[**Link do vídeo**](teste.com.br)

*Este trabalho é dedicado às crianças adultas que,*  
*quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.*

A conclusão desta monografia representa um marco importante em nossas vidas acadêmica e profissional. Ao longo dessa jornada, tivemos a oportunidade de contar com o apoio e a colaboração de diversas pessoas e instituições, às quais expresso minha mais profunda gratidão.

À minha família e amigos,

minha base sólida e porto seguro em todos os momentos. Agradeço por acreditarem em nosso potencial, por incentivarem nossos sonhos e por celebrarem cada conquista ao nosso lado. A vocês, dedico este trabalho com imenso amor e reconhecimento.

A minha orientadora, Professora ,

reconheço a importância fundamental de sua orientação, sabedoria e paciência ao longo da pesquisa. Sua expertise e dedicação nos inspiraram e guiaram na construção deste trabalho. Agradeço pelas valiosas contribuições, pelo tempo dedicado e pela confiança depositada em nosso grupo.

Aos demais membros da banca examinadora,

Professores(as),

agradeço a oportunidade de apresentar nossa pesquisa e receber seus valiosos feedbacks. Agradeço por terem dedicado seu tempo e conhecimento à avaliação deste trabalho.

À ,

minha segunda casa durante os anos de graduação. Agradeço à instituição por nos proporcionar uma formação de qualidade, por nos colocar em contato com professores excepcionais e por nos oferecer os recursos necessários para o desenvolvimento desta pesquisa de forma gratuita.

Aos colegas de curso e amigos da Licenciatura em Matemática,

com quem compartilhamos momentos de aprendizado, desafios e alegrias. Agradeço pelas trocas de conhecimento, pelo apoio mútuo e pela amizade que nos acompanham desde o início da graduação.

Aos projetos integradores e demais serviços de pesquisa além da plataforma acadêmica,

que nos proporcionaram acesso a materiais essenciais para a realização deste trabalho. Agradeço a todos os profissionais que me auxiliaram na busca por informações e na utilização de ferramentas para uma boa pesquisa.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho,

nossa sincera gratidão. Cada palavra de incentivo, cada sugestão e cada ajuda foram valiosas para o nosso aprimoramento e para a conquista deste objetivo.

Este trabalho é fruto de um esforço coletivo e representa a soma de conhecimentos, experiências e apoio de muitas pessoas. Agradecemos a todos que fizeram parte dessa jornada e que nos ajudaram a alcançar este importante marco em nossas vidas.

*“Hoje, ainda almejamos saber por que*  
*estamos aqui e de onde viemos.O desejo*  
*profundo da humanidade pelo conhecimento é*  
*justificativa suficiente para nossa busca contínua.*  
*(Stephen Hawking)*

Só após ao fim da conclusão.

**Palavras-chave: Transformação Linear, Álgebra Linear, Matrizes**

english Same above.

**Keywords**: Linear Transformation, Linear Algebra. Matrices.

Conjunto dos números reais.

Existe.

Pertence.

Tal que.

Portanto.

Conjunto vazio.

# Introdução

Com o decorrer do tempo, depois da era de ouro da álgebra linear nos meados do século XVIII. Onde, Euler e Louis Lagrange publicaram o "Recherche d’Arithmétique", entre 1773 e 1775, no qual estudavam certos conceitos da transformação linear. Posteriormente, Johann Carl Friedrich Gauss, também estudou sobre assuntos que apresentou similaridade com a matriz de transformação linear.

Até se arrefecer o assunto no século XIX e XX, com Giuseppe Peano, onde foi cunhado o termo "sistema linear" com a primeira definição de axiomática para espaço vetorial. Nos dias atuais, a apresentação da álgebra linear, temas abordados nesse campo da matemática são frequentemente esquecidos, portanto, este estudo trata de buscar o entendimento e compreender sobre as transformações lineares em sua totalidade e aplicações no contexto atual contemporâneo.

