김일성종합대학학보 수 학
주체110(2021)년 제67권 제2호

# 리만다양체에서 사분대칭계량접속의 호상접속에 대하여

곽금혁, 허달윤

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《기초과학을 끊임없이 심화발전시키지 않고서는 첨단과학기술을 연구도입할수도 없고 새로운 높은 수준의 과학기술을 연구개발할수도 없습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제22권 21페지)

선행연구[1]에서는 반대칭계량접속의 호상접속에 대한 연구가 진행되였고 선행연구[5]에서는 사분대칭계량접속과 그것의 곡률텐소르의 성질이 연구되였다. 그리고 선행연구[3]에서는 반대칭접속의 호상접속이 연구되고 그 물리적의미가 밝혀졌다. 또한 선행연구[4]에서는 비계량접속의 공액대칭성조건을 밝히는 문제가 연구되고 선행연구[2]에서는 사분대칭계량접속의 사영변환과 그것에 관한 불변량이 연구되였다.

론문에서는 선행연구결과에 기초하여 사분대칭계량접속의 호상접속에 관한 사영동등성, 공액대칭조건과 일정곡률성을 밝히려고 한다.

사분대칭계량접속 $\nabla$는

$$\nabla_k g_{ij}=0\,,\ \ T_{ij}^k=\pi_j\varphi_i^k-\pi_i\varphi_j^k$$

를 만족시키는 접속으로 정의되였으며 $\nabla$의 접속결수는

$$\Gamma_{ij}^k=\left\{ {k \atop ij} \right\}+\pi_j U_i^k-\pi_i V_j^k-U_{ij}\pi^k \tag{1}$$

로 표시되였다. 여기서 $\left\{ {k \atop ij} \right\}$는 레비－치비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$의 접속결수로서 크리스토펠기호이며 $\pi_i$는 주어진 1－형식 $\pi$의 성분이고 $\varphi_i^k$는 (1, 1)형텐소르마당 $\varphi$의 성분이다. 그리고

$$U_{ij}=\frac{1}{2}(\varphi_{ij}+\varphi_{ji}),\ \ V_{ij}=\frac{1}{2}(\varphi_{ij}-\varphi_{ji}),\ \ \pi^k=g^{kl}\pi_l$$

이다.[2]

한편 사분대칭계량접속 $\nabla$의 호상접속 $\overset{m}{\nabla}$의 접속결수는 다음과 같다.

$$\overset{m}{\Gamma}{}_{ij}^k=\left\{ {k \atop ij} \right\}+\pi_i U_j^k-\pi_j V_i^k-U_{ij}\pi^k \tag{2}$$

식 (2)로부터 호상접속 $\overset{m}{\nabla}$은 리만다양체 $(M,\ g)$에서

$$\overset{m}{\nabla}_k g_{ij}=-2\pi_k U_{ij}+\pi_i(U_{kj}+V_{kj})+\pi_j(U_{ki}+V_{ki})\,,\ \ \overset{m}{T}{}_{ij}^{k}=\pi_i\varphi_j^k-\pi_j\varphi_i^k \tag{3}$$

를 만족시키는 비대칭비계량접속이다. 그리고 호상접속 $\overset{m}{\nabla}$의 쌍대접속 $\overset{m*}{\nabla}$의 접속결수는 식 (3)으로부터 다음과 같다.

$$\overset{m*}{\Gamma}{}_{ij}^k=\left\{ {k \atop ij} \right\}-\pi_i U_j^k+\pi_j U_i^k+V_{ij}\pi^k \tag{4}$$

또한 호상접속 $\overset{m}{\nabla}$에 관한 곡률텐소르는 식 (2)로부터 다음과 같다.

$$\overset{m}{R}{}_{ijk}^l=K_{ijk}^l+U_{ik}a_j^l-U_{jk}a_i^l-b_{ijk}\pi^l+b_{jik}\pi^l+c_{ikj}^l-c_{jki}^l+V_i^l d_{jk}-V_j^l d_{ik}+e_{ij}^l\pi_k-e_{ji}^l\pi_k \tag{5}$$

