김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제4호

조종들에 대한 적분제한과 기하학적제한을 가진 단순집단추종대피경기에서 경기값

김금성, 주광휘

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《기초과학이 든든해야 나라의 과학기술이 공고한 토대우에서 끊임없이 발전할수 있습니다.》

선행연구[1]에서는 m 명의 추종자들의 조종들에 대한 적분제한과 하나의 대피자의 조종에 대한 기하학적제한을 가진 마감시간고정단순추종대피미분경기를, 선행연구[2]에서는 힐베르트공간 l_2 에서 유한 또는 셀수 있는 개수의 추종자들과 한 대피자를 가진 추종대피경기에서 대피문제를 론의하였으며 선행연구[3]에서는 힐베르트공간 l_2 에서 셀수 있는 개수의 추종자들에 의한 하나의 대피자를 추종하는 적분제한단순미분경기를 연구하였다.

론문에서는 m 명의 추종자들의 조종들에 대한 적분제한과 하나의 대피자의 조종에 대한 기하학적제한을 가진 한가지 마감시간고정단순추종대피미분경기를 연구하였다. 여기서는 선행연구들의 기초에 놓였던 추종자들과 대피자의 초기점들사이의 위치관계에 대한 가정이 없는 일반적인 경우에 경기값을 구하고 추종자들의 최량방략들을 구성하였다.

$\mathbf{R}^n$ 에서 추종자 P_i 들과 대피자 E 의 운동은 방정식

$$(P_i):\ \dot{x}_i = u_i(t),\ \ x_i(0) = x_{i0},\ i \in I \tag{1}$$

$$(E):\ \dot{y} = v(t),\ \ y(0) = y_0 \tag{2}$$

에 의하여 서술된다. 여기서 $x_i,\ u_i,\ y,\ v \in \mathbf{R}^n$ 이고 u_i 와 v 는 각각 추종자 P_i 와 대피자 E 의 조종들이다.

정의 1 조건

$$\int_0^{\zeta} |u_i(t)|^2\, dt \le \rho_i^2 \tag{3}$$

을 만족시키는 가측함수 $u_i = u_i(t),\ 0 \le t \le \zeta$ 를 추종자 P_i 의 허용조종이라고 부른다. 여기서 ζ 는 주어진 고정된 순간이고 ρ_i 들은 주어진 정인 수들이다.

정의 2 제한

$$|v(t)| \le \sigma \tag{4}$$

를 만족시키는 가측함수 $v = v(t)$, $0 \le t \le \theta$ 를 대피자 E 의 허용조종이라고 부른다. 여기서 σ 는 주어진 정수이다.

만일 $u_i = u_i(t)$ 와 $v = v(t)$, $0 \le t \le \zeta$ 들이 각각 추종자 P_i 와 대피자 E 의 허용조종들이라면 추종자자리길 $x_i(t)$, $0 \le t \le \zeta$ 는 식 (1)의 절대련속인 풀이에 의하여 정의되고 대피자자리길 $y(t)$, $0 \le t \le \zeta$ 는 식 (2)의 절대련속인 풀이에 의하여 정의된다.

정의 3 함수 $U_i(t,\ x_i,\ y,\ v)$, $U_i : [0,\ \infty) \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $i \in I$ 를 추종자 P_i 의

방략이라고 부른다. 여기서 련립방정식

$$\dot{x}_i = U_i(t,\ x_i,\ y,\ v(t)),\ x_i(0) = x_{i0}$$
$$\dot{y} = v(t),\ y(0) = y_0$$

은 대피자 E의 임의의 허용조종 $v = v(t),\ 0 \le t \le \varsigma$ 에 대하여 유일한 풀이 $(x_i(\cdot),\ y(\cdot))$을 가진다. 방략 U_i 에 의하여 형성된 매 조종이 허용조종이면 방략 U_i 를 허용방략이라고 부른다. 만일 $\inf\limits_{U_1,\ \cdots,\ U_m} \Gamma_1(U_1,\ \cdots,\ U_m) = \Gamma_1(U_{10},\ \cdots,\ U_{m0})$ 이면 추종자 P_i 들의 방략 U_{i0} 들을 최량방략들이라고 부른다. 여기서 $\Gamma_1(U_1,\ \cdots,\ U_m) = \sup\limits_{v(\cdot)} \min\limits_{1\le i\le m} \| x_i(\zeta) - y(\zeta) \|$ 이고 U_i 와 $v(\cdot)$ 은 각각 추종자 P_i 들의 허용방략들과 대피자 E 의 허용조종이다.

