김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제1호

단순추종미분경기에서 행렬해결함수값을 구하는 한가지 방법

주 광 휘

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《첨단돌파전을 힘있게 벌려야 나라의 과학기술전반을 빨리 발전시키고 지식경제의 토대를 구축해나갈수 있습니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 39페지)

론문에서는 단순추종미분경기에서 행렬해결함수값을 구하는 한가지 방법을 제기하였다.

선행연구[1]에서는 단순추종미분경기에서 스칼라해결함수값의 기하학적성질을 밝히고 그것을 구하는 방법을 제기하였다. 선행연구[2]에서는 스칼라해결함수보다 개선된 행렬해결함수를 도입하고 목표모임에 대한 H −불룩성가정밑에서 준선형추종미분경기에서 추종가능하기 위한 충분조건을 밝혔다.

론문에서는 임의의 목표모임에 대하여 단순추종미분경기에서 행렬해결함수를 구하는 한가지 방법을 제기하였다.

단순추종미분경기

$$\dot{z} = u - v \ \ (u \in U,\ v \in V,\ M \text{ 은 목표모임}) \tag{1}$$

을 보기로 하겠다. 여기서 $z \in \mathbf{R}^n$ 이고 $U,\ V,\ M$ 은 $\mathbf{R}^n$ 의 콤팍트부분모임들이다.

공간 $\mathbf{R}^n$ 에서 표준토대벡토르 $\boldsymbol{e}_i = (0,\ \cdots,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0)\ \ (i = 1,\ \cdots,\ n)$ 에 대하여

$$H = \{\pm \boldsymbol{e}_i,\ i = 1,\ \cdots,\ n\}$$

이라고 놓고 만일

$$M = \bigcap_{h \in H} \{x \in \mathbf{R}^n \mid (x,\ h) \le W_M(h)\}$$

인 모임 $M \subset \mathbf{R}^n$ 을 H −불룩모임이라고 부른다. 여기서

$$W_M(h) = \sup_{x \in M} (x,\ h)$$

는 모임 M 의 지지함수이다. 이 함수는 값 $\pm\infty$ 들을 취할수도 있다. 불룩해석리론으로부터 만일 H 가 유한인 벡토르들의 모임이 아니라 L 에서의 단위구라면 H −불룩성은 보통의 불룩성으로 된다.

가정 1 모임 M 은 H −불룩이다.

임의의 고유값행렬 즉 n 차대각선행렬

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & 0 \\ & \alpha_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \alpha_n \end{pmatrix} = \operatorname{diag}\{\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n\},\ \alpha_i \ge 0\ \ (i = \overline{1,\ n})$$

을 고찰하자. 행렬 A 의 대각선형태를 고려하면 그것을 벡토르 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n)$ 과 동일시

할수 있다.

$z\in\mathbf{R}^n,\ v\in V$ 에 있어서 다가넘기기

$$A_1(z,\ v)=\{(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n),\ \alpha_i=\alpha\ \ (i=\overline{1,\ n})\,|\,(U-v)\cap\alpha(M-z)\neq\varnothing\}$$

$$A_2(z,\ v)=\{(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n),\ \alpha_i\geq 0\ \ (i=\overline{1,\ n})\,|\,(\hat{U}-v)\cap A(M-z)\neq\varnothing\}$$

$$A(z,\ v)=A_1(z,\ v)\cup A_2(z,\ v)$$

를 도입하겠다. 여기서

$$\hat{U}=\bigcap_{h\in H}\{x\in\mathbf{R}^n\,|\,(x,\ h)\leq W_{U\cap\mathrm{con}\{h\}}(h)\}$$

이다.

뽄뜨랴긴조건 $0\in U-v,\ \ \forall v\in V$

함수

$$\tilde{\alpha}(z,\ v)=\sup_{\alpha(z,\ v)\in A(z,\ v)}\ \underline{\min}_{i=1,\ n}\alpha_i(z,\ v)$$

를 단순추종미분경기에서 행렬해결함수라고 부르고

$$M(z,\ v)=\left\{\alpha(z,\ v)\ \middle|\ \underline{\min}_{i=1,\ v}\alpha_i(z,\ v)=\tilde{\alpha}(z,\ v)\right\}$$

로 표시하겠다. 이제

$$T(z)=\inf\left\{t\geq 0\ \middle|\ \inf_{v_t(\cdot)}\int_0^t\tilde{\alpha}(z,\ v(\tau))d\tau\geq 1\right\}$$

을 도입하고 괄호안의 부등식이 성립하지 않는 경우에는 $T(z)=+\infty$ 로 놓겠다. 여기서 $v_t(\cdot)=\{v(s)\in V\,|\,s\in[0,\ t]\}$ 이다.

