Hyslan Silva Cruz
Iara Regina Grilo Papais
Carolina Cristina Ferreira de Mello Pires

Transformações Lineares e suas aplicações

Link do vídeo

Suzano

2024

Hyslan Silva Cruz
Iara Regina Grilo Papais
Carolina Cristina Ferreira de Mello Pires

Transformações Lineares e suas aplicações

Monografia de graduação à Universidade Virtual do Estado de São Paulo, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciatura em Matemática.
Orientadora: Lorena Salvi Stringheta

Universidade Virtual do Estado de São Paulo

Orientadora: Lorena Salvi Stringheta

Suzano

2024

Este trabalho é dedicado às crianças adultas que,
quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.

Agradecimentos

A conclusão desta monografia representa um marco importante em nossas vidas acadêmica e profissional. Ao longo dessa jornada, tivemos a oportunidade de contar com o apoio e a colaboração de diversas pessoas e instituições, às quais expresso minha mais profunda gratidão.

À minha família e amigos,

minha base sólida e porto seguro em todos os momentos. Agradeço por acreditarem em nosso potencial, por incentivarem nossos sonhos e por celebrarem cada conquista ao nosso lado. A vocês, dedico este trabalho com imenso amor e reconhecimento.

A minha orientadora, Professora Lorena Salvi Stringheta,

reconheço a importância fundamental de sua orientação, sabedoria e paciência ao longo da pesquisa. Sua expertise e dedicação nos inspiraram e guiaram na construção deste trabalho. Agradeço pelas valiosas contribuições, pelo tempo dedicado e pela confiança depositada em nosso grupo.

Aos demais membros da banca examinadora,

Professores(as),

agradeço a oportunidade de apresentar nossa pesquisa e receber seus valiosos feedbacks. Agradeço por terem dedicado seu tempo e conhecimento à avaliação deste trabalho.

À Universidade Virtual do Estado de São Paulo,

minha segunda casa durante os anos de graduação. Agradeço à instituição por nos proporcionar uma formação de qualidade, por nos colocar em contato com professores excepcionais e por nos oferecer os recursos necessários para o desenvolvimento desta pesquisa de forma gratuita.

Aos colegas de curso e amigos da Licenciatura em Matemática,

com quem compartilhamos momentos de aprendizado, desafios e alegrias. Agradeço pelas trocas de conhecimento, pelo apoio mútuo e pela amizade que nos acompanham desde o início da graduação.

Aos projetos integradores e demais serviços de pesquisa além da plataforma acadêmica,

que nos proporcionaram acesso a materiais essenciais para a realização deste trabalho. Agradeço a todos os profissionais que me auxiliaram na busca por informações e na utilização de ferramentas para uma boa pesquisa.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho, nossa sincera gratidão. Cada palavra de incentivo, cada sugestão e cada ajuda foram valiosas para o nosso aprimoramento e para a conquista deste objetivo.

Este trabalho é fruto de um esforço coletivo e representa a soma de conhecimentos, experiências e apoio de muitas pessoas. Agradecemos a todos que fizeram parte dessa jornada e que nos ajudaram a alcançar este importante marco em nossas vidas.

"Hoje, ainda almejamos saber por que estamos aqui e de onde viemos.O desejo profundo da humanidade pelo conhecimento é justificativa suficiente para nossa busca contínua.

(Stephen Hawking)

Resumo

Só após ao fim da conclusão.

Palavras-chave: Transformação Linear, Álgebra Linear, Matrizes

Abstract

Same above.

Keywords: Linear Transformation, Linear Algebra. Matrices.

Lista de tabelas

Lista de símbolos

$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
$\exists$	Existe.
$\in$	Pertence.
$\mid$	Tal que.
$\therefore$	Portanto.
$\emptyset$	Conjunto vazio.
σ	Somatório.

Sumário

1 Introdução

Com o decorrer do tempo, depois da era de ouro da álgebra linear nos meados do século XVIII. Onde, Euler e Louis Lagrange publicaram o "Recherche d'Arithmétique", entre 1773 e 1775, no qual estudavam certos conceitos da transformação linear. Posteriormente, Johann Carl Friedrich Gauss, também estudou sobre assuntos que apresentou similaridade com a matriz de transformação linear.

Até se arrefecer o assunto no século XIX e XX, com Giuseppe Peano, onde foi cunhado o termo "sistema linear"com a primeira definição de axiomática para espaço vetorial. Nos dias atuais, a apresentação da álgebra linear, temas abordados nesse campo da matemática são frequentemente esquecidos, portanto, este estudo trata de buscar o entendimento e compreender sobre as transformações lineares em sua totalidade e aplicações no contexto atual contemporâneo.

Passado esse brevíssimo contexto histórico e motivador para a nossa pesquisa e deleite deste ramo de estudado, iremos nos adiantar a certos conceitos matemáticos elementares já bastantes fundamentados no decorrer dos anos escolares do ensino básico regular. Para isto, passaremos a certas definições matemáticas primordiais que serão apresentadas nesta monografia para as discussões advindas a posteriori neste estudo.

Portanto, dividimos esta monografia em 4 capítulos, a saber, revisão literária fundamentais, pesquisas de artigos, teses e discussões recentes sobre as transformações lineares em diversas aplicações, seu contexto educacional atual em questão de matéria aplicada e por conseguinte nossa metodologia utilizada, os resultados obtidos dessa pesquisa e, por fim, nossa discussão final, a saber, do uso da transformação linear atualmente.

Aguardando Iara nesta parte...

2 Espaços Vetoriais

Começaremos pela definição de um espaço vetorial, onde, podemos tratar como um vetor ao designar um elemento do espaço vetorial de um número $\mathbb{R}$ definido tal que:

Definição 01: Seja um conjunto V, não vazio, com duas operações: soma, $V \times V \rightarrow V$, e multiplicação por escalar, $R \times V \rightarrow V$, tais que, para quaisquer $u, v, w \in \mathbb{R}$, satisfaçam as propriedades:

1. $(u + v) + w = u + (v + w), \forall\, u, v, w \in V$ (propriedade associativa.)
2. $1u = u$.
3. $u + v = v + u, \forall\, u, v \in V$ (propriedade comutativa).
4. $\exists\, 0 \in V$ tal que $u + 0 = u$.
5. $\exists\, -u \in V$ tal que $u + (-u) = 0$.
6. $a(u + v) = au + av$.
7. $(a + b)v = av + bv$.
8. $(ab)v = a(bv)$.
9. $1u = u$.

