김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제4호

상태제한을 가지는 정－역방향분수확률조종계의 최대값원리

김현남, 신명국

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《과학자, 기술자들은 당이 마련해준 과학기술룡마의 날개를 활짝 펴고 과학적재능과 열정을 총폭발시켜 누구나 다 높은 과학기술성과들을 내놓음으로써 부강조국건설에 이바지하는 참된 애국자가 되여야 합니다.》

선행연구[4]에서는 위너형정－역방향확률조종계의 최대값원리에 대하여 고찰하였고 선행연구[3]에서는 위너－뽜쏭형정－역방향확률조종계의 최대값원리에 대하여 고찰하였다. 그리고 선행연구[5]에서는 분수확률조종계의 최대값원리에 대하여 고찰하였다. 또한 상태제한이 없는 경우 정－역방향분수확률조종계의 최대값원리에 대하여서는 선행연구[1]에서 연구되였다. 그러므로 론문에서는 상태제한을 가지는 정－역방향분수확률조종계의 최대값원리를 증명한다.

조종계의 상태방정식이 정－역방향분수확률미분방정식

$$\begin{cases} dx_t = f(x(t),\ y(t),\ v(t),\ t)dt + \sigma(t)dB_t^H \\ dy_t = g(x(t),\ y(t),\ v(t),\ t)dt + z(t)dB_t^H \end{cases} \tag{1}$$
$$x(0) = x_0,\ y(T) = h(x(T))$$

로 주어지고 상태제한조건들은 다음과 같이 주어진다고 하자.

$$\begin{aligned} EG_1(x(T)) = 0 \\ EG_0(y(0)) = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

여기서 $f,\ g,\ h,\ \sigma,\ G_0,\ G_1$ 은 다음과 같은 넘기기들이다.

$$f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k \times [0,\ T] \times \Omega \to \mathbf{R}^n,\ g : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^k \times [0,\ T] \times \Omega \to \mathbf{R}^m$$
$$\sigma : [0,\ T] \times \Omega \to L(\mathbf{R}^d,\ \mathbf{R}^n),\ h : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$$
$$G_0 : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^{m_1}\ (m_1 < m),\ G_1 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n_1}\ (n_1 < n)$$

그리고 B_t^H 는 허스트지수 H 가 $1/2 < H < 1$ 인 분수브라운운동이다.

이제 U 는 $\mathbf{R}^k$ 의 비지 않은 닫긴부분모임이라고 하고 허용조종모임을 다음과 같이 놓자.

$$U_{ad} := \{v(\cdot) \in L_F^2([0,\ T],\ \mathbf{R}^k) \mid v(t) \in U\}$$

그리고 다음과 같은 목적함수를 생각하자.

$$J(v(\cdot)) := E\gamma(y(0)) \tag{3}$$

또한 다음과 같은 기호약속을 하자.

$$(F,\ G) := E\int_D \langle F(t),\ G(t) \rangle dt$$

$$(F,\ G)_{L_\phi^{1,\ 2}}:=E\left[\sum_i\int_D\int_D F_i(s)\cdot G_i(t)\phi_{H_i}(s,\ t)dsdt+\sum_{i,\ j}\left(\int_D D_{j,\ s}^\phi F_i(s)ds\right)\left(\int_D D_{i,\ t}^\phi G_j(t)dt\right)\right]$$

여기서 $F(t),\ G(t)$는 $D\times\Omega$에서 정의된 다차원우연과정이고 $D_{i,\ t}^\phi Y$는 말랴빈 $\phi-$도함수이다. 그리고 다음과 같은 노름을 가진 함수 F들전부의 모임을 각각 $L^2,\ L_\phi^{1,\ 2}$로 표시하자.

$$\|F\|^2:=(F,\ F)<+\infty,\ \|F\|_{L_\phi^{1,\ 2}}^2:=(F,\ F)_{L_\phi^{1,\ 2}}<+\infty$$

또한

$$V:=(x,\ y,\ z),\ A(t,\ V):=\begin{pmatrix}-g(t,\ V)\\ f(t,\ V)\\ \sigma(t,\ V)\end{pmatrix}$$

$$(A,\ V):=(-g,\ x)+(f,\ y)+(\sigma,\ z)_{L_\phi^{1,\ 2}}$$

$$(V,\ V):=\|V\|^2=(x,\ x)+(y,\ y)+(z,\ z)_{L_\phi^{1,\ 2}}$$

로 놓자. 계속해서 다음과 같은 가정들을 주자.

