김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체106(2017)년 제63권 제2호 Vol. 63 No. 2 JUCHE106(2017).

선형변결수분수계미분방정식의 꼬쉬형문제의 풀이표시

최금성, 김명하

분수계미분방정식의 꼬쉬형문제의 풀이법 및 풀이표시에 관한 연구에서는 주로 선형상결수분수계미분방정식이 많이 연구되고 변결수에 대해서는 특수한 형태의 방정식에 대하여 극히 부분적으로 연구되였다.

선행연구[4]에서는 선형상결수분수계미분방정식을 라쁠라스변환법으로, 선행연구[3]에서는 연산자법으로 연구하였다. 특히 선행연구[4]에서는 라쁠라스변환법에 의하여 선형상결수리만－류빌분수계미분연산자에 대한 그린함수의 여러변수미따크－레플레르함수에 의한 표시식을 주었다. 그리고 선행연구[3]에서는 미크신쓰끼연산자법을 적용하여 일반화된 선형상결수리만－류빌분수계미분방정식의 풀이표시를 얻었다.

선행연구[1]에서는 선형상결수련립분수계미분방정식의 그린함수에 의한 풀이법을 주었으며 선행연구[2]에서는 라게르도함수와 캐푸토도함수의 성질에 의하여 변결수를 가지는 한 형태의 분수계미분방정식의 해석적풀이를 구하였다.

론문에서는 적분가능한 함수공간에서 한가지 형태의 꼬쉬형문제를 설정하고 적분방정식과의 동등성과 풀이의 유일존재성을 론의하였으며 동차방정식의 풀이법과 풀이의 양적표시에 기초하여 비동차방정식의 풀이법과 풀이의 양적표시에 대하여 론의한다.

끝으로 우리가 얻은 결과를 증명하기 위한 몇가지 실례를 주었다.

$\mathrm{Re}\,\alpha \ge 0$ 인 복소수 $\alpha \in \boldsymbol{C}$ 에 대하여 자연수 n 을 다음과 같이 약속한다.

$$n := \begin{cases} [\mathrm{Re}\,\alpha]+1, & \alpha \notin \boldsymbol{N} \\ \alpha, & \alpha \in \boldsymbol{N} \end{cases} \tag{1}$$

$l \in \boldsymbol{N}$ 이고 복소수 $\alpha_j \in \boldsymbol{C}$ $(j=1, \cdots, l)$ 들은 다음의 조건을 만족시킨다고 하자.

$$0 = \alpha_0 < \mathrm{Re}\,\alpha_1 < \cdots < \mathrm{Re}\,\alpha_l < \mathrm{Re}\,\alpha \tag{2}$$

$\alpha \in \boldsymbol{C}$ $(n-1 < \mathrm{Re}\,\alpha < n,\ n \in \boldsymbol{N})$ 계선형변결수미분방정식의 꼬쉬형문제

$$(D_{a+}^{\alpha} y)(x) + \sum_{j=0}^{l} a_j(x)(D_{a+}^{\alpha_j} y)(x) = g(x), \tag{3}$$

$$(D_{a+}^{\alpha-k} y)(a+) = b_k H(k_0 - k),\ k = 1, \cdots, n \tag{4}$$

을 고찰하자. 여기서 함수 $a_j(x),\ g(x)$ 들은 $a_j(x) \in C[a, b]\ (j=0, \cdots, l),\ g(x) \in L(a, b)$ 인 실변수 x 의 복소수값함수이며 $b_k \in \boldsymbol{C},\ k=1, \cdots, n$ 이다. 그리고

$$k_0 = \max\left\{ k \in_1 N_n :\ \forall j \in_0 Z_l\ ,\ a_j(x) \frac{(x-a)^{\alpha-\alpha_j-k}}{\Gamma(\alpha-\alpha_j-k+1)} \in L(a, b) \right\} \tag{5}$$

이고 $H(k)$ 는 $H(k) = \begin{cases} 1, & k \ge 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$ 인 변수 $k \in_0 Z_n$ 의 함수(헤비사이드형)이다.

