김일성종합대학학보 수 학
주체108(2019)년 제65권 제1호

# 영구사전실시선택권가격 변분부등식과 그 양계차도식의 몇가지 성질

오형철, 조성산

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《과학기술의 종합적발전추세와 사회경제발전의 요구에 맞게 새로운 경계과학을 개척하고 발전시키는데 큰 힘을 넣어야 합니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 40페지)

우리는 경계과학인 금융수학에서 중요하게 제기되는 영구사전실시선택권가격에 대하여 연구하였다.

선행연구[4]에서는 선택권가격의 리산모형과 미분방정식모형들을 주었으며 특히 상결수를 가지는 사전실시선택권과 영구사전실시선택권가격의 자유경계문제모형과 변분부등식모형을 주고 자유경계문제모형의 가격공식을 유도하였다.

선행연구[5]에서는 상결수를 가지는 영구사전실시선택권의 2분나무법과 최량실시경계를 구하였다.

선행연구[6]에서는 사전실시선택권의 2분나무법과 최량실시경계, 수렴성 등을 연구하였다.

최근 시간의존결수를 가지는 사전실시선택권의 2분나무법에 의한 가격연구, 변분부등식모형의 양계차도식에 의한 가격연구가 진행되였다.[1－3]

론문에서는 영구사전실시선택권가격의 변분부등식과 그것의 양계차도식의 몇가지 성질을 고찰하였다.

## 1. 영구사전실시선택권가격의 변분부등식의 풀이의 성질

$r,\ q,\ \sigma$가 각각 리자률, 기초자산의 배당률, 기초자산가격의 파동률이라고 하면 영구사전실시판매선택권의 변분부등식모형은

$$\begin{aligned}&\min\left\{-\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{d^2V}{dS^2}-(r-q)S\frac{dV}{dS}+rV,\ V-\phi\right\}=0,\quad S>0\\&V(0+)=E,\ V(+\infty)=0\end{aligned}\qquad(1)$$

과 같이 주어진다. 여기서 $\phi=(E-S)^+$ (판매선택권) 또는 $\phi=(S-E)^+$ (구매선택권)이다.

블랙－숄즈상미분연산자를

$$-LV=-\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{d^2V}{dS^2}-(r-q)S\frac{dV}{dS}+rV\qquad(2)$$

와 같이 정의한다.

$V(S)$가 식 (1)의 풀이이면 보유중지구역에서는 $V(S)=\phi$, $-LV>0$이고 보유유지구역

에서는 $V(S)>\phi$, $-LV=0$이 성립한다.[3] 이리하여 식 (1)의 풀이는 늘 부가 아니다.

구간 $A=(a,\ b)\,(0\le a<b\le\infty)$에서 블랙－숄즈상미분연산자 (2)를 고찰한다.

정리 1 (블랙－숄즈상미분연산자에 대한 극값원리) $r>0$이라고 가정하자. $V(S)\in C^2(A)$에 대하여 $-LV<(>)0,\ S\in A$이라고 하면 $V$의 부(정)아닌 최대(소)값은 $V$의 $A$의 내부에서 도달불가능하다. 나아가서 $-LV\le(\ge)0,\ S\in A$이면

$$\sup_{x\in A}V(x)=\sup_{x\in\partial A}V^+(x)\ \ (\inf_{x\in A}V(x)=\inf_{x\in\partial A}V^-(x)) \tag{3}$$

따름(영구사전실시선택권가격함수에 대한 최대값원리) 식 (1)의 풀이 $V(S)$는 $V>\phi$인 구역(보유유지구역)안의 임의의 부분구역 $A=(a,\ b)$의 경계에서 부아닌 최대값을 취한다.

이제부터는 판매선택권에 대하여 론의한다.

보조정리 1 $V(S)$가 영구사전실시판매선택권가격 즉 $\phi=(E-S)^+$일 때 그것이 식 (1)의 풀이이고 $V(S)=(E-S)^+$이면 즉 $S$가 보유중지구역에 들면 $S\le\min\{rE/(q)^+, E\}$가 성립한다. 즉 최량실시경계는 $\min\{rE/(q)^+,\ E\}$보다 클수 없다.( $(q)^+$는 $q\ge 0$이면 $q$이고 $q<0$이면 령이다.)

