김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제2호

결정보로노이도식을 리용한 한 형태의 최량궤도문제의 풀이법

정혁진, 허명송

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《새 제품개발과 질제고에 힘을 넣어 세계적수준의 다양한 경공업제품들을 더 많이 생산하여야 합니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 55페지)

보로노이도식의 한 형태인 결정보로노이도식은 로보트의 이동이나 배의 항해 등에서 장애물들을 극복하는 최량궤도를 결정하는데 매우 효과적으로 리용되고있다.

지금까지 결정보로노이도식을 구성하는 대표적인 방법들로서 고속전진법[2], 표식점추적법[4] 등이 연구되였다. 그러나 고속전진법은 배의 항해문제나 비행기조종문제에서의 바다물이나 바람과 같은 외부흐름이 존재하는 경우 적용할수 없고[5] 표식점추적법은 반복법으로서 계산량이 방대한 결함을 가지고있다.[4]

론문에서는 외부흐름이 존재하는 경우에도 적용할수 있는 효과적인 결정보로노이도식 구성법과 그것을 리용한 한 형태의 최량궤도문제풀이법을 제기한다.

$S=\{P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_n\}\subset\mathbf{R}^2$ 를 평면에 있는 지점들의 모임이라고 하고 매 지점 P_i 에서 υ_i 의 속도로 질점 M_i 가 아래와 같은 규칙으로 움직인다고 하자.

임의의 $\boldsymbol{x}=(x,\ y)\in\mathbf{R}^2$ 에 대하여 n 개의 질점들중에서 M_k 가 제일먼저 도착하였다고 하면 M_k 가 아닌 다른 모든 질점들은 $\boldsymbol{x}$ 에 도달할수 없다.

질점 M_i 가 다른 질점들보다 먼저 도착할수 있는 점들의 모임을 M_i 의 결정이라고 부르고 $R(S;P_i)$ 로 표시한다. 이때 질점 M_i 가 임의의 $P\in\mathbf{R}^2$ 에 도달하는데 걸리는 시간은 무게붙은 보로노이도식과 달리 $P,\ P_i$ 에 의해서만 결정되는것이 아니라 다른 질점들의 결정의 크기에도 관계된다.

우와 같은 조건에서 $T(P_i,\ P)$ 를 질점 M_i 가 P 에 도달하는데 걸리는 시간이라고 하면 M_i 의 결정 $R(S;P_i)$ 는 $R(S;P_i)=\{P\,|\,T(P_i,\ P)<T(P_j,\ P),\ i\neq j\}$ 와 같이 표시된다.

이때 $R(S;P_i)\ (i=1,\cdots,n)$ 를 결정보로노이구역이라고 부르며 결정보로노이구역들의 모임을 결정－성장보로노이도식 간단히 결정보로노이도식이라고 부른다.

구역 $\Omega\subset\mathbf{R}^2$ 와 지점모임 $S=\{P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_n\}\subset\Omega$ 가 주어졌다고 하자.

$V(\boldsymbol{x}):\Omega\mapsto\mathbf{R}^2$ 를 Ω 에서 주어진 외부흐름이라고 하고 S 의 매 지점 P_i 에서 출발한 질점 M_i 가 F_i 의 속도로 임의의 방향으로 움직인다고 하자.

$T_i(\boldsymbol{x})$ 를 P_i 에서 출발한 M_i 가 $\boldsymbol{x}$ 에 도달하는 최소시간이라고 할 때 $R(S;P_i)$ 가 P_i 의 보로노이구역이면 $\boldsymbol{x}\in\Omega$ 에 대하여 $\boldsymbol{x}\in R(S;P_i)\Leftrightarrow T_i(\boldsymbol{x})=\min\limits_{1\le k\le n}T_k(\boldsymbol{x})$ 가 성립된다.

