김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체105(2016)년 제62권 제7호 Vol. 62 No. 7 JUCHE105(2016).

우연결수를 가지는 옹근수값 1차주기자기회귀모형의 파라메터추정량의 점근분포

유강혁, 진교웅

경애하는 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《새 세기 산업혁명의 불길을 세차게 지펴올려 과학기술의 힘으로 경제강국건설의 전환적국면을 열어놓아야 하겠습니다.》

선행연구[4]에서는 옹근수값1차주기자기회귀모형의 파라메터에 대한 무게붙은 조건부최소두제곱추정량을, 선행연구[1]에서는 우연결수를 가지는 옹근수값1차주기자기회귀과정의 파라메터에 대한 조건부최소두제곱추정량의 점근분포를 론의하였다.

선행연구[2]에서는 우연결수를 가지는 옹근수값 p 차주기자기회귀모형의 파라메터를 추정하는 문제를 론의하였다.

론문에서는 주기성을 가지는 옹근수값시계렬을 모형화하는데 리용되는 우연결수를 가지는 옹근수값1차주기자기회귀모형의 파라메터에 대한 조건부최소두제곱추정량의 점근분포를 연구하였다.

정의 부아닌 옹근수값우연과정 $\{X_t,\ t\in I\}$ 가 회귀방정식 $X_t=\xi_t\circ X_{t-1}+Z_t$ 를 만족시킨다고 하자. 여기서 $\{\xi_t\}$ 는 $(0, 1)$ 우에서 값을 취하며 분포함수가 Φ_{ξ_t} 인 독립인 우연량렬로서 $\mathrm{E}(\xi_t)=\phi(t)$, $\mathrm{var}(\xi_t)=\sigma_\xi^2(t)<\infty$ 이다. $\{Z_t\}$ 는 $\{0, 1, 2, \cdots\}$ 에서 값을 취하며 확률함수가 $F_{Z_t}(>0)$ 인 독립인 우연량렬로서 $\mathrm{E}(Z_t)=\mu_Z(t)<\infty$, $\mathrm{var}(Z_t)=\sigma_Z^2(t)<\infty$ 이고 $\{\xi_t\}$ 와 독립이다. 또한 Z_t 는 $X_{t-i},\ i\ge 1$ 과 독립이고 $\mathrm{E}(X_0^2)<\infty$ 이다. 그리고 “$\circ$”는 감소연산자로서 $\xi_t\circ X:=\sum_{i=1}^{X}Y_i^{(t)}$ 으로 정의되며 $\{Y_i^{(t)}\}$ 는 X 와 독립이고 동일한 분포에 따르는 베르누이우연량렬로서 $P(Y_i^{(t)}=1|\xi_t)=\xi_t=1-P(Y_i^{(t)}=0|\xi_t)$ 를 만족시킨다. $\{Y_i^{(t)}\}$ 를 $\xi_t\circ X$ 의 계수렬이라고 말한다. 앞으로 의미가 명백할 때에는 $\{Y_i^{(t)}\}$ 를 $\{Y_i\}$ 로 쓰기로 한다. 그리고 $\{Z_t\}$ 는 $\xi_t\circ X$ 의 계수렬과 독립이라고 가정한다.

이때 임의의 옹근수 k 와 적당한 옹근수 T 가 있어서 $\Phi_{\xi_t}=\Phi_{\xi_{t+kT}}$, $F_{Z_t}=F_{Z_{t+kT}}$ 가 성립된다면 $\{X_t,\ t\in I\}$ 를 우연결수를 가지는 주기가 T 인 옹근수값1차주기자기회귀(RCPINAR$_T(1)$)과정이라고 부르고 앞으로 간단히 $\{X_t\}$ 로 표시한다.

RCPINAR$_T(1)$ 모형은 $t=i+kT,\ i=1, 2, \cdots, T$ 라고 하면 다음과 같이 쓸수 있다.

$$X_{i+kT}=\xi_{i+kT}\circ X_{i+kT-1}+Z_{i+kT} \qquad (1)$$

RCPINAR$_T(1)$ 모형의 파라메터 $\mathrm{E}(\xi_{i+kT})=\phi(i)$ 와 $\mathrm{E}(Z_{i+kT})=\mu_Z(i)$ 에 대한 조건부최소두제곱추정량은 조건부기대값에 의한 오차의 두제곱의 합

$$Q(\boldsymbol{\theta})=\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i=1}^{T}(X_{i+kT}-\mathrm{E}(X_{i+kT}\mid X_{i-1+kT}))^2 \tag{2}$$

을 최소로 하는 $\hat{\boldsymbol{\theta}}=(\hat{\phi}(1),\ \hat{\mu}_Z(1),\ \cdots,\ \hat{\phi}(T),\ \hat{\mu}_Z(T))'$로 된다.

