**线性代数知识点总结**

**第一章 略**

1. **行列式**

**一：n阶行列式**

**1：二阶与三阶行列式**

**定义一**：把表达式称为所确定的**二阶行列式**，并记作，

即

**定义二：三阶行列式**：

=

**注意：对角线法则只适用于二阶及三阶行列式的计算。**

利用行列式计算二元方程组和三元方程组：

对二元方程组

设

则，

对三元方程组，

设，

，，，

则，，

**注意：以上规律还能推广到*n*元线性方程组的求解上。**

**2：n阶行列式**

*n*阶行列式 可简记为D，，其中为D的（i，j元）。

**定义三:**在阶行列式中，把元素所在的第行和第列划去后，留下来的阶行列式叫做元素的**余子式**，记作。

，叫做元素的**代数余子式**。

**定义四:** 阶行列式 等于它的任意一行（列）的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和，即，，。

**推论1：上，下三角行列式的值均等于其主对角线上各元素的乘积 。**

即****

**推论2：主对角行列式的值等于其对角线上各元的乘积，副对角行列式的值等于乘以其副对角线上各元的乘积。**

即**，**

**二：行列式的性质与展开定理**

**1.行列式的性质**

**定义五：**记，行与列互换得到，

称为行列式的**转置行列式**。

**性质1** 行列式与它的转置行列式相等。

**说明:**行列式中行与列具有同等地位，因此凡是对行成立的行列式的性质的对列也成立。

**性质2 互换行列式的两行或列，行列式变号。**

**推论:**如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式为零。

**性质3** 行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一数，等于用数乘此行列式(化简用)。

**推论1** 的某一行（列）中所有元素的公因子k可以提到的外面;

**推论2** 中某一行（列）所有元素为零，则。

**推论3**行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式为零．

**性质4** 若行列式的某一列（行）的元素都是两数之和，则****

**性质5** 把行列式的某一列（行）的各元素乘以同一数k然后加到另一列(行)对应的元素上去，行列式的值不变（使行列式可以消元）。

**计算行列式常用方法：**

1.利用定义

2.利用运算把行列式化为上三角形行列式，从而算得行列式的值

3.利用降阶法，递推法

**2.行列式按行（列）展开定理**

**定理1：行列式等于它的某一行(或列)的元素与其对应的代数余子式的乘积之和。**

**推论：**阶行列式 的任意一行（列）的各元素与另一行（列）对应的代数余子式的乘积之和为零，即

**扩展:**范德蒙德(Vandermonde)行列式

**三：克拉默法则**

**定理2**：如果**非齐次线性方程组**的系数行列式不等于零，

即，那么该方程组**有唯一解**。解可以表示为

(其中*Di*是用非齐次项b代替*D*中第*i*列元素后所得的行列式）。

**注意:克拉默法则只适用于方程个数与未知量个数相等的情形。**

**逆否定理:**如果线性方程组无解或有两个不同的解，则它的系数行列式必为零。

**定理3:**若**齐次线性方程组**的系数行列式，则其次线性方程组**有唯一解，解为0**。

**逆否定理:**如齐次方程组有非零解，则它的系数行列式D=0.

**第三章 矩阵**

**一：矩阵的基本运算**

**1.特殊距阵**

**定义：**由个数排成的行列的数表称为*m*行*n*列矩阵。简称矩阵，记作，简记为，。

**说明:1.**元素是实数的矩阵称为实矩阵，元素是复数的矩阵称为复矩阵。

**2.**矩阵与行列式有本质的区别，行列式是一个算式，一个数字行列式经过计算可求得其值，而矩阵仅仅是一个数表，它的行数和列数可以不同。

**扩展**:几种特殊的矩阵：

行(列)矩阵/向量：只有一行(列)的矩阵。也称行(列)向量。

