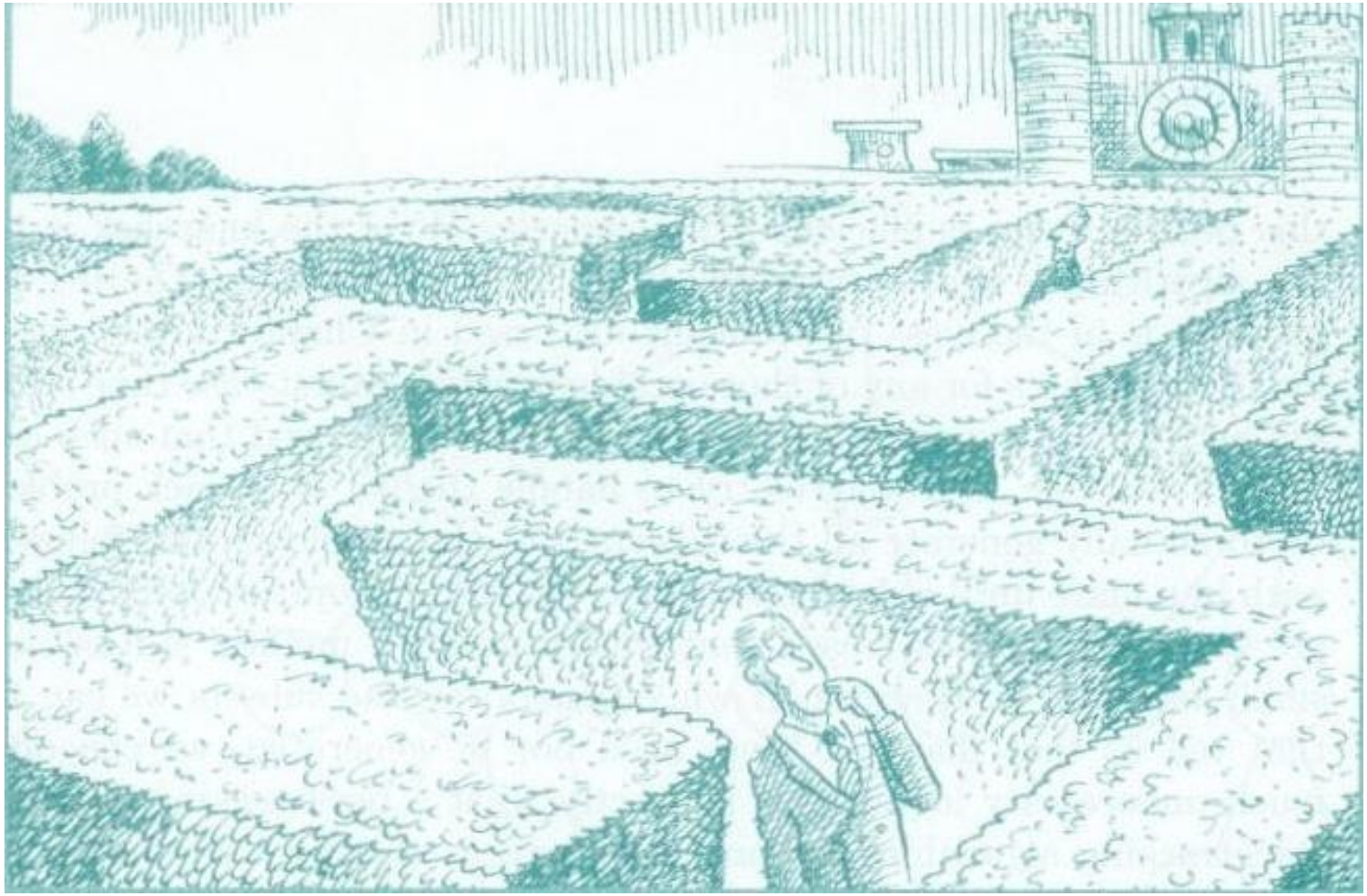
Chap 5. Backtracking

1. The Backtracking Technique
2. The n-Queens Problems
3. Using a Monte Carlo Algorithm
4. The Sum-of-Subsets Problem
5. Graph Coloring
6. The Hamiltonian Circuits Problem
7. The 0-1 Knapsack Problem

Backtracking



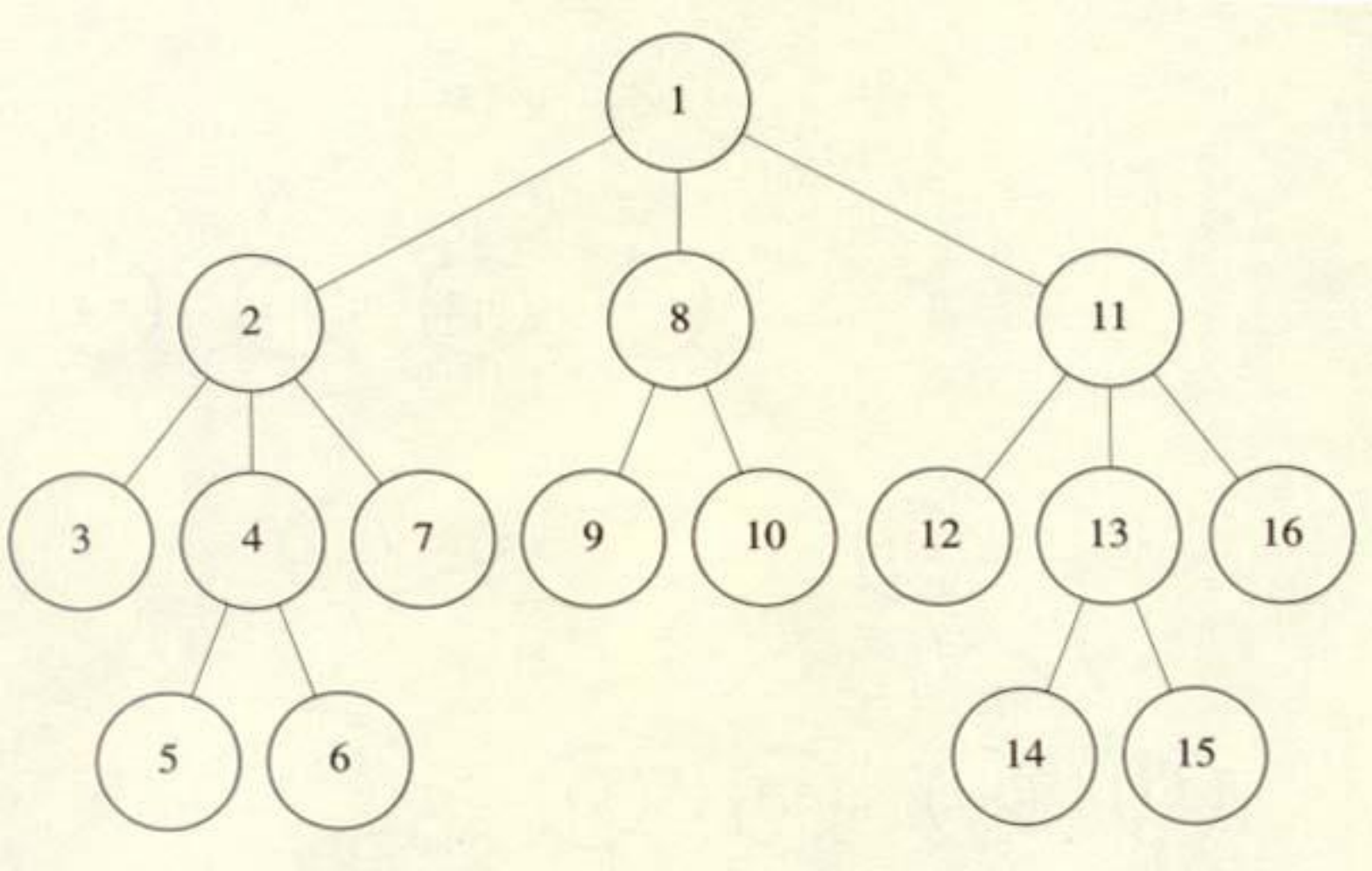
Depth-First Search (깊이우선검색)

- 뿌리노드(root)가 되는 노드(node)를 먼저 방문한 뒤, 그 노드의 모든 후손노드(descendant)들을 차례로 (보통 왼쪽에서 오른쪽으로) 방문한다.
  (= preorder tree traversal)

```
void depth_first_tree_search (node v) {
        node u;

        visit v;
        for (each child u of v)
            depth_first_tree_search(u)
}
```

