김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체104(2015)년 제61권 제10호 Vol. 61 No. 10 JUCHE104(2015).

선행처리두파라메터웃완화법의 수렴성

황명근, 리영혁

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《선진과학기술을 받아들이기 위한 사업을 적극적으로 벌려야 하겠습니다.

선진과학기술을 받아들이는것은 나라의 과학기술을 빨리 발전시키기 위한 중요한 방도의 하나로 됩니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제15권 499～500폐지)

론문에서는 선형련립방정식을 풀기 위한 선행처리TOR법에 대하여 연구하였다.

선행연구[3]에서는

$$P_S=(I+S),\quad P_\alpha=(I+D(\alpha)S),\quad D(\alpha)=\mathrm{diag}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_{n-1},\ 1)$$

에 의한 선행처리가우스－자이델방법들에 대한 수렴속도들을 비교하였다.

선행연구[1]에서는 $P_\alpha,\ P_R=(I+S+R)$ 에 의한 선행처리가우스－자이델방법들사이의 수렴속도들을 비교하였고 선행연구[2]에서는 선행연구[3]에서의 선행처리기들을 일반화한 $P_m=(I+S_m)$ 형선행처리기에 의한 선행처리가우스－자이델방법들사이의 수렴속도들을 비교하였다.

그러나 선행연구들에서는 우와 같은 선행처리기에 의한 선행처리AOR법과 선행처리TOR법에 대해서는 론의되지 못했다.

우리는 $P_S=(I+S)$ 와 $P_R=(I+S+R)$ 에 의한 선행처리TOR법의 반복도식들을 제기하고 TOR법과 선행처리TOR법사이의 수렴속도비교결과들을 증명하고 수값실험을 진행하였다.

1. 계산도식

다음의 선형련립방정식에 대하여 론의하자.

$$Ax=b,\ \ A\in \boldsymbol{R}^{n\times n},\quad x,\ b\in \boldsymbol{R}^n,\ \ A:\ \text{불퇴화} \tag{1}$$

이제 $A=I-(V+V^*)-U$ 로 분리하자. 여기서 I 는 n 차단위행렬이고 $-(V+V^*)$ 과 $-U$ 는 각각 A 의 엄격한 아래삼각형행렬과 엄격한 웃삼각형행렬이다.

식 (1)에 대한 TOR법의 반복행렬은 다음과 같다.

$$\left.\begin{aligned}
&T(\alpha,\ \beta)=M^{-1}(\alpha,\ \beta)N(\alpha,\ \beta)\\
&M(\alpha,\ \beta)=\frac{2I-\alpha V-\beta V^*}{\alpha+\beta}\\
&N(\alpha,\ \beta)=\frac{(2-(\alpha+\beta))I+(\alpha+\beta)U+\alpha V^*+\beta V}{\alpha+\beta}
\end{aligned}\right\}$$

선행처리기들을 다음과 같이 구성하자.

$$P_S=I+S,\ S=\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & -a_{23} & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & -a_{n-1,\ n} \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_R=I+S+R,\ R=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ -a_{n,\ 1} & -a_{n,\ 2} & \cdots & -a_{n,\ n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

그러면 선형련립방정식 (1)의 선행처리된 선형련립방정식들은 다음과 같다.

$$A_Sx=b_S,\quad A_S=P_SA,\quad b_S=P_Sb \tag{2}$$

$$A_Rx=b_R,\quad A_R=P_RA,\quad b_R=P_Rb \tag{3}$$

A_S와 A_R를 다음과 같이 분리한다.

$$A_S=(I+S)A=I-(I+S)(V+V^*)-(U-S-SU)=D_S-(V_S+V_S^*)-U_S$$

$$A_R=(I+S+R)A=I-[(I+S+R)(V+V^*)+R-RU]-(U+S-SU)=D_R-(V_R+V_R^*)-U_R$$

여기서 $-(V_S+V_S^*)$과 $-(V_R+V_R^*)$, $-U_S$와 $-U_R$는 각각 A_S와 A_R의 엄격한 아래삼각형행렬들과 엄격한 웃삼각형행렬들이고 같은 구조를 가진다. 그리고

$$D_S=D_R=\mathrm{diag}(d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_{n-1},\ 1)\equiv D,\quad d_i=1-a_{i,\ i+1}a_{i+1,\ i},\ i=1,\ 2,\cdots,\ n-1.$$

