

Hyslan Silva Cruz
Iara Regina Grilo Papais

Transformações Lineares e suas aplicações

[**Link do vídeo**](#)

Suzano
2024

Hyslan Silva Cruz
Iara Regina Grilo Papais

Transformações Lineares e suas aplicações

Monografia de graduação à Universidade Virtual
do Estado de São Paulo, como requisito parcial
para a obtenção do título de Licenciatura em
Matemática.

Orientadora: Lorena Salvi Stringheta

Universidade Virtual do Estado de São Paulo

Orientadora: Lorena Salvi Stringheta

Suzano

2024

*Este trabalho é dedicado às crianças adultas que,
quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.*

Agradecimentos

A conclusão desta monografia representa um marco importante em nossas vidas acadêmica e profissional. Ao longo dessa jornada, tivemos a oportunidade de contar com o apoio e a colaboração de diversas pessoas e instituições, às quais expresso minha mais profunda gratidão.

À minha família e amigos,

minha base sólida e porto seguro em todos os momentos. Agradeço por acreditarem em nosso potencial, por incentivarem nossos sonhos e por celebrarem cada conquista ao nosso lado. A vocês, dedico este trabalho com imenso amor e reconhecimento.

A minha orientadora, Professora Lorena Salvi Stringheta,

reconheço a importância fundamental de sua orientação, sabedoria e paciência ao longo da pesquisa. Sua expertise e dedicação nos inspiraram e guiaram na construção deste trabalho. Agradeço pelas valiosas contribuições, pelo tempo dedicado e pela confiança depositada em nosso grupo.

Aos demais membros da banca examinadora,

Professores(as),

agradeço a oportunidade de apresentar nossa pesquisa e receber seus valiosos feedbacks. Agradeço por terem dedicado seu tempo e conhecimento à avaliação deste trabalho.

À Universidade Virtual do Estado de São Paulo,

minha segunda casa durante os anos de graduação. Agradeço à instituição por nos proporcionar uma formação de qualidade, por nos colocar em contato com professores excepcionais e por nos oferecer os recursos necessários para o desenvolvimento desta pesquisa de forma gratuita.

Aos colegas de curso e amigos da Licenciatura em Matemática,

com quem compartilhamos momentos de aprendizado, desafios e alegrias. Agradeço pelas trocas de conhecimento, pelo apoio mútuo e pela amizade que nos acompanham desde o início da graduação.

Aos projetos integradores e demais serviços de pesquisa além da plataforma acadêmica,

que nos proporcionaram acesso a materiais essenciais para a realização deste trabalho. Agradeço a todos os profissionais que me auxiliaram na busca por informações e na utilização de ferramentas para uma boa pesquisa.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho,

nossa sincera gratidão. Cada palavra de incentivo, cada sugestão e cada ajuda foram valiosas para o nosso aprimoramento e para a conquista deste objetivo.

Este trabalho é fruto de um esforço coletivo e representa a soma de conhecimentos, experiências e apoio de muitas pessoas. Agradecemos a todos que fizeram parte dessa jornada e que nos ajudaram a alcançar este importante marco em nossas vidas.

*“Hoje, ainda almejamos saber por que
estamos aqui e de onde viemos. O desejo
profundo da humanidade pelo conhecimento é
justificativa suficiente para nossa busca contínua.
(Stephen Hawking)*

Resumo

Só após ao fim da conclusão.

Palavras-chave: Transformação Linear, Álgebra Linear, Matrizes

Abstract

Same above.

Keywords: Linear Transformation, Linear Algebra. Matrices.

Lista de tabelas

Tabela 1 – Vetores e escalares utilizados na combinação linear	17
--	----

Lista de símbolos

\mathbb{R} Conjunto dos números reais.

\exists Existe.

\in Pertence.

