김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체103(2014)년 제60권 제12호 Vol. 60 No. 12 JUCHE103(2014).

월커다양체우에서의 곡률평탄성에 대한 연구

박신혁, 안윤호

위대한 수령 **김일성**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《새로운 과학분야들을 개척하고 최신과학기술의 성과를 인민경제에 널리 받아들이며 중요한 기초과학부문들을 적극 발전시켜야 합니다.》(《**김일성**전집》 제27권 391페지)

론문에서는 월커다양체가 국부적으로 곡률평탄이기 위한 필요충분조건을 연구하였다.

선행연구[4]에서는 임의의 자연수 $r \le n/2$ 에 대하여 r 차원평행령평면분포를 가진 n 차원다양체에서 의리만계량을 론의하였다.

선행연구[1]에서는 이 계량을 월커계량, 월커계량이 정의된 다양체를 월커다양체라고 정의하고 이 월커다양체를 $(M,\ g,\ D)$ 로 표시하였다. 여기서 M 은 미분다양체, g 는 의리만계량, D 는 분포를 표시한다.

선행연구[4]에서는 콤팍트복소다양체에서 비정값캘러－아인슈타인구조를 론의하였으며 선행연구[2]에서는 유향4차원월커다양체에 거의 복소구조쌍이 있다는것과 거의 복소구조에 의한 2－형식이 씸플렉트형식이 되기 위한 조건을 구하고 복소구조의 적분가능성을 연구하였다.

또한 선행연구[3]에서는 월커다양체의 계량에 의한 2차형식이 씸플렉트형식이 되기 위한 조건을 만족시키는 세가지 풀이를 구하였다.

월커계량의 행렬이

$$g=(g_{ij})=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & c \\ 0 & 1 & c & b \end{pmatrix} \tag{1}$$

로 표시되는 국부자리표계 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ 는 항상 존재하며 이때 표준형식 (1)을 계량의 표준형식이라고 부른다. 여기서 $a,\ b,\ c$ 는 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ 에 관한 함수들이며 이때 $D=\mathrm{span}\{\partial_1,\ \partial_2\}$ 이다.

이제 표준형식 (1)에서 $c=0$ 이라는 일정한 제한을 주는 경우 이 계량의 몇가지 선행결과들을 보기로 하자.

선행연구[1]에서는 다음과 같은 적당한 거의 복소구조 J 를 제기하였다.

$$J\partial_1=K\partial_2,\ J\partial_2=-\frac{1}{K}\partial_1,\ J\partial_3=\frac{1}{2}\left(Ka-\frac{b}{K}\right)\partial_2+\frac{1}{K}\partial_4,\ J\partial_4=\frac{1}{2}\left(Ka-\frac{b}{K}\right)\partial_1-K\partial_3$$

여기서 $K=\left(\dfrac{b^2+4}{a^2+4}\right)^{1/4}$ 이다.

$\omega(X,\ Y)=g(JX,\ Y)$ 로 정의되는 2－형식 ω 의 행렬표현은 다음과 같다.

$$\omega=(\omega_{ij})=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & -1/K & 0 \\ 0 & 1/K & 0 & (Ka+b/K)/2 \\ -K & 0 & (Ka+b/K)/2 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

선행연구[3]에서는 2－형식 $\omega=Kdx^1\wedge dx^4-\frac{1}{K}dx^2\wedge dx^3+\frac{1}{2}\left(Ka+\frac{b}{K}\right)dx^3\wedge dx^4$ 이 씸플렉트형식이기 위해서는 다음의 4가지 조건을 만족시킬것이 필요충분하다는것을 밝혔다.

$$K_1=0,\ K_2=0,\ K^2a_1+b_1-2KK_3=0,\ K^2a_2+b_2+\frac{2}{K}K_4=0 \tag{3}$$

여기서 $K_i=\frac{\partial K}{\partial x_i}$ 이다.

방정식 (3)을 만족시키는 풀이는 다음과 같은 세가지뿐이다.

