김일성종합대학학보 주체110(2021)년
수 학 제67권 제2호

반환우의 위상반모듈의 덜기씨스펙트르의 성질

한원진, 한성철

경애하는 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《이미 일정한 토대가 있고 전망이 확고한 연구대상들에 힘을 넣어 세계패권을 쥐며 그 성과를 확대하는 방법으로 과학기술을 빨리 발전시켜야 합니다.》

반환은 환과 분배속을 일반화한 한가지 대수계로서 분배법칙에 의해 련결되는 더하기와 곱하기라는 두 2원산법을 가지고있지만 환이 아닌 반환에서는 덜기산법이 허용되지 않으므로 환론의 수법들이 반환인 경우에로 그대로 적용되지 않는다.

선행연구[2, 3, 6]에서는 령원소와 단위원소를 가진 가환반환의 덜기씨이데알들전부의 모임우에서의 자리스끼위상이 각이한 류형의 반환들에 대하여 연구되였다. 그리고 선행연구[4]에서는 령원소와 단위원소를 가진 가환반환우에서의 아주 강한 곱하기반모듈에 대하여 덜기씨부분반모듈들전부의 모임우의 자리스끼위상이 연구되였다. 또한 선행연구[1]에서는 령원소와 단위원소를 가진 반환우의 위상반모듈에 대하여 그것의 씨부분반모듈들전부의 모임우에 자리스끼위상이 도입되여 얻어진 씨스펙트르의 위상적성질들이 연구되였다.

론문에서는 령원소와 단위원소를 가진 반환우의 위상반모듈에 대하여 그것의 덜기씨부분반모듈들전부의 모임우에 자리스끼위상이 도입되여 얻어지는 덜기씨스펙트르의 위상적성질들과 반모듈의 대수적성질들사이의 호상련관을 밝히려고 한다.

가환반군 $(S,\ +)$의 부분반군 A에 대하여 모임

$$\overline{A}=\{x\in S\mid \exists a,\ b\in A:\ x+a=b\}$$

를 A의 덜기페포 또는 $k-$페포라고 부른다.

R는 령원소 0과 단위원소 1을 가지는 $0\neq 1$인 반환이고 M은 우니타르 $R-$반모듈이며 Λ는 임의의 비지 않은 첨수모임이라고 하자.

R의 어떤 이데알 I가 존재하여 $I=\bar{I}$일 때 I를 R의 덜기이데알 또는 $k-$이데알이라고 부른다. R의 어떤 참이데알 I가 존재하여 임의의 $a,\ b(\in R)$에 대하여 $aRb\subseteq I$이면 $a\in I$ 또는 $b\in I$일 때 I를 R의 씨이데알이라고 부른다.

N이 M의 부분반모듈일 때 $N\leq M$으로 표시하고

$$(N:M):=\{r\in R\mid\ rM\subseteq N\}$$

으로 놓자. 그러면 $(N:M)$은 R의 이데알로 된다.

또한 N이 M의 참부분반모듈일 때 $N<M$으로 표시한다.

M의 비지 않은 부분모임 S에 대하여 S에 의하여 생성된 M의 부분반모듈을 $\langle S\rangle$로 표시한다. 그리고 $m\in M$일 때 $\langle m\rangle:=\langle\{m\}\rangle$으로 놓는다.

M의 어떤 부분반모듈 N이 존재하여 $N=\overline{N}$일 때 N을 M의 덜기부분반모듈 또는 $k-$부분반모듈이라고 부른다. 그리고 M의 어떤 참부분반모듈 P가 존재하여 만일 $P\leq N<M$이면 늘 $P=N$일 때 P를 M의 극대부분반모듈이라고 부른다. 또한 M의 어떤 참부분반모듈 P가 존재하여 임의의 $r(\in R)$, $m(\in M)$에 대하여 $rRm\subseteq P$이면 $m\in P$ 또는 $r\in(P:M)$일 때 P를 M의 씨부분반모듈이라고 부른다. 그리고 M의 씨부분반모듈

들전부의 모임을 $\mathrm{Spec}(M)$ 으로 표시한다.

