

Hyslan Silva Cruz  
Iara Regina Grilo Papais  
Carolina Cristina Ferreira de Mello Pires

# **Transformações Lineares e suas aplicações**

[Link do vídeo](#)

Suzano  
2024

Hyslan Silva Cruz  
Iara Regina Grilo Papais  
Carolina Cristina Ferreira de Mello Pires

## **Transformações Lineares e suas aplicações**

Monografia de graduação à Universidade Virtual do Estado de São Paulo, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Lorena Salvi Stringheta

Universidade Virtual do Estado de São Paulo

Orientadora: Lorena Salvi Stringheta

Suzano

2024

*Este trabalho é dedicado às crianças adultas que,  
quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.*

# Agradecimentos

A conclusão desta monografia representa um marco importante em nossas vidas acadêmica e profissional. Ao longo dessa jornada, tivemos a oportunidade de contar com o apoio e a colaboração de diversas pessoas e instituições, às quais expresso minha mais profunda gratidão.

À minha família e amigos,

minha base sólida e porto seguro em todos os momentos. Agradeço por acreditarem em nosso potencial, por incentivarem nossos sonhos e por celebrarem cada conquista ao nosso lado. A vocês, dedico este trabalho com imenso amor e reconhecimento.

A minha orientadora, Professora Lorena Salvi Stringheta,

reconheço a importância fundamental de sua orientação, sabedoria e paciência ao longo da pesquisa. Sua expertise e dedicação nos inspiraram e guiaram na construção deste trabalho. Agradeço pelas valiosas contribuições, pelo tempo dedicado e pela confiança depositada em nosso grupo.

Aos demais membros da banca examinadora,

Professores(as),

agradeço a oportunidade de apresentar nossa pesquisa e receber seus valiosos feedbacks. Agradeço por terem dedicado seu tempo e conhecimento à avaliação deste trabalho.

À Universidade Virtual do Estado de São Paulo,

minha segunda casa durante os anos de graduação. Agradeço à instituição por nos proporcionar uma formação de qualidade, por nos colocar em contato com professores excepcionais e por nos oferecer os recursos necessários para o desenvolvimento desta pesquisa de forma gratuita.

Aos colegas de curso e amigos da Licenciatura em Matemática,

com quem compartilhamos momentos de aprendizado, desafios e alegrias. Agradeço pelas trocas de conhecimento, pelo apoio mútuo e pela amizade que nos acompanham desde o início da graduação.

Aos projetos integradores e demais serviços de pesquisa além da plataforma acadêmica,

que nos proporcionaram acesso a materiais essenciais para a realização deste trabalho. Agradeço a todos os profissionais que me auxiliaram na busca por informações e na utilização de ferramentas para uma boa pesquisa.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho,

nossa sincera gratidão. Cada palavra de incentivo, cada sugestão e cada ajuda foram valiosas para o nosso aprimoramento e para a conquista deste objetivo.

Este trabalho é fruto de um esforço coletivo e representa a soma de conhecimentos, experiências e apoio de muitas pessoas. Agradecemos a todos que fizeram parte dessa jornada e que nos ajudaram a alcançar este importante marco em nossas vidas.

*“Hoje, ainda almejamos saber por que  
estamos aqui e de onde viemos. O desejo  
profundo da humanidade pelo conhecimento é  
justificativa suficiente para nossa busca contínua.  
(Stephen Hawking)*

# Resumo

Só após ao fim da conclusão.

**Palavras-chave:** Transformação Linear, Álgebra Linear, Matrizes

# Abstract

Same above.

**Keywords:** Linear Transformation, Linear Algebra. Matrices.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Um vetor no plano. . . . .	16
Figura 2 – Exemplo de vetor no espaço. . . . .	17
Figura 3 – Combinação linear de Vetores (BOLDRINI et al., 1986), pg. 113. . . . .	20
Figura 4 – Combinação de três vetores lineares (BOLDRINI et al., 1986), pg. 113. . . . .	20
Figura 5 – Vetores linearmente dependentes (BOLDRINI et al., 1986), pg. 115. . . . .	22
Figura 6 – Base de um vetor em $\mathbb{R}^3$ (CAMARGO; BOULOS, 2005), pg. 52. . . . .	23
Figura 7 – Transformação linear dobro de um vetor. . . . .	26
Figura 8 – Transformada de rotação de um vetor (NOGUEIRA, 2013). . . . .	27
Figura 9 – Diagrama do núcleo de uma transformação linear (STEINBRUCH; WINTERLE, 1987). . . . .	28
Figura 10 – Imagem de um núcleo de transformação linear (BOLDRINI et al., 1986), pg. 152. . . . .	29
Figura 11 – Diagrama do isomorfismo e sua imagem (ANTON, 2010), pg. 445. . . . .	30
Figura 12 – Esquema de articulações (AMORIM, 2017). . . . .	32
Figura 13 – Posição inicial e final (AMORIM, 2017). . . . .	33
Figura 14 – Rotação e translação (AMORIM, 2017). . . . .	33
Figura 15 – Translação e rotação (AMORIM, 2017). . . . .	33
Figura 16 – Transformação do referencial $A^0$ para o referencial $\{A^2\}$ (AMORIM, 2017). . . . .	35
Figura 17 – Posição inicial do braço robótico $\{A^2\}$ (AMORIM, 2017). . . . .	37

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Vetores e escalares utilizados na combinação linear . . . . .	20
Tabela 2 – Tabela de randomização (SILVA, 2009) . . . . .	39
Tabela 3 – Tabela de randomização (SILVA, 2009) . . . . .	41

# Lista de abreviaturas e siglas

AL	Álgebra Linear.
EV	Espaço Vetorial.
TL	Transformação Linear.
LD	Linearmente Dependente.
LI	Linearmente Independente.
BNCC	Base Nacional Comum Curricular.
LGPD	Lei Geral de Proteção de Dados Pessoais.

# Lista de símbolos

$\mathbb{R}$  Conjunto dos números reais.

$\exists$  Existe.

$\forall$  Para todo.

$\in$  Pertence.

$|$  Tal que.

$\therefore$  Portanto.

$\emptyset$  Conjunto vazio.

$\Longleftrightarrow$  Se, e somente se.

$\Sigma$  Somatório.

$\cap$  Interseção.

$\alpha$  Letra grega Alfa.

$\beta$  Letra grega Beta.

$\theta$  Ângulo variável.

$\rho$  Letra grega Rho.

$A^T$  Matriz transposta.

$\dim$  Dimensão.

$\ker$  Núcleo.

$\det$  Determinante.

$\sigma$  Função de ativação.

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>13</b>
<b>1.1</b>	<b>Justificativa</b>	<b>13</b>
1.1.1	Objetivo Geral	14
1.1.2	Objetivos Específicos	14
<b>2</b>	<b>ESPAÇOS VETORIAIS</b>	<b>15</b>
<b>2.1</b>	<b>Subespaços Vetoriais</b>	<b>17</b>
<b>2.2</b>	<b>Combinação Linear</b>	<b>19</b>
<b>2.3</b>	<b>Dependência e Independência Linear</b>	<b>21</b>
<b>2.4</b>	<b>Base</b>	<b>22</b>
<b>2.5</b>	<b>Dimensão</b>	<b>24</b>
<b>3</b>	<b>TRANSFORMAÇÕES LINEARES</b>	<b>25</b>
<b>3.1</b>	<b>Núcleo de uma Transformação Linear</b>	<b>28</b>
<b>3.2</b>	<b>Isomorfismo</b>	<b>29</b>
<b>4</b>	<b>APLICAÇÕES DE TRANSFORMAÇÕES LINEARES</b>	<b>32</b>
<b>4.1</b>	<b>Posicionamento de Um Braço Robótico</b>	<b>32</b>
<b>4.2</b>	<b>Aplicação das Transformações Lineares na Educação</b>	<b>37</b>
<b>4.3</b>	<b>Aplicação em Criptografia</b>	<b>38</b>
<b>4.4</b>	<b>Classificação de Imagens com Redes Neurais</b>	<b>41</b>
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>43</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>44</b>

# 1 Introdução

Uma área da Matemática que tem implicações na computação gráfica, genética, criptografia, redes elétricas entre outros é a Álgebra Linear (AL). Com estrutura que permite um tratamento algébrico simples, a AL estuda os aspectos relacionados ao Espaço Vetorial (EV). Um conceito central da AL é a Transformação Linear (TL), que desempenham papel fundamental na análise e compreensão dos sistemas lineares de equações, geometria analítica, física, engenharia e outros campos de estudo (FIGUEREIDO, 2009).

Contextualizando o início dos estudos da AL, que é o estudo dos espaços vetoriais e das TL entre eles e possui variadas aplicações (SILVA; SILVA, 2017), nos meados do século XVIII, Euler e Louis Lagrange publicaram o "Recherche d'Arithmétique", entre 1773 e 1775, no qual estudavam certos conceitos da TL. Posteriormente, Johann Carl Friedrich Gauss, também estudou sobre assuntos que apresentou similaridade com a matriz de transformação linear.

No século XIX e XX, Giuseppe Peano cunha o termo "sistema linear" com a primeira definição de axiomática para espaço vetorial. Atualmente, a apresentação da AL, temas abordados nesse campo da matemática são frequentemente esquecidos. Este estudo busca o entendimento e compreender sobre as transformações lineares em sua totalidade e aplicações no contexto atual contemporâneo.

Passo esse brevíssimo contexto histórico e motivador para a nossa pesquisa e deleite desramo de estudado, iremos nos adiantar a certos conceitos matemáticos elementares já bastantes fundamentados no decorrer dos anos escolares do ensino básico regular. para isto, passaremos a certas definições matemáticas primordiais que serão apresentadas nesta monografia para as discussões advindas a posteriori neste estudo.

Portanto, dividimos esta monografia em 4 capítulos: revisão literária fundamentais, pesquisas de artigos, teses e discussões recentes sobre as transformações lineares em diversas aplicações, seu contexto educacional atual em questão de matéria aplicada e por conseguinte nossa metodologia utilizada, os resultados obtidos dessa pesquisa e, por fim, nossa discussão final, a saber, do uso da transformação linear atualmente.

## 1.1 Justificativa

As transformações lineares se fazem presentes em diversos campos da matemática, e sua aplicação é fundamental para a solidificar a base teórica de problemas práticos. A partir da compreensão de conceitos e das propriedades das TL, a modelagem e a solução de problemas complexos são facilitadas, como na tecnologia e computação, por exemplo.

Procura-se contribuir com o raciocínio lógico e a capacidade de abstração, necessários para o desenvolvimento das habilidades matemáticas e analíticas. Essa investigação visa contribuir com o avanço do conhecimento nessa área e fundamentar o desenvolvimento de novos métodos, teorias e aplicações.

