김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제2호

비종점소득미분경기에서 한가지 값함수계산도식에 의한 둘째 경기자의 최량방략구성

리국환, 김향

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《현시대는 과학기술의 시대이며 과학기술의 발전수준은 나라의 종합적국력과 지위를 규정하는 징표로 됩니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 38폐지)

우리는 비종점소득미분경기에서 둘째 경기자의 최량방략의 구성에 대한 연구를 진행하였다. 선행연구[1, 3, 4]에서는 비종점소득미분경기에 대하여 여러가지 형태의 연산자를 리용한 값함수계산도식과 그것에 대한 수렴성평가를 진행하고 값함수계산도식에 기초하여 값함수를 계산한 다음 극값표준법을 리용하여 조종을 실현하였다. 그런데 극값표준법에 의거하면 값함수전체를 계산한 다음에야 방략을 구성할수 있으며 값함수계산의 높은 정확성과 함께 방략계산을 위한 추가적인 최량화문제를 풀어야 한다.

론문에서는 비종점소득미분경기인 경우에 한가지 값함수계산도식에 의거하여 시간－상태공간의 직립방체그물에서 경기값계산과 동시에 둘째 경기자의 최량방략을 구성하고 그 최량성을 증명하였다.

1. 비종점소득미분경기와 유한계차연산자

다음의 비종점소득미분경기[3]를 취급한다.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,\ x,\ u,\ \upsilon) \\ x \in \mathbf{R}^n,\ t \in I := [t_{00},\ \theta],\ u \in P \subset \mathbf{R}^p,\ \upsilon \in Q \subset \mathbf{R}^q \\ \gamma(x(\cdot)) = \min\limits_{t \in [t_{00},\ \theta]} \sigma(t,\ x(t)) \to \min\limits_{u} \max\limits_{\upsilon} \end{cases} \tag{1}$$

여기서 t는 시간변수, θ는 경기의 마감시각, x는 계의 상태벡토르, $u,\ \upsilon$는 각각 첫째 및 둘째 경기자의 조종벡토르들, $P,\ Q$는 각각 콤팍트들이다. 첫째 경기자(조종 u)의 목적은 소득을 최소화하는것이고 둘째 경기자(조종 υ)의 목적은 최대화하는것이다.

$t,\ x,\ u,\ \upsilon$에 관한 함수 $f(\cdot)$는 모든 변수들에 관하여 유계평등련속이고(유계상수 K) 변수 $t,\ x$에 관하여 립쉬츠련속인(립쉬츠상수 L_f) 함수로서 다음의 아이젝쓰조건을 만족시킨다.

$$\min_{u \in P} \max_{\upsilon \in Q} < s,\ f(t,\ x,\ u,\ \upsilon) >= \max_{\upsilon \in Q} \min_{u \in P} < s,\ f(t,\ x,\ u,\ \upsilon) > (=: H(t,\ x,\ s))$$

$$\forall (t,\ x) \in I \times \mathbf{R}^n,\ \forall s \in \mathbf{R}^n$$

함수 $\sigma(\cdot): \mathbf{R}^{1+n} \to \mathbf{R}$는 유계립쉬츠련속함수이다.(립쉬츠상수 L_σ)

임의의 초기위치 $(t,\ x) \in I \times \mathbf{R}^n$에 대하여 문제 (1)의 경기값 $w^*(t,\ x)$가 존재하며 이때 값함수 $(t,\ x) \mapsto w^*(t,\ x)$는 유계립쉬츠련속함수(립쉬츠상수 L_{w^*})로서 해밀턴－야꼬비－벨만－아이젝쓰방정식에 대한 다음의 경계값문제의 최대최소풀이(또는 점성풀이)이다.[2, 5]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w(t,\ x)}{\partial t} + H\left(t,\ x,\ \dfrac{\partial w(t,\ x)}{\partial x}\right) = 0,\ (t,\ x) \in [0,\ \theta) \times \mathbf{R}^n \\ w(t,\ x) \le \sigma(t,\ x),\ (t,\ x) \in \mathbf{R}^{1+n} \\ w(\theta,\ x) = \sigma(\theta,\ x),\ x \in \mathbf{R}^n \end{cases} \tag{2}$$

