김일성종합대학학보 수 학

주체108(2019)년 제65권 제3호

한가지 형태의 (1, 2)－형모호선형다항분수계미분방정식의 적분경계값문제에 대한 절단문제의 풀이의 구성적존재성

오규남, 류명복

우리는 물리적응용성이 강한 한가지 (1, 2)－형모호분수계미분방정식의 적분경계값문제의 절단문제의 풀이의 구성적존재조건에 대하여 연구하였다.

Bagley와 Torvik는 1984년에 처음으로 뉴톤흐름속에서 운동하는 크고 얇은 판의 운동모형을 분수계미분방정식의 초기값문제로 모형화하고 모호Bagley－Torvik방정식

$$A\widetilde{y}''(t)+BD^{3/2}\widetilde{y}(t)+c\widetilde{y}(t)=8,\ 0\le t\le 1,\ \widetilde{y}(0)=(-1,\ 0,\ 1),\ \widetilde{y}'(0)=(-1,\ 0,\ 1) \tag{1}$$

에 대한 절단문제의 풀이의 존재성[6]을 밝히였다. 선행연구[5]에서는 미분계수가 1이하인 모호상결수선형분수계미분방정식의 초기값문제에 대한 풀이법을 고찰하였고 선행연구[1, 3, 4]에서는 1계 및 2계모호미분방정식의 초기값문제와 두점경계값문제에 대하여 (1, 1)－형, (1, 2)－형인 경우 풀이의 존재성을 연구하였다.

(1, 2)－형인 경우에는 절단문제의 표시가 달라지므로 일반적으로 적분방정식이 련립분수계미분방정식으로 주어지게 되고 미지함수에 대한 부등식제한조건도 달라지며 따라서 풀이의 존재성에 대한 론의가 (1, 1)－형인 경우보다 어렵게 된다.

이로부터 우리는 (1, 2)－형모호캐푸토분수계미분방정식의 절단문제의 풀이의 구성적존재성을 연구하였다.

모호수전부의 모임을 $\mathbf{R}_F$ ([5])로 표시한다.

정의 1[3] $f:(a,\ b)\to\mathbf{R}_F$, $x_0\in(a,\ b)$인 모호수값함수라고 하자. 이때 다음의 조건중에서 어느 하나를 만족시키는 $f'_G(x_0)\in\mathbf{R}_F$가 존재하면 f는 x_0에서 H－미분가능하다고 말한다.

① 충분히 작은 $h>0$에 대하여 $f(x_0+h)\ominus_H f(x_0),\ f(x_0)\ominus_H f(x_0-h)$가 존재하여

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)\ominus_H f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0)\ominus_H f(x_0-h)}{h}=f'_G(x_0)$$

이 성립한다.

② 충분히 작은 $h>0$에 대하여 $f(x_0)\ominus_H f(x_0+h),\ f(x_0-h)\ominus_H f(x_0)$이 존재하여

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0)\ominus_H f(x_0+h)}{-h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0-h)\ominus_H f(x_0)}{-h}=f'_G(x_0)$$

이 성립한다.

정의 2[3] 정의 1의 ①의 의미에서 미분가능하면 (1)－미분가능하다고 말하고 그때의 도함수를 $D_1^{(1)}f(x_0)$으로 표시한다. 마찬가지로 ②의 의미에서 미분가능하면 (2)－미분가능하다고 말하고 그때의 도함수를 $D_2^{(1)}f(x_0)$으로 표시한다.

정의 3[3] $f:(a,\ b)\to\mathbf{R}_F$, $x_0\in(a,\ b)$라고 하자. 만일 x_0에서 $D_n^{(1)}f(x_0)$에 대하여 $D_m^{(1)}(D_n^{(1)}f)(x_0)$이 존재하면 함수 f는 $(n,\ m)$－미분가능하다고 말하고 $D_{n,m}^{(2)}f(x_0)$으로 표

시한다. 여기서 $n,\ m\in\{1,\ 2\}$ 이다.

정의 4[2] $f:(a,\ b)\to\mathbf{R}$ $(\alpha>0)$ 라고 하자. $I_{a+}^{\alpha}f(t):=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_a^t(t-s)^{\alpha-1}f(s)ds$ 를 함수 f 의 α 계리만－류빌분수적분이라고 부른다.

