김일성종합대학학보 주체107(2018)년
수 학 제64권 제2호

한가지 충만함수를 리용한 제한이 없는 대역적최량화

리진동, 오용범

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《현시대는 과학기술의 시대이며 과학기술의 발전수준은 나라의 종합적국력과 지위를 규정하는 징표로 됩니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 38페지)

론문에서는 충만함수법을 리용한 제한이 없는 련속함수의 대역적최량풀이를 구하는 한가지 풀이법을 연구하였다.

선행연구[1]에서는 충만함수법을 처음으로 제기하고 파라메터 r, ρ 에 크게 의존하는 지수함수로 표현된 $P-$함수와 $Q-$함수를 제기하였다.

선행연구[3]에서는 파라메터를 포함하지 않는 불련속유계인 충만함수를 제기하였다.

선행연구[2]에서는 련속미분가능한 충만함수와 새로운 형태의 국부탐색알고리듬을 제기하였다.

우리는 련속함수의 대역적최량화문제를 풀기 위한 새로운 형태의 충만함수와 해당한 알고리듬을 제기하였으며 그 효과성을 검증하였다.

정의 x_k^*을 목적함수 $f(x)$의 현재 국부최소점이라고 하자.

이때 다음의 조건들을 만족시키는 함수 $P(x_k^*,\ x)$를 점 x_k^*에서 $f(x)$의 충만함수라고 부른다.

① x_k^*은 $P(x_k^*,\ x)$의 엄격한 국부최대점이다.

② $S_1 = \{x \mid f(x) \ge f(x_k^*)\} \setminus \{x_k^*\}$ 우에서 $P(x_k^*,\ x)$는 최소점을 가지지 않는다.

③ x_k^*이 $f(x)$의 대역적최소점이 아니면 $P(x_k^*,\ x)$는 $S_2 = \{x \mid f(x) < f(x_k^*)\}$ 우에서 최소점을 가진다.

충만함수의 이러한 성질은 하강법 실례로 최속하강법, 준뉴톤법 등을 리용하여 이미 만들어진 충만함수를 최소화할 때 목적함수값이 $f(x_k^*)$보다 큰 점에서는 반복점렬이 끝나지 않는다는것을 말하여준다.

정의에 기초하여 충만함수를 다음과 같이 정의하자.

$$P(x_k^*,\ x) = 1/(1 + \| x - x_k^* \|^2) + \gamma([1 + f(x) - f(x_k^*)]/[1 + | f(x) - f(x_k^*) |] - 1),\ \ \gamma > 0$$

제시된 충만함수는 선행연구[2]에서 제기한 방법과는 달리 파라메터가 1개이므로 수값계산을 보다 쉽게 할수 있다.

가정 1 $f(x)$의 국부최소점은 유한개이다. 다시말하여 국부최소점들은 모두 고립점이다.

가정 2 $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} f(x) = +\infty$

가정 3 $f(x)$는 련속함수이다.

정리 1 x_k^*을 목적함수 $f(x)$의 현재 국부최소점이라고 하면 γ의 선택에 무관계하게 x_k^*은 $P(x_k^*,\ x)$의 국부최대점이다.

정리 2 x_k^*을 목적함수 $f(x)$의 현재 국부최소점이라고 하면 γ의 선택에 무관계하게 $S_1=\{x\,|\,f(x)\ge f(x_k^*)\}\setminus\{x_k^*\}$ 우에서 $P(x_k^*,\ x)$는 정류점이나 최소점을 가지지 않는다.

증명 분명히 $S_1=\{x\,|\,f(x)\ge f(x_k^*)\}\setminus\{x_k^*\}$ 우에서 $P(x_k^*,\ x)=\dfrac{1}{1+\|x-x_k^*\|^2}$ 이다.

$\nabla P(x_k^*,\ x)=\dfrac{-2(x-x_k^*)}{(1+\|x-x_k^*\|^2)^2}\ne 0$ 이므로 $P(x_k^*,\ x)$는 S_1우에서 정류점을 가지지 않는다.

한편 $x_k^*\ne x'\in S_1$, $f(x_k^*)=f(x')$이고 각각 $\|x_1-x_k^*\|>\|x'-x_k^*\|$, $\|x_2-x_k^*\|<\|x'-x_k^*\|$이라고 하면 $P(x_k^*,\ x_1)<P(x_k^*,\ x')$, $P(x_k^*,\ x_2)>P(x_k^*,\ x')$이므로 x'는 최소점이 될수 없다.(증명끝)

정리 3 x_k^*을 목적함수 $f(x)$의 현재 국부최소점이라고 할 때 x_k^*이 $f(x)$의 대역적최소점이 아니면 적당한 γ가 있어서 $P(x_k^*,\ x)$는 $S_2=\{x\,|\,f(x)<f(x_k^*)\}$우에서 최소점을 가진다.

