김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체105(2016)년 제62권 제1호 Vol. 62 No. 1 JUCHE105(2016).

일정곡률통계다양체들사이의 통계적넣기에 대하여

민 철 림

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《선진과학기술을 받아들이기 위한 사업을 적극적으로 벌려야 하겠습니다.

선진과학기술을 받아들이는것은 나라의 과학기술을 빨리 발전시키기 위한 중요한 방도의 하나로 됩니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제15권 499～500페지)

최근시기 일정곡률통계다양체의 통계적넣기의 성질들이 많이 연구되였다.[1, 2, 4]

선행연구[4]에서는 통계다양체들사이의 통계적넣기의 개념이 정의되고 특수한 통계다양체들인 평탄리만다양체의 일정헤쎄곡률헤쎄다양체에로의 통계적넣기의 성질이 연구되였으며 선행연구[1, 2]에서는 일정곡률리만다양체의 일정헤쎄곡률헤쎄다양체 및 일정곡률통계다양체에로의 통계적넣기의 성질들이 연구되였다.

선행연구들을 분석해보면 일정곡률통계다양체의 특수한 몇가지 경우들에 대해서만 통계적넣기의 성질을 론의하였을뿐 일정곡률통계다양체들사이의 통계적넣기에 대해서는 론의하지 못하였다.

론문에서는 선행연구결과를 포괄하면서 일정한 조건을 만족시키는 일정곡률통계다양체 $(M,\ \nabla,\ g)$ 들사이의 통계적넣기의 특성에 대하여 론의한다.

M 을 n 차원다양체, ∇ 를 M 우의 대칭접속, g 를 M 우의 리만계량, TM 을 M 우의 벡토르마당전부의 모임, $TM^{(r,\ s)}$ 를 M 우의 $(r,\ s)$ 형텐소르마당전부의 모임, R 를 M 우의 곡률텐소르마당이라고 하자.

$(M,\ \nabla,\ g)$ 가 통계다양체일 때 즉 ∇ 가 대칭접속이고 $(\nabla_X g)(Y,\ Z)=(\nabla_Y g)(X,\ Z)$, $\forall X,\ Y,\ Z\in TM$ 일 때 쌍 $(\nabla,\ g)$ 를 통계구조라고 부른다.[4]

다양체 M 에서는 임의의 $\alpha\in \boldsymbol{R}$ 에 대하여 접속 $\nabla^{(\alpha)}$ 가 $\nabla^{(\alpha)}=\dfrac{1+\alpha}{2}\nabla+\dfrac{1-\alpha}{2}\overset{*}{\nabla}$ 로 정의된다. 여기서 $\nabla,\ \overset{*}{\nabla}$ 은 M 우의 쌍대인 접속들이다.[5]

통계다양체 $(M,\ \nabla,\ g)$ 에서 ∇ 의 곡률텐소르마당 R 에 대하여

$$R(X,\ Y)Z=k\{g(Y,\ Z)X-g(X,\ Z)Y\},\ \forall X,\ Y,\ Z\in TM \tag{1}$$

이면 $(M,\ \nabla,\ g)$ 를 $k-$일정곡률통계다양체라고 부른다.[3]

$(\tilde{M},\ \tilde{\nabla},\ \tilde{g})$ 이 통계다양체이고 $f: M\to\tilde{M}$ 이 넣기라고 하고 M 에서의 리만계량 g 와 아핀접속 ∇ 를 $g=f^*\tilde{g},\ g(\nabla_X Y,\ Z)=\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X f_*Y,\ f_*Z),\ X,\ Y,\ Z\in TM$ 으로 정의하면 $(\nabla,\ g)$ 는 M 우에서의 통계구조로 되는데 이것을 $(\tilde{\nabla},\ \tilde{g})$ 로부터 f 에 의하여 유도된 통계구조라고 부른다.[4]

$(M,\ \nabla,\ g)$ 와 $(\tilde{M},\ \tilde{\nabla},\ \tilde{g})$ 이 통계다양체라고 하자.

$(\nabla,\ g)$ 가 $(\tilde{\nabla},\ \tilde{g})$ 로부터 넣기 f 에 의하여 유도된 통계구조일 때 넣기 $f: M\to\tilde{M}$ 을

통계적넣기라고 부른다.[4]

통계다양체들사이의 통계적넣기에 대하여 성립되는 공식들에 대하여 보자.

