

Hyslan Silva Cruz  
Iara Regina Grilo Papais

# **Transformações Lineares e suas aplicações**

[\*\*Link do vídeo\*\*](#)

Suzano  
2024

Hyslan Silva Cruz  
Iara Regina Grilo Papais

## **Transformações Lineares e suas aplicações**

Monografia de graduação à Universidade Virtual  
do Estado de São Paulo, como requisito parcial  
para a obtenção do título de Licenciatura em  
Matemática.

Orientadora: Lorena Salvi Stringheta

Universidade Virtual do Estado de São Paulo

Orientadora: Lorena Salvi Stringheta

Suzano

2024

*Este trabalho é dedicado às crianças adultas que,  
quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.*

# Agradecimentos

A conclusão desta monografia representa um marco importante em nossas vidas acadêmica e profissional. Ao longo dessa jornada, tivemos a oportunidade de contar com o apoio e a colaboração de diversas pessoas e instituições, às quais expresso minha mais profunda gratidão.

À minha família e amigos,

minha base sólida e porto seguro em todos os momentos. Agradeço por acreditarem em nosso potencial, por incentivarem nossos sonhos e por celebrarem cada conquista ao nosso lado. A vocês, dedico este trabalho com imenso amor e reconhecimento.

A minha orientadora, Professora Lorena Salvi Stringheta,

reconheço a importância fundamental de sua orientação, sabedoria e paciência ao longo da pesquisa. Sua expertise e dedicação nos inspiraram e guiaram na construção deste trabalho. Agradeço pelas valiosas contribuições, pelo tempo dedicado e pela confiança depositada em nosso grupo.

Aos demais membros da banca examinadora,

Professores(as),

agradeço a oportunidade de apresentar nossa pesquisa e receber seus valiosos feedbacks. Agradeço por terem dedicado seu tempo e conhecimento à avaliação deste trabalho.

À Universidade Virtual do Estado de São Paulo,

minha segunda casa durante os anos de graduação. Agradeço à instituição por nos proporcionar uma formação de qualidade, por nos colocar em contato com professores excepcionais e por nos oferecer os recursos necessários para o desenvolvimento desta pesquisa de forma gratuita.

Aos colegas de curso e amigos da Licenciatura em Matemática,

com quem compartilhamos momentos de aprendizado, desafios e alegrias. Agradeço pelas trocas de conhecimento, pelo apoio mútuo e pela amizade que nos acompanham desde o início da graduação.

Aos projetos integradores e demais serviços de pesquisa além da plataforma acadêmica,

que nos proporcionaram acesso a materiais essenciais para a realização deste trabalho. Agradeço a todos os profissionais que me auxiliaram na busca por informações e na utilização de ferramentas para uma boa pesquisa.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho,

nossa sincera gratidão. Cada palavra de incentivo, cada sugestão e cada ajuda foram valiosas para o nosso aprimoramento e para a conquista deste objetivo.

Este trabalho é fruto de um esforço coletivo e representa a soma de conhecimentos, experiências e apoio de muitas pessoas. Agradecemos a todos que fizeram parte dessa jornada e que nos ajudaram a alcançar este importante marco em nossas vidas.

*“Hoje, ainda almejamos saber por que  
estamos aqui e de onde viemos. O desejo  
profundo da humanidade pelo conhecimento é  
justificativa suficiente para nossa busca contínua.  
(Stephen Hawking)*

# Resumo

Só após ao fim da conclusão.

**Palavras-chave:** Transformação Linear, Álgebra Linear, Matrizes

# Abstract

Same above.

**Keywords:** Linear Transformation, Linear Algebra. Matrices.



# Lista de tabelas

Tabela 1 – Vetores e escalares utilizados na combinação linear . . . . .	17
--	----

# Lista de símbolos

$\mathbb{R}$  Conjunto dos números reais.

$\exists$  Existe.

$\in$  Pertence.

$|$  Tal que.

$\therefore$  Portanto.

