김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체106(2017)년 제63권 제3호 Vol. 63 No. 3 JUCHE106(2017).

대중봉사계의 도착과 봉사속도조종에서 할인비용최량방략의 존재성

전 용 철

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《우리는 가까운 앞날에 전반적인 과학기술분야에서 세계를 디디고 올라설수 있다는 배심을 가지고 첨단돌파의 기적들을 련이어 창조하여야 합니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 40페지)

선행연구[1]에서는 뽜쏭도착과 지수분포봉사를 가지는 한봉사기구봉사계에서 입장과 봉사속도의 조종문제를 연구하였다. 조종기는 매 상태에서 봉사속도를 선택하며 매 상태에서 도착하는 요청들을 거절할수 있다.

선행연구[4]에서는 대중봉사계 M/M/1/K에서 계의 상태에 따라 요청들의 입장을 조종할 때의 작업주기에 대하여 연구하였으며 선행연구[3]에서는 요청들의 입장계획화문제에서 최량계획을 구하기 위한 국부탐색방법과 아래한계에 대하여 연구하였다.

론문에서는 할인비용을 최소화하는 도착속도와 봉사속도조종에서 최량성방정식과 최량방략의 존재성에 대하여 론의한다.

다음과 같은 구조를 가지는 대중봉사계를 생각하자.

요청들의 도착흐름은 도착속도가 λ인 뽜쏭흐름이고 요청들에 대한 봉사시간은 파라메터가 μ인 지수분포에 따르며 봉사계에 있는 요청수에 따라 도착속도와 봉사속도를 조종할수 있다고 가정한다.

봉사계에 있는 요청수를 i라고 할 때 도착속도는 $\lambda + a_1(i)$이고 봉사속도는 $\mu + a_2(i)$이다. $a(i) = (a_1(i),\ a_2(i))$로 놓는다.

도착속도와 봉사속도가 각각 $a_1(i)$, $a_2(i)$만큼 증가할 때 드는 비용은 $c(i,\ a(i))$이다. 여기서 $a_1(i)$, $a_2(i)$들은 모든 i에 대하여 각각 $[a_1^0,\ a_1^1]$, $[a_2^0,\ a_2^1]$에 속하며 $\mu + a_2(i) > \lambda + a_1(i) > 0$이라고 가정한다.

그리고 모든 $i \in S$에 대하여 $c(i,\ a(i)) \ge 0$이라고 가정한다. 할인인자는 α이다. 봉사계는 할인된 비용을 최소로 하려고 한다.

체계는 다음과 같은 마르꼬브결정과정으로 서술한다.

체계의 상태는 계에 있는 요청수 i이고 상태공간은 $S = \{0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$이며 작용은 $a(i) = (a_1(i),\ a_2(i))$이다. 작용공간은 $A(i) = [a_1^0,\ a_1^1] \times [a_2^0,\ a_2^1]$이다.

이행속도 $q(j \mid i,\ a(i))$는 다음과 같다.

$a(i) \in A(0)\ \ (i = 0)$에 대하여

$$q(1 \mid 0,\ a(0)) = -q(0 \mid 0,\ a(0)) = \lambda + a_1(0),\ \ q(j \mid 0,\ a(0)) = 0,\ \ j \ge 2$$

이고 $a(i) \in A(i)\ \ (i \ge 1)$에 대하여

$$q(j\,|\,i,\ a(i))=\begin{cases}\mu+a_2(i), & j=i-1\\ -(\lambda+\mu)-a_1(i)-a_2(i), & j=i\\ \lambda+a_1(i), & j=i+1\\ 0, & |\,j-i\,|>1\ .\end{cases}$$

$K=\{(i,\ a(i)):i\in S,\ a(i)\in A(i)\}$ 로 놓는다. 매 $i\in S$ 에 대하여 $q_i(a)=-q(i\,|\,i,\ a)$ 라고 하면 $q^*(i)=\sup_{a\in A(i)} q_i(a)<\infty$ 를 만족시킨다.