方阵 ：行数与列数都等于*n*的矩阵*A*。 记作：*An。*

**方阵的行列式:由阶方阵的元素所构成的行列式，记作或**

零矩阵：元素都是零的矩阵（不同型的零矩阵不同）

单位矩阵：主对角线上元素都是1，其它元素都是0，记作：*En*简记为 *E*

数量矩阵：主对角线上元素相等，其它元素都是0

对角矩阵：不在主对角线上的元素都是零。

**2：矩阵的相等**

同型矩阵：两矩阵的行数相等，列数也相等。

**定义一：**相等矩阵：*AB*同型,且对应元素相等。记作：*A*＝*B*

**3：矩阵的运算**

**定义二：矩阵的加法:**设有两个矩阵，那么矩阵与的和记作，规定为

**说明:**只有当两个矩阵是同型矩阵时，才能进行加法运算。

**矩阵加法的运算性质：**

**；**

****

**，**称为矩阵的

**定义三：矩阵的数乘: **

**定义四：矩阵的乘法：** 设是一个矩阵，是一个矩阵，那么规定矩阵A与矩阵B的乘积是一个矩阵，其中，，并把此乘积记作

**注意：**

1.A与B能相乘的条件是：A的列数＝B的行数。

2.矩阵的乘法不满足交换律，即在一般情况下，，而且两个非零矩阵的乘积可能是零矩阵。

3.对于n阶方阵A和B，若AB=BA，则称A与B是可交换的。

**定义五：矩阵的幂：**若*A*是***n* 阶方阵**，则称 *Ak*为*A*的*k*次幂，即，并且，。规定：*A*0＝*E*

**4：矩阵的转置**

**定义六：转置矩阵：**把矩阵的行换成同序数的列得到的新矩阵，叫做的转置矩阵，记作，

，

**转置矩阵的运算性质：**

；

；

；

；

；

；



**定义七：对称（反对称）矩阵:** 设*A*为*n* 阶方阵，如果满足*A*=*AT* ，**即(充要条件)**那么*A*称为对称阵；如果则称矩阵为反对称矩阵。

**定理1：**若(充要条件)，那么*A*称为对称阵；

**说明:**对称阵的元素以主对角线为对称轴对应相等。

**二:逆矩阵**

**定义八：伴随矩阵:**行列式的各个元素的代数余子式所构成的如下矩阵称为矩阵*A*的伴随矩阵。

**定理2：（易忘知识点）**

**定义九：逆矩阵:**对于*n*阶方阵*A*，如果有一个*n*阶方阵*B*,使得*AB*＝*BA*＝*E*则说矩阵*A*是可逆的，并把矩阵*B*称为*A*的逆矩阵。，。

**定理3:**.若A是可逆矩阵，则A的逆矩阵是唯一的。

**定理4： 矩阵*A*可逆的充分必要条件是，并且当*A*可逆时，有（重要）奇异矩阵与非奇异矩阵:**当时，称为奇异矩阵，当时，称为非奇异矩阵。即。

**推论**:若，则

**求逆矩阵方法:**

**3.逆矩阵的运算性质：**

****

。

。

。

。

**三：矩阵分块法**

**定义十：矩阵分块定义：** 将矩阵*A*用若干条纵线和横线分成许多个小矩阵，每一个小矩阵称为*A*的子块，以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵。分块的目的是为了简化运算。

**2.分块矩阵的运算规则**

**1)加法:**A与B同型，且A、B的分块方法相同，则A与B的和定义为对应子块相加。

**2)数乘:。**

**3)转置:。**

**4)乘法:**首先AB有意义，其次A的列的分法与B的行的分法相同。，，。

**定义十一：分块对角阵（准对角矩阵）**

设A为n阶矩阵，若A的分块矩阵只有在主对角线上有非零子块，其余子块都为零矩阵，且非零子块都是方阵，即**，。**

。

，（**diag（A）表示对角阵A**）

3)

