김일성종합대학학보 수 학 주체108(2019)년 제65권 제3호

EM알고리듬에 의한 혼합뽜쏭분포모형의 파라메터에 대한 점추정과 믿음구간추정

리광선, 리창현

론문에서는 혼합뽜쏭분포모형파라메터의 한가지 점추정문제와 구간추정문제를 연구하였다.

선행연구[1, 3, 4]에서는 혼합정규분포와 혼합지수분포의 파라메터추정문제에 대한 연구를 주로 모멘트법, 최대우도법 등으로 고찰하였다.

기타 분포의 경우에는 1개의 분포모형(혼합되지 않은)을 설정하고 추론문제를 연구[2]하였다.

론문에서는 혼합뽜쏭분포모형에 들어있는 2개의 파라메터의 EM알고리듬에 의한 점추정문제와 구간추정문제를 연구하였다.

이제 T는 다음과 같은 혼합뽜쏭분포모형에 따르는 우연량이라고 하자.

즉 T의 확률함수는

$$f(x=k\,|\,\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_M)=\frac{\alpha_1\lambda_1{}^k}{k!}e^{-\lambda_1}+\frac{\alpha_2\lambda_2{}^k}{k!}e^{-\lambda_2}+\ \cdots\ +\frac{\alpha_M\lambda_M{}^k}{k!}e^{-\lambda_M} \tag{1}$$

이고 여기서 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_M>0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_M>0,\ \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_M=1$이다. 이 혼합분포모형의 미지파라메터들로서는 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_M$과 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_M$이다.

이제 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$은 혼합분포모형 (1)에 따르는 크기가 n인 표본이라고 하고 미지파라메터 $\lambda=(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_M)$과 $\alpha=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_M)$의 추정량과 그 믿음구간을 구하는 문제를 고찰하기로 하자.

1. EM알고리듬에 의한 파라메터들의 점추정

정리 1 EM알고리듬에 의한 혼합분포모형 (1)의 미지파라메터 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_M$과 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_M$의 추정량은 다음과 같다.

$$\lambda_l{}^{(k+1)}=\frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\alpha_l{}^{(k)}\dfrac{\lambda_l^{(k)x_j}}{x_j!}e^{-\lambda_l^{(k)}}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{M}\alpha_i{}^{(k)}\dfrac{\lambda_i^{(k)x_j}}{x_j!}e^{-\lambda_i^{(k)}}}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_l{}^{(k)}\dfrac{\lambda_l^{(k)x_j}}{x_j!}e^{-\lambda_l^{(k)}}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{M}\alpha_i{}^{(k)}\dfrac{\lambda_i^{(k)x_j}}{x_j!}e^{-\lambda_i^{(k)}}}} \tag{2}$$

$$\alpha_l^{(k+1)} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_l^{(k)}\dfrac{\lambda_l^{(k)x_j}}{x_j!}e^{-\lambda_l^{(k)}}}{\sum_{i=1}^{M}\alpha_i^{(k)}\dfrac{\lambda_i^{(k)x_j}}{x_j!}e^{-\lambda_i^{(k)}}} \tag{3}$$

여기서 $l = 1, 2, \cdots, M$ 이다.

정리 2 식 (2), (3)으로 주어진 EM알고리듬추정량은 수렴한다.

2. 파라메터들의 믿음구간추정

이제 간단히 하기 위하여 T 는 다음과 같은 혼합뽜쏭분포모형에 따르는 우연량이라고 하자.

$$f(x = k \mid \lambda_1,\ \lambda_2) = \frac{\alpha\lambda_1{}^k}{k!}e^{-\lambda_1} + \frac{(1-\alpha)\lambda_2{}^k}{k!}e^{-\lambda_2} \tag{4}$$

여기서 $\lambda_1,\ \lambda_2 > 0,\ \alpha > 0$ 이다.

이제 혼합분포모형의 미지파라메터를 $\theta = (\alpha,\ \lambda_1,\ \lambda_2)$ 로 표시하고 미지파라메터 $\theta = (\alpha,\ \lambda_1,\ \lambda_2)$ 의 믿음구간을 구하기로 한다.