### 1.1.1 Objetivo Geral

Este trabalho objetiva compreender a aplicação da transformação linear.

### 1.1.2 Objetivos Específicos

Como objetivos específicos, são apresentados:

- Uso da transformação linear na sociedade;
- Aplicação em modelagem matemática e em contexto computacional da transformação linear;
- Contextualização da transformação linear no campo da inteligência artificial.

## 2 Espaços Vetoriais

Começaremos pela definição de um espaço vetorial utilizando aquelas apresentadas por (BOLDRINI et al., 1986) e (ULHOA; LOURENÇO, 2018), onde, podemos tratar como um vetor ao designar um elemento do espaço vetorial de um número  $\mathbb{R}$  definido tal que:

**Definição 01:** Seja um conjunto  $V$ , não vazio, com duas operações: soma,  $V \times V \rightarrow V$ , e multiplicação por escalar,  $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$ , tais que, para quaisquer  $u, v, w \in V$ , satisfaçam as propriedades:

1.  $(u + v) + w = u + (v + w), \forall u, v, w \in V$  (propriedade associativa.)
2.  $1u = u$ .
3.  $u + v = v + u, \forall u, v \in V$  (propriedade comutativa).
4.  $\exists 0 \in V$  tal que  $u + 0 = u$ .
5.  $\exists -u \in V$  tal que  $u + (-u) = 0$ .
6.  $a(u + v) = au + av$ .
7.  $(a + b)v = av + bv$ .
8.  $(ab)v = a(bv)$ .
9.  $1u = u$ .

**Observação:**  $0$  é o vetor nulo.

**Observação:** Limitaremos nossa discussão, demonstrações e aplicações dentro do conjunto dos números reais apenas.

**Exemplo 01:** Suponhamos uma matriz  $M_{(2,2)}$ , onde, é denotado por  $M_{(m,n)}$ , dado por  $M = [a_{ij}]_{m \times n}$  podendo ser interpretada dessa forma,  $V = M_{(2,2)}$ , onde  $V$ , é um conjunto não vazio, seu escalar pertencente ao conjunto dos  $\mathbb{R}$ , que satisfazem todas as propriedades de um espaço vetorial.



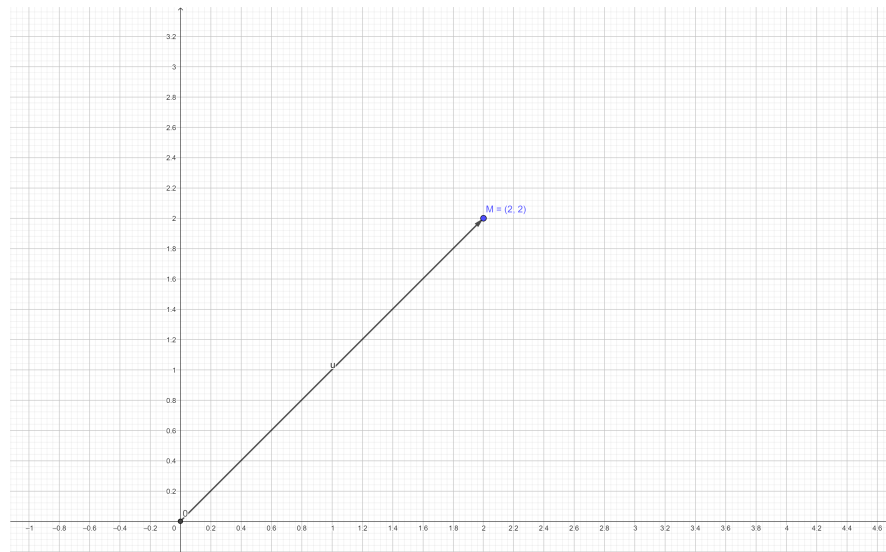


Figura 1 – Um vetor no plano.

A partir disto, podemos perceber o uso analítico dos espaços vetoriais para resolução de problemas em geral. Vejamos mais alguns exemplos.

**Exemplo 02:** O exemplo anterior, trata-se de uma matriz de  $\mathbb{R}^2$  pode ser dito como, no plano, agora iremos expandir para  $\mathbb{R}^3$ , seja um vetor  $A = (x, y, z)$  ou representado pela forma matricial:

$$A = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Assim, por quaisquer números reais, podemos fazer uma projeção ortogonal no espaço, segue um exemplo traçado:

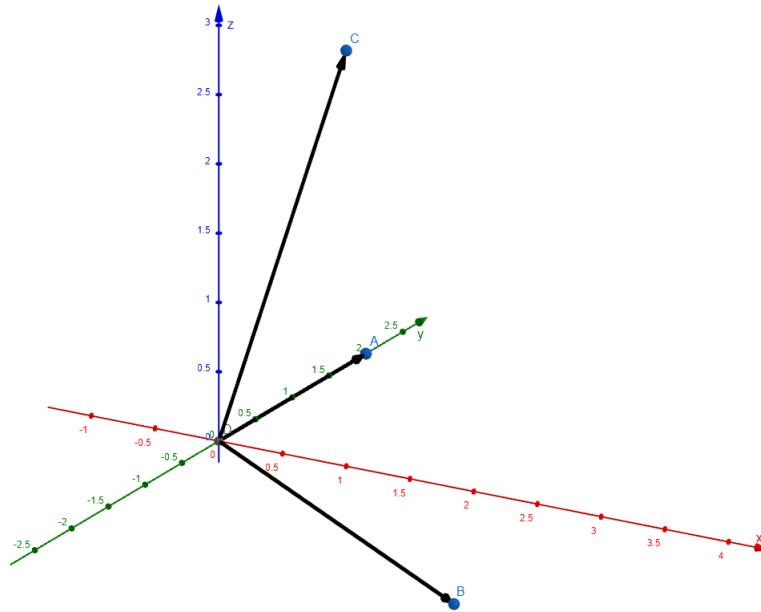


Figura 2 – Exemplo de vetor no espaço.

**Exemplo 03:** Consideremos  $n$  – uplas de números reais.

$$V = \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{R}\}$$

e se  $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $v = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  e  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \text{ e } au = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n)$$

Por tratarmos de uma quantidade  $n$  de números, o campo tridimensional deixa de ser visto, e passamos a ter  $\mathbb{R}^n$  dimensões, as propriedades não deixam de valer independente a quantidade de dimensões.

## 2.1 Subespaços Vetoriais

Nesta seção iremos introduzir conceitos no estudo de espaço vetorial para subespaço vetorial.

**Definição 02:** Dado um espaço vetorial  $V$ , um subconjunto  $W$ , não vazio, será um subespaço vetorial de  $V$  se:

1. Para quaisquer  $u, v \in W$  tivermos  $u + v \in W$ .
2. Para quaisquer  $a \in \mathbb{R}, u \in W$  tivermos  $au \in W$ .

**Teorema 01:** Um subconjunto não vazio  $W$  de  $V$  é um subespaço de  $V$  se, e somente se, para cada par de vetores  $\alpha, \beta$  em  $W$  e cada escalar  $c$  em  $F$ , o vetor  $c\alpha + \beta$  está em  $W$ .

**Demonstração:** Suponhamos que  $W$  seja um subconjunto não vazio de  $V$ , tal que,  $c\alpha + \beta$  pertença a  $W$  para todos os vetores  $\alpha, \beta$  em  $W$  e todos escalares  $c$  em  $F$ . Como  $W$  é não vazio, existe um vetor  $\rho$  em  $W$ , logo  $(-1)\rho + \rho = 0$  está em  $W$ . Então se  $\alpha$  é um vetor arbitrário em  $W$  e  $c$  é um escalar arbitrário, o vetor  $c\alpha = c\alpha + 0$  está em  $W$ . Em particular  $(-1)\alpha = -\alpha$  está em  $W$ . Finalmente se  $\alpha$  e  $\beta$  estão em  $W$ , então  $\alpha + \beta = 1\alpha + \beta$  está em  $W$ . Assim,  $W$  é um subespaço de  $V$ .

**Exemplo 04:** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$ . O conjunto de todos os vetores que residem no plano  $xy$ , ou seja,  $\{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ , forma um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^3$ .

Se o conjunto dado forma um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^3$ , precisamos verificar as três propriedades fundamentais:

1. Contém o vetor nulo: O vetor nulo em  $\mathbb{R}^3$  é  $(0, 0, 0)$ . Este vetor também está contido no plano  $xy$ , pois  $z = 0$ .
2. É fechado sob adição: Se tomarmos dois vetores  $(x_1, y_1, 0)$  e  $(x_2, y_2, 0)$  no plano  $xy$ , a sua soma será  $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0)$ , que também reside no plano  $xy$ .
3. É fechado sob multiplicação por escalar: Para qualquer escalar  $c$  e vetor  $(x, y, 0)$  no plano  $xy$ ,  $c \cdot (x, y, 0) = (cx, cy, 0)$ , que também está no plano  $xy$ .

Então, o conjunto de todos os vetores  $(x, y, 0)$  com  $x, y \in \mathbb{R}$  forma um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^3$ .

**Exemplo 05:** No espaço vetorial das funções reais de uma variável real,  $V = \{f(x) \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ , considere o conjunto de todas as funções lineares, ou seja,  $\{f(x) = mx + b \mid m, b \in \mathbb{R}\}$ . Esse conjunto forma um subespaço vetorial de  $V$ . Novamente, você pode verificar as propriedades para confirmar.

Se o conjunto dado forma um subespaço vetorial de  $V$ , novamente precisamos verificar as três propriedades fundamentais:

1. Contém a função nula: A função nula em  $V$  é  $f(x) = 0$ . Esta função é uma função linear, pois pode ser escrita como  $f(x) = 0 \cdot x + 0$ . Portanto, a função nula está contida no conjunto.
2. É fechado sob adição: Se tomarmos duas funções lineares  $f_1(x) = m_1x + b_1$  e  $f_2(x) = m_2x + b_2$ , a sua soma será  $f_1(x) + f_2(x) = (m_1 + m_2)x + (b_1 + b_2)$ , que também é uma função linear. Portanto, o conjunto é fechado sob adição.
3. É fechado sob multiplicação por escalar: Para qualquer escalar  $c$  e função linear  $f(x) = mx + b$ , a multiplicação por escalar  $cf(x) = c(mx + b) = (cm)x + (cb)$  também é uma função linear. Assim, o conjunto é fechado sob multiplicação por escalar.

Portanto, o conjunto de todas as funções lineares  $f(x) = mx + b$  com  $m, b \in \mathbb{R}$  forma um subespaço vetorial de  $V$ .

