김일성종합대학학보 수 학 주체109(2020)년 제66권 제2호

비등방성최소시간조종문제에 대한 개선된 순서화상승법의 수렴성

박지성, 허명송

고속전진법[1]은 등방성최소시간조종문제를 푸는 점근복잡도를 가지는 한가지 효과적인 방법으로서 인과성조건에 본질적으로 의거하나 비등방성최소시간조종문제들에서는 일반적으로 인과성조건이 만족되지 않는다.

선행연구[2]에서 설정된 문제의 특수경우인 비등방성최소시간조종문제들을 효과적으로 풀기 위한 방법으로는 고속쓸기법, 고속반복법, 특성선고속전진법들이 있다.[3]

론문에서는 불룩비등방성최소시간조종문제를 푸는 한가지 방법인 개선된 순서화상승법의 수렴성을 증명한다.

구역 Ω에서 움직이는 질점의 최량궤도문제를 생각하자.

질점의 순간속도 f는 운동방향과 위치에 동시에 의존된다고 하자.

이 질점의 운동은 다음과 같은 상미분방정식에 의해 표시된다고 하자.

$$\boldsymbol{y}'(t)=f(\boldsymbol{y}(t),\ a(t))a(t),\ \ \boldsymbol{y}(0)=0\in\Omega$$

여기서 $\boldsymbol{y}(t)$는 t시각에 질점의 위치이고 $S_1=\{\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^2 \mid \|\boldsymbol{a}\|=1\}$은 허용조종값들의 모임이며 $A=\{a:\boldsymbol{R}_{+,\,0}\mapsto S_1\}$은 허용조종들의 모임이다.

$T(x,\ a(\cdot))=\inf\{t\in\mathbf{R}_{+,\,0} \mid \boldsymbol{y}(t)\in\partial\Omega\}$ 라고 할 때 $\mathrm{Cost}(x,\ a(\cdot))=T(x,\ a(\cdot))+q(\boldsymbol{y}(T(x,\ a(\cdot))))$을 최소화하여야 한다. 여기서 $q:\partial\Omega\to\mathbf{R}_{+,\,0}$은 경계에서 정의된 보상함수이다.

$f,\ q$에 대하여 우리는 다음과 같은 가정을 준다.

$f,\ q$는 립쉬츠련속이며 다음과 같은 유계성을 가진다.

$$0<f_1\le f(x,\ \boldsymbol{a})\le f_2<\infty\ \ (\forall x\in\Omega,\ \forall\boldsymbol{a}\in S_1),\ \ 0<q_1\le q(x)\le q_2<\infty\ \ (x\in\partial\Omega)$$

이때 $\gamma=f_2/f_1$로 정의한다.

우의 최량조종문제의 값함수는 $\begin{cases} u(x)=\inf\limits_{\boldsymbol{a}(\cdot)}\mathrm{Cost}(x,\ \boldsymbol{a}(\cdot)),\ x\in\Omega\setminus\partial\Omega \\ u(x)=q(x)\end{cases}$ 와 같이 정의된다.

값함수 $u(x)$는 아래와 같은 해밀턴—야꼬비—벨만방정식을 만족시킨다.

$$\min_{\alpha\in S_1}\{(\nabla u(x)\cdot\boldsymbol{a})f(x,\ \boldsymbol{a})\}+1=0\ (x\in\Omega),\ u(x)=q(x)\ \ (x\in\partial\Omega)$$

x_jx_l를 이웃한 두 그물점들이라고 하자.

x에서의 값에 대한 수치근사를 $V_{x_jx_k}(x)=\min\limits_{\zeta\in[0,\ 1]}\{\tau(\zeta)/f(x,\ \boldsymbol{a}_\zeta)+\zeta U(x_j)+(1-\zeta)U(x_k)\}$ 와 같이 정의한다. 여기서 $\tau(\zeta)=\|(\zeta x_k+(1-\zeta)x_k)-x\|,\ \boldsymbol{a}_\zeta=[(\zeta x_j+(1-\zeta)x_k)-x]/\tau(\zeta)$이다.