가정 1 $A(t,\ V)$는 V에 관하여 약단조성조건을 만족시킨다. 즉 적당한 $\mu(>0)$가 존재하여 임의의 $V(\in L^2\times L^2\times L_\phi^{1,\ 2})$에 대하여

$$(A-A',\ V-V')\le-\mu\|V-V'\|^2$$

이 성립한다.

가정 2 $f,\ g,\ \sigma,\ h,\ \gamma$는 자체의 변수에 관하여 련속미분가능하며 다음의 조건들을 만족시킨다.

1) $f_x,\ \sigma_x,\ g_x,\ g_y$들은 유계이다.

2) $|\gamma_y|\le C(1+|y|),\ h=Qx+R$

여기서 $Q,\ R$는 각각 적당한 $n\times n$형상수행렬과 n차원상수벡토르이다.

가정 3 $G_0,\ G_1$은 유계이고 련속미분가능하다.

가정 1－3밑에서 방정식 (1)의 풀이가 유일존재한다.[2]

이상의 조건밑에서 식 (1)－(3)으로 주어지는 정－역방향분수확률조종계에 대하여 최대값원리를 증명해보자.

임의의 두 허용조종 $u(\cdot),\ v(\cdot)(\in U_{ad})$에 대하여

$$d(u(\cdot),\ v(\cdot)):=E(mes\{t\in[0,\ T]|\ u(t)\ne v(t)\})$$

로 정의하자. 여기서 $mes(D)$는 모임 D의 르베그측도이다. 그러면 공간 $(U_{ad},\ d(\cdot,\ \cdot))$은 완비공간으로 된다.[6]

또한 $u(\cdot)$은 정－역방향분수확률조종문제 (1)－(3)의 최량조종이라고 하고 $x(\cdot),\ y(\cdot),\ z(\cdot)$은 정－역방향분수확률미분방정식 (1), (2)의 풀이라고 하자. 그리고 임의의 $v(\cdot)(\in U_{ad})$에 대하여

$$J_\rho(v(\cdot)):=\{E|G_1(x(T;\ v))|^2+E|G_0(y(0;\ v))|^2+[E\gamma(y(0;\ v))-E\gamma(y(0))+\rho]^2\}^{1/2}$$

으로 정의하자. 그러면 적당한 $v_\rho(\cdot)(\in U_{ad})$이 존재하여

$$J_\rho(v_\rho(\cdot)) \le J_\rho(u(\cdot)) + \rho$$

$$d(v_\rho(\cdot),\ u(\cdot)) \le \sqrt{\rho}$$

$$J_\rho(\omega(\cdot)) \ge J_\rho(v_\rho(\cdot)) - \sqrt{\rho}\, d(\omega(\cdot),\ v_\rho(\cdot)) \quad (\forall \omega(\cdot) \in U_{ad}) \tag{4}$$

이 성립한다.[6] 또한 조종 $v_\rho(\cdot)$의 변분 $v_\rho^\varepsilon(\cdot)$을

$$v_\rho^\varepsilon(t) := \begin{cases} v, & \tau \le t \le \tau + \varepsilon \\ v_\rho(t), & \text{기타} \end{cases}$$

로 정의하면 식 (4)에 의하여 다음의 부등식이 성립한다.

$$J_\rho(v_\rho^\varepsilon(\cdot)) - J_\rho(v_\rho(\cdot)) + \sqrt{\rho}\, d(v_\rho^\varepsilon(\cdot),\ v_\rho(\cdot)) \ge 0 \tag{5}$$

또한 허용조종 $v_\rho(\cdot)$, $v_\rho^\varepsilon(\cdot)$에 대응하는 방정식 (1)의 풀이를 각각 $(x_\rho(\cdot),\ y_\rho(\cdot),\ z_\rho(\cdot))$, $(x_\rho^\varepsilon(\cdot),\ y_\rho^\varepsilon(\cdot),\ z_\rho^\varepsilon(\cdot))$으로 표시하면 변분방정식은 다음과 같다.

