김일성종합대학학보 주체107(2018)년
수 학 제64권 제4호

련속변결수를 가진 모호선형다항분수계미분방정식에 대한 초기값문제의 풀이표시

강정수, 김대철

우리는 모호정규캐푸토다항분수계미분방정식에 대한 초기값문제의 풀이표시문제를 연구하였다.

선행연구[2]에서는 1계선형변결수모호미분방정식에 대한 상수변화공식을 제기하고 상결수선형단항모호리만—류빌분수계미분방정식에 대한 풀이표시를 모호라쁠라스변환을 리용하여 구하였다.

선행연구[3, 4]에서는 상결수선형단항모호리만—류빌분수계미분방정식의 풀이표시를 쌍곡형함수를 리용하여 얻었으며 모호선형단항비정규캐푸토분수계미분방정식의 풀이표시를 얻었다.

론문에서는 모호정규캐푸토다항분수계미분방정식의 초기값문제의 풀이의 존재성을 연구한데 기초하여 선행연구[1]의 결과를 모호인 경우에로 일반화하였다.

모호실수전부의 모임을 $\mathbf{R}_F$ 로 표시하자.

다음과 같은 표시식을 도입한다.

$C^F(I)$: 구간 I 에서 련속인 모호수값함수전부의 모임

$AC^F(I)$: 구간 I 에서 절대련속인 모호수값함수전부의 모임

$L^F(I)$: 구간 I 에서 르베그적분가능한 모호수값함수전부의 모임

먼저 다음의 모호다항분수계미분방정식에 대한 초기값문제의 풀이의 존재성을 고찰하자.

$$\begin{aligned} &{}^C D_{0+}^{\alpha} y(x) = f(x,\ y(x),\ {}^C D_{0+}^{\beta} y(x)),\ x \in I \\ &y(0) = y_0\ \ (y,\ y_0 \in \mathbf{R}_F) \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 $I = (0,\ 1]$ $(0 < \beta < \alpha < 1)$ 이다.

정리 1 문제 (1)의 오른변 f 가 자기변수에 관하여 련속이라고 하자. $y(x)$ 를 문제 (1)의 풀이라고 할 때 $z(x) := {}^C D_{0+}^{\alpha} y(x)$ 로 규정되는 모호수값함수 $z(x)$ 는 모호적분방정식

$$z(x) = f\left(x,\ y_0 \oplus \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{z(s)}{(x-s)^{1-\alpha}} ds,\ I_{0+}^{\alpha-\beta} z(x) \right),\ x \in I \tag{2}$$

의 $C^F(I)$ 에서의 풀이이다. 거꾸로 $z(x)$ 를 모호적분방정식 (2)의 $C^F(I)$ 에서의 풀이라고 할 때 식

$$y(x) = y_0 \oplus \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{z(s)}{(x-s)^{1-\alpha}} ds$$

로 규정되는 $y(x)$ 는 문제 (1)의 풀이로 된다.

$C^F(I)$ 에 다음의 거리를 주자.

$$d^*(u,\ v):=\max_{t\in I} d(u(t),\ v(t))\ \ (\forall u,\ v\in C^F(I))$$

이때 $(C^F(I),\ d^*)$은 완비거리공간이다.

임의의 수 k에 대하여 다음의 거리를 생각하자.

$$d_k^*(u,\ v):=\max_{t\in I} e^{-kt} d(u(t),\ v(t))\ \ (\forall u,\ v\in C^F(I))$$

이때 거리 d_k^*은 거리 d^*과 동등하다. 즉

$$\exists M,\ m>0;\ \forall u,\ v\in C^F(I),\ md_k^*(u,\ v)\le d^*(u,\ v)\le Md_k^*(u,\ v)$$

정리 2 $\forall y_1,\ y_2,\ z_1,\ z_2\in \mathbf{R}_F$에 대하여

$$d(f(x,\ y_1,\ z_1),\ f(x,\ y_2,\ z_2))\le L_1\cdot d(y_1,\ y_2)+L_2\cdot d(z_1,\ z_2)$$

라고 하자. 그러면 모호적분방정식 (2)의 풀이는 유일존재한다.

이제 다음의 초기값문제

$$\begin{aligned}&{}^C D_{0+}^{\alpha} y(x)=a(x){}^C D_{0+}^{\beta} y(x)\oplus b(x)y(x)\oplus g(x),\ \ x\in I\\ &y(0)=y_0\ \ (y,\ y_0\in \mathbf{R}_F)\end{aligned} \tag{3}$$

의 풀이표시를 구하자. 여기서 $a,\ b\in C(I)$, $g\in C^F(I)$이다.

