김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제2호

한가지 형태의 비순간임풀스분수계미분방정식의 주기경계값문제에 대한 풀이의 존재성

김 광 혁

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《과학과 기술이 매우 빨리 발전하고있는 오늘의 현실은 기초과학을 발전시킬것을 더욱 절실하게 요구하고있습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제11권 138페지)

임풀스조건하에서 비선형분수계미분방정식의 풀이의 존재성과 풀이법에 대한 연구가 활발히 진행되고있는데 임풀스조건은 두가지 형태[2]로 나타난다. 즉 변화기간이 전 과정의 지속기간보다 상대적으로 짧은 순간임풀스와 임풀스작용이 임의의 점에서 시작되여 유한시간구간에서 작용이 남아있는 비순간임풀스이다.

비순간임풀스문제는 선행연구[3]에서 소개되였으며 그때부터 많은 연구자들이 이 분야에 대한 연구를 심화시켰다. 그 과정에 비순간임풀스미분방정식에 대한 많은 연구결과들이 발표되였다.[3－5]

선행연구[4]에서는 비순간임풀스비선형1계미분방정식의 초기값문제의 상풀이, 하풀이에 의한 단조반복알고리듬을 제시하고 그 풀이들의 극한이 최대풀이와 최소풀이로 된다는것을 증명하였다.

선행연구[3]에서는 앞에서 발표한 결과를 비순간임풀스비선형분수계미분방정식의 초기값문제로 일반화하였다.

주기경계조건을 가지는 임풀스미분방정식의 풀이의 존재성결과는 순간임풀스인 경우 이미 많은 론문들에서 얻어졌으나 비순간임풀스인 경우 존재성결과는 찾아볼수 없으며 선행연구[3]에서 론의한 문제의 풀이의 존재성결과는 현재까지 밝히지 못하였다.

론문에서는 주기경계조건을 가진 비순간임풀스분수계미분방정식의 풀이의 유일존재성을 밝혔다.

다음과 같은 주기경계조건을 가진 비순간임풀스비선형분수계미분방정식에 대하여 고찰하자.

$$\begin{cases} {}^cD^{\alpha}u(t)=f(t,\ u(t)),\ t\in(t_i,\ s_i]\ \ (i=0,\ 1,\ \cdots,\ p+1) \\ u(t)=g_i(t,\ u(t),\ u(s_i-0)),\ t\in(s_i,\ t_{i+1}]\ \ (i=0,\ 1,\ \cdots,\ p) \\ u(0)=u(T) \end{cases} \tag{1}$$

여기서

$$\alpha\in(0,\ 1),\ \ f:\bigcup_{i=0}^{p+1}[t_i,\ s_i]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ \ {}^cg_i:[s_i,\ t_{i+1}]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}\ \ (i=0,\ 1,\cdots,\ p)$$

$$0=t_0<s_0<t_1<s_1<\cdots<t_{p+1}<s_{p+1}=T$$

$$u(s_i-0):=\lim_{\varepsilon\to0+}u(s_i-\varepsilon),\ \ u(s_i+0):=\lim_{\varepsilon\to0+}u(s_i+\varepsilon)$$

이고 ${}^cD^\alpha$ 는 α 계캐푸토미분연산자이다.

주의 $(s_i,\ t_{i+1}]\ (i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ p)$ 을 비순간임풀스구간, $g_i(t,\ x,\ y)\ (i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ p)$ 를 비순간임풀스함수라고 부른다.

다음과 같은 공간을 생각하자.

$$PC^1([0,\ T])=\left\{u:[0,\ T]\to\mathbf{R}\ \middle|\ u\in C^1\left(\bigcup_{i=0}^{p+1}[t_i,\ s_i],\ \mathbf{R}\right),\ u\in C\left(\bigcup_{i=0}^{p+1}[t_i,\ s_i],\ \mathbf{R}\right),\right.$$
$$u(s_i)=u(s_i-0)<+\infty,\ u'(s_i)=u'(s_i-0)<+\infty,\ u(s_i+0)<+\infty,$$
$$\left.u(t_i+0)<+\infty\ \ (i=0,\ 1,\ \cdots,\ p+1)\right\}$$
$$\|u\|_{PC^1}:=\sup_{t\in[0,\ T]}|u(t)|$$

이때 공간 $PC^1([0,\ T])$ 는 바나흐공간이다.

정의 1 [1] $\alpha>0$, 1계캐푸토도함수는 다음과 같이 정의한다.

$${}^cD^\alpha u(t)=\int_0^t\frac{(t-s)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}u^{(n)}(s)ds,\ n=[\alpha]+1,\ 0<t<T$$

여기서 $\Gamma(s)$ 는 보통의 감마함수이다.

정의 2 만일 $u\in PC^1([0,\ T])$ 가 다음의 조건을 만족시킨다고 하자.

① $\forall t\in(t_i,\ s_i]\ (i=0,\ 1,\ \cdots,\ p+1)$ 에 대하여 $u(t)=u_i^*(t)$ 이고 여기서 $u_i^*(t)$ 는 $u_i^*(t)\in C^1([t_i,\ s_i],\ \mathbf{R})$ 이고 ${}^cD_{t_i}^\alpha u_i^*(t)=f(t,\ u_i^*(t))$ 가 성립한다.

그리고 $u_0^*(t_0)=u_{p+1}^*(s_{p+1})\ \ (i=1,\ \cdots,\ p+1)$ 일 때 $u_i^*(t_i)=\tilde{u}_i(t_i)$ 이다.

