

접수함수역해석풀이의 유일성

허준, 정송수

경애하는 김정은동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《과학연구부문에서는 나라의 경제발전과 인민생활향상에서 전망적으로 풀어야 할 문제들과 현실에서 제기되는 과학기술적문제들을 풀고 첨단을 돌파하여 지식경제건설의 지름길을 열어놓아야 합니다.》

론문에서는 접수함수해석의 역문제를 동경접수함수로부터 지각과 상부만틀에서 지진파속도들의 준련속분포들을 동시에 추정하는 문제로 정식화하고 모의해석을 통하여 역문제의 풀이가 유일하다는것을 검증하였다.

1. 접수함수해석의 역문제와 지진파속도구조모형

접수함수해석방법은 먼거리지진파기록으로부터 지진관측소근방의 지각과 상부만틀에서 지진파속도구조를 추정하는 방법이다.[1] 접수함수해석의 역문제는 관측접수함수로부터 해당 관측소근방에서 지진파속도구조를 추정하는 문제로서 수학적으로 다음과 같이 표시할수 있다.

$$m = F^{-1}[d] \quad (1)$$

여기서 m 은 해당 관측소근방의 지각과 상부만틀에서 지진파속도구조모형으로서 역문제의 풀이이고 d 는 지진파관측기록으로부터 계산한 동경접수함수시계렬[1]이며 $F^{-1}[d]$ 는 주어진 속도구조모형으로부터 동경접수함수시계렬을 계산하는 정문제풀기과정을 표시하는 함수 $F[m]$ 의 거꾸함수이다. 역문제 식 (1)의 풀기과정은 대체로 정문제 $d = F[m]$ 의 풀기과정을 동반한다. 그것은 함수 $F[m]$ 이 전파행렬법에 의한 지진파모의기록의 계산과정과 여러가지 역합성적방법들을 리용한 접수함수계산과정을 다같이 반영하는 지진파속도분포에 관한 비선형함수로서 이 함수와 그것의 거꾸함수 $F^{-1}[d]$ 를 수학적으로 명백하게 표시할수 없기때문이다.

접수함수해석의 역문제 식 (1)에서 풀이의 유일성에 대한 문제는 곧 동경접수함수로부터 추정한 지진파속도구조의 정확성에 대한 문제라고 말할수 있으며 이 문제에 대하여서는 지금까지 적지 않게 논의되어왔다.[3, 4] 지난 시기에는 주로 지각과 상부만틀에서 파속비의 분포는 고정시키고 P파 또는 S파의 속도분포만을 역문제 식 (1)의 탐색모형(m)으로 설정하였다.[3-5] 그러나 지진파가 전파하는 지구매질은 일반적으로 불균일비등방성매질이며 지각과 상부만틀에서 매질의 비등방성과 불련속경계면들의 경사를 고려하지 않고 가장 간단한 평행층상구조를 가정하는 경우에도 총별로 P파와 S파의 전파속도 그리고 매질밀도들은 서로 독립적으로 변하게 된다.

론문에서는 동경접수함수로부터 지진파속도구조를 보다 정확히 추정하기 위하여 역문제 식 (1)에서 탐색하려는 속도구조모형 m 에 P파속도(V_P)와 S파속도(V_S)의 1차원준련속분포들을 다같이 반영하는 경우에도 풀이가 유일하게 결정되었는가 하는 문제를 해명하였다.

이를 위하여 역문제 식 (1)을 다음과 같은 비선형최소2제곱문제로 전환시켰다.

$$\mathbf{m}_0 = \arg \min(\|\mathbf{E}_1(\mathbf{m})\|_2^2 + w_1 \|\mathbf{E}_2(\mathbf{m})\|_2^2 + w_2 \|\Delta_2 \mathbf{m}\|_2^2), \mathbf{m}_L \leq \mathbf{m}_0 \leq \mathbf{m}_U \quad (2)$$