Observação: 0 é o vetor nulo.

Observação: Limitaremos nossa discussão, demonstrações e aplicações dentro do conjunto dos números reais apenas.

Exemplo 01: Suponhamos uma matriz $M_{(2,2)}$, onde, é denotado por $M_{(m,n)}$, dado por $M = [a_{ij}]_{m \times n}$ podendo ser interpretada dessa forma, $V = M_{(2,2)}$, onde V, é um conjunto não vazio, seu escalar pertencente ao conjunto dos $\mathbb{R}$, que satisfazem todas as propriedades de um espaço vetorial.

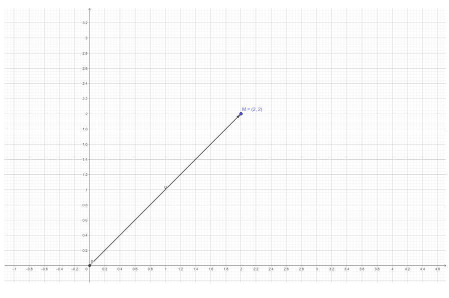


Figura 1 – Exemplo 01: Vetor no plano.

A partir disto, podemos perceber o uso analítico dos espaços vetoriais para resolução de problemas em geral. Vejamos mais alguns exemplos.

Exemplo 02: O exemplo anterior, trata-se de uma matriz de $\mathbb{R}^2$ pode ser dito como, no plano, agora iremos expandir para $\mathbb{R}^3$, seja um vetor $A = (x, y, z)$ ou representado pela forma matricial:

$$A = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Assim, por quaisquer números reais, podemos fazer uma projeção ortogonal no espaço, segue um exemplo traçado:

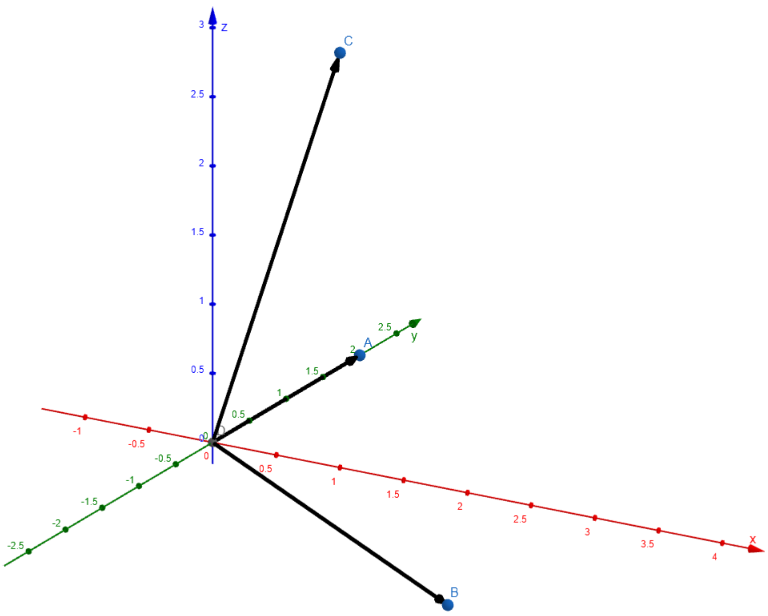


Figura 2 – Exemplo 02: Exemplo de vetor no espaço.

Exemplo 03: Consideremos $n - uplas$ de números reais.

$V = \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n); x_i \in \mathbb{R}\}$

e se $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n), v = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ e $a \in \mathbb{R}$,

$u + v = (x_1 + y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n)$ e $au = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n)$

Por tratarmos de uma quantidade n de números, o campo tridimensional deixa de ser visto, e passamos a ter $\mathbb{R}^n$ dimensões, as propriedades não deixam de valer independente a quantidade de dimensões.

2.1 Subespaços Vetoriais

Nesta seção iremos introduzir conceitos no estudo de espaço vetorial para subespaço vetorial.

Definição 02: Dado um espaço vetorial V, um subconjunto W, não vazio, será um subespaço vetorial de V se:

1. Para quaisquer $u, v \in W$ tivermos $u + v \in W$.
2. Para quaisquer $a \in R, u \in W$ tivermos $au \in W$.

Teorema 01: Um subconjunto não vazio W de V é um subespaço de V se, e somente se, para cada par de vetores α, β em W e cada escalar c em F, o vetor $c\alpha + \beta$ está em W.

Demonstração: Suponhamos que W seja um subconjunto não vazio de V, tal que, $c\alpha + \beta$ pertença a W para todos os vetores α, β em W e todos escalares c em F. Como W é não vazio, existe um vetor ρ em W, logo $(-1)\rho + \rho = 0$ está em W. Então se α é um vetor arbitrário em W e c é um escalar arbitrário, o vetor $c\alpha = c\alpha + 0$ está em W. Em particular $(-l)\alpha = -\alpha$ está em W. Finalmente se α e β estão em W, então $\alpha + \beta = 1\alpha + \beta$ está em W. Assim, W é um subespaço de V.

Exemplo 04: Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$. O conjunto de todos os vetores que residem no plano xy, ou seja, $\{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, forma um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Se o conjunto dado forma um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$, precisamos verificar as três propriedades fundamentais:

1. Contém o vetor nulo: O vetor nulo em $\mathbb{R}^3$ é $(0, 0, 0)$. Este vetor também está contido no plano xy, pois $z = 0$.
2. É fechado sob adição: Se tomarmos dois vetores $(x_1, y_1, 0)$ e $(x_2, y_2, 0)$ no plano xy, a sua soma será $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0)$, que também reside no plano xy.
3. É fechado sob multiplicação por escalar: Para qualquer escalar c e vetor $(x, y, 0)$ no plano xy, $c \cdot (x, y, 0) = (cx, cy, 0)$, que também está no plano xy.

Então, o conjunto de todos os vetores $(x, y, 0)$ com $x, y \in \mathbb{R}$ forma um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 05: No espaço vetorial das funções reais de uma variável real, $V = \{f(x) \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, considere o conjunto de todas as funções lineares, ou seja, $\{f(x) = mx+b \mid m, b \in \mathbb{R}\}$. Esse conjunto forma um subespaço vetorial de V. Novamente, você pode verificar as propriedades para confirmar.

Se o conjunto dado forma um subespaço vetorial de V, novamente precisamos verificar as três propriedades fundamentais:

1. Contém a função nula: A função nula em V é $f(x) = 0$. Esta função é uma função linear, pois pode ser escrita como $f(x) = 0 \cdot x + 0$. Portanto, a função nula está contida no conjunto.