$f:(M,\ \nabla,\ g)\to(\widetilde{M},\ \widetilde{\nabla},\ \widetilde{g})$ 이 여차원이 1인 통계적넣기이고 ξ 가 f 의 단위법선벡토르라고 하면 $h,\ h^*\in TM^{(0,\ 2)}$ 와 $A,\ A^*\in TM^{(1,\ 1)}$ 이 있어서 다음의 가우스공식과 와인가르텐공식이 성립된다.

$$\widetilde{\nabla}_X f_*Y=f_*\nabla_X Y+h(X,\ Y)\xi,\quad \widetilde{\nabla}_X\xi=-f_*A^*X+\tau^*(X)\xi$$
$$\widetilde{\nabla}^*_X f_*Y=f_*\nabla^*_X Y+h^*(X,\ Y)\xi,\quad \widetilde{\nabla}^*_X\xi=-f_*AX+\tau(X)\xi,\quad X,\ Y\in TM$$

여기서 $\widetilde{\nabla}^*$ 은 $\widetilde{\nabla}$ 의 $\widetilde{g}$ 에 관한 쌍대접속이다.

또한 $II\in TM^{(0,2)}$ 와 $S\in TM^{(1,\ 1)}$ 이 있어서 리만가우스공식과 리만와인가르텐공식 $\widetilde{\nabla}^g_X f_*Y=f_*\nabla^g_X Y+II(X,\ Y)\xi,\ \ \widetilde{\nabla}^g_X\xi=-f_*SX$ 와 $B^*=A^*-II$ 가 성립된다.

통계적초곡면에 대한 가우스방정식, 코다찌방정식, 리찌방정식에 관한 자세한 내용은 선행연구[4]에서의 공식들을 따른다.

일정곡률통계다양체들사이의 통계적넣기는 그것이 $\tau^*=0$ 을 만족시키는가 하는것이 중요한데 선행연구[4]에서는 통계적넣기에 대하여 항상 $\tau^*=0$ 이다. 그러나 론문에서 론의하는 통계적넣기에 대해서는 $\tau^*=0$ 이 항상 만족된다고 말할수 없다.

우리는 $\tau^*=0$ 이 만족되기 위한 조건을 론의한다.

정리 1 $(M,\ \nabla,\ g)$, $(\widetilde{M},\ \widetilde{\nabla},\ \widetilde{g})$ 이 각각 $k,\ \widetilde{k}-$ 일정곡률통계다양체이면서 동시에 $(M,\ \nabla,\ g)$, $(\widetilde{M},\ \nabla^{\widetilde{g}},\ \widetilde{g})$ 이 $\overset{\circ}{k},\ \overset{\circ}{\widetilde{k}}-$ 일정곡률리만다양체 $(\widetilde{k}-\overset{\circ}{\widetilde{k}}\neq k-\overset{\circ}{k})$ 일 때 여차원이 1인 통계적넣기 $f:M\to\widetilde{M}$ 이 존재하며 $\mathrm{rank}B^*\geq 2$ (여기서 $B^*=A^*-S$)이면 $\tau^*=0$ 이다.

증명 선행연구[4]의 식 (2.3), (3.6)과 식 (1)에 의하여

$$-2[(\widetilde{k}-\overset{\circ}{\widetilde{k}})-(k-\overset{\circ}{k})]\{g(Y,\ Z)X-g(X,\ Z)Y\}=$$
$$=(\nabla_X K)(Y,\ Z)-(\nabla_Y K)(X,\ Z)-b(Y,\ Z)A^*X+b(X,\ Z)A^*Y+h(X,\ Z)B^*Y-h(Y,\ Z)B^*X,$$
$$0=h(X,\ K(Y,\ Z))-h(Y,\ K(X,\ Z))+(\nabla_X b)(Y,\ Z)-(\nabla_Y b)(X,\ Z)+$$
$$+\tau^*(X)b(Y,\ Z)-\tau^*(Y)b(X,\ Z)-\tau^*(Y)h(X,\ Z)+\tau^*(X)h(Y,\ Z),$$
$$0=K(Y,\ A^*X)-K(X,\ A^*Y)-\tau^*(Y)A^*X+\tau^*(X)A^*Y-$$
$$-(\nabla_X B^*)Y+(\nabla_Y B^*)X+\tau^*(X)B^*Y-\tau^*(Y)B^*X,$$
$$0=-h(X,\ B^*Y)+h(Y,\ B^*X)+(\nabla_X\tau^*)(Y)-(\nabla_Y\tau^*)(X)+b(Y,\ A^*X)-b(X,\ A^*Y).$$

여기서 $K(X,\ Y)=\nabla_X Y-\nabla^g_X Y$ 는 변형텐소르이다.