우선 그물점들을 3개의 모임 즉 $S_F,\ S_C,\ S_A$로 분할한다.

S_{AFF}를 S_C에 속하는 그물점들에 이웃하고있는 S_A의 점들의 모임으로, S_{AF}를 S_{AFF}에 속하는 이웃한 두 점들을 맺는 선분토막의 모임으로 정의한다.

모임 S_C 의 매 점 x 에 대하여 $S_{NF}(x,\ \boldsymbol{a})$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$S_{NF}(x,\ \boldsymbol{a})=\{x_jx_k\in S_{AF}\mid \exists\widetilde{x}\in x_jx_k,\ \cos(x\widetilde{x}\wedge\boldsymbol{a})>\gamma^{-1},\ \|\widetilde{x}-x\|<h\gamma\}$$

매 그물점 x 에 대하여 $NA(x)$ 를 $NA(x)=\{x\in N(x),\ x\in S_A\}$ 와 같이 정의한다.

이때 개선된 순서화상승법알고리듬은 다음과 같다.

걸음 1 모든 그물점들을 모임 S_F 에 포함시킨다.

걸음 2 경계에 있는 그물점들을 모임 S_A 에 포함시킨다.$(U(y)=q(y))$

걸음 3 S_A 의 점들에 이웃하고있는 모임 S_F 의 그물점들을 S_C 에 포함시키고 그 점들에서 림시값을 $V(x):=\min\limits_{x_jx_k\in\bigcup\limits_{x_i\in NA(x)}S_{NF}(x,\ \overrightarrow{xx_i})}V_{x_jx_k}(x)$ 와 같이 계산한다.

걸음 4 S_C 에 있는 점들가운데서 림시값이 제일 작은 점 $\bar{x}$ 를 찾는다.

걸음 5 $\bar{x}$ 를 S_A 에 포함시키고 $U(\bar{x})=V(\bar{x})$ 로 해주며 S_{AFF} 를 갱신한다.

걸음 6 $\bar{x}$ 에 이웃하고있는 S_F 의 점들에서 림시값을 $V(x):=\min\limits_{x_jx_k\in S_{NF}(x,\ \overrightarrow{x\bar{x}})}V_{x_jx_k}(x)$ 와 같이 계산하고 S_C 에 포함시킨다.

걸음 7 $\bar{x}\in\bigcup\limits_{x'\in NA(x)}S_{NF}(x,\ \overrightarrow{xx'})$ 인 모든 점들에서 림시값을 다음과 같이 갱신해준다.

$$V(x):=\min\left(V(x),\ \min_{\bar{x}x_j\in S_{NF}(x,\ \overrightarrow{xx'}),\ x'\in NA(x)}V_{\bar{x}x_j}(x)\right)$$

걸음 8 S_C 가 빈모임이 아니면 걸음 4로 간다.

개선된 순서화상승법알고리듬의 수렴성에 대하여 증명하자.

모임 $S'_{AF}(x),\ S'_{NF}(x)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$S'_{AF}(x)=\{x_1x_2\in S_{AF}\mid\exists\widetilde{x}\in x_1x_2,\ \exists x'\in NA(x),\ \cos(\overrightarrow{xx'}\wedge\overrightarrow{x\widetilde{x}})>\gamma^{-1}\}$$

$$S'_{NF}(x)=\{x_1x_2\in S_{AF}\mid\exists\widetilde{x}\in x_1x_2,\ \exists x'\in NA(x),\ \cos(\overrightarrow{xx'}\wedge\overrightarrow{x\widetilde{x}})>\gamma^{-1},\ |x-\widetilde{x}|<h\gamma\}$$

보조정리 1 알고리듬의 일정한 단계에서 $V(\bar{x})=\min\limits_{x\in S_C}V(x)$ 즉 $U(\bar{x})=V(\bar{x})$ 라고 하자.

