김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제4호

두점경계조건을 가진 상결수다항분수계미분방정식의 해석적풀이법

정성국, 리성림

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《기초과학을 끊임없이 심화발전시키지 않고서는 첨단과학기술을 연구도입할수도 없고 새로운 높은 수준의 과학기술을 연구개발할수도 없습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제22권 21페지)

선행연구[1]에서는 선형다항분수계미분방정식의 초기값문제의 풀이에 대한 표시식을 연산자법으로 얻었다. 선행연구[3]에서는 선행연구[1]의 결과를 리용하여 여러가지 형태의 선형, 비선형분수계미분방정식의 초기값문제에 대한 풀이법과 풀이의 존재성을 론의하였다.

선행연구[2]에서는 라쁠라스변환을 리용하여 선형다항분수계미분방정식의 일반풀이의 양적인 표시식을 얻었다. 그러나 복잡한 풀이표시식에 들어있는 무한합렬의 절대수렴성은 밝히지 않고 수렴한다고 가정하고있다. 선행연구[4]에서는 다항분수계미분방정식의 주기경계값문제에 대한 풀이의 존재성을 론의하였고 라쁠라스변환을 리용하여 그린함수를 구성하였다. 이때 그 그린함수를 구성하는 무한합렬의 절대수렴성을 론의하지 않았다. 선행연구들에서 나타나고있는 이러한 부족점들은 다항분수계미분방정식의 리용에서 많은 제약을 주고있다.

론문에서는 먼저 $I+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I^{\alpha_i}$ 형태의 분수계적분연산자들이 임의의 $\lambda_i\in\mathbf{R}$ 와 임의의 $\alpha_i>0$ 에 대하여 련속가역이 되기 위한 조건을 해명하고 그 거꿀의 해석적표시를 얻는다. 이것은 $\left\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I^{\alpha_i}\right\|<1$ 일 때 연산자 $I+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i I^{\alpha_i}$ 이 련속가역이라는 거꿀연산자정리결과의 확장으로 된다. 이 표시를 리용하여 선형상결수다항분수계미분방정식의 주기경계값문제의 해석적풀이를 얻었다.

1. 미타그－레플레르함수에 의한 분수계적분연산자의 해석적거꿀표현식

함수

$$E_\alpha(z):=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)},\ \alpha>0$$

을 미타그－레플레르함수, 함수

$$E_{\alpha,\beta}(z):=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)},\ \alpha>0$$

을 일반화된 미타그－레플레르함수라고 부른다.

주의 1 미타그－레플레르함수와 일반화된 미타그－레플레르함수는 복소수평면의 전구역에서 절대수렴한다.

정의 [1] (여러변수 미타그－레플레르함수)

$$E_{(a_1,\cdots,a_n),b}(z_1, \cdots, z_n)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l_1,\cdots,l_n\ge 0}^{l_1+\cdots+l_n=k}\binom{k}{l_1, \cdots, l_n}\frac{\prod_{j=1}^{n} z_j^{l_j}}{\Gamma\left(b+\sum_{j=1}^{n} a_j l_j\right)} \tag{1}$$

이다. 여기서

$$\binom{k}{l_1, \cdots, l_n}=\frac{k!}{l_1!, \cdots, l_n!}\ (k,\ l_1, \cdots, l_n \in \mathbf{N}_0)$$

이다.

주의 2 여러변수 미타그－레플레르함수는 선행연구[2]에서 정의되였다. 그러나 무한합렬로 이루어진 이 함수의 $\mathbf{R}^n$ 에서의 절대수렴성을 찾아볼수 없다. 그러므로 여기서는 이 합렬의 절대수렴성을 고찰한다.

보조정리 $b,\ a_1, \cdots, a_n>0$ 일 때 여러변수 미타그－레플레르함수 (1)은 $\mathbf{R}^n$ 에서 절대수렴한다.

정리 1 임의의 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbf{R},\ \beta_1, \cdots, \beta_n \ge 0$ 에 대하여 다음의 사실이 성립한다.

