김일성종합대학학보 주체110(2021)년
수 학 제67권 제1호

# 수렬표현가능한 모임첨수행렬의 성질과 그 응용

리진경, 인혁철

경애하는 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《현시대는 과학기술의 시대이며 과학기술의 발전수준은 나라의 종합적국력과 지위를 규정하는 징표로 됩니다.》

론문에서는 수렬표현가능한 모임첨수행렬의 개념을 정식화하고 그것의 성질들을 증명한데 기초하여 표준대칭모임함수가 부아닌 무게를 가지는 짝릉무방향초그라프의 절단함수로 표현되기 위한 보다 간단한 필요충분조건을 유도하였다.

선행연구[3]에서는 표준대칭모임함수를 절단함수로 가지는 짝릉무방향초그라프가 유일존재한다는것을 증명하였으며 선행연구[2]에서는 주어진 표준대칭모임함수를 절단함수로 가지는 짝릉무방향초그라프를 재귀적으로 구성하는 공식을 유도하였다.

선행연구[1]에서는 첨수축소가능한 모임첨수행렬의 성질을 선행연구[2]의 결과에 적용하여 표준대칭모임함수가 부아닌 무게를 가지는 짝릉무방향초그라프의 절단함수로 표현되기 위한 필요충분조건을 유도하였다.

론문에서는 수렬표현가능한 모임첨수행렬의 성질들을 밝힌데 기초하여 선행연구[1]의 결과를 개선하였다.

정의 1 [1] 유한모임 $V$와 $M,\ N\subseteq\{1,\ 2,\ \cdots,\ |V|\}$이 주어졌다고 하자. 이때 모임첨수행렬 $\Lambda=(\alpha_{S,T})\in\mathbf{R}_{\binom{V}{M}\times\binom{V}{N}}$에 대하여 행렬 $A=(a_{ij})_{M\times N}$이 있어서 $i<j$이면 $a_{ij}=0$이고

$$\alpha_{S,T}=\begin{cases}\dfrac{a_{|S|,|T|}}{C_{|T|}^{|S|}}, & T\subseteq S\\ 0, & T\not\subset S\end{cases}$$

을 만족시키면 $\Lambda$는 첨수축소가능하다고 말하고 행렬 $A$를 모임첨수행렬 $\Lambda$의 첨수축소행렬이라고 부르며 $A=\Phi(\Lambda)$로 표시한다.

보조정리 1 [1]

1) $\Lambda+\Pi=\Gamma\Leftrightarrow\Phi(\Lambda)+\Phi(\Pi)=\Phi(\Gamma)$

2) $\Lambda\times\Pi=\Gamma\Leftrightarrow\Phi(\Lambda)\times\Phi(\Pi)=\Phi(\Gamma)$

정의 2 유한모임 $V$와 자연수 $m,\ n,\ k$가 주어졌다고 하자. 이때 모임첨수행렬 $\Lambda=(\alpha_{S,T})\in\mathbf{R}_{\binom{V}{M}\times\binom{V}{N}}$에 대하여 수렬 $h_i$가 있어서 다음의 조건들을 만족시키면 $\Lambda$를 수렬표현가능하다고 말한다.

1) $\Lambda=(\alpha_{S,T})\in\mathbf{R}_{\binom{V}{M}\times\binom{V}{N}}$

$$M=\left\{m,\ m+k,\ \cdots,\ m+\left\lfloor\frac{|V|-m}{k}\right\rfloor k\right\},\ N=\left\{n,\ n+k,\ \cdots,\ n+\left\lfloor\frac{|V|-n}{k}\right\rfloor k\right\},\ 1\le n,\ m\le k$$

2) $\alpha_{S,T}=\begin{cases}h_{|S\setminus T|}, & T\subseteq S\\ 0, & T\not\subset S\end{cases}$

이러한 모임첨수행렬들의 모임을 $\Omega_{m,n}^k$ 로 표시한다. 정의로부터 $\Lambda\in\Omega_{m,n}^k$ 는 수렬 $h_i$ 를 가지고 표현할수 있다는것을 알수 있다.

정리 1

1) $\Lambda,\ \Pi\in\Omega_{m,n}^k\Rightarrow\Lambda+\Pi\in\Omega_{m,n}^k$

2) $\Lambda\in\Omega_{m,n}^k,\ \Pi\in\Omega_{n,l}^k\Rightarrow\Lambda\times\Pi\in\Omega_{m,l}^k$

3) $\Lambda\in\Omega_{m,m}^k\Rightarrow\Lambda^{-1}\in\Omega_{m,m}^k$

증명 1)은 자명하다.

