김일성종합대학학보 주체110(2021)년
수 학 제67권 제2호

비등방아이코날방정식에 대한 한가지 단순통과방법

허명송, 조송미

경애하는 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《수학, 물리학, 화학, 생물학과 같은 기초과학부문에서 과학기술발전의 원리적, 방법론적기초를 다져나가면서 세계적인 연구성과들을 내놓아야 합니다.》

우리는 비등방최소시간조종문제와 관련된 비등방아이코날방정식을 풀기 위한 한가지 수치풀이법을 제안하였다.

등방아이코날방정식에 대하여 국부단순통과법으로서 계산시간이 대단히 빠른 고속전진법[1]이 제안되였으나 비등방아이코날방정식에는 적용불가능하다.

비등방아이코날방정식에 대하여 단순통과법인 순서화상승법[2]이 제안되였으나 이것은 수렴성이 담보된 단순통과법이라는 우점과 함께 계산효과성이 낮은 제한성을 가지고 있다.[3, 4] 그리하여 특수한 경우의 비등방아이코날방정식들에 대하여 고속풀이법들인 고속쓸기법, 고속반복법[3, 4]들이 제안되였다.

론문에서는 일반적인 비등방아이코날방정식에 대하여 제안된 선행방법인 순서화상승법에 주목을 돌리고 순서화상승법의 우점인 단순통과성을 보존하면서 동시에 계산효과성이 고속쓸기법, 고속반복법들과 비교가능한 한가지 새로운 단순통과법을 제안하였다. 이를 위하여 순서화상승법에서의 반라그랑쥬도식을 리용하지 않고 최량조종을 근사시키는 새로운 방도(린접접수면에서의 그라디엔트리용방법)를 제안하고 그 리론적타당성을 해명한다. 또한 잘 알려진 비등방아이코날방정식들에 대한 수치실험을 통하여 제안한 방법의 계산효과성을 보여준다.

비등방최소시간조종문제와 관련된 비등방아이코날방정식은 다음과 같다.

$$\sup_{a\in B(0,\ 1)} \{-f(x,\ a)a\cdot\nabla u(x)\}=1 \tag{1}$$

여기서 $x\in\Omega\setminus\Gamma$, Ω는 $\mathbf{R}^d$의 유계열린모임, Γ는 $\mathbf{R}^d$의 비지 않은 목표모임이고 f는 주어진 정값립쉬츠련속스칼라함수들이다. 또한 $B(0,\ 1)$은 $\mathbf{R}^d$의 단위구로서 허용조종들의 모임이다.

론문에서는 론의상편리를 위하여 $d=2$이고 $\Gamma=\partial\Omega$인 경우만을 론의하는데 론문의 결과들은 임의의 차원에서도 적용가능하다.

X를 Ω우의 정규직4각형그물이라고 하자. 그물간격 Δx와 Δy는 같으며 $h=\Delta x$라고 하자. 그물점 $x=(x_i,\ y_j)$에 대하여 $N(x)$, $ND(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$N(x)=\{(x_{i-1},\ y_j),\ (x_{i+1},\ y_j),\ (x_i,\ y_{j-1}),\ (x_i,\ y_{j+1})\}$$

$$\begin{aligned}ND(x)=\{&(x_{i-1},\ y_j),\ (x_{i+1},\ y_j),\ (x_i,\ y_{j-1}),\ (x_i,\ y_{j+1}),\ (x_{i-1},\ y_{j-1}),\\ &(x_{i-1},\ y_{j+1}),\ (x_{i+1},\ y_{j-1}),\ (x_{i+1},\ y_{j+1})\}\end{aligned}$$

두 그물점 $x,\ y$에 대하여 $x\in N(y)$이면 $x,\ y$는 이웃한다고 말하며 $x\in ND(y)$, $x\notin N(y)$이면 대각이웃이라고 부른다.

방정식 (1)의 점성풀이 즉 비등방성최소시간조종문제의 값함수가 가지는 몇가지 성질들에 대하여 보자.

$x\in X$ 에 대하여 x 를 내점으로 가지며 $d(x,\ \Gamma)=h$, $\Gamma\subset\Omega$ 인 닫긴곡선을 Γ 라고 하자. 이때 다음의 사실들이 성립된다.