정의 5[2] 함수 f 의 α 계리만－류빌분수계도함수는 다음과 같이 정의된다.

$$(D_{a+}^{\alpha}f)(t):=\left(\frac{d}{dt}\right)^n(I_{a+}^{n-\alpha}f)(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\int_a^t\frac{f(s)ds}{(t-s)^{\alpha-n+1}}\quad(n=[\alpha]+1,\ x>a)$$

정의 6[2] $f:(a,\ b)\to\mathbf{R},\ n-1<\alpha\le n$ 이라고 하자. 함수 f 의 α 계캐푸토분수계도함수는 다음과 같이 정의된다.

$${}^cD_{a+}^{\alpha}f(t):=D_{a+}^{\alpha}\left(f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)t^k}{k!}\right)$$

정의 7[4] $f:(a,\ b)\to\mathbf{R}_F$ $(1<\alpha<2)$ 라고 하자. 이때 함수 $\widetilde{G}(t)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\widetilde{G}(t):=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^t(t-s)^{1-\alpha}\otimes(f(s)\ominus_H(f(0)\oplus s\otimes D_1^{(1)}f(0)))ds \tag{2}$$

① 만일 함수 $\widetilde{G}(t)$ 가 $(1,\ 1)$－미분가능하면 f 는 t 에서 ${}^c[(1,\ 1)-\alpha]$－미분가능하다고 말하고 ${}^cD_{1,1}^{\alpha}f(t):=D_{1,1}^{(2)}\widetilde{G}(t)$ 로 표시한다.

② 만일 함수 $\widetilde{G}(t)$ 가 $(1,\ 2)$－미분가능하면 f 는 t 에서 ${}^c[(1,\ 2)-\alpha]$－미분가능하다고 말하고 ${}^cD_{1,2}^{\alpha}f(t):=D_{1,2}^{(2)}\widetilde{G}(t)$ 로 표시한다.

우리는 론문에서 다음과 같은 (1, 2)－형모호분수계미분방정식의 경계값문제를 연구하였다.

$${}^cD_{1,2}^{\alpha}y(t)=a_1(t)\otimes{}^cD_{1,2}^{\beta}y(t)\oplus a_2(t)\otimes y(t)\oplus f(t),\ t\in I=[0,\ 1],\ y(0)=y_0,\ y(1)=\int_0^1g(s)\otimes y(s)ds \tag{3}$$

여기서 $1\le\beta<\alpha<2$ 이고 $y_0\in\mathbf{R}_F,\ y,\ f\in C^F(I),\ g,\ a_k\in C(I)\ (k=1,\ 2)$, ${}^cD_{1,2}^{\alpha}$, ${}^cD_{1,2}^{\beta}$ 는 (1, 2)－형모호정규캐푸토분수계도함수이다. 특히 $a_k(t)\ge0,\ g(t)\ge0\ (k=1,\ 2)$ 이다.

정의 8 ${}^cD_{1,2}^{\alpha}y,\ y\in C^F(I)$ 이고 식 (3)을 만족시키는 함수 y 를 문제 (3)의 풀이라고 부른다.

$f,\ y\in C^F(I)$ 의 절단을 $[f(t)]^r:=[f_1(t,\ r),\ f_2(t,\ r)]$, $[y(t)]^r:=[y_1(t,\ r),\ y_2(t,\ r)]$ 로 표시하자. 또한 y_0 의 절단을 $[y_0]^r:=[y_{0,1}(r),\ y_{0,2}(r)]$ 로 표시한다.

보조정리 1[4] $f\in C^F(I)\cap L^F(I),\ [f(t)]^r:=[f_1(t,\ r),\ f_2(t,\ r)]$ 라고 하자. $1<\alpha<2$ 일 때 f 가 ${}^c[(1,\ 2)-\alpha]$－미분가능하면 $[({}^cD_{1,2}^{\alpha}f)(t)]^r=[{}^cD_{0+}^{\alpha}f_2(t,\ r),\ {}^cD_{0+}^{\alpha}f_1(t,\ r)]$ 가 성립한다.

$y(t)$ 를 문제 (3)의 풀이라고 하자. 그러면 보조정리 1과 가정 $a_k(t)\ge0\ (k=1,\ 2)$ 에 의하여 임의의 $r\in(0,\ 1]$ 에 대하여

$$[{}^cD_{1,2}^{\alpha}y(t)]^r \equiv [a_1(t)\otimes{}^cD_{0+}^{\beta}y(t)\oplus a_2(t)\otimes y(t)\oplus f(t)]^r,\ [{}^cD_{1,2}^{\alpha}y(t)]^r \equiv$$

$$\equiv [a_1(t)\otimes{}^cD_{0+}^{\beta}y(t)]^r + [a_2(t)\otimes y(t)]^r + [f(t)]^r$$

$$[{}^cD_{1,2}^{\alpha}y(t)]^r \equiv a_1(t)[{}^cD_{0+}^{\beta}y(t)]^r + a_2(t)[y(t)]^r + [f(t)]^r$$

$$[{}^cD_{1,2}^{\alpha}y_2(t,\ r),\ {}^cD_{1,2}^{\alpha}y_1(t,\ r)] \equiv a_1(t)[{}^cD_{0+}^{\beta}y_2(t,\ r),\ {}^cD_{0+}^{\beta}y_1(t,\ r)] +$$

$$+ a_2(t)[y_1(t,\ r),\ y_2(t,\ r)] + [f_1(t,\ r),\ f_2(t,\ r)]$$

이므로 다음의 관계식들을 만족시킨다.