꼬쉬형문제 (3), (4)에 대응되는 다음의 제2종볼테라형적분방정식을 론의하자.

$$\Phi(x)=g(x)-\sum_{j=0}^{l}\sum_{k=1}^{n}b_kH(k_0-k)a_j(x)\frac{(x-a)^{\alpha-\alpha_j-k}}{\Gamma(\alpha-\alpha_j-k+1)}-\sum_{j=0}^{l}a_j(x)(I_{a+}^{\alpha-\alpha_j}\Phi)(x) \quad (6)$$

정리 1 $\alpha,\ \alpha_j,\ n,\ a_j(x),\ g(x),\ b_k,\ k_0,\ j=0,\cdots,\ l,\ k=1,\cdots,\ n$에 대하여 식 (1), (2), (5)가 성립될 때 $y(x)\in L^\alpha(a,\ b)$가 꼬쉬형문제 (3), (4)를 만족시키기 위해서는 $\Phi(x)=(D_{a+}^\alpha y)(x)\in L(a,\ b)$가 적분방정식 (6)을 만족시킬것이 필요하고 충분하다.(증명생략)

정리 2 정리 1의 가정들이 성립되면 꼬쉬형문제 (3), (4)의 풀이 $y(x)\in L^\alpha(a,\ b)$는 유일존재한다.

증명 정리 1에 의하여 적분방정식 (6)의 풀이 $\Phi(x)\in L(a,\ b)$가 유일존재한다는것을 증명하면 충분하다.

$$\Phi_0(x):=g(x)-\sum_{j=0}^{l}\sum_{k=1}^{n}b_kH(k_0-k)a_j(x)\frac{(x-a)^{\alpha-\alpha_j-k}}{\Gamma(\alpha-\alpha_j-k+1)},\ (T\Phi)(x):=\Phi_0(x)-\sum_{j=0}^{l}a_j(x)(I_{a+}^{\alpha-\alpha_j}\Phi)(x)$$

로 놓으면 적분방정식 (6)을 $\Phi(x)=(T\Phi)(x)$와 같이 쓸수 있다.

$a_j(x)\in C[a,\ b]\ (j=0,\ 1,\cdots,\ l)$이므로 $A=\max\limits_{\substack{a\le x\le b\\ j\in_0 Z_l}}|a_j(x)|$라고 할수 있다.

$\omega=A\sum\limits_{j=0}^{l}\frac{(x_1-a)^{\alpha-\alpha_j}}{|\Gamma(\alpha-\alpha_j+1)|}<1$이 되게 $x_1\in(a,\ b]$를 택하고 $L(a,\ x_1)$에서 적분방정식 (6)의 풀이의 유일존재성을 증명하자.

$T:(a,\ x_1)\to L(a,\ x_1)$이라는것은 분명하다.

$\Phi_1,\ \Phi_2\in L(a,\ x_1)$에 대하여

$$\|T\Phi_1-T\Phi_2\|_{L(a,\ x_1)}\le A\sum_{j=0}^{l}\frac{(x_1-a)^{\alpha-\alpha_j}}{|\Gamma(\alpha-\alpha_j+1)|}\|\Phi_1-\Phi_2\|_{L(a,\ x_1)}=\omega\|\Phi_1-\Phi_2\|_{L(a,\ x_1)}$$

이고 $0<\omega<1$이므로 $[a,\ x_1]$에서 적분방정식 (6)의 유일풀이 $\Phi(x)\in L(a,\ x_1)$이 존재한다. 그리고 풀이 $\Phi(x)$는 수렴렬 $(T^m\Phi_0^*)(x)$의 극한이다. 즉

$$\lim_{m\to\infty}\|T^m\Phi_0^*-\Phi^*\|_{L(a,\ x_1)}=0$$

이다. 여기서 Φ_0^*은 $L(a,\ b)$의 임의의 함수이며 $b_k\ne0$인 $b_k\ (k=1,\cdots,\ n)$가 있으면 $\Phi_0^*(x)=\Phi_0(x)$로 택할수 있다.

$(T^m\Phi_0^*)(x)$는 $(T^m\Phi_0^*)(x)=\Phi_0(x)-\sum\limits_{j=0}^{l}a_j(x)I_{a+}^{\alpha-\alpha_j}(T^{m-1}\Phi_0^*)(x)$로 쓸수 있고 $\Phi_m(x):=(T^m\Phi_0^*)(x)$라고 하면 이 식을 $\Phi_m(x)=\Phi_0(x)-\sum\limits_{j=0}^{l}a_j(x)(I_{a+}^{\alpha-\alpha_j}\Phi_{m-1})(x)\ (m=1,\ 2,\cdots)$와 같이, $\lim\limits_{m\to\infty}\|T^m\Phi_0^*-\Phi^*\|_{L(a,\ x_1)}=0$은 $\lim\limits_{m\to\infty}\|\Phi_m-\Phi^*\|_{L(a,\ x_1)}=0$과 같이 쓸수 있다.

