김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제3호

반순서거리공간에서 한가지 일반화된 약축소넘기기에 대한 부동점정리

김명훈, 강정수

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《현대과학기술의 빠른 발전은 기초과학의 성과에 토대하고있으며 과학기술분야에서의 자립성은 기초과학분야에서부터 시작됩니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제10권 485페지)

우리는 완비거리공간에서 축소넘기기에 대한 바나흐의 부동점정리의 일반화를 연구하였다.

최근 바나흐의 부동점정리를 일반화하기 위한 연구에서 거리변경함수를 리용한 약축소넘기기, 일반화된 약축소넘기기들에 대한 부동점정리들이 많이 제기되였다.[1－4]

선행연구[6]에서는 완비거리공간에서 한가지 일반화된 약축소넘기기에 대한 부동점정리를 고찰하였다.

론문에서는 완비거리공간에서 일반화된 약축소넘기기에 대한 부동점정리를 반순서거리공간에서 같은 넘기기에 대한 부동점정리로 개선하였다.

정의 1[1] 다음조건을 만족시키는 함수 $\psi:(0,\ \infty)\to[0,\ \infty)$ 를 거리변경함수라고 부른다.

① ψ 는 련속, 비감소함수이다.

② $\psi(t)=0 \Leftrightarrow t=0$

정리 1[2] $(X,\ d)$ 는 완비거리공간, $\psi,\ \phi$ 는 거리변경함수, T 는 $X\to X$ 인 함수로서 다음조건을 만족시킨다고 하자.

$$\psi(d(Tx,\ Ty))\le\psi(d(x,\ y))-\phi(d(x,\ y))\ \ (x,\ y\in X) \tag{1}$$

이때 T 는 유일한 부동점을 가진다.

정리 2[4] $(X,\ \le)$ 는 반순서모임, $(X,\ d)$ 는 거리 d 에 의한 완비거리공간, T 는 $X\to X$ 인 련속, 비감소함수로서 다음조건을 만족시킨다고 하자.

$$\psi(d(Tx,\ Ty))\le\psi(d(x,\ y))-\phi(d(x,\ y))\ \ (x\ge y\ \ (x,\ y\in X)) \tag{2}$$

이때 만일 $x_0\le Tx_0$ 인 $x_0\in X$ 가 존재한다면 T 는 부동점을 가진다. 여기서 $\psi,\ \phi$ 는 거리변경함수이다.

정리 3[5] $(X,\ d)$ 는 완비거리공간, $\psi,\ \phi$ 는 거리변경함수, T 는 $X\to X$ 인 함수로서 임의의 $x,\ y$ 에 대하여 다음조건을 만족시킨다고 하자.

$$\psi(d(Tx,\ Ty))\le\psi(M_g(Tx,\ Ty))-\phi(\max(d(x,\ y),\ d(y,\ Ty)))\ \ (x,\ y\in X)$$

여기서 $M_g(x,\ y):=\max\{d(x,\ y),\ d(y,\ Ty),\ [d(x,\ Ty)+d(y,\ Tx)]/2\}$ 이고 ψ 는 거리변경함수, $\phi:[0,\ \infty)\to[0,\ \infty)$ 인 련속함수, $\phi(t)=0\Leftrightarrow t=0$ 이다.

이때 T 는 유일한 부동점을 가진다.

정리 4[6] $(X,\ d)$ 는 완비거리공간, $\psi,\ \phi$ 는 거리변경함수, $T:X\to X$ 인 함수로서 다

음조건을 만족시킨다고 하자.

$$\psi(d(Tx,\ Ty)) \le \psi(M_g(Tx,\ Ty)) - \phi(M_g(Tx,\ Ty))\ \ (x,\ y \in X)$$

이때 T 는 유일한 부동점을 가진다.

반순서거리공간에서 정리 3의 일반화된 약축소넘기기에 대한 부동점정리는 이미 증명되였다.[1]

론문에서는 정리 4에서 본 일반화된 약축소넘기기에 대한 부동점정리를 반순서거리공간에서의 부동점정리로 개선하였다.

정의 2[3] $(X,\ \le)$ 는 반순서모임, $f: X \to X$ 인 넘기기이고 다음조건을 만족시키면 f 를 단조, 비감소넘기기라고 부른다.

$$x,\ y \in X\ \ (x \le y) \Rightarrow f(x) \le f(y)$$

정의 3[4] $(X,\ d)$ 는 거리공간, $T: X \to X$ 인 넘기기이고 다음조건을 만족시키면 T 를 일반화된 약축소넘기기라고 부른다.

$$\psi(d(Tx,\ Ty)) \le \psi(M_g(x,\ y)) - \phi(\max\{d(x,\ y),\ d(y,\ Ty)\})\ \ (\forall x,\ y \in X) \tag{3}$$

여기서 $M_g(x,\ y) := \max\{d(x,\ y),\ d(x,\ Tx),\ d(y,\ Ty),\ [d(x,\ Ty)+d(y,\ Tx)]/2\}$ 이고 $\psi,\ \phi$ 는 거리변경함수이다.

