김일성종합대학학보 주체108(2019)년
물리학 제65권 제4호

진공섭동을 받는 고전립자의 스핀각운동량의 량자화현상

김일광, 김광일

무질서한 섭동매질속에서 브라운운동하는 고전립자는 공간적인 존재확률밀도가 불균일할 때 확산에 의하여 생기는 일종의 포텐샬 즉 확산포텐샬을 더 가지게 되며 이것을 하밀토니안에 반영하면 고전립자의 운동도 슈뢰딩게르파동방정식형태의 확률동력학적방정식을 만족한다.[1, 2] 선행연구[3, 8, 9]에서는 시공간이 프락탈성을 가진다고 가정하고 프락탈시공간속에서 운동하는 고전립자의 운동방정식이 량자력학적 또는 량자마당론적방정식형태를 가진다는데 대하여 수학적으로 고찰하였다.

일반적으로 립자는 진공요동이나 열요동과 같은 매질의 무질서한 섭동작용에 의하여 회전축방향과 회전각이 무질서하게 변하는 회전브라운운동을 하게 된다. 회전브라운운동에 의한 회전확산은 유전완화(dielectric relaxation), 형광편극소실(fluorescence depolarization)과 같은 편극된 량들의 완화가 일어나는 현상들에 대한 연구에서 중요하게 제기되였다. 아인슈타인(Einstein, 1906)은 열요동매질속에 있는 구형립자의 1차원회전확산에 대하여 고찰하였고 데바이(Debye, 1929)는 스몰루홉스끼(Smoluchowski)방정식에 기초하여 외부마당의 영향을 고려한 회전확산리론을 처음으로 제기하였다.[4] 그리고 코페이(Coffey, 1996)는 회전확산에 대한 보다 발전된 리론을 제기하였으며 깔미꼬브(Kalmykov)는 구체적인 경우들에 대한 연구를 진행하였다.[5, 7, 10]

우리는 립자의 병진브라운운동에서 나타나는 량자화현상이 가장 단순한 자체회전운동의 경우로서 고정축주위로 회전할수 있는 고전립자의 자기축회전브라운운동에서도 나타난다는것을 보여주었다. 즉 섭동매질속에 어떤 고정축(실례로 Z축)주위로 회전할수 있는 고전립자가 만족하는 회전운동에 대한 확률동력학적방정식을 유도하였다. 물론 회전축이 고정되지 않은 회전운동에 대한 보다 일반적인 방정식을 유도하는것도 원리적으로 가능하지만 립자의 확률적회전량자화의 본질을 파악하는데서는 가장 간단한 경우에 대하여 먼저 연구하는것이 편리하다.

1. 진공섭동매질속에서 회전브라운립자의 브라운회전확산포텐샬

먼저 공간에 설정한 관성자리표계 $\{X, Y, Z\}$의 Z축과 립자에 고정한 자리표계 $\{X', Y', Z'\}$의 Z'축을 일치시키고 X와 X'축사이의 각 또는 Y와 Y'축사이의 각을 문자 φ로 표시하자. 그리고 립자의 관성모멘트를 I로 표시하고 그것의 회전운동에 영향을 주는 어떤 외부마당의 포텐샬을 $U_e(\varphi, t)$라고 하자.

립자는 진공매질로부터 받는 섭동에 의하여 회전요동운동을 한다. 즉 립자에 작용하는 외부회전모멘트는 항상 우연적인 어떤 요동성분을 가지게 된다. 다시말하여 립자는 외부마당의 포텐샬 $U_e(\varphi, t)$에 의한 뉴톤력학적회전운동과 함께 회전브라운운동도 동반하며 실제적인 립자의 회전각 $\varphi(t)$는 평균회전각 $\overline{\varphi}(t)$ 근방에서 우연요동하면서 변화된다.

우연요동회전성분이 있으므로 립자의 회전운동은 확률과정으로 되며 불가피하게 확률분포함수 $f(\varphi, t)$를 받아들이게 된다.

회전운동만 하는 경우 분포함수 $f(\varphi, t)$는 립자의 X'축과 관성자리표계의 X축(혹은 Y'축과 관성자리표계의 Y축)사이의 각 φ가 그 근방의 단위각구역안에 있을 확률 즉 립자에 고정된 X'축이 각 φ근방에 나타날 확률밀도를 의미하는데 다음과 같은 규격화조건을 만족시켜야 한다.

