김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체103(2014)년 제60권 제10호 Vol. 60 No. 10 JUCHE103(2014).

반순서완비거리공간에서 축소형다가넘기기의 부동점정리

김은혜, 리미경, 림창일

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 지적하시였다.

《현대과학기술의 빠른 발전은 기초과학의 성과에 토대하고있으며 과학기술분야에서의 자립성은 기초과학분야에서부터 시작됩니다.》(《**김정일**선집》 제10권 증보판 485폐지)

부동점리론에서 축소형조건은 매우 중요한 역할을 한다.

$(E, \|\cdot\|)$ 이 바나흐공간일 때 넘기기 $F: E\to E$ 가 어떤 상수 $0\le k<1$ 에 대하여 $\|Fx-Fy\|\le k\cdot\|x-y\|$ $(x,\ y\in E)$ 를 만족시키면 넘기기 F 는 바나흐축소원리를 만족시킨다고 말한다. 이때 넘기기 F 가 부동점을 가진다는 축소넘기기원리에 이어 선행연구[2]에서는 이 축소넘기기원리를 일반화하여 완비거리공간 E 에서 넘기기 $F: E\to E$ 가 $d(Fx,\ Fy)\le\beta(d(x,\ y))\cdot d(x,\ y)$ $(x,\ y\in E)$ 를 만족시키면 부동점을 가진다는것을 밝혔다. 여기서 $\beta:[0,\ \infty)\to[0,\ 1)$ 은 $\beta(t_n)\to 1\Rightarrow t_n\to 0$ $(n\to\infty)$ 을 만족시킨다.

선행연구[3]에서는 반순서완비거리공간에서 $\exists x_0\in E,\ x_0\le Fx_0$ 이고

$$d(Fx,\ Fy)\le\beta(d(x,\ y))\cdot d(x,\ y)\ \ (x,\ y\in E,\ \ x\ge y)$$

를 만족시키는 넘기기 $F: E\to E$ 가 부동점을 가진다는것을 밝혔다.

최근에 한값넘기기의 부동점정리들이 다가넘기기로 확장되면서 다가넘기기의 부동점존재성이 여러가지 축소형조건들을 리용하여 얻어지고있다.

선행연구[4]에서는 다가넘기기 $G: E\to 2^E$ 가 UCAV를 가지고 일반화된 약축소넘기기이면 즉 $f(H_d(Gx,\ Gy))\le f(d(x,\ y))-\varphi(f(d(x,\ y)))$ $(x,\ y\in E,\ x\ge y)$ 이면 부동점을 가진다는것을 밝혔다.

론문에서는 선행연구[1, 3]의 결과를 다가넘기기에로 확장하였다.

론문에서 공간 $(E,\ d,\ \le)$ 은 반순서완비거리공간으로서 E 의 증가(감소)렬 $\{x_n\}$ 이 x 로 수렴하면 $x_n\le x$ $(x_n\ge x),\ n\in N$ 이라는 가정을 만족시킨다.

2^E 에서의 하우스도르프준거리 $H_d: 2^E\times 2^E\to R_+\cup\{\infty\}$ 는

$$H_d(C,\ D):=\max\left\{\sup_{a\in C} d(a,\ D),\ \sup_{b\in D} d(C,\ b)\right\}$$

로 정의한다. 여기서 $d(a,\ D)=\inf_{d\in D}\{d(a,\ d),\ \ d(C,\ b)\}=\inf_{c\in C} d(c,\ b)$ 이다.

정의 1 [4] 공간 E 의 부분모임 D 에 대하여 넘기기

$$P_D(x)=\{y\in D: d(x,\ y)=d(x,\ D)\},\ x\in D$$

가 비지 않는 값을 가질 때 D 는 근사적이라고 말한다.

다가넘기기 $G: E\to 2^E$ 가 임의의 x 에 대하여 근사적인 Gx 를 가질 때 G 는 근사값 간단히 AV를 가진다고 말한다.

만약 $G:E\to 2^E$ 가 근사값을 가지고 임의의 $x\in E$ 에 대하여 x 와 비교할수 있는 $y\in P_{Gx}(x)$ 가 존재한다면 G 는 비교가능한 근사값 간단히 CAV를 가진다고 말한다. 또한 $G:E\to 2^E$ 가 근사값을 가지고 임의의 $x\in E$ 에 대하여 $y\ge x\,(y\le x)$ 인 $y\in P_{Gx}(x)$ 가 존재한다면 G 는 우(아래)로 비교가능한 근사값 간단히 UCAV(LCAV)를 가진다고 말한다.