다음과 같은 새로운 변량 Z_{ik} 를 도입하자.

$$Z_{ji} = \begin{cases} 1, & t_j\text{가 } i\text{번째 분포에 속할 때} \\ 0, & \text{기타} \end{cases}$$

그러면 $Z_j = (Z_{j1},\ Z_{j2},\ Z_{jM})$ 은 다만 1개 원소만이 1을 취하고 나머지원소들은 모두 0이 된다. 이때

$$P(\alpha,\ \lambda_1,\ \lambda_2 \mid X,\ Z) = \sum_{j=1}^{n}\left\{Z_{j1}\ln\left[\frac{\alpha\lambda_1{}^{x_j}}{x_j!}e^{-\lambda_1}\right] + Z_{j2}\ln\left[\frac{(1-\alpha)\lambda_2{}^{x_j}}{x_j!}e^{-\lambda_2}\right]\right\}$$

$$P(Z_{j1} = 1,\ Z_{j2} = 0 \mid \alpha,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ X) =$$

$$= \frac{\dfrac{\alpha\lambda_1{}^{x_j}}{x_j!}e^{-\lambda_1}}{\dfrac{\alpha\lambda_1{}^{x_j}}{x_j!}e^{-\lambda_1} + \dfrac{(1-\alpha)\lambda_2{}^{x_j}}{x_j!}e^{-\lambda_2}} = \frac{\alpha\lambda_1{}^{x_j}e^{-\lambda_1}}{\alpha\lambda_1{}^{x_j}e^{-\lambda_1} + (1-\alpha)\lambda_2{}^{x_j}e^{-\lambda_2}}$$

$$P(Z_{j1} = 0,\ Z_{j2} = 1 \mid \alpha,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ X) = \frac{(1-\alpha)\lambda_2{}^{x_j}e^{-\lambda_2}}{\alpha\lambda_1{}^{x_j}e^{-\lambda_1} + (1-\alpha)\lambda_2{}^{x_j}e^{-\lambda_2}}$$

이며 다음의 보조정리들이 성립하게 된다.

보조정리 1

$$E\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(P(\alpha,\ \lambda_1,\ \lambda_2 \mid X,\ Z)) =$$

$$=\begin{pmatrix} E\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}P(\alpha,\ \lambda_1,\ \lambda_2\,|\,X,\ Z)\right) & 0 & 0 \\ 0 & E\left(\frac{\partial^2}{\partial\lambda_1^2}P(\alpha,\ \lambda_1,\ \lambda_2\,|\,X,\ Z)\right) & 0 \\ 0 & 0 & E\left(\frac{\partial^2}{\partial\lambda_2^2}P(\alpha,\ \lambda_1,\ \lambda_2\,|\,X,\ Z)\right) \end{pmatrix}$$

여기서

$$E\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{-(1-\alpha)\lambda_1^{x_j}e^{-\lambda_1}-\alpha\lambda_2^{x_j}e^{-\lambda_2}}{\alpha(1-\alpha)(\alpha\lambda_1^{x_j}e^{-\lambda_1}+(1-\alpha)\lambda_2^{x_j}e^{-\lambda_2})}$$

$$E\left(\frac{\partial^2}{\partial\lambda_1^2}\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha\lambda_1^{x_j}e^{-\lambda_1}}{\alpha\lambda_1^{x_j}e^{-\lambda_1}+(1-\alpha)\lambda_2^{x_j}e^{-\lambda_2}}\cdot\frac{-x_j}{\lambda_1^2}$$

$$E\left(\frac{\partial^2}{\partial\lambda_2^2}\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{(1-\alpha)\lambda_1^{x_j}e^{-\lambda_1}}{\alpha\lambda_1^{x_j}e^{-\lambda_1}+(1-\alpha)\lambda_2^{x_j}e^{-\lambda_2}}\cdot\frac{-x_j}{\lambda_2^2}$$

이다. 다음으로

$$\mathrm{Var}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}P(\alpha,\ \lambda_1,\ \lambda_2\,|\,X,\ Z)\right)=\mathrm{Var}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

를 계산하자.