지점 P_i 에서 출발한 질점 M_i 의 운동방정식은 다음과 같다.

$$d\boldsymbol{y}_i(t)/dt=F_i\alpha_i(t)-V(\boldsymbol{y}_i(t)),\ \ t>0 \tag{1}$$

$$\boldsymbol{y}_i(0)=P_i \tag{2}$$

여기서 $\boldsymbol{y}_i(t)$ 는 t 시각 M_i 의 위치이고 $S_1=\{a\in\mathbf{R}^2\mid \|a\|=1\}$ 은 허용조종값모임이며 $\alpha_i(\cdot):[0,\ +\infty)\to S_1$ 은 M_i 에 대한 조종, $\Lambda_i:=\{\alpha_i(\cdot):[0,\ +\infty)\to S_1\mid \alpha_i(\cdot):$ 가측함수$\}$ 는 M_i 에 대한 허용조종들의 모임이다. 조종 $\alpha_i(\cdot)$ 에 대응되는 계 (1)의 궤도가 $\boldsymbol{x}=(x,\ y)\in\mathbf{R}^2$ 에 도착하는 시각을 $T_{i\boldsymbol{x}}(\alpha_i)$ 로 표시하면 최량궤도문제는 매 초기상태 (2)에 대하여 계 (1)의 궤도들가운데서 $T_{i\boldsymbol{x}}(\alpha_i)\to\inf$ 인 조종과 대응되는 궤도를 구하는 문제이다.

값함수는 $T_i(\boldsymbol{x})=\inf\limits_{\alpha_i(\cdot)\in\Lambda_i} T_{i\boldsymbol{x}}(\alpha_i),\ \boldsymbol{x}\in\Omega$ 이며 이에 대한 해밀턴－야꼬비－벨만방정식은

$$\min_{a\in S_1}\{(\nabla T_i(\boldsymbol{x})\cdot a)F_i\}-\nabla T_i(\boldsymbol{x})\cdot V(\boldsymbol{x})+1=0\ (\boldsymbol{x}\in\Omega),\ T_i(\boldsymbol{x})=0\ \ (\boldsymbol{x}=P_i).$$

여기서 최소값을 주는 조종을 고려하면 동등한 다음의 해밀턴－야꼬비방정식을 얻는다.

$$|\nabla T_i(\boldsymbol{x})|F_i+\nabla T_i(\boldsymbol{x})\cdot V(\boldsymbol{x})=1\ \ (\boldsymbol{x}\in\Omega),\ \ T_i(\boldsymbol{x})=0\ \ (\boldsymbol{x}=P_i)$$

계산구역 Ω 가 $\Delta x\times\Delta y$ 크기의 꼭같은 직4각형들로 리산화되였고 점 $\boldsymbol{x}$ 를 임의의 그물점이라고 하자. 그리고 $T(\boldsymbol{x})=T_1(\boldsymbol{x}),\ F(\boldsymbol{x})=F_1(\boldsymbol{x}),\ f(\boldsymbol{x},\ a)=F(\boldsymbol{x})a-V(\boldsymbol{x})$ 라고 하자.

$\boldsymbol{x}_j$ 와 $\boldsymbol{x}_k$ 가 서로 이웃한 그물점이라고 하고 구역 $\boldsymbol{x}_j\boldsymbol{x}_k\boldsymbol{x}$ 를 생각하자.

조종계가 점 $\boldsymbol{x}$ 에서 출발하여 구역 $\boldsymbol{x}_j\boldsymbol{x}_k\boldsymbol{x}$ 의 내부에서 움직이며 변 $\boldsymbol{x}_j\boldsymbol{x}_k$ 에 도달할 때까지 조종계의 이동방향이 변하지 않는다고 가정하자.

사귐점 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 에서의 값 $T(\tilde{\boldsymbol{x}})$ 은 값 $T(\boldsymbol{x}_j)$ 와 $T(\boldsymbol{x}_k)$ 에 의하여 근사될수 있으며 이때 벨만의 최량성원리의 조종론적리산화로부터 단체 $\boldsymbol{x}_j\boldsymbol{x}_k\boldsymbol{x}$ 에서 점 $\boldsymbol{x}$ 에서의 값 $T(\boldsymbol{x})$ 의 수치근사에 관한 방정식을 아래와 같이 얻는다.[1, 3]

$$T(\boldsymbol{x})=T_{\boldsymbol{x}_j,\ \boldsymbol{x}_k}(\boldsymbol{x}),\ \ T_{\boldsymbol{x}_j,\ \boldsymbol{x}_k}(\boldsymbol{x})=\min_{\tilde{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{x}_j\boldsymbol{x}_k} T_{\boldsymbol{x}_j,\ \boldsymbol{x}_k,\ \tilde{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{x})$$

$$T_{\boldsymbol{x}_j,\ \boldsymbol{x}_k,\ \tilde{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{x})=\|\tilde{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}\|/f(\boldsymbol{x},\ c(\boldsymbol{x},\ \tilde{a}))+\lambda T(\boldsymbol{x}_j)+(1-\lambda)T(\boldsymbol{x}_k)$$

