

## 가상문제에 기초한 MRCPSP/max의 한가지 풀이방법

문경호, 전재경

위대한 령도자 김정일동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《인민경제 모든 부문의 생산기술공정과 생산방법, 경영활동을 새로운 과학적토대위에 올려세우기 위한 연구사업도 강화하여야 합니다.》(《김정일선집》 증보판 제11권 138페이지)

쌍을 이루는 활동들사이의 최소 및 최대시간지연이 선정된 방식들에 의하여 변할수 있는 일반화된 선후관계를 가지는 다중방식프로젝트일정작성문제(MRCPSP/max)에 대하여 2개의 부분문제 즉 방식할당문제 MAP와 RCPSP/max로 분할하여 푸는 방법[1-3], 방식벡토르와 시작시간벡토르의 동시결정방법[4]이 있다.

본문에서는 우선순위나무에 기초한 음적렬거알고리즘[5]의 매 준위에 대하여, 현재 준위에서 주어진 활동의 시작시간과 다음준위에서 논의될 아직 일정화되지 않은 활동들의 우선순위를 최량적으로 계산하는 가상적인 부분문제를 생각하고 그에 기초하여 MRCPSP/max를 푸는 한가지 풀이방법에 대하여 논의한다.

### 1. 문제 설정

MRCPSP/max는 망  $N=\{V, E, \Delta\}$ 로 표현될수 있다.

여기서  $V=\{0, 1, \dots, n, n+1\}$ 은 절점들의 모임으로서 매 절점에는 프로젝트의 하나의 활동만이 대응되며 이때 0,  $n+1$ 은 각각 프로젝트의 가상적인 시작, 마감활동을 나타내는 절점들이며  $i=\overline{1, n}$ 는 프로젝트의 실제적인 활동을 나타내는 절점이다. 매 활동  $i \in V$ 는 여러개의 실행방식들을 가질수 있으며 하나의 방식에서만 수행될수 있다. 이러한 활동  $i$ 의 실행방식들의 모임을  $M_i$ 로,  $p_{im}$ 을 방식  $m \in M_i$ 에서 실행되는 활동  $i$ 의 수행기간으로 하며 이때  $M_0 = M_{n+1} = \{1\}$ ,  $p_{01} = p_{n+1, 1} = 0$ 이다. 한편  $E$ 는 호들의 모임이며  $(i, j) \in E$ 는 활동  $i$ 와 활동  $j$ 사이의 일반화된 선후관계를 나타내는 호이며 모든 호들은 무게행렬을 가진다. 그리고  $\Delta = (\delta_{ijm_i m_j})_{m_i \in M_i, m_j \in M_j}$ 는 호  $(i, j)$ 의 무게행렬이다.

만약  $s_0 = 0$ 으로 정의하면  $s_{n+1}$ 은 프로젝트수행기간으로 된다. 활동  $i$ 의 시작시간을  $s_i$ 로 한다면 매 시점  $t \in [s_i, s_i + p_{im_i} - 1]$ ,  $m_i \in M_i$ 에서 수행되고있는것으로 된다.

한편 MRCPSP/max(초기문제 (P))는 다음과 같은 개념모형으로 정식화된다.

$$\min s_{n+1} \quad (1)$$

$$s_i + \delta_{ijm_i m_j} \leq s_j, \quad \forall (i, j) \in E \quad (2)$$

$$\sum_{i \in A(M, S, t)} r_{im_k k}^\rho \leq R_k^\rho, \forall k \in R^\rho, t \geq 0 \quad (3)$$

$$\sum_{i \in V} r_{im_k k}^v \leq R_k^v, \forall k \in R^v \quad (4)$$

$$m_i \in M_i, \forall i \in V \quad (5)$$

$$s_i \geq 0, \forall i \in V \quad (6)$$

$$s_0 = 0 \quad (7)$$

여기서  $A(M, S, t) = \{i \mid s_i \leq t < s_i + p_{im_i}, m_i \in M, \forall i \in V\}$  는 주어진 일정방안  $(M, S)$ 에 대하여 시간  $t$ 에서 실행되고있는 활동들의 모임이며  $R^\rho$  와  $R^v$  는 각각 재생가능한 자원 및 재생불가능한 자원들의 모임이다. 그리고  $R_k^\rho \in Z_{\geq 0}$  는 매 시점에서 리용할수 있는 재생가능한 자원  $k \in R^\rho$  의 량이며  $R_k^v \in Z_{\geq 0}$  는 총적으로 리용할수 있는 재생불가능한 자원  $k \in R^v$  의 량이다.