$\{S,\ A(i),\ q(j\,|\,i,\ a(i)),\ c(i,\ a(i))\}$ 가 주어졌을 때 시간 t 에 따르는 상태 i 의 변화를 나타내는 과정 $x(t)$ 는 마르꼬브결정과정이다.

초기상태가 $i\in S$ 일 때 방략 $\pi=(\pi_t)\in\Pi$ 의 기대할인비용은 다음과 같이 정의된다.

$$J_\alpha(i,\ \pi)=\mathrm{E}\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t}c(x(t),\ \pi_t)dt\right]$$

할인최량화문제에서 최량값함수는 모든 초기상태 $i\in S$ 에 대하여 $J_\alpha^*(i)=\inf_{\pi\in\Pi} J_\alpha(i,\ \pi)$ 이다.

$\varepsilon\ge 0$ 이 주어졌을 때 마르꼬브방략 $\pi^*\in\Pi$ 의 할인비용 ε −최량성은

$$J_\alpha(i,\ \pi^*)\le J_\alpha^*(i)+\varepsilon,\quad i\in S$$

라는것을 의미한다.

$\varepsilon=0$ 일 때 우의 부등식이 성립되면 즉 $J_\alpha(i,\ \pi^*)=J_\alpha^*(i)$, $i\in S$ 이면 $\pi^*\in\Pi$ 를 할인비용최량방략(또는 $\alpha-$할인비용최량방략)이라고 부른다.

$\zeta(i,\ u(i),\ a(i))=u(i-1)(\mu+a_2(i))+u(i+1)(\lambda+a_1(i))$ 라고 하자.

정리 1 모든 $i\in S$ 에 대하여 $J_\alpha^*(i)<\infty$ 라고 가정하면 다음의 두 방정식은 동등하다.

$$J_\alpha^*(i)=\inf_{a\in A(i)}\left\{\frac{c(i,\ a)}{\alpha+q_i(a)}+\frac{1}{\alpha+q_i(a)}\zeta(i,\ J_\alpha^*(i),\ a(i))\right\}\tag{1}$$

$$\alpha J_\alpha^*(i)=\inf_{a\in A(i)}\{c(i,\ a)-J_\alpha^*(i)q_i(a)+\zeta(i,\ J_\alpha^*(i),\ a(i))\}\tag{2}$$

증명 J_α^* 이 방정식 (1)을 만족시킨다고 가정하고 임의의 $i\in S$ 와 $\varepsilon>0$ 을 취하면 ε 에 관계되는 적당한 $f\in F$ 가 있어서 다음의 식이 성립된다.

$$J_\alpha^*(i)\ge\frac{c(i,\ f)}{\alpha+q_i(f)}+\frac{1}{\alpha+q_i(f)}\zeta(i,\ J_\alpha^*(i),\ f(i))-\frac{\varepsilon}{\alpha+q_i(f)}$$

이로부터

$$|\,J_\alpha^*(i)q_i(f)\,|\le|\,J_\alpha^*(i)\,|\,q^*(i)<\infty\tag{3}$$

라는것을 고려하면 다음의 식이 성립된다.

$$\alpha J_\alpha^*(i)\ge c(i,\ f)-J_\alpha^*(i)q_i(f)+\zeta(i,\ J_\alpha^*(i),\ f(i))-\varepsilon\ge$$
$$\ge\inf_{a\in A(i)}\{c(i,\ f)-J_\alpha^*(i)q_i(f)+\zeta(i,\ J_\alpha^*(i),\ f(i))\}-\varepsilon$$

그러므로 $\varepsilon\to 0$ 으로 놓으면 다음과 같다.

$$\alpha J_\alpha^*(i)\ge\inf_{a\in A(i)}\{c(i,\ a)-J_\alpha^*(i)q_i(a)+\zeta(i,\ J_\alpha^*,\ a)\}\tag{4}$$

한편 식 (1)로부터 $J_\alpha^*(i) \le \frac{c(i,\ a)}{\alpha + q_i(a)} + \frac{1}{\alpha + q_i(a)}\zeta(i,\ J_\alpha^*(i),\ a(i))$ 가 성립된다.

