김일성종합대학학보 주체107(2018)년
(수학) 제64권 제1호

한가지 형태의 프레드홀름-볼테라형분수계적분-미분방정식에 대한 분해-연산행렬법

최희철, 장경준

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《기초과학부문들을 발전시켜야 나라의 과학기술수준을 빨리 높일수 있고 인민경제 여러 분야에서 나서는 과학기술적문제들을 원만히 풀수 있으며 과학기술을 주체성있게 발전시켜나갈수 있습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제10권 485페지)

론문에서는 최근시기 많이 연구되고있는 분수계적분-미분방정식의 한가지 수치풀이법에 대하여 론의한다.

선행연구[2]에서는 분수계선형프레드홀름형적분-미분방정식

$$y'(x)-\lambda\int_0^1 k(x,\ t)_* D^\alpha y(t)dt = f(x)\ \ (0\le x\le 1,\ 0<\alpha<1,\ y(0)=\gamma)$$

와

$$_*D^\alpha y(x)-\lambda\int_0^1 k(x,\ t)G(y(t))dt = f(x)\ \ (0\le x\le 1,\ n-1<\alpha\le n,\ n\in\mathbf{N})$$

$$y^{(i)}(0)=\delta_i\ \ (i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,n)$$

에 대하여 하르함수를 리용한 연산행렬법에 대하여 론의하였다.

선행연구[3]에서는 두가지 형태의 적분-미분방정식 즉 비선형고계볼테라-프레드홀름형적분-미분방정식

$$\sum_{j=0}^n p_{i,\ j}(x)u_i^{(j)}(x) = f_i(x)+\lambda_{i1}\int_0^x K_{i1}(x,\ t,\ u(t),\ u'(t),\ \cdots,\ u^{(n)}(t))dt +$$

$$+\lambda_{i2}\int_0^1 K_{i2}(x,\ t,\ u(t),\ u'(t),\ \cdots,\ u^{(n)}(t))dt\ \ (i=1,\ \cdots,\ s)$$

$$u_i^{(j)}(0)=a_j\ \ (j=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$$

와 비선형분수계적분-미분방정식

$$D_{*t}^\alpha u(t) = f(t)+\int_0^x K(t,\ u(t),\ D_{*t}^\alpha u(t))dt,\ 0\le\alpha<1$$

$$u_i^{(j)}(0)=a_j\ \ (j=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$$

를 연산행렬을 리용하여 푸는 방법에 대하여 고찰하였다.

또한 선행연구[4]에서는 련립선형분수계적분-미분방정식의 초기값문제

$$D^{\alpha_i} y_i(t) = f_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij}(t) y_j(t) + \int_0^t k_{i,\,j}(t,\ s) y_j(s) ds \right) \ (i = 1,\ \cdots,\ n)$$

$$y_i^{(k)}(0) = b_{ik} \ \ (k = 0,\ 1,\ \cdots,\ \lceil \alpha \rceil - 1)$$

에 대한 3각형함수를 리용한 연산행렬법에 대하여 취급하였다.

우리는 선행연구[1]에서 선행연구[2－4]의 문제를 일반화한 비선형볼테라－프레드홀름형분수계적분－미분방정식

$$\begin{aligned} {}^cD_0^{\alpha} u(t) + a(t) {}^cD_0^{\beta} u(t) + b(t) u(t) = g(t) + \lambda_1 \int_0^t K_1(t,\ s,\ {}^cD_0^{\alpha_1} u(s),\ {}^cD_0^{\beta_1} u(s)) ds + \\ + \lambda_2 \int_0^1 K_2(t,\ s,\ {}^cD_0^{\alpha_2} u(s),\ {}^cD_0^{\beta_2} u(s)) ds \ \ (t \in (0,\ 1)) \end{aligned} \tag{1}$$

$$u^{(i)}(0) = c_i \ \ (i = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1) \tag{2}$$

의 풀이의 존재성과 유일존재성을 론의하였다. 여기서 ${}^cD_0^{\alpha} u(t)$ 는 $u(t)$ 의 캐푸토도함수, $m-1 < \alpha \le m$, $0 < \beta < \alpha$, $0 < \beta_1 < \alpha_1 < \alpha$, $0 < \beta_2 < \alpha_2 < \alpha$ ($m \in \mathbf{N}$)이다.