여기서 $\tilde{a}=(\tilde{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x})/\|\tilde{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}\|$, $\lambda=\|\tilde{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}_k\|/\|\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{x}_k\|$, $c(\boldsymbol{x},\ \tilde{a})=g(\boldsymbol{x},\ \tilde{a})/\|g(\boldsymbol{x},\ \tilde{a})\|$ 이며 $g(\boldsymbol{x},\ \tilde{a}):=(|V(\boldsymbol{x})|\cos\alpha+(F(\boldsymbol{x})^2-(|V(\boldsymbol{x})|\sin\alpha)^2)^{1/2})\tilde{a}+V(\boldsymbol{x})$ (α 는 V와 $\tilde{a}$사이의 각)이다.

그물점들의 모임을 $\Omega_{\Delta x,\ \Delta y}$ 라고 하고 $\Omega_{\Delta x,\ \Delta y}$ 를 3개의 부분으로 나누자.

T 값이 이미 확정된 그물점들의 모임을 A 라고 표시한다.

A 의 그물점이 아니면서 A 의 적어도 하나의 그물점과 직접 이웃한 그물점들의 모임을 N 으로 표시한다. 나머지 그물점들의 모임 $(A\cup N)^{\mathrm{C}}$ 를 F 라고 표시한다.

그물점 $\boldsymbol{x}=(x_i,\ y_j)$ 에 대하여 아래와 같은 약속을 하자.

$$N(\boldsymbol{x}):=\{(x_{i+1},\ y_j),\ (x_i,\ y_{j+1}),\ (x_{i-1},\ y_j),\ (x_i,\ y_{j-1})\}$$

$$ND(\boldsymbol{x}):=N(\boldsymbol{x})\cup\{(x_{i+1},\ y_{j+1}),\ (x_{i-1},\ y_{j+1}),\ (x_{i-1},\ y_{j-1}),\ (x_{i+1},\ y_{j-1})\}$$

$$NDF(\boldsymbol{x}):=\{\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_j\mid \boldsymbol{x}_i,\ \boldsymbol{x}_j\in ND(\boldsymbol{x})\cap A,\ \boldsymbol{x}_i\in N(\boldsymbol{x}_j)\}$$

그물점 $\hat{\boldsymbol{x}}=(x_i,\ y_j)\in A$ 에 대하여 $\mathrm{grd}(\hat{\boldsymbol{x}})$ 를 점 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 에서의 그라디엔트모임이라고 한다.

처음에 $\mathrm{grd}(\hat{\boldsymbol{x}})$ 를 빈모임으로 놓고 다음과 같이 구성한다.

$\boldsymbol{x}_1=(x_{i+1},\ y_j)\in A$, $\boldsymbol{x}_2=(x_i,\ y_{j+1})\in A$ 이면 $\tilde{\boldsymbol{g}}=((T(\boldsymbol{x}_1)-T(\hat{\boldsymbol{x}}))/\Delta x,\ (T(\boldsymbol{x}_2)-T(\hat{\boldsymbol{x}}))/\Delta y)^{\mathrm{T}}$ 로, $\boldsymbol{x}_1=(x_{i-1},\ y_j)\in A$, $\boldsymbol{x}_2=(x_i,\ y_{j+1})\in A$ 이면 $\tilde{\boldsymbol{g}}=((T(\hat{\boldsymbol{x}})-T(\boldsymbol{x}_1))/\Delta x,\ (T(\boldsymbol{x}_2)-T(\hat{\boldsymbol{x}}))/\Delta y)^{\mathrm{T}}$ 로, $\boldsymbol{x}_1=(x_{i-1},\ y_j)\in A$, $\boldsymbol{x}_2=(x_i,\ y_{j-1})\in A$ 이면 $\tilde{\boldsymbol{g}}=((T(\hat{\boldsymbol{x}})-T(\boldsymbol{x}_1))/\Delta x,\ (T(\hat{\boldsymbol{x}})-T(\boldsymbol{x}_2))/\Delta y)^{\mathrm{T}}$ 로,

$\boldsymbol{x}_1=(x_{i+1},\ y_j)\in A$, $\boldsymbol{x}_2=(x_i,\ y_{j-1})\in A$ 이면 $\tilde{\boldsymbol{g}}=((T(\boldsymbol{x}_1)-T(\hat{\boldsymbol{x}}))/\Delta x,\ (T(\hat{\boldsymbol{x}})-T(\boldsymbol{x}_2))/\Delta y)^{\mathrm{T}}$ 로 놓고 $\tilde{\boldsymbol{g}}$ 을 $\mathrm{grd}(\hat{\boldsymbol{x}})$ 에 추가한다.