이로부터 식 (3)을 다시 고려하면 $\alpha J_\alpha^*(i) \le c(i,\ a) - J_\alpha^*(i) q_i(a) + \zeta(i,\ J_\alpha^*(i),\ a(i))$ 가 성립된다는것을 알수 있다.

따라서 $\alpha J_\alpha^*(i) \le \inf\limits_{a\in A(i)} \{c(i,\ a) - J_\alpha^*(i) q_i(a) + \zeta(i,\ J_\alpha^*(i),\ a(i))\}$ 이다.

이 부등식과 식 (4)에 의하여 방정식 (2)가 나온다.

식 (2)로부터 식 (1)이 나온다는것도 류사하게 증명할수 있다.(증명끝)

정리 1에서는 최량할인비용 $J_\alpha^*(i)$ 가 최량성방정식 (1) 또는 (2)를 만족시킨다고 가정하였다.

이제 $J_\alpha^*(i)$ 가 최량성방정식 (1)을 만족시킨다는것과 할인비용 ε —최량방략의 존재성을 론의하자.

이때 정상방략들의 모임을 F 로 표시한다.

보조정리 1 [2] 모든 $f \in F$ 와 $i \in S$ 에 대하여 다음의 사실들이 성립된다.

① $J_\alpha(i,\ f)$ 는 $u(i) = \frac{c(i,\ f)}{\alpha + q_i(f)} + \frac{1}{\alpha + q_i(f)}\zeta(i,\ u(i),\ f(i))$ 의 부아닌 최소풀이이다.

② S 우의 부아닌 함수 u 가 $u(i) \ge \frac{c(i,\ f)}{\alpha + q_i(f)} + \frac{1}{\alpha + q_i(f)}\zeta(i,\ u(i),\ f(i))$ 를 만족시키면 $u(i) \ge J_\alpha(i,\ f)$ 가 성립된다.

임의의 $\pi \in \Pi$ 에 대하여 이행함수 $p_\pi(s,\ i,\ t,\ j)$ 를 가지는 마르꼬브과정 $x(t)$ 에서 량 $\tau_1 = \inf\{t > 0 : x(t) \ne x(0)\}$ 을 생각하자.

τ_1 을 초기상태 $x(0)$ 으로부터의 첫 비약순간이라고 할 때 다음의 사실이 성립된다.

보조정리 2 [5] 임의의 $\pi \in \Pi$, 초기상태 $x(0) = i \in S$, S 우의 부아닌 함수 u 에 대하여 다음의 식들이 성립된다.

① $P\{\tau_1 > t\} = \exp\left[\int_0^t q(i\,|\,i,\ \pi_\upsilon) d\upsilon\right],\ t \ge 0$

② $\mathrm{E}[e^{-\alpha\tau_1} u(x(\tau_1))] = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \exp\left[\int_0^t q(i\,|\,i,\ \pi_\upsilon) d\upsilon\right] \zeta(i,\ u(i),\ \pi_t(i)) dt$

정리 2 ① 함수 $J_\alpha^*(i)$ 는 할인비용최량성방정식 (1)을 만족시킨다. 즉 다음의 식이 성립된다.

$$J_\alpha^*(i) = \inf_{a\in A(i)}\left\{\frac{c(i,\ a)}{\alpha + q_i(a)} + \frac{1}{\alpha + q_i(a)}\zeta(i,\ J_\alpha^*(i),\ a(i))\right\},\ i \in S$$

② 임의의 $\varepsilon > 0$ 에 대하여 할인비용 ε —최량정상방략이 존재한다.

증명 ①과 ②를 동시에 증명하자.

