김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체106(2017)년 제63권 제9호 Vol. 63 No. 9 JUCHE106(2017).

한가지 형태의 임풀스분수계미분방정식의 경계값문제에 대한 연산행렬법

최희철, 김광혁

진화과정을 묘사하는데서 중요하게 리용되는 옹근수계임풀스미분방정식은 임풀스분수계미분방정식으로 확장되여 리론적 및 실천적응용부문에 널리 리용되고있다.

선행연구[1]에서는 한가지 형태의 임풀스분수계미분방정식에 대하여 론의하였으며 선행연구[2－4]에서는 각각 이 임풀스분수계미분방정식의 $p+1$ 점경계값문제, 반주기경계값문제, 경계값문제의 풀이의 존재성에 대하여 론의하였다.

론문에서는 선행연구[4]에서 론의한 문제에 대하여 $m=1,\ t_1=t_*$로 놓은 연산행렬법으로 효과적으로 풀수 있는 다음과 같은 문제에 대하여 론의한다.

$$ {}^cD_0^q u(t)=f(t,\ u(t)),\ \ t\in(0,\ 1],\ \ 1<q\le 2,\ \ t\in J' \tag{1}$$

$$\Delta u(t_*)=I_*(u(t_*^-)),\ \ \Delta u'(t_*)=\bar{I}_*(u(t_*^-)) \tag{2}$$

$$au(0)-bu'(0)=x_0,\ \ cu(1)+du'(1)=x_1 \tag{3}$$

여기서 ${}^cD_0^q$는 캐푸터도함수연산자이고 $a\ge 0,\ b>0,\ c\ge 0,\ d>0,\ \delta=ac+ad+bc\ne 0$이며

$$x_0,\ x_1\in \boldsymbol{R},\ f\in C(I\times \boldsymbol{R},\ \boldsymbol{R}),\ \ I_*,\ \bar{I}_*\in C(\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{R}),\ \ t_*\in(0,\ 1),\ \ J=(0,\ 1),\ J'=J\setminus\{t_*\},$$

$$\Delta u(t_*)=u(t_*+0)-u(t_*-0),\ \ \Delta u'(t_*)=u'(t_*+0)-u'(t_*-0).$$

$\varphi(t):=-\dfrac{(bc-\delta)x_0-abx_1}{a\delta}-\dfrac{cx_0-ax_1}{a\delta}t,\ \ \chi(t):=\begin{cases}1,\ t>0\\ 0,\ t\le 0\end{cases},\ \ \eta:=\dfrac{c(1-t_*)}{\delta}+\dfrac{d}{\delta}$ 라고 하자.

정리 1 $u(t)$가 문제 (1)－(3)의 풀이이기 위해서는 $u(t)$가 방정식

$$\begin{aligned}u(t)=&I_0^q f(t,\ u(t))+\chi(t-t_*)[(t-t_*)I_0^{q-1}f(t,\ u(t))|_{t_*}+\\ &+I_*(u(t_*-0))+(t-t_*)\bar{I}_*(u(t_*-0))]+(b+at)C_0(u)+\varphi(t)\end{aligned} \tag{4}$$

의 풀이일것이 필요하고 충분하다. 여기서

$$\begin{aligned}C_0(u):=-\Bigg\{&\frac{c}{\delta}I_0^q f(t,\ u(t))|_{t_*}+\eta I_0^{q-1}f(t,\ u(t))|_{t_*}+\frac{c}{\delta}I_*(u(t_*-0))+\eta\bar{I}_*(u(t_*-0))+\\ &+\frac{c}{\delta\cdot\Gamma(q)}\int_{t_*}^1(1-s)^{q-1}f(s,\ u(s))ds+\frac{d}{\delta\cdot\Gamma(q-1)}\int_{t_*}^1(1-s)^{q-2}f(s,\ u(s))ds\Bigg\}.\end{aligned}$$

이제 문제 (4)에 연산행렬법을 리용하기 위해 다음의 계산그물을 만들자.

$$\Delta t:=1/m=1/2^r,\ \ r\in\boldsymbol{N},\ \ t_k:=(k-0.5)\Delta t,\ \ k=1,\ \cdots,\ m$$

론의를 간단히 하기 위하여 $t_*=1/2=t_{m/2}$이라고 하자.

