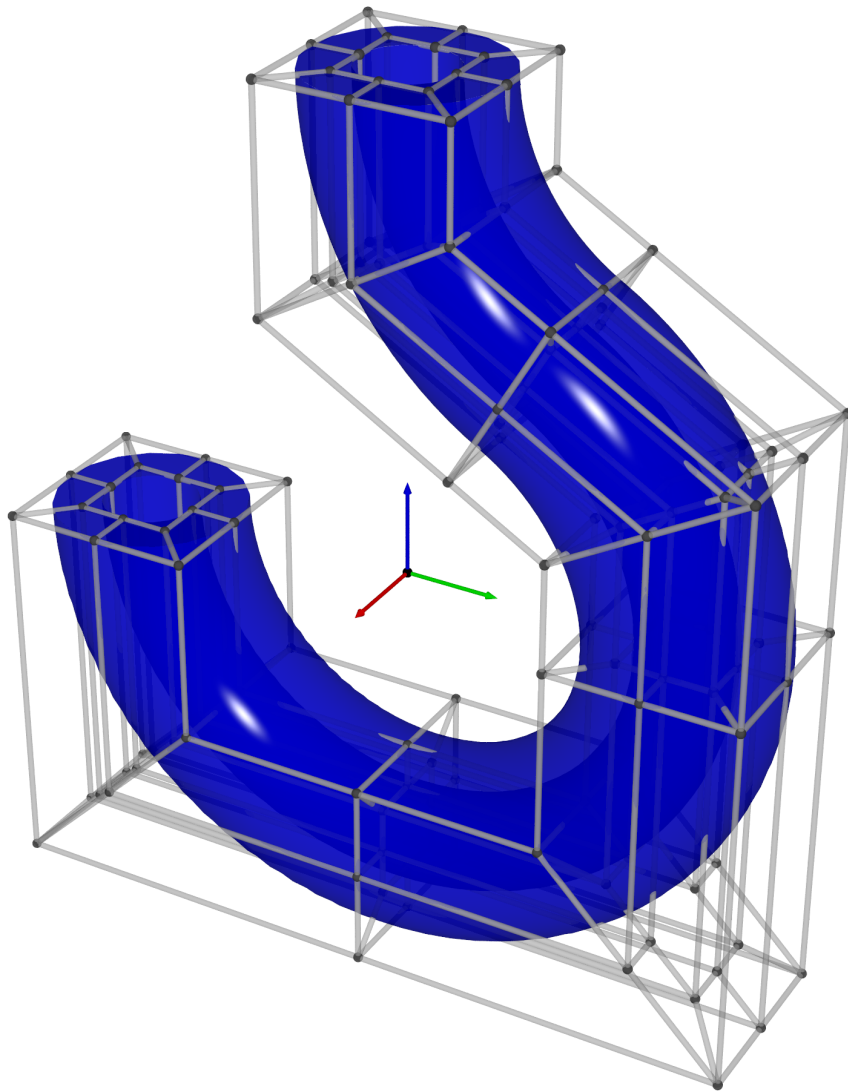


NURBS 多様体による形状表現

@Hyrodium

2018 年 12 月 11 日



はじめに

NURBS(Non-uniform Rational B-spline) はコンピュータ上で物体の形状を表現するために開発された手法である。NURBS を用いれば

- 次元 d
- ノット列 $\mathbf{k}^1, \dots, \mathbf{k}^d$
- 次数 p^1, \dots, p^d
- 重み $w_{1\dots 1}, \dots, w_{n^1\dots n^d}$
- 制御点 $\mathbf{a}_{1\dots 1}, \dots, \mathbf{a}_{n^1\dots n^d}$

を定めるだけで物体の形状を決める事が可能で、かつその表現は非常に柔軟である。形状表現の類似手法として、Bézier 曲線/曲面, B-spline 曲線/曲面などがあるが、これらは全て NURBS で表現可能な形状である。この意味で、NURBS は一般性、汎用性の高い手法であり、こうした利点のコンピュータ上の形状表現で利用されている理由である。

NURBS の制御点を適切に削減できるよう一般化したものとして T-spline もあるが、本文章では簡単な紹介に留める。なお、NURBS「多様体」と書いたのは単に曲線や曲面の一般化程度の意味合いであって、多様体論の知識とかは必要としない。

参考文献

NURBS は「物体の形状表現」という工学への応用が重視される道具であるから、数学的に厳密な議論に立ち入らない書籍が多く、記述が具体的過ぎて読みにくいものも多い。そのため、NURBS について数学的にちゃんと書かれている和書は私の知る限り存在しない。以下に幾つかの NURBS に関連した書籍を挙げる。

- Geometric Modeling with Splines: An Introduction
数学的に厳密かつ一般的に書かれている。本文章中の定理の殆どはこれにも載っている。B-spline による内挿や、発展的な形状表現についての記述もある。図も美しく、大変おすすめ。
- The NURBS Book
NURBS の使い方に主眼を置いて書かれている本。入門書としてよく参照される。
- An Introduction to NURBS: With Historical Perspective
歴史的背景や擬似コードも記載されている。
- 3D グラフィックスのための数学入門 クォータニオン・スプライン曲線の基礎
NURBS について書かれた最近の和書は少なく、その意味で貴重である。しかし高校数学の復習から四元数による回転も扱っているため、どうしても NURBS に関連した記述は限られてしまっている。
- 情報科学 CAD/CAM における曲線曲面のモデリング
B-spline 曲線を Cox-de Boor の漸化式で定義せずに、Bézier 曲線を区分的に繋げたものとして導入している。本文章で扱わなかった、曲面の干渉の話題もある。
- NURBS — 射影幾何学から実務まで
射影幾何や円錐曲線などの話題もあり、導入が独特である。

記号

以下に幾つかの記号の注意をまとめる.

- $f: A \rightarrow B; a \mapsto b$ 写像 f の始域と終域, 元の対応を表す.
- \mathbb{N} 自然数全体の集合. \mathbb{N} は 0 を含むとする.
- $[i, j]_{\mathbb{Z}}$ i から j までの整数の集合. $[i, j]_{\mathbb{Z}} = \{i, i+1, \dots, j-1, j\} = [i, j] \cap \mathbb{Z}$.
- $\#S$ 集合 S の元の個数. 本文章では有限集合に対してのみこの記号を使う.
- $C^r(U)$ U 上の関数のうち, r 階導関数が連続なものの全体の集合. C^0 は単に連続関数.
- $A \subset B$ 集合 A, B の包含関係. 真部分集合とは限らない.
- \bar{A} 集合 A の閉包.
- $\text{Conv } A$ 集合 A の凸包.
- $\text{supp}(f)$ 関数 $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ の台. $\text{supp}(f) = \overline{\{x \in U \mid f(x) \neq 0\}}$ で定義される.

この文章について

図は [CorelDRW](#), [Luxor \(Julia package\)](#), [Mathematica](#), [POV-Ray](#) を使って作成した. 可能な限り図には [Desmos graphing calculator](#) へのリンクを付けており, インタラクティブに動かして理解が進むようにした. この pdf ファイルは L^AT_EX でコンパイルして作成した. この文章のライセンスは (CC BY 4.0) とする.

This work is licensed under a [Creative Commons “Attribution 4.0 International”](#) license.



目次

1	Bernstein 基底関数と Bézier 曲線	1
2	有理基底関数と有理曲線	8
3	B-spline 基底関数と B-spline 曲線	12
4	多重基底関数と多様体	28
5	NURBS 多様体	30
6	NURBS 多様体の細分と T-spline	32

1 Bernstein 基底関数と Bézier 曲線

NURBS の理解のためには, Bernstein 基底関数と Bézier 曲線から導入するのが適切であろう. NURBS 基底関数は, 後述の有理基底関数や B-spline 基底関数, 多重基底関数を合わせたものであり, これらの基底関数はそれぞれ Bernstein 基底関数の一般化としての性質を持つためである.

定義 1. Bernstein 基底関数

p 次 Bernstein 基底関数 $B_{(i,p)}$ は次式で定義される.

$$B_{(i,p)}(t) = \binom{p}{i-1} t^{i-1} (1-t)^{p-i+1} \quad (i = 1, \dots, p+1) \quad (1)$$

ここで $\binom{p}{i-1}$ は 2 項係数である.

次の図 1 に $p \leq 4$ までの Bernstein 基底関数の例を示す.*1

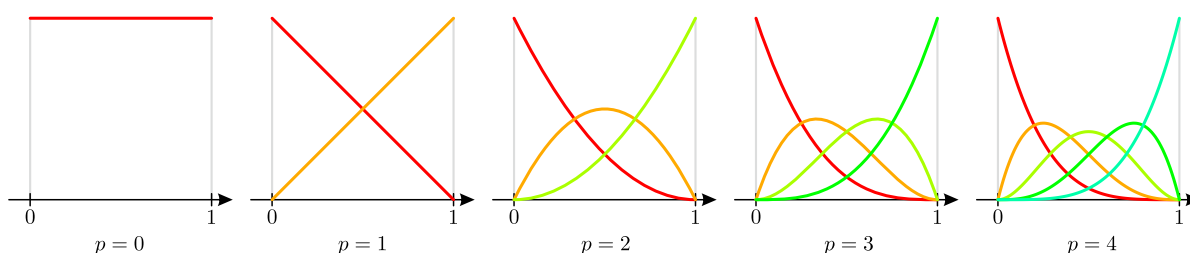


図 1 Bernstein 基底関数の例*2

Bézier 曲線は Bernstein 基底関数と制御点の線形結合によって定義される.

定義 2. Bézier 曲線

n 個の点 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^{\bar{d}}$ が与えられたとき, Bézier 曲線は次式で定義される.

$$\mathbf{p} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{\bar{d}}; t \mapsto \sum_{i=1}^n B_{(i,p)}(t) \mathbf{a}_i \quad (p = n-1) \quad (2)$$

ここで $B_{(i,p)}$ は p 次 Bernstein 基底関数であり, \mathbf{a}_i は制御点と呼ばれる.

次の図 2 に $p \leq 4$ までの Bézier 曲線の例を示す.*3

*1 図の曲線の色は $i = 1$ から順に赤, 橙, ... としており, 後の図 3 などと同様である.

*2 <https://www.desmos.com/calculator/yc2qe6j6re>

*3 (単に定義の問題なのでどちらでも良いのだが) 1 点しか現れない $p = 0$ でも Bézier 曲線に含めるとする.

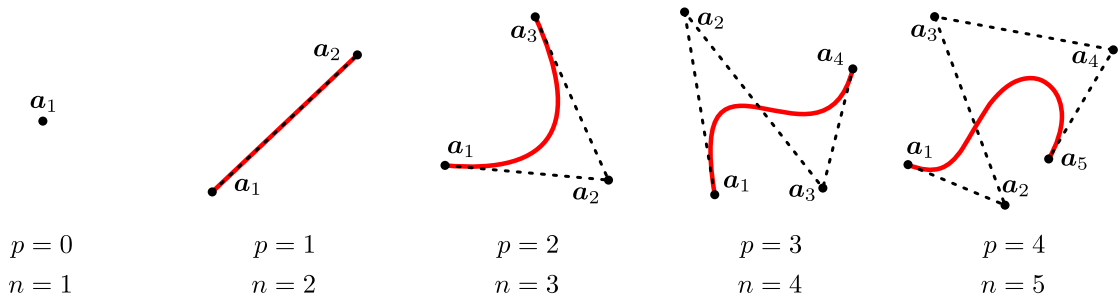


図2 Bézier 曲線の例^{*4}

Bernstein 基底関数について次の帰納的な性質が成り立つ.

定理 3. Bernstein 基底関数の漸化式

Bernstein 基底関数 $B_{(i,p)}$ について

$$B_{(i,p)}(t) = tB_{(i-1,p-1)}(t) + (1-t)B_{(i,p-1)}(t) \quad (3)$$

$$B_{(1,0)}(t) = 1 \quad (4)$$

が成立する.

証明. 定義に沿って展開して

$$\begin{aligned} B_{(i,p)}(t) &= \binom{p}{i-1} t^{i-1} (1-t)^{p-i+1} \\ &= \left(\binom{p-1}{i-2} + \binom{p-1}{i-1} \right) t^{i-1} (1-t)^{p-i+1} \\ &= t \binom{p-1}{i-2} t^{i-2} (1-t)^{(p-1)-i+2} + (1-t) \binom{p-1}{i-1} t^{i-1} (1-t)^{(p-1)-i+1} \\ &= tB_{(i-1,p-1)}(t) + (1-t)B_{(i,p-1)}(t) \end{aligned} \quad (5)$$

$$B_{(1,0)}(t) = \binom{0}{1-1} t^{1-1} (1-t)^{0-1+1} = 1 \quad (6)$$

である. ただし, 2 項係数の性質から $B_{(0,p)} = B_{(p+2,p)} = 0$ とした. \square

定義 1 の代わりに, 定理 3 を以って Bernstein 基底関数の定義とする流儀もある. この流儀は, 後の B-spline 基底関数の定義で役立つ. $p \leq 3$ までの帰納的關係を表したものが次の図 3 である.^{*5}

^{*4} <https://www.desmos.com/calculator/rkvbtzpipd>

^{*5} 特に主張の無い図に見えるかもしれないが, 後の図 11 と見比べるのに役立つ.

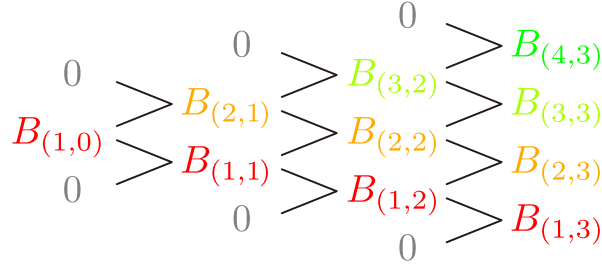


図3 Bernstein 基底関数の帰納的關係

Bézier 曲線について次の定理が成り立つ.

定理 4. Bézier 曲線の漸化式 (De Casteljau のアルゴリズム)

帰納的に $\mathbf{q}_{(i,j)}$ を

$$\mathbf{q}_{(i,j)}(t) = t\mathbf{q}_{(i+1,j-1)} + (1-t)\mathbf{q}_{(i,j-1)} \quad (7)$$

$$\mathbf{q}_{(i,0)}(t) = \mathbf{a}_i \quad (8)$$

とおけば

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{q}_{(1,p)}(t) \quad (9)$$

が成立する.

証明. 写像 $\mathbf{r}_{(i,j)} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{\bar{d}}$ を

$$\mathbf{r}_{(i,j)}(t) = \sum_{k=1}^{j+1} B_{(k,j)}(t) \mathbf{a}_{k+i-1} \quad (10)$$

とおく. この $\mathbf{r}_{(i,j)}$ について

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{(i,j)}(t) &= \sum_{k=1}^{j+1} B_{(k,j)}(t) \mathbf{a}_{k+i-1} \\ &= \sum_{k=1}^{j+1} (tB_{(k-1,j-1)}(t) + (1-t)B_{(k,j-1)}(t)) \mathbf{a}_{k+i-1} \\ &= t \sum_{k=1}^{j+1} B_{(k-1,j-1)}(t) \mathbf{a}_{k+i-1} + (1-t) \sum_{k=1}^{j+1} B_{(k,j-1)}(t) \mathbf{a}_{k+i-1} \\ &= t \sum_{k=1}^j B_{(k,j-1)}(t) \mathbf{a}_{k+i} + (1-t) \sum_{k=1}^j B_{(k,j-1)}(t) \mathbf{a}_{k+i-1} \\ &= t\mathbf{r}_{(i+1,j-1)} + (1-t)\mathbf{r}_{(i,j-1)} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{(i,0)}(t) &= \sum_{k=1}^{0+1} B_{(k,0)}(t) \mathbf{a}_{k+i-1} \\ &= B_{(1,0)}(t) \mathbf{a}_{1+i-1} \\ &= \mathbf{a}_i \end{aligned} \quad (12)$$

が成り立つから, $q_{(i,j)} = r_{(i,j)}$ である. よって

$$q_{(1,p)}(t) = r_{(1,p)}(t) = \sum_{k=1}^{p+1} B_{(k,p)}(t) a_{k+1-1} = \sum_{k=1}^n B_{(k,p)}(t) a_k = p(t) \quad (13)$$

である. □

定理 4 を図で表すと, 例えば $p = 3$ では図 4 のようになる.