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi, t) d\varphi = 1 \tag{1}$$

또한 병진브라운운동에서와 마찬가지로 1차원회전브라운운동을 하는 립자는 확률밀도가 큰 각위치로부터 확률밀도가 작은 각위치로 점차 회전확산하게 된다.[6]

한편 확률회전흐름의 련속성을 표시하는 스몰루홉스끼방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \nabla(\boldsymbol{j}_d + \boldsymbol{j}_e) \tag{2}$$

여기서 ∇는 1차원각자리표계 즉 각공간 $\{\varphi\}$에서 표시한 구배연산자이고 $\boldsymbol{j}_d$는 회전확산에 의한 회전흐름확률밀도벡토르, $\boldsymbol{j}_e$는 외부마당으로부터 받는 회전모멘트에 의한 회전흐름확률밀도벡토르이다.

회전확산에 의한 회전흐름확률밀도벡토르는 다음과 같이 표시된다.

$$\boldsymbol{j}_d = -D_r \nabla f(\varphi, t) \tag{3}$$

여기서 D_r는 회전확산결수이다. 식 (3)은 병진브라운립자의 확산에 대한 피크(Fick)의 법칙을 회전확산의 경우에 대하여 그대로 적용한것이다. 회전흐름확률밀도벡토르 $\boldsymbol{j}$의 물리적의미는 립자에 고정한 X'축 혹은 Y'축이 어떤 각위치 φ근방의 단위각구역안에서 회전각속도 ω로 회전할 확률밀도이다.

우리는 1차원회전운동에 대하여 론의하므로 이 경우에 식 (3)은 다음과 같이 간단하게 된다.

$$\boldsymbol{j}_d = -D_r \frac{\partial f(\varphi, t)}{\partial \varphi} \tag{4}$$

식 (4)의 물리적의미는 고정축주위로의 회전브라운운동에서는 임의의 t시각에 확률밀도 $f(\varphi, t)$가 큰 각위치 φ로부터 확률밀도가 작은 각위치 $\varphi + \Delta\varphi$로 회전확산에 의하여 확률적인 표류회전흐름이 생긴다는것이다. 다시말하여 어떤 회전각표류속도 ω_d가 생긴다. 그러면 식 (4)를 $\boldsymbol{j}_d = f(\varphi, t)\omega_d$와 같이 적을수 있다.

병진브라운운동에서와 마찬가지로 각위치 φ에 따르는 확률밀도불균일에 의하여 생기는 회전운동에네르기는 다음과 같다.[1]

$$\frac{I\omega_d^2}{2} = \frac{ID_r^2}{2}\left(\frac{1}{f(\varphi, t)} \frac{\partial f(\varphi, t)}{\partial \varphi}\right)^2 \tag{5}$$

식 (5)는 립자가 각위치 φ인 상태에 있을 때 회전운동에네르기 $\frac{I\omega_d^2}{2}$으로 넘어갈수 있는 보충적인 에네르기이며 어떤 순간 t에 각위치 φ에만 관계되는 량이므로 브라운회전확산포텐샬이라고 부르고 $U_d(\varphi, t)$로 표시하겠다.

2. 섭동매질속에서 브라운회전확산포텐샬을 고려한 고정축주위로의 립자의 회전운동에 대한 확률동력학적방정식

먼저 회전확산포텐샬을 고려하여 고정축주위로 회전하는 립자의 하밀톤함수밀도를 작성하면 다음과 같다.

$$\mathcal{H}(\varphi,\ t)=f(\varphi,\ t)\left[\frac{1}{2I}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}S(\varphi,\ t)\right)^2+U_e(\varphi,\ t)+U_d(\varphi,\ t)\right] \tag{6}$$

여기서 $U_e(\varphi,\ t)$는 회전운동을 야기시키는 외부마당의 포텐샬이고 $S(\varphi,\ t)$는 일반적으로 립자의 각자리표 φ와 시각 t에 관계되는 작용량이다. 우리의 경우에는 립자의 병진운동의 운동량에 대한 공식에 대응하게 회전운동의 평균각운동량을 작용 $S(\varphi,\ t)$를 리용하여 다음과 같이 표시할수 있다.

