

점탄성판의 강제진동에 미치는 몇가지 인자들의 영향

리일광, 김준용

위대한 수령 김일성동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《새로운 과학분야를 개척하며 최신과학기술의 성과를 인민경제에 널리 받아들이기 위한 연구사업을 전망성있게 하여야 합니다.》(《김일성전집》 제72권 292페이지)

선행연구[2]에서는 점탄성재료의 동력학적모형을 루적구적법에 의하여 시간에 따르는 변위를 해석하는 방법을 제기하였다. 선행연구[3]에서는 점탄성재료감쇠에서 자름완화률, 복소자름탄성결수, 자름순응성함수들의 영향을 분석하였다.

론문에서는 외부강제력이 작용하는 경우에 점탄성판의 진동에 영향을 미치는 인자들을 분수계미분점탄성모형에 기초하여 해석하는 방법과 진동감쇠에 미치는 재료상수들과 강제력의 주파수의 영향을 고찰하였다.

1. 강제력이 작용하는 점탄성판의 변위해석을 위한 기본방정식

분수계미분으로 표시된 점탄성판의 구부림진동방정식은 다음과 같다.[1]

$$[M]D_t^{2+\alpha}\{\delta(t)\} - \lambda[M]D_t^2\{\delta(t)\} + [C]D_t^{1+\alpha}\{\delta(t)\} - \lambda[C]D_t^1\{\delta(t)\} + [K]D_t^\alpha\{\delta(t)\} - (1+\lambda)[K]\{\delta(t)\} = D_t^\alpha\{Q\} - \lambda\{Q\} \quad (1)$$

여기서 D_t^α 는 리만-류빌의 의미에서의 α 계미분연산자이고 $[M]$, $[C]$, $[K]$ 는 각각 구조전체의 질량행렬, 외부적감쇠행렬, 억제기행렬이고 $\{Q\}$ 는 외력벡토르, $\{\delta(t)\}$ 는 마디점변위벡토르이며 $\lambda = G_0/(G_\infty - G_0)$ 이고 G_0 은 정적자름탄성결수, G_∞ 는 동적자름탄성결수이며 t 는 실시간을 완화시간에 의하여 무차원화한 시간이다.

외부강제력이

$$Q(x, y, t) = F(x, y)T(t)$$

와 같이 표시된다고 하자.

요소등가마디점점은

$$\{Q\}^e = \int_V [N]^T F(x, y) dV T(t) = \{F_0\}^e T(t)$$

와 같이 구성하자. 이때 진동방정식 (1)은

$$[M]D_t^{2+\alpha}\{\delta(t)\} - \lambda[M]D_t^2\{\delta(t)\} + \frac{\mu}{\rho}[M]D_t^{1+\alpha}\{\delta(t)\} - \lambda\frac{\mu}{\rho}[M]D_t^1\{\delta(t)\} + [K]D_t^\alpha\{\delta(t)\} - (1+\lambda)[K]\{\delta(t)\} = \{F_0\}^e D_t^\alpha T(t) - \lambda T(t) \quad (2)$$

와 같이 쓸수 있다. 여기서

$$[M]^e = \int_v [N]^T \rho [N] dV$$

는 요소질량행렬이고

$$[C]^e = \int_v [N]^T \mu [N] dV$$

는 감쇠행렬이다. (ρ - 밀도, μ - 감쇠계수, $[N]$ - 형태함수)

진동방정식 (2)의 풀이를

$$\{\delta(t)\} = \{\delta_0\} \varphi(t) \quad (3)$$

형태로 구하기로 하고 방정식 (2)에 대입하면 다음과 같다.

$$[M]\{\delta_0\} \left(D_t^{2+\alpha} \varphi(t) - \lambda D_t^2 \varphi(t) + \frac{\mu}{\rho} D_t^{1+\alpha} \varphi(t) - \lambda \frac{\mu}{\rho} D_t^1 \varphi(t) \right) + \quad (4)$$

$$+ [K]\{\delta_0\} (D_t^\alpha \varphi(t) - (1 + \lambda) \varphi(t)) = \{F_0\}^e (D_t^\alpha T(t) - \lambda T(t))$$

