김일성종합대학학보 주체110(2021)년
수 학 제67권 제1호

반리만다양체우의 일반화된 공액접속의 등적아핀성

민철림, 정강민

경애하는 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《우리는 과학기술을 발전시켜도 남들이 걸은 길을 따라만 갈것이 아니라 우리 과학자들의 애국충정과 우리 인민의 슬기와 민족적자존심을 폭발시켜 년대와 년대를 뛰여넘으며 비약해나가야 합니다.》

통계다양체에서는 공액인 접속쌍들의 등적아핀성이 서로 동등하다.

선행연구[2, 3]는 통계다양체가 공액대칭이면 등적아핀구조를 허용한다는것을, 선행연구[4]에서는 평탄통계다양체는 등적아핀이라는것을 밝혔다.

또한 선행연구[1]에서는 통계다양체에서 공액인 접속쌍의 등적아핀성들이 동등하다는 사실을 반리만다양체우의 일반화된 공액접속쌍의 경우에로 일반화하였다. 그러나 통계다양체가 등적아핀구조를 가지기 위한 충분조건과 관련한 연구는 아직까지 반리만다양체의 경우에로 일반화되지 못하였다.

우리는 통계다양체의 공액대칭성이 통계다양체가 등적아핀구조를 가지기 위한 충분조건으로 된다는것을 반리만다양체우의 일반화된 공액접속쌍의 경우에로 일반화하였다.

$(M,\ g)$를 반리만다양체라고 하고 ∇를 M우의 아핀접속, τ를 M우의 미분1-형식이라고 하자.

g에 관한 ∇의 τ에 의하여 일반화된 공액접속 $\overline{\nabla}^*$은 다음과 같이 정의된다.[1]

$$Xg(Y,\ Z)=g(\nabla_X Y,\ Z)+g(Y,\ \overline{\nabla}^*_X Z)-\tau(X)g(Y,\ Z),\ \forall X,\ Y,\ Z\in\Gamma(TM)$$

먼저 반리만다양체에서 주어진 아핀접속과 그것의 일반화된 공액접속의 곡률텐소르들사이의 관계를 보자.

보조정리 1 $(M,\ g)$가 반리만다양체, ∇가 M우의 아핀접속, τ가 M우의 미분1-형식이고 $\overline{\nabla}^*$이 g에 관한 ∇의 τ에 의하여 일반화된 공액접속일 때 ∇, $\overline{\nabla}^*$의 곡률텐소르 R, $\overline{R}^*$사이에는 임의의 $X,\ Y,\ Z,\ U\in\Gamma(TM)$에 대하여 다음의 관계식이 성립된다.

$$g(R(X,\ Y)Z,\ U)+g(Z,\ \overline{R}^*(X,\ Y)U)=[X(\tau(Y))-Y(\tau(X))-\tau([X,\ Y])]g(Z,\ U)$$

증명 일반화된 공액접속의 정의로부터

$$Xg(Y,\ Z)=g(\nabla_X Y,\ Z)+g(Y,\ \overline{\nabla}^*_X Z)-\tau(X)g(Y,\ Z),\quad \forall X,\ Y,\ Z\in\Gamma(TM)$$

$$Yg(Z,\ U)=g(\nabla_Y Z,\ U)+g(Z,\ \overline{\nabla}^*_Y U)-\tau(Y)g(Z,\ U),\quad \forall Y,\ Z,\ U\in\Gamma(TM)$$

이므로 임의의 $X,\ Y,\ Z,\ U\in\Gamma(TM)$에 대하여 다음의 식들이 성립된다.

