김일성종합대학학보 주체107(2018)년
수 학 제64권 제3호

3단기둥매듭의 자이훠트행렬과 불변량

김길, 리강일

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《과학기술부문에서 첨단돌파전을 힘있게 벌려야 하겠습니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 39페지)

자이훠트행렬은 매듭으로부터 얻어지는 행렬이다. 자이훠트행렬로부터 알렉싼더다항식, 특성수를 비롯한 중요한 매듭불변량들이 얻어진다.[2, 3] 그러나 매듭의 자이훠트행렬을 정의에 기초하여 결정하는것은 대단히 복잡하다.[1] 자이훠트행렬은 또르매듭과 일정한 부류의 두다리매듭에 대하여 알려져있는데 임의로 주어진 매듭에 대해서는 자이훠트행렬을 구성하는 일반적인 방법만 있고 그것을 적용하기가 어렵다. 한편 매듭의 자이훠트행렬은 자이훠트곡면의 성질을 반영하고있다. 매듭과 관련된 곡면들의 연구는 저차원위상에서 중요한 문제로 제기되고있으며 매듭의 자이훠트행렬을 결정하는 효과적인 알고리듬을 얻는것은 실천적으로 큰 의의를 가진다.[4] 이로부터 론문에서는 기둥매듭의 한 부류인 3단기둥매듭에 대하여 자이훠트행렬을 구하는 공식을 얻고 그것으로부터 매듭불변량들인 행렬식불변량과 특성수를 결정하는 문제를 해결한다.

유향련결곡면 F의 경계가 매듭 K와 동등할 때 F를 K의 자이훠트곡면이라고 부른다.

임의의 매듭에 대하여 그것을 경계로 가지는 자이훠트곡면이 존재한다. 그런데 자이훠트곡면을 구하는 한가지 방법은 매듭사영도를 리용하는것이다. 이 방법으로 구해진 자이훠트곡면으로부터 자이훠트행렬이라고 부르는 행렬을 구성하는 방법은 다음과 같다.

우선 곡면에서 원판들을 점으로, 띠들을 선으로 수축하여 자이훠트그라프를 얻는다.

다음으로 이 그라프에서 매 닫긴곡선(이것을 고리라고 부른다.)들을 자이훠트곡면에 묻는다. 이때 고리들에는 임의로 방향을 준다. 그리고 자이훠트곡면 F를《두껍게》한다. 즉 모임 $F\times[0, 1]$을 생각한다.(여기서 $F\times(0)$은 처음의 자이훠트곡면 F이고 $F\times(1)$은 F의 들기이다.) 이때 두 고리 α_1, α_2의 들기를 $\alpha_1^{\#}, \alpha_2^{\#}$으로 표시하면 처음의 곡면 F와 그것의 들기에 의하여 얻어진 곡면의 곡선들은 얽힘을 이루며 따라서 얽힘수 $lk(\alpha_1, \alpha_2^{\#})$, $lk(\alpha_1^{\#}, \alpha_2)$를 얻을수 있다. 우와 같이 얻어진 모든 고리 $\alpha_i\ (1\le i\le m)$들의 가능한 모든 쌍들에 대한 얽힘수 $lk(\alpha_i, \alpha_j^{\#})\ (1\le i,\ j\le m)$을 원소로 가지는 행렬 $M:=[lk(\alpha_i, \alpha_j^{\#})]$을 매듭의 자이훠트행렬이라고 부른다.

1. 자이훠트행렬의 결정방법

정의에 기초하여 매듭의 자이훠트행렬을 구하는것은 복잡하다. 그러므로 매듭의 자이훠트행렬을 쉽게 구할수 있는 방법이 필요하다. 그 한가지 방법이 사영도를 리용하는 도식적인 방법이다. 이것을 보기로 하자.

