김일성종합대학학보 (자연과학)
주체104(2015)년 제61권 제4호
JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE)
Vol. 61 No. 4 JUCHE104(2015).

두목적문제에 의거하는 고정비망흐름문제의 풀이법

리종욱, 림승일

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《과학자, 기술자들은 사회주의경제발전의 요구에 맞게 인민경제 모든 부문의 생산기술공정과 생산방법, 경영활동을 새로운 과학적토대우에 올려세우는데서 나서는 과학기술적문제를 전망성있게 풀어나가야 하겠습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제11권 138페지)

고정비망흐름문제는 광산설계나 탄광설계에서 제기되는 갱플격구조선택문제를 비롯하여 인민경제 여러 부문에서 나서는 할당문제, 설계문제 등에서 많이 찾아볼수 있다. 그렇기때문에 지금까지 많이 연구되여왔지만 고정비망흐름문제가 NP－hard문제라는것은 널리 알려져있고 최근에 나온 수법[2]들마저도 여러가지 복잡성을 내포하고있다.

이와 같은 실정에 비추어 여기서는 고정비망흐름문제를 선행연구[1]에서와 같이 두목적문제로 넘겨서 푸는 수법을 내놓는다. 이 수법은 선형계획법문제를 2개 푸는것과 맞먹는것이기때문에 이 수법의 개발은 고정비망흐름문제를 p－클라스에 속하게 한다.

고정비망흐름문제를 정식화하기 위하여 m개의 정점들의 모임 N과 n개의 흐름의 모임 A로 이루어진 그라프 $G=(N,\ A)$에 대하여 론의하자.

이때 고정비망흐름문제는 다음과 같이 정식화할수 있다.[3]

$$\begin{gathered}-\sum_{(k,\ i)\in A} x_{ki}+\sum_{(i,\ k)\in A} x_{ih}=b_i,\ i\in N,\ 0\le x_{ij}\le \chi_{ij},\ (i,\ j)\in A\\ f(x)=\sum_{(i,\ j)\in A} c_{ij}x_{ij}+\sum_{(i,\ j)\in A} s_{ij}\varphi(x_{ij})=\min\end{gathered}\tag{1}$$

여기서 $\varphi(x_{ij})=\begin{cases}0, & x_{ij}=0\\ 1, & x_{ij}>0\end{cases}$, $s_{ij}\ge 0$.

이제 $S=\left\{(x_{ij})\left| -\sum_{(k,\ i)\in A} x_{ki}+\sum_{(i,\ k)\in A} x_{ik}=b_i,\ \forall i\in N,\ 0\le x_{ij}\le \chi_{ij},\ (i,\ j)\in A\right.\right\}$ 라고 놓고 문제 (1)대신에 다음의 두목적문제에 대하여 론의하자.

$$(x_{ij})\in S,\ L(x)=\sum_{(i,\ j)\in A} c_{ij}x_{ij}\Rightarrow \min,\ D(x)=\sum_{(i,\ j)\in A} s_{ij}\varphi(x_{ij})\tag{2}$$

이때 선행연구[1]에서와 같이 다음과 같은 정리가 성립된다.

정리 1 고정비망흐름문제 (1)의 최량점은 두목적문제 (2)의 유효정점들가운데서 찾을수 있다.

그러므로 문제 (1)을 풀기 위해서는 두목적문제 (2)의 유효정점들을 구하는 수법이 마련되여야 한다.

두목적문제 (2)의 유효정점들을 구하는 과정은 선형계획법문제

$$x \in S,\ \ L(x) = \min \tag{3}$$

의 최량점을 구하는것으로부터 시작하는것이 편리하다.

그런데 문제 (3)은 량쪽제한선형계획법문제이므로 거기에 맞는 수법을 써서 푸는것이 옳다.

그러므로 문제 (3)의 최량점 $x^0 \in \boldsymbol{R}^n$ 이 주어졌다고 보고 론의할수 있다.

이제 x^0에 대응되는 동차련립방정식

$$-\sum_{(k,\ i)\in A} x_{ki} + \sum_{(i,\ k)\in A} x_{ik} = b_i\tau,\ i \in N,\ 0 \le x_{ij} \le \chi_{ij}\tau,\ (i,\ \ j) \in A$$

의 풀이의 표준기본계를

$$d_l = \begin{pmatrix} x_l \\ 0 \end{pmatrix},\ l = \overline{1,\ n},\ \ d_{n+1} = \begin{pmatrix} x^0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

이라고 하자. 여기서 $x_l = (x^l_{1_{j_1}} x^l_{1_{j_2}} \cdots x^l_{p_1 m} \cdots x^l_{p_t m})^T \in \boldsymbol{R}^n$, τ는 부아닌 변수이다.