정의 1 다음의 식으로 규정되는 함수계를 블로크임풀스함수계(BPF)라고 부른다.

$$b_i(t)=\begin{cases}1,\ \ i/m\le t<(i+1)/m\\ 0,\ \ \ \text{기타}\end{cases},\ \ i=\overline{0,\ m-1}$$

정의 2 실축 R 우에서 정의된 함수계

$$h_0(t)=\frac{1}{\sqrt{m}},\ \ h_i(t)=\frac{1}{\sqrt{m}}\begin{cases}2^{j/2}, & (k-1)/2^j<t\le(k-1/2)/2^j\\ -2^{j/2}, & (k-1/2)/2^j<t\le k/2^j\\ 0, & \text{기타}\end{cases}$$

를 하르웨블레트족이라고 부른다. 여기서 $j,\ k$ 는 i 의 옹근수분해이다.

정의 3 임의의 $i\ge1,\ i\in\boldsymbol{Z}$ 에 대하여 부등식 $i=k+2^j-1,\ 0\le j<i,\ 1\le k<2^j+1$ 을 만족시키는 옹근수쌍 $(j,\ k)$ 를 i 의 옹근수분해라고 부른다.

정의 4 $H_{\text{matrix}}:=\begin{pmatrix}h_0(t_1) & h_0(t_2) & \cdots & h_0(t_m)\\ h_1(t_1) & h_1(t_2) & \cdots & h_1(t_m)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ h_{m-1}(t_1) & h_{m-1}(t_2) & \cdots & h_{m-1}(t_m)\end{pmatrix}$ 을 점배치점모임 (t_k) 에 관한 하르웨블레트행렬이라고 부른다.

보조정리 1[5] 블로크임풀스함수벡토르 $B(t)=(B_1(t),\ B_2(t),\cdots,\ B_m(t))^{\mathrm{T}}$ 의 연산행렬 F_B^α 는 $F_B^\alpha=\dfrac{1}{m^\alpha}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha+2)}\begin{pmatrix}1 & \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_{m-1}\\ 0 & 1 & \xi_1 & \cdots & \xi_{m-2}\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \xi_{m-3}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}$ 과 같이 표시된다. 여기서

$$\xi_k=(k+1)^{\alpha+1}-2k^{\alpha+1}+(k-1)^{\alpha+1}.$$

정리 2[5] 하르웨블레트족 $H(t)=(h_0(t),\ h_1(t),\ \cdots,\ h_{m-1}(t))^{\mathrm{T}}$ 의 연산행렬 F_H^α 는 $F_H^\alpha=H_{\text{matrix}}F_B^\alpha H_{\text{matrix}}^{\mathrm{T}}$ 와 같이 표시된다.

$H_m(t):=(h_0(t),\ h_1(t),\ \cdots,\ h_{m-1}(t))^{\mathrm{T}}$, $C^{\mathrm{T}}:=(c_0,\ c_1,\ \cdots,\ c_{m-1})$ 이라고 할 때 함수 $y(t)$ 가 토막상수함수이면 유한개의 하르함수에 의해 근사시킬수 있다. 즉 $y(t)=\sum_{k=0}^{m-1}c_kh_k(t)=C^{\mathrm{T}}H(t).$

이 경우에

$$I_0^\alpha y(t)=I_0^\alpha C^{\mathrm{T}}H(t)=C^{\mathrm{T}}I_0^\alpha H(t)=C^{\mathrm{T}}F_H^\alpha H(t),\quad (I_0^\alpha y(t_1),I_0^\alpha y(t_2),\ \cdots,\ I_0^\alpha y(t_m))=C^{\mathrm{T}}F_H^\alpha H_{\text{matrix}}.$$

앞으로 공간은 $PC(l,\ \boldsymbol{R}):=\{y:l\to\boldsymbol{R}\,|\,y:l_k$ 에서 련속, $y(0+0),\ \ y(T-0),\ \ y(t_k+0),\ \ y(t_k-0)$: 존재, $y(t_k-0)=y(t_k),\ \ k=1,\cdots,\ p\}$ 와 같은 공간을 리용한다.

$f,\ I_*,\ \bar{I}_*$ 이 비선형이므로 아도미안분해법을 리용하자.

가정 1 $u(t):=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(t)$

식 (4)로부터 다음과 같다.