$$\begin{aligned}XYg(Z,\ U)&=X(g(\nabla_Y Z,\ U))+X(g(Z,\ \overline{\nabla}^*_Y U))-X(\tau(Y)g(Z,\ U))=\\&=g(\nabla_X\nabla_Y Z,\ U)+g(\nabla_Y Z,\ \overline{\nabla}^*_X U)-\tau(X)g(\nabla_Y Z,\ U)+\\&+g(\nabla_X Z,\ \overline{\nabla}^*_Y U)+g(Z,\ \overline{\nabla}^*_X\overline{\nabla}^*_Y U)-\tau(X)g(Z,\ \overline{\nabla}^*_Y U)-\\&-X(\tau(Y))g(Z,\ U)-\tau(Y)[g(\nabla_X Z,\ U)+g(Z,\ \overline{\nabla}^*_X U)-\tau(X)g(Z,\ U)]\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}YXg(Z,\ U)&=Y(g(\nabla_X Z,\ U))+Y(g(Z,\ \overline{\nabla}^*_X U))-Y(\tau(X)g(Z,\ U))=\\&=g(\nabla_Y\nabla_X Z,\ U)+g(\nabla_X Z,\ \overline{\nabla}^*_Y U)-\tau(Y)g(\nabla_X Z,\ U)+\\&+g(\nabla_Y Z,\ \overline{\nabla}^*_X U)+g(Z,\ \overline{\nabla}^*_Y\overline{\nabla}^*_X U)-\tau(Y)g(Z,\ \overline{\nabla}^*_X U)-\\&-Y(\tau(X))g(Z,\ U)-\tau(X)[g(\nabla_Y Z,\ U)+g(Z,\ \overline{\nabla}^*_Y U)-\tau(Y)g(Z,\ U)]\end{aligned}\tag{2}$$

이때 식 (1)에서 식 (2)를 변끼리 덜면

$$\begin{aligned}[X,\ Y]g(Z,\ U)&=X(Yg(Z,\ U))-Y(Xg(Z,\ U))=g(\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z,\ U)+\\&+g(Z,\ \nabla^*_X\nabla^*_Y U-\nabla^*_Y\nabla^*_X U)-X(\tau(Y))g(Z,\ U)+Y(\tau(X))g(Z,\ U)\end{aligned}\tag{3}$$

이고 다시 일반화된 공액접속의 정의로부터

$$[X,\ Y]g(Z,\ U)=g(\nabla_{[X,\ Y]}Z,\ U)+g(Z,\ \overline{\nabla}^*_{[X,\ Y]}U)-\tau([X,\ Y])g(Z,\ U)\tag{4}$$

이므로 식 (3), (4)로부터

$$g(R(X,Y)Z,\ U)+g(Z,\ \overline{R}^*(X,\ Y)U)=[X(\tau(Y))-Y(\tau(X))-\tau([X,\ Y])]g(Z,\ U)$$

가 성립된다.(증명끝)

따름 $(M,\ g)$가 반리만다양체, ∇가 M우의 아핀접속, τ가 M우의 닫긴1−형식이면 $\overline{\nabla}^*$을 g에 관한 ∇의 τ에 의해 일반화된 공액접속이라고 할 때 ∇, $\overline{\nabla}^*$의 곡률텐소르 R, $\overline{R}^*$사이에는 다음의 관계식이 성립된다.

$$g(R(X,Y)Z,\ U)+g(\overline{R}^*(X,Y)U,\ Z)=0,\ \ \forall X,\ Y,\ Z,\ U\in\Gamma(TM)$$

보조정리 2 $(M,\ g)$를 반리만다양체, τ를 M우의 닫긴1−형식이라고 하자.

∇, $\overline{\nabla}^*$이 g에 관한 τ에 의하여 일반화된 공액인 두 접속들로서 대칭이라고 할 때 ∇, $\overline{\nabla}^*$의 곡률텐소르 R, $\overline{R}^*$사이에는 다음의 관계식이 성립된다.

$$g(\overline{R}^*(X,Y)Z,\ U)-g(R(X,Y)Z,\ U)=(\nabla_X\nabla_Y g)(Z,\ U)-(\nabla_Y\nabla_X g)(Z,\ U)$$

보조정리 3 $(M,\ g,\ \nabla)$를 대칭접속다양체, ∇°을 M우의 레비−치비따접속이라고 할 때 임의의 $X,\ Y,\ Z,\ U\in\Gamma(TM)$에 대하여 다음의 관계식이 성립된다.