함수 $V(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_m,\ y)$, $V : [0,\ \infty) \times \mathbf{R}^n \times \cdots \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 을 대피자 E 의 방략이라고 부른다. 여기서 련립방정식

$$\dot{x}_i = u_i,\ x_i(0) = x_{i0},\ i \in I$$
$$\dot{y} = V(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_m,\ y),\ y(0) = y_0$$

은 추종자 P_i 들의 임의의 허용조종 $u_i = u_i(t),\ 0 \le t \le \zeta$ 에 대하여 유일한 풀이 $(x_1(\cdot),\ \cdots,\ x_m(\cdot),\ y(\cdot))$ 을 가진다. 만일 방략 V 에 의하여 형성된 매 조종이 허용조종이면 방략 V 를 허용방략이라고 부른다.

만일 $\sup\limits_V \Gamma_2(V) = \Gamma_2(V_0)$ 이면 대피자 E 의 방략 V_0 을 최량방략이라고 부른다. 여기서

$$\Gamma_2(V) = \inf_{u_1(\cdot),\ \cdots,\ u_m(\cdot)} \min_{1\le i\le m} \| x_i(\zeta) - y(\zeta) \|$$

이고 $u_i(\cdot)$ 과 V 는 각각 추종자 P_i 의 허용조종과 대피자 E 의 허용방략이다.

만일 $\Gamma_1(U_{10},\ \cdots,\ U_{m0}) = \Gamma_2(V_0) = \gamma$ 이면 경기는 값 γ 를 가진다고 말한다.

식 (1)－(4)에 대하여 우리는 추종자 P_i 들과 대피자 E 의 최량방략들인 U_{i0} 들과 V_0 그리고 경기값 γ 를 구하겠다.

$H(x,\ r)$ 를 중심이 x 이고 반경이 r 인 구라고 하자. 그때 초기위치 $x_{i0},\ i \in I$ 로부터 순간 ζ 까지 추종자 P_i 의 도달가능한 구역은 구 $H(x_{i0},\ \rho_i \zeta^{1/2})$ 로 된다. 그것은 꼬쉬－부냐꼽스끼부등식에 의하여

$$| x_i(\zeta) - x_{i0} | = \left| \int_0^\zeta u_i(s) ds \right| \le \int_0^\zeta | u_i(s) | ds \le \left(\int_0^\zeta 1^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^\zeta | u_i(s) |^2 ds \right)^{1/2} \le \rho_i \zeta^{1/2}$$

으로 되고 등식이 $| u_i(s) | = \rho_i \zeta^{1/2}$ 에 대하여 성립되기때문이다.

그리고 만일 $\bar{x} \in H(x_{i0},\ \rho_i \zeta^{1/2})$ 즉 $| \bar{x} - x_{i0} | \le \rho_i \zeta^{1/2}$ 이면 조종

$$u_i(t) = \frac{\bar{x} - x_{i0}}{\zeta},\ 0 \le t \le \zeta$$

에 대하여 $x_i(\zeta) = \bar{x}$ 를 얻는다.

추종자 P_i 의 조종은 허용조종으로 된다. 즉

$$\int_0^\zeta | u_i(t) |^2 dt = \left(\frac{1}{\zeta} \right) | \bar{x} - x_{i0} |^2 \le (\rho_i \zeta^{1/2})^2 \cdot \frac{1}{\zeta} = \rho_i^2$$

한편 초기위치 y_0 으로부터 순간 ζ 까지 대피자 E 의 도달가능성구역이 구 $H(y_0,\ \sigma\zeta)$ 로 된다는것이 대피자의 조종에 대한 기하학적제한 (4)로부터 나온다.

