김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제3호

모호선형다항분수계미분방정식의 (1, 1)－풀이에 대한 근사법

장성룡, 박순애

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《과학기술부문에서 첨단돌파전을 힘있게 벌려야 하겠습니다.》

론문에서는 한 형태의 모호선형다항분수계미분방정식에 대한 (1, 1)－풀이의 존재성과 그 풀이법을 연구하였다.

선행연구[1]에서는 모호초기조건을 가진 모호분수계미분방정식의 개념을 제기하였으며 선행연구[2]에서는 일반화된 H－미분가능성의 개념을 계수가 $0<\beta<1$인 모호분수계미분방정식에로 확장하였다.

선행연구[3]에서는 모호분수계Bagley－Torvik방정식을 호모토피섭동법으로 푸는 방법을 고찰하였으나 모호분수계Bagley－Torvik방정식의 풀이에 대한 존재성결과는 주어지지 않았다.

선행연구[4]에서 방정식이 매우 단순한 경우에도 풀이가 존재하지 않는 경우가 있다는것을 실례로 보여주었다. 이로부터 모호분수계Bagley－Torvik방정식의 풀이는 결수나 비동차항이 어떻게 주어지는가에 따라 존재하지 않을수 있다.

론문에서는 모호Bagley－Torvik방정식의 일반화로 되는 한가지 형태의 모호분수계미분방정식의 (1, 1)－풀이가 존재하기 위한 조건을 얻고 하르웨블레트연산행렬을 리용한 모호미분방정식의 수치풀이법을 취급하였다.

다음의 모호초기값문제를 고찰하자.

$$({}^cD_{1,1}^{\alpha}y)(t)\oplus b\otimes({}^cD_{1,1}^{\beta}y)(t)\oplus c\otimes y(t)=f(t)\ \ (t\in(0,\ 1)) \tag{1}$$

$$y(0)=y_0,\ D_1^{(1)}y(0)=y_0' \tag{2}$$

여기서

$$1<\beta<\alpha\le 2,\ 0<\alpha-\beta<1,\ b,\ c\in\mathbf{R}_+,\ y,\ f\in C(J,\ \mathbf{R}_F),\ J=[0,\ 1],\ y_0,\ y_0'\in\mathbf{R}_F$$

정의 1 ${}^cD_{1,1}^{\alpha}y\in C(J,\ \mathbf{R}_F)$인 y가 식 (1), (2)를 만족시킬 때 y를 식 (1), (2)의 풀이라고 부른다.

방정식 (1)에 절단을 취하고 구간연산을 진행하여 다음의 식을 얻을수 있다.

$$\begin{cases} {}^cD_{0+}^{\alpha}y_1(t,\ r)+b\,{}^cD_{0+}^{\beta}y_1(t,\ r)+cy_1(t,\ r)=f_1(t,\ r) \\ {}^cD_{0+}^{\alpha}y_2(t,\ r)+b\,{}^cD_{0+}^{\beta}y_2(t,\ r)+cy_2(t,\ r)=f_2(t,\ r) \\ y_1(t,\ r)\le y_2(t,\ r) \\ {}^cD_{0+}^{\beta}y_1(t,\ r)\le {}^cD_{0+}^{\beta}y_2(t,\ r) \\ {}^cD_{0+}^{\alpha}y_1(t,\ r)\le {}^cD_{0+}^{\alpha}y_2(t,\ r) \end{cases} \tag{3}$$

$[y_0]^r:=[y_{0,1}(r),\ y_{0,2}(r)],\ [y_0']^r:=[y_{0,1}'(r),\ y_{0,2}'(r)]$라고 하자. 그러면 절단문제 (3)의 초

기조건은 다음과 같이 표시된다.

$$y_1(0,\ r)=y_{0,1}(r),\ \ y_1'(0,\ r)=y_{0,1}'(r),\ y_2(0,\ r)=y_{0,2}(r),\ y_2'(0,\ r)=y_{0,2}'(r) \tag{4}$$

정의 2 ${}^cD_{0+}^{\alpha}y_1(\cdot,\ r),\ {}^cD_{0+}^{\alpha}y_2(\cdot,\ r)\in C(J)$ 인 쌍 $(y_1(t,\ r),\ y_2(t,\ r))$ 가 식 (3), (4)를 만족시킬 때 $(y_1(t,\ r),\ y_2(t,\ r))$ 를 절단문제 (3), (4)의 풀이라고 부른다.

