

dual-spacetime-simulator documents

<https://github.com/hypernumbernet>

2025 年 12 月 24 日

概要

重力多体シミュレーションを行うに当たって数学的基盤を整えておく目的でまとめを書いています。プログラミングですぐに活用できるように計算手順を具体化し実係数で式を展開しています。

目次

第 1 章	複四元数による特殊相対性理論	4
1.1	複四元数とは	4
1.2	複四元数の共役は 2 種類	4
1.3	複四元数で表現する特殊相対論的時空	5
1.4	特殊相対論的速度との関係	5
1.5	複四元数によるローレンツ変換の計算方法	6
1.6	ラピディティによるもう一つの計算方法	7
1.7	行列を使ったローレンツ変換	8
1.8	単位複四元数は高次元の回転	8
第 2 章	多元数による回転計算	10
2.1	複素数による回転計算	10
2.2	四元数による三次元の回転計算	10
2.3	超球の形をする宇宙	12
2.4	単位四元数の視覚化	12
2.5	四次元の回転計算は単純ではない	13
2.6	四元数の実軸からの回転	15
2.7	八元数の定義	17
2.8	八元数による四次元の回転計算	19
2.9	分解型八元数の定義	20
2.10	分解型八元数の角度	21
2.11	純虚分解型八元数の指数関数	22
2.12	分解型八元数による回転	23
第 3 章	多体シミュレーションにおける物理法則	24
3.1	時間進捗の考え方の導入	24
3.2	時間進捗で計算する内容	24
第 4 章	クリフォード代数の導入	25
4.1	クリフォード代数の構成	25
4.2	クリフォード代数による時空表現	25
4.3	クリフォード代数の積	26
4.4	クリフォード代数の内積と外積	27
4.5	クリフォード代数の共役	28
4.6	クリフォード代数の回転子	28
4.7	クリフォード代数のローレンツ変換	29
4.8	四元数の直積との対比	30
4.9	双四元数の内積と外積	31
4.10	双四元数による擬ユークリッド空間	32

第 5 章	クリフォード代数と一般相対性理論	34
5.1	斜交座標と基底ベクトル	34
5.2	クリフォード代数の時空超立方体	36
5.3	クリフォード代数での重力計算	39
第 6 章	二重時空理論の成立	50
6.1	二重時空理論での重力計算	50

第 1 章

複四元数による特殊相対性理論

1.1 複四元数とは

まず、複素数は以下のように定義されることを復習しましょう。

$$\text{Complex number} : \mathbb{C} := r_0 + r_1 i, \quad r_0, r_1 \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1 \quad (1.1)$$

四元数は以下のようになります。クォータニオンとも呼びます。

$$\text{Quaternion} : \mathbb{H} := r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k, \quad r_0, r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R} \\ i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad (1.2)$$

四元数の演算規則です。

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j, \quad ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j \quad (1.3)$$

複四元数とは四元数の 4 つの係数を複素数にしたもので、8 つの実数を内包します。

$$\text{Complex Quaternion} : \mathbb{H} \otimes \mathbb{C} := w_0 + w_1 i + w_2 j + w_3 k, \quad w_0, w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C} \\ = r_0 + r_1 I + (r_2 + r_3 I)i + (r_4 + r_5 I)j + (r_6 + r_7 I)k \\ r_0, \dots, r_7 \in \mathbb{R}, \quad I^2 = -1 \quad (1.4)$$

新たに導入した虚数 I と四元数部分の虚数 i, j, k は互いに干渉しません。

$$iI = Ii, \quad jI = Ij, \quad kI = Ik \quad (1.5)$$

1.2 複四元数の共役は 2 種類

複素数の共役と絶対値は以下のものでした。

$$w = r_0 + r_1 i, \quad w \in \mathbb{C} \\ \bar{w} = r_0 - r_1 i \\ |w| = \sqrt{w\bar{w}} = \sqrt{r_0^2 + r_1^2} \quad (1.6)$$

四元数での共役とノルムです。ここでは*を使って表現します。ノルムは絶対値の二乗とします。

$$h = r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k, \quad h \in \mathbb{H} \\ h^* = r_0 - r_1 i - r_2 j - r_3 k \\ N(h) = hh^* = r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \\ |h| = \sqrt{N(h)} = \sqrt{r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} \quad (1.7)$$

複四元数では共役は以下のように 2 種類が定義されます。

$$\begin{aligned}
b &= w_0 + w_1 i + w_2 j + w_3 k, \quad w_0, w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}, \quad b \in \mathbb{B} \\
&= r_0 + r_1 I + (r_2 + r_3 I) i + (r_4 + r_5 I) j + (r_6 + r_7 I) k, \quad r_0, \dots, r_7 \in \mathbb{R} \\
b^* &= w_0 - w_1 i - w_2 j - w_3 k \\
&= r_0 + r_1 I - (r_2 + r_3 I) i - (r_4 + r_5 I) j - (r_6 + r_7 I) k \\
\bar{b} &= \overline{w_0} + \overline{w_1} i + \overline{w_2} j + \overline{w_3} k \\
&= r_0 - r_1 I + (r_2 - r_3 I) i + (r_4 - r_5 I) j + (r_6 - r_7 I) k
\end{aligned} \tag{1.8}$$

複四元数のノルムの定義は四元数としての共役の定義を使用して定義します。

$$N(b) = bb^* = w_0^2 + w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 \tag{1.9}$$

1.3 複四元数で表現する特殊相対論的時空

複四元数の一部を使って相対論の 4 次元時空を表現できます。

$$\begin{aligned}
\text{Spacetime} : \mathbb{M} &:= \{m : m^* = \bar{m}\} \\
&= \{t + xIi + yIj + zIk, \quad t, x, y, z \in \mathbb{R}\}
\end{aligned} \tag{1.10}$$

ノルムが丁度不変量になります。

$$\text{Invariant} : mm^* = t^2 - x^2 - y^2 - z^2, \quad m \in \mathbb{M} \tag{1.11}$$

このような集合をミンコフスキー空間とも呼びます。

以下のような複四元数の集合を定義します。ノルムが 1 になるという意味で単位複四元数と呼びます。

$$\mathbb{G} := \{g : gg^* = 1, \quad g \in \mathbb{B}\} \tag{1.12}$$

するとローレンツ変換は以下の計算で成立します。

$$\text{Lorentz transformation} : T(m) = g^* m \bar{g}, \quad m \in \mathbb{M} \tag{1.13}$$

変換後の値も時空を表しています。

$$T(m) \in \mathbb{M} \tag{1.14}$$

変換後も不変量は変化しません。^{*1}

$$T(m)(T(m))^* = mm^* \tag{1.15}$$

以上のように、時空の不変量を変化させないように時空を変換する道具として複四元数が使えます。光速度不変の原理を壊すことなくローレンツ変換を行う複四元数の条件を得ています。任意の単位複四元数です。

1.4 特殊相対論的速度との関係

単位複四元数の集合全体について一般的に位相群を解明する事は困難です。しかし、その一部である $\mathbb{G} \cap \mathbb{M}$ については以下のように計算できることが分かっています。

三次元空間の方向を表現する単位四元数の集合を定義します。ノルムが 1 の純虚四元数となっており、ベルソルとも呼びます。

$$\begin{aligned}
\text{Versor} : \mathbb{V} &:= \{d : d = \sqrt{-1}, \quad d \in \mathbb{H}\} \\
&= \{d_1 i + d_2 j + d_3 k, \quad d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}, \quad d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 1\}
\end{aligned} \tag{1.16}$$

以下のように計算すると、 Id が分解型複素数 (Split-complex number) を表現している事が分かります。

$$(Id)^2 = I^2 d^2 = (-1)(-1) = +1 \tag{1.17}$$

^{*1} 簡潔な証明が可能です。 $N(g) = 1$ より、 $N(g^*) = 1$ も成り立ちます。従って、 $N(g^* m \bar{g}) = N(g^*) N(m) N(\bar{g}) = N(m)$ となります。

分解型複素数のオイラーの公式を調べてみます。

$$\begin{aligned}\exp(aId) &= \cosh a + Id \sinh a, \quad a \in \mathbb{R} \\ &\cosh a + (d_1 Ii + d_2 Ij + d_3 Ik) \sinh a\end{aligned}\tag{1.18}$$

この至宝の公式は四次元時空の集合の範囲内にあることがわかります。

$$\exp(aId) \in \mathbb{M}\tag{1.19}$$

四次元時空の双曲幾何学的な性質からこの公式内での速さは丁度以下になります。

$$\text{Speed} : v = c \tanh a, \quad c : \text{Speed of light}, \quad v \in \mathbb{R}\tag{1.20}$$

速さから逆に角度を求めると以下ようになります。この角度はラピディティという名前があります。

$$\text{Rapidity} : a = \operatorname{arctanh} \frac{|v|}{c}\tag{1.21}$$

ラピディティには単純な足し算が出来るというメリットがあります。

1.5 複四元数によるローレンツ変換の計算方法

四元数による回転計算からの類推で複四元数によるローレンツ変換の角度も半角化すれば丁度良いことがわかります。

$$g = \exp(0.5aId) \rightarrow g^* = \bar{g} = \exp(-0.5aId)\tag{1.22}$$

と置けば、

$$\begin{aligned}T(\exp(aId)) &= g^* \exp(aId) \bar{g} \\ &= \exp(-0.5aId) \exp(aId) \exp(-0.5aId) \\ &= \exp(-0.5aId + aId - 0.5aId) \\ &= 1\end{aligned}\tag{1.23}$$

この変換を複四元数の実数成分で表現してみると、

$$g = \exp(0.5aId) = r_0 + r_1 Ii + r_2 Ij + r_3 Ik\tag{1.24}$$

と置いて、

$$r_0 = \cosh 0.5a, \quad (r_1, r_2, r_3) = (d_1, d_2, d_3) \sinh 0.5a, \quad d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 1\tag{1.25}$$

となります。変換に使用する単位複四元数を得ました。変換元の四次元時空を

$$m = t + xIi + yIj + zIk\tag{1.26}$$

と置くと、

$$\begin{aligned}T(m) &= g^* m \bar{g} \\ &= (r_0 - r_1 Ii - r_2 Ij - r_3 Ik)(t + xIi + yIj + zIk)(r_0 - r_1 Ii - r_2 Ij - r_3 Ik) \\ &= (r_0 t - r_1 t Ii - r_2 t Ij - r_3 t Ik + r_0 x Ii - r_1 x Ii Ii - r_2 x Ij Ii - r_3 x Ik Ii + r_0 y Ij - r_1 y Ii Ij - r_2 y Ij Ij - r_3 y Ik Ij \\ &\quad + r_0 z Ik - r_1 z Ii Ik - r_2 z Ij Ik - r_3 z Ik Ik)(r_0 - r_1 Ii - r_2 Ij - r_3 Ik) \\ &= (r_0 t - r_1 t Ii - r_2 t Ij - r_3 t Ik + r_0 x Ii - r_1 x - r_2 x k + r_3 x j + r_0 y Ij + r_1 y k - r_2 y - r_3 y i \\ &\quad + r_0 z Ik + r_1 z j + r_2 z i - r_3 z)(r_0 - r_1 Ii - r_2 Ij - r_3 Ik) \\ &= (r_0 t - r_1 x - r_2 y - r_3 z + (r_2 z - r_3 y)i + (r_1 z + r_3 x)j + (r_1 y - r_2 x)k \\ &\quad + (r_0 x - r_1 t)Ii + (r_0 y - r_2 t)Ij + (r_0 z - r_3 t)Ik)(r_0 - r_1 Ii - r_2 Ij - r_3 Ik)\end{aligned}\tag{1.27}$$

$$\begin{aligned}
&= r_0^2 t - r_0 r_1 x - r_0 r_2 y - r_0 r_3 z + r_0(r_2 z - r_3 y)i + r_0(r_1 z + r_3 x)j + r_0(r_1 y - r_2 x)k \\
&\quad + r_0(r_0 x - r_1 t)Ii + r_0(r_0 y - r_2 t)Ij + r_0(r_0 z - r_3 t)Ik \\
&\quad + (-r_0 r_1 t + r_1^2 x + r_1 r_2 y + r_1 r_3 z)Ii + r_1(r_2 z - r_3 y)I + r_1(r_1 z + r_3 x)Ik - r_1(r_1 y - r_2 x)Ij \\
&\quad - r_1(r_0 x - r_1 t) - r_1(r_0 y - r_2 t)k + r_1(r_0 z - r_3 t)j \\
&\quad + (-r_0 r_2 t + r_1 r_2 x + r_2^2 y + r_2 r_3 z)Ij - r_2(r_2 z - r_3 y)Ik + r_2(r_1 z + r_3 x)I + r_2(r_1 y - r_2 x)Ii \\
&\quad + r_2(r_0 x - r_1 t)k - r_2(r_0 y - r_2 t) - r_2(r_0 z - r_3 t)i \\
&\quad + (-r_0 r_3 t + r_1 r_3 x + r_2 r_3 y + r_3^2 z)Ik + r_3(r_2 z - r_3 y)Ij - r_3(r_1 z + r_3 x)Ii + r_3(r_1 y - r_2 x)I \\
&\quad - r_3(r_0 x - r_1 t)j + r_3(r_0 y - r_2 t)i - r_3(r_0 z - r_3 t) \\
&= r_0^2 t - r_0 r_1 x - r_0 r_2 y - r_0 r_3 z - r_1(r_0 x - r_1 t) - r_2(r_0 y - r_2 t) - r_3(r_0 z - r_3 t) \\
&\quad + r_0(r_2 z - r_3 y)i - r_2(r_0 z - r_3 t)i + r_3(r_0 y - r_2 t)i \\
&\quad + r_0(r_1 z + r_3 x)j + r_1(r_0 z - r_3 t)j - r_3(r_0 x - r_1 t)j \\
&\quad + r_0(r_1 y - r_2 x)k - r_1(r_0 y - r_2 t)k + r_2(r_0 x - r_1 t)k \\
&\quad + r_1(r_2 z - r_3 y)I + r_2(r_1 z + r_3 x)I + r_3(r_1 y - r_2 x)I \\
&\quad + r_0(r_0 x - r_1 t)Ii + (-r_0 r_1 t + r_1^2 x + r_1 r_2 y + r_1 r_3 z)Ii + r_2(r_1 y - r_2 x)Ii - r_3(r_1 z + r_3 x)Ii \\
&\quad + r_0(r_0 y - r_2 t)Ij - r_1(r_1 y - r_2 x)Ij + (-r_0 r_2 t + r_1 r_2 x + r_2^2 y + r_2 r_3 z)Ij + r_3(r_2 z - r_3 y)Ij \\
&\quad + r_0(r_0 z - r_3 t)Ik + r_1(r_1 z + r_3 x)Ik - r_2(r_2 z - r_3 y)Ik + (-r_0 r_3 t + r_1 r_3 x + r_2 r_3 y + r_3^2 z)Ik
\end{aligned} \tag{1.28}$$

i, j, k, I の項はきれいに消えます。

$$\begin{aligned}
T(m) &= (r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)t - 2r_0(r_1 x + r_2 y + r_3 z) \\
&\quad + ((r_0^2 + r_1^2 - r_2^2 - r_3^2)x - 2r_1(r_0 t - r_2 y - r_3 z))Ii \\
&\quad + ((r_0^2 - r_1^2 + r_2^2 - r_3^2)y - 2r_2(r_0 t - r_1 x - r_3 z))Ij \\
&\quad + ((r_0^2 - r_1^2 - r_2^2 + r_3^2)z - 2r_3(r_0 t - r_1 x - r_2 y))Ik
\end{aligned} \tag{1.29}$$

従って、四次元時空各成分に注目したローレンツ変換は以下となります。

$$\begin{aligned}
t' &= (r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)t - 2r_0(r_1 x + r_2 y + r_3 z) \\
x' &= (r_0^2 + r_1^2 - r_2^2 - r_3^2)x - 2r_1(r_0 t - r_2 y - r_3 z) \\
y' &= (r_0^2 - r_1^2 + r_2^2 - r_3^2)y - 2r_2(r_0 t - r_1 x - r_3 z) \\
z' &= (r_0^2 - r_1^2 - r_2^2 + r_3^2)z - 2r_3(r_0 t - r_1 x - r_2 y)
\end{aligned} \tag{1.30}$$

コンピューターによる計算にとってはこの最適化が有用になるでしょう。

1.6 ラピディティによるもう一つの計算方法

ラピディティの足し算による計算方法もあります。以下のように変換対象の時空を定義します。

$$\begin{aligned}
mv &= \exp(qIp), \quad p = p_1 i + p_2 j + p_3 k \\
t &= \cosh q, \quad (x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) \sinh q \\
m &\in \mathbb{M}, \quad q, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}, \quad p \in \mathbb{D}
\end{aligned} \tag{1.31}$$

t, x, y, z から q, p_1, p_2, p_3 を算出する必要があり、方法はいくつか考えられますが、一つとしては以下のようになります。

$$q = \operatorname{arccosh} t, \quad (p_1, p_2, p_3) = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \tag{1.32}$$

この変換では原点座標ではゼロの除算になるので特別な配慮が必要です。

ここまで準備できればローレンツ変換は単純に加法減法になります。

変換した分の速度をラピディティ $a \in \mathbb{R}$ 方向 $d \in \mathbb{D}$ として、

$$\begin{aligned}
T(m) &= g^* m \bar{g} \\
&= \exp(-0.5aId) \exp(qIp) \exp(-0.5aId) \\
&= \exp((qp - ad)I)
\end{aligned} \tag{1.33}$$

全ての計算をラピディティで完結させることが出来ればこれ程単純な計算方法はないです。しかし、実際は現実世界の座標に以下のように変換する必要があります。

$$q'p' = qp - ad, \quad q' \in \mathbb{R}, \quad p' \in \mathbb{D}, \quad p' = p'_1 i + p'_2 j + p'_3 k \quad (1.34)$$

$$q' = |qp - ad|, \quad p' = \frac{qp - ad}{|qp - ad|} \quad (1.35)$$

$$t' = \cosh q', \quad (x', y', z') = (p'_1, p'_2, p'_3) \sinh q' \quad (1.36)$$

1.7 行列を使ったローレンツ変換

比較のために行列を使った算出方法を掲載しておきます。

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3), \quad v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R} \quad (1.37)$$

$$\beta = \frac{|\mathbf{v}|}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1.38)$$

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\frac{v_1}{c}\gamma & -\frac{v_2}{c}\gamma & -\frac{v_3}{c}\gamma \\ -\frac{v_1}{c}\gamma & 1 + \frac{v_1^2}{|\mathbf{v}|}(\gamma - 1) & \frac{v_1 v_2}{|\mathbf{v}|}(\gamma - 1) & \frac{v_1 v_3}{|\mathbf{v}|}(\gamma - 1) \\ -\frac{v_2}{c}\gamma & \frac{v_1 v_2}{|\mathbf{v}|}(\gamma - 1) & 1 + \frac{v_2^2}{|\mathbf{v}|}(\gamma - 1) & \frac{v_2 v_3}{|\mathbf{v}|}(\gamma - 1) \\ -\frac{v_3}{c}\gamma & \frac{v_1 v_3}{|\mathbf{v}|}(\gamma - 1) & \frac{v_2 v_3}{|\mathbf{v}|}(\gamma - 1) & 1 + \frac{v_3^2}{|\mathbf{v}|}(\gamma - 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

1.8 単位複四元数は高次元の回転

任意の複四元数 b_0, b_1 の積をその実数成分で表現しておきます。

$$\begin{aligned} b_0 &= p_0 + p_1 I + (p_2 + p_3 I)i + (p_4 + p_5 I)j + (p_6 + p_7 I)k, \quad p_0, \dots, p_7 \in \mathbb{R} \\ &= w_0 + w_1 i + w_2 j + w_3 k, \quad w_0, w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{H} \\ b_1 &= q_0 + q_1 I + (q_2 + q_3 I)i + (q_4 + q_5 I)j + (q_6 + q_7 I)k, \quad p_0, \dots, p_7 \in \mathbb{R} \\ &= u_0 + u_1 i + u_2 j + u_3 k, \quad u_0, u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{H} \end{aligned} \quad (1.40)$$

まずは、通常の高次元の乗算を行います。

$$\begin{aligned} b_0 b_1 &= (w_0 + w_1 i + w_2 j + w_3 k)(u_0 + u_1 i + u_2 j + u_3 k) \\ &= w_0 u_0 + w_0 u_1 i + w_0 u_2 j + w_0 u_3 k \\ &\quad + w_1 i u_0 + w_1 i u_1 i + w_1 i u_2 j + w_1 i u_3 k \\ &\quad + w_2 j u_0 + w_2 j u_1 i + w_2 j u_2 j + w_2 j u_3 k \\ &\quad + w_3 k u_0 + w_3 k u_1 i + w_3 k u_2 j + w_3 k u_3 k \\ &= w_0 u_0 + w_0 u_1 i + w_0 u_2 j + w_0 u_3 k \\ &\quad + w_1 u_0 i - w_1 u_1 + w_1 u_2 k - w_1 u_3 j \\ &\quad + w_2 u_0 j - w_2 u_1 k - w_2 u_2 + w_2 u_3 i \\ &\quad + w_3 u_0 k + w_3 u_1 j - w_3 u_2 i - w_3 u_3 \\ &= w_0 u_0 - w_1 u_1 - w_2 u_2 - w_3 u_3 \\ &\quad + (w_0 u_1 + w_1 u_0 + w_2 u_3 - w_3 u_2)i \\ &\quad + (w_0 u_2 - w_1 u_3 + w_2 u_0 + w_3 u_1)j \\ &\quad + (w_0 u_3 + w_1 u_2 - w_2 u_1 + w_3 u_0)k \end{aligned} \quad (1.41)$$

次に実数に展開します。

$$\begin{aligned}
b_0 b_1 &= (p_0 + p_1 I)(q_0 + q_1 I) - (p_2 + p_3 I)(q_2 + q_3 I) - (p_4 + p_5 I)(q_4 + q_5 I) - (p_6 + p_7 I)(q_6 + q_7 I) \\
&+ ((p_0 + p_1 I)(q_2 + q_3 I) + (p_2 + p_3 I)(q_0 + q_1 I) + (p_4 + p_5 I)(q_6 + q_7 I) - (p_6 + p_7 I)(q_4 + q_5 I))i \\
&+ ((p_0 + p_1 I)(q_4 + q_5 I) - (p_2 + p_3 I)(q_6 + q_7 I) + (p_4 + p_5 I)(q_0 + q_1 I) + (p_6 + p_7 I)(q_2 + q_3 I))j \\
&+ ((p_0 + p_1 I)(q_6 + q_7 I) + (p_2 + p_3 I)(q_4 + q_5 I) - (p_4 + p_5 I)(q_2 + q_3 I) + (p_6 + p_7 I)(q_0 + q_1 I))k
\end{aligned} \tag{1.42}$$

$$\begin{aligned}
&= (p_0 q_0 - p_1 q_1 + (p_0 q_1 + p_1 q_0)I) - (p_2 q_2 - p_3 q_3 + (p_2 q_3 + p_3 q_2)I) \\
&- (p_4 q_4 - p_5 q_5 + (p_4 q_5 + p_5 q_4)I) - (p_6 q_6 - p_7 q_7 + (p_6 q_7 + p_7 q_6)I) \\
&+ ((p_0 q_2 - p_1 q_3 + (p_0 q_3 + p_1 q_2)I) + (p_2 q_0 - p_3 q_1 + (p_2 q_1 + p_3 q_0)I) \\
&+ (p_4 q_6 - p_5 q_7 + (p_4 q_7 + p_5 q_6)I) - (p_6 q_4 - p_7 q_5 + (p_6 q_5 + p_7 q_4)I))i \\
&+ ((p_0 q_4 - p_1 q_5 + (p_0 q_5 + p_1 q_4)I) - (p_2 q_6 - p_3 q_7 + (p_2 q_7 + p_3 q_6)I) \\
&+ (p_4 q_0 - p_5 q_1 + (p_4 q_1 + p_5 q_0)I) + (p_6 q_2 - p_7 q_3 + (p_6 q_3 + p_7 q_2)I))j \\
&+ ((p_0 q_6 - p_1 q_7 + (p_0 q_7 + p_1 q_6)I) + (p_2 q_4 - p_3 q_5 + (p_2 q_5 + p_3 q_4)I) \\
&- (p_4 q_2 - p_5 q_3 + (p_4 q_3 + p_5 q_2)I) + (p_6 q_0 - p_7 q_1 + (p_6 q_1 + p_7 q_0)I))k
\end{aligned} \tag{1.43}$$

$$\begin{aligned}
&= p_0 q_0 - p_1 q_1 - p_2 q_2 + p_3 q_3 - p_4 q_4 + p_5 q_5 - p_6 q_6 + p_7 q_7 \\
&+ (p_0 q_1 + p_1 q_0 - p_2 q_3 - p_3 q_2 - p_4 q_5 - p_5 q_4 - p_6 q_7 - p_7 q_6)I \\
&+ (p_0 q_2 - p_1 q_3 + p_2 q_0 - p_3 q_1 + p_4 q_6 - p_5 q_7 - p_6 q_4 + p_7 q_5)i \\
&+ (p_0 q_3 + p_1 q_2 + p_2 q_1 + p_3 q_0 + p_4 q_7 + p_5 q_6 - p_6 q_5 - p_7 q_4)Ii \\
&+ (p_0 q_4 - p_1 q_5 - p_2 q_6 + p_3 q_7 + p_4 q_0 - p_5 q_1 + p_6 q_2 - p_7 q_3)j \\
&+ (p_0 q_5 + p_1 q_4 - p_2 q_7 - p_3 q_6 + p_4 q_1 + p_5 q_0 + p_6 q_3 + p_7 q_2)Ij \\
&+ (p_0 q_6 - p_1 q_7 + p_2 q_4 - p_3 q_5 - p_4 q_2 + p_5 q_3 + p_6 q_0 - p_7 q_1)k \\
&+ (p_0 q_7 + p_1 q_6 + p_2 q_5 + p_3 q_4 - p_4 q_3 - p_5 q_2 + p_6 q_1 + p_7 q_0)Ik
\end{aligned} \tag{1.44}$$

複四元数のノルムを実数成分で表しておく以下ようになります。

$$g = a_0 + a_1 I + (a_2 + a_3 I)i + (a_4 + a_5 I)j + (a_6 + a_7 I)k, \quad a_0, \dots, a_7 \in \mathbb{R} \tag{1.45}$$

$$\begin{aligned}
gg^* &= (a_0 + a_1 I)^2 + (a_2 + a_3 I)^2 + (a_4 + a_5 I)^2 + (a_6 + a_7 I)^2 \\
&= a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 + a_4^2 - a_5^2 + a_6^2 - a_7^2 + 2(a_0 a_1 + a_2 a_3 + a_4 a_5 + a_6 a_7)I
\end{aligned} \tag{1.46}$$

参考までに

$$gg^* = 1 \iff \begin{cases} a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 + a_4^2 - a_5^2 + a_6^2 - a_7^2 = 1 \\ a_0 a_1 + a_2 a_3 + a_4 a_5 + a_6 a_7 = 0 \end{cases} \tag{1.47}$$

複四元数のノルムは複四元数の積に対して乗法的である事が示せます。つまり、任意の複四元数 (b_0, b_1) に対して次の式が成り立ちます。

$$N(b_0 b_1) = N(b_0)N(b_1) \tag{1.48}$$

幸いな事に実数に展開しなくても証明できます。

$$N(b_0 b_1) = (b_0 b_1)(b_0 b_1)^* = b_0 b_1 b_1^* b_0^* = b_0 N(b_1) b_0^* = N(b_1) b_0 b_0^* = N(b_1) N(b_0) = N(b_0) N(b_1) \tag{1.49}$$

b_0 と b_1 のノルムがどちらも 1 の場合、

$$b_0, b_1 \in \mathbb{G} \iff N(b_0) = N(b_1) = 1 \iff N(b_0 b_1) = 1 \tag{1.50}$$