이 식들과 선행연구[4]에서의 가우스방정식, 코다찌방정식, 리찌방정식과 $B^*=A^*-S$, $b=h-II$ 를 리용하여 계산하면 다음과 같다.

$$0=-2[(\widetilde{k}-\overset{\circ}{\widetilde{k}})-(k-\overset{\circ}{k})]\{g(Y,\ Z)X-g(X,\ Z)Y\}+g(BY,\ Z)B^*X-g(BX,\ Z)B^*Y$$
$$0=\tau^*(Y)B^*X-\tau^*(X)B^*Y \tag{2}$$
$$0=-g([B,\ B^*]X,\ Y)$$

식 (2)의 세번째 식으로부터 $B,\ B^*$은 동시에 대각선화가 가능하다. 즉 어떤 $\lambda_j \in \boldsymbol{R}$가 있어서 $BX_j = \lambda_j X_j,\ B^* X_j = \lambda_j^* X_j$인 직교토대 $\{X_j\},\ j = 1, \cdots,\ n$이 있다.

식 (2)에서 $X,\ Z = X_i,\ Y = X_j\ (i \neq j)$로 놓으면

$$[(\tilde{k} - \mathring{\tilde{k}}) - (k - \mathring{k})]\{g(X_j,\ X_i)X_i - g(X_i,\ X_i)X_j\} + \lambda_j \lambda_i^* g(X_j,\ X_i)X_i - \lambda_i \lambda_j^* g(X_i,\ X_i)X_j =$$

$$= -[(\tilde{k} - \mathring{\tilde{k}}) - (k - \mathring{k}) + \lambda_i \lambda_j^*]g(X_i,\ X_i)X_j = 0$$

이므로 $(\tilde{k} - \mathring{\tilde{k}}) - (k - \mathring{k}) + \lambda_i \lambda_j^* = 0$이고 $\lambda_i \lambda_j^* = -[(\tilde{k} - \mathring{\tilde{k}}) - (k - \mathring{k})] \neq 0$이다.

$\mathrm{rank} B^* \geq 2$이면 $\lambda_1^*, \lambda_2^* \neq 0$이므로 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \lambda$이고 $\lambda\lambda_j^* = -[(\tilde{k} - \mathring{\tilde{k}}) - (k - \mathring{k})] \neq 0$이다. 따라서 $B^* = \lambda^* I$로 되고 식 (2)의 두번째 식에 의하여 $\tau^* = 0$이다.(증명끝)

다음으로 일정곡률통계다양체로부터 일정곡률통계다양체에로의 통계적넣기의 형태연산자에 대하여 론의하자.

정리 2 $(M,\ \nabla,\ g)$, $(\tilde{M},\ \tilde{\nabla},\ \tilde{g})$이 각각 $k,\ \tilde{k}$ − 일정곡률통계다양체이면서 동시에 $(M,\ \nabla,\ g)$, $(\tilde{M},\ \nabla^{\tilde{g}},\ \tilde{g})$이 $\mathring{k},\ \mathring{\tilde{k}}$ − 일정곡률리만다양체 $(\tilde{k} - \mathring{\tilde{k}} \neq k - \mathring{k})$일 때 $f: M \to \tilde{M}$이 여차원이 1인 통계적넣기라고 하자.

그러면 $\mathrm{rank} A^* \geq 2$일 때 M우에서 정의된 함수 μ가 있어서 어떤 $x \in M$에 대하여 $\mu(x) = 0$이면 $\tilde{k} = k$이고 $\mu(x) \neq 0$인 x에 대해서는 $A_x^* = \mu^{-1}(x)(k - \tilde{k})I_x$이다. 여기서 $A,\ A^*$은 f의 형태연산자들이고 I는 항등넘기기이다.

증명 선행연구[3]의 가우스방정식

$$k\{g(Y,\ Z)X - g(X,\ Z)Y\} =$$

$$= \tilde{k}\{g(Y,\ Z)X - g(X,\ Z)Y\} + \{h(Y,\ Z)A^* X - h(X,\ Z)A^* Y\}$$

를 Z에 관하여 축약을 실시하면

$$h(Y,\ A^* X) - h(X,\ A^* Y) = g(AY,\ A^* X) - g(AX,\ A^* Y) = 0$$

이므로 $AA^* = A^* A$이다. 따라서 A와 A^*은 동시에 대각선화가 가능하다. 즉 어떤 $\mu_j,\ \mu_j^* \in \boldsymbol{R}$가 있어서 $Ae_j = \mu_j e_j,\ A^* e_j = \mu_j^* e_j$인 직교토대 $\{e_j\}$를 택할수 있다.