식 (1)에서 첨수 i 를 고정한 하나의 추종자와 하나의 대피자를 가진 보조경기를 생각하겠다. 이 경기는 다음과 같은 동적방정식들에 의하여 서술된다. 즉

$$\begin{aligned}(P)&: \dot{x} = u(t),\ \ x(0) = x_0\\ (E)&: \dot{y} = \upsilon(t),\ \ y(0) = y_0\end{aligned} \tag{5}$$

이제

$$\Delta = \{\eta \in \mathbf{R}^n : 2(y_0 - x_0,\ \eta) \le (\rho^2\zeta - \sigma^2\zeta^2) + \| y_0 \|^2 - \| x_0 \|^2\}$$

로 정의하겠다.

추종자 P 의 목표는 등식 $x(\zeta) = y(\zeta)$ 를 실현하는것이고 대피자 E 의 목표는 그 반대이다.

σ 로 표시되는 대피자의 속도한계가 ρ 로 표시되는 대피자의 에네르기자원보다 작거나 같게 된다는것을 요구하지 않는다.

우리는 대피자의 임의의 허용조종에 대해서도 $x(\zeta) = y(\zeta)$ 가 성립되는 추종자의 방략을 정의하여야 한다.

보조정리 1 $y(\zeta) \in \Delta$ 라고 가정하겠다. 그때 식 (5)에서 $x(\zeta) = y(\zeta)$ 가 성립되는 추종자 P 의 방략

$$u(t) = \frac{1}{\zeta}(y_0 - x_0) + \upsilon(t),\ \ 0 \le t \le \zeta \tag{6}$$

가 존재한다.

몇가지 표식들을 도입하자. 즉

$$\Delta_i(\rho) = \{\eta \in \mathbf{R}^n : 2(y_0 - x_0,\ \eta) \le (\rho_i + \rho)^2\zeta - \sigma^2\zeta^2 + \| y_0 \|^2 - \| x_0 \|^2\},\ \ \rho \ge 0$$

$$\rho_0 = \min\left\{\rho \ge 0 : H(y_0,\ \sigma\zeta) \subset \bigcup_{i=1}^{m} \Delta_i(\rho)\right\}$$

보조정리 2 $\rho_0 > 0$ 이라고 가정하자. 그때 임의의 $0 < \delta < \rho_0$ 에 대하여 모임 $\bigcup_{i=1}^{m} \Delta_i(\rho_0 - \delta)$ 에 포함되지 않으면서 모든 $i \in I$ 에 대하여 $| \bar{y} - x_{i0} | \ge (\rho_i + \rho_0)\zeta^{1/2}$ 을 만족시키는 점 $\bar{y} \in H(y_0,\ \sigma\zeta)$ 가 존재한다.

정리 식 (1)의 경기값은 $\gamma = \rho_0\zeta^{1/2}$ 과 같다.

증명 방정식

$$\dot{z}_i = w_i(t)\,,\ \ z_i(0) = x_{i0}\,,\ \ \left(\int_0^{\zeta} | w_i(s) |^2\, ds\right)^{1/2} \le \bar{\rho}_i := \rho_i + \rho_0 \tag{7}$$

에 의하여 서술되는 가상적인 추종자 z_i 들을 정의하겠다.

x_{i0} 으로부터 시간 ζ 에 추종자 z_i 들의 도달가능한 모임은 구

$$H(x_{i0},\ \bar{\rho}_i\zeta^{1/2}) = H(x_{i0},\ \rho_i\zeta^{1/2} + \rho_0\zeta^{1/2})$$

로 된다.

식 (3)을 리용하여 가상추종자 $z_i,\ i \in I$ 들의 방략을

$$w_i(t,\ \upsilon) = \begin{cases} \dfrac{y_0 - x_{i0}}{\zeta} + \upsilon(t), & 0 \le t \le \zeta_0 \\ 0, & \zeta_0 < t \le \zeta \end{cases} \tag{8}$$

로 정의하겠다. 여기서 $\zeta_0 \in [0,\ \zeta]$은 $\int_0^{\zeta_0} \left| \frac{y_0 - x_{i0}}{\zeta} + \upsilon(s) \right|^2 ds = \overline{\rho}_i^2$을 만족시키는 시간이다.

