김일성종합대학학보　　　　　　　　　　　　　　　　주체109(2020)년
수 학　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　제66권　제3호

수감행렬의 프레임에 관한 수준제한등거리넘기기성

최철국, 강정수

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《우리는 현실발전의 요구에 맞게 나라의 과학기술을 빨리 발전시켜야 하겠습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제11권 134페지)

론문에서는 수감행렬이 프레임에 관한 수준제한등거리넘기기성을 만족시키기 위한 충분조건에 대하여 연구하였다.

선행연구[1]에서는 프레임에 관한 수준제한등거리넘기기성을 정의하고 그에 기초하여 성긴 표현을 가지는 신호의 회복을 위한 분해토대추적문제의 근사성질에 대하여 론의하였다.

선행연구[2]에서는 표준압축수감인 경우에 수감행렬이 수준제한등거리넘기기성을 만족시키기 위한 충분조건을 연구하였다.

우리는 수감행렬이 부분표본화된 우니타르행렬인 경우에 프레임에 관한 수준제한등거리넘기기성을 만족시키기 위한 충분조건을 정식화하고 증명하였다.

1. 예비적결과들

l_1 − 분해법은 다음과 같은 문제

$$\hat{x} = \underset{\tilde{x}\in\mathbf{C}^n}{\arg\min} \| D^* \tilde{x} \|_1 ,\ \ \| y - A\tilde{x} \| \le \varepsilon \tag{1}$$

으로 정식화된다.[3]

선행연구[5]에서 론의된 $(\boldsymbol{s},\ \boldsymbol{M})$ − 성김성을 도입한다.

정의 1 [5] $r\in\mathbf{N}$ 에 대하여 $\boldsymbol{M}=(M_1,\ M_2,\ \cdots,\ M_r)\in\mathbf{N}^r$, $1\le M_1 < M_2 < \cdots < M_r = n$ 이라고 하자. 또한 $\boldsymbol{s}=(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_r)\in\mathbf{N}^r$, $s_k \le M_k - M_{k-1}$, $k=1,\ \cdots,\ r$, $M_0=0$ 이라고 하자. 이때 $(\boldsymbol{s},\ \boldsymbol{M})$ 을 성김성패턴이라고 부른다. 만일 자연수들의 모임 $\Lambda\subset\{1,\ 2,\ \cdots,\ M_r\}$ 에 대하여

$$|\Lambda \cap \{M_{k-1}+1,\ M_{k-1}+2,\ \cdots,\ M_k\}| \le s_k \ \ (k=1,\ \cdots,\ r)$$

를 만족시키면 모임 Λ 를 $(\boldsymbol{s},\ \boldsymbol{M})$ − 성긴모임이라고 부른다. 그리고 받침이 $(\boldsymbol{s},\ \boldsymbol{M})$ − 성긴모임인 벡토르 $x\in\mathbf{C}^n$ 을 $(\boldsymbol{s},\ \boldsymbol{M})$ − 성긴벡토르라고 부르며 $(\boldsymbol{s},\ \boldsymbol{M})$ − 성긴벡토르들의 모임을 $\Sigma_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{M}}$ 으로 표시한다.

벡토르 $\boldsymbol{M}$ 은 수준수가 r 인 성김성수준을 나타내며 벡토르 $\boldsymbol{s}$ 는 그 수준내에서의 국부적성김성을 나타낸다. 또한 $\sigma_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{M}}(x)$ 를

$$\sigma_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{M}}(x) = \min_{\hat{x}\in\Sigma_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{M}}} \| x - \hat{x} \|_1$$

으로 정의한다.

여러수준우연표본화는 다음과 같이 정의된다.[5]

정의 2 $r\in\mathbf{N}$ 에 대하여 $\boldsymbol{N}=(N_1,\ N_2,\ \cdots,\ N_r)$ 라고 하자. 여기서 $1\le N_1 < N_2 < \cdots < N_r$

$=N$ 이다. 그리고 $\boldsymbol{m}=(m_1, \cdots, m_r)$, $m_k \le N_k - N_{k-1}$, $k=1, \cdots, r$, $N_0=0$ 이라고 하자. 매 $k=1, \cdots, r$ 에 대하여 $t_{k,1}, \cdots, t_{k,m_k}$ 는 모임 $\{N_{k-1}+1, \cdots, N_k\}$ 로부터 평등적으로 취한 수들이라고 하고 $\Omega_k=\{t_{k,1}, \cdots, t_{k,m_k}\}$ 로 놓자. 만일 $\Omega=\Omega_{\boldsymbol{N},\boldsymbol{m}}=\Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_r$ 이면 Ω 를 0－여러수준부분표본화방법이라고 부른다.