증명 $\partial S_2=\{x\,|\,f(x)=f(x_k^*)\}$은 S_2의 경계로서 비지 않은 모임이며 $f(x)$가 련속함수이고 ∂S_2는 유계닫긴모임이므로 $P(x_k^*,\ x)$는 ∂S_2우에서 최소값을 가진다.

$\min\limits_{x\in\partial S_2}P(x_k^*,\ x)=\min\left(\dfrac{1}{1+\|x-x_k^*\|^2}\right)=:P(x_k^*,\ \overline{x})=\dfrac{1}{1+\|\overline{x}-x_k^*\|^2}$ 이라고 하자.

고정된 $x'\in S_2$에 대하여 $f(x')<f(x_k^*)$이며 다음의 식이 성립된다.

$$P(x_k^*,\ x')=\frac{1}{1+\|x-x_k^*\|^2}+\gamma\frac{-2|f(x')-f(x_k^*)|}{1+|f(x')-f(x_k^*)|}$$

$$\gamma>\left(\frac{2|f(x')-f(x_k^*)|}{1+|f(x')-f(x_k^*)|}\right)^{-1}\left(\frac{1}{1+\|x'-x_k^*\|^2}-\frac{1}{1+\|\overline{x}-x_k^*\|^2}\right)=:\gamma_0$$

으로 놓으면 $P(x_k^*,\overline{x})>P(x_k^*,\ x')$가 성립된다.

한편 $S_2\cup\partial S_2$가 유계닫긴모임이므로 $P(x_k^*,\ x)$는 $S_2\cup\partial S_2$우에서 최소값을 가진다.

$\min\limits_{x\in S_2\cup\partial S_2}P(x_k^*,\ x)=:P(x_k^*,\ \hat{x})$이라고 하면 $P(x_k^*,\overline{x})>P(x_k^*,\ x')\ge P(x_k^*,\ \hat{x})$이므로 $\hat{x}$은 S_2에 포함되며 $P(x_k^*,\ x)$는 $S_2=\{x\,|\,f(x)<f(x_k^*)\}$우에서 최소점 $\hat{x}$을 가진다.(증명끝)

정리 4 x_k^*이 목적함수 $f(x)$의 현재 국부최소점이고 $x_1,\ x_2\in\Omega$가 조건 $x_1,\ x_2\in S_1$, $\|x_1-x_k^*\|<\|x_2-x_k^*\|$을 만족시킨다고 하면 $P(x_k^*,\ x_1)>P(x_k^*,\ x_2)$가 성립된다.

증명 $P(x_k^*,\ x_1)=\dfrac{1}{1+\|x_1-x_k^*\|^2}$, $P(x_k^*,\ x_2)=\dfrac{1}{1+\|x_2-x_k^*\|^2}$이므로 분명하다.(증명끝)

정리 5 $P(x_k^*,\ x)$는 ∂S_2을 제외한 나머지 모든 점에서 미분가능하며 ∂S_2에서 미분불가능하지만 련속이다.

충만함수의 최소화를 위한 하강방향을 론의하고 제시된 충만함수를 리용하는 알고리듬에 대하여 보자.

x_k^*을 국부최소점, $x_k^{(i)}$를 반복렬에서의 점, $0<\lambda<\mu$, $\lambda\le d_k^{(i)}\le\mu$를 만족시키는 $d_k^{(i)}$를 $x_k^{(i)}$에서 탐색방향이라고 하자.

정리 6 $x_k^{(i+1)} = x_k^{(i)} + d_k^{(i)}$ 라고 할 때 $d_k^{(i)}$ 가 $(d_k^{(i)})^{\mathrm{T}}(x_k^{(i)} - x_k^*) \ge 0$ 을 만족시키면 $\| x_k^{(i)} - x_k^* \|^2 \ge i\lambda^2 + \| x_k^{(0)} - x_k^* \|^2$ 이 성립된다.

정리 7 $d \ne 0$ 을 $f(x) > f(x_k^*)$ 인 점 x 에서의 탐색방향이라고 하자.

이때 $d^{\mathrm{T}} \nabla P(x_k^*,\ x) < 0$ 이기 위하여서는 $d^{\mathrm{T}}(x - x_k^*) > 0$ 일것이 필요충분하다.

우의 정리에 근거하여 다음의 방향들을 충만함수의 하강방향으로 줄수 있다.

$$d_1(x) = x - x_k^*,\ \ d_2(x) = -\nabla f(x)$$

$$d_3(x) = d_1 + \frac{d_2^{\mathrm{T}} d_1 d_2}{\| d_1 \| \cdot \| d_2 \|},\ \ d_4(x) = \alpha d_1(x) + (1-\alpha) d_2(x)$$

여기서 $d_2,\ d_3,\ d_4$ 는 함수 $f(x)$ 가 미분가능한 경우 리용할수 있다.