여기서 \mathbf{m} 은 지진파속도구조모형, \mathbf{m}_0 은 추정결과, \mathbf{m}_L 과 \mathbf{m}_U 는 모형파라미터벡터의 아래한계와 윗한계, $\mathbf{E}_1(\mathbf{m})$ 과 $\mathbf{E}_2(\mathbf{m})$ 은 각각 동경접수함수와 결보기S파속도곡선[2]의 주어진 모형 \mathbf{m} 에 대한 계산결과와 관측자료사이의 잔차들로서 다같이 속도구조모형 \mathbf{m} 에 관한 비선형함수들이며 $\Delta_2 \mathbf{m}$ 은 속도구조모형의 2계계차이다. 그리고 w_1 과 w_2 는 무게결수들이며 $\|\cdot\|_2$ 는 2-노름을 표시한다. 식 (2)에서 기본문제는 $\|\mathbf{E}_1(\mathbf{m})\|_2^2$ 이 최소로 되는 속도구조모형 \mathbf{m}_0 을 찾는 문제이며 \mathbf{m}_L 과 \mathbf{m}_U 는 속도구조모형 \mathbf{m}_0 에 대한 제한조건이다. $\|\mathbf{E}_2(\mathbf{m})\|_2^2$ 과 $\|\Delta_2 \mathbf{m}\|_2^2$ 이 최소로 되어야 한다는 조건은 속박조건으로 된다. 이런 의미에서 식 (2)를 제한조건과 속박조건이 있는 비선형최소2제곱문제라고 말할수 있으며 여기서 무게결수 w_1 과 w_2 는 기본문제와 속박조건들사이의 균형을 맞추어주는 역할을 한다. 식 (2)에서 $\|\Delta_2 \mathbf{m}\|_2^2$ 이 최소로 되어야 한다는것은 속도구조모형이 깊이에 따라 원활하여야 한다는것을 의미하는데 이 조건은 잡음이 섞인 지진파모의기록이나 관측기록의 경우에 적용하는것이 편리하다.[2, 3]

역문제(식 (2))에서 지진파속도구조모형 \mathbf{m} 을 합리적으로 구성하기 위하여 고찰하는 깊이구간을 준련속지연시간분할방법[2, 4]으로 분할하고 총별로 P파속도(V_p)와 파속비(V_p/V_s)를 모형파라미터로 설정하였다. 속도구조모형을 P파속도와 파속비의 분포로 구성한 이유는 첫째로, 역문제풀기과정에 파속비의 변화를 물리적으로 타당한 값범위안에서 제한하기 위해서이며 둘째로, 동경접수함수와 결보기S파속도가 P파속도분포보다 S파속도분포에 훨씬 더 심하게 의존하기때문이다. 속도구조모형에 S파속도분포를 직접 포함시키면 역문제풀이의 탐색과정에 P파속도분포의 정확도에는 무관하게 S파속도분포의 오차만을 줄이는 방향에서 부극대수렴이 진행될 가능성이 있다.

론문에서는 역문제(식 (2))를 풀기 위하여 제한조건이 있는 비선형최소2제곱문제풀기에서 많이 리용되고있는 TRR알고리즘[2]을 리용하였다.

2. 모의해석을 통한 역문제풀이의 유일성검증

역문제(식 (2))의 풀이 \mathbf{m}_0 의 유일성을 검증하기 위하여 식 (2)에서 $w_2=0$ 으로 설정하고 잡음이 없는 지진파모의기록에 대한 접수함수역해석을 진행하였다.

지진파기록에 잡음이 섞이지 않은 경우 역문제(식 (2))에서 w_2 를 령아닌 값으로 설정하면 정확한 풀이가 얻어지지 않는다.[2]

잡음이 없는 지진파모의기록에 대하여 $w_2=0$ 인 경우 역문제(식 (2))의 정확한 풀이로 되는 목표모형은 1개의 저속도층을 포함하는 등방성평행층상구조로 설정하였다. 지각에서 직달P파에 대한 PS전환파의 지연시간은 5.2s, 지각두께는 38.22km, 지각에서 P파속도의 평균값은 6.17km/s, 평균파속비는 1.79이며 속도구조모형에서 제일 아래에 놓이는 불련속경계면의 깊이는 54.46km이다.

목표모형의 제일 아래에 놓이는 불련속경계면에 파선파라미터가 $p=0.065\text{s/km}$ 인 단위진폭을 가지는 평면P파(평면세로파)임펄스가 입사한다고 가정하고 지면에서의 지진파모의기록을 스넬의 법칙을 리용하여 RTZ자리표계에서 계산하였다. 동경접수함수는 수준면역합성적방법[3]을 리용하여 계산하였다.