활동  $i$  가 방식  $m_i$  에서 수행된다고 하면  $r_{im_i k}^\rho$  개 단위의 재생가능한 자원  $k \in R^\rho$  가 활동  $i$  가 수행되고있는 매 시점에서 리용되고 재생불가능한 자원  $k \in R^v$  는 총적으로  $r_{im_i k}^v$  개 단위만큼 소비된다. 이때 활동 0과  $n+1$ 에 대하여서는  $r_{0, 1k}^\rho = r_{n+1, 1k}^\rho = 0 (\forall k \in R^\rho)$  이고  $r_{0, 1k}^v = r_{n+1, 1k}^v = 0 (\forall k \in R^v)$  이다.

목적은 시간지연에 대한 제한 (2), 재생가능한 자원 및 재생불가능한 자원에 대한 제한 (3), (4)가 만족되고 프로젝트수행기간 (1)이 최소화되게 일정방안  $(M, S)$ 를 결정하는것이다.

## 2. 가 상 문 제

우선순위나무에 기초한 렬거물림새로 본 문제를 론의하기 위해 초기문제 (P)에 대응하는 가상문제를 정의한다.

먼저 활동  $i$  의 가상방식  $\hat{m}_i$  을 생각하는데 이것은 다음과 같은 속성을 가진다.

$$\textcircled{1} \text{ 처리시간 } p_{i\hat{m}_i} = \min_{m_i \in M_i} p_{im_i}$$

$$\textcircled{2} \text{ 재생불가능한 자원요구량 } r_{i\hat{m}_i k} = \min_{m_i \in M_i} r_{im_i k}^v (\forall k \in R^v)$$

$$\textcircled{3} \text{ 호무게 } \delta_{ij\hat{m}_i\hat{m}_j} = \min_{m_i \in M_i} \min_{m_j \in M_j} \delta_{ijm_i m_j} (\forall (i, j) \in E)$$

한편 가상방식  $\hat{m}_i$  로 수행되는 활동  $i$  의 가상적인 시작시간을  $\hat{s}_i$  로 표기할수 있다.

여기에 기초하여 가상일정방안  $(\hat{M}, \hat{S})_{l-1}$  을 정의하는데 여기서 방식벡토르는

$$\hat{M} = (m_0, \dots, m_{l-1}, \hat{m}_l, \dots, \hat{m}_{n+1})$$

이고 시작시간벡토르는  $\hat{S} = (s_0, \dots, s_{l-1}, \hat{s}_l, \dots, \hat{s}_{n+1})$  이다.

이 일정방안은 활동  $i(i=0, l-1)$  는 시간  $s_i$  에서 실제방식  $m_i$  로 수행되고 활동  $i(i=l, n+1)$  는 시간  $\hat{s}_i$  에서 가상방식  $\hat{m}_i$  로 수행된다는것을 나타낸다.

이때 일반성을 잃지 않고 첨수를 활동번호로 한다.

그러면  $(\hat{M}, \hat{S})_{l-1}$  도 일정방안이라는데로부터  $\hat{S}$ 에 관하여

$$s_0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_{l-1} \leq \hat{s}_l \leq \dots \leq \hat{s}_{n+1}$$

이 성립하고  $s_0 = 0$  이라고 생각할수 있다.

가상문제는 바로 이 가상일정방안의 정의에 기초한다.

이제 MRCPSp/max 의 어떤 실체  $(P)$ 와 가상일정방안  $(\hat{M}, \hat{S})_{l-1}$  이 주어지고 또 활동  $l(l = \arg \min_i \hat{s}_i)$  이 실제방식  $m_l$  로 수행될 때 활동  $l$ 의 실제 시작시간  $s_l$ 의 최소화문제는 다음과 같은 가상문제  $(\hat{P})_l$ 로 정의할수 있다.