먼저 문제 (3)에 대응하는 적분방정식의 풀이표시를 구하자.

$z(x):={}^C D_{0+}^{\alpha} y(x)$라고 하면 다음의 관계식이 성립한다.

$$y(x)=y_0\oplus I_{0+}^{\alpha} z(x)$$

이로부터 문제 (3)에 대응하는 다음의 적분방정식을 얻는다.

$$z(x)=a(x)I_{0+}^{\alpha-\beta} z(x)\oplus b(x)I_{0+}^{\alpha} z(x)\oplus g(x)\oplus b(x)y_0 \tag{4}$$

이제 연산자 L을

$$(Lz)(x):=a(x)I_{0+}^{\alpha-\beta} z(x)\oplus b(x)I_{0+}^{\alpha} z(x),\ \ x\in I$$

로 정의하면 $a,\ b\in C(I)$로부터 분명히 $L: C^F(I)\to C^F(I)$이다.

연산자 L을 리용하면 적분방정식 (4)는

$$z(x)=(Lz)(x)\oplus \hat{g}(x) \tag{5}$$

로 표시된다. 이로부터

$$(I\ominus_H L)z(x)=\hat{g}(x) \tag{6}$$

이다.

이제 연산자 $(I\ominus_H L)$의 가역성을 고찰하자.

보조정리 1 $a,\ b,\ c,\ d\in \mathbf{R}_F$라고 하자. 이때 다음의 관계식들이 성립한다.

① 후꾸하라차 $(a\oplus b)\ominus_H b$가 존재하면 $(a\oplus b)\ominus_H b=a$이다.

② 후꾸하라차 $(a\oplus b)\ominus_H (c\oplus d)$, $(a\ominus_H c)$, $(b\ominus_H d)$들이 존재하면

$$(a\oplus b)\ominus_H (c\oplus d)=(a\ominus_H c)\oplus(b\ominus_H d)$$

가 성립된다.

$z\in C^F(I)$를 적분방정식 (5)의 풀이, $D(I\ominus_H L)$을 연산자 $I\ominus_H L$의 정의역이라고 하면 다음의 사실을 알수 있다.

보조정리 2 $z\in D(L)$이 적분방정식 (5)의 풀이이고 $\forall k\in\{0,\ 1,\ \cdots\}$, $L^k\hat{g}\in D(L)$일 때 다음의 사실이 성립한다.

① $\forall k \in \mathbf{N},\ L^k z \in D(I \ominus_H L)$

② $\sum_{k=0}^{n} L^k z \in D(I \ominus_H L)$

$z \in D(I \ominus_H L)$에 대하여

$$(I \ominus_H L) \circ \sum_{k=0}^{n} L^k z(x) = \sum_{k=0}^{n} L^k z(x) \ominus_H L \circ \sum_{k=0}^{n} L^k z(x) = \sum_{k=0}^{n} L^k z(x) \ominus_H \sum_{k=0}^{n} L^{k+1} z(x)$$

이고

$$(I \ominus_H L) \circ \sum_{k=0}^{n} L^k z(x) = (z(x) \oplus Lz(x) \oplus \cdots \oplus L^n z(x)) \ominus_H (Lz(x) \oplus \cdots \oplus L^{n+1} z(x))$$

인데 $z \in D(I \ominus_H L)$이므로 $z(x) \ominus_H Lz(x)$가 존재한다.

또한 $z(x) = (Lz)(x) \oplus \hat{g}(x)$임을 고려하면 가정 $\forall k \in \{0,\ 1,\ \cdots\},\ L^k \hat{g} \in D(L)$하에서

$$Lz(x) = (L^2 z)(x) \oplus L\hat{g}(x)\ ,\quad Lz(x) \ominus_H (L^2 z)(x) = L\hat{g}(x)$$

이다. 그리고

$$(I \ominus_H L)z(x) = \hat{g}(x),\ \ L(I \ominus_H L)z(x) = L\hat{g}(x)$$

이므로 다음의 식이 성립한다.

$$L(z(x) \ominus_H Lz(x)) = Lz(x) \ominus_H L^2 z(x)$$

따라서 보조정리 1에 의하여

$$(I \ominus_H L) \circ \sum_{k=0}^{n} L^k z(x) = z(x) \ominus_H L^{n+1} z(x) \tag{7}$$

이다.