론문에서는 풀이의 존재성이 담보된 문제 (1), (2)의 풀이를 구하는 한가지 수치풀이법인 분해－연산행렬법에 대하여 론의한다.

정의 다음의 조건을 만족시키는 u 를 문제 (1), (2)의 풀이라고 한다.

① $u \in X = \{u | {}^cD^{\alpha} u \in C[0,\ 1],\ u \in AC^m[0,\ 1]\}$

② 식 (1), (2)를 만족시킨다.

몇가지 가정을 하자.

ㄱ) $a,\ b,\ g \in C[0,\ 1]$

ㄴ) $z \in C^1[0,\ 1]$

ㄷ) $\exists L_{K_j};\ \forall (y_1,\ s_1),\ (y_2,\ s_2) \in \mathbf{R}^2$

$$|K_j(x,\ t,\ y_1,\ s_1) - K_j(x,\ t,\ y_2,\ s_2)| \le L_{K_j}(|y_1 - y_2| + |s_1 - s_2|) \ \ (j = 1,\ 2)$$

정리 1[1] ① $u(x)$ 가 문제 (1), (2)의 풀이이면 $z(t) := {}^cD_0^{\alpha} u(t)$ 는 적분방정식

$$\begin{aligned} z(t) = \hat{g}(t) - a(t) J_0^{\alpha-\beta} z(t) - b(t) J_0^{\alpha} z(t) + \\ + \lambda_1 \int_0^t K_1(t,\ s,\ J_0^{\alpha-\alpha_1} z(s) + h_1(s),\ J_0^{\alpha-\beta_1} z(s) + h_2(s)) ds + \\ + \lambda_2 \int_0^1 K_2(t,\ s,\ J_0^{\alpha-\alpha_2} z(s) + s_1(s),\ J_0^{\alpha-\beta_2} z(s) + s_2(s)) ds \ \ (t \in (0,\ 1)) \end{aligned} \tag{3}$$

를 만족시킨다. 여기서 $J_0^{\alpha} z(s)$ 는 분수계적분을 표시한것이다.

② $z(t)$ 가 방정식 (3)의 $C[0,\ 1]$ 에서의 풀이이면 식

$$u(t) := J_0^{\alpha} z(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{c_k}{k!} t^k$$

으로 결정되는 $u(t)$ 는 문제 (1), (2)의 풀이이다.

③ 가정 ㄱ), ㄴ)하에서 문제 (3)의 풀이는 $C[0,\ 1]$에서 유일존재한다.

여기서

$$\hat{g}(t) := g(t) - a(t)\sum_{k=0}^{m-1}\frac{c_k}{k!}({}^cD_0^{\beta}t^k) - b(t)\sum_{k=0}^{m-1}\frac{c_k}{k!}t^k$$

$$h_1(t) := \sum_{k=0}^{m-1}\frac{c_k}{k!}({}^cD_0^{\alpha_1}t^k),\ \ h_2(t) := \sum_{k=0}^{m-1}\frac{c_k}{k!}({}^cD_0^{\beta_1}t^k)$$

$$s_1(t) := \sum_{k=0}^{m-1}\frac{c_k}{k!}({}^cD_0^{\alpha_2}t^k),\ \ s_2(t) := \sum_{k=0}^{m-1}\frac{c_k}{k!}({}^cD_0^{\beta_2}t^k)$$

주의 1 정리 1로부터 문제 (1), (2)의 풀이를 구하는 문제는 $C[0,\ 1]$에서 적분방정식 (3)의 풀이를 구하는 문제에 귀착된다.

