdot\mathbf{y})=a\cdot(\mathbf{x}\circ\mathbf{y})$.

**Απαντηση**. Εχουμε

$$\mathbf{x}\circ\mathbf{x}=\left[\begin{array}{cccc}x_1&x_2&...&x_N\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}x_1\\x_2\\...\\x_N\end{array}\right]=x_1^2+x_2^2+...+x_N^2$$

απο την οποια ειναι προφανεις οι ιδιοιτητες 1 και 2. Επισης

$$\mathbf{x}\circ\mathbf{y}=x_1y_1+x_2y_2+...+x_Ny_N==y_1x_1+y_2x_2+...+y_Nx_N=\mathbf{y}\circ\mathbf{x}$$

αρα ισχυει και η 3. Για την 4 εχουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{x}\circ(a\cdot\mathbf{y}+b\mathbf{z})&=x_1\cdot(ay_1+bz_1)+x_2\cdot(ay_2+bz_2)+...+x_N\cdot(ay_N+bz_N)\\&=ax_1y_1+bx_1z_1+ax_2y_2+bx_2z_2+...+ax_Ny_N+bx_Nz_N\\&=ax_1y_1+ax_2y_2+...+ax_Ny_N+bx_1z_1++bx_2z_2+....+bx_Nz_N\\&=a\cdot(\mathbf{x}\circ\mathbf{y})+b\cdot(\mathbf{x}\circ\mathbf{z}).\end{aligned}$$

και για την 5

$$\begin{aligned}(a\cdot\mathbf{x})\circ\mathbf{y} &= (ax_1)\cdot y_1 + (ax_2)\cdot y_2 + ... + (ax_N)\cdot y_N \\ &= ax_1y_1 + ax_2y_2 + ... + ax_Ny_N \\ &= a\cdot(\mathbf{x}\circ\mathbf{y})\end{aligned}$$

και αντιστοιχα αποδεικνυεται $\mathbf{x}\circ(a\cdot\mathbf{y}) = a\cdot(\mathbf{x}\circ\mathbf{y})$.

**9.2.5.** Για τα διανυσματα $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}^T$ ελεγξτε οτι ισχυει η ανισοτητα *Cauchy-Schwarz*.

**Απαντηση**. Εχουμε

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}, \quad \|\mathbf{y}\| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}, \quad |\mathbf{x}\circ\mathbf{y}| = |1\cdot 1 + 2\cdot 3| = 7$$

και οντως

$$7 < \sqrt{5}\sqrt{10} = 5\sqrt{2} = 7.0711...$$

**9.2.6.** Για τα διανυσματα $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T$ ελεγξτε οτι ισχυει η ανισοτητα *Cauchy-Schwarz*.

**Απαντηση**. Εχουμε

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}\| &= \sqrt{2^2+0^2+4^2} = \sqrt{20}, \quad \|\mathbf{y}\| = \sqrt{1^2+0^2+2^2} = \sqrt{5}, \\ |\mathbf{x}\circ\mathbf{y}| &= |2\cdot 1 + 0\cdot 0 + 4\cdot 2| = 10\end{aligned}$$

και οντως

$$10 = \sqrt{20}\sqrt{5} = \sqrt{100} = 10.$$

Εδω εχουμε ισοτητα, επειδη $\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{y}$.

**9.2.7.** Για τα διανυσματα $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ ελεγξτε οτι ισχυει η ανισοτητα *Cauchy-Schwarz*.

**Απαντηση**. Εχουμε

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}\| &= \sqrt{1^2+2^2+0^2+4^2} = \sqrt{21}, \quad \|\mathbf{y}\| = \sqrt{(-1)^2+0^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{3}, \\ |\mathbf{x}\circ\mathbf{y}| &= |1\cdot(-1) + 2\cdot 0 + 0\cdot 1 + 4\cdot(-1)| = 5\end{aligned}$$

και οντως

$$5 = \sqrt{21}\sqrt{3} = \sqrt{63} = 7.9373.$$

**9.2.8.** Αποδειξτε οτι για καθε $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^N$ εχουμε $|\mathbf{x}\circ\mathbf{y}| \leq ||\mathbf{x}||\cdot||\mathbf{y}||$.

**Απαντηση**. Θεωρουμε το μετρο του $\mathbf{x}+t\mathbf{y}$ ως συναρτηση του $t\in\mathbb{R}$:

$$0 \leq \|\mathbf{x}+t\mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x}+t\mathbf{y})\circ(\mathbf{x}+t\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2 + 2t\cdot(\mathbf{x}\circ\mathbf{y}) + t^2\|\mathbf{y}\|.$$

Βλεπουμε λοιπον οτι το $\|\mathbf{x}+t\mathbf{y}\|^2$ ειναι ενα τριωνυμο ως προς $t$ και παιρνει μη αρνητικες τιμες για καθε $t\in\mathbb{R}$. Αρα η διακρινουσα του τριωνυμου πρεπει να ειναι αρνητικη:

$$0 \geq (2\cdot\mathbf{x}\circ\mathbf{y})^2 - 4\cdot\|\mathbf{x}\|^2\cdot\|\mathbf{x}\|^2 \Rightarrow 4\cdot\|\mathbf{x}\|^2\cdot\|\mathbf{x}\|^2 \geq 4\cdot(\mathbf{x}\circ\mathbf{y})^2.$$

Το ζητουμενο προκυπτει διαιρωντας το 4 και παιρνοντας ριζες.

**9.2.9.** Υπολογιστε την γωνια μεταξυ των παρακατω διανυσματων.

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{y}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{z}=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix},$$

**Απαντηση**. Εχουμε

$$\cos(\widehat{\mathbf{x},\mathbf{y}})=\frac{\mathbf{x}\circ\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|}=\frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\widehat{\mathbf{x},\mathbf{y}}=\frac{\pi}{4}.$$
$$\cos(\widehat{\mathbf{y},\mathbf{z}})=\frac{\mathbf{y}\circ\mathbf{z}}{\|\mathbf{y}\|\cdot\|\mathbf{z}\|}=\frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{1}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\widehat{\mathbf{y},\mathbf{z}}=-\frac{\pi}{4}.$$
$$\cos(\widehat{\mathbf{z},\mathbf{x}})=\frac{\mathbf{z}\circ\mathbf{x}}{\|\mathbf{z}\|\cdot\|\mathbf{x}\|}=\frac{0}{\sqrt{1}\sqrt{1}}\Rightarrow\widehat{\mathbf{z},\mathbf{x}}=\frac{\pi}{2}.$$

**9.2.10.** Υπολογιστε την γωνια μεταξυ των παρακατω διανυσματων.

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{y}=\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\end{bmatrix},\quad \mathbf{z}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},$$

**Απαντηση**. Εχουμε

$$\cos(\widehat{\mathbf{x},\mathbf{y}})=\frac{\mathbf{x}\circ\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|}=\frac{-2}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=-1\Rightarrow\widehat{\mathbf{x},\mathbf{y}}=\pi.$$
$$\cos(\widehat{\mathbf{y},\mathbf{z}})=\frac{\mathbf{y}\circ\mathbf{z}}{\|\mathbf{y}\|\cdot\|\mathbf{z}\|}=\frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\widehat{\mathbf{y},\mathbf{z}}=-\frac{\pi}{3}.$$
$$\cos(\widehat{\mathbf{z},\mathbf{x}})=\frac{\mathbf{z}\circ\mathbf{x}}{\|\mathbf{z}\|\cdot\|\mathbf{x}\|}=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}\Rightarrow\widehat{\mathbf{z},\mathbf{x}}=\frac{\pi}{3}.$$

**9.2.11.** Υπολογιστε την γωνια μεταξυ των παρακατω διανυσματων.

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\1\\2\\3\end{bmatrix},\quad \mathbf{y}=\begin{bmatrix}0\\2\\1\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{z}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

**Απαντηση**. Εχουμε

$$\cos(\widehat{\mathbf{x},\mathbf{y}})=\frac{\mathbf{x}\circ\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|}=\frac{-2}{\sqrt{15}\sqrt{5}}=-\frac{2}{5\sqrt{3}}\Rightarrow\widehat{\mathbf{x},\mathbf{y}}=1.8038.$$
$$\cos(\widehat{\mathbf{y},\mathbf{z}})=\frac{\mathbf{y}\circ\mathbf{z}}{\|\mathbf{y}\|\cdot\|\mathbf{z}\|}=\frac{0}{\sqrt{5}\sqrt{2}}=0\Rightarrow\widehat{\mathbf{y},\mathbf{z}}=\frac{\pi}{2}.$$
$$\cos(\widehat{\mathbf{z},\mathbf{x}})=\frac{\mathbf{z}\circ\mathbf{x}}{\|\mathbf{z}\|\cdot\|\mathbf{x}\|}=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{15}}\Rightarrow\widehat{\mathbf{z},\mathbf{x}}=1.3872.$$

**9.2.12.** Υπολογιστε τα μηκη των παρακατω διανυσματων και τις μεταξυ τους αποστασεις.

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{y}=\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\end{bmatrix},\quad \mathbf{z}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},$$

**Απαντηση**. Εχουμε

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}\| &= \sqrt{1^2+0^2+1^2} = \sqrt{2},\\ \|\mathbf{y}\| &= \sqrt{(-1)^2+0^2+(-1)^2} = \sqrt{2},\\ \|\mathbf{z}\| &= \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| &= \sqrt{(1+1)^2+0^2+(1+1)^2} = 2,\\ \|\mathbf{y}-\mathbf{z}\| &= \sqrt{(-1-1)^2+(0-1)^2+(-1-1)^2} = \sqrt{5},\\ \|\mathbf{z}-\mathbf{x}\| &= \sqrt{(1-1)^2+(1-0)^2+(1-1)^2} = 1.\end{aligned}$$

**9.2.13.** Αποδειξτε οτι για καθε $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^N$ και $a\in\mathbb{R}$ εχουμε:

1. $||\mathbf{x}|| \geq 0$.
2. $||\mathbf{x}|| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
3. $||a\cdot\mathbf{x}|| = |a|\cdot||\mathbf{x}||$.
4. $||\mathbf{x}+\mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$

**Απαντηση**. Απο την

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_N^2}$$

ειναι προφανεις οι 1 και 2. Για την 3 εχουμε

$$\begin{aligned}\|a\mathbf{x}\| &= \sqrt{(ax_1)^2+(ax_2)^2+...+(ax_N)^2}\\ &= \sqrt{a^2\cdot(x_1^2+x_2^2+...+x_N^2)}\\ &= |a|\cdot\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_N^2} = |a|\cdot\|\mathbf{x}\|.\end{aligned}$$

Για την 4

$$\begin{aligned}||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2 &= (\mathbf{x}+\mathbf{y})\circ(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\cdot\mathbf{x}\circ\mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^2\\ &\leq ||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2 + 2\cdot\|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\| = (\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|)^2\end{aligned}$$

που δινει το ζητουμενο.

**9.2.14.** Αποδειξτε οτι για καθε $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbb{R}^N$ εχουμε

1. $||\mathbf{x}-\mathbf{y}|| \geq 0$
2. $||\mathbf{x}-\mathbf{y}|| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.

3. $||\mathbf{x}-\mathbf{y}|| = ||\mathbf{y}-\mathbf{x}||$.

4. $||\mathbf{x}-\mathbf{z}|| \leq ||\mathbf{x}-\mathbf{y}|| + ||\mathbf{y}-\mathbf{z}||$ (τριγωνικη ανισοτητα).

**Απαντηση**. Η 1, 2, 3 ειναι προφανεις απο την

$$||\mathbf{x}-\mathbf{y}|| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + ... + (x_N-y_N)^2}.$$

Η 4 προκυπτει αμεσα απο την $||\mathbf{x}'+\mathbf{y}'|| \leq ||\mathbf{x}'|| + ||\mathbf{y}'||$ αν θεσουμε $\mathbf{x}' = \mathbf{x}-\mathbf{y}$ και $\mathbf{y}' = \mathbf{y}-\mathbf{z}$.

**9.2.15.** Αποδειξτε οτι για καθε $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$ εχουμε

$$||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 2||\mathbf{x}||^2 + 2||\mathbf{y}||^2$$

**Απαντηση**. Εχουμε

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 &= (\mathbf{x}+\mathbf{y}) \circ (\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{x}\circ\mathbf{x} + \mathbf{y}\circ\mathbf{x} + \mathbf{x}\circ\mathbf{y} + \mathbf{y}\circ\mathbf{y} \\
&= \|\mathbf{x}\|^2 + 2\cdot\mathbf{x}\circ\mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^2 \\
\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 &= (\mathbf{x}-\mathbf{y}) \circ (\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \mathbf{x}\circ\mathbf{x} - \mathbf{y}\circ\mathbf{x} - \mathbf{x}\circ\mathbf{y} + \mathbf{y}\circ\mathbf{y} \\
&= \|\mathbf{x}\|^2 - 2\cdot\mathbf{x}\circ\mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^2
\end{aligned}$$

και με προσθεση κατα μελη παιρνουμε το ζητουμενο.

**9.2.16.** Δειξτε οτι

$$\mathbf{x}\circ\mathbf{y} = \frac{1}{4}\left(\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2\right)$$

*Αρα το εσωτερικο γινομενο μπορει να οριτει δια μεσου της αποστασης.*

**Απαντηση**. Εχουμε

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 &= (\mathbf{x}+\mathbf{y}) \circ (\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{x}\circ\mathbf{x} + \mathbf{y}\circ\mathbf{x} + \mathbf{x}\circ\mathbf{y} + \mathbf{y}\circ\mathbf{y} \\
&= \|\mathbf{x}\|^2 + 2\cdot\mathbf{x}\circ\mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^2 \\
\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 &= (\mathbf{x}-\mathbf{y}) \circ (\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \mathbf{x}\circ\mathbf{x} - \mathbf{y}\circ\mathbf{x} - \mathbf{x}\circ\mathbf{y} + \mathbf{y}\circ\mathbf{y} \\
&= \|\mathbf{x}\|^2 - 2\cdot\mathbf{x}\circ\mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^2
\end{aligned}$$

και με αφαιρεση κατα μελη παιρνουμε

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 4\cdot\mathbf{x}\circ\mathbf{y}$$

που δινει το ζητουμενο.

**9.2.17.** Δειξτε οτι

$$(a_1 + ... + a_N)^2 \leq N \cdot \left(a_1^2 + ... + a_N^2\right)$$

**Απαντηση**. Αυτη προκυπτει αμεσα απο την ανισοτητα *Cauchy-Schwarz* αν θεσουμε $\mathbf{x} = \left[\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & ... & a_N \end{array}\right]^T$ και $\mathbf{y} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & ... & 1 \end{array}\right]^T$.

**9.2.18.** Δειξτε οτι

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \left( \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 \right)$$

**Απαντηση**. Αυτο προκυπτει αμεσα απο το

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \circ (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2 + 2 \cdot \mathbf{x} \circ \mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^2$$

**9.2.19.** Αποδειξτε οτι

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| \Leftrightarrow ((\mathbf{x} + \mathbf{y}) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0)$$

**Απαντηση**. Αυτο προκυπτει αμεσα απο το

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2 - 2 \cdot \mathbf{x} \circ \mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^2$$

**9.2.20.** Υπολογιστε την προβολη του $\mathbf{x}$ στο $\mathbf{y}$ οταν $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

**Απαντηση**. Εχουμε

$$proj\,(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathbf{x} \circ \mathbf{y}}{||\mathbf{y}||^2} \cdot \mathbf{y} = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1}{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{4}{3} \cdot \mathbf{y}.$$

**9.2.21.** Υπολογιστε την προβολη του $\mathbf{x}$ στο $\mathbf{y}$ οταν $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

**Απαντηση**. Εχουμε

$$proj\,(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathbf{x} \circ \mathbf{y}}{||\mathbf{y}||^2} \cdot \mathbf{y} = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1}{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{y}.$$

**9.2.22.** Υπολογιστε την προβολη του $\mathbf{x}$ στο $\mathbf{y}$ οταν $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T$.

**Απαντηση**. Εχουμε

$$proj\,(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathbf{x} \circ \mathbf{y}}{||\mathbf{y}||^2} \cdot \mathbf{y} = \frac{1 \cdot 6 + 2 \cdot 7 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3}{6^2 + 7^2 + 1^2 + 3^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{32}{95} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{32}{95} \cdot \mathbf{y}.$$

**9.2.23.** *Αποδειξτε* οτι η προβολη του $\mathbf{x}$ στο $\mathbf{y}$ ειναι

$$proj\,(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathbf{x} \circ \mathbf{y}}{||\mathbf{y}||^2} \cdot \mathbf{y}.$$

**Απαντηση**. Εξ ορισμου, η προβολη του $\mathbf{x}$ στο $\mathbf{y}$ ειναι ενα διανυσμα $c\mathbf{y}$ τετοιο ωστε $\|\mathbf{x} - c\mathbf{y}\|$ να ελαχιστοποιειται. Θελουμε λοιπον να βρουμε το $c$ το οποιο ελαχιστοποιηει το $\|\mathbf{x} - c\mathbf{y}\|\cdot$ αλλα αυτο θα ειναι το ιδιο (γιατι;) με το $c$ το οποιο ελαχιστοποιει την

$$F(c) = \|\mathbf{x} - c\mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x} - c\mathbf{y}) \circ (\mathbf{x} - c\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2 - 2c\mathbf{x} \circ \mathbf{y} + c^2 \|\mathbf{y}\|^2.$$

Θετουμε

$$0 = \frac{dF}{dc} = -2\mathbf{x} \circ \mathbf{y} + 2c\|\mathbf{y}\|^2 \Rightarrow c = \frac{\mathbf{x} \circ \mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|^2}$$

οποτε οντως

$$proj\,(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathbf{x} \circ \mathbf{y}}{||\mathbf{y}||^2} \cdot \mathbf{y}.$$

**9.2.24.** Βρειτε ολα τα διανυσματα που ειναι ορθογωνια στο $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T$ και στο $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

**Απαντηση**. Τα ζητουμενα διανυσματα θα ειναι της μορφης $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$ τετοια ωστε

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Το συνολο των λυσεων του ειναι

$$V = \left\{ \mathbf{x} : \mathbf{x} = t \cdot \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

δηλ. η ευθεια η οποια περναει απο την αρχη των αξονων και ειναι καθετη στο επιπεδο που σχηματιζουν τα διανυσματα $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T$ και $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

**9.2.25.** Βρειτε ολα τα διανυσματα που ειναι ορθογωνια στο $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T$.

**Απαντηση**. Τα ζητουμενα διανυσματα θα ειναι της μορφης $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$ τετοια ωστε

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

δηλ. σχηματιζουν το συνολο

$$V = \{\mathbf{x} : x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$$

το οποιο ειναι ενα επιπεδο το οποιο περναει απο την αρχη των αξονων. Αυτο αντιστοιχει στο γεωμετρικο γεγονος οτι ολα τα διανυσματα τα καθετα σε μιαν ευθεια απαρτιζουν ενα επιπεδο.

**9.2.26.** Δειξτε οτι η πραξη $\mathbf{x} * \mathbf{y} = \sum_{n=1}^{N} w_n x_n y_n$ ειναι ενα γενικευμενο εσωτερικο γινομενο οταν τα $w_n > 0$.

**Απαντηση**. Πρεπει να επαληθευσουμε τις ιδιοτητες τις ιδιοτητες 1-5 της **9.1.14**. Πραγματι

$$\mathbf{x} * \mathbf{x} = \sum_{n=1}^{N} w_n x_n^2 \geq 0$$

και η ισοτητα ισχυει ανν $x_1 \equiv ... = x_n = 0$ (δηλ. $\mathbf{x} = \mathbf{0}$). Επισης

$$\mathbf{x} * \mathbf{y} = \sum_{n=1}^{N} w_n x_n y_n = \mathbf{x} * \mathbf{y} = \sum_{n=1}^{N} w_n y_n x_n = \mathbf{y} * \mathbf{x},$$

$$\mathbf{x} * (a\mathbf{y} + b\mathbf{z}) = \sum_{n=1}^{N} w_n x_n \cdot (a y_n + b z_n) = a \cdot \sum_{n=1}^{N} w_n x_n y_n + b \cdot \sum_{n=1}^{N} w_n x_n z_n = a \cdot \mathbf{x} * \mathbf{y} + b \cdot \mathbf{x} * \mathbf{z},$$

$$(a\mathbf{x}) \circ \mathbf{y} = \sum_{n=1}^{N} w_n a x_n y_n = a \sum_{n=1}^{N} w_n x_n y_n = a \cdot (\mathbf{x} \circ \mathbf{y}).$$

Αρα ολες οι ιδιοτητες του εσωτερικου γινομενου ισχυουν για την $*$.

**9.2.27.** Εστω οτι ο $N \times N$ πινακας $\mathbf{Q}$ εχει την ιδιοτητα

$$\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} : \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} > \mathbf{0}. \tag{9.2}$$

Δειξτε οτι η πραξη $\mathbf{x} * \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{y}$ ειναι ενα γενικευμενο εσωτερικο γινομενο.

**Απαντηση**. Οι ιδιοτητες 1 και 2 της **9.1.14** προκυπτουν αμεσα απο την (9.2). Επειδη $\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{y}$ ειναι $1 \times 1$, εχουμε $\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{y} = \left(\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{y}\right)^T$ οποτε

$$\mathbf{x} * \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{y} = \left(\mathbf{x}^{\mathbf{T}} \mathbf{Q} \mathbf{y}\right)^T = \mathbf{y}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} = \mathbf{y} * \mathbf{x}$$

οποτε η ιδιοτητα 3 ισχυει. Οι 4 και 5 αποδεικνυονται ευκολα.

## 9.3 Αλυτα Προβληματα

**9.3.1.** Υπολογιστε ολα τα δυνατα εσωτερικα γινομενα των διανυσματων

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

**Απ**. $\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = -1 = \mathbf{y} \circ \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \circ \mathbf{z} = 3 = \mathbf{z} \circ \mathbf{x}$ , $\mathbf{y} \circ \mathbf{z} = -3 = \mathbf{z} \circ \mathbf{y}$.

**9.3.2.** Υπολογιστε ολα τα δυνατα εσωτερικα γινομενα των διανυσματων

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

**Απ**. $\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = 1 = \mathbf{y} \circ \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \circ \mathbf{z} = 2 = \mathbf{z} \circ \mathbf{x}$ , $\mathbf{y} \circ \mathbf{z} = 0 = \mathbf{z} \circ \mathbf{y}$ (τα $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ ειναι μεταξυ τους ορθογωνια).

**9.3.3.** Εστω

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Υπολογιστε τα εξης: $\|\mathbf{x}\|$, $\|\mathbf{y}\|$, $\|\mathbf{y} + \mathbf{2z}\|$, $\|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{z} - \mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{y} - \mathbf{u}\|$,

**Απ**. $\sqrt{31}$ , $\sqrt{434}$ , $\sqrt{\left(3486 - 16\sqrt{434}\right)}$, $2\sqrt{6}$, $\sqrt{6}$, $3\sqrt{2}$.

**9.3.4.** Για τα διανυσματα του προηγουμενου προβληματος ελεγξτε οτι

$$\begin{aligned} &||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||, \\ &||\mathbf{y} - \mathbf{u}|| \leq ||\mathbf{y} - \mathbf{z}|| + ||\mathbf{z} - \mathbf{u}||. \\ &||\mathbf{x} - \mathbf{u}|| \leq ||\mathbf{x} - \mathbf{y}| + ||\mathbf{y} - \mathbf{z}|| + ||\mathbf{z} - \mathbf{u}||. \end{aligned}$$

**9.3.5.** Εστω

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Δειξτε οτι τα $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ειναι ορθογωνια, υπολογιστε την γωνια μεταξυ των $\mathbf{x}$ και $\mathbf{z}$, δειξτε οτι $\mathbf{u}\circ(3\mathbf{y}+2\mathbf{z}) = \mathbf{3u}\circ\mathbf{y}+2\mathbf{u}\circ\mathbf{z}$ και οτι $\mathbf{u}\circ(3\mathbf{y}+2\mathbf{z}) = \mathbf{3u}\circ\mathbf{y}+2\mathbf{u}\circ\mathbf{z}$.

**9.3.6.** Για τα διανυσματα του προηγουμενου προβληματος ελεγξτε οτι

$$\begin{aligned} \mathbf{x}\circ\mathbf{y} \le ||\mathbf{x}||\cdot||\mathbf{y}||, &\qquad ||\mathbf{x}+\mathbf{y}|| \le ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}|| \\ \mathbf{x}\circ\mathbf{z} \le ||\mathbf{x}||\cdot||\mathbf{z}||, &\qquad ||\mathbf{x}+\mathbf{z}|| \le ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{z}||. \end{aligned}$$

**9.3.7.** Για τα διανυσματα του προηγουμενου προβληματος βρειτε την προβολη του $\mathbf{z}$ στο $\mathbf{x}$ και του $\mathbf{z}$ στο $\mathbf{y}$.

**Απ**. $0$, $\sqrt{\frac{3}{2}}\mathbf{y}$.

**9.3.8.** Για τα διανυσματα $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ ελεγξτε οτι ισχυει η ανισοτητα *Cauchy-Schwarz*.

**9.3.9.** Για τα διανυσματα $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T$ ελεγξτε οτι ισχυει η ανισοτητα *Cauchy-Schwarz*.

**9.3.10.** Για τα διανυσματα $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T$ ελεγξτε οτι ισχυει η ανισοτητα *Cauchy-Schwarz*.

**9.3.11.** Υπολογιστε τις γωνιες μεταξυ των παρακατω διανσυματων.

$$\mathbf{x}= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

**Απ**. $\cos(\widehat{\mathbf{x},\mathbf{y}}) = 0$, $\widehat{\mathbf{x},\mathbf{y}} = 0\cdot$ $\cos(\widehat{\mathbf{x},\mathbf{z}}) = -1$, $\widehat{\mathbf{x},\mathbf{z}} = -\pi/2\cdot$ $\cos(\widehat{\mathbf{z},\mathbf{y}}) = -1$, $\widehat{\mathbf{z},\mathbf{y}} = -\pi/2$.

**9.3.12.** Υπολογιστε τις γωνιες μεταξυ των παρακατω διανυσματων.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

**Απ**. $\cos(\widehat{\mathbf{x},\mathbf{y}}) = -2/\sqrt{6}$, $\cos(\widehat{\mathbf{x},\mathbf{z}}) = 2/\sqrt{6}$,$\cos(\widehat{\mathbf{z},\mathbf{y}}) = -1$.

**9.3.13.** Υπολογιστε την γωνια μεταξυ των παρακατω διανυσματων

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}= \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**Απ**. $\cos(\widehat{\mathbf{x},\mathbf{y}}) = 1/2\sqrt{15}$.

**9.3.14.** Για τα διανυσματα του προηγουμενου προβληματος επαληθευστε οτι $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2$.

**9.3.15.** Αποδειξτε οτι για καθε $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ εχουμε $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2$.

**9.3.16.** Υπολογιστε τα μηκη των παρακατω διανυσματων και τις μεταξυ τους αποστασεις.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

**Απ**. $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{3}$, $\|\mathbf{y}\| = \sqrt{2}$, $\|\mathbf{z}\| = \sqrt{2}$, $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = 3$, $\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\| = \sqrt{3}$, $\|\mathbf{z}\| = 1$.

**9.3.17.** Αποδειξτε οτι για καθε $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ η συναρτηση

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_1 = \sum_{n=1}^{N} |x_n - y_n|$$

ικανοποιει τις ιδιοτητες της γενικευμενης αποστασης (Εδαφιο 9.1.11).

**9.3.18.** Υπολογιστε την προβολη του $\mathbf{x}$ στο $\mathbf{y}$ οταν $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

**Απαντηση**. Εχουμε

$$proj\,(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{x}\circ\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|^2} \cdot \mathbf{y} = \frac{1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 1\cdot 1}{1^2+1^2+1^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{4}{3} \cdot \mathbf{y}.$$

**9.3.19.** Υπολογιστε την προβολη του $\mathbf{x}$ στο $\mathbf{y}$ οταν $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$.

**Απ**. $\begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{8}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{8}{5} \end{bmatrix}^T$.

**9.3.20.** Υπολογιστε την προβολη του $\mathbf{x}$ στο $\mathbf{y}$ οταν $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$.

**Απαντηση**. Εχουμε $proj\,(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

**9.3.21.** Βρειτε ολα τα διανυσματα που ειναι ορθογωνια στο $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}^T$ και στο $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

**Απ**. Τα ζητουμενα διανυσματα θα ειναι της μορφης $\mathbf{x} = \mathbf{t}\cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & t \end{bmatrix}^T$.

**9.3.22.** Βρειτε ολα τα διανυσματα που ειναι ορθογωνια στο $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$.

**Απ**. Τα ζητουμενα διανυσματα σχηματιζουν το επιπεδο

$$V = \{\mathbf{x} : x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}.$$

**9.3.23.** Δειξτε οτι η πραξη $\mathbf{x} * \mathbf{y} = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$ ειναι ενα γενικευμενο εσωτερικο γινομενο

**9.3.24.** Δειξτε οτι δυο διανυσματα $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ ειναι ορθογωνια ανν

$$\forall a,b \in \mathbb{R} : \left\|a\mathbf{x}^2 + b\mathbf{y}^2\right\| = \left\|a\mathbf{x}^2\right\| + \left\|b\mathbf{y}^2\right\|.$$

**9.3.25.** Εστω

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Βρειτε την ελαχιστη γωνια που σχηματιζει το $\mathbf{x}$ με διανυσμα $\mathbf{u} \in span\,(\mathbf{y},\mathbf{z})$.

**Απ**. $\pi/4$.

# Κεφάλαιο 10

# Ορθογωνιοτητα Διανυσματικων Χωρων

## 10.1 Θεωρια

**10.1.1.** Εστω γραμμικος υποχωρος $S \subseteq \mathbb{R}^N$ και διανυσμα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$. Το $\mathbf{x}$ λεγεται *ορθογωνιο* στον $S$ αν για καθε $\mathbf{y} \in S$ εχουμε $\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = 0$. Γραφουμε και $\mathbf{x} \perp S$, $S \perp \mathbf{x}$.

**10.1.2.** Δυο γραμμικοι υποχωροι $S, T \subseteq \mathbb{R}^N$ λεγονται *ορθογωνιοι (προς αλληλους)* αν για καθε $\mathbf{x} \in S$ και $\mathbf{y} \in T$ εχουμε $\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = 0$. Γραφουμε και $S \perp T$, $T \perp S$.

**10.1.3.** Εστω $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_M, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ τετοια ωστε (για $m = 1, 2, ..., M$) $\mathbf{x}_m \circ \mathbf{y} = 0$. Τοτε, για καθε $\mathbf{z} \in span\left(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_M\right)$ εχουμε $\mathbf{z} \circ \mathbf{y} = 0$

**10.1.4.** Εστω γραμμικος υποχωρος $S \subseteq \mathbb{R}^N$. Το *ορθογωνιο συμπληρωμα* του $S$ γραφεται $S^{\perp}$ και οριζεται ως εξης

$$S^{\perp} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \forall \mathbf{y} \in S \text{ εχουμε } \mathbf{x} \circ \mathbf{y} = 0\right\}.$$

**10.1.5.** Για καθε γραμμικο υποχωρο $S \subseteq \mathbb{R}^N$, το ορθογωνιο συμπληρωμα $S^{\perp}$ ειναι ενας γραμμικος υποχωρος.

**10.1.6.** Εστω γραμμικος υποχωρος $S \subseteq \mathbb{R}^N$ και διανυσμα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$. Η *προβολη* του $\mathbf{x}$ στον $S$ γραφεται $proj\left(\mathbf{x}, S\right)$ και οριζεται ως εξης: ειναι το διανυσμα $\mathbf{y} \in S$ το οποιο ελαχιστοποιει το $||\mathbf{x} - \mathbf{y}||$.

**10.1.7.** Εστω οτι τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_M$ ειναι μια βαση του διανυσματικου υποχωρου $S \subseteq \mathbb{R}^N$. Αν τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_M$ ειναι αμοιβαια ορθογωνια, τοτε λεμε οτι το $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_M\}$ ειναι μια *ορθογωνια βαση* του $S$. Αν επιπλεον $||\mathbf{x}_1|| = ||\mathbf{x}_2|| = ... = ||\mathbf{x}_M|| = 1$, τοτε λεμε οτι ειναι μια *ορθοκανονικη βαση* του $S$.

**10.1.8.** Εστω $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_M \in \mathbb{R}^N$ τετοια ωστε $\mathbf{x}_m \circ \mathbf{x}_n = 0$ (για $m, n = 1, 2, ..., M$ και $m \neq n$). Τοτε, τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_M$ ειναι γραμμικα ανεξαρτητα.

**10.1.9.** Εστω γραμμικος υποχωρος $S \subseteq \mathbb{R}^N$ με $\dim\left(S\right) = M$, εστω $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_M \in S$ τετοια ωστε (για $m, n = 1, 2, ..., M$ και $m \neq n$) εχουμε $\mathbf{x}_m \circ \mathbf{x}_n = 0$. Τοτε, το συνολο $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_M\}$ ειναι μια ορθογωνια βαση του $S$.

**10.1.10.** (Αλγοριθμος $Gram - Schmidt$) Εστω οτι τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_M$ ειναι μια βαση του διανυσματικου υποχωρου $S \subseteq \mathbb{R}^N$. Οριζουμε τα διανυσματα $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_M$ ως εξης

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_1 &= \mathbf{x}_1 \\
\mathbf{y}_2 &= \mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_2 \circ \mathbf{y}_1}{\mathbf{y}_1 \circ \mathbf{y}_1}\mathbf{y}_1 \\
\mathbf{y}_3 &= \mathbf{x}_3 - \frac{\mathbf{x}_3 \circ \mathbf{y}_1}{\mathbf{y}_1 \circ \mathbf{y}_1}\mathbf{y}_2 - \frac{\mathbf{x}_3 \circ \mathbf{y}_2}{\mathbf{y}_2 \circ \mathbf{y}_2}\mathbf{y}_1 \\
&\dots \\
\mathbf{y}_M &= \mathbf{x}_M - \frac{\mathbf{x}_M \circ \mathbf{y}_1}{\mathbf{y}_1 \circ \mathbf{y}_1}\mathbf{y}_1 - ... - \frac{\mathbf{x}_M \circ \mathbf{y}_{M-1}}{\mathbf{y}_{M-1} \circ \mathbf{y}_{M-1}}\mathbf{y}_{M-1}.
\end{aligned}$$

Τα $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_M$ ειναι μια ορθογωνια βαση. Τα δε $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, ..., \mathbf{z}_M$, που οριζονται ως εξησ:

$$\mathbf{z}_1 = \frac{\mathbf{y}_1}{||\mathbf{y}_1||}, \quad \mathbf{z}_2 = \frac{\mathbf{y}_2}{||\mathbf{y}_2||}, \quad ..., \mathbf{z}_M = \frac{\mathbf{y}_M}{||\mathbf{y}_M||},$$

ειναι μια ορθοκανονικη βαση του $S$.

**10.1.11.** Καθε γραμμικος υποχωρος $S \subseteq \mathbb{R}^N$, διαστασης $M$, περιεχει $M$ αμοιβαια ορθογωνια διανυσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_M$ (δηλ. $\mathbf{x}_m \circ \mathbf{x}_n = 0$ για $m = 1, 2, ..., M$). Ο υποχωρος *δεν μπορει* να περιεχει περισσοτερα απο $M$ αμοιβαια ορθογωνια διανυσματα.

**10.1.12.** Εστω γραμμικος υποχωρος $S \subseteq \mathbb{R}^N$ και $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_M$ μια ορθογωνια βαση του $S$. Καθε $\mathbf{y} \in S$ μπορει να γραφτει στην μορφη

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{y} \circ \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_1} \cdot \mathbf{x}_1 + \frac{\mathbf{y} \circ \mathbf{x}_2}{\mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_2} \cdot \mathbf{x}_2 + ... + \frac{\mathbf{y} \circ \mathbf{x}_M}{\mathbf{x}_M \circ \mathbf{x}_M} \cdot \mathbf{x}_M.$$

**10.1.13.** Εστω γραμμικος υποχωρος $S \subseteq \mathbb{R}^N$, εστω $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_M$ μια ορθοκανονικη βαση του $S$ και εστω $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in S$ τυχοντα στοιχεια του $S$. Τα $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ μπορουν να γραφτουν ως γραμμικοι συνδυασμοι των διανυσματων της βασης:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y} &= a_1 \cdot \mathbf{x}_1 + a_2 \cdot \mathbf{x}_2 + ... + a_M \cdot \mathbf{x}_M \\
\mathbf{z} &= b_1 \cdot \mathbf{x}_1 + b_2 \cdot \mathbf{x}_2 + ... + b_M \cdot \mathbf{x}_M,
\end{aligned}$$

και το εσωτερικο τους γινομενο ως

$$\mathbf{y} \circ \mathbf{z} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_M b_M.$$

Επισης

$$||\mathbf{y}||^2 = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_M^2, \qquad ||\mathbf{z}||^2 = b_1^2 + b_2^2 + ... + b_M^2.$$

**10.1.14.** Εστω γραμμικος υποχωρος $S \subseteq R^N$, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_M$ μια ορθογωνια βαση του $S$ και τυχον διανυσμα $\mathbf{y} \in R^N$. Η προβολη του $\mathbf{y}$ στον $S$ δινεται απο την σχεση

$$proj\left(\mathbf{y}, \mathbf{S}\right) = \frac{\mathbf{y} \circ \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_1} \cdot \mathbf{x}_1 + \frac{\mathbf{y} \circ \mathbf{x}_2}{\mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_2} \cdot \mathbf{x}_2 + ... + \frac{\mathbf{y} \circ \mathbf{x}_M}{\mathbf{x}_M \circ \mathbf{x}_M} \cdot \mathbf{x}_M.$$

**10.1.15.** Το $||\mathbf{Ax} - \mathbf{b}||^2$ ελαχιστοποιειται οταν $\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b}$.

**10.1.16.** Εστω $M \times N$ πινακας $\mathbf{A}$. Γραφουμε τον *πινακα προβολης* που αντιστοιχει στον $\mathbf{A}$ ως $\mathbf{P}_A$ και τον οριζουμε ως εξης:

$$\mathbf{P}_A = \mathbf{A} \cdot \left(\mathbf{A}^T \mathbf{A}\right)^{-1} \cdot \mathbf{A}^T.$$

**10.1.17.** Εστω $S$ ενας διανυσματικος υποχωρος του $\mathbb{R}^M$ και $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_N \in \mathbb{R}^M$ τετοια ωστε $S = span\left(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_N\right)$ Θετουμε $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & ... & \mathbf{a}_N \end{array}\right]$. Για καθε $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^M$, η προβολη του $\mathbf{b}$ στο $S$ ειναι το $\mathbf{P}_A \mathbf{b}$.

**10.1.18.** Εστω διανυσματα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_N \in R^M$. Θετουμε $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & ... & \mathbf{a}_N \end{array}\right]$. Για καθε $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^M$, η προβολη του $\mathbf{b}$ στο $im\left(\mathbf{A}\right)$ ειναι το $\mathbf{P}_A \mathbf{b}$.

**10.1.19.** Εστω $M \times N$ πινακας $\mathbf{A}$ και $\mathbf{P}_A$ ο αντιστοιχος πινακας προβολης. Ισχυουν τα εξης.

1. Ο $\mathbf{P}_A$ ειναι $M \times M$ (δηλ. ο $\mathbf{P}_A$ ειναι *τετραγωνικος*)..
2. $\mathbf{P}_A^T = \mathbf{P}_A$ (δηλ. ο $\mathbf{P}_A$ ειναι *συμμετρικος*).
3. Για $k = 1, 2, ...$ εχουμε $\left(\mathbf{P}_A\right)^k = \mathbf{P}_A$ (δηλ. ο $\mathbf{P}_A$ ειναι *ταυτοδυναμος*)

**10.1.20.** Καθε τετραγωνικος πινακας $\mathbf{P}$ ο οποιος ικανοποιει $\mathbf{PP} = \mathbf{P}$ και $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}$ ειναι πινακας προβολης στον υποχωρο $im\left(\mathbf{P}\right)$.

## 10.2 Λυμενα Προβληματα

**10.2.1.** Εστω διανυσματα

$$\mathbf{x}_1 = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right], \mathbf{x}_2 = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right], \mathbf{y} = \left[\begin{array}{c} 3 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right].$$

Δειξτε οτι το $\mathbf{y}$ ειναι ορθογωνιο στον υποχωρο $S = span\left(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\right)$.

**Απαντηση**. Διοτι, προφανως τα $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ ειναι μια ορθογωνια βαση του $S$ και εχουμε

$$\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{y} = 0 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$$
$$\mathbf{x}_2 \circ \mathbf{y} = 0 \cdot 3 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0.$$

Αρα $\mathbf{y} \perp S$, συμφωνα με το 10.1.13.

**10.2.2.** Εστω διανυσματα

$$\mathbf{x}_1 = \left[\begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 3 \end{array}\right], \mathbf{x}_2 = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 4 \end{array}\right], \mathbf{y} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right].$$

Δειξτε οτι το $\mathbf{y}$ ειναι ορθογωνιο στον υποχωρο $S = span\left(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\right)$.

**Απαντηση**. Διοτι, τα $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ ειναι γρ. αν. και αρα ειναι μια βαση του $S$ (οχι ορθογωνια). Επισης εχουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{y} &= 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 0\\ \mathbf{x}_2 \circ \mathbf{y} &= 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Αρα $\mathbf{y} \perp S$.

**10.2.3.** Εστω διανυσματα

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Δειξτε οτι το $\mathbf{y}$ ειναι ορθογωνιο στον υποχωρο $S = span\,(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$.

**Απαντηση**. Διοτι, τα $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ ειναι γρ. αν. και αρα ειναι μια βαση του $S$ (οχι ορθογωνια). Επισης εχουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{y} &= -2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 0\\ \mathbf{x}_2 \circ \mathbf{y} &= -1 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 0.\end{aligned}$$

Αρα $\mathbf{y} \perp S$.

**10.2.4.** Αποδειξτε το 10.1.3.

**Απαντηση**. Εστω τυχον $\mathbf{z} \in S = span\,(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_M)$. Θα ειναι

$$\mathbf{z} = a_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{x}_2 + ... + a_M\mathbf{x}_M.$$

Τοτε

$$\begin{aligned}\mathbf{y} \circ \mathbf{z} &= \mathbf{y} \circ (a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + ... + a_M\mathbf{x}_M)\\ &= a_1\mathbf{y} \circ \mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{y} \circ \mathbf{x}_2 + ... + a_M\mathbf{y} \circ \mathbf{x}_M\\ &= a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + ... + a_M \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Με αλλα λογια, $\mathbf{y} \in S^{\perp}$, το ορθογωνιο συμπληρωμα του $S = span\,(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_M)$.

**10.2.5.** Εστω οι υποχωροι

$$S = \left\{ \mathbf{x} : \mathbf{x} = a \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}, \quad T = \left\{ \mathbf{x} : \mathbf{x} = b \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Δειξτε οτι $S \perp T$.

**Απαντηση**. Διοτι, για τυχοντα $\mathbf{x} \in S$ και $\mathbf{y} \in T$ θα εχουμε

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = \left( a \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \circ \left( b \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = a \cdot b \cdot (-1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2) = 0.$$

**10.2.6.** Εστω οι υποχωροι

$$S=\left\{\mathbf{x}:\mathbf{x}=a\cdot\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix},a\in\mathbb{R}\right\},\quad T=\left\{\mathbf{x}:\mathbf{x}=b\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\\2\end{bmatrix},b\in\mathbb{R}\right\}.$$

Δειξτε οτι $S\perp T$.

**Απαντηση**. Διοτι, για τυχοντα $\mathbf{x}\in S$ και $\mathbf{y}\in T$ θα εχουμε

$$\mathbf{x}\circ\mathbf{y}=\left(a\cdot\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\right)\circ\left(b\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\\2\end{bmatrix}\right)=a\cdot b\cdot\left(-1\cdot0+1\cdot1+1\cdot0-\frac{1}{2}\cdot2\right)=0.$$

**10.2.7.** Εστω οι υποχωροι

$$S=\left\{\mathbf{x}:\mathbf{x}=a\cdot\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix},a\in\mathbb{R}\right\},\quad T=\left\{\mathbf{x}:\mathbf{x}=b\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\\2\end{bmatrix}+c\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\\2\end{bmatrix},b,c\in\mathbb{R}\right\}.$$

Δειξτε οτι $S\perp T$.

**Απαντηση**. Για τυχοντα $\mathbf{x}\in S$ και $\mathbf{y}\in T$ εχουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{x}\circ\mathbf{y}&=\left(a\cdot\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\right)\circ\left(b\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\\2\end{bmatrix}+c\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\\2\end{bmatrix}\right)\\&=a\cdot b\cdot\left(-1\cdot0+1\cdot1+1\cdot0-\frac{1}{2}\cdot2\right)+a\cdot c\cdot\left(-1\cdot1+1\cdot1+1\cdot1-\frac{1}{2}\cdot2\right)=0.\end{aligned}$$

**10.2.8.** Εστω

$$\mathbf{y}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\mathbf{z}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}.$$

Βρειτε ενα διανυσμα

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}^T$$

που να ειναι ορθογωνιο στον υποχωρο $S=span\,(\mathbf{y},\mathbf{z})$.

**Απαντηση**. Αρκει να εχουμε $\mathbf{x}\circ\mathbf{y}=\mathbf{x}\circ\mathbf{z}=0$. Αρα θα λυσουμε το συστημα

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}.$$

Αυτο εχει την οικογενεια λυσεων (ευθεια)

$$a\cdot\begin{bmatrix}-a & 0 & a\end{bmatrix}^T.$$

Αρα το

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \perp span\left(\mathbf{y}, \mathbf{z}\right).$$

Γενικοτερα, αν θεσουμε

$$T = \left\{ \mathbf{x} : \mathbf{x} = a \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$$

(το $T$ ειναι ενας υποχωρος) τοτε $T \perp S$.

**10.2.9.** Οριζουμε τα διανυσματα

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Εστω ο υποχωρος

$$S = \left\{ \mathbf{x} : \mathbf{x} = a \cdot \mathbf{u}_1 + b \cdot \mathbf{u}_2 \text{ οπου } a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Βρειτε το $S^{\perp}$, δηλ. το ορθογωνιο συμπληρωμα του $S$.

**Απαντηση**. Αυτο ειναι το συνολο ολων των $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^4$ τα οποια ικανοποιουν $\mathbf{x} \circ \mathbf{y}$=0 για καθε $\mathbf{y} \in S$. Δηλ. ισχυει

$$(a \cdot \mathbf{u}_1 + b \cdot \mathbf{u}_2) \circ \mathbf{y} = 0 \tag{10.1}$$

για *καθε* τιμη των $a, b \in R$. Αρα η (10.1) θα ισχυει και για $a = 1, b = 0$ οπως και για $a = 0, b = 1$. Δηλ θα εχουμε το συστημα

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

το οποιο εχει την οικογενεια λυσεων

$$T = \left\{ \mathbf{y} : \mathbf{y} = c \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ οπου } c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Καθε $\mathbf{y} \in T$ ικανοποιει $\mathbf{u}_1 \circ \mathbf{y} = \mathbf{u}_1 \circ \mathbf{y} = 0$, αρα (αφου τα $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ ειναι βαση του $S$) και $S \perp \mathbf{y}$. Αφου αυτο ισχυει για καθε $\mathbf{y} \in T$, εχουμε $S^{\perp} = T$.

**10.2.10.** Οριζουμε το διανυσμα $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. Εστω ο υποχωρος

$$S = \left\{ \mathbf{x} : \mathbf{x} = a \cdot \mathbf{u} \text{ οπου } a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Θα βρουμε το $S^{\perp}$, δηλ. το ορθογωνιο συμπληρωμα του $S$. Αυτο ειναι το συνολο ολων των $\mathbf{y} \in R^4$ τα οποια ικανοποιουν $\mathbf{x} \circ \mathbf{y}$=0 για καθε $\mathbf{y} \in S$. Αρκει να ισχυει

$$\mathbf{u} \circ \mathbf{y} = 0$$

δηλ.

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array}\right] = [0]$$

το οποιο (προφανως) εχει την οικογενεια λυσεων

$$T = \left\{ \mathbf{y} : \mathbf{y} = b \cdot \left[\begin{array}{r} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{4} \end{array}\right] + c \cdot \left[\begin{array}{r} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{2}{4} \end{array}\right] + d \cdot \left[\begin{array}{r} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{3}{4} \end{array}\right] \text{ οπου } b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Οποτε εχουμε $S^{\perp} = T$.

**10.2.11.** Αποδειξτε το 10.1.5.

**Απαντηση**. Εστω $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S^{\perp}$ και $a, b \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{z} \in S$. Τοτε

$$(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) \circ \mathbf{z} = a\mathbf{x} \circ \mathbf{z} + b\mathbf{y} \circ \mathbf{z} = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0,$$

δηλ. $S^{\perp}$ ειναι ενας διανυσματικος χωρος.

**10.2.12.** Δειξτε οτι τα διανυσματα

$$\mathbf{x}_1 = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right], \mathbf{x}_2 = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right]$$

ειναι μια ορθοκανονικη βαση του $\mathbb{R}^2$.

**Απαντηση**. Προφανως καθε $\mathbf{y} = \left[\begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array}\right]^T \in \mathbb{R}^2$ μπορει να γραφτει ως

$$\mathbf{y} = y_1 \cdot \mathbf{x}_1 + y_2 \cdot \mathbf{x}_2,$$

επισης $\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_2 = 0$ και τελος $||\mathbf{x}_1|| = ||\mathbf{x}_2|| = 1$. Αρα τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ ειναι μια ορθοκανονικη βαση του $\mathbb{R}^2$.

**10.2.13.** Δειξτε οτι τα διανυσματα

$$\mathbf{x}_1 = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right], \mathbf{x}_2 = \left[\begin{array}{r} -1 \\ 1 \end{array}\right]$$

ειναι μια ορθογωνια βαση του $\mathbb{R}^2$.

**Απαντηση**. Εχουμε $\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_2 = 0$ και επιπλεον

$$\left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{array} \right| = 2 \neq 0$$

αρα τα $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ ειναι γραμμικα ανεξαρτητα. Εχουμε $||\mathbf{x}_1|| = ||\mathbf{x}_2|| = \sqrt{2}$, αρα η βαση *δεν* ειναι ορθοκανονικη. Ομως τα διανυσματα $\mathbf{y}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{x}_1$, $\mathbf{y}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{x}_2$ ικανοποιουν $\|\mathbf{y}_1\| = \|\mathbf{y}_1\| = 1$ *ειναι* μια ορθοκανονικη βαση του $\mathbb{R}^2$.

**10.2.14.** Δειξτε οτι τα διανυσματα

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ειναι μια ορθογωνια βαση του $\mathbb{R}^3$.

**Απαντηση**. Πραγματι ειναι ευκολο να ελεγξουμε οτι $\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_3 \circ \mathbf{x}_1 = 0$, δηλ. οτι τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ ειναι αμοιβαια ορθογωνια (και αρα γραμμικα ανεξαρτητα). Τρια γρ. αν. διανυσματα στον $\mathbb{R}^3$ αποτελουν μια βαση (διοτι $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$).

**10.2.15.** Δειξτε οτι τα διανυσματα

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ειναι μια ορθογωνια βαση του $span(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$.

**Απαντηση**. Προφανως $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ ειναι μια βαση του $span(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$. Επισης ευκολα μπορουμε να δουμε οτι $\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_2 = 0$.

**10.2.16.** Αποδειξτε το 10.1.8.

**Απαντηση**. Εστω $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_M \in \mathbb{R}^N$ τετοια ωστε $\mathbf{x}_m \circ \mathbf{x}_n = 0$ (για $m, n = 1, 2, ..., M$ και $m \neq n$) και εστω αριθμοι $a_1, a_2, ..., a_M$ τ.ω.

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + ... + a_M\mathbf{x}_M = 0.$$

Πολλαπλασιαζουμε με $\mathbf{x}_m$ για τυχον $m \in \{1, ..., M\}$ και παιρνουμε

$$\begin{aligned} 0 &= (a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + ... + a_M\mathbf{x}_M) \circ \mathbf{x}_m \\ &= a_1\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_m + a_2\mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_m + ... + a_m\mathbf{x}_m \circ \mathbf{x}_m + ... + a_M\mathbf{x}_M \circ \mathbf{x}_m \\ &= a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + ... + a_m \cdot \|\mathbf{x}_m\| + ... + a_M \cdot 0 = a_m \cdot \|\mathbf{x}_m\|. \end{aligned}$$

Αρα $a_m \cdot \|\mathbf{x}_m\| = 0$ που σημαινει οτι $a_m = 0$. Αφου αυτο ισχυει για *καθε* $m \in \{1, ..., M\}$. Αρα τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_M$ ειναι γραμμικα ανεξαρτητα.

