김일성종합대학학보 주체110(2021)년
수 학 제67권 제2호

가환반환의 준씨스펙트르

한 성 철

반환은 환과 분배속을 일반화한 한가지 대수계로서 분배법칙에 의해 련결되는 더하기와 곱하기라는 두 2원산법을 가지고있지만 환이 아닌 반환에서는 덜기산법이 허용되지 않으므로 환론의 수법들이 반환에 그대로 적용되지 않는다.

령이 아닌 단위원소를 가진 가환환의 씨스펙트르는 대수방정식의 풀이모임의 기하학적구조와 관련되여 연구되기 시작하였으며 가환대수와 대수적기하, 속론에서 중요한 역할을 한다.[1]

선행연구[5]에서는 령원소와 령이 아닌 단위원소를 가진 가환반환의 씨스펙트르가 스펙트르공간으로 된다는것이 증명되였으며 선행연구[4]에서는 령이 아닌 단위원소를 가진 가환환의 준씨스펙트르가 정의되고 콤팍트성, 기약성, 분리성과 같은 준씨스펙트르의 위상적성질들과 가환환의 대수적성질들사이의 련관관계들이 밝혀졌다. 그러나 준씨스펙트르에서 부분모임의 페포에 대한 고찰과 준씨스펙트르가 스펙트르공간으로 되기 위한 필요충분조건에 대한 고찰은 특정한 조건들을 만족시키는 가환환들에만 국한되여있다.

론문에서는 령원소와 령이 아닌 단위원소를 가진 가환반환에 대하여 그것의 준씨이데알들전부의 모임우에 자리스끼위상을 도입하여 준씨스펙트르를 정의하고 콤팍트성, 기약성, 분리성과 같은 준씨스펙트르의 위상적성질들과 가환반환의 대수적성질들사이의 호상련관을 연구한다. 론문의 일부 결과들은 준씨이데알의 근기는 그것을 포함하는 최소씨이데알로 된다는 성질을 리용하여 선행연구[4]의 대응하는 결과들을 가환반환들에로 일반화한것들로서 동시에 선행연구[4]에 있는 가환환들에 대한 추가적인 조건들이 필요없다는것도 보여준다.

비지 않은 모임 R에 2개의 2원산법 즉 더하기 $+$와 곱하기 $\cdot$가 정의되여있고 다음의 조건들을 만족시키면 $(R,\ +,\ \cdot)$를 반환이라고 부른다.[2]

① $(R,\ +)$는 가환반군이다.

② $(R,\ \cdot)$는 반군이다.

③ 곱하기는 더하기에 관하여 량쪽분배법칙을 만족시킨다.

반환 R가 더하기중성원소 0을 가지고 모든 $r\in R$에 대하여 $0r=r0=0$이 성립되면 0을 R의 령원소라고 부르며 반환 R가 곱하기중성원소 1을 가지면 1을 R의 단위원소라고 부른다.

반환 R의 비지 않은 부분모임 I가 있어서 $a,\ b\in I$, $r\in R$에 대하여 늘 $a+b\in I$, $ra\in I$, $ar\in I$가 성립되면 I를 R의 이데알이라고 부르며 R의 이데알들전부의 모임을 $\mathrm{I}(R)$로 표시한다. 그리고 반환 R에서 $I\neq R$인 이데알 I를 참이데알이라고 부른다.

반환 R의 어떤 참이데알 P가 있어서 임의의 $a,\ b\in R$에 대하여 $aRb\subseteq P$이면 $a\in P$ 또는 $b\in P$일 때 P를 R의 씨이데알이라고 부르며 반환 R의 씨이데알들전부의 모임을 $\mathrm{Spec}(R)$로 표시한다.

반환 R의 참이데알 M이 있어서 $M\subset I\subseteq R$인 R의 이데알 I는 R뿐일 때 M을 R의 극대이데알이라고 부르고 반환 R의 극대이데알들전부의 모임을 $\mathrm{Max}(R)$로 표시한다.

반환 R에서 곱하기산법이 바꿈법칙을 만족시키면 R를 가환반환이라고 부른다.

가환반환 R에서 P가 씨이데알이면 $IJ \subseteq P$인 R의 임의의 이데알 I와 J에 대하여 $I \subseteq P$이거나 $J \subseteq P$이다.

R는 령원소와 령이 아닌 단위원소를 가진 가환반환이고 Λ는 임의의 비지 않은 첨수모임이며 $\mathbf{N}$은 정의옹근수들전부의 모임이라고 하자.

R의 원소 a에 대하여 만일 어떤 $b \in R$가 있어서 $ab = 1$이면 a를 R의 가역원소 또는 단원이라고 부른다.