2. É fechado sob adição: Se tomarmos duas funções lineares $f_1(x) = m_1x + b_1$ e $f_2(x) = m_2x + b_2$, a sua soma será $f_1(x) + f_2(x) = (m_1 + m_2)x + (b_1 + b_2)$, que também é uma função linear. Portanto, o conjunto é fechado sob adição.

3. É fechado sob multiplicação por escalar: Para qualquer escalar c e função linear $f(x) = mx + b$, a multiplicação por escalar $cf(x) = c(mx + b) = (cm)x + (cb)$ também é uma função linear. Assim, o conjunto é fechado sob multiplicação por escalar.

Portanto, o conjunto de todas as funções lineares $f(x) = mx + b$ com $m, b \in \mathbb{R}$ forma um subespaço vetorial de V.

Exemplo 06: No espaço das matrizes reais 2×2, $M_{(2,2)}$, considere o conjunto de todas as matrizes simétricas, ou seja, aquelas em que $A = A^T$. Esse conjunto forma um subespaço vetorial de $M_{(2,2)}$. Você pode demonstrar isso verificando as propriedades de um subespaço vetorial

Para tal, é imperativo investigar as três propriedades basilares:

1. **Presença da Matriz Nula:** A matriz nula em $M_{(2,2)}$ é a matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Nota-se que esta matriz é simétrica, posto que $A = A^T$. Portanto, a matriz nula está asseguradamente contida no conjunto em questão.

2. **Fechamento sob Adição:** Considerando duas matrizes simétricas A e B, a sua soma $A + B$ é também simétrica, visto que $(A + B)^T = A^T + B^T = A + B$. Logo, o conjunto demonstra ser fechado sob adição.

3. **Fechamento sob Multiplicação por Escalar:** Para qualquer escalar c e matriz simétrica A, a multiplicação por escalar cA é igualmente simétrica, haja vista que $(cA)^T = cA^T = cA$. Deste modo, o conjunto revela-se fechado sob multiplicação por escalar.

Assim sendo, constata-se que o conjunto de todas as matrizes simétricas configura-se como um subespaço vetorial de $M_{(2,2)}$.

2.2 Combinação Linear

Dentro de um espaço vetorial, conforme demonstrado que podemos ter subconjuntos de espaços vetoriais, é possível a obtenção de novos vetores a partir de vetores dados (BOLDRINI et al., 1986).

Definição 03: Sejam V um espaço vetorial $\mathbb{R}$, $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ e $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Então, o vetor $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n$ é um elemento de V podendo ser chamado combinação linear de $v_1, \ldots, v_n$.

Se $V \subset W$, podemos adotar a notação $W = [v_1, \ldots, v_n]$, onde expandindo-o

$$W = [v_1, \ldots, v_n] = \{v \in V; v = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n, a_i \in \mathbb{R}, 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

Exemplo 07: Presuma um vetor $V = \mathbb{R}^3, v \in V, v \neq 0$. Se imaginarmos sua reta que contém o vetor v, onde, $[v] = av : a \in \mathbb{R}$

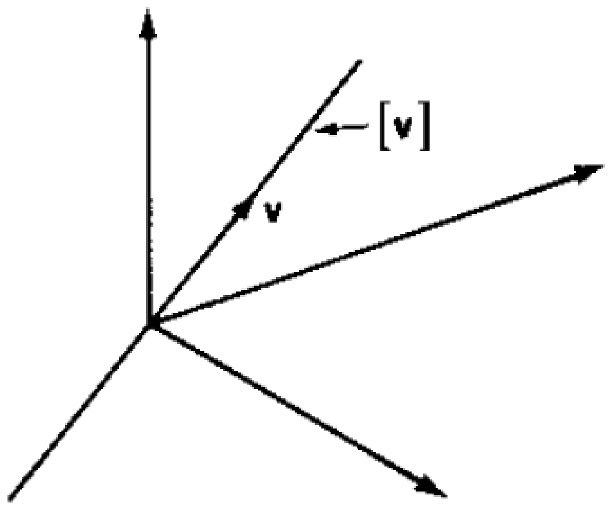


Figura 3 – Retirado de (BOLDRINI et al., 1986), pg. 113.

Exemplo 08: Se obtemos $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ e $v_3 \in [v_1, v_2]$, então $[v_1, v_2, v_3] = [v_1, v_2]$, então v_3 é um combinação linear de v_1 e v_2.

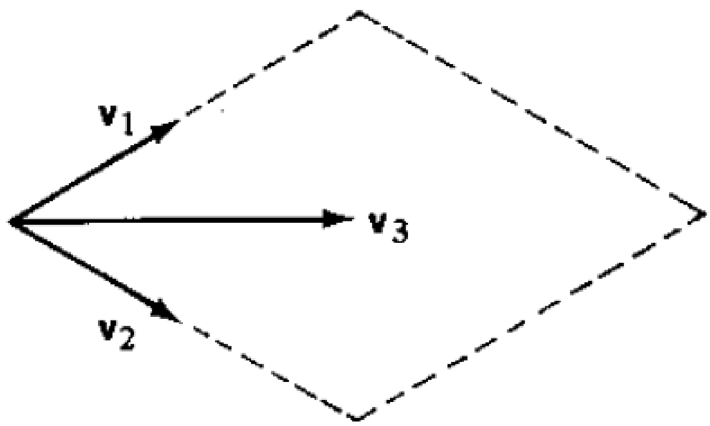


Figura 4 – Retirado de (BOLDRINI et al., 1986), pg. 113.

Exemplo 09: Consideremos o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ e os vetores $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Sejam também os escalares $a = 3$ e $b = -1$. Então temos, os seguintes elementos.

Vetor	Componentes	Escalar
$\mathbf{v}$	$2, 3, 1$	3
$\mathbf{w}$	$1, -1, 2$	-1

Tabela 1 – Vetores e escalares utilizados na combinação linear

Definimos a combinação linear dos vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ como:

$$a\mathbf{v} + b\mathbf{w} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aplicando as operações, obtemos:

$$a\mathbf{v} + b\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-1 \\ 9+1 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a combinação linear dos vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ com os coeficientes $a = 3$ e $b = -1$ é o vetor

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.3 Dependência e Independência Linear

Dado a combinação linear, devemos saber, a priori, se algum desses vetores não é combinação linear dos outros e assim por diante. Para isto precisamos saber sua dependência e independência linear.

