김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체103(2014)년 제60권 제11호 Vol. 60 No. 11 JUCHE103(2014).

한가지 재귀프락탈보간곡면의 구성과 그것의 프락탈차원평가

윤철희, 김미향

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《과학자, 기술자들은 현실에 튼튼히 발을 붙이고 사회주의건설의 실천이 제기하는 문제들을 연구대상으로 삼고 과학연구사업을 진행하여야 하며 연구성과를 생산에 도입하는데서 나서는 과학기술적문제들을 책임적으로 풀어야 합니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제15권 492페지)

재귀프락탈보간곡면구성에서는 상수축소인수나 전체 직4각형구역우에서 주어진 함수축소인수를 가진 재귀반복함수계를 리용하여 프락탈보간곡면을 생성하는 여러가지 방법들이 연구되였다.[1－4]

론문에서는 매 지역마다에서 정의되는 함수축소인수를 가진 재귀반복함수계를 리용하여 재귀프락탈보간곡면을 구성하고 그것의 용량차원을 평가하는 문제를 론의하였다.

1. 재귀프락탈보간곡면의 구성

여기서는 행렬자료모임을 가지고 재귀프락탈보간곡면을 구성하는 방법을 보기로 한다.

다음과 같은 자료모임이 있다고 하자.

$P=\{(x_i,\ y_j,\ z_{ij})\in \boldsymbol{R}^3;\ i=0, 1, \cdots, n,\ j=0, 1, \cdots, m\}$ $(x_0<x_1<\cdots<x_n,\ y_0<y_1<\cdots<y_m)$

$D_x=\{x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n\}$, $D_y=\{y_0,\ y_1, \cdots,\ y_m\}$, $N=n\cdot m$, $I_{x_i}=[x_{i-1},\ x_i]$, $I_{y_j}=[y_{j-1},\ y_j]$, $N_{nm}=\{1,\ \cdots,\ n\}\times\{1,\ \cdots,\ m\}$, $E=[x_0,\ x_n]\times[y_0,\ y_m]$, $E_{ij}=I_{x_i}\times I_{y_j}$로 표시하고 E_{ij}를 지역이라고 부른다.

다음 몇개의 지역들로 이루어진 직4각형 $\tilde{E}_k,\ k=1,\ \cdots,\ l$들을 E에서 선택하자.

그러면 $\tilde{E}_k$는 x축, y축우의 닫긴구간(각각 $\tilde{I}_{x,\ k},\ \tilde{I}_{y,\ k}$로 표시한다.)들의 직적으로 표시된다. 이때 $\tilde{I}_{x,\ k}$, $k\in\{1,\ \cdots,\ l\}$의 시작점과 끝점들은 I_{x_i}, $i=1, \cdots,\ n$들의 어떤 끝점들과 일치하므로 이 끝점들의 번호를 각각 $s_x(k),\ e_x(k)$로 표시하면 다음의 대응관계가 성립된다.

$$s_x:\{1,\ \cdots,\ l\}\to\{1,\ \cdots,\ n\},\ \ e_x:\{1,\ \cdots,\ l\}\to\{1,\ \cdots,\ n\}$$

$\tilde{I}_{y,\ k}$에 대해서도 마찬가지 방법으로 다음의 대응관계가 성립된다.

$$s_y:\{1, \cdots,\ l\}\to\{1, \cdots,\ m\},\ \ e_y:\{1,\ \cdots,\ l\}\to\{1,\ \cdots,\ m\}$$

따라서 $\tilde{I}_{x,\ k}=[x_{s_x(k)},\ x_{e_x(k)}]$, $\tilde{I}_{y,\ k}=[y_{s_y(k)},\ y_{e_y(k)}]$로 표시된다.

그리고 $\tilde{I}_{x,\ k},\ \tilde{I}_{y,\ k},\ k=1,\ \cdots,\ l$들의 끝점들의 모임을 각각 $\tilde{D}_x,\ \tilde{D}_y$로 표시한다.