Depth-First Search



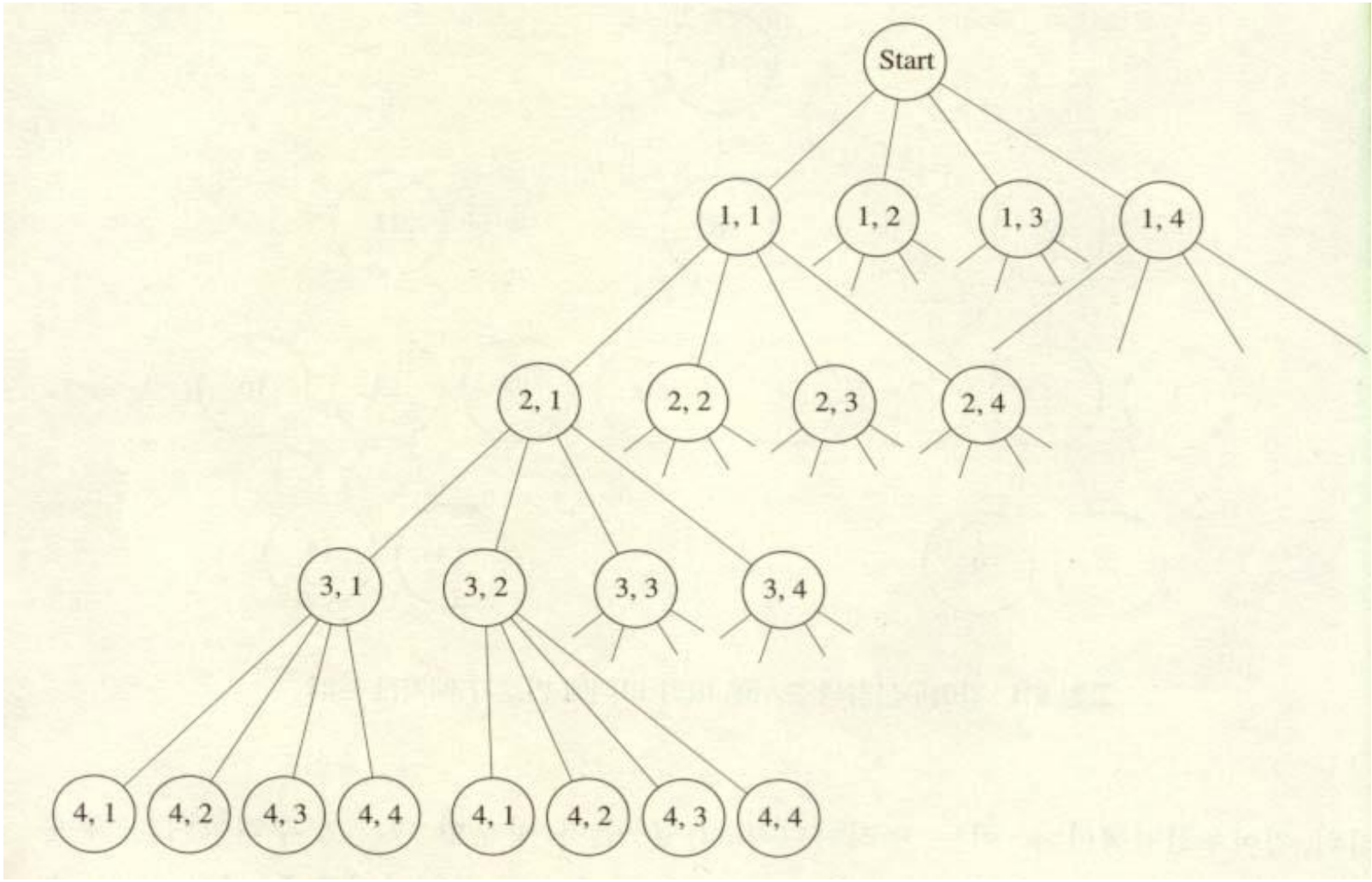
4-Queens Problem

- 4-Queens Problem
  - 4(=n)개의 Queen을 서로 상대방을 위협하지 않도록 4×4 서양장기(chess)판에 위치시키는 문제이다.
  - 서로 상대방을 위협하지 않기 위해서는 같은 행이나, 같은 열이나, 같은 대각선 상에 위치하지 않아야 한다.

  - 무작정 알고리즘
    - 각 Queen을 각각 다른 행에 할당한 후에, 어떤 열에 위치하면 해답은 얻을 수 있는지를 차례대로 점검해 보면 된다.
    - 이때, 각 Queen은 4개의 열 중에서 한 열에 위치할 수 있기 때문에, 해답을 얻기 위해서 점검해 보아야 하는 모든 경우의 수는 $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$가지가 된다.

4-Queens Problem

- 4-Queens 문제의 상태공간트리



4-Queens Problem

- State Space Tree (상태 공간 트리)
  - 뿌리노드에서 잎노드(leaf)까지의 경로가 해답후보(candidate solution)가 되는데, 깊이우선검색을 하여 그 해답후보 중에서 해답을 찾을 수 있다.
  - 이 Tree를 State Space Tree (상태공간트리)라고 한다.
  - 그러나 이 방법을 사용하면 해답이 될 가능성이 전혀 없는 노드의 후손노드(descendant)들도 모두 검색해야 하므로 비효율적이다.

Back Tracking

- 정의: **promising**
  - 전혀 해답이 나올 가능성이 없는 노드는 유망하지 않다 (non-promising)고 하고,
  - 그렇지 않으면 유망하다(promising)고 한다.

- 되추적이란?
  - 어떤 노드의 유망성을 점검한 후, 유망하지 않다고 판정되면 그 노드의 부모노드(parent)로 돌아가서("backtrack") 다음 후손노드에 대한 검색을 계속 진행하는 과정이다.

Back Tracking

- 되추적 알고리즘의 개념
  - 되추적 알고리즘은 상태공간트리에서 깊이우선검색을 실시하는데,
  - 유망하지 않은 노드들은 가지쳐서(pruning) 검색을 하지 않으며,
  - 유망한 노드에 대해서만 그 노드의 자식노드(children)를 검색한다.

- 진행 절차
  1. 상태공간트리의 깊이우선검색을 실시한다.
  2. 각 노드가 유망한지를 점검한다.
  3. 만일 그 노드가 유망하지 않으면,
     그 노드의 부모노드로 돌아가서 검색을 계속한다.

Back Tracking

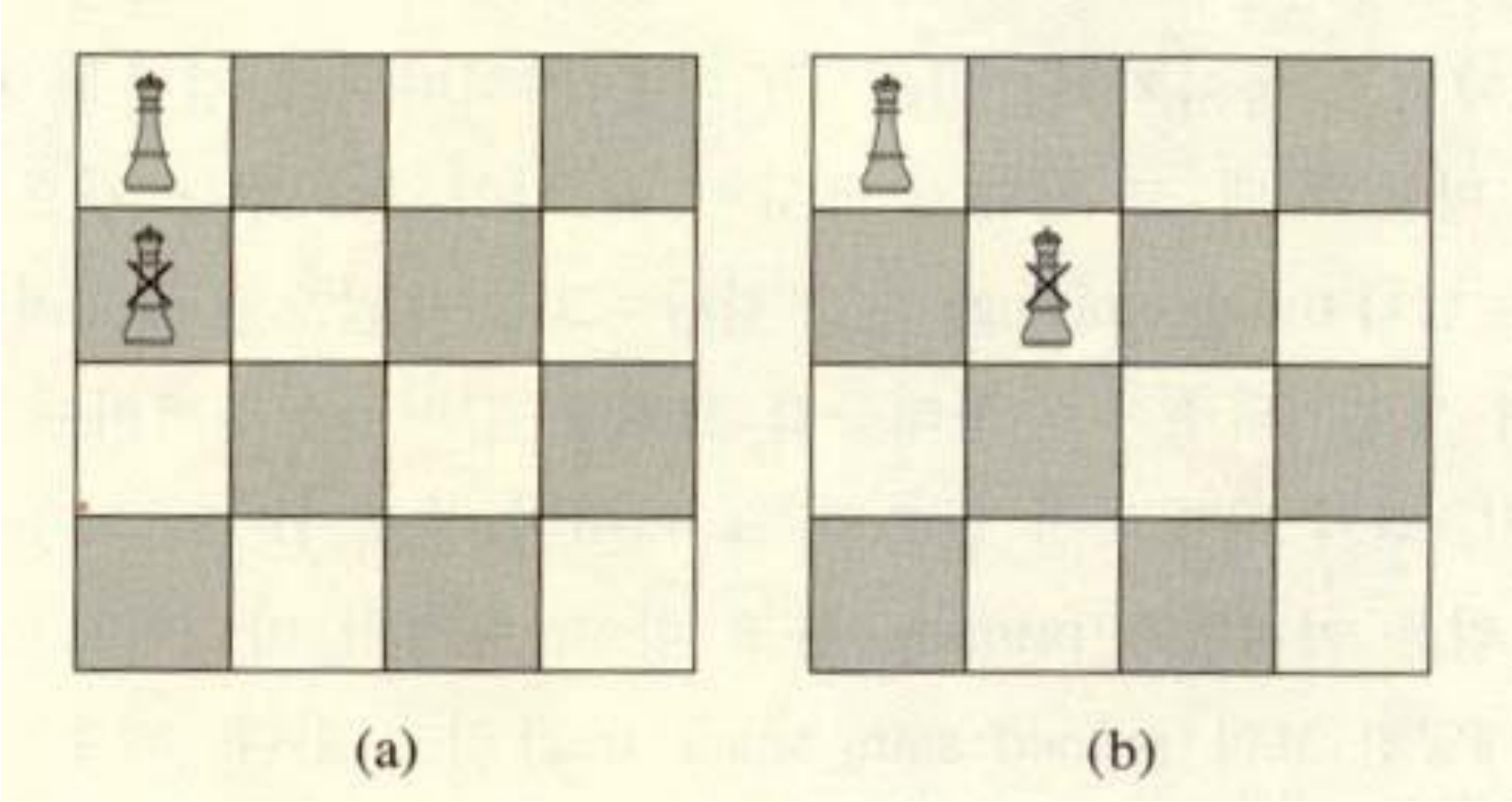
- 일반 되추적 알고리즘:

```
void checknode (node v) {
        node u;

        if (promising(v))
            if (there is a solution at v)
                    write the solution;
            else
                    for (each child u of v)
                            checknode(u);
}
```

