김일성종합대학학보 주체110(2021)년
수 학 제67권 제2호

일반콤팍트다양체우의 해밀턴계의 불변모임의 특징짓기

정 우 환

해밀턴방정식의 불변모임은 대상체계의 점근거동을 해석하는데서 기초로 되며 전형적인 불변모임들로서는 평형점, 주기궤도, 불변고리들이 있다.

선행연구[6]에서는 심플렉티크다양체 $(\mathbf{R}^{2n},\ \omega_0)$(여기서 ω_0은 $\mathbf{R}^{2n}$우의 표준심플렉티크구조)우의 해밀턴방정식에는 르베그측도의 의미에서 거의 모든 콤팍트정칙에네르기곡면우에 주기궤도가 존재한다는것을, 선행연구[2]에서는 정칙에네르기곡면 S가 유계불룩구역을 둘러싸는 경우에는 S우에 적어도 2개의 주기궤도가 존재한다는것을 밝혔으며 선행연구[4]에서는 섭동해밀턴계인 경우에, 선행연구[5, 7]에서는 일반적으로는 섭동형이 아닌 해밀턴계인 경우에 불변고리가 존재하기 위한 충분조건을 밝혔다.

한편 선행연구[3]에서는 력학적인 대상체계의 상태공간으로서 자주 제기되는 특수한 콤팍트다양체인 k차원고리 $\boldsymbol{T}^k$의 여접다발우에서 정의된 해밀턴함수에 관한 해밀턴상미분방정식에 대하여 다양체우에서 정의된 주어진 함수의 미분의 그라프가 불변모임이기 위해서는 그 함수가 대응되는 해밀턴－야꼬비편미분방정식의 풀이일것이 필요하고 충분하다는것을 밝혔으며 선행연구[1]에서는 선행연구[3]에서의 결과를 유클리드공간에 묻혀진 콤팍트다양체의 여접다발우에서 정의된 강압적해밀턴함수에 관한 해밀턴상미분방정식인 경우에 대하여 일반화하였다.

론문에서는 다양체가 유클리드공간에 묻혀있다는 가정[1]을 없애고 일반적인 콤팍트다양체의 여접다발우에서 정의된 해밀턴함수에 관한 해밀턴상미분방정식인 경우로 선행연구[3]의 결과를 일반화한다.

먼저 기호들을 약속하자.

$m\in\mathbf{N}$이라고 하고 M은 하우스돌프공리와 제2셈공리를 만족시키는 m차원 C^∞콤팍트다양체이다. 점 $q\in M$에서의 M의 접공간을 T_qM으로, 선형공간 T_qM의 공액공간을 $T_q^*M=L(T_qM,\ \mathbf{R})$로 표시한다. M의 여접다발 $T^*M=\bigcup_{x\in M}T_x^*M$에 대하여 $\tau^*:T^*M\to M$을 $\tau^*(p)=q\ \ (\forall p\in T_q^*M)$로 정의한다. M의 T^*M우의 점을 $q\in M$과 $p\in(\pi^*)^{-1}(q)$에 관하여 $(q,\ p)$와 같이 표시한다. M의 T^*M우의 자연스러운 심플렉티크구조를 Ω로 표시한다.

정의 1 $r\in\mathbf{N}\bigcup\{\infty\}: r\geq 2$라고 할 때 C^r급함수 $H:T^*M\to\mathbf{R},\ (q,\ p)\mapsto H(q,\ p)$를 다양체 M우의 해밀턴함수라고 부른다.

임의의 $\xi\in T^*M$에 대하여 관계식 $d_\xi H(\eta)=\Omega_q(X_H(\xi),\ \eta)\ \ (\forall\eta\in T_\xi(T^*M))$를 만족시키는 유일한 벡토르 $X_H(\xi)\in T_\xi(T^*M)$이 존재하는데 다양체 T^*M우의 C^1급벡토르마당 $X_H:T^*M\to T(T^*M)$을 해밀턴함수 $H:T^*M\to\mathbf{R}$에 관한 해밀턴벡토르마당이라고 부른다.

T^*M우의 상미분방정식

$$\dot{y}=X_H(y)\tag{1}$$

를 H를 해밀턴함수로 하는 해밀턴방정식이라고 부른다.

