病毒传播数学模型

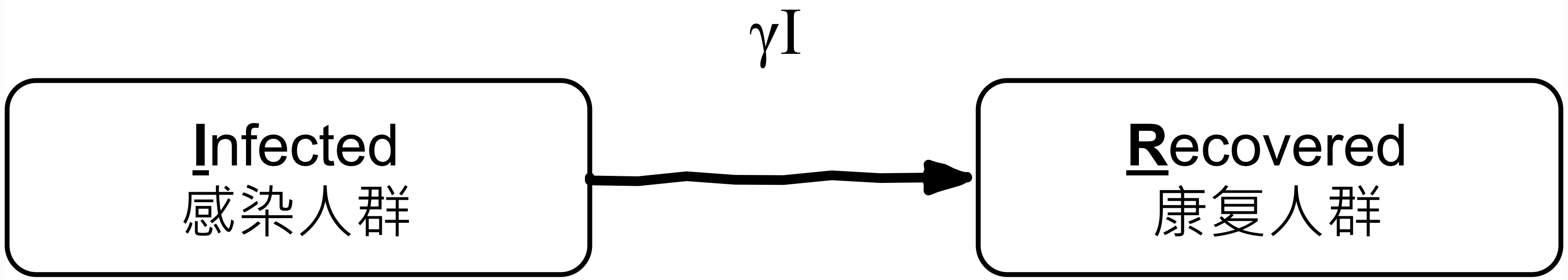
数学模型 :用数学语言描述一些具有规律性或常识性的现象

经典 SIR 模型

$$\dot{S} = -\beta S I$$
$$\dot{I} = \beta S I - \gamma I$$
$$\dot{R} = \gamma I$$

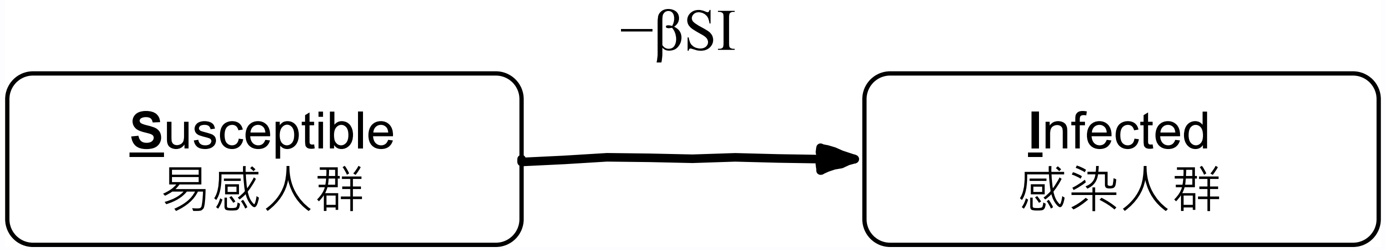
- Sir Ronald Ross 1902 诺贝尔生理学或医学奖
- 被用于Ebola，疟疾，HIV，流感等传染病动力学的建模。
- 易于扩展


Susceptible
易感人群
Get sick
Infected
感染人群
Get cured
Recovered
康复人群



$$\dot{R} = \gamma I$$

- 每天都有一部分感染人群I以一个恒定的比例γ转变为康复人群R。
- γ: 康复率($\gamma >= 0$) recovery rate
- $\dot{R}$: 康复人群数量增长率



