김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체105(2016)년 제62권 제9호 Vol. 62 No. 9 JUCHE105(2016).

C^r 반공액넘기기에 관한 편미분방정식에 의하여 주어지는 불변다양체

조 연 희

경애하는 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《과학자, 기술자들은 당이 마련해준 과학기술룡마의 날개를 활짝 펴고 과학적재능과 열정을 총폭발시켜 누구나 다 높은 과학기술성과들을 내놓음으로써 부강조국건설에 이바지하는 참된 애국자가 되여야 합니다.》

선행연구[1]에서는 $\boldsymbol{R}^m$ 에서 주어진 하밀톤방정식에 대하여 불변고리가 만족되는 편미분방정식을 유도하고 뉴톤법을 적용하여 이 방정식의 풀이의 존재성을 증명함으로써 불변고리의 존재성을 밝혔다.

선행연구[2]에서는 $\boldsymbol{R}^m$ 에서 주어진 련립상미분방정식에 대하여 불변다양체가 만족되는 편미분방정식을 유도하였다.

론문에서는 바나흐다양체에서 정의된 두 력학계가 C^r 반공액이기 위해서는 C^r 반공액넘기기가 어떤 편미분방정식을 만족시킬것이 필요하고 충분하며 이때 C^r 반공액넘기기가 단일넘기기이면 그것의 영상모임이 두번째 력학계의 불변다양체가 된다는것을 밝혔다. 이 결과는 일반적인 동력학계의 불변다양체의 존재성문제를 편미분방정식의 풀이의 존재성문제에 귀착시킨다.

정의 1 M 을 바나흐공간 $\boldsymbol{E}$ 를 모형공간으로 하는 C^{r+1} 다양체(간단히 $C^{r+1}\boldsymbol{E}$ 다양체)라고 하고 $X: M \to TM$ 을 C^r 벡토르마당이라고 부른다.

$\varphi(t,\ x),\ t \in I_X(x)$ 를 상미분방정식

$$\dot{y} = X(y) \tag{1}$$

의 초기조건 $y(0) = x$ 를 만족시키는 연장불가능풀이이라고 부른다.

$D_X = \{(t,\ x) \in \boldsymbol{R} \times M\ ;\ t \in I_X(x)\}$ 라고 놓으면 넘기기 $\varphi: D_X \to M\ ;\ (t,\ x) \to \varphi(t,\ x)$ 는 C^r 넘기기가 되는데 φ 를 방정식 (1)의 C^r 흐름이라고 부른다.

정의 2 N 을 $C^{r+1}\boldsymbol{F}$ 다양체, $Y: N \to TN$ 을 C^r 벡토르마당, $\psi: D_Y \to N$ 을 Y 의 C^r 흐름이라고 한다.

C^r 넘기기 $u: M \to N$ 에 관하여

$$u(\varphi(t,\ x)) = \psi(t,\ u(x)) \quad (\forall x \in M,\ \forall t \in I_X(x) \cap I_Y(u(x))) \tag{2}$$

일 때 C^r 흐름 φ 와 ψ 는 u 에 관하여 C^r 반공액이라고 말한다.

정리 1 φ 와 ψ 가 C^r 넘기기 $u: M \to N$ 에 관하여 C^r 반공액이기 위해서는

$$Tu(X(x)) = Y(u(x)) \quad (x \in M) \tag{3}$$

가 성립될것이 필요하고 충분하다.

증명 (필요성) 식 (2)의 량변을 t 로 미분하고 $t=0$ 으로 놓으면 식 (3)을 얻는다.

(충분성) 식 (3)이 성립된다고 하자.

$x\in M$ 을 임의로 고정하고 넘기기 $\zeta: I_X(x)\cap I_Y(u(x))\to N; \zeta(t)=u(\varphi_x(t))$ 를 론의하자.

$$\frac{d}{dt}\zeta(t)=\frac{d}{dt}u(\varphi_x(t))=Tu(\dot{\varphi}_x(t))=Tu(X(\varphi_x(t)))=Y(u(\varphi_x(t)))=Y(\zeta(t))$$

이므로 $\zeta: I_X(x)\cap I_Y(u(x))\to N$ 은 미분방정식

$$\dot{z}=Y(z) \tag{4}$$

의 초기조건 $z(0)=u(x)$ 를 만족시키는 풀이이다.

