김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체106(2017)년 제63권 제6호 Vol. 63 No. 6 JUCHE106(2017).

모호력학계가 유한형의 부분밀기에 위상반공액이기 위한 조건

주현희, 김철산

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《이미 일정한 토대가 있고 전망이 확고한 연구대상들에 힘을 넣어 세계패권을 쥐며 그 성과를 확대하는 방법으로 과학기술을 빨리 발전시켜야 합니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 39페지)

력학계들사이의 위상공액성이나 위상반공액성은 많은 력학적성질들을 가지고있는것으로 하여 위상공액성과 반공액성에 대한 연구는 력학계연구에서 중요한 방법의 하나로 되고있다.

기호력학계가 직관성이 좋고 풍부한 력학적성질들을 가지고있는것으로 하여 기호력학계와 다른 력학계들사이의 위상공액성과 위상반공액성에 대한 연구가 활발해지고 있다.[1－3]

초공간이나 모호력학계에 대한 연구에서 기본은 주어진 계와 그것에 의하여 확장된 모호력학계사이의 련관에 대하여 연구하는것이다.

선행연구[2]에서는 리산력학계의 모호화와 모호공간에서 위상들에 대하여 론의하였으며 력학계들사이의 위상공액성(반공액성)이 그것들에 의해 정의된 모호력학계들사이의 위상공액성(반공액성)으로 확장될수 있다는것도 증명하였다.

론문에서는 주어진 계로부터 확장된 모호력학계가 $(\Sigma_A,\ \sigma_A)$에 위상반공액이기 위한 충분조건을 구하였다.

$\boldsymbol{N}$을 정의옹근수전부의 모임이고 $\boldsymbol{N}_0=\boldsymbol{N}\cup\{0\}$이라고 하자.

$(X,\ f)$와 $(Y,\ g)$를 력학계라고 할 때 $g\circ\phi=\phi\circ f$인 우로의 련속넘기기 $\phi: X\to Y$가 존재하면 $(X,\ f)$(간단히 f)는 $(Y,\ g)$(간단히 g)와 ϕ에 의하여 (위상)반공액이라고 하며 넘기기 ϕ가 위상동형이면 f는 g와 ϕ에 의하여 (위상)공액이라고 말한다.

$m\geq 2$, $A=\{1,\cdots,\ m\}$이라고 하면 모임 $\Sigma_m=\{\alpha=(a_0,\ a_1,\cdots): a_i\in A,\ i\in\boldsymbol{N}_0\}$은 거리

$$\rho(\alpha,\ \beta)=\begin{cases}0, & \alpha=\beta\\ 2^{-(k+1)}, & \alpha\neq\beta,\ k=\min\{i\,|\,a_i\neq b_i\}\end{cases}$$

에 의하여 콤팍트거리공간으로 된다. 여기서 $\alpha=(a_0,\ a_1,\cdots)$, $\beta=(b_0,\ b_1,\cdots)\in\Sigma_m$이다.

$\sigma(\alpha)=(a_1,\ a_2,\cdots)$, $\alpha=(a_0,\ a_1,\ a_2,\cdots)\in\Sigma_m$으로 정의되는 완전밀기넘기기(간단히 밀기넘기기) $\sigma:\Sigma_m\to\Sigma_m$은 Σ_m을 Σ_m으로 보내는 련속넘기기이다.

력학계 $(\Sigma_m,\ \sigma)$를 완전밀기라고 부른다.

행렬 $A=(a_{ij})$를 m차행렬이라고 하자.

m 차이행행렬 $A=(a_{ij})$ 에 대하여 모임

$$\Sigma_A=\{(b_0,\ b_1,\ \cdots)\in\Sigma_m \mid a_{b_i b_{i+1}}=1,\ i\in\boldsymbol{N}_0\}$$

은 콤팍트 $\sigma-$ 불변모임이다.

넘기기 $\sigma_A=\sigma|_{\Sigma_A}$ 를 행렬 A 에 대한 유한형의 부분밀기넘기기라고 부르고 부분계 $(\Sigma_A,\ \sigma_A)$ 를 행렬 A 에 대한 유한형의 부분밀기라고 부른다.