보조정리 1 조종 a 에 대하여 $V(x,\ a)=u(\hat{x})+\|x-\hat{x}\|/f(x,\ a)$ 로 정의하자. 여기서 $\hat{x}$ 은 x 를 시작점으로 하고 방향이 a 인 반직선과 닫긴곡선 Γ 와의 사귐점이다.

이때 $\|x-\hat{x}\|<\gamma h$ 이면 등식 $V(x,\ a)=u(x)+(\nabla u(x)\cdot a+1/f(x,a))O(h)+O(h^2)$ 이 성립된다.

보조정리 2 서로 이웃한 그물점 $x_1,\ x_2\in ND(x)$ 와 $x_0\in x_1x_2$ 가 존재하여 x 를 지나는 최량자리길이 선분 x_1x_2 와 점 x_0 에서 사귄다고 하면 다음의 식이 성립된다.

$$|\nabla u(x_0)-\nabla u(x)|=O(h)\tag{2}$$

보조정리 3 $x_1,\ x_2\in ND(x)$ 이면 $x'\in\{x_1,\ x_2\}$ 에 대하여 $|\nabla u(x)-\nabla u(x')|=O(h)$ 가 성립된다.

정리 $x_1,\ x_2\in ND(x)$ 라고 할 때 $x'\in\{x_1,\ x_2\}$ 에 대하여

$$\hat{a}:=\underset{a\in S_1}{\arg\min}\{\nabla u(x')a+1/f(x,\ a)\},\ \ \hat{V}(x)=u(\hat{x})+\|x-\hat{x}\|/f(x,\ \hat{a})$$

이고 $\|x-\hat{x}\|<\gamma h$ 이면 $\hat{V}(x)=u(x)+O(h^2)$ 이다. 여기서 $\hat{x}$ 은 x 에서 방향 $\hat{a}$ 로 향하는 반직선과 Γ 와의 사귐점이다.

증명 보조정리 1로부터 $\nabla u(x)\hat{a}+1/f(x,\ \hat{a})=O(h)$ 를 밝히면 된다.

$$\nabla u(x)\hat{a}+1/f(x,\ \hat{a})=\nabla u(x')\hat{a}+1/f(x,\ \hat{a})+(\nabla u(x)-\nabla u(x'))\hat{a}$$

이제 $\bar{a}:=\underset{a\in S_1}{\arg\min}\{\nabla u(x')a+1/f(x',\ a)\}$ 라고 하면 $\nabla u(x')\bar{a}+1/f(x',\ \bar{a})=0$ 이고 보조정리 1로부터 $1/f(x,\ \bar{a})-1/f(x',\ \bar{a})=O(h)$ 이므로 $\nabla u(x)\bar{a}+1/f(x,\ \bar{a})=O(h)$ 이다.

그런데 $\hat{a}:=\underset{a\in S_1}{\arg\min}\{\nabla u(x')a+1/f(x,\ a)\}$ 이므로 $\nabla u(x')\hat{a}+1/f(x,\ \hat{a})<O(h)$ 이다.

한편 $(\nabla u(x)-\nabla u(x'))\hat{a}=|\nabla u(x)-\nabla u(x')|\cos\alpha$ 는 보조정리 2로부터 $|\nabla u(x)-\nabla u(x')|=O(h)$ 이므로 $(\nabla u(x)-\nabla u(x'))\hat{a}=O(h)$ 이다.(증명끝)

그물점들을 3개의 모임 즉 Acc, Cons, Far 로 분할한다. 여기서 Acc는 값이 이미 확정된 점들의 모임, Cons는 값이 계산은 되였지만 확정되지 못한 점들이며 Far는 값이 아직 계산되지 않은 점들의 모임이다.

그물점 $\hat{\boldsymbol{x}}=(x_i,\ y_j)\in \mathrm{Acc}$ 에 대하여 $\nabla U(\hat{\boldsymbol{x}})=(DX,\ DY)$ 를 다음과 같이 얻는다.

$\boldsymbol{x}_L=(x_{i-1},\ y_j)$, $\boldsymbol{x}_R=(x_{i+1},\ y_j)$, $\boldsymbol{x}_D=(x_i,\ y_{j-1})$, $\boldsymbol{x}_U=(x_i,\ y_{j+1})$ 이라고 하자.