従って、単位複四元数の乗算は回転を意味しています。双曲的な高次元の角度となっています。

特殊相対性理論のローレンツ変換は光速を 1 とした場合、三次元の角度と捉える事ができます。それを回転させる単位複四元数についても角度でありますから、ここまでの所は物理的有意性のある計量として角度のみでの記述が可能という事になります。

第 2 章

多元数による回転計算

2.1 複素数による回転計算

オイラーの公式により角度と絶対値が 1 の複素数の関係が明らかになっています。

$$\exp(aI) = \cos a + I \sin a, \quad a \in \mathbb{R}, \quad I^2 = -1 \quad (2.1)$$

$$|\exp(aI)| = \sqrt{\cos^2 a + \sin^2 a} = 1 \quad (2.2)$$

ここでは複素数の虚数単位をあえて I で表現しています。

任意の二次元座標 (x, y) を原点回りに角度 a 回転させる計算は、 $x + yI$, $x, y \in \mathbb{R}$ を構築して、

$$x' + y'I = (x + yI) \exp(aI) \quad (2.3)$$

で算出できます。

2.2 四元数による三次元の回転計算

任意の三次元座標を原点回りに回転させる計算は二次元ほど単純ではありません。二次元での回転と違いどの方向に回転させるかのパラメーターも必要になります。行列を使って三次元の回転の計算をすることは一応できますが、ジンバルロックの問題を回避して完全な回転計算を行うには四元数を使う計算が必須になります。

身近な例で言うと、天と地の軸が定まっている 3D ゲームでは四元数は必須ではないですが、宙返りを自由に行うフライトシミュレーターでは四元数は必須になってきます。ゲームエンジンのライブラリに含まれる Quaternion クラスには四元数による回転計算が完全に実装されていない例があるようです。その場合、以下の計算方法を独自に実装する必要があります。

方向を表す三次元単位ベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} があり、 \mathbf{a} から \mathbf{b} の方向に $t \in \mathbb{R}$ の割合だけ回転させる計算は以下のようになります。この計算方法は球面線形補間 (Slerp) と呼ばれます。

\mathbf{a} と \mathbf{b} の成す角度 θ を内積から求めます。

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (a_x, a_y, a_z), \quad \mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z), \quad a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z \in \mathbb{R} \\ \theta &= \arccos(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \arccos(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z), \quad \theta \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2.4)$$

回転軸^{*1}を表す三次元単位ベクトルを外積から求めます。

$$\mathbf{w}_{cross} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = a_y b_z - a_z b_y, \quad a_z b_x - a_x b_z, \quad a_x b_y - a_y b_x \quad (2.5)$$

この外積の結果を正規化し単位ベクトルにしておきます。

$$\mathbf{w}_{unit} = \frac{\mathbf{w}_{cross}}{|\mathbf{w}_{cross}|} \quad (2.6)$$

この計算では \mathbf{a} と \mathbf{b} が一致する場合と正反対を向く場合については特別な配慮が必要です。

^{*1} 一般的に N 次元の回転軸は $N - 1$ 次元になります。プログラム中の名称は axis。

この回転軸をベルソル化しておきます。

$$w = \mathbf{w}_{unit} \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} = w_x i + w_y j + w_z k, \quad w \in \mathbb{V} \quad (2.7)$$

回転子^{*2}としての四元数は以下のように構成されます。^{*3}

$$h = \exp(-0.5t\theta w) = \cos 0.5t\theta - w \sin 0.5t\theta, \quad h \in \mathbb{H} \quad (2.8)$$

回転させたい三次元座標 (x, y, z) を純虚四元数化させておきます。^{*4}

$$f = xi + yj + zk \quad (2.9)$$

回転後の三次元座標 (x', y', z') は、

$$x'i + y'j + z'k = h^* f h \quad (2.10)$$

という計算で算出できます。右側を共役として説明される場合もありますが、どちらでも回転計算はできます。

コンピューターでの計算速度を考えると実数成分に展開して最適化しておいた方が良さそうです。

$h = r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k$ と置いて、

$$\begin{aligned} h^* f h &= (r_0 - r_1 i - r_2 j - r_3 k)(xi + yj + zk)(r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k) \\ &= (r_0 xi + r_0 yj + r_0 zk + r_1 x - r_1 yk + r_1 zj + r_2 xk + r_2 y - r_2 zi - r_3 xj + r_3 yi + r_3 z) \\ &\quad (r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k) \\ &= (r_1 x + r_2 y + r_3 z + (r_0 x - r_2 z + r_3 y)i + (r_0 y - r_3 x + r_1 z)j + (r_0 z - r_1 y + r_2 x)k) \\ &\quad (r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k) \\ &= (r_1 x + r_2 y + r_3 z)r_0 + (r_1 x + r_2 y + r_3 z)r_1 i + (r_1 x + r_2 y + r_3 z)r_2 j + (r_1 x + r_2 y + r_3 z)r_3 k \\ &\quad + (r_0 x - r_2 z + r_3 y)r_0 i - (r_0 x - r_2 z + r_3 y)r_1 + (r_0 x - r_2 z + r_3 y)r_2 k - (r_0 x - r_2 z + r_3 y)r_3 j \\ &\quad + (r_0 y - r_3 x + r_1 z)r_0 j - (r_0 y - r_3 x + r_1 z)r_1 k - (r_0 y - r_3 x + r_1 z)r_2 + (r_0 y - r_3 x + r_1 z)r_3 i \\ &\quad + (r_0 z - r_1 y + r_2 x)r_0 k + (r_0 z - r_1 y + r_2 x)r_1 j - (r_0 z - r_1 y + r_2 x)r_2 i - (r_0 z - r_1 y + r_2 x)r_3 \\ &= r_0 r_1 x + r_0 r_2 y + r_0 r_3 z - r_0 r_1 x - r_1 r_2 z + r_1 r_3 y - r_0 r_2 y - r_2 r_3 x + r_1 r_2 z - r_0 r_3 z - r_1 r_3 y + r_2 r_3 x \\ &\quad + (r_1^2 x + r_1 r_2 y + r_1 r_3 z)i + (r_0^2 x - r_0 r_2 z + r_0 r_3 y)i + (r_0 r_3 y - r_3^2 x + r_1 r_3 z)i - (r_0 r_2 z - r_1 r_2 y + r_2^2 x)i \\ &\quad + (r_1 r_2 x + r_2^2 y + r_2 r_3 z)j - (r_0 r_3 x - r_2 r_3 z + r_3^2 y)j + (r_0^2 y - r_0 r_3 x + r_0 r_1 z)j + (r_0 r_1 z - r_1^2 y + r_1 r_2 x)j \\ &\quad + (r_1 r_3 x + r_2 r_3 y + r_3^2 z)k + (r_0 r_2 x - r_2^2 z + r_2 r_3 y)k - (r_0 r_1 y - r_1 r_3 x + r_1^2 z)k + (r_0^2 z - r_0 r_1 y + r_0 r_2 x)k \end{aligned} \quad (2.11)$$

ここでスカラーパートはきれいに消えます。^{*5}

$$\begin{aligned} h^* f h &= (r_1^2 x + r_1 r_2 y + r_1 r_3 z + r_0^2 x - r_0 r_2 z + r_0 r_3 y + r_0 r_3 y - r_3^2 x + r_1 r_3 z - r_0 r_2 z + r_1 r_2 y - r_2^2 x)i \\ &\quad + (r_1 r_2 x + r_2^2 y + r_2 r_3 z - r_0 r_3 x + r_2 r_3 z - r_3^2 y + r_0^2 y - r_0 r_3 x + r_0 r_1 z + r_0 r_1 z - r_1^2 y + r_1 r_2 x)j \\ &\quad + (r_1 r_3 x + r_2 r_3 y + r_3^2 z + r_0 r_2 x - r_2^2 z + r_2 r_3 y - r_0 r_1 y + r_1 r_3 x - r_1^2 z + r_0^2 z - r_0 r_1 y + r_0 r_2 x)k \\ &= (r_1^2 x + r_0^2 x - r_3^2 x - r_2^2 x + r_1 r_2 y + r_0 r_3 y + r_0 r_3 y + r_1 r_2 y + r_1 r_3 z - r_0 r_2 z + r_1 r_3 z - r_0 r_2 z)i \\ &\quad + (r_1 r_2 x - r_0 r_3 x - r_0 r_3 x + r_1 r_2 x + r_2^2 y - r_3^2 y + r_0^2 y - r_1^2 y + r_2 r_3 z + r_2 r_3 z + r_0 r_1 z + r_0 r_1 z)j \\ &\quad + (r_1 r_3 x + r_0 r_2 x + r_1 r_3 x + r_0 r_2 x + r_2 r_3 y + r_2 r_3 y - r_0 r_1 y - r_0 r_1 y + r_3^2 z - r_2^2 z - r_1^2 z + r_0^2 z)k \\ &= ((r_0^2 + r_1^2 - r_2^2 - r_3^2)x + 2((r_1 r_2 + r_0 r_3)y + (r_1 r_3 - r_0 r_2)z))i \\ &\quad + ((r_0^2 - r_1^2 + r_2^2 - r_3^2)y + 2((r_1 r_2 - r_0 r_3)x + (r_2 r_3 + r_0 r_1)z))j \\ &\quad + ((r_0^2 - r_1^2 - r_2^2 + r_3^2)z + 2((r_1 r_3 + r_0 r_2)x + (r_2 r_3 - r_0 r_1)y))k \end{aligned} \quad (2.12)$$

最終的に、三次元座標の単位四元数による回転は以下の式になります。

$$\begin{aligned} x' &= (r_0^2 + r_1^2 - r_2^2 - r_3^2)x + 2((r_1 r_2 + r_0 r_3)y + (r_1 r_3 - r_0 r_2)z) \\ y' &= (r_0^2 - r_1^2 + r_2^2 - r_3^2)y + 2((r_1 r_2 - r_0 r_3)x + (r_2 r_3 + r_0 r_1)z) \\ z' &= (r_0^2 - r_1^2 - r_2^2 + r_3^2)z + 2((r_1 r_3 + r_0 r_2)x + (r_2 r_3 - r_0 r_1)y) \end{aligned} \quad (2.13)$$

^{*2} プログラム中の名称は rotator。

^{*3} h のノルムは 1 になっていますので、 h は単位四元数です。

^{*4} 純虚四元数とは実数部分がゼロになっている四元数の事で四元数のベクトルパートとも呼ばれます。

^{*5} 四元数の実数部分をスカラーパートと呼びます。

CG のコンピューティングではあらかじめこの計算をしておき四次元行列に組み込む事になるでしょう。

2.3 超球の形をする宇宙

三次元での回転については球の表面で描くことができるので想像しやすいです。例えば地球の表面については経度と緯度の二次元で表現できます。同様に、四次元単位ベクトルの回転についても三次元で表現できます。三次元超球面 (3-sphere) ^{*6}という言葉を使います。グロームとも呼ばれています。グロームは宇宙空間そのものであると考えられており、一般相対性理論をグロームに適用すると時間と共に宇宙が拡大しているという結論が導き出されるのでよく議論の対象になります。グロームは四次元単位ベクトルに相当します。従って、四次元単位ベクトルの回転計算とは宇宙空間における移動そのものと考えられます。さらに、四次元単位ベクトルは単位四元数に相当するので、単位四元数の回転が宇宙空間の移動であるとする事もできます。

整理すると、三次元超球面 (3-sphere)=グローム (glome)=四次元単位ベクトル=単位四元数=宇宙空間となります。

$$\begin{aligned} 3\text{-sphere} : \mathbb{S} &:= \{s : ss^* = 1, \quad s \in \mathbb{H}\} \\ &= \{\exp(ae) = \cos a + e \sin a, \quad a \in \mathbb{R}, \quad e \in \mathbb{V}\} \end{aligned} \quad (2.14)$$

地球上での移動が実は平面的でなく球の上を曲がって移動しているように、宇宙空間での移動も四次元内の超球面を曲がって移動していると考えられます。宇宙が巨大なのでそれを観測することが難しいのです。このビジョンでは宇宙の果てには壁はなく逆方向から元の位置に戻ってくる事になります。地上での移動の本質が経度と緯度の角度であると同様に宇宙空間での移動も本質は角度である事に注目してください。

2.4 単位四元数の視覚化

四次元の回転を視覚化して直感的に把握するようにしたい所です。単位四元数の指数関数によって三次元空間に三次元超球面をプロットする事ができます。

以下の計算で単位四元数を三次元化できます。

$$\begin{aligned} s &= s_0 + s_1i + s_2j + s_3k, \quad s \in \mathbb{S} \mapsto (x, y, z) \\ v &= s_1i + s_2j + s_3k \\ xi + yj + zk &= \frac{v}{|v|} \arccos s_0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

ただし、コンピューターでの計算では誤差や値域の関係から、`atan2()` を使った方が良いです。

$$xi + yj + zk = \frac{v}{|v|} \text{atan2}(|v|, s_0) \quad (2.16)$$

また、四元数の指数関数について以下のように変形しておくとイメージしやすいです。普通に四元数 $h = a + bi + cj + dk$ の指数関数を求めると、

$$\exp(h) = \exp(a) \left(\cos \sqrt{b^2 + c^2 + d^2} + \frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \sin \sqrt{b^2 + c^2 + d^2} \right) \quad (2.17)$$

という形になりますが、予め $\theta = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2}$ と置いて整理しておくと、

$$h = a + bi + cj + dk = a + \theta v, \quad v \in \mathbb{V} \quad (2.18)$$

$$\exp(h) = \exp(a + \theta v) = \exp(a)(\cos \theta + v \sin \theta) \quad (2.19)$$

というように簡潔になります。特に純虚四元数ではさらに簡潔になります。

$$\exp(\theta v) = \cos \theta + v \sin \theta \quad (2.20)$$

三次元方向が v で移動量が θ というイメージで把握できるようになります。

また、以下のように計算すれば三次元の角度になるのではないかと思われるかもしれませんが、実際に計算をしてみると似て非なる物になります。

$$\exp(xi) \exp(yj) \exp(zk) \quad (2.21)$$

^{*6} ここで言う三次元超球面は球の中心が原点にあり半径 1 の超球の事です。

2.5 四次元の回転計算は単純ではない

四次元を四元数を使って回転させる事はできるのでしょうか？

まず、単純に複素数の回転の計算方法でどうなるのかを見てみましょう。回転させたい四次元ベクトルを四元数で $h = h_0 + h_1i + h_2j + h_3k$ 、回転角を $\theta \in \mathbb{R}$ 、回転方向を $v \in \mathbb{V}$ と定義すると、回転後の単位四元数 $h' = h'_0 + h'_1i + h'_2j + h'_3k$ は、

$$\begin{aligned} x' &= x \exp(\theta v) \\ h'_0 + h'_1i + h'_2j + h'_3k &= (h_0 + h_1i + h_2j + h_3k) \exp(\theta v) \end{aligned} \quad (2.22)$$

となる事が期待されます。この乗算では確かに矛盾なく循環するように見えますが、回転して欲しい方向以外の回転も含まれてしまうので、捻りが加わってしまう事になります。単位四元数の視覚化を使うと良く分かります。

より一般的な四元数による回転は等斜線分解 (Isoclinic decomposition) により表現できると考えられています。

$$h'_0 + h'_1i + h'_2j + h'_3k = \exp(au)(h_0 + h_1i + h_2j + h_3k) \exp(bv), \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad u, v \in \mathbb{V} \quad (2.23)$$

単位四元数を指数関数形式で表現しています。2つの直交する回転面とその回転面上の2つの回転角により四次元の回転になるという事なので、ベルソル u, v は直交し内積が0という条件が加わる事になると考えられます。

$$u \perp v \iff u \cdot v = 0 \quad (2.24)$$

指数関数の式で表すと等斜線分解では回転として5つの角度になっているという事が分かります。まず u を決めるのに2角度です。直交する v を決めるのに1角度で、角度 a, b の合計で5角度です。

では、具体的にどのように回転面と回転角を解釈すれば良いのでしょうか？三次元超球面を自由に航海したいのです。この数式だけでは実用的な航海術としては満足できる物ではありません。より詳しく調査を進めていきましょう。まず四次元の2要素だけを考え、式を展開してみます。まず以下のように素材を置きます。

$$h = h_0 + h_1i + h_2j + h_3k \mapsto h' = h'_0 + h'_1i + h'_2j + h'_3k \quad (2.25)$$

$$a^2 + b^2 = 1, \quad a = \cos \frac{\theta}{2}, \quad b = \sin \frac{\theta}{2}, \quad a, b, \theta \in \mathbb{R} \quad (2.26)$$

倍角の公式から

$$a^2 - b^2 = \cos \theta, \quad 2ab = \sin \theta \quad (2.27)$$

色々な組み合わせが考えられますが、以下について計算すると h_3 から h_2 方向への回転が得られます。

$$\begin{aligned} & (a - bi)(h_0 + h_1i + h_2j + h_3k)(a + bi) \\ &= (ah_0 + ah_1i + ah_2j + ah_3k - bh_0i + bh_1 - bh_2k + bh_3j)(a + bi) \\ &= a^2h_0 + a^2h_1i + a^2h_2j + a^2h_3k - abh_0i + abh_1 - abh_2k + abh_3j \\ &\quad + abh_0i - abh_1 - abh_2k + abh_3j + b^2h_0 + b^2h_1i - b^2h_2j - b^2h_3k \\ &= a^2h_0 + abh_1 - abh_1 + b^2h_0 + a^2h_1i - abh_0i + abh_0i + b^2h_1i \\ &\quad + a^2h_2j + abh_3j + abh_3j - b^2h_2j + a^2h_3k - abh_2k - abh_2k - b^2h_3k \\ &= a^2h_0 + b^2h_0 + a^2h_1i + b^2h_1i \\ &\quad + a^2h_2j + 2ab h_3j - b^2h_2j + a^2h_3k - 2ab h_2k - b^2h_3k \\ &= h_0 + h_1i + ((a^2 - b^2)h_2 + 2ab h_3)j + ((a^2 - b^2)h_3 - 2ab h_2)k \\ &= h_0 + h_1i + (h_2 \cos \theta + h_3 \sin \theta)j + (h_3 \cos \theta - h_2 \sin \theta)k \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{pmatrix} h'_2 \\ h'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

同様に

$$\begin{aligned}
& (a - bj)(h_0 + h_1i + h_2j + h_3k)(a + bj) \\
&= (ah_0 + ah_1i + ah_2j + ah_3k - bh_0j + bh_1k + bh_2 - bh_3i)(a + bj) \\
&= a^2h_0 + a^2h_1i + a^2h_2j + a^2h_3k - abh_0j + abh_1k + abh_2 - abh_3i \\
&\quad + abh_0j + abh_1k - abh_2 - abh_3i + b^2h_0 - b^2h_1i + b^2h_2j - b^2h_3k \\
&= a^2h_0 + abh_2 - abh_2 + b^2h_0 + a^2h_1i - abh_3i - abh_3i - b^2h_1i \\
&\quad + a^2h_2j - abh_0j + abh_0j + b^2h_2j + a^2h_3k + abh_1k + abh_1k - b^2h_3k \\
&= h_0 + ((a^2 - b^2)h_1 - 2abh_3)i + h_2j + ((a^2 - b^2)h_3 + 2abh_1)k \\
&= h_0 + (h_1 \cos \theta - h_3 \sin \theta)i + h_2j + (h_3 \cos \theta + h_1 \sin \theta)k
\end{aligned} \tag{2.30}$$

$$\begin{pmatrix} h'_1 \\ h'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_3 \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

h_1 から h_3 方向への回転になります。

$$\begin{aligned}
& (a - bk)(h_0 + h_1i + h_2j + h_3k)(a + bk) \\
&= (ah_0 + ah_1i + ah_2j + ah_3k - bh_0k - bh_1j + bh_2i + bh_3)(a + bk) \\
&= a^2h_0 + a^2h_1i + a^2h_2j + a^2h_3k - abh_0k - abh_1j + abh_2i + abh_3 \\
&\quad + abh_0k - abh_1j + abh_2i - abh_3 + b^2h_0 - b^2h_1i - b^2h_2j + b^2h_3k \\
&= a^2h_0 + abh_3 - abh_3 + b^2h_0 + a^2h_1i + abh_2i + abh_2i - b^2h_1i \\
&\quad + a^2h_2j - abh_1j - abh_1j - b^2h_2j + a^2h_3k - abh_0k + abh_0k + b^2h_3k \\
&= h_0 + ((a^2 - b^2)h_1 + 2abh_2)i + ((a^2 - b^2)h_2 - 2abh_1)j + h_3k \\
&= h_0 + (h_1 \cos \theta + h_2 \sin \theta)i + (h_2 \cos \theta - h_1 \sin \theta)j + h_3k
\end{aligned} \tag{2.32}$$

$$\begin{pmatrix} h'_1 \\ h'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

h_2 から h_1 方向への回転になります。

この三つの回転角を座標軸 x, y, z として移動を考えてみましょう。

$$x, y, z \in \mathbb{R} \tag{2.34}$$

$$e_x = \exp\left(\frac{x}{2}i\right) = \cos \frac{x}{2} + i \sin \frac{x}{2} = a_x + b_x i \tag{2.35}$$

$$e_y = \exp\left(\frac{y}{2}j\right) = \cos \frac{y}{2} + j \sin \frac{y}{2} = a_y + b_y j \tag{2.36}$$

$$e_z = \exp\left(\frac{z}{2}k\right) = \cos \frac{z}{2} + k \sin \frac{z}{2} = a_z + b_z k \tag{2.37}$$

と置くと、任意の四元数 h の x, y, z 方向への移動とは

$$h' = e_z^* e_y^* e_x^* h e_x e_y e_z \tag{2.38}$$

四元数 $h = h_0 + h_1i + h_2j + h_3k$ のベクトルパートについては $h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 > 0$ の条件が有意な空間表現の為に必要なことが直ちに分かります。つまり、スカラーパートだけの四元数から移動を開始する事ができません。何か様子がおかしいですがこのまま進めてみます。 h のノルムについては特に制限はなさそうです。 h' を実成分で展開してみます。

$$\begin{aligned}
e_z^* e_y^* e_x^* &= (a_z - b_z k)(a_y - b_y j)(a_x - b_x i) \\
&= (a_y a_z - a_z b_y j - a_y b_z k - b_y b_z i)(a_x - b_x i) \\
&= a_x a_y a_z - a_y a_z b_x i - a_x a_z b_y j - a_z b_x b_y k - a_x a_y b_z k + a_y b_x b_z j - a_x b_y b_z i - b_x b_y b_z \\
&= a_x a_y a_z - b_x b_y b_z - (a_x b_y b_z + a_y a_z b_x)i - (a_x a_z b_y - a_y b_x b_z)j - (a_x a_y b_z + a_z b_x b_y)k
\end{aligned} \tag{2.39}$$

右側は

$$\begin{aligned}
e_x e_y e_z &= (a_x + b_x i)(a_y + b_y j)(a_z + b_z k) \\
&= (a_x a_y + a_x b_y j + a_y b_x i + b_x b_y k)(a_z + b_z k) \\
&= a_x a_y a_z + a_x a_y b_z k + a_x a_z b_y j + a_x b_y b_z i + a_y a_z b_x i - a_y b_x b_z j + a_z b_x b_y k - b_x b_y b_z \\
&= a_x a_y a_z - b_x b_y b_z + (a_x b_y b_z + a_y a_z b_x)i + (a_x a_z b_y - a_y b_x b_z)j + (a_x a_y b_z + a_z b_x b_y)k
\end{aligned} \tag{2.40}$$

ここで

$$e_0 = a_x a_y a_z - b_x b_y b_z, \quad e_1 = a_x b_y b_z + a_y a_z b_x, \quad e_2 = a_x a_z b_y - a_y b_x b_z, \quad e_3 = a_x a_y b_z + a_z b_x b_y \quad (2.41)$$

と置くと

$$h' = (e_0 - e_1 i - e_2 j - e_3 k) h (e_0 + e_1 i + e_2 j + e_3 k) \quad (2.42)$$

互いに共役な四元数にまとめました。さらに展開して

$$\begin{aligned} e_z^* e_y^* e_x^* h &= (e_0 - e_1 i - e_2 j - e_3 k)(h_0 + h_1 i + h_2 j + h_3 k) \\ &= e_0 h_0 + e_0 h_1 i + e_0 h_2 j + e_0 h_3 k - e_1 h_0 i + e_1 h_1 - e_1 h_2 k + e_1 h_3 j \\ &\quad - e_2 h_0 j + e_2 h_1 k + e_2 h_2 - e_2 h_3 i - e_3 h_0 k - e_3 h_1 j + e_3 h_2 i + e_3 h_3 \\ &= e_0 h_0 + e_1 h_1 + e_2 h_2 + e_3 h_3 + (e_0 h_1 - e_1 h_0 - e_2 h_3 + e_3 h_2) i \\ &\quad + (e_0 h_2 + e_1 h_3 - e_2 h_0 - e_3 h_1) j + (e_0 h_3 - e_1 h_2 + e_2 h_1 - e_3 h_0) k \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} h' &= (e_0 h_0 + e_1 h_1 + e_2 h_2 + e_3 h_3 + (e_0 h_1 - e_1 h_0 - e_2 h_3 + e_3 h_2) i \\ &\quad + (e_0 h_2 + e_1 h_3 - e_2 h_0 - e_3 h_1) j + (e_0 h_3 - e_1 h_2 + e_2 h_1 - e_3 h_0) k)(e_0 + e_1 i + e_2 j + e_3 k) \\ &= e_0^2 h_0 + e_0 e_1 h_1 + e_0 e_2 h_2 + e_0 e_3 h_3 + (e_0^2 h_1 - e_0 e_1 h_0 - e_0 e_2 h_3 + e_0 e_3 h_2) i \\ &\quad + (e_0^2 h_2 + e_0 e_1 h_3 - e_0 e_2 h_0 - e_0 e_3 h_1) j + (e_0^2 h_3 - e_0 e_1 h_2 + e_0 e_2 h_1 - e_0 e_3 h_0) k \\ &\quad + (e_0 e_1 h_0 + e_1^2 h_1 + e_1 e_2 h_2 + e_1 e_3 h_3) i - (e_0 e_1 h_1 - e_1^2 h_0 - e_1 e_2 h_3 + e_1 e_3 h_2) \\ &\quad - (e_0 e_1 h_2 + e_1^2 h_3 - e_1 e_2 h_0 - e_1 e_3 h_1) k + (e_0 e_1 h_3 - e_1^2 h_2 + e_1 e_2 h_1 - e_1 e_3 h_0) j \\ &\quad + (e_0 e_2 h_0 + e_1 e_2 h_1 + e_2^2 h_2 + e_2 e_3 h_3) j + (e_0 e_2 h_1 - e_1 e_2 h_0 - e_2^2 h_3 + e_2 e_3 h_2) k \\ &\quad - (e_0 e_2 h_2 + e_1 e_2 h_3 - e_2^2 h_0 - e_2 e_3 h_1) - (e_0 e_2 h_3 - e_1 e_2 h_2 + e_2^2 h_1 - e_2 e_3 h_0) i \\ &\quad + (e_0 e_3 h_0 + e_1 e_3 h_1 + e_2 e_3 h_2 + e_3^2 h_3) k - (e_0 e_3 h_1 - e_1 e_3 h_0 - e_2 e_3 h_3 + e_3^2 h_2) j \\ &\quad + (e_0 e_3 h_2 + e_1 e_3 h_3 - e_2 e_3 h_0 - e_3^2 h_1) i - (e_0 e_3 h_3 - e_1 e_3 h_2 + e_2 e_3 h_1 - e_3^2 h_0) \\ &= (e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) h_0 \\ &\quad + ((e_0^2 + e_1^2 - e_2^2 - e_3^2) h_1 + 2(e_0 e_3 + e_1 e_2) h_2 + 2(e_1 e_3 - e_0 e_2) h_3) i \\ &\quad + (2(e_1 e_2 - e_0 e_3) h_1 + (e_0^2 - e_1^2 + e_2^2 - e_3^2) h_2 + 2(e_0 e_1 + e_2 e_3) h_3) j \\ &\quad + (2(e_0 e_2 + e_1 e_3) h_1 + 2(e_2 e_3 - e_0 e_1) h_2 + (e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 + e_3^2) h_3) k \end{aligned} \quad (2.44)$$