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>ESPAÇOS VETORIAIS . . . . .</b>	<b>12</b>
<b>2.1</b>	<b>Subespaços Vetoriais . . . . .</b>	<b>14</b>
<b>2.2</b>	<b>Combinação Linear . . . . .</b>	<b>16</b>
<b>2.3</b>	<b>Dependência e Independência Linear . . . . .</b>	<b>18</b>
<b>3</b>	<b>TRANSFORMAÇÕES LINEARES . . . . .</b>	<b>19</b>
<b>4</b>	<b>APLICAÇÕES DE TRANSFORMAÇÕES LINEARES . . . . .</b>	<b>22</b>
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>23</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>24</b>

# 1 Introdução

Com o decorrer do tempo, depois da era de ouro da álgebra linear nos meados do século XVIII. Onde, Euler e Louis Lagrange publicaram o "Recherche d'Arithmétique", entre 1773 e 1775, no qual estudavam certos conceitos da transformação linear. Posteriormente, Johann Carl Friedrich Gauss, também estudou sobre assuntos que apresentou similaridade com a matriz de transformação linear.

Até se arrefecer o assunto no século XIX e XX, com Giuseppe Peano, onde foi cunhado o termo "sistema linear" com a primeira definição de axiomática para espaço vetorial. Nos dias atuais, a apresentação da álgebra linear, temas abordados nesse campo da matemática são frequentemente esquecidos, portanto, este estudo trata de buscar o entendimento e compreender sobre as transformações lineares em sua totalidade e aplicações no contexto atual contemporâneo.

Passado esse brevíssimo contexto histórico e motivador para a nossa pesquisa e deleite deste ramo de estudado, iremos nos adiantar a certos conceitos matemáticos elementares já bastantes fundamentados no decorrer dos anos escolares do ensino básico regular. Para isto, passaremos a certas definições matemáticas primordiais que serão apresentadas nesta monografia para as discussões advindas a posteriori neste estudo.

Portanto, dividimos esta monografia em 4 capítulos, a saber, revisão literária fundamentais, pesquisas de artigos, teses e discussões recentes sobre as transformações lineares em diversas aplicações, seu contexto educacional atual em questão de matéria aplicada e por conseguinte nossa metodologia utilizada, os resultados obtidos dessa pesquisa e, por fim, nossa discussão final, a saber, do uso da transformação linear atualmente.

Aguardando Iara nesta parte...

## 2 Espaços Vetoriais

Começaremos pela definição de um espaço vetorial, onde, podemos tratar como um vetor ao designar um elemento do espaço vetorial de um número  $\mathbb{R}$  definido tal que:

**Definição 01:** Seja um conjunto  $V$ , não vazio, com duas operações: soma,  $V \times V \rightarrow V$ , e multiplicação por escalar,  $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$ , tais que, para quaisquer  $u, v, w \in V$ , satisfaçam as propriedades:

1.  $(u + v) + w = u + (v + w), \forall u, v, w \in V$  (propriedade associativa.)
2.  $1u = u$ .
3.  $u + v = v + u, \forall u, v \in V$  (propriedade comutativa).
4.  $\exists 0 \in V$  tal que  $u + 0 = u$ .
5.  $\exists -u \in V$  tal que  $u + (-u) = 0$ .
6.  $a(u + v) = au + av$ .
7.  $(a + b)v = av + bv$ .
8.  $(ab)v = a(bv)$ .
9.  $1u = u$ .

**Observação:**  $0$  é o vetor nulo.

**Observação:** Limitaremos nossa discussão, demonstrações e aplicações dentro do conjunto dos números reais apenas.

**Exemplo 01:** Suponhamos uma matriz  $M_{(2,2)}$ , onde, é denotado por  $M_{(m,n)}$ , dado por  $M = [a_{ij}]_{m \times n}$  podendo ser interpretada dessa forma,  $V = M_{(2,2)}$ , onde  $V$ , é um conjunto não vazio, seu escalar pertencente ao conjunto dos  $\mathbb{R}$ , que satisfazem todas as propriedades de um espaço vetorial.

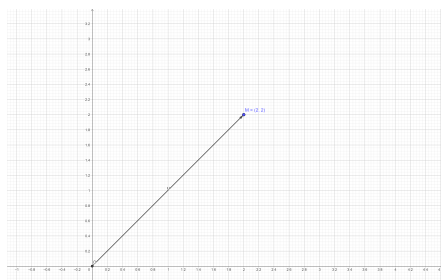


Figura 1 – Exemplo 01: Vetor no plano.