**\*4．线性方程组的分块表示**

线性方程组，，

其中A为系数矩阵，*x*称为未知数向量，b称为常数向量，B称为增广矩阵。增广矩阵可以分块表示为：

**四：矩阵的初等变换与线性方程组**

**1.矩阵的等价**

**定义十二：矩阵等价**

**等价关系的性质：**

（1）反身性 A~A

****

****

**2.矩阵的初等变换**

**定义十三：标准型矩阵**对行最简形矩阵再施以初等列变换，可以变换为形如的矩阵，称为标准型。任意矩阵经过有限次初等变换可以变成标准型矩阵。

**定义十四：初等矩阵**由单位矩阵经过一次初等变换得到的方阵称为初等矩阵。

**定义十五：初等行/列变换**

**。**

**。**

**。**

**（**把初等行变换中的行变为列，即为初等列变换，所用记号是把“*r*”换成“*c*”）。

**扩展:**矩阵的初等列变换与初等行变换统称为初等变换，初等变换的逆变换仍为初等变换, 且类型相同。

**初等矩阵变换的性质：**

设*A*是一个*m*×*n*矩阵，则

（1）对*A*施行一次初等行变换，相当于在*A*的左边乘以相应的*m*阶初等矩阵；



（2）对*A*施行一次初等列变换，相当于在*A*的右边乘以相应的*n*阶初等矩阵；

即



**3.用初等变换求逆矩阵**

1.方阵*A*可逆的充分必要条件是存在有限个初等方阵。

2.

**初等变换求逆矩阵的应用：**

**（1）求逆矩阵：**或**。**

**（2）求*A*-1*B* ：**A*即，*则*P*=*A*-1*B。或.*

**五：矩阵的秩**

**定义十六：**任何矩阵，总可以经过有限次初等变换把它变为行阶梯形，行阶梯形矩阵中非零行的行数是唯一确定的。在矩阵*A*中有一个不等于0的*r*阶子式*D*，且所有*r* + 1阶子式(如果存在的话)全等于0，那么*D*称为矩阵*A*的最高阶非零子式。数*r*称为矩阵*A*的秩，记作R(A).规定零矩阵的秩，R(0)=0.

1)矩阵*Am*×*n*，则 *R*(*A*) ≤min{*m*,*n*}；

2)*R*(*A*) = *R*(*AT*);

3)矩阵，若，称A为行满秩矩阵；若，称A为列满秩矩阵；









若R（A）<n/m，则A为降秩矩阵。

**2.矩阵秩的计算**

**定理5:**矩阵*A*经过有限次行(列)初等变换后其秩不变。即若*A*～*B*，则*R*(*A*)=*R*(*B*)。

矩阵*Am*×*n*，经过有限次初等行变换可变为行阶梯形，则非零行的行数就是*A*的秩。

**推论**:

**3.矩阵秩的性质**

















。

**六：线性方程组解的理论**

线性方程组

**1.***n*元齐次线性方程组 *Ax*=0

（1）R(A) = n Ax=0 有唯一解，零解

（2）R(A) < n Ax=0 有非零解.

**2.***n*元非齐次线性方程组

1. 无解的充分必要条件是
2. 有唯一解的充分必要条件是
3. 有无限多接的充分必要条件是

**第四章 向量组的线性相关性**

**一：向量组及其线性表示**

***1.定义1：****n*个数*a*1,*a*2,…,*an*组成的一个有序数组(*a*1,*a*2,…,*an*) 称为一个*n*维向量,记为，其中第*i*个数*ai*称为向量的第*i*个分量。

**说明：**

1. 列向量即为列矩阵,行向量即为行矩阵

2. 行向量和列向量都按照矩阵的运算法则

进行运算；

3. 行向量和列向量总被看作是两个不同的向量；当没有明确说明是行向量还是列向量时，都当作列向量。行向量可看作是列向量的转置。

**零向量 0=(0,0,…,0)*T*(维数不同, 零向量不同)**

**负向量** 。

**向量相等** 设，若则。

**2.向量运算规律：**

* 1. 
  2. 
  3. 
  4. 
  5. 
  6. 
  7. 
  8. 