여기서 $K_{ijk}^l$은 레비-치비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$에 관한 곡률텐소르이고

$$a_{ik}=\overset{\circ}{\nabla}_i\pi_k+\pi_iU_{kp}\pi^p-U_{ip}\pi^p\pi_k,\ b_{ijk}=\overset{\circ}{\nabla}_iU_{jk}-\pi_iU_{jp}U_k^p,\ c_{ikj}^l=\nabla_i(U_k^l\pi_j)$$

$$d_{ik}=\overset{\circ}{\nabla}_i\pi_k-\pi_iU_k^p\pi^p+V_i{}^p\pi_p\pi_k-U_{ik}\pi_p\pi^p,\ e_{ij}{}^l=\overset{\circ}{\nabla}_iV_j^l-\pi_iV_p^lV_j^p+U_{ip}V_j^p\pi^l$$

이다.

한편 호상접속 $\overset{m}{\nabla}$의 쌍대접속 $\overset{m*}{\nabla}$에 관한 곡률텐소르는 식 (4)로부터 다음과 같다.

$$\overset{m*}{R}{}_{ijk}^{l}=K_{ijk}^l+U_j^la_{ik}-U_i^la_{jk}+b_{ij}^l\pi_k-b_{ji}^l\pi_k-c_{ikj}^l+c_{jki}^l-V_{ik}\bar{d}_j^l+V_{jk}\bar{d}_i^l+\bar{e}_{ijk}\pi^l-\bar{e}_{jik}\pi^l \tag{6}$$

여기서

$$\bar{d}_{ik}=\overset{\circ}{\nabla}_i\pi_k-\pi_iU_{kp}\pi^p+V_{ip}\pi^p\pi_k-U_{ik}\pi_p\pi^p,\ \bar{e}_{ijk}=\nabla_iV_{jk}-\pi_jV_{ip}U_k^p+V_{ip}U_j^p\pi_k$$

이다.

이제

$$A_{ijk}^l=U_{ik}a_j^l-b_{ijk}\pi^l+c_{ikj}^l+V_i^ld_{jk}-e_{ij}^l\pi_k$$

라고 하면 식 (5)는

$$\overset{m}{R}{}_{ijk}^{l}=K_{ijk}^l+A_{ijk}^l-A_{jik}^l \tag{7}$$

이고

$$B_{ijk}{}^l=U_j^la_{ik}+U_{jk}a_i^l+b_{ij}{}^l\pi_k+b_{ijk}\pi^l+2c_{jki}{}^l+V_{jk}\bar{d}_i^l+V_j^ld_{ik}+\bar{e}_{ijk}\pi^l-e_{ij}{}^l\pi_k$$

라고 하면 식 (5)와 (6)으로부터 다음의 식이 성립한다.

$$\overset{m*}{R}{}_{ijk}^{l}=\overset{m}{R}{}_{ijk}^{l}+B_{ijk}^l-B_{jik}^l \tag{8}$$

이로부터 다음의 정리가 성립한다.

정리 1 리만다양체 $(M,\ g)$에 대하여 사분대칭계량접속 $\nabla$의 호상접속 $\overset{m}{\nabla}$은 다음과 같은 기하학적성질을 가진다.

① $A_{ijk}^l=A_{jik}^l$일 때 접속변환 $\overset{\circ}{\nabla}\to\overset{m}{\nabla}$에 관하여 곡률텐소르는 보존된다.

② $B_{ijk}^l=B_{jik}^l$일 때 접속변환 $\overset{m}{\nabla}\to\overset{m*}{\nabla}$에 관하여 곡률텐소르는 보존된다. 즉 호상접속 $\overset{m}{\nabla}$은 공액대칭이다.

③ 호상접속 $\overset{m}{\nabla}$의 쌍대접속 $\overset{m*}{\nabla}$은 레비-치비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$와 사영동등하다.

