Hyslan Silva Cruz
Iara Regina Grilo Papais

# Transformações Lineares e suas aplicações

Suzano

2024

Hyslan Silva Cruz
Iara Regina Grilo Papais

# Transformações Lineares e suas aplicações

Monografia de graduação à Universidade Virtual do Estado de São Paulo, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciatura em Matemática.
Orientadora: Lorena Salvi Stringheta

Universidade Virtual do Estado de São Paulo

Orientadora: Lorena Salvi Stringheta

Suzano
2024

# Resumo

Resumo de nosso trabalho.

**Palavras-chave: Transformação Linear, Álgebra Linear, Matrizes**

# Abstract

This is the english abstract.

**Keywords**: latex. abntex. text editoration.

# Lista de tabelas

# Lista de símbolos

| | |
|---|---|
| $\mathbb{R}$ | Conjunto dos números reais. |
| $\exists$ | Existe. |
| $\in$ | Pertence. |
| $\vert$ | Tal que. |

# Sumário

# 1 Introdução

Com o decorrer do tempo, depois da era de ouro da álgebra linear nos meados do século XVIII. Onde, Euler e Louis Lagrange publicaram o "Recherche d'Arithmétique", entre 1773 e 1775, no qual estudavam certos conceitos da transformação linear. Posteriormente, Johann Carl Friedrich Gauss, também estudou sobre assuntos que apresentou similaridade com a matriz de transformação linear.

Até se arrefecer o assunto no século XIX e XX, com Giuseppe Peano, onde foi cunhado o termo "sistema linear"com a primeira definição de axiomática para espaço vetorial. Nos dias atuais, a apresentação da álgebra linear, temas abordados nesse campo da matemática são frequentemente esquecidos, portanto, este estudo trata de buscar o entendimento e compreender sobre as transformações lineares em sua totalidade e aplicações no contexto atual contemporâneo.

Passado esse brevíssimo contexto histórico e motivador para a nossa pesquisa e deleite deste ramo de estudado, iremos nos adiantar a certos conceitos matemáticos elementares já bastantes fundamentados no decorrer dos anos escolares do ensino básico regular. Para isto, passaremos a certas definições matemáticas primordiais que serão apresentadas nesta monografia para as discussões advindas a posteriori neste estudo.

Portanto, dividimos esta monografia em 4 capítulos, a saber, revisão literária fundamentais, pesquisas de artigos, teses e discussões recentes sobre as transformações lineares em diversas aplicações, seu contexto educacional atual em questão de matéria aplicada e por conseguinte nossa metodologia utilizada, os resultados obtidos dessa pesquisa e, por fim, nossa discussão final, a saber, do uso da transformação linear atualmente.

# 2 Espaços Vetoriais

Começaremos pela definição de um espaço vetorial, onde, podemos tratar como um vetor ao designar um elemento do espaço vetorial de um número $\mathbb{R}$ definido tal que:

**Definição 01:** Seja um conjunto V, não vazio, com duas operações: soma, $V \times V \rightarrow V$, e multiplicação por escalar, $R \times V \rightarrow V$, tais que, para quaisquer $u, v, w \in \mathbb{R}$, satisfaçam as propriedades:

1. $(u+v)+w = u+(v+w), \forall\, u, v, w \in V$ (propriedade associativa.)
2. $1u = u$.
3. $u+v = v+u, \forall\, u, v \in V$ (propriedade comutativa).
4. $\exists\, 0 \in V$ tal que $u+0 = u$.
5. $\exists\, -u \in V$ tal que $u+(-u) = 0$.
6. $a(u+v) = au+av$.
7. $(a+b)v = av+bv$.
8. $(ab)v = a(bv)$.
9. $1u = u$.

**Observação: 0** é o vetor nulo.

**Observação:** Limitaremos nossa discussão, demonstrações e aplicações dentro do conjunto dos números reais apenas.

**Exemplo 01:** Suponhamos uma matriz $M_{(2,2)}$, onde, é denotado por $M_{(m,n)}$, dado por $M = [a_{ij}]_{m \times n}$ podendo ser interpretada dessa forma, $V = M_{(2,2)}$, onde $V$, é um conjunto não vazio, seu escalar pertencente ao conjunto dos $\mathbb{R}$, que satisfazem todas as propriedades de um espaço vetorial.

