

blackhole-simulator documents

hyper7

2024 年 3 月 28 日

概要

重力多体シミュレーションを行うに当たって数学的基盤を整えておく目的でまとめを書いています。プログラミングですぐに活用できるように計算手順を具体化し実係数で式を展開しています。

第 1 章

双四元数による相対性理論

1.1 双四元数とは

まず、複素数は以下のように定義されることを復習しましょう。

$$\text{Complex number : } \mathbb{C} := r_0 + r_1 i, \quad r_0, r_1 \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1 \quad (1.1)$$

四元数は以下のようになります。クォータニオンとも呼びます。

$$\begin{aligned} \text{Quaternion : } \mathbb{H} &:= r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k, \quad r_0, r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R} \\ i^2 &= j^2 = k^2 = -1 \end{aligned} \quad (1.2)$$

四元数の演算規則です。

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j, \quad ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j \quad (1.3)$$

双四元数とは四元数の 4 つの係数を複素数にしたもので、8 つの実数を内包します。バイクォータニオンとも呼びます。

$$\begin{aligned} \text{Biquaternion : } \mathbb{B} &:= w_0 + w_1 i + w_2 j + w_3 k, \quad w_0, w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C} \\ &= r_0 + r_1 I + (r_2 + r_3 I)i + (r_4 + r_5 I)j + (r_6 + r_7 I)k \\ r_0, \dots, r_7 &\in \mathbb{R}, \quad I^2 = -1 \end{aligned} \quad (1.4)$$

新たに導入した虚数 I と四元数部分の虚数 i, j, k は互いに干渉しません。

$$iI = Ii, \quad jI = Ij, \quad kI = Ik \quad (1.5)$$

1.2 双四元数の共役は 2 種類

複素数の共役と絶対値は以下のものでした。

$$\begin{aligned} w &= r_0 + r_1 i, \quad w \in \mathbb{C} \\ \bar{w} &= r_0 - r_1 i \\ |w| &= \sqrt{w\bar{w}} = \sqrt{r_0^2 + r_1^2} \end{aligned} \quad (1.6)$$

四元数での共役とノルムです。ここでは*を使って表現します。ノルムは絶対値の 2 乗とします。

$$\begin{aligned} h &= r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k, \quad h \in \mathbb{H} \\ h^* &= r_0 - r_1 i - r_2 j - r_3 k \\ N(h) &= hh^* = r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \\ |h| &= \sqrt{N(h)} = \sqrt{r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} \end{aligned} \quad (1.7)$$

双四元数では共役は以下のように 2 種類が定義されます。

$$\begin{aligned}
b &= w_0 + w_1i + w_2j + w_3k, \quad w_0, w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}, \quad b \in \mathbb{B} \\
&= r_0 + r_1I + (r_2 + r_3I)i + (r_4 + r_5I)j + (r_6 + r_7I)k, \quad r_0, \dots, r_7 \in \mathbb{R} \\
b^* &= w_0 - w_1i - w_2j - w_3k \\
&= r_0 + r_1I - (r_2 + r_3I)i - (r_4 + r_5I)j - (r_6 + r_7I)k \\
\bar{b} &= \overline{w_0} + \overline{w_1}i + \overline{w_2}j + \overline{w_3}k \\
&= r_0 - r_1I + (r_2 - r_3I)i + (r_4 - r_5I)j + (r_6 - r_7I)k
\end{aligned} \tag{1.8}$$

双四元数のノルムの定義は四元数としての共役の定義を使用して定義します。

$$N(b) = bb^* = w_0^2 + w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 \tag{1.9}$$

1.3 双四元数で表現する特殊相対論的時空

双四元数の一部を使って相対論の 4 次元時空を表現できます。

$$\begin{aligned}
\text{Spacetime} : \mathbb{M} &:= \{m : m^* = \bar{m}\} \\
&= \{t + xIi + yIj + zIk, \quad t, x, y, z \in \mathbb{R}\}
\end{aligned} \tag{1.10}$$

ノルムが丁度不変量になります。

$$\text{Invariant} : mm^* = t^2 - x^2 - y^2 - z^2, \quad m \in \mathbb{M} \tag{1.11}$$

このような集合をミンコフスキー空間とも呼びます。

以下のような双四元数の集合を定義します。ノルムが 1 になるという意味で単位双四元数と呼びます。

$$\mathbb{G} := \{g : gg^* = 1, \quad g \in \mathbb{B}\} \tag{1.12}$$

するとローレンツ変換は以下の計算で成立します。

$$\text{Lorentz transformation} : T(m) = g^*m\bar{g}, \quad m \in \mathbb{M} \tag{1.13}$$

変換後の値も時空を表しています。

$$T(m) \in \mathbb{M} \tag{1.14}$$

変換後も不変量は変化しません。^{*1}

$$T(m)(T(m))^* = mm^* \tag{1.15}$$

1.4 単位双四元数が広げる可能性

以上のように、時空の不変量を変化させないように時空を変換する道具として双四元数が使えます。光速度不変の原理を壊すことなくローレンツ変換を行う双四元数の条件を得ています。任意の単位双四元数です。4 つの実数からなる時空 \mathbb{M} を 8 つの実数からなる単位双四元数 \mathbb{G} で変換する事になるので、4 次元を超越した次元へのアクセスが出来るのではないかと期待できます。もしかしたら、4 次元時空を破綻させないまま超空間へ転移する挙動を表現できるかもしれません。

1.5 特殊相対論的速度との関係

単位双四元数の集合全体について一般的に位相群を解明する事は困難です。しかし、その一部である $\mathbb{G} \cap \mathbb{M}$ については以下のように計算できることが分かっています。

三次元空間の方向を表現する単位四元数の集合を定義します。ノルムが 1 の純虚四元数となっており、ベルソルとも呼びます。

$$\begin{aligned}
\text{Versor} : \mathbb{V} &:= \{d : d = \sqrt{-1}, \quad d \in \mathbb{H}\} \\
&= \{d_1i + d_2j + d_3k, \quad d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}, \quad d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 1\}
\end{aligned} \tag{1.16}$$

^{*1} 簡潔な証明が可能です。Wikipedia の Biquaternion を参照してください。

以下のように計算すると、 Id が分解型複素数 (Split-complex number) を表現している事が分かります。

$$(Id)^2 = I^2 d^2 = (-1)(-1) = +1 \quad (1.17)$$

分解型複素数のオイラーの公式を調べてみます。

$$\begin{aligned} \exp(aId) &= \cosh a + Id \sinh a, \quad a \in \mathbb{R} \\ \cosh a &+ (d_1 Ii + d_2 Ij + d_3 Ik) \sinh a \end{aligned} \quad (1.18)$$

この至宝の公式は四次元時空の集合の範囲内にあることがわかります。

$$\exp(aId) \in \mathbb{M} \quad (1.19)$$

四次元時空の双曲幾何学的な性質からこの公式内での速さは丁度以下ようになります。

$$\text{Speed} : v = c \tanh a, \quad c : \text{Speed of light}, \quad v \in \mathbb{R} \quad (1.20)$$

速さから逆に角度を求めると以下ようになります。この角度はラピディティという名前があります。

$$\text{Rapidity} : a = \operatorname{arctanh} \frac{|v|}{c} \quad (1.21)$$

ラピディティには単純な足し算が出来るというメリットがあります。

1.6 双四元数によるローレンツ変換の計算方法

四元数による回転計算からの類推で双四元数によるローレンツ変換の角度も半角化すれば丁度良いことがわかります。

$$g = \exp(0.5aId) \rightarrow g^* = \bar{g} = \exp(-0.5aId) \quad (1.22)$$

と置けば、

$$\begin{aligned} T(\exp(aId)) &= g^* \exp(aId) \bar{g} \\ &= \exp(-0.5aId) \exp(aId) \exp(-0.5aId) \\ &= \exp(-0.5aId + aId - 0.5aId) \\ &= 1 \end{aligned} \quad (1.23)$$

この変換を双四元数の実数成分で表現してみると、

$$g = \exp(0.5aId) = r_0 + r_1 Ii + r_2 Ij + r_3 Ik \quad (1.24)$$

と置いて、

$$r_0 = \cosh 0.5a, \quad (r_1, r_2, r_3) = (d_1, d_2, d_3) \sinh 0.5a, \quad d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 1 \quad (1.25)$$

となります。変換に使用する単位双四元数を得ました。変換元の四次元時空を

$$m = t + xIi + yIj + zIk \quad (1.26)$$

と置くと、

$$\begin{aligned} T(m) &= g^* m \bar{g} \\ &= (r_0 - r_1 Ii - r_2 Ij - r_3 Ik)(t + xIi + yIj + zIk)(r_0 - r_1 Ii - r_2 Ij - r_3 Ik) \\ &= (r_0 t - r_1 t Ii - r_2 t Ij - r_3 t Ik + r_0 x Ii - r_1 x Ii Ii - r_2 x Ij Ii - r_3 x Ik Ii + r_0 y Ij - r_1 y Ii Ij - r_2 y Ij Ij - r_3 y Ik Ij \\ &\quad + r_0 z Ik - r_1 z Ii Ik - r_2 z Ij Ik - r_3 z Ik Ik)(r_0 - r_1 Ii - r_2 Ij - r_3 Ik) \\ &= (r_0 t - r_1 t Ii - r_2 t Ij - r_3 t Ik + r_0 x Ii - r_1 x - r_2 x k + r_3 x j + r_0 y Ij + r_1 y k - r_2 y - r_3 y i \\ &\quad + r_0 z Ik + r_1 z j + r_2 z i - r_3 z)(r_0 - r_1 Ii - r_2 Ij - r_3 Ik) \\ &= (r_0 t - r_1 x - r_2 y - r_3 z + (r_2 z - r_3 y)i + (r_1 z + r_3 x)j + (r_1 y - r_2 x)k \\ &\quad + (r_0 x - r_1 t)Ii + (r_0 y - r_2 t)Ij + (r_0 z - r_3 t)Ik)(r_0 - r_1 Ii - r_2 Ij - r_3 Ik) \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned}
&= r_0^2 t - r_0 r_1 x - r_0 r_2 y - r_0 r_3 z + r_0(r_2 z - r_3 y)i + r_0(r_1 z + r_3 x)j + r_0(r_1 y - r_2 x)k \\
&\quad + r_0(r_0 x - r_1 t)Ii + r_0(r_0 y - r_2 t)Ij + r_0(r_0 z - r_3 t)Ik \\
&\quad + (-r_0 r_1 t + r_1^2 x + r_1 r_2 y + r_1 r_3 z)Ii + r_1(r_2 z - r_3 y)I + r_1(r_1 z + r_3 x)Ik - r_1(r_1 y - r_2 x)Ij \\
&\quad - r_1(r_0 x - r_1 t) - r_1(r_0 y - r_2 t)k + r_1(r_0 z - r_3 t)j \\
&\quad + (-r_0 r_2 t + r_1 r_2 x + r_2^2 y + r_2 r_3 z)Ij - r_2(r_2 z - r_3 y)Ik + r_2(r_1 z + r_3 x)I + r_2(r_1 y - r_2 x)Ii \\
&\quad + r_2(r_0 x - r_1 t)k - r_2(r_0 y - r_2 t) - r_2(r_0 z - r_3 t)i \\
&\quad + (-r_0 r_3 t + r_1 r_3 x + r_2 r_3 y + r_3^2 z)Ik + r_3(r_2 z - r_3 y)Ij - r_3(r_1 z + r_3 x)Ii + r_3(r_1 y - r_2 x)I \\
&\quad - r_3(r_0 x - r_1 t)j + r_3(r_0 y - r_2 t)i - r_3(r_0 z - r_3 t) \\
&= r_0^2 t - r_0 r_1 x - r_0 r_2 y - r_0 r_3 z - r_1(r_0 x - r_1 t) - r_2(r_0 y - r_2 t) - r_3(r_0 z - r_3 t) \\
&\quad + r_0(r_2 z - r_3 y)i - r_2(r_0 z - r_3 t)i + r_3(r_0 y - r_2 t)i \\
&\quad + r_0(r_1 z + r_3 x)j + r_1(r_0 z - r_3 t)j - r_3(r_0 x - r_1 t)j \\
&\quad + r_0(r_1 y - r_2 x)k - r_1(r_0 y - r_2 t)k + r_2(r_0 x - r_1 t)k \\
&\quad + r_1(r_2 z - r_3 y)I + r_2(r_1 z + r_3 x)I + r_3(r_1 y - r_2 x)I \\
&\quad + r_0(r_0 x - r_1 t)Ii + (-r_0 r_1 t + r_1^2 x + r_1 r_2 y + r_1 r_3 z)Ii + r_2(r_1 y - r_2 x)Ii - r_3(r_1 z + r_3 x)Ii \\
&\quad + r_0(r_0 y - r_2 t)Ij - r_1(r_1 y - r_2 x)Ij + (-r_0 r_2 t + r_1 r_2 x + r_2^2 y + r_2 r_3 z)Ij + r_3(r_2 z - r_3 y)Ij \\
&\quad + r_0(r_0 z - r_3 t)Ik + r_1(r_1 z + r_3 x)Ik - r_2(r_2 z - r_3 y)Ik + (-r_0 r_3 t + r_1 r_3 x + r_2 r_3 y + r_3^2 z)Ik
\end{aligned} \tag{1.28}$$