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n(t)=I_0^qf(t,\ u_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(I_0^qf\left(t,\ \sum_{j=0}^{n}u_j(t)\right)-I_0^qf\left(t,\ \sum_{j=0}^{n-1}u_j(t)\right)\right)+$$

$$+\chi(t-t_*)\left[(t-t_*)\left(I_0^{q-1}f(t,\ u_0)|_{t_*}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(I_0^{q-1}f\left(t,\ \sum_{j=0}^{n}u_j(t)\right)\Bigg|_{t_*}-I_0^{q-1}f\left(t,\ \sum_{j=0}^{n-1}u_j(t)\right)\Bigg|_{t_*}\right)\right)+\right.$$

$$+I_*(u_0(t_*-0))+\sum_{n=1}^{\infty}\left(I_*\left(\sum_{j=0}^{n}u_j(t_*-0)\right)-I_*\left(\sum_{j=0}^{n-1}u_j(t_*-0)\right)\right)+$$

$$+(t-t_*)\left(\bar{I}_*(u_0(t_*-0))+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\bar{I}_*\left(\sum_{j=0}^{n}u_j(t_*-0)\right)-\bar{I}_*\left(\sum_{j=0}^{n-1}u_j(t_*-0)\right)\right)\right)\Bigg]+(b+at)C_0\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n(t)\right)+\varphi(t)$$

$$C_0\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n(t)\right)=-\left\{\frac{c}{\delta}\left(I_0^q f(t,\ u_0)|_{t_*}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(I_0^q f\left(t,\ \sum_{j=0}^{n}u_j(t)\right)\Bigg|_{t_*}-I_0^q f\left(t,\ \sum_{j=0}^{n-1}u_j(t)\right)\Bigg|_{t_*}\right)\right)+\right.$$

$$+\eta\left(I_0^{q-1}f(t,\ u_0)|_{t_*}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(I_0^{q-1}f\left(t,\ \sum_{j=0}^{n}u_j(t)\right)\Bigg|_{t_*}-I_0^{q-1}f\left(t,\ \sum_{j=0}^{n-1}u_j(t)\right)\Bigg|_{t_*}\right)\right)+$$

$$+\frac{c}{\delta}\left(I_*(u_0(t_*-0))+\sum_{n=1}^{\infty}\left(I_*\left(\sum_{j=0}^{n}u_j(t_*-0)\right)-I_*\left(\sum_{j=0}^{n-1}u_j(t_*-0)\right)\right)\right)+$$

$$+\eta\left(\bar{I}_*(u_0(t_*-0))+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\bar{I}_*\left(\sum_{j=0}^{n}u_j(t_*-0)\right)-\bar{I}_*\left(\sum_{j=0}^{n-1}u_j(t_*-0)\right)\right)\right)+$$

$$+\frac{c}{\delta\cdot\Gamma(q)}\left(\int_{t_*}^{1}(1-s)^{q-1}f(s,\ u_0(s))ds+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{t_*}^{1}(1-s)^{q-1}f\left(s,\ \sum_{j=0}^{n}u_j(s)\right)ds-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\int_{t_*}^{1}(1-s)^{q-1}f\left(s,\ \sum_{j=0}^{n-1}u_j(s)\right)ds\right)\right)+\frac{d}{\delta\cdot\Gamma(q-1)}\left(\int_{t_*}^{1}(1-s)^{q-2}f(s,\ u_0(s))ds+\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{t_*}^{1}(1-s)^{q-2}f\left(s,\ \sum_{j=0}^{n}u_j(s)\right)ds-\int_{t_*}^{1}(1-s)^{q-2}f\left(s,\ \sum_{j=0}^{n-1}u_j(s)\right)ds\right)\right)\right\}$$

이로부터 다음의 분해식을 리용한다.