1. 분해－연산행렬도식

1) 분해도식

식 (3)의 풀이 z가 평등수렴하는 합렬로 전개된다고 가정하자. 즉

$$z(t) = \sum_{k=0}^{\infty} z_k(t)$$

그러면

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} z_k(t) &= \hat{g}(t) - a(t)\sum_{k=0}^{\infty} J_0^{\alpha-\beta} z_k(t) - b(t)\sum_{k=0}^{\infty} J_0^{\alpha} z_k(t) + \\ &+ \lambda_1\int_0^t K_1\left(t,\ s,\ \sum_{k=0}^{\infty} J_0^{\alpha-\alpha_1} z_k(s) + h_1(s),\ \sum_{k=0}^{\infty} J_0^{\alpha-\beta_1} z_k(s) + h_2(s)\right)ds + \\ &+ \lambda_2\int_0^1 K_2\left(t,\ s,\ \sum_{k=0}^{\infty} J_0^{\alpha-\alpha_2} z_k(s) + s_1(s),\ \sum_{k=0}^{\infty} J_0^{\alpha-\beta_2} z_k(s) + s_2(s)\right)ds\quad (t\in(0,\ 1))\end{aligned}$$

분해도식은 다음과 같다.

걸음 1

$$z_0(t) = \hat{g}(t) - a(t)J_0^{\alpha-\beta} z_0(t) - b(t)J_0^{\alpha} z_0(t) \tag{4}$$

걸음 2

$$\begin{aligned}z_1(t) &= -a(t)J_0^{\alpha-\beta} z_1(t) - b(t)J_0^{\alpha} z_1(t) + \lambda_1\int_0^t K_1(t,\ s,\ J_0^{\alpha-\alpha_1} z_0(s) + h_1(s),\ J_0^{\alpha-\beta_1} z_0(s) + h_2(s))ds + \\ &+ \lambda_2\int_0^1 K_2(t,\ s,\ J_0^{\alpha-\alpha_2} z_0(s) + s_1(s),\ J_0^{\alpha-\beta_2} z_0(s) + s_2(s))ds\end{aligned} \tag{5}$$

걸음 3

$$z_{n+1}(t) = -a(t)J_0^{\alpha-\beta} z_{n+1}(t) - b(t)J_0^{\alpha} z_{n+1}(t) + \hat{g}_{n+1}(t)$$

여기서

$$
\begin{aligned}
\hat{g}_{n+1}(t) = \lambda_1 \int_0^t K_1 \left(t,\ s,\ \sum_{k=0}^{n} J_0^{\alpha-\alpha_1} z_k(s) + h_1(s),\ \sum_{k=0}^{n} J_0^{\alpha-\beta_1} z_k(s) + h_2(s) \right) ds - \\
- \lambda_1 \int_0^t K_1 \left(t,\ s,\ \sum_{k=0}^{n-1} J_0^{\alpha-\alpha_1} z_k(s) + h_1(s),\ \sum_{k=0}^{n-1} J_0^{\alpha-\beta_1} z_k(s) + h_2(s) \right) ds + \\
+ \lambda_2 \int_0^1 K_2 \left(t,\ s,\ \sum_{k=0}^{n} J_0^{\alpha-\alpha_2} z_k(s) + s_1(s),\ \sum_{k=0}^{n} J_0^{\alpha-\beta_2} z_k(s) + s_2(s) \right) ds - \\
- \lambda_2 \int_0^1 K_2 \left(t,\ s,\ \sum_{k=0}^{n-1} J_0^{\alpha-\alpha_2} z_k(s) + s_1(s),\ \sum_{k=0}^{n-1} J_0^{\alpha-\beta_2} z_k(s) + s_2(s) \right) ds,\ n \ge 1
\end{aligned}
\tag{6}
$$

보조정리 1 적분방정식 (4)에서 $\hat{g},\ a,\ b \in C[0,\ 1]$ 이라고 하자.