선행처리된 선형련립방정식 (2), (3)에 대한 TOR법의 반복행렬들은 다음과 같다.

$$\left.\begin{aligned} & T_S(\alpha,\ \beta)=M_S^{-1}(\alpha,\ \beta)N_S(\alpha,\ \beta) \\ & M_S(\alpha,\ \beta)=\frac{2D-\alpha V_S-\beta V_S^*}{\alpha+\beta} \\ & N_S(\alpha,\ \beta)=\frac{(2-(\alpha+\beta))D+(\alpha+\beta)U_S+\alpha V_S^*+\beta V_S}{\alpha+\beta} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} & T_R(\alpha,\ \beta)=M_R^{-1}(\alpha,\ \beta)N_R(\alpha,\ \beta) \\ & M_R(\alpha,\ \beta)=\frac{2D-\alpha V_R-\beta V_R^*}{\alpha+\beta} \\ & N_R(\alpha,\ \beta)=\frac{(2-(\alpha+\beta))D+(\alpha+\beta)U_R+\alpha V_R^*+\beta V_R}{\alpha+\beta} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

식 (4), (5)로부터 $\sum_{k=1,\ j\neq k}^{n-1}a_{n,\ k}a_{k,\ j}\geq a_{n,\ j}$, $j=1,\ 2,\cdots,\ n-1$이면 $N_S(\alpha,\ \beta)\leq N_R(\alpha,\ \beta)$이다.

2. 수렴속도비교

행렬 $A=(a_{ij})\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 이 있어서 임의의 $i\neq j$ 에 대하여 $a_{ij}\le 0$ 일 때 A 를 Z 행렬이라고 부르고 $A^{-1}\ge 0$ 이면 A 를 M 행렬이라고 부른다.

A 가 M 행렬일 때 $A=M-N$ 과 같은 분리를 M 분리라고 부르며 $M^{-1}\ge 0,\ \ N\ge 0$ 일 때 정칙분리라고 부른다.[3]

보조정리 1[3] A 가 Z 행렬이라고 하면 다음의 사실들이 동등하다.

i) A 는 불퇴화 M 행렬이다.

ii) A 의 모든 주대각선소행렬은 불퇴화 M 행렬이다.

iii) A 의 모든 주대각선소행렬식은 정수이다.

iv) $Ax\ge 0$ 을 만족시키는 정인벡토르 x 가 존재한다.

정리 1 $A=(a_{ij})\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 이 불퇴화 M 행렬이고 $\alpha,\ \beta\in(0,\ 1],\ \alpha+\beta\in(0,\ 2)$ 라고 하자.

그러면 다음의 식이 성립된다.

$$\rho(T_S(\alpha,\ \beta))\le\rho(T(\alpha,\ \beta))<1 \tag{6}$$

증명 $(\alpha,\ \beta)M_S$ 의 대각선원소들은 $2(1-a_{i,\ i+1}a_{i+1,\ i})$ 이고 n 째 원소는 2이다. A 가 M 행렬이므로 모든 주대각선소행렬식은 정수이다. 그러므로 A 의 임의의 2×2 주대각선소행렬식이 $1-a_{i,\ i+1}a_{i+1,\ i}>0$ 이므로 M 의 대각선원소들이 정수이다.

따라서 보조정리 1로부터 M_S 는 M 행렬이므로 $M_S^{-1}\ge 0$ 이고 $N_S\ge 0$ 이므로

$$T_S(\alpha,\ \beta)\ge 0.$$

$I+S$ 가 불퇴화행렬이므로

$$E_S=(I+S)^{-1}M_S(\alpha,\ \beta),\quad H_S=(I+S)^{-1}N_S(\alpha,\ \beta)$$

로 놓으면 $E_S^{-1}=M_S^{-1}(\alpha,\ \beta)(I+S)\ge 0$ 이 성립된다.

$A_S=(I+S)A=M_S(\alpha,\ \beta)-N_S(\alpha,\ \beta)$ 이므로 $A=E_S-H_S$ 이고 이것은 A 의 정칙분리로 된다.

가정으로부터 $2I-\alpha V-\beta V^*\ge 2I-V-V^*\ge 2D_S-\alpha V_S-\beta V_S^*$ 이므로 $M\ge M_S$ 이다.