$$I\omega(\varphi,\ t)=\frac{\partial}{\partial\varphi}S(\varphi,\ t) \tag{7}$$

그리고 $U_d(\varphi,\ t)$는 립자의 회전확산포텐샬이다. 식 (6)을 구체적으로 다음과 같이 표시할수 있다.

$$\mathcal{H}(\varphi,\ t)=f(\varphi,\ t)\left[\frac{1}{2I}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}S(\varphi,\ t)\right)^2+U_e(\varphi,\ t)+\frac{ID_r^2}{2}\left(\frac{1}{f(\varphi,\ t)}\frac{\partial f(\varphi,\ t)}{\partial\varphi}\right)^2\right] \tag{8}$$

이 하밀토니안은 립자의 평균각운동량을 결정하는 량인 $S(\varphi,\ t)$와 립자가 각 φ의 회전상태에 나타날수 있는 확률밀도 $f(\varphi,\ t)$로 표시되여있다.

량 S와 f를 립자의 확률력학적상태를 규정하는 정준변수로 선정하고 하밀톤형식론에서 잘 알려진 정준방정식

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial S}-\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\left(\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right)} \tag{9}$$

$$-\frac{\partial S}{\partial t}=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial f}-\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right)} \tag{10}$$

에 대입하면 하밀톤—야꼬비방정식과 회전운동에 대한 다음의 확률련속방정식을 얻는다.

$$-\frac{\partial S}{\partial t}=\frac{1}{2I}\left(\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right)^2+U_e(\varphi,\ t)+\frac{ID_r^2}{2}\left[\left(\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right)^2-\frac{2}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\right] \tag{11}$$

$$-\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{f}{I}\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right) \tag{12}$$

이제

$$f=f_0e^{-2Q} \tag{13}$$

을 표시하는 새로운 량 Q를 받아들이고 방정식 (11), (12)를 Q에 대한 방정식으로 변환한 다음 다시 또 다른 변수변환

$$P=\frac{S}{d_r}+iQ \tag{14}$$

에 의하여 두 방정식을 새로운 복소수량 P에 대한 1개의 방정식으로 넘긴다.[1, 2] 여기서 Q는 무본량, f_0은 f와 물리적본이 같은 임의의 상수, d_r도 역시 량 S와 물리적본이 같은 량으로서 임의로 선택할수 있는 상수량, $i=\sqrt{-1}$이다. 1∶1넘기기들인 넘기기 식 (13)과 (14)에 의하여 얻어지는 복소수량 P에 대한 방정식은 비선형편미분방정식으로 된다. 이제

$$d_r=2ID_r \tag{15}$$

로 하면 P에 대한 방정식은 훨씬 간단해진다.[1]

변수변환

$$P=-i\ln\frac{\psi}{\sqrt{f_0}},\qquad \psi=\sqrt{f_0}e^{iP}=\sqrt{f}e^{i\frac{S}{d_r}} \tag{16}$$

을 하여 새로운 복소수함수 ψ에 대한 방정식으로 넘기면 다음과 같다.

$$id_r\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{d_r^2}{2I}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+U_e(\varphi,\ t)\psi \tag{17}$$

식 (15)를 고려하면 식 (17)은 다음과 같이 표시된다.

$$i2ID_r\frac{\partial\psi}{\partial t}=-2ID_r^2\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+U_e(\varphi,\ t)\psi \tag{18}$$

우의 변환들을 리용하여 계산하면 $f(\varphi,\ t)=\psi(\varphi,\ t)^*\psi(\varphi,\ t)$는 립자에 고정한 X'축과 관성자리표계의 X축사이의 각이 t시각에 φ인 상태에 있을 확률밀도 $f(\varphi,\ t)$이며

$$\boldsymbol{j}=\frac{id_r}{2I}\left(\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial\varphi}-\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)=iD_r\left(\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial\varphi}-\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right) \tag{19}$$

는 각공간에서 확률흐름밀도의 물리적의미를 가진다는것을 알수 있다. 또한

$$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{j}/\psi^*\psi=\frac{id_r}{2I}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\ln\frac{\psi^*}{\psi}\right)=iD_r\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\ln\frac{\psi^*}{\psi}\right) \tag{20}$$

는 립자의 위치가 각 φ일 때 립자의 평균회전각속도의 의미를 가지며

$$L=I\omega=I\cdot j/\psi^*\psi=\frac{id_r}{2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\ln\frac{\psi^*}{\psi}\right)=iID_r\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\ln\frac{\psi^*}{\psi}\right) \tag{21}$$

는 각운동량의 물리적의미를 가진다는것을 알수 있다.

