

## • 例題 8.7

一單擺的擺長  $L = 2 \text{ m}$ ，擺錘質量  $m = 2 \text{ kg}$ 。當擺繩與鉛垂線的夾角為  $35^\circ$  時，其速率為  $v = 1.2 \text{ m/s}$ 。當單擺擺到 (a) 最低點；(b) 最高點時，求擺繩的張力。

**解**

本題需應用動力學及機械能守恆。作用於擺錘的力如圖 8.11 所示。牛頓第二定律的向量形式為

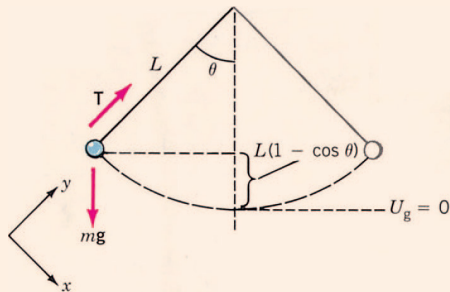
$$\mathbf{T} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a}$$

其中  $\mathbf{a}$  具有徑向及切線分量。切線分量的方程式， $\Sigma F_x = mg \sin \theta = ma_t$ ，與本題無關。

由於擺錘沿半徑為  $L$  的圓形路徑運動，因此徑向分量的方程式為

$$\Sigma F_y = T - mg \cos \theta = \frac{mv^2}{L} \quad (\text{i})$$

要求張力，須知速率，這可用守恆律求得。



► 圖 8.11 擺錘的位能由垂直位置  $L - L \cos \theta$  決定。

令最低點的  $U_g = 0$ ，並注意高度為  $y = L - L \cos \theta$ 。機械能為

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + mgL(1 - \cos \theta) \\ &= \frac{1}{2}(2 \text{ kg})(1.2 \text{ m/s})^2 + (2 \text{ kg})(9.8 \text{ N/kg})(2 \text{ m})(1 - 0.82) = 8.5 \text{ J} \end{aligned} \quad (\text{ii})$$

(a) 在最低點時  $\theta = 0$ ，因此，(ii) 式成為

$$E = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 + 0$$

因  $E = 8.5 \text{ J}$ ，故得  $v_{\max} = \pm 2.9 \text{ m/s}$ 。有了速率，就可求出在  $\theta = 0$  處的張力。

依據 (i) 式， $T - mg = mv_{\max}^2 / L$ ，由此求得  $T = 19.6 + 8.5 = 28.1 \text{ N}$ 。

(b) 在最高點  $v = 0$ ；故 (ii) 式成為

$$E = 0 + mgL(1 - \cos \theta_{\max})$$

代入  $E = 8.5 \text{ J}$  即得  $\cos \theta_{\max} = 0.783$ 。因  $v = 0$ ，故  $T = mg \cos \theta_{\max} = 15.3 \text{ N}$ 。