**Exemplo 06:** No espaço das matrizes reais  $2 \times 2$ ,  $M_{(2,2)}$ , considere o conjunto de todas as matrizes simétricas, ou seja, aquelas em que  $A = A^T$ . Esse conjunto forma um subespaço vetorial de  $M_{(2,2)}$ . Você pode demonstrar isso verificando as propriedades de um subespaço vetorial

Para tal, é imperativo investigar as três propriedades basilares:

1. **Presença da Matriz Nula:** A matriz nula em  $M_{(2,2)}$  é a matriz  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Nota-se que esta matriz é simétrica, posto que  $A = A^T$ . Portanto, a matriz nula está asseguradamente contida no conjunto em questão.
2. **Fechamento sob Adição:** Considerando duas matrizes simétricas  $A$  e  $B$ , a sua soma  $A + B$  é também simétrica, visto que  $(A + B)^T = A^T + B^T = A + B$ . Logo, o conjunto demonstra ser fechado sob adição.
3. **Fechamento sob Multiplicação por Escalar:** Para qualquer escalar  $c$  e matriz simétrica  $A$ , a multiplicação por escalar  $cA$  é igualmente simétrica, haja vista que  $(cA)^T = cA^T = cA$ . Deste modo, o conjunto revela-se fechado sob multiplicação por escalar.

Assim sendo, constata-se que o conjunto de todas as matrizes simétricas configura-se como um subespaço vetorial de  $M_{(2,2)}$ .

## 2.2 Combinação Linear

Dentro de um espaço vetorial, conforme demonstrado que podemos ter subconjuntos de espaços vetoriais, é possível a obtenção de novos vetores a partir de vetores dados (BOLDRINI et al., 1986).

**Definição 03:** Sejam  $V$  um espaço vetorial  $\mathbb{R}$ ,  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  e  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . Então, o vetor  $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$  é um elemento de  $V$  podendo ser chamado combinação linear de  $v_1, \dots, v_n$ .

Se  $V \subset W$ , podemos adotar a notação  $W = [v_1, \dots, v_n]$ , onde expandindo-o

$$W = [v_1, \dots, v_n] = \{v \in V; v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n, a_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$$

**Exemplo 07:** Presuma um vetor  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $v \in V, v \neq 0$ . Se imaginarmos sua reta que contém o vetor  $v$ , onde,  $[v] = av : a \in \mathbb{R}$

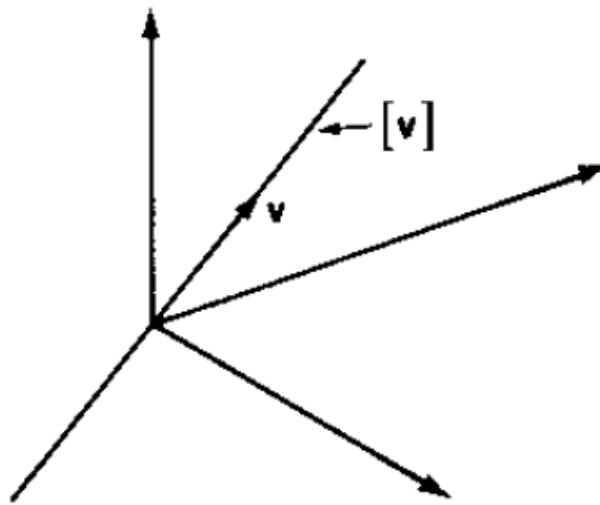


Figura 3 – Combinação linear de Vetores (BOLDRINI et al., 1986), pg. 113.

**Exemplo 08:** Se obtemos  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$  e  $v_3 \in [v_1, v_2]$ , então  $[v_1, v_2, v_3] = [v_1, v_2]$ , então  $v_3$  é um combinação linear de  $v_1$  e  $v_2$ .

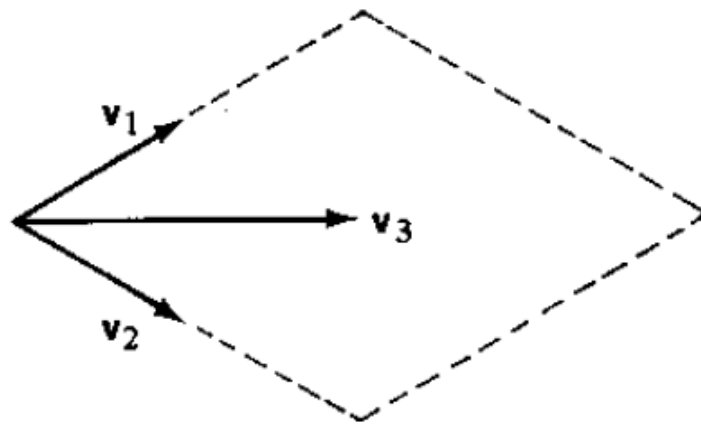


Figura 4 – Combinação de três vetores lineares (BOLDRINI et al., 1986), pg. 113.

**Exemplo 09:** Consideremos o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  e os vetores  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Sejam também os escalares  $a = 3$  e  $b = -1$ . Então temos, os seguintes elementos.

Vetor	Componentes	Escalar
$\mathbf{v}$	2, 3, 1	3
$\mathbf{w}$	1, -1, 2	-1

Tabela 1 – Vetores e escalares utilizados na combinação linear

Definimos a combinação linear dos vetores  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  como:

$$a\mathbf{v} + b\mathbf{w} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aplicando as operações, obtemos:

$$a\mathbf{v} + b\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-1 \\ 9+1 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a combinação linear dos vetores  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  com os coeficientes  $a = 3$  e  $b = -1$  é o vetor

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 2.3 Dependência e Independência Linear

Dado a combinação linear, devemos saber, a priori, se algum desses vetores não é combinação linear dos outros e assim por diante. Para isto precisamos saber sua dependência e independência linear.

**Definição 03:** Sejam  $\mathbf{V}$  um espaço vetorial e  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbf{V}$ . Dizemos que o conjunto  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  é linearmente independente (**LI**), ou que os vetores  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  são **LI**, se a equação

$$a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_n\mathbf{v}_n = 0$$

implica que  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ . No caso em que exista algum  $a_i \neq 0$  dizemos que  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  é linearmente dependente (**LD**), ou que os vetores  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  são **LD**.

**Teorema 02:** Uma combinação linear é **LD** se, e somente se um destes vetores for uma combinação linear dos outros.

$$\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} = \mathbf{LD} \iff \exists i \mid \sum_{i \neq j} c_i \mathbf{v}_i$$

**Demonstração:** Sejam  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  **LD** e  $a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_j\mathbf{v}_j + \dots + a_n\mathbf{v}_n = 0$

Um dos coeficientes deve ser diferente de zero. Suponhamos que seja  $a_j \neq 0$ . Então

$$\mathbf{v}_j = -\frac{1}{a_j}(a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_{j-1}\mathbf{v}_{j-1} + a_{j+1}\mathbf{v}_{j+1} + \dots + a_n\mathbf{v}_n)$$

e portanto  $\mathbf{v}_j = -\frac{a_1}{a_j}\mathbf{v}_1 + \dots - \frac{a_n}{a_j}\mathbf{v}_n$

Logo,  $\mathbf{v}_j$  é uma combinação linear dos outros vetores.

**Exemplo 10:** Sejam  $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$  e  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{V}$ ,  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$  é **LD**  $\iff \mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  estiverem na mesma reta, que passa pela origem. ( $\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_2$ ).

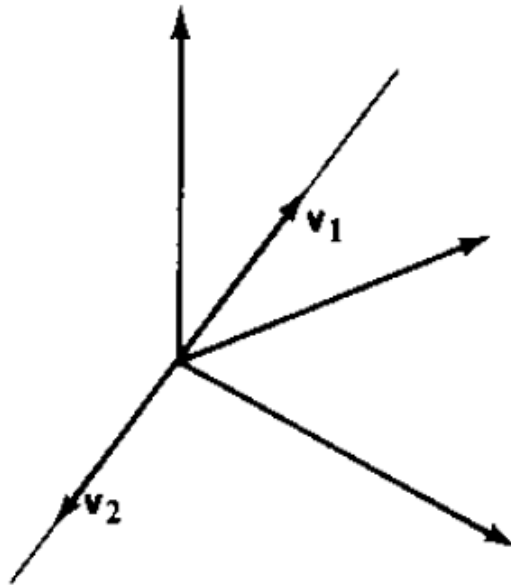


Figura 5 – Vetores linearmente dependentes (BOLDRINI et al., 1986), pg. 115.

## 2.4 Base

Seja  $V$  um espaço vetorial. Uma base para  $V$  é um conjunto finito  $B = \{u_1, \dots, u_n\}$  de elementos de  $V$ , tal que  $B$  é Linearmente independente e gera o espaço vetorial  $V$ , ou seja, qualquer elemento de  $V$  pode ser escrito como combinação linear dos elementos de  $B$ . O subespaço gerado por  $B$  coincide com um subespaço  $H$  de um espaço vetorial  $V$ , então

$$H = \text{Span}\{b_1, \dots, b_p\}$$

A definição de base se aplica ao caso em  $H = V$ , porque todo espaço vetorial é subespaço dele mesmo. Assim, uma base de  $V$  é um conjunto linearmente independente que gera  $V$  (LAY, 1999). Então se tivermos uma tripla ordenada linearmente independente  $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  será uma base de  $V^3$ .

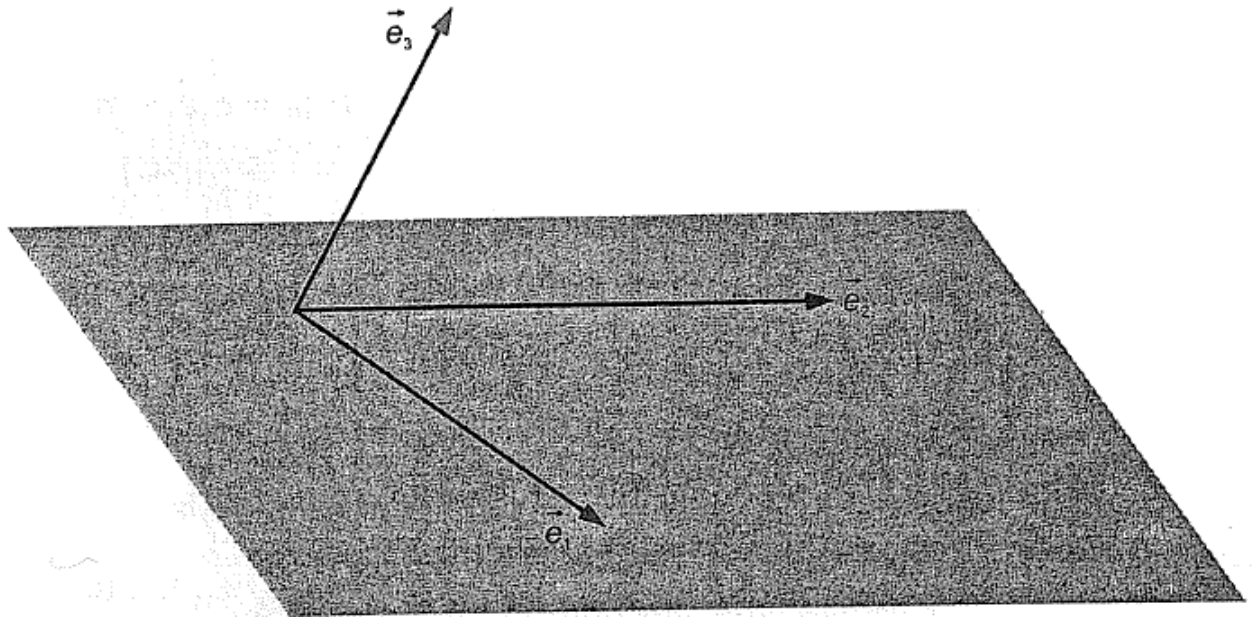


Figura 6 – Base de um vetor em  $\mathbb{R}^3$  (CAMARGO; BOULOS, 2005), pg. 52.