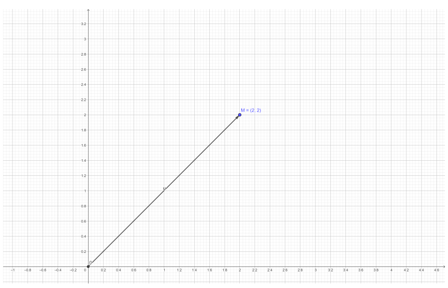


Figura 1 – Exemplo 01: Vetor no plano.

A partir disto, podemos perceber o uso analítico dos espaços vetoriais para resolução de problemas em geral. Vejamos mais alguns exemplos.

**Exemplo 02:** O exemplo anterior, trata-se de uma matriz de $\mathbb{R}^2$ pode ser dito como, no plano, agora iremos expandir para $\mathbb{R}^3$, seja um vetor $A = (x, y, z)$ ou representado pela forma matricial:

$$A = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Assim, por quaisquer números reais, podemos fazer uma projeção ortogonal no espaço, segue um exemplo traçado:

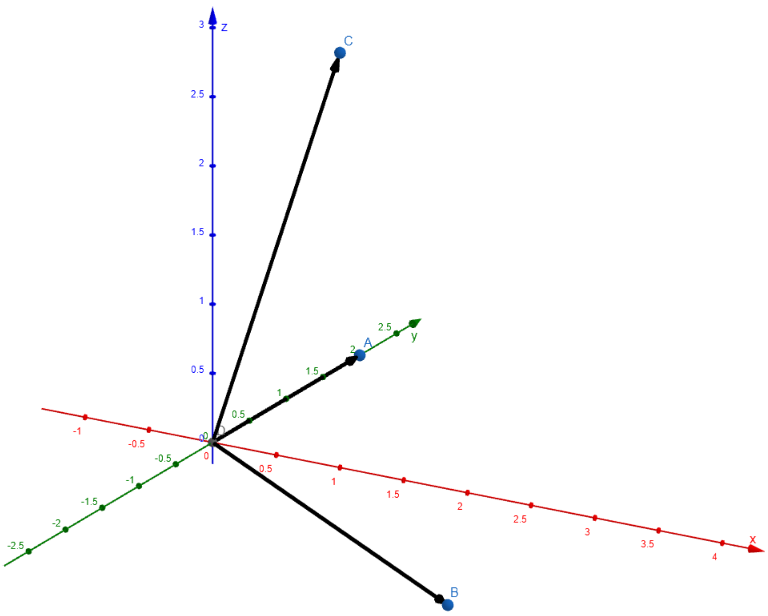



Figura 2 – Exemplo 02: Exemplo de vetor no espaço.

**Exemplo 03:** Consideremos $n - uplas$ de números reais.

$V = \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n); x_i \in \mathbb{R}\}$

e se $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n), v = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ e $a \in \mathbb{R}$,

$u + v = (x_1 + y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n)$ e $au = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n)$

Por tratarmos de uma quantidade $n$ de números, o campo tridimensional deixa de ser visto, e passamos a ter $\mathbb{R}^n$ dimensões, as propriedades não deixam de valer independente a quantidade de dimensões.

## 2.1 Subespaços Vetoriais

Nesta seção iremos introduzir conceitos no estudo de espaço vetorial para subespaço vetorial.

**Definição 02:** Dado um espaço vetorial V, um subconjunto W, não vazio, será um subespaço vetorial de V se:

1. Para quaisquer $u, v \in W$ tivermos $u + v \in W$.
2. Para quaisquer $a \in R, u \in W$ tivermos $au \in W$.

**Teorema 01:** Um subconjunto não vazio $W$ de $V$ é um subespaço de $V$ se, e somente se, para cada par de vetores $\alpha, \beta$ em $W$ e cada escalar $c$ em $F$, o vetor $c\alpha + \beta$ está em $W$.