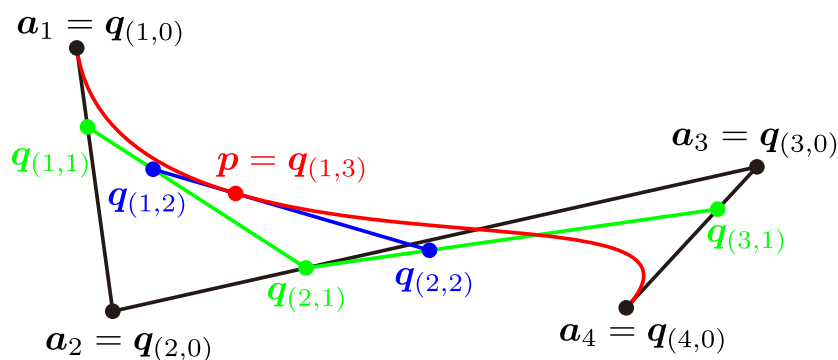


図 4 3 次 Bézier 曲線 (赤線)^{*6}

式 (2) と式 (9) が等価であることから, Bézier 曲線の定義を式 (9) とする流儀もある. 以降のための準備として, 次に多項式空間を用意する.

定義 5. 多項式空間

$\mathcal{P}[p]$ で p 次以下の多項式全体を表す.

定理 6. 多項式空間の線形性

$\mathcal{P}[p]$ には自然に $p+1$ 次元線形空間としての構造が入り, $p \leq q$ であれば線形部分空間としての包含関係 $\mathcal{P}[p] \subset \mathcal{P}[q]$ が成り立つ.

証明. p 次以下の多項式は t を変数として $a_p t^p + a_{p-1} t^{p-1} + \cdots + a_1 t + a_0$ の形に書くことができる. 多項式の線形演算は, 係数 a_i を取り出せば \mathbb{R}^{p+1} の線形演算と同型であり, よって $\mathcal{P}[p]$ には $p+1$ 次元線形空間の構造が入る. 包含関係 $\mathcal{P}[p] \subset \mathcal{P}[q]$ は定義から明らか. □

Bernstein 基底関数について以下の定理 7, 8 が成立する.

定理 7. Bernstein 基底関数の張る線形空間

p 次 Bernstein 基底関数は p 次多項式空間 $\mathcal{P}[p]$ の基底である.

^{*6} <https://www.desmos.com/calculator/rnbuksh1w3>

証明. p 次多項式空間 $\mathcal{P}[p]$ は $p + 1$ 次元の線形空間であり, p 次 Bernstein 基底関数はこの空間の元である. 基底関数の数は $p + 1$ 個であるから, あとは Bernstein 基底関数の線形独立性を言えば良い. これは $t = 0$ で微分係数を順に比較することで示される. \square

この定理 7 から, 任意の多項式曲線*7 と Bézier 曲線が等価である事が分かる. つまり, Bézier 曲線で放物線は表現できるが, 楕円や双曲線は表現することができない. 次の定理は Bernstein 基底関数を持つ基本的な性質である.

定理 8. 1 の分割 (Bernstein 基底関数)

Bernstein 基底関数 $B_{(i,p)}$ について次が成り立つ.

$$\sum_{i=1}^n B_{(i,p)}(t) = 1, \quad 0 \leq B_{(i,p)}(t) \leq 1 \quad (t \in [0, 1]) \quad (14)$$

ただし $n = p + 1$ とする.

証明.*8 帰納法で示す. $\sum_{i=1}^{p+1} B_{(i,p)}(t) = 1$ は $p = 0$ については明らかに成立. $\sum_{i=1}^P B_{(i,P-1)}(t) = 1$ を仮定すれば定理 3 より

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{P+1} B_{(i,P)}(t) &= \sum_{i=1}^{P+1} (tB_{(i-1,P-1)}(t) + (1-t)B_{(i,P-1)}(t)) \\ &= t \sum_{i=2}^{P+1} B_{(i-1,P-1)}(t) + (1-t) \sum_{i=1}^P B_{(i,P-1)}(t) \\ &= t + (1-t) = 1 \end{aligned} \quad (15)$$

である. よって帰納的に任意の $n = p + 1$ に対して $\sum_i B_i(t) = 1$ が従う. Bernstein 基底関数の定義と $0 \leq t \leq 1$ からすぐに $0 \leq B_{(i,p)}$ が従い, 先の等式を合わせれば $0 \leq B_{(i,p)} \leq 1$ が分かる. \square

*7 曲線の各成分が t に関する多項式で表される曲線のこと.

*8 後の定理 24 と定理 28 を使えば, より一般の場合の別証明が与えられる.

1 の分割とは、定数関数 1 を、幾つかの非負値関数の和に分解する事を意味している。次の定理 9, 定理 10 は単に 1 の分割から従うものだから、Bernstein 基底関数よりも一般的な形で述べる。

定理 9. アフィン不変性^{*9}

1 の分割を充たす基底関数 B_i とそれに対応する制御点を \mathbf{a}_i とする。また、これらから生成される曲線を $\mathbf{p}(\mathbf{a}_i; t) := \sum_i B_i(t) \mathbf{a}_i$ とする。このとき、任意のアフィン変換 T に対して次が成立する。

$$T(\mathbf{p}(\mathbf{a}_i; t)) = \mathbf{p}(T(\mathbf{a}_i); t) \quad (16)$$

証明. 任意のアフィン変換 T は行列 A による線形変換とベクトル \mathbf{b} による平行移動の合成で書けるから

$$\mathbf{p}(T(\mathbf{a}_i); t) = \sum_i B_i(A\mathbf{a}_i + \mathbf{b}) = A \sum_i B_i \mathbf{a}_i + \sum_i B_i \mathbf{b} = A\mathbf{p}(\mathbf{a}_i; t) + \mathbf{b} = T(\mathbf{p}(\mathbf{a}_i; t)) \quad (17)$$

である。 □

次の図 5 は 5 次 Bézier 曲線に対するアフィン不変性の例を示している。

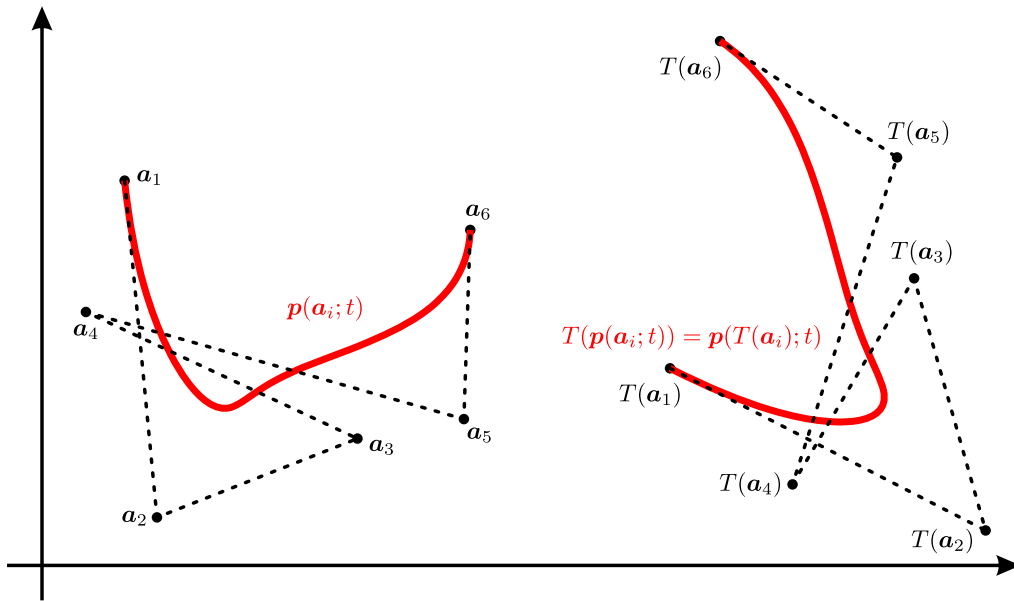


図 5 アフィン不変性の例

アフィン不変性は、「制御点を平行移動や拡大縮小^{*10}すれば曲線もそれに追従する」ことを意味しており、これは人間が制御点を直観的に決定することを容易にしている。次の凸包性に関する性質は、生成される図形の位置が制御点から見積もれることを主張しており、この性質も人間にとって都合が良い。

^{*9} affine invariance の訳から習慣的に「アフィン不変性」と呼ばれているが、「アフィン可換性」と呼ぶ方が定理をよく表しているように筆者は思う。

^{*10} アフィン変換なので、定理はより一般の変換での成立を主張している。

定理 10. 凸包性

基底関数 $B_i : I \rightarrow \mathbb{R}$, 制御点 $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^{\bar{d}}$ から構成される曲線 C について, 基底関数 B_i が 1 の分割を充たせば, 曲線 C は制御点の凸包の部分集合である.

証明.^{*11} 制御点の集合 $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\} \subset \mathbb{R}^{\bar{d}}$ の凸包 $\text{Conv}_i(\mathbf{a}_i)$ について

$$\text{Conv}_i(\mathbf{a}_i) = \left\{ \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{a}_i \mid \sum_{i=1}^n c_i = 1, c_i \in [0, 1] \right\} \quad (18)$$

が成り立つ. よって $\mathbb{R}^{\bar{d}}$ の部分集合としての曲線

$$C = \left\{ \sum_i B_i(t) \mathbf{a}_i \mid t \in I \right\} \quad (19)$$

と見比べれば $C \subset \text{Conv}_i(\mathbf{a}_i)$ が分かる. □

次の図 6 は 5 次 Bézier 曲線に対する凸包性の例を示している.

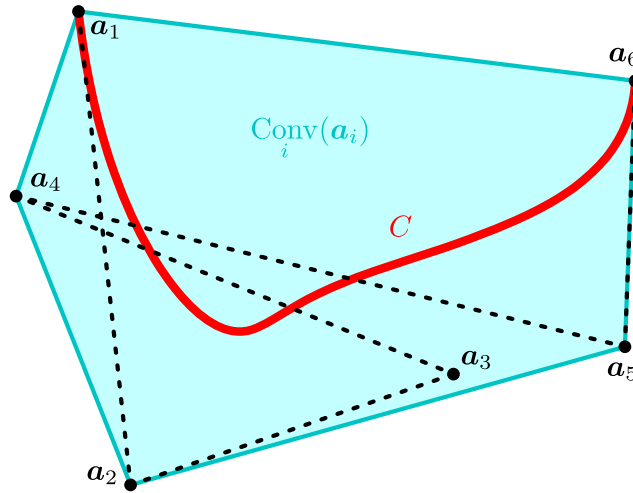


図 6 凸包性の例

^{*11} これは一般的の曲線に対する証明だが, Bézier 曲線に限れば式 (18) を経由しない別証明がある:

証明. 定理 4 より $1 \leq k \leq n$ に対して $\mathbf{p}_{(i,k)} \in \text{Conv}_i(\mathbf{p}_{(i,k-1)})$ であるから

$$\text{Conv}(\mathbf{p}_{(i,k)}) \subset \text{Conv}(\mathbf{p}_{(i,k-1)}) \quad (20)$$

である. よって帰納的に定理が従う. □

2 有理基底関数と有理曲線

Bézier 曲線では、楕円や双曲線を表現できないという問題があった。これを解決するのが有理基底関数と有理曲線である。

定義 11. 有理基底関数

n 個の非負値基底関数 $B_i^{(o)} : I \rightarrow \mathbb{R}$ とそれに対応する n 個の実数 w_i が与えられれば、有理基底関数は次で定義される。

$$B_i : I \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto \frac{B_i^{(o)}(t)w_i}{\sum_j B_j^{(o)}(t)w_j} \quad (21)$$

ここで w_i 重みと呼ばれ、普通は $w_i > 0$ とする。

有理基底関数に対しても次の定理が成立する。

定理 12. 1 の分割 (有理基底関数)

有理基底関数 B_i について次が成り立つ。

$$\sum_i B_i = 1 \quad 0 \leq B_i \leq 1 \quad (22)$$

証明. 先の定義を代入して

$$\sum_i B_i(t) = \sum_i \frac{B_i^{(o)}(t)w_i}{\sum_j B_j^{(o)}(t)w_j} = 1 \quad (23)$$

である。なお、基底関数 $B_i^{(o)}$ の 1 の分割 $\sum_i B_i^{(o)} = 1$ は必ずしも必要ではなかった。重みについて $w_i > 0$ より $B_i \geq 0$ が従い、上の式から ≤ 1 でも抑えられる。□

とくに、 $B_i^{(o)}$ が 1 の分割を充たし、 $w_1 = \dots = w_n$ であれば $B_i = B_i^{(o)}$ である。重み w_i 全体を定数倍しても、分母分子で約分されるから、基底関数 B_i は変わらない。^{*12}

定義 13. 有理曲線

n 個の制御点 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^{\tilde{d}}$ と有理基底関数 B_i が与えられれば、有理曲線は次式で定義される。

$$\mathbf{p}(t) = \sum_i B_i(t)\mathbf{a}_i \quad (24)$$

定理 12 より 1 の分割が充たされるから、有理曲線もまたアフィン不変性 (定理 9) や凸包性 (定理 10) を充たす。

^{*12} この意味で定数倍に関して同地関係を取り、重みを \mathbb{R}^{P^n-1} の元として扱える。しかし、 $w_i > 0$ の条件のために \mathbb{R}^{P^n-1} 全体に対応している訳ではなくあまり利益はない。

次に、有理曲線を幾何的に解釈するための定理を与える。

定理 14. 有理曲線と射影の関係

$\mathbb{R}^{\tilde{d}}$ と $\mathbb{R}^{\tilde{d}} \times \{1\} \subset \mathbb{R}^{\tilde{d}+1}$ を自然な写像で同一視する。制御点 $\mathbf{a}_i = (a_i^1, \dots, a_i^{\tilde{d}}) \in \mathbb{R}^{\tilde{d}}$ に対応する点 $(a_i^1, \dots, a_i^{\tilde{d}}, 1) \in \mathbb{R}^{\tilde{d}} \times \{1\}$ を $\mathbf{a}_i^{(\tilde{d}+1)}$ と書く。 $\boldsymbol{\alpha}_i = w_i \mathbf{a}_i^{(\tilde{d}+1)} \in \mathbb{R}^{\tilde{d}+1}$ において、 $\mathbb{R}^{\tilde{d}+1}$ 上の曲線 $\boldsymbol{\pi}(t) = \sum_i B_i^{(o)}(t) \boldsymbol{\alpha}_i$ を構成する。このとき、 $\boldsymbol{\pi}(t)$ を $\mathbf{O} \in \mathbb{R}^{\tilde{d}+1}$ に関して $\mathbb{R}^{\tilde{d}} \times \{1\}$ に射影すれば $\mathbf{p}(t)$ が得られる。

