김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제1호

일반화된 분수계체비쉐브함수를 리용한 변결수시간공간 분수계편미분방정식의 근사풀이법

김현진, 강영숙

우리는 분수계편미분방정식의 근사풀이에 대하여 연구하였다.

론문에서는 일반화된 분수계체비쉐브함수들을 리용하여 변결수를 포함하는 시간공간 분수계편미분방정식을 풀기 위한 한가지 근사풀이도식을 제기하고 수값실험 및 수렴성해석을 진행하였다.

1. 선행연구결과와 문제설정

선행연구[2]에서는 제1종의 이동체비쉐브다항식을 리용하여 분수계확산방정식을 풀기 위한 방법을 고찰하였다. 공간분수계편미분방정식은 분수계편미분방정식의 한 형태로서 많은 연구자들이 수값적으로 풀었다.[2－6]

선행연구[3]에서는 제2종의 이동체비쉐브다항식을 리용하여 공간분수계확산방정식을 풀기 위한 방법을 서술하고 수값실험을 통하여 방법의 효과성을 보여주었다.

선행연구에서 제기된 스펙트르점배치법들에서는 근사풀이가 속하는 공간을 직교다항식들에 의하여 생성되는 공간으로 보고 근사풀이를 진행하였다. 선행연구[1]에서 우리는 분수계직교함수들에 의한 근사풀이공간을 구성하였다.

우리는 선행연구[1]의 제2종의 이동분수계체비쉐브함수를 구간 $[0, h]$ 에로 일반화한 일반화된 제2종의 분수계체비쉐브함수를 제기하고 그것을 리용한 분수계도함수의 근사계산도식을 제기하며 그에 기초하여 변결수를 포함하는 공간시간분수계편미분방정식을 풀기 위한 근사풀이법을 고찰한다.

2. 기 초 개 념

정의 1 μ 계의 캐푸터분수도함수연산자 D^{μ} 는 다음과 같이 정의된다.

① μ 가 자연수가 아닌 경우

$$D^{\mu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\mu)} \int_0^x \frac{f^{(m)}(t)}{(x-t)^{\mu-m+1}} dt, \ \mu > 0 \tag{1}$$

여기서 $m-1 < \mu < m \ (m \in \mathbf{N}, \ x > 0)$ 이다.

② $\mu \in \mathbf{N}$ 에 대하여 캐푸터미분연산자는 보통의 옹근수계미분연산자와 일치한다.

정의 2[1] 제2종의 이동체비쉐브분수계직교함수를 다음과 같이 정의한다. 여기서 $U_n(x)$ 는 제2종의 체비쉐브다항식이다.

$$U_n^{(\lambda)}(x) := U_n(2x^{\lambda} - 1), \ \lambda > 0 \tag{2}$$

이동분수계체비쉐브함수 $\{U_n^{(\lambda)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 에 변수변환 $t = xh$ 를 도입하며 t 를 다시 x 로

표시하면 $\{U_n^{(h\lambda)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 를 얻는다. 이렇게 얻어진 $\{U_n^{(\lambda)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 를 일반화된 분수계체비쉐브함수라고 부른다.

$h\lambda$ 차의 일반화된 분수계체비쉐브함수 $U_n^{(h\lambda)}(x)$ 의 해석적형태는 다음과 같다.

$$U_n^{(h\lambda)}(x)=\sum_{k=0}^{n} b_{k,\,n}\frac{x^{\lambda(n-k)}}{h^{\lambda(n-k)}}\ \ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \tag{3}$$

$$b_{k,\,n}=(-1)^k 2^{2n-2k}\frac{\Gamma(2n-k+2)x^{\lambda(n-k)}}{\Gamma(k+1)\Gamma(2n-2k+2)}$$

일반화된 분수계체비쉐브함수는 구간 $[0,\ h]$ 우에서 무게함수

$$w^{(h\lambda)}(x)=\lambda\left(\frac{x}{h}\right)^{3\lambda/2-1}\frac{\sqrt{1-(x/h)^{\lambda}}}{h} \tag{4}$$

