김일성종합대학학보 주체110(2021)년
수 학 제67권 제3호

리만다양체에서 반대칭비계량접속호모토피에 대하여

허달윤, 곽금혁, 최현일

경애하는 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《수학, 물리학, 화학, 생물학과 같은 기초과학부문에서 과학기술발전의 원리적, 방법론적기초를 다져나가면서 세계적인 연구성과들을 내놓아야 합니다.》

선행연구[1]에서는 리만다양체에서 $\pi-$반대칭비계량접속을 새롭게 제시하고 그 성질들이 연구되였으며 선행연구[4]에서는 $\pi-$반대칭비계량접속의 물리적모형이 제시되였다. 그리고 선행연구[2]에서는 특수한 형태의 반대칭비계량접속이 제시되고 그 성질이 고찰되였다. 또한 선행연구[3]에서는 선행연구[1, 2]에서 연구된 접속들을 포함하는 리만다양체우의 반대칭비계량접속족이 새롭게 제시되고 그 성질들이 연구되였다. 그리고 선행연구[5]에서는 리만다양체에서 측지선에 기초하여 접속호모토피의 형태를 새롭게 제시하였다. 접속호모토피는 물리적특성을 가지는 접속들의 모임으로서 동일한 물리적성질을 가지는 게이지마당의 성질을 밝히는 중요한 수단이다. 그러므로 론문에서는 선행연구[1, 3]에서 연구된 반대칭비계량접속들로 구성된 반대칭비계량접속호모토피를 새롭게 정의하고 이 접속호모토피에 관한 곡률텐소르의 성질, 공액대칭이기 위한 조건, 곡률이 일정하기 위한 조건을 연구하였다.

정의 리만다양체 $(M,\ g)$에서 식

$$\overset{\alpha}{\nabla}_k g_{ij} = -2(\alpha-1)\pi_k g_{ij} - \alpha\pi_i g_{jk} - \alpha\pi_j g_{ik},\ T_{ij}^k = \pi_j\delta_i^k - \pi_i\delta_j^k \quad (1)$$

를 만족시키는 접속족 $\overset{\alpha}{\nabla}$를 반대칭비계량접속호모토피라고 부른다.

반대칭비계량접속호모토피의 매 접속의 접속결수는 다음과 같이 표시된다.

$$\overset{\alpha}{\Gamma}{}_{ij}^k = \left\{ {k \atop ij} \right\} + (\alpha-1)\pi_i\delta_j^k + \alpha\pi_j\delta_i^k \quad (2)$$

그러므로 $\alpha=0$이면 식 (1)을 다음과 같이 쓸수 있다.[1]

$$\overset{\alpha}{\nabla}_k g_{ij} = 2\pi_k g_{ij},\ T_{ij}^k = \pi_j\delta_i^k - \pi_i\delta_j^k$$

그리고 식 (2)를 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\overset{\alpha}{\Gamma}{}_{ij}^k = \left\{ {k \atop ij} \right\} - \pi_i\delta_j^k$$

또한 $\alpha=1$이면 식 (1)을 다음과 같이 쓸수 있다.[2]

$$\overset{\alpha}{\nabla}_k g_{ij} = -\pi_i g_{jk} - \pi_j g_{ik},\ T_{ij}^k = \pi_j\delta_i^k - \pi_i\delta_j^k$$

그리고 식 (2)를 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\overset{\alpha}{\Gamma}{}_{ij}^k = \left\{ {k \atop ij} \right\} + \pi_j\delta_i^k$$

한편 식 (2)를 리용하면 반대칭비계량접속호모토피 $\overset{\alpha}{\nabla}$의 매 접속에 관한 곡률텐소르는 다음과 같다는것을 알수 있다.

$$R_{ijk}^{l} = K_{ijk}^{l} + \delta_j^l a_{ik} - \delta_i^l a_{jk} + (\alpha - 1)\delta_k^l \pi_{ij} \tag{3}$$

여기서 K_{ijk}^{l} 은 레비－치비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$ 에 관한 곡률텐소르이고

$$a_{ik} := \alpha(\overset{\circ}{\nabla}_i \pi_k - \alpha\pi_i\pi_k),\ \ \pi_{ij} := \overset{\circ}{\nabla}_i \pi_j - \overset{\circ}{\nabla}_j \pi_i \tag{4}$$

이다.