証明. 射影先の座標を得るには $\boldsymbol{\pi}$ の第 $\tilde{d} + 1$ 成分でそれ自身を割れば良いから

$$\mathbf{p}(t) = \frac{\boldsymbol{\pi}(t)}{\boldsymbol{\pi}(t) \cdot \mathbf{e}_{\tilde{d}+1}} = \frac{\sum_i B_i^{(o)}(t) \boldsymbol{\alpha}_i}{\sum_j B_j^{(o)}(t) \boldsymbol{\alpha}_j \cdot \mathbf{e}_{\tilde{d}+1}} = \frac{\sum_i B_i^{(o)}(t) w_i \mathbf{a}_i}{\sum_j B_j^{(o)}(t) w_j} = \sum_i B_i(t) \mathbf{a}_i \quad (25)$$

である。ここで $\mathbf{e}_{\tilde{d}+1} = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{\tilde{d}+1}$ である。 □

この定理を図で表すと次の図 7 のようになる。

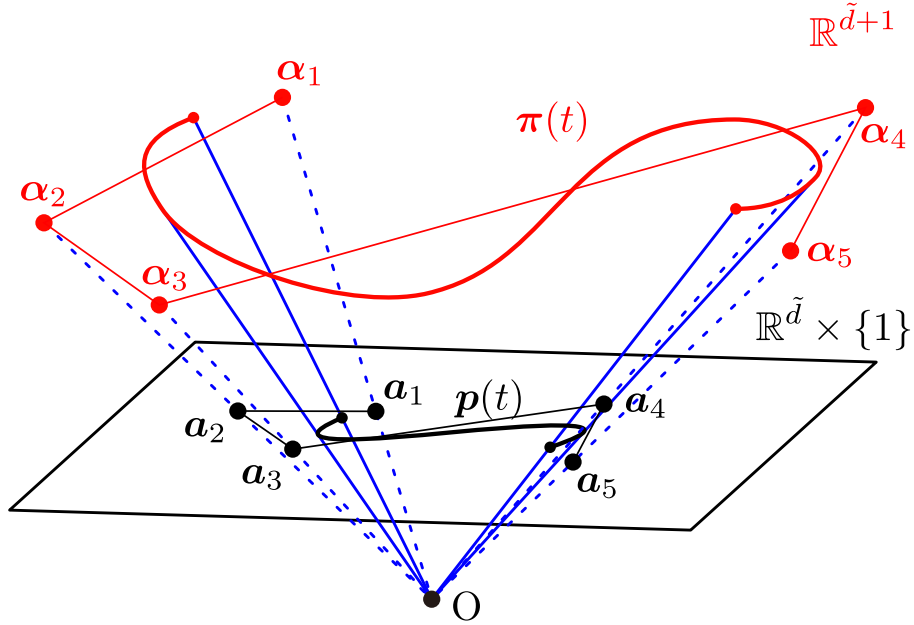


図 7 曲線の射影

$\tilde{d} = 2$ では可視化するために必要な空間が 3 次元だから理解しやすいが、 $\tilde{d} = 3$ となると 4 次元空間からの射影が必要となり、幾何的にイメージするのは少し難しくなる。

有理 Bézier 曲線で円弧を表現するには, 図 8 のように Bézier 曲線で \mathbb{R}^3 上の円錐に沿って放物線を作り, それを原点に関して射影すれば良い.^{*13}

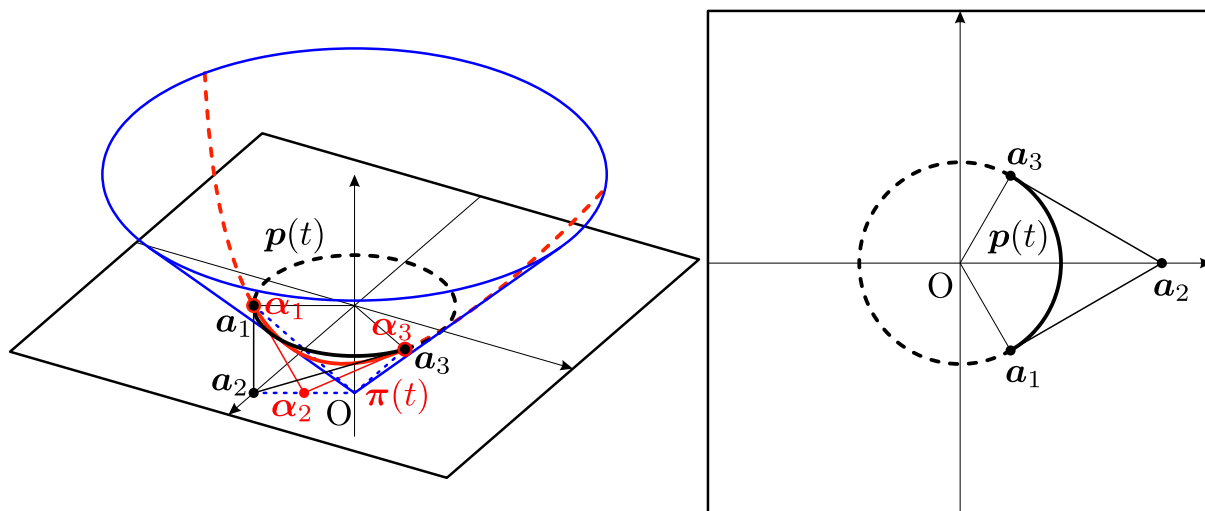


図 8 有理 Bézier 曲線による円弧の表現^{*14}

もっとも, 有理基底関数は Bézier 曲線を円弧などに拡張するためだけのものではない. 次の定理は係数 w_i が重みと呼ばれる理由を与える.

定理 15. 重みの極限

任意の $k \in [1, n]_{\mathbb{Z}}, t \in I$ に対して, $B_k^{(o)}(t) \neq 0$ であれば

$$B_i(t) \rightarrow \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases} \quad \left(\max \left(\frac{w_0}{w_k}, \dots, \frac{w_{k-1}}{w_k}, \frac{w_{k+1}}{w_k}, \dots, \frac{w_n}{w_k} \right) \rightarrow 0 \right) \quad (26)$$

である.

証明. $i \neq k$ について

$$B_i(t) = \frac{B_i^{(o)}(t)w_i}{\sum_j B_j^{(o)}(t)w_j} = \frac{B_i^{(o)}(t)\frac{w_i}{w_k}}{\sum_j B_j^{(o)}(t)\frac{w_j}{w_k}} \rightarrow 0 \quad (27)$$

である. よって定理 12 より $i = k$ について $B_i(t) \rightarrow 1$ である. □

^{*13} これによって写像 $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ が得られるが, この写像は立体射影と本質的に同じパラメータ付けである.

^{*14} <https://www.desmos.com/calculator/92allkrzw7>

この定理の例として 5 次有理 Bernstein 基底関数を考えれば, 次の図 9 のようになる. ここで, 簡単のために $w_0 = w_1 = w_3 = w_4 = w_5 = 1$ とし, w_2 をパラメータとした. 図中の色付きの曲線が有理 Bernstein 基底関数 B_2 である.

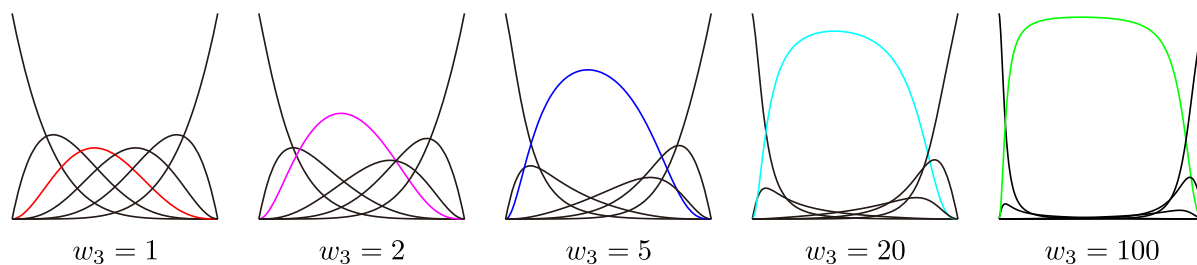


図 9 有理 Bernstein 基底関数^{*15}

図 9 に示したこれらの基底関数から生成される有理 Bézier 曲線は, それぞれ次の図 10 のような曲線を描く.

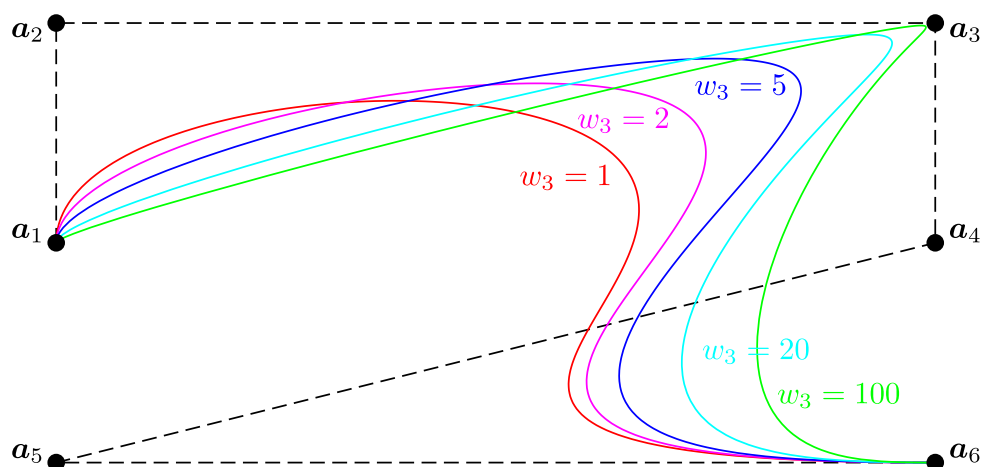


図 10 有理 Bézier 曲線^{*16}

^{*15} <https://www.desmos.com/calculator/czb6vigneh>

^{*16} <https://www.desmos.com/calculator/lojzonnjop>

3 B-spline 基底関数と B-spline 曲線

Bézier 曲線では (C^ω 級^{*17}) の多項式曲線しか表せなかった。一般に、ある曲線を 1 つの低次 Bézier 曲線のみで近似することは困難であるため、近似精度を良くするには複数の Bézier 曲線を繋げる必要がある。出来るだけ滑らかに多項式曲線 (= Bézier 曲線) を区分的に繋げたものが、本節で扱う B-spline 曲線である。Bézier 曲線、有理曲線と同じように、制御点 \mathbf{a}_i に対応する B-spline 基底関数 $B_{(i,p)}$ を 1 の分割が充たされるように作る。これまでと大きく異なる点は、区分点の情報を入れるために広義単調増加な実数の有限列 $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_l)$ を用意する所にある。ここで \mathbf{k} はノット列^{*18}、 k_i はノットと呼ばれる。つまり、ある区間 $[k_i, k_{i+1})$ に一つの多項式曲線が対応し、別の区間 $[k_{i-1}, k_i)$ には別の多項式曲線が対応するようにするのである。^{*19} 定義 1 のように、B-spline 基底関数 $B_{(i,p)}$ を直接定義することも可能ではあるが、あまりにも天下一の、2 項係数に対応する部分が複雑になってしまう。それを避けるため、B-spline 基底関数では定理 3 のような、漸化式を以って定義とすることが通常である。これが次の定義 16 である。

定義 16. B-spline 基底関数 (Cox-de Boor の漸化式)

与えられたノット列 $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_l)$ に対する B-spline 基底関数は次式で定義される:

$$B_{(i,p)}(t) = \frac{t - k_i}{k_{i+p} - k_i} B_{(i,p-1)}(t) + \frac{k_{i+p+1} - t}{k_{i+p+1} - k_{i+1}} B_{(i+1,p-1)}(t), \quad (28)$$

$$B_{(i,0)}(t) = \begin{cases} 1 & (k_i \leq t < k_{i+1}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (29)$$

ただし、式 (28) において分母が 0 であればその項を 0 とする。

次の図 11 は $n = 7$ とした際の $p \leq 3$ までの基底関数の漸化式による定義の関係を表したものである。

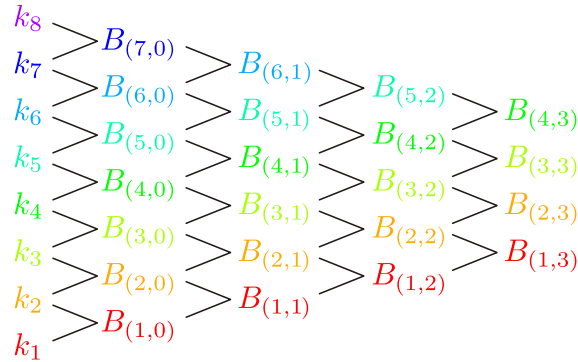


図 11 B-Spline 基底関数の漸化式による定義

^{*17} ある関数 f が C^ω 級であるとは定義域上の任意の点での Taylor 展開が収束し、その点の近傍で一致するものをいう。定義より明らかに $C^\infty \subset C^\omega$ である。 f が C^ω 級であれば局所的性質から大域的性質まで決まってしまう。曲がりパイプなど、実用的な形状の多くは C^ω 級ではない。

^{*18} 英語では knot vector と呼ばれるが、 \mathbf{k} に対して (単位元や逆元の存在する通常の) 加法やスカラー倍を定義する訳ではないから、単にノット列とする方が筆者の好みである。

^{*19} 多項式の繋ぎ目にあたる数が k_i になっており、これがノット (knot) と呼ばれる理由である。

定義式 (28) の右辺の $B_{(i,p-1)}, B_{(i+1,p-1)}$ の係数は, それぞれ区間 $[k_i, k_{i+p}] = \text{supp}(B_{(i,p-1)}), [k_{i+1}, k_{i+p+1}] = \text{supp}(B_{(i+1,p-1)})$ 上 (定理 17 参照) で 1 次関数であり, この区間上で 0 から 1 まで (或いは 1 から 0 まで) 変化する. $p \leq 3$ までの基底関数 $B_{(i,p)}$ は例えば次の図 12 のようになる.