그런데 선형계획법문제 (3)은 두목적선형계획법문제가 아니기때문에 두목적문제 (2)를 풀기 위한 표의 $L(x)-$렬과 $D(x)-$렬의 l째 성분을 각각

$$L(x_l)\theta_l,\ \ D(x_l) = D(x_{n+1} + \theta_l x_l) - D(x_{n+1}),\ \ l = \overline{1,\ n}$$

으로, 마지막성분은 $L(x_{n+1})$, $D(x_{n+1})$로 그대로 놓는다. 여기서 $\theta_l = \min\{x_{ij}^{n+1} \mid x_{ij}^l = -1\}$이고 첫걸음에서는 $x_{n+1} = x^0$이다.

그러면

$$N^- = \{r \mid L(x_r) > 0,\ \ D(x_r) < 0\},\ \ N^+ = \{k \mid L(x_k) < 0,\ \ D(x_k) > 0\},$$
$$N^0 = \{q \mid L(x_q) = 0,\ \ D(x_q) > 0 \ \text{또는}\ L(x_q) > 0,\ D(x_q) = 0\}$$

이라고 할 때 선행연구[1]에서와 같은 다음의 정리가 성립된다.

정리 2 $\bar{x}$를 두목적문제 (2)에 대한 유효정점이라고 하자.

이때 $r \in N^-$에 대하여 $\bar{x}$의 린접정점 $\bar{x} + \theta_r x_r$가 유효정점이기 위해서는 다음과 같은 부등식들이 성립될것이 필요충분하다.

$$\frac{L(x_k)\theta_k}{-D(x_k)} \ge \frac{L(x_r)\theta_r}{-D(x_r)} \ge \frac{-L(x_k)\theta_k}{D(x_k)},\ \ r \in N^-,\ \ k \ne r,\ \ k \in N^+ \tag{4}$$

공식 (4)에 의하여 선형계획법문제 (3)의 최량점으로 되는 유효정점으로부터 시작하여 차례로 유효정점들을 구해나가다가

$$x \in S,\ \ D(x) = \sum_{(i,\ \ j)\in A} s_{ij}\varphi(x_{ij}) = \min \tag{5}$$

의 최량점으로 되는 유효정점에 이르면 유효정점탐색과정은 끝난다. 여기서 문제 (5)는 선행연구[2]에서와 같이 0－1선형계획법으로 볼수 있다.

정리 3 두목적계획법문제 (2)의 유효정점들가운데서 $f(x) = L(x) + D(x)$를 최소화하는것이 고정비망흐름문제 (1)의 최량점(흐름)이다.

풀이의 계산방식은 다음과 같다.

① 선형계획법문제 (3)을 풀어서 최량점 x^0을 구한다.

이때 x^0이 유일한 최량점이면 그것은 두목적문제 (2)의 유효정점이므로 그것을 가

지고 걸음 ②로 넘어간다.

만일 선형계획법문제 (3)의 최량정점이 여러개 있을 때에는 그가운데서 유효점을 골라서 그것을 x^0으로 보고 걸음 ②로 넘어간다.

② x^0을 포함하고있는 표에 $D(x)$－렬을 첨가하고 거기에서 부등식 (4)를 만족시키는 x_r를 구하여 린접유효정점 $x^1 = x^0 + \theta_r x_r$로 넘어간다.

그리고 x^1을 x^0으로 보고 걸음 ②를 반복한다.

③ 우와 같은 과정을 선형계획법문제 (5)의 최량점으로 되는 유효정점에 도달할 때까지 계속한다.

④ 유효정점이 다 구해졌을 때 유효정점들가운데서 $f(x)$를 최소화하는것을 찾으면 주어진 문제 (1)의 최량점이 나온다.

실례 갱끌격구조선택문제가 그림과 같이 그라프형태로 주어졌다고 하자.

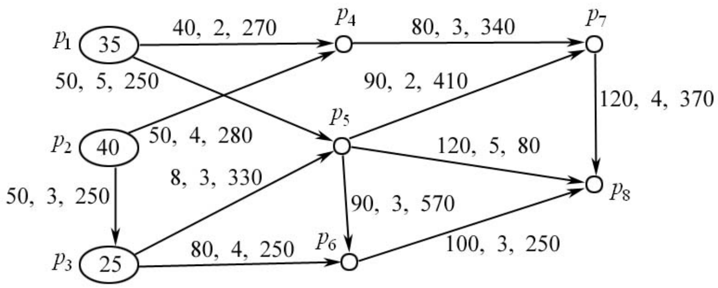

그림. 갱끌격구조선택문제

그림에서 호 (p_i, p_j)의 x_{ij}, c_{ij}, s_{ij}는 각각 통과능력, 운반비, 고정비이다.