매 $(i,\ j)\in N_{nm}$ 에 대하여 $k\in\{1,\ \cdots,\ l\}$ 를 고정하고 $\tilde{E}_k=[x_{s_x(k)},\ x_{e_x(k)}]\times[y_{s_y(k)},\ y_{e_y(k)}]$, $x_{s_x(k)},\ x_{e_x(k)}\in D_x$, $y_{s_y(k)},\ y_{e_y(k)}\in D_y$, $e_x(k)-s_x(k)>1$, $e_y(k)-s_y(k)>1$, $\tilde{E}_k,\ k=1,\ \cdots,\ l$, $N_{nm}=\{1,\ \cdots,\ n\}\times\{1,\ \cdots,\ m\}$ 으로 표시하고 E_{ij} 를 지역, $\tilde{E}_k$ 를 구역이라고 부른다.

매 $(i,\ j)\in N_{nm}$ 에 대하여 $k\in\{1,\ \cdots,\ l\}$ 를 고정하고 k 를 $\gamma(i,\ j)$ 로 표시한다.

그리고 N 개의 변환 $W_{ij,\ k}:\tilde{E}_k\times\boldsymbol{R}\to E_{ij}\times\boldsymbol{R},\ (i,\ j)\in N_{nm}$ 을

$$W_{ij,\ k}(x,\ y,\ z)=(L_{ij,\ k}(x,\ y),\ F_{ij,\ k}(x,\ y,\ z)),\ L_{ij,\ k}(x,\ y)=(L_{x_i,\ k}(x),\ L_{y_j,\ k}(y)),$$

$$F_{ij,\ k}(x,\ y,\ z)=s_{ij,\ k}(L_{ij,\ k}(x,\ y))z+Q_{ij,\ k}(x,\ y)$$

의 형태로 정의한다. 여기서

$$L_{x_i,\ k}:[x_{s_x(k)},\ x_{e_x(k)}]\to[x_{i-1},\ x_i],\ \ L_{y_j,\ k}:[y_{s_y(k)},\ y_{e_y(k)}]\to[y_{j-1},\ y_j],\ \ (i,\ j)\in N_{nm}$$

들은 축소위상동형넘기기들이고 $s_{ij,\ k}:E_{ij}\to\boldsymbol{R}$ 는 $0<|s_{ij,\ k}(x,\ y)|<1$ 인 지역우에서의 축소함수이며 $Q_{ij,\ k}:\tilde{E}_k\to\boldsymbol{R}$ 는 리프쉬츠함수이다. 리프쉬츠(축소)넘기기 f 의 리프쉬츠(축소)상수를 $L_f(c_f)$ 로 표시한다.

변환 $W_{ij,\ k}$, $i=1,\ \cdots,\ n,\ j=1,\ \cdots,\ m,\ \gamma(i,\ j)=k$ 들을 다음의 조건을 만족시키도록 정의한다.

$\tilde{E}_k$ 의 네 끝점우의 자료점들을 E_{ij} 의 네 끝점우의 자료점들로 보낸다. 즉

$$L_{x_i,\ k}:\{x_{s_x(k)},\ x_{e_x(k)}\}\to\{x_{i-1},\ x_i\},\ \ L_{y_j,\ k}:\{y_{s_y(k)},\ y_{e_y(k)}\}\to\{y_{j-1},\ y_j\},\tag{1}$$

$$F_{ij,\ k}(x_\alpha,\ y_\beta,\ z_{\alpha\beta})=z_{ab},\ a,\ b\in\{i-1,\ i\}\times\{j-1,\ j\},\ \alpha\in\{s_x(k),\ e_x(k)\},\ \beta\in\{s_y(k),\ e_y(k)\}$$

이다. 여기서 $L_{x_i,\ k}(x_{\alpha(k)})=x_a,\ L_{y_j,\ k}(y_{\beta(k)})=y_b$ 이다.

