김일성종합대학학보 주체110(2021)년
수 학 제67권 제3호

한가지 데까르뜨적그라프에서의 생성나무 개수공식에 대한 간단한 증명

우승식, 김원

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《나라의 과학기술을 세계적수준에 올려세우자면 발전된 과학기술을 받아들이는것과 함께 새로운 과학기술분야를 개척하고 그 성과를 인민경제에 적극 받아들여야 합니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제11권 138~139페지)

그라프에서의 생성나무개수평가문제는 망의 안정성평가를 비롯한 여러 분야에서 리론실천적으로 많이 제기된다.

두 그라프 $G_1=(V_1,\ E_1)$, $G_2=(V_2,\ R_2)$에 대하여 다음과 같은 그라프를 G_1과 G_2의 데까르뜨적그라프라고 부르고 $G_1\square G_2=(V,\ E)$로 표시한다.

① $G_1\square G_2$의 정점모임은 G_1와 G_2의 정점모임 V_1와 V_2의 데까르뜨적 $V=V_1\times V_2$이다.

② $G_1\square G_2$의 두 정점 vu, $v'u'$ $(v,\ v'\in V_1,\ \ u,\ u'\in V_2)$ 사이의 릉은 다음의 두가지 조건중 어느 하나가 성립될 때 존재한다.

ㄱ) $\{v,\ v'\}\in E_1,\ u=u'$

ㄴ) $\{u,\ u'\}\in E_2,\ v=v'$

그라프 G의 두 정점 u, v 사이 릉의 개수를 $l_G(u,\ v)$로 표시하고 정점 v에 이웃하고있는 릉의 개수를 $d_G(v)$로 표시한다. 이때 $n-$정점다중그라프 G에 대하여

$$l_{ij}:=\begin{cases} d_G(v_i), & i=j \\ l_G(v_i,\ v_j), & i\neq j \end{cases}$$

와 같은 n차행렬 $L(G)=(l_{ij})_{n,\ n}$을 G의 키르히호프행렬이라고 부른다.

선행연구[3, 5]에서는 행렬나무정리 즉 임의의 $n-$정점다중그라프 G에 대하여 G의 키르히호프행렬의 임의의 주대각선원소에 대한 여소행렬식은 서로 같으며 그 값은 G의 생성나무개수와 같다는것을 증명하였다. 또한 고유값을 리용한 행렬나무정리 즉 임의의 단순무방향그라프 G의 키르히호프행렬의 고유값에 의하여 G의 생성나무개수를 평가하는 방법을 제기하였다. 선행연구[4]에서는 조합적방법으로 완전그라프와 완전2조그라프의 표식붙은 결합그라프의 생성나무개수를 평가하였으며 고유값을 리용한 행렬나무정리를 리용하여 선행연구[1, 5]에서는 완전그라프와 완전2조그라프, 완전다조그라프의 생성나무개수를 평가하였다. 선행연구[2]에서는 표식붙은 데까르뜨적그라프 $K_n\square K_{n_1,\ n_2,\cdots,\ n_t}$의 생성나무개수를 행렬나무정리를 리용하여 평가하였다. 그러나 이 방법은 매 원소들이 파라메터로 되여있는 행렬식을 계산하여야 하므로 매우 복잡하고 계산량이 많은 결함이 있다.

키르히호프행렬의 구조를 잘 분석하여 그 행렬의 고유값으로 될수 있는 파라메터들을 판단하고 키르히호프행렬의 매 대각선원소들에서 이 값을 던 행렬의 위수를 평가한 다음 그로부터 그 고유값의 다중도까지 결정하여 모든 고유값들을 찾는 방법으로 그라프의 생성나무개수를 계산하면 계산량을 훨씬 줄일수 있다.

우리는 고유값을 리용한 행렬나무정리를 리용하여 데까르뜨적그라프 $K_n\square K_{p,\,q}$ 의 생성나무개수를 평가하고 그것을 일반화하여 데까르뜨적그라프 $K_n\square K_{n_1,\,n_2,\cdots,\,n_t}$ 에서의 생성나무개수를 보다 간단히 유도한다.

그라프 G 의 생성나무개수를 $\upsilon(G)$ 로 표시한다.

보조정리 1 [3, 5] G 를 단순무방향그라프, L 을 n 차행렬로서 G 의 키르히호프행렬, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 을 L 의 고유값들이라고 하자. 여기서 $\lambda_n = 0$ 이다.