호 (p_i, p_j)를 지나가는 광석의 량을 x_{ij}라고 놓으면 문제 (1)은 다음과 같다.

$$x_{14} + x_{15} = 35,\ x_{23} + x_{24} = 40,\ -x_{23} + x_{35} + x_{36} = 25,\ -x_{14} - x_{24} + x_{47} = 0$$
$$-x_{15} - x_{35} + x_{56} + x_{57} + x_{58} = 2,\ -x_{56} - x_{36} + x_{68} = 0$$
$$-x_{47} - x_{57} + x_{78} = 0,\ x_{58} + x_{68} + x_{78} = 100$$
$$0 \le x_{14} \le 40,\ 0 \le x_{35} \le 80,\ 0 \le x_{57} \le 90$$
$$0 \le x_{15} \le 50,\ 0 \le x_{36} \le 80,\ 0 \le x_{58} \le 120$$
$$0 \le x_{23} \le 50,\ 0 \le x_{47} \le 80,\ 0 \le x_{68} \le 100$$
$$0 \le x_{24} \le 50,\ 0 \le x_{56} \le 90,\ 0 \le x_{78} \le 120$$
$$\begin{aligned} f(x) = {} & 4x_{14} + 5x_{15} + 3x_{23} + 4x_{24} + 3x_{35} + 4x_{36} + 3x_{47} + 2x_{57} + 3x_{56} + 5x_{58} + \\ & + 3x_{68} + 4x_{78} + 270\varphi(x_{14}) + 280\varphi(x_{15}) + 240\varphi(x_{23}) + 280\varphi(x_{24}) + \\ & + 330\varphi(x_{35}) + 250\varphi(x_{36}) + 340\varphi(x_{47}) + 410\varphi(x_{57}) + 570\varphi(x_{56}) + \\ & + 290\varphi(x_{58}) + 250\varphi(x_{68}) + 370\varphi(x_{78}) = \min \end{aligned}$$

이 문제의 풀이과정은 표와 같다.

표의 (2)표에서 $L(x)$－렬의 성분들이 모두 정수이므로

$$x^3 = (0\ 35\ 40\ 0\ 0\ 65\ 0\ 0\ 0\ 65\ 35\ 0)$$

은 선형계획법문제 (3)의 최량점인 두목적문제 (2)의 유효정점이다.

(2)표의 $D(x)$－렬에는 부수성분이 하나만 들어있으므로 그것이 놓여있는 3－행을

주목행으로 하여 표를 바꾸면 (3)표를 얻는데 그 $D(x)$ －렬의 성분들은 모두 정수이므로

$$x^4 = (0\ 35\ 40\ 0\ 65\ 0\ 0\ 0\ 0\ 100\ 0\ 0)$$

도 유효정점이며 문제 (5)의 최량점이기때문에 계산과정은 끝난다.

이리하여 유효정점은 x^3 과 x^4 뿐인데 그가운데서 $f(x)$ 의 값이 작은 x^4 가 주어진 문제의 최량점이다.

표. 계산과정

No.	$L/(-D)$	$L(x)$	$D(x)$	x_{14}	x_{15}	x_{23}	x_{24}	x_{35}	x_{36}	x_{47}	x_{56}	x_{57}	x_{58}	x_{68}	x_{78}	τ
(1)		0		－1	1					－1	1			1	－1	
		1				－1	1		－1	1				－1	1	
		2						1	－1		1					
		0									－1	1		－1	1	
		－1									(－1)		1	－1		
		960			35	40			65	35				65	35	1
				5	50	10	50	80	15	45	90	90	120	35	85	
(2)		1		(－1)	1					－1			1		－1	
		1				－1	1		－1	1				－1	1	
		1						1	－1				1	－1		
		1										1	－1		1	
		1									1		－1		1	
		960			35	40			65	35				65	35	1
				5	50	10	50	80	15	45	90	90	120	35	85	
(3)		1×35	440	1	－1					1			－1		1	
		1×40	750			－1	1		－1	1				－1	1	
		1×65	－170					1	(－1)				1	－1		
		1×35	490									1	－1		1	
		1×35	280								1		－1	1		
	2 205	925	1280		35	40			65				35	65		1
				40	15	10	50	80	15	80	90	90	85	35	120	
(4)		1×35	730	1	－1					1			－1		1	
		0	750			－1	1	－1		1			－1		1	
		－1×65	170					－1	1				－1	1		
		1×100	490									1	－1		1	
		1×100	530								1		－1	1		
	2 100	990	1 110		35	40		65					100			1
				40	15	10	50	15	80	80	90	90	20	100	120	

참 고 문 헌

[1] 리종욱 등; 수학, 1, 24, 주체102(2013).

[2] T. G. Crainic et al.; Descret App. Math., 112, 73, 2001.

주체103(2014)년 12월 5일 원고접수

A Solution Procedure of the Fixed Charge Network Flow Problem Depending on Biobjective Problem

Ri Jong Uk, Rim Sung Il

We proposed an approximate method to solve the FCNFP by finding all efficient vertexes of the biobjective programming problem which is made by separating the objective function into linear term and fixed charge term of the FCNFP.

Key word: biobjective programming problem