**Demonstração:** Suponhamos que $W$ seja um subconjunto não vazio de $V$, tal que, $c\alpha + \beta$ pertença a $W$ para todos os vetores $\alpha$, $\beta$ em $W$ e todos escalares $c$ em $F$. Como $W$ é não vazio, existe um vetor $\rho$ em $W$, logo $(-1)\rho + \rho = 0$ está em $W$. Então se $\alpha$ é um vetor arbitrário em $W$ e $c$ é um escalar arbitrário, o vetor $c\alpha = c\alpha + 0$ está em $W$. Em particular $(-l)\alpha = -\alpha$ está em $W$. Finalmente se $\alpha$ e $\beta$ estão em $W$, então $\alpha + \beta = 1\alpha + \beta$ está em $W$. Assim, $W$ é um subespaço de $V$.

**Exemplo 04:** Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$. O conjunto de todos os vetores que residem no plano $xy$, ou seja, $\{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, forma um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Se o conjunto dado forma um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$, precisamos verificar as três propriedades fundamentais:

1. Contém o vetor nulo: O vetor nulo em $\mathbb{R}^3$ é $(0, 0, 0)$. Este vetor também está contido no plano $xy$, pois $z = 0$.
2. É fechado sob adição: Se tomarmos dois vetores $(x_1, y_1, 0)$ e $(x_2, y_2, 0)$ no plano $xy$, a sua soma será $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0)$, que também reside no plano $xy$.
3. É fechado sob multiplicação por escalar: Para qualquer escalar $c$ e vetor $(x, y, 0)$ no plano $xy$, $c \cdot (x, y, 0) = (cx, cy, 0)$, que também está no plano $xy$.

Então, o conjunto de todos os vetores $(x, y, 0)$ com $x, y \in \mathbb{R}$ forma um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

**Exemplo 05:** No espaço vetorial das funções reais de uma variável real, $V = \{f(x) \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, considere o conjunto de todas as funções lineares, ou seja, $\{f(x) = mx+b \mid m, b \in \mathbb{R}\}$. Esse conjunto forma um subespaço vetorial de $V$. Novamente, você pode verificar as propriedades para confirmar.

Se o conjunto dado forma um subespaço vetorial de $V$, novamente precisamos verificar as três propriedades fundamentais:

1. Contém a função nula: A função nula em $V$ é $f(x) = 0$. Esta função é uma função linear, pois pode ser escrita como $f(x) = 0 \cdot x + 0$. Portanto, a função nula está contida no conjunto.

2. É fechado sob adição: Se tomarmos duas funções lineares $f_1(x) = m_1x + b_1$ e $f_2(x) = m_2x + b_2$, a sua soma será $f_1(x) + f_2(x) = (m_1 + m_2)x + (b_1 + b_2)$, que também é uma função linear. Portanto, o conjunto é fechado sob adição.

3. É fechado sob multiplicação por escalar: Para qualquer escalar $c$ e função linear $f(x) = mx + b$, a multiplicação por escalar $cf(x) = c(mx + b) = (cm)x + (cb)$ também é uma função linear. Assim, o conjunto é fechado sob multiplicação por escalar.

Portanto, o conjunto de todas as funções lineares $f(x) = mx + b$ com $m, b \in \mathbb{R}$ forma um subespaço vetorial de $V$.

**Exemplo 06:** No espaço das matrizes reais $2 \times 2$, $M_{(2,2)}$, considere o conjunto de todas as matrizes simétricas, ou seja, aquelas em que $A = A^T$. Esse conjunto forma um subespaço vetorial de $M_{(2,2)}$. Você pode demonstrar isso verificando as propriedades de um subespaço vetorial

Para tal, é imperativo investigar as três propriedades basilares:

1. **Presença da Matriz Nula:** A matriz nula em $M_{(2,2)}$ é a matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Nota-se que esta matriz é simétrica, posto que $A = A^T$. Portanto, a matriz nula está asseguradamente contida no conjunto em questão.

2. **Fechamento sob Adição:** Considerando duas matrizes simétricas $A$ e $B$, a sua soma $A + B$ é também simétrica, visto que $(A + B)^T = A^T + B^T = A + B$. Logo, o conjunto demonstra ser fechado sob adição.