자이훠트곡면의 어떤 곡선과 그것의 들기에 의하여 얻어진 곡선사이의 얽힘을 생각하자.(이 두 곡선의 사귐점들은 본래의 사영도의 교차점들뿐이며 다만 교차점들에서의 부호가 이전과 다를수 있다.) 이때 얽힘수는 고리를 따라가며 구한 교차점들에서의 부호들의 합의 절반과 같다.

우선 자이훠트그라프에서 변들을 따라 이웃한 고리들사이의 얽힘을 보기로 하자.

한 고리와 그것의 들기에 의하여 얻어지는 두 곡선의 공간적인 배치관계는 다음과 같다.

① 이웃한 교차점들에서 띠의 상태를 보존하면서 두 고리의 가지들을 자이훠트곡면에 배치한다. 이때 생기는 추가적인 사귐점들에서 띠의 상태는 들어올린 고리의 가지가 우로 지나도록 정한다.

② 두 가지의 얽힘수를 구하면 고리들사이의 얽힘수가 얻어진다.

자이훠트그라프에서 한 정점을 공유하는 고리들사이의 얽힘을 보기로 하자.

공통정점에 해당한 자이훠트원판에서 볼 때 원판의 경계에 있는 두 고리의 끝점들은 경계원주를 분리하는 쌍을 이루거나 그렇지 않다. 만일 끝점쌍들이 원주를 분리하지 않으면 고리들사이의 얽힘수는 0이다. 그리고 끝점쌍들이 원주를 분리하면 번호가 작은 고리는 원판의 아래쪽에 있다고 보고 번호가 큰 고리는 원판의 웃쪽에 있다고 보고 공간에서 두 고리사이의 얽힘수를 계산한다. 이것은 공통정점에 해당한 자이훠트원판에서 들어올린 가지의 끝점들을 련결하는 활줄을 웃가지로, 다른 가지의 끝점들을 련결하는 활줄을 아래가지로 그렸을 때 나타나는 교차점의 부호와 같다.

이상의 결과들을 종합하면 다음의 결과가 얻어진다.

정리 1 자이훠트행렬의 원소인 고리들사이의 얽힘수는 다음과 같이 결정된다.

① $lk(a, a^{\#})$은 사영도에서 곡선 a를 따라가면서 교차점의 부호들을 더한 값의 절반과 같다.

② 고리 a, b가 자이훠트그라프에서 변들을 따라 이웃한 고리들이면 $lk(a, b^{\#})$은 사영도 변에 해당한 공통교차점들을 보존하면서 고리 a, b를 나란히 그릴 때 새로 생긴 점에서 b의 가지를 웃가지로 놓고 구한 얽힘수와 같다.

③ 고리 a, b가 자이훠트그라프에서 공통점을 가지는 고리들이면 $lk(a, b^{\#})$은 공통점에 해당한 자이훠트원주에서 a의 끝점들을 맺는 활줄을 아래가지, b의 끝점들을 맺는 활줄을 웃가지로 볼 때 생기는 교차점의 부호와 같다.

2. 3단기둥매듭의 자이훠트행렬

기둥매듭에 대한 연구는 아직 종결되지 못하였다.[5] 여기서는 3개의 블로크로 이루어진 기둥매듭의 자이훠트행렬을 구한다.

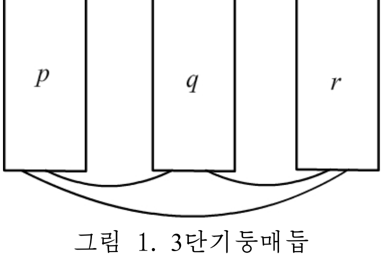

그림 1. 3단기둥매듭

사영도가 그림 1과 같은 매듭을 3단기둥매듭이라고 부른다.(그림 1에서 p, q, r는 매 단의 지수 즉 부호를 고려한 교차점들의 개수이다.)

앞으로 p의 부호를 p'로 표시한다.