에 관하여 다음의 직교관계를 만족시킨다.

$$\int_0^h w^{(h\lambda)}(x)U_n^{(h\lambda)}(x)U_m^{(h\lambda)}(x)dx=\begin{cases}0, & n\neq m\\ \dfrac{\pi}{8}, & n=m\end{cases} \tag{5}$$

공간 $L_{W^{(h\lambda)}}(0,\ h)$ 에서 $\{U_n^{(h\lambda)}(x)\}$ 가 직교토대로 된다.

다음의 함수공간을 생각하자.

$$F_m^{(h\lambda)}:=\mathrm{span}\{U_0^{(h\lambda)}(x),\ U_1^{(h\lambda)}(x),\ \cdots,\ U_{m-1}^{(h\lambda)}(x)\} \tag{6}$$

공간 $F_m^{(h\lambda)}$ 는 $L^2_{w^{(h\lambda)}}(0,\ h)$ 의 부분공간이다. $u\in L^2_{w^{(h\lambda)}}(0,\ h)$ 의 이 부분공간우로의 직교사영을 $u_m\in L^2_{w^{(h\lambda)}}(0,\ h)$ 라고 하면 그것은 다음과 같이 계산된다.

$$u_m(x)=\sum_{i=0}^{m-1}c_iU_i^{(h\lambda)}(x) \tag{7}$$

여기서

$$c_i=\langle u(x),\ U_i^{(h\lambda)}(x)\rangle/\langle U_i^{(h\lambda)}(x),\ U_i^{(h\lambda)}(x)\rangle=\frac{8}{\pi}\int_0^h u(x)w^{(h\lambda)}(x)U_i^{(h\lambda)}(x)dx \tag{8}$$

$u_m(x)$ 를 벡토르값함수를 리용하여 다음과 같이 표시할수 있다.

$$u_m(x)=\sum_{i=0}^{m-1}c_iU_i^{(h\lambda)}(x)=C^{\mathrm{T}}\Phi(x) \tag{9}$$

여기서 $C=[c_0,\ c_1,\ \cdots,\ c_{m-1}]^{\mathrm{T}}$, $\Phi(x)=[U_0^{(h\lambda)}(x),\ U_1^{(h\lambda)}(x),\ \cdots,\ U_{m-1}^{(h\lambda)}(x)]^{\mathrm{T}}$ 이다.

임의의 함수 $u(x,\ t)\in L^2([0,\ h]\times[0,\ l])$ 에 대하여 아래의 공식에 의한 전개를 생각하자.

$$u(x,\ t)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}u_{ij}U_i^{(h\lambda)}(x)U_j^{(l\beta)}(t)$$

여기서 u_{ij} 는 다음과 같이 계산된다.

$$u_{ij}=\left(\frac{8}{\pi}\right)^2\int_0^h\int_0^l u(x,\ t)w^{(h\lambda)}(x)w^{(l\beta)}(x)U_i^{(h\lambda)}U_j^{(l\beta)}(t)dxdt\ \ (i,\ j=0,\ 1,\ \cdots)$$

국부자름합렬을 고찰하면

$$u(x,\ t)\approx u_m(x,\ t)=\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}u_{ij}U_i^{(h\lambda)}(x)U_j^{(l\beta)}(t)=\Phi^{\mathrm{T}}(x)U\Phi(t) \tag{10}$$

로 쓸수 있다. 여기서

$$\Phi^{\mathrm{T}}(x)=[U_0^{(h\lambda)}(x),\ \cdots,\ U_{m-1}^{(h\lambda)}(x)]$$
$$\Phi^{\mathrm{T}}(t)=[U_0^{(l\beta)}(t),\ \cdots,\ U_{n-1}^{(l\beta)}(t)]$$
$$U=\{u_{ij}\}_{i,\ j=0}^{m-1,\ n-1}$$

일반화된 분수계체비쉐브함수의 도함수와 적의 분수계연산행렬

$$D^{\mu}\Phi(x)\approx A^{\mu}\Phi(x) \tag{11}$$

와 같이 근사시켰을 때 행렬 A^{μ}를 일반화된 분수계체비쉐브함수의 μ계도함수연산행렬이라고 부른다.

