김일성종합대학학보 JOURNAL OF KIM IL SUNG UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체105(2016)년 제62권 제6호 Vol. 62 No. 6 JUCHE105(2016).

4차원워커다양체우에서 오일레르－라그랑쥬방정식과 해밀튼방정식의 구성

안윤호, 박신혁

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《선진과학기술을 받아들이기 위한 사업을 적극적으로 벌려야 하겠습니다.

선진과학기술을 받아들이는것은 나라의 과학기술을 빨리 발전시키기 위한 중요한 방도의 하나로 됩니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제15권 499～500페지)

론문에서는 보다 일반화된 적합한 거의복소구조가 정의된 4차원워커다양체 M에서 라그랑쥬방정식과 해밀튼방정식을 구성하였다.

선행연구[1]에서는 워커4차원다양체우에서 거의복소구조와 씸플렉트구조 등과 같은 구조적인 문제를 워커계량에 관하여 응용하였으며 선행연구[3, 4]에서는 거의복소구조가 존재할 때 에르미트구조가 존재하기 위한 조건을 얻었다.

선행연구[2]에서는 4차원워커다양체에서 거의복소구조의 존재성이 론의되였다.

정의 1 일반적으로 임의의 자연수 $r \le n/2$에 대하여 r차원평행령평면마당을 허용하는 n차원다양체를 워커다양체라고 부르고 이때 계량을 워커계량이라고 한다.

특히 4차원의리만워커계량의 그람행렬이

$$g=(g_{ij})=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & c \\ 0 & 1 & c & b \end{pmatrix} \tag{*}$$

로 표시되는 국부자리표계 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$가 항상 존재하며 이때 행렬 (*)을 계량의 표준형식이라고 부른다. 여기서 $a,\ b,\ c$는 자리표계 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$에 관한 함수들이며 이때 $D=\mathrm{span}\{\partial_1,\ \partial_2\}$이다.

정의 2 4차원워커다양체 $(M,\ g,\ D)$에서 정의된 거의복소구조 J가 다음의 조건을 만족시킬 때 J를 일반화된 적합한 거의복소구조라고 한다.

i) $J^2=-Id$

ii) $g(JX,\ JY)=g(X,\ Y)$

iii) J는 령분포 $D=\mathrm{span}\{\partial_1,\ \partial_2\}$우에서 $J\partial_1=K\partial_2$, $J\partial_2=-\partial_1/K$을 만족시키는 $\pi/2$－회전연산자를 정의한다. 여기서 K는 국부자리표계 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$에 관한 정값함수이다.

보조정리 4차원워커다양체 $(M,\ g,\ D)$에서 적합한 거의복소구조 J는 국부적으로 다음과 같이 유일하게 표현된다.

$$J\partial_1=K\partial_2,\quad J\partial_2=-\frac{\partial_1}{K},\quad J\partial_3=-\frac{c}{K}\partial_1+\frac{1}{2}\left(Ka-\frac{b}{K}\right)\partial_2+\frac{1}{K}\partial_4,\quad J\partial_4=\frac{1}{2}\left(Ka-\frac{b}{K}\right)\partial_1+Kc\partial_2-K\partial_3$$

여기서 $K=\sqrt[4]{(b^2+4)/(a^2+4)}$ 이고 령분포는 $D=\mathrm{span}\{\partial_1,\ \partial_2\}$ 이다.

론문에서는 일반화된 적합한 거의복소구조가 정의된 2차원평행령분포를 허용하는 4차원워커다양체를 $(M,\ g,\ J)$ 로 표시한다.

정리 1 4차원워커다양체 $(M,\ g,\ J)$ 우에서 워커계량 g 의 표현함수들이 편미분방정식

$$K_1=0,\ K_2=0,\ K^2a_1+b_1-2KK_3=0,\ K^2a_2+b_2+\frac{2}{K}K_4=0,\ K^2a_2+c_1=0,\ K^2c_2+b_1=0$$

을 만족시키면 오일레르－라그랑쥬방정식은 다음과 같이 주어지며 풀이를 가진다.

$$\begin{cases}\partial_t(K\partial_2L)-\partial_1L=0\\ \partial_t\left(\dfrac{1}{K}\partial_1L\right)+\partial_2L=0\\ \partial_t\left(-\dfrac{c}{K}\partial_1L+\dfrac{1}{2}\left(Ka-\dfrac{b}{K}\right)\partial_2L+\dfrac{1}{K}\partial_4L\right)-\partial_3L=0\\ \partial_t\left(\dfrac{1}{2}\left(Ka-\dfrac{b}{K}\right)\partial_1L+Kc\partial_2L-K\partial_3L\right)-\partial_4L=0\end{cases}$$

증명 $F(M)$, $\Lambda^1(M)$ 을 각각 M 우에 C^∞ 급함수들의 모임, 벡토르마당들의 모임, 1차형식들의 모임이라고 하자.