이 사영도가 실지로 매듭을 표시하는 경우는 p, q, r

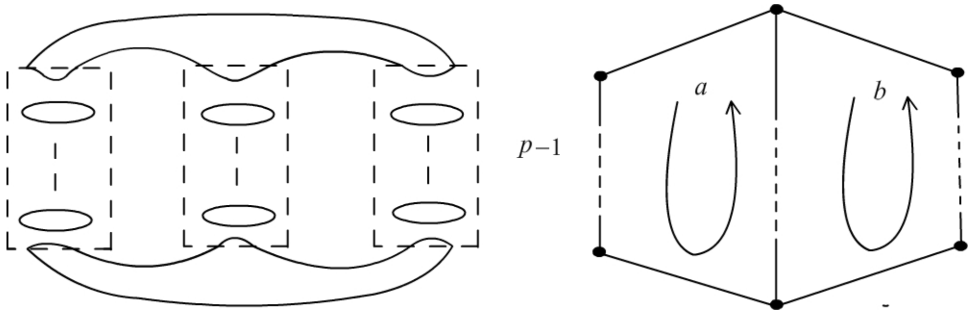

그림 2. 토대를 이루는 고리

들가운데서 짝수가 기껏 1개 있는 경우들이다. 그 경우들가운데서 본질적으로 다른 경우는 두가지이다. 즉 p, q, r가 모두 홀수인 경우와 q만이 짝수인 경우이다.

우선 p, q, r가 모두 홀수인 경우를 보기로 하자.

이 경우에 매 단에서 가지들의 방향은 서로 반대이며 자이훠트원주와 자이훠트그라프, 토대를 이루는 고리들은 그림 2와 같다.

$lk(a, a^{\#})$을 계산하자.

이것은 사영도에서 고리 a를 따라가면서 교차점의 부호들을 더한 값의 절반과 같다. 그런데 고리를 따라갈 때 띠의 방향과 단에서의 띠의 방향이 일치하므로

$$lk(a, a^{\#}) = \frac{p+q}{2}$$

이다.

마찬가지로

$$lk(b, b^{\#}) = \frac{q+r}{2}$$

이다.

다음으로 $lk(b, a^{\#})$을 계산하자.

이것은 둘째 단의 가지들을 그대로 리용하면서 고리 a, b를 나란히 그릴 때 새로 생긴 점에서 a의 가지를 웃가지로 놓고 구한 얽힘수와 같다. 그런데 교차점의 부호를 계산할 때 리용되는 두 가지의 방향은 $lk(b, a^{\#})$을 계산할 때와 단에서 계산할 때 다르다. 즉 한 가지의 방향이 바뀐다. 그리고 추가적인 교차점의 부호를 고려하면 다음과 같다.

$$lk(b, a^{\#}) = \frac{1}{2}(-q-1)$$

마찬가지로 $lk(a, b^{\#})$에 대하여 다음의 결과도 얻어진다.

$$lk(a, b^{\#}) = \frac{1}{2}(-q+1)$$

결국 다음의 결과가 얻어진다.

정리 2 p, q, r가 모두 홀수인 3단기둥매듭의 자이훠트행렬 M은 다음과 같다.

$$M = \begin{bmatrix} \frac{p+q}{2} & \frac{-q+1}{2} \\ \frac{-q-1}{2} & \frac{q+r}{2} \end{bmatrix}$$

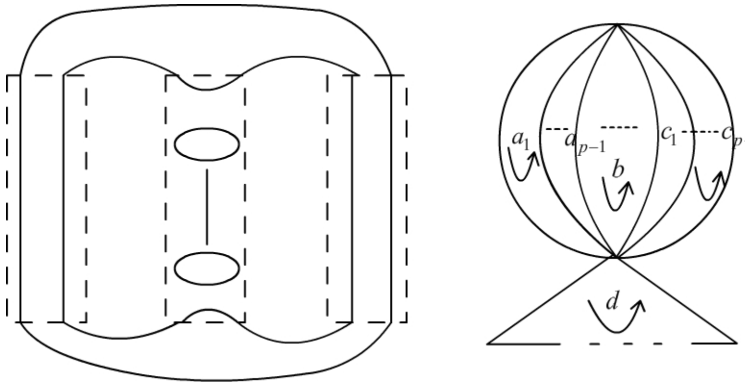

그림 3. 자이훠트원주, 자이훠트그라프와 토대를 이루는 고리

다음으로 $p,\ r$가 홀수이고 q가 짝수인 경우를 보기로 하자.

