경제라산에 리용되는 선형계획법문제의 쌍대원리

김용운

경애하는 **김정은**동지의 숭고한 뜻을 받들어 하루빨리 경제강국을 일떠세우자면 새세기 산업혁명의 불길을 세차게 지펴올려 나라의 경제를 과학기술의 힘, 지식의 힘으로 장성하는 경제로 일신시켜야 한다.

경애하는 김정은동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《오늘 세계는 경제의 지식화에로 전환되고있으며 우리앞에는 나라의 경제를 지식의 힘으로 장성하는 경제로 일신시켜야 할 시대적과업이 나서고있습니다.》

지식경제강국을 건설하기 위하여서는 인민경제 모든 부문에서 과학기술과 생산을 밀착시켜 우리의 자원과 기술로 생산을 늘이며 나아가서 설비와 생산공정의 CNC화, 무인화를 적극 실현하여 나라의 전반적기술장비수준을 세계적수준으로 끌어올려야 한다. 이와함께 지식경제시대의 요구에 맞는 경제구조를 완비하며 현실발전의 요구에 맞게 주체사상을 구현한 우리 식의 경제관리방법을 연구완성하여야 한다.

특히 과학과 기술의 급속한 발전에 기초한 인민경제의 과학화, 정보화가 힘있게 추진 되고있는 현실적요구에 맞게 경제관리를 보다 새로운 과학적토대우에 올려세우고 경제타 산의 과학화수준을 더욱 높여야 한다.

경제타산의 과학화수준을 높이기 위하여서는 선형계획법을 비롯한 최량화모형을 적 극 리용하여야 한다.

선형계획법이 의거하고있는 최량화모형은 경제활동의 조건들을 제한식에 반영하고 경제활동의 결과를 목적식에 반영하여 가장 좋은 경제적성과를 이룩하기 위한 방도를 찾 을수 있게 하는 매우 효과적인 수단이다.

경제타산에서 선형계획법문제의 쌍대원리를 잘 리용하면 그 과학화수준을 더욱 높일수 있다. 선형계획법문제의 쌍대원리를 리용하면 경제활동조건의 변화가 경제적목적달성에 미치는 영향정도를 분석할수 있다. 이것은 실천적으로 중요한 의의를 가진다. 그것은 쌍대원리에 의거하면 처음의 최량화모형을 리용하여 얻은 최량방안의 안정성과 경제적예비를 정량적으로 밝히고 경제활동조건을 변화시켜 얻게 되는 경제적효과도 예측하여 경제활동최량화의 효과를 더욱 높이며 최량화모형의 현실성을 더 잘 보장할수 있기때문이다.

최량화모형리용의 실천적경험은 경제활동조건들이 일부 변동되는 경우에 처음에 얻은 최량방안을 약간 조절하는 방법으로 새로운 최량방안을 얻는것이 효과적이라는것을 보여준다.

선형계획법의 시초문제가 다음과 같이 주어졌다고 하자.

$$F(X) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \Rightarrow \max$$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \leq b_2 \\ \dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \ (j = \overline{1, n})$$

시초문제에 대응하는 쌍대문제는 다음과 같이 표시된다.

$$G(Y) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m \Rightarrow \min$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \ge c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \ge c_2 \\ \dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \ge c_n \end{cases} \quad y_i \ge 0, \ (i = \overline{1, m})$$

여기서 y_i 는 쌍대변수이다.

시초문제와 쌍대문제를

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, \quad B = (b_1, b_2, \dots, b_m)^{\mathrm{T}}, \quad C = (c_1, c_2, \dots, c_n)^{\mathrm{T}},$$
$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^{\mathrm{T}}, \quad Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)^{\mathrm{T}}$$

라고 하면 행렬형식으로 각각

$$F(X) = C^{T}X \Rightarrow \max$$
 $G(Y) = B^{T}Y = \min$
 $AX \leq B$ $A^{T}Y \geq C$
 $X \geq 0$ $Y \geq 0$

으로 표시할수 있다.

시초문제와 쌍대문제는 쌍대쌍을 이룬다.

시초문제와 쌍대문제에 대하여 다음의 사실이 성립한다.

(1) 시초문제와 쌍대문제의 임의의 허용계획 X.Y에 대하여

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

이 성립한다.

② 시초문제와 쌍대문제에 대하여 허용계획이 존재한다면 그것들은 각각 최량계획 X^*, Y^* 들을 가지며

$$\sum_{i=1}^{n} c_{j} x_{j}^{*} = \sum_{i=1}^{m} b_{i} y_{i}^{*}$$

이 성립한다. 그리고 ①로부터 X^* 이 시초문제의 최량계획이기 위하여서는 $\sum_{j=1}^n c_j x_j^* = \sum_{i=1}^m b_i y_i^*$ 인 쌍대문제의 허용계획 Y^* 이 존재할것이 필요하고 충분하다는 최량성 평가조건이 나온다.

③ 허용계획 X^*, Y^* 이 각각 시초문제와 쌍대문제의 최량계획이기 위하여서는 그것들이 여불견고성조건

$$\sum_{i=1}^{m} y_{i}^{*} (b_{i} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{j}^{*}) = 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} x_{j}^{*} (c_{j} - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_{i}^{*}) = 0$$

을 만족시킬것이 필요하고 충분하다.

여불견고성조건은 우선 쌍대문제의 최량계획 Y^* 에 대하여 $y_i^*>0$ 이면 최량계획 X^* 에 서 시초문제의 i째 제한식은 $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* = b_i$ 즉 등식으로 성립하여야 하며 또한 시초문제의

i 째 제한식이 최량계획 X^* 에서 엄격한 부등식 즉 $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* < b_i$ 으로 성립되면 쌍대문제의 최량계획 Y^* 에서 그에 대응하는 쌍대변수는 $y_i^*=0$ 이여야 한다는것을 의미한다.