연산자 $I+\sum_{r=1}^{n}\lambda_r I_{0+}^{\beta_r}: C[0,\ T]\to C[0,\ T]$ 는 련속가역연산자이다. 특히 $\forall h\in C[0,\ T]$,

$$\left(I+\sum_{r=1}^{n}\lambda_r I_{0+}^{\beta_r}\right)^{-1} h(t)=h(t)-\sum_{l=1}^{n}\lambda_l\int_0^t (t-s)^{\beta_l-1}E_{(\beta_1,\cdots,\beta_n),\beta_l}(-\lambda_1(t-s)^{\beta_1}, \cdots, -\lambda_n(t-s)^{\beta_n})h(s)ds$$

가 성립한다.

2. 최고계수가 1이하인 상결수다항분수계미분방정식의 반주기경계값문제의 해석적풀이법

반주기경계조건을 가진 상결수다항분수계미분방정식을 고찰하자.

$$L(D)u(t)=f(t)\ \ (t\in[0,\ T],\ T>0) \tag{2}$$

$$u(0)+u(T)=0 \tag{3}$$

여기서

$$L(D):=\lambda_n\, {}^cD_{0+}^{\alpha_n}+\lambda_{n-1}\, {}^cD_{0+}^{\alpha_{n-1}}+\cdots+\lambda_1\, {}^cD_{0+}^{\alpha_1}+\lambda_0\, {}^cD_{0+}^{\alpha_0}$$

$$\lambda_i\in\mathbf{R}\ (i=0,\ 1,\ \cdots,\ n),\ \lambda_n\ne 0,\ \sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k^2\ne 0,\ 0<\alpha_0<\alpha_1<\cdots<\alpha_{n-1}<\alpha_n<1$$

이다.

정리 2 $f:[0,\ T]\to\mathbf{R}$ 는 련속이라고 하자. $u(t)$ 가 식 (2), (3)의 풀이이면 $y(t)={}^cD_{0+}^{\alpha_n}u(t)$ 로 결정되는 $y(t)$ 는 $C[0,\ T]$ 에서 적분방정식

$$y(t)+\lambda_{n-1}I_{0+}^{\beta_{n-1}}y(t)+\cdots+\lambda_1 I_{0+}^{\beta_1}y(t)+\lambda_0 I_{0+}^{\beta_0}y(t)=f(t) \tag{4}$$

의 풀이이다. 거꾸로 $y(t)$ 가 적분방정식 (4)의 풀이이면 식 $u(t)=I_{0+}^{\alpha_n}y(t)-\frac{1}{2}I_{0+}^{\alpha_n}y(t)|_{t=T}$ 로 결정되는 $u(t)$ 는 식 (2), (3)의 풀이이다.

정리 2에 의하여 식 (2), (3)의 풀이를 구하는 문제는 결국 적분방정식 (4)의 풀이를 구하는 문제에 귀착된다.

이제 적분방정식 (4)의 해석적풀이를 구할수 있다. 정리 1에 의해 적분방정식 (4)의 풀이는 다음과 같이 표시된다.

$$y(t)=f(t)-\sum_{l=0}^{n-1}\lambda_l\int_0^t(t-s)^{\beta_l-1}E_{(\beta_0,\cdots,\beta_{n-1}),\ \beta_l}(-\lambda_0(t-s)^{\beta_0},\ \cdots,\ -\lambda_{n-1}(t-s)^{\beta_{n-1}})f(s)ds$$

이로부터 다음의 정리가 성립한다.

정리 3 $f:[0,\ T]\to\mathbf{R}$ 는 련속이라고 하자. 이때 식 (2), (3)의 풀이는 다음과 같이 표시된다.

$$u(t)=I_{0+}^{\alpha_n}f(t)-\sum_{l=0}^{n-1}\lambda_l I_{0+}^{\alpha_n}\int_0^t(t-s)^{\beta_l-1}E_{(\beta_0,\cdots,\beta_{n-1}),\ \beta_l}(-\lambda_0(t-s)^{\beta_0},\cdots,-\lambda_{n-1}(t-s)^{\beta_{n-1}})f(s)ds-$$

$$-\frac{1}{2}I_{0+}^{\alpha_n}f(T)+\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{n-1}\lambda_l I_{0+}^{\alpha_n}\int_0^t(t-s)^{\beta_l-1}E_{(\beta_0,\cdots,\beta_{n-1}),\beta_l}(-\lambda_0(t-s)^{\beta_0},\cdots,-\lambda_{n-1}(t-s)^{\beta_{n-1}})f(s)ds|_{t=T}$$

여기서 $\beta_i:=\alpha_n-\alpha_i\ \ (i=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$ 이다.

