김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체103(2014)년 제60권 제8호 Vol. 60 No. 8 JUCHE103(2014).

구역분할법에 의한 한가지 2차옹근수계획법 문제의 풀이법

오용범, 박숙녀

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 지적하시였다.

《인민경제의 규모가 커지고 현대적인 과학기술수단들이 경제관리에 널리 리용되고있는 현실은 사회주의경제를 과학적인 방법론에 기초하여 관리운영할것을 요구하고있습니다.》(《**김정일**선집》 제10권 증보판 485페지)

론문에서는 목적함수가 분리형2차함수인 경우 목적함수의 등고면절단법에 의한 옹근수2차계획법문제의 풀이법을 고찰하였다.

2차목적함수를 가지는 다음과 같은 비선형옹근수계획법문제를 고찰하자.

$$q(x)=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{c_j x_j^2}{2}+d_j x_j\right)\Rightarrow \min$$

$$Ax\le b \tag{1}$$

$$x\ge 0,\quad x\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 1)$$

여기서 $A=(a_{ij})$ 는 모든 성분이 부아닌 실수인 $m\times n$ 형행렬이고 $b=(\beta_1, \cdots, \beta_m)^T$, $x=(x_1, \cdots, x_n)^T$ 이며 $c_j\ge 0$ $(j=1, \cdots, n)$ 혹은 $c_j\le 0$ $(j=1, \cdots, n)$ 이며 d_j $(j=1, \cdots, n)$ 는 실수이다.

그리고 문제 (1)의 허용구역은 유계라고 가정한다.

선행연구[2]에서는 비선형옹근수계획법문제를 취급하면서 라그랑쥬완화를 리용하여 본래문제와 쌍대문제의 호상관계에 의하여 최량풀이를 구하는 방법들을 고찰하였으며 분리2차목적함수를 가지는 비선형옹근수계획법문제풀이에 라그랑쥬완화와 등고면절단법을 리용하였다. 그런데 이 방법은 절단된 부분에서의 최량풀이와 절단밖에서의 쌍대문제를 풀어 쌍대간격을 줄이는 방법이므로 계산량이 많은 결함을 가지고있다.

선행연구[3]에서는 일반2차옹근수계획법문제의 대역적최량풀이를 가지한계법에 의하여 구하는 방법에 대하여 고찰하였으며 선행연구[4]에서는 목적함수가 비증가하는 우묵함수들의 합으로 이루어진 우묵배낭문제를 문제의 특수한 구조를 리용하여 목적함수의 선형근사와 허용구역절단과 분해에 의한 아래, 웃한계를 구하는 방법으로 최량풀이를 찾는 수법을 제기하였다.

여기서는 선형제한분리2차목적함수를 가지는 2차옹근수계획법문제를 등고면절단법에 의하여 푸는 효과적인 방법에 대하여 고찰하였다.

문제 (1)은 유계이므로 어떤 정의옹근수 Q가 존재하여 다음의 식이 성립된다.

$$X=\{x\mid Ax\le b,\ \ x\ge 0\}=\left\{x\ \middle|\ Ax\le b,\ \ \sum_{i=1}^{n}x_i\le Q,\ \ 0\le x_i\,,\ \ i=\overline{1,\ n}\right\} \tag{2}$$

X 를 한차원 더 높은 공간에서 표시하자.

$$\overline{X}=\left\{\sum_{i=0}^{n}d_i x_i\ \middle|\ \sum_{i=0}^{n}x_i=Q,\ \ x_0\ge 0,\ \ x\ge 0,\ \ x_0\equiv 0(\bmod 1),\ \ x\equiv 0(\bmod 1)\right\}$$

여기서 $d_0=(0,\cdots,0)^T$, $d_i=(0,\ \cdots,\underset{(i)}{1},\ \cdots,0)^T$, $i=\overline{1,\ n}$ 이다.

정리 1 [1] 문제 (1)은 다음과 같은 형식으로 쓸수 있다.

$$q(\overline{x})=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{c_j x_j^2}{2}+d_j x_j\right)\Rightarrow \min$$

$$\overline{A}\overline{x}\le \overline{b} \tag{3}$$

$$\sum_{i=0}^{n}x_i=Q$$

$$\overline{x}\ge 0,\ \ \overline{x}\equiv 0(\bmod 1)$$

여기서 $\overline{A}=(\overline{A}_1,\ \overline{A}_2)$ 이고 $\overline{A}_1$ 은 모든 성분이 부아닌 $m\times 1$ 형행렬, $\overline{A}_2$ 는 모든 성분이 부아닌 $m\times n$ 형행렬이며 $\overline{b}=(\beta_1,\cdots,\ \beta_m)^T$, $\overline{x}=(x_0,\ x)^T=(x_0,\cdots,x_n)^T$ 이다.