A partir disto, podemos perceber o uso analítico dos espaços vetoriais para resolução de problemas em geral. Vejamos mais alguns exemplos.

**Exemplo 02:** O exemplo anterior, trata-se de uma matriz de  $\mathbb{R}^2$  pode ser dito como, no plano, agora iremos expandir para  $\mathbb{R}^3$ , seja um vetor  $A = (x, y, z)$  ou representado pela forma matricial:

$$A = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Assim, por quaisquer números reais, podemos fazer uma projeção ortogonal no espaço, segue um exemplo traçado:

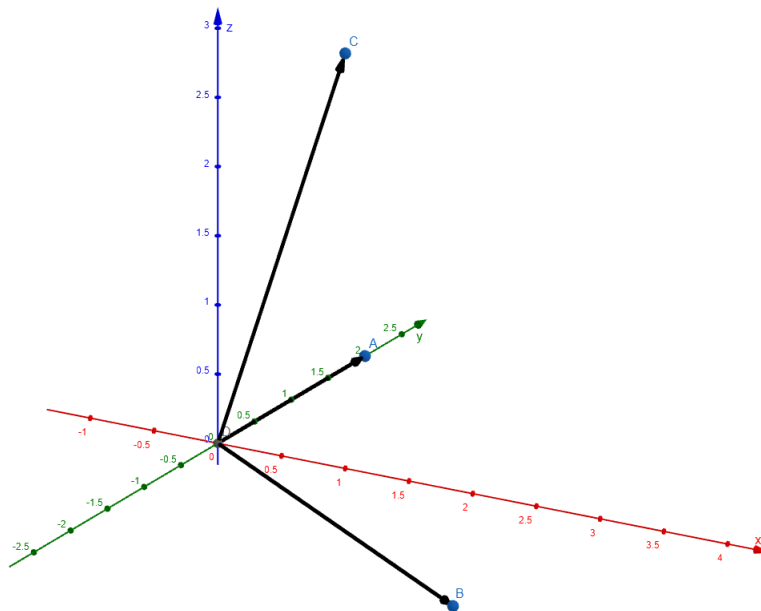


Figura 2 – Exemplo 02: Exemplo de vetor no espaço.

**Exemplo 03:** Consideremos  $n$  – *uplas* de números reais.

$$V = \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{e se } u = (x_1, x_2, \dots, x_n), v = (y_1, y_2, \dots, y_n) \text{ e } a \in \mathbb{R},$$

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \text{ e } au = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n)$$

Por tratarmos de uma quantidade  $n$  de números, o campo tridimensional deixa de ser visto, e passamos a ter  $\mathbb{R}^n$  dimensões, as propriedades não deixam de valer independente a quantidade de dimensões.

## 2.1 Subespaços Vetoriais

Nesta seção iremos introduzir conceitos no estudo de espaço vetorial para subespaço vetorial.

**Definição 02:** Dado um espaço vetorial  $V$ , um subconjunto  $W$ , não vazio, será um subespaço vetorial de  $V$  se:

1. Para quaisquer  $u, v \in W$  tivermos  $u + v \in W$ .
2. Para quaisquer  $a \in R, u \in W$  tivermos  $au \in W$ .

**Teorema 01:** Um subconjunto não vazio  $W$  de  $V$  é um subespaço de  $V$  se, e somente se, para cada par de vetores  $\alpha, \beta$  em  $W$  e cada escalar  $c$  em  $F$ , o vetor  $c\alpha + \beta$  está em  $W$ .

**Demonstração:** Suponhamos que  $W$  seja um subconjunto não vazio de  $V$ , tal que,  $c\alpha + \beta$  pertença a  $W$  para todos os vetores  $\alpha, \beta$  em  $W$  e todos escalares  $c$  em  $F$ . Como  $W$  é não vazio, existe um vetor  $\rho$  em  $W$ , logo  $(-1)\rho + \rho = 0$  está em  $W$ . Então se  $\alpha$  é um vetor arbitrário em  $W$  e  $c$  é um escalar arbitrário, o vetor  $c\alpha = c\alpha + 0$  está em  $W$ . Em particular  $(-1)\alpha = -\alpha$  está em  $W$ . Finalmente se  $\alpha$  e  $\beta$  estão em  $W$ , então  $\alpha + \beta = 1\alpha + \beta$  está em  $W$ . Assim,  $W$  é um subespaço de  $V$ .