보조정리 1 문제 (3), (4)의 풀이를 $(y_1(t,\ r),\ y_2(t,\ r))$ 라고 할 때

$$\varphi_1(t,\ r):={}^cD_{0+}^{\alpha}y_1(t,\ r),\ \varphi_2(t,\ r):={}^cD_{0+}^{\alpha}y_2(t,\ r)$$

로 규정되는 $\varphi_1(t,\ r),\ \varphi_2(t,\ r)$ 는 $C(J)$ 에서 문제

$$\begin{cases}\varphi_1(t,\ r)+bI_{0+}^{\alpha-\beta}\varphi_1(t,\ r)+cI_{0+}^{\alpha}\varphi_1(t,\ r)=f_1(t,\ r)-c(y_{0,1}(r)+y_{0,1}'(r)t)\\ \varphi_2(t,\ r)+bI_{0+}^{\alpha-\beta}\varphi_2(t,\ r)+cI_{0+}^{\alpha}\varphi_2(t,\ r)=f_2(t,\ r)-c(y_{0,2}(r)+y_{0,2}'(r)t)\\ \varphi_1(t,\ r)\le\varphi_2(t,\ r)\end{cases} \tag{5}$$

를 만족시킨다. 거꾸로 $C(J)$ 에서 문제 (5)의 풀이 $\varphi_1(t,\ r),\ \varphi_2(t,\ r)$ 에 대하여

$$\begin{aligned}y_1(t,\ r)&=y_{0,1}(r)+y_{0,1}'(r)t+I_{0+}^{\alpha}\varphi_1(t,\ r)\\ y_2(t,\ r)&=y_{0,2}(r)+y_{0,2}'(r)t+I_{0+}^{\alpha}\varphi_2(t,\ r)\end{aligned} \tag{6}$$

는 절단문제 (3), (4)의 풀이이다.

이 보조정리로부터 문제 (3), (4)의 풀이의 유일존재성문제는 문제 (5)의 풀이의 유일존재성문제에 귀착된다. 이제부터 이 유일풀이가 식 (5)의 셋째 부등식을 만족시키기 위한 충분조건을 고찰하자.

다음의 표시를 리용한다.

$$\Delta f(t,\ r):=f_2(t,\ r)-f_1(t,\ r),\ w(t,\ r):=\varphi_2(t,\ r)-\varphi_1(t,\ r)$$

$$\Delta_0(r):=y_{0,2}(r)-y_{0,1}(r),\ \Delta_0'(r):=y_{0,2}'(r)-y_{0,1}'(r),\ \Delta\phi:=\Delta f(t,\ r)-c(\Delta_0(r)+\Delta_0'(r)t)$$

보조정리 2 $\Delta\phi$ 가 련속이고 $(I-L)\Delta\phi(t,\ r)\ge 0$ 이면 $\varphi_1(t,\ r)\le\varphi_2(t,\ r)$ 가 성립한다.

이상의 고찰로부터 다음의 결론을 내릴수 있다.

$b,\ c\in\mathbf{R}_+,\ f\in C(I,\ \mathbf{R}_F)$ 이고

$$\Delta\phi=f_2(t,\ r)-f_1(t,\ r)-c((y_{0,2}(r)-y_{0,1}(r))+(y_{0,2}'(r)-y_{0,1}'(r)t)$$

가 변수 t 에 관하여 련속이고 $(I-L)\Delta\phi(t,\ r)\ge 0$ 이면 문제 (5)의 풀이는 유일존재하며 따라서 절단문제 (3), (4)의 풀이는 유일존재한다.