성김성수준 $\boldsymbol{M}$ 과 구분하기 위하여 $\boldsymbol{N}$ 을 표본화수준이라고 부른다.

먼저 선행연구[2]에서 도입된 수준제한등거리넘기기성(RIPL)을 프레임에 관한 수준제한등거리넘기기성(D-RIPL)으로 일반화한다.

정의 3 성김성수준 $\boldsymbol{M}=(M_0, M_1, \cdots, M_r)$ 와 국부적성김성파라메터 $\boldsymbol{s}=(s_1, s_2, \cdots, s_r)$ 가 주어졌다고 하자. 행렬 $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$ 과 엄격한 프레임 $D \in \mathbf{C}^{n\times d}$ 에 대하여 적당한 상수 $1>\delta>0$ 이 있어서 임의의 $z \in \Sigma_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{M}}$ 에 대하여

$$(1-\delta)\| Dz \|_2^2 \le \| ADz \|_2^2 \le (1+\delta)\| Dz \|_2^2$$

이 성립하면 행렬 A 는 δ 를 가지고 차수 $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{M})$ 인 D-RIPL를 만족시킨다고 말한다. 그리고 이때 가장 작은 δ 를 $\delta_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{M}}$ 으로 표시하고 행렬 A 의 차수 $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{M})$ 인 D-RIPL상수라고 부른다.

정리 1 $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{M})$ 을 수준수가 r 인 성김성패턴이라고 하고 $\eta_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{M}}=\max_{k,l=1,\cdots,r}\{s_k/s_l\}$ 라고 하자. 수감행렬 $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$ 이 $\delta_{2s}\left(<1\Big/\sqrt{r(\eta_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{M}}+1/4)^2+1}\right)$ 을 가지고 D-RIPL을 만족시킨다고 하자.

그리고 $x \in \mathbf{C}^n$ 에 대하여 $y=Ax+e, \|e\|_2 \le \varepsilon$ 이라고 하자. 이때 식 (1)의 풀이 $\hat{x}$ 은

$$\| x-\hat{x} \|_2 \le 2\varepsilon(A_2+B_2\sqrt[4]{r\eta_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{M}}})+\frac{\sigma_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{M}}(D^*x)}{\sqrt{s}}(C_2+D_2\sqrt[4]{r\eta_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{M}}})$$

을 만족시킨다.

2. 수감행렬의 프레임에 관한 수준제한등거리넘기기성의 충분조건

여기서는 여러수준부분표본화도식에 따라 부분표본화된 우니타르행렬이 프레임에 관한 제한된 등거리넘기기성을 만족시키기 위한 충분조건에 대하여 고찰한다. 수감행렬은 다음과 같이 구성한다. 즉 우니타르행렬 $U \in \mathbf{C}^{n\times n}$ 과 부분표본화도식

$$\Omega=\Omega_{\boldsymbol{N},\boldsymbol{m}}=\Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_r$$

가 주어지면 다음과 같이 수감행렬을 구성한다.

$$A=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{p_1}P_{\Omega_1}U \\ 1/\sqrt{p_2}P_{\Omega_2}U \\ \vdots \\ 1/\sqrt{p_r}P_{\Omega_r}U \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{m\times n} \quad (m=m_1+\cdots+m_r) \tag{2}$$

여기서 $p_k=m_k/(N_k-N_{k-1})$ $(k=1, \cdots, r)$ 이다.

