김일성종합대학학보
(자연과학)
주체106(2017)년 제63권 제7호

JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(NATURAL SCIENCE)
Vol. 63 No. 7 JUCHE106(2017).

손실자료가 불충분한 경우 복귀손실초과 재보험에서 웃평균손실평가

김철호, 로영춘

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《인민경제 모든 부문의 생산기술공정과 생산방법, 경영활동을 새로운 과학적토대우에 올려세우기 위한 연구사업도 강화하여야 합니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제11권 138페지)

우리는 보험기관들의 경영활동을 과학적으로, 합리적으로 진행하는데서 중요한 기술적문제로 제기되는 복귀를 가지는 손실초과재보험에 대하여 연구하였다.

선행연구[4]에서는 손실자료가 불충분한 경우 극우연량의 분포를 제기하고 그 표시를 연구하였으며 선행연구[1－3]에서는 복귀를 가지는 손실초과재보험에서의 보험료결정방법, 복합뽜쏭분포들을 연구하였다.

론문에서는 재보험협정이 복귀를 가지는 손실초과액재보험이며 재보험위험에 대한 손실자료가 불충분하게 주어지는 경우 복귀재보험손실에서의 웃평균손실에 대한 표시문제를 연구한다.

정의 1[3] X를 분포함수가 $F(x)$인 우연량이라고 하자.

이때 $S_X(x) := 1 - F(x)$를 우연량 X의 생존함수라고 하고 $\pi_X(t) := \int_t^{+\infty} S_X(x)dx$를 정지손실함수라고 부른다.

정의 2[3] X와 Y가 두 우연량이라고 하자.

임의의 $t \in \boldsymbol{R}$에 대하여 $\pi_X(t) \le \pi_Y(t)$일 때 정지손실순서의 관점에서 X는 Y보다 작다고 하고 $X \le_{sl} Y$로 표시한다.

이제 모임 $D = D(I_X,\ \mu,\ \sigma)$를 평균이 μ이고 분산이 σ^2인 구간 $I_X = [0,\ b]$의 값을 가지는 우연량들의 모임이라고 하자.

다음의 량들[3]을 생각한다.

$\nu = (\sigma / \mu)^2$: 손실크기 Z의 상대분산

$\nu_0 = (b - \mu) / \mu$: 모임 D에 대한 최대상대분산

$\nu_r = \nu / \nu_0$: 최대상대분산에 의한 상대분산의 비

정의 3[3] 임의의 $X \in D$에 대하여 $X_* \le_{sl} X \le_{sl} X^*$인 $X_*,\ X^*$을 각각 정지손실아래우연량, 정지손실웃우연량이라고 부른다.

$X \in D$에 대하여 특수한 정지손실아래, 웃우연량의 분포함수들은 표 1, 2와 같고 우연량 X를 $Z = (X - \mu)/\mu$로 놓고 변환한 정지손실아래, 웃우연량의 분포함수들은 표 3, 4와 같다.[3]

표 1. 아래우연량의 분포함수 $F_*(x)$

x	$F_*(x)$
$0 \le x \le \mu(1-\nu/\nu_0)$	0
$\mu(1+\nu/\nu_0) \le x < \mu(1+\nu)$	$\nu_0/(1+\nu_0)$
$\mu(1+\nu) \le x \le b$	1

표 2. 웃우연량의 분포함수 $F^*(x)$

x	$F^*(x)$
$0 \le x \le \alpha^*$	$\nu/(1+\nu)$
$\alpha^+ \le x \le \beta^*$	$[1+x/(\nu+z^2)^{1/2}]/2$
$\beta^* \le x < b$	$\nu/(\nu_0+\nu_r)$
$x=b$	1

표 3. 변환된 아래우연량의 분포함수 $F_*(x)$

z	$F_*(z)$
$-1 \le z \le -\nu_r$	0
$-\nu_r \le z < \nu$	$\nu_0/(1+\nu_0)$
$\nu \le z \le \nu_0$	$\nu/(\nu_0+\nu_r)$
$x=b$	1