넘기기 G 가 콤팍트값을 가지면 분명히 G 는 AV를 가지며 G 가 한값넘기기인 경우 UCAV(LCAV)는 $\forall x\in E,\ Gx\ge x\ \ (Gx\le x)$ 를 의미한다.

정의 2[4] $G:E\to 2^E$ 에 대하여 $x\in Gx$ 인 x 를 G 의 부동점이라고 부른다.

정의 3[4] E 의 두 부분모임 $X,\ Y$ 에 대하여 $\forall x\in X,\ \forall y\in Y,\ x\le y$ 이면 $X\le Y$ 라고 한다. 그리고 넘기기 $G:E\to 2^E$ 에 대하여 $x\le y$ 이면 $Gx\le Gy$ ($Gx\ge Gy$) 일 때 G 는 증가(감소)한다고 말한다.

론문에서는 $\beta(t_n)\to 1$ 이면 $t_n\to 0\ \ (n\to\infty)$ 이라는 가정을 만족시키는 함수족 S 를 리용한다.

정의 4[1] 함수 $\varphi:[0,\ \infty)\to[0,\ \infty)$ 가 다음의 조건들을 만족시키면 φ 를 거리변경함수라고 부른다.

① φ 는 련속이고 비감소이다.

② $\varphi(t)=0\Leftrightarrow t=0$

정리 1 다가넘기기 $G:E\to 2^E$ 가 UCAV를 가지고

$$\forall x,\ y\in E,\ \ x\le y\ ,\ \ \varphi(H_d(Gx,\ Gy))\le\beta(d(x,\ y))\cdot\varphi(d(x,\ \ y))$$

를 만족시킨다고 하자. 여기서 $\beta\in S$ 이고 φ 는 거리변경함수이다.

그러면 넘기기 G 는 부동점 $u^*\in E$ 를 가지며 임의의 $u_0\in E$ 에 대하여 $u_n\in Gu_{n-1}$ 인 반복렬 $\{u_n\}$ 은 부동점 u^* 로 수렴한다.

증명 임의의 $u_0\in E$ 를 고정할 때 $u_0\in Gu_0$ 이면 증명은 끝난다. 아니면 G 가 UCAV를 가지므로 $u_1\in Gu_0$ 이 있어서 $u_0\ne u_1,\ u_0\le u_1$ 이며 $d(u_0,\ u_1)=d(u_0,\ Gu_0)$ 이다.

이 과정을 귀납적으로 반복하면 $u_{n-1}\in Gu_{n-1}$ 이므로 증명이 끝나던지 아니면 $u_n\in Gu_{n-1}$ 이 있어서 $u_n\ne u_{n-1},\ u_{n-1}\le u_n$ 이며 $d(u_n,\ u_{n-1})=d(u_{n-1},\ Gu_{n-1})$, $n=2,\ 3,\cdots$ 이다.

거리변경함수 φ 가 비감소함수이므로 $d(u_n,\ u_{n+1})\le d(u_n,\ u_{n-1})$ 이고 따라서 수렬은 부아닌 감소렬로서 수렴한다.

이때 $\lim\limits_{n\to\infty} d(u_n,\ u_{n+1})=r\ge 0$ 인데 $r>0$ 이라고 가정하면

$$\frac{\varphi(d(u_n,\ u_{n+1}))}{\varphi(d(u_n,\ u_{n-1}))}\le\beta(d(u_n,\ \ u_{n-1}))<1,\ \ n=2,\ 3,\ 4,\cdots$$

이고 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta(d(u_n,\ u_{n-1}))=1$ 이면 $\beta\in S$ 이므로 $d(u_n,\ u_{n-1})\to 0$ 이다.

이것은 모순되므로 $\lim\limits_{n\to\infty} d(u_n,\ u_{n+1})=r\ge 0$ 이다.

이제 $\{u_n\}$ 이 꼬쉬렬임을 증명하자.

$\{u_n\}$ 이 꼬쉬렬이 아니라고 가정하면 적당한 정수 $\varepsilon>0$ 이 있어서 $\{u_n\}$ 의 부분렬 $\{u_{m(k)}\},\ \{u_{n(k)}\}$ 가 있어서 $n(k)>m(k)>k,\ d(u_{m(k)},\ u_{n(k)})\ge\varepsilon$ 이다.

