김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제1호

적분법에 의한 량쪽 제한을 가진 혼합0－1다항식함수의 대역적최량풀이를 구하는 한가지 방법

오용범, 최은철

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《새 세기 산업혁명의 불길을 세차게 지펴올려 과학기술의 힘으로 경제강국건설의 전환적국면을 열어놓아야 하겠습니다.》

론문에서는 현실에서 제기되는 량쪽 제한을 가진 혼합0－1다항식계획법문제의 대역적최량풀이를 구하는 방법에 대한 연구를 진행하였다.

1. 문 제 설 정

다음의 최소화문제를 보기로 하자.

$$f(x)=\sum_{j\in J}\eta_j x_1^{\beta_{j1}}\cdots x_n^{\beta_{jn}}\Rightarrow \min \tag{1}$$

$$a_i\le x_i\le b_i\ (i=\overline{1,\ n_1}),\quad x_i\in\{0,\ 1\}\ (i=\overline{n_1+1,\ n})$$

여기서 J는 목적함수 $f(x)$의 단항식들의 첨수모임, n은 변수의 개수, n_1은 련속변수의 개수, η_j, a_i는 실수, b_i는 부아닌 실수, β_{ji}는 부아닌 옹근수이다.

선행연구[1]에서는 적분법을 리용하여 직립방체우에서 다항식함수의 대역적최량풀이를 구하는 방법을 제기하였다. 선행연구[2]에서는 우연탐색방법에 기초한 량쪽 제한을 가진 혼합옹근수계획법문제의 풀이법을 제기하였으며 선행연구[3]에서는 0－1제한과 량쪽제한을 가진 하나의 배낭제한에 의하여 정의된 혼합0－1배낭다면체를 연구하였다.

선행연구[4]에서는 혼합변수들을 가지는 3차다항식최량화문제에 대한 국부 및 대역적최량성필요조건들을 제기하고 일반적인 최량화문제에 대한 약국부최량화알고리듬 및 그것과 보조함수를 결합한 3차다항식의 한가지 대역적최량화방법을 제기하였다.

2. 량쪽 제한을 가진 혼합0－1다항식계획법문제의 변형과 그 풀이법

$$X=\{x=(x_1,\ \cdots,\ x_n)^{\mathrm{T}}\mid a_i\le x_i\le b_i\ (i=\overline{1,\ n_1}),\ 0\le x_i\le 1\ (i=\overline{n_1+1,\ n})\}$$

$$a_i=0,\ b_i=1\ (i=\overline{n_1+1,\ n})$$

로 놓자.

문제 (1)을 다음과 같이 변형하자.

$$F(x,\ r)=\sum_{j\in J}\eta_j x_1^{\beta_{j1}}\cdots x_n^{\beta_{jn}}-r\sum_{i=n_1+1}^{n}x_i(x_i-1)\Rightarrow \min \tag{2}$$

$$a_i\le x_i\le b_i\ \ (i=\overline{1,\ n})$$

$-\sum_{i=n_1+1}^{n} x_i(x_i-1)$ 은 구역 X 에서 부아닌 값을 가지며 구역 X 에서의 최소값점은 문제 (1)의 허용점이다. 그러므로 보상함수 $P(x)$ 를 $-\sum_{i=n_1+1}^{n} x_i(x_i-1)$ 로 놓으면 $F(x,\ \gamma)=f(x)+\frac{1}{\gamma}p(x)$ 로 된다.

x^k 는 $F(x^k,\ \gamma_k)=\max F(x,\ \gamma_k)$ 에 의하여 결정되는 벡토르이며 매개 k 에 대하여 x^k 가 존재한다.

m 은 정의옹근수이고 $F_{\max}$ 는 함수 $F(x,\ r)$ 의 허용구역

$$X=\{x=(x_1,\ \cdots,\ x_n)^{\mathrm{T}}\,|\,a_i\le x_i\le b_i\ (i=\overline{1,\ n})\}$$

에서의 어떤 상계값이며 γ 는 $\gamma<F_{\max}$ 인 어떤 보조변수라고 하자.

