김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체104(2015)년 제61권 제11호 Vol. 61 No. 11 JUCHE104(2015).

# 카즈너넘기기의 단측부분밀기와의 위상반공액성

주현희, 김철산

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《현시대는 과학과 기술의 시대이며 과학과 기술이 류례없이 빠른 속도로 발전하는것은 현대과학기술발전의 중요한 특징입니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제15권 485페지)

론문에서는 일반상대성리론의 시공간특이성연구에서 초점으로 되여있는 카즈너넘기기(BKL넘기기)의 카오스적성질에 대하여 론의한다.

선행연구[1]에서는 카즈너넘기기를 가우스넘기기로 재표시하고 그것이 카오스적이라는것을 정의랴쁘노브지수, 거리적엔트로피의 지표에 의하여 밝혔다. 그러나 카즈너넘기기의 카오스성연구에 리용된 가우스넘기기가 시간의존성을 가진다는 사실이 밝혀져 그 결과가 의문시되였다.

선행연구[2－4]에서는 파레이넘기기의 프락탈성을 리용하여 카즈너넘기기의 카오스적인 한 측면을 론의하였다.

우리는 선행연구[5]에서 쌍확장넘기기와 카오스성사이의 관계를 연구한데 기초하여 카즈너넘기기의 $A$－쌍확장성을 리용하여 이 넘기기의 부분밀기와의 위상반공액성을 밝힘으로써 그것의 카오스적인 충분한 거동에 대하여 론의한다.

정의 직각자리표계가 도입된 평면에서 다음과 같은 단위원둘레를 생각하자.

$$K=\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2=1\}$$

단위원둘레 $K$우에 점 $T_1(-1,\ 0)$, $T_2(1/2,\ \sqrt{3}/2)$, $T_3(1/2,\ -\sqrt{3}/2)$을 취하고 $K$를 3등분한 부분호 $\overset{\frown}{T_2T_3}$, $\overset{\frown}{T_3T_1}$, $\overset{\frown}{T_1T_2}$를 각각 $\Lambda_1,\ \Lambda_2,\ \Lambda_3$으로 약속하자.

다음 점 $T_1,\ T_2,\ T_3$에서 단위원둘레 $K$에 외접하는 바른3각형의 정점들을 각각

$$M_1(2,\ 0),\ \ M_2(-1,\ -\sqrt{3}),\ \ M_3(-1,\ \sqrt{3})$$

으로 약속하자.

$K$우에서 정의된 넘기기 $\varphi: K\to K$를 다음과 같이 정의하자.

점 $p\in\Lambda_i$에 점 $p$와 점 $M_i$를 맺는 직선이 단위원둘레 $K$와 사귀는 점 $q$를 대응시킨다. 즉

$$q=\varphi(p).$$

넘기기 $\varphi: K\to K$를 카즈너넘기기, 이때의 단위원둘레 $K$를 카즈너환이라고 부른다.

점 $T_i\ (i=1,\ 2,\ 3)$들은 $\varphi: K\to K$의 부동점들이다.(그림 1)

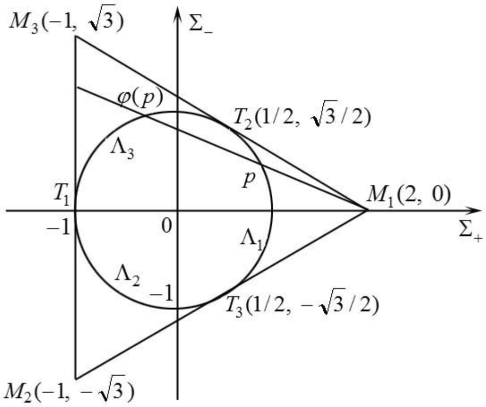

그림 1. 카즈너넘기기의 정의와 그것의 부동점들

이제 카즈너환 $K$ 에 호길이에 의한 보통거리를 주자.

두 점 $p_1,\ p_2 \in K$ 사이의 거리를 $d(p_1,\ p_2):=\min\{|\overset{\frown}{p_1p_2}|,\ 2\pi-|\overset{\frown}{p_1p_2}|\}$ 로 정의하면 카즈너환 $K$ 는 거리공간으로 된다. 여기서 $|\overset{\frown}{p_1p_2}|$ 는 단위원둘레로서의 $K$ 의 부분호 $\overset{\frown}{p_1p_2}$ 의 길이이다.

극자리표계가 도입된 평면에서 카즈너환과 카즈너넘기기에 대하여 론의하자.