한편 $\psi_{u(x)}(t),\ t\in I_X(x)\cap I_Y(u(x))$ 도 미분방정식 (4)의 초기조건 $z(0)=u(x)$ 를 만족시키는 풀이이다. 따라서 초기값문제의 풀이의 유일성으로부터 임의의 $t\in I_X(x)\cap I_Y(u(x))$ 에 대하여 $u(\varphi(t,\ x))=u(\varphi_x(t))=\zeta(t)=\psi_{u(x)}(t)=\psi(t,\ u(x))$ 가 성립된다.(증명끝)

정리 2 C^r 단일넘기기 $u:M\to N$ 이 식 (3)을 만족시키면 다음의 사실들이 성립된다.

i) $S=u(M)$ 은 $C^r\boldsymbol{E}$ 다양체의 구조를 가진다.

ii) $T_{u(x)}S=T_xu(T_xM)\ \ (x\in M)$

iii) X 가 완비이면 S 는 방정식 (4)에 관한 불변다양체이다.

iv) S 가 N 의 닫긴모임이면 S 는 방정식 (4)에 관한 불변다양체이다.

v) M 이 콤팍트이면 벡토르마당 $X:M\to TM$ 과 $\widetilde{Y}:S\to TS\,;\widetilde{Y}(y)=Y(y)\ \ (y\in S)$ 는 완비이고 S 는 방정식 (4)에 관한 불변다양체이며 $u:M\to S$ 는 위상동형이다. 나아가서 X 의 C^r 흐름 $\varphi:\boldsymbol{R}\times M\to M$ 과 $\widetilde{Y}$ 의 C^r 흐름 $\widetilde{\psi}:\boldsymbol{R}\times S\to S$ 는 u 에 관하여 위상공액이다.

증명 i) 이제 모임 S 에 C^r 다양체의 구조를 도입하자.

$u^{-1}: S=u(M)\to M$ 은 완전단일넘기기 $u:M\to S$ 의 거꿀넘기기를 표시한다.

$A=\{(U_i,\ \alpha_i),\ i\in J\}$ 를 M 의 C^r 지도첩이라고 한다.

$\forall i\in J$, $V_i=u(U_i)$ 라고 놓고 넘기기 $\beta_i:V_i\to\boldsymbol{E}$ 를 $\beta_i(y)=\alpha_i(u^{-1}(y))\ \ (y\in V_i)$ 에 의하여 정의하면 $B=\{(V_i,\ \beta_i),\ i\in J\}$ 는 모임 S 의 C^r 지도첩이 된다.

ii) $x\in M,\ \ y=u(x)\in S=u(M)$ 이라고 하고 $T_yS\subset T_xu(T_xM)$ 이라는것을 증명하자.

$w\in T_yS$ 를 임의로 취하면 0 을 포함하는 열린구간 $I\subset\boldsymbol{R}$ 와 $c(0)=y$ 인 C^r 넘기기 $c:I\to S=u(M)$ 이 있어서 $w=[c]_y$ 가 성립된다. 여기서 $[c]_y$ 는 $t=0$ 일 때 x 에서 c 와 접하는 M 우의 C^r 곡선전체의 모임이다.

이제 $x\in M$ 을 $y=u(x)$ 를 만족시키는 원소라고 하고 C^1 넘기기 $\widetilde{c}:I\to M$ 을 $\widetilde{c}=u^{-1}\circ c$ 로 정의하면 $\widetilde{c}(0)=u^{-1}(c(0))=u^{-1}(u(x))=x$ 이다.

$v=[\widetilde{c}]_x(\in T_xM)$ 라고 놓으면 $T_xu(v)=T_xu([\widetilde{c}]_x)=[u\circ\widetilde{c}]_{u(x)}=[c]_y=w\in T_xu(T_xM)$ 이다.

$T_xu(T_xM)\subset T_yS$ 도 마찬가지로 증명된다.

iii) $y\in S$ 를 임의로 취하면 $y=u(x)$ 인 $x\in M$ 이 유일하게 존재한다.