**10.2.17.** Αποδειξτε το 10.1.9.

**Απαντηση**. Εστω γραμμικος υποχωρος $S \subseteq \mathbb{R}^N$ με $\dim(S) = M$, εστω $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_M \in S$ τετοια ωστε (για $m, n = 1, 2, ..., M$ και $m \neq n$) εχουμε $\mathbf{x}_m \circ \mathbf{x}_n = 0$. Συμφωνα με το 10.1.8, το $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_M\}$ ειναι ενα γρ.αν. συνολο, με $M$ στοιχεια. Αρα ειναι μια βαση του $S$. Αφου τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_M$ ειναι και μεταξυ τους ορθογωνια, το $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_M\}$ ειναι μια ορθογωνια βαση του $S$.

**10.2.18.** Βρειτε μια ορθογωνια βαση του $\mathbb{R}^3$ η οποια να περιεχει τα διανυσματα

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

**Απαντηση**. Ευκολα βλεπουμε οτι τα $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ ειναι γραμμικα ανεξαρτητα και ορθογωνια. Θα τα συμπληρωσουμε με ενα ακομη διανυσμα, το $\mathbf{x}_3$ ωστε το $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ να ειναι μια ορθογωνια βαση του $\mathbb{R}^3$. Ζητουμε ενα διανυσμα $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{bmatrix}^T$ που να ικανοποιει $\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_3 = 0$. Δηλ. πρεπει να ισχυει

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Οι λυσεις εχουν την μορφη $a \cdot \begin{bmatrix} -a & a & 0 \end{bmatrix}^T$. Θετοντας $a = 1$ παιρνουμε $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$.

**10.2.19.** Βρειτε μια ορθογωνια βαση του $span\,(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, οπου

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση**. Ευκολα βλεπουμε οτι τα $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ ειναι γραμμικα ανεξαρτητα αλλα οχι ορθογωνια. Θα δημιουργησουμε δυο νεα, μεταξυ τους ορθογωνια, διανυσματα $\mathbf{y}_1$,$\mathbf{y}_2$ τετοια ωστε το

$$span\,(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = span\,(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$$

να ειναι γραμμικα ανεξαρτητο. Ας θεσουμε $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1$. Κατοπιν θετουμε

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 - proj\,(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1) = \mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_2 \circ \mathbf{y}_1}{\mathbf{y}_1 \circ \mathbf{y}_1} \cdot \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_1} \cdot \mathbf{x}_1.$$

Πραγματι

$$\mathbf{y}_1 \circ \mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_1 \circ \left( \mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_1} \cdot \mathbf{x}_1 \right) = \mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_1} \cdot \mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_1 = 0$$

και, προφανως, αφου $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1$ και το $\mathbf{y}_2$ ειναι γραμμικος συνδυασμος τω $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ εχουμε $span\,(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = span\,(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$.

**10.2.20.** Βρειτε μια ορθογωνια βαση του $span\,(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$, οπου

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

**Απαντηση**. Τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ ειναι γραμμικα ανεξαρτητα (αλλα οχι ορθογωνια) και αρα ειναι μια βαση του $\mathbb{R}^3$. Θα βρουμε τωρα μια αλλη, ορθογωνια βαση με την διαδικασια

*Gram-Schmidt*.

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_2 \circ \mathbf{y}_1}{\mathbf{y}_1 \circ \mathbf{y}_1}\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\mathbf{x}_2 \circ \mathbf{y}_1}{\mathbf{y}_1 \circ \mathbf{y}_1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{x}_3 - \frac{\mathbf{x}_3 \circ \mathbf{y}_1}{\mathbf{y}_1 \circ \mathbf{y}_1}\mathbf{y}_1 - \frac{\mathbf{x}_3 \circ \mathbf{y}_2}{\mathbf{y}_2 \circ \mathbf{y}_2}\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{3}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{8/3}\begin{bmatrix} -4/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

**10.2.21.** Βρειτε μια ορθογωνια βαση του *span* $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4)$, οπου

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση**. Τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$ ειναι γραμμικα ανεξαρτητα και αρα ειναι μια βαση του $\mathbb{R}^4$. Θα βρουμε τωρα μια ορθογωνια βαση με την διαδικασια *Gram-Schmidt*.

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_2 \circ \mathbf{y}_1}{\mathbf{y}_1 \circ \mathbf{y}_1}\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{x}_3 - \frac{\mathbf{x}_3 \circ \mathbf{y}_1}{\mathbf{y}_1 \circ \mathbf{y}_1}\mathbf{y}_1 - \frac{\mathbf{x}_3 \circ \mathbf{y}_2}{\mathbf{y}_2 \circ \mathbf{y}_2}\mathbf{y}_2$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{4}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{\frac{11}{4}}\begin{bmatrix} -\frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{11} \\ \frac{2}{11} \\ -\frac{6}{11} \\ \frac{5}{11} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{x}_4 - \frac{\mathbf{x}_4 \circ \mathbf{y}_1}{\mathbf{y}_1 \circ \mathbf{y}_1}\mathbf{y}_1 - \frac{\mathbf{x}_4 \circ \mathbf{y}_2}{\mathbf{y}_2 \circ \mathbf{y}_2}\mathbf{y}_2 - \frac{\mathbf{x}_4 \circ \mathbf{y}_3}{\mathbf{y}_3 \circ \mathbf{y}_3}\mathbf{y}_3$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\frac{6}{4}}{\frac{11}{4}}\begin{bmatrix} -\frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} - \frac{-\frac{1}{11}}{\frac{6}{11}}\begin{bmatrix} -\frac{1}{11} \\ \frac{2}{11} \\ -\frac{6}{11} \\ \frac{5}{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

**10.2.22.** Αποδειξτε οτι η διαδικασια *Gram-Schmidt* δινει παντοτε μια ορθογωνια βαση του *span* $(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_M)$ (Εδαφιο 10.1.10).

**Απαντηση**. Θα αποδειξουμε επαγωγικα οτι τα $\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_M$ ειναι μεταξυ τους ορθογωνια. Πιο συγκεκριμενα, θα αποδειξουμε οτι

$$\text{για } m \in \{2, ..., M\}\text{ , το } \mathbf{y}_m \text{ ειναι ορθογωνιο στα } \mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_{m-1}. \tag{10.2}$$

Πραγματι, για $m = 2$ εχουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_2 \cdot \mathbf{y}_1 &= \left(\mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_2 \circ \mathbf{y}_1}{\mathbf{y}_1 \circ \mathbf{y}_1}\mathbf{y}_1\right) \cdot \mathbf{y}_1 \\ &= \mathbf{x}_2 \circ \mathbf{y}_1 - \frac{\mathbf{x}_2 \circ \mathbf{y}_1}{\mathbf{y}_1 \circ \mathbf{y}_1}\mathbf{y}_1 \circ \mathbf{y}_1 = 0.\end{aligned}$$

Εστω οτι η (10.2) ισχυει για $m = 2, 3, ..., k$. Για $m = k + 1$ και τυχον $n \leq k$ εχουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_{k+1} \circ \mathbf{y}_n &= \left(\mathbf{x}_{k+1} - \frac{\mathbf{x}_{k+1} \circ \mathbf{y}_1}{\mathbf{y}_1 \circ \mathbf{y}_1}\mathbf{y}_1 - ... - \frac{\mathbf{x}_{k+1} \circ \mathbf{y}_k}{\mathbf{y}_k \circ \mathbf{y}_k}\mathbf{y}_k\right) \circ \left(\mathbf{x}_{n+1} - \frac{\mathbf{x}_{n+1} \circ \mathbf{y}_1}{\mathbf{y}_1 \circ \mathbf{y}_1}\mathbf{y}_1 - ... - \frac{\mathbf{x}_{n+1} \circ \mathbf{y}_n}{\mathbf{y}_n \circ \mathbf{y}_n}\mathbf{y}_n\right) \\ &=\end{aligned}$$

εστω τυχοντα $m, n \in \{1, 2, ..., M\}$. Τοτε ...

**10.2.23.** Αποδειξτε το 10.1.12

**Απαντηση**. Αφου το $\{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_M\}$ ειναι μια βαση του $S$, καθε $\mathbf{y} \in S$ μπορει να γραφτει ως

$$\mathbf{y} = a_1\mathbf{x}_1 + ... + a_M\mathbf{x}_M. \tag{10.3}$$

Αν πολλαπλασιασουμε την (10.3) με $\mathbf{x}_m$ παρνουμε

$$\mathbf{y} \circ \mathbf{x}_m = (a_1\mathbf{x}_1 + ... + a_M\mathbf{x}_M) \circ \mathbf{x}_m = a_m\mathbf{x}_m \circ \mathbf{x}_m$$

αφου το $\{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_M\}$ ειναι μια *ορθοογωνια* βαση. Αρα, για καθε $m \in \{1, 2, ..., M\}$ εχουμε

$$a_m = \frac{\mathbf{y} \circ \mathbf{x}_m}{\mathbf{x}_m \circ \mathbf{x}_m}$$

και εχουμε αποδειξει το ζητουμενο.

**10.2.24.** Αποδειξτε το 10.1.13

**Απαντηση**. Τα $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ προφανως μπορουν να γραφτουν ως γραμμικοι συνδυασμοι των διανυσματων της βασης:

$$\begin{aligned}\mathbf{y} &= a_1 \cdot \mathbf{x}_1 + a_2 \cdot \mathbf{x}_2 + ... + a_M \cdot \mathbf{x}_M, \\ \mathbf{z} &= b_1 \cdot \mathbf{x}_1 + b_2 \cdot \mathbf{x}_2 + ... + b_M \cdot \mathbf{x}_M.\end{aligned}$$

Τοτε

$$\begin{aligned}\mathbf{y} \circ \mathbf{z} &= (a_1 \cdot \mathbf{x}_1 + a_2 \cdot \mathbf{x}_2 + ... + a_M \cdot \mathbf{x}_M) \circ (b_1 \cdot \mathbf{x}_1 + b_2 \cdot \mathbf{x}_2 + ... + b_M \cdot \mathbf{x}_M) \\ &= \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M} a_m b_n \mathbf{x}_m \circ \mathbf{x}_n.\end{aligned}$$

Αφου $\mathbf{x}_m \circ \mathbf{x}_n = 0$ για $m \neq n$, τελικα εχουμε

$$\mathbf{y} \circ \mathbf{z} = \sum_{m=1}^{M} a_m b_m \mathbf{x}_m \circ \mathbf{x}_m = \sum_{m=1}^{M} a_m b_m \left\|\mathbf{x}_m\right\| = \sum_{m=1}^{M} a_m b_m \cdot 1 = \sum_{m=1}^{M} a_m b_m.$$

Αν τωρα $\mathbf{y} = \mathbf{z}$, τοτε

$$\left\|\mathbf{y}\right\|^2 = \mathbf{y} \circ \mathbf{y} = \sum_{m=1}^{M} a_m a_m \mathbf{x}_m \circ \mathbf{x}_m = \sum_{m=1}^{M} a_m^2.$$

**10.2.25.** Αποδειξτε το 10.1.14

**Απαντηση**. Πρεπει να αποδειξουμε οτι η ποσοτητα $\left\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\right\|$ ελαχιστοποιειται (ως προς ολα τα διανυσματα $\mathbf{x} \in S$) απο το

$$\mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{y} \circ \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_1} \cdot \mathbf{x}_1 + \frac{\mathbf{y} \circ \mathbf{x}_2}{\mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_2} \cdot \mathbf{x}_2 + ... + \frac{\mathbf{y} \circ \mathbf{x}_M}{\mathbf{x}_M \circ \mathbf{x}_M} \cdot \mathbf{x}_M.$$

Αντι να ελαχιστοποιησουμε το $\left\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\right\|$, θα ελαχιστοποιησουμε (ισοδυναμα) το $\left\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\right\|^2$. Πριν ομως κανουμε αυτο, θα δειξουμε οτι, για καθε $\mathbf{z} \in S$ ισχυει $\mathbf{z} \perp (\mathbf{y} - \mathbf{x}^*)$. Πραγματι, το $\mathbf{z}$ μπορει να γραφτει ως αθροισμα των διανυσματων βασησ:

$$\mathbf{z} = a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + ... + a_M\mathbf{x}_M.$$

Τωρα

$$\begin{aligned}&\mathbf{z} \circ (\mathbf{y} - \mathbf{x}^*) \\ &= (a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + ... + a_M\mathbf{x}_M) \circ \left(\mathbf{y} - \frac{\mathbf{y} \circ \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_1} \cdot \mathbf{x}_1 - \frac{\mathbf{y} \circ \mathbf{x}_2}{\mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_2} \cdot \mathbf{x}_2 - ... + \frac{\mathbf{y} \circ \mathbf{x}_M}{\mathbf{x}_M \circ \mathbf{x}_M} \cdot \mathbf{x}_M\right).\end{aligned} \tag{10.4}$$

Εκτελωντας το εσωτερικο γινομενο της (10.4) θα εχουμε ορους της μορφης $\kappa_{mn}\mathbf{x}_m \circ \mathbf{x}_n$. Ολοι αυτοι οι οροι θα μηδενιζονται για $m \neq n$ (γιαιτι;). Οποτε τελικα η (10.4) γινεται

$$a_1\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{y} + ... + a_M\mathbf{x}_M \circ \mathbf{y} - \frac{\mathbf{y} \circ \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_1} \cdot a_1\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_1 - ... - \frac{\mathbf{y} \circ \mathbf{x}_M}{\mathbf{x}_M \circ \mathbf{x}_M} \cdot a_M\mathbf{x}_M \circ \mathbf{x}_M = 0$$

που αποδεικνυει οτι $\mathbf{z} \perp (\mathbf{y} - \mathbf{x}^*)$.

Ας εξετασουμε τωρα την ποσοτητα

$$\begin{aligned}\left\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\right\|^2 &= \left\|\mathbf{y} - \mathbf{x}^* + \mathbf{x}^* - \mathbf{x}\right\|^2 = (\mathbf{y} - \mathbf{x}^* + \mathbf{x}^* - \mathbf{x}) \circ (\mathbf{y} - \mathbf{x}^* + \mathbf{x}^* - \mathbf{x}) \\ &= (\mathbf{y} - \mathbf{x}^*) \circ (\mathbf{y} - \mathbf{x}^*) + 2 \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}^*) \circ (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) + (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) \circ (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) \\ &= \left\|\mathbf{y} - \mathbf{x}^*\right\|^2 + \left\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}\right\|.\end{aligned}$$

Στο τελευταιο βημα χρησιμοποιησαμε $(\mathbf{y} - \mathbf{x}^*) \perp (\mathbf{x}^* - \mathbf{x})$ (γιατι ισχυει αυτο;). Τωρα, η ποσοτητα $\left\|\mathbf{y} - \mathbf{x}^*\right\|^2$ ειναι σταθερη. Αρα, για να ελαχιστοποιησουμε την $\left\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\right\|^2$, αρκει να ελαχιστοποιησουμε την $\left\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}\right\|^2$. Αλλα η ελαχιστη τιμη αυτης ειναι $\left\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}\right\|^2 = 0$ και επιτυγχανεται οταν $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}$, οποτε εχουμε αποδειξει το ζητουμενο.

$$\mathbf{x} = a_1 \cdot \mathbf{x}_1 + a_2 \cdot \mathbf{x}_2 + ... + a_M \cdot \mathbf{x}_M.$$

Θετουμε

$$\left\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\right\|^2 = \left\|\mathbf{y} - \mathbf{x}^* + \mathbf{x}^* - \mathbf{x}\right\|^2$$

**10.2.26.** Αποδειξτε το 10.1.15.

**Απαντηση**. Η αποδειξη θυμιζει αυτη του προηγουμενου εδαφιου. Θετουμε $\mathbf{x}^* = \left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b}$ και, για καθε $\mathbf{x}$, θετουμε $\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ (οποτε και $\mathbf{z}^* = \mathbf{A}\mathbf{x}^*$). Τωρα εχουμε

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b}\|^2 &= \|\mathbf{z}-\mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{z}-\mathbf{z}^*+\mathbf{z}^*-\mathbf{b}\|^2 \\ &= \|\mathbf{z}-\mathbf{z}^*\|^2 + \|\mathbf{z}^*-\mathbf{b}\|^2 + 2\cdot(\mathbf{z}-\mathbf{z}^*)\circ(\mathbf{z}^*-\mathbf{b}).\end{aligned}$$

Τωρα θα δειξουμε οτι $(\mathbf{z}-\mathbf{z}^*)\circ(\mathbf{z}^*-\mathbf{b}) = 0$. Πραγματι, ας θεσουμε $\mathbf{u} = \mathbf{x}-\mathbf{x}^*$, τοτε εχουμε

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{z}-\mathbf{z}^*$$

και

$$\begin{aligned}(\mathbf{z}-\mathbf{z}^*)\circ(\mathbf{z}^*-\mathbf{b}) &= (\mathbf{A}\mathbf{u})\circ(\mathbf{z}^*-\mathbf{b}) = \mathbf{u}^T\mathbf{A}^T\cdot(\mathbf{z}^*-\mathbf{b}) \\ &= \mathbf{u}^T\mathbf{A}^T\mathbf{z}^* - \mathbf{u}^T\mathbf{A}^T\mathbf{b} = \mathbf{u}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b} - \mathbf{u}^T\mathbf{A}^T\mathbf{b} \\ &= \mathbf{u}^T\mathbf{A}^T\mathbf{b} - \mathbf{u}^T\mathbf{A}^T\mathbf{b} = 0.\end{aligned}$$

Αρα λοιπον

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{z}-\mathbf{z}^*\|^2 + \|\mathbf{z}^*-\mathbf{b}\|^2$$

και το $\|\mathbf{z}^*-\mathbf{b}\|^2$ ειναι σταθερο, οποτε η συνολικη ποστητα ελαχιστοποιειται οταν $\|\mathbf{z}-\mathbf{z}^*\|^2 = 0$, δηλ. οταν $\mathbf{z} = \mathbf{z}^*$.

**10.2.27.** Βρειτε την λυση ελαχιστου τετραγωνικου σφαλματος για το συστημα

$$x = 2, \quad x = 1, \quad x = 0, \quad 2x = 1.$$

**Απαντηση**. Το συστημα μπορει να γραφει

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\2\end{bmatrix} x = \begin{bmatrix}2\\1\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Θετουμε

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\2\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix}2\\1\\0\\1\end{bmatrix}$$

και, συμφωνα με το Εδαφιο 10.1.15, υπολογιζουμε το $x$ ως εξησ:

$$x = \frac{\mathbf{a}^T\mathbf{b}}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}} = \frac{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\2\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}2\\1\\0\\1\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\2\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}1\\1\\1\\2\end{bmatrix}} = \frac{5}{7}.$$

**10.2.28.** Βρειτε την λυση ελαχιστου τετραγωνικου σφαλματος για το συστημα

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση**. Θετουμε

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

και υπολογιζουμε το

$$x = \frac{\mathbf{a}^T\mathbf{b}}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}} = \frac{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}} = \frac{8}{6}.$$

**10.2.29.** Βρειτε την λυση ελαχιστου τετραγωνικου σφαλματος για το συστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση**. Εχουμε

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

και η λυση ελ. τετρ. σφαλματος για το $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ειναι

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 18 & 7 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{11} \\ \frac{51}{77} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & -\frac{1}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{18}{77} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{11} \\ \frac{51}{77} \end{bmatrix}.$$

**10.2.30.** Βρειτε την λυση ελαχιστου τετραγωνικου σφαλματος για το συστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση**. . Εχουμε

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

και η λυση ελ. τετρ. σφαλματος για το $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ειναι

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{13}{11} & -\frac{7}{11} & -\frac{2}{11} \\ -\frac{7}{11} & \frac{21}{44} & \frac{3}{22} \\ -\frac{2}{11} & \frac{3}{22} & \frac{2}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{12}{11} \\ -\frac{3}{44} \\ \frac{9}{22} \end{bmatrix}.$$

**10.2.31.** Βρειτε την προβολη του $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ στο

$$span \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right).$$

**Απαντηση**. Η προβολη υπολογιζεται ως εξης. Θετουμε

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

οποτε ο πινακας προβολης ειναι

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 14 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{14}{45} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και αρα η προβολη του $\mathbf{z}$ ειναι

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{6}{5} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**10.2.32.** Βρειτε την προβολη του $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}^T$ στο

$$span \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$

**Απαντηση**. Η προβολη υπολογιζεται ως εξης. Θετουμε

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

οποτε

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 18 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{18}{59} & -\frac{7}{59} \\ -\frac{7}{59} & \frac{6}{59} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{10}{59} & \frac{20}{59} & -\frac{3}{59} & \frac{9}{59} \\ \frac{20}{59} & \frac{40}{59} & -\frac{6}{59} & \frac{18}{59} \\ -\frac{3}{59} & -\frac{6}{59} & \frac{54}{59} & \frac{15}{59} \\ \frac{9}{59} & \frac{18}{59} & \frac{15}{59} & \frac{14}{59} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

και αρα η προβολη του $\mathbf{z}$ ειναι

$$\begin{bmatrix} \frac{10}{59} & \frac{20}{59} & -\frac{3}{59} & \frac{9}{59} \\ \frac{20}{59} & \frac{40}{59} & -\frac{6}{59} & \frac{18}{59} \\ -\frac{3}{59} & -\frac{6}{59} & \frac{54}{59} & \frac{15}{59} \\ \frac{9}{59} & \frac{18}{59} & \frac{15}{59} & \frac{14}{59} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{83}{59} \\ \frac{166}{59} \\ \frac{99}{59} \\ \frac{116}{59} \end{bmatrix}.$$

**10.2.33.** Αποδειξτε οτι ο $4 \times 4$ πινακας

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{cccc} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right].$$

ειναι πινακας προβολης.

**Απαντηση**. Ο $\mathbf{P}$ ειναι συμμετρικος (προφανως) και ταυτοδυναμοσ:

$$\left[\begin{array}{cccc} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right]^2 = \left[\begin{array}{cccc} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right].$$

Αρα ο $\mathbf{P}$ ειναι πινακας προβολης στον υποχωρο

$$S = span\left(\left[\begin{array}{c} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{array}\right], \left[\begin{array}{c} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{array}\right], \left[\begin{array}{c} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{array}\right], \left[\begin{array}{c} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{array}\right]\right)$$

Προφανως $\dim(S) = 1$ και μαλιστα

$$S = span\left(\left[\begin{array}{c} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{array}\right], \left[\begin{array}{c} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{array}\right], \left[\begin{array}{c} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{array}\right], \left[\begin{array}{c} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{array}\right]\right) = span\left(\left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right]\right).$$

Αυτος ειναι ο χωρος στον οποιο προβαλλει ο $\mathbf{P}$.

**10.2.34.** Δειξτε οτι ο $3 \times 3$ πινακας

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{array}\right].$$

ειναι πινακας προβολης.

**Απαντηση**. Ο $\mathbf{P}$ ειναι συμμετρικος (προφανως) και ταυτοδυναμοσ: Ειναι συμμετρικος (προφανως) και ταυτοδυναμοσ:

$$\left[\begin{array}{ccc} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{array}\right]^2 = \left[\begin{array}{ccc} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{array}\right].$$

Αρα ο $\mathbf{P}$ ειναι πινακας προβολης στον υποχωρο

$$S = span\left(\left[\begin{array}{c} \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{array}\right], \left[\begin{array}{c} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{array}\right], \left[\begin{array}{c} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} \end{array}\right]\right).$$

Εχουμε $|\mathbf{P}| = 0$, δηλ. $\dim(S) < 3$. Επειδη

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right| = \frac{1}{6} \neq 0$$

(δηλ. ο $S$ εχει δυο γραμμικα ανεξαρτητα διανυσματα) εχουμε $\dim(S) = 2$. Αν παρουμε τα δυο γρ. αν. διανυσματα να ειναι οι δυο πρωτες στηλες του $\mathbf{P}$, τοτε

$$S = span\left( \begin{bmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \right)$$

και αυτο ειναι ο χωρος στον οποιο προβαλλει ο $\mathbf{P}$.

**10.2.35.** ◄ ⋇Δειξτε οτι ο ο $4 \times 4$ πινακας

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{47}{57} & -\frac{2}{57} & \frac{7}{19} & -\frac{5}{57} \\ -\frac{2}{57} & \frac{49}{57} & \frac{8}{57} & \frac{6}{19} \\ \frac{7}{19} & \frac{8}{57} & \frac{11}{57} & \frac{1}{57} \\ -\frac{5}{57} & \frac{6}{19} & \frac{1}{57} & \frac{7}{57} \end{bmatrix}.$$

ειναι πινακας προβολης.

**Απαντηση**. Ο $\mathbf{P}$ ειναι συμμετρικος (προφανως) και ταυτοδυναμοσ:

$$\begin{bmatrix} \frac{47}{57} & -\frac{2}{57} & \frac{7}{19} & -\frac{5}{57} \\ -\frac{2}{57} & \frac{49}{57} & \frac{8}{57} & \frac{6}{19} \\ \frac{7}{19} & \frac{8}{57} & \frac{11}{57} & \frac{1}{57} \\ -\frac{5}{57} & \frac{6}{19} & \frac{1}{57} & \frac{7}{57} \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} \frac{47}{57} & -\frac{2}{57} & \frac{7}{19} & -\frac{5}{57} \\ -\frac{2}{57} & \frac{49}{57} & \frac{8}{57} & \frac{6}{19} \\ \frac{7}{19} & \frac{8}{57} & \frac{11}{57} & \frac{1}{57} \\ -\frac{5}{57} & \frac{6}{19} & \frac{1}{57} & \frac{7}{57} \end{bmatrix}.$$

Αρα ο $\mathbf{P}$ ειναι πινακας προβολης στον υποχωρο

$$S = span\left( \begin{bmatrix} \frac{47}{57} \\ -\frac{2}{57} \\ \frac{7}{19} \\ -\frac{5}{57} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{2}{57} \\ \frac{49}{57} \\ \frac{8}{57} \\ \frac{6}{19} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{7}{19} \\ \frac{8}{57} \\ \frac{11}{57} \\ \frac{1}{57} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{5}{57} \\ \frac{6}{19} \\ \frac{1}{57} \\ \frac{7}{57} \end{bmatrix} \right).$$

Η κλιμακωτη μορφη του $\mathbf{P}$ ειναι

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{57} & \frac{49}{57} & \frac{8}{57} & \frac{6}{19} \\ 0 & \frac{55}{6} & \frac{5}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

αρα $\dim(S) = 2$. Αν παρουμε δυο γρ. αν. διανυσματα του $S$ να ειναι οι δυο πρωτες στηλες του $\mathbf{P}$, τοτε

$$S = span\left( \begin{bmatrix} \frac{47}{57} \\ -\frac{2}{57} \\ \frac{7}{19} \\ -\frac{5}{57} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{2}{57} \\ \frac{49}{57} \\ \frac{8}{57} \\ \frac{6}{19} \end{bmatrix} \right)$$

και αυτο ειναι ο χωρος στον οποιο προβαλλει ο $\mathbf{P}$.

**10.2.36.** $\triangleleft$Αποδειξτε το 10.1.17: αν ο $S$ ειναι διανυσματικος υποχωρος του $\mathbb{R}^M$ και $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_N \in \mathbb{R}^M$ τετοια ωστε $S = span(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_N)$ και $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & ... & \mathbf{a}_N \end{bmatrix}$, τοτε, για καθε $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^M$, η προβολη του $\mathbf{b}$ στο $S$ ειναι το $\mathbf{P}_A\mathbf{b}$.

**Απαντηση**. Πρεπει να αποδειξουμε οτι, απολα τα διανυσματα $\mathbf{y} \in span(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_N)$ , το $\mathbf{y}^*= \mathbf{P}_A\mathbf{b}$ ειναι αυτο που ελαχιστοποιει την ποσοτητα $\|\mathbf{y}-\mathbf{b}\|^2$. Ομως, καθε τετοιο $\mathbf{y}$ μπορει να γραφτει στην μορφη $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, δηλ. ως γραμμικος συνδυασμος των στηλων του $\mathbf{A}$. Οποτε, ζηταμε το διανυσμα $\mathbf{y}^*= \mathbf{A}\mathbf{x}^*$ το οποιο ελαχιστοποιει την ποσοτητα $\|\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b}\|^2$. Αυτο το προβλημα το εχουμε λυσει στο Εδαφιο 10.2.26 και ξερουμε οτι $\mathbf{x}^* = \left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b}$ και αρα $\mathbf{y}^* = \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b}$. Οποτε εχουμε δειξει το ζητουμενο.

**10.2.37.** $\triangleright$Αποδειξτε το 10.1.18: για διανυσματα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_N \in \mathbb{R}^M$ και πινακα $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & ... & \mathbf{a}_N \end{bmatrix}$ και για καθε $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^M$, η προβολη του $\mathbf{b}$ στο $im(\mathbf{A})$ ειναι το $\mathbf{P}_A\mathbf{b}$.

**Απαντηση**. Αυτο ειναι απλα μια διαφορετικη διατυπωση του **;;** (το οποιο αποδειξαμε στο προηγουμενο εδαφιο), επειδη

$$span(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_N) = im(\mathbf{A}).$$

**10.2.38.** $\blacktriangleright$Αποδειξτε το 10.1.19: για καθε $M \times N$ πινακα $\mathbf{A}$, ο αντιστοιχος πινακας προβολης

$$\mathbf{P_A} = \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T$$

ειναι τετραγωνικος, συμμετρικος και ταυτοδυναμος.

**Απαντηση**. Ο $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ και αρα και ο $\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}$ ειναι $N \times N$. Ο $\mathbf{P_A} = \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T$ ειναι $M \times M$, τετραγωνικος. Για την συμμετρικοτητα εχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_\mathbf{A}^T &= \left(\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T\right)^T = \left(\mathbf{A}^T\right)^T\left(\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\right)^T\mathbf{A}^T \\
&= \mathbf{A}\left(\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^T\right)^{-1}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^T\left(\mathbf{A}^T\right)^T\right)^{-1}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T = \mathbf{P}_A.
\end{aligned}$$

Για την ταυτοδυναμια εχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_\mathbf{A}^2 &= \left(\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T\right)\cdot\left(\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T\right) \\
&= \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T \\
&= \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\cdot\mathbf{I}\cdot\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T = \mathbf{P}_A.
\end{aligned}$$

Αφου $\mathbf{P}_\mathbf{A}^2 = \mathbf{P_A}$, εχουμε και $\mathbf{P}_\mathbf{A}^3 = \mathbf{P}_\mathbf{A}^2\mathbf{P_A} = \mathbf{P_A}\mathbf{P_A} = \mathbf{P}_\mathbf{A}^2 = \mathbf{P_A}$ και με αντιστοιχο τροπο δειχνουμε οτι $\mathbf{P}_\mathbf{A}^k = \mathbf{P_A}$ για καθε $k \in \{1, 2, ...\}$. Οποτε εχουμε αποδειξει το ζητουμενο.

## 10.3 Αλυτα Προβληματα

**10.3.1.** Εστω

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Δειξτε οτι $\mathbf{x} \perp span(\mathbf{y}, \mathbf{z})$.

**10.3.2.** Εστω

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}0\\4\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}=\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix},\quad \mathbf{w}=\begin{bmatrix}2\\0\\-2\end{bmatrix}.$$

Δειξτε οτι $\mathbf{u}\perp span\,(\mathbf{v},\mathbf{w})$

**10.3.3.** Για τα $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ του προηγουμενου προβληματος, βρειτε το ορθογωνιο συμπληρωμα του $span\,(\mathbf{u},\mathbf{v})$ και του $span\,(\mathbf{u},\mathbf{w})$.

**(Απ.** $(span\,(\mathbf{u},\mathbf{v}))^{\perp}=\left\{\mathbf{x}=\begin{bmatrix}-3t & 0 & t\end{bmatrix}^T, t\in\mathbb{R}\right\}$, $(span\,(\mathbf{u},\mathbf{w}))^{\perp}=\left\{\mathbf{x}=\begin{bmatrix}t & 0 & t\end{bmatrix}^T, t\in\mathbb{R}\right\}$.**)**

**10.3.4.** Εστω

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}^T,\qquad \mathbf{y}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\end{bmatrix}^T.$$

Βρειτε μια βαση του $(span\,(\mathbf{x},\mathbf{y}))^{\perp}$.

**(Απ.** $\left\{\begin{bmatrix}-2t & t & 0\end{bmatrix}^T, t\in\mathbb{R}\right\}$.**)**

**10.3.5.** Εστω

$$\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\-1\end{bmatrix},\quad \mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\3\end{bmatrix},\quad \mathbf{x}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\-9\\2\end{bmatrix},\quad \mathbf{x}_4=\begin{bmatrix}16\\-13\\1\\3\end{bmatrix}.$$

Δειξτε οτι αυτα ειναι μια ορθογωνια βαση του $\mathbb{R}^4$.

**10.3.6.** Εκφραστε το διανυσματα $\mathbf{y}=\begin{bmatrix}2 & 2 & 2 & -2\end{bmatrix}^T$ ως γραμμικο συνδυασμο των $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3,\mathbf{x}_4$ του προηγουμενου προβληματος.

**(Απ.** $\mathbf{y}=\begin{bmatrix}\frac{3318}{5365} & \frac{34}{37} & \frac{238}{5365} & \frac{34}{1073}\end{bmatrix}^T$.**)**

**10.3.7.** Τα διανυσματα

$$\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

ειναι γραμμικα ανεξαρτητα και αρα ειναι μια βαση του $\mathbb{R}^2$. Βρειτε μια ορθογωνια βαση με την διαδικασια *Gram-Schmidt*.

**(Απ.** $\mathbf{y}_1=[2\quad 1]^T$, $\mathbf{y}_2=[1\quad -2]^T$.**)**

**10.3.8.** Εστω

$$\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{x}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Βρειτε μια ορθογωνια βαση του $span\,(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3)$ με την διαδικασια *Gram-Schmidt*.

**(Απ.** $\mathbf{y}_1=[1\quad 1\quad 1]^T$, $\mathbf{y}_2=[-2/3\quad 1/3\quad 1/3]^T$, $\mathbf{y}_3=[0\quad -1/2\quad 1/2]^T$.**)**

**10.3.9.** Εστω

$$\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\2\\4\end{bmatrix},\quad \mathbf{x}_3=\begin{bmatrix}1\\2\\-4\\-3\end{bmatrix}.$$

Βρειτε μια ορθογωνια βαση του $span\,(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3)$ με την διαδικασια *Gram-Schmidt*.

**(Απ.** $\mathbf{y}_1=[1\quad 1\quad 1\quad 1]^T$, $\mathbf{y}_2=[-1\quad -1\quad 0\quad 2]^T$, $\mathbf{y}_3=[1/2\quad 3/2\quad -3\quad 1]^T$.**)**

**10.3.10.** Εστω

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Βρειτε μια ορθογωνια βαση του $span\,(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$, οπως και την προβολη σε αυτο του $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}^T$.

(**Απ.** $\mathbf{y}_1 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$, $\mathbf{y}_2 = [0 \quad -2 \quad 1 \quad 1]^T$, $\mathbf{y}_3 = [12 \quad -4 \quad -1 \quad -7]^T$, $proj\,(\mathbf{y}) = [-14/70 \quad 158/70 \quad 47/70 \quad 89/70]^T$.)

**10.3.11.** Βρειτε την λυση ελαχιστου σφαλματος για το συστημα

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(**Απ.** $x = \frac{1}{6}$.)

**10.3.12.** Βρειτε την λυση ελαχιστου σφαλματος για το συστημα

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(**Απ.** $x = \frac{3}{8}$.)

**10.3.13.** Βρειτε την λυση ελαχιστου σφαλματος για το συστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(**Απ.** $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T$.)

**10.3.14.** Βρειτε την λυση ελαχιστου σφαλματος για το συστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(**Απ.** $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^T$.)

**10.3.15.** Βρειτε την προβολη του $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ στο

$$span\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$$

.

**(Απ.** $proj\left(\mathbf{z}\right) = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{6}{5} & 1 \end{bmatrix}^T$.**)**

**10.3.16.** Βρειτε την προβολη του $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ στο

$$span\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right).$$

**(Απ.** $proj\left(\mathbf{z}\right) = \begin{bmatrix} \frac{143}{149} & \frac{173}{149} & \frac{122}{149} \end{bmatrix}^T$.**)**

**10.3.17.** Βρειτε την προβολη του $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ στο

$$span\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right).$$

**(Απ.** $proj\left(\mathbf{z}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{3}{206} & \frac{73}{103} & \frac{66}{103} & \frac{59}{206} \end{bmatrix}^T$.**)**

**10.3.18.** Επαληθευστε οτι ο πινακας ο οποιος προβαλλει στο

$$span\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right).$$

ειναι ο

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**10.3.19.** Επαληθευστε οτι ο πινακας ο οποιος προβαλλει στο

$$span\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

ειναι ο

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**10.3.20.** Επαληθευστε οτι ο πινακας ο οποιος προβαλλει στο

$$span\left(\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\1\\5\end{bmatrix}\right)$$

ειναι ο

$$\begin{bmatrix}\frac{29}{110} & \frac{9}{55} & \frac{9}{22}\\ \frac{9}{55} & \frac{53}{55} & -\frac{1}{11}\\ \frac{9}{22} & -\frac{1}{11} & \frac{17}{22}\end{bmatrix}$$

**10.3.21.** Επαληθευστε οτι ο πινακας ο οποιος προβαλλει στο

$$span\left(\begin{bmatrix}3\\2\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\3\\1\\5\end{bmatrix}\right).$$

ειναι ο

$$\begin{bmatrix}\frac{139}{202} & \frac{37}{101} & \frac{41}{202} & -\frac{20}{101}\\ \frac{37}{101} & \frac{75}{202} & \frac{16}{101} & \frac{55}{202}\\ \frac{41}{202} & \frac{16}{101} & \frac{15}{202} & \frac{5}{101}\\ -\frac{20}{101} & \frac{55}{202} & \frac{5}{101} & \frac{175}{202}\end{bmatrix}.$$

**10.3.22.** Επαληθευστε οτι ο

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}\frac{41}{50} & \frac{6}{25} & -\frac{3}{10}\\ \frac{6}{25} & \frac{17}{25} & \frac{2}{5}\\ -\frac{3}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

ειναι πινακας προβολης και βρειτε τον υποχωρο στον οποιο προβαλλει.

(**Απ**. Προβαλλει στο

$$span\left(\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\3\\0\end{bmatrix}\right).$$

**10.3.23.** Επαληθευστε οτι ο

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

ειναι πινακας προβολης και βρειτε τον υποχωρο στον οποιο προβαλλει.

(**Απ**. Προβαλλει στο

$$span\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\right)$$

**10.3.24.** Επαληθευστε οτι ο

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7}\\ \frac{1}{7} & \frac{34}{35} & -\frac{3}{35}\\ \frac{3}{7} & -\frac{3}{35} & \frac{26}{35}\end{bmatrix}$$

ειναι πινακας προβολης και βρειτε τον υποχωρο στον οποιο προβαλλει.

**(Απ**. Προβαλλει στο

$$span\left(\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}\right).$$

**10.3.25.** Εστω

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{y}=\begin{bmatrix}3\\-2\\-5\end{bmatrix},\quad \mathbf{z}=\begin{bmatrix}2\\-1\\-3\end{bmatrix}.$$

Δειξτε οτι $\mathbf{x}\perp span\,(\mathbf{y},\mathbf{z})$.

**10.3.26.** Εστω

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}0\\4\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}=\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix},\quad \mathbf{w}=\begin{bmatrix}2\\0\\-2\end{bmatrix}.$$

Δειξτε οτι $\mathbf{u}\perp span\,(\mathbf{v},\mathbf{w})$.

**10.3.27.** Αποδειξτε οτι καθε τετραγωνικος πινακας $\mathbf{P}$ ο οποιος ικανοποιει $\mathbf{PP}=\mathbf{P}$ και $\mathbf{P}^T=\mathbf{P}$ ειναι πινακας προβολης στον υποχωρο $im\,(\mathbf{P})$.

**10.3.28.** Εστω διανυσματικος χωρος $V$. Δειξτε οτι $S\subseteq\left(S^{\perp}\right)^{\perp}$.

# Κεφάλαιο 11

# Μιγαδικοι Πινακες

## 11.1 Περιληψη

**11.1.1.** Στα προηγουμενα κεφαλαια εχουμε υποθεσει οτι καθε πινακας (και διανυσμα) $\mathbf{A}$ ειναι *πραγματικη* συναρτηση:

$$\mathbf{A} : \{1, 2, ..., M\} \times \{1, 2, ..., N\} \to \mathbb{R}.$$

Τωρα επεκτεινουμε τον ορισμο του πινακα (και του διανυσματος): ενας πινακας ειναι μια ορθογωνια διαταξη *μιγαδικων* αριθμων η, ισοδυναμα, ενα πινακας $\mathbf{A}$ ειναι μια συναρτηση

$$\mathbf{A} : \{1, 2, ..., M\} \times \{1, 2, ..., N\} \to \mathbb{C}.$$

Θα μιλαμε λοιπον για *πραγματικους πινακες* (αυτους που εχουν στοιχεια πραγματικους αριθμους) και *μιγαδικους πινακες* (αυτους που εχουν στοιχεια μιγαδικους αριθμους).

**11.1.2.** Ο κυριοτερος λογος για την παραπανω γενικευση αυτη ειναι οτι στα Κεφαλαια 12 και 13 (σχετικα με τις *ιδιοτιμες*) θα χρειαστουμε μιγαδικους πινακες και διανυσματα.

**11.1.3.** Επιπλεον, η γενικευση στους μιγαδικους πινακες εχει ¨μηδενικο κοστος¨. Ολα οσα εχουμε πει στα προηγουμενα κεφαλαια για τους πραγματικους πινακες ισχυουν εξ ισου και για τους μιγαδικους πινακες[1]. Συγκεκριμενα, ολες οι αλγεβρικες πλευρες της μελετης των πινακων (και των συστηματων γραμμικων εξισωσεων) που ειδαμε στα προηγουμενα κεφαλαια εξακολουθουν να ισχυουν και για τους μιγαδικους πινακες, οπως επισης και η γενικη θεωρια των διανυσματικων χωρων. *Αυτο συμβαινει γιατι ολες οι εννοιες που εχουμε χρησιμοποιησει στηριζονται στις απλες αριθμητικες πραξεις (προσθεση, αφαιρεση, πολλαπλασιασμο, διαιρεση) οι οποιες γενικευονται αμεσα στο συνολο των μιγαδικων αριθμων.*

**11.1.4.** Μπορουμε επισης να γενικευσουμε τον ορισμο του εσωτερικου γινομενου ωστε να εφαρμοζεται και για μιγαδικα διανυσματα. Ο ορισμος που θα δοθει στην **19.1.2** ειναι *επεκταση* αυτου της **9.1.1**, δηλ. οταν $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$, ο παλιος και ο νεος ορισμος δινουν το ιδιο αποτελεσμα (γι' αυτο και χρησιμοποιουμε το ιδιο συμβολο $\circ$).

[1] Με μονη εξαιρεση την γεωμετρικη ερμηνεια των διανυσματων ως σημειων του χωρου· πραγματι, οι χωροι $\mathbb{C}^2$ και $\mathbb{C}^N$ δεν εχουν προφανη αντιστοιχια με τον φυσικο χωρο.

**11.1.5.** Για καθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^N$, το *εσωτερικο γινομενο* των $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ γραφεται ως $\mathbf{x} \circ \mathbf{y}$ και οριζεται ως εξης:

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + ... + x_N\overline{y}_N. \tag{11.1}$$

**11.1.6.** Για καθε $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$ και $a, b \in \mathbb{C}$ εχουμε

1. $\mathbf{x} \circ \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2 \geq 0.$
2. $\mathbf{x} \circ \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}.$
3. $\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = \overline{\mathbf{y} \circ \mathbf{x}}.$
4. $\mathbf{x} \circ (a \cdot \mathbf{y} + b\mathbf{z}) = \overline{a} \cdot (\mathbf{x} \circ \mathbf{y}) + \overline{b} \cdot (\mathbf{x} \circ \mathbf{z}).$
5. $(a \cdot \mathbf{x}) \circ \mathbf{y} = \mathbf{x} \circ (\overline{a} \cdot \mathbf{y}) = a \cdot (\mathbf{x} \circ \mathbf{y}).$

**11.1.7.** Εστω $M \times N$ πινακας $\mathbf{A}$. Ο *συζυγης αναστροφος* του $\mathbf{A}$ συμβολιζεται με $\mathbf{A}^H$ και οριζεται ως εξης:

$$\left(\mathbf{A}^H\right)_{mn} = \overline{(\mathbf{A})_{nm}}.$$

Αν ο $\mathbf{A}$ ειναι *πραγματικος* πινακας, ο συζυγης αναστροφος ταυτιζεται με τον αναστροφο: $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}^T$.

**11.1.8.** Ενας πινακας λεγεται *ερμιτιανος* αν $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}$ και *αντιερμιτιανος* αν $\mathbf{A}^H = -\mathbf{A}$.

**11.1.9.** Αν θεωρησουμε τα $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ως $1 \times N$ πινακες (γραμμεσες), τοτε ισοδυναμα με την (19.1) εχουμε

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = \mathbf{x}\mathbf{y}^H.$$

**11.1.10.** Δυο διανυσματα $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^N$ λεγονται ορθογωνια ανν $\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = \mathbf{x}\mathbf{y}^H = 0.$

## 11.2 Θεωρια και Παραδειγματα

**11.2.1.** Υπολογιστε το αθροισμα $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ και τα γινομενα $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BA}$ των πινακων

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1+i & i \\ 2 & 1-i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2-i & i \\ 3 & 1+i \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση**. Το αθροισμα ειναι

$$\begin{aligned}\mathbf{A} + \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 1+i & i \\ 2 & 1-i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2-i & i \\ 3 & 1+i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+i+2+i & i+i \\ 2+3 & 1-i+1+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2i & 2i \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Το γινομενο ειναι

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 1+i & i \\ 2 & 1-i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2-i & i \\ 3 & 1+i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1+i)(2-i) + i3 & (1+i)i + i(1+i) \\ 2(2-i) + (1-i)3 & 2i + (1-i)(1-i) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3+4i & -2+2i \\ 7-5i & 2+2i \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

**11.2.2.** Υπολογιστε τα γινομενα **AB, BA** των πινακων

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} i & 2+3i & 1 \\ 2 & 1-i & i \\ 2i & 1+i & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 2-i & i & 3 \\ 3 & 1+1 & 2-i \\ 1 & i & 4+i \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση**. Ειναι

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix} i & 2+3i & 1 \\ 2 & 1-i & i \\ 2i & 1+i & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2-i & i & 3 \\ 3 & 1+1 & 2-i \\ 1 & i & 4+i \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} 8+11i & 3+7i & 11+8i \\ 7-4i & 1 & 6+i \\ 8+7i & 5i & 15+10i \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{BA}=\begin{bmatrix} 2-i & i & 3 \\ 3 & 1+1 & 2-i \\ 1 & i & 4+i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & 2+3i & 1 \\ 2 & 1-i & i \\ 2i & 1+i & 3 \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} 1+10i & 11+8i & 10-i \\ 6+7i & 11+8i & 9-i \\ -2+11i & 6+9i & 12+3i \end{bmatrix}.$$

**11.2.3.** Υπολογιστε τα $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^3$ για τον πινακα

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1+i & i \\ 2 & 1-i \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση**. Ειναι

$$\mathbf{A}^2=\mathbf{AA}=\begin{bmatrix} 1+i & i \\ 2 & 1-i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+i & i \\ 2 & 1-i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4i & 2i \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$\mathbf{A}^3=\mathbf{A}^2\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 4i & 2i \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+i & i \\ 2 & 1-i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4+8i & -2+2i \\ 4+4i & 4i \end{bmatrix}.$$

**11.2.4.** Υπολογιστε τα $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^3$ για τον πινακα

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1+i & 3 & i \\ 4 & 1-2i & 1 \\ 2 & i & 1-i \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση**. Ειναι

$$\mathbf{A}^2=\mathbf{AA}=\begin{bmatrix} 1+i & 3 & i \\ 4 & 1-2i & 1 \\ 2 & i & 1-i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+i & 3 & i \\ 4 & 1-2i & 1 \\ 2 & i & 1-i \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} 12+4i & 5-3i & 3+2i \\ 10-4i & 9-3i & 2+i \\ 4+4i & 9+2i & i \end{bmatrix}$$

και

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 12+4i & 5-3i & 3+2i \\ 10-4i & 9-3i & 2+i \\ 4+4i & 9+2i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+i & 3 & i \\ 4 & 1-2i & 1 \\ 2 & i & 1-i \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 34+8i & 33+2i & 6+8i \\ 54-4i & 32-31i & 16+6i \\ 36+18i & 24-4i & 6+7i \end{bmatrix}.$$

**11.2.5.** Δινονται οι πινακες ($a, b \in \mathbb{R}$)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & c+id \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & -d & c \end{bmatrix},$$

Υπολογιστε τις δυναμεις $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{B}^2$. Τι παρατηρειτε; Υπολογιστε τις δυναμεις $\mathbf{A}^3$, $\mathbf{B}^3$. Μπορειτε να γενικευσετε τα συμπερασματα σας;

**Απαντηση**. Καταρχην ο $\mathbf{A}$ ειναι διαγωνιος πινακας, και ο $\mathbf{B}$ ειναι διαμερισμενος διαγωνιοσ:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{12} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}_{11} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}_{22} = \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}.$$

Επισης, το στοιχειο $a_{11}$ αντιστοιχιζεται στον υποπινακα $\mathbf{B}_{11}$ και το στοιχειο $a_{22}$ αντιστοιχιζεται στον υποπινακα $\mathbf{B}_{22}$

$$a+ib \rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \qquad c+id \rightarrow \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}.$$

Τωρα, παιρνοντας τετραγωνα εχουμε

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & c+id \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} a^2+2iab-b^2 & 0 \\ 0 & c^2+2icd-d^2 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & -d & c \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} a^2-b^2 & 2ab & 0 & 0 \\ -2ab & a^2-b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^2-d^2 & 2cd \\ 0 & 0 & -2cd & c^2-d^2 \end{bmatrix}.$$

Ο $\mathbf{A}^2$ ειναι διαγωνιος και ο $\mathbf{B}^2$ ειναι διαμερισμενος διαγωνιος (και τα δυο ηταν αναμενομενα). Επιπλεον, η αντιστοιχιση μεταξυ στοιχειων και υποπινακων εξακολουθει να ισχυει:

$$(a+ib)^2 = a^2-b^2+2iab \rightarrow \begin{bmatrix} a^2-b^2 & 2ab \\ -2ab & a^2-b^2 \end{bmatrix},$$
$$(c+id)^2 = c^2-d^2+2icd \rightarrow \begin{bmatrix} c^2-d^2 & 2cd \\ -2cd & c^2-d^2 \end{bmatrix}.$$

Συγκρινοντας τους $\mathbf{A}^3$, $\mathbf{B}^3$ εχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^3 &= \begin{bmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & c+id \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^2+2iab-b^2 & 0 \\ 0 & c^2+2icd-d^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a^3+3ia^2b-3ab^2-ib^3 & 0 \\ 0 & c^3+3ic^2d-3cd^2-id^3 \end{bmatrix} \\
\mathbf{B}^3 &= \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & -d & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^2-b^2 & 2ab & 0 & 0 \\ -2ab & a^2-b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^2-d^2 & 2cd \\ 0 & 0 & -2cd & c^2-d^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a^3-3ab^2 & 3a^2b-b^3 & 0 & 0 \\ b^3-3a^2b & a^3-3ab^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^3-3cd^2 & 3c^2d-d^3 \\ 0 & 0 & d^3-3c^2d & c^3-3cd^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

και η απεικονιση εξακολουθει να ισχυει.

Μπορειτε να αποδειξετε οτι για καθε $K \in \{0,1,2,3,4,...\}$ θα εχουμε

$$\left(\mathbf{A}^K\right)_{11} = \left(\mathbf{B}^K\right)_{11}, \qquad \left(\mathbf{A}^K\right)_{22} = \left(\mathbf{B}^K\right)_{22};$$

**11.2.6.** Βρειτε τον αναστροφο συζυγη $\mathbf{A}^H$ του πινακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3+2i & 2+i \\ 3-2i & 1 & 2-3ii \\ 2-i & 2+3i & 2 \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση**. Ειναι

$$\mathbf{A}^H = \begin{bmatrix} 1 & 3+2i & 2+i \\ 3-2i & 1 & 2-3ii \\ 2-i & 2+3i & 2 \end{bmatrix}^H = \begin{bmatrix} 1 & 3+2i & 2+i \\ 3-2i & 1 & 2-3i \\ 2-i & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

**11.2.7.** Αποδειξτε οτι για καθε $M \times N$ πινακα $\mathbf{A}$, εχουμε $\left(\mathbf{A}^H\right)^H = \mathbf{A}$.

**Απαντηση**. Για καθε $m \in \{1,...,M\}$ και $n \in \{1,...,N\}$ εχουμε

$$\left(\left(\mathbf{A}^H\right)^H\right)_{mn} = \overline{\left(\left(\mathbf{A}^H\right)_{nm}\right)} = \overline{\left(\overline{(\mathbf{A})_{mn}}\right)} = \overline{\left(\overline{a_{mn}}\right)} = a_{mn} = (\mathbf{A})_{mn}.$$

Αρα $\left(\mathbf{A}^H\right)^H = \mathbf{A}$.

