김일성종합대학학보 (수학) 주체107(2018)년 제64권 제1호

선형분수계련립미분방정식의 안정성을 판정하는 한가지 충분조건

김 철

최근에 분수계미분방정식에서 풀이의 안정성은 광범하게 연구되고있다.[1－6]

행렬의 고유값의 편각이 분수계선형련립미분방정식, 분수계비선형련립미분방정식의 풀이의 안정성평가에서 중요한 역할을 한다는것은 이미 밝혀져있다.[4]

선행연구[4]에서는 분수계방정식 $D^{\alpha}x(t)=f(x(t))$ 에 대하여 행렬 A 의 고유값의 편각의 절대값이 모두 $\alpha\pi/2$ 보다 크면 평형점은 안정하고 적어도 하나의 절대값이 $\alpha\pi/2$ 보다 작으면 평형점은 불안정하다는것을 밝혔다. 여기서 $A=(a_{ij})_{i,\,j=\overline{1,\,n}}$ 이고

$$a_{ij}=\left.\frac{\partial f_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*}\quad (i,\ j=\overline{1,\ n})$$

이다.

론문에서는 다음의 분수계선형동차련립미분방정식

$$^{c}D^{\alpha}x(t)=Ax(t) \tag{1}$$

의 령풀이가 안정하기 위한 조건을 고찰하였다. 여기서 $^{c}D^{\alpha}$ 는 캐푸토분수계도함수이고 $t\in(a,\ +\infty)$, $x(t)\in\mathbf{R}^n$, $0<\alpha\le 1$이며 A는 n차행렬로서 불퇴화이다.

식 (1)의 령풀이는 행렬 A의 고유값들의 편각의 절대값이 모두 $\alpha\pi/2$보다 크면 점근안정하고 절대값중에서 적어도 하나가 $\alpha\pi/2$보다 작으면 불안정하다.

행렬 A의 고유값을 구하기 위하여서는 특성방정식의 뿌리를 구해야 한다. 이때 방정식의 차수는 행렬 A의 차수와 같다. 그런데 특성방정식의 차수가 3보다 크면 뿌리를 구하거나 뿌리의 편각을 구하는것이 일반적으로 어려운 문제로 제기되고있다. 상미분방정식에서도 사정은 마찬가지이다. 그리하여 상미분방정식에서는 후르위츠의 판정법이 제기되였다.

선행연구[3]에서는 행렬의 차수가 4보다 작은 경우 고유값을 직접 구하지 않고 고유값의 편각의 절대값이 $\alpha\pi/2$보다 크기 위한 조건을 밝혔다. 이 방법은 상미분방정식에서 훌위쯔의 판정법의 일반화라고 볼수 있다.

이밖에도 분수계지연련립미분방정식 등에서 특성방정식의 뿌리를 직접 구할대신 편각의 원리를 리용하여 안정성을 판정하는 효과적이고 해석적인 판정법을 확립하였다.[6]

따라서 론문에서는 행렬의 차수를 낮추어 판정할수 있는 한가지 충분조건을 제기한다.

다음의 보조정리에서는 리만－류빌분수계도함수와 캐푸토분수계도함수사이관계를 보여준다.

보조정리 1 [5] $\beta\in(0,\ 1)$ 이고 $M(0)\ge 0$ 이면

$$^{c}D_0^{\beta}M(t)\le D_0^{\beta}M(t) \tag{2}$$

가 성립한다. 여기서 ${}^{c}D_{0}^{\beta}M(t)$, $D_{0}^{\beta}M(t)$ 들은 각각 캐푸토분수계도함수와 리만—류빌분수계도함수이다.

이제 α —분수안정행렬개념과 한가지 비교원리를 수립한다.

실수 $\alpha\in(0,\ 1]$ 에 대하여 복소수평면에서 모임 $\{\lambda\in\mathbf{C}: |\arg(\lambda)|>\alpha\pi/2\}$ 를 I—구역, 모임 $\{\lambda\in\mathbf{C}: |\arg(\lambda)|<\alpha\pi/2\}$ 를 J—구역이라고 하자. 행렬 A 의 고유값들이 모두 I—구역에 놓이면 선형분수계 (1)의 령풀이는 점근안정하고 고유값들중 적어도 하나가 J—구역에 놓이면 불안정하다.