점탄성 판의 순간탄성계수를 탄성계수로 하는 대응탄성 판의 고유값문제

$$([K] - P^2[M])\{\delta_0\} = 0 \quad (5)$$

을 풀면 방정식 (4)로부터

$$D_t^{2+\alpha} \varphi(t) - \lambda D_t^2 \varphi(t) + \frac{\mu}{\rho} D_t^{1+\alpha} \varphi(t) - \lambda \frac{\mu}{\rho} D_t^1 \varphi(t) + P^2 D_t^\alpha \varphi(t) - (1 + \lambda) P^2 \varphi(t) = \quad (6)$$

$$= A_{mn} (D_t^\alpha T(t) - \lambda T(t))$$

가 얻어진다. 여기서 A_{mn} 은 행렬 $(\{\delta_0\}[M])^{-1}\{F_0\}^e$ 의 원소들이다.

방정식 (6)의 풀이는 다음과 같이 표시된다.

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^3 C_i \varphi_i(t) + \varphi_3(t) \cdot F_1(t) \quad (7)$$

여기서

$$\varphi_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sum_{|\beta|=k} \frac{k!}{\beta_1! \beta_2! \beta_3! \beta_4! \beta_5!} (-\lambda)^{\beta_1} \mu_1^{\beta_2} (-\lambda \mu_1)^{\beta_3} P_{mn}^{2\beta_4} (-(1 + \lambda) P_{mn}^2)^{\beta_5} f_{\alpha_i^*}(t)$$

$$f_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

$$\alpha_i^* = \alpha \beta_1 + \beta_2 + (1 + \alpha) \beta_3 + 2 \beta_4 + (2 + \alpha) \beta_5 + 2 + \alpha - i + 1 \quad (i=1, 2, 3)$$

$$D_t^{2+\alpha-i} \varphi^*(t)|_{t=0} = C_i, \quad \varphi^*(t) = \sum_{i=1}^3 C_i \varphi_i(t) \quad (i=1, 2, 3)$$

$$F_1(t) = A_{mn} (D_t^\alpha - \lambda) T(t)$$

$$\varphi_3(t) \cdot F_1(t) = \int_0^t \varphi_3(t - \tau) F_1(\tau) d\tau$$

이다.

실제로 다음과 같은 외력 $Q(x, y, t) = F_0 T(t)$ 가 작용한다고 하자. 여기서 $T(t)$ 를 비조화함수라고 하면 이 함수는 푸리에전개에 의하여 다음과 같은 조화함렬로 표시할수 있다.

$$T(t) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \sin \omega_l t \quad (8)$$

함수 $\sin \omega_l t$ 에 대한 테일러전개식을 리용하면

$$T(t) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \sin \omega_l t = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_l (-1)^j \omega_l^{2j+1} f_{2j+2}(t)$$

로 표시할수 있다. 여기서

$$f_{2j+2}(t) = \frac{t^{2j+1}}{(2j+1)!} = \frac{t^{2j+1}}{\Gamma(2j+2)}$$

이다. 분수계미분공식을 리용하면

$$\begin{aligned} F_1(t) &= A_{mn} (D_t^\alpha - \lambda) \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_l (-1)^j \omega_l^{2j+1} f_{2j+2}(t) = \\ &= A_{mn} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_l (-1)^j \omega_l^{2j+1} [f_{2j+2-\alpha}(t) - \lambda f_{2j+2}(t)] \end{aligned}$$

