김일성종합대학학보 주체110(2021)년
수 학 제67권 제1호

# H－계획을 리용한 2수준최량겹친초포화계획구성방법

김철호, 김성혁

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《과학과 기술이 매우 빨리 발전하고있는 오늘의 현실은 기초과학을 발전시킬것을 더욱 절실하게 요구하고있습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제11권 138페지)

우리는 실험인자들이 많은 경우 1차회귀모형을 추정하기 위한 적은 실험회수를 가지는 초포화계획의 한가지 구성방법에 대하여 연구하였다.

선행연구[3, 4]에서는 두수준초포화계획의 $E(S^2)$ －최량성기준을 만들고 직교계획과 BIB－계획 등을 리용하여 $E(S^2)$－최량초포화계획들을 구성하는 방법과 초포화계획에 행을 더 첨가하여 최량초포화계획을 구성하는 방법들을 제기하였다.

또한 선행연구[1, 2]에서는 겹친계획의 구성방법으로 1차회귀모형에 대한 2수준초포화계획구성방법을 제기하였으며 선행연구[3]에서는 플랙케트－부맨계획을 리용하여 겹친초포화계획을 구성하고 그것이 유효성이 높은 2수준초포화계획으로 된다는것을 밝혔다.

론문에서는 H－계획을 리용하여 정보행렬의 최대최소성의 관점에서 최량겹친초포화계획을 구성하는 방법을 연구하였다.

이제 1차회귀모형

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^{m} \beta_i x_i + \varepsilon \tag{1}$$

또는

$$Y = \beta_0 I + \beta X + \varepsilon \tag{2}$$

을 생각하자. 여기서 $\beta_0$ 은 미지상수이고 $I$ 는 모든 원소가 1인 $n \times 1$ 형벡토르이며 $\beta = (\beta_1\ \beta_2 \cdots \beta_m)^{\mathrm{T}}$ 는 $n \times 1$ 형미지결수벡토르, $X$ 는 $\beta$ 에 대응하는 $n \times m$ 형계획행렬이다. 그리고 $\varepsilon = (\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \cdots\ \varepsilon_n)^{\mathrm{T}}$ 는 평균이 0이고 분산이 $\sigma^2$ 인 정규분포에 따르는 우연오차이다.

이때 모형 (1), (2)에 대한 미지결수 $(\beta_0,\ \beta)$ 를 추정하기 위한 초포화계획을 구성하자.

정의 1[1] 행렬 $B$ 를 원소가 $\pm 1$ 인 $2n \le m$ 을 만족시키는 $n \times m$ 형행렬이라고 할 때 겹친행렬

$$X = \begin{pmatrix} B \\ -B \end{pmatrix} \tag{3}$$

를 모형 (1) 또는 (2)에 대한 기초계획 $B$ 에 의한 겹친초포화계획이라고 부른다.

구성방법에 따라 계획 (3)은 주어진 모형 (1)에 대한 2수준초포화계획이다.

정의 2[3] 임의의 초포화계획에 대응하는 정보행렬 $X^{\mathrm{T}} X = (S_{ij})$ $(i,\ j = 1, \cdots, m)$ 에 대하여

$$E(S^2) = \sum_{i<j} \frac{S_{ij}^2}{C_m^2}$$

이 최소인 계획을 모형 (1)에 대한 $E(S^2)$ －최량초포화계획이라고 부른다.

정의 3[4] 초포화계획 $X$ 에 대하여 $UE_X(S^2)=\frac{1}{C_{m+1}^2}\left[\sum_{i=1}^{m}(1^{\mathrm{T}}x_i)^2+\sum_{1\le i<j\le m}(x_i^{\mathrm{T}}x_j)^2\right]$ 이 최소인 계획을 모형 (1)에 대한 $UE(S^2)$ －최량초포화계획이라고 부른다.

보조정리[2] 수준균형이 보장되는 초포화계획들의 모임우에서 $E(S^2)$ －최량성과 $UE(S^2)$ －최량성은 동등하지만 수준균형이 보장되지 않는 초포화계획들의 모임우에서는 동등하지 않다.