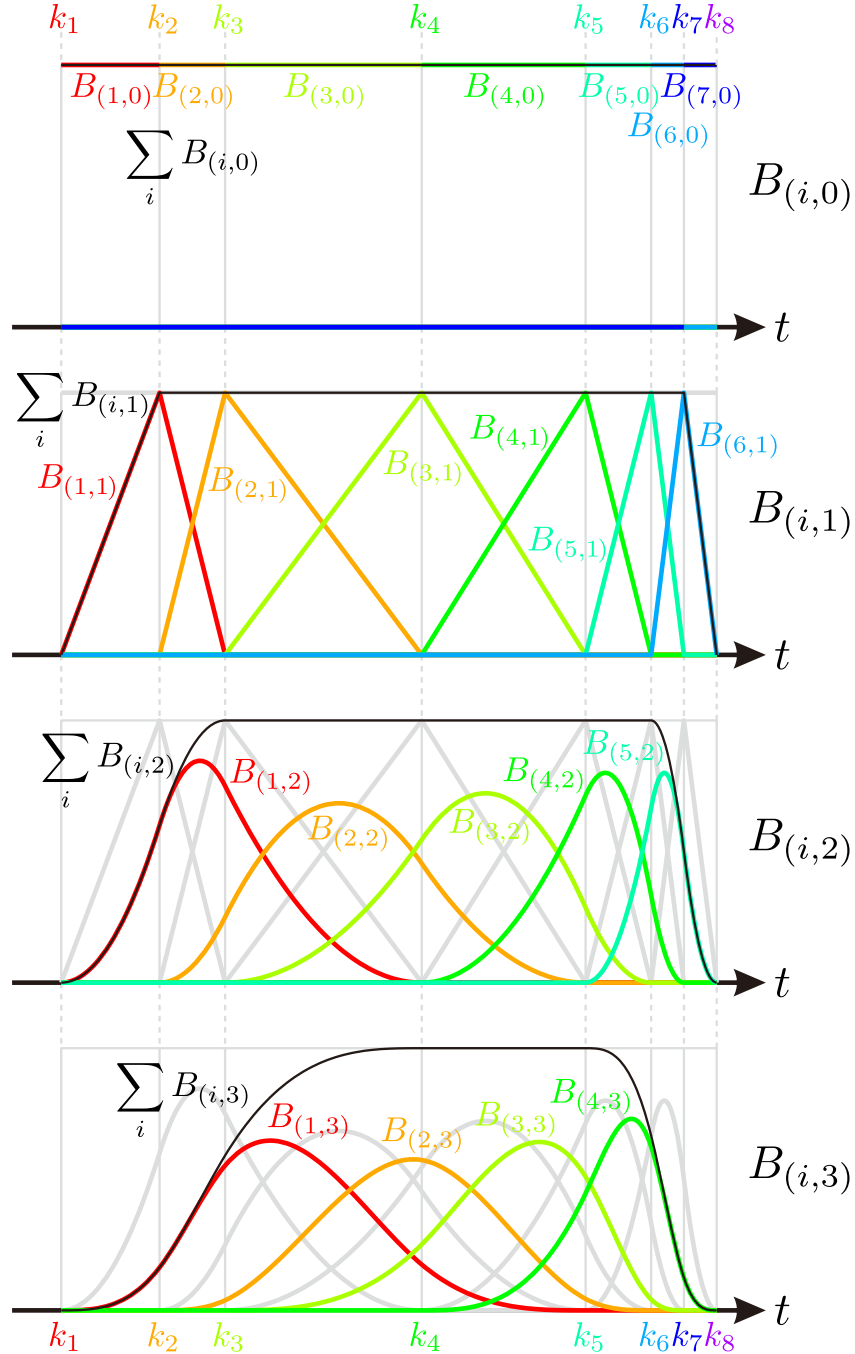


図 12 B-Spline 基底関数の例^{*20}

^{*20} <https://www.desmos.com/calculator/ql6jqgdabs>

次の定理は B-spline 基底関数の性質の中でも特に基本的である。

定理 17. B-spline 基底関数の台

ノット列 $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_l)$ から生成される B-spline 基底関数 $B_{(i,p)}$ について

$$\text{supp}(B_{(i,p)}) = \overline{(k_i, k_{i+p+1})} \quad (30)$$

が成り立つ。

証明. $k_i = k_{i+p+1}$ であれば明らかなので、以降では $k_i \neq k_{i+p+1}$ を仮定する。B-spline 基底関数の定義式 (28), (29) (及び図 11) より, $t \notin [k_i, k_{i+p+1}]$ において $B_{(i,p)}(t) = 0$ である。よって

$$\text{supp}(B_{(i,p)}) \subset [k_i, k_{i+p+1}] \quad (31)$$

である。更に B-spline 基底関数の定義より, $k_l \neq k_{l+1}$ ($l = i, \dots, i+p$) であれば各開区間 (k_l, k_{l+1}) においては $B_{(i,p)} > 0$ あり, $\text{supp}(B_{(i,p)}) \supset [k_l, k_{l+1}]$ である。よって $k_i \neq k_{i+p+1}$ であれば

$$\text{supp}(B_{(i,p)}) \supset \bigcup_{j \in [i, i+p] \mathbb{Z}, k_j \neq k_{j+1}} [k_j, k_{j+1}] = [k_i, k_{i+p+1}] \quad (32)$$

である。よって

$$\text{supp}(B_{(i,p)}) = [k_i, k_{i+p+1}] = \overline{(k_i, k_{i+p+1})} \quad (33)$$

である。 □

次の定理はノットの配置が B-spline 基底関数の決定に及ぼす影響を述べる。

定理 18. B-spline 基底関数のノット依存性

$p \geq 1$ に対し, $B_{(i,p)}|_{[k_j, k_{j+1}]}$ はノット列の部分列 $(k_{j-p+1}, \dots, k_{j+p})$ のみによって決定される。

証明. 帰納法で示す。 $p = 1$ については明らか。 $t \in [k_j, k_{j+1}]$ とする。B-spline 基底関数の定義式 (28) において, 係数の $\frac{t-k_i}{k_{i+p}-k_i}, \frac{k_{i+p+1}-t}{k_{i+p+1}-k_{i+1}}$ が影響するのは $t \in \text{supp}(B_{(i,p-1)}) = \overline{(k_i, k_{i+p})}, t \in \text{supp}(B_{(i+1,p-1)}) = \overline{(k_{i+1}, k_{i+p+1})}$ の場合である。よって帰納的に $B_{(i,p)}(t)$ は $k_{j-p+1}, \dots, k_{j+p}$ のみで決定され, 定理が従う。 □

次の図 13 は $p = 3$ での例である。

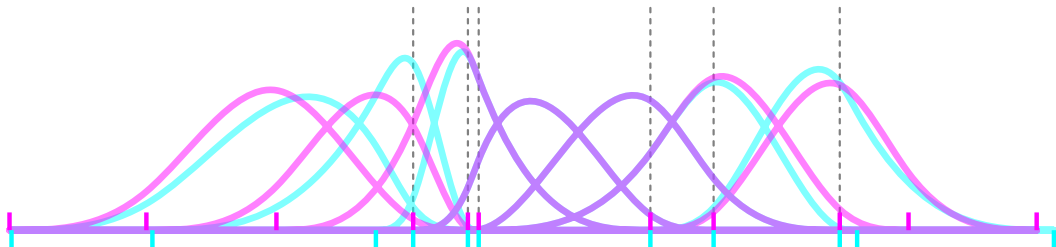


図 13 B-Spline 基底関数を決定するノット列^{*21}

^{*21} <https://www.desmos.com/calculator/wnp8e4xyyj>

定理 19. B-spline 基底関数を決定するノット列

$B_{(i,p)}|_{[k_{i+j}, k_{i+j+1}]}$ はノット列の部分列

$$\begin{cases} (k_i, \dots, k_{i+p}) & (j = 0) \\ (k_i, \dots, k_{i+p+1}) & (j \in [1, p-1]_{\mathbb{Z}}) \\ (k_{i+1}, \dots, k_{i+p+1}) & (j = p) \end{cases} \quad (34)$$

によって決定される。

証明. 定理 17 と定理 18 を合わせれば明らか。 □

B-spline 基底関数の導関数に対しても、定義式と同様に漸化式が存在する。

定理 20. B-spline 基底関数の導関数

B-spline 基底関数 $B_{(i,p)}$ の導関数 $\dot{B}_{(i,p)}$ について次が成り立つ。

$$\dot{B}_{(i,p)}(t) = p \left(\frac{1}{k_{i+p} - k_i} B_{(i,p-1)}(t) - \frac{1}{k_{i+p+1} - k_{i+1}} B_{(i+1,p-1)}(t) \right) \quad (35)$$

ただし $t \in [k_1, k_l] \setminus \{k_1, \dots, k_l\}$ とするが、 $t = k_j$ において $B_{(i,p-1)}(t), B_{(i+1,p-1)}(t)$ が連続であれば、 t の範囲を k_j の近傍までも含める事ができる。右辺各項において分母が 0 となる場合は、定義 16 と同様にその項を無視した形の式が成立する。

証明. 帰納法で証明する。

$$\mathcal{B}_p = \frac{1}{k_{i+p} - k_i} B_{(i,p-1)} - \frac{1}{k_{i+p+1} - k_{i+1}} B_{(i+1,p-1)}, \quad (36)$$

$$I = [k_1, k_l] \setminus \{k_1, \dots, k_l\} \quad (37)$$

とおく。 $B_{(i,0)}$ が区分的定数だから I 上で $\dot{B}_{(i,0)} = 0$ であり

$$\begin{aligned} \dot{B}_{(i,1)} &= \frac{1}{k_{i+1} - k_i} B_{(i,0)} - \frac{1}{k_{i+1+1} - k_{i+1}} B_{(i+1,0)} + \frac{t - k_i}{k_{i+1} - k_i} \dot{B}_{(i,0)} + \frac{k_{i+1+1} - t}{k_{i+1+1} - k_{i+1}} \dot{B}_{(i+1,0)} \\ &= \mathcal{B}_1 + 0 + 0 = 1\mathcal{B}_1 \end{aligned} \quad (38)$$

である。よって $p = 1$ について式 (35) が成立する。続いて $p = P - 1$ で式 (35) が成立すると仮定すれば

$$\begin{aligned} \dot{B}_{(i,P)} &= \frac{1}{k_{i+P} - k_i} B_{(i,P-1)} - \frac{1}{k_{i+P+1} - k_{i+1}} B_{(i+1,P-1)} \\ &\quad + \frac{t - k_i}{k_{i+P} - k_i} \dot{B}_{(i,P-1)} + \frac{k_{i+P+1} - t}{k_{i+P+1} - k_{i+1}} \dot{B}_{(i+1,P-1)} \\ &= \mathcal{B}_P + \frac{t - k_i}{k_{i+P} - k_i} (P-1) \left(\frac{1}{k_{i+P-1} - k_i} B_{(i,P-2)} - \frac{1}{k_{i+P} - k_{i+1}} B_{(i+1,P-2)} \right) \\ &\quad + \frac{k_{i+P+1} - t}{k_{i+P+1} - k_{i+1}} (P-1) \left(\frac{1}{k_{i+P} - k_{i+1}} B_{(i+1,P-2)} - \frac{1}{k_{i+P+1} - k_{i+2}} B_{(i+2,P-2)} \right) \end{aligned} \quad (39)$$

である。ここで記号の見やすさのために $a = k_i, b = k_{i+1}, c = k_{i+2}, A = k_{i+P-1}, B = k_{i+P}, C = k_{i+P+1}$ とおくと*22

*22 B が B-spline 基底関数 $B_{(i,p)}$ と紛らわしいかもしれないが、実際には問題にならない。

$$\begin{aligned}\dot{B}_{(i,P)} = \mathcal{B}_P + (P-1) & \left(\frac{t-a}{B-a} \left(\frac{1}{A-a} B_{(i,P-2)} - \frac{1}{B-b} B_{(i+1,P-2)} \right) \right. \\ & \left. + \frac{C-t}{C-b} \left(\frac{1}{B-b} B_{(i+1,P-2)} - \frac{1}{C-c} B_{(i+2,P-2)} \right) \right)\end{aligned}\quad (40)$$

である。ここで

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_P &= \frac{1}{k_{i+P}-k_i} B_{(i,P-1)} - \frac{1}{k_{i+P+1}-k_{i+1}} B_{(i+1,P-1)} \\ &= \frac{1}{k_{i+P}-k_i} \left(\frac{t-k_i}{k_{i+P-1}-k_i} B_{(i,P-2)} + \frac{k_{i+P}-t}{k_{i+P}-k_{i+1}} B_{(i+1,P-2)} \right) \\ &\quad - \frac{1}{k_{i+P+1}-k_{i+1}} \left(\frac{t-k_{i+1}}{k_{i+P}-k_{i+1}} B_{(i+1,P-2)} + \frac{k_{i+P+1}-t}{k_{i+P+1}-k_{i+2}} B_{(i+2,P-2)} \right) \\ &= \frac{1}{B-a} \left(\frac{t-a}{A-a} B_{(i,P-2)} + \frac{B-t}{B-b} B_{(i+1,P-2)} \right) \\ &\quad - \frac{1}{C-b} \left(\frac{t-b}{B-b} B_{(i+1,P-2)} + \frac{C-t}{C-c} B_{(i+2,P-2)} \right) \\ &= \frac{1}{B-a} \left(\frac{t-a}{A-a} B_{(i,P-2)} + \frac{B-t}{B-b} B_{(i+1,P-2)} \right) \\ &\quad - \frac{1}{C-b} \left(\frac{t-b}{B-b} B_{(i+1,P-2)} + \frac{C-t}{C-c} B_{(i+2,P-2)} \right) \\ &\quad - \frac{t-a}{B-a} \left(\frac{1}{A-a} B_{(i,P-2)} - \frac{1}{B-b} B_{(i+1,P-2)} \right) \\ &\quad - \frac{C-t}{C-b} \left(\frac{1}{B-b} B_{(i+1,P-2)} - \frac{1}{C-c} B_{(i+2,P-2)} \right) \\ &\quad + \frac{t-a}{B-a} \left(\frac{1}{A-a} B_{(i,P-2)} - \frac{1}{B-b} B_{(i+1,P-2)} \right) \\ &\quad + \frac{C-t}{C-b} \left(\frac{1}{B-b} B_{(i+1,P-2)} - \frac{1}{C-c} B_{(i+2,P-2)} \right) \\ &= \left(\frac{B-t}{B-a} - \frac{t-b}{C-b} + \frac{t-a}{B-a} - \frac{C-t}{C-b} \right) \frac{B_{(i+1,P-2)}}{B-b} \\ &\quad + \frac{t-a}{B-a} \left(\frac{1}{A-a} B_{(i,P-2)} - \frac{1}{B-b} B_{(i+1,P-2)} \right) \\ &\quad + \frac{C-t}{C-b} \left(\frac{1}{B-b} B_{(i+1,P-2)} - \frac{1}{C-c} B_{(i+2,P-2)} \right)\end{aligned}\quad (41)$$

であり

$$\begin{aligned}\frac{B-t}{B-a} - \frac{t-b}{C-b} + \frac{t-a}{B-a} - \frac{C-t}{C-b} &= \frac{B}{B-a} + \frac{b}{C-b} - \frac{a}{B-a} - \frac{C}{C-b} \\ &= \frac{B(C-b) + b(B-a) - a(C-b) - C(B-a)}{(B-a)(C-b)} = 0\end{aligned}\quad (42)$$

である。したがって以上の式 (40)(41)(42) を合わせて

$$\dot{B}_{(i,P)} = \mathcal{B}_P + (P-1)\mathcal{B}_P = P\mathcal{B}_P \quad (43)$$

を得る。よって帰納的に任意の $p \in [1, l-2]_{\mathbb{Z}}$, $t \in I$ に対して式 (35) が成立する。さらに $B_{(i,p-1)}, B_{(i+1,p-1)}$ が k_j の近傍で連続であれば k_j の近傍でも式 (35) が成立する。これは $B_{(i,p)}$ が k_j の近傍で連続であり、導関

数が $t \rightarrow k_j$ で収束するためである。^{*23} $k_{i+p} - k_i = 0$ または $k_{i+p+1} - k_{i+1} = 0$ なる場合も同様の議論から示される。 \square

後の定理のために、ノット列の重複度を返す関数を用意する。

定義 21. ノット列の重複に関する記号

ノット列 $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_l)$, 次数 $p \in \mathbb{N}$ に対して, 関数 $\mathbf{n}_{(i,p)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}, \mathbf{n} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ を次で定義する。

$$\mathbf{n}_{(i,p)}(t) = \# \{ j \in [i, i+p+1]_{\mathbb{Z}} \mid k_j = t \} \quad (49)$$

$$\mathbf{n}(t) = \# \{ j \in [1, l]_{\mathbb{Z}} \mid k_j = t \} \quad (50)$$

B-spline 基底関数 $B_{(i,p)}$ に影響を与えるノット列の重複を返す関数が $\mathbf{n}_{(i,p)}$ である。それに対して \mathbf{n} は単にノットの重複を返す関数であり、とくに基底関数を選ぶ訳ではない。明らかに $\mathbf{n}_{(i,p)}(t) \leq \mathbf{n}(t)$ であり, $\mathbf{n}(t) \neq 0$ であれば $t \in \{k_1, \dots, k_l\}$ である。 $\mathbf{n}_{(i,p)}$ は直ぐ後の定理 22 で, \mathbf{n} はもう少し後の定義 31 で使うことになる。

