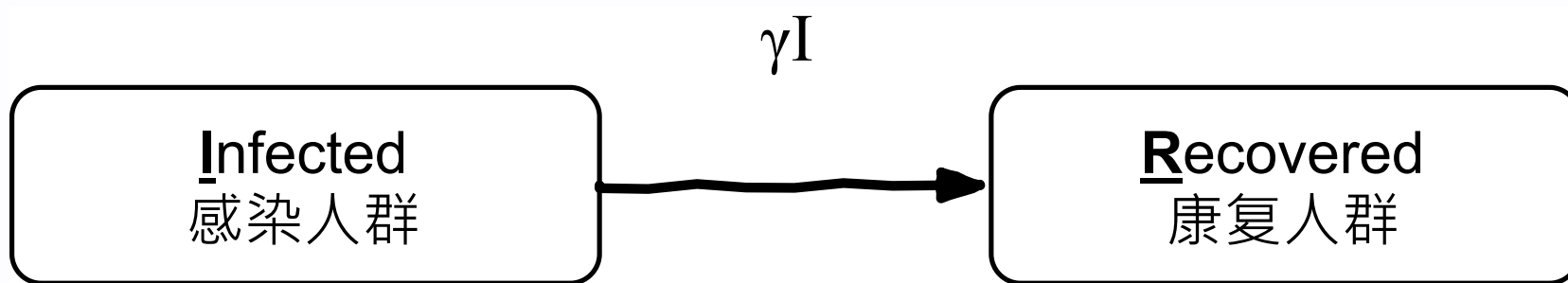


病毒传播数学模型

数学模型 :用数学语言描述一些具有规律性或常识性的现象

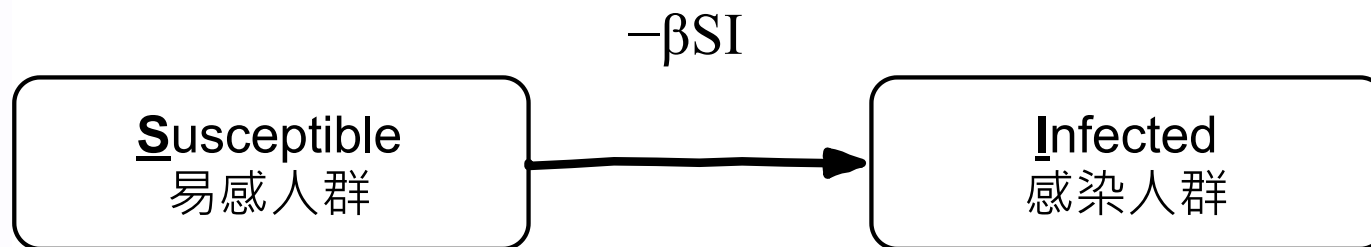




- 每天都有一部分感染人群 I 以一个恒定的比例 γ 转变为康复人群 R 。

$$\dot{R} = \gamma I$$

- I : 感染人群数量
- γ : 康复率($\gamma \geq 0$) recovery rate
- R : 康复人群数量
- \dot{R} : 康复人群数量增长率



- 病毒携带者数量（感染人群）越大，感染的速度就越快
 $\dot{S} \propto I$
- 易感人群数量越大，单个病毒携带者能感染的速度就越快
 $\dot{S} \propto S$

$$\dot{S} = -\beta SI$$

- I : 感染人群数量
- β : 传染率 ($\beta \geq 0$) infection/transmission rate
- S : 易感人群数量
- \dot{S} : 易感人群数量下降率
- 负号: 易感人群数量是 减少 的