그러므로 $y_i^*=0$ 이면 시초문제의 최량계획과 목적함수의 최량값을 변화시키지 않으면서도 대응하는 제한식의 상수마디값 b_i 의 크기를 줄일수 있다. $y_i^*>0$ 인 경우에는 시초문제의 대응하는 제한식이 $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^*=b_i$ 로 되므로 상수마디값 b_i 의 크기를 변화시키면 시초문제의 최량계획과 목적함수의 최량값이 변동되게 된다. 이때 y_i^* 의 크기는 상수마디값 b_i 의 크기를 한단위 변화시킬 때에 시초문제의 목적함수의 최량값 $F(X^*)$ 이 커지는 정도를 보여준다.

이와 같이 쌍대문제의 최량계획은 시초문제의 제한식의 상수마디의 변화에 대한 최 량계획의 안정성을 특징짓는다. 일반적으로 최량화모형의 제한식은 경제활동을 위한 자원 의 보장조건을 의미하므로 쌍대문제의 최량계획은 자원의 보장규모의 변화가 목적함수의 최량값변동에 미치는 영향을 반영한다. 이것은 경제타산에서 중요한 역할을 한다.

실례로 《기》, 《L》, 《L》라는 품종의 압연강재를 생산하는 어떤 제강소의 생산 능력을 타산하는 문제를 보기로 하자. 압연강제는 가열로, 압연기, 교정기, 절단기를 순차 적으로 거쳐 완성된다. 설비들의 계획총작업시간과 공정에 따르는 제품별기준가공시간은 표에 주어졌다.

설비	제 품 명			계획총작업시간
	7	L	Ц	(기대-h)
가열로	0.3	0.15	0.2	850
압연기	0.2	0.3	0.25	920
교정기	0.4	0	0.18	900
절단기	0.2	0.25	0.4	1 100
환산곁수	0.85	0.8	1	

설비의 계획총작업시간과 제품기준가공시간

제강소의 생산능력을 타산하기 위한 선형계획법의 시초문제와 쌍대문제는 각각 다음 과 같다.

$$\begin{cases} 0.3x_1 + 0.15x_2 + 0.2x_3 \le 850 \\ 0.2x_1 + 0.3x_2 + 0.25x_3 \le 920 \\ 0.4x_1 + 0.18x_3 \le 900 \\ 0.2x_1 + 0.25x_2 + 0.4x_3 \le 1\ 100 \\ x_j \ge 0, \quad (j = \overline{1, 3}) \end{cases}$$

$$F(X) = 0.85x_1 + 0.8x_2 + x_3 \Rightarrow \max$$

여기서 x_i $(i=\overline{1,3})$ 는 제품별생산량이다.

$$\begin{cases} 0.3y_1 + 0.2y_2 + 0.4y_3 + 0.2y_4 \ge 0.85 \\ 0.15y_1 + 0.3y_2 + 0.25y_4 \ge 0.8 \\ 0.2y_1 + 0.25y_2 + 0.18y_3 + 0.4y_4 \ge 1 \end{cases}$$

$$y_i \ge 0, \quad (i = \overline{1,4})$$

$$G(Y) = 850y_1 + 920y_2 + 900y_3 + 1100y_4 \Rightarrow \min$$

시초문제와 쌍대문제의 최량계획들과 목적함수값(압연강재생산량)들은 다음과 같다.

$$x_1^* = 1 388.37, \quad x_2^* = 893.02,$$

 $x_3^* = 1 497.67, \quad F(X^*) = 3 392.21$
 $y_1^* = 1.38, \quad y_2^* = 0.98, \quad y_3^* = 0,$
 $y_4^* = 1.2, \quad G(Y^*) = 3 392.21$

풀이결과에서 알수 있는것처럼 시초문제의 최량계획에서 가열로, 압연기, 절단기들은 계획총작업시간을 다 리용하여야 하는데 교정기는 계획총작업시간 900기대-h중 825기대-h동안만 작업하여도 타산된 생산능력을 충분히 보장할수 있다. 즉 교정기는 75기대-h만한 여유를 가진다. 이에 대응하는 쌍대변수의 값은 $y_3^*=0$ 이다.

계획총작업시간을 모두 리용하는 가열로, 압연기, 절단기들에 대응하는 쌍대변수들의 값들은 $y_1^*=1.38$, $y_2^*=0.98$, $y_4^*=1.2$ 이다. 실례로 가열로의 작업시간을 한단위 늘여그 계획총작업시간을 851기대-h로 보장한다면 압연강재생산능력을 1.38만큼 더 늘여 3.393.59로 보장할수 있다는것을 의미한다.

이처럼 쌍대문제의 최량계획 Y^* 에서 쌍대변수의 값이 령 $(y_i^*=0)$ 인것에 대응하는 시초문제의 제한식의 자원보장규모 (b_i) 는 타산된 최량계획에서 여유를 가진다. 그러나 $y_i^* \neq 0$ 에 대응하는 시초문제의 자원보장규모 b_i 는 모두 리용되며 그 보장규모를 한단위들이면 목적함수의 값(우의 례에서 압연강재생산능력)을 y_i^* 만큼 더 늘일수 있다.

그러므로 경제조직사업에서는 $y_i^*>0$ 에 대응하는 자원들 특히 y_i^* 의 값이 큰 자원들의 보장규모를 늘이기 위한데 특별히 주목을 돌려야 한다.

우리는 인민경제의 현대화, 과학화가 힘있게 추진되고있는 현실적조건에 맞게 경제관리를 보다 새로운 과학적토대우에 올려세움으로써 지식경제강국건설을 위한 투쟁에 적극이바지하여야 할것이다.