$m(k)$에 대하여 $n(k)$를 $n(k)>m(k)$이면서 부등식을 만족시키는 가장 작은 옹근수로 선택하면 $d(u_{m(k)},\ u_{n(k)-1})<\varepsilon$이다.

그러면 삼각부등식으로부터

$$\varepsilon \le d(u_{m(k)},\ u_{n(k)}) \le d(u_{m(k)},\ u_{n(k)-1})+d(u_{n(k)-1},\ u_{n(k)})<\varepsilon+d(u_{n(k)-1},\ u_{n(k)})$$

이고 $k\to\infty$일 때 $\lim\limits_{k\to\infty} d(u_{n(k)},\ u_{m(k)})=\varepsilon$이다.

$$d(u_{m(k)},\ u_{n(k)}) \le d(u_{m(k)},\ u_{m(k)+1})+d(u_{m(k)+1},\ u_{n(k)+1})+d(u_{n(k)+1},\ u_{n(k)}),$$

$$d(u_{m(k)+1},\ u_{n(k)+1}) \le d(u_{m(k)+1},\ u_{m(k)})+d(u_{m(k)},\ u_{n(k)})+d(u_{n(k)},\ u_{n(k)+1})$$

이므로 $k\to\infty$일 때 $\lim\limits_{k\to\infty} d(u_{n(k)+1},\ u_{m(k)+1})=\varepsilon>0$이다.

한편 $n(k)>m(k)$이므로 $u_{n(k)}\ge u_{m(k)}$이고

$$\varphi(d(u_{n(k)+1},\ u_{m(k)+1}))\le\varphi(H_d(Gu_{n(k)},\ Gu_{m(k)}))\le\beta(d(u_{n(k)},\ u_{m(k)}))\cdot\varphi(d(u_{n(k)},\ u_{m(k)}))\ .$$

$\dfrac{\varphi(d(u_{n(k)+1},\ u_{m(k)+1}))}{\varphi(d(u_{n(k)},\ u_{m(k)}))}\le\beta(d(u_{n(k)},\ u_{m(k)}))<1$이며 $k\to\infty$일 때 $\beta(d(u_{n(k)},\ u_{m(k)}))\to 1$이므로 $\beta\in S$에 의하여 $d(u_{n(k)},\ u_{m(k)})\to 1$이여야 하는데 이것은 모순이다.

따라서 $\{u_n\}$은 꼬쉬렬이다.

그러면 E가 완비거리공간이므로 $\{u_n\}$은 $u^*\in E$로 수렴한다.

이제 u^*이 G의 부동점임을 밝히자.

$d(u_{n+1},\ Gu^*)\le H_d(Gu_n,\ Gu^*)$인데 공간 E의 성질에 의하여 $u_n\le u^*$이므로

$$\varphi(d(u_{n+1},\ Gu^*))\le\varphi(H_d(Gu_n,\ Gu^*))\le\beta(d(u_n,\ u^*))\cdot\varphi(d(u_n,\ u^*))\le\varphi(d(u_n,\ u^*))$$

이며 $d(u_{n+1},\ Gu^*)\le d(u_n,\ u^*)$이고 $\lim\limits_{n\to\infty} d(u_{n+1},\ Gu^*)=0$이다.

G가 AV를 가지므로 적당한 $y\in Gu^*$이 있어서 $d(u^*,\ y)=d(u^*,\ Gu^*)=0$이다.

따라서 $u^*=y\in Gu^*$이므로 u^*은 G의 부동점이다.(증명끝)

다가넘기기 G가 LCAV를 가지는 경우에도 류사한 정리가 성립된다.

정리 2 다가넘기기 G는 AV를 가지고 증가하며

$$\forall x,\ y\in E,\ \ x\le y\ ,\ \ \varphi(H_d(Gx,\ Gy))\le\beta(d(x,\ y))\cdot\varphi(d(x,\ y))$$

를 만족시킨다. 여기서 $\beta\in S$이고 φ는 거리변경함수이다.

만약 $u_0\in E$가 있어서 $\{u_0\}\le Gu_0$이면 G는 부동점 $u^*\in E$를 가지며 $u_n\in Gu_{n-1}$인 반복렬 $\{u_n\}$은 부동점 u^*로 수렴한다.

증명 만일 $u_0\in Gu_0$이면 증명은 끝난다.