M 과 M_S 가 M 행렬이므로 $M^{-1}\le M_S^{-1}\le M_S^{-1}(I+S)=E_S^{-1}$ 이고 $N\ge 0$ 이다.

따라서 $\rho(T_S(\alpha,\ \beta))\le\rho(T(\alpha,\ \beta))$ 가 성립되며 식 (6)이 성립된다.(증명끝)

보조정리 2 A 가 $a_{i,\ i+1}\neq 0,\ i=1,\ 2,\cdots,\ n-1$ 인 기약불퇴화 M 행렬이고 $A_S=M_S-N_S$ 라고 하자.

그러면 $T_S(\alpha,\ \beta)$ 에는

$$T_S(\alpha,\ \beta)x=\rho(T_S(\alpha,\ \beta))x$$

를 만족시키는 정인벡토르가 대응된다.

보조정리 3[2] A 가 불퇴화 M 행렬이라고 하면 충분히 작은 임의의 정수 ε 에 대하여 $A(\varepsilon)=(a_{ij}(\varepsilon))$ 도 불퇴화 M 행렬이다. 여기서 $a_{ij}(\varepsilon)=\begin{cases}a_{ij},\ a_{ij}\neq 0\\ -\varepsilon,\ a_{ij}=0\end{cases}.$

보조정리 4[3] $A\geq 0$이 n차기약행렬일 때 다음의 사실들이 성립된다.

i) A는 $\rho(A)$와 같은 정인실고유값을 가진다.

ii) $\rho(A)$에는 정인고유벡토르 $x>0$이 대응된다.

iii) A의 임의의 원소를 크게 하면 $\rho(A)$도 커진다.

iv) $\rho(A)$는 A의 단순고유값이다.

정리 2 $A=(a_{ij})\in \boldsymbol{R}^{n\times n}$이 $a_{i,\ i+1}\neq 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$인 불퇴화$M$행렬이고

$$\sum_{k=1,\ j\neq k}^{n-1} a_{n,\ k}a_{k,\ j}\geq a_{n,\ j},\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1$$

이며 $\alpha,\ \beta\in(0,\ 1],\ \alpha+\beta\in(0,\ 2)$라고 하자.

그러면 $A_S=M_S(\alpha,\ \beta)-M_S(\alpha,\ \beta)$와 $A_R=M_R(\alpha,\ \beta)-M_R(\alpha,\ \beta)$들은 정칙분리이고 $\rho(T_R(\alpha,\ \beta))\leq\rho(T_S(\alpha,\ \beta))<1$이 성립된다.

증명 두가지 경우로 나누어 론의하자.

① A가 기약이고 $a_{i,\ i+1}\neq 0,\ i=1, 2, \cdots, n-1$이라고 하자.

그러면 보조정리 2로부터 $T_S(\alpha,\ \beta)x=\rho(T_S(\alpha,\ \beta))x$를 만족시키는 정인벡토르 x가 존재한다. 따라서 $T_S(\alpha,\ \beta)x=\rho(T_S(\alpha,\ \beta))$가 성립된다.

$M_R(\alpha,\ \beta)-M_S(\alpha,\ \beta)=RA$이므로

$$M_S^{-1}(\alpha,\ \beta)-M_R^{-1}(\alpha,\ \beta)=M_R^{-1}(\alpha,\ \beta)RAM_S^{-1}(\alpha,\ \beta)$$

가 성립되며 이 식과 가정으로부터

$$T_S(\alpha,\ \beta)-T_R(\alpha,\ \beta)\geq M_R^{-1}(\alpha,\ \beta)RAT_S(\alpha,\ \beta)$$

가 성립된다.

이 식의 두변에 x를 곱하면

$$\rho(T_S(\alpha,\ \beta))x-T_R(\alpha,\ \beta)x\geq\rho(T_S(\alpha,\ \beta))M_R^{-1}(\alpha,\ \beta)RAx.$$

또한 $0<\rho(T_S(\alpha,\ \beta))<1$이면 보조정리 1의 iv)로부터 $Ax\geq 0$, $M_R^{-1}(\alpha,\ \beta)R\geq 0$이므로

$$T_R(\alpha,\ \beta)x\leq\rho(T_S(\alpha,\ \beta))x \tag{7}$$

가 성립되며 보조정리 4와 식 (7)로부터 $\rho(T_R(\alpha,\ \beta))\leq\rho(T_S(\alpha,\ \beta))<1$이 성립된다.

