김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제2호

섭동이 작용하는 분수계련립미분방정식의 령풀이의 점근안정성연구

김철, 송초화

론문에서는 섭동이 작용하는 분수계련립미분방정식의 령풀이의 점근안정성을 연구한다.

풀이의 안정성은 미분방정식의 풀이를 구하지 않고 그 성질을 고찰할수 있는것으로 하여 상미분방정식에서뿐아니라 분수계미분방정식에서도 매우 중요하게 제기되고있다. 분수계미분방정식은 보통의 미분방정식보다 많은 현상들을 더 잘 설명하는것으로 하여 광범히 연구되고있으며 여기서 방정식의 풀이에 대한 질론적해석은 특별히 중요한 문제로 제기된다.

최근에 분수계미분방정식에서 풀이의 안정성은 광범하게 연구되고있다.[2, 5−9]

선행연구[9]에서는 분수계미분방정식 $D^{\alpha}x(t)=f(x(t))$ 에 대하여 행렬 A 의 고유값의 편각의 절대값이 모두 $\alpha\pi/2$ 보다 크면 평형점은 안정하고 적어도 하나의 절대값이 $\alpha\pi/2$ 보다 작으면 불안정하다는것을 밝혔다. 여기서 $A=(a_{ij})_{i,\ j=\overline{1,\ n}}$ 이고 $a_{ij}\ (i,\ j=\overline{1,\ n})$ 들은 평형점에서 평가되는 오른변의 야꼬비행렬의 원소들이다.

론문에서는 다음의 분수계련립미분방정식

$$^{c}D^{\alpha}x(t)=Ax(t)+Q(t)x(t) \tag{1}$$

$$^{c}D^{\alpha}x(t)=Ax(t)+f(t,\ x(t)) \tag{2}$$

의 령풀이가 안정하기 위한 조건을 고찰한다. 여기서 $^{c}D^{\alpha}$ 는 캐푸토분수도함수이고 $t\in(0,\ +\infty)$, $x(t)\in\mathbf{R}^{n}$, $1\le\alpha<2$ 이다.

선행연구[3]에서는 $\alpha=1$ 인 경우 A 의 고유값의 실수부가 모두 부수이고 $\int_{0}^{\infty}\|Q(s)\|ds$ 가 유한이면 식 (1)의 령풀이가 지수안정하다는것을 밝혔다. 선행연구[5]에서는 $1<\alpha<2$ 일 때 식 (1)과 (2)의 령풀이가 점근안정하기 위한 조건을 구하였다.

선행연구[6]에서는 $0<\alpha<2$ 일 때 $^{c}D^{\alpha}x(t)=Ax(t)+f(x(t))$ 의 령풀이가 점근안정하기 위한 조건을 구하였다.

론문에서는 행렬 A 의 고유값의 편각의 절대값이 모두 $\alpha\pi/2$ 보다 크다는 조건밑에서 $Q(t)$ 와 $f(t,\ x(t))$ 가 어떤 조건을 만족시킬 때 식 (1)과 (2)의 령풀이가 점근안정한가를 고찰하고 선행연구[5]에서 얻은 결과를 일반화하였다.

행렬지수함수와 비슷하게

$$E_{\alpha,\ \beta}(Az):=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^{k}z^{k}}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\ (\alpha>0,\ \beta>0,\ A=(a_{ij})_{n\times n},\ z\in\mathbf{C})$$

을 행렬미따크－레플레르함수[1]라고 부른다.

명제[8] n차행렬 A의 고유값들의 모임 $\sigma(A)$가 $\{\lambda\in\mathbf{C}\setminus\{0\}:|\arg(\lambda)|>\alpha\pi/2\}$에 포함된다고 하자. 이때 다음의 사실이 성립한다.

① $\lim\limits_{t\to\infty}\|E_{\alpha,\,1}(t^\alpha A)\|=0$ ② $\lim\limits_{t\to\infty}t\|E_{\alpha,\,2}(t^\alpha A)\|=0$ ③ $\int_0^\infty t^{\alpha-1}\|E_{\alpha,\,\alpha}(t^\alpha A)\|dt<\infty$

먼저 식 (1)의 령풀이가 점근안정하기 위한 조건들을 정식화해보자.

여기서 $Q(t):[0,\ \infty)\to\mathbf{R}^{n\times n}$는 련속인 행렬함수이다.