아니면 G가 AV를 가지므로 $u_1\in Gu_0$이 있어서 $d(u_0,\ u_1)=d(u_0,\ Gu_0),\ u_0\ne u_1$이다.

이때 $\{u_0\}\le Gu_0$이므로 $u_0\le u_1$이다. 이 과정을 계속하면 $u_{n-1}\in Gu_{n-1}$이므로 증명이 끝나던지 아니면 반복렬 $\{u_n\}$을 다음의 조건을 만족시키게 얻을수 있다.

$$u_n\in Gu_{n-1}\ ,\ u_{n-1}\le u_n\ ,\ d(u_n,\ u_{n-1})=d(u_{n-1},\ Gu_{n-1})\ ,\ n=2,3,4,\cdots$$

이 반복렬 $\{u_n\}$에 대하여 정리 1의 증명을 반복하면 극한 u^*이 부동점임을 증명할수 있다. (증명끝)

정리 1, 2에서 넘기기 G가 한값넘기기인 경우 다음의 결과가 따름으로 얻어진다.

따름 1 한값넘기기 $G:E\to E$ 에 대하여 어떤 $\beta\in S$ 와 거리변경함수 φ가 있어서

$$\varphi(d(Gx,\ Gy))\le\beta(d(x,\ y))\cdot\varphi(d(x,\ y)),\quad \forall x,\ y\in E,\ \ x\le y$$

가 만족된다고 하자.

이때 아래의 가정들중 하나가 성립되면 G 는 부동점 $u^*\in E$ 를 가지며 반복렬 $\{u_n\}$ $(u_n=Gu_{n-1})$ 은 부동점 u^*로 수렴한다.

① $\forall x\in E,\ \ x\le Gx$ 이다.

② $\forall x\in E,\ \ x\ge Gx$ 이다.

③ G 는 증가하고 $u_0\le Gu_0$ 인 $u_0\in E$ 가 존재한다.

정리 2에서 거리변경함수가 $\varphi(t)=t$ 인 경우 다음의 정리가 얻어진다.

정리 3 다가넘기기 $G:E\to 2^E$ 는 AV를 가지고 증가하며

$$H_d(Gx,\ Gy)\le\beta(d(x,\ y))\cdot d(x,\ \ y),\quad \forall x,\ y\in E,\ \ x\le y$$

를 만족시킨다. 여기서 $\beta\in S$ 이다.

만약 $u_0\in E$ 가 있어서 $\{u_0\}\le Gu_0$ 이면 G 는 부동점 $u^*\in E$ 를 가지며 $u_n\in Gu_{n-1}$ 인 반복렬 $\{u_n\}$ 은 부동점 u^*로 수렴한다.

이 정리를 한값넘기기에 적응하면 다음의 따름이 얻어진다.

따름 2 넘기기 $G:E\to E$ 에 대하여 G가 증가하고 $\beta\in S$ 가 있어서

$$d(Gx,\ \ Gy)\le\beta(d(x,\ \ y))\cdot d(x,\ \ y),\quad \forall x,\ \ y\in E,\ x\le y$$

를 만족시킨다고 하자.

이때 $u_0\le Gu_0$ 인 $u_0\in E$ 가 존재하면 G 는 부동점 $u^*\in E$ 를 가지며 반복렬 $\{u_n\}$ $(u_n=Gu_{n-1})$ 은 부동점 u^*로 수렴한다.

다음으로 앞에서 얻은 정리들을 리용하여 쌍곡선형미분포함

$$\begin{cases}\partial^2u(t,\ x)/\partial t\partial x\in F(t,\ x,\ \ u(t,\ x)),\ \text{거의 모든 }(t,\ \ x)\in J_a\times J_b\\ u(t,\ 0)=\xi(t),\ \ t\in J_a\\ u(0,\ \ x)=\eta(x),\ \ x\in J_b\end{cases}\tag{*}$$

의 풀이의 존재성에 대하여 고찰하자. 여기서 $J_a=[0,\ a],\ J_b=[0,\ b],\quad \xi\in C(J_a,\ R),$ $\eta\in C(J_b,\ R)$ 이고 $F:J_a\times J_b\times R\to 2^R$ 는 다가넘기기이다.

$J_a\times J_b$ 를 R 로 보내는 모든 련속함수들의 공간 $C(J_a\times J_b,\ R)$ 는 노름

$$\|u\|=\sup\{|u(t,\ x)|:(t,\ \ x)\in J_a\times J_b\},\quad u\in C(J_a\times J_b\ ,\ R)$$

에 관하여 바나흐공간이다.

