김일성종합대학학보 주체110(2021)년
수 학 제67권 제3호

우연끝시각을 가지는 한가지 형태의 평균마당역방향확률미분방정식의 풀이의 유일존재성과 비교정리

리경일, 신명국

경애하는 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《과학기술의 종합적발전추세와 사회경제발전의 요구에 맞게 새로운 경계과학을 개척하고 발전시키는데 큰 힘을 넣어야 합니다.》

선행연구[4]에서는 립쉬츠조건하에서 우연끝시각을 가지는 역방향확률미분방정식의 풀이의 유일존재성을 증명하고 그것을 리용하여 디리흘레경계조건을 가지는 타원형편미분방정식의 풀이에 대한 확률적표시식을 주었다.

선행연구[3]에서는 선행연구[4]의 조건을 단조성조건으로 약화시키고 타원형편미분방정식의 점성풀이의 존재성을, 선행연구[1]에서는 립쉬츠조건하에서 평균마당역방향확률미분방정식의 풀이의 유일존재성과 비교정리를 증명하였다.

선행연구[2]에서는 우연끝시각역방향확률미분방정식을 리용하여 디리흘레경계조건을 가지는 HJB방정식의 점성풀이의 유일존재성을 증명하였다.

선행연구[3, 4]에서와 같이 우연끝시각역방향확률미분방정식은 타원형편미분방정식과 밀접히 련관되지만 평균마당우연끝시각인 경우에 대해서는 아직 연구되지 못하였다.

론문에서는 단조성조건하에서 우연끝시각평균마당역방향확률미분방정식의 풀이의 유일존재성과 비교정리를 선행연구[4]에서와 류사한 방법으로 증명한다. 그리고 유한끝시각인 경우의 풀이를 리용하여 풀이를 새롭게 구성하여 존재성을 증명한다.

$(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$는 완비확률공간이고 $\boldsymbol{F}=\{\mathcal{F}_s,\ 0\le s\le T\}$는 $\mathbf{R}^d$ －값위너과정 W에 의해 생성되는 완비 σ－모임벌족이라고 하자. 그리고 τ는 거의 유계인 $\{\mathcal{F}_t\}$－정지시각이라고 하자. 여기서 ξ는 $\mathcal{F}_\tau$－가측인 실수값우연량이다.

실수 θ와 유클리드공간 V에 대하여 $\|X\|_\theta^2:=\mathbf{E}\left[\int_0^\tau e^{\theta s}|X(s)|^2\,ds\right]<\infty$인 V－값 $\mathcal{F}_t$－적합과정 $\{X(\cdot)\}$들의 모임을 $M_\theta^2(0,\ \tau;V)$로 표시한다.

$$Y_t=\xi+\int_{t\wedge\tau}^{\tau}f(s,\ Y_s,\ Z_s,\ \mathbf{E}[1_{\{s\le\tau\}}Y_s],\ \mathbf{E}[1_{\{s\le\tau\}}Z_s])ds-\int_{t\wedge\tau}^{\tau}Z_s dW_s,\quad t\ge 0 \qquad (*)$$

f는 $\Omega\times\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}$인 함수이며 모든 $y,\ z,\ y',\ z'$에 대하여 $f(\cdot,\ y,\ z,\ y',\ z')$가 전진가측과정일 때 다음의 가정들이 성립된다.

가정 1 단조성이 성립된다. 즉

$$\exists\, a\in\mathbf{R},\ \mathbf{E}[(\xi_1-\xi_2)(f(t,\ \xi_1,\ \gamma,\ \mathbf{E}\xi_1,\ \mathbf{E}\gamma)-f(t,\ \xi_2,\ \gamma,\ \mathbf{E}\xi_2,\ \mathbf{E}\gamma))]\le a\mathbf{E}|\xi_1-\xi_2|^2$$

가정 2 $f(t,\ y,\ z,\ y',\ z')$는 $z,\ z'$에 관하여 립쉬츠련속이다. 즉

$$\exists\, b>0,\ |f(t,\ y,\ z_1,\ y',\ z_1')-f(t,\ y,\ z_2,\ y',\ z_2')|\le b(\|z_1-z_2\|+\|z_1'-z_2'\|)$$

가정 3 $\exists K>0$, $|f(t,\ y,\ z,\ y',\ z')|\le|f(t,\ 0,\ z,\ 0,\ z')|+K(1+|y|+|y'|)$

가정 4 $f(t,\ y,\ z,\ y',\ z')$는 $y,\ y'$에 관하여 련속이다.

