김일성종합대학학보 JOURNAL OF KIM IL SUNG UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체105(2016)년 제62권 제12호 Vol. 62 No. 12 JUCHE105(2016).

선형변결수캐푸터분수계미분방정식의 초기값문제풀이의 유일존재성

박 철 우

경애하는 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《과학기술강국은 사회주의강국건설에서 오늘 우리가 선차적으로 점령하여야 할 중요한 목표입니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 38페지)

초기값문제풀이에 관한 연구들에서는 주로 상결수선형분수계미분방정식이 많이 연구되고 변결수에 대해서는 특수한 형태의 방정식에 대하여 극히 부분적으로 연구되였다.[1－3]

또한 리만－류빌분수계도함수를 가진 초기값문제들은 보다 광범히 연구되였지만 캐푸터분수계도함수를 포함하는 초기값문제들에 대하여서는 충분히 연구되지 못하였다.

론문에서는 캐푸터의미에서 복소수계도함수를 가진 선형변결수캐푸터분수계미분방정식의 초기값문제와 볼테라형적분방정식의 동등성 및 풀이의 유일존재성을 제기한다.

$\alpha\in\boldsymbol{C}$ $(\mathrm{Re}\alpha>0)$ 계리만－류빌분수적분 $I_{a+}^{\alpha}f$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$(I_{a+}^{\alpha}f)(x):=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\quad (x>a,\ \mathrm{Re}\alpha>0)$$

여기서 $\mathrm{Re}\alpha$ 는 복소수 α 의 실수부이며 $(x-t)^{1-\alpha}=e^{(1-\alpha)\ln(x-t)}$ 을 의미한다.

이 적분을 리만－류빌의 의미에서 왼쪽분수계적분이라고 부른다.

$\alpha=n\in\boldsymbol{N}$ 일 때 우의 정의는 다음과 같은 n 중반복적분과 일치한다.

$$(I_{a+}^{n}f)(x)=\int_a^x dt_1\int_a^{t_1}dt_2\cdots\int_a^{t_{n-1}}f(t_n)dt_n=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x(x-t)^{n-1}f(t)dt\quad (n\in\boldsymbol{N})$$

$\alpha\in\boldsymbol{C}$ $(\mathrm{Re}\alpha\ge 0)$ 계리만－류빌분수도함수 $D_{a+}^{\alpha}y$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x):=\left(\frac{d}{dx}\right)^n(I_{a+}^{\alpha}y)(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\int_a^x\frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\quad (n=[\mathrm{Re}\alpha]+1,\ x>a)$$

여기서 $[\mathrm{Re}\alpha]$ 는 $\mathrm{Re}\alpha$ 의 옹근수부를 의미한다.

$\alpha=n\in\boldsymbol{Z},\ n>0$ 일 때 $(D_{a+}^{n}y)(x)=y^{(n)}(x)$ 이고 $y^{(n)}(x)$ 는 $y(x)$ 의 보통 n 계도함수이다.

만일 $0<\mathrm{Re}\alpha<1$ 이면 $(D_{a+}^{\alpha}y)(x)=\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x\frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha-[\mathrm{Re}\alpha]}}$ $(x>a)$ 로 정의한다.

캐푸터의미에서 왼쪽분수계도함수 ${}^cD_{a+}^{\alpha}y$ 는 다음과 같다.

$$({}^cD_{a+}^{\alpha}y)(x)=\left(D_{a+}^{\alpha}\left[y(t)-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{y^{(j)}(a)}{j!}(t-a)^j\right]\right)(x)\ (\alpha\in\boldsymbol{C},\ \mathrm{Re}\alpha>0),\ n=\begin{cases}[\mathrm{Re}\alpha]+1, & \alpha\notin\boldsymbol{N}\\ \alpha, & \alpha\in\boldsymbol{N}\end{cases}$$

다음과 같은 복소수선형변결수분수계미분방정식의 초기값문제를 생각하자.