이제 $\Delta > 0,\ \gamma > 0,\ \Delta_{\xi_i} := \gamma\Delta\ (i = \overline{1,\ n})$ 라고 놓고 시간축 t 의 구간 I 에 평등분할

$$\pi = \{0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_N = \theta\}\ (\text{여기서}\ \ \Delta = \tau_{i+1} - \tau_i\ \ (i = \overline{0,\ N-1})) \tag{3}$$

를, 상태공간 $\mathbf{R}^n$ 에 직립방체그물

$$GR = \{x_{GR} = (\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n)^{\mathrm{T}},\ \xi_i = \xi_{0i} + j_i\Delta_{\xi_i}\ \ (i = \overline{1,\ n},\ \ j_i = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)\} \tag{4}$$

(여기서 $\xi_{0i}\ \ (i = \overline{1,\ n})$ 는 임의로 고정시킨 상수이다.)를 생각하자. 이때 시간—상태공간 $I \times \mathbf{R}^n$ 에 직립방체그물 $\pi \times GR$ 가 형성된다.

값함수계산을 위한 유한계차연산자를 정의하는데 필요한 다중선형보간공식을 론의하자. 일반적으로 GR 의 임의의 그물세포 $gd = \prod_{i=1}^{n} [\underline{\xi}_i,\ \overline{\xi}_i]$ 를 생각하자.($\overline{\xi}_i = \underline{\xi}_i + \Delta_{\xi_i}$)

선택된 직립방체에서 2^n 개의 정점들에 번호를 붙이고 자리표를 $y_k^{gd}\ \ (k = \overline{1,\ 2^n})$ 로 표시하자. 그리고 매 번호 $k \in \overline{1,\ 2^n}$ 에 2진표시 $j^k = (j_1^k,\ \cdots,\ j_n^k)$ 를 대응시키자. 여기서 y_k^{gd} 의 i 째 성분이 $\underline{\xi}_i$ 이면 $j_i^k = 0$ 이고 y_k^{gd} 의 i 째 성분이 $\overline{\xi}_i$ 이면 $j_i^k = 1$ 이다.

또한 다음의 함수를 도입한다.

$$\omega_k(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n) = \prod_{i=1}^{n} (1 - a_i)^{1 - j_i^k} a_i^{j_i^k}\ \ (k = \overline{1,\ 2^n})$$

여기서 i 째 항은 j_i^k 의 값에 따라 $1 - a_i$ 또는 a_i 이다. 이때 점 $x = (\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n)^{\mathrm{T}} \in gd$ 에 대하여 다음과 같이 놓는다.

$$\omega_k^{gd}(x) = \omega_k\left(\frac{\xi_1 - \underline{\xi}_1}{\Delta_{\xi_1}},\ \cdots,\ \frac{\xi_n - \underline{\xi}_n}{\Delta_{\xi_n}}\right)\ (k = \overline{1,\ 2^n})$$

함수 $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 의 다중선형보간함수 $ML(\varphi)(\cdot)$ 를 다음과 같이 구성한다.

임의의 점 $x = (\xi_1,\ \cdots,\ \xi_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$ 과 이 점을 포함하는 GR 의 그물세포 $gd(x) = \prod_{i=1}^{n} [\underline{\xi}_i,\ \overline{\xi}_i]$ 를 생각하자.(여기서 $\underline{\xi}_i \le \xi_i \le \overline{\xi}_i$) 점 x 는 $x = \sum_{k=1}^{2^n} y_k^{gd(x)} \cdot \omega_k^{gd}(x)$ 와 같이 표시되며 점 x 에서의 다중선형보간값은 다음과 같다.

$$ML(\varphi)(x) = \sum_{k=1}^{2^n} \varphi(y_k^{gd}) \cdot \omega_k^{gd}(x)$$

우의 다중선형보간공식에 기초하여 보편최량방략구성을 위한 한가지 계차연산자를

도입하자. $t \in I,\ t+\Delta \in I$ 라고 하자. $t+\Delta$ 시각에 값함수 $x \mapsto w^*(t+\Delta,\ x)$ 의 근사함수로서 유계립쉬츠련속함수 $\varphi(\cdot): \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 가 주어진다고 하자.(립쉬츠상수 L_φ)

이때 연산자 $\varphi \mapsto \Pi(t,\ \Delta,\ \varphi)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\Pi(t,\ \Delta,\ \varphi)(x) := \begin{cases} \max\limits_{\upsilon \in Q} \min\limits_{\substack{f \in \mathrm{cof}(t, \\ x,\ P,\ \upsilon)}} ML(\varphi(x+\Delta f)), & \Delta > 0 \\ \varphi(x), & \Delta = 0 \end{cases}$$

일반근사계산도식의 수렴성과 관련한 선행연구[1]을 리용하면 사실이 성립한다.