그물점 $\boldsymbol{x}\in N$ 에 대하여 그 점에서의 값함수의 값을 구하려 한다고 하자.

$G(\boldsymbol{x}):=\bigcup_{\bar{\boldsymbol{x}}\in ND(\boldsymbol{x})\cap A}\mathrm{grd}(\bar{\boldsymbol{x}})$, $A(\boldsymbol{x}):=\{\hat{a}=\boldsymbol{u}/\|\boldsymbol{u}\|\mid \boldsymbol{u}=-F(\boldsymbol{x})\tilde{\boldsymbol{g}}/\|\tilde{\boldsymbol{g}}\|-V(\boldsymbol{x}),\ \tilde{\boldsymbol{g}}\in G(\boldsymbol{x})\}$, $\boldsymbol{x}\in N$ 를 정의한다. 여기서 $A(\boldsymbol{x})$ 는 $\boldsymbol{x}$ 에서 조종계의 최량궤도방향으로 될수 있는 방향들의 모임이다.

점 $\boldsymbol{x}$ 를 시작점으로 하고 방향 $\hat{a}$ 으로 향하는 반직선 $l_{\hat{a}}$ 과 사귀는 $NDF(\boldsymbol{x})$ 의 선분을 $\boldsymbol{x}_{j_0}\boldsymbol{x}_{k_0}$ 이라고 하고 $l_{\hat{a}}$ 과 선분 $\boldsymbol{x}_{j_0}\boldsymbol{x}_{k_0}$ 의 사귐점을 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 라고 하자.

$$T_{\hat{a}}(\boldsymbol{x}):=T_{\boldsymbol{x}_{j_0},\ \boldsymbol{x}_{k_0},\ \bar{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{x}),\ \ T(\boldsymbol{x}):=\min_{\hat{a}\in A(\boldsymbol{x})}T_{\hat{a}}(\boldsymbol{x}) \tag{3}$$

우에서 론의한 값함수근사를 리용하여 결정보로노이도식을 구성해보자.

매 그물점 $\boldsymbol{x}$ 에 대하여 $T(\boldsymbol{x})=\min_{1\le i\le n}T_i(\boldsymbol{x})$ 라고 놓고 $T(\boldsymbol{x})$ 를 구하기 위하여 매 그물점에 보로노이번호라고 부르는 자연수 $\mathrm{vnum}[\boldsymbol{x}]$ 를 대응시킨다.

결정보로노이도식구성알고리듬은 다음과 같다.

걸음 1 $A=S$ 로 설정하고 $P_i\ (i=1,\cdots,n)$ 에 대하여 $\mathrm{vnum}[P_i]=i$, $T=0$ 으로, 나머지 모든 그물점들에 대하여 $\mathrm{vnum}=0,\ T=\infty$ 로 설정한다.

걸음 2 $P_i\ (i=1,\ \cdots,\ n)$ 에 대하여 우에서 언급한 방법으로 그라디엔트모임을 구성한다.

걸음 3 $P_i\ (i=1,\ \cdots,\ n)$ 에 대하여 P_i 와 이웃하고있는 그물점 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 들을 N 으로 이동시키고 $F(\hat{\boldsymbol{x}})=F_i$, $\mathrm{vnum}[\hat{\boldsymbol{x}}]=i$ 로 설정하고 그 점들의 T 값을 식 (3)을 리용하여 계산한다.

걸음 4 N 의 그물점들가운데서 T 값이 최소인 점 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 를 찾는다.

걸음 5 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 를 A 로 이동시키고 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 와 $N(\bar{\boldsymbol{x}})\cap A$ 의 매 $\boldsymbol{x}$ 에 대하여 $\mathrm{grd}(\boldsymbol{x})$ 를 갱신한다.