가 얻어진다. 따라서

$$\begin{aligned} \varphi_3(t) \cdot F_1(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sum_{|\beta|=k} \frac{k!}{\beta_1! \beta_2! \beta_3! \beta_4! \beta_5!} (-\lambda)^{\beta_1} \mu_1^{\beta_2} (-\lambda \mu_1)^{\beta_3} P_{mn}^{2\beta_4} (- (1+\lambda) P_{mn}^2)^{\beta_5} \cdot \\ &\cdot f_{\alpha_3^*}(t) \cdot A_{mn} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_l (-1)^j \omega_l^{2j+1} [f_{2j+2-\alpha}(t) - \lambda f_{2j+2}(t)] = \\ &= A_{mn} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_l (-1)^j \omega_l^{2j+1} \sum_{|\beta|=k} \frac{k!}{\beta_1! \beta_2! \beta_3! \beta_4! \beta_5!} (-\lambda)^{\beta_1} \mu_1^{\beta_2} (-\lambda \mu_1)^{\beta_3} P_{mn}^{2\beta_4} \cdot \\ &\cdot (- (1+\lambda) \cdot P_{mn}^2)^{\beta_5} (f_{\alpha_3^*+2j+2-\alpha}(t) - \lambda f_{\alpha_3^*+2j+2}(t)) \end{aligned} \quad (9)$$

이다. 여기서

$$\alpha_3^* = \alpha \beta_1 + \beta_2 + (1+\alpha) \beta_3 + 2\beta_4 + (2+\alpha) \beta_5 + \alpha$$

이다.

2. 점탄성판의 강제진동에 영향을 주는 인자들

온도가 일정한 조건하에서 강제력 $Q(x, y, t) = F_0 \sin \omega t$ 가 분포점으로 작용할 때 점탄성판의 동력학적변위에 영향을 주는 몇가지 인자들의 영향을 실험을 리용하여 분석하였다.

1) 점탄성재료상수들의 영향

먼저 네모서리가 단순지되되고 $a=0.24\text{m}$, $b=0.24\text{m}$ 이고 $h=0.02\text{m}$, $\rho=400\text{kg/m}^3$, $E_0=107\text{Pa}$, $\nu=0.48$ 인 등방성점탄성판에 대하여 점탄성재료상수들의 영향을 고찰하였다.

그림 1에서 볼수 있는바와 같이 점탄성상수 α 가 큰 재료일수록 진폭은 시간에 따라 빨리 감소한다. 점탄성상수 λ 의 값이 작은 재료일수록 진폭은 감소하며 진동주기는 거의 변하지 않는다. 여기서도 α 의 값에 따라 판의 점탄성효과가 크게 달라지므로 이 값에 따르는 감쇠효과를 기준으로 하여 판을 선택하여야 한다.