이제 $T_1,\ T_2,\ T_3$ 의 자리표는 $(1,\ \pi)$, $(1,\ \pi/3)$, $(1,\ 5\pi/3)$ 로 되며 정점 $M_1,\ M_2,\ M_3$ 의 자리표는 각각 $(2,\ 0)$, $(2,\ 4\pi/3)$, $(2,\ 2\pi/3)$ 로 된다.

이때 카즈너넘기기 $\varphi$ 는 점들의 극각에 의한 한변수함수 $\Phi:[0,\ 2\pi]\to[0,\ 2\pi]$ 에 의하여 론의된다. 즉 $\varphi: p(\theta_1)\to q(\theta_2)$ 일 때 $\Phi:\theta_1\to\theta_2$ 이다.(그림 2)

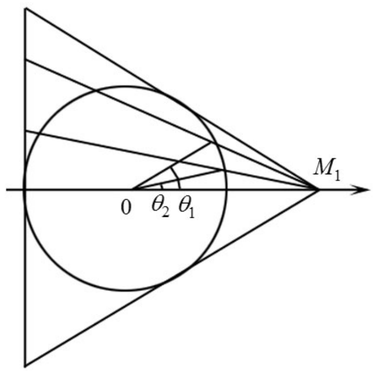


그림 2. 넘기기 $\Phi:\theta_1\to\theta_2$ 의 정의

우리는 카즈너넘기기 $\varphi: K\to K$ 가 유한형의 단측부분밀기 $\sigma$ 에 위상반공액이라고 본다.

정리 1 $K$ 를 카즈너환, $\varphi: K\to K$ 를 카즈너넘기기라고 하자.

본질적으로 정인기약이행행렬 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ 을 생각하자.

이때 카즈너넘기기 $\varphi: K\to K$ 는 $A$ －쌍확장넘기기이다.

증명 카즈너환 $K$ 의 구성으로부터 $K=\Lambda_1\cup\Lambda_2\cup\Lambda_3$ 이고 매 $\Lambda_i\ (i=1,\ 2,\ 3)$ 는 유계닫긴부분모임이다. 그리고 카즈너넘기기 $\varphi: K\to K$ 의 정의로부터 매 $i=1,\ 2,\ 3$ 에 대하여 적당한 $j,\ k\ (j,\ k\neq i)$ 가 있어서 $\varphi(\Lambda_i)=\Lambda_j\cup\Lambda_k$ 이다. 이것은 $\varphi(\Lambda_i)\supset\bigcap_{\substack{j\\(A)_{ij}=1}}\Lambda_j$ 로 고쳐쓸수 있다.

따라서 $\varphi: K\to K$ 는 모임 $\Lambda_1,\ \Lambda_2,\ \Lambda_3$ 에 의한 $A$ －쌍확장넘기기이다.(증명끝)

주의 1 카즈너넘기기 $\varphi: K\to K$ 는 엄격한 $A$ －쌍확장넘기기는 아니다.

보조정리 1 $K$ 를 카즈너환, $\varphi: K\to K$ 를 카즈너넘기기라고 하자.

$\Phi$ 를 극각에 의한 $\varphi$ 의 표시라고 하자.

이때 임의의 $\theta_1\in[0,\ \pi/3]$ 와 임의의 $\theta_2\in[0,\ \theta_1]$ 에 대하여

$$|\Phi(\theta_1)-\Phi(\theta_2)|\geq|\theta_1-\theta_2|$$

이고 $\theta_1\in[0,\ \pi/3]$ 를 임의로 고정할 때 $\dfrac{|\Phi(\theta_1)-\Phi(\theta_2)|}{|\theta_1-\theta_2|}$ 는 $\theta_2\in[0,\ \theta_1]$ 에 관하여 증가한다.

증명 기하학적해석으로부터

$$|\Phi(\theta_1)-\Phi(\theta_2)|=\theta_1-\theta_2+2\arctan\frac{\sin\theta_2}{2-\cos\theta_2}-2\arctan\frac{\sin\theta_1}{2-\cos\theta_1}$$

이라는 관계식이 나온다.

몇가지 식변형과 정돈을 통하여 보조정리가 성립된다는것이 나온다.(증명끝)

주의 2 카즈너환 $K$ 의 임의의 두 점사이의 거리는 두 점의 극각의 차의 절대값과 같다.