$$u_0(t)=\varphi(t) \tag{5}$$

$$\begin{aligned}u_1(t)&=I_0^q f(t,\ u_0)+\chi(t-t_*)[(t-t_*)(I_0^{q-1}f(t,\ u_0))|_{t_*}+I_*(u_0(t_*-0))+\\&+(t-t_*)(\bar{I}_*(u_0(t_*-0)))]+(b+at)C_{0,\,1}(u_0)\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}u_{n+1}(t)&=I_0^q f\left(t,\ \sum_{j=0}^{n}u_j(t)\right)-I_0^q f\left(t,\ \sum_{j=0}^{n-1}u_j(t)\right)+\chi(t-t_*)\left[(t-t_*)\left(I_0^{q-1}f\left(t,\ \sum_{j=0}^{n}u_j(t)\right)\Bigg|_{t_*}-\right.\right.\\&\left.-I_0^{q-1}f\left(t,\ \sum_{j=0}^{n-1}u_j(t)\right)\Bigg|_{t_*}\right)+I_*\left(\sum_{j=0}^{n}u_j(t_*-0)\right)-I_*\left(\sum_{j=0}^{n-1}u_j(t_*-0)\right)+\\&\left.+(t-t_*)\left(\bar{I}_*\left(\sum_{j=0}^{n}u_j(t_*-0)\right)-\bar{I}_*\left(\sum_{j=0}^{n-1}u_j(t_*-0)\right)\right)\right]+(b+at)C_{0,\,n}\end{aligned} \tag{7}$$

여기서

$$C_{0,\,1}(u_0)=-\left\{\frac{c}{\delta}I_0^q f(t,\,u_0)|_{t_*}+\eta I_0^{q-1}f(t,\,u_0)|_{t_*}+\frac{c}{\delta}I_*(u_0(t_*-0))+\right.$$
$$\left.+\eta\bar{I}_*(u_0(t_*-0))+\frac{c}{\delta\cdot\Gamma(q)}\int_{t_*}^{1}(1-s)^{q-1}f(s,\,u_0(s))ds+\frac{d}{\delta\cdot\Gamma(q-1)}\int_{t_*}^{1}(1-s)^{q-2}f(s,\,u_0(s))ds\right\},$$

$$C_{0,\,n}=-\left\{I_0^q f\left(t,\,\sum_{j=0}^{n}u_j(t)\right)\Bigg|_{t_*}-I_0^q f\left(t,\,\sum_{j=0}^{n-1}u_j(t)\right)\Bigg|_{t_*}+\eta\left(I_0^{q-1}f\left(t,\,\sum_{j=0}^{n}u_j(t)\right)\Bigg|_{t_*}-I_0^{q-1}f\left(t,\,\sum_{j=0}^{n-1}u_j(t)\right)\Bigg|_{t_*}\right)+\right.$$
$$+\frac{c}{\delta}\left(I_*\left(\sum_{j=0}^{n}u_j(t_*-0)\right)-I_*\left(\sum_{j=0}^{n-1}u_j(t_*-0)\right)\right)+\eta\left(\bar{I}_*\left(\sum_{j=0}^{n}u_j(t_*-0)\right)-\bar{I}_*\left(\sum_{j=0}^{n-1}u_j(t_*-0)\right)\right)+$$
$$+\frac{c}{\delta\cdot\Gamma(q)}\left(\int_{t_*}^{1}(1-s)^{q-1}f\left(s,\,\sum_{j=0}^{n}u_j(s)\right)ds-\int_{t_*}^{1}(1-s)^{q-1}f\left(s,\,\sum_{j=0}^{n-1}u_j(s)\right)ds\right)+$$
$$\left.+\frac{d}{\delta\cdot\Gamma(q-1)}\left(\int_{t_*}^{1}(1-s)^{q-2}f\left(s,\,\sum_{j=0}^{n}u_j(s)\right)ds-\int_{t_*}^{1}(1-s)^{q-2}f\left(s,\,\sum_{j=0}^{n-1}u_j(s)\right)ds\right)\right\}.$$

이 사실을 리용하여 알고리듬을 작성하자.

$u_0(t)$ 의 점배치근사풀이를 $\hat{u}_0(t)=C_0^{\mathrm{T}}\circ H(t)$ 형태로 구하되 $u_0(t)=\varphi(t)$ 를 리용하자.

$$\hat{u}_0(t_k)=C_0^{\mathrm{T}}\circ H(t_k)=\varphi(t_k),\quad k=1,\,\cdots,\,m$$
$$(\varphi(t_1),\,\varphi(t_2),\,\cdots,\,\varphi(t_m))=(C_0^{\mathrm{T}}H(t_1),\,C_0^{\mathrm{T}}H(t_2),\,\cdots,\,C_0^{\mathrm{T}}H(t_m))=C_0^{\mathrm{T}}H_{\mathrm{matrix}}$$

따라서 $C_0^{\mathrm{T}}=Y\circ H_{\mathrm{matrix}}^{\mathrm{T}}$ 가 성립된다.

