김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제4호

작용－각변수로 표시되지 않은 해밀턴벡토르마당에 관한 KAM정리의 성립조건결수의 정량적평가

정우환, 신경령

론문에서는 해밀턴벡토르마당에 대한 불변고리의 존재성과 국부적유일성을 연구하였다. 해밀턴계에서의 불변고리들의 존재성은 여러 자연과학과 기술공학분야들에서 자주 사용된다.[1, 3, 9, 14, 15, 18, 19] 선행연구[2, 16]의 고전적결과이후 선행연구[4, 5, 8, 10－12]을 비롯하여 여러 형태의 섭동형KAM정리들이 제시되였다. 많은 실천적인 응용들에서는 거의 적분가능한 계가 아닌 경우에 오차가 충분히 작은 근사적인 불변고리근방에서 진짜 불변고리를 찾아야 하는 경우가 제기된다.[17]

그리하여 선행연구[13, 17]에서는 적분가능계의 섭동계로 표시되지 않는 해밀턴계에 대한 KAM정리를 증명하였다. 이상의 KAM정리들에서는 KAM정리성립조건결수가 충분히 작으면 불변고리가 존재한다(또는 불변고리가 국부적으로 유일)는 방식으로 정식화되여있다. 그러나 구체적인 물리적계들에 KAM정리를 적용하려고 할 때 정리성립조건결수가 얼마보다 작으면 불변고리가 존재하는가와 같은 정량적평가가 주어져야 한다.

선행연구[6]에서는 해밀턴함수가

$$H(x,\ y,\ t) = y^2/2 + \varepsilon[\cos x + \cos(x-t)]$$

인 해밀턴계를 연구하고 섭동파라메터가 $0 < \varepsilon \le 0.025\ 375$ 이면 불변고리가 존재한다는것을 밝혔다. 한편 선행연구[7]에서는 KAM알고리듬을 태양－목성－위성계에 적용하여 섭동파라메터가 $0 < \varepsilon \le 0.001$ 을 만족시키면 불변고리가 존재한다는것을 밝혔다.

론문에서는 일반적으로는 적분가능계의 섭동으로 표시되지 않고 작용－각변수로도 표시되지 않은 해석적인 해밀턴벡토르마당에 대한 KAM정리의 성립조건결수에 대한 정량적평가를 진행하였다.

정의 1 $n \in \mathbf{N},\ \rho > 0$ 이라고 가정한다. 상다양체 $\boldsymbol{T}^n = \mathbf{R}^n / \mathbf{Z}^n$ 을 n 차원고리라고 부른다. 또한 $U_\rho = \{\theta \in \mathbf{C}^n \,|\, |\operatorname{Im}\theta| \le \rho\}$ 로 놓는다.

정의 2[17] $\boldsymbol{v} = (v_1,\ \cdots,\ v_n) \in \mathbf{R}^n$ 이라고 하자. 어떤 $\gamma > 0,\ \sigma > 0$ 에 대하여 조건

$$|\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v}| \ge \frac{\gamma}{\|\boldsymbol{k}\|^\sigma} \quad (\forall \boldsymbol{k} = (k_1,\ \cdots,\ k_n) \in \mathbf{Z}^n \setminus \{0\})$$

(여기서 $\|\boldsymbol{k}\| := |k_1| + \cdots + |k_n|$)를 만족시킬 때 벡토르 $\boldsymbol{v}$ 는 디오판투스조건을 만족시킨다고 말한다. 웃조건을 만족시키는 벡토르 $\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^n$ 들전체의 모임을 $D_n(\gamma,\ \sigma)$ 로 표시한다.

정의 3 련속함수 $\xi : \boldsymbol{T}^n \to \mathbf{R}$ 에 대하여 적분 $\int_{\boldsymbol{T}^n} \xi(\theta) d\theta$ 를 ξ 의 평균이라고 부르고 $<\xi>$ 로 표시한다.

