● 例題 15.3

在一彈簧–質點系統，$m = 0.2$ kg 且 $k = 5$ N/m。當 $t = \pi/10$ s，彈簧壓縮 6 cm 且質點速度為 −40 cm/s。(a) 求位移對時間的函數；(b) 何時 ($t > 0$) 是第一次速度值為正且為最大值的 60%？

解

(a) 要先求得 15.2 式中的 ω、A 及 ϕ。由 15.7 式，角速度為

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{5\ \text{N/m}}{0.2\ \text{kg}}} = 5\ \text{rad/s}$$

將已知分別代入 15.2、15.3 式，可得

$$-0.06 = A\sin\left(\frac{5\pi}{10} + \phi\right) \tag{i}$$

$$-0.08 = A\cos\left(\frac{5\pi}{10} + \phi\right) \tag{ii}$$

當我們將此二式平方相加得 $A = 0.10$ m (因 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$)。上二式相除可求得 ϕ：

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) = \frac{3}{4} \tag{iii}$$

即 $(\pi/2 + \phi) = \tan^{-1}\dfrac{3}{4}$ (也可以將 $A = 0.1$ m 代入 (i) 或 (ii) 式中)。

有兩個可能值 $(\pi/2 + \phi) = 37\pi/180$ rad 或 $217\pi/180$ rad。因正弦及餘弦值均為負值，此角度應在第三象限，故 $(\pi/2 + \phi) = 217\pi/180$ rad。即 $\phi = 127\pi/180 = 2.2$ rad。位移隨時間的函數可知為

$$x = 0.1 \sin(5t + 2.2) \text{ m} \quad \text{(iv)}$$

此方程式畫在圖 15.6。

注意水平軸為 ωt (單位：rad)，而不是 t。

(b) 將 (iv) 式導微可得

$$v = 0.5 \cos(5t + 2.2) \text{ m/s}$$

v 為最大值的 60%，故

$$0.6 = \cos(5t + 2.2)$$

即 $5t + 2.2 = \cos^{-1} 0.6$。因此，$5t + 2.2 = 53\pi/180$ rad 或 $307\pi/180$ rad。

第一個解使 $t < 0$，不合；第二個可得 $5t = (5.4 - 2.2)$ rad，而得 $t = 0.64$ s。

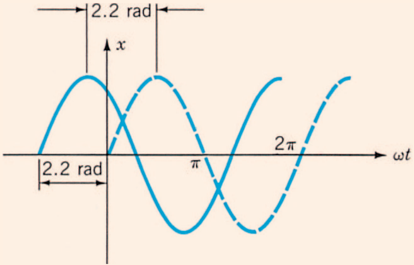

圖 15.6 函數 $x = A \sin(\omega t + 2.2 \text{ rad})$。注意，水平軸為 ωt，不是 t。