초기조건 $y(0)=\xi\,(\in T^*M)$ 를 만족시키는 해밀턴방정식 (1)의 연장불가능풀이를 $\varphi^H(t,\ \xi),\ \ t\in I(\xi)$로 표시한다. 여기서 $I(\xi)\subset \mathbf{R}$는 $0\in I(\xi)$인 열린구간이다.

$D_H=\{(t,\ \xi)\in \mathbf{R}\times T^*M\,;\,t\in I(\xi)\}$라고 놓으면 C^1급넘기기 $\varphi: D_H\to T^*M\,;(t,\ \xi)\mapsto \varphi(t,\ \xi)$를 해밀턴미분방정식 (1)의 상흐름이라고 부른다.

임의의 $\xi\in T^*M$에 대하여 $I(\xi)=\mathbf{R}$가 성립할 때 해밀턴방정식 (1)은 완비이다고 말한다. 이때 $D_H=\mathbf{R}\times T^*M$이 성립된다.

정의 2 $q\in M$에 관하여 평등적으로 $|H(q,\ p)|\to +\infty\ (\|p\|\to +\infty)$가 성립될 때 해밀턴함수 $H: T^*M\to \mathbf{R}$는 강압적이다고 말한다.

정리 1 $H: T^*M\to \mathbf{R}$를 다양체 M우의 강압적해밀턴함수라고 하면 H를 해밀턴함수로 하는 해밀턴방정식 (1)은 완비이다.

증명 선행연구[1]의 정리 1의 증명에서와 같은 방법으로 증명된다.(증명끝)

정의 3 E를 심플렉티크선형공간, $\omega: E\times E\to \mathbf{R}$를 E우의 심플렉티크2－형식이라고 한다.

$F\subset E$를 부분선형공간이라고 하고 $\omega(u,\ \upsilon)=0\ \ (\forall u,\ \upsilon\in F)$이 성립된다고 할 때 F를 심플렉티크선형공간 E의 라그랑쥬부분공간이라고 부른다.

보조정리 1 F를 심플렉티크선형공간 $(E,\ \omega)$의 라그랑쥬부분선형공간이라고 하자.

만일 $u\in E$가 임의의 $\upsilon\in F$에 대하여 $\omega(u,\ \upsilon)=0$을 만족시키면 $u\in F$가 성립된다.

정의 4 $(S,\ \omega)$를 심플렉티크다양체라고 하고 $N\subset S$를 C^1급부분다양체라고 한다.

임의의 $x\in N$에 대하여 T_xN이 T_xS의 심플렉티크2－형식 $\omega_x: T_xS\times T_xS\to \mathbf{R}$에 관한 라그랑쥬부분공간일 때 N을 심플렉티크다양체 S의 라그랑쥬부분다양체라고 부른다.

보조정리 2 σ를 C^∞유한차원다양체 L우의 C^1급1차미분형식이라고 한다.

이때 σ의 그라프 $\mathrm{Graph}(\sigma):=\{(x,\ \sigma_x)\in T^*L\ ;\ x\in L\}$이 L의 여접다발 T^*L의 라그랑쥬부분다양체이기 위하여서는 σ가 닫긴미분형식일것이 필요하고 충분하다.

정의 5 $c\in \mathbf{R}$일 때 미지함수 $u: M\to \mathbf{R}$에 관한 1계편미분방정식

$$H(q,\ d_qu)=c \tag{2}$$

를 해밀턴－야꼬비방정식이라고 부른다.

정리 2 $u: M\to \mathbf{R}$를 C^2급함수라고 할 때 $x\mapsto (x,\ d_xu)$로 정의되는 넘기기 $du: M\to T^*M$의 그라프 $\mathrm{Graph}\,(du)=\{(q,\ d_qu)\in T_q^*M\ ;\ q\in M\}\subset T^*M$이 H의 해밀턴상흐름 φ^H에 관하여 불변이기 위하여서는 H가 $\mathrm{Graph}\,(du)$우에서 상수일것이 필요하고 충분하다. 즉 $\mathrm{Graph}\,(du)$가 H의 φ^H에 관하여 불변이기 위하여서는 함수 $u: M\to \mathbf{R}$가 어떤 $c\in \mathbf{R}$에 관하여 해밀턴－야꼬비방정식 (2)의 풀이가 될것이 필요하고 충분하다:

$$H(q,\ d_qu)=c\ \ (\forall q\in M)$$

증명 $N=\mathrm{Graph}\,(du)$라고 하자.