가정 5 $\beta:=4a+4b^2$이라고 할 때 어떤 $\rho>\beta$가 있어서 다음의 식이 성립된다.

$$\mathbf{E}\left[e^{\rho\tau}(|\xi|^2+1)+\int_0^{\tau}e^{\rho s}|f(s,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)|^2\,ds\right]<\infty$$

만일 함수 f가 가정 2, 3을 만족시키면

$$\begin{aligned}|f(t,\ y,\ z,\ y',\ z')|&\le|f(t,\ 0,\ z,\ 0,\ z')|+K(1+|y|+|y'|)\le\\&\le|f(t,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)|+b(\|z\|+\|z'\|)+K(|y|+|y'|)+K\end{aligned}$$

이므로 임의의 $\delta>0$에 대하여 다음의 식이 성립된다.

$$\begin{aligned}-2y\cdot f(t,\ y,\ z,\ y',\ z')&\le2|y|(|f(t,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)|+b\|z\|+b\|z'\|+K|y'|+K)+2K|y|^2\le\\&\le(2b^2+2K^2+2K+\delta)|y|^2+|y'|^2+\|z\|^2+\|z'\|^2+\delta^{-1}|f(t,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)|^2+1\end{aligned}$$

보조정리 1 어떤 실수 θ가 있어서 f가 $f(t,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)\in M_{\theta}^{2}(0,\ \tau;\mathbf{R})$이고 가정 2와 3을 만족시킨다고 하자.

또한 $\mathbf{E}[e^{\theta\tau}]<\infty$이며 방정식 (*)이 풀이 $(Y,\ Z)\in M_{\theta}^{2}(0,\ \tau;\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d)$를 가진다고 하자.

그러면 $\mathbf{E}\left[\sup\limits_{0\le s\le\tau}e^{\theta s}|Y(s)|^2\right]<\infty$이고 $M_t=\int_0^{t\wedge\tau}e^{\theta s}Y(s)Z(s)dW(s)$는 평등적분가능한 마르팅게일이다.

이제부터는 $1_{s>\tau}Y(s)=\xi$, $1_{s>\tau}Z(s)=0$, $1_{s>\tau}f(s,\ y,\ z,\ y',\ z')=0$으로 약속한다.

보조정리 2 $(\xi^1,\ f^1)$, $(\xi^2,\ f^2)$가 가정 1－5를 만족시키고 $(Y^1,\ Z^1)$, $(Y^2,\ Z^2)$는 각각 그것에 대응하는 방정식 (*)의 풀이들로서 $M_{\rho}^{2}(0,\ \tau;\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d)$에 속하며 $\Delta Y:=Y^1-Y^2$, $\Delta Z:=Z^1-Z^2$로 놓으면 $\beta=4a+4b^2<\theta\le\rho$에 대하여 다음의 식이 성립된다.

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\left[e^{\theta(t\wedge\tau)}|\Delta Y(t\wedge\tau)|^2+\int_{t\wedge\tau}^{\tau}e^{\theta s}\left(\alpha|\Delta Y(s)|^2+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\|\Delta Z(s)\|^2\right)ds\right]\le\\&\le\mathbf{E}[e^{\theta\tau}|\xi^1-\xi^2|^2]+\delta^{-1}\mathbf{E}\left[\int_{t\wedge\tau}^{\tau}e^{\theta s}|f^1(s,\ Y^2(s),\ Z^2(s),\ \mathbf{E}[1_{\{s\le\tau\}}Y^2(s)],\ \mathbf{E}[1_{\{s\le\tau\}}Z^2(s)])-\right.\\&\left.-f^2(s,\ Y^2(s),\ Z^2(s),\ \mathbf{E}[1_{\{s\le\tau\}}Y^2(s)],\ \mathbf{E}[1_{\{s\le\tau\}}Z^2(s)])|^2\,ds\right]\end{aligned}$$

정리 1 $(\xi^1,\ f^1)$과 $(\xi^2,\ f^2)$가 가정 1－5를 만족시키고 그것에 대응하는 방정식 (*)의 풀이들이 각각 $(Y^1,\ Z^1)$, $(Y^2,\ Z^2)$이며 다음의 조건들이 성립된다고 할 때 $\xi^1\le\xi^2$, $f^1\le f^2$이면 $Y^1\le Y^2$가 성립된다.

