김일성종합대학학보 주체110(2021)년
수 학 제67권 제1호

모호Bagley-Torvik방정식의 초기값문제에 대한 (1, 1)－풀이가 존재하기 위한 필요충분조건

최희철, 박순애, 장성룡

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《새로운 과학기술분야를 개척하기 위한 사업도 전망성있게 밀고나가야 합니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제11권 138페지)

론문에서는 과학기술적문제해결에서 중요하게 제기되는 모호분수계미분방정식에 대하여 연구하였다.

선행연구[1]에서는 모호초기조건을 가진 모호분수계미분방정식의 개념을 제안하였으며 모호분수계미분방정식의 초기값문제에 대한 풀이의 존재성을 증명하였다. 선행연구[2]에서는 모호분수계미분방정식과 그로부터 유도되는 모호분수계적분방정식이 동등하지 않으며 선행연구[3, 4, 5]를 비롯한 많은 론문의 결과들이 맞지 않는다는것을 발표하였다. 선행연구[6]에서는 모호Bagley-Torvik방정식에 대하여 풀이의 존재성은 론의하지 않고 주어진 초기값문제의 (1, 1)－풀이를 호모토피섭동법으로 구하는 방법을 고찰하였다. 그러나 방정식결수의 값을 변화시키면 그 풀이가 정확하지 않다는것을 알수 있다.

론문에서는 동등한 적분방정식을 리용하지 않고 모호Bagley-Torvik방정식의 초기값문제

$$\begin{aligned}&({}^cD^{\alpha}_{n,\,m}y)(t)\oplus b\otimes({}^cD^{\beta}_{n,\,m}y)(t)\oplus c\otimes y(t)=f(t),\ t\in(0,\ 1]\\&y(0)=y_0,\ D^{(1)}_n y(0)=y'_0\end{aligned}\tag{1}$$

의 (1, 1)－풀이가 존재하기 위한 필요충분조건을 연구하였다. 여기서

$$1<\beta<\alpha\le 2,\ b,\ c\in\mathbf{R}_+,\ y_0,\ y'_0\in\mathbf{R}_{\boldsymbol{F}},\ y,\ f\in C(J,\ \mathbf{R}_{\boldsymbol{F}}),\ J=[0,\ 1]$$

이다.

정의 1 함수 $y\in C(J,\ \mathbf{R}_{\boldsymbol{F}})$가 초기값문제 (1)을 만족시키고

$${}^cD^{\alpha}_{n,\,m}y\in C(J,\ \mathbf{R}_{\boldsymbol{F}}),\ {}^cD^{\beta}_{n,\,m}y\in C(J,\ \mathbf{R}_{\boldsymbol{F}}),\ D^{(1)}_n y\in C(J,\ \mathbf{R}_{\boldsymbol{F}})$$

가 성립하면 $y(t)$를 초기값문제 (1)의 $(n,\ m)-$풀이라고 부른다.

문제 (1)에 대응하는 다음의 절단문제 (2), (3)을 얻을수 있다.

$$\begin{cases}{}^cD^{\alpha}_{0+}y_1(t,\ r)+b\,{}^cD^{\beta}_{0+}y_1(t,\ r)+cy_1(t,\ r)=f_1(t,\ r)\\{}^cD^{\alpha}_{0+}y_2(t,\ r)+b\,{}^cD^{\beta}_{0+}y_2(t,\ r)+cy_2(t,\ r)=f_2(t,\ r)\\y_1(t,\ r)\le y_2(t,\ r)\\y'_1(t,\ r)\le y'_2(t,\ r)\\{}^cD^{\beta}_{0+}y_1(t,\ r)\le{}^cD^{\beta}_{0+}y_2(t,\ r)\\{}^cD^{\alpha}_{0+}y_1(t,\ r)\le{}^cD^{\alpha}_{0+}y_2(t,\ r)\end{cases}\tag{2}$$

