김일성종합대학학보 JOURNAL OF KIM IL SUNG UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체104(2015)년 제61권 제5호 Vol. 61 No. 5 JUCHE104(2015).

일반화된 초기하연산자에 의하여 정의된 해석함수의 부분족에서 적분연산자의 성질

리은심, 김무영

론문에서는 일반화된 초기하연산자에 의하여 정의된 해석함수의 부분족에서 적분연산자 $I_\gamma[f]$의 성질에 대하여 론의하였다.

선행연구[2]에서는

$$1+\gamma z+\frac{\gamma z}{2+\gamma z}\prec\frac{zf'(z)}{f(z)}\prec 1+z+\frac{z}{2+z}\Rightarrow 1+\gamma z\prec\frac{zF'(z)}{F(z)}\prec 1+z,\ \ z\in U$$

가 성립된다는것을 밝혔으며 선행연구[3]에서는 일반화된 초기하연산자의 특수경우에 해당되는 한가지 선형연산자에 대한 적분연산자의 성질을 론의하였다.

우리는 일반화된 초기하연산자에 의하여 정의된 해석함수의 부분족에서 적분연산자 $I_\gamma[f]$의 성질을 연구하여 선행연구[2, 3]에서 얻은 결과를 일반화하였다.

단위원 $U=\{z\in \boldsymbol{C}:|z|<1\}$ 에서 해석적인 함수들의 모임을 $H(U)$ 로 표시하고 $n\in \boldsymbol{N}$, $a\in \boldsymbol{C}$ 에 대하여 $f(z)=a+\sum\limits_{k=n}^{\infty}a_k z^k$ 모양의 함수 $f\in H(U)$ 들의 모임을 $H[a,\ n]$ 으로 표시하자. 그리고 $A=\{f\in H(U): f(0)=f'(0)-1=0\}$ 이라고 하자.

정의 1[5] 함수 f 와 g 가 단위원 U 에서 해석적이라고 하자.

이때 조건 $w(0)=0,\ |w(z)|<1,\ z\in U$ 와 $f(z)=g(w(z)),\ z\in U$ 를 만족시키는 단위원 U 에서 해석적인 함수 w 가 있으면 함수 f 는 g 에 종속된다고 말하고 g 는 f 에 공액종속된다고 말하며 $f\prec g$ 혹은 $f(z)\prec g(z),\ z\in U$ 로 쓴다.

f 가 g 에 종속될 때 g 를 f 의 우월함수라고 부르며 f 의 모든 우월함수 $\tilde{g}$ 에 대하여 $g\prec\tilde{g}$ 이면 g 를 f 의 최량인 우월함수라고 부른다.

g 가 f 에 공액종속될 때 g 의 모든 공액종속 $\tilde{f}$ 에 대하여 $\tilde{f}\prec f$ 이면 f 를 g 의 최량인 종속함수라고 부른다.

정의 2[3] $\overline{U}:=\{z\in \boldsymbol{C}:|z|\le 1\}$ 이라고 하자.

$\overline{U}\setminus E(f)$ 우에서 해석적이고 1 : 1인 함수 f 들의 모임을 Q 로 표시한다. 여기서 $E(f):=\{\xi\in\partial U:\lim\limits_{z\to\xi}f(z)=\infty\}$ 이고 $f'(\zeta)\ne 0,\ \zeta\in\partial U\setminus E(f)$ 이다.

$\alpha_i\in \boldsymbol{C},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ l$ 과 $\beta_j\in \boldsymbol{C}\setminus\{0,\ -1,\ -2,\ \cdots\},\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$ 에 대하여

$${}_lF_m(\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_l\ ;\beta_1,\ \beta_2,\cdots,\ \beta_m\ ;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_n(\alpha_2)_n\cdots(\alpha_l)_n}{(\beta_1)_n(\beta_2)_n\cdots(\beta_m)_n}\frac{z^n}{n!}\quad (l\le m+1,\ m\in \boldsymbol{N}\cup\{0\})$$

을 일반화된 초기하함수라고 부른다. 여기서 $(a)_n$ 은

$$(a)_n := \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = \begin{cases} 1, & n=0 \\ a(a+1)\cdots(a+n-1) & n \in \boldsymbol{N} \end{cases}.$$

정의 3[3] $H_m^l(\alpha_1,\ \alpha_2, \cdots,\ \alpha_l\,;\ \beta_1,\ \beta_2, \cdots,\ \beta_m): A \to A,$

$$H_m^l(\alpha_1,\ \alpha_2, \cdots,\ \alpha_l\,;\ \beta_1,\ \beta_2, \cdots,\ \beta_m) f(z) := z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_{n-1}(\alpha_2)_{n-1}\cdots(\alpha_l)_{n-1}}{(\beta_1)_{n-1}(\beta_2)_{n-1}\cdots(\beta_m)_{n-1}} \frac{a_n z^n}{(n-1)!}$$

을 일반화된 초기하연산자라고 부른다.