ここで e_0, e_1, e_2, e_3 の置き方から $e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$ なので

$$\begin{aligned} h'_0 &= h_0 \\ h'_1 &= (e_0^2 + e_1^2 - e_2^2 - e_3^2) h_1 + 2(e_0 e_3 + e_1 e_2) h_2 + 2(e_1 e_3 - e_0 e_2) h_3 \\ h'_2 &= 2(e_1 e_2 - e_0 e_3) h_1 + (e_0^2 - e_1^2 + e_2^2 - e_3^2) h_2 + 2(e_0 e_1 + e_2 e_3) h_3 \\ h'_3 &= 2(e_0 e_2 + e_1 e_3) h_1 + 2(e_2 e_3 - e_0 e_1) h_2 + (e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 + e_3^2) h_3 \end{aligned} \quad (2.45)$$

h, h' は単位四元数ではないですが、ノルムは保存されます。

$$N(h') = N(h) \quad (2.46)$$

$h'_0 = h_0$ なので

$$h_1'^2 + h_2'^2 + h_3'^2 = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 \quad (2.47)$$

これは三次元内の球の表面の移動を意味しています。四次元の計算のつもりが三次元になってしまいました。この数式は三次元の回転計算としては有用そうです。しかし、四次元の回転計算にはならない事が分かりました。

以上から等斜線分解の計算式で互いに共役な単位四元数を左右にセットすると三次元の回転になる事が、実成分に展開して確認できましたが、求める航海術は得られませんでした。

2.6 四元数の実軸からの回転

改めて等斜線分解の計算式を考えてみます。指数関数を使うと以下のように変形できます。

$$\begin{aligned} N(h') \exp(\theta' w') &= N(h) \exp(au) \exp(\theta w) \exp(bv) \\ a, b, \theta, \theta' &\in \mathbb{R}, \quad u, v, w, w' \in \mathbb{V} \end{aligned} \quad (2.48)$$

$N(h') = N(h) \in \mathbb{R}$ なので結局は

$$\exp(\theta' w') = \exp(au) \exp(\theta w) \exp(bv) \quad (2.49)$$

指数関数を外すと

$$\theta' w' = au + \theta w + bv \quad (2.50)$$

ここで以下のように置いて

$$\begin{aligned} u &= u_1 i + u_2 j + u_3 k, & v &= v_1 i + v_2 j + v_3 k, & w &= w_1 i + w_2 j + w_3 k \\ u, v &\in \mathbb{V}, & u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3 &\in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2.51)$$

実軸から i 軸への回転だけを表すようになる条件は

$$\begin{aligned} \theta' w'_1 &= au_1 + \theta w_1 + bv_1 \\ \theta' w'_2 &= \theta w_2 \\ \theta' w'_3 &= \theta w_3 \end{aligned} \quad (2.52)$$

になるようにするのだから

$$au_2 + bv_2 = 0 \quad \wedge \quad au_3 + bv_3 = 0 \iff au_2 = -bv_2 \quad \wedge \quad au_3 = -bv_3 \quad (2.53)$$

つまり以下のような j, k に関してだけ共役な単位四元数のペアによる変換式になります。

$$h' = \exp(au_1 i - bv_2 j - bv_3 k) h \exp(bv_1 i + bv_2 j + bv_3 k) \quad (2.54)$$

直交条件から

$$\begin{aligned} au_1 bv_1 - b^2 v_2^2 - b^2 v_3^2 &= 0 \\ au_1 v_1 - bv_2^2 - bv_3^2 &= 0 \\ au_1 v_1 - b(v_2^2 + v_3^2) &= 0 \\ au_1 v_1 - b(1 - v_1^2) &= 0 \\ bv_1^2 + au_1 v_1 + b &= 0 \end{aligned} \quad (2.55)$$

v_1 が実数である条件は

$$a^2 u_1^2 - 4b^2 \geq 0 \iff au_1 \geq 2b \quad (2.56)$$

a, b が満たすべき条件がこれでしょうか？次に右側を a で置き換えてみます。

$$h' = \exp(au_1 i + au_2 j + au_3 k) h \exp(bv_1 i - au_2 j - au_3 k) \quad (2.57)$$

直交条件から

$$\begin{aligned} au_1 bv_1 - a^2 u_2^2 - a^2 u_3^2 &= 0 \\ bu_1 v_1 - au_2^2 - au_3^2 &= 0 \\ bu_1 v_1 - a(u_2^2 + u_3^2) &= 0 \\ bu_1 v_1 - a(1 - u_1^2) &= 0 \\ au_1^2 + bu_1 v_1 + a &= 0 \end{aligned} \quad (2.58)$$

u_1 が実数である条件は

$$b^2 v_1^2 - 4a^2 \geq 0 \iff bv_1 \geq 2a \quad (2.59)$$

以上から実数 a, b の条件をまとめると

$$au_1 \geq 2b \quad \wedge \quad bv_1 \geq 2a \quad \wedge \quad u_1, v_1 \leq 1 \quad (2.60)$$

これらを満たす実数 a, b は存在しません。従って、四元数の実軸から i 軸にだけ回転させる計算は少なくとも単位四元数の回転計算の範囲には存在しないことになります。

2.7 八元数の定義

八元数は以下のように定義されます。

$$\text{Octonion} : \mathbb{O} := r_0 + r_1 e_1 + r_2 e_2 + r_3 e_3 + r_4 e_4 + r_5 e_5 + r_6 e_6 + r_7 e_7, \quad r_0, \dots, r_7 \in \mathbb{R} \quad (2.61)$$

e_1, \dots, e_7 の乗法は乗積表から算出できます。乗法は順番を変えてはならず、3 つ以上並んだ場合は左から順番に計算しないといけません。

乗積表には 480 通りのバリエーションがあり、ここではその一つを書いています。しかし、その他の 479 通りの八元数についての本質的な違いはないと考えられています。また、虚数単位 e_1, \dots, e_7 の書き方についても、 i, j, k, l や h, i, j, k を組み合わせたりする事もあります。

八元数の共役 o^* とノルム $N(o)$ は以下のようになります。

$$\begin{aligned} o &= r_0 + r_1 e_1 + r_2 e_2 + r_3 e_3 + r_4 e_4 + r_5 e_5 + r_6 e_6 + r_7 e_7 \\ o^* &= r_0 - r_1 e_1 - r_2 e_2 - r_3 e_3 - r_4 e_4 - r_5 e_5 - r_6 e_6 - r_7 e_7 \quad (2.62) \\ N(o) &= o^* o = r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 + r_5^2 + r_6^2 + r_7^2 \end{aligned}$$

八元数とは別に分解型八元数という物が定義できますが、それはまた別途触れたいと思います。

とりあえず、任意の八元数 o_0, o_1 の積をその実数成分で表現しておきます。

$$\begin{aligned} o_0 &= p_0 + p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3 + p_4 e_4 + p_5 e_5 + p_6 e_6 + p_7 e_7 \\ o_1 &= q_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3 + q_4 e_4 + q_5 e_5 + q_6 e_6 + q_7 e_7 \end{aligned} \quad (2.63)$$

$o_0 o_1$ を実直に計算しても良いですがスカラーパートを分ける事で少し楽をします。

$$\begin{aligned} u &= p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3 + p_4 e_4 + p_5 e_5 + p_6 e_6 + p_7 e_7 \\ v &= q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3 + q_4 e_4 + q_5 e_5 + q_6 e_6 + q_7 e_7 \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned} o_0 o_1 &= (p_0 + u)(q_0 + v) \\ &= p_0 q_0 + p_0 v + q_0 u + uv \end{aligned} \quad (2.65)$$

表 2.1 八元数の乗積表

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	$-e_3$	-1	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_2	$-e_1$	-1	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	-1	e_1	e_2	e_3
e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	-1	$-e_3$	e_2
e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	-1	$-e_1$
e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	-1

$$\begin{aligned}
uv &= (p_1e_1 + p_2e_2 + p_3e_3 + p_4e_4 + p_5e_5 + p_6e_6 + p_7e_7)(q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3 + q_4e_4 + q_5e_5 + q_6e_6 + q_7e_7) \\
&= p_1e_1q_1e_1 + p_1e_1q_2e_2 + p_1e_1q_3e_3 + p_1e_1q_4e_4 + p_1e_1q_5e_5 + p_1e_1q_6e_6 + p_1e_1q_7e_7 \\
&\quad + p_2e_2q_1e_1 + p_2e_2q_2e_2 + p_2e_2q_3e_3 + p_2e_2q_4e_4 + p_2e_2q_5e_5 + p_2e_2q_6e_6 + p_2e_2q_7e_7 \\
&\quad + p_3e_3q_1e_1 + p_3e_3q_2e_2 + p_3e_3q_3e_3 + p_3e_3q_4e_4 + p_3e_3q_5e_5 + p_3e_3q_6e_6 + p_3e_3q_7e_7 \\
&\quad + p_4e_4q_1e_1 + p_4e_4q_2e_2 + p_4e_4q_3e_3 + p_4e_4q_4e_4 + p_4e_4q_5e_5 + p_4e_4q_6e_6 + p_4e_4q_7e_7 \\
&\quad + p_5e_5q_1e_1 + p_5e_5q_2e_2 + p_5e_5q_3e_3 + p_5e_5q_4e_4 + p_5e_5q_5e_5 + p_5e_5q_6e_6 + p_5e_5q_7e_7 \\
&\quad + p_6e_6q_1e_1 + p_6e_6q_2e_2 + p_6e_6q_3e_3 + p_6e_6q_4e_4 + p_6e_6q_5e_5 + p_6e_6q_6e_6 + p_6e_6q_7e_7 \\
&\quad + p_7e_7q_1e_1 + p_7e_7q_2e_2 + p_7e_7q_3e_3 + p_7e_7q_4e_4 + p_7e_7q_5e_5 + p_7e_7q_6e_6 + p_7e_7q_7e_7 \\
&= -p_1q_1 + p_1q_2e_3 - p_1q_3e_2 + p_1q_4e_5 - p_1q_5e_4 - p_1q_6e_7 + p_1q_7e_6 \\
&\quad - p_2q_1e_3 - p_2q_2 + p_2q_3e_1 + p_2q_4e_6 + p_2q_5e_7 - p_2q_6e_4 - p_2q_7e_5 \\
&\quad + p_3q_1e_2 - p_3q_2e_1 - p_3q_3 + p_3q_4e_7 - p_3q_5e_6 + p_3q_6e_5 - p_3q_7e_4 \\
&\quad - p_4q_1e_5 - p_4q_2e_6 - p_4q_3e_7 - p_4q_4 + p_4q_5e_1 + p_4q_6e_2 + p_4q_7e_3 \\
&\quad + p_5q_1e_4 - p_5q_2e_7 + p_5q_3e_6 - p_5q_4e_1 - p_5q_5 - p_5q_6e_3 + p_5q_7e_2 \\
&\quad + p_6q_1e_7 + p_6q_2e_4 - p_6q_3e_5 - p_6q_4e_2 + p_6q_5e_3 - p_6q_6 - p_6q_7e_1 \\
&\quad - p_7q_1e_6 + p_7q_2e_5 + p_7q_3e_4 - p_7q_4e_3 - p_7q_5e_2 + p_7q_6e_1 - p_7q_7 \\
&= -p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 - p_4q_4 - p_5q_5 - p_6q_6 - p_7q_7 \\
&\quad + p_2q_3e_1 - p_3q_2e_1 + p_4q_5e_1 - p_5q_4e_1 - p_6q_7e_1 + p_7q_6e_1 \\
&\quad - p_1q_3e_2 + p_3q_1e_2 + p_4q_6e_2 + p_5q_7e_2 - p_6q_4e_2 - p_7q_5e_2 \\
&\quad + p_1q_2e_3 - p_2q_1e_3 + p_4q_7e_3 - p_5q_6e_3 + p_6q_5e_3 - p_7q_4e_3 \\
&\quad - p_1q_5e_4 - p_2q_6e_4 - p_3q_7e_4 + p_5q_1e_4 + p_6q_2e_4 + p_7q_3e_4 \\
&\quad + p_1q_4e_5 - p_2q_7e_5 + p_3q_6e_5 + p_4q_1e_5 - p_6q_3e_5 + p_7q_2e_5 \\
&\quad + p_1q_7e_6 + p_2q_4e_6 - p_3q_5e_6 - p_4q_2e_6 + p_5q_3e_6 - p_7q_1e_6 \\
&\quad - p_1q_6e_7 + p_2q_5e_7 + p_3q_4e_7 - p_4q_3e_7 - p_5q_2e_7 + p_6q_1e_7
\end{aligned} \tag{2.66}$$

$$\begin{aligned}
uv &= -p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 - p_4q_4 - p_5q_5 - p_6q_6 - p_7q_7 \\
&\quad + (p_2q_3 - p_3q_2 + p_4q_5 - p_5q_4 + p_7q_6 - p_6q_7)e_1 \\
&\quad + (p_3q_1 - p_1q_3 + p_4q_6 - p_6q_4 + p_5q_7 - p_7q_5)e_2 \\
&\quad + (p_1q_2 - p_2q_1 + p_4q_7 - p_7q_4 + p_6q_5 - p_5q_6)e_3 \\
&\quad + (p_5q_1 - p_1q_5 + p_6q_2 - p_2q_6 + p_7q_3 - p_3q_7)e_4 \\
&\quad + (p_1q_4 - p_4q_1 + p_3q_6 - p_6q_3 + p_7q_2 - p_2q_7)e_5 \\
&\quad + (p_1q_7 - p_7q_1 + p_2q_4 - p_4q_2 + p_5q_3 - p_3q_5)e_6 \\
&\quad + (p_2q_5 - p_5q_2 + p_3q_4 - p_4q_3 + p_6q_1 - p_1q_6)e_7
\end{aligned} \tag{2.67}$$

$$\begin{aligned}
o_0o_1 &= p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 - p_4q_4 - p_5q_5 - p_6q_6 - p_7q_7 \\
&\quad + (p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2 + p_4q_5 - p_5q_4 + p_7q_6 - p_6q_7)e_1 \\
&\quad + (p_0q_2 + p_2q_0 + p_3q_1 - p_1q_3 + p_4q_6 - p_6q_4 + p_5q_7 - p_7q_5)e_2 \\
&\quad + (p_0q_3 + p_3q_0 + p_1q_2 - p_2q_1 + p_4q_7 - p_7q_4 + p_6q_5 - p_5q_6)e_3 \\
&\quad + (p_0q_4 + p_4q_0 + p_5q_1 - p_1q_5 + p_6q_2 - p_2q_6 + p_7q_3 - p_3q_7)e_4 \\
&\quad + (p_0q_5 + p_5q_0 + p_1q_4 - p_4q_1 + p_3q_6 - p_6q_3 + p_7q_2 - p_2q_7)e_5 \\
&\quad + (p_0q_6 + p_6q_0 + p_1q_7 - p_7q_1 + p_2q_4 - p_4q_2 + p_5q_3 - p_3q_5)e_6 \\
&\quad + (p_0q_7 + p_7q_0 + p_2q_5 - p_5q_2 + p_3q_4 - p_4q_3 + p_6q_1 - p_1q_6)e_7
\end{aligned} \tag{2.68}$$

uv は七次元の内積と外積の形をしていますので、七次元の角度や回転軸を計算する事ができると考えられます。四元数を使って三次元の回転を計算できたように、八元数を使って七次元を回転できるのではないかと期待したい所です。しかし、目下の所、四次元だけを回転させる計算方法を確立させたいので、まずは四次元に着目します。

2.8 八元数による四次元の回転計算

四次元ベクトル (s_0, s_1, s_2, s_3) を八元数の e_4, e_5, e_6, e_7 に割り当てて回転計算を行ってみます。

$$s = s_0 e_4 + s_1 e_5 + s_2 e_6 + s_3 e_7 \quad (2.69)$$

方向を表す四次元単位ベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} があり、 \mathbf{a} から \mathbf{b} の方向に $t \in \mathbb{R}$ の割合だけ回転させます。 \mathbf{a} と \mathbf{b} が成す角度 θ を内積から求めます。

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (a_0, a_1, a_2, a_3), \quad \mathbf{b} = (b_0, b_1, b_2, b_3), \quad a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R} \\ \theta &= \arccos(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \arccos(a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3), \quad 0 < \theta < \pi, \quad \theta \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2.70)$$

回転軸を表す八元数を七次元の外積から求めます。今 e_4, e_5, e_6, e_7 の内に四次元があると仮定しているので \mathbf{a}, \mathbf{b} を以下の八元数に置き換えます。

$$a = a_0 e_4 + a_1 e_5 + a_2 e_6 + a_3 e_7, \quad b = b_0 e_4 + b_1 e_5 + b_2 e_6 + b_3 e_7 \quad (2.71)$$

積を計算し外積を抽出します。

$$\begin{aligned} ab &= -\cos \theta \\ &\quad + (a_0 b_1 - a_1 b_0 + a_3 b_2 - a_2 b_3) e_1 \\ &\quad + (a_0 b_2 - a_2 b_0 + a_1 b_3 - a_3 b_1) e_2 \\ &\quad + (a_0 b_3 - a_3 b_0 + a_2 b_1 - a_1 b_2) e_3 \end{aligned} \quad (2.72)$$

$|a| = |b| = |ab| = 1$ なので以下であることが確認できます。

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta + (a_0 b_1 - a_1 b_0 + a_3 b_2 - a_2 b_3)^2 + (a_0 b_2 - a_2 b_0 + a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (a_0 b_3 - a_3 b_0 + a_2 b_1 - a_1 b_2)^2 &= 1 \\ (a_0 b_1 - a_1 b_0 + a_3 b_2 - a_2 b_3)^2 + (a_0 b_2 - a_2 b_0 + a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (a_0 b_3 - a_3 b_0 + a_2 b_1 - a_1 b_2)^2 &= \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (2.73)$$

e_1, e_2, e_3 の係数から八元数を構成し直して正規化しておきます。

$$w_1 = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0 + a_3 b_2 - a_2 b_3}{\sin \theta}, \quad w_2 = \frac{a_0 b_2 - a_2 b_0 + a_1 b_3 - a_3 b_1}{\sin \theta}, \quad w_3 = \frac{a_0 b_3 - a_3 b_0 + a_2 b_1 - a_1 b_2}{\sin \theta} \quad (2.74)$$

$$w = w_1 e_1 + w_2 e_2 + w_3 e_3, \quad |w| = 1 \quad (2.75)$$

こうして八元数より抽出した外積の“回転軸” w を観察してみると、元の軸 e_4, e_5, e_6, e_7 が構成する空間の外側にある e_1, e_2, e_3 軸が構成する空間で三次元として存在していると読み取れます。従って、四次元を回転させる軸は七次元内の別の三次元に存在すると解釈できます。四次元を四元数で回転させようとしても上手くいかなかった原因がここにありそうです。

他の軸の組み合わせはどうなるかが気になります。7つのうち4つを選ぶ組み合わせの数は35通りあります。 e_1, e_2, e_3, e_4 内に四次元を取ると

$$a = a_0 e_1 + a_1 e_2 + a_2 e_3 + a_3 e_4, \quad b = b_0 e_1 + b_1 e_2 + b_2 e_3 + b_3 e_4 \quad (2.76)$$

$$ab + |ab| = (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_1 + (a_2 b_0 - a_0 b_2) e_2 + (a_0 b_1 - a_1 b_0) e_3 + (a_0 b_3 - a_3 b_0) e_5 + (a_1 b_3 - a_3 b_1) e_6 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) e_7 \quad (2.77)$$

というように6軸になります。

どのような回転軸になるかは多様性と規則性がありそうですが、とりあえず回転計算を継続します。以下のようにノルムが1の純虚八元数を七次元ベルソルとして定義しておきます。

$$\begin{aligned} \text{Versor7} : \mathbb{V}_7 &:= \{d : d = \sqrt{-1}, \quad d \in \mathbb{O}\} \\ &= \{d_1 e_1 + d_2 e_2 + d_3 e_3 + d_4 e_4 + d_5 e_5 + d_6 e_6 + d_7 e_7, \quad d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7 \in \mathbb{R}, \quad |d| = 1\} \end{aligned} \quad (2.78)$$

一般的に、四次元単位ベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} を純虚八元数の係数のどれかに割り当てて七次元ベルソル a, b とした時、これらを含む回転の回転軸を表す七次元ベルソル w は、 \mathbf{a}, \mathbf{b} が成す角度を θ として、

$$w = \frac{ab + \cos \theta}{\sin \theta}, \quad w \in \mathbb{V}_7 \quad (2.79)$$

となる事が見えてきました。この回転軸によって回転を計算する為の八元数は以下のようになります。

$$o = \exp(-0.5t\theta w) = \cos 0.5t\theta - w \sin 0.5t\theta \quad (2.80)$$

回転させたい四次元ベクトルを純虚八元数のいずれかに当てはめた八元数を s とすると、回転後の四次元座標を示す八元数 s' が以下のように算出される事が期待されます。

$$s' = o^* s o \quad (2.81)$$

実数成分で ${}_7C_4 = 35$ の組み合わせで展開してみるのは流石に冗長なので、コンピューターを使って計算をしてみましょう。するとすべての組み合わせで、この回転計算の結果 s' が s が選択した八元数の 4 つの軸による空間に戻ることが確認できます。また、3D グラフで視覚化をしてみると、確かに循環する輪が描かれる事が分かります。循環する輪の形は (1) 右回りにねじれる、(2) 左回りにねじれる、(3) 閉じている、(4) 開いているの 4 種類あるようです。これらの内、(1)(2) のねじれるパターンは、四元数の乗算と同じ形になっており、ねじれるという欠点があります。そして、平行線を伸ばしたら合流してしまう (3) は除外できるでしょう。(4) の開いているという回転のパターンが求める三次元超球面の移動だと考えられます。しかし、これらの回転パターンは注目したある二次元の面にだけ成り立つ特徴があり、三次元の移動を考えた時に 3 軸全てで (4) の開いているという形状をしているパターンは 35 種類の組み合わせの中には発見できません。つまり、三次元超球面から切り取った原点を含む二次元面については回転計算が成立しますが、そこから外れる事ができません。

2.9 分解型八元数の定義

分解型八元数についても可能性を調査してみましょう。分解型八元数は以下のように定義されます。

Split-octonion :

$$\begin{aligned} \mathbb{O}_s &:= r_0 + r_1 e_1 + r_2 e_2 + r_3 e_3 + r_4 e_4 + r_5 e_5 + r_6 e_6 + r_7 e_7 \\ r_0, \dots, r_7 &\in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2.82)$$

e_1, \dots, e_7 の乗法は表 2.2 に従います。

共役は八元数と同じ定義です。

$$\begin{aligned} s &= r_0 + r_1 e_1 + r_2 e_2 + r_3 e_3 + r_4 e_4 + r_5 e_5 + r_6 e_6 + r_7 e_7 \\ s^* &= r_0 - r_1 e_1 - r_2 e_2 - r_3 e_3 - r_4 e_4 - r_5 e_5 - r_6 e_6 - r_7 e_7 \end{aligned} \quad (2.83)$$

ノルムについては少し様子が違って以下のようになります。

$$N(s) = s^* s = (r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) - (r_4^2 + r_5^2 + r_6^2 + r_7^2) \quad (2.84)$$

八元数同様に乗積表の右上と左下の符号が反転しているので共役をかけるとそれらが消えて実数部分のみになります。

まず、任意の分解型八元数 s_0, s_1 の積をその実数成分で表現しておきましょう。

$$\begin{aligned} s_0 &= p_0 + p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3 + p_4 e_4 + p_5 e_5 + p_6 e_6 + p_7 e_7 \\ s_1 &= q_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3 + q_4 e_4 + q_5 e_5 + q_6 e_6 + q_7 e_7 \end{aligned} \quad (2.85)$$

スカラーパートを分けておきます。

$$\begin{aligned} u &= p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3 + p_4 e_4 + p_5 e_5 + p_6 e_6 + p_7 e_7 \\ v &= q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3 + q_4 e_4 + q_5 e_5 + q_6 e_6 + q_7 e_7 \end{aligned} \quad (2.86)$$

$$\begin{aligned} s_0 s_1 &= (p_0 + u)(q_0 + v) \\ &= p_0 q_0 + p_0 v + q_0 u + uv \end{aligned} \quad (2.87)$$

$$\begin{aligned}
uv &= (p_1e_1 + p_2e_2 + p_3e_3 + p_4e_4 + p_5e_5 + p_6e_6 + p_7e_7)(q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3 + q_4e_4 + q_5e_5 + q_6e_6 + q_7e_7) \\
&= p_1e_1q_1e_1 + p_1e_1q_2e_2 + p_1e_1q_3e_3 + p_1e_1q_4e_4 + p_1e_1q_5e_5 + p_1e_1q_6e_6 + p_1e_1q_7e_7 \\
&\quad + p_2e_2q_1e_1 + p_2e_2q_2e_2 + p_2e_2q_3e_3 + p_2e_2q_4e_4 + p_2e_2q_5e_5 + p_2e_2q_6e_6 + p_2e_2q_7e_7 \\
&\quad + p_3e_3q_1e_1 + p_3e_3q_2e_2 + p_3e_3q_3e_3 + p_3e_3q_4e_4 + p_3e_3q_5e_5 + p_3e_3q_6e_6 + p_3e_3q_7e_7 \\
&\quad + p_4e_4q_1e_1 + p_4e_4q_2e_2 + p_4e_4q_3e_3 + p_4e_4q_4e_4 + p_4e_4q_5e_5 + p_4e_4q_6e_6 + p_4e_4q_7e_7 \\
&\quad + p_5e_5q_1e_1 + p_5e_5q_2e_2 + p_5e_5q_3e_3 + p_5e_5q_4e_4 + p_5e_5q_5e_5 + p_5e_5q_6e_6 + p_5e_5q_7e_7 \\
&\quad + p_6e_6q_1e_1 + p_6e_6q_2e_2 + p_6e_6q_3e_3 + p_6e_6q_4e_4 + p_6e_6q_5e_5 + p_6e_6q_6e_6 + p_6e_6q_7e_7 \\
&\quad + p_7e_7q_1e_1 + p_7e_7q_2e_2 + p_7e_7q_3e_3 + p_7e_7q_4e_4 + p_7e_7q_5e_5 + p_7e_7q_6e_6 + p_7e_7q_7e_7 \\
&= -p_1q_1 + p_1q_2e_3 - p_1q_3e_2 - p_1q_4e_5 + p_1q_5e_4 - p_1q_6e_7 + p_1q_7e_6 \\
&\quad - p_2q_1e_3 - p_2q_2 + p_2q_3e_1 - p_2q_4e_6 + p_2q_5e_7 + p_2q_6e_4 - p_2q_7e_5 \\
&\quad + p_3q_1e_2 - p_3q_2e_1 - p_3q_3 - p_3q_4e_7 - p_3q_5e_6 + p_3q_6e_5 + p_3q_7e_4 \\
&\quad + p_4q_1e_5 + p_4q_2e_6 + p_4q_3e_7 + p_4q_4 + p_4q_5e_1 + p_4q_6e_2 + p_4q_7e_3 \\
&\quad - p_5q_1e_4 - p_5q_2e_7 + p_5q_3e_6 - p_5q_4e_1 + p_5q_5 + p_5q_6e_3 - p_5q_7e_2 \\
&\quad + p_6q_1e_7 - p_6q_2e_4 - p_6q_3e_5 - p_6q_4e_2 - p_6q_5e_3 + p_6q_6 + p_6q_7e_1 \\
&\quad - p_7q_1e_6 + p_7q_2e_5 - p_7q_3e_4 - p_7q_4e_3 + p_7q_5e_2 - p_7q_6e_1 + p_7q_7 \\
&= -p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 + p_4q_4 + p_5q_5 + p_6q_6 + p_7q_7 \\
&\quad + (p_2q_3 - p_3q_2 + p_4q_5 - p_5q_4 + p_6q_7 - p_7q_6)e_1 \\
&\quad + (p_3q_1 - p_1q_3 + p_4q_6 - p_6q_4 + p_7q_5 - p_5q_7)e_2 \\
&\quad + (p_1q_2 - p_2q_1 + p_4q_7 - p_7q_4 + p_5q_6 - p_6q_5)e_3 \\
&\quad + (p_1q_5 - p_5q_1 + p_2q_6 - p_6q_2 + p_3q_7 - p_7q_3)e_4 \\
&\quad + (p_3q_6 - p_6q_3 + p_4q_1 - p_1q_4 + p_7q_2 - p_2q_7)e_5 \\
&\quad + (p_1q_7 - p_7q_1 + p_4q_2 - p_2q_4 + p_5q_3 - p_3q_5)e_6 \\
&\quad + (p_2q_5 - p_5q_2 + p_4q_3 - p_3q_4 + p_6q_1 - p_1q_6)e_7
\end{aligned} \tag{2.88}$$

