김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체104(2015)년 제61권 제7호 Vol. 61 No. 7 JUCHE104(2015).

프레임에 의한 한가지 화상손상회복알고리듬

김 종 철

손상회복문제는 화상에서 화소자료들중의 일부가 없어지거나 다른것에 의하여 가리워진 경우에 일어난다.

손상회복의 과제는 그러한 불완전한 관측자료로부터 잃어진 령역을 회복하는것이다.

화상을 그 화상의 렬들을 련속적으로 련결하여 얻어지는 $\boldsymbol{R}^N$의 벡토르로 표시하자.

원시화상 $\boldsymbol{f}$가 령역 $\Omega=\{1, 2, \cdots, N\}$ 우에서 정의되고 비지 않은 부분모임 $\Lambda\subset\Omega$를 주어진 관측령역이라고 하면 관측된 불완전한 화상 $\boldsymbol{g}$는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{g}(i)=\begin{cases}\boldsymbol{f}(i)+\varepsilon(i), & i\in\Lambda\\ h(i), & i\in\Omega\setminus\Lambda\end{cases}\tag{1}$$

여기서 $\varepsilon(i)$는 잡음항이고 $h(i)$는 0부터 255사이의 임의의 값을 취할수 있다.

목적은 $\boldsymbol{g}$로부터 원시화상 $\boldsymbol{f}$를 회복하는것이다.

모든 $i\in\Lambda$에 대하여 $\varepsilon(i)=0$이면 $\boldsymbol{f}(i)=\boldsymbol{g}(i)$이며 이때 $\boldsymbol{f}$는 보간문제의 풀이로 된다. 그렇지 않으면 모든 $i\in\Lambda$에 대하여 $|\boldsymbol{f}(i)-\boldsymbol{g}(i)|\le\varepsilon(i)$를 만족시키는 풀이 $\boldsymbol{f}$를 구한다.

P_Λ는 Λ에 있는 첨수에 대응되는 대각선원소는 1이고 기타는 0인 N차대각선행렬이고 $K\times N$형행렬 A는 한계가 1인 엄격한 프레임분해행렬이며 $T_{\boldsymbol{\lambda}}$는 유연턱값연산자로서

$$T_{\boldsymbol{\lambda}}([\beta_1,\ \beta_2,\cdots,\ \beta_K]^T)\equiv[t_{\lambda_1}(\beta_1),\ t_{\lambda_2}(\beta_2),\cdots,\ t_{\lambda_K}(\beta_K)]^T\tag{2}$$

라고 하자. 여기서 $\boldsymbol{\lambda}=[\lambda_1,\ \lambda_2,\cdots,\ \lambda_K]^T$ ($\lambda_i>0,\ i=1,\cdots,\ K$)이고 $t_{\lambda_i}(\cdot)$은 유연턱값함수로서

$$t_{\lambda_i}(\beta_i)\equiv\begin{cases}\mathrm{sgn}(\beta_i)(|\beta_i|-\lambda_i), & |\beta_i|>\lambda_i\\ 0, & |\beta_i|\le\lambda_i\end{cases}.\tag{3}$$

선행연구[1]에서는 이에 기초하여 다음의 화상손상회복반복알고리듬을 제기하였다.

i) 초기근사를 $\boldsymbol{f}_0$으로 놓는다.

ii) $\boldsymbol{f}_n$이 수렴할 때까지 n에 관하여 반복한다.

$$\boldsymbol{f}_{n+1}=P_\Lambda\boldsymbol{g}+(I-P_\Lambda)A^*T_{\boldsymbol{\lambda}}(A\boldsymbol{f}_n)\tag{4}$$

iii) 걸음 ii)의 출력을 $\boldsymbol{f}^*$이라고 하자.

식 (1)에서 모든 $i\in\Lambda$에 대하여 $\varepsilon(i)=0$이면 $\boldsymbol{f}^*$을 풀이로 놓고 그렇지 않으면 $T_{\boldsymbol{\lambda}}$가 잡음을 제거할수 있기때문에 손상회복＋잡음제거문제의 풀이를 $\boldsymbol{f}^\circ=A^*T_{\boldsymbol{\lambda}}(A\boldsymbol{f}^*)$로 놓는다.

알고리듬은 효과적이며 선행연구[2, 3]에서의 변분방법과 비교할 때 PSNR를 2～3dB 개선하였다. 또한 선행연구[1]에서는 이 알고리듬을 어떤 범함수를 최소화하는 반복법으로 해석하여 그 수렴성을 증명하였다.