$$\min \hat{s}_{n+1} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \hat{s}_i + \delta_{ij\hat{m}_i\hat{m}_j} \leq \hat{s}_j, \forall (i, j) \in E, i, j \in \bar{V}, \\ \hat{s}_i + \delta_{ijm_i\hat{m}_j} \leq \hat{s}_j, \forall (i, j) \in E, i \in V \setminus \bar{V}, j \in \bar{V}, \\ \hat{s}_i + \delta_{ijm_im_j} \leq \hat{s}_j, \forall (i, j) \in E, i, j \in V \setminus \bar{V} \end{cases} \quad (9)$$

$$r_{lm,k}^\rho \leq R_k^\rho - \sum_{i \in A(t)} r_{im,k}^\rho, \forall k \in R^\rho, t \geq s_{l-1} \quad (10)$$

$$r_{lm,k}^v \leq R_k^v - \left( \sum_{i \in V} r_{im,k}^v + \sum_{i \in V \setminus \bar{V}} r_{im,k}^v \right), \forall k \in R^v \quad (11)$$

$$\hat{s}_i = s_i, \forall i \in V \setminus V \setminus \{l\} \quad (12)$$

여기서  $\bar{V} = \{l+1, n+1\}$ 는 가상방식으로 수행되는 활동들의 모임이고

$$A(t) = \{i \mid s_i \leq t < s_i + p_{im}, \forall i \in V \setminus \bar{V} \setminus \{l\}\}$$

은 가상일정방안  $(\hat{M}, \hat{S})_{l-1}$ 에 대하여 시간  $t$ 에서 수행된 활동들의 모임으로서 식 (10)과 (11)의 오른쪽항들은 미리 결정된다.

또한  $s_0 = 0$  이므로  $s_i$ 는 활동  $i \in V \setminus \bar{V} \setminus \{l\}$ 의 해제시간과 동등하고 따라서 호  $(0, \cdot) \in E$ 의 무게  $\delta_{0im_i}$ 는  $s_i (\forall i \in V \setminus \bar{V} \setminus \{l\})$ 로 미리 설정된다.

결국 가상문제는 선정된 하나의 활동에 대한 자원제한과 활동들사이의 시간제한들을 조건으로 한다.

목적은 제한 (9)~(12)이 만족되고  $\hat{s}_{n+1}$ 이 최소화되게  $\hat{M} = (m_0, \dots, m_l, \hat{m}_{l+1}, \dots, \hat{m}_{n+1})$ 이고  $\hat{S} = (s_0, \dots, s_l, \hat{s}_{l+1}, \dots, \hat{s}_{n+1})$ 인 새로운 가상일정방안  $(\hat{M}, \hat{S})_l$ 을 결정하는것이다.

보다 명백히 이 가상문제는 제한 (9)~(12)들이 만족되게 실제방식  $m_l$ 에서 수행되는 주어진 활동  $l$ 의 실제적인 최속시작시간  $s_l$ 과 가상방식  $\hat{m}_i$ 에서 수행되는 활동  $i \in \bar{V}$ 의 가상의 최속시작시간  $\hat{s}'_{i+1}$ 들을 얻어내는것을 목적으로 한다.

$(\hat{P})_l$ 이 초기의 문제  $(P)$ 의 완화된 문제라는것은 명백하며  $(\hat{P})_l$ 의 망을  $\hat{N} = \{V, E; \hat{\Delta}\}$ 로 표기한다. 식 (8)~(12)로 표현되는 이러한 가상문제  $(\hat{P})_l$ 은 잘 알려진 전형적인 RCPSp-GPR이다. 따라서  $(\hat{P})_l$ 은 RCPSp-GPR[6]에 대한 시간해석의 수법을 리용하여 론의될수 있다.

### 3. 풀이를 위한 렐거물림새

MRCPSp/max를 풀기 위한 우선순위나무에 기초한 음적렐거물림새 (IES-pt)는 가상문제  $(\hat{P})_l$ 의 정의에 기초한다.

IES-pt의 렐거나무는 활동들이 하나씩 차례로 일정화되기때문에  $n+1$ 의 준위를 가지는데 일반성을 잃지 않고 준위첨수를 활동번호로 표현한다.

매 준위에서 렐거나무의 절점들은 가상적인 일정방안에 대응한다. 실례로 준위 0에는  $(\hat{M}, \hat{S})_0$  이, 준위 1에는  $(\hat{M}, \hat{S})_1$ , 준위  $l-1$ 에는  $(\hat{M}, \hat{S})_{l-1}$  이 대응되는데 우에서 언급한바와 같이 이것은 각각 준위 0, 1, ...,  $l-1$ 까지 1, 2, ...,  $l$ 의 활동들이 이미 일정방안되었다는것을 나타낸다.

준위  $l$ 에서 어떤 활동을 일정화한다는것은 그것에 실제방식과 최속시간 및 자원실행 가능한 시작시간을 할당한다는것을 의미하며 이 시작시간은 준위  $l-1$ 에서 이미 일정화된 활동의 시작시간보다 작지 말아야 한다.

