Hyslan Silva Cruz
Iara Regina Grilo Papais

Transformações Lineares e suas aplicações

Suzano

2024

Hyslan Silva Cruz
Iara Regina Grilo Papais

Transformações Lineares e suas aplicações

Monografia de graduação à Universidade Virtual do Estado de São Paulo, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciatura em Matemática.
Orientadora: Lorena Salvi Stringheta

Universidade Virtual do Estado de São Paulo

Orientadora: Lorena Salvi Stringheta

Suzano

2024

Resumo

Resumo de nosso trabalho.

Palavras-chave: Transformação Linear, Álgebra Linear, Matrizes

Abstract

This is the english abstract.

Keywords: latex. abntex. text editoration.

Lista de tabelas

Lista de símbolos

$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
$\exists$	Existe.
$\in$	Pertence.

Sumário

1 Introdução

Com o decorrer do tempo, depois da era de ouro da álgebra linear nos meados do século XVIII. Onde, Euler e Louis Lagrange publicaram o "Recherche d'Arithmétique", entre 1773 e 1775, no qual estudavam certos conceitos da transformação linear. Posteriormente, Johann Carl Friedrich Gauss, também estudou sobre assuntos que apresentou similaridade com a matriz de transformação linear.

Até se arrefecer o assunto no século XIX e XX, com Giuseppe Peano, onde foi cunhado o termo "sistema linear"com a primeira definição de axiomática para espaço vetorial. Nos dias atuais, a apresentação da álgebra linear, temas abordados nesse campo da matemática são frequentemente esquecidos, portanto, este estudo trata de buscar o entendimento e compreender sobre as transformações lineares em sua totalidade e aplicações no contexto atual contemporâneo.

Passado esse brevíssimo contexto histórico e motivador para a nossa pesquisa e deleite deste ramo de estudado, iremos nos adiantar a certos conceitos matemáticos elementares já bastantes fundamentados no decorrer dos anos escolares do ensino básico regular. Para isto, passaremos a certas definições matemáticas primordiais que serão apresentadas nesta monografia para as discussões advindas a posteriori neste estudo.

Portanto, dividimos esta monografia em 4 capítulos, a saber, revisão literária fundamentais, pesquisas de artigos, teses e discussões recentes sobre as transformações lineares em diversas aplicações, seu contexto educacional atual em questão de matéria aplicada e por conseguinte nossa metodologia utilizada, os resultados obtidos dessa pesquisa e, por fim, nossa discussão final, a saber, do uso da transformação linear atualmente.

2 Espaços Vetoriais

Começaremos pela definição de um espaço vetorial, onde, podemos tratar como um vetor ao designar um elemento do espaço vetorial de um número $\mathbb{R}$ definido tal que:

Definição 01: Seja um conjunto V, não vazio, com duas operações: soma, $V \times V \rightarrow V$, e multiplicação por escalar, $R \times V \rightarrow V$, tais que, para quaisquer $u, v, w \in \mathbb{R}$, satisfaçam as propriedades:

1. $(u + v) + w = u + (v + w), \forall\, u, v, w \in V$ (propriedade associativa.)
2. $1u = u$.
3. $u + v = v + u, \forall\, u, v \in V$ (propriedade comutativa).
4. $\exists\, 0 \in V$ tal que $u + 0 = u$.
5. $\exists\, -u \in V$ tal que $u + (-u) = 0$.
6. $a(u + v) = au + av$.
7. $(a + b)v = av + bv$.
8. $(ab)v = a(bv)$.
9. $1u = u$.

Observação: 0 é o vetor nulo.

Observação: Limitaremos nossa discussão, demonstrações e aplicações dentro do conjunto dos números reais apenas.

Exemplo 01: Suponhamos uma matriz $M_{(2,2)}$, onde, é denotado por $M_{(m,n)}$, dado por $M = [a_{ij}]_{m \times n}$ podendo ser interpretada dessa forma, $V = M_{(2,2)}$, onde V, é um conjunto não vazio, seu escalar pertencente ao conjunto dos $\mathbb{R}$, que satisfazem todas as propriedades de um espaço vetorial.

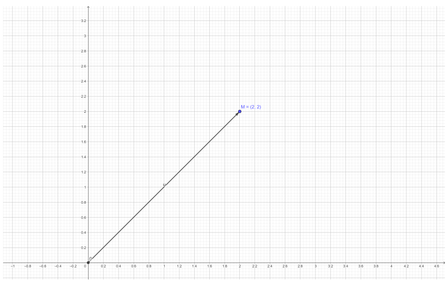

Figura 1 – Exemplo 01: Vetor no plano.

A partir disso, podemos perceber o uso analítico dos espaços vetoriais para resolução de problemas em geral. Vejamos mais alguns exemplos.