론문에서는 식 (2), (3)으로 정의되는 턱값연산자 $T_{\boldsymbol{\lambda}}$를 보다 일반화한 경우에도 우의 알고리듬이 수렴한다는것을 밝혔다.

1. 일반화된 손상회복알고리듬과 교대방향최소화문제로의 변환

다음의 가정들을 만족시키는 아래와 같은 가법적성김성벌칙함수를 도입하자.

$$\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\beta})=\sum_{i=1}^{K}\lambda_i\psi(\beta_i) \tag{5}$$

가정 1 ψ 는 $\boldsymbol{R}$ 에서 $(-\infty,\ +\infty]$ 로의 순수하고 불룩이고 하반련속이며 $\psi(0)=0$ 인 함수이다. 여기서 실값함수 $\boldsymbol{f}$ 의 정의역 $\{x\in\boldsymbol{R}:\boldsymbol{f}(x)<+\infty\}$ 가 비지 않으면 $\boldsymbol{f}$ 는 순수하다고 말한다.

가정 2 ψ 는 짝대칭이고 부가 아니며 $[0,\ +\infty)$ 에서 비감소한다.

가정 3 ψ 는 $(0,\ +\infty)$ 에서 미분가능하며 0에서 정의오른쪽도수를 가진다. 즉

$$\psi'_+(0)=\lim_{t\to 0+}(\psi(t)/t)>0\ .$$

실례로 $\psi(\beta_i)=|\beta_i|^p,\ \ p\ge 1$ 을 들수 있다.

이 조건밑에서 매 $\lambda_i\psi$ 에 대하여 꼭 하나의 련속이고 홀대칭인 린근연산자

$$\alpha_i=\operatorname{pro}x_{\lambda_i\psi}(\beta_i)=\begin{cases}0, & |\beta_i|\le\lambda_i\psi'_+(0)\\ \beta_i-\lambda_i\psi'(\alpha_i), & |\beta_i|>\lambda_i\psi'_+(0)\end{cases} \tag{6}$$

이 존재한다. 여기서 α_i 는 β_i 와 동일한 부호를 가진다는것을 고려하여야 한다.

$\lambda_i\psi(\beta_i)=\lambda_i|\beta_i|$ 인 경우 식 (3)에서의 $t_{\lambda_i}(\beta_i)$ 는 $t_{\lambda_i}(\beta_i)=\operatorname{pro}x_{\lambda_i\psi}(\beta_i)$ 로 되고 $|\cdot|$ 은 우의 모든 가정을 만족시키므로 식 (4)에서 $T_{\boldsymbol{\lambda}}$ 를

$$T_{\boldsymbol{\lambda}}([\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_K]^T)\equiv[\operatorname{pro}x_{\lambda_1\psi}(\beta_1),\ \operatorname{pro}x_{\lambda_2\psi}(\beta_2),\ \cdots,\ \operatorname{pro}x_{\lambda_K\psi}(\beta_K)]^T \tag{7}$$

로 리용하는 경우 $T_{\boldsymbol{\lambda}}$ 는 종전보다 일반적인 턱값연산자로 된다.

우리는 식 (2)대신에 식 (7)로 정의된 턱값연산자를 리용한다.

이때 알고리듬에서 식 (4)가 어떤 교대방향최소화절차와 동등하다는것을 밝히자.

린근연산자의 정의와 식 (5)의 분리가능성으로부터 식 (7)에 의하여 정의된 턱값연산자 $T_{\boldsymbol{\lambda}}$ 는 다음의 식을 만족시킨다.

$$T_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\beta})=\arg\min_{\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{R}^K}\{\|\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}\|_2^2/2+\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\alpha})\} \tag{8}$$

다음으로 벡토르들의 모임 $\boldsymbol{C}=\{\boldsymbol{y}\in[0,\ \ 255]^N:P_\Lambda\boldsymbol{y}=P_\Lambda\boldsymbol{g}\}$ 에 대하여 론의하자.

모임 $\boldsymbol{C}$ 는 분명히 불룩이다.

벡토르 $\boldsymbol{x}$ 의 $\boldsymbol{C}$ 우에로의 사영을 $P_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{x})$ 로 표시하면 그것은 제한이 있는 최량화문제의 최소점 $P_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{x})=\arg\min_{\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{C}}\{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2^2/2\}$ 으로 정의될수 있다.