표 4. 변환된 웃우연량의 분포함수 $F^*(z)$

z	$F^*(z)$
$0 \le z \le z(\alpha^*)$	$\nu/(1+\nu)$
$z(\alpha^+) \le z \le z(\beta^*)$	$[1+z/(\nu+z^2)^{1/2}]/2$
$z(\beta^*) \le z < \nu_0$	$\nu/(\nu_0+\nu_r)$
$z=\nu_0$	1

표 1－4에서 $\alpha^* = \mu(\nu+1)/2,\ \beta^* = \mu(\nu_0-\nu_r+2)/2$ 이고 $z(\alpha^*) = (\alpha^*-\mu)/\mu = (\nu-1)/2,$ $z(\beta^*) = (\beta^*-\mu)/\mu = (\nu_0-\nu_r)/2$ 이다.

다음으로 복귀를 가지는 손실초과재보험에 대하여 론의하자.

재보험은 어떤 보험기관이 자기가 접수한 보험대상의 일부를 여러 보험기관들에 나누어주어 그것에 미치는 위험들을 함께 담보하는 보험의 한가지 형태이다.

손실초과재보험은 원보험기관이 이미 합의한 한도 l을 초과하는 손실부분을 한도 m까지 책임지는 재보험이다. 이때 한도 m을 면책 또는 손해보유액이라고 한다.

어떤 손실 X_0 은 원보험기관의 손실 $X_S = (X_0-l)_+ - (X_0-l-m)_+$ 와 재보험기관이 책임지는 손실 $X_R = X_0 - X_S$ 로 나누어 표시된다. 이러한 협정을 $C_{XS}D$ 로 표시하며 D 와 $D+C$ 사이의 구역은 $C_{XS}D$ 에 속하는 층으로 표현된다.

손실초과재보험협정들은 보통 1개 층으로 주어지는 경우보다 여러개의 층으로 접수된다.

이제 1년 담보된 보험협정이 있어서 N은 1년간 일어나는 손실회수, $Y_i,\ i=1, \cdots, N$ 은 i번째 손실의 크기라고 하자.

어떤 l 초과 m ($m_{XS}l$ 로 표기)층에 대한 손실초과재보험 또는 XL재보험은 면책 l 을 초과하는 매개 손실부분을 한도 m 까지 담보한다. 즉 매 손실에 대한 재보험담보는

$$Z_i = \min\{(Y_i-l)_+,\ m\},\ \ i=1, \cdots,\ N. \tag{1}$$

X를 층에 대한 종합손실이라고 하면 그것은 우연합으로서 다음과 같다.

$$X = \sum_{i=1}^{N} Z_i \tag{2}$$

종합면책 L을 가지는 $m_{XS}l$ 층에 대한 XL재보험을 $m_{XS}l_{XS}L$ 로 표시하며 이것은 L을 초과하는 층의 종합손실부분만을 담보한다. 즉 $X_{L,\,M} = (X-L)_+$ 이다.

층에 대한 종합한도 M이 있는 경우 재보험자는 L을 초과하는 층의 종합손실에 대해 제한된 금액 M까지 보상해준다. 즉 $X_{L,\,M} = \min\{(X-L)_+,\ M\}$ 이다.

이러한 담보를 가지는 보험을 종합층 $M_{XS}L$ 을 가지는 층 $m_{XS}l$ 에 대한 XL재보험이라고 한다. 즉 종합한도 M이 한도 m의 배수 즉 $M=(K+1)m$ 이면 K번복귀가 있는 층 $m_{XS}l$ 에 대한 XL재보험이라고 한다. 이 XL재보험에 대한 재보험보상은 다음과 같다.

$$X_L^K = \min\{(X-L)_+,\ (K+1)m\} \tag{3}$$

이때 재보험은 종합지불이 한도의 전체배수 즉 $k \ge 1$을 초과하면 복귀되여야 한다.