정의 4 $X \subset \mathbf{C}^n$ 을 $X \subset \overline{\operatorname{int} X}$ 를 만족시키는 모임이라고 한다. 모임 X 에서 련속이고 매 변수에 관하여 1－주기적이며 $\operatorname{int} X$ 에서 실해석적인 넘기기 $K : X \to \mathbf{R}^{2n}$ 들전체의 모

임을 $\mathcal{P}(X,\ \mathbf{R}^{2n})$과 같이 표시한다. $\mathcal{P}(X,\ \mathbf{R}^{2n})$은 노름

$$\|K\|=\sup_{z\in X}|K(\theta)|=\sup_{z\in X}\max_{1\le j\le 2n}|K_j(z)|$$

에 관하여 바나흐공간이 된다. $Y\subset\mathbf{R}^{2n}$일 때 $\mathcal{P}(X,\ Y)=\{K\in\mathcal{P}(X,\ \mathbf{R}^{2n})\mid K(X)\subset Y\}$라고 놓는다.

정의 5 [2] $\boldsymbol{U}^{2n}$로 $\mathbf{R}^{2n}$의 열린모임 또는 어떤 열린모임 $U\subset\mathbf{R}^n$에 관하여 $\boldsymbol{U}^{2n}=\boldsymbol{T}^n\times U$로 주어지는 $2n$차원다양체를 표시한다. n차단위행렬을 I_n으로 표시하고 $2n$차행렬 J를

$$J=\begin{pmatrix}0 & I_n\\ -I_n & 0\end{pmatrix}$$

으로 정의한다. 실해석적함수 $H:\boldsymbol{U}^{2n}\to\mathbf{R}$가 주어졌다고 하자. 이때

$$X_H(z)=J\nabla H(z)\ \ (z\in\boldsymbol{U}^{2n})$$

에 의하여 정의되는 $\boldsymbol{U}^{2n}$우의 벡토르마당 $X_H:\boldsymbol{U}^{2n}\to\mathbf{R}^{2n}$을 해밀턴함수 H에 관한 해밀턴벡토르마당이라고 부르고 상미분방정식

$$\frac{dz}{dt}=X_H(z)=J\nabla H(z) \tag{1}$$

를 해밀턴함수가 H인 해밀턴상미분방정식이라고 부른다. $\varphi_t(x_0,\ y_0)$ $(t\in\mathbf{R})$으로 초기조건 $x(0)=x_0,\ y(0)=y_0$을 만족시키는 상미분방정식 (1)의 풀이를 표시하자.

모임 $\mathcal{T}^n\subset\boldsymbol{U}^{2n}$이 n차원고리 $\boldsymbol{T}^n$과 미분동형이고 $\varphi_t(\mathcal{T}^n)=\mathcal{T}^n$ $(\forall t\in\mathbf{R})$을 만족시킬 때 모임 $\mathcal{T}^n$을 상미분방정식 (1)의 불변고리라고 부른다.

정의 6 [17] $\sigma>n-1$이고 $\upsilon\in D_n(\gamma,\ \sigma)$라고 한다. $K\in\mathcal{P}(U_\rho,\ \boldsymbol{U}^{2n})$에 대하여

$$\partial_\nu K(\theta):=DK(\theta)\nu$$

라고 놓는다. 넘기기 $F:\mathcal{P}(U_\rho,\ \boldsymbol{U}^{2n})\to\mathcal{P}(U_\rho,\ \mathbf{R}^{2n})$을

$$F(K)(\theta)=J\nabla H(K(\theta))-\partial_\nu K(\theta)\ \ (\theta\in U_\rho)$$

에 의하여 정의한다.

해밀턴상미분방정식 (1)을 고찰하기 위하여 1계편미분방정식

$$F(K)=J\nabla H\circ K-\partial_\nu K=0 \tag{2}$$

을 생각한다. 식 (2)의 실해석적인 단일넣기가 되는 풀이 $K\in\mathcal{P}(U_\rho,\ \boldsymbol{U}^{2n})$에 대하여 모임 $K(\boldsymbol{T}^n)$은 식 (1)의 불변고리가 된다. 그리하여 식 (2)를 해밀턴불변고리방정식이라고 부른다.

정의 7 $K\in\mathcal{P}(U_\rho,\ \boldsymbol{U}^{2n})$이 아래의 두 조건을 만족시킨다고 하자.

① 임의의 $\theta\in U_\rho$에 대하여 $Y(\theta)=K(\theta)^{\mathrm{T}}K(\theta)$는 불퇴화이다. $N(\theta)=Y(\theta)^{-1}$이라고 놓는다.

