김일성종합대학학보　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　주체109(2020)년
수 학　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　제66권　제4호

한 형태의 지연을 가진 볼테라미적분방정식을 풀기 위한 스펙트르점배치법

조선향, 강영숙

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《현대과학기술의 빠른 발전은 기초과학의 성과에 토대하고있으며 과학기술분야에서의 자립성은 기초과학분야에서부터 시작됩니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제10권 485페지)

론문에서는 한 형태의 지연을 가진 볼테라미적분방정식을 풀기 위한 스펙트르점배치도식을 구성하고 오차평가와 수렴성을 해석하였다.

지연을 가진 미적분방정식을 풀기 위한 르쟝드르스펙트르점배치법[2], 라게르근사[3] 등이 연구되였다.

선행연구[4]에서는 지연을 가진 볼테라미적분방정식

$$u^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}a_k(x)u^{(k)}(x)+\sum_{k=0}^{n-1}b_k(x)u^{(k)}(q_kx)+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^x c_k(x,\ y)u^{(k)}(y)dy+\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{r_kx}d_k(x,\ z)u^{(k)}(z)dz+g(x)\ \ (x,\ z\in[0,\ T])\qquad(1)$$

$$u^{(k)}(0)=w_k\ \ (0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)\ \ 0\le q_k\le 1,\ 0\le r_k\le 1\ \ (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$$

을 풀기 위한 이동체비쉐브스펙트르방법을 연구하였다. 여기서

$$g(x),\ a_k(x),\ b_k(x),\ c_k(x,\ y),\ d_k(x,\ z)\ \ (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$$

들은 $0\le x\le T,\ 0\le y\le x,\ 0\le z\le x$에서 정의된 주어진 함수이다.

우리는 방정식 (1)의 풀이의 존재성을 론의하고 그것을 풀기 위한 스펙트르점배치도식을 구성하며 수렴성을 해석하였다. 가우스점들에 대한 라그랑쥬보간다항식을 근사풀이형태로 놓고 가우스구적공식을 리용하여 볼테라형적분들을 근사시키는 방법으로 선형대수방정식을 얻는다. 분수계미적분방정식을 풀기 위하여 선행연구[5]에서 유도된 분수계준스펙트르적분행렬을 리용하였다.

정의 1 [5] $-1=\tau_0<\cdots<\tau_{N+1}=1$인 가우스점 $\{\tau_k\in(-1,\ 1)\}_{k=1}^N$들에 관한 왼쪽, 오른쪽 γ − 계분수계준스펙트르적분행렬(FPIM)들의 원소들은 다음과 같이 정의된다.

$${}_{-1}^{\ \tau}I_{ki}^{\gamma}={}_{-1}I_{\tau_k}^{\gamma}L_i(\tau)\ \ (k,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$$

$${}_{\tau}^{1}I_{ki}^{\gamma}={}_{\tau}I_1^{\gamma}L_i(\tau)\ \ (k,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$$

론문에서 옹근수계적분연산자, 왼쪽옹근수계적분행렬에 대하여 다음과 같은 표시를 리용하겠다.

$$I^n:={}_{-1}I_{\tau}^n,\ \ {}^{\tau}I_{ki}^m:=I^mL_i(\tau_k)$$

변수변환 $x=T(\tau+1)/2$을 방정식 (1)에 적용하여 다음의 방정식으로 변환한다.

$$\widetilde{u}^{(n)}(\tau)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2}{T}\right)^{k-n}\widetilde{a}_k(\tau)\widetilde{u}^{(k)}(\tau)+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2}{T}\right)^{k-n}\widetilde{b}_k(\tau)\widetilde{u}^{(k)}(\theta^k)+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2}{T}\right)^{k-n}\int_{-1}^{\tau}\widetilde{c}_k(\tau,\ \xi)\widetilde{u}^{(k)}(\xi)d\xi+$$
$$+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2}{T}\right)^{k-n}\int_{-1}^{\gamma^k}d_k(\tau,\ \rho)\widetilde{u}^{(k)}(\rho)d\rho+\left(\frac{2}{T}\right)^{-n}\widetilde{g}(\tau)\ \ (\tau\in[-1,\ 1],\ \gamma^k,\ \theta^k\in[-1,\ \tau])$$
$$\widetilde{u}^{(k)}(-1)=\left(\frac{T}{2}\right)^k w_k\ \ (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1) \tag{2}$$