정리 1 리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 반대칭비계량접속호모토피 $\overset{\alpha}{\nabla}$ 에 대하여 1－형식 π 가 닫긴형식이면 곡률텐소르 R_{ijk}^{l} 은 다음과 같은 성질을 가진다.

① $R_{jk} = R_{kj}$

② $P_{ij} = 0$

③ $R_{ijk}^{l} + R_{jki}^{l} + R_{kij}^{l} = 0$

증명 1－형식 π 가 닫긴형식이면 식 (4)로부터 $\pi_{ij} = 0$ 이므로 식 (3)을 다음과 같이 쓸수 있다.

$$R_{ijk}^{l} = K_{ijk}^{l}\delta_j^l a_{ik} - \delta_i^l a_{jk} \tag{5}$$

이 식을 $i,\ l$ 에 관하여 축약하면 다음과 같다.

$$R_{jk} = K_{jk} + a_{jk} - na_{jk} = K_{jk} - (n-1)a_{jk}$$

계속해서 이 식을 $j,\ k$ 에 관하여 빗대칭화하면 $K_{jk} - K_{kj} = 0$ 과 $a_{jk} - a_{kj} = \alpha\pi_{jk} = 0$ 이라는 사실로부터 $R_{jk} - R_{kj} = 0$ 이라는것이 나온다. 따라서 ①이 증명된다.

한편 식 (5)를 $k,\ l$ 에 관하여 축약하면 $P_{ij} = \overset{\circ}{P}_{ij} + a_{ij} - a_{ji}$ 이다. 여기서 $\overset{\circ}{P}_{ij} = K_{ijk}^{k} = 0$ 이다. 따라서 ②도 증명된다.

또한 식 (5)를 원순환하여 합하면 다음의 식이 얻어진다.

$$R_{ijk}^{l} + R_{jki}^{l} + R_{kij}^{l} = K_{ijk}^{l} + K_{jki}^{l} + K_{kij}^{l} - \delta_i^l(a_{jk} - a_{kj}) - \delta_j^l(a_{ki} - a_{ik}) - \delta_k^l(a_{ij} - a_{ji})$$

그리고 식 (3)을 리용하면 반대칭비계량접속호모토피 $\overset{\alpha}{\nabla}$ 의 매 접속에 관한 곡률텐소르에 대하여 다음과 같은 제1종의 비앙끼항등식이 성립한다는것을 알수 있다.

$$R_{ijk}^{l} + R_{jki}^{l} + R_{kij}^{l} = -(\delta_i^l \pi_{jk} + \delta_j^l \pi_{ki} + \delta_k^l \pi_{ij})$$

그런데 $K_{ijk}^{l} + K_{jki}^{l} + K_{kij}^{l} = 0$ 이고 $a_{jk} - a_{kj} = 0$ 이다. 그러므로 ③도 증명된다.(증명끝)

정리 2 리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 반대칭비계량접속호모토피 $\overset{\alpha}{\nabla}$ 의 매 접속에 관한 곡률텐소르가 령이면 리만다양체 $(M,\ g,\ \overset{\circ}{\nabla})$ 는 사영평탄이다.

증명 식 (3)을 $i,\ l$ 에 관하여 축약하고 $\pi_{ij} = -\pi_{ji}$ 라는것을 리용하면 다음의 식이 얻어진다.

$$R_{jk} = K_{jk} - (n-1)a_{jk} - (\alpha - 1)\pi_{jk} \tag{6}$$

그러므로 식 (6)을 $j,\ k$ 에 관하여 빗대칭화하고 $a_{jk} - a_{kj} = \alpha\pi_{jk}$ 라는것을 리용하면

$$R_{jk} - R_{kj} = -[(n+1)\alpha - 2]\pi_{jk}$$

가 성립한다는것을 알수 있다. 따라서

$$\pi_{jk} = \frac{1}{(n+1)\alpha - 2}(R_{kj} - R_{jk}) \tag{7}$$

라는것이 얻어진다. 이 식을 식 (6)에 넣고 a_{jk}를 구하면 다음과 같다.

$$a_{jk} = \frac{1}{n-1}\left[K_{jk} - R_{jk} + \frac{\alpha-1}{(n+1)\alpha-2}(R_{jk} - R_{kj})\right] \tag{8}$$