간단히 $H_m^l[\alpha_1]f(z) := H_m^l(\alpha_1,\ \alpha_2, \cdots,\ \alpha_l\,;\ \beta_1,\ \beta_2, \cdots,\ \beta_m) f(z)$로 표시한다.

함수 $f \in A$에 대하여 $F(z) := I_\gamma[f](z) = \frac{1+\gamma}{z^\gamma} \int_0^z t^{\gamma-1} f(t) dt$를 일반화된 적분연산자라고 부른다.

정리 1 $h \in H(U)$는 $U = \{z : |z| < 1\}$에서 불룩이고 $h(0) = 1$이며 $\gamma \in \boldsymbol{C}$에 대하여 미분방정식 $q(z) + \frac{zq'(z)}{\alpha_1 q(z) + \gamma - \alpha_1 + 1} = h(z),\ z \in U$는 $q(z) \prec h(z),\ z \in U$인 단엽풀이 $q(z),\ q(0) = 1$을 가진다고 하자.

그리고 $f \in A$에 대하여

$$F(z) := I_\gamma[f](z) = \frac{1+\gamma}{z^\gamma} \int_0^z t^{\gamma-1} f(t) dt \qquad (*)$$

라고 하자.

이때 $\frac{H_m^l[\alpha_1+1]f(z)}{H_m^l[\alpha_1]f(z)} \prec h(z),\ z \in U$이면 $\frac{H_m^l[\alpha_1+1]F(z)}{H_m^l[\alpha_1]F(z)} \prec q(z),\ z \in U$가 성립되고 q는 최량인 우월함수이다.

증명 식 (*)로부터 $\gamma F(z) + zF'(z) = (1+\gamma) f(z)$이므로

$$\gamma H_m^l[\alpha_1]F(z) + z(H_m^l[\alpha_1]F(z))' = (1+\gamma) H_m^l[\alpha_1] f(z).$$

$p(z) := \frac{H_m^l[\alpha_1+1]F(z)}{H_m^l[\alpha_1]F(z)}$로 놓으면 $(\alpha_1+1)\frac{H_m^l[\alpha_1+2]F(z)}{H_m^l[\alpha_1+1]F(z)} = \alpha_1 p(z) + \frac{zp'(z)}{p(z)} + 1$을 얻는다.

이로부터 $\frac{H_m^l[\alpha_1+1]f(z)}{H_m^l[\alpha_1]f(z)} = p(z) + \frac{zp'(z)}{\alpha_1 p(z) + (\gamma - \alpha_1 + 1)}$를 얻는다.

따라서 정리의 조건에 의하여 $p(z) + \frac{zp'(z)}{\alpha_1 F(z) + (\gamma - \alpha_1 + 1)} \prec h(z),\ z \in U$이므로 선행연구[1]에 의하여 $p(z) \prec q(z),\ z \in U$이고 q는 최량인 우월함수이다.(증명끝)

주의 1 정리 1에서 $l=1,\ m=0,\ \alpha_1 = 1,\ \gamma = 1$을 취하고 함수 $h(z) = 1 + z + \frac{z}{2+z}$를 취하면 선행연구[2]의 정리 2와 같다.

정리 2 $h \in H(U)$는 단위원 $U = \{z : |z| < 1\}$에서 불룩이고 $h(0) = a$라고 하자.

$\gamma \in \boldsymbol{C}$에 대하여 $q(z) + \frac{zq'(z)}{\alpha_1 q(z) + \gamma - \alpha_1 + 1} = h(z),\ z \in U$는 $q(0) = a$이고 $q(z) \prec h(z),\ z \in U$인 단엽인 풀이 q를 가진다고 하자.

그리고 $f\in A$에 대하여 $F(z):=I_\gamma[f](z)=\frac{1+\gamma}{z^\gamma}\int_0^z t^{\gamma-1}f(t)dt$ 이고 $\frac{H_m^l[\alpha_1+1]f(z)}{H_m^l[\alpha_1]f(z)}$ 는 U 에서 단엽이며 $\frac{H_m^l[\alpha_1+1]F(z)}{H_m^l[\alpha_1]F(z)}\in H[a,\ 1]\cap Q$ 라고 하자.