S_C 에 속하는 임의의 그물점 x 에 대하여 $W(x)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$W(x)=\min_{x_1x_2\in S'_{AF}(x)}\min_{\zeta\in[0,\ 1]}\{K(x,\ \boldsymbol{a})\tau(\zeta)+(\zeta U(x_1)+(1-\zeta)U(x_2))\}$$

이때 $U(\bar{x})=V(\bar{x})=W(\bar{x})$ 가 성립된다.

보조정리 2 Ω 가 불룩이고 $d(x)$ 를 $x\in\Omega$ 에서부터 $\partial\Omega$ 까지의 거리라고 하면 $U(x)\le d(x)/f_1+q_2$ 가 성립된다.

편의를 위하여 S_{AF} 를 AF 로 표시하고 $U_{\min}^{AF}$ $(U_{\max}^{AF})$ 를 $\max\limits_{x\in S_{AF}}U(x)$ $\left(\min\limits_{x\in S_{AF}}U(x)\right)$ 로 하자.

$AF_{\bar{x}}$ $(AF^{\bar{x}})$를 $\bar{x}$ 가 접수되기 직전(직후)의 AF 의 상태라고 하자.

보조정리 3 $h_{\min}$ 을 구역 Ω 의 그물 X 에서 가장 작은 3각형의 높이라고 하자.

그러면 수치풀이 U 에 대하여 다음의 약단조성결과들이 성립된다.

① $U_{\min}^{AF_{\bar{x}}}+h_{\min}/f_2\le U(\bar{x})\le U_{\max}^{AF_{\bar{x}}}+h/f_1$

② $U_{\min}^{AF_{\bar{x}}}\le U_{\min}^{AF^{\bar{x}}}$

③ 만일 x_i 가 x_j 보다 전에 접수되였다면 $U_{\min}^{AF_{x_i}} \le U_{\min}^{AF_{x_j}}$ 이다.

④ $U_{\max}^{AF_{\bar{x}}} \le U_{\min}^{AF\bar{x}} + h/f_1 \Rightarrow U_{\max}^{AF^{\bar{x}}} \le U_{\min}^{AF^{\bar{x}}} + h/f_1$

보조정리 4 $L_1 = \eta / f_1$ 라고 할 때 x_1 과 x_2 가 구역 ω 내부의 그물점들이라고 하면 다음의 결과들이 성립된다.

① $|U(x_1) - U(x_2)| \le L_1 \| x_1 - x_2 \|$

② $L_2 = \eta L_1$. $d(x) > h$ 인 어떤 점 $x \in \Omega \setminus \partial\Omega$ 에서 $\nabla U(x)$ 가 정의되였다면 $\|\nabla U(x)\| \le L_2$

③ $\forall x_1,\ x_2 \in \Omega$ 에 대하여 $|U(x_1) - U(x_2)| \le L_2 \| x_1 - x_2 \|$ 가 성립된다.

정리 그물점렬 $\{X_r\}$ 를 생각할 때 U^r 를 그물 X_r 에서 개선된 순서화상승법알고리듬에 의하여 얻어진 근사풀이라고 하면 $h^r \to 0$ 일 때 U^r 는 점성풀이에로 평등수렴한다.

증명 $\{U^r\}$ 가 유계이고 유계립쉬츠련속이므로 아르첼라－아스콜리정리에 의하여 그물점렬 $\{X^r\}$ 의 부분렬 $\{X_p\}$ 가 존재하여 $h_p \to 0\ (p \to \infty)$ 이며 어떤 함수 u 가 존재하여 $U^p \to u$ 로 평등수렴한다. u 의 유계성과 평등련속성은 U^p 의 성질로부터 곧 나온다.

임의의 함수 $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ 에 대하여 $(u - \phi)$ 가 $x_0 \in \Omega$ 에서 국부최소값을 가지고 B_δ 를 x_0 을 중심으로 하는 반경이 δ 인 닫긴구라고 하면 $B_\delta \subset \Omega$ 인 어떤 $\delta > 0$ 이 존재하며 $(u - \phi)(x_0) < (u - \phi)(x)$ 가 성립된다.

