김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제2호

# 특이비선형타원형경계값문제의 풀이의 존재정리

리영식, 림창일

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《기초과학을 끊임없이 심화발전시키지 않고서는 첨단과학기술을 연구도입할수도 없고 새로운 높은 수준의 과학기술을 연구개발할수도 없습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제22권 21페지)

론문에서는 다음과 같은 특이타원형경계값문제를 연구한다.

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u)/u^{\beta}, & \Omega \\ u > 0, & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

여기서 $\Omega$는 $\mathbf{R}^N\ (N \ge 1)$의 유계구역으로서 미끈한 경계 $\partial\Omega$를 가지며 $f:[0,\ \infty) \to [0,\ \infty)$는 $f(0) > 0$인 $C^1$급함수이고 $\beta \in (0,\ 1)$이다.

선행연구[1]에서는 특이타원형경계값문제 (1)에 대한 2개의 웃풀이, 아래풀이들의 쌍 $(\psi_1,\ \phi_1),\ (\psi_2,\ \phi_2)$들이 $\phi_1 \le \psi_2 \le \psi_1$, $\phi_1 \le \phi_2 \le \psi_1$, $\phi_2 \not\le \psi_2$를 만족시킬 때 우의 경계값문제에 대한 풀이 $u_0,\ u_1,\ u_2$들의 존재성을 연구하였다.

우리는 엄격한 웃풀이, 엄격한 아래풀이들의 쌍 $(\psi_1,\ \phi_1)$과 강한 웃풀이, 강한 아래풀이들의 쌍 $(\psi_2,\ \phi_2)$가 $\psi_1 \ll \psi_2 \ll \phi_1$, $\psi_1 \ll \phi_2 \ll \phi_1$, $\psi_2 \not\le \phi_2$를 만족시킬 때 우의 경계값문제에 대한 풀이 $u_0$의 존재성에 대하여 연구한다.

특이타원형경계값문제 (1)은 선행연구[1－3]에서 연구되였으나 선행연구의 결과들은 모두 아래풀이 $\phi_1$이 웃풀이 $\psi_1$보다 작은 경우에 대하여 론의한것이였다.

론문에서는 경계값문제 (1)에 대하여 $\phi_1 \gg \psi_1$인 경우에 $C^2(\Omega) \cap C_0^2(\overline{\Omega})$에서의 풀이의 존재성을 밝힌다.

경계값문제 (1)을 $\begin{cases} -\Delta u - f(0)/u^{\beta} = g(u), & \Omega \\ u > 0, & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega \end{cases}$, $g(u) = \dfrac{f(u) - f(0)}{u^{\beta}}$으로 다시 쓸수 있다.

평균값정리에 의하여 $\exists s \in (0,\ t)$, $g(t) = f'(s)t^{1-\beta}$이다.

$\lim_{s \to 0} |f'(s)| < \infty$, $0 < \beta < 1$이므로 $g(0) = 0$이다. 다시말하여 $g$를 $[0,\ \infty)$에서 련속이고 $g(0) = 0$인 함수로 볼수 있다.

론문의 목표는 부동점정리를 리용하여 경계값문제 (1)에 대한 풀이존재정리를 증명하는것이다.

선행연구[3]의 결과를 다시 보기로 하자.

$e \in C^2(\overline{\Omega})$는 문제 $-\Delta e = 1\ (\Omega),\ e = 0\ (\partial\Omega)$의 유일한 정풀이를 표시한다.

이때 $e(x)>0\ (\Omega)$ 이고 $\dfrac{\partial e}{\partial v}<0\ (\partial\Omega)$ 이며 적당한 상수 $k>0$ 에 대하여 $e(x)\ge kd(x)$ 이다. 여기서 $d(x)=\operatorname{dist}(x,\ \partial\Omega)$ 이다.

$C_e(\overline{\Omega})$ 는 $\exists t>0,\ -te\le u\le te$ 인 $u\in C_0(\overline{\Omega})$ 들의 모임이다.

또한 $C_e(\overline{\Omega})$ 는 $\|u\|_e=\inf\{t>0:-te\le u\le te\}$ 에 관하여 바나흐공간이다.