A^{μ}를 일반화된 분수계체비쉐브함수의 μ계캐푸터도함수의 m차연산행렬이라고 하자. $\lambda\geq\mu$일 때 A^{μ}의 원소들은 다음과 같이 계산된다.

$$A^{\mu}=\{d_{ij}\}_{i,\ j=0}^{m-1,\ m-1} \tag{12}$$

$$d_{i,\ j}=\sum_{k=0}^{i-1}d_j b_{k,\ i}\frac{1}{h^{\lambda(i-k)}}\frac{\Gamma(\lambda(i-k)+1)}{\Gamma(\lambda(i-k)+1-\mu)} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}d_j&=\langle x^{\lambda(i-k)-\mu},\ U_j^{(h\lambda)}(x)\rangle/\langle U_j^{(h\lambda)}(x),\ U_j^{(h\lambda)}(x)\rangle=\\&=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\sum_{s=0}^{j}b_{s,\ j}h^{-\mu+\lambda(i-k)}\frac{\Gamma(i-k+j-s+3/2-\mu/\lambda)}{\Gamma(i-k+j-s+3-\mu/\lambda)}\end{aligned} \tag{14}$$

다음으로 일반화된 분수계체비쉐브함수들의 적의 근사계산방법을 고찰하자. C를 x에 관계되지 않는 상수벡토르라고 하자. $\Phi(x)\Phi^{\mathrm{T}}(x)C$ 형태의 식의 근사계산방법을 론의한다. 식

$$\Phi(x)\Phi^{\mathrm{T}}(x)C\approx\widetilde{C}\Phi(x) \tag{15}$$

에서 m차행렬 $\widetilde{C}$을 C에 대한 일반화된 분수계체비쉐브함수들의 적의 연산행렬이라고 부른다. 그것의 원소들은 다음과 같다.

$$\xi_{ij}=\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{m-1}c_k g_{ijk} \tag{16}$$

여기서 c_k들은 C의 원소들이며

$$g_{ijk}=(U_i^{(h\lambda)}U_k^{(h\lambda)},\ U_j^{(h\lambda)})=\int_0^h w^{(h\lambda)}(x)U_i^{(h\lambda)}U_k^{(h\lambda)}U_j^{(h\lambda)}dx \tag{17}$$

와 같다.

3. 일반화된 체비쉐브분수직교함수를 리용한 공간시간분수계 편미분방정식의 근사풀이

1) 근사도식의 유도

변결수를 가진 다음의 분수계편미분방정식을 고찰하자.

$$a(x)\frac{\partial^{\mu}u(x,\ t)}{\partial x^{\mu}}+b(t)\frac{\partial^{r}u(x,\ t)}{\partial t^{r}}+c(x)\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial x}+d(x)u(x,\ t)=g(x,\ t) \tag{18}$$
$$u(0,\ t)=q_1(t),\ u(h,\ t)=q_2(t),\ u(x,\ 0)=u_0(x)$$

여기서 $0\le x\le h,\ 0\le t\le l,\ n-1<\mu,\ \gamma\le n$ (n은 어떤 자연수)이고 함수 $g(x,\ t),\ a(x),\ b(t),\ c(x),\ d(x)$는 련속함수로서 알려진 함수들이다.