i, j, k, I の項はきれいに消えます。

$$\begin{aligned}
T(m) &= (r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)t - 2r_0(r_1 x + r_2 y + r_3 z) \\
&\quad + ((r_0^2 + r_1^2 - r_2^2 - r_3^2)x - 2r_1(r_0 t - r_2 y - r_3 z))Ii \\
&\quad + ((r_0^2 - r_1^2 + r_2^2 - r_3^2)y - 2r_2(r_0 t - r_1 x - r_3 z))Ij \\
&\quad + ((r_0^2 - r_1^2 - r_2^2 + r_3^2)z - 2r_3(r_0 t - r_1 x - r_2 y))Ik
\end{aligned} \tag{1.29}$$

従って、四次元時空各成分に注目したローレンツ変換は以下となります。

$$\begin{aligned}
t' &= (r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)t - 2r_0(r_1 x + r_2 y + r_3 z) \\
x' &= (r_0^2 + r_1^2 - r_2^2 - r_3^2)x - 2r_1(r_0 t - r_2 y - r_3 z) \\
y' &= (r_0^2 - r_1^2 + r_2^2 - r_3^2)y - 2r_2(r_0 t - r_1 x - r_3 z) \\
z' &= (r_0^2 - r_1^2 - r_2^2 + r_3^2)z - 2r_3(r_0 t - r_1 x - r_2 y)
\end{aligned} \tag{1.30}$$

コンピューターによる計算にとってはこの最適化が有用になるでしょう。

1.7 ラピディティによるもう一つの計算方法

ラピディティの足し算による計算方法もあります。以下のように変換対象の時空を定義します。

$$\begin{aligned}
mv &= \exp(qIp), \quad p = p_1 i + p_2 j + p_3 k \\
t &= \cosh q, \quad (x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) \sinh q \\
m &\in \mathbb{M}, \quad q, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}, \quad p \in \mathbb{D}
\end{aligned} \tag{1.31}$$

t, x, y, z から q, p_1, p_2, p_3 を算出する必要があり、方法はいくつか考えられますが、一つとしては以下ようになります。

$$q = \operatorname{arccosh} t, \quad (p_1, p_2, p_3) = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \tag{1.32}$$

この変換では原点座標ではゼロの除算になるので特別な配慮が必要です。

ここまで準備できればローレンツ変換は単純に加法減法になります。

変換した分の速度をラピディティ $a \in \mathbb{R}$ 方向 $d \in \mathbb{D}$ として、

$$\begin{aligned}
T(m) &= g^* m \bar{g} \\
&= \exp(-0.5aId) \exp(qIp) \exp(-0.5aId) \\
&= \exp((qp - ad)I)
\end{aligned} \tag{1.33}$$

全ての計算をラピディティで完結させることが出来ればこれ程単純な計算方法はないです。しかし、実際は現実世界の座標に以下のように変換する必要があります。

$$q'p' = qp - ad, \quad q' \in \mathbb{R}, \quad p' \in \mathbb{D}, \quad p' = p'_1 i + p'_2 j + p'_3 k \quad (1.34)$$

$$q' = |qp - ad|, \quad p' = \frac{qp - ad}{|qp - ad|} \quad (1.35)$$

$$t' = \cosh q', \quad (x', y', z') = (p'_1, p'_2, p'_3) \sinh q' \quad (1.36)$$

1.8 行列を使ったローレンツ変換

比較のために行列を使った算出方法を掲載しておきます。

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3), \quad v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R} \quad (1.37)$$

$$\beta = \frac{|\mathbf{v}|}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1.38)$$

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\frac{v_1}{c}\gamma & -\frac{v_2}{c}\gamma & -\frac{v_3}{c}\gamma \\ -\frac{v_1}{c}\gamma & 1 + \frac{v_1^2}{|\mathbf{v}|}(\gamma - 1) & \frac{v_1 v_2}{|\mathbf{v}|}(\gamma - 1) & \frac{v_1 v_3}{|\mathbf{v}|}(\gamma - 1) \\ -\frac{v_2}{c}\gamma & \frac{v_1 v_2}{|\mathbf{v}|}(\gamma - 1) & 1 + \frac{v_2^2}{|\mathbf{v}|}(\gamma - 1) & \frac{v_2 v_3}{|\mathbf{v}|}(\gamma - 1) \\ -\frac{v_3}{c}\gamma & \frac{v_1 v_3}{|\mathbf{v}|}(\gamma - 1) & \frac{v_2 v_3}{|\mathbf{v}|}(\gamma - 1) & 1 + \frac{v_3^2}{|\mathbf{v}|}(\gamma - 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

1.9 単位双四元数は高次元の回転

任意の双四元数 b_0, b_1 の積をその実数成分で表現しておきます。

$$\begin{aligned} b_0 &= p_0 + p_1 I + (p_2 + p_3 I)i + (p_4 + p_5 I)j + (p_6 + p_7 I)k, \quad p_0, \dots, p_7 \in \mathbb{R} \\ &= w_0 + w_1 i + w_2 j + w_3 k, \quad w_0, w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{H} \\ b_1 &= q_0 + q_1 I + (q_2 + q_3 I)i + (q_4 + q_5 I)j + (q_6 + q_7 I)k, \quad p_0, \dots, p_7 \in \mathbb{R} \\ &= u_0 + u_1 i + u_2 j + u_3 k, \quad u_0, u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{H} \end{aligned} \quad (1.40)$$

まずは、通常の高次元の乗算を行います。

$$\begin{aligned} b_0 b_1 &= (w_0 + w_1 i + w_2 j + w_3 k)(u_0 + u_1 i + u_2 j + u_3 k) \\ &= w_0 u_0 + w_0 u_1 i + w_0 u_2 j + w_0 u_3 k \\ &\quad + w_1 i u_0 + w_1 i u_1 i + w_1 i u_2 j + w_1 i u_3 k \\ &\quad + w_2 j u_0 + w_2 j u_1 i + w_2 j u_2 j + w_2 j u_3 k \\ &\quad + w_3 k u_0 + w_3 k u_1 i + w_3 k u_2 j + w_3 k u_3 k \\ &= w_0 u_0 + w_0 u_1 i + w_0 u_2 j + w_0 u_3 k \\ &\quad + w_1 u_0 i - w_1 u_1 + w_1 u_2 k - w_1 u_3 j \\ &\quad + w_2 u_0 j - w_2 u_1 k - w_2 u_2 + w_2 u_3 i \\ &\quad + w_3 u_0 k + w_3 u_1 j - w_3 u_2 i - w_3 u_3 \\ &= w_0 u_0 - w_1 u_1 - w_2 u_2 - w_3 u_3 \\ &\quad + (w_0 u_1 - w_1 u_0 + w_2 u_3 - w_3 u_2)i \\ &\quad + (w_0 u_2 - w_1 u_3 - w_2 u_0 + w_3 u_1)j \\ &\quad + (w_0 u_3 + w_1 u_2 - w_2 u_1 + w_3 u_0)k \end{aligned} \quad (1.41)$$

次に実数に展開します。

$$\begin{aligned}
b_0 b_1 &= (p_0 + p_1 I)(q_0 + q_1 I) - (p_2 + p_3 I)(q_2 + q_3 I) - (p_4 + p_5 I)(q_4 + q_5 I) - (p_6 + p_7 I)(q_6 + q_7 I) \\
&+ ((p_0 + p_1 I)(q_2 + q_3 I) - (p_2 + p_3 I)(q_0 + q_1 I) + (p_4 + p_5 I)(q_6 + q_7 I) - (p_6 + p_7 I)(q_4 + q_5 I))i \\
&+ ((p_0 + p_1 I)(q_4 + q_5 I) - (p_2 + p_3 I)(q_6 + q_7 I) - (p_4 + p_5 I)(q_0 + q_1 I) + (p_6 + p_7 I)(q_2 + q_3 I))j \\
&+ ((p_0 + p_1 I)(q_6 + q_7 I) + (p_2 + p_3 I)(q_4 + q_5 I) - (p_4 + p_5 I)(q_2 + q_3 I) + (p_6 + p_7 I)(q_0 + q_1 I))k
\end{aligned} \tag{1.42}$$

$$\begin{aligned}
&= (p_0 q_0 - p_1 q_1 + (p_0 q_1 + p_1 q_0)I) - (p_2 q_2 - p_3 q_3 + (p_2 q_3 + p_3 q_2)I) \\
&- (p_4 q_4 - p_5 q_5 + (p_4 q_5 + p_5 q_4)I) - (p_6 q_6 - p_7 q_7 + (p_6 q_7 + p_7 q_6)I) \\
&+ ((p_0 q_2 - p_1 q_3 + (p_0 q_3 + p_1 q_2)I) - (p_2 q_0 - p_3 q_1 + (p_2 q_1 + p_3 q_0)I) \\
&+ (p_4 q_6 - p_5 q_7 + (p_4 q_7 + p_5 q_6)I) - (p_6 q_4 - p_7 q_5 + (p_6 q_5 + p_7 q_4)I))i \\
&+ ((p_0 q_4 - p_1 q_5 + (p_0 q_5 + p_1 q_4)I) - (p_2 q_6 - p_3 q_7 + (p_2 q_7 + p_3 q_6)I) \\
&- (p_4 q_0 - p_5 q_1 + (p_4 q_1 + p_5 q_0)I) + (p_6 q_2 - p_7 q_3 + (p_6 q_3 + p_7 q_2)I))j \\
&+ ((p_0 q_6 - p_1 q_7 + (p_0 q_7 + p_1 q_6)I) + (p_2 q_4 - p_3 q_5 + (p_2 q_5 + p_3 q_4)I) \\
&- (p_4 q_2 - p_5 q_3 + (p_4 q_3 + p_5 q_2)I) + (p_6 q_0 - p_7 q_1 + (p_6 q_1 + p_7 q_0)I))k
\end{aligned} \tag{1.43}$$

$$\begin{aligned}
&= p_0 q_0 - p_1 q_1 - p_2 q_2 + p_3 q_3 - p_4 q_4 + p_5 q_5 - p_6 q_6 + p_7 q_7 \\
&+ (p_0 q_1 + p_1 q_0 - p_2 q_3 - p_3 q_2 - p_4 q_5 - p_5 q_4 - p_6 q_7 - p_7 q_6)I \\
&+ (p_0 q_2 - p_1 q_3 - p_2 q_0 + p_3 q_1 + p_4 q_6 - p_5 q_7 - p_6 q_4 + p_7 q_5)i \\
&+ (p_0 q_3 + p_1 q_2 - p_2 q_1 - p_3 q_0 + p_4 q_7 + p_5 q_6 - p_6 q_5 - p_7 q_4)Ii \\
&+ (p_0 q_4 - p_1 q_5 - p_2 q_6 + p_3 q_7 - p_4 q_0 + p_5 q_1 + p_6 q_2 - p_7 q_3)j \\
&+ (p_0 q_5 + p_1 q_4 - p_2 q_7 - p_3 q_6 - p_4 q_1 - p_5 q_0 + p_6 q_3 + p_7 q_2)Ij \\
&+ (p_0 q_6 - p_1 q_7 + p_2 q_4 - p_3 q_5 - p_4 q_2 + p_5 q_3 + p_6 q_0 - p_7 q_1)k \\
&+ (p_0 q_7 + p_1 q_6 + p_2 q_5 + p_3 q_4 - p_4 q_3 - p_5 q_2 + p_6 q_1 + p_7 q_0)Ik
\end{aligned} \tag{1.44}$$