$|$ Tal que.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	11
2	ESPAÇOS VETORIAIS	12
2.1	Subespaços Vetoriais	14
2.2	Combinação Linear	16
2.3	Dependência e Independência Linear	18
3	TRANSFORMAÇÕES LINEARES	19
4	APLICAÇÕES DE TRANSFORMAÇÕES LINEARES	21
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	22
	REFERÊNCIAS	23

1 Introdução

Com o decorrer do tempo, depois da era de ouro da álgebra linear nos meados do século XVIII. Onde, Euler e Louis Lagrange publicaram o "Recherche d'Arithmétique", entre 1773 e 1775, no qual estudavam certos conceitos da transformação linear. Posteriormente, Johann Carl Friedrich Gauss, também estudou sobre assuntos que apresentou similaridade com a matriz de transformação linear.

Até se arrefecer o assunto no século XIX e XX, com Giuseppe Peano, onde foi cunhado o termo "sistema linear" com a primeira definição de axiomática para espaço vetorial. Nos dias atuais, a apresentação da álgebra linear, temas abordados nesse campo da matemática são frequentemente esquecidos, portanto, este estudo trata de buscar o entendimento e compreender sobre as transformações lineares em sua totalidade e aplicações no contexto atual contemporâneo.

Passado esse brevíssimo contexto histórico e motivador para a nossa pesquisa e deleite deste ramo de estudado, iremos nos adiantar a certos conceitos matemáticos elementares já bastantes fundamentados no decorrer dos anos escolares do ensino básico regular. Para isto, passaremos a certas definições matemáticas primordiais que serão apresentadas nesta monografia para as discussões advindas a posteriori neste estudo.

Portanto, dividimos esta monografia em 4 capítulos, a saber, revisão literária fundamentais, pesquisas de artigos, teses e discussões recentes sobre as transformações lineares em diversas aplicações, seu contexto educacional atual em questão de matéria aplicada e por conseguinte nossa metodologia utilizada, os resultados obtidos dessa pesquisa e, por fim, nossa discussão final, a saber, do uso da transformação linear atualmente.

Aguardando Iara nesta parte...

2 Espaços Vetoriais

Começaremos pela definição de um espaço vetorial, onde, podemos tratar como um vetor ao designar um elemento do espaço vetorial de um número \mathbb{R} definido tal que:

Definição 01: Seja um conjunto V , não vazio, com duas operações: soma, $V \times V \rightarrow V$, e multiplicação por escalar, $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$, tais que, para quaisquer $u, v, w \in V$, satisfaçam as propriedades:

1. $(u + v) + w = u + (v + w), \forall u, v, w \in V$ (propriedade associativa.)
2. $1u = u$.
3. $u + v = v + u, \forall u, v \in V$ (propriedade comutativa).
4. $\exists 0 \in V$ tal que $u + 0 = u$.
5. $\exists -u \in V$ tal que $u + (-u) = 0$.
6. $a(u + v) = au + av$.
7. $(a + b)v = av + bv$.
8. $(ab)v = a(bv)$.
9. $1u = u$.

Observação: 0 é o vetor nulo.

Observação: Limitaremos nossa discussão, demonstrações e aplicações dentro do conjunto dos números reais apenas.

Exemplo 01: Suponhamos uma matriz $M_{(2,2)}$, onde, é denotado por $M_{(m,n)}$, dado por $M = [a_{ij}]_{m \times n}$ podendo ser interpretada dessa forma, $V = M_{(2,2)}$, onde V , é um conjunto não vazio, seu escalar pertencente ao conjunto dos \mathbb{R} , que satisfazem todas as propriedades de um espaço vetorial.

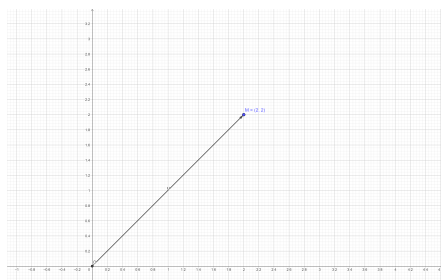


Figura 1 – Exemplo 01: Vetor no plano.

A partir disto, podemos perceber o uso analítico dos espaços vetoriais para resolução de problemas em geral. Vejamos mais alguns exemplos.