Passado esse brevíssimo contexto histórico e motivador para a nossa pesquisa e deleite deste ramo de estudado, iremos nos adiantar a certos conceitos matemáticos elementares já bastantes fundamentados no decorrer dos anos escolares do ensino básico regular. Para isto, passaremos a certas definições matemáticas primordiais que serão apresentadas nesta monografia para as discussões advindas a posteriori neste estudo.

Portanto, dividimos esta monografia em 4 capítulos, a saber, revisão literária fundamentais, pesquisas de artigos, teses e discussões recentes sobre as transformações lineares em diversas aplicações, seu contexto educacional atual em questão de matéria aplicada e por conseguinte nossa metodologia utilizada, os resultados obtidos dessa pesquisa e, por fim, nossa discussão final, a saber, do uso da transformação linear atualmente.

Aguardando Iara nesta parte...

# Espaços Vetoriais

Começaremos pela definição de um espaço vetorial, onde, podemos tratar como um vetor ao designar um elemento do espaço vetorial de um número definido tal que:

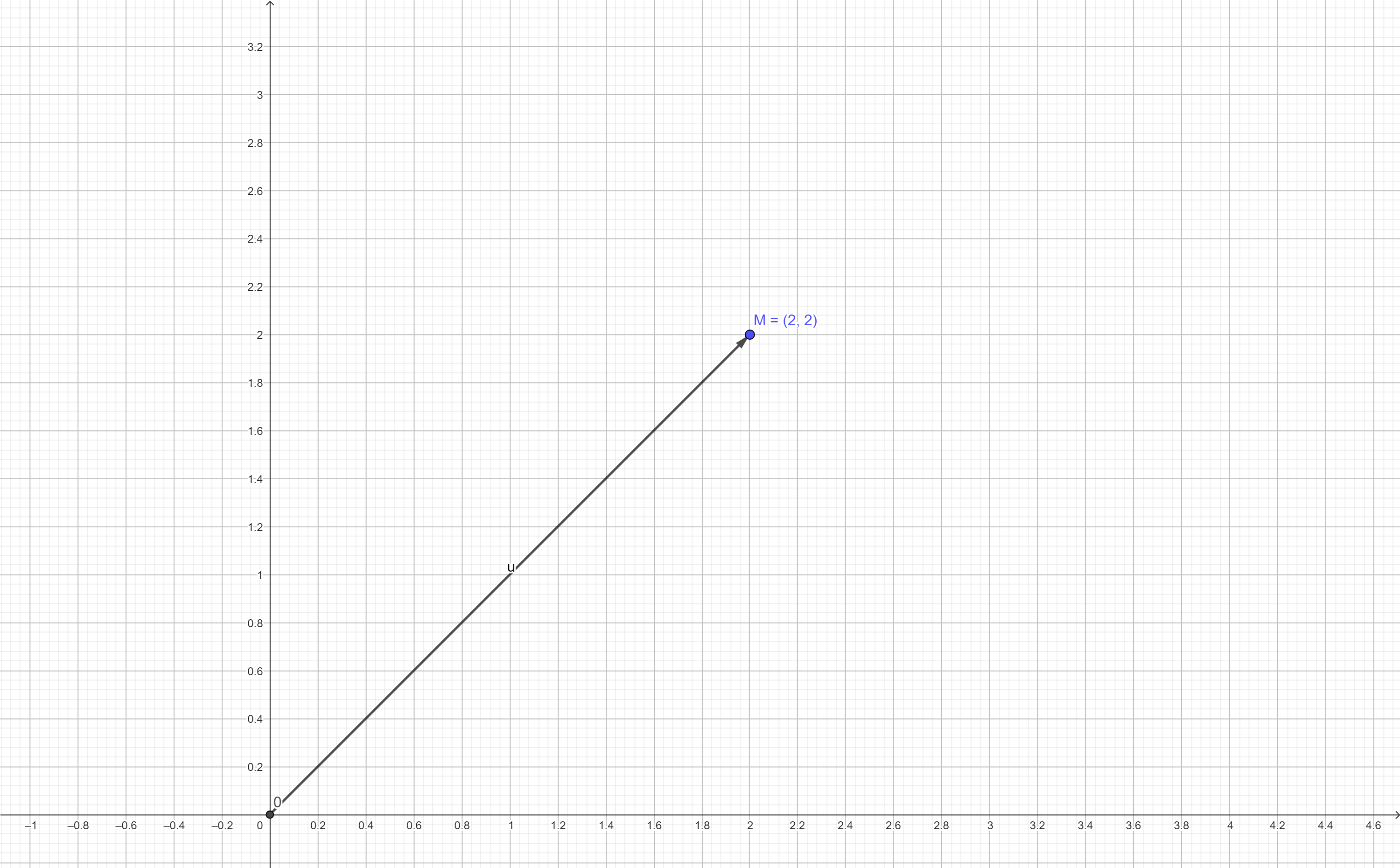
**Definição 01:** Seja um conjunto V, não vazio, com duas operações: soma, , e multiplicação por escalar, , tais que, para quaisquer , satisfaçam as propriedades:

1. (propriedade associativa.)
2. .
3. (propriedade comutativa).
4. tal que .
5. tal que .
6. .
7. .
8. .
9. .

**Observação:** é o vetor nulo.

**Observação:** Limitaremos nossa discussão, demonstrações e aplicações dentro do conjunto dos números reais apenas.

**Exemplo 01:** Suponhamos uma matriz , onde, é denotado por , dado por podendo ser interpretada dessa forma, , onde , é um conjunto não vazio, seu escalar pertencente ao conjunto dos , que satisfazem todas as propriedades de um espaço vetorial.

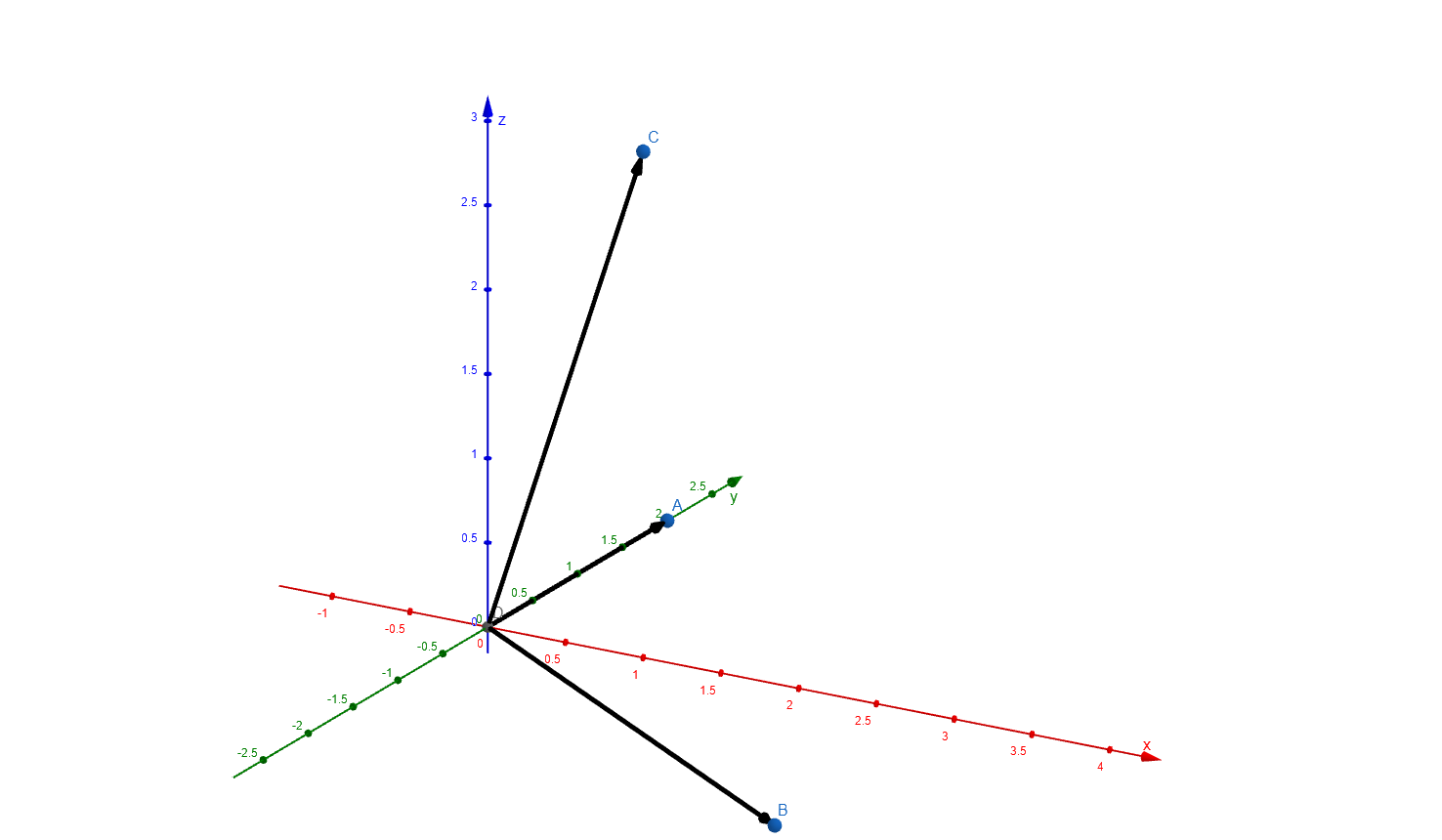


Exemplo 01: Vetor no plano.

A partir disto, podemos perceber o uso analítico dos espaços vetoriais para resolução de problemas em geral. Vejamos mais alguns exemplos.

**Exemplo 02:** O exemplo anterior, trata-se de uma matriz de pode ser dito como, no plano, agora iremos expandir para , seja um vetor ou representado pela forma matricial:

Assim, por quaisquer números reais, podemos fazer uma projeção ortogonal no espaço, segue um exemplo traçado:



Exemplo 02: Exemplo de vetor no espaço.

**Exemplo 03:** Consideremos de números reais.

e se e ,

e

Por tratarmos de uma quantidade de números, o campo tridimensional deixa de ser visto, e passamos a ter dimensões, as propriedades não deixam de valer independente a quantidade de dimensões.