Definição 03: Sejam $\mathbf{V}$ um espaço vetorial e $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbf{V}$. Dizemos que o conjunto $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ é linearmente independente (**LI**), ou que os vetores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ são **LI**, se a equação

$$a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n = 0$$

implica que $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$. No caso em que exista algum $a_i \neq 0$ dizemos que $v_1, \ldots, v_n$ é linearmente dependente (**LD**), ou que os vetores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ são **LD**.

Teorema 02: Uma combinação linear é **LD** se, e somente se um destes vetores for uma combinação linear dos outros.

$$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} = \mathbf{LD} \iff \exists i \mid \sum_{i \neq j} c_i \mathbf{v}_i$$

Demonstração: Sejam $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ **LD** e $a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_j\mathbf{v}_j + \ldots + a_n\mathbf{v}_n = 0$

Um dos coeficientes deve ser diferente de zero. Suponhamos que seja $a_j \neq 0$. Então

$$\mathbf{v}_j = -\frac{1}{a_j}(a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_{j-1}\mathbf{v}_{j-1} + +a_{j+1}\mathbf{v}_{j+1} + \ldots + a_n\mathbf{v})_{\mathbf{n}}$$

e portanto $\mathbf{v}_j = -\frac{a_1}{a_j}\mathbf{v}_1 + \ldots - \frac{a_n}{a_j}\mathbf{v}_n$

Logo, $\mathbf{v}_j$ é uma combinação linear dos outros vetores.

Exemplo 10: Sejam $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ e $v_1, v_2 \in \mathbf{V}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ é **LD** $\iff$ $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ estiverem na mesma reta, que passa pela origem. $(\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_2)$.

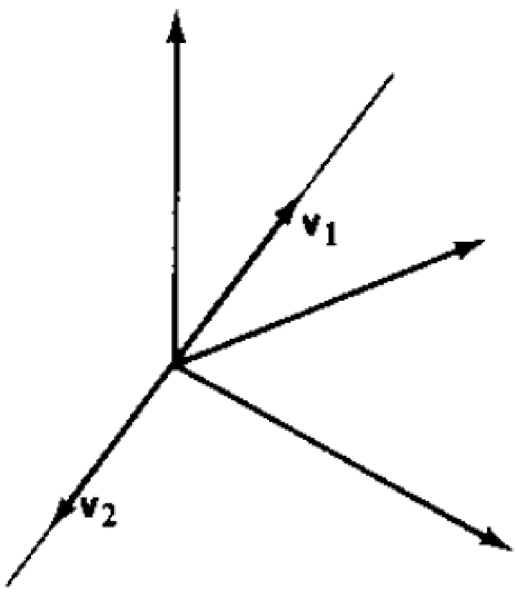


Figura 5 – Retirado de (BOLDRINI et al., 1986), pg. 115.

3 Transformações Lineares

Neste capítulo, iremos tratar sobre um tipo especial de função ou aplicação, onde, segundo (STEINBRUCH; WINTERLE, 1987), o domínio e o contradomínio são espaços vetoriais reais. Assim, tanto a variável independente como a variável dependente são vetores, razão pela qual essas funções são chamadas vetoriais.

Nosso estudo das funções vetoriais lineares em questão, será focado, nas transformações lineares.

Definição 04: Sejam $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ dois espaços vetoriais. Uma transformação linear (aplicação linear) é uma função de $\mathbf{V}$ em $\mathbf{W}$, $\mathbf{F} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$, que satisfaz as seguintes condições:

1. Para quaisquer $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em $\mathbf{V}$, $\mathbf{F}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{F}(u) + \mathbf{F}(v)$. **Homogeneidade**
2. Para quaisquer $k \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, $F(k\mathbf{v}) = k\mathbf{F}(\mathbf{v})$. **Aditividade**

No caso especial em que $\mathbf{V} = \mathbf{W}$, a transformação linear é denominada **operador linear** do espaço vetorial $\mathbf{V}$ (ANTON, 2010).

Válido em: $\forall \mathbf{v}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ e $\forall k \in \mathbb{R}$.

Trataremos $\mathbf{F}$ como $\mathbf{T}$ por convenção daqui em diante. Para se dizer que $\mathbf{T}$ é uma transformação linear do espaço vetorial $\mathbf{V}$ no espaço vetorial $\mathbf{W}$, será denotado por $\mathbf{T} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$, onde $\mathbf{T}$ é a função, cada vetor $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ tem uma só imagem $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$, indicado por $\mathbf{w} = \mathbf{T}(\mathbf{v})$.

Tomemos por dois conjuntos de vetores, $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{W} = \mathbb{R}^3$.

Uma transformação de $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ associa vetores $\mathbf{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ com vetores $\mathbf{w} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

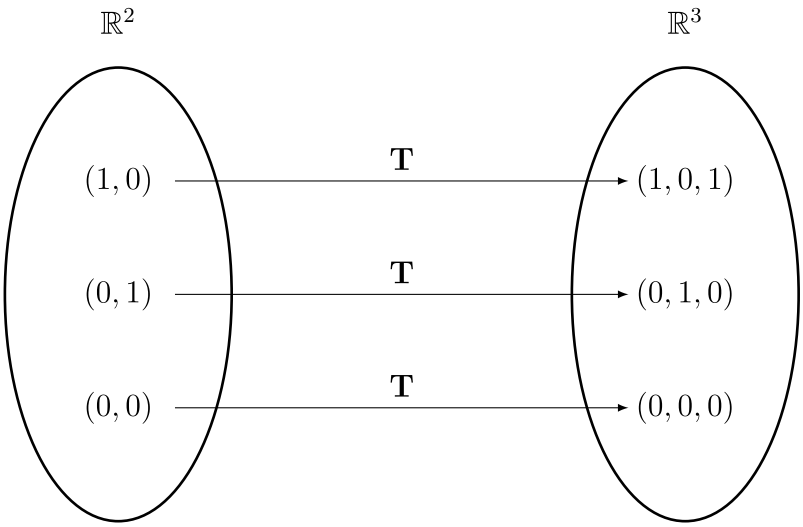
Exemplo 11: Declarado esta transformação linear $\mathbf{T}(x, y) = (x, y, x + y)$. Iremos selecionar alguns vetores em $\mathbb{R}^2$ e calcular suas imagens sob a transformação $\mathbf{T}$. Por exemplo, os vetores $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Para $(1, 0)$, temos:

$$\mathbf{T}(1, 0) = (1, 0, 1 + 0) = (1, 0, 1)$$

e para $(0, 1)$, temos:

$$\mathbf{T}(0, 1) = (0, 1, 0 + 1) = (0, 1, 1).$$

Segue a imagem em $\mathbb{R}^3$:



Uma função $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ com $\mathbf{T} = \{(x, y, x + y)\}$

Exemplo 12: Se tomarmos um vetor arbitrário e fazemos uma transformação linear idêntica, ou seja, 1α = α, é uma transformação linear de $\mathbf{V}$ em $\mathbf{V}$. A transformação é definida por $0\alpha = 0$, é também uma transformação linear de $\mathbf{V}$ em $\mathbf{V}$ (HOFFMAN; KUNZE, 1979).