정리 1 구간 I 의 분할 (3)에 대하여 연산자 Π 에 의한 근사도식이 다음의 공식들에 의하여 결정된다고 하자.

$$\overline{w}_\pi(\theta,\ x) = ML(\sigma(\theta,\ \cdot))(x)\ \ (x \in \mathbf{R}^n)$$

$$\overline{w}_\pi(t,\ x) = \min\{\Pi(t,\ \tau_{i+1}-t,\ \overline{w}_\pi(\tau_{i+1},\ \cdot))(x),\ \sigma(t,\ x)\},\ t \in [\tau_i,\ \tau_{i+1}),\ x \in \mathbf{R}^n\ \ (i = \overline{0,\ N-1}) \tag{5}$$

이때 다음의 평가식이 성립한다.

$$\| \overline{w}_\pi - w^* \| \le C\sqrt{\Delta}$$

여기서 $\| \overline{w}_\pi - w^* \| := \max\limits_{(t,\ x) \in I \times \mathbf{R}^n} | \overline{w}_\pi(t,\ x) - w^*(t,\ x) |$ 이다.

함수 $\overline{w}_\pi(t,\ \cdot)$ 는 유계립쉬츠련속함수로서 립쉬츠상수 $L_{\overline{w}_\pi} \le \sqrt{n}\exp(L_f(\theta - t_{00}))L_\sigma$ 를 택할수 있다.

2. 한가지 걸음조종절차 및 최량성평가

매 $\tau_i \in \pi$ 시각의 상태공간 $\mathbf{R}^n$ 을 $\mathbf{R}^n(\tau_i)$ 로 표시하자. 시간－상태공간 $I \times \mathbf{R}^n$ 의 직립방체그물 $\pi \times GR$ 의 매 정점 $(\tau_i,\ x_{GR})$ 에서 근사도식 (5)에 따라 함수값

$$\begin{aligned} \overline{w}_\pi(\tau_i,\ x_{GR}) &= \min\{\Pi(\tau_i,\ \Delta,\ \overline{w}_\pi(\tau_{i+1},\ \cdot))(x_{GR}),\ \sigma(\tau_i,\ x_{GR})\} = \\ &= \min\{\max_{\upsilon \in Q} \min_{\substack{f \in \mathrm{cof}(\tau_i, \\ x_{GR},\ P,\ \upsilon)}} ML(\overline{w}_\pi(\tau_{i+1},\ \cdot))(x_{GR}+\Delta f),\ \sigma(\tau_i,\ x_{GR})\} \end{aligned} \tag{6}$$

의 계산과 동시에 둘째 경기자의 조종

$$V^0(\tau_i,\ x_{GR}) = \arg\max_{\upsilon \in Q} \min_{\substack{f \in \mathrm{cof}(\tau_i, \\ x_{GR},\ P,\ \upsilon)}} \overline{w}_\pi(\tau_{i+1},\ x_{GR}+\Delta f),\ (\tau_i,\ x_{GR}) \in \pi \times GR,\ i = \overline{0,\ N-1} \tag{7}$$

을 계산하자. 이때 $\mathbf{R}^n(\tau_i)$ 에서의 조종함수 $V^C(\tau_i,\ \cdot)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$V^C(\tau_i,\ x) = V^0(\tau_i,\ x_{GR}),\ x_{GR} = x_{GR}(x) = \arg\min_{y \in GR(\tau_i)} \| y - x \|,\ x \in \mathbf{R}^n(\tau_i) \tag{8}$$