M 의 어떤 참인 덜기부분반모듈 P 가 존재하여 만일 N 이 M 의 덜기부분반모듈이고 $P \le N < M$ 이면 늘 $P = N$ 일 때 P 를 M 의 덜기극대부분반모듈 또는 $k-$극대부분반모듈이라고 부른다. 그리고 M 에서 덜기부분반모듈인 씨부분반모듈을 M 의 덜기씨부분반모듈이라고 부른다. M 의 덜기씨부분반모듈들전부의 모임을 $\mathrm{Spec}_k(M)$ 으로 표시한다. 론문에서는 $\mathrm{Spec}_k(M) \ne \varnothing$ 이라고 가정한다.

M 의 부분반모듈 N 을 포함하는 M 의 씨부분반모듈들전부의 사귐을 N 의 근기라고 부르고 $\sqrt{N}$ 으로 표시한다. 그리고 N 을 포함하는 M 의 씨부분반모듈이 없는 경우에는 $\sqrt{N} := M$ 으로 약속한다. 또한 M 의 부분반모듈 N 을 포함하는 M 의 덜기씨부분반모듈들전부의 사귐을 N 의 덜기근기 또는 $k-$근기라고 부르고 $\sqrt{N}^{(k)}$ 로 표시한다. 그리고 N 을 포함하는 M 의 덜기씨부분반모듈이 없는 경우에는 $\sqrt{N}^{(k)} := M$ 으로 약속한다. 그러면 늘 $\sqrt{N} \subseteq \sqrt{N}^{(k)}$ 가 성립한다.

이제는 임의의 $S(\ne \varnothing, \subseteq M)$ 에 대하여 $V(S) := \{P \in \mathrm{Spec}(M) \mid S \subseteq P\}$ 로 놓자. 이때 M 의 임의의 부분반모듈 N 과 L 에 대하여 M 의 어떤 부분반모듈 T 가 존재하여 $V(N) \cup V(L) = V(T)$ 가 만족되면 M 을 위상반모듈이라고 부른다. 또한 M 이 위상반모듈일 때 $\mathrm{Spec}(M)$ 의 부분모임족 $\{V(S) \mid \varnothing \ne S \subseteq M\}$ 은 닫긴모임들에 관한 위상공리들을 만족시키는데 이 부분모임족에 의하여 도입된 위상을 $\mathrm{Spec}(M)$ 우의 자리스끼위상이라고 부른다. 그리고 이때 $\mathrm{Spec}(M)$ 을 M 의 씨스펙트르라고 부른다.

또한 $\mathrm{Spec}(M)$ 의 열린모임 $\mathrm{Spec}(M) \setminus V(S)$ 를 $D(S)$ 로 표시하자. 그리고 매 원소 $m(\in M)$ 에 대하여 $V(m) := V(\langle m \rangle)$, $D(m) := D(\langle m \rangle)$ 으로 놓자. 이때 $D(m)$ 을 $\mathrm{Spec}(M)$ 의 기초열린모임이라고 부른다.

또한 $\varnothing \ne Y \subseteq \mathrm{Spec}(M)$ 일 때 Y 에 속하는 씨부분반모듈들전부의 사귐을 $\tau(Y)$ 로 표시하자.

명제 $P \in \mathrm{Spec}_k(M)$ 이면 $(P:M)$ 은 R 의 덜기씨이데알이다.

증명 $(P:M)$ 이 R 의 씨이데알이라는것은 [1]에서의 성질 1로부터 나온다. 그러므로 $(P:M)$ 이 R 의 덜기이데알이라는것을 밝히자.