双四元数のノルムを実数成分で表しておくといふようになります。

$$g = a_0 + a_1 I + (a_2 + a_3 I)i + (a_4 + a_5 I)j + (a_6 + a_7 I)k, \quad a_0, \dots, a_7 \in \mathbb{R} \tag{1.45}$$

$$\begin{aligned}
gg^* &= (a_0 + a_1 I)^2 + (a_2 + a_3 I)^2 + (a_4 + a_5 I)^2 + (a_6 + a_7 I)^2 \\
&= a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 + a_4^2 - a_5^2 + a_6^2 - a_7^2 + 2(a_0 a_1 + a_2 a_3 + a_4 a_5 + a_6 a_7)I
\end{aligned} \tag{1.46}$$

参考までに

$$gg^* = 1 \iff \begin{cases} a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 + a_4^2 - a_5^2 + a_6^2 - a_7^2 = 1 \\ a_0 a_1 + a_2 a_3 + a_4 a_5 + a_6 a_7 = 0 \end{cases} \tag{1.47}$$

双四元数のノルムは双四元数の積に対して乗法的である事が示せます。つまり、任意の双四元数 (b_0, b_1) に対して次の式が成り立ちます。

$$N(b_0 b_1) = N(b_0)N(b_1) \tag{1.48}$$

幸いな事に実数に展開しなくても証明できます。

$$N(b_0 b_1) = (b_0 b_1)(b_0 b_1)^* = b_0 b_1 b_1^* b_0^* = b_0 N(b_1) b_0^* = N(b_1) b_0 b_0^* = N(b_1) N(b_0) = N(b_0) N(b_1) \tag{1.49}$$

b_0 と b_1 のノルムがどちらも 1 の場合、

$$b_0, b_1 \in \mathbb{G} \iff N(b_0) = N(b_1) = 1 \iff N(b_0 b_1) = 1 \tag{1.50}$$

従って、単位双四元数の乗算は回転を意味しています。双曲的な高次元の角度となっています。

特殊相対性理論のローレンツ変換は光速を 1 とした場合、三次元の角度と捉える事ができます。それを回転させる単位双四元数についても角度でありますから、ここまでの所は物理的有意性のある計量として角度のみでの記述が可能という事になります。

第 2 章

多元数による回転計算

2.1 複素数による回転計算

オイラーの公式により角度と絶対値が 1 の複素数の関係が明らかになっています。

$$\exp(aI) = \cos a + I \sin a, \quad a \in \mathbb{R}, \quad I^2 = -1 \quad (2.1)$$

$$|\exp(aI)| = \sqrt{\cos^2 a + \sin^2 a} = 1 \quad (2.2)$$

ここでは複素数の虚数単位をあえて I で表現しています。

任意の二次元座標 (x, y) を原点回りに角度 a 回転させる計算は、 $x + yI$, $x, y \in \mathbb{R}$ を構築して、

$$x' + y'I = (x + yI) \exp(aI) \quad (2.3)$$

で算出できます。

2.2 四元数による三次元の回転計算

任意の三次元座標を原点回りに回転させる計算は二次元ほど単純ではありません。二次元での回転と違いどの方向に回転させるかのパラメーターも必要になります。行列を使って三次元の回転の計算をすることは一応できますが、ジンバルロックの問題を回避して完全な回転計算を行うには四元数を使う計算が必須になります。

身近な例で言うと、天と地の軸が定まっている 3D ゲームでは四元数は必須ではないですが、宙返りを自由に行うフライトシミュレーターでは四元数は必須になってきます。ゲームエンジンのライブラリに含まれる Quaternion クラスには四元数による回転計算が完全に実装されていない例があるようです。その場合、以下の計算方法を独自に実装する必要があります。

方向を表す三次元単位ベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} があり、 \mathbf{a} から \mathbf{b} の方向に $t \in \mathbb{R}$ の割合だけ回転させる計算は以下ようになります。この計算方法は球面線形補間 (Slerp) と呼ばれます。

\mathbf{a} と \mathbf{b} の成す角度 θ を内積から求めます。

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (a_x, a_y, a_z), \quad \mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z), \quad a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z \in \mathbb{R} \\ \theta &= \arccos \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \arccos(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z), \quad \theta \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2.4)$$

回転軸を表す三次元単位ベクトルを外積から求めます。

$$\mathbf{w}_{cross} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x) \quad (2.5)$$

この外積の結果を正規化し単位ベクトルにしておきます。

$$\mathbf{w}_{unit} = \frac{\mathbf{w}_{cross}}{|\mathbf{w}_{cross}|} \quad (2.6)$$

この計算では \mathbf{a} と \mathbf{b} が一致する場合と正反対を向く場合については特別な配慮が必要です。

この回転軸をベルソル化しておきます。

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_{unit} \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} = w_x i + w_y j + w_z k, \quad e \in \mathbb{V} \quad (2.7)$$

回転子としての四元数は以下のように構成されます。^{*1}

$$h = \exp(-0.5t\theta w) = \cos 0.5t\theta - w \sin 0.5t\theta, \quad h \in \mathbb{H} \quad (2.8)$$

回転させたい三次元座標 (x, y, z) を純虚四元数化させておきます。^{*2}

$$f = xi + yj + zk \quad (2.9)$$

回転後の三次元座標 (x', y', z') は、

$$x'i + y'j + z'k = h^*fh \quad (2.10)$$

という計算で算出できます。右側を共役として説明される場合もありますが、どちらでも回転計算はできます。

コンピューターでの計算速度を考えると実数成分に展開して最適化しておいた方が良さそうです。

$h = r_0 + r_1i + r_2j + r_3k$ と置いて、

$$\begin{aligned} h^*fh &= (r_0 - r_1i - r_2j - r_3k)(xi + yj + zk)(r_0 + r_1i + r_2j + r_3k) \\ &= (r_0xi + r_0yj + r_0zk + r_1x - r_1yk + r_1zj + r_2xk + r_2y - r_2zi - r_3xj + r_3yi + r_3z) \\ &\quad (r_0 + r_1i + r_2j + r_3k) \\ &= (r_1x + r_2y + r_3z + (r_0x - r_2z + r_3y)i + (r_0y - r_3x + r_1z)j + (r_0z - r_1y + r_2x)k) \\ &\quad (r_0 + r_1i + r_2j + r_3k) \\ &= (r_1x + r_2y + r_3z)r_0 + (r_1x + r_2y + r_3z)r_1i + (r_1x + r_2y + r_3z)r_2j + (r_1x + r_2y + r_3z)r_3k \\ &\quad + (r_0x - r_2z + r_3y)r_0i - (r_0x - r_2z + r_3y)r_1 + (r_0x - r_2z + r_3y)r_2k - (r_0x - r_2z + r_3y)r_3j \\ &\quad + (r_0y - r_3x + r_1z)r_0j - (r_0y - r_3x + r_1z)r_1k - (r_0y - r_3x + r_1z)r_2 + (r_0y - r_3x + r_1z)r_3i \\ &\quad + (r_0z - r_1y + r_2x)r_0k + (r_0z - r_1y + r_2x)r_1j - (r_0z - r_1y + r_2x)r_2i - (r_0z - r_1y + r_2x)r_3 \\ &= r_0r_1x + r_0r_2y + r_0r_3z - r_0r_1x - r_1r_2z + r_1r_3y - r_0r_2y - r_2r_3x + r_1r_2z - r_0r_3z - r_1r_3y + r_2r_3x \\ &\quad + (r_1^2x + r_1r_2y + r_1r_3z)i + (r_0^2x - r_0r_2z + r_0r_3y)i + (r_0r_3y - r_3^2x + r_1r_3z)i - (r_0r_2z - r_1r_2y + r_2^2x)i \\ &\quad + (r_1r_2x + r_2^2y + r_2r_3z)j - (r_0r_3x - r_2r_3z + r_3^2y)j + (r_0^2y - r_0r_3x + r_0r_1z)j + (r_0r_1z - r_1^2y + r_1r_2x)j \\ &\quad + (r_1r_3x + r_2r_3y + r_3^2z)k + (r_0r_2x - r_2^2z + r_2r_3y)k - (r_0r_1y - r_1r_3x + r_1^2z)k + (r_0^2z - r_0r_1y + r_0r_2x)k \end{aligned} \quad (2.11)$$

ここでスカラーパートはきれいに消えます。^{*3}

$$\begin{aligned} h^*fh &= (r_1^2x + r_1r_2y + r_1r_3z + r_0^2x - r_0r_2z + r_0r_3y + r_0r_3y - r_3^2x + r_1r_3z - r_0r_2z + r_1r_2y - r_2^2x)i \\ &\quad + (r_1r_2x + r_2^2y + r_2r_3z - r_0r_3x + r_2r_3z - r_3^2y + r_0^2y - r_0r_3x + r_0r_1z + r_0r_1z - r_1^2y + r_1r_2x)j \\ &\quad + (r_1r_3x + r_2r_3y + r_3^2z + r_0r_2x - r_2^2z + r_2r_3y - r_0r_1y + r_1r_3x - r_1^2z + r_0^2z - r_0r_1y + r_0r_2x)k \\ &= (r_1^2x + r_0^2x - r_3^2x - r_2^2x + r_1r_2y + r_0r_3y + r_0r_3y + r_1r_2y + r_1r_3z - r_0r_2z + r_1r_3z - r_0r_2z)i \\ &\quad + (r_1r_2x - r_0r_3x - r_0r_3x + r_1r_2x + r_2^2y - r_3^2y + r_0^2y - r_1^2y + r_2r_3z + r_2r_3z + r_0r_1z + r_0r_1z)j \\ &\quad + (r_1r_3x + r_0r_2x + r_1r_3x + r_0r_2x + r_2r_3y + r_2r_3y - r_0r_1y - r_0r_1y + r_3^2z - r_2^2z - r_1^2z + r_0^2z)k \\ &= ((r_0^2 + r_1^2 - r_2^2 - r_3^2)x + 2((r_1r_2 + r_0r_3)y + (r_1r_3 - r_0r_2)z))i \\ &\quad + ((r_0^2 - r_1^2 + r_2^2 - r_3^2)y + 2((r_1r_2 - r_0r_3)x + (r_2r_3 + r_0r_1)z))j \\ &\quad + ((r_0^2 - r_1^2 - r_2^2 + r_3^2)z + 2((r_1r_3 + r_0r_2)x + (r_2r_3 - r_0r_1)y))k \end{aligned} \quad (2.12)$$