Exemplo 02: O exemplo anterior, trata-se de uma matriz de \mathbb{R}^2 pode ser dito como, no plano, agora iremos expandir para \mathbb{R}^3 , seja um vetor $A = (x, y, z)$ ou representado pela forma matricial:

$$A = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Assim, por quaisquer números reais, podemos fazer uma projeção ortogonal no espaço, segue um exemplo traçado:

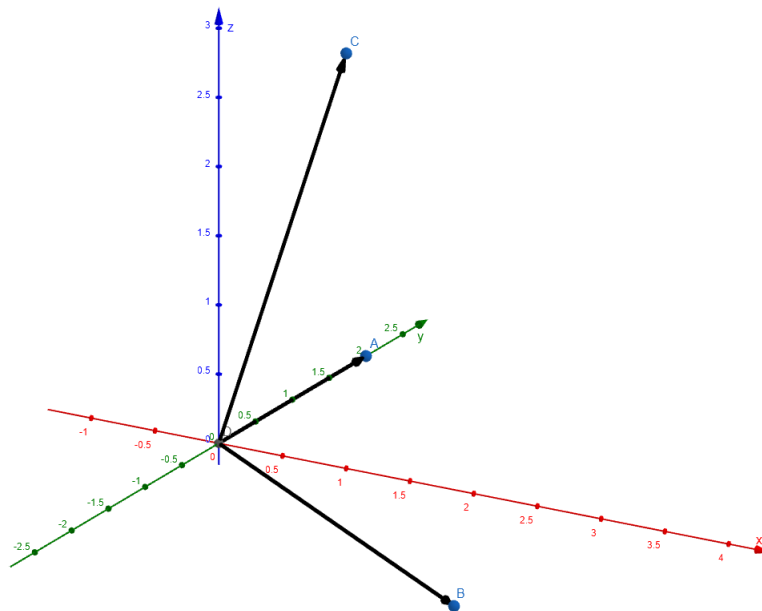


Figura 2 – Exemplo 02: Exemplo de vetor no espaço.

Exemplo 03: Consideremos n – *uplas* de números reais.

$$V = \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{e se } u = (x_1, x_2, \dots, x_n), v = (y_1, y_2, \dots, y_n) \text{ e } a \in \mathbb{R},$$

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \text{ e } au = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n)$$

Por tratarmos de uma quantidade n de números, o campo tridimensional deixa de ser visto, e passamos a ter \mathbb{R}^n dimensões, as propriedades não deixam de valer independente a quantidade de dimensões.

2.1 Subespaços Vetoriais

Nesta seção iremos introduzir conceitos no estudo de espaço vetorial para subespaço vetorial.

Definição 02: Dado um espaço vetorial V , um subconjunto W , não vazio, será um subespaço vetorial de V se:

1. Para quaisquer $u, v \in W$ tivermos $u + v \in W$.
2. Para quaisquer $a \in R, u \in W$ tivermos $au \in W$.

Teorema 01: Um subconjunto não vazio W de V é um subespaço de V se, e somente se, para cada par de vetores α, β em W e cada escalar c em F , o vetor $c\alpha + \beta$ está em W .

Demonstração: Suponhamos que W seja um subconjunto não vazio de V , tal que, $c\alpha + \beta$ pertença a W para todos os vetores α, β em W e todos escalares c em F . Como W é não vazio, existe um vetor ρ em W , logo $(-1)\rho + \rho = 0$ está em W . Então se α é um vetor arbitrário em W e c é um escalar arbitrário, o vetor $c\alpha = c\alpha + 0$ está em W . Em particular $(-1)\alpha = -\alpha$ está em W . Finalmente se α e β estão em W , então $\alpha + \beta = 1\alpha + \beta$ está em W . Assim, W é um subespaço de V .

Exemplo 04: Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^3 . O conjunto de todos os vetores que residem no plano xy , ou seja, $\{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, forma um subespaço vetorial de \mathbb{R}^3 .

