김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제1호

적분경계조건을 가지는 분수계미분방정식의 정인 풀이의 존재성을 위한 불변구역탐색법

조신혁, 최히철

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《수학, 물리학, 화학, 생물학과 같은 기초과학부문에서 과학기술발전의 원리적, 방법론적기초를 다져나가면서 세계적인 연구성과들을 내놓아야 합니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 40페지)

론문에서는 최근시기 활발히 연구되고있는 분수계미분방정식의 정인 풀이의 존재성을 론의하였다.

1. 문제설정

론문에서 론의하는 보조변수가 포함된 적분경계조건을 가지는 비선형분수계미분방정식은 피흐름문제들과 열탄성학, 력학계를 비롯하여 실지 현상들을 연구하는데서 제기되는 문제이다.[1, 2, 5]

많은 론문들에서 분수계미분방정식의 풀이의 존재성에 대한 연구를 추에서의 부동점정리를 리용하여 진행하고있다.[4, 6]

선행연구[7]에서는 추에서의 부동점정리를 리용하여 다음의 분수계미분방정식의 풀이의 존재성을 연구하였다.

$$D_{0+}^{\alpha}u(t)+f(t,\ u(t))=0\ \ (0<t<1) \tag{1}$$

$$u(0)=u'(0)=0,\ u(1)=\lambda\int_0^1 u(s)ds \tag{2}$$

여기서 $2<\alpha\le 3,\ 0<\lambda,\ \lambda\ne\alpha,\ f:[0,\ 1]\times[0,\ \infty)\to[0,\ \infty)$는 련속함수, D_{0+}^{α}는 리만-류빌분수계도함수이다. 여기에서는 설정된 문제와 관련된 그린함수의 성질을 밝혔으며 비선형항 f에 대한 다음의 가정들과 추에서의 부동점정리(크라스노셀스끼부동점정리)를 리용하여 정인 풀이의 존재성을 밝혔다.

① $f_0=\infty,\ f^{\infty}=0$

② $f^0=0,\ f_{\infty}=\infty$

여기서

$$f_0=\lim_{u\to0^+}\left\{\min_{t\in[1/2,\ 1]}\frac{f(t,\ u)}{u}\right\},\ f_{\infty}=\lim_{u\to\infty}\left\{\min_{t\in[1/2,\ 1]}\frac{f(t,\ u)}{u}\right\}$$

$$f^0=\lim_{u\to0^+}\left\{\max_{t\in[0,\ 1]}\frac{f(t,\ u)}{u}\right\},\ f^{\infty}=\lim_{u\to\infty}\left\{\max_{t\in[0,\ 1]}\frac{f(t,\ u)}{u}\right\}$$

이다. 우의 가정들은 함수 f의 상선형, 하선형성으로서 추에서의 부동점정리의 조건들을 만족시키는데 리용된다. 그러므로 함수 f가 우의 두 가정들을 모두 만족시키지 않는 경

우에는 선행연구[7]의 결과를 리용할수 없다. 실례로 함수 $f(t,\ u)=2u+(1-t)\sin u$ 에 대하여 $f_0=2,\ f_\infty=2,\ f^0=3,\ f^\infty=2$ 이므로 함수 f 는 선행연구[7]의 가정들을 만족시키지 않는다. 그러므로 선행연구[7]의 결과를 리용할수 없다.

론문에서는 분수계미분방정식 (1), (2)와 동등한 적분방정식에 들어있는 적분연산자의 불변구역을 찾고 샤우데르부동점정리를 리용하여 정인 풀이의 존재성을 밝혔다. 결과 비선형항 f 에 대한 새로운 가정들이 제시되였으며 선행연구[7]의 결과를 리용할수 없는 일부 문제들에 대하여서도 방정식 (1), (2)의 정인 풀이의 존재성을 론의할수 있다.

2. 예 비 지 식

정의 1[3] $\alpha>0$ 계리만-류빌의 분수도함수는 다음과 같이 정의된다.