명제 점 $z^0\in\mathbf{R}^n\setminus M$ 에 대하여 뽄뜨랴긴조건과 가정 1이 성립된다고 하자. 이때 경기 (1)을 초기상태 z^0 으로부터 시작하여 $T(z^0)$ 보다 늦지 않는 시간에 끝낼수 있다.

보다 일반적인 경우에 대한 증명이 선행연구[2]에 주어져있다.

행렬해결함수에서 해결함수값들의 구하기에 대하여 보자.

$X,\ Y$ 를 각각 $\mathbf{R}^n$ 공간의 비지 않은 콤팍트들이라고 하자.

가정 2 $0\notin X,\ 0\in Y$

앞으로 모임 X 와 Y 에 대하여 가정 2가 성립된다고 한다.

정의 1 어떤 $x^*=(\xi_1^*,\ \cdots,\ \xi_n^*)^{\mathrm{T}}\in X$ 에 대하여

① $|\xi_i|\leq|\xi_i^*|\ \ (i=\overline{1,\ n})$

② $x\neq x^*$

인 $x=(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_n)^{\mathrm{T}}\in X$ 가 없으면 x^* 을 모임 X 의 자리표극소점이라고 부르고 그 전부의 모임을 $\overline{X}$ 로 표시하겠다.

몇가지 표식들을 약속하자.

$\mathbf{R}_\nu^n\ \ (\nu=\overline{1,\ 2^n})$ 은 $\mathbf{R}^n$ 의 ν 째 분구, $\mathbf{R}_{-\nu}^n$ 은 자리표원점에 관하여 $\mathbf{R}_\nu^n$ 과 대칭인 분구

보조정리 1 $x^*\in\mathbf{R}_\nu^n$ 이 모임 X 의 자리표극소점이기 위해서는

$$(x^*+\mathbf{R}_{-\nu}^n)\cap(X\cap\mathbf{R}_\nu^n)=\{x^*\}$$

일것이 필요하고 충분하다.

정의 2 어떤 $y^* = (\eta_1^*, \cdots, \eta_n^*)^{\mathrm{T}} \in Y$ 에 대하여

① $|\eta_i| \ge |\eta_i^*|$ $(i = \overline{1, n})$

② $y \ne y^*$

인 $y = (\eta_1, \cdots, \eta_n)^{\mathrm{T}} \in Y$ 가 없으면 y^* 을 모임 Y 의 자리표극대점이라고 부르고 그 전부의 모임을 $\overline{Y}$ 로 표시하겠다.

보조정리 2 $y^* \in \mathbf{R}_\nu^n$ 이 모임 Y 의 자리표극대점이기 위해서는

$$(y^* + \mathbf{R}_\nu^n) \cap Y = \{y^*\}$$

일것이 필요하고 충분하다.

정의 3[1] 주어진 X, Y 에 대하여 조건

$$y \in \mathrm{con}\{x\}$$

를 만족시키는 $(x, y) \in \overline{X} \times \overline{Y}$ 를 X, Y 에 관하여 추직선대응하는 쌍이라고 부르고 그 전부의 모임을 $D(X, Y)$ 로 표시하겠다.

모임

$$\hat{X} = \overline{X} \cup \left(\bigcup_{x' \in \overline{X}} (\mathrm{con}\{x'\} \setminus \mathrm{co}\{x', 0\}) \right), \quad \hat{Y} = \mathrm{con}\,\overline{X} \cap \left(\bigcup_{y' \in \overline{Y}} \mathrm{co}\{y', 0\} \right)$$

과 모든 $x \in \overline{X}$, $y \in \overline{Y}$ 에 대하여 자리표원점 O에서 모임 $\hat{X} - x$ 와 $\hat{Y} - y$ 에 대한 법추를 각각 $\Gamma(x)$, $\Gamma(y)$ 로 표시하고

$$\Gamma'(x) = \begin{cases} \Gamma(x), & \Gamma(x) \ne \{0\} \\ -\mathrm{con}\{x\}, & \Gamma(x) = \{0\} \end{cases}, \quad \Gamma'(y) = \begin{cases} \Gamma(y), & \Gamma(y) \ne \{0\} \\ -\mathrm{con}\{y\}, & \Gamma(y) = \{0\} \end{cases}$$

이라고 놓자.