이때 G 의 생성나무개수는 $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \cdots \cdot \lambda_{n-1} / n$ 이다.

보조정리 2 n 차행렬 A 에 대하여 행렬 $A - \lambda_0 E$ 의 위수가 $m(m<n)$ 이면 $\lambda = \lambda_0$ 은 A 의 $(n-m)$ 중고유값이다.

보조정리 3 주대각선에 블로크소행렬이 놓인 행렬의 위수는 매개 블로크소행렬의 위수의 합과 같다. 즉 $A = \begin{bmatrix} B_1 \vdots\ 0 \vdots \cdots \vdots 0 \\ 0 \vdots B_2 \vdots \cdots \vdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 \vdots\ 0 \vdots \cdots \vdots B_t \end{bmatrix}$ 일 때 $\mathrm{rank}(A) = \sum_{i=1}^{t} \mathrm{rank}(B_i)$ 이다.

먼저 완전그라프 K_n 과 완전2조그라프 $K_{p,\,q}$ 의 데까르뜨적그라프 $K_n\square K_{p,\,q}$ 의 생성나무개수를 평가하자.

정리 1 데까르뜨적그라프 $K_n\square K_{p,\,q}$ 의 생성나무개수는 다음과 같다.

$$\upsilon(K_n\square K_{p,\,q}) = n^{n-2} p^{q-1} q^{p-1} (n+p)^{(n-1)(q-1)} (n+q)^{(n-1)(p-1)} (n+p+q)^{n-1}$$

$s := n+p+q$ 라고 하면 다음의 공식이 나오는데 이것은 선행연구[2]의 공식과 일치한다.

$$\upsilon(K_n\square K_{p,\,q}) = \upsilon(K_n)\upsilon(K_{p,\,q})(s(s-p)^{p-1}(s-q)^{q-1})^{n-1}$$

다음 정리 1의 공식을 일반화하여 완전그라프 K_n 과 완전다조그라프 $K_{n_1,\,n_2,\cdots,\,n_t}$ 의 데까르뜨적그라프 $K_n\square K_{n_1,\,n_2,\cdots,\,n_t}$ 에서의 생성나무개수공식을 유도하자.

$m = n_1 + n_2 + \cdots + n_t$, $m_i = \sum_{j=1,\ j\neq i}^{t} n_j = m - n_i$, $i = \overline{1,\ t}$ 로 놓자.

정리 2 데까르뜨적그라프 $K_n\square K_{n_1,\,n_2,\cdots,\,n_t}$ 의 생성나무개수는 다음과 같다.

$$\upsilon(K_n\square K_{n_1,\,n_2,\,\cdots,\,n_t}) = (m+n)^{(n-1)(t-1)} \prod_{i=1}^{t} (m_i+n)^{(n-1)(n_i-1)} \upsilon(K_n)\upsilon(K_{n_1,\,n_2,\,\cdots,\,n_t})$$

증명 데까르뜨적그라프 $K_n\square K_{n_1,\,n_2,\,\cdots,\,n_t}$ 의 정점들을 다음과 같이 순서화하자.

K_n 의 정점모임은 $\{x_1,\ x_2, \cdots, x_n\}$ 으로 순서화한다. $K_{n_1,\,n_2,\cdots,\,n_t}$ 의 정점모임은

$$\{y_{1,1},\ y_{1,2}, \cdots,\ y_{1,n_1};\ y_{2,1},\ y_{2,2}, \cdots,\ y_{2,n_2};\cdots;\ y_{t,1},\ y_{t,2}, \cdots,\ y_{t,n_t}\}$$

으로 순서화하고 두 순서화된 정점모임의 직적으로 된 $n(n_1+n_2+\cdots+n_t) = nm$ 개의 정점들을 사전식순서로 놓는다.

이 정점모임을 $V_{i,\ j} = \{x_i y_{j,1},\ x_i y_{j,2},\ \cdots,\ x_i y_{j,n_j}\}$, $i = 1,\ \cdots,\ n,\ \ j = 1,\ \cdots,\ t$ 로 분할하자.