**11.2.8.** Ποιοι απο τους παρακατω πινακες ειναι ερμιτιανοι και ποιοι αντιερμιτιανοι;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3+2i & 2+i \\ 3-2i & 1 & 2-3i \\ 2-i & 2+3i & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1+i & 3+2i & i \\ 3-2i & 1 & 1+i \\ -i & 1-i & 2+3i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -3+2i & i \\ 3+2i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}. \ .$$

**Απαντηση**. Εχουμε

$$\mathbf{A}^H = \begin{bmatrix} 1 & 3+2i & 2+i \\ 3-2i & 1 & 2-3i \\ 2-i & 2+3i & 2 \end{bmatrix}^H = \begin{bmatrix} 1 & 3+2i & 2+i \\ 3-2i & 1 & 2-3i \\ 2-i & 2+3i & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

αρα ο $\mathbf{A}$ ειναι ερμιτιανος. Επισης

$$\mathbf{B}^H = \begin{bmatrix} 1+i & 3+2i & i \\ 3-2i & 1 & 1+i \\ -i & 1-i & 2+3i \end{bmatrix}^H = \begin{bmatrix} 1-i & 3+2i & i \\ 3-2i & 1 & 1+i \\ -i & 1-i & 2-3i \end{bmatrix} \neq \mathbf{B}, \mathbf{B}^H$$

αρα ο $\mathbf{B}$ δεν ειναι ουτε ερμιτιανος ουτε αντιερμιτιανος. Τελος

$$\mathbf{C}^H = \begin{bmatrix} 0 & -3+2i & i \\ 3+2i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix}^H = \begin{bmatrix} 0 & 3-2i & -i \\ -3-2i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\mathbf{C}$$

αρα ο $\mathbf{C}$ ειναι αντιερμιτιανος.

**11.2.9.** Αποδειξτε οτι καθε $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$ μπορει να γραφτει ως αθροισμα ενος ερμιτιανου και ενος αντιερμιτιανου πινακα.

**Απαντηση**. Εστω οτι

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C} \tag{11.2}$$

οπου $\mathbf{B} = \mathbf{B}^H$ (ερμιτιανος) και $\mathbf{C} = -\mathbf{C}^H$ (αντιερμιτιανος). Παιρνουμε την συζυγη αναστροφη της (11.2):

$$\mathbf{A}^H = \mathbf{B}^H + \mathbf{C}^H = \mathbf{B} - \mathbf{C}^H. \tag{11.3}$$

Προσθετοντας και κατοπιν αφαιρωντας τις (11.2) και (11.3) εχουμε

$$\mathbf{A} + \mathbf{A}^H = 2\mathbf{B}, \qquad \mathbf{A} - \mathbf{A}^H = 2\mathbf{C}.$$

Με αλλα λογια,

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^H\right), \qquad \mathbf{C} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^H\right).$$

Ευκολα ελεγχουμε οτι $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$. Επισης, πραγματι ο $\mathbf{B}$ ειναι ερμιτιανος και ο $\mathbf{C}$ αντιερμιτιανος, διοτι

$$\mathbf{B}^H = \left(\frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^H\right)\right)^H = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}^H + \left(\mathbf{A}^H\right)^H\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}^H + \mathbf{A}\right) = \mathbf{B},$$

$$\mathbf{C}^H = \left(\frac{1}{2}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^H\right)\right)^H = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}^H - \left(\mathbf{A}^H\right)^H\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}^H - \mathbf{A}\right) = -\mathbf{C}.$$

**11.2.10.** Αποδειξτε οτι για καθε $N \times N$ πινακα $\mathbf{A}$, ο $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ ειναι ερμιτιανος.

**Απαντηση**. Εστω $\mathbf{B} = \mathbf{A}^H\mathbf{A}$. Εχουμε

$$\mathbf{B}^H = \left(\mathbf{A}^H\mathbf{A}\right)^H = \mathbf{A}^H\left(\mathbf{A}^H\right)^H = \mathbf{A}^H\mathbf{A} = \mathbf{B}$$

αρα ο $\mathbf{B} = \mathbf{A}^H\mathbf{A}$ ειναι ερμιτιανος.

**11.2.11.** Υπολογιστε την οριζουσα του πινακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 2 \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση**. Εχουμε

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & i \\ i & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - i \cdot i = 2 + 1 = 3.$$

**11.2.12.** Υπολογιστε την οριζουσα του πινακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} i & 1 & 1+i \\ 0 & 1 & 1 \\ i & 1 & i \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση**. Ειναι

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} i & 1 & 1+i \\ 0 & 1 & 1 \\ i & 1 & i \end{vmatrix} &= i \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & i \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ i & i \end{vmatrix} + (1+i) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ i & 1 \end{vmatrix} \\ &= i \cdot (i-1) - 1 \cdot (0-i) + (1+i) \cdot (0-i) \\ &= -1 - i + i - i + 1 = -i. \end{aligned}$$

**11.2.13.** Υπολογιστε τον αντιστροφο του πινακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 2 \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση**. Συμφωνα με τον τυπο για $2 \times 2$ αντιστροφο εχουμε

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{bmatrix} 2 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

και επαληθευουμε οτι

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**11.2.14.** Υπολογιστε τον αντιστροφο του πινακα

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1-i & 2i & 0 \\ 3 & 1+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση**. Συμφωνα με τον γνωστο τυπο του Κεφαλαιου 4 εχουμε

$$|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 1-i & 2i & 0 \\ 3 & 1+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{vmatrix} = -6 - 10i$$

και

$$B_{11} = \begin{vmatrix} 1+1 & 0 \\ 0 & 1-i \end{vmatrix} = 2-2i, \quad B_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1-i \end{vmatrix} = 3-3i, \quad B_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1+1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$B_{21} = \begin{vmatrix} 2i & 0 \\ 0 & 1-i \end{vmatrix} = 2+2i \ , \quad B_{22} = \begin{vmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1-i \end{vmatrix} = -2i \ , \quad B_{23} = \begin{vmatrix} 1-i & 2i \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$B_{31} = \begin{vmatrix} 2i & 0 \\ 1+1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ , \quad B_{32} = \begin{vmatrix} 1-i & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad B_{23} = \begin{vmatrix} 1-i & 2i \\ 3 & 1+1 \end{vmatrix} = 2-8i.$$

Οποτε ο αντιστροφος ειναι

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{-6-10i} \begin{bmatrix} 2-2i & -2-2i & 0 \\ -3+3i & -2i & 0 \\ 0 & 0 & 2-8i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{17}+\frac{4}{17}i & \frac{4}{17}-\frac{1}{17}i & 0 \\ -\frac{3}{34}-\frac{6}{17}i & \frac{5}{34}+\frac{3}{34}i & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \end{bmatrix}.$$

**11.2.15.** Λυστε το συστημα

$$\begin{aligned} x_1 + ix_2 &= 1 \\ ix_1 + x_2 &= 1. \end{aligned}$$

**Απαντηση**. Χρησιμοποιουμε τον κανονα του $Cramer$:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & i \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1-i}{2}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ i & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1-i}{2}$$

και επαληθευουμε οτι

$$\begin{aligned} \frac{1-i}{2} + i \cdot \frac{1-i}{2} &= 1 \\ i \cdot \frac{1-i}{2} + \frac{1-i}{2} &= 1. \end{aligned}$$

**11.2.16.** Λυστε το συστημα

$$\begin{aligned} (1+i)\,x_1 + (1-2i)\,x_2 &= 1 \\ x_1 - ix_2 &= 3 \end{aligned}$$

με τον κανονα του $Cramer$ , με χρηση αντιστροφου πινακα και με την απαλοιφη $Gauss$.

**Απαντηση**. Το συστημα ειναι $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ με

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1+i & 1-2i \\ 1 & -i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Με τον κανονα του $Cramer$ εχουμε

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-2i \\ 3 & -i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+i & 1-2i \\ 1 & -i \end{vmatrix}} = 5+3i, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+i & 1-2i \\ 1 & -i \end{vmatrix}} = 3-2i.$$

Με τον αντιστροφο πινακα ειναι

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1+i & 1-2i \\ 1 & -i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2+i \\ i & 1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+3i \\ 3-2i \end{bmatrix}.$$

Με απαλοιφη $Gauss$, εκτελουμε στον επαυξημενο την γραμμοπραξη $R_2 \leftarrow R_2 - (1+i)^{-1} R_1$ χρησιμοποιωντας ενα στοιχειωδη πινακα. Εχουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -(1+i)^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+i & 1-2i & 1 \\ 1 & -i & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+i & 1-2i & 1 \\ 0 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i & \frac{5}{2}+\frac{1}{2}i \end{bmatrix}$$

οποτε το συστημα ειναι

$$\begin{aligned} (1+i)\,x_1 + (1-2i)\,x_2 &= 1 \\ \frac{1}{2}(1+i)\,x_2 &= \frac{1}{2}(5+i) \end{aligned}$$

οποτε

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{5+i}{1+i} = 3-2i \\ x_1 &= \frac{1-(1-2i)\,x_2}{1+i} = \frac{1-(1-2i)(3-2i)}{1+i} = 5+3i. \end{aligned}$$

Και με τους τρεις τροπους παιρνουμε την ιδια λυση.

**11.2.17.** Λυστε το συστημα

$$\begin{aligned} 2x_1 + (1-2i)\,x_2 + x_3 - ix_4 &= 1 \\ (1+i)\,x_1 - ix_2 - (2+3i)\,x_4 &= 3 \\ x_1 + x_4 &= 2+3i \end{aligned}$$

με απαλοιφη $Gauss$.

**Απαντηση**. Ο επαυξημενος ειναι

$$\begin{bmatrix} 2 & 1-2i & 1 & -i & 1 \\ 1+i & -i & 0 & 2+3i & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2+3i \end{bmatrix}.$$

Γραφουμε κατα σειρα τις γραμμοπραξεις που χρησιμοποιουμε, με συμβολισμο στοιχειωδων πινακων.

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}(1+i) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1-2i & 1 & -i & 1 \\ 1+i & -i & 0 & 2+3i & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2+3i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1-2i & 1 & -i & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i & \frac{3}{2}+\frac{7}{2}i & \frac{5}{2}-\frac{1}{2}i \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2+3i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 2 & 1-2i & 1 & -i & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i & \frac{3}{2}+\frac{7}{2}i & \frac{5}{2}-\frac{1}{2}i \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2+3i \end{bmatrix}
$$
$$
= \begin{bmatrix} 2 & 1-2i & 1 & -i & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i & \frac{3}{2}+\frac{7}{2}i & \frac{5}{2}-\frac{1}{2}i \\ 0 & -\frac{1}{2}+i & -\frac{1}{2} & 1+\frac{1}{2}i & \frac{3}{2}+3i \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{-\frac{1}{2}+i}{-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i} & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 2 & 1-2i & 1 & -i & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i & \frac{3}{2}+\frac{7}{2}i & \frac{5}{2}-\frac{1}{2}i \\ 0 & -\frac{1}{2}+i & -\frac{1}{2} & 1+\frac{1}{2}i & \frac{3}{2}+3i \end{bmatrix}
$$
$$
= \begin{bmatrix} 2 & 1-2i & 1 & -i & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i & \frac{3}{2}+\frac{7}{2}i & \frac{5}{2}-\frac{1}{2}i \\ 0 & 0 & -\frac{1}{10}-\frac{3}{10}i & -\frac{8}{5}+\frac{6}{5}i & \frac{8}{5}+\frac{24}{5}i \end{bmatrix}
$$

Το συστημα λοιπον γινεται

$$
\begin{array}{rrrrr}
2x_1+ & (1-2i)\,x_2+ & x_3- & ix_4 = & 1 \\
 & \left(-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i\right)x_2+ & \left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)x_3+ & \left(\frac{3}{2}+\frac{7}{2}i\right)x_4 = & \frac{5}{2}-\frac{1}{2}i \\
 & & \left(-\frac{1}{10}-\frac{3}{10}i\right)x_3+ & \left(-\frac{8}{5}+\frac{6}{5}i\right)x_4 = & \frac{8}{5}+\frac{24}{5}i
\end{array}
$$

Η $x_4$ ειναι ανεξαρτητη μεταβλητη. Λυνοντας με προς τα πισω αντικατασταση τελικα παιρνουμε

$$
x_1 = 2 - x_4 + 3i, \quad x_2 = 5 - (4-3i)\,x_4 + 4i, \quad x_3 = -10ix_4 - 16.
$$

**11.2.18.** Γραψτε τον πινακα

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1+i & i & 1 \\ 3i & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1+i \end{bmatrix}.
$$

ως γινομενο στοιχειωδων πινακων.

**Απαντηση**. Γραφουμε κατα σειρα τις γραμμοπραξεις που χρησιμοποιουμε, με συμβολισμο στοιχειωδων πινακων.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3i}{1+i} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+i & i & 1 \\ 3i & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+i & i & 1 \\ 0 & \frac{5}{2}-\frac{3}{2}i & -\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i \\ 1 & 1 & 1+i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{1+i} & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+i & i & 1 \\ 0 & \frac{5}{2}-\frac{3}{2}i & -\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i \\ 1 & 1 & 1+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+i & i & 1 \\ 0 & \frac{5}{2}-\frac{3}{2}i & -\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i \\ 0 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}+\frac{3}{2}i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i}{\frac{5}{2}-\frac{3}{2}i} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+i & i & 1 \\ 0 & \frac{5}{2}-\frac{3}{2}i & -\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i \\ 0 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}+\frac{3}{2}i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+i & i & 1 \\ 0 & \frac{5}{2}-\frac{3}{2}i & -\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i \\ 0 & 0 & \frac{16}{17}+\frac{30}{17}i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{1+i} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+i & i & 1 \\ 0 & \frac{5}{2}-\frac{3}{2}i & -\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i \\ 0 & 0 & \frac{16}{17}+\frac{30}{17}i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \\ 0 & \frac{5}{2}-\frac{3}{2}i & -\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i \\ 0 & 0 & \frac{16}{17}+\frac{30}{17}i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\frac{5}{2}-\frac{3}{2}i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \\ 0 & \frac{5}{2}-\frac{3}{2}i & -\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i \\ 0 & 0 & \frac{16}{17}+\frac{30}{17}i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \\ 0 & 1 & -\frac{3}{17}-\frac{12}{17}i \\ 0 & 0 & \frac{16}{17}+\frac{30}{17}i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\frac{16}{17}+\frac{30}{17}i} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \\ 0 & 1 & -\frac{3}{17}-\frac{12}{17}i \\ 0 & 0 & \frac{16}{17}+\frac{30}{17}i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \\ 0 & 1 & -\frac{3}{17}-\frac{12}{17}i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \\ 0 & 1 & -\frac{3}{17}-\frac{12}{17}i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{17}-\frac{1}{17}i \\ 0 & 1 & -\frac{3}{17}-\frac{12}{17}i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\left(\frac{4}{17}-\frac{1}{17}i\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{17}-\frac{1}{17}i \\ 0 & 1 & -\frac{3}{17}-\frac{12}{17}i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{17}-\frac{12}{17}i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\left(-\frac{3}{17}-\frac{12}{17}i\right) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{17}-\frac{12}{17}i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Αρα ο $\mathbf{A}$ ειναι ισος με το γινομενο των αντιστροφων των παραπανω στοχειωδων πινακων

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2}+\frac{3}{2}i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{17}-\frac{1}{17}i & 1 \end{bmatrix}\cdot$$
$$\begin{bmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2}-\frac{3}{2}i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16}{17}+\frac{30}{17}i \end{bmatrix}\cdot$$
$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{17}-\frac{1}{17}i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{17}-\frac{12}{17}i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**11.2.19.** Εξεταστε αν ειναι γραμμικα ανεξαρτητο το συνολο

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1-i \\ 0 \\ 3i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \\ 1+i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 2+i \\ i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

**Απαντηση**. Λυνουμε το συστημα

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1-i & 2i & 2+i \\ 0 & 1+i & i \\ 3i & 1+i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

και βρισκουμε οτι εχει μοναδικη λυση την

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Αρα το συνολο ειναι γραμμικα ανεξαρτητο.

**11.2.20.** Εξεταστε αν ειναι γραμμικα ανεξαρτητο το συνολο

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1-i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1+i \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

**Απαντηση**. Παρατηρουμε οτι η οριζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{vmatrix} = 0$$

αρα το συνολο ειναι γραμμικα εξαρτημενο.

**11.2.21.** Βρειτε μια βαση του

$$span\left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1-i \\ 0 \\ 3i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \\ 1+i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1+i \\ 6i \end{bmatrix} \right)$$

**Απαντηση**. Εχουμε ηδη δει οτι το συνολο

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1-i \\ 0 \\ 3i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \\ 1+i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1+i \\ 6i \end{bmatrix} \right\}$$

ειναι γρ.αν. Αρα μια βαση ειναι το ιδιο το συνολο.

**11.2.22.** Βρειτε δυο διαφορετικες βασεις του

$$span\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1-i \\ 1+i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6i \end{bmatrix}\right)$$

**Απαντηση**. Καταρχην

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1-i & 1+i & 2 \\ 1+i & 0 & 6i \end{vmatrix} = -10 \neq 0$$

αρα το

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1-i \\ 1+i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6i \end{bmatrix}\right\}$$

ειναι γρ.αν. και ειναι μια βαση του $span$. Μπορουμε να βρουμε μια αλλη βαση φερνοντας τον πινακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 1-i & 1+i \\ 1 & 1+i & 0 \\ 1 & 2 & 6i \end{bmatrix}$$

σε κλιμακωτη μορφη. Αυτη ειναι

$$\begin{bmatrix} 1 & 1-i & 1+i \\ 0 & 2i & -1-i \\ 0 & 0 & 5i \end{bmatrix}$$

οποτε μια αλλη βαση ειναι η

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1-i \\ 1+i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 2i \\ -1-i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5i \end{bmatrix}\right\}.$$

**11.2.23.** Υπολογιστε τον βαθμο του πινακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1+i & 0 & i & 0 \\ 3i & 1 & 0 & 1-i \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2+4i & -1 & 1+i & 1-i \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση**. Η κλιμακωτη μορφη του πινακα (προκυπτει με γραμμοπραξεις οτι) ειναι

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1+6i & -3i & 1-i \\ 0 & 0 & -\frac{7}{37}+\frac{42}{37}i & -\frac{4}{37}+\frac{24}{37}i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Αφου ο πινακας εχει τρεις κομβους, $rank\left(\mathbf{A}\right) = 3$.

**11.2.24.** Υπολογιστε τα εσωτερικα γινομενα των

$$\mathbf{x}=\left[\begin{array}{ccc}2 & 1+i & i\end{array}\right], \quad \mathbf{y}=\left[\begin{array}{ccc}3-2i & 1 & 1+4i\end{array}\right], \quad \mathbf{z}=\left[\begin{array}{ccc}1 & i & 3\end{array}\right].$$

**Απαντηση**. Ειναι

$$\mathbf{x}\circ\mathbf{y}=\mathbf{x}\mathbf{y}^H=\left[\begin{array}{ccc}2 & 1+i & i\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}3+2i\\ 1\\ 1-4i\end{array}\right]=11+6i,$$

$$\mathbf{x}\circ\mathbf{z}=\mathbf{x}\mathbf{z}^H=\left[\begin{array}{ccc}2 & 1+i & i\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}1\\ -i\\ 3\end{array}\right]=3+2i,$$

$$\mathbf{y}\circ\mathbf{z}=\mathbf{y}\mathbf{z}^H=\left[\begin{array}{ccc}3-2i & 1 & 1+4i\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}1\\ -i\\ 3\end{array}\right]=6+9i.$$

**11.2.25.** Υπολογιστε τα $\|\mathbf{x}\|$, $\|\mathbf{y}\|$, $\|\mathbf{z}\|$ για τα διανυσματα του προηγουμενου προβληματος.

**Απαντηση**. Ειναι

$$\|\mathbf{x}\|^2=\mathbf{x}\circ\mathbf{x}=\mathbf{x}\mathbf{x}^H=\left[\begin{array}{ccc}2 & 1+i & i\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}2\\ 1-i\\ -i\end{array}\right]=7,$$

$$\|\mathbf{z}\|^2=\mathbf{z}\circ\mathbf{z}=\mathbf{z}\mathbf{z}^H=\left[\begin{array}{ccc}1 & i & 3\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}1\\ -i\\ 3\end{array}\right]=11,$$

$$\|\mathbf{y}\|^2=\mathbf{y}\circ\mathbf{y}=\mathbf{y}\mathbf{y}^H=\left[\begin{array}{ccc}3-2i & 1 & 1+4i\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}3+2i\\ 1\\ 1-4i\end{array}\right]=31.$$

**11.2.26.** Αποδειξτε οτι $\mathbf{x}\circ\mathbf{x}=\|\mathbf{x}\|^2$ και $\mathbf{x}\circ\mathbf{x}=0$ ανν $\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

**Απαντηση**. Εχουμε

$$\mathbf{x}\circ\mathbf{x}=\mathbf{x}^H\mathbf{x}=\sum_{n=1}^N\overline{x}_nx_n=\sum_{n=1}^N|x_n|^2=\|\mathbf{x}\|^2\geq 0$$

και

$$\mathbf{x}\circ\mathbf{x}=\sum_{n=1}^N|x_n|^2=0\Leftrightarrow(\forall n: x_n=0)\Leftrightarrow\mathbf{x}=\mathbf{0}.$$

**11.2.27.** Αποδειξτε οτι $\mathbf{y}\circ\mathbf{x}=\overline{\mathbf{x}\circ\mathbf{y}}$.

**Απαντηση**. Εχουμε

$$\overline{\mathbf{x}\circ\mathbf{y}}=\overline{\sum_{n=1}^N\overline{x}_ny_n}=\sum_{n=1}^N\overline{\overline{x}_ny_n}=\sum_{n=1}^N\overline{\overline{x}_n}\,\overline{y_n}=\sum_{n=1}^Nx_n\overline{y}_n=\mathbf{y}\circ\mathbf{x}.$$

**11.2.28.** Βρειτε την προβολη του $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3+4i & 2-3i \end{bmatrix}$ στο $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 5+i & 2i \end{bmatrix}$.

**Απαντηση**. Ειναι

$$proj\,(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{x}\circ\mathbf{y}}{\mathbf{y}\circ\mathbf{y}}\cdot\mathbf{y} = \frac{\begin{bmatrix} 3+4i \\ 2-3i \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 5+i \\ 2i \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 5+i \\ 2i \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 5+i \\ 2i \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 5+i \\ 2i \end{bmatrix}$$

$$= \frac{(3+4i)(5-i)+(2-3i)(-2i)}{(5+i)(5-i)+(2i)(-2i)} \begin{bmatrix} 5+i \\ 2i \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{13}{30}+\frac{13}{30}i\right) \begin{bmatrix} 5+i \\ 2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{26}{15}+\frac{13}{5}i \\ -\frac{13}{15}+\frac{13}{15}i \end{bmatrix}$$

**11.2.29.** Δινονται τα διανυσματα

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1-i \end{bmatrix}.$$

Βρειτε μια ορθογωνια βαση του $span\,(\mathbf{x},\mathbf{y})$.

**Απαντηση**. Εφαρμοζουμε τον αλγοριθμο $Gram - Schmidt$. Θετουμε $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1$ και τοτε το $\mathbf{y}_2$ ειναι

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_2\circ\mathbf{y}_1}{\mathbf{y}_1\circ\mathbf{y}_1}\cdot\mathbf{y}_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1-i \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1-i \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1-i \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1-i \end{bmatrix} - \frac{(1-2i)}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}+i \\ 1-\frac{1}{2}i \\ 1-i \end{bmatrix}$$

Αρα η ζητουμενη βαση ειναι

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2}+i \\ 1-\frac{1}{2}i \\ 1-i \end{bmatrix} \right\}.$$

**11.2.30.** Δειξτε οτι στο $\mathbb{C}^N$ *δεν* ισχυει

$$\left(\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2\right) \Leftrightarrow \mathbf{x}\circ\mathbf{y} = 0.$$

**Απαντηση**. Θα δωσουμε ενα αντιπαραδειγμα. Αν παρουμε

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Τοτε

$$\|\mathbf{x}\|^2 = 1, \quad \|\mathbf{y}\|^2 = 1, \quad \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} 1+i \\ 0 \end{bmatrix} \right\|^2 = (1+i)(1-i) = 2.$$

Δηλ. ισχυει οτι $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$. Ομως

$$\mathbf{x}\circ\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i \\ 0 \end{bmatrix} = -i \neq 0.$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Τοτε

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{2}, \quad \|\mathbf{y}\|^2 = 1, \quad \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix} \right\|^2 = (1+i)(1-i) + 1 = 3.$$

Δηλ. ισχυει οτι $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$. Ομως

$$\mathbf{x}\circ\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i \\ 0 \end{bmatrix} = -i \neq 0.$$

## 11.3 Αλυτα Προβληματα

**11.3.1.** Υπολογιστε το αθροισμα $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ και τα γινομενα $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BA}$ των πινακων

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2+3i & i \\ 2i & 1+i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1-i & i \\ 1 & 1+i \end{bmatrix}.$$

**Απ**. $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3+2i & 2i \\ 1+2i & 2+2i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 5+2i & -4+3i \\ 3+3i & -2+2i \end{bmatrix}$:

**11.3.2.** Υπολογιστε τα γινομενα $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BA}$ των πινακων

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1+i & 2+i & 1 \\ 2+i & 1+i & 1+i \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2+i & i & 3 \\ 3+i & 1-1 & 2+i \\ 1 & i & 4+i \end{bmatrix}.$$

**Απ**. $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 7+8i & -1+2i & 10+8i \\ 6+9i & -2+3i & 10+11i \\ 6+3i & i & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 6+5i & 5+5i & -2+2i \\ 6+6i & 7+6i & 1 \\ 8+5i & 5+3i & -4 \end{bmatrix}.$

**11.3.3.** Υπολογιστε τους αντιστροφους των πινακων

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{cc} 1+2i & i \\ 1 & 1-i \end{array}\right], \quad \mathbf{B}=\left[\begin{array}{ccc} 1-i & 2i & 0 \\ 3 & 1+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{array}\right].$$

**Απ**. $\mathbf{A}^{-1}=\left[\begin{array}{cc} \frac{1}{3}-\frac{1}{3}i & -\frac{1}{3}i \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}+\frac{2}{3}i \end{array}\right]$, $\mathbf{B}^{-1}=\left[\begin{array}{ccc} \frac{1}{17}+\frac{4}{17}i & \frac{4}{17}-\frac{1}{17}i & 0 \\ -\frac{3}{34}-\frac{6}{17}i & \frac{5}{34}+\frac{3}{34}i & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \end{array}\right]$.

**11.3.4.** Υπολογιστε τα $\mathbf{A}^2,\ \mathbf{A}^3$ για τον πινακα

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{cc} 1+i & i \\ 2 & 1-i \end{array}\right].$$

**Απ**. $\mathbf{A}^2=\left[\begin{array}{cc} 4i & 2i \\ 4 & 0 \end{array}\right]$, $\mathbf{A}^3=\left[\begin{array}{cc} -4+8i & -2+2i \\ 4+4i & 4i \end{array}\right]$.

**11.3.5.** Υπολογιστε τα $\mathbf{A}^2,\ \mathbf{A}^3$ για τον πινακα

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{ccc} 2+i & 1 & i \\ 4 & 1+2i & 0 \\ 2 & i & 1-i \end{array}\right].$$

**Απ**. $\mathbf{A}^2=\left[\begin{array}{ccc} 7+6i & 2+3i & 3i \\ 12+12i & 1+4i & 4i \\ 6+4i & 1+2i & 0 \end{array}\right]$, $\mathbf{A}^3=\left[\begin{array}{ccc} 16+37i & 13i & -3+10i \\ 16+60i & 1+18i & -8+16i \\ 12+22i & 3+8i & -4+6i \end{array}\right]$.

**11.3.6.** Βρειτε τον αναστροφο συζυγη $\mathbf{A}^H$ του πινακα

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{ccc} 1+i & 2 & i \\ 3-2i & 6 & 1+i \\ 2-i & 2+3i & 2-3i \end{array}\right].$$

**Απ**. $\mathbf{A}^H=\left[\begin{array}{ccc} 1-i & 3+2i & 2+i \\ 2 & 6 & 2-3i \\ -i & 1-i & 2+3i \end{array}\right]$.

**11.3.7.** Ποιοι απο τους παρακατω πινακες ειναι ερμιτιανοι και ποιοι αντιερμιτιανοι;

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{cc} 6 & 1+2i \\ 1-2i & 1 \end{array}\right], \quad \mathbf{B}=\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1+4i & i \\ 1-4i & 3 & 1+i \\ -i & 1-i & 2 \end{array}\right], \quad \mathbf{C}=\left[\begin{array}{cc} 0 & -1+3i \\ 1-3i & 0 \end{array}\right], \quad .$$

**Απ**. Οι $\mathbf{A},\mathbf{B}$ ειναι ερμιτιανοι, ο $\mathbf{C}$ ειναι αντιερμιτιανος.

**11.3.8.** Αποδειξτε οτι για καθε $N\times N$ πινακα $\mathbf{A}$, ο $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$ ειναι συμμετρικος.

**11.3.9.** Υπολογιστε τις οριζουσες των πινακων

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3+i & i \\ 1 & 1-i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2+i & i & 1 \\ 3+i & 1+1 & -2+i \\ i & 2 & 3i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1+i & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1+2i & 0 & 0 \\ 1 & i-4 & 4 & 0 \\ 2i & 1 & 4i & 3+i \end{bmatrix}.$$

**Απ**. $|\mathbf{A}| = 4 - 3i$, $\mathbf{B} = 21 + 14i$, $|\mathbf{C}| = -24 + 32i$.

**11.3.10.** Λυστε το συστημα

$$\begin{aligned} (2+3i)\,x_1 + (1-2i)\,x_2 &= 1 \\ (1+i)\,x_1 - ix_2 &= 1 \end{aligned}$$

με τον κανονα του $Cramer$ , με χρηση αντιστροφου πινακα και με την απαλοιφη $Gauss$.

**Απ**. $x_1 = -1 - i$, $x_2 = -2 + i$.

**11.3.11.** Λυστε το συστημα

$$\begin{aligned} x_1 + (1-2i)\,x_2 - (1+i)\,x_3 &= 1 \\ ix_1 - (3-i)\,x_2 + (4+3i)\,x_3 &= 1 \end{aligned}$$

με τον κανονα του $Cramer$ και με την απαλοιφη $Gauss$.

**Απ**. $x_1 = \frac{4}{5} - \left(\frac{6}{5} - \frac{7}{5}i\right) x_3 - \frac{3}{5}i$, $x_2 = \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right) x_3 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5}i$.

**11.3.12.** Εξεταστε αν ειναι γραμμικα ανεξαρτητο το συνολο

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1-i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \\ i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1+3i \\ 1+2i \end{bmatrix} \right\}.$$

**Απ**. Ειναι γρ. εξ.

**11.3.13.** Εξεταστε αν ειναι γραμμικα ανεξαρτητο το συνολο

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1-i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

**Απ**. Ειναι γρ. αν.

**11.3.14.** Βρειτε μια βαση του

$$span \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1+i \\ i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ -i \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 8-i \\ 4+2i \\ 3+2i \end{bmatrix} \right)$$

**Απ**. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1+i \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -i \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

**11.3.15.** Υπολογιστε τον βαθμο του πινακα

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 6+3i & 0 & i & 0 \\ 3i & 3+i & 0 & 1-i \\ 1 & -2 & 1-7i & 0 \\ 2i & 1 & 3+4i & 3i \end{bmatrix}.$$

**Απ**. $rank\left(\mathbf{A}\right)=4.$

**11.3.16.** Υπολογιστε τον βαθμο του πινακα

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1+i & i & -1 \\ 3i & 1+i & 1-2i \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Απ**. $rank\left(\mathbf{A}\right)=2.$

**11.3.17.** Υπολογιστε τα εσωτερικα γινομενα των

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} 2 & 1+i & i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}=\begin{bmatrix} 3-2i & 1 & 1+4i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}=\begin{bmatrix} 1 & i & 3 \end{bmatrix}.$$

**Απ**. $\mathbf{x}\circ\mathbf{y}=11+6i$, $\mathbf{x}\circ\mathbf{z}==3+2i$, $\mathbf{y}\circ\mathbf{z}==6+9i$.

**11.3.18.** Υπολογιστε τα $\|\mathbf{x}\|$, $\|\mathbf{y}\|$, $\|\mathbf{z}\|$ για τα διανυσματα του προηγουμενου προβληματος.
**Απ**. $\|\mathbf{x}\|^2=7$, $\|y\|^2=31, \quad \|\mathbf{z}\|^2=11.$

**11.3.19.** Βρειτε την προβολη του $\mathbf{x}=\begin{bmatrix} 3+i & 5-2i \end{bmatrix}^T$ στο $\mathbf{y}=\begin{bmatrix} 5+i & 1+2i \end{bmatrix}^T$.
**Απ**. $\frac{19-5i}{28}\begin{bmatrix} 5+i & 1+2i \end{bmatrix}^T.$

**11.3.20.** Δινεται το διανυσμα $\mathbf{x}=\begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \end{bmatrix}^T$. Βρειτε μια ορθογωνια βαση του $span\left(\mathbf{x}\right)^{\perp}$.
**Απ**. $\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1-i & i \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 3i-3 & 1+i & 2 \end{bmatrix}^T\right\}.$

**11.3.21.** Δειξτε οτι για καθε $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{C}^N$ και $a,b\in\mathbb{C}^N$ $e$χουμε

1. $\mathbf{x}\circ\left(a\cdot\mathbf{y}+b\mathbf{z}\right)=\overline{a}\cdot\left(\mathbf{x}\circ\mathbf{y}\right)+\overline{b}\cdot\left(\mathbf{x}\circ\mathbf{z}\right).$
2. $\left(a\cdot\mathbf{x}\right)\circ\mathbf{y}=\mathbf{x}\circ\left(\overline{a}\cdot\mathbf{y}\right)=a\cdot\left(\mathbf{x}\circ\mathbf{y}\right).$

**11.3.22.** Δειξτε οτι για καθε $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{C}^N$ εχουμε

$$4\cdot\mathbf{x}\circ\mathbf{y}=\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2-\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2+i\cdot\|\mathbf{x}-i\mathbf{y}\|-i\cdot\|\mathbf{x}-i\mathbf{y}\|.$$

**11.3.23.** Δειξτε οτι

$$\mathbf{x}\circ\mathbf{y}=0\Leftrightarrow\left(\forall a,b\in\mathbb{C}^N:\|a\mathbf{x}+b\mathbf{y}\|^2=\|a\mathbf{x}\|^2+\|b\mathbf{y}\|^2\right).$$

# Κεφάλαιο 12

# Ιδιοτιμες και Ιδιοδιανυσματα

## 12.1 Θεωρια

**12.1.1.** Εστω $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$. Το *χαρακτηριστικο πολυωνυμο* του $A$ γραφεται ως $f_A(\lambda)$ και οριζεται ως

$$f_A(\lambda) = |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}|.$$

Η *χαρακτηριστικη εξισωση* του $A$ οριζεται ως

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0.$$

**12.1.2.** Για καθε $N \times N$ πινακα $\mathbf{A}$, το χαρακτηριστικο πολυωνυμο ειναι πραγματι πολυωνυμο $N$-στου βαθμου. Το πολυωνυμο αυτο εχει $N$ ριζες $\lambda_1, ..., \lambda_N$· καποιες απο αυτες μπορει να ειναι *επαναλαμβανομενες*, δηλ. $\lambda_m = \lambda_n$ για $m \neq n$. Εχουμε

$$|\mathbf{A}| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot ... \cdot \lambda_N.$$

**12.1.3.** Εστω $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$. Καθε ριζα $\lambda$ της χαρακτηριστικης εξισωσης $|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$ λεγεται *ιδιοτιμη* του $\mathbf{A}$. Ο πινακας εχει $N$ ιδιοτιμες. Καθε λυση $\mathbf{v}$ της εξισωσης

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

λεγεται *ιδιοδιανυσμα* του $\mathbf{A}$ (το οποιο αντιστοιχει στο $\lambda$).

**12.1.4.** Αν $\mathbf{v}$ ειναι μια ιδιοτιμη του $\mathbf{A}$, τοτε και $c\mathbf{v}$ ειναι μια ιδιοτιμη του $\mathbf{A}$ (για οποιοδηποτε μη μηδενικο $c \in \mathbb{C}$). Αρα, αν ενας πινακας εχει ενα ιδιοδιανυσμα, εχει απειρα ιδιοδιανυσματα.

**12.1.5.** Εστω $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$, τοτε οι $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^T$ εχουν το ιδιο χαρακτηριστικο πολυωνυμο και τις ιδιες ιδιοτιμες.

**12.1.6.** Εστω $N \times N$ ανω η κατω τριγωνικος πινακας. Τοτε οι ιδιοτιμες του $\mathbf{A}$ ειναι $a_{11}, a_{22}, ..., a_{NN}$.

**12.1.7.** Εστω $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$ με ιδιοτιμες $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N$. Τοτε οι ιδιοτιμες του $\mathbf{A}^k$ ειναι $\lambda_1^k, \lambda_2^k, ..., \lambda_N^k$, για $k = 1, 2, ...$ .

**12.1.8.** Εστω $N \times N$ αντιστρεψιμος πινακας $\mathbf{A}$ με ιδιοτιμες $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N$. Τοτε οι ιδιοτιμες του $\mathbf{A}^{-k}$ ειναι $\lambda_1^{-k}, \lambda_2^{-k}, ..., \lambda_N^{-k}$, για $k = 1, 2, ...$ .

**12.1.9.** Εστω $N \times N$ πινακες $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{P}$ τετοιοι ωστε $\mathbf{PAP}^{-1} = \mathbf{B}$. Τοτε οι $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ εχουν ιδιο χαρακτηριστικο πολυωνυμο και ιδιες ιδιοτιμες.

**12.1.10.** Αν $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_K$ ειναι διαφορετικες μεταξυ τους ιδιοτιμες ενος πινακα και $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_K$ ειναι ιδιοδιανυσματα που αντιστοιχουν στις $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_K$ , τοτε το συνολο $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_K\}$ ειναι γραμμικα ανεξαρτητο.

**12.1.11.** Εστω $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$, $\lambda$ μια ιδιοτιμη αυτου και $V$ το συνολο ολων των (ιδιο)διανυσματων που ικανοποιουν $\mathbf{Av} = \lambda \mathbf{v}$. Το $V$ ειναι διανυσματικος χωρος, τον οποιο ονομαζουμε *ιδιοχωρο* της $\lambda$.

**12.1.12.** Η *αλγεβρικη πολλαπλοτητα* μιας ιδιοτιμης ειναι η πολλαπλοτητα της ως ριζας της χαρακτηριστικης εξισωσης. Η *γεωμετρικη πολλαπλοτητα* ειναι η διασταση του αντιστοιχου ιδιοχωρου (δηλαδη ο μεγιστος αριθμος γραμμικα ανεξαρτητων διανυσματων του ιδιοχωρου).

**12.1.13.** Εστω $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$ και $\lambda$ μια ιδιοτιμη αυτου. Η γεωμετρικη πολλαπλοτητα της $\lambda$ ειναι μικροτερη η ιση της αλγεβρικης πολλαπλοτητας.

**12.1.14.** Εστω $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$ και $\lambda$ μια ιδιοτιμη αυτου. Η γεωμετρικη πολλαπλοτητα της $\lambda$ ισουται με $N - rank\,(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$.

**12.1.15.** Αν ενας πινακας ειναι πραγματικος και συμμετρικος, τοτε ολες οι ιδιοτιμες του ειναι πραγματικες. Επιπλεον, αν τα ιδιοδιανυσματα $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ αντιστοιχουν σε διαφορετικες ιδιοτιμες ικανοποιουν $\mathbf{u}^T \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

## 12.2 Λυμενα Προβληματα

**12.2.1.** Βρειτε τις ιδιοτιμες και ιδιοδιανυσματα του

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

και του $\mathbf{A}^T$.

**Απαντηση**. Εργαζομαστε ως εξης:

$$f_A(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \left| \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \right|$$
$$= (3-\lambda) \cdot (2-\lambda) - 2 \cdot 1 = 4 - 5\lambda + \lambda^2.$$

Αυτο ειναι το χαρακτηριστικο πολυωνυμο των $\mathbf{A}$ και $\mathbf{A}^T$. Βρισκουμε τις ριζες του.

$$4 - 5\lambda + \lambda^2 = 0 \Rightarrow (\lambda = 1\ ,\ \lambda = 4)\,.$$

Δηλ. $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 4$ ειναι οι ιδιοτιμες των $\mathbf{A}$ και $\mathbf{A}^T$. Για τον $\mathbf{A}$ εχουμε:

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda_1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3-1 & 2 \\ 1 & 2-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

οπου $t$ αυθαιρετη σταθερα. Αρα ενα ιδιοδιανυσμα που αντιστοιχει στην $\lambda_1 = 1$ ειναι $\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T$ (για $t = 1$). Επισης

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda_2 & 2 \\ 1 & 2-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3-4 & 2 \\ 1 & 2-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

οπου $t$ αυθαιρετη σταθερα. Αρα ενα ιδιοδιανυσμα που αντιστοιχει στην $\lambda_2 = 4$ ειναι $\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^T$ (για $t = 1$). Τελικα οι ιδιοτιμες και ιδιοδιανυσματα του $\mathbf{A}$ ειναι: $\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T \leftrightarrow 1$ και $\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^T \leftrightarrow 4$. Καθε γραμμικος συνδυασμος

$$\mathbf{v} = \kappa \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ειναι επισης ιδιοδιανυσμα του $\mathbf{A}$. Διοτι

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot \left( \kappa \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \kappa \cdot \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= \kappa \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{v}.$$

Για τον $\mathbf{A}^T$ εχουμε:

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda_1 & 1 \\ 2 & 2-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{bmatrix} 3-1 & 1 \\ 2 & 2-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Αρα ενα ιδιοδιανυσμα που αντιστοιχει στην $\lambda_1$ ειναι $\begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}^T$. Επισης

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 3-\lambda_2 & 1 \\ 2 & 2-\lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \\
\begin{bmatrix} 3-4 & 1 \\ 2 & 2-4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \\
\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \\
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Αρα ενα ιδιοδιανυσμα που αντιστοιχει στην $\lambda_2$ ειναι $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$. Τελικα οι ιδιοτιμες και ιδιοδιανυσματα του $\mathbf{A}^T$ ειναι: $\begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}^T \leftrightarrow 1$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T \leftrightarrow 4$. Καθε γραμμικος συνδυασμος

$$\mathbf{v} = \kappa \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ειναι επισης ιδιοδιανυσμα του $\mathbf{A}$.

**12.2.2.** Βρειτε τις ιδιοτιμες και ιδιοδιανυσματα του

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση.** Εχουμε

$$\begin{aligned}
|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}| &= \left| \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} \right| \\
&= (2-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda) = -2+\lambda+2\lambda^2-\lambda^3 = f_{A^t}(\lambda).
\end{aligned}$$

και $(2-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda) = 0$ συνεπαγεται οτι $\lambda = 2$ , $\lambda = 1$ , $\lambda = -1$. Δηλαδη ο $\mathbf{A}$ εχει ιδιοτιμες $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$. Για $\lambda_1 = 2$ ισχυει:

$$\begin{bmatrix} 2-2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2 & 0 \\ 0 & 0 & -1-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Αρα ενα ιδιοδιανυσμα που αντιστοιχει στην $\lambda_1$ ειναι $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. Επισης

$$\begin{bmatrix} 2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-1 & 0 \\ 0 & 0 & -1-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Αρα ενα ιδιοδιανυσμα που αντιστοιχει στην $\lambda_2 = 1$ ειναι $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ Τελος

$$\begin{bmatrix} 2+1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+1 & 0 \\ 0 & 0 & -1+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Αρα ενα ιδιοδιανυσμα που αντιστοιχει στην $\lambda_3 = -1$ ειναι $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$. Τελικα οι ιδιοτιμες και ιδιοδιανυσματα ειναι

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow 2, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow 1, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow -1$$

και καθε γραμμικος συνδυασμος

$$\mathbf{v} = \kappa \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**12.2.3.** Βρειτε τις ιδιοτιμες και ιδιοδιανυσματα του

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση.** Εχουμε

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -6 + 2\lambda^2 + 5\lambda - \lambda^3 = 0$$

που εχει ριζες $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -2$. Τωρα

$$\begin{bmatrix} 2-1 & 1 & 1 \\ -2 & 1-1 & 3 \\ 3 & 1 & -1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2-3 & 1 & 1 \\ -2 & 1-3 & 3 \\ 3 & 1 & -1-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2-(-2) & 1 & 1 \\ -2 & 1-(-2) & 3 \\ 3 & 1 & -1-(-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Αρα οι ιδιοτιμες και ιδιοδιανυσματα ειναι

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \leftrightarrow 3, \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow 1, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow -2.$$

και οι γραμμικοι συνδυασμοι των παραπανω διανυσματων ειναι επισης ιδιοδιανυσματα.

**12.2.4.** Βρειτε τις ιδιοτιμες και ιδιοδιανυσματα του

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση.** Εχουμε

$$|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda^3-5\lambda^2+8\lambda-4 = (\lambda-1)(\lambda-2)^2 = 0$$

που εχει ριζες $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Τωρα

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-2 & 0 \\ -1 & -1 & 1-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2-1 & 1 & 0 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ -1 & -1 & 2-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Αρα οι ιδιοτιμες και ιδιοδιανυσματα ειναι

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow 1, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow 2, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow 2.$$

και οι γραμμικοι συνδυασμοι των παραπανω διανυσματων ειναι επισης ιδιοδιανυσματα.

**12.2.5.** Αποδειξτε: για καθε $N\times N$ πινακα $\mathbf{A}$, το χαρακτηριστικο πολυωνυμο ειναι πραγματι πολυωνυμο $N$-στου βαθμου. Το πολυωνυμο αυτο εχει $N$ ριζες $\lambda_1, ..., \lambda_N$· καποιες απο αυτες μπορει να ειναι *επαναλαμβανομενες*, δηλ. $\lambda_m = \lambda_n$ για $m \neq n$. Εχουμε

$$|\mathbf{A}| = \lambda_1\cdot\lambda_2\cdot ...\cdot\lambda_N.$$

**Απαντηση**. Εχουμε $f_A(\lambda) = |\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}|$. Οπως εχουμε δει, η οριζουσα ειναι αθροισμα γινομενων, οπου καθε γινομενο περιεχει ακριβως εναν ορο απο καθε γραμμη και στηλη του πινακα $\mathbf{B}(\lambda) = \lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}$. Καθε ενας απο αυτα τα γινομενα ειναι ενα πολυωνυμο του $\lambda$ (γιατι;), αρα και η οριζουσα θα ειναι αθροισμα πολυωνυμων, οποτε θα ειναι και αυτη πολυωνυμο, με $N$ ριζες: $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N$ (καποιες απο αυτες τις ριζες μπορει να ειναι επαναλαμβανομενες, δηλ. $\lambda_m = \lambda_n$ για $m \neq n$). Αρα

$$|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}| = \kappa\cdot(\lambda-\lambda_1)\cdot(\lambda-\lambda_2)\cdot ...\cdot(\lambda-\lambda_N) \quad (12.1)$$

Η μεγαλυτερη δυναμη του $\lambda$ προκυπτει απο τον ορο της οριζουσας

$$b_{11}(\lambda)\cdot ...\cdot b_{NN}(\lambda) = (\lambda-a_{11})\cdot ...\cdot(\lambda-a_{NN})$$

και ειναι, προφανως, $\lambda^N$. Αρα η σταθερα $\kappa$ στην (12.1) ειναι $\kappa = 1$ και

$$|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}| = (\lambda-\lambda_1)\cdot(\lambda-\lambda_2)\cdot ...\cdot(\lambda-\lambda_N) \quad (12.2)$$

Θετοντας $\lambda = 0$ στην (12.2) παιρνουμε

$$|-\mathbf{A}| = (-1)^N\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot ...\cdot\lambda_N.$$

Αλλα $|-\mathbf{A}| = (-1)^N\cdot|\mathbf{A}|$ (γιατι;). Αρα

$$|\mathbf{A}| = \lambda_1\cdot\lambda_2\cdot ...\cdot\lambda_N.$$

**12.2.6.** Αποδειξτε: αν $\mathbf{v}$ ειναι ενα ιδιοδιανυσμα του $\mathbf{A}$, καθε διανυσμα $c\mathbf{v}$, $c \in \mathbb{C}$, ειναι επισης ιδιοδιανυσμα.

**Απαντηση**. Αυτο ισχυει επειδη

$$\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v} \Rightarrow c\mathbf{Av} = c\lambda\mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{A}\cdot(c\mathbf{v}) = \lambda \cdot (c\mathbf{v}).$$

**12.2.7.** Αποδειξτε: οι $N \times N$ πινακες $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^T$ εχουν ιδιο χαρακτηριστικο πολυωνυμο και ιδιες ιδιοτιμες.

**Απαντηση**. Αυτο ισχυει επειδη

$$f_A(\lambda) = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \left|(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^T\right| = \left|\lambda\mathbf{I}^T = \mathbf{A}^T\right| = \left|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}^T\right| = f_{A^T}(\lambda).$$

Αφου οι πινακες εχουν ιδιο χαρακτηριστικο πολυωνυμο θα εχουν και ιδιες ιδιοτιμες (οι οποιες ειναι οι ριζες του πολυωνυμου).

**12.2.8.** Εστω $N \times N$ ανω η κατω τριγωνικος πινακας. Τοτε οι ιδιοτιμες του $\mathbf{A}$ ειναι $a_{11}, a_{22}, ..., a_{NN}$.

**Απαντηση**. Για κατω τριγωνικο πινακα εχουμε:

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & 0 & ... & 0 \\ -a_{22} & \lambda & .. & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ -a_{N1} & -a_{N2} & ... & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - a_{11}) \cdot (\lambda - a_{22}) \cdot ... \cdot (\lambda - a_{NN})$$

που δινει το ζητουμενο. Για ανω τριγωνικο πινακα η αποδειξη ειναι παρομοια.

**12.2.9.** Εστω $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$ με ιδιοτιμες $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N$. Τοτε οι ιδιοτιμες του $\mathbf{A}^k$ ειναι $\lambda_1^k, \lambda_2^k, ..., \lambda_N^k$, για $k = 1, 2, ...$ .

**Απαντηση**. Για τυχον $n \in \{1, 2, ..., N\}$ εχουμε

$$\mathbf{Av} = \lambda_n\mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{AAv} = \mathbf{A}\lambda_n\mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{A}^2\mathbf{v} = \lambda_n\mathbf{Av} = \lambda_n\lambda_n\mathbf{v} = \lambda_n^2\mathbf{v}$$

το οποιο δειχνει οτι η $\lambda_n^2$ ειναι ιδιοτιμη του $\mathbf{A}^2$. Αντιστοιχα εχουμε $\mathbf{A}^3\mathbf{v} = \lambda_n\mathbf{A}^2\mathbf{v} = \lambda_n^3\mathbf{v}$ κτλ.

**12.2.10.** Εστω $N \times N$ αντιστρεψιμος πινακας $\mathbf{A}$ με ιδιοτιμες $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N$. Τοτε οι ιδιοτιμες του $\mathbf{A}^{-k}$ ειναι $\lambda_1^{-k}, \lambda_2^{-k}, ..., \lambda_N^{-k}$, για $k = 1, 2, ...$ .

**Απαντηση**. Για τυχον $n \in \{1, 2, ..., N\}$ εχουμε

$$\mathbf{Av} = \lambda_n\mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Av} = \mathbf{A}^{-1}\lambda_n\mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{v} = \lambda_n\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v} = \lambda_n^{-1}\mathbf{v}$$

το οποιο δειχνει οτι η $\lambda_n^{-1}$ ειναι ιδιοτιμη του $\mathbf{A}^{-1}$ (παρατηρειστε οτι $\lambda_n = 0$ ειναι αδυνατον, διοτι τοτε $|\mathbf{A}| = \lambda_1 \cdot ... \cdot \lambda_N = 0$ οποτε ο $\mathbf{A}$ υα ηταν μη αντιστρεψιμος). Απο την $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v} = \lambda_n^{-1}\mathbf{v}$ παιρνουμε $\mathbf{A}^{-k}\mathbf{v} = \lambda_n^{-k}\mathbf{v}$ με διαδιχικους πολλαπλασιασμους με $\mathbf{A}^{-1}$.

**12.2.11.** Εστω $N \times N$ πινακες $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{P}$ τετοιοι ωστε $\mathbf{PAP}^{-1} = \mathbf{B}$. Τοτε οι $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ εχουν ιδιο χαρακτηριστικο πολυωνυμο και, συνεπως, ιδιες ιδιοτιμες. .

