김일성종합대학학보 주체107(2018)년
수 학 제64권 제4호

단위원판에 평등분포된 점들의 델로네이3각형화의 선형시간분리기

조 현 웅

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《오늘 우리앞에는 과학연구사업에서 혁명적전환을 일으켜 나라의 과학기술을 새로운 높은 단계에로 발전시켜야 할 무거운 과업이 나서고있습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제15권 484페지)

분할지배방식은 많은 문제들에서 최량시간복잡도를 달성하게 하는 좋은 알고리듬구성방식으로서 문제를 같은 류형의 보다 작은 부분문제들로 가르고 재귀적으로 푼 다음 부분문제들의 결과들을 종합하여 원래문제의 풀이를 얻는다.

평면그라프에 관한 립톤과 타잔의 평면분리기정리는 바로 그라프관련문제들에서 분할지배방식을 리용할수 있게 하는 리론적토대이다.[3] 평면분리기정리로부터 n개 정점을 가진 임의의 평면그라프 G는 $O(\sqrt{n})$개의 정점들을 제거하여 크기가 기껏 $2n/3$인 2개의 비교차하는 부분그라프들로 가를수 있다. 또한 분리기는 $O(n)$시간동안에 찾을수 있다.

델로네이3각형화는 계산기하학에서 가장 중요한 기하구조의 하나로서 문제해결의 기초단계에서 그것을 리용하는 실례들은 대단히 많다. 따라서 델로네이3각형화의 분리기를 빠른 시간에 구성한다면 델로네이3각형화를 기초연산으로 하는 알고리듬적문제들에서의 시간복잡도를 개선할수 있다.

일반적인 위치에 놓인 평면의 n개 점들의 모임에 관한 델로네이3각형화는 $O(n\log n)$시간에 구성할수 있다.[2] 구성한 3각형화에 평면분리기정리를 적용하면 총적으로 $O(n\log n)$시간에 델로네이3각형화의 분리기를 구성할수 있다. 만일 델로네이3각형화의 양적인 구성과정이 없다면 그것의 평면분리기를 $O(n\log n)$보다 빠른 시간동안에 구성할수도 있다. 평면의 점모임이 일반적으로 주어지는 경우 델로네이3각형화를 구성하지 않고 그것의 분리기를 구하는것은 어려운 문제이다.

론문에서는 단위원판에 우연적으로 평등분포된 n개 점들의 모임 P에 관한 분리기를 구성하는 $O(n)$시간알고리듬을 제기하고 얻어지는 분리기가 높은 확률로 P의 델로네이3각형화의 분리기로 된다는것을 증명한다.

단위원판에 평등분포된 점들에 대한 연구는 평면의 기하적우연그라프에 대한 현실적요구로부터 많이 제기된다. 기하적우연그라프는 평면에서 우연적으로 구성되는 여러가지 망을 모형화하는 수단으로서 오늘날 무선망과 같은 정보통신망에서 자주 쓰인다. 실례로 무선망에서 에네르기소모가 적은 경로를 구성하려면 우연점들로부터 생성된 기하적그라프에서 릉길이의 아래웃한계를 평가하여야 한다.

우리는 많은 경우 반경이 1인 원을 단위원으로 리해한다. 그러나 론문에서는 리론적해석을 쉽게 할 목적으로 면적이 1인 원판을 단위원판으로 약속한다. 또한 우연점들이 일

반적인 위치에 놓이지 않을 확률은 무시할수 있을 정도로 매우 작기때문에 그것에 대한 가정을 따로 하지 않는다.

정의 1 n개 정점을 가진 그라프 G의 정점모임의 부분모임 C가 다음의 조건을 만족시키면 $\delta-$분할 $f(n)-$분리기라고 부른다.

① $|C|\le f(n)$

② $G-C$는 $|A|, |B|\le \delta n$이고 $a\in A,\ b\in B$ 사이에는 릉이 없는 두 부분 A, B로 분할할수 있다.(여기서 f는 함수이고 $0<\delta<1$이다.)

③ A, B, C는 선형시간동안에 구할수 있어야 한다.

모든 그라프가 다 분리기를 가지는것은 아니다. 실례로 완전그라프를 들수 있다. 립톤과 타잔은 임의의 평면그라프는 $(3/4)-$분할 $O(\sqrt{n})-$분리기를 가진다는것을 증명하였다.[3]

정의 2[4] $\mathbf{R}^d$의 닫긴 구들의 모임 $\Gamma=\{B_1,\ \cdots,\ B_n\}$에 대하여 $\mathbf{R}^d$의 그 어떤 점도 $k+1$개이상의 구안에 엄격히 놓이지 않는다면 Γ을 k겹체계라고 부른다.

