김일성종합대학학보 주체107(2018)년
(수학) 제64권 제1호

아핀면을 리용한 일반화된 균형적시합배치의 한가지 구성법

김성철, 장일광

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《기초과학은 과학기술강국을 떠받드는 주추입니다. 기초과학이 든든해야 나라의 과학기술이 공고한 토대우에서 끊임없이 발전할수 있습니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 40페지)

GBTD$(k,\ m)$은 블로크들을 다음의 두가지 조건을 만족시키도록 $m\times(km-1)$형행렬로 배렬할수 있는 균형적불완전블로크배치(Balanced Incomplete Block Design)이다.

① 점모임의 모든 원소는 매 렬의 꼭 1개 블로크에 포함된다.

② 점모임의 모든 원소는 매 행의 기껏 k개 블로크에 포함된다.

선행연구[5, 7]에서는 $k=2,\ 3$인 경우의 GBTD$(k,\ m)$의 존재성을 밝혔으며 선행연구[3, 6]에서는 $k=4$인 경우의 존재성을 고찰하였다.

한편 선행연구[1, 2, 4]에서는 GBTD$(k,\ k)$와 동등한 k^2차행렬을 도입하여 p가 홀씨수이고 n이 2이상의 옹근수일 때 GBTD$(p^n,\ p^n)$을 구성하였다. 론문에서는 아핀면을 리용하여 $n(n>2)$이 씨수의 제곱일 때 GBTD$(n,\ n)$을 구성하는 한가지 방법을 제기하였다.

1. 기 초 개 념

정의 1[5] V를 v개의 원소(점이라고 부른다.)로 이루어진 모임, B를 V의 어떤 $k-$부분모임(블로크라고 부른다.)들의 모임이라고 하자. 만일 V의 임의의 서로 다른 두 원소들이 B의 반드시 λ개의 블로크들에 함께 포함되면 순서붙은 쌍 $(V,\ B)$를 $(v,\ k,\ \lambda)-$균형적불완전블로크배치(간단히 $(km,\ k,\ k-1)-$BIBD로 표시) 또는 $(v,\ k,\ \lambda)-$BIBD라고 부른다.

정의 2[8] $(V,\ B)$를 $(v,\ k,\ \lambda)-$BIBD라고 가정하자. B의 서로 사귀지 않는 블로크들의 모임으로서 합이 V로 되는 모임을 $(V,\ B)$의 병렬클라스라고 부른다. B의 병렬클라스들(r개)로의 분할을 분해라고 부른다. 만일 B가 적어도 하나의 분해를 가진다면 $(V,\ B)$를 분해가능한 BIBD라고 부른다.

정의 3[8] $(n^2,\ n,\ 1)-$BIBD를 n차아핀면이라고 부른다.

보조정리 1[8] $(v,\ k,\ \lambda)-$BIBD는 $(\lambda v(v-1))/(k(k-1))$개의 블로크를 가진다. 즉 $(km,\ k,\ k-1)-$BIBD는 $m(km-1)$개의 블로크를 가진다.

정의 4[5] 만일 어떤 $(km,\ k,\ k-1)-$BIBD $(V,\ B)$에 대하여 B의 블로크들을 다음의 두가지 조건을 만족시키는 $m\times(km-1)$형행렬로 배렬할수 있다면 $(V,\ B)$를 일반화된 균형적시합배치(Generalized Balanced Tournament Design)라고 부르고 GBTD$(k,\ m)$으로 표시한다.

㉠ V의 모든 점은 매 렬에서 꼭 1개 블로크에 포함된다.

㉡ V의 모든 점은 매 행의 기껏 k개 블로크에 포함된다.

정의에 의하여 GBTD는 그 GBTD에 대응하는 블로크들의 배렬로 생각할수 있다.

이제부터 GBTD를 대응하는 그 블로크들의 배렬로 생각하겠다.

정의에서 볼수 있는바와 같이 GBTD는 분해가능한 BIBD이며 매 렬이 병렬클라스들이다.

모든 정의옹근수 $m \neq 2$에 대하여 GBTD(2, m)과 GBTD(3, m)이 존재하며[5, 7] GBTD(k, 2)는 존재하지 않는다. 또한 $m \geq 5$, $m \notin \{28, 32, 33, 34, 37, 38, 39, 44\}$일 때 GBTD(4, m)이 존재한다.[6]

한편 선행연구[1, 2, 4]에서는 GBTD(k, k)와 동등한 k^2차행렬을 도입하여 $p > 2$가 씨수일 때 GBTD(p^n, p^n)을 구성하였다.

론문에서는 아핀면을 리용하여 $n(n > 2)$이 씨수의 제곱일 때 GBTD(n, n)을 구성하는 한가지 방법을 제기한다.