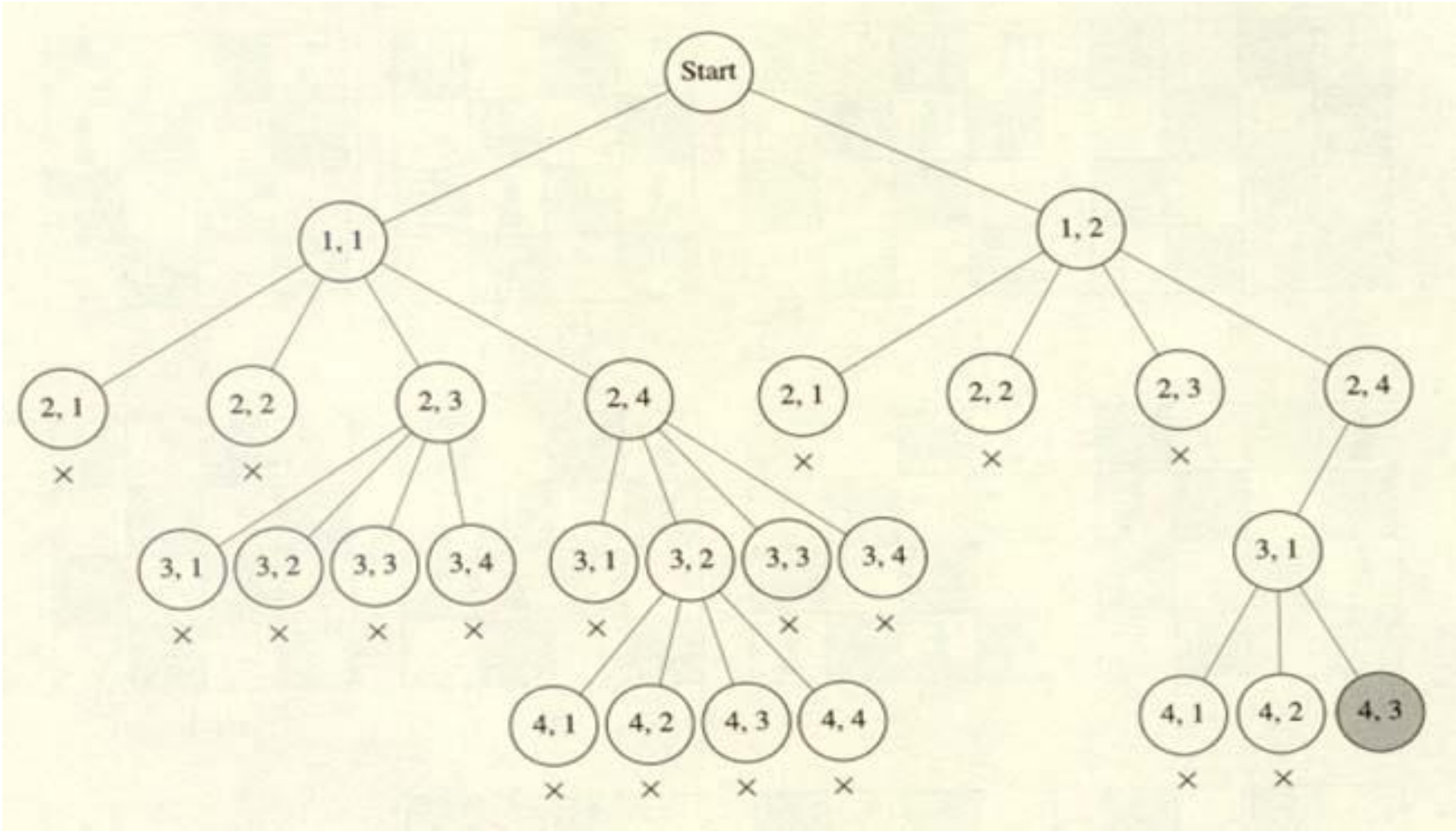
- See Example 5.1 (next 3 slides)

Back Tracking

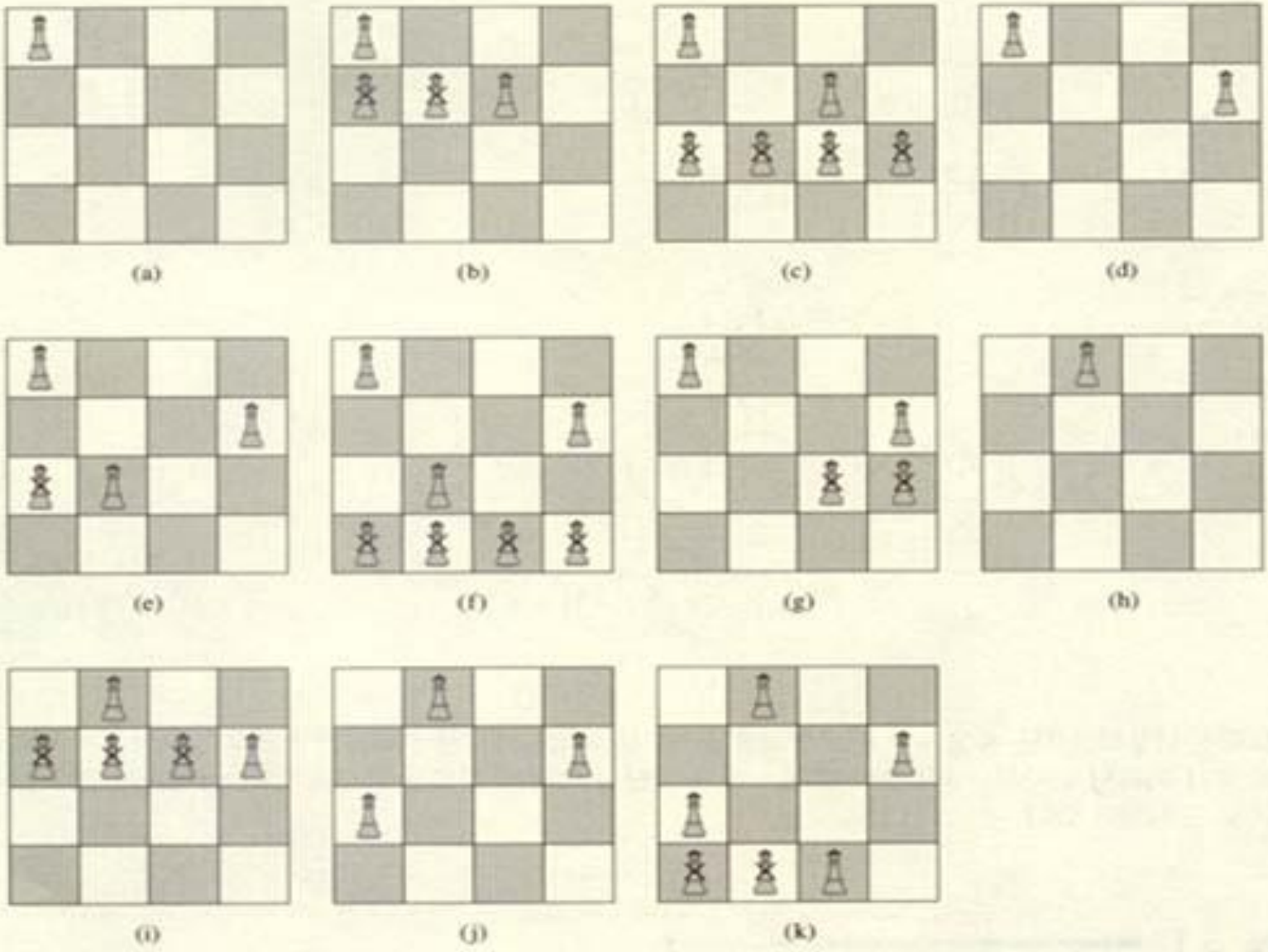


Back Tracking

- 4-Queens 문제의 상태 공간 트리 (**되추적**)



Back Tracking



Back Tracking

- 깊이우선검색 vs 되추적
  - 검색하는 노드 개수의 비교
    - 순수한 깊이우선검색 = 155 노드
    - 되추적 = 27 노드

Back Tracking

```
void expand (node v) {
    node u;
    for (each child u of v)
        if (promising(u))
            if (there is a solution at u)
                write the solution;
            else
                expand(u);
}
```

- 개선된 되추적 알고리즘(일반 알고리즘(10쪽)과 비교)
  - 유망성 여부의 점검을 실시하고 나서 stack에 넣는 방법
    - 일반 방법은 일단 stack에 넣고 나서 나중에 유명성 여부 검사 .
  - 그러나 일반 알고리즘이 이해하기는 더 쉽고,
    일반 알고리즘을 개량된 알고리즘으로 변환하기는 간단하므로,
    앞으로 이 강의에서의 모든 되추적 알고리즘은
    일반 알고리즘과 같은 형태로 표현

n-Queens Problem

- ***n*-Queens problem**
  - n개의 Queen을 서로 상대방을 위협하지 않도록 $n \times n$ 서양장기(chess) 판에 위치시키는 문제이다.
    서로 상대방을 위협하지 않기 위해서는 같은 행이나, 같은 열이나, 같은 대각선 상에 위치하지 않아야 한다.

  - ***n*-Queens 문제의 되추적 알고리즘**
    - 4-Queens 문제를 *n*-Queens 문제로 확장시키면 된다.

n-Queens Problem

- Promising Function
  - must check two queens are in the same column or diagonal
  - col(i) : the column number where the queens in the i-th row is located.
  - How to check whether the queen in k-th row is in the same column?
    - If (col(i) == col(k)) nonpromising;
  - How to check whether the queen in k-th row is in the same diagonal?
    - If (abs(col(i) - col(k)) == abs(i - k)) nonpromising;
    - Ex.[Ref. Figure 5.6]
      - abs(col(6)-col(3)) = abs(4-1) = 3 == abs(6-3) => nonpromising
      - abs(col(6)-col(2)) = abs(4-8) = 4 == abs(6-2) => nonpromising

n-Queens Problem

- Algorithm 5.1 (I)
  - Problem : Position *n* queens on a chessboard so that no two are in the same row, column, or diagonal.
  - Inputs : *n*
  - Outputs : The position number of each queen can be placed on an *n***n* chessboard

```
void queens (index i) {
    index j;
    if (promising (i))
        if (i == n)  cout << col[1] through col[n];
        else
            for (j=1; j<=n; j++) {
                col[i+1] = j;
                queens(i+1);
            }
}
```

n-Queens Problem

```
bool promising (index i) {
        index k;
        bool switch;

        k = 1;
        switch = TRUE;
        while (k<i && switch) {
              if (col[i] == col[k] || abs(col[i] – col[k]) == abs(i-k))
                    switch = FALSE;
              k++;
        }
        return switch;
}

queens(0);
```

n-Queens Problem

- n-Queens 문제의 분석 I
  - 상태공간트리 전체에 있는 노드 (promising test)의 수를 구함으로서, 가지 친 상태공간트리의 노드의 개수의 상한을 구한다.
  - 깊이가 i인 노드의 개수는 n^i개 이고, 이 트리의 깊이는 n이므로, 노드의 총 개수는 상한(upper bound)은:

$$1+n+n^2+n^3+\cdots+n^n=\frac{n^{n+1}-1}{n-1}$$

  - 따라서 $n=8$일 때, $\frac{8^9-1}{8-1}=19{,}173{,}961$
  - 그러나 이 분석은 별 가치가 없다.
    왜냐하면 되추적함으로서 점검하는 노드 수를 얼마나 줄였는지 상한값을 구해서는 전혀 알 수 없기 때문이다.

n-Queens Problem

- *n*-Queens 문제의 분석 II
  - 유망한 노드만 세어서 상한을 구한다.
    이 값을 구하기 위해서는 어떤 두 개의 Queen이
    같은 열(column)에 위치할 수 없다는 사실을 이용하면 된다.

  - 예를 들어 $n = 8$일 경우를 생각해 보자.
    첫번째 Queen은 어떤 열에도 위치시킬 수 있고,
    두 번째는 기껏해야 남은 7열 중에서만 위치시킬 수 있고,
    세 번째는 남은 6열 중에서 위치시킬 수 있다.
    이런 식으로 계속했을 경우 노드의 수는
    $1 + 8 + 8 \times 7 + 8 \times 7 \times 6 + \ldots + 8! = 109{,}601$가 된다.