조건부기대값의 성질과 식 (1)을 리용하면

$$\mathrm{E}(X_{i+kT}\mid X_{i-1+kT})=\mathrm{E}(\mathrm{E}(\xi_{i+kT}\circ X_{i-1+kT}+Z_{i+kT}\mid X_{i-1+kT},\ \ \xi_{i+kT})\mid X_{i-1+kT})=\phi(i)X_{i-1+kT}+\mu_Z(i) \tag{3}$$

이므로 식 (2)는 $Q(\boldsymbol{\theta})=\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i=1}^{T}(X_{i+kT}-\phi(i)X_{i-1+kT}-\mu_Z(i))^2$과 같이 쓸수 있다.

따라서 임의의 $i\in\{1,\ 2,\ \cdots,T\}$에 대하여 $\phi(i),\ \mu_Z(i)$에 대한 조건부최소두제곱추정량은 $\begin{cases}\dfrac{\partial Q(\boldsymbol{\theta})}{\partial\phi(i)}=0\\ \dfrac{\partial Q(\boldsymbol{\theta})}{\partial\mu_Z(i)}=0\end{cases}$ 즉 $\begin{cases}\left(\sum_{k=0}^{N-1}X_{i+kT-1}^2\right)\hat{\phi}(i)+\left(\sum_{k=0}^{N-1}X_{i-1+kT}\right)\hat{\mu}_Z(i)=\sum_{k=0}^{N-1}X_{i+kT}X_{i-1+kT}\\ \left(\sum_{k=0}^{N-1}X_{i-1+kT}\right)\hat{\phi}(i)+N\,\hat{\mu}_Z(i)=\sum_{k=0}^{N-1}X_{i+kT}\end{cases}$ 로부터 얻을수 있다.

그러므로 $\phi(i),\ \mu_Z(i)$에 대한 조건부최소두제곱추정량은 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix}\hat{\phi}(i)\\ \hat{\mu}_Z(i)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{k=0}^{N-1}X_{i-1+kT}^2 & \sum_{k=0}^{N-1}X_{i-1+kT}\\ \sum_{k=0}^{N-1}X_{i-1+kT} & N\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\sum_{k=0}^{N-1}X_{i+kT}X_{i-1+kT}\\ \sum_{k=0}^{N-1}X_{i+kT}\end{pmatrix} \tag{4}$$

$$\mathfrak{I}_{i+kT}:=\sigma\{X_1,\ X_2,\cdots,\ X_{i+kT}\},\ \ M_{i+kT}:=X_{i+kT}-\mathrm{E}(X_{i+kT}\mid\mathfrak{I}_{i-1+kT}),\ \ \overline{M}_N(i):=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}M_{i+kT},$$

$$M'_{i+kT}:=X_{i-1+kT}(X_{i+kT}-\mathrm{E}(X_{i+kT}\mid\mathfrak{I}_{i-1+kT})),\ \ \overline{M}'_N(i):=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}M'_{i+kT}$$

라고 하면 다음의 보조정리들이 성립된다.

보조정리 1 $\mathrm{RCPINAR}_T(1)$과정 $\{X_t\}$가 적당한 $r(>2)$에 대하여 $\mathrm{E}(|X_t|^r)<\infty$를 만족시킨다면 $N\to\infty$일 때 임의의 $i\in\{1,\cdots,T\}$에 대하여 $\sqrt{N}\overline{M}_N(i)$는 $N(0,\ \sigma_1^2(i))$로 분포수렴한다. 즉 $\sqrt{N}\overline{M}_N(i)\xrightarrow{D}N(0,\sigma_1^2(i))$가 성립된다.