最終的に、三次元座標の単位四元数による回転は以下の式になります。

$$\begin{aligned} x' &= (r_0^2 + r_1^2 - r_2^2 - r_3^2)x + 2((r_1r_2 + r_0r_3)y + (r_1r_3 - r_0r_2)z) \\ y' &= (r_0^2 - r_1^2 + r_2^2 - r_3^2)y + 2((r_1r_2 - r_0r_3)x + (r_2r_3 + r_0r_1)z) \\ z' &= (r_0^2 - r_1^2 - r_2^2 + r_3^2)z + 2((r_1r_3 + r_0r_2)x + (r_2r_3 - r_0r_1)y) \end{aligned} \quad (2.13)$$

CG のコンピューティングではあらかじめこの計算をしておき四次元行列に組み込む事になるでしょう。

^{*1} h のノルムは 1 になっていますので、 h は単位四元数です。

^{*2} 純虚四元数とは実数部分がゼロになっている四元数の事で四元数のベクトルパートとも呼ばれます。

^{*3} 四元数の実数部分をスカラーパートと呼びます。

2.3 超球の形をする宇宙

三次元での回転については球の表面で描くことができるので想像しやすいです。例えば地球の表面については経度と緯度の二次元で表現できます。同様に、四次元単位ベクトルの回転についても三次元で表現できます。三次元超球面 (3-sphere) ^{*4}という言葉を使います。グロームとも呼ばれています。グロームは宇宙空間そのものであると考えられており、一般相対性理論をグロームに適用すると時間と共に宇宙が拡大しているという結論が導き出されるのでよく議論の対象になります。グロームは四次元単位ベクトルに相当します。従って、四次元単位ベクトルの回転計算とは宇宙空間における移動そのものとする事ができます。さらに、四次元単位ベクトルは単位四元数に相当するので、単位四元数の回転が宇宙空間の移動であるとする事もできます。

整理すると、三次元超球面 (3-sphere)=グローム (glome)=四次元単位ベクトル=単位四元数=宇宙空間となります。

$$\begin{aligned} \text{3-sphere} : \mathbb{S} &:= \{s : ss^* = 1, \quad s \in \mathbb{H}\} \\ &= \{\exp(ae) = \cos a + e \sin a, \quad a \in \mathbb{R}, \quad e \in \mathbb{V}\} \end{aligned} \quad (2.14)$$

地球上での移動が実は平面的でなく球の上を曲がって移動しているように、宇宙空間での移動も四次元内の超球面を曲がって移動していると考えられます。宇宙が巨大なのでそれを観測することが難しいのです。このビジョンでは宇宙の果てには壁はなく逆方向から元の位置に戻ってくる事になります。地上での移動の本質が経度と緯度の角度であると同様に宇宙空間での移動も本質は角度である事に注目してください。

2.4 単位四元数の視覚化

四次元の回転を視覚化して直感的に把握するようにしたい所です。単位四元数の指数関数によって三次元空間に三次元超球面をプロットする事ができます。

以下の計算で単位四元数を三次元化できます。

$$\begin{aligned} s &= s_0 + s_1i + s_2j + s_3k, \quad s \in \mathbb{S} \mapsto (x, y, z) \\ v &= s_1i + s_2j + s_3k \\ xi + yj + zk &= \frac{v}{|v|} \arccos s_0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

ただし、コンピューターでの計算では誤差や値域の関係から、`atan2()` を使った方が良いです。

$$xi + yj + zk = \frac{v}{|v|} \text{atan2}(|v|, s_0) \quad (2.16)$$

また、四元数の指数関数について以下のように変形しておくイメージしやすいです。普通に四元数 $h = a + bi + cj + dk$ の指数関数を求めると、

$$\exp(h) = \exp(a) \left(\cos \sqrt{b^2 + c^2 + d^2} + \frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \sin \sqrt{b^2 + c^2 + d^2} \right) \quad (2.17)$$

という形になりますが、予め $\theta = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2}$ と置いて整理しておくと、

$$h = a + bi + cj + dk = a + \theta v, \quad v \in \mathbb{V} \quad (2.18)$$

$$\exp(h) = \exp(a + \theta v) = \exp(a)(\cos \theta + v \sin \theta) \quad (2.19)$$

というように簡潔になります。特に純虚四元数ではさらに簡潔になります。

$$\exp(\theta v) = \cos \theta + v \sin \theta \quad (2.20)$$

三次元の方が v で移動量が θ というイメージで把握できるようになります。

また、以下のように計算すれば三次元の角度になるのではないかと思われるかもしれませんが、実際に計算をしてみると似て非なる物になります。

$$\exp(xi) \exp(yj) \exp(zk) \quad (2.21)$$

^{*4} ここで言う三次元超球面は球の中心が原点にあり半径 1 の超球の事です。

2.5 四次元の回転計算は単純ではない

四次元を四元数を使って回転させる事はできるのでしょうか？

まず、単純に複素数の回転の計算方法でどうなるのかを見てみましょう。回転させたい四次元ベクトルを四元数で $h = h_0 + h_1i + h_2j + h_3k$ 、回転角を $\theta \in \mathbb{R}$ 、回転方向を $v \in \mathbb{V}$ と定義すると、回転後の単位四元数 $h' = h'_0 + h'_1i + h'_2j + h'_3k$ は、

$$\begin{aligned} x' &= x \exp(\theta v) \\ h'_0 + h'_1i + h'_2j + h'_3k &= (h_0 + h_1i + h_2j + h_3k) \exp(\theta v) \end{aligned} \quad (2.22)$$

となる事が期待されます。この乗算では確かに矛盾なく循環するように見えますが、回転して欲しい方向以外の回転も含まれてしまうので、捻りが加わってしまう事になります。単位四元数の視覚化を使うと良く分かります。

より一般的な四元数による回転は等斜線分解 (Isoclinic decomposition) により表現できると考えられています。

$$h'_0 + h'_1i + h'_2j + h'_3k = \exp(au)(h_0 + h_1i + h_2j + h_3k) \exp(bv), \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad u, v \in \mathbb{V} \quad (2.23)$$

単位四元数を指数関数形式で表現しています。2つの直交する回転面とその回転面上の2つの回転角により四次元の回転になるという事なので、ベルソル u, v は直交し内積が0という条件が加わる事になると考えられます。

$$u \perp v \iff u \cdot v = 0 \quad (2.24)$$

指数関数の式で表すと等斜線分解では回転として5つの角度になっているという事が分かります。まず u を決めるのに2角度です。直交する v を決めるのに1角度で、角度 a, b の合計で5角度です。

では、具体的にどのように回転面と回転角を解釈すれば良いのでしょうか？三次元超球面を自由に航海したいのです。この数式だけでは実用的な航海術としては満足できる物ではありません。より詳しく調査を進めていきましょう。まず四次元の2つ要素だけを考え、式を展開してみます。まず以下のように素材を置きます。

$$h = h_0 + h_1i + h_2j + h_3k \mapsto h' = h'_0 + h'_1i + h'_2j + h'_3k \quad (2.25)$$

$$a^2 + b^2 = 1, \quad a = \cos \frac{\theta}{2}, \quad b = \sin \frac{\theta}{2}, \quad a, b, \theta \in \mathbb{R} \quad (2.26)$$

倍角の公式から

$$a^2 - b^2 = \cos \theta, \quad 2ab = \sin \theta \quad (2.27)$$

色々な組み合わせが考えられますが、以下について計算すると h_3 から h_2 方向への回転が得られます。

$$\begin{aligned} & (a - bi)(h_0 + h_1i + h_2j + h_3k)(a + bi) \\ &= (ah_0 + ah_1i + ah_2j + ah_3k - bh_0i + bh_1 - bh_2k + bh_3j)(a + bi) \\ &= a^2h_0 + a^2h_1i + a^2h_2j + a^2h_3k - abh_0i + abh_1 - abh_2k + abh_3j \\ &\quad + abh_0i - abh_1 - abh_2k + abh_3j + b^2h_0 + b^2h_1i - b^2h_2j - b^2h_3k \\ &= a^2h_0 + abh_1 - abh_1 + b^2h_0 + a^2h_1i - abh_0i + abh_0i + b^2h_1i \\ &\quad + a^2h_2j + abh_3j + abh_3j - b^2h_2j + a^2h_3k - abh_2k - abh_2k - b^2h_3k \\ &= a^2h_0 + b^2h_0 + a^2h_1i + b^2h_1i \\ &\quad + a^2h_2j + 2ab h_3j - b^2h_2j + a^2h_3k - 2ab h_2k - b^2h_3k \\ &= h_0 + h_1i + ((a^2 - b^2)h_2 + 2ab h_3)j + ((a^2 - b^2)h_3 - 2ab h_2)k \\ &= h_0 + h_1i + (h_2 \cos \theta + h_3 \sin \theta)j + (h_3 \cos \theta - h_2 \sin \theta)k \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{pmatrix} h'_2 \\ h'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

同様に

$$\begin{aligned}
& (a - bj)(h_0 + h_1i + h_2j + h_3k)(a + bj) \\
&= (ah_0 + ah_1i + ah_2j + ah_3k - bh_0j + bh_1k + bh_2 - bh_3i)(a + bj) \\
&= a^2h_0 + a^2h_1i + a^2h_2j + a^2h_3k - abh_0j + abh_1k + abh_2 - abh_3i \\
&\quad + abh_0j + abh_1k - abh_2 - abh_3i + b^2h_0 - b^2h_1i + b^2h_2j - b^2h_3k \\
&= a^2h_0 + abh_2 - abh_2 + b^2h_0 + a^2h_1i - abh_3i - abh_3i - b^2h_1i \\
&\quad + a^2h_2j - abh_0j + abh_0j + b^2h_2j + a^2h_3k + abh_1k + abh_1k - b^2h_3k \\
&= h_0 + ((a^2 - b^2)h_1 - 2abh_3)i + h_2j + ((a^2 - b^2)h_3 + 2abh_1)k \\
&= h_0 + (h_1 \cos \theta - h_3 \sin \theta)i + h_2j + (h_3 \cos \theta + h_1 \sin \theta)k
\end{aligned} \tag{2.30}$$

$$\begin{pmatrix} h'_1 \\ h'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_3 \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

h_1 から h_3 方向への回転になります。

$$\begin{aligned}
& (a - bk)(h_0 + h_1i + h_2j + h_3k)(a + bk) \\
&= (ah_0 + ah_1i + ah_2j + ah_3k - bh_0k - bh_1j + bh_2i + bh_3)(a + bk) \\
&= a^2h_0 + a^2h_1i + a^2h_2j + a^2h_3k - abh_0k - abh_1j + abh_2i + abh_3 \\
&\quad + abh_0k - abh_1j + abh_2i - abh_3 + b^2h_0 - b^2h_1i - b^2h_2j + b^2h_3k \\
&= a^2h_0 + abh_3 - abh_3 + b^2h_0 + a^2h_1i + abh_2i + abh_2i - b^2h_1i \\
&\quad + a^2h_2j - abh_1j - abh_1j - b^2h_2j + a^2h_3k - abh_0k + abh_0k + b^2h_3k \\
&= h_0 + ((a^2 - b^2)h_1 + 2abh_2)i + ((a^2 - b^2)h_2 - 2abh_1)j + h_3k \\
&= h_0 + (h_1 \cos \theta + h_2 \sin \theta)i + (h_2 \cos \theta - h_1 \sin \theta)j + h_3k
\end{aligned} \tag{2.32}$$

$$\begin{pmatrix} h'_1 \\ h'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

h_2 から h_1 方向への回転になります。

この三つの回転角を座標軸 x, y, z として移動を考えてみましょう。

$$x, y, z \in \mathbb{R} \tag{2.34}$$

$$e_x = \exp\left(\frac{x}{2}i\right) = \cos \frac{x}{2} + i \sin \frac{x}{2} = a_x + b_x i \tag{2.35}$$

$$e_y = \exp\left(\frac{y}{2}j\right) = \cos \frac{y}{2} + j \sin \frac{y}{2} = a_y + b_y j \tag{2.36}$$

$$e_z = \exp\left(\frac{z}{2}k\right) = \cos \frac{z}{2} + k \sin \frac{z}{2} = a_z + b_z k \tag{2.37}$$