$$\begin{cases} dx_{\rho 1} = [f_x x_{\rho 1} + f_y y_{\rho 1} + f(v_\rho^\varepsilon) - f(v_\rho)]dt \\ dy_{\rho 1} = [g_x x_{\rho 1} + g_y y_{\rho 1} + g(v_\rho^\varepsilon) - g(v_\rho)]dt + z_{\rho 1} dB_t^H \end{cases} \tag{6}$$

$$x_{\rho 1}(0) = 0,\ y_{\rho 1}(T) = h_x(x_\rho(T)) x_{\rho 1}(T)$$

여기서

$$f_x := f_x(x_\rho(t),\ y_\rho(t),\ v_\rho(t),\ t),\ g_x := g_x(x_\rho(t),\ y_\rho(t),\ v_\rho(t),\ t)$$

$$f_y := f_y(x_\rho(t),\ y_\rho(t),\ v_\rho(t),\ t),\ g_y := g_y(x_\rho(t),\ y_\rho(t),\ v_\rho(t),\ t)$$

$$f(u^\varepsilon) := f(x_\rho(t),\ y_\rho(t),\ v_\rho^\varepsilon(t),\ t),\ f(u) := f(x_\rho(t),\ y_\rho(t),\ v_\rho(t),\ t)$$

$$g(u^\varepsilon) := g(x_\rho(t),\ y_\rho(t),\ v_\rho^\varepsilon(t),\ t),\ g(u) := g(x_\rho(t),\ y_\rho(t),\ v_\rho(t),\ t)$$

보조정리 1 정－역방향분수확률미분방정식 (1)에 대하여 가정 1, 2가 만족될 때 다음의 부등식들이 성립한다.

$$\sup_{0 \le t \le \tau} E|x_{\rho 1}(t)|^2 \le C\varepsilon^2,\quad \sup_{0 \le t \le \tau} E|x_{\rho 1}(t)|^4 \le C\varepsilon^4$$

$$\sup_{0 \le t \le \tau} E|y_{\rho 1}(t)|^2 \le C\varepsilon^2,\quad \sup_{0 \le t \le \tau} E|y_{\rho 1}(t)|^4 \le C\varepsilon^4$$

$$\| z_{\rho 1} \|^2_{L_\phi^{1,2}} \le C\varepsilon^2$$

보조정리 2 정－역방향분수확률미분방정식 (1)에 대하여 가정 1, 2가 만족될 때 다음의 부등식들이 성립한다.

$$\sup_{0 \le t \le T} E|x_\rho^\varepsilon(t) - x_\rho(t) - x_{\rho 1}(t)|^2 \le C\varepsilon^2$$

$$\sup_{0 \le t \le T} E|y_\rho^\varepsilon(t) - y_\rho(t) - y_{\rho 1}(t)|^2 \le C\varepsilon^2$$

$$\sup_{0 \le t \le T} \| z_\rho^\varepsilon(s) - z_\rho(s) - z_{\rho 1}(s) \|^2_{L_\phi^{1,2}} \le C\varepsilon^2$$

해밀턴함수와 공액방정식을 각각 다음과 같이 놓자.

$$H(x,\ y,\ z,\ v,\ p,\ q,\ k,\ t):=(p,\ f(x,\ v,\ t))+(q,\ g(x,\ y,\ z,\ v,\ t))+(k,\ \sigma(t))_{L_\phi^{1,\ 2}} \tag{7}$$

$$\begin{cases} -dp=[f_x^{\ *}(x,\ y,\ u)p+g_x^{\ *}(x,\ y,\ u)q]dt-kdB_t^H \\ \qquad p_\rho(T)=G_{1x}(x(T))h_1-h_x^{\ *}(x(T))q(T) \\ -dq=\left[f_y^{\ *}(x,\ y,\ u)p+g_y^{\ *}(x,\ y,\ u)q\right]dt \\ \qquad q_\rho(0)=-(G_{0x}(y(0))h_2+\gamma_y(y(0))h_0) \end{cases} \tag{8}$$

그리고

$$h_{\rho 1}^\varepsilon :=\frac{2EG_1(x_\rho(T))}{J_\rho(v_\rho^\varepsilon(\cdot))+J_\rho(v_\rho(\cdot))}$$

$$h_{\rho 2}^\varepsilon :=\frac{EG_0(y_\rho(0))}{J_\rho(v_\rho^\varepsilon(\cdot))+J_\rho(v_\rho(\cdot))}$$

$$h_{\rho 0}^\varepsilon :=\frac{E(\gamma(y_\rho(0))-\gamma(y(0))+\rho)}{J_\rho(v_\rho^\varepsilon(\cdot))+J_\rho(v_\rho(\cdot))}$$

로 놓자.