① ω_A: $K=\mathrm{const}$ 이고 $a=a(x_3,\ x_4)$, $b=b(x_3,\ x_4)$ 인 경우

② ω_B: $a(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=-b(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ 이고 $a_1\neq 0\vee a_2\neq 0$ 인 경우

③ ω_C : $a=\frac{1}{\varphi^2}\left(\varphi L+\phi-\frac{\varphi^4-1}{\varphi L+\phi}\right)$, $b=\varphi L+\phi+\frac{\varphi^4-1}{\varphi L+\phi}$ 인 경우

여기서 $L=L(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=\varphi_3x_1-\varphi^{-2}\varphi_4x_2$, $\phi=\phi(x_3,\ x_4)$, $\varphi=\varphi(x_3,\ x_4)$ 이다.

또한 적당한 거의 복소구조 J 가 적분가능하기 위해서는 다음의 조건을 만족시킬것이 필요충분하다는것을 밝혔다.

$$K_1=0,\ K_2=0,\ K^2a_1-b_1-2KK_3=0,\ K^2a_2-b_2-\frac{2}{K}K_4=0 \tag{4}$$

방정식 (4)의 풀이는 다음과 같은 세가지뿐이다.

④ J_A: $K=\mathrm{const}$ 이고 $a=a(x_3,\ x_4)$, $b=b(x_3,\ x_4)$ 인 경우

⑤ J_B: $a(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=b(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ 이고 $a_1\neq 0\vee a_2\neq 0$ 인 경우

⑥ J_C: $a=\frac{1}{\psi^2}\left(\psi M+\mu-\frac{\psi^4-1}{\psi M+\mu}\right)$, $b=-\left(\psi M+\mu+\frac{\psi^4-1}{\psi M+\mu}\right)$ 인 경우

여기서 $M=M(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=\psi_3x_1-\psi^{-2}\psi_4x_2$, $\mu=\mu(x_3,\ x_4)$, $\psi=\psi(x_3,\ x_4)$ 이다.

구조 $(g,\ \omega_A,\ J_A)$ 가 캘러－아인슈타인구조가 된다는것을 접속리론으로 보기로 하자.

J_A 가 적분가능하고 레비－찌비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$ ($\overset{\circ}{\nabla}g=0,\ T=0$)에 대하여 $\overset{\circ}{\nabla}J_A=0$ 이므로 $\overset{\circ}{\nabla}\omega_A=0$ 이 성립되며 따라서 $(\omega_A,\ J_A)$ 는 씸플렉트접속으로 된다.

$J_A\partial_i=J_i^j\partial_j$ 로 표시하면

$$J_A=(J_i^j)=\begin{pmatrix} 0 & K & 0 & 0 \\ -1/K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (Ka-b/K)/2 & 0 & 1/K \\ (Ka-b/K)/2 & 0 & -K & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

이다.

한편 $g^{kj}: g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j$ 로 정의하면 $(g^{ij}) = \begin{pmatrix} -a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 으로 표시된다.

곡률텐소르의 크리스토펠기호를 리용한 국부표시를 쓰면

$$R_{ijk}^l = \partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{ip}^l \Gamma_{jk}^p - \Gamma_{jp}^l \Gamma_{ik}^p. \tag{6}$$

일반적으로 접속 ∇가 씸플렉트접속($\nabla\omega = 0,\ T = 0$)이 되기 위해서는

$$\partial_i \omega(\partial_j,\ \partial_k) - \omega(\nabla_{\partial_i}\partial_j,\ \partial_k) - \omega(\partial_j,\ \nabla_{\partial_i}\partial_k) = 0 \tag{7}$$

일것이 필요충분하다.

또한 식 (7)은 다음의 방정식과 동등하다.

$$\partial_i \omega_{jk} - \Gamma_{ij}^l \omega_{lk} - \Gamma_{ik}^l \omega_{jl} = 0 \tag{8}$$

구조 $(g,\ \omega_A,\ J_A)$ 인 경우 식 (8)은 다음의 련립방정식과 동등하다.