증명 식 (7)로부터 ①은 자명하며 식 (8)로부터 ②도 자명하다. 또한 식 (4)로부터

$$\overset{m*}{\Gamma}_{(ij)}=\left\{{k \atop ij}\right\}$$

이므로 $\overset{m*}{\nabla}$과 $\overset{\circ}{\nabla}$는 사영동등이다. 따라서 ③이 증명된다.(증명끝)

주의 1 정리 1에서 ③은 접속 $\overset{\circ}{\nabla}$와 $\overset{m*}{\nabla}$의 측지선이 같다는것을 의미한다.

이제 $f_h=\varphi_h^i\pi_i,\ s_h=\varphi_i^i\pi_h$라고 하자.

정리 2 련결리만다양체 $(M,\ g)(\dim M \ge 3)$ 에서 사분대칭계량접속 $\nabla$ 의 호상접속 $\overset{m}{\nabla}$ 에 관한 단면곡률이 임의의 점 $P$ 에서의 2차원방향 $E$ ($T_PM$ 의 임의의 2차원부분공간)의 선택에 무관계할 때

$$f_h = s_h \tag{9}$$

이면 리만다양체 $(M,\ g,\ \overset{m}{\nabla})$ 은 일정곡률다양체로 된다.

증명 사분대칭계량접속 $\nabla$ 의 호상접속 $\overset{m}{\nabla}$ 에 관한 제2종의 비앙끼항등식은

$$\overset{m}{\nabla}_h \overset{m}{R}{}^l_{ijk} + \overset{m}{\nabla}_i \overset{m}{R}{}^l_{jhk} + \overset{m}{\nabla}_j \overset{m}{R}{}^l_{hik} = \overset{m}{T}{}^p_{hi} \overset{m}{R}{}^l_{jpk} + \overset{m}{T}{}^p_{ij} \overset{m}{R}{}^l_{hpk} + \overset{m}{T}{}^p_{jh} \overset{m}{R}{}^l_{ipk} \tag{10}$$

이다. 따라서 접속 $\overset{m}{\nabla}$ 에 관한 단면곡률이 임의의 점 $P$ 에서의 2차원방향 $E$ 의 선택에 무관계하면

$$\overset{m}{R}{}^l_{ijk} = k(P)(\delta^l_i g_{jk} - \delta^l_j g_{ik}) \tag{11}$$

이므로 이 식을 식 (10)에 넣고 정돈하면서 식 (3)을 리용하면

$$\begin{aligned}
&\overset{m}{\nabla}_h k(\delta^l_i g_{jk} - \delta^l_j g_{ik}) + \overset{m}{\nabla}_i k(\delta^l_j g_{hk} - \delta^l_h g_{jk}) + \overset{m}{\nabla}_j k(\delta^l_h g_{ik} - \delta^l_i g_{hk}) + \\
&\quad + k[3\pi_h(\delta^l_j U_{ik} - \delta^l_i U_{jk}) + 3\pi_i(\delta^l_h U_{jk} - \delta^l_j U_{hk}) + 3\pi_j(\delta^l_i U_{hk} - \delta^l_h U_{ik}) + \\
&\quad + \pi_h(\delta^l_j V_{ik} - \delta^l_i V_{jk}) + \pi_i(\delta^l_h V_{jk} - \delta^l_j V_{hk}) + \pi_j(\delta^l_i V_{hk} - \delta^l_h V_{ik})] = \\
&\quad = k[\pi_h \delta^l_j (U_{ik} + V_{ik}) - \pi_i \delta^l_j (U_{hk} + V_{hk}) - \pi_h(U^l_i + V^l_i) g_{jk} + \pi_i(U^l_h + V^l_h) g_{jk} + \\
&\quad + \pi_i \delta^l_h (U_{jk} + V_{jk}) - \pi_j \delta^l_h (U_{ik} + V_{ik}) - \pi_i(U^l_j + V^l_j) g_{hk} + \pi_j(U^l_i + V^l_i) g_{hk} + \\
&\quad + \pi_j \delta^l_i (U_{hk} + V_{hk}) - \pi_h \delta^l_i (U_{jk} + V_{jk}) - \pi_j(U^l_h + V^l_h) g_{ik} + \pi_h(U^l_j + V^l_j) g_{ik}]
\end{aligned}$$