워커계량이 표준형식을 취하는 국부자리표계에 대하여 $X=X^1\partial_1+X^2\partial_2+X^3\partial_3+X^4\partial_4$ 로 표시되는 오일레르－라그랑쥬벡토르마당 X 를 생각하자. 여기서 $X^1=\dot{x}_1$, $X^2=\dot{x}_2$, $X^3=\dot{x}_3$, $X^4=\dot{x}_4$ 이며 $\dot{x}_i$ 는 시간 t 에 관한 도함수를 의미한다.

한편 복소오일레르－라그랑쥬벡토르마당과 고유거의복소구조의 의미로부터 M 에서 류빌벡토르마당은 다음과 같이 표시된다.

$$V_J=J(X)=KX^1\partial_2-\frac{1}{K}X^2\partial_1+X^3\left(-c\frac{1}{K}\partial_1+\frac{1}{2}\left(Ka-\frac{1}{K}b\right)\partial_2+\frac{1}{K}\partial_4\right)+$$
$$+X^4\left(\frac{1}{2}\left(Ka-b\frac{1}{K}\right)\partial_1+cK\partial_2-K\partial_3\right)$$

V_J 가 류빌벡토르마당이므로 에네르기함수 E_L^J 는 $E_L^J=V_J(L)-L$ 로 된다. 확장된 고유거의복소구조 J 에 관하여 4차원워커다양체 M 에서의 외미분 $d_J:F(M)\to\Lambda^1M$ 은

$$d_J=K\partial_2d_1-\frac{1}{K}\partial_1d_2+\left(-c\frac{1}{K}\partial_1+\frac{1}{2}\left(Ka-\frac{b}{K}\right)\partial_2+\frac{1}{K}\partial_4\right)d_3+\left(\frac{1}{2}\left(Ka-\frac{b}{K}\right)\partial_1+Kc\partial_2-K\partial_3\right)d_4$$

로 되며 까르딴2차형식은 $\Phi_L^J=-dd_JL$ 로 자연스럽게 정의된다.

이 2차형식은 라그랑쥬함수가 정칙이면 씸플렉트형식이 된다.

에네르기함수는 다음과 같다.

$$E_L^J=X^1K\partial_2L-\frac{X^2}{K}\partial_1L+X^3\left(-\frac{c}{K}\partial_1L+\frac{1}{2}\left(Ka-\frac{b}{K}\right)\partial_2L+\frac{1}{K}\partial_4L\right)+$$
$$+X^4\left(\frac{1}{2}\left(Ka-\frac{b}{K}\right)\partial_1L+cK\partial_2L-K\partial_3L\right)-L$$

곡선 $\alpha: R \to M$ 을 오일레르-라그랑쥬벡토르마당 X 에 따르는 적분곡선이라고 가정하면 오일레르-라그랑쥬방정식은

$$\begin{cases} \partial_t(K\partial_2 L) - \partial_1 L = 0 \\ \partial_t\left(\dfrac{1}{K}\partial_1 L\right) + \partial_2 L = 0 \\ \partial_t\left(-\dfrac{c}{K}\partial_1 L + \dfrac{1}{2}\left(Ka - \dfrac{b}{K}\right)\partial_2 L + \dfrac{1}{K}\partial_4 L\right) - \partial_3 L = 0 \\ \partial_t\left(\dfrac{1}{2}\left(Ka - \dfrac{b}{K}\right)\partial_1 L + Kc\partial_2 L - K\partial_3 L\right) - \partial_4 L = 0 \end{cases}$$

으로 되며 풀이를 가진다.(증명끝)

정리 2 4차원워커캘러다양체 $(M,\ g,\ \omega_1,\ J)$ 우에서 해밀튼력학계의 풀이곡선의 방정식은 다음과 같이 주어지며 풀이를 가진다.

$$\begin{cases} \dfrac{d_1}{dt} = \dfrac{1}{P}(a_{34}\partial_2 H - a_{24}\partial_3 H + a_{23}\partial_4 H) \\ \dfrac{d_2}{dt} = \dfrac{1}{P}(-a_{34}\partial_1 H + a_{14}\partial_3 H - a_{13}\partial_4 H) \\ \dfrac{d_3}{dt} = \dfrac{1}{P}(-a_{23}\partial_1 H + a_{13}\partial_2 H - a_{12}\partial_3 H) \\ \dfrac{d_4}{dt} = \dfrac{1}{P}(-a_{23}\partial_1 H + a_{13}\partial_2 H - a_{12}\partial_3 H) \end{cases}$$

참 고 문 헌

[1] Y. Matsushita et al.; Journal of Geometry and Physics, 52, 89, 2004.
[2] J. Carlos Diaz-Ramos et al.; Mat. Contemp., 30, 91, 2006.
[3] M. Chaichi et al.; Classical and Quantum Gravity, 22, 3, 559, 2005.
[4] M. Tekkoyun; Journal of Modern Physics, 2, 1318, 2011.

주체105(2016)년 2월 5일 원고접수

Construction of Euler-Lagrange and Hamilton Equation on the Four Dimensional Walker Manifolds

An Yun Ho, Pak Sin Hyok

This paper presents complex Euler−Lagrangian and Hamiltonian equation on 4 dimensional Walker manifold admitting the generalized almost complex structure on the basis of the canonical form of Walker metrics.

Key word: Walker metric