이때 적분방정식 (4)의 풀이는 $C[0,\ 1]$ 에서 유일존재한다.

주의 2 결음 2, 3에서의 방정식의 풀이의 존재성은 $K_1,\ K_2$ 가 자기변수에 관하여 련속이라는 가정을 주면 보조정리 1에 의해 해결된다.

2) 하르웨블레트와 몇가지 성질

구간 $[0,\ 1]$ 우에서 정의된 하르웨블레트족을 다음과 같이 표시하자.

$$
h_0(t) = \frac{1}{\sqrt{m}}
$$

$$
h_i(t) = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{cases} 2^{j/2}, & \dfrac{k-1}{2^j} < t \le \dfrac{k-1/2}{2^j} \\ -2^{j/2}, & \dfrac{k-1/2}{2^j} < t \le \dfrac{k}{2^j} \\ 0, & \text{기타} \end{cases}
$$

여기서 $j,\ k$ 는 i 의 옹근수분해이다.

다음의 표시를 리용하자.

$$
H_m(t) := (h_0(t),\ h_1(t),\ \cdots,\ h_{m-1}(t))^{\mathrm{T}}
$$

$$
C_m^{\mathrm{T}} := (c_0,\ c_1,\ \cdots,\ c_{m-1})
$$

$$
\Delta t := 1/m = 1/2^r,\ r \in \mathbf{N}
$$

$$
t_k := (k-0.5)\Delta t,\ k = \overline{1,\ m}
$$

$$
H_{matrix} := \begin{pmatrix} h_0(t_1) & h_0(t_2) & \cdots & h_0(t_m) \\ h_1(t_1) & h_1(t_2) & \cdots & h_1(t_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{m-1}(t_1) & h_{m-1}(t_2) & \cdots & h_{m-1}(t_m) \end{pmatrix}
$$

을 점배치점모임 $\{t_k \mid k = 1,\ 2,\ \cdots,\ m\}$ 에 관한 하르웨블레트행렬이라고 부른다.

벡토르함수 $\Psi(t) = (\Psi_1(t),\ \Psi_2(t),\ \cdots,\ \Psi_m(t))^{\mathrm{T}}$ 에 대하여

$$
(J_0^{\alpha}\Psi)(t) := (J_0^{\alpha}\Psi_1(t),\ J_0^{\alpha}\Psi_2(t),\ \cdots,\ J_0^{\alpha}\Psi_m(t))^{\mathrm{T}}
$$

로 리해한다. 편리상 $(J_0^{\alpha}\Psi)(t)$ 를 $J_0^{\alpha}\Psi(t)$ 로도 표시한다.

$(J_0^{\alpha}\Psi)(t)=F_{\Psi}^{\alpha}\circ\Psi(t)$ 인 m 차상수행렬 F_{Ψ}^{α} 를 Ψ 의 α 계분수적분에 대한 연산행렬이라고 부른다.

보조정리 2[2] 블로크임풀스함수벡토르 $B(t)=(B_1(t),\ B_2(t),\ \cdots,\ B_m(t))^{\mathrm{T}}$ 의 연산행렬 F_B^{α} 는 다음과 같이 표시된다.

$$F_B^{\alpha}=\frac{1}{m^{\alpha}}\frac{1}{\Gamma(\alpha+2)}\begin{pmatrix}1 & \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_{m-1}\\ 0 & 1 & \xi_1 & \cdots & \xi_{m-2}\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \xi_{m-3}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}$$

여기서

$$\xi_k=(k+1)^{\alpha+1}-2k^{\alpha+1}+(k-1)^{\alpha+1}$$

이다.

보조정리 3 다음의 평가식이 성립한다.