2)를 증명하자. 정의로부터 $\Lambda$ 의 첨수축소행렬을 $(a_{ij})$ 라고 하면 다음의 식이 성립한다.

$$\Lambda\in\Omega_{m,n}^k\Leftrightarrow\frac{a_{ij}}{\binom{m+k(i-1)}{n+k(j-1)}}=\frac{a_{i+1,j+1}}{\binom{m+ki}{n+kj}}\tag{1}$$

$\Lambda\in\mathbf{R}_{\binom{V}{M}\times\binom{V}{N}},\ \Pi\in\mathbf{R}_{\binom{V}{N}\times\binom{V}{L}},\ \Lambda\times\Pi\in\mathbf{R}_{\binom{V}{M}\times\binom{V}{L}}$ 의 첨수축소행렬들을 각각 $(a_{ij}),\ (b_{ij}),\ (c_{ij})$ 라고 하자. $\Lambda\times\Pi=\Gamma\Leftrightarrow\Phi(\Lambda)\times\Phi(\Pi)=\Phi(\Gamma)$ 이므로 $(c_{ij})=(a_{ij})\cdot(b_{ij})$ 이다.

$(a_{ij}),\ (b_{ij})$ 들은 식 (1)을 만족시키므로 다음의 식이 성립한다.

$$\frac{c_{i+1,j+1}}{\binom{m+ki}{l+kj}}=\frac{\sum_{t=j+1}^{i+1}a_{i+1t}b_{tj+1}}{\binom{m+ki}{l+kj}}=\frac{\sum_{t=j}^{i}a_{i+1t+1}b_{t+1j+1}}{\binom{m+ki}{l+kj}}=\left(\sum_{t=j}^{i}\frac{a_{it}\binom{m+ki}{n+kt}b_{tj}\binom{n+kt}{l+kj}}{\binom{m+k(i-1)}{n+k(t-1)}\binom{n+k(t-1)}{l+k(j-1)}}\right)\Bigg/\binom{m+ki}{l+kj}=$$

$$=\left(\sum_{t=j}^{i}\frac{a_{it}b_{tj}\binom{m+ki}{l+kj}}{\binom{m+k(i-1)}{l+k(j-1)}}\right)\Bigg/\binom{m+ki}{l+kj}=\frac{\sum_{t=j}^{i}a_{i+1t+1}b_{t+1j+1}}{\binom{m+k(i-1)}{l+k(j-1)}}=\frac{c_{ij}}{\binom{m+k(i-1)}{l+k(j-1)}}$$

즉 $\Lambda\times\Pi\in\Omega_{m,n}^k$ 이다.

3)을 증명하자. $\Lambda\in\mathbf{R}_{\binom{V}{M}\times\binom{V}{M}},\ \Lambda^{-1}$ 의 첨수축소행렬들을 $(a_{ij}),\ (b_{ij})$ 라고 하자.

$\Phi(\Lambda^{-1})=(\Phi(\Lambda))^{-1}$ 이므로 $(a_{ij})^{-1}=(b_{ij})$ 이다. $(a_{ij})$ 가 아래3각형행렬이므로 $(b_{ij})$ 는 다음과 같이 표시된다.

$$b_{ij}=\begin{cases}1/a_{ii}, & i=j\\ -\left(\sum_{t=j}^{i-1}a_{it}b_{tj}\right)/a_{ii}, & i>j\\ 0, & i<j\end{cases}$$

$(b_{ij})$ 가 식 (1)을 만족시킨다는것을 행번호와 렬번호의 차 $t$ 에 관한 수학적귀납법으로 증명하자.

$t=0$ 인 경우

$$\frac{b_{i+1,j+1}}{\binom{m+ki}{m+ki}}=\frac{1}{a_{i+1,i+1}}=\frac{1}{a_{ii}}=\frac{b_{ii}}{\binom{m+k(i-1)}{m+k(i-1)}}$$

이므로 성립한다.

$t<i-j$ 인 경우에 성립한다는것을 가정하자.

$t=i-j$ 인 경우에 성립한다는것을 증명하자.

$$\frac{b_{i+1,j+1}}{\binom{m+ki}{m+kj}}=\frac{-\left(\sum_{t=j+1}^{i}a_{i+1t}b_{tj+1}\right)\Big/a_{i+1,i+1}}{\binom{m+ki}{m+kj}}=\frac{-\left(\sum_{t=j}^{i-1}a_{i+1t+1}b_{t+1j+1}\right)\Big/a_{i+1,i+1}}{\binom{m+ki}{m+kj}}=$$

$$=\frac{-\left(\sum_{t=j}^{i-1}a_{it}b_{tj}\right)\Big/a_{ii}}{\binom{m+k(i-1)}{m+k(j-1)}}=\frac{b_{ij}}{\binom{m+k(i-1)}{m+k(j-1)}}$$

즉 $\Lambda^{-1}\in\Omega_{m,m}^{k}$ 이다.(증명끝)

주어진 망 $N=(H,\ c),\ H=(V,\ \varepsilon)$ 에 대하여

$$K_N(X):=\sum_{A\in E}w_A(X)c(A)\,,\quad w_A(X)=\begin{cases}1, & A\cap X\neq\phi\neq A\setminus X\\ 0, & \text{기타}\end{cases}$$

와 같이 정의되는 모임함수를 절단함수라고 부른다.