보조정리 2 $V(S)$가 영구사전실시판매선택권가격일 때

① $V(S_0)=(E-S_0)^+$인 $S_0>0$이 있으면 $\forall S<S_0$에 대하여 $V(S)=(E-S)^+$이 성립한다.

② $V(S_1)>(E-S_1)^+$인 $S_1>0$이 있으면 $\forall S>S_1$에 대하여 $V(S)>(E-S)^+$ 이 성립한다.

보조정리 2로부터 최량실시경계의 존재성이 나온다.

정리 2 (최량실시경계의 존재성) $V(S)$가 영구사전실시판매선택권가격일 때 최량실시경계 $S_0$은 존재한다.

정리 3 (영구사전실시판매선택권가격의 변분부등식풀이의 유일성) $\phi=(E-S)^+$일 때 식 (1)의 풀이는 유일하다.

주의 1 선행연구[4]에서 론의한 영구사전실시선택권가격의 자유경계문제의 풀이가 변분부등식 (1)의 풀이로 되므로 식 (1)의 풀이의 존재성은 이미 알려져있다. 이리하여 영구사전실시판매선택권가격의 변분부등식모형의 풀이의 유일존재성과 최량실시경계의 유일존재성문제가 완전히 증명되였다.

## 2. 영구사전실시판매선택권가격의 변분부등식의 양계차도식의 성질

식 (1)에 대하여 변수변환을 다음과 같이 진행하자.

$$u(x)=V(S),\ S=e^x,\ \varphi(x)=(E-e^x)^+;\ S_0=e^c$$

그러면 변분부등식은 다음의 상결수문제로 된다.

$$\min\left\{-\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-(r-q-\frac{\sigma^2}{2})\frac{\partial u}{\partial x}+ru,\ u-\varphi\right\}=0,\quad x\in(-\infty,\ +\infty) \tag{4}$$
$$u(-\infty)=E,\quad u(+\infty)=0$$

$\Delta x>0$일 때 $u_j=u(j\Delta x+c)$, $\varphi_j=\varphi(j\Delta x+c)$라고 놓고 식 (4)에서

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j=\frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2\Delta x},\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j=\frac{u_{j+1}-2u_j+u_{j-1}}{\Delta x^2}$$

과 같은 계차비를 리용하면 다음의 계차방정식을 얻는다.

$$\min\left\{-\frac{\sigma^2}{2}\frac{u_{j+1}-2u_j+u_{j-1}}{\Delta x^2}-(r-q-\frac{\sigma^2}{2})\frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2\Delta x}+ru_j, u_j-\varphi_j\right\}=0,\ j\in\mathbf{Z} \tag{5}$$

$$u_j=E,\ j=-\infty\ ;\ u_j=0,\ j=+\infty$$

여기서 $\alpha=\Delta t$ 라고 놓고 $\min(A,\ B)=0\Leftrightarrow\min(\alpha A,\ B)=0\ (\alpha>0)$ 을 고려하면

$$\min\left\{-\frac{\sigma^2\Delta t}{2\Delta x^2}(u_{j+1}-2u_j+u_{j-1})-(r-q-\frac{\sigma^2}{2})\frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}-u_{j-1})+r\Delta t u_j,\ u_j-\varphi_j\right\}=0$$

$$u_j=E,\ \ j=-\infty\ ;\ u_j=0,\ j=+\infty$$

이고

$$-\frac{\sigma^2\Delta t}{2\Delta x^2}(u_{j+1}-2u_j+u_{j-1})-(r-q-\frac{\sigma^2}{2})\frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}-u_{j-1})+r\Delta t u_j=$$

$$=(1+r\Delta t)u_j-(1-\frac{\sigma^2\Delta t}{\Delta x^2})u_j-$$

$$-\frac{\sigma^2\Delta t}{\Delta x^2}\left[\left(\frac{1}{2}+(r-q-\frac{\sigma^2}{2})\frac{\Delta x}{2\sigma^2}\right)u_{j+1}+\left(\frac{1}{2}-(r-q-\frac{\sigma^2}{2})\frac{\Delta x}{2\sigma^2}\right)u_{j-1}\right]$$

이므로

$$w=\frac{\sigma^2\Delta t}{\Delta x^2},\ \ a=\frac{1}{2}+(r-q-\frac{\sigma^2}{2})\frac{\Delta x}{2\sigma^2},\ \ \rho=1+r\Delta t$$

로 표시하면 $\min\{\rho u_j-(1-w)u_j-w[au_{j+1}+(1-a)u_{j-1}],\ u_j-\varphi_j\}=0$ 이다.