그림 1은 평면에서 3겹체계의 한가지 실례를 보여준다.

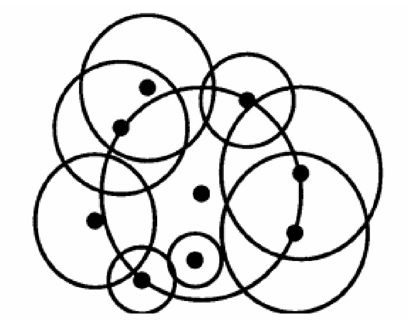

그림 1. 평면에서 3겹체계

정리 1[4] $\Gamma=\{B_1,\ \cdots,\ B_n\}$을 $\mathbf{R}^d$의 k겹체계라고 하자. 그러면

$$|\Gamma_O(S)|=O(k^{1/d}n^{1-1/d}),\ |\Gamma_I(S)|,\ |\Gamma_E(S)|\le\frac{(d+1)n}{d+2}$$

이 성립하는 적당한 구면 S가 존재한다.

여기서 $\Gamma_E(S)$는 S의 외부에 놓이는 Γ의 구들의 모임, $\Gamma_I(S)$는 S의 내부에 놓이는 구들의 모임, $\Gamma_O(S)$는 S와 교차하는 구들의 모임이다. 더우기 기하적분리기를 구성하는 알고리듬의 실행시간의 웃한계는 $c(\varepsilon,\ d)+O(nd)$이다. 여기서 $c(\varepsilon,\ d)$는 ε과 d에만 의존하는 상수이다.

그림 2는 기하적분리기정리를 직관적으로 보여주고있다. 그림에서 점선으로 표시한 원은 S이고 진한색으로 표시된 원들은 $\Gamma_O(S)$의 원들이다. 그리고 연한색으로 표시된 원들은 각각 $\Gamma_E(S)$와 $\Gamma_I(S)$의 원들을 가리킨다. 기하적분리기정리의 가장 직접적인 응용은 k겹체계의 교차그라프의 평면분리기구성이다.

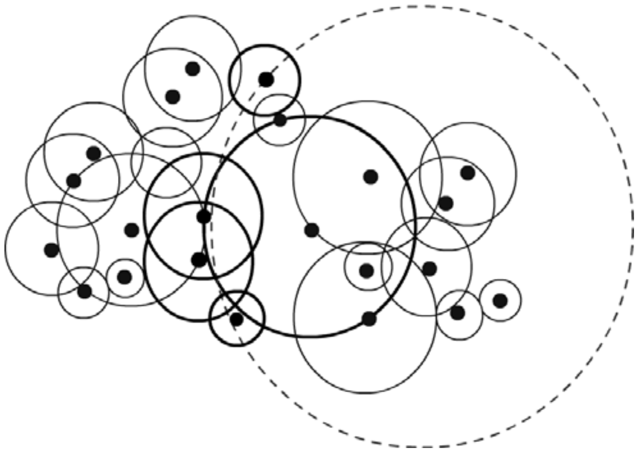

그림 2. 기하적분리기정리의 직관적표상

정의 3 $\Gamma=\{B_1,\ \cdots,\ B_n\}$을 $\mathbf{R}^d$의 k겹체계라고 하자. 이때 $V=\Gamma$이고

$$E=\{(B_i,\ B_j)\,|\,B_i\cap B_j\ne\varnothing\}$$

인 무방향그라프를 Γ의 교차그라프라고 부른다.

정리 2로부터 k겹체계의 교차그라프는 선형시간분리기를 가진다는 사실이 곧 나온다.

정리 2[4] $\Gamma=\{B_1,\ \cdots,\ B_n\}$ 을 $\mathbf{R}^d$ 의 k 겹체계라고 하자. Γ 의 교차그라프는 $((d+1)/(d+2))-$분할 $O(k^{1/d}n^{1-1/d})-$분리기를 가진다.

알고리듬 1

① 단위원판의 매 점을 중심으로 작은 반경 r 를 가진 원을 그린다.(r 의 구체적인 값은 알고리듬의 해석에서 주기로 한다.)

② 우에서 구성한 k 겹체계의 $(3/4)-$분할 $O(\sqrt{nk})-$분리기를 구한다.

알고리듬 1이 출력한 분리기가 론문에서 해결하려고 하는 분리기로 된다는것을 증명하기 위하여 알고리듬을 단계별로 나누어 해석한다.

우선 알고리듬 1의 단계 ①에서 리용한 반경 r 의 값과 작은 원들을 그려 얻은 k 겹체계의 성질을 밝히는것이다.

다음의 보조정리는 평면의 단위원판에 평등분포된 점들의 델로네이3각형화에서 릉길이의 웃한계에 대한 확률적해석을 보여준다.