    이 결과를 일반화하면 유망한 노드의 수는

    $$1 + n + n(n-1) + n(n-1)(n-2) + \cdots + n!$$

    을 넘지 않는다.

n-Queens Problem

- 사색
  - 위 2가지 분석 방법은 알고리즘의 복잡도를 정확히 얘기해주지 못하고 있다.
  - 왜냐하면:
    - 대각선을 점검하는 경우를 고려하지 않았다.
      따라서 실제 유망한 노드의 수는 훨씬 더 작을 수 있다.
    - 유망하지 않은 노드를 포함하고 있는데,
      실제로 해석의 결과에 포함된 노드 중에서
      유망하지 않은 노드가 훨씬 더 많을 수 있다.

n-Queens Problem

- *n*-Queens 문제의 분석 III
  - 유망한 노드의 개수를 정확하게 구하기 위한 유일한 방법은 실제로 알고리즘을 수행하여 구축된 상태공간트리의 노드의 개수를 세어보는 수 밖에 없다.
  - 그러나 이 방법은 진정한 분석 방법이 될 수 없다. 왜냐하면 분석은 알고리즘을 실제로 수행하지 않고 이루어져야 하기 때문이다.

n-Queens Problem

- 알고리즘의 수행시간 비교

n	알고리즘 1†로 검사한 마디의 개수	알고리즘 2‡로 검사한 해답후보의 개수	되추적으로 검사한 마디의 개수	되추적으로 유망함을 알아낸 마디의 개수
4	341	24	61	17
8	19,173,961	40,320	15,721	2057
12	9.73×10^{12}	4.79×10^{8}	1.01×10^{7}	8.56×10^{5}
14	1.20×10^{16}	8.72×10^{10}	3.78×10^{8}	2.74×10^{7}

* 해답을 모두 찾는 데 필요한 검사횟수를 나타냄.
† 알고리즘 1은 되추적 없이 상태공간 트리를 깊이우선 검색함.
‡ 알고리즘 2는 각 여왕말을 다른 행과 열에 위치하는 $n!$개의 해답후보를 생성함.

A Monte Carlo Algorithm

- Monte Carlo 기법을 사용한 백트랙킹 알고리즘의 수행시간 추정
  - Monte Carlo estimates the expected value of a random variable, defined on a sample space, from its average value on a random sample of the sample space
  - 이 기법을 적용하기 위해서는 다음 두 조건을 반드시 만족하여야 한다.
    - 상태공간트리에서 같은 수준(same level)에 있는 모든 노드에서 같은 유망함수를 사용해야 한다.
    - 상태 공간트리에서 같은 수준(same level) 에 있는 모든 노드들은 같은 수의 자식노드들을 가지고 있어야 한다.
  - *n*-Queens 문제는 이 두 조건을 만족한다.

A Monte Carlo Algorithm

- Monte Carlo 기법을 사용한 백트랙킹 알고리즘의 수행시간 추정 방법

  1. 뿌리노드의 유망한 자식노드의 개수를 m_0이라고 한다.
  2. 상태공간트리의 수준 1에서 유망한 노드 하나를 무작위로 정하고, 그 노드의 유망한 자식노드의 개수를 m_1이라고 한다.
  3. 위에서 정한 노드의 유망한 노드 하나를 다시 무작위로 정하고, 그 노드의 유망한 자식노드의 개수를 m_2라고 한다.
  4. 더 이상 유망한 자식노드가 없을 때까지 이 과정을 반복한다.

- 되추적 알고리즘에 의해서 점검한 노드의 총 개수의 추정치
  - m_i는 수준 i에 있는 노드의 유망한 자식노드의 개수의 평균의 추정치
  - t_i는 수준 i에 있는 한 노드의 자식노드의 총 개수
  - 따라서 노드의 총 개수의 추정치는

$$1+t_0+m_0t_1+m_0m_1t_2+\cdots m_0m_1\cdots m_{i-1}t_i+\cdots$$

A Monte Carlo Algorithm

- Algorithm 5.2
  - Problem : Monte-Carlo 알고리즘을 사용하여,
    되추적 알고리즘의 효율성을 평가하라.
  - Inputs : 되추적 알고리즘이 해결하여야 할 문제의 예시
  - Outputs : 주어진 예시에 대한 모든 해를 찾기 위하여 주어진
    알고리즘이 검사해야 하는 노드의 수

A Monte Carlo Algorithm

```
int estimate() {
    node v;
    int m, mprod, t, numnodes;

    v = root of state space tree;
    numnodes = 1;
    m=1;
    mprod = 1;  // m_0 * m_ 1 * … m_i-1

    while (m != 0) {
        t = number of children of v;
        mprod = mprod*m;
        numnodes = numnodes + mprod*t;
        m = number of promising children of v;
        if (m != 0)
            v = randomly selected promising child of v;
    }
    return numnodes;
}
```

A Monte Carlo Algorithm

Monte-Carlo Estimate for Algorithm 5.1

```
int estimate_n_queens (int n) {
    index i, j, col[1..n];
    int m, mprod, numnodes;
    set_of_index prom_children;

    i = 0;  numnodes = 1;  m=1;  mprod = 1;
    while (m != 0 && i!=n) {
        mprod = mprod*m;
        numnodes = numnodes + mprod*n;
        i++;  m = 0;  prom_children = Φ;
        for (j=1; j<=n; j++) {
            col[i] = j; // 현재 queen 위치를  j 로 놓고 promising 검사
            if (promising(i)) {
                m++;
                prom_children = prom_children ∪ {j};
            }
        }
        if (m != 0) {
            j = random selection from prom_children;
            col[i] = j; // random으로 선정한 위치를
                        // i 번째 queen 위치로 설정
        }
    }
    return numnodes;
}
```

Estimation with Monte Carlo

- Estimation
  - 한번 이상을 수행하여 평균
  - 경험적으로 약 20회가 적당
  - 여러 번 수행하면 좋은 추정치를 구할 확률이 높이 지만, 보장은 없음

Sum-of-Subsets Problem

- Sum-of-Subsets Problem
  - There are n positive integers w_i and a positive integer W.
  - The goal is to find all subsets of integers that sum of W.

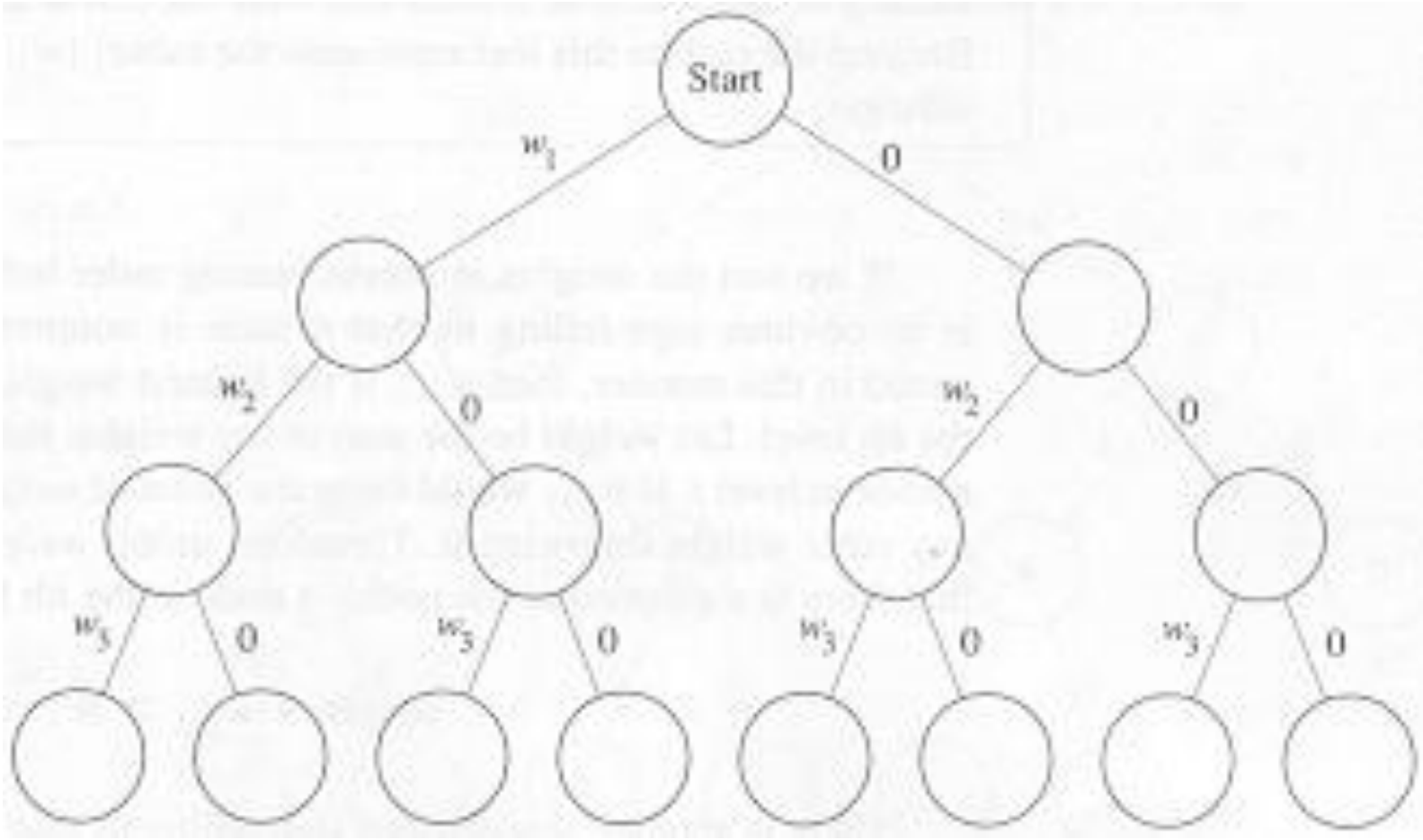
Ex 5.2

- Suppose $n = 5$, $W = 21$
- $w_1 = 5$; $w_2 = 6$; $w_3 = 10$; $w_4 = 11$; $w_5 = 16$;
- Because $w_1 + w_2 + w_3 = 5 + 6 + 10 = 21$