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x):=\left(\frac{d}{dx}\right)^n(I_{a+}^{n-\alpha}y)(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\int_a^x\frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}$$

여기서 n 은 α 보다 작지 않은 옹근수이고 $\Gamma(\alpha)$ 는 $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt\ \ (\alpha>0)$ 로 정의되는 감마함수이다.

정의 2[3] 함수 $f:[a,\ +\infty)\to\mathbf{R}$ 의 $\alpha>0$ 계 리만-류빌분수계적분은

$$(I_{a+}^{\alpha}f)(x):=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x(x-t)^{\alpha-1}f(t)dt\ \ (x>a)$$

로 정의된다.

보조정리 1[3] $\alpha>0$ 이고 $f(x)\in L_{\overline{p}}(a,\ b)\ \ (1\le\overline{p}\le\infty)$ 이면 등식

$$(D_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\alpha}f)(x)=f(x)$$

가 구간 $[a,\ b]$ 의 거의 도처에서 성립한다.

보조정리 2[3] $\alpha>0,\ u,\ D_{0+}^{\alpha}u\in L_1(0,\ 1)$ 이라고 하자. 그러면 다음의 사실이 성립한다.

$$I_{0+}^{\alpha}D_{0+}^{\alpha}u(t)=u(t)+c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2}+\cdots+c_nt^{\alpha-n},\ \ c_i\in\mathbf{R}\ \ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

이제 적분경계조건 (2)를 가지는 선형분수계미분방정식

$$D_{0+}^{\alpha}u(t)+y(t)=0\ \ (0<t<1) \tag{3}$$

과 그것과 관련된 그린함수의 성질에 대하여 보자.

보조정리 3[7] $2<\alpha\le3,\ \lambda\ne\alpha,\ y\in C[0,\ 1]$ 이라고 하자. 그러면 식 (2), (3)은 유일한 풀이

$$u(t)=\int_0^1G(t,\ s)y(s)ds$$

를 가진다. 여기서

$$G(t,\ s)=\begin{cases}\dfrac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}(\alpha-\lambda+\lambda s)-(\alpha-\lambda)(t-s)^{\alpha-1}}{(\alpha-\lambda)\Gamma(\alpha)} & (0\le s\le t\le1)\\[2ex] \dfrac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}(\alpha-\lambda+\lambda s)}{(\alpha-\lambda)\Gamma(\alpha)} & (0\le t\le s\le1)\end{cases} \tag{4}$$

보조정리 3으로부터 연산자 $T: C[0,\ 1] \to C[0,\ 1]$ 을

$$Tu(t) := \int_0^1 G(t,\ s) f(s,\ u(s)) ds \tag{5}$$

로 정의하면 연산자 T 의 부동점은 (1), (2)의 풀이로 된다는것을 알수 있다.

보조정리 4[7] 식 (4)에서 정의된 함수 G 는 다음과 같은 성질들을 가진다.

① 임의의 $t,\ s \in [0,\ 1]$ 과 $\lambda \neq \alpha$ 에 대하여 $G(t,\ s)$ 는 련속이다.

② $\alpha \in (2,\ 3]$ 이고 $\lambda \in (0,\ \alpha)$ 이면 임의의 $t,\ s \in (0,\ 1)$ 에 대하여

$$t^{\alpha-1} G(1,\ s) \le G(t,\ s) \le \frac{\alpha}{\lambda} G(1,\ s) \tag{6}$$

가 성립한다.

③ $\alpha \in (2,\ 3]$ 이고 $\lambda \in [0,\ \alpha)$ 이면 임의의 $t,\ s \in (0,\ 1)$ 에 대하여 $G(t,\ s) > 0$ 이다.

3. 기 본 결 과

보조정리 5 $G_s(t) := G(t,\ s)$ 로 놓으면 $\{G_s(t) \mid 0 \le s \le 1\}$ 은 $C[0,\ 1]$ 에서 동정도련속이다.