보조정리 2 $\Sigma_3^+(A)$ 를 본질적으로 정인기약이행행렬 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ 에 관한 단측기호렬공간이라고 하자.

$K$ 를 카즈너환, $\varphi: K\to K$ 를 카즈너넘기기라고 하자.

이때 임의의 점 $\omega=(\omega_n)_{n\in\mathbf{Z}^+}\in\Sigma_3^+(A)$ 에 대하여 모임 $J_N(\omega)=\bigcap_{n=0}^{N}\varphi^{-n}(\overset{0}{\Lambda}_{\omega_n})$ $(N\in\mathbf{Z}^+)$ 은 매 $N\in\mathbf{Z}^+$ 에 대하여 비지 않은 닫긴모임이며 $\operatorname{diam}(J_N(\omega))\to 0$ $(N\to\infty)$ 이다. 여기서 $\overset{0}{\Lambda}_{\omega_n}$ 은 $\Lambda_{\omega_n}$ 의 내부, $\overline{\varphi^{-n}(\overset{0}{\Lambda}_{\omega_n})}$ 는 $\varphi^{-n}(\overset{0}{\Lambda}_{\omega_n})$ 의 페포를 표시하며 $\operatorname{diam}(J_N(\omega))$ 는 $J_N(\omega)$ 의 직경을 의미한다.

증명 매 $N\in\mathbf{Z}^+$ 에 대하여 $J_N(\omega)$ 가 닫긴모임이라는것은 분명하다.

매 $\omega=(\omega_n)_{n\in\mathbf{Z}^+}\in\Sigma_3^+(A)$ 에 대하여 $\Sigma_3^+(A)$ 의 정의를 따르면

$$\forall n\in\mathbf{Z}^+,\ \omega_n\neq\omega_{n+1},\ \omega_n\in\{1,\ 2,\ 3\}.$$

이것을 리용하면 카즈너넘기기 $\varphi: K\to K$ 의 성질에 의하여 $\forall n\in\mathbf{Z}^+$, $\varphi(\overset{0}{\Lambda}_{\omega_n})\supset\overset{0}{\Lambda}_{\omega_{n+1}}$ 이 성립되며 여기로부터 $\overset{0}{\Lambda}_{\omega_n}\cap\varphi^{-1}(\overset{0}{\Lambda}_{\omega_{n+1}})\neq\phi$ 이다.

웃식으로부터 $\varphi^{-1}(\overset{0}{\Lambda}_{\omega_N})\cap\overset{0}{\Lambda}_{\omega_{N-1}}\neq\phi$ 이며 $(\varphi^{-1}(\overset{0}{\Lambda}_{\omega_N})\cap\overset{0}{\Lambda}_{\omega_{N-1}})\subset\overset{0}{\Lambda}_{\omega_{N-1}}\subset\varphi(\overset{0}{\Lambda}_{\omega_{N-2}})$ 가 성립된다.

이로부터 $\varphi^{-1}(\varphi^{-1}(\overset{0}{\Lambda}_{\omega_N})\cap\overset{0}{\Lambda}_{\omega_{N-1}})\cap\overset{0}{\Lambda}_{\omega_{N-2}}\neq\phi$ 이다.

귀납적으로 $\varphi^{-1}(\varphi^{-1}(\cdots(\varphi^{-1}(\varphi^{-1}(\overset{0}{\Lambda}_{\omega_N})\cap\overset{0}{\Lambda}_{\omega_{N-1}})\cap\overset{0}{\Lambda}_{\omega_{N-2}})\cap\cdots)\cap\overset{0}{\Lambda}_{\omega_1})\cap\overset{0}{\Lambda}_{\omega_0}\neq\phi$ 이 성립된다.

한편 $\varphi^{-1}(\varphi^{-1}(\overset{0}{\Lambda}_{\omega_N})\cap\overset{0}{\Lambda}_{\omega_{N-1}})\subset\left(\varphi^{-2}(\overset{0}{\Lambda}_{\omega_N})\cap\varphi^{-1}(\overset{0}{\Lambda}_{\omega_{N-1}})\right)\subset\left(\overline{\varphi^{-2}(\overset{0}{\Lambda}_{\omega_N})}\cap\overline{\varphi^{-1}(\overset{0}{\Lambda}_{\omega_{N-1}})}\right)$ 라는것을 고려하면 귀납적으로 $\varphi^{-1}(\varphi^{-1}(\cdots(\varphi^{-1}(\varphi^{-1}(\overset{0}{\Lambda}_{\omega_N})\cap\overset{0}{\Lambda}_{\omega_{N-1}})\cap\overset{0}{\Lambda}_{\omega_{N-2}})\cap\cdots)\cap\overset{0}{\Lambda}_{\omega_1})\cap\overset{0}{\Lambda}_{\omega_0}\subset J_N(\omega)$.