임의의 $k > 0$에 대하여 $d_k^*(\hat{0},\ Lz)$를 평가하면

$$d_k^*(\hat{0},\ Lz) \le \max_{t \in I} e^{-k} \{|\, a(t)\,| \cdot d(\hat{0},\ I_{0+}^{\alpha-\beta} z(t)) + |\, a(t)\,| \cdot d(\hat{0},\ I_{0+}^{\alpha} z(t))\}$$

이고

$$d_k^*(\hat{0},\ Lz) \le \left\{\|\, a(t)\,\|_{C(I)} \cdot \frac{1}{k^{\alpha-\beta}} + \|\, b(t)\,\|_{C(I)} \cdot \frac{1}{k^{\alpha}}\right\} d_k^*(\hat{0},\ z)$$

가 성립한다. 이제

$$w := \|\, a(t)\,\|_{C(I)} \cdot \frac{1}{k_*^{\alpha-\beta}} + \|\, b(t)\,\|_{C(I)} \cdot \frac{1}{k_*^{\alpha}} < 1$$

이 성립하는 $k_* \in \mathbf{N}$을 택하면 $d_{k_*}^*(\hat{0},\ Lz) \le w d_{k_*}^*(\hat{0},\ z)$가 성립한다.

따라서

$$\begin{aligned} d_{k_*}^*(\hat{0},\ L^2 z) &\le w d_{k_*}^*(\hat{0},\ Lz) \le w^2 d_{k_*}^*(\hat{0},\ z) \\ d_{k_*}^*(\hat{0},\ L^n z) &\le w^n d_{k_*}^*(\hat{0},\ z) \end{aligned} \tag{8}$$

이제 $S(x) := z(x) \ominus_H L^{n+1} z(x)$라고 하면 $S(x) \oplus L^{n+1} z(x) = z(x)$이고 따라서

$$d(z(x) \ominus_H L^{n+1} z(x),\ z(x)) = d(S(x),\ S(x) \oplus L^{n+1} z(x)) = d(\hat{0},\ L^{n+1} z(x))$$

이다. 식 (8)로부터

$$d^*_{k_*}(z \ominus_H L^{n+1}z,\ z) = d^*_{k_*}(\hat{0},\ L^{n+1}z) \le w^{n+1} d^*_{k_*}(\hat{0},\ z)$$

이다. 즉 $\lim_{n\to\infty} d^*_{k_*}(z \ominus_H L^{n+1}z,\ z) = 0$ 이 나오며 결국 식 (7)로부터

$$(I \ominus_H L) \circ \sum_{k=0}^{\infty} L^k z(x) = z(x)$$

가 성립한다. 마찬가지로

$$\sum_{k=0}^{\infty} L^k \circ (I \ominus_H L) z(x) = z(x)$$

임을 밝힐수 있다. 방정식 (6)으로부터

$$\sum_{k=0}^{\infty} L^k (I \ominus_H L) z(x) = \sum_{k=0}^{\infty} L^k \hat{g}(x)$$

이므로 적분방정식 (5)의 풀이는 다음과 같이 표시된다.

$$z(x) = \sum_{k=0}^{\infty} L^k \hat{g}(x) \tag{9}$$

이로부터 다음의 정리가 성립한다.

정리 3 $\forall k \in \{0,\ 1,\ \cdots\},\ L^k \hat{g} \in D(L)$ 이면 문제 (3)의 풀이를 다음과 같이 표시할수 있다.

$$y(x) = y_0 \oplus I^{\alpha}_{0+} g(x) \oplus I^{\alpha}_{0+}(b(x) y_0) \oplus \sum_{k=1}^{\infty} I^{\alpha}_{0+}(a(x) I^{\alpha-\beta}_{0+} \oplus b(x) I^{\alpha}_{0+})^k \hat{g}(x)$$

참 고 문 헌

[1] Sunae Pak et al.; Fractional Differential Calculus, 7, 2, 357, 2017.

[2] Barnaba´s Bede et al.; Information Sciences, 177, 1648, 2007.

[3] S. Salahshour et al.; Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 17, 1372, 2012.

[4] M. Chehlabi, T. Allahviranloo; Applied Soft Computing, 44, 108, 2016.

주체107(2018)년 6월 5일 원고접수

Representation of Solutions of Initial Value Problem for Fuzzy Linear Multi-term Fractional Differential Equation with Continuous Variable Coefficient

Kang Jong Su, Kim Thae Chol

In this paper, we obtain the representation of solutions of a kind of initial value problem for fuzzy linear multi-term inhomogeneous fractional differential equations with continuous variable coefficients.

Key words: linear fuzzy differential equations, initial value problem