$$\begin{aligned}(\nabla_X Q)(Y,\ Z,\ U)-(\nabla_Y Q)(X,\ Z,\ U)&=(\nabla^\circ{}_X Q)(Y,\ Z,\ U)-(\nabla^\circ{}_Y Q)(X,\ Z,\ U)+\\&+\{Q(Z,Q^\#(Y,\ U),\ X)-Q(Q^\#(Y,\ U),\ X,\ Z)+Q(U,\ Q^\#(Y,\ Z),\ X)-\\&-Q(Q^\#(Y,\ Z),\ X,\ U)-Q(Z,\ Q^\#(X,\ U),\ Y)+Q(Q^\#(X,\ U),\ Y,\ Z)-\\&-Q(U,\ Q^\#(X,\ Z),\ Y)+Q(Q^\#(X,\ Z),\ Y,\ U)\}/2\end{aligned}$$

여기서 $Q(X,Y,Z)=(\nabla_X g)(Y,\ Z)$이며 $Q^\#$은 $Q(X,Y,Z)=g(Q^\#(X,\ Y),\ Z)$를 만족시키는 (1, 2)형텐소르이다.

선행연구[1]에서는 대칭접속 ∇와 $\overline{\nabla}^*$이 g에 관한 τ에 의하여 일반화된 공액접속들이고 τ가 닫긴1−형식일 때 ∇가 등적아핀이기 위해서는 $\overline{\nabla}^*$이 등적아핀일것이 필요하고 충분하다는것을 밝혔다.

다음의 정리는 대칭접속 ∇와 $\overline{\nabla}^*$이 g에 관한 τ에 의하여 일반화된 공액접속들일 때 ∇와 $\overline{\nabla}^*$이 동시에 등적아핀이기 위한 한가지 충분조건을 보여준다.

정리 $(M,\ g)$를 반리만다양체, τ를 M우의 닫긴1−형식이라고 하자. 이때 ∇와 $\overline{\nabla}^*$이 g에 관한 τ에 의해 일반화된 공액인 두 접속들로서 대칭이라고 가정하자.

R, $\overline{R}^*$을 각각 ∇, $\overline{\nabla}^*$의 곡률텐소르들이라고 할 때 $R=\overline{R}^*$이 성립되면 ∇, $\overline{\nabla}^*$은 동시에 등적아핀이다.

증명 M우의 대칭접속 ∇가 등적아핀이기 위해서는 국부자리표계 $(U, x^1, \cdots, x^n)$에서 $\nabla_{\partial_i}\partial_j=\Gamma_{ij}^k\partial_k$, $\forall i, j, k\in\{1,\cdots, n\}$이라고 할 때 다음의 식이 성립할것이 필요하고 충분하다.[2]

$$\partial_i\Gamma_{jk}^k=\partial_j\Gamma_{ik}^k,\ \forall i,\ j\in\{1,\cdots,n\} \tag{5}$$

$\nabla_X Y=\nabla_X^\circ Y-P^\#(X,\ Y)/2,\ \forall X, Y\in\Gamma(TM)$일 때 국부자리표계 $(U, x^1, \cdots, x^n)$에서

$$0=\partial_i\Gamma_{jk}^k-\partial_j\Gamma_{ik}^k=\partial_i({\Gamma^{(0)}}_{jk}^k-P_{jk}^k/2)-\partial_j({\Gamma^{(0)}}_{ik}^k-P_{ik}^k/2)=-(\partial_i P_{jk}^k-\partial_j P_{ik}^k)/2$$

이므로 식 (5)는 $X(\mathrm{tr}\{Z\mapsto P^\#(Y,Z)\})=Y(\mathrm{tr}\{Z\mapsto P^\#(X,Z)\}),\ \forall X,\ Y\in\Gamma(TM)$과 동등하며 이것은 레비-치비따접속의 대칭성으로부터 다음의 식과 동등하다.

$$\nabla_X^\circ \mathrm{tr}\{Z\mapsto P^\#(Y,\ Z)\}=\nabla_Y^\circ \mathrm{tr}\{Z\mapsto P^\#(X,Z)\},\ \ \forall X, Y\in\Gamma(TM) \tag{6}$$

$\nabla^\circ g=0$이고 $\nabla_X^\circ \mathrm{tr}\{Z\mapsto P^\#(Y,\ Z)\}=\mathrm{tr}_g\{(Z,\ U)\mapsto(\nabla_X^\circ P)(Y,\ Z,\ U)\},\ \forall X, Y\in\Gamma(TM)$이므로 식 (6)은 다음의 식과 동등하다.