Para analisar as propriedades da base de um espaço vetorial de forma generalizada, consideremos desta forma.

**Teorema 3:** Sejam  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \mid \mathbf{v} \neq 0$ , estes que geram um espaço vetorial  $V$ . Então, dentre estes vetores podemos extrair uma base de  $V$ .

Se  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  são **LI**, então eles cumprem as condições para uma base, e não temos mais nada a fazer. Se  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  são **LD**, então existe uma combinação linear deles, com algum coeficiente não zero, obtendo o vetor nulo

$$x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \dots + x_n \mathbf{v}_n = 0$$

Se  $x_n \neq 0$ . Então é possível escrever

$$\mathbf{v}_n = \frac{-x_1}{x_n} \mathbf{v}_1 + \frac{-x_2}{x_n} \mathbf{v}_2 + \dots + \frac{-x_{n-1}}{x_n} \mathbf{v}_{n-1}$$

ora,  $\mathbf{v}_n$  é uma combinação linear de  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$  e, portanto,  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$  geram  $V$ . Se  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$  for **LD**, então existe uma combinação linear deles que dará o vetor nulo e com algum coeficiente  $\neq 0$ , portanto, é possível extrair o vetor que corresponde a este coeficiente. Se continuarmos, com as iterações, após uma quantidade  $n$  de passos, obteremos um subconjunto de  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  formado por  $r$  ( $r \leq n$ ) vetores **LI**  $\mathbf{v}_{i1}, \mathbf{v}_{i2}, \dots, \mathbf{v}_{ir}$ , que ainda geram  $V$ , por fim, formará uma base.



## 2.5 Dimensão

A dimensão de um espaço vetorial  $V$  é o número de elementos de uma base para  $V$ , que denotamos por  $\dim(V)$ . Caso  $V = \{e\}$ , o conjunto vazio é uma base para  $V$  e  $\dim(V) = 0$ . Qualquer base de um espaço vetorial tem sempre o mesmo número de elementos.

**Teorema 4:** Seja  $V$  um espaço vetorial e  $\{u_1, \dots, u_n\}$  um conjunto de elementos que geram  $V$ . Então, dentre esses elementos podemos extrair uma base para  $V$ .

**Teorema 5:** Seja  $V$  um espaço vetorial gerado por um conjunto finito de  $n$  elementos  $u_1, u_2, \dots, u_n$ . Então, qualquer conjunto linearmente independente em  $V$  possui no máximo  $n$  elementos.

**Teorema 6:** Qualquer base de um espaço vetorial tem sempre o mesmo número (finito) de elementos.

**Teorema 7 (Completamento):** Qualquer conjunto de elementos **LI** de um espaço vetorial  $V$  de dimensão finita pode ser completado até formar uma base para  $V$ .

**Teorema 8:** Seja  $V$  um espaço vetorial e  $U$  e  $W$  subespaços vetoriais de  $V$ , então:

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

**Teorema 9:** Seja  $V$  um espaço vetorial e  $\beta = \{u_1, \dots, u_n\}$  uma base ordenada para  $V$ , isto é, os elementos estão ordenados na ordem em que aparecem. Então, todo elemento de  $V$  pode ser escrito de maneira única como combinação linear de  $u_1, \dots, u_n$ .

### 3 Transformações Lineares

Neste capítulo, iremos tratar sobre um tipo especial de função ou aplicação, onde, segundo (STEINBRUCH; WINTERLE, 1987), o domínio e o contradomínio são espaços vetoriais reais. Assim, tanto a variável independente como a variável dependente são vetores, razão pela qual essas funções são chamadas vetoriais.

Nosso estudo das funções vetoriais lineares em questão, será focado, nas transformações lineares.

**Definição 04:** Sejam  $V$  e  $W$  dois espaços vetoriais. Uma transformação linear (aplicação linear) é uma função de  $V$  em  $W$ ,  $F : V \rightarrow W$ , que satisfaz as seguintes condições:

1. Para quaisquer  $u$  e  $v$  em  $V$ ,  $F(u + v) = F(u) + F(v)$ . **Homogeneidade**
2. Para quaisquer  $k \in \mathbb{R}$  e  $v \in V$ ,  $F(kv) = kF(v)$ . **Aditividade**

No caso especial em que  $V = W$ , a transformação linear é denominada **operador linear** do espaço vetorial  $V$  (ANTON, 2010).

Válido em:  $\forall v, v \in V$  e  $\forall k \in \mathbb{R}$ .

Trataremos  $F$  como  $T$  por convenção daqui em diante. Para se dizer que  $T$  é uma transformação linear do espaço vetorial  $V$  no espaço vetorial  $W$ , será denotado por  $T : V \rightarrow W$ , onde  $T$  é a função, cada vetor  $v \in V$  tem uma só imagem  $w \in W$ , indicado por  $w = T(v)$ .

Tomemos por dois conjuntos de vetores,  $V = \mathbb{R}^2$  e  $W = \mathbb{R}^3$ .

Uma transformação de  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  associa vetores  $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  com vetores  $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

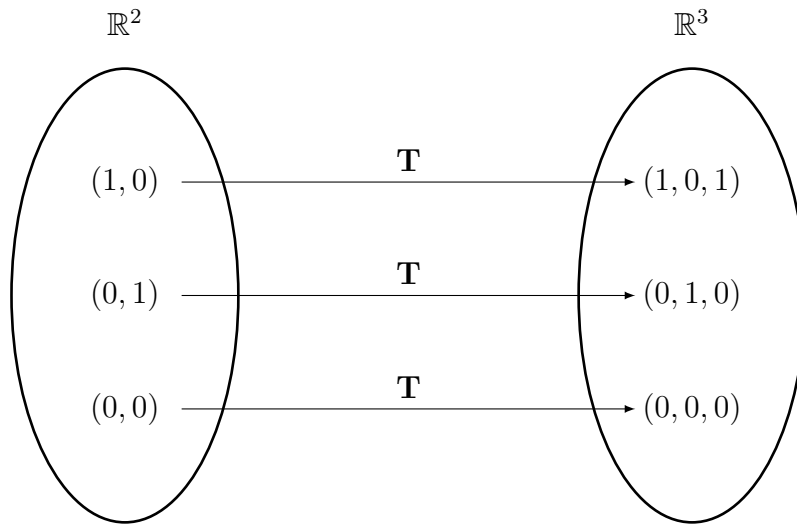
**Exemplo 11:** Declarado esta transformação linear  $T(x, y) = (x, y, x + y)$ . Iremos selecionar alguns vetores em  $\mathbb{R}^2$  e calcular suas imagens sob a transformação  $T$ . Por exemplo, os vetores  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$ . Para  $(1, 0)$ , temos:

$$T(1, 0) = (1, 0, 1 + 0) = (1, 0, 1)$$

e para  $(0, 1)$ , temos:

$$T(0, 1) = (0, 1, 0 + 1) = (0, 1, 1).$$

Segue a imagem em  $\mathbb{R}^3$ :



Uma função  $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  com  $T = \{(x, y, x + y)\}$

**Exemplo 12:** Se tomarmos um vetor arbitrário e fazemos uma transformação linear idêntica, ou seja,  $1\alpha = \alpha$ , é uma transformação linear de  $V$  em  $V$ . A transformação é definida por  $0\alpha = 0$ , é também uma transformação linear de  $V$  em  $V$  (HOFFMAN; KUNZE, 1979).

De acordo com o exemplo acima, percebe-se, que será uma função onde o gráfico passa a reta pela origem se supormos uma função afim,  $\mathbb{R}^1$  em  $\mathbb{R}^1$ . Uma transformação linear mantém combinações lineares  $W = [v_1, \dots, v_n]$  são vetores que pertencem a  $V$  e possui seus escalares  $c_1, \dots, c_n$ , então:

$$T(c_1 v_1, \dots, c_n v_n) = T(c_1 v_1 + c_2 v_2) = c_1(Tv_1) + c_2(Tv_2)$$

**Exemplo 13:** Tomemos um caso que desejamos dobrar nosso espaço vetorial, dado um vetor  $V = (2, 2)$ ;  $V \in \mathbb{R}^2$ , a transformação linear será dada por,  $T(x, y) = (2x, 2y) \in \mathbb{R}^2$ . Nosso domínio e contradomínio está em  $\mathbb{R}^2$ , portanto o resultado será por  $W = (2 \times 2, 2 \times 2) \therefore W = (4, 4)$

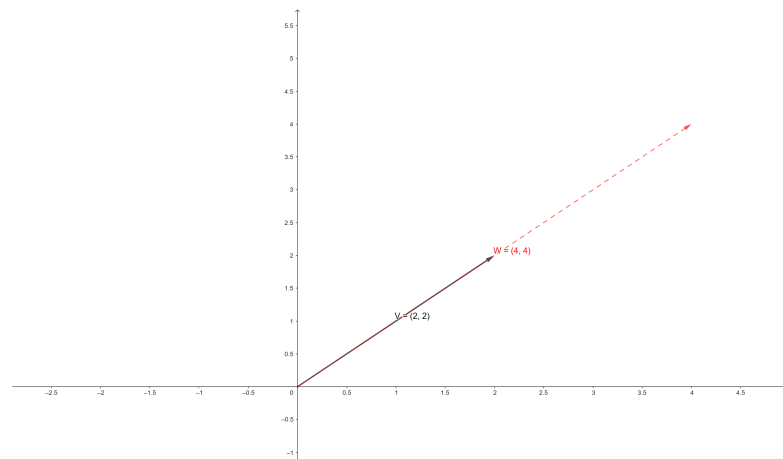


Figura 7 – Transformação linear dobro de um vetor.