$\Phi_{01}(x):=\Phi_0(x)-\sum\limits_{j=0}^{l}a_j(x)(I_{a+}^{\alpha-\alpha_j}\Phi)(x_1)$로 놓고 적분방정식 (6)을 다음과 같이 쓰자.

$$\Phi(x)=\Phi_{01}(x)-\sum_{j=0}^{l}a_j(x)(I_{x_1+}^{\alpha-\alpha_j}\Phi)(x)$$

$x_2\in(x_1,\ b)$ 를 $A\sum_{j=0}^{l}\frac{(x_2-x_1)^{\alpha-\alpha_j}}{|\Gamma(\alpha-\alpha_j+1)|}<1$ 이 만족되도록 택하고 우와 같은 방법을 리용하면 $[x_1,\ x_2]$ 에서 적분방정식 (6)의 풀이 $\Phi^*\in L(x_1,\ x_2)$ 는 유일존재한다.

우와 같은 과정을 반복하면 구간 $[a,\ b]$ 에서 적분방정식 (6)의 풀이 $\Phi^*\in L(a,\ b)$ 가 유일존재한다는것이 증명된다. 정리 1에 의하여 꼬쉬형문제 (3), (4)의 풀이 $y(x)\in L^{\alpha}(a,\ b)$ 는 유일존재하며 $y(x)=\sum_{k=1}^{n}b_kH(k_0-k)\frac{(x-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}+(I_{a+}^{\alpha}\Phi^*)(x)$ 로 표시된다.(증명끝)

선형동차방정식

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x)+\sum_{j=0}^{l}a_j(x)(D_{a+}^{\alpha_j}y)(x)=0,\quad x>a \tag{7}$$

와 비동차초기조건 (4)를 만족시키는 풀이 $y(x)\in L^{\alpha}(a,\ b)$ 를 구하는 문제를 고찰하자.

정의 1 동차방정식 $(D_{a+}^{\alpha}y_i)(x)+\sum_{j=0}^{l}a_j(x)(D_{a+}^{\alpha_j}y_i)(x)=0,\ x>a$ 와 초기조건

$$(D_{a+}^{\alpha-k}y_i)(a+)=\begin{cases}1, & i=k\\ 0, & i\neq k\end{cases},\quad k=1,\cdots,\ n,\quad i=1,\cdots,\ k_0$$

을 만족시키는 $y_i(x)\in L^{\alpha}(a,\ b),\ i=1,\cdots,\ k_0$ 을 방정식 (7)의 풀이의 표준기본계라고 부른다.

정리 3 $\alpha,\ \alpha_j,\ n,\ a_j(x),\ g(x),\ b_k,\ k_0,\ j=0,\cdots,\ l,\ k=1,\cdots,\ n$ 에 대하여 식 (1), (2), (5)가 성립되면 방정식 (7)의 풀이의 표준기본계 $y_i(x)\in L^{\alpha}(a,\ b)\ (i=1,\cdots,\ k_0)$ 는 유일존재하며

$$y_i(x)=\frac{(x-a)^{\alpha-i}}{\Gamma(\alpha-i+1)}+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}I_{a+}^{\alpha}\left(\sum_{j=0}^{l}a_j(x)I_{a+}^{\alpha-\alpha_j}\right)^k\sum_{j=0}^{l}a_j(x)\frac{(x-a)^{\alpha-\alpha_j-i}}{\Gamma(\alpha-\alpha_j-i+1)},\quad i=1,\cdots,\ k_0 \tag{8}$$

으로 표시된다.(증명생략)

비동차방정식 (3)과 동차초기조건

$$(D_{a+}^{\alpha-k}y)(a+)=0,\ k=1,\cdots,\ n \tag{9}$$

을 만족시키는 풀이 $y(x)\in L^{\alpha}(a,\ b)$ 를 구하는 문제에 대하여 론의하자.

정리 4 $\alpha\in\boldsymbol{C},\ \alpha_j\in\boldsymbol{C}\ (j=0,\ 1,\cdots,\ l),\ n\in\boldsymbol{N},\ a_j(x)\ (j=0,\ 1,\cdots,\ l),\ g(x)$ 에 대하여 정리 1의 가정들이 성립된다고 하면 비동차꼬쉬형문제 (3), (9)의 풀이 $y(x)\in L^{\alpha}(a,\ b)$ 는 유일존재하며 다음과 같이 표시된다.