정리 1 행렬 A의 고유값모임 $\sigma(A)$가 $\{\lambda\in\mathbf{C}\setminus\{0\}:|\arg(\lambda)|>\alpha\pi/2\}$에 포함되고 $Q(t)$가

$$q:=\sup_{t\ge0}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}\|E_{\alpha,\,\alpha}((t-\tau)^\alpha A)Q(\tau)\|d\tau<1 \tag{3}$$

을 만족시키면 식 (1)의 령풀이는 점근안정하다.

증명 식 (1)의 령풀이가 점근안정하다는것은 $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0;\ \|x_0\|<\delta$일 때 $\|x(t:\,0,\ x_0)\|<\varepsilon$이고 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t:\,0,\ x_0)=0$이 성립한다는것이다.

우선 명제로부터

$$1<\sup_{t\ge0}[\|E_{\alpha,\,1}(t^\alpha A)\|+t\|E_{\alpha,2}(t^\alpha A)\|]<\infty$$

이므로 $\forall\varepsilon>0$에 대하여

$$\delta:=\frac{(1-q)\varepsilon}{\sup\limits_{t\ge0}[\|E_{\alpha,\,1}(t^\alpha A)\|+t\|E_{\alpha,2}(t^\alpha A)\|]}\in(0,\ \varepsilon)$$

으로 놓자. 한편 초기조건 $x_0=\begin{pmatrix}x(0)\\x'(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{01}\\x_{02}\end{pmatrix}$를 가진 식 (1)의 풀이는

$$x(t)=E_{\alpha,\,1}(t^\alpha A)x_{01}+tE_{\alpha,2}(t^\alpha A)x_{02}+\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha A)Q(\tau)x(\tau)d\tau \tag{4}$$

를 만족시킨다.[4] 이제 $\forall x_0\in\mathbf{R}^n$에 대하여 연산자 $T_{x_0}:C([0,\ \infty);\ \mathbf{R}^n)\to C([0,\ \infty);\ \mathbf{R}^n)$를

$$T_{x_0}\zeta(t)=E_{\alpha,1}(t^\alpha A)x_{01}+tE_{\alpha,2}(t^\alpha A)x_{02}+\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha A)Q(\tau)\zeta(\tau)d\tau$$

로 정의하면 넘기기 T_{x_0}의 부동점은 초기조건 x_0을 만족시키는 식 (1)의 풀이이다.

먼저 $\|x_0\|\le\delta$에 대하여 $\|x(t:\,0,\ x_0)\|<\varepsilon$임을 보자.

$$B_{C^\infty}(0,\ \varepsilon):=\{\zeta\in C([0,\ \infty);\ \mathbf{R}^n)\ :\|\zeta\|_\infty\le\varepsilon\}$$

으로 놓자. 여기서 $\|\zeta\|_\infty:=\sup\limits_{t\ge0}\|\zeta(t)\|<\infty$이다. 그러면 $\zeta(t)\in B_{C\infty}(0,\ \varepsilon)$에 대하여

$$\|T_{x_0}\zeta(t)\|\le\|E_{\alpha,1}(t^\alpha A)x_{01}\|+t\|E_{\alpha,2}(t^\alpha A)x_{02}\|+\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}\|E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha A)Q(\tau)\zeta(\tau)\|d\tau\le$$

$$\le\delta\sup_{t\ge0}[\|E_{\alpha,1}(t^\alpha A)\|+t\|E_{\alpha,2}(t^\alpha A)\|]+\varepsilon\,q\ \le\varepsilon$$

이고 따라서 $T_{x_0}(B_{C\infty}(0,\ \varepsilon)) \subset B_{C\infty}(0,\ \varepsilon)$ 이다. 또한 $\zeta(t),\ \zeta_1(t) \in B_{C\infty}(0,\ \varepsilon)$ 에 대하여

$$T_{x_0}\zeta(t) - T_{x_0}\zeta_1(t) = \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha A)Q(\tau)[\zeta(\tau)-\zeta_1(t)]d\tau$$

$$\| T_{x_0}\zeta(t) - T_{x_0}\zeta_1(t) \| \le \| \zeta - \zeta_1 \|_\infty \sup_{t\ge 0} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \| E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha A)Q(\tau) \| d\tau \le q \| \zeta - \zeta_1 \|_\infty$$

이다. 따라서 축소넘기기의 부동점정리에 의하여 연산자 T_{x_0} 은 $B_{C\infty}(0,\ \varepsilon)$ 공간에서 유일한 부동점을 가지는데 이것은 초기조건 $x(0) = x_0$ 을 만족시키는 식 (1)의 풀이이다. 결과 $\| x_0 \| \le \delta$ 에 대하여 $\| x(t:\ 0,\ x_0) \| < \varepsilon\ \ (t \ge 0)$ 이 성립한다.