다음으로 $u_1(t)$ 의 점배치근사풀이를 $\hat{u}_1(t)=C_1^{\mathrm{T}}\circ H(t)$ 형태로 구하자.

방정식 (6)의 u_0 에 $\hat{u}_0$ 을 대입하고 점 t_k 를 배치하자.

$$\hat{u}_1(t_k):=I_0^q f(t,\,\hat{u}_0)|_{t_k}+\chi(t_k-t_*)[(t_k-t_*)(I_0^{q-1}f(t,\,\hat{u}_0))|_{t_*}+I_*(\hat{u}_0(t_*-0))+$$
$$+(t_k-t_*)(\bar{I}_*(\hat{u}_0(t_*-0)))]+(b+at_k)C_{0,\,1}(\hat{u}_0)=C_1^{\mathrm{T}}\circ H(t_k)$$
$$(\hat{u}_1(t_1),\,\hat{u}_1(t_2),\,\cdots,\,\hat{u}_1(t_k))=(C_1^{\mathrm{T}}\circ H(t_1),\,C_1^{\mathrm{T}}\circ H(t_2),\,\cdots,\,C_1^{\mathrm{T}}\circ H(t_m))=C_1^{\mathrm{T}}\circ H_{\mathrm{matrix}}$$

따라서 $C_1^{\mathrm{T}}=(\hat{u}_1(t_1),\,\hat{u}_1(t_2),\,\cdots,\,\hat{u}_1(t_k))\circ H_{\mathrm{matrix}}^{\mathrm{T}}$ 이다.

우리가 구하려는 풀이의 형태가 $u(t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(t)$ 이므로 $n+1$ 째 근사풀이를

$$U_{n+1}(t):=\sum_{j=0}^{n+1}\hat{u}_j(t)$$

로 놓는다.

$S_{n+1}:=\sum_{j=0}^{n+1}C_j^{\mathrm{T}}$ 라고 표시하면 $U_{n+1}(t)=S_{n+1}\circ H(t)$, $S_0=C_0^{\mathrm{T}}$, $S_1=C_0^{\mathrm{T}}+C_1^{\mathrm{T}}$ 이다.

한편 $\hat{u}_{n+1}(t)=U_{n+1}(t)-U_n(t)$ 이므로 식 (7)로부터 다음과 같다.

$$U_{n+1}(t_k)=U_n(t_k)+I_0^q f(t,\,U_n(t))|_{t_k}-I_0^q f(t,\,U_{n-1}(t))|_{t_k}+\chi(t_k-t_*)\cdot$$
$$\cdot[(t_k-t_*)(I_0^{q-1}f(t,\,U_n(t))|_{t_*}-I_0^{q-1}f(t,\,U_{n-1}(t))|_{t_*})+I_*(U_n(t_*-0))-$$
$$-I_*(U_{n-1}(t_*-0))+(t_k-t_*)(\bar{I}_*(U_n(t_*-0))-\bar{I}_*(U_{n-1}(t_*-0)))]+(b+at_k)C_{0,\,n+1}$$

다음으로 $U_{n+1}(t)$ 의 점배치근사풀이를 $U_{n+1}(t)=S_{n+1}\circ H(t)$ 형태로 구하자.

$$(U_{n+1}(t_1),\ U_{n+1}(t_2), \cdots,\ U_{n+1}(t_k))=$$
$$=(S_{n+1}\circ H(t_1),\ S_{n+1}\circ H(t_2),\ \cdots,\ S_{n+1}\circ H(t_m))=S_{n+1}\circ H_{\mathrm{matrix}}$$

따라서 $S_{n+1}=(U_{n+1}(t_1),\ U_{n+1}(t_2), \cdots,\ U_{n+1}(t_k))\circ H_{\mathrm{matrix}}^{\mathrm{T}}$ 이다.