(충분성) H가 N우에서 상수이면 $\forall \xi\in N,\ \forall \upsilon\in T_\xi N,\ d_\xi H(\upsilon)=0$이 성립된다.

해밀턴벡토르마당의 정의로부터 다음의 식이 성립된다.

$$0=d_\xi H(\upsilon)=\Omega_\xi(X_H(\xi),\ \upsilon)\ \ \ (\forall \xi\in N,\ \upsilon\in T_\xi N)$$

이때 보조정리 1로부터 $X_H(\xi)\in T_\xi N$ $(\xi\in N)$ 이 성립된다. 여기서 $Y:N\to TN$ 을 $Y(\xi)=X_H(\xi)\in T_\xi(T^*M)$ $(\xi\in N)$ 으로 정의하면 Y 는 N 우의 C^0 급벡토르마당이 된다.

$\xi_0\in N$ 을 임의로 취하면 초기조건 $y(0)=\xi_0$ 을 만족시키는 해밀턴방정식 (1)의 연장불가능풀이는 $\varphi_t^H(\xi_0)$ $(t\in\mathbf{R})$ 로 주어진다.

한편 꼬쉬－뻬아노의 정리로부터 초기값문제 $\dot{y}=Y(y),\ y(0)=\xi_0$ 의 국부적풀이가 존재하며 벡토르마당 X_H 의 완비성으로부터 이 초기값문제의 연장불가능풀이로서 $(-\infty,\ +\infty)$ 에서 정의되는것이 존재한다. 이것을 $\psi(t,\ \xi_0)\in N$ $(t\in(-\infty,\ +\infty))$ 로 표시하면 벡토르마당 Y 의 정의와 상미분방정식의 초기값문제의 풀이의 유일성으로부터 $\varphi_t^H(\xi_0)=\psi(t,\ \xi_0)\in N$ $(t\in(-\infty,\ +\infty))$ 이 성립된다.

따라서 부분모임 $N=\mathrm{Graph}(du)\subset T^*M$ 은 φ^H 에 관하여 불변이다.

(필요성) $N=\mathrm{Graph}(du)$ 가 해밀턴상흐름 φ^H 에 관하여 불변이라고 가정하자.

이때 임의의 $\xi\in N$ 에 대하여 곡선 $t\mapsto\varphi_t^H(\xi)\in N$ 의 $t=0$ 에서의 접선벡토르는 $X_H(\xi)$이며 $X_H(\xi)\in T_\xi N$ 이 성립된다.

한편 $d(du)=0$ 이므로 보조정리 2로부터 $N=\mathrm{Graph}(du)$ 는 T^*M 의 라그랑쥬부분다양체이다. 따라서 $\forall\xi\in N,\ \forall v\in T_\xi N,\ d_\xi H(v)=\Omega_\xi(X_H(\xi),\ v)=0$ 이 성립된다.

그러므로 H 는 N 우에서 상수이다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보 수학, 66, 1, 74, 주체109(2020).
[2] I. Ekeland; Convexity Methods in Hamiltonian Mechanics, Springer, 34～56, 1990.
[3] A. Fathi et al.; Proc. ICM, 3, 597, 2014.
[4] J. Féjoz; arXiv:1102.0923v2 [math.DS], 1, 2011.
[5] A. González et al.; J. Differential Equations, 245, 1243, 2008.
[6] B. Hasselblatt et al.; Handbook of Dynamical Systems, 1, 14, 15, 2002.
[7] Wu Hwan Jong et al.; Chaos. Solitons & Fractals, 68, 114, 2014.

주체109(2020)년 12월 5일 원고접수

Characterization of Invariant Set of Hamiltonian System on General Compact Manifolds

Jong U Hwan

It was proved that the graph of differentiation of C^2 function $u:M\to\mathbf{R}$ defined on general compact manifold M which is not embedded in an Euclid space is invariant under the Hamiltonian system with coercive Hamiltonian $H:T^*M\to\mathbf{R}$ if and only if u is a solution of the Hamilton-Jacobi equation.

Keywords: compact manifold, Hamiltonian system