① $\|F_B^{\alpha}\|_{\infty}=\dfrac{1}{m^{\alpha}}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha+2)}(m^{\alpha+1}-(m-1)^{\alpha+1})\le\dfrac{1}{\Gamma(\alpha+1)}$

② $\|F_B^{\alpha}\|_2\le\|F_B^{\alpha}\|_{\infty},\ \|(F_B^{\alpha})^{\mathrm{T}}\|_2\le\|(F_B^{\alpha})^{\mathrm{T}}\|_{\infty}$

3) 분해－연산행렬법의 도식

걸음 1에 대한 연산행렬도식

이제 C_m^{T} 의 표시식에서 차원수를 의미하는 첨수 m 은 생략하고 그 자리에 근사풀이의 번호를 쓰겠다. 적분방정식 (4)의 근사풀이형태를 $\tilde{z}_0(t)=C_0^{\mathrm{T}}H(t)$ 로 놓고 점배치점

$$t_k:=(k-0.5)\Delta t\ \ (k=\overline{1,\ m})$$

에서 점배치방정식을 작성하면 다음과 같다.

$$C_0^{\mathrm{T}}H(t_k)=\hat{g}(t_k)-a(t_k)C_0^{\mathrm{T}}F_H^{\alpha-\beta}H(t_k)-b(t_k)C_0^{\mathrm{T}}F_H^{\alpha}H(t_k)\ \ (k=1,\ \cdots,\ m)$$

그러므로 걸음 1에 대한 연산행렬도식으로서 다음의 방정식을 리용한다.

$$C_0=H_{matrix}(G_0-A\circ H_{matrix}^{\mathrm{T}}\circ(F_H^{\alpha-\beta})^{\mathrm{T}}\circ C_0-B\circ H_{matrix}^{\mathrm{T}}\circ(F_H^{\alpha})^{\mathrm{T}}\circ C_0)\tag{7}$$

여기서

$$G_0:=\begin{pmatrix}\hat{g}(t_1)\\ \hat{g}(t_2)\\ \vdots\\ \hat{g}(t_m)\end{pmatrix},\ A:=\begin{pmatrix}a(t_1) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a(t_2) & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a(t_m)\end{pmatrix},\ B:=\begin{pmatrix}b(t_1) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & b(t_2) & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & b(t_m)\end{pmatrix}$$

보조정리 4 $\|H_{matrix}\circ(A\circ H_{matrix}^{\mathrm{T}}\circ(F_H^{\alpha-\beta})^{\mathrm{T}}+B\circ H_{matrix}^{\mathrm{T}}\circ(F_H^{\alpha})^{\mathrm{T}})\|_2<\omega$

여기서

$$\omega := \max_{t\in[0,\ 1]}|a(t)|\frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}+\max_{t\in[0,\ 1]}|b(t)|\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}$$

따름 $0<\omega<1$ 이면 C_0 은 유일존재하며 다음의 평가식이 성립한다.

$$\|C_0\|_2 \le \|G_0\|_2/(1-\omega)$$

걸음 2에 대한 연산행렬도식은

$$C_1 = H_{matrix}(G_1 - A\circ H_{matrix}^{\mathrm{T}}\circ(F_H^{\alpha-\beta})^{\mathrm{T}}\circ C_1 - B\circ H_{matrix}^{\mathrm{T}}\circ(F_H^{\alpha})^{\mathrm{T}}\circ C_1) \tag{8}$$

이다. 여기서

$$G_1 := (\hat{g}_1(t_1),\ \hat{g}_1(t_2),\ \cdots,\ \hat{g}_1(t_m))^{\mathrm{T}}$$

걸음 3에 대한 연산행렬도식은

$$C_{n+1} = H_{matrix}(G_{n+1} - A\circ H_{matrix}^{\mathrm{T}}\circ(F_H^{\alpha-\beta})^{\mathrm{T}}\circ C_{n+1} - B\circ H_{matrix}^{\mathrm{T}}\circ(F_H^{\alpha})^{\mathrm{T}}\circ C_{n+1}) \tag{9}$$