그러므로 식 (7)과 (8)을 식 (3)에 대입하고 정돈하면 다음의 식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} & R_{ijk}^l - \frac{1}{n-1}(\delta_i^l R_{jk} - \delta_j^l R_{ik}) - \\ & -\frac{\alpha-1}{(n-1)[(n+1)\alpha-2]}[\delta_i^l(R_{jk} - R_{kj}) - \delta_j^l(R_{ik} - R_{ki}) + (n-1)\delta_k^l(R_{ij} - R_{ji})] = \\ & = K_{ijk}^l - \frac{1}{n-1}(\delta_i^l K_{jk} - \delta_j^l K_{ik}) = \overset{\circ}{W}{}_{ijk}^l \end{aligned} \tag{9}$$

여기서 $\overset{\circ}{W}{}_{ijk}^l$은 레비—치비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$에 관한 와일사영곡률텐소르이다. 따라서 $R_{ijk}^l = 0$이면 식 (9)로부터 $\overset{\circ}{W}{}_{ijk}^l = 0$이다. 그러므로 리만다양체 $(M,\ g,\ \overset{\circ}{\nabla})$는 사영평탄이다.(증명끝)

주의 1 선행연구[1, 2]에서 연구된 반대칭비계량접속에 대해서도 이 정리가 증명되였다. 그러므로 이 정리 2는 선행연구[1, 2]에서 증명된 정리의 일반화이다.

이제는 반대칭비계량접속호모토피의 매 접속이 공액대칭이기 위한 조건을 구해보자.

리만다양체 $(M,\ g)$에서의 비계량접속 ∇에 대하여 그것의 쌍대접속을 $\overset{*}{\nabla}$이라고 하자. 이때 ∇와 $\overset{*}{\nabla}$에 관한 곡률텐소르가 일치하면 ∇를 공액대칭접속, ∇와 $\overset{*}{\nabla}$에 관한 릿치곡률텐소르가 일치하면 ∇를 공액릿치대칭접속이라고 부른다.

정리 3 리만다양체 $(M,\ g)$에서 반대칭비계량접속호모토피의 매 접속이 공액대칭이기 위해서는 그것이 공액릿치대칭일것이 필요하고 충분하다.

증명 반대칭비계량접속호모토피를 $\overset{\alpha}{\nabla}$로, $\overset{\alpha}{\nabla}$의 매 접속의 쌍대접속들로 이루어진 접속호모토피를 $\overset{\alpha*}{\nabla}$로 표시하자. 그러면 $\overset{\alpha*}{\nabla}$의 매 접속의 접속결수는 식 (1), (2)로부터 다음과 같다는것을 알수 있다.

$$\overset{\alpha*}{\Gamma}{}_{ij}^k = \left\{ {k \atop ij} \right\} - (\alpha-1)\pi_i\delta_j^k - \alpha g_{ij}\pi^k$$

그러므로 $\overset{\alpha*}{\nabla}$에 관한 곡률텐소르는 다음과 같다.

$$\overset{*}{R}{}_{ijk}^l = K_{ijk}^l + g_{ik}a_j^l - g_{jk}a_i^l - (\alpha-1)\delta_k^l\pi_{ij} \tag{10}$$

따라서 식 (3)과 (10)으로부터 다음의 식이 얻어진다.

$$\overset{*}{R}{}_{ijk}^l = R_{ijk}^l + \delta_i^l a_{jk} - \delta_j^l a_{ik} + g_{ik}a_j^l - g_{jk}a_i^l - 2(\alpha-1)\delta_k^l\pi_{ij} \tag{11}$$

그러므로 이 식을 $i,\ l$에 관하여 축약하고 $\pi_{ij} = -\pi_{ji}$라는것을 고려하면 다음의 식이 성립한다.

$$\overset{*}{R}_{jk} = R_{jk} + na_{jk} - g_{jk}a_i^i + 2(\alpha-1)\pi_{jk} \tag{12}$$

이 식을 $j,\ k$ 에 관하여 빗대칭화하면 다음과 같다.

$$\overset{*}{R}_{jk} - \overset{*}{R}_{kj} = R_{jk} - R_{kj} + n(a_{jk} - a_{kj}) + 4(\alpha-1)\pi_{jk}$$

따라서 $a_{jk} - a_{kj} = \alpha\pi_{jk}$ 라는것을 고려하면

$$\pi_{jk} = \frac{1}{(n+4)\alpha-4}[(\overset{*}{R}_{jk} - \overset{*}{R}_{kj}) - (R_{jk} - R_{kj})] \tag{13}$$

가 성립한다. 이 식을 식 (12)에 넣고 a_{jk} 를 구하면 다음과 같다.