이제 $U_{n+1}(t_k)$ 를 연산행렬법으로 고속계산하는 방법에 대하여 론의하자.

$$F_n:=(f(t_1,\ U_n(t_1)),\ f(t_2,\ U_n(t_2)), \cdots,\ f(t_m,\ U_n(t_m)))$$
$$U_n(t_k)=S_n\circ H(t_k)$$

$$I_0^q f(t,\ U_n(t))|_{t_k}=F_n\circ H_{\mathrm{matrix}}^{\mathrm{T}}\circ F_H^q\circ H(t_k),\ \ I_0^q f(t,\ U_{n-1}(t))|_{t_k}=F_{n-1}\circ H_{\mathrm{matrix}}^{\mathrm{T}}\circ F_H^q\circ H(t_k)$$
$$I_0^q f(t,\ U_n(t))|_{t_k}-I_0^q f(t,\ U_{n-1}(t))|_{t_k}=(F_n-F_{n-1})\circ H_{\mathrm{matrix}}^{\mathrm{T}} F_H^q H(t_k)$$
$$I_0^{q-1} f(t,\ U_n(t))|_{t_*}-I_0^{q-1} f(t,\ U_{n-1}(t))|_{t_*}=(F_n-F_{n-1})\circ H_{\mathrm{matrix}}^{\mathrm{T}} F_H^{q-1} H(t_k)$$
$$G_n(t_k):=\chi(t_k-t_*)I_*(U_n(t_*-0))+\chi(t_k-t_*)(t_k-t_*)\bar{I}_*(U_n(t_*-0))$$

따라서 다음의 식이 성립된다.

$$U_{n+1}(t_k)=U_n(t_k)+G_n(t_k)-G_{n-1}(t_k)+(b+at_k)C_{0,\ n+1}+(F_n-F_{n-1})\circ H_{\mathrm{matrix}}^{\mathrm{T}}(F_H^q+F_H^{q-1})H(t_k)$$

$C_{0,\ n+1}$ 에 대해서도 마찬가지로 론의할수 있다.

보조정리 2 $M:=\sup|f(t,\ x)|,\ \ t_2>t_1$ 이라고 하자.

이때 $|I_0^\alpha f(t,\ x(t))|_{t_1}-I_0^\alpha f(t,\ x(t))|_{t_2}|\le\begin{cases}2M/\Gamma(1+\alpha)\cdot\Delta t^\alpha, & \alpha\le 1\\ M/\Gamma(1+\alpha)\cdot((t_2-t_1)^\alpha+t_2^\alpha-t_1^\alpha), & \alpha>1\end{cases}$ 이 성립된다.

가정 2 $\forall x_1,\ x_2\in\boldsymbol{R},\ |f(t,\ x_1)-f(t,\ x_2)|\le L_f|x_1-x_2|$

가정 3 $\forall x_1,\ x_2\in\boldsymbol{R},\ |I_*(x_1)-I_*(x_2)|\le L_{I_*}|x_1-x_2|$

가정 4 $\forall x_1,\ x_2\in\boldsymbol{R},\ |\bar{I}_*(x_1)-\bar{I}_*(x_2)|\le L_{\bar{I}_*}|x_1-x_2|$

가정 5 $\omega:=L_f(1/\Gamma(1+q)+\Delta t/\Gamma(q))+(L_{I_*}+L_{\bar{I}_*}\Delta t)$, $0<\omega<1$

이때 다음의 수렴성정리가 성립된다.

정리 3 $\|u(t)-U_N(t)\|_{PC[0,\ 1]}\le\dfrac{M}{\Gamma(1+q)}(\Delta t^q+\Delta t^{q-1})+\Delta t\cdot C+\omega^N\|u-U_0\|_{PC[0,\ 1]}$

증명 $\forall t\in[0,\ 1],\ \exists t_k;\ t_k\in\bigcup\limits_{\Delta t}(t)\ \ (t_k\ne t)$

$$|u(t)-U_N(t)|=|u(t)-u(t_k)+u(t_k)-U_N(t_k)+U_N(t_k)-U_N(t)|$$

$U_N(t)$ 의 구성으로부터 $|U_N(t_k)-U_N(t)|=|U_N(t_k)-U_N(t_k)|=0$ 이 성립된다.