$D_2(x)$ 가 $\phi(x)$ 의 헤쎄행렬이면 어떤 $\mu > 0$ 이 존재하여 $\| D_2(x) \|_2 \le \mu$ 이고 $x \in B_\delta$ 이다.

이제 x_0^p 를 B_δ 우에서 $(U^p - \phi)$ 의 최소값점이라고 하고 x_1^P 를 x_0^p 에서 가장 가까운 정점이라고 하자.

$$U^p(x_1^p) - U^p(x_0^p) = \nabla\phi(x_0^p)(x_1^p - x_0^p),\ (U^p - \phi)(x_1^p) \le (U^p - \phi)(x_0^p) + \mu h_p^2 / 2$$

$$\phi(x) - \phi(x_1^p) = (\phi(x) - \phi(x_0^p)) + (\phi(x_0^p) - \phi(x_1^p)) \le U^p(x) - U^p(x_1^p) + \mu h_p^2 / 2 \qquad (1)$$

$\| x_0^p - x_1^p \| \le h_p$ 이므로 $\lim\limits_{p \to \infty} x_1^p = x_0$ 이라는것은 분명하다. 따라서 충분히 큰 p 가 있어서 $h_p \gamma \le \delta$ 이며 갱신공식에 의하여 $\tilde{x}^p \in AF_{x_1^p} \cap B_\delta$ 가 있어서

$$U^p(x_1^p) = \tau_p / f(x_1^p,\ a^p) + U^p(\tilde{x}^p),\quad \tau_p = \| \tilde{x}^p - x_1^p \|,\ a^p = (\tilde{x}^p - x_1^p) / \| \tilde{x}^p - x_1^p \| \quad (2)$$

$$\nabla\phi(x_1^p) \cdot a^p + 1/f(x_1^p,\ a^p) \le [\phi(x_1^p + \tau_p a^p) - \phi(x_1^p)] / \tau_p + 1/f(x_1^p,\ \alpha^p) + \tau_p \mu \le \mu h_p^2 / (2\tau_p) + \tau_p \mu$$

한편 $\tau_p \le h_p \gamma$ 이므로 $\nabla\phi(x_1^p) \cdot a^p + 1/f(x_1^p,\ a^p) \le \mu(\eta/2 + \gamma) h_p$ 이다.

렬 $\{a^p\}$ 는 어떤 벡토르 $b \in S_1$ 에로 수렴하는 부분렬을 가진다.

f 의 련속성과 ϕ 의 미분가능성, U_p 의 평등수렴성을 리용하면

$$\nabla\phi(x_0) \cdot \boldsymbol{b} + 1/f(x_0,\ b) \le 0 \to (\nabla\phi(x_0) \cdot \boldsymbol{b}) f(x_0,\ \boldsymbol{b}) + 1 \le 0$$

$\min\limits_{\alpha \in S_1} \{(\nabla\phi(x_0 \cdot \boldsymbol{a})) f(x_0,\ a)\} \le (\nabla\phi(x_0) \cdot \boldsymbol{b}) f(x_0,\ b)$ 이므로 첫번째 부분이 증명된다.

$(u - \phi)$, $x_0 \in \Omega$ 에서 최대값을 가지는 임의의 함수 $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ 를 생각하자.

B_δ 를 반경이 δ 이고 중심이 x_0 인 구로 정의하자.

그러면 $B_\delta \subset \Omega$ 인 어떤 $\delta > 0$ 이 있어서 $x \in B_\delta$ 에 대하여

$$(u - \phi)(x_0) > (u - \phi)(x) \qquad (3)$$

$\nabla\phi(x_0)=0$ 이면 분명하다. 따라서 $\|\nabla\phi(x)\|\ge\nu>0$ 이라고 가정할수 있다.