Se o conjunto dado forma um subespaço vetorial de \mathbb{R}^3 , precisamos verificar as três propriedades fundamentais:

1. Contém o vetor nulo: O vetor nulo em \mathbb{R}^3 é $(0, 0, 0)$. Este vetor também está contido no plano xy , pois $z = 0$.
2. É fechado sob adição: Se tomarmos dois vetores $(x_1, y_1, 0)$ e $(x_2, y_2, 0)$ no plano xy , a sua soma será $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0)$, que também reside no plano xy .
3. É fechado sob multiplicação por escalar: Para qualquer escalar c e vetor $(x, y, 0)$ no plano xy , $c \cdot (x, y, 0) = (cx, cy, 0)$, que também está no plano xy .

Então, o conjunto de todos os vetores $(x, y, 0)$ com $x, y \in \mathbb{R}$ forma um subespaço vetorial de \mathbb{R}^3 .

Exemplo 05: No espaço vetorial das funções reais de uma variável real, $V = \{f(x) \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$, considere o conjunto de todas as funções lineares, ou seja, $\{f(x) = mx + b \mid m, b \in \mathbb{R}\}$. Esse conjunto forma um subespaço vetorial de V . Novamente, você pode verificar as propriedades para confirmar.

Se o conjunto dado forma um subespaço vetorial de V , novamente precisamos verificar as três propriedades fundamentais:

1. **Contém a função nula:** A função nula em V é $f(x) = 0$. Esta função é uma função linear, pois pode ser escrita como $f(x) = 0 \cdot x + 0$. Portanto, a função nula está contida no conjunto.
2. **É fechado sob adição:** Se tomarmos duas funções lineares $f_1(x) = m_1x + b_1$ e $f_2(x) = m_2x + b_2$, a sua soma será $f_1(x) + f_2(x) = (m_1 + m_2)x + (b_1 + b_2)$, que também é uma função linear. Portanto, o conjunto é fechado sob adição.
3. **É fechado sob multiplicação por escalar:** Para qualquer escalar c e função linear $f(x) = mx + b$, a multiplicação por escalar $cf(x) = c(mx + b) = (cm)x + (cb)$ também é uma função linear. Assim, o conjunto é fechado sob multiplicação por escalar.

Portanto, o conjunto de todas as funções lineares $f(x) = mx + b$ com $m, b \in \mathbb{R}$ forma um subespaço vetorial de V .

Exemplo 06: No espaço das matrizes reais 2×2 , $M_{(2,2)}$, considere o conjunto de todas as matrizes simétricas, ou seja, aquelas em que $A = A^T$. Esse conjunto forma um subespaço vetorial de $M_{(2,2)}$. Você pode demonstrar isso verificando as propriedades de um subespaço vetorial

Para tal, é imperativo investigar as três propriedades basilares:

1. **Presença da Matriz Nula:** A matriz nula em $M_{(2,2)}$ é a matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Nota-se que esta matriz é simétrica, posto que $A = A^T$. Portanto, a matriz nula está asseguradamente contida no conjunto em questão.
2. **Fechamento sob Adição:** Considerando duas matrizes simétricas A e B , a sua soma $A + B$ é também simétrica, visto que $(A + B)^T = A^T + B^T = A + B$. Logo, o conjunto demonstra ser fechado sob adição.
3. **Fechamento sob Multiplicação por Escalar:** Para qualquer escalar c e matriz simétrica A , a multiplicação por escalar cA é igualmente simétrica, haja vista que $(cA)^T = cA^T = cA$. Deste modo, o conjunto revela-se fechado sob multiplicação por escalar.

Assim sendo, constata-se que o conjunto de todas as matrizes simétricas configura-se como um subespaço vetorial de $M_{(2,2)}$.

2.2 Combinação Linear

Dentro de um espaço vetorial, conforme demonstrado que podemos ter subconjuntos de espaços vetoriais, é possível a obtenção de novos vetores a partir de vetores dados (BOLDRINI et al., 1986).

Definição 03: Sejam V um espaço vetorial \mathbb{R} , $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ e $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Então, o vetor $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$ é um elemento de V podendo ser chamado combinação linear de v_1, \dots, v_n .