보조정리 1 사영 $P_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{x})$ 는 다음과 같은 두가지 형태로 된다.

i) $P_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{x})=P_\Lambda\boldsymbol{g}+(I-P_\Lambda)\boldsymbol{x}$

ii) $P_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{x})=\arg\min_{\boldsymbol{y}}\{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2^2/2+i_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{y})\}$ 이다. 여기서 $i_{\boldsymbol{C}}$ 는 $\boldsymbol{C}$ 의 지적자함수로서

$$i_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{y})\equiv\begin{cases}0, & \boldsymbol{y}\in\boldsymbol{C}\\ +\infty, & \boldsymbol{y}\notin\boldsymbol{C}\end{cases}. \tag{9}$$

이제는 우의 결과들을 리용하여 알고리듬에서 식 (4)를 다시 쓰자.

식 (8)에 의하여 $\boldsymbol{\alpha}_n \equiv T_\lambda(A\boldsymbol{f}_n) = \arg\min_{\boldsymbol{\alpha}}\{\| A\boldsymbol{f}_n - \boldsymbol{\alpha}\|_2^2/2 + \Psi_\lambda(\boldsymbol{\alpha})\}$ 이다.

$\boldsymbol{\alpha}_n$ 의 정의를 식 (4)에 대입하고 보조정리 1을 리용하면

$$\boldsymbol{f}_{n+1} = P_\Lambda \boldsymbol{g} + (I - P_\Lambda)A^*\boldsymbol{\alpha}_n = P_{\boldsymbol{C}}(A^*\boldsymbol{\alpha}_n) = \arg\min_{\boldsymbol{f}}\{\| A^*\boldsymbol{\alpha}_n - \boldsymbol{f}\|_2^2/2 + i_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{f})\}$$

이므로 프레임에 기초한 손상회복알고리듬 (4)는 주파수－공간교대최소화문제

$$\boldsymbol{\alpha}_n = \arg\min_{\boldsymbol{\alpha}}\{\| A\boldsymbol{f}_n - \boldsymbol{\alpha}\|_2^2/2 + \Psi(\boldsymbol{\alpha})\},\quad \boldsymbol{f}_{n+1} = \arg\min_{\boldsymbol{f}}\{\| A^*\boldsymbol{\alpha}_n - \boldsymbol{f}\|_2^2/2 + i_C(\boldsymbol{f})\} \tag{10}$$

로 정의될수 있다.

2. 알고리듬의 수렴성

여기서는 식 (10)에서 렬 $\{\boldsymbol{f}_n\}$과 $\{\boldsymbol{\alpha}_n\}$이 둘다 수렴한다는것을 증명한다.

먼저 $\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{f}_n \equiv \boldsymbol{f}^*$이 존재하며 그것이

$$\min_{\boldsymbol{f}\in\boldsymbol{C}}\{\min_{\boldsymbol{\alpha}}\{\| A\boldsymbol{f} - \boldsymbol{\alpha}\|_2^2/2 + \Psi_\lambda(\boldsymbol{\alpha})\}\} \tag{11}$$

의 최소점이라는것을 밝히자.

$(-\infty, +\infty]$ 에서 값을 취하는 임의의 불룩이며 하반련속인 함수 φ 에 대하여 그것의 린근연산자는

$$\mathrm{pro}\,x_\varphi(\boldsymbol{x}) \equiv \arg\min_{\boldsymbol{y}}\{\| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2^2/2 + \varphi(\boldsymbol{y})\} \tag{12}$$

로 정의되고 그 최소값은

$${}^1\varphi(\boldsymbol{x}) \equiv \min_{\boldsymbol{y}}\{\| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2^2/2 + \varphi(\boldsymbol{y})\} \tag{13}$$

이며 함수 ${}^1\varphi(\boldsymbol{x})$ 는 불룩이고 미분가능하며 그것의 그라디엔트는 다음과 같다.

$$\nabla({}^1\varphi(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x} - \mathrm{pro}\,x_\varphi(\boldsymbol{x}) \tag{14}$$

정리 1 [4] 최소화문제 $\min_{\boldsymbol{f}}\{F_1(\boldsymbol{f}) + F_2(\boldsymbol{f})\}$ 를 보자. 여기서 F_1은 $(-\infty, +\infty]$ 에서 값을 취하는 순수하고 하반련속인 불룩함수이며 F_2 는 값구역이 $\boldsymbol{R}$ 인 순수하고 불룩이고 미분가능하며 $1/b$ – 리프쉬츠련속인 그라디엔트를 가지는 함수이다.

