김일성종합대학학보 수 학

주체107(2018)년 제64권 제2호

$p-$라쁠라스연산자를 가진 한가지 비선형분수계미분방정식의 경계값문제에서 고유값구간결정

최희철, 오규남

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《수학, 물리학, 화학, 생물학과 같은 기초과학부문에서 과학기술발전의 원리적, 방법론적 기초를 다져나가면서 세계적인 연구성과들을 내놓아야 합니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 40페지)

우리는 최근에 많이 론의되고있는 비선형분수계미분방정식의 한가지 고유값문제에서 고유값구간을 결정하는 문제에 대하여 연구하였다.

선행연구[1, 2, 7]에서는 크라스노셀스끼부동점정리 등 일련의 부동점정리들을 리용하여 $p-$라쁠라스연산자를 가진 비선형리만-류빌분수계미분방정식에 대한 세점경계값문제의 정인 풀이의 존재성을 고찰하였다.

또한 선행연구[4]에서는 $p-$라쁠라스연산자를 가진 다음의 비선형다항캐푸터분수계미분방정식의 경계값문제

$$\begin{cases} D_{0+}^{\gamma}\varphi_p(D_{0+}^{\alpha}u(t)) + f(t,\ u(t),\ D_{0+}^{\rho}u(t)) = 0 \ \ (0<t<1) \\ u(0)=u'(1)=0,\ u''(0)=0,\ D_{0+}^{\alpha}u(0)=0 \\ 2<\alpha<3,\ 0<\gamma<1,\ 0<\rho\le 1 \end{cases}$$

의 우묵성, 정인 풀이의 존재성을 론의하였다.

론문에서는 미지함수의 분수계도함수가 포함되여있는 고유값문제 (1)의 풀이가 적어도 하나 존재하게 되는 고유값구간결정문제를 연구하였다. 여기서 도함수는 모두 리만－류빌분수계도함수이다.

우리가 고찰하는 문제는 선행연구[4]와 제일 류사한데 도함수의 의미가 다르고 령점에서의 도함수조건이 약화된 고유값문제이다.

론문에서 취급하는 문제는 다음과 같다.

$$\begin{cases} D_{0+}^{\gamma}\varphi_p(D_{0+}^{\alpha}u(t)) = \lambda f(t,\ u(t),\ D_{0+}^{\beta}u(t)) \ \ (0<t<1) \\ u(0)=D_{0+}^{\alpha}u(0)=u'(0)=u'(1)=0 \\ 0<\gamma<1,\ 0<\beta<1,\ 2<\alpha<3,\ 3<\alpha+\gamma<4 \end{cases} \tag{1}$$

여기서 $f\in C[0,\ 1]$은 부아닌 함수, $D_{0+}^{\gamma},\ D_{0+}^{\alpha},\ D_{0+}^{\beta}$는 리만－류빌분수계도함수이다.

정의 1 [6] $\Delta_p(u)=\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$로 정의되는 연산자 Δ_p를 $p-$라쁠라스연산자라고 부른다.

주의 u가 한변수함수인 경우 Δ_p는 $\Delta_p(u)=(|u'|^{p-2}u')'$로 된다. 리만－류빌분수계미분방정

식을 취급하는 우리의 경우에 $\varphi_p(s)=|s|^{p-2}s$ 라고 하면 Δ_p 를

$$\Delta_p(u)=D_{0+}^{\beta}(|D_{0+}^{\alpha}u|^{p-2}D_{0+}^{\alpha}u)=D_{0+}^{\beta}\varphi_p(D_{0+}^{\alpha}u(t))$$

로 쓸수 있다. Δ_p 가 φ_p 에 의해 규정된다는 의미에서 엄밀히 지적하지 않는 한 φ_p 를 $p-$라쁠라스 연산자라고도 부른다.

정의 2[1] 다음과 같은 적분을 함수 $f:[a, +\infty)\to\mathbf{R}$ 의 $\alpha>0$ 계리만－류빌분수계적분이라고 부른다.

$$(I_{a+}^{\alpha}f)(x):=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x(x-t)^{\alpha-1}f(t)dt,\ x>a$$

정의 3[1] 다음의 도함수를 $\alpha>0$ 계리만－류빌의 분수계도함수라고 부른다.