② $A(\theta)=\begin{pmatrix}D_x\nabla_y H(K(\theta)) & D_y\nabla_y H(K(\theta))\\ -D_x\nabla_x H(K(\theta)) & -D_y\nabla_x H(K(\theta))\end{pmatrix}$라고 놓을 때 행렬함수

$$S^0(\theta)=N(\theta)DK(\theta)^{\mathrm{T}}[A(\theta)J-JA(\theta)]DK(\theta)N(\theta)$$

의 평균 $<S^0>$은 불퇴화이다. 이때 K는 불퇴화조건을 만족시킨다고 말한다. 불퇴화조건을 만족시키는 넘기기 $K\in\mathcal{P}(U_\rho,\ \boldsymbol{U}^{2n})$들전체의 모임을 $\mathcal{NP}(\rho)$와 같이 표시한다.

정의 8[17] 모임 $K\in\mathcal{NP}(\rho)$ 에 속하는 넘기기 $K:U_\rho\to\boldsymbol{U}^{2n}$ 을 식 (2)의 근사풀이라고 부른다. 이때 넘기기 $e(\theta)=J\,\nabla H(K(\theta))-\partial_\omega K(\theta)\ (\theta\in U_\rho)$ 를 식 (2)의 근사풀이 K 의 오차라고 부른다. $\|e\|_\rho$ 를 식 (2)의 근사풀이 K 의 오차크기라고 부른다.

정의 9 넘기기 $R_\tau:U_\rho\subset\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^n$ 을 $R_\tau(\theta)=\theta+\tau$ 로 정의한다.

정의 10 세변수다항식 $p(d,\ \nu,\ h)$ 와 4변수다항식 $\xi(d,\ \nu,\ h,\ s)$, $\eta(d,\ \nu,\ h,\ s)$ 및 5변수다항식 $\lambda(d,\ \nu,\ s,\ h,\ H)$ 를 아래의 식으로 정의한다.

$$p(d,\ \nu,\ h):=(d+1)^2(\nu+1)^3(4nh+1)$$

$$\xi(d,\ \nu,\ h,\ s)=$$
$$=(d+1)(\nu+1)\cdot(\mu+1)(2n(\mu+1)d+n)p[(2n(\mu+1)d+n)+s(2n(\mu+1)d+n)p+1]$$

$$\eta(d,\ \nu,\ h,\ s)=14(d+1)(\nu+1)(2n(\mu+1)d+n)p(\mu+1)(2n(\mu+1)d+n)p\cdot$$
$$\cdot[(2n(\mu+1)d+n)+s(2n(\mu+1)d+n)p+1]$$

$$\lambda(d,\ \nu,\ s,\ h,\ H)=68(s+1)^2p(4\nu^2+2H+1)(2nd+n^2)(\eta+H\xi^2)$$

정리 1 $\sigma>n-1,\ \nu\in D_n(\gamma,\ \sigma),\ 0<\rho_0\le 12,\ \delta_0=\rho_0/12$ 이라고 한다. $H:\boldsymbol{U}^{2n}\to\mathbf{R}$ 를 실해석적함수라고 하고 어떤 $r>0$ 이 있어서 $H(z)$ 가 모임

$$\mathcal{B}_r=\left\{z\in\mathbf{C}^{2n}\ \middle|\ \inf_{|\mathrm{Im}\,\theta|<\rho_0}|z-K_0(\theta)|<r\right\}$$

에 해석연장된다고 가정한다. 그리고 $K_0\in\mathcal{NP}(\rho_0)$ 이라고 하고

$$e_0(\theta)=J\,\nabla H(K_0(\theta))-\partial_\omega K_0(\theta)\ \ (\theta\in U_\rho)$$

라고 놓는다. 여기서

$$d_0=\|DK_0\|_{\rho_0},\ \nu_0=\|N_0\|_{\rho_0},\ \ s_0=\|<S_0>^{-1}\|,\ \beta=\gamma^2\delta_0^{\ 2\sigma-1}2^{-(4\sigma+1)}(1+2^{4\sigma-1})$$

$$c=\lambda(d_0+\beta,\ \nu_0+\beta,\ \ s_0+\beta,\ |H|_{C^2,\ \mathcal{B}_r},\ \ |H|_{C^3,\ \mathcal{B}_r}),\ C=(1+2^{4\sigma})c$$