식 (1)의 령풀이가 점근안정하자면 행렬 A 가 어떤 조건을 만족시켜야 하는가를 보기로 하자.

정의 $\alpha\in(0,\ 1]$ 에 대하여 상수 $M\geq 1,\ \lambda>0$ 이 있어서

$$\| E_{\alpha,\,\beta}(A(t-t_0)^{\alpha})\| \leq ME_{\alpha,\,\beta}(-\lambda(t-t_0)^{\alpha})$$

이 성립하면 행렬 A 는 α —분수안정행렬이라고 부른다. 여기서 $\beta\in[0,1]$ 이다.

주의 1 정의의 이 조건을 만족시키는 행렬 A 의 고유값들이 모두 I—구역에 놓인다는것은 많은 수치실험결과들을 보고 예상할수 있다. 다만 여기서는 다음의 두 실례들을 언급하기로 한다.

실례 1 행렬

$$B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

가 0.5—분수안정행렬임을 증명하시오.

증명 먼저 $\lambda_1(B)=\lambda_1=1+2i$, $\lambda_2(B)=\lambda_2=1-2i$ 이다. 여기서 λ_1, λ_2 들은 B 의 고유값들이다. 이제 $C=\begin{pmatrix}i & -i\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ 이면 $C^{-1}AC=\begin{pmatrix}1-2i & 0\\ 0 & 1+2i\end{pmatrix}$ 이다. 따라서

$$E_{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}(Bt^{0.5})=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}E_{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}((1+2i)t^{0.5})+\frac{1}{2}E_{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}((1-2i)t^{0.5}) & -\frac{i}{2}E_{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}((1+2i)t^{0.5})+\frac{i}{2}E_{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}((1-2i)t^{0.5})\\ \frac{i}{2}E_{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}((1+2i)t^{0.5})-\frac{i}{2}E_{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}((1-2i)t^{0.5}) & \frac{1}{2}E_{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}((1+2i)t^{0.5})+\frac{1}{2}E_{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}((1-2i)t^{0.5})\end{pmatrix}$$

$$\left\|E_{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}(Bt^{0.5})\right\|=\left\|\begin{pmatrix}\operatorname{Re}E_{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}((1+2i)t^{0.5}) & \operatorname{Im}E_{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}((1+2i)t^{0.5})\\ -\operatorname{Im}E_{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}((1+2i)t^{0.5}) & \operatorname{Re}E_{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}((1+2i)t^{0.5})\end{pmatrix}\right\|\leq$$

$$\leq 2\left|E_{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}((1+2i)t^{0.5})\right|\leq 8E_{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}(-t^{0.5})$$

이다. 즉 $\left\|E_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(Bt^{0.5})\right\|\leq 8E_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(-t^{0.5})$ 이 성립한다. 따라서 B 는 0.5—분수안정행렬이다. 마

찬가지 방법으로 B가 0.6－분수안정행렬이라는 사실도 증명할수 있다.(증명끝)

실례 2 행렬 $A=\begin{pmatrix}-6 & 3\\ -5 & 2\end{pmatrix}$가 $\alpha-$분수안정행렬이라는것을 증명하시오. 여기서 $\alpha\in(0,\ 1)$인 임의의 실수이다.

증명 실례 1과 같이 계산하면 $\lambda_1(A)=\lambda_1=-3$, $\lambda_2(A)=\lambda_2=-1$이다. $t_0=0$이라고 하자. 이제 $B=\begin{pmatrix}1 & 3/5\\ 1 & 1\end{pmatrix}$이면 $B^{-1}AB=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$이다. 따라서

$$E_{\alpha,\alpha}(At^\alpha)=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}E_{\alpha,\alpha}(-3t^\alpha)-\frac{3}{2}E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha) & -\frac{3}{2}E_{\alpha,\alpha}(-3t^\alpha)+\frac{3}{2}E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha)\\ \frac{5}{2}E_{\alpha,\alpha}(-3t^\alpha)-\frac{5}{2}E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha) & -\frac{3}{2}E_{\alpha,\alpha}(-3t^\alpha)+\frac{5}{2}E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha)\end{pmatrix}$$

이고 $\|E_{\alpha,\alpha}(At^\alpha)\|\le 5E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha)$이 성립한다. 여기서 $\|A\|:=\max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$이다.(증명끝)

주의 2 이 정의에서 $\alpha=1,\ \beta=1$이면 선행연구[2]의 후르위츠안정행렬의 정의와 일치한다.