그리고 련속묻기 $C_0^1(\overline{\Omega})\subsetneq C_e(\overline{\Omega})\subsetneq C_0(\overline{\Omega})$ 가 성립된다.

더우기 $C_e(\overline{\Omega})$ 는 정규, 극소이고 비지 않은 내부를 가지는 정추

$$K_e=\{u\in C_e(\overline{\Omega}):u(x)\ge 0\}$$

에 관한 반순서바나흐공간이다.

특히 $\overset{\circ}{K}_e$ 의 내부는 $\exists t_1,\ t_2>0,\ t_1e\le u\le t_2e$ 인 $u\in C_e(\overline{\Omega})$ 들전부의 모임이다.

정의 1 [1] 넘기기 $A_g:C_0(\overline{\Omega})\to C_0^1(\overline{\Omega})$ 를 $w$ 가

$$\begin{cases}-\Delta w-f(0)/w^{\beta}=g(u), & \Omega\\ w>0, & \Omega\\ w=0, & \partial\Omega\end{cases}\tag{2}$$

의 약풀이일 때 $A_g(u)=w$ 인 넘기기로 정의한다.

약풀이 $w\in H_0^1(\Omega)$ 는 $\int\limits_{\Omega}\nabla w\nabla\varphi-f(0)\int\limits_{\Omega}\dfrac{\varphi}{w^{\beta}}=\int\limits_{\Omega}g(u)\varphi,\ \forall\varphi\in C_c^{\infty}(\Omega)$ 를 만족시킨다.

론문 전 과정에 우리는 $g$가 $\mathbf{R}^+$ 에서 증가한다고 가정한다.

정의 2 $\Omega$ 에서 $u>0$ 인 함수 $u$ 가 $u\in C^2(\Omega)\cap C_0^1(\Omega)$ 이고 고전적의미에서 방정식 $-\Delta u=f(u)/u^{\beta}$ 를 만족시키면 $u$ 를 경계값문제 (1)의 풀이라고 말한다. 또한 $u>0$ 이 $u\in C^2(\overline{\Omega})\cap C_0^1(\overline{\Omega})$ 이고 $\Omega$ 의 점들에서 $-\Delta u\le f(u)/u^{\beta}$ (또는 $-\Delta u\ge f(u)/u^{\beta}$ )를 만족시키면 아래풀이(또는 웃풀이)라고 부른다.

그리고 경계값문제 (1)의 풀이가 아닌 아래풀이(또는 웃풀이)를 엄격한 아래풀이(또는 엄격한 웃풀이)라고 말한다. 또한 $\Omega$ 의 매 점들에서 $-\Delta u<f(u)/u^{\beta}$ (또는 $-\Delta u>f(u)/u^{\beta}$ )를 만족시키면 강한 아래풀이(또는 강한 웃풀이)라고 부른다.

보조정리 1 [1] $u$가 경계값문제 (1)의 풀이이기 위해서는 $u$가 넘기기 $A_g$ 의 부동점일것이 필요하고 충분하다.

보조정리 2 [1] 넘기기 $A_g$ 는 $C_0(\overline{\Omega})$ 를 $C_0^1(\overline{\Omega})$ 에로 넘기는 단조연산자이다.

보조정리 3 [1] 넘기기 $A_g:C_e(\overline{\Omega})\to C_e^1(\overline{\Omega})$ 는 완전련속이다.

보조정리 4 [1] $E$ 는 다음의 조건들을 만족시키는 추 $K$ 를 가지는 반순서바나흐공간이라고 하자.

① $K$ 는 아낙추이다. 즉 $\overset{\circ}{K}\ne\phi$ 이다.

② $K$ 는 극소, 정규추이다.

이때 어떤 점 $\psi,\ \phi\in E\ (\psi\ll\phi)$ 와 완전련속인 단조증가연산자 $A:[\psi,\ \phi]\to X$ 가 있어서 $A\psi\ll\psi$ , $A\phi\gg\phi$ 를 만족시킨다고 하면 $A$ 는 $[\psi,\ \phi]$ 에서 부동점 $u_*$ 을 가진다.