$$\begin{cases} \Gamma_{i1}^3 + K^2 \Gamma_{i2}^4 = 0 \\ 2\Gamma_{i1}^2 + (K^2 a + b)\Gamma_{i1}^4 - 2K^2 \Gamma_{i3}^4 = 0 \\ 2K^2 \Gamma_{i1}^1 + (K^2 a + b)\Gamma_{i1}^3 + 2K^2 \Gamma_{i4}^4 = 0 \\ 2K\Gamma_{i2}^1 + (K^2 a + b)\Gamma_{i2}^3 - 2\Gamma_{i4}^3 = 0 \\ 2\Gamma_{i2}^2 + (K^2 a + b)\Gamma_{i2}^4 + 2\Gamma_{i3}^3 = 0 \\ K^2 a_i + b_i - 2K^2 \Gamma_{i3}^1 - (K^2 a + b)\Gamma_{i3}^3 - 2\Gamma_{i4}^2 - (Ka + b)\Gamma_{i4}^4 = 0 \end{cases} \tag{9}$$

방정식 (9)의 셋째 식과 다섯째 식으로부터 $\Gamma_{i1}^1 + \Gamma_{i2}^2 + \Gamma_{i3}^3 + \Gamma_{i4}^4 = 0$ 이 성립된다.

따라서 곡률텐소르는 $R_{ijk}^{\ l} = \partial_i \Gamma_{jk}^{\ l} - \partial_j \Gamma_{ik}^{\ l}$ 로 된다.

한편 레비－찌비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$은 계량텐소르에 관하여 다음과 같이 유일하게 결정된다.

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}) \tag{10}$$

정리 1 월커다양체 $(M,\ g,\ \omega_A,\ J_A)$ 에서 레비－찌비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$의 릿찌텐소르는 령이다.

증명 릿찌텐소르가 $r_{jk} = R_{ijk}^i = \partial_i \Gamma_{jk}^i - \partial_j \Gamma_{ik}^i$, $i \vee j = 1,\ 2$이면 접속결수 Γ_{ij}^k 는 식 (10)을 만족시키므로 $\Gamma_{ij}^k = 0$ 이다.

또한 $i \vee j = 1,\ 2$ 이면 $\partial_i g_{1l} = \partial_i g_{2l} = 0$ 이고 $a = a(x_3,\ x_4)$, $b = b(x_3,\ x_4)$ 이므로

$$a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$$

이며 이것을 식 (10)에 갈아넣으면 $\Gamma_{ij}^k = 0$ 이 나온다.

$j \vee k = 1,\ 2$이면 우의 사실로부터 $r_{jk} = 0$ 이 된다.

$\Gamma_{i1}^1 + \Gamma_{i2}^2 + \Gamma_{i3}^3 + \Gamma_{i4}^4 = 0$ 이므로 $r_{jk} = \partial_i \Gamma_{jk}^i$ 이며 $i = 3 \vee 4$ 인 경우 $g^{33} = g^{43} = g^{34} = g^{44} = 0$ 이므로 $r_{jk} = \partial_1 \Gamma_{jk}^1 + \partial_2 \Gamma_{jk}^2 = 0$ 이다.

임의의 $j,\ k$ 에 대하여 $r_{jk} = 0$ 이 성립되므로 정리는 증명된다.(증명끝)

이로부터 월커다양체 $(M,\ g,\ \omega_A,\ J_A)$는 씸플렉트－아인슈타인다양체임을 알수 있다.

곡률의 정의로부터 곡률의 비령성분들만 보면 그것의 령곡률성은 일정한 조건이 주어지면 만족된다는것을 알수 있다.

정리 2 월커다양체 $(M,\ g,\ \omega_A,\ J_A)$에서 레비－찌비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$의 곡률 R가 령이기 위해서는 $a_{44}+b_{33}=0$일것이 필요충분하다.

증명 $i\vee j=1,\ 2$이거나 $k=3,\ 4$이면 $\Gamma_{ij}^{k}=0$이고 $\Gamma_{i1}^{1}+\Gamma_{i2}^{2}+\Gamma_{i3}^{3}+\Gamma_{i4}^{4}=0$이므로 곡률 (6)은 $R_{ijk}^{l}=\partial_i\Gamma_{jk}^{l}-\partial_j\Gamma_{ik}^{l}$로 된다.

또한 $i=j$이면 $R_{ijk}^{l}=0$이고 $R_{ijk}^{l}=-R_{ijk}^{l}$이다.

