김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제4호

반주기경계조건을 가지는 한가지 형태의 다항분수계미분방정식의 풀이의 존재성

신영심, 최희철

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《과학과 기술이 매우 빨리 발전하고있는 오늘의 현실은 기초과학을 발전시킬것을 더욱 절실하게 요구하고있습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제11권 138페지)

론문에서는 반주기경계조건을 가진 한가지 형태의 다항분수계미분방정식의 풀이의 존재성을 연구하였다.

선행연구[4]에서는 최고계수가 1이하인 경우 다음의 다항분수계반주기경계값문제의 풀이의 존재성을 고찰하고 라쁠라스변환을 리용하여 동등한 적분방정식을 얻고 련속함수공간에서 풀이의 존재성을 증명하였다.

$$L(D)u(t)=f(t,\ u(t))\ \ (t\in[0,\ T],\ T>0)$$

$$L(D):=\lambda_n\, {}^cD_{0+}^{\alpha_n}+\lambda_{n-1}\, {}^cD_{0+}^{\alpha_{n-1}}+\cdots+\lambda_1\, {}^cD_{0+}^{\alpha_1}+\lambda_0\, {}^cD_{0+}^{\alpha_0}$$

$$\lambda_i\in\mathbf{R}\ \ (i=0,\ 1,\ \cdots,\ n),\ \ \lambda_n\neq 0,\ \ 0\le\alpha_0<\alpha_1<\cdots<\alpha_{n-1}<\alpha_n<1$$

론문에서는 선행연구[4]에서 론의한 방정식의 도함수항의 결수들을 변결수로 확장하는 경우 라쁠라스변환을 쓸수 없기때문에 최고차항을 풀이로 가지는 동등한 적분방정식으로 넘기는 수법으로 풀이의 존재성을 론의하였다.

$$\begin{aligned}
&L(D)u(t)=f(t,\ u(t))\ \ (t\in[0,\ T],\ T>0)\\
&L(D):=\lambda_n(t)\,{}^cD_{0+}^{\alpha_n}+\lambda_{n-1}(t)\,{}^cD_{0+}^{\alpha_{n-1}}+\cdots+\lambda_1(t)\,{}^cD_{0+}^{\alpha_1}+\lambda_0(t)\,{}^cD_{0+}^{\alpha_0}\\
&\lambda_i(t)\in C[0,\ T]\ (i=0,\ 1,\ \cdots,\ n),\ \lambda_n(t)\neq 0,\ \ 0\le\alpha_0<\alpha_1<\cdots<\alpha_{n-1}<\alpha_n<1\\
&u(0)+u(T)=0
\end{aligned}\tag{1}$$

정의 1[1] $f:[0,\ T]\to\mathbf{R},\ \alpha>0$이라고 하자. f의 α계리만-류빌적분은 다음과 같이 정의된다.

$$I_{0+}^{\alpha}f(t):=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s)ds$$

정의 2[2] f의 α계리만-류빌도함수는 다음과 같이 정의된다.

$$(D_{0+}^{\alpha}f)(t):=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{f(s)ds}{(t-s)^{\alpha}}\ \ (0<\alpha<1,\ t>0)$$

정의 3[3] $f:[0,\ T]\to\mathbf{R},\ \alpha\in(0,\ 1)$이라고 하자. f의 α계캐푸토도함수는 다음과 같이 정의된다.

$${}^cD_{0+}^{\alpha}f(t):=D_{0+}^{\alpha}(f(t)-f(0))$$

정의 4 ${}^cD_{0+}^{\alpha_n}u,\ u\in C[0,\ T]$인 u가 식 (1)을 만족시킨다면 u를 식 (1)의 풀이라고

부른다.

론의의 편리성을 위하여 다음의 표시를 도입하자.

$$\overline{\lambda}_i(t) := -\frac{\lambda_i(t)}{\lambda_n(t)},\ \beta_i := \alpha_n - \alpha_i\ \ (i = 0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$$

정리 1 $f:[0,\ T]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 는 련속이라고 하자. $u(t)$ 가 식 (1)의 풀이이면 $y(t)={}^cD_{0+}^{\alpha_n}u(t)$ 는 $C[0,\ T]$ 에서 적분방정식

$$y(t) = \overline{\lambda}_{n-1}(t)I_{0+}^{\beta_{n-1}}y(t) + \cdots + \overline{\lambda}_1(t)I_{0+}^{\beta_1}y(t) + \overline{\lambda}_0(t)I_{0+}^{\beta_0}y(t) + f\left(t,\ I_{0+}^{\alpha_n}y(t) - \frac{1}{2}I_{0+}^{\alpha_n}y(t)|_{t=T}\right) \quad (2)$$

의 풀이이다. 거꾸로 $y(t)$ 가 적분방정식 (2)의 풀이이면 식

$$u(t) = I_{0+}^{\alpha_n}y(t) - \frac{1}{2}I_{0+}^{\alpha_n}y(t)|_{t=T}$$

로 결정되는 $u(t)$ 는 식 (1)의 풀이이다.