식 (20)에서 $u(x,\ t)$와 결수함수들을 우의 론의에 따라 일반화된 분수계체비쉐브함수에 의하여 근사시키면 다음과 같은 형태로 쓸수 있다.

$$a(x)\approx A^{\mathrm{T}}\Phi(x),\ g(x,\ t)\approx\Phi^{\mathrm{T}}(x)G\Phi(t),\ b(t)\approx\Phi^{\mathrm{T}}(t)B$$
$$c(x)\approx C^{\mathrm{T}}\Phi(x),\ d(x)\approx P^{\mathrm{T}}\Phi(x)$$
$$u(x,\ t)\approx u_m(x,\ t)=\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}u_{ij}U_i^{(h\lambda)}(x)U_j^{(l\beta)}(t)=\Phi^{\mathrm{T}}(x)U\Phi(t)$$
$$d(x)u(x,\ t)\approx P^{\mathrm{T}}\Phi(x)\Phi^{\mathrm{T}}(x)U\Phi(t)=(\Phi(x)\Phi^{\mathrm{T}}(x)P)^{\mathrm{T}}U\Phi(t)=$$
$$=(\widetilde{P}\Phi(x))^{\mathrm{T}}U\Phi(t)=\Phi^{\mathrm{T}}(x)\widetilde{P}^{\mathrm{T}}U\Phi(t)$$
$$c(x)\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial x}\approx C^{\mathrm{T}}\Phi(x)\frac{\partial(\Phi^{\mathrm{T}}(x)U\Phi(t))}{\partial x}=C^{\mathrm{T}}\Phi(x)\Phi^{\mathrm{T}}(x)D_x^{\mathrm{T}}U\Phi(t)\approx\Phi^{\mathrm{T}}(x)\widetilde{C}D_x^{\mathrm{T}}U\Phi(t)$$
$$b(t)\frac{\partial^{r}u(x,\ t)}{\partial t^{r}}\approx\Phi^{\mathrm{T}}(t)B\frac{\partial^{r}(\Phi^{\mathrm{T}}(x)U\Phi(t))}{\partial t^{r}}=\Phi^{\mathrm{T}}(t)B\Phi^{\mathrm{T}}(x)UD_t^{r}\Phi(t)=$$
$$=\Phi^{\mathrm{T}}(x)UD_t^{r}\Phi(t)\Phi^{\mathrm{T}}(t)B\approx\Phi^{\mathrm{T}}(x)UD_t^{r}\widetilde{B}\Phi(t)$$
$$a(x)\frac{\partial^{\mu}u(x,\ t)}{\partial x^{\mu}}\approx A^{\mathrm{T}}\Phi(x)\frac{\partial^{\mu}(\Phi^{\mathrm{T}}(x)U\Phi(t))}{\partial x^{\mu}}=$$
$$=A^{\mathrm{T}}\Phi(x)\frac{\partial^{\mu}(\Phi^{\mathrm{T}}(x)U\Phi(t))}{\partial x^{\mu}}=A^{\mathrm{T}}\Phi(x)\Phi^{\mathrm{T}}(x)(D_x^{\mu})^{\mathrm{T}}U\Phi(t)\approx\Phi^{\mathrm{T}}(x)\widetilde{A}^{\mathrm{T}}(D_x^{\mu})^{\mathrm{T}}U\Phi(t)$$

여기서

$$G=\{g_{ij}\}_{i,\ j=0}^{m-1,\ n-1},\ A^{\mathrm{T}}=\{a_i\}_{i=0}^{m-1},\ B^{\mathrm{T}}=\{b_j\}_{i=0}^{n-1},\ C^{\mathrm{T}}=\{c_i\}_{i=0}^{m-1},\ P^{\mathrm{T}}=\{p_i\}_{i=0}^{m-1}$$

이며 행렬 $\widetilde{A},\ \widetilde{B},\ \widetilde{C},\ \widetilde{P}$은 벡토르 $A,\ B,\ C,\ P$에 대한 일반화된 분수계체비쉐브함수들의 적연산행렬들이다. 우의 식들을 리용하여 방정식 (18)을 다음과 같이 쓸수 있다.