정의 4 주어진 X, Y 에 대하여

$$\Gamma'(x) \cap -\Gamma'(y) \ne \varnothing$$

을 만족시키는 $(x, y) \in \overline{X} \times \overline{Y}$ 를 모임 X 와 Y 에 관하여 법추대응하는 쌍이라고 부르고 그 전부의 모임을 $S(X, Y)$ 로 표시한다.

$\overline{D}(X, Y) = D(X, Y) \cap S(X, Y)$ 라고 놓으면 $\overline{D}(X, Y)$ 는 X 와 Y 에 관하여 추직선－법추대응하는 쌍전부의 모임으로 된다.

이제 가정 2를 만족시키는 콤팍트들의 쌍 (X, Y) 전부의 모임우에서 정의되는 함수

$$\beta(X, Y) = \max\left\{ \frac{\|y\|}{\|x\|} \,\middle|\, (x, y) \in D(X, Y) \right\}$$

를 생각하고

$$D_0(X, Y) = \left\{ (x, y) \in D(X, Y) \,\middle|\, \frac{\|y\|}{\|x\|} = \beta(X, Y) \right\}$$

라고 놓자.

보조정리 3[1] $D^0(X, Y) \subset \overline{D}(X, Y)$

따름 $\beta(X, Y) = \max\{\|y\| / \|x\|, (x, y) \in \overline{D}(X, Y)\}$

보조정리 4 주어진 $X,\ Y$에 대하여 모임 $\hat{X},\ \hat{Y}$이 불룩이면

$$D^0(X,\ Y)=\overline{D}(X,\ Y)$$

가 성립된다.

정리 1 단순추종미분경기 (1)에서 $X=M-z$, $Y=U-v$라고 놓을 때 $D(X,\ Y)\neq\varnothing$이면

$$\widetilde{\alpha}(z,\ v)=\beta(X,\ Y)$$

가 성립된다.

증명 $\alpha(z,\ v)\in M(z,\ v)\bigcap A_1(z,\ v)$인 경우에 대해서는 선행연구[1]에서 증명되였다. 그러므로 $\alpha(z,\ v)\in M(z,\ v)\bigcap A_2(z,\ v)$인 경우를 보기로 하겠다.

$(x^*,\ y^*)\in D^0(X,\ Y)$라고 하면 $x^*\in\overline{X},\ y^*\in\overline{Y}$이고 $\beta(X,\ Y)=\|y^*\|/\|x^*\|$로 된다. 따라서 행렬 $A=\mathrm{diag}\{\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n\},\ \alpha_i=\|y^*\|/\|x^*\|\ (i=\overline{1,\ n})$이 존재하여 $x^*=Ay^*$로 된다.

만일 정리의 결과가 성립되지 않는다고 가정하면 즉 $\widetilde{\alpha}(z,\ v)>\beta(X,\ Y)$라고 가정하면 행렬 $A'=\mathrm{diag}\{\alpha_1',\ \cdots,\ \alpha_n'\},\ \alpha_i'>\alpha_i\ \ (i=\overline{1,\ n})$가 있어서 $Ax'=y'$인 $(x',\ y')$가 존재한다. 그리고 모임 $\overline{X}$와 $\overline{Y}$의 정의로부터 $x'\in\overline{X},\ y'\in\overline{Y}$로 된다.

이때 세 경우 즉 $x'=x^*$, $y'\neq y^*$인 경우와 $x'\neq x^*$, $y'=y^*$인 경우 그리고 $x'\neq x^*$, $y'\neq y^*$인 경우가 가능하다.

첫 두 경우에는 어떤 $\mathbf{R}_\nu^n$에 있어서 각각 $y'\in(y^*+\mathbf{R}_\nu^n)$, $x'\in(x^*+\mathbf{R}_{-\nu}^n)$로 되여야 하는데 이것은 $x^*\in\overline{X}$와 $y^*\in\overline{Y}$에 모순된다. 세번째 경우에는 $(x',\ y')$가 추직선대응하는 쌍일 때에는 $\beta(X,\ Y)$의 정의에 모순되고 그렇지 않을 때에는 추직선대응하는 쌍의 정의에 모순된다. 이로부터 $\widetilde{\alpha}(z,\ v)=\beta(X,\ Y)$가 나온다.(증명끝)

가정 3 $\exists\nu,\ 1\le\nu\le 2^n,\ \overline{X}\subset\mathbf{R}_\nu^n$

몇가지 표식들을 약속하자.