**Exemplo 04:** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$ . O conjunto de todos os vetores que residem no plano  $xy$ , ou seja,  $\{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ , forma um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^3$ .

Se o conjunto dado forma um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^3$ , precisamos verificar as três propriedades fundamentais:

1. Contém o vetor nulo: O vetor nulo em  $\mathbb{R}^3$  é  $(0, 0, 0)$ . Este vetor também está contido no plano  $xy$ , pois  $z = 0$ .
2. É fechado sob adição: Se tomarmos dois vetores  $(x_1, y_1, 0)$  e  $(x_2, y_2, 0)$  no plano  $xy$ , a sua soma será  $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0)$ , que também reside no plano  $xy$ .
3. É fechado sob multiplicação por escalar: Para qualquer escalar  $c$  e vetor  $(x, y, 0)$  no plano  $xy$ ,  $c \cdot (x, y, 0) = (cx, cy, 0)$ , que também está no plano  $xy$ .

Então, o conjunto de todos os vetores  $(x, y, 0)$  com  $x, y \in \mathbb{R}$  forma um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^3$ .

**Exemplo 05:** No espaço vetorial das funções reais de uma variável real,  $V = \{f(x) \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ , considere o conjunto de todas as funções lineares, ou seja,  $\{f(x) = mx + b \mid m, b \in \mathbb{R}\}$ . Esse conjunto forma um subespaço vetorial de  $V$ . Novamente, você pode verificar as propriedades para confirmar.

Se o conjunto dado forma um subespaço vetorial de  $V$ , novamente precisamos verificar as três propriedades fundamentais:

1. **Contém a função nula:** A função nula em  $V$  é  $f(x) = 0$ . Esta função é uma função linear, pois pode ser escrita como  $f(x) = 0 \cdot x + 0$ . Portanto, a função nula está contida no conjunto.
2. **É fechado sob adição:** Se tomarmos duas funções lineares  $f_1(x) = m_1x + b_1$  e  $f_2(x) = m_2x + b_2$ , a sua soma será  $f_1(x) + f_2(x) = (m_1 + m_2)x + (b_1 + b_2)$ , que também é uma função linear. Portanto, o conjunto é fechado sob adição.
3. **É fechado sob multiplicação por escalar:** Para qualquer escalar  $c$  e função linear  $f(x) = mx + b$ , a multiplicação por escalar  $cf(x) = c(mx + b) = (cm)x + (cb)$  também é uma função linear. Assim, o conjunto é fechado sob multiplicação por escalar.

Portanto, o conjunto de todas as funções lineares  $f(x) = mx + b$  com  $m, b \in \mathbb{R}$  forma um subespaço vetorial de  $V$ .

**Exemplo 06:** No espaço das matrizes reais  $2 \times 2$ ,  $M_{(2,2)}$ , considere o conjunto de todas as matrizes simétricas, ou seja, aquelas em que  $A = A^T$ . Esse conjunto forma um subespaço vetorial de  $M_{(2,2)}$ . Você pode demonstrar isso verificando as propriedades de um subespaço vetorial

Para tal, é imperativo investigar as três propriedades basilares:

1. **Presença da Matriz Nula:** A matriz nula em  $M_{(2,2)}$  é a matriz  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Nota-se que esta matriz é simétrica, posto que  $A = A^T$ . Portanto, a matriz nula está asseguradamente contida no conjunto em questão.
2. **Fechamento sob Adição:** Considerando duas matrizes simétricas  $A$  e  $B$ , a sua soma  $A + B$  é também simétrica, visto que  $(A + B)^T = A^T + B^T = A + B$ . Logo, o conjunto demonstra ser fechado sob adição.
3. **Fechamento sob Multiplicação por Escalar:** Para qualquer escalar  $c$  e matriz simétrica  $A$ , a multiplicação por escalar  $cA$  é igualmente simétrica, haja vista que  $(cA)^T = cA^T = cA$ . Deste modo, o conjunto revela-se fechado sob multiplicação por escalar.