**Απαντηση**. Εχουμε

$$\begin{aligned} f_A(\lambda) &= |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = |\mathbf{P}|\,|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|\,|\mathbf{P}|^{-1} \\ &= |\mathbf{P}|\,|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|\left|\mathbf{P}^{-1}\right| = \left|\lambda\mathbf{PIP}^{-1} - \mathbf{PAP}^{-1}\right| = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{B}| = f_B(\lambda). \end{aligned}$$

**12.2.12.** Αν $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_K$ ειναι διαφορετικες μεταξυ τους ιδιοτιμες ενος $N \times N$ πινακα $\mathbf{A}$ και $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_K$ ειναι ιδιοδιανυσματα που αντιστοιχουν στις $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_K$ , τοτε το συνολο $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_K\}$ ειναι γραμμικα ανεξαρτητο.

**Απαντηση**. Εστω οτι το ζητουμενο δεν ισχυει. Θα υπαρχει ενα υποσυνολο του $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_K\}$ το οποιο να ειναι γραμμικα εξαρτημενο και να περιεχει τον μεγιστο δυνατο αριθμο διανυσματων (δηλ. αν αφαιρεσουμε ενα απο τα διανυσματα, το συνολο που απομενει ειναι γραμμικα ανεξαρτητο). Ας υποθεσουμε οτι αυτο το *ελαχιστο* γραμμικα ανεξαρτητο υποσυνολο ειναι το $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_M\}$ με $M \leq K$· μπορουμε παντα να αριθμησουμε τις ιδιοτιμες και τα ιδιοδιανυσματα ετσι ωστε το $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_{M-1}\}$ να ειναι γραμμικα ανεξαρτητο αλλα το $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_M\}$ γραμμικα εξαρτημενο. Λογω της γραμμικης εξαρτησης θα υπαρχουν αριθμοι $a_1, ..., a_{M-1}$ τετοιοι ωστε

$$\mathbf{v}_M = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + ... + a_{M-1}\mathbf{v}_{M-1} \Rightarrow \tag{12.3}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_M = \mathbf{A}\cdot (a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + ... + a_{M-1}\mathbf{v}_{M-1}) \Rightarrow$$

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_M = a_1\mathbf{A}\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{A}\mathbf{v}_2 + ... + a_{M-1}\mathbf{A}\mathbf{v}_{M-1} \Rightarrow$$

$$\lambda_M\mathbf{v}_M = a_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + a_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + ... + a_{M-1}\lambda_{M-1}\mathbf{v}_{M-1.} \tag{12.4}$$

Πολλαπλασιαζουμε την (12.3) με $\lambda_M$ και παιρνουμε

$$\lambda_M\mathbf{v}_M = a_1\lambda_M\mathbf{v}_1 + a_2\lambda_M\mathbf{v}_2 + ... + a_{M-1}\lambda_M\mathbf{v}_{M-1} \tag{12.5}$$

και, αφαιρωντας την (12.4) απο την (12.5) εχουμε

$$\mathbf{0} = a_1 \cdot (\lambda_M - \lambda_1) \cdot \mathbf{v}_1 + a_2 \cdot (\lambda_M - \lambda_2) \cdot \mathbf{v}_2 + ... + a_{M-1} \cdot (\lambda_M - \lambda_{M-1}) \cdot \mathbf{v}_{M-1}. \tag{12.6}$$

Αλλα το $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_{M-1}\}$ ειναι γραμμικα ανεξαρτητο, οποτε πρεπει να ειναι

$$0 = a_1 \cdot (\lambda_M - \lambda_1) = a_2 \cdot (\lambda_M - \lambda_2) = ... = a_{M-1} \cdot (\lambda_M - \lambda_{M-1}). \tag{12.7}$$

Ομως ενα τουλαχιστον εκ των $a_m$ ειναι διαφορο του $0$ οποτε πρεπει για ενα τουλαχιστον $m$ να ειναι $\lambda_M - \lambda_m = 0$. Αλλα εχουμε υποθεσει οτι ολες οι ιδιοτιμες ειναι διαφορετικες μεταξυ τους, αρα εχουμε οδηγηθει σε αντιφαση. Αρα το $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_K\}$ ειναι γραμμικα ανεξαρτητο.

**12.2.13.** Εστω $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$, $\lambda$ μια ιδιοτιμη αυτου και $V_\lambda$ το συνολο ολων των (ιδιο)διανυσματων που ικανοποιουν $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Το $V_\lambda$ ειναι διανυσματικος χωρος, τον οποιο ονομαζουμε *ιδιοχωρο* της $\lambda$.

**Απαντηση**. Εστω $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_\lambda$, δηλ. τετοια ωστε $\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ και $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$· εστω $a, b \in \mathbb{C}$ Τοτε

$$\mathbf{A}\cdot (a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = a\mathbf{A}\mathbf{u} + b\mathbf{A}\mathbf{v} = a\lambda\mathbf{u} + b\lambda\mathbf{v} = \lambda\cdot (a\mathbf{u} + b\mathbf{v}).$$

Αρα $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} \in V_\lambda$ και το $V_\lambda$ ειναι διανυσμτικος χωρος.

**12.2.14.** Εστω $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$ και $\lambda$ μια ιδιοτιμη αυτου. Η γεωμετρικη πολλαπλοτητα της $\lambda$ ισουται με $N - rank\,(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$.

**Απαντηση**. Η γεωμετρικη πολλαπλοτητα του $\mathbf{A}$ ειναι απλα η διασταση του ιδιοχωρου $V_\lambda$, δηλ. του συνολου ολων των $\mathbf{u}$ τετοιων ωστε

$$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Με αλλα λογια, ο $V_\lambda$ ειναι ο *πυρηνας* του $(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})$ και η γεωμετρικη πολλαπλοτητα του $\mathbf{A}$ ειναι $null\,(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})$. Ως ειναι γνωστο, εχουμε

$$rank\,(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})+null\,(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})=N$$

το οποιο δινει αμεσως το ζητουμενο.

**12.2.15.** Βρειτε την γεωμετρικη και αλγεβρικη πολλαπλοτητα των ιδιοτιμων του

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&4\\1&1&2\end{bmatrix}.$$

**Απαντηση**. Απο την $|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}|=0$ εχουμε

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\0&2-\lambda&4\\1&1&2-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow(1-\lambda)\left(-4\lambda+\lambda^2\right)=0$$

αρα οι ιδιοτιμες του $\mathbf{A}$ ειναι $\lambda_1=1,\lambda_2=0,\lambda_3=4$. Τα αντιστοιχα ιδιοδιανυσματα ειναι

$$\begin{bmatrix}1-1&0&0\\0&2-1&4\\1&1&2-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=t\cdot\begin{bmatrix}3\\-4\\1\end{bmatrix}.$$
$$\begin{bmatrix}1-0&0&0\\0&2-0&4\\1&1&2-0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=t\cdot\begin{bmatrix}0\\-2\\1\end{bmatrix}.$$
$$\begin{bmatrix}1-4&0&0\\0&2-4&4\\1&1&2-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=t\cdot\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}.$$

Για να ελεγξουμε την γρ. ανεξαρτησια των στηλων του πινακα

$$\begin{bmatrix}3&0&0\\-4&-2&2\\1&1&1\end{bmatrix}$$

αρκει να υπολογισουμε την οριζουσα. Επειδη

$$\begin{vmatrix}3&0&0\\-4&-2&2\\1&1&1\end{vmatrix}=-12.$$

συμπεραινουμε οτι οι στηλες ειναι γραμμικα ανεξαρτητες. Αρα καθε ιδιοτιμη του $\mathbf{A}$ εχει αλγεβρικη και γεωμετρικη πολλαπλοτητα 1.

**12.2.16.** Βρειτε την γεωμετρικη και αλγεβρικη πολλαπλοτητα των ιδιοτιμων του

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση**. Απο την $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$ εχουμε

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 16 + 12\lambda - \lambda^3 = -(\lambda-4)(2+\lambda)^2 = 0$$

αρα οι ιδιοτιμες του $\mathbf{A}$ ειναι $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = \lambda_3 = -2$. Παρατηρουμε οτι η $-2$ ειναι *διπλη* ιδιοτιμη. Τα αντιστοιχα ιδιοδιανυσματα ειναι

$$\begin{bmatrix} 1-4 & -3 & 3 \\ 3 & -5-4 & 3 \\ 6 & -6 & 4-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1-(-2) & -3 & 3 \\ 3 & -5-(-2) & 3 \\ 6 & -6 & 4-(-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Βλεπουμε οτι στην διπλη ιδιοτιμη $-2$ αντιστοιχουν δυο (προφανως) γραμμικα ανεξαρτητα ιδιοδιανυσματα. Ελεγχουμε τωρα αν ειναι γραμμικα ανεξαρτητες οι στηλες

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Επειδη

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

τα ιδιοδιανυσματα ειναι γραμμικα ανεξαρτητα. Ετσι η $4$ εχει αλγεβρικη και γεωμετρικη πολλαπλοτητα 1, ενω η $-2$ εχει αλγεβρικη και γεωμετρικη πολλαπλοτητα 2.

**12.2.17.** Βρειτε την γεωμετρικη και αλγεβρικη πολλαπλοτητα των ιδιοτιμων του

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση**. Απο την $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$ προκυπτουν οι ιδιοτιμες 2 και $-4$. Τα αντιστοιχα ιδιοδιανυσματα ειναι

$$\begin{bmatrix} 3-2 & -1 & 1 \\ 7 & -5-2 & 1 \\ 6 & -6 & 2-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 3+4 & -1 & 1 \\ 7 & -5+4 & 1 \\ 6 & -6 & 2+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Βλεπουμε οτι στην μονη ιδιοτιμη $2$ αντιστοιχει ενα ιδιοδιανυσμα (αυτη εχει αλγεβρικη και γεωμετρικη πολλαπλοτητα 1) και στην διπλη ιδιοτιμη $-4$ αντιστοιχει ενα γραμμικα ανεξαρτητο ιδιοδιανυσμα (αυτη εχει αλγεβρικη πολλαπλοτητα 2 και γεωμετρικη πολλαπλοτητα 1).

**12.2.18.** Αν ενας πινακας ειναι πραγματικος και συμμετρικος, τοτε ολες οι ιδιοτιμες του ειναι πραγματικες. Επιπλεον, αν τα ιδιοδιανυσματα $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ αντιστοιχουν σε διαφορετικες ιδιοτιμες ικανοποιουν $\mathbf{u}^T\mathbf{v}=\mathbf{0}$.

**Απαντηση**. Εστω $N\times N$ πραγματικος συμμετρικος πινακας $\mathbf{A}$, $\lambda$ μια ιδιοτιμη αυτου και $\mathbf{x}=\left[\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & ... & x_N \end{array}\right]^T$ το αντιστοιχο $N\times 1$ ιδιοδιανυσμα. Η $\lambda$ μπορει να ειναι μιγαδικη και το $\mathbf{x}$ μπορει να εχει ιγαδικα στοιχεια. Οριζουμε τωρα το διανυσμα

$$\mathbf{x}^H=\left[\begin{array}{cccc} \overline{x}_1 & \overline{x}_2 & ... & \overline{x}_N \end{array}\right]$$

οπου $\overline{x}_n$ ειναι ο μιγαδικος συζυγης του $x_n$. Παρατηρουμε οτι

$$\mathbf{x}^H\cdot\mathbf{x}=\overline{x}_1x_1+\overline{x}_2x_2+...+\overline{x}_Nx_N=|x_1|^2+|x_2|^2+...+|x_N|^2$$

δηλ. ειναι πραγματικος (και μαλιστα θετικος) αριθμος.

Εχουμε $\mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{x}$· πολλαπλασιαζοντας με $\mathbf{x}^H$ παιρνουμε

$$\mathbf{x}^H\mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{x}^H\mathbf{x}. \tag{12.8}$$

Το αριστερο μελος της (12.8) ειναι

$$\mathbf{x}^H\mathbf{Ax}=\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}a_{mn}\overline{x}_mx_n=\sum_{m=1}^{N}a_{mm}|x_m|^2+\sum_{m=1}^{N}\sum_{n\neq m}a_{mn}\overline{x}_mx_n.$$

Το πρωτο αθροισμα ειναι πραγματικος αριθμος, διοτι τα $a_{mm}$ ειναι πραγματικοι αριθμοι, οπως και τα $|x_m|^2$. Το δευτερο αθροισμα ειναι επισης πραγματικος αριθμος, διοτι μπορουμε να ομαδοπιησουμε τους ορους του σε ζευγη ως εξης:

$$a_{mn}\overline{x}_mx_n+a_{nm}\overline{x}_nx_m=a_{mn}\cdot(\overline{x}_mx_n+\overline{x}_nx_m)=a_{mn}\cdot\left(\overline{x}_mx_n+\overline{\overline{x}_mx_n}\right)$$

οποτε μεσα στην παρενθεση εχουμε αθροισμα συζυγων, το οποιο ειναι πραγματικος αριθμος.

Αρα το αριστερο μελος της (12.8) ειναι πραγματικος αριθμος και πρεπει το δεξι μελος να ειναι επισης πραγματικος. Αλλα το δεξι μελος ειναι

$$\lambda\cdot\mathbf{x}^H\mathbf{x}=\lambda\cdot\left(|x_1|^2+|x_2|^2+...+|x_N|^2\right)$$

οποτε και το $\lambda$ πρεπει να ειναι πραγματικος αριθμος και εχουμε αποδειξει το πρωτο ζητουμενο.

Αφου καθε ιδιοτιμη $\lambda$ ειναι πραγματικη και καθε ιδιοδιανυσμα $\mathbf{u}$ τετοιο ωστε $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\,\mathbf{u}=\mathbf{0}$ ειναι επισης πραγματικο, ως λυση ενος πραγματικου συστηματος γραμμικων εξισωσεων.

Για το δευτερο ζητουμενο, εστω $\lambda,\mu$ δυο διαφορετικες ιδιοτιμες του $\mathbf{A}$ με αντιστοιχα ιδιοδιανυσματα $\mathbf{u},\mathbf{v}$. Εχουμε

$$\mathbf{Au}=\lambda\mathbf{u}\Rightarrow\mathbf{v}^T\mathbf{Au}=\lambda\mathbf{v}^T\mathbf{u}$$
$$\mathbf{Av}=\mu\mathbf{v}\Rightarrow\mathbf{u}^T\mathbf{Av}=\mu\mathbf{u}^T\mathbf{v}.$$

Αλλα το $\mathbf{v}^T\mathbf{A}\mathbf{u}$ ειναι $1 \times 1$ οποτε $\mathbf{v}^T\mathbf{A}\mathbf{u} = \left(\mathbf{v}^T\mathbf{A}\mathbf{u}\right)^T = \mathbf{u}^T\mathbf{A}\mathbf{v}$ οποτε και

$$\lambda\mathbf{v}^T\mathbf{u} = \mu\mathbf{u}^T\mathbf{v} \Rightarrow (\lambda - \mu) \cdot \mathbf{u}^T\mathbf{v} = 0.$$

Αφου $\lambda \neq \mu$, θα εχουμε $\mathbf{u}^T\mathbf{v} = 0$ και εχουμε αποδειξει το δευτερο ζητουμενο.

**12.2.19.** Για ποιες τιμες του $k$ εχει ο

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

ιδιοτιμη ιση με 1;

**Απαντηση**. Το χαρακτηριστικο πολυωνυμο του $\mathbf{A}$ ειναι $(\lambda - k)\left(\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 2k\right)$ το οποιο εχει ριζες $\lambda = k, 1 \pm \sqrt{2k}$. Πρεπει να εχουμε

$$k = 1 \qquad \text{ή} \qquad 1 \pm \sqrt{2k} = 1 \Rightarrow k = 0.$$

Αρα οι ζητουμενες τιμες ειναι $k = 1$ ή $k = 0$.

**12.2.20.** Δινεται $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$ και σχηματιζουμε τον $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \alpha\mathbf{I}$. Δειξτε: αν η $\lambda$ ειναι ιδιοτιμη του $\mathbf{A}$, η $\lambda - \alpha$ ειναι ιδιοτιμη του $\mathbf{B}$.

**Απαντηση**. Εστω $\lambda$ ιδιοτιμη του $\mathbf{A}$ και $\mathbf{u}$ αντιστοιχο ιδιοδιανυσμα.Τοτε

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{u} - \alpha\mathbf{u} = (\lambda - \alpha)\,\mathbf{u} \Rightarrow (\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I})\,\mathbf{u} = (\lambda - \alpha)\,\mathbf{u}$$

που αποδεικνυει το ζητουμενο.

**12.2.21.** Βρειτε τις ιδιοτιμες του

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{array}\right].$$

**Απαντηση**. Εχουμε

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \left|\begin{array}{cc} \lambda - \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \lambda - \cos\phi \end{array}\right| = \lambda^2 - 2\lambda\cos\phi + \cos^2\phi + \sin^2\phi = 0$$

που εχει ριζες

$$\lambda_{1,2} = \frac{2\cos\phi \pm \sqrt{4\cos^2\phi - 4}}{2} = \cos\phi \pm i\sin\phi = e^{\pm i\phi}.$$

Βλεπουμε οτι ενας πραγματικος πινακας μπορει να εχει μιγαδικες ιδιοτιμες.

**12.2.22.** Βρειτε τις ιδιοτιμες του

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc} i & 1 \\ 0 & i \end{array}\right].$$

**Απαντηση**. Εχουμε

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \left|\begin{array}{cc} \lambda - i & -1 \\ 0 & \lambda - i \end{array}\right| = \lambda^2 - 2i\lambda - 1 = 0$$

Αλλα $\lambda^2 - 2i\lambda - 1 = \lambda^2 - 2i\lambda + i^2 = (\lambda - i)^2$ αρα ο $\mathbf{A}$ εχει διπλη ιδιοτιμη την $i$.

**12.2.23.** Αν $f_A(\lambda)$ ειναι το χαρακτηριστικο πολυωνυμο του $N \times N$ πινακα $\mathbf{A}$, βρειτε το χαρακτηριστικο πολυωνυμο του $-\mathbf{A}$.

**Απαντηση**. Εχουμε

$$f_{-A}(\lambda) = |\lambda\mathbf{I} + \mathbf{A}| = (-1)^N \cdot |-\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = (-1)^N \cdot f_A(-\lambda).$$

**12.2.24.** Αν $f_A(\lambda)$ ειναι το χαρακτηριστικο πολυωνυμο του $N \times N$ πινακα $\mathbf{A}$, μπορειτε να βρειτε το χαρακτηριστικο πολυωνυμο του $\mathbf{A}^2$;

**Απαντηση**. Εχουμε

$$(-1)^N \cdot f_A(\lambda) \cdot f_A(-\lambda) = f_A(\lambda) f_{-A}(\lambda) = (-1)^N \cdot |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| \cdot |\lambda\mathbf{I} + \mathbf{A}| = \left|\lambda^2\mathbf{I} - \mathbf{A}^2\right| = (-1)^N \cdot f_{A^2}\left(\lambda^2\right).$$

Αρα

$$f_{A^2}\left(\lambda^2\right). = (-1)^N \cdot f_A(\lambda) f_{-A}(-\lambda).$$

*Προσοχη*! Αυτο *δεν* δημαινει οτι $f_{A^2}(\lambda). = (-1)^N \cdot f_A\left(\sqrt{\lambda}\right) f_{-A}\left(-\sqrt{\lambda}\right)$, διοτι το δεξι μερος *δεν*.ειναι υποχρεωρικα πολυωνυμο του $\lambda$.

**12.2.25.** Αποδειξτε την ανισοτητα

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

χρησιμοποιωντας τον πινακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} c & a & b \\ a & b & c \\ b & c & a \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση**. Θετουμε $\lambda_0 = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca)}$ και υπολογιζουμε την οριζουσα

$$|\lambda_0\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda_0 - c & -a & -b \\ -a & \lambda_0 - b & -c \\ -b & -c & \lambda_0 - a \end{vmatrix}.$$

Μετα αρκετες πραξεις προκυπτει οτι η οριζουσα ειναι $0$, δηλ. ειναι μια ιδιοτιμη του $\mathbf{A}$. Αλλα ο $\mathbf{A}$ ειναι συμμετρικος, αρα ολες οι ιδιοτιμες του ειναι πραγματικες. Οποτε $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

## 12.3 Αλυτα Προβληματα

**12.3.1.** Να βρεθουν οι ιδιοτιμες και τα ιδιοδιανυσματα των $\mathbf{A}$ και $\mathbf{A}^T$.

1. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ **Απ.** $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow 1$, $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow 2$.

2. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ **Απ.** $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow -1$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow 4$).

3. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ **Απ.** $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\leftrightarrow 3,\ \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\leftrightarrow 1,\ \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\leftrightarrow 2.$

4. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&1&3\\0&2&2\end{bmatrix}$ **Απ.** $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\leftrightarrow 3,\ \begin{bmatrix}0\\-\frac{3}{2}\\1\end{bmatrix}\leftrightarrow -1,\ \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\leftrightarrow 4.$

5. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&0&2\\7&1&6\\3&0&1\end{bmatrix}$ **Απ.** $\begin{bmatrix}1\\\frac{13}{3}\\1\end{bmatrix}\leftrightarrow 4,\ \begin{bmatrix}1\\1\\-\frac{3}{2}\end{bmatrix}\leftrightarrow -1,\ \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\leftrightarrow 1.$

6. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&3-i&1\\0&0&3+i\end{bmatrix}$

   **Απ.** $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\leftrightarrow 1,\ \begin{bmatrix}1\\2-i\\0\end{bmatrix}\leftrightarrow 3-i,\ \begin{bmatrix}1\\2+i\\-2+4i\end{bmatrix}\leftrightarrow 3+i.$

7. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1-i&0&2\\0&3&0\\1&0&1+i\end{bmatrix}$

   **Απ.** $\begin{bmatrix}1-i\\0\\1\end{bmatrix}\leftrightarrow 2,\ \begin{bmatrix}1\\0\\-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\end{bmatrix}\leftrightarrow 0,\ \begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}\leftrightarrow 3$

8. $.\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1-i&0&0&0\\0&1+i&0&0\\1&0&1+i&0\\1&2&3&4\end{bmatrix}.$

   **Απ.** $\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\leftrightarrow 4,\ \begin{bmatrix}-\frac{18}{13}+\frac{14}{13}i\\0\\-\frac{7}{13}-\frac{9}{13}i\\1\end{bmatrix}\leftrightarrow 1-i,\ \left(\begin{bmatrix}0\\-\frac{3}{2}\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\\0\\1\end{bmatrix}\right)\leftrightarrow 1+i.$

**12.3.2.** Να βρειτε την γεωμετρικη και αλγεβρικη πολλαπλοτητα των ιδιοτιμων του

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}.$$

**Απ.** Η $\lambda_1=1$ εχει αλγεβρικη πολλαπλοτητα 1 και γεωμετρικη πολλαπλοτητα 1. Η $\lambda_2=2$ εχει αλγεβρικη πολλαπλοτητα 2 και γεωμετρικη πολλαπλοτητα 1.

**12.3.3.** Να βρειτε την γεωμετρικη και αλγεβρικη πολλαπλοτητα των ιδιοτιμων του

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Απ**. Η $\lambda_1 = 1$ εχει αλγεβρικη πολλαπλοτητα 2 και γεωμετρικη πολλαπλοτητα 2, η $\lambda_2 = 2$ εχει αλγεβρικη πολλαπλοτητα 2 και γεωμετρικη πολλαπλοτητα 2.

**12.3.4.** Να βρειτε την γεωμετρικη και αλγεβρικη πολλαπλοτητα των ιδιοτιμων του

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Απ**. Η $\lambda_1 = -4$ εχει αλγεβρικη πολλαπλοτητα 1 και γεωμετρικη πολλαπλοτητα 1. Η $\lambda_2 = 2$ εχει αλγεβρικη πολλαπλοτητα 2 και γεωμετρικη πολλαπλοτητα 1.

**12.3.5.** Να βρειτε την γεωμετρικη και αλγεβρικη πολλαπλοτητα των ιδιοτιμων του

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

**Απ**. Η $\lambda_1 = 2$ εχει αλγεβρικη πολλαπλοτητα 1 και γεωμετρικη πολλαπλοτητα 1. Η $\lambda_2 = 1$ εχει αλγεβρικη πολλαπλοτητα 2 και γεωμετρικη πολλαπλοτητα 2.

**12.3.6.** Να βρειτε την γεωμετρικη και αλγεβρικη πολλαπλοτητα των ιδιοτιμων του

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

**Απ**. $\lambda_1 = 1$ εχει αλγεβρικη πολλαπλοτητα 2 και γεωμετρικη πολλαπλοτητα 2. Η $\lambda_2 = 2$ εχει αλγεβρικη πολλαπλοτητα 1 και γεωμετρικη πολλαπλοτητα 1.)

**12.3.7.** Να βρειτε την γεωμετρικη και αλγεβρικη πολλαπλοτητα των ιδιοτιμων του

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & 6 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

**Απ**. Η $\lambda_1 = 1$ εχει αλγεβρικη πολλαπλοτητα 2 και γεωμετρικη πολλαπλοτητα 1. Η $\lambda_2 = 2$ εχει αλγεβρικη πολλαπλοτητα 1 και γεωμετρικη πολλαπλοτητα 1.

**12.3.8.** Εστω $N \times N$ αντιερμιτιανος πινακας $\mathbf{A}$. Αποδειξτε οτι ο $\mathbf{I} + \mathbf{A}$ ειναι ομαλος και ο $(\mathbf{I} + \mathbf{A})(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ ειναι ορθογωνιος.

**12.3.9.** Δειξτε οτι αν το $\mathbf{v}$ ειναι ιδιοδιανυσμα των $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ τοτε ειναι ιδιοδιανυσμα και του $\mathbf{A}+\mathbf{B}$.

**12.3.10.** Δινεται ο $(2N-1)\times(2N-1)$ πινακας

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} x & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & x \end{bmatrix}.$$

Δειξτε οτι τα ιδιοδιανυσματα του $\mathbf{A}$ ειναι

$$\mathbf{v}_n=\begin{bmatrix} \sin\frac{n\pi}{2N} \\ \sin\frac{2n\pi}{2N} \\ \sin\frac{3n\pi}{2N} \\ ... \\ \sin\frac{(2N-1)\pi}{2N} \end{bmatrix}, \qquad n=1,2,...,2N-1.$$

**12.3.11.** Δινεται ο $N\times N$ πινακας

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Δειξτε οτι οι ιδιοτιμες του $\mathbf{A}$ ειναι

$$\mathbf{v}_n=2i\cdot\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{N+1} \\ \cos\frac{2\pi}{N+1} \\ ... \\ \cos\frac{N\pi}{N+1} \end{bmatrix}, \qquad n=1,2,...,N.$$

**12.3.12.** Εστω $N\times N$ πινακας $\mathbf{A}$ με μη αρνητικα στοιχεια τα οποια ικανοποιουν (για $m=1,2,...,N$) $\sum_{n=1}^{N}a_{mn}=1$. Αποδειξτε οτι $\lambda=1$ ειναι μια ιδιοτιμη του $\mathbf{A}$.

**12.3.13.** Εστω $(2N-1)\times(2N-1)$ ορθογωνιος πινακας $\mathbf{A}$ με $|\mathbf{A}|\in\{-1,+1\}$. Δειξτε οτι ο $\mathbf{A}$ εχει ιιδιοτιμη την $+1$ ή την $-1$.

**12.3.14.** Αποδειξτε οτι, αν η $\lambda$ ειναι ιδιοτιμη του $\mathbf{A}$, τοτε η $\overline{\lambda}$ ειναι ιδιοτιμη του $\mathbf{A}^H$.

**12.3.15.** Εστω $N\times N$ πινακας $\mathbf{A}$ που ικανοποιει $\mathbf{A}^2=\mathbf{I}$ και $\mathbf{v}$ τυχον ιδιοδιανυσμα. Δειξτε οτι ο $\mathbf{I}+\mathbf{A}$ εχει ιδιοτιμη $\lambda_1=+1$ και ιδιοδιανυσμα $(\mathbf{I}+\mathbf{A})\,\mathbf{v}$. Αντιστοιχα δειξτε οτι ο $\mathbf{I}-\mathbf{A}$ εχει ιδιοτιμη $\lambda_1=-1$ και ιδιοδιανυσμα $(\mathbf{I}-\mathbf{A})\,\mathbf{v}$

**12.3.16.** Εστω $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$. Αποδειξτε οτι, αν $rank(\mathbf{A}) = K$, τοτε τουλαχιστον $N - K$ ιδιοτιμες του $\mathbf{A}$ ειναι μηδενικες.

**12.3.17.** Εστω $N \times N$ ερμιτιανος πινακας $\mathbf{A}$ ο οποιος ικανοποιει $\mathbf{A} = \mathbf{B} + i\mathbf{C}$, οπου $\mathbf{B}, \mathbf{C}$ ειναι πραγματικοι πινακες. Ποια ειναι η αντιστοιχια των ιδιοτιμων και ιδιοδιανυσματων του $\mathbf{C}$ με αυτα του πινακα

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & -\mathbf{C} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

**12.3.18.** Αποδειξτε οτι οι ιδιοτιμες ενος ορθογωνιου πινακα εχουν μετρο ισο με το 1.

**12.3.19.** Εστω $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$ και $\lambda$ μια ιδιοτιμη αυτου. Αποδειξτε οτι η γεωμετρικη πολλαπλοτητα της $\lambda$ ειναι μικροτερη η ιση της αλγεβρικης πολλαπλοτητας.

**12.3.20.** Αποδειξτε οτι καθε ερμιτιανος πινακας εχει πραγματικες ιδιοτιμες.

# Κεφάλαιο 13

# Διαγωνιοποιηση και Συναρτησεις Πινακων

## 13.1 Θεωρια

**13.1.1.** Εστω $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$ με $N$ (πιθανον επαναλαμβανομενες) ιδιοτιμες $\lambda_1$, $\lambda_2$, ..., $\lambda_N$ και $N$ αντιστοιχα ιδιοδιανυσματα $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_N$. Δηλ.

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_n = \lambda_n \mathbf{v}_n \qquad \text{για } n = 1, 2, ..., N. \tag{13.1}$$

Μπορουμε να γραψουμε την (13.1) σε πιο συμπαγη μορφη. Οριζουμε

$$\mathbf{X} = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & ... & \mathbf{v}_N \end{array}\right], \qquad \mathbf{\Lambda} = \left[\begin{array}{cccc} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_N \end{array}\right].$$

Τοτε η (13.1) ειναι ισοδυναμη με την

$$\mathbf{AX} = \mathbf{X\Lambda}.$$

**13.1.2.** Εστω $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$ με $N$ γραμμικα ανεξαρτητα ιδιοδιανυσματα. Τοτε υπαρχουν πινακες $\mathbf{X}$ (αντιστρεψιμος) και $\mathbf{\Lambda}$ (διαγωνιος) τετοιοι ωστε $\mathbf{X}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{\Lambda}$. Σε αυτη την περιπτωση λεμε οτι ο $\mathbf{A}$ ειναι *διαγωνιοποιησιμος*.

**13.1.3.** (Θεωρημα $Cayley$-$Hamilton$) Εστω τετραγωνικος πινακας $\mathbf{A}$ με χαρακτηριστικο πολυωνυμο $f_A(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}|$. Τοτε $f_A(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$.

**13.1.4.** Εστω μια συναρτηση $f(z)$ η οποια στην γειτονια του 0 εχει αναπτυγμα $Taylor$:

$$f(z) = f(0) + f'(0)\frac{z}{1!} + f''(0)\frac{z^2}{2!} + ...$$

Τοτε για οποιοδηποτε $N$ και για καθε $N \times N$ πινακα $\mathbf{A}$ μπορουμε να ορισουμε την αντιστοιχη συναρτηση πινακα ως εξης:

$$f(\mathbf{A}) = f(0)\,\mathbf{I} + f'(0)\,\mathbf{A} + \frac{1}{2!}f''(0)\,\mathbf{A}^2 + ... \tag{13.2}$$

υπο την προυποθεση οτι η (13.2) συγκλινει.

**13.1.5.** Εστω $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$ με $N$ ιδιοτιμες $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N$, και αντιστοιχα γραμμικα ανεξαρτητα ιδιοδιανυσματα $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_N$. Επισης, εστω μια συναρτηση $f(z)$ η οποια στην γειτονια του $0$ εχει αναπτυγμα $Taylor$. Τοτε

$$f(\mathbf{A}) = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & ... & \mathbf{v}_N \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccc} f(\lambda_1) & 0 & ... & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & f(\lambda_N) \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & ... & \mathbf{v}_N \end{array}\right]^{-1}.$$

**13.1.6.** Εστω $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$ με $N$ ιδιοτιμες $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N$, και αντιστοιχα γραμμικα ανεξαρτητα ιδιοδιανυσματα $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_N$. Επισης, εστω πολυωνυμο (οποιουδηποτε βαθμου) $f(z)$. Τοτε το $f(\mathbf{A})$ ισουται με ενα πολυωνυμο του $\mathbf{A}$ το οποιο ειναι το πολυ $N-1$ βαθμου.

**13.1.7.** Εστω $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$ με $N$ ιδιοτιμες $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N$, και αντιστοιχα γραμμικα ανεξαρτητα ιδιοδιανυσματα $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_N$. Επισης, εστω μια συναρτηση $f(z)$ η οποια στην γειτονια του $0$ εχει αναπτυγμα $Taylor$. Τοτε η $f(\mathbf{A})$ ισουται με ενα πολυωνυμο του $\mathbf{A}$ το οποιο ειναι το πολυ $N-1$ βαθμου.

**13.1.8.** Μια *τετραγωνικη μορφη* των μεταβλητων $x_1, x_2, ..., x_N$ ειναι ενα ομογενες πολυωνυμο δευτερου βαθμου, δηλ. ενα πολυωνυμο της μορφης

$$f(x_1, x_2, ..., x_N) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{NN}x_N^2 + a_{12} \cdot x_1 x_2 + ... + a_{N-1,N} x_{N-1} x_N$$

οπου $a_{mn} \in \mathbb{R}$ για καθε $m, n \in \{1, 2, ..., N\}$.

**13.1.9.** Καθε τετραγωνικη μορφη $f(x_1, x_2, ..., x_N)$ μπορει να γραφτει ως $\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}$, οπου $\mathbf{x} = \left[\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & ... & x_N \end{array}\right]^T$ και $\mathbf{P}$ ειναι συμμετρικος πραγματικος πινακας.

**13.1.10.** Μια τετραγωνικη μορφη $f(x_1, x_2, ..., x_N) = \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}$ (οπου ο $\mathbf{P}$ ειναι συμμετρικος) λεγεται *θετικη ορισμενη* (*αρνητικη ορισμενη*) ανν $\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x} > 0$ ($\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x} < 0$) για καθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N - \{\mathbf{0}\}$. Αντιστοιχα, ο πινακας $\mathbf{P}$ λεγεται θετικος ορισμενος (αρνητικος ορισμενος).

**13.1.11.** Μια τετραγωνικη μορφη $f(x_1, x_2, ..., x_N) = \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}$ (οπου ο $\mathbf{P}$ ειναι συμμετρικος) ειναι θετικη ορισμενη (αρνητικη ορισμενη) ανν ο $\mathbf{P}$ εχει $N$ θετικες (αρνητικες) ιδιοτιμες.

## 13.2 Λυμενα Προβληματα

**13.2.1.** Διαγωνιοποιειστε τον πινακα

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc} 5 & 4 \\ 4 & -1 \end{array}\right].$$

**Απαντηση.** Οι ιδιοτιμες ειναι $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 7$. Τα ιδιοδιανυσματα ειναι

$$\left[\begin{array}{cc} 5+3 & 4 \\ 4 & -1+3 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}\right] = t \cdot \left[\begin{array}{c} 1 \\ -2 \end{array}\right].$$

$$\begin{bmatrix} 5-7 & 4 \\ 4 & -1-7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Σχηματιζουμε τον πινακα

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Υπολογιζουμε

$$\mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Και τωρα διαγωνιοποιουμε τον $\mathbf{A}$ ως εξης:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

**13.2.2.** Διαγωνιοποιειστε τον πινακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση**. Οι ιδιοτιμες ειναι $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -2$ (διπλη) και τα ιδιοδιανυσματα ειναι

$$\begin{bmatrix} 1-4 & -3 & 3 \\ 3 & -5-4 & 3 \\ 6 & -6 & 4-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1-(-2) & -3 & 3 \\ 3 & -5-(-2) & 3 \\ 6 & -6 & 4-(-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Αρα η $\lambda_1 = 4$ εχει αλγεβρικη και γεωμετρικη πολλαπλοτητα 1· η $\lambda_2 = -2$ εχει αλγεβρικη και γεωμετρικη πολλαπλοτητα 2. Σχηματιζουμε τον πινακα

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Επειδη

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

υπαρχει ο $\mathbf{X}^{-1}$. Υπολογιζουμε

$$\mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Και τωρα διαγωνιοποιουμε τον $\mathbf{A}$ ως εξης:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

**13.2.3.** Διαγωνιοποιειστε τον πινακα

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση.** Οι ιδιοτιμες ειναι $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -2$ (διπλη). Τα ιδιοδιανυσματα ειναι

$$\begin{bmatrix} -3-4 & 1 & -1 \\ -7 & 5-4 & -1 \\ -6 & 6 & -2-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} -3-(-2) & 1 & -1 \\ -7 & 5-(-2) & -1 \\ -6 & 6 & -2-(-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Αρα η $\lambda_1 = 4$ εχει αλγεβρικη και γεωμετρικη πολλαπλοτητα 1· η $\lambda_2 = -2$ εχει αλγεβρικη πολλαπλοτητα 2 και γεωμετρικη πολλαπλοτητα 1. Αρα ο $A$ δεν ειναι διαγωνιοποιησιμος.

**13.2.4.** Βρειτε εναν $2 \times 2$ πινακα ο οποιος εχει ιδιοτιμες $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$

**Απαντηση**. Μια ευκολη λυση ειναι $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Γενικοτερα, εστω $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, αυτος εχει χαρακτηριστικο πολυωνυμο

$$\lambda^2 - (a_{22} + a_{11})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

και υα εχουμε

$$\begin{aligned} 3 &= \lambda_1 + \lambda_2 = a_{22} + a_{11} \\ 2 &= \lambda_1 \cdot \lambda_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \end{aligned}$$

Οποτε μπορουμε να διαλεξουμε τα $a_{ij}$ αρκει να ικανοποιουν τις παραπανω συνθηκες. Π.χ. αν θεσουμε αυθαιρετα $a_{11} = 4$ και $a_{12} = 1$, τοτε παιρνουμε $a_{22} = 3 - a_{11} = 3 - 4 = -1$ και $a_{21} = \frac{2 - a_{11}a_{22}}{-a_{12}} = \frac{6}{1} = -6$. Πραγματι μπορουμε ευκολα να ελεγξουμε οτι ο

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -6 & -1 \end{bmatrix}$$

εχει ιδιοτιμες 1 και 2.

**13.2.5.** Βρειτε εναν $3 \times 3$ πινακα ο οποιος εχει ιδιοτιμες $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 2$ και αντιστοιχα ιδιοδιανυσματα

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση**. Ας θεσουμε

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Τοτε $|\mathbf{X}| = -2 \neq 0$ και αρα υπαρχει ο

$$\mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Οποτε ο πινακας

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{\Lambda}\mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

πραγματι εχει τις ζητουμενες ιδιοτιμες και ιδιο διανυσματα, οπως μπορουμε ευκολα να ελεγξουμε με υπολογισμο.

**13.2.6.** Βρειτε εναν $3 \times 3$ πινακα ο οποιος εχει ιδιοτιμες $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 2$.

**Απαντηση**. Αφου δεν ζητουνται συγκεκριμενα ιδιοδιανυσματα, μπορουμε να χρησιμοποιησουμε οποια θελουμε. Παιρνουμε

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{και } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

οποτε προφανως

$$\mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και ο ζητουενος πινακας ειναι

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

πραγματι εχει τις ζητουμενες ιδιοτιμες και ιδιο διανυσματα, οπως μπορουμε ευκολα να ελεγξουμε χωρις υπολογισμο.

**13.2.7.** Βρειτε εναν ανω τριγωνικο $3 \times 3$ πινακα ο οποιος εχει ιδιοτιμες $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 2$.

**Απαντηση**. Δεν ειναι αναγκαιο να χρησιμοποιησουμε τα τεχνασματα των προηγουμενων ασκησεων. Μας ειναι γνωστο οτι καθε ανω τριγωνικος πινακας εχει ιδιοτιμες τα στοιχεια που εμφανιζονται στην διαγωνιο. Αρα οποιοσδηποτε πινακας

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 2 & z \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

με τυχοντα $x, y, z$ ικανοποιει τις απιτησεις του προβληματος.

**13.2.8.** Επαληθευστε το Θεωρημα *Cayley-Hamilton* για τον

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση.** Εχουμε

$$f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 5 - 3\lambda + \lambda^2.$$

Και

$$5\mathbf{I} - 3\mathbf{A} + \mathbf{A}^2 = 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^2 =$$

$$5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 9 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**13.2.9.** Επαληθευστε το Θεωρημα *Cayley-Hamilton* για τον πινακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Κατοπιν υπολογιστε τον $\mathbf{A}^{-1}$ χρησιμοποιωντας το το Θεωρημα *Cayley-Hamilton*.

**Απαντηση.** Εχουμε

$$f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -3 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 6 - 13\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3.$$

Και

$$\begin{aligned} & 6\mathbf{I} - 13\mathbf{A} + 6\mathbf{A}^2 - \mathbf{A}^3 \\ & = 6\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} - 13\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}^2 - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}^3 \\ & = 6\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 13\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -8 & -5 & -16 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 11 & 12 & 17 \\ -35 & -37 & -57 \\ 22 & 34 & 26 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Τωρα

$$\begin{aligned} 6\mathbf{I} - 13\mathbf{A} + 6\mathbf{A}^2 - \mathbf{A}^3 &= 0 \Rightarrow \\ 6\mathbf{A}^{-1} - 13\mathbf{I} + 6\mathbf{A} - \mathbf{A}^2 &= 0 \Rightarrow \\ \frac{13}{6}\mathbf{I} - \mathbf{A} + \frac{1}{6}\mathbf{A}^2 &= \mathbf{A}^{-1} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{13}{6}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

**13.2.10.** Χρησιμποποιωντας το Θεωρημα *Cayley-Hamilton* υπολογιστε τον $\mathbf{A}^{-1}$ για

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

**Απαντηση**. Το χαρακτηριστικο πολυωνυμο του $\mathbf{A}$ ειναι $\lambda^3 - 4\lambda^2 - 3\lambda + 10$. Αρα, απο το Θεωρημα *Cayley-Hamilton* εχουμε

$$\mathbf{A}^3 - 4\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} + 10\mathbf{I} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{10}\cdot\left(\mathbf{A}^2 - 4\mathbf{A} - 3\mathbf{I}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= -\frac{1}{10}\cdot\left(\mathbf{A}^2 - 4\mathbf{A} - 3\mathbf{I}\right) \\ &= -\frac{1}{10}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}^2 - 4\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**13.2.11.** Αποδειξτε το Θεωρημα *Cayley-Hamilton*: καθε $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$ επαληθευει την χαρακτηριστικη του εξισωση.

**Απαντηση**. Εστω οτι το χαρακτηριστικο πολυωνυμο του $\mathbf{A}$ ειναι

$$f_A(\lambda) = \lambda^N + a_{N-1}\lambda^{N-1} + ... + a_1\lambda + a_0.$$

Παιρνουμε τωρα τον προσαρτηενο πινακα $\mathbf{B}(\lambda)$ του πινακα $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|$. Αυτος θα εχει την ιδιοτητα (θυμηθειτε τον τυπο του αντιστρφου πινακα)

$$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{B}(\lambda) = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|\cdot\mathbf{I} = f_A(\lambda)\cdot\mathbf{I}.$$

Επισης, αν υπολογισουμε τον $\mathbf{B}(\lambda)$ με αναπτυξη των υποοριζουσων, θα παρουμε ενα πολυωνυμο της μορφης

$$\mathbf{B}(\lambda) = \mathbf{B}_{N-1}\lambda^{N-1} + \mathbf{B}_{N-2}\lambda^{N-2} + ... + \mathbf{B}_1\lambda + \mathbf{B}_0.$$

Οι συντελεστες του πολυωνυμου ειναι πινακες και ο βαθμος του δεν ειναι μεγαλυτερος του $\lambda^{N-1}$ γιατι καθε υποοριζουσα σχηματιζεται απαλειφοντας μια γραμμη και μια στηλη απο τον $\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}$. Αρα εχουμε

$$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\left(\mathbf{B}_{N-1}\lambda^{N-1} + \mathbf{B}_{N-2}\lambda^{N-2} + ... + \mathbf{B}_1\lambda + \mathbf{B}_0\right) = \left(\lambda^N + a_{N-1}\lambda^{N-1} + ... + a_1\lambda + a_0\right)\cdot\mathbf{I}.$$

Εκτελωντας τους πολλαπλασιασμους στο αριστερο μελος και εξισωνοντας τους συντελεστες παιρνουμε

$$\mathbf{B}_{N-1}=\mathbf{I},\quad \mathbf{B}_{N-2}-\mathbf{A}\mathbf{B}_{N-1}=a_{N-1}\mathbf{I},\quad ...,\quad \mathbf{B}_0-\mathbf{A}\mathbf{B}_1=a_1\mathbf{I},\quad -\mathbf{A}\mathbf{B}_0=a_0\mathbf{I}.$$

Πολλαπλασιαζοντας τις παραπανω εξισωσεις με $\mathbf{A}^N$, $\mathbf{A}^{N-1}$, ..., $\mathbf{A}$, $\mathbf{I}$ παιρνουμε

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^N\mathbf{B}_{N-1}&=\mathbf{A}^N\mathbf{I},\\
\mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B}_{N-2}-\mathbf{A}^N\mathbf{B}_{N-1}&=a_{N-1}\mathbf{A}^{N-1},\\
&...,\\
\mathbf{A}\mathbf{B}_0-\mathbf{A}^2\mathbf{B}_1&=a_1\mathbf{A},\\
-\mathbf{A}\mathbf{B}_0&=a_0\mathbf{I}.
\end{aligned}$$

Προσθετοντας τωρα τα αριστερα και δεξια μελη των παραπανω παιρνουμε

$$\begin{aligned}
\mathbf{0}&=\mathbf{A}^N\mathbf{B}_{N-1}+\mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B}_{N-2}-\mathbf{A}^N\mathbf{B}_{N-1}+...+\mathbf{A}\mathbf{B}_0-\mathbf{A}^2\mathbf{B}_1-\mathbf{A}\mathbf{B}_0\\
&=\mathbf{A}^N+a_{N-1}\mathbf{A}^{N-1}+...+a_1\mathbf{A}+a_0\mathbf{I}=f_A(\mathbf{A})
\end{aligned}$$

και εχουμε δειξει το ζητουμενο.

**13.2.12.** Αποδειξτε οτι για καθε $N\times N$ πινακα $\mathbf{A}$ με $N$ ιδιοτιμες $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_N$, και αντιστοιχα γραμμικα ανεξαρτητα ιδιοδιανυσματα $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_N$ η συναρτηση $f(z)$ (η οποια στην γειτονια του $0$ εχει αναπτυγμα $Taylor$) ισουται με

$$f(\mathbf{A})=\mathbf{V}\begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 & ... & 0\\ 0 & f(\lambda_2) & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & f(\lambda_N)\end{bmatrix}\mathbf{V}^{-1}.$$

οπου

$$\mathbf{V}=\left[\begin{array}{cccc}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & ... & \mathbf{v}_N\end{array}\right]$$

**Απαντηση**. Εχουμε

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{A})&=f(0)\,\mathbf{I}+f'(0)\,\mathbf{A}+\frac{1}{2!}f''(0)\,\mathbf{A}^2+...\Rightarrow\\
\mathbf{V}^{-1}f(\mathbf{A})\,\mathbf{V}&=\mathbf{V}^{-1}\cdot\left(f(0)\,\mathbf{I}+f'(0)\,\mathbf{A}+\frac{1}{2!}f''(0)\,\mathbf{A}^2+...\right)\cdot\mathbf{V}\\
&=f(0)\,\mathbf{V}^{-1}\cdot\mathbf{I}\cdot\mathbf{V}+f'(0)\,\mathbf{V}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{V}+\frac{1}{2!}f''(0)\,\mathbf{V}^{-1}\cdot\mathbf{A}^2\cdot\mathbf{V}+... \qquad (13.3)
\end{aligned}$$

Επειδη $\mathbf{V}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{V}=\mathbf{\Lambda}$, καθε ορος της μορφης $\mathbf{V}^{-1}\cdot\mathbf{A}^k\cdot\mathbf{V}$ μπορει να γραφτει

$$\mathbf{V}^{-1}\cdot\mathbf{A}^k\cdot\mathbf{V}=\mathbf{V}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{V}\cdot...\cdot\mathbf{V}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{V}=\mathbf{V}^{-1}\cdot\mathbf{\Lambda}^k\cdot\mathbf{V}\ .$$

Αρα η (13.3) γινεται

$$\mathbf{V}^{-1}f(\mathbf{A})\,\mathbf{V}=f(0)\,\mathbf{I}+f'(0)\,\mathbf{V}^{-1}\cdot\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{V}+\frac{1}{2!}f''(0)\,\mathbf{V}^{-1}\cdot\mathbf{\Lambda}^2\cdot\mathbf{V}+...$$

$$= \begin{bmatrix} f(0) + f'(0)\lambda_1 + \frac{1}{2!}f''(0)\lambda_1^2 + ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & f(0) + f'(0)\lambda_N + \frac{1}{2!}f''(0)\lambda_N^2 + ... \end{bmatrix}$$

οποτε

$$\mathbf{V}^{-1} f(\mathbf{A})\mathbf{V} = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 & ... & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & f(\lambda_N) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{V} \cdot \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 & ... & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & f(\lambda_N) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{V}^{-1}$$

και ετσι εχουμε αποδειξει το ζητουμενο.

**13.2.13.** Υπολογιστε τον $e^{\mathbf{A}}$ οπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση**. Ο $\mathbf{A}$ εχει ιδιοτιμες και αντιστοιχα ιδιοδιανυσματα

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow 2, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow 3$$

Οποτε

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

και

$$e^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} e^2 & e^3 - e^2 \\ 0 & e^3 \end{bmatrix}.$$

**13.2.14.** Υπολογιστε τον $e^{\mathbf{A}}$ οπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση.** Οι ιδιοτιμες του $\mathbf{A}$ και τα αντιστοιχα ιδιοδιανυσματα ειναι

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow 0, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow 1, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow 2$$

Οποτε εχουμε

$$e^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -e+1 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}.$$

**13.2.15.** Υπολογιστε τον πινακα $\sin(\mathbf{A})$ οπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση**. Ο $\mathbf{A}$ εχει ιδιοτιμες και 3 και 2, με αντιστοιχα ιδιοδιανυσματα

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Εχουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

και

$$\begin{aligned} \sin\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(3) & 0 \\ 0 & \sin(2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\sin 3 + 2\sin 2 & 2\sin 3 - 2\sin 2 \\ -\sin 3 + \sin 2 & 2\sin 3 - \sin 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**13.2.16.** Αποδειξτε οτι για καθε $N \times N$ πινακα $\mathbf{A}$ με $N$ ιδιοτιμες $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N$, και αντιστοιχα γραμμικα ανεξαρτητα ιδιοδιανυσματα $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_N$ και για καθε πολυωνυμο $f(\lambda)$, το $f(\mathbf{A})$ ισουται με ενα πολυωνυμο του $\mathbf{A}$ το οποιο ειναι το πολυ $N-1$ βαθμου.

**Απαντηση**. Αν το $f(\lambda)$ ειναι βαθμου μικροτερου η ισου με το $N-1$, δεν χρειαζεται να αποδειξουμε τιποτα. Εστω λοιπον οτι ο βαθμος του $f(\lambda)$ ειναι μεγαλυτερος η ισος του $N$. Εστω $f_A(\lambda)$ το χαρακτηριστικο πολυωνυμο του $\mathbf{A}$. Μπορουμε να διαιρεσουμε το $f(\lambda)$ με το $f_A(\lambda)$ και να παρουμε υπολοιπον $v(\lambda)$

$$f(\lambda) = f_A(\lambda)\, u(\lambda) + v(\lambda) \tag{13.4}$$

οπου το $v(\lambda)$ ειναι βαθμου το πολυ $N-1$ (αφου το $f_A(\lambda)$ ειναι βαθμου $N$). Θετοντας $\lambda = \mathbf{A}$ στην (13.4) παιρνουμε

$$f(\mathbf{A}) = f_A(\mathbf{A})\, u(\mathbf{A}) + v(\mathbf{A}) = \mathbf{0} u(\mathbf{A}) + v(\mathbf{A}) = v(\mathbf{A}) \tag{13.5}$$

και εχουμε αποδειξει το ζητουμενο. Η (13.5) ειναι χρησιμη στον υπολογισμο διαφορων πολυωνυμων, οπως θα φανει στις παρακατω προβληματα.

