김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체106(2017)년 제63권 제10호 Vol. 63 No. 10 JUCHE106(2017).

반순서바나흐공간에서 한가지 형태의 임풀스분수계 미분방정식의 풀이의 존재성과 응용

리미경, 림창일

사회현상을 연구하는데서 중요한 수단인 임풀스분수계미분방정식에 대하여 연구하는 것은 매우 중요하며 많은 론문들에서 이에 대하여 연구되였다.

선행연구[1]에서는 E가 반순서바나흐공간이고 $0<q<1$인 경우 다음과 같은 임풀스분수계미분방정식의 풀이의 유일존재성에 대하여 론의하였다.

$$\begin{cases} {}^cD_t^q u(t)=f(t,\ u(t)),\ t\in J':=J\setminus\{t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_m\},\ \ J=[0,\ T] \\ \Delta u(t_l)=y_l, \qquad\qquad l=1,\ 2,\ \cdots,\ m,\ y_l\in E \\ u(0)=u_0 \end{cases} \tag{1}$$

여기서 $f:J\times E\to E,\ u_0\in E,\ 0=t_0<t_1<\cdots<t_m<t_{m+1}=T$이며 ${}^cD_t^q$는 q계캐푸터도함수이다.

선행연구[2]에서는 $1<q<2$인 경우 방정식 (1)과 같은 형태의 임풀스분수계미분방정식의 풀이의 존재성에 대하여 론의하였다.

우리는 방정식 (1)의 임풀스조건을 일반화시킨 다음의 방정식의 풀이의 유일존재성을 론의하였으며 선행연구[1]에서와 달리 $k-$노름을 도입함으로써 축소조건을 약화시켰다.

$$\begin{cases} {}^cD_t^q u(t)=f(t,\ u(t)),\ \ t\in J':=J\setminus\{t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_m\},\ J=[0,\ T] \\ \Delta u(t_l)=J_l(u(t_l^-)), \qquad\qquad l=1,\ 2,\ \cdots,\ m \\ u(0)=u_0 \end{cases} \tag{2}$$

여기서 $0<q<1,\ u_0\in E,\ \Delta u(t_l)=u(t_l^+)-u(t_l^-),\ l=1,\ 2,\ \cdots,\ m,\ J_l:\ E\to E,\ l=1,\ 2,\ \cdots,\ m$.

이미 선행연구[1]에서는 다음의 적분방정식이 방정식 (2)와 동등하다는것을 증명하였다.

$$u(t)=u_0+\sum_{0<t_l<t}J_l(u(t_l^-))+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t(t-s)^{q-1}f(s,\ u(s))\,ds,\ t\in J \tag{3}$$

그러므로 론문에서는 방정식 (3)의 풀이의 존재성으로부터 방정식 (2)의 풀이의 존재성을 유도한다.

E가 바나흐공간일 때 $J=[0,\ T]$에서 련속넘기기공간 $C(J,\ E)=\{u:\ J\to E\ |\ u$는 련속$\}$은 노름 $\|u\|_C:=\sup_{t\in J}\|u(t)\|,\ u\in C(J,\ E)$에 관하여 바나흐공간이며 단편련속인 넘기기공간

$PC(J,\ E)=\{u:J\to E\,|\,u\in C((t_l,\ t_{l+1}],\ E),\ l=0,\ 1,\ \cdots,\ m,\ u(t_l^+)$와 $u(t_l^-)$가 존재하며 $u(t_l^-)=u(t_l)\}$도 노름 $\|u\|_{PC}:=\sup_{t\in J}\|u(t)\|,\ u\in PC(J,\ E)$에 관하여 바나흐공간이다. 특히 공간 $PC(J,\ E)$에 $k-$노름 $\|u\|_k:=\sup_{t\in J}e^{-kt}\|u(t)\|,\ u\in PC(J,\ E)$를 도입하면 공간 $(PC(J,\ E),\ \|\cdot\|_k)$도 역시 바나흐공간으로 되며 $\forall u\in PC(J,\ E),\ \|u\|_k\le\|u\|_{PC}$이므로 $\|\cdot\|_{PC}$와 $\|\cdot\|_k$는 동등하다.