と置くと、任意の四元数 h の x, y, z 方向への移動とは

$$h' = e_z^* e_y^* e_x^* h e_x e_y e_z \tag{2.38}$$

四元数 $h = h_0 + h_1i + h_2j + h_3k$ のベクトルパートについては $h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 > 0$ の条件が有意な空間表現の為に必要なことが直ちに分かります。つまり、スカラーパートだけの四元数から移動を開始する事ができません。何か様子がおかしいですがこのまま進めてみます。 h のノルムについては特に制限はなさそうです。 h' を実成分で展開してみます。

$$\begin{aligned}
e_z^* e_y^* e_x^* &= (a_z - b_z k)(a_y - b_y j)(a_x - b_x i) \\
&= (a_y a_z - a_z b_y j - a_y b_z k - b_y b_z i)(a_x - b_x i) \\
&= a_x a_y a_z - a_y a_z b_x i - a_x a_z b_y j - a_z b_x b_y k - a_x a_y b_z k + a_y b_x b_z j - a_x b_y b_z i - b_x b_y b_z \\
&= a_x a_y a_z - b_x b_y b_z - (a_x b_y b_z + a_y a_z b_x)i - (a_x a_z b_y - a_y b_x b_z)j - (a_x a_y b_z + a_z b_x b_y)k
\end{aligned} \tag{2.39}$$

右側は

$$\begin{aligned}
e_x e_y e_z &= (a_x + b_x i)(a_y + b_y j)(a_z + b_z k) \\
&= (a_x a_y + a_x b_y j + a_y b_x i + b_x b_y k)(a_z + b_z k) \\
&= a_x a_y a_z + a_x a_y b_z k + a_x a_z b_y j + a_x b_y b_z i + a_y a_z b_x i - a_y b_x b_z j + a_z b_x b_y k - b_x b_y b_z \\
&= a_x a_y a_z - b_x b_y b_z + (a_x b_y b_z + a_y a_z b_x)i + (a_x a_z b_y - a_y b_x b_z)j + (a_x a_y b_z + a_z b_x b_y)k
\end{aligned} \tag{2.40}$$

ここで

$$e_0 = a_x a_y a_z - b_x b_y b_z, \quad e_1 = a_x b_y b_z + a_y a_z b_x, \quad e_2 = a_x a_z b_y - a_y b_x b_z, \quad e_3 = a_x a_y b_z + a_z b_x b_y \quad (2.41)$$

と置くと

$$h' = (e_0 - e_1 i - e_2 j - e_3 k) h (e_0 + e_1 i + e_2 j + e_3 k) \quad (2.42)$$

互いに共役な四元数にまとめました。さらに展開して

$$\begin{aligned} e_z^* e_y^* e_x^* h &= (e_0 - e_1 i - e_2 j - e_3 k)(h_0 + h_1 i + h_2 j + h_3 k) \\ &= e_0 h_0 + e_0 h_1 i + e_0 h_2 j + e_0 h_3 k - e_1 h_0 i + e_1 h_1 - e_1 h_2 k + e_1 h_3 j \\ &\quad - e_2 h_0 j + e_2 h_1 k + e_2 h_2 - e_2 h_3 i - e_3 h_0 k - e_3 h_1 j + e_3 h_2 i + e_3 h_3 \\ &= e_0 h_0 + e_1 h_1 + e_2 h_2 + e_3 h_3 + (e_0 h_1 - e_1 h_0 - e_2 h_3 + e_3 h_2) i \\ &\quad + (e_0 h_2 + e_1 h_3 - e_2 h_0 - e_3 h_1) j + (e_0 h_3 - e_1 h_2 + e_2 h_1 - e_3 h_0) k \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} h' &= (e_0 h_0 + e_1 h_1 + e_2 h_2 + e_3 h_3 + (e_0 h_1 - e_1 h_0 - e_2 h_3 + e_3 h_2) i \\ &\quad + (e_0 h_2 + e_1 h_3 - e_2 h_0 - e_3 h_1) j + (e_0 h_3 - e_1 h_2 + e_2 h_1 - e_3 h_0) k)(e_0 + e_1 i + e_2 j + e_3 k) \\ &= e_0^2 h_0 + e_0 e_1 h_1 + e_0 e_2 h_2 + e_0 e_3 h_3 + (e_0^2 h_1 - e_0 e_1 h_0 - e_0 e_2 h_3 + e_0 e_3 h_2) i \\ &\quad + (e_0^2 h_2 + e_0 e_1 h_3 - e_0 e_2 h_0 - e_0 e_3 h_1) j + (e_0^2 h_3 - e_0 e_1 h_2 + e_0 e_2 h_1 - e_0 e_3 h_0) k \\ &\quad + (e_0 e_1 h_0 + e_1^2 h_1 + e_1 e_2 h_2 + e_1 e_3 h_3) i - (e_0 e_1 h_1 - e_1^2 h_0 - e_1 e_2 h_3 + e_1 e_3 h_2) \\ &\quad - (e_0 e_1 h_2 + e_1^2 h_3 - e_1 e_2 h_0 - e_1 e_3 h_1) k + (e_0 e_1 h_3 - e_1^2 h_2 + e_1 e_2 h_1 - e_1 e_3 h_0) j \\ &\quad + (e_0 e_2 h_0 + e_1 e_2 h_1 + e_2^2 h_2 + e_2 e_3 h_3) j + (e_0 e_2 h_1 - e_1 e_2 h_0 - e_2^2 h_3 + e_2 e_3 h_2) k \\ &\quad - (e_0 e_2 h_2 + e_1 e_2 h_3 - e_2^2 h_0 - e_2 e_3 h_1) - (e_0 e_2 h_3 - e_1 e_2 h_2 + e_2^2 h_1 - e_2 e_3 h_0) i \\ &\quad + (e_0 e_3 h_0 + e_1 e_3 h_1 + e_2 e_3 h_2 + e_3^2 h_3) k - (e_0 e_3 h_1 - e_1 e_3 h_0 - e_2 e_3 h_3 + e_3^2 h_2) j \\ &\quad + (e_0 e_3 h_2 + e_1 e_3 h_3 - e_2 e_3 h_0 - e_3^2 h_1) i - (e_0 e_3 h_3 - e_1 e_3 h_2 + e_2 e_3 h_1 - e_3^2 h_0) \\ &= (e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) h_0 \\ &\quad + ((e_0^2 + e_1^2 - e_2^2 - e_3^2) h_1 + 2(e_0 e_3 + e_1 e_2) h_2 + 2(e_1 e_3 - e_0 e_2) h_3) i \\ &\quad + (2(e_1 e_2 - e_0 e_3) h_1 + (e_0^2 - e_1^2 + e_2^2 - e_3^2) h_2 + 2(e_0 e_1 + e_2 e_3) h_3) j \\ &\quad + (2(e_0 e_2 + e_1 e_3) h_1 + 2(e_2 e_3 - e_0 e_1) h_2 + (e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 + e_3^2) h_3) k \end{aligned} \quad (2.44)$$

ここで e_0, e_1, e_2, e_3 の置き方から $e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$ なので

$$\begin{aligned} h'_0 &= h_0 \\ h'_1 &= (e_0^2 + e_1^2 - e_2^2 - e_3^2) h_1 + 2(e_0 e_3 + e_1 e_2) h_2 + 2(e_1 e_3 - e_0 e_2) h_3 \\ h'_2 &= 2(e_1 e_2 - e_0 e_3) h_1 + (e_0^2 - e_1^2 + e_2^2 - e_3^2) h_2 + 2(e_0 e_1 + e_2 e_3) h_3 \\ h'_3 &= 2(e_0 e_2 + e_1 e_3) h_1 + 2(e_2 e_3 - e_0 e_1) h_2 + (e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 + e_3^2) h_3 \end{aligned} \quad (2.45)$$

h, h' は単位四元数ではないですが、ノルムは保存されます。

$$N(h') = N(h) \quad (2.46)$$

$h'_0 = h_0$ なので

$$h_1'^2 + h_2'^2 + h_3'^2 = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 \quad (2.47)$$

これは三次元内の球の表面の移動を意味しています。四次元の計算のつもりが三次元になってしまいました。この数式は三次元の回転計算としては有用そうです。しかし、四次元の回転計算にはならない事が分かりました。

以上から等斜線分解の計算式で互いに共役な単位四元数を左右にセットすると三次元の回転になる事が、実成分に展開して確認できましたが、求める航海術は得られませんでした。

2.6 四元数の実軸からの回転

改めて等斜線分解の計算式を考えてみます。指数関数を使うと以下のように変形できます。

$$\begin{aligned} N(h') \exp(\theta' w') &= N(h) \exp(au) \exp(\theta w) \exp(bv) \\ a, b, \theta, \theta' &\in \mathbb{R}, \quad u, v, w, w' \in \mathbb{V} \end{aligned} \quad (2.48)$$

$N(h') = N(h) \in \mathbb{R}$ なので結局は

$$\exp(\theta' w') = \exp(au) \exp(\theta w) \exp(bv) \quad (2.49)$$

指数関数を外すと

$$\theta' w' = au + \theta w + bv \quad (2.50)$$

ここで以下のように置いて

$$\begin{aligned} u &= u_1 i + u_2 j + u_3 k, & v &= v_1 i + v_2 j + v_3 k, & w &= w_1 i + w_2 j + w_3 k \\ u, v &\in \mathbb{V}, & u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3 &\in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2.51)$$

実軸から i 軸への回転だけを表すようになる条件は

$$\begin{aligned} \theta' w'_1 &= au_1 + \theta w_1 + bv_1 \\ \theta' w'_2 &= \theta w_2 \\ \theta' w'_3 &= \theta w_3 \end{aligned} \quad (2.52)$$

になるようにするのだから

$$au_2 + bv_2 = 0 \quad \wedge \quad au_3 + bv_3 = 0 \iff au_2 = -bv_2 \quad \wedge \quad au_3 = -bv_3 \quad (2.53)$$

つまり以下のような j, k に関してだけ共役な単位四元数のペアによる変換式になります。

$$h' = \exp(au_1 i - bv_2 j - bv_3 k) h \exp(bv_1 i + bv_2 j + bv_3 k) \quad (2.54)$$

直交条件から

$$\begin{aligned} au_1 bv_1 - b^2 v_2^2 - b^2 v_3^2 &= 0 \\ au_1 v_1 - bv_2^2 - bv_3^2 &= 0 \\ au_1 v_1 - b(v_2^2 + v_3^2) &= 0 \\ au_1 v_1 - b(1 - v_1^2) &= 0 \\ bv_1^2 + au_1 v_1 + b &= 0 \end{aligned} \quad (2.55)$$

v_1 が実数である条件は

$$a^2 u_1^2 - 4b^2 \geq 0 \iff au_1 \geq 2b \quad (2.56)$$

a, b が満たすべき条件がこれでしょうか？次に右側を a で置き換えてみます。

$$h' = \exp(au_1 i + au_2 j + au_3 k) h \exp(bv_1 i - au_2 j - au_3 k) \quad (2.57)$$