Se $V \subset W$, podemos adotar a notação $W = [v_1, \dots, v_n]$, onde expandindo-o

$$W = [v_1, \dots, v_n] = \{v \in V; v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n, a_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$$

Exemplo 07: Presuma um vetor $V = \mathbb{R}^3$, $v \in V, v \neq 0$. Se imaginarmos sua reta que contém o vetor v , onde, $[v] = av : a \in \mathbb{R}$

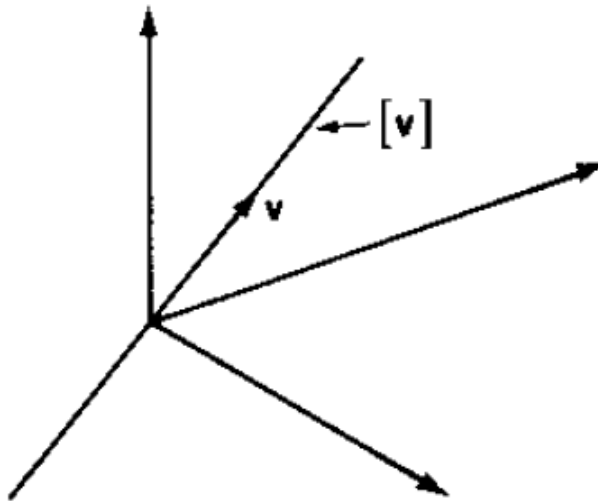


Figura 3 – Retirado de (BOLDRINI et al., 1986), pg. 113.

Exemplo 08: Se obtemos $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ e $v_3 \in [v_1, v_2]$, então $[v_1, v_2, v_3] = [v_1, v_2]$, então v_3 é um combinação linear de v_1 e v_2 .

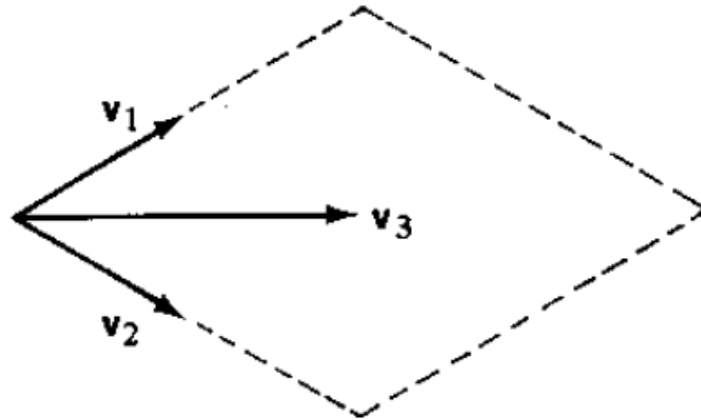


Figura 4 – Retirado de (BOLDRINI et al., 1986), pg. 113.

Exemplo 09: Consideremos o espaço vetorial \mathbb{R}^3 e os vetores $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Sejam também os escalares $a = 3$ e $b = -1$. Então temos, os seguintes elementos.

Vetor	Componentes	Escalar
\mathbf{v}	2, 3, 1	3
\mathbf{w}	1, -1, 2	-1

Tabela 1 – Vetores e escalares utilizados na combinação linear

Definimos a combinação linear dos vetores \mathbf{v} e \mathbf{w} como:

$$a\mathbf{v} + b\mathbf{w} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aplicando as operações, obtemos:

$$a\mathbf{v} + b\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 1 \\ 9 + 1 \\ 3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a combinação linear dos vetores \mathbf{v} e \mathbf{w} com os coeficientes $a = 3$ e $b = -1$ é o vetor

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.3 Dependência e Independência Linear

Dado a combinação linear, devemos saber, a priori, se algum desses vetores não é combinação linear dos outros e assim por diante. Para isto precisamos saber sua dependência e independência linear.

Definição 03: Sejam V um espaço vetorial e $v_1, \dots, v_n \in V$. Dizemos que o conjunto v_1, \dots, v_n é linearmente independente (**LI**), ou que os vetores v_1, \dots, v_n são **LI**, se a equação

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$$

implica que $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$. No caso em que exista algum $a_i \neq 0$ dizemos que v_1, \dots, v_n é linearmente dependente (**LD**), ou que os vetores v_1, \dots, v_n são **LD**.