자료모임 P 를 보간하는 련속함수 $g\in C^0(E)$ 에 대하여 $\tilde{E}_k$ 의 경계우에서의 함수 g 의 값들을 E_{ij} 의 경계우에서의 g 의 값들로 보낸다. 즉

$$F_{ij,\ k}(x_\alpha,\ y,\ g(x_\alpha,\ y))=g(L_{ij,\ k}(x_\alpha,\ y)),\ \alpha\in\{s_x(k),\ e_x(k)\},\tag{2}$$

$$F_{ij,\ k}(x,\ y_\beta,\ g(x,\ y_\beta))=g(L_{ij,\ k}(x,\ y_\beta)),\ \beta\in\{s_y(k),\ e_y(k)\}.\tag{3}$$

이때 $s_{ij,\ k}$ 는 자유미지함수로 취한다. 이 조건은 $W_{ij,\ k}$ 들의 P 를 보간하는 련속함수의 그라프를 변환할 때에는 E_{ij} 들의 공통경계우에서 일치한다는것을 의미한다.

이제 $\boldsymbol{R}^3$ 에서의 거리 ρ_θ 를 $\theta\ (0<\theta<(1-\bar{c}_L)/\bar{L}_Q)$ 에 대하여 다음과 같이 정의하자.

$$\rho_\theta((x,\ y,\ z),\ (x',\ y',\ z'))=|x-x'|+|y-y'|+\theta|z-z'|,\ (x,\ y,\ z),\ (x',\ y',\ z')\in\boldsymbol{R}^3$$

여기서 $\bar{c}_L=\max\{c_{L_{ij,\ k}};i=1,\ \cdots,\ n,\ j=1,\ \cdots,\ m\},\ \bar{L}_Q=\max\{L_{Q_{ij,\ k}};i=1,\ \cdots,\ n,\ j=1,\ \cdots,\ m\}$ 이다.

그러면 $W_{ij,\ k}$, $i=1,\ \cdots,\ n,\ j=1,\ \cdots,\ m,\ \gamma(i,\ j)=k$ 들은 거리 ρ_θ 에 관하여 축소변환으로 되며 이 변환에 의하여 평면에 수직인 선분은 그대로 평면에 수직인 선분으로 넘어가며 그 길이는 $|s_{ij,\ k}(x,\ y)|$ 로 축소된다. 이로부터 $s_{ij,\ k}$ 를 축소인수라고 부른다.

$M=(p_{ij})_{N\times N}$ 을 $p_{ij}=\begin{cases}1/a_i,\ E_{\tau^{-1}(i)}\subseteq\tilde{E}_{\gamma(\tau^{-1}(j))}\\ 0,\ \ \ \ \ \ E_{\tau^{-1}(i)}\not\subset\tilde{E}_{\gamma(\tau^{-1}(j))}\end{cases}$ 로 정의한다. 여기서 $\tau:N_{nm}\to\{1,\ \cdots,\ N\}$ 은

$\tau(i,\ j)=i+(j-1)n$ 인 단일넘기기이고 a_i 는 $\tilde{E}_{\gamma(\tau^{-1}(j))}$ 에 포함되여있는 지역들의 개수이다.

련결행렬 $C=(c_{ij})_{N\times N}$ 은 $c_{ij}=\begin{cases}1, & p_{ji}>0\\ 0, & p_{ji}=0\end{cases}$ 으로 정의한다.

그러면 $\{\boldsymbol{R}^3;M,\ W_{ij,\ k},\ i=1,\cdots,\ n,\ j=1,\cdots,\ m,\ k\in\{1,\cdots,\ l\}\}$ 은 재귀반복함수계(RIFS)로 된다. 이 재귀반복함수계의 불변모임을 A로 표시하면 다음의 정리가 성립된다.

정리 1　A를 우에서 구성한 RIFS의 불변모임이라고 하자.

그러면 A는 자료모임 P를 보간하는 어떤 련속함수 f의 그라프로 된다. 즉 A는 재귀프락탈보간곡면이다.

증명 함수공간 $C(E)$ 를 $C(E)=\{gC^0(E);g$는 P를 보간하며 조건 (2), (3)을 만족시킨다.$\}$로 정의하면 이것은 $\|\cdot\|_\infty$ 노름에 관한 완비거리공간으로 된다.