만일 $\boldsymbol{x}_L\in \mathrm{Acc}$, $\boldsymbol{x}_R\in \mathrm{Acc}$ 이면 $DX=(U(\boldsymbol{x}_R)-U(\boldsymbol{x}_L))/2\Delta x$ 이고 $\boldsymbol{x}_D\in \mathrm{Acc}$, $\boldsymbol{x}_U\in \mathrm{Acc}$ 이면 $DY=(U(\boldsymbol{x}_U)-U(\boldsymbol{x}_D))/2\Delta y$ 이다.

AFF를 모임 Cons에 속하는 그물점들에 이웃하고있는 모임 Acc의 점들의 모임으로, AF를 모임 AFF에 속하는 이웃한 두 그물점들을 맺는 선분토막의 모임으로 정의한다.

모임 Cons의 매 점 x 에 대하여 $NF(x)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$NF(x)=\{x_jx_k\in S_{AF}\mid \exists\tilde{x}\in x_jx_k,\ \|\tilde{x}-x\|<h\gamma\}$$

지금 그물점 $\boldsymbol{x}\in \mathrm{Cons}$ 에 대하여 그 점에서의 값함수의 값을 구하려 한다고 하자.

$\boldsymbol{x}\in \mathrm{Cons}$ 에 대하여

$$G(\boldsymbol{x}) := \bigcup_{\overline{\boldsymbol{x}} \in ND(\boldsymbol{x}) \cap \mathrm{Acc}} \nabla U(\overline{\boldsymbol{x}}),\quad A(\boldsymbol{x}) := \left\{ \hat{a} = \arg\min_{a \in S_1} \{ \tilde{g} \cdot a + 1/f(x,\ a),\ \tilde{\boldsymbol{g}} \in G(\boldsymbol{x}) \} \right\}$$

를 정의한다. 점 $\boldsymbol{x}$ 를 시작점으로 하고 방향 $\hat{a}$ 으로 향하는 반직선 $l_{\hat{a}}$ 과 사귀는 $NF(\boldsymbol{x})$ 의 선분을 $\boldsymbol{x}_{j_0}\boldsymbol{x}_{k_0}$ 이라고 하며 $l_{\hat{a}}$ 과 선분 $\boldsymbol{x}_{j_0}\boldsymbol{x}_{k_0}$ 의 사귐점을 $\overline{\boldsymbol{x}}$ 라고 하자.

이때 $U_{\hat{a}}(\boldsymbol{x}) := U_{\boldsymbol{x}_{j_0},\ \boldsymbol{x}_{k_0},\ \overline{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{x})$ 로 정의하자. 만일 사귀는 선분이 없게 되면 $U_{\hat{a}}(\boldsymbol{x}) = \infty$ 로 놓는다. 우와 같은 론의에 기초하여 점 $\boldsymbol{x}$ 에서의 값함수값을 아래와 같이 근사한다.

$$U(\boldsymbol{x}) := \min_{\hat{a} \in A(\boldsymbol{x})} U_{\hat{a}}(\boldsymbol{x}) \qquad (3)$$

우에서 제기한 새로운 도식에 기초하여 다음과 같은 알고리듬을 제기한다.

걸음 1 모든 그물점을 Far라고 하고 임의의 $\boldsymbol{x} \in \Omega_{\Delta x,\ \Delta y}$ 에 대하여 $U(\boldsymbol{x}) = \infty$ 로 놓는다.

걸음 2 Γ 에 있는 모든 그물점들을 Acc로 이동시킨다. 이때 Acc의 매 점에 대하여 그 점에서의 그라디엔트를 계산한다.

걸음 3 Acc와 이웃하고있는 그물점들을 Cons로 이동시키고 그 점들의 값을 식 (3)을 리용하여 계산한다.

걸음 4 Cons의 그물점들가운데서 U 의 값이 최소인 점 $\overline{\boldsymbol{x}}$ 를 찾는다.

걸음 5 $\overline{\boldsymbol{x}}$ 를 Acc로 이동시키고 $\overline{\boldsymbol{x}}$ 와 $ND(\overline{\boldsymbol{x}}) \cap \mathrm{Acc}$ 의 점들의 그라디엔트를 얻는다.

