● 例題 6.8

繫於繩端的石子在垂直的圓上運動，只受到重力及繩子張力的作用。求在下列幾點時，繩子的張力：(a) 最低點；(b) 最高點；(c) 繩子與垂直方向成 θ 角。

解

因為繩子可彎曲，所以無法在與它垂直的方向施力 (像棒子就可以)。淨加速度的大小和方向都不是定值。石子受到兩種力，因此第二定律的向量式為

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{T} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a} \tag{i}$$

(a) 在最低點時，加速度垂直向上，如圖 6.13a 所示。若石子在底部的速度為 v_B，則

$$\Sigma F_y = T - mg = \frac{mv_B^2}{r} \tag{ii}$$

故得 $T = mv_B^2/r + mg$。繩子的張力支撐了石子的重量，也提供了向心力。

(b) 在最高點時，T 和 mg 共同提供了垂直向下的向心力，如圖 6.13b 所示：

$$\Sigma F_y = T + mg = \frac{mv_T^2}{r} \tag{iii}$$

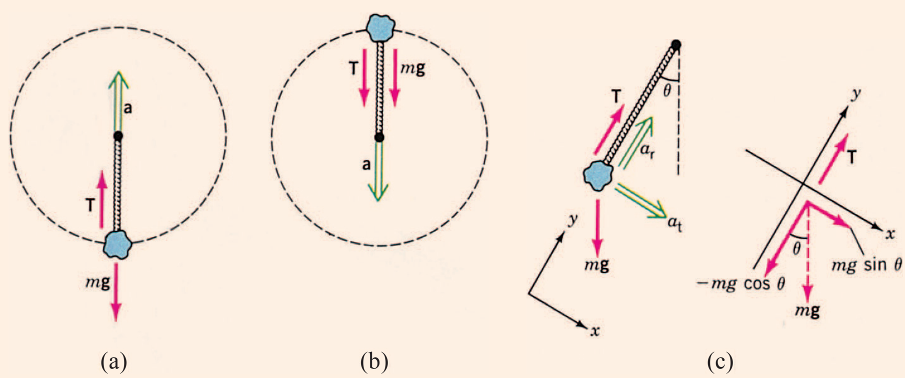
其中 v_T 是石子在頂端的速率。由此得 $T = mv_T^2/r - mg$。如果恰好 $v_T^2 = rg$，則 $T = 0$。這表示光靠重量就足以提供向心力。

(c) 如圖 6.13c 所示，繩子與垂直方向成 θ 角時，石子具有沿路徑切線方向的加速度，因為重量在這個方向上有分量。(i) 式的徑向與切線分量為

$$\Sigma F_x = mg\sin\theta = ma_t \tag{iv}$$

$$\Sigma F_y = T - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{r} \tag{v}$$

因此 $a_t = g\sin\theta$，而 $T = mv^2/r + mg\cos\theta$。(ii)、(iii) 兩式是 (v) 式在 $\theta = 0°$ 與 $\theta = 180°$ 時的特例 (這也是對 (v) 式的核對)。



▶ 圖 6.13　石子在垂直的圓上運動。(a) 石子在最低點時；(b) 石子在最高點時；(c) 在任意位置時。