满足以上8条性质的向量加法、数乘两种运算,称为线性运算。

**3.向量的线性组合和线性表示**

**向量组：**若干个**同维数**的列向量（或**同维数**的行向量）所组成的集合叫做向量组。

设矩阵A=(aij)m×n有n个m维列向量，即，。同理，也可说矩阵A有m个行向量组组成。

，。

另外，线性方程组的解也可以用一个向量来描述；线性方程组的解集合(通解)可以用一个向量组来描述。

**向量，向量组，矩阵与方程组的关系：**

向量组矩阵：

向量方程 方程组：，

可简写作

向量方程方程组矩阵形式

**定义2：**给定向量组和向量b，对于任一组实数，向量称为向量组的一个**线性组合**。称为这个线性组合的系数。如果存在一组数使b=，则向量*b*是向量组*A*的**线性组合**，这时称*b*向量能由向量组*A***线性表示**。

**定理1:** 向量b能由向量组线性表示的充分必要条件是矩阵的秩等于矩阵的秩。即系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩R(A)=R(A,b)。

**第二节 向量组的线性相关性**

**1.定义三：**给定向量组，如果存在不全为零的数使，则称向量组是**线性相关**的；若当且仅当时上式成立，则称向量组*A***线性无关**。

推论：向量组（当时）线性相关的充分必要条件是中至少有一个向量可由其余m-1个向量线性表示，反之也成立。

注意：

1.对于向量组来说，不是线性无关，就是线性相关。

2.对于两个向量来说，线性相关意味着两向量的分量对应成比例，几何含义两向量共线；三个向量线性相关意味着三向量共面。

4.包含零向量的任何向量组是线性相关的，此时总存在不为零的k，使得

**定理2：**向量组**线性相关**的充分必要条件是它所构成的矩阵<向量的个数m或Ia ,a ,…a I=0，向量组**线性无关**的充分必要条件是R（A）=m,或Ia ,a ,…a I=0

**2. 定理3**：若线性无关的向量组***A*** =()添上一个向量***B*** =()就线性相关的话，则添上的向量可由这个向量组唯一地线性表出。用方程组的术语说就是非齐次线性方程组有唯一解的结论

**定理4：1)** 若向量组*A*：线性相关，则向量组*B*：也线性相关；反言之，线性无关的向量组的任何非空的部分向量组都线性无关。可简述为：部分相关则整体相关，整体无关则部分无关。用方程组的语言来说就是部分方程里有多余方程，整体组就有多余方程。

**2)** 若*m*个*r*维向量线性无关，则对应的*m*个*r*+1维向量也线性无关。可简述为：无关组，添加分量后仍无关；反言之，相关组，减少分量后仍相关。

**3)** 当*m* > *n*时，*m*个*n*维向量线性相关。可简述为：向量个数大于维数时必线性相关。（当未知量个数 **>** 方程个数时，齐次线性方程组必有非零解）

**第三节 向量组的秩**

**1.定义5** :设有向量组*A*，若在*A*中能选出*r*个向量，满足

① 向量组*A*0：线性无关；

② *A*中任意*r*+1个向量(若有*r*+1个向量的话)都线性相关，

则称向量组*A*0是向量组*A*的一个**最大线性无关组**，简称**最大无关组**，最大无关组所*A*0含向量个数称为**向量组***A***的秩**。

推论：1）任一个向量组*A*与其最大无关组*A*0等价。

2）线性无关向量组的最大无关组即它自身，其秩=它所2含向量的个数。

3）只含零向量的向量组的秩为零。

4）向量组的最大无关组不惟一。

**2.定义6**：向量组的最大线性无关组所含向量的个数称为向量组的秩，记向量组的秩为*RA*，*RA=R*（）。

矩阵*A*的秩＝矩阵*A*行向量组的秩＝矩阵*A*列向量组的秩＝有效方程的个数

**第四节 向量空间**

**1.定义7**：向量空间的基和维数

**2.定义8**：设与是*V*的两个基，则

．

*A*，其中*A*=(*aij*)*nn*∈*Mn*(*F*)．

矩阵*A*叫做由基到基的过渡矩阵．

**定理5：坐标变换公式**

设*α*∈*V*在基{}下的坐标是X=()，在基{}下的坐标是Y=()，则X=aY或Y=aX

**第五节 线性方程组的结构**

**定义9**：齐次线性方程组的通解具有形式(*c*1, *c*2为任意常数)，称通解式中向量构成该齐次线性方程组的基础解系。

1. **齐次线性方程组：**将系数矩阵*A*化成行阶梯形矩阵，判断是否有非零解. 若有非零解，化成行最简形矩阵，写出其解；齐次线性方程组的基础解系含有的向量个数为*n*－*R*(*A*)，齐次线性方程组的通解可以表成基础解系的“线性组合”。