만일 $k=0$이면 복귀는 없다. 복귀보험료는 초기보험료의 백분률 즉 $C_k \ge 0$인 k차복귀에 대체로 표현되며 그것은 층에 대한 손실에 비례하여 지불된다. 보험료 $C_k P_L^k$를 가지는 k차복귀는 금액 $r_L^k = \min\{(X-km-L)_+,\ m\},\ k=1,\cdots,\ K$를 담보한다. 여기서 0차복귀는 초기보험료 P_L^k로 정해지며 원래의 층을 담보한다. 즉 $r_L^0 = \min\{(X-L)_+,\ m\}$이다.

복귀는 비례적으로 지불되므로 k차복귀에 대한 우연보험료는 $r_L^{k-1} c_k P_L^k / m$이다.

이 XL재보험에 대하여 요구되는 전체 보험료수입은 다음과 같다.

$$_{\text{tot}}P_L^K = P_L^K \left(1 + \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{K} c_k r_L^{k-1}\right) \tag{4}$$

XL재보험에 대하여 재보험자가 지불하는 종합손실은 명백히 등식 $\sum_{k=0}^{K} r_L^k = X_L^K$를 만족시킨다. 여기서 X_L^K는 식 (3)에서 정의되였다.

다음으로 불충분한 손실분포를 가지는 복귀손실초과재보험에서의 웃평균손실결정에 대하여 론의하자.

복귀가 있는 XL재보험에 대한 보험료를 계산하기 위해서는 식 (2)에서 정의된 층 $m_{xs}l$에 대한 종합손실 X의 분포함수 $F_X(x) = \Pr\{X \le x\}$를 알아야 하는데 이것은

$$\pi_X(x) = \mathrm{E}[(X-x)_+] = \int_z^{+\infty} \overline{F}_X(x)dx,\quad \overline{F}_X(x) = 1 - F_X(x)$$

로 정의되는 정지손실변환과 련관된다. 명백히 순수보험료는 기대값방정식 $\mathrm{E}[_{\text{tot}}P_L^K]$를 만족시키는데 이것은 식 (4)로부터 다음과 같이 표시된다.

$$P_L^k(1 + c_k \mathrm{E}[r_L^{k-1}]/m) = \mathrm{E}[X_L^K] \tag{5}$$

이제 복귀 $c_k = c,\ k=1,\cdots,\ K$를 가지는 특별한 경우만을 고찰하자.

그러면 식 (5)로부터 $P_L^k(1 + c/m \cdot \mathrm{E}[X_L^{k-1}]) = \mathrm{E}[X_L^k]$가 성립된다.

그러나 $X_L^k = \min\{X-L)_+,\ (k+1)m\} = (X-L)_+ - (X-L-(k+1)m)_+,\quad k=1,\cdots,\ K$와 정지손실변환의 정의를 리용하면 다음의 보험료공식을 얻게 된다.

$$P_L^k = [\pi_X(L) - \pi_X(L+(k+1)m)]/\{1 + c[\pi_X(L) - \pi_X(L+km)]/m\} \tag{6}$$

식 (6)은 복귀가 있는 XL재보험의 순보험료가 식 (1), (2)에서 정의되는 종합손실 $X = \sum_{i=1}^{N} Z_i = \sum_{i=1}^{N} \min\{(Y_i - l)_+,\ m\}$과 련관된 정지손실변환식에 의존한다는것을 보여준다.

사실 실천에서 X의 정지손실변환을 구하는것은 판져반복법이나 고속푸리에변환과 같은 수값계산방법에 의거한다.

그런데 판져반복법은 리산분포형태로 손실크기 Y_i의 분포를 요구한다.

이제 손실자료가 불충분한 경우라고 하자.

평균손실수 $\lambda = \mathrm{E}[N]$과 XL재보험의 손실크기 $Z = Z_i$는 평균 $\mu = \mathrm{E}[Z]$, 분산 $\sigma^2 = \mathrm{Var}[Z]$를 가지는 $[0,\ m]$에서 정의되는 모든 우연변수들의 모임 $D = D([0,\ m];\ \mu,\ \sigma)$에 속한다고 가정한다.