정리 1[3] 완비거리공간 (E, d)에 반순서관계 $\leq$가 정의되고 넘기기 $F: E \to E$가 비감소넘기기이며 다음의 가정들이 만족된다고 하면 넘기기 F는 E에서 부동점을 가지며 반복렬 $\{f^n(x_0)\}$은 부동점에로 수렴한다.

① 어떤 상수 $k \in (0, 1)$이 있어서 $\forall x, y \in E\ (x \geq y)$, $d(Fx, Fy) \leq k \cdot d(x, y)$가 성립된다.

② $\exists x_0 \in E,\ x_0 \leq Fx_0$

③ E의 임의의 증가렬 $\{x_n\}$이 x로 수렴하면 $x_n \leq x,\ \forall n \in \boldsymbol{N}$이다.

정의 1 $u \in PC(J, E)$가 방정식 (2)를 만족시키면 u를 식 (2)의 풀이라고 부른다.

바나흐공간 E에 반순서관계 $\leq$가 정의되고 공간 E의 임의의 증가렬 $\{x_n\}$이 x로 수렴하면 $x_n \leq x,\ \forall n \in \boldsymbol{N}$이 성립된다는 성질을 만족시킨다고 하자.

$PC(J, E)$에 대하여 반순서관계 $\leq$를 $u \leq v := \forall t \in J,\ u(t) \leq v(t),\ u, v \in PC(J, E)$로 할 때 공간 $(PC(J, E), \|\cdot\|_k, \leq)$에 대하여 $PC(J, E)$의 임의의 증가렬 $\{u_n\}$이 u로 수렴하면 $u_n \leq u,\ \forall n \in \boldsymbol{N}$이 성립된다는것을 증명할수 있다.

정의 2 넘기기 $u_* \in PC(J, E)$가 부등식

$$\begin{cases} {}^cD_t^q u_*(t) \leq f(t, u_*(t)), & t \in J' \\ \Delta u_*(t_l) \leq J_l(u(t_l^-)),\ u_*(0) \leq u_0, & l = 1, 2, \cdots, m \end{cases} \tag{4}$$

을 만족시키면 u_*을 임풀스분수계미분방정식 (2)의 하풀이라고 부른다.

방정식 (2)에 대하여 다음의 가정들을 리용한다.

가정 1 넘기기 $f: J \times E \to E$에 대하여 $\forall u \in C(J, E),\ f(\cdot, u(\cdot)) \in C(J, E)$이다.

가정 2 $\exists q_1 \in (0, q),\ \exists h(t) \in L^{1/q_1}(J, \boldsymbol{R}),\ \forall u, v \in E\ (u \geq v)$

$$\| f(t, u) - f(t, v) \| \leq h(t) \cdot \| u - v \| \tag{5}$$

가정 3 넘기기 $f: J \times E \to E$는 u에 관하여 비감소이다.

가정 4 넘기기 $J_l: E \to E,\ l = 1, 2, \cdots, m$은 비감소넘기기이며

$$\exists L_l \geq 0,\ \forall u, v \in E,\ u \geq v \Rightarrow \| J_l(u) - J_l(v) \| \leq L_l \| u - v \|.$$

정리 2 공간 E가 임의의 증가렬 $\{x_n\}$이 x로 수렴하면 $x_n \leq x,\ \forall n \in \boldsymbol{N}$이 성립되는 반순서바나흐공간이라고 하자.

이때 가정 1－4가 성립되고 $L = \max\limits_{1 \leq l \leq m}\{L_l\} < 1$이며 임풀스분수계미분방정식 (2)의 하풀이 $u_* \in PC(J, E)$가 존재하면 방정식 (2)는 $PC(J, E)$에서 풀이를 가진다.