## Subespaços Vetoriais

Nesta seção iremos introduzir conceitos no estudo de espaço vetorial para subespaço vetorial.

**Definição 02:** Dado um espaço vetorial V, um subconjunto W, não vazio, será um subespaço vetorial de V se:

1. Para quaisquer tivermos .
2. Para quaisquer tivermos .

**Teorema 01:** Um subconjunto não vazio de é um subespaço de se, e somente se, para cada par de vetores em e cada escalar em , o vetor está em .

**Demonstração:** Suponhamos que seja um subconjunto não vazio de , tal que, pertença a para todos os vetores , em e todos escalares em . Como é não vazio, existe um vetor em , logo está em . Então se é um vetor arbitrário em e é um escalar arbitrário, o vetor está em . Em particular está em . Finalmente se e estão em , então está em . Assim, é um subespaço de .

**Exemplo 04:** Considere o espaço vetorial . O conjunto de todos os vetores que residem no plano , ou seja, , forma um subespaço vetorial de .

Se o conjunto dado forma um subespaço vetorial de , precisamos verificar as três propriedades fundamentais:

1. Contém o vetor nulo: O vetor nulo em é . Este vetor também está contido no plano , pois .
2. É fechado sob adição: Se tomarmos dois vetores e no plano , a sua soma será , que também reside no plano .
3. É fechado sob multiplicação por escalar: Para qualquer escalar e vetor no plano , , que também está no plano .