Assim sendo, constata-se que o conjunto de todas as matrizes simétricas configura-se como um subespaço vetorial de  $M_{(2,2)}$ .



## 2.2 Combinação Linear

Dentro de um espaço vetorial, conforme demonstrado que podemos ter subconjuntos de espaços vetoriais, é possível a obtenção de novos vetores a partir de vetores dados (BOLDRINI et al., 1986).

**Definição 03:** Sejam  $V$  um espaço vetorial  $\mathbb{R}$ ,  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  e  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . Então, o vetor  $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$  é um elemento de  $V$  podendo ser chamado combinação linear de  $v_1, \dots, v_n$ .

Se  $V \subset W$ , podemos adotar a notação  $W = [v_1, \dots, v_n]$ , onde expandindo-o

$$W = [v_1, \dots, v_n] = \{v \in V; v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n, a_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$$

**Exemplo 07:** Presuma um vetor  $V = \mathbb{R}^3, v \in V, v \neq 0$ . Se imaginarmos sua reta que contém o vetor  $v$ , onde,  $[v] = av : a \in \mathbb{R}$

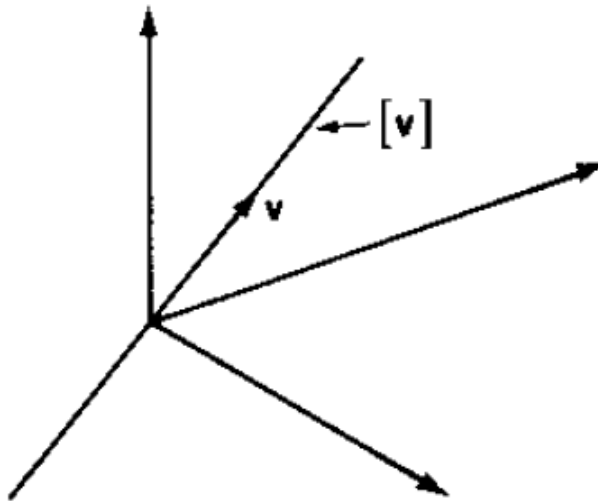


Figura 3 – Retirado de (BOLDRINI et al., 1986), pg. 113.

**Exemplo 08:** Se obtemos  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$  e  $v_3 \in [v_1, v_2]$ , então  $[v_1, v_2, v_3] = [v_1, v_2]$ , então  $v_3$  é um combinação linear de  $v_1$  e  $v_2$ .

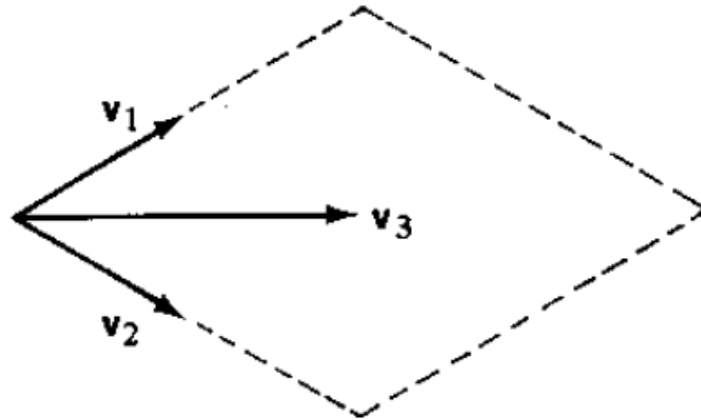


Figura 4 – Retirado de (BOLDRINI et al., 1986), pg. 113.

**Exemplo 09:** Consideremos o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  e os vetores  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Sejam também os escalares  $a = 3$  e  $b = -1$ . Então temos, os seguintes elementos.