보조정리 2

$$\mathrm{Var}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)=\begin{pmatrix} \mathrm{Var}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) & \mathrm{Cov}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha},\ \frac{\partial}{\partial\lambda_1}\right) & \mathrm{Cov}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha},\ \frac{\partial}{\partial\lambda_2}\right) \\ \mathrm{Cov}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_1},\ \frac{\partial}{\partial\alpha}\right) & \mathrm{Var}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\right) & \mathrm{Cov}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_1},\ \frac{\partial}{\partial\lambda_2}\right) \\ \mathrm{Cov}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_2},\ \frac{\partial}{\partial\alpha}\right) & \mathrm{Cov}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_2},\ \frac{\partial}{\partial\lambda_1}\right) & \mathrm{Var}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\right) \end{pmatrix}$$

라고 하면 이 행렬의 원소들은 각각 다음과 같다.

$$\mathrm{Var}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}P(\alpha,\ \lambda_1,\ \lambda_2\,|\,X,\ Z)\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{(\lambda_1\lambda_2)^{x_j}e^{-\lambda_1-\lambda_2}}{(\alpha\lambda_1^{x_j}e^{-\lambda_1}+(1-\alpha)\lambda_2^{x_j}e^{-\lambda_2})^2}$$

$$\mathrm{Var}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_1}P(\alpha,\ \lambda_1,\ \lambda_2\,|\,X,\ Z)\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{x_j}{\lambda_1}-1\right)^2\frac{\alpha(1-\alpha)(\lambda_1\lambda_2)^{x_j}e^{-\lambda_1-\lambda_2}}{(\alpha\lambda_1^{x_j}e^{-\lambda_1}+(1-\alpha)\lambda_2^{x_j}e^{-\lambda_2})^2}$$

$$\mathrm{Var}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_2}P(\alpha,\ \lambda_1,\ \lambda_2\,|\,X,\ Z)\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{x_j}{\lambda_2}-1\right)^2\frac{\alpha(1-\alpha)(\lambda_1\lambda_2)^{x_j}e^{-\lambda_1-\lambda_2}}{(\alpha\lambda_1^{x_j}e^{-\lambda_1}+(1-\alpha)\lambda_2^{x_j}e^{-\lambda_2})^2}$$

$$\mathrm{Cov}\left(\frac{\partial P(\alpha,\ \lambda_1,\ \lambda_2\,|\,X,\ Z)}{\partial\alpha},\ \frac{\partial P(\alpha,\ \lambda_1,\ \lambda_2\,|\,X,\ Z)}{\partial\lambda_1}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left\{\left(\frac{x_j}{\lambda_1}-1\right)\frac{\lambda_1^{x_j}e^{-\lambda_1}}{\alpha\lambda_1^{x_j}e^{-\lambda_1}+(1-\alpha)\lambda_2^{x_j}e^{-\lambda_2}}-\right.$$

$$-\frac{(\lambda_1{}^{x_j}e^{-\lambda_1}-\lambda_2{}^{x_j}e^{-\lambda_2})\alpha\lambda_1{}^{x_j}e^{-\lambda_1}}{(\alpha\lambda_1{}^{x_j}e^{-\lambda_1}+(1-\alpha)\lambda_2{}^{x_j}e^{-\lambda_2})^2}\Bigg\}=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{x_j}{\lambda_1}-1\right)\frac{(\lambda_1\lambda_2)^{x_j}e^{-\lambda_1-\lambda_2}}{(\alpha\lambda_1{}^{x_j}e^{-\lambda_1}+(1-\alpha)\lambda_2{}^{x_j}e^{-\lambda_2})^2}$$