만일 $a+b \in (P:M)$ 이고 $a \in (P:M)$ 이면 임의의 $m(\in M)$ 에 대하여 $am + bm = (a+b)m \in P$ 이고 $am \in P$ 이다. 그런데 P 는 덜기부분반모듈이다. 그러므로 $bm \in P$ 이고 따라서 $b \in (P:M)$ 이다.(증명끝)

$\varnothing \ne S \subseteq M$ 일 때 $V_k(S) := \{P \in \mathrm{Spec}_k(M) \mid S \subseteq P\}$ 로 놓자. 그러면

$$V_k(S) = V(S) \cap \mathrm{Spec}_k(M)$$

이고 다음의 보조정리 1이 쉽게 증명된다.

보조정리 1 M 이 반모듈일 때 다음의 사실들이 성립한다.

① $\varnothing \ne S \subseteq T \subseteq M$ 이면 $V_k(T) \subseteq V_k(S)$ 이다.

② 모든 $\lambda(\in \Lambda)$ 에 대하여 $\varnothing \ne S_\lambda \subseteq M$ 이면 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} V_k(S_\lambda) = V_k\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda\right)$ 이다.

③ $\varnothing \ne S \subseteq M$ 이면 $V_k(S) = V_k(\langle S \rangle) = V_k(\sqrt{\langle S \rangle})$ 이다.

④ S 와 T 가 M 의 비지 않은 부분모임들이면 $V_k(S) \cup V_k(T) = V_k(S \cap T)$ 이다.

⑤ $V_k(\{0_M\})=\mathrm{Spec}_k(M)$, $V_k(M)=\varnothing$ 이다.

⑥ 모든 $\lambda(\in\Lambda)$ 에 대하여 $N_\lambda \le M$ 이면 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} V_k(N_\lambda)=V_k\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda\right)$ 이다.

⑦ $N\le M$ 이면 $V_k(\overline{N})=V_k(N)=V_k(\sqrt{N})=V_k(\sqrt{N}^{(k)})$ 이다.

⑧ $N\le M$, $K\le M$ 이고 $V_k(N)\subseteq V_k(K)$ 이면 $K\subseteq\sqrt{N}^{(k)}$ 이다.

정의 1 M 이 위상반모듈일 때 씨스펙트르 $\mathrm{Spec}(M)$ 의 위상부분공간 $\mathrm{Spec}_k(M)$ 을 M 의 덜기씨스펙트르 또는 $k-$씨스펙트르라고 부른다.

$\{V_k(S)\mid \varnothing\ne S\subseteq M\}$ 은 $\mathrm{Spec}_k(M)$ 의 닫긴부분모임들전부의 족이다.

이제 $\mathrm{Spec}_k(M)$ 의 열린모임 $\mathrm{Spec}_k(M)\setminus V_k(S)$ 를 $D_k(S)$ 로 표시하자. 그러면

$$D_k(S)=\{P\in\mathrm{Spec}_k(M)\mid S\not\subseteq P\}=D(S)\cap\mathrm{Spec}_k(M)$$

이다. 그리고 원소 $m(\in M)$ 에 대하여 $V_k(m):=V_k(\langle m\rangle)$, $D_k(m):=D_k(\langle m\rangle)$ 으로 놓자. 이때 $D_k(m)$ 을 $\mathrm{Spec}_k(M)$ 의 기초열린모임이라고 부른다.

보조정리 2 M 이 위상반모듈이면 $\{D_k(m)\mid m\in M\}$ 은 $\mathrm{Spec}_k(M)$ 의 위상토대로 된다.

증명 선행연구[1]에서의 보조정리 3에 의하여 $\{D(m)\mid m\in M\}$ 은 $\mathrm{Spec}(M)$ 우의 자리스끼위상에 관한 토대이고 매 원소 $m(\in M)$ 에 대하여 $D_k(m)=D(m)\cap\mathrm{Spec}_k(M)$ 이기때문이다.(증명끝)

정리 1 M 이 위상반모듈이면 $\mathrm{Spec}_k(M)$ 은 T_0-공간이다.