앞의 론의로부터 다음의 구간족들을 생각할수 있다.

$$\{U_\alpha(t,\ r):=[{}^cD_{0+}^{\alpha}y_1(t,\ r),\ {}^cD_{0+}^{\alpha}\,y_2(t,\ r)],\ r\in[0,\ 1]\}$$

$$\{U_\beta(t,\ r):=[{}^cD_{0+}^{\beta}y_1(t,\ r),\ {}^cD_{0+}^{\beta}y_2(t,\ r)],\ r\in[0,\ 1]\}$$

$$\{U_1(t,\ r):=[y_1'(t,\ r),\ y_2'(t,\ r)],\ \ r\in[0,\ 1]\}$$

$$\{U_0(t,\ r):=[y_1(t,\ r),\ y_2(t,\ r)],\ \ r\in[0,\ 1]\}$$

이제 이 구간족들이 모호수를 생성한다는것을 고찰하자.

다음의 기호들을 약속한다.

$$\Delta f_1(t) := f_1(t,\ r_2) - f_1(t,\ r_1),\ \Delta f_2(t) := f_2(t,\ r_2) - f_2(t,\ r_1)$$
$$w_1(t) := \varphi_1(t,\ r_2) - \varphi_1(t,\ r_1),\ w_2(t) := \varphi_2(t,\ r_2) - \varphi_2(t,\ r_1)$$
$$\Delta_{0,1} := y_{0,1}(r_2) - y_{0,1}(r_1),\ \Delta_{0,2} := y_{0,2}(r_2) - y_{0,2}(r_1)$$
$$\Delta'_{0,1} := y'_{0,1}(r_2) - y'_{0,1}(r_1),\ \Delta'_{0,2} := y'_{0,2}(r_2) - y'_{0,2}(r_1)$$
$$\Delta\phi_1 := \Delta f_1(t) - c(\Delta_{0,1} + \Delta'_{0,1}t),\ \Delta\phi_2 := \Delta f_2(t) - c(\Delta_{0,2} + \Delta'_{0,2}t)$$

정리 1 함수 $\Delta\phi,\ \Delta\phi_1$ 들이 변수 t 에 관하여 련속이고

$$(I-L)\Delta\phi(t,\ r) \ge 0,\ (I-L)\Delta\phi_1(t,\ r) \ge 0$$

이며 $\Delta\phi_2$ 는 변수 t 에 관하여 련속이고 $(I-L)\Delta\phi_2(t,\ r) \le 0$ 이라고 하자. 그러면 구간족

$$\{U_\alpha(t,\ r),\ r\in[0,\ 1]\},\ \{U_\beta(t,\ r),\ r\in[0,\ 1]\}$$
$$\{U_1(t,\ r),\ r\in[0,\ 1]\},\ \{U_0(t,\ r),\ r\in[0,\ 1]\}$$

들은 모호수를 생성한다.

절단구간족

$$\{U_\alpha(t,\ r) := [{}^cD_{0+}^\alpha y_1(t,\ r),\ {}^cD_{0+}^\alpha y_2(t,\ r)],\ r\in[0,\ 1]\} \tag{7}$$
$$\{U_\beta(t,\ r) := [{}^cD_{0+}^\beta y_1(t,\ r),\ {}^cD_{0+}^\beta y_2(t,\ r)],\ r\in[0,\ 1]\} \tag{8}$$
$$\{U_1(t,\ r) := [y'_1(t,\ r),\ y'_2(t,\ r)],\ r\in[0,\ 1]\} \tag{9}$$
$$\{U_0(t,\ r) := [y_1(t,\ r),\ y_2(t,\ r)],\ r\in[0,\ 1]\} \tag{10}$$

들에 의해 생성된 모호수값함수들을 각각 $\widetilde{y}_\alpha(t),\ \widetilde{y}_\beta(t),\ \widetilde{y}_1(t),\ \widetilde{y}_0(t)$ 로 표시하자.

이때 다음의 사실이 성립한다.

정리 2 모호수값함수 $\widetilde{y}_\alpha(t),\ \widetilde{y}_\beta(t),\ \widetilde{y}_1(t),\ \widetilde{y}_0(t)$ 들은 구간 I 에서 련속이다.

보조정리 3 임의의 $t\in(0,\ 1)$ 에 대하여 다음의 관계식

$$D_1^{(1)}\widetilde{y}_0(t) = \widetilde{y}_1(t)$$

가 성립한다.