최소화문제 $\min_{\boldsymbol{f}}\{F_1(\boldsymbol{f}) + F_2(\boldsymbol{f})\}$ 의 최소점이 존재하고 $b > 1/2$ 이라고 가정하자.

이때 임의의 초기점 $\boldsymbol{f}_0$ 에 대하여 반복법

$$\boldsymbol{f}_{n+1} = \mathrm{pro}\,x_{F_1}(\boldsymbol{f}_n - \nabla F_2(\boldsymbol{f}_n)) \tag{15}$$

은 $F_1(\boldsymbol{f}) + F_2(\boldsymbol{f})$ 의 최소점에로 수렴한다.

이 정리를 적용하기 위하여 $\xi(\boldsymbol{\beta}) \equiv \Psi_\lambda(\boldsymbol{\beta}),\ F_1(\boldsymbol{f}) \equiv i_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{f})$, $F_2(\boldsymbol{f}) \equiv ({}^1\xi \circ A)(\boldsymbol{f})$ 로 정의하자.

식 (9)와 식 (13)에 의하여 다음의 식이 성립된다.

$$\min_{\boldsymbol{f}}\{F_1(\boldsymbol{f}) + F_2(\boldsymbol{f})\} = \min_{\boldsymbol{f}\in\boldsymbol{C}}\{({}^1\xi \circ A)(\boldsymbol{f})\} = \min_{\boldsymbol{f}\in\boldsymbol{C}}\{({}^1\Psi_\lambda(A\boldsymbol{f}))\} = \min_{\boldsymbol{f}\in\boldsymbol{C}}\left\{\min_{\boldsymbol{\alpha}}\left\{\frac{1}{2}\| A\boldsymbol{f} - \boldsymbol{\alpha}\|_2^2 + \Psi_\lambda(\boldsymbol{\alpha})\right\}\right\} \tag{16}$$

이것은 바로 최소화문제 (11)이다.

식 (10)에 식 (12)를 대입하고 $A^*A=I$ 를 리용하면 알고리듬은 다음과 같이 된다.

$$\boldsymbol{f}_{n+1}=\mathrm{prox}_{i_C}(A^*\boldsymbol{\alpha}_n)=\mathrm{prox}_{i_C}(A^*\mathrm{prox}_{\xi}(A\boldsymbol{f}_n))=\mathrm{prox}_{i_C}(\boldsymbol{f}_n-A^*(A\boldsymbol{f}_n-\mathrm{prox}_{\xi}(A\boldsymbol{f}_n)))\quad(17)$$

한편 식 (14)에 의하여 $\nabla F_2(\boldsymbol{f})=\nabla({}^1\xi\circ A)(\boldsymbol{f})=A^*(A\boldsymbol{f}-\mathrm{prox}_{\xi}(A\boldsymbol{f}))$ 이므로 식 (17)은 식 (15)와 같다. 따라서 식 (4)와 동등한 식 (17)이 식 (11)의 최소점에로 수렴한다는것을 보여주기 위해서는 정리 1에서의 조건들이 성립된다는것을 밝히면 된다.

보조정리 2 값구역이 $(-\infty, +\infty]$ 인 함수 i_C 와 값구역이 $\boldsymbol{R}$ 에 있는 ${}^1\xi\circ A$ 는 순수하고 불룩이며 하반련속이다. 그리고 ${}^1\xi\circ A$ 는 미분가능하며 1－리프쉬츠련속인 그라디엔트를 가진다.

보조정리 3 A 를 한계가 1인 엄격한 프레임이라고 하면 최소화문제 (11)은 적어도 하나의 최소점을 가진다.

정리 2 A 를 한계가 1인 엄격한 프레임이라고 하자.

이때 알고리듬에서 반복식 (4)는 임의의 초기점 $\boldsymbol{f}_0$ 에 대하여 최소화문제 (11)의 최소점에로 수렴한다.

다음으로 $\boldsymbol{\alpha}_n$ 의 수렴성에 대하여 론의하자.