증명 선행연구[1]에서의 정리 1에 의하여 $\mathrm{Spec}(M)$ 은 T_0-공간이므로 그것의 부분공간인 $\mathrm{Spec}_k(M)$ 도 T_0-공간이다.(증명끝)

보조정리 3 M 이 위상반모듈이고 $\varnothing\ne Y\subseteq\mathrm{Spec}_k(M)$ 이면 $\mathrm{Spec}_k(M)$ 에서의 Y 의 페포는 $V_k(\tau(Y))$ 이다.

증명 선행연구[1]에서의 보조정리 4에 의하여 $\mathrm{Spec}(M)$ 에서 $\overline{Y}=V(\tau(Y))$ 이므로 $\mathrm{Spec}_k(M)$ 에서의 Y 의 페포는 $\overline{Y}\cap\mathrm{Spec}_k(M)=V(\tau(Y))\cap\mathrm{Spec}_k(M)=V_k(\tau(Y))$ 이다.(증명끝)

정리 2 M 이 위상반모듈일 때 $\mathrm{Spec}_k(M)$ 이 T_1-공간이기 위해서는 M 에서의 매 덜기씨부분반모듈이 다른 덜기씨부분반모듈에 포함되지 않을것이 필요하고 충분하다.

증명 (필요성) $\mathrm{Spec}_k(M)$ 이 T_1-공간이면 임의의 $P(\in\mathrm{Spec}_k(M))$ 에 대하여 $\{P\}$ 는 $\mathrm{Spec}_k(M)$ 의 닫긴모임이다. 그런데 보조정리 3에 의하여 $\mathrm{Spec}_k(M)$ 에서의 $\{P\}$ 의 페포는 $V_k(\tau(\{P\}))=V_k(P)$ 이다. 그러므로 $\{P\}=V_k(P)$ 이고 따라서 M 에서 P 를 포함하는 덜기씨부분반모듈은 P 뿐이다.

(충분성) 임의의 $P(\in\mathrm{Spec}_k(M))$ 에 대하여 P 를 포함하는 M 의 덜기씨부분반모듈이 P 뿐이면 보조정리 3으로부터 $\mathrm{Spec}_k(M)$ 에서의 $\{P\}$ 의 페포는 $V_k(\tau(\{P\}))=V_k(P)=\{P\}$ 이므로 $\{P\}$ 는 $\mathrm{Spec}_k(M)$ 의 닫긴모임이다. 따라서 $\mathrm{Spec}_k(M)$ 은 T_1-공간이다.(증명끝)

비지 않은 위상공간 X 에서 임의의 두 비지 않은 열린부분모임들의 사귐이 항상 비지 않을 때 X 를 기약공간이라고 부른다. 그리고 X 의 부분모임 Y 가 부분공간으로서 기약공간일 때 Y 를 기약모임이라고 부른다.

X 의 부분모임 Y 가 기약모임이기 위해서는 X 의 임의의 닫긴부분모임 Y_1 과 Y_2 에 대하여 $Y\subseteq Y_1\cup Y_2$ 이면 $Y\subseteq Y_1$ 또는 $Y\subseteq Y_2$ 일것이 필요하고 충분하다.

또한 Y가 X의 닫긴부분모임이고 $Y=\overline{\{y\}}$인 y가 X에 존재하면 이 y를 Y의 일반점이라고 부른다.

정리 3 M이 위상반모듈이고 $\varnothing \neq Y \subseteq \mathrm{Spec}_k(M)$일 때 다음의 조건들은 서로 동등하다.

① Y는 $\mathrm{Spec}_k(M)$의 기약모임이다.

② Y는 $\mathrm{Spec}(M)$의 기약모임이다.

③ $\tau(Y)$는 M의 씨부분반모듈이다.

④ $\tau(Y)$는 M의 덜기씨부분반모듈이다.

증명 ①⇔②는 기약모임의 정의로부터 나온다. 그리고 ②⇔③은 선행연구[1]에서의 정리 3으로부터 나온다. 또한 ③⇔④는 $\tau(Y)$가 M의 덜기부분반모듈이기때문이다.(증명끝)

정리 4 M이 위상반모듈이고 $N \le M$일 때 다음의 조건들은 서로 동등하다.