Para uma matriz de transformação linear  $T$  de  $V$  em si mesma, existe uma matriz única  $A$  de dimensão  $n \times n$  que representa  $T$ . Essa matriz é definida pela seguinte propriedade:

$$T(v) = Av$$

para todo vetor  $v$  em  $V$ . A matriz  $A$  é chamada de matriz de transformação de  $T$ .

Consideremos agora no segmento da transformação linear e no campo da geometria o uso de operações como rotações, reflexões e projeções. Tomemos o espaço vetorial bidimensional  $\mathbb{R}^2$  com base canônica  $e_1 = (1, 0)$  e  $e_2 = (0, 1)$ . A rotação de 90 graus no sentido anti-horário pode ser representada pela seguinte matriz de transformação:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz  $R$  chamada de matriz de rotação, possui algumas propriedades:

1. **Ortogonalidade:** A matriz  $R$  é ortogonal, ou seja sua transposta é inversa:

$$R^T = R^{-1}$$

2. **Determinante:** O determinante da matriz  $R$  é igual a  $-1$ .

$$\det(R) = -1$$

Ao rotacionar um vetor  $v = (x, y)$  em 90 graus no sentido anti-horário, basta aplicar a matriz de rotação em  $v$ .

$$v' = R \times v = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}$$

No caso em questão, o operador de rotação de um ângulo qualquer como  $\theta$  em torno e origem em  $\mathbb{R}^2$ , tratando-se o operador  $R : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ , resulta em  $R(u + v) = R(u) + R(v)$ .

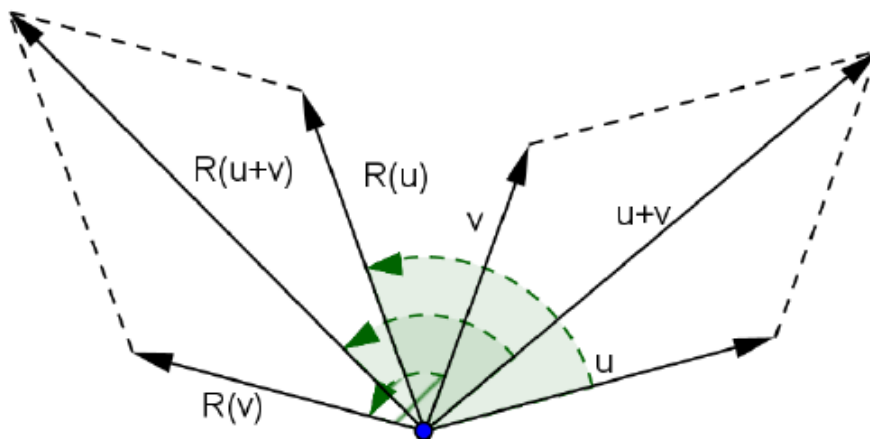


Figura 8 – Transformada de rotação de um vetor (NOGUEIRA, 2013).

### 3.1 Núcleo de uma Transformação Linear

Em transformações lineares. O núcleo, também chamado de espaço nulo de uma transformação linear  $T$ , denotado por  $N(T)$ , é o conjunto de todos os vetores no domínio de  $T$  que são mapeados para o vetor nulo. Portanto, representa o conjunto de soluções para a equação homogênea  $T(x) = 0$ . O núcleo é definido como:

$$N(T) = \{x \in U \mid T(x) = 0\}$$

onde  $U$  representa o domínio de  $T$ .

Para  $N(T) = \{v \in \frac{V}{T(v)} = 0\}$ , segue o diagrama:

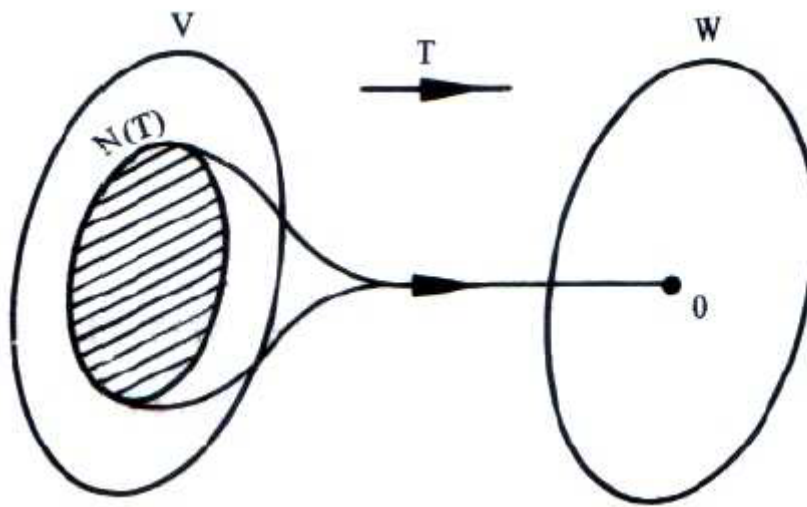


Figura 9 – Diagrama do núcleo de uma transformação linear (STEINBRUCH; WINTERLE, 1987).

então,  $N(T) \subset V$  e  $N(T) \neq \emptyset$ , pois  $0 \in N(T)$ , se  $T(0) = 0$ .

De acordo com (LANG, 2003), que, enfatizou a importância do núcleo na compreensão da injetividade de uma transformação linear, ou seja, a capacidade de preservar a identidade dos vetores. O núcleo de uma transformação linear possui duas propriedades, que regem:

1. O núcleo de uma transformação linear  $T : V \longrightarrow W$  é um subespaço vetorial de  $V$ .
2. Uma transformação linear  $T : V \longrightarrow W$  é injetora se, e somente se,  $N(T) = \{0\}$ .

Se  $v_1$  e  $v_2$  pertencem ao núcleo  $N(T)$  e  $k$  um número real qualquer. Então,  $T(v_1) = 0$  e  $T(v_2) = 0$ . Logo:

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = 0 + 0 = 0$$

portanto,  $v_1 + v_2 \in N(T)$ .

**Exemplo 14:** Dado  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \mid (x, y) \rightarrow x + y$ , o núcleo, que iremos chamar, neste caso,  $\ker T$  é  $\ker T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 0\}$ , onde a reta  $y = -x$  é  $\ker T$  e  $\ker T = \{(x, -x); x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, -1); x \in \mathbb{R}\} = [(1, -1)]$ . A imagem da transformação, ou seja,  $\text{Im } T = \mathbb{R}$ , todavia, um vetor  $w \in \mathbb{R}, w = T(w, 0)$ .

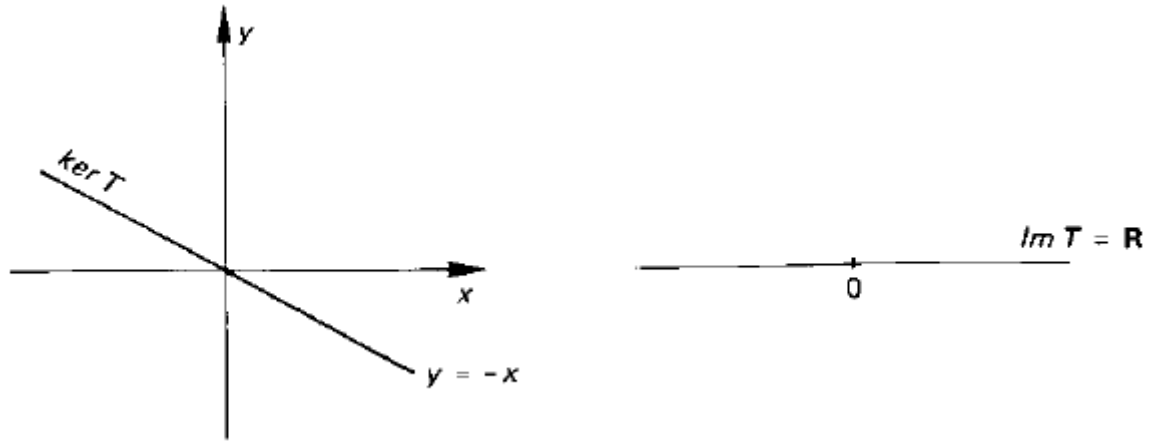


Figura 10 – Imagem de um núcleo de transformação linear (BOLDRINI et al., 1986), pg. 152.

Percebe-se que a imagem de uma transformação é  $T : V \rightarrow W$  é um subespaço de  $W$ , pois, se tomarmos dois vetores,  $w_1 + w_2 \in \text{Im } T$  e  $\alpha w_1 \in \text{Im } T$ . Existem vetores  $v$  e  $u \in V \mid T(v) = w_1 + w_2$  e  $T(u) = \alpha w_1$ .

Se  $w_1, w_2 \in \text{Im } T$ , existem vetores  $v_1, v_2 \in V \mid T(v_1) = w_1$  e  $T(v_2) = w_2$ . Tendo  $v = v_1 + v_2$  e  $u = \alpha v_1$ , logo:

$$T(v) = T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = w_1 + w_2$$

e  $T(u) = T(\alpha v_1) = \alpha T(v_1) = \alpha w_1$ , portanto,  $\text{Im } T$  é um subespaço vetorial de  $W$ .

## 3.2 Isomorfismo

Um conceito intrigante surge com o isomorfismo. Uma transformação linear  $T : U \rightarrow V$ , entre espaços vetoriais  $U$  e  $V$ , que é bijetora. Um isomorfismo só é válido se atender a duas condições cruciais:

1. **Injetividade:**  $T$  é injetora, o que significa que mapeia vetores distintos do domínio para vetores distintos no contradomínio. Em outras palavras,  $T$  preserva a identidade.
2. **Sobrejetividade:**  $T$  é sobrejetora, mapeando todo vetor em  $V$  a partir de um vetor em  $U$ . Isso significa que a imagem de  $T$  abrange todo o espaço  $V$ .

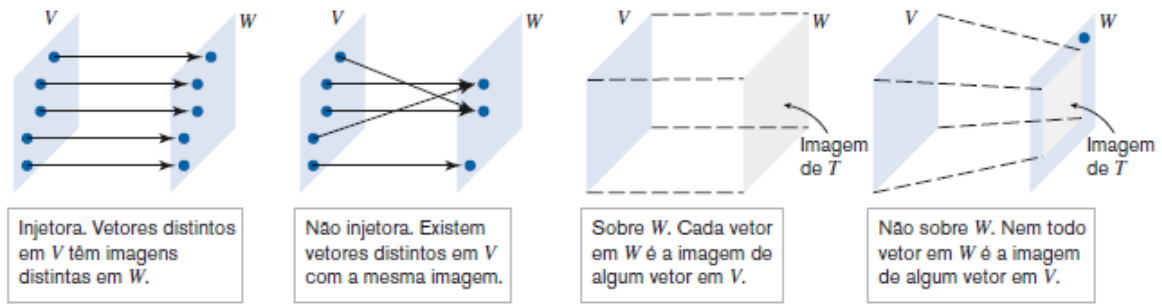


Figura 11 – Diagrama do isomorfismo e sua imagem (ANTON, 2010), pg. 445.