보조함수를 $h(x,\ r,\ \gamma)=\left(\frac{1}{(F_{\max}-\gamma)^2}(2F(x,\ r)-F_{\max}-\gamma)^2\right)^m$ 으로 놓자. 이 보조함수는 r 가 주어졌을 때 $\gamma=F(x,\ r)$ 인 x 에 대하여서는 $h(x,\ r,\ \gamma)=1$ 이고 $\gamma<F(x,\ r)$ 인 x 에 대하여서는 $h(x,\ r,\ \gamma)$ 의 함수값이 1보다 작으면서 0보다 크며 $\gamma>F(x,\ r)$ 인 x 에 대하여서는 $h(x,\ r,\ \gamma)$ 의 함수값이 1보다 크며 $\left(\frac{F_{\max}-F(x,\ r)}{F_{\max}-\gamma}\right)^m$ 보다 크다.

정리 1 임의의 정의옹근수 m 에 대하여 다음의 부등식

$$\int_X\left(\frac{1}{(F_{\max}-\gamma)^2}(2F(x,\ r)-F_{\max}-\gamma)^2\right)^m dx\ge|X| \tag{3}$$

를 만족시키면 구역 X 에는 $F(x,\ r)\le\gamma$ 를 만족시키는 점모임 $D_\gamma=\{x\,|\,F(x,\ r)<\gamma\}$ 가 존재한다.

따름 모든 $x\in X$ 에 대하여 $f(x)\ge\gamma$ 이면 임의의 정의옹근수 m 에 대하여

$$\int_X\left(\frac{1}{(F_{\max}-\gamma)^2}(2F(x,\ r)-F_{\max}-\gamma)^2\right)^m dx\le|X| \tag{4}$$

이다.

정리 2 모든 $x\in X$ 에 대하여 $F(x,\ r)\ge\gamma$ 이면 임의의 정의옹근수 $m_1,\ m_2\ (m_1<m_2)$ 에 대하여

$$\int_X\left(\frac{1}{(F_{\max}-\gamma)^2}(2F(x,\ r)-F_{\max}-\gamma)^2\right)^{m_2} dx\le\int_X\left(\frac{1}{(F_{\max}-\gamma)^2}(2F(x,\ r)-F_{\max}-\gamma)^2\right)^{m_1} dx$$

가 성립한다.

정리 3 $f(x)<\gamma$ 인 $x\in X$ 가 존재한다고 하자. 그러면 어떤 정의옹근수 k 가 있어서 $m_1+k<m_2$ 인 임의의 정의옹근수 $m_1,\ m_2$ 에 대하여

$$\int_X\left(\frac{1}{(F_{\max}-\gamma)^2}(2F(x,\ r)-F_{\max}-\gamma)^2\right)^{m_1} dx\le\int_X\left(\frac{1}{(F_{\max}-\gamma)^2}(2F(x,\ r)-F_{\max}-\gamma)^2\right)^{m_2} dx$$

가 성립한다.

함수 $F(x,\ r)$에 대하여 $F(x,\ r)<F_{\max},\ x\in X$라고 하자. 이때 적분

$$\int_X\left(\frac{1}{(F_{\max}-\gamma)^2}(2F(x,\ r)-F_{\max}-\gamma)^2\right)^m dx \tag{5}$$

를 론의한다. 이제 구역 X를 분할하자. 즉

$$X=\bigcup_{i=1}^{L}X_i,\ \left|X_i\bigcap X_j\right|=\varnothing\ (i\neq j) \tag{6}$$

그러면 $|X|=\sum_{i=1}^{L}|X_i|$이다.

정리 4 X_k를 $F(x,\ r)$의 유일한 최소점이 놓이는 구역이라고 하자. 즉

$$x^*=\arg\min_{x\in X}F(x,\ r),\ x^*\in X_k \tag{7}$$

그때 $\forall\gamma\ (\gamma<F_{\max})$에 대하여 어떤 $m>0$(정의옹근수)이 있어서

$$V_k(\gamma)=\int_{X_k}\left(\frac{1}{(F_{\max}-\gamma)^2}(2F(x,\ r)-F_{\max}-\gamma)^2\right)^m dx>V_i(\gamma)\ (i\neq k) \tag{8}$$

이다. 여기서 $|X_i|=|X_j|\ (i\neq j)$이다.

3. 계 산 방 식

알고리듬

걸음 1 $a_j^1=a_j\ (j=\overline{1,\ n}),\ b_j^1=b_j\ (j=\overline{1,\ n})$로 놓는다.

$t=1,\ s=1,\ i=1,\ H=\{1\}$, $\gamma_1=F(0,\ r)$로 놓고 $F_{\max}$를 구한다. 제곱차수 m, 오차 ε, 구역분할개수 d와 믿음구역개수 e를 준다.