$$({}^c D_{a+}^{\alpha} y)(x) + \sum_{j=0}^{l} a_j(x)({}^c D_{a+}^{\alpha_j} y)(x) = g(x) \tag{1}$$

$$y^{(k)}(a+) = b_k,\ k = 0, \cdots,\ n-1 \tag{2}$$

방정식 (1)에서 분수계도함수들은 우에서 정의된 캐푸터의미에서의 도함수들이고 함수 $a_j(x),\ g(x)$ 는 $a_j(x) \in \boldsymbol{C}[a,\ b]$ $(j = 0, \cdots, l),\ g(x) \in \boldsymbol{C}[a,\ b]$ 인 실변수 t 의 복소수값함수이며 $b_k \in \boldsymbol{C},\ k = 0, \cdots,\ n-1$ 이다. 여기서 n 은 $\alpha \in \boldsymbol{C}\,(\mathrm{Re}\alpha > 0)$ 에 대하여 $n := \begin{cases} [\mathrm{Re}\alpha] + 1, & \alpha \notin \boldsymbol{N} \\ \alpha, & \alpha \in \boldsymbol{N} \end{cases}$ 으로 정의되는 자연수이다.

$l \in \boldsymbol{N}$ 이고 $\alpha_j \in \boldsymbol{C}$ $(j = 1, \cdots,\ l)$ 들은 다음의 조건을 만족시킨다고 가정하자.

$$0 = \alpha_0 < \mathrm{Re}\alpha_1 < \cdots < \mathrm{Re}\alpha_l < \mathrm{Re}\alpha \tag{3}$$

정의 $\alpha \in \boldsymbol{C}\,(n-1 < \mathrm{Re}\alpha < n),\ n = [\mathrm{Re}\alpha] + 1$ 에 대하여 함수공간 $\boldsymbol{C}^{\alpha,\ n-1}[a,\ b]$ 를

$$\boldsymbol{C}^{\alpha,\ n-1}[a,\ b] := \{y \in \boldsymbol{C}^{n-1}[a,\ b],\ {}^c D^{\alpha} y \in \boldsymbol{C}[a,\ b]\}$$

와 같이 정의한다.

식 (3)을 만족시키는 $\alpha_j \in \boldsymbol{C}$ $(j = 1, \cdots,\ l)$ 에 대하여 $n_j := \begin{cases} [\mathrm{Re}\alpha_j] + 1, & \alpha_j \notin \boldsymbol{N} \\ \alpha_j, & \alpha_j \in \boldsymbol{N} \end{cases}$ 으로 정의되는 자연수 n_j $(j = 1, \cdots,\ l)$ 와 $n_0 = 0$ 을 생각한다.

미지함수의 변환

$$({}^c D_{a+}^{\alpha} y)(x) = \Phi(x) \tag{4}$$

와 다음의 적분방정식을 생각하자.

$$\Phi(x) = g(x) - \sum_{j=0}^{l} a_j(x) \sum_{k=0}^{n-1} b_k H(k - n_j) \frac{(x-a)^{k-\alpha_j}}{\Gamma(k+1-\alpha_j)} - \sum_{j=0}^{l} a_j(x)(I_{a+}^{\alpha-\alpha_j}\Phi)(x) \tag{5}$$

여기서 $H(k)$ 는 $H(k) = \begin{cases} 1, & k \ge 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$ 인 변수 $k \in Z,\ 0 < k < n-1$ 의 함수(헤비사이드형)이다.

정리 1 $y(x) \in \boldsymbol{C}^{\alpha,\ n-1}[a,\ b]$ 가 초기값문제 (1), (2)를 만족시키기 위해서는 변환 (4)에 의하여 $\Phi(x) \in \boldsymbol{C}[a,\ b]$ 가 적분방정식 (5)를 만족시킬것이 필요하고 충분하다.

증명(필요성) $y(x) \in \boldsymbol{C}^{\alpha,\ n-1}[a,\ b]$ 가 초기값문제 (1), (2)를 만족시키면 $y(x) \in \boldsymbol{C}^{n-1}[a,\ b]$, $({}^c D_{a+}^{\alpha} y)(x) \in \boldsymbol{C}[a,\ b]$ 이고 식 (3)에 의하여 $({}^c D_{a+}^{\alpha_j} y)(x) \in \boldsymbol{C}[a,\ b]$ 이다.