그러면 $G_2 := K_n\square K_{n_1,\,n_2,\,\cdots,\,n_t}$ 의 키르히호프행렬은 nm 차행렬로서 정점부분모임

$$V_{i,\ j},\quad i = 1, \cdots, n,\ \ j = 1, \cdots, t$$

들에 대응하는 행블로크들과 렬블로크들로 표시하면 다음과 같다.

$$L(G_2)=\begin{bmatrix}
a_1''E_{n_1} & -J_{n_1,n_2} & \cdots & -J_{n_1,n_t} & -E_{n_1} & 0_{n_1,n_2} & \cdots & 0_{n_1,n_t} & \cdots & -E_{n_1} & 0_{n_1,n_2} & \cdots & 0_{n_1,n_t}\\
-J_{n_2,n_1} & a_2''E_{n_2} & \cdots & -J_{n_2,n_t} & 0_{n_2,n_1} & -E_{n_2} & \cdots & 0_{n_2,n_t} & \cdots & 0_{n_2,n_1} & -E_{n_2} & \cdots & 0_{n_2,n_t}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
-J_{n_t,n_1} & -J_{n_t,n_2} & \cdots & a_t''E_{n_t} & 0_{n_t,n_1} & 0_{n_t,n_2} & \cdots & -E_{n_t} & \cdots & 0_{n_t,n_1} & 0_{n_t,n_2} & \cdots & -E_{n_t}\\
-E_{n_1} & 0_{n_1,n_2} & \cdots & 0_{n_1,n_t} & a_1''E_{n_1} & -J_{n_1,n_2} & \cdots & -J_{n_1,n_t} & \cdots & -E_{n_1} & 0_{n_1,n_2} & \cdots & 0_{n_1,n_t}\\
0_{n_2,n_1} & -E_{n_2} & \cdots & 0_{n_2,n_t} & -J_{n_2,n_1} & a_2''E_{n_2} & \cdots & -J_{n_2,n_t} & \cdots & 0_{n_2,n_1} & -E_{n_2} & \cdots & 0_{n_2,n_t}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0_{n_t,n_1} & 0_{n_t,n_2} & \cdots & -E_{n_t} & -J_{n_t,n_1} & -J_{n_t,n_2} & \cdots & a_t''E_{n_t} & \cdots & 0_{n_t,n_1} & 0_{n_t,n_2} & \cdots & -E_{n_t}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
-E_{n_1} & 0_{n_1,n_2} & \cdots & 0_{n_1,n_t} & -E_{n_1} & 0_{n_1,n_2} & \cdots & 0_{n_1,n_t} & \cdots & a_1''E_{n_1} & -J_{n_1,n_2} & \cdots & -J_{n_1,n_t}\\
0_{n_2,n_1} & -E_{n_2} & \cdots & 0_{n_2,n_t} & 0_{n_2,n_1} & -E_{n_2} & \cdots & 0_{n_2,n_t} & \cdots & -J_{n_2,n_1} & a_2''E_{n_2} & \cdots & -J_{n_2,n_t}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0_{n_t,n_1} & 0_{n_t,n_2} & \cdots & -E_{n_t} & 0_{n_t,n_1} & 0_{n_t,n_2} & \cdots & -E_{n_t} & \cdots & -J_{n_t,n_1} & -J_{n_t,n_2} & \cdots & a_t''E_{n_t}
\end{bmatrix}$$

여기서 $a_j''=m_j+n-1,\ \ j=1,\cdots,t$ 이고 E_p 는 p 차단위행렬, $a_j''E_p$ 는 주대각선원소들이 모두 a_j'' 이고 나머지원소들은 모두 령인 p 차소행렬이다. 그리고 $-J_{p,q}$ 는 모든 원소들이 -1인 $p\times q$ 형소행렬, $0_{p,q}$ 는 모든 원소들이 0인 $p\times q$ 형소행렬이다.

이 행렬은 nm 차행렬이므로 nm 개의 고유값들을 가지는데 그중 1개는 령이다.

이제 이 $nm-1$ 개의 고유값들을 구하자.

먼저 행렬 $L_1^{(1)}(G_2):=L(G_2)-(m_1+n)E_{nm}$ 을 생각하자.

이 행렬에서 정점부분모임 $V_{1,1}$ 에 대응하는 행블로크에 -1 배하여 $n-1$ 개의 정점부분모임 $V_{i,1},\ i=2,\cdots,n$ 에 대응하는 행블로크들 매개에 더하면 $n-1$ 개의 정점부분모임 $V_{i,1},\ i=2,\ \cdots,\ n$ 에 대응하는 행블로크들 매개에 들어있는 n_1 개의 행들은 같으므로 $L_1^{(1)}(G_2)$ 는 위수가 기껏 $nm-(n-1)(n_1-1)$ 이며 $\lambda_1^{(1)}(G_2)\ =m_1+n$ 은 $L(G_2)$ 의 $(n-1)(n_1-1)$ 중이상의 고유값이다.