보조정리 2 $B=(b_{ij})_{n\times n}$가 실행렬이고, $y(t;\ t_0,\ c)$와 $z(t;\ t_0,\ c)$는 각각

$$\begin{cases}{}^cD^\alpha y\le By+f(t)\\ y(t_0)=c\end{cases},\quad \begin{cases}{}^cD^\alpha z=Bz+f(t)\\ z(t_0)=c\end{cases}$$

의 풀이라고 하자. 여기서 $z,\ y\in\mathbf{R}^n$, $f(t)=(f_1(t),\ \cdots,\ f_n(t))^{\mathrm{T}}\in C[I,\ \mathbf{R}^n]$, $I=[t_0,\ \infty)$이다. 이때 $\|(t-t)^{1-\alpha}f_i(t)\|<\infty$이면 $y(t;\ t_0,\ c)\le z(t;\ t_0,\ c)$ 즉 $y_i(t,\ t_0,\ c)\le z_i(t,\ t_0,\ c)\ (\forall t\ge t_0)$가 성립한다.

증명은 생략한다.

다음은 분수계련립미분방정식 (1)의 령풀이 즉 평형점이 안정하기 위한 충분조건을 준다. 식 (1)을 다음의 모양으로 쓰자.

$$^cD^\alpha\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_r\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & A_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & A_{rr}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_r\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}0 & A_{12} & \cdots & A_{1r}\\ A_{21} & 0 & \cdots & A_{2r}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_r\end{pmatrix}\tag{3}$$

여기서 $x_i\in\mathbf{R}^{n_i}$, A_{ii}와 A_{ij}는 각각 n_i차행렬, $n_i\times n_j$형행렬이고 $\sum\limits_{i=1}^{r}n_i=n$이다.

다음과 같은 부분계를 생각하자.

$$^cD^\alpha\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_r\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & A_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & A_{rr}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_r\end{pmatrix}\tag{4}$$

정리 매 행렬 A_{ii}는 $\alpha-$분수안정행렬 즉 $M_i>0,\ \lambda_i>0\ (i=1,\ \cdots,\ n)$들이 있어서 $\|E_{\alpha,\alpha}(A_{ii}(t)^\alpha)\|\le M_iE_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i(t)^\alpha)$이라고 하자. 행렬 $B=(-\delta_{ii}\lambda_i+(1-\delta_{ij})M_i\|A_{ij}\|)_{r\times r}$가 $\alpha-$분수안정행렬이면 행렬 A는 $\alpha-$분수안정행렬이다.

증명 식 (3)의 풀이를 다음과 같이 쓸수 있다.

$$x_i(t; 0, x_0) = E_{\alpha,1}(A_{ii}(t)^\alpha)\, x_{i0} + \\ + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A_{ii}(t-s)^\alpha) \sum_{j=1}^r (1-\delta_{ij}) A_{ij} \cdot x_j(s,\ 0,\ x_0) ds \tag{5}$$

여기서 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ 이다. 매 행렬 A_{ii} 가 $\alpha-$분수안정행렬이므로

$$\| x_i(t,\ 0,\ x_0) \| \le M_i \| x_{i0} \| E_{\alpha,1}(-\lambda_i(t)^\alpha) + \\ + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} M_i E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i(t-s)^\alpha) \sum_{j=1}^r (1-\delta_{ij}) \| A_{ij} \| \cdot \| x_j(s,\ 0,\ x_0) \| ds\ (i = \overline{1,\ r}) \tag{6}$$

이다. 이제

$$y_i(t) := \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} M_i E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i(t-s)^\alpha) \sum_{j=1}^r (1-\delta_{ij}) \| A_{ij} \| \cdot \| x_j(s,\ 0,\ x_0) \| ds$$

라고 하자. 식[4]

$$D_{a+}^\alpha \int_a^x K(x-t) f(t) dt = \int_a^x D_{a+}^\alpha K(x-t) f(x-t+a) dt + f(x) \lim_{x \to a+} [I_{a+}^{1-\alpha} K(t-a)](x)$$