$$a(x)\frac{\partial^{\mu}u(x,\ t)}{\partial x^{\mu}}+b(t)\frac{\partial^{r}u(x,\ t)}{\partial t^{r}}+c(x)\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial x}+d(x)u(x,\ t)=g(x,\ t)$$
$$\Phi^{\mathrm{T}}(x)\widetilde{A}^{\mathrm{T}}(D_x^{\mu})^{\mathrm{T}}U\Phi(t)+\Phi^{\mathrm{T}}(x)UD_t^{r}\widetilde{B}\Phi(t)+\Phi^{\mathrm{T}}(x)\widetilde{C}D_x^{\mathrm{T}}U\Phi(t)+\Phi^{\mathrm{T}}(x)\widetilde{P}^{\mathrm{T}}U\Phi(t)\approx$$
$$\approx\Phi^{\mathrm{T}}(x)G\Phi(t) \tag{19}$$

갈료르낀방법에서와 류사하게 $k=0,\ 1,\ \cdots,\ m-2;\ s=0,\ 1,\ \cdots,\ n-2$에 대하여 식 (19)의 량변에 $w^{(h\lambda)}(x)\ w^{(l\lambda)}(t)\ U_k^{(h\lambda)}(x)U_l^{(l\lambda)}(t)$를 곱하고 $[0,\ h]\times[0,\ l]$우에서 적분한것이 령이 되도록 근사도식을 작성하겠다.

일반화된 분수계체비쉐브함수의 직교성을 리용하면 식 (19)에 대응하는 다음의 근사방정식이 얻어진다.

$$\widetilde{A}^{\mathrm{T}}(D_x^{\mu})^{\mathrm{T}}U+UD_t^{r}\widetilde{B}+\widetilde{C}D_x^{\mathrm{T}}U+\widetilde{P}^{\mathrm{T}}U=G \tag{20}$$

이 방정식에서 미지량은 U 이다. 미지수의 개수는 mn 개이다. 방정식의 개수는 $(m-1)\times(n-1)=mn-m-n+1$ 개이다.

경계조건을 리용하여 $m+n-1$ 개의 방정식을 얻는다.

먼저 경계조건과 초기조건으로 주어진 함수를 분수계체비쉐브함수를 리용하여 전개하고 앞에서 고찰된 함수근사식을 리용한다. 다음 방정식에 대하여 고찰된것과 같은 방식으로 방정식을 얻는다. 아래에 두가지 조건을 실례로 보여준다.

$$u(0,\ t)\approx\Phi^{\mathrm{T}}(0)U\Phi(t)\approx Q^{\mathrm{T}}\Phi(t)$$

$$u(x,\ 0)\approx\Phi^{\mathrm{T}}(x)U\Phi(0)\approx\Phi\mathrm{T}(x)F$$

$$Q^{\mathrm{T}}=\{q_i\}_{i=0}^{n-1},\ q_i=\frac{8}{\pi}\int_0^L u(0,\ t)U_i^{(l\lambda)}(t)w^{(l\lambda)}(t)dt$$

$$F=\{f_i\}_{i=0}^{m-1},\ f_i=\frac{8}{\pi}\int_0^h u(x,\ 0)U_i^{(h\lambda)}(x)w^{(h\lambda)}(x)dx$$

이로부터 다음의 방정식들을 얻는다.

$$\Phi^{\mathrm{T}}(0)U=Q^{\mathrm{T}}$$

$$U\Phi(0)=F$$

2) 수렴성과 오차해석

정리 만일 합렬 $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}u_{ij}U_i^{(h\lambda)}(x)U_j^{(l\beta)}(t)$ 가 구간 $[0,\ h]\times[0,\ l]$ 에서 $u(x,\ t)$ 로 평등수렴하면 다음의 식이 성립한다.

$$u_{ij}=\left(\frac{8}{\pi}\right)^2\int_0^h\int_0^l u(x,\ t)U_i^{(h\lambda)}(x)U_j^{(l\beta)}(t)w^{(h\alpha)}(x)w^{(l\beta)}(t)dxdt$$

만일 합렬 $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}u_{ij}U_i^{(h\lambda)}(x)U_j^{(l\beta)}(t)$ 가 $[0,\ h]\times[0,\ l]$ 에서 련속함수 $u(x,\ t)$ 로 평등수렴하면 합렬 $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}u_{ij}U_i^{(h\lambda)}(x)U_j^{(l\beta)}(t)$ 는 $u(x,\ t)$ 의 일반화된 분수계체비쉐브함수의 전개이다.