② $\forall t\in(s_i,\ t_{i+1}]\ (i=0,\ 1,\ \cdots,\ p)$ 에 대하여 $u(t)=\tilde{u}_i(t)$ 이고 여기서 $\tilde{u}_i(t):[s_i,\ t_{i+1}]\to\mathbf{R}$ 에 대하여 $\tilde{u}_i(t_i)=g_i(t,\ \tilde{u}_i(t),\ u_i^*(s_i-0))$ 이 성립한다.

이때 $u(t)$ 를 주어진 문제 (1)의 풀이라고 부른다.

보조정리 1 [3] 다음의 초기조건을 가지는 비선형분수계미분방정식

$$\begin{cases}{}^cD_\tau^\alpha u(t)=f(t,\ u(t)),\ t\in[\tau,\ s_i),\ \tau\in[t_i,\ s_i)\ \ (i=0,\ 1,\ \cdots,\ p+1)\\ u(\tau)=u_\tau,\ u_\tau\in\mathbf{R}\end{cases}$$

는 적분방정식

$$u(t)=u_\tau+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_\tau^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,\ u(s))ds,\ t\in(\tau,\ s_i)\ \ (i=0,\ 1,\ \cdots,\ p+1)$$

와 동등하다.

보조정리 1로부터 보조정리 2를 얻을수 있다.

보조정리 2 문제 (1)과 동등한 적분방정식은 다음과 같다.

$$u(t)=g_p(t_{p+1},\ u(t_{p+1}),\ u(s_p-0))+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_{p+1}}^T(T-s)^{\alpha-1}f(s,\ u(s))ds+$$
$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,\ u(s))ds,\ t\in[0,\ s_0]$$

$$u(t)=g_{i-1}(t_i,\ u(t_i),\ u(s_{i-1}-0))+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_i}^{t}(t-s)^{\alpha-1}f(s,\ u(s))ds \tag{2}$$

$$t\in(t_i,\ s_i]\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ p+1)$$

$$u(t)=g_i(t,\ u(t),\ u(s_i-0)),\ t\in(s_i,\ t_{i+1}]\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ p)$$

가정 1 $f:\bigcup_{i=0}^{p+1}(t_i,\ s_i]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 가 련속이며 다음의 조건을 만족시킨다.

① $\exists L_f>0;\ \forall x,\ y\in\mathbf{R}\ |f(t,\ x)-f(t,\ y)|\le L_f|x-y|$

② $\exists C_f,\ M_f>0;\ |f(t,\ x)|<C_f+M_f|x|$

가정 2 $g_i:[s_i,\ t_{i+1})\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 가 련속이며 다음의 조건을 만족시킨다.

① $\exists L_g,\ K_g>0:\forall x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2\in\mathbf{R},$

$$|g_i(t,\ x_1,\ y_1)-g_i(t,\ x_2,\ y_2)|\le L_g|x_1-x_2|+K_g|y_1-y_2|$$

② $\exists M_g>0:|g_i(t,\ x,\ y)|\le M_g,\ \forall t\in[s_i,\ t_{i+1}]\ (i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ p)$

가정 3 $L_T:=\left(L_g+K_g+\dfrac{2L_fT^\alpha}{T(\alpha+1)}\right)\le 1$

정리 문제 (1)의 함수들이 가정 1—3을 만족시키면 설정한 문제 (1)은 $PC^1([0,\ T])$ 에서 유일풀이를 가진다.

실례 다음의 문제를 고찰하자.

$$\alpha=1/2,\ 0=t_0<s_0=0.3<t_1=0.7<s_1=1$$

$${}^cD^{1/2}u(t)=\frac{2+|u(t)|}{40e^{t^2+2}(1+|u(t)|)},\ t\in(0,\ 0.3]\cup(0.7,\ 1]$$

$$u(t)=\frac{\sin u(t)+t\left(\dfrac{1}{|u(s_0-0)|+1}\right)}{10},\ t\in(0.3,\ 0.7]$$

$$u(0)=u(1)$$

이때

$$L_f=1/(40e^2),\ T=1,\ \Gamma(3/2)\approx 0.886\ 227,\ L_g=1/10$$

$$K_g=0.7/10,\ M_g=0.17,\ C_f=1/(40e^2)+1,\ M_f=1/(40e^2)$$

이다. 계산결과는 $L_T\approx 0.177\ 635<1$ 이다.

따라서 주어진 방정식의 풀이가 유일존재한다.

참 고 문 헌

[1] A. A. Kilbas et al.; Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, 37~123, 2006.

[2] E. Hernandez et al.; Proc. Amer. Math. Soc., 141, 1641, 2013.

[3] R. Agarwal et al.; Applied Mathematics and Computation, 334, 407, 2018.
[4] R. Agarwal et al.; Applied Mathematics and Computation, 298, 45, 2017.
[5] S. Asawasamrit et al.; Boundary Value Problems, 122, 1, 2016.

주체108(2019)년 12월 15일 원고접수

Existence of Solutions for a Class of Non-Instantaneous Impulsive Fractional Differential Equations with Periodic Boundary Condition

Kim Kwang Hyok

In this paper, we study of existence of unique solution for a non-instantaneous impulsive fractional differential equation with periodic boundary condition using Banach fixed point theorem.

Keyword: fractional differential equation