この展開された式は八元数の七次元の外積とは別物のようです。何を表すのでしょうか？掘り下げて調査する必要があるそうです。

2.10 分解型八元数の角度

分解型八元数に内在する角度がオイラーの公式からどうなるかを調べましょう。

$$s_L = r_0 + r_1e_1 + r_2e_2 + r_3e_3, \quad s_R = r_4e_4 + r_5e_5 + r_6e_6 + r_7e_7 \tag{2.89}$$

というように分解すると s_L は四元数と同様になり、 $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \neq 0$ の時、

$$\alpha v_L = r_1e_1 + r_2e_2 + r_3e_3, \quad v_L^2 = -1, \quad \alpha \in \mathbb{R} \tag{2.90}$$

と置いて、

$$\exp(s_L) = \exp(r_0 + \alpha v_L) = \exp(r_0)(\cos \alpha + v_L \sin \alpha) \tag{2.91}$$

s_R については、 $|s_R| \neq 0$ の時、

$$\beta v_R = r_4e_4 + r_5e_5 + r_6e_6 + r_7e_7, \quad v_R^2 = +1, \quad \beta \in \mathbb{R} \tag{2.92}$$

と置くと、分解型複素数のオイラーの公式から、

$$\exp(s_R) = \exp(\beta v_R) = \cosh \beta + v_R \sinh \beta \tag{2.93}$$

従って、分解型八元数の角度表現は以下のようになります。

$$\exp(s) = \exp(s_L + s_R) = \exp(s_L) \exp(s_R) = \exp(r_0)(\cos \alpha + v_L \sin \alpha)(\cosh \beta + v_R \sinh \beta) \tag{2.94}$$

純虚分解型八元数について書き直すと、

$$\exp(s) = \exp(\alpha v_L + \beta v_R) = (\cos \alpha + v_L \sin \alpha)(\cosh \beta + v_R \sinh \beta), \quad r_0 = 0 \tag{2.95}$$

以下のように展開してみます。

$$\exp(s) = \cos \alpha \cosh \beta + v_L v_R \sin \alpha \sinh \beta + v_L \sin \alpha \cosh \beta + v_R \cos \alpha \sinh \beta \quad (2.96)$$

複素数による三角関数と加法定理より、 $I^2 = -1$ という別の虚数単位を導入して、

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - I\beta) &= \cos \alpha \cos I\beta + \sin \alpha \sin I\beta \\ &= \cos \alpha \cosh \beta + I \sin \alpha \sinh \beta \\ \sin(\alpha - I\beta) &= \sin \alpha \cos I\beta - \cos \alpha \sin I\beta \\ &= \sin \alpha \cosh \beta - I \cos \alpha \sinh \beta \end{aligned} \quad (2.97)$$

さらに $J^2 = -1$ という別の虚数単位を導入すると、

$$J \sin(\alpha - I\beta) = J \sin \alpha \cosh \beta - JI \cos \alpha \sinh \beta \quad (2.98)$$

$I = v_L v_R, J = v_L$ というように当てはめると、

$$\begin{aligned} \exp(s) &= \cos \alpha \cosh \beta + v_L v_R \sin \alpha \sinh \beta + v_L \sin \alpha \cosh \beta - v_L v_L v_R \cos \alpha \sinh \beta \\ &= \cos(\alpha - v_L v_R \beta) + v_L \sin(\alpha - v_L v_R \beta) \\ &= \exp(v_L(\alpha - v_L v_R \beta)) \\ &= \exp(v_L \alpha + v_R \beta) \\ &= \exp(s) \end{aligned} \quad (2.99)$$

元に戻ります。ここで $\theta = \alpha - v_L v_R \beta$ と置けば、四元数のオイラーの公式と同じ形が得られます。

$$\exp(v_L \theta) = \cos \theta + v_L \sin \theta \quad (2.100)$$

2.11 純虚分解型八元数の指数関数

改めて純虚分解型八元数を以下のように定義し直します。

$$\begin{aligned} \exp(s) &= \exp(\alpha u + \beta v) = p_0 + p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3 + p_4 e_4 + p_5 e_5 + p_6 e_6 + p_7 e_7 \\ \alpha, \beta, p_0, \dots, p_7 &\in \mathbb{R} \\ u &= a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3, \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 \\ v &= a_4 e_4 + a_5 e_5 + a_6 e_6 + a_7 e_7, \quad a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2 = 1 \\ a_1, \dots, a_7 &\in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2.101)$$

p_0, \dots, p_7 を角度と方向からなる実数で表現してみましょう。

$$\begin{aligned} \exp(s) &= (\cos \alpha + u \sin \alpha)(\cosh \beta + v \sinh \beta) \\ &= \cos \alpha \cosh \beta + uv \sin \alpha \sinh \beta + u \sin \alpha \cosh \beta + v \cos \alpha \sinh \beta \end{aligned} \quad (2.102)$$

uv を先に展開して、

$$\begin{aligned} uv &= (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3)(a_4 e_4 + a_5 e_5 + a_6 e_6 + a_7 e_7) \\ &= (a_1 a_5 + a_2 a_6 + a_3 a_7) e_4 \\ &\quad + (a_3 a_6 - a_1 a_4 - a_2 a_7) e_5 \\ &\quad + (a_1 a_7 - a_2 a_4 - a_3 a_5) e_6 \\ &\quad + (a_2 a_5 - a_3 a_4 - a_1 a_6) e_7 \end{aligned} \quad (2.103)$$

e_1, e_2, e_3 の項が消えてしまうのが印象的です。

$$\begin{aligned} \exp(s) &= \cos \alpha \cosh \beta + a_1 e_1 \sin \alpha \cosh \beta + a_2 e_2 \sin \alpha \cosh \beta + a_3 e_3 \sin \alpha \cosh \beta \\ &\quad + ((a_1 a_5 + a_2 a_6 + a_3 a_7) \sin \alpha + a_4 \cos \alpha) e_4 \sinh \beta \\ &\quad + ((a_3 a_6 - a_1 a_4 - a_2 a_7) \sin \alpha + a_5 \cos \alpha) e_5 \sinh \beta \\ &\quad + ((a_1 a_7 - a_2 a_4 - a_3 a_5) \sin \alpha + a_6 \cos \alpha) e_6 \sinh \beta \\ &\quad + ((a_2 a_5 - a_3 a_4 - a_1 a_6) \sin \alpha + a_7 \cos \alpha) e_7 \sinh \beta \end{aligned} \quad (2.104)$$

$$\begin{aligned}
p_0 &= \cos \alpha \cosh \beta \\
p_1 &= a_1 \sin \alpha \cosh \beta \\
p_2 &= a_2 \sin \alpha \cosh \beta \\
p_3 &= a_3 \sin \alpha \cosh \beta \\
p_4 &= ((a_1 a_5 + a_2 a_6 + a_3 a_7) \sin \alpha + a_4 \cos \alpha) \sinh \beta \\
p_5 &= ((a_3 a_6 - a_1 a_4 - a_2 a_7) \sin \alpha + a_5 \cos \alpha) \sinh \beta \\
p_6 &= ((a_1 a_7 - a_2 a_4 - a_3 a_5) \sin \alpha + a_6 \cos \alpha) \sinh \beta \\
p_7 &= ((a_2 a_5 - a_3 a_4 - a_1 a_6) \sin \alpha + a_7 \cos \alpha) \sinh \beta
\end{aligned} \tag{2.105}$$

2.12 分解型八元数による回転

分解型八元数に内在する角度が2つある事が分かってきました。方向を表す2つのベクトルもあります。三次元単位ベクトルと四次元単位ベクトルです。これらが組み合わさって七次元を構成しています。

2つの純虚分解型八元数 u, v を以下のように定義して回転を計算してみます。

$$\begin{aligned}
u &= p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3 + p_4 e_4 + p_5 e_5 + p_6 e_6 + p_7 e_7 \\
p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 &= 1, \quad p_4^2 + p_5^2 + p_6^2 + p_7^2 = 1 \\
v &= q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3 + q_4 e_4 + q_5 e_5 + q_6 e_6 + q_7 e_7 \\
q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 &= 1, \quad q_4^2 + q_5^2 + q_6^2 + q_7^2 = 1 \\
\cos \alpha &= p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 \\
\cos \beta &= p_4 q_4 + p_5 q_5 + p_6 q_6 + p_7 q_7
\end{aligned} \tag{2.106}$$

u, v のノルムは0になります。

$$N(u) = N(v) = N(uv) = 0 \tag{2.107}$$

積の計算結果から、

$$uv = -\cos \alpha + \cos \beta + s \tag{2.108}$$

となるように s を置くと、

$$N(uv) = (-\cos \alpha + \cos \beta)^2 + N(s) = 0 \tag{2.109}$$

$$N(s) = -(-\cos \alpha + \cos \beta)^2 \tag{2.110}$$

というような関係性が見られます。回転軸 w は、

$$\begin{aligned}
s &= s_1 e_1 + s_2 e_2 + s_3 e_3 + s_4 e_4 + s_5 e_5 + s_6 e_6 + s_7 e_7 \\
s_L &= s_1 e_1 + s_2 e_2 + s_3 e_3, \quad s_R = s_4 e_4 + s_5 e_5 + s_6 e_6 + s_7 e_7
\end{aligned} \tag{2.111}$$

として、

$$\begin{aligned}
w_L &= \frac{s_L}{|s_L|}, \quad w_R = \frac{s_R}{|s_R|} \\
w &= w_L + w_R, \quad N(w) = 0
\end{aligned} \tag{2.112}$$

回転子 ρ は、 w_L 方向に $a\alpha$ 、 w_R 方向に $b\beta$ 回転させるとして、

$$\rho = \exp(-0.5a\alpha w_L + b\beta w_R) = (\cos 0.5a\alpha - w_L \sin 0.5a\alpha)(\cosh 0.5b\beta - w_R \sinh 0.5b\beta) \tag{2.113}$$

純虚分解型八元数 f を回転させて f' になるとすると、

$$\begin{aligned}
f' &= \rho^* f \rho \\
&= (\cosh 0.5b\beta + w_R \sinh 0.5b\beta)(\cos 0.5a\alpha + w_L \sin 0.5a\alpha) f (\cos 0.5a\alpha - w_L \sin 0.5a\alpha)(\cosh 0.5b\beta - w_R \sinh 0.5b\beta)
\end{aligned} \tag{2.114}$$

第 3 章

多体シミュレーションにおける物理法則

3.1 時間進捗の考え方の導入

多体物理シミュレーションに適用する物理法則を考えるに当たって、最も重要な事は時間に対する考え方になります。通常の物理方程式の解の求め方では、時間を連続した直線的な概念として把握します。時間を直線的な t のパラメーターとして考えてある時刻を t に当てはめれば、どんな未来も過去も物理的実体を厳密に算出する事ができます。

しかし、このような物理方程式を多体について厳密に解いていく事は不可能です。コンピューターによる多体シミュレーションでは時間は非連続的であると考えます。フィルム映画やアニメーションのようにコマ送りで物理法則を計算していきます。計算する内容は現在の物理的パラメーターに基づいた次の瞬間の物理パラメーターの遷移についてだけです。

このシミュレーションの方法では任意に時刻を指定して状態を厳密に算出する事はできません。もし任意の時刻の状態を知りたいのであれば、一度知りたい時刻の範囲の計算を行っておいて、そのデータを全部記録しておく事になります。

3.2 時間進捗で計算する内容

全ての物体が分解したり合体したりしないで総数が一定の粒子であるとすれば、それぞれの粒子について位置と運動量をデータとして持っておき、それらの相互作用を計算することで多体シミュレーションを成立させます。具体的に行う計算には 2 種類あります。

一つは、状態変化の計算になります。具体的には速度を位置の変化に反映させる計算になります。 N 体あれば N 回の計算で済みます。

もう一つは、他の粒子との相互作用になります。この計算は、 N 体あれば $N(N - 1)/2$ 回の計算になり、計算量オーダー的に $O(n^2)$ となりますので、粒子数が増えると計算量が激増します。具体的には、運動量の交換がこの相互作用で行われます。

第4章

クリフォード代数の導入

4.1 クリフォード代数の構成

クリフォード代数は、2種類の基底ベクトルで構成されます。二乗して1になる基底ベクトルと、二乗して-1になる基底ベクトルです。これらの基底ベクトルを任意の個数だけ使う事ができます。通常は、 e に添え字で書いて e_1, e_2, \dots というように基底ベクトルを表記します。異なる基底ベクトル間の積に交換法則はありません。積の順序を変えると符号が反転します。

$$e_1 e_2 = -e_2 e_1, \quad e_2 e_3 = -e_3 e_2 \quad (4.1)$$

この符号反転の法則から添え字の大きい方から開始する基底ベクトルの積は、小さい方から開始される基底ベクトルの積に入れ替えが可能です。小さい添え字から開始される積により、新たな基底ベクトルが定義されます。例えば、基底ベクトルの数が3個あるとすると、以下のような構成になります。

$$e_1, \quad e_2, \quad e_3, \quad e_1 e_2, \quad e_1 e_3, \quad e_2 e_3, \quad e_1 e_2 e_3 \quad (4.2)$$

実係数を加えると、

$$a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_1 e_2 + a_5 e_1 e_3 + a_6 e_2 e_3 + a_7 e_1 e_2 e_3, \quad a_0, \dots, a_7 \in \mathbb{R} \quad (4.3)$$

という8次元の数になります。2つの基底ベクトルの積の事を特別に双ベクトル (bivector) と呼び、3つの基底ベクトルの積は、3-ベクトル (trivector) と呼びます。

- 双ベクトル (bivector): $e_1 e_2, \quad e_1 e_3, \quad e_2 e_3$
- 3-ベクトル (trivector): $e_1 e_2 e_3$

これらに対して単一構成の基底ベクトルを、1-ベクトルと言う事があります。

組み合わせて使用する1-ベクトルの内、二乗して1になる1-ベクトルの数を m 個、二乗して-1になる1-ベクトルの数を n 個とした時のクリフォード代数を $Cl(m, n)$ と表現します。 $Cl(3, 0)$ では通常の3次元空間を扱うことができます。 $Cl(0, 0)$ は実数 \mathbb{R} と同型で、 $Cl(0, 1)$ は複素数 \mathbb{C} と同型です。四元数は $Cl(0, 2)$ により構成可能ですが、八元数は $Cl(0, 3)$ と同型にはなりません。クリフォード代数が結合的である一方、八元数は非結合だからです。

- クリフォード代数は結合的で括弧の付け方で結果が変わらない。 $(e_i e_j) e_k = e_i (e_j e_k)$
- 八元数は非結合で括弧の付け方で結果が変わる。 $(e_i e_j) e_k \neq e_i (e_j e_k)$

4.2 クリフォード代数による時空表現

クリフォード代数で特殊相対性理論の時空を表現する場合、 $Cl(3, 1)$ もしくは、 $Cl(1, 3)$ が適合すると考えられます。物理学的には $(+, -, -, -)$ が習慣的に良く使用されるので、 $Cl(1, 3)$ を選択します。

- 1-ベクトル: $e_0, \quad e_1, \quad e_2, \quad e_3$

$$e_0^2 = +1 \text{ (時間的)} \quad e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1 \text{ (空間的)} \quad e_i e_j = -e_j e_i \quad (i \neq j) \quad (4.4)$$

- 双ベクトル: $e_0 e_1, \quad e_0 e_2, \quad e_0 e_3, \quad e_1 e_2, \quad e_1 e_3, \quad e_2 e_3$
- 3-ベクトル: $e_0 e_1 e_2, \quad e_0 e_1 e_3, \quad e_0 e_2 e_3, \quad e_1 e_2 e_3$
- 4-ベクトル: $e_0 e_1 e_2 e_3$

これらの要素でクリフォード代数の 16 次元を構成します。

$$\begin{aligned} \text{Cl}(1,3) := & r_0 + r_1 e_0 + r_2 e_1 + r_3 e_2 + r_4 e_3 \\ & + r_5 e_0 e_1 + r_6 e_0 e_2 + r_7 e_0 e_3 + r_8 e_1 e_2 + r_9 e_1 e_3 + r_{10} e_2 e_3 \\ & + r_{11} e_0 e_1 e_2 + r_{12} e_0 e_1 e_3 + r_{13} e_0 e_2 e_3 + r_{14} e_1 e_2 e_3 \\ & + r_{15} e_0 e_1 e_2 e_3 \\ & r_0, \dots, r_{15} \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (4.5)$$

時間 t と空間 x, y, z はこの一部を使い、

$$t e_0 + x e_1 + y e_2 + z e_3 \quad (4.6)$$

と表されます。

その他の係数は主に回転を算出するための要素となります。詳しく見ていきます。

4.3 クリフォード代数の積

基底ベクトルの積は、添え字を小さい順になるように入れ替えて符号を変えるという操作と、二乗して 1 か -1 にするという操作を組み合わせで行います。幾何積 (geometric product) とも呼びます。例えば、 $e_0 e_2$ と $e_0 e_1 e_3$ の積は、

$$e_0 e_2 e_0 e_1 e_3 = e_0 (e_2 e_0) e_1 e_3 = -e_0 (e_0 e_2) e_1 e_3 = -(e_0 e_0) e_2 e_1 e_3 = e_2 e_1 e_3 = -e_1 e_2 e_3 \quad (4.7)$$

となります。この規則により $\text{Cl}(1,3)$ の乗積表を作ると以下の通りです。プログラムで作成しています。基底ベクトルをビットパターンに当てはめる事で、比較的単純な規則で算出可能です。

- e_0 を 2 進数で [0001]、 e_1 を [0010] とすると、 $e_0 e_1$ が [0011]、 $e_1 e_2 e_3$ は [1110]

表 4.1 $\text{Cl}(1,3)$ の乗積表 1

	e_0	e_1	e_2	e_3	$e_0 e_1$	$e_0 e_2$	$e_0 e_3$
e_0	+1	$+e_0 e_1$	$+e_0 e_2$	$+e_0 e_3$	$+e_1$	$+e_2$	$+e_3$
e_1	$-e_0 e_1$	-1	$+e_1 e_2$	$+e_1 e_3$	$+e_0$	$-e_0 e_1 e_2$	$-e_0 e_1 e_3$
e_2	$-e_0 e_2$	$-e_1 e_2$	-1	$+e_2 e_3$	$+e_0 e_1 e_2$	$+e_0$	$-e_0 e_2 e_3$
e_3	$-e_0 e_3$	$-e_1 e_3$	$-e_2 e_3$	-1	$+e_0 e_1 e_3$	$+e_0 e_2 e_3$	$+e_0$
$e_0 e_1$	$-e_1$	$-e_0$	$+e_0 e_1 e_2$	$+e_0 e_1 e_3$	+1	$-e_1 e_2$	$-e_1 e_3$
$e_0 e_2$	$-e_2$	$-e_0 e_1 e_2$	$-e_0$	$+e_0 e_2 e_3$	$+e_1 e_2$	+1	$-e_2 e_3$
$e_0 e_3$	$-e_3$	$-e_0 e_1 e_3$	$-e_0 e_2 e_3$	$-e_0$	$+e_1 e_3$	$+e_2 e_3$	+1
$e_1 e_2$	$+e_0 e_1 e_2$	$+e_2$	$-e_1$	$+e_1 e_2 e_3$	$+e_0 e_2$	$-e_0 e_1$	$+e_0 e_1 e_2 e_3$
$e_1 e_3$	$+e_0 e_1 e_3$	$+e_3$	$-e_1 e_2 e_3$	$-e_1$	$+e_0 e_3$	$-e_0 e_1 e_2 e_3$	$-e_0 e_1$
$e_2 e_3$	$+e_0 e_2 e_3$	$+e_1 e_2 e_3$	$+e_3$	$-e_2$	$+e_0 e_1 e_2 e_3$	$+e_0 e_3$	$-e_0 e_2$
$e_0 e_1 e_2$	$+e_1 e_2$	$+e_0 e_2$	$-e_0 e_1$	$+e_0 e_1 e_2 e_3$	$+e_2$	$-e_1$	$+e_1 e_2 e_3$
$e_0 e_1 e_3$	$+e_1 e_3$	$+e_0 e_3$	$-e_0 e_1 e_2 e_3$	$-e_0 e_1$	$+e_3$	$-e_1 e_2 e_3$	$-e_1$
$e_0 e_2 e_3$	$+e_2 e_3$	$+e_0 e_1 e_2 e_3$	$+e_0 e_3$	$-e_0 e_2$	$+e_1 e_2 e_3$	$+e_3$	$-e_2$
$e_1 e_2 e_3$	$-e_0 e_1 e_2 e_3$	$-e_2 e_3$	$+e_1 e_3$	$-e_1 e_2$	$+e_0 e_2 e_3$	$-e_0 e_1 e_3$	$+e_0 e_1 e_2$
$e_0 e_1 e_2 e_3$	$-e_1 e_2 e_3$	$-e_0 e_2 e_3$	$+e_0 e_1 e_3$	$-e_0 e_1 e_2$	$+e_2 e_3$	$-e_1 e_3$	$+e_1 e_2$

表 4.2 Cl(1,3) の乗積表 2

	e_1e_2	e_1e_3	e_2e_3	$e_0e_1e_2$	$e_0e_1e_3$	$e_0e_2e_3$	$e_1e_2e_3$	$e_0e_1e_2e_3$
e_0	$+e_0e_1e_2$	$+e_0e_1e_3$	$+e_0e_2e_3$	$+e_1e_2$	$+e_1e_3$	$+e_2e_3$	$+e_0e_1e_2e_3$	$+e_1e_2e_3$
e_1	$-e_2$	$-e_3$	$+e_1e_2e_3$	$+e_0e_2$	$+e_0e_3$	$-e_0e_1e_2e_3$	$-e_2e_3$	$+e_0e_2e_3$
e_2	$+e_1$	$-e_1e_2e_3$	$-e_3$	$-e_0e_1$	$+e_0e_1e_2e_3$	$+e_0e_3$	$+e_1e_3$	$-e_0e_1e_3$
e_3	$+e_1e_2e_3$	$+e_1$	$+e_2$	$-e_0e_1e_2e_3$	$-e_0e_1$	$-e_0e_2$	$-e_1e_2$	$+e_0e_1e_2$
e_0e_1	$-e_0e_2$	$-e_0e_3$	$+e_0e_1e_2e_3$	$+e_2$	$+e_3$	$-e_1e_2e_3$	$-e_0e_2e_3$	$+e_2e_3$
e_0e_2	$+e_0e_1$	$-e_0e_1e_2e_3$	$-e_0e_3$	$-e_1$	$+e_1e_2e_3$	$+e_3$	$+e_0e_1e_3$	$-e_1e_3$
e_0e_3	$+e_0e_1e_2e_3$	$+e_0e_1$	$+e_0e_2$	$-e_1e_2e_3$	$-e_1$	$-e_2$	$-e_0e_1e_2$	$+e_1e_2$
e_1e_2	-1	$+e_2e_3$	$-e_1e_3$	$-e_0$	$+e_0e_2e_3$	$-e_0e_1e_3$	$-e_3$	$-e_0e_3$
e_1e_3	$-e_2e_3$	-1	$+e_1e_2$	$-e_0e_2e_3$	$-e_0$	$+e_0e_1e_2$	$+e_2$	$+e_0e_2$
e_2e_3	$+e_1e_3$	$-e_1e_2$	-1	$+e_0e_1e_3$	$-e_0e_1e_2$	$-e_0$	$-e_1$	$-e_0e_1$
$e_0e_1e_2$	$-e_0$	$+e_0e_2e_3$	$-e_0e_1e_3$	-1	$+e_2e_3$	$-e_1e_3$	$-e_0e_3$	$-e_3$
$e_0e_1e_3$	$-e_0e_2e_3$	$-e_0$	$+e_0e_1e_2$	$-e_2e_3$	-1	$+e_1e_2$	$+e_0e_2$	$+e_2$
$e_0e_2e_3$	$+e_0e_1e_3$	$-e_0e_1e_2$	$-e_0$	$+e_1e_3$	$-e_1e_2$	-1	$-e_0e_1$	$-e_1$
$e_1e_2e_3$	$-e_3$	$+e_2$	$-e_1$	$+e_0e_3$	$-e_0e_2$	$+e_0e_1$	$+1$	$-e_0$
$e_0e_1e_2e_3$	$-e_0e_3$	$+e_0e_2$	$-e_0e_1$	$+e_3$	$-e_2$	$+e_1$	$+e_0$	-1

この積の規則により、時空ベクトルについては二乗が不変量になります。

$$\begin{aligned}
(te_0 + xe_1 + ye_2 + ze_3)^2 &= t^2e_0e_0 + txe_0e_1 + tye_0e_2 + tze_0e_3 \\
&\quad + txe_1e_0 + x^2e_1e_1 + xye_1e_2 + xze_1e_3 \\
&\quad + tye_2e_0 + xye_2e_1 + y^2e_2e_2 + yze_2e_3 \\
&\quad + tze_3e_0 + xze_3e_1 + yze_3e_2 + z^2e_3e_3 \\
&= t^2 + txe_0e_1 + tye_0e_2 + tze_0e_3 \\
&\quad - txe_0e_1 - x^2 + xye_1e_2 + xze_1e_3 \\
&\quad - tye_0e_2 - xye_1e_2 - y^2 + yze_2e_3 \\
&\quad - tze_0e_3 - xze_1e_3 - yze_2e_3 - z^2 \\
&= t^2 - x^2 - y^2 - z^2
\end{aligned} \tag{4.8}$$

双ベクトルや 3-ベクトルなどのベクトルの階層の事を、ブレード (Blade) という言葉で呼ぶことがあります。また、末尾の基底ベクトルの積については、擬スカラーと呼び、末尾から 2 番目の基底ベクトルの積については、擬ベクトルと呼ぶこともあります。

- 0-ブレード: スカラー
- 1-ブレード: 1-ベクトル
- 2-ブレード: 双ベクトル (bivector)
- 3-ブレード: 3-ベクトル、擬ベクトル (trivector、pseudo-vector)
- 4-ブレード: 4-ベクトル、擬スカラー (4-vector、pseudo-scalar)

