김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제4호

평등불룩바나흐공간에서 일반화된 α-비확장넘기기의 수렴성정리

림창일, 김정경

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《수학, 물리학, 화학, 생물학과 같은 기초과학부문에서 과학기술발전의 원리적, 방법론적기초를 다져나가면서 세계적인 연구성과들을 내놓아야 합니다.》

선행연구[1]에서는 평등불룩바나흐공간에서 (C)조건을 만족시키는 넘기기의 부동점정리와 수렴성정리들을 연구하였다.

론문에서는 일반화된 $\alpha-$비확장넘기기의 수렴성정리들을 증명하고 선행연구[1]의 결과들을 일반화하였다.

1. 기 초 개 념

먼저 론문서술과 리해에 필요한 기초개념들을 소개한다.

정의 1[3] $T:C\to C$는 바나흐공간 X의 부분모임 C우에서 정의된 넘기기라고 하자. 이 넘기기가 다음의 성질

$$\frac{1}{2}\|x-Tx\|\le\|x-y\|\Rightarrow\|Tx-Ty\|\le\|x-y\|$$

를 만족시킬 때 넘기기 T는 (C)조건을 만족시킨다고 말한다.

정의 2 $T:C\to C$는 바나흐공간 X의 부분모임 C우에서 정의된 넘기기라고 하자.

임의의 $x,\ y\in C$에 대하여 넘기기 T가 다음의 성질

$$\frac{1}{2}\|x-Tx\|\le\|x-y\|\Rightarrow\|Tx-Ty\|\le\alpha\|Tx-y\|+\alpha\|x-Ty\|+(1-2\alpha)\|x-y\|$$

를 만족시키게 되는 $\alpha\in[0,\ 1)$가 존재할 때 넘기기 T를 일반화된 $\alpha-$비확장넘기기라고 부른다.

일반화된 $\alpha-$비확장넘기기족은 분명히 비확장넘기기족을 포함하며 또한 준비확장넘기기족에 포함된다. 한편 (C)조건을 만족시키는 넘기기족을 엄격히 포함한다.

실례 넘기기 $T:[0,\ 4]\to[0,\ 4]$가 다음과 같이 정의된다고 하자.

$$T(x)=\begin{cases}0, & x\ne 4\\ 2, & x=4\end{cases}$$

$x=4,\ y=3$에 대하여 $\|x-Tx\|/2=1\le\|x-y\|=1$이지만 $\|Tx-Ty\|\le\|x-y\|$는 성립하지 않는다. 따라서 이 넘기기는 (C)조건을 만족시키지 않는다.

그러나 $\alpha=1/2$에 대하여

$$\forall x,\ y\in C,\ \|Tx-Ty\|\le\alpha\|Tx-y\|+\alpha\|x-Ty\|+(1-2\alpha)\|x-y\|$$

가 성립하므로 일반화된 $\alpha-$비확장넘기기로 된다.

정의 3[3] X 를 바나흐공간이라고 하자. X 의 약수렴하는 임의의 점렬 $\{x_n\}(x_n \to x(\text{약}))$ 에 대하여 다음부등식이 성립하면 X 는 Opial성질을 가진다고 말한다.

$$\forall y \neq x,\ \liminf_{n\to\infty} \| x_n - x \| < \liminf_{n\to\infty} \| x_n - y \|$$

임의의 힐베르트공간과 유한차원바나흐공간, $l^p (1 \le p < \infty)$ 공간들은 모두 Opial성질을 가진다.

정의 4[3] $\{x_n\}$ 이 바나흐공간 X 의 유계렬이라고 하자. 점 $x \in C \subset X$ 에 대하여

$$r(x,\ \{x_n\}) := \limsup_{n\to\infty} \| x_n - x \|$$

라고 할 때 C 에 관한 $\{x_n\}$ 의 점근반경과 점근중심은 각각 다음과 같이 정의한다.

$$r(C,\ \{x_n\}) := \inf \{ r(x,\ \{x_n\}) \mid x \in C \}$$

$$A(C,\ \{x_n\}) := \{ x \in C \mid r(x,\ \{x_n\}) = r(C,\ \{x_n\}) \}$$

평등불룩인 바나흐공간에서 점근중심이 한 원소만으로 이루어진다는것은 이미 잘 알려져있다.[3]

론문에서는 평등불룩인 바나흐공간에서 일반화된 α – 비확장넘기기에 대하여 부동점존재정리들을 밝힌데 기초하여 선행연구[2]에서의 반복도식 (*)을 리용하여 수렴성정리들을 증명한다.

$$\begin{cases} x = x_1 \in C \\ x_{n+1} = (1-a_n)Tz_n + a_n Ty_n \\ y_n = (1-b_n)z_n + b_n Tz_n \\ z_n = (1-c_n)x_n + c_n Tx_n \end{cases} \quad (n \in \mathbf{N}) \qquad (*)$$

여기서 $\{a_n\},\ \{b_n\},\ \{c_n\} \subset (0,\ 1)$ 이다.