直交条件から

$$\begin{aligned} au_1 bv_1 - a^2 u_2^2 - a^2 u_3^2 &= 0 \\ bu_1 v_1 - au_2^2 - au_3^2 &= 0 \\ bu_1 v_1 - a(u_2^2 + u_3^2) &= 0 \\ bu_1 v_1 - a(1 - u_1^2) &= 0 \\ au_1^2 + bu_1 v_1 + a &= 0 \end{aligned} \quad (2.58)$$

u_1 が実数である条件は

$$b^2 v_1^2 - 4a^2 \geq 0 \iff bv_1 \geq 2a \quad (2.59)$$

以上から実数 a, b の条件をまとめると

$$au_1 \geq 2b \quad \wedge \quad bv_1 \geq 2a \quad \wedge \quad u_1, v_1 \leq 1 \quad (2.60)$$

これらを満たす実数 a, b は存在しません。従って、四元数の実軸から i 軸にだけ回転させる計算は少なくとも単位四元数の回転計算の範囲には存在しないことになります。

2.7 八元数の定義

八元数は以下のように定義されます。

$$\text{Octonion} : \mathbb{O} := r_0 + r_1 e_1 + r_2 e_2 + r_3 e_3 + r_4 e_4 + r_5 e_5 + r_6 e_6 + r_7 e_7, \quad r_0, \dots, r_7 \in \mathbb{R} \quad (2.61)$$

e_1, \dots, e_7 の乗法は表 2.1 に従います。乗法は順番を変えてはならず、3 つ以上並んだ場合は左から順番に計算しないといけません。

乗積表には 480 通りのバリエーションがあり、ここではその一つを書いています。しかし、その他の 479 通りの八元数についての本質的な違いはないと考えられています。また、虚数単位 e_1, \dots, e_7 の書き方についても、 i, j, k, l や h, i, j, k を組み合わせたりする事もあります。

八元数の共役 o^* とノルム $N(o)$ は以下のようになります。

$$\begin{aligned} o &= r_0 + r_1 e_1 + r_2 e_2 + r_3 e_3 + r_4 e_4 + r_5 e_5 + r_6 e_6 + r_7 e_7 \\ o^* &= r_0 - r_1 e_1 - r_2 e_2 - r_3 e_3 - r_4 e_4 - r_5 e_5 - r_6 e_6 - r_7 e_7 \quad (2.62) \\ N(o) &= o^* o = r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 + r_5^2 + r_6^2 + r_7^2 \end{aligned}$$

八元数とは別に分解型八元数という物が定義できますが、それはまた別途触れたいと思います。

とりあえず、任意の八元数 o_0, o_1 の積をその実数成分で表現しておきます。

$$\begin{aligned} o_0 &= p_0 + p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3 + p_4 e_4 + p_5 e_5 + p_6 e_6 + p_7 e_7 \\ o_1 &= q_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3 + q_4 e_4 + q_5 e_5 + q_6 e_6 + q_7 e_7 \end{aligned} \quad (2.63)$$

$o_0 o_1$ を実直に計算しても良いですがスカラーパートを分ける事で少し楽をします。

$$\begin{aligned} u &= p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3 + p_4 e_4 + p_5 e_5 + p_6 e_6 + p_7 e_7 \\ v &= q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3 + q_4 e_4 + q_5 e_5 + q_6 e_6 + q_7 e_7 \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned} o_0 o_1 &= (p_0 + u)(q_0 + v) \\ &= p_0 q_0 + p_0 v + q_0 u + uv \end{aligned} \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned}
uv &= (p_1e_1 + p_2e_2 + p_3e_3 + p_4e_4 + p_5e_5 + p_6e_6 + p_7e_7)(q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3 + q_4e_4 + q_5e_5 + q_6e_6 + q_7e_7) \\
&= p_1e_1q_1e_1 + p_1e_1q_2e_2 + p_1e_1q_3e_3 + p_1e_1q_4e_4 + p_1e_1q_5e_5 + p_1e_1q_6e_6 + p_1e_1q_7e_7 \\
&\quad + p_2e_2q_1e_1 + p_2e_2q_2e_2 + p_2e_2q_3e_3 + p_2e_2q_4e_4 + p_2e_2q_5e_5 + p_2e_2q_6e_6 + p_2e_2q_7e_7 \\
&\quad + p_3e_3q_1e_1 + p_3e_3q_2e_2 + p_3e_3q_3e_3 + p_3e_3q_4e_4 + p_3e_3q_5e_5 + p_3e_3q_6e_6 + p_3e_3q_7e_7 \\
&\quad + p_4e_4q_1e_1 + p_4e_4q_2e_2 + p_4e_4q_3e_3 + p_4e_4q_4e_4 + p_4e_4q_5e_5 + p_4e_4q_6e_6 + p_4e_4q_7e_7 \\
&\quad + p_5e_5q_1e_1 + p_5e_5q_2e_2 + p_5e_5q_3e_3 + p_5e_5q_4e_4 + p_5e_5q_5e_5 + p_5e_5q_6e_6 + p_5e_5q_7e_7 \\
&\quad + p_6e_6q_1e_1 + p_6e_6q_2e_2 + p_6e_6q_3e_3 + p_6e_6q_4e_4 + p_6e_6q_5e_5 + p_6e_6q_6e_6 + p_6e_6q_7e_7 \\
&\quad + p_7e_7q_1e_1 + p_7e_7q_2e_2 + p_7e_7q_3e_3 + p_7e_7q_4e_4 + p_7e_7q_5e_5 + p_7e_7q_6e_6 + p_7e_7q_7e_7 \\
&= -p_1q_1 + p_1q_2e_3 - p_1q_3e_2 + p_1q_4e_5 - p_1q_5e_4 - p_1q_6e_7 + p_1q_7e_6 \\
&\quad - p_2q_1e_3 - p_2q_2 + p_2q_3e_1 + p_2q_4e_6 + p_2q_5e_7 - p_2q_6e_4 - p_2q_7e_5 \\
&\quad + p_3q_1e_2 - p_3q_2e_1 - p_3q_3 + p_3q_4e_7 - p_3q_5e_6 + p_3q_6e_5 - p_3q_7e_4 \\
&\quad - p_4q_1e_5 - p_4q_2e_6 - p_4q_3e_7 - p_4q_4 + p_4q_5e_1 + p_4q_6e_2 + p_4q_7e_3 \\
&\quad + p_5q_1e_4 - p_5q_2e_7 + p_5q_3e_6 - p_5q_4e_1 - p_5q_5 - p_5q_6e_3 + p_5q_7e_2 \\
&\quad + p_6q_1e_7 + p_6q_2e_4 - p_6q_3e_5 - p_6q_4e_2 + p_6q_5e_3 - p_6q_6 - p_6q_7e_1 \\
&\quad - p_7q_1e_6 + p_7q_2e_5 + p_7q_3e_4 - p_7q_4e_3 - p_7q_5e_2 + p_7q_6e_1 - p_7q_7 \\
&= -p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 - p_4q_4 - p_5q_5 - p_6q_6 - p_7q_7 \\
&\quad + p_2q_3e_1 - p_3q_2e_1 + p_4q_5e_1 - p_5q_4e_1 - p_6q_7e_1 + p_7q_6e_1 \\
&\quad - p_1q_3e_2 + p_3q_1e_2 + p_4q_6e_2 + p_5q_7e_2 - p_6q_4e_2 - p_7q_5e_2 \\
&\quad + p_1q_2e_3 - p_2q_1e_3 + p_4q_7e_3 - p_5q_6e_3 + p_6q_5e_3 - p_7q_4e_3 \\
&\quad - p_1q_5e_4 - p_2q_6e_4 - p_3q_7e_4 + p_5q_1e_4 + p_6q_2e_4 + p_7q_3e_4 \\
&\quad + p_1q_4e_5 - p_2q_7e_5 + p_3q_6e_5 + p_4q_1e_5 - p_6q_3e_5 + p_7q_2e_5 \\
&\quad + p_1q_7e_6 + p_2q_4e_6 - p_3q_5e_6 - p_4q_2e_6 + p_5q_3e_6 - p_7q_1e_6 \\
&\quad - p_1q_6e_7 + p_2q_5e_7 + p_3q_4e_7 - p_4q_3e_7 - p_5q_2e_7 + p_6q_1e_7
\end{aligned} \tag{2.66}$$

$$\begin{aligned}
uv &= -p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 - p_4q_4 - p_5q_5 - p_6q_6 - p_7q_7 \\
&\quad + (p_2q_3 - p_3q_2 + p_4q_5 - p_5q_4 + p_7q_6 - p_6q_7)e_1 \\
&\quad + (p_3q_1 - p_1q_3 + p_4q_6 - p_6q_4 + p_5q_7 - p_7q_5)e_2 \\
&\quad + (p_1q_2 - p_2q_1 + p_4q_7 - p_7q_4 + p_6q_5 - p_5q_6)e_3 \\
&\quad + (p_5q_1 - p_1q_5 + p_6q_2 - p_2q_6 + p_7q_3 - p_3q_7)e_4 \\
&\quad + (p_1q_4 - p_4q_1 + p_3q_6 - p_6q_3 + p_7q_2 - p_2q_7)e_5 \\
&\quad + (p_1q_7 - p_7q_1 + p_2q_4 - p_4q_2 + p_5q_3 - p_3q_5)e_6 \\
&\quad + (p_2q_5 - p_5q_2 + p_3q_4 - p_4q_3 + p_6q_1 - p_1q_6)e_7
\end{aligned} \tag{2.67}$$

$$\begin{aligned}
o_0o_1 &= p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 - p_4q_4 - p_5q_5 - p_6q_6 - p_7q_7 \\
&\quad + (p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2 + p_4q_5 - p_5q_4 + p_7q_6 - p_6q_7)e_1 \\
&\quad + (p_0q_2 + p_2q_0 + p_3q_1 - p_1q_3 + p_4q_6 - p_6q_4 + p_5q_7 - p_7q_5)e_2 \\
&\quad + (p_0q_3 + p_3q_0 + p_1q_2 - p_2q_1 + p_4q_7 - p_7q_4 + p_6q_5 - p_5q_6)e_3 \\
&\quad + (p_0q_4 + p_4q_0 + p_5q_1 - p_1q_5 + p_6q_2 - p_2q_6 + p_7q_3 - p_3q_7)e_4 \\
&\quad + (p_0q_5 + p_5q_0 + p_1q_4 - p_4q_1 + p_3q_6 - p_6q_3 + p_7q_2 - p_2q_7)e_5 \\
&\quad + (p_0q_6 + p_6q_0 + p_1q_7 - p_7q_1 + p_2q_4 - p_4q_2 + p_5q_3 - p_3q_5)e_6 \\
&\quad + (p_0q_7 + p_7q_0 + p_2q_5 - p_5q_2 + p_3q_4 - p_4q_3 + p_6q_1 - p_1q_6)e_7
\end{aligned} \tag{2.68}$$

uv は七次元の内積と外積の形をしていますので、七次元の角度や回転軸を計算する事ができると考えられます。四元数を使って三次元の回転を計算できたように、八元数を使って七次元を回転できるのではないかと期待したい所です。しかし、目下の所、四次元だけを回転させる計算方法を確立させたいので、まずは四次元に着目します。

2.8 八元数による四次元の回転計算

四次元ベクトル (s_0, s_1, s_2, s_3) を八元数の e_4, e_5, e_6, e_7 に割り当てて回転計算を行ってみます。

$$s = s_0 e_4 + s_1 e_5 + s_2 e_6 + s_3 e_7 \quad (2.69)$$

方向を表す四次元単位ベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} があり、 \mathbf{a} から \mathbf{b} の方向に $t \in \mathbb{R}$ の割合だけ回転させます。 \mathbf{a} と \mathbf{b} が成す角度 θ を内積から求めます。