결국 $\forall N\in\mathbf{Z}^+,\ J_N(\omega)\neq\phi$.

다음으로 $\operatorname{diam}(J_N(\omega))\to 0$ $(N\to\infty)$ 이 성립되지 않는다고 하자.

이때 $\bigcap_{N=0}^{\infty}J_N(\omega)$ 에는 서로 다른 두 점 $p_1,\ p_2\in K$ 가 존재한다.

$J_N(\omega)$ 의 정의에 의하여 부분호 $\overset{\frown}{p_1p_2}\subset K$ 도 $\bigcap_{N=0}^{\infty}J_N(\omega)$ 에 포함된다.

분명히 $\exists i\in\{1,\ 2,\ 3\}$, $\overset{\frown}{p_1p_2}\subset\Lambda_i$ 이며 $J_N(\omega)$ 의 정의에 의하여 $\forall n\in\mathbf{Z}^+$, $\varphi^n(\overset{\frown}{p_1p_2})\subset\overset{0}{\Lambda}_{\omega_n}$ 이 성립된다. 즉 $\forall n\in\mathbf{Z}^+$, $\operatorname{diam}\varphi^n(\overset{\frown}{p_1p_2})\le\operatorname{diam}\overset{0}{\Lambda}_{\omega_n}=2\pi/3$ 이여야 한다.

그런데 주의 2와 보조정리 1로부터 $\exists n\in\mathbf{Z}^+$, $\operatorname{diam}\varphi(\overset{\frown}{p_1p_2})>2\pi/3$ 이다. 이것은 모순이다.(증명끝)

정리 2 $K$를 카즈너환, $\varphi : K \to K$를 카즈너넘기기라고 하자.

이때 넘기기 $\pi : \Sigma_3^+(A) \to K$가 존재하여 다음의 두 조건을 만족시킨다.

i) 넘기기 $\pi$는 $\Sigma_3^+(A)$에서 련속이며 $K$우로의 넘기기이다.

ii) $\pi \circ \sigma = \varphi \circ \pi$ 즉 $A$ー쌍확장넘기기인 카즈너넘기기 $\varphi : K \to K$는 $\Sigma_3^+(A)$우의 유한형의 단측부분밀기 $\sigma$에 위상반공액이다.

증명 먼저 매 $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbf{Z}^+} \in \Sigma_3^+(A)$에 대하여 $\pi(\omega) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\varphi^{-n}(\overset{0}{\Lambda}_{\omega_n})}$로 정의되는 규칙 $\pi$가 $\Sigma_3^+(A) \to K$인 넘기기라는것을 보자.

보조정리 2를 리용하여 웃식을 다시 쓰면 $\pi(\omega) = \bigcap_{N=0}^{\infty} J_N(\omega)$이며 모임렬 $\{J_N(\omega)\}$은 $\mathrm{diam}(J_N(\omega)) \to 0 \ (N \to \infty)$인 비지 않은 축소닫긴모임렬이다.

이로부터 모임 $\bigcap_{N=0}^{\infty} J_N(\omega)$는 한점모임이라는것이 나오고 이것은 $\pi$가 $\Sigma_3^+(A)$에서 정의된 넘기기라는것을 의미한다.

i)의 증명 먼저 $\pi$가 $\Sigma_3^+(A)$에서 련속이라는것을 보자.

보조정리 2로부터 매 $\omega^0 = (\omega_n^0)_{n \in \mathbf{Z}^+} \in \Sigma_3^+(A)$에 대하여

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N_0 \in \mathbf{Z}, \ \forall N \ge N_0, \ \mathrm{diam} J_N(\omega^0) < \varepsilon .$$

$\Sigma_3^+(A)$에서 거리 $d_\Sigma$의 정의에 의하여 $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbf{Z}^+} \in \Sigma_3^+(A)$일 때

$$d_\Sigma(\omega, \ \omega^0) < 1/2^{N_0} \Rightarrow \omega_i = \omega_i^0, \ i = 1, \cdots, \ N_0 - 1 .$$

이로부터 $d_\Sigma(\omega, \ \omega^0) < 1/2^{N_0} \Rightarrow \pi(\omega), \ \pi(\omega^0) \in J_N(\omega^0)$이 성립되며 특히

$$d(\pi(\omega), \ \pi(\omega^0)) \le \mathrm{diam} J_{N_0}(\omega^0) < \varepsilon .$$

이것은 $\pi$가 $\Sigma_3^+(A)$에서 련속이라는것을 보여준다.