さらにそれぞれを階層に見立ててグレードと呼んだりもします。偶数グレードや奇数グレードとまとめて表現する事が出来るようになります。

4.4 クリフォード代数の内積と外積

クリフォード代数の内積は通常、幾何積のスカラー部分を取り出す形で定義されます。外積はそれ以外の部分とみなせます。

$$ab = a \cdot b + a \wedge b \tag{4.9}$$

正確な定義としては幾何積の可換部分が内積、反可換部分が外積になります。反可換部分とは順序を逆にすると符号が反転するという意味になります。

$$a \cdot b = \frac{1}{2}(ab + ba) \tag{4.10}$$

$$a \wedge b = \frac{1}{2}(ab - ba) \quad (4.11)$$

交換子 $[a, b] = ab - ba$ 、反交換子 $\{a, b\} = ab + ba$ の記法を使うと、

$$2a \cdot b = \{a, b\}, \quad 2a \wedge b = [a, b] \quad (4.12)$$

と表記する事もできます。

4.5 クリフォード代数の共役

一般的には、クリフォード代数の共役には3種類あると考えられます。

表 4.3 クリフォード代数の共役

名前	表記	操作
リバーズ (Reverse)	\tilde{A}	基底ベクトルの順序を逆にする
グレード対合 (Grade Involution)	\overline{A}	奇数グレードの符号反転
クリフォード共役 (Clifford Conjugate)	A^*	他の共役の掛け合わせ

通常、クリフォード代数の共役にはリバーズが使用されます。クリフォード代数においてリバーズ演算は、要素の基底ベクトルの順序を逆にしたものです。例えば、

- スカラー: $\tilde{a} = a$ (変化なし)
- 1-ベクトル: $\tilde{e}_0 = e_0$ (変化なし)
- 双ベクトル: $\widetilde{e_0 e_1} = -e_1 e_0$ (-1 倍)
- 3-ベクトル: $\widetilde{e_0 e_1 e_2} = e_2 e_1 e_0 = -e_1 e_2 e_0 = e_1 e_0 e_2 = -e_0 e_1 e_2$ (-1 倍)
- 4-ベクトル: $\widetilde{e_0 e_1 e_2 e_3} = e_3 e_2 e_1 e_0 = e_0 e_1 e_2 e_3$ (変化なし)

各共役の符号についてまとめると以下の表になります。

表 4.4 グレード k の符号の一般式

k mod 4	0	1	2	3	
\tilde{A}	+	+	-	-	$(-1)^{k(k-1)/2}$
\overline{A}	+	-	+	-	$(-1)^k$
A^*	+	-	-	+	$(-1)^{k(k+1)/2}$

4.6 クリフォード代数の回転子

クリフォード代数の回転子 (Rotor) は偶数グレードから形成され、以下の条件を満たします。

$$R\tilde{R} = \tilde{R}R = 1 \quad (4.13)$$

ここで \tilde{R} は R のリバーズ (Reverse) です。

この回転子を以下の様に対象 X に作用させます。

$$RX\tilde{R} = X' \quad (4.14)$$

この様な挟み込みの掛け合わせで対象を変換することを、サンドイッチ積 (Sandwich Product) と呼びます。通常、サンドイッチ積による操作は対象の示す座標を回転させる事になります。

4.6.1 空間的雙ベクトルの回転子

空間的雙ベクトル $e_1 e_2, e_1 e_3, e_2 e_3$ を使って回転子 (Rotor) を定義します。二乗について確認します。

$$(e_1 e_2)^2 = (e_1 e_3)^2 = (e_2 e_3)^2 = -1 \quad (4.15)$$

よってベルソル \boldsymbol{v} が定義できます。回転角を 2θ とすると、

$$\boldsymbol{v} = v_1 e_1 e_2 + v_2 e_1 e_3 + v_3 e_2 e_3, \quad \boldsymbol{v}^2 = -1, \quad v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R} \quad (4.16)$$

$$B_x = \theta(v_1 e_1 e_2 + v_2 e_1 e_3 + v_3 e_2 e_3), \quad \theta \in \mathbb{R} \quad (4.17)$$

と定義して、回転子は以下の通りです。

$$\text{Rotor} : R_x = \exp(B_x) = \cos \theta + \boldsymbol{v} \sin \theta \quad (4.18)$$

\boldsymbol{v}^2 を展開すると、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}^2 &= (v_1 e_1 e_2 + v_2 e_1 e_3 + v_3 e_2 e_3)^2 \\ &= v_1^2 e_1 e_2 e_1 e_2 + v_1 v_2 e_1 e_2 e_1 e_3 + v_1 v_3 e_1 e_2 e_2 e_3 \\ &\quad + v_1 v_2 e_1 e_3 e_1 e_2 + v_2^2 e_1 e_3 e_1 e_3 + v_2 v_3 e_1 e_3 e_2 e_3 \\ &\quad + v_1 v_3 e_2 e_3 e_1 e_2 + v_2 v_3 e_2 e_3 e_1 e_3 + v_3^2 e_2 e_3 e_2 e_3 \\ &= -v_1^2 + v_1 v_2 e_2 e_3 - v_1 v_3 e_1 e_3 - v_1 v_2 e_2 e_3 - v_2^2 + v_2 v_3 e_1 e_2 + v_1 v_3 e_1 e_3 - v_2 v_3 e_1 e_2 - v_3^2 \\ &= -v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 \end{aligned} \quad (4.19)$$

4.6.2 時間的双ベクトルの回転子

次に、双ベクトルの内、時間的双ベクトル $e_0 e_1, e_0 e_2, e_0 e_3$ を使って回転子 (Rotor) を定義します。二乗について確認します。

$$(e_0 e_1)^2 = (e_0 e_2)^2 = (e_0 e_3)^2 = 1 \quad (4.20)$$

よって双曲的ベルソル \boldsymbol{u} が定義できます。回転角を 2ϕ とすると、

$$\boldsymbol{u} = u_1 e_0 e_1 + u_2 e_0 e_2 + u_3 e_0 e_3, \quad \boldsymbol{u}^2 = 1, \quad u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R} \quad (4.21)$$

$$B_t = \phi(u_1 e_0 e_1 + u_2 e_0 e_2 + u_3 e_0 e_3), \quad \phi \in \mathbb{R} \quad (4.22)$$

と定義して、回転子は以下の通りです。

$$\text{Rotor} : R_t = \exp(B_t) = \cosh \phi + \boldsymbol{u} \sinh \phi \quad (4.23)$$

\boldsymbol{u}^2 を展開すると、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}^2 &= (u_1 e_0 e_1 + u_2 e_0 e_2 + u_3 e_0 e_3)^2 \\ &= u_1^2 e_0 e_1 e_0 e_1 + u_1 u_2 e_0 e_1 e_0 e_2 + u_1 u_3 e_0 e_1 e_0 e_3 \\ &\quad + u_1 u_2 e_0 e_2 e_0 e_1 + u_2^2 e_0 e_2 e_0 e_2 + u_2 u_3 e_0 e_2 e_0 e_3 \\ &\quad + u_1 u_3 e_0 e_3 e_0 e_1 + u_2 u_3 e_0 e_3 e_0 e_2 + u_3^2 e_0 e_3 e_0 e_3 \\ &= u_1^2 - u_1 u_2 e_1 e_2 - u_1 u_3 e_1 e_3 + u_1 u_2 e_1 e_2 + u_2^2 - u_2 u_3 e_2 e_3 + u_1 u_3 e_1 e_3 + u_2 u_3 e_2 e_3 + u_3^2 \\ &= u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \end{aligned} \quad (4.24)$$

4.7 クリフォード代数のローレンツ変換

$Cl(1, 3)$ におけるローレンツ変換の計算を説明します。改めて時空については以下の定義です。

$$\text{Spacetime} : \mathbb{M} := \{te_0 + xe_1 + ye_2 + ze_3, \quad t, x, y, z \in \mathbb{R}\} \quad (4.25)$$

$$\text{Invariant} : m^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2, \quad m \in \mathbb{M} \quad (4.26)$$

1-ベクトルよりなる時空を双ベクトルによるサンドイッチ積で回転変換する事を考えます。双ベクトルは6種類あります。様子を見るために具体的に一方向だけを計算してみましょう。 $R = a + be_0 e_1$ とすると $\tilde{R} = a - be_0 e_1$ になります。 $Cl(1, 3)$ では、

$$R\tilde{R} = (a + be_0 e_1)(a - be_0 e_1) = a^2 - b^2 = 1$$

を満たすように係数が決定される必要があります。ご存知の様に、この数式に当てはまる適切な関数は双曲線関数です。 e_0 が含まれるため、これは時間方向の回転であり、ローレンツブーストを意味しています。 $e_0 e_2, e_0 e_3$ についても同様と考えられます。双ベクトルの内、 e_0 が含まれる双ベクトルは時間的な双ベクトルと考えられます。

一方、 e_0 が含まれない双ベクトルは空間的な双ベクトルと考えられます。 $R = a + be_1e_2$ で計算してみましょう。 $\tilde{R} = a - be_1e_2$ になり、

$$R\tilde{R} = (a + be_1e_2)(a - be_1e_2) = a^2 + b^2 = 1$$

空間的双ベクトルによるサンドイッチ積では、満たすべき係数の条件は単位円上という事になります。これは空間方向の回転ですので、ローレンツブーストにはなりません。 e_1e_3, e_2e_3 についても同様と考えられます。

ここまでは双四元数で実現できる計算と変わりません。

4.8 四元数の直積との対比

双四元数は四元数の係数を複素数にしましたが、同じように係数を四元数にしてみます。四元数としてお互いに干渉しない虚数単位のセットを 2 つ定義します。

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad (4.27)$$

$$I^2 = J^2 = K^2 = -1 \quad (4.28)$$

$$ij = k, jk = i, ki = j, ji = -k, kj = -i, ik = -j \quad (4.29)$$

$$IJ = K, JK = I, KI = J, JI = -K, KJ = -I, IK = -J \quad (4.30)$$

$$iI = Ii, jI = Ij, kI = Ik \quad (4.31)$$

$$iJ = Ji, jJ = Jj, kJ = Jk \quad (4.32)$$

$$iK = Ki, jK = Kj, kK = Kk \quad (4.33)$$

これらを組み合わせて 2 つの四元数の直積を作りますが、利便性の為に以後「双四元数」(バイクォータニオン) と呼称します。

$$\begin{aligned} \text{Biquaternion: } \mathbb{H} \otimes \mathbb{H} &:= a + bi + cj + dk + m + ni + rj + sk \\ a, b, c, d &\in \mathbb{R} \\ m &= m_1I + m_2J + m_3K, \quad m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{R} \\ n &= n_1I + n_2J + n_3K, \quad n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{R} \\ r &= r_1I + r_2J + r_3K, \quad r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R} \\ s &= s_1I + s_2J + s_3K, \quad s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (4.34)$$

双四元数はクリフォード代数 $Cl(3, 1)$ の変形と同型になっています。以下の様に各ブレードに割り当てます。

- スカラー: a
- 1-ベクトル: $cj + sk = cj + s_1kI + s_2kJ + s_3kK$
- 双ベクトル: $ni + m = n_1iI + n_2iJ + n_3iK + m_1I + m_2J + m_3K$
- 3-ベクトル: $dk + rj = dk + r_1jI + r_2jJ + r_3jK$
- 擬スカラー: bi

$Cl(3, 1)$ の変形は以下の様に一部の順序を置き換えます。

- 双ベクトルの一部: $e_1e_2, e_2e_3 \rightarrow e_2e_1, e_3e_2$
- 3-ベクトルの一部: $e_0e_1e_2, e_0e_2e_3 \rightarrow e_0e_2e_1, e_0e_3e_2$

全体的に順序を整えます。

- 1-ベクトル: e_0, e_1, e_2, e_3
- 双ベクトル: $e_0e_1, e_0e_2, e_0e_3, e_3e_2, e_1e_3, e_2e_1$
- 3-ベクトル: $e_1e_2e_3, e_0e_3e_2, e_0e_1e_3, e_0e_2e_1$
- 擬スカラー: $e_0e_1e_2e_3$

乗積表を作って確かめてみます。

表 4.5 双四元数の乗積表

	j	kI	kJ	kK	iI	iJ	iK	I	J	K	k	jI	jJ	jK	i
j	-1	$+iI$	$+iJ$	$+iK$	$-kI$	$-kJ$	$-kK$	$+jI$	$+jJ$	$+jK$	$+i$	$-I$	$-J$	$-K$	$-k$
kI	$-iI$	+1	$-K$	$+J$	$-j$	$+jK$	$-jJ$	$-k$	$+kK$	$-kJ$	$-I$	$+i$	$-iK$	$+iJ$	$+jI$
kJ	$-iJ$	$+K$	+1	$-I$	$-jK$	$-j$	$+jI$	$-kK$	$-k$	$+kI$	$-J$	$+iK$	$+i$	$-iI$	$+jJ$
kK	$-iK$	$-J$	$+I$	+1	$+jJ$	$-jI$	$-j$	$+kJ$	$-kI$	$-k$	$-K$	$-iJ$	$+iI$	$+i$	$+jK$
iI	$+kI$	$+j$	$-jK$	$+jJ$	+1	$-K$	$+J$	$-i$	$+iK$	$-iJ$	$-jI$	$-k$	$+kK$	$-kJ$	$-I$
iJ	$+kJ$	$+jK$	$+j$	$-jI$	$+K$	+1	$-I$	$-iK$	$-i$	$+iI$	$-jJ$	$-kK$	$-k$	$+kI$	$-J$
iK	$+kK$	$-jJ$	$+jI$	$+j$	$-J$	$+I$	+1	$+iJ$	$-iI$	$-i$	$-jK$	$+kJ$	$-kI$	$-k$	$-K$
I	$+jI$	$-k$	$+kK$	$-kJ$	$-i$	$+iK$	$-iJ$	-1	$+K$	$-J$	$+kI$	$-j$	$+jK$	$-jJ$	$+iI$
J	$+jJ$	$-kK$	$-k$	$+kI$	$-iK$	$-i$	$+iI$	$-K$	-1	$+I$	$+kJ$	$-jK$	$-j$	$+jI$	$+iJ$
K	$+jK$	$+kJ$	$-kI$	$-k$	$+iJ$	$-iI$	$-i$	$+J$	$-I$	-1	$+kK$	$+jJ$	$-jI$	$-j$	$+iK$
k	$-i$	$-I$	$-J$	$-K$	$+jI$	$+jJ$	$+jK$	$+kI$	$+kJ$	$+kK$	-1	$-iI$	$-iJ$	$-iK$	$+j$
jI	$-I$	$-i$	$+iK$	$-iJ$	$+k$	$-kK$	$+kJ$	$-j$	$+jK$	$-jJ$	$+iI$	+1	$-K$	$+J$	$-kI$
jJ	$-J$	$-iK$	$-i$	$+iI$	$+kK$	$+k$	$-kI$	$-jK$	$-j$	$+jI$	$+iJ$	$+K$	+1	$-I$	$-kJ$
jK	$-K$	$+iJ$	$-iI$	$-i$	$-kJ$	$+kI$	$+k$	$+jJ$	$-jI$	$-j$	$+iK$	$-J$	$+I$	+1	$-kK$
i	$+k$	$-jI$	$-jJ$	$-jK$	$-I$	$-J$	$-K$	$+iI$	$+iJ$	$+iK$	$-j$	$+kI$	$+kJ$	$+kK$	-1

表 4.6 Cl(3,1) 変換形の乗積表 (e 表記を省略)

	0	1	2	3	01	02	03	32	13	21	123	032	013	021	0123
0	-	+01	+02	+03	-1	-2	-3	+032	+013	+021	+0123	-32	-13	-21	-123
1	-01	+	-21	+13	-0	+021	-013	-123	+3	-2	-32	+0123	-03	+02	+032
2	-02	+21	+	-32	-021	-0	+032	-3	-123	+1	-13	+03	+0123	-01	+013
3	-03	-13	+32	+	+013	-032	-0	+2	-1	-123	-21	-02	+01	+0123	+021
01	+1	+0	-021	+013	+	-21	+13	-0123	+03	-02	-032	-123	+3	-2	-32
02	+2	+021	+0	-032	+21	+	-32	-03	-0123	+01	-013	-3	-123	+1	-13
03	+3	-013	+032	+0	-13	+32	+	+02	-01	-0123	-021	+2	-1	-123	-21
32	+032	-123	+3	-2	-0123	+03	-02	-	+21	-13	+1	-0	+021	-013	+01
13	+013	-3	-123	+1	-03	-0123	+01	-21	-	+32	+2	-021	-0	+032	+02
21	+021	+2	-1	-123	+02	-01	-0123	+13	-32	-	+3	+013	-032	-0	+03
123	-0123	-32	-13	-21	+032	+013	+021	+1	+2	+3	-	-01	-02	-03	+0
032	-32	-0123	+03	-02	+123	-3	+2	-0	+021	-013	+01	+	-21	+13	-1
013	-13	-03	-0123	+01	+3	+123	-1	-021	-0	+032	+02	+21	+	-32	-2
021	-21	+02	-01	-0123	-2	+1	+123	+013	-032	-0	+03	-13	+32	+	-3
0123	+123	-032	-013	-021	-32	-13	-21	+01	+02	+03	-0	+1	+2	+3	-

これらは一致しています。

4.9 双四元数の内積と外積

さて、四元数の積には以下のように内積と外積が組み込まれています。

$$\begin{aligned} a &= a_0 + a_1i + a_2j + a_3k = a_0 + u \\ b &= b_0 + b_1i + b_2j + b_3k = b_0 + v \end{aligned} \quad (4.35)$$

と置いて、

$$\begin{aligned} ab &= a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 \\ &\quad + (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2)i \\ &\quad + (a_0b_2 + a_2b_0 + a_3b_1 - a_1b_3)j \\ &\quad + (a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1)k \\ &= a_0b_0 - u \cdot v + a_0v + b_0u + u \times v \end{aligned} \quad (4.36)$$

スカラー部分を取り除くと、

$$uv = -u \cdot v + u \times v \quad (4.37)$$

1-ベクトルの内積と外積を考えます。1-ベクトルを実数係数で具体化すると以下のようになっています。

$$\begin{aligned} p &= p_0e_0 + p_1e_1 + p_2e_2 + p_3e_3 \\ q &= q_0e_0 + q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3, \quad p_0, \dots, q_3, q_0, \dots, q_3 \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (4.38)$$

内積と外積の極めて一般的な定義としてはウェッジ積を用いて以下の定義になります。

$$pq = \lambda p \cdot q + \mu p \wedge q, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (4.39)$$

ここで $\lambda = \mu = -1$ を選択すると、

$$\begin{aligned} pq &= -p \cdot q - p \wedge q \\ qp &= -q \cdot p - q \wedge p = -p \cdot q + p \wedge q \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} 2p \cdot q &= -(pq + qp) \\ 2p \wedge q &= -(pq - qp) \\ p \cdot q &= -\frac{1}{2}(pq + qp) \\ p \wedge q &= -\frac{1}{2}(pq - qp) \end{aligned} \quad (4.41)$$

一般的に、1-ベクトル p と n グレードのマルチベクトル $^{*1}A_n = p_1 \wedge p_2 \dots \wedge p_n$ の内積と外積は以下のようになります。

$$\begin{aligned} 2p \cdot A_n &= (-1)^n (pA_n - (-1)^n A_n p) \\ 2p \wedge A_n &= (-1)^n (pA_n + (-1)^n A_n p) \end{aligned} \quad (4.42)$$

特に双ベクトル B の場合は、 $n = 2$ なので、 $2p \cdot B = pB - Bp$ となります。具体的に、 $p = p_0j + p_1kI, B = b_0iI + b_1iJ$ の内積について計算すると、

$$\begin{aligned} pB &= (p_0j + p_1kI)(b_0iI + b_1iJ) = -p_0b_0kI - p_0b_1kJ - p_1b_0j + p_1b_1jK \\ Bp &= (b_0iI + b_1iJ)(p_0j + p_1kI) = p_0b_0kI + p_0b_1kJ + p_1b_0j + p_1b_1jK \\ 2p \cdot B &= pB - Bp = -2p_0b_0kI - 2p_0b_1kJ - 2p_1b_0j \\ p \cdot B &= -p_1b_0j - p_0b_0kI - p_0b_1kJ \end{aligned} \quad (4.43)$$

または、

$$\begin{aligned} pB &= (p_0e_0 + p_1e_1)(b_0e_0e_1 + b_1e_0e_2) = -p_0b_0e_1 - p_0b_1e_2 - p_1b_0e_0 + p_1b_1e_0e_2e_1 \\ Bp &= (b_0e_0e_1 + b_1e_0e_2)(p_0e_0 + p_1e_1) = p_0b_0e_1 + p_0b_1e_2 + p_1b_0e_0 + p_1b_1e_0e_2e_1 \\ p \cdot B &= -p_1b_0e_0 - p_0b_0e_1 - p_0b_1e_2 \end{aligned} \quad (4.44)$$

4.10 双四元数による擬ユークリッド空間

1-ベクトルの実数係数を以下のように定めて内積を計算すると、

$$s = tj + xkI + ykJ + zkK, \quad t, x, y, z \in \mathbb{R} \quad (4.45)$$

$$s \cdot s = -ss = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (4.46)$$

内積は相対論的不変量になります。ローレンツ変換は以下のように定義されます。

$$X' = RXR^* \quad (4.47)$$

ここで R は $RR^* = 1$ を満たす偶数グレード（通常、双ベクトル）です。同様に任意の 3-ベクトル A に対して、

$$A = a_0k + a_1jI + a_2jJ + a_3jK \quad (4.48)$$

$$A' = RAR^* \quad (4.49)$$

が成り立ち、相対論的不変量 $A \cdot A$ が得られます。ラピディティ θ が、 $\tanh \theta = v/c$ で与えられ、方向を表す単位ベクトル（ベルソル）が、

$$\boldsymbol{d} = d_1I + d_2J + d_3K, \quad d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 1, \quad d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R} \quad (4.50)$$

^{*1} 複数回ウェッジ積を重ねた結果の事で、双ベクトルや 3-ベクトルが構成される

で与えられる時、

$$\begin{aligned}
 R &= \exp\left(\frac{1}{2}\theta \boldsymbol{di}\right) \\
 &= \cosh\frac{\theta}{2} + \boldsymbol{di} \sinh\frac{\theta}{2} \\
 &= \cosh\frac{\theta}{2} + (d_1iI + d_2iJ + d_3iK) \sinh\frac{\theta}{2}
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

として R が定まります。

第5章

クリフォード代数と一般相対性理論

5.1 斜交座標と基底ベクトル

曲がった空間を表現するためにはこれまで使用してきた直交座標は適用できず斜交座標を使用します。まず二次元で考えます。斜交座標ではベクトルの成分は共変と反変の2種類あります。二次元ベクトル A の共変成分 A_1, A_2 と、反変成分 A^1, A^2 があるとします。^{*1}反変成分を定義する基底ベクトル e_1, e_2 と共変成分を定義する双対基底ベクトル e^1, e^2 については以下のような関係があります。^{*2}

$$\begin{aligned} A &= A^1 e_1 + A^2 e_2 = A_1 e^1 + A_2 e^2 \\ e_1 \cdot e^2 &= e_2 \cdot e^1 = 0, \quad e_1 \cdot e^1 = e_2 \cdot e^2 = 1 \end{aligned} \quad (5.1)$$

e_1, e_2, e^1, e^2 は座標の基準となるベクトルですが長さは1とは限りません。長さが1になる場合は、 e_1, e^1 の成す角度が0の場合で、そうすると e_2, e^2 の成す角度も0になり、 $e_1 = e^1, e_2 = e^2$ になり、長さが一斉に1にそろい直交座標となる場合です。

次に A ベクトルの微小変位 dA の長さを考えると以下ようになります。

$$N(dA) = dA \cdot dA = dA_1 dA^1 + dA_2 dA^2 = dA^1 dA_1 + dA^2 dA_2 \quad (5.2)$$

そもそも長さをこのように定義したいがために基底ベクトルを選んでいきます。アインシュタインの縮約記法で表記すると、

$$N(dA) = dA_i dA^i = dA^i dA_i \quad (5.3)$$

ここで共変成分だけを使って長さを表すようにした時、

$$N(dA) = \begin{pmatrix} dA_1 & dA_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dA_1 \\ dA_2 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

となるように、

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

を定めると g が空間の特徴を表すようになります。 g を計量テンソルと呼びます。通常の平面であれば、

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

となります。 g は一般的に対称テンソルです。四次元ベクトルを持ってきて、以下のように g を定めれば、

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

特殊相対論的時空の不変量が表現できます。特殊相対論の時間と空間を論じる時に斜交座標で説明される事もありますが、リーマン幾何学の斜交座標とは異なるので注意しましょう。特殊相対論では計量 g は変化しませんが、リーマン幾何学では g が変化していきます。

^{*1} アインシュタインの縮約記法により、共変成分を下添え字、反変成分を上添え字で表記します。

^{*2} 基底ベクトルについては添え字の上下が入れ替わります。

斜交座標を持ってきても物差しが変わっただけで空間は曲がっていない事に注意してください。 g を変化させると内積の計算規則が変更されていきます。 g は場所によって変化していくので、位置の関数として表現されます。空間が曲がるとは、場所によって計量 $g(x)$ が変化していく事によって検出されます。位置の関数となる計量 $g(x)$ が、平行移動したときに計量の様態がどのように変化するかが空間の歪曲となります。ある位置の $g(x)$ が標準と異なっていたとしても、平行移動して $g(x)$ に変化がなければ空間は曲がっていません。

逆に言うと、空間の歪曲を算出するにあたって $g(x)$ の関数の中身を知る必要はありません。微小移動量 dx で、 $g(x)$ と $g(x + dx)$ の違いが分かればそれで歪曲の度合いが算出できます。

5.1.1 クリフォード代数で計量が異なるという事の意味

クリフォード代数での計量は幾何積のルールとして現れ、平坦な時空で $Cl(1,3)$ を選択すれば、計量は、

$$\eta = [1, -1, -1, -1] \quad (5.8)$$

となり、内積は、

$$e_0 \cdot e_0 = 1, e_1 \cdot e_1 = e_2 \cdot e_2 = e_3 \cdot e_3 = -1 \quad (5.9)$$

$$e_i \cdot e_i = \eta_i, \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (5.10)$$

となります。これらが新しい基底 ν_i で表現し直されるとすると、係数を ω_{ij} として、

$$\nu_i = \omega_{ij} e_j, \quad \omega_{ij} \in \mathbb{R}, \quad i, j = 0, 1, 2, 3 \quad (5.11)$$

$$\nu_i \cdot \nu_i = (\omega_{ij})^2 e_j \cdot e_j = (\omega_{ij})^2 \eta_j \quad (5.12)$$

ω_{ij} は 16 個の係数です。つまり、各 ν_i について全ての基本基底のスカラー合成の範囲内にあるとします。新しい基底 ν_i の新しい計量は、

$$g_i = (\omega_{ij})^2 \eta_j \quad (5.13)$$

になりました。これでとりあえず入れ物が用意されました。次に制約を考えていきます。これらは不変量を保つという制約があります。

$$S^2 = g_0 t^2 + g_1 x^2 + g_2 y^2 + g_3 z^2 = \eta_0 t^2 + \eta_1 x^2 + \eta_2 y^2 + \eta_3 z^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (5.14)$$

この制約をクリフォード代数で表現すると回転子による回転に帰着します。四次元時空では、6 種類の双ベクトルにより構成されます。

$$R = \exp(\gamma_0 e_0 e_1 + \gamma_1 e_0 e_2 + \gamma_2 e_0 e_3 + \gamma_3 e_1 e_2 + \gamma_4 e_1 e_3 + \gamma_5 e_2 e_3) \quad (5.15)$$