이 공간에서의 순서는 다음과 같다.

$$u,\ \ v\in C(J_a\times J_b,\ R),\ \ u\le v,\ \ v:=\forall(t,\ \ x)\in J_a\times J_b,\ u(t,\ \ x)\le v(t,\ \ x)$$

$J_a\times J_b$ 우에서 정의된 르베그적분가능한 함수들의 모임 $L^1(J_a\times J_b,\ R)$ 는 노름

$$\|u\|_L=\int_0^a\int_0^b|u(t,\ \ x)|dxdt\ ,\ \ u\in L^1(J_a\times J_b\ ,\ R)$$

에 관하여 바나흐공간이다.

$F: J_a \times J_b \times R \to 2^R$ 가 비지 않는 값을 가지는 다가넘기기라고 할 때 임의의 $u \in C(J_a \times J_b,\ R)$ 에 대하여 F 의 선택모임을

$$S_{F,\ u} := \{v \in L^1(J_a \times J_b,\ R) : v(t,\ x) \in F(t,\ x,\ u(t,\ x)),\ \text{거의 모든 } (t,\ x) \in J_a \times J_b\}$$

로, 련속넘기기 $L: L^1(J_a \times J_b,\ R) \to C(J_a \times J_b,\ R)$ 를 $Lu(t,\ x) = \int_0^t \int_0^x u(s,\ \tau) d\tau ds$ 로 정의한다.

정리 4 다가넘기기 $F: J_a \times J_b \times R \to 2^R$ 가 다음의 가정들을 만족시킨다고 하자.

① $S_{F,\ u}$ 는 $L^1(J_a \times J_b,\ R)$ 의 비지 않는 콤팍트부분모임이다.

② 비교가능한 임의의 $u,\ v \in C(J_a \times J_b,\ R)$ 에 대하여

$H_d(F(t,\ x,\ u(t,\ x)),\ F(t,\ x,\ v(t,\ x))) \le l(t,\ x) \cdot \ln(|u(t,\ x) - v(t,\ x)| + 1)$ (거의 모든 $(t,\ x) \in J_a \times J_b$) 이 성립된다. 여기서 $l \in L^1(J_a \times J_b,\ R)$ 는 $\|l\|_L \le 1$ 이다.

③ $\forall u \in C(J_a \times J_b,\ R),\ \forall v \in S_{F,\ u},\ \forall (t,\ x) \in J_a \times J_b,\ \{u(t,\ x) - \xi(t) - \eta(x) + \xi(0)\} \le Lv(t,\ x)$

이때 식 (*)은 적어도 하나의 풀이 $u^* \in C(J_a \times J_b,\ R)$ 를 가지며 임의의 $u_0 \in C(J_a \times J_b,\ R)$ 에 대하여 $u_n(t,\ x) = \xi(t) + \eta(x) - \xi(0) + \int_0^t \int_0^x v_{n-1}(s,\ \tau) d\tau ds,\ \ v_{n-1} \in S_{F,\ u_{n-1}}$ 인 반복렬 $\{u_n\}$ 은 풀이 u^* 로 수렴한다.

증명 식 (*)은 다음의 적분포함과 동등하다.

$$u(t,\ x) \in \left\{ h \in C(J_a \times J_b,\ R) : h(t,\ x) = \xi(t) + \eta(x) - \xi(0) + \int_0^t \int_0^x v(s,\ \tau) d\tau ds,\ v \in S_{F,\ u} \right\}$$

다가넘기기 $A: C(J_a \times J_b,\ R) \to 2^{C(J_a \times J_b,\ R)}$ 을 다음과 같이 정의하자.

$$(Au)(t,\ x) \in \{h \in C(J_a \times J_b,\ R) : h(t,\ x) = \xi(t) + \eta(x) - \xi(0) + Lv(t,\ x),\ v \in S_{F,\ u}\}$$

가정 ①에 의하여 $\forall u \in C(J_a \times J_b,\ R),\ S_{F,\ u} \ne \phi$ 이므로 넘기기 A 는 잘 정의된다.

우선 넘기기 A 가 콤팍트값을 가진다는것을 보자.

그러자면 $L \circ S_{F,\ u}$ 가 콤팍트값을 가진다는것을 증명하면 충분하다.