증명 과정 $\{X_t\}$가 $\mathrm{RCPINAR}_T(1)$과정이라는것과 조건부기대값의 성질을 리용하면

$$\mathrm{E}(M_{i+kT})=\mathrm{E}(X_{i+kT}-\mathrm{E}(X_{i+kT}\mid\mathfrak{I}_{i-1+kT}))=$$
$$=\mathrm{E}(X_{i+kT})-\mathrm{E}(\mathrm{E}(X_{i+kT}\mid X_{i-1+kT}))=\mathrm{E}(X_{i+kT})-\mathrm{E}(X_{i+kT})=0,$$
$$\mathrm{E}(M_{i+kT}\mid\mathfrak{I}_{i-1+kT})=\mathrm{E}(X_{i+kT}-\mathrm{E}(X_{i+kT}\mid\mathfrak{I}_{i-1+kT})\mid\mathfrak{I}_{i-1+kT})=$$
$$=\mathrm{E}(X_{i+kT}\mid\mathfrak{I}_{i-1+kT})-\mathrm{E}(X_{i+kT}\mid\mathfrak{I}_{i-1+kT})=0.$$

따라서 임의의 $i\in\{1,\cdots,T\}$에 대하여 $\{M_{i+kT},\ \mathfrak{I}_{i+kT},\ k\ge 0\}$은 마르팅게일차렬이다.

과정 $\{X_t\}$가 $\mathrm{RCPINAR}_T(1)$과정이라는것과 식 (3)을 리용하면

$$M_{i+kT}=X_{i+kT}-\mathrm{E}(X_{i+kT}\mid\mathfrak{I}_{i-1+kT})=X_{i+kT}-\mathrm{E}(X_{i+kT}\mid X_{i-1+kT})=X_{i+kT}-\phi(i)X_{i+kT-1}-\mu_Z(i). \tag{5}$$

가정 $\mathrm{E}(|X_t|^r)<\infty$ 와 $\{X_{i+kT},\ k\in\boldsymbol{N}\}$ 이 정상과정이라는것을 리용하면

$$\mathrm{E}(M_{i+kT}^2)=\mathrm{E}(X_{i+kT}-\phi(i)X_{i+kT-1}-\mu_Z(i))^2=\sigma_1^2(i)$$

이므로 $\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\mathrm{E}(M_{i+kT}^2)\to\sigma_1^2(i)\quad(N\to\infty)$ 가 성립된다.

한편 임의의 $i\in\{1,\cdots,T\}$ 에 대하여

$$V_{i+kT}:=\sum_{l=0}^{i-1}\eta_{i,\ l}\circ Z_{i-l}+\sum_{m=1}^{k}\sum_{l=0}^{T-1}(\eta_{i,\ i}\circ\eta_{T,\ l}\circ\eta_{T,\ T}^{m-1})\circ Z_{Tm+l}$$

은 L^2 에서 수렴하므로 $\{V_{i+kT}^2,\ k\ge 0\}$ 은 평등적분가능하다.

또한 $X_{i+kT}\overset{d}{=}\eta_{j+kT,\ j+kT}\circ X_0+V_{i+kT}$ 이므로(여기서 $\overset{d}{=}$ 는 분포가 같다는것을 의미한다.) 평등적분가능성에 대한 성질을 리용하면

$$\{(X_{i+kT}-\phi(i)X_{i+kT-1}-\mu_Z(i))^2,\ k\ge 0\}$$

도 평등적분가능하다는것이 나온다.

그러면 선행연구[5]에 의하여

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}M_{i+kT}^2=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(X_{i+kT}-\phi(i)X_{i+kT-1}-\mu_Z(i))^2\to\sigma_1^2(i)\ (\text{거의}).$$

따라서 선행연구[3]에 의하여 $\sqrt{N}\overline{M}_N(i)$ 는 $N(0,\ \sigma_1^2(i))$ 에로 분포수렴한다.(증명끝)

보조정리 2 $\mathrm{RCPINAR}_T(1)$ 과정 $\{X_t\}$ 가 적당한 $r(>4)$ 에 대하여 $\mathrm{E}(|X_t|^r)<\infty$ 를 만족시킨다면 $N\to\infty$ 일 때 임의의 $i\in\{1,\cdots,T\}$ 에 대하여 $\sqrt{N}\overline{M}'_N(i)$ 는 $N(0,\ \sigma_2^2(i))$ 로 분포수렴한다. 즉 $\sqrt{N}\overline{M}'_N(i)\xrightarrow{D}N(0,\ \sigma_2^2(i))$ 가 성립된다.

