

Hyslan Silva Cruz
Iara Regina Grilo Papais
Carolina Cristina Ferreira de Mello Pires

Transformações Lineares e suas aplicações

[Link do vídeo](#)

Suzano
2024

Hyslan Silva Cruz
Iara Regina Grilo Papais
Carolina Cristina Ferreira de Mello Pires

Transformações Lineares e suas aplicações

Monografia de graduação à Universidade Virtual do Estado de São Paulo, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Lorena Salvi Stringheta

Universidade Virtual do Estado de São Paulo

Orientadora: Lorena Salvi Stringheta

Suzano

2024

*Este trabalho é dedicado às crianças adultas que,
quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.*

Agradecimentos

A conclusão desta monografia representa um marco importante em nossas vidas acadêmica e profissional. Ao longo dessa jornada, tivemos a oportunidade de contar com o apoio e a colaboração de diversas pessoas e instituições, às quais expresso minha mais profunda gratidão.

À minha família e amigos,

minha base sólida e porto seguro em todos os momentos. Agradeço por acreditarem em nosso potencial, por incentivarem nossos sonhos e por celebrarem cada conquista ao nosso lado. A vocês, dedico este trabalho com imenso amor e reconhecimento.

A minha orientadora, Professora Lorena Salvi Stringheta,

reconheço a importância fundamental de sua orientação, sabedoria e paciência ao longo da pesquisa. Sua expertise e dedicação nos inspiraram e guiaram na construção deste trabalho. Agradeço pelas valiosas contribuições, pelo tempo dedicado e pela confiança depositada em nosso grupo.

Aos demais membros da banca examinadora,

Professores(as),

agradeço a oportunidade de apresentar nossa pesquisa e receber seus valiosos feedbacks. Agradeço por terem dedicado seu tempo e conhecimento à avaliação deste trabalho.

À Universidade Virtual do Estado de São Paulo,

minha segunda casa durante os anos de graduação. Agradeço à instituição por nos proporcionar uma formação de qualidade, por nos colocar em contato com professores excepcionais e por nos oferecer os recursos necessários para o desenvolvimento desta pesquisa de forma gratuita.

Aos colegas de curso e amigos da Licenciatura em Matemática,

com quem compartilhamos momentos de aprendizado, desafios e alegrias. Agradeço pelas trocas de conhecimento, pelo apoio mútuo e pela amizade que nos acompanham desde o início da graduação.

Aos projetos integradores e demais serviços de pesquisa além da plataforma acadêmica,

que nos proporcionaram acesso a materiais essenciais para a realização deste trabalho. Agradeço a todos os profissionais que me auxiliaram na busca por informações e na utilização de ferramentas para uma boa pesquisa.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho,

nossa sincera gratidão. Cada palavra de incentivo, cada sugestão e cada ajuda foram valiosas para o nosso aprimoramento e para a conquista deste objetivo.

Este trabalho é fruto de um esforço coletivo e representa a soma de conhecimentos, experiências e apoio de muitas pessoas. Agradecemos a todos que fizeram parte dessa jornada e que nos ajudaram a alcançar este importante marco em nossas vidas.

*“Hoje, ainda almejamos saber por que
estamos aqui e de onde viemos. O desejo
profundo da humanidade pelo conhecimento é
justificativa suficiente para nossa busca contínua.
(Stephen Hawking)*

Resumo

Só após ao fim da conclusão.

Palavras-chave: Transformação Linear, Álgebra Linear, Matrizes

Abstract

Same above.

Keywords: Linear Transformation, Linear Algebra. Matrices.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Um vetor no plano.	16
Figura 2 – Exemplo de vetor no espaço.	17
Figura 3 – Combinação linear de Vetores (BOLDRINI et al., 1986), pg. 113.	20
Figura 4 – Combinação de três vetores lineares (BOLDRINI et al., 1986), pg. 113.	20
Figura 5 – Vetores linearmente dependentes (BOLDRINI et al., 1986), pg. 115.	22
Figura 6 – Base de um vetor em \mathbb{R}^3 (CAMARGO; BOULOS, 2005), pg. 52.	23
Figura 7 – Transformação linear dobro de um vetor.	26
Figura 8 – Transformada de rotação de um vetor (NOGUEIRA, 2013).	27
Figura 9 – Diagrama do núcleo de uma transformação linear (STEINBRUCH; WINTERLE, 1987).	28
Figura 10 – Imagem de um núcleo de transformação linear (BOLDRINI et al., 1986), pg. 152.	29
Figura 11 – Diagrama do isomorfismo e sua imagem (ANTON, 2010), pg. 445.	30
Figura 12 – Diagrama de circuito elétrico (AMORIM, 2017).	32
Figura 13 – Circuito de malha de resistência elétrica (AMORIM, 2017).	33

Lista de tabelas

Tabela 1 – Vetores e escalares utilizados na combinação linear	20
--	----

Lista de abreviaturas e siglas

AL	Álgebra Linear.
EV	Espaço Vetorial.
TL	Transformação Linear.
LD	Linearmente Dependente.
LI	Linearmente Independente.

Lista de símbolos

\mathbb{R} Conjunto dos números reais.

\exists Existe.

\forall Para todo.

\in Pertence.

$|$ Tal que.

\therefore Portanto.

\emptyset Conjunto vazio.

\Longleftrightarrow Se, e somente se.

Σ Somatório.

\cap Interseção.

Ω Letra grega Omega.

α Letra grega Alfa.

β Letra grega Beta.

θ Letra grega Theta.

ρ Letra grega Rho.

A^T Matriz transposta.

\dim Dimensão.

\ker Núcleo.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Justificativa	13
1.1.1	Objetivo Geral	14
1.1.2	Objetivos Específicos	14
2	ESPAÇOS VETORIAIS	15
2.1	Subespaços Vetoriais	17
2.2	Combinação Linear	19
2.3	Dependência e Independência Linear	21
2.4	Base	22
2.5	Dimensão	24
3	TRANSFORMAÇÕES LINEARES	25
3.1	Núcleo de uma Transformação Linear	28
3.2	Isomorfismo	29
4	APLICAÇÕES DE TRANSFORMAÇÕES LINEARES	32
4.1	Circuitos Elétricos	32
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	38
	REFERÊNCIAS	39

1 Introdução

Uma área da Matemática que tem implicações na computação gráfica, genética, criptografia, redes elétricas entre outros é a Álgebra Linear (AL). Com estrutura que permite um tratamento algébrico simples, a AL estuda os aspectos relacionados ao Espaço Vetorial (EV). Um conceito central da AL é a Transformação Linear (TL), que desempenham papel fundamental na análise e compreensão dos sistemas lineares de equações, geometria analítica, física, engenharia e outros campos de estudo (FIGUEREIDO, 2009).

Contextualizando o início dos estudos da AL, que é o estudo dos espaços vetoriais e das TL entre eles e possui variadas aplicações (SOUZA SILVA; COSTA DA SILVA, 2017), nos meados do século XVIII, Euler e Louis Lagrange publicaram o "Recherche d'Arithmétique", entre 1773 e 1775, no qual estudavam certos conceitos da TL. Posteriormente, Johann Carl Friedrich Gauss, também estudou sobre assuntos que apresentou similaridade com a matriz de transformação linear.

No século XIX e XX, Giuseppe Peano cunha o termo "sistema linear" com a primeira definição de axiomática para espaço vetorial. Atualmente, a apresentação da AL, temas abordados nesse campo da matemática são frequentemente esquecidos. Este estudo busca o entendimento e compreender sobre as transformações lineares em sua totalidade e aplicações no contexto atual contemporâneo.

Passo esse brevíssimo contexto histórico e motivador para a nossa pesquisa e deleite desramo de estudado, iremos nos adiantar a certos conceitos matemáticos elementares já bastantes fundamentados no decorrer dos anos escolares do ensino básico regular. para isto, passaremos a certas definições matemáticas primordiais que serão apresentadas nesta monografia para as discussões advindas a posteriori neste estudo.