증명 임의의 $s \in [0,\ 1]$ 에 대하여

$$\lim_{t \to s^+} \frac{G_s(t) - G_s(s)}{t - s} = \lim_{t \to s^+} \frac{(t^{\alpha-1} - s^{\alpha-1})(1-s)^{\alpha-1}(\alpha - \lambda + \lambda s)}{(t-s)(\alpha - \lambda)\Gamma(\alpha)} \tag{7}$$

이다. 마찬가지로 다음식이 성립한다.

$$\lim_{t \to s^-} \frac{G_s(t) - G_s(s)}{t - s} = \lim_{t \to s^-} \frac{(t^{\alpha-1} - s^{\alpha-1})(1-s)^{\alpha-1}(\alpha - \lambda + \lambda s)}{(t-s)(\alpha - \lambda)\Gamma(\alpha)} \tag{8}$$

함수 $t^{\alpha-1}$ 의 미분가능성으로부터 식 (7), (8)은 존재하며 서로 같다. 즉 $G_s(t)$ 는 구간 $(0,\ 1)$ 에서 미분가능하다.

$$|G_s'(t)| = \begin{cases} \left| \dfrac{(\alpha-1)t^{\alpha-2}(1-s)^{\alpha-1}(\alpha-\lambda+\lambda s) - (\alpha-\lambda)(\alpha-1)(t-s)^{\alpha-2}}{(\alpha-\lambda)\Gamma(\alpha)} \right| & (0 < s \le t < 1) \\ \left| \dfrac{(\alpha-1)t^{\alpha-2}(1-s)^{\alpha-1}(\alpha-\lambda+\lambda s)}{(\alpha-\lambda)\Gamma(\alpha)} \right| & (0 < t \le s < 1) \end{cases}$$

일 때

$$|G_s'(t)| \le \left| \frac{(\alpha-1)t^{\alpha-2}\alpha}{(\alpha-\lambda)\Gamma(\alpha)} \right| + \left| \frac{(\alpha-\lambda)(\alpha-1)t^{\alpha-2}}{(\alpha-\lambda)\Gamma(\alpha)} \right| \le \frac{(\alpha-1)(2\alpha-\lambda)}{(\alpha-\lambda)\Gamma(\alpha)}$$

이다. 그러므로 $N := \dfrac{(\alpha-1)(2\alpha-\lambda)}{(\alpha-\lambda)\Gamma(\alpha)}$ 로 놓으면 $\forall t_1,\ t_2 \in (0,\ 1)$ 에 대하여

$$|G_s'(t_2) - G_s'(t_1)| \le N |t_2 - t_1| \tag{9}$$

이 성립한다. 즉 s 의 임의성으로부터 결과가 성립한다.(증명끝)

보조정리 6 식 (5)에서 정의된 연산자 $T: C[0,\ 1] \to C[0,\ 1]$ 은 콤팍트연산자이다.

증명 $\Omega \subset C[0,\ 1]$ 을 유계모임이라고 하자. 그러면 $T(\Omega)$ 는 동정도련속과 아르첼라-아스콜리정리에 의하여 $T(\Omega)$ 는 상대콤팍트이고 Ω 의 임의성에 의하여 T 는 콤팍트연산자이다.(증명끝)

함수 f에 대하여 다음의 가정을 하자.

가정 1 함수 $f:[0,\ 1]\times[0,\ \infty)\to[0,\ \infty)$는 련속함수이고 $f(t,\ 0)=0$이다.

가정 2 $\exists l_2>0;\ \forall z,\ y\in[0,\ +\infty)$에 대하여 다음식이 성립한다.

$$|f(t,\ z)-f(t,\ y)|\le l_2|z-y|\ \ (\forall t\in(0,\ 1))$$

가정 3 $\exists l_1>0;\ \forall z,\ y\in[0,\ +\infty)$에 대하여 다음식이 성립한다.

$$l_1|z-y|\le|f(t,\ z)-f(t,\ y)|\ \ (\forall t\in(0,\ 1))$$

편리상 몇가지 약속을 하겠다.

$$A:=(\alpha+1)(\alpha-\lambda)\Gamma(\alpha),\ \ B:=\frac{l_1\lambda\Gamma(\alpha+1)}{(\alpha-\lambda)\Gamma(2\alpha+1)}$$

$$C:=\frac{A\alpha}{\lambda}\int_0^1 G(1,\ s)g\left(\int_0^1 G(s,\ \bar{s})d\bar{s}\right)ds,\ \ I:=\left(0,\ \alpha-\frac{l_2}{(\alpha+1)\Gamma(\alpha)}\right)$$

$$Lset(\varepsilon,\ \lambda)=\left\{L\in\mathbf{R}\ \middle|\ \frac{\alpha A\varepsilon}{\lambda}<L<\frac{A\varepsilon-l_2\varepsilon}{1-B}\right\}$$