  $w_1 + w_5 = 5 + 16 = 21$

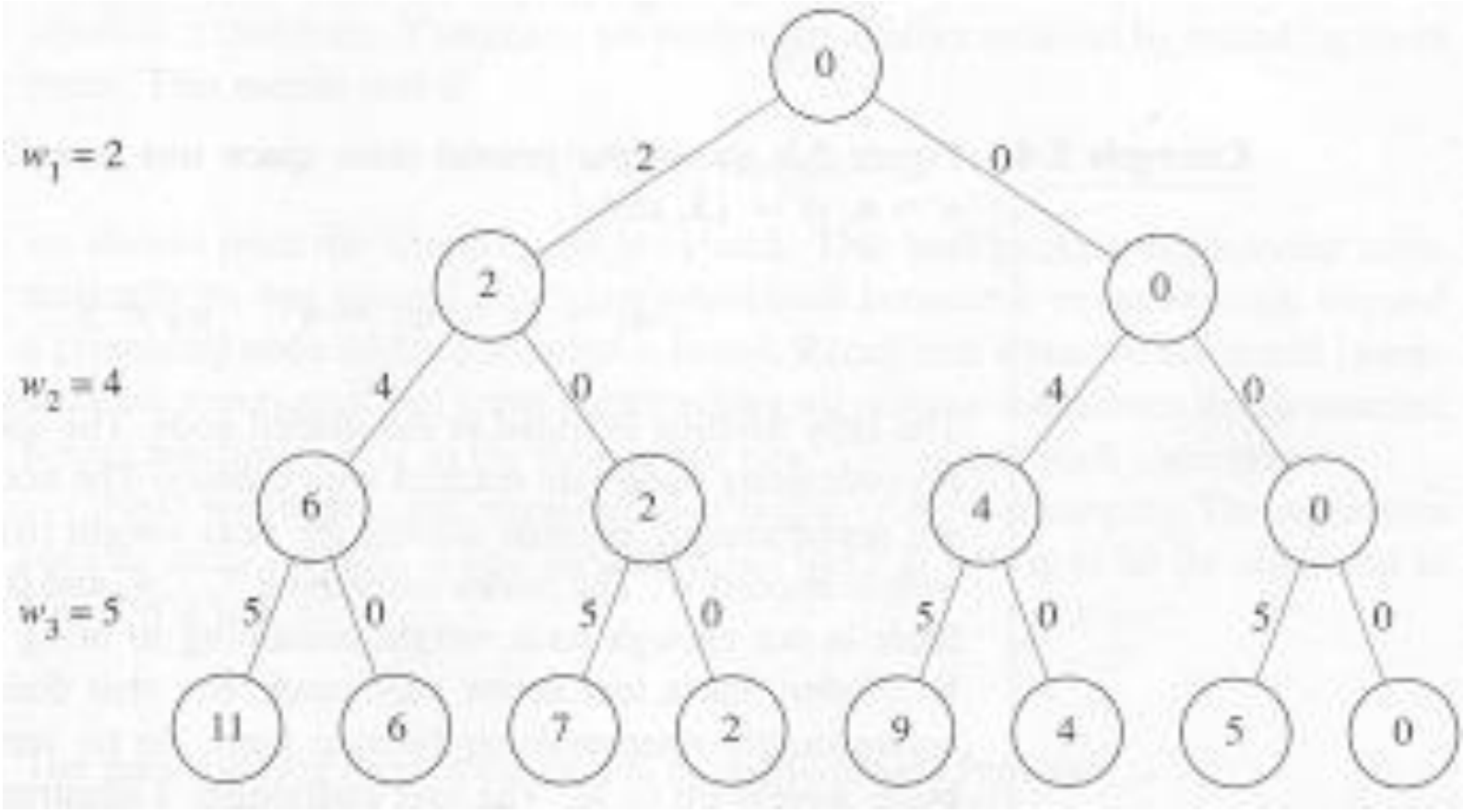
  $w_3 + w_4 = 10 + 11 = 21$
- Solutions are $\{w_1, w_2, w_3\}$, $\{w_1, w_5\}$, $\{w_3, w_4\}$

Sum-of-Subsets Problem



A state space tree for Sum-of-Subsets (n=3)

Sum-of-Subsets Problem



n=3, W=6 and $w_1 = 2$; $w_2 = 4$; $w_3 = 5$

Sum-of-Subsets Problem

- Backtracking Strategy
  - If we sort the weights in nondecreasing order,
    there are obvious signs that a node is nonpromisong
    - 이유 : 정렬하지 않으면 답을 못 찾거나, 늦게 찾음

    1. *weight* – the sum of the weights that have been included up to a node at level *I (지금까지 합)*

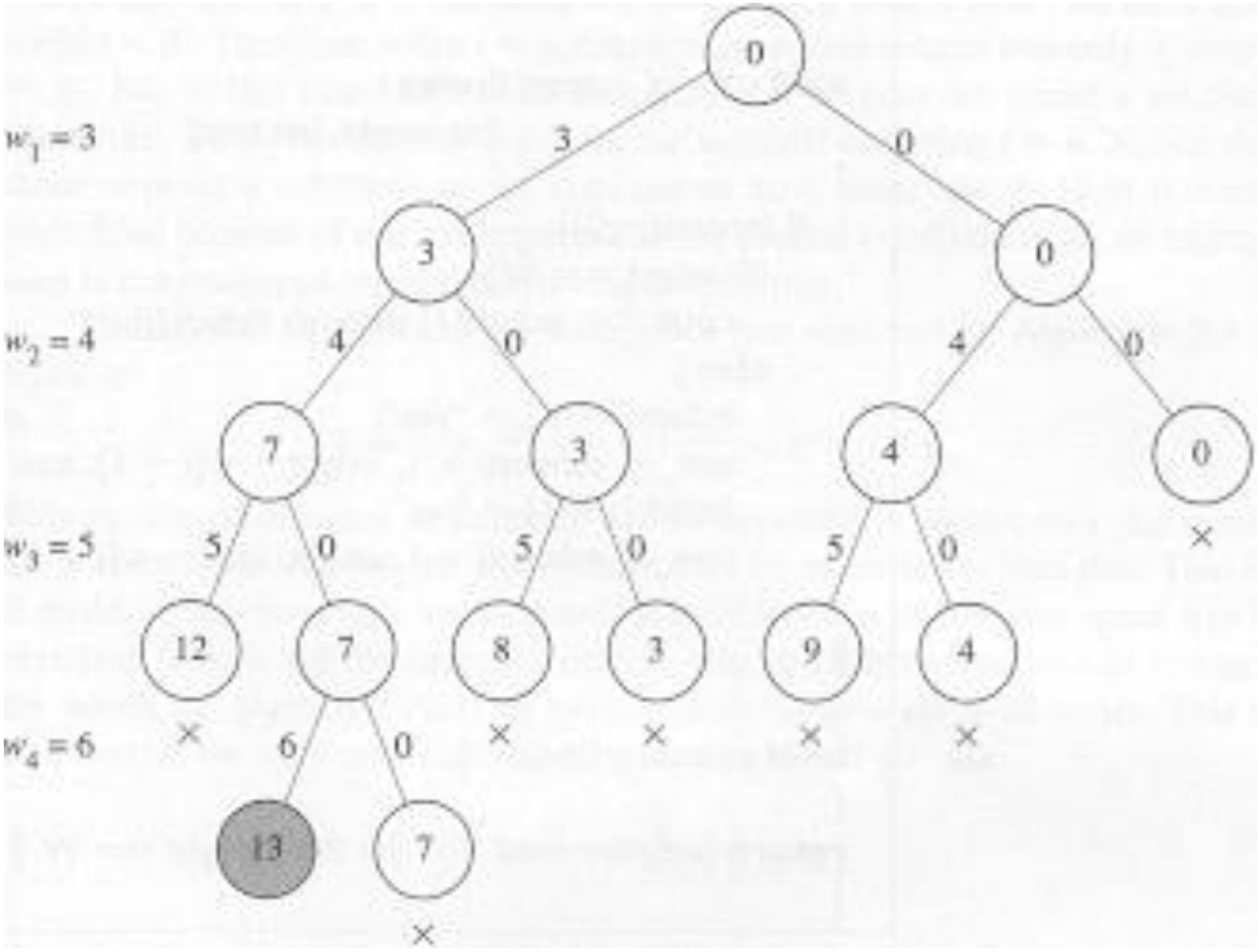
    if $weight + w_{i+1} > W$ ➔ a node is non-promising
    (앞으로 하나 더하면 벌써 넘침)

    2. *total* – the total weight of the remaining weights (남은 것 합)

    if $weight + total < W$ ➔ a node is non-promising
    (남는 것 다 더해도 부족)
- Start : sum_of_subsets(0, 0 total);

Sum-of-Subsets Problem

Ex 5.4 n=4, W=13 and $w_1 = 3$; $w_2 = 4$; $w_3 = 5$; $w_4 = 6$



Sum-of-Subsets Problem

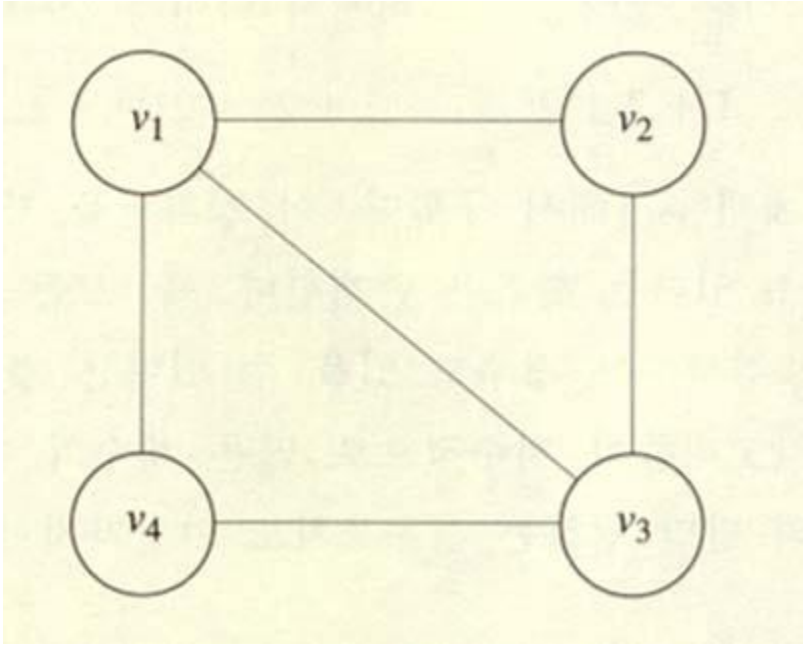
```
void sum_of_subsets (index i, int weight, int total) {
    if (promising(i)) {// =>(index i, int weight, int total)
        if (weight ==W)
            cout << include[1] through include[i];
        else {
            include[i+1] = "yes";
            sum_of_subsets(i+1, weight+w[i+1], total-w[i+1]);
            include[i+1] = "no";
            sum_of_subsets(i+1, weight, total-w[i+1]);
        }
}

bool promising (index i) { // =>(index i, int weight, int total)
    return (weight+total >= W)
        && (weight == W || weight+w[i+1] <= W);
}
```

Graph Coloring

- Graph Coloring Problem
  - m-coloring – 지도에 m가지 색으로 색칠하는 문제
  - m개의 색을 가지고, 인접한 지역이 같은 색이 되지 않도록 지도에 색칠하는 문제

Ex 5.5



이 그래프에서 두가지 색으로 문제를 풀기는 불가능하다.