보조정리 3 $\mathrm{RCPINAR}_T(1)$ 과정 $\{X_t\}$ 가 적당한 $r(>4)$ 에 대하여 $\mathrm{E}(|X_t|^r)<\infty$ 를 만족시킨다면 $N\to\infty$ 일 때 임의의 $i\in\{1,\cdots,T\}$ 에 대하여 $\sqrt{N}(c_1\overline{M}_N(i)+c_2\overline{M}'_N(i))$ 는

$$N(0,\ \mathrm{E}((c_1X_{i-1+kT}+c_2)^2(X_{i+kT}-\phi(i)X_{i-1+kT}-\mu_Z(i))^2))$$

에로 분포수렴한다. 즉

$$\sqrt{N}(c_1\overline{M}_N(i)+c_2\overline{M}'_N(i))\xrightarrow{D}N(0,\ \mathrm{E}((c_1X_{i-1+kT}+c_2)^2(X_{i+kT}-\phi(i)X_{i-1+kT}-\mu_Z(i))^2))$$

이 성립된다. 여기서 $(c_1,\ c_2)\in\boldsymbol{R}^2\setminus(0,\ 0)$ 이다.

정리 1 $\mathrm{RCPINAR}_T(1)$ 과정 $\{X_t\}$ 가 적당한 $r(>4)$ 에 대하여 $\mathrm{E}(|X_t|^r)<\infty$ 를 만족시킨다면 $\mathrm{RCPINAR}_T(1)$ 모형의 조건부최소두제곱추정량에 대하여

$$\sqrt{N}\begin{pmatrix}\hat{\phi}(i)-\phi(i)\\ \hat{\mu}_Z(i)-\mu_Z(i)\end{pmatrix}\xrightarrow{D}N(\mathbf{0},\ V(i)W(i)V(i))\tag{6}$$

가 성립된다. 여기서

$$W(i)=\begin{pmatrix}\sigma_2^2(i) & \sigma_{12}(i)\\ \sigma_{12}(i) & \sigma_1^2(i)\end{pmatrix},\quad V(i)=(m_2(i)-m_1^2(i))^{-1}\begin{pmatrix}1 & -m_1(i)\\ -m_1(i) & m_2(i)\end{pmatrix}$$

이고 $\sigma_{12}(i)=\mathrm{E}(X_{i-1+kT}(X_{i+kT}-\phi(i)X_{i-1+kT}-\mu_Z(i))^2)$ 이다.

증명 식 (5), (6)으로부터 임의의 $i\in\{1,\cdots,T\}$ 에 대하여

$$\begin{pmatrix}\phi(i)\\ \mu_Z(i)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{k=0}^{N-1}X_{i-1+kT}^2 & \sum_{k=0}^{N-1}X_{i-1+kT}\\ \sum_{k=0}^{N-1}X_{i-1+kT} & N\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\sum_{k=0}^{N-1}X_{i+kT}X_{i-1+kT}-N\overline{M}'_N(i)\\ \sum_{k=0}^{N-1}X_{i+kT}-N\overline{M}_N(i)\end{pmatrix}. \tag{7}$$

따라서 식 (4), (7)로부터 다음의 식이 성립된다.

$$\sqrt{N}\begin{pmatrix}\hat{\phi}(i)-\phi(i)\\ \hat{\mu}_Z(i)-\mu_Z(i)\end{pmatrix}=\sqrt{N}\begin{pmatrix}\sum_{k=0}^{N-1}X_{i-1+kT}^2 & \sum_{k=0}^{N-1}X_{i-1+kT}\\ \sum_{k=0}^{N-1}X_{i-1+kT} & N\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}N\overline{M}'_N(i)\\ N\overline{M}_N(i)\end{pmatrix}=$$

$$=\sqrt{N}\frac{1}{N^2}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X_{i-1+kT}^2-\frac{1}{N^2}\left(\sum_{k=0}^{N-1}X_{i-1+kT}\right)^2\right]^{-1}\times\begin{pmatrix}N & -\sum_{k=0}^{N-1}X_{i-1+kT}\\ -\sum_{k=0}^{N-1}X_{i-1+kT} & \sum_{k=0}^{N-1}X_{i-1+kT}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}N\overline{M}'_N(i)\\ N\overline{M}_N(i)\end{pmatrix}=$$

$$=\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X_{i-1+kT}^2-\frac{1}{N^2}\left(\sum_{k=0}^{N-1}X_{i-1+kT}\right)^2\right]^{-1}\times\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X_{i-1+kT}\\ -\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X_{i-1+kT} & \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X_{i-1+kT}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{N}\overline{M}'_N(i)\\ \sqrt{N}\overline{M}_N(i)\end{pmatrix}$$