이때 가지들의 방향은 가운데단에서 반대이고 량끝단에서 같다. 자이훠트원주, 자이훠트그라프와 토대를 이루는 고리들은 그림 3과 같다.

$lk(a_i,\ a_i)$는 고리 a_i를 따라 교차점들을 지나면서 그 점에서의 부호들을 합하고 2로 나눈 값이다. 단에서 띠의 방향과 고리를 따르는 띠의 방향이 《직교》하므로 이때의 부호는 p의 부호와 반대이다. 즉 $-p'$이다.

$lk(a_i,\ a_{i+1}^{\#}),\ lk(a_i^{\#},\ a_{i+1})$을 계산하기 위하여 해당한 교차점에서 가지들을 그대로 리용하고 고리들을 나란히 그린다. 새로 생긴 교차점에서 웃가지를 들어올린 가지로 놓으면

$$lk(a_i,\ a_{i+1}^{\#}) = p',\ lk(a_i^{\#},\ a_{i+1}) = 0$$

이라는것이 얻어진다.

역시

$$lk(c_j,\ c_{j+1}^{\#}) = r',\ lk(c_{j+1},\ c_j^{\#}) = 0,\ lk(c_j,\ c_j^{\#}) = -r'$$

이다.

이제 $a_{|p|-1} = a,\ c_1 = c$로 표시하자. 그러면 마찬가지론의에 의하여 다음의 결과가 나온다.

$$lk(a,\ b^{\#}) = p',\ lk(a^{\#},\ b) = 0,\ lk(b,\ c^{\#}) = r',\ lk(c,\ b^{\#}) = 0$$

$$lk(b,\ b^{\#}) = \frac{1}{2}(-p' - r')$$

고리 a_i와 c_j, a_i와 d, c_j와 d들은 떨어져있으므로 해당한 얽힘수들은 0이다.

고리 b와 d는 자이훠트그라프에서 정점을 공유하고있다. 이 경우에는 d를 들어올릴 때에만 두 곡선이 얽히므로 다음의 결과가 얻어진다.

$$lk(b,\ d^{\#}) = 1,\ lk(b^{\#},\ d) = 0$$

그리고 분명히 $lk(d,\ d^{\#}) = q/2$이다.

결국 다음의 결과가 얻어진다.

정리 3 $p,\ r$가 홀수이고 q가 짝수인 3단기둥매듭의 자이훠트행렬 M은 다음과 같다.

$$M=\begin{bmatrix} -p' & p' & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -p' & p' & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p' & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -p' & p' & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \dfrac{-p'-r'}{2} & r' & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -r' & r' & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -r' & r' & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & -r' & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -r' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \dfrac{q}{2} \end{bmatrix}$$

3. 자이훠트행렬로부터 얻어지는 3단기둥매듭의 불변량

M 이 매듭 K 의 자이훠트행렬일 때 대칭행렬 $A:=M+M^{\mathrm{T}}$ 를 생각하자.

다음의 사실들이 알려져있다.[2]

명제 1 행렬식 $\det A$ 의 절대값과 특성수 $\sigma(K)$ 는 매듭불변량이다. 여기서 $\sigma(K)$ 는 A 의 정의 고유값들의 개수와 부의 고유값들의 개수의 차이다.

명제 2 매듭의 특성수 $\sigma(K)$ 는 짝수이다.

명제 3 $\sigma(K)$ 는 매듭의 해소수 $u(K)$ 의 아래한계를 준다. 즉 부등식

$$|\sigma(K)|\le 2u(K)$$

가 성립한다.

