김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체104(2015)년 제61권 제1호 Vol. 61 No. 1 JUCHE104(2015).

블로크합성 및 변환에 의한 회전가능한 3수준2차계획의 구성법

림 광 서

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《과학자, 기술자들은 사회주의경제발전의 요구에 맞게 인민경제 모든 부문의 생산기술공정과 생산방법, 경영활동을 새로운 과학적토대우에 올려세우는데서 나서는 과학기술적문제를 전망성있게 풀어나가야 하겠습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제11권 138페지)

론문에서는 블로크의 합성 및 변환에 의하여 회전가능한 3수준2차계획을 새롭게 구성하는 방법을 연구하였다.

복스의 복합계획, 하틀리의 복합계획, 루카스의 계획들은 5수준2차계획들이였으나 그 이후 선행연구[2, 3]에서는 3수준2차계획을 구성하였다. 그러나 그것들은 일반적으로 회전성조건들을 만족시키지 못하였다.

선행연구[1]에서는 인자의 개수 $k=3, 4, \cdots, 10$에 대하여 $L_n(p^p)$형직교표를 변형시키는 방법으로 회전가능한 3수준2차계획을 구성하였다.

우리는 선행연구[1]에서와는 달리 블로크를 합성 및 변형하는 방법으로 $k=3, 4, \cdots$에 대하여 회전가능한 3수준2차계획의 구성법을 연구하였다.

2차회귀모형

$$y=\beta_0+\sum_{i=1}^{k}\beta_{ii}x_i^2+\sum_{i=1}^{k}\beta_i x_i+\sum_{i<j}^{k}\beta_{ij}x_i x_j+\varepsilon \tag{1}$$

에 대하여 계획구역

$$\vartheta=\{(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k): x_i\subseteq[-1,\ 0,\ +1],\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ k\} \tag{2}$$

에서 회전성조건

$$\sum_{\alpha=1}^{N}x_{i\alpha}=0,\quad \sum_{\alpha}x_{i\alpha}x_{j\alpha}=0,\quad \frac{1}{N}\sum_{\alpha}x_{i\alpha}^2=\lambda_2,\ \ \frac{1}{N}\sum x_{i\alpha}^2x_{j\alpha}^2=\lambda_4,\quad \lambda_2=3\lambda_4 \tag{3}$$

및 불퇴화성조건

$$\lambda_4/\lambda_2^2\geq k/(k+2) \tag{4}$$

가 만족되게 계획행렬

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1N} & x_{2N} & \cdots & x_{kN} \end{bmatrix}$$

을 구성하자.

1. 직교표 $L_n(2^p)$ 와 별점블로크의 합성에 의한 구성법

1) 직교표 $L_8(2^7)$ 과 별점블로크의 변환 및 합성에 의한 구성

2수준직교표 $L_8(2^7)$ 과 블로크(기본핵블로크)와 별점블로크를 다음과 같이 변환 및 합성하여 행렬 $X_1(\varepsilon(N))$ 을 구성한다.

먼저 기본핵블로크를 구성하자.

2수준직교표 $L_8(2^7)$ 에서 수준 1을 ±1로, 수준 2를 $\tilde{0}$ 로 놓는다.

$$\tilde{X}=\begin{bmatrix} \pm1 & \pm1 & \pm1 & \pm1 & \pm1 & \pm1 & \pm1 \\ \pm1 & \pm1 & \tilde{0} & \pm1 & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \pm1 & \tilde{0} & \pm1 & \tilde{0} & \pm1 & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \pm1 & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \pm1 & \pm1 \\ \tilde{0} & \pm1 & \pm1 & \tilde{0} & \tilde{0} & \pm1 & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \pm1 & \tilde{0} & \tilde{0} & \pm1 & \tilde{0} & \pm1 \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \pm1 & \pm1 & \tilde{0} & \tilde{0} & \pm1 \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \pm1 & \pm1 & \pm1 & \tilde{0} \end{bmatrix}$$

이 행렬에서 $k\ (k=3,\ 4,\cdots,\ 7)$ 개렬을 취한다.