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (a_0, a_1, a_2, a_3), \quad \mathbf{b} = (b_0, b_1, b_2, b_3), \quad a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R} \\ \theta &= \arccos(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \arccos(a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3), \quad 0 < \theta < \pi, \quad \theta \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2.70)$$

回転軸を表す八元数を七次元の外積から求めます。今 e_4, e_5, e_6, e_7 の内に四次元があると仮定しているので \mathbf{a}, \mathbf{b} を以下の八元数に置き換えます。

$$\mathbf{a} = a_0 e_4 + a_1 e_5 + a_2 e_6 + a_3 e_7, \quad \mathbf{b} = b_0 e_4 + b_1 e_5 + b_2 e_6 + b_3 e_7 \quad (2.71)$$

積を計算し外積を抽出します。

$$\begin{aligned} \mathbf{ab} &= -\cos \theta \\ &\quad + (a_0 b_1 - a_1 b_0 + a_3 b_2 - a_2 b_3) e_1 \\ &\quad + (a_0 b_2 - a_2 b_0 + a_1 b_3 - a_3 b_1) e_2 \\ &\quad + (a_0 b_3 - a_3 b_0 + a_2 b_1 - a_1 b_2) e_3 \end{aligned} \quad (2.72)$$

$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{ab}| = 1$ なので以下であることが確認できます。

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta + (a_0 b_1 - a_1 b_0 + a_3 b_2 - a_2 b_3)^2 + (a_0 b_2 - a_2 b_0 + a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (a_0 b_3 - a_3 b_0 + a_2 b_1 - a_1 b_2)^2 &= 1 \\ (a_0 b_1 - a_1 b_0 + a_3 b_2 - a_2 b_3)^2 + (a_0 b_2 - a_2 b_0 + a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (a_0 b_3 - a_3 b_0 + a_2 b_1 - a_1 b_2)^2 &= \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (2.73)$$

e_1, e_2, e_3 の係数から八元数を構成し直して正規化しておきます。

$$w_1 = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0 + a_3 b_2 - a_2 b_3}{\sin \theta}, \quad w_2 = \frac{a_0 b_2 - a_2 b_0 + a_1 b_3 - a_3 b_1}{\sin \theta}, \quad w_3 = \frac{a_0 b_3 - a_3 b_0 + a_2 b_1 - a_1 b_2}{\sin \theta} \quad (2.74)$$

$$w = w_1 e_1 + w_2 e_2 + w_3 e_3, \quad |w| = 1 \quad (2.75)$$

こうして八元数より抽出した外積の“回転軸” w を観察してみると、元の軸 e_4, e_5, e_6, e_7 が構成する空間の外側にある e_1, e_2, e_3 軸が構成する空間で三次元として存在していると読み取れます。従って、四次元を回転させる軸は七次元内の別の三次元に存在すると解釈できます。四次元を四元数で回転させようとしても上手くいかなかった原因がここにありそうです。

他の軸の組み合わせはどうなるかが気になります。7つのうち4つを選ぶ組み合わせの数は35通りあります。 e_1, e_2, e_3, e_4 内に四次元を取ると

$$\mathbf{a} = a_0 e_1 + a_1 e_2 + a_2 e_3 + a_3 e_4, \quad \mathbf{b} = b_0 e_1 + b_1 e_2 + b_2 e_3 + b_3 e_4 \quad (2.76)$$

$$\mathbf{ab} + |\mathbf{ab}| = (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_1 + (a_2 b_0 - a_0 b_2) e_2 + (a_0 b_1 - a_1 b_0) e_3 + (a_0 b_3 - a_3 b_0) e_5 + (a_1 b_3 - a_3 b_1) e_6 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) e_7 \quad (2.77)$$

というように6軸になります。

どのような回転軸になるかは多様性と規則性がありそうですが、とりあえず回転計算を継続します。以下のようにノルムが1の純虚八元数を七次元ベルソルとして定義しておきます。

$$\begin{aligned} \text{Versor7} : \mathbb{V}_7 &:= \{d : d = \sqrt{-1}, \quad d \in \mathbb{O}\} \\ &= \{d_1 e_1 + d_2 e_2 + d_3 e_3 + d_4 e_4 + d_5 e_5 + d_6 e_6 + d_7 e_7, \quad d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7 \in \mathbb{R}, \quad |d| = 1\} \end{aligned} \quad (2.78)$$

一般的に、四次元単位ベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} を純虚八元数の係数のどれかに割り当てて七次元ベルソル a, b とした時、これらを含む回転の回転軸を表す七次元ベルソル w は、 \mathbf{a}, \mathbf{b} が成す角度を θ として、

$$w = \frac{\mathbf{ab} + \cos \theta}{\sin \theta}, \quad w \in \mathbb{V}_7 \quad (2.79)$$

となる事が見えてきました。この回転軸によって回転を計算する為の八元数は以下ようになります。

$$o = \exp(-0.5t\theta w) = \cos 0.5t\theta - w \sin 0.5t\theta \quad (2.80)$$

回転させたい四次元ベクトルを純虚八元数のいずれかに当てはめた八元数を s とすると、回転後の四次元座標を示す八元数 s' が以下のように算出される事が期待されます。

$$s' = o^* s o \quad (2.81)$$

実数成分で ${}_7C_4 = 35$ の組み合わせで展開してみるのは流石に冗長なので、コンピューターを使って計算をしてみましょう。するとすべての組み合わせで、この回転計算の結果 s' が s が選択した八元数の 4 つの軸による空間に戻ることが確認できます。また、3D グラフで視覚化をしてみると、確かに循環する輪が描かれる事が分かります。循環する輪の形は (1) 右回りにねじれる、(2) 左回りにねじれる、(3) 閉じている、(4) 開いているの 4 種類あるようです。これらの内、(1)(2) のねじれるパターンは、四元数の乗算と同じ形になっており、ねじれるという欠点があります。そして、平行線を伸ばしたら合流してしまう (3) は除外できるでしょう。(4) の開いているという回転のパターンが求める三次元超球面の移動だと考えられます。しかし、これらの回転パターンは注目したある二次元の面にだけ成り立つ特徴があり、三次元の移動を考えた時に 3 軸全てで (4) の開いているという形状をしているパターンは 35 種類の組み合わせの中には発見できません。つまり、三次元超球面から切り取った原点を含む二次元面については回転計算が成立しますが、そこから外れる事ができません。

2.9 分解型八元数の定義

分解型八元数についても可能性を調査してみましょう。分解型八元数は以下のように定義されます。

Split-octonion :

$$\begin{aligned} \mathbb{O}_s &:= r_0 + r_1 e_1 + r_2 e_2 + r_3 e_3 + r_4 e_4 + r_5 e_5 + r_6 e_6 + r_7 e_7 \\ r_0, \dots, r_7 &\in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2.82)$$

e_1, \dots, e_7 の乗法は表 2.2 に従います。

共役は八元数と同じ定義です。

$$\begin{aligned} s &= r_0 + r_1 e_1 + r_2 e_2 + r_3 e_3 + r_4 e_4 + r_5 e_5 + r_6 e_6 + r_7 e_7 \\ s^* &= r_0 - r_1 e_1 - r_2 e_2 - r_3 e_3 - r_4 e_4 - r_5 e_5 - r_6 e_6 - r_7 e_7 \end{aligned} \quad (2.83)$$

ノルムについては少し様子が違って以下ようになります。

$$N(s) = s^* s = (r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) - (r_4^2 + r_5^2 + r_6^2 + r_7^2) \quad (2.84)$$

八元数同様に乗積表の右上と左下の符号が反転しているので共役をかけるとそれらが消えて実数部分のみになります。

まず、任意の分解型八元数 s_0, s_1 の積をその実数成分で表現しておきましょう。

$$\begin{aligned} s_0 &= p_0 + p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3 + p_4 e_4 + p_5 e_5 + p_6 e_6 + p_7 e_7 \\ s_1 &= q_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3 + q_4 e_4 + q_5 e_5 + q_6 e_6 + q_7 e_7 \end{aligned} \quad (2.85)$$

スカラー部分を分けておきます。

$$\begin{aligned} u &= p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3 + p_4 e_4 + p_5 e_5 + p_6 e_6 + p_7 e_7 \\ v &= q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3 + q_4 e_4 + q_5 e_5 + q_6 e_6 + q_7 e_7 \end{aligned} \quad (2.86)$$

$$\begin{aligned} s_0 s_1 &= (p_0 + u)(q_0 + v) \\ &= p_0 q_0 + p_0 v + q_0 u + uv \end{aligned} \quad (2.87)$$

$$\begin{aligned}
uv &= (p_1e_1 + p_2e_2 + p_3e_3 + p_4e_4 + p_5e_5 + p_6e_6 + p_7e_7)(q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3 + q_4e_4 + q_5e_5 + q_6e_6 + q_7e_7) \\
&= p_1e_1q_1e_1 + p_1e_1q_2e_2 + p_1e_1q_3e_3 + p_1e_1q_4e_4 + p_1e_1q_5e_5 + p_1e_1q_6e_6 + p_1e_1q_7e_7 \\
&\quad + p_2e_2q_1e_1 + p_2e_2q_2e_2 + p_2e_2q_3e_3 + p_2e_2q_4e_4 + p_2e_2q_5e_5 + p_2e_2q_6e_6 + p_2e_2q_7e_7 \\
&\quad + p_3e_3q_1e_1 + p_3e_3q_2e_2 + p_3e_3q_3e_3 + p_3e_3q_4e_4 + p_3e_3q_5e_5 + p_3e_3q_6e_6 + p_3e_3q_7e_7 \\
&\quad + p_4e_4q_1e_1 + p_4e_4q_2e_2 + p_4e_4q_3e_3 + p_4e_4q_4e_4 + p_4e_4q_5e_5 + p_4e_4q_6e_6 + p_4e_4q_7e_7 \\
&\quad + p_5e_5q_1e_1 + p_5e_5q_2e_2 + p_5e_5q_3e_3 + p_5e_5q_4e_4 + p_5e_5q_5e_5 + p_5e_5q_6e_6 + p_5e_5q_7e_7 \\
&\quad + p_6e_6q_1e_1 + p_6e_6q_2e_2 + p_6e_6q_3e_3 + p_6e_6q_4e_4 + p_6e_6q_5e_5 + p_6e_6q_6e_6 + p_6e_6q_7e_7 \\
&\quad + p_7e_7q_1e_1 + p_7e_7q_2e_2 + p_7e_7q_3e_3 + p_7e_7q_4e_4 + p_7e_7q_5e_5 + p_7e_7q_6e_6 + p_7e_7q_7e_7 \\
&= -p_1q_1 + p_1q_2e_3 - p_1q_3e_2 - p_1q_4e_5 + p_1q_5e_4 - p_1q_6e_7 + p_1q_7e_6 \\
&\quad - p_2q_1e_3 - p_2q_2 + p_2q_3e_1 - p_2q_4e_6 + p_2q_5e_7 + p_2q_6e_4 - p_2q_7e_5 \\
&\quad + p_3q_1e_2 - p_3q_2e_1 - p_3q_3 - p_3q_4e_7 - p_3q_5e_6 + p_3q_6e_5 + p_3q_7e_4 \\
&\quad + p_4q_1e_5 + p_4q_2e_6 + p_4q_3e_7 + p_4q_4 + p_4q_5e_1 + p_4q_6e_2 + p_4q_7e_3 \\
&\quad - p_5q_1e_4 - p_5q_2e_7 + p_5q_3e_6 - p_5q_4e_1 + p_5q_5 + p_5q_6e_3 - p_5q_7e_2 \\
&\quad + p_6q_1e_7 - p_6q_2e_4 - p_6q_3e_5 - p_6q_4e_2 - p_6q_5e_3 + p_6q_6 + p_6q_7e_1 \\
&\quad - p_7q_1e_6 + p_7q_2e_5 - p_7q_3e_4 - p_7q_4e_3 + p_7q_5e_2 - p_7q_6e_1 + p_7q_7 \\
&= -p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 + p_4q_4 + p_5q_5 + p_6q_6 + p_7q_7 \\
&\quad + (p_2q_3 - p_3q_2 + p_4q_5 - p_5q_4 + p_6q_7 - p_7q_6)e_1 \\
&\quad + (p_3q_1 - p_1q_3 + p_4q_6 - p_6q_4 + p_7q_5 - p_5q_7)e_2 \\
&\quad + (p_1q_2 - p_2q_1 + p_4q_7 - p_7q_4 + p_5q_6 - p_6q_5)e_3 \\
&\quad + (p_1q_5 - p_5q_1 + p_2q_6 - p_6q_2 + p_3q_7 - p_7q_3)e_4 \\
&\quad + (p_3q_6 - p_6q_3 + p_4q_1 - p_1q_4 + p_7q_2 - p_2q_7)e_5 \\
&\quad + (p_1q_7 - p_7q_1 + p_4q_2 - p_2q_4 + p_5q_3 - p_3q_5)e_6 \\
&\quad + (p_2q_5 - p_5q_2 + p_4q_3 - p_3q_4 + p_6q_1 - p_1q_6)e_7
\end{aligned} \tag{2.88}$$