이제 이 토대를 리용하면 가우스방정식을

$$(\tilde{k} - k)\{g(e_j,\ Z)e_i - g(e_i,\ Z)e_j\} + \mu_j \mu_i^* g(e_j,\ Z) - \mu_i \mu_j^* g(e_i,\ Z)e_j =$$

$$= (\tilde{k} - k + \mu_j \mu_i^*)g(e_j,\ Z)e_i - (\tilde{k} - k + \mu_i \mu_j^*)g(e_i,\ Z)e_j = 0$$

으로 쓸수 있고 $Z := e_i$라고 놓으면 $\tilde{k} - k + \mu_i \mu_j^* = 0$ 즉

$$\mu_i \mu_j^* = (\tilde{k} - k).$$

$\mathrm{rank} A^* \geq 2$임을 고려하면 $\mu_1^*,\ \mu_2^* \neq 0$이므로 $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_n = \mu$를 얻는다. 즉

$$\mu\mu_j^* = k - \tilde{k}\ \ (\mathrm{const}).$$

이 식에서 $\mu = 0$이면 $k - \tilde{k} = 0$이고 $\mu \neq 0$이면 $\mu_j^* = \mu^{-1}(k - \tilde{k})$이다.(증명끝)

실례 $M=\boldsymbol{R}^2$ 에 리만계량이 $g=a\sum d\theta^i d\theta^i$ 으로 주어지고 아핀접속이

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial\theta^1}}\frac{\partial}{\partial\theta^1}=\frac{1-ab}{2}\frac{\partial}{\partial\theta^1},\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial\theta^2}}\frac{\partial}{\partial\theta^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta^1},\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial\theta^1}}\frac{\partial}{\partial\theta^2}=\nabla_{\frac{\partial}{\partial\theta^2}}\frac{\partial}{\partial\theta^1}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta^2}$$

로 정의되면 $(M,\ \nabla^g,\ g)$ 가 평탄리만다양체이며 $(M,\ \nabla,\ g)$ 는 $\left(-\frac{b}{4}\right)-$ 일정곡률통계다양체로 된다.

$\tilde{M}=\boldsymbol{R}^3$ 에 리만계량이 $\tilde{g}=a\sum d\theta^i d\theta^i$ 로 주어지고 아핀접속이

$$\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial\theta^1}}\frac{\partial}{\partial\theta^1}=\tilde{b}\frac{\partial}{\partial\theta^1},\ \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial\theta^2}}\frac{\partial}{\partial\theta^2}=\frac{\tilde{b}}{2}\frac{\partial}{\partial\theta^1},\ \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial\theta^3}}\frac{\partial}{\partial\theta^3}=\frac{\tilde{b}}{2}\frac{\partial}{\partial\theta^1},$$

$$\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial\theta^1}}\frac{\partial}{\partial\theta^2}=\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial\theta^2}}\frac{\partial}{\partial\theta^1}=\frac{\tilde{b}}{2}\frac{\partial}{\partial\theta^2},\ \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial\theta^1}}\frac{\partial}{\partial\theta^3}=\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial\theta^3}}\frac{\partial}{\partial\theta^1}=\frac{\tilde{b}}{2}\frac{\partial}{\partial\theta^2},\ \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial\theta^2}}\frac{\partial}{\partial\theta^3}=\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial\theta^3}}\frac{\partial}{\partial\theta^2}=0$$

으로 정의되면 $(\tilde{M},\ \nabla^{\tilde{g}},\ \tilde{g})$ 이 평탄리만다양체이며 $(\tilde{M},\ \tilde{\nabla},\ \tilde{g})$ 은 $\left(-\frac{\tilde{b}^2}{4a}\right)-$ 일정곡률통계다양체로 된다.

$(M,\ \nabla,\ g)$ 로부터 $(\tilde{M},\ \tilde{\nabla},\ \tilde{g})$ 에로의 여차원이 1인 통계적넣기 f 를 다음식에 의해 정의할수 있다.

$$f:(x,\ y)(\in\boldsymbol{R}^2)\mapsto\left(\frac{1}{\tilde{b}}x,\ y,\ \sqrt{1-abx}\right)(\in\boldsymbol{R}^3)$$

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보(자연과학), 57, 11, 3, 주체100(2011).

[2] **김일성**종합대학학보(자연과학), 59, 3, 3, 주체102(2013).

[3] S. Amari et al.; Methods of Information Geometry, AMS & Oxford University Press, 34～234, 2000.

[4] H. Furuhata; Diff. Geom. Appl., 27, 420, 2009.

[5] J. Zhang; AISM, 59, 161, 2007.

주체104(2015)년 9월 5일 원고접수

A Statistical Immersion between Statistical Manifolds of Constant Curvature

Min Chol Rim

We study properties of a statistical immersion between statistical manifolds of constant curvature. We give a condition for a statistical immersion between statistical manifolds of constant curvature to satisfy $\tau^*=0$, and show a property of a shape operator of it.

Key words: statistical manifold, statistical immersion