De acordo com o exemplo acima, percebe-se, que será uma função onde o gráfico passa a reta pela origem se supormos uma função afim, $\mathbb{R}^1$ em $\mathbb{R}^1$. Uma transformação linear mantém combinações lineares $W = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$ são vetores que pertencem a $\mathbf{V}$ e possui seus escalares $c_1, \ldots, c_n$, então:

$$\mathbf{T}(c_1\mathbf{v}_1, \ldots, c_n\mathbf{v}_n) = \mathbf{T}(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = c_1(\mathbf{T}\mathbf{v}_1) + c_2(\mathbf{T}\mathbf{v}_2)$$

Exemplo 13: Tomemos um caso que desejamos dobrar nosso espaço vetorial, dado um vetor $\mathbf{V} = (2, 2); \mathbf{V} in \mathbb{R}^2$, a transformação linear será dada por, $\mathbf{T}(x, y) = (2x, 2y) in \mathbb{R}^2$. Nosso domínio e contradomínio está em $\mathbb{R}^2$, portanto o resultado será por $\mathbf{W} = (2 \times 2, 2 \times 2) \therefore \mathbf{W} = (4, 4)$

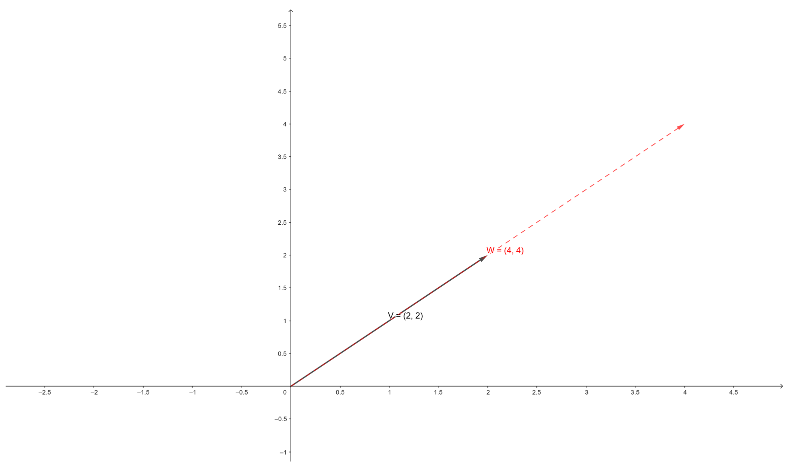


Figura 6 – Exemplo 13.

Para uma matriz de transformação linear $\mathbf{T}$ de $\mathbf{V}$ em si mesma, existe uma matriz única $\mathbf{A}$ de dimensão $n \times n$ que representa $\mathbf{T}$. Essa matriz é definida pela seguinte propriedade:

$$\mathbf{T}(\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{v})$$

para todo vetor $\mathbf{v}$ em $\mathbf{V}$. A matriz $\mathbf{A}$ é chamada de matriz de transformação de $\mathbf{T}$.

Consideremos agora no segmento da transformação linear e no campo da geometria o uso de operações como rotações, reflexões e projeções. Tomemos o espaço vetorial bidimensional $\mathbb{R}^2$ com base canônica $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ e $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$. A rotação de 90 graus no sentido anti-horário pode ser representada pela seguinte matriz de transformação:

$$\mathbf{R} = [[0, 1], [-1, 0]]$$

A matriz $\mathbf{R}$ chamada de matriz de rotação, possui algumas propriedades:

1. **Ortogonalidade:** A matriz $\mathbf{R}$ é ortogonal, ou seja sua transporta é inversa:
$$\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$$

2. **Determinante:** O determinante da matriz $\mathbf{R}$ é igual a -1.
$$\det(\mathbf{R}) = -1$$

Ao rotacionar um vetor $\mathbf{v} = (x, y)$ em 90 graus no sentido anti-horário, basta aplicar a matriz de rotação em $\mathbf{v}$.

$$\mathbf{v}' = \mathbf{R} \times \mathbf{v} = [[-1, 0], [0, -1]] \times [x, y] = [y, -x]$$

No caso em questão, o operador de rotação de um angulo qualquer como θ em torno e origem em $\mathbb{R}^2$, tratando-se o operador $\mathbf{R} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, resulta em $\mathbf{R}(u + v) = \mathbf{R}(u) + \mathbf{R}(v)$.

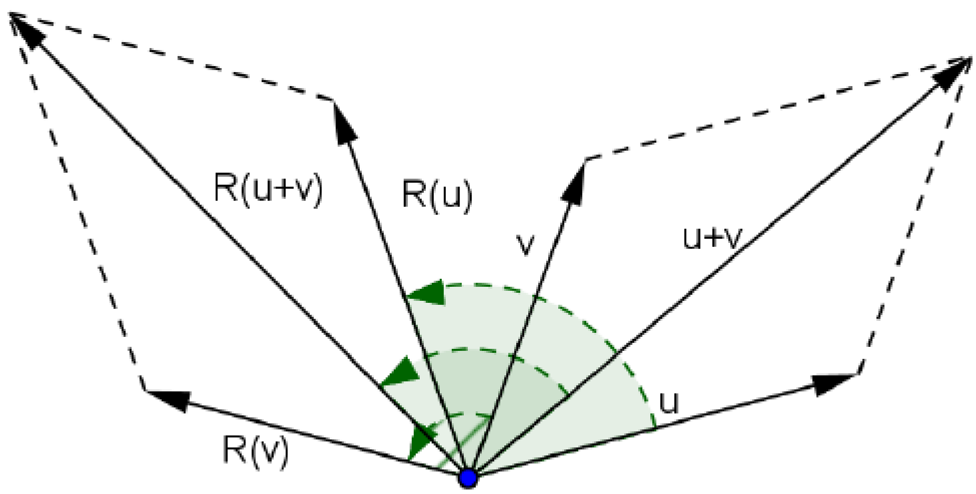


Figura 7 – Retirado de (NOGUEIRA, 2013)

3.1 Núcleo de uma Transformação Linear

Em transformações lineares. O núcleo, também chamado de espaço nulo de uma transformação linear $\mathbf{T}$, denotado por $\mathbf{N}(\mathbf{T})$, é o conjunto de todos os vetores no domínio de $\mathbf{T}$ que são mapeados para o vetor nulo. Portanto, representa o conjunto de soluções para a equação homogênea $\mathbf{T}(x) = 0$. O núcleo é definido como:

$$\mathbf{N}(\mathbf{T}) = \{x \in \mathbf{U} \mid \mathbf{T}(x) = 0\}$$

onde $\mathbf{U}$ representa o domínio de $\mathbf{T}$.