이제 준위  $l$ 에 적합한 활동들의 모임이 있고 어떤 적합한 활동과 그것의 실제방식이 하나 선정된다면 그때 그 활동을 일정화한다는것은 결과적으로 가상일정방안  $(\hat{M}, \hat{S})_{l-1}$ 에 기초하는 가상문제  $\hat{P}_l$ 을 푸는것에 귀착된다.

만일 선정된 현재 방식에서 일정화하는것이 실행불가능하다면 다른 방식이 검사되며 모든 방식들이 다 검사되었다면 다른 적합한 활동이 선택된다. 이렇게 하여 적합한 모든 활동들이 다 논의되었다면 앞준위  $l-1$ 로 되돌아가 이 준위에서 다른 방식이나 다른 적합한 활동이 선정되고 논의된다.

한편 현재 방식에서 일정화하는것이 실행가능하다면 준위  $l$ 의 렐거나무의 절점들은 생성된 새로운 가상일정방안  $(\hat{M}, \hat{S})_l$ 에 대응된다.

$(\hat{M}, \hat{S})_l$ 의 총소요시간에 대한 하계 LB 즉  $LB = \hat{s}_{n+1}$ 이 계산되는데  $LB \geq UB$ 이라면 렐거나무안의 대응하는 가지는 더 검사되지 말아야 하며 되돌아가 우와 같은 과정이 수행될수 있다. 여기서 UB는 이제까지 찾아진 가장 좋은 총소요시간이다.

이후 준위  $l+1$ 의 적합한 활동들의 모임이  $\{i | \min_{i \in V} \hat{s}_i, \hat{s}_i \in \hat{S}\}$ 로 결정되는데 여기서  $\bar{V}$ 는 준위  $l$ 에서 가상방식으로 일정화되는 활동들의 모임이고  $\hat{s}_i$ 는 그러한 활동들의 가상적인 시작시간이다. 이것은 준위  $l+1$ 에서 논의될 아직 일정화되지 않은 활동들의 우선권을 결정한다는것을 의미한다. 결국 매 준위에서 앞준위의 가상일정방안에 기초하는 가상문제  $(\hat{P})_l$ 의 풀이를 얻음으로써 주어진 현재 활동의 실제적인 최속시작시간과 다음 준위에서 활동들의 우선순위를 얻을수 있다. 이때 준위  $l+1$ 에서 각이한 우선권규칙들을 적용하여 적합한 활동과 그것의 실제방식을 선택할수 있다.

준위  $l=n+1$ 에 도달하면 모든 활동들은 일정화되고 렐거나무의 잎들은 실제적인 일정방안  $(M, S)$ 들에 대응된다. 그리고 대응된 실제 일정화의 총소요시간은 이제까지 얻어진 가장 좋은 UB와 비교된다. 그다음 또다른 적합한 활동이 선정되는데서 앞준위에서의 되돌아가 일어난다.

## 맺 는 말

MRCPSP/max를 푸는 방법은 현재 준위에서 주어진 활동의 시작시간과 다음준위에서 논의될 아직 일정화되지 않은 활동들의 우선순위를 최량적으로 계산하는 가상문제의 정의에 기초한다. 매 준위에서 이 가상적인 부분문제를 풀어서 얻은 가상일정방안은 그 준위의 렐거나무절위의 렐거나무절점에 대응하고 다음준위의 새로운 가상문제를 생성할수 있는 토대로 되며 준위의 증가와 함께 실제적인 일정방안으로 차례차례 변화되어간다.

## 참 고 문 헌

- [1] R. Heilmann; OR Spectrum, **23**, 335, 2001.
- [2] K. Nonobe et al.; In: MIC2003: The 5<sup>th</sup> Metaheuristics International Conference, 55, 2003.
- [3] Agustin Barrios et al.; Computers & Operations Research, **38**, 33, 2011.
- [4] R. Heilmann; European Journal of Operational Research, **144**, 348, 2003.
- [5] Sprecher Amo; European Journal of Operational Research, **107**, 431, 1998.
- [6] M. Bartuch et al.; Annals of Operations Research, **16**, 201, 1998.

주체104(2015)년 4월 5일 원고접수

## **A Solution Method for MRCPSP/max based on Definition of the Virtual Subproblem**

*Mun Kyong Ho, Jon Jae Gyong*

We present a solution method for MRCPSP/max that the implicit enumeration procedure is based on the definition of the virtual subproblem that optimally calculates a start time of a given activity in current level and a priority of unscheduled activities to be considered in next level.

Key words: multi-mode project scheduling, minimal time lag