$[y_0]^r:=[y_{0,1}(r),\ y_{0,2}(r)],\ [y'_0]^r:=[y'_{0,1}(r),\ y'_{0,2}(r)]$라고 하자. 그러면 식 (2)의 초기조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &y_1(0,\ r)=y_{0,1}(r),\ y_1'(0,\ r)=y_{0,1}'(r)\\ &y_2(0,\ r)=y_{0,2}(r),\ y_2'(0,\ r)=y_{0,2}'(r) \end{aligned} \tag{3}$$

정의 2 $(y_1(t,\ r),\ y_2(t,\ r))$가 식 (2), (3)을 만족시키고 ${}^cD_{0+}^{\alpha}y_1(\cdot,\ r),\ {}^cD_{0+}^{\alpha}y_2(\cdot,\ r)\in C(J)$일 때 $(y_1(t,\ r),\ y_2(t,\ r))$를 식 (2), (3)의 풀이라고 부른다.

정리 1(필요조건) $y(t)$를 초기값문제 (1)의 (1, 1)−풀이라고 하고 그것의 절단을 $(y_1(t,\ r),\ \ y_2(t,\ r))$라고 할 때 y에 대하여 다음의 사실들이 성립한다.

① $(y_1(t,\ r),\ y_2(t,\ r))$는 절단문제 (2), (3)의 풀이이다.

② 적분방정식

$$U(t)+bI_{0+}^{\alpha-\beta}U(t)+cI_{0+}^{\alpha}U(t)=d([f(t)]^r)-c(d([y_0]^r)+d([y_0']^r)t)$$

는 유일한 부아닌 풀이를 가진다.

③ $r_1,\ r_2\in[0,\ 1],\ r_1\le r_2,\ \Delta f_1(t):=f_1(t,\ r_2)-f_1(t,\ r_1),\ \Delta_{0,1}:=y_{0,1}(r_2)-y_{0,1}(r_1),\ \Delta_{0,1}':=$ $y_{0,1}'(r_2)-y_{0,1}'(r_1)$이라고 할 때 적분방정식

$$U(t)+bI_{0+}^{\alpha-\beta}U(t)+cI_{0+}^{\alpha}U(t)=\Delta f_1(t)-c(\Delta_{0,1}+\Delta_{0,1}'t)$$

는 유일한 부가 아닌 풀이를 가진다.

④ $r_1,\ r_2\in[0,\ 1],\ r_1\le r_2,\ \ \Delta f_2(t):=f_2(t,\ \ r_2)-f_2(t,\ r_1),\ \ \Delta_{0,2}:=y_{0,2}(r_2)-y_{0,2}(r_1),\ \ \Delta_{0,2}':=$ $y_{0,2}'(r_2)-y_{0,2}'(r_1)$이라고 할 때 적분방정식

$$U(t)+bI_{0+}^{\alpha-\beta}U(t)+cI_{0+}^{\alpha}U(t)=\Delta f_2(t)-c(\Delta_{0,2}+\Delta_{0,2}'t)$$

는 유일한 정이 아닌 풀이를 가진다.

다음의 구간족

$$\begin{aligned} &\{U_\alpha(t,\ r):=[{}^cD_{0+}^{\alpha}y_1(t,\ r),\ {}^cD_{0+}^{\alpha}y_2(t,\ r)],\ r\in[0,\ 1]\}\\ &\{U_\beta(t,\ r):=[{}^cD_{0+}^{\beta}y_1(t,\ r),\ {}^cD_{0+}^{\beta}y_2(t,\ r)],\ r\in[0,\ 1]\}\\ &\{U_1(t,\ r):=[y_1'(t,\ r),\ y_2'(t,\ r)],\ r\in[0,\ 1]\}\\ &\{U_0(t,\ r):=[y_1(t,\ r),\ y_2(t,\ r)],\ r\in[0,\ 1]\} \end{aligned}$$

들을 얻을수 있는데 이 구간족들이 모호수값함수를 생성한다.

정리 2 비동차항과 초기조건에 대하여 다음의 두가지 가정이 만족된다고 하자.