Se  $T$  satisfaz ambas as condições, podemos afirmar que ela estabelece uma correspondência biunívoca entre  $U$  e  $V$ . Essa relação especial permite que representamos cada vetor em  $V$  por um único vetor em  $U$ , e vice-versa. É notável também ressaltar, que, todo espaço vetorial  $V$  de dimensão  $n$  é isomorfo a  $\mathbb{R}^n$ , portanto dois espaços vetoriais de dimensão finita são isomorfos se tiverem a mesma dimensão.

O núcleo de uma transformação e seu isomorfismo tem uma conexão que é o Teorema do Núcleo e da Imagem. Este teorema estabelece uma relação crucial entre a dimensão do núcleo, a dimensão da imagem e a dimensão do domínio de uma transformação linear  $T$ :

$$\dim(N(T)) + \dim(Im(T)) = \dim(U)$$

onde  $Im(T)$  representa a imagem de  $Im(T)$ , o conjunto de todos os vetores em  $V$  que são alcançados por  $T$ .

O Teorema do Núcleo e da Imagem oferece ferramentas valiosas para determinar se uma transformação linear é um isomorfismo. Se a dimensão do núcleo for zero e a dimensão da imagem for igual à dimensão do domínio, podemos concluir que  $T$  é um isomorfismo.

**Teorema 10:** Sejam  $E, F$  espaços vetoriais de dimensão finita. Para toda transformação linear  $T : E \rightarrow F$  tem-se que  $\dim E = \dim N(T) + \dim Im(T)$ .

Se  $\{T(u_1), \dots, T(u_p)\}$  é uma base de  $Im(T)$  e  $\{v_1, \dots, v_q\}$  é uma base de  $N(T)$  então  $\{u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q\}$  é uma base de  $E$ . Logo, se tivermos

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_p u_p + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_q v_q = 0,$$

então, com a transformação em ambos os membros da igualdade, obtemos

$$\alpha_1 T(u_1) + \dots + \alpha_p T(u_p) = 0.$$

Como  $T(u_1), \dots, T(u_p)$  são **LI**, resultando em  $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$ . Portanto se reduz a igualdade

$$\beta_1 v_1 + \dots + \beta_q v_q = 0.$$

Da mesma forma  $v_1, \dots, v_q$  são **LI**, concluí-se que  $\beta_1 = \dots = \beta_q = 0$ . Então ambos os vetores  $u$  e  $v$  são **LI**.

Agora, se considerarmos um vetor arbitrário  $w \in E$ . Como  $T(w) \in Im(T)$ , definimos

$$\mathbf{T}(\mathbf{w}) = \alpha_1 \mathbf{T}(\mathbf{u}_1) + \dots + \alpha_p \mathbf{T}(\mathbf{u}_p),$$

pois  $\{\mathbf{T}(\mathbf{u}_1), \dots, \mathbf{T}(\mathbf{u}_p)\}$  é uma base da imagem de  $\mathbf{T}$ . Manipulando a expressão temos

$$\mathbf{T}[\mathbf{w} - (\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_p \mathbf{u}_p)] = 0.$$

Dessa forma, o vetor  $\mathbf{w} - (\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_p \mathbf{u}_p)$  pertence ao núcleo de  $\mathbf{T}$ , podendo ser expresso como uma combinação linear dos elementos da base  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q\}$ . Temos então

$$(\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_p \mathbf{u}_p) = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \beta_q \mathbf{v}_q,$$

ou seja,  $\mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_p \mathbf{u}_p + \beta_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \beta_q \mathbf{v}_q$ . O que prova que os vetores  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q\}$  geram  $E$  e portanto constituem uma base.



## 4 Aplicações de Transformações Lineares

As TL têm contribuições significativas para o campo da AL. (STRANG, 2010), renomado matemático e professor do MIT - Massachusetts Institute of Technology, aborda, por exemplo, o processamento de sinais e imagens para compressão, filtragem, reconstrução e análise de dados, a análise de redes e sistemas dinâmicos da engenharia elétrica e ciência da computação, a geometria e a computação gráfica para manipular objetos em espaços tridimensionais, videogames e modelagem em três dimensões, além de cripto segurança e, mais recentemente, análise de dados em decisões gerenciais e aprendizagem de máquina.

A seguir, baseando em um estudo desenvolvido na Universidade Federal de Alagoas (AMORIM, 2017), apresentamos algumas aplicações das TL na área de engenharia.

### 4.1 Posicionamento de Um Braço Robótico

Para executar atividades repetitivas, perigosas e precisas, um braço robótico, composto por elos e juntas conforme figura 12 é dispositivo dotado de articulações e pode ser programado utilizando aplicações de AL, considerando as variações de posição no plano e no espaço.

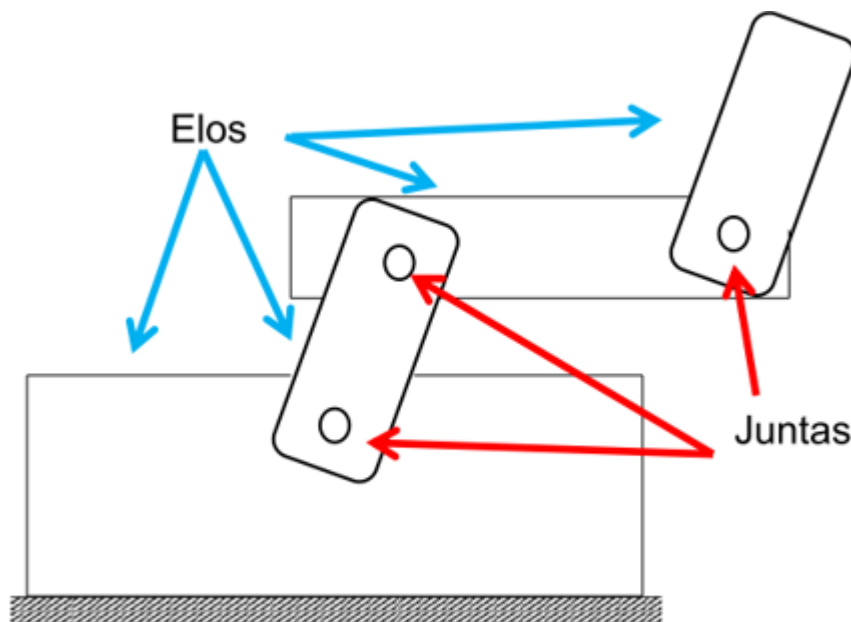


Figura 12 – Esquema de articulações (AMORIM, 2017).

Para representar a aplicação, considere que a figura 13a contém um braço robótico com

dois graus de liberdade e seus comprimentos são indicados por  $d_1, d_2$  e  $d_3$  dos elos, e os ângulos da posição inicial do braço com base no ponto  $P$ , nas coordenadas iniciais  $(x_0, y_0)$ . Na figura 13b, está demonstrada como seria o efeito desse movimento, com o ponto  $P$  na coordenada  $(x_1, y_1)$ , utilizando as TL.

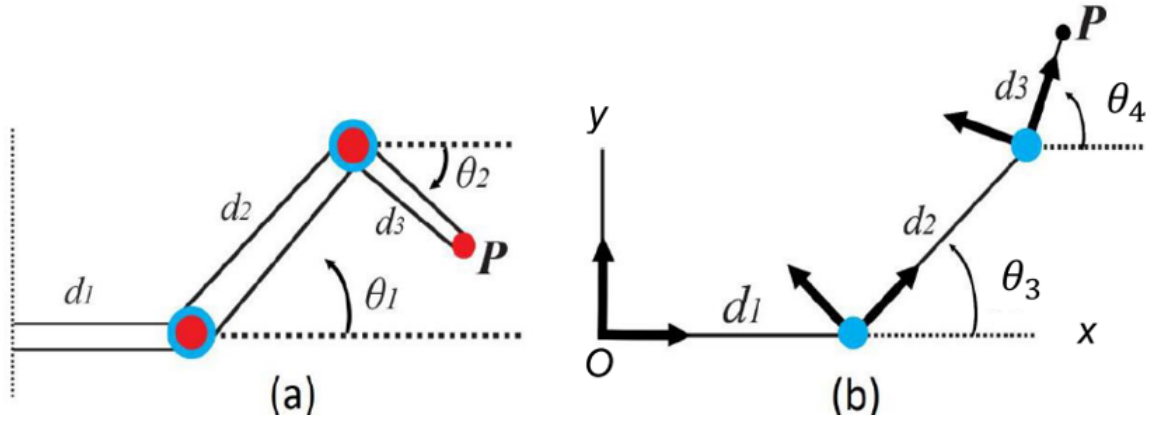


Figura 13 – Posição inicial e final (AMORIM, 2017).

A Figura 14 apresenta o movimento de rotação e translação, e a figura 15 mostra o movimento de translação e rotação, observando que o resultado é diferente de acordo com a ordem aplicada.

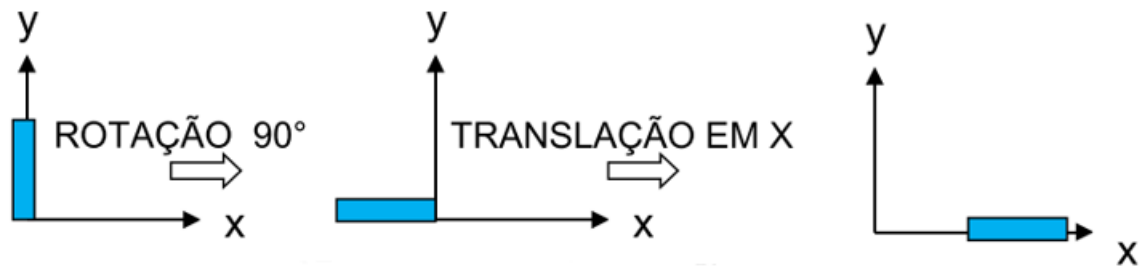


Figura 14 – Rotação e translação (AMORIM, 2017).



Figura 15 – Translação e rotação (AMORIM, 2017).

Utilizando as TL, consideramos que o sistema adotado como global foi o do antebraço. Denominemos este sistema por  $\{A^0\}$ . Onde  $e_1$  e  $e_2$  são os vetores da base canônica do  $\mathbb{R}^2$ , com

origem no ponto  $O$  (Figura 13b) e  $d_1$  o comprimento do braço e de  $\theta_1$  o ângulo que o antebraço faz com o eixo determinado por  $\mathbf{e}_1$ . Seja  $\mathbf{A}_1 = \{f_1, f_2\}$  o sistema local obtido da rotação do sistema  $\mathbf{A}_0$  pelo ângulo  $\theta_1$  seguida da translação na direção de  $\mathbf{e}_1$  por um comprimento  $d_1$ .