라고 놓는다. 이때

$$C\gamma^{-4}\delta_0^{\ -4\sigma}\|e_0\|_{\rho_0}\le 1/2,\ C\gamma^{-2}\delta_0^{\ -2\sigma}\|e_0\|_{\rho_0}<r$$

를 만족시키면 식 (2)의 풀이 $K_\infty\in\mathcal{NP}(\rho/2)$ 가 존재하고

$$\|K_\infty-K_0\|_{\rho_\infty}\le c\gamma^{-2}\delta_0^{\ -2\sigma}\varepsilon_0\left(1+\kappa\frac{2^{4\sigma}}{2^{2\sigma}-1}\right)<r$$

를 만족시킨다.

정리 2 $\sigma>n-1$, $\nu\in D_n(\gamma,\ \sigma)$ 및 $\delta=\rho/8$ 라고 가정한다.

$$c^0=(1+|<S(\theta)>^{-1}|)(1+2n\|DK\|_\rho^2\|N\|_\rho^2)^2(\|H\|_{C^1,\,\mathcal{B}_r}+1)^2(1+\gamma\delta^\sigma)^2(1+\mu)^2$$

및

$$c^*=2^{2\sigma+1}n\cdot(1+\|DK_2\|_\rho)(1+\|N_2\|_\rho)(2n\rho^{-1}+3\|D^2K_1\|_0)(1+\|N_2\|_\rho)c^0$$

이라고 놓는다. 이때 $K_1,\ K_2\in\mathcal{NP}(\rho)$ 들이 $K_1(U_\rho)\subset\mathcal{B}_r,\ K_2(U_\rho)\subset\mathcal{B}_r$ 를 만족시키는 식 (2)의 풀이이고

$$\gamma^{-2}\delta^{-2\sigma}c^*\|K_1-K_2\|_\rho<1$$

을 만족시키면 어떤

$$\tau \in \Theta := \{\tau \in \mathbf{R}^n \mid |\tau| < \| K_1 - K_2 \|_\rho\}$$

가 있어서 $K_1 \circ R_\tau = K_2$ 가 성립한다.

참 고 문 헌

[1] K. Abe; http://math.shinshu－u.ac.jp/~kabe/, 2009.

[2] V. I. Arnold; Usp. Mat. Nauk, 18, 5, 13, 1963.

[3] V. I. Arnold; Russian Math. Surveys, 18, 86, 1963.

[4] G. Benettin et al.; Nuovo. Cimento, 79, 2, 201, 1984.

[5] J. Xu et al.; Mathematische Zeitschrift, 226, 375, 1997.

[6] A. Celletti et al.; Nonlinearity, 13, 2, 397, 2000.

[7] A. Celletti et al.; Z. Angew. Math. Phys., 57, 33, 2006.

[8] L. H. Eliasson; Math. Phys. Electronic J., 2, 4, 1996.

[9] J. Féjoz; Ergod Th. Dyn. Sys., 24, 1, 2004.

[10] H. Rüssmann; Number Theory and Dynamical Systems, Cambridge Univ. Press, 5～18, 1989.

[11] J. Féjoz; arXiv:1102.0923v2 [math.DS], 2011.

[12] G. Gallavotti; NATO ASI Series C: Math. Phys. Sci., 533, 62, 1999.

[13] A. González et al.; J. Differential Equations, 245, 1243, 2008.

[14] R. H. G. Helleman et al.; Lecture Notes in Physics, 247, Springer, 64～76, 1986.

[15] A. N. Kolmogorov; Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 98, 4, 527, 1954.

[16] R. Llave et al.; Nonlinearity, 18, 855, 2005.

[17] S. K. Wang et al.; http://www.shaneross.com/books/space, 2006.

[18] N. Nakajima et al.; J. Plasma Fusion Res., 88, 3, 153, 2012.

[19] J. Pöschel; Proc. Symp. Pure. Math., 69, 707, 2001.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

Quantitative Estimation of the Realization Condition Coefficients in KAM Theorem for Hamiltonian Vector Fields without Action-Angle Variables

Jong U Hwan, Sin Kyong Ryong

We give a quantitative estimation of the realization condition coefficients of KAM theorem for Hamiltonian vector fields without action-angle variables.

Key words: KAM theorem, Hamiltonian system