또한 $\lim\limits_{t\to\infty} x(t:\ 0,\ x_0) = 0$ 이라는것을 증명하자.

식 (4)로부터

$$\| x(t) \| \le \| E_{\alpha,1}(t^\alpha A) \| x_{01} + t \| E_{\alpha,2}(t^\alpha A) \| x_{02} + \| x(t) \| \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \| E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha A)Q(\tau) \| d\tau$$

$$(1-q) \| x(t) \| \le \| E_{\alpha,1}(t^\alpha A) \| x_{01} + t \| E_{\alpha,2}(t^\alpha A) \| x_{02}$$

$$\| x(t) \| \le \frac{\| E_{\alpha,1}(t^\alpha A) \| + t \| E_{\alpha,2}(t^\alpha A) \|}{(1-q)} \| x_0 \|$$

이고 명제로부터 $\lim\limits_{t\to\infty}[\| E_{\alpha,1}(t^\alpha A) \| + t \| E_{\alpha,2}(t^\alpha A) \|] = 0$ 이므로 $\lim\limits_{t\to\infty} x(t:\ 0,\ x_0) = 0$ 이다. 따라서 식 (1)의 령풀이는 점근안정하다.(증명끝)

정리 2 행렬 A 의 고유값모임 $\sigma(A)$ 가 $\{\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\} : |\arg(\lambda)| > \alpha\pi/2\}$ 에 포함된다고 하자. 이때

$$\sup_{t\ge 0} \| Q(t) \| < m \tag{5}$$

이 성립하면 식 (1)의 령풀이가 점근안정하게 되는 적당한 정수 $m > 0$ 이 존재한다.

증명 명제로부터

$$0 < m := \frac{1}{2\int_0^\infty t^{\alpha-1} \| E_{\alpha,\ \alpha}(t^\alpha A) \| dt} < \infty$$

로 선택할수 있다.

이때 $Q(t)$ 가 식 (5)를 만족시키면 식 (3)을 만족시킨다. 따라서 령풀이는 점근안정하다.(증명끝)

정리 3 다음의 조건들이 만족되면 식 (1)의 령풀이는 점근안정하다.

① 적당한 m 이 존재하여 $\| Q(t) \| < m$ 이 성립한다.

② $\mathrm{Re}(\mathrm{eig}(A)) < 0$ 이고 $w = -\max\{\mathrm{Re}(\mathrm{eig}(A))\} > (mK_2\Gamma(\alpha))^{1/\alpha}$ 이 성립한다. 여기서 K_2 는 $\| e^{At} \| \le K_2 e^{-wt}$ 인 수이다.

증명 식 (3)에서 조건 ①을 고려하고 $\alpha \ge 1$ 이고 $\beta = 1,\ 2,\ \alpha$ 일 때

$$| E_{\alpha,\beta}(t^\alpha A) \| \le \| e^{At^\alpha} \| \le \| e^{At} \|$$

라는것[5]을 고려하면 곧 증명된다.(증명끝)

주의 1 정리 3은 선행연구[5]에서 정리 1과 같다. 따라서 정리 1은 선행연구[5]의 정리 1(선형섭동계의 령풀이의 점근안정성 충분조건)의 결과를 일반화하였다.

다음으로 식 (2)의 령풀이가 점근안정하기 위한 조건들을 정식화하자.

여기서 $f:[0, \infty)\times\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$는 련속인 벡토르값함수로서 다음의 조건을 만족시킨다.

$$f(t,\ 0)=0\ \ (\forall t\ge 0) \tag{6}$$

$$\| f(t,\ x)-f(t,\ y)\| \le K(t)\| x-y\|\ \ (\forall t\ge 0;\ x,\ y\in\mathbf{R}^n) \tag{7}$$

정리 4 행렬 A의 고유값모임 $\sigma(A)$가 $\{\lambda\in\mathbf{C}\setminus\{0\}:|\arg(\lambda)|>\alpha\pi/2\}$에 포함되고 $K(t)$가

$$q:=\sup_{t\ge 0}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\| E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha A)K(\tau)\| d\tau<1 \tag{8}$$

을 만족시키면 식 (2)의 령풀이는 점근안정하다.