여기서 $\widetilde{u}(\tau),\ \widetilde{a}_k(\tau),\ \widetilde{b}_k(\tau),\ \widetilde{c}_k(\tau,\ \xi),\ \widetilde{d}_k(\tau,\ \rho)$ 는 $u(x),\ a_k(x),\ b_k(x),\ c_k(x,\ y),\ d_k(x,\ z)$ 에 우의 변환을 실시한 결과함수들이고 $\theta^k=q_k\tau+q_k-1,\ \gamma^k=r_k\tau+r_k-1$ 이다.

정의 2 [1] $\widetilde{u}^{(n)}\in C[-1,\ 1]$ 인 $\widetilde{u}$ 이 방정식 (2)를 만족시킨다면 $\widetilde{u}$ 을 방정식 (2)의 풀이라고 부른다.

보조정리 1 $\widetilde{g}$ 이 련속이라고 하자. 함수 $\widetilde{u}$ 이 방정식 (2)의 풀이이면

$$f(\tau):=\widetilde{u}^{(n)}(\tau) \tag{3}$$

로 정의되는 함수 f 는 $C[-1,\ 1]$ 에서 다음의 적분방정식의 풀이이다.

$$f(\tau)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2}{T}\right)^{k-n}[\widetilde{a}_k(\tau)F_k(\tau)+\widetilde{b}_k(\tau)F_k(\theta^k)+\int_{-1}^{\tau}\widetilde{c}_k(\tau,\ \xi)F_k(\xi)d\xi+\int_{-1}^{\gamma^k}\widetilde{d}_k(\tau,\ \rho)F_k(\rho)d\rho]+\left(\frac{2}{T}\right)^{-n}\widetilde{g}(\tau) \tag{4}$$

여기서 $F_k(\tau):=I^{n-k}f(\tau)+\sum_{i=k}^{n-1}\frac{(T/2)^i}{(i-k)!}(\tau+1)^{i-k}$ 이다.

거꾸로 f 가 $C[-1,\ 1]$ 에서 적분방정식 (4)의 풀이이면

$$\widetilde{u}(\tau):=I^n f(\tau)+\sum_{i=k}^{n-1}\frac{(T/2)^i w_i}{i!}(\tau+1)^i \tag{5}$$

으로 결정되는 $\widetilde{u}$ 은 방정식 (2)의 풀이이다.

정리 1 적분방정식 (4)에 대하여 다음의 조건이 만족된다고 하자.

① $a_k(\cdot),\ \widetilde{b}_k(\cdot),\ \widetilde{g}(\cdot)\in C[-1,\ 1]$

② $\exists C,\ D>0:|\widetilde{c}_k(\tau,\ \xi)|\le C,\ |\widetilde{d}_k(\tau,\ \xi)|\le D,\ \tau,\ \xi\in[-1,\ 1]$

이때 적분방정식 (4)는 유일풀이를 가진다.

$h(\tau):=\widetilde{u}^{(n)}(\tau)$ 라고 놓자. 보조정리 1로부터 방정식 (2)를 적분방정식으로 변환할수 있다.

$$h(\tau)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2}{T}\right)^{k-n}[\widetilde{a}_k(\tau)H_k(\tau)+\widetilde{b}_k(\tau)H_k(\theta^k)+\int_{-1}^{\tau}\widetilde{c}_k(\tau,\ \xi)H_k(\xi)d\xi+\int_{-1}^{\gamma^k}\widetilde{d}_k(\tau,\ \rho)H_k(\rho)d\rho]+\left(\frac{2}{T}\right)^{-n}\widetilde{g}(\tau) \tag{6}$$

여기서 $H_k(\tau):=I^{n-k}h(\tau)+\sum_{i=k}^{n-1}\frac{(T/2)^i}{(i-k)!}(\tau+1)^{i-k}$ 이다.