$[0,\ h]\times[0,\ l]$ 에서 두 련속함수가 같은 일반화된 분수계체비쉐브함수의 전개를 가지면 두 함수는 같다. 이제 $u(x,\ t)$ 를 정확한 풀이, $u_{mn}(x,\ t)$ 를 근사풀이라고 하자. 오차를

$$e_{mn}(x,\ t)=u(x,\ t)-u_{mn}(x,\ t)$$

로 표시하자. $u_{mn}(x,\ t)$ 를 주어진 방정식에 대입하였을 때 대입차를 $R_{mn}(x,\ t)$ 로 표시하면 다음의 식이 성립한다.

$$R_{mn}(x,\ t)=g(x,\ t)-\left(a(x)\frac{\partial^{\mu}u_{mn}(x,\ t)}{\partial x^{\mu}}+b(t)\frac{\partial^{r}u_{mn}(x,\ t)}{\partial t^{r}}+c(x)\frac{\partial u_{mn}(x,\ t)}{\partial x}+d(x)u_{mn}(x,\ t)\right)$$

정확한 풀이는

$$a(x)\frac{\partial^{\mu}u(x,\ t)}{\partial x^{\mu}}+b(t)\frac{\partial^{r}u(x,\ t)}{\partial t^{r}}+c(x)\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial x}+d(x)u(x,\ t)=g(x,\ t)$$

를 만족시킨다. 두 식을 덜면 오차가 만족시켜야 할 방정식이 나온다.

$$a(x)\frac{\partial^{\mu}e_{mn}(x,\ t)}{\partial x^{\mu}}+b(t)\frac{\partial^{r}e_{mn}(x,\ t)}{\partial t^{r}}+c(x)\frac{\partial e_{mn}(x,\ t)}{\partial x}+d(x)e_{mn}(x,\ t)=R_{mn}(x,\ t)$$

3) 수값실례

실례 1 다음의 방정식을 고찰하자.

$$a(x)\frac{\partial^{3/2}u(x,\ t)}{\partial x^{3/2}}+b(t)\frac{\partial^{3/2}u(x,t)}{\partial t^{3/2}}=g(x,\ t)$$

$$u(0,\ t)=u(x,\ 0)=0,\ u(h,\ t)=2^{3/2}(t^3-t^{3/2}),\ (x,\ t)\in\Omega=[0,\ 2]\times[0,\ 3]$$

$$a(x)=x^{5/2}+\frac{1}{2}x^3+\cos x,\ b(t)=t^{5/2}+\sin t$$

$g(x,\ t)$는 정확한 풀이가 $u(x,\ t)=x^{3/2}(t^3-t^{3/2})$이도록 정한다.

$\lambda=3/2,\ m=3,\ n=3$인 경우의 근사풀이결수행렬 U는 다음과 같다.

$$U=\begin{pmatrix}8.258\ 19 & 7.708\ 82 & 2.386\ 49\\ 4.129\ 1 & 3.854\ 41 & 1.193\ 24\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\lambda=3/2,\ m=3,\ n=4$인 경우의 근사풀이결수행렬 U를 계산하면 $i\ge3,\ j\ge4$에 대응하는 결수들이 령으로 되며 이것은 제기된 방법의 타당성을 보여준다.