증명 넘기기 $F: PC(J, E) \to PC(J, E)$를 다음과 같이 정의하자.

$$(Fu)(t) = u_0 + \sum_{0 < t_l < t} J_i(u(t_i^-)) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t - s)^{q-1} f(s, u(s))\, ds,\ t \in J$$

이때 넘기기 F는 $PC(J, E) \to PC(J, E)$로서 비감소넘기기이다.

가정 3에 의하여 $\forall u, v \in PC(J, E)\ (u \geq v),\ \ \forall t \in J$,

$$(Fu)(t) = u_0 + \sum_{0 < t_l < t} J_l(u(t_l^-)) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t - s)^{q-1} f(s, u(s))\, ds \geq$$

$$\geq u_0 + \sum_{0 < t_l < t} J_l(v(t_l^-)) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t - s)^{q-1} f(s, v(s))\, ds = (Fv)(t)$$

이므로 $Fu \geq Fv$이고 따라서 넘기기 F는 비감소넘기기이다.

다음으로 임의의 $u,\ v \in PC(J,\ E)\ (u \ge v)$ 에 대하여 다음의 식이 성립된다.

$$\| Fu - Fv \|_k = \sup_{t\in J} e^{-kt} \left\| \sum_{0<t_l<t} [J_l(u(t_l^-)) - J_l(v(t_l^-))] + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} [f(s,\ u(s)) - f(s,\ v(s))]\, ds \right\| \le$$

$$\le \sup_{t\in J} e^{-kt} \left\| \sum_{0<t_l<t} [J_l(u(t_l^-)) - J_l(v(t_l^-))] \right\| + \frac{1}{\Gamma(q)} \sup_{t\in J} e^{-kt} \left\| \int_0^t (t-s)^{q-1} [f(s,\ u(s)) - f(s,\ v(s))] ds \right\|$$

그런데 가정 2에 의하여

$$\frac{1}{\Gamma(q)} \sup_{t\in J} e^{-kt} \left\| \int_0^t (t-s)^{q-1} [f(s,\ u(s)) - f(s,\ v(s))]\, ds \right\| \le$$

$$\le \frac{1}{\Gamma(q)} \sup_{t\in J} e^{-kt} \int_0^t (t-s)^{q-1} \cdot h(s) \cdot \| u(s) - v(s) \|\, ds \le \tag{6}$$

$$\le \frac{\Gamma((q-q_1)/(1-q_1))}{\Gamma(q)} \| h \|_{L^{1/q_1}(J)} \ (1-q)^{(q-q_1)/(1-q_1)} \frac{1}{k^{(q-q_1)/(1-q_1)}} \le \frac{\alpha}{k^\beta}$$

이다. 여기서 $\beta = \dfrac{q-q_1}{1-q_1} > 0,\ \alpha = \dfrac{\Gamma((q-q_1)/(1-q_1))}{\Gamma(q)} \| h \|_{L^{1/q_1}(J)}\ (1-q)^{(q-q_1)/(1-q_1)} > 0$ 이다.

또한 가정 4에 의하여

$$\sup_{t\in J} e^{-kt} \left\| \sum_{0<t_l<t} [J_l(u(t_l^-)) - J_l(v(t_l^-))] \right\| \le \sup_{t\in J} e^{-kt} \sum_{0<t_l<t} \| J_l(u(t_l^-)) - J_l(v(t_l^-)) \| \le \sup_{t\in J} e^{-kt} \sum_{0<t_l<t} L_l \| u(t_l^-) - v(t_l^-) \| \le$$

$$\le \max\{ L_1 e^{-kt_1} \| u(t_1) - v(t_1) \|,\ e^{-k(t_2-t_1)} L_1 e^{-kt_1} \| u(t_1^-) - v(t_1^-) \| + L_2 e^{-kt_2} \| u(t_2^-) - v(t_2^-) \|,\ \cdots,$$

$$\cdots,\ e^{-k(t_m - t_1)} L_1 e^{-kt_1} \| u(t_1^-) - v(t_1^-) \| + \cdots + L_m e^{-kt_m} \| u(t_m^-) - v(t_m^-) \| \}.$$