임의의 $u \in C(J_a \times J_b,\ R)$ 에 대하여 $S_{F,\ u}$ 의 임의의 렬 $\{u_n\}$ 을 선택하자.

그러면 $S_{F,u}$ 의 콤팍트성에 의하여 적당한 부분렬(일반성을 잃지 않고 $\{u_n\}$ 그자체를 생각할수 있다.)이 있어서 $\exists v \in S_{F,\ u} : \|u_n - v\|_L \to 0\ (n \to \infty)$ 이다.

$$\forall (t,\ x) \in J_a \times J_b,\ |Lu_n(t,\ x) - Lv(t,\ x)| \le \int_0^t \int_0^x |u_n(s,\ \tau) - v(s,\ \tau)| d\tau ds \le \int_0^a \int_0^b |u_n(s,\ \tau) - v(s,\ \tau)| d\tau ds \to \infty$$

이므로 $Lu_n(t,\ x) \to Lv(t,\ x)\ (n \to \infty)$ 이다.

$\{Lu_n\}$ 은 평등유계이다. 그것은 n 이 충분히 크면 $\int_0^a \int_0^b |u_n(s,\ \tau) - v(s,\ \tau)| d\tau ds < \varepsilon$ 이므로

$$\|Lu_n\| = \sup_{(t,\ x) \in J_a \times J_b} \left| \int_0^t \int_0^x u_n(s,\ \tau) d\tau\, ds \right| \le \int_0^a \int_0^b u_n(s,\ \tau) d\tau\, ds < \varepsilon + \|v\|_L$$

이기때문에 $\{Lu_n\}$ 은 $C(J_a \times J_b,\ R)$ 에서 평등유계이다.

또한 $\{Lu_n\}$은 $C(J_a\times J_b,\ R)$에서 동정도련속이다. 그것은 $\forall\varepsilon>0$에 대하여 n이 충분히 크면 $\int_0^a\int_0^b|u_n(s,\ \tau)-v(s,\ \tau)|\,d\tau ds<\dfrac{\varepsilon}{2}$이고 $v\in L^1(J_a\times J_b,\ R)$이므로

$$\exists\delta>0,\ \forall|t_1-t_2|<\delta,\ |x_1-x_2|<\delta\ (t_1<t_2,\ x_1<x_2)$$

이면 $\left(\int_0^{t_1}\int_{x_1}^{x_2}+\int_{t_1}^{t_2}\int_0^{x_2}\right)|v(s,\ \tau)|\,dsd\tau<\dfrac{\varepsilon}{2}$이기때문이다.

따라서 $\forall|t_1-t_2|<\delta,\ |x_1-x_2|<\delta\ (t_1<t_2,\ x_1<x_2)$에 대하여

$$|Lu_n(t_2,\ x_2)-Lu_n(t_1,\ x_1)|\le\left(\int_0^{t_1}\int_{x_1}^{x_2}+\int_{t_1}^{t_2}\int_0^{x_2}\right)|u_n(s,\ \tau)|\,dsd\tau\le\left(\int_0^{t_1}\int_{x_1}^{x_2}+\int_{t_1}^{t_2}\int_0^{x_2}\right)|v(s,\ \tau)|\,dsd\tau+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

이므로 $\{Lu_n\}$은 $C(J_a\times J_b,\ R)$에서 동정도련속이다.

아르쩰라-아스콜리정리에 의하여 $\{Lu_n\}$은 $C(J_a\times J_b,\ R)$의 상대콤팍트모임이며 수렴하는 부분렬의 극한은 분명히 $Lv\in L\circ S_{F,\ u}$이므로 $L\circ S_{F,\ u}$는 콤팍트모임이며 임의의 $u\in C(J_a\times J_b,\ R)$에 대하여 Au는 콤팍트값을 가진다.

또한 가정 ③에 의하여 $\forall u\in C(J_a\times J_b,\ R),\ \forall v\in S_{F,\ u},\ \forall(t,\ x)\in J_a\times J_b,$

$$\{u(t,\ x)-\xi(t)-\eta(x)+\xi(0)\}\le Lv(t,\ x)$$

이므로 $\forall u\in C(J_a\times J_b,\ R),\ P_{Au}(u)$의 원소 $h\in C(J_a\times J_b,\ R)$는

$$v\in S_{F,\ u},\quad h(t,\ x)=\xi(t)+\eta(x)-\xi(0)+Lv(t,\ x)\ge u(t,\ x),\ (t,\ x)\in J_a\times J_b$$

로서 $u\le h$ 즉 A는 UCAV를 가진다.