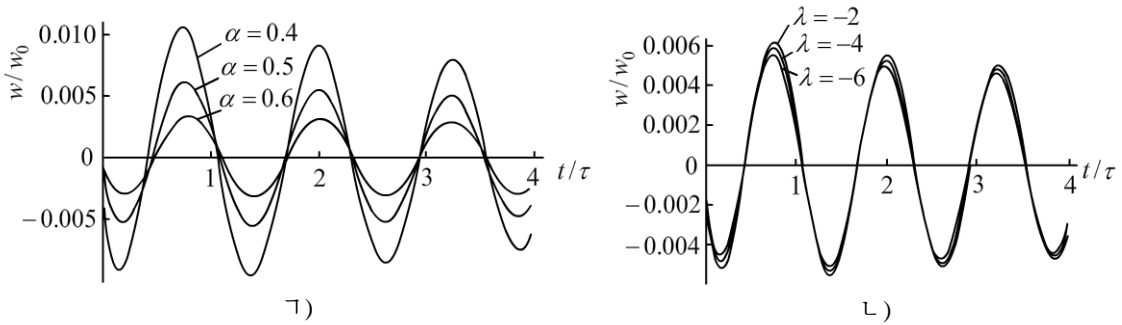


그림 1. 점탄성판의 강제진동

ㄱ) 각이한 α 에 따르는 진동거동, ㄴ) 각이한 λ 에 따르는 진동거동

2) 두께의 영향

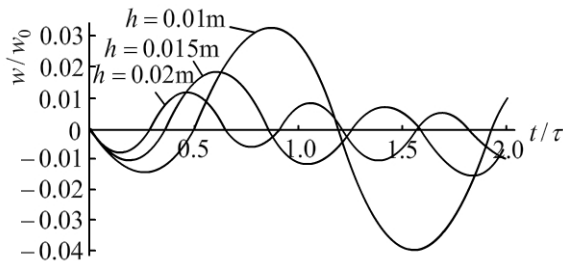


그림 2. 각이한 두께를 가진 점탄성판의 강제진동

그림 2는 각이한 두께를 가진 점탄성판의 강제진동거동을 보여준다. 이것은 두께가 두꺼울수록 진폭이 심하게 감소한다는것을 보여준다. 따라서 점탄성판의 두께를 조절하는 방법으로 진동감쇠를 조종할수 있다.

3) 강제력의 각이한 주파수의 영향

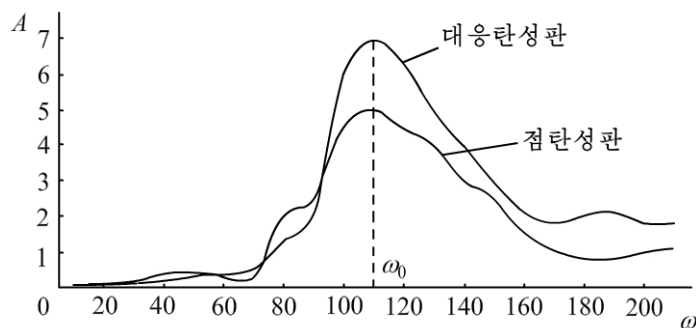


그림 3. 강제력의 각이한 주파수에 따르는 진폭비의 변화

각이한 주파수를 가진 강제력이 작용할 때 점탄성판의 진동특성을 고찰하기 위하여 점탄성판과 대응탄성판의 주파수-진폭관계를 고찰하였다.(그림 3)

강제력의 각이한 주파수성분에 대하여 점탄성판은 대응탄성판의 고유주파수 ω_0 보다 작은 어떤 일정한 주파수(임계주파수)아래의 구역에서는 감쇠진동을 하며 보다 큰 구역에서는 진폭이 증가하는 진동을 한다. 그러한 주파수대역이 존재하며 그 대역을 벗어나 보다 큰 주파수에서는 다시 감쇠하는 진동이 진행된다. 비감쇠주파수대역은 고찰하는 대응

탄성판의 고유진동수를 포함하면서 대략 $0.7\omega_0 < \omega < 1.6\omega_0$ 범위에 있다.

그러므로 비감쇠대역에 포함되는 주파수를 가진 진동형들의 작용효과가 매우 커진다는 것을 고려하여야 한다.

맺는 말

강제력이 작용할 때 점탄성판의 변위에 영향을 주는 인자는 점탄성재료상수, 판의 두께, 강제력의 주파수 등이다. 특히 강제력의 주파수는 변위에 큰 영향을 미친다.

참고 문헌

- [1] Kim Jun Yong; J. of KIM IL SUNG University(Natural Science), 4, 1, 8, Juche 104(2015).
- [2] K. Adolfsson et al.; LNCS, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 3743, 76, 2006.
- [3] S. W. Park; International Journal of Solids and Structures, 38, 8065, 2001.

주체108(2019)년 3월 15일 원고접수

Effect of Several Factors on Forced Vibration of Viscoelastic Plates

Ri Il Gwang, Kim Jun Yong

This paper presents a dynamic model for linear viscoelastic materials, based on the solution of fractional differential equations. A body is discretized with the spatial variable by finite element method and its viscoelastic behavior is analyzed by the solution of fractional differential equations. Also, the numeral simulations validate its accuracy and availability.

Key words: viscoelastic plate, fractional differential equation, free vibration