$$\begin{cases} {}^cD_{0+}^{\alpha}y_1(t,\ r) = a_1(t){}^cD_0^{\beta}y_1(t,\ r) + a_2(t)y_2(t,\ r) + f_2(t,\ r) \\ {}^cD_{0+}^{\alpha}y_2(t,\ r) = a_1(t){}^cD_0^{\beta}y_2(t,\ r) + a_2(t)y_1(t,\ r) + f_1(t,\ r) \end{cases} \tag{4}$$

$$y_1(0,\ r) = y_{0,1}(r),\ y_2(0,\ r) = y_{0,2}(r) \tag{5}$$

$$y_1(1,\ r) = \int_0^1 g(s)y_1(s,\ r)ds,\ y_2(1,\ r) = \int_0^1 g(s)y_2(s,\ r)ds \tag{6}$$

$$y_1(t,\ r) \le y_2(t,\ r),\ {}^cD_{0+}^{\beta}y_2(t,\ r) \le {}^cD_{0+}^{\beta}y_1(t,\ r),\ {}^cD_{0+}^{\alpha}y_2(t,\ r) \le {}^cD_{0+}^{\alpha}y_1(t,\ r) \tag{7}$$

가정 1 $k_1 = 1 - \int_0^1 g(s)sds > 0,\ k_2 = 1 - \int_0^1 g(s)ds < 0,\ k := -k_2/k_1 > 0,\ \bar{k} := 1/k_1 > 0$

$$\bar{f}_1(t,\ r) := (kt+1)a_2(t)\cdot y_{0,1}(r) + f_1(t,\ r),\ \bar{f}_2(t,\ r) := (kt+1)a_2(t)\cdot y_{0,2}(r) + f_2(t,\ r)$$

로 표시하자.

정리 1 절단문제 (4)−(7)의 풀이를 $y_1(t,\ r),\ y_2(t,\ r)$ 라고 할 때 식

$$z_1(t,\ r) := {}^cD_{0+}^{\alpha}y_1(t,\ r),\ z_2(t,\ r) := {}^cD_{0+}^{\alpha}y_2(t,\ r)$$

로 규정되는 $z_1(t,\ r),\ z_2(t,\ r)$ 들은 다음의 문제 (8)−(11)의 풀이로 된다.

$$z_2(t,\ r) \le z_1(t,\ r) \tag{8}$$

$$I_{0+}^{\alpha-\beta}z_2(t,\ r) \le I_{0+}^{\alpha-\beta}z_1(t,\ r) \tag{9}$$

$$(kt+1)y_{0,1}(r) + \bar{k}\left(\int_0^1 g(s)I_{0+}^{\alpha}z_1(s,\ r)ds - I_{0+}^{\alpha}z_1(t,\ r)|_{t=1}\right)t + I_0^{\alpha}z_1(t,\ r) \le$$

$$\le (kt+1)y_{0,2}(r) + \bar{k}\left(\int_0^1 g(s)I_{0+}^{\alpha}z_2(s,\ r)ds - I_{0+}^{\alpha}z_2(t,\ r)|_{t=1}\ l\right)t + I_0^{\alpha}z_2(t,\ r) \tag{10}$$

$$\begin{cases} z_1(t,\ r) = a_1(t)I_{0+}^{\alpha-\beta}z_1(t,\ r) + a_2(t)I_{0+}^{\alpha}z_2(t,\ r) + \bar{k}\left(\int_0^1 g(s)I_{0+}^{\alpha}z_2(s,\ r)ds - I_{0+}^{\alpha}z_2(t,\ r)|_{t=1}\right)t\cdot a_2(t) + \bar{f}_2(t,\ r) \\ z_2(t,\ r) = a_1(t)I_{0+}^{\alpha-\beta}z_2(t,\ r) + a_2(t)I_{0+}^{\alpha}z_1(t,\ r) + \bar{k}\left(\int_0^1 g(s)I_{0+}^{\alpha}z_1(s,\ r)ds - I_{0+}^{\alpha}z_1(t,\ r)|_{t=1}\right)t\cdot a_2(t) + \bar{f}_1(t,\ r) \end{cases} \tag{11}$$