- 前面已知易感人群的下降率 \dot{S} ，又已知康复人群的增长率 \dot{R} ，那么 感染人群 的变化率 \dot{I} 则为这二者之和。

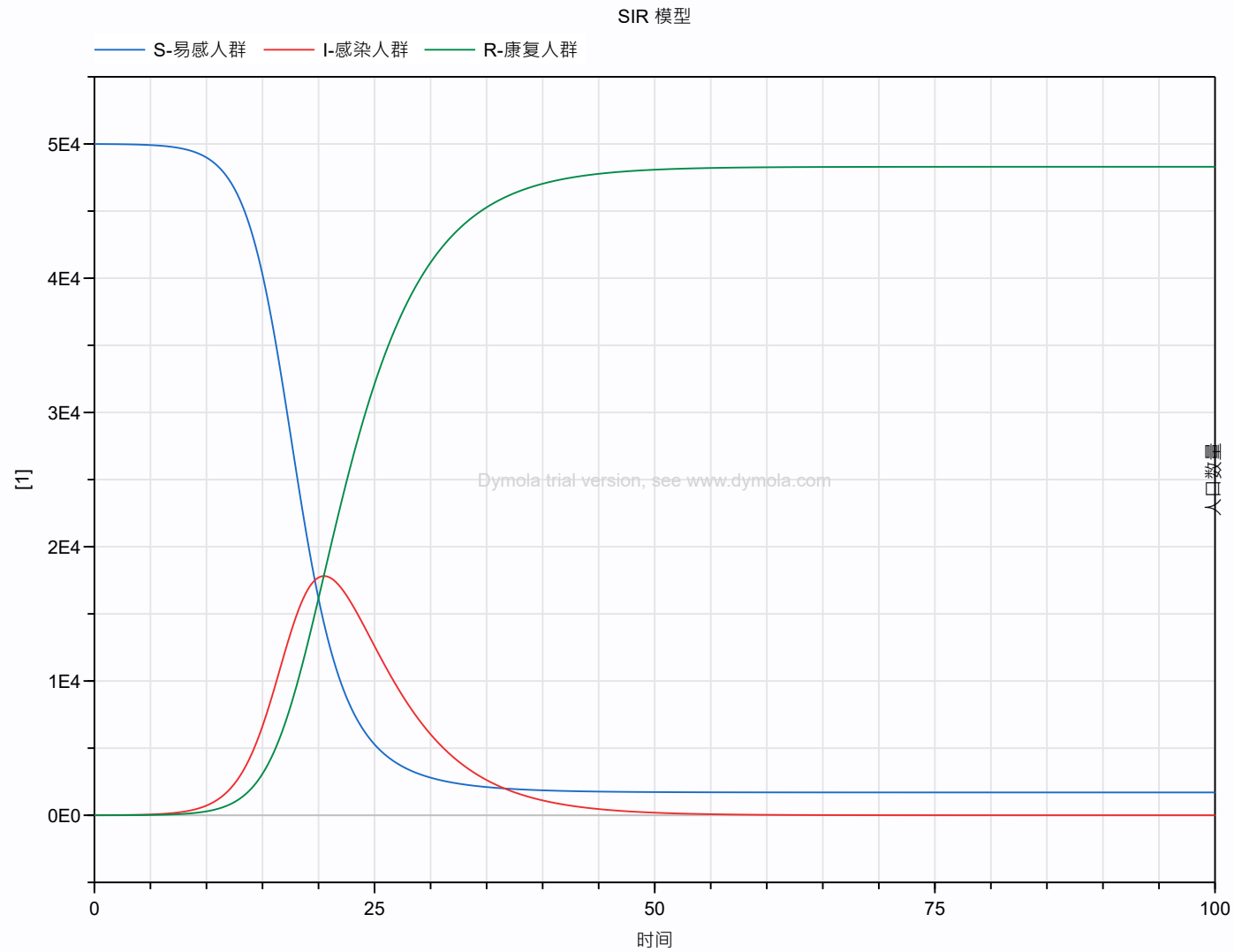
$$\dot{I} = \beta SI - \gamma I = (\beta S - \gamma)I$$

- I : 感染人群数量
- β : 传染率
- γ : 康复率
- S : 易感人群数量
- R : 康复人群数量

经典 SIR 模型

$$\begin{aligned}\dot{S} &= -\beta SI \\ \dot{I} &= \beta SI - \gamma I \\ \dot{R} &= \gamma I\end{aligned}$$

- Kermack-McKendrick Theory 1927
- Sir Ronald Ross 1902 诺贝尔生理学或医学奖
- 被用于Ebola，疟疾，HIV，流感等传染病动力学的建模。
- 易于扩展



- $\beta = 1.4 \times 10^{-5}, \gamma = 0.2, R_e = 3.5$
- $N = 50000, I(0) = 1$

```

model SIR "Susceptible, Infected and Recovered model"
  Real S "易感人群";
  Real I "感染人群";
  Real R "康复人群";
  parameter Real beta(min=0) = 0.7/50000 "感染率";
  parameter Real gamma(min=0) = 0.2 "康复率";
  parameter Integer N(min=0) = 50000 "总人口";
  parameter Integer I0(min=0) = 5 "初始感染人群数量";
protected
  final parameter Integer R0=0 "初始康复人群数量";
  final parameter Integer S0=N - I0 - R0 "初始易感人群数量";
  final parameter Real Re=S0*beta/gamma "有效繁殖数";
initial equation
  S = S0;
  I = I0;
  R = R0;
equation
  der(S) = -beta*S*I "易感人群方程";
  der(I) = beta*S*I - gamma*I "感染人群方程";
  der(R) = gamma*I "康复人群方程";
end SIR;

```

非常识性结论：

疫情拐点会出现在 $S(t) = \frac{\gamma}{\beta}$ 处
通过该点后感染人数 I 就会下降

$$\dot{I} = (\beta S - \gamma)I = \left(\frac{\beta}{\gamma}S - 1\right)\gamma I$$

$$R_e = S(0) \frac{\beta}{\gamma} - \text{有效繁殖数}$$

- 当 $R_e \leq 1$ 时， $I(t)$ 会随着时间推移递减至 0。
- 当 $R_e > 1$ 时， $I(t)$ 会先增加，并达到其峰值，最后递减至 0。

其他结论

- 感染人数存在极大值。
- 病毒不会以“清空”所有易感人群 S 的方式结束 $S(\infty) > S(0)e^{-\beta/\gamma}$
- 可以预测疫情大小，疫情结束时间等。

公共卫生政策解读

$$R_e = S(0) \frac{\beta}{\gamma} - \text{有效繁殖数}$$

- 降低 β : 隔离，洗手，戴口罩。
- 增大 γ : 抗病毒药物研制，建医院，增加医护人员。
- 降低 $S(0)$: 打疫苗。