R의 이데알 I에 대하여 모임 $\sqrt{I} := \{a \in R \mid \exists n \in \mathbf{N},\ a^n \in I\}$를 I의 근기라고 부른다.

그러면 $\sqrt{I}$는 I를 포함하는 R의 씨이데알들전부의 사귐과 같다.[2]

$\mathrm{Nil}(R) := \sqrt{\{0\}}$를 R의 령근기, $\mathrm{Nil}(R)$의 원소를 R의 제곱령원소라고 부른다.

R의 참이데알 Q는 임의의 원소 $x, y \in R$에 대하여 만일 $xy \in Q$이면 $x \in Q$이든가 어떤 $n \in \mathbf{N}$이 있어서 $y^n \in Q$일 때 R의 준씨이데알이라고 부른다.[2]

R의 준씨이데알 Q에 대하여 $\sqrt{Q}$는 Q를 포함하는 R의 최소씨이데알이다.

R의 준씨이데알들전부의 모임을 $\mathrm{Prim}(R)$로 표시한다.

그러면 $\varnothing \neq \mathrm{Max}(R) \subseteq \mathrm{Spec}(R) \subseteq \mathrm{Prim}(R)$이다.

비지 않은 위상공간 X에서 임의의 두 비지 않은 열린부분모임들의 사귐이 늘 비지 않을 때 X를 기약공간이라고 부른다. 위상공간 X의 부분모임 Y가 부분공간으로서 기약공간일 때 Y를 기약모임이라고 부른다. 위상공간 X의 부분모임 Y가 기약모임이기 위해서는 X의 임의의 닫긴부분모임 Y_1과 Y_2에 대하여 $Y \subseteq Y_1 \cup Y_2$이면 $Y \subseteq Y_1$ 또는 $Y \subseteq Y_2$일것이 필요하고 충분하다. Y가 위상공간 X의 닫긴모임이고 $Y = \overline{\{y\}}$인 y가 X에 존재하면 y를 Y의 일반점이라고 부른다. 만일 위상공간 X가 콤팍트 T_0-공간이고 X에서 콤팍트열린부분모임들이 위상토대를 이루며 임의의 유한개의 콤팍트열린부분모임들의 사귐이 콤팍트열린부분모임으로 되고 X에서 매개 기약닫긴부분모임이 일반점을 가진다면 X를 스펙트르공간이라고 부른다.[3]

R의 비지 않은 부분모임 S에 대하여 $V(S) := \{P \in \mathrm{Spec}(R) \mid S \subseteq P\}$로 놓으면 $\mathrm{Spec}(R)$의 부분모임족 $\{V(S) \mid \varnothing \neq S \subseteq R\}$는 닫긴모임들에 의한 위상공리들을 만족시킨다. 이렇게 도입되는 위상 τ를 $\mathrm{Spec}(R)$우의 자리스끼위상이라고 부르고 위상공간 $(\mathrm{Spec}(R), \tau)$를 R의 씨스펙트르라고 부른다.[2]

R의 임의의 비지 않은 부분모임 S에 대하여 $V_{\mathrm{rad}}(S) := \{Q \in \mathrm{Prim}(R) \mid S \subseteq \sqrt{Q}\}$로 놓자.

보조정리 1 다음의 사실들이 성립된다.

① 만일 $\varnothing \neq S \subseteq R$이면 $V_{\mathrm{rad}}(S) = V_{\mathrm{rad}}(\langle S \rangle)$이다.

② 만일 $\varnothing \neq S \subseteq T \subseteq R$이면 $V_{\mathrm{rad}}(T) \subseteq V_{\mathrm{rad}}(S)$이다.

③ 만일 I가 R의 이데알이면 $V_{\mathrm{rad}}(I) = V_{\mathrm{rad}}(\sqrt{I})$이다.

④ 만일 I와 J가 R의 이데알들이고 $V_{\mathrm{rad}}(I) \subseteq V_{\mathrm{rad}}(J)$이면 $J \subseteq \sqrt{I}$이다.

⑤ I와 J가 R의 이데알들일 때 $\sqrt{I} = \sqrt{J}$이기 위해서는 $V_{\mathrm{rad}}(I) = V_{\mathrm{rad}}(J)$일것이 필요하고 충분하다.

⑥ 매개 $i \in \Lambda$에 대하여 $\varnothing \neq S_i \subseteq R$이면 $V_{\mathrm{rad}}\left(\bigcup_{i \in \Lambda} S_i\right) = \bigcap_{i \in \Lambda} V_{\mathrm{rad}}(S_i)$이다.

$a\in R$ 일 때 $V_{\mathrm{rad}}(a):=V_{\mathrm{rad}}(\{a\})$ 로 놓자.