$$\mathrm{tr}_g\{(Z,\ U)\mapsto(\nabla_X^\circ P)(Y,\ Z,\ U)\}=\mathrm{tr}_g\{(Z,\ U)\mapsto(\nabla_Y^\circ P)(X,\ Z,\ U)\} \tag{7}$$

그런데 $\nabla^\circ g=0$과

$$Q(X,\ Y,\ Z)=Q(X,\ Z,\ Y),\ \forall X,\ Y,\ Z\in\Gamma(TM)$$
$$P(X,\ Y,\ Z):=Q(X,\ Y,\ Z)+Q(Y,\ Z,\ X)-Q(Z,\ X,\ Y),\quad \forall X,\ Y,\ Z\in\Gamma(TM)$$

을 리용하면 임의의 $X, Y\in\Gamma(TM)$에 대하여

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}_g\{(Z, U)\mapsto(\nabla_X^\circ P)(Y,\ Z,\ U)\}-\mathrm{tr}_g\{(Z, U)\mapsto(\nabla_Y^\circ P)(X,\ Z,\ U)\}=\\
&=\nabla_X^\circ \mathrm{tr}_g\{(Z,\ U)\mapsto P(Y,\ Z,\ U)\}-\nabla_Y^\circ \mathrm{tr}_g\{(Z, U)\mapsto P(X,\ Z,\ U)\}=\\
&=\nabla_X^\circ \mathrm{tr}_g\{(Z, U)\mapsto[Q(Y,\ Z, U)+Q(Z,U,\ Y)-Q(U,\ Y,\ Z)]\}-\\
&-\nabla_Y^\circ \mathrm{tr}_g\{(Z, U)\mapsto[Q(X,\ Z, U)+Q(Z, U,\ X)-Q(U,\ X,\ Z)]\}=\\
&=\nabla_X^\circ \mathrm{tr}_g\{(Z, U)\mapsto[Q(Y,\ Z, U)+Q(Z, Y, U)-Q(U, Y,\ Z)]\}-\\
&-\nabla_Y^\circ \mathrm{tr}_g\{(Z, U)\mapsto[Q(X,\ Z, U)+Q(Z,\ X,\ U)-Q(U,\ X,\ Z)]\}=\\
&=\nabla_X^\circ \mathrm{tr}_g\{(Z,\ U)\mapsto Q(Y,\ Z,\ U)\}-\nabla_Y^\circ \mathrm{tr}_g\{(Z,\ U)\mapsto Q(X,\ Z,\ U)\}=\\
&=\mathrm{tr}_g\{(Z,\ U)\mapsto[(\nabla_X^\circ Q)(Y,\ Z,\ U)-(\nabla_Y^\circ Q)(X,\ Z,\ U)]\}
\end{aligned}$$

이다. 조건으로부터 $R=\overline{R}^*$이므로 보조정리 2에 의하여

$$(\nabla_X Q)(Y,\ Z,\ U)-(\nabla_Y Q)(X,\ Z,\ U)=0,\ \forall X,\ Y,\ Z,\ U\in\Gamma(TM)$$

이고 다시 보조정리 3으로부터 임의의 $X, Y, Z,\ U\in\Gamma(TM)$에 대하여

$$\begin{aligned}
0=&(\nabla_X^\circ Q)(Y,\ Z,\ U)-(\nabla_Y^\circ Q)(X,\ Z,\ U)+\\
&+\{Q(Z,\ Q^\#(Y,\ U),\ X)-Q(Q^\#(Y, U),\ X,\ Z)+Q(U,\ Q^\#(Y, Z),\ X)-\\
&-Q(Q^\#(Y, Z),\ X,\ U)-Q(Z,\ Q^\#(X, U), Y)+Q(Q^\#(X, U), Y,\ Z)-\\
&-Q(U,\ Q^\#(X,\ Z), Y)+Q(Q^\#(X,\ Z), Y, U)\}/2
\end{aligned}$$