정의 4[1] 초포화계획 (3)에 대한 정보행렬 $X^{\mathrm{T}}X=(S_{ij}),\ i,\ j=1,2,\cdots,m$ 에 대하여 $S_{\max}=\max_{i<j}|S_{ij}|,\ \ f_{S_{\max}}=\sum_{i<j}I_{S_{\max}}(|S_{ij}|)$ 가 최소로 될 때 $X$ 를 최대최소성을 가지는 겹친초포화계획이라고 부른다. 여기서 $I_a(b)$ 는 $a=b$ 이면 1이고 아니면 0인 정의함수이고 $S_{ij}$ 는 계획 $X$ 의 $i$ 째 렬과 $j$ 째 렬사이의 스칼라적, $S_{\max}$ 는 정보행렬의 비대각선원소들중에서 최대값, $f_{S_{\max}}$ 는 정보행렬의 비대각선원소들중 최대값에 대응하는 렬들의 쌍의 총개수이다.

정의 5 초포화계획 (3)에 대하여 다음의 조건들이 만족된다고 하자.

① 계획 $X$ 는 가상렬을 포함하지 않는다.

② 계획 $X$ 는 최대최소성을 가진다.

이때 계획 (3)을 모형 (1)에 대한 2수준최량겹친초포화계획이라고 부른다.

우리는 H－계획을 리용하여 모형 (1)에 대한 2수준최량겹친초포화계획을 구성하는 방법을 연구한다.

정리 1 계획 (3)이 모형 (1)에 대한 2수준최량겹친초포화계획이기 위해서는 기초계획 $B$ 가 가상렬을 포함하지 않는 최대최소성을 가진 초포화계획일것이 필요하고 충분하다.

증명 계획 (3)의 구성방법에 따라 정보행렬은 $X^{\mathrm{T}}X=(B^{\mathrm{T}},\ -B^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix}B\\-B\end{pmatrix}=2B^{\mathrm{T}}B$ 이므로 계획 $X$ 의 가상렬존재성과 최대최소성문제는 기초계획 $B$ 의 가상렬존재성과 최대최소성문제에 따라 결정된다.(증명끝)

정리 1의 결과로부터 모형 (1)에 대응하는 2수준최량겹친초포화계획을 구성하자면 가상렬이 포함되지 않으면서 최대최소성을 만족시키는 기초계획을 구성하면 충분하다는 것을 알수 있다. 이제 $D$ 를 $m=2^k$ 개의 행과 $n$ 개의 인자를 가지는 H－계획의 부분인자계획이라고 하면 $D$ 는 직교하는 $n$ 개의 렬을 가진 행렬이다.

이때 기초계획을 $B=D^{\mathrm{T}}$ 로 놓으면 다음의 결과가 얻어진다.

정리 2 계획 $B=D^{\mathrm{T}}$ 는 $UE(S^2)$ －최량초포화계획이다.

정리 3 $D$ 를 $m=2^k$ 개의 행과 $n$ 개의 인자렬을 가지는 H－계획의 부분인자계획이라고 할 때 $k$ 개의 독립인 렬을 가진 이 계획의 정의식이 홀수길이를 가지면 계획행렬 $D$ 는 가상행을 가지지 않는다.

정리 2, 3에 의하여 기초계획 $B=D^{\mathrm{T}}$ 는 가상렬을 가지지 않는 $n$ 개 행을 가진 $UE(S^2)$ －최량초포화계획이다.

따라서 H－계획의 부분계획으로 구성된 $B$ 에 의한 겹친계획 (3)은 가상렬을 포함하지 않는 $m=2^k$ 개 인자와 $N=2n$ 개의 행을 가지는 $UE(S^2)$ －최량초포화계획이다.

이제 $B=D^{\mathrm{T}}$에 의한 겹친계획 $X$가 최대최소성의 의미에서 최량계획을 구성하는 방법을 보기 위하여 다음의 계산과정을 진행한다.

① $k=3, 4, 5$인 경우 $2n\le m=2^k$을 만족시키는 모든 $n$들을 찾는다.

② 매개 $n$에 대하여 홀수길이를 가지는 정의식에 의하여 행렬 $D$들을 구성한다.

③ 매개 $n$에 따르는 행렬 $D$를 시초계획으로 하는 겹친계획 (3)들을 구성한다.

④ 매개 $n$과 행렬 $D$에 의한 겹친계획 (3)에 의하여 얻어지는 정보행렬들을 리용하여 $S_{\max}$와 $f_{S_{\max}}$ 들을 계산하여 최소인 계획을 찾는다.

⑤ $k=6$인 경우에는 $n\le 14$인 모든 $n$에 대하여 행렬 $D$와 겹친행렬을 만들어 대응하는 정보행렬들을 리용하여 $S_{\max}$와 $f_{S_{\max}}$ 들을 계산하여 최소인 계획을 찾는다.