**13.2.17.** Να υπολογιστει το $\mathbf{A}^{31}$ για

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{7}{5} \end{bmatrix}$$

**Απαντηση.** Ειναι επιπονο να υψωσουμε τον $\mathbf{A}$ στην 31η δυναμη (ποσοι πολλαπλασιασμοι χρειαζονται; μπορει αυτοι να ειναι λιγοτεροι απο 30;) γι' αυτο θα χρησιμοποιησουμε την πολυωνυμικη διαιρεση με το χαρακτηριστικο πολυωνυμο. Θετουμε $f(\lambda) = \lambda^{31}$. Ο $\mathbf{A}$ εχει δυο ιδιοτιμες $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Χρησιμοποιωντας

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= f_A(\lambda)\, u(\lambda) + v(\lambda) \\ v(\lambda) &= a_0 + a_1 \lambda \end{aligned}$$

παιρνουμε δυο εξισωσεις

$$\begin{aligned} f(\lambda_1) &= v(\lambda_1) = a_0 + a_1\lambda_1 \\ f(\lambda_2) &= v(\lambda_2) = a_0 + a_1\lambda_2 \end{aligned}$$

οι οποιες γινονται

$$\begin{aligned} 1 &= a_0 + a_1 \\ -1 &= a_0 - a_1 \end{aligned}$$

και προφανως εχουν λυση $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. Οποτε

$$\mathbf{A}^{31} = a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{A} = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{7}{5} \end{bmatrix}.$$

**13.2.18.** Να υπολογιστει το $\mathbf{A}^{20} - 3\mathbf{A}^4$ για

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

**Απαντηση.** Θετουμε $f(\lambda) = \lambda^{20} - 3\lambda^4$. Ο $\mathbf{A}$ εχει διπλη ιδιοτιμη $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ με γεωμετρικη πολλαπλοτητα 1 (δινει μονο ενα γραμμικα ανεξαρτητο ιδιοδιανυσμα, το $\begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}^T$). Παρομοια με την προηγουμενη ασκηση, χρησιμοποιωντας την

$$f(\lambda) = f_A(\lambda)\, u(\lambda) + v(\lambda)$$

παιρνουμε *μια* εξισωση

$$f(\lambda_1) = v(\lambda_1) = a_0 + a_1\lambda_1.$$

Χρειαζομαστε αλλη μια εξισωση, αλλα αυτη δεν μπορει να ειναι η $f(\lambda_1) = v(\lambda_1)$ (αφου $\lambda_1 = \lambda_2$). Αυτη βρισκεται ως εξης. Αφου η $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ειναι διπλη ιδιοτιμη, το χαρακτηριστικο πολυωνυμο θα εχει ενα παραγοντα $(\lambda - 1)^2$. Αν λοιπον παραγωγισουμε την (13.7) θα εχουμε

$$\begin{aligned} & f'(\lambda) = f_A'(\lambda)\, u(\lambda) + f_A(\lambda)\, u'(\lambda) + v(\lambda) \Rightarrow \\ & f'(\lambda_1) = f_A'(\lambda_1)\, u(\lambda_1) + f_A(\lambda_1)\, u'(\lambda_1) + v(\lambda_1) \\ & f'(\lambda_1) = v(\lambda_1). \end{aligned}$$

Δηλ., εξ αιτιας του παραγοντα $(\lambda - \lambda_1)^2$, εχουμε $f_A(\lambda_1) = 0$ *και* $f_A'(\lambda_1) = 0$! Η επιπλεον εξισωση ειναι $f'(\lambda_1) = a_1$. Τελικα το συστημα γινεται

$$\begin{aligned} f(\lambda_1) &= a_0 + a_1\lambda_1 \\ f'(\lambda_1) &= a_1 \end{aligned}$$

και, αφου $(\lambda^{20} - 3\lambda^4)' = 20\lambda^{19} - 12\lambda^3$ και $v'(\lambda) = a_1$, τελικα εχουμε για το συγκεκριμενο προβλημα:

$$\begin{aligned} -2 &= a_0 + a_1 \\ 8 &= a_1 \end{aligned}$$

με λυση $a_0 = -10$, $a_1 = 8$. Ετσι εχουμε

$$\mathbf{A}^{20} - 3\mathbf{A}^4 = a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{A} = -10 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 8 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{22}{3} & -\frac{8}{3} \\ \frac{32}{3} & \frac{10}{3} \end{bmatrix}.$$

**13.2.19.** Αποδειξτε οτι για καθε $N \times N$ πινακα $\mathbf{A}$ με $N$ ιδιοτιμες $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N$, και αντιστοιχα γραμμικα ανεξαρτητα ιδιοδιανυσματα $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_N$ και για καθε συναρτηση $f(z)$ η οποια στην γειτονια του $0$ εχει αναπτυγμα $Taylor$, η $f(\mathbf{A})$ ισουται με ενα πολυωνυμο του $\mathbf{A}$ το οποιο ειναι το πολυ $N-1$ βαθμου.

**Απαντηση**. Η αποδειξη του ζητουμενου ειναι ομοια με αυτη της 13.2.16, αλλα τωρα η $f(z)$ ειναι η σειρα $Taylor$ της ζητουμενης συναρτησης. Αυτη ειναι πολυωνυμο απειρης ταξης, αλλα αυτο δεν εμποδιζει την εκτελεση της διαιρεσης και το υπολοιπο $v(\lambda)$ εξακολουθει να ειναι βαθμου το πολυ $N-1$. Ετσι η μεθοδος μπορει να χρησιμοποιηθει για τον υπολογισμο διαφορων συναρτησεων πινακων (ως μια εναλλακτικη της μεθοδου με διαγωνιοποιηση) οπως θα φανει στις παρακατω προβληματα.

**13.2.20.** Χρησιμοποιωντας το υπολοιπο πολυωνυμικης διαιρεσης, υπολογιστε τον $e^{\mathbf{A}}$ οπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση**. Ο $\mathbf{A}$ εχει ιδιοτιμες $2, 3$. Ο $e^{\mathbf{A}}$ θα πρεπει να ειναι $v(\mathbf{A})$ οπου το $v(\lambda)$ δινεται απο την διαιρεση $f(\lambda) = f_A(\lambda)\, u(\lambda) + v(\lambda)$ με $f(\lambda) = e^{\lambda}$ και $f_A(\lambda)$ το χαρακτηριστικο πολυωνυμο του $\mathbf{A}$. Αλλα επισης εχουμε $f(\lambda_1) = f(\lambda_2) = 0$. Αν λοιπον θεσουμε

$$v(\lambda) = a_0 + a_1\lambda$$

θα πρεπει να εχουμε

$$\begin{aligned} e^2 &= a_0 + 2a_1 \\ e^3 &= a_0 + 3a_1. \end{aligned}$$

Λυνοντας το συστημα παιρνουμε $a_0 = 3e^2 - 2e^3$, $a_1 = e^3 - e^2$. Οποτε

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}} &= v(\mathbf{A}) = \left(3e^2 - 2e^3\right) \cdot \mathbf{I} + \left(e^3 - e^2\right) \cdot \mathbf{A} \\ &= \left(3e^2 - 2e^3\right) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(e^3 - e^2\right) \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (3e^2 - 2e^3) + 2(e^3 - e^2) & (e^3 - e^2) \\ 0 & (3e^2 - 2e^3) + 3(e^3 - e^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^2 & e^3 - e^2 \\ 0 & e^3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

που επαληθευει το αποτελεσμα που βρηκαμε με διαγωνιοποιηση.

**13.2.21.** Χρησιμοποιωντας το υπολοιπο πολυωνυμικης διαιρεσης, υπολογιστε τον $e^{\mathbf{A}}$ οπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Απαντηση.** Οι ιδιοτιμες του $\mathbf{A}$ ειναι $0, 1, 2$. Ο $e^{\mathbf{A}}$ θα ρεπει να ειναι $v(\mathbf{A})$ οπου το $v(\lambda)$ δινεται απο την διαιρεση $f(\lambda) = f_A(\lambda) u(\lambda) + v(\lambda)$ με $f(\lambda) = e^{\lambda}$ και $f_A(\lambda)$ το χαρακτηριστικο πολυωνυμο του $\mathbf{A}$. Αν θεσουμε

$$v(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2$$

θα εχουμε

$$\begin{aligned} e^0 &= a_0 \\ e^1 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ e^2 &= a_0 + 2a_1 + 4a_2. \end{aligned}$$

Λυνοντας το συστημα παιρνουμε $a_0 = 1$, $a_1 = 2e - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^2$, $a_2 = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2} - e$. Οποτε

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(2e - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^2\right) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2} - e\right) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^2 \\ &= \begin{bmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -e+1 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**13.2.22.** Χρησιμοποιωντας το υπολοιπο πολυωνυμικης διαιρεσης, υπολογιστε τον πινακα $\sin(\mathbf{A})$ οπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση**. Ο $\mathbf{A}$ εχει ιδιοτιμες και 3 και 2, αρα θα εχουμε

$$\begin{aligned} \sin(2) &= a_0 + 2a_1 \\ \sin(3) &= a_0 + 3a_1 \end{aligned}$$

που εχει λυση $a_0 = 3\sin 2 - 2\sin 3$, $a_1 = \sin 3 - \sin 2$. Ετσι

$$\begin{aligned} \sin\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\right) &= (3\sin 2 - 2\sin 3) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (\sin 3 - \sin 2) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2\sin 2 - \sin 3 & 2\sin 3 - 2\sin 2 \\ -\sin 3 + \sin 2 & -\sin 2 + 2\sin 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**13.2.23.** Να υπολογιστει ο $e^{\mathbf{A}}$ οπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

**Απαντηση**. Ο $\mathbf{A}$ εχει ιδιοτιμες $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Αν θεσουμε

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= f_A(\lambda) u(\lambda) + v(\lambda) \qquad (13.6) \\ v(\lambda) &= a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2, \end{aligned}$$

παιρνουμε, με τον συνηθη τροπο, *δυο* εξισωσεις

$$\begin{aligned} e^1 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ e^2 &= a_0 + 2a_1 + 4a_2 \end{aligned}$$

και χρειαζομαστε μια εξισωση ακομη! Αυτη βρισκεται ως εξης. Αφου η $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ ειναι διπλη ιδιοτιμ, το χαρακτηριστικο πολυωνυμο θα εχει ενα παραγοντα $(\lambda - 2)^2$. Αν λοιπον παραγωγισουμε την (13.7) θα εχουμε

$$\begin{aligned} f'(\lambda) &= f_A'(\lambda)\, u(\lambda) + f_A(\lambda)\, u'(\lambda) + v(\lambda) \Rightarrow \\ f'(\lambda_2) &= f_A'(\lambda_2)\, u(\lambda_2) + f_A(\lambda_2)\, u'(\lambda_2) + v(\lambda_2) \\ f'(\lambda_2) &= v(\lambda_2)\,. \end{aligned}$$

Δηλ., εξ αιτιας του παραγοντα $(\lambda - \lambda_2)^2$, εχουμε $f_A(\lambda_2) = 0$ ***και*** $f_A'(\lambda_2) = 0$! Αφου $\left(e^{\lambda}\right)' = e^{\lambda}$ και $v'(\lambda) = a_1 + 2a_2\lambda$, στο συγκεκριμενο προβλημα εχουμε την επιπλεον εξισωση

$$e^2 = a_1 + 4a_2.$$

Αρα το συστημα γινεται

$$\begin{aligned} e^1 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ e^2 &= a_0 + 2a_1 + 4a_2 \\ e^2 &= a_1 + 4a_2 \end{aligned}$$

με λυση $a_1 = e^2 - 4e$, $a_2 = e$, $a_0 = -e^2 + 4e$ και ετσι

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}} &= \left(-e^2 + 4e\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(e^2 - 4e\right) \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} + e \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}^2 \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}e^2 & \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e & \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}e^2 \\ 0 & e^2 & 0 \\ \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}e^2 & \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e & \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}e^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**13.2.24.** Να υπολογιστει ο $e^{\mathbf{A}}$ οπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

**Απαντηση**. Ο $\mathbf{A}$ εχει ιδιοτιμες $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Αν θεσουμε

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= f_A(\lambda)\, u(\lambda) + v(\lambda) \\ v(\lambda) &= a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2, \end{aligned} \tag{13.7}$$

παιρνουμε, με τον συνηθη τροπο, *δυο* εξισωσεις

$$\begin{aligned} e^1 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ e^2 &= a_0 + 2a_1 + 4a_2 \end{aligned}$$

και χρειαζομαστε μια εξισωση ακομη! Αυτη βρισκεται ως εξης. Αφου η $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ ειναι διπλη ιδιοτιμη, το χαρακτηριστικο πολυωνυμο θα εχει ενα παραγοντα $(\lambda - 2)^2$. Αν λοιπον παραγωγισουμε την (13.7) θα εχουμε

$$
\begin{aligned}
f'(\lambda) &= f'_A(\lambda)\, u(\lambda) + f_A(\lambda)\, u'(\lambda) + v(\lambda) \Rightarrow \\
f'(\lambda_2) &= f'_A(\lambda_2)\, u(\lambda_2) + f_A(\lambda_2)\, u'(\lambda_2) + v(\lambda_2) \\
f'(\lambda_2) &= v(\lambda_2)\,.
\end{aligned}
$$

Δηλ., εξ αιτιας του παραγοντα $(\lambda - \lambda_2)^2$, εχουμε $f_A(\lambda_2) = 0$ *και* $f'_A(\lambda_2) = 0$! Αφου $\left(e^{\lambda}\right)' = e^{\lambda}$ και $v'(\lambda) = a_1 + 2a_2\lambda$, στο συγκεκριμενο προβλημα εχουμε την επιπλεον εξισωση

$$e^2 = a_1 + 4a_2.$$

Αρα το συστημα γινεται

$$
\begin{aligned}
e^1 &= a_0 + a_1 + a_2 \\
e^2 &= a_0 + 2a_1 + 4a_2 \\
e^2 &= a_1 + 4a_2
\end{aligned}
$$

με λυση $a_1 = e^2 - 4e$, $a_2 = e$, $a_0 = -e^2 + 4e$ και ετσι

$$
\begin{aligned}
e^{\mathbf{A}} &= \left(-e^2 + 4e\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(e^2 - 4e\right) \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} + e \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}^2 \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}e^2 & \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e & \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}e^2 \\ 0 & e^2 & 0 \\ \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}e^2 & \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e & \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}e^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

**13.2.25.** Να υπολογιστει ο $e^{\mathbf{A}}$ οπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση**.Ο πινακας $\mathbf{A}$ εχει τριπλη ιδιοτιμη $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ και μονο ενα γραμμικα ανεξαρτητο ιδιοδιανυσμα, το $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. Αρα ο $\mathbf{A}$ δεν ειναι διαγωνιοποιησιμος και ο $e^{\mathbf{A}}$ δεν μπορει να υπολογιστει με διαγωνιοποιηση. Ομως, παρομοια με την προηγουμενη ασκηση, χρησιμοποιωντας την

$$f(\lambda) = f_A(\lambda)\, u(\lambda) + v(\lambda)$$

παιρνουμε *τρεις εξισωσεις*

$$f(\lambda_1) = v(\lambda_1)\,, \quad f(\lambda_1) = v'(\lambda_1)\,, \quad f''(\lambda_1) = v''(\lambda_1)$$

και, αν υποθεσουμε $v(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2$, αυτες γινονται για το συγκεκριμενο προβλημα

$$
\begin{aligned}
e^1 &= a_0 + a_1 + a_2 \\
e^1 &= a_1 + 2a_2 \\
e^1 &= 2a_2
\end{aligned}
$$

με λυση $a_2 = \frac{1}{2}e$, $a_1 = 0$, $a_0 = \frac{1}{2}e$. Ετσι τελικα

$$e^{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}e \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}e \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} e & e & \frac{1}{2}e \\ 0 & e & e \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}.$$

**13.2.26.** Να υπολογιστει ο $\cos(\mathbf{A})$ οπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \pi & 1 & 0 \\ 0 & \pi & 1 \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση**. Ο πινακας $\mathbf{A}$ εχει τριπλη ιδιοτιμη $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \pi$ με γεωμετρικη πολλαπλοτητα 1. Παρομοια με την προηγουμενη ασκηση, εχουμε

$$\begin{aligned} \cos(\pi) &= a_0 + a_1 + a_2 \\ -\sin(\pi) &= a_1 + 2a_2 \\ -\cos(\pi) &= 2a_2 \end{aligned}$$

δηλ.

$$\begin{aligned} -1 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ 0 &= a_1 + 2a_2 \\ 1 &= 2a_2 \end{aligned}$$

με λυση $a_1 = -1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_0 = -\frac{1}{2}$. Ετσι τελικα

$$\begin{aligned} \cos(\mathbf{A}) &= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} \pi & 1 & 0 \\ 0 & \pi & 1 \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \pi & 1 & 0 \\ 0 & \pi & 1 \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}^2 \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} - \pi + \frac{1}{2}\pi^2 & -1 + \pi & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} - \pi + \frac{1}{2}\pi^2 & -1 + \pi \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} - \pi + \frac{1}{2}\pi^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**13.2.27.** Αποδειξτε οτι καθε τετραγωνικη μορφη $f(x_1, x_2, ..., x_N)$ μπορει να γραφτει ως $\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}$, οπου $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad ... \quad x_N]^T$ και $\mathbf{P}$ ειναι συμμετρικος πραγματικος πινακας.

**Απαντηση.** Η τετραγωνικη μορφη ειναι

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, ..., x_N) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{NN}x_N^2 + a_{12} \cdot x_1x_2 + ... + a_{N-1,N}x_{N-1}x_N \\ &= [x_1 \quad x_2 \quad ... \quad x_N] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2N} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{N1} & a_{N2} & & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_N \end{bmatrix} \end{aligned}$$

οπως μπορει να ελεγχθει ευκολα με εκτελεση του πολλαπλασιασμου πινακων. Αν τωρα θεσουμε

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2N} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{N1} & a_{N2} & & a_{NN} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_N \end{bmatrix}$$

εχουμε (αφου το $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ ειναι $1\times 1$ εχουμε $\left(\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}\right)^T = \mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{x}$)

$$f(x_1, x_2, ..., x_N) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \frac{1}{2}\cdot\left(\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \left(\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}\right)^T\right)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{x}\right) = \mathbf{x}^T\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T\right)\right)\cdot\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}$$

οπου ο πινακας $\mathbf{P} = \frac{1}{2}\cdot\left(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T\right)$ ειναι συμμετρικος.

**13.2.28.** Αποδειξτε οτι μια τετραγωνικη μορφη $f(x_1, x_2, ..., x_N) = \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}$ (οπου ο $\mathbf{P}$ ειναι συμμετρικος) ειναι θετικη (αρνητικη) ορισμενη ανν ο $\mathbf{P}$ εχει $N$ θετικες (αρνητικες) ιδιοτιμες.

**Απαντηση.** Θα αποδειξουμε το ζητουμενο μονο για την περιπτωση που ο $\mathbf{P}$ εχει $N$ διαφορετικες μεταξυ τους ιδιοτιμες (το ζητουμενο ισχυει και οταν υπαρχουν επαναλαμβανομενες ιδιοτιμες, αλλα η αποδειξη ειναι πιο πολυπλοκη).

Εστω λοιπον οτι ο $\mathbf{P}$ εχει ιδιοτιμες $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N$, ολες διαφορετικες μεταξυ τους, και αντιστοιχα ιδιοδιανυσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_N$. Επειδη ο $\mathbf{P}$ ειναι συμμετρικος, ολες οι ιδιοτιμες ειναι πραγματικες και τα ιδιοδιανυσματα ικανοποιουν

$$m \neq n \Rightarrow \mathbf{v}_m^T\mathbf{v}_n = 0.$$

Επισης, επειδη καθε $c\mathbf{v}_n$ ($c \neq 0$) ειναι επισης ιδιοδιανυσμα, μπορουμε να επιλεξουμε τα $\mathbf{v}_n$ τετοια ωστε $\mathbf{v}_n^T\mathbf{v}_n = 1$. Αν τωρα σχηματισουμε τον πινακα

$$\mathbf{V} = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & ... & \mathbf{v}_N \end{array}\right]$$

αυτος διαγωνιοποιει τον $\mathbf{P}$, δηλ. $\mathbf{V}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{V} = \mathbf{\Lambda}$ (ο $\mathbf{V}^{-1}$ υπαρχει γιατι ο $\mathbf{P}$ ειναι συμμετρικος και ιδιοδιανυσματα που αντιστοιχουν σε διαφορετικες ιδιοτιμες ειναι ανεξαρτητα). Επισης ο $\mathbf{V}$ θα εχει αναστροφο

$$\mathbf{V}^T = \left[\begin{array}{c} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ ... \\ \mathbf{v}_N^T \end{array}\right]$$

και θα εχουμε

$$\mathbf{V}^T\mathbf{V} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ ... \\ \mathbf{v}_N^T \end{array}\right]\left[\begin{array}{cccc} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & ... & \mathbf{v}_N \end{array}\right]$$
$$= \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_2 & ... & \mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_N \\ \mathbf{v}_2^T\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_2 & ... & \mathbf{v}_2^T\mathbf{v}_N \\ ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{v}_N^T\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_N^T\mathbf{v}_2 & ... & \mathbf{v}_N^T\mathbf{v}_N \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{array}\right] = \mathbf{I}.$$

Με αλλα λογια $\mathbf{V}^T = \mathbf{V}^{-1}$. Αρα

$$\mathbf{V}^T\mathbf{P}\mathbf{V} = \mathbf{\Lambda} \Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T.$$

Αν λοιπον θεσουμε $\mathbf{y}=\mathbf{V}^T\mathbf{x}$, μπορουμε λοιπον να γραψουμε την τετραγωνικη μορφη ως

$$\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}=\mathbf{x}^T\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T\mathbf{x}=\mathbf{y}^T\mathbf{\Lambda}\mathbf{y}=\sum_{n=1}^{N}\lambda_n y_n^2$$

και ειναι φανερο οτι

$$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_N>0\Leftrightarrow\left(\forall\mathbf{y}\in\mathbb{R}^N-\{\mathbf{0}\}:\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}>\mathbf{0}\right) \tag{13.8}$$

$$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_N<0\Leftrightarrow\left(\forall\mathbf{y}\in\mathbb{R}^N-\{\mathbf{0}\}:\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}<\mathbf{0}\right). \tag{13.9}$$

Τελος παρατηρουμε οτι ο $\mathbf{V}$ ειναι ομαλος ($\mathbf{V}^{-1}=\mathbf{V}^T$) και αρα

$$\mathbf{y}\in\mathbb{R}^N-\{\mathbf{0}\}\Leftrightarrow\mathbf{x}\in\mathbb{R}^N-\{\mathbf{0}\}$$

οποτε οι (13.8)-(13.9) γραφονται ισοδυναμα

$$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_N>0\Leftrightarrow\left(\forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}^N-\{\mathbf{0}\}:\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}>\mathbf{0}\right)$$
$$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_N<0\Leftrightarrow\left(\forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}^N-\{\mathbf{0}\}:\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}<\mathbf{0}\right).$$

και εχουμε αποδειξει το ζητουμενο.

**13.2.29.** Εξεταστε αν η τετραγωνικη μορφη $x_1^2+x_1x_2+2x_2^2$ ειναι θετικα η αρνητικα ορισμενη

**Απαντηση**. Εχουμε

$$x_1^2+x_1x_2+2x_2^2=[x_1\quad x_2]\begin{bmatrix}1&1/2\\1/2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Ο πινακας $\mathbf{A}$ εχει ιδιοτιμες $\lambda_1=\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{3}{2}>0$, $\lambda_2=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}>0$ οποτε η $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ ειναι θετικα ορισμενη.

**13.2.30.** Εξεταστε αν η τετραγωνικη μορφη $2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$ ειναι θετικα η αρνητικα ορισμενη

**Απαντηση**. Εχουμε

$$2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3=[x_1\quad x_2\quad x_3]\begin{bmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Ο πινακας

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{bmatrix}$$

εχει ιδιοτιμες $\lambda_1=\lambda_2=1>0$ και $\lambda_3=10>0$, οποτε η $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ ειναι θετικα ορισμενη.

**13.2.31.** Αναγνωριστε την καμπυλη που περιγραφεται απο την εξισωση $3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 = 1$.

**Απαντηση**. Το αριστερο μερος της εξισωσης μπορει να γραφτει στην μορφη

$$3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x} \text{ με } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Υπολογιζουμε τις ιδιοτιμες και τα ιδιοδιανυσματα του $\mathbf{P}$ και βρισκουμε

$$\lambda_1 = 2, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_2 = 4, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

και παρατηρουμε οτι $\mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_2 = 0$. Κανονικοποιωντας τα ιδιοδιανυσματα παιρνουμε

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

και

$$\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Αρα εχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 2y_1^2 + 4y_2^2. \end{aligned}$$

Η αρχικη εξισωση $3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 = 1$ ειναι λοιπον ισοδυναμη με την

$$2y_1^2 + 4y_2^2 = 1$$

που αναγνωριζεται ως εξισωση ελλειψης.

**13.2.32.** Αναγνωριστε την καμπυλη που περιγραφεται απο την εξισωση $4x_1^2 + 24x_1x_2 + 11x_2^2 = 1$.

**Απαντηση**. Το αριστερο μερος της εξισωσης μπορει να γραφτει στην μορφη

$$4x_1^2 + 24x_1x_2 + 11x_2^2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x} \text{ με } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 11 \end{bmatrix}.$$

Υπολογιζουμε τις ιδιοτιμες και τα ιδιοδιανυσματα του $\mathbf{P}$ και βρισκουμε

$$\lambda_1 = -5, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_2 = 20, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

και παρατηρουμε οτι $\mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_2 = 0$. Κανονικοποιωντας τα ιδιοδιανυσματα παιρνουμε

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} -4/5 & 3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix}$$

και

$$\begin{bmatrix} -4/5 & 3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4/5 & 3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4/5 & 3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4/5 & 3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = -5y_1^2 + 20y_2^2. \end{aligned}$$

Η αρχικη εξισωση $4x_1^2 + 24x_1x_2 + 11x_2^2 = 1.$ ειναι λοιπον ισοδυναμη με την

$$-5y_1^2 + 20y_2^2 = 1$$

που αναγνωριζεται ως εξισωση υπερβολης.

**13.2.33.** Αναγνωριστε την επιφανεια που περιγραφεται απο την εξισωση $5x_1^2+6x_2^2+7y_3^2-4x_1x_2+4x_2x_3 = 1$.

**Απαντηση**. Το αριστερο μερος της εξισωσης μπορει να γραφτει στην μορφη

$$\begin{aligned} &5x_1^2 + 6x_2^2 + 7y_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3 \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x} \, . \end{aligned}$$

με

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Υπολογιζουμε τις ιδιοτιμες και τα ιδιοδιανυσματα του $\mathbf{P}$ και βρισκουμε

$$\lambda_1 = 3, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_2 = 9, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_2 = 6, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

και παρατηρουμε οτι $\mathbf{v}_m^T\mathbf{v}_n = 0$ για $m \neq n$ Κανονικοποιωντας τα ιδιοδιανυσματα παιρνουμε

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & -2/3 \end{bmatrix}$$

και

$$\begin{bmatrix} -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & -2/3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & -2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & -2/3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 6y_1^2 + 3y_2^2 + 9y_3^2. \end{aligned}$$

Η αρχικη εξισωση ειναι λοιπον ισοδυναμη με την

$$6y_1^2 + 3y_2^2 + 9y_3^2 = 1$$

που αναγνωριζεται ως εξισωση ελλειψοειδους.

**13.2.34.** Αναγνωριστε την επιφανεια που περιγραφεται απο την εξισωση

$$3x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 12x_3x_2 = 0.$$

**Απαντηση**. Η καμπυλη μπορει να γραφτει στην μορφη

$$0 = 3x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 12x_3x_2 = 0. = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & -2 & -6 \\ -4 & -6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}.$$

με

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & -2 & -6 \\ -4 & -6 & -1 \end{bmatrix}$$

Υπολογιζουμε τις ιδιοτιμες και τα ιδιοδιανυσματα του $\mathbf{P}$ και βρισκουμε

$$\lambda_1 = 3, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_2 = 6, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_3 = -9, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

και παρατηρουμε οτι $\mathbf{v}_m^T\mathbf{v}_n = 0$ για $m \neq n$ Κανονικοποιωντας τα ιδιοδιανυσματα παιρνουμε

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

και

$$\begin{bmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & -2 & -6 \\ -4 & -6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & -2 & -6 \\ -4 & -6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & -2 & -6 \\ -4 & -6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 3x_1^2 + 6x_2^2 - 9x_3^2 = 0. \end{aligned}$$

Αρα η επιφανεια ειναι ενας κωνος.

## 13.3 Αλυτα Προβληματα

**13.3.1.** Διαγωνιοποιειστε (εφοσον αυτο ειναι δυνατο) τους παρακατω πινακες.

1. $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ **Απ**. $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$.

2. $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$ **Απ**. $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ **Απ**. $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -6 & 5 & -4 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

   **Απ**. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

5. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \end{bmatrix}$ **Απ**. Ο πινακας δεν διαγωνιοποιειται.

**13.3.2.** Βρειτε εναν πινακα $\mathbf{A}$ ο οποιος εχει ιδιοτιμες $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$ και αντιστοιχα ιδιοδιανυσματα

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**Απ.** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$**.**

**13.3.3.** Βρειτε εναν ανω τριγωνικο $3\times3$ πινακα $\mathbf{A}$ ο οποιος εχει ιδιοτιμες $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 2$.

**Απ.** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & x & y \\ 0 & 4 & z \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ με τυχοντα $x, y, z$ .

**13.3.4.** Επαληθευστε το Θεωρημα *Cayley-Hamilton* για τον

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

**13.3.5.** Επαληθευστε το Θεωρημα *Cayley-Hamilton* για τον

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 5 \\ -5 & 6 & 5 \\ -5 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

**13.3.6.** Χρησιμποποιωντας το Θεωρημα *Cayley-Hamilton* υπολογιστε τον $\mathbf{A}^{-1}$ για

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

**Απ**. $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

**13.3.7.** Χρησιμποποιωντας το Θεωρημα *Cayley-Hamilton* υπολογιστε τον $\mathbf{A}^{-1}$ για

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{bmatrix}$$

**Απ**. $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$.

**13.3.8.** Υπολογιστε τους παρακατω πινακες

$$e^{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}, \qquad e^{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}.$$

**Απ.** $\begin{bmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^3 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} e^2 & e^3 - e^2 \\ 0 & e^3 \end{bmatrix}$.

**13.3.9.** Υπολογιστε τον $e^{\mathbf{A}}$ οπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

**Απ.** $\begin{bmatrix} e^4 & 2e^4 - 2e^3 \\ 0 & e^3 \end{bmatrix}$.

**13.3.10.** Υπολογιστε τον $e^{\mathbf{A}}$ οπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

**Απ.** $\begin{bmatrix} \frac{3}{4}e^2 + \frac{1}{4}e^6 & \frac{1}{4}e^6 - \frac{1}{4}e^2 & \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}e^6 \\ \frac{1}{2}e^6 - \frac{1}{2}e^2 & \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}e^6 & \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^6 \\ \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}e^6 & \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}e^6 & \frac{3}{4}e^2 + \frac{1}{4}e^6 \end{bmatrix}$.

**13.3.11.** Υπολογιστε τον $e^{\mathbf{A}}$ οπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 8 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Απ.** $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ \frac{16}{25} - \frac{11}{25}e^5 & \frac{13}{25}e^5 + \frac{22}{25} & \frac{6}{25}e^5 - \frac{11}{25} \\ \frac{57}{25} - \frac{22}{25}e^5 & \frac{26}{25}e^5 + \frac{44}{25} & \frac{12}{25}e^5 - \frac{22}{25} \end{bmatrix}$.

**13.3.12.** Υπολογιστε τον $e^{\mathbf{A}}$ οπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & -3 \\ 3 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

**Απ.** $\begin{bmatrix} \frac{3}{4}e^2 + \frac{1}{4}e^6 & \frac{1}{2}e^6 - \frac{1}{2}e^2 & -\frac{1}{4}e^6 + \frac{1}{4}e^2 \\ -\frac{3}{4}e^2 + \frac{3}{4}e^6 & -\frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{2}e^6 & -\frac{3}{4}e^6 + \frac{3}{4}e^2 \\ -\frac{3}{4}e^2 + \frac{3}{4}e^6 & \frac{3}{2}e^6 - \frac{3}{2}e^2 & \frac{7}{4}e^2 - \frac{3}{4}e^6 \end{bmatrix}$

**13.3.13.** Υπολογιστε τον $e^{\mathbf{A}}$ οπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Απ.** $\begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{1-i} + \frac{1}{2}e^{1+i} & \frac{1}{2}ie^{1+i} - \frac{1}{2}ie^{1-i} \\ \frac{1}{2}ie^{1-i} - \frac{1}{2}ie^{1+i} & \frac{1}{2}e^{1-i} + \frac{1}{2}e^{1+i} \end{bmatrix}$.

**13.3.14.** Υπολογιστε τον πινακα $\sin(\mathbf{A})$ οπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

**Απ.**

**13.3.15.** Υπολογιστε τον πινακα $\sin(\mathbf{A})$ οπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

**Απ.**

**13.3.16.** Υπολογιστε τον

$$\sin \begin{bmatrix} \pi & 1 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 4 & 1 & \pi/2 \end{bmatrix}$$

**Απ.** $\begin{bmatrix} 0 & -1/\pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -8/\pi & (16-10\pi)/\pi^2 & 1 \end{bmatrix}$

**13.3.17.** Υπολογιστε τον πινακα $\sin(\mathbf{A})$ οπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Απ.** $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\sin(1)+\sin(3) & \sin(1)+\sin(3) \\ \sin(1)+\sin(3) & -\sin(1)+\sin(3) \end{bmatrix}$

**13.3.18.** Υπολογιστε τον πινακα $\cos(\mathbf{A})$ οπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

**Απ.** $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} \cos(2)+9\cos(8) & -3\cos(2)+3\cos(8) \\ -3\cos(2)+3\cos(8) & \cos(2)+9\cos(8) \end{bmatrix}$

**13.3.19.** Υπολογιστε τον πινακα $\cos(\mathbf{A})$ οπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Απ.** $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \cos(5)+\cos(3) & \cos(5)-\cos(3) & -\cos(5)+\cos(3) \\ 2\cos(5)-2\cos(3) & 2\cos(5) & -2\cos(5)+2\cos(3) \\ \cos(5)-\cos(3) & \cos(5)-\cos(3) & -\cos(5)+3\cos(3) \end{bmatrix}$

**13.3.20.** Να υπολογιστει το $\mathbf{A}^{12}$ για

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

**Απ.** $\begin{bmatrix} 11\,073\,136\,049 & 5536\,302\,304 \\ 5536\,302\,304 & 2768\,682\,593 \end{bmatrix}$

**13.3.21.** Να υπολογιστει το $\mathbf{A}^{123}$ για

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$$

**Απ.** $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$.

**13.3.22.** Να υπολογιστει το $\mathbf{A}^{52}$ για

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

**Απ.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

**13.3.23.** Να υπολογιστει το $\mathbf{A}^{202} - 3\mathbf{A}^{147} + 2\mathbf{I}$ για

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

**Απ.** $\begin{bmatrix} 9 & -9 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$.

**13.3.24.** Να υπολογιστει το $\mathbf{A}^{521}$για

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

**Απ.** $\begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 \end{bmatrix}$.

**13.3.25.** Εξεταστε ποιες απο τις τετραγωνικες μορφες

(α) $4x_1^2 + 5x_1x_2 + 7x_2^2$

(β) $2x_1^2 - 3x_1x_2 - x_2^2$

(γ) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3 + 4x_3^2$

(δ) $x_1^2 + 2x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3 + 4x_1x_3$

ειναι θετικα η αρνητικα ορισμενες.

**Απ**. (α) θ.ο., (β) α.ο., (δ) θ.ο..

**13.3.26.** Αναγνωριστε την καμπυλη που περιγραφεται απο την εξισωση $5x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2 = 32$.

**Απ**. Ελλειψη.

**13.3.27.** Αναγνωριστε την καμπυλη που περιγραφεται απο την εξισωση $x_1^2+6x_1x_2+3x_2^2 = 1$.

**Απ**. Υπερβολη.

**13.3.28.** Αναγνωριστε την επιφανεια που περιγραφεται απο την εξισωση

$$2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 = 1.$$

**Απ**. Ελλειψοειδες.

**13.3.29.** Αναγνωριστε την επιφανεια που περιγραφεται απο την εξισωση

$$3x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 = 1.$$

**Απ**. Ελλειπτικος κυλινδρος.

**13.3.30.** Αναγνωριστε την επιφανεια που περιγραφεται απο την εξισωση

$$5x_1^2 + 6x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3 - 10x_1 + 8x_2 + 14x_3 = 6.$$

**Απ**. Ελλειψοειδες.

# Μέρος ΙΙ

# Συμπληρωματικα Θεματα

# Κεφάλαιο 14

# Οριζουσες : Θεωρητικη Θεμελιωση

Στο Κεφαλαιο 4 ορισαμε την οριζουσα πινακα και αποδειξαμε αρκετες απο τις ιδιοτητες αυτης. Αν και ο *αναδρομικος* ορισμος 4.1.1 ειναι ευκολα κατανοητος, δυσχεραινει την αποδειξη ορισμενων ιδιοτητων της οριζουσας. Γι' αυτο τον λογο αφησαμε αναποδεικτες στο Κεφ. 4 τις ιδιοτητες 4.1.7, 4.1.11-4.1.15 και, κυριως, τις *θεμελιωδεις ιδιοτητες* του Εδαφιου 4.1.8. Επιπλεον, ο *αναδρομικος* ορισμος 4.1.1 αποκρυπτει την *συνδυαστικη* φυση της οριζουσας. Για ολους αυτους τους λογους, στο παρον κεφαλαιο ακολουθουμε μια διφορετικη προσεγγιση στις οριζουσες. Καταρχην, δινουμε εναν νεο, *συνδυαστικο* ορισμο της ορειζουσας, στο Εδαφιο 14.1.5. (Ο ορισμος αυτος απαιτει την εισαγγη της εννοιας της *μεταθεσης*, την οποια συζητηουμε στα Εδαφια 14.1.1-14.1.4.) Κατοπιν αποδεικνυουμε τις θεμελιωδεις ιδιοτητες της οριζουσας. στο Εδαφιο 14.1.9. Βασει αυτων και του συνδυαστικου ορισμου αποδεικνυουμε επισης μιας σειρα αλλων ιδιοτητων. Κατοπιν δειχνουμε οτι οι θεμελιωδεις ιδιοτητες *καθοριζουν* την οριζουσα, δηλ. η οριζουσα ειναι η *μοναδικη* συναρτηση η οποια ικανοποιει τις θεμελιωδεις ιδιοτητες. Τελος δινουμε μια γεωμετρικη ερμηνεια της οριζουσας και των θεμελιωδων ιδιοτητων αυτης.

## 14.1 Θεωρια

**14.1.1.** Μια *μεταθεση* των αριθμων $\{1,2,...,N\}$ ειναι μια 1-προς-1 συναρτηση $\sigma$ του $\{1,2,...,N\}$ στον εαυτο του. Γραφουμε $\sigma(i) = j_i$ η και $\sigma = j_1 j_2 ... j_N$.

**14.1.2.** Το συνολο ολων των μεταθεσεων των αριθμων $\{1,2,...,N\}$ γραφεται $\mathbf{S}_N$.

**14.1.3.** Δινεται μια μεταθεση $\sigma$ του $\{1,2,...,N\}$. Μια *αντιστροφη* ειναι ενα ζευγος $(i,k)$ τετοιο ωστε $i<k$ και $\sigma(i) > \sigma(k)$.

**14.1.4.** Λεμε οτι η μεταθεση $\sigma$ ειναι *αρτια* (και γραφουμε $sign(\sigma) = +1$) αν ο συνολικος αριθμος αντιστροφων στην $\sigma$ ειναι αρτιος. Λεμε οτι η μεταθεση $\sigma$ ειναι *περιττη* (και γραφουμε $sign(\sigma) = -1$) αν ο συνολικος αριθμος αντιστροφων στην $\sigma$ ειναι περιττος.

**14.1.5.** Δινεται $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$. Η οριζουσα του $\mathbf{A}$ συμβολιζεται ως $|\mathbf{A}|$ η $D(\mathbf{A})$ και οριζεται ως

$$|\mathbf{A}| = \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_N} sign(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... a_{N\sigma(N)}. \tag{14.1}$$

Στην (14.1) το αθροισμα ειναι πανω σε ολα τα στοιχεια του $\mathbf{S}_N$, δηλ. πανω σε ολες τις μεταθεσεις των $\{1, 2, ..., N\}$.

**14.1.6.** Σε καθε ορο (γινομενο) του αθροισματος (14.1) εμφανιζεται ακριβως ενα στοιχειο απο καθε σειρα και καθε στηλη του πινακα $\mathbf{A}$.

**14.1.7.** Εστω ο $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$. Ισχυει οτι

$$|\mathbf{A}| = \left|\mathbf{A}^T\right|. \tag{14.2}$$

**14.1.8.** *Επομενως ολες οι ιδιοτητες που δινονται παρακατω σε σχεση με τις στηλες ενος πινακα ισχυουν επισης και σε σχεση με τις γραμμες αυτου.*

**14.1.9.** Εστω $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$ με στηλες $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n, ..., \mathbf{a}_N$. Δηλ.

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad ... \quad \mathbf{a}_n \quad ... \quad \mathbf{a}_N]$$

Οριζουμε την συναρτηση

$$D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n, ..., \mathbf{a}_N) = |\mathbf{A}|$$

(δηλ. η $D$ ειναι η οριζουσα του $\mathbf{A}$ ως συναρτηση των στηλων αυτου). Τοτε η $D$ εχει τις παρακατω ιδιοτητες.

1. Αν μια στηλη $\mathbf{a}_n$ ειναι γραμμικος συνδυασμος $\mathbf{a}_n = \kappa' \mathbf{a}'_n + \kappa'' \mathbf{a}''_n$, το αντιστοιχο ισχυει και για την $D$:

$$\begin{aligned} &D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \kappa' \mathbf{a}'_n + \kappa'' \mathbf{a}''_n, ..., \mathbf{a}_N) \\ &= \kappa' D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}'_n, ..., \mathbf{a}_N) + \kappa'' D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}''_n, ..., \mathbf{a}_N). \end{aligned} \tag{14.3}$$

2. Αν εναλλαξουμε δυο στηλες, τοτε η $D$ αλλαζει προσημο:

$$D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_m, ..., \mathbf{a}_n, ..., \mathbf{a}_N) = -D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n, ..., \mathbf{a}_m, ..., \mathbf{a}_N). \tag{14.4}$$

3. Εστω τα μοναδιαια διανυσματα βασης

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}, \quad ..., \quad \mathbf{e}_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Τοτε

$$D(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_N) = 1. \tag{14.5}$$

**14.1.10.** Ξαναγραφουμε τις παραπανω ιδιοτητες με συμβολισμο οριζουσων. Εστω $N \times N$ πινακας

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad ... \quad \mathbf{a}_n \quad ... \quad \mathbf{a}_N]$$

1. Αν μια στηλη $\mathbf{a}_n$ ειναι γραμμικος συνδυασμος $\mathbf{a}_n = \kappa'\mathbf{a}'_n + \kappa''\mathbf{a}''_n$, τοτε:

$$\begin{aligned} &\left|\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad ... \quad \kappa'\mathbf{a}'_n + \kappa''\mathbf{a}''_n \quad ... \quad \mathbf{a}_N\right| \\ &= \kappa' \left|\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad ..., \mathbf{a}'_n \quad ... \quad \mathbf{a}_N\right| + \kappa'' \left|\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad ... \quad \mathbf{a}''_n \quad ... \quad \mathbf{a}_N\right|. \end{aligned} \tag{14.6}$$

2. Αν εναλλαξουμε δυο στηλες, τοτε η οριζουσα αλλαζει προσημο:

$$\left|\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad ... \quad \mathbf{a}_m \quad ... \quad \mathbf{a}_n \quad ... \quad \mathbf{a}_N\right| = -\left|\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad ... \quad \mathbf{a}_n \quad ... \quad \mathbf{a}_m \quad ... \quad \mathbf{a}_N\right|. \tag{14.7}$$

3. Για τα μοναδιαια διανυσματα βασης εχουμε

$$\left|\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad ... \quad \mathbf{e}_N\right| = |\mathbf{I}| = 1. \tag{14.8}$$

**14.1.11.** Εστω ο $N \times N$ πινακας $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccccccc} \mathbf{a}_1 & ... & \mathbf{a}_m & ... & \mathbf{a}_n & ... & \mathbf{a}_N \end{array}\right]$. Ισχυουν τα εξης.

1. Αν μια στηλη (γραμμη) του πινακα ειναι μηδενικη, τοτε η οριζουσα ειναι μηδεν:

$$\left|\begin{array}{ccccc} \mathbf{a}_1 & ... & \mathbf{0} & ... & \mathbf{a}_N \end{array}\right| = 0. \tag{14.9}$$

2. Αν δυο στηλες (γραμμες) του πινακα ειναι ισες, τοτε η οριζουσα ειναι μηδεν:

$$\left|\begin{array}{ccccccc} \mathbf{a}_1 & ... & \mathbf{a}_m & ... & \mathbf{a}_m & ... & \mathbf{a}_N \end{array}\right| = 0. \tag{14.10}$$

3. Αν πολλαπλασιασουμε μια στηλη (γραμμη) του πινακα με τον αριθμο $\kappa$, η οριζουσα πολλαπλασιαζεται επι $\kappa$:

$$\left|\begin{array}{ccccc} \mathbf{a}_1 & ... & \kappa\mathbf{a}_n & ... & \mathbf{a}_N \end{array}\right| = \kappa \cdot \left|\begin{array}{ccccc} \mathbf{a}_1 & ... & \mathbf{a}_n & ... & \mathbf{a}_N \end{array}\right|. \tag{14.11}$$

4. Αν σε μια στηλη (γραμμη) του πινακα προσθεσουμε ενα πολλαπλασιο αλλης στηλης, η τιμη της οριζουσας παραμενει αμεταβλητη:

$$\left|\begin{array}{ccccc} \mathbf{a}_1 & ... & \mathbf{a}_m + \kappa\mathbf{a}_n & ... & \mathbf{a}_N \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccccccc} \mathbf{a}_1 & ... & \mathbf{a}_m & ... & \mathbf{a}_n & ... & \mathbf{a}_N \end{array}\right|. \tag{14.12}$$

**14.1.12.** Επειδη $|\mathbf{A}| = \left|\mathbf{A}^T\right|$, ολες οι παραπανω ιδιοτητες ισχυουν και για τις γραμμες ενος πινακα.

**14.1.13.** Αν ο $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$ ειναι (ανω η κατω) τριγωνικος, η οριζουσα ισουται με το γινομενο των διαγωνιων στοιχειων:

$$\left|\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1N} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2N} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{NN} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccc} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{N1} & a_{N2} & ... & a_{NN} \end{array}\right| = a_{11}a_{22}...a_{NN}. \tag{14.13}$$

**14.1.14.** Ο αναδρομικος ορισμος της οριζουσας 4.1.1 προκυπτει απο τον συνδυαστικο ορισμο 14.1.5. Δηλ. για καθε $N \times N$ πινακα $\mathbf{A}$. Ισχυει οτι

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_N} sign\,(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{N\sigma(N)} \\ &= (-1)^{1+1} a_{11} A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} A_{12} + \ldots + (-1)^{1+N} a_{1N} A_{1N}, \end{aligned} \tag{14.14}$$

οπου $A_{ij}$ ειναι η *υποοριζοουσα* του $(N-1) \times (N-1)$ πινακα ο οποιος προκυπτει διαγραφοντας την $i$ γραμμη και $j$ στηλη του $\mathbf{A}$.

**14.1.15.** Γενικοτερα, εστω $\mathbf{B}$ ο πινακας ο οποιος προκυπτει αντικαθιστωντας την $i$-στη γραμμη του $N \times N$ πινακα $\mathbf{A}$ με το διανυσμα $\mathbf{b} = \left[\begin{array}{cccc} b_{i1} & b_{i2} & \ldots & b_{iN} \end{array}\right]$. Τοτε ισχυει οτι

$$|\mathbf{B}| = (-1)^{1+1} b_{i1} A_{i1} + (-1)^{1+2} b_{i2} A_{i2} + \ldots + (-1)^{1+N} b_{iN} A_{iN}, \tag{14.15}$$

**14.1.16.** Εστω $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$ με $|\mathbf{A}| \neq 0$. Τοτε

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \left[\begin{array}{cccc} (-1)^{1+1} A_{11} & (-1)^{1+2} A_{21} & \ldots & (-1)^{1+N} A_{N1} \\ (-1)^{2+1} A_{12} & (-1)^{2+2} A_{22} & \ldots & (-1)^{2+N} A_{N2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (-1)^{N+1} A_{1N} & \ldots & \ldots & (-1)^{N+N} A_{NN} \end{array}\right] \tag{14.16}$$

**14.1.17.** Εστω $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$. Τοτε ο αντιστροφος $\mathbf{A}^{-1}$ υπαρχει ανν η οριζουσα ειναι διαφορη του μηδενος:

$$\exists \mathbf{A}^{-1} \Leftrightarrow |\mathbf{A}| \neq 0. \tag{14.17}$$

**14.1.18.** Εστω $N \times N$ πινακες $\mathbf{A}, \mathbf{B}$. Τοτε

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|\,. \tag{14.18}$$

**14.1.19.** Εστω $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$ ο οποιος ειναι *διαγωνιος διαμερισμενος*:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{0} & \ldots & \ldots & \mathbf{A}_{NN} \end{array}\right] \tag{14.19}$$

Τοτε

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}_{11}| \cdot |\mathbf{A}_{22}| \cdot \ldots \cdot |\mathbf{A}_{NN}| \tag{14.20}$$

**14.1.20.** Η οριζουσα ειναι η *μοναδικη* συναρτηση των στηλων ενος τετραγωνικου πινακα η οποια ικανοποιει τις ιδιοτητες της 14.1.9.

**14.1.21.** Εστω $2 \times 2$ πινακας $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{array}\right]$. Το εμβαδον του παραλληλογραμμου με πλευρες $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ ειναι $|\mathbf{A}|$.

**14.1.22.** Εστω $3 \times 3$ πινακας $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{array}\right]$. Ο ογκος του παραλληλεπιπεδου με πλευρες $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ ειναι $|\mathbf{A}|$.

**14.1.23.** Εστω $N \times N$ πινακας $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \ldots & \mathbf{a}_N \end{array}\right]$. *Οριζουμε* τον (υπερ)ογκο του (υπερ)παραλληλεπιπεδου με πλευρες $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_N$ να ειναι ισος με $|\mathbf{A}|$.

## 14.2 Λυμενα Προβληματα

**14.2.1.** Απαριθμηστε ολες τις μεταθεσεις του $\{1,2\}$, του $\{1,2,3\}$ και του $\{1,2,3,4\}$.

**Απαντηση**. Ειναι προφανες οτι οι μονες δυνατες μεταθεσεις του $\{1,2\}$ ειναι: 12 και 21. Καθεμια εξ αυτων μπορει να αναπαρασταθει ως μια συναρτηση. Π.χ. η 12 ειναι η συναρτηση $\sigma_0$ με $\sigma_0(1)=1$, $\sigma_0(2)=2$· παρατηρειστε οτι αυτη ειναι η *μηδενικη* μεταθεση, δηλ. αυτη η οποια δεν αλλαζει την θεση κανενος στοιχειου. Η μεταθεση 21 μπορει να αναπαρασταθει απο την συναρτηση $\sigma_1$ με $\sigma_1(1)=2$, $\sigma_1(2)=1$.