모임함수 $f:2^V\to\mathbf{R}$ 의 뫼비우스반전은 다음과 같이 정의된다.

$$m_f(X)=\sum_{Y\subseteq X}(-1)^{|X\setminus Y|}f(Y),\ X\subseteq V$$

**보조정리 2**[3] 주어진 망 $N=(\widetilde{H},\ c),\ \widetilde{H}=(V,\ \widetilde{\varepsilon})$ 에 대하여 넘기기 $\varphi_H:\mathbf{R}^{\widetilde{\varepsilon}}\to F_V(c\to K_N)$ 은 우로의 1대1넘기기이다. 여기서 $\widetilde{\varepsilon}$, $F_V$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\widetilde{\varepsilon}=\{E\mid\phi\neq E\subseteq V,\ |E|=2k\},\ F_V=\{f:2^V\to\mathbf{R}\mid f(\phi)=0,\ f(X)=f(V\setminus X),\ \forall X\subseteq V\}$$

보조정리 2는 주어진 무방향초그라프에 대하여 그와 동등한 절단함수를 가지는 짝릉무방향초그라프를 구성할수 있다는것을 보여준다.

주어진 망 $N=(H^*,\ c),\ H^*=(V,\ 2^V)$ 의 절단함수를 $f$ 라고 하고 그와 동등한 절단함수를 가지는 짝릉무방향초그라프의 무게함수를 $\widetilde{c}:\widetilde{\varepsilon}\to\mathbf{R}$ 라고 하자.

그러면 절단함수의 정의로부터 다음의 식이 성립한다.

$$f(X)=\sum_{A\in 2^V}w_A(X)c(A)=\sum_{A\in\widetilde{\varepsilon}}w_A(X)\widetilde{c}(A)$$

뫼비우스반전의 정의로부터 웃식을 다음과 같이 쓸수 있다.

$$m_f(X)=\sum_{A\in 2^V} m_A(X)c(A)=\sum_{A\in\widetilde{\varepsilon}} m_A(X)\widetilde{c}(A) \tag{2}$$

여기서 $m_A(X)$는 $w_A(X)$의 뫼비우스반전을 나타낸다.

정리 2 유한모임 $V$와 $A\subseteq V$에 대하여 $m_A(X)$는 다음과 같이 표시된다.

$$m_A(X)=\sum_{Y\subseteq X}(-1)^{|X\setminus Y|}w_A(Y)=\begin{cases}1, & X\notin\widetilde{\varepsilon},\ X\subset A,\ X\neq A\\ -1, & X\in\widetilde{\varepsilon},\ X\subset A,\ X\neq A\\ -2, & X\in\widetilde{\varepsilon},\ X=A\\ 0, & \text{기타}\end{cases}$$

이제 다음과 같은 몇가지 기호약속을 진행하자.

$$M:=\{m_A(X)\,|\,A\in 2^V,\ X\in 2^V\}$$

로 놓고 $M=\begin{pmatrix}M_{EE} & M_{EO}\\ M_{OE} & M_{OO}\end{pmatrix}$로 표시하자. 여기서 $M_{EE}$, $M_{EO}$, $M_{OE}$, $M_{OO}$는 다음과 같이 정의된다.

$$M_{EE}=\{m_A(X)\,|\,A,\ X\in\widetilde{\varepsilon}\},\quad M_{OE}=\{m_A(X)\,|\,A\notin\widetilde{\varepsilon},\ X\in\widetilde{\varepsilon}\}$$

$$M_{EO}=\{m_A(X)\,|\,A\in\widetilde{\varepsilon},\ X\notin\widetilde{\varepsilon}\},\quad M_{OO}=\{m_A(X)\,|\,A\notin\widetilde{\varepsilon},\ X\notin\widetilde{\varepsilon}\}$$

무게함수 $c:2^V\to\mathbf{R}$는 본질상 $\mathbf{R}^{2^V}$ 벡토르로 볼수 있다.

이제 $c:=(c_E,\ c_O)$로 표시하자. 여기서 $c_E$와 $c_O$는 각각 짝농도, 홀농도를 가지는 릉들에 대응하는 무게함수값들을 나타낸다.