임의의 방략 $\pi = (\pi_t) \in \Pi$ 와 임의의 초기상태 $i \in S$ 에 대하여 $J_\alpha(i,\ \pi)$ 의 정의에 의하여 다음의 식이 성립된다.

$$J_\alpha(i,\ \pi) = \mathrm{E}\left[\int_0^{\tau_1} e^{-\alpha t} c(x(t),\ \pi_t) dt + \int_{\tau_1}^\infty e^{-\alpha t} c(x(t),\ \pi_t) dt\right] \tag{5}$$

τ_1 이 방략 $\pi=(\pi_t)\in\Pi$ 밑에서 i 에 있는 유지시간이므로 보조정리 2에 의하여

$$\mathrm{E}\left[\int_0^{\tau_1} e^{-\alpha t}c(x(t),\ \pi_t)dt\right]=\int_0^{\infty}\exp\left[-\alpha t+\int_0^t q(i\,|\,i,\ \pi_\upsilon)d\upsilon\right]c(x(t),\ \pi_t)dt\,. \tag{6}$$

임의의 $t_0\ge 0$ 에 대하여 $\pi_t^{t_0}(\cdot\,|\,i)=\pi_{t_0+t}(\cdot\,|\,i)$ 로 정의되는 π^{t_0} 을 생각하면 다음의 식들이 성립된다.

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}\left[\int_{\tau_1}^{\infty} e^{-\alpha t}c(x(t),\ \pi_t)dt\right]=\mathrm{E}\left[\int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau_1}e^{-\alpha t}c(x(\tau_1+t),\ \pi_{\tau_1+t})dt\right]=\mathrm{E}[e^{-\alpha\tau_1}J_\alpha(x(\tau_1),\ \pi^{\tau_1})]\ge\\ &\ge \mathrm{E}[e^{-\alpha\tau_1}J_\alpha^*(x(\tau_1))]=\int_0^\infty e^{-\alpha t}\exp\left(\int_0^t q(i\,|\,i,\ \pi_\upsilon)d\upsilon\right)\zeta(i,\ J_\alpha^*,\ \pi_t)dt\end{aligned} \tag{7}$$

식 (5)−(7)로부터 다음의 식이 성립된다.

$$\begin{aligned}J_\alpha(i,\ \pi)&\ge\int_0^\infty\exp\left(-\alpha t+\int_0^t q(i\,|\,i,\ \pi_\upsilon)d\upsilon\right)(c(i,\ \pi_t)+\zeta(i,\ J_\alpha^*,\ \pi_t))dt=\\ &=\int_0^\infty\int_{A(i)}\exp\left(-\alpha t+\int_0^t q(i\,|\,i,\ \pi_\upsilon)d\upsilon\right)(c(i,\ a)+\zeta(i,\ J_\alpha^*,\ a))\pi_t(da\,|\,i)dt\end{aligned} \tag{8}$$

이제

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\int_{A(i)}\exp\left(-\alpha t+\int_0^t q(i\,|\,i,\ \pi_\upsilon)d\upsilon\right)(\alpha+q_i(a))\pi_t(da\,|\,i)dt=\\ &=\int_0^\infty\int_{A(i)}\exp\left(-\alpha t+\int_0^t q(i\,|\,i,\ \pi_\upsilon)d\upsilon\right)(\alpha-q(i\,|\,i,\ \pi_t))dt=1\end{aligned}$$

이라는것을 고려하면 식 (8)에 의하여 다음의 식이 성립된다.

$$J_\alpha(i,\ \pi)\ge\inf_{a\in A(i)}\left\{\frac{c(i,\ a)}{\alpha+q_i(a)}+\frac{1}{\alpha+q_i(a)}\zeta(i,\ J_\alpha^*,\ a)\right\}$$

π 가 임의로 선택된것이므로

$$J_\alpha^*(i)\ge\inf_{a\in A(i)}\left\{\frac{c(i,\ a)}{\alpha+q_i(a)}+\frac{1}{\alpha+q_i(a)}\zeta(i,\ J_\alpha^*,\ a)\right\}.$$