대칭행렬 $A:=M+M^{\mathrm{T}}$ 를 주대각선행렬로 만들기 위하여 행렬의 기본변환을 적용하자. 이때 행에 관한 어떤 기본변환과 렬에 관한 대응하는 기본변환을 동시에 실시한다. 그러면 결과적으로 주대각선행렬 $A':=PAP^{\mathrm{T}}$ 가 얻어진다.(여기서 P 는 $\det P=\pm 1$ 인 어떤 옹근수행렬이다.) 이때 $|\det A|=|\det A'|$ 이고 $\sigma(K)$ 는 A' 의 주대각선에 놓이는 정수들의 개수에서 부수들의 개수를 던 값과 같다.

① $p,\ q,\ r$ 가 모두 홀수인 경우

$$A:=\begin{bmatrix} p+q & -q \\ -q & q+r \end{bmatrix}$$

를 대각화하면 다음의 행렬이 얻어진다.

$$A':=\begin{bmatrix} p+q & 0 \\ 0 & \dfrac{pq+qr+rp}{q+r} \end{bmatrix}$$

따라서 $\det A=pq+qr+rp$ 이다.

② $p,\ r$ 가 홀수이고 q 가 짝수인 경우

$$A=\begin{bmatrix}
-2p' & p' & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & -2p' & p' & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & 0 & -2p' & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & -2p' & p' & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -p'-r' & r' & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & r' & -2r' & r' & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & r' & -2r' & r' & \cdots & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & r' & -2r' & \cdots & 0 & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2r' & 0\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & q
\end{bmatrix}$$

첫째 행에 $1/2$을 곱하여 둘째 행에 더하고 첫째 렬에 $1/2$을 곱하여 둘째 렬에 더한다. 둘째 행에 $2/3$를 곱하여 셋째 행에 더하고 둘째 렬에 $2/3$를 곱하여 셋째 렬에 더한다. 이 조작을 반복하면 왼쪽 웃부분에 놓이는 다음의 대각선블로크행렬이 분리된다.

$$\begin{bmatrix}
-\frac{2}{1}p' & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & -\frac{3}{2}p' & 0 & \cdots & 0\\
0 & 0 & -\frac{4}{3}p' & \cdots & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{|p|}{|p|-1}p'
\end{bmatrix}$$

그리고 나머지블로크행렬은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix}
-\frac{p'}{|p|}-r' & r' & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\
r' & -2r' & r' & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & r' & -2r' & r' & \cdots & 0 & 0\\
0 & 0 & r' & -2r' & \cdots & \cdots & \cdots\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2r' & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & q
\end{bmatrix}$$

여기서 $p'/|p|=1/p$이다. 론의를 간단히 하기 위하여 $r'=1$인 경우를 보기로 하자.

이 행렬의 첫째 행에 $p/(p+1)$를 곱하여 둘째 행에 더하고 렬에 대해서도 같은 조작을 한다. 이 조작을 반복하여 첫째 행에 $p/(p+1)$를 곱한 다음 그것을 마지막행에 더하고 렬에 대해서도 같은 조작을 한다. 그러면 다음의 행렬이 얻어진다.

$$\begin{bmatrix} -\frac{p+1}{p} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{p+2}{p+1} & 1 & 0 & \cdots & 0 & \frac{p}{p+1} \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 0 \\ 0 & \frac{p}{p+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & q+\frac{p}{p+1} \end{bmatrix}$$

이제는 첫째 행과 첫째 렬을 제거한 한차원 낮은 행렬을 생각하자. 이 행렬의 첫째 행에 $(p+1)/(p+2)$ 을 곱하여 둘째 행에 더하고 렬에 대해서도 같은 조작을 한다. 이 조작을 반복하여 첫째 행에 $p/(p+2)$ 를 곱한 다음 그것을 마지막행에 더하고 렬에 대해서도 같은 조작을 한다. 그러면 결과적으로 대각선행렬이 얻어지는데 이때 주대각선에 놓이는 원소들은 다음과 같다.

$$-\frac{p+1}{p},\ -\frac{p+2}{p+1},\ -\frac{p+3}{p+2},\ \cdots,\ -\frac{p+r}{p+r-1},\ q_r$$

여기서

$$q_r = q+\frac{p}{p}\cdot\frac{p}{p+1}+\frac{p}{p+1}\cdot\frac{p}{p+2}+\ \cdots\ +\frac{p}{p+r-1}\cdot\frac{p}{p+r}$$

이다.