그러면 보조정리 1의 ①에 의하여 $V_{\mathrm{rad}}(S)=V_{\mathrm{rad}}(\langle S\rangle)$ 이다.

보조정리 2 다음의 사실들이 성립된다.

① $V_{\mathrm{rad}}(0)=\mathrm{Prim}(R)$ 이고 $V_{\mathrm{rad}}(1)=\varnothing$ 이다.

② 만일 I 와 J 가 R 의 이데알들이면 $V_{\mathrm{rad}}(I\cap J)=V_{\mathrm{rad}}(IJ)=V_{\mathrm{rad}}(I)\cup V_{\mathrm{rad}}(J)$ 이다.

③ 매개 $i\in\Lambda$ 에 대하여 J_i 가 R 의 이데알이면 $V_{\mathrm{rad}}\left(\sum_{i\in\Lambda}J_i\right)=\bigcap_{i\in\Lambda}V_{\mathrm{rad}}(J_i)$ 이다.

보조정리 1의 ①과 보조정리 2에 의하여 $\mathrm{Prim}(R)$ 의 부분모임족 $\{V_{\mathrm{rad}}(S)\,|\,\varnothing\neq S\subseteq R\}$ 는 닫긴모임들에 의한 위상공리들을 만족시킨다. 이렇게 도입되는 위상 τ_{rad} 를 $\mathrm{Prim}(R)$ 우의 자리스끼위상이라고 부르고 위상공간 $(\mathrm{Prim}(R),\ \tau_{\mathrm{rad}})$ 를 R 의 준씨스펙트르라고 부른다. 준씨스펙트르 $\mathrm{Prim}(R)$ 의 열린모임을 $D_{\mathrm{rad}}(S):=\mathrm{Prim}(R)\setminus V_{\mathrm{rad}}(S)$ 로 표시한다. 여기서 $\varnothing\neq S\subseteq R$ 이다. 특히 $a\in R$ 일 때 열린모임 $D_{\mathrm{rad}}(a)$ 를 $\mathrm{Prim}(R)$ 의 기초열린모임이라고 부른다.

정리 1 $\mathrm{Prim}(R)$ 에서 기초열린모임족 $\{D_{\mathrm{rad}}(a)\,|\,a\in R\}$ 는 자리스끼위상 τ_{rad} 의 토대로 된다.

보조정리 3 $a,\ b\in R$ 이면 $D_{\mathrm{rad}}(ab)=D_{\mathrm{rad}}(a)\cap D_{\mathrm{rad}}(b)$ 이다.

정리 2 $a\in R$ 에 대하여 다음의 사실들이 성립된다.

① a 가 제곱령원소이기 위해서는 $D_{\mathrm{rad}}(a)=\varnothing$ 일것이 필요하고 충분하다.

② a 가 단원이기 위해서는 $D_{\mathrm{rad}}(a)=\mathrm{Prim}(R)$ 일것이 필요하고 충분하다.

정리 3 매개 $a\in R$ 에 대하여 기초열린모임 $D_{\mathrm{rad}}(a)$ 는 콤팍트모임이며 특히 $\mathrm{Prim}(R)=D_{\mathrm{rad}}(1)$ 은 콤팍트공간이다.

정리 4 $\mathrm{Prim}(R)$ 에서 임의의 두 콤팍트열린모임들의 사귐은 콤팍트열린모임이다.

유일한 극대이데알을 가지는 가환반환을 국부반환이라고 부른다.[5]

위상공간 X 의 매개 열린피복이 X 를 포함할 때 X 를 초콤팍트공간이라고 부른다.[4]

정리 5 다음의 명제들은 서로 동등하다.

① R 는 국부반환이다.

② $\mathrm{Prim}(R)$ 는 초콤팍트공간이다.

③ $\mathrm{Spec}(R)$ 는 초콤팍트공간이다.

정리 6 다음의 명제들은 서로 동등하다.

① $\mathrm{Prim}(R)$ 는 기약공간이다.

② $\mathrm{Nil}(R)$ 는 R 의 씨이데알이다.

③ $\mathrm{Nil}(R)$ 는 R 의 준씨이데알이다.

④ $\mathrm{Spec}(R)$ 는 기약공간이다.

$\mathrm{Prim}(R)$ 의 비지 않은 부분모임 Y 에 대하여 $\eta(Y):=\bigcap_{Q\in Y}\sqrt{Q}$ 로 놓자.

그러면 $\eta(Y)$ 는 R 의 참이데알이다.

정리 7 $\mathrm{Prim}(R)$ 의 비지 않은 부분모임 Y 가 기약모임이기 위해서는 $\eta(Y)$ 가 R 의 씨이데알일것이 필요하고 충분하다.

따름 1 준씨이데알 $Q\in\mathrm{Prim}(R)$ 에 대하여 $V_{rad}(Q)$ 는 기약모임이다.