다음으로 어떤 함수 $\beta\in S$와 거리변경함수 φ가 있어서

$$\varphi(H_d(Au,\ Av))\le\beta(d(u,\ v))\cdot\varphi(d(u,\ v)),\ \forall u,\ v\in C(J_a\times J_b,\ R),\ u\le v$$

임을 밝히자.

$\forall h_1\in Au$를 고정하자.

그러면 $\exists v_1\in S_{F,\ u},\ h_1(t,\ x)=\xi(t)+\eta(x)-\xi(0)+\int_0^t\int_0^x v_1(s,\ \tau)d\tau ds,\ (t,\ x)\in J_a\times J_b$이다.

가정 ②에 의하여

$$\exists v_2\in F(t,\ x,\ v(t,\ x)),\ |v_1(t,\ x)-v_2(t,\ x)|\le l(t,\ x)\cdot\ln(|u(t,\ x)-v(t,\ x)|+1).$$

이제 $h_2(t,\ x)=\xi(t)+\eta(x)-\xi(0)+\int_0^t\int_0^x v_2(s,\ \tau)d\tau ds$라고 하면

$$\forall(t,\ x)\in J_a\times J_b,\ |h_2(t,\ x)-h_1(t,\ x)|\le\|l\|_L\cdot\ln(\|u-v\|+1)\le\ln(\|u-v\|+1).$$

따라서 $h_2\in Av$에 의하여

$$\|h_2-h_1\|=\sup_{(t,\ x)\in J_a\times J_b}|h_2(t,\ x)-h_1(t,\ x)|\le\frac{\ln(\|u-v\|+1)}{\|u-v\|}\cdot\|u-v\|$$

이고 비슷하게 u와 v의 역할을 바꾸면 $H_d(Au,\ Av)\le\dfrac{\ln(d(u,\ v)+1)}{d(u,\ v)}\cdot d(u,\ v)$이다.

$\varphi(t):=t,\ \beta(t):=\ln(t+1)/t,\ t>0$이라고 하자.

이때 $\varphi(H_d(Au,\ Av)) \le \beta(d(u,\ v)) \cdot \varphi(d(u,\ v))$, $u \le v$ 이고 정리 1에 의하여 식 (*)은 풀이를 가지며 임의의 $u_0 \in C(J_a \times J_b,\ R)$ 에서 시작한 반복렬

$$\{u_n\} \quad \left(u_n(t,\ x) = \xi(t) + \eta(x) - \xi(0) + \int_0^t \int_0^x v_{n-1}(s,\ \tau) d\tau ds,\ \ v_{n-1} \in S_{F,\ u_{n-1}} \right)$$

은 풀이로 수렴한다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] 림창일 등; **김일성**종합대학창립 65돐기념 국제학술토론회론문집(수학), **김일성**종합대학출판사, 64, 주체100(2011).

[2] M. Geraghti; Proc. Amer. Math. Soc., 40, 604, 1973.

[3] A. A. Harandi et al.; Nonliner Anal., 72, 2238, 2010.

[4] Shi Huang Hong; Nonliner Anal., 72, 3929, 2010.

주체103(2014)년 6월 5일 원고접수

Fixed Point Theorems for Contractive Multivalued Operators in Partially Ordered Completed Metric Space

Kim Un Hye, *Ri Mi Gyong* and *Rim Chang Il*

Our aim is to extend the results of [1, 3], fixed point theorems for single-valued contractive operators to multivalued operators that satisfies the following contractive condition

$$\varphi(H_d(Gx,\ Gy)) \le \beta(d(x,\ y)) \cdot \varphi(d(x,\ y)),\ \ \forall x,\ \ y \in E,\ \ x \le y.$$

And as an application of our results, we consider about the existence of solutions for the following hyperbolic differential inclusions

$$\begin{cases} \partial^2 u(t,\ x)/\partial t \partial x \in F(t,\ x,\ \ u(t,\ x)),\ \text{a.e. } (t,\ \ x) \in J_a \times J_b \\ u(t,\ 0) = \xi(t),\ \ t \in J_a \\ u(0,\ \ x) = \eta(x),\ \ x \in J_b \end{cases}.$$

Key words: contractive multivalued operator, fixed point