2. 아 핀 면

아핀면은 분해가능하다.[8] 선행연구 [8]에서는 1개의 동등관계를 도입하여 아핀면의 분해가능성을 론증하였다. 이것을 리용하면 다음의 사실을 쉽게 얻는다.

보조정리 2 아핀면은 분해가능하며 서로 다른 병렬클라스에 속하는 임의의 2개 블로크는 꼭 하나의 공통점을 포함한다.

n차아핀면은 $(n^2, n, 1)-$BIBD이며 보조정리 1로부터 $n(n+1)$개의 블로크를 가진다. GBTD의 두 파라메터가 같은 경우 즉 GBTD(k, k)는 정의에서의 두가지 조건을 만족시키는 $(k^2, k, k-1)-$BIBD이다. 다음의 보조정리들로부터 $k(k > 2)$가 씨수의 제곱일 때 $(k^2, k, k-1)-$BIBD가 존재한다는것은 쉽게 알수 있다.

보조정리 3[8] 임의의 씨수의 제곱 q에 대하여 q차아핀면(즉 $(q^2, q, 1)-$BIBD)이 존재한다.

보조정리 4[8] $(v, k, \lambda_1)-$BIBD와 $(v, k, \lambda_2)-$BIBD가 존재하면 $(v, k, \lambda_1+\lambda_2)-$BIBD가 존재한다.

문제는 k차아핀면 즉 $(k^2, k, 1)-$BIBD를 리용하여 합구성법으로 GBTD의 정의에서의 두가지 조건 ㉠ ㉡를 만족시키는 $(k^2, k, k-1)-$BIBD를 구성하는것이다. 아핀면의 블로크들을 매 렬에 하나의 병렬클라스를 놓는 방법으로 행렬형태로 배렬하고 매 행에 포함되여있는 점들의 출현회수를 고려하여 이러한 배렬들을 나란히 붙이면 GBTD를 얻을수 있다. 3차아핀면의 배렬에서 점들의 출현회수를 보면 다음과 같다.

실례 1 3차아핀면 $(9, 3, 1)-$BIBD의 12개의 블로크들을 매 렬에 하나의 병렬클라스가 놓이도록 행렬형태로 배렬하면 매 행에서 점들의 출현회수는 다음의 세가지 경우들중 어느 하나로 된다.

경우 1: 4번 출현하는 점이 1개, 한번 출현하는 점이 8개 있으며 출현하지 않는 점은 없다.(표 1)

경우 2: 3번 출현하는 점이 1개, 2번 출현하는 점이 3개, 1번 출현하는 점이 3개, 출현하지 않

는 점이 2개(표 2)

경우 3: 2번 출현하는 점이 6개, 출현하지 않는 점이 3개(표 3)

표 1. 경우 1

4	4	4	4
1	1	1	1

표 2. 경우 2

3	3	3	2.1
2.1	2.2	2.3	2.2

표 3. 경우 3

2.1	2.1	2.2	2.3
2.2	2.4	2.4	2.5

이 경우는 4개의 렬들가운데서 2개 렬을 뽑는 조합의 수와 같다.

우의 배렬표현에서 매 렬은 하나의 블로크를 표현하며 매 칸의 수들은 그 점의 출현회수를 나타낸다. 실례로 2. 3은 두번 나타나는 세번째 점이라는 표시이다. 하나의 그림은 아핀면의 블로크배렬에서 1개의 행을 나타낸다.

정리 $n(n>2)$이 씨수의 제곱일 때 아핀면을 리용하여 GBTD(n, n)을 구성할수 있다.

증명 보조정리 3으로부터 $n(n>2)$이 씨수의 제곱일 때 n차아핀면 $(n^2, n, 1)-$BIBD가 존재하며 보조정리 4로부터 $(n^2, n, n-1)-$BIBD이 존재한다.

보조정리 1로부터 n차아핀면 $(n^2, n, 1)-$BIBD는

$$\frac{\lambda v(v-1)}{k(k-1)}=\frac{n^2(n^2-1)}{n(n-1)}=n(n+1)$$

개의 블로크를 가진다.

보조정리 2로부터 아핀면의 블로크들을 매 렬에 1개의 병렬클라스가 놓이도록 $n\times(n+1)$형행렬형태로 배렬하면서 1개의 행에 n번 포함되는 점이 1개, 두번 포함되는 점이 n개, 한번 포함되는 점이 n개, 한번도 포함되지 않는 점이 n^2-2n-1개 되도록 할수 있다.(표 4)

표 4. 아핀면의 블로크들에서 점들의 출현회수

n	n	n	$\cdots$	n	2.1
2.1	2.2	2.3	$\cdots$	2. n	2.2
1	1	1	$\cdots$	1	2.3
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
1	1	1	$\cdots$	1	2. n

쉽게는 매 병렬클라스에서 어떤 특정한 점을 포함하는 블로크들을 맨 웃행에 놓고 마지막 병렬클라스에서는 그 점을 포함하지 않는 블로크를 놓으면 된다.