이제 실제적인 경기자 $x_i,\ i \in I$들의 방략들을

$$u_i(t,\ \upsilon) = \frac{\rho_i}{\overline{\rho}_i} w_i(t,\ \upsilon),\ 0 \le t \le \zeta \tag{9}$$

로 설정하겠다.

식 (9)의 방략들이 부등식

$$\sup_{\upsilon(\cdot)} \min_{1 \le i \le m} \| y(\zeta) - x_i(\zeta) \| \le \eta_0 \zeta^{1/2}$$

을 만족시킨다는것을 보겠다.

η_0의 정의에 의하여 $H(y_0,\ \sigma\zeta) \subset \bigcup_{i \in I_0} \Delta_i(\eta_0)$가 나온다. 여기서

$$I_0 = \{ i \in I : H(y_0,\ \sigma\zeta) \cap \Delta_i(\eta_0) \ne \varnothing \}$$

이다. 따라서 점 $y(\zeta) \in H(y_0,\ \sigma\zeta)$는 어떤 반공간 $\Delta_s,\ s \in I_0$에 속한다. 그리고

$$2(y_0 - x_{i0},\ y(\zeta)) \le (\rho_s + \rho_0)^2 \zeta - \sigma^2 \zeta^2 + \| y_0 \|^2 - \| x_{s0} \|^2$$

이 성립된다.

추종자 $z_i,\ i \in I_0$들의 방략 (8)들에 대한 보조정리 1에 의하여 $z_s(\zeta) = y(\zeta)$가 얻어지고

$$\int_0^{\zeta} \left| \frac{y_0 - x_{s0}}{\zeta} + \upsilon(t) \right|^2 dt \le (\rho_s + \rho_0)^2$$

이 성립된다.

이제 $| x_s(\zeta) - y(\zeta) | \le \rho_0 \zeta^{1/2}$이 성립한다는것을 보겠다. 식 (9)에 의하여

$$| x_s(\zeta) - y(\zeta) | = | x_s(\zeta) - z(\zeta) | = \left| \int_0^{\zeta} u_s(t) dt - \int_0^{\zeta} w_s(t) dt \right| =$$

$$= \left| \int_0^{\zeta} \left(\frac{\rho_s}{\overline{\rho}_s} - 1 \right) w_s(t) dt \right| \le \frac{\rho_0}{\overline{\rho}_s} \int_0^{\zeta} | w_s(t) | \, dt$$

가 나온다. 꼬쉬－슈와르츠부등식을 리용하면

$$\int_0^{\zeta} | w_i(t) |^2 \, dt \le \left(\int_0^{\zeta} 1 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^{\zeta} | w_i(t) |^2 \, dt \right)^{1/2} \le \overline{\rho}_s \zeta^{1/2}$$

을 얻게 된다. 따라서 $| x_s(\zeta) - y(\zeta) | \le \rho_0 \zeta^{1/2}$으로 된다.

대피자의 방략을

$$\inf_{u_1(\cdot), \cdots, u_m(\cdot)} \min_{i \in I} | x_s(\zeta) - y(\zeta) | \ge \rho_0 \zeta^{1/2} \tag{10}$$

을 만족시키도록 정의하겠다. 여기서 $u_1(\cdot),\ \cdots,\ u_m(\cdot)$은 추종자들의 허용조종들이다. 부등

식 (10)은 $\rho_0 = 0$에 대하여 항상 성립된다.

$\rho_0 > 0$ 이라고 가정하겠다. ρ_0 의 정의에 의하여 임의의 $0 < \delta < \rho_0$ 에 대하여 모임 $\bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i(\rho_0 - \delta)$ 는 구 $H(y_0,\ \sigma\zeta)$ 를 포함하지 않는다.