걸음 6 매 $\boldsymbol{x}\in ND(\bar{\boldsymbol{x}})$ 에 대하여 A 에 속하지 않으면 $F(\boldsymbol{x})=F(\bar{\boldsymbol{x}})$ 로 설정하고 그 점들에서의 T 값을 식 (3)을 리용하여 갱신하는데 이때 $\mathrm{grd}(\bar{\boldsymbol{x}})$ 의 원소들가운데서 vnum이 $\mathrm{vnum}[\bar{\boldsymbol{x}}]$ 와 같은 그물점들에 의하여 구성된 그라디엔트만 리용한다. T 값이 갱신되였으면 $\mathrm{vnum}[\boldsymbol{x}]=\mathrm{vnum}[\bar{\boldsymbol{x}}]$ 로 설정한다.

$ND(\bar{\boldsymbol{x}})$ 의 점들중 F 의 점이 있으면 그 점들을 N 으로 이동시킨다.

걸음 7 만일 N 이 비지 않으면 걸음 4로 다시 이행한다.

걸음 8 그물점들을 vnum 에 따라 분류한다.

$S=\{P_0,\ P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_n\}\subset\mathbf{R}^2$ 를 평면에 있는 점들의 모임이라고 하고 매 P_i 에서 F_i 의 속도로 질점 M_i 가 출발하여 임의의 방향으로 움직인다고 하자.

이제 M_0 이 운동과정에 다른 질점들과 충돌하지 않으면서 목적지 Q 에 도달하는 가장 최악의 경우의 최량궤도를 구하려고 한다.

최량궤도를 구성하기 위하여 지점모임 $S=\{P_0,\ P_1,\ \cdots,\ P_n\}$ 에 대하여 결정보로노이도식이 주어졌다고 하면 결정보로노이도식의 매 결정 $R(S;P_i)\ (i=0,\cdots,n)$ 는 P_i 에서 출발한 질점 M_i 가 점령할수 있는 최대구역이다.

따라서 M_0 이 $R(S;P_i)\ (i=1,\cdots,n)$ 들을 통과하지 않는다면 $M_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 와 충돌하지 않으며 이때의 궤도는 가장 안전한 궤도로 된다.

정리 임의의 $\boldsymbol{x}\in\Omega$ 에 대하여 $T_0(\boldsymbol{x})$ 를 지점 P_0 을 출발한 M_0 이 $\boldsymbol{x}$ 에 도달하는데 결

리는 최소시간이라고 할 때 M_0 이 임의의 $\boldsymbol{y}\in\Omega$ 에 도달하는 최량궤도는 다음의 방정식의 풀이로 표시된다.

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=-F_0(\boldsymbol{x})\frac{\nabla T_0(\boldsymbol{x})}{|\nabla T_0(\boldsymbol{x})|}-V(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}|_{t=T_0(\boldsymbol{y})}=\boldsymbol{y} \tag{4}$$

증명 다음과 같은 미분방정식의 풀이로 표시되는 립쉬츠련속함수 $\phi(\boldsymbol{x},\ t)$ 를 생각하자.

$$\frac{\partial\phi(\boldsymbol{x},\ t)}{\partial t}+F_0(\boldsymbol{x})|\nabla\phi(\boldsymbol{x},\ t)|+V(\boldsymbol{x})\cdot\nabla\phi(\boldsymbol{x},\ t)=0,\ \phi(\boldsymbol{x},\ t=0)=\|\boldsymbol{x}\|_2$$

주어진 시각 t 에 M_0 이 도달할수 있는 점들의 모임을 Z_t 라고 하면 다음과 같다.[3]

$$Z_t=\{\boldsymbol{x}\,|\,\phi(\boldsymbol{x},\ t)=0\},\ \phi(\boldsymbol{x},\ t)>0,\ \boldsymbol{x}\in Z_t^+,\ \phi(\boldsymbol{x},\ t)<0,\ \boldsymbol{x}\in Z_t^-$$

시각 t 에 도달한 그물점 $\boldsymbol{x}$ 에서의 M_0 의 임의의 전진방향을 $\boldsymbol{h}$ 라고 하면 $\boldsymbol{h}$ 는 Z_t 의 $\boldsymbol{x}$ 에서의 접선방향 $\boldsymbol{t}$ 와 법선방향 $\boldsymbol{n}$ 에 의하여 $\boldsymbol{h}=\alpha\boldsymbol{t}+\beta\boldsymbol{n},\ \alpha^2+\beta^2=1,\ 0\le|\alpha|,\ |\beta|\le 1$ 과 같이 표시된다. 그러면 M_0 의 운동방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=F_0(\boldsymbol{x})(\alpha\boldsymbol{t}+\beta\boldsymbol{n})+V(\boldsymbol{x}) \tag{5}$$

극한 $\lim\limits_{\Delta t\to 0^+}\phi(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x},\ t+\Delta t)/\Delta t$ 를 고찰하자.