정의[3] $(X,\ d)$ 를 거리공간, $f:D\subset X\to X$ 라고 하자.

$A=(a_{ij})$ 가 $m\ (\geq 2)$ 차이행행렬이라고 가정할 때 내부가 서로 사귀지 않는 D 의 m 개의 비지 않는 모임 $\Lambda_i\ (1\leq i\leq m)$ 에 대하여 $f(\Lambda_i)\supset \bigcup_{j,\ a_{ij}=1}\Lambda_j$ 를 만족시키면 넘기기 f 는 Λ_i 에서 $A-$ 쌍확장이라고 말한다. 더우기 모든 $i,\ j\ (1\leq i\neq j\leq m)$ 에 대하여 $d(\Lambda_i,\ \Lambda_j)>0$ 이면 넘기기 f 는 Λ_i 에서 엄격한 $A-$ 쌍확장이라고 말한다. 여기서 $d(\Lambda_i,\ \Lambda_j)$ 는 모임 Λ_i 와 Λ_j 사이의 거리를 표시한다.

행렬 A 의 원소가 모두 1이면 (엄격한) $A-$ 쌍확장넘기기 f 를 간단히 (엄격한) 쌍확장넘기기라고 말한다.

X 를 비지 않은 모임이라고 하자.

모호모임 F 는 넘기기 $F:X\to I=[0,\ 1]$ 이다.

임의의 $c\in(0,\ 1]$ 에 대하여 모임 $[F]_c=\{x\in X: F(x)\geq c\}$ 를 모호모임 F 의 $c-$ 수준모임이라고 부른다. 모호모임 F 의 대 $\mathrm{supp}F=\overline{\{x\in X: F(x)>0\}}$ 를 $[F]_0$ 으로 표시한다.

론문에서는 다음과 같이 정의하고 X 가 콤팍트모임인 경우에 대하여서만 론의한다.

$$\boldsymbol{F}(X)=\{F: X\to I: F \text{ 는 대가 콤팍트인 상반련속넘기기}\}$$

$$\boldsymbol{F}^1(X)=\{F\in\boldsymbol{F}(X):[F]_1\neq\phi\}$$

$\boldsymbol{F}(X)$ 우의 거리를 정의하기 위하여 $\boldsymbol{K}(X)$ 우에서의 하우스돌프거리 DH_X 를 $DH_X(\phi,\ \phi)=0$ 으로 하고 $K\in\boldsymbol{K}(X)$ 에 대하여 $DH_X(\phi,\ K)=\mathrm{diam}(X)$ 로 확장하자. 여기서 $\mathrm{diam}(X)$ 는 모임 X 의 직경이다.

$\boldsymbol{F}(X)$ 우에서의 수준별거리는 $d_\infty(F,\ G)=\sup_{c\in(0,1]} DH_X([F]_c,\ [G]_c)$, $F,\ G\in\boldsymbol{F}(X)$ 로 한다.

d_∞ 에 의하여 유도되는 위상이 도입된 공간 $\boldsymbol{F}(X)$ 와 $\boldsymbol{F}^1(X)$ 는 콤팍트공간도 아니고 가분공간도 아니다.[2] 또한 $F\in\boldsymbol{F}(X)$ 에 대하여 모임 $\mathrm{end}(F)=\{(x,\ c)\in X\times I: F(x)\geq c\}$ 를 모호모임 F 의 자기그라프라고 부르며 자기그라프거리 $d_E(F,\ G)=DH_{X\times I}(\mathrm{end}(F),\ \mathrm{end}(G))$, $F,\ G\in\boldsymbol{F}(X)$ 가 도입된 공간 $\boldsymbol{F}(X)$ 와 $\boldsymbol{F}^1(X)$ 는 콤팍트모임이다.

