김일성종합대학학보 주체109(2020)년
정보과학 제66권 제1호

랴뿌노브수법에 기초한 구면거꿀흔들이의 안정화조종방법

허일건, 박명성

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《과학자, 기술자들은 현실에 튼튼히 발을 붙이고 사회주의건설의 실천이 제기하는 문제들을 연구대상으로 삼고 과학연구사업을 진행하여야 하며 연구성과를 생산에 도입하는데서 나서는 과학기술적문제들을 책임적으로 풀어야 합니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제15권 492페지)

구면거꿀흔들이는 구동부족인 비선형MIMO체계인것으로 하여 다른 종류의 거꿀흔들이들보다 조종난도가 훨씬 높은 대상으로 인정되고있다.[1, 2]

선행연구[1, 2]에서는 구면거꿀흔들이의 안정화방법과 그 결과를 고찰하였는데 일반적인 반결합선형화수법을 적용한것으로 하여 실천적견지에서의 로바스트안정화능력이 결핍되여있으며 안정화가능한 흔들이의 초기각도범위도 크지 못하다. 선행연구[3]에서는 랴뿌노브안정론을 적용하여 구면거꿀흔들이의 비선형반결합안정화를 실현하였는데 여기서 리용한 모형은 표준화된 모형이다.

론문에서는 표준화되지 않은 구면거꿀흔들이의 동력학적모형과 라쎌의 불변모임정리에 기초하여 비선형상태반결합안정화조종법칙을 설계하고 모의를 통하여 제안된 방법의 효과성을 확증하였다.

1. 구면거꿀흔들이조종체계의 모형

구면거꿀흔들이의 동력학적모형을 작성하기 위하여 그림과 같이 흔들이를 질량이 m인 질점으로 보면 그것의 자리표를

$$(x+lC_\theta S_\varphi,\ y+lS_\theta,\ lC_\theta C_\varphi)$$

로 표시할수 있다. 식에서 x, y는 각각 대차의 X, Y축방향에서의 변위를 표시하며 l은 흔들이의 길이(회전중심으로부터 흔들이의 질량중심까지의 거리)이다. 그리고 θ, φ는 각각 X축 및 Y축주위에로의 회전각이며 u_x와 u_y는 각각 x축 및 y축방향에서 대차의 가속도이다. 또한 자리표표현식에서 C_x, S_x는 각각 $\cos(x)$, $\sin(x)$로 약속하는데 앞으로 식표현을 간단히 하기 위하여 이 표현을 그대로 리용하기로 한다.

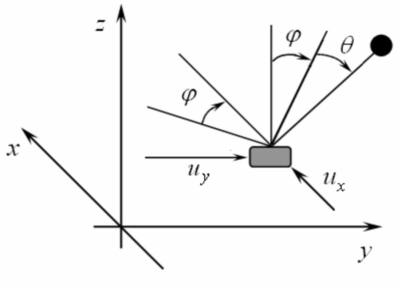

그림. 구면거꿀흔들이의 자리표계

우와 같은 자리표계에 따르는 동력학적모형을 작성하자.

이를 위해 흔들이의 운동에네르기와 자리에네르기로부터 구해지는 라그랑쥬함수

$$L=T-V=$$
$$=\frac{1}{2}m[-2glC_\theta C_\varphi+(\dot{y}+lC_\theta\dot{\theta})^2+(\dot{x}-lS_\theta\dot{\theta}S_\varphi+lC_\theta C_\varphi\dot{\varphi})^2+(lS_\theta\dot{\theta}C_\varphi+lC_\theta S_\varphi\dot{\varphi})^2] \tag{1}$$

을 라그랑쥬운동학방정식에 대입하여 계산하면 다음의 식이 얻어진다.

$$\begin{cases} lm(-gS_\theta C_\varphi + lC_\theta S_\theta \dot{\varphi}^2 - S_\theta S_\varphi \ddot{x} + C_\theta \ddot{y} + l\ddot{\theta}) = 0 \\ lmC_\theta(-gS_\varphi - 2lS_\theta \dot{\theta}\dot{\varphi} + C_\varphi \ddot{x} + lC_\theta \ddot{\varphi}) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