$\Delta t = \min\limits_{l=2,\cdots,\ m} \{ t_l - t_{l-1} \}$ 이라고 하면 다음의 식이 성립된다.

$$\sup_{t\in J} e^{-kt} \left\| \sum_{0<t_l<t} [J_l(u(t_l^-)) - J_l(v(t_l^-))] \right\| \le \| u - v \|_k \cdot \max\{ L_1,\ e^{-k\Delta t} L_1 + L_2,\ \cdots,\ e^{-k(m-1)\Delta t} L_1 + \cdots + L_m \}$$

k 가 충분히 크면 $\dfrac{\alpha}{k^\beta} + L + \dfrac{1}{e^{k\Delta t}} < 1$ 이 되게 할수 있다.

그러면 $L + 1/e^{k\Delta t} < 1$ 이므로

$$e^{-k\Delta t} L_1 + L_2 < L + \frac{1}{e^{k\Delta t}} < 1,\ e^{-2k\Delta t} L_1 + e^{-k\Delta t} L_2 + L_3 \le L + \frac{e^{-k\Delta t} L_1 + L_2}{e^{k\Delta t}} < L + \frac{1}{e^{k\Delta t}} < 1,\ \cdots,$$

$$e^{-k(l-1)\Delta t} L_1 + e^{-k(l-2)\Delta t} L_2 + \cdots + L_l < L + \frac{e^{-k(l-2)\Delta t} L_1 + e^{-k(l-3)\Delta t} L_2 + \cdots + L_{l-1}}{e^{k\Delta t}} < L + \frac{1}{e^{k\Delta t}} < 1$$

이고 결과 $\sup\limits_{t\in J} e^{-kt} \left\| \sum\limits_{0<t_l<t} [J_l(u(t_l^-)) - J_l(v(t_l^-))] \right\| \le \left(L + \dfrac{1}{e^{k\Delta t}} \right) \| u - v \|_k$ 가 성립된다.

따라서 웃식과 부등식 (6)에 의하여 $\| Fu - Fv \|_k \le (L + 1/e^{k\Delta t} + \alpha / k^\beta) \| u - v \|_k$ 이므로 넘기기 F 는 정리 1의 ①을 만족시킨다.

끝으로 $u_* \le Fu_*$ 임을 증명하자.

$\forall\, t \in [0,\ t_1],\ u_* \in C([0,\ t_1],\ E),\ {}^c D_t^q u_*(t) \le f(t,\ u_*(t)),\ u_*(0) \le u_0$ 이므로 $l \in \{1,\ 2,\ \cdots,\ m\}$,

$$\forall\, t\in(t_l,\ t_{l+1}],\quad \beta(t)=\begin{cases} u_*(t), & t\in[0,\ t_1] \\ u_*(t)-\Delta u_*(t_1), & t\in(t_1,\ t_2] \\ u_*(t)-\Delta u_*(t_1)-\Delta u_*(t_2), & t\in(t_2,\ t_3] \\ \quad\vdots & \\ u_*(t)-\Delta u_*(t_1)-\cdots-\Delta u_*(t_l), & t\in(t_l,\ t_{l+1}] \end{cases}$$

로 정의하면 $\beta(t)\in C([0,\ t_{l+1}],\ E)$ 이다. 따라서

$$u_*(t)=\beta(t)+\Delta u_*(t_1)+\cdots+\Delta u_*(t_l)=I_t^q\ {}^cD_t^q u_*(t)+u_*(0)+\Delta u_*(t_1)+\cdots+\Delta u_*(t_l)\le$$

$$\le I_t^q f(t,\ u_*(t))+u_0+y_1+\cdots+y_l=\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1} f(s,\ u_*(s))\,ds+u_0+y_1+\cdots+y_l=(Fu_*)(t)$$

이므로 결국 $u_*\le Fu_*$ 이다. 따라서 정리 1의 가정 ②도 만족시킨다.