① $r_1,\ r_2\in[0,\ 1],\ r_1\le r_2,\ \Delta f_1(t):=f_1(t,\ r_2)-f_1(t,\ r_1),\ \Delta_{0,1}:=y_{0,1}(r_2)-y_{0,1}(r_1),\ \Delta_{0,1}':=$ $y_{0,1}'(r_2)-y_{0,1}'(r_1)$이라고 할 때 적분방정식

$$U(t)+bI_{0+}^{\alpha-\beta}U(t)+cI_{0+}^{\alpha}U(t)=\Delta f_1(t)-c(\Delta_{0,1}+\Delta_{0,1}'t)$$

는 유일한 부가 아닌 풀이를 가진다.

② $r_1,\ r_2\in[0,\ 1],\ r_1\le r_2,\ \ \Delta f_2(t):=f_2(t,\ \ r_2)-f_2(t,\ r_1),\ \ \Delta_{0,2}:=y_{0,2}(r_2)-y_{0,2}(r_1),\ \ \Delta_{0,2}':=$ $y_{0,2}'(r_2)-y_{0,2}'(r_1)$이라고 할 때 적분방정식

$$U(t)+bI_{0+}^{\alpha-\beta}U(t)+cI_{0+}^{\alpha}U(t)=\Delta f_2(t)-c(\Delta_{0,2}+\Delta_{0,2}'t)$$

는 유일한 정이 아닌 풀이를 가진다.

이때 구간족

$$\{U_\alpha(t,\ r),\ r\in[0,\ 1]\},\ \{U_\beta(t,\ r),\ r\in[0,\ 1]\},\ \{U_1(t,\ r),\ r\in[0,\ 1]\},\ \{U_0(t,\ r),\ r\in[0,\ 1]\}$$

들은 모호수값함수를 생성한다. 절단구간족

$$\{U_\alpha(t,\ r) := [{}^c D_{0+}^{\alpha} y_1(t,\ r),\ {}^c D_{0+}^{\alpha} y_2(t,\ r)],\ r \in [0,\ 1]\}$$

$$\{U_\beta(t,\ r) := [{}^c D_{0+}^{\beta} y_1(t,\ r),\ {}^c D_{0+}^{\beta} y_2(t,\ r)],\ r \in [0,\ 1]\}$$

$$\{U_1(t,\ r) := [y_1'(t,\ r),\ y_2'(t,\ r)],\ r \in [0,\ 1]\}$$

$$\{U_0(t,\ r) := [y_1(t,\ r),\ y_2(t,\ r)],\ r \in [0,\ 1]\}$$

들에 의해 생성된 모호수값함수들을 각각

$$\tilde{y}_\alpha(t),\ \tilde{y}_\beta(t),\ \tilde{y}_1(t),\ \tilde{y}_0(t)$$

로 표시하자. 이때 다음의 사실이 성립한다.

정리 3 모호수값함수 $\tilde{y}_\alpha(t),\ \tilde{y}_\beta(t),\ \tilde{y}_1(t),\ \tilde{y}_0(t)$ 들은 구간 I 에서 련속이다.

정리 4 다음의 관계식들이 성립한다.

$$\tilde{y}_0(t) = \tilde{y}_0(0) \oplus \tilde{y}_1(0) \otimes t \oplus I_{0+}^{\alpha} \tilde{y}_\alpha(t)$$

$$\tilde{y}_\beta(t) = I_{0+}^{\alpha-\beta} \tilde{y}_\alpha(t)$$

$${}^c D_{1,1}^{\alpha} \tilde{y}_0(t) = \tilde{y}_\alpha(t)$$

정리 5(충분조건) 다음의 조건들이 만족된다고 하자.

① 임의의 $r \in [0,\ 1]$ 에 대하여 적분방정식

$$U(t) + bI_{0+}^{\alpha-\beta} U(t) + cI_{0+}^{\alpha} U(t) = d([f(t)]^r) - c(d([y_0]^r) + d([y_0']^r)t)$$

는 유일한 부가 아닌 풀이를 가진다.