Para $\mathbf{N}(\mathbf{T}) = \{\mathbf{v} \in \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{T}(\mathbf{v})} = 0\}$, segue o diagrama:

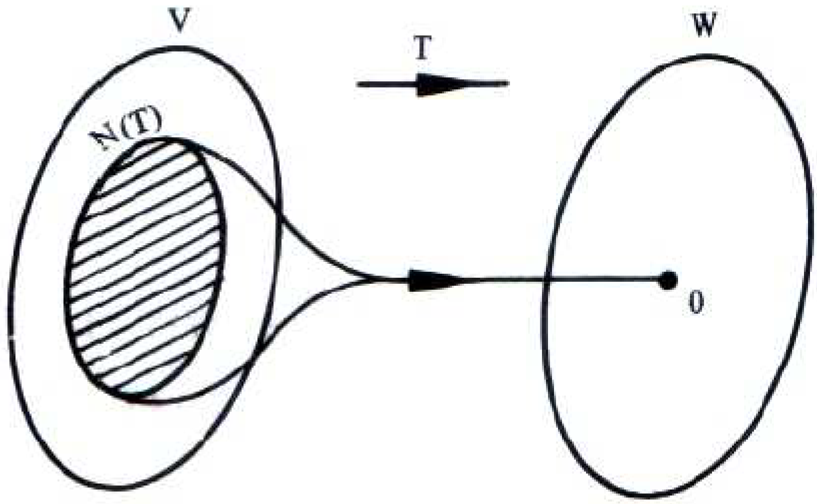


Figura 8 – Retirado de (STEINBRUCH; WINTERLE, 1987)

então, $\mathbf{N}(\mathbf{T}) \subset \mathbf{V}$ e $\mathbf{N}(\mathbf{T}) \neq \emptyset$, pois $0 \in \mathbf{N}(\mathbf{T})$, se $\mathbf{T}(0) = 0$.

De acordo com (LANG, 2003), que, enfatizou a importância do núcleo na compreensão da injetividade de uma transformação linear, ou seja, a capacidade de preservar a identidade dos vetores. O núcleo de uma transformação linear possui duas propriedades, que regem:

1. O núcleo de uma transformação linear $\mathbf{T} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$ é um subespaço vetorial de $\mathbf{V}$.

2. Uma transformação linear $\mathbf{T} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$ é injetora se, e somente se, $\mathbf{N}(\mathbf{T}) = \{0\}$.

Se $\mathbf{v})_1$ e $\mathbf{v})_2$ pertencem ao núcleo $\mathbf{N}(\mathbf{T})$ e k um número real qualquer. Então, $\mathbf{T}(\mathbf{v}_1) = 0$ e $\mathbf{T}(\mathbf{v}_2) = 0$. Logo:

$$\mathbf{T}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathbf{T}(\mathbf{v}_1) + \mathbf{T}(\mathbf{v}_2) = 0 + 0 = 0$$

portanto, $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in \mathbf{N}(\mathbf{T})$.

Exemplo 14: Dado $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid (x, y) \rightarrow x + y$, o núcleo, que iremos chamar, neste caso, $\ker \mathbf{T}$ é $\ker \mathbf{T} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 0\}$, onde a reta $y = -x$ é $\ker \mathbf{T}$ e $\ker \mathbf{T} = \{(x, -x); x \in$

$\mathbb{R}\} = \{x(1,-1); x \in \mathbb{R}\} = [(1,-1)]$. A imagem da transformação, ou seja, $Im\mathbf{T} = \mathbb{R}$, todavia, um vetor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}, \mathbf{w} = \mathbf{T}(\mathbf{w}, 0)$.

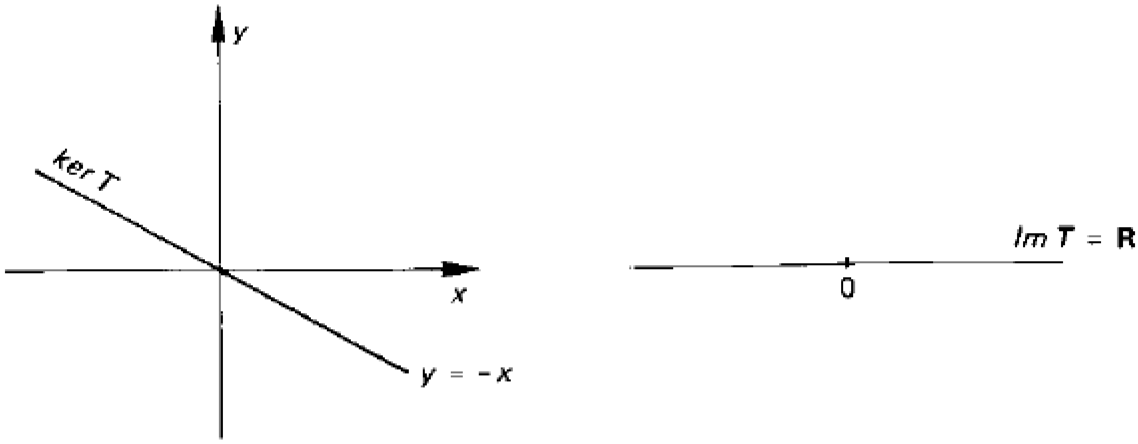


Figura 9 – Retirado de (BOLDRINI et al., 1986), pg. 152

Percebe-se que a imagem de uma transformação é $\mathbf{T} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}$ é um subespaço de $\mathbf{W}$, pois, se tomarmos dois vetores, $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in Im\mathbf{T}$ e $\alpha\mathbf{w}_1 \in Im\mathbf{T}$. Existem vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u} \in \mathbf{V} \mid \mathbf{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ e $\mathbf{T}(\mathbf{u}) = \alpha\mathbf{w}_1$.