정리 1로부터 임의의 $t\in I_X(x)\cap I_Y(u(x))=I_Y(y)$ 에 대하여 $\psi(t,u(x))=u(\varphi(t,x))\in S$ 가 성립된다.

iv) $S=u(M)$ 은 C^r 다양체의 구조를 가지며 매 점 $y\in S$ 에서의 접공간은 $T_{u(x)}S=T_xu(T_xM)$ $(x\in M)$ 에 의하여 주어진다.

어떤 $x\in M$ 에 대하여 $y=u(x)$ 라고 하면 방정식 (3)으로부터

$$Y(y)=Y(u(x))=Tu(X(x))=T_xu(X(x))\in T_xu(T_xM)=T_yS$$

이므로 $\widetilde{Y}:S\to TS;\widetilde{Y}(y)=Y(y)$ $(y\in S)$ 는 C^r 다양체 S 우의 C^r 벡토르마당을 정의한다.

벡토르마당 $\widetilde{Y}:S\to TS$ 에 관한 미분방정식

$$\dot{z}=\widetilde{Y}(z)\ \ (z\in S) \tag{5}$$

의 C^r 흐름을 $\widetilde{\psi}:D_{\widetilde{Y}}\to S$ 로 표시하자.

$y\in S$ 와 $t\in I_{\widetilde{Y}}(y)$ 를 임의로 취하면

$$\frac{d}{dt}\widetilde{\psi}_y(t)=\widetilde{Y}(\widetilde{\psi}_y(t))=Y(\widetilde{\psi}_y(t))$$

이므로 $\widetilde{\psi}_y(t),\ t\in I_{\widetilde{Y}}(y)$ 는 초기조건 $z(0)=y$ 를 만족시키는 방정식 (4)의 풀이이다.

그러므로 $I_{\widetilde{Y}}(y)\subset I_Y(y)$, $\widetilde{\psi}_y(t)=\psi_y(t)$ $(\forall t\in I_{\widetilde{Y}}(y))$ 가 성립된다.

이제 $I_{\widetilde{Y}}(y)=I_Y(y)$ 라는것을 증명하자.

만일 이것을 부정하면 $s\in I_Y(y)$ 로서 $t<s$ $(\forall t\in I_{\widetilde{Y}}(y))$ 인것이 존재하거나 $s'\in I_Y(y)$ 로서 $s'<t$ $(\forall t\in I_{\widetilde{Y}}(y))$ 인것이 존재한다.

첫째 경우만을 론의하자.

$$s_0=\inf\{s\in I_Y(y)\,;\,t<s\}\ \ (\forall t\in I_{\widetilde{Y}}(y))$$

라고 놓으면 $s_0=\sup I_{\widetilde{Y}}(y)$ 가 성립되며 극한 $z_0=\lim\limits_{t\to s_0}\widetilde{\psi}_y(t)=\lim\limits_{t\to s_0}\psi_y(t)\in N$ 이 존재한다.

그런데 가정으로부터 S 가 N 의 닫긴모임이므로 $z_0\in S$ 가 성립된다.

초기조건 $z(0)=z_0$ 을 만족시키는 방정식 (5)의 풀이 $\xi(t),\ t\in(-\delta,\ \delta)$ 가 존재한다.

이때 $\eta(t)=\begin{cases}\widetilde{\psi}_y(t), & t\in I_{\widetilde{Y}}(y)\\ \xi(t-s_0), & t\in[s_0,\ s_0+\delta)\end{cases}$ 라고 놓으면 $\eta(t),\ t\in I_{\widetilde{Y}}(y)\cup[s_0,\ s_0+\delta)$ 는 초기조건 $z(0)=y$ 를 만족시키는 방정식 (5)의 풀이이다.

이것은 $\psi_y(t),\ t\in I_{\widetilde{Y}}(y)$ 가 초기조건 $z(0)=y$ 를 만족시키는 방정식 (5)의 연장불가능한 풀이이라는데 모순된다. 따라서 $I_{\widetilde{Y}}(y)=I_Y(y)$ 가 성립된다.