$t=l=3$에서 정확한 풀이와 근사풀이와의 오차는 다음과 같다. 여기서 첫렬은 x의 값들이다.(표 1)

표 1. $t=l=3$에서 정확한 풀이와 근사풀이와의 오차

x의 값들	오차
0	$3.301\ 99\times10^{-8}$
0.4	$3.916\ 16\times10^{-8}$
1.0	$5.729\ 71\times10^{-8}$
1.4	$7.323\ 52\times10^{-8}$
1.8	$9.164\ 82\times10^{-8}$
2.0	$1.016\ 86\times10^{-7}$
1.2	$6.493\ 31\times10^{-8}$

실례 2 다음의 방정식을 고찰하자.

$$a(x)\frac{\partial^{1/2}u(x,\ t)}{\partial x^{3/2}}+b(t)\frac{\partial^{1/2}u(x,\ t)}{\partial t^{3/2}}=g(x,\ t)$$

$$u(0,t)=u(x,0)=0,\ (x,t)\in\Omega=[0,2]\times[0,1]$$

$$a(x)=x,\ b(t)=1$$

$g(x,\ t)$는 정확한 풀이가 $u(x,\ t)=xt$가 성립되도록 정한다.

$\lambda=1/2,\ m=4,\ n=3$인 경우의 근사풀이결수행렬 U는 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix}0.195\ 312 & 0.156\ 25 & 0.039\ 062\ 5\\ 0.156\ 25 & 0.125 & 0.031\ 25\\ 0.039\ 062\ 5 & 0.031\ 25 & 0.007\ 812\ 5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$t = l = 3$ 에서 정확한 풀이와 근사풀이와의 오차는 다음과 같다.(표 2) 여기서 첫렬은 x 의 값들이다.

수값계산결과는 론문에서 제시된 방법의 타당성을 보여준다. 실례 1, 2에서 선택된 m, n 들에 대하여 근사풀이가 속하는 공간과 정확한 풀이가 속하는 공간이 일치한다. 그러나 곁수들인 $a(x)$, $b(t)$ 와 $g(x, t)$ 는 이 공간에 속하지 않으므로 오차가 발생하였다고 볼수 있다. 실례에서 계산된 결과는 실례 1에서 $i \geq 2$ 또는 $j \geq 3$ 이면 $u_{ij} = 0$ 이고 실례 2에서 $i \geq 3$ 또는 $j \geq 3$ 이면 $u_{ij} = 0$ 이라는것을 보여준다. 이것은 론문에서 제기된 방법이 매우 효과적이라는것을 보여준다.

표 2. $t = l = 3$ 에서 정확한 풀이와 근사풀이와의 오차

x 의 값들	오차
0	$-6.721\ 01 \times 10^{-14}$
0.6	$5.923\ 04 \times 10^{-14}$
1.2	$6.128\ 43 \times 10^{-14}$
1.8	$4.307\ 67 \times 10^{-14}$
2.0	$3.463\ 9 \times 10^{-14}$

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보 수학, 64, 1, 34, 주체107(2018).

[2] M. M. Khader; Commun Nonlinear Sci. Numer. Simul., 16, 25, 35, 2011.

[3] N. H. Sweilam et al.; Chaos, Solitons & Fractals, 73, 141, 2015.

[4] E. Sousa; Comput Math. Appl., 62, 983, 2011.

[5] A. H. Bhrawy, M. A. Zaky; Applied Mathematical Modelling, 40, 832, 2016.

[6] Boling Guo; Fractional Partial Differential Equations and Their Numerical Solutions, World Scientific, 34～42, 2015.

주체107(2018)년 9월 8일 원고접수

An Approximate Method for Time-Space Fractional Partial Differential Equations with Variable Coefficients using Generalized Fractional-Order Chebyshev Functions

Kim Hyon Jin, *Kang Yong Suk*

In this paper, we present a method to solve approximately fractional partial differential equation with variable coefficients using generalized fractional-order Chebyshev functions. We construct the approximate scheme and show the error analysis.

Key words: fractional-order Chebyshev function, fractional partial differential equation