$$\mathrm{Cov}\left(\frac{\partial P(\alpha,\ \lambda_1,\ \lambda_2\,|\,X,\ Z)}{\partial\alpha},\ \frac{\partial P(\alpha,\ \lambda_1,\ \lambda_2\,|\,X,\ Z)}{\partial\lambda_2}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left\{\left(\frac{x_j}{\lambda_2}-1\right)\frac{\lambda_2{}^{x_j}e^{-\lambda_2}}{\alpha\lambda_1{}^{x_j}e^{-\lambda_1}+(1-\alpha)\lambda_2{}^{x_j}e^{-\lambda_2}}-\right.$$

$$-\frac{(\lambda_1{}^{x_j}e^{-\lambda_1}-\lambda_2{}^{x_j}e^{-\lambda_2})(1-\alpha)\lambda_2{}^{x_j}e^{-\lambda_2}}{(\alpha\lambda_1{}^{x_j}e^{-\lambda_1}+(1-\alpha)\lambda_2{}^{x_j}e^{-\lambda_2})^2}\Bigg\}=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{x_j}{\lambda_2}-1\right)\frac{-(\lambda_1\lambda_2)^{x_j}e^{-\lambda_1-\lambda_2}}{(\alpha\lambda_1{}^{x_j}e^{-\lambda_1}+(1-\alpha)\lambda_2{}^{x_j}e^{-\lambda_2})^2}$$

$$\mathrm{Cov}\left(\frac{\partial P(\alpha,\ \lambda_1,\ \lambda_2\,|\,X,\ Z)}{\partial\lambda_1},\ \frac{\partial P(\alpha,\ \lambda_1,\ \lambda_2\,|\,X,\ Z)}{\partial\lambda_2}\right)=-\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{x_j}{\lambda_1}-1\right)\left(\frac{x_j}{\lambda_2}-1\right)\frac{\alpha(1-\alpha)(\lambda_1\lambda_2)^{x_j}e^{-\lambda_1-\lambda_2}}{(\alpha\lambda_1{}^{x_j}e^{-\lambda_1}+(1-\alpha)\lambda_2{}^{x_j}e^{-\lambda_2})^2}$$

정리 3 α의 $1-\alpha^*$ 믿을구간과 λ_1의 $1-\alpha^*$ 믿을구간 그리고 λ_2의 $1-\alpha^*$ 믿을구간은 각각 다음과 같다.

$$\left(\hat{\alpha}-Z_{1-\frac{\alpha^*}{2}}\frac{\sqrt{l_{11}}}{\sqrt{n}},\ \hat{\alpha}+Z_{1-\frac{\alpha^*}{2}}\frac{\sqrt{l_{11}}}{\sqrt{n}}\right),\ \left(\hat{\lambda}_1-Z_{1-\frac{\alpha^*}{2}}\frac{\sqrt{l_{22}}}{\sqrt{n}},\ \hat{\lambda}_1+Z_{1-\frac{\alpha^*}{2}}\frac{\sqrt{l_{22}}}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(\hat{\lambda}_2-Z_{1-\frac{\alpha^*}{2}}\frac{\sqrt{l_{33}}}{\sqrt{n}},\ \hat{\lambda}_2+Z_{1-\frac{\alpha^*}{2}}\frac{\sqrt{l_{33}}}{\sqrt{n}}\right)$$

참 고 문 헌

[1] A. Mustafa; International Journal of Reliability and Applications, 9, 1, 79, 2008.

[2] N. S. Samindra et a1.; Statistics and Probability Letters, 79, 899, 2009.

[3] G. Rajkumar et a1.; International Journal of Computer Science Issues, 8, 2, 1694, 2011.

[4] Kiyoshi Tsukakoshi; Procedia Computer Science, 62, 370, 2015.

주체108(2019)년 3월 15일 원고접수

Point and Confidence Interval Estimation for the Parameters of a Mixture Poission Distribution using EM Algorithm

Ri Kwang Son, Ri Chang Hyon

In this paper, we study the point and confidence interval estimations for the parameters of a mixture Poission distribution, using EM algorithm.

Key words: mixture Poission distribution, interval estimation