마찬가지로 매 $j\ (2\le j\le t)$ 에 대하여 행렬 $L_j^{(1)}(G_2):=L(G_2)-(m_j+n)E_{nm}$ 을 생각하면 $\lambda_j^{(1)}(G_2)=m_j+n$ 은 $L(G_2)$ 의 $(n-1)(n_j-1)$ 중이상의 고유값이다.

다음으로 행렬 $L_1^{(2)}(G_2):=L(G_2)-m_1E_{nm}$ 을 생각하자.

이 행렬에서 정점부분모임 $V_{i,1},\ i=1,\cdots,n$ 에 대응하는 n개의 행블로크들을 더하면

$$(0_{n_1}\ -J_{n_1,n_2}\ \cdots\ -J_{n_1,n_t}\ 0_{n_1}\ -J_{n_1,n_2}\ \cdots\ -J_{n_1,n_t}\ \cdots\ -E_{n_1}\ -J_{n_1,n_2}\ \cdots\ -J_{n_1,n_t})$$

가 얻어지는데 간단한 변환에 의해 이 행블로크로부터 n_1-1 개의 령행들이 얻어지므로 $\lambda_1^{(2)}(G_2)=m_1$ 은 $L(G_2)$ 의 (n_1-1) 중이상의 고유값이다. 마찬가지로 매 $j\ (2\le j\le t)$ 에 대하여 행렬 $L_j^{(2)}(G_2):=L-m_jE_{mn}$ 을 생각하면 $\lambda_j^{(2)}(G_2)=m_j$ 는 $L(G_2)$ 의 (n_j-1) 중이상의 고유값이다.

다음으로 행렬 $L^{(3)}(G_2):=L(G_2)-(m+n)E_{mn}$을 생각하자.

이제 $V_{1,1}$에 대응하는 행블로크에 -1배하여 $V_{i,1},\ i=2,\cdots,n$에 대응하는 행블로크들 매개에 더하고 $V_{1,2}$에 대응하는 행블로크에 -1배하여 $V_{i,2},\ i=2,\cdots,n$에 대응하는 행블로크들 매개에 더한 다음 $V_{1,t}$에 대응하는 행블로크에 -1배하여 $V_{i,t},\ i=2,\cdots,n$에 대응하는 행블로크들 매개에 더한다. 그리고 $V_{i,1},\ i=2,\cdots,n$에 대응하는 렬블로크 매개를 $V_{1,1}$에 대응하는 렬블로크에 더하고 $V_{i,2},\ i=2,\cdots,n$에 대응하는 렬블로크 매개를 $V_{1,2}$에 대응하는 렬블로크에 더하며 마지막으로 매 $V_{i,t},\ i=2,\cdots,n$에 대응하는 렬블로크를 $V_{1,t}$에 대응하는 렬블로크 매개에 더한다.

이 행렬에서 $n-1$개의 정점모임조 $(V_{i,1}, V_{i,2},\cdots,\ V_{i,2t}),\ i=2,\ \cdots,\ n$에 대응하는 행블로크조들 매개에는 주대각선부분에만 꼭 같은 m차블로크소행렬들

$$\begin{bmatrix} -n_1E_{n_1} & -J_{n_1,n_2} & \cdots & -J_{n_1,n_t} \\ -J_{n_2,n_1} & -n_2E_{n_2} & \cdots & -J_{n_2,n_t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -J_{n_t,n_1} & -J_{n_t,n_2} & \cdots & -n_tE_{n_t} \end{bmatrix}$$

이 놓여있고 나머지는 모두 령이다. 그런데 이 블로크소행렬들에서 첫 행블로크에 들어있는 행들을 모두 더하면 모든 원소가 $-n_1$인 행이 얻어지고 또 두번째 행블로크에 들어있는 행들을 모두 더하면 모든 원소가 $-n_2$인 행이 얻어지며 마지막으로 t번째 행블로크에 있는 행들을 더하면 $-n_t$인 행이 얻어지므로 이 블로크소행렬의 위수는 기껏 $m-(t-1)$이다. 따라서 $L^{(3)}(G_2)$의 위수는 보조정리 3에 의하여 기껏 $nm-(t-1)(n-1)$이고 $\lambda^{(3)}(G_2)=n+m$은 $L(G_2)$의 $(t-1)(n-1)$중이상 고유값이다.