$r'=-1$ 인 경우에도 같은 방법으로 론의할수 있다. 이때 주대각선에 놓이는 원소들은 다음과 같다.

$$\frac{p-1}{p},\ \frac{p-2}{p-1},\ \frac{p-3}{p-2},\ \cdots,\ \frac{p-r}{p-r+1},\ q_r$$

여기서

$$q_r = q-\frac{p}{p}\cdot\frac{p}{p-1}-\frac{p}{p-1}\cdot\frac{p}{p-2}-\ \cdots\ -\frac{p}{p-r+1}\cdot\frac{p}{p-r}$$

이다.

이제는 행렬 A 에 대하여 행렬식의 절대값과 정의 고유값의 개수에서 부의 고유값의 개수를 던 값을 쉽게 구할수 있다.

① $p,\ q,\ r$ 가 모두 홀수인 경우

이 경우에는 $\det A = pq+qr+rp$ 이다.

② $p,\ r$ 가 홀수이고 q 가 짝수인 경우

$p\neq -r$ 이면 $\det A = -p'(p+r)$ 이다.

$p=-r$ 이면 앞의 론의에 따라 마지막 2차행렬이 대각화되지 않는다. 그 행렬들은 각각 다음과 같다.

$$B_r=\begin{bmatrix} 0 & -p \\ -p & q_{r-1} \end{bmatrix}(r'=1\text{ 인 경우}),\ \ B_r=\begin{bmatrix} 0 & p \\ p & q_{r-1} \end{bmatrix}(r'=-1\text{ 인 경우})$$

따라서 $\det A = -r'p^2$ 이다.

대각화할 때 주대각선에는 정수와 부수가 1개씩 나타난다. 그러므로 $\sigma(B_r)=0$ 이다.

이상의 결과들을 종합하면 다음의 사실이 얻어진다.

정리 4 3단기둥매듭의 행렬식불변량은 p, q, r 가 모두 홀수이면 $|pq+qr+rp|$ 이고 p, r 가 홀수이고 q 가 짝수이면 $p\neq -r$ 일 때 $|(p+r)q_r|$ 이고 $p=-r$ 일 때 p^2 이다. 여기서 $|p|\geq |r|$ 이다.

정리 5 3단기둥매듭의 특성수는 p, q, r 가 모두 홀수이면 $(pq+qr+rp)'(q+r)'+(p+q)'$ 이고 p, r 가 홀수이고 q 가 짝수이면 $p\neq -r$ 일 때 $-p+p'-r+(q_r)'$ 이며 $p=-r$ 일 때 $p'+1$ 이다. 여기서 $|p|\geq |r|$ 이다.

참 고 문 헌

[1] C. Balm et al.; Comm. Anal. Geom. 20, 235, 2012.
[2] P. Cromwell; Knots and Links, Cambridge University Press, 129～153, 2004.
[3] Y. Nakannishi; J. Knot Theory Ramifications 14, 1, 3, 2005.
[4] P. Przytycki, J. Schultens; Trans. Amer. Math. Soc., 364, 1489, 2012.
[5] J. K. Zhang, B. Lu; J. Knot Theory Ramifications, 17, 2, 157, 2008.

주체107(2018)년 3월 10일 원고접수

Seifert Matrices and Invariants of 3-Block Pretzel Knots

Kim Kil, Ri Kang Il

We obtain some methods for the Seifert matrix from the given knot diagram. We also determine Seifert matrices of 3-block pretzel knots and invariants derived from them.

Key words: pretzel knot, Seifert matrix, knot signature