여기서는 렬 $\{\boldsymbol{\alpha}_n\}\equiv\{T_{\boldsymbol{\lambda}}(A\boldsymbol{f}_n)\}$ 의 극한 $\boldsymbol{\alpha}^{\circ}\equiv T_{\boldsymbol{\lambda}}(A\boldsymbol{f}^*)$ 이

$$\min_{\boldsymbol{\alpha}}\{\|P_\Lambda(A^*\boldsymbol{\alpha})-P_\Lambda\boldsymbol{g}\|_2^2/2+\|(I-AA^*)\boldsymbol{\alpha}\|_2^2/2+\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\alpha})\}\quad(18)$$

의 최소점이라는것을 보여준다.

식 (12)와 (17)에 의하여 식 (10)에서 $\boldsymbol{\alpha}_n$ 에 대한 반복은 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1}=\mathrm{prox}_{\xi}(A\boldsymbol{f}_{n+1})=\mathrm{prox}_{\xi}[A\,\mathrm{prox}_{i_C}(A^*\boldsymbol{\alpha}_n)]$$

식 (17)과 (4)에 의하여 $\mathrm{prox}_{i_C}(A^*\boldsymbol{\alpha}_n)=f_{n+1}=P_\Lambda g+(I-P_\Lambda)A^*\boldsymbol{\alpha}_n$ 이고 $P_\Lambda^2=P_\Lambda$ 이므로

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1}=\mathrm{prox}_{\xi}[AP_\Lambda g+A(I-P_\Lambda)A^*\boldsymbol{\alpha}_n]=\mathrm{prox}_{\xi}[\boldsymbol{\alpha}_n-((I-AA^*)\boldsymbol{\alpha}_n+AP_\Lambda(P_\Lambda A^*\boldsymbol{\alpha}_n-P_\Lambda g))].$$

$(I-AA^*)$ 은 A^* 의 핵우에로의 직교사영연산자이므로 $(I-AA^*)^2=(I-AA^*)$ 이다. 따라서

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1}=\mathrm{prox}_{\xi}[\boldsymbol{\alpha}_n-\nabla(\|P_\Lambda A^*\boldsymbol{\alpha}_n-P_\Lambda\boldsymbol{g}\|_2^2/2+\|(I-AA^*)\boldsymbol{\alpha}_n\|_2^2/2)].$$

$F_3(\boldsymbol{\alpha})\equiv\xi(\boldsymbol{\alpha}),\ F_4(\boldsymbol{\alpha})\equiv\|P_\Lambda A^*\boldsymbol{\alpha}-P_\Lambda\boldsymbol{g}\|_2^2/2+\|(I-AA^*)\boldsymbol{\alpha}\|_2^2/2$ 이라고 놓으면 웃식은 반복도식 (15)의 형태로 된다. 즉

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1}=\mathrm{prox}_{F_3}(\boldsymbol{\alpha}_n-\nabla F_4(\boldsymbol{\alpha}_n)).\quad(19)$$

정리 1을 적용하기 위해 F_3 과 F_4 가 정리 1에서 F_1 과 F_2 에 대한 조건들을 만족시키는가를 검증하자.

보조정리 4 함수 $\xi(\boldsymbol{\alpha})$ 는 $(-\infty, +\infty]$ 에서 값구역을 가지고 순수하고 불룩이며 하반련속이고 함수 $\|P_\Lambda A^*\boldsymbol{\alpha}-P_\Lambda\boldsymbol{g}\|_2^2/2+\|(I-AA^*)\boldsymbol{\alpha}\|_2^2/2$ 은 값구역이 $\boldsymbol{R}$ 인 순수하고 불룩이며 미분가능하다고 하면 그것의 그라디엔트는 1－리프쉬츠련속이다.

증명 ξ 는 정의로부터 값구역이 $\boldsymbol{R}$ 에 있고 불룩이며 하반련속이다.

두번째 함수는 $\boldsymbol{\alpha}$ 의 어떤 아핀변환에 대한 노름이므로 그것은 순수하고 불룩이며 $\boldsymbol{R}$ 에서 값을 취하는 련속인 함수이다. 더우기 그것의 노름이 미분가능하므로 그 함수 역시 미분

가능하다.