보조정리 1 넘기기 T 가 바나흐공간 X 의 비지 않은 부분모임 C 우에서 정의된 일반화된 α –비확장넘기기라고 하자. 이때 임의의 $x,\ y \in C$ 에 대하여 다음부등식이 성립한다.

$$\| x - Ty \| \le \frac{3+\alpha}{1-\alpha} \| x - Tx \| + \| x - y \|$$

보조정리 2 넘기기 $T : C \to C$ 가 평등불룩바나흐공간 X 의 비지 않은 닫긴불룩부분모임 C 우에서 정의된 일반화된 α –비확장넘기기라고 하자. 또한 C 에서 부동점을 가진다고 하자. 그러면 $\{x_n\}$ 이 식 (*)에 의하여 주어지는 렬이라고 할 때 임의의 부동점 p 에 대하여 극한 $\lim_{n\to\infty} \| x_n - p \|$ 가 존재한다.

2. 기 본 결 과

여기서는 평등불룩바나흐공간에서 일반화된 α – 비확장넘기기의 부동점존재정리와 수렴성정리를 증명한다.

정리 1 넘기기 T 가 평등불룩바나흐공간 X 의 비지 않은 닫긴불룩부분모임 C 우에서 정의된 일반화된 α – 비확장넘기기라고 하자. 이때 $\{T^n x\}$ 가 유계인 $x \in C$ 가 존재하면

T 는 C 에서 부동점을 가진다.

증명 $x_n := T^n x$ 로 놓으면 C 에 관한 $\{x_n\}$ 의 점근중심은 유일한 점 z 로 이루어진다.

먼저 임의의 $n \in \mathbf{N}$ 에 대하여 $\| x_{n+1} - x_{n+2} \| \le \| x_n - x_{n+1} \|$ 임을 밝히자.

사실 $\frac{1}{2} \| x_n - Tx_n \| = \frac{1}{2} \| x_n - x_{n+1} \| \le \| x_n - x_{n+1} \|$ 이므로

$$\| x_{n+1} - x_{n+2} \| = \| Tx_n - Tx_{n+1} \| \le \| Tx_n - x_{n+1} \| + \alpha \| x_n - Tx_{n+1} \| + (1-2\alpha) \| x_n - x_{n+1} \| \le$$
$$\le \alpha \| x_n - x_{n+1} \| + \alpha \| x_{n+1} - x_{n+2} \| + (1-2\alpha) \| x_n - x_{n+1} \| \le (1-\alpha) \| x_n - x_{n+1} \| + \alpha \| x_{n+1} - x_{n+2} \|$$

가 성립한다. 이로부터

$$\| x_{n+1} - x_{n+2} \| \le \| x_n - x_{n+1} \| \tag{1}$$

이 나온다.

다음으로 임의의 $n \in \mathbf{N}$ 에 대하여

$$\| x_n - x_{n+1} \| \le 2 \| x_n - z \| \text{ 또는 } \| x_{n+1} - x_{n+2} \| \le 2 \| x_{n+1} - z \|$$

가 성립한다는것을 밝히자.

만일 어떤 $n \in \mathbf{N}$ 이 존재하여

$$\| x_n - x_{n+1} \| > 2 \| x_n - z \| \text{ 이고 } \| x_{n+1} - x_{n+2} \| > 2 \| x_{n+1} - z \|$$

라고 하면 식 (1)로부터

$$\| x_n - x_{n+1} \| \le \| x_n - z \| + \| x_{n+1} - z \| < \frac{1}{2} \| x_n - x_{n+1} \| + \frac{1}{2} \| x_{n+1} - x_{n+2} \| \le$$
$$\le \frac{1}{2} \{ \| x_n - x_{n+1} \| + \| x_n - x_{n+1} \| \} = \| x_n - x_{n+1} \|$$

이므로 모순이 생긴다. 따라서 임의의 $n \in \mathbf{N}$ 에 대하여

$$\| x_n - x_{n+1} \| \le 2 \| x_n - z \| \text{ 또는 } \| x_{n+1} - x_{n+2} \| \le 2 \| x_{n+1} - z \|$$

가 성립한다.