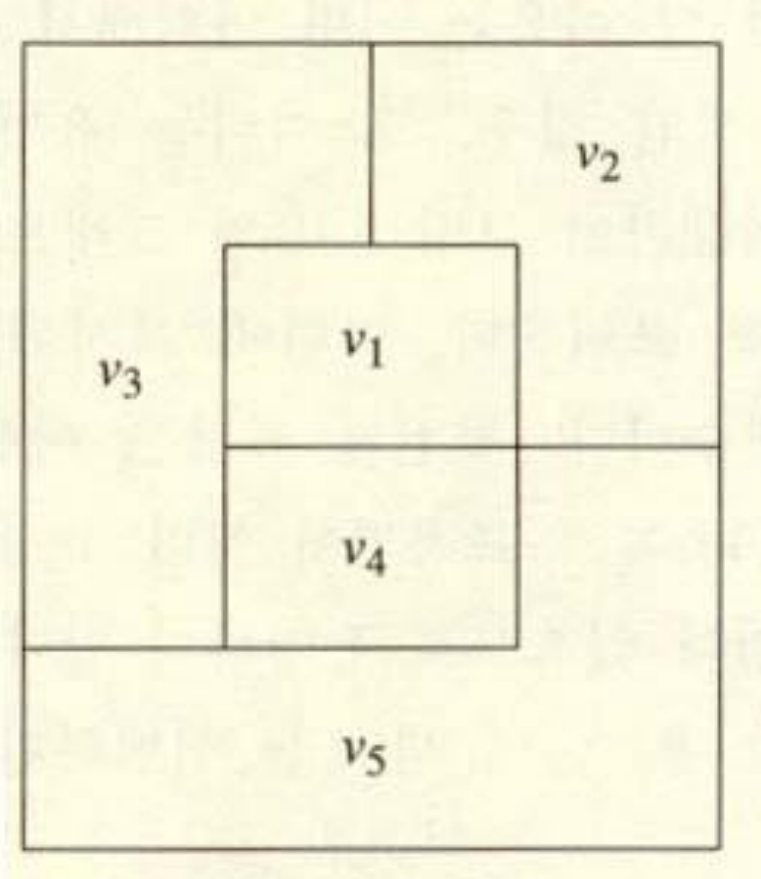
세 가지 색을 사용하면 총 6가지의 해답을 얻을 수 있다.

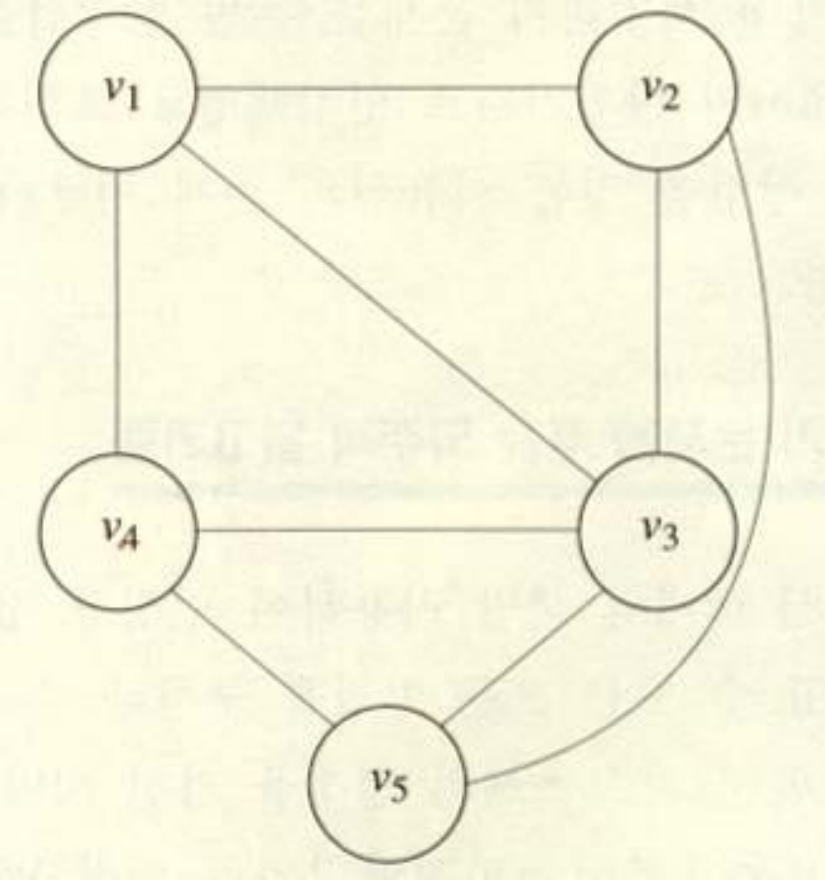
Graph Coloring

- Coloring of maps
  - An important application of graph coloring
  - A graph is called *planar* (평면) if it can be drawn in a plane in such a way that no two edges cross each other
- Planar Graph (평면그래프)
  - To every map, there corresponds a planar graph
  - 지도에서 각 지역을 그래프의 정점으로 하고,
    한 지역이 어떤 다른 지역과 인접해 있으며
    그 지역들을 나타내는 정점들 사이에 이음선을 그으면,
    모든 지도는 그에 상응하는 평면그래프로 표시할 수 있다.
- *m*-coloring problem for planar graphs
  - Determine how many ways the map can be colored, using at most m colors, so that no two adjacent regions have the same color

Graph Coloring

- 지도와 평면 그래프

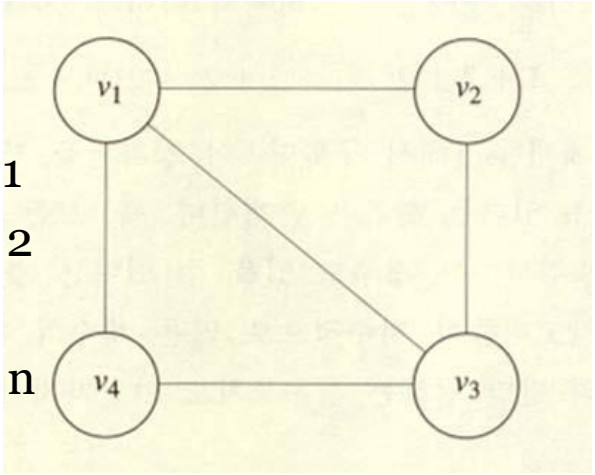




Graph Coloring

- Strategy of *m*-coloring problem
  - Use state space tree
  - Procedure
    - Each possible color is tried for vertex v_1 at level 1
    - Each possible color is tried for vertex v_2 at level 2

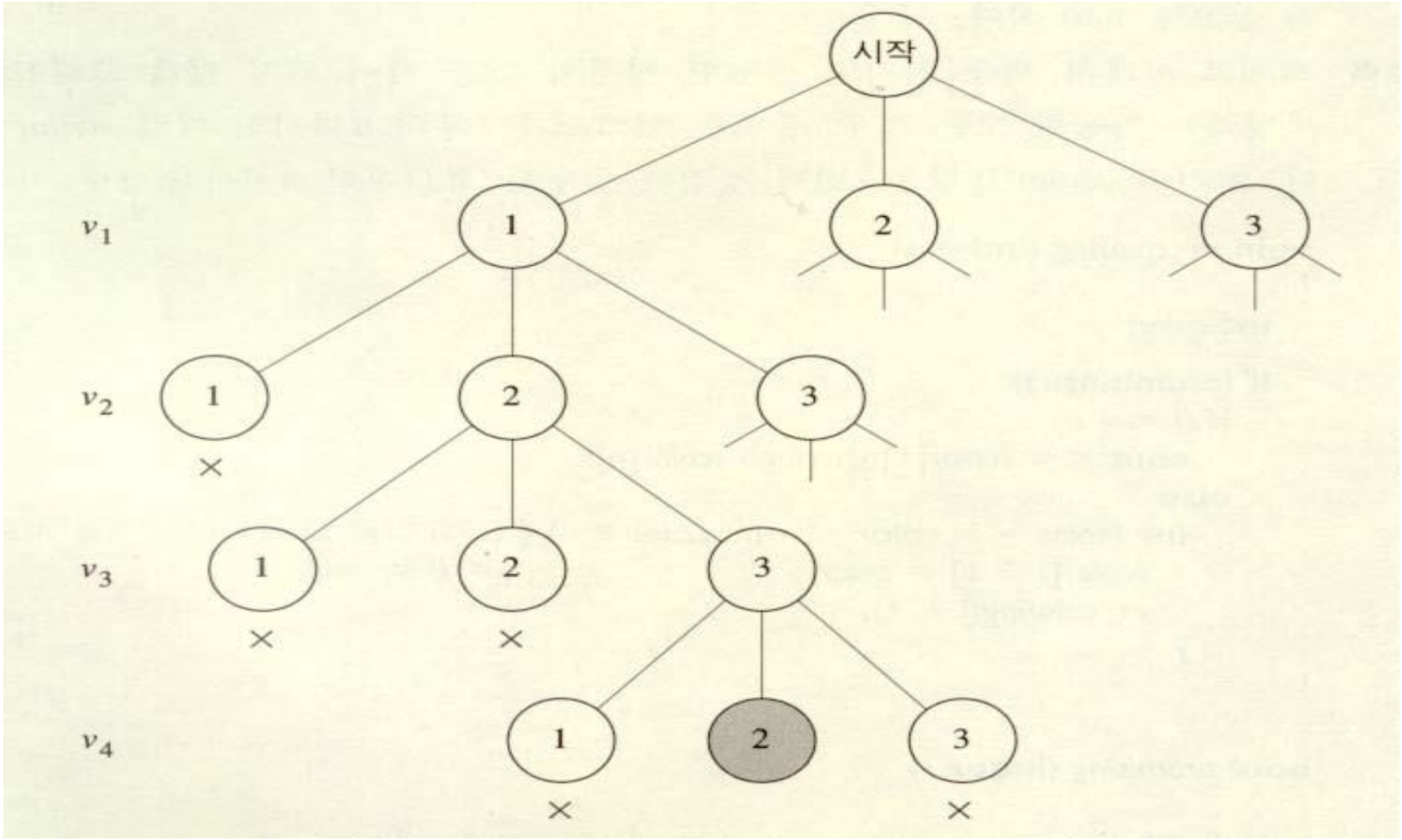
      .....
    - Each possible color is tried for vertex v_n at level n