이 식에서 다시 $\min(A,\ B)=0\Leftrightarrow\min(\alpha A,\ B)=0\ (\alpha>0)$ 을 고려하면

$$\min\left\{u_j-\frac{1}{\rho}\Big[(1-w)u_j-w[au_{j+1}+(1-a)u_{j-1}]\Big], u_j-\varphi_j\right\}=0$$

으로 되고 다시 $\min(C-A,\ C-B)=0\Leftrightarrow C=\max(A,\ B)$ 를 고려하면 식 (5)와 동등한 다음의 계차방정식을 얻는다.

$$u_j=\max\left\{\frac{1}{\rho}[(1-w)u_j+w[au_{j+1}+(1-a)u_{j-1}]],\varphi_j\right\},\ j\in\mathbf{Z} \tag{6}$$

$$u_j=E,\ \ j=-\infty\ ;\ u_j=0,\ j=+\infty$$

이제 리산블랙－숄즈연산자를 다음과 같이 정의한다.

$$I_j(U)=(\rho+w-1)U_j-w[aU_{j+1}+(1-a)U_{j-1}],\ j\in Z,\ U\in l_\infty(Z)$$

여기서 $l_\infty(Z)$ 는 유계인 량측실수렬전체가 이루는 바나흐공간이다.

정리 4 (리산블랙－숄즈연산자에 대한 극값원리) $\Delta x$ 가 충분히 작으면

① $Z$ 의 어떤 구간 $A$ 에서 $I_j(U)\le 0,\ j\in A$ 가 성립할 때 $U$ 의 최대값은 내부에서 도

달불가능하다. 즉 $U_{j-1}<U_j$ 와 $U_j>U_{j+1}$ 이 동시에 성립하는 $j\in A$ 는 존재하지 않는다.

② $Z$ 의 어떤 구간 $A$ 에서 $I_j(U)\ge 0,\ j\in A$ 가 성립할 때 $U$ 의 최소값은 내부에서 도달불가능하다. 즉 $U_{j-1}>U_j$ 와 $U_j<U_{j+1}$ 이 동시에 성립하는 $j\in A$ 는 존재하지 않는다.

이 정리를 리용하면 영구선택권가격변분부등식의 계차방정식 (6)의 풀이에 대한 최대값원리를 증명할수 있다.

정리 5(영구선택권가격변분부등식의 계차방정식에 대한 최대값원리) $U=\{U_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 를 식 (7)의 풀이라고 하자. 이때 $\Sigma_1=\{j\in\mathbf{Z}\,|\,U_j>\varphi_j\}$ 의 임의의 부분구간 $A=[j_1,\ j_2]$ 에서 $U$ 의 최대값과 최소값은 경계에서 취한다. 이리하여 $\Sigma_1$ 에서 $U_j$ 는 $j$ 에 관하여 단조함수이다.

보조정리 3 $E>0,\ r>0$ 이라고 가정하고 $U=\{U_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 는 식 (7)의 풀이이며 $\Delta x$ 가 충분히 작다고 하자. $j^*=\min\{j\in\mathbf{Z}: E\le e^{j\Delta x+c}\}$, $j^{**}=\min\{j\in\mathbf{Z}:\ rE\le qe^{j\Delta x+c}\}$ 와 같이 표시하자. 이때

$$U_j=\varphi_j \Rightarrow j<\inf\{j^*,\ j^{**}\}<\infty$$

이다.

주의 2 $r=0,\ q\ge 0$ 이면 $j^{**}=-\infty$ 이고 실시구역은 빈모임이므로 실시경계는 존재하지 않는다. $r=0,\ q<0$ 또는 $r>0,\ q\le 0$ 이면 $j^{**}=\infty$ 이고 실시경계는 $j^*$ 이다.