먼저 $|u(t)-u(t_k)|$ 를 평가하자.

$$u(t)=I_0^q f(t,\ u(t))+\chi(t-t_*)[(t-t_*)I_0^{q-1}f(t,\ u(t))|_{t_*}+$$
$$+I_*(u(t_*-0))+(t-t_*)\bar{I}_*(u(t_*-0))]+(b+at)C_0(u)+\varphi(t)$$
$$u(t_k)=I_0^q f(t,\ u(t))|_{t_k}+\chi(t_k-t_*)[(t_k-t_*)I_0^{q-1}f(t,\ u(t))|_{t_*}+$$
$$+I_*(u(t_*-0))+(t_k-t_*)\bar{I}_*(u(t_*-0))]+(b+at_k)C_0(u)+\varphi(t_k)$$
$$|u(t)-u(t_k)|\le M/\Gamma(1+q)\cdot(\Delta t^q+\Delta t^{q-1})+\Delta t\cdot C$$

이제 $|u(t_k)-U_N(t_k)|$ 을 평가하자.

$$U_N(t_k)=U_{N-1}(t_k)+I_0^q f(t,\ U_{N-1}(t))|_{t_k}-I_0^q f(t,\ U_{N-2}(t))|_{t_k}+$$
$$+\chi(t_k-t_*)[(t_k-t_*)(I_0^{q-1}f(t,\ U_{N-1}(t))|_{t_*}-I_0^{q-1}f(t,\ U_{N-2}(t))|_{t_*})+$$
$$+I_*(U_{N-1}(t_*-0))-I_*(U_{N-2}(t_*-0))+$$
$$+(t_k-t_*)(\bar{I}_*(U_{N-1}(t_*-0))-\bar{I}_*(U_{N-2}(t_*-0)))]+(b+at_k)C_{0,\ N}$$

$$U_{N-1}(t_k)=U_{N-2}(t_k)+I_0^q f(t,\ U_{N-2}(t))|_{t_k}-I_0^q f(t,\ U_{N-3}(t))|_{t_k}+$$
$$+\chi(t_k-t_*)[(t_k-t_*)(I_0^{q-1}f(t,\ U_{N-2}(t))|_{t_*}-I_0^{q-1}f(t,\ U_{N-3}(t))|_{t_*})+$$
$$+I_*(U_{N-2}(t_*-0))-I_*(U_{N-3}(t_*-0))+$$
$$+(t_k-t_*)(\bar{I}_*(U_{N-2}(t_*-0))-\bar{I}_*(U_{N-3}(t_*-0)))]+(b+at_k)C_{0,\ N-1}$$

$$u(t_k)=I_0^q f(t,\ u(t))|_{t_k}+\chi(t_k-t_*)[(t_k-t_*)I_0^{q-1}f(t,\ u(t))|_{t_*}+$$
$$+I_*(u(t_*-0))+(t_k-t_*)\bar{I}_*(u(t_*-0))]+(b+at_k)C_0(u)+\varphi(t_k)$$

$$|u(t_k)-U_N(t_k)|\le L_f\left(\frac{1}{\Gamma(1+q)}+\frac{\Delta t}{\Gamma(q)}\right)\|u-U_{N-1}\|_{PC[0,\ 1]}+(L_{I_*}+L_{\bar{I}_*}\Delta t)\|u-U_{N-1}\|_{PC[0,\ 1]}=$$
$$=\omega\|u-U_{N-1}\|_{PC[0,\ 1]}\le\omega^N\|u-U_0\|_{PC[0,\ 1]}$$

따라서 $\|u(t)-U_N(t)\|_{PC[0,\ 1]}\le\dfrac{M}{\Gamma(1+q)}(\Delta t^q+\Delta t^{q-1})+\Delta t\cdot C+\omega^N\|u-U_0\|_{PC[0,\ 1]}$ 이다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] B. Ahmad et al.; Nonlinear Anal. Hybrid Syst., 3, 3, 251, 2009.

[2] Y. S. Tian et al.; Comput. Math. Appl., 59, 8, 2601, 2010.

[3] L. H. Zhang et al.; Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., 7, 1, 2011.

[4] G. Hariharan et al.; World Applied Sciences Journal, 23, 12, 1, 2013.

[5] A. Neamaty et al.; J. Math. Comput. Sci., 7, 230, 2013.

주체106(2017)년 5월 5일 원고접수

The Operational Matrices Method for the Boundary Value Problem of an Impulsive Fractional Differential Equation

Choe Hui Chol, Kim Kwang Hyok

We studied about a numerical method for the boundary value problem of the impulsive fractional differential equation which was widely studied recently. And we analyzed its convergence.

Key words: Caputo fractional derivative, impulsive fractional differential equation