보조정리 3 분수정—역방향확률미분방정식 (1)에 대하여 가정 1—3이 만족된다고 하자. 이때 다음의 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned}[H(x_\rho(t),\ y_\rho(t),\ z_\rho(t),\ v_\rho^\varepsilon(t),\ p_\rho^\varepsilon(t),\ q_\rho^\varepsilon(t),\ k_\rho^\varepsilon(t))-\\ -H(x_\rho(t),\ y_\rho(t),\ z_\rho(t),\ v_\rho(t),\ p_\rho^\varepsilon(t),\ q_\rho^\varepsilon(t),\ k_\rho^\varepsilon(t))]+\sqrt{\rho}\ge 0\end{aligned} \tag{9}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\|h_{\rho 0}^\varepsilon\|^2+\|h_{\rho 1}^\varepsilon\|^2+\|h_{\rho 2}^\varepsilon\|^2)=1 \tag{10}$$

정리 (최대값원리) 분수정—역방향확률미분방정식 (1)에 대하여 가정 1—3이 성립하고 $(u(\cdot),\ x(\cdot),\ y(\cdot),\ z(\cdot))$이 정—역방향분수확률조종계 (1)—(3)의 최량조종과 그것에 대응하는 상태과정이고 $(p(\cdot),\ q(\cdot),\ k(\cdot))$이 공액방정식 (8)의 풀이라고 하자. 이때 모든 $v(\cdot)(\in U_{ad})$에 대하여 다음의 부등식이 성립한다.

$$H(x(t),\ y(t),\ z(t),\ v(t),\ p(t),\ q(t),\ k(t))-H(x(t),\ y(t),\ z(t),\ u(t),\ p(t),\ q(t),\ k(t))\ge 0 \tag{11}$$

증명 $(p_\rho(\cdot),\ q_\rho(\cdot),\ k_\rho(\cdot))$이 공액방정식 (8)의 풀이일 때

$$(p_\rho^\varepsilon,\ q_\rho^\varepsilon,\ k_\rho^\varepsilon)\to(p_\rho,\ q_\rho,\ k_\rho)\ (\varepsilon\to 0)$$

가 성립한다. 그리고 식 (9)로부터 다음의 부등식이 성립한다.

$$\begin{aligned}[H(x_\rho(t),\ y_\rho(t),\ z_\rho(t),\ v(t),\ p_\rho(t),\ q_\rho(t),\ k_\rho(t))-\\ -H(x_\rho(t),\ y_\rho(t),\ z_\rho(t),\ v_\rho(t),\ p_\rho(t),\ q_\rho(t),\ k_\rho(t))]+\sqrt{\rho}\ge 0\end{aligned} \tag{12}$$

또한 $\rho\to 0$일 때

$$(x_\rho(\cdot),\ y_\rho(\cdot),\ z_\rho(\cdot))\to(x(\cdot),\ y(\cdot),\ z(\cdot))$$

$$(p_\rho(\cdot),\ q_\rho(\cdot),\ k_\rho(\cdot)) \to (p(\cdot),\ q(\cdot),\ k(\cdot))$$

$$v_\rho(\cdot) \to k(\cdot)$$

이 성립한다. 그러므로 식 (12)에서 $\rho \to 0$일 때의 극한을 취하면 식 (11)이 나온다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보 수학, 64, 4, 89, 주체107(2018).

[2] 신명국, 문철; 수학, 223, 4, 25, 주체103(2014).

[3] A. R. Hussein et al.; arXiv: 1301. 1948v4[math. OC] 2013.

[4] G. C. Wang et al.; Abstract and Applied Analysis, 2011, 20, 2011.

[5] S. Douissi et al.; Applied Mathematics and Computation, 355, 282, 2019.

[6] Q. M. Wei; Abstract and Applied Analysis, 2014, 12, 2014.

주체109(2020)년 6월 5일 원고접수

The Maximum Principle for Forward-backward Fractional Stochastic Control System with State Constraint

Kim Hyon Nam, Sin Myong Guk

In this paper, we propose the maximum principle for forward-backward fractional stochastic control system with state constraint.

Keywords: state constraint, maximum principle