식 (2)에서 속도구조모형에 대한 제한조건은 $3\text{km/s} \leq V_p \leq 8.2\text{km/s}$, $1.6 \leq V_p/V_s \leq 2.1$ 로 설정하였다. 일반성을 보장하기 위하여 초기모형들에서 P파속도분포는 제한조건의 범위 안에서 다음의 식에 따라 우연적으로 생성하였다.

$$V_p(z) = a \cdot z + b + c \cdot N_{0,1}(z) \quad (3)$$

여기서 z 는 깊이, $N_{0,1}(z)$ 는 평균값이 0이고 표준편차가 1인 정규분포에 따르는 우연수이며 a, b, c 는 상수이다. 그리고 초기모형들에서 파속비는 깊이에 무관계하게 1.8로 설정하였다.(그림 1)

지진파속도구조에 대한 초기모형들에서 지연시간분할간격은 0.1s이고 층개수는 71개이다. 따라서 접수함수로부터 추정하여야 할 모형파라미터의 수는 142개인데 이 값들은 속도구조모형의 탐색과정에 변하지 않으며 매개 탐색결음에서 층별지진파속도값들이 수정갱신되는것으로 하여 층두께와 불연속경계면들의 위치가 변하게 된다. 매개 층에서 매질의 밀도는 버취의 경험식[1]을 리용하여 P파속도로부터 계산한다. 역문제풀이에 리용한 접수함수시계열의 표본화주파수는 20Hz이고 길이는 700(지연시간구간: $-10\text{s} - 24.95\text{s}$)이며 결보기 S파속도로는 1s-10s의 러파너비구간에서 로그척도로 등분할한 51개의 값을 취하였다.

각이한 초기모형들을 가지고 모의해석을 반복해본 결과 접수함수역문제(식 (2))의 풀이가 초기모형에는 관계없이 유일하면서도 정확하게 결정된다는것을 확인하였다. 그림 1과 2에 서로 차이나는 2개의 초기모형들에 대한 모의해석결과들을 대비적으로 보여주었다.

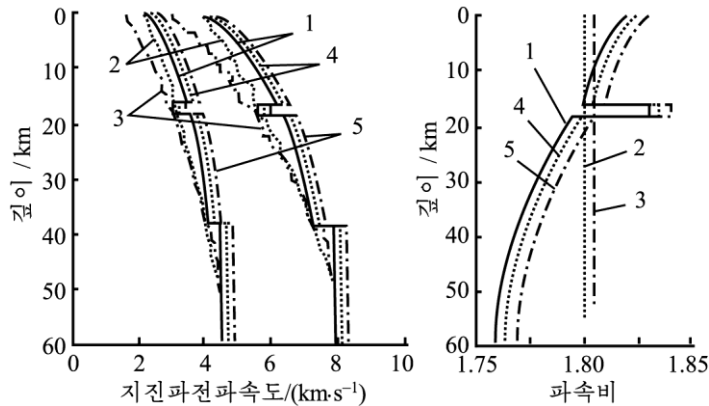


그림 1. 지진파속도구조모형

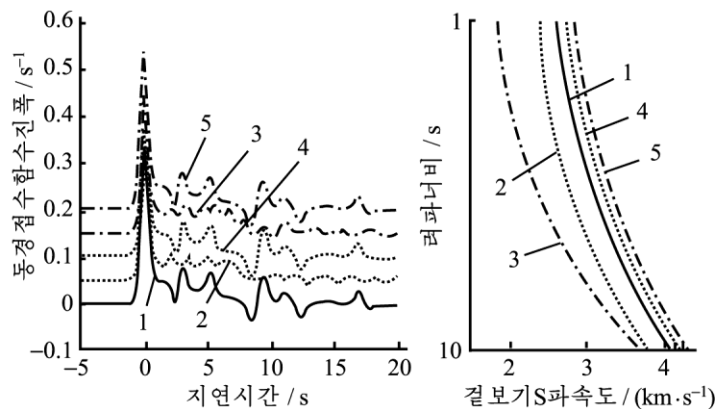


그림 2. 동경접수함수와 결보기S파속도곡선

그림 1과 2에서 1은 목표모형, 2는 초기모형 1, 3은 초기모형 2, 4는 최종모형 1, 5는 최종모형 2이다. 그림에서 곡선들이 서로 겹치지 않도록 하기 위하여 목표모형과 그에 해당하는 곡선들을 기준으로 하여 인위적으로 일정한 간격을 조성해주었다. 즉 그림 1에서는 P파와 S파속도분포의 최종모형들에 대하여 가로축상에서 0.2km/s만 한 간격을 조성해주었으며 파속비분포에 대한 초기모형과 최종모형들에 대하여 다같이 가로축상에서 0.005만 한 간격을 두었다. 그리고 그림 2에서는 초기모형들과 최종모형들로부터 계산된 동경접수합수곡선들에 대하여 다같이 세로축상에서 0.05 s^{-1} 만 한 간격을 두었으며 최종모형들로부터 계산된 결보기S파속도곡선들에 대하여서는 가로축상에서 0.1km/s만 한 간격을 두었다.