双四元数では、

$$R = \exp(\omega_0 iI + \omega_1 iJ + \omega_2 iK + \omega_3 I + \omega_4 J + \omega_5 K) \quad (5.16)$$

変形 $Cl(3,1)$ では、

$$R = \exp(\omega_0 \epsilon_0 \epsilon_1 + \omega_1 \epsilon_0 \epsilon_2 + \omega_2 \epsilon_0 \epsilon_3 + \omega_3 \epsilon_3 \epsilon_2 + \omega_4 \epsilon_1 \epsilon_3 + \omega_5 \epsilon_2 \epsilon_1) \quad (5.17)$$

これらの内、左側の時空的な 3 成分がもたらす回転はローレンツブーストになり、右側の空間的な 3 成分がもたらす回転は空間回転になります。

$$S' = RSR^*, \quad RR^* = 1, \quad S \cdot S = S' \cdot S' \quad (5.18)$$

この回転はまた、双四元数や分解型八元数による回転と同型の、双曲線関数と三角関数の混合タイプになっています。

時空の歪みを算出するにあたっては、 ω_{ij} が具体的にどんな値なのかを知る必要はない事に注意してください。更に、計量 g_i についても知る必要はありません。平行移動でどれだけ計量 g_i が変化するかを知れば歪みがわかりますが、ここで位置の関数である $g(x)$ が R で表現できる事が分かったわけですから、 R も位置による関数 $R(x)$ です。クリフォード代数で計量が異なるという事の意味は、回転子が異なるという意味に他なりません。時空の歪みは回転子の変化量で表現できるという事になります。

5.2 クリフォード代数の時空超立方体

$Cl(1, 3)$ において、擬スカラー $e_0 e_1 e_2 e_3$ を 1-ベクトルにかけると以下ようになります。

$$\begin{aligned} (te_0 + xe_1 + ye_2 + ze_3)e_0 e_1 e_2 e_3 &= te_1 e_2 e_3 + xe_0 e_2 e_3 - ye_0 e_1 e_3 + ze_0 e_1 e_2 \\ e_0 e_1 e_2 e_3 (te_1 e_2 e_3 + xe_0 e_2 e_3 - ye_0 e_1 e_3 + ze_0 e_1 e_2) &= te_0 + xe_1 + ye_2 + ze_3 \end{aligned} \quad (5.19)$$

左からかけると元に戻ります。y 軸については符号が反転しています。

$$\begin{aligned} (te_1 e_2 e_3 + xe_0 e_2 e_3 - ye_0 e_1 e_3 + ze_0 e_1 e_2)^2 &= t^2 + txe_0 e_1 + tye_0 e_2 + tze_0 e_3 \\ &\quad - txe_0 e_1 - x^2 - xye_1 e_2 + xze_1 e_3 \\ &\quad - tye_0 e_2 - xye_1 e_2 - y^2 + zye_2 e_3 \\ &\quad - tze_0 e_3 - xze_1 e_3 - yze_2 e_3 - z^2 \\ &= t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \end{aligned} \quad (5.20)$$

二乗すると不変量になります。この様に 1-ベクトルに擬スカラーをかけて 3-ベクトルにする操作を双対変換 (dual map) と呼ぶ事とします。時空とその双対時空の和のノルムを計算してみます。

$$S = te_0 + xe_1 + ye_2 + ze_3, \quad S^\dagger = te_1 e_2 e_3 + xe_0 e_2 e_3 - ye_0 e_1 e_3 + ze_0 e_1 e_2 \quad (5.21)$$

と置くと、

$$Se_0 e_1 e_2 e_3 = S^\dagger, \quad e_0 e_1 e_2 e_3 S^\dagger = S \quad (5.22)$$

$$S^2 = (S^\dagger)^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} SS^\dagger &= (te_0 + xe_1 + ye_2 + ze_3)(te_1 e_2 e_3 + xe_0 e_2 e_3 - ye_0 e_1 e_3 + ze_0 e_1 e_2) \\ &\quad + t^2 e_1 e_2 e_3 e_4 + txe_2 e_3 - tye_1 e_3 + tze_1 e_2 \\ &\quad - txe_2 e_3 - x^2 e_0 e_1 e_2 e_3 - xye_0 e_3 + xze_0 e_2 \\ &\quad + tye_1 e_3 + xye_0 e_3 - y^2 e_0 e_1 e_2 e_3 - yze_0 e_1 \\ &\quad - tze_1 e_2 - xze_0 e_2 + yze_0 e_1 - z^2 e_0 e_1 e_2 e_3 \\ &= (t^2 - x^2 - y^2 - z^2)e_1 e_2 e_3 e_4 \\ &= S^2 e_1 e_2 e_3 e_4 \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} S^\dagger S &= (te_1 e_2 e_3 + xe_0 e_2 e_3 - ye_0 e_1 e_3 + ze_0 e_1 e_2)(te_0 + xe_1 + ye_2 + ze_3) \\ &\quad - t^2 e_1 e_2 e_3 e_4 - txe_2 e_3 - tye_1 e_3 - tze_1 e_2 \\ &\quad + txe_2 e_3 + x^2 e_0 e_1 e_2 e_3 - xye_0 e_3 - xze_0 e_2 \\ &\quad + tye_1 e_3 + xye_0 e_3 + y^2 e_0 e_1 e_2 e_3 - yze_0 e_1 \\ &\quad + tze_1 e_2 + xze_0 e_2 + yze_0 e_1 + z^2 e_0 e_1 e_2 e_3 \\ &= -(t^2 - x^2 - y^2 - z^2)e_1 e_2 e_3 e_4 \\ &= -S^2 e_1 e_2 e_3 e_4 \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} (S + S^\dagger)^2 &= S^2 + (S^\dagger)^2 + SS^\dagger + S^\dagger S \\ &= 2S^2 \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$\frac{1}{2}(S + S^\dagger)^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (5.27)$$

和についても不変量となっている様子です。双対時空にさらに右から擬スカラーをかけると、

$$(te_1 e_2 e_3 + xe_0 e_2 e_3 - ye_0 e_1 e_3 + ze_0 e_1 e_2)e_0 e_1 e_2 e_3 = -te_0 - xe_1 - ye_2 - ze_3 \quad (5.28)$$

となり全符号が反転します。従って時空に擬スカラーを 4 回かけるごとに元に戻ります。

5.2.1 $Cl(1, 3)$ の超立方体

擬スカラー $e_0e_1e_2e_3$ は幾何代数的には時空の 4 次元超立方体の向き付きの体積を表しています。向きの情報は、 $e_0e_1e_2e_3$ 自体が持っています。双対で算出した 3-ベクトルは、4 次元超立方体を構成する 3 次元超平面を形成しています。係数はその超平面の面積 (3 次元体積) を表しています。 $e_1e_2e_3$ は、空間超平面を構成しています。他の e_0 が関わる 3 つ $e_0e_1e_2, e_0e_1e_3, e_0e_2e_3$ は、それぞれ時空超平面を構成しています。

単位超立方体を考えてみます。時間と空間を同じスケールで考えると光円錐外になってしまうので、空間は光速と比べ十分小さい単位で考えます。

- 単位時空: $(t, x, y, z) = (c, 1, 1, 1)$
- 単位時空超平面: $(xyz, tyz, txz, txy) = (1, c, c, c)$

単位体積は光速 c になり、 $e_1e_2e_3$ の単位超面積は 1 で、 $e_0e_2e_3, e_0e_1e_3, e_0e_1e_2$ の単位超面積は c です。原点と座標 (ct, x, y, z) が張る超立方体は、超体積が $ctxyz$ で超面積は、 $xyz, ctyz, ctxz, ctxy$ になります。

5.2.2 超平面の法線

クリフォード代数では、擬ベクトル (ここでは 3-ベクトル) の超平面に擬スカラーをかける操作で法線が求まります。この法線の方法は単位超立方体の辺を構成していた時空座標の基底と一致していると考えられます。

さて、ここで空間の歪みを考えてみましょう。3 次元の立方体を思い浮かべてください。歪んでいない立方体では、x 軸の方向と立方体の yz 平面の法線は一致しています。しかし、歪んだ立方体になると x 軸と立方体の yz 平面の法線は一致しなくなります。

同様に歪んだ四次元時空についても法線不一致が起きると考えられます。時空と双対時空超平面の法線の関係は、丁度リーマン幾何学で言う反変ベクトルと共変ベクトルの関係に似ています。

5.2.3 双対時空で考える時空の歪曲

クリフォード代数の構造の中で、1-ブレードと 3-ブレードが独立した変数を持ち、その不一致が斜交座標とみなせるとしました。どのように不一致が起きるのかについては、3-ブレードを不変量を保ったまま変形させると考えます。そのような変形については、2-ブレードの時空的回転子である、 e_0e_1, e_0e_2, e_0e_3 の指数関数による双曲線関数型の回転と、空間的回転子である、 e_1e_2, e_1e_3, e_2e_3 の指数関数による三角関数型の回転の合成になると考えられます。これらの回転子が組み合わさって、3-ブレードへサンドイッチ積する事によって、超立方体が変形します。

重要なのはこの超立方体の歪みを内部ステータスとして持っていると考えた時、リーマン幾何学で行われる平行移動はもはや必要なくなるという事です。従って、時空が滑らかに連続している必要もなくなり、時空連続体仮説が棄却されます。

重力の影響はこの時空立方体へ作用し、それが時間進捗に従って自然に時空へと反映されます。もし時空立方体の歪みが時空へ反映される事に抗えば、加速度として感じる力に変換されます。逆に言うと物体が加速度を持つとき、時空側が先に歪んで時空立方体との差が出現する事になると考えます。

5.2.4 双対空間回転

一般的にどの様に 3-ブレードへの回転を考えれば良いのか探っていきます。ここでは、1-ブレードの時空に対する 2-ブレードによる回転操作に相当する 3-ブレードへの作用が、2-ブレードの双対による回転操作になると仮定して計算してみます。

具体的に 1 方向についてだけ計算して様子を見てみましょう。双ベクトル e_1e_2 によって、x-y 平面における角度 2θ の回転を行ってみます。物体は一定の速さ $|\mathbf{v}|$ で移動しているとします。移動の方向転換になるのでローレンツブーストにはなりませんが、円運動になるので遠心力が働いていると考えられます。物体の速度 \mathbf{v} によっては移動しながら回転したり、螺旋運動をしています。

- 初期時空: $S = te_0 + xe_1 + ye_2 + ze_3$
- 空間的回転子: $R = \exp(\theta e_1e_2) = \cos \theta + e_1e_2 \sin \theta$
- 空間的回転子リバーズ: $\tilde{R} = \cos \theta - e_1e_2 \sin \theta$

- 初期双対時空: $S^\dagger = t e_1 e_2 e_3 + x e_0 e_2 e_3 - y e_0 e_1 e_3 + z e_0 e_1 e_2$
- 空間的双対回転子: $R^\dagger = \exp(\theta e_1 e_2 e_0 e_1 e_2 e_3) = \exp(-\theta e_0 e_3) = \cosh \theta - e_0 e_3 \sinh \theta$
- 空間的双対回転子リバーズ: $\tilde{R}^\dagger = \cosh \theta + e_0 e_3 \sinh \theta$

$RS\tilde{R}$ を計算すると、x-y 平面での回転になります。こちらの計算の詳細は省略します。

$R^\dagger S^\dagger \tilde{R}^\dagger$ を計算してみます。

$$\begin{aligned} R^\dagger S^\dagger &= (\cosh \theta - e_0 e_3 \sinh \theta)(te_1 e_2 e_3 + xe_0 e_2 e_3 - ye_0 e_1 e_3 + ze_0 e_1 e_2) \\ &= S^\dagger \cosh \theta + (te_0 e_1 e_2 + xe_2 - ye_1 + ze_1 e_2 e_3) \sinh \theta \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} R^\dagger S^\dagger \tilde{R}^\dagger &= (S^\dagger \cosh \theta + (te_0 e_1 e_2 + xe_2 - ye_1 + ze_1 e_2 e_3) \sinh \theta)(\cosh \theta + e_0 e_3 \sinh \theta) \\ &= S^\dagger \cosh^2 \theta + (te_0 e_1 e_2 + xe_2 - ye_1 + ze_1 e_2 e_3) e_0 e_3 \sinh^2 \theta \\ &\quad + (S^\dagger e_0 e_3 + te_0 e_1 e_2 + xe_2 - ye_1 + ze_1 e_2 e_3) \cosh \theta \sinh \theta \\ &= (te_1 e_2 e_3 + xe_0 e_2 e_3 - ye_0 e_1 e_3 + ze_0 e_1 e_2) \cosh^2 \theta + (te_1 e_2 e_3 - xe_0 e_2 e_3 + ye_0 e_1 e_3 + ze_0 e_1 e_2) \sinh^2 \theta \\ &\quad + ((te_1 e_2 e_3 + xe_0 e_2 e_3 - ye_0 e_1 e_3 + ze_0 e_1 e_2) e_0 e_3 + te_0 e_1 e_2 + xe_2 - ye_1 + ze_1 e_2 e_3) \cosh \theta \sinh \theta \\ &= (te_1 e_2 e_3 + xe_0 e_2 e_3 - ye_0 e_1 e_3 + ze_0 e_1 e_2) \cosh^2 \theta + (te_1 e_2 e_3 - xe_0 e_2 e_3 + ye_0 e_1 e_3 + ze_0 e_1 e_2) \sinh^2 \theta \\ &\quad + (te_0 e_1 e_2 - xe_2 + ye_1 + ze_1 e_2 e_3 + te_0 e_1 e_2 + xe_2 - ye_1 + ze_1 e_2 e_3) \cosh \theta \sinh \theta \\ &= (te_1 e_2 e_3 + xe_0 e_2 e_3 - ye_0 e_1 e_3 + ze_0 e_1 e_2) \cosh^2 \theta + (te_1 e_2 e_3 - xe_0 e_2 e_3 + ye_0 e_1 e_3 + ze_0 e_1 e_2) \sinh^2 \theta \\ &\quad + 2(te_0 e_1 e_2 + ze_1 e_2 e_3) \cosh \theta \sinh \theta \\ &= (t \cosh^2 \theta + t \sinh^2 \theta + 2z \cosh \theta \sinh \theta) e_1 e_2 e_3 \\ &\quad + (x \cosh^2 \theta - x \sinh^2 \theta) e_0 e_2 e_3 + (-y \cosh^2 \theta + y \sinh^2 \theta) e_0 e_1 e_3 \\ &\quad + (z \cosh^2 \theta + z \sinh^2 \theta + 2t \cosh \theta \sinh \theta) e_0 e_1 e_2 \\ &= (t \cosh^2 \theta + t \sinh^2 \theta + 2z \cosh \theta \sinh \theta) e_1 e_2 e_3 + xe_0 e_2 e_3 - ye_0 e_1 e_3 \\ &\quad + (z \cosh^2 \theta + z \sinh^2 \theta + 2t \cosh \theta \sinh \theta) e_0 e_1 e_2 \\ &= (t \cosh(2\theta) + z \sinh(2\theta)) e_1 e_2 e_3 + xe_0 e_2 e_3 - ye_0 e_1 e_3 + (z \cosh(2\theta) + t \sinh(2\theta)) e_0 e_1 e_2 \end{aligned} \quad (5.30)$$

$\theta^\dagger = -\theta$ とすると、

$$\begin{bmatrix} t' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(2\theta^\dagger) & -\sinh(2\theta^\dagger) \\ -\sinh(2\theta^\dagger) & \cosh(2\theta^\dagger) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ z \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

式の形からローレンツブーストを表している事がわかります。

少しまとめます。1-ベクトルよりなる時空に擬スカラーをかけると双対時空が現れました。時空の円運動を表現する空間回転の回転子に擬ベクトルをかけ、円運動の双対回転子を構成しました。双対回転子により双対時空をサンドイッチ積すると、ローレンツブーストになりました。時空体積を表現していると考えられる擬ベクトルによる双対時空が双曲線関数的に歪むと解釈できます。円運動する物体が同時に双対時空の歪みを内部状態として持つと考えれば、双対回転子による計算が、円運動による加速度、つまり遠心力を表現している可能性が考えられます。

逆にこの双対時空の z 方向へのローレンツブーストが先に加速度として作用した場合を考えます。 $R^\dagger = \exp(-\theta e_0 e_3)$ の双対計算をすると、

$$(R^\dagger)^\dagger = \exp(-\theta e_0 e_3 e_0 e_1 e_2 e_3) = \exp(-\theta e_1 e_2) = \cos \theta - e_1 e_2 \sin \theta \quad (5.32)$$

この式は最初の円運動の回転の逆を意味しています。双対時空が通常時空に作用する結果は逆回転になるという事ですから、円運動の中心方向と逆方向の遠心力を表現していると考えられます。双対時空の時間方向の歪みは遠心力による時間の遅れになると解釈できます。また、双曲線関数なので角度が大きくなると加速度が小さくなるという事はありません。

5.2.5 双対時空回転

それでは次に、物体が加速して速さが増大する計算をしてみます。

- ラピディティ（速さの増大分）: $\tanh \phi = \Delta v / c$
- 初期時空: $S = te_0 + xe_1 + ye_2 + ze_3$

- 時空的回転子: $R = \exp(\phi e_0 e_1) = \cosh \phi + e_0 e_1 \sinh \phi$
- 時空的回転子リバーズ: $\tilde{R} = \cosh \phi - e_0 e_1 \sinh \phi$
- 初期双対時空: $S^\dagger = t e_1 e_2 e_3 + x e_0 e_2 e_3 - y e_0 e_1 e_3 + z e_0 e_1 e_2$
- 時空的双対回転子: $R^\dagger = \exp(\phi e_0 e_1 e_0 e_1 e_2 e_3) = \exp(\phi e_2 e_3) = \cos \phi + e_2 e_3 \sin \phi$
- 時空的双対回転子リバーズ: $\tilde{R}^\dagger = \cos \phi - e_2 e_3 \sin \phi$

$RS\tilde{R}$ を計算すると、t-x 時空平面でのローレンツブーストになります。こちらの計算の詳細は省略します。

$R^\dagger S^\dagger \tilde{R}^\dagger$ を計算してみます。

$$\begin{aligned} R^\dagger S^\dagger &= (\cos \phi + e_2 e_3 \sin \phi)(t e_1 e_2 e_3 + x e_0 e_2 e_3 - y e_0 e_1 e_3 + z e_0 e_1 e_2) \\ &= S^\dagger \cos \phi + (-t e_1 - x e_0 + y e_0 e_1 e_2 + z e_0 e_1 e_3) \sin \phi \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned} R^\dagger S^\dagger \tilde{R}^\dagger &= (S^\dagger \cos \phi + (-t e_1 - x e_0 + y e_0 e_1 e_2 + z e_0 e_1 e_3) \sin \phi)(\cos \phi - e_2 e_3 \sin \phi) \\ &= S^\dagger \cos^2 \phi + (t e_1 + x e_0 - y e_0 e_1 e_2 - z e_0 e_1 e_3) e_2 e_3 \sin^2 \phi \\ &\quad + (-S^\dagger e_2 e_3 - t e_1 - x e_0 + y e_0 e_1 e_2 + z e_0 e_1 e_3) \cos \phi \sin \phi \\ &= (t e_1 e_2 e_3 + x e_0 e_2 e_3 - y e_0 e_1 e_3 + z e_0 e_1 e_2) \cos^2 \phi + (t e_1 e_2 e_3 + x e_0 e_2 e_3 + y e_0 e_1 e_3 - z e_0 e_1 e_2) \sin^2 \phi \\ &\quad + (-(t e_1 e_2 e_3 + x e_0 e_2 e_3 - y e_0 e_1 e_3 + z e_0 e_1 e_2) e_2 e_3 - t e_1 - x e_0 + y e_0 e_1 e_2 + z e_0 e_1 e_3) \cos \phi \sin \phi \\ &= (t e_1 e_2 e_3 + x e_0 e_2 e_3 - y e_0 e_1 e_3 + z e_0 e_1 e_2) \cos^2 \phi + (t e_1 e_2 e_3 + x e_0 e_2 e_3 + y e_0 e_1 e_3 - z e_0 e_1 e_2) \sin^2 \phi \\ &\quad + (t e_0 + x e_0 + y e_0 e_1 e_2 + z e_0 e_1 e_3 - t e_1 - x e_0 + y e_0 e_1 e_2 + z e_0 e_1 e_3) \cos \phi \sin \phi \\ &= (t e_1 e_2 e_3 + x e_0 e_2 e_3 - y e_0 e_1 e_3 + z e_0 e_1 e_2) \cos^2 \phi + (t e_1 e_2 e_3 + x e_0 e_2 e_3 + y e_0 e_1 e_3 - z e_0 e_1 e_2) \sin^2 \phi \\ &\quad + 2(y e_0 e_1 e_2 + z e_0 e_1 e_3) \cos \phi \sin \phi \\ &= (t \cos^2 \phi + t \sin^2 \phi) e_1 e_2 e_3 + (x \cos^2 \phi + x \sin^2 \phi) e_0 e_2 e_3 \\ &\quad + (-y \cos^2 \phi + y \sin^2 \phi + 2z \cos \phi \sin \phi) e_0 e_1 e_3 \\ &\quad + (z \cos^2 \phi - z \sin^2 \phi + 2y \cos \phi \sin \phi) e_0 e_1 e_2 \\ &= t e_1 e_2 e_3 + x e_0 e_2 e_3 + (-y \cos^2 \phi + y \sin^2 \phi + 2z \cos \phi \sin \phi) e_0 e_1 e_3 \\ &\quad + (z \cos^2 \phi - z \sin^2 \phi + 2y \cos \phi \sin \phi) e_0 e_1 e_2 \\ &= t e_1 e_2 e_3 + x e_0 e_2 e_3 (-y \cos(2\phi) + z \sin(2\phi)) e_0 e_1 e_3 + (z \cos(2\phi) + y \sin(2\phi)) e_0 e_1 e_2 \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$\begin{bmatrix} -y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(2\phi) & -\sin(2\phi) \\ \sin(2\phi) & \cos(2\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

$e_0 e_1 e_2, e_0 e_1 e_3$ の超平面面積が交換されます。 $e_0 e_1 e_3$ の大きさは符号反転していますが、これは $Cl(1, 3)$ 双対時空の特徴と合致しています。

こちらの式においても加速度を表していると考えられますが、循環関数なのである程度強い加速では、加速度による負荷を感じなくなると解釈できます。つまり非常に瞬間的な加速や減速を行う乗り物が成立する事になります。

$R^\dagger = \exp(\phi e_2 e_3)$ の双対計算をすると、

$$(R^\dagger)^\dagger = \exp(\phi e_2 e_3 e_0 e_1 e_2 e_3) = \exp(-\phi e_0 e_1) = \cosh \phi - e_0 e_1 \sinh \phi \quad (5.36)$$

こちらの $(R^\dagger)^\dagger$ では、時空にサンドイッチ積されると逆方向のブーストになります。加速では加速方向と逆に加速度を受ける事になりますが、その加速度を重力によって最初に作用させれば、自然と自由落下として移動が起きると考えます。

5.3 クリフォード代数での重力計算

双対時空の歪みとその歪みによる速度の変化について、多体シミュレーションを意識しつつ、三次元で一般化された形を整えています。双対空間回転と双対時空回転の様子見から、加速度と重力の数理的な本質が見えてきました。1-ブレードで表現された時空の回転により、3-ブレードで表現された双対時空とのズレが生じ加速度の慣性力となります。逆に双対時空から時空への双対の双対回転子による作用が重力による圧のない自然落下となると考えられます。重力による時空超平面の変形は、空間回転子とブースト回転子の混合による事が見えてきました。物体の進行方向と重力の作用が直角の場合は空間回転子になり、平行の場合はブースト回転子になり、それ以外は、両者の角度により配合率が決定されると考えるのが自然です。ベルソルを使ってまとめてみます。

表 5.1 時空回転のパラメーター

回転種別	角度	方向	ベルソル	双対回転
ブースト	2ϕ	進行方向	$\mathbf{u}^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$	空間回転
空間回転	2θ	進行方向と直角	$\mathbf{v}^2 = -(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) = -1$	ブースト

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= u_1 iI + u_2 iJ + u_3 iK \\
\mathbf{u}^2 &= (u_1 iI + u_2 iJ + u_3 iK)(u_1 iI + u_2 iJ + u_3 iK) \\
&= u_1^2 - u_1 u_2 K + u_1 u_3 J + u_1 u_2 K + u_2^2 - u_2 u_3 I - u_1 u_3 J + u_2 u_3 I + u_3^2 \\
&= u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1 \\
\mathbf{v} &= v_1 I + v_2 J + v_3 K \\
\mathbf{v}^2 &= (v_1 I + v_2 J + v_3 K)(v_1 I + v_2 J + v_3 K) \\
&= -v_1^2 + v_1 v_2 K - v_1 v_3 J - v_1 v_2 K - v_2^2 + v_2 v_3 I + v_1 v_3 J - v_2 v_3 I - v_3^2 \\
&= -v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 = -1
\end{aligned} \tag{5.37}$$

$$\begin{aligned}
R_{boost} &= \exp(\gamma_0 e_0 e_1 + \gamma_1 e_0 e_2 + \gamma_2 e_0 e_3) = \exp(\phi \mathbf{u}) = \cosh \phi + \mathbf{u} \sinh \phi \\
R_{space} &= \exp(\gamma_3 e_1 e_2 + \gamma_4 e_1 e_3 + \gamma_5 e_2 e_3) = \exp(\theta \mathbf{v}) = \cos \theta + \mathbf{v} \sin \theta
\end{aligned} \tag{5.38}$$

$$\begin{aligned}
R_{hybrid} &= \exp(\gamma_0 e_0 e_1 + \gamma_1 e_0 e_2 + \gamma_2 e_0 e_3 + \gamma_3 e_1 e_2 + \gamma_4 e_1 e_3 + \gamma_5 e_2 e_3) \\
&= \exp(\phi \mathbf{u} + \theta \mathbf{v}) \\
&= \exp(u_1 \phi iI + u_2 \phi iJ + u_3 \phi iK + \theta v_1 I + \theta v_2 J + \theta v_3 K) \\
&= \exp\left((\theta v_1 + \phi u_1 i)I + (\theta v_2 + \phi u_2 i)J + (\theta v_3 + \phi u_3 i)K\right)
\end{aligned} \tag{5.39}$$

η_n で置き換えて見通しを良くします。

$$\eta_n = \theta v_n + \phi u_n i, \quad n = 1, 2, 3 \tag{5.40}$$

$$R_{hybrid} = \exp(\eta_1 I + \eta_2 J + \eta_3 K) \tag{5.41}$$

ベルソルの方向としてはお互いが直角になっているので、

$$v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3 = 0 \tag{5.42}$$

また二乗に関しては以下の通りです。

$$\eta_1^2 = (v_1 \theta + u_1 \phi i)^2 = v_1^2 \theta^2 - u_1^2 \phi^2 + 2v_1 u_1 \theta \phi \tag{5.43}$$

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = (v_1 \theta + u_1 \phi i)^2 + (v_2 \theta + u_2 \phi i)^2 + (v_3 \theta + u_3 \phi i)^2 = \theta^2 - \phi^2 \tag{5.44}$$

$$(\eta_1 I + \eta_2 J + \eta_3 K)^2 = -\eta_1^2 - \eta_2^2 - \eta_3^2 = -(\theta^2 - \phi^2) \tag{5.45}$$