定理 22. B-spline 基底関数の微分可能性

B-spline 基底関数 $B_{(i,p)}$ について, 次の性質が成り立つ。

- (i) ノット列 \mathbf{k} に重複が無ければ, 基底関数は $B_{(i,p)} \in C^{p-1}(\mathbb{R})$ なる区分 p 次多項式である。
- (ii)
 - $p - \mathbf{n}_{(i,p)}(t^*) = -2$ なる t^* が存在すれば $B_{(i,p)} = 0$.
 - $p - \mathbf{n}_{(i,p)}(t^*) = -1$ ならば $B_{(i,p)}$ は t^* で不連続。
 - $p - \mathbf{n}_{(i,p)}(t^*) \geq 0$ ならば $B_{(i,p)}$ は t^* の近傍において $C^{p-\mathbf{n}_{(i,p)}(t^*)}$ 級である。

^{*23} これは次の補題から従う。

補題. $f \in C(I, \mathbb{R})$ が $I \setminus \{a\}$ で微分可能で $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)$ が存在すれば f は a において微分可能で $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)$ が成立する。

証明. 定数 c と関数 g を

$$c := \lim_{x \rightarrow a} f'(x), \quad g(x) := f(x+a) - f(a) - cx \quad (44)$$

とおくと $g(0) = 0$, $g'(x) = f'(x+a) - c$, $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = 0$ である。よってあとは

$$g'(0) = 0 \quad (45)$$

を示せば良い。 $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = 0$ を ε - δ で表せば

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; |x| < \delta \Rightarrow |g'(x)| < \varepsilon \quad (46)$$

である。 $0 < x_0 < \delta$ なる x_0 において $g(x_0) > \varepsilon x_0$ を仮定する。 $d := g(x_0) - \varepsilon x_0 > 0$ とおく。このとき微積分学の基本定理より

$$g(x) = \int_{x_0}^x g'(x) dx + g(x_0) > \varepsilon(x - x_0) + \varepsilon x_0 + d = \varepsilon x + d \quad (47)$$

である。よって $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \geq d > 0 = g(0)$ よりこれは g の連続性に矛盾。したがって $g(x_0) \leq \varepsilon x_0$ である。同様にして $|x_0| < \delta \Rightarrow |g(x_0)| \leq \varepsilon |x_0|$ である。よって

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; |x_0| < \delta \Rightarrow g'(0) = \left| \frac{g(x_0) - g(0)}{x_0} \right| \leq \varepsilon \quad (48)$$

であり, $g'(0) = 0$ である。 \square

証明. (i) 帰納法で証明する. ノットに重複が無ければ $B_{(i,1)}$ は連続だから C^0 級. よって $p = 1$ について成立. $p = P - 1$ で $B_{(i,p)}$ が $C^{p-1} = C^{P-2}$ 級であれば, 定理 20 より $B_{(i,P)}$ の導関数が C^{P-2} 級となる. よって $B_{(i,p)}$ は C^{p-1} 級である. したがって帰納的に定理が成立する.

- (ii) • $p - \mathbf{n}_{(i,p)}(t^*) = -2$ なる t^* が存在すれば, 基底関数の定義式 (28), (29) より基底関数を構成するノットは全て等しい. よって帰納的に $B_{(l,p)} = 0$.
- $p - \mathbf{n}_{(i,p)}(t^*) = -1$ なる場合について, $k_i < k_{i+1} = \dots = k_{i+p+1} = t^*$ または $t^* = k_i = \dots = k_{i+p} < k_{i+p+1}$ である. $k_i < k_{i+1} = \dots = k_{i+p+1} = t^*$ では基底関数の定義式 (28), (29) より

$$B_{(i,p)}(t) = \begin{cases} \left(\frac{t - k_i}{k_{i+p+1} - k_i} \right)^p & (t \in [k_i, k_{i+p+1})) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (51)$$

である. よって $B_{(l,p)}$ は t^* で不連続である. $t^* = k_i = \dots = k_{i+p} < k_{i+p+1}$ の場合でも同様である.

- $p - \mathbf{n}_{(i,p)}(t^*) \geq 0$ なる場合について. $t^* = k_j = \dots = k_{j+\mathbf{n}_{(i,p)}(t^*)-1}$ を充たす $j \in [i, i + p + 1]_{\mathbb{Z}}$ が存在. よって, 上に見たように $B_{(j,\mathbf{n}_{(i,p)}(t^*)-2)} = 0$ である. 同様に上に見たように, $\tilde{i} \in [i, i + p - \mathbf{n}_{(i,p)}(t^*) + 1]_{\mathbb{Z}}$ に対して $B_{(\tilde{i},\mathbf{n}_{(i,p)}(t^*)-1)}$ は t^* で不連続である. したがって, $\tilde{i} \in [i, i + p - \mathbf{n}_{(i,p)}(t^*)]_{\mathbb{Z}}$ に対して $B_{(\tilde{i},\mathbf{n}_{(i,p)}(t^*))}$ は t^* で連続 (C^0 級) である. よって, 定理 20 より帰納的に $\tilde{i} \in [i, i + p - \mathbf{n}_{(i,p)}(t^*) - r]_{\mathbb{Z}}$ に対して $B_{(\tilde{i},\mathbf{n}_{(i,p)}(t^*)+r)}$ は t^* の近傍で C^r 級である. ゆえに, $r = p - \mathbf{n}_{(i,p)}(t^*)$ を考えれば $B_{(i,p)}$ は t^* の近傍で $C^{p-\mathbf{n}_{(i,p)}(t^*)}$ 級である.*24

ここで, (ii) の 3 番目は (i) を特別な場合として含んでいることに注意. □

定理 23. 基底関数の極大点一意性

B-spline 基底関数 $B_{(i,p)}$ のそれぞれに対して $\tau_{(i,p)} \in \mathbb{R}$ が存在し, $B_{(i,p)}$ は $(-\infty, \tau_{(i,p)})$ で広義単調増加, $[\tau_{(i,p)}, +\infty)$ で広義単調減少となる. とくに, $B_{(i,p)} \in C^0(\mathbb{R})$ なら $[k_i, \tau_{(i,p)}]$ で狭義単調増加, $[\tau_{(i,p)}, k_{i+p+1}]$ で狭義単調減少とできる.

証明. $p = 0$ に対しては $\tau_{(i,p)} = k_{i+1}$, $p = 1$ に対しても $\tau_{(i,p)} = k_{i+1}$ とすれば良い. $p - \mathbf{n}_{(i,p)}(t^*) = 2$ なる t^* が存在すれば, $B_{(i,p)}$ は定数 0 だから $\tau_{(i,p)}$ は任意に取れる. $p - \mathbf{n}_{(i,p)}(t^*) = 1$ なる t^* が存在すれば, $k_i < k_{i+1} = \dots = k_{l-1} < k_l$ であって, $t^* = k_{i+1}$, $B_{(i,p)}(t^*) = 1$ であるから, $\tau_{(i,p)} = k_{i+1}$ とすれば良い.

よって以降では, $p \geq 2$, $B_{(i,p)} \in C^1(\mathbb{R})$ と仮定して良い. この場合に, より強く

$$\exists \tau_{(i,p)} \in \text{supp}(B_{(i,p)}) \text{ s.t. } B_{(i,p)}|_{[k_i, \tau_{(i,p)}]}, -B_{(i,p)}|_{[\tau_{(i,p)}, k_{i+p+1}]} \text{ は狭義単調増加} \quad (52)$$

が成り立つことを以下で示す.

関数 $C_{(i,p)}$ を次で定義する.*25

$$C_{(i,p)} = \frac{1}{k_{i+p+1} - k_i} B_{(i,p)} \quad (53)$$

*24 証明の文章だけでは分かり難いため, 適宜図 11 を参照されたい.

*25 $k_{i+p+1} - k_i = 0$ であれば $B_{(i,p)} = 0$ であった. しかし, $C_{(i,p)}$ は (定数倍の差はあるが) Dirac の δ 関数のように定義する方が自然である.

ここで次が成り立つ.

$$B_{(i,p)} = (t - k_i)C_{(i,p-1)} + (k_{i+p+1} - t)C_{(i+1,p-1)} \quad (54)$$

$$\dot{B}_{(i,p)} = p(C_{(i,p-1)} - C_{(i+1,p-1)}) \quad (55)$$

$$C_{(i,p)} = \frac{t - k_i}{k_{i+p+1} - k_i}C_{(i,p-1)} + \frac{k_{i+p+1} - t}{k_{i+p+1} - k_i}C_{(i+1,p-1)} \quad (56)$$

$$\dot{C}_{(i,p)} = \frac{p}{k_{i+p+1} - k_i} (C_{(i,p-1)} - C_{(i+1,p-1)}) \quad (57)$$

図 12 と同一のノット列に対する $p \leq 3$ までの関数 $C_{(i,p)}$ は例えば次の図 14 のようになる.

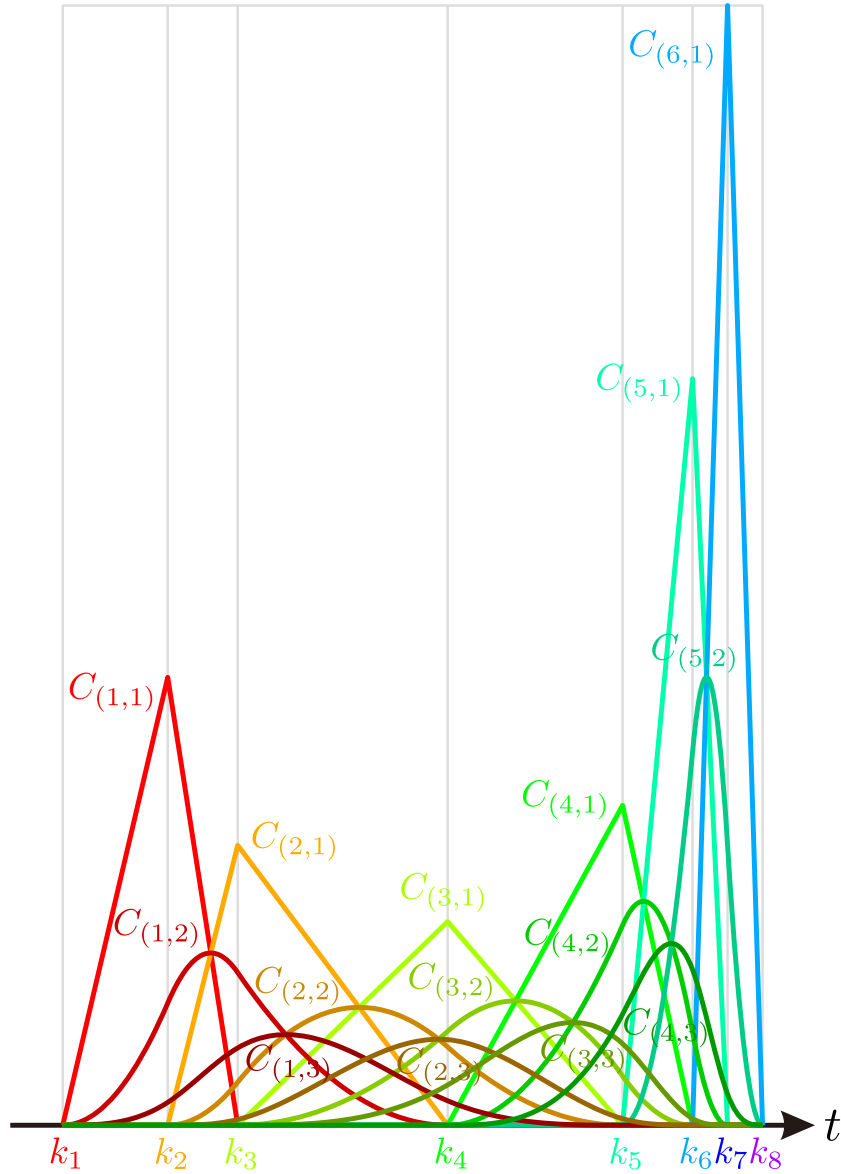


図 14 関数 $C_{(i,p)}$ ^{*26}

^{*26} <https://www.desmos.com/calculator/maxhnhnh91>

$B_{(i,p)}$ は C^1 級と仮定して良いのであったから、 $B_{(i,p)}$ が $\tau_{(i,p)}$ で極大値を取るとすればその点で $C_{(i,p)}$ も極大で、 $\dot{C}_{(i,p)}(\tau_{(i,p)}) = 0$ である。図 14 と式 (56), (57) から分かるように、 $C_{(i,p-1)}$ どうしの交点は $C_{(i,p)}$ の極大点に一致する。あとは $\tau_{(i,p)} \in (k_i, k_{i+p+1})$ の一意性、つまり $\dot{C}_{(i,p)}(t) = 0$ の解 $\tau_{(i,p)}$ がある区間の上で一意的であることを示せば良い。冒頭で議論したように、 $C_{(i,p-1)} \in C^0(\mathbb{R}) \setminus C^1(\mathbb{R})$ であれば、式 (52) を充たす $\tau_{(i,p-1)}$ が存在する。よってあとは C^1 級の $C_{(i,p)}$ に対して次が成り立つことを示せば十分である。

$$(\text{式 (52) を充たす } \tau_{(i,p-1)}, \tau_{(i+1,p-1)} \text{ が存在}) \Rightarrow (\text{式 (52) を充たす } \tau_{(i,p)} \text{ が存在}) \quad (58)$$

区間 $(k_i, \tau_{(i,p-1)})$, $(\tau_{(i,p-1)}, \tau_{(i+1,p-1)})$, $(\tau_{(i+1,p-1)}, k_{i+p+1})$ に分けて考える。

- 区間 $(k_i, \tau_{(i,p-1)})$

この区間で $C_{(i,p)}$ は狭義単調増加である。これは次式から分かる。

$$\begin{aligned} \frac{k_{i+p+1} - k_i}{p} \dot{C}_{(i,p)} &= C_{(i,p-1)}(t) - C_{(i+1,p-1)}(t) \\ &= \frac{t - k_i}{k_{i+p} - k_i} C_{(i,p-2)}(t) + \frac{k_{i+p} - t}{k_{i+p} - k_i} C_{(i+1,p-2)}(t) \\ &\quad - \frac{t - k_{i+1}}{k_{i+p+1} - k_{i+1}} C_{(i+1,p-2)}(t) - \frac{k_{i+p+1} - t}{k_{i+p+1} - k_{i+1}} C_{(i+2,p-2)}(t) \\ &= \frac{t - k_i}{k_{i+p} - k_i} C_{(i,p-2)}(t) + \frac{k_{i+p+1} - t}{k_{i+p+1} - k_{i+1}} C_{(i+1,p-2)}(t) \\ &\quad - \frac{t - k_i}{k_{i+p} - k_i} C_{(i+1,p-2)}(t) - \frac{k_{i+p+1} - t}{k_{i+p+1} - k_{i+1}} C_{(i+2,p-2)}(t) \\ &= \frac{t - k_i}{p-1} \dot{C}_{(i,p-1)}(t) + \frac{k_{i+p+1} - t}{p-1} \dot{C}_{(i+1,p-1)}(t) \\ &= \frac{1}{p-1} ((t - k_i) \dot{C}_{(i,p-1)}(t) + (k_{i+p+1} - t) \dot{C}_{(i+1,p-1)}(t)) > 0 \end{aligned} \quad (59)$$

ただし $\dot{C}_{(i,p-1)}(t), \dot{C}_{(i+1,p-1)}(t) > 0$ を使った。 $C_{(i,p-1)}, C_{(i+1,p-1)} \in C^1(\mathbb{R})$ とは限らないが、その場合 $\tau_{(i,p-1)}, \tau_{(i+1,p-1)}$ がノット上にあるために $C_{(i,p-1)}, C_{(i+1,p-1)} \in C^1((k_i, \tau_{(i,p-1)}))$ なので問題ない。

- 区間 $(\tau_{(i+1,p-1)}, k_{i+p+1})$

区間 $(k_i, \tau_{(i,p-1)})$ と同様の方針で $C_{(i,p)}|_{(\tau_{(i+1,p-1)}, k_{i+p+1})}$ の狭義単調減少が示せる。