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x):=\left(\frac{d}{dx}\right)^n(I_{a+}^{n-\alpha}y)(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\int_a^x\frac{y(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt$$

$$n=[\alpha]+1,\ x>a$$

보조정리 1[3] $\alpha>0,\ n=1+[\alpha]$, $u,\ D_{0+}^{\alpha}u\in L_1(0,\ 1)$ 이라고 하자. 그러면 다음의 사실이 성립한다.

$$I_{0+}^{\alpha}D_{0+}^{\alpha}u(t)=u(t)+c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2}+\cdots+c_nt^{\alpha-n}\ \ (c_i\in\mathbf{R},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

보조정리 2[3] E 를 바나흐공간, Ω 를 X 의 유계열린부분모임, $0\in\Omega$ 라고 하자. 만일 완전련속연산자 $T:\overline{\Omega}\to E$ 가 조건

$$\|Tu\|\le\|u\|,\ \forall u\in\partial\Omega$$

를 만족시키면 T 는 $\overline{\Omega}$ 에서 부동점을 가진다.

보조정리 3[3] E 를 바나흐공간, $T:E\to E$ 를 완전련속연산자, $V:=\{u\in E\,|\,u=\rho Tu,\ 0<\rho<1\}$ 이 유계모임이라고 하면 T 는 E 에서 부동점을 가진다.

보조정리 4[5] $p\ge2,\ |x|,\ |y|\le M\Rightarrow|\varphi_p(x)-\varphi_p(y)|\le(p-1)M^{p-2}|x-y|$

정의 4 $D_{0+}^{\gamma}\varphi_p(D_{0+}^{\alpha}u(t))\in C[0,\ 1],\ D_{0+}^{\alpha}u(t)\in C[0,\ 1]$ 인 함수 $u(t)$ 가 식 (1)을 만족시킬 때 $u(t)$ 를 문제 (1)의 풀이라고 부른다.

정리 1 문제 (1)의 풀이 $u(t)$ 에 대하여 $x(t):=\varphi_p(D_{0+}^{\alpha}u(t))$ 는 다음의 적분방정식

$$x(t)=\lambda I_{0+}^{\gamma}f(t,\ \sigma_\alpha(t,\ x(t)),\ \sigma_\beta(t,\ x(t)))\tag{2}$$

의 $C[0,\ 1]$ 에서의 풀이이다. 여기서

$$\sigma_\alpha(t,\ x(t)):=I_{0+}^{\alpha}\varphi_q(x(t))-\frac{1}{\alpha-1}I_{0+}^{\alpha-1}\varphi_q(x(t))|_{t=1}\,t^{\alpha-1}$$

$$\sigma_\beta(t,\ x(t)):=I_{0+}^{\alpha-\beta}\varphi_q(x(t))-\frac{\Gamma(\alpha)}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-\beta)}I_{0+}^{\alpha-1}\varphi_q(x(t))|_{t=1}\,t^{\alpha-\beta-1}$$

정리 2 $x(t)$ 가 적분방정식 (2)의 $C[0,\ 1]$ 에서의 풀이이면

$$u(t)=I_{0+}^{\alpha}\varphi_q(x(t))-\frac{1}{\alpha-1}I_{0+}^{\alpha-1}\varphi_q(x(t))|_{t=1}\,t^{\alpha-1}\tag{3}$$

은 문제 (1)의 풀이이다.

적분방정식 (2)의 오른변을 $Tx(t)$ 로 표시하면 식 (2)를 연산자방정식형태로 다음과 같이 쓸수 있다.

$$x = Tx,\ x \in C[0,\ 1] \tag{4}$$

f 의 자기변수들에 관한 련속성으로부터 T 는 $C[0,\ 1]$ 에서 련속이다.

정리 3 $\Omega \subset C[0,\ 1]$ 을 유계모임 즉 $\exists M_0 > 0:\ \forall u \in \Omega,\ \|u\|_{C[0,\ 1]} \le M_0$ 이라고 하면 $T(\Omega)$ 는 $C[0,\ 1]$ 의 상대콤팍트모임이다. 즉 연산자 T 는 완전련속연산자이다.

정리 4 f 가 부아닌 유계이고 $f(s,\ 0,\ 0) \ne 0$ 이면 임의의 $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ 에 대하여 적분방정식 (2)는 령아닌 풀이를 가진다.

보조정리 3과 정리 3에 의하여 적분방정식 (2)는 풀이를 가진다. 한편 $\lambda \ne 0$ 인 경우 적분방정식 (2)는 령풀이를 가지지 않는다. 사실 $f(s,\ 0,\ 0) > 0$ 이므로 f 의 련속성으로부터

$$\exists \delta > 0;\ \forall x_1,\ x_2 \in U_\delta(0),\ f(s,\ x_1,\ x_2) > 0$$

으로 되고 따라서

$$I_{0+}^{\gamma} f(t,\ \sigma_\alpha(t,\ x(t)),\ \sigma_\beta(t,\ x(t))) > 0$$

이다. 그러므로 정리의 주장이 나온다.