임의의 련속넘기기 $f:X\to X$ 에 대하여

$$(\hat{f}(F))(x)=\sup_{y\in f^{-1}(x)}\{F(y)\}$$

로 정의되는 넘기기 $\hat{f}$ 은 $(\boldsymbol{F}(X),\ d_\infty)$ (또는 $(\boldsymbol{F}(X),\ d_E)$) 우의 련속넘기기이다. 여기서 $F\in\boldsymbol{F}(X)$, $x\in X$ 이다.

명제 1 X 는 콤팍트거리공간이고 $f:X\to X$ 는 련속이라고 하자.

그러면 임의의 $F\in\boldsymbol{F}(X)$ 와 임의의 $c\in(0,\ 1]$ 에 대하여 $[\hat{f}(F)]_c=\bar{f}([F]_c)=f([F]_c)$ 이다.

계 $(\boldsymbol{F}(X),\ \hat{f})$ (또는 $(\boldsymbol{F}^1(X),\ \hat{f})$)을 X 로부터 확장된 모호력학계라고 부른다.

우리는 $(X,\ f)$ 로부터 확장된 모호력학계 $(\boldsymbol{F}(X),\ \hat{f})$ 이 유한형의 부분밀기 $(\Sigma_A,\ \sigma_A)$ 에 위상반공액이기 위한 충분조건에 대하여 론의한다.

$V_1, V_2, \cdots, V_m \subset X$ 가 서로 사귀지 않는 비지 않은 콤팍트모임들일 때 다음과 같은 조건을 약속하자.

$$V_\alpha = \bigcap_{s=0}^{\infty} f^{-s}(V_{a_s}) \neq \phi,\ \ \alpha = (a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots) \in \Sigma_A \qquad (*)$$

모호공간 $\boldsymbol{F}(X)$ 는 거리 d_∞ 에 의해서는 콤팍트가 아니지만 자기그라프거리 d_E 에 의해서는 콤팍트로 된다.

거리 d_E 가 주어진 콤팍트력학계 $(\boldsymbol{F}(X),\ \hat{f})$ 에 대하여 론의하자.

$K \in \boldsymbol{K}(X)$ 에 대하여 $e_{\boldsymbol{F}}(K) = \{F \in \boldsymbol{F}(X) : [F]_0 \subset K\}$ 라고 놓는다.

보조정리 1 임의의 $K \in \boldsymbol{K}(X)$ 에 대하여 $e_{\boldsymbol{F}}(K)$ 는 $\boldsymbol{F}(X)$ 의 비지 않은 콤팍트모임이다.

증명 임의의 $K \in \boldsymbol{K}(X)$ 에 대하여 $e_{\boldsymbol{F}}(K)$ 가 비지 않았다는것은 분명하다.

$e_{\boldsymbol{F}}(K)$ 에서 코쉬렬 F_n 을 취하면 $\boldsymbol{F}(X)$ 의 콤팍트성에 의하여 $d_E(F_n,\ F) \to 0\ (n \to \infty)$ 인 $F \in \boldsymbol{F}(X)$ 가 존재한다.

$[F]_0 \subset K$ 를 증명하기 위하여 $F(x_0) = c_0 > 0$ 인 $x_0 \in \mathrm{supp}F \setminus K$ 가 존재한다고 가정하면 $d_E(F_n,\ F) \to 0\ (n \to \infty)$ 이므로 렬 $(x_n,\ c_n) \in \mathrm{end}(F_n) \bigcap (K \times I)$ 가 존재하여

$$DH_{X \times I}((x_n,\ c_n),\ (x_0,\ c_0)) \to 0$$

이 성립된다. 이로부터 $d(x_n,\ x_0) \to 0\ (n \to \infty)$ 이 성립되며 따라서 $x_0 \in K$ 이고 이것은 우의 가정에 모순된다.(증명끝)

보조정리 2 X 는 콤팍트거리공간이고 $f : X \to X$ 는 련속넘기기라고 하자.

$\hat{f}$ 을 f 의 Zadeh확장이라고 할 때 $\boldsymbol{F}(X)$ 가 콤팍트이면 임의의 $F \in \boldsymbol{F}(X)$ 에 대하여 $[\hat{f}(F)]_0 = f([F]_0)$ 이 성립된다.