$\mathrm{RCPINAR}_T(1)$ 과정의 에르고드성으로부터

$$\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X_{i-1+kT}^2-\frac{1}{N^2}\left(\sum_{k=0}^{N-1}X_{i-1+kT}\right)^2\right]^{-1}\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X_{i-1+kT}\\ -\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X_{i-1+kT} & \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X_{i-1+kT}^2\end{pmatrix}\to$$

$$\to(m_2(i)-m_1^2(i))^{-1}\begin{pmatrix}1 & -m_1(i)\\ -m_1(i) & m_2(i)\end{pmatrix}=:V(i)\ \ (\text{거의})$$

가 성립된다. 여기서 $m_1(i)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X_{i-1+kT}$, $m_2(i)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X_{i-1+kT}^2$ 이다.

따라서 보조정리 3과 선행연구[6]에 의하여 $N\to\infty$ 일 때

$$\sqrt{N}\begin{pmatrix}\hat{\phi}(i)-\phi(i)\\ \hat{\mu}_Z(i)-\mu_Z(i)\end{pmatrix}\xrightarrow{D}N(\mathbf{0},\ V(i)W(i)V(i))$$

가 성립된다. 여기서

$$W(i)=\begin{pmatrix}\sigma_2^2(i) & \sigma_{12}(i)\\ \sigma_{12}(i) & \sigma_1^2(i)\end{pmatrix},\ \ \sigma_{12}(i)=\mathrm{E}(X_{i-1+kT}(X_{i+kT}-\phi(i)X_{i-1+kT}-\mu_Z(i))^2)$$

이다.(증명끝)

정리 2 $\mathrm{RCPINAR}_T(1)$ 과정 $\{X_t\}$ 가 적당한 $r(>4)$ 에 대하여 $\mathrm{E}(|X_t|^r)<\infty$ 를 만족시키면 $\mathrm{RCPINAR}_T(1)$ 모형의 조건부최소두제곱추정량 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 에 대하여

$$\sqrt{N}(\hat{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\theta})\xrightarrow{D}N(\mathbf{0},\ VWV)$$

가 성립된다. 여기서

$$V=\begin{pmatrix} V(1) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & V(2) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & V(T) \end{pmatrix},\quad W=\begin{pmatrix} W(1,1) & W(1,2) & \cdots & W(1,T) \\ W(2,1) & W(2,2) & \cdots & W(2,T) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W(T,1) & W(T,2) & \cdots & W(T,T) \end{pmatrix}.$$

증명 RCPINAR $_T(1)$ 모형의 파라메터 $\boldsymbol{\theta}$ 에 대한 조건부최소두제곱추정량 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 에 대하여 식 (4)를 유도할 때와 같은 방법을 적용하면 다음의 식이 성립된다.

$$\begin{pmatrix} \hat{\phi}(1) \\ \hat{\mu}_Z(1) \\ \vdots \\ \hat{\phi}(T) \\ \hat{\mu}_Z(T) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{N-1}X_{kT}^2 & \sum_{k=0}^{N-1}X_{kT} & \cdots & 0 & 0 \\ \sum_{k=0}^{N-1}X_{kT} & N & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{k=0}^{N-1}X_{T-1+kT}^2 & \sum_{k=0}^{N-1}X_{T-1+kT} \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{k=0}^{N-1}X_{T-1+kT} & N \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{N-1}X_{1+kT}X_{kT}-N\overline{M}'_N(1) \\ \sum_{k=0}^{N-1}X_{1+kT}-N\overline{M}_N(1) \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{N-1}X_{T+kT}X_{T-1+kT}-N\overline{M}'_N(T) \\ \sum_{k=0}^{N-1}X_{T+kT}-N\overline{M}_N(T) \end{pmatrix}$$