정리 5 $p > 2$ 이고 $f(t,\ 0,\ 0) \ne 0$ 이며 부아닌 련속함수 $m(t),\ a_1(t),\ a_2(t)$ 들이 존재하여

$$|f(t,\ z_1,\ z_2)| \le m(t) + a_1(t)|z_1|^{\lambda_1} + a_2(t)|z_2|^{\lambda_2}\ \ (0 < \lambda_1,\ \lambda_2 \le 1)$$

이 성립한다고 하자. 이때 $\lambda \in U_W(0) \setminus \{0\}$ 이면 적분방정식 (2)는 령아닌 풀이를 가진다. 여기서

$$W := \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\|m\|_{C[0,\ 1]} + \dfrac{\|a_1\|_{C[0,1]}}{(2\Gamma(\alpha))^{\lambda_1}} + \dfrac{\|a_2\|_{C[0,\ 1]}}{(2\Gamma(\alpha-\beta))^{\lambda_2}}}$$

정리 6 $p > 2$ 이고 $f(t,\ 0,\ 0) \ne 0$ 이며 f 가 휠데르련속 즉

$$|f(t,\ z_1,\ z_2) - f(t,\ y_1,\ y_2)| \le l_1(t)|z_1 - y_1|^{\lambda_1} + l_2(t)|z_2 - y_2|^{\lambda_2}\ \ (0 < \lambda_1,\ \lambda_2 \le 1)$$

이라고 하자.

이때 $\lambda \in U_W(0) \setminus \{0\}$ 이면 적분방정식 (2)는 령아닌 풀이를 가진다. 여기서

$$W := \frac{\Gamma(\gamma+1)}{M_1 + \dfrac{\|l_1\|_{C[0,1]}}{(2\Gamma(\alpha))^{\lambda_1}} + \dfrac{\|l_2\|_{C[0,1]}}{(2\Gamma(\alpha-\beta))^{\lambda_2}}},\ M_1 = \max_{0 \le t \le 1}|f(t,\ 0,\ 0)|$$

실례 다음의 경계값문제를 론의하자.

$$\begin{cases} D_{0+}^{0.8}\varphi_p(D_{0+}^{2.5}u(t)) = \lambda f(t,\ u(t),\ D_{0+}^{0.5}u(t))\ \ (0 < t < 1) \\ u(0) = D_{0+}^{2.5}u(0) = u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

여기서

$$p = 3,\ f(t,\ x,\ y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{t^2+3}\sin x + \frac{1}{4+|x|}\sin y$$

이다.

$l_1(t) = 1/(3+t^2),\ l_2(t) = 1/4$ 이고 $\|l_1\|_{C[0,\ 1]} = 1/3,\ \|l_2\|_{C[0,\ 1]} = 1/4\ \ (\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1)$ 이다.

또한 $f(t,\ 0,\ 0) = 1/2 - t^2/4 \le 1/2$ 이고 $p = 3 > 2$ 이며

$$W := \frac{\Gamma(\gamma+1)}{M_1 + \dfrac{\| l_1 \|_{C[0,1]}}{(2\Gamma(\alpha))^{\lambda_1}} + \dfrac{\| l_2 \|_{C[0,1]}}{(2\Gamma(\alpha-\beta))^{\lambda_2}}} = \frac{\Gamma(0.8+1)}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6\Gamma(2.5)} + \dfrac{1}{8\Gamma(2.5-0.5)}} = 1.241\ 22$$

이므로 정리 6에 의하여 $-1.241\ 22 < \lambda < 1.241\ 22$인 모든 령아닌 λ에 대하여 적어도 하나의 비령풀이가 존재한다.

참 고 문 헌

[1] A. A. Kilbas et al.; Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, 118～134, 2006.

[2] J. Wang et al.; East Journal of Applied Mathematics, 37, 33, 2009.

[3] J. X. Sun; Nonlinear Functional Analysis and its Application, Science Press, 46～89, 2008.

[4] J. Wang et al.; Int. J. Math. Sci., Article ID 495138, 10, 2010.

[5] Z. liu et al.; Acta. Math. Hungar., 141, 3, 203, 2013.

[6] C. Chen et al.; Boundary Value Problems, Article ID 563767, 17, 2009.

[7] L. Hu, S. Zhang; Mediterr. J. Math., 13, 955, 2016.

주체106(2017)년 12월 5일 원고접수

Determination of the Eigenvalue Interval for a Boundary Value Problem of the Nonlinear Fractional Differential Equations with *p*-Laplacian Operator

Choe Hui Chol, *O Kyu Nam*

In this paper, we find some sufficient conditions for the determination of the eigenvalue interval for the existence of nonzero solutions in a boundary value problem of the nonlinear Riemann-Liouville fractional differential equations with *p*-Laplacian operator.

Key words: *p*-Laplacian operator, fractional differential equation, boundary value problem, eigenvalue interval