    - Each path from the root to a leaf is a candidate solution
      - Check whether a candidate solution is a solution by determining whether any two adjacent vertices are the same color

Graph Coloring

- 그래프 색칠하기 되추적 해법



Graph Coloring

- Algorithm 5.5 (I)
  - Problem : m개의 색을 사용하여, 그래프의 정점의 색을 할당할 수 있는 모든 방법을 결정하라. 단, 인접한 정점은 서로 같은 색을 가질 수 없다.
  - Inputs : n(정점의 수), m(색의 수), W[1..n][1..n] (그래프, W[i][j]=1(TRUE) => i정점과 j정점사이에 간선이 있음)
  - Outputs : vcolor[1..n]

- Start : m_coloring(0);

Graph Coloring

```
void m_coloring (index i) {
    int color;
    if (promising(i))
        if (i == n)  cout << vcolor[1] through vcolor[n];
        else
            for (color = 1; color<=m; color++) {
                vcolor[i+1] = color;
                m_coloring(i+1);
            }
}

bool promising(index i) {
    int j;     bool switch;
    switch = TRUE;
    j = 1;
    while (j<i && switch) {
        if (W[i][j] && vcolor[i]==vcolor[j]) switch = FALSE;
        j++;
    }
    return switch;
}
```

Graph Coloring

- 그래프 색칠하기: 분석
  - 상태공간트리 상의 노드의 총수는

$$1 + m + m^2 + \cdots + m^m = \frac{m^{m+1} - 1}{m - 1}$$

  - 여기서도 Monte Carlo 기법을 사용하여 수행시간을 추정할 수 있다.

graph coloring application

- GSM
  - number of frequencies required to cover whole region?
  - hexagon coverage of a frequency
  - 4
- Aircraft scheduling
- final exam timetable

The Hamiltonian Circuits Problem

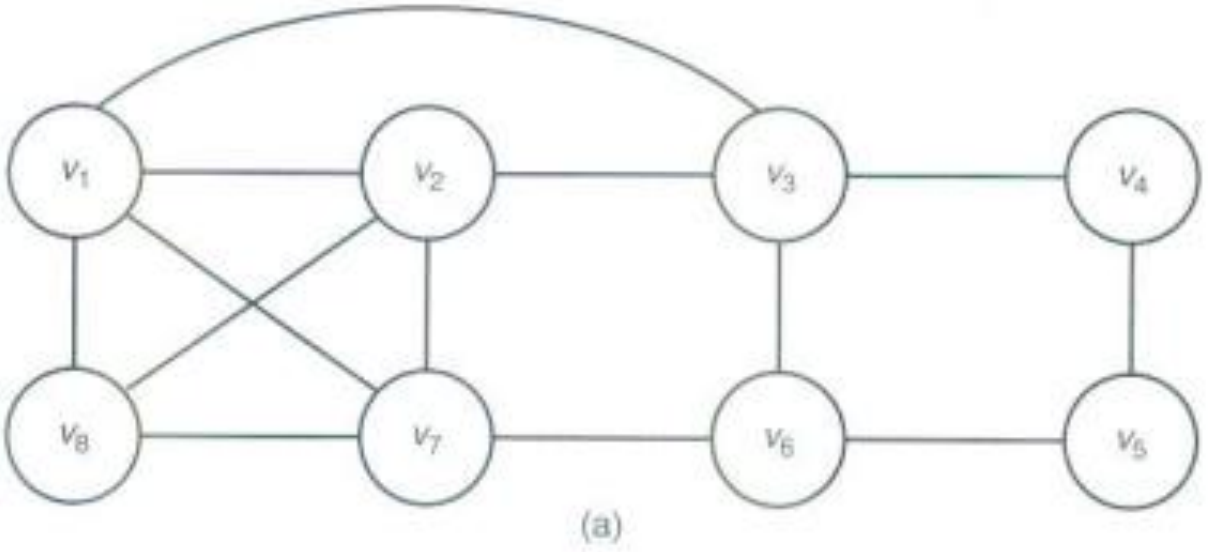
- Traveling Salesperson Problem (Dynamic Programming)

  $T(n) = (n-1)(n-2) \cdot 2^{n-3}$ cf) Brute-force $T(n) = (n-1)!$

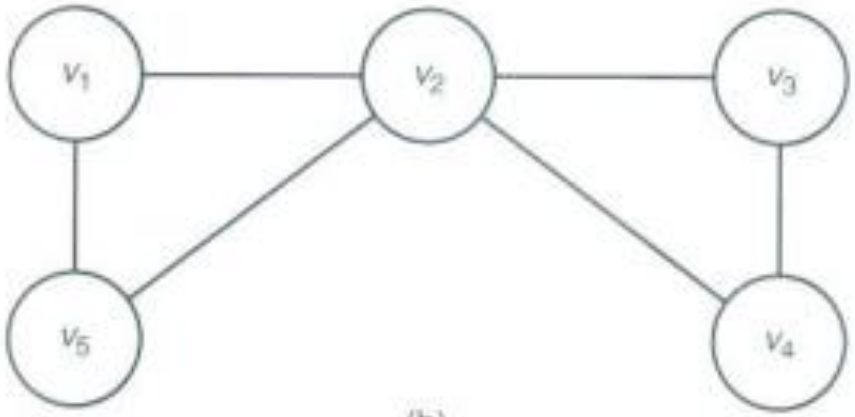
  - if n=20, T(20) = 45 secs
  - if n=40, $T(40) = 39 \cdot 38 \cdot 2^{37}$ = 6.46 yrs

- Hamiltonian Circuits Problem
  - Not every city is connected to every other city by a road
  - For a directed-graph (in TSP) or an undirected graph (in HCP)
    (사실 별 상관은 없음)
  - Hamiltonian Circuit (or Tour)
    - A path that starts at a given vertex,
      visits each vertex in the graph exactly once,
      and ends at the starting vertex

The Hamiltonian Circuits Problem



(a)



(b)

The Hamiltonian Circuits Problem

- Hamiltonian Circuits Problem
  - 연결된 비방향성 그래프에서 해밀토니안 회로를 결정하는 문제
  - 되추적 방법을 적용하기 위해서 다음 사항을 고려해야 한다.
    - 경로 상의 i번째 정점은 그 경로 상의 $(i-1)$번째 정점과 반드시 이웃해야 한다.
    - $(n-1)$번째 정점은 반드시 0번째 정점(출발점)과 이웃해야 한다.
    - i번째 정점은 처음 $i-1$개의 정점이 될 수 없다.
  - 상태공간트리 상의 노드 수는

$$1+(n-1)+(n-1)^2+\cdots+(n-1)^{(n-1)}=\frac{(n-1)^n-1}{n-2}$$

Cf) dynamic programming – $(n-1)(n-2)2^{n-3}$

The Hamiltonian Circuits Problem

- Algorithm 5.6
  - Problem : 주어진 그래프에서 Hamiltonian 경로를 찾아라.
  - Inputs : n(정점의 수), W[1..n][1..n] (그래프, W[i][j]=1(TRUE) => i정점과 j정점사이에 간선이 있음)
  - Outputs : vindex [0..n-1] // [1..n]=> [0..n-1]로 수정

```
void hamiltonian(index i) {
    index j;

    if (promising(i))
        if (i == n-1)
            cout << vindex[0] through vindex[n-1];
        else
            for (j = 2; j<=n; j++) {          // Try all vertices as
                vindex[i+1] = j;              // next one.
                hamiltonian (i+1);
            }
}
```

The Hamiltonian Circuits Problem

```
bool promising(index i) {
    int j;     bool switch;

    if (i== n-1 && !W[vindex[n-1]][vindex[0]])
        switch = FALSE;
    else if (i>0 && !W[vindex[i-1]][vindex[i]])
        switch = FALSE;
    else {
        switch = TRUE;
        j= 1;
        while (j<i && switch) {
            if (vindex[i] == vindex[j]) switch = FALSE;
            j++;
        }
    }
    return switch;
}
```

- Vindex[0] =1; hamiltonian(0);

The Hamiltonian Circuits Problem

- HCP는 한 개의 경로를 찾는 문제이고, TSP는 모든 가능한 경로에서 가장 짧은 경로를 찾는 문제이다.
  - HCP가 과연 TSP보다 더 쉬운 문제인가?
    - 이상의 방법으로 해결하고자 할때 worst case를 보면 그렇지는 않다.
    - HCP로 얻는 solution이 마지막에 나온다면, TSP와 같다.
    - 하지만 HCP로 얻는 solution이 앞쪽 검색에서 나온다면 당연히 빠르다.
    - 그렇지만 dynamic program으로 TSP를 해결하는 방법보다 항상 빠르다고 말할 수도 없다.
  - HCP는 모든 vertices 가 서로 다 연결 되지 않았다고 가정하고 푸는 것임을 다시 한번 강조
  - HCP가 왜 depth first search를 사용한 backtracking으로 풀까?
    - 끝까지 한번이라도 가는 것이 있어야 하므로.

The 0-1 Knapsack Problem

- Backtracking algorithm for the 0-1 Knapsack Problem
  - 상태공간트리를 구축하여 되추적 기법으로 문제를 푼다.
  - 뿌리마디에서 왼쪽으로 가면 첫번째 아이템을 배낭에 넣는 경우이고, 오른쪽으로 가면 첫번째 아이템을 배낭에 넣지 않는 경우이다.
  - 동일한 방법으로 두 번째 아이템을 넣으면 수준 1의 노드에서 왼쪽으로 가고, 빼면 오른쪽으로 가고 .....
  - 이런 식으로 계속하여 상태공간트리를 구축하면, 뿌리마디로부터 잎마디까지의 모든 경로는 해답후보가 된다.
  - 이 문제는 최적의 해를 찾는 문제(optimization problem)이므로 검색이 완전히 끝나기 전에는 해답을 알 수가 없다. 따라서 검색하는 과정 동안 항상 그 때까지 찾은 최적의 해를 기억해 두어야 한다.