보조정리 4 Y 가 $\mathrm{Prim}(R)$ 의 비지 않은 부분모임이면 $\overline{Y}=V_{rad}(\eta(Y))$ 가 성립된다.

증명 $Q\in Y$ 이면 $\eta(Y)\subseteq\sqrt{Q}$ 이므로 $Q\in V_{\mathrm{rad}}(\eta(Y))$ 이고 따라서 $Y\subseteq V_{\mathrm{rad}}(\eta(Y))$ 이므로 $\overline{Y}\subseteq V_{\mathrm{rad}}(\eta(Y))$ 가 성립된다. 거꾸로 $P\in V_{\mathrm{rad}}(\eta(Y))$ 라고 하면 $\eta(Y)\subseteq\sqrt{P}$ 이다.

I 가 $Y\subseteq V_{\mathrm{rad}}(I)$ 인 R 의 임의의 이데알일 때 $Q\in Y$ 이면 $Q\in V_{\mathrm{rad}}(I)$ 이고 $I\subseteq\sqrt{Q}$ 이므로 $I\subseteq\eta(Y)$ 이며 따라서 $I\subseteq\sqrt{P}$ 이고 $P\in V_{\mathrm{rad}}(I)$ 이다. 그러므로 $P\in\overline{Y}$ 이다.(증명끝)

주의 선행연구[4]에서는 R 가 가환환일 때 정의 3에서 $\mathrm{Prim}(R)$ 의 임의의 비지 않은 부분모임 Y 에 대하여 $\xi(Y):=\bigcap_{Q\in Y}Q$ 로 정의하고 정리 6에서 만일 R 가 임의의 이데알모임 $\{I_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ 에 대하여 $\sqrt{\bigcap_{\lambda\in\Lambda}I_\lambda}=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\sqrt{I_\lambda}$ 가 성립되는 가환환이면 $\overline{Y}=V_{\mathrm{rad}}(\xi(Y))$ 라는것을 증명하였다.

따름 2 $Q\in\mathrm{Prim}(R)$ 이면 $\overline{\{Q\}}=V_{\mathrm{rad}}(Q)$ 이다.

정리 8 Y 가 $\mathrm{Prim}(R)$ 의 기약닫긴부분모임이면 어떤 $Q\in\mathrm{Spec}(R)$ 가 있어서 $Y=\overline{\{Q\}}$ 이다.

정리 9 다음의 명제들은 서로 동등하다.

① $\mathrm{Prim}(R)$ 는 T_0 –공간이다.

② R 의 매개 준씨이데알은 씨이데알이다.

③ $\mathrm{Prim}(R)$ 는 스펙트르공간이다.

증명 ①⇒② $\mathrm{Prim}(R)$ 가 T_0 –공간이라고 할 때 만일 Q 가 R 의 준씨이데알이면 따름 2와 보조정리 1의 ③에 의하여 $\overline{\{Q\}}=V_{\mathrm{rad}}(Q)=V_{\mathrm{rad}}(\sqrt{Q})=\overline{\{\sqrt{Q}\}}$ 이다.

가정으로부터 $Q=\sqrt{Q}$ 가 나오고 따라서 Q 는 R 의 씨이데알이다.

②⇒③ $\mathrm{Prim}(R)=\mathrm{Spec}(R)$ 이면 R 의 임의의 이데알 I 에 대하여 $V_{\mathrm{rad}}(I)=V(I)$ 가 성립되므로 $\mathrm{Prim}(R)$ 우의 자리스끼위상은 $\mathrm{Spec}(R)$ 우의 자리스끼위상과 일치한다.

선행연구[5]의 정리 3.1에 의하여 씨스펙트르 $\mathrm{Spec}(R)$ 는 스펙트르공간이다.

③⇒① 스펙트르공간의 정의로부터 분명하다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] F. Callialp et al.; Turkish J. Math., 41, 326, 2017.

[2] J. S. Golan; Semirings and their Applications, Kluwer Academic, 65～94, 1999.

[3] M. Hochster; Trans. Amer. Math. Soc., 142, 43, 1969.

[4] N. A. Ozkirisci et al.; arXiv:1705.07702v1[math.AC], 2017.

[5] A. Pena et al.; Rev. Notas Mat., 5, 2, 66, 2009.

주체109(2020)년 12월 5일 원고접수

The Primary Spectrum of a Commutative Semiring

Han Song Chol

The paper defines the primary spectrum of a commutative semiring with zero and nonzero identity and studies the interplay between topological properties such as compactness, irreducibility and separation property in the primary spectrum and algebraic properties of the commutative semiring.

Keywords: commutative semiring, primary ideal, Zariski topology