수값적효과성을 높이기 위하여 알고리듬에서는 충만함수를 다음과 같이 변형한다.

$$P(x_k^*,\ x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{1 + \| x - x_i^* \|^2} + \gamma \left(\frac{1 + f(x) - f(x_k^*)}{1 + | f(x) - f(x_k^*) |} - 1 \right)$$

여기서 $x_i,\ i = 1, \cdots, k$ 들은 알고리듬의 반복시행과정에 얻어진 국부최량점들이다.

충만함수를 우와 같이 변형하는 리유는 알고리듬의 실시과정에 대역적최량점이 아닌 이미 얻어진 국부최량점에로 다시 가는 즉 반복되는 현상을 피하기 위해서이다.

충만함수알고리듬에 대하여 보자.

먼저 $\varepsilon > 0$, $\gamma_0 > 0$ 을 목적함수 $f(x)$ 및 충만함수 $P(x_k^*,\ x)$ 의 최소화를 끝내기 위한 허용수값으로 정하고 초기반복과 초기점 $k = 1,\ x_1^0 \in \Omega$ 를 설정하며 $k = 1$, $i = 1$, $\delta = 0.05$, $\gamma = 0.1$ 로 놓는다. 다음 방향 $d_i,\ i = 1, 2, \cdots, k_0,\ k_0 \ge 2n$ 을 선택한다. 여기서 n 은 독립변수의 개수이다.

이때 충만함수알고리듬은 다음과 같다.

걸음 1 초기점 x_k^0 으로부터 시작하여 함수 $f(x)$ 의 국부최소점 x_k^* 을 구한다. 이미 알고있는 준뉴톤법, 최속하강법 등을 리용할수 있다. 여기서는 준뉴톤법을 리용한다.

걸음 2 만일 $i > k_0$ 이거나 $\gamma \ge \gamma_0$ 혹은 $| f(x_k^*) - f(x_{k+1}^*) | < \varepsilon$ 이면 반복을 끝내고 x_k^* 을 목적함수의 대역적최소값으로 놓는다.

걸음 3 만일 $\gamma < \gamma_0$ 이면 $\gamma = 2\gamma$ 로 놓는다.

걸음 4 $x_{k,\,i}^1 = x_k^* + \delta e_i$ 로 놓는다. 만일 $f(x_{k,\,i}^1) < f(x_k^*)$ 이면 $k = k+1,\ x_{k+1}^0 := x_{k,\,i}^1$ 로 놓고 걸음 1에로 이행한다. 아니면 걸음 5에로 이행한다.

걸음 5 $x_{k,\,i}^1$ 에서 출발하여 탐색방향 d_j 를 따라 충만함수를 최소화한다.

$$x_{k,\,i}^2 = x_{k,\,i}^1 + \frac{\lambda d_j(x_{k,\,i}^1)}{\| d_j(x_{k,\,i}^1) \|},\ \ j = 1, 2, 3, 4$$

여기서 d_j 는 우에서 소개된 방향들이다.

걸음 6 $x_{k,\,i}^2$ 이 Ω 밖으로 나가면 $i = i+1$ 로 놓고 걸음 2에로 이행한다.

만일 $f(x_{k,\,i}^2) < f(x_k^*)$ 이면 $k = k+1,\ x_{k+1}^0 = x_{k,\,i}^2$ 으로 놓고 걸음 1에로 이행하며 아니면 $i = i+1$ 로 놓고 걸음 2에로 이행한다.

실례 1　6개 락타잔등함수(Six-hump Back Camel Function)

$$\min f(x)=4x_1^2-2.1x_1^4+x_1^6/3-x_1x_2-4x_1^2+4x_2^4,\ \ -3<x_1<3,\ -3<x_2<3$$

초기점 (－3, 0)에서 출발하여 알고리듬을 실시한 결과는 다음과 같다.

k	x_k^0	x_k^*	$f(x_k^*)$
1	(−3, 0)	(1.70, −0.79)	−0.215 00
2	(−0.089 9, −0.713 0)	(−0.089 852 2, −0.712 665 7)	−1.031 63

실례 2　$\min f(x)=10|x|+\sin|7x|+\cos(5y)+y+x^2,\ \ -1\le x_1,\ x_2\le 1$

초기점 (1, 1)에서 시작하여 알고리듬을 실시한 결과는 다음과 같다.

k	x_k^0	x_k^*	$f(x_k^*)$
1	(1, 1)	(0.000 005 123, 0.058 8)	−0.391 7
2	(1, −1)	(0.000 005 123, −0.668 59)	−1.648 4

참 고 문 헌

[1] R. P. Ge; Math. Program., 46, 191, 1990.

[2] S. Ma et al.; Appl. Math. Comput., 215, 3610, 2010.

[3] C. L. Gao et al.; Com. Math. Appl., 62, 2393, 2011.

주체106(2017)년 12월 5일 원고접수

Unconstrained Global Optimization using a Filled Function

Ri Jin Dong, O Yong Bom

We introduce a new type of filled function which is numerically stable for solving global optimization problems of continuous functions, propose an algorithm, and verify that the proposed algorithm is efficient by numerical experiments.

Key words: filled function, global optimization, local search, filled function method