정리 1에 의하여 식 (1)의 풀이의 존재성은 결국 적분방정식 (2)의 풀이의 존재성에 귀착된다.

정리 2 다음의 가정을 하자.

① $f:[0,\ T]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 는 련속이다.

② $\exists L>0;\ \forall t\in[0,\ T]\ (\forall x_1,\ x_2\in\mathbf{R})$ 에 대하여 $|f(t,\ x_1)-f(t,\ x_2)|\le L\cdot|x_1-x_2|$ 가 성립한다.

③ $w := \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\|\overline{\lambda}_k\|\cdot T^{\beta_k}}{\Gamma(\beta_k+1)} + L\cdot\frac{1.5T^{\alpha_n}}{\Gamma(\alpha_n+1)} < 1$

그러면 식 (1)은 유일한 풀이를 가진다.

보조정리 1 X 를 바나흐공간, M 을 X 의 비지 않은 유계닫긴불룩모임, 연산자 $P,\ Q$ 들은 다음의 조건을 만족시킨다고 하자.

① $\forall x,\ y\in M;\ Px+Qy\in M$

② P 는 콤팍트, 련속연산자이다.

③ Q 는 축소연산자이다.

그러면 $z=Pz+Qz\ (z\in M)$ 가 존재한다.

정리 3 다음의 가정들이 성립될 때 식 (1)은 적어도 하나의 풀이를 가진다.

① $f:[0,\ T]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 는 첫째 변수에 관하여 련속인 유계함수이다.

② $\exists L>0;\ \forall t\in[0,\ T]\ (\forall x_1,\ x_2\in\mathbf{R})$ 에 대하여 $|f(t,\ x_1)-f(t,\ x_2)|\le L\cdot|x_1-x_2|$ 가 성립한다.

③ $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\|\overline{\lambda}_k\|\cdot T^{\beta_k}}{\Gamma(\beta_k+1)}<1,\ L\frac{1.5T^{\alpha_n}}{\Gamma(\alpha_n+1)}<1$

보조정리 2 X 를 바나흐공간, Ω 는 $0\in\Omega$ 인 X 의 유계열린모임, 연산자 $T:\overline{\Omega}\to X$ 가 다음의 조건을 만족시키는 완전련속연산자라고 하자.

$$\forall x\in\partial\Omega,\ \|Tx\|\le\|x\|$$

그러면 $\overline{\Omega}$ 에는 T 의 부동점이 존재한다.

정리 4 다음의 가정들이 성립될 때 식 (1)은 적어도 하나의 풀이를 가진다.

① $\exists L_x,\ L_t>0;\ \forall t_1,\ t_2\in[0,\ T]\ (\forall x_1,\ x_2\in\mathbf{R})$ 에 대하여

$$|f(t_1,\ x_1)-f(t_2,\ x_2)|\le L_t\cdot|t_1-t_2|+L_x\cdot|x_1-x_2|$$

가 성립한다.

② $\exists d,\ e>0;\ |f(t,\ x)|\le d|x|+e$

③ $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\|\overline{\lambda}_k\|\cdot T^{\beta_k}}{\Gamma(\beta_k+1)}+\frac{1.5T^{\alpha_n}}{\Gamma(\alpha_n+1)}d<1$

참 고 문 헌

[1] B. Ahmad et al.; Computers and Mathematics with Applications, 62, 1150, 2011.

[2] R. P. Agarwal et al.; Computers and Mathematics with Applications, 62, 1200, 2011.

[3] M. H. Aqlan et al.; Open Math., 14, 723, 2016.

[4] S. Choudhary et al.; Fract. Calc. Appl. Anal., 17, 2, 333, 2014.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

Existence of Solutions for a Multi-Term Fractional Equation with Anti-Periodic Boundary Condition

Sin Yong Sim, Choe Hui Chol

In this paper, we consider the existence of solutions for multi-term fractional differential equations with an anti-periodic boundary condition.

Key words: multi-term fractional equation, anti-periodic boundary value problem