Vetor	Componentes	Escalar
$\mathbf{v}$	2, 3, 1	3
$\mathbf{w}$	1, -1, 2	-1

Tabela 1 – Vetores e escalares utilizados na combinação linear

Definimos a combinação linear dos vetores  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  como:

$$a\mathbf{v} + b\mathbf{w} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aplicando as operações, obtemos:

$$a\mathbf{v} + b\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 1 \\ 9 + 1 \\ 3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a combinação linear dos vetores  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  com os coeficientes  $a = 3$  e  $b = -1$  é o vetor

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 2.3 Dependência e Independência Linear

Dado a combinação linear, devemos saber, a priori, se algum desses vetores não é combinação linear dos outros e assim por diante. Para isto precisamos saber sua dependência e independência linear.

**Definição 03:** Sejam  $V$  um espaço vetorial e  $v_1, \dots, v_n \in V$ . Dizemos que o conjunto  $v_1, \dots, v_n$  é linearmente independente (**LI**), ou que os vetores  $v_1, \dots, v_n$  são **LI**, se a equação

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$$

implica que  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ . No caso em que exista algum  $a_i \neq 0$  dizemos que  $v_1, \dots, v_n$  é linearmente dependente (**LD**), ou que os vetores  $v_1, \dots, v_n$  são **LD**.

**Teorema 02:** Uma combinação linear é **LD** se, e somente se um destes vetores for uma combinação linear dos outros.

$$\{v_1, \dots, v_n\} = \text{LD} \iff \exists i \mid \sum_{i \neq j} c_i v_i$$

**Demonstração:** Sejam  $v_1, \dots, v_n$  **LD** e  $a_1 v_1 + \dots + a_j v_j + \dots + a_n v_n = 0$

Um dos coeficientes deve ser diferente de zero. Suponhamos que seja  $a_j \neq 0$ . Então

$$v_j = -\frac{1}{a_j}(a_1 v_1 + \dots + a_{j-1} v_{j-1} + a_{j+1} v_{j+1} + \dots + a_n v_n)$$

e portanto  $v_j = -\frac{a_1}{a_j} v_1 + \dots - \frac{a_n}{a_j} v_n$

Logo,  $v_j$  é uma combinação linear dos outros vetores.

**Exemplo 10:** Sejam  $V = \mathbb{R}^3$  e  $v_1, v_2 \in V$ ,  $\{v_1, v_2\}$  é **LD**  $\iff v_1$  e  $v_2$  estiverem na mesma reta, que passa pela origem. ( $v_1 = \lambda v_2$ ).

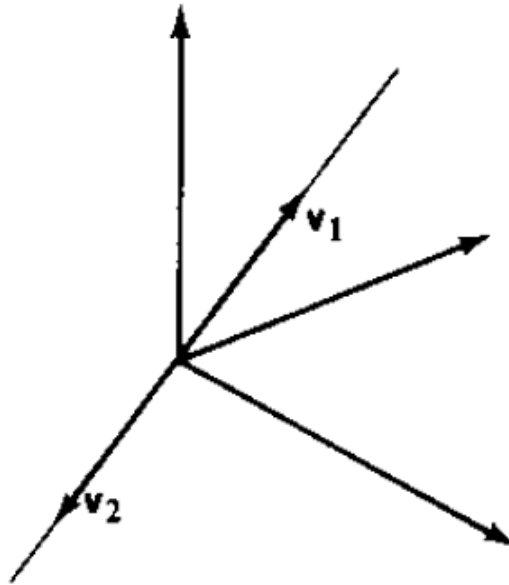


Figura 5 – Retirado de (BOLDRINI et al., 1986), pg. 115.

### 3 Transformações Lineares

Neste capítulo, iremos tratar sobre um tipo especial de função ou aplicação, onde, segundo (STEINBRUCH; WINTERLE, 1987), o domínio e o contradomínio são espaços vetoriais reais. Assim, tanto a variável independente como a variável dependente são vetores, razão pela qual essas funções são chamadas vetoriais.

Nosso estudo das funções vetoriais lineares em questão, será focado, nas transformações lineares.