우의 식을 정리하면

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \dfrac{1}{l}(gS_\theta C_\varphi - lC_\theta S_\theta \dot{\varphi}^2 + S_\theta S_\varphi \ddot{x} - C_\theta \ddot{y}) = 0 \\ \ddot{\varphi} = \dfrac{1}{lC_\theta^2}(-gC_\theta S_\varphi + 2lS_\theta \dot{\theta}\dot{\varphi} - C_\theta C_\varphi \ddot{x}) = 0 \end{cases}$$

으로 되며 상태벡토르를 $q = [x\ \ y\ \ \theta\ \ \varphi\ \ \dot{x}\ \ \dot{y}\ \ \dot{\theta}\ \ \dot{\varphi}]^{\mathrm{T}}$, 입력벡토르를 $u = [u_x\ \ u_y]^{\mathrm{T}}$ 라고 하면 체계를 다음과 같은 입력아핀비선형체계로 표시할수 있다.

$$\dot{q} = f(q) + g(q)u \tag{3}$$

여기서

$$f(q) = \left[\dot{x}\ \ \dot{y}\ \ \dot{\theta}\ \ \dot{\varphi}\ \ 0\ \ 0\ \ \frac{1}{l}(gS_\theta C_\varphi - lC_\theta S_\theta \dot{\varphi}^2)\ \ \frac{1}{lC_\theta^2}(gC_\theta S_\varphi + 2lS_\theta C_\theta \dot{\theta}\dot{\varphi}) \right]^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

$$g(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{l}S_\theta S_\varphi & -\frac{1}{lC_\theta}C_\varphi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{l}C_\theta & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

이다.

2. 안정화조종체계의 설계방법

안정화조종체계설계문제는 식 (3)의 상태자리길에 따르는 시간미분이 부의반정값으로 되는 국부정의정값함수(혹은 랴뿌노브함수) V 를 찾는 문제이다. 다시말하여 초기에 흔들이가 XOY 평면의 웃쪽에 있다고 가정하고 불안정평형점 $q = 0$ 이 국부점근안정으로 되게 하는 조종벡토르 u 를 구하는 문제이다.

이 문제를 풀기 위하여 보조변수 ξ 와 μ 를 도입하여 $\xi = x + g_1(\theta,\ \varphi)$ 와 $\mu = y + g_2(\theta)$ 를 정의한다. 여기서 g_1 과 g_2 는 원활한 함수들이다. 이러한 보조변수를 도입하여 그것들(ξ 와 μ)을 동시에 령으로 만들면 원점의 점근안정화가 실현되게 된다. 이를 위하여 먼저 다음과 같은 랴뿌노브함수후보를 생각한다.

$$V(q) = \frac{1}{2}\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}\dot{\mu}^2 + \frac{k_1}{2}\xi^2 + \frac{k_2}{2}\mu^2 + n\phi(q) \tag{6}$$

여기서 k_1, k_2, n 은 엄격히 정인 상수들이며 스칼라함수 $\phi(q)$ 는 다음과 같은 조건을 만족시키도록 선택한다.

$$\frac{\partial}{\partial q}\phi(q) g(q) u = u_x \dot{\xi} + u_y \dot{\mu} \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial q}\phi(q) f(q) = 0 \tag{8}$$

식 (7)과 (8)을 풀기 위하여 $\partial\phi/\partial\dot{x}=\dot{x}$, $\partial\phi/\partial\dot{y}=\dot{y}$ 인 ϕ 를 선택하고 식 (7)의 왼쪽 식에

$$\frac{\partial}{\partial q}\phi(q)=\begin{bmatrix}\frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial\theta} & \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} & \frac{\partial\phi}{\partial\dot{x}} & \frac{\partial\phi}{\partial\dot{y}} & \frac{\partial\phi}{\partial\dot{\theta}} & \frac{\partial\phi}{\dot{\varphi}}\end{bmatrix}$$