3. **Fechamento sob Multiplicação por Escalar:** Para qualquer escalar $c$ e matriz simétrica $A$, a multiplicação por escalar $cA$ é igualmente simétrica, haja vista que $(cA)^T = cA^T = cA$. Deste modo, o conjunto revela-se fechado sob multiplicação por escalar.

Assim sendo, constata-se que o conjunto de todas as matrizes simétricas configura-se como um subespaço vetorial de $M_{(2,2)}$.

## 2.2 Combinação Linear

Dentro de um espaço vetorial, conforme demonstrado que podemos ter subconjuntos de espaços vetoriais, é possível a obtenção de novos vetores a partir de vetores dados (BOLDRINI et al., 1986).

**Definição 03:** Sejam $V$ um espaço vetorial $\mathbb{R}$, $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ e $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Então, o vetor $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n$ é um elemento de $V$ podendo ser chamado combinação linear de $v_1, \ldots, v_n$.

Se $V \subset W$, podemos adotar a notação $W = [v_1, \ldots, v_n]$, onde expandindo-o

$$W = [v_1, \ldots, v_n] = \{v \in V; v = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n, a_i \in \mathbb{R}, 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

**Exemplo 07:** Presuma um vetor $V = \mathbb{R}^3, v \in V, v \neq 0$. Se imaginarmos sua reta que contém o vetor $v$, onde, $[v] = av : a \in \mathbb{R}$

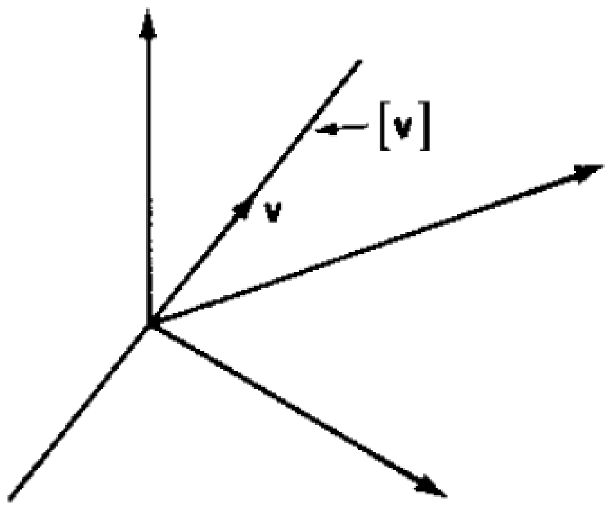



Figura 3 – Retirado de (BOLDRINI et al., 1986), pg. 113.

**Exemplo 08:** Se obtemos $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ e $v_3 \in [v_1, v_2]$, então $[v_1, v_2, v_3] = [v_1, v_2]$, então $v_3$ é um combinação linear de $v_1$ e $v_2$.

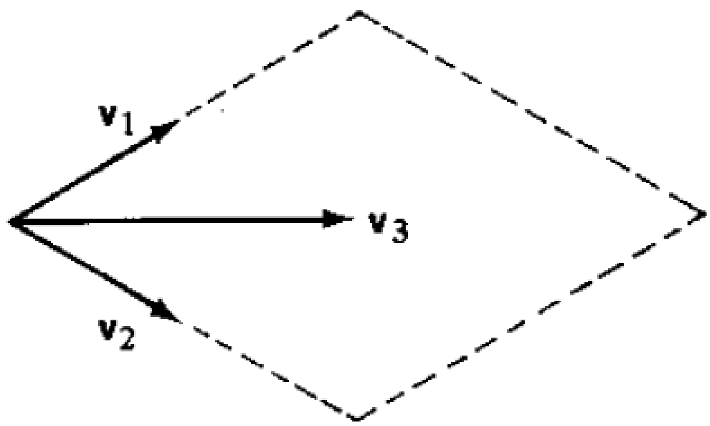



Figura 4 – Retirado de (BOLDRINI et al., 1986), pg. 113.