걸음 6 $ND(\overline{\boldsymbol{x}})$ 의 점들중 Acc에 속하지 않는 점들에 대하여 그 점들에서의 U 의 값을 재계산한다. $ND(\overline{\boldsymbol{x}})$ 의 점들중 Far의 점이 있으면 그 점들을 Cons로 이동시킨다.

걸음 7 만일 Cons가 비지 않았으면 걸음 4로 다시 이행한다.

제안한 방법의 효과성을 검증하기 위한 수치실험은 다음과 같다.

$f(x,\ y,\ a)$ 가 표 1과 같이 속도함수들로 주어지는 비등방성아이코날방정식들에 대하여 론의한다.

표 1. 속도함수

No.	속도함수
1	$f(x,\ y,\ a) = 1/\sqrt{1 + (\nabla g(x,\ y) \cdot a)^2}$
2	$f(x,\ y,\ a) = m_{\lambda,\ \mu}(a)a$
3	$f(x,\ y,\ a) = (1 + \lvert x + y \rvert) m_{\lambda,\ \mu}(a)a$

여기서 $g(x,\ y) = 0.9\sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$, $m_{\lambda,\ \mu}(a) = (1 + (\lambda a_1 + \mu a_2)^2)^{-1/2}$, $\lambda,\ \mu \in \mathbf{R}$ 이다.

론문의 방법의 효과성을 검증하기 위하여 우의 실례에 대하여 론문의 방법으로 얻은 풀이와 고속쓸기법, 고속반복법으로 얻은 풀이를 비교하였다.(표 2, 3, 4)

순서화상승법으로 800×800 그물에서 얻은 수치풀이를 실지풀이로 간주하였다.

계산구역을 $\Omega = [-0.5,\ 0.5] \times [-0.5,\ 0.5]$ 로, 초기조건은 $T(x_s,\ y_s) = 0,\ (x_s,\ y_s) = 0$ 으로 설정하였다.

표 2. 속도함수 1에 대한 수치실험결과

그물수	론문의 방법		고속쓸기법		고속반복법	
	시간	E_∞	시간	E_∞	시간	E_∞
100	1.382	0.074 309	0.746	0.022 265	1.960	0.038 172
200	3.941	0.016 033	1.355	0.011 547	5.681	0.026 700
400	13.935	0.003 349	4.063	0.010 482	21.461	0.025 036

표 3. 속도함수 2에 대한 수치실험결과

그물수	론문의 방법		고속쓸기법		고속반복법	
	시간	E_∞	시간	E_∞	시간	E_∞
100	1.541	0.026 509	0.757	0.265 950	0.962	0.386 570
200	3.470	0.017 757	1.285	0.184 168	2.272	0.326 970
400	11.981	0.012 297	3.539	0.133 441	7.455	0.294 921

표 4. 속도함수 3에 대한 수치실험결과

그물수	론문의 방법		고속쓸기법		고속반복법	
	시간	E_∞	시간	E_∞	시간	E_∞
100	1.310	0.018 783	1.323	0.259 660	1.750	0.222 715
200	3.627	0.012 211	4.990	0.160 190	5.427	0.210 141
400	12.789	0.009 819	25.518	0.112 946	15.843	0.201 296

론문의 방법은 비등방성척도가 작은 문제들에 대하여서는 반복법알고리듬들인 고속쓸기법이나 고속반복법에 비하여 효과적이지 못하다. 그러나 비등방성척도가 큰 문제들인 경우에는 효과적이라는것을 알수 있다.

참 고 문 헌

[1] J. A. Sethian et al.; Proc. Nat. Acad. Sci., 93, 4, 1591, 1996.
[2] J. A. Sethian et al.; SIAM J. Numer. Anal., 41, 1, 323, 2003.
[3] S. Cacace et al.; SIAM J. Sci. Comput., 36, 1, 570, 2014.
[4] R. Glowinski et al.; SIAM J. Sci. Comput., 38, 2, 1195, 2016.

주체109(2020)년 12월 5일 원고접수

A Single-pass Method for Anisotropic Eikonal Equation

Ho Myong Song, Jo Song Mi

We propose a way to directly obtain an approximate value at each grid point by using the gradients of the value function at its neighboring grid points. Based on this way, we develop a computationally efficient method for anisotropic eikonal equation.

Keyword: anisotropic eikonal equation