**Definição 04:** Sejam  $V$  e  $W$  dois espaços vetoriais. Uma transformação linear (aplicação linear) é uma função de  $V$  em  $W$ ,  $F : V \rightarrow W$ , que satisfaz as seguintes condições:

1. Para quaisquer  $u$  e  $v$  em  $V$ ,  $F(u + v) = F(u) + F(v)$ . **Homogeneidade**
2. Para quaisquer  $k \in \mathbb{R}$  e  $v \in V$ ,  $F(kv) = kF(v)$ . **Aditividade**

No caso especial em que  $V = W$ , a transformação linear é denominada **operador linear** do espaço vetorial  $V$  (ANTON, 2010).

Válido em:  $\forall v, v \in V$  e  $\forall k \in \mathbb{R}$ .

Trataremos  $F$  como  $T$  por convenção daqui em diante. Para se dizer que  $T$  é uma transformação linear do espaço vetorial  $V$  no espaço vetorial  $W$ , será denotado por  $T : V \rightarrow W$ , onde  $T$  é a função, cada vetor  $v \in V$  tem uma só imagem  $w \in W$ , indicado por  $w = T(v)$ .

Tomemos por dois conjuntos de vetores,  $V = \mathbb{R}^2$  e  $W = \mathbb{R}^3$ .

Uma transformação de  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  associa vetores  $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  com vetores  $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

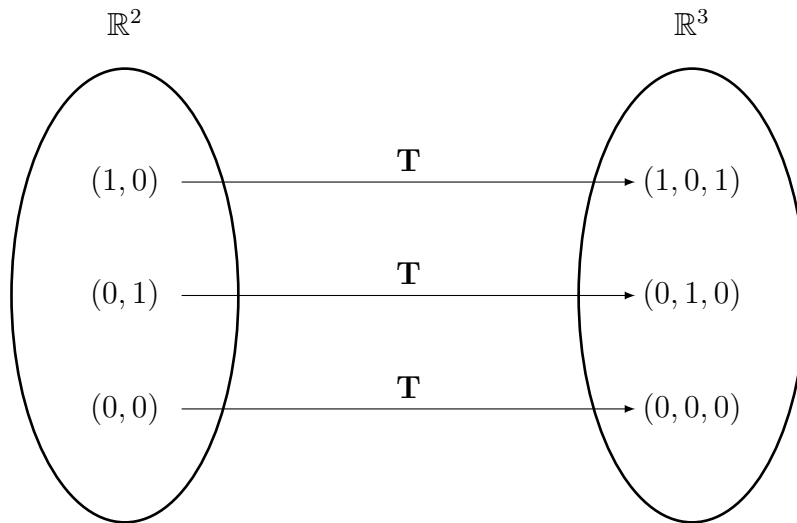
**Exemplo 11:** Declarado esta transformação linear  $T(x, y) = (x, y, x + y)$ . Iremos selecionar alguns vetores em  $\mathbb{R}^2$  e calcular suas imagens sob a transformação  $T$ . Por exemplo, os vetores  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$ . Para  $(1, 0)$ , temos:

$$T(1, 0) = (1, 0, 1 + 0) = (1, 0, 1)$$

e para  $(0, 1)$ , temos:

$$T(0, 1) = (0, 1, 0 + 1) = (0, 1, 1).$$

Segue a imagem em  $\mathbb{R}^3$ :



Uma função  $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  com  $T = \{(x, y, x + y)\}$

**Exemplo 12:** Se tomarmos um vetor arbitrário e fazemos uma transformação linear idêntica, ou seja,  $1\alpha = \alpha$ , é uma transformação linear de  $V$  em  $V$ . A transformação é definida por  $0\alpha = 0$ , é também uma transformação linear de  $V$  em  $V$  (HOFFMAN; KUNZE, 1979).

De acordo com o exemplo acima, percebe-se, que será uma função onde o gráfico passa a reta pela origem se supormos uma função afim,  $\mathbb{R}^1$  em  $\mathbb{R}^1$ . Uma transformação linear mantém combinações lineares  $W = [v_1, \dots, v_n]$  são vetores que pertencem a  $V$  e possui seus escalares  $c_1, \dots, c_n$ , então:

$$T(c_1 v_1, \dots, c_n v_n) = T(c_1 v_1 + c_2 v_2) = c_1(Tv_1) + c_2(Tv_2)$$

**Exemplo 13:** Tomemos um caso que desejamos dobrar nosso espaço vetorial, dado um vetor  $V = (2, 2)$ ;  $V \in \mathbb{R}^2$ , a transformação linear será dada por,  $T(x, y) = (2x, 2y) \in \mathbb{R}^2$ . Nosso domínio e contradomínio está em  $\mathbb{R}^2$ , portanto o resultado será por  $W = (2 \times 2, 2 \times 2) \therefore W = (4, 4)$