그림 1에서 보는바와 같이 초기모형들에서 불연속경계면들의 위치와 고찰구간의 전체 깊이가 목표모형과 현저하게 차이나는데 이렇게 속도구조에 따라 층두께와 불연속경계면들의 위치가 변하는것은 지연시간분할방법의 중요한 특징이다.

그림 1과 2에서 보여준 모의해석결과들의 상대오차들을 표에 보여주었다.

표. 2개의 초기모형에 대한 모의해석결과들의 상대오차

No.	걸음수	속도구조모형		동경접수합수		결보기S파속도	
		상대오차		상대오차		상대오차	
		초기값	최종값	초기값	최종값	초기값	최종값
1	629	0.083	3.82×10^{-7}	0.323	1.88×10^{-11}	0.092	7.28×10^{-14}
2	1 531	0.162	3.10×10^{-8}	0.402	1.85×10^{-12}	0.215	9.88×10^{-14}

표에 제시한 상대오차값들은 지진파모의기록을 생성하는데 리용한 목표모형과 그로부터 계산되는 곡선들을 기준으로 하여 결정한 값들인데 여기서 초기값과 최종값은 각각 초기모형과 최종모형에 해당하는 상대오차값들이다. 표에서 보는바와 같이 초기모형 2는 초기모형 1보다 목표모형과의 상대오차가 거의 2배만큼 큰것으로 하여 탐색걸음수도 거의 2.5배만큼 커졌다. 여기서 걸음수는 $w_2 = 0$ 인 경우 식 (2)에서 최소화하려는 함수 $Q(m) = \|E_1(m)\|_2^2 + w_1 \|E_2(m)\|_2^2$ 의 값의 한걸음에 해당하는 감소량이 10^{-20} 보다 작아질 때까지 탐색을 반복한 회수이다.

그림 1, 2와 표에서 보는바와 같이 잡음이 없는 지진파모의기록에 대한 접수합수역해석에서는 초기모형들에는 무관계하게 추정결과가 목표모형과 정확히 일치한다. 표에 보여준 상대오차값들은 접수합수역문제풀기에 리용한 MATLAB서고함수의 수값처리능력의 허용한계내에서 탐색걸음의 중단조건을 조정하여 걸음수를 늘이는 방법으로 보다 더 낮출수 있다. 실지로 각이한 초기모형들에 대하여 모의해석을 진행해본 결과 매번 정확한 풀이가 얻어진다는것이 확인되었다.

이로부터 접수합수역해석에 의하여 지각과 상부만틀에서 지진파속도의 준련속분포들을 동시에 추정할수 있다는 결론을 내릴수 있다.

맺 는 말

동경접수합수로부터 지각과 상부만틀에서 P파속도와 파속비의 준련속분포들을 동시에 추정하는 문제를 접수합수해석의 역문제로 설정하고 잡음이 없는 지진파모의기록에 대한 접수합수역해석을 통하여 역문제의 풀이가 유일하게 결정된다는것을 검증하였다.

참 고 문 헌

- [1] 김일성 종합대학학보(자연과학), 63, 10, 61, 주체106(2017).
- [2] 김일성 종합대학학보 물리학, 65, 3, 42, 주체108(2019).
- [3] C. J. Ammon et al.; Journal of Geophysical Research, 95, 15303, 1990.
- [4] B. H. Jacobsen et al.; Bulletin of the Seismological Society of America, 98, 4, 1756, 2008.
- [5] C. Schiffer et al.; Geophysical Journal International, 204, 1579, 2016.

주체109(2020)년 12월 5일 원고접수

On Uniqueness of Solution of Receiver Function Inversion

Ho Jun, Jong Song Su

We formed the velocity model of receiver function inversion with the quasi-continuous distributions of the velocities of the seismic waves and verified that the solution of the inverse problem was unique through inversion tests on noise-free seismogram.

Keywords: receiver function, inversion, velocity structure