한편 임의로 $\varepsilon>0$ 을 고정하고 적당한 $L>0$ 을 취하여 매 $i\in S$ 에 대하여

$$0<\alpha\varepsilon_i\le\min\{\alpha\varepsilon,\ L\}$$

인 ε_i 를 생각하면 적당한 $f_\varepsilon\in F$ 가 있어서 다음의 식이 성립된다.

$$J_\alpha^*(i)\ge\inf_{a\in A(i)}\left\{\frac{c(i,\ a)}{\alpha+q_i(a)}+\frac{1}{\alpha+q_i(a)}\zeta(i,\ J_\alpha^*,\ a)\right\}\ge\frac{c(i,\ f_\varepsilon)-\alpha\varepsilon_i}{\alpha+q_i(f_\varepsilon)}+\frac{1}{\alpha+q_i(f_\varepsilon)}\zeta(i,\ J_\alpha^*,\ f_\varepsilon)$$

$c(i,\ f_\varepsilon(i))-\alpha\varepsilon_i\ge 0$ 이므로 보조정리 1의 ②에 의하여 비용 $c(i,\ f_\varepsilon(i))-\alpha\varepsilon_i$ 에 관한 기대할인비용이 $J_\alpha^*(i)$ 보다 크지 않다는것을 알수 있다.

따라서 다음의 식이 성립된다.

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t}\mathrm{E}(c(x(t),\ f_\varepsilon)-\alpha\varepsilon_{x(t)})dt\le J_\alpha^*(i)\,,\quad i\in S$$

그리고 모든 $i \in S$ 에 대하여 $\varepsilon_i \le \varepsilon$ 이므로 $\alpha \int_0^\infty e^{-\alpha t} \mathrm{E}(\varepsilon_{x(t)}) dt \le \varepsilon$ 이 성립된다.

이때 $J_\alpha^*(i) \ge J_\alpha(i,\ f_\varepsilon) - \varepsilon \ge J_\alpha^*(i) - \varepsilon$, $i \in S$ 가 성립되므로

$$J_\alpha^*(i) \ge \inf_{a \in A(i)} \left\{ \frac{c(i,\ a)}{\alpha + q_i(a)} + \frac{1}{\alpha + q_i(a)} \zeta(i,\ J_\alpha^*,\ a) \right\} \ge \frac{c(i,\ f_\varepsilon) - \alpha \varepsilon_i}{\alpha + q_i(f_\varepsilon)} + \frac{1}{\alpha + q_i(f_\varepsilon)} \zeta(i,\ J_\alpha^*,\ f_\varepsilon) \ge$$

$$\ge \frac{c(i,\ f_\varepsilon) - \alpha \varepsilon_i}{\alpha + q_i(f_\varepsilon)} + \frac{1}{\alpha + q_i(f_\varepsilon)} [J_\alpha(i-1,\ f_\varepsilon)(\mu + f_{\varepsilon 2}(i)) + J_\alpha(i+1,\ f_\varepsilon)(\lambda + f_{\varepsilon 1}(i))] =$$

$$= J_\alpha(i,\ f_\varepsilon) - \varepsilon \ge J_\alpha^*(i) - \varepsilon.$$

이로부터 정리의 주장들이 성립된다는것을 알수 있다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] K. M. Adusumilli et al.; Queueing Syst., 66, 2, 131, 2010.

[2] W. J. Anderson; Continuous-Time Markov Chains, Springer, 37～75, 1991.

[3] S. Ceschia et al.; Comput. Oper. Res., 38, 1452, 2011.

[4] A. A. Hanbali et al.; Oper. Res. Lett., 38, 1, 2010.

[5] G. G. Yin et al.; Continuous-Time Markov Chains and Applications, Springer, 29～65, 1998.

주체105(2016)년 11월 5일 원고접수

Existence of Discounted-Cost Optimal Policies in Arrival and Service Rates Control of a Queue

Jon Yong Chol

We considered a joint control problem of the arrival and service rates to minimize nonnegative discounted-cost for the queue M/M/1.

When arrival and service rates took the continuous values, we proved the existence of optimal stationary policies.

Key words: queue, control