가우스공식을 리용하여 볼테라형적분들을 근사시키면 다음과 같다.

$$\int_{-1}^{\tau}\tilde{c}_k(\tau,\ \xi)H_k(\xi)d\xi=\frac{\tau+1}{2}\int_{-1}^{1}\tilde{c}_k(\tau,\ \xi(s))H_k(\xi(s))ds\approx\frac{\tau+1}{2}\sum_{l=1}^{N+1}\tilde{c}_k(\tau,\ \xi(s_l))H_k(\xi(s_l))\omega_l$$

$$\int_{-1}^{\gamma^k}\tilde{d}_k(\tau,\ \rho)H_k(\rho)d\rho=\frac{\gamma^k+1}{2}\int_{-1}^{1}\tilde{d}_k(\tau,\ \rho^k(s))H_k(\rho^k(s))ds\approx\frac{\gamma^k+1}{2}\sum_{l=1}^{N+1}\tilde{d}_k(\tau,\ \rho^k(s_l))H_k(\rho^k(s_l))\omega_l$$

여기서 $\xi(s)=\frac{\tau+1}{2}s+\frac{\tau-1}{2},\ \rho^k(s)=\frac{\gamma^k+1}{2}s+\frac{\gamma^k-1}{2}$ 이다.

근사풀이형태를 $h(\tau)=\sum_{m=1}^{N+1}h_mL_m(\tau)$ 로 놓겠다. 다음과 같은 표시를 리용하겠다.

$$\begin{gathered}\theta_m^k=q_k\tau_m+q_k-1,\ \gamma_m^k=r_k\tau_m+r_k-1\\ \rho_{ml}^k=\frac{\gamma_m^k+1}{2}s_l+\frac{\gamma_m^k-1}{2},\ \xi_{ml}=\frac{\tau_m+1}{2}s_l+\frac{\tau_m-1}{2}\\ {}^{\theta^k}I_{mi}^{n-k}=I^{n-k}L_i(\theta_m^k),\ {}^{\xi}I_{mli}^{n-k}=I^{n-k}L_i(\xi_{ml}),\ {}^{\rho^k}I_{mli}^{n-k}=I^{n-k}L_i(\rho_{ml}^k)\\ k=0,\ \cdots,\ n-1;\ m,\ l,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ N+1\end{gathered}\tag{7}$$

보조정리 2 ${}^{\theta^k}I_{vi}^{n-k},\ {}^{\xi}I_{vli}^{n-k},\ {}^{\rho^k}I_{vli}^{n-k}$ 는 정확히 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{gathered}{}^{\theta^k}I_{vi}^{n-k}=2^{\gamma}\tilde{\omega}_i\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\tilde{p}_j(\tilde{\tau}_i)}{\tilde{\lambda}_i}\left(\sum_{m=0}^{j}\tilde{c}_m^j\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\gamma+1)}((\theta_v^k+1)/2)^{m+\gamma}\right)\\ {}^{\xi}I_{vli}^{n-k}=2^{\gamma}\tilde{\omega}_i\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\tilde{p}_j(\tilde{\tau}_i)}{\tilde{\lambda}_i}\left(\sum_{m=0}^{j}\tilde{c}_m^j\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\gamma+1)}((\xi_{vl}+1)/2)^{m+\gamma}\right)\\ {}^{\gamma^k}I_{vli}^{n-k}=2^{\gamma}\tilde{\omega}_i\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\tilde{p}_j(\tilde{\tau}_i)}{\tilde{\lambda}_i}\left(\sum_{m=0}^{j}\tilde{c}_m^j\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\gamma+1)}((\rho_{vl}^k+1)/2)^{m+\gamma}\right)\\ k=0,\ \cdots,\ n-1;\ v,\ l,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ N+1\end{gathered}\tag{8}$$