- 区間 $(\tau_{(i,p-1)}, \tau_{(i+1,p-1)})$

以上より、 $\dot{C}_{(i,p)} = \frac{p}{k_{i+p+1} - k_i} (C_{(i,p)} - C_{(i+1,p)}) = 0$ が解を取りうる区間は $(\tau_{(i,p-1)}, \tau_{(i+1,p-1)})$ である。さらに $\dot{C}_{(i,p)}$ は $[\tau_{(i,p-1)}, \tau_{(i+1,p-1)}]$ 上で狭義単調減少な連続関数だから逆関数が存在し、 $\dot{C}_{(i,p)}(\tau_{(i,p-1)}) > 0, \dot{C}_{(i,p)}(\tau_{(i+1,p-1)}) < 0$ である。したがって $\dot{C}_{(i,p)}(t) = 0$ を充たす $\tau_{(i,p)} \in (\tau_{(i,p-1)}, \tau_{(i+1,p-1)})$ が一意的に存在する。

以上を合わせて証明が完了する。 □

普通は B-spline 基底関数を定義 16 から定義するが, 証明中で定義した $C_{(i,p)}$ を先に定義してから $B_{(i,p)}$ を定義しても問題ない. $B_{(i,p)}$ と $C_{(i,p)}$ にはそれぞれの良い性質があり, $C_{(i,p)}$ の良い性質とは上の証明で見た図 14, 式 (56), (57) と等式 $\int_{\mathbb{R}} C_{(i,p)} dt = 1/(p+1)$ ^{*27}である. これに対して, $B_{(i,p)}$ の良い性質は 1 の分割である.^{*28}

定理 24. 1 の分割 (B-spline 基底関数)

B-spline 基底関数 $B_{(i,p)}$ について次が成り立つ.

$$\sum_i B_{(i,p)}(t) = 1 \quad (t \in (k_{p+1}, k_{l-p})) \quad 0 \leq B_{(i,p)} \leq 1 \quad (60)$$

証明. 区間 $(k_j, k_{j+1}) \subset (k_{p+1}, k_{l-p})$ で考える. 定理 17 より

$$\sum_i B_{(i,p)}(t) = \sum_{i \in \{j-p, \dots, j\}} B_{(i,p)}(t) \quad (t \in (k_j, k_{j+1})) \quad (61)$$

である. 帰納法で示す. $p = 0$ では定義 (29) より明らかに式 (60) が成立. $p = P - 1$ で式 (60) が成立すると仮定する. $p = P$ について

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in \{j-p, \dots, j\}} B_{(i,p)} \\ &= B_{(j-P, P)} + B_{(j-P+1, P)} + \dots + B_{(j, P)} \\ &= \frac{t - k_{j-P}}{k_j - k_{j-P}} B_{(j-P, P-1)} + \frac{t - k_{j-P+1}}{k_{j+1} - k_{j-P+1}} B_{(j-P+1, P-1)} + \dots + \frac{t - k_j}{k_{j+P} - k_j} B_{(j, P-1)} \\ & \quad + \frac{k_{j+1} - t}{k_{j+1} - k_{j-P+1}} B_{(j-P+1, P-1)} + \frac{k_{j+2} - t}{k_{j+2} - k_{j-P+2}} B_{(j-P+2, P-1)} + \dots + \frac{k_{j+P+1} - t}{k_{j+P+1} - k_{j+1}} B_{(j+1, P-1)} \\ &= B_{(j-(P-1), P-1)} + \dots + B_{(j, P-1)} = 1 \end{aligned} \quad (62)$$

である. よって各区間 (k_j, k_{j+1}) において帰納的に任意の p に対して式 (60) が成立する. ノット $k_i \in \{k_{p+2}, \dots, k_{l-p-1}\}$ の近傍では連続性から式 (60) が成立する. よって区間 (k_{p+1}, k_{l-p}) 上で式 (60) が成立. 区間 $[k_{p+1}, k_{l-p}]$ の外では総和の個数が足らず, $\sum_i B_{(i,p)}(t) < 1$ である. さらに $B_{(i,p)} \geq 0$ より $B_{(i,p)} > 1$ となれば矛盾であるから $t \in [k_1, k_l]$ において $0 \leq \sum_i B_{(i,p)} \leq 1$ である. \square

^{*27} 後で使う訳ではないので証明略とした. 証明は簡単.

^{*28} 後の定理 28 で見るが, B-spline 基底関数 $B_{(i,p)}$ は特定の条件下で Bernstein 多項式に一致する. この条件下で $C_{(i,p)}$ もこれらに一致している.

B-spline 曲線の定義は, 1 の分割の性質のために, 次の 3 通りの流儀がある.

- (a) 1 の分割を充たす区間 $[k_{p+1}, k_{l-p}]$ に制限するもの
- (b) 両端のノットを集めて区間 $[k_1, k_l]$ で 1 の分割が充たされるようにするもの
- (c) 周期的条件を与えて閉曲線とするもの

これらのそれぞれについて, 以下で B-spline 曲線の定義を述べる.

定義 25. B-spline 曲線 (a) 区間の制限

次数 $p > 0$, ノット列 $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_l)$ に関して $n = l - p - 1, k_{l-p} < k_l$ とする. $B_{(i,p)}$ を \mathbf{k} から生成される B-spline 基底関数とする.

このとき, 制御点 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^{\tilde{d}}$ が与えられれば, B-spline 曲線は次で定義される.

$$\mathbf{p} : [k_{p+1}, k_{l-p}] \rightarrow \mathbb{R}^{\tilde{d}}; t \mapsto \sum_i B_{(i,p)}(t) \mathbf{a}_i \quad (63)$$

ノット列に関する仮定 $k_{l-p} < k_l$ は $[k_{p+1}, k_{l-p}]$ 上で 1 の分割が充たされるようにするためのものである. 定義 (a) による B-spline 基底関数と B-spline 曲線の例を次の図 15 に示す.

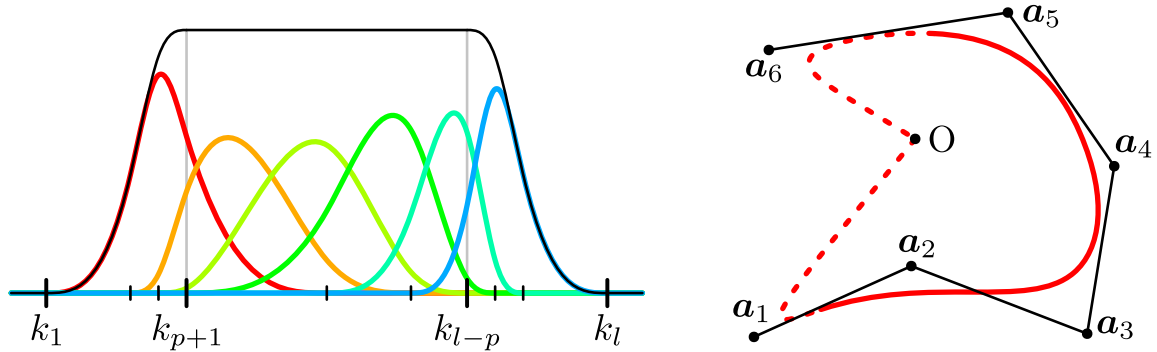


図 15 B-spline 曲線の例 (a)^{*29}

図 15 右側の破線部は区間 $[k_1, k_{p+1}]$, $[k_{l-p}, k_l]$ に対応する部分である. これらの区間では 1 の分割が充たされないために Affine 不変性 (定理 9) を充たさないし, 凸包性 (定理 10) を充たすとも限らない.

^{*29} <https://www.desmos.com/calculator/meyqjb90bw>

さて, (a) のように定義した B-spline 曲線は端点で制御点と一致しない. このために Bézier 曲線のような直観的な制御点の決定が困難となる. そのための修正が次の定義 (b) である.

定義 26. B-spline 曲線 (b) ノット列の修正

B-spline 基底関数の定義式 (29) を次のように修正する.

$$B_{(i,0)}(t) = \begin{cases} 1 & (k_i \leq t < k_{i+1} < k_l) \\ 1 & (k_i \leq t \leq k_{i+1} = k_l) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (64)$$

次数 $p > 0$, ノット列 $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_l)$ に関して $n = l - p - 1, k_1 = \dots = k_{p+1}, k_{l-p} = \dots = k_l$ とする.

$B_{(i,p)}$ を \mathbf{k} から生成される修正後の B-spline 基底関数とする.

このとき, 制御点 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^{\tilde{d}}$ が与えられれば, B-spline 曲線は次で定義される.

$$\mathbf{p} : [k_1, k_l] \rightarrow \mathbb{R}^{\tilde{d}}; t \mapsto \sum_i B_{(i,p)}(t) \mathbf{a}_i \quad (65)$$

式 (64) による修正は 1 の分割のためである. この修正が無ければ, 1 の分割が充たされる区間は閉区間 $[k_1, k_l]$ ではなく $[k_1, k_l)$ になってしまう. 定義 (b) による B-spline 基底関数と B-spline 曲線の例を次の図 16 に示す.

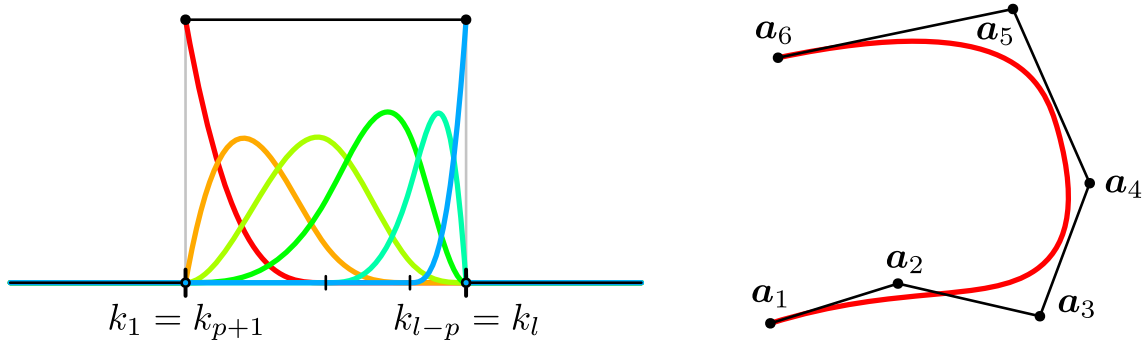


図 16 B-spline 曲線の例 (b)^{*30}

^{*30} <https://www.desmos.com/calculator/rnjiwt5jte>

パラメータ空間に同値関係を入れて閉曲線を構成する方法もある。これが次の定義である。

定義 27. B-spline 曲線 (c) 周期的条件

ノット列 $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_{n+1})$ を用意して $T = k_{n+1} - k_1 > 0$ とする。このノット列から $k_i = k_{i+n} - T = k_{i-n} + T$ によって可算個のノットを持つノット列 $\tilde{\mathbf{k}}$ を構成する。 $\tilde{\mathbf{k}}$ から生成される B-spline 基底関数を $\tilde{B}_{(i,p)}$ とする。ここで基底関数 $B_{(i,p)}$ を次で定義する。

$$B_{(i,p)}(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{B}_{(i+jn,p)}(t) \quad (66)$$

任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $B_{(i,p)}(t) = B_{(i,p)}(t + T)$ であるから、 $\mathbb{R}/T\mathbb{Z} (\simeq S^1)$ 上の関数 $[t] \mapsto B_{(i,p)}(t)$ は well-defined である。^{*31}

このとき、制御点 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^{\tilde{d}}$ が与えられれば、B-spline 閉曲線は次で定義される。

$$\mathbf{p} : \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^{\tilde{d}}; [t] \mapsto \sum_i B_{(i,p)}(t) \mathbf{a}_i \quad (67)$$

定義 (c) による B-spline 基底関数と B-spline 曲線の例を次の図 17 に示す。

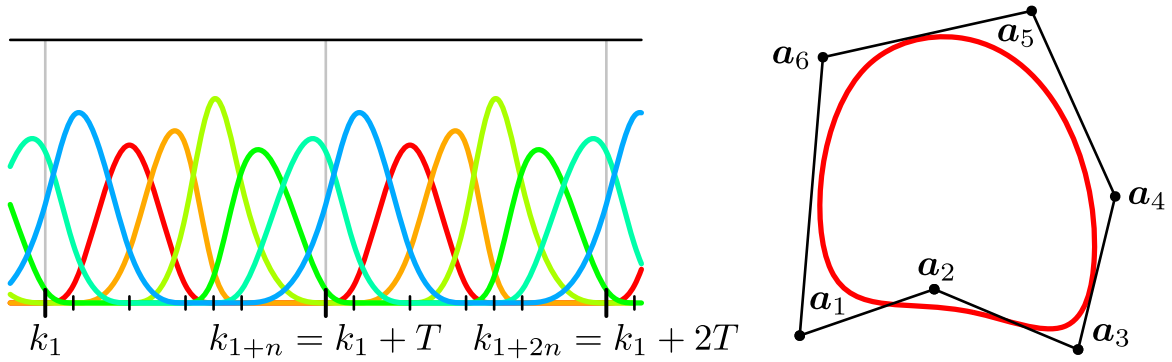


図 17 B-spline 曲線の例 (c)^{*32}

^{*31} $\text{supp}(\tilde{B}_{(i,p)})$ は局所有限な \mathbb{R} の被覆だから、 $j \in \mathbb{Z}$ に関する無限和は収束する。

^{*32} <https://www.desmos.com/calculator/pm7rb9zbew>

次の定理は B-spline 基底関数が Bernstein 基底関数の一般化である事を主張する.

定理 28. Bernstein 基底関数と B-spline 基底関数の関係

$B_{(i,j)}^{\text{Béz}}(t)$ を式 (1) で定義される j 次 Bernstein 基底関数, $B_{(i,j)}^{\text{B-sp}}(t)$ をノット列 $(k_1, \dots, k_{2p+2}) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1})$ から生成される B-spline 基底関数とする. このとき $t \in (0, 1)$ に対して

$$B_{(i,j)}^{\text{Béz}}(t) = B_{(i-j+p,j)}^{\text{B-sp}}(t) \quad (68)$$

が成立する. とくに

$$B_{(i,p)}^{\text{Béz}}(t) = B_{(i,p)}^{\text{B-sp}}(t) \quad (69)$$

である.

証明. 新たに基底関数を

$$\tilde{B}_{(i,j)} := B_{(i-j+p,j)}^{\text{B-sp}} \quad (70)$$

とおく. この基底関数について B-spline の漸化式による定義 (28) から

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{(i,j)} &= B_{(i-j+p,j)}^{\text{B-sp}} \\ &= (1-t)B_{(i-j+p,j-1)}^{\text{B-sp}} + tB_{(i-j+p+1,j-1)}^{\text{B-sp}} \\ &= (1-t)B_{((i-1)-(j-1)+p,j-1)}^{\text{B-sp}} + tB_{(i-(j-1)+p,j-1)}^{\text{B-sp}} \\ &= (1-t)\tilde{B}_{(i-1,j-1)} + t\tilde{B}_{(i,j-1)} \end{aligned} \quad (71)$$

であり, さらに $i \notin [0, j]_{\mathbb{Z}}$ に対して $B_{(i,j)}^{\text{Béz}} = \tilde{B}_{(i,j)} = 0$ で, $B_{(1,0)}^{\text{Béz}} = \tilde{B}_{(1,0)} = 1$ である. つまり, $\tilde{B}_{(i,j)}$ は定理 3 と同じ漸化式を満たし, $\tilde{B}_{(i,j)} = B_{(i,j)}^{\text{Béz}}$ である. 故に

$$B_{(i,j)}^{\text{Béz}}(t) = B_{(i-j+p,j)}^{\text{B-sp}}(t) \quad (72)$$

である. とくに, $j = p$ とおけば

$$B_{(i,p)}^{\text{Béz}}(t) = B_{(i,p)}^{\text{B-sp}}(t) \quad (73)$$

を得る.*33 □

*33 $B_{(i,p)}^{\text{B-sp}}$ と $B_{(i,j)}^{\text{Béz}}$ の関係は図 3 と図 11 を見比べれば分り易い.