F_k는 불룩다면모임 $\mathbf{R}_{-\nu}^n,\ 1\le\nu\le 2^n$의 k차원열린경계, $k=\overline{1,\ n-1}$, π_{F_k}는 $\mathbf{R}_\nu^n$을 F_k에로 넘기는 직교사영연산자, $\overline{X}_{\nu,\ k_0}$은 가정 3이 성립되는 $\nu\ (1\le\nu\le 2^n)$와 임의의 $F_k\ \ (k=\overline{1,\ n-1})$에 대해서도 어떤 $F_{k_0}\ \ (1\le k_0\le n-1)$이 있어서

$$\{\mathrm{con}(\overline{Y}\bigcap\mathbf{R}_\nu^n)\bigcap(x+F_k)\}\subset x+F_{k_0}$$

을 만족시키는 $x\in\overline{X}$들의 모임이다.

정리 2 단순추종미분경기 (1)에서 $X=M-z$, $Y=U-v$라고 놓을 때 $D(X,\ Y)=\varnothing$이고 가정 2가 성립된다고 하자. 그리고 어떤 $\nu_0,\ k_0\ \ (1\le\nu_0\le 2^n,\ 1\le k_0\le n-1)$이 있어서 $\overline{X}_{\nu_0,\ k_0}=\overline{X}$이고 $D(\pi_{F_{k_0}}\overline{X},\ \pi_{F_{k_0}}(\mathrm{co}\{0,\ \overline{Y}\})\bigcap\mathbf{R}_{\nu_0}^n)\neq\varnothing$이라고 하자. 그때

$$\widetilde{\alpha}(z,\ v)=\beta(\pi_{F_{k_0}}\overline{X},\ \pi_{F_{k_0}}(\mathrm{co}\{0,\ \overline{Y}\}\bigcap\mathbf{R}_{\nu_0}^n))$$

이 성립된다.

증명 임의의 $\alpha(z,\ v)\in A(z,\ v)$에 대하여 $\min\limits_{1\le i\le n}\alpha_i(z,\ v)$는 조건 $D(X,\ Y)=\varnothing$과 가정 3에 의하여 F_{k_0}을 포함하는 k_0차원부분공간 $\mathbf{R}^{k_0}$의 자리표성분들의 첨수들가운데서만 도달된다.

그러므로 주어진 z와 v에 대하여 $\widetilde{\alpha}(z,\ v)$를 결정하는 문제는 공간 $\mathbf{R}^{k_0}$에서

$X=\pi_{F_{k_0}}\overline{X},\ Y=\pi_{F_{k_0}}(\mathrm{co}\{0,\ \overline{Y}\}\cap\mathbf{R}^n_{\nu_0})$ 이라고 놓을 때의 정리 1의 결과에 귀착된다.(증명끝)

실례 $\mathbf{R}^2$ 에서

$$X=\mathrm{co}\{(-4,\ 2),\ (-4,\ -3),\ (-5,\ 2),\ (-5,\ 3)\}$$

$$Y=\mathrm{co}\{(-1,\ 1),\ (-2,\ 2),\ (0,\ 1),\ (0,\ 2)\}\cup\mathrm{co}\{(-1,\ 1),\ (-2,\ 0),\ (0,\ 1),\ (0,\ 0)\}$$

인 경우에 2.4분구에서

$$\overline{X}=\{X_2\},\ \overline{Y}=\{Y_1\},\ D(X,\ Y)=\varnothing$$

으로 된다. 그리고 F_{k_0} 은 부의 x 축이고 $k_0=1$ 이다. 따라서

$$\pi_{F_{k_0}}\overline{X}=X_2=(0,\ -4)$$

$$\pi_{F_{k_0}}(\mathrm{co}\{0,\ \overline{Y}\}\cap\mathbf{R}^n_{\nu_0})=\pi_{F_{k_0}}\mathrm{co}\{0,\ Y_3\}=\mathrm{co}\{(0,\ 0),\ (-2,\ 0)\}$$

이고 행렬해결함수는 $\beta(\pi_{F_{k_0}}\overline{X},\ \pi_{F_{k_0}}(\mathrm{co}\{0,\ \overline{Y}\}\cap\mathbf{R}^n_{\nu_0}))=2/4$ 로 된다. 이것은 선행연구[1]에서의 스칼라해결함수값 $\alpha(X,\ Y)=1/3$ 보다 크다.

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보(자연과학), 53, 3, 13, 주체96(2007).

[2] А. А. Чикрий, Г. Ц. Чикрий; Тр. ИММ УрО РАН, Т. 20, 3, 324, 2014.

주체107(2018)년 9월 8일 원고접수

A Method of Determining Matrix Resolving Function Value in Simple Differential Pursuit Game

Ju Kwang Hwi

We study a method of determining matrix resolving function value in simple differential pursuit games.

Key words: simple differential pursuit game, resolving function, Pontryagin’s condition