$q(\overline{x})$ 는 문제 (3)에서 정의된 2차함수이고 $\tau=-\sum_{j=1}^{n}d_j^2/(2c_j)$ 이라고 하자.

이제 $q(\overline{x})$ 의 다음과 같은 타원궤도를 고찰하자.

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{c_j x_j^2}{2}+d_j x_j\right)=\upsilon \tag{4}$$

여기서 $c_j>0\ (j=1,\cdots,n)$ 일 때 $\upsilon\ge\tau$ 이며 $c_j<0\ (j=1,\cdots,n)$ 일 때 $\upsilon<\tau$ 이다.

타원 (4)의 중심은 $O=\left(-\dfrac{d_1}{c_1},\cdots,\ -\dfrac{d_n}{c_n}\right)^T$ 이다.

또한 타원 (4)의 j 째 축의 길이는 $2r_j=2\sqrt{|\,2(\upsilon-\tau)/c_j\,|}$ 이다.

$E(\upsilon)$ 를 타원 (4)의 등고선에 의하여 형성된 타원체라고 하자.

타원체 $E(\upsilon)$ 를 포함하는 최소직4각형은 $[a,\ b]$ 이다. 여기서

$$a=(O_1-r_1,\cdots,\ O_n-r_n)^T,\ \ b=(O_1+r_1,\cdots,\ O_n+r_n)^T\,.$$

이때 $E(\upsilon)$ 에 있는 모든 옹근수들을 포함하는 최소옹근수립방체는 $M(\upsilon)=<\alpha,\ \beta>$ 로 표시할수 있다. 여기서 $\alpha=(\lceil O_1-r_1\rceil,\cdots,\ \lceil O_n-r_n\rceil)^T$, $\beta=(\lfloor O_1+r_1\rfloor,\cdots,\ \lfloor O_n+r_n\rfloor)^T$ 이다.

$\tilde{x}$ 을 $E(\upsilon)$ 에 속하는 옹근수점이라고 하자.

$N(\tilde{x})$ 이 $\tilde{x}$ 을 한모서리로 가지는 $E(\upsilon)$ 의 옹근수부분립방체를 표시한다고 하자.

그러면 $E(\upsilon)$ 의 대칭성에 의하여 $N(\tilde{x})=<\gamma,\ \delta>$ 이다. 여기서

$$\gamma=(\lceil O_1-|\,\tilde{x}_1-O_1\,|\rceil,\cdots,\ \lceil O_n-|\,\tilde{x}_n-O_n\,|\rceil)^T,\ \ \delta=(\lfloor O_1+|\,\tilde{x}_1-O_1\,|\rfloor,\ \cdots,\ \lfloor O_n+|\,\tilde{x}_n-O_n\,|\rfloor)^T\,.$$

$q(\tilde{x})=\upsilon$ 이면 $<\gamma,\ \delta>$ 는 $\tilde{x}$ 을 지나는 타원체의 최대옹근수립방체이다.

다음으로 목적함수의 등고선절단에 의한 옹근수2차계획법문제의 풀이법에 대하여 고찰하자.

$$q(\overline{x})=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{c_j\overline{x}_j^2}{2}+d_j\overline{x}_j\right)\Rightarrow \min \qquad (5)$$
$$\overline{A}\overline{x}\le\overline{b},\quad \overline{x}\ge 0$$

문제 (5)의 최량풀이를 $\tilde{x}$ 라고 하자.

$\tilde{x}$ 이 문제 (3)의 허용풀이이면 $\tilde{x}$ 은 문제 (3)의 최량풀이이며 허용풀이가 아니면 $<\alpha,\ \beta>\backslash<\gamma,\ \delta>$ 가운데서 허용옹근수풀이를 찾고 그가운데서 목적함수값이 제일 작은 것이 최량풀이로 된다.

$<\alpha,\ \beta>\backslash<\gamma,\ \delta>$ 가 빈모임이면 $\sqrt{|(\upsilon-\tau)/c_k|}=\max\limits_j\sqrt{|(\upsilon-\tau)/c_j|}$ 인 k 를 구한다.

그리고 $<\gamma,\ \delta>=<\alpha,\ \beta>$ 로 놓고 $\sqrt{|(\overline{\upsilon}-\tau)/c_k|}=\left|\sqrt{|(\upsilon-\tau)/c_k|}\right|+1$ 인 $\overline{\upsilon}$ 를 구하여 $E(\overline{\upsilon})$ 에 있는 모든 옹근수들을 포함하는 최소옹근수립방체 $M(\overline{\upsilon})=<\alpha,\ \beta>$ 를 구하고 우의 과정을 반복한다.

$<\alpha,\ \beta>\backslash<\gamma,\ \delta>$ 를 구하는 방법에 대하여 고찰하자.