Ολες οι *μεταθεσεις* του $\{1,2,3\}$ ειναι 123, 132, 312, 213, 231, 321. Τις υπολογισαμε με τον εξης τροπο: για καθε μεταθεση του $\{1,2\}$ παιρνουμε το επιπλεον στοιχειο 3 και το εισαγουμε σε ολες τις δυνατες θεσεις: 12**3**, 1**3**2, **3**12. Με αντιστοιχο τροπο, απο την 21 παιρνουμε τις 21**3**, 2**3**1, **3**21. Σε αυτο το σημειο καντε μια παυση και βεβαιωθειτε οτι απαριθμησαμε *ολες* τις δυνατες μεταθεσεις του $\{1,2,3\}$ χωρις να επαναλαβουμε καμμια. Παρατηρειστε επισης οτι για καθε μια απο τις δυο μεταθεσεις του $\{1,2\}$ παιρνουμε 3 μεταθεσεις του $\{1,2,3\}$, αρα εχουμε συνολικα $2\cdot 3=3!=6$ μεταθεσεις. Σε καθεμια εξ αυτων αντιστοιχει μια συναρτηση:

$$\begin{aligned}
&\sigma_0(1)=1, \quad \sigma_0(2)=2, \quad \sigma_0(3)=3,\\
&\sigma_1(1)=1, \quad \sigma_1(2)=3, \quad \sigma_1(3)=2,\\
&\qquad\quad ...\\
&\sigma_5(1)=3, \quad \sigma_5(2)=2, \quad \sigma_5(3)=1.
\end{aligned}$$

Με τον ιδιο τροπο μπορουμε να βρουμε ολες τις μεταθεσεις του $\{1,2,3,4\}$. Ειναι

$$\begin{array}{lcl}
123 & \rightarrow & 1234, 1243, 1423, 4123\\
132 & \rightarrow & 1324, 1342, 1432, 4132\\
312 & \rightarrow & 3124, 3142, 3412, 4312\\
213 & \rightarrow & 2134, 2143, 2413, 4213\\
231 & \rightarrow & 2314, 2341, 2431, 4231\\
321 & \rightarrow & 3214, 3241, 3421, 4321
\end{array}$$

δηλ. συνολικα $3!\cdot 4=4!=24$ μεταθεσεις.

**14.2.2.** Ποιος ειναι ο συνολικος αριθμος των μεταθεσεων του $\{1,2,...,N\}$;

**Απαντηση**. Χρησιμοποιωντας την μεθοδο του προηγουμενου εδαφιου, βλεπουμε οτι το $\{1,2,...,N\}$ εχει συνολικα $N!$ μεταθεσεις.

**14.2.3.** Δινεται η μεταθεση $\sigma=4132$ του $\{1,2,3,4\}$. Ποιο ειναι το προσημο της $\sigma$;

**Απαντηση**. Πρεπει να μετρησουμε ολα τα ζευγη $(i,k)$ τετοια ωστε $i<k$ και $\sigma(i)>\sigma(k)$. Π.χ., για το ζευγος $(1,2)$ εχουμε $1<2$ και $\sigma(1)=4>1=\sigma(2)$· για το $(1,3)$ εχουμε $1<3$ και $\sigma(1)=4>3=\sigma(3)$· για το $(1,4)$ εχουμε $1<4$ και $\sigma(1)=4>2=\sigma(4)$. Αυτη η διαδικασια μπορει να περιγραφει πιο απλα: στην $\sigma$ το 4 προηγειται των $1,3,2$ τα οποια ειναι μικροτερα αυτου· αρα απο το 4 παιρνουμε 3 αντιστροφες. Παρομοια, απο το 1 παιρνουμε 0 αντιστροφες (το 1 προηγειται των 2 και 3, κανενα εκ των οποιων δεν ειναι μικροτερο του 1)· απο το 3 παιρνουμε 1 αντιστροφη (προηγειται του 2) και απο το 2 παιρνουμε 0 αντιστροφες (δνε προηγειται κανενος αλλου στοιχειου). Συνολικα λοιπον εχουμε $3+0+1+0=4$ αντιστροφες· αφου $(-1)^4=1$, η $\sigma=4132$ ειναι μια αρτια μεταθεση, δηλ. $sign(\sigma)=+1$.

**14.2.4.** Ποιο ειναι το προσημο της μεταθεσης $\tau = 53421$;

**Απαντηση**. Απο το 5 παιρνουμε 4 αντιστροφες $(5 > 3,\ 5 > 4,\ 5 > 2,\ 5 > 1)$· απο το 3 παιρνουμε 2 αντιστροφες $(3 > 2,\ 3 > 1)$· απο το 4 παιρνουμε 2 αντιστροφες $(4 > 2,\ 4 > 1)$· απο το 2 παιρνουμε 1 αντιστροφη $(2 > 1)$· απο το 1 παιρνουμε 0 αντιστροφες. Εχουμε $4+2+2+1+0 = 9$, $(-1)^9 = -1$ και $sign\,(\tau) = -1$.

**14.2.5.** Πως μπορει να αναπαρασταθει η μεταθεση $\sigma = 4132$ με ενα πινακα;

**Απαντηση**. Ας παρουμε τον μοναδιαιο $4 \times 4$ πινακα $\mathbf{I}$ και ας σχηματιζουμε εναν κανουριο πινακα $\mathbf{E}$ εφαρμοζοντας στις γραμμες του $\mathbf{I}$ την μεταθεση 4132· δηλ. ως 1η γραμμη του $\mathbf{E}$ παιρνουμε την 4η του $\mathbf{I}$, ως 2η γραμμη του $\mathbf{E}$ παιρνουμε την 1η του $\mathbf{I}$, ως 3η γραμμη του $\mathbf{E}$ παιρνουμε την 3η του $\mathbf{I}$ και ως 4η γραμμη του $\mathbf{E}$ παιρνουμε την 2η του $\mathbf{I}$, Τοτε ο πινακας $\mathbf{E}$ ειναι

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και αναπαριστα την μεταθεση $\sigma$ με την εξης εννοια: εστω ενα τυχον διανυσμα

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix},$$

τοτε εχουμε

$$\mathbf{Ex} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_3 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

δηλ. ο (*απο αριστερα*) πολλαπλασιασμος του $\mathbf{x}$ με τον $\mathbf{E}$ μεταθετει τα στοιχεια του $\mathbf{x}$ ακριβως οπως και η μεταθεση $\sigma$. Παρατηρειστε οτι η $\sigma$ ειναι αρτια μεταθεση (γιατι;). Μπορουμε να υπολογισουμε οτι

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 = sign\,(\sigma)\,.$$

**14.2.6.** Πως μπορει να αναπαρασταθει η μεταθεση $\tau = 4123$ με ενα πινακα;

**Απαντηση**. Παρομοια με το προηγουμενο εδαφιο, παιρνουμε τις γραμμες του $\mathbf{I}$ στη σειρα που προσδιοριζει η $\tau$ και εχουμε τον πινακα

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ευκολα διαπιστωνουμε οτι

$$\mathbf{Fx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Επειδη ο $\mathbf{F}$ προκυπτει απο τον $\mathbf{E}$ με εναλλαγη της τριτης και τεταρτης γραμμης, απο την ιδιοτητα (14.4) των οριζουσων εχουμε

$$|\mathbf{F}| = |\mathbf{E}| = -1.$$

Ποιο ειναι το $sign\,(\tau)$;

**14.2.7.** Πως μπορει να αναπαρασταθει τυχουσα μεταθεση $\sigma$ του $\{1, 2, ..., N\}$ με ενα πινακα;

**Απαντηση**. Συμφωνα με την μεθοδο των προηγουμενων εδαφιων: ξεκινουμε με τον μοναδιαιο $N \times N$ πινακα $\mathbf{I}$ και σχηματιζουμε τον $\mathbf{E}$ τοποθετωντας τις γραμμες του $\mathbf{I}$ στην σειρα που προσδιοριζει η $\sigma$. Ο $\mathbf{E}$ αντιστοιχει στην $\sigma$ και μπορει να αποδειχτει (καντε το!) οτι εχει την ιδιοτητα

$$\mathbf{E}\cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{\sigma(1)} \\ x_{\sigma(2)} \\ \ldots \\ x_{\sigma(N)} \end{bmatrix}$$

και οτι $|\mathbf{E}| = sign\,(\sigma)$.

**14.2.8.** Δινονται οι μεταθεσεις $\sigma = 4132$ και $\tau = 2143$. Υπολογιστε την μεταθεση $\sigma\,(\tau)$.

**Απαντηση**. Οι $\sigma$ και $\tau$ ειναι συναρτησεις. Η $\sigma\,(\tau)$ ειναι επισης μια συναρτηση, η *συνθεση* των $\sigma$ και $\tau$. Δηλ. για καθε $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ εχουμε

$$\sigma\,(\tau)\,(n) = \sigma\,(\tau\,(n))\,.$$

Στο συγκεκριμενο παραδειγμα εχουμε

Σχημα:

$$\sigma\,(1) = 4, \sigma\,(2) = 1, \sigma\,(3) = 3, \sigma\,(4) = 2,$$
$$\tau\,(1) = 2, \tau\,(2) = 1, \tau\,(3) = 4, \tau\,(4) = 3,$$

Οποτε παιρνοντας την συνθεση των δυο συναρτησεων εχουμε

$$\begin{aligned} \sigma\,(\tau)\,(1) &= \sigma\,(\tau\,(1)) = \sigma\,(2) = 1 \\ \sigma\,(\tau)\,(2) &= \sigma\,(\tau\,(2)) = \sigma\,(1) = 4 \\ \sigma\,(\tau)\,(3) &= \sigma\,(\tau\,(3)) = \sigma\,(4) = 2 \\ \sigma\,(\tau)\,(4) &= \sigma\,(\tau\,(4)) = \sigma\,(3) = 3 \end{aligned}$$

Παρατηρειστε οτι η $\sigma\,(\tau)$ ειναι 1-προς-1, δηλ. *ειναι και αυτη μια μεταθεση*. (Αποδειξτε γιατι ισχυει αυτο!) Ποιος ειναι ο πινακας της $\sigma\,(\tau)$; Εστω $\mathbf{E}$ και $\mathbf{F}$ οι πινακες των $\sigma$ και $\tau$ αντιστοιχα:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Τοτε ο πινακας $\mathbf{G}$ της $\sigma(t)$ ειναι

$$\mathbf{G}=\mathbf{FE}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

(ελεγξτε το!). Παρατηριστε οτι για την συνθεση $\sigma(\tau)$ ο πολλαπλασιασμος ειναι $\mathbf{FE}$, δηλ. οι πινακες πολλαπλασιαζονται με την αντιστροφη σειρα απο αυτη με την οποια γραφουμε την συνθεση των μεταθεσεων.

**14.2.9.** Δινονται οι μεταθεσεις $\sigma = 2341$ και $\tau = 4321$. Υπολογιστε την μεταθεση $\sigma(\tau)$.

**Απαντηση**. Οι πινακες των $\sigma$ και $\tau$ ειναι, αντιστοιχα,

$$\mathbf{E}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix},\quad \mathbf{F}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Τοτε ο πινακας $\mathbf{G}$ της $\sigma(\tau)$ ειναι

$$\mathbf{G}=\mathbf{FE}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

οποτε $\sigma(\tau) = 1432$.

**14.2.10.** Αποδειξτε οτι για καθε πινακα μεταθεσης $\mathbf{E}$ ισχυει $\mathbf{E}\mathbf{E}^T= \mathbf{E}^T\mathbf{E} =\mathbf{I}$ και $\mathbf{E}^{-1} = \mathbf{E}^T$.

**Απαντηση**. Εστω ενας $N \times N$ πινακας $\mathbf{E}$ ο οποιος αντιστοιχει στην μεταθεση $\sigma$. Ο $\mathbf{E}$ προεκυψε απο την εφαρμογη της $\sigma$ στις στηλες του μοναδιαιου πινακα. Δηλ.

$$\mathbf{E}=\left[\begin{array}{cccc}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_N\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cccc}\mathbf{e}_{\sigma(1)} & \mathbf{a}_{\sigma(2)} & \dots & \mathbf{e}_{\sigma(N)}\end{array}\right]$$

(οπου $\mathbf{e}_1$, ..., $\mathbf{e}_N$ ειναι τα τυπικα μοναδιαια διανυσματα βασης). Αρα, για καθε $m, n \in \{1, 2, ..., N\}$ εχουμε

$$\mathbf{a}_m^T\mathbf{a}_n=\begin{cases}1 & \text{αν } m=n\\ 0 & \text{αν } m\neq n\end{cases}$$

το οποιο αποδεικνυει το ζητουμενο. Επισης παρατηρειστε οτι καθε στηλη και γραμμη του $\mathbf{E}$ περιεχει ακριβως 1 μοναδα και $N - 1$ μηδενικα.

**14.2.11.** Δινεται η μεταθεση $\sigma = 4132$. Υπολογιστε την *αντιστροφη* μεταθεση $\sigma^{-1}$.

**Απαντηση**. Αφου η $\sigma$ ειναι 1-προς-1 συναρτηση θα εχει και αντιστροφη συναρτηση, την $\sigma^{-1}$· αυτη ειναι επισης μια μεταθεση (γιατι;). Η $\sigma^{-1}$ θα πρεπει να ειναι τετοια ωστε οι $\sigma(\sigma^{-1})$ και $\sigma^{-1}(\sigma)$ να δινουν την *μηδενικη* μεταθεση $\sigma_0$, δηλ. αυτη η οποια δεν αλλαζει την σειρα κανενος στοιχειου. Μπορουμε να βρουμε την $\sigma^{-1}$ απευθειας (αναζητωντας την μεταθεση η οποια ¨αναιρει¨ την $\sigma$), αλλα ειναι πιο ευκολο να σκεφτουμε ως εξης. Η $\sigma^{-1}$

θα εχει ενα αντιστοιχο πινακα, εστω $\mathbf{H}$. Ο $\mathbf{H}$ θα πρεπει να ικανοποιει $\mathbf{EH} = \mathbf{HE} = \mathbf{I}$ (γιατι ;). Δηλ. ο $\mathbf{H}$ ειναι ο $\mathbf{E}^{-1}$. Μπορουμε να υπολογισουμε τον $\mathbf{E}^{-1}$ χρησιμοποιωντας μια μεθοδο υπολογισμου αντιστροφου πινακα (δες Κεφ. 4, 6). Ομως ειναι πιο ευκολο να χρησιμοποιησουμε το αποτελεσμα του εδαφιου 14.2.10.

$$\mathbf{H} = \mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Οποτε καταλαβαινουμε (απο την σειρα με την οποια εμφανιζονται στον $\mathbf{H}$ οι γραμμες του $\mathbf{I}$) οτι $\sigma^{-1} = 2431$.

**14.2.12.** Δινεται η μεταθεση $\sigma = 32451$. Βρειτε την μεταθεση $\sigma^{-1}$.

**Απαντηση**. Ο πινακας της $\sigma$ ειναι,

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Τοτε ο πινακας της $\sigma^{-1}$ ειναι

$$\mathbf{E}^{-1} = \mathbf{E}^{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ευκολα ελγχουμε οτι

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και οτι $\sigma\left(\sigma^{-1}\right) = \sigma^{-1}\left(\sigma\right) = \sigma_0$.

**14.2.13.** Δινεται τυχουσα μεταθεση $\sigma$ του $\{1, ..., N\}$. Οριζουμε τα πολυωνυμα

$$g\left(x_1, ..., x_N\right) = \prod_{i<j}\left(x_i - x_j\right), \qquad \sigma\left(g\right) = \prod_{i<j}\left(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}\right).$$

Για $N = 3$, $\sigma_0 = 123$ και $\sigma_1 = 213$ υπολογιστε τα πολυωνυμα $g\left(x_1, x_2, x_3\right)$, $\sigma_0\left(g\right)\left(x_1, x_2, x_3\right)$, $\sigma_1\left(g\right)\left(x_1, x_2, x_3\right)$.

**Απαντηση**. Στο γινομενο $\prod_{i<j}(x_i - x_j)$ περιεχονται ακριβως τρεις οροι με $i < j$: $i = 1 < 2 = j$, $i = 1 < 3 = j$, $i = 2 < 3 = j$. Οποτε το πολυωνυμο $g$ ειναι

$$g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3).$$

Με $N = 3$, στο γινομενο $\prod_{i<j}\left(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}\right)$ υπαρχουν τρεις οροι: για $i = 1 < 2 = j$, για $i = 1 < 3 = j$ και για $i = 2 < 3 = j$. Οποτε για την μεταθεση $\sigma_0 = 123$, το πολυωνυμο $\sigma_0(g)$ ειναι

$$\begin{aligned}\sigma_0(g)(x_1, x_2, x_3) &= \left(x_{\sigma_0(1)} - x_{\sigma_0(2)}\right)\left(x_{\sigma_0(1)} - x_{\sigma_0(3)}\right)\left(x_{\sigma_0(2)} - x_{\sigma_0(3)}\right)\\ &= (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3).\end{aligned}$$

Για την μεταθεση $\sigma_1 = 213$, το πολυωνυμο $\sigma_1(g)$ ειναι

$$\begin{aligned}\sigma_1(g)(x_1, x_2, x_3) &= \left(x_{\sigma_1(1)} - x_{\sigma_1(2)}\right)\left(x_{\sigma_1(1)} - x_{\sigma_1(3)}\right)\left(x_{\sigma_1(2)} - x_{\sigma_1(3)}\right)\\ &= (x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_1 - x_3).\end{aligned}$$

Παρατηρειστε οτι $\sigma_1(g)(x_1, x_2, x_3) = -\sigma_0(g)(x_1, x_2, x_3)\cdot$ επισης οτι η $\sigma_0$ ειναι αρτια μεταθεση και η $\sigma_1$ περιττη (γιατι;).

**14.2.14.** Δινεται η μεταθεση $\sigma = 3241$. Βρειτε το αντιστοιχο πολυωνυμο $\sigma(g)$.

**Απαντηση**. Εχουμε

$$\begin{aligned}&\sigma(g)(x_1, x_2, x_3, x_4)\\ &= \left(x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(2)}\right)\left(x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(3)}\right)\left(x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(4)}\right)\left(x_{\sigma(2)} - x_{\sigma(3)}\right)\left(x_{\sigma(2)} - x_{\sigma(4)}\right)\left(x_{\sigma(3)} - x_{\sigma(4)}\right)\\ &= (x_3 - x_2)(x_3 - x_4)(x_3 - x_1)(x_2 - x_4)(x_2 - x_1)(x_4 - x_1)\\ &= (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_1 - x_3) = g(x_1, x_2, x_3, x_4),\end{aligned}$$

το οποιο ηταν αναμενομενο, αφου $sign(\sigma) = +1$.

**14.2.15.** Δειξτε οτι για καθε $N$ εχουμε $\sigma(g) = sign(\sigma)\cdot g$.

**Απαντηση**. Καταρχην παρατηρειστε οτι στο γινομενο $g(x_1, ..., x_N) = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$ εμφανιζονται ολα τα $\frac{N(N-1)}{2}$ δυνατα ζευγη $x_i$ και $x_j$. Αφου η $\sigma$ ειναι 1-προς-1, στο γινομενο $\prod_{i<j}\left(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}\right)$ θα εμφανιζονται επισης ολα τα δυνατα ζευγη $x_i$ και $x_j$, ειτε στην "αρχικη" μορφη $(x_i - x_j)$, ειτε στην μορφη $(x_j - x_i) = -(x_i - x_j)$. Για την ακριβεια (αποδειξτε το!), αν η $\sigma$ διατηρει την σειρα των $i, j$ (δηλ. για $i < j$ εχουμε και $\sigma(i) < \sigma(j)$) τοτε ο αρχικος ορος $(x_i - x_j)$ θα εμφανιζεται ως $(x_i - x_j)$ και στο $\sigma(g)$, ενω αν η $\sigma$ αντιστρεφει την σειρα των $i, j$ (δηλ. για $i < j$ εχουμε $\sigma(i) > \sigma(j)$, τοτε ο αρχικος ορος $(x_i - x_j)$ θα εμφανιζεται ως $-(x_i - x_j)$ στο $\sigma(g)$. Με αλλα λογια

$$\sigma(g)(x_1, ..., x_N) = (-1)^K g(x_1, ..., x_N)$$

οπου $K$ ειναι ο αριθμος των αντιστροφων. Αλλα, αν ο $K$ ειναι αρτιος, τοτε η $\sigma$ ειναι αρτια και $(-1)^K = sign\,(\sigma) = 1$, ενω αν ο $K$ ειναι περιττος, τοτε η $\sigma$ ειναι περιττη και $(-1)^K = sign\,(\sigma) = -1$. Με αλλα λογια

$$\sigma\,(g)\,(x_1, ..., x_N) = sign\,(\sigma)\,g\,(x_1, ..., x_N)$$

και εχουμε αποδειξει το ζητουμενο.

**14.2.16.** Δινονται τυχουσες μεταθεσεις $\sigma, \tau$ του $\{1, ..., N\}$. Δειξτε οτι (α) $sign\,(\sigma\,(\tau)) = sign\,(\sigma) \cdot sign\,(\tau)$, (β) $sign\,(\sigma) = sign\,(\sigma^{-1})$.

**Απαντηση**. Εχουμε

$$sign\,(\sigma\,(\tau)) \cdot g = \sigma\,(\tau)\,(g) = \sigma\,(\tau\,(g)) = sign\,(\sigma) \cdot \tau\,(g) = sign\,(\sigma) \cdot sign\,(\tau) \cdot g$$

και εχουμε αποδειξει το πρωτο ζητουμενο. Αν τωρα θεσουμε $\tau = \sigma^{-1}$, εχουμε $\sigma\,(\sigma^{-1}) = \sigma_0$, την μηδενικη μεταθεση, η οποια προφανως ειναι αρτια (γιατι;). Οποτε

$$1 = sign\,(\sigma_0) = sign\left(\sigma\left(\sigma^{-1}\right)\right) = sign\,(\sigma)\,sign\left(\sigma^{-1}\right).$$

Αρα ειτε $sign\,(\sigma) = sign\,(\sigma^{-1}) = 1$, ειτε $sign\,(\sigma) = sign\,(\sigma^{-1}) = -1$· και εχουμε αποδειξει το δευτερο ζητουμενο.

**14.2.17.** Δινεται η μεταθεση $\sigma = 4132$ και $4 \times 4$ πινακας $\mathbf{A}$. Δειξτε οτι

$$a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}a_{\sigma(3)3}a_{\sigma(4)4} = a_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)}a_{3\tau(3)}a_{4\tau(4)}$$

οπου $\tau = \sigma^{-1}$.

**Απαντηση**. Ο πινακας της $\sigma$ ειναι

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Αρα ο πινακας της $\sigma^{-1}$ ειναι

$$\mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Οποτε $\tau = \sigma^{-1} = 2431$. Τελος, εχουμε

$$\begin{aligned} a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}a_{\sigma(3)3}a_{\sigma(4)4} &= a_{41}a_{12}a_{33}a_{24} = \\ a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} &= a_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)}a_{3\tau(3)}a_{4\tau(4)} \end{aligned}$$

**14.2.18.** Δινεται τυχουσα μεταθεση $\sigma = j_1...j_N$ και $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$. Δειξτε οτι

$$a_{j_1 1} a_{j_2 2} ... a_{j_N N} = a_{1k_1} a_{2k_2} ... a_{Nk_N}$$

οπου $\sigma^{-1} = k_1 k_2 ... k_N$.

**Απαντηση**. Αφου $j_1...j_N$ ειναι μια μεταθεση του $\{1, ..., N\}$, οι αριθμοι $j_1, j_2, ..., j_N$ ειναι ακριβως οι $1, 2, ..., N$, γραμμενοι με διαφορετικη σειρα. Μπορουμε να ξαναγραψουμε το γινομενο ετσι ωστε οι οροι να εμφανιζονται σε αυξουσα σειρα των δεικτων *γραμμης*:

$$a_{j_1 1} a_{j_2 2} ... a_{j_N N} = a_{1k_1} a_{2k_2} ... a_{Nk_N}$$

οπου $k_1, k_2, ..., k_N$ ειναι και παλι οι αριθμοι $1, 2, ..., N$ γραμμενοι με καποια αλλη σειρα· δηλ. υπαρχει μια μεταθεση $\tau$ των $\{1, 2, ..., N\}$ τετοια ωστε $\tau = k_1 k_2 ... k_N$. Μπορουμε λοιπον να γραψουμε

$$a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} ... a_{\sigma(N)N} = a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} ... a_{N\tau(N)}. \tag{14.21}$$

Στο παραπανω γινομενο εχουμε, π.χ., $a_{\sigma(1)1} = a_{m'\tau(m')}$ , δηλ. $\sigma(1) = m'$ και $\tau(m') = 1$. Με αλλα λογια, $\tau(\sigma(1)) = 1$. Αντιστοιχα μπορουμε να δειξουμε οτι $\tau(\sigma(n)) = n$ για καθε $n \in \{1, 2, ...N\}$, οπως και $\sigma(\tau(n)) = n$ για καθε $n \in \{1, 2, ...N\}$. Δηλ. $\tau = \sigma^{-1}$ και εχουμε δειξει το ζητουμενο.

**14.2.19.** Υπολογιστε την οριζουσα του πινακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

χρησιμοποιωντας την (14.1).

**Απαντηση**. Οι μεταθεσεις του $\{1, 2\}$ ειναι $\sigma_0 = 12$, $\sigma_1 = 21$. Οποτε

$$|\mathbf{A}| = sign(\sigma_0)\, a_{1\sigma_0(1)} a_{2\sigma_0(2)} + sign(\sigma_0)\, a_{1\sigma_1(1)} a_{2\sigma_1(2)} = +a_{11}a_{12} - a_{12}a_{21}$$

δηλ. ο γνωστος τυπος της $2 \times 2$ οριζουσας.

**14.2.20.** Υπολογιστε την οριζουσα του πινακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

χρησιμοποιωντας την (14.1).

**Απαντηση**. Οι μεταθεσεις του $\{1, 2\}$ ειναι

$$\begin{array}{lll} \sigma_0 & 123 & sign(\sigma_0) = +1 \\ \sigma_1 & 132 & sign(\sigma_1) = -1 \\ \sigma_2 & 213 & sign(\sigma_2) = -1 \\ \sigma_3 & 231 & sign(\sigma_3) = +1 \\ \sigma_4 & 312 & sign(\sigma_4) = +1 \\ \sigma_5 & 321 & sign(\sigma_5) = -1 \end{array}.$$

Οποτε

$$|\mathbf{A}| = \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_N} sign(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} = \sum_{i=0}^{5} sign(\sigma_i)\, a_{1\sigma_i(1)} a_{2\sigma_i(2)} a_{3\sigma_i(3)}$$
$$= +a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Ελεγξτε οτι αυτος ειναι ο γνωστος τυπος της $3 \times 3$ οριζουσας.

**14.2.21.** Αποδειξτε οτι σε καθε ορο (γινομενο) του αθροισματος (14.1) εμφανιζεται ακριβως ενα στοιχειο απο καθε σειρα και καθε στηλη του πινακα $\mathbf{A}$.

**Απαντηση**. Καθε ορος του αθροισματος εχει την μορφη $a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... a_{N\sigma(N)}$, οπου $\sigma$ ειναι μια μεταθεση. Αφου οι δεικτες γραμμων στο $a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... a_{N\sigma(N)}$ ειναι $1, 2, ..., N$, ειναι φανερο οτι εμφανιζεται ενας ακριβως ορος απο την 1η γραμμη, ενας απο την 2η κτλ. Οι δεικτες στηλων ειναι $\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(N)$ και, αφου η $\sigma$ ειναι μια μεταθεση, οι $\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(N)$ ειναι απλα οι $1, 2, ..., N$ γραμμενοι σε διαφορετικη σειρα. Οποτε στο $a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... a_{N\sigma(N)}$ εμφανιζεται ακριβως ενας ορος απο καθε στηλη.

**14.2.22.** Αποδειξτε οτι $|\mathbf{A}| = \left|\mathbf{A}^T\right|$.

**Απαντηση**. Εστω $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$, οποτε εχουμε $b_{ij} = a_{ji}$. Συμφωνα με τον ορισμο 14.16

$$\left|\mathbf{A}^T\right| = |\mathbf{B}| = \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_N} sign(\sigma)\, b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} ... b_{N\sigma(N)} = \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_N} sign(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} ... a_{\sigma(N)N}$$

(λογω του $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$). Για καθε $\sigma$ εστω $\tau = \sigma^{-1}\cdot$ τοτε $sign(\sigma) = sign(\tau)$ και

$$a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} ... a_{\sigma(N)N} = a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} ... a_{N\tau(N)}$$

λογω της (14.21). Οποτε

$$\left|\mathbf{A}^T\right| = \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_N} sign(\tau)\, a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} ... a_{N\tau(N)}$$

Στο παραπανω αθροιζουμε επι ολων των δυνατων μεταθεσεων $\sigma$ του $\{1, 2, ..., N\}$. Ομως αυτο ειναι ισοδυναμο με το να αθροισουμε επι ολων των δυνατων μεταθεσεων $\tau = \sigma^{-1}$ (γιατι;). Αρα

$$\left|\mathbf{A}^T\right| = \sum_{\tau \in \mathbf{S}_N} sign(\tau)\, a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} ... a_{N\tau(N)}$$

που ειναι ισο με την $|\mathbf{A}|$. Ετσι εχουμε αποδειξει το ζητουμενο.

**14.2.23.** Δινεται ο πινακας

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ελεγξτε ποιες ιδιοτητες του Εδαφιου 14.1.9 ισχυουν για αυτο τον πινακα.

**Απαντηση**. Για την ιδιοτητα (14.3) ας ορισουμε πινακες

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

και αριθμους $\kappa' = 1, \kappa'' = 1$. Παρατηρουμε οτι

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \kappa' \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \kappa'' \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3, \qquad |\mathbf{A}'| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2, \qquad |\mathbf{A}''| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

και

$$|\mathbf{A}| = \kappa' |\mathbf{A}'| + \kappa'' |\mathbf{A}''| .$$

Για την ιδιοτητα (14.4) ας ορισουμε τον πινακα

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρουμε οτι

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3, \qquad |\mathbf{A}'| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3,$$

δηλ. $|\mathbf{A}| = -|\mathbf{A}'|$.

Η ιδιοτητα (14.5) δεν εφαρμοζεται στον $|\mathbf{A}|$.

**14.2.24.** Αποδειξτε την 14.1.9.

**Απαντηση**. Εστω $N \times N$ πινακας

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad ... \quad \mathbf{a}_n \quad ... \quad \mathbf{a}_N]$$

Η 14.1.9 εχει τρια μερη. Για το (14.3), εστω $N \times N$ πινακας

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad ... \quad \kappa'\mathbf{a}_n' + \kappa''\mathbf{a}_n'' \quad ... \quad \mathbf{a}_N]$$

Εχουμε

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= D\left(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \kappa'\mathbf{a}_n' + \kappa''\mathbf{a}_n'', ..., \mathbf{a}_N\right) \\ &= \sum_\sigma sign\left(\sigma\right) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} ... \left(\kappa' a_{\sigma(n)n}' + \kappa'' a_{\sigma(n)n}''\right) ... a_{\sigma(N)N} \\ &= \sum_\sigma sign\left(\sigma\right) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} ... \kappa' a_{\sigma(n)n}' ... a_{\sigma(N)N} + \sum_\sigma sign\left(\sigma\right) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} ... \kappa'' a_{\sigma(n)n}'' ... a_{\sigma(N)N} \\ &= \kappa' \sum_\sigma sign\left(\sigma\right) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} ... a_{\sigma(n)n}' ... a_{\sigma(N)N} + \kappa'' \sum_\sigma sign\left(\sigma\right) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} ... a_{\sigma(n)n}'' ... a_{\sigma(N)N} \\ &= \kappa' D\left(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n', ..., \mathbf{a}_N\right) + \kappa'' D\left(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n'', ..., \mathbf{a}_N\right). \end{aligned}$$

Για το (14.4), εστω $N \times N$ πινακες

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad ... \quad \mathbf{a}_m \quad ... \quad \mathbf{a}_n \quad ... \quad \mathbf{a}_N],$$
$$\mathbf{B} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad ... \quad \mathbf{a}_n \quad ... \quad \mathbf{a}_m \quad ... \quad \mathbf{a}_N].$$

Εχουμε

$$|\mathbf{A}| = \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_N} sign\,(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... a_{m\sigma(m)} ... a_{n\sigma(n)} ... a_{N\sigma(N)}.$$

Ας θεωρησουμε τωρα την μεταθεση $\tau$ η οποια εναλασσει τα στοιχεια $m$ και $n$ και αφηνει ολα τα αλλα στοιχεια αμεταβλητα. Τοτε

$$\begin{aligned}|\mathbf{B}| &= \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_N} sign\,(\sigma)\, b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} ... b_{m\sigma(m)} ... b_{n\sigma(n)} ... b_{N\sigma(N)} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_N} sign\,(\sigma)\, a_{1\tau(\sigma(1))} a_{2\tau(\sigma(2))} ... a_{m\tau(\sigma(m))} ... a_{n\tau(\sigma(n))} ... a_{N\tau(\sigma(N))}.\end{aligned}$$

Καθως η $\sigma$ διατρεχει ολα τις δυνατες μεταθεσεις στο $\mathbf{S}_N$, το ιδιο κανει και η $\tau\,(\sigma)$. Επισης, η $\tau$ ειναι μια περιττη μεταθεση (γιατι;) οποτε και $sign\,(\tau\,(\sigma)) = sign\,(\tau) \cdot sign\,(\sigma) = -sign\,(\sigma)$. Οποτε εχουμε

$$|\mathbf{B}| = -\sum_{\tau(\sigma) \in \mathbf{S}_N} sign\,(\tau\,(\sigma))\, a_{1\tau(\sigma(1))} a_{2\tau(\sigma(2))} ... a_{m\tau(\sigma(m))} ... a_{n\tau(\sigma(n))} ... a_{N\tau(\sigma(N))} = -\,|\mathbf{A}|$$

και εχουμε αποδειξει το δευτερο ζητουμενο.

Το (14.5) προκυπτει ευκολα χρησιμοποιωντας τον ορισμο

$$|\mathbf{I}| = \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_N} sign\,(\sigma)\, i_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... i_{n\sigma(n)} ... i_{N\sigma(N)}. \tag{14.22}$$

Για καθε μεταθεση $\sigma \neq \sigma_0$ (οπου $\sigma_0$ ειναι η ταυτοτικη μεταθεση) θα υπαρχει καποιο $\sigma\,(n) \neq n$ οποτε στο γινομενο θα εμφανιζεται ενας ορος $a_{n\sigma(n)} = 0$ (ορος εκτος της κυριας διαγωνιου). Οποτε, απολα τα γινομενα στην (14.22), το μονο μη μηδενικο θα ειναι αυτο που αντιστοιχει στην ταυτοτικη μεταθεση:

$$|\mathbf{I}| = \sum_{\sigma = \sigma_0} sign\,(\sigma)\, i_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... i_{n\sigma(n)} ... i_{N\sigma(N)} = i_{11} i_{22} ... i_{NN} = 1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1 = 1.$$

Ετσι εχουμε αποδειξει ολα τα ζητουμενα σε σχεση με τις στηλες ενος πινακα $\mathbf{A}$. *Δεδομενου οτι* $|\mathbf{A}| = \left|\mathbf{A}^T\right|$, *ολα τα παραπανω ισχυουν οχι μονο σε σχεση με τις στηλες αλλα και με τις γραμμες ενος πινακα* $\mathbf{A}$.

**14.2.25.** Δινεται ο πινακας

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Ελεγξτε οτι ισχυει η (14.4).

**Απαντηση**. Θετουμε

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Εχουμε

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 6, \qquad |\mathbf{A}'| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -6 = -|\mathbf{A}|.$$

**14.2.26.** Δινονται οι πινακες

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}'' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ελεγξτε οτι ισχυει η (14.3).

**Απαντηση**. Εχουμε

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

και

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 6 = 2 + 4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = |\mathbf{A}'| + |\mathbf{A}''|.$$

**14.2.27.** Αποδειξτε την 14.1.11.

**Απαντηση**. Τα ζητουμενα της 14.1.11 προκυπτουν απο αυτα της 14.1.9. Π.χ., συμφωνα με την (14.3),

$$\begin{aligned} \left| \mathbf{a}_1 \ \ ... \ \ \mathbf{0} \ \ ... \ \ \mathbf{a}_N \right| &= \left| \mathbf{a}_1 \ \ ... \ \ 1 \cdot \mathbf{a}_n + (-1) \cdot \mathbf{a}_n \ \ ... \ \ \mathbf{a}_N \right| \\ &= 1 \cdot \left| \mathbf{a}_1 \ \ ... \ \ \mathbf{a}_n \ \ ... \ \ \mathbf{a}_N \right| + (-1) \cdot \left| \mathbf{a}_1 \ \ ... \ \ \mathbf{a}_n \ \ ... \ \ \mathbf{a}_N \right| \\ &= |\mathbf{A}| - |\mathbf{A}| = 0 \end{aligned}$$

και ετσι εχουμε αποδειξει την (14.9).

Επισης, εστω οτι ο $\mathbf{A}$ εχει δυο ιδιες στηλες:

$$\mathbf{A} = \left| \mathbf{a}_1 \ \ ... \ \ \mathbf{a}_m \ \ ... \ \ \mathbf{a}_m \ \ ... \ \ \mathbf{a}_N \right|.$$

Εαν εναλλαξουμε αυτες τις δυο στηλες, συμφωνα με την (14.4), εχουμε

$$|\mathbf{A}| = \left| \mathbf{a}_1 \ \ ... \ \ \mathbf{a}_m \ \ ... \ \ \mathbf{a}_m \ \ ... \ \ \mathbf{a}_N \right| = - \left| \mathbf{a}_1 \ \ ... \ \ \mathbf{a}_m \ \ ... \ \ \mathbf{a}_m \ \ ... \ \ \mathbf{a}_N \right| = -|\mathbf{A}|.$$

Αλλα $|\mathbf{A}| = -|\mathbf{A}| \Rightarrow |\mathbf{A}| = 0$ και ετσι εχουμε αποδειξει την (14.10).

Συμφωνα με την ιδιοτητα (14.3), εχουμε

$$\begin{aligned} \left| \mathbf{a}_1 \ \ ... \ \ \kappa\mathbf{a}_n \ \ ... \ \ \mathbf{a}_N \right| &= D\left(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \kappa \cdot \mathbf{a}_n + 0 \cdot \mathbf{a}_n'', ..., \mathbf{a}_N\right) \\ &= \kappa \cdot D\left(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n, ..., \mathbf{a}_N\right) + 0 \cdot D\left(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n'', ..., \mathbf{a}_N\right) \\ &= \kappa \cdot |\mathbf{A}| + 0 = \kappa \cdot |\mathbf{A}| \end{aligned}$$

και ετσι εχουμε αποδειξει την (14.11).

Και παλι συμφωνα με την ιδιοτητα (14.3), εχουμε

$$\begin{aligned}\left|\begin{array}{ccccc}\mathbf{a}_1 & ... & \mathbf{a}_m+\kappa\cdot\mathbf{a}_n & ... & \mathbf{a}_N\end{array}\right| &= D\left(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,...,1\cdot\mathbf{a}_m+\kappa\cdot\mathbf{a}_n,...,\mathbf{a}_n,\mathbf{a}_N\right)\\ &= 1\cdot D\left(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,...,\mathbf{a}_m,...,...,\mathbf{a}_n,...,\mathbf{a}_N\right)\\ &+\kappa\cdot D\left(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,...,\mathbf{a}_n,...,...,\mathbf{a}_n,...,\mathbf{a}_N\right)\\ &= 1\cdot D\left(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,...,\mathbf{a}_m,...,...,\mathbf{a}_n,...,\mathbf{a}_N\right)+\kappa\cdot 0\\ &= \left|\begin{array}{ccccccc}\mathbf{a}_1 & ... & \mathbf{a}_m & ... & \mathbf{a}_n & ... & \mathbf{a}_N\end{array}\right|\end{aligned}$$

αφου $D\left(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,...,\mathbf{a}_n,...,...,\mathbf{a}_n,...,\mathbf{a}_N\right)$ (ο $\left|\begin{array}{ccccccc}\mathbf{a}_1 & ... & \mathbf{a}_n & ... & \mathbf{a}_m & ... & \mathbf{a}_N\end{array}\right|$ εχει δυο ιδιες στηλες).

Ετσι εχουμε αποδειξει ολα τα ζητουμενα σε σχεση με τις στηλες ενος πινακα $\mathbf{A}$. Δεδομενου οτι $|\mathbf{A}|=\left|\mathbf{A}^T\right|$, *ολα τα παραπανω ισχυουν οχι μονο σε σχεση με τις στηλες αλλα και με τις γραμμες* ενος πινακα $\mathbf{A}$.

**14.2.28.** Δινεται ο πινακας

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{ccc}2&0&0\\4&1&0\\3&1&4\end{array}\right].$$

Υπολογιστε την οριζουσα αυτου.

**Απαντηση**. Επειδη ο πινακας ειναι κατω τριγωνικος, εχουμε

$$|\mathbf{A}|=\left|\begin{array}{ccc}2&0&0\\4&1&0\\3&1&4\end{array}\right|=2\cdot1\cdot4=8.$$

**14.2.29.** Δινεται ο πινακας

$$A=\left[\begin{array}{ccccc}2&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&4&0&0\\0&0&0&3&0\\0&0&0&0&4\end{array}\right].$$

Υπολογιστε την οριζουσα αυτου.

**Απαντηση**. Επειδη ο πινακας ειναι διαγωνιος (αρα και τριγωνικος), εχουμε

$$|\mathbf{A}|=\left|\begin{array}{ccccc}2&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&4&0&0\\0&0&0&3&0\\0&0&0&0&4\end{array}\right|=2\cdot1\cdot4\cdot3\cdot4=96.$$

**14.2.30.** Εστω ανω η κατω τριγωνικος $N\times N$ πινακας $\mathbf{A}$. Αποδειξτε οτι

$$|\mathbf{A}|=a_{11}a_{22}...a_{NN}.$$

**Απαντηση**. Σε καθε γινομενο του αθροισματος

$$|\mathbf{A}| = \sum_{\sigma\in\mathbf{S}_N} sign\left(\sigma\right) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{N\sigma(N)}$$

εμφανιζεται ενας ορος απο καθε γραμμη και καθε στηλη. Αν ενα τετοιο γινομενο περιεχει εστω και εναν ορο κατω της κυριας διαγωνιου του πινακα, αυτος θα ειναι μηδενικος και το συγκεκριμενο γινομενο θα μηδενιζεται. Επισης, για καθε εμφανιζομενο ορο *ανω* της κυριας διαγωνιου θα εμφανιζεται και ενας αλλος ορος *κατω* της κυριας διαγωνιου (αποδειξτε το!). Αρα το μονο γινομενο το οποιο δεν μηδενιζεται ειναι αυτο το οποιο περιεχει *μονο* ορους της κυρια διαγωνιου:

$$|\mathbf{A}| = \sum_{\sigma\in\mathbf{S}_N} sign\left(\sigma\right) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{N\sigma(N)} = sign\left(\sigma_0\right) a_{11}a_{22}...a_{NN}$$

οι οποιοι προκυπτουν απο την ταυτοτικη μεταθεση ($\sigma_0\left(1\right) = 1$, $\sigma_0\left(2\right) = 2$, ... ) και αρα $sign\left(\sigma_0\right) = 1$.

**14.2.31.** Αποδειξτε οτι για καθε $N \times N$ πινακα $\mathbf{A}$ εχουμε

$$|\mathbf{A}| = (-1)^{i+1} a_{i1}A_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2}A_{i2} + ... + (-1)^{i+N} a_{iN}A_{iN}, \tag{14.23}$$

οπου $A_{ij}$ ειναι η *υποοριζοουσα* του $(N-1)\times(N-1)$ πινακα ο οποιος προκυπτει διαγραφοντας την $i$ γραμμη και $j$ στηλη του $\mathbf{A}$.

**Απαντηση**. Συμφωνα με τον συνδυαστικο ορισμο 14.1.5 της οριζουσας εχουμε

$$|\mathbf{A}| = \sum_{\sigma\in\mathbf{S}_N} sign\left(\sigma\right) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{N\sigma(N)}$$

Επειδη σε καθε γινομενο εμφανιζεται ακριβως ενας ορος απο καθε γραμμη, για τυχον $i \in \{1,2,...,N\}$ μπορουμε να ξαναγραψουμε την οριζουσα ως εξησ:

$$|\mathbf{A}| = a_{i1}\overline{A}_{i1} + a_{i2}\overline{A}_{i2} + ... + a_{iN}\overline{A}_{iN}$$

οπου ο ορος $\overline{A}_{ij}$ ($j \in \{1,2,...,N\}$) ειναι μια (αριθμητικη) εκφραση η οποια δεν περιεχει το $a_{ij}$. Για να αποδειξουμε το ζητουμενο, αρκει να δειξουμε

$$\overline{A}_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij} = (-1)^{i+j} \left|\mathbf{A}^{(i,j)}\right| \tag{14.24}$$

οπου $A_{ij}$ ειναι η γνωστη ελασσων υποοριζουσα (η οποια προκυπτει διαγραφοντας την $i$ γραμμη και $j$ στηλη). Επισης στα παρακατω θα χρησιμοποιησουμε τον συμβολισμο $\mathbf{A}^{(i,j)}$ για τον υποπινακα ο οποιος προκυπτει διαγραφοντας απο τον $\mathbf{A}$ την $i$ γραμμη και $j$ στηλη. Παρατηρειστε οτι $\left|\mathbf{A}^{(i,j)}\right| = A_{ij}$.

Θα εξετασουμε πρωτα την περιπτωση $i = j = N$. Τοτε το αθροισμα των ορων που περιεχουν το $a_{NN}$ ειναι

$$a_{NN}\overline{A}_{NN} = a_{NN} \sum_{\sigma\in\overline{\mathbf{S}}_N} sign\left(\sigma\right) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{N-1,\sigma(N-1)}$$

οπου $\overline{\mathbf{S}}_N$ ειναι το συνολο των μεταθεσεων $\sigma$ οι οποιες ικανοποιουν $\sigma(N) = N$. Ομως αυτο ειναι ισοδυναμο με το να αθροισουμε πανω σε ολες τις $\sigma \in \mathbf{S}_{N-1}$. Αρα

$$\overline{A}_{NN} = \sum_{\sigma \in \overline{\mathbf{S}}_{N-1}} sign(\sigma) \, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... a_{N-1,\sigma(N-1)} = \left|\mathbf{A}^{(N,N)}\right| = (-1)^{N+N} A_{NN}.$$

Ας παρουμε τωρα τυχοντα $i, j \in \{1, ..., N\}$. Μπορουμε να δημιουργησουμε εναν νεο πινακα $\mathbf{A}'$, μετατοπιζοντας την $i$ γραμμη του $\mathbf{A}$ στην τελευταια θεση του πινακα (κανοντας $N-i$ εναλλαγες γραμμων) και κατοπιν μετατοπιζοντας την $j$ στηλη στην τελευταια θεση του πινακα (κανοντας $N-j$ εναλλαγες στηλων) . Αυτο δεν επηρεαζει τον $\mathbf{A}^{(i,j)}$, ουτε την υποοριζουσα $\left|\mathbf{A}^{(i,j)}\right| = A_{ij}$, ομως αλλαζει τα προσημα των $|\mathbf{A}|$ και $\overline{A}_{ij}$ συνολικα $N-i+N-j$ φορες. Οποτε

$$\overline{A}_{ij} = (-1)^{N-i+N-j} \left|\mathbf{A}^{(i,j)}\right| = (-1)^{i+j} A_{ij}.$$

Εχουμε λοιπον αποδειξει οτι, για καθε $i, j \in \{1, 2, ..., N\}$ ισχυει η (14.24), απο την οποια προκυπτει η (14.24).

**14.2.32.** Εστω $\mathbf{B}$ ο πινακας ο οποιος προκυπτει αντικαθιστωντας την $i$-στη γραμμη του $N \times N$ πινακα $\mathbf{A}$ με το διανυσμα $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_{i1} & b_{i2} & ... & b_{iN} \end{bmatrix}$. Τοτε ισχυει οτι

$$|\mathbf{B}| = (-1)^{i+1} b_{i1} A_{i1} + (-1)^{i+2} b_{i2} A_{i2} + ... + (-1)^{i+N} b_{iN} A_{iN}, \tag{14.25}$$

**Απαντηση**. Απο την (14.23) εχουμε

$$|\mathbf{B}| = (-1)^{i+1} b_{i1} B_{i1} + .... + (-1)^{i+N} b_{iN} B_{iN}.$$

Η υποοριζουσα $B_{in}$ δεν εξαρταται απο την $i$-στη γραμμη του $\mathbf{B}$ (γιατι;). Αρα $B_{ij} = A_{ij}$ για $i, j \in \{1, 2, ..., N\}$ και ετσι

$$|\mathbf{B}| = b_{i1} (-1)^{i+1} A_{i1} + .... + b_{iN} (-1)^{i+N} A_{iN}$$

και εχουμε δειξει το ζητουμενο.

**14.2.33.** Εστω $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$ με $|\mathbf{A}| \neq 0$. Τοτε

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} A_{11} & (-1)^{1+2} A_{21} & ... & (-1)^{1+N} A_{N1} \\ (-1)^{2+1} A_{12} & (-1)^{2+2} A_{22} & ... & (-1)^{2+N} A_{N2} \\ ... & ... & ... & ... \\ (-1)^{N+1} A_{1N} & ... & ... & (-1)^{N+N} A_{NN} \end{bmatrix}$$

**Απαντηση**. Εστω $\mathbf{A}'$ ο πινακας ο οποιος προκυπτει απο τον $\mathbf{A}$, αντικαθιστωντας την γραμμη $i$ με τη γραμμη $j$. Αφου ο $\mathbf{A}'$ εχει δυο ιδιες γραμμες, $|\mathbf{A}'| = 0$. Οποτε, απο την (14.25) εχουμε

$$0 = |\mathbf{A}'| = a_{j1} (-1)^{j+1} A_{j1} + ... + a_{jN} (-1)^{j+N} A_{jN}.$$

Χρησιμοποιωνντας $|\mathbf{A}| = \left|\mathbf{A}^T\right|$ μπορουμε να αποδειξουμε και οτι (καντετ το!)

$$0 = a_{1j} (-1)^{1+j} A_{1j} + ... + a_{Nj} (-1)^{N+j} A_{Nj}.$$

**14.2.34.** Ας θεσουμε

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} A_{11} & (-1)^{2+1} A_{21} & ... & (-1)^{N+1} A_{N1} \\ (-1)^{1+2} A_{12} & (-1)^{2+2} A_{22} & ... & (-1)^{N+2} A_{N2} \\ ... & ... & ... & ... \\ (-1)^{1+N} A_{1N} & ... & ... & (-1)^{N+N} A_{NN} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \mathbf{AB}.$$

Η $i$ γραμμη του $\mathbf{A}$ ειναι (προφανως)

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{iN} \end{bmatrix}. \tag{14.26}$$

Η $j$ στηλη του $\mathbf{B}$ ειναι (γιατι;)

$$\begin{bmatrix} (-1)^{j+1} A_{j1} & A_{j2}^{j+2} & ... & A_{jN}^{j+N} \end{bmatrix}^T. \tag{14.27}$$

Το $(i,j)$ στοιχειο του $\mathbf{C}$ ειναι (πολλαπλασιαζοντας τις (14.26) και (14.27) )

$$c_{ij} = a_{i1} (-1)^{j+1} A_{j1} + ... + a_{iN} (-1)^{j+N} A_{jN}.$$

Αλλα αυτη η εκφραση ειναι $|\mathbf{A}|$ οταν $i = j$ και 0 οταν $i \neq j$ (γιατι;). Με αλλα λογια, εχουμε δειξει

$$\frac{c_{ij}}{|\mathbf{A}|} = \begin{cases} 1 & \text{οταν} \quad i = j \\ 0 & \text{οταν} \quad i \neq j \end{cases}$$

δηλ.

$$\left( \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{B} \right) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$$

το οποιο δειχνει οτι

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} A_{11} & (-1)^{1+2} A_{21} & ... & (-1)^{1+N} A_{N1} \\ (-1)^{2+1} A_{12} & (-1)^{2+2} A_{22} & ... & (-1)^{2+N} A_{N2} \\ ... & ... & ... & ... \\ (-1)^{N+1} A_{1N} & ... & ... & (-1)^{N+N} A_{NN} \end{bmatrix}. \tag{14.28}$$

**14.2.35.** Εστω $\mathbf{B}$ τυχον $N \times N$ πινακας και $\mathbf{E}$ *στοιχειωδης* $N \times N$ πινακας. Αποδειξτε οτι $|\mathbf{EB}| = |\mathbf{E}| \cdot |\mathbf{B}|$.

**Απαντηση**. Θυμηθειτε (Κεφ. 6) οτι πολλαπλασιαζοντας τον $\mathbf{B}$ με ενα στοιχειωδη πινακα $\mathbf{E}$ υλοποιουμε μια απο τις στοιχειωδεις γραμμοπραξεις (εναλλαγη γραμμων, πολ/σμο γραμμης επι αριθμο $\kappa$, προσθεση σε γραμμη πολλαπλασιου μιας αλλης γραμμης). Ας εξετασουμε λοιπον αυτες τις τρεις περιπτωσεις.