이다. 그러므로 이 식의 량변을 $i$, $l$ 에 관하여 축약하고 정돈하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
&(n-2)(\overset{m}{\nabla}_h k\, g_{jk} - \overset{m}{\nabla}_j k\, g_{hk}) + k(n-2)(3\pi_j U_{hk} - 3\pi_h U_{jk} + \pi_j V_{hk} - \pi_h V_{jk}) = \\
&\quad = k[(n-3)\pi_j(U_{hk} + V_{hk}) - (n-3)\pi_h(U_{jk} + V_{jk}) + \\
&\quad + \pi_i(U^i_h + V^i_h) g_{jk} - \pi_h(U^i_i + V^i_i) g_{jk} + \pi_j(U^i_i + V^i_i) g_{hk} - \pi_i(U^i_j + V^i_j) g_{hk}]
\end{aligned}$$

계속해서 이 식의 량변에 $g^{ik}$ 를 곱하고 축약을 실시하면 다음과 같다.

$$(n-1)(n-2)\overset{m}{\nabla}_h k + (n-2)k(3U_{hi}\pi^i - 3\pi_h U^i_i + V_{hi}\pi^i) = 2(n-2)k[\pi_i(U^i_h + V^i_h) - \pi_h(U^i_i + V^i_i)]$$

그러므로 이 식을 정돈하면

$$V^i_i = 0,\quad \overset{m}{T}{}^i_{ih} = \pi_i(U^i_h + V^i_h) - \pi_h U^i_i$$

이므로

$$(n-1)\overset{m}{\nabla}_h k + k\overset{m}{T}{}^i_{ih} = 0$$

으로 된다. 그런데

$$\overset{m}{T}{}^i_{ih} = \pi_i \varphi^i_h - \pi_h \varphi^i_i = f_h - s_h$$

이므로 $\overset{m}{T}{}_{ih}{}^i = 0$ 이면 $f_h = s_h$ 이다. 따라서 식 (9)가 만족되면 $k = \text{const}$ 이다. 그런데 조건에

의하여 다양체가 련결이고 $k$가 련속이므로 $k = \mathrm{const}$는 대역적으로 성립한다. 결국 리만다양체 $(M,\ g,\ \overset{m}{\nabla})$은 일정곡률다양체로 된다.

주의 2 사분대칭계량접속의 특수한 형태인 반대칭계량접속의 호상접속이 도입된 리만다양체는 일정곡률성을 가지지 않는다는것이 선행연구[1]에서 증명되였다. 정리 2는 사분대칭계량접속의 호상접속이 도입된 리만다양체가 일정곡률성을 가질수 있다는것을 보여준다.

## 참 고 문 헌


[1] **김일성**종합대학학보 수학, 65, 3, 81, 주체108(2019).

[2] Yanling Han et al.; Filomat 27, 4, 679, 2013.

[3] I. Suhendro; Progress in Physics, 4, 10, 47, 2007.

[4] E. S. Stepanova; Journal of Mathematical Sciences, 47, 1, 6507, 2007.

[5] K. Yano, T. Imai; Tensor, 38, 13, 1982.


주체109(2020)년 12월 5일 원고접수

## On the Mutual Connection of a Quarter-symmetric Metric Connection in a Riemannian Manifold

*Kwak Kum Hyok, Ho Tal Yun*

In this paper, we newly discovered the geometrical properties of the mutual connection of a quarter-symmetric metric connection in a Riemannian manifold. And we obtained a conjugate symmetry condition and a constant curvature condition of the mutual connection of a quarter-symmetric metric connection.

Keywords: mutual connection, conjugate symmetry, constant curvature