$\rho(T_S(\alpha,\ \beta))=0$이면 $T_S(\alpha,\ \beta)x=\rho(T_S(\alpha,\ \beta))x$로부터

$$N_S(\alpha,\ \beta)x=\rho(T_S(\alpha,\ \beta))M_S(\alpha,\ \beta)x=0.$$

$N_R(\alpha,\ \beta)\geq 0,\ x>0$이므로 $N_R(\alpha,\ \beta)=0$이다.

따라서 $T_R(\alpha,\ \beta)=0$ 즉 $\rho(T_R(\alpha,\ \beta))=0$이고 $\rho(T_R(\alpha,\ \beta))\leq\rho(T_S(\alpha,\ \beta))$가 성립된다.

② A가 가약이고 $A(\varepsilon)=(a_{ij}(\varepsilon))$은 보조정리 3에서와 같이 정의되였다고 하자.

그러면 보조정리 3으로부터 충분히 작은 임의의 정수 ε에 대하여 $A(\varepsilon)$은 불퇴화기약M행렬이고 $A_S(\varepsilon)=(I+S(\varepsilon))A(\varepsilon),\ A_R(\varepsilon)=(I+S(\varepsilon)+R(\varepsilon))A(\varepsilon)$이다.

따라서 $A_S(\varepsilon)=M_S(\alpha,\ \beta,\ \varepsilon)-N_S(\alpha,\ \beta,\ \varepsilon)$은 $a_{i,\ i+1}\neq 0,\ i=1, 2, \cdots, n-1$인 불퇴화기약$M$행렬의 분리이다. ①에 의하여 $\rho(T_R(\alpha,\ \beta,\ \varepsilon))\leq\rho(T_S(\alpha,\ \beta,\ \varepsilon))$이 성립된다.

이제 $\varepsilon\to 0$이면 $\rho(T_R(\alpha,\ \beta))\leq\rho(T_S(\alpha,\ \beta))$가 성립된다.

따라서 정리의 결론이 나온다.(증명끝)

실례 련립방정식 $Ax=b$ 에 대하여 수값실험을 진행하였다. 여기서

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -0.1 & -0.2 & 0 & -0.3 & -0.5 \\ -0.2 & 1 & -0.3 & 0 & -0.4 & -0.1 \\ 0 & -0.3 & 1 & -0.6 & -0.2 & 0 \\ -0.2 & -0.3 & -0.1 & 1 & -0.1 & -0.3 \\ 0 & -0.3 & -0.2 & -0.1 & 1 & -0.2 \\ -0.2 & -0.3 & 0 & -0.3 & -0.1 & 1 \end{bmatrix}.$$

선행처리행렬을 $P_S=(I+S)$ 로 택하면 선행처리련립방정식은 $A_S x=b_S$ 이다. 여기서

$$S=\begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad A_S=\begin{bmatrix} 0.8 & 0 & -0.23 & 0 & -0.34 & -0.51 \\ -0.2 & 0.91 & 0 & -0.18 & -0.46 & -0.1 \\ -0.12 & -0.48 & 0.94 & 0 & -0.26 & -0.18 \\ -0.2 & -0.33 & -0.12 & 0.9 & 0 & -0.23 \\ -0.04 & -0.36 & -0.2 & -0.16 & 0.8 & 0 \\ -0.2 & -0.3 & 0 & -0.3 & -0.1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\mathrm{cond}(A_S)=45.745\,5$ 이다. 이것은 주어진 행렬의 조건수 $\mathrm{cond}(A)=56.794\,3$ 보다 작은 값이다.

참 고 문 헌

[1] Wen Li; Journal of Computational and Applied Mathematics, 182, 81, 2005.

[2] M. Morimoto; Journal of Computational and Applied Mathematics, 24, 209, 2010.

[3] Wen Li et al.; Linear Algebra and Its Applications, 317, 227, 2000.

주체104(2015)년 6월 5일 원고접수

Convergence of Preconditioned Two-Parameter Overrelaxation Method

Hwang Myong Gun, Ri Yong Hyok

We presented the preconditioned two-parameter overrelaxation method for solving the systems of linear equation, where preconditioners are $P_S=(I+S)$ and $P_R=(I+S+R)$. And comparison result between the two-parameter overrelaxation method and the preconditioned two-parameter overrelaxation method is proved.

Key word: two-parameter overrelaxation method