**性质：**

**2.非齐次线性方程组：**将增广矩阵*B*=(*A*,*b*)化成行阶梯形矩阵，判断其是否有解．若有解，化成行最简形矩阵，写出其解；在求解过程中，一般取行最简形矩阵中非零行的第一个非零元对应的未知量为非自由的。

非齐次线性方程组解的通解具有形式 (*c*1, *c*2为任意常数)，不带参数部分是非齐次方程组的一个解；带参数部分的两个向量构成对应齐次方程的基础解系。

**性质：**

**第五章 矩阵的相似对角化**

**第一节 矩阵的特征值与特征向量**

**定义1**：设为n阶矩阵，是一个数，如果存在非零n维向量，使得：，则称是矩阵的一个特征值，非零向量为矩阵的属于（或对应于）特征值的特征向量。



因为是非零向量，这说明是齐次线性方程组的非零解，而齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是其系数矩阵的行列式等于零，即＝0而属于的特征向量就是齐次线性方程组的非零解。

1.设是n阶矩阵，则是的特征值，是的属于的特征向量的充分必要条件是是＝0的根。称矩阵称为的**特征矩阵**，它的行列式称为的**特征多项式**，＝0称为的**特征方程**，其根为矩阵的**特征值**。

2.求矩阵的特征值及特征向量的步骤：

（1）计算；

（2）求＝0的全部根，它们就是的全部特征值；

（3）对于矩阵的每一个特征值，求出齐次线性方程组的一个基础解系：，其中为矩阵的秩；则矩阵的属于的全部特征向量为：

，其中为不全为零的常数。

**3.特征值、特征向量的基本性质**

1）.n阶矩阵A与它的转置矩阵有相同的特征值。



2）.设，则

（a）

（b）

推论：A可逆的充分必要条件是A的所有特征值都不为零。即。

3）.设是A的特征值，且是A属于的特征向量，则

（a）是的特征值，并有（）＝（）

（b）是的特征值，＝

（c）若A可逆，则且是的特征值，＝。

**第二节 相似矩阵**

**1.定义2**：设A、B为n阶矩阵，如果存在n阶可逆矩阵P，使得成立，则称矩阵A与B相似，记作。

**相似矩阵的性质**

1. 反身性：对任意n阶方阵A，都有。（）
2. 对称性：若，则。（因）
3. 传递性：若，。则。
4. 若n阶矩阵A、B相似，则它们具有相同的特征值。
5. 只要能求出A的n个线性无关的特征向量，令P=()就能使，其中矩阵，对角阵的主对角元素依次为所对应的特征值。

**推论**：n阶矩阵A与对角阵相似的充分必要条件是对每一个特征值对应的特征向量线性无关的最大个数等于该特征值的重数，即对每一个重特征值， ()X=0的基础解系含有个向量。()。

**第三节 实对称矩阵的对角化**

3.设A为n阶实对称矩阵，则存在n阶正交矩阵Q，使为对角阵。

实对称阵对角化的步骤如下：

1. 求全部不同的根，它们是A的全部不同的特征值；
2. 对于每个特征值（重根），求齐次线性方程组的一个基础解系：，利用施密特正交化方法将其正交化，再将其单位化得：；
3. 在第二步中对每个特征值得到一组标准正交向量组组合为一个向量组：



共有个。它们是n个向量组成的标准正交向量组。以其

为列向量组的矩阵Q就是所求正交矩阵。

4）＝，其主对角线元素依次为：



**第六章 实二次型**