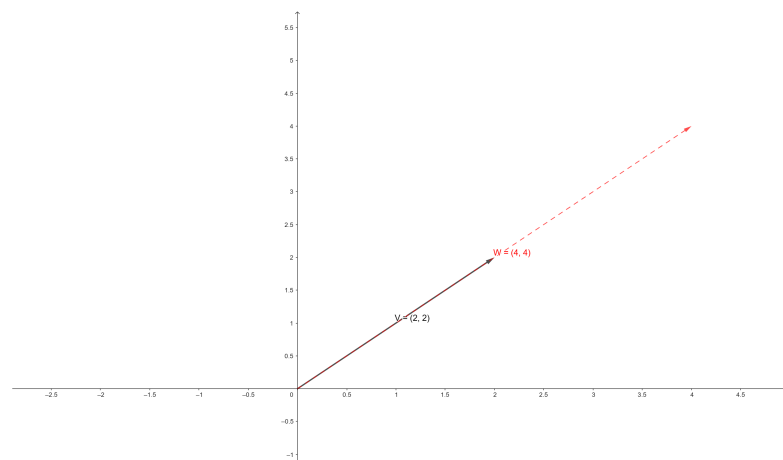


Figura 6 – Exemplo 13.

Para uma matriz de transformação linear  $\mathbf{T}$  de  $\mathbf{V}$  em si mesma, existe uma matriz única  $\mathbf{A}$  de dimensão  $n \times n$  que representa  $\mathbf{T}$ . Essa matriz é definida pela seguinte propriedade:

$$\mathbf{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v}$$

para todo vetor  $\mathbf{v}$  em  $\mathbf{V}$ . A matriz  $\mathbf{A}$  é chamada de matriz de transformação de  $\mathbf{T}$ .

Uma outra aplicação importante da transformação linear é no campo da geometria em uso de operações como rotações, reflexões e projeções. Considere o espaço vetorial bidimensional  $\mathbb{R}^2$  com base canônica  $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$  e  $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ . A rotação de 90 graus no sentido anti-horário pode ser representada pela seguinte matriz de transformação:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz  $\mathbf{R}$  chamada de matriz de rotação, possui algumas propriedades:

1. **Ortogonalidade:** A matriz  $\mathbf{R}$  é ortogonal, ou seja sua transposta é inversa:

$$\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$$

2. **Determinante:** O determinante da matriz  $\mathbf{R}$  é igual a  $-1$ .

$$\det(\mathbf{R}) = -1$$

Ao rotacionar um vetor  $\mathbf{v} = (x, y)$  em 90 graus no sentido anti-horário, basta aplicar a matriz de rotação em  $\mathbf{v}$ .

$$\mathbf{v}' = \mathbf{R} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}$$

## 4 Aplicações de Transformações Lineares

Aguardando pela Caroline Pires...

## 5 Considerações Finais

That's all folks!



# Referências

ANTON, H. *Elementary Linear Algebra*. John Wiley & Sons, 2010. ISBN 9780470458211. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=YmcQJoFyZ5gC>>. Citado na página 19.

BOLDRINI, J. L. et al. *Algebra Linear*. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1986. Citado 3 vezes nas páginas 16, 17 e 18.

CAMARGO, I. de; BOULOS, P. *Geometria analítica: um tratamento vetorial*. São Paulo: Prentice Hall, 2005. ISBN 9788587918918.

HOFFMAN, K.; KUNZE, R. *Álgebra Linear*. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1979. Citado na página 20.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. *Álgebra Linear*. Pearson Universidades, 1987. ISBN 9780074504123. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=q36CPgAACAAJ>>. Citado na página 19.

ULHOA, C. F.; LOURENÇO, M. L. *Um Curso de Álgebra Linear*. 2. ed. São Paulo: EDUSP, 2018.