이다. 여기서

$$G_{n+1} := (\hat{g}_{n+1}(t_1),\ \hat{g}_{n+1}(t_2),\ \cdots,\ \hat{g}_{n+1}(t_m))^{\mathrm{T}}$$

식 (9)를 만족시키는 풀이 C_{n+1}의 유일존재성은 걸음 1에서와 같이 론의할수 있다. 이에 기초하여 적분방정식 (3)의 n째 근사풀이는

$$U_n(x) := S_n\cdot H(x),\ n\ge 1 \tag{10}$$

로 구해진다. 여기서 $S_n := \sum_{k=0}^{n} C_k^{\mathrm{T}}$ 이다.

2. 근사풀이의 오차평가

보조정리 5 $\gamma\in\{\alpha,\ \alpha-\beta,\ \alpha-\alpha_1,\ \alpha-\beta_1,\ \alpha-\alpha_2,\ \alpha-\beta_2\}$라고 하자. 이때 다음의 평가식이 성립한다.

$$|J_0^{\gamma}z(t)-C_m^{\mathrm{T}}F_H^{\gamma}H_m(t)|\le\frac{1}{\Gamma(\gamma+1)}\max_t|z(t)-C_m^{\mathrm{T}}H_m(t)|+\|C_m^{\mathrm{T}}\|_2\cdot\|J_0^{\gamma}B_m(t)-F_B^{\gamma}B_m(t)\|_2$$

$z(t)$를 방정식 (3)의 정확한 풀이, $U_N(t)$를 연산행렬법에 의한 N차근사풀이라고 하자.

정리 2 $0<\omega_1<1$인 경우 다음의 평가식이 성립한다.

$$\|z(t)-U_N(t)\|_\infty\le\frac{c\Delta t}{1-\omega_1}+\frac{\omega_2\cdot N\cdot\max_k\|G_k\|_2\cdot W}{(1-\omega_1)(1-\omega)}$$

여기서

$$\omega_1 := \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\cdot\max_t|a(t)|+\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\cdot\max_t|b(t)|+|\lambda_1|\cdot L_{K_1}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha_1+1)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta_1+1)}\right)+$$
$$+|\lambda_2|\cdot L_{K_2}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha_2+1)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta_2+1)}\right)$$

$$\omega_2 := \max_t|a(t)|+\max_t|b(t)|+2|\lambda_1|\cdot L_{K_1}+2|\lambda_2|\cdot L_{K_2}$$

$$W := \max_{\substack{\gamma\in\{\alpha,\ \alpha-\beta,\ \alpha-\alpha_1,\\ \alpha-\beta_1,\ \alpha-\alpha_2,\ \alpha-\beta_2\}}}\{\|J_0^{\gamma}B_m(t)-F_B^{\gamma}B_m(t)\|_2\}$$

참 고 문 헌

[1] 최희철, 장경준; 수학, 1, 32, 주체106(2017).

[2] Yadollah Ordokhani, Neda Rahimi; Journal of Information and Computing Science, 9, 3, 169, 2014.

[3] A. Golbabai; Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization, 4, 1, 41, 2014.

[4] M. Asgari; IAENG International Journal of Applied Mathematics, 45, 2, 14, 2015.

주체106(2017)년 8월 10일 원고접수

A Decomposition-Operational Matrix Method for a Kind of Fractional Mixed Volterra-Fredholm Integro-Differential Equations

Choe Hui Chol, Jang Kyong Jun

We study a decomposition-operational matrix method for a kind of fractional mixed Volterra-Fredholm integro-differential equations. Firstly, we give the decomposition scheme and the method for combining it with the operational matrix method. Secondly, we prove the existence and uniqueness of the approximate solution and present the error estimation formula.

Key words: Caputo fractional derivative, fractional integro-differential equation, numerical method, operational matrix method