다음 행렬 $L^{(4)}(G_2):=L(G_2)-nE_{mn}$을 생각하자.

$L^{(3)}(G_2)$에서와 같은 변환을 실시하면 얻어진 행렬에서 $n-1$개의 정점모임조 $(V_{i,1}, V_{i,2},\cdots,\ V_{i,2t}),\ i=2,\cdots,n$에 대응하는 행블로크들 매개에는 주대각선부분에만 꼭 같은 m차블로크소행렬들 $\begin{bmatrix} m_1E_{n_1} & -J_{n_1,n_2} & \cdots & -J_{n_1,n_t} \\ -J_{n_2,n_1} & m_2E_{n_2} & \cdots & -J_{n_2,n_t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -J_{n_t,n_1} & -J_{n_t,n_2} & \cdots & m_tE_{n_t} \end{bmatrix}$이 놓여있고 나머지는 모두 령이다.

그런데 이 블로크소행렬에 들어있는 행들을 모두 더하면 모든 원소가 0인 행이 얻어지므로 이 블로크소행렬의 위수는 기껏 $m-1$이다. 따라서 보조정리 3에 의하여 $L^{(4)}(G_2)$의 위수는 기껏 $nm-(n-1)$이고 $\lambda^{(4)}(G_2)=n$은 $L(G_2)$의 $(n-1)$중이상 고유값이다.

따라서 $L^{(5)}(G_2)$의 위수는 기껏 $nm-(t-1)$이고 $\lambda^{(5)}(G_2)=m$은 $L(G_2)$의 $(t-1)$중이상의 고유값이다.

지금까지 얻어진 고유값은 중복도까지 고려하면

$$\sum_{j=1}^{t}(n-1)(n_j-1)+\sum_{j=1}^{t}(n_j-1)+(n-1)(t-1)+(n-1)+(t-1)=nm-1$$

이므로 $L(G_2)$의 령이 아닌 고유값들이 모두 구해졌다.

결국 데까르뜨적그라프 $G_2 = K_n \square K_{n_1, n_2, \cdots, n_t}$의 생성나무개수는 보조정리 1에 의하여

$$\upsilon(G_2) = \upsilon(K_n \square K_{n_1, n_2, \cdots, n_t}) = \left(\prod_{j=1}^{t} (m_j + n)^{(n-1)(n_j-1)} \cdot \prod_{j=1}^{t} m_j^{n_j - 1} \cdot (n+m)^{(t-1)(n-1)} \cdot n^{n-1} \cdot m^{t-1} \right) \cdot \frac{1}{nm} =$$

$$= (m+n)^{(n-1)(t-1)} \prod_{j=1}^{t} (m_j + n)^{(n-1)(n_j-1)} \upsilon(G_n) \upsilon(K_n \square K_{n_1, n_2, \cdots, n_t})$$

가 성립된다.(증명끝)

이 공식도 선행연구[2]의 공식과 일치한다.

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보 수학, 65, 3, 56, 주체108(2019).

[2] 우승식; 조선민주주의인민공화국 과학원통보, 4, 15, 주체106(2017).

[3] N. Biggs; Algebraic Graph Theory, Cambridge University Press, 265～306, 2001.

[4] S. S. U; Electronic Journal of Graph Theory and Applications, 4, 2, 171, 2016.

[5] Miklos Bona; A Walk Through Combinatorics, World Scientific, 228～233, 2011.

주체110(2021)년 3월 5일 원고접수

The Simple Proof of the Enumeration for the Number of Spanning Trees of one Cartesian Product Graph

U Sung Sik, Kim Won

We have enumerated the number of spanning trees of the Cartesian $K_n \square K_{p,q}$ of the complete graph K_n and the complete bipartite graph $K_{p,q}$ by using the eigenvalues of the Kirchhoff matrix.

And, we have enumerated the number of spanning trees of the Cartesian $K_n \square K_{n_1, n_2, \cdots, n_t}$ of the complete graph K_n and the complete multipartite graph $K_{n_1, n_2, \cdots, n_t}$ by the same way.

Keywords: spanning tree, complete graph, complete multipartite graph