김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제2호

시간변수에 관한 특이성을 가진 한가지 형태의 비선형분수계 미분방정식의 적분경계값문제의 풀이의 존재성

오규남, 오옥현

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《과학기술의 종합적발전추세와 사회경제발전의 요구에 맞게 새로운 경계과학을 개척하고 발전시키는데 큰 힘을 넣어야 합니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 40폐지)

우리는 최근에 활발히 연구 및 응용되고있는 한가지 형태의 특이분수계미분방정식의 적분경계값문제에 대한 풀이의 유일존재성을 연구하였다.

선행연구[1, 3]에서는 추에서의 부동점정리를 리용하여 특이성이 없는 경우 비선형다항분수계미분방정식의 풀이의 존재성을 연구하였다.

선행연구[4]에서는 부동점정리들을 리용하여 시간변수에 관한 특이성을 가진 경우로서 리만－스틸쩨스적분경계조건을 가진 특이련립분수계미분방정식의 풀이의 존재성을 연구하였다.

론문에서는 우의 결과들에 기초하여 선행연구[1]에서 비선형함수 f 가 시간변수에 관한 특이성이 있는 경우 다음의 다항분수계미분방정식의 비선형적분경계값문제

$$D_{0+}^{\alpha}y(t)+f(t,\ y(t),\ D_{0+}^{\beta}y(t))=0\ \ (t\in(0,\ 1)),\ \ y(0)=0,\ \ y(1)=\int_0^1 g(s,y(s))ds \qquad (1)$$

여기서 $D_{0+}^{\alpha},\ D_{0+}^{\beta}$ 는 리만－류빌분수계도함수이고 $1<\alpha<2,\ 0<\beta<1$ 이며 $1<\alpha-\beta<2$ 임을 가정한다. 또한 $f\in C((0,\ 1)\times[0,\ +\infty)\times[0,\ +\infty),\ [0,\ +\infty))$ 이고 $f(t,\ \cdot,\ \cdot)$ 은 $t=0$ 또는 $t=1$ 에서 특이이다. 또한 $g\in C([0,\ 1]\times[0,\ +\infty),\ [0,\ +\infty))$ 이다.

정의 1[2] $\alpha>0,\ f\in L_1[a,\ b]$ 에 대하여 $I_{a+}^{\alpha}f(t):=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_a^t\dfrac{f(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}ds$, $t>a$ 를 f 의 리만－류빌의 α 계왼쪽분수적분이라고 부른다.

정의 2[2] $f:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}$ 인 련속함수 $f(t)$ 의 리만－류빌의 α 계분수도함수는

$$D_{a+}^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n\int_a^t\frac{f(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}}ds$$

와 같이 정의한다. 여기서 $[\alpha]$는 α 의 옹근수부를 나타내며 $\alpha>0$, $n=[\alpha]+1$ 이다.

보조정리 1[2] $y\in L_1[0,\ 1],\ \ \nu>\sigma>0$ 이면

$$I_{0+}^{\nu}I_{0+}^{\sigma}y(t)=I_{0+}^{\nu+\sigma}y(t),\ D_{0+}^{\sigma}I_{0+}^{\nu}y(t)=I_{0+}^{\nu-\sigma}y(t),\ D_{0+}^{\nu}I_{0+}^{\nu}y(t)=y(t)$$

가 성립되며 $\alpha>0,\ \sigma>0$ 이면 다음의 식이 성립된다.

$$I_{0+}^{\alpha}\,t^{\sigma-1}=\Gamma(\sigma)/\Gamma(\sigma+\alpha)\cdot t^{\sigma+\alpha-1},\ \ D_{0+}^{\alpha}\,t^{\sigma-1}=\Gamma(\sigma)/\Gamma(\sigma-\alpha)\cdot t^{\sigma-\alpha-1}$$

보조정리 2[2] $\alpha>0$ 이고 $D_{0+}^{\alpha}u\in C(0,\ T)\cap L(0,\ T)$ 에 대하여 다음의 식이 성립된다.

$$I_{0+}^{\alpha} D_{0+}^{\alpha} u(t) = u(t) + c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + \cdots + c_n t^{\alpha-n}$$
$$c_i \in \mathbf{R},\ i = 1, \cdots, n,\ n = [\alpha] + 1$$