가우스점 $\{\tau_m\}_{m=1}^{N+1}$ 들을 점배치점으로 리용하고 식 (8)을 리용하면

$$\begin{aligned}\hat{h}_m=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2}{T}\right)^{k-n}\Bigg[&\tilde{a}_k(\tau_m)\hat{H}_k(\tau_m)+\tilde{b}_k(\tau_m)H_k(\theta_m^k)+\frac{\tau_m+1}{2}\sum_{l=1}^{N+1}\tilde{c}_k(\tau_m,\ \xi_{ml})\hat{H}_k(\xi_{ml})\omega_l+\\ &+\frac{\gamma_m^k+1}{2}\sum_{l=1}^{N+1}\tilde{d}_k(\tau_m,\ \rho_{ml}^k)\hat{H}_k(\rho_{mi}^k)\omega_l\Bigg]+\left(\frac{2}{T}\right)^{-n}\tilde{g}(\tau_m)\end{aligned}\tag{9}$$

이 나온다. 여기서

$$\begin{gathered}\hat{H}_k(\tau_m):=\sum_{i=1}^{N+1}{}^{\tau}I_{mi}^{n-k}\hat{h}_i+\sum_{i=k}^{n-1}\frac{(T/2)^iw_i}{(i-k)!}(\tau_m+1)^{i-k}\\ \hat{H}_k(\theta_m^k):=\sum_{i=1}^{N+1}{}^{\theta^k}I_{mi}^{n-k}\hat{h}_i+\sum_{i=k}^{n-1}\frac{(T/2)^iw_i}{(i-k)!}(\theta_m^k+1)^{i-k}\\ \hat{H}_k(\xi_{ml}):=\sum_{i=1}^{N+1}{}^{\xi}I_{mli}^{n-k}\hat{h}_i+\sum_{i=k}^{n-1}\frac{(T/2)^iw_i}{(i-k)!}(\xi_{ml}+1)^{i-k}\end{gathered}$$

$$\widehat{H}_k(\rho_{ml}^k) := \sum_{i=1}^{N+1}{}^{\rho^k} I_{mli}^{n-k}\widehat{h}_i + \sum_{i=k}^{n-1}\frac{(T/2)^i w_i}{(i-k)!}(\rho_{ml}^k+1)^{i-k}$$

이다. 식 (9)를 풀어 $\{\widehat{h}_m\}_{m=1}^{N+1}$ 을 구한 다음 아래와 같이 마디점에서의 근사풀이값을 구하고 라그랑쥬보간하여 근사풀이 $\widehat{\widetilde{u}}(\tau)$ 를 얻는다.

$$\widehat{\widetilde{u}}_m = \sum_{i=1}^{N+1}{}^{\tau} I_{mi}^n \widehat{h}_i + \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(T/2)^i w_i}{i!}(\tau_m+1)^i,\ m=1,\ 2,\ \cdots,\ N+1,\ \widehat{\widetilde{u}}(\tau) = \sum_{m=1}^{N+1}\widehat{\widetilde{u}}_m L_m(\tau) \quad (10)$$

이 근사풀이 $\widehat{\widetilde{u}}(\tau)$ 에 변환 $\tau = 2t/T - 1$ 을 실시하여 구간 $[-1,\ 1]$ 을 $[0,\ T]$ 로 넘긴다.

정리 2 적분방정식 (4)에 대하여 다음의 조건들이 만족된다고 하자.

$$h \in H_{w^{(\alpha,\ \beta)}}^{l_1}(-1,\ 1)$$

$$\partial_\xi^{l_{2k}}\widetilde{c}_k(\tau,\ \cdot) \in C([-1,\ 1]^2),\ \partial_\xi^{l_{3k}}\widetilde{d}_k(\tau,\ \cdot) \in C([-1,\ 1]^2)$$

$$\widetilde{a}_k(\cdot),\ \widetilde{b}_k(\cdot) \in C^1([-1,\ 1]),\ l_1,\ l_{2k},\ l_{3k} \ge 1\ (k=1,\ \cdots,\ n-1)$$