이때 $h(z)\prec\frac{H_m^l[\alpha_1+1]f(z)}{H_m^l[\alpha_1]f(z)},\ z\in U$ 이면 $q(z)\prec\frac{H_m^l[\alpha_1+1]F(z)}{H_m^l[\alpha_1]F(z)},\ z\in U$ 이고 q 는 최량인 종속함수이다.

증명 $p(z):=\frac{H_m^l[\alpha_1+1]F(z)}{H_m^l[\alpha_1]F(z)}$ 로 하면 정리 1의 증명과정에서와 같이 다음의 식을 얻는다.

$$\frac{H_m^l[\alpha_1+1]f(z)}{H_m^l[\alpha_1]f(z)}=p(z)+\frac{zp'(z)}{\alpha_1 p(z)+(\gamma-\alpha_1+1)}$$

정리의 조건에 의하여

$$h(z)\prec p(z)+\frac{zp'(z)}{\alpha_1 F(z)+(\gamma-\alpha_1+1)},\ z\in U$$

이므로 선행연구[4]에 의하여 $q(z)\prec\frac{H_m^l[\alpha_1+1]F(z)}{H_m^l[\alpha_1]F(z)},\ z\in U$ 이고 q 는 최량인 종속함수이다.(증명끝)

주의 2 정리 2에서 $l=1,\ m=0,\ \alpha_1=1,\ \gamma=1$ 을 취하고 $h(z)=1+\gamma z+\frac{\gamma z}{2+\gamma z}$ 를 취하면 선행연구[2]의 정리 1과 같다.

정리 3 $h_j\in H(U),\ j=1,\ 2$ 는 단위원 U 에서 불룩이고 $h_j(0)=1$ 이며 $\gamma\in\boldsymbol{C}$ 에 대하여

$$q_j(z)+\frac{zq_j'(z)}{\alpha_1 q_j(z)+\gamma-\alpha_1+1}=h_j(z),\ z\in U,\ j=1,\ 2$$

는 $q_j(0)=1$ 이고 $q_j(z)\prec h_j(z),\ z\in U,\ j=1,2$ 인 단엽인 풀이 $q_j(z),\ j=1,2$ 를 가진다고 하자.

그리고 $f\in A$에 대하여 $F(z):=I_\gamma[f](z)=\frac{1+\gamma}{z^\gamma}\int_0^z t^{\gamma-1}f(t)dt$ 이고 $\frac{H_m^l[\alpha_1+1]f(z)}{H_m^l[\alpha_1]f(z)}$ 는 U 에서 단엽이며 $\frac{H_m^l[\alpha_1+1]F(z)}{H_m^l[\alpha_1]F(z)}\in H[a,\ 1]\cap Q$ 라고 하자.

이때 $h_1(z)\prec\frac{H_m^l[\alpha_1+1]f(z)}{H_m^l[\alpha_1]f(z)}\prec h_2(z),\ \ z\in U$ 이면 $q_1(z)\prec\frac{H_m^l[\alpha_1+1]F(z)}{H_m^l[\alpha_1]F(z)}\prec q_2(z),\ z\in U$ 이고 $q_1(z)$ 와 $q_2(z)$ 는 각각 최량인 종속함수, 최량인 우월함수이다.

주의 3 정리 3에서 $l=1,\ m=0,\ \alpha_1=1,\ \gamma=1$ 을 취하고 함수 $h_1(z)=1+\gamma z+\frac{\gamma z}{2+\gamma z}$, $h_2(z)=1+z+\frac{z}{2+z}$ 를 취하면 선행연구[2]의 따름과 같다.

참 고 문 헌

[1] S. S. Miller et al.; Differential Subordinations, Theory and Applications, Marcel · Dekker, 56～98, 2000.
[2] G. I. Oros; Stud. Univ. “Babes-Bolyai”, Math., 50, 1, 93, 2005.
[3] J. L. Liu et al.; Indian J. Ineq. Pure Appl. Math., 33, 11, 1713, 2002.
[4] S. S. Miller et al.; J. Math. Anal. Appl., 329, 327, 2007.
[5] G. I. Oros; Math. Reports, 11, 61, 155, 2009.

주체104(2015)년 1월 5일 원고접수

Properties of Bernardi Integral Operator for Subclass of Analytic Functions Defined by the Dziok-Srivastava Linear Operator

Ri Un Sim, Kim Mu Yong

We discussed the properties of generalized Bernardi integral operator for a certain subclass of analytic functions defined by the Dziok-Srivastava linear operator $H_m^l[\alpha_1]: A \to A$. The obtained result is the generalization of result of [2].

Key words: differential subordination, differential superordination, dziok-srivastava linear operator, integral operator