우리는 시간구간 I 의 분할 π 에 기초한 둘째 경기자의 걸음조종절차로서 $V^C(\tau_i,\ \cdot)$, $\tau_i \in \pi$ 를 택하고 이 절차의 최량성을 평가하려고 한다. 이 걸음조종절차에 의하여 초기위치 $(t_0,\ x_0)$ $(t_0 \in I)$ 으로부터 생성되는 걸음운동은 미분방정식

$$\begin{cases} \dot{x}_\pi(t) = f(t,\ x_\pi(t),\ u(t),\ V^C(\tau_i,\ x_\pi(\tau_i))),\ \tau_i \le t < \tau_{i+1},\ i = \overline{i_0,\ N-1} \\ x_\pi(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{9}$$

의 풀이 $x_\pi(\cdot): [t_0, \theta] \to \mathbf{R}^n$ 이다. 여기서 $u(\cdot): [t_0, \theta] \to P$ 는 임의의 르베그가측함수이고 τ_{i_0} 은 $\tau_{i_0} \le t_0 < \tau_{i_0+1}$ 인 시각이며 $\tau_{i_0} < t_0$ 인 경우에 $V^C(t_0, x_0) = V^C(\tau_{i_0}, x_0)$ 이다.

보조정리 $\tau_i, \tau_{i+1} \in \pi$ $(i \le N-1)$ 라고 하자. 이때 미분방정식 (9)의 풀이 $x_\pi(\cdot)$ 에 대하여 다음의 부등식이 성립한다.

$$\inf_{u(\cdot)} \min\{\overline{w}_\pi(\tau_{i+1}, x_\pi(\tau_{i+1})), \sigma(\tau_i, x_\pi(\tau_i))\} \ge$$

$$\ge \overline{w}_\pi(\tau_i, x_\pi(\tau_i)) - \Delta\left[\frac{1}{2}L_{\overline{w}_\pi}[3\sqrt{n}\gamma + L_f(1+K)\Delta] + \sqrt{n}\gamma \max\{L_{\overline{w}_\pi}\exp(L_f\Delta), L_\sigma\}\right]$$

정리 2 파라메터 γ 가 식 $\gamma = \rho\Delta^a$ 으로 주어진다고 하자.($a>0$, $\rho>0$) 이때 임의의 초기위치 (t_0, x_0) $(t_0 \in I)$ 과 임의의 르베그가측조종 $u(\cdot): [t_0, \theta] \to P$, 결음조종절차 $V^{\mathrm{C}}(\tau_i, \cdot)$, $\tau_i \in \pi$ 에 의하여 생성되는 결음운동 $x_\pi(\cdot)$ 에 대하여

$$\min_{t \in [t_0, \theta]} \sigma(t, x_\pi(t)) \ge w^*(t_0, x_0) - \psi(\Delta), \quad \lim_{\Delta \to 0} \psi(\Delta) = 0$$

이 성립한다. 여기서

$$\psi(\Delta) = L_{w^*}(1+K)\Delta + C\sqrt{\Delta} + L_\sigma\left[\frac{\sqrt{n}}{2}\rho\Delta^a + (1+K)\right]\Delta +$$

$$+(\theta - t_0)\left[\frac{1}{2}L_{\overline{w}_\pi}[3\sqrt{n}\rho\Delta^a + L_f(1+K)\Delta] + \sqrt{n}\rho\Delta^a \max\{L_{\overline{w}_\pi}\exp(L_f\Delta), L_\sigma\}\right]$$

참 고 문 헌

[1] С. А. Лобов и др.; Современные проблемы математики: Тезисы международной(4-й Всероссийской) молодежной школы－конференции, 151, 2012.

[2] А. И. Субботин; Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона－Якоби, М.: Наука, 216, 1991.

[3] N. D. Botkin et al.; SIAM J. Sci. Comput., 33, 2, 992, 2011.

[4] N. D. Botkin et al.; Analsis, 31, 335, 2011.

[5] A. I. Subbotin et al.; Optimization of Guaranteed Result in Control Problems, Nauka, Moscow, 1～284, 1981.

주체107(2018)년 12월 5일 원고접수

On the Construction of the Second Player's Optimal Strategy using the Multilinear Interpolation in the Differential Games with Non-terminal Payoffs

Ri Kuk Hwan, Kim Hyang

In this paper, for the differential games with non－terminal payoffs, we construct the second player's optimal strategy in a cubic grid with the approximation scheme of the value function, and estimate its correctness.

Key words: differential games with non－terminal payoffs, optimal strategy