$D_2(x)$ 를 ϕ 의 헤쎄행렬이라고 하면 μ 가 존재하여 $\|D_2(x)\|_2\le\mu$ 가 성립된다.

x_0^p 가 B_δ 우에서 $(U_p-\phi)$ 의 최대값점이면 U^p 의 평등수렴성으로부터 $\lim\limits_{p\to\infty}x_0^p=x_0$.

x_1^p 를 x_0^p 에서 가장 가까운 정점이라고 하자.

$$U^p(x_1^p)-U^p(x_0^p)=\nabla\phi(x_0^p)(x_1^p-x_0^p),\ \ (U^p-\phi)(x_1^p)\ge(U^p-\phi)(x_0^p)-\mu h_p^2/2$$

이고 이 부등식을 리용하면 $\forall x\in B_\delta$ 에 대하여 다음의 식이 성립된다.

$$\phi(x)-\phi(x_1^p)\ge(U^p(x)-U^p(x_0^p))+(U^p(x_0^p)-U^p(x_1^p)-\mu h_p^2/2)-U^p(x)-U^p(x_1^p)-\mu h_p^2/2 \quad (4)$$

$\|x_0^p-x_1^p\|\le h_p$ 이므로 $\lim\limits_{p\to\infty}x_1^p=x_0$ 이라는것은 분명하다.

$$\min_{\alpha\in S_1}\{(\nabla\phi(x_0)\cdot a)f(x_0,\ a)\}=\min_{\alpha\in S_1^{\phi,\ x_0}}\{(\nabla\phi(x_0)\cdot a)f(x_0,\ a)\} \quad (5)$$

$$S_1^{\phi,x_1^p}:=\{a\,|\,a\cdot\nabla\phi(x_1^p)\le\gamma^{-1}\|\nabla\phi(x_1^p)\|\} \quad (6)$$

$S_1^{\phi,\ x_1^p}\to S_1^{\phi,\ x_0}\ (p\to\infty)$ 이라는것은 분명하다.

국부최대값이 그물점에서 취해지고 시험함수 ϕ 가 선형일 때 x_1^p 에서 시작하여 일정한 거리 $\tau_p=O(h_p)$ 만큼 방향 a 를 따라 간다면 $AF_{x_1^p}$ 와 사귄다.

ϕ 는 방향 a 를 따라 감소하고 U^p 는 국부최대조건과 보조정리 3으로부터 x_1^p 가 접수된 이후 매 그물점 $x\in X_p$ 에 대하여 $U^p(x)\ge U_{\min}^{AF_{x_1^p}}+h_p/(\eta f_2)$ 가 성립된다.

부등식 (4)와 ϕ 의 미분가능성, 부등식 (6)으로부터

$$U^p(x_1^p+t_pa)-U^p(x_1^p)\le(\phi(x_1^p+t_pa)-\phi(x_1^p))+\mu h_p^2/2\le-\upsilon t_p\gamma^{-1}+\mu(h_p^2+t_p^2)/2$$

x_1^p 에서 시작하여 일정한 거리 $\tau_p=O(h_p)$ 만큼 방향 a 를 따라 간다면 $AF_{x_1^p}$ 와 사귄다는것을 증명하기 위하여서는 아래의 부등식이 만족될것이 필요하고 충분하다.

$$-\upsilon t_pf_1/f_2+\mu(h_p^2+t_p^2)/2\le-h_p/f_1 \quad (7)$$

$t_p=Ah_p$ 라고 하자.

만일 $(1/f_1-\upsilon Af_1/f_2)>0$ 이라고 하면 임의의 $h_p\in[0,\ 2(\upsilon Af_1/f_2-f_2)/[\mu(1+A^2)]]$ 에 대하여 식 (7)이 성립된다. 따라서 $A>(f^2/(\upsilon f_1))$ 이 되게 A 를 택하면 식 (7)이 충분히 작은 h 에 대하여 성립된다.

우의 부등식과 보조정리 3의 단조성결과를 결합하면

$$U^p(x_1^p+t_pa)\le U^p(x_1^p)-h_p/f_1\le U_{\min}^{AF_{x_1^p}}$$

$(x_1^p+t_pa)$ 는 $AF_{x_1^p}$ 안에 놓일수 없고 x_1^p 가 $AF_{x_1^p}$ 안에 놓이므로 x_1^p 에서 시작하여 일정한 거리 $\tau_p=O(h_p)$ 만큼 방향 a 를 따라 간다면 $AF_{x_1^p}$ 와 사귄다.