Portanto, dividimos esta monografia em 4 capítulos: revisão literária fundamentais, pesquisas de artigos, teses e discussões recentes sobre as transformações lineares em diversas aplicações, seu contexto educacional atual em questão de matéria aplicada e por conseguinte nossa metodologia utilizada, os resultados obtidos dessa pesquisa e, por fim, nossa discussão final, a saber, do uso da transformação linear atualmente.

1.1 Justificativa

As transformações lineares se fazem presentes em diversos campos da matemática, e sua aplicação é fundamental para a solidificar a base teórica de problemas práticos. A partir da compreensão de conceitos e das propriedades das TL, a modelagem e a solução de problemas complexos são facilitadas, como na tecnologia e computação, por exemplo.

Procura-se contribuir com o raciocínio lógico e a capacidade de abstração, necessários para o desenvolvimento das habilidades matemáticas e analíticas. Essa investigação visa contribuir com o avanço do conhecimento nessa área e fundamentar o desenvolvimento de novos métodos, teorias e aplicações.

1.1.1 Objetivo Geral

Este trabalho objetiva compreender a aplicação da transformação linear.

1.1.2 Objetivos Específicos

Como objetivos específicos, são apresentados:

- Uso da transformação linear na sociedade;
- Aplicação em modelagem matemática e em contexto computacional da transformação linear;
- Contextualização da transformação linear no campo da inteligência artificial.

2 Espaços Vetoriais

Começaremos pela definição de um espaço vetorial utilizando aquelas apresentadas por (BOLDRINI et al., 1986) e (ULHOA; LOURENÇO, 2018), onde, podemos tratar como um vetor ao designar um elemento do espaço vetorial de um número \mathbb{R} definido tal que:

Definição 01: Seja um conjunto V , não vazio, com duas operações: soma, $V \times V \rightarrow V$, e multiplicação por escalar, $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$, tais que, para quaisquer $u, v, w \in V$, satisfaçam as propriedades:

1. $(u + v) + w = u + (v + w), \forall u, v, w \in V$ (propriedade associativa.)
2. $1u = u$.
3. $u + v = v + u, \forall u, v \in V$ (propriedade comutativa).
4. $\exists 0 \in V$ tal que $u + 0 = u$.
5. $\exists -u \in V$ tal que $u + (-u) = 0$.
6. $a(u + v) = au + av$.
7. $(a + b)v = av + bv$.
8. $(ab)v = a(bv)$.
9. $1u = u$.

Observação: 0 é o vetor nulo.

Observação: Limitaremos nossa discussão, demonstrações e aplicações dentro do conjunto dos números reais apenas.

Exemplo 01: Suponhamos uma matriz $M_{(2,2)}$, onde, é denotado por $M_{(m,n)}$, dado por $M = [a_{ij}]_{m \times n}$ podendo ser interpretada dessa forma, $V = M_{(2,2)}$, onde V , é um conjunto não vazio, seu escalar pertencente ao conjunto dos \mathbb{R} , que satisfazem todas as propriedades de um espaço vetorial.

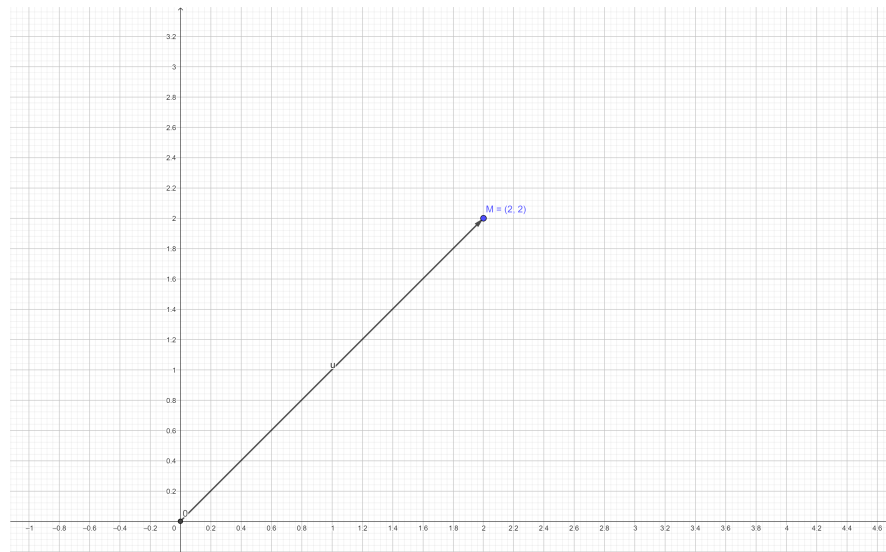


Figura 1 – Um vetor no plano.

A partir disto, podemos perceber o uso analítico dos espaços vetoriais para resolução de problemas em geral. Vejamos mais alguns exemplos.

Exemplo 02: O exemplo anterior, trata-se de uma matriz de \mathbb{R}^2 pode ser dito como, no plano, agora iremos expandir para \mathbb{R}^3 , seja um vetor $A = (x, y, z)$ ou representado pela forma matricial:

$$A = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Assim, por quaisquer números reais, podemos fazer uma projeção ortogonal no espaço, segue um exemplo traçado:

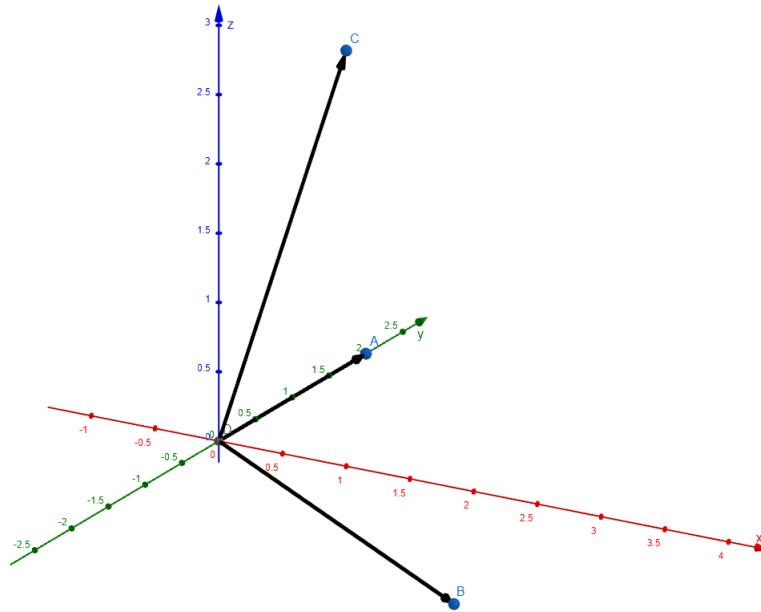


Figura 2 – Exemplo de vetor no espaço.

Exemplo 03: Consideremos n – uplas de números reais.

$$V = \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{R}\}$$

e se $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $v = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ e $a \in \mathbb{R}$,

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \text{ e } au = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n)$$

Por tratarmos de uma quantidade n de números, o campo tridimensional deixa de ser visto, e passamos a ter \mathbb{R}^n dimensões, as propriedades não deixam de valer independente a quantidade de dimensões.

2.1 Subespaços Vetoriais

Nesta seção iremos introduzir conceitos no estudo de espaço vetorial para subespaço vetorial.

Definição 02: Dado um espaço vetorial V , um subconjunto W , não vazio, será um subespaço vetorial de V se:

1. Para quaisquer $u, v \in W$ tivermos $u + v \in W$.
2. Para quaisquer $a \in \mathbb{R}, u \in W$ tivermos $au \in W$.

Teorema 01: Um subconjunto não vazio W de V é um subespaço de V se, e somente se, para cada par de vetores α, β em W e cada escalar c em F , o vetor $c\alpha + \beta$ está em W .