定義 29. ノット列に関する記号

$\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ をノット列, $m \in \mathbb{N}$ とする.

$$k_i \in \mathbf{k} \stackrel{\text{def}}{\iff} (\text{ノット列 } \mathbf{k} \text{ がノット } k_i \text{ を含む}) \quad (74)$$

$$\mathbf{k} \subset \mathbf{k}' \stackrel{\text{def}}{\iff} (\mathbf{k}' \text{ が部分列として } \mathbf{k} \text{ を含む}) \quad (75)$$

$$\#\mathbf{k} := (\text{ノット列の要素の数}) \quad (76)$$

$$\mathbf{k}^* := (\mathbf{k} \text{ から重複するノットを除いて得られるノット列}) \quad (77)$$

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 := (\mathbf{k}_1 \text{ と } \mathbf{k}_2 \text{ のノットを合わせて昇順に並べ替えて得られるノット列}) \quad (78)$$

$$m\mathbf{k} := \underbrace{\mathbf{k} + \cdots + \mathbf{k}}_m \quad (79)$$

定理 30. ノット列の記号に関する諸性質

任意のノット列 $\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$ について次が成り立つ.

$$\mathbf{k} \subset \mathbf{k}, \quad (80)$$

$$\mathbf{k}_1 \subset \mathbf{k}_2 \text{ かつ } \mathbf{k}_2 \subset \mathbf{k}_3 \Rightarrow \mathbf{k}_1 \subset \mathbf{k}_3, \quad (81)$$

$$\mathbf{k}_1 \subset \mathbf{k}_2 \text{ かつ } \mathbf{k}_2 \subset \mathbf{k}_1 \Rightarrow \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2, \quad (82)$$

$$\mathbf{k}^* \subset \mathbf{k}, \quad (83)$$

$$\mathbf{k}_1 + (\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) = (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) + \mathbf{k}_3, \quad (84)$$

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_1, \quad (85)$$

$$\#(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) = \#\mathbf{k}_1 + \#\mathbf{k}_2, \quad (86)$$

$$\mathbf{k}_1 \subset \mathbf{k}_2 \Rightarrow \#\mathbf{k}_1 \leq \#\mathbf{k}_2 \quad (87)$$

証明. 初等的. □

定義 31. ノット列 $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_l)$ と次数 p から生成される区分多項式空間 $\mathcal{P}[p, \mathbf{k}]$

$$\mathcal{P}[p, \mathbf{k}] = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \left| \begin{array}{l} f|_{\mathbb{R} \setminus [k_1, k_l]} = 0, \\ \forall i \in [1, l-1]_{\mathbb{Z}}, \exists g \in \mathcal{P}[p], f|_{[k_i, k_{i+1})} = g|_{[k_i, k_{i+1})}, \\ \forall t \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, f|_{(t-\varepsilon, t+\varepsilon)} \in C^{p-n(t)} \end{array} \right. \right\} \quad (88)$$

ただし $\max_{t \in \mathbb{R}} n(t) \leq p+1$ とする.

つまり, $\mathcal{P}[p, \mathbf{k}]$ は p 次区分多項式の集合であり, 区分多項式は \mathbb{R} 上で C^{p-1} 級となるように繋いである. ただしノットが重なっている場合はその限りではなく, 重複度に依じてその点での滑らかさが下がっていく.

定理 32. 区分多項式空間の性質とその次元

$\mathcal{P}[p, \mathbf{k}]$ は $\#\mathbf{k} - p - 1$ 次元線形空間である.

証明. $\mathcal{P}[p, \mathbf{k}]$ が線形空間である事は直ぐに分かる. 問題は次元であり, 厳密な証明はまだ書けてない. あるいは定理 33 と同時に示すのが楽かな. □

定理 33. B-spline 基底関数の張る線形空間

$\{B_{(i,p)}\}$ ($i \in [1, \#\mathbf{k} - p - 1]_{\mathbb{Z}}$) は線形空間 $\mathcal{P}[p, \mathbf{k}]$ の基底である.

証明. 線形独立は明らか. 定理 32 の証明が埋まれば基底になることも示せる. □

定理 34. ノット列の包含関係と部分空間

$$\mathbf{k} \subset \mathbf{k}' \Rightarrow \mathcal{P}[p, \mathbf{k}] \subset \mathcal{P}[p, \mathbf{k}'] \quad (89)$$

証明. 定義 31 から明らか. □

注意. $p < p'$ なら $\mathcal{P}[p, \mathbf{k}]$ よりも $\mathcal{P}[p', \mathbf{k}]$ の方が多項式の次数に関して広いように思うが, 一般に

$$p < p' \not\Rightarrow \mathcal{P}[p, \mathbf{k}] \subset \mathcal{P}[p', \mathbf{k}] \quad (90)$$

である. これは滑らかさに関しての制限が入るためである.*34

上の注意のような, 基底関数の滑らかさに関する制約を回避するための定理が次である.

定理 35. 区分多項式の次数と部分空間

任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して

$$p' = p + m, \quad \mathbf{k}' = \mathbf{k} + m\mathbf{k}^* \Rightarrow \mathcal{P}[p, \mathbf{k}] \subset \mathcal{P}[p', \mathbf{k}'] \quad (91)$$

が成り立つ.

証明. 定義 31 から明らか. □

*34 そもそも定理 32 より $\dim(\mathcal{P}[p, \mathbf{k}]) > \dim(\mathcal{P}[p', \mathbf{k}])$ であるから包含関係が成立しない事は明らかである.

4 多重基底関数と多様体

これまでは 1 次元の曲線しか扱っていなかったが, これを d 次元の多様体^{*35}に拡張する.

定義 36. 多重基底関数

1 の分割を充たす基底関数の d 個からなる列 $B_{i^1}^{(o-1)} : I^1 \rightarrow \mathbb{R}, \dots, B_{i^d}^{(o-d)} : I^d \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられれば, 多重基底関数 $B_{i^1 \dots i^d}$ は次で定義される.

$$B_{i^1 \dots i^d} : I^1 \times \dots \times I^d \rightarrow \mathbb{R}; (t^1, \dots, t^d) \mapsto B_{i^1}^{(o-1)}(t^1) \dots B_{i^d}^{(o-d)}(t^d) \quad (92)$$

ただし添字について $i^1 \in [1, n^1]_{\mathbb{Z}}, \dots, i^d \in [1, n^d]_{\mathbb{Z}}$ とする.

曲線の場合と同様に, 次が成り立つ.

定理 37. 1 の分割 (多重基底関数)

多重基底関数 $B_{i^1 \dots i^d}$ について次が成り立つ.

$$\sum_{i^1, \dots, i^d} B_{i^1 \dots i^d} = 1 \quad 0 \leq B_{i^1 \dots i^d} \leq 1 \quad (93)$$

証明. 順に展開して

$$\sum_{i^1, \dots, i^d} B_{i^1 \dots i^d}(t^1, \dots, t^d) = \sum_{i^1} \dots \sum_{i^d} B_{i^1}^{(o-1)}(t^1) \dots B_{i^d}^{(o-d)}(t^d) = 1 \quad (94)$$

である. 不等式もこれまでと同様に示せる. □

定義 38. 多重基底関数から生成される多様体

多重基底関数 $B_{i^1 \dots i^d}$ とそれに対応する $n_1 \dots n_d$ 個の制御点 $\mathbf{a}_{i^1 \dots i^d} \in \mathbb{R}^{\tilde{d}}$ が与えられれば, d 次元多様体が次で定義される.

$$\mathbf{p} : I^1 \times \dots \times I^d; (t^1, \dots, t^d) \mapsto \sum_{i^1, \dots, i^d} B_{i^1 \dots i^d}(t^1, \dots, t^d) \mathbf{a}_{i^1 \dots i^d} \quad (95)$$

注意. 定理 9, 定理 10 は曲線 ($d = 1$) について述べたものであったが, これらの性質は一般の $d \in \mathbb{N}$ まで拡張できる.

^{*35} 多様体と言っても, ここでは単なる曲線や曲面の一般化程度の意味である. 座標関数が入る事は何も保証していない (はめ込みかも知れないし, そもそも滑らかさの保証も無い) ので, 厳密な事は気にしていない.

基底関数が全て Bernstein 多項式から構成されるような形状を Bézier 多様体と呼ぶ。次の図 18 は $d = \tilde{d} = 2$ での 1×2 次の Bézier 曲面の例である。

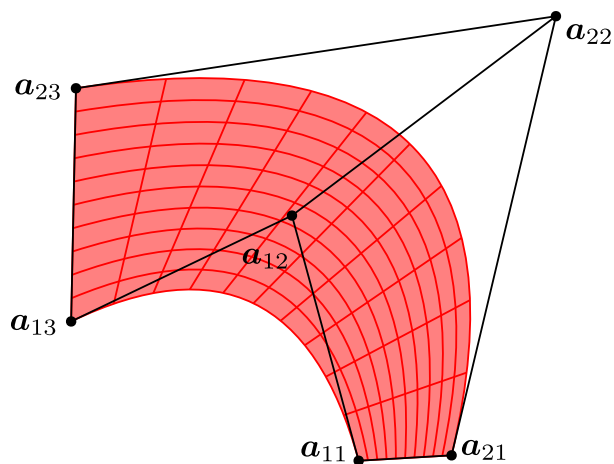


図 18 \mathbb{R}^2 に埋め込まれた Bézier 曲面^{*36}

次の図 19 は $d = 2, \tilde{d} = 3$ での 3×3 次の Bézier 曲面の例である。

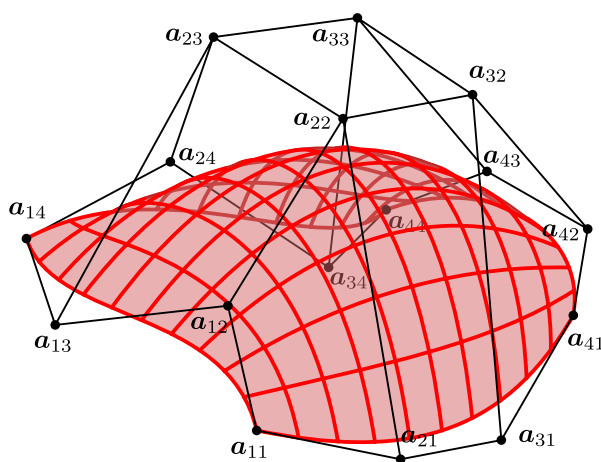


図 19 \mathbb{R}^3 に埋め込まれた Bézier 曲面

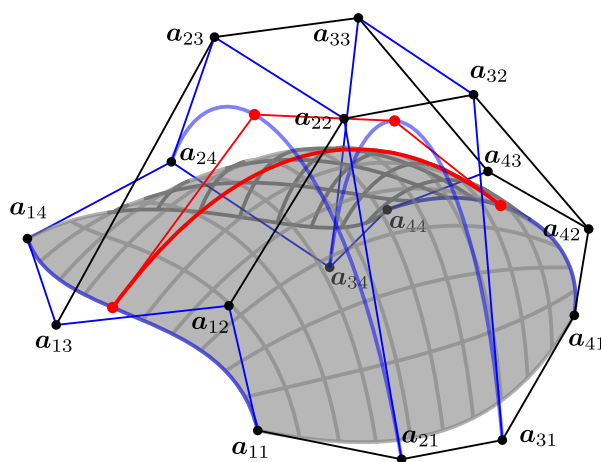


図 20 BézierB 曲線の軌跡としての Bézier 曲面

とくに, Bézier 曲面は制御点が Bézier 曲線を動くような Bézier 曲線の軌跡として実現できる。(図 20) これは簡単な計算で確かめられる。

^{*36} <https://www.desmos.com/calculator/2vy911g23r>

5 NURBS 多様体

NURBS とは, Non-Uniform Rational B-spline の略である. Non-Uniform はノット列が等間隔とは限らない事を, Rational は有理基底関数をそれぞれ意味している. B-spline は先に説明した通りである. 以上を組み合わせたものが NURBS であるから, この節では特に新しい概念は登場しない. 既出の定義/定理を用いて NURBS 基底関数, NURBS 多様体の構成を行う.

定義 39. NURBS 基底関数

次元 d , ノット列 $\mathbf{k}^1, \dots, \mathbf{k}^d$, 次数 p^1, \dots, p^d , 重み $w_{i^1 \dots i^d}$ が定まれば, NURBS 基底関数は

$$B_{i^1 \dots i^d} : I^1 \times \dots \times I^d \rightarrow \mathbb{R}; (t^1, \dots, t^d) \mapsto \frac{B_{(i^1, p^1)}(t^1) \cdots B_{(i^d, p^d)}(t^d) w_{i^1 \dots i^d}}{\sum_{j^1, \dots, j^d} B_{(j^1, p^1)}(t^1) \cdots B_{(j^d, p^d)}(t^d) w_{j^1 \dots j^d}} \quad (96)$$

で定義される. ただし, I^i は各次元の方向での B-spline 基底関数の定義域で, 定義 25, 定義 26, 定義 27 の何れかによって定義される.

重みの決定には, 各 B-spline 基底関数に対する重みのテンソル積のように構成する場合^{*37}も多いが, より一般のためにこのような w_{ijk} の形を採用している. 何より定義 40 での制御点 $\mathbf{a}_{i^1 \dots i^d}$ と重み $w_{i^1 \dots i^d}$ が一対一に対応している方が直感的に扱いやすい.

定義 40. NURBS 多様体

NURBS 基底関数 $B_{i^1 \dots i^d}$, 制御点 $\mathbf{a}_{i^1 \dots i^d} \in \mathbb{R}^{\tilde{d}}$ が定まれば, NURBS 多様体は

$$\mathbf{p} : I^1 \times \dots \times I^d \rightarrow \mathbb{R}^{\tilde{d}}; (t^1, \dots, t^d) \mapsto \sum_{i^1, \dots, i^d} B_{i^1 \dots i^d}(t^1, \dots, t^d) \mathbf{a}_{i^1 \dots i^d} \quad (97)$$

で定義される.

次の図 21 は $d = \tilde{d} = 2, p^1 = 3, p^2 = 2, w_{ij} = 1$ での例である.

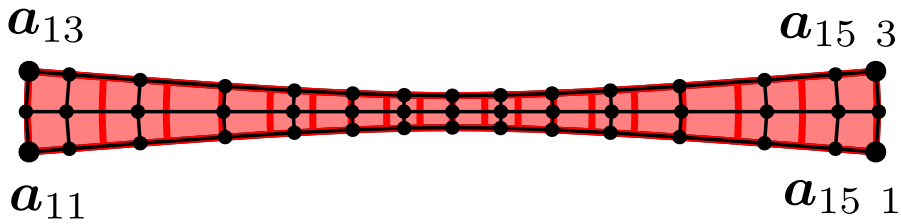


図 21 2次元 NURBS 多様体

^{*37} つまり例えば, $w_{i^1 \dots i^d} = w_{i^1} \cdots w_{i^d}$ という具合にである.