보조정리[1] 단위원판에 평등분포된 n 개 점들의 모임 P 에 관한 델로네이3각형화 $\mathrm{Del}(P)$ 는 다음의 성질을 만족시킨다. 즉

$\binom{n}{2}(n-2)e^{-\sqrt{2}(n-3)/\pi}<\varepsilon<1$ 인 임의의 ε 에 대하여 적어도 $1-\varepsilon$ 의 확률로

$$d(a,\ b)\ge\sqrt[3]{\frac{16}{\sqrt{\pi}}\frac{\ln\left(\binom{n}{2}(n-2)/\varepsilon\right)}{n-3}}$$

인 릉 $(a,\ b)\in\mathrm{Del}(P)$ $(a,\ b\in P)$ 는 존재하지 않는다.

사실 알고리듬 1의 단계 ①에서 리용하는 r 의 값은 보조정리에서 밝힌 릉길이의 웃한계와 같게 설정한다.

정리 3 단위원판에 평등분포된 n 개 점들의 모임 P 의 매 점에서 반경이

$$r=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{16}{\sqrt{\pi}}\frac{\ln\left(\binom{n}{2}(n-2)/\varepsilon\right)}{n-3}}$$

인 원을 그리면 이러한 원들로 이루어진 k 겹체계 Γ 는 다음의 성질을 만족시킨다.(여기서 ε 에 대한 가정은 보조정리에서와 같다.)

$$k=O(n^{1/3+\varepsilon})$$

$\mathrm{Del}(P)$ 는 적어도 $1-\varepsilon$ 의 확률로 Γ 의 교차그라프의 부분그라프이다.

증명 k 는 평면의 1개 점을 공통으로 포함할수 있는 구들의 최대개수이다. 알고리듬 1의 단계 ①에서는 매개 우연점에서 같은 반경 r 인 원을 그리였다. 따라서 단위원판의 임의의 한 점을 중심으로 반경 r 인 원안에 놓인 우연점들의 원은 모두 사귄다. 즉 k 에 대한 평가는 단위원판의 임의의 점을 중심으로 반경 r 인 원을 그렸을 때 그안에 몇개의 우연점이 놓이는가 하는 문제로 귀착된다.

단위원판에서 점들은 평등분포에 따르므로 점개수의 수학적기대값은 다음과 같다.

$$Ek = \pi r^2 n = \sqrt[3]{4n\left(\pi\binom{n}{2}(n-2)/\varepsilon\right)^2} = O(n^{1/3+\varepsilon})$$

보조정리로부터 적어도 $1-\varepsilon$ 의 확률로 Del(P) 안의 모든 릉들의 거리는 $2r$ 를 넘지 못한다. 따라서 Del(P) 에서 릉으로 련결된 두 정점에서 반경 r 로 그린 원은 반드시 사귄다. 이것은 Del(P) 에서 두점사이에 릉이 존재하면 교차그라프에서도 그 두점사이에 릉이 존재한다는것을 의미한다. 즉 교차그라프는 Del(P) 를 자기의 부분그라프로 포함한다.

알고리듬 1은 단계 ②에서 교차그라프의 분리기를 구하는것으로 끝난다. 우리가 목적하는것은 델로네이3각형화의 분리기이므로 결과적인 분리기가 사실상 주어진 점모임의 델로네이3각형화의 분리기임을 증명하여야 한다.

따름 단위원판에 평등분포된 n 개 점들의 델로네이3각형화의 $(3/4)-$ 분할 $O(n^{2/3+\varepsilon})-$ 분리기는 적어도 $1-\varepsilon$ 의 확률로 선형시간에 구할수 있다.(여기서 ε 에 대한 가정은 보조정리 1에서와 같다.)

참 고 문 헌

[1] E. M. Arkin et al.; Computational Geometry: Theory and Applications, 48, 134, 2015.

[2] B. Mark et al.; Computational Geometry-Algorithms and Applications, Springer, 199～208, 2008.

[3] R. J. Lipton et al.; SIAM J. Applied Mathematics, 36, 2, 177, 1979.

[4] G. L. Miller et al.; J. ACM, 44, 1, 1, 1997.

주체107(2018)년 6월 5일 원고접수

Linear Time Separator for the Delaunay Triangulation of Random Points Uniformly Distributed in a Unit Disk

Jo Hyon Ung

A planar separator for the Delaunay triangulation of n points on the plane can be constructed in $O(n\log n)$ time. We propose an $O(n)$ time algorithm to find a separator for a set P of n points distributed uniformly at random in a unit disk and prove that the resulting separator is the one for the Delaunay triangulation of P with high probability.

Key words: Delaunay triangulation, planar graph, separator