Então, o conjunto de todos os vetores com forma um subespaço vetorial de .

**Exemplo 05:** No espaço vetorial das funções reais de uma variável real, , considere o conjunto de todas as funções lineares, ou seja, . Esse conjunto forma um subespaço vetorial de . Novamente, você pode verificar as propriedades para confirmar.

Se o conjunto dado forma um subespaço vetorial de , novamente precisamos verificar as três propriedades fundamentais:

1. Contém a função nula: A função nula em é . Esta função é uma função linear, pois pode ser escrita como . Portanto, a função nula está contida no conjunto.
2. É fechado sob adição: Se tomarmos duas funções lineares e , a sua soma será , que também é uma função linear. Portanto, o conjunto é fechado sob adição.
3. É fechado sob multiplicação por escalar: Para qualquer escalar e função linear , a multiplicação por escalar também é uma função linear. Assim, o conjunto é fechado sob multiplicação por escalar.

Portanto, o conjunto de todas as funções lineares com forma um subespaço vetorial de .

**Exemplo 06:** No espaço das matrizes reais , , considere o conjunto de todas as matrizes simétricas, ou seja, aquelas em que . Esse conjunto forma um subespaço vetorial de . Você pode demonstrar isso verificando as propriedades de um subespaço vetorial

Para tal, é imperativo investigar as três propriedades basilares:

1. **Presença da Matriz Nula:** A matriz nula em é a matriz . Nota-se que esta matriz é simétrica, posto que . Portanto, a matriz nula está asseguradamente contida no conjunto em questão.
2. **Fechamento sob Adição:** Considerando duas matrizes simétricas e , a sua soma é também simétrica, visto que . Logo, o conjunto demonstra ser fechado sob adição.
3. **Fechamento sob Multiplicação por Escalar:** Para qualquer escalar e matriz simétrica , a multiplicação por escalar é igualmente simétrica, haja vista que . Deste modo, o conjunto revela-se fechado sob multiplicação por escalar.

Assim sendo, constata-se que o conjunto de todas as matrizes simétricas configura-se como um subespaço vetorial de .

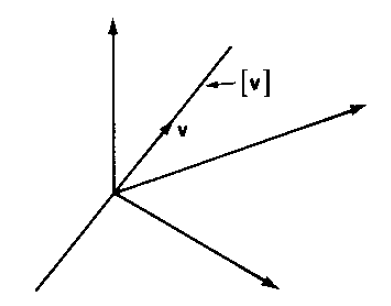
## Combinação Linear

Dentro de um espaço vetorial, conforme demonstrado que podemos ter subconjuntos de espaços vetoriais, é possível a obtenção de novos vetores a partir de vetores dados .

**Definição 03:** Sejam um espaço vetorial , e . Então, o vetor é um elemento de podendo ser chamado combinação linear de .

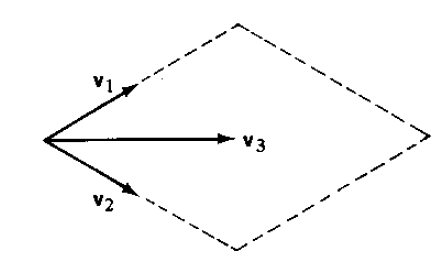
Se , podemos adotar a notação , onde expandindo-o

**Exemplo 07:** Presuma um vetor . Se imaginarmos sua reta que contém o vetor , onde,



Retirado de , pg. 113.

**Exemplo 08:** Se obtemos e , então , então é um combinação linear de e .



Retirado de , pg. 113.

**Exemplo 09:** Consideremos o espaço vetorial e os vetores e . Sejam também os escalares e . Então temos, os seguintes elementos.