증명 초기조건 $x_0=\begin{pmatrix} x(0)\\ x'(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_{01}\\ x_{02}\end{pmatrix}$을 가진 식 (2)의 풀이는

$$x(t)=E_{\alpha,1}(t^\alpha A)x_{01}+tE_{\alpha,2}(t^\alpha A)x_{02}+\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha A)f(\tau,\ x(\tau))d\tau$$

이다.[4] 이제 $\forall x_0$에 대하여 연산자 $T_{x_0}: C([0,\ \infty);\ \mathbf{R}^n)\to C([0,\ \infty);\ \mathbf{R}^n)$을

$$T_{x_0}\zeta(t)=E_{\alpha,1}(t^\alpha A)x_{01}+tE_{\alpha,2}(t^\alpha A)x_{02}+\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha A)f(\tau,\ \zeta(\tau))d\tau$$

로 정의하면 넘기기 T_{x_0}의 부동점은 초기조건 $\begin{pmatrix} x(0)\\ x'(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_{01}\\ x_{02}\end{pmatrix}$을 만족시키는 식 (2)의 풀이이다.

$$\begin{aligned}
&\| T_{x_0}\zeta(t)\| \le \| E_{\alpha,\ 1}(t^\alpha A)x_{01}\| +t\| E_{\alpha,\ 2}(t^\alpha A)x_{02}\| +\\
&+\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\| E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha A)f(\tau,\ \zeta(\tau))\| d\tau\le \| E_{\alpha,1}(t^\alpha A)x_{01}\| +t\| E_{\alpha,2}(t^\alpha A)x_{02}\| +\\
&+\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\| E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha A)[f(\tau,\ \zeta(\tau))-f(\tau,\ 0)]\| d\tau\le\\
&\le \| E_{\alpha,1}(t^\alpha A)x_{01}\| +t\| E_{\alpha,2}(t^\alpha A)x_{02}\| +\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\| E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha A)K(\tau)\| \| \zeta(\tau)\| d\tau
\end{aligned}$$

라는 사실을 고려하면 정리 1과 류사하게 증명할수 있다.(증명끝)

정리 5 행렬 A의 고유값모임 $\sigma(A)$가 $\{\lambda\in\mathbf{C}\setminus\{0\}:|\arg(\lambda)|>\alpha\pi/2\}$에 포함된다고 하자. 이때 $\sup_{t\ge 0}K(t)<\varepsilon$이 성립하면 식 (2)의 령풀이가 점근안정하게 되는 적당한 정수 $\varepsilon>0$이 존재한다.

증명 정리 2와 류사하게 ε을 정하면 식 (8)이 성립하고 정리의 결론이 곧 나온다.(증명끝)

주의 2 정리 4를 리용하여 선행연구[5]에서 정리 3과 같은 결과를 얻을수 있다. 따라서 정리 4는 선행연구[5]의 정리 3(비선형섭동계의 령풀이의 점근안정성 충분조건)의 결과를 일반화한다..

론문에서는 상결수선형분수계동차련립미분방정식

$$ {}^{c}D^{\alpha}x(t) = Ax(t) \ \ (1 \le \alpha < 2) $$

에 선형 및 비선형섭동이 작용할 때 섭동계의 령풀이의 안정성을 판정하는 한가지 방법을 연구하였다. 상결수선형동차계의 령풀이가 점근안정할 때 일정한 의미에서 작은 섭동항을 추가해도 령풀이의 안정성은 달라지지 않는다는것을 증명하였다. 이 결과들은 선행연구[5]에서 얻은 결과들을 일반화한다.

참 고 문 헌

[1] 김명하; 분수계미적분과 그 응용, **김일성**종합대학출판사, 1∼60, 주체95(2006).

[2] B. Bonilla et al.; Applied Mathematics and Computation, 187, 68, 2007.

[3] Xiaoxin Laio et al.; Stability of Dynamical Systems, Elsevier, 100∼400, 2007.

[4] A. A. Kilbas et al.; Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, 13∼65, 2006.

[5] B. K. Lenka et al.; Nonlinear Dyn., 85, 167, 2016.

[6] Z. Ruoxun et al.; ISA Transactions, 56, 102, 2015.

[7] D. Matignon; Models and Applications, 5, 145, 1998.

[8] R. Agarwal et al.; Math. Comp. Model, 52, 862, 2010.

[9] E. Ahmed et al.; J. Math. Anal. Appl., 325, 542, 2007.

주체107(2018)년 12월 5일 원고접수

The Asymptotic Stability of Trivial Solutions of Fractional Differential Systems under the Action of Perturbations

Kim Chol, *Song Cho Hwa*

In this paper, we investigated a method to test the asymptotic stability of trivial solutions of fractional differential systems under the action of linear and nonlinear perturbations. Even if the trivial solutions of original unperturbed systems are asymptotically stable, under the action of small(in some sense) perturbations the trivial solutions of the perturbed systems is also asymptotically stable.

Key words: fractional differential equation, equilibrium, stability