Teorema 02: Uma combinação linear é **LD** se, e somente se um destes vetores for uma combinação linear dos outros.

$$\{v_1, \dots, v_n\} = \text{LD} \iff \exists i \mid \sum_{i \neq j} c_i v_i$$

Demonstração: Sejam v_1, \dots, v_n **LD** e $a_1 v_1 + \dots + a_j v_j + \dots + a_n v_n = 0$

Um dos coeficientes deve ser diferente de zero. Suponhamos que seja $a_j \neq 0$. Então

$$v_j = -\frac{1}{a_j}(a_1 v_1 + \dots + a_{j-1} v_{j-1} + a_{j+1} v_{j+1} + \dots + a_n v_n)$$

e portanto $v_j = -\frac{a_1}{a_j} v_1 + \dots - \frac{a_n}{a_j} v_n$

Logo, v_j é uma combinação linear dos outros vetores.

Exemplo 10: Sejam $V = \mathbb{R}^3$ e $v_1, v_2 \in V$, $\{v_1, v_2\}$ é **LD** $\iff v_1$ e v_2 estiverem na mesma reta, que passa pela origem. ($v_1 = \lambda v_2$).

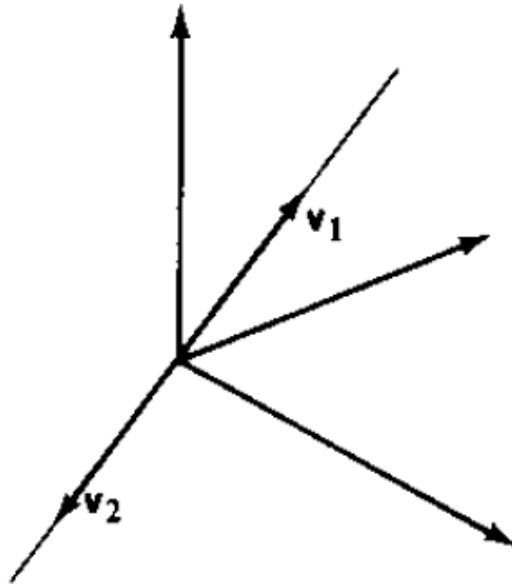


Figura 5 – Retirado de (BOLDRINI et al., 1986), pg. 115.

3 Transformações Lineares

Neste capítulo, iremos tratar sobre um tipo especial de função ou aplicação, onde, segundo (STEINBRUCH; WINTERLE, 1987), o domínio e o contradomínio são espaços vetoriais reais. Assim, tanto a variável independente como a variável dependente são vetores, razão pela qual essas funções são chamadas vetoriais.

Nosso estudo das funções vetoriais lineares em questão, será focado, nas transformações lineares.

Definição 04: Sejam V e W dois espaços vetoriais. Uma transformação linear (aplicação linear) é uma função de V em W , $F : V \rightarrow W$, que satisfaz as seguintes condições:

1. Para quaisquer u e v em V , $F(u + v) = F(u) + F(v)$. **Homogeneidade**
2. Para quaisquer $k \in \mathbb{R}$ e $v \in V$, $F(kv) = kF(v)$. **Aditividade**

No caso especial em que $V = W$, a transformação linear é denominada **operador linear** do espaço vetorial V (ANTON, 2010).

Válido em: $\forall v, v \in V$ e $\forall k \in \mathbb{R}$.

Trataremos F como T por convenção daqui em diante. Para se dizer que T é uma transformação linear do espaço vetorial V no espaço vetorial W , será denotado por $T : V \rightarrow W$, onde T é a função, cada vetor $v \in V$ tem uma só imagem $w \in W$, indicado por $w = T(v)$.

Tomemos por dois conjuntos de vetores, $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \mathbb{R}^3$.