Demonstração: Suponhamos que W seja um subconjunto não vazio de V , tal que, $c\alpha + \beta$ pertença a W para todos os vetores α, β em W e todos escalares c em F . Como W é não vazio, existe um vetor ρ em W , logo $(-1)\rho + \rho = 0$ está em W . Então se α é um vetor arbitrário em W e c é um escalar arbitrário, o vetor $c\alpha = c\alpha + 0$ está em W . Em particular $(-1)\alpha = -\alpha$ está em W . Finalmente se α e β estão em W , então $\alpha + \beta = 1\alpha + \beta$ está em W . Assim, W é um subespaço de V .

Exemplo 04: Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^3 . O conjunto de todos os vetores que residem no plano xy , ou seja, $\{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, forma um subespaço vetorial de \mathbb{R}^3 .

Se o conjunto dado forma um subespaço vetorial de \mathbb{R}^3 , precisamos verificar as três propriedades fundamentais:

1. Contém o vetor nulo: O vetor nulo em \mathbb{R}^3 é $(0, 0, 0)$. Este vetor também está contido no plano xy , pois $z = 0$.
2. É fechado sob adição: Se tomarmos dois vetores $(x_1, y_1, 0)$ e $(x_2, y_2, 0)$ no plano xy , a sua soma será $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0)$, que também reside no plano xy .
3. É fechado sob multiplicação por escalar: Para qualquer escalar c e vetor $(x, y, 0)$ no plano xy , $c \cdot (x, y, 0) = (cx, cy, 0)$, que também está no plano xy .

Então, o conjunto de todos os vetores $(x, y, 0)$ com $x, y \in \mathbb{R}$ forma um subespaço vetorial de \mathbb{R}^3 .

Exemplo 05: No espaço vetorial das funções reais de uma variável real, $V = \{f(x) \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$, considere o conjunto de todas as funções lineares, ou seja, $\{f(x) = mx + b \mid m, b \in \mathbb{R}\}$. Esse conjunto forma um subespaço vetorial de V . Novamente, você pode verificar as propriedades para confirmar.

Se o conjunto dado forma um subespaço vetorial de V , novamente precisamos verificar as três propriedades fundamentais:

1. Contém a função nula: A função nula em V é $f(x) = 0$. Esta função é uma função linear, pois pode ser escrita como $f(x) = 0 \cdot x + 0$. Portanto, a função nula está contida no conjunto.
2. É fechado sob adição: Se tomarmos duas funções lineares $f_1(x) = m_1x + b_1$ e $f_2(x) = m_2x + b_2$, a sua soma será $f_1(x) + f_2(x) = (m_1 + m_2)x + (b_1 + b_2)$, que também é uma função linear. Portanto, o conjunto é fechado sob adição.
3. É fechado sob multiplicação por escalar: Para qualquer escalar c e função linear $f(x) = mx + b$, a multiplicação por escalar $cf(x) = c(mx + b) = (cm)x + (cb)$ também é uma função linear. Assim, o conjunto é fechado sob multiplicação por escalar.

Portanto, o conjunto de todas as funções lineares $f(x) = mx + b$ com $m, b \in \mathbb{R}$ forma um subespaço vetorial de V .

Exemplo 06: No espaço das matrizes reais 2×2 , $M_{(2,2)}$, considere o conjunto de todas as matrizes simétricas, ou seja, aquelas em que $A = A^T$. Esse conjunto forma um subespaço vetorial de $M_{(2,2)}$. Você pode demonstrar isso verificando as propriedades de um subespaço vetorial

Para tal, é imperativo investigar as três propriedades basilares:

1. **Presença da Matriz Nula:** A matriz nula em $M_{(2,2)}$ é a matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Nota-se que esta matriz é simétrica, posto que $A = A^T$. Portanto, a matriz nula está asseguradamente contida no conjunto em questão.
2. **Fechamento sob Adição:** Considerando duas matrizes simétricas A e B , a sua soma $A + B$ é também simétrica, visto que $(A + B)^T = A^T + B^T = A + B$. Logo, o conjunto demonstra ser fechado sob adição.
3. **Fechamento sob Multiplicação por Escalar:** Para qualquer escalar c e matriz simétrica A , a multiplicação por escalar cA é igualmente simétrica, haja vista que $(cA)^T = cA^T = cA$. Deste modo, o conjunto revela-se fechado sob multiplicação por escalar.

Assim sendo, constata-se que o conjunto de todas as matrizes simétricas configura-se como um subespaço vetorial de $M_{(2,2)}$.

2.2 Combinação Linear

Dentro de um espaço vetorial, conforme demonstrado que podemos ter subconjuntos de espaços vetoriais, é possível a obtenção de novos vetores a partir de vetores dados (BOLDRINI et al., 1986).

Definição 03: Sejam V um espaço vetorial \mathbb{R} , $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ e $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Então, o vetor $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$ é um elemento de V podendo ser chamado combinação linear de v_1, \dots, v_n .

Se $V \subset W$, podemos adotar a notação $W = [v_1, \dots, v_n]$, onde expandindo-o

$$W = [v_1, \dots, v_n] = \{v \in V; v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n, a_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$$

Exemplo 07: Presuma um vetor $V = \mathbb{R}^3$, $v \in V, v \neq 0$. Se imaginarmos sua reta que contém o vetor v , onde, $[v] = av : a \in \mathbb{R}$

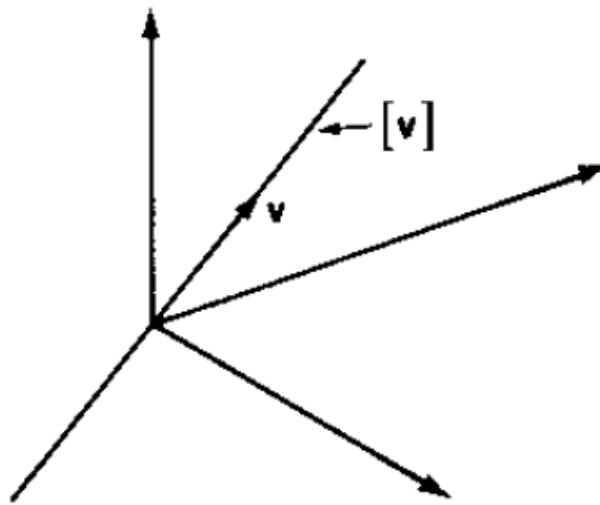


Figura 3 – Combinação linear de Vetores (BOLDRINI et al., 1986), pg. 113.

Exemplo 08: Se obtemos $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ e $v_3 \in [v_1, v_2]$, então $[v_1, v_2, v_3] = [v_1, v_2]$, então v_3 é um combinação linear de v_1 e v_2 .

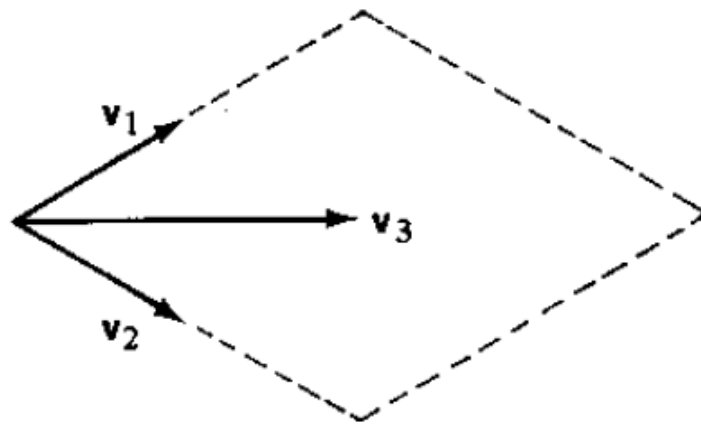


Figura 4 – Combinação de três vetores lineares (BOLDRINI et al., 1986), pg. 113.

Exemplo 09: Consideremos o espaço vetorial \mathbb{R}^3 e os vetores $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Sejam também os escalares $a = 3$ e $b = -1$. Então temos, os seguintes elementos.