**Exemplo 09:** Consideremos o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ e os vetores $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Sejam também os escalares $a = 3$ e $b = -1$. Então temos, os seguintes elementos.

| **Vetor** | **Componentes** | **Escalar** |
|---|---|---|
| $\mathbf{v}$ | $2, 3, 1$ | $3$ |
| $\mathbf{w}$ | $1, -1, 2$ | $-1$ |

Tabela 1 – Vetores e escalares utilizados na combinação linear

Definimos a combinação linear dos vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ como:

$$a\mathbf{v} + b\mathbf{w} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aplicando as operações, obtemos:

$$a\mathbf{v} + b\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-1 \\ 9+1 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a combinação linear dos vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ com os coeficientes $a = 3$ e $b = -1$ é o vetor

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 2.3 Dependência e Independência Linear

Dado a combinação linear, devemos saber, a priori, se algum desses vetores não é combinação linear dos outros e assim por diante. Para isto precisamos saber sua dependência e independência linear.

**Definição 03:** Sejam $\mathbf{V}$ um espaço vetorial e $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbf{V}$. Dizemos que o conjunto $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ é linearmente independente (**LI**), ou que os vetores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ são **LI**, se a equação

$$a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n = 0$$

implica que $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$. No caso em que exista algum $a_i \neq 0$ dizemos que $v_1, \ldots, v_n$ é linearmente dependente (**LD**), ou que os vetores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ são **LD**.

**Teorema 02:** Uma combinação linear é **LD** se, e somente se um destes vetores for uma combinação linear dos outros.

$$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} = \mathbf{LD} \iff \exists i \mid \sum_{i \neq j} c_i \mathbf{v}_i$$

**Demonstração:** Sejam $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ **LD** e $a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_j\mathbf{v}_j + \ldots + a_n\mathbf{v}_n = 0$

Um dos coeficientes deve ser diferente de zero. Suponhamos que seja $a_j \neq 0$. Então

$$\mathbf{v}_j = -\frac{1}{a_j}(a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_{j-1}\mathbf{v}_{j-1} + +a_{j+1}\mathbf{v}_{j+1} + \ldots + a_n\mathbf{v})_\mathbf{n}$$

e portanto $\mathbf{v}_j = -\frac{a_1}{a_j}\mathbf{v}_1 + \ldots - \frac{a_n}{a_j}\mathbf{v}_n$

Logo, $\mathbf{v}_j$ é uma combinação linear dos outros vetores.

**Exemplo 10:** Sejam $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ e $v_1, v_2 \in \mathbf{V}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ é **LD** $\iff$ $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ estiverem na mesma reta, que passa pela origem. $(\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_2)$.

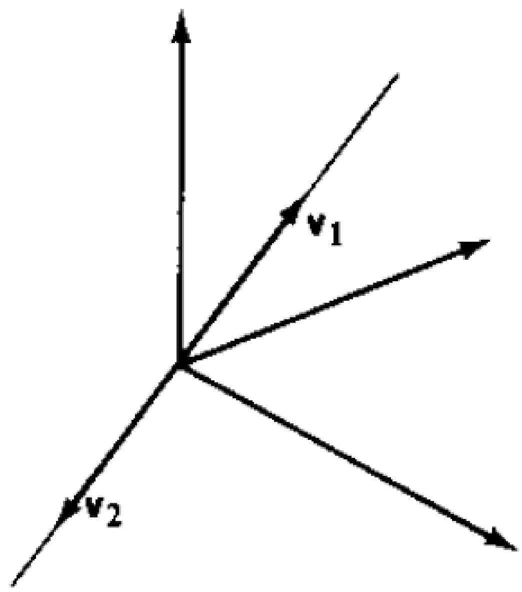



Figura 5 – Retirado de (BOLDRINI et al., 1986), pg. 115.

# 3 Transformações Lineares

Neste capítulo, iremos tratar sobre um tipo especial de função ou aplicação, onde, segundo (STEINBRUCH; WINTERLE, 1987), o domínio e o contradomínio são espaços vetoriais reais. Assim, tanto a variável independente como a variável dependente são vetores, razão pela qual essas funções são chamadas vetoriais.

Nosso estudo das funções vetoriais lineares em questão, será focado, nas transformações lineares.