이므로 임의의 $X,\ Y \in \Gamma(TM)$ 에 대하여

$$\begin{aligned}0 = \mathrm{tr}_g\{(Z,\ U) \mapsto [(\nabla^{\circ}_X Q)(Y,\ Z,\ U) - (\nabla^{\circ}_Y Q)(X,\ Z,\ U) +\\ + (Q(Z,\ Q^{\#}(Y,\ U),\ X) - Q(Q^{\#}(Y,\ U),\ X,\ Z) + Q(U,\ Q^{\#}(Y,\ Z),\ X) -\\ - Q(Q^{\#}(Y,\ Z),\ X,\ U) - Q(Z,\ Q^{\#}(X,\ U),\ Y) + Q(Q^{\#}(X,\ U),\ Y,\ Z) -\\ - Q(U,\ Q^{\#}(X,\ Z),\ Y) + Q(Q^{\#}(X,\ Z),\ Y,\ U))/2]\}\\ = \mathrm{tr}_g\{(Z,\ U) \mapsto [(\nabla^{\circ}_X Q)(Y,\ Z,\ U) - (\nabla^{\circ}_Y Q)(X,\ Z,\ U)]\} +\\ + \mathrm{tr}_g\{(Z,\ U) \mapsto [Q(Z,\ Q^{\#}(Y,\ U),\ X) - Q(Q^{\#}(Y,\ U),\ X,\ Z) +\\ + Q(U,\ Q^{\#}(Y,\ Z),\ X) - Q(Q^{\#}(Y,\ Z),\ X,\ U) - Q(Z,\ Q^{\#}(X,\ U),\ Y) +\\ + Q(Q^{\#}(X,\ U),\ Y,\ Z) - Q(U,\ Q^{\#}(X,\ Z),\ Y) + Q(Q^{\#}(X,\ Z),\ Y,\ U)]\}/2\end{aligned}$$

이다. 그런데

$$Q(X,\ Y,\ Z) = Q(X,\ Z,\ Y),\ \forall X,\ Y,\ Z \in \Gamma(TM)$$

$$\mathrm{tr}_g\{(Z,\ U) \mapsto Q(Z,\ Q^{\#}(Y,\ U),\ X)\} = \mathrm{tr}_g\{(Z,\ U) \mapsto Q(Q^{\#}(Y,\ U),\ Z,\ X)\},\ \forall X,\ Y \in \Gamma(TM)$$

이므로 임의의 $X,\ Y \in \Gamma(TM)$ 에 대하여

$$\mathrm{tr}_g\{(Z,\ U) \mapsto [(\nabla^{\circ}_X Q)(Y,\ Z,\ U) - (\nabla^{\circ}_Y Q)(X,\ Z,\ U)]\} = 0$$

이 성립되며 이로부터 식 (7)이 성립된다. 즉 ∇는 등적아핀이다.

이때 선행연구[1]의 결과로부터 동시에 $\overline{\nabla}^*$도 등적아핀이다.(증명끝)

통계다양체 $(M,\ g,\ \nabla,\ \nabla^*)$가 공액대칭이면 즉 $R,\ R^*$이 각각 $\nabla,\ \nabla^*$의 곡률텐소르들일 때 $R = R^*$이면 ∇와 ∇^*이 동시에 등적아핀이라는것이 알려져있다.[4]

우의 정리는 통계다양체에서 공액인 접속쌍에 대하여 성립되는 결과를 반리만다양체에서 일반화된 공액접속쌍에로 일반화한것이라고 말할수 있다.

참 고 문 헌

[1] O. Calin et al.; Complex Analysis and Mathematical Physics, World Scientific, 24～34, 2009.

[2] H. Matsuzoe et al.; Diff. Geom. Appl., 24, 567, 2006.

[3] J. Takeuchi et al.; IEEE Trans. Inform. Theory, 51, 1011, 2005.

[4] J. Zhang; Ann. Inst. Stat. Math., 59, 3, 161, 2007.

주체109(2020)년 9월 5일 원고접수

Equiaffinity of Generalized Conjugate Connections on Semi-Riemannian Manifolds

Min Chol Rim, Jong Kang Min

We find a sufficient condition for a pair of generalized conjugate connections to be equiaffine on semi-Riemannian manifolds.

Keywords: statistical manifold, conjugate connection