① f^1과 f^2중 어느 하나는 z'에 무관계하다.

② f^1과 f^2중 어느 하나는 y'에 관하여 다음의 조건을 만족시킨다.

$$\mathbf{E}[1_{\{s\le\tau\}}(Y_s^1-Y_s^2)^+\cdot(f^i(s,\ Y_s^i,\ Z_s^i,\ \mathbf{E}(1_{\{s\le\tau\}}Y_s^1),\ \mathbf{E}[1_{\{s\le\tau\}}Z_s^i])-$$
$$-f^i(s,\ Y_s^i,\ Z_s^i,\ \mathbf{E}(1_{\{s\le\tau\}}Y_s^2),\ \mathbf{E}[1_{\{s\le\tau\}}Z_s^i]))]\le a\mathbf{E}[1_{\{s\le\tau\}}((Y_s^1-Y_s^2)^+)^2]$$

증명 일반성을 잃지 않고 f^1이 조건 ①을, f^2가 ②를 만족시킨다고 하자.

$\Delta Y^+=1_{\{Y^1-Y^2>0\}}(Y^1-Y^2)$라고 놓으면 다음의 식이 성립된다.

$$\mathbf{E}[e^{\theta(t\wedge\tau)}|\Delta Y^+(t\wedge\tau)|^2]+\mathbf{E}\left[\int_{t\wedge\tau}^{\tau}e^{\theta s}(\theta|\Delta Y^+(s)|^2+1_{\{\Delta Y>0\}}\|\Delta Z(s)\|^2)ds\right]=$$
$$=\int_t^\infty 2\mathbf{E}[e^{\theta s}1_{\{s\le\tau\}}\Delta Y^+(s)(f^1(s,\ Y^1(s),\ Z^1(s),\ \mathbf{E}[1_{\{s\le\tau\}}Y^1(s)])-$$
$$-f^2(s,\ Y^2(s),\ Z^2(s),\ \mathbf{E}[1_{\{s\le\tau\}}Y^2(s)],\ \mathbf{E}[1_{\{s\le\tau\}}Z^2(s)]))]ds$$

그런데

$f^1(s,\ Y^2(s),\ Z^2(s),\ \mathbf{E}[1_{\{s\le\tau\}}Y^1(s)])\le f^2(s,\ Y^2(s),\ Z^2(s),\ \mathbf{E}[1_{\{s\le\tau\}}Y^1(s)],\ \mathbf{E}[1_{\{s\le\tau\}}Z^2(s)])$

이므로 웃식의 피적분함수는 다음의 식을 만족시킨다.

$$I:=2\mathbf{E}[e^{\theta s}1_{\{s\le\tau\}}\Delta Y^+(s)(f^1(s,\ Y^1(s),\ Z^1(s),\ \mathbf{E}[1_{\{s\le\tau\}}Y^1(s)])-$$
$$-f^2(s,\ Y^2(s),\ Z^2(s),\ \mathbf{E}[1_{\{s\le\tau\}}Y^2(s)],\ \mathbf{E}[1_{\{s\le\tau\}}Z^2(s)]))]\le$$
$$\le 2\mathbf{E}[e^{\theta s}1_{\{s\le\tau\}}\Delta Y^+(s)(f^1(s,\ Y^1(s),\ Z^1(s),\ \mathbf{E}[1_{\{s\le\tau\}}Y^1(s)])-$$
$$-f^1(s,\ Y^2(s),\ Z^2(s),\ \mathbf{E}[1_{\{s\le\tau\}}Y^1(s)]))]+$$
$$+2\mathbf{E}[e^{\theta s}1_{\{s\le\tau\}}\Delta Y^+(s)(f^2(s,\ Y^2(s),\ Z^2(s),\ \mathbf{E}[1_{\{s\le\tau\}}Y^1(s)],\ \mathbf{E}[1_{\{s\le\tau\}}Z^2(s)])-$$
$$-f^2(s,\ Y^2(s),\ Z^2(s),\ \mathbf{E}[1_{\{s\le\tau\}}Y^2(s)],\ \mathbf{E}[1_{\{s\le\tau\}}Z^2(s)]))]=I_1+I_2$$