$a_j(x) \in \boldsymbol{C}[a,\ b]$ $(j = 0, \cdots, l),\ g(x) \in \boldsymbol{C}[a,\ b]$ 이므로 $g(x) - \sum_{j=0}^{l} a_j(x)({}^c D_{a+}^{\alpha_j} y)(x) \in \boldsymbol{C}[a,\ b]$ 이고

$$({}^c D_{a+}^{\alpha} y)(x) \equiv g(x) - \sum_{j=0}^{l} a_j(x)({}^c D_{a+}^{\alpha_j} y)(x),\ \ x \in [a,\ b]. \tag{6}$$

초기값문제 (4), (2)에 $f(x,\ y) = \Phi(x)$ 일 때 선행연구[3]의 결과를 적용하면

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \frac{(x-a)^k}{k!} + I_{a+}^{\alpha}\Phi(x). \tag{7}$$

식 (7)의 량변에 ${}^{c}D_{a+}^{\alpha_j}$ 를 실시하면 $({}^{c}D_{a+}^{\alpha_j}y)(x)=\sum_{k=0}^{n-1}b_k\,{}^{c}D_{a+}^{\alpha_j}\frac{(x-a)^k}{k!}+I_{a+}^{\alpha-\alpha_j}\Phi(x)$ 를 얻는다.

$${}^{c}D_{a+}^{\alpha_j}\frac{(x-a)^k}{k!}=D_{a+}^{\alpha_j}\left(\frac{(x-a)^k}{k!}-\sum_{i=0}^{n_j-1}\frac{(x-a)^{k-i}}{(k-i)!}\bigg|_{x=a}\frac{(x-a)^i}{i!}\right)=H(k-n_j)\frac{(x-a)^{k-\alpha_j}}{\Gamma(k+1-\alpha_j)},\quad j=\overline{1,\ l},\ k=\overline{0,\ n-1}$$

이므로

$$({}^{c}D_{a+}^{\alpha_j}y)(x)=\sum_{k=0}^{n-1}b_kH(k-n_j)\frac{(x-a)^{k-\alpha_j}}{\Gamma(k+1-\alpha_j)}+I_{a+}^{\alpha-\alpha_j}\Phi(x). \tag{8}$$

식 (4), (8)을 식 (6)에 대입하면 적분방정식 (5)를 얻는다.

(충분성) $\Phi(x)\in C[a,\ b]$가 적분방정식 (5)를 만족시킨다고 하자.

$\Phi(x)=g(x)-\sum_{j=0}^{l}a_j(x)\left[\sum_{k=0}^{n-1}b_kH(k-n_j)\frac{(x-a)^{k-n_j}}{\Gamma(k+1-n_j)}+(I_{a+}^{\alpha-\alpha_j}\Phi)(x)\right]$에 식 (4), (8)을 대입하면 방정식 (1)을 얻는다. 식 (7)로부터 $y(x)$가 초기조건 (2)를 만족시킨다는것은 분명하다.

또한 식 (7)로부터 $y(x)\in \boldsymbol{C}^{n-1}[a,\ b]$이고 식 (4)로부터 ${}^{c}D_{a+}^{\alpha}y(x)\in \boldsymbol{C}[a,\ b]$는 분명하다.

따라서 $y(x)\in \boldsymbol{C}^{\alpha,\ n-1}[a,\ b]$이다.(증명끝)

정리 2 초기값문제 (1), (2)의 풀이 $y(x)\in \boldsymbol{C}^{\alpha,\ n-1}[a,\ b]$는 유일존재한다.

참고문헌

[1] **김일성**종합대학학보(자연과학), 55, 12, 3, 주체98(2009).

[2] Kim Myong Ha et al.; Fract. Calc. Appl. Anal., 17, 1, 79, 2014.

[3] A. A. Kilbas et al.; Fract. Calc. Appl. Anal., 7, 3, 297, 2004.

주체105(2016)년 8월 5일 원고접수

Existence and Uniqueness of the Solution to the Initial Value Problem for Linear Caputo Fractional Differential Equation with Variable Coefficients

Pak Chol U

We propose the initial value problems for linear fractional differential equations with variable coefficients with derivatives of complex order in the meaning of Caputo. We prove the equivalence of the initial value problem and the Volterra integral equation and the existence and uniqueness of the solution.

Key word: linear Caputo fractional differential equation with variable coefficient