Se $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in Im\mathbf{T}$, existem vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{V} \mid \mathbf{T}(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$ e $\mathbf{T}(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$. Tendo $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ e $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v}_1$, logo:

$$\mathbf{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{T}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathbf{T}(\mathbf{v}_1) + \mathbf{T}(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$$

e $\mathbf{T}(\mathbf{u}) = \mathbf{T}(\alpha\mathbf{v}_1) = \alpha\mathbf{T}(\mathbf{v}_1) = \alpha\mathbf{w}_1$, portanto, $Im\mathbf{T}$ é um subespaço vetorial de $\mathbf{W}$.

3.2 Isomorfismo

Um conceito intrigante surge com o isomorfismo. Uma transformação linear $\mathbf{T} : \mathbf{U} \longleftrightarrow \mathbf{V}$, entre espaços vetoriais $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$, que é bijetora. Um isomorfismo só é válido se atender a duas condições cruciais:

1. **Injetividade:** $\mathbf{T}$ é injetora, o que significa que mapeia vetores distintos do domínio para vetores distintos no contradomínio. Em outras palavras, $\mathbf{T}$ preserva a identidade.
2. **Sobrejetividade:** $\mathbf{T}$ é sobrejetora, mapeando todo vetor em $\mathbf{V}$ a partir de um vetor em $\mathbf{U}$. Isso significa que a imagem de $\mathbf{T}$ abrange todo o espaço $\mathbf{V}$.

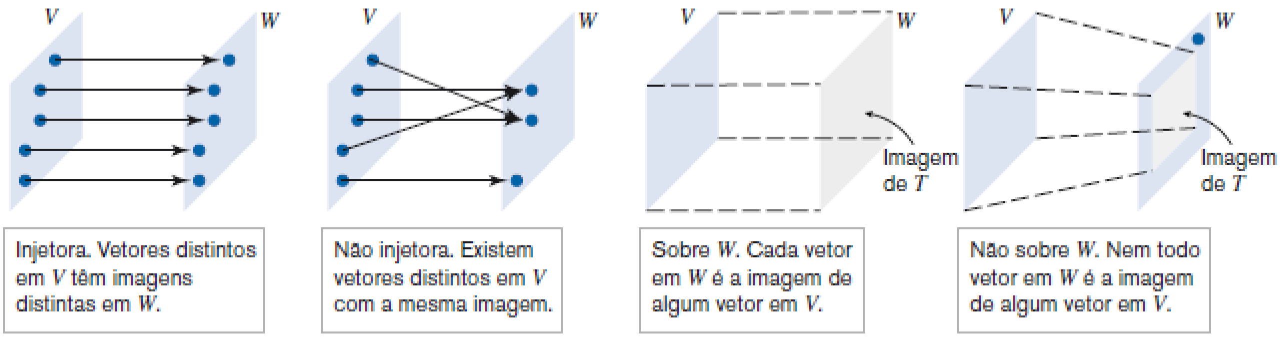


Figura 10 – Retirado de (ANTON, 2010), pg. 445

Se $\mathbf{T}$ satisfaz ambas as condições, podemos afirmar que ela estabelece uma correspondência biunívoca entre $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$. Essa relação especial permite que representamos cada vetor em $\mathbf{V}$ por um único vetor em $\mathbf{U}$, e vice-versa. É notável também ressaltar, que, todo espaço vetorial $\mathbf{V}$ de dimensão n é isomorfo a $\mathbb{R}^n$, portanto dois espaços vetoriais de dimensão finita são isomorfos se tiverem a mesma dimensão.

O núcleo de uma transformação e seu isomorfismo tem uma conexão que é o Teorema do Núcleo e da Imagem. Este teorema estabelece uma relação crucial entre a dimensão do núcleo, a dimensão da imagem e a dimensão do domínio de uma transformação linear $\mathbf{T}$:

$$\dim(\mathbf{N}(\mathbf{T})) + \dim(Im(\mathbf{T})) = \dim(\mathbf{U})$$

onde $Im(\mathbf{T})$ representa a imagem de $Im(\mathbf{T})$, o conjunto de todos os vetores em $\mathbf{V}$ que são alcançados por $\mathbf{T}$.

O Teorema do Núcleo e da Imagem oferece ferramentas valiosas para determinar se uma transformação linear é um isomorfismo. Se a dimensão do núcleo for zero e a dimensão da imagem for igual à dimensão do domínio, podemos concluir que $\mathbf{T}$ é um isomorfismo.

Teorema: Sejam E, F espaços vetoriais de dimensão finita. Para toda transformação linear $\mathbf{T} : E \longrightarrow F$ tem-se que $\dim E = \dim \mathbf{N}(\mathbf{T}) + \dim Im(\mathbf{T})$.

Se $\{\mathbf{T}(\mathbf{u}_1), \ldots, \mathbf{T}(\mathbf{u}_p)\}$ é uma base de $Im(\mathbf{T})$ e $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q\}$ é uma base de $\mathbf{N}(\mathbf{T})$ então $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q\}$ é uma base de E. Logo, se tivemos

$$\alpha_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_p + \beta\mathbf{v}_1 + \ldots + \beta\mathbf{u}_q = 0,$$

então, com a transformação em ambos os membros da igualdade, obtemos

$$\alpha_1\mathbf{T}(\mathbf{u}_1) + \ldots + \alpha_p\mathbf{T}(\mathbf{u}_p) = 0.$$

Como $\mathbf{T}(\mathbf{u}_1), \ldots, \mathbf{T}(\mathbf{u}_p)$ são **LI**, resultando em $\alpha_1 = \ldots = \alpha_p = 0$. Portanto se reduz a igualdade

$$\beta_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \beta_q\mathbf{v}_q = 0.$$

Da mesma forma $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q$ são **LI**, concluí-se que $\beta_1 = \ldots = \beta_q = 0$. Então ambos os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são $\mathbf{LI}$.

