김일성종합대학학보 주체107(2018)년
수 학 제64권 제2호

평면띠염동력학계의 안장마디분지형거동과 쇠스랑분지형거동

김상문, 리천남

선행연구[1, 2, 4, 5, 7－9]에서는 미분방정식의 오른변의 1계 및 2계편도함수들이 령이 아닌 경우, 오른변의 고계도함수들이 령인 경우, 오른변의 1계 및 2계편도함수들이 두 변수에 관하여 령인 경우, 어느 하나의 변수에 관한 편도함수가 령인 경우 $\mathbf{R}^2$에서 정의된 자동련립미분방정식의 궤도들이 안장마디분지형거동과 안정성교체형거동 혹은 쇠스랑분지형거동을 하기 위한 충분조건들을 밝혔다. 한편 선행연구[3, 6]에서는 $\mathbf{R}^2$에서 정의된 띠염동력학계가 2계이하의 편도함수들이 령이 아닌 경우 안장마디분지형거동과 쇠스랑분지형거동 그리고 안정성교체분지형거동을 하기 위한 충분조건들을 밝혔다.

론문에서는 1계 및 2계편도함수들이 령인 경우 고계도함수조건을 리용하여 $\mathbf{R}^2$에서 정의된 띠염동력학계가 안장마디분지형거동과 쇠스랑분지형거동을 하기 위한 충분조건들을 연구하였다.

띠염동력학계

$$x \mapsto f(x) \tag{1}$$

를 고찰한다. 여기서 $x=(y,\ z)\in\mathbf{R}^2,\ \ f\in C^r(\mathbf{R}^2,\ \mathbf{R}^2),\ f=(f_0^1,\ f_0^2)$이고 r는 어떤 자연수이다.

구체적으로 f가

$$f(y,\ z)=(f_0^1(y,\ z),\ f_0^2(y,\ z))=(f^1(y,\ z)+y,\ f^2(y,\ z)+z)$$

이고 다음과 같이 표시되였다고 하자.

$$\begin{cases} f^1(y,\ z)=F^1(y, z)\cdot g(y, z) \\ f^2(y, z)=F^2(y, z)\cdot g(y, z) \end{cases} \tag{2}$$

보조정리 $C^r(r\ge 2n,\ n;$ 자연수$)$ 급넘기기 $g:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^1$이 있어서 다음의 조건을 만족시킨다고 하자.

1) $g(0,\ 0)=0$

2) $g_z(0,0)=g_{z^2}(0,0)=\cdots=g_{z^{2n-1}}(0,0)=0$

3) $g_y(0,0)\cdot g_{z^{2n}}(0,0)<0$

이때 $\delta>0, \varepsilon>0$과 다음의 조건을 만족시키는 유일한 함수 $h:(-\delta,\delta)\to(-\varepsilon,\varepsilon)$이 있다.

① $(y_0, z_0)\in(-\varepsilon,\varepsilon)\times(-\delta,\delta)$
$g(y_0, z_0)=0 \Leftrightarrow y_0=h(z_0)$
$g(h(z), z)=0,\ z\in(-\delta,\delta)$

② $h(0)=0$

③ $h'(0)=h''(0)=\cdots=h^{(2n-1)}(0)=0$

④ $h^{(2n)}(0)>0$

정리 1 $g:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^1$이 보조정리의 조건을 만족시키고 $C^r(r\ge 2n-1,\ n;$자연수$)$ 급넘기기 $F^1, F^2:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^1$이 다음의 조건을 만족시킨다고 하자.

1) $F^1(0,\ 0)=0$

2) $F_z^1(0,\ 0)=\cdots=F^1_{z^{2n-2}}(0,\ 0)=0$

3) $F^1_{z^{2n-1}}(0,\ 0)\ne 0$

4) $F^2(0,\ 0)\ne 0$

이때 $\delta>0$ 과 식 (1)의 부동점곡선 $(h(z),\ z),\ z\in(-\delta,\ \delta)$ 가 존재하여 $\sigma=-1$ 일 때 $(h(z),\ z)$ 는 $z\in(0,\ \delta)$ 에서 안정하고 $z\in(-\delta,\ 0)$ 에서 불안정하다. $\sigma=1$ 일 때 $(h(z),\ z)$ 는 $z\in(0,\ \delta)$ 에서 불안정하고 $z\in(-\delta,\ 0)$ 에서 안정하다.
여기서 $\sigma:=\mathrm{sign}[F^1_{z^{2n-1}}(0,\ 0)\cdot g_y(0,\ 0)+F^2(0,\ 0)\cdot g_{z^{2n}}(0,\ 0)]$ 이다.