The 0-1 Knapsack Problem

- A general algorithm

```
void checknode(node v) {
    node u;

    if (value(v) is better than best)
        best = value(v);
    if (promising(v))
        for (each child u of v)
            checknode(u);
}
```

  - best : 지금까지 찾은 제일 좋은 해답치
  - value(v) : v 마디에서의 해답치

The 0-1 Knapsack Problem

- Strategy for the 0-1 Knapsack problem
  - w_i and p_i are the weight and profit of the i-th item, respectively
  - Sort the items in nonincreasing order according to the values of p_i / w_i
    (일종의 탐욕적인 방법이 되는 셈이지만,
    알고리즘 자체는 탐욕적인 알고리즘은 아니다.)
  - Let:
    - *profit* – the sum of the profits of the items included up to the node
    - *weight* – the sum of the weights of those items
      - 위 두 개는 지금까지 합
    - *totweight* – the sum of the weights could be obtained by expanding beyond that node (절대 W를 초과 못 함)
      - 지금까지 무게 합 +앞으로 넣을 수 있는 무게 합(0-1 개념임)
    - *bound* – the upper bound on the profit that could be obtained by expanding beyond that node
      - 지금까지 profit+ 앞으로 profit(0-1) + 그 이후 partial profit

The 0-1 Knapsack Problem

- 알고리즘 스케치
  - *bound*와 *totweight*를 *profit*과 *weight* 값으로 초기화
  - 그 다음에 탐욕적으로 아이템을 취함
  - 이 과정을 *totweight*이 W를 초과하게 되는 아이템을 잡을 때까지 반복
  - 남은 공간이 허용하는무게만큼 마지막 아이템의 일부분을 취하고, 그 일부분에 해당하는 *profit*을 *bound*에 더함
  - 마디가 수준 i에 있다고 하고, 수준 k에 있는 마디에서 총무게가 W를 넘는다면,

$$totweight = weight + \sum_{j=i+1}^{k-1} w_j$$

$$bound = \left(profit + \sum_{j=i+1}^{k-1} p_j \right) + (W - totweight) \times \frac{p_k}{w_k}$$

  - *maxprofit* : 지금까지 찾은 최선의 해답이 주는 값어치

    if bound ≤ maxprofit ➔ a node at level i is nonpromising

The 0-1 Knapsack Problem

- *maxprofit* := $0; *profit* := $0; *weight* := 0

- 깊이우선순위로 각 마디를 방문하여 다음을 수행한다:
  1. 그 마디의 *profit*와 *weight*를 계산한다.
  2. 그 마디의 *bound*를 계산한다.
  3. *weight* < *W* 이고, *bound* > *maxprofit*이면, 검색을 계속한다;
     그렇지 않으면, 되추적.

The 0-1 Knapsack Problem

- Ex 5.6

$n = 4, W = 16$이고,

i	p_i	w_i	$\frac{p_i}{w_i}$
1	\$40	2	\$20
2	\$30	5	\$6
3	\$50	10	\$5
4	\$10	5	\$2

일 때,

되추적을 사용하여 구축되는 가지친 상태공간트리를 그려 보시오.

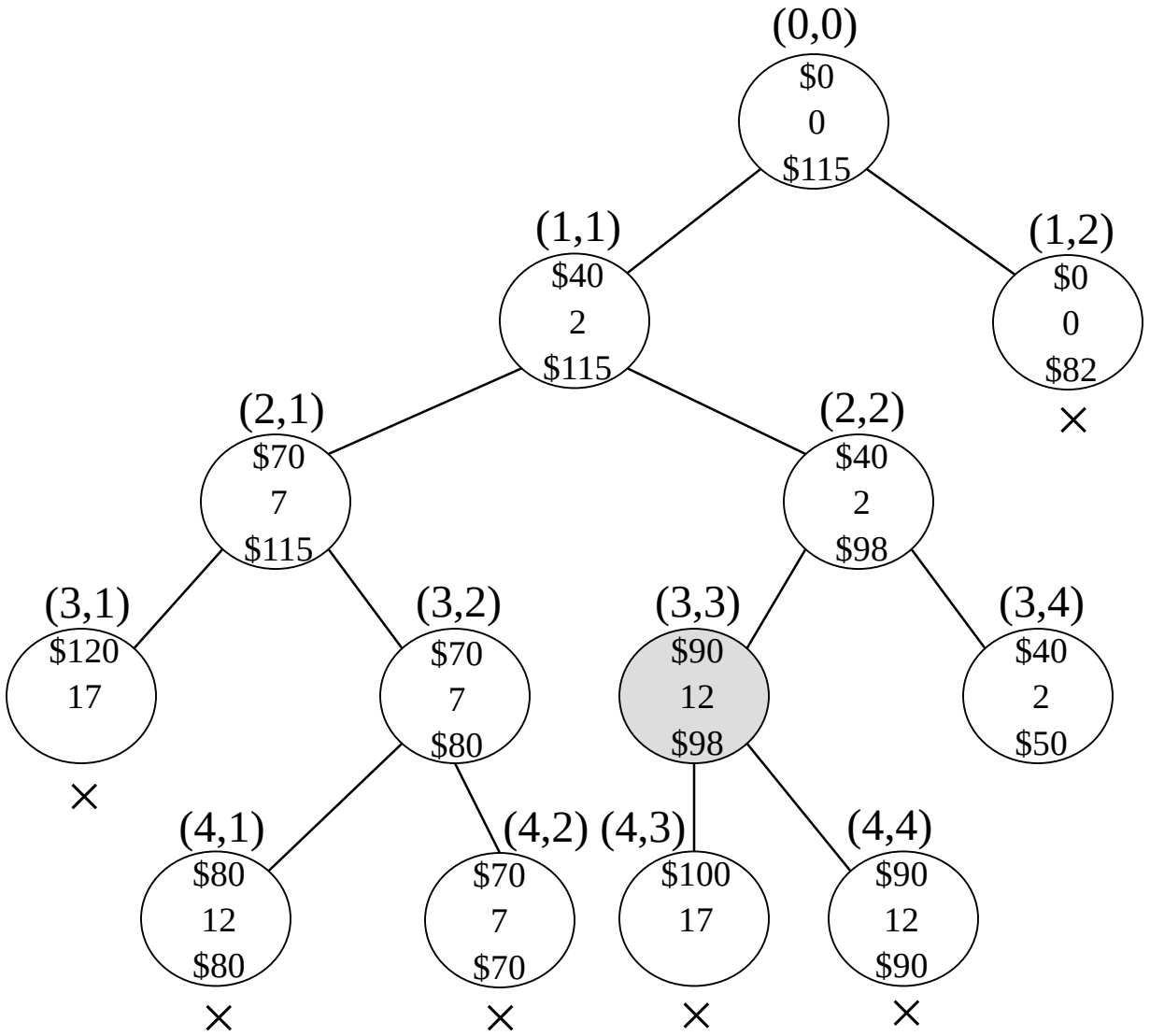
The 0-1 Knapsack Problem

item 1 $\begin{bmatrix}\$40\\2\end{bmatrix}$

item 2 $\begin{bmatrix}\$30\\5\end{bmatrix}$

item 3 $\begin{bmatrix}\$50\\10\end{bmatrix}$

item 4 $\begin{bmatrix}\$10\\5\end{bmatrix}$



The 0-1 Knapsack Problem

- **Algorithm**
  - Problem : Let *n* items be given, where each item has a *weight* and a *profit*. Let *W* be given. Determine a set of items with maximum total profit, under the constraint that the sum of their weights cannot exceed *W*.
  - Inputs : *n, W, w[1..n], p[1..n]*. *w* and *p* arrays are containing positive integers sorted in nonincreasing order according to the values of *p[i]/w[i]*.
  - Outputs : bestset[1..n].

$$\begin{pmatrix} bestset[i]=YES; & If\ \ the\ i-th\ item\ is\ \ included \\ bestset[i]=NO; & Otherwise \end{pmatrix}$$

The 0-1 Knapsack Problem

```
void knapsack (index i, int profit, int weight) {
        if (weight <= W  &&  profit > maxprofit) {     // best so far
              maxprofit = profit;
              numbest = i;
              bestset = include;
        }

        if  (promising(i, profit, weight)) {
              include[i+1] = "YES";                          // Include w[i+1]
              knapsack(i+1, profit+p[i+1], weight+w[i+1]);
              include[i+1] = "NO";                           // Not include w[i+1]
              knapsack(i+1,  profit,  weight);
        }
}
```

The 0-1 Knapsack Problem

```
bool promising(index i, int profit, int weight) {
    index j, k;
    int totweight;
    float bound;

    if (weight >= W)  return FALSE;
    else {
        j = i+1;
        bound = profit;
        totweight = weight;
        while ((j <= n) &&  (totweight +w[j] <= W)) {
            totweight = totweight + w[j];
            bound = bound + p[j];
            j++
        }

        k=j;
        if (k <= n)
            bound = bound +(W–totweight)*p[k]/w[k];
        return  bound > maxprofit;
    }
}
```

The 0-1 Knapsack Problem

- 분석
  - 이 알고리즘이 점검하는 마디의 수는 $\Theta(2^n)$이다.
  - 위 보기의 경우의 분석: 점검한 마디는 13개이다.
    이 알고리즘이 동적계획법으로 설계한 알고리즘 보다 좋은가?
    - 확실하게 대답하기 불가능
    - Dynamic Programming – 최악의 경우 $O(\min(2^n, nW))$
    - Backtracking – 최악의 경우 $\Theta(2^n)$
  - Horowitz와 Sahni(1978)는 Monte Carlo 기법을 사용하여
    되추적 알고리즘이 동적계획법 알고리즘보다
    일반적으로 더 빠르다는 것을 입증하였다.
  - Horowitz와 Sahni(1974)가 분할정복과 동적계획법을
    적절히 조화하여 개발한 알고리즘은 $O(2^{n/2})$의 시간복잡도를 가지는데,
    이 알고리즘은 되추적 알고리즘보다 일반적으로 빠르다고 한다.