Exemplo 02: O exemplo anterior, trata-se de uma matriz de $\mathbb{R}^2$ pode ser dito como, no plano, agora iremos expandir para $\mathbb{R}^3$, seja um vetor $A = (x, y, z)$ ou representado pela forma matricial:

$$A = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Assim, por quaisquer números reais, podemos fazer uma projeção ortogonal no espaço, segue um exemplo traçado:

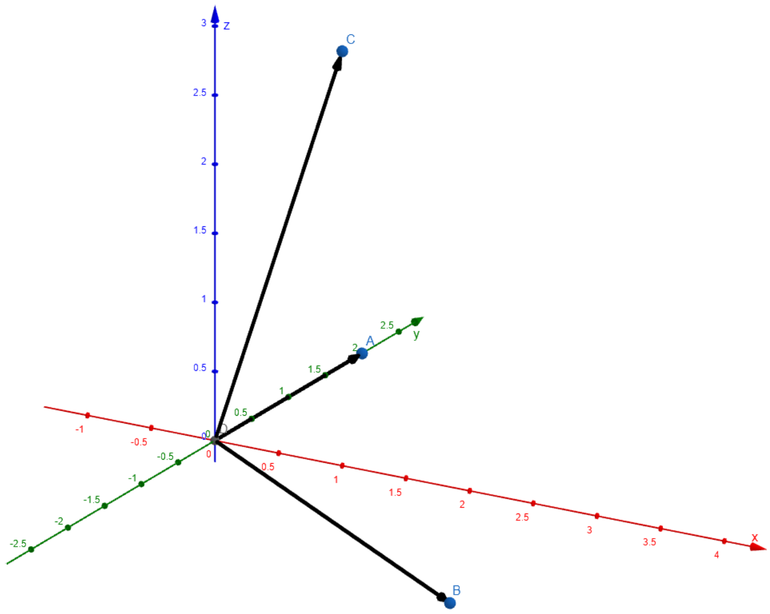

Figura 2 – Exemplo 02: Exemplo de vetor no espaço.

Exemplo 03: Consideremos $n - uplas$ de números reais.

$V = \mathbb{R}^n = (x_1, x_2, \ldots, x_n); x_i \in \mathbb{R}$

e se $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n), v = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ e $a \in \mathbb{R}$,

$u + v = (x_1 + y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n)$ e $au = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n)$

Por tratarmos de uma quantidade n de números, o campo tridimensional deixa de ser visto, e passamos a ter $\mathbb{R}^n$ dimensões, as propriedades não deixam de valer independente a quantidade de dimensões.

2.1 Subespaços Vetoriais

Nesta seção iremos introduzir conceitos no estudo de espaço vetorial para subespaço vetorial.

Definição 02: Dado um espaço vetorial V, um subconjunto W, não vazio, será um subespaço vetorial de V se:

1. Para quaisquer $u, v \in W$ tivermos $u + v \in W$.
2. Para quaisquer $a \in R, u \in W$ tivermos $au \in W$.

Teorema 01: Um subconjunto não vazio W de V é um subespaço de V se, e somente se, para cada par de vetores α, β em W e cada escalar c em F, o vetor $c\alpha + \beta$ está em W.

Demonstração: Suponhamos que W seja um subconjunto não vazio de V tal que $c\alpha+\beta$ pertença a W para todos os vetores α, β em W e todos escalares c em F. Como W é não vazio, existe um vetor ρ em W, logo $(-1)\rho + \rho = O$ está em W. Então se α é um vetor arbitrário em W e c é um escalar arbitrário, o vetor $c\alpha = c\alpha + O$ está em W. Em particular $(-l)\alpha = -\alpha$ está em W. Finalmente se α e β estão em W, então $\alpha + \beta = l\alpha + \beta$ está em W. Assim, W é um subespaço de V.

Exemplo 04: Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$. O conjunto de todos os vetores que residem no plano xy, ou seja, $(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}$, forma um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$. Verifique as propriedades de um subespaço vetorial para confirmar isso.

Exemplo 05: No espaço vetorial das funções reais de uma variável real, $V = f(x) \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, considere o conjunto de todas as funções lineares, ou seja, $f(x) = mx + b \mid m, b \in \mathbb{R}$. Esse conjunto forma um subespaço vetorial de V. Novamente, você pode verificar as propriedades para confirmar.

Exemplo 06: No espaço das matrizes reais 2×2, $M_{(2,2)}$, considere o conjunto de todas as matrizes simétricas, ou seja, aquelas em que $A = A^T$. Esse conjunto forma um subespaço vetorial de $M_{(2,2)}$. Você pode demonstrar isso verificando as propriedades de um subespaço vetorial

3 Transformações Lineares

Segue sua definição abaixo:

Definição 03: Sejam V e W dois espaços vetoriais. Uma transformação linear (aplicação linear) é uma função de V em W, $F : V \to W$, que satisfaz as seguintes condições:

1. Para quaisquer u e v em V, $F(u + v) = F(u) + F(v)$.
2. Para quaisquer $k \in R$ e $v \in V$, $F(kv) = kF(v)$.

4 Aplicações de Transformações Lineares

Aguardando pela Caroline Pires...

5 Conclusão

That’s all folks!

Referências

BOLDRINI, J. L. *Algebra Linear*. 3.ed.. São Paulo: Harbra, 1986. Bibliografia: p. 406.

HOFFMAN, K.; RAY, K. *Álgebra Linear*. 2.ed.. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1979.

ULHOA, C. F.; LOURENÇO, M. L. *Um Curso de Álgebra Linear*. 2.ed.. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2018.