증명 $g:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^1$이 보조정리의 조건을 만족시키므로 $\delta>0,\ \varepsilon>0$ 과 $h:(-\delta,\delta)\to(-\varepsilon,\varepsilon)$ 이 있어서

$$\begin{aligned}&g(h(z),\ z)=0,\ z\in(-\delta,\ \delta)\\&h(0)=0,\ h'(0)=0,\ \cdots,\ h^{(2n-1)}(0)=0,\ h^{(2n)}(0)>0\end{aligned}\tag{3}$$

이 성립한다. 따라서 $z\in(-\delta,\delta)$ 일 때

$$\begin{aligned}f^1(h(z),\ z)&=F^1(h(z),\ z)\cdot g(h(z),\ z)=0\\f^2(h(z),\ z)&=F^2(h(z),\ z)\cdot g(h(z),\ z)=0\end{aligned}$$

이 성립하고

$$f(h(z),\ z)=(f_0^1(h(z),\ z),\ f_0^2(h(z),\ z))=(f^1(h(z),\ z)+h(z),\ f^2(h(z),\ z)+z)=(h(z),\ z)$$

이며 $z\in(-\delta,\ \delta)$ 일 때 $(h(z),\ z)$ 는 식 (1)의 부동점이다.

부동점 $(h(z),\ z)$ 의 중립안정성을 판정하기 위하여 부동점에서 식 (1)의 야꼬비행렬의 고유값의 절대값을 고찰하자. 부동점에서 식 (1)의 야꼬비행렬은

$$J=\left.\begin{pmatrix}f_y^1 & f_z^1\\ f_y^2 & f_z^2\end{pmatrix}\right|_{(h(z),\ z)}$$

와 같다. 그리고

$$\det(J-\lambda I)\big|_{(h(z),\ z)}=\left.\begin{vmatrix}f_y^1-\lambda & f_z^1\\ f_y^2 & f_z^2-\lambda\end{vmatrix}\right|_{(h(z),\ z)}=$$

$$=[\lambda^2-\lambda\cdot(f_y^1+f_z^2+2)+f_y^1f_z^2-f_z^1f_y^2+f_y^1+f_z^2+1]\big|_{(h(z),\ z)}=0$$

이고 $g(h(z),\ z)=0$ 이므로 $(f_y^1f_z^2-f_z^1f_y^2)|_{(h(z),\ z)}=0$ 이다.

이제 부동점곡선 $(h(z),z)$ 의 매 점의 안정성을 평가하자. 매 부동점 $(h(z),\ z)$ 에서 한 개의 고유값은 $\lambda_1(h(z),z)=1$ 이므로 λ_2 의 부호에 따라 중립안정성과 중립불안정성이 결정된다. 따라서 매 부동점 $(h(z),z)$ 에서 $\lambda_2(h(z),z)$ 의 절대값을 계산해보면

$$\lambda_2(h(z),\ z)=f_y^1(h(z),\ z)+f_z^2(h(z),\ z)+1$$

이고 임의의 자연수 n에 대하여

$$\frac{d^n}{dz^n}\lambda_2(h(z), z) = G_n^1(z)\cdot h'(z) + \cdots + G_n^n(z)\cdot h^{(n)}(z) + [f_{yz^n}^1(h(z), z) + f_{z^{n+1}}^2(h(z), z)]$$

가 성립한다. 여기서 $G_1^1(z) := f_{yy}^1(h(z), z) + f_{zy}^2(h(z), z)$이고

$$G_2^1(z) := \frac{d}{dz}G_1^1(z) + f_{yzy}^1(h(z), z) + f_{zzy}^2(h(z), z)$$

$$G_2^2(z) := G_1^1(z)$$

이며 일반적으로

$$G_{k+1}^1(z) := \frac{d}{dz}G_k^1(z) + f_{yz^k y}^1(h(z), z) + f_{z^{k+1}y}^2(h(z), z)$$