정리 3 다음의 관계식들이 성립한다.

$$\widetilde{y}_0(t) = \widetilde{y}_0(0) \oplus \widetilde{y}_1(0) \otimes t \oplus I_{0+}^\alpha \widetilde{y}_\alpha(t)$$
$$\widetilde{y}_\beta(t) = I_{0+}^{\alpha-\beta}\widetilde{y}_\alpha(t),\ {}^cD_{1,1}^\alpha \widetilde{y}_0(t) = \widetilde{y}_\alpha(t)$$

정의 3 구간 $[0,\ 1]$ 에서 정의된

$$h_0(t) = \frac{1}{\sqrt{m}},\ h_i(t) = \frac{1}{\sqrt{m}}\begin{cases} 2^{j/2}, & \dfrac{k-1}{2^j} < t \le \dfrac{k-1/2}{2^j} \\ -2^{j/2}, & \dfrac{k-1/2}{2^j} < t \le \dfrac{k}{2^j} \\ 0, & \text{기타} \end{cases}$$

들의 모임을 하르함수들의 직교모임이라고 부른다. 여기서 $j,\ k$ 는 i 의 옹근수분해이다.

표시

$$H(t) := (h_0(t),\ h_1(t),\ \cdots,\ h_{m-1}(t))^{\mathrm{T}},\ C^{\mathrm{T}} := (c_0,\ c_1,\ \cdots,\ c_{m-1})$$

을 도입하자.

$$\Delta t := \frac{1}{m} = \frac{1}{2^r},\ t_k := (k-0.5)\Delta t\ \ (k = \overline{1,\ m}),\ H_{matrix} := \begin{pmatrix} h_0(t_1) & h_0(t_2) & \cdots & h_0(t_m) \\ h_1(t_1) & h_1(t_2) & \cdots & h_1(t_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{m-1}(t_1) & h_{m-1}(t_2) & \cdots & h_{m-1}(t_m) \end{pmatrix}$$

을 점배치점모임 (t_k) 에 관한 하르웨블레트행렬이라고 부른다. 이 행렬은 직교행렬이다. 즉

$$H_{matrix}^{-1} = H_{matrix}^{\mathrm{T}}$$

이다. 이제

$$(I_{0+}^{\alpha} H)(t) := (I_{0+}^{\alpha} h_0(t),\ I_{0+}^{\alpha} h_1(t),\ \cdots,\ I_{0+}^{\alpha} h_{m-1}(t))^{\mathrm{T}}$$

라고 하자.

정의 4 $(I_{0+}^{\alpha} H)(t) \approx F_H^{\alpha} \cdot H(t)$ 인 m 차상수행렬 F_H^{α} 를 α 계분수적분의 연산행렬이라고 부른다.

$$F_B^{\alpha} := \frac{1}{m^{\alpha}} \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} \begin{pmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_{m-1} \\ 0 & 1 & \xi_1 & \cdots & \xi_{m-2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \xi_{m-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

을 리용하면

$$F_H^{\alpha} = H_{mat} F_B^{\alpha} H_{mat}^{\mathrm{T}}$$

가 성립한다. 여기서 $\xi_k = (k+1)^{\alpha+1} - 2k^{\alpha+1} + (k-1)^{\alpha+1}$ 이다.

이제 하르웨블레트를 리용하여 식 (6), (7)을 풀기 위한 연산행렬법에 대하여 고찰하자.

먼저 분수계적분방정식 (5)의 근사풀이 $\widetilde{\varphi}_1(t,\ r),\ \widetilde{\varphi}_2(t,\ r)$ 를 얻은 다음 식 (6)을 리용하여 근사풀이 $\widetilde{y}_1(t,\ r),\ \widetilde{y}_2(t,\ r)$ 를 얻는다. 이때

$$C_{g_1}^{\mathrm{T}} = (g_1(t_1,\ r),\ g_1(t_2,\ r),\ \cdots,\ g_1(t_m,\ r)) \cdot H_{matrix}^{\mathrm{T}}$$
$$C_{g_2}^{\mathrm{T}} = (g_2(t_1,\ r),\ g_2(t_2,\ r),\ \cdots,\ g_2(t_m,\ r)) \cdot H_{matrix}^{\mathrm{T}}$$