앞에서 모든 $Z \in D$ 에 대하여 $Z_* \le_{sl} Z \le_{sl} Z^*$ 즉 모든 $x \ge 0$ 과 모든 $Z \in D$ 에 대하여 $\pi_{Z_*}(x) \le \pi_Z(x) \le \pi_{Z^*}(x)$ 를 만족시키는 명확한 정지손실우연량 Z_*, Z^* 을 보여주었다. 여기서 $\pi_Z(x) = \mathrm{E}[(Z-x)_+]$ 는 우연량 Z 의 정지손실함수를 나타낸다.

정규화된 우연량 $(Z_* - \mu)/\mu$ 와 $(Z^* - \mu)/\mu$ 의 분포도 앞에서 이미 개괄되였다.

층 $m_{XS} l$ 에 대한 종합손실도 역시 정지손실화된다.

보조정리 $X_* = \sum_{i=1}^{N} Z_{*i} \le_{sl} X = \sum_{i=1}^{N} Z_i \le_{sl} X^* = \sum_{i=1}^{N} Z_i^*$

정리 1 층 $m_{XS} l$ 에 대한 XL재보험에서 $L=0$ 이고 K차복귀가 있는 경우 손실 X_0^K 의 평균은 $\mathrm{E}[X_0^K] = (K+1)m + \sum_{\alpha:(\alpha,\, Z)<(K+1)m} \frac{\lambda^{|\alpha|}}{|\alpha|!} e^{-\lambda} P^{\alpha}((\alpha,\, Z)-(K+1)m)$ 이다. 여기서 $|\alpha| = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i$, $(\alpha,\, Z) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i Z_i$ 이고

$$P^{\alpha} = P_0^{\alpha_0} P_1^{\alpha_1} \cdots P_n^{\alpha_n}, \quad P_0 = \int_0^l f_Y(x)dx, \; P_i = \int_{l+z_{i-1}}^{l+z_i} f_Y(x)dx \;\; (i=1, \cdots,\; n-1), \;\; P_n = \int_{l+z_{n-1}}^{+\infty} f_Y(x)dx.$$

증명 $X = \sum_{i=1}^{N} Z_i$, $X_0^{(K)} = X - (X-(K+1)m)_+$ 이고 따라서 $\mathrm{E}[X_0^K] = \mathrm{E}[X] - \mathrm{E}[(X-(K+1)m)_+]$ 가 성립된다.

$F(x)$ 를 X 의 분포함수라고 할 때 $\mathrm{E}[(X-(K+1)m)_+] = \mathrm{E}[X] - (K+1)m - F((K+1)m)$ 이며 이로부터 $\mathrm{E}[X_0^K] = (K+1)m + F((K+1)m)$ 이 성립된다.

이제 $F((K+1)m)$ 을 구하자.

$$f_X(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \delta(x - z_i)$$

여기서 $\delta(x)$ 는 다음의 성질을 만족시키는 디라크함수이다.

$$\delta(x-a) = \begin{cases} \infty, & x=a \\ 0, & x \ne a \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \sum p_i \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-Z_i)dx = 1$$

$$F_X(x) = P\left\{\sum_{i=1}^{N} Z_i < x\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} P(A_k) P\left\{\sum_{i=1}^{k} Z_i < x \,\middle|\, A_k\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} P\left\{\sum_{k=0}^{k} Z_i < x\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} F_z^{*k}(x)$$

여기서 $A_k = \{N = k\}$, $N = 0, 1, 2, \cdots$ 이고 $F_X^0(x) = H(x)$ 는 헤비사이드함수이며 $F_i^{*K}(x)$ 는 $\sum_{i=1}^{k} Z_i$ 의 분포함수이다.