보조정리 3 함수 $k \in C(0,\ 1)$에 대하여 다음의 조건이 만족된다고 하자.

$$\exists \sigma_1,\ \sigma_2 \in (0,\ 1),\quad \lim_{t \to 0+} t^{\sigma_1} k(t) = k_1 > 0,\ \lim_{t \to 1-} (1-t)^{\sigma_2} k(t) = k_2 > 0$$

이때 임의의 $\mu \in (1,\ 2]$에 대하여 $K \in C[0,\ 1]$인 함수 $K(t)$를 $K(t) := \int_0^t (t-s)^{\mu-1} k(s) ds$와 같이 정의하면 닫긴구간 $[0,\ 1]$에서 $K(t) < +\infty$이다.

보조정리 4[4] 연산자 A가 바나흐공간 X의 유계닫긴불룩모임 D를 자체로 넘기는 완전련속연산자이면 D에는 연산자 A의 부동점이 존재한다.

가정 1 $[0,\ +\infty) \times [0,\ +\infty)$에서 련속인 비부값함수 $f_1(x_1,\ x_2),\ f_2(x_1,\ x_2)$들이 있어서 $\sigma_1, \sigma_2 \in (0,\ 1)$에 대하여 $\lim_{t \to 0+} t^{\sigma_1} f(t,\ x_1,\ x_2) = f_1(x_1,\ x_2),\ \lim_{t \to 1-} (1-t)^{\sigma_2} f(t,\ x_1,\ x_2) = f_2(x_1,\ x_2)$가 성립된다.

정리 1 가정 1이 성립된다고 할 때 $y(t)$가 경계값문제 (1)의 풀이이기 위해서는 $x(t) := D_{0+}^{\beta} y(t)$인 $x(t)$가 다음의 적분방정식의 풀이일것이 필요하고 충분하다.

$$x(t) = -I_{0+}^{\alpha-\beta} f(t,\ I_{0+}^{\beta} x(t),\ x(t)) + \left[\int_0^1 g(s,\ I_{0+}^{\beta} x(s)) ds + I_{0+}^{\alpha} f(t,\ I_{0+}^{\beta} x(t),\ x(t)) \Big|_{t=1} \right] t^{\alpha-\beta-1} \quad (2)$$

정리 1로부터 경계값문제 (1)의 풀이의 존재성문제는 $C[0,\ 1]$에서 적분방정식 (2)의 풀이의 존재성문제에 귀착된다.

보조정리 5 $G(t,\ s) := \begin{cases} [(1-s)^{\alpha-1} t^{\alpha-\beta-1} - (t-s)^{\alpha-\beta-1}] / \Gamma(\alpha-\beta), & 0 \le s \le t \le 1 \\ [(1-s)^{\alpha-1} t^{\alpha-\beta-1}] / \Gamma(\alpha-\beta), & 0 \le t \le s \le 1 \end{cases}$ 이라고 할 때 $|G(t,\ s)| \le G(s,\ s) = [(1-s)^{\alpha-1} s^{\alpha-\beta-1}] / \Gamma(\alpha-\beta),\ t,\ s \in [0,\ 1]$이 성립되며 식 (2)는 다음과 같다.

$$x(t) = \int_0^1 G(t,\ s) f(s,\ I_{0+}^{\beta} x(s),\ x(s))\, ds + \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\beta)} t^{\alpha-\beta-1} \int_0^1 g(s,\ I_{0+}^{\beta} x(s)) ds \quad (3)$$

보조정리 6 $x \in C[0,\ 1]$이 적분방정식 (2)의 풀이이기 위하여서는 그것이 식 (3)의 풀이일것이 필요하고 충분하다.

X를 노름 $\|x\| := \max_{0 \le t \le 1} |x(t)|$이 도입된 바나흐공간 $C[0,\ 1]$이라고 하자.

연산자 $T: X \to X$를 리용하여 연산자 (3)의 오른변을 $(Tx)(t)$로 표시하면 $x \in X$가 적분방정식 (2)의 풀이라는것은 $x(t)$가 연산자 T의 부동점이라는 사실과 동등하다.

보조정리 7 $T: X \to X$는 완전련속연산자이다.