① $V_k(N)$은 $\mathrm{Spec}_k(M)$의 기약모임이다.

② $V_k(N)$은 $\mathrm{Spec}(M)$의 기약모임이다.

③ $\sqrt{N}^{(k)}$는 M의 덜기씨부분반모듈이다.

④ $\sqrt{N}^{(k)}$는 $\mathrm{Spec}_k(M)$에서의 $V_k(N)$의 일반점이다.

증명 ①⇔②는 분명하다. 그리고 ①⇔③은 정리 3으로부터 나온다.

③⇒④를 증명하자. $\sqrt{N}^{(k)} \in \mathrm{Spec}_k(M)$이므로 보조정리 3과 보조정리 1의 ⑦로부터 $\mathrm{Spec}_k(M)$에서의 $\{\sqrt{N}^{(k)}\}$의 페포는 $V_k(\tau(\{\sqrt{N}^{(k)}\}))=V_k(\sqrt{N}^{(k)})=V_k(N)$이다.

④⇒③은 분명하다.(증명끝)

따름 M이 위상반모듈이면 $\mathrm{Spec}_k(M)$의 임의의 기약닫긴모임은 일반점을 가진다.

증명 보조정리 1의 ③과 정리 4로부터 곧 나온다.(증명끝)

정의 2 M의 어떤 유한개의 원소 $a_1, \cdots, a_n$이 존재하여 $M=\overline{\langle a_1, \cdots, a_n \rangle}$일 때 M은 덜기유한생성된다 또는 $k-$유한생성된다고 말한다.

유한생성반모듈은 분명히 덜기유한생성되지만 그 거꿀은 일반적으로 성립하지 않는다.

실례 $B_1=\{0,\ 1\}$을 부울속, $M=\mathbf{Z}_+ \cup \{+\infty\}$라고 하자. 여기서 $\mathbf{Z}_+$는 부아닌 옹근수들 전부의 모임이다. 이제 $a,\ b \in M$이고 $r \in B_1$일 때

$$a+b:=\max\{a,\ b\},\quad r\cdot a:=\begin{cases} a & (r=1\text{인 경우}) \\ 0_M & (r=0\text{인 경우}) \end{cases}$$

으로 정의하자. 그러면 M은 B_1-반모듈로 된다. 임의의 유한개의 원소 $a_1, \cdots, a_n (\in M)$에 대하여 $\langle a_1, \cdots, a_n \rangle=\{0_M,\ a_1, \cdots, a_n\}$이므로 M은 유한생성되지 않는다. 그러나 $\langle +\infty \rangle= \{0_M,\ +\infty\}$이고 임의의 원소 $a(\in M)$에 대하여 $a+(+\infty)=+\infty$이므로 $\overline{\langle +\infty \rangle}=\overline{\{0_M,\ +\infty\}}=M$이고 따라서 M은 덜기유한생성된다.

보조정리 4[5] M이 덜기유한생성반모듈이고 N이 M의 참인 덜기부분반모듈이라고 하자. 그러면 N을 포함하는 M의 덜기극대부분반모듈이 존재하며 따라서 M은 덜기극대부분반모듈을 가진다.

보조정리 5 M의 매 덜기극대부분반모듈 K는 씨부분반모듈이다.

증명 임의의 $r(\in R)$와 임의의 $m(\in M)$에 대하여 $rRm \subseteq K$라고 하자. 이때 만일 $m \notin K$이면 $K \subset K+\langle m \rangle \subseteq \overline{K+\langle m \rangle}$이므로 $M=\overline{K+\langle m \rangle}$이다. 이로부터 임의의 $x(\in M)$에 대하여 어떤

$r_1,\ r_2(\in R)$와 $k_1,\ k_2(\in K)$가 존재하여 $x+k_1+r_1m=k_2+r_2m$이므로 $rx+rk_1+rr_1m=rk_2+rr_2m$이다. 이 식에서 $rk_1+rr_1m\in K$이고 $rk_2+rr_2m\in K$이므로 $rx\in\overline{K}=K$이다. 따라서 $K\in \mathrm{Spec}_k(M)$이다.(증명끝)

보조정리 6 M이 덜기유한생성반모듈일 때 만일 $M=\overline{\sum_{\lambda\in\Lambda}\langle f_\lambda\rangle}$이면 어떤 유한개의 $\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_t(\in\Lambda)$가 존재하여 $M=\overline{\sum_{1\le i\le t}\langle f_{\lambda_i}\rangle}$가 성립한다.