$$G_{k+1}^2(z) := G_k^1(z) + \frac{d}{dz}G_k^2(z)$$

$$\vdots$$

$$G_{k+1}^k(z) := G_k^{k-1}(z) + \frac{d}{dz}G_k^k(z)$$

$$G_{k+1}^{k+1}(z) := G_k^k(z)$$

이다. 한편

$$\begin{aligned} f_{yz^k}^1(h(z), z)\big|_{z=0} = {} & [C_k^0(F_{yz^k}^1(h(z), z)\cdot g(h(z), z) + F^1(h(z), z)\cdot g_{yz^k}(h(z), z)) + \\ & + C_k^1(F_{yz^{k-1}}^1(h(z), z)\cdot g_z(h(z), z) + F_z^1(h(z), z)\cdot g_{yz^{k-1}}(h(z), z)) + \cdots + \\ & + C_k^{k-1}(F_{yz}^1(h(z), z)\cdot g_{z^{k-1}}(h(z), z) + F_{z^{k-1}}(h(z), z)\cdot g_{yz}(h(z), z)) + \\ & + C_k^k(F_y^1(h(z), z)\cdot g_{z^k}(h(z), z) + F_{z^k}(h(z), z)\cdot g_y(h(z), z))]\big|_{z=0} \end{aligned}$$

이다. 여기서 $k = 1, 2, \cdots, 2n-1, 2n$이다. 그리고

$$\begin{aligned} f_{z^{k+1}}^2(h(z), z)\big|_{z=0} = {} & [C_{k+1}^0 F_{z^{k+1}}^2(h(z), z)\cdot g(h(z), z) + C_{k+1}^1 F_{z^k}^2(h(z), z)\cdot g_z(h(z), z) + \cdots + \\ & + C_{k+1}^k F_z^2(h(z), z)\cdot g_{z^k}(h(z), z) + C_{k+1}^{k+1} F^2(h(z), z) g_{z^{k+1}}(h(z), z)]\big|_{z=0} \end{aligned}$$

이다. 보조정리의 조건 1)−3)과 정리의 조건 1)−4)에 의하여 $k = 0, 1, \cdots, 2n-2$일 때

$$f_{yz^k}^1(h(0), 0) = 0$$

$$f_{yz^{2n-1}}^1(h(0), 0) = F_{z^{2n-1}}^1(0, 0) g_y(0, 0) \neq 0$$

이고 $k = 0, 1, \cdots, 2n-1$일 때

$$f_{z^k}^1(h(0), 0) = 0$$

$$f_{z^{2n}}^1(h(0), 0) = F^2(0, 0) g_{z^{2n}}(0, 0) \neq 0$$

이라는 사실과 식 (3)을 고려하면

$$\lambda_2(h(0), 0) = 1$$

$$\frac{d}{dz}\lambda_2(h(0),\,0)=0$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^{2n-2}}{dz^{2n-2}}\lambda_2(h(0),\,0)=0$$

$$\frac{d^{2n-1}}{dz^{2n-1}}\lambda_2(h(0),\,0)=f^1_{yz^{2n-1}}(h(0),\,0)+f^2_{z^{2nm}}(h(0),\,0)=$$

$$=F^1_{z^{2n-1}}(0,\,0)g_y(0,\,0)+F^2(0,\,0)g_{z^{2n}}(0,\,0)\neq 0$$

이다.

이제 $\sigma:=\mathrm{sign}[F^1_{z^{2n-1}}(0,\,0)\cdot g_y(0,\,0)+F^2(0,\,0)\cdot g_{z^{2n}}(0,\,0)]$이라고 하자.

$\sigma=-1$이면 $\lambda_2(h(z),\,z)$는 $z=0$근방에서 감소하고 $\lambda_2(h(0),\,0)=1$이므로 $z\in(-\delta,\,0)$에서 $\lambda_2(h(z),\,z)>1$ 즉 부동점 $(h(z),\,z)$는 불안정중립점이고 $z\in(0,\,\delta)$에서 $\lambda_2(h(z),\,z)<1$ 즉 부동점 $(h(z),\,z)$는 안정중립점이다. $\sigma=1$이면 $\lambda_2(h(z),\,z)$는 $z=0$근방에서 증가하므로 우의 경우와 반대로 된다.(증명끝)

실례 1 $f:(y,\ z)\mapsto(y+y^2-yz^4+z^3y-z^7,\,z+y-z^4)$은 $(0,\,0)$근방에서 안장마디분지형거동을 한다.(그림 1)