따라서 곡률 R_{ijk}^{l}의 마디들중에서 R_{343}^{1}, R_{343}^{2}, R_{344}^{1}, R_{344}^{2}들만 따져보면 된다.

$$R_{343}^{1}=\partial_3\Gamma_{43}^{1}-\partial_4\Gamma_{33}^{1}=\partial_3\left(\frac{a_4}{2}\right)-\partial_4\left(\frac{a_3}{2}\right)=\frac{a_{43}}{2}-\frac{a_{34}}{2}=0$$

$$R_{343}^{2}=\partial_3\Gamma_{43}^{2}-\partial_4\Gamma_{33}^{2}=\partial_3\left(\frac{b_3}{2}\right)-\partial_4\left(-\frac{b_4}{2}\right)=\frac{b_{33}}{2}+\frac{b_{44}}{2}$$

$$R_{344}^{1}=\partial_3\Gamma_{44}^{1}-\partial_4\Gamma_{34}^{1}=\partial_3\left(-\frac{b_3}{2}\right)-\partial_4\left(\frac{a_4}{2}\right)=-\frac{b_{33}}{2}-\frac{a_{44}}{2}$$

$$R_{344}^{2}=\partial_3\Gamma_{44}^{2}-\partial_4\Gamma_{34}^{2}=\partial_3\left(\frac{b_4}{2}\right)-\partial_4\left(\frac{b_3}{2}\right)=\frac{b_{43}}{2}-\frac{b_{34}}{2}=0$$

따라서 $R_{ijk}^{l}=0$이기 위해서는 $a_{44}+b_{33}=0$일것이 필요하고 충분하다.(증명끝)

우리는 이미 넘기기 $A:TM\to TM\,;A^2=\lambda\cdot Id$에 대하여 텐소르 $S(X,\ Y):=\omega(X,\ AY)$가 대칭텐소르이면

$$\nabla_X Y=\overset{\circ}{\nabla}_X Y+\frac{1}{2}A(\overset{\circ}{\nabla}_X A)Y \tag{11}$$

로 정의된 접속 ∇가 거의 씸플렉트접속이 된다는것을 보았다.

일반적으로 이 접속의 꼬임률텐소르 $T_{ij}^{k}=\Gamma_{ij}^{k}-\Gamma_{ji}^{k}$는 령이 아니며 식 (11)로부터 국부표시를 쓰면 다음과 같다.

$$T_{ij}^{k}=-\frac{1}{2}A_j^h\Gamma_{ih}^{p}A_p^k+\frac{1}{2}A_i^h\Gamma_{jh}^{p}A_p^k-\frac{1}{2}\partial_j(A_i^l)A_l^k+\frac{1}{2}\partial_i(A_j^l)A_l^k$$

이제 풀이 ①, ②와 풀이 ④를 동시에 만족시키는 적당한 거의 복소구조와 씸플렉트구조를 각각 J_D, ω_D로 표시하자.

정리 3 월커다양체 $(M,\ g,\ \omega_D,\ J_D)$에서 준동형넘기기 $A:TM\to TM$,

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\lambda}K & 0 & 0 \\ \sqrt{\lambda}/K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\lambda}/K \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda}K & 0 \end{pmatrix}$$

에 의한 접속 $\nabla_X Y=\overset{\circ}{\nabla}_X Y+\frac{1}{2}A(\overset{\circ}{\nabla}_X A)Y$는 꼬임률텐소르가 령인 씸플렉트접속이다.(증명생략)

참 고 문 헌

[1] Y. Matsushita; J. Geom. Phys., 52, 89, 2004.
[2] Y. Matsushita; J. Geom. Phys., 55, 385, 2005.
[3] E. Garcia-Rio et al.; J. Geom., 90, 56, 2008.
[4] Y. Petean; Commun. Math. Phys., 189, 227, 1997.

주체103(2014)년 8월 5일 원고접수

On the Flatness of Curvature over Walker Manifold

Pak Sin Hyok, An Yun Ho

We observed that the Walker manifold is a Symplectic-Einstein manifold with respect to the Levi-Civita connection and then obtained the sufficient and necessary conditions for the manifold to be flat locally.

Key word: Walker manifold