$\tau_p\in[0,\ t_p]$ 가 있어서 $\tilde{x}^p=(x_1^p+\tau_pa)\in AF_{x_1^o}$ 이 성립된다.

식 (6)으로부터 $\cos(-\nabla\phi(x_1^p)\wedge a)>\gamma^{-1}$ 이다.

$\lim_{p\to\infty} x_1^p = x_0$ 이고 식 (3)으로부터 충분히 큰 p 에 대하여

$$\forall x \in N(x_1^p),\quad (U^p - \phi)(x_1^p) > (U^p - \phi)(x)$$

한편 식 (6)으로부터 $\cos(-\nabla\phi(x_1^p) \wedge a) > \gamma^{-1}$ 이므로 $\exists x' \in A(x),\ \cos(\overrightarrow{xx'} \wedge a) > \gamma^{-1}$ 이 성립된다. 즉 $a \in S_1^{x_1^p}$ 이고 $\tilde{x}^p \in S'_{AF}(x_1^p)$ 가 성립된다.

보조정리 1로부터

$$U^p(x_1^p) = W^p(x_1^p) \le \tau_p / f(x_1^p,\ a) + U^p(\tilde{x}^p) \tag{8}$$

ϕ 의 미분가능성과 부등식 (4), (8)을 리용하면

$$\nabla\phi(x_1^p)\cdot a + 1/f(x_1^p,\ a) \ge [\phi(x_1^p + \tau_p a) - \phi(x_1^p)]/\tau_p + 1/f(x_1^p,\ a) - \tau_p\mu \ge -\mu h_p^2/(2\tau_p) - \tau_p\mu \tag{9}$$

$\tilde{x}$ 가 $AF_{x_1^p}$ 에 놓이고 $\tau_p = \|\tilde{x}^p - x_1^p\|$ 이므로 $\tau_p \ge h_p/\eta$ 이다.

한편 $\tau_p \le t_p = Ah_p$ 이다. 여기서 A 는 h_p 에 무관계한 상수이다.

부등식 (9)를 리용하면 $\nabla\phi(x_1^p)\cdot a + 1/f(x_1^p,\ a) \ge -\mu(\eta/2 + A)h_p$ 가 성립된다.

f 의 련속성과 ϕ 의 미분가능성, U^p 의 평등수렴성을 리용하면

$$\nabla\phi(x_0)\cdot a + 1/f(x_0,\ a) \ge 0 \Rightarrow (\nabla\phi(x_0)\cdot a) f(x_0,\ a) + 1 \ge 0$$

한편 $p\to\infty$ 일 때 $S_1^{\phi,\ x_1^p} \to S_1^{\phi,\ x_0}$ 이므로 우의 부등식은 임의의 $a \in S_1^{\phi,\ x_0}$ 에 대하여 성립되며 식 (5)로부터 $\min_{a\in S_1}\{(\nabla\phi(x_0)\cdot a) f(x_0,\ a)\} + 1 \ge 0$ 이 성립된다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] J. A. Sethian et al.; SIAM Review, 41, 2, 199, 1999.
[2] J. A. Sethian et al.; SIAM J. Numer. Anal., 41, 1, 323, 2003.
[3] S. Cacace et al.; SIAM J. Sci. Comput., 36, 570, 2014.

주체108(2019)년 12월 15일 원고접수

Convergence of Improved Ordered Upwind Method for an Anisotropic Min-Time Optimal Control Problem

Pak Ji Song, Ho Myong Song

We prove the convergence of improved ordered upwind method for an anisotropic min-time optimal control problem. We prove the various properties of the numerical solution which is given by the improved ordered upwind method and prove that the numerical solution converges uniformly to the viscosity solution of Hamilton-Jacobi equation for the min-time optimal control problem as the mesh size goes to zero.

Keywords: accepted front, anisotropic min-time optimal control problem