먼저 $\tilde{X}_1$ 의 행들에서 ±1이 몇번째 자리에 놓이는가에 따라서 2^{7-4} 형H－행렬의 첫째, 둘째, ⋯, k째 렬을 ±1의 자리에 배당한다.

다음으로 $\tilde{0}$ 의 자리에는 $(0,\ 0,\cdots,\ 0)^T$ 를 배당한다.

이 블로크행렬을 $\tilde{X}_1(\varepsilon)$ 이라고 하자.

다음으로 별점블로크를 구성하자.

렬의 개수는 기본핵블로크에서와 같이 k개로 한다.

$2k\times k$ 형행렬을 만드는데 $k\ (k=3,\ 4,\cdots,\ 7)$ 번째 렬에서 $2k-1$번째 원소는 +1로, $2k$ 번째 원소는 −1로 놓는다. 나머지 $2k-2$ 개 원소는 $\tilde{0}$ 로 놓는다.

수준 +1의 자리에는 $(+1,+1,\ +1,\ +1,\ -1,\ -1,\ -1,\ -1)^T$ 를, 수준 −1 의 자리에는 $(-1,\ -1,\ -1,\ -1,+1,+1,\ +1,\ +1)^T$ 를, $\tilde{0}$ 의 자리에는 $(0,0,\ \cdots,0,0)^T$ 를 넣는다.

이 행렬블로크를 별점블로크 $\tilde{X}_2(\varepsilon)$ 이라고 한다.

기본핵블로크 $\tilde{X}_1(\varepsilon)$ 과 $\tilde{X}_2(\varepsilon)$ 을 합성하여 계획행렬 $X_1(\varepsilon(N))=\begin{bmatrix}\tilde{X}_1(\varepsilon)\\ \tilde{X}_2(\varepsilon)\end{bmatrix}$ 을 구성한다.

정리 1 계획 $X_1(\varepsilon(N))$ 은 $k=3,\ 4,\cdots,7$ 일 때의 2차회귀모형 (1)과 계획구역 (2)에 대한 회전가능한 3수준2차계획이다.

증명 계획 $X_1(\varepsilon(N))$ 은 수준 −1과 0 그리고 +1을 수준으로 가지는 3수준계획이다.

그리고 $X_1(\varepsilon(N))$ 은 구성된 구조로부터 2차회귀모형 (1)에 대한 회전성조건 (3)과 불퇴화성조건 (4)를 만족시킨다. 따라서 계획 $X\ (\varepsilon(N))$ 은 2차회귀모형 (1)과 계획구역 (2)에 대한 회전가능한 3수준2차계획이다.(증명끝)

２）직교표 $L_{16}(2^{15})$와 별점블로크의 합성 및 변환에 의한 구성

앞에서 우리는 $k=3,\ 4,\ \cdots,\ 7$인 경우에 대하여 회전가능한 3수준2차계획을 구성하는 방법을 보았다.

여기서는 $k=8,\ 9,\ \cdots,\ 15$인 경우를 보기로 한다.

먼저 기본핵블로크를 구성하자.

2수준직교표 $L_{16}(2^{15})$에서 첫 행을 빼버리고 수준 1을 ±1로, 수준 2를 $\tilde{0}$로 놓는다.

이 행렬에서 $k\ (k=8,\ 9,\ \cdots,\ 15)$렬을 취한다.

이때 매 행에서 ±1의 개수는 7을 넘지 않는다.

±1의 자리에는 2^{7-4}형H－행렬의 렬들을 앞에서와 류사한 방법으로 넣는다.

$\tilde{0}$의 자리에는 8차원렬벡토르 $(0,\ 0,\cdots,\ 0,\ 0)^T$를 넣는다. 이 행렬을 $\tilde{\tilde{X}}_1(\varepsilon)$로 표시하고 기본핵블로크라고 부른다.

별점블로크는 앞에서와 같은 방법으로 구성하며 $\tilde{\tilde{X}}_2(\varepsilon)$로 표시한다.

기본핵블로크와 별점블로크를 합성하여 계획행렬 $X_2(\varepsilon(N))=\begin{bmatrix}\tilde{\tilde{X}}_1(\varepsilon)\\ \tilde{\tilde{X}}_2(\varepsilon)\end{bmatrix}$을 구성한다.