1. Εστω οτι ο $\mathbf{E}$ αντιστοιχει σε εναλλαγη των γραμμων $i$ και $j$. Αυτο σημαινει οτι ο $\mathbf{E}$ προηλθε απο εναλλαγη των $i$ και $j$ γραμμων του μοναδιαιου πινακα $\mathbf{I}$. Αρα (συμφωνα με την (14.4) ) $|\mathbf{E}| = -|\mathbf{I}| = -1$. Επισης, ο $\mathbf{EB}$ ειναι ο πινακας $\mathbf{B}$ με εναλλαγμενες τις $i$ και $j$ γραμμες. Αρα $|\mathbf{EB}| = -|\mathbf{B}|$. Οποτε

$$|\mathbf{EB}| = -|\mathbf{B}| = |\mathbf{E}| \cdot |\mathbf{B}|.$$

2. Παρομοια, εστω οτι ο $\mathbf{E}$ αντιστοιχει στον πολλαπλασιασμο της γραμμης $i$ επι $\kappa$. Αυτο σημαινει οτι ο $\mathbf{E}$ προηλθε απο πολλαπλασιασμο της γραμμης $i$ του μοναδιαιου πινακα $\mathbf{I}$ επι $\kappa$. Αρα (συμφωνα με την (14.11) ) $|\mathbf{E}| = \kappa \cdot |\mathbf{I}| = \kappa$. Επισης, ο $\mathbf{EB}$ ειναι ο πινακας $\mathbf{B}$ με την $i$ γραμμη πολλαπλασιασμενη απι $\kappa$. Αρα $|\mathbf{EB}| = \kappa \cdot |\mathbf{B}|$. Οποτε
$$|\mathbf{EB}| = \kappa \cdot |\mathbf{B}| = |\mathbf{E}| \cdot |\mathbf{B}| .$$

3. Τελος, εστω οτι εστω οτι ο $\mathbf{E}$ αντιστοιχει στην προσθεση στην $i$ γραμμη της $j$ γραμμης πολλαπλασιασμενης επι $\kappa$. Ο $\mathbf{E}$ προηλθε απο εφαρμογη αυτης της γραμμοπραξης στον $\mathbf{I}$. Αρα (συμφωνα με την (14.5) ) $|\mathbf{E}| = |\mathbf{I}| = 1$· τα ιδια ισχυουν για τον $\mathbf{EB}$ και τον $\mathbf{B}$, αρα
$$|\mathbf{EB}| = |\mathbf{B}| = |\mathbf{E}| \cdot |\mathbf{B}| .$$

**14.2.36.** Δινεται ο πινακας
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$
και οι πινακες
$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Αποδειξτε οτι
$$|\mathbf{E}_4\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A}| = |\mathbf{E}_4| \cdot |\mathbf{E}_3| \cdot |\mathbf{E}_2| \cdot |\mathbf{E}_1| \cdot |\mathbf{A}| .$$

**Απαντηση**. Εχουμε (προσεξτε την επιδραση των $\mathbf{E}_k$ στο γινομενο των πινακων)
$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_4\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 9 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 9 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 9 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 30 & 7 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 9 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Τωρα
$$|\mathbf{E}_4\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 6 & 30 & 7 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 75, \qquad |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -25$$

και

$$|\mathbf{E}_4| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad |\mathbf{E}_3| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad |\mathbf{E}_2| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad |\mathbf{E}_1| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Πραγματι λοιπον, $|\mathbf{E}_4\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A}| = |\mathbf{E}_4| \cdot |\mathbf{E}_3| \cdot |\mathbf{E}_2| \cdot |\mathbf{E}_1| \cdot |\mathbf{A}|$.

**14.2.37.** Εστω $\mathbf{B}$ τυχον $N \times N$ πινακας και $\mathbf{E}_1, ...., \mathbf{E}_K$ στοιχειωδεις $N \times N$ πινακας. Αποδειξτε οτι $|\mathbf{E}_K\mathbf{E}_{K-1}...\mathbf{E}_1\mathbf{B}| = |\mathbf{E}_K| \cdot |\mathbf{E}_{K-1}| \cdot ... \cdot |\mathbf{E}_1| \cdot |\mathbf{B}|$.

**Απαντηση**. Αυτο προκυπτει απο το 14.2.35 με επαγωγη.

**14.2.38.** Εστω $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$. Ο $\mathbf{A}^{-1}$ υπαρχει ανν $|\mathbf{A}| \neq 0$. (Με αλλα λογια, $\exists \mathbf{A}^{-1} \Leftrightarrow |\mathbf{A}| \neq 0$.)

**Απαντηση**. Αν $|\mathbf{A}| \neq 0$, τοτε ο $\mathbf{A}^{-1}$ υπαρχει και δινεται απο τον τυπο (14.28).

Απο την αλλη, αν υπαρχει ο αντιστροφος, τοτε αυτος μπορει να υπολογιστει αναγοντας τον πινακα $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$ στον πινακα $\left[\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}\right]$ χρησιμοποιωντας *αντιστρεπτες* γραμμοπραξεις (δες Κεφ. 6). Πιο συγκεκριμενα, εχουμε

$$\mathbf{E}_K\mathbf{E}_{K-1}...\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \mathbf{I}$$
$$\mathbf{E}_K\mathbf{E}_{K-1}...\mathbf{E}_1\mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}.$$

Οποτε, συμφωνα με το εδαφιο 14.2.37,

$$|\mathbf{E}_K| \cdot |\mathbf{E}_{K-1}| \cdot ... \cdot |\mathbf{E}_1| \cdot |\mathbf{B}| = |\mathbf{E}_K\mathbf{E}_{K-1}...\mathbf{E}_1\mathbf{B}| = |\mathbf{I}| = 1 \Rightarrow$$
$$|\mathbf{B}| = \frac{1}{|\mathbf{E}_K| \cdot |\mathbf{E}_{K-1}| \cdot ... \cdot |\mathbf{E}_1|} \neq 0$$

(για $k \in \{1, 2, ..., K\}$ εχουμε $|\mathbf{E}_k| \neq 0$, αφου οι γραμμοπραξεις ειναι *αντιστρεπτες*).

**14.2.39.** Δινονται οι πινακες

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ελεγξτε οτι $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$.

**Απαντηση**. Εχουμε

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 6, \qquad |\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$|\mathbf{AB}| = \left| \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 7 & 10 & 21 \\ 1 & 6 & 12 \\ 5 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 6$$

και οντως $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$.

**14.2.40.** Αποδειξτε οτι $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$.

**Απαντηση**. Θα διακρινουμε δυο περιπτωσεις: $|\mathbf{A}| = 0$ και $|\mathbf{A}| \neq 0$.

Αν $|\mathbf{A}| = 0$ τοτε δεν υπαρχει ο $\mathbf{A}^{-1}$. Αλλα τοτε δεν υπαρχει ουτε και ο $(\mathbf{AB})^{-1}$, διοτι, αν υπηρχε, ο $\mathbf{A}\left[\mathbf{B}(\mathbf{AB})^{-1}\right] = \mathbf{I}$ και αρα ο $\left[\mathbf{B}(\mathbf{AB})^{-1}\right]$ θα ηταν ο αντιστροφος του $\mathbf{A}$. Αφου δεν υπαρχει $(\mathbf{AB})^{-1}$,εχουμε $|\mathbf{AB}| = 0$, οποτε και

$$|\mathbf{AB}| = 0 = 0 \cdot |\mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|.$$

Εστω τωρα οτι $|\mathbf{A}| \neq 0$, Τοτε υπαρχει ο $\mathbf{A}^{-1}$ και

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_K\mathbf{E}_{K-1}...\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \mathbf{I} &\Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{E}_1^{-1}\mathbf{E}_2^{-1}...\mathbf{E}_K^{-1} \\ \mathbf{E}_K\mathbf{E}_{K-1}...\mathbf{E}_1\mathbf{I} &= \mathbf{A}^{-1}. \end{aligned}$$

Οι πινακες $\mathbf{E}_1^{-1}$, $\mathbf{E}_2^{-1}$, ..., $\mathbf{E}_K^{-1}$ αντιστοιχουν επισης σε στοιχειωδεις γραμμοπραξεις· ας τους ονομασουμε $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ..., $\mathbf{F}_K$ οποτε εχουμε

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{F}_1\mathbf{F}_2...\mathbf{F}_K| = |\mathbf{F}_1| \cdot |\mathbf{F}_2| \cdot ... \cdot |\mathbf{F}_K|$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{AB}| &= |\mathbf{F}_1\mathbf{F}_2...\mathbf{F}_K\mathbf{B}| = |\mathbf{F}_1| \cdot |\mathbf{F}_2...\mathbf{F}_K\mathbf{B}| \\ &= |\mathbf{F}_1| \cdot |\mathbf{F}_2| \cdot |\mathbf{F}_3...\mathbf{F}_K\mathbf{B}| \\ &= |\mathbf{F}_1| \cdot |\mathbf{F}_2| \cdot ... \cdot |\mathbf{F}_K| \cdot |\mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|. \end{aligned}$$

**14.2.41.** Δινεται ο πινακας

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Υπολογιστε την $|\mathbf{A}|$.

**Απαντηση**. Θετουμε

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_{33} \end{bmatrix},$$

οποτε

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}_{11}| \cdot |\mathbf{A}_{22}| \cdot |\mathbf{A}_{22}| = (-15) \cdot 9 \cdot (-2) = 270$$

**14.2.42.** Εστω $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$ ο οποιος ειναι *διαγωνιος διαμερισμενος*:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} & ... & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{0} & ... & ... & \mathbf{A}_{KK} \end{bmatrix}$$

Αποδειξτε οτι

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}_{11}| \cdot |\mathbf{A}_{22}| \cdot ... \cdot |\mathbf{A}_{KK}|$$

**Απαντηση**. Αρκει να αποδειξουμε το θεωρημα για $K = 2$ (γιατι;). Θετουμε $\mathbf{A}_{11} = \mathbf{B}$, $\mathbf{A}_{12} = \mathbf{C}$, $\mathbf{A}_{22} = \mathbf{D}$. Εχουμε

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_N} sign\,(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... a_{N\sigma(N)}.$$

Εστω οτι ο $\mathbf{A}_{11}$ ειναι $N_1 \times N_1$ και ο $\mathbf{A}_{22}$ ειναι $N_2 \times N_2$ (και $N = N_1 + N_2$· ποια ειναι η διασταση του $\mathbf{A}_{12}$;). Αν $i > N_1$ και $j < N_2$, τοτε $a_{ij} = 0$. Αρα αρκει να εξετασουμε μεταθεσεις τετοιες ωστε

$$\sigma(\{N_1 + 1, ..., N_1 + N_2\}) = \{N_1 + 1, ..., N_1 + N_2\}$$
$$\sigma(\{1, ..., N_2\}) = \{1, ..., N_2\}.$$

Εστω $\sigma_1(k) = \sigma(k)$ για $k \leq N_1$ και $\sigma_2(k) = \sigma(N_1 + K) - N_1$ για $k \leq N_2$. Τοτε

$$sign\,(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... a_{N\sigma(N)} = sign\,(\sigma_1)\, b_{1\sigma_1(1)} b_{2\sigma_1(2)} ... b_{N\sigma_1(N)} sign\,(\sigma_2)\, d_{1\sigma_2(1)} d_{2\sigma_2(2)} ... d_{N\sigma_2(N)}$$

και

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_N} sign\,(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... a_{N\sigma(N)} \\ &= \sum_{\sigma_1 \in \mathbf{S}_{N_1}, \sigma_2 \in \mathbf{S}_{N_2}} sign\,(\sigma_1)\, b_{1\sigma_1(1)} b_{2\sigma_1(2)} ... b_{N\sigma_1(N)} sign\,(\sigma_2)\, d_{1\sigma_2(1)} d_{2\sigma_2(2)} ... d_{N\sigma_2(N)} \\ &= \left( \sum_{\sigma_1 \in \mathbf{S}_{N_1}} sign\,(\sigma_1)\, b_{1\sigma_1(1)} b_{2\sigma_1(2)} ... b_{N\sigma_1(N)} \right) \left( \sum_{\sigma_2 \in \mathbf{S}_{N_2}} sign\,(\sigma_2)\, d_{1\sigma_2(1)} d_{2\sigma_2(2)} ... d_{N\sigma_2(N)} \right) \\ &= |\mathbf{B}| \cdot |\mathbf{D}|. \end{aligned}$$

**14.2.43.** Αποδειξτε οτι η οριζουσα ειναι η *μοναδικη* συναρτηση των στηλων ενος τετραγωνικου πινακα η οποια ικανοποιει τις ιδιοτητες της 14.1.9.

**Απαντηση**. Εχουμε ηδη δει στο Εδαφιο 14.2.24 οτι η $D(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_N)$ ικανοποιει τις ιδιοτητες (14.3)-(14.5). Εστω τωρα οτι υπαρχει μια αλλη συναρτηση $F(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_N)$ η οποια ικανοποιει τις ιδιες ιδιοτητες. *Αυτη η συναρτηση θα ικανοποιει επισης και τις (14.9)-(14.12), επειδη αυτες αποδειχτηκαν χρησιμοποιωντας μονο τις (14.3)-(14.5).* Εστω

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}, ..., \mathbf{e}_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Απο την (14.5) εχουμε $F(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_N) = 1$. Επισης, αν $\sigma = i_1 i_2 ... i_N$, τοτε απο την (14.4) εχουμε

$$F(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, .., \mathbf{e}_{i_N}) = sign\,(\sigma).$$

Τωρα ας παρουμε τυχοντα $N \times N$ πινακα $\mathbf{A}$ και ας τον γραψουμε ως εξης

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{a}_1 & ... & \mathbf{a}_N \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{ccc} a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + ... + a_{N1}\mathbf{e}_N & ... & a_{1N}\mathbf{e}_1 + a_{2N}\mathbf{e}_2 + ... + a_{NN}\mathbf{e}_N \end{array}\right].\end{aligned}$$

Τοτε

$$F(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_N) = F(a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + ... + a_{N1}\mathbf{e}_N, ..., a_{1N}\mathbf{e}_1 + a_{2N}\mathbf{e}_2 + ... + a_{NN}\mathbf{e}_N).$$

Εκμεταλλευομενοι την (14.11), παιρνουμε

$$\begin{aligned}F(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_N) &= \sum F(a_{1i_1}\mathbf{e}_{i_1}, ..., a_{Ni_N}\mathbf{e}_{i_N}) \\ &= \sum a_{1i_1}...a_{Ni_N} F(\mathbf{e}_{i_1}, ..., \mathbf{e}_{i_N}).\end{aligned}$$

Το αθροισμα εκτεινεται σε *ολες* τις δυνατες σειρες $i_1 i_2 ... i_N$ , οχι μονο στις μεταθεσεις. Με αλλα λογια, μεσα σε μια σειρα μπορουμε να εχουμε και επαναληψεις των $\{1, 2, ..., N\}$ . Ομως, απο την (14.10) βλεπουμε οτι $F(\mathbf{e}_{i_1}, ..., \mathbf{e}_{i_N}) = 0$ για καθε σειρα με επαναληψεις δεικτων. Και επισης βλεπουμε οτι για καθε *μεταθεση* $\sigma = i_1 i_2 ... i_N$ εχουμε

$$F(\mathbf{e}_{i_1}, ..., \mathbf{e}_{i_N}) = sign(\sigma).$$

Οποτε τελικα

$$F(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_N) = \sum_{\sigma \in S_N} a_{1\sigma(1)}...a_{N\sigma(N)} F\left(\mathbf{e}_{\sigma(1)}, ..., \mathbf{e}_{\sigma(N)}\right) = D(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_N).$$

Με αλλα λογια, *καθε συναρτηση* $F(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_N)$ η οποια ικανοποιει τις (14.3)-(14.5), τελικα ειναι ιση με $D(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_N)$, το οποιο ειναι ενας αλλος τροπος για να πουμε οτι η *μοναδικη* τετοια συναρτηση ειναι η $D(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_N)$, δηλ. η οριζουσα.

Τωρα φαινεται γιατι ονομασαμε τις (14.3)-(14.5) *θεμελιωδεις* ιδιοτητες της οριζουσας. Αυτες ειναι που καθοριζουν τον συνδυαστικο τυπο της οριζουσας 14.1.5, οπως και τον αναδρομικο τυπο 14.1.14, καθως και ολες τις αλλες ιδιοτητες της οριζουσας, τις οποιες εχουμε αποδειξει στο Κεφ. 6 και στο παρον Κεφαλαιο.

**14.2.44.** Εστω $2 \times 2$ πινακας $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{array}\right]$. Αποδειξτε οτι το εμβαδον του παραλληλογραμμου με πλευρες τα διανυσματα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ ειναι $|\mathbf{A}|$.

**Απαντηση**. Ας θεσουμε

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{array}\right].$$

Με αλλα λογια

$$\mathbf{a}_1 = \left[\begin{array}{c} a_{11} \\ a_{21} \end{array}\right], \qquad \mathbf{a}_2 = \left[\begin{array}{c} a_{12} \\ a_{22} \end{array}\right]$$

Τωρα δειτε το σχημα. Οπως ειναι γνωστο απο το Λυκειο, το εμβαδον $E$ του παραλληλογραμου ειναι ισο με το εξωτερικο γινομενο των $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$:

**Σχημα**

$$E = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{22} = \left|\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}\right|.$$

**14.2.45.** Δινονται τα διανυσματα $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^T$ και $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix}^T$. Ποιο ειναι το εμβαδον του παραλληλογραμμου με πλευρες τα διανυσματα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ ;

**Απαντηση**. Ειναι (δες και σχημα)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 7.$$

**Σχημα**

**14.2.46.** Εστω δυο *τριδιαστατα*, $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}^T$ και $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}^T$. Ποιο ειναι το εμβαδον του παραλληλογραμμου με πλευρες τα διανυσματα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ ;

**Απαντηση**. Αυτο το προβλημα ειναι (προφανως) μια επεκταση του προηγουμενου. Θα χρησιμοποιησουμε το γεγονος (το οποιο αποδεικνυεται στην Αναλυτικη Γεωμετρια) οτι το εμβαδον του παραλληλογραμμου ειναι και παλι το εξωτερικο γινομενο των $\mathbf{a}_1$ και $\mathbf{a}_2$. Ομως τωρα πρεπει να ειμαστε προσεκτικοι. Θυμηθειτε οτι το εξωτερικο γινομενο *τρι*διαστατων διανυσματων δινεται απο τον τυπο

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \tag{14.29}$$

Στην (14.29) μεταχεριζομαστε τον συμβολισμο της Αναλυτικης Γεωμετριας. Τα $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ειναι τα μοναδιαια διανυσματα βασης κατα τους αξονες $x, y$ και $z$· με τον συμβολισμο του παροντος βιβλιου θα τα γραφαμε ως $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Το εξωτερικο γινομενο υπολογιζεται οπως μια οριζουσα, δηλ.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 &= \mathbf{i} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - \mathbf{j} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + \mathbf{k} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} \cdot (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) - \mathbf{j} \cdot (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) + \mathbf{k} \cdot (a_{12}a_{22} - a_{21}a_{12}). \end{aligned}$$

Με τον συμβολισμο της Γραμμικης Αλγεβρας θα γραφαμε

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\ -a_{11}a_{23} + a_{13}a_{21} \\ a_{12}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{bmatrix}.$$

Το πιο σημαντικο ομως ειναι οτι το εμβαδον ειναι *διανυσματικο* μεγεθος. Αυτο συμβαινει επειδη ενα επιπεδο σχημα στον τριδιαστατο χωρο εχει εμβαδον και *προσανατολισμο* (δες Σχημα). Χρησιμοποιωντας το διανυσματικο εμβαδον δινουμε την πληροφορια και για τα δυο (το αριθμητικο μεγεθος του εμβαδου και τον προσανατολισμο του).

**Σχημα**

Αν τα $\mathbf{a}_1$ και $\mathbf{a}_2$ περιεχοταν στο επιπεδο $xy$, τοτε θα ειχαν την μορφη

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \end{bmatrix}^T, \qquad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & 0 \end{bmatrix}^T$$

ή και

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{i}a_{11} + \mathbf{j}_{a_{12}}, \qquad \mathbf{a}_1 = \mathbf{i}a_{11} + \mathbf{k}_{a_{12}}$$

και το εσωτερικο γινομενο θα ηταν

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \mathbf{i}\cdot \begin{vmatrix} a_{12} & 0 \\ a_{22} & 0 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \mathbf{k}\cdot \left( a_{12}a_{22} - a_{21}a_{12} \right).$$

Δηλ. το εμβαδον θα ειχε την αριθμητικη τιμη της οριζουσας και διανυσματικα θα ηταν ομορροπο με τον αξονα των $z$. Ή μηπως οχι; Τι θα συνεβαινε αν η οριζουσα ηταν αρνητικη; Για να απαντησετε αυτο το ερωτημα, υπολογιστε το εμβαδον δυο παραλληλογραμμων. Το πρωτο εχει πλευερες τις $\left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \end{array} \right]^T$, $\left[ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \end{array} \right]^T$ και το δευτερο εχει τις $\left[ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \end{array} \right]^T$, $\left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \end{array} \right]^T$.

**14.2.47.** Δινονται τα διανυσματα $\mathbf{a}_1 = \left[ \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 2 \end{array} \right]^T$ και $\mathbf{a}_2 = \left[ \begin{array}{ccc} 1 & -2 & 4 \end{array} \right]^T$. Ποιο ειναι το εμβαδον του παραλληλογραμμου με πλευρες τα διανυσματα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$;

**Απαντηση**. Ειναι (δες και το σχημα)

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 8\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 5\mathbf{k}.$$

**Σχημα**

**14.2.48.** Εστω $3 \times 3$ πινακας $\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{ccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{array} \right]$. Αποδειξτε οτι ο ογκος του παραλληλεπιπεδου με πλευρες $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ ειναι $|\mathbf{A}|$.

**Απαντηση**. Ας θεσουμε

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{ccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{array} \right].$$

Με αλλα λογια

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}.$$

Τωρα δειτε το σχημα. Ο ογκος $V$ του παραλληλεπιπεδου δινεται απο το *μεικτο γινομενο* των $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$:

**Σχημα**

$$V = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3).$$

Ο τυπος αυτος συνηθως δεν διδασκεται στο λυκειο, αλλα μπορουμε να τον δικαιολογησουμε ευκολα. Ο ζητουμενος ογκος ειναι ισος με το εμβαδον της βασεως του παρ/επιπεδου επι το υψος αυτου. Εδω φαινεται η χρησιμοτητα του διανυσματικου ορισμου του εμβαδου. Το εμβαδον της βασης ειναι $\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3$. Το υψος ειναι ισο με την προβολη της πλευρας $\mathbf{a}_1$ κατα την διευθυνση την καθετη στο επιπεδο των $\mathbf{a}_2$ και $\mathbf{a}_3$, δηλ. την προβοπλη κατα την διευθυνση του $\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3$. Αυτη η προβολη ομως ειναι ακριβως ιση με $\mathbf{a}_1 \cdot \frac{(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3).}{\|\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3\|}$. Ο ζητουμενος ογκος ειναι ισος με το υψος επι την αριθμητικη τιμη του εμβαδου, δηλ.

$$V = \mathbf{a}_1 \cdot \frac{(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3).}{\|\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3\|} \|\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3\| = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3).$$

Μενει μονο να εκφρασουμε τον ογκο σε μορφη οριζουσας. Εχουμε

$$\begin{aligned}
V &= \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) \\
&= (\mathbf{i}a_{11} + \mathbf{j}a_{12} + \mathbf{k}a_{13}) \cdot (\mathbf{i}\cdot (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - \mathbf{j}\cdot (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + \mathbf{k}\cdot (a_{22}a_{32} - a_{31}a_{22})) \\
&= a_{11}\cdot (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}\cdot (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}\cdot (a_{22}a_{32} - a_{31}a_{22}) \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Η οριζουσα ειναι αριθμητικο μεγεθος, οχι διανυσματικο, αλλα μπορει να ειναι αρνητικη η θετικη. Τι σημαινει αρνητικος ογκος; Για να απαντησετε το ερωτημα θα σας βοηθησει να υπολογισετε τον ογκο δυο παραλληλεπιπεδων. Το πρωτο εχει πλευρες τις $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ και το δευτερο τις $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$.

**14.2.49.** Δινονται τα διανυσματα $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ και $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$. Ποιος ειναι ο ογκος του παραλληλεπιπεδου με πλευρες τα διανυσματα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$;

**Απαντηση**. Ειναι (δες και το σχημα)

$$V = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -5$$

**Σχημα**

**14.2.50.** Δινονται τα διανυσματα $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ και $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}^T$. Ποιος ειναι ο ογκος του παραλληλεπιπεδου με πλευρες τα διανυσματα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$;

**Απαντηση**. Ειναι

$$V = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

**Σχημα**

Ο ογκος προκυπτει μηδνεικος επειδη τα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ ειναι *συνεπιπεδα* (δες και το σχημα).

**14.2.51.** Εστω $N \times N$ πινακας $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \ldots & \mathbf{a}_N \end{bmatrix}$. Εξηγειστε τον λογο για τον οποιο ο (υπερ)ογκος του (υπερ)παραλληλεπιπεδου με πλευρες $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_N$ οριζεται να ειναι ισος με $|\mathbf{A}|$.

**Απαντηση**. Στο παρον προβλημα δεν εχουμε να *αποδειξουμε* κατι. Αντιθετα, πρεπει να επιχειρηματολογησουμε υπερ της χρησης της οριζουσας ως συναρτησης (υπερ)ογκου. Εστω λοιπον μια τετοια συναρτηση $V(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_N)$, που δεχεται ως εισοδο τις πλευρες $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_N$ ενος (υπερ) παραλληλεπιπεδου και δινει ως αποτελεσμα τον (υπερ)ογκο αυτου.

Η συναρτηση $V(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ θα δινει το *εμβαδον* ενος παραλληλογραμμου με πλευρες $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$. Η συναρτηση $V(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ θα δινει τον *ογκο* ενος παραλληλεπιπεδου με πλευρες $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$. Τι θα δινει η $V(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_N)$ για $N > 3$;

Δεν εχουμε μια σαφη, εποπτικη αντιληψη του $N$-διαστατου χωρου ή του $N$-διαστατου (υπερ)παραλληλεπιπεδου. Εχουμε ομως δει οτι αυτα συμπεριφερονται αντιστοιχα με το 2διαστατο και 3διαστατο αναλογο τους. Αντιστοιχα, θα θελαμε η συναρτηση $V(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_N)$, του (υπερ)ογκου ενος $N$-διαστατου (υπερ)παραλληλεπιπεδου να συμπεριφερεται αναλογα με το εμβαδον $V(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$, ενος 2διαστατου παραλληλογραμμου και με τον ογκο $V(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$, ενος 3διαστατου παραλληλεπιπεδου. Οπως θα φανει τωρα, τρεις ιδιοτητες του εμβαδου (ογκου) ειναι αρκετες για να καθορισουν απολυτα τη συναρτηση εμβαδου (ογκου). Η γενικευση αυτων των τριων ιδιοτητων στις $N$-διαστασεις ειναι ακριβως οι *θεμελιωδεις* ιδιοτητες (14.3)-(14.5) της οριζουσας.

Η απλουστερη ιδιοτητα που ζηταμε απο την συναρτηση εμβαδου (ογκου) ειναι το μοναδιαιο τετραγωνο (κυβος) να εχει εμβαδον (ογκο) ισο με την μοναδα. Δηλ. $V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1$ και $V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 1$. Η γενικευση αυτων των ιδιοτητων ειναι $V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_N) = 1$, δηλ. η ιδιοτητα (14.5).

Μια αλλη ιδιοτητα που ζηταμε απο το εμβαδον / ογκο ειναι η *προσθετικοτητα*. Δειτε το παρακατω σχημα:

**Σχημα**

Το ζητουμενο ειναι το εμβαδον του παραλληλογραμμου $OACG$ να ισουται με το αθροισμα των εμβαδων των $OABD$ και $OAFE$. Αλγεβρικα, αυτο γραφεται ως

$$V(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3) = V(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) + V(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3).$$

Αντιστοιχα θελουμε να ισχυει και η *πολλαπλασιαστικοτητα*: αν πολλαπλασιασουμε το μηκος μιας πλευρας επι $\kappa$, θελουμε το εμβαδον να πολλαπλασιαστει επι $\kappa$ επισης. Αλγεβρικα, αυτο γραφεται ως

$$V(\mathbf{a}_1, \kappa \mathbf{a}_2) = \kappa V(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2).$$

Και οι δυο ιδιοτητες μαζι μπορουν να γραφτουν ως

$$V(\mathbf{a}_1, \kappa \cdot \mathbf{a}_2 + \lambda \cdot \mathbf{a}_3) = \kappa V(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) + \lambda V(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3).$$

Ζητουμε την αντιστοιχη ιδιοτητα για *καθε* πλευρα του παραλληλογραμμου και, αντιστοιχα, για καθε πλευρα ενος παραλληλεπιπεδου. Η γενικευση αυτης της ιδιοτητα ειναι

$$V(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \kappa \cdot \mathbf{a}'_n + \kappa'' \cdot \mathbf{a}''_n, ..., \mathbf{a}_N) = \kappa' \cdot D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}'_n, ..., \mathbf{a}_N) + \kappa'' \cdot D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}''_n, ..., \mathbf{a}_N)$$

η οποια ειαι η ιδιοτητα (14.3).

Τελος ζητουμε απο το εμβαδον / ογκο κτλ. να ικανοποιουν μια ακομη ιδιοτητα, σχετικη με το προσημο αυτων. Σχετικα ερωτηματα (τι σημαινει αρνητικο εμβαδον, αρνητικος ογκος;) σας εχουν ηδη σε προηγουμενα εδαφια. Ισως τα εχετε ηδη απαντησει ή όχι. Η ζητουμενη απαντηση ειναι οτι θελουμε ενα εμβαδον / ογκος / (υπερ)ογκος να ειναι θετικο οταν αντιστοιχει σε *δεξιο*στροφο συστημα πλευρων και να ειναι αρνητικο οταν αντιστοιχει σε *αριστερο*στροφο συστημα πλευρων. Και αλγεβρικα αυτη η ιδιοτητα διατυπωνεται ως εξης

$$V(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_m, ..., \mathbf{a}_n, ..., \mathbf{a}_N) = -V(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n, ..., \mathbf{a}_m, ..., \mathbf{a}_N)$$

(επειδη η εναλλαγη δυο στηλων αλλαζει το (υπερ)παρ/δο απο δεξιοστροφο σε αριστεροστροφο) και ειναι (προφανως) η (14.4).

Οι παραπανω τρεις ιδιοτητες ειναι θεμελιωδεις. Ισως να θελαμε να προσδιορισουμε και αλλες ιδιοτητες του (υπερ)ογκου αλλα καταλαβαινουμε (λογω του 14.2.43) οτι οι τρεις παραπανω ιδιοτητες προσδιοριζουν μονοσημαντα την συναρτηση *προσημασμενου* υπερογκου και αυτη ειναι η οριζουσα. Ετσι εχουμε πλεον δει και την γεωμετρικη σημασια της οριζουσας.

## 14.3 Αλυτα Προβληματα

**14.3.1.** Απαριθμηστε ολες τις μεταθεσεις του $\{a, b, c\}$.

(**Απ**. Στα προηγουμενα μιλουσαμε για μεταθεσεις συνολων της μορφης $\{1, 2, ..., N\}$ αλλα τα ιδια ακριβως ισχυουν και για μεταθεσεις γενικων συνολων (χρησιμοποιησαμε τις αριθμητικες ιδιοτητες των ακεραιων μονο για να υπολογισουμε το προσημο μιας μεταθεσης). Οι μεταθεσεις του $\{a, b, c\}$ ειναι: $abc$, $acb$, $bac$, $bca$, $cab$, $cba$.)

**14.3.2.** Ποια ειναι τα προσημα των μεταθεσεων (α) $321$, (β) $51234$, (γ) $1234576$;

(**Απ**. (α) $-1$, (β) $+1$, (γ) $-1$ .)

**14.3.3.** Βρειτε τους πινακες και τα προσημα των μεταθεσεων (α) $52341$, (β) $23145$;

(**Απ**. $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.)

**14.3.4.** Βρειτε την συνθεση $\sigma(\tau)$ των μεταθεσεων $\sigma = 52341$, $\tau = 23145$.

(**Απ**. $\sigma(\tau) = 23541$ .)

**14.3.5.** Βρειτε την $\sigma^{-1}$ αν $\sigma = 52341$.

(**Απ**. $\sigma^{-1} = 52341$.)

**14.3.6.** Δινεται η μεταθεση $\sigma = 3214$. Βρειτε το πολυωνυμο $\sigma(g)$.

(**Απ**. $\sigma(g) = (x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_3 - x_4)(x_2 - x_1)(x_2 - x_4)(x_1 - x_4)$.)

**14.3.7.** Δειξτε οτι για τυχουσα μεταθεση $\sigma$ , στο πολυωνυμο $\sigma(g)$ ο αρχικος ορος $(x_i - x_j)$ θα εμφανιζεται ως $(x_i - x_j)$ αν για $i < j$ εχουμε και $\sigma(i) < \sigma(j)$, ενω εμφανιζεται ως $-(x_i - x_j)$ αν για $i < j$ εχουμε $\sigma(i) > \sigma(j)$.

**14.3.8.** Δειξτε η μηδενικη μεταθεση $\sigma_0$ ειναι αρτια.

**14.3.9.** Ποια ιδιοτητα του Εδαφιου 14.1.9 επαλυθευει ο πινακας

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

**14.3.10.** Δειξτε η μεταθεση η οποια εναλασσει τα στοιχεια $m$ και $n$ και αφηνει ολα τα αλλα στοιχεια αμεταβλητα ειναι περιττη.

**14.3.11.** Υπολογιστε την οριζουσα του πινακα

$$\left[\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 6 & 132 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right].$$

**(Απ.** 1152.)

**14.3.12.** Δειξτε οτι στον συνδυαστικο ορισμο της οριζουσας, σε καθε γινομενο αν εμφανιζεται ενας ορος *ανω* της κυριας διαγωνιου θα εμφανιζεται και ενας αντιστοιχος ορος *κατω* της κυριας διαγωνιου.

**14.3.13.** Δειξτε οτι η εκφραση $a_{i1}(-1)^{j+1}A_{j1}+...+a_{iN}(-1)^{j+N}A_{jN}$ ειναι ιση με $|\mathbf{A}|$ οταν $i=j$ και 0 οταν $i\neq j$.

**14.3.14.** Δινεται ο πινακας

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

και οι πινακες

$$\mathbf{E}_1=\left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right],\quad \mathbf{E}_2=\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right],\quad \mathbf{E}_1=\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right],\quad \mathbf{E}_1=\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Αποδειξτε οτι

$$|\mathbf{E}_4\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A}|=|\mathbf{E}_4|\cdot|\mathbf{E}_3|\cdot|\mathbf{E}_2|\cdot|\mathbf{E}_1|\cdot|\mathbf{A}|.$$

**14.3.15.** Εστω $\mathbf{B}$ τυχον $N\times N$ πινακας και $\mathbf{E}_1,....,\mathbf{E}_K$ στοιχειωδεις $N\times N$ πινακας. Δωστε μια πληρη επαγωγικη αποδειξη οτι

$$|\mathbf{E}_K\mathbf{E}_{K-1}...\mathbf{E}_1\mathbf{B}|=|\mathbf{E}_K|\cdot|\mathbf{E}_{K-1}|\cdot...\cdot|\mathbf{E}_1|\cdot|\mathbf{B}|.$$

**14.3.16.** Υπολογιστε την οριζουσα του πινακα

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

**(Απ.** 154.)

**14.3.17.** Εστω $N\times N$ πινακας $\mathbf{A}$ ο οποιος ειναι *διαγωνιος διαμερισμενος*:

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{cccc} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} & ... & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{0} & ... & ... & \mathbf{A}_{KK} \end{array}\right]$$

Αποδειξτε οτι $|\mathbf{A}|=|\mathbf{A}_{11}|\cdot|\mathbf{A}_{22}|\cdot...\cdot|\mathbf{A}_{KK}|$ για $K>2$.

**14.3.18.** Δινονται τα διανυσματα $\mathbf{a}_1 = \left[\begin{array}{cc} 1 & 4 \end{array}\right]^T$ και $\mathbf{a}_2 = \left[\begin{array}{cc} 2 & -1 \end{array}\right]^T$. Ποιο ειναι το εμβαδον του παραλληλογραμμου με πλευρες τα διανυσματα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ ;

**(Απ.** $-9$.)

**14.3.19.** Δινονται τα διανυσματα $\mathbf{a}_1 = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \end{array}\right]^T$ και $\mathbf{a}_2 = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \end{array}\right]^T$. Ποιο ειναι το εμβαδον του παραλληλογραμμου με πλευρες τα διανυσματα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ ;

**(Απ.** $2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$.)

**14.3.20.** Δινονται τα διανυσματα $\mathbf{a}_1 = \left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \end{array}\right]^T$ , $\mathbf{a}_2 = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array}\right]^T$ και $\mathbf{a}_3 = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array}\right]^T$. Ποιος ειναι ο ογκος του παραλληλεπιπεδου με πλευρες τα διανυσματα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ ;

**(Απ.** $3$.)

# Κεφάλαιο 15

# Επαναληπτικη Λυση Συστηματων Γραμμικων Εξισωσεων

# Κεφάλαιο 16

# Πινακες, Εξισωσεις Διαφορων και Διαφορικες Εξισωσεις

# Κεφάλαιο 17

# Στοχαστικοι Πινακες

# Κεφάλαιο 18

# Πινακες και Ηεκτρικα Κυκλωματα

# Κεφάλαιο 19

# Γενικευσεις

## 19.1 Περιληψη

**19.1.1.** Μπορουμε να γενικευσουμε τον ορισμο του εσωτερικου γινομενου ωστε να εφαρμοζεται και για μιγαδικα διανυσματα. Ο ορισμος που θα δοθει στην **19.1.2** ειναι *επεκταση* αυτου της **9.1.1**, δηλ. οταν $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$, ο παλιος και ο νεος ορισμος δινουν το ιδιο αποτελεσμα (γι' αυτο και χρησιμοποιουμε το ιδιο συμβολο $\circ$).

**19.1.2.** Για καθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^N$, το *εσωτερικο γινομενο* των $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ γραφεται ως $\mathbf{x} \circ \mathbf{y}$ και οριζεται ως εξης

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = x_1 \overline{y}_1 + x_2 \overline{y}_2 + ... + x_N \overline{y}_N. \tag{19.1}$$

**19.1.3.** Εστω $M \times N$ πινακας $\mathbf{A}$. Ο *συζυγης αναστροφος* του $\mathbf{A}$ συμβολιζεται με $\mathbf{A}^H$ και οριζετια ως εξης:

$$\left(\mathbf{A}^H\right)_{mn} = \left(\mathbf{A}\right)_{nm}.$$

Αν ο $\mathbf{A}$ ειναι *πραγματικος* πινακας, ο συζυγης αναστροφος ταυτιζεται με τον αναστροφο: $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}^T$.

**19.1.4.** Αν θεωρησουμε τα $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ως $N \times 1$ πινακες (στηλες), τοτε ισοδυναμα με την (19.1) εχουμε

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = \mathbf{x}^H \cdot \mathbf{y},$$

και αν θεωρησουμε τα $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ως $1 \times N$ πινακες (γραμμες), τοτε ισοδυναμα με την (19.1) εχουμε

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}^H.$$

**19.1.5.** Δυο διανυσματα $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^N$ λεγονται ορθογωνια ανν $\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = \mathbf{x}^H \cdot \mathbf{y} = 0$.

**19.1.6.** Οι αντιστοιχες των ιδιοτητων 9.1.10.1-5 μπορουν να αποδειχτουν για το μιγαδικο εσωτερικο γινομενο αλλα δεν θα επεκταθουμε προς αυτη την κατευθυνση.

**19.1.7.** Μπορουμε να δωσουμε εναν ακομη πιο γενικο ορισμο του εσωτερικου γινομενου. Εστω διανυσματικος χωρος $V$· ονομαζεται *γενικευμενο εσωτερικο γινομενο* καθε πραξη $* : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ η οποια ικανοποιει τις παρακατω συνθηκες για καθε $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ και καθε $a, b \in \mathbb{C}$.

1. $\mathbf{x} * \mathbf{x} \geq 0$.
2. $\mathbf{x} * \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
3. $\mathbf{x} * \mathbf{y} = \overline{\mathbf{y} * \mathbf{x}}$.
4. $\mathbf{x} * (a \cdot \mathbf{y} + b\mathbf{z}) = a \cdot (\mathbf{x} * \mathbf{y}) + b \cdot (\mathbf{x} * \mathbf{z})$.
5. $(a \cdot \mathbf{x}) * \mathbf{y} = \mathbf{x} * (a \cdot \mathbf{y}) = a \cdot (\mathbf{x} * \mathbf{y})$.

**19.1.8.** Δειξτε οτι το

$$\left(\int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx\right)^2 \leq \left(\int_{-1}^{1} (f(x))^2\, dx\right)\left(\int_{-1}^{1} (g(x))^2\, dx\right).$$

**Απαντηση**. Η ζητουμενη ανισοτητα ειναι αμεση συνεπεια της ανισοτητας $Cauchy$-$Schwarz$ στον διανυσματικο χωρο των συνεχων συναρτησεων με πεδιο ορισμου το $[-1, 1]$ και εσωτερικο γινομενο το

$$f \circ g = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx.$$

**19.1.9.** Βρειτε την προβολη της $f(x) = x^3 - 1$ στις $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = x$, $g_3(x) = x^2$ ως προς το εσωτερικο γινομενο της προηγουμενης ασκησης.

**Απαντηση**. Εχουμε

$$\|f\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} \left(x^3 - 1\right)^2 dx} = \frac{4}{7}\sqrt{7},$$

$$\|g_1\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} 1^2 dx} = \sqrt{2},$$

$$\|g_2\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} x^2 dx} = \sqrt{2/3},$$

$$\|g_3\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} \left(x^2\right)^2 dx} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

και

$$f \circ g_1 = \int_{-1}^{1} \left(x^3 - 1\right) 1 dx = -2,$$

$$f \circ g_2 = \int_{-1}^{1} \left(x^3 - 1\right) x dx = \frac{2}{5},$$

$$f \circ g_3 = \int_{-1}^{1} \left(x^3 - 1\right) x^2 dx = -\frac{2}{3}.$$

Οποτε

**19.1.10.** Χρησιμοποιωντας το εσωτερικο γινομενο της προηγουμενης ασκησης βρειτε: (α) την προβολη της $f_1(x) = 1 + x$ στις $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = x$· (β) της $f_2(x) = 1 + x^2$ στις $g_1(x) = 1$, $g_3(x) = x^2$. $\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$

**Απαντηση**. Για το (α) εχουμε

$$proj\,(f_1, g_1) = \frac{\int_{-1}^{1}(1+x)\,1dx}{\int_{-1}^{1} 1^2 dx} \cdot 1 = \frac{2}{2} = 1 = g_1$$

$$proj\,(f_1, g_2) = \frac{\int_{-1}^{1}(1+x)\,xdx}{\int_{-1}^{1} x^2 dx} \cdot x = \frac{2/3}{2/3} \cdot x = x = g_2$$

Βλεπουμε οτι η $f_1 = proj\,(f_1, g_1) + proj\,(f_1, g_2)$. Αυτο οφειλεται στο οτι $g_1 \perp g_2$ : $g_1 \circ g_2 = \int_{-1}^{1} 1xdx = 0$. Η $f_1$ αναλυεται σε δυο, ορθογωνιες μεταξυ τους, συνιστωσες, τις $proj\,(f_1, g_1)$ και $proj\,(f_1, g_2)$.

Για το (β) εχουμε

$$proj\,(f_2, g_1) = \frac{\int_{-1}^{1}(1+x^2)\,1dx}{\int_{-1}^{1} 1^2 dx} \cdot 1 = \frac{8/3}{2} = 1 = g_1$$

$$proj\,(f_2, g_3) = \frac{\int_{-1}^{1}(1+x)\,x^2dx}{\int_{-1}^{1} x^4 dx} \cdot x^2 = \frac{16/15}{2/3} \cdot x^2 = \frac{8}{5}x^2 \neq g_2.$$

Βλεπουμε οτι η $f_2 \neq proj\,(f_2, g_1) + proj\,(f_1, g_3)$. Αυτο οφειλεται στο οτι $\widehat{g_1, g_3} \neq \frac{\pi}{2}$ : $g_1 \circ g_3 = \int_{-1}^{1} 1 \cdot x^2 dx = \frac{2}{3} \neq 0$. Ετσι καθε μια απο τις $proj\,(f_2, g_1)$, $proj\,(f_1, g_3)$ περιεχει ενα μερος της αλλης και γι' αυτο η $f_2$ δεν εναι ιση με $proj\,(f_2, g_1) + proj\,(f_1, g_3)$.

**19.1.11.** Δειξτε οτι το $\int_{-1}^{1} f(x)\,g(x)\,dx$ ειναι ενα εσωτερικο γινομενο στον διανυσματικο χωρο των συνεχων συναρτησεων με πεδιο ορισμου το $[-1, 1]$.

**Απαντηση**. Οριζουμε για καθε $f, g$ συνεχεις στο $[-1, 1]$ την πραξη

$$f \circ g = \int_{-1}^{1} f(x)\,g(x)\,dx.$$

και πρεπει να αποδειξουμε οτι η $\circ$ ικανοποιει τις ιδιοτητες 1-5 της **9.1.2**. Πραγματι

$$f \circ f = \int_{-1}^{1} (f(x))^2\,dx \geq 0$$

και η ισοτητα ισχυει ανν $f(x) \equiv 0$ (δηλ. $f(x) = 0$ για καθε $x \in [-1, 1]$)· η συναρτηση $f(x) \equiv 0$ ειναι το *μηδενικο διανυσμα* στον εν λογω διανυσματικο χωρο. Επισης

$$f \circ g = \int_{-1}^{1} f(x)\,g(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,g(x)\,dx = g \circ f,$$

$$\begin{aligned} f \circ (ag + bh) &= \int_{-1}^{1} f(x)\,(ag(x) + bh(x))\,dx \\ &= a\int_{-1}^{1} f(x)\,g(x)\,dx + b\int_{-1}^{1} f(x)\,h(x)\,dx = a \cdot f \circ g + +b \cdot f \circ h \\ (af) \circ g &= \int_{-1}^{1} af(x)\,g(x)\,dx = a\int_{-1}^{1} f(x)\,g(x)\,dx = a \cdot (f \circ g)\,. \end{aligned}$$

Αρα ολες οι ιδιοτητες του εσωτερικου γινομενου ισχυουν για την $\circ$.

**19.1.12.** Δειξτε οτι η πραξη $\mathbf{x} * \mathbf{y} = \sum_{n=1}^{N} w_n x_n y_n$ ειναι ενα εσωτερικο γινομενο οταν τα $w_n > 0$.

**Απαντηση**. Πρεπει να επαληθευσουμε τις ιδιοτητες τις ιδιοτητες 1-5 της **9.1.2**. Πραγματι

$$\mathbf{x} * \mathbf{x} = \sum_{n=1}^{N} w_n x_n^2 \geq 0$$

και η ισοτητα ισχυει ανν $x_1 \equiv ... = x_n = 0$ (δηλ. $\mathbf{x} = \mathbf{0}$). Επισης

$$\mathbf{x} * \mathbf{y} = \sum_{n=1}^{N} w_n x_n y_n = \mathbf{x} * \mathbf{y} = \sum_{n=1}^{N} w_n y_n x_n = \mathbf{y} * \mathbf{x},$$

$$\mathbf{x} * (a\mathbf{y} + b\mathbf{z}) = \sum_{n=1}^{N} w_n x_n \cdot (a y_n + b z_n) = a \cdot \sum_{n=1}^{N} w_n x_n y_n + b \cdot \sum_{n=1}^{N} w_n x_n z_n = a \cdot \mathbf{x} * \mathbf{y} + b \cdot \mathbf{x} * \mathbf{z},$$

$$(a\mathbf{x}) \circ \mathbf{y} = \sum_{n=1}^{N} w_n a x_n y_n = a \sum_{n=1}^{N} w_n x_n y_n = a \cdot (\mathbf{x} \circ \mathbf{y}).$$

Αρα ολες οι ιδιοτητες του εσωτερικου γινομενου ισχυουν για την $*$.

**19.1.13.** Δειξτε οτι η πραξη $\mathbf{x} * \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{y}$ ειναι ενα εσωτερικο γινομενο οταν ο $\mathbf{Q}$ ειναι θετικα ορισμενος πινακας.

**Απαντηση**. Ξερουμε οτι, αν ο $\mathbf{Q}$ ειναι θετικα ορισμενος εχει $N$ θετικες ιδιοτιμες $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N$. Επισης ξερουμε οτι $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{R}$ οπου $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ και

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_N \end{bmatrix}.$$

Ετσι λοιπον εχουμε

$$\mathbf{x} * \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{R}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{R} \mathbf{y} = \mathbf{u} \mathbf{\Lambda} \mathbf{v}$$

με $\mathbf{u} = \mathbf{R}\mathbf{x}$ και $\mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{y}$. Ολες οι ιδιοτητες του εσωτερικου γινομενου επαληθευπνται ευκολα χρησιμοποιωντας τις

$$\mathbf{x} * \mathbf{y} = \mathbf{u} \mathbf{\Lambda} \mathbf{v}, \qquad \mathbf{u} = \mathbf{R}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{y}.$$

Σημειωνουμε ιδιαιτερα μονο την αποδειξη της ιδιοτητας **9.1.2**.2:

$$\mathbf{x} * \mathbf{x} = \mathbf{u}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{u} = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

αλλα τοτε

$$\mathbf{0} = \mathbf{u} = \mathbf{R}\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{0} = \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{x} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

**19.1.14.** Βρειτε ολα τα διανυσματα που ειναι ορθογωνια στο $\left[\begin{array}{lll} 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$.

**Απαντηση**. Τα ζητουμενα διανυσματα θα ειναι της μορφης $\mathbf{x}=\left[\begin{array}{lll} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}\right]^T$ τετοια ωστε

$$\left[\begin{array}{lll} 1 & -2 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\right]=0 \Leftrightarrow x_1-2x_2+x_3=0$$

δηλ. σχηματιζουν το συνολο

$$V=\{\mathbf{x}: x_1-2x_2+x_3=0\}$$

το οποιο ειναι ενα επιπεδο το οποιο περναει απο την αρχη των αξονων. Αυτο αντιστοιχει στο γεωμετρικο γεγονος οτι ολα τα διανυσματα τα καθετα σε μιαν ευθεια απαρτιζουν ενα επιπεδο.

## 19.2 Θεωρια και Παραδειγματα

**19.2.1.** Στα προηγουμενα κεφαλαια εχουμε υποθεσει οτι καθε πινακας (και διανυσμα) $\mathbf{A}$ ειναι *πραγματικη* συναρτηση:

$$\mathbf{A}:\{1,2,...,M\}\times\{1,2,...,N\}\rightarrow\mathbb{R}.$$

Τωρα επεκτεινουμε τον ορισμο του πινακα (και του διανυσματος): ενας πινακας ειναι μια ορθογωνια διαταξη *μιγαδικων* αριθμων η, ισοδυναμα, ενα πινακας $\mathbf{A}$ ειναι μια συναρτηση

$$\mathbf{A}:\{1,2,...,M\}\times\{1,2,...,N\}\rightarrow\mathbb{C}.$$

Θα μιλαμε λοιπον για *πραγματικους πινακες* (αυτους που εχουν στοιχεια πραγματικους αριθμους) και *μιγαδικους πινακες* (αυτους που εχουν στοιχεια μιγαδικους αριθμους).

**19.2.2.** Ο κυριοτερος λογος για την παραπανω γενικευση αυτη ειναι οτι στα επομενα κεφαλαια (τα σχετικα με τις *ιδιοτιμες*) θα χρειαστουμε μιγαδικους πινακες και διανυσματα.

**19.2.3.** Επιπλεον, η γενικευση στους μιγαδικους πινακες εχει ¨μηδενικο κοστος¨. Ολα οσα εχουμε πει στα προηγουμενα κεφαλαια για τους πραγματικους πινακες ισχυουν εξ ισου και για τους μιγαδικους πινακες[1]. Συγκεκριμενα, ολες οι αλγεβρικες πλευρες της μελετης των πινακων (και των συστηματων γραμμικων εξισωσεων) που ειδαμε στα προηγουμενα κεφαλαια εξακολουθουν να ισχυουν και για τους μιγαδικους πινακες, οπως επισης και η γενικη θεωρια των διανυσματικων χωρων. Αυτο συμβαινει γιατι ολες οι εννοιες που εχουμε χρησιμοποιησει στηριζονται στις απλες αριθμητικες πραξεις (προσθεση, αφαιρεση, πολλαπλασιασμο, διαιρεση) οι οποιες γενικευονται αμεσα στο συνολο των μιγαδικων αριθμων.

[1] Με μονη εξαιρεση την γεωμετρικη ερμηνεια των διανυσματων ως σημειων του χωρου· πραγματι, οι χωροι $\mathbb{C}^2$ και $\mathbb{C}^N$ δεν εχουν προφανη αντιστοιχια με τον φυσικο χωρο.