보조정리 4 $E>0,\ r>0$ 이라고 가정하자. $U=\{U_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 가 식 (7)의 풀이이고 $\Delta x$ 가 충분히 작다고 하자. 이때 다음의 사실이 성립한다.

① $\exists j_0\in\mathbf{Z}: U_{j_0}=\varphi_{j_0}\Rightarrow \forall j<j_0,\ U_j=\varphi_j$

② $\exists j_1\in\mathbf{Z}: U_{j_1}>\varphi_{j_1}\Rightarrow \forall j>j_1,\ U_j>\varphi_j$

정리 6(양계차도식에서 최량실시경계의 존재성) $E>0,\ r>0$ 이라고 가정하자. $U=\{U_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 가 식 (6)의 풀이라고 하자. 그러면 $j_0\in\mathbf{Z}$ 가 존재하여 $\forall j<j_0$ 이면 $U_j=\varphi_j$ 이고 $\forall j\ge j_0$ 이면 $U_j>\phi_j$ 가 성립한다.

아래에서는 최량실시경계를 $j_*=j_0-1$ 로 표시한다. 보조정리의 결과로부터 양계차도식 (6)은 다음과 같은 계차방정식으로 쓸수 있다.

$$\begin{cases} u_j=\dfrac{1}{\rho}[(1-w)u_j+w[au_{j+1}+(1-a)u_{j-1}]], & j>j_* \\ u_{j_*}=\varphi_{j_*}\ge\dfrac{1}{\rho}[(1-w)u_{j_*}+w[au_{j_*+1}+(1-a)u_{j_*-1}]], & j=j_* \\ u_j=0, & j=+\infty \end{cases} \tag{7}$$

정리 7(영구사전실시판매선택권의 양계차도식의 풀이의 유일성) 방정식 (7)의 풀이는 유일하다.

이제 식 (7)을 만족시키는 풀이 $(U,\ j_*)$ 를 구하자.

$$f=\frac{1}{\Delta x}\left(\log\frac{\{\rho-[(1-w)+w(a\xi_1+(1-a))]\}E}{\rho-\{(1-w)+w[a\xi_1+(1-a)e^{-\Delta x}]\}}-c\right) \tag{8}$$

로 놓으면

$$U_j = \begin{cases} (E - e^{j_*\Delta x + c})\xi_1^{\,j-j_*}, & j > j_* \\ E - e^{j\Delta x + c}, & j \le j_* \end{cases} \tag{9}$$

(여기서 $j_* = \lceil \log f \rceil$이다.)와 같이 정의되는 $(U,\ j_*)$는 식 (7)을 만족시키는 풀이이다. 이리하여 영구사전실시판매선택권의 양계차도식의 풀이의 존재성정리를 증명하였다.

정리 8 영구사전실시판매선택권의 양계차도식 (7)의 풀이는 존재하며 식 (9)와 같이 표시된다.

따름 식 (8)에서 $r = 0$이면 $\rho = 1,\ \xi_1 = 1$이므로 $f = 0$이고 최량실시경계는 존재하지 않는다.

주의 3 정리 6－8에 의하여 영구사전실시판매선택권가격의 변분부등식에 대한 양계차도식의 풀이의 유일존재성과 최량실시경계의 유일존재성문제가 완전히 증명되였다.

## 참 고 문 헌

[1] 김일성종합대학학보(자연과학), 63, 6, 3, 주체106(2017).
[2] 김일성종합대학학보(자연과학), 63, 11, 16, 주체106(2017).
[3] 오형철 등; 조선민주주의인민공화국 과학원통보 3, 10, 주체106(2017).
[4] L. Jiang; Mathematical Modeling and Methods for Option Pricing, Singapore: World Scientific, 45～50, 2005.
[5] Lin Jianwei; Front. Math. China, 2, 2, 243, 2007.
[6] L. S. Jiang et al.; Journal of Computation Mathematics, 22, 3, 371, 2004.

주체107(2018)년 9월 8일 원고접수

## Some Properties of Variational Inequality and Its Explicit Difference Scheme of the Perpetual American Option Prices

*O Hyong Chol, Jo Song San*

We study the maximum principle, existence of optimal exercise boundary and the existence and uniqueness of the solutions for the variational inequality and its explicit difference scheme for perpetual American option prices.

Key words: perpetual American option, maximum principle, optimal exercise boundary