● 例題 🔏 12

兩木塊質量 $m_1 = 3$ kg, $m_2 = 1$ kg,由繩跨過一半徑為 R = 0.2 m,質量 M = 4 kg 的滑輪,如圖 12.10。滑輪以中心為軸時轉動慣量為 $I = \frac{1}{2}MR^2$ 。請利用 12.9 式找出木塊線加速度。假設全無摩擦力,且 m_2 木塊質心 (CM) 在滑輪中心上方 R 處。

我們可用F = ma 施於木塊, $\tau = Ia$ 施於滑輪解決此問題,但我們用角動

m_2 m_1 m_1 m_1

(i)

(ii)

解

量來闡明此例。由 12.3 式可知沿直線同動物體其角動量為 $\ell = r_{\perp}p$ 。若以滑輪中心為原點,則兩木塊角動量分別為 m_1vR 及 m_2vR 。而滑輪角動量可由 12.7 式 $L = I\omega$ 獲得。因此總角動量為

$$L = m_1 vR + m_2 vR + I\omega$$

(i) 若繩未滑動,則 $v = \omega R$ 。相對於滑輪中心淨外力矩乃因 m_1 重量所致:

$$\tau_{\text{EXT}} = r \cdot F = R(m_1 g)$$

要用 12.9 式前需先找出 L 之導數, 並使之等於 τ_{EXT} 。因 a = dv/dt 且 $d\omega/dt = \alpha = a/R$ 可得

$$Rm_1g = (m_1 + m_2)Ra + I\frac{a}{R}$$

利用
$$I = \frac{1}{2}MR^2$$
 可得下與 R 無關之式:

$$a = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2 + M/2} = 4.9 \text{ m/s}^2$$