**Definição 04:** Sejam V e W dois espaços vetoriais. Uma transformação linear (aplicação linear) é uma função de V em W, $F : V \to W$, que satisfaz as seguintes condições:

1. Para quaisquer $u$ e $v$ em $V$, $F(u + v) = F(u) + F(v)$.
2. Para quaisquer $k \in \mathbb{R}$ e $v \in V$, $F(kv) = kF(v)$.

$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{v} \in \mathbf{V} \text{ e } \forall k \in \mathbb{R}.$$

Para se dizer que $\mathbf{T}$ é uma transformação linear do espaço vetorial $\mathbf{V}$ no espaço vetorial $\mathbf{W}$, será denotado por $\mathbf{T} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$, onde $\mathbf{T}$ é a função, cada vetor $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ tem uma só imagem $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$, indicado por $\mathbf{w} = \mathbf{T}(\mathbf{v})$.

Tomemos por dois conjuntos de vetores, $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{W} = \mathbb{R}^3$.

Uma transformação de $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ associa vetores $\mathbf{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ com vetores $\mathbf{w} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

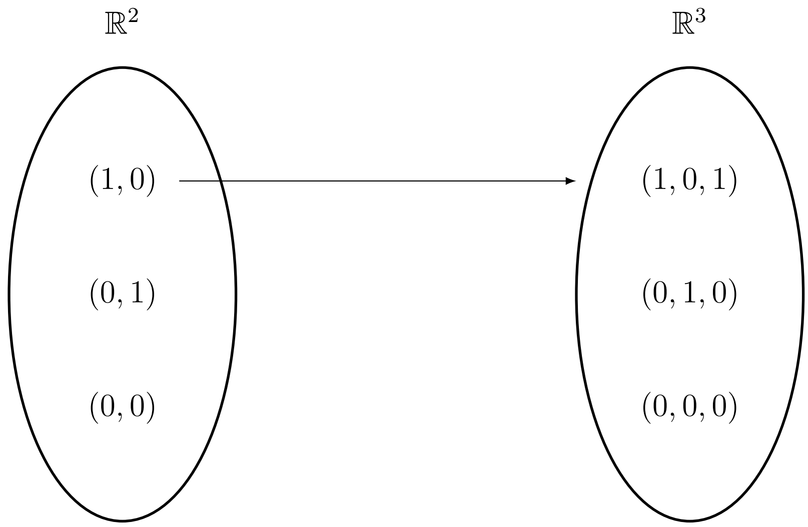
**Exemplo 11:** Declarado esta transformação linear $\mathbf{T}(x, y) = (x, y, x + y)$. Iremos selecionar alguns vetores em $\mathbb{R}^2$ e calcular suas imagens sob a transformação $\mathbf{T}$. Por exemplo, os vetores $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Para $(1, 0)$, temos:

$$\mathbf{T}(1, 0) = (1, 0, 1 + 0) = (1, 0, 1)$$

e para $(0, 1)$, temos:

$$\mathbf{T}(0, 1) = (0, 1, 0 + 1) = (0, 1, 1).$$

Segue a imagem em $\mathbb{R}^3$:




Uma função $\mathbf{T} : A \longrightarrow B$ com $\mathbf{T} = \{(a,p),(c,p),(c,s),(d,s),(e,q)\}$

# 4 Aplicações de Transformações Lineares

Aguardando pela Caroline Pires...

# 5 Considerações Finais

That’s all folks!

# Referências

BOLDRINI, J. L. et al. *Algebra Linear*. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1986. 12, 13, 14

CAMARGO, I. de; BOULOS, P. *Geometria analítica: um tratamento vetorial*. São Paulo: Prentice Hall, 2005. ISBN 9788587918918.

HOFFMAN, K.; KUNZE, R. *Álgebra Linear*. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1979.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. *Álgebra Linear*. Pearson Universidades, 1987. ISBN 9780074504123. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=q36CPgAACAAJ>. 15

ULHOA, C. F.; LOURENÇO, M. L. *Um Curso de Álgebra Linear*. 2. ed. São Paulo: EDUSP, 2018.