Vetor	Componentes	Escalar
\mathbf{v}	2, 3, 1	3
\mathbf{w}	1, -1, 2	-1

Tabela 1 – Vetores e escalares utilizados na combinação linear

Definimos a combinação linear dos vetores \mathbf{v} e \mathbf{w} como:

$$a\mathbf{v} + b\mathbf{w} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aplicando as operações, obtemos:

$$a\mathbf{v} + b\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-1 \\ 9+1 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a combinação linear dos vetores \mathbf{v} e \mathbf{w} com os coeficientes $a = 3$ e $b = -1$ é o vetor

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.3 Dependência e Independência Linear

Dado a combinação linear, devemos saber, a priori, se algum desses vetores não é combinação linear dos outros e assim por diante. Para isto precisamos saber sua dependência e independência linear.

Definição 03: Sejam \mathbf{V} um espaço vetorial e $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbf{V}$. Dizemos que o conjunto $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ é linearmente independente (**LI**), ou que os vetores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ são **LI**, se a equação

$$a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_n\mathbf{v}_n = 0$$

implica que $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$. No caso em que exista algum $a_i \neq 0$ dizemos que $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ é linearmente dependente (**LD**), ou que os vetores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ são **LD**.

Teorema 02: Uma combinação linear é **LD** se, e somente se um destes vetores for uma combinação linear dos outros.

$$\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} = \mathbf{LD} \iff \exists i \mid \sum_{i \neq j} c_i \mathbf{v}_i$$

Demonstração: Sejam $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ **LD** e $a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_j\mathbf{v}_j + \dots + a_n\mathbf{v}_n = 0$

Um dos coeficientes deve ser diferente de zero. Suponhamos que seja $a_j \neq 0$. Então

$$\mathbf{v}_j = -\frac{1}{a_j}(a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_{j-1}\mathbf{v}_{j-1} + a_{j+1}\mathbf{v}_{j+1} + \dots + a_n\mathbf{v}_n)$$

e portanto $\mathbf{v}_j = -\frac{a_1}{a_j}\mathbf{v}_1 + \dots - \frac{a_n}{a_j}\mathbf{v}_n$

Logo, \mathbf{v}_j é uma combinação linear dos outros vetores.

Exemplo 10: Sejam $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{V}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ é **LD** $\iff \mathbf{v}_1$ e \mathbf{v}_2 estiverem na mesma reta, que passa pela origem. ($\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_2$).

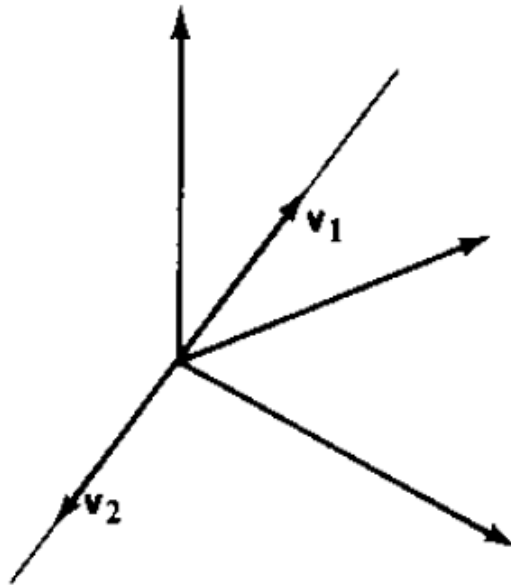


Figura 5 – Vetores linearmente dependentes (BOLDRINI et al., 1986), pg. 115.

2.4 Base

Seja V um espaço vetorial. Uma base para V é um conjunto finito $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ de elementos de V , tal que B é Linearmente independente e gera o espaço vetorial V , ou seja, qualquer elemento de V pode ser escrito como combinação linear dos elementos de B . O subespaço gerado por B coincide com um subespaço H de um espaço vetorial V , então

$$H = \text{Span}\{b_1, \dots, b_p\}$$

A definição de base se aplica ao caso em $H = V$, porque todo espaço vetorial é subespaço dele mesmo. Assim, uma base de V é um conjunto linearmente independente que gera V (LAY, 1999). Então se tivermos uma tripla ordenada linearmente independente $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ será uma base de V^3 .

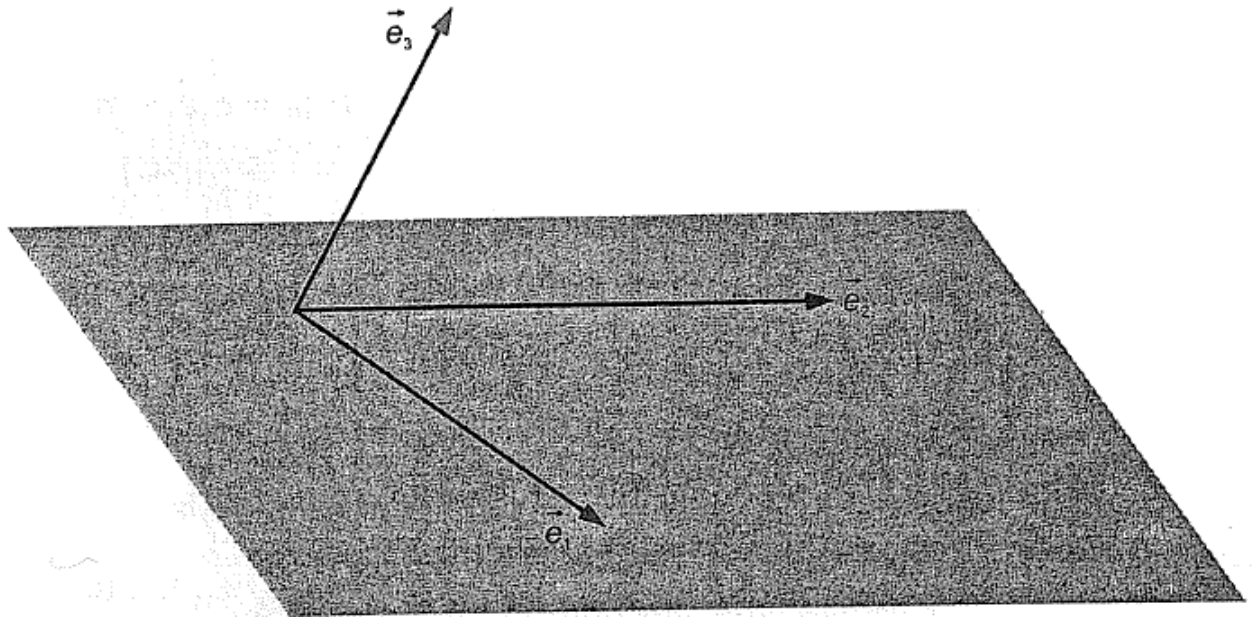


Figura 6 – Base de um vetor em \mathbb{R}^3 (CAMARGO; BOULOS, 2005), pg. 52.

Para analisar as propriedades da base de um espaço vetorial de forma generalizada, consideremos desta forma.

Teorema 3: Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \mid \mathbf{v} \neq 0$, estes que geram um espaço vetorial V . Então, dentre estes vetores podemos extrair uma base de V .

Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ são **LI**, então eles cumprem as condições para uma base, e não temos mais nada a fazer. Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ são **LD**, então existe uma combinação linear deles, com algum coeficiente não zero, obtendo o vetor nulo

$$x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \dots + x_n \mathbf{v}_n = 0$$

Se $x_n \neq 0$. Então é possível escrever

$$\mathbf{v}_n = \frac{-x_1}{x_n} \mathbf{v}_1 + \frac{-x_2}{x_n} \mathbf{v}_2 + \dots + \frac{-x_{n-1}}{x_n} \mathbf{v}_{n-1}$$

ora, \mathbf{v}_n é uma combinação linear de $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ e, portanto, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ geram V . Se $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ for **LD**, então existe uma combinação linear deles que dará o vetor nulo e com algum coeficiente $\neq 0$, portanto, é possível extrair o vetor que corresponde a este coeficiente. Se continuarmos, com as iterações, após uma quantidade n de passos, obteremos um subconjunto de $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ formado por r ($r \leq n$) vetores **LI** $\mathbf{v}_{i1}, \mathbf{v}_{i2}, \dots, \mathbf{v}_{ir}$, que ainda geram V , por fim, formará uma base.