$\alpha = \phi^2 - \theta^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\eta = \eta_1 I + \eta_2 J + \eta_3 K$ と置くと、

$$\eta^2 = \alpha, \quad R_{hybrid} = \exp(\eta) \tag{5.46}$$

α の平方根については、

$$\eta = \sqrt{\alpha} = \phi \mathbf{u} + \theta \mathbf{v} \tag{5.47}$$

ここで \mathbf{u}, \mathbf{v} について更に調べると、

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}\mathbf{v} &= (u_1 iI + u_2 iJ + u_3 iK)(v_1 I + v_2 J + v_3 K) \\
&= -u_1 v_1 i + u_1 v_2 iK - u_1 v_3 iJ - u_2 v_1 iK - u_2 v_2 i + u_2 v_3 iI + u_3 v_1 iJ - u_3 v_2 iI - u_3 v_3 i \\
&= (u_2 v_3 - u_3 v_2) iI + (u_3 v_1 - u_1 v_3) iJ + (u_1 v_2 - u_2 v_1) iK \\
\mathbf{v}\mathbf{u} &= (v_1 I + v_2 J + v_3 K)(u_1 iI + u_2 iJ + u_3 iK) \\
&= -u_1 v_1 i + u_2 v_1 iK - u_3 v_1 iJ - u_1 v_2 iK - u_2 v_2 i + u_3 v_2 iI + u_1 v_3 iJ - u_2 v_3 iI - u_3 v_3 i \\
&= (u_3 v_2 - u_2 v_3) iI + (u_1 v_3 - u_3 v_1) iJ + (u_2 v_1 - u_1 v_2) iK
\end{aligned} \tag{5.48}$$

$$\mathbf{u}^2 = 1, \quad \mathbf{v}^2 = -1, \quad \mathbf{u}\mathbf{v} = -\mathbf{v}\mathbf{u} \tag{5.49}$$

になっているので、 \mathbf{u}, \mathbf{v} については、 $Cl(1, 1)$ の基底と同等になります。

$$(\phi \mathbf{u} + \theta \mathbf{v})^2 = \phi^2 - \theta^2 \quad (5.50)$$

テイラー展開を行うと、

$$\begin{aligned} R_{hybrid} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \eta^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \eta^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \eta^{2n+1} \end{aligned} \quad (5.51)$$

5.3.1 混合回転の具体化

α の符号によって場合分けします。

- $\alpha > 0$:

$$\alpha^n = |\alpha|^n \quad (5.52)$$

$$\begin{aligned} R_{hybrid} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \alpha^n + \eta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \alpha^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (\sqrt{\alpha})^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (\sqrt{\alpha})^{2n+1} \\ &= \cosh(\sqrt{\alpha}) + \sinh(\sqrt{\alpha}) \end{aligned} \quad (5.53)$$

双曲線関数の加法定理から、

$$\begin{aligned} \cosh(\phi \mathbf{u} + \theta \mathbf{v}) &= \cosh(\phi \mathbf{u}) \cosh(\theta \mathbf{v}) + \sinh(\phi \mathbf{u}) \sinh(\theta \mathbf{v}) \\ &= \cosh \phi \cos \theta + \mathbf{u} \mathbf{v} \sinh \phi \sin \theta \\ \sinh(\phi \mathbf{u} + \theta \mathbf{v}) &= \sinh(\phi \mathbf{u}) \cosh(\theta \mathbf{v}) + \cosh(\phi \mathbf{u}) \sinh(\theta \mathbf{v}) \\ &= \mathbf{u} \sinh \phi \cos \theta + \mathbf{v} \cosh \phi \sin \theta \end{aligned} \quad (5.54)$$

$$\begin{aligned} R_{hybrid} &= \cosh \phi \cos \theta + \mathbf{u} \sinh \phi \cos \theta + \mathbf{v} \cosh \phi \sin \theta + \mathbf{u} \mathbf{v} \sinh \phi \sin \theta \\ &= (\cosh \phi + \mathbf{u} \sinh \phi)(\cos \theta + \mathbf{v} \sin \theta) \end{aligned} \quad (5.55)$$

- $\alpha < 0$:

$$\alpha^n = (-1)^n |\alpha|^n \quad (5.56)$$

$$\begin{aligned} R_{hybrid} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} |\alpha|^n + \eta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} |\alpha|^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\sqrt{|\alpha|})^{2n} + \frac{\eta}{\sqrt{|\alpha|}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\sqrt{|\alpha|})^{2n+1} \\ &= \cos(\sqrt{|\alpha|}) + \sin(\sqrt{|\alpha|}) \end{aligned} \quad (5.57)$$

ここで、 $|\alpha| = \theta^2 - \phi^2 > 0$ だから、 $\sqrt{|\alpha|} = \theta \mathbf{u} + \phi \mathbf{v}$

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{\sqrt{|\alpha|}} &= \frac{\phi \mathbf{u} + \theta \mathbf{v}}{\theta \mathbf{u} + \phi \mathbf{v}} = \frac{(\phi \mathbf{u} + \theta \mathbf{v})(\theta \mathbf{u} + \phi \mathbf{v})}{(\theta \mathbf{u} + \phi \mathbf{v})^2} = \frac{(\phi \mathbf{u} + \theta \mathbf{v})(\theta \mathbf{u} + \phi \mathbf{v})}{\theta^2 - \phi^2} \\ &= \frac{\phi \theta - \phi \theta + (\phi^2 - \theta^2) \mathbf{u} \mathbf{v}}{\theta^2 - \phi^2} \\ &= \mathbf{u} \mathbf{v} \end{aligned} \quad (5.58)$$

三角関数の加法定理から、

$$\begin{aligned} \cos(\theta \mathbf{u} + \phi \mathbf{v}) &= \cos(\theta \mathbf{u}) \cos(\phi \mathbf{v}) - \sin(\theta \mathbf{u}) \sin(\phi \mathbf{v}) \\ &= \cosh \phi \cos \theta - \mathbf{u} \mathbf{v} \sinh \phi \sin \theta \\ \sinh(\theta \mathbf{u} + \phi \mathbf{v}) &= \sin(\theta \mathbf{u}) \cos(\phi \mathbf{v}) + \cos(\theta \mathbf{u}) \sin(\phi \mathbf{v}) \\ &= \mathbf{u} \cosh \phi \sin \theta + \mathbf{v} \sinh \phi \cos \theta \end{aligned} \quad (5.59)$$

$$\begin{aligned}
R_{hybrid} &= \cosh \phi \cos \theta - \mathbf{u}\mathbf{v} \sinh \phi \sin \theta + \mathbf{u}\mathbf{v}(\mathbf{u} \cosh \phi \sin \theta + \mathbf{v} \sinh \phi \cos \theta) \\
&= \cosh \phi \cos \theta - \mathbf{u}\mathbf{v} \sinh \phi \sin \theta - \mathbf{v} \cosh \phi \sin \theta - \mathbf{u} \sinh \phi \cos \theta \\
&= \cosh \phi \cos \theta - \mathbf{u} \sinh \phi \cos \theta - \mathbf{v} \cosh \phi \sin \theta - \mathbf{u}\mathbf{v} \sinh \phi \sin \theta \\
&= (\cos \theta - \mathbf{v} \sin \theta)(\cosh \phi - \mathbf{u} \sinh \phi)
\end{aligned} \tag{5.60}$$

- $\alpha = 0$:

$$R_{hybrid} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \eta^n = 1 + \phi \mathbf{u} + \theta \mathbf{v} \tag{5.61}$$

5.3.2 ユニタリ性の確認

それぞれについての共役を選択してユニタリ性を確かめていきます。

- $\alpha = 0$:

$$\begin{aligned}
RR^* &= (1 + \phi \mathbf{u} + \theta \mathbf{v})(1 - \phi \mathbf{u} - \theta \mathbf{v}) \\
&= 1 - \phi \mathbf{u} - \theta \mathbf{v} + \phi \mathbf{u} - \phi^2 - \phi \theta \mathbf{u}\mathbf{v} + \theta \mathbf{v} + \phi \theta \mathbf{u}\mathbf{v} + \theta^2 \\
&= 1 - \phi^2 + \theta^2 \\
&= 1
\end{aligned} \tag{5.62}$$

- $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned}
R &= \cosh \phi \cos \theta + \mathbf{u} \sinh \phi \cos \theta + \mathbf{v} \cosh \phi \sin \theta + \mathbf{u}\mathbf{v} \sinh \phi \sin \theta \\
R^* &= \cosh \phi \cos \theta - \mathbf{u} \sinh \phi \cos \theta - \mathbf{v} \cosh \phi \sin \theta - \mathbf{u}\mathbf{v} \sinh \phi \sin \theta
\end{aligned} \tag{5.63}$$

この R^* は、 $\alpha < 0$ の場合の R と同じになっています。式の短縮のために $\cosh \phi = a, \sinh \phi = b, \cos \theta = p, \sin \theta = q$ と置いて、

$$\begin{aligned}
RR^* &= (ap + bp\mathbf{u} + aqv + bq\mathbf{u}\mathbf{v})(ap - bp\mathbf{u} - aqv - bq\mathbf{u}\mathbf{v}) \\
&= a^2p^2 - abp^2\mathbf{u} - a^2pq\mathbf{v} - abpq\mathbf{u}\mathbf{v} + abp^2\mathbf{u} - b^2p^2 - abpq\mathbf{u}\mathbf{v} - b^2pq\mathbf{v} \\
&\quad + a^2pq\mathbf{v} + abpq\mathbf{u}\mathbf{v} + a^2q^2 - abq^2\mathbf{u} + abpq\mathbf{u}\mathbf{v} + b^2pq\mathbf{v} + abq^2\mathbf{u} - b^2q^2 \\
&= a^2p^2 - b^2p^2 + a^2q^2 - b^2q^2 \\
&= (a^2 - b^2)(p^2 + q^2) \\
&= 1
\end{aligned} \tag{5.64}$$

- $\alpha < 0$:

逆も同様なので、

$$RR^* = R^*R = 1 \tag{5.65}$$

5.3.3 混合回転の双対

双対混合回転を計算します。 $Cl(1, 3)$ で考えると、

$$\begin{aligned}
R &= \exp(\gamma_0 e_0 e_1 + \gamma_1 e_0 e_2 + \gamma_2 e_0 e_3 + \gamma_3 e_1 e_2 + \gamma_4 e_1 e_3 + \gamma_5 e_2 e_3) \\
R^\dagger &= \exp((\gamma_0 e_0 e_1 + \gamma_1 e_0 e_2 + \gamma_2 e_0 e_3 + \gamma_3 e_1 e_2 + \gamma_4 e_1 e_3 + \gamma_5 e_2 e_3)e_0 e_1 e_2 e_3) \\
&= \exp(\gamma_0 e_2 e_3 - \gamma_1 e_1 e_3 + \gamma_2 e_1 e_2 - \gamma_3 e_0 e_3 + \gamma_4 e_0 e_2 - \gamma_5 e_0 e_1)
\end{aligned} \tag{5.66}$$

双四元数で考えると、

$$\begin{aligned}
R &= \exp(\omega_0 iI + \omega_1 iJ + \omega_2 iK + \omega_3 I + \omega_4 J + \omega_5 K) \\
R^\dagger &= \exp((\omega_0 iI + \omega_1 iJ + \omega_2 iK + \omega_3 I + \omega_4 J + \omega_5 K)i) \\
&= \exp(-\omega_0 I - \omega_1 J - \omega_2 K + \omega_3 iI + \omega_4 iJ + \omega_5 iK)
\end{aligned} \tag{5.67}$$

ベルソルの双対は、

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^\dagger &= i\mathbf{u} = -u_1 I - u_2 J - u_3 K \\
(\mathbf{u}^\dagger)^2 &= -u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 = -1 \\
\mathbf{v}^\dagger &= i\mathbf{v} = v_1 iI + v_2 iJ + v_3 iK \\
(\mathbf{v}^\dagger)^2 &= v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1
\end{aligned} \tag{5.68}$$

$$\begin{aligned}
R_{boost}^\dagger &= \exp(-\omega_0 I - \omega_1 J - \omega_2 K) = \exp(\phi \mathbf{u}^\dagger) = \cos \phi + \mathbf{u}^\dagger \sin \phi \\
R_{space}^\dagger &= \exp(\omega_3 i I + \omega_4 i J + \omega_5 i K) = \exp(\theta \mathbf{v}^\dagger) = \cosh \theta + \mathbf{v}^\dagger \sinh \theta
\end{aligned} \tag{5.69}$$

表 5.2 時空歪曲の混合回転

$\alpha = \phi^2 - \theta^2$	通常回転子 (Usual Rotor)	双対回転子 (Dual Rotor)
$\alpha > 0$	$(\cosh \phi + \mathbf{u} \sinh \phi)(\cos \theta + \mathbf{v} \sin \theta)$	$(\cos \phi + \mathbf{u}^\dagger \sin \phi)(\cosh \theta + \mathbf{v}^\dagger \sinh \theta)$
$\alpha < 0$	$(\cos \theta - \mathbf{v} \sin \theta)(\cosh \phi - \mathbf{u} \sinh \phi)$	$(\cosh \theta - \mathbf{v}^\dagger \sinh \theta)(\cos \phi - \mathbf{u}^\dagger \sin \phi)$
$\alpha = 0$	$1 + \phi \mathbf{u} + \theta \mathbf{v}$	$1 + \phi \mathbf{u}^\dagger + \theta \mathbf{v}^\dagger$

物体の進行方向と重力の作用する方向のなす角度を σ 、重力の大きさを ρ とすると、

$$\phi = \frac{1}{2}\rho \cos \sigma, \quad \theta = \frac{1}{2}\rho \sin \sigma, \quad 0 \leq \sigma \leq \pi, \quad \rho \geq 0, \quad \sigma, \rho \in \mathbb{R} \tag{5.70}$$

5.3.4 クリフォード代数の 4 元運動量

相対性理論では、運動量 \mathbf{p} 、エネルギー E 、質量 m の間に以下の関係があります。

$$E^2 = (\mathbf{p}c)^2 + (mc^2)^2 \tag{5.71}$$

質量を左辺にして整理すると、

$$(mc^2)^2 = E^2 - (\mathbf{p}c)^2 = E^2 - (p_1c)^2 - (p_2c)^2 - (p_3c)^2 \tag{5.72}$$

クリフォード代数 $Cl(1, 3)$ に当てはめて、

$$\begin{aligned}
P &= Ee_0 + cp_1e_1 + cp_2e_2 + cp_3e_3 \\
P^2 &= E^2 - c^2p_1^2 - c^2p_2^2 - c^2p_3^2 = E^2 - c^2\mathbf{p}^2 = (mc^2)^2 \\
|P| &= mc^2, \quad (m \geq 0)
\end{aligned} \tag{5.73}$$

この様に 1-ブレードで表現しても不変量は保たれますが、 c の位置が丁度、時空超平面の単位面積になっています。

$$E(e_1e_2e_3), \quad p_1(c e_0e_2e_3), \quad p_2(c e_0e_1e_3), \quad p_3(c e_0e_1e_2) \tag{5.74}$$

双対時空として表現すると、

$$\begin{aligned}
P^\dagger &= Ee_1e_2e_3 + cp_1e_0e_2e_3 - cp_2e_0e_1e_3 + cp_3e_0e_1e_2 \\
(P^\dagger)^2 &= E^2 - c^2p_1^2 - c^2p_2^2 - c^2p_3^2 = E^2 - c^2\mathbf{p}^2 = (mc^2)^2 \\
|P^\dagger| &= mc^2, \quad (m \geq 0)
\end{aligned} \tag{5.75}$$

クリフォード代数表現からすると、4 元運動量はどうかや時空超立方体と関連が深い様子です。1-ブレードの 4 元速度 U を考えてみます。3 次元速度を $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ 、固有時間を τ とすると、ローレンツ因子 γ は、

$$\gamma = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} \tag{5.76}$$

$$\begin{aligned}
U &= \frac{cdt}{d\tau}e_0 + \frac{dx}{d\tau}e_1 + \frac{dy}{d\tau}e_2 + \frac{dz}{d\tau}e_3 \\
&= \gamma ce_0 + \gamma v_1e_1 + \gamma v_2e_2 + \gamma v_3e_3 \\
&= \gamma(ce_0 + v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3) \\
U^2 &= \gamma^2(c^2 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2) \\
&= \gamma^2(c^2 - \mathbf{v}^2) = c^2\gamma^2(1 - \mathbf{v}^2/c^2) \\
&= c^2 \\
|U| &= c
\end{aligned} \tag{5.77}$$

4 元速度のノルムと 4 元運動量のノルムは以下のような関係になっています。

$$|U|mc = |P^\dagger| \tag{5.78}$$

c の位置から 4 元速度は、単位時空基底で構成されています。

$$\gamma(ce_0), \quad \gamma v_1(e_1), \quad \gamma v_2(e_2), \quad \gamma v_3(e_3) \quad (5.79)$$

- 4 元速度: 単位時空基底で構成
- 4 元運動量: 時空超平面の単位面積基底で構成

4 元速度を扱う場合、単純に速度を足していくと光速を超えてしまう事になるので出来ませんが、4 元運動量であれば、3 次元運動量として加算していても、エネルギーが自動的に調整されるので、相対論的に破綻する事はありません。

光の場合

質量がゼロなら光的になります。 h をプランク定数、 ν を振動数として、

$$E^2 - c^2 \mathbf{p}^2 = E^2 - h^2 \boldsymbol{\nu}^2 = 0 \quad (5.80)$$

$$\begin{aligned} P_{light}^\dagger &= E e_1 e_2 e_3 + c p_1 e_0 e_2 e_3 - c p_2 e_0 e_1 e_3 + c p_3 e_0 e_1 e_2 \\ &= E e_1 e_2 e_3 + h \nu_1 e_0 e_2 e_3 - h \nu_2 e_0 e_1 e_3 + h \nu_3 e_0 e_1 e_2 \\ (P_{light}^\dagger)^2 &= |P_{light}^\dagger| = 0 \end{aligned} \quad (5.81)$$

光の場合、4 元速度は固有時間 $\tau = 0$ のため定義できませんが、速度の方向と大きさは明確なので算出は容易です。光は進行方向の空間の長さがローレンツ収縮によりゼロになっています。このようなゼロの空間で光の活動がどの様になっているかを考える事は困難です。しかし、時空超立方体で光の振動が起きていると考え、光に関する円偏光などの現象が理解しやすくなります。また、重力によって時空超立方体が変形すると光の進行方向が変化すると想定できます。

5.3.5 4 元運動量とラピディティの関係

相対性理論では運動量 \mathbf{p} と速度 \mathbf{v} は以下の関係があります。

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{|\mathbf{v}|}{c} \quad (5.82)$$

ここで \mathbf{p} および \mathbf{v} は三次元ベクトルの範囲とします。展開して変形していきます。 $p = |\mathbf{p}|, v = |\mathbf{v}|$ とします。

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \frac{m \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Leftrightarrow p^2 (1 - \frac{v^2}{c^2}) = m^2 v^2 \Leftrightarrow m^2 v^2 + \frac{p^2 v^2}{c^2} = p^2 \Leftrightarrow (m^2 + \frac{p^2}{c^2}) v^2 = p^2 \\ &\Leftrightarrow (\frac{m^2 c^2 + p^2}{c^2}) v^2 = p^2 \Leftrightarrow v^2 = p^2 (\frac{c^2}{m^2 c^2 + p^2}) \\ v &= \frac{pc}{\sqrt{m^2 c^2 + p^2}}, \quad v \rightarrow c \quad (p \rightarrow \infty, \quad m \rightarrow \infty), \quad v = c \quad (m = 0) \end{aligned} \quad (5.83)$$

運動量や質量が無限大に増大しても破綻しません。速さは光速に近づいていきます。質量がゼロの時、速度は光速になります。ラピディティ Θ を求めていくと、

$$\begin{aligned} \beta = \frac{v}{c} &= \tanh \Theta = \frac{p}{\sqrt{m^2 c^2 + p^2}} = \frac{pc}{E} < 1, \quad (p \rightarrow \infty, \quad m \rightarrow \infty) \\ \text{Rapidity: } \Theta &= \operatorname{arctanh} \frac{p}{\sqrt{m^2 c^2 + p^2}}, \quad \Theta \rightarrow \infty \quad (p \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (5.84)$$

5.3.6 双対時空での重力計算

ここまで時空連続体仮説を棄却して代わりに時空超立方体の性質を調べ、運動量は時空超立方体に関連した量と考えられる事を見してきました。重力として物体に働く力は、力というより時空超立方体の歪みであり、同時に運動量を歪ませる量と考えて来ています。物体もしくは粒子に働く力は、基本的に運動量の交換になります。物体が時空超立方体の歪みに抵抗し、物体の運動量の変化に反映されなかった場合は、それは力が働いたとは言えない事になります。日常的には時空超立方体の歪みに抵抗した力を重力と感じています。双対時空で考えると運動量交換の原理は変わらず、 P^\dagger の内、 (p_1, p_2, p_3) の三次元ベクトルにおいて交換されると考えられま

す。不変量 $(P^\dagger)^2$ は E の大きさを調整することで保たれます。従って、自由落下のみを計算する多体シミュレーションで考えた場合では、運動量の交換量が線形的に加算されます。

では、具体的な計算に入りましょう。まず2体で考えます。物体のパラメーターを以下の様に定義します。

	質量	運動量 (3次元ベクトル)	位置 (3次元座標)
物体 A	m_a	\mathbf{p}_a	\mathbf{x}_a
物体 B	m_b	\mathbf{p}_b	\mathbf{x}_b

物体 A と物体 B は重力によって運動量を交換し、交換の結果、運動量が反対向きに同じ量だけ変化します。

- 物体 A の運動量変化: $\Delta \mathbf{p}_a = \Delta \mathbf{p}$
- 物体 B の運動量変化: $\Delta \mathbf{p}_b = -\Delta \mathbf{p}$
- 物体 A,B 間の距離: $r = |\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_a|$
- 物体 A から B への方向: $\hat{\mathbf{r}} = (\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_a)/r$
- 万有引力定数: G
- 微小時間ステップ: Δt

重力による力積をニュートン近似を用いて次のように計算します。

$$\Delta \mathbf{p} = \Delta t \frac{G m_a m_b}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = \Delta t \frac{G m_a m_b}{r^3} (\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_a) \quad (5.85)$$

物体 A を含めて N 体の物体があるとする、 $N(N-1)/2$ の運動量の交換関係があります。物体 A に関して和を計算します。

$$\mathbf{p}_{total} = \sum_{n=1}^{N-1} \Delta \mathbf{p}_n \quad (5.86)$$

運動量に関しては線形的にどれだけでも加算することが出来るという前提です。この \mathbf{p}_{total} が物体の持つ双対時空に作用します。つまり、その物体が状態として持つ局所的な時空立方体を歪めます。ある瞬間に浮遊する物体が持っている双対時空は物体の持つ座標と一致しています。

$$\begin{aligned} S &= t e_0 + x e_1 + y e_2 + z e_3 \\ S^\dagger &= (t e_0 + x e_1 + y e_2 + z e_3) e_0 e_1 e_2 e_3 = t e_1 e_2 e_3 + x e_0 e_2 e_3 - y e_0 e_1 e_3 + z e_0 e_1 e_2 \end{aligned} \quad (5.87)$$

双四元数で表現すると、

$$\begin{aligned} S &= t j + x k I + y k J + z k K \\ S^\dagger &= i(t j + x k I + y k J + z k K) = t k - x j I - y j J - z j K \end{aligned} \quad (5.88)$$

- ある瞬間の物体の双対時空: $S^\dagger = t e_1 e_2 e_3 + x e_0 e_2 e_3 - y e_0 e_1 e_3 + z e_0 e_1 e_2$

双対混合回転子で表現すると、

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{p}_a}{|\mathbf{p}_a|}, \quad \mathbf{p} = \frac{\mathbf{p}_{total}}{|\mathbf{p}_{total}|}, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (5.89)$$

$$\cos \sigma = \mathbf{u} \cdot \mathbf{p}, \quad \phi = a \cos \sigma, \quad \theta = a \sin \sigma \quad (5.90)$$

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p} - \mathbf{u} \cos \sigma}{\sin \sigma}, \quad 0 < \sigma < \pi \quad (5.91)$$

$$R^\dagger = \left(\cos \frac{\phi}{2} + \mathbf{u}^\dagger \sin \frac{\phi}{2} \right) \left(\cosh \frac{\theta}{2} + \mathbf{v}^\dagger \sinh \frac{\theta}{2} \right) \quad (5.92)$$

運動量の方向と重力の方向が一致するとして、左側だけを計算していきます。

$$R = \exp \left(\frac{\phi}{2} \mathbf{u} \right) = \exp \left(\frac{\phi}{2} (u_1 e_0 e_1 + u_2 e_0 e_2 + u_3 e_0 e_3) \right) \quad (5.93)$$

時空的双対回転子は、 \mathbf{u} に $e_0 e_1 e_2 e_3$ をかけて構成するので、

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^\dagger &= \mathbf{u} e_0 e_1 e_2 e_3 = u_1 e_0 e_1 e_0 e_1 e_2 e_3 + u_2 e_0 e_2 e_0 e_1 e_2 e_3 + u_3 e_0 e_3 e_0 e_1 e_2 e_3 \\ &= u_1 e_2 e_3 - u_2 e_1 e_3 + u_3 e_1 e_2 \\ &= u_3 e_1 e_2 - u_2 e_1 e_3 + u_1 e_2 e_3 \end{aligned} \quad (5.94)$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u}^\dagger)^2 &= (u_3e_1e_2 - u_2e_1e_3 + u_1e_2e_3)^2 \\
&= u_3^2e_1e_2e_1e_2 - u_2u_3e_1e_2e_1e_3 + u_1u_3e_1e_2e_2e_3 \\
&\quad - u_2u_3e_1e_3e_1e_2 + u_2^2e_1e_3e_1e_3 - u_1u_2e_1e_3e_2e_3 \\
&\quad + u_1u_3e_2e_3e_1e_2 - u_1u_2e_2e_3e_1e_3 + u_1^2e_2e_3e_2e_3 \\
&= -u_3^2 - u_2u_3e_2e_3 - u_1u_3e_1e_3 \\
&\quad + u_2u_3e_2e_3 - u_2^2 - u_1u_2e_1e_2 \\
&\quad + u_1u_3e_1e_3 + u_1u_2e_1e_2 - u_1^2 \\
&= -u_1^2 - u_2^2 - u_3^2
\end{aligned} \tag{5.95}$$

従って、 \mathbf{u}^\dagger は四元数を使ったベルソルと同型となっています。

$$R^\dagger = \exp\left(\frac{\phi}{2}\mathbf{u}^\dagger\right) = \exp\left(\frac{\phi}{2}(u_3e_1e_2 - u_2e_1e_3 + u_1e_2e_3)\right) = \cos\frac{\phi}{2} + \mathbf{u}^\dagger \sin\frac{\phi}{2} \tag{5.96}$$