3. 외부힘마당이 $U_e(\varphi,\ t)=0$일 때 진공섭동을 받는 고전립자의 확률동력학적회전운동방정식에 대한 간단한 풀이와 해석

진공섭동매질속에서 고정축주위로 회전할수 있는 립자가 그 어떤 외부힘마당의 영향도 받지 않는 경우 그 립자의 회전운동에 대한 확률동력학적방정식 (17) 혹은 (18)의 간단한 풀이를 구해보자.

이 경우에 방정식 (17) 혹은 (18)을 다음과 같이 적을수 있다.

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}\cong -D_r\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} \tag{22}$$

풀이형태를 $\partial\psi = T(t)\cdot\Phi(\varphi)$ 와 같이 놓고 변수분리상수 ε 을 받아들이면 방정식 (22)는 다음과 같다.

$$i\frac{\partial T}{\partial t}-\varepsilon T=0 \tag{23}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+\frac{\varepsilon}{D_r}\Phi=0 \tag{24}$$

방정식 (23)과 (24)의 일반풀이는 다음과 같다.

$$\psi(\varphi,\ t)=e^{-i\varepsilon t}(C_1e^{i\xi\varphi}+C_2e^{-i\xi\varphi}) \tag{25}$$

여기서 상수 C_1과 C_2는 각각 경계조건과 규격화조건에 의하여 구해지는 상수, ξ는

$$\xi=\sqrt{\frac{\varepsilon}{D_r}}\ . \tag{26}$$

한편 고정축주위로의 회전운동에 대한 경계조건

$$\psi(\varphi,\ t)=\psi(\varphi+n2\pi,\ t)\quad (n=0, \pm1,\ \pm2,\ \cdots) \tag{27}$$

을 만족하기 위하여서는 일반풀이 (25)에서 ξ가 $\xi=n$ 을 만족시키는 옹근수이여야 한다는것을 알수 있다. 또한 식 (26)은 다음과 같이 표시된다.

$$\varepsilon=D_rn^2 \tag{28}$$

결과 고전립자의 고정축주위로의 회전운동상태(스핀상태)는 확률동력학적방정식 (17)의 고유함수 $\psi_n(\varphi,\ t)$로 표시되는 량자화된 고유상태

$$\psi_n(\varphi,\ t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i(D_rn^2t-n\varphi)}\quad (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots) \tag{29}$$

에 있거나 이 고유상태들의 중첩상태에 있을수 있다.

이제 고유상태들에 대한 풀이 (29)와 각운동량에 대한 식 (21)을 리용하여 회전고유상태들의 각운동량을 계산하면 다음과 같은 식들을 얻는다.

$$L_n=nd_r\quad (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots) \tag{30}$$

또는

$$L_n=2nID_r\quad (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)\,. \tag{31}$$

이와 같이 섭동매질속에서 브라운운동을 하는 고전립자의 고정축(Z축)주위로의 스핀각운동량의 값들은 $d_r=2ID_r$의 옹근수배로 량자화된다.

한가지 실례로 질량이 구면우에만 집중되여있는 구각형태의 립자의 스핀각운동량을 평가해보자.

량자화된 각운동량들의 구체적인 값들을 계산하기 위해서는 먼저 구체적인 경우에 해당한 d_r의 값을 구해야 한다. 그러자면 해당한 립자의 관성모멘트 I와 회전확산결수 D_r를 알아야 한다. 우리의 경우에는 반경이 a이고 질량이 m인 구각형태의 립자에 대하여 d_r를 계산하여야 한다. 이를 위하여 먼저 점성결수가 η인 매질속에서 구형립자의 병진브라운운동의 확산결수 D_t와 회전브라운운동의 확산결수 D_r가 각각 다음과 같은 식들로 표시된다는것을 상기하자.[7]

$$D_t = \frac{k_{\mathrm{B}} T}{6\pi\beta a}, \quad D_r = \frac{k_{\mathrm{B}} T}{8\pi\beta a^3} \tag{32}$$

여기서 k_{B}는 볼츠만상수, T는 열요동매질의 온도이다.