이때 얻어지는 겹친행렬들은 모형 (1)에 대한 2수준최량겹친초포화계획이다.

실례 $k=3$인 경우 $2n\le m=2^3=8$을 만족시키는 $n$은 4이다.

이때 $n=4$ 인 H－계획의 부분계획을 만드는 홀수길이를 가지는 정의식에 대응하는 발생식들은 $x_4=x_1x_2$, $x_4=x_1x_3$, $x_4=x_2x_3$ 이다.

이 발생식들에 의하여 만들어지는 부분계획들은 다음과 같다.

$$D_1=\begin{pmatrix} 1&1&1&1\\ 1&1&-1&-1\\ 1&-1&1&-1\\ 1&-1&-1&1\\ -1&1&1&1\\ -1&1&-1&-1\\ -1&-1&1&-1\\ -1&-1&-1&1 \end{pmatrix},\quad D_2=\begin{pmatrix} 1&1&1&1\\ 1&1&-1&1\\ 1&-1&1&-1\\ 1&-1&-1&-1\\ -1&1&1&-1\\ -1&1&-1&-1\\ -1&-1&1&1\\ -1&-1&-1&1 \end{pmatrix},\quad D_3=\begin{pmatrix} 1&1&1&1\\ 1&1&-1&-1\\ 1&-1&1&1\\ 1&-1&-1&-1\\ -1&1&1&-1\\ -1&1&-1&1\\ -1&-1&1&-1\\ -1&-1&-1&1 \end{pmatrix}$$

이 행렬들에 기초하여 겹친행렬을 만들면 다음과 같다.

$$X_1=\begin{pmatrix} D_1^{\mathrm{T}}\\ -D_1^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1&1&1&1&-1&-1&-1&-1\\ 1&1&-1&-1&1&1&-1&-1\\ 1&-1&1&-1&1&-1&1&-1\\ 1&-1&-1&1&1&-1&-1&1\\ -1&-1&-1&-1&1&1&1&1\\ -1&-1&1&1&-1&-1&1&1\\ -1&1&-1&1&-1&1&-1&1\\ -1&1&1&-1&-1&1&1&-1 \end{pmatrix},\quad X_2=\begin{pmatrix} D_2^{\mathrm{T}}\\ -D_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1&1&1&1&-1&-1&-1&-1\\ 1&1&-1&-1&1&1&-1&-1\\ 1&-1&1&-1&1&-1&1&-1\\ 1&1&-1&-1&-1&-1&1&1\\ -1&-1&-1&-1&1&1&1&1\\ -1&-1&1&1&-1&-1&1&1\\ -1&1&-1&1&-1&1&-1&1\\ -1&-1&1&1&1&1&-1&-1 \end{pmatrix}$$

$$X_3=\begin{pmatrix} D_3^{\mathrm{T}}\\ -D_3^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1&1&1&1&-1&-1&-1&-1\\ 1&1&-1&-1&1&1&-1&-1\\ 1&-1&1&-1&1&-1&1&-1\\ 1&-1&1&-1&-1&1&-1&1\\ -1&-1&-1&-1&1&1&1&1\\ -1&-1&1&1&-1&-1&1&1\\ -1&1&-1&1&-1&1&-1&1\\ -1&1&-1&1&1&-1&1&-1 \end{pmatrix}$$

계획행렬들로부터 독립변수행렬 $\tilde{X}=(1:X)$를 리용하여 정보행렬 $\tilde{X}^{\mathrm{T}}\tilde{X}$의 상반행렬

들을 구하고 $S_{\max}$ 와 $f_{S_{\max}}$ 들을 계산하면 다음과 같다. 여기서 1은 모든 원소가 1인 $n\times 1$ 형벡토르이다.

$$\tilde{X}_1^{\mathrm{T}}\tilde{X}_1=\begin{pmatrix} 8&0&0&0&0&0&0&0&0\\ &8&0&0&0&4&-4&-4&-4\\ &&8&0&0&-4&4&-4&-4\\ &&&8&0&-4&-4&4&-4\\ &&&&8&-4&-4&-4&4\\ &&&&&8&0&0&0\\ &&&&&&8&0&0\\ &&&&&&&8&0\\ &&&&&&&&8 \end{pmatrix},\ S_{\max}(X_1)=4,\ f_{S_{\max}}(X_1)=16$$