정리 2 계획 $X_2(\varepsilon(N))$은 $k=8,\ 9,\ \cdots,\ 15$일 때 2차회귀모형 (1)과 계획구역 (2)에 대한 회전가능한 3수준2차계획이다.

주의 계획 $X_2(\varepsilon(N))$은 $k=3,\ 4,\cdots,\ 7$인 경우에도 회전가능한 3수준2차계획이다. 그런데 이 경우에는 인자의 개수에 비해볼 때 실험회수가 상대적으로 크게 되는 불합리한 점들이 있다.

２. $L_8(2^{7-4})$와 BIBD들의 합성 및 변환에 의한 구성

먼저 $L_8(2^{7-4})$의 변환에 의한 블로크 $X_1(\varepsilon)$을 구성하자.

직교표 $L_8(2^{7-4})$에서 첫 행을 빼버리고 수준 1을 ±1로, 수준 2를 $\tilde{0}$로 놓는다.

±1의 자리에는 매 행에서의 그것의 순서에 따라 2^{3-1}형행렬의 첫째, 둘째, 셋째 렬을 넣는다. 그리고 $\tilde{0}$의 자리에 $(0,\ 0,\cdots,\ 0,\ 0)^T$를 넣는다. 이 블로크를 $X_1(\varepsilon)$으로 표시한다.

다음으로 BIBD의 변환에 의한 블로크 $X_2(\varepsilon)$을 구성하자.

BIBD(7, 7, 3, 3, 1)을 구성한 다음 수준 1을 ±1로, 수준 0을 $\tilde{0}$로 놓는다.

웃항목에서와 같이 $\pm1,\ \tilde{0}$의 자리들에 각각 2^{3-1}형H－행렬의 렬들과 $(0,\ 0,\cdots,\ 0,\ 0)^T$를 넣는다. 이 블로크를 $X_2(\varepsilon)$으로 표시한다.

블로크 $X_1(\varepsilon)$과 $X_2(\varepsilon)$을 합성하여 계획 $X_3(\varepsilon(N))=\begin{bmatrix}X_1(\varepsilon)\\ X_2(\varepsilon)\end{bmatrix}$을 구성한다.

정리 3 계획 $X_3(\varepsilon(N))$은 $k=3,\ 4,\ \cdots,\ 7$인 경우에 2차회귀모형 (1)과 계획구역 (2)에 대한 회전가능한 3수준2차계획이다.

증명 $X_3(\varepsilon(N))$은 수준들이 $-1,\ 0,\ +1$로 된 $N\times k$형계획행렬이다. 여기서 $N=56$이다.

그리고 계획을 구성한 구조상특징으로부터 블로크 $X_1(\varepsilon)$에서

$$\sum_{\alpha=1}^{N} x_{i\alpha}^2 = \sum_{\alpha=1}^{N} x_{i\alpha}^4 = 12\,,\ \sum x_{i\alpha}^2 x_{j\alpha}^2 = 4\,,\ \sum_{\alpha=1}^{N} x_{i\alpha}^1 x_{j\alpha}^2 = \sum x_{i\alpha}^2 x_{j\alpha}^1 = 0\ (i \neq j,\ \ i,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ k)$$

이며 블로크 $X_2(\varepsilon)$에서도 대응되는 합들이 같다.

그러므로 $\lambda_2 = \frac{1}{N}\sum_{\varepsilon=1}^{N} x_{i\alpha}^2 = \frac{24}{56}$, $\lambda_4 = \frac{1}{N}\sum x_{i\alpha}^2 x_{j\alpha}^2 = \frac{8}{56}$ $(i \neq j,\ \ i,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ 이며 $\lambda_2 = 3\lambda_4$ 이다.

그리고 불퇴화성조건 $\frac{\lambda_4}{\lambda_2^2} \geq \frac{k}{k+2}$ 도 만족된다.