그러면 식 (2)를 다음과 같이 쓸수 있다.

$$m_f=(c_E,\ c_O)\cdot\begin{pmatrix}M_{EE} & M_{EO}\\ M_{OE} & M_{OO}\end{pmatrix}=\widetilde{c}_E\cdot(M_{EE},\ M_{EO})$$

웃식으로부터 $\widetilde{c}_E=\widetilde{m}_f\cdot M_{EE}^{-1}$이 성립한다. 여기서 $\widetilde{m}_f$은 짝농도를 가지는 부분모임에 대응하는 뫼비우스반전을 나타낸다.

정리 2로부터 $M_{EE}\in\Omega_{2,2}^2$이며 정리 1에 의하여 $M_{EE}^{-1}\in\Omega_{2,2}^2$이다.

$M_{EE}^{-1}$이 수렬표현가능하므로 $EE:=\Phi(M_{EE})$라고 할 때 $g_{2i-2}:=EE_{i1}^{-1}/C_{2i}^2$을 가지고 $M_{EE}^{-1}$의 모든 원소들을 표현할수 있다. 즉

$$g_{2i-2}=\frac{-\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{i-1}\left(EE_{i1}^{-1}\binom{2i}{2k}\right)}{\dbinom{2i}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{i-1}\left(\frac{EE_{k1}^{-1}}{\dfrac{(2k)(2k-1)}{2}}\cdot\frac{(2i-2)!}{(2k-2)!(2i-2k)!}\right)=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{i-1}g_{2k-2}\binom{2i-2}{2k-2}$$

$$\alpha_{S,T}=\begin{cases}g_{|S\setminus T|}, & S\supseteq T\\ 0, & \text{기타}\end{cases},\quad \begin{cases}g_{2i}=-\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{i}g_{2k-2}\binom{2i}{2k-2}\\ g_0=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

와 같이 표시된다. 여기서 $M_{EE}^{-1}=(\alpha_{S,T})$이다.

$\widetilde{c}_E = \widetilde{m}_f \cdot M_{EE}^{-1}$ 이므로 다음과 같은 공식을 얻을수 있다.

$$\forall A_0 \in 2^V (|A_0| = 2j),\ \widetilde{c}(A_0) = \sum_{i \ge j} \sum_{A_0 \subseteq A \in \binom{V}{2i}} g_{2i-2j} f^{(2i)}(A) \tag{3}$$

보조정리 3[1] 표준대칭모임함수 $f$ 가 주어졌다고 할 때 망 $N_f = (H^*, -0.5m_f)$ 의 절단함수는 $f$ 로 된다.

정리 3 표준대칭모임함수 $f: 2^V \to \mathbf{R}$ 가 부아닌 무게를 가지는 짝릉무방향초그라프의 절단함수로 표현되기 위해서는

$$\forall A_0 \in 2^V (|A_0| = 2j),\ \widetilde{c}(A_0) = \sum_{i \ge j} \sum_{A_0 \subseteq A \in \binom{V}{2i}} g_{2i-2j} f^{(2i)}(A) \ge 0$$

이 성립할것이 필요하고 충분하다.

증명 보조정리 3으로부터 망 $N_f = (H^*, -0.5m_f)$ 는 $f$ 를 절단함수로 가진다. 식 (3)을 리용하여 $N_f$ 로부터 짝릉만을 가지는 망 $\widetilde{N}_f$ 를 구성한다. 보조정리 2에 의하여 $f$ 를 절단함수로 가지면서 짝릉만을 포함하는 망은 유일하므로 $f$ 가 부아닌 무게를 가지는 짝릉무방향초그라프의 절단함수로 표현되기 위해서는 $\widetilde{N}_f$ 의 모든 릉의 무게가 부가 아닐것이 필요하고 충분하다. 즉

$$\forall A_0 \in 2^V (|A_0| = 2j),\ \widetilde{c}(A_0) = \sum_{i \ge j} \sum_{A_0 \subseteq A \in \binom{V}{2i}} g_{2i-2j} f^{(2i)}(A) \ge 0$$

일것이 필요하고 충분하다.(증명끝)

## 참 고 문 헌


[1] 김일성종합대학학보 수학, 66, 3, 19, 주체109(2020).

[2] Y. Yamaguchi; Discrete Math., 339, 2007, 2016.

[3] V. P. Grishuhin; Combinatorica, 9, 21, 1989.


주체109(2020)년 9월 5일 원고접수

## Properties of Set-index Matrix Representable as a Sequence and Its Application

*Ri Jin Gyong, In Hyok Chol*

In this paper, we define the set-index matrix representable as a sequence and prove the properties of it. And we derive more simple necessary and sufficient condition for realizing normalized symmetric set functions as cut functions of even undirected hypergraphs.

Keywords: symmetric set function, set-index matrix