A partir da transformação de rotação, a matriz é representada por

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e sua respectiva matriz de translação na direção de  $d_1\mathbf{e}_1$  é dada por

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Desta forma, a composição de  $\mathbf{T}_1$  com  $\mathbf{R}_1$  fica

$$\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & d_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Considerando que  $d_2$  é o comprimento do antebraço e  $\theta_2$  o ângulo que não faz com o eixo determinado por  $f_1$ , o sistema local  $\mathbf{A}^2 = \{g_1, g_2\}$  é obtido da rotação do sistema  $\mathbf{A}^1$  pelo ângulo  $\theta_2$  seguida da translação, na direção de  $f_1$ , por um comprimento  $d_2$ , representado pela matriz de rotação

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e pela matriz de translação

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A composição  $\mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{R}_2$  é representada por

$$\mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & d_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então houve duas transformações sucessivas partindo do referencial global até o sistema local da mão. Agora partindo uma transformação que leva o referencial  $A^0$  ao referencial  $\{A^2\}$  como mostra a figura 16 abaixo.

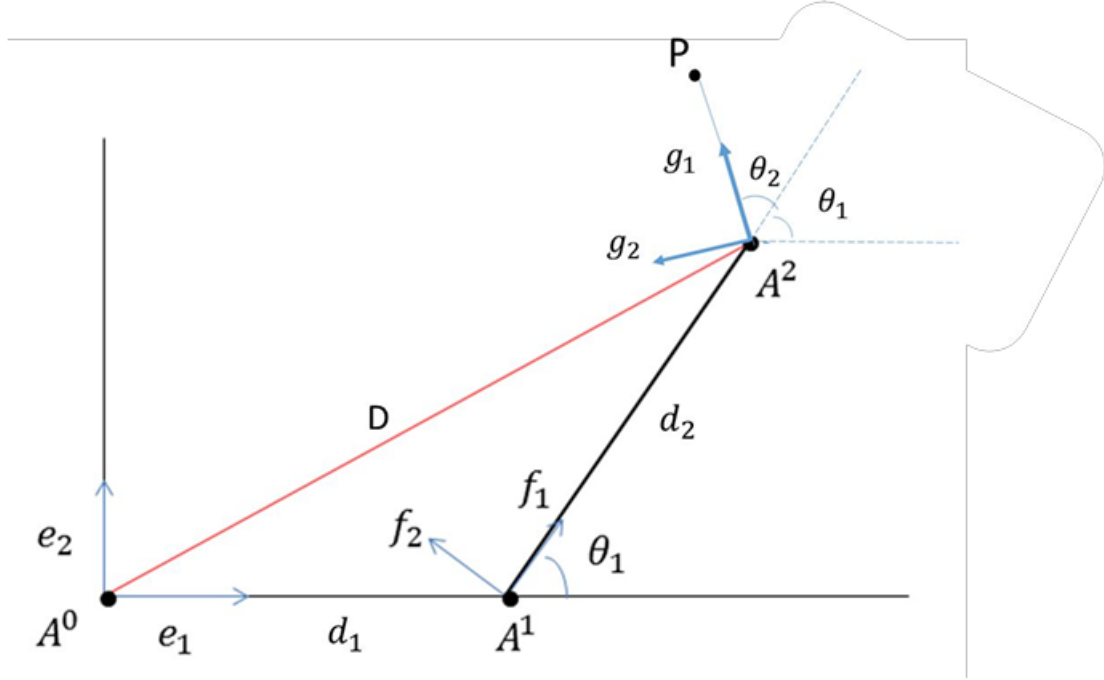


Figura 16 – Transformação do referencial  $A^0$  para o referencial  $\{A^2\}$  (AMORIM, 2017).

Para levar  $A^0$  até  $A^2$  é necessário rotacionar (conforme demonstrado nos capítulos anteriores) e depois transladar, nessa ordem, por uma matriz do tipo

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & d_1 \\ \sin \theta & \cos \theta & d_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nessa matriz, o ângulo  $\theta$  que o referencial  $A^0$  deve ser rotacionado para ficar paralelo ao referencial  $A^2$  é  $\theta_1 + \theta_2$ . Além disso, note que as coordenadas do vetor translação  $t = (t_1, t_2)$  para a transformação  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{R}$  são

$$\begin{aligned} t_1 &= d_1 + d_2 \cos \theta_1 \\ t_2 &= d_2 \sin \theta_1 \end{aligned}$$

Então, a matriz de transformação do referencial  $A^0$  para o referencial  $A^2$  pode ser reescrita como

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) & d_1 + d_2 \cos \theta_1 \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & d_2 \sin \theta_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

fazendo manipulações algébricas e reduzindo a matriz em um produto temos

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & d_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & d_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{T}_1 \cdot \mathbf{R}_1 \bullet \mathbb{T}_2 \cdot \mathbf{R}_2$$

Observe a ordem que este produto deve ser realizado para obtermos a matriz final. Considere agora o referencial local  $\mathbf{A}^3$ , obtido ao transladarmos o referencial  $\mathbf{A}^2$  para o ponto  $P$  sem girá-lo. O ponto  $P$  está localizado no sistema local  $\mathbf{A}^2$  com coordenadas  $(d_3, 0)$ . É necessário, agora, apenas transladar de  $\mathbf{A}^2$  para  $P$  por meio da seguinte matriz (o ângulo de rotação é nulo)

$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

então, a matriz de transformação geral,  $\mathbf{M}$ , é dada por

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & d_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & d_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para encontrarmos as coordenadas do ponto  $P$  no referencial  $\mathbf{A}^0$  é necessário aplicar a matriz  $\mathbf{M}$  ao vetor  $(0, 0, 1)$ , origem de  $\mathbf{A}^0$ . Então o ponto em análise pode ser expresso por

$$P = \mathbf{M} \cdot (0, 0, 1)$$

ou seja,

$$P = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & d_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & d_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

realizando esse produto chegamos a

$$P = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) & d_1 + d_2 \cos \theta_1 + \cos(\theta_1 + \theta_2)d_3 \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & d_2 \sin \theta_1 + \sin(\theta_1 + \theta_2)d_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**Exemplo 15:** Seja a posição inicial do braço robótico dada pela figura 17, onde  $d_1 = 20\text{cm}$ ,  $d_2 = 30\text{cm}$ ,  $d_3 = 14\text{cm}$ ,  $\theta_1 = 60^\circ$  e  $\theta_2 = -90^\circ$ .

- a) Determinar as coordenadas do ponto  $P$  para esta configuração em relação ao sistema global e  
b) para  $\theta_1 = 45^\circ$  e  $\theta_2 = 45^\circ$ .

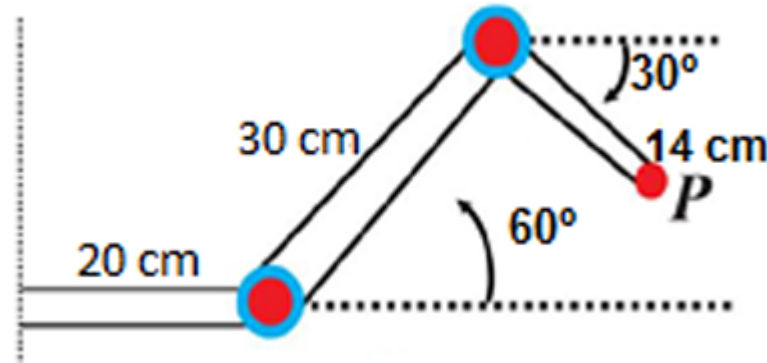


Figura 17 – Posição inicial do braço robótico  $\{A^2\}$  (AMORIM, 2017).

- a) O ponto  $P$  é obtido diretamente pela inserção direta dos valores fornecidos

$$P = \begin{bmatrix} \cos(-30) & -\sin(-30) & 20 + 30 \cos(60) + \cos(-30)14 \\ \sin(-30) & \cos(-30) & 30 \sin(60) + \sin(-30)14 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 47, 12 \\ 19 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- b) O ponto  $P$  é obtido diretamente pela inserção direta dos valores fornecidos

$$P = \begin{bmatrix} \cos(90) & -\sin(90) & 20 + 30 \cos(45) + \cos(90)14 \\ \sin(90) & \cos(90) & 30 \sin(45) + \sin(90)14 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 41, 2 \\ 3, 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

## 4.2 Aplicação das Transformações Lineares na Educação

É previsto na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) que estudantes do Ensino Médio adquiram as competências de:

- Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e

Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

- Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
- Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
- Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
- Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Em específico, a habilidade (EM13MAT301), que requer que a pessoa estudante possa resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

A partir das bases de AL formadas no Ensino Médio, é esperado que estudantes da área de exatas desenvolvam pensamento matemático de forma avançada em cursos de Engenharia, Física Aplicada, entre outros. Para que o ensino aprendizagem seja sólido, professores devem oportunizar a reflexão dos objetos da disciplina além de definir e exemplificar os conceitos. (MARINS; SAVIOLI, 2016), não sendo apenas uma questão específica brasileira, e sim mundial (PENA S. DE M.; MOURA, 2016).

Com o auxílio do software GeoGebra, é possível experimentar dinâmicas e visualizações da TL (SILVA, 2015), facilitando a compreensão e aplicação dos conceitos apresentados de forma mais dinâmica e efetiva na construção do conhecimento (SILVA; SILVA, 2017).

### 4.3 Aplicação em Criptografia

A criptografia, modelo de segurança cibernética, nada mais é que um método de armazenar e transmitir dados de uma forma que somente às pessoas autorizadas como, por exemplo, os

destinatários, possam ler e processar (SILVA, 2009). Então, é um método extremamente eficaz para proteção de ataques cibernéticos em busca de informações sensíveis, dados de clientes, contas bancárias e entre outros.

Com advento e vigência em 2020 a LGPD (Lei Geral de Proteção de Dados Pessoais), se tornou cada vez mais intrínseco o uso de modelos de segurança para a proteção de dados, uma codificação forte para resolver brechas de segurança. Porém, há duas condições para importantes na criptografia de dados:

1. Não existe um método de criptografia que não possa ser quebrado.
2. O real objetivo da criptografia é fazer com que conseguir acesso à informação, seja tão trabalhoso e leve ao mesmo tempo, que o atacante sint-se desestimulado e desista.

Usando um operador linear no  $\mathbb{R}^2$ , imaginemos que a mensagem a seguir tenha grande valor de especulação, e que seu remetente e seu destinatário sejam conhecidos:

O texto puro é: C-O-N-V-E-N-I-O-U-N-I-V-I-M-A-U-F-S-C-M-T-M

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
6	14	-2	7	-8	-6	13	-7	2	-4	-3	3	10
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
15	1	-9	8	-5	11	0	4	9	-1	12	21	5

Tabela 2 – Tabela de randomização (SILVA, 2009)

A tabela acima é o que chamamos de randomizar, cada letra está relacionada com um número na linha logo abaixo.