정리 2 문제 (8)−(11)의 풀이 $z_1(t,\ r),\ z_2(t,\ r)$ 에 대하여

$$\begin{cases} y_1(t,\ r)=(kt+1)y_{0,\,1}(r)+\bar{k}\left(\int_0^1 g(s)I_{0+}^{\alpha}z_1(s,\ r)ds-I_{0+}^{\alpha}z_1(t,\ r)|_{t=1}\right)t+I_{0+}^{\alpha}z_1(t,\ r) \\ y_2(t,\ r)=(kt+1)y_{0,\,2}(r)+\bar{k}\left(\int_0^1 g(s)I_{0+}^{\alpha}z_2(s,\ r)ds-I_{0+}^{\alpha}z_2(t,\ r)|_{t=1}\right)t+I_{0+}^{\alpha}z_2(t,\ r) \end{cases} \quad (12)$$

로 규정되는 $y_1(t,\ r),\ y_2(t,\ r)$ 들은 문제 (4)－(7)의 풀이로 된다.

주의 이로부터 (4)－(7)의 풀이의 존재성은 (8)－(11)의 풀이의 존재성문제에 귀착된다.

문제 (8)－(11)을 연산자 len 을 리용하여 다음과 같이 표시하자.

$$len(z(t,\ r))\ge 0 \quad (13)$$

$$I_{0+}^{\alpha-\beta}len(z(t,\ r))\ge 0 \quad (14)$$

$$(kt+1)len(y_0(r))-\bar{k}\left(\int_0^1 g(s)I_{0+}^{\alpha}len(z(s,\ r))ds-I_{0+}^{\alpha}len(z(t,\ r))|_{t=1}\right)t-I_{0+}^{\alpha}len(z(t,\ r))\ge 0 \quad (15)$$

$$\begin{aligned} len(z(t,\ r))&=a_1(t)I_{0+}^{\alpha-\beta}len(z(t,\ r))-a_2(t)I_{0+}^{\alpha}len(z(t,\ r))- \\ &-\bar{k}\left(\int_0^1 g(s)I_{0+}^{\alpha}len(z(s,\ r))ds-I_{0+}^{\alpha}len(z(t,\ r))|_{t=1}\right)t\cdot a_2(t)+len(\bar{f}(t,\ r)) \end{aligned} \quad (16)$$

여기서 $len(\bar{f}(t,\ r)):=\bar{f}_2(t,\ r)-\bar{f}_1(t,\ r)$ 이다. 우의 표시식으로부터 $len(\bar{f}(t,\ r))\ge 0$ 이다.

가정 2 $q_1:=\|a_1\|_{C[0,\,1]}/\Gamma(\alpha-\beta+1)<1$

가정 3 $(1-t)^{\alpha-1}(1-\bar{k})+\bar{k}\int_t^1 g(s)(s-t)^{\alpha-1}ds\le 0\ \ (t\in[0,\ 1])$

보조정리 2 $U(t,\ r)\ge 0$ 이고 가정 3을 만족시키면 다음의 식이 성립한다.

$$I_{0+}^{\alpha}U(t,\ r)+\bar{k}\left(\int_0^1 g(s)I_{0+}^{\alpha}U(s,\ r)ds-I_{0+}^{\alpha}U(t,\ r)|_{t=1}\right)\ \ (t\le 0)$$

보조정리 3 방정식 $U(t)=a_1(t)I_{0+}^{\alpha-\beta}U(t)+V(t)\ \ (t\in I)$ 는 $C(I)$ 에서 유일한 부아닌 풀이를 가진다. 여기서 $V,\ a_1\in C(I)$ 이다. 특히 $V(t)\ge 0,\ t\in I$ 이다.

가정 4 $q_2:=\dfrac{\|a_2\|_{C[0,1]}}{\Gamma(\alpha+1)}\left[1+|\bar{k}|\cdot\left(\int_0^1 g(s)s^{\alpha}ds+1\right)\right]\Big/(1-q_1)<1$

정리 3 가정 1－4를 만족시키면 식 (13)－(16)의 풀이 $len(z(t,\ r))$ 가 존재하며 그것은 다음의 도식으로 결정된다.

$$len(z_0(t,\ r))=0$$

$$\begin{aligned} len(z_{n+1}(t,\ r))&=a_1(t)I_{0+}^{\alpha-\beta}len(z_{n+1}(t,\ r))-a_2(t)I_{0+}^{\alpha}len(z_n(t,\ r))- \\ &-\bar{k}\left(\int_0^1 g(s)I_{0+}^{\alpha}len(z_n(s,\ r))ds-I_{0+}^{\alpha}len(z_n(t,\ r))|_{t=1}\right)t\cdot a_2(t)+len(\bar{f}(t,\ r))\ \ (n=0,\ 1,\ \cdots) \end{aligned} \quad (17)$$

따름 가정 1－4를 만족시키면 식 (8)－(11)의 풀이 $(z_1(t, r), z_2(t, r))$가 존재하며 그것은 다음의 도식으로 결정된다.

