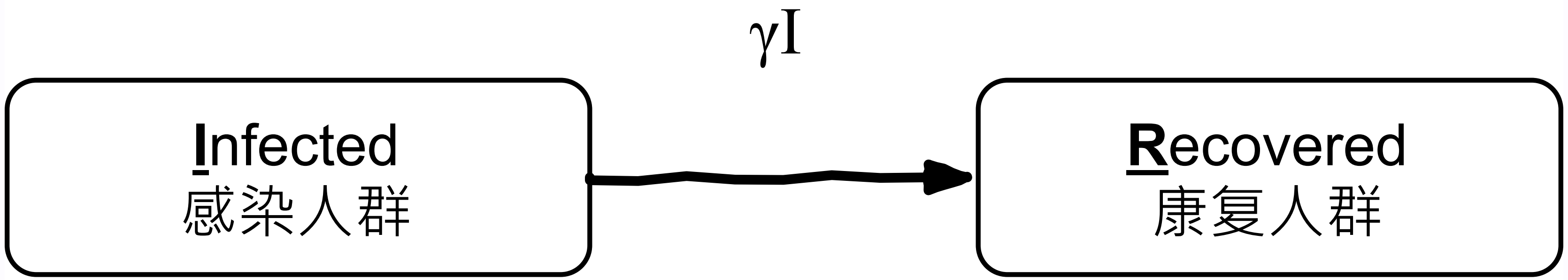
病毒传播数学模型

数学模型 :用数学语言描述一些具有规律性或常识性的现象

显而易见

- 现象1：病毒携带者人数越多，感染的速率就越快。
- 现象2：易感人群的人口基数越大，单个病毒携带者的感染能力越强。
- 现象3：由于人类自身免疫力，医学的进步和科学的治疗，被感染的人中总有一定比例会被治愈。

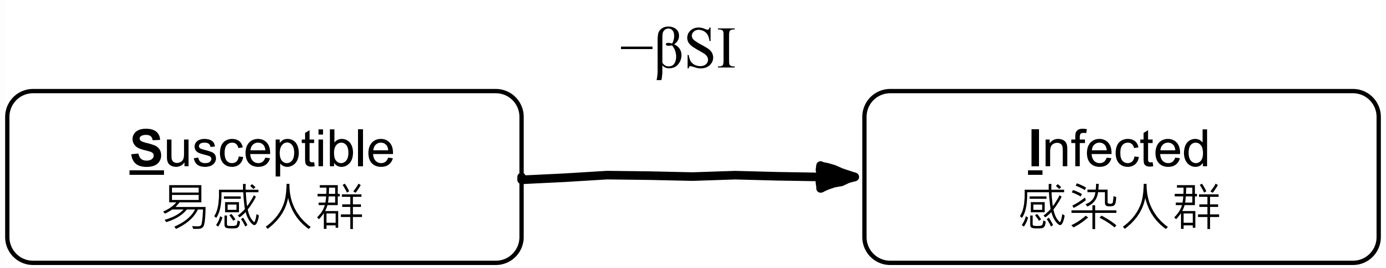

Susceptible
易感人群
Get sick
Infected
感染人群
Get cured
Recovered
康复人群



- 现象3 :每天都有一部分感染人群I以一个恒定的比例γ转变为康复人群R。

$$\dot{R} = \gamma I$$

- I: 感染人群数量
- γ: 康复率($\gamma >= 0$) recovery rate
- R: 康复人群数量
- $\dot{R}$: 康复人群数量增长率



- 现象1：病毒携带者数量（感染人群）越大，感染的速度就越快 $\dot{S} \propto I$
- 现象2：易感人群数量越大，单个病毒携带者能感染的速度就越快 $\dot{S} \propto S$

$$\dot{S} = -\beta S I$$

- I: 感染人群数量
- β: 传染率($\beta >= 0$) infection/transmission rate
- S: 易感人群数量
- $\dot{S}$: 易感人群数量下降率
- 负号: 易感人群数量是 减少 的