Vetores e escalares utilizados na combinação linear

| **Vetor** | **Componentes** | **Escalar** |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

Definimos a combinação linear dos vetores e como:

Aplicando as operações, obtemos:

Portanto, a combinação linear dos vetores e com os coeficientes e é o vetor

## Dependência e Independência Linear

Dado a combinação linear, devemos saber, a priori, se algum desses vetores não é combinação linear dos outros e assim por diante. Para isto precisamos saber sua dependência e independência linear.

**Definição 03:** Sejam um espaço vetorial e . Dizemos que o conjunto é linearmente independente (**LI**), ou que os vetores são **LI**, se a equação

implica que . No caso em que exista algum dizemos que é linearmente dependente (**LD**), ou que os vetores são **LD**.

**Teorema 02:** Uma combinação linear é **LD** se, e somente se um destes vetores for uma combinação linear dos outros.

**LD**

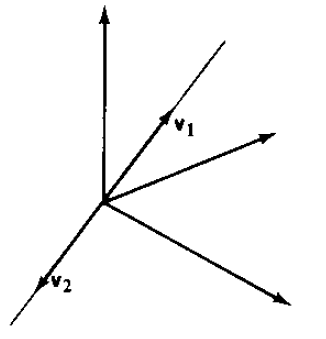
**Demonstração:** Sejam **LD** e

Um dos coeficientes deve ser diferente de zero. Suponhamos que seja . Então

e portanto

Logo, é uma combinação linear dos outros vetores.

**Exemplo 10:** Sejam e , é **LD** e estiverem na mesma reta, que passa pela origem. .



Retirado de , pg. 115.

# Transformações Lineares

Neste capítulo, iremos tratar sobre um tipo especial de função ou aplicação, onde, segundo , o domínio e o contradomínio são espaços vetoriais reais. Assim, tanto a variável independente como a variável dependente são vetores, razão pela qual essas funções são chamadas vetoriais.

Nosso estudo das funções vetoriais lineares em questão, será focado, nas transformações lineares.

**Definição 04:** Sejam e dois espaços vetoriais. Uma transformação linear (aplicação linear) é uma função de em , , que satisfaz as seguintes condições:

1. Para quaisquer e em , . **Homogeneidade**
2. Para quaisquer e , . **Aditividade**

No caso especial em que , a transformação linear é denominada **operador linear** do espaço vetorial .

Válido em: e .

Trataremos como por convenção daqui em diante. Para se dizer que é uma transformação linear do espaço vetorial no espaço vetorial , será denotado por , onde é a função, cada vetor tem uma só imagem , indicado por .

Tomemos por dois conjuntos de vetores, e .

Uma transformação de associa vetores com vetores

**Exemplo 11:** Declarado esta transformação linear . Iremos selecionar alguns vetores em e calcular suas imagens sob a transformação . Por exemplo, os vetores e . Para , temos:

e para , temos:

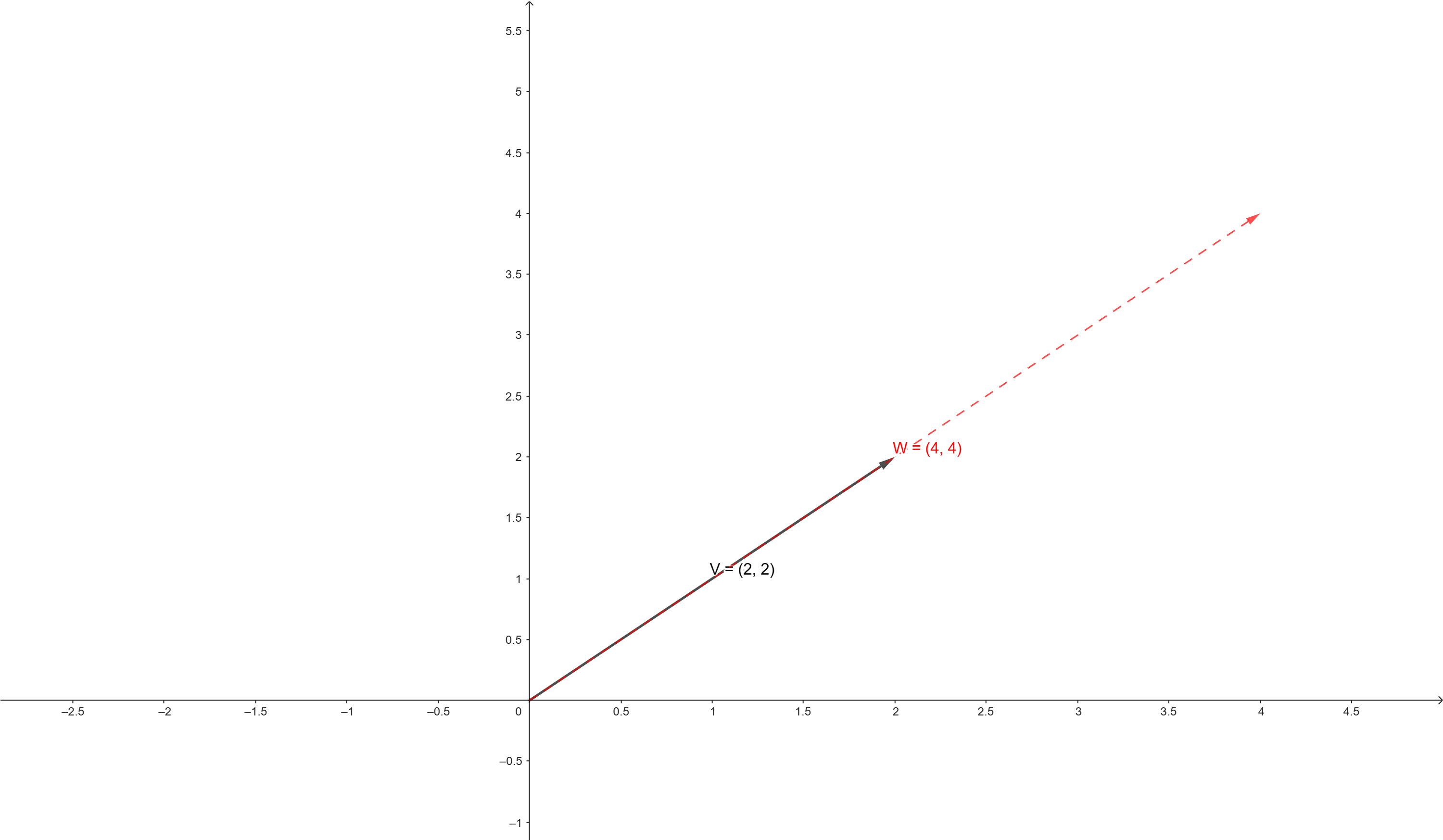
.

Segue a imagem em :

**Exemplo 12:** Se tomarmos um vetor arbitrário e fazemos uma transformação linear idêntica, ou seja, = , é uma transformação linear de em . A transformação é definida por , é também uma transformação linear de em .

De acordo com o exemplo acima, percebe-se, que será uma função onde o gráfico passa a reta pela origem se supormos uma função afim, em . Uma transformação linear mantém combinações lineares são vetores que pertencem a e possui seus escalares , então:

**Exemplo 13:** Tomemos um caso que desejamos dobrar nosso espaço vetorial, dado um vetor , a transformação linear será dada por, . Nosso domínio e contradomínio está em , portanto o resultado será por



Exemplo 13.

Para uma matriz de transformação linear de em si mesma, existe uma matriz única de dimensão que representa . Essa matriz é definida pela seguinte propriedade:

para todo vetor em . A matriz é chamada de matriz de transformação de .