가정 1, 2로부터

$$I_1\le 2\mathbf{E}[e^{\theta s}1_{\{s\le\tau\}}(a|\Delta Y^+(s)|^2+b|\Delta Y^+(s)|\cdot\|\Delta Z(s)\|)]\le$$
$$\le(2a+b^2)\mathbf{E}[e^{\theta s}1_{\{s\le\tau\}}|\Delta Y^+(s)|^2]+\mathbf{E}[e^{\theta s}1_{\{s\le\tau\}}1_{\{\Delta Y>0\}}\|\Delta Z(s)\|^2]$$

이며 조건 ②로부터 $I_2\le 2e^{\theta s}a\mathbf{E}[1_{\{s\le\tau\}}|\Delta Y^+(s)|^2]$이 성립된다.

따라서 $I\le(4a+b^2)\mathbf{E}[e^{\theta s}1_{\{s\le\tau\}}|\Delta Y^+(s)|^2]+\mathbf{E}[e^{\theta s}1_{\{s\le\tau\}}1_{\{\Delta Y>0\}}\|\Delta Z(s)\|^2]$이므로 $\theta(>4a+b^2)$에 대하여 다음의 식이 성립된다.

$$\mathbf{E}[e^{\theta(t\wedge\tau)}|\Delta Y^+(t\wedge\tau)|^2]+\mathbf{E}\left[\int_{t\wedge\tau}^{\tau}e^{\theta s}(\theta|\Delta Y^+(s)|^2+1_{\{\Delta Y>0\}}\|\Delta Z(s)\|^2)ds\right]=$$
$$=\int_t^\infty(4a+b^2)\mathbf{E}[e^{\theta s}1_{\{s\le\tau\}}|\Delta Y^+(s)|^2]+\mathbf{E}[e^{\theta s}1_{\{s\le\tau\}}1_{\{\Delta Y>0\}}\|\Delta Z(s)\|^2]ds\le$$
$$\le\mathbf{E}\left[\int_{t\wedge\tau}^{\tau}e^{\theta s}(\theta|\Delta Y^+(s)|^2+1_{\{\Delta Y>0\}}\|\Delta Z(s)\|^2)ds\right]$$

따라서 $\Delta Y^+=0$(거의)이 성립된다.(증명끝)

정리 2 $(\xi,\ f)$가 가정 1－5를 만족시키면 방정식 (*)은 $M_\rho^2(0,\ \tau:\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d)$에서 유일한 풀이 $(Y,\ Z)$를 가지며 $\mathbf{E}\left[\sup_{0\le s\le\tau} e^{\rho s}|Y(s)|^2\right]<\infty$가 성립된다.

참 고 문 헌

[1] R. Buckdahn et al.; Stochastic Process. Appl., 119, 3133, 2009.

[2] R. Buckdahn et al.; SIAM J. Control Optim., 54, 2, 602, 2016.

[3] R. W. R. Darling et al.; Ann. Probab., 25, 3, 1135, 1997.

[4] S. Peng; Stochastics Stochastics Rep., 37, 61, 1991.

주체110(2021)년 3월 5일 원고접수

Existence, Uniqueness and Comparison Theorem of Solutions for Mean-Field BSDEs with Random Terminal Time

Ri Kyong Il, Sin Myong Guk

We prove the existence, uniqueness and comparison theorem of solutions for a kind of mean-field backward stochastic differential equation with random terminal time by using the existence and uniqueness result under weak monotonicity and general growth condition.

Keywords: mean-field, backward stochastic differential equation, random terminal time