この展開された式は八元数の七次元の外積とは別物のようです。何を表すのでしょうか？掘り下げて調査する必要があるそうです。

2.10 分解型八元数の角度

分解型八元数に内在する角度がオイラーの公式からどうなるかを調べましょう。

$$s_L = r_0 + r_1e_1 + r_2e_2 + r_3e_3, \quad s_R = r_4e_4 + r_5e_5 + r_6e_6 + r_7e_7 \tag{2.89}$$

というように分解すると s_L は四元数と同様になり、 $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \neq 0$ の時、

$$\alpha v_L = r_1e_1 + r_2e_2 + r_3e_3, \quad v_L^2 = -1, \quad \alpha \in \mathbb{R} \tag{2.90}$$

と置いて、

$$\exp(s_L) = \exp(r_0 + \alpha v_L) = \exp(r_0)(\cos \alpha + v_L \sin \alpha) \tag{2.91}$$

s_R については、 $|s_R| \neq 0$ の時、

$$\beta v_R = r_4e_4 + r_5e_5 + r_6e_6 + r_7e_7, \quad v_R^2 = +1, \quad \beta \in \mathbb{R} \tag{2.92}$$

と置くと、分解型複素数のオイラーの公式から、

$$\exp(s_R) = \exp(\beta v_R) = \cosh \beta + v_R \sinh \beta \tag{2.93}$$

従って、分解型八元数の角度表現は以下のようになります。

$$\exp(s) = \exp(s_L + s_R) = \exp(s_L) \exp(s_R) = \exp(r_0)(\cos \alpha + v_L \sin \alpha)(\cosh \beta + v_R \sinh \beta) \tag{2.94}$$

純虚分解型八元数について書き直すと、

$$\exp(s) = \exp(\alpha v_L + \beta v_R) = (\cos \alpha + v_L \sin \alpha)(\cosh \beta + v_R \sinh \beta), \quad r_0 = 0 \tag{2.95}$$

以下のように展開してみます。

$$\exp(s) = \cos \alpha \cosh \beta + v_L v_R \sin \alpha \sinh \beta + v_L \sin \alpha \cosh \beta + v_R \cos \alpha \sinh \beta \quad (2.96)$$

複素数による三角関数と加法定理より、 $I^2 = -1$ という別の虚数単位を導入して、

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - I\beta) &= \cos \alpha \cos I\beta + \sin \alpha \sin I\beta \\ &= \cos \alpha \cosh \beta + I \sin \alpha \sinh \beta \\ \sin(\alpha - I\beta) &= \sin \alpha \cos I\beta - \cos \alpha \sin I\beta \\ &= \sin \alpha \cosh \beta - I \cos \alpha \sinh \beta \end{aligned} \quad (2.97)$$

さらに $J^2 = -1$ という別の虚数単位を導入すると、

$$J \sin(\alpha - I\beta) = J \sin \alpha \cosh \beta - JI \cos \alpha \sinh \beta \quad (2.98)$$

$I = v_L v_R, J = v_L$ というように当てはめると、

$$\begin{aligned} \exp(s) &= \cos \alpha \cosh \beta + v_L v_R \sin \alpha \sinh \beta + v_L \sin \alpha \cosh \beta - v_L v_L v_R \cos \alpha \sinh \beta \\ &= \cos(\alpha - v_L v_R \beta) + v_L \sin(\alpha - v_L v_R \beta) \\ &= \exp(v_L(\alpha - v_L v_R \beta)) \\ &= \exp(v_L \alpha + v_R \beta) \\ &= \exp(s) \end{aligned} \quad (2.99)$$

元に戻ります。ここで $\theta = \alpha - v_L v_R \beta$ と置けば、四元数のオイラーの公式と同じ形が得られます。

$$\exp(v_L \theta) = \cos \theta + v_L \sin \theta \quad (2.100)$$

2.11 純虚分解型八元数の指数関数

改めて純虚分解型八元数を以下のように定義し直します。

$$\begin{aligned} \exp(s) &= \exp(\alpha u + \beta v) = p_0 + p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3 + p_4 e_4 + p_5 e_5 + p_6 e_6 + p_7 e_7 \\ \alpha, \beta, p_0, \dots, p_7 &\in \mathbb{R} \\ u &= a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3, \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 \\ v &= a_4 e_4 + a_5 e_5 + a_6 e_6 + a_7 e_7, \quad a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2 = 1 \\ a_1, \dots, a_7 &\in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2.101)$$

p_0, \dots, p_7 を角度と方向からなる実数で表現してみましょう。

$$\begin{aligned} \exp(s) &= (\cos \alpha + u \sin \alpha)(\cosh \beta + v \sinh \beta) \\ &= \cos \alpha \cosh \beta + uv \sin \alpha \sinh \beta + u \sin \alpha \cosh \beta + v \cos \alpha \sinh \beta \end{aligned} \quad (2.102)$$

uv を先に展開して、

$$\begin{aligned} uv &= (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3)(a_4 e_4 + a_5 e_5 + a_6 e_6 + a_7 e_7) \\ &= (a_1 a_5 + a_2 a_6 + a_3 a_7) e_4 \\ &\quad + (a_3 a_6 - a_1 a_4 - a_2 a_7) e_5 \\ &\quad + (a_1 a_7 - a_2 a_4 - a_3 a_5) e_6 \\ &\quad + (a_2 a_5 - a_3 a_4 - a_1 a_6) e_7 \end{aligned} \quad (2.103)$$

e_1, e_2, e_3 の項が消えてしまうのが印象的です。

$$\begin{aligned} \exp(s) &= \cos \alpha \cosh \beta + a_1 e_1 \sin \alpha \cosh \beta + a_2 e_2 \sin \alpha \cosh \beta + a_3 e_3 \sin \alpha \cosh \beta \\ &\quad + ((a_1 a_5 + a_2 a_6 + a_3 a_7) \sin \alpha + a_4 \cos \alpha) e_4 \sinh \beta \\ &\quad + ((a_3 a_6 - a_1 a_4 - a_2 a_7) \sin \alpha + a_5 \cos \alpha) e_5 \sinh \beta \\ &\quad + ((a_1 a_7 - a_2 a_4 - a_3 a_5) \sin \alpha + a_6 \cos \alpha) e_6 \sinh \beta \\ &\quad + ((a_2 a_5 - a_3 a_4 - a_1 a_6) \sin \alpha + a_7 \cos \alpha) e_7 \sinh \beta \end{aligned} \quad (2.104)$$

$$\begin{aligned}
p_0 &= \cos \alpha \cosh \beta \\
p_1 &= a_1 \sin \alpha \cosh \beta \\
p_2 &= a_2 \sin \alpha \cosh \beta \\
p_3 &= a_3 \sin \alpha \cosh \beta \\
p_4 &= ((a_1 a_5 + a_2 a_6 + a_3 a_7) \sin \alpha + a_4 \cos \alpha) \sinh \beta \\
p_5 &= ((a_3 a_6 - a_1 a_4 - a_2 a_7) \sin \alpha + a_5 \cos \alpha) \sinh \beta \\
p_6 &= ((a_1 a_7 - a_2 a_4 - a_3 a_5) \sin \alpha + a_6 \cos \alpha) \sinh \beta \\
p_7 &= ((a_2 a_5 - a_3 a_4 - a_1 a_6) \sin \alpha + a_7 \cos \alpha) \sinh \beta
\end{aligned} \tag{2.105}$$

2.12 分解型八元数による回転

分解型八元数に内在する角度が2つある事が分かってきました。方向を表す2つのベクトルもあります。三次元単位ベクトルと四次元単位ベクトルです。これらが組み合わさって七次元を構成しています。

2つの純虚分解型八元数 u, v を以下のように定義して回転を計算してみます。

$$\begin{aligned}
u &= p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3 + p_4 e_4 + p_5 e_5 + p_6 e_6 + p_7 e_7 \\
p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 &= 1, \quad p_4^2 + p_5^2 + p_6^2 + p_7^2 = 1 \\
v &= q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3 + q_4 e_4 + q_5 e_5 + q_6 e_6 + q_7 e_7 \\
q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 &= 1, \quad q_4^2 + q_5^2 + q_6^2 + q_7^2 = 1 \\
\cos \alpha &= p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 \\
\cos \beta &= p_4 q_4 + p_5 q_5 + p_6 q_6 + p_7 q_7
\end{aligned} \tag{2.106}$$

u, v のノルムは0になります。

$$N(u) = N(v) = N(uv) = 0 \tag{2.107}$$

積の計算結果から、

$$uv = -\cos \alpha + \cos \beta + s \tag{2.108}$$

となるように s を置くと、

$$N(uv) = (-\cos \alpha + \cos \beta)^2 + N(s) = 0 \tag{2.109}$$

$$N(s) = -(-\cos \alpha + \cos \beta)^2 \tag{2.110}$$

というような関係性が見られます。回転軸 w は、

$$\begin{aligned}
s &= s_1 e_1 + s_2 e_2 + s_3 e_3 + s_4 e_4 + s_5 e_5 + s_6 e_6 + s_7 e_7 \\
s_L &= s_1 e_1 + s_2 e_2 + s_3 e_3, \quad s_R = s_4 e_4 + s_5 e_5 + s_6 e_6 + s_7 e_7
\end{aligned} \tag{2.111}$$

として、

$$\begin{aligned}
w_L &= \frac{s_L}{|s_L|}, \quad w_R = \frac{s_R}{|s_R|} \\
w &= w_L + w_R, \quad N(w) = 0
\end{aligned} \tag{2.112}$$

回転子 ρ は、 w_L 方向に $a\alpha$ 、 w_R 方向に $b\beta$ 回転させるとして、

$$\rho = \exp(-0.5a\alpha w_L + b\beta w_R) = (\cos 0.5a\alpha - w_L \sin 0.5a\alpha)(\cosh 0.5b\beta - w_R \sinh 0.5b\beta) \tag{2.113}$$

純虚分解型八元数 f を回転させて f' になるとすると、

$$\begin{aligned}
f' &= \rho^* f \rho \\
&= (\cosh 0.5b\beta + w_R \sinh 0.5b\beta)(\cos 0.5a\alpha + w_L \sin 0.5a\alpha) f (\cos 0.5a\alpha - w_L \sin 0.5a\alpha)(\cosh 0.5b\beta - w_R \sinh 0.5b\beta)
\end{aligned} \tag{2.114}$$