$z_1^{(0)}(t, r)=0,\ z_2^{(0)}(t, r)=0$

$$\begin{cases} z_1^{(n+1)}(t, r)=a_1(t)I_{0+}^{\alpha-\beta}z_1^{(n+1)}(t, r)+a_2(t)I_{0+}^{\alpha}z_2^{(n)}(t, r)+\bar{k}\left(\int_0^1 g(s)I_{0+}^{\alpha}z_2^{(n)}(s, r)ds-I_{0+}^{\alpha}z_2^{(n)}(1, r)\right)t\cdot a_2(t)+\bar{f}_2(t, r) \\ z_2^{(n+1)}(t, r)=a_1(t)I_{0+}^{\alpha-\beta}z_2^{(n+1)}(t, r)+a_2(t)I_{0+}^{\alpha}z_1^{(n)}(t, r)+\bar{k}\left(\int_0^1 g(s)I_{0+}^{\alpha}z_1^{(n)}(s, r)ds-I_{0+}^{\alpha}z_1^{(n)}(1, r)\right)t\cdot a_2(t)+\bar{f}_1(t, r) \end{cases} \tag{18}$$

실례 다음의 모호적분경계값문제를 보자.

$${}^cD_{1,2}^{\alpha}y(t)=\frac{1}{4+e^t}\otimes {}^cD_{1,2}^{\beta}y(t)\oplus\frac{1}{\sqrt{100+t^2}}\otimes y(t)\oplus(1+t)\otimes(4.3,\ 4.5,\ 4.7),\ t\in[0,\ 1] \tag{19}$$

$$y(0)=(0.9,\ 1,\ 1.1),\ y(1)=\int_0^1 4.2s^3\otimes y(s)ds \tag{20}$$

여기서

$$\alpha=1.9,\ \beta=1.2,\ g(s)=4.2s^3,\ a_1(t)=\frac{1}{4+e^t},\ a_2(t)=1/\sqrt{100+t^2}$$

$$k_1=0.16,\ k_2=-0.05,\ \|a_1\|_{C(I)}=0.2,\ \|a_2\|_{C(I)}=0.1,\ q_1:=\|a_1\|_{C[0,1]}/\Gamma(\alpha-\beta+1)\approx 0.22<1$$

이다. 또한

$$(1-t)^{\alpha-1}(1-\bar{k})+\bar{k}\int_t^1 g(s)(s-t)^{\alpha}ds\approx -6.25(1-t)^{0.9}+5.36(1-t)^{0.9}-1.24(1-t)^{0.9}-1.5(1-t)^{0.9}t^4\le 0$$

$$t\in[0,\ 1]$$

$$q_2=0.1\cdot(1+6.25\cdot(0.86+1))/(\Gamma(2.9)\cdot 0.78)\approx 0.82<1$$

이므로 따라서 가정 1－4를 모두 만족시킨다.

그러므로 식 (19), (20)에 대응하는 절단문제는 적어도 하나의 풀이를 가진다.

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보 수학, 64, 4, 72, 주체107(2018).

[2] A. A. Kilbas et al.; Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, 1～150, 2006.

[3] B. Bede et al.; Fuzzy Sets Syst., 151, 581, 2005.

[4] M. Mazandarani et al.; Commun Nonlinear Sci. Numer. Simulat., 19, 2354, 2014.

[5] M. Chehlabi et al.; Applied Soft Computing, 44, 108, 2016.

[6] H. V. Ngo et al.; Fuzzy Sets Syst., 347, 54, 2018.

주체108(2019)년 3월 15일 원고접수

Constructive Existence of Solutions of the Cut-Problem to Integral Boundary Value Problems for a Type－(1, 2) Fuzzy Linear Multi-Term Fractional Differential Equation

O Kyu Nam, Ryu Myong Bok

In this paper, we present the cut-problem of an integral boundary value problem for a type －(1, 2) fuzzy linear multi-term fractional differential equation and investigate the constructive existence of its solutions.

Key word: fuzzy linear multi-term differential equation