정리 가정 1, 2, 3을 만족시킬 때 $\forall\varepsilon>0,\ \forall\lambda\in I,\ \forall L\in Lset(\varepsilon,\ \lambda)$에 대하여 연산자 T는 원소 $u^*(t)=L\int_0^1 G(t,s)ds$의 ε근방에서 적어도 하나의 정인 부동점을 가진다.

증명 먼저 임의의 $s\in[0,\ 1]$에 대하여

$$f(s,\ u^*(s))<L$$

임을 보자. 사실 가정 1, 2에 의하여

$$f(s,\ u^*(s))=f(s,\ u^*(s))-f(s,\ 0)\le l_2|u^*(s)|=l_2L\int_0^1 G(s,\ \bar{s})d\bar{s}\le l_2L\frac{\alpha}{\lambda}\int_0^1 G(1,\ \bar{s})d\bar{s}=l_2\frac{L}{A}$$

이고 $\lambda\in I$로부터 $f(s,\ u^*(s))<L$이다. 다음으로

$$V:=\{u\in C[0,\ 1]\,|\ \|u-u^*\|_\infty<\varepsilon,\ u(t)\ge 0,\ t\in[0,\ 1]\}$$

로 놓으면 V는 T의 불변구역 즉 $T(V)\subset V$임을 보자.

임의의 $u\in V$에 대하여 함수 $G(t,\ s)$와 연산자 T의 정의와 가정 1에 의하여 $Tu(t)\ge 0\ \ (t\in[0,\ 1])$이 성립한다. 또한

$$\begin{aligned}|Tu(t)-u^*(t)|&=\left|\int_0^1 G(t,\ s)f(s,\ u(s))ds-u^*(t)\right|\le\\&\le\left|\int_0^1 G(t,\ s)f(s,\ u(s))-G(t,\ s)f(s,\ u^*(s))ds\right|+\left|\int_0^1 G(t,\ s)f(s,\ u^*(s))ds-u^*(t)\right|=\\&=\left|\int_0^1 G(t,\ s)(f(s,\ u(s))-f(s,\ u^*(s)))ds\right|+\left|\int_0^1 G(t,\ s)(f(s,\ u^*(s))-L)ds\right|\le\\&\le\int_0^1|G(t,\ s)\|f(s,\ u(s))-f(s,\ u^*(s))|ds+\int_0^1|G(t,\ s)\|f(s,\ u^*(s))-L|ds\le\end{aligned}$$

$$\le l_2\varepsilon^\theta \int_0^1 G(t,\ s)ds + \int_0^1 G(t,\ s)(L - f(s,\ u^*(s)))ds \le$$

$$\le l_2\varepsilon^\theta \frac{\alpha}{\lambda}\int_0^1 G(1,\ s)ds + \frac{\alpha}{\lambda}\int_0^1 G(1,\ s)(L - f(s,\ u^*(s)))ds \le \tag{10}$$

$$\le l_2\varepsilon^\theta \frac{\alpha}{\lambda}\int_0^1 G(1,\ s)ds + \frac{\alpha L}{\lambda}\int_0^1 G(1,\ s)ds - \frac{\alpha}{\lambda}\int_0^1 G(1,\ s)f(s,\ u^*(s))ds$$

가정 3에 의하여

$$f(s,\ u^*(s)) = f(s,\ u^*(s)) - f(s,\ 0) \ge l_1 u^*(s) = l_1 L\int_0^1 G(s,\ \bar{s})d\bar{s} \ge$$

$$\ge l_1 L\int_0^1 s^{\alpha-1}G(1,\ \bar{s})d\bar{s} = \frac{\lambda l_1 L s^{\alpha-1}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha-\lambda)\Gamma(\alpha)}$$