따라서 계획 $X_3(\varepsilon(N))$은 회전가능한 3수준2차계획이다.(증명끝)

3. 2수준직교표, 릉중심, 면중심블로크들의 합성 및 변환에 의한 구성

인자의 개수 k에 따라서 직교표, 릉중심, 면중심들에 대한 변환은 약간씩 차이를 가진다.

직교표블로크의 구성 $k=3$일 때에는 직교표 $L_8(2^7)$을, $k=5,\ \cdots,\ 8$일 때에는 $L_{16}(2^{15})$를, $k=9,\ 10$일 때에는 $L_{32}(2^{31})$을 리용한다.

$k=7,\ 8$인 경우를 제외하고는 해당한 직교표에서 첫 행을 빼버린다.

수준 1을 ±1로, 수준 2를 $\tilde{0}$로 놓은 다음 $k=3,\ 4,\ \cdots,\ 10$개렬을 취한다.

±1의 자리에는 매 행에서의 ±1의 순서에 따라서 $k=3,\ 4$일 때에는 2^{3-1}형H-행렬, $k=5,\ \cdots,\ 8$일 때에는 2^{7-4}형H-행렬, $k=9,\ 10$일 때에는 2^{15-11}형H-행렬의 렬들을 놓는다. 이 행렬을 $X_1(\varepsilon)$으로 표시한다.

릉중심블로크의 구성 릉중심블로크는 서로 각이하게 매 행에 2개의 원소가 1이고 나머지 원소들은 0으로 된 $C_k^2 \times k$ 형행렬이다. 이 블로크를 $X_2(\varepsilon)$으로 표시한다.

면중심블로크의 구성 면중심블로크는 k차단위행렬로 되며 $X_3(\varepsilon)$으로 표시한다.

블로크 $X_1(\varepsilon),\ X_2(\varepsilon)$ 및 $X_3(\varepsilon)$들을 합성하여 다음의 계획행렬들을 구성한다.

$$X_3^{(1)}(\varepsilon(N)) = \begin{bmatrix} X_1(\varepsilon) \\ X_2(\varepsilon) \end{bmatrix},\ \ X_3^{(2)}(\varepsilon(N)) = \begin{bmatrix} X_1(\varepsilon) \\ X_2(\varepsilon) \\ X_3(\varepsilon) \end{bmatrix}$$

정리 4 계획 $X_3^{(1)}(\varepsilon(N))$, $X_3^{(2)}(\varepsilon(N))$은 각각 $k=4,\ 6,\ 8,\ 10$일 때와 $k=3,\ 5,\ 7,\ 9$일 때의 2차회귀모형 (1)과 계획구역 (2)에 대한 회전가능한 3수준2차계획이다.

사실 계획 $X_3^{(1)}(\varepsilon(N))$과 $X_3^{(2)}(\varepsilon(N))$은 각각 해당한 k에 대하여 2차회전성조건과 계획의 불퇴화조건을 만족시킨다는것을 쉽게 증명할수 있다.

따름 $X(\varepsilon(N))$을 $N \times k$ 형의 회전가능한 3수준2차계획행렬이라고 하고 $\tilde{X}(\varepsilon(N))$을 계획행렬 $X(\varepsilon(N))$의 행의 순서들을 적당히 바꾼 행렬이라고 하자.

이때 행렬 $X(\varepsilon(2N)) = \begin{bmatrix} X(\varepsilon(N)) \\ \tilde{X}(\varepsilon(N)) \end{bmatrix}$은 $2N \times k$ 형의 회전가능한 3수준2차계획이다.

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보(자연과학), 60, 1, 23, 주체103(2014).

[2] M. D. Morris; Technometrics, 42, 111, 2000.

[3] N. Nguyen; J. Statist. Plan. Inference, 138, 294, 2008.

주체103(2014)년 9월 5일 원고접수

On Construction Method of Rotatable 3-Level Quadratic Design by Composition and Conversion of Some Blocks

Rim Kwang So

In papers [2, 3] constructed three level quadratic designs by some method of conversion.

In paper [1] constructed the method of rotatable three level quadratic design using change of the orthogonal table.

We studied new construction method of rotatable three level quadratic design by composition and conversion of some blocks.

Key words: block composition, three level quadratic design