주의 1 $A$의 부동점 $u_*$은 $\psi \ll u_* \ll \phi$를 만족시킨다.

보조정리 5[1] (강－극대값원리) $u \in C^2(\Omega)\bigcap C_0^1(\overline{\Omega})$ 가 비부이고 $a(x) \in C(\Omega),\ a(x) \ge 0$ 이며 $\Omega$에서 $-\Delta u + a(x)u \ge 0$ 이면 $\Omega$에서 $u(x) \equiv 0$ 또는 $u(x) > 0$ 이 성립된다.

정리 1 $\psi, \phi$를 각각 경계값문제 (1)의 강한 웃풀이와 강한 아래풀이 즉 $\psi \ll \phi$라고 하면 $[\psi, \phi]$에서 경계값문제 (1)의 풀이 $u_*$ $(\psi \ll u_* \ll \phi)$이 존재한다.

증명 $\psi \in C_0^2(\overline{\Omega})\bigcap C^2(\Omega)$ 가 경계값문제 (1)의 강한 웃풀이이므로 $\Omega$ 의 점들에서 $-\Delta\psi - f(0)/\psi^\beta > g(\psi)$ 가 성립된다.

$\tilde{\psi}$ 을 $-\Delta\tilde{\psi} - f(0)/\tilde{\psi}^\beta = g(\psi)$ 의 유일풀이라고 하면 $\tilde{\psi} = A_g(\psi)$ 이다. 또한 $\Omega$의 점들에서 $-\Delta(\tilde{\psi} - \psi) - f(0)(1/\tilde{\psi}^\beta - 1/\psi^\beta) < 0$ 즉 $-\Delta(\psi - \tilde{\psi}) - f(0)(1/\psi^\beta - 1/\tilde{\psi}^\beta) > 0$ 이 성립된다는것을 알수 있다. 따라서 평균값정리를 리용하면 보조정리 5로부터 $\Omega$ 의 점들에서 $\psi(x) > \tilde{\psi}(x)$ 즉 $\psi \gg \tilde{\psi}$ 또는 $\psi \gg A_g(\psi)$라는것을 알수 있다.

류사하게 강한 아래풀이 $\phi$에 대해서도 $A_g(\phi) \gg \phi$가 성립된다는것을 알수 있다.

$E = C_e(\overline{\Omega})$ 이고 $K_e$가 $E$의 정추라고 하면 $(E,\ K_e)$는 반순서바나흐공간으로 된다.

넘기기 $A_g : [\psi,\ \phi] \to E$는 보조정리 2, 3으로부터 완전련속증가연산자이다.

이로부터 보조정리 4에 의하여 연산자 $A_g$의 부동점 $u_*$이 $[\psi,\ \phi]$에서 존재한다.

보조정리 1에 의하여 $A_g$의 부동점은 $[\psi,\ \phi]$에서 경계값문제 (1)의 풀이로 된다.(증명끝)

보조정리 6 극소, 정규, 아낙추인 $K$를 가지는 반순서바나흐공간은 콤팍트하우스돌프공간 $Q$우에서 정의된 련속함수들의 바나흐공간과 위상동형이다.

이 위상동형넘기기에 의한 $K$의 상은 $Q$우에서 부아닌 련속함수들의 순서추이다.

보조정리 7[1] $E$는 보조정리 4의 조건 ①, ②를 만족시키는 순서추 $K$를 가지는 반순서바나흐공간이고 어떤 점 $\psi_1,\ \phi_1 \in E$ $(\psi_1 \ll \phi_1)$와 완전련속인 증가연산자 $A:[\psi_1,\ \phi_1] \to E$ 가 있어서 $A\psi_1 < \psi_1$, $A\phi_1 > \phi_1$을 만족시킨다고 하자.