와 식 (4)의 $g(q)$ 를 넣어 계산한다. 그리고 $\partial\phi/\partial\dot{x}=\dot{x}$, $\partial\phi/\partial\dot{y}=\dot{y}$ 라는 조건을 고려하면 식 (7), (8)로부터 다음의 결과를 얻게 된다.

$$\dot{\xi}=\left(\dot{x}+\frac{1}{l}S_\theta S_\varphi\frac{\partial\phi}{\partial\dot{\theta}}-\frac{C_\varphi}{lC_\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\dot{\varphi}}\right),\ \dot{\mu}=\left(\dot{y}-\frac{C_\theta}{l}\frac{\partial\phi}{\partial\dot{\theta}}\right) \tag{9}$$

이제 $\dot{\xi}$ 와 $\dot{\mu}$ 의 정의로부터 얻게 되는 $\dot{\xi}=\dot{x}+\frac{\partial g_1}{\partial\theta}\dot{\theta}+\frac{\partial g_1}{\partial\varphi}\dot{\varphi}$ 와 $\dot{\mu}=\dot{y}+\frac{\partial g_2}{\partial\theta}\dot{\theta}$ 를 식 (9)의 $\dot{\xi}$ 와 $\dot{\mu}$ 에 대입하면 다음의 2개의 식이 얻어진다.

$$\frac{\partial g_1}{\partial\theta}\dot{\theta}+\frac{\partial g_1}{\partial\varphi}\dot{\varphi}=\frac{1}{l}S_\theta S_\varphi\frac{\partial\phi}{\partial\dot{\theta}}-\frac{C_\varphi}{lC_\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\dot{\varphi}} \tag{10}$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial\theta}\dot{\theta}=-\frac{C_\theta}{l}\frac{\partial\phi}{\partial\dot{\theta}} \tag{11}$$

식 (11)로부터

$$\frac{\partial\phi}{\partial\dot{\theta}}=-\frac{l}{C_\theta}\frac{\partial g_2}{\partial\theta}\dot{\theta}=h_1\dot{\theta}$$

가 얻어지며 이때 웃식의 풀이는 $\phi(q)=\frac{h_1}{2}\dot{\theta}^2+v_1$ (v_1 은 $\dot{\theta}$ 에 무관계한 항)의 형식을 가지는데 이것을 식 (10)에 넣어서 나온 편미분방정식을 풀면

$$\phi(q)=\frac{h_2}{2}C_\theta^2\dot{\varphi}^2+v_2$$

(v_2 는 $\dot{\varphi}$ 에 무관계한 항)의 형태가 얻어진다. v_1 과 v_2 를 θ, φ 에 관계되는 항으로 보고 $\phi(q)$ 의 두가지 형태를 종합하면 다음의 식이 얻어지게 된다.

$$\phi(q)=\frac{h_1}{2}\dot{\theta}^2+\frac{h_2}{2}C_\theta^2\dot{\varphi}^2+\frac{\dot{x}^2}{2}+\frac{\dot{y}^2}{2}=w(\theta,\ \varphi) \tag{12}$$

여기서 스칼라함수 $w(\theta,\ \varphi)$ 와 상수 h_1, h_2 는 다음과 같이 결정할수 있다.

식 (8)에 식 (11)을 대입하면

$$\dot{\varphi}^2\dot{\theta}C_\theta S_\theta(-h_1+h_2)=0,\ \dot{\varphi}\left(\frac{g}{l}h_2C_\theta S_\varphi+\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right)=0,\ \dot{\theta}\left(\frac{g}{l}h_1S_\theta C_\varphi+\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)=0 \tag{13}$$

으로 되고 따라서 $h_1=h_2=h$, $w(\theta,\varphi)=\frac{g}{l}h(-1+C_\theta C_\varphi)$ 이다.