이다. 이 평가식을 식 (10)에 대입하면 다음식이 성립한다.

$$|Tu(t) - u^*(t)| \le l_2\varepsilon^\theta \frac{\alpha}{\lambda}\int_0^1 G(1,\ s)ds + \frac{\alpha L}{\lambda}\int_0^1 G(1,\ s)ds - \frac{l_1 L}{(\alpha+1)(\alpha-\lambda)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 G(1,\ s)s^{\alpha-1}ds =$$

$$= \frac{1}{A}\left(l_2\varepsilon^\theta + L - \frac{l_1\lambda L}{(\alpha-\lambda)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}s^\alpha ds \right) =$$

$$= \frac{1}{A}\left(l_2\varepsilon^\theta + L - \frac{l_1\lambda L}{(\alpha-\lambda)\Gamma(\alpha)}\beta(\alpha+1,\ \alpha) \right) =$$

$$= \frac{1}{A}\left(l_2\varepsilon^\theta + L - \frac{l_1\lambda L}{(\alpha-\lambda)\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)} \right) =$$

$$= \frac{1}{A}(l_2\varepsilon^\theta + L - BL) < \varepsilon$$

$\| Tu(t) - u^*(t) \|_\infty < \varepsilon$ 이 성립하므로 $Tu \in V$ 이다. 그러므로 샤우데르정리에 의하여 T 는 V 에서 부동점을 가진다.

한편 식 (6)과 $Lset(\varepsilon,\ \lambda)$ 의 정의에 의하여

$$\| u^* \|_\infty = L\left\| \int_0^1 G(t,\ s)ds \right\|_\infty \ge L\left\| \int_0^1 t^{\alpha-1}G(1,\ s)ds \right\|_\infty = L\left\| t^{\alpha-1}\frac{\lambda}{(\alpha-\lambda)\Gamma(\alpha+2)} \right\|_\infty =$$

$$= L\cdot\frac{\lambda}{(\alpha-\lambda)\Gamma(\alpha+2)} = \frac{\lambda L}{\alpha A} > \varepsilon$$

이므로 V 에는 령원소가 포함되지 않는다. 그러므로 T 의 부동점은 정인 부동점이다.(증명끝)

실례 분수계미분방정식

$$\begin{cases} D_{0+}^{2.5}u(t) + 2u(t) + (t-1)\sin u(t) = 0 \ \ (0 < t < 1) \\ u(0) = u'(0) = 0,\ u(1) = \lambda\int_0^1 u(s)ds \end{cases}$$

에 대하여 $f(t,\ u)=2u+(1-t)\sin u$ 이고

$$1<\left|\frac{\partial f(t,\ u)}{\partial u}\right|=|2+(1-t)\cos u|<3$$

이 성립하므로

$$|z-y|\le|f(t,\ z)-f(t,\ y)|\le 3|z-y|$$

이다. 즉 $l_1=1,\ l_2=3,\ \theta=1$ 이고 가정 1, 2, 3을 만족시킨다. 그러므로 이 문제는 정인 풀이를 가진다.

참 고 문 헌

[1] K. B. Oldham, J. Spanier; The Fractional Calculus, Academic Press, 175～233, 1974.

[2] I. Podlubny; Fractional Differential Equations, Academic Press, 63～72, 1999.

[3] A. A. Kilbas et al.; Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier Science, 69～89. 2006.

[4] Z. Han et al.; Appl. Math. Comput., 257, 526, 2015.

[5] S. Sun et al.; Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 17, 4961, 2012.

[6] Y. Zhao et al.; Appl. Math. Comput., 217, 6950, 2011.

[7] A. Cabada, Z. Hamdi; Appl. Math. Comput., 228, 251, 2014.

주체107(2018)년 9월 8일 원고접수

A Technique of Searching Invariant Domain for the Existence of Positive Solutions for the Fractional Differential Equation with Integral Boundary Conditions

Jo Sin Hyok, Choe Hui Chol

In this paper, we obtained the existence of positive solutions for a class of fractional differential equations with integral boundary conditions including a parameter by means of Schauder's fixed point theory.

Key words: integral boundary condition, positive solution, invariant domain