와 보조정리 1의 부등식 (2)를 리용하면 $y_i(t,\ 0,\ y_0)$ 은

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha y_i \le -\lambda_i y_i + \sum_{j=1}^r M_i \| A_{ij} \| (1-\delta_{ij}) y_i + \\ \qquad + \sum_{j=1}^r M_i \| x_{j0} \| (1-\delta_{ij}) E_{\alpha,1}(-\lambda_j(t)^\alpha) \| A_{ij} \| M_j \\ y_i(0) = 0\ \ (i = \overline{1,\ r}) \end{cases} \tag{7}$$

을 만족시킨다. 식 (7)에 대한 다음의 비교방정식

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha z_i = -\lambda_i z_i + \sum_{j=1}^r M_i \| A_{ij} \| (1-\delta_{ij}) z_i + \\ \qquad + \sum_{j=1}^r M_i \| x_{j0} \| (1-\delta_{ij}) E_{\alpha,1}(-\lambda_j(t)^\alpha) \| A_{ij} \| M_j \\ z_i(0) = 0\ \ \ (i = \overline{1,\ r}) \end{cases} \tag{8}$$

을 생각하자. 식 (8)을 다음의 벡토르형식으로 쓰자.

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha z = Bz + f(t) \\ z(0) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

여기서

$$f(t):=\begin{pmatrix}\sum_{j=2}^{r}M_1\|x_{j0}\|\|A_{1j}\|M_jE_{\alpha,1}(-\lambda_1(t)^\alpha),\cdots\\ \cdots,\sum_{j=1}^{r-1}M_r\|x_{j0}\|\|A_{rj}\|M_jE_{\alpha,1}(-\lambda_r(t)^\alpha)\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

이다. 행렬 B가 $\alpha-$분수안정행렬이므로 상수 $h>0,\ \beta>0$ 들이 존재하여 $\|E_{\alpha,\alpha}(B(t)^\alpha)\|\le hE_{\alpha,\alpha}(-\beta(t)^\alpha)$ 이 성립한다. 식 (9)의 풀이는 다음과 같이 쓸수 있다.

$$z(t\,;0,z_0)=\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(B(t-s)^\alpha)f(s)ds \tag{10}$$

$E_\alpha(0)=1$이므로

$$G(x_0):=\max\left\{\sum_{j=2}^{r}M_1\|x_{j0}\|\|A_{1j}\|M_j,\ \cdots,\ \sum_{j=1}^{r-1}M_r\|x_{j0}\|\|A_{rj}\|M_j\right\}$$

라고 하면

$$\|z(t)\|\le\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}hE_{\alpha,\alpha}(-\beta(t-s)^\alpha)\|f(s)\|ds\le Gh\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\beta(t-s)^\alpha)ds\le$$
$$\le(Gh/\beta)E_{\alpha,1}(-\beta(t)^\alpha)$$

이고 $\lim_{t\to\infty}\|z(t)\|=0$ 이 나온다. 따라서

$$\|x_i(t,\ t_0,\ x_0)\|\le M_i\|x_{i0}\|E_{\alpha,1}(-\lambda_i(t)^\alpha)+y_i(t\,;0,y_0)\le$$
$$\le M_i\|x_{i0}\|E_{\alpha,1}(-\lambda_i(t)^\alpha)+z_i(t\,;0,z_0)\le$$
$$\le M_i\|x_{i0}\|E_{\alpha,1}(-\lambda_i(t)^\alpha)+\|z(t\,;0,z_0)\|\to0\ \ (t\to+\infty;\ i=\overline{1,\ n})$$

이고 A는 $\alpha-$분수안정행렬이다.(증명끝)

이 정리는 식 (1) 또는 식 (3)의 령풀이가 점근안정하다는것을 의미한다.

주의 3 정리 3에서 $\alpha=1$이라고 하면 선행연구[2]의 결과가 얻어진다.($t_0=0$인 경우)

실례 3 행렬

$$A=\begin{pmatrix}-6&3&1/8&-1/8\\-5&2&1/7&-1/7\\1/2&1&-4&1\\1&1/2&1&-4\end{pmatrix}$$

가 $\alpha-$분수안정행렬임을 증명하시오.