**19.2.4.** Υπολογιστε την οριζουσα του πινακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} i & 1 & 1+i \\ 0 & 1 & 1 \\ i & 1 & i \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση**. Ειναι

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} i & 1 & 1+i \\ 0 & 1 & 1 \\ i & 1 & i \end{vmatrix} &= i \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & i \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ i & i \end{vmatrix} + (1+i) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ i & 1 \end{vmatrix} \\ &= i \cdot (i-1) - 1 \cdot (0-i) + (1+i) \cdot (0-i) \\ &= -1 - i + i - i + 1 = -i. \end{aligned}$$

**19.2.5.** Λυστε το συστημα

$$\begin{aligned} x_1 + ix_2 &= 1 \\ ix_1 + x_2 &= 1. \end{aligned}$$

**Απαντηση**. Χρησιμοποιουμε τον κανονα του $Cramer$:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & i \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1-i}{2}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ i & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1-i}{2}$$

και επαληθευουμε οτι

$$\begin{aligned} \frac{1-i}{2} + i \cdot \frac{1-i}{2} &= 1 \\ i \cdot \frac{1-i}{2} + \frac{1-i}{2} &= 1. \end{aligned}$$

**19.2.6.** Υπολογιστε τον αντιστροφο του πινακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 2 \end{bmatrix}.$$

**Απαντηση**. Συμφωνα με τον τυπο για $2 \times 2$ αντιστροφο εχουμε

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

και επαληθευουμε οτι

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**19.2.7.** Οι εννοιες του πινακα και του διανυσματικου χωρου μπορουν να γενικευθουν ακομη περισσοτερο· στο υπολοιπο του παροντος κεφαλαιου δινουμε μερικες τετοιες γενικευσεις, δουλευοντας κυριως με παραδειγματα.

**19.2.8.** Συμβολιζουμε με $\mathcal{M}_{M\times N}$ το συνολο των $M \times N$ μιγαδικων πινακων. Δειξτε οτι, για δεδομενα $M$ και $N$, το $\mathcal{M}_{M\times N}$ , εφοδιασμενο με τις πραξεις τηω προσθεσης πινακων και του πολλαπλασιασμου αριθμου επι πινακα, ειναι ενας διανυσματικος χωρος.

**Απαντηση**. Θα θεωρησουμε τους $M \times N$ πινακες ως ¨διανυσματα¨. Η ¨προσθεση διανυσματων¨ θα συμβολιζεται με $+$ και θα ειναι η γνωστη προσθεση πινακων· ο πολλαπλασιασμος αριθμου επι ¨διανυσμα¨ θα συμβολιζεται με $\cdot$ και θα ειναι ο γνωστος πολλαπλασιασμος αριθμου επι $M \times N$ πινακα. Απο τον ορισμο της προσθεσης και του πολλαπλασιασμου προκυπτει και ο ορισμος του γραμμικου συνδυασμου πινακων: αν $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ ειναι $M \times N$ πινακες και $\kappa, \lambda \in \mathbb{C}$, τοτε ο γραμμικος συνδυασμος των $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ ειναι

$$\kappa\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$$

ο οποιος ειναι επισης ενας $M \times N$ πινακας, δηλ. το συνολο των $M \times N$ πινακων ειναι κλειστο ως προς τους γραμμικους συνδυασμους, αρα η δομη $(\mathcal{M}_{M\times N}, +, \cdot)$ ειναι ενας διανυσματικος χωρος.

Με δεδομενη την εννοια του γραμμικου συνδυασμου μπορουμε να επεκτεινουμε και τις υπολοιπες εννοιες των διανυσματικων χωρων. Π.χ. το συνολο $M \times N$ πινακων $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_L\}$ θα λεγεται γραμμικα ανεξαρτητο ανν

$$\kappa_1\mathbf{A}_1 + \kappa_2\mathbf{A}_2 + ... + \kappa_L\mathbf{A}_L = \mathbf{0}_{M,N} \Rightarrow \kappa_1 = \kappa_2 = ... = \kappa_L = 0.$$

Μια βαση του διανυσματικου χωρου ειναι οι πινακες

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}, \quad ..., \quad \mathbf{E}_M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ... & 1 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix},$$

$$...$$

$$\mathbf{E}_{(M-1)\cdot N+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}, \quad ... \quad \mathbf{E}_{M\cdot N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

(γιατι;) και αρα η διασταση του χωρου $\mathcal{M}_{M\times N}$ ειναι $M \cdot N$.

**19.2.9.** Δειξτε οτι, για δεδομενο $N$, το συνολο των $(\mathcal{M}_{N\times N}, +, \cdot)$ ειναι ενας διανυσματικος χωρος επι του $\mathbb{C}$.

**Απαντηση**. Αυτη ειναι μια ειδικη περιπτωση του παραπανω προβληματος, παιρνοντας $M = N$.

**19.2.10.** Βρειτε μερικους διανυσματικους υποχωρους του $(\mathcal{M}_{N\times N}, +, \cdot)$.

**Απαντηση**. Το συνολο των συμμετρικων πινακων $N \times N$ ειναι ενας διανυσματικος χωροσ: αν οι πινακες $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ ειναι $N \times N$ συμμετρικοι, τοτε για καθε $\kappa, \lambda \in \mathbb{C}$ ο πινακας

$\kappa\mathbf{A}+\lambda\mathbf{B}$ ειναι επισης συμμετρικος (ελεγξτε το!). Αρα το συνολο των συμμετρικων $N \times N$ πινακων (εφοδιασμενο με τη προσθεση πινακων και τον πολλαπλασιασμο αριθμου επι πινακα) ειναι ειναι ενας διανυσματικος *υπο*χωρος του συνολου των $N \times N$ πινακων. Το ιδιο ισχυει και για το συνολο των αντισυμμετρικων $N \times N$ πινακων.

Το συνολο των *αντιστρεψιμων* $N \times N$ πινακων *δεν* ειναι διανυσματικος χωρος επειδη δεν ειναι κλειστο ως προς γραμμικους συνδυασμους. Π.χ. εστω οι αντιστρεψιμοι πινακες

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ο πινακας

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

δεν ειναι αντιστρεψιμος.

**19.2.11.** Οριζουμε το

$$l_2 = \left\{ \mathbf{a} = (a_1, a_2, ...) : (\forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{R}) \text{ και } \sum_{n=1}^{N} a_n^2 < \infty \right\},$$

δηλ. το συνολο ολων των ακολουθιων με πραγματικους ορους οι οποιες ειναι *τετραγωνικα αθροισιμες*. Εφοδιαζουμε το $l_2$ με τις πραξεις προσθεσεις δυο ακολουθιων και πολλαπλασιασμου ακολουθιας επι αριθμο:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, ...\}$$
$$\kappa \cdot \mathbf{a} = \{\kappa a_1, \kappa a_2, ...\}.$$

Δειξτε οτι το $(l_2, +.\cdot)$ ειναι ενας διανυσματικος χωρος. Για αυτο τον χωρο ποιο ειναι το αντιστοιχο του πολλαπλασιασμου πινακων;

**Απαντηση**. Συμβολιζουμε το συνολο των εν λογω ακολουθιων με $l_2$. Αν $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in l_2$ και $\kappa \in \mathbb{C}$, ο πολλαπλασιασμο της ακολουθιας $\mathbf{a}$ επι τον αριθμο $\kappa$ δινει μια νε ακολουθια

$$\mathbf{c} = \{c_1, c_2, ...\} = \{\kappa a_1, \kappa a_2, ...\}$$

και η προσθεση $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ δινει μια νεα ακολουθια

$$\mathbf{d} = \{d_1, d_2, ...\} = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, ...\}.$$

Μπορουμε να σκεφτουμε τις ακολουθιες ως διανυσματα με απειρες συνιστωσες. Για να δειξουμε οτι ο $\{l_2, +, \cdot\}$ ειναι διανυσματικος χωρος, αρκει να δειξουμε οτι ειναι κλειστος ως προς γραμμικους συνδυασμους, δηλ. οτι

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in l_2, \quad \forall \kappa, \lambda \in \mathbb{C} : \kappa\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} \in l_2.$$

Για να ισχυει αυτο, πρεπει να εχουμε

$$\left. \begin{matrix} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < \infty \end{matrix} \right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) < \infty.$$

Αυτο ισχυει επειδη

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\right)+\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2\right)+\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n\right) \tag{19.2}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n\right)\leq\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2\right). \tag{19.3}$$

Η (19.2) αποδεικνυεται ευκολα· η (19.3) ειναι η ανισοτητα $Cauchy$-$Schwarz$, της οποιας η αποδειξη θα δοθει στο Κεφαλαιο 9.

Οι συναρτησεις της μορφης

$$\mathbf{A}:\{1,2,...\}\times\{1,2,...\}\rightarrow\mathbb{C}$$

παιζουν τον ρολο των πινακων. Π.χ. οριζουμε

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&...\\\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}&...\\\frac{1}{3}&\frac{1}{2}&1&...\\...&...&...&...\end{bmatrix},\quad\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2&2^{-1}&2^{-2}&...\\0&2&2^{-1}&...\\0&0&2&...\\...&...&...&...\end{bmatrix}\text{ κ.τ.λ.}$$

Ο πολλαπλασιασμος πινακων οριζεται ως

$$\left(\mathbf{AB}\right)_{mn}=\sum_{k=1}^{\infty}a_{mk}b_{kn}.$$

Ετσι με $\mathbf{a}=\begin{bmatrix}a_1&a_2&...\end{bmatrix}^T$ εχουμε

$$\mathbf{Aa}=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&...\\\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}&...\\\frac{1}{3}&\frac{1}{2}&1&...\\...&...&...&...\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\...\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+...\\\frac{a_2}{2}+a_2+\frac{a_3}{2}+...\\\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{2}+a_3+...\\...\end{bmatrix}$$

και

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&...\\\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}&...\\\frac{1}{3}&\frac{1}{2}&1&...\\...&...&...&...\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2^{-1}&2^{-2}&...\\0&2&2^{-1}&...\\0&0&2&...\\...&...&...&...\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&2^{-1}+\frac{1}{2}\cdot2&2^{-2}+\frac{1}{2}\cdot2^{-1}+\frac{1}{3}\cdot2&...\\\frac{1}{2}\cdot2&\frac{1}{2}\cdot2^{-1}+2..&\frac{1}{2}\cdot2^{-2}+2^{-1}+\frac{1}{3}\cdot2&...\\...&...&...&...\\...&...&...&...\end{bmatrix}.$$

Μια *βαση* του $l_2$ ειναι τα διανυσματα (ακολουθιες)

$$\mathbf{e}^{(1)}=\{1,0,0,...\}$$
$$\mathbf{e}^{(1)}=\{0,1,0,...\}$$
$$\mathbf{e}^{(1)}=\{0,0,1,...\}$$
$$...$$

Εδω βλεπουμε κατι καινουριο: μια βαση με *απειρα* στοιχεια. Αρα $\dim\left(l_2\right)=\infty$.

**19.2.12.** Συμβολιζουμε με $\Pi_N$ το συνολο των πολυωνυμων βαθμου το πολυ $N$:

$$\Pi_N = \left\{ f(x) = f_0 + f_1 x + ... + f_N x^N \text{ με } f_0, f_1, ...., f_N \in \mathbb{C} \right\}$$

και το εφοδιαζουμε με τις πραξεις προσθεσης δυο πολυωνυμων και πολλαπλασιασμου πολυωνυμου επι αριθμο:

$$\forall x \in \mathbb{C} : (f+g)(x) = f_0 + g_0 + (f_1 + g_1) \cdot x + (f_2 + g_2) \cdot x^2 + ...$$
$$\forall x \in \mathbb{C} : (\kappa \cdot f)(x) = \kappa f_0 + \kappa f_1 \cdot x + \kappa f_2 x^2 + ...$$

Δειξτε οτι το $(\Pi_N, +.\cdot)$ ειναι ενας διανυσματικος χωρος.

**Απαντηση**. Εστω $\Pi_N$ το συνολο των πολυωνυμων βαθμου το πολυ $N$. Εφοδιαζουμε το $\Pi_N$ με τις πραξεις $+$ (συνηθισμενη προσθεση πολυωνυμων) και $\cdot$ (συνηθισμενος πολλαπλασιασμος πολυωνυμου επι αριθμο). Π.χ. αν $N = 2$, $f(x) = 1+x+x^2$ και $g(x) = x^2$, τοτε

$$(f+g)(x) = 1 + x + 2x^2, \quad (\kappa \cdot f)(x) = \kappa + \kappa x + \kappa x^2.$$

Βλεπουμε αμεσως οτι το $\Pi_N$ ειναι κλειστο ως προς τις πραξεις $+$ και $\cdot$ και ως προς γραμμικους συνδυασμους. Δηλ., αν $f(x), g(x) \in \Pi_N$ και $\kappa, \lambda \in \mathbb{C}$, τοτε $(\kappa f + \lambda g)(x) \in \Pi_N$. Αρα το $(\Pi_N, +, \cdot)$ ειναι ενας διανυσματικος χωρος. Το ¨μηδενικο διανυσμα¨ του χωρου ειναι το *μηδενικο* πολυωνυμο $0(x)$ που οριζεται ως εξησ:

$$\forall x : 0(x) = 0.$$

Το συνολο των πολυωνυμων $\left\{1, x, x^2, ..., x^N\right\}$ ειναι μια βαση του $(\Pi_N, +, \cdot)$: ειναι ενα γραμμικο ανεξαρτητο συνολο, επειδη

$$a_0 + a_1 x + ... + a_N x^N = 0(x) \Rightarrow a_0 = a_1 = ... = a_N = 0$$

και καθε πολυωνυμο $f(x)$ ειναι ενας γραμμικος συνδυασμος των $\left\{1, x, x^2, ..., x^N\right\}$:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_N x^N.$$

Αρα και $\dim(\Pi_N) = N$.

**19.2.13.** Οριζουμε $\Pi$ να ειναι το συνολο ολων των πολυωνυμων (*οποιουδηποτε βαθμου*):

$$\Pi = \left\{ f(x) = f_0 + f_1 x + ... + f_N x^N \text{ με } f_0, f_1, ...., f_N \in \mathbb{C}, \ N \in \mathbb{N} \right\}$$

και το εφοδιαζουμε με τις πραξεις προσθεσης δυο πολυωνυμων και πολλαπλασιασμου πολυωνυμου επι αριθμο (οπως αυτες εχουν οριστει στην προηγουμενη ασκηση). Δειξτε οτι το $(\Pi, +.\cdot)$ ειναι ενας διανυσματικος χωρος.

**Απαντηση**. Εστω $\Pi$ το συνολο πολυωνυμων *οποιουδηποτε* βαθμου. Με τις συνηθισμενες πραξεις $+, \cdot$, το συνολο $(\Pi, +, \cdot)$ ειναι ενας διανυσματικος χωρος για τον ιδιο λογο που και το $(\Pi_N, +, \cdot)$: καθε γραμμικος συνδυασμος πολυωνυμων ειναι πολυωνυμο. Μια βαση του $(\Pi, +, \cdot)$ ειναι το συνολο

$$\left\{1, t, t^2, ...\right\}.$$

Εδω βλεπουμε κατι καινουριο: μια βαση με απειρα στοιχεια. Εχουμε $\dim(\Pi) = \infty$!

**19.2.14.** Οριζουμε $C_{[-1,1]}$ να ειναι το συνολο ολων των συνεχων συναρτησεων με πεδιο ορισμου το $[-1.1]$ και πεδιο τιμων το $\mathbb{R}$. Εφοδιαζουμε το $C_{[-1,1]}$ με τις πραξεις προσθεσης δυο συναρτησεων και πολλαπλασιασμου συναρτησης επι αριθμο:

$$\forall x \in \mathbb{C} : (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$\forall x \in \mathbb{C} : (\kappa \cdot f)(x) = \kappa f(x).$$

Δειξτε οτι το $\left(C_{[-1,1]}, +.\cdot\right)$ ειναι ενας διανυσματικος χωρος.

**Απαντηση**. Το αθροισμα δυο συναρτησεων $f(x)$, $g(x)$ ειναι μια νεα συναρτηση $(f+g)(x)$ η οποια οριζεται ως εξησ:

$$\forall x : (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

και το γινομενο συναρτησης $f(x)$ επι αριθμο $\kappa \in \mathbb{C}$ ειναι Αυτο θυμιζει μια νεα συναρτηση $(\kappa \cdot f)(x)$ η οποια οριζεται ως εξησ:

$$\forall x : (\kappa \cdot f)(x) = \kappa \cdot f(x).$$

Αυτο θυμιζει ενα διανυσμα με *απειρες* συνιστωσεσ: η $f$ εχει μια συνισωτσα $f(x)$ για καθε $x$.

Ξερουμε οτι το αθροισμα δυο συνεχων συναρτησεων, οπως και το γινομενο συνεχους συναρτησης επι αριθμο ειναι συνεχης συναρτηση. Ετσι το $\left(C_{[-1,1]}, +.\cdot\right)$ ειναι κλειστο ως προς γραμμικους συνδυασμους και αρα ειναι διανυσματικος χωρος. Μπορειτε να βρειτε μια βαση του $\left(C_{[-1,1]}, +.\cdot\right)$;

Αν θεωρησουμε μια συναρτηση $f(x)$ ως διανυσμα με απειρες συνιστωσες, τοτε το αντιστοιχο ενος πινακα ειναι μια συναρτηση *δυο* μεταβλητων $A(x,y)$:

$$A : [-1,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}.$$

Τοτε ο πολλαπλασιασμος ¨πινακα¨ $A(x,y)$ επι διανυσμα $f(x)$ μετατρεπεται σε ενα ολοκληρωμα:

$$\int_{-1}^{1} A(x,y) f(y)\, dy.$$

Αντιστοιχα, ο πολλαπλασιασμος δυο ¨πινακων¨ $A(x,y)$, $B(x,y)$ μετατρεπεται στο ολοκληρωμα

$$\int_{-1}^{1} A(x,y) B(y,z)\, dy.$$

**19.2.15.** Μπορουμε να γενικευσουμε ακομη περισσοτερο την εννοια του διανυσματικου χωρου, χρησιμοποιωντας τις εννοιες της *ομαδας* και του *σωματος*. Το σωμα ειναι η γενικευση του συνολου των αριθμων (π.χ. του $\mathbb{R}$, του $\mathbb{C}$) και η ομαδα ειναι η γενικευση του συνολου των διανυσματων (π.χ. του $\mathbb{R}^N$, του $\mathbb{C}^N$).

**19.2.16.** Εστω ενα συνολο $V$ εφοδιασμενο με μια πραξη $\oplus$ μεταξυ των στοιχειων του $V$ (δηλ. $\oplus : V \times V \to V$) η οποια ικανοποιει τις εξης ιδιοτητες.

1. $\forall u, v \in V : u \oplus v \in V.$

2. $\forall u, v, w \in V : (u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$.

3. $\exists 0 \in V : \forall u \in V : u \oplus 0 = 0 \oplus u = u$.

4. $\forall u \in V \exists -u \in V : u \oplus (-u) = (-u) \oplus u = 0$.

5. $\forall u, v \in V : u \oplus v = v \oplus u$.

   Αν ικανοποιουνται οι 1–4, λεμε οτι η $(V, \oplus)$ ειναι μια *ομαδα*. Αν ικανοποιειται και η 5, λεμε οτι το $(V, \oplus)$ ειναι μια *αντιμεταθετικη* (η *αβελιανη*) ομαδα.

   Τα στοιχεια του $V$ θα παιξουν στα παρακατω τον ρολο των *διανυσματων*.

**19.2.17.** Δειξτε οτι το συνολο των πραγματικων αριθμων, εφοδιασμενο με την συνηθη προσθεση ειναι μια αντιμεταθετικη ομαδα.

**Απαντηση**. Πραγματι, οι ιδιοτητες 1-5 ικανοποιουνται απο την δομη $(\mathbb{R}, +)$:

1. Το αθροισμα δυο πραγματικων αριθμων ειναι πραγματικος αριθμος.

2. Για καθε $a, b, c \in \mathbb{R}$ εχουμε $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$.

3. Υπαρχει ουδετερο στοιχειο, το $0$ τετοιο ωστε για καθε $a \in \mathbb{R}$ εχουμε $a+0 = 0+a = a$.

4. Για καθε $a \in \mathbb{R}$ υπαρχει $-a$ τετοιο ωστε $a + (-a) = 0$.

5. Η προσθεση πραγματικων αριθμων ειναι αντιμεταθετικη: $a + b = b + a$.

**19.2.18.** Δειξτε οτι το συνολο των πραγματικων $M \times N$ πινακων , εφοδιασμενο με την συνηθη προσθεση (πινακων) ειναι μια αντιμεταθετικη ομαδα.

**Απαντηση**. Αποδεικνυεται οτι το συνολο $(\mathcal{M}_{M,N}, +)$ ειναι αντιμεταθετικη ομαδα με τους ιδιους συλλογισμους που χρησιμοποιησαμε για το $(\mathbb{R}, +)$.

**19.2.19.** Ειναι το συνολο των πραγματικων αριθμων εφοδιασμενο με τον πολλαπλασιασμο μια ομαδα;

**Απαντηση**. Οι ιδιοτητες 1 και 2 ικανοποιουνται: για καθε $a, b, c \in \mathbb{R}$ εχουμε $a \cdot b \in R$ και $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$. Επισης υπαρχει ουδετερο στοιχειο, το $1$ (αυτο παιζει τωρα τον ρολο του $0$ στον ορισμο ;;;) τετοι ωστε για καθε $a \in \mathbb{R}$ $eqo\mathrm{m}\, a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$. Αλλα η ιδιοτητα 4 *δεν* ισχυει: καθε αριθμος $a$ εχει αντιστροφο ($a^{-1}$ τετοιο ωστε $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$) *εκτος απο* το $0$!

Ομως η δομη $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ ειναι ομαδα και μαλιστα αντιμεταθετικη.

**19.2.20.** Συμβολιζουμε με $\mathbb{N}_N$ το συνολο $\{0, 1, ..., N - 1\}$. Οριζουμε επι αυτου του συνολου την προσθεση *modulo-N* ως εξης:

$$\forall m, n \in \mathbb{N}_N : m +_N n = \begin{cases} m + n & \text{ανν} \quad 0 \leq m + n < N \\ m + n - N & \text{ανν} \quad m + n < 0 \text{ η } N \leq m + n \end{cases}.$$

Δειξτε οτι η δομη $(\mathbb{N}_N, +_N)$ ειναι μια αντιμεταθετικη ομαδα.

**Απαντηση**. Για καθε $m, n \in \{0, 1, ..., N\}$ εχουμε $m +_N n \in \{0, 1, ..., N-1\}$· αυτο ειναι φανερο αν $m + n \in \{0, 1, ..., N-1\}$· σε αντιθετη περιπτωση θα εχουμε

$$\left. \begin{array}{c} 0 \leq m < N \\ 0 \leq n < N \end{array} \right\} \Rightarrow N \leq m + n < 2N$$

$$\Rightarrow N - N \leq m + n - N = m +_N n < 2N - N \Rightarrow 0 \leq m +_N n < N$$

$$\Rightarrow m +_N N \in \{0, 1, ..., N-1\}.$$

Αρα το η $\mathbb{N}_N$ ειναι κλειστο ως προς την $+_N$. Για να αποδειξουμε την προσεταιριστικοτητα των αθροισματων $(k + m)+n$, $(k + (m + n))$δουλευουμε με παρομοιο τροπο, αλλα πρεπει να διακρινουμε περισσοτερες περιπτωσεις:

$$\begin{array}{ll} k + m \in \{0, ..., N-1\}, & k + m + n \in \{0, ..., N-1\}, \\ k + m \in \{0, ..., N-1\}, & k + m + n \in \{N, ..., 2N-1\}, \\ \quad ... & \\ k + m \in \{N, ..., 2N-1\}, & k + m + n \in \{2N, ..., 2N-1\}. \end{array}$$

Το ουδετερο στοιχειο της $+_N$ ειναι το 0: $m +_N 0 = m$. Καθε $m \in \{0, ..., N-1\}$ εχει αντιστροφο $m' = N - m$: $m +_N m' = m +_N (N - m) = (m + N - m) - N = 0$. Τελος ειναι ευκολο να δουμε οτι η $+_N$ ειναι αντιμεταθετικη.

**19.2.21.** Καθε πινακας της μορφης

$$\mathbf{A}(\phi) = \left[ \begin{array}{cc} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{array} \right]$$

λεγεται $2 \times 2$ *πινακας στροφης*. Συμβολιζουμε το συνολο ολων των $2 \times 2$ πινακων στροφης με $\mathcal{R}_2$, δηλ.

$$\mathcal{R}_2 = \left\{ \left[ \begin{array}{cc} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{array} \right] : \phi \in \mathbb{R} \right\}.$$

Δειξτε οτι το διανυσμα $\mathbf{y} = \mathbf{A}(\phi)\,\mathbf{x}$ ειναι το διανυσμα $\mathbf{x}$ περιστραμμενο ωρολογιακα κατα $\phi$ ακτινια. Κατοπιν δειξτε οτι η δομη $(\mathcal{R}_2, \cdot)$ (οπου $\cdot$ ειναι ο συνηθισμενος πολλαπλασιασμος πινακων) ειναι μια αντιμεταθετικη ομαδα.

**Απαντηση**. Εστω διανυσμα $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2]^T$. Τοτε

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}(\phi)\,\mathbf{x} = \left[ \begin{array}{cc} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} x_1\cos\phi + x_2\sin\phi \\ -x_1\sin\phi + x_2\cos\phi \end{array} \right]$$

και, οπως φαινεται στο σχημα, το $\mathbf{y}$ ειναι το $\mathbf{x}$ περιστραμμενο ωρολογιακα κατα $\phi$ ακτινια.

Για να δειξουμε οτι το $(\mathcal{R}_2, \cdot)$ ειναι μια αντιμεταθετικη ομαδα, αρκει να δειξουμε οτι ικανοποιουνται οι ιδιοτητες 1-5 της ;;;, με το $\cdot$ να παιζει τον ρολο του $\oplus$. Για την 1 δειχνουμε οτι το γινομενο δυο πινακων στροφης ειναι πινακας στροφης. Πραγματι, για

$\phi, \theta \in \mathbb{R}$ εχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\phi) \cdot \mathbf{A}(\theta) &= \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta & \cos\phi\sin\theta + \sin\phi\cos\theta \\ -\sin\phi\cos\theta - \cos\phi\sin\theta & -\sin\phi\sin\theta + \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos(\phi+\theta) & \sin(\phi+\theta) \\ -\sin(\phi+\theta) & \cos(\phi+\theta) \end{bmatrix} = \mathbf{A}(\phi+\theta).
\end{aligned}$$

Για την προσεταιριστικοτητα εχουμε

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}(\phi) \cdot \mathbf{A}(\theta)) \cdot \mathbf{A}(\omega) = \mathbf{A}(\phi+\theta) \cdot \mathbf{A}(\omega) = \mathbf{A}(\phi+\theta+\omega) \\
\mathbf{A}(\phi) \cdot (\mathbf{A}(\theta) \cdot \mathbf{A}(\omega)) = \mathbf{A}(\phi) \cdot \mathbf{A}(\theta+\omega) = \mathbf{A}(\phi+\theta+\omega)
\end{aligned}$$

αρα ισχυει και η ιδιοτητα 2. Το ουδετερο στοιχειο (που παιζει τον ρολο του 0) ειναι ο

$$\mathbf{A}(0) = \begin{bmatrix} \cos 0 & \sin 0 \\ -\sin 0 & \cos 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

αρα ισχυει και η 3. Ακομη, καθε πινακας στροφης εχει αντιστροφο:

$$\mathbf{A}^{-1}(\phi) = \mathbf{A}(-\phi)$$

(γιατι; ελεγξτε το διαισθητικα *και* με πολλαπλασιασμο πινακων!) αρα ισχυει και η 4. Τελος, η ιδιοτητα 5 ισχυει επειδη

$$\mathbf{A}(\phi) \cdot \mathbf{A}(\theta) = \mathbf{A}(\phi+\theta) = \mathbf{A}(\theta) \cdot \mathbf{A}(\phi).$$

Αρα η $(\mathcal{R}_2, \cdot)$ ειναι μια αντιμεταθετικη ομαδα.

**19.2.22.** Μια αντιμεταθεση των στοιχειων του συνολου $A_N = \{a_1, a_2, ..., a_N\}$ ειναι μια αμφιμονοσημαντη συναρτηση

$$\sigma : \{a_1, a_2, ..., a_N\} \overset{\text{1-προσ-1}}{\rightarrow} \{a_1, a_2, ..., a_N\}.$$

Συνηθως παριστανουμε μια συγκεκριμενη αντιμεταθεση απλα γραφοντας τα στοιχεια $\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(N)$. Π.χ., ολες οι δυνατες αντιμεταθεσεις του $A_3 = \{1, 2, 3\}$ ειναι

$$a_1a_2a_3, \quad a_1a_3a_2, \quad a_2a_1a_3, \quad a_2a_3a_1, \quad a_3a_1a_2, \quad a_3a_2a_1.$$

Θα μελετησουμε τις αντιμεταθεσεις σε μεγαλυτερη λεπτομερεια στο Κεφαλαιο **;;**.

**19.2.23.** Καθε $N \times N$ πινακας $\mathbf{A}$ που προκυπτει απο αντιμεταθεση των γραμμων του μοναδιαιου πινακα λεγεται πινακας αντιμεταθεσης. Δειξτε οτι το συνολο των $N$-διαστατων πινακων αντιμεταθεσης, εφοδιασμενο με την πραξη του πολλαπλασιασμου πινακων ειναι μια ομαδα.

**Απαντηση**. Θα δωσουμε μια διαισθητικη ¨αποδειξη¨· η αυστηρη αποδειξη αφηνεται στον αναγνωστη.

Ας ονομασουμε $\mathcal{P}_N$ το συνολο των πινακων που προκυτουν απο αντιμεταθεση των γραμμων του μοναδιαιου πινακα. Π.χ., αν $N = 3$, υπαρχουν 6 μελη του $\mathcal{P}_3$ (αντιστοιχουν στις 6 αντιμεταθεσεις των αριθμων 1, 2, 3) και ειναι οι εξης πινακες:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(Παρατηρειστε οτι ο πρωτος πινακας ειναι ο μοναδιαιος, ο οποιος αντιστοιχει στην ¨μηδενικη¨ αντιμεταθεση, η οποια αφηνει τις γραμμες του μοναδιαιου ως εχουν.) Αν πολλαπλασιασουμε ενα $\mathbf{A} \in \mathcal{P}_3$ με ενα τυχοντα $3 \times 3$ πινακα $\mathbf{C}$, παρατηρουμε οτι οι γραμμες του $\mathbf{C}$ αντιμετατιθενται με τον ιδιο τροπο με τον οποιο αντιμετατεθηκαν οι γραμμες του $\mathbf{I}$ για να παρουμε τον $\mathbf{A}$. Π.χ. εχουμε

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}.$$

Αυτο ισχυει και τσην γενικη περιπτωση τυχοντα $N \times N$ πινακα αντιμεταθεσης (αποδειξτε το!).

Απο αυτη την παρατηρηση προκυπτει ευκολα οτι η $(\mathcal{P}_N, \cdot)$ ειναι ομαδα. Καθε γινομενο $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ δυο πινακων αντιμεταθεσης δινει παλι πινακα αντιμεταθεσης: ο $\mathbf{A}_1$ αντιμεταθετει για μια ακομη φορα τις (ηδη αντιμεταθειμενες) γραμμες του μοναδιαιου πινακα· η ¨ουδετερη¨ αντιμεταθεση ειναι αυτη που αντιστοιχει στον μοναδιαιο πινακα· η ¨αντιθετη¨ καθε αντιμεταθεσης ειναι αυτη που την ¨αναιρει¨.

Ειναι η $(\mathcal{P}_N, \cdot)$ αντιμεταθετικη; Με αλλα λογια, αν εφαρμοσουμε δυο αντιμεταθεσεις σε ενα συνολο αντικειμενων, επηρεαζεται το τελικο αποτελεσμα απο την σειρα με τηνοποια εφαρμοζουμε τις αντιμεταθεσεις;

**19.2.24.** Ενα σωμα $(V, \oplus, \otimes)$ ειναι ενα συνολο $V$ εφοδιασμενο με δυο πραξεις $\oplus : V \times V \to V$, $\otimes : V \times V \to V$, ανν αυτες ικανοποιουν τις ιδιοτητες ($\forall u, v, w \in V$)

1. $u \oplus v \in V$, $u \otimes v \in V$.
2. $(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$, $(u \otimes v) \otimes w = u \otimes (v \otimes w)$.
3. $u \oplus v = v \oplus u$, $u \otimes v = v \otimes u$.
4. $\exists 0 \in V : u \oplus 0 = u$, $\exists 1 \in V : u \otimes 1 = u$.
5. $\forall u,\ \exists -u \in V : u + (-u) = (-u) + u = 0$.
6. $\forall u \neq 0 \exists u^{-1} : u \otimes u^{-1} = u \otimes u^{-1} = 1$.
7. $(u \oplus v) \otimes w = (u \otimes w) \oplus (v \otimes w)$, $w \otimes (u \oplus v) = (w \otimes u) \oplus (w \otimes v)$.

**19.2.25.** Το κλασσικο παραδειγμα σωματος ειναι το $(\mathbb{C}, +, \cdot)$. Αλλα σωματα ειναι τα $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ (οπου $\mathbb{Q}$ ειναι το συνολο των ρητων αριθμων). Αφηνουμε την επαληθευση αυτων των ισχυρισμων σοτν αναγνωστη. Το $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ (οπου $\mathbb{Z}$ ειναι το συνολο των θετικων και αρνητικων ακεραιων) *δεν* ειναι σωμα: ο αντιστροφος $m^{-1}$ ενος ρητου $m$ δεν ειναι υποχρεωτικα ρητος. Υπαρχουν και αλλα σωματα, ενα εκ των οποιων εξεταζουμε στο επομενο προβλημα.

**19.2.26.** Επι του συνολου $\mathcal{F} = \{0, 1\}$ οριζουμε τις πραξεις $\oplus$ και $\otimes$ ως εξης:

$$\begin{aligned} &0 \oplus 0 = 0, \quad 0 \oplus 1 = 1, \quad 1 \oplus 0 = 1, \quad 1 \oplus 1 = 0, \\ &0 \otimes 0 = 0, \quad 0 \otimes 1 = 0, \quad 1 \otimes 0 = 0, \quad 1 \otimes 1 = 1. \end{aligned}$$

Δειξτε οτι το $\{\mathcal{F}, \oplus, \otimes\}$ ειναι σωμα.

**Απαντηση**. Ειναι φανερο οτι το $\mathcal{F}$ ειναι κλειστο ως προς τις πραξεις $\oplus, \otimes$ και οτι αυτες ειναι αντιμεταθετικες. Για να αποδειξουμε την προσεταιριστικοτητα ελεγχουμε ολες τις δυνατες περιπτωσεις. Αυτη ειναι μια μακροσκελης αλλα απλη εργασια. Π.χ. εχουμε

$$\begin{aligned} &(0 \oplus 0) \oplus 0 = 0 \oplus 0 = 0 \oplus (0 \oplus 0) \\ &(0 \oplus 0) \oplus 1 = 0 \oplus 1 = 0 \oplus (0 \oplus 1) \\ &\qquad\qquad ... \\ &(1 \oplus 1) \oplus 1 = 0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1 \oplus (1 \oplus 1) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} &(0 \otimes 0) \otimes 0 = 0 \otimes 0 = 0 \otimes (0 \otimes 0) \\ &(0 \otimes 0) \otimes 1 = 0 \otimes 1 = 0 \otimes 0 = 0 \otimes (0 \otimes 1) \\ &\qquad\qquad ... \\ &(1 \otimes 1) \otimes 1 = 1 \otimes 1 = 1 \otimes (1 \otimes 1)\,. \end{aligned}$$

Το ουδετερο στοιχειο της $\oplus$ ειναι το $0$ ($a \oplus 0 = a$ για $a \in \{0, 1\}$). Το ουδετερο στοιχειο της $\otimes$ ειναι το $1$ ($a \otimes 1 = a$ για $a \in \{0, 1\}$). Ο αντιθετος του $a$ ειναι ο $a$ ($0 \oplus 0 = 0$ και $1 \oplus 1 = 0$)· και ο αντιστροφος του $1$ ειναι το $1$ ($1 \otimes 1 = 1$)· το $0$ δεν εχει αντιστροφο. Η επιμεριστικοτητα επισης ισχυει, οπως αποδεικνυεται εξεταζοντας ολες τις δυνατες περιπτωσεις ($(0 \oplus 0) \otimes 0$, $(0 \oplus 0) \otimes 1$ κ.τ.λ.).

**19.2.27.** Δινουμε τωρα ενα γενικευμενο ορισμο του διανυσματικου χωρου. Εστω ενα *σωμα* $(F, +, \cdot)$ και μια *αντιμεταθετικη ομαδα* $(V, \oplus)$. Εστω ακομη μια πραξη

$$* : F \times V \to F$$

δηλ. η $*$ αντιστοιχιζει σε καθε ζευγαρι $(\kappa, \mathbf{v})$ (οπου $\kappa \in F$ και $\mathbf{v} \in V$) ενα στοιχειο $\kappa * \mathbf{v} \in V$.

(Τα στοιχεια του σωματος $(F, +, \cdot)$ παιζουν τον ρολο των *αριθμων* και τα στοιχεια της ομαδας $(V, \oplus)$ παιζουν τον ρολο των *διανυσματων*· η $\oplus$ ειναι η προσθεση διανυσματων και η $*$ ειναι ο πολλαπλασιασμος αριθμου επι διανυσμα.)

Λεμε οτι η δομη $(V, \oplus, \cdot)$ ειναι ενας διανυσματικος χωρος επι του πεδιου $(F, +, \cdot)$ ανν ισχυουν οι εξης ιδιοτητες (για καθε $\kappa, \lambda \in F$ και για καθε $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$).

1. $\kappa * (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \kappa * \mathbf{u} + \kappa * \mathbf{v}$.
2. $(\kappa + \lambda) * \mathbf{u} = \kappa * \mathbf{u} + \lambda * \mathbf{u}$.
3. $(\kappa \cdot \lambda) * \mathbf{u} = \kappa * (\lambda * \mathbf{u})$.
4. $1 * \mathbf{u} = \mathbf{u}$. (Οπου $1$ ειναι το ουδετερο στοιχειο της $\cdot$).

Βλεπουμε οτι ο παραπανω ορισμος γενικευει οτι εχουμε πει περι διανυσματικων χωρων. Το σωμα ειναι το συνολο των αριθμων (πραγματικων, μιγαδικων κ.τ.λ.) και το κυριο χαρακτηριστικο αυτων ειναι οτι μπορουμε να τους προσθεσουμε και να τους πολλαπλασιασουμε.Η ομαδα ειναι το συνολο των διανυσματων· το κυριο χαρακτηριστικο αυτων ειναι οτι μπορουμε να τα προσθεσουμε και ολες οι γνωστες ιδιοτητες της προσθεσης διανυσματων προκυπτουν απο τις ιδιοτητες της ομαδας. . Η πραξη $*$ ειναι ο πολλαπλασιασμος διανυσματος επι αριθμο. Η κλειστοτητα ως προς γραμμικους συνδυασμους δεν περιεχεται στις ιδιοτητες του ορισμου, αλλα προκυπτει αμεσα απο την κλειστοτητα των πραξεων $\oplus$ και $*$.

**19.2.28.** Μπορουμε παντα να δημιουργησουμε εναν διανυσματικο χωρο απο ενα σωμα $(\mathcal{F}, \oplus, \otimes)$: θεωρουμε το συνολο $\mathcal{F}^N$ των $N$-διαστατων διανυσματων με συνιστωσες απο το $\mathcal{F}$ και οριζουμε για καθε $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{F}^N$, $\kappa, \lambda \in \mathcal{F}$:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \oplus v_1 \\ u_2 \oplus v_2 \\ \dots \\ u_N \oplus v_N \end{bmatrix}, \quad \kappa * \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \kappa \otimes u_1 \\ \kappa \otimes u_2 \\ \dots \\ \kappa \otimes u_N \end{bmatrix}$$

Τοτε μπορει ευκολα να αποδειχτει οτι ο $\left(\mathcal{F}^N, \oplus, *\right)$ ειναι ενας διανυσματικος χωρος.

**19.2.29.** Επιπλεον, μπορουμε να ορισουμε $\mathcal{F}_{M \times N}$ να ειναι το συνολο των $M \times N$ πινακων με στοιχεια απο το σωμα $\mathcal{F}$ και να το εφοδιασουμε με την προσθεση και πολλαπλασιασμο πινακων, που οριζονται ως εξης

$$(\mathbf{A} \oplus \mathbf{B})_{mn} = a_{mn} \oplus b_{mn}, \qquad (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})_{mn} = \oplus_{k=1}^{K} \left(a_{mk} \otimes b_{kn}\right).$$

Τοτε ολες οι ιδιοτητες των πινακων (και των γραμμικων συστηματων) εξακολουθουν να ισχυουν οπως αυτες διατυπωθηκαν στα Κεφαλαια 1-11.

**19.2.30.** Μελετειστε συστηματα γραμμικων εξισωσεων με στοιχεια απο το σωμα $\{\mathcal{F}, +, \cdot\}$ του εδαφιου ;;;.

**Απαντηση**. Ενα τετοιο συστημα ειναι το

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Μπορουμε να το λυσουε χρησιμοποιωντας απαλοιφη $Gauss$[2]. Σχηματιζουμε τον επαυξημενο και τον μετασχηματιζουμε σε κλιμακωτη μορφη:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{r}_3 \leftarrow \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

οποτε το ισοδυναμο συστημα ειναι

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 1 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

απο το οποιο παιρνουμε $x_3 = 0$, $x_2 = 1$, $x_1 = 0$. Ενα αλλο συστημα ειναι το

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Μπορουμε να το λυσουε χρησιμοποιωντας απαλοιφη $Gauss$[3]. Σχηματιζουμε τον επαυξημενο και τον μετασχηματιζουμε σε κλιμακωτη μορφη:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{r}_3 \leftarrow \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{r}_3 \leftarrow \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

οποτε το ισοδυναμο συστημα ειναι

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_4 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}$$

απο το οποιο παιρνουμε $x_4 = 0$, $x_3 = 0$, $x_2 = t$, $x_1 = 1 - t$. Στον $\mathbb{R}^4$ αυτο θα εδινε απειρια λυσεων. Ομως ο $\mathcal{F}^4$ εχει πεπερασμενο αριθμο στοιχειων (ποσα;). Και ετσι και ο αριθμος των λυσεων του συγκεκριμενου συστηματος ειναι πεπερασμενος, συγκεκριμενα οι δυνατες λυσεις λαμβανονται για $t \in \{0, 1\}$ και ειναι

$$(1, 0, 0, 0) \text{ και } (0, 1, 0, 0).$$

[2]Ομως αξιζει να προσεξουμε οτι οι μονες δυνατες γραμμοπραξεις ειναι: (α) εναλλαγη δυο γραμμων και (β) προσθεση δυο γραμμων. Αυτο ισχυει διοτι στον πολλαπλασιασμος γραμμης επι αριθμο $\kappa$ οι μονες δυνατες τιμες του $\kappa$ ειναι $0$ και $1$· αλλα ο πολλαπλασιασμος επι $0$ δεν χρησιμοποιειται (γιατι;) και ο πολλαπλασιασμος επι $1$ δινει την αρχικη γραμμη.

[3]Ομως αξιζει να προσεξουμε οτι οι μονες δυνατες γραμμοπραξεις ειναι: (α) εναλλαγη δυο γραμμων και (β) προσθεση δυο γραμμων. Αυτο ισχυει διοτι στον πολλαπλασιασμος γραμμης επι αριθμο $\kappa$ οι μονες δυνατες τιμες του $\kappa$ ειναι $0$ και $1$· αλλα ο πολλαπλασιασμος επι $0$ δεν χρησιμοποιειται (γιατι;) και ο πολλαπλασιασμος επι $1$ δινει την αρχικη γραμμη.

**19.2.31.** Μελετειστε τους πινακες με στοιχεια απο το σωμα $\{\mathcal{F}, +, \cdot\}$ του εδαφιου ;;;.

**Απαντηση**. Οι εν λογω πινακες ειναι ορθογωνιες διαταξεις 0 και 1. Π.χ.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Η προσθεση και πολλαπλασιασμος πινακων οριζονται σε σχεση με τις πραξεις $+$ και $\cdot$. Π.χ.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 1+1 \\ 0+1 & 1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 0+1\cdot 1 & 1\cdot 1+1\cdot 0 \\ 0\cdot 0+1\cdot 1 & 0\cdot 1+1\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+1 & 1+0 \\ 0+1 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1+1\cdot 0 & 1\cdot 0+1\cdot 1 \\ 0\cdot 1+1\cdot 0 & 0\cdot 0+1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 1+1 \\ 0+0 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}.$$

Μπορουμε να χρησιμοποιησουμε πινακες για να λυσουμε ενα συστημα γραμμικων εξισωσεων. Το

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$$

γραφεται σε μορφη πινακων ως

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

και, συμφωνα με τον κανονα του $Cramer$, εχει λυση

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}.$$

Η οριζουσα του συστηματος ειναι

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Πριν προχωρησουμε αξιζει να σημειωσουμε οτι $-1 = 1$. Πραγματι, εξ ορισμου, $-1$ ειναι ο αντιστροφος του 1, δηλ. ο αριθμος $a$ τ.ω. $1 + a = 0$. Αλλα αυτο ισχυει μονο για $a = 1$:

$1+1=0$. Ετσι

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} &= 1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1\cdot(-1) + 1\cdot(-1) + 1\cdot 1 \\ &= .1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 1+1+1 = 1.\end{aligned}$$

Με αντιστοιχο τροπο υπολογιζουμε τις οριζουσες

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\cdot(0-1) + 1\cdot(0-1) + 1\cdot(1-0) = 0+1+1 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(0-1) + 0\cdot(0-1) + 1\cdot(1-1) = 1+0+0 = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(0-1) + 1\cdot(1-1) + 0\cdot(1-0) = 1+0+0 = 1$$

και τελικα εχουμε

$$x_1 = \frac{0}{1} = 0, \quad x_2 = \frac{1}{1} = 1, \quad x_3 = \frac{1}{1} = 1.$$

Μπορουμε να επαληθευσουμε οτι αυτη ειναι πραγματι μια λυση του αρχικου συστηματοσ:

$$\begin{aligned} 0+1+1 &= 0 \\ 0+1 &= 1 \\ 0+1 &= 1 \end{aligned}$$

και μαλιστα ειναι η μοναδικη λυση, αφου η οριζουσα του συστηματος ειναι $0$.

**19.2.32.** Μελετειστε τον διανυσματικο χωρο με διανυσματα απο το συνολο $\mathcal{F}^3$.

**Απαντηση**. Αυτος αποτελειται απο το συνολο των διανυσματων $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$ με $x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\}$. Ο $\mathcal{F}^3$ περιεχει συνολικα οκτω τετοια διανυσματα (γιατι οκτω ;).

Ο $\mathcal{F}^3$ περιεχει γραμμικα ανεξαρτητα συνολα τριων διανυσματων· ενα τετοιο ειναι, π.χ., το

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Το συνολο αυτο ειναι γραμμικα ανεξαρτητο επειδη το συστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

εχει μοναδικη λυση $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ · η λυση ειναι μοναδικη επειδη

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

(ελεγξτε οτι πραγματι η οριζουσα ισουται με 1!). Επισης, ο $\mathcal{F}^3$ δεν περιεχει γραμμικα ανεξαρτητα συνολα τεσσαρων διανυσματων· αυτο ισχυει επειδη η αποδειξη της ;;; εξακολουθει να ισχυει και στον γενικευμενο διανυσματικο χωρο. Αρα $\dim(\mathcal{F}^3) = 3$. Π.χ. περιμενουμε οτι το συνολο

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

ειναι γραμμικα εξαρτημενο. Για να το επιβεβαιωσουμε βρισκουμε τις λυσεις του συστηματος

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

η, ισοδυναμα, του

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_3 &= 0 \\ x_2 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Ο επαυξημενος του συστηματος αναγεται σε κλιμακωτη μορφη ως εξης

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

που εχει λυσεις

$$x_4 = t, \quad x_3 = 0, \quad x_2 = -t, \quad x_1 = t.$$

Π.χ. για $t = 1$ εχουμε την μη μηδνεικη λυση $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 0, 1)$· οντως

$$1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(ελεγξτε το!). Αρα τα διανυσματα ειναι γραμμικα εξαρτημενα.

## 19.3 Αλυτα Προβληματα

**19.3.1.** Οριζουμε $C_{(-\infty,\infty)}$ να ειναι το συνολο ολων των συνεχων συναρτησεων με πεδιο ορισμου το $(-\infty, \infty)$ και πεδιο τιμων το $\mathbb{R}$. Εφοδιαζουμε το $C_{(-\infty,\infty)}$ με τις πραξεις προσθεσης δυο συναρτησεων και πολλαπλασιασμου συναρτησης επι αριθμο. Δειξτε οτι το $\left(C_{(-\infty,\infty)}, +\cdot\right)$ ειναι ενας διανυσματικος χωρος.

**19.3.2.** Οριζουμε $D^{(\infty)}$ να ειναι το συνολο των συναρτησεων (με πεδιο ορισμου και πεδιο τιμων το $\mathbb{R}$) οι οποιες εχουν παραγωγους ολων των ταξεων και το εφοδιαζουμε με τις πραξεις πολλαπλασιασμου δυο συναρτησεων και πολλαπλασιασμου συναρτησης επι αριθμο. Δειξτε οτι το $\left(D^{(\infty)}, +.\cdot\right)$ ειναι ενας διανυσματικος χωρος. Μπορειτε να βρειτε μια βαση του διανσματικου χωρου; (Υποδειξη: σκεφτειτε το αναπτυγμα $McLaurin$ της συναρτησης.)

**19.3.3.** Για τυχον $T \in [0, \infty)$ οριζουμε την προσθεση $+_T$ ως εξης:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : a +_T b = a + b - k \cdot T \text{ οπου } k \text{ τ.ω. } a + b - k \cdot T \in [0, T]$$

Δειξτε οτι η δομη $(\mathbb{R}, +_{2\pi})$ ειναι *ισομορφη* με την ομαδα $(\mathcal{R}_2, \cdot)$ (των $2{\times}2$ πινακων στροφης).

# Κεφάλαιο 20

# Πινακες και Θεωρια Γραφων

**20.0.4.** Οι πινακες με στοιχεια απο το σωμα $\{\mathcal{F}, +, \cdot\}$ βρισκουν εφαρμογη στην μελετη των *γραφων*.

**20.0.5.** Ενας γραφος ειναι ενα ζευγος $(V, E)$ οπου $V = \{1, 2, ..., N\}$ ειναι το συνολο των *κομβων* και $E \subseteq V \times V$ ειναι το συνολο των *ακμων*. Π.χ. στο σχημα ;;;

**20.0.6.** Ενα μονοπατι σε δεδομενο γραφο $(V, E)$ ειναι ...

**20.0.7.** Ενας γραφος $(V, E)$ λεγεται *συνεκτικος* ανν

**20.0.8.** Ενα *δεντρο* ειναι ενας γραφος $(V, E)$ στον οποιο ...

**20.0.9.** Ενα *δεντρο-καλυμμα* (η απλα *καλυμμα*) ενος γραφου $(V, E)$ ειναι ενα δεντρο $(V, E')$ με $E' \subseteq E$. Δηλ.

**20.0.10.** Δινεται ενας γραφος $(V, E)$ και ενα καλυμμα αυτου $(V, E')$. Ενας *θεμελιωδης κυκλος* του $(V, E)$ ως προς το $(V, E')$ ειναι ...

**20.0.11.** Οριζουμε τον πινακα προσπτωσης ενος γραφου $(V, E)$ ως εξης ...

**20.0.12.** Εστω συνεκτικος γραφος $(V, E)$ με $V = \{1, 2, ..., N\}$ και ενα καλυμμα $(V, E')$. Ο πινακας προσπτωσης $\mathbf{A}$ του $(V, E)$ οριζεται ως εξης ...

Ο πινακας $\mathbf{B}$ των *θεμελιωδων κυκλων* του $(V, E)$ ως προς το καλυμμα $(V, E')$ οριζεται ως εξης ...

**20.0.13.** Εστω συνεκτικος γραφος $(V, E)$ με $V = \{1, 2, ..., N\}$ και ενα καλυμμα $(V, E')$. Καθε βαση του $span\,(\mathbf{A})$ αντιστοιχει σε ενα καλυμμα του $(V, E)$.

**20.0.14.** Για καθε συνεκτικος γραφος $(V, E)$ με $V = \{1, 2, ..., N\}$ και ενα καλυμμα $(V, E')$ εχουμε

$$\mathbf{AB} = \mathbf{0}$$

**20.0.15.** Για καθε συνεκτικος γραφος $(V, E)$ με $V = \{1, 2, ..., N\}$ και ενα καλυμμα $(V, E')$ εχουμε

$$rank\,(\mathbf{A}) = N - 1, \quad rank\,(\mathbf{B}) = M - N + 1.$$