그때 보조정리 2에 의하여 $|\bar{y} - x_{i0}| \ge \bar{\rho}_i \zeta^{1/2},\ i \in I$ 를 만족시키는 점 $\bar{y} \in H(y_0,\ \sigma\zeta)$ 가 존재한다. 한편

$$|x_i(\zeta) - x_{i0}| \le \zeta^{1/2} \left(\int_0^{\zeta} |u_i(t)|^2\, dt \right)^{1/2} \le \rho_i \zeta^{1/2},\ i \in I$$

가 성립한다. 즉

$$|\bar{y} - x_i(\zeta)| \ge |\bar{y} - x_{i0}| - |x_i(\zeta) - x_{i0}| \ge \bar{\rho}_i \zeta^{1/2} - \rho_i \zeta^{1/2} = \rho_0 \zeta^{1/2},\ i \in I$$

이다. 대피자의 조종

$$v(t) = \frac{|\bar{y} - y_0|}{\zeta} e,\ 0 \le t \le \zeta,\ e = \frac{\bar{y} - y_0}{|\bar{y} - y_0|}$$

에 의하여

$$y(\zeta) = y_0 + \int_0^{\zeta} v(s) ds = y_0 + e \int_0^{\zeta} \frac{|\bar{y} - y_0|}{\zeta} ds = y_0 + |\bar{y} - y_0| e = \bar{y}$$

를 얻게 된다.

그러므로 경기값이 $\rho_0 \zeta^{1/2}$ 보다 작지 않게 되며 부등식 (10)이 성립된다.(증명끝)

우리는 고정된 시간구간을 가지는 추종－대피경기를 연구하였다. 이 경기에서는 공간 $\mathbf{R}^n$ 에서 m 명의 추종자들이 하나의 대피자를 추종한다. 추종자들의 조종함수들에 적분제한들이 그리고 대피자의 조종함수에 기하학적제한이 부과된다. 허용방략의 정의에서는 추종자들의 에네르기자원들과 대피자의 속도한계사이에 관계가 없다고 가정하였다.

론문에서의 본질적인 결과는 추종자들과 대피자의 초기점들사이의 관계에 대한 가정이 없이 경기값을 구하고 추종자들의 최량방략들을 구성한것이다.

실례로 1차원공간에서

$$x_{1,0} = 0,\ x_{2,0} = 4,\ y_0 = 2,\ \zeta = 4,\ \rho_1 = \rho_2 = 1,\ \sigma = 1/4$$

로 주어지는 두 추종자에 의한 한 대피자의 추종대피경기를 보기로 하겠다. 이 경기에서 선행연구[1]에서의 최량성조건

$$H(y_0,\ r) \subset \bigcup_{i \in I} H(x_{i0},\ R_i),\ \rho_i \ge \sigma,\ i \in I$$

는 성립되지만 경기자들의 초기점들사이의 관계에 관한 가정

$$\exists p_0 \ne 0,\ (y_0 - x_{i0},\ p_0) \ge 0,\ i \in I$$

가 만족되지 않으므로 경기값에 대하여 말할수 없다.

주어진 경기에서 $\bar{\rho}_1 = \bar{\rho}_2 = \sqrt{5}/2$ 이므로 정리에 의하여 경기값은

$$\rho_0 \zeta^{1/2} = \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - 1 \right) \cdot \sqrt{4} = \sqrt{5} - 2$$

로 된다.

참 고 문 헌

[1] G. Ibraimov; Automation and Remote Control, 66, 8, 1214, 2005.
[2] M. Salimi; SeMA J, 75, 1, 139, 2018.
[3] M. Salimi, M. Ferrara; https://doi.org/10.1007/s00182-018-0638-6, 2018.

주체109(2020)년 6월 5일 원고접수

A Value of Game in a Simple Motion Group Pursuit-evasion Differential Game with Integral and Geometric Constraints on Controls

Kim Kum Song, Ju Kwang Hwi

In this paper, we study a differential game with integral and geometric constraints on controls in which *m* pursuers pursue a single evader, without assumption on relation between the initial points of the pursuers and those of the evader.

Keywords: differential game, pursuit-evasion game