그러므로 정리 1에 의하여 넘기기 F 는 $PC(J,\ E)$ 에서 부동점을 가지는데 바로 이 부동점이 방정식 (2)의 풀이로 된다.(증명끝)

실지 정리 1에 의하여 정리 2에서 u_* 을 시작점으로 하는 반복렬의 수렴성이 담보된다.

즉 $\upsilon_0=u_*,\ \upsilon_n=u_0+\sum\limits_{0<t_l<t} J_l(\upsilon_{n-1}(t_l^-))+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1} f(s,\ \upsilon_{n-1}(s))\,ds,\ t\in J,\ n=1,\ 2,\ \cdots$ 은 $\|\cdot\|_k$ 에 관하여 방정식의 풀이에로 수렴하며 따라서 $\|\cdot\|_{PC}$ 에 관하여서도 수렴한다.

따름 공간 E 가 임의의 증가렬 $\{x_n\}$ 이 x 로 수렴하면 $x_n\le x,\ \forall n\in \boldsymbol{N}$ 이 성립되는 반순서바나흐공간일 때 가정 1－3이 성립되고 다음의 임풀스분수계미분방정식의 하풀이가 존재하면 이 방정식은 공간 $PC(J,\ E)$ 에서 풀이를 가진다.

$$\begin{cases} {}^cD_t^q u(t)=f(t,\ u(t)), & t\in J' \\ \Delta u(t_l)=y_l,\ u(0)=u_0, & l=1,\ 2,\ \cdots,\ m \end{cases}$$

주의 1 따름은 선행연구[1]에서의 정리 3에서 축소조건 $\dfrac{\|h\|_{L^{1/q_2}(J)}\,T^{(1+\alpha)(1-q_2)}}{\Gamma(q)(1+\alpha)^{1-q_2}}<1$ 을 제거한것으로서 이것은 정리 2와 같이 선행연구[1]결과의 일반화로 된다.

실례 1 다음의 임풀스분수계미분방정식의 풀이의 존재성에 대하여 밝히자.

$$\begin{cases} {}^cD_t^{1/2}x_n(t)=[5x_n(t)+2x_{n+2}(t)]/e^t, & t\in[0,\ 1/2)\cup(1/2,\ 1] \\ x_n(0)=1/n^3,\ x_n(1/2^+)=x_n(1/2^-)+1/3^n, & n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots \end{cases}\tag{7}$$

$E=l^1=\left\{x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots)\,|\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|<\infty\right\}$ 는 노름 $\|x\|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|,\ x\in E$ 에 관하여 바나흐공간이며 반순서관계 $x\ge y:=x_n\ge y_n,\ \forall n\in \boldsymbol{N}$ 에 관하여 공간 E 의 임의의 증가렬 $\{x_n\}$ 이 x 로 수렴하면 $x_n\le x,\ n\in \boldsymbol{N}$ 이 성립된다.

넘기기 $f:[0,\ 1]\times E\to E$ 를

$$\begin{gathered} f(t,\ u)=(f_1(t,\ u),\ f_2(t,\ u),\ \cdots,\ f_n(t,\ u),\ \cdots), \\ f_n(t,\ u)=(5u_n+2u_{n+2})/e^t,\ t\in[0,\ 1],\ u=(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n,\ \cdots)\in E \end{gathered}\tag{8}$$

로, $y_1=(1/3,\ 1/3^2,\ 1/3^3,\ \cdots,\ 1/3^n,\ \cdots),\ u_0=(1,\ 1/2^3,\ 1/3^3,\ \cdots,\ 1/n^3,\ \cdots)\in E$ 로 표시하자.

그러면 방정식 (7)은 다음과 같이 표시할수 있다.

$$ {}^{c}D_t^{1/2}x(t) = f(t,\ x(t)) \quad (t \in [0,\ 1/2) \cup (1/2,\ 1]),\ \ \Delta x(1/2) = y_1,\ x(0) = u_0 \tag{9}$$

이제 방정식 (9)의 넘기기가 가정 1－3을 만족시킨다는것을 증명하자.