ϕ 가 립쉬츠련속이므로 $\lim\limits_{\Delta t\to 0^+}\phi(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x},\ t+\Delta t)/\Delta t=\lim\limits_{\Delta t\to 0^+}\phi(\boldsymbol{x},\ t)$ 가 성립된다.

$\boldsymbol{x}$ 가 t 시각에 도달한 점이므로 $\boldsymbol{x}$ 는 Z_t 에 놓이며 따라서 $\phi(\boldsymbol{x},\ t)=0$ 이다.

그러므로 $\lim\limits_{\Delta t\to 0^+}\phi(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x},\ t+\Delta t)=0,\ \lim\limits_{\Delta t\to 0^+}\Delta t=0$ 이 성립된다. 따라서 로피탈의 법칙을 쓰면 $\lim\limits_{\Delta t\to 0^+}\dfrac{\phi(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x},\ t+\Delta t)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0^+}\left(\nabla\phi\cdot\dfrac{\Delta\boldsymbol{x}}{\Delta t}+\dfrac{\partial\phi}{\partial t}\right)=\nabla\phi\cdot\dfrac{\Delta\boldsymbol{x}}{\Delta t}+\dfrac{\partial\phi}{\partial t}$ 가 성립된다.

식 (5)를 고려하면 $\lim\limits_{\Delta t\to 0^+}\dfrac{\phi(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x},\ t+\Delta t)}{\Delta t}=\dfrac{\partial\phi}{\partial t}+\nabla\phi\cdot(F_0(\boldsymbol{x})\alpha\boldsymbol{t}+F_0(\boldsymbol{x})\beta\boldsymbol{n}+V(\boldsymbol{x}))$ 이다.

한편 $\dfrac{\partial\phi(\boldsymbol{x},\ t)}{\partial t}=-F_0(\boldsymbol{x})|\nabla\phi(\boldsymbol{x},\ t)|-V(\boldsymbol{x})\cdot\nabla\phi(\boldsymbol{x},\ t),\ \nabla\phi\cdot\boldsymbol{t}=0$ 임을 고려하면

$$\lim_{\Delta t\to 0^+}\phi(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x},\ t+\Delta t)/\Delta t=\nabla\phi(\boldsymbol{x},\ t)\cdot\boldsymbol{n}(F_0(\boldsymbol{x})\beta-F(\boldsymbol{x}))=|\nabla\phi(\boldsymbol{x},\ t)|(F_0(\boldsymbol{x})\beta-F_0(\boldsymbol{x}))$$

이다. 따라서 $\beta<1$ 이면 $\lim\limits_{\Delta t\to 0^+}\phi(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x},\ t+\Delta t)/\Delta t<0$ 이므로 M_0 은 $t+\Delta t$ 시각에 $Z_{t+\Delta t}$ 에 도달할수 없으며 항상 $Z_{t+\Delta t}^-$ 에 놓인다. 즉 $\beta=1$, 다시말하여 $\boldsymbol{x}$ 에서 M_0 의 전진방향을 Z_t 의 법선방향으로 하는 경우에만 M_0 은 $t+\Delta t$ 시각에 $Z_{t+\Delta t}$ 에 도달할수 있으며 이것은 Z_t 의 그라디엔트방향이 M_0 의 최량전진방향이라는것을 말해준다.

한편 Z_t 의 정의로부터 임의의 시각 t 에 대하여 $Z_t=\{\boldsymbol{x}\,|\,T_0(\boldsymbol{x})=t\}$ 임을 알수 있다.