정의 4 $r \in \mathbf{N}$ 은 수준수, $\boldsymbol{M}=(M_1, \cdots, M_r)$ 는 성김성수준이라고 하자. 그리고 $k=1, \cdots, r$ 에 대하여 $\Lambda_k=\{M_{k-1}+1, \cdots, M_k\}$ 라고 놓자. $D \in \mathbf{C}^{n\times d}$ 는 엄격한 프레임, $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{M})$ 은 성김성패턴이라고 하자. 매 $k=1, \cdots, r$ 에 대하여 k 째 수준에서 국부화인자를 다음과 같이 정의한다.

$$\eta_k = \sup\left\{\frac{\| P_{\Lambda_k} D^* Du \|_1}{\sqrt{s_k}} : \| P_{\Lambda_k} D^* Du \|_2 = 1,\ u \in \Sigma_{\boldsymbol{s},\ \boldsymbol{M}}\right\}$$

수준에서 국부화인자는 선행연구[4]에서 정의된 국부화인자의 일반화이다.

정리 2 $U \in \mathbf{C}^{n\times n}$ 은 우니타르행렬, $D \in \mathbf{C}^{n\times d}$ 는 엄격한 프레임, $r \in \mathbf{N}$ 이고 $0 < \varepsilon$, $\delta < 1$, $0 \le r_0 \le r$ 라고 하자. 그리고 $\Omega = \Omega_{\boldsymbol{N},\boldsymbol{m}}$ 은 $(\boldsymbol{N},\ \boldsymbol{m})-$ 여러수준부분표본화도식, $\boldsymbol{M}$ 과 $\boldsymbol{s}$ 는 각각 성김성수준과 국부성김성파라메터라고 하자. 또한 $\mu_{k,\,l}$ 은 $\boldsymbol{N}$ 과 $\boldsymbol{M}$ 에 관하여 UD 의 $(k,\ l)$ 째 국부일치성척도라고 하자. 그리고 $m_k = N_k - N_{k-1}$ $(k = 1,\ \cdots,\ r_0)$ 과

$$m_k \gtrsim \delta^{-2} \cdot r \cdot (N_k - N_{k-1}) \cdot \left(\sum_{l=1}^{r} s_l \mu_{k,l} \eta_l^2\right) \cdot (\log(2\tilde{m})\log(2d)\log^2(2s) + \log(\varepsilon^{-1}))$$

$$(k = r_0 + 1,\ \cdots,\ r)$$

이라고 가정하자. 그러면 기껏 $1-\varepsilon$ 의 확률로 행렬 (2)는 상수 $\delta_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{M}} \le \delta$ 를 가지고 $(\boldsymbol{s},\ \boldsymbol{M})$ 차의 프레임에 관한 수준제한등거리넘기기성을 만족시킨다.

주의 D 가 우니타르행렬일 때 정리 2의 결과는 다음과 같다.

$$m_k \gtrsim \delta^{-2} \cdot r \cdot (N_k - N_{k-1}) \cdot \left(\sum_{l=1}^{r} s_l \mu_{k,l} \eta_l^2\right) \cdot (\log(2\tilde{m})\log(2n)\log^2(2s) + \log(\varepsilon^{-1})) \quad (3)$$

식 (3)과 선행연구[2]와의 기본차이는 l 째 수준에서 국부화인자 η_l^2 의 출현이다.

실험결과에 의하면 하르웨블레트계인 경우에 수준에서의 국부화인자는 1보다 작다.

따라서 특수한 경우에 론문의 평등회복조건은 선행연구[2]에서의 결과보다 개선되였다.

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보 수학, 66, 2, 39, 주체109(2020).

[2] C. Li, B. Adcock; arXiv preprint arXiv: 1601.01988v3, 2018.

[3] E. Candès et al.; Appl. Comput. Harm. Anal., 31, 1, 59, 2010.

[4] M. N. Do, M. Vetterli; IEEE Transactions on Image Processing, 14, 12, 2091, 2005.

[5] B. Adcock et al.; Forum. Math. Sigma., 5, 17, 2017.

주체109(2020)년 3월 15일 원고접수

The Restricted Isometry Property in Levels Adapted to a Frame for Sensing Matrix

Choe Chol Guk, Kang Jong Su

In this paper, we present uniform recovery guarantees for this class when the sensing matrix corresponds to a subsampled isometry. We prove this by establishing a variant of the standard restricted isometry property adapted to a frame for sparse in levels vectors known as the restricted isometry property in levels adapted to a frame.

Keywords: compressed sensing, l_1-analysis, sparse signal recovery