다음으로 $\pi$가 $K$우로의 넘기기라는것을 보자.

모임 $K_0 = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}^+} \varphi^{-n}\{T_1, \ T_2, \ T_3\}$은 셀수 있는 모임이다.

$K_0$의 매 점의 임의의 근방은 $K$의 구조로부터 셀수 없는 모임이므로 이 근방에는 $K \setminus K_0$의 원소가 늘 존재한다. 즉 $K \setminus K_0$은 $K_0$에서 조밀하다.

임의의 점 $p \in K \setminus K_0$을 취하자.

이때 $\exists \omega_0 \in \{1, \ 2, \ 3\}, \ \ p \in \overset{0}{\Lambda}_{\omega_0}$이다.

또한 카즈너넘기기 $\varphi : K \to K$의 성질에 의하여 $\forall n \in \mathbf{Z}, \exists \omega_n \in \{1, \ 2, \ 3\}, \ \ \varphi^{-n}(p) \in \overset{0}{\Lambda}_{\omega_n}$이고 $\omega_n \ne \omega_{n+1}$이다. 이것은 우에서 얻어진 $\omega_i$들로 된 기호렬 $\omega_0 \omega_1 \omega_2 \cdots$은 $\Sigma_3^+(A)$의 원소이며 특히 $\pi$의 정의에 의하여 $\pi((\omega_n)_{n \in \mathbf{Z}^+}) = p$임을 의미한다.

이제 임의의 점 $p_0 \in K_0$을 취하자.

모임 $K \setminus K_0$이 $K_0$에서 조밀하므로 $\exists (p_n) \subset K \setminus K_0, \ \ p_n \to p_0 (n \to \infty)$이다.

우에서 증명된 사실에 의하여 임의의 $n\in \boldsymbol{Z}$에 대하여 $\Sigma_3^+(A)$의 적당한 점 $\omega^n$이 있어서 $\pi(\omega^n)=p_n$이다.

$\Sigma_3^+(A)$는 콤팍트모임이므로 점렬 $(\omega^n)\subset\Sigma_3^+(A)$에 대하여 $\omega^{n_k}\to\omega^0\in\Sigma_3^+(A)$ $(k\to\infty)$인 적당한 부분렬 $(\omega^{n_k})$이 존재한다.

$\pi$의 련속성에 의하여 $\pi(\omega^0)=\lim\limits_{k\to\infty}\pi(\omega^{n_k})=\lim\limits_{k\to\infty}p_{n_k}=p_0$이다. 즉 $\pi$는 $K$우로의 넘기기이다.

ii)의 증명 임의의 $\omega=(\omega_n)_{n\in\boldsymbol{Z}^+}\in\Sigma_3^+(A)$에 대하여

$$\pi\circ\sigma((\omega_n)_{n\in\boldsymbol{Z}^+})=\pi((\omega_{n+1})_{n\in\boldsymbol{Z}^+})=\bigcap_{n=0}^{\infty}\overline{\varphi^{-n}(\Lambda^0_{\omega_{n+1}})}=\varphi\circ\pi((\omega_n)_{n\in\boldsymbol{Z}^+})$$

가 성립된다.(증명끝)

## 참 고 문 헌


[1] J. D. Barrow; Phys. Rep., 85, 1, 1982.

[2] N. J .Cornish et al.; Phys. Rev., D 55, 7489, 1997.

[3] N. J. Cornish et al.; Phys. Rev. Lett., 78, 998, 1997.

[4] N. J. Cornish; arXiv: gr-gc/9602054v1 27 Feb. 1996.

[5] Kim Chol San et al.; arXiv:1401.2349v1 [math.DS] 9 Jan 2014.


주체104(2015)년 7월 5일 원고접수

## Topological Semi-Conjugacy of Kasner Map to One-Sided Subshift

*Ju Hyon Hui, Kim Chol San*

We study the relation between the Kasner map and the symbolic dynamical systems. We found that a subshift of finite type is topologically semi-conjugate to the Kasner map, so that we can see a lot of information about the Kasner map through the plenty of the topological behaviors of the subshift.

Key word: Kasner map