따라서 Z_t 의 그라디엔트방향은 $T_0(\boldsymbol{x})$ 의 그라디엔트방향과 일치하며 M_0 의 최량전진방향은 $T_0(\boldsymbol{x})$ 의 그라디엔트방향임을 알수 있다. 즉 M_0 의 최량궤도는 방정식

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=F(\boldsymbol{x})\frac{\nabla T_0(\boldsymbol{x})}{|\nabla T_0(\boldsymbol{x})|}+V(\boldsymbol{x}),\ \ \boldsymbol{x}|_{t=0}=P_0,\ \ \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=-F(\boldsymbol{x})\frac{\nabla T_0(\boldsymbol{x})}{|\nabla T_0(\boldsymbol{x})|}-V(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}|_{t=T_0(\boldsymbol{y})}=\boldsymbol{y}$$

의 풀이에 의하여 표시된다.(증명끝)

임의의 $\boldsymbol{x}\in\Omega$ 에 대하여 $T(\boldsymbol{x})$ 를 결정보로노이도식구성알고리듬에 의하여 결정된

함수값이라고 하면 $T(\boldsymbol{x}) = \min_{0 \le i \le n} T_i(\boldsymbol{x})$ 이다. 즉 $\begin{cases} T(\boldsymbol{x}) = T_0(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in R(S\,;P_0) \\ T(\boldsymbol{x}) = T_i(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in R(S\,;P_i)\ \ (i=1,\ \cdots,\ n) \end{cases}$ 이다.

따라서 $\boldsymbol{x} \in R(S\,;P_i)\ (i=1,\ \cdots,\ n)$에 대하여 $T_0(\boldsymbol{x})$를 설정하여야 한다.

$\boldsymbol{x} \in R(S;P_i)\ (i=1,\ \cdots,\ n)$들은 M_0이 통과할수 없는 구역이므로 M_0이 $\boldsymbol{x} \in R(S;P_i)\ (i=1,\ \cdots,\ n)$에 도달하는데 걸리는 최소시간은 무한대로 볼수 있다. 즉

$$T_0(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{x})\ \ (\boldsymbol{x} \in R(S\,;P_0)),\ \ T_0(\boldsymbol{x}) = \infty\ \ (\boldsymbol{x} \in R(S\,;P_i),\ \ i=1,\cdots,\ n) \tag{6}$$

그러면 임의의 $\boldsymbol{x} \in \Omega$에 대하여 $T_0(\boldsymbol{x})$값이 존재하며 방정식 (4)를 리용하여 M_0이 Q에 도달하도록 하는 최량궤도를 구할수 있다.

다음으로 최량궤도구성알고리듬에 대하여 보자.

① 주어진 점모임 $S = \{P_0,\ P_1,\ \cdots,\ P_n\}$에 대한 결정보로노이도식을 구성한다.

② 식 (6)과 같은 방법으로 모든 그물점들에 대하여 값함수값을 설정한다.

③ 목적지 Q가 $M_i\ \ (i=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$들의 결정에 들어있다면 끝낸다.

④ 방정식 (4)를 리용하여 M_0이 목적지 Q에 도달하도록 하는 최량궤도를 구한다.

이와 같이 론문에서는 외부흐름마당에서 결정보로노이도식을 구성하는 한가지 방법을 제기하였으며 그것을 리용하여 한 형태의 최량궤도문제의 풀이법을 제기하였다.

고속전진법[2]은 외부흐름이 존재하는 경우 적용할수 없다.

론문에서는 고속전진법의 계산효과성을 그대로 가지고있으며 외부흐름마당에서도 적용할수 있는 결정보로노이도식구성방법을 제기하였으며 그것을 리용하여 외부흐름마당에서의 최량궤도문제의 풀이를 구하였다.

참 고 문 헌

[1] D. Dahiya et al.; SIAM J. Sci. Comput., 35, 4, 1880, 2015.

[2] T. Nishida et al.; J. Comput. Appl. Math., 202, 377, 2007.

[3] Efstathios Bakolas et al.; Automatica, 46, 2059, 2010.

[4] J. A. Sethian et al.; SIAM J. Numer. Anal., 41, 1, 323, 2003.

[5] K. Kobayashi et al.; 数理解析研究所講究録, 1185, 109, 2001.

주체107(2018)년 12월 5일 원고접수

The Optimal Path Planning using the Crystal Voronoi Diagram

Jong Hyok Jin, Ho Myong Song

We construct the crystal Voronoi diagram using the control fast marching method for the anisotropic eikonal equations in the outside flow field and for its application, propose the optimal path planning.

Key word: crystal Voronoi diagram