걸음 2 허용구역을 d개로 분할하고 $H=H\bigcup\{2,\ \cdots,\ d+1\}\setminus\{t\}$에 속하는 모든 k에 대하여 구역 X_k에 속하는 허용점 x_k를 구하고 그 점에서 함수값을 γ_k로 놓는다. 즉

$$\gamma_k=F(x_k,\ r),\ k\in H$$

걸음 3 $\gamma_{i_1}\leq\cdots\leq\gamma_{i_e}$인 첨수모임 $\{i_1,\ \cdots,\ i_e\}\subset H$를 선택한다. 여기서 $\gamma_{i_1}=\min_{i\in H}\gamma_i$이다.

걸음 4 $|X_{i_1}|<\varepsilon$이면 정지한다. 최량풀이는 $x^{i_1}\in X_{i_1}$이고 최량값은 γ_{i_1}이다.

걸음 5 매 $t\in\{i_1,\ \cdots,\ i_e\}$에 대하여 $(b_l^t-a_l^t)=\max_{0\leq j\leq n}(b_j^t-a_j^t)$인 l을 구하고 구역을 분할한다.

$1\leq l\leq n_1$이면

$$X_{s+1}=\left\{x\in X_1\,|\,a_i^t\leq x_i\leq b_i^t,\ i\neq l,\ a_l^t\leq x_l\leq a_l^t+\frac{1}{2}(b_l^t-a_l^t)\right\}$$

$$X_{s+2}=\left\{x\in X_1\,|\,a_i^t\leq x_i\leq b_i^t,\ i\neq l,\ a_l^t+\frac{1}{2}(b_l^t-a_l^t)\leq x_l\leq b_l^t\right\}$$

$n_1+1\leq l\leq n$이면

$$X_{s+1}=\{x\in X_1 \mid a_i^t\le x_i\le b_i^t,\ i\ne l,\ x_l=a_l^t\}$$
$$X_{s+2}=\{x\in X_1 \mid a_i^t\le x_i\le b_i^t,\ i\ne l,\ x_l=b_l^t\}$$

구역 X_{s+1}, X_{s+2}에 속하는 허용점 x_{s+1}, x_{s+2}를 구하고 그 점에서 함수값을 γ_{s+1}, γ_{s+2}로 놓는다.

$$\gamma_{s+1}=F(x_{s+1},\ r),\ \gamma_{s+2}=F(x_{s+2},\ r)$$
$$H=H\cup\{s+1\}\cup\{s+2\},\ s=s+2,\ H=H\setminus\{t\}$$

걸음 6 $i=i+1$로 놓고 걸음 3에로 이행한다.

정리 5 어떤 m과 임의의 i에 대하여 $x^*\in \bigcup_{j\in\{i_1,\cdots,i_e\}} X_j$가 되게 e를 선택하였다고 하자. $\{x^{i_1}\in X_{i_1}\}$, $\{\gamma_{i_1}\}$이 우의 알고리듬에 의하여 생성된 점렬, 수렬이라고 하면

$$\lim_{i\to 2^n} x^{i_1}=x^* \tag{9}$$
$$\lim_{i\to 2^n} \gamma_{i_1}=f(x^*) \tag{10}$$

이다. 여기서 $x^*=\arg\min_{x\in X} f(x)$이다.

참 고 문 헌

[1] 리종욱; 수리계획법, **김일성**종합대학출판사, 130∼254, 주체98(2009).

[2] 오용범; 조선민주주의인민공화국 과학원통보, 2, 24, 주체107(2018).

[3] C. Mohan et al.; Computational Optimization and Applications, 14, 103, 1999.

[4] J. P. P. Richard et al.; Math. Program., Ser. B 98, 89, 2003.

[5] Z. Y. Wu et al.; J Optim Theory Appl., 153, 408, 2012.

주체107(2018)년 9월 8일 원고접수

A Method of Finding a Global Optimal Solution of Mixed 0－1 Polynomial Function with Box Constraints by Integral Method

O Yong Bom, Choe Un Chol

In this paper, we study the minimization problem of a mixed 0－1 polynomial function with box constraints using the integral method that is a new method at deterministic global optimization.

We propose a method of finding global minimum value based on integration of an auxiliary function and its algorithm.

Key word: deterministic global optimization, mixed 0－1 polynomial function