2.5 Dimensão

A dimensão de um espaço vetorial V é o número de elementos de uma base para V , que denotamos por $\dim(V)$. Caso $V = \{e\}$, o conjunto vazio é uma base para V e $\dim(V) = 0$. Qualquer base de um espaço vetorial tem sempre o mesmo número de elementos.

Teorema 4: Seja V um espaço vetorial e $\{u_1, \dots, u_n\}$ um conjunto de elementos que geram V . Então, dentre esses elementos podemos extrair uma base para V .

Teorema 5: Seja V um espaço vetorial gerado por um conjunto finito de n elementos u_1, u_2, \dots, u_n . Então, qualquer conjunto linearmente independente em V possui no máximo n elementos.

Teorema 6: Qualquer base de um espaço vetorial tem sempre o mesmo número (finito) de elementos.

Teorema 7 (Completamento): Qualquer conjunto de elementos **LI** de um espaço vetorial V de dimensão finita pode ser completado até formar uma base para V .

Teorema 8: Seja V um espaço vetorial e U e W subespaços vetoriais de V , então:

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

Teorema 9: Seja V um espaço vetorial e $\beta = \{u_1, \dots, u_n\}$ uma base ordenada para V , isto é, os elementos estão ordenados na ordem em que aparecem. Então, todo elemento de V pode ser escrito de maneira única como combinação linear de u_1, \dots, u_n .

3 Transformações Lineares

Neste capítulo, iremos tratar sobre um tipo especial de função ou aplicação, onde, segundo (STEINBRUCH; WINTERLE, 1987), o domínio e o contradomínio são espaços vetoriais reais. Assim, tanto a variável independente como a variável dependente são vetores, razão pela qual essas funções são chamadas vetoriais.

Nosso estudo das funções vetoriais lineares em questão, será focado, nas transformações lineares.

Definição 04: Sejam V e W dois espaços vetoriais. Uma transformação linear (aplicação linear) é uma função de V em W , $F : V \rightarrow W$, que satisfaz as seguintes condições:

1. Para quaisquer u e v em V , $F(u + v) = F(u) + F(v)$. **Homogeneidade**
2. Para quaisquer $k \in \mathbb{R}$ e $v \in V$, $F(kv) = kF(v)$. **Aditividade**

No caso especial em que $V = W$, a transformação linear é denominada **operador linear** do espaço vetorial V (ANTON, 2010).

Válido em: $\forall v, v \in V$ e $\forall k \in \mathbb{R}$.

Trataremos F como T por convenção daqui em diante. Para se dizer que T é uma transformação linear do espaço vetorial V no espaço vetorial W , será denotado por $T : V \rightarrow W$, onde T é a função, cada vetor $v \in V$ tem uma só imagem $w \in W$, indicado por $w = T(v)$.

Tomemos por dois conjuntos de vetores, $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \mathbb{R}^3$.

Uma transformação de $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ associa vetores $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ com vetores $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

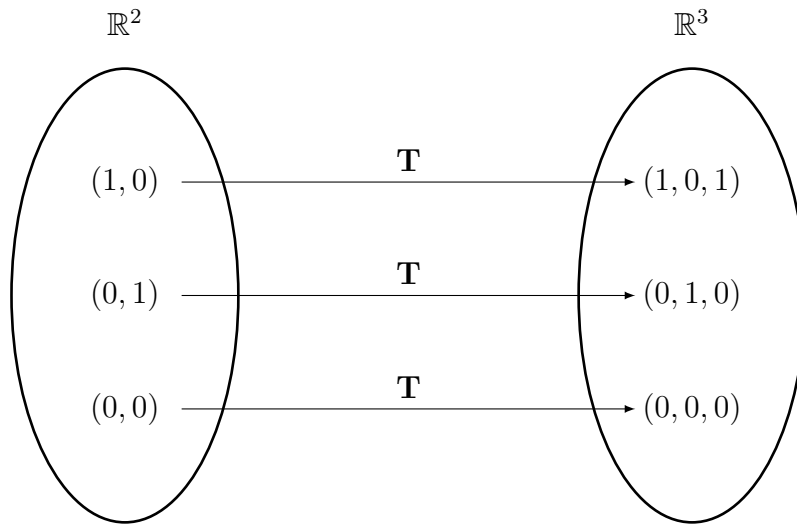
Exemplo 11: Declarado esta transformação linear $T(x, y) = (x, y, x + y)$. Iremos selecionar alguns vetores em \mathbb{R}^2 e calcular suas imagens sob a transformação T . Por exemplo, os vetores $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Para $(1, 0)$, temos:

$$T(1, 0) = (1, 0, 1 + 0) = (1, 0, 1)$$

e para $(0, 1)$, temos:

$$T(0, 1) = (0, 1, 0 + 1) = (0, 1, 1).$$

Segue a imagem em \mathbb{R}^3 :



Uma função $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ com $T = \{(x, y, x + y)\}$

Exemplo 12: Se tomarmos um vetor arbitrário e fazemos uma transformação linear idêntica, ou seja, $1\alpha = \alpha$, é uma transformação linear de V em V . A transformação é definida por $0\alpha = 0$, é também uma transformação linear de V em V (HOFFMAN; KUNZE, 1979).

De acordo com o exemplo acima, percebe-se, que será uma função onde o gráfico passa a reta pela origem se supormos uma função afim, \mathbb{R}^1 em \mathbb{R}^1 . Uma transformação linear mantém combinações lineares $W = [v_1, \dots, v_n]$ são vetores que pertencem a V e possui seus escalares c_1, \dots, c_n , então:

$$T(c_1 v_1, \dots, c_n v_n) = T(c_1 v_1 + c_2 v_2) = c_1(Tv_1) + c_2(Tv_2)$$

Exemplo 13: Tomemos um caso que desejamos dobrar nosso espaço vetorial, dado um vetor $V = (2, 2)$; $V \in \mathbb{R}^2$, a transformação linear será dada por, $T(x, y) = (2x, 2y) \in \mathbb{R}^2$. Nosso domínio e contradomínio está em \mathbb{R}^2 , portanto o resultado será por $W = (2 \times 2, 2 \times 2) \therefore W = (4, 4)$

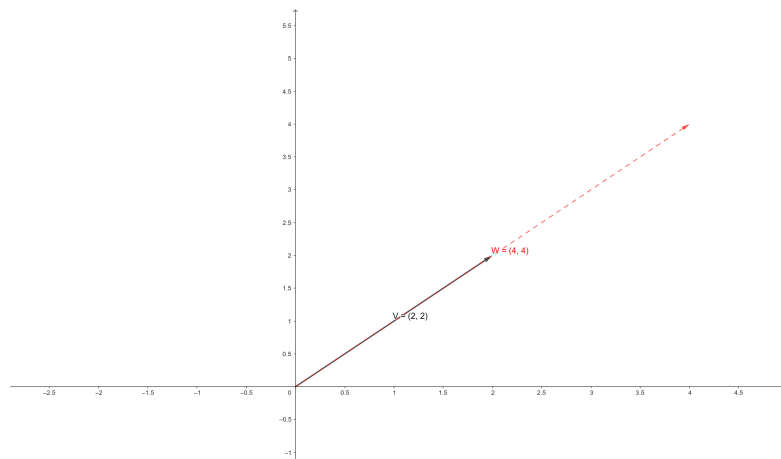


Figura 7 – Transformação linear dobro de um vetor.

Para uma matriz de transformação linear T de V em si mesma, existe uma matriz única A de dimensão $n \times n$ que representa T . Essa matriz é definida pela seguinte propriedade:

$$T(v) = Av$$

para todo vetor v em V . A matriz A é chamada de matriz de transformação de T .