- 前面已知易感人群的下降率$\dot{S}$，又已知康复人群的增长率$\dot{R}$，那么`感染人群`的变化率$\dot{I}$则为这二者之和。

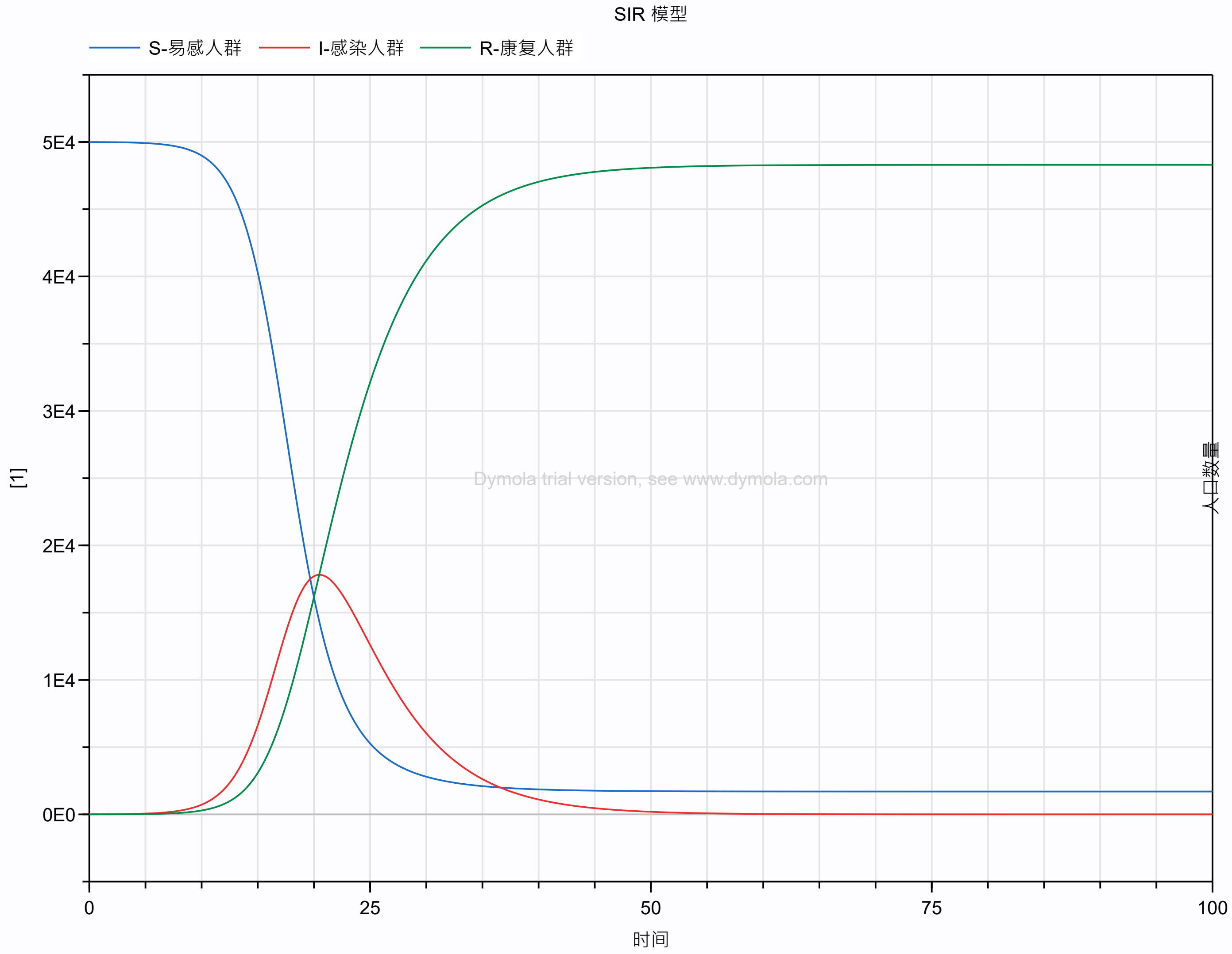
$$\dot{I} = \beta S I - \gamma I = (\beta S - \gamma) I$$

- I: 感染人群数量
- β: 传染率
- γ: 康复率
- S: 易感人群数量
- R: 康复人群数量

经典 SIR 模型

$$\dot{S} = -\beta S I$$
$$\dot{I} = \beta S I - \gamma I$$
$$\dot{R} = \gamma I$$

- Kermack-McKendrick Theory 1927
- Sir Ronald Ross 1902 诺贝尔生理学或医学奖
- 被用于Ebola，疟疾，HIV，流感等传染病动力学的建模。
- 易于扩展



- $\beta = 1.4 \times 10^{-5}, \gamma = 0.2, R_e = 3.5$
- $N = 50000, I(0) = 1$

非常识性结论：

疫情拐点会出现在$S(t) = \frac{\gamma}{\beta}$处

通过该点后感染人数I就会下降

$$\dot{I} = (\beta S - \gamma) I = (\frac{\beta}{\gamma} S - 1) \gamma I$$

$$R_e = S(0)\frac{\beta}{\gamma}$$ - 有效繁殖数

- 当$R_e \leq 1$时，$I(t)$会随着时间推移递减至0。
- 当$R_e > 1$时，$I(t)$会先增加，并达到其峰值，最后递减至0。

其他结论

- 感染人数存在极大值。
- 病毒不会以“清空”所有易感人群S的方式结束 $S(\infty) > S(0)e^{-\beta/\gamma}$
- 可以预测疫情大小，疫情结束时间等。

公共卫生政策解读

$$R_e = S(0)\frac{\beta}{\gamma}$$ - 有效繁殖数

- 降低β: 隔离，洗手，戴口罩。
- 增大γ: 抗病毒药物研制，建医院，增加医护人员。
- 降低$S(0)$: 打疫苗。