Vamos fazer a primeira cifragem:

-2\_1\_15\_9\_-8\_15\_2\_1\_4\_15\_2\_9\_2\_10\_6\_4\_-6\_11\_-2\_10\_0\_10

O algoritmo que usaremos é o Operador Linear do  $\mathbb{R}^2$

$$T(x, y) = (3x - y, 2x + y)$$

Primeiramente, vamos confirmar que  $T$  é um Isomorfismo, através de sua matriz associada na base canônica do  $\mathbb{R}^2$ , é inversível, ou seja, se seu determinante é diferente de zero:

$$[T] = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \det[T] = 3 - (-2) = 5$$

realmente,  $[T]$  é inversível, logo,  $T$  é um Isomorfismo. Tomando de dois em dois números, e fazendo as contas:



$$\begin{aligned}
T(-2, 1) &= (3(-2) - 1, 2(-2) + 1) = (-7, -3) \\
T(15, 9) &= (3(15) - 9, 2(15) + 9) = (36, 39) \\
T(-8, 15) &= (3(-8) - 15, 2(-8) + 15) = (-39, -1) \\
T(2, 1) &= (3(2) - 1, 2(2) + 1) = (5, 5) \\
T(4, 15) &= (3(4) - 15, 2(4) + 15) = (-3, 23) \\
T(2, 9) &= (3(2) - 9, 2(2) + 9) = (-3, 13) \\
T(2, 10) &= (3(2) - 10, 2(2) + 10) = (-4, 14) \\
T(6, 4) &= (3(6) - 4, 2(6) + 4) = (14, 16) \\
T(-6, 11) &= (3(-6) - 11, 2(-6) + 11) = (-29, -1) \\
T(-2, 10) &= (3(-2) - 10, 2(-2) + 10) = (-16, 6) \\
T(0, 10) &= (3(0) - 10, 2(0) + 10) = (-10, 10)
\end{aligned}$$

Aqui fazemos a segunda cifragem:

-7\_-3\_36\_39\_-39\_-1\_5\_5\_-3\_23\_-3\_13\_-4\_14\_14\_16\_-29\_-1\_-16\_6\_-10\_10

Este é o texto recebido pelo destinatário. Cabe ao destinatário decifrar, o texto recebido.

São de domínio comum ao remetente e do destinatário, a tabela de randomização que faz parte do algoritmo criptográfico. Neste caso  $T(x, y) = (3x - y, 2x + y)$  assim o destinatário deverá encontrar o Isomorfismo Inverso de  $T$ , aqui usaremos o processo prático via escalonamento de matrizes, para obtermos a inversa de  $[T]$  e assim chegarmos a  $T^{-1}$ :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\sim 1/3L_1 \rightarrow L_1 \sim \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim 1/2L_2 \rightarrow L_2 \sim \\
\begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} &\sim L_2 - L_1 \rightarrow \sim \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 5/6 & -1/3 & 1/2 \end{pmatrix} \sim 6/5L_2 \rightarrow L_2 \sim \\
\begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix} &\sim L_1 + 1/3L_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix} \\
\text{então, } [T^{-1}] &= 1/5 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ e assim, } 1/5 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1/5 \begin{pmatrix} x + y \\ 3y - 2x \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Logo,  $T^{-1}(x, y) = (1/5(x + y), 1/5(3y - 2x))$

$$\begin{aligned}
T^{-1}(-7, -3) &= (1/5(-7-3), 1/5(3[-3] - 2[-7])) = (-2, 1) \\
T^{-1}(36, 39) &= (1/5(36+39), 1/5(3[39] - 2[36])) = (15, 9) \\
T^{-1}(-39, -1) &= ((1/5(-39-1), 1/5(3[-1] - 2[-39])) = (-8, 15) \\
T^{-1}(5, 5) &= (1/5(5 + 5), 1/5(3[5] - 2[5])) = (2, 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T^{-1}(-3, 23) &= (1/5(-3+23), 1/5(3[23] - 2[-3])) = (4, 15) \\
T^{-1}(-3, 13) &= (1/5(-3+13), 1/5(3[13] - 2[-3])) = (2, 9) \\
T^{-1}(-4, 14) &= (1/5(-4+14), 1/5(3[14] - 2[-4])) = (2, 10) \\
T^{-1}(14, 16) &= (1/5(14+16), 1/5(3[16] - 2[14])) = (6, 4) \\
T^{-1}(-29, -1) &= ((1/5(-29-1), 1/5(3[-1] - 2[-29])) = (-6, 11) \\
T^{-1}(-16, 6) &= (1/5(-16+6), 1/5(3[6] - 2[-16])) = (-2, 10) \\
T^{-1}(-10, 10) &= (1/5(-10+10), 1/5(3[10] - 2[-10])) = (0, 10)
\end{aligned}$$

Novamente, aplicando a tabela de randomização:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
6	14	-2	7	-8	-6	13	-7	2	-4	-3	3	10
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
15	1	-9	8	-5	11	0	4	9	-1	12	21	5

Tabela 3 – Tabela de randomização (SILVA, 2009)

e finalmente, o texto descriptografado:

CONVENIO UNIVIMA UFSC MTM

A transformação linear aplicada, usada como algoritmo, mistura de duas em duas letras a palavra.

## 4.4 Classificação de Imagens com Redes Neurais

Considere uma rede neural artificial que é treinada para classificar imagens em categorias diferentes, como gatos e cachorros. A rede neural tem uma camada de entrada que recebe as características das imagens, uma camada oculta que processa essas características e uma camada de saída que produz a classificação final.

A camada oculta é composta por neurônios que realizam transformações lineares seguidas de funções de ativação não-lineares. Por exemplo, um neurônio pode ser representado pela seguinte equação:

$$h = Wx + b \quad (4.1)$$

onde  $W$  é a matriz de pesos,  $x$  é o vetor de entrada e  $b$  é o vetor de bias. Essa equação representa a combinação linear dos pesos  $W$  com a entrada  $x$  e o bias  $b$ .

Para demonstrar que essa transformação é linear, podemos aplicar a lei de composição de funções matemáticas:

$$h = Wx + b = W(x + 0) + b = Wx + W(0) + b = Wx + b \quad (4.2)$$

Essa equação demonstra que a transformação é linear, pois a combinação de  $W$  com  $x$  e  $b$  não altera a estrutura linear da equação.

A aplicação de uma função de ativação não-linear sobre  $h$  introduz a não-linearidade necessária para a aprendizagem de padrões complexos. Por exemplo, a função de ativação sigmoide pode ser representada pela seguinte equação:

$$\sigma(h) = \frac{1}{1 + e^{-h}} \quad (4.3)$$

Essa função de ativação não-linear permite que a rede neural aprenda a classificar imagens complexas, como imagens de gatos e cachorros.

De acordo com (LECUN; BENGIO; HINTON, 2015), a utilização de transformações lineares em redes neurais tem se mostrado eficaz na resolução de problemas de classificação e regressão em inteligência artificial.

## 5 Considerações Finais

That's all folks!

# Referências

AMORIM, S. R. de. *Quatro aplicações da álgebra linear na engenharia* — Universidade Federal de Alagoas, Delmiro Gouveia - Alagoas, 2017. Citado 5 vezes nas páginas 8, 32, 33, 35 e 37.

ANTON, H. *Elementary Linear Algebra*. John Wiley & Sons, 2010. ISBN 9780470458211. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=YmcQJoFyZ5gC>>. Citado 3 vezes nas páginas 8, 25 e 30.

BOLDRINI, J. L. et al. *Algebra Linear*. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1986. Citado 6 vezes nas páginas 8, 15, 19, 20, 22 e 29.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC: Ministério da Educação, 2018. Citado na página 37.

CAMARGO, I. de; BOULOS, P. *Geometria analítica: um tratamento vetorial*. São Paulo: Prentice Hall, 2005. ISBN 9788587918918. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 23.

CARVALHO, J. de. *Introdução à álgebra linear*. Instituto de Matemática Pura e Aplicado, 1971. (Monografias de matemática). Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=CnIRHQAACAAJ>>.

FIGUEREIDO, L. M. *Álgebra linear I*. 3. ed. [S.l.: s.n.], 2009. v. 1. ISBN 8589200442. Citado na página 13.

HOFFMAN, K.; KUNZE, R. *Álgebra Linear*. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1979. Citado na página 26.

LANG, S. *Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2003. ISBN 9788573932539. Citado na página 28.

LAY, D. C. *Álgebra linear e suas aplicações*. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999. ISBN 8521611560. Citado na página 22.

LECUN, Y.; BENGIO, Y.; HINTON, G. Deep learning. *Nature*, v. 521, n. 7553, p. 436–444, May 2015. Citado na página 42.

MARINS, A. S.; SAVIOLI, A. M. P. d. D. Pensamento matemático avançado manifestado em tarefas envolvendo transformações lineares. *Ciência e Educação (Bauru)*, Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência, Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Ciências, campus de Bauru., v. 22, n. 2, p. 489–504, Apr 2016. ISSN 1516-7313. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/1516-731320160020013>>. Citado na página 38.

NOGUEIRA, L. B. *Transformações lineares no plano e aplicações*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 27.

PENA S. DE M.; MOURA, G. Transformações lineares: Um texto para licenciatura em matemática. 2016. Citado na página 38.

SILVA, E. de Souza da. *Transformações lineares em um curso de Licenciatura em Matemática: uma estratégia didática com uso de tecnologias digitais*. Tese (Doutorado em Educação) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015. Citado na página 38.

SILVA, E. S.; SILVA, J. do Socorro Costa da. Transformações lineares: Sequencia didática e o uso do geogebra. In: ULBRA. *VII CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA*. Canoas - Rio Grande do Sul, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 38.

SILVA, L. H. O. da. *Transformações Lineares e Isomorfismos: Um Exemplo em Criptografia* — Universidade Federal de Santa Catarina, Imperatriz - Maranhão, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 9, 39 e 41.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. *Álgebra Linear*. Pearson Universidades, 1987. ISBN 9780074504123. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=q36CPgAACAAJ>>. Citado 3 vezes nas páginas 8, 25 e 28.

STRANG, G. *Álgebra linear e suas aplicações*. Cengage Learning, 2010. ISBN 9788522107445. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=T8QGRAAACAAJ>>. Citado na página 32.

ULHOA, F. C.; LOURENÇO, M. L. *Um Curso de Álgebra Linear*. 2. ed. São Paulo: EDUSP, 2018. Citado na página 15.