表紙の図は $d = \tilde{d} = 3, p^1 = 1, p^2 = 2, p^3 = 2, \mathbf{k}^1 = (0, 0, 1, 1), \mathbf{k}^2 = (0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4), \mathbf{k}^3 = (0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4)$ とした例である。制御点の配置は図 22 の通りで、重みは紙面の都合で一部のみ書き込んだ。

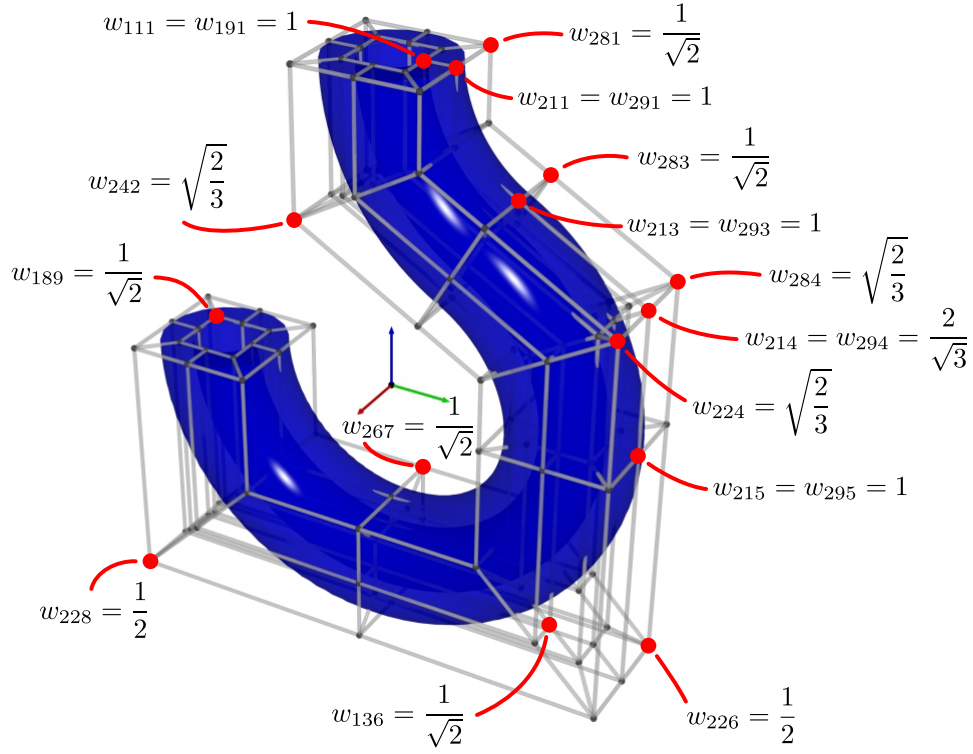


図 22 3次元 NURBS 多様体

NURBS 多様体は 有理化・区分化・多次元化 の拡張によってその柔軟性を獲得したが、それでもまだ複雑な形状には対応できない場合も多い。その場合は、有限個の NURBS 多様体を張り合わせて形状を構成する。この手法は多重パッチと呼ばれる。次の図 23 は多重パッチの概略図である。^{*38}

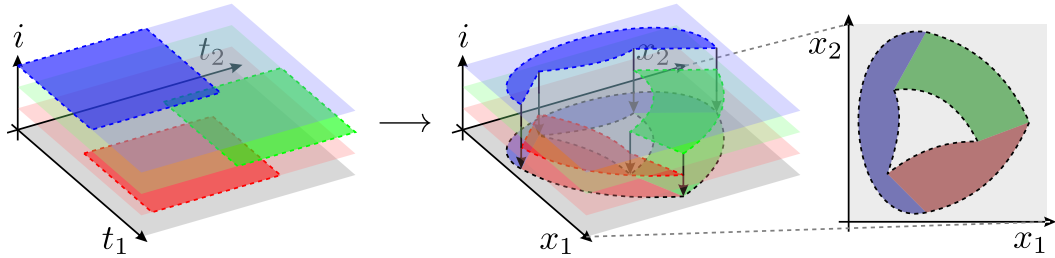


図 23 多重パッチ

^{*38} 連結な 1 次元多様体は \mathbb{R} と S^1 に分類でき、それぞれに対応するように定義 25, 26, 27 が構成できた。しかし 2 次元以上だと分類が複雑になるため、このような多重パッチが必要となるのである。

6 NURBS 多様体の細分と T-spline

Bézier 曲線では, 制御点を適切に配置すれば任意の 2 次 Bézier 曲線を 3 次 Bézier 曲線で表すことができる.

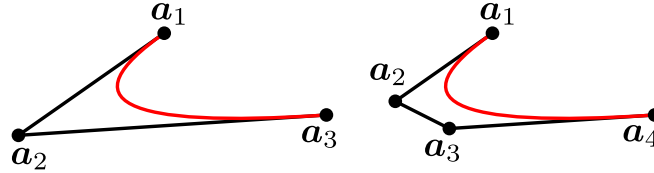


図 24 2 次 Bézier 曲線と 3 次 Bézier 曲線への変換

これは多項式空間の包含関係 (定理 6) が本質的であって, 当然のように任意の 3 次 Bézier 曲線を 2 次 Bézier 曲線で表すことはできない. NURBS 多様体でも区分多項式空間 $\mathcal{P}[p, \mathbf{k}]$ の包含関係によって制御点を増やすことが出来る. この操作は細分^{*39}と呼ばれ, とくに定理 34 によるものが h -細分, 定理 35 によるものが p -細分である.

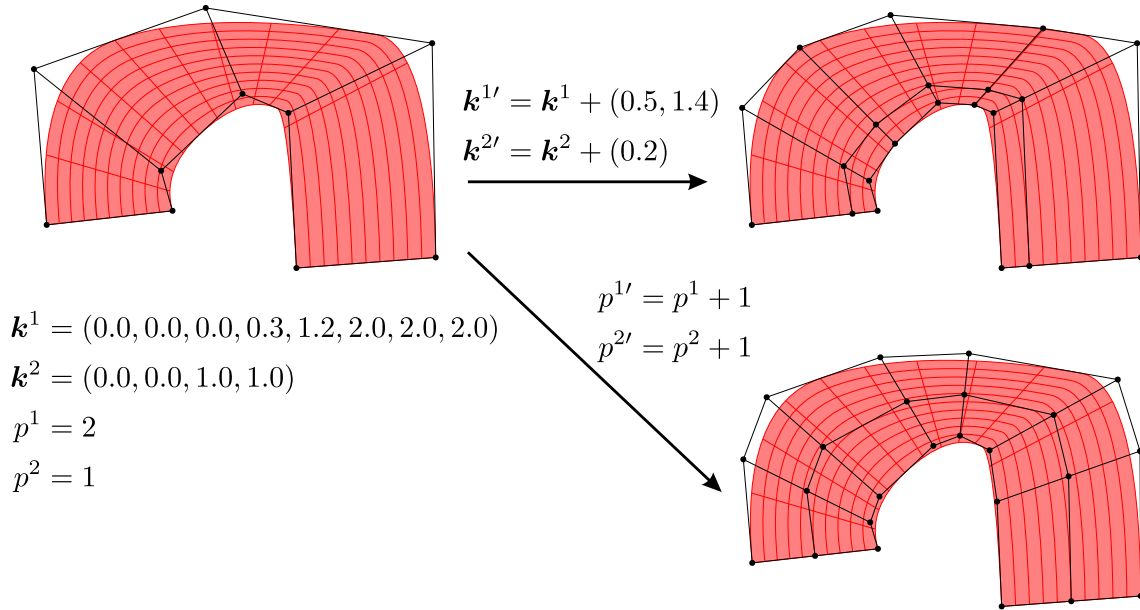


図 25 NURBS 多様体の細分

細分前の基底関数, 制御点を B_I, \mathbf{a}_I , 細分後の基底関数, 制御点を B'_I, \mathbf{a}'_I とする. 細分後の制御点などを求めるには, 次が充たされることを考えれば良い.

$$\sum_I B_I \mathbf{a}_I = \sum_J B'_J \mathbf{a}'_J \quad (98)$$

^{*39} 細分と書いたが, 定着した日本語は無い. 英語では refinement と呼ばれる.

具体的に展開すれば

$$\sum_I B_I \mathbf{a}_I = \sum_{i^1, \dots, i^d} \frac{B_{(i^1, p^1)}(t^1) \cdots B_{(i^d, p^d)}(t^d) w_{i^1 \dots i^d}}{\sum_{j^1, \dots, j^d} B_{(j^1, p^1)}(t^1) \cdots B_{(j^d, p^d)}(t^d) w_{j^1 \dots j^d}} \mathbf{a}_{i^1 \dots i^d} \quad (99)$$

$$\sum_I B'_I \mathbf{a}'_I = \sum_{i^1, \dots, i^d} \frac{B'_{(i^1, p^1)}(t^1) \cdots B'_{(i^d, p^d)}(t^d) w'_{i^1 \dots i^d}}{\sum_{j^1, \dots, j^d} B'_{(j^1, p^1)}(t^1) \cdots B'_{(j^d, p^d)}(t^d) w'_{j^1 \dots j^d}} \mathbf{a}'_{i^1 \dots i^d} \quad (100)$$

であり、まずは分母の一致のために次を充たす w'_I を決定する。

$$\sum_{i^1, \dots, i^d} B_{(i^1, p^1)}(t^1) \cdots B_{(i^d, p^d)}(t^d) w_{i^1 \dots i^d} = \sum_{j^1, \dots, j^d} B'_{(j^1, p^1)}(t^1) \cdots B'_{(j^d, p^d)}(t^d) w'_{j^1 \dots j^d} \quad (101)$$

細分の条件から、 $B_{(i^s, p^s)} = \sum_{j^s} A_{i^s j^s}^s B'_{(j^s, p^s)}$ を充たす行列 $A_{i^s j^s}^s$ が存在するから

$$w'_{j^1 \dots j^d} = \sum_{i^1, \dots, i^d} A_{i^1 j^1}^1 \cdots A_{i^d j^d}^d w_{i^1 \dots i^d} \quad (102)$$

とすれば良い。続いて分子の一致のために次を充たす \mathbf{a}'_I を決定する。

$$\sum_{i^1, \dots, i^d} B_{(i^1, p^1)}(t^1) \cdots B_{(i^d, p^d)}(t^d) w_{i^1 \dots i^d} \mathbf{a}_{i^1 \dots i^d} = \sum_{j^1, \dots, j^d} B'_{(j^1, p^1)}(t^1) \cdots B'_{(j^d, p^d)}(t^d) w'_{j^1 \dots j^d} \mathbf{a}'_{j^1 \dots j^d} \quad (103)$$

ここでも w'_I と同様に考えて

$$\mathbf{a}'_{j^1 \dots j^d} = \frac{\sum_{i^1, \dots, i^d} A_{i^1 j^1}^1 \cdots A_{i^d j^d}^d w_{i^1 \dots i^d} \mathbf{a}_{i^1 \dots i^d}}{w'_{j^1 \dots j^d}} \quad (104)$$

とすれば良い。

基本的には上の通りにすれば細分が可能であるが、問題として $A_{i j}^s$ の計算が残っている。このために、より一般に関数 $f \in \mathcal{P}[p, \mathbf{k}]$ を基底 $B_{(i, p)}$ の線型結合 $f = \sum_i B_{(i, p)} a_i$ で表す手法を構成しよう。これは関数の線型結合だから、 a_i の決定のためには適当に n 個の点 κ_j を取って次が満たされるようにすれば良い。

$$f(\kappa_j) = \sum_i B_{(i, p)}(\kappa_j) a_i \quad (105)$$

あとはこの連立方程式を解けば $a_i \in \mathbb{R}$ が求められる。少し問題になるのが κ_j の決定であり、雑に選べば行列 $B_{(i, p)}(\kappa_j)$ は非可逆になってしまう。当然 κ_j には任意性があるが、次のようにして選べば行列 $B_{(i, p)}(\kappa_j)$ を可逆に構成することが出来る。

$$\kappa_i = \frac{1}{2} \left(\frac{i}{n+1} k_i + \frac{n-i+1}{n+1} k_{i+p+1} \right) \quad (106)$$

天下り的になってしまったが、要するにこれは区間 $\text{supp}(B_{(i, p)})$ を $n+1$ 等分してその点を順に選んでいるだけである。式 (106) で決定した行列 $B_{(i, p)}(\kappa_j)$ が可逆になる事は次の定理 41 から保証される。

定理 41. 基底関数の各点での独立性

次数 $p > 0$, ノット列 $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_l)$ から生成される B-spline 基底関数を B_i とし、 $n = \#\mathbf{k} - p - 1$ とおく。このとき、 $(B_1(\kappa_a), \dots, B_n(\kappa_a)), (B_1(\kappa_b), \dots, B_n(\kappa_b))$ は \mathbb{R}^n 上で線形独立。

証明. 線形従属と仮定すれば, B-spline 基底関数の 1 の分割の性質 (定理 24) より $B_i(\kappa_a) = B_i(\kappa_b)$ である. しかしこれは基底関数の極大点一意性 (定理 23) に矛盾. よって $(B_1(\kappa_a), \dots, B_n(\kappa_a)), (B_1(\kappa_b), \dots, B_n(\kappa_b))$ は \mathbb{R}^n 上で線形独立である. \square

さて, NURBS の h -細分は局所的に形状を変化させるための操作である. つまり, ノット列の集まっている所では制御点の数が増え, その付近での変形の自由度が増えることを利用するのである. 次の図 26 は Ω_{22} 内のノットを増やした際の模式図である.

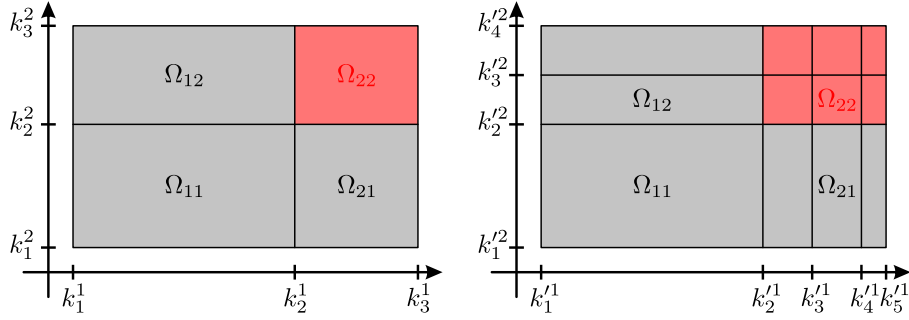


図 26 h -細分の模式図

Ω_{22} の上でのノットの密度を上げたかったのだが, Ω_{12}, Ω_{21} にも余計にノット列が挿入されている. これを解決するための手法が T-spline^{*40}である. その概略図が次の図 27 である.

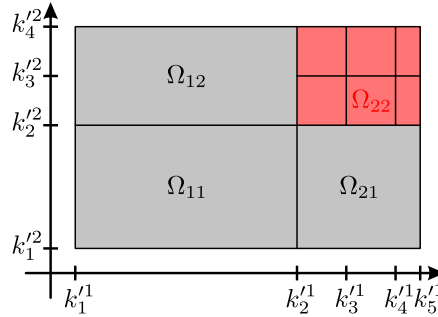


図 27 T-spline の座標空間の模式図

つまり, $\Omega_{22} \subset \text{supp}(B_I)$ を満たすような基底関数 B_I に関する制御点 \mathbf{a}_I だけを細分後に動かすこととし, それ以外は動かさないように決めておくのである. このようにして Ω_{12}, Ω_{22} 上での T-spline のパラメータ付けは細分後に変化しないようにでき, この領域に対応する制御点は細分前のものとする事で, 制御点を削減することが出来るのである. T-spline と NURBS の差分は単にデータの取り扱い方であって, そこには数学的なギャップは殆ど存在しない.^{*41}

^{*40} T-spline ではパラメータ空間の分割や制御点の結ぶグラフに T 字形状が現れる. これが T-spline と呼ばれる理由である.

^{*41} 更に言えば, T-spline で表現可能な形状は NURBS でも表現可能であって, 逆に NURBS で表現可能な形状は T-spline でも表現可能である.