보조정리 1 [2] $A=<\alpha,\ \beta>,\ B=<\gamma,\ \delta>,\ \ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\in Z^n,\ \ \alpha\le\gamma\le\delta\le\beta$ 라고 하자.

이때 $A\backslash B$ 는 다음과 같이 기껏해서 $2n$ 개의 옹근수립방체들로 분해된다.

$$A\backslash B=\left\{\bigcup_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{j-1}<\alpha_i,\ \delta_i>\times<\delta_j+1,\ \beta_j>\times\prod_{i=j+1}^{n}<\alpha_i,\ \beta_j>\right)\right\}\cup$$
$$\cup\left\{\bigcup_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{j-1}<\gamma_i,\ \delta_i>\times<\alpha_j,\ \gamma_j-1>\times\prod_{i=j+1}^{n}<\alpha_i,\ \delta_j>\right)\right\} \qquad (6)$$

식 (6)에서 분할된 옹근수립방체들을 $X_i=<\alpha^i,\ \beta^i>$ 라고 하자.

보조정리 2 α^i 가 $\overline{A}_2\alpha^i>\overline{b}$ 이면 옹근수립방체 $X_i=<\alpha^i,\ \beta^i>$ 에는 문제 (3)의 허용점이 존재하지 않는다.

증명 문제 (3)의 $\overline{A}$, $\overline{b}$ 의 원소들이 부아닌 실수이므로 임의의 $k\ (k=1,\cdots,n)$ 에 대하여 $\overline{A}_2(\alpha^i+\rho e_k)>\overline{b},\ \rho\ge 0$ 이 성립된다. 여기서 $e_k=(0,\cdots,\underset{(k)}{1},\cdots,\ 0)^T$ 이다.(증명끝)

알고리듬은 다음과 같다.

① 문제 (5)를 풀어 최량풀이 $\tilde{x}$ 을 구한다.

$\upsilon=q(\tilde{x})$ 로 놓고 $\sqrt{|(\upsilon-\tau)/c_k|}=\max\limits_j\sqrt{|(\upsilon-\tau)/c_j|}$ 인 k 를 구한다.

② $\alpha=(\lceil O_1-|\tilde{x}_1-O_1|\rceil,\cdots,\ \lceil O_n-|\tilde{x}_n-O_n|\rceil)^T,\quad \beta=(\lfloor O_1+|\tilde{x}_1-O_1|\rfloor,\ \cdots,\ \lfloor O_n+|\tilde{x}_n-O_n|\rfloor)^T$

$\gamma=(\lfloor O_1-|\tilde{x}_1-O_1|\rfloor,\ \cdots,\ \lfloor O_n-|\tilde{x}_n-O_n|\rfloor)^T,\ \delta=(\lceil O_1+|\tilde{x}_1-O_1|\rceil,\cdots,\ \lceil O_n+|\tilde{x}_n-O_n|\rceil)^T$

를 구한다.

③ $<\alpha,\ \beta>\backslash<\gamma,\ \delta>$ 에서 옹근수립방체 $X_i=<\alpha^i,\ \beta^i>$ 들과

$$I=\left\{i\;\middle|\;\overline{A}_2\alpha^i\le\overline{b},\;\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^i\le Q,\;\sum_{j=1}^{n}\beta_j^i\ge Q\right\}$$

를 구한다.

④ $q(\tilde{x}')=\min_{i\in I}\min\left\{q(\overline{x})\;\middle|\;\overline{A}\overline{x}\le\overline{b},\;\sum_{i=0}^{n}\overline{x}_i=Q,\;\;\overline{x}\ge 0,\;\;\overline{x}\equiv 0(\mathrm{mod}\;1),\;\overline{x}\in X_i\right\}$ 인 $\tilde{x}'$ 를 구한다.

$\tilde{x}'$ 가 존재하면 $\tilde{x}'$ 가 문제 (3)의 최량풀이이므로 정지하고 $\tilde{x}'$ 가 존재하지 않으면 ⑤로 이행한다.

⑤ $<\gamma,\;\delta>=<\alpha,\;\beta>$ 로 놓고 $\sqrt{|(\overline{\upsilon}-\tau)/c_k|}=\left|\sqrt{|(\upsilon-\tau)/c_k|}\right|+1$ 인 $\overline{\upsilon}$ 를 구한다.

$\upsilon=\overline{\upsilon}$ 로 놓고 $E(\upsilon)$ 에 있는 모든 옹근수들을 포함하는 최소옹근수립방체 $M(\upsilon)=<\alpha,\;\beta>$ 를 구하고 ③으로 이행한다.

정리 2 우의 알고리듬은 유한번만에 최량풀이에서 정지하든지 허용풀이가 없다는것을 판정한다.