$$\tilde{X}_2^{\mathrm{T}}\tilde{X}_2=\begin{pmatrix} 8&0&0&0&0&0&0&0&0\\ &8&4&0&-4&0&-4&0&-4\\ &&8&-4&0&-4&0&4&0\\ &&&8&4&0&-4&0&-4\\ &&&&8&-4&0&-4&0\\ &&&&&8&4&0&-4\\ &&&&&&8&-4&0\\ &&&&&&&8&4\\ &&&&&&&&8 \end{pmatrix},\ S_{\max}(X_2)=4,\ f_{S_{\max}}(X_2)=16$$

$$\tilde{X}_3^{\mathrm{T}}\tilde{X}_3=\begin{pmatrix} 8&0&0&0&0&0&0&0&0\\ &8&0&4&-4&4&0&-4&-4\\ &&8&-4&4&0&0&-4&-4\\ &&&8&0&-4&-4&0&0\\ &&&&8&-4&-4&0&0\\ &&&&&8&0&4&-4\\ &&&&&&8&-4&4\\ &&&&&&&8&0\\ &&&&&&&&8 \end{pmatrix},\ S_{\max}(X_2)=4,\ f_{S_{\max}}(X_3)=17$$

따라서 $k=3$인 경우 2수준최량겹친초포화계획은 $X_1$ 또는 $X_2$이다.

다음의 표는 $k=3,\ 4,\ 5,\ 6$ 인 경우 H－계획의 부분계획들에 의한 2수준최량겹친초포화계획구성을 보여준다.

표. H－계획의 부분계획들에 의한 2수준최량겹친초포화계획

| $k$ | $P$ | $n$ | 발생식 | $m$ | $S_{\max}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 4 | $x_4=x_1x_2$ | 8 | 4 |
| | | | $x_4=x_2x_3$ | | |
| 4 | 1 | 5 | $x_5=x_3x_4$ | 16 | 6 |
| | 2 | 6 | $x_6=x_1x_2$ | 16 | 4 |
| | 3 | 7 | $x_7=x_2x_4$ | 16 | 6 |
| | 4 | 8 | $x_8=x_1x_4$ | 16 | 8 |

표계속

| $k$ | $P$ | $n$ | 발생식 | $m$ | $S_{max}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 1 | 6 | $x_6 = x_4x_5$ | 32 | 8 |
| | 2 | 7 | $x_7 = x_1x_2x_4x_5$ | 32 | 10 |
| | 3 | 8 | $x_8 = x_3x_5$ | 32 | 8 |
| | 4 | 9 | $x_9 = x_4x_2$ | 32 | 10 |
| | 5 | 10 | $x_{10} = x_1x_3$ | 32 | 8 |
| | 6 | 11 | $x_{11} = x_2x_5$ | 32 | 10 |
| | 7 | 12 | $x_{12} = x_1x_5$ | 32 | 8 |
| | 8 | 13 | $x_{13} = x_3x_4$ | 32 | 10 |
| | 9 | 14 | $x_{14} = x_1x_2$ | 32 | 8 |
| | 10 | 15 | $x_{15} = x_2x_3x_4x_5$ | 32 | 10 |
| 6 | 1 | 7 | $x_7 = x_6x_5$ | 64 | 10 |
| | 2 | 8 | $x_8 = x_1x_2x_3x_4$ | 64 | 8 |
| | 3 | 7 | $x_7 = x_6x_5$ | 64 | 8 |
| | | 8 | $x_8 = x_2x_3$ | | |
| | | 9 | $x_9 = x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ | | |
| | 4 | 10 | $x_{10} = x_4x_6$ | 64 | 12 |
| | 5 | 11 | $x_{11} = x_1x_3x_4x_5$ | 64 | 10 |
| | 6 | 12 | $x_{12} = x_1x_2$ | 64 | 8 |

## 참 고 문 헌


[1] E. Anna et al.; Technometrics, 59, 1, 48, 2017.
[2] N. T. Diamond et al.; Australian Journal of Statistics, 33, 159, 1991.
[3] C. Y. Dasl; J. Statist. Plann. Inference, 140, 1398, 2010.
[4] K. Chatterjee et al.; J. Statist. Plann. Inference, 138, 3749, 2008.


주체109(2020)년 9월 5일 원고접수

## A Construction Method of Two-level Optimal Foldover Supersaturated Design Using H-design

*Kim Chol Ho, Kim Song Hyok*

We study the construction method of two-level optimal foldover supersaturated design for one-order regression model using H design.

Keywords: foldover design, optimal supersaturated design