그리디엔트의 1－리프쉬츠련속성은 직접 계산에 의해 알수 있다. 즉 다음과 같이 계산할수 있다.

$$\|\nabla[\|P_\Lambda A^*\boldsymbol{\alpha}-P_\Lambda \boldsymbol{g}\|_2^2/2+\|(I-AA^*)\boldsymbol{\alpha}\|_2^2/2]-\|P_\Lambda A^*\boldsymbol{\alpha}'-P_\Lambda \boldsymbol{g}\|_2^2/2+\|(I-AA^*)\boldsymbol{\alpha}'\|_2^2/2\|_2=$$

$$=\|[(I-AA^*)\boldsymbol{\alpha}+AP_\Lambda(P_\Lambda A^*\boldsymbol{\alpha}-P_\Lambda \boldsymbol{g})]-[(I-AA^*)\boldsymbol{\alpha}'+AP_\Lambda(P_\Lambda A^*\boldsymbol{\alpha}'-P_\Lambda \boldsymbol{g})]\|_2=$$

$$=\|(I-A(I-P_\Lambda)A^*)(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}')\|_2\le\|I-A(I-P_\Lambda)A^*\|_2\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}'\|_2\le\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}'\|_2$$

마지막부등식은 $(I-A(I-P_\Lambda)A^*)$이 자기공액이므로

$$\|I-A(I-P_\Lambda)A^*\|_2=\sup_{\|\boldsymbol{\alpha}\|_2=1}|<(I-A(I-P_\Lambda)A^*)\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\alpha}>_2|=\sup_{\|\boldsymbol{\alpha}\|_2=1}|1-<(I-P_\Lambda)A^*\boldsymbol{\alpha},A^*\boldsymbol{\alpha}>|_2=$$

$$=\sup_{\|\boldsymbol{\alpha}\|_2=1}|1-<(I-P_\Lambda)A^*\boldsymbol{\alpha},(I-P_\Lambda)A^*\boldsymbol{\alpha}>_2|=\sup_{\|\boldsymbol{\alpha}\|_2=1}|1-\|(I-P_\Lambda)A^*\boldsymbol{\alpha}\|_2^2|$$

이고 $\|(I-P_\Lambda)A^*\boldsymbol{\alpha}\|_2^2\le\|(I-P_\Lambda)A^*\|_2^2\|\boldsymbol{\alpha}\|_2^2\le\|(I-P_\Lambda)\|_2^2\|A^*\|_2^2\|\boldsymbol{\alpha}\|_2^2=\|\boldsymbol{\alpha}\|_2^2$이다.(증명끝)

이제는 $\boldsymbol{\alpha}_n$이 최소화문제 (18)의 최소점에로 수렴한다는것을 증명할수 있다.

정리 3 식 (4)에서 $\boldsymbol{\alpha}_n=T_{\boldsymbol{\lambda}}(A\boldsymbol{f}_n)$이라고 하자.

이때 $\boldsymbol{\alpha}_n$은 임의의 초기점 $\boldsymbol{\alpha}_0$에 대하여 최소화문제 (18)의 최소점에로 수렴한다.

증명 정리 2에 의하여 렬 $\{\boldsymbol{f}_n\}$은 수렴하므로 T_λ의 련속성으로부터 렬 $\boldsymbol{\alpha}_n=T_{\boldsymbol{\lambda}}(A\boldsymbol{f}_n)$도 수렴한다. 또한 식 (19)에 의하여 $\{\boldsymbol{\alpha}_n\}$의 극한 $\boldsymbol{\alpha}^\circ$은 $\boldsymbol{\alpha}^\circ=\mathrm{pro}\ x_{F_3}(\boldsymbol{\alpha}^\circ-\nabla F_4(\boldsymbol{\alpha}^\circ))$을 만족시킨다. 이것과 보조정리 4, 정리 1로부터 극한 $\boldsymbol{\alpha}^\circ$은 $\min_{\boldsymbol{\alpha}}\{F_3(\boldsymbol{\alpha})+F_4(\boldsymbol{\alpha})\}$의 최소점이며 따라서 그것은 최소화문제 (18)의 최소점으로 된다.(증명끝)

참고문헌

[1] Cai Jian Feng et al.; Appl. Comput. Harmon. Anal., 24, 131, 2008.

[2] T. Chan et al.; J. Visual Commun. Image Represent, 12, 436, 2001.

[3] T. Chan et al.; SIAM J. Appl. Math., 62, 1019, 2001.

[4] P. L. Combettes et al.; Multiscale Model. Simul., 4, 1168, 2005.

주체104(2015)년 3월 5일 원고접수

A Frame-based Image Inpainting Algorithm

Kim Jong Chol

Image inpainting is a fundamental problem in image processing and has many applications. In this paper we generalize a previous algorithm for image inpainting based on framelets and analyse it as an iteration for minimizing a special functions to prove convergence of the algorithm. The proof of the convergence is under the framework of convex analysis and optimization theory.

Key words: tight frame, inpainting, convex analysis