만일 어떤 점 $\psi_2,\ \phi_2 \in [\psi_1,\ \phi_1]$이 있어서 $\psi_1 \ll \psi_2$, $\phi_2 \ll \phi_1$, $\phi_2 \ll A\phi_2$, $A\psi_2 \ll \psi_2$를 만족시키면 $A$는 $[\psi_1,\ \phi_1]$에서 적어도 하나의 부동점 $u_0$을 가진다. 여기서

$$u_0 \in [\psi_1,\ \phi_1] \setminus ([\psi_2,\ \phi_1] \cup [\psi_1,\ \phi_2])$$

보조정리 7을 넘기기 $A_g$에 적용하여 경계값문제 (1)에 대한 다음의 기본정리를 얻는다.

정리 2 경계값문제 (1)의 엄격한 웃풀이와 엄격한 아래풀이들의 쌍 $(\psi_1,\ \phi_1)$과 강한 웃풀이와 강한 아래풀이들의 쌍 $(\psi_2,\ \phi_2)$가 존재하여

$$\psi_1 \ll \psi_2 \ll \phi_1,\ \psi_1 \ll \phi_2 \ll \phi_1,\ \psi_2 \not\leq \phi_2$$

를 만족시킨다고 하자. 이때 적어도 하나의 풀이 $u_0$이 존재한다. 여기서

$$u_0 \in [\psi_1,\ \phi_1] \setminus ([\psi_1,\ \phi_2] \cup [\psi_2,\ \phi_1])$$

증명 $(\psi_1,\ \phi_1)$이 각각 엄격한 웃풀이와 엄격한 아래풀이들의 쌍이고 $(\psi_2,\ \phi_2)$가 각각 강한 웃풀이와 강한 아래풀이들의 쌍이라는데로부터 정리 1에서와 같은 방법으로 $X$로 제한시킨 연산자 $A_g : X \to C_e(\overline{\Omega})$가

$$A_g(\psi_1) < \psi_1,\ \phi_1 < A_g(\phi_1),\ A_g(\psi_2) \ll \psi_2,\ \phi_2 \ll A_g(\phi_2)$$

를 만족시킨다는것을 얻는다.

한편 보조정리 2, 3에 의하여 $A_g$는 완전련속이고 증가연산자이다.

결국 보조정리 7의 모든 조건들이 만족된다.

그리하여 연산자 $A_g$의 부동점의 존재성이 보조정리 7로부터 쉽게 나오며 이로부터 경계값문제 (1)이 적어도 하나의 풀이 $u_0 \in [\psi_1,\ \phi_1] \setminus ([\psi_1,\ \phi_2] \cup [\psi_2,\ \phi_1])$ 을 가진다는것을 알수 있다.(증명끝)

주의 2 선행연구[1]에서는 경계값문제 (2)에서 $g$가 엄격한 증가함수라는것을 가정하였다. 그러나 론문에서는 $g$가 증가함수라는것만 가정하였다.

주의 3 선행연구[1]에서는 아래풀이가 웃풀이보다 작은 경우에 경계값문제 (1)에 대한 세 풀이의 존재성을 밝혔다. 그러나 론문에서는 웃풀이가 아래풀이보다 작은 경우에 경계값문제 (1)에 대한 풀이의 존재성을 밝혔다.

## 참 고 문 헌


[1] R. Dhanya et al.; J. Math. Anal. Appl., 424, 1, 598, 2015.

[2] V. Kostrykin et al.; http://dx.doi.org/10. 1186/1687, 211, 2012.

[3] H. Amann; SIAM, 18, 4, 620, 1976.


주체107(2018)년 12월 5일 원고접수

## The Existence Theorem of Solutions for Singular Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems

*Ri Yong Sik, Rim Chang Il*

We prove the existence theorem of solutions for singular nonlinear elliptic boundary value problems of the form $-\Delta u = f(u)/u^{\beta}$ in $\Omega$ and $u = 0$ on $\partial\Omega$, where $\Omega$ is a bounded domain in $\mathbf{R}^N\ (N \ge 1)$ with a smooth boundary $\partial\Omega$, $f: [0,\ \infty) \to [0,\ \infty)$ is a $C^1$ function with $f(0) > 0$ and $\beta \in (0,\ 1)$.

Key words: singular nonlinear elliptic boundary value problem, ordered Banach space