우선 $\forall u \in C([0,\ 1],\ E),\ \forall t,\ t+\delta \in [0,\ 1]$에 대하여

$$\| f(t+\delta,\ u(t+\delta)) - f(t,\ u(t)) \| \le (7\| u(t+\delta)-u(t)\|)/e^t + (7|1-e^{\delta}|\cdot\|u(t)\|)/e^{(t+\delta)} \to 0\ \ (\delta \to 0)$$

이므로 넘기기 $f:[0,\ 1]\times E \to E$는 가정 1을 만족시킨다.

다음으로 $\forall t \in [0,\ 1],\ \forall u,\ v \in E\ \ (u \ge v)$,

$$\| f(t,\ u) - f(t,\ v) \| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(5u_n + 2u_{n+2}) - (5v_n + 2v_{n+2})|}{e^t} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5(u_n - v_n) + 2(u_{n+2} - v_{n+2})}{e^t} \le \frac{7}{e^t}\|u - v\|$$

이고 $\forall q_2 \in (0,\ q),\ h(t) = 7/e^t \in L_{1/q_2}(J,\ \boldsymbol{R})$이므로 가정 2가 만족된다.

끝으로 식 (8)에 의하여 $u \ge v$ 이면 $f_n(t,\ u) = (5u_n + 2u_{n+2})/e^t \ge (5v_n + 2v_{n+2})/e^t = f_n(t,\ v)$이므로 결국 $f:[0,\ 1]\times E \to E$는 u에 관하여 비감소이고 가정 3이 만족된다.

한편 $u_*(t) = (0,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ \cdots) \in E$는 분명 방정식 (9)의 하풀이므로 따름에 의하여 방정식 (9)는 $PC(J,\ E)$에서 풀이를 가진다.

주의 2 가정 2에서 부등식 (5)는 $u \ge v$인 $u,\ v \in E$에 대하여서만 성립된다.

이 가정은 모든 $u,\ v \in E$에 대하여 부등식 (5)가 성립된다는 가정보다 훨씬 약한것이다.

실례 2 공간 $E = \{(-t,\ t) \mid t \in \boldsymbol{R}\}$는 노름 $\|(x,\ y)\| = |x| + |y|$에 관하여 바나흐공간이며 반순서관계 $(x,\ y) \ge (z,\ t) := x \ge z,\ y \ge t$에 관하여 공간 E의 임의의 증가렬 $\{x_n\}$이 x로 수렴하면 $x_n \le x,\ n \in \boldsymbol{N}$이 성립된다는 성질을 만족시킨다.

넘기기 $f:[0,\ 1]\times E \to E$를 $f(t,\ u) = (u_1^3,\ u_2^3),\ u = (u_1,\ u_2) \in E,\ t \in [0,\ 1]$로 정의하자.

그러면 $\forall u,\ v \in E$, $\| f(t,\ u) - f(t,\ v) \| = |u_1^3 - v_1^3| + |u_2^3 - v_2^3| = |u_1^2 + u_1v_1 + v_1^2| \cdot \|u - v\|$이므로 $\forall h(t) \in L^{1/q_1}(J,\ \boldsymbol{R}),\ \| f(t,\ u) - f(t,\ v) \| \le h(t)\cdot\|u - v\|$가 성립될수 없다.

그러나 E에서 모든 원소는 자기 자신과만 비교가능하므로 가정 2가 성립한다.

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보(자연과학), 61, 11, 13, 주체104(2015).

[2] Jinrong Wang et al.; Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 17, 4384, 2012.

[3] J. J. Nieto et al.; Order, 22, 223, 2005.

주체106(2017)년 6월 5일 원고접수

The Existence of Solution for an Impulsive Fractional Differential Equation in a Partially Ordered Banach Space and Application

Ri Mi Gyong, Rim Chang Il

We prove the generalized existence theorems of solution for an impulsive fractional differential equation by using the fixed point theorem in a partially ordered Banach space and apply it to examples.

Key words: impulsive fractional differential equation, partially ordered Banach space