증명 $A_{11}=\begin{bmatrix}-6&3\\-5&2\end{bmatrix}$, $A_{22}=\begin{bmatrix}-4&1\\1&-4\end{bmatrix}$, $A_{12}=\begin{bmatrix}1/8&-1/8\\1/7&-1/7\end{bmatrix}$, $A_{21}=\begin{bmatrix}1/2&1\\1&1/2\end{bmatrix}$이라고 하자. 이때

$\lambda_1(A_{11})=\lambda_1=-3$, $\lambda_2(A_{11})=\lambda_2=-1$, $\lambda_1(A_{22})=\tilde{\lambda}_1=-5$, $\lambda_2(A_{22})=\tilde{\lambda}_2=-3$이며 그러면

$$E_{\alpha,\alpha}(At^\alpha)=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}E_{\alpha,\alpha}(-3t^\alpha)-\frac{3}{2}E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha)&-\frac{3}{2}E_{\alpha,\alpha}(-3t^\alpha)+\frac{3}{2}E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha)\\\frac{5}{2}E_{\alpha,\alpha}(-3t^\alpha)-\frac{5}{2}E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha)&-\frac{3}{2}E_{\alpha,\alpha}(-3t^\alpha)+\frac{5}{2}E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha)\end{pmatrix}$$

$$E_{\alpha,\alpha}(A_{22}t^{\alpha})=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_{\alpha,\alpha}(-5t^{\alpha})+\frac{1}{2}E_{\alpha,\alpha}(-3t^{\alpha}) & -\frac{1}{2}E_{\alpha,\alpha}(-5t^{\alpha})+\frac{1}{2}E_{\alpha,\alpha}(-3t^{\alpha}) \\ \frac{1}{2}E_{\alpha,\alpha}(-5t^{\alpha})-\frac{1}{2}E_{\alpha,\alpha}(-3t^{\alpha}) & \frac{1}{2}E_{\alpha,\alpha}(-5t^{\alpha})+\frac{1}{2}E_{\alpha,\alpha}(-3t^{\alpha}) \end{pmatrix}$$

이다. 따라서 $\| E_{\alpha,\alpha}(A_{11}t^{\alpha})\| \le 5E_{\alpha,\alpha}(-t^{\alpha})$, $\| E_{\alpha,\alpha}(A_{22}t^{\alpha})\| \le (1/2)E_{\alpha,\alpha}(-3t^{\alpha})$ 이고 $\| A_{12}\| = 2/7$, $\| A_{21}\| = 3/2$ 이다. 여기서 $\| A\| := \max_{1\le i\le r}\sum_{j=1}^{r}|a_{ij}|$, $M_1=5$, $M_2=1/2$, $\alpha_1=-1$, $\alpha_2=-3$ 이다.

그러면 $B=\begin{pmatrix} -1 & 10/7 \\ 3/2 & -3 \end{pmatrix}$ 이고 α – 분수안정행렬이며 따라서 행렬 A 도 α – 분수안정행렬이다. 결국 $X'=AX$ 의 령풀이는 점근안정하다.(증명끝)

론문에서는 행렬의 차원수를 낮추고 얻어진 행렬의 고유값을 구하는 방법으로 령풀이의 안정성을 판정하는 한가지 수법을 제기하였다.

참 고 문 헌

[1] 김명하; 분수계미적분과 그 응용, **김일성**종합대학출판사, 3∼78, 주체95(2006).

[2] X. X. Laio et al.; Stability of Dynamical Systems, Elsevier, 14, 2007.

[3] E. Ahmed et al.; Physics Letters A., 358, 1, 2006.

[4] E. Ahmed et al.; J. Math. Anal. Appl., 325, 542, 2007.

[5] Y. Li et al.; Automatica., 45, 1965, 2009.

[6] M. Shi et al.; Automatica., 47, 2001, 2011.

주체106(2017)년 8월 10일 원고접수

A Sufficient Condition for the Stability Testing of Linear Fractional Differential System

Kim Chol

In this paper, we introduce the definition of α-fraction-stable matrix and establish a fractional differential inequality. Using the inequality, we find a sufficient condition for the stability of the equilibrium in linear homogeneous fractional differential system with Caputo derivative. An example is given to illustrate the sufficient condition.

Key words: fractional differential system, equilibrium, fractional differential inequality, stability