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kI_{a+}^{\alpha}\left(\sum_{j=0}^{l}a_j(x)I_{a+}^{\alpha-\alpha_j}\right)^kg(x) \tag{10}$$

증명 꼬쉬형문제 (3), (9)는 꼬쉬형문제 (3), (4)의 특수경우이므로 정리 2에 의하여 유일풀이 $y(x)\in L^{\alpha}(a,\ b)$ 를 가진다. 이 풀이는 적분방정식 (6)과

$$y(x)=\sum_{k=1}^{n} b_k H(k_0-k)\frac{(x-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}+(I_{a+}^{\alpha}\Phi)(x), \tag{11}$$

$$\Phi_0(x)=g(x)-\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_k H(k_0-k)a_j(x)\frac{(x-a)^{\alpha-\alpha_j-k}}{\Gamma(\alpha-\alpha_j-k+1)},$$

$$\Phi_m(x)=\Phi_0(x)-\sum_{j=0}^{l} a_j(x)(I_{a+}^{\alpha-\alpha_j}\Phi_{m-1})(x),\ m=1,\ 2,\ \cdots, \tag{12}$$

$$\Phi(x)=\lim_{\substack{m\to\infty\\ L(a,\ b)}}\Phi_m(x) \Leftrightarrow \lim_{m\to\infty}\|\Phi_m-\Phi\|_{L(a,\ b)}=0$$

에 의하여 구할수 있다.

꼬쉬형문제 (3), (9)인 경우에 식 (6), (11), (12)는 각각 다음과 같다.

$$\Phi(x)=g(x)-\sum_{j=0}^{l} a_j(x)(I_{a+}^{\alpha-\alpha_j}\Phi)(x) \tag{13}$$

$$y(x)=(I_{a+}^{\alpha}\Phi)(x) \tag{14}$$

$$\Phi_0(x)=g(x)$$

$$\Phi_m(x)=\Phi_0(x)-\sum_{j=0}^{l} a_j(x)(I_{a+}^{\alpha-\alpha_j}\Phi_{m-1})(x),\ m=1,\ 2,\ \cdots \tag{15}$$

$$\Phi(x)=\lim_{\substack{m\to\infty\\ L(a,\ b)}}\Phi_m(x)$$

식 (13)—(15)에 의하여 식 (10)이 유도되므로 정리는 증명된다.(증명끝)

정의 2 꼬쉬형문제

$$(D_{\xi+}^{\alpha}G)(x\,;\xi)+\sum_{j=0}^{l} a_j(x)(D_{\xi+}^{\alpha_j}G)(x\,;\xi)=0\ \ (x>\xi>a),\ \ (D_{\xi+}^{\alpha-k}G)(x\,;\xi)|_{x=\xi}=\begin{cases}1, & k=1\\ 0, & k\neq 1\end{cases}\ \ (k=1,\ \cdots,\ n)$$

의 풀이 $G(x\,;\xi)\in L^{\alpha}(\xi,\ b),\ \xi>a$를 비동차꼬쉬형문제 (3), (9)의 그린함수라고 부른다.

주의 꼬쉬형문제 (3), (9)의 그린함수 $G(x\,;\xi)\in L^{\alpha}(\xi,\ b)$는 유일존재하며 다음과 같다.

$$G(x\,;\xi)=\frac{(x-\xi)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}I_{\xi+}^{\alpha}\left(\sum_{j=0}^{l} a_j(x)I_{\xi+}^{\alpha-\alpha_j}\right)^{k}\sum_{j=0}^{l} a_j(x)\frac{(x-\xi)^{\alpha-\alpha_j-1}}{\Gamma(\alpha-\alpha_j)} \tag{16}$$

정리 5 $\alpha\in\boldsymbol{C},\ \alpha_j\in\boldsymbol{C}\ (j=0,\ 1,\cdots,\ l),\ n\in\boldsymbol{N},\ a_j(x)\ (j=0,\ 1,\cdots,\ l),\ g(x)$에 대하여 정리 1의 가정들이 성립되면 비동차꼬쉬형문제 (3), (9)의 풀이 $y(x)\in L^{\alpha}(a,\ b)$는 유일존재하며 $G(x\,;\xi)$에 의하여 $y(x)=\int_a^x G(x\,;\xi)g(\xi)d\xi$와 같이 표시되며 이 식은 식 (10)과 일치한다.