를 계산하고 표시

$$\widetilde{\varphi}_1(t,\ r) := C_{\varphi_1}^{\mathrm{T}} H(t),\ \widetilde{\varphi}_2(t,\ r) := C_{\varphi_2}^{\mathrm{T}} H(t),\ \widetilde{g}_1(t,\ r) := C_{g_1}^{\mathrm{T}} H(t),\ \widetilde{g}_2(t,\ r) := C_{g_2}^{\mathrm{T}} H(t)$$

의 표시를 리용하면

$$C_{\varphi_1}^{\mathrm{T}} = C_{g_1}^{\mathrm{T}} (I + bF_H^{\alpha-\beta} + cF_H^{\alpha})^{-1},\ C_{\varphi_2}^{\mathrm{T}} = C_{g_2}^{\mathrm{T}} (I + bF_H^{\alpha-\beta} + cF_H^{\alpha})^{-1}$$

에 의해 근사풀이 $\widetilde{\varphi}_1(t,\ r),\ \widetilde{\varphi}_2(t,\ r)$ 를 계산할수 있다.

$\widetilde{h}_1(t,\ r) := C_{h_1}^{\mathrm{T}} H(t),\ \widetilde{h}_2(t,\ r) := C_{h_2}^{\mathrm{T}} H(t)$ 로 표시하고

$$C_{h_1}^{T} = (h_1(t_1,\ r),\ h_1(t_2,\ r),\ \cdots,\ h_1(t_m,\ r)) \cdot H_{matrix}^{\mathrm{T}}$$
$$C_{h_2}^{\mathrm{T}} = (h_2(t_1,\ r),\ h_2(t_2,\ r),\ \cdots,\ h_2(t_m,\ r)) \cdot H_{matrix}^{\mathrm{T}}$$

를 계산하면 $\widetilde{y}_1(t,\ r),\ \widetilde{y}_2(t,\ r)$ 는

$$\begin{aligned}\widetilde{y}_1(t,\ r)&=C_{h_1}^{\mathrm{T}}H(t)+C_{g_1}^{\mathrm{T}}(I+bF_H^{\alpha-\beta}+cF_H^{\alpha})^{-1}F_H^{\alpha}H(t)\\ \widetilde{y}_2(t,\ r)&=C_{h_2}^{\mathrm{T}}H(t)+C_{g_2}^{\mathrm{T}}(I+bF_H^{\alpha-\beta}+cF_H^{\alpha})^{-1}F_H^{\alpha}H(t)\end{aligned}\tag{11}$$

에 의해 계산된다. 이제 $I+bF_H^{\alpha-\beta}+cF_H^{\alpha}$ 의 불퇴화성은 다음의 사실에 의해 담보된다.

보조정리 4 조건

$$q:=\frac{b}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}+\frac{c}{\Gamma(\alpha+1)}<1\tag{12}$$

을 만족시키면 식 (11)의 행렬 $I+bF_H^{\alpha-\beta}+cF_H^{\alpha}$ 는 불퇴화이다.

참 고 문 헌

[1] R. P. Agarwal et al.; Nonlinear Anal., 72, 2, 859, 2010.

[2] S. Salahshour et al.; Advances in Difference Equations, 2, 12, 112, 2012.

[3] S. Chakraverty et al.; Fuzzy Arbitrary Order System, Fuzzy Fractional Differential Equations and Applications, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 4～26, 2016.

[4] Yicheng Liu, Jun Wu; Advances in Difference Equations, 15, 379, 2015.

주체108(2019)년 3월 15일 원고접수

The Approximate Method for (1, 1)－Solution of the Fuzzy Linear Multi-Term Fractional Differential Equation

Jang Song Ryong, Pak Sun Ae

In this paper, we consider the approximate method of the (1, 1)－solution for a type of the fuzzy linear multi-term fractional differential equation which is the generalization of the fuzzy Bagley-Torvik fractional differential equation. We prove the constructive existence of the solution and obtain an efficient numerical scheme for solving the equation using Haar wavelet operational matrix.

Key words: fuzzy fractional differential equation, generalized Hukuhara differentiability