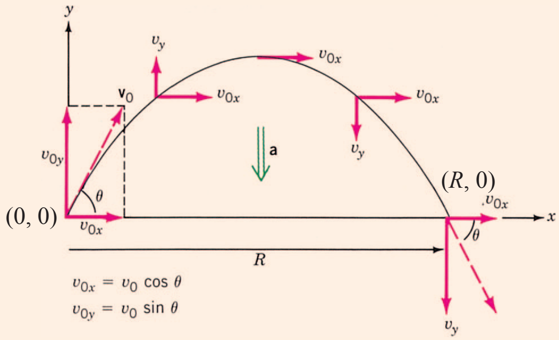
• 例題 4.2

一抛射體以初速度 v_0 與水平仰角 θ 從地面射出。求其：(a) 飛行時間；(b) 水平射程；(c) 路徑的形狀。

解

圖 4.6 描繪了座標系以及幾個不同位置的速度分量。抛射體最初位於座標系原點 (0, 0)，落地座標為 $(R, 0)$。



▶ 圖 4.6　沒有空氣阻力時，抛射體的路徑為抛物線。只有當著地與抛出的位置高度相同時，路徑才會對稱於最高點。

依據 4.9 及 4.11 式，在時間為 t 時，座標為

$$x = (v_0 \cos\theta)t \qquad \text{(i)}$$

$$y = (v_0 \sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad \text{(ii)}$$

(a) 為求飛行時間，注意抛體著地時 $y = 0$。由 (ii) 式可得 $t = 0$ (這是 y 首度為零的時間)，以及

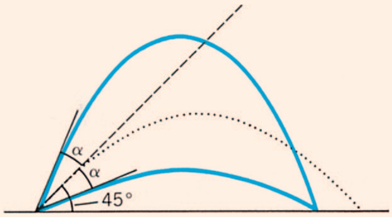
$$t = \frac{2\, v_0 \sin\theta}{g} \qquad \text{(iii)}$$

這是 y 再度為 0 的時間。

(b) 為求得水平射程，可將 (iii) 代入 (i)：$R = (v_0 \cos\theta)(2\, v_0 \sin\theta)/g$。利用 $\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$，可得

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} \qquad \text{(iv)}$$

注意 (iv) 式只有在抛射體回到原來高度，即 $\Delta y = 0$ 時才能成立。對一定的初速率 v_0 而言，當 $\sin 2\theta = 1$，即 $\theta = 45°$ 時，射程最遠。通常對一定的 R 和 v_0 而言，有兩個可能的 θ 值。例如，若 $v_0 = 20$ m/s，$R = 30$ m，則 $\sin 2\theta = Rg/v_0^2 = 0.735$。則 $\theta = 23.7°$ 或 $66.3°$。請注意 $\theta = 45° \pm \alpha$，其中 $\alpha = 21.3°$ (參見圖 4.7)



▶ 圖 4.7　以仰角 45° 發射可得到最大水平射程，伽立略並證明以 $45° + \alpha$ 和 $45° - \alpha$ 仰角發射的水平射程都是一樣的。

(c) 要求得路徑的形狀，應將 y 表為 x 的函數。由 (i) 式可得 $t = x/(v_0 \cos\theta)$，將之代入 (ii) 式，即可導出：

$$y = (\tan\theta)x - \frac{g}{2\,(v_0 \cos\theta)^2}\, x^2 \qquad \text{(v)}$$

這屬於 $y = Ax + Bx^2$ 的形式，是抛物線的方程式。

伽立略是首先證明在無空氣阻力時抛射體的路徑為抛物線的人。
他也是首先證明在初仰角為 $45° \pm \alpha$ 時射程相同的人。