증명 매 반복에서 $<\alpha,\;\beta>\backslash<\gamma,\;\delta>$ 가 빈모임이 아니면 $<\alpha,\;\beta>\backslash<\gamma,\;\delta>$ 에 속하는 허용옹근수점들가운데서 함수값이 제일 작은것이 최량이다.

허용구역이 유계이므로 $<\alpha,\;\beta>\backslash<\gamma,\;\delta>$ 이 빈모임이 되는 반복은 유한번이다.

그러므로 알고리듬의 유한성이 보장된다.(증명끝)

실례 $f(x)=-171x_1+18x_1^2-108.8x_2+32x_2^2-56.7x_3+21x_3^2\Rightarrow\min$

$$3x_1+4x_2+5x_3\le 16$$
$$4x_1+x_2+3x_3\le 17$$
$$2x_1+x_2+x_3\ge 1$$
$$x_i\ge 0,\;\;x_i\equiv 0(\mathrm{mod}\;1),\;\;i=1,\,2,\,3$$

이 문제에서 $Q=5$ 로 하면 문제 (1)은 다음과 같다.

$$f(x)=-171x_1+18x_1^2-108.8x_2+32x_2^2-56.7x_3+21x_3^2\Rightarrow\min$$
$$3x_1+4x_2+5x_3\le 16$$
$$4x_1+x_2+3x_3\le 17$$
$$-2x_1-x_2-x_3\le -1$$
$$x_0+x_1+x_2+x_3=5$$
$$x_i\ge 0,\;\;x_i\equiv 0(\mathrm{mod}\;1),\;\;i=1,\,2,\,3$$

선행연구[1]에 의하여 우의 문제를 변형하면 다음과 같다.

$$f(x)=-171x_1+18x_1^2-108.8x_2+32x_2^2-56.7x_3+21x_3^2\Rightarrow\min$$
$$3x_1+4x_2+5x_3\le 16$$
$$4x_1+x_2+3x_3\le 17$$
$$2x_1+x_2+x_3\le 9$$
$$x_0+x_1+x_2+x_3=5$$
$$x_i\ge 0,\;\;i=0,\,1,\,2,\,3$$

이 문제의 최량값은 $\upsilon=-473.472$ 이고 최량풀이는

$$\tilde{x} = (0.077\,564,\ \ 3.808\,970,\ \ 0.994\,231,\ \ 0.119\,231)^T .$$

그리고 $O = (19/4,\ 1.7,\ 1.35)^T$, $\tau = -536.878$, $r_1 = 1.876\ 85$, $r_2 = 1.407\ 64$, $r_3 = 1.737\ 62$, $\alpha = (3,\ 0,\ 0)^T$, $\beta = (6, 3,\ 3)^T$, $\gamma = (4,\ 1,\ 1)^T$, $\delta = (5,\ 2,\ 2)^T$ 이다.

$< \alpha,\ \beta > \setminus < \gamma,\ \delta >$ 에서 옹근수립방체 $< (6, 0,\ 0),\ (6, 3,\ 3) >$, $< (3,\ 3, 0),\ (5, 3,\ 3) >$, $< (3, 0, 3),\ (5, 2, 3) >$ 들은 허용조건을 만족시키지 않으므로 버린다.

$< (3,\ 0, 0),\ (3, 2, 2) >$, $< (4, 0, 0),\ (5, 0, 2) >$, $< (4,\ 1, 0),\ (5, 2, 0) >$ 들은 허용조건을 만족시킨다.

이 옹근수립방체에서 허용점은 $(2, 3, 0, 0)^T$, $(1, 3, 0, 1)^T$, $(1, 3, 1, 0)^T$, $(0, 4, 1, 0)^T$ 이고 여기서 함수값이 제일 작은것이 $(0, 4, 1,\ 0)^T$ 이므로 최량풀이는 $(4, 1, 0)^T$ 이고 최량값은 -472.8 이다.

참 고 문 헌

[1] 오용범: 최량화문제풀이법, **김일성**종합대학출판사, 129～150, 주체97(2008).

[2] D. Li; Nonlinear Integer Programming, Springer, 241～263, 2006.

[3] N. V. Thoai; Computational Optimization and Applications, 10, 149, 1998.

[4] X. L. Sun et al.; Journal of Global Optimization, 33, 15, 2005.

주체103(2014)년 4월 5일 원고접수

A Method for Solving a Kind of Integer Quadratic Programming Problem by the Domain Partition Technique

O Yong Bom, Pak Suk Nyo

We considered a method for solving a kind of integer quadratic programming problem by exploiting the geometry of the quadratic contour of the objective function. Where the objective function is separable quadratic function.

And the example to illustrate the technique is given.

Key words: integer quadratic programming, contour