Uma transformação de $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ associa vetores $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ com vetores $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

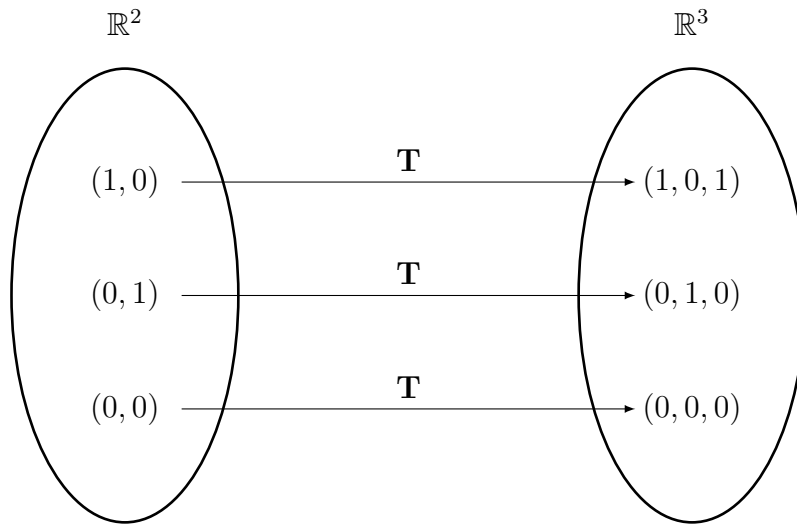
Exemplo 11: Declarado esta transformação linear $T(x, y) = (x, y, x + y)$. Iremos selecionar alguns vetores em \mathbb{R}^2 e calcular suas imagens sob a transformação T . Por exemplo, os vetores $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Para $(1, 0)$, temos:

$$T(1, 0) = (1, 0, 1 + 0) = (1, 0, 1)$$

e para $(0, 1)$, temos:

$$T(0, 1) = (0, 1, 0 + 1) = (0, 1, 1).$$

Segue a imagem em \mathbb{R}^3 :



Uma função $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ com $\mathbf{T} = \{(x, y, x + y)\}$

Exemplo 12: Se tomarmos um vetor arbitrário e fazemos uma transformação linear idêntica, ou seja, $1\alpha = \alpha$, é uma transformação linear de \mathbf{V} em \mathbf{V} . A transformação é definida por $0\alpha = 0$, é também uma transformação linear de \mathbf{V} em \mathbf{V} (HOFFMAN; KUNZE, 1979).

De acordo com o exemplo acima, percebe-se, que será uma função onde o gráfico passa a reta pela origem se supormos uma função afim, \mathbb{R}^1 em \mathbb{R}^1 . Uma transformação linear mantém combinações lineares $W = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$ são vetores que pertencem a \mathbf{V} e possui seus escalares c_1, \dots, c_n , então:

$$\mathbf{T}(c_1\mathbf{v}_1, \dots, c_n\mathbf{v}_n) = \mathbf{T}(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = c_1(\mathbf{T}\mathbf{v}_1) + c_2(\mathbf{T}\mathbf{v}_2)$$

4 Aplicações de Transformações Lineares

Aguardando pela Caroline Pires...

5 Considerações Finais

That's all folks!

Referências

ANTON, H. *Elementary Linear Algebra*. John Wiley & Sons, 2010. ISBN 9780470458211. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=YmcQJoFyZ5gC>>. Citado na página 19.

BOLDRINI, J. L. et al. *Algebra Linear*. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1986. Citado 3 vezes nas páginas 16, 17 e 18.

CAMARGO, I. de; BOULOS, P. *Geometria analítica: um tratamento vetorial*. São Paulo: Prentice Hall, 2005. ISBN 9788587918918.

HOFFMAN, K.; KUNZE, R. *Álgebra Linear*. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1979. Citado na página 20.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. *Álgebra Linear*. Pearson Universidades, 1987. ISBN 9780074504123. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=q36CPgAACAAJ>>. Citado na página 19.

ULHOA, C. F.; LOURENÇO, M. L. *Um Curso de Álgebra Linear*. 2. ed. São Paulo: EDUSP, 2018.