$$\dot{S} = -\beta S I$$

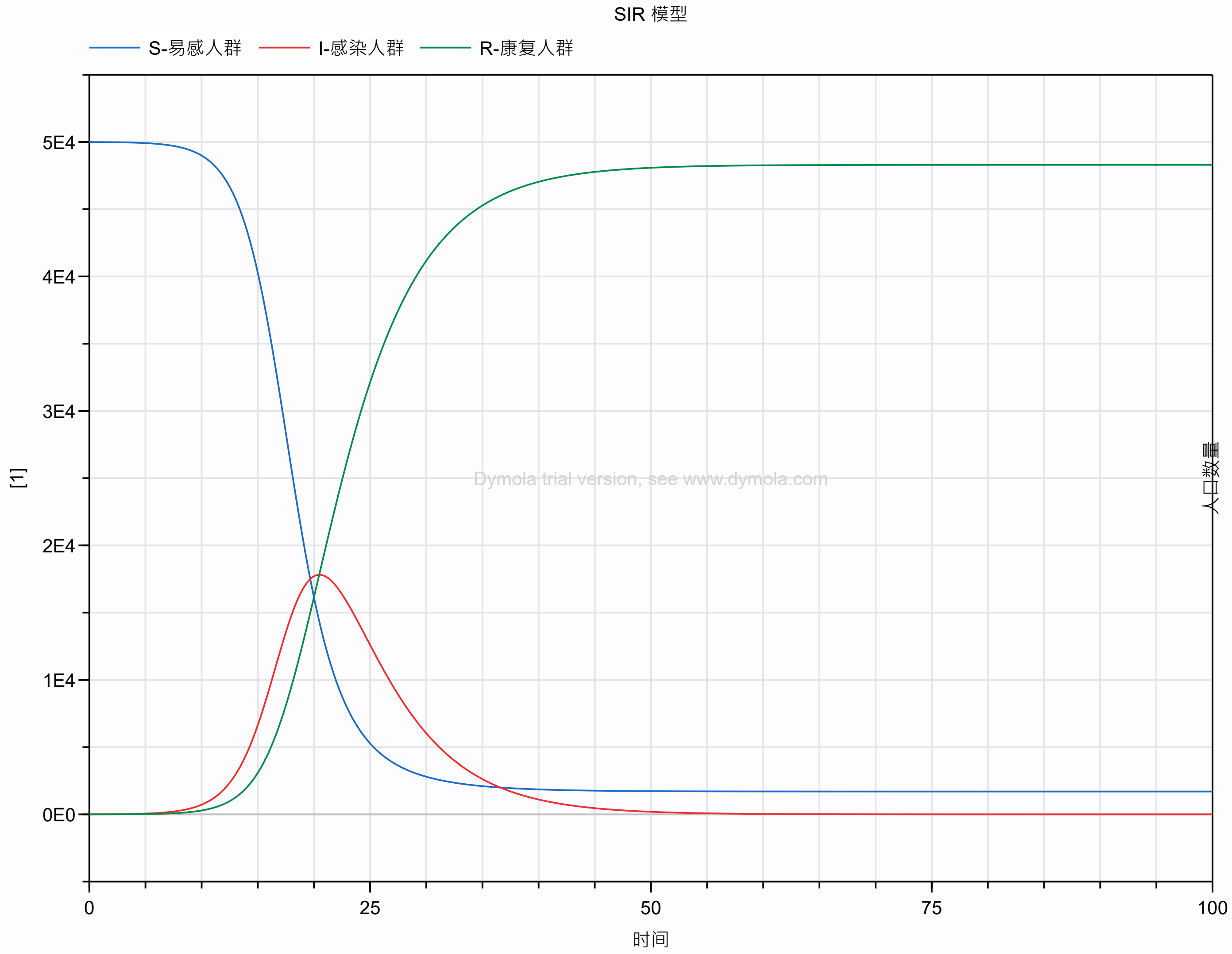
- 病毒携带者数量（感染人群）越大，感染的速度就越快
  $\dot{S} \propto I$
- 易感人群数量越大，单个病毒携带者能感染的速度就越快
  $\dot{S} \propto S$
- β: 传染率($\beta >= 0$) infection/transmission rate
- 负号: 易感人群数量总是 下降 的

$$\dot{I} = \beta S I - \gamma I = (\beta S - \gamma) I$$

- 前面已知易感人群的下降率$\dot{S}$，又已知康复人群的增长率$\dot{R}$，那么 `感染人群` 的变化率$\dot{I}$则为这二者之和，符号相反。

仿真

```
model SIR "Susceptible, Infected and Recovered model"
  Real S "易感人群";
  Real I "感染人群";
  Real R "康复人群";
  parameter Real beta(min=0) = 0.7/50000 "感染率";
  parameter Real gamma(min=0) = 0.2 "康复率";
  parameter Integer N(min=0) = 50000 "总人口";
  parameter Integer I0(min=0) = 5 "初始感染人群数量";
protected
  final parameter Integer R0=0 "初始康复人群数量";
  final parameter Integer S0=N - I0 - R0 "初始易感人群数量";
  final parameter Real Re=S0*beta/gamma "有效繁殖数";
initial equation
  S = S0;
  I = I0;
  R = R0;
equation
  der(S) = -beta*S*I "易感人群方程";
  der(I) = beta*S*I - gamma*I "感染人群方程";
  der(R) = gamma*I "康复人群方程";
end SIR;
```



- $\beta = 1.4 \times 10^{-5}, \gamma = 0.2, R_e = 3.5$
- $N = 50000, I(0) = 1$

分析

非常识性结论：

疫情拐点会出现在$S(t) = \frac{\gamma}{\beta}$处

通过该点后感染人数I就会下降

$$\dot{I} = (\beta S - \gamma)I = (\frac{\beta}{\gamma}S - 1)\gamma I$$

$$R_e = S(0)\frac{\beta}{\gamma}$$ - 有效繁殖数

- 当$R_e \leq 1$时，$I(t)$会随着时间推移递减至0。
- 当$R_e > 1$时，$I(t)$会先增加，并达到其峰值，最后递减至0。

公共卫生政策解读

$R_e = S(0)\frac{\beta}{\gamma}$ - 有效繁殖数

- 降低β: 隔离，洗手，戴口罩。
- 增大γ: 抗病毒药物研制，建医院，增加医护人员。
- 降低$S(0)$: 打疫苗。

其他结论

- 感染人数存在极大值。
- 病毒不会以“清空”所有易感人群S的方式结束 $S(\infty) > S(0)e^{-\beta/\gamma}$
- 可以预测疫情大小，疫情结束时间等。