② 임의의 $r_1,\ r_2 \in [0,\ 1]\ (r_1 \le r_2)$ 에 대하여 적분방정식

$$U(t) + bI_{0+}^{\alpha-\beta} U(t) + cI_{0+}^{\alpha} U(t) = \Delta f_1(t) - c(\Delta_{0,1} + \Delta_{0,1}' t)$$

는 유일한 부가 아닌 풀이를 가진다. 여기서

$$\Delta f_1(t) := f_1(t,\ r_2) - f_1(t,\ r_1),\ \Delta y_{0,1} := y_{0,1}(r_2) - y_{0,1}(r_1),\ \Delta y_{0,1}' := y_{0,1}'(r_2) - y_{0,1}'(r_1)$$

이다.

③ 임의의 $r_1,\ r_2 \in [0,\ 1]\ (r_1 \le r_2)$ 에 대하여 적분방정식

$$U(t) + bI_{0+}^{\alpha-\beta} U(t) + cI_{0+}^{\alpha} U(t) = \Delta f_2(t) - c(\Delta_{0,2} + \Delta_{0,2}' t)$$

는 유일한 정이 아닌 풀이를 가진다. 여기서

$$\Delta f_2(t) := f_2(t,\ r_2) - f_2(t,\ r_1),\ \Delta y_{0,2} := y_{0,2}(r_2) - y_{0,2}(r_1),\ \Delta y_{0,2}' := y_{0,2}'(r_2) - y_{0,2}'(r_1)$$

이다. 이때 모호초기값문제 (1), (2)의 (1, 1)－풀이는 유일존재한다.

실례 1 다음의 모호Bagley-Torvik방정식을 고찰하자.

$$D_{1,1}^{(2)} y(t) \oplus b \otimes ({}^c D_{1,1}^{1.5} y)(t) \oplus c \otimes y(t) = (1+t) \otimes (7.9,\ 8,\ 8.1),\ t \in (0,\ 1) \tag{4}$$

$$y(0) = (-0.1,\ 0,\ 0.1),\ D_1 y(0) = (-0.1,\ 0,\ 0.1) \tag{5}$$

여기서 $b,\ c \in \mathbf{R}_+,\ y \in C([0,\ 1],\ \mathbf{R}_F),\ y_0 \in \mathbf{R}_F,\ y_0' \in \mathbf{R}_F$ 이며 식 (5)의 초기값들과 (4)의 비동차항의 결수 (7.9, 8, 8.1) 은 3각형모호수들이다. 임의로 고정한 $r \in [0,\ 1]$ 에 대하여 $1-c \ge 0$ 이고 $(1-1.880\ 63 \cdot b - 2c/3) > 0$ 을 만족시키면 모호Bagley-Torvik방정식 (4), (5)는 유일한 (1, 1)－풀이를 가진다는것을 알수 있다.

실례 2 모호Bagley-Torvik방정식 (4), (5)는 $b = c = 1.5$ 일 때 (1, 1)－풀이를 가지지 않는다.

참 고 문 헌

[1] R. P. Agarwal et al.; Nonlinear Anal., 72, 2859, 2010.
[2] N. V. Hoa et al.; Fuzzy Sets Syst., 347, 54, 2018.
[3] T. Allahviranloo et al.; J. Intell. Fuzzy Syst., 26, 1481, 2014.
[4] N. V. Hoa; Fuzzy Sets Syst., 280, 58, 2015.
[5] P. Prakash et al.; J. Intell. Fuzzy Syst., 28, 2691, 2015.
[6] S. Chakraverty et al.; Fuzzy Arbitrary Order System: Fuzzy Fractional Differential Equations and Applications, John Wiley & Sons, 5～131, 2016.

주체109(2020)년 9월 5일 원고접수

Necessary and Sufficient Conditions for the Existence of (1, 1)-Solution for the Initial Value Problem of the Fuzzy Bagley-Torvik Type Equations

Choe Hui Chol, *Pak Sun Ae* and *Jang Song Ryong*

In this paper, the necessary and sufficient conditions for the existence of solutions for the initial value problem of the fuzzy Bagley-Torvik type equations (1) which are the generalizations of the fuzzy Bagley-Torvik equation are discussed under generalized H-differentiability.

Keyword: fuzzy fractional differential equation