Consideremos agora no segmento da transformação linear e no campo da geometria o uso de operações como rotações, reflexões e projeções. Tomemos o espaço vetorial bidimensional \mathbb{R}^2 com base canônica $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$. A rotação de 90 graus no sentido anti-horário pode ser representada pela seguinte matriz de transformação:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz R chamada de matriz de rotação, possui algumas propriedades:

1. **Ortogonalidade:** A matriz R é ortogonal, ou seja sua transposta é inversa:

$$R^T = R^{-1}$$

2. **Determinante:** O determinante da matriz R é igual a -1 .

$$\det(R) = -1$$

Ao rotacionar um vetor $v = (x, y)$ em 90 graus no sentido anti-horário, basta aplicar a matriz de rotação em v .

$$v' = R \times v = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$$

No caso em questão, o operador de rotação de um ângulo qualquer como θ em torno e origem em \mathbb{R}^2 , tratando-se o operador $R : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, resulta em $R(u + v) = R(u) + R(v)$.

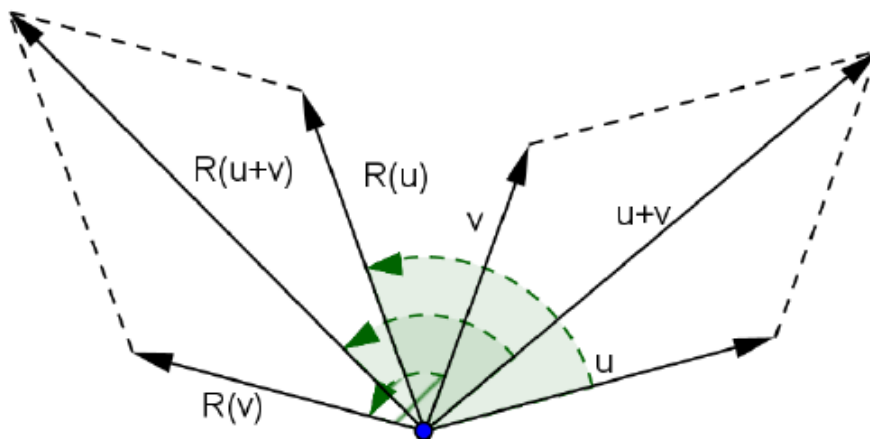


Figura 8 – Transformada de rotação de um vetor (NOGUEIRA, 2013).

3.1 Núcleo de uma Transformação Linear

Em transformações lineares. O núcleo, também chamado de espaço nulo de uma transformação linear T , denotado por $N(T)$, é o conjunto de todos os vetores no domínio de T que são mapeados para o vetor nulo. Portanto, representa o conjunto de soluções para a equação homogênea $T(x) = 0$. O núcleo é definido como:

$$N(T) = \{x \in U \mid T(x) = 0\}$$

onde U representa o domínio de T .

Para $N(T) = \{v \in \frac{V}{T(v)} = 0\}$, segue o diagrama:

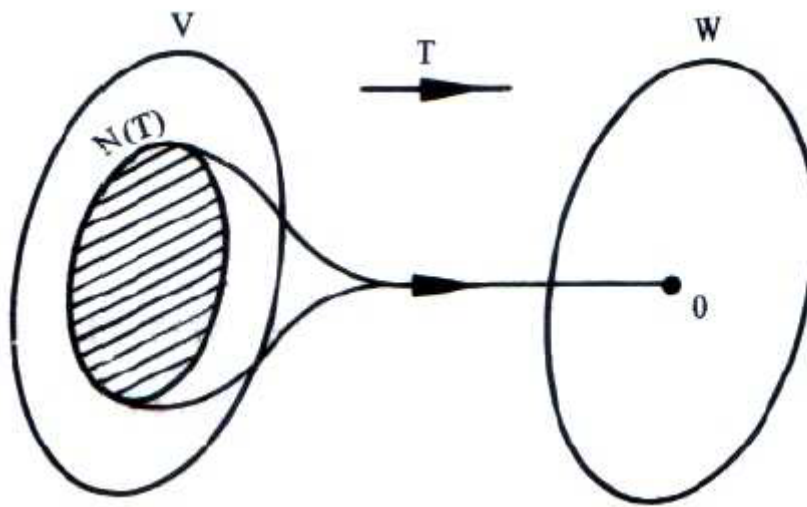


Figura 9 – Diagrama do núcleo de uma transformação linear (STEINBRUCH; WINTERLE, 1987).

então, $N(T) \subset V$ e $N(T) \neq \emptyset$, pois $0 \in N(T)$, se $T(0) = 0$.

De acordo com (LANG, 2003), que, enfatizou a importância do núcleo na compreensão da injetividade de uma transformação linear, ou seja, a capacidade de preservar a identidade dos vetores. O núcleo de uma transformação linear possui duas propriedades, que regem:

1. O núcleo de uma transformação linear $T : V \longrightarrow W$ é um subespaço vetorial de V .
2. Uma transformação linear $T : V \longrightarrow W$ é injetora se, e somente se, $N(T) = \{0\}$.

Se v_1 e v_2 pertencem ao núcleo $N(T)$ e k um número real qualquer. Então, $T(v_1) = 0$ e $T(v_2) = 0$. Logo:

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = 0 + 0 = 0$$

portanto, $v_1 + v_2 \in N(T)$.

Exemplo 14: Dado $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \mid (x, y) \rightarrow x + y$, o núcleo, que iremos chamar, neste caso, $\ker T$ é $\ker T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 0\}$, onde a reta $y = -x$ é $\ker T$ e $\ker T = \{(x, -x); x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, -1); x \in \mathbb{R}\} = [(1, -1)]$. A imagem da transformação, ou seja, $\text{Im } T = \mathbb{R}$, todavia, um vetor $w \in \mathbb{R}, w = T(w, 0)$.

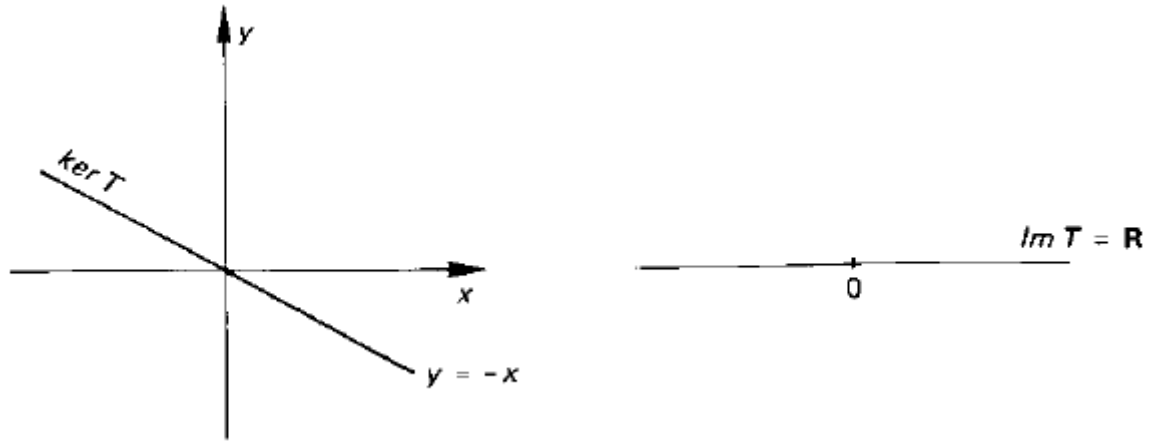


Figura 10 – Imagem de um núcleo de transformação linear (BOLDRINI et al., 1986), pg. 152.

Percebe-se que a imagem de uma transformação é $T : V \rightarrow W$ é um subespaço de W , pois, se tomarmos dois vetores, $w_1 + w_2 \in \text{Im } T$ e $\alpha w_1 \in \text{Im } T$. Existem vetores v e $u \in V \mid T(v) = w_1 + w_2$ e $T(u) = \alpha w_1$.