증명 $x \in [\hat{f}(F)]_0,\ \hat{f}(F)(x) = 0$ 이라고 하면 임의의 $n \in \boldsymbol{N}$ 에 대하여 $\hat{f}(F)(x_n) = c_n > 0$ 이고 $x_n \to x (n \to \infty)$ 인 $[\hat{f}(F)]_0$ 의 렬 $\{x_n\}$ 이 존재한다.

임의의 $n \in \boldsymbol{N}$ 에 대하여 $c_n > 0$ 이므로 $x_n \in [\hat{f}(F)]_{c_n} = f([F]_{c_n}) \subset f([F]_0)$ 이 성립된다.

$[F]_0$ 의 콤팍트성과 f 의 련속성에 의하여 렬 $y_n \in [F]_{c_n}$ 과 점 $y \in [F]_0$ 이 있어서 임의의 $n \in \boldsymbol{N}$ 에 대하여 $x_n = f(y_n)$ 이고 $y_n \to y\ \ (n \to \infty)$ 이다.

분명히 $x = f(y)$ 이고 따라서 $x \in f([F]_0)$ 이다.

거꾸로 $x \in f([F]_0)$ 이라고 하면 $x = f(y)$ 인 점 $y \in [F]_0$ 이 존재한다.

$F(y) > 0$ 인 경우는 분명하다.

$F(y) = 0$ 이라고 하면 임의의 $n \in \boldsymbol{N}$ 에 대하여 $F(y_n) = c_n > 0$ 이고 $y_n \to y\ \ (n \to \infty)$ 인 렬 $\{y_n\}$ 이 존재하며 f 의 련속성에 의하여 $\lim\limits_{n \to \infty} f(y_n) = f(y) = x$ 가 성립된다.

또한 임의의 $n \in \boldsymbol{N}$ 에 대하여 $c_n > 0$ 이므로 임의의 $n \in \boldsymbol{N}$ 에 대하여 $f(y_n) \in [\hat{f}(F)]_{c_n}$ 이 성립된다. 이로부터 $x \in [\hat{f}(F)]_0$ 이 나온다.(증명끝)

보조정리 3 $\forall n \in \boldsymbol{N},\ e_{\boldsymbol{F}}(f^{-n}(K)) = \hat{f}^{-n}(e_{\boldsymbol{F}}(K))$

보조정리 4 임의의 $i\in \boldsymbol{N}$ 에 대하여 $V_i\in \boldsymbol{K}(X)$ 라고 하자.

이때 $\bigcap_{i=1}^{\infty}V_i\neq\phi$ 이면 $\bigcap_{i=1}^{\infty}e_{\boldsymbol{F}}(V_i)=e_{\boldsymbol{F}}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}V_i\right)$ 이다.

정리 $(X,\ f)$ 를 콤팍트력학계라고 하자.

$\boldsymbol{F}(X)$ 에 거리 d_E 가 주어지고 $A=(a_{ij})$ 를 $m\,(\geq 2)$ 차이행행렬이라고 할 때 조건 (*)을 만족시키는 X 의 둘씩 사귀지 않는 m 개의 비지 않은 부분모임 V_i 가 존재하면 유한형의 부분밀기 $(\Sigma_A,\ \sigma_A)$ 에 위상반공액인 $(\boldsymbol{F}(X),\ \hat{f})$ 의 부분계 $(Z,\ \hat{f}|_Z)$ 가 존재한다.

증명 임의의 $i\in\{1, 2, \cdots, m\}$ 에 대하여 $Z_i=e_{\boldsymbol{F}}(V_i)$ 라고 하자.