따라서 정리 1에서와 같은 방법으로

$$\sqrt{N}\begin{pmatrix} \hat{\phi}(1)-\phi(1) \\ \hat{\mu}_Z(1)-\mu_Z(1) \\ \vdots \\ \hat{\phi}(T)-\phi(T) \\ \hat{\mu}_Z(T)-\mu_Z(T) \end{pmatrix}=\sqrt{N}\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{N-1}X_{kT}^2 & \sum_{k=0}^{N-1}X_{kT} & \cdots & 0 & 0 \\ \sum_{k=0}^{N-1}X_{kT} & N & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{k=0}^{N-1}X_{T-1+kT}^2 & \sum_{k=0}^{N-1}X_{T-1+kT} \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{k=0}^{N-1}X_{T-1+kT} & N \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} N\overline{M}'_N(1) \\ N\overline{M}_N(1) \\ \vdots \\ N\overline{M}'_N(T) \\ N\overline{M}_N(T) \end{pmatrix}\xrightarrow{D}$$

$$\xrightarrow{D} N(\mathbf{0},\ VWV).$$

웃식의 첫 마디가 블로크대각선행렬이므로

$$V=\begin{pmatrix} V(1) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & V(2) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & V(T) \end{pmatrix}$$

이며 W 의 $(i,\ j)$ 째 $(i,\ j\in\{1,2,\cdots,T\})$ 원소 $W(i,\ j)$ 는 $i=j$ 일 때

$$W(i,\ i)=W(i)$$

이고 $i\neq j$ 일 때

$$W(i,\ j)=\begin{pmatrix} \sigma_{11}(i,\ j) & \sigma_{12}(i,\ j) \\ \sigma_{21}(i,\ j) & \sigma_{22}(i,\ j) \end{pmatrix}$$

인 2차원행렬이다. 여기서

$$\sigma_{11}(i,\ j)=\mathrm{E}(X_{i-1+kT}X_{j-1+kT}(X_{i+kT}-\phi(i)X_{i-1+kT}-\mu_Z(i))(X_{j+kT}-\phi(j)X_{j-1+kT}-\mu_Z(j))),$$
$$\sigma_{12}(i,\ j)=\mathrm{E}(X_{i-1+kT}(X_{i+kT}-\phi(i)X_{i-1+kT}-\mu_Z(i))(X_{j+kT}-\phi(j)X_{j-1+kT}-\mu_Z(j))),$$
$$\sigma_{21}(i,\ j)=\mathrm{E}(X_{j-1+kT}(X_{i+kT}-\phi(i)X_{i-1+kT}-\mu_Z(i))(X_{j+kT}-\phi(i)X_{j-1+kT}-\mu_Z(j))),$$
$$\sigma_{22}(i,\ j)=\mathrm{E}((X_{i+kT}-\phi(i)X_{i-1+kT}-\mu_Z(i))(X_{j+kT}-\phi(j)X_{j-1+kT}-\mu_Z(j))).$$

따라서 정리의 결과가 나온다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] H. Zheng et al.; J. Statistical Planning and Inference, 173, 212, 2007.
[2] H. Zhang et al.; J. Time Series Anal., 32, 195, 2011.
[3] J. D. Hamilton; Time Series Analysis, New Jersey, 12～45, 1994.
[4] M. Monteiro et al.; J. Statistical Planning and Inference, 140, 1529, 2010.
[5] P. Billingsley; Statistical Inference for Markov Processes, University of Chicago Press, 56～78, 1961.
[6] P. J. Brockwell et al.; Time Series Theory and Methods, Springer, 34～58, 2006.

주체105(2016)년 3월 5일 원고접수

Asymptotic Distribution of Parameter Estimator of Periodic Integer-Valued Autoregressive Model of First Order with Random Coefficient

Yu Kang Hyok, Jin Kyo Ung

In the past, the weighted conditional least square estimator for parameter of first order periodic integer-valued autoregressive model and asymptotic distribution of conditional least square estimator for parameter of first order integer-valued autoregressive model with random coefficient are discussed [4, 1]. Moreover parameter estimation of p^{th} order integer-valued autoregressive model with random coefficient is also addressed [2].

We studied asymptotic distribution of conditional least squares estimator for parameter of first order periodic integer-valued autoregressive model with random coefficient.

Key words: conditional least square estimator, asymptotic distribution