3. 한가지 상결수다항분수계미분방정식의 두점경계값문제의 해석적풀이

두점경계조건을 가진 상결수다항분수계미분방정식을 고찰하자.

$$L(D)u(t)=f(t),\ t\in[0,\ T],\ T>0 \tag{5}$$

$$u(0)=a,\ u(T)=b \tag{6}$$

여기서

$$L(D):={}^cD_{0+}^{\alpha_n}+\lambda_{n-1}{}^cD_{0+}^{\alpha_{n-1}}+\cdots+\lambda_1{}^cD_{0+}^{\alpha_1}+\lambda_0{}^cD_{0+}^{\alpha_0}$$

$$\lambda_i\in\mathbf{R}\ (i=0,\ 1,\ \cdots,\ n),\ \lambda_n\neq 0,\ \sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k^2\neq 0,\ 1<\alpha_0<\alpha_1<\cdots<\alpha_{n-1}<\alpha_n<2$$

이다.

정리 4 $f:[0,\ T]\to\mathbf{R}$ 를 련속이라고 하자. $u(t)$ 가 식 (5), (6)의 풀이이면 $y(t)={}^cD_{0+}^{\alpha_n}u(t)$ 로 결정되는 $y(t)$ 는 $C[0,\ T]$ 에서 적분방정식

$$y(t)+\lambda_{n-1}I_{0+}^{\beta_{n-1}}y(t)+\cdots+\lambda_1I_{0+}^{\beta_1}y(t)+\lambda_0I_{0+}^{\beta_0}y(t)=f(t) \tag{7}$$

의 풀이이다. 거꾸로 $y(t)$ 가 적분방정식 (7)의 풀이이면 식

$$u(t)=a+\frac{b-a-I_{0+}^{\alpha_n}y(t)|_{t=T}}{T}t+I_{0+}^{\alpha_n}y(t)$$

로 결정되는 $u(t)$ 는 식 (5), (6)의 풀이이다. 따라서 식 (5), (6)의 풀이를 구할수 있다.

정리 5 $f:[0,\ T]\to\mathbf{R}$ 를 련속이라고 하자. 이때 식 (5), (6)의 풀이는 다음과 같이 표시된다.

$$u(t)=a+\frac{b-a-I_{0+}^{\alpha_n}f(t)|_{t=T}}{T}t+$$

$$+\frac{t}{T}\sum_{l=0}^{n-1}\lambda_l I_{0+}^{\alpha_n}\int_0^t (t-s)^{\beta_l-1}E_{(\beta_0,\cdots,\beta_{n-1}),\beta_l}(-\lambda_0(t-s)^{\beta_0},\ \cdots,\ -\lambda_{n-1}(t-s)^{\beta_{n-1}})f(s)ds|_{t=T}+$$

$$+I_{0+}^{\alpha_n}f(t)-\sum_{l=0}^{n-1}\lambda_l I_{0+}^{\alpha_n}\int_0^t (t-s)^{\beta_l-1}E_{(\beta_0,\cdots,\beta_{n-1}),\beta_l}(-\lambda_0(t-s)^{\beta_0},\ \cdots,\ -\lambda_{n-1}(t-s)^{\beta_{n-1}})f(s)ds$$

여기서 $\beta_i:=\alpha_n-\alpha_i,\ i=0,1,\cdots,\ n-1$이다.

참 고 문 헌

[1] Y. Luchko et al.; Acta Math. Vietnam., 24, 207, 1999.

[2] A. A. Kilbas et al.; Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, Amsterdam, 49～67, 2006.

[3] Yizheng Hu et al.; Journal of Computational and Applied Mathematics, 215, 1, 2008.

[4] S. Choudhary et al.; Fractional Calculus and Applied Analysis, 17, 2, 333, 2014.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

The Analytic Solution Method of Multi-Term Fractional Differential Equations with Constant Coefficients with Two−Point Boundary Condition

Jong Song Guk, Ri Song Rim

In this paper, we obtain the analytic expression of the inverse of the fractional integral operator $I+\sum_{r=1}^{n}\lambda_r I_{0+}^{\beta_r}$ and the simple analytic solution expression of the boundary value problems associated with equations of the form ${}^cD_{0+}^{\alpha}u(t)+\sum_{r=1}^{n}\lambda_r\,{}^cD_{0+}^{\alpha_r}u(t)=f(t)$.

Key word: fractional calculus