Se $w_1, w_2 \in \text{Im } T$, existem vetores $v_1, v_2 \in V \mid T(v_1) = w_1$ e $T(v_2) = w_2$. Tendo $v = v_1 + v_2$ e $u = \alpha v_1$, logo:

$$T(v) = T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = w_1 + w_2$$

e $T(u) = T(\alpha v_1) = \alpha T(v_1) = \alpha w_1$, portanto, $\text{Im } T$ é um subespaço vetorial de W .

3.2 Isomorfismo

Um conceito intrigante surge com o isomorfismo. Uma transformação linear $T : U \rightarrow V$, entre espaços vetoriais U e V , que é bijetora. Um isomorfismo só é válido se atender a duas condições cruciais:

1. **Injetividade:** T é injetora, o que significa que mapeia vetores distintos do domínio para vetores distintos no contradomínio. Em outras palavras, T preserva a identidade.
2. **Sobrejetividade:** T é sobrejetora, mapeando todo vetor em V a partir de um vetor em U . Isso significa que a imagem de T abrange todo o espaço V .

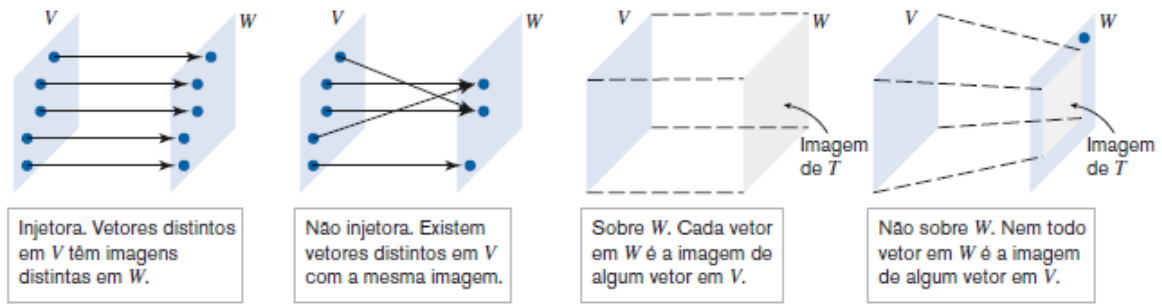


Figura 11 – Diagrama do isomorfismo e sua imagem (ANTON, 2010), pg. 445.

Se T satisfaz ambas as condições, podemos afirmar que ela estabelece uma correspondência biunívoca entre U e V . Essa relação especial permite que representamos cada vetor em V por um único vetor em U , e vice-versa. É notável também ressaltar, que, todo espaço vetorial V de dimensão n é isomorfo a \mathbb{R}^n , portanto dois espaços vetoriais de dimensão finita são isomorfos se tiverem a mesma dimensão.

O núcleo de uma transformação e seu isomorfismo tem uma conexão que é o Teorema do Núcleo e da Imagem. Este teorema estabelece uma relação crucial entre a dimensão do núcleo, a dimensão da imagem e a dimensão do domínio de uma transformação linear T :

$$\dim(N(T)) + \dim(Im(T)) = \dim(U)$$

onde $Im(T)$ representa a imagem de $Im(T)$, o conjunto de todos os vetores em V que são alcançados por T .

O Teorema do Núcleo e da Imagem oferece ferramentas valiosas para determinar se uma transformação linear é um isomorfismo. Se a dimensão do núcleo for zero e a dimensão da imagem for igual à dimensão do domínio, podemos concluir que T é um isomorfismo.

Teorema 10: Sejam E, F espaços vetoriais de dimensão finita. Para toda transformação linear $T : E \rightarrow F$ tem-se que $\dim E = \dim N(T) + \dim Im(T)$.

Se $\{T(u_1), \dots, T(u_p)\}$ é uma base de $Im(T)$ e $\{v_1, \dots, v_q\}$ é uma base de $N(T)$ então $\{u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q\}$ é uma base de E . Logo, se tivermos

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_p u_p + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_q v_q = 0,$$

então, com a transformação em ambos os membros da igualdade, obtemos

$$\alpha_1 T(u_1) + \dots + \alpha_p T(u_p) = 0.$$

Como $T(u_1), \dots, T(u_p)$ são **LI**, resultando em $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$. Portanto se reduz a igualdade

$$\beta_1 v_1 + \dots + \beta_q v_q = 0.$$

Da mesma forma v_1, \dots, v_q são **LI**, concluí-se que $\beta_1 = \dots = \beta_q = 0$. Então ambos os vetores u e v são **LI**.

Agora, se considerarmos um vetor arbitrário $w \in E$. Como $T(w) \in Im(T)$, definimos

$$\mathbf{T}(\mathbf{w}) = \alpha_1 \mathbf{T}(\mathbf{u}_1) + \dots + \alpha_p \mathbf{T}(\mathbf{u}_p),$$

pois $\{\mathbf{T}(\mathbf{u}_1), \dots, \mathbf{T}(\mathbf{u}_p)\}$ é uma base da imagem de \mathbf{T} . Manipulando a expressão temos

$$\mathbf{T}[\mathbf{w} - (\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_p \mathbf{u}_p)] = 0.$$

Dessa forma, o vetor $\mathbf{w} - (\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_p \mathbf{u}_p)$ pertence ao núcleo de \mathbf{T} , podendo ser expresso como uma combinação linear dos elementos da base $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q\}$. Temos então

$$(\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_p \mathbf{u}_p) = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \beta_q \mathbf{v}_q,$$

ou seja, $\mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_p \mathbf{u}_p + \beta_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \beta_q \mathbf{v}_q$. O que prova que os vetores $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q\}$ geram E e portanto constituem uma base.

4 Aplicações de Transformações Lineares

As TL têm contribuições significativas para o campo da AL. (STRANG, 2010), renomado matemático e professor do MIT - Massachusetts Institute of Technology, aborda, por exemplo, o processamento de sinais e imagens para compressão, filtragem, reconstrução e análise de dados, a análise de redes e sistemas dinâmicos da engenharia elétrica e ciência da computação, a geometria e a computação gráfica para manipular objetos em espaços tridimensionais, videogames e modelagem em três dimensões, além de cripto segurança e, mais recentemente, análise de dados em decisões gerenciais e aprendizagem de máquina.

A seguir, baseando em um estudo desenvolvido na Universidade Federal de Alagoas (AMORIM, 2017), apresentamos algumas aplicações das TL na área de engenharia.

4.1 Circuitos Elétricos

Um circuito elétrico é composto por geradores que criam correntes elétricas com magnitudes limitadas pelos resistores posicionados em série ou em paralelo, exemplificado na figura 12. Existem três unidades básicas da física: potencial elétrico V (volts = V), resistência elétrica R (ohms = Ω) e corrente elétrica I (ampères = A), como por exemplo, baterias, que mantêm a diferença de potencial constante entre seus dois terminais.

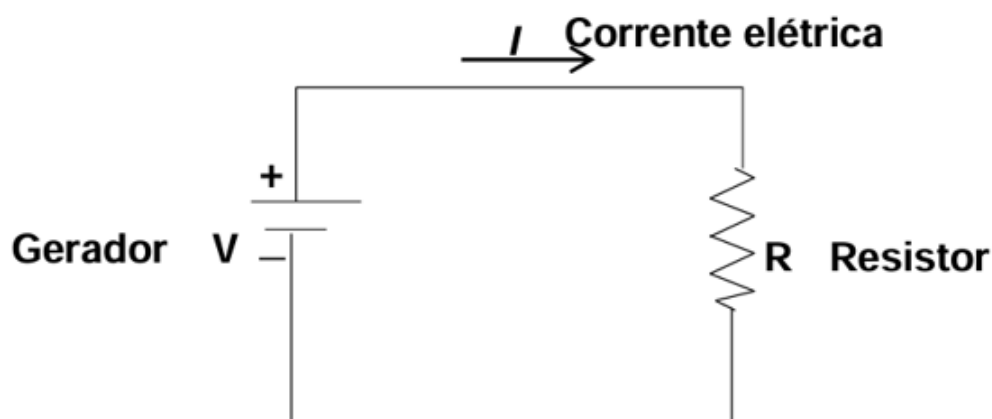


Figura 12 – Diagrama de circuito elétrico (AMORIM, 2017).