식 (12)를 식 (6)에 대입하여 얻어지는 $V(q)$ 는 분명히 랴뿌노브후보함수이다.[3]

여기에 기초하여 식 (3)의 자리길에 따르는 V 의 시간미분을 계산하자. 이를 위해 식 (6)에 적당한 조작을 진행하면

$$V(q)=\dot{\xi}\left(\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial q}f(q)+\left(\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial q}g(q)+(n,\ 0)\right)u+k_1\xi\right)+\dot{\mu}\left(\frac{\partial\dot{\mu}}{\partial q}f(q)+\left(\frac{\partial\dot{\mu}}{\partial q}g(q)+(0,\ n)\right)u+k_2\mu\right) \tag{14}$$

로 되고 여기로부터

$$\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial q}f(q)+\left(\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial q}g(q)+(n,0)\right)u+k_1\xi=-\dot{\xi} \tag{15}$$

$$\frac{\partial\dot{\mu}}{\partial q}f(q)+\left(\frac{\partial\dot{\mu}}{\partial q}g(q)+(0,n)\right)u+k_2\mu=-\dot{\mu} \tag{16}$$

를 만족시켜

$$\dot{V}(q)=-\dot{\xi}^2-\dot{\mu}^2 \tag{17}$$

으로 되도록 한다. 이때 조종체계의 최대불변모임이 다름아닌 불안정평형점 $q=0$ 이라는 것을 증명할수 있다.[3] 따라서 설계된 조종체계의 안정성을 담보할수 있다.

3. 모의실험 및 결과분석

Matlab의 Simulink를 리용하여 제안한 구면거꿀흔들이의 안정화조종에 대한 모의를 진행하였다.

일반적으로 체계를 평형점근방에서 선형화하고 선형2차조절기(LQR)를 리용한 경우의 안정화가능한 흔들이의 초기각도는 $\theta_0=0.04\text{rad}$, $\varphi_0=-0.04\text{rad}$ 정도로서 평형점의 아주 작은 근방에서만 안정화가 가능하다.

한편 선행연구[1, 2]에서 제안한 반결합선형화에 의한 수법을 적용하는 경우에 안정화가능한 흔들이의 초기각도범위는 각각 $\theta_0=\pm0.1\text{rad}$, $\varphi_0=\pm0.1\text{rad}$ 이다.

조종기의 설계파라메터를

$$k_1=15,\quad k_2=3.5,\quad n=1$$

로 주었을 때 제안한 방법으로 결정한 안정화가능한 흔들이의 초기각도는 $\theta_0=0.48\text{rad}$, $\varphi_0=-0.48\text{rad}$ 이다.

모의결과로부터 제안된 방법을 리용하여 조종체계를 설계하는 경우 선형조종방법보다 12배, 반결합선형화방법보다는 4배나 큰 흔들이의 초기각도에 대하여 안정화가 가능하다는것을 알수 있다.

맺 는 말

라그랑쥬운동방정식을 리용하여 표준화되지 않은 구면거꿀흔들이의 동력학모형을 작성하고 랴뿌노브안정리론과 라쎌의 불변성원리에 기초한 안정화조종체계의 설계방법을 제안하였으며 모의실험을 통하여 제안된 방법의 효과성을 검증하였다.

참 고 문 헌

[1] G. Liu; International Journal of Control, 81, 7, 1035, 2008.

[2] Guangyu Liu; International Journal of Control, 81, 1, 116, 2008.

[3] Carlos Aguilar-Ibanez; Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision & Control, 13, 2006.

주체108(2019)년 11월 5일 원고접수

A Method of the Stabilization of the Spherical Inverted Pendulum Based on Lyapunov Approach

Ho Il Gon, Pak Myong Song

We proposed nonlinear state feedback for stabilization of the spherical inverted pendulum system by using dynamic model which was not normalized and LaSalle's invariant set theorem, and verified effecivenees of the presented approach by using the Matlab simulation.

Keywords: spherical inverted pendulum, Lyapunov, invariant set theorem