증명 $M=\overline{\langle m_1,\ \cdots,\ m_n\rangle}$이라고 하자. $1\le j\le n$인 임의의 j에 대하여 $m_j\in M$이므로 $n_j<t_j$인 적당한 정의 옹근수 $n_j,\ t_j$와 $\{j_k\mid 1\le k\le t_j\}(\subseteq\Lambda)$, $\{r_{j_k}\mid 1\le k\le t_j\}(\subseteq R)$가 존재하여

$$m_j+\sum_{1\le k\le n_j}r_{j_k}f_{j_k}=\sum_{n_j+1\le k\le t_j}r_{j_k}f_{j_k}$$

가 성립한다. 그러므로

$$m_j\in\overline{\sum_{1\le j\le n}\sum_{1\le k\le t_j}\langle r_{j_k}f_{j_k}\rangle}\subseteq\overline{\sum_{1\le j\le n}\sum_{1\le k\le t_j}\langle f_{j_k}\rangle}$$

이다. 따라서

$$M=\overline{\sum_{1\le j\le n}\langle m_j\rangle}\subseteq\overline{\sum_{1\le j\le n}\sum_{1\le k\le t_j}\langle f_{j_k}\rangle}\subseteq M$$

이므로

$$M=\overline{\sum_{1\le j\le n}\sum_{1\le k\le t_j}\langle f_{j_k}\rangle}$$

이다.(증명끝)

정리 5 M이 덜기유한생성위상반모듈이면 $\mathrm{Spec}_k(M)$은 콤팍트공간이다.

증명 보조정리 2로부터 기초열린모임들로 이루어진 $\mathrm{Spec}_k(M)$의 임의의 피복이 유한부분피복을 가진다는것을 밝히면 충분하다.

$$\mathrm{Spec}_k(M)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}D_k(f_\lambda)$$

라고 하자. 그러면 보조정리 1의 ⑥과 ⑦에 의하여 다음의 식이 성립한다.

$$\varnothing=\mathrm{Spec}_k(M)\setminus\bigcup_{\lambda\in\Lambda}D_k(f_\lambda)=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}V_k(\langle f_\lambda\rangle)=V_k\left(\sum_{\lambda\in\Lambda}\langle f_\lambda\rangle\right)=V_k\left(\overline{\sum_{\lambda\in\Lambda}\langle f_\lambda\rangle}\right)$$

이제 $M=\overline{\sum_{\lambda\in\Lambda}\langle f_\lambda\rangle}$라는것을 밝히자. 사실 $\overline{\sum_{\lambda\in\Lambda}\langle f_\lambda\rangle}<M$이면 보조정리 4에 의하여 $\overline{\sum_{\lambda\in\Lambda}\langle f_\lambda\rangle}$를 포함하는 M의 덜기극대부분반모듈 K가 존재한다. 그리고 보조정리 5에 의하여 $K\in\mathrm{Spec}_k(M)$이므로 $V_k\left(\overline{\sum_{\lambda\in\Lambda}\langle f_\lambda\rangle}\right)\ne\varnothing$이 성립한다. 그런데 이것은 모순이다.