다음으로 이러한 $(n-1)$개의 아핀면을 GBTD정의에서의 두가지 조건이 만족되도록 즉 매 점이 한 행에 기껏 n번 포함되도록 나란히 붙이면 된다. 방법은 많지만 그중에서 한가지 방법은 다음과 같다.

먼저 매 아핀면에서의 같은 행에 n번 포함되는 점이 1개, 두번 포함되는 점이 n개, 한번 포함되는 점이 n개, 한번도 포함되지 않는 점이 n^2-2n-1개로 되도록 한다.

다음으로 $n-1$개의 아핀면들에서 점모임을 각각 치환하는 방법으로 서로 다른 아핀면에서의 점포함회수가 표 5와 같이 되도록 한다.

우의 표 5에서는 매개 행들은 1개 아핀면에서의 한 행을 나타내는데 렬들은 n^2개의 점들로 첨수화되였다.

마지막으로 $n-1$개의 아핀면들에서 첫번째 렬에 대응하는 점과 그리고 한번 포함되면서 서로 다른 렬에 대응하는 점들과 치환을 진행하면 GBTD정의에서의 두가지 조건을 만족시킬수 있다.

표 5. 아핀면들의 블로크들의 한가지 배렬

$n-1$개	0	n	0	…	0	2	2	…	2	1	1	…	1	…	1	1	…	1
	0	0	n	…	0	1	1	…	1	2	2	…	2	…	1	1	…	1
	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
	0	0	0	…	n	1	1	…	1	1	1	…	1	…	2	2	…	2
		$n-1$개				n개				n개					n개			

실례로 첫째 아핀면의 $2n+1$번째 점, 둘째 아핀면의 $3n+1$번째 점, $\cdots$, $n-2$번째 아핀면의 n^2-n+1번째 점, $n-1$번째 아핀면의 $n+1$번째 점과 각각 치환을 진행하면 $n-1$개의 아핀면들에서 특정한 번호의 행에서의 점포함회수는 표 6과 같이 된다.

표 6. 표 5의 블로크들의 재배렬

$n-1$개	1	n	0	…	0	2	2	…	2	0	1	…	1	…	1	1	…	1
	1	0	n	…	0	1	1	…	1	2	2	…	2	…	1	1	…	1
	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
	1	0	0	…	n	0	1	…	1	1	1	…	1	…	2	2	…	2
		$n-1$개				n개				n개					n개			

(증명끝)

우의 방법을 적용할 때 GBTD의 조건을 한 행에서만 만족시키도록 하여서는 안되며 모든 행에서 다 같이 만족되도록 하여야 한다는것을 주의해둔다.

실례 2 우의 정리에서와 같이 2개의 3차아핀면을 가지고 GBTD(3, 3) $(V,\ B)$를 구성하면 다음과 같다.

$$V=\{00,\ 01,\ 02,\ 10,\ 11,\ 12,\ 20,\ 21,\ 22\}$$

$B=$

00	00	02	10	12	12	20	21
10	11	11	11	21	01	01	01
20	22	20	12	02	00	02	22
01	01	00	20	11	11	12	02
11	12	12	21	01	22	22	10
21	20	21	22	10	02	10	00
02	02	01	00	20	20	11	12
12	10	10	01	22	21	21	11
22	21	22	02	00	10	00	20

오른쪽의 아핀면은 왼쪽의 아핀면에서 점모임에 치환 (00, 12, 22)(01, 11) (02, 20)(10, 21)을 적용한것이다.

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보(자연과학), 63, 1, 15, 주체106(2017).
[2] **김일성**종합대학학보(자연과학), 58, 12, 7, 주체101(2012).
[3] **김일성**종합대학학보(자연과학), 61, 3, 3, 주체104(2015).
[4] S. C. Kim et al.; arXiv:1208.1920v1 [math.CO] 9, 2012.
[5] C. J. Colbourn et al.; The CRC Handbook of Combinatorial Designs, CRC Press, 72～336, 2007.
[6] J. X. Yin et al.; Des. Codes Cryptogr., 46, 211, 2008.
[7] E. R. Lamken; Des. Codes Cryptgr., 11, 37, 1997.
[8] D. R. Stinson; Combinatorial Designs, Springer, 1～108, 2004.

주체106(2017)년 8월 10일 원고접수

A Method to Construct Generalized Balanced Tournament Designs using Affine Planes

Kim Song Chol, Jang Il Gwang

We propose a new method to construct GBTD(n, n) using affine planes when $n(n > 2)$ is a prime power.

Key words: generalized balanced tournament design(GBTD), affine plane