サンドイッチ積により重力の影響で歪んだ双対時空 $(S^\dagger)' = R^\dagger S^\dagger \widetilde{R}^\dagger$ を計算します。 $p = \cos\frac{\phi}{2}, q = \sin\frac{\phi}{2}$ とします。

$$\begin{aligned}
R^\dagger S^\dagger \widetilde{R}^\dagger &= (p + \mathbf{u}^\dagger q)S^\dagger(p - \mathbf{u}^\dagger q) \\
&= (pS^\dagger + q\mathbf{u}^\dagger S^\dagger)(p - \mathbf{u}^\dagger q) \\
&= p^2 S^\dagger + pq\mathbf{u}^\dagger S^\dagger - pqS^\dagger \mathbf{u}^\dagger - q^2 \mathbf{u}^\dagger S^\dagger \mathbf{u}^\dagger
\end{aligned} \tag{5.97}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^\dagger S^\dagger &= (u_3e_1e_2 - u_2e_1e_3 + u_1e_2e_3)(ze_0e_1e_2 - ye_0e_1e_3 + xe_0e_2e_3 + te_1e_2e_3) \\
&= zu_3e_1e_2e_0e_1e_2 - yu_3e_1e_2e_0e_1e_3 + xu_3e_1e_2e_0e_2e_3 + tu_3e_1e_2e_1e_2e_3 \\
&\quad - zu_2e_1e_3e_0e_1e_2 + yu_2e_1e_3e_0e_1e_3 - xu_2e_1e_3e_0e_2e_3 - tu_2e_1e_3e_1e_2e_3 \\
&\quad + zu_1e_2e_3e_0e_1e_2 - yu_1e_2e_3e_0e_1e_3 + xu_1e_2e_3e_0e_2e_3 + tu_1e_2e_3e_1e_2e_3 \\
&= -zu_3e_0 - yu_3e_0e_2e_3 - xu_3e_0e_1e_3 - tu_3e_3 \\
&\quad + zu_2e_0e_2e_3 - yu_2e_0 - xu_2e_0e_1e_2 - tu_2e_2 \\
&\quad + zu_1e_0e_1e_3 + yu_1e_0e_1e_2 - xu_1e_0 - tu_1e_1 \\
&= (-xu_1 - yu_2 - zu_3)e_0 - tu_1e_1 - tu_2e_2 - tu_3e_3 \\
&\quad + (yu_1 - xu_2)e_0e_1e_2 + (zu_1 - xu_3)e_0e_1e_3 + (zu_2 - yu_3)e_0e_2e_3
\end{aligned} \tag{5.98}$$

$$\begin{aligned}
S^\dagger \mathbf{u}^\dagger &= (ze_0e_1e_2 - ye_0e_1e_3 + xe_0e_2e_3 + te_1e_2e_3)(u_3e_1e_2 - u_2e_1e_3 + u_1e_2e_3) \\
&= zu_3e_0e_1e_2e_1e_2 - yu_3e_0e_1e_3e_1e_2 + xu_3e_0e_2e_3e_1e_2 + tu_3e_1e_2e_3e_1e_2 \\
&\quad - zu_2e_0e_1e_2e_1e_3 + yu_2e_0e_1e_3e_1e_3 - xu_2e_0e_2e_3e_1e_3 - tu_2e_1e_2e_3e_1e_3 \\
&\quad + zu_1e_0e_1e_2e_2e_3 - yu_1e_0e_1e_3e_2e_3 + xu_1e_0e_2e_3e_2e_3 + tu_1e_1e_2e_3e_2e_3 \\
&= -zu_3e_0 + yu_3e_0e_2e_3 + xu_3e_0e_1e_3 - tu_3e_3 \\
&\quad - zu_2e_0e_2e_3 - yu_2e_0 + xu_2e_0e_1e_2 - tu_2e_2 \\
&\quad - zu_1e_0e_1e_3 - yu_1e_0e_1e_2 - xu_1e_0 - tu_1e_1 \\
&= (-xu_1 - yu_2 - zu_3)e_0 - tu_1e_1 - tu_2e_2 - tu_3e_3 \\
&\quad - (yu_1 - xu_2)e_0e_1e_2 - (zu_1 - xu_3)e_0e_1e_3 - (zu_2 - yu_3)e_0e_2e_3
\end{aligned} \tag{5.99}$$

$$A_0 = -xu_1 - yu_2 - zu_3, \quad A_1 = yu_1 - xu_2, \quad A_2 = zu_1 - xu_3, \quad A_3 = zu_2 - yu_3 \tag{5.100}$$

と置いて整理すると、

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^\dagger S^\dagger &= A_0e_0 - tu_1e_1 - tu_2e_2 - tu_3e_3 + A_1e_0e_1e_2 + A_2e_0e_1e_3 + A_3e_0e_2e_3 \\
S^\dagger \mathbf{u}^\dagger &= A_0e_0 - tu_1e_1 - tu_2e_2 - tu_3e_3 - A_1e_0e_1e_2 - A_2e_0e_1e_3 - A_3e_0e_2e_3
\end{aligned} \tag{5.101}$$

$$\begin{aligned}
pq\mathbf{u}^\dagger S^\dagger - pqS^\dagger \mathbf{u}^\dagger &= 2pq(A_1e_0e_1e_2 + A_2e_0e_1e_3 + A_3e_0e_2e_3) \\
&= 2pqA_1e_0e_1e_2 + 2pqA_2e_0e_1e_3 + 2pqA_3e_0e_2e_3 \\
&= 2pq(yu_1 - xu_2)e_0e_1e_2 + 2pq(zu_1 - xu_3)e_0e_1e_3 + 2pq(zu_2 - yu_3)e_0e_2e_3
\end{aligned} \tag{5.102}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^\dagger S^\dagger \mathbf{u}^\dagger &= (A_0 e_0 - t u_1 e_1 - t u_2 e_2 - t u_3 e_3 + A_1 e_0 e_1 e_2 + A_2 e_0 e_1 e_3 + A_3 e_0 e_2 e_3)(u_3 e_1 e_2 - u_2 e_1 e_3 + u_1 e_2 e_3) \\
&= A_0 u_3 e_0 e_1 e_2 + t u_1 u_3 e_2 - t u_2 u_3 e_1 - t u_3^2 e_1 e_2 e_3 - A_1 u_3 e_0 - A_2 u_3 e_0 e_2 e_3 + A_3 u_3 e_0 e_1 e_3 \\
&\quad - A_0 u_2 e_0 e_1 e_3 - t u_1 u_2 e_3 - t u_2^2 e_1 e_2 e_3 + t u_2 u_3 e_1 - A_1 u_2 e_0 e_2 e_3 + A_2 u_2 e_0 + A_3 u_2 e_0 e_1 e_2 \\
&\quad + A_0 u_1 e_0 e_2 e_3 - t u_1^2 e_1 e_2 e_3 + t u_1 u_2 e_3 - t u_1 u_3 e_2 - A_1 u_1 e_0 e_1 e_3 + A_2 u_1 e_0 e_1 e_2 - A_3 u_1 e_0 \\
&= (-A_3 u_1 + A_2 u_2 - A_1 u_3) e_0 + (A_2 u_1 + A_3 u_2 + A_0 u_3) e_0 e_1 e_2 + (-A_1 u_1 - A_0 u_2 + A_3 u_3) e_0 e_1 e_3 \\
&\quad + (A_0 u_1 - A_1 u_2 - A_2 u_3) e_0 e_2 e_3 - t e_1 e_2 e_3
\end{aligned} \tag{5.103}$$

係数を展開すると、

$$\begin{aligned}
-A_3 u_1 + A_2 u_2 - A_1 u_3 &= -(z u_2 - y u_3) u_1 + (z u_1 - x u_3) u_2 - (y u_1 - x u_2) u_3 \\
&= -z u_1 u_2 + y u_1 u_3 + z u_1 u_2 - x u_2 u_3 - y u_1 u_3 + x u_2 u_3 \\
&= 0 \\
A_2 u_1 + A_3 u_2 + A_0 u_3 &= (z u_1 - x u_3) u_1 + (z u_2 - y u_3) u_2 + (-x u_1 - y u_2 - z u_3) u_3 \\
&= z u_1^2 - x u_1 u_3 + z u_2^2 - y u_2 u_3 - x u_1 u_3 - y u_2 u_3 - z u_3^2 \\
&= -2x u_1 u_3 - 2y u_2 u_3 + z(u_1^2 + u_2^2 - u_3^2) \\
-A_1 u_1 - A_0 u_2 + A_3 u_3 &= -(y u_1 - x u_2) u_1 - (-x u_1 - y u_2 - z u_3) u_2 + (z u_2 - y u_3) u_3 \\
&= -y u_1^2 + x u_1 u_2 + x u_1 u_2 + y u_2^2 + z u_2 u_3 + z u_2 u_3 - y u_3^2 \\
&= 2x u_1 u_2 + y(-u_1^2 + u_2^2 - u_3^2) + 2z u_2 u_3 \\
A_0 u_1 - A_1 u_2 - A_2 u_3 &= (-x u_1 - y u_2 - z u_3) u_1 - (y u_1 - x u_2) u_2 - (z u_1 - x u_3) u_3 \\
&= -x u_1^2 - y u_1 u_2 - z u_1 u_3 - y u_1 u_2 + x u_2^2 - z u_1 u_3 + x u_3^2 \\
&= x(-u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) - 2y u_1 u_2 - 2z u_1 u_3
\end{aligned} \tag{5.104}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^\dagger S^\dagger \mathbf{u}^\dagger &= (-2x u_1 u_3 - 2y u_2 u_3 + z(u_1^2 + u_2^2 - u_3^2)) e_0 e_1 e_2 \\
&\quad + (2x u_1 u_2 + y(-u_1^2 + u_2^2 - u_3^2) + 2z u_2 u_3) e_0 e_1 e_3 \\
&\quad + (x(-u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) - 2y u_1 u_2 - 2z u_1 u_3) e_0 e_2 e_3 - t e_1 e_2 e_3
\end{aligned} \tag{5.105}$$

$$\begin{aligned}
R^\dagger S^\dagger \widetilde{R}^\dagger &= p^2 S^\dagger + p q \mathbf{u}^\dagger S^\dagger - p q S^\dagger \mathbf{u}^\dagger - q^2 \mathbf{u}^\dagger S^\dagger \mathbf{u}^\dagger \\
&= p^2 z e_0 e_1 e_2 - p^2 y e_0 e_1 e_3 + p^2 x e_0 e_2 e_3 + p^2 t e_1 e_2 e_3 \\
&\quad + 2p q (y u_1 - x u_2) e_0 e_1 e_2 + 2p q (z u_1 - x u_3) e_0 e_1 e_3 + 2p q (z u_2 - y u_3) e_0 e_2 e_3 \\
&\quad - q^2 (-2x u_1 u_3 - 2y u_2 u_3 + z(u_1^2 + u_2^2 - u_3^2)) e_0 e_1 e_2 \\
&\quad - q^2 (2x u_1 u_2 + y(-u_1^2 + u_2^2 - u_3^2) + 2z u_2 u_3) e_0 e_1 e_3 \\
&\quad - q^2 (x(-u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) - 2y u_1 u_2 - 2z u_1 u_3) e_0 e_2 e_3 \\
&\quad + q^2 t e_1 e_2 e_3 \\
&= (p^2 z + 2p q (y u_1 - x u_2) - q^2 (-2x u_1 u_3 - 2y u_2 u_3 + z(u_1^2 + u_2^2 - u_3^2))) e_0 e_1 e_2 \\
&\quad + (-p^2 y + 2p q (z u_1 - x u_3) - q^2 (2x u_1 u_2 + y(-u_1^2 + u_2^2 - u_3^2) + 2z u_2 u_3)) e_0 e_1 e_3 \\
&\quad + (p^2 x + 2p q (z u_2 - y u_3) - q^2 (x(-u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) - 2y u_1 u_2 - 2z u_1 u_3)) e_0 e_2 e_3 \\
&\quad + t e_1 e_2 e_3 \\
&= (p^2 z + 2p q (y u_1 - x u_2) + q^2 (2x u_1 u_3 + 2y u_2 u_3 + z(-u_1^2 - u_2^2 + u_3^2))) e_0 e_1 e_2 \\
&\quad - (p^2 y + 2p q (x u_3 - z u_1) + q^2 (2x u_1 u_2 + y(-u_1^2 + u_2^2 - u_3^2) + 2z u_2 u_3)) e_0 e_1 e_3 \\
&\quad + (p^2 x + 2p q (z u_2 - y u_3) + q^2 (x(u_1^2 - u_2^2 - u_3^2) + 2y u_1 u_2 + 2z u_1 u_3)) e_0 e_2 e_3 \\
&\quad + t e_1 e_2 e_3
\end{aligned} \tag{5.106}$$

これは四元数による三次元の回転と同型と考えられます。以下の様に置き換えます。

$$q_1 = q u_1, \quad q_2 = q u_2, \quad q_3 = q u_3 \tag{5.107}$$

$$R^\dagger = \cos \frac{\phi}{2} + \mathbf{u}^\dagger \sin \frac{\phi}{2} = p + q u_3 e_1 e_2 - q u_2 e_1 e_3 + q u_1 e_2 e_3 = p + q_3 e_1 e_2 - q_2 e_1 e_3 + q_1 e_2 e_3 \tag{5.108}$$

$$\begin{cases} x' = p^2 x + 2p q (z u_2 - y u_3) + q^2 (x(u_1^2 - u_2^2 - u_3^2) + 2y u_1 u_2 + 2z u_1 u_3) \\ y' = p^2 y + 2p q (x u_3 - z u_1) + q^2 (2x u_1 u_2 + y(-u_1^2 + u_2^2 - u_3^2) + 2z u_2 u_3) \\ z' = p^2 z + 2p q (y u_1 - x u_2) + q^2 (2x u_1 u_3 + 2y u_2 u_3 + z(-u_1^2 - u_2^2 + u_3^2)) \end{cases} \tag{5.109}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x' = p^2x + 2p(zq_2 - yq_3) + x(q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) + 2yq_1q_2 + 2zq_1q_3 \\ y' = p^2y + 2p(xq_3 - zq_1) + 2xq_1q_2 + y(-q_1^2 + q_2^2 - q_3^2) + 2zq_2q_3 \\ z' = p^2z + 2p(yq_1 - xq_2) + 2xq_1q_3 + 2yq_2q_3 + z(-q_1^2 - q_2^2 + q_3^2) \end{cases} \quad (5.110)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x' = (p^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2)x + 2(zpq_2 - ypq_3 + yq_1q_2 + zq_1q_3) \\ y' = (p^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2)y + 2(xpq_3 - zpq_1 + xq_1q_2 + zq_2q_3) \\ z' = (p^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2)z + 2(ypq_1 - xpq_2 + xq_1q_3 + yq_2q_3) \end{cases} \quad (5.111)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x' = (p^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2)x + 2((q_1q_2 - pq_3)y + (q_1q_3 + pq_2)z) \\ y' = (p^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2)y + 2((q_1q_2 + pq_3)x + (q_2q_3 - pq_1)z) \\ z' = (p^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2)z + 2((q_1q_3 - pq_2)x + (q_2q_3 + pq_1)y) \end{cases} \quad (5.112)$$

四元数による三次元の回転計算とは符号が異なる部分がありますが、サンドイッチ積の順序が逆になっていて回転角度が逆になったと考えられます。本質的な部分は変わりません。

一方向だけで計算してみましょう。 $u_1 = 1, u_2 = 0, u_3 = 0$ とすると、

$$R^\dagger S^\dagger \widetilde{R}^\dagger = (p^2z + 2pqy - q^2z)e_0e_1e_2 - (p^2y - 2pqz - q^2y)e_0e_1e_3 + xe_0e_2e_3 + te_1e_2e_3 \quad (5.113)$$

$$2pq = 2 \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\phi}{2} = \sin \phi, \quad p^2 - q^2 = \cos \phi \quad (5.114)$$

$$R^\dagger S^\dagger \widetilde{R}^\dagger = (\sin \phi y + \cos \phi z)e_0e_1e_2 - (\cos \phi y - \sin \phi z)e_0e_1e_3 + xe_0e_2e_3 + te_1e_2e_3 \quad (5.115)$$

角度を中心にまとめると、

$$\begin{cases} x' = p^2x + 2pq(zu_2 - yu_3) + q^2(x(u_1^2 - u_2^2 - u_3^2) + 2yu_1u_2 + 2zu_1u_3) \\ y' = p^2y + 2pq(xu_3 - zu_1) + q^2(2xu_1u_2 + y(-u_1^2 + u_2^2 - u_3^2) + 2zu_2u_3) \\ z' = p^2z + 2pq(yu_1 - xu_2) + q^2(2xu_1u_3 + 2yu_2u_3 + z(-u_1^2 - u_2^2 + u_3^2)) \end{cases} \quad (5.116)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x' = (1 - q^2)x + 2pq(zu_2 - yu_3) + q^2(x(u_1^2 - u_2^2 - u_3^2) + 2yu_1u_2 + 2zu_1u_3) \\ y' = (1 - q^2)y + 2pq(xu_3 - zu_1) + q^2(y(-u_1^2 + u_2^2 - u_3^2) + 2xu_1u_2 + 2zu_2u_3) \\ z' = (1 - q^2)z + 2pq(yu_1 - xu_2) + q^2(z(-u_1^2 - u_2^2 + u_3^2) + 2xu_1u_3 + 2yu_2u_3) \end{cases} \quad (5.117)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x' = x + 2pq(zu_2 - yu_3) + q^2(x(u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - 1) + 2(yu_1u_2 + zu_1u_3)) \\ y' = y + 2pq(xu_3 - zu_1) + q^2(y(u_2^2 - u_3^2 - u_1^2 - 1) + 2(xu_1u_2 + zu_2u_3)) \\ z' = z + 2pq(yu_1 - xu_2) + q^2(z(u_3^2 - u_1^2 - u_2^2 - 1) + 2(xu_1u_3 + yu_2u_3)) \end{cases} \quad (5.118)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x' = x + (zu_2 - yu_3) \sin \phi + (x(u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - 1) + 2(yu_1u_2 + zu_1u_3)) \sin^2 \frac{\phi}{2} \\ y' = y + (xu_3 - zu_1) \sin \phi + (y(u_2^2 - u_3^2 - u_1^2 - 1) + 2(xu_1u_2 + zu_2u_3)) \sin^2 \frac{\phi}{2} \\ z' = z + (yu_1 - xu_2) \sin \phi + (z(u_3^2 - u_1^2 - u_2^2 - 1) + 2(xu_1u_3 + yu_2u_3)) \sin^2 \frac{\phi}{2} \end{cases} \quad (5.119)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x' = x + (zu_2 - yu_3) \sin \phi + (-2x(1 - u_1^2) + 2(yu_1u_2 + zu_1u_3)) \sin^2 \frac{\phi}{2} \\ y' = y + (xu_3 - zu_1) \sin \phi + (-2y(1 - u_2^2) + 2(xu_1u_2 + zu_2u_3)) \sin^2 \frac{\phi}{2} \\ z' = z + (yu_1 - xu_2) \sin \phi + (-2z(1 - u_3^2) + 2(xu_1u_3 + yu_2u_3)) \sin^2 \frac{\phi}{2} \end{cases} \quad (5.120)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x' = x + (zu_2 - yu_3) \sin \phi + 2(x(u_1^2 - 1) + yu_1u_2 + zu_1u_3) \sin^2 \frac{\phi}{2} \\ y' = y + (xu_3 - zu_1) \sin \phi + 2(y(u_2^2 - 1) + xu_1u_2 + zu_2u_3) \sin^2 \frac{\phi}{2} \\ z' = z + (yu_1 - xu_2) \sin \phi + 2(z(u_3^2 - 1) + xu_1u_3 + yu_2u_3) \sin^2 \frac{\phi}{2} \end{cases} \quad (5.121)$$

循環関数になりますので重力の増大の結果、運動量への影響に振動的な影響を与えていると考えられます。

どうして、直接的に通常時空に重力の影響を考えるのではなく、双対時空へかける計算を行うか、その必然性を説明します。ラビディティの総和を直接時空にかけても重力多体シミュレーションとして一応成立します。例えば、水星と太陽の要素をインプットすれば回転する楕円軌道が再現できます。しかし、このシミュレーション方式では重力が大きくなりすぎると無限大でエラーになって粒子の動きが止まってしまいます。重力の増大で計算不能になる原因はコンピューターの能力の限界ではなく、物理法則としての実在性について問題がある事を示していると考えます。無限大が出現する原因は双曲線関数の適用にあるので、三角関数による回転を混合すれば打開策が見つかると考えました。

さらに、一般相対性理論が仮定する時空連続体仮説が持つ特異点問題を回避するためには、双対時空における回転の計算を行うことで、この問題を回避する可能性があると考えました。この議論を進めるためには、通常時空と双対時空の関係から重力を数学的に表現する特別な手段を準備する必要があるそうです。

第 6 章

二重時空理論の成立

6.1 クリフォード代数表現の放棄

前章まで行ってきた通常時空と双対時空の二重時空を、今度は双四元数で表現してみます。

$$\begin{aligned} S &= tj + xkI + ykJ + zkK \\ S^\dagger &= (tj + xkI + ykJ + zkK)i = -tk + xjI + yjJ + zjK \end{aligned} \quad (6.1)$$

- ある瞬間の物体の双対時空: $S^\dagger = -tk + xjI + yjJ + zjK$
- $Cl(1,3)$ 表現: $S^\dagger = te_1e_2e_3 + xe_0e_2e_3 - ye_0e_1e_3 + ze_0e_1e_2$

双四元数の方は符号が時間反転になっており、クリフォード代数の空間の特定軸の対称性が乱れるよりは、双四元数版の方が物理的な意味が深まると考えられます。クリフォード代数でも基底の順序を入れ替える事で時間の反転として符号を揃えることは可能ですが、より直接的には双四元数を使う方が良いでしょう。この時間反転には深い物理的意味として、慣性力の本質や量子力学と関係がありそうです。今後は特に理由がない限り、双四元数表現を使うことにします。

6.2 二重時空理論での重力計算

6.2.1 重力と慣性力の本質

前章で、重力による影響の結果、双対時空の時空立方体が回転し歪む様子を、三角関数と双曲線関数の混合回転で見てきました。物体の運動量は時空立方体に沿って進行すると考えれば、時空立方体が変形すれば運動量が見かけ上変化するように見えるでしょう。もし物体の通常時空が時空立方体の変形に応じて変化するのであれば、物体側は、慣性力は感じられず無重力浮遊の状態を経験すると考えられます。ここで重要な幾何学的なイメージは、通常時空と双対時空の食い違いが重力に抵抗する時の慣性力になっているのではないかという推定です。

さて、リーマン幾何学とは別の一般相対性理論の定式化として、アインシュタイン・カルタン理論（1922 年）というものが存在します。この理論では、時空連続体の曲率ではなく、ねじれ（torsion）を重力の性質を決定する要素として扱います。アインシュタイン・カルタン理論は数年で廃れてしまいましたが、テレパラレル重力理論として研究自体は続いており、近年、TEGR（Teleparallel Equivalent to General Relativity）として一般相対性理論と同型である理論が示されています。

TEGR の結論を簡単に述べると、時空の曲率をゼロとし、トーションを非ゼロにする事で、一般相対性理論と同じ重力方程式を得ることが出来るというものです。この理論では、トーションは時空のねじれを表し、物体のスピンと相互作用することで重力効果を生み出すとされています。

ここでは時空連続体を否定したいので、時空のねじれは定義できませんが、通常時空と双対時空のねじれは定義できるでしょう。TEGR に合う様に定式化します。

$$R_{\text{usual}} = \exp\left(\frac{\omega_1}{2}iI + \frac{\omega_2}{2}iJ + \frac{\omega_3}{2}iK\right), \quad R_{\text{dual}} = \exp\left(\frac{\phi_1}{2}I + \frac{\phi_2}{2}J + \frac{\phi_3}{2}K\right) \quad (6.2)$$

ここで、 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ は通常時空の回転角、 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 は双対時空の回転角、 R_{usual} は通常ローター、 R_{dual} は双対ローターです。

R_{usual} を用いて、通常時空と双対時空の両方に作用するローレンツ変換を表現できます。

$$\tilde{S} = R_{\text{usual}} S R_{\text{usual}}^\dagger \quad (6.3)$$

この変換は速度の変化を意味します。開空間であり非コンパクトです。

R_{dual} を用いて、通常時空と双対時空の両方に作用する回転を表現できます。

$$\tilde{S} = R_{\text{dual}} S R_{\text{dual}}^{\dagger} \quad (6.4)$$

この変換は単純化すれば回転を意味しますが、物理的にはもっと豊かな意味を持ちます。閉空間でありコンパクトです。

これらを組み合わせた全体の回転子は以下ようになります。

$$R_{\text{total}} = R_{\text{usual}} R_{\text{dual}} = \exp \left(\frac{\omega_1}{2} iI + \frac{\omega_2}{2} iJ + \frac{\omega_3}{2} iK + \frac{\phi_1}{2} I + \frac{\phi_2}{2} J + \frac{\phi_3}{2} K \right) \quad (6.5)$$

I, J, K でまとめると、

$$R_{\text{total}} = \exp \left(\frac{1}{2} ((\omega_1 i + \phi_1)I + (\omega_2 i + \phi_2)J + (\omega_3 i + \phi_3)K) \right) \quad (6.6)$$

ここで、 $\omega_1 i + \phi_1, \omega_2 i + \phi_2, \omega_3 i + \phi_3$ は複素数です。この複素数を用いて、全体の回転子を以下のように書き換えられます。

$$R_{\text{total}} = \exp \left(\frac{1}{2} (\psi_1 I + \psi_2 J + \psi_3 K) \right) \quad (6.7)$$

ここで、 $\psi_1 = \omega_1 i + \phi_1, \psi_2 = \omega_2 i + \phi_2, \psi_3 = \omega_3 i + \phi_3$ です。この形式は、通常時空と双対時空の回転を一つの複素回転として統一的に扱うことができます。

6.2.2 ねじれ不整合回転子の定義

ここで、 Ω を以下のように定義します。

$$\text{Torsional Mismatch Rotor: } \Omega = R_{\text{usual}}^{\dagger} R_{\text{dual}} \in \text{Spin}^+(3, 1) \oplus \text{Spin}^+(3, 1) \quad (6.8)$$

この Ω は、通常時空と双対時空の角度の差異を表し、重力効果を記述するための重要な要素となります。

$\text{Spin}^+(3, 1) \oplus \text{Spin}^+(3, 1)$ を理解するにはリー群とリー代数の説明が必要かと思います。用語の定義にポイントを絞って説明します。

- 群構造とは、集合に結合法則・単位元・逆元を満たす二項演算（積）が定義された代数構造です。
- 多様体とは、局所的にユークリッド空間と同相な位相空間で、滑らかな構造を備えた幾何オブジェクトです。
- パラメータを連続的に変化させても物理法則や対象の性質が不変である対称性は、連続対称性と呼ばれます。
- リー群は、群構造を持ちかつ滑らかな多様体である連続対称性の全体を表すオブジェクトです。
- リー群の全分類を列挙すると、古典群（直交群、特殊直交群、ユニタリ群、特殊ユニタリ群、交代群）と例外群（G2, F4, E6, E7, E8）に分けられます。
- SO とは、特殊直交群（Special Orthogonal group）の略で、距離を保ち、かつ向きを保存する回転変換全体の群を指します。
- 例えば $SO(3)$ は 3 次元空間の回転群、 $SO(3, 1)$ は 4 次元時空のローレンツ群を表します。
- 被覆群とは、ある群の元に対して複数の元が対応するような群のことです。
- 二重被覆群とは、ある群の各元に対して 2 つの元が対応するような被覆群のことです。
- スピン群とは、特殊直交群の二重被覆群であり、スピン 1/2 粒子の対称性を扱うために重要なリー群です。
- リー代数は、そのリー群の単位元近傍（局所的）での微小変換を接空間として線形化し、リー括弧で非可換性を捉えた代数構造です。要は、微分方程式が扱いやすくなるようにしたものです。
- リー括弧とは、リー代数における二項演算で、非可換性を表現し、ヤコビ恒等式を満たすものです。
- ヤコビ恒等式とは、リー代数のリー括弧が満たすべき特定の恒等式で、非可換性の一貫性を保証します。具体的には、任意の元 x, y, z に対して以下の式が成り立ちます。

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

- ヤコビ恒等式により、リー代数の構造が安定し、物理的な対称性の解析において重要な役割を果たします。
- 直和とは、複数のベクトル空間や代数構造を一つにまとめる操作で、各成分が独立に作用するように構成されます。

$\text{Spin}^+(3, 1) \oplus \text{Spin}^+(3, 1)$ は、通常時空と双対時空のスピン群の直和を表し、各時空の回転対称性を独立に扱うことができます。この構造を用いることで、通常時空と双対時空の角度の差異を捉え、重力効果を記述するための数学的基盤を提供します。

R の \dagger は共役を意味します。共役を織り交ぜる事で、通常時空と双対時空の角度の差異を抽出することになります。