$$f_X(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} f_i^{*k}(x), \quad \frac{d}{dx} H(x) = \delta(x), \quad f_z'(x) = \sum_{i=0}^{n} P_i \delta(x - z_i)$$

$$f_z^{*2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_z(x-y) f_z(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=0}^{n} P_i \delta(x-y-Z_i) \sum_{j=0}^{n} P_j \delta(y - Z_j) dy =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} P_i P_j \int \delta(x-y-Z_i)\delta(y-Z_j)dy = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} P_i P_j \delta(x - Z_i - Z_j)$$

류사하게 다음과 같이 계산된다.

$$f_z^{*k}(x)=\sum_{i_1=0}^{n}\sum_{i_2=0}^{n}\cdots\sum_{i_k=0}^{n}P_{i_1}P_{i_2}\cdots P_{i_k}\delta(x-Z_{i_1}-Z_{i_2}-\cdots-Z_{i_k})$$

$$f_X(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{\alpha}P_\alpha\delta(x-Z_\alpha)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{|\alpha(n)|=k}P_\alpha\delta(x-(\alpha,\ Z))$$

$$\alpha(k)=(i_1,\ i_2,\cdots,\ i_k),\ \ P_\alpha=P_{i_1}P_{i_2}\cdots P_{i_k},\ \ Z_\alpha=Z_{i_1}+Z_{i_2}+\cdots Z_{i_k},\ \ |\alpha(n)|=k$$

따라서 $F((k+1)m)=\int_0^{(K+1)m}f_X(x)dx=\sum_{\alpha:(\alpha,\ Z)<(K+1)m}\frac{\lambda^{|\alpha|}}{|\alpha|!}e^{-\lambda}P_\alpha((\alpha,\ Z)-(K+1)m)$ 이다.(증명끝)

정리 2 Z_d^* 이 아래와 같이 결정되는 $\{x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3\}$ 에서 정의되고 확률 $\{p_0,\ p_1,\ p_2,\ p_3\}$ 을 가지는 4원우연량이라고 하자.

$$x_0=0,\ \ x_1=\mu(1+\nu)/2,\ \ x_2=\mu(1+(\nu_0-\nu_r)/2),\ \ x_3=\mu(1+\nu_0)$$

$$p_0=\frac{\nu}{1+\nu},\ \ p_1=\frac{\nu_0-\nu}{(1+\nu_0)(1+\nu)},\ \ p_2=\frac{\nu_0-\nu}{(1+\nu_0)(\nu_r+\nu_0)},\ \ p_3=\frac{\nu_r}{(\nu_r+\nu_0)}$$

이때 정지손실웃우연량 X_d^* 의 평균은 다음과 같이 표시된다.

$$\pi_{X_d^*}(x)=\lambda\mu-x+e^{-\lambda(1-\nu_0)}\sum_{n_1,\ n_2,\ n_3=0}^{\infty}\frac{(\lambda p_1)^{n1}(\lambda p_2)^{n2}(\lambda p_3)^{n3}}{n_1!n_2!n_3!}\left(x-\sum_{i=1}^{3}n_ix_i\right)_+$$

참 고 문 헌

[1] W. Hürlimann; ASTIN Bulletin, 35, 1, 211, 2005.

[2] W. Hürlimann; ASTIN Bulletin, 37, 1, 189, 2007.

[3] Zhi Bin Ling et al.; Insurance Mathematics and Economics, 49, 207, 2011.

[4] M. Dennuit et al.; Actuarial Theory for Dependent Risks Measures, Orders and Models, John Wiley & Sons, 103～181, 2005.

주체106(2017)년 3월 5일 원고접수

The Estimation of Up-Mean-Loss of the Excess of Loss Reinsurance with Reinstatements in Case of Insufficient Loss Data

Kim Chol Ho, Ro Yong Chun

We study an expression of up-mean-loss of the reinsurance with reinstatement in case that the agreement is the excess of loss reinsurance with reinstatement and insufficient loss data.

Key words: excess of loss reinsurance, reinstatement, insufficient loss data