이제 $g\in C(E)$ 에 대하여 E 우에서의 함수 Tg 를 다음과 같이 정의하면 $Tg\in C(E)$ 이다.

$$(Tg)(x,\ y)=F_{ij,\ k}(L_{ij,\ k}^{-1}(x,\ y),\ g(L_{ij,\ k}^{-1}(x,\ y))),\quad (x,\ y)\in E_{ij}$$

사실 $\alpha\in\{s_x(k),\ e_x(k)\}$ 에 대하여

$$(Tg)(L_{ij,\ k}(x_\alpha,\ y))=F_{ij,\ k}(x_\alpha,\ y,\ g(x_\alpha,\ y))=g(L_{ij,\ k}(x_\alpha,\ y)),$$

$$(Tg)(L_{ij,\ k}(x,\ y_\beta))=F_{ij,\ k}(x,\ y_\beta,\ g(x,\ y_\beta))=g(L_{ij,\ k}(x,\ y_\beta))$$

이므로 E의 모든 분할선 $\{(x_i,\ y):y\in[y_0,\ y_m]\},\ \{(x,\ y_j):x\in[x_0,\ x_n]\}$ 우에서 $Tg=g$ 이다. 따라서 $F_{ij,\ k}(x_\alpha,\ y,\ (Tg)(x_\alpha,\ y))=F_{ij,\ k}(x_\alpha,\ y,\ g(x_\alpha,\ y))=g(L_{ij,\ k}(x_\alpha,\ y))=(Tg)(L_{ij,\ k}(x_\alpha,\ y))$.

마찬가지로 식 (3)이 성립된다.

그러므로 $C(E)$ 우에서의 연산자 $T:C(E)\to C(E)$ 가 정의되며 이것은 분명 축소연산자로 된다.

따라서 완비거리공간에서의 축소연산자의 부동점정리로부터 T 는 유일한 부동점 $f\in C(E)$ 를 가지며 $f(x,\ y)=F_{ij,\ k}(L_{ij,\ k}^{-1}(x,\ y),\ f(L_{ij,\ k}^{-1}(x,\ y)))$ 이므로 f 의 그라프 $Gr(f)$ 에 대하여 $Gr(f)=\bigcup_{j=1}^{N}\bigcup_{k\in I(j)}W_{\tau^{-1}(k)}(Gr(f|_{E_{\tau^{-1}(k)}}))$ 이다. 여기서 $I(j)=\{k\in\boldsymbol{N};\ p_{kj}>0\},\ j=1,\cdots,\ N$ 이다.

이것은 $Gr(f)$가 우에서 구성한 RIFS의 불변모임임을 의미한다.

따라서 불변모임의 유일성으로부터 $A=Gr(f)$ 이다.(증명끝)

2. 재귀프락탈보간곡면의 용량차원

여기서는 구성한 재귀프락탈보간곡면 A의 용량차원의 아래한계와 웃한계를 평가하였다.

$[0,\ 1]\times[0,\ t]$ $(t\in\boldsymbol{R})$ 를 직4각형 $E\subset\boldsymbol{R}^2$ 에로 넘기는 리프쉬츠변환이 존재하고 용량차원은 리프쉬츠변환에 관하여 불변이므로 $E=[0,\ 1]\times[0,\ t]$ 이라고 가정할수 있으며 지역과 구역의 끝점들은 조건 $x_{i+1}-x_i=y_{j+1}-y_j=1/n$, $x_{e_x(k)}-x_{s_x(k)}=y_{e_y(u)}-y_{s_y(u)}=a/n$, $i=0,\ 1,\cdots,\ n-1,\ j=0,\ 1,\cdots,\ m-1,\ a\in\boldsymbol{N},\ k,u=1,\cdots,\ l$ 을 만족시킨다고 하자.

그러면 임의의 구역안에는 a^2 개의 지역들이 있다.