가정 2 부아닌 련속함수 $a_i(t),\ b_i(t) (i = 1,\ 2),\ c_1(t)$들이 존재하면 다음의 사실들이 성립된다.

$$\forall (t,\ x_1,\ x_2) \in (0,\ 1) \times [0,\ +\infty) \times [0,\ +\infty),\ t^{\sigma_1} (1-t)^{\sigma_2} f(t,\ x_1,\ x_2) \le a_1(t) + b_1(t) x_1 + c_1(t) x_2$$
$$\forall (t,\ x_1) \in [0,\ 1] \times [0,\ +\infty),\ g(t,\ x_1) \le a_2(t) + b_2(t) x_1$$

가정 3 $d = \left(\frac{\|b_1\|}{\Gamma(\beta+1)} + \|c_1\| \right) B(\alpha-\beta-\sigma_1,\ \alpha-\sigma_2) + \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\beta)} \frac{\|b_2\|}{\Gamma(\beta+1)} < 1$

가정 4 $r \ge \dfrac{\| a_1 \| B(\alpha-\beta-\sigma_1,\ \alpha-\sigma_2) + \Gamma(\alpha)/\Gamma(\alpha-\beta) \| a_2 \|}{1-d}$

정리 2 가정 1−4가 만족되면 적분방정식 (2)는 $\Omega = \{x \mid \| x \| \le r\}$ 에서 적어도 1개의 풀이를 가진다.

정리 1, 2로부터 경계값문제 (1)은 적어도 하나의 풀이를 가진다.

실례 다음의 특이분수계미분방정식의 적분경계값문제의 풀이의 존재성을 보자.

$$D_{0+}^{1.8} y(t) + f(t,\ y(t),\ D_{0+}^{0.3} y(t)) = 0 \ \ (t \in (0,\ 1)),\ \ y(0) = 0,\ \ y(1) = \int_0^1 g(s,\ y(s)) ds \tag{4}$$

여기서

$$f(t,\ x,\ y) = 1/(t(1-t))^{1/2} [(1+t^2)/4 + (100+t^2)^{1/2} \ln(1+x)/(1+x^2) + 1/(3+e^x) \cdot \sin y]$$

이고 $g(s,\ x) = 1/(10+s) + 1/(100+s^2)^{1/2} \sin^2 \sqrt{x}$ 이며 $\alpha = 1.8,\ \beta = 0.3$ 이다.

또한 $a_1 = 0.25$, $a_2 = 0.1$, $b_1 = 0.1$, $b_2 = 0.1$, $c_1 = 0.25$, $\sigma_1 = 0.5$, $\sigma_2 = 0.5$ 이고

$$\lim_{t \to 0+} \sqrt{t} f(t,\ x,\ y) = \frac{1}{4} + \frac{\ln(1+x)}{10(1+x^2)} + \frac{\sin y}{3+e^x},\ \ \lim_{t \to 1-} \sqrt{1-t} f(t,\ x,\ y) = \frac{1}{2} + \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{101}(1+x^2)} + \frac{\sin y}{3+e^x}$$

가 성립된다. 그리고

$$d = \left(\frac{\| b_1 \|}{\Gamma(\beta+1)} + \| c_1 \| \right) B(\alpha-\beta-\sigma_1,\ \alpha-\sigma_2) + \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\beta)} \frac{\| b_2 \|}{\Gamma(\beta+1)} \approx 0.574 < 1$$

이고 $r \ge 1.15$ 이다.

따라서 가정 1−4가 모두 만족되므로 정리 2에 의하여 경계값문제 (4)는 적어도 하나의 풀이를 가진다.

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보(자연과학), 62, 1, 18, 주체105(2016).

[2] A. A. Kilbas et al.; Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, 35∼89, 2006.

[3] Li Q. P. et al.; J. Appl. Math. Comput., 53, 383, 2017.

[4] Wang Y. et al.; Appl. Math. Comput., 258, 312, 2015.

주체107(2018)년 12월 5일 원고접수

Existence of Solutions for an Integral Boundary Value Problem of Nonlinear Fractional Differential Equation with Singularity on Time Variable

O Kyu Nam, O Ok Hyon

We investigate the existence of solutions of a class of multi-term fractional differential equations with integral boundary condition using Schauder's fixed point theorem.

Key words: singular fractional differential equation, existence of solutions