임의의 $t\in I_Y(y)=I_{\widetilde{Y}}(y)$ 에 대하여 $\psi_y(t)=\widetilde{\psi}_y(t)\in S$ 이므로 S 는 방정식 (4)의 불변다양체이다.

v) M 을 콤팍트라고 가정하면 $S=u(M)$ 도 콤팍트이므로 벡토르마당 $X:M\to TM$ 과 $\widetilde{Y}:S\to TS$ 는 완비이며 iii)으로부터 S 는 방정식 (4)의 불변다양체로 된다.

콤팍트위상공간에서 하우스돌프위상공간에로의 완전단일련속넘기기는 위상동형넘기기이므로 $u:M\to S$ 는 위상동형넘기기이다.

이때 정리 1로부터 임의의 $x\in M,\ t\in \boldsymbol{R}$ 에 대하여

$$(u\circ\varphi_t)(x)=u(\varphi(t,\ x))=\psi(t,\ u(x))=\psi_t(u(x))=(\psi_t\circ u)(x)$$

가 성립된다.(증명끝)

$\boldsymbol{T}^n = \boldsymbol{R}^n / \boldsymbol{Z}^n$ 으로 n차원고리를 표시한다.

$\boldsymbol{U}^{2n}$ 을 어떤 열린모임 $U \subset \boldsymbol{R}^n$ 에 관하여 $\boldsymbol{U}^{2n} = U \times \boldsymbol{T}^n$ 과 같이 표시되거나 $\boldsymbol{R}^{2n}$ 의 열린모임으로 정의한다.

C^∞ 급 $2n$ 차행렬값함수 $B(z)$ $(z \in \boldsymbol{U}^{2n})$ 를 $\boldsymbol{U}^{2n}$ 우의 빠쏭구조행렬[3]이라고 한다.

$H : \boldsymbol{U}^{2n} \to \boldsymbol{R}$ 를 C^∞ 함수라고 하고 H 를 하밀톤함수로 하는 일반화된 하밀톤계[3]

$$\frac{dz}{dt} = B(z)\nabla H(z) \tag{6}$$

를 고찰하자.

$\omega \in \boldsymbol{R}^n$ 에 대하여 $\partial_\omega u(\theta) = Du(\theta)\omega$ 라고 놓는다.

따름 $\omega \in \boldsymbol{R}^n$ 을 디오판투스적이라고 할 때 C^∞ 단일넘기기 $u : \boldsymbol{T}^n \to \boldsymbol{U}^{2n}$ 이

$$\partial_\omega u(\theta) = B(u(\theta))\nabla H(u(\theta)) \tag{7}$$

를 만족시키면 다음의 사실들이 성립된다.

i) $\mathfrak{T} = u(\boldsymbol{T}^n)$ 는 하밀톤계 (6)의 불변고리이다.

ii) $u : \boldsymbol{T}^n \to \mathfrak{T}$ 는 위상동형넘기기이다.

iii) $\boldsymbol{T}$ 우에 제한한 하밀톤계 (6)의 흐름은 $\boldsymbol{R} \times \mathfrak{T}$ 에서 정의되고 크로네케르의 흐름 $\varphi(t,\ \theta) = \theta + \omega t$ $(t \in \boldsymbol{R},\ \theta \in \boldsymbol{T}^n)$ 와 u 에 관하여 위상공액이다.

따라서 $\mathfrak{T}$ 우에 제한한 하밀톤계 (6)의 흐름은 준주기적이다.

참 고 문 헌

[1] Wu Hwan Jong et al.; Chaos, Solitons & Fractals, 68, 114, 2014.

[2] S. Wiggins; Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, Springer, 39～40, 2003.

주체105(2016)년 5월 5일 원고접수

Invariant Manifold given by PDE for C^r Semi-Congugacy

Jo Yon Hui

We reveal that two dynamical systems are C^r semi-conjugate if and only if the C^r semi-conjugacy satisfies a partial differential equation. And we reveal that the image set of the C^r semi-conjugacy become invariant manifold for the second dynamical system if the C^r semi-conjugacy is injection.

Key words: invariant manifold, invariant tori