$r>0$ 에 대하여 변의 길이가 $1/a^r$ 인 립방체들의 모임 $\boldsymbol{B}$ 를

$$\boldsymbol{B}=\left\{\left[\frac{k-1}{a^r},\ \frac{k}{a^r}\right]\times\left[\frac{l-1}{a^r},\ \frac{l}{a^r}\right]\times\left[b,\ b+\frac{1}{a^r}\right],\ k,\ l\in\boldsymbol{N},\ b\in\boldsymbol{R}\right\}$$

로 정의하고 A를 피복하는데 필요한 $\boldsymbol{B}$ 의 립방체들의 최소개수를 $N(1/a^r)$ 로 표시하면 A를 피복하는 $1/a^r$ –그물립방체들의 최소개수 $N'(1/a^r)$ 과 $N(1/a^r)$ 사이에는

$$N'(1/a^r)\le N(1/a^r)\le 4N'(1/a^r)$$

의 관계가 성립되므로 용량차원계산에 $N(1/a^r)$ 을 리용할수 있다.

모임 $D\subset\boldsymbol{R}^2$ 에 대하여 $R_f[D]=\sup\{|f(x_2,\ y_2)-f(x_1,\ y_1)|;(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2)\in D\}$ 를 D 에서의 f 의 진폭이라고 부른다.

보조정리 D 는 $\boldsymbol{R}^2$ 의 직4각형, $W:D\times\boldsymbol{R}\to D\times\boldsymbol{R}$ 는

$$W\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}L(x,\ y)\\ F(x,\ y,\ z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}L(x,\ y)\\ s(L(x,\ y))z+Q(x,\ y)\end{pmatrix}$$

와 같은 형태의 변환이라고 하자. 여기서 Q 는 리프쉬츠상수가 L_Q 인 리프쉬츠함수이고 L 은 $L_{ij,\ k}$ 와 같이 정의한 구역축소변환이다.

그러면 임의의 $f:D\to\boldsymbol{R}$ 에 대하여 $R_{F(L^{-1},\ f\circ L^{-1})}[L(D)]\le\bar{s}R_f[D]+\mathrm{diam}(D)(c_s\overline{f}+L_Q)$ 가 성립된다. 여기서 $\mathrm{diam}(D)$ 는 모임 D 의 직경, $\bar{s}=\max\limits_D|s(x,\ y)|$, c_s 는 $s(x,\ y)$ 의 축소인수, $\overline{f}=\max\limits_D|f(x,\ y)|$ 이다.

증명 $(x,\ y),\ (x',\ y')\in L(D)$ 에 대하여

$$(\tilde{x},\ \tilde{y}):=L^{-1}(x,\ y),\ (\tilde{x}',\ \tilde{y}'):=L^{-1}(x',\ y'),\ (\tilde{x},\ \tilde{y}),\ (\tilde{x}',\ \tilde{y}')\in D$$

라고 하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
&|F(L^{-1},\ f\circ L^{-1})(x,\ y)-F(L^{-1},\ f\circ L^{-1})(x',\ y')|=\\
&\quad=|F(L^{-1}(x,\ y),\ \ f(L^{-1}(x,\ y)))-F(L^{-1}(x',\ y'),\ \ f(L^{-1}(x',\ y')))|=\\
&\quad=|s(x,\ y)f(\tilde{x},\ \tilde{y})-s(x,\ y)f(\tilde{x}',\ \tilde{y}')+s(x,\ y)f(\tilde{x}',\ \tilde{y}')-\\
&\qquad\quad -s(x',\ y')f(\tilde{x}',\ \tilde{y}')+Q(\tilde{x},\ \tilde{y})-Q(\tilde{x}',\ \tilde{y}')|\le\\
&\quad\le|s(x,\ y)||f(\tilde{x},\ \tilde{y})-f(\tilde{x}',\ \tilde{y}')|+|s(x,\ y)-s(x',\ y')||f(\tilde{x}',\ \tilde{y}')|+|Q(\tilde{x},\ \tilde{y})-Q(\tilde{x}',\ \tilde{y}')|\le\\
&\quad\le\bar{s}R_f[D]+c_sd((x,\ y),\ (x',\ y'))\overline{f}+L_Qd((\tilde{x},\ \tilde{y}),\ (\tilde{x}',\ \tilde{y}'))\le\\
&\quad\le\bar{s}R_f[D]+\mathrm{diam}(D)(c_s\overline{f}+L_Q)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&|F(L^{-1},\ f\circ L^{-1})(x,\ y)-F(L^{-1},\ f\circ L^{-1})(x',\ y')|=\\
&\quad=|F(L^{-1}(x,\ y),\ \ f(L^{-1}(x,\ y)))-F(L^{-1}(x',\ y'),\ \ f(L^{-1}(x',\ y')))|
\end{aligned}$$