첫째 경우에 $\frac{1}{2} \| x_n - x_{n+1} \| = \frac{1}{2} \| x_n - Tx_n \| \le \| x_n - z \|$ 이므로

$$\| Tx_n - Tz \| \le \alpha \| Tx_n - z \| + \alpha \| x_n - Tz \| + (1-2\alpha) \| x_n - z \|$$

가 성립한다. 이로부터

$$\limsup_{n\to\infty} \| Tx_n - Tz \| \le \alpha \limsup_{n\to\infty} \| Tx_n - z \| + \alpha \limsup_{n\to\infty} \| x_n - Tz \| + (1-2\alpha) \limsup_{n\to\infty} \| x_n - z \|$$

가 나온다. 따라서

$$\limsup_{n\to\infty} \| x_n - Tz \| \le \limsup_{n\to\infty} \| x_n - z \| \tag{2}$$

이다. 이로부터 $Tz \in A(C, \{x_n\})$ 이고 따라서 $Tz = z$ 가 성립한다.

두번째 경우에도 마찬가지로 $Tz = z$ 가 성립한다.

따라서 T 의 부동점이 존재한다.(증명끝)

정리 2 넘기기 T 가 평등불룩인 바나흐공간 X 의 비지 않은 약콤팍트불룩부분모임 C 우에서 정의된 일반화된 α –비확장넘기기라고 하자. 그리고 $\{x_n\}$ 이 식 (*)에 의하여 주어지는 렬이라고 하자. 이때 X 가 Opial성질을 가지면 $\{x_n\}$ 은 T 의 부동점에로 약수렴한다.

증명 평등불룩바나흐공간에서 부분모임의 유계닫김성과 약콤팍트성은 동차이므로 정리 1로부터 평등불룩바나흐공간의 약콤팍트불룩부분모임에서의 부동점존재성을 밝힐수

있다. 따라서 T 의 부동점 p 가 존재한다. $p\in F(T)$ 라고 하면 보조정리 2로부터 극한 $\lim_{n\to\infty}\|x_n-p\|$가 존재한다.

이제 $\{x_n\}$의 임의의 부분렬이 유일한 점에로 약수렴한다는것을 증명하자.

$x,\ y$를 각각 $\{x_n\}$의 두 부분렬 $\{x_{n_j}\}$, $\{x_{n_k}\}$의 약극한들이라고 하자.

보조정리 2로부터 $\lim_{n\to\infty}\|x_n-Tx_n\|=0$이다. 따라서 보조정리 1로부터 $x=Tx$, $y=Ty$이다.

$x\neq y$ 라고 가정하자. 그러면 Opial성질로부터

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=\lim_{n_j\to\infty}\|x_{n_j}-x\|<\lim_{n_j\to\infty}\|x_{n_j}-y\|=\lim_{n\to\infty}\|x_n-y\|=\lim_{n_k\to\infty}\|x_{n_k}-y\|<$$
$$<\lim_{n_k\to\infty}\|x_{n_k}-x\|=\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|$$

가 나온다. 이것은 모순이다. 따라서 $x=y$이고 정리의 결과가 증명된다.(증명끝)

정리 3 넘기기 T가 평등불룩인 바나흐공간 X의 비지 않은 콤팍트불룩부분모임 C우에서 정의된 일반화된 $\alpha-$비확장넘기기라고 하자. 그리고 $\{x_n\}$이 식 (*)에 의하여 주어지는 렬이라고 하자. 그러면 $\{x_n\}$은 T의 부동점에로 수렴한다.

주의 일반화된 $\alpha-$비확장넘기기족은 (C)조건을 만족시키는 넘기기족을 엄격히 포함하므로 론문의 결과들은 모두 선행연구[1]의 결과들의 일반화로 된다.

참 고 문 헌

[1] A. Javid et al.; Mathematics, 7, 522, 2019.
[2] V. K. Sahu et al.; Aligarh Bull. Math., 35, 19, 2016.
[3] T. Suzuki; J. Math. Anal. Appl., 340, 2, 1088, 2008.

주체109(2020)년 6월 5일 원고접수

Convergence Theorems for Generalized α–Nonexpansive Mappings on a Uniformly Convex Banach Space

Rim Chang Il, Kim Jong Gyong

In this paper, we define a new kind of nonexpansive mappings, generalized α–nonexpansive mapping, and establish some basic properties for this mapping. And then we prove convergence theorems for it on a uniformly convex Banach space.

Keywords: uniformly convex Banach space, Opial's condition