한편 정리의 가정에 의하여 M이 덜기유한생성반모듈이므로 보조정리 6으로부터 어떤 유한개의 $\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_t(\in\Lambda)$가 존재하여 $M=\overline{\sum_{1\le i\le t}\langle f_\lambda\rangle}$가 성립한다. 그러므로 보조정리 1의

⑤에 의하여

$$V_k\left(\overline{\sum_{1\le i\le t}\langle f_{\lambda_i}\rangle}\right)=V_k(M)=\varnothing$$

이 성립하고 다시 보조정리 1의 ⑥과 ⑦에 의하여

$$\bigcup_{i=1}^{t}D_k(f_{\lambda_i})=\mathrm{Spec}_k(M)\setminus\bigcap_{1\le i\le t}V_k(\langle f_{\lambda_i}\rangle)=\mathrm{Spec}_k(M)\setminus V_k\left(\sum_{1\le i\le t}\langle f_{\lambda_i}\rangle\right)=$$

$$=\mathrm{Spec}_k(M)\setminus V_k\left(\overline{\sum_{1\le i\le t}\langle f_{\lambda_i}\rangle}\right)=\mathrm{Spec}_k(M)$$

이다.(증명끝)

정리 6 M이 위상반모듈이면 다음의 사실들은 서로 동등하다.

① M은 덜기유한생성반모듈이다.

② $\mathrm{Spec}_k(M)$은 콤팍트공간이고 만일 N이 M의 참인 덜기부분반모듈이면 N을 포함하는 M의 덜기극대부분반모듈이 존재한다.

③ $\mathrm{Spec}_k(M)$은 콤팍트공간이고 만일 N이 M의 참인 덜기부분반모듈이면 N을 포함하는 M의 덜기씨부분반모듈이 존재한다.

증명 ①⇒②는 보조정리 4와 정리 5로부터 나온다. 그리고 ②⇒③은 보조정리 5로부터 나온다.

③⇒①을 증명하자.

보조정리 2에 의하여 M의 비지 않은 부분모임 $\{f_i\in M\mid i\in\Lambda\}$가 존재하여

$$\mathrm{Spec}_k(M)=\bigcup_{i\in\Lambda}D_k(f_i)$$

가 성립한다. 가정에 의하여 $\mathrm{Spec}_k(M)$이 콤팍트공간이므로 Λ의 비지 않은 유한부분모임 Δ가 존재하여

$$\mathrm{Spec}_k(M)=\bigcup_{i\in\Delta}D_k(f_i)$$

가 성립한다. 보조정리 1의 ⑥과 ⑦에 의하여

$$\varnothing=\bigcap_{i\in\Delta}V_k(f_i)=V_k\left(\sum_{i\in\Delta}\langle f_i\rangle\right)=V_k\left(\overline{\sum_{i\in\Delta}\langle f_i\rangle}\right)$$

이다. 만일 $\overline{\sum_{i\in\Delta}\langle f_i\rangle}<M$이면 $\overline{\sum_{i\in\Delta}\langle f_i\rangle}$를 포함하는 M의 덜기씨부분반모듈이 존재하므로 $V_k\left(\overline{\sum_{i\in\Delta}\langle f_i\rangle}\right)\ne\varnothing$으로 되여 모순이다. 따라서 $\overline{\sum_{i\in\Delta}\langle f_i\rangle}=M$이다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보 수학, 65, 2, 7, 주체108(2019).

[2] **김일성**종합대학학보 수학, 65, 3, 46, 주체108(2019).

[3] S. E. Atani et al.; Quasigroups Related Systems, 20, 29, 2012.

[4] S. E. Atani et al.; Eur. J. Pure Appl. Math., 4, 3, 251, 2011.
[5] S. C. Han; J. Algebra Appl., 16, 7, 1750130, 2017.
[6] P. Lescot; J. Pure Appl. Algebra, 216, 1004, 2012.

주체109(2020)년 12월 5일 원고접수

Properties of the Subtractive Prime Spectrum of a Semimodule over a Semiring

Han Won Jin, Han Song Chol

For a top semimodule over a semiring, we study the interplay between the topological properties of the subtractive prime spectrum and the algebraic properties of the semimodule.

Keywords: top semimodule, subtractive prime subsemimodule, Zariski topology