정리 6 $\alpha\in\boldsymbol{C},\ \alpha_j\in\boldsymbol{C}\ (j=0,\ 1,\ \cdots,\ l),\ n\in\boldsymbol{N},\ a_j(x)\ (j=0,\ 1,\ \cdots,\ l),\ g(x),\ b_k\in\boldsymbol{C}\ (k=1,\cdots,\ n),$ k_0에 대하여 정리 1의 가정이 성립된다고 하면 꼬쉬형문제 (3), (4)의 풀이 $y(x)\in L^{\alpha}(a,\ b)$는 유일존재하며 $y(x)=\sum_{i=1}^{k_0} b_i y_i(x)+\int_a^x G(x\,;\xi)g(\xi)d\xi$로 표시된다. 여기서 $y_i(x)\ (i=1,\ \cdots,\ k_0)$는 동차방정식 (7)의 풀이의 표준기본계 (8)이며 $G(x\,;\xi)$는 비동차꼬쉬형문제 (3), (9)의 그린함수 (16)과 같은 함수이다.

실례 1 다음의 선형상결수동차분수계미분방정식의 풀이를 구하자.

$$(D_{0+}^{1.5}y)(x)+3(D_{0+}^{1}y)(x)=0,\ 0<x<T \tag{17}$$

식 (5)에 의하여 k_0을 결정하자.

$a_1\dfrac{x^{\alpha-\alpha_1-k}}{\Gamma(\alpha-\alpha_1-k+1)}=3\dfrac{x^{0.5-k}}{\Gamma(0.5-k+1)}\begin{cases}\in L(0,\ T),\ k=1\\ \notin L(0,\ T),\ k=2=n\end{cases}$ 이므로 $k_0=1<2=n$ 이다. 임의의 $b_1\in \boldsymbol{C}$ 에 대하여 초기조건 $(D_{0+}^{1.5-1}y)(0+)=(D_{0+}^{0.5}y)(0+)=b_1$, $(D_{0+}^{1.5-2}y)(0+)=(D_{0+}^{-0.5}y)(0+)=0$ 을 만족시키는 식 (17)의 풀이 $y(x)\in L^{1.5}(0,\ T)$ 는 유일존재하며 풀이공식 (8)을 리용하면 계산되는 풀이의 표준기본계 $y_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k3^k\dfrac{x^{1.5k+0.5}}{\Gamma(1.5k+1.5)}$ 에 의하여 $y(x)=b_1y_1(x)$ 로 표시된다.

실례 2 다음의 선형변결수동차분수계미분방정식의 풀이를 구하자.

$$(D_{0+}^{1.5}y)(x)+x(D_{0+}^{1}y)(x)=0,\ 0<x<T \tag{18}$$

식 (5)를 리용하여 k_0을 결정하자.

$a_1(x)\dfrac{x^{\alpha-\alpha_1-k}}{\Gamma(\alpha-\alpha_1-k+1)}=x\dfrac{x^{1.5-1-k}}{\Gamma(1.5-1-k+1)}=\dfrac{x^{1.5-k}}{\Gamma(1.5-k)}\in L(0,\ T),\ k=1,\ 2$ 이므로 $k_0=2=n$ 이고 동차방정식 (18)의 풀이의 표준기본계 $y_i(x)\in L^{1.5}(0,\ T),\ i=1,\ 2$ 는 풀이공식 (8)에 의하여 $y_i(x)=\dfrac{x^{1.5-i}}{\Gamma(2.5-i)}+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\prod_{j=1}^{k+1}(1.5j-i)\dfrac{x^{(k+2)1.5-i}}{\Gamma((k+2)1.5-i+1)}$, $i=1,\ 2$ 와 같이 표시된다.

또한 $\forall b_i\in \boldsymbol{C},\ i=1,\ 2$ 에 대하여 초기조건 $(D_{0+}^{0.5}y)(0+)=b_1$, $(D_{0+}^{-0.5}y)(0+)=b_2$ 를 만족시키는 방정식 (18)의 풀이 $y(x)\in L^{1.5}(0,\ T)$ 는 유일존재하며 $y(x)=y_1(x)b_1+y_2(x)b_2$ 로 표시된다.

참 고 문 헌

[1] B. Bonilla et al.; Appl. Math. Comput., 187, 68, 2007.

[2] R. Garra; Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 17, 1549, 2012.

[3] H. Hilfer et al.; Fract. Calc. Appl. Anal., 12, 3, 299, 2009.

[4] A. A. Kilbas et al.; Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, 34～98, 2006.

주체105(2016)년 10월 5일 원고접수

Expression of Solution for Cauchy Type Problem of Linear Fractional Differential Equation with Variable Coefficients

Choe Kum Song, Kim Myong Ha

We proved the equivalence between a special Cauchy type problem and its integral equation and existence and uniqueness of solution for the Cauchy type problem in integrable function space, and then we provided the expression of the solution.

Key words: variable coefficient, Cauchy type problem