Agora, se considerarmos um vetor arbitrário $\mathbf{w} \in E$. Como $\mathbf{T}(\mathbf{w}) \in Im(\mathbf{T})$, definimos

$$\mathbf{T}(\mathbf{w}) = \alpha_1 \mathbf{T}(\mathbf{u}_1) + \ldots + \alpha_p \mathbf{T}(\mathbf{u}_p),$$

pois $\{\mathbf{T}(\mathbf{u}_1), \ldots, \mathbf{T}(\mathbf{u}_p)\}$ é uma base da imagem de $\mathbf{T}$. Manipulando a expressão temos

$$\mathbf{T}[\mathbf{w} - (\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_p \mathbf{u}_p)] = 0.$$

Dessa forma, o vetor $\mathbf{w} - (\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_p \mathbf{u}_p)$ pertence ao núcleo de $\mathbf{T}$, podendo ser expresso como uma combinação linear dos elementos da base $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q\}$. Temos então

$$(\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_p \mathbf{u}_p) = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \beta_q \mathbf{v}_q,$$

ou seja, $\mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_p \mathbf{u}_p + \beta_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \beta_q \mathbf{v}_q$. O que prova que os vetores $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q\}$ geram E e portanto constituem uma base.

4 Aplicações de Transformações Lineares

As aplicações lineares pode ser usado em diversas áreas, como:

Gráficos Computacionais e processamento de imagem: nesta área as transformações lineares são frequentemente usadas para rotacionar, escalar e transladar objetos ou imagens. Elas desempenham um papel crucial em transformações geométricas que são aplicados para criar efeitos em jogos, simulações e edições de imagens.

Processamento de sinal e telecomunicações: As transformações lineares são usadas em processamento de sinal para realizar operações como filtragem, modulação e demodulação. Elas são aplicadas em sistemas de comunicações como modulação de amplitude, modulação de frequência e modulação de fase, para transmitir e receber sinais de forma eficiente.

Análise de dados e aprendizado de máquina: Em análise de dados e aprendizado de máquinas, as transformações lineares são usadas para representar e transformar conjunto de dados. Por exemplo, a análise de componentes principais (PCA) envolve uma transformação linear que projeta os dados em um novo espaço de menor dimensionalidade enquanto preserva a maior parte da variância.

Economia e finanças: Nesta área as transformações lineares são aplicadas para descrever e analisar as relações entre variáveis econômicas, como oferta e demanda, investimentos e retornos financeiros. Elas são usadas em modelos de regressão linear, análise de séries temporais e precificação de ativos financeiros.

Engenharia e física: Na engenharia e física, as transformações lineares são fundamentais para descrever sistemas físicos e resolver problemas de engenharia. Elas são usadas em mecânica para representar sistemas de equações diferenciais lineares que descrevem o movimento de corpos sólidos e fluidos, em eletrônica para modelar circuitos elétricos lineares e em controle de sistemas para projetar controladores lineares.

No exemplo abaixo foi selecionado a área de engenharia em análise de estruturas estáticas, no qual calcula a força em cada membro que compõe a estrutura, no caso das treliças que será o caso analise temos barras e juntas.

Em análise de estruturas estáticas, uma aplicação comum de transformação linear é na resolução de sistemas de equações lineares para determinar as forças internas e externas em cada membro da estrutura.

Por exemplo, considere uma treliça, que é uma estrutura composta por membros retos ligados por juntas. Para analisar as forças em cada membro da treliça sob diferentes condições de carga, pode-se usar transformações lineares para representar as forças em cada membro em termos de forças externas aplicadas e das reações nas juntas.

Ao formular as equações de equilíbrio para a estrutura, elas podem ser representadas como um sistema de equações lineares. A aplicação de técnicas de álgebra linear, como métodos de matriz e transformações, permite resolver eficientemente esses sistemas e determinar as forças em cada membro da treliça. Essa análise é crucial para garantir que a estrutura seja segura e capaz de suportar as cargas esperadas. Suponha que temos uma treliça simples com três membros e quatro nós, como mostrado abaixo:

1 / / 2——3

Podemos atribuir forças desconhecidas em cada membro da treliça (F1, F2, F3) e forças de reação nas juntas (R1x, R1y, R3x, R3y). Podemos então escrever as equações de equilíbrio para cada nó:

Para o nó 1:

$\sigma Fx = R1x - F1 = 0$ $\sigma Fy = R1y = 0$ Para o nó 2:

$\sigma Fx = -F1 = 0$ $\sigma Fy = -F2 = 0$ Para o nó 3:

$\sigma Fx = -R3x + F1 = 0$ $\sigma Fy = R3y - F3 = 0$

Além disso, podemos ter equações de equilíbrio global, como a soma das forças horizontais e verticais igual a zero.

Essas equações formam um sistema de equações lineares que pode ser representado na forma matricial Ax = b, onde A é a matriz de coeficientes, x é o vetor de incógnitas (neste caso, as forças em cada membro e as reações nas juntas) e b é o vetor de termos constantes (neste caso, zeros devido ao equilíbrio).

Ao resolver esse sistema linear, podemos determinar as forças em cada membro da treliça e as reações nas juntas, o que nos permite analisar a estabilidade e a integridade estrutural da treliça.

5 Considerações Finais

That's all folks!

Referências

AMORIM, S. R. de. *Quatro aplicações da álgebra linear na engenharia* — Universidade Federal de Alagoas, Delmiro Gouveia, 2017.

ANTON, H. *Elementary Linear Algebra*. John Wiley & Sons, 2010. ISBN 9780470458211. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=YmcQJoFyZ5gC>. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 24.

BOLDRINI, J. L. et al. *Algebra Linear*. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1986. Citado 4 vezes nas páginas 16, 17, 18 e 23.

CAMARGO, I. de; BOULOS, P. *Geometria analítica: um tratamento vetorial*. São Paulo: Prentice Hall, 2005. ISBN 9788587918918.

CARVALHO, J. de. *Introdução à álgebra linear*. Instituto de Matemática Pura e Aplicado, 1971. (Monografías de matemática). Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=CnIRHQAACAAJ>.

FIGUEREIDO, L. M. *Álgebra linear I*. 3. ed. [S.l.: s.n.], 2009. v. 1. ISBN 8589200442.

HOFFMAN, K.; KUNZE, R. *Álgebra Linear*. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1979. Citado na página 20.

LANG, S. *Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2003. ISBN 9788573932539. Citado na página 22.

NOGUEIRA, L. B. *Transformações lineraes no plano e aplicações*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Goiás, Instituo de Matemática e Estatística, 2013. Citado na página 21.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. *Álgebra Linear*. Pearson Universidades, 1987. ISBN 9780074504123. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=q36CPgAACAAJ>. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 22.

STRANG, G. *Álgebra linear e suas aplicações*. Cengage Learning, 2010. ISBN 9788522107445. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=T8QGRAAACAAJ>.

ULHOA, F. C.; LOURENÇO, M. L. *Um Curso de Álgebra Linear*. 2. ed. São Paulo: EDUSP, 2018.