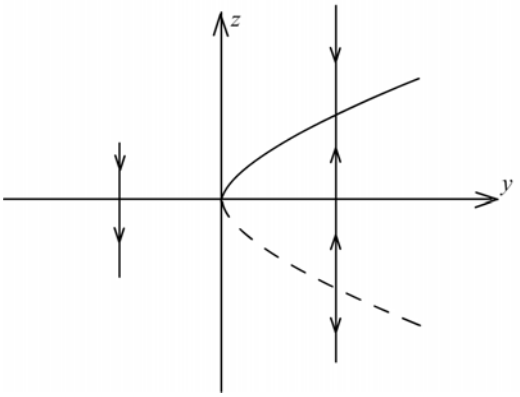

그림 1. 안장마디분지형거동(실례 1)

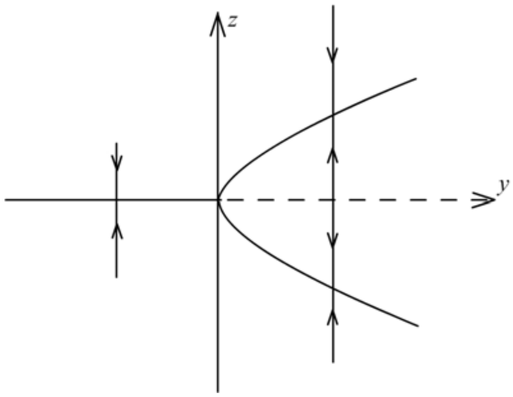

그림 2. 쇠스랑분지형거동(실례 2)

정리 2 $g:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^1$이 있어서 보조정리의 조건을 만족시키고 $C^r(r\geq 1)$급함수 $F^1,\ F^2:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^1$이 있어서 다음의 조건을 만족시킨다고 하자.

1) $F^1(y,\ 0)=0,\ F^2(y,\ 0)=0$

2) $F^1_z(0,\ 0)=F^1_{z^2}(0,\ 0)=\cdots=F^1_{z^{2n-1}}(0,\ 0)=0$

3) $F^2_z(y,\ 0)\neq 0$

4) $F^1_y(y,\ 0)=0$

이때 $\delta>0$과 식 (1)의 2개의 부동점곡선 $(y,0)$ 및 $(y(z),\ z)$, $z\in(-\delta,\ \delta)$가 존재하여 $\sigma=1$일 때 부동점곡선 $z=0$우의 점들은 $y\in(-\varepsilon,\ 0)$에서 안정하고 $y\in(0,\ \varepsilon)$에서 불안정하며 부동점곡선 $y=y(z)$우의 점들은 안정하다. $\sigma=-1$일 때의 안정성은 각각 반대로 된다. 여기서 $\sigma=\mathrm{sign}[F^2_z(0,\ 0)g_{z^{2n-1}}(0,\ 0)]$이다.

증명 증명은 정리 1과 류사하다.(증명끝)

실례 2

$$f:(y,\ z)\mapsto (y+zy^4-z^3y^4+z^4y-z^6,\ z+z^2y-z^4+y^2z-yz^3)$$

은 $(0, 0)$ 근방에서 쇠스랑분지형거동을 한다.(그림 2)

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보(자연과학), 53, 3, 22, 주체96(2007).

[2] **김일성**종합대학학보(자연과학), 53, 2, 14, 주체96(2007).

[3] **김일성**종합대학학보(자연과학), 63, 2, 12, 주체106(2017).

[4] 김상문 등; 조선민주주의인민공화국 과학원통보, 6, 8, 주체103(2014).

[5] 김상문 등; 수학, 1, 6, 주체101(2012).

[6] 리청해 등; 조선민주주의인민공화국 과학원통보, 1, 19, 주체106(2017).

[7] B. Fiedler et a1.; ICM., 3, 305, 2002.

[8] F. Balibrea et a1.; Nonlinear Analysis, 52, 405, 2003.

[9] S. Liebscher; Bifurcation without parameters, Springer, 109～142, 2015.

주체106(2017)년 12월 5일 원고접수

Behavior of Saddle-node and Pitch-fork Bifurcations of Discrete Dynamical Systems in Plane

Kim Sang Mun, Ri Chon Nam

We consider the behavior of orbits of some discrete dynamical systems in plane by using high order partial derivatives with respect to one variable.

We study the sufficient conditions for the existence of saddle-node and pitch-fork bifurcations in the given systems.

Key words: dynamical system, discrete dynamical system, bifurcation