Para a montagem ou avaliação de um circuito, é necessário descobrir qual a corrente elétrica que passa em cada trecho do circuito e as quedas de potencial. Dependendo do fluxo

da corrente elétrica, as intensidades de corrente e as quedas de tensão podem ser positivas ou negativas. Três princípios básicos devem ser considerados:

- **Lei de Ohm:** A diferença de potencial medida através de um resistor é o produto da corrente que passa por ele e a sua resistência, representado por

$$V = R \times I$$

, onde V é a tensão, em Volts(V), R é a resistência, em ohm(Ω) e I é a corrente, em ampère(A).

- **Lei da corrente de Kirchhoff:** Se houver um ponto de ramificação, junção ou nó, a corrente pode se dividir e a soma das correntes que chegam no nó devem ser iguais à soma das correntes que saem do nó, representado por

$$I = I_1 + I_2$$

- **Lei das malhas ou Lei de Voltagem de Kirchhoff:** A soma algébrica das variações no potencial ao longo de qualquer malha fechada deve ser igual a zero. Para exemplificar a aplicação das leis, considera-se o circuito da figura

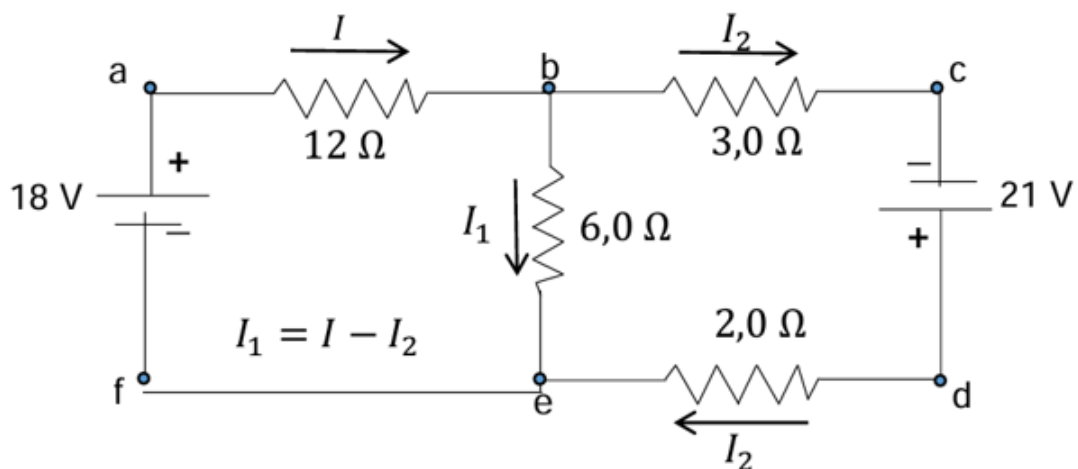


Figura 13 – Circuito de malha de resistência elétrica (AMORIM, 2017).

Considerando a lei dos nós no trecho \overrightarrow{abef} , obtemos a equação

$$18V - (12\Omega)I - (6\Omega)I_1 = 0$$

Aplicando a lei das malhas no trecho \overrightarrow{abef} , obtemos a equação

$$-(3\Omega)I_2 + 21V - (2\Omega)I_2 + (6\Omega)I_1 = 0$$

Para determinar as correntes, resolvemos o sistema de equações lineares

$$1. \quad I = I_1 + I_2$$

$$2. \quad 18 - 12I - 6I_2 = 0$$

$$3. \ 21 - 5\mathbf{I}_2 + 6\mathbf{I}_1 = 0$$

Dividimos a equação 2 por 6:

$$1. \ \mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2$$

$$2. \ 3 - 2\mathbf{I} - \mathbf{I}_1 = 0$$

$$3. \ 21 - 5\mathbf{I}_2 + 6\mathbf{I}_1 = 0$$

Representado em matriz aumentada, temos o sistema consistente

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -5 & 21 \end{array} \right]$$

Utilizando o método de Gauss-Jordan, podemos adotar a seguinte sequência:

1. Multiplicar a primeira linha por 2:

$$\left[\begin{array}{cccc} 2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -5 & 21 \end{array} \right]$$

2. Somar o resultado à linha 2:

$$\left[\begin{array}{cccc} 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & 6 & -5 & 21 \end{array} \right]$$

3. Multiplicar a linha 2 por 2:

$$\left[\begin{array}{cccc} 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & -4 & -6 \\ 0 & 6 & -5 & 21 \end{array} \right]$$

4. Somar o resultado à linha 3:

$$\left[\begin{array}{cccc} 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -9 & 15 \end{array} \right]$$

5. Multiplicar a linha 3 por $-\frac{1}{9}$:

$$\left[\begin{array}{cccc} 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} \end{array} \right]$$

6. Multiplicar a linha 3 por 1:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

7. Somar à linha 1:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & -\frac{5}{3} \\ 0 & -6 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

8. Multiplicar a linha 3 por 2:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & -\frac{5}{3} \\ 0 & -6 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{10}{3} \end{bmatrix}$$

9. Somar à linha 2:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & -\frac{5}{3} \\ 0 & -6 & -2 & -\frac{28}{3} \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{10}{3} \end{bmatrix}$$

10. Multiplicar a linha 2 por $-\frac{1}{3}$:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 2 & \frac{2}{3} & \frac{28}{9} \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{10}{3} \end{bmatrix}$$

11. Somar à linha 1:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{13}{9} \\ 0 & 2 & \frac{2}{3} & \frac{28}{9} \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{10}{3} \end{bmatrix}$$

Iara, os passos dão errado para o resultado final...

5 Considerações Finais

That's all folks!

Referências

- AMORIM, S. R. de. *Quatro aplicações da álgebra linear na engenharia* — Universidade Federal de Alagoas, Delmiro Gouveia, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 8, 32 e 33.
- ANTON, H. *Elementary Linear Algebra*. John Wiley & Sons, 2010. ISBN 9780470458211. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=YmcQJoFyZ5gC>>. Citado 3 vezes nas páginas 8, 25 e 30.
- BOLDRINI, J. L. et al. *Algebra Linear*. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1986. Citado 6 vezes nas páginas 8, 15, 19, 20, 22 e 29.
- CAMARGO, I. de; BOULOS, P. *Geometria analítica: um tratamento vetorial*. São Paulo: Prentice Hall, 2005. ISBN 9788587918918. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 23.
- CARVALHO, J. de. *Introdução à álgebra linear*. Instituto de Matemática Pura e Aplicado, 1971. (Monografias de matemática). Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=CnIRHQAACAAJ>>.
- FIGUEREIDO, L. M. *Álgebra linear I*. 3. ed. [S.l.: s.n.], 2009. v. 1. ISBN 8589200442. Citado na página 13.
- HOFFMAN, K.; KUNZE, R. *Álgebra Linear*. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1979. Citado na página 26.
- LANG, S. *Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2003. ISBN 9788573932539. Citado na página 28.
- LAY, D. C. *Álgebra linear e suas aplicações*. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999. ISBN 8521611560. Citado na página 22.
- NOGUEIRA, L. B. *Transformações lineares no plano e aplicações*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 27.
- SOUZA SILVA, E.; COSTA DA SILVA, J. DO S. Transformações lineares: Sequencia didática e o uso do geogebra. In: ULBRA. *VII CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA*. Canoas - Rio Grande do Sul, 2017. Citado na página 13.
- STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. *Álgebra Linear*. Pearson Universidades, 1987. ISBN 9780074504123. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=q36CPgAACAAJ>>. Citado 3 vezes nas páginas 8, 25 e 28.
- STRANG, G. *Álgebra linear e suas aplicações*. Cengage Learning, 2010. ISBN 9788522107445. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=T8QGRAAACAAJ>>. Citado na página 32.
- ULHOA, F. C.; LOURENÇO, M. L. *Um Curso de Álgebra Linear*. 2. ed. São Paulo: EDUSP, 2018. Citado na página 15.