보조정리 1에 의하여 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_m$ 은 둘씩 서로 사귀지 않는 비지 않은 콤팍트모임이며 보조정리 3, 4에 의하여 임의의 $\alpha=(a_0,\,a_1,\,\cdots)\in\Sigma_A$ 에 대하여

$$Z_\alpha=\bigcap_{i=0}^{\infty}\hat{f}^{-i}(Z_{a_i})=\bigcap_{i=0}^{\infty}\hat{f}^{-i}(e_{\boldsymbol{F}}(V_{a_i}))=e_{\boldsymbol{F}}\left(\bigcap_{i=0}^{\infty}\hat{f}^{-i}(V_{a_i})\right)\neq\phi$$

이 성립된다. $Z=\bigcup_{\alpha\in\Sigma_A}Z_\alpha$ 는 $\boldsymbol{F}(X)$ 의 콤팍트모임이고 $\hat{f}$ －불변모임이며 따라서 $(\boldsymbol{F}(X),\ \hat{f})$ 의 부분계 $(Z,\ \hat{f}|_Z)$ 는 유한형의 부분밀기 $(\Sigma_A,\ \sigma_A)$ 와 위상반공액이다.(증명끝)

주의 V 가 한점모임이지만 $e_{\boldsymbol{F}}(V)$ 는 한점모임이 아닐수도 있으므로 $(\boldsymbol{F}(X),\ \hat{f})$ 에 대하여서는 위상공액성이 나오지 않을수 있다. 그러나 $(\boldsymbol{F}^1(X),\ \hat{f}|_{\boldsymbol{F}^1(X)})$ 의 경우에는 우의 결과들이 모두 성립되며 V 가 한점모임이면 $e_{\boldsymbol{F}^1}(V)$ 도 한점모임이라는것을 알수 있다.

이 주의로부터 다음과 같은 결과를 얻는다.

명제 2 $(X,\ f)$ 를 콤팍트력학계라고 하고 $\boldsymbol{F}^1(X)$ 에 거리 d_E 가 주어졌다고 하자.

그리고 X 의 m 개의 서로 사귀지 않는 비지 않은 모임 V_i 가 있어서 조건 (*)을 만족시킨다고 하자.

이때 임의의 V_α 가 한점모임이면 유한형의 부분밀기 $(\Sigma_A,\ \sigma_A)$ 와 위상공액인 $(\boldsymbol{F}^1(X),\ \hat{f})$ 의 부분계 $(Z,\ \hat{f}|_Z)$ 가 존재한다.

따름 $(X,\ f)$ 를 콤팍트력학계, A 를 $(\Sigma_A,\ \sigma_A)$ 가 위상이행적이 되는 m 차이행행렬이라고 하자.

$\overline{\mathrm{Orb}_{\sigma_A}(\alpha_0)}=\Sigma_A$ 인 $\alpha_0\in\Sigma_A$ 에 대하여 m 개의 서로 사귀지 않는 콤팍트부분모임 $V_1,\ V_2, \cdots, V_m\subset X$ 가 있어서 $V_{\alpha_0}\neq\phi$ 이면 유한형의 부분밀기 $(\Sigma_A,\ \sigma_A)$ 에 위상반공액인 $(\boldsymbol{F}(X),\ \hat{f})$ 의 부분계 $(Z,\ \hat{f}|_Z)$ 가 존재한다.

참고문헌

[1] J. S. Cánovas et al.; Fuzzy Sets Syst., 57, 132, 2014.

[2] J. Kupka; Inf. Sci., 181, 2858, 2011.

[3] Y. Shi et al.; Chaos Solitons Fractals, 39, 2138, 2009.

주체106(2017)년 2월 5일 원고접수

Conditions for Topologically Semi-Conjugate of the Fuzzy Dynamical System to the Subshift of Finite Type

Ju Hyon Hui, Kim Chol San

Let X be a compact metric space and $f: X \to X$ be a continuous map.

In the previous study, it is shown that if a dynamical system (X, f) has strictly coupled-expanding property, then the hyperspace dynamical system $(\boldsymbol{K}(X), \bar{f})$ induced by (X, f) has a subsystem which is topologically semi-conjugate to a full shift (Σ_k, σ).

We obtain sufficient conditions for topologically semi-conjugate of the fuzzy dynamical system extended from the obtained system, to (Σ_A, σ_A).

Key words: coupled-expanding, fuzzy dynamical system