$$a_{jk} = \frac{1}{n}\left\{\overset{*}{R}_{jk} - R_{jk} + g_{jk}a_i{}^i - \frac{2(\alpha-1)}{(n+4)\alpha-4}[(\overset{*}{R}_{jk} - \overset{*}{R}_{kj}) - (R_{jk} - R_{kj})]\right\} \tag{14}$$

그러므로 식 (13)과 (14)를 식 (11)에 대입하고 정돈하면 다음의 식이 얻어진다.

$$\begin{aligned}
&\overset{*}{R}{}^l_{ijk} - \frac{1}{n}(\delta_i^l \overset{*}{R}_{jk} - \delta_j^l \overset{*}{R}_{ik} + g_{ik}\overset{*}{R}{}^l_j - g_{jk}\overset{*}{R}{}^l_i) + \\
&+\frac{2(\alpha-1)}{n[(n+4)\alpha-4]}[\delta_i^l(\overset{*}{R}_{jk} - \overset{*}{R}_{kj}) - \delta_j^l(\overset{*}{R}_{ik} - \overset{*}{R}_{ki}) + g_{ik}(\overset{*}{R}{}^l_j - \overset{*}{R}{}^l_{\cdot j}) - g_{jk}(\overset{*}{R}{}_i{}^l - \overset{*}{R}{}^l_{\cdot i}) + n\delta_k^l(\overset{*}{R}_{ij} - \overset{*}{R}_{ji})] = \\
&= R^l_{ijk} - \frac{1}{n}(\delta_i^l R_{jk} - \delta_j^l R_{ik} + g_{ik}R^l_j - g_{jk}R^l_i) + \\
&+\frac{2(\alpha-1)}{n[(n+4)\alpha-4]}[\delta_i^l(R_{jk} - R_{kj}) - \delta_j^l(R_{ik} - R_{ki}) + g_{ik}(R^l_j - R^l_{\cdot j}) - g_{jk}(R^l_i - R^l_{\cdot i}) + n\delta_k^l(R_{ij} - R_{ji})]
\end{aligned} \tag{15}$$

따라서 $\overset{*}{R}{}^l_{ijk} = R^l_{ijk}$ 이면 $\overset{*}{R}_{jk} = R_{jk}$ 라는것은 분명하다.

거꾸로 $\overset{*}{R}_{jk} = R_{jk}$ 이면 식 (15)로부터 $\overset{*}{R}{}^l_{ijk} = R^l_{ijk}$ 이다.

주의 2 접속이 공액대칭이기 위한 정리 3에서의 조건은 아인슈타인방정식을 리용하여 접속호모토피를 연구할수 있게 한다.

끝으로 반대칭비계량접속호모토피의 매 접속에 관한 곡률이 일정하기 위한 조건을 구해보자.

리만다양체 $(M,\ g)$ 의 임의의 점 p 에서의 접속 ∇ 에 관한 단면곡률이 단면 E ($T_p(M)$ 의 임의의 2차원부분공간)의 선택에 무관계하면 곡률텐소르는 다음과 같이 표시된다.

$$R^l_{ijk} = k(p)(\delta_i^l g_{jk} - \delta_j^l g_{ik}) \tag{16}$$

그러므로 $k(p) = \text{const}$ 이면 리만다양체 $(M,\ g,\ \nabla)$ 는 일정곡률다양체이다.

정리 4 련결인 리만다양체 $(M,\ g)$ $(\dim M \ge 3)$ 에서 반대칭비계량접속호모토피 $\overset{\alpha}{\nabla}$ 의 매 접속에 관한 임의의 점에서의 단면곡률이 단면 E 의 선택에 무관계하고

$$\alpha = 0 \tag{17}$$

일 때에만 리만다양체 $(M,\ g,\ \overset{\alpha}{\nabla})$ 는 일정곡률다양체이다.