식 (32)로부터 다음과 같은 관계식을 얻을수 있다.

$$\frac{D_r}{D_t} = \frac{3}{4a^2} \tag{33}$$

식 (33)에서 보는것처럼 두 확산결수의 비는 그것이 주위매질의 온도, 점성결수와 같은 섭동매질의 구체적인 특성에는 관계없고 구형립자의 반경에만 관계된다. 그러므로 우리는 이 관계식이 진공섭동매질속에서도 그대로 성립한다고 가정하겠다.

구각형태의 립자에 대하여 식 (15)와 (33)을 리용하면 $d_r = 2ID_r = I(3/2)(D_t/a^2)$ 이라고 쓸수 있고 이 식에 구각의 관성모멘트 $I = 2ma^2/3$을 대입하면 식

$$d_r = mD_t = d_t/2 \tag{34}$$

를 얻는다. 여기서 병진브라운운동의 확률동력학적방정식을 론의할 때 나타나는 관계식 $d_t = 2mD_t$를 리용하였다.

그러면 진공속에서 병진브라운립자에 대한 관계 $d_t = \hbar$와 식 (34)로부터 진공속에서 Z축주위로 자체회전하는 구각형태의 고전립자의 각운동량에 대한 식 (30)은 다음과 같이 표시된다.

$$L_n = n\hbar/2 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{35}$$

식 (35)로부터 진공매질속에 있는 구각형태의 고전립자의 량자화된 각운동량들의 크기가 립자의 질량과 크기에 무관계하다는것을 알수 있다. 물론 이 결과는 특수한 경우에 해당한것이다.

맺 는 말

진공섭동매질속에서 어떤 고정축주위로 자체회전할수 있는 고전립자의 1차원적인 회전운동에 대한 확률동력학적방정식을 세우고 그것에 기초하여 립자의 고유각운동량이 량자화된다는것을 밝혔다. 그리고 구체적인 실례로 진공섭동매질속에 있는 구각형태의 고전립자의 고유각운동량의 Z성분이 식 (35)와 같이 량자화되며 구각형립자의 질량과 크기에는 무관계하다는것을 밝혔다. 만일 공기를 배기한 진공속에서 즉 끈기가 없는 매질속에서 구형 또는 구각형나노립자들의 자체회전(스핀)에네르기준위들의 려기현상을 보여주는 실험을 진행할수 있다면 론문에서 제기된 섭동매질속에서 고전립자의 스핀량자화에 대하여 확인할수 있을것이다. 이 현상이 실험적으로 확인되면 기초리론발전뿐아니라 량자콤퓨터기술 등 응용기술발전에서도 새로운 전진을 이룩할수 있는 계기로 될것이라고 생각한다.

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보 물리학, 64, 4, 37, 주체107(2018).

[2] **김일성**종합대학학보 물리학, 65, 1, 28, 주체108(2019).

[3] G. N. Ord; International Journal of Theoritical Physics, 35, 2, 263, 1996.

[4] A. Einstein et al.; Ann. Phys. 19, 371, 1906.
[5] W. T. Coffey et al.; The Langevin Equation with Application in Physics, Chemistry and Electrical Engineering, World Scientific, 38～60, 2004.
[6] R. M. Mazo; Brownian Motion (Fluctuations, Dynamics, Application), Oxford University Press, 74～92, 2002.
[7] Yu. P. Kalmykov et al.; Journal of Molecular Structure, 479, 123, 1999.
[8] G. N. Ord; Chaos, Soliton, Fractals, 17, 609, 2003.
[9] M. Celerier et al.; arXiv:1009, 2934u1[Physics. gen-ph] 2010.
[10] W. T. Coffey et al.; Advances in Chemical Physics, 133, 284, 2006.

주체108(2019)년 6월 5일 원고접수

The Quantization of Spin Angular Momentum of Classical Particle Undergoing the Vacuum Perturbation

Kim Il Gwang, Kim Kwang Il

We proposed a postulate that vacuum is a kind of perturbation medium which causes random fluctuation to the spin-rotational motion of the particle as ordinary thermodynamic medium. Then on the basis of this postulate, we constructed the stochastic dynamical equation on one dimensional spin motion of classical particle in vacuum medium, and showed that spin angular momentum of a classical particle was quantized. Also, to illustrate a simple example we showed that *Z*-component of spin angular momentum of a classical particle with spherical surface shape in vacuum was quantized as follows

$$L_n = n\hbar/2 \quad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots).$$

Key word: spin angular moment