따라서 보조정리는 증명된다.(증명끝)

N차행렬 $U=(u_{ij})_{N\times N}$, $V=(v_{ij})_{N\times N}$ 에 대하여 관계 $<$ 를

$$U<V\Leftrightarrow u_{ij}<v_{ij},\quad i,\ j=1,\ \cdots,\ N$$

으로 정의한다.

그리고 $\boldsymbol{R}^3$의 점모임에서 x(또는 y)의 자리표가 같은 점들이 모두 한 직선에 놓일 때 이 점모임의 점들을 x(또는 y)－공선이라고 말한다.

정리 2 함수 $f: E \to \boldsymbol{R}$를 그라프가 우에서 구성한 RIFS의 불변모임 A에서의 련속함수라고 하자.

그리고 $\overline{S}$, $\underline{S}$는 각각 다음과 같은 N차대각선행렬이라고 하자.

$$\overline{S} = \mathrm{diag}(\overline{s}_{\tau^{-1}(1)}, \cdots, \overline{s}_{\tau^{-1}(N)}), \quad \underline{S} = \mathrm{diag}(\underline{s}_{\tau^{-1}(1)}, \cdots, \underline{s}_{\tau^{-1}(N)})$$

여기서 $\overline{s}_{\tau^{-1}(k)} = \overline{s}_{ij} = \max_{E_{ij}} |s_{ij}(x, y)|$, $\underline{s}_{\tau^{-1}(k)} = \underline{s}_{ij} = \min_{E_{ij}} |s_{ij}(x, y)|$이다.

이때 어떤 $\widetilde{E}_{k_0 l_0}$이 있어서 보간점모임 $P \cap (\widetilde{E}_{k_0 l_0} \times \boldsymbol{R})$의 점들이 x－공선 또는 y－공선이 아니면 A의 용량차원 $\dim_B A$가 $\underline{\lambda} > a$일 때 $1 + \log_a \underline{\lambda} \le \dim_B A \le 1 + \log_a \overline{\lambda}$, $\overline{\lambda} \le a$일 때 $\dim_B A = 2$이다. 여기서 $\underline{\lambda} = \rho(\underline{S}C)$, $\overline{\lambda} = \rho(\overline{S}C)$는 각각 기약행렬 $\underline{S}C$, $\overline{S}C$의 스펙트르반경이다.

주의 $s_{ij}(x, y) = s_{ij}$(상수)인 경우 $\overline{\lambda} = \underline{\lambda} > a$이면 $\dim_B A = 1 + \log_a \lambda$이다. 이것은 선행연구[3]의 결과와 일치한다.

참 고 문 헌

[1] 윤철희 등; 수학, 50, 1, 주체99(2010).

[2] M. F. Barnsley et al.; Constr. Approx., 5, 3, 1989.

[3] P. Bouboullis et al.; J. Approx. Theory, 141, 99, 2008.

[4] W. Metzler et al.; Internat. J. Bifur. Chaos, 20, 12, 2010.

주체103(2014)년 7월 5일 원고접수

Construction of a Recurrent Fractal Interpolation Surface and Estimation of Its Fractal Dimension

Yun Chol Hui, Kim Mi Hyang

We construct a recurrent fractal interpolation surface using RIFS with function scaling factors defined on regions and estimate its fractal dimension.

Key word: recurrent fractal interpolation surface