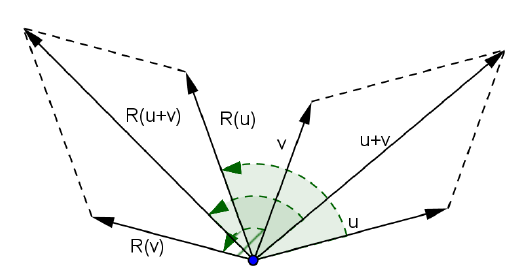
Consideremos agora no segmento da transformação linear e no campo da geometria o uso de operações como rotações, reflexões e projeções. Tomemos o espaço vetorial bidimensional com base canônica e . A rotação de 90 graus no sentido anti-horário pode ser representada pela seguinte matriz de transformação:

A matriz chamada de matriz de rotação, possui algumas propriedades:

1. **Ortogonalidade:** A matriz é ortogonal, ou seja sua transporta é inversa:
2. **Determinante:** O determinante da matriz é igual a .

Ao rotacionar um vetor em 90 graus no sentido anti-horário, basta aplicar a matriz de rotação em .

No caso em questão, o operador de rotação de um angulo qualquer como em torno e origem em , tratando-se o operador , resulta em .



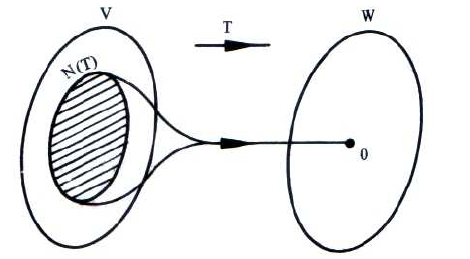
Retirado de

## Núcleo de uma Transformação Linear

Em transformações lineares. O núcleo, também chamado de espaço nulo de uma transformação linear , denotado por , é o conjunto de todos os vetores no domínio de que são mapeados para o vetor nulo. Portanto, representa o conjunto de soluções para a equação homogênea . O núcleo é definido como:

onde representa o domínio de .

Para , segue o diagrama:



Retirado de

então, e , pois , se .

De acordo com , que, enfatizou a importância do núcleo na compreensão da injetividade de uma transformação linear, ou seja, a capacidade de preservar a identidade dos vetores. O núcleo de uma transformação linear possui duas propriedades, que regem:

1. O núcleo de uma transformação linear é um subespaço vetorial de .
2. Uma transformação linear é injetora se, e somente se, .

Se e pertencem ao núcleo e um número real qualquer. Então, e . Logo:

portanto, .

## Isomorfismo

Um conceito intrigante surge com o isomorfismo. Uma transformação linear , entre espaços vetoriais e , é considerado um isomorfismo se atender a duas condições cruciais:

1. **Injetividade:** é injetora, o que significa que mapeia vetores distintos do domínio para vetores distintos no contradomínio. Em outras palavras, preserva a identidade.
2. **Sobrejetividade:** é sobrejetora, mapeando todo vetor em a partir de um vetor em . Isso significa que a imagem de abrange todo o espaço .

Se satisfaz ambas as condições, podemos afirmar que ela estabelece uma correspondência biunívoca entre e . Essa relação especial permite que representamos cada vetor em por um único vetor em , e vice-versa.

O núcleo de uma transformação e seu isomorfismo tem uma conexão que é o Teorema do Núcleo e da Imagem. Este teorema estabelece uma relação crucial entre a dimensão do núcleo, a dimensão da imagem e a dimensão do domínio de uma transformação linear :

onde representa a imagem de , o conjunto de todos os vetores em que são alcançados por .

O Teorema do Núcleo e da Imagem oferece ferramentas valiosas para determinar se uma transformação linear é um isomorfismo. Se a dimensão do núcleo for zero e a dimensão da imagem for igual à dimensão do domínio, podemos concluir que é um isomorfismo.

# Aplicações de Transformações Lineares

Aguardando pela Caroline Pires...

# Considerações Finais

That’s all folks!