이때 다음의 부등식이 성립한다.

$$\| h - \widehat{h} \| \le \left\{ c_1 N^{0.5-l_1} | h |_{H_{w^{(-0.5,\ -0.5)}}^{l_1}} + c_2 \sum_{k=1}^{n-1}[(N^{-l_{2k}} \| \partial_\xi^{l_{2k}}\widetilde{c}_k(\tau,\ \xi) \| + N^{-l_{3k}} \| \partial_\xi^{l_{3k}}\widetilde{d}_k(\tau,\ \xi) \|) \cdot \| H_k \|] \right\} \cdot$$
$$\cdot \begin{cases} \ln N, & -1 < \alpha,\ \beta < -0.5 \\ N^{\max(\alpha,\ \beta)+0.5}, & -0.5 \le \alpha,\ \beta \le 0 \end{cases} \quad (11)$$

이 노름평가는 max노름에 관한 평가이다. $c_1,\ c_2$ 는 N 에 무관계한 적당한 정의 상수들이다.

실례 다음의 미적분방정식[4]을 고찰하자.

$$u'(t) = \frac{1}{100}(qt - t - 10)u(qt) + \frac{1}{100}(t+20)e^{-1} + \frac{1}{100}\int_0^t u(s)ds + \frac{1}{1000}\int_0^{qt}(t-s)u(s)ds$$

$$u(0) = e^{-1},\ 0 \le t \le 1$$

이 방정식의 정확한 풀이는 $u(t) = e^{t/10-1}$ 이다. 도식 (9)를 리용하여 얻은 근사풀이는 다음과 같다.

$$\widehat{u}(t) = 0.367\ 879 + 0.036\ 787\ 9t + 0.001\ 839\ 4t^2 + 6.131\ 32\cdot 10^{-5}t^3 + 1.532\ 86\cdot 10^{-6}t^4 +$$
$$+ 3.061\ 88\cdot 10^{-8}t^5 + 5.376\ 39\cdot 10^{-10}t^6$$

르장드르스펙트르점배치법(LSCM)[2], 이동체비쉐브점배치법(SCC)[4]과 도식 (9)의 최대절대오차(MAE)를 비교하였다.(표)

표. 선행방법들과의 최대절대오차비교

근사공간의 차원수	LSCM	SCC	근사공간의 차원수	론문의 방법
2	$7.77\cdot 10^{-2}$	$1.99\cdot 10^{-2}$	1	$2.458\cdot 10^{-4}$
4	$1.21\cdot 10^{-3}$	$1.61\cdot 10^{-4}$	2	$2.03\cdot 10^{-6}$
6	$8.10\cdot 10^{-6}$	$8.22\cdot 10^{-7}$	3	$2.03\cdot 10^{-6}$
8	$3.06\cdot 10^{-8}$	$9.69\cdot 10^{-9}$	4	$6.31\cdot 10^{-11}$
10	$7.52\cdot 10^{-11}$	$2.8\cdot 10^{-11}$	5	$2.63\cdot 10^{-13}$
12	$3.08\cdot 10^{-13}$	$3.08\cdot 10^{-13}$	6	$2.93\cdot 10^{-15}$

참 고 문 헌

[1] M. Gulsu, M. Sezer; Numer. Meth. Par. Differ. Eqn., 27, 2, 447, 2011.
[2] Y. Wei, Y. P. Chen; J. Sci. Comput., 53, 672, 2012.
[3] S. Yuzbasi; Appl. Math. Comput., 232, 1183, 2014.
[4] S. S. Ezz-Eldien, E.H. Doha; Numer. Algor., 81, 57, 2019.
[5] T. Xiaojun, X. Heyong; Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., 30, 248, 2016.

주체109(2020)년 6월 5일 원고접수

The Spectral Collocation Method for Solving Volterra Integro-differential Equations with a Kind of Delay

Jo Son Hyang, Kang Yong Suk

In this paper, we study the spectral collocation method for solving Volterra integro-differential equations with a kind of delay.

Keywords: collocation method, Volterra integro-differential equation