증명 리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 반대칭비계량접속호모토피 $\overset{\alpha}{\nabla}$ 의 매 접속에 관한 곡률텐소르에 대하여 다음과 같은 제2종의 비앙끼항등식이 성립한다.

$$\overset{\alpha}{\nabla}_h R^l_{ijk} + \overset{\alpha}{\nabla}_i R^l_{jhk} + \overset{\alpha}{\nabla}_j R^l_{hik} = T^p_{hi} R^l_{jpk} + T^p_{ij} R^l_{hpk} + T^p_{jh} R^l_{ipk}$$

이 식에 식 (16)을 대입하고 식 (1)을 리용하면 다음의 식이 얻어진다.

$$\begin{aligned}
&\overset{\alpha}{\nabla}_h k(\delta^l_i g_{jk} - \delta^l_j g_{ik}) + \overset{\alpha}{\nabla}_i k(\delta^l_j g_{hk} - \delta^l_h g_{jk}) + \overset{\alpha}{\nabla}_j k(\delta^l_h g_{ik} - \delta^l_i g_{hk}) - \\
&\quad -(\alpha-2)k[\pi_h(\delta^l_i g_{jk} - \delta^l_j g_{ik}) + \pi_i(\delta^l_j g_{hk} - \delta^l_h g_{jk}) + \pi_j(\delta^l_h g_{ik} - \delta^l_i g_{hk})] = \\
&\quad = 2k[\pi_h(\delta^l_i g_{jk} - \delta^l_j g_{ik}) + \pi_i(\delta^l_j g_{hk} - \delta^l_h g_{jk}) + \pi_j(\delta^l_h g_{ik} - \delta^l_i g_{hk})]
\end{aligned}$$

그러므로 이 식의 량변을 $i,\ l$ 에 관하여 축약하면 다음의 식이 성립한다.

$$(n-2)(\overset{\alpha}{\nabla}_h k\, g_{jk} - \overset{\alpha}{\nabla}_j k\, g_{hk}) - (n-2)(\alpha-2)k(\pi_h g_{jk} - \pi_j g_{hk}) = 2(n-1)(n-2)k(\pi_h g_{jk} - \pi_j g_{hk})$$

따라서 이 식의 량변에 다시 g^{jk} 를 곱하면 다음의 식이 성립한다.

$$(n-1)(n-2)\overset{\alpha}{\nabla}_h k - (n-1)(n-2)(\alpha-2)k\pi_h = 2(n-1)(n-2)k\pi_h$$

그런데 조건에 의하여 $\dim M \ge 3$ 이다. 그러므로 우의 식으로부터 다음의 식이 성립한다.

$$\overset{\alpha}{\nabla}_h k - \alpha k \pi_h = 0$$

결국 $\alpha = 0$ 일 때에만 $k = \mathrm{const}$ 이다.(증명끝)

정리 5 리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 반대칭비계량접속호모토피 $\overset{\alpha}{\nabla}$ 에 대하여

$$\alpha = \frac{1}{2} \tag{18}$$

이면 $\overset{\alpha}{\nabla}$ 에 관한 측지선과 레비－치비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$ 에 관한 측지선은 일치한다.

증명 식 (2)를 고려하면 반대칭비계량접속 $\overset{\alpha}{\nabla}$ 에 관한 측지선의 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \left\{ {k \atop ij} \right\} \frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} + [(\alpha-1)\pi_i \delta_j{}^k + \alpha\pi_j \delta_i{}^k]\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} = 0$$

따라서 이 식을 다음과 같이 고쳐쓸수 있다.

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \left\{ {k \atop ij} \right\} \frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} = (1-2\alpha)\pi_i \frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt}$$

그러므로 조건 (18)이 만족되면 우의 식은 다음과 같다.

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \left\{ {k \atop ij} \right\} \frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} = 0$$

그런데 이 방정식은 레비－치비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$ 에 관한 측지선의 방정식이다. 따라서 결과가 성립한다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보(자연과학) 49, 3, 3, 주체92(2003).
[2] N. S. Agashe et al.; Indian J. Pure Appl. Math., 23, 399, 1992.
[3] T. Ho et al.; Filomat 33, 12, 209, 2019.
[4] K. A. Duan; Tensor. N. S., 29, 214, 1975.
[5] V. G. Ivancevic et al.; Applied Differential Geometry, W. S., 278～279, 2007.

주체110(2021)년 3월 5일 원고접수

On a Semi-Symmetric Non-Metric Connection Homotopy in a Riemannian Manifold

Ho Tal Yun, Kwak Kum Hyok, Choe Hyon Il

In this paper we newly defined a semi-symmetric non-metric connection homotopy in a Riemannian manifold and studied its properties. And we studied properties of the curvature tensor of a semi-symmetric non-metric connection homotopy, the condition of a conjugate symmetry and the Schure’s theorem. Also we found a type of the semi-symmetric non-metric connection that becomes the same geodesic as that of the Levi-Civita connection.

Keywords: semi-symmetric non-metric connection, Levi-Civita connection, connection homotopy