정의 4[6] $(X,\ d)$ 는 거리공간, $T: X \to X$ 인 넘기기이고 다음조건을 만족시키면 T 를 일반화된 약축소넘기기라고 부른다.

$$\psi(d(Tx,\ Ty)) \le \psi(M_g(Tx,\ Ty)) - \phi(M_g(Tx,\ Ty))\ \ (\forall x,\ y \in X) \tag{4}$$

여기서 ψ 는 거리변경함수, $\phi: (0,\ \infty) \to [0,\ \infty)$ 인 하반련속, $\phi(t)=0 \Leftrightarrow t=0$ 이다.

정리 5 $(X,\ \le)$ 는 반순서모임, $(X,\ d)$ 는 거리 d 에 관하여 완비공간, $T: X \to X$ 인 련속, 비감소넘기기이고 만일 $x,\ y \in X\ \ (x \ge y)$ 에 대하여 $d(x,\ Tx)/2 \le d(x,\ y)$ 이면 조건 (4)를 만족시킨다고 하자.

이때 $\exists x_0 \in X;\ x_0 \le Tx_0$ 이면 T 는 X 에서 부동점을 가진다. 여기서 $\psi,\ \phi$ 들은 정리 3에서와 같다.

증명 만일 $Tx_0 = x_0$ 이면 증명은 끝난다.

$Tx_0 < x_0$ 이라고 하자. $Tx_0 < x_0$ 이고 T 는 비감소함수이므로

$$x_0 < Tx_0 = x_1 \le Tx_1 = x_2 \le \cdots \le Tx_{n-1} = x_n \le \cdots\ \ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

이고 $x_{n+1} = Tx_n\ \ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ 이라고 놓자.

이제 $x = x_{n-1},\ y = x_n$ 으로 놓으면 임의의 n 에 대하여 $d(x_{n-1},\ x_n)/2 \le d(x_{n-1},\ x_n)$ 이고 x_{n-1} 과 x_n 은 비교가능하므로 식 (4)에 의하여

$$\begin{aligned}
&\psi(d(x_{n+1},\ x_n)) = \psi(d(Tx_n,\ Tx_{n-1})) \le \\
&\quad \le \psi(M_g(Tx_n,\ Tx_{n-1})) - \phi(M_g(Tx_n,\ Tx_{n-1})) = \\
&\quad = \psi(\max\{d(x_n,\ x_{n-1}),\ d(x_n,\ Tx_n),\ d(x_{n-1},\ Tx_{n-1}),\ [d(x_n,\ Tx_{n-1})+d(x_{n=1},\ Tx_n)]/2\}) - \\
&\quad - \phi(\max\{d(x_n,\ x_{n-1}),\ d(x_n,\ Tx_n),\ d(x_{n-1},\ Tx_{n-1}),\ [d(x_n,\ Tx_{n-1})+d(x_{n=1},\ Tx_n)]/2\}) = \\
&\quad = \psi(\max\{d(x_n,\ x_{n-1}),\ d(x_n,\ x_{n+1})\}) - \phi(\max\{d(x_n,\ x_{n-1}),\ d(x_n,\ x_{n+1})\})
\end{aligned} \tag{5}$$

이다.

만일 $d(x_n,\ x_{n-1}) < d(x_n,\ x_{n+1})$ 인 n 이 있다면 식 (5)는

$$\psi(d(x_{n+1},\ x_n))\le\psi(d(x_n,\ x_{n+1}))-\phi(d(x_n,\ x_{n+1}))$$

로 되고 $\phi(d(x_n,\ x_{n+1}))=0$ 이며 즉 $x_n=x_{n+1}=Tx_n$ 이다.

따라서 x_n 은 부동점이다.

만일 모든 n 에 대하여 $d(x_n,\ x_{n-1})\ge d(x_n,\ x_{n+1})$ 이면 $d(x_n,\ x_{n+1})$ 은 부아닌 단조감소소렬이고 $\lim_{n\to\infty} d(x_n,\ x_{n+1})=\gamma\ge 0$ 이다.

ϕ 의 하반련속성에 의하여 $\phi(\gamma)\le\liminf_{n\to\infty}\phi(d(x_n,\ x_{n-1}))$ 이고 ψ 의 련속성에 의하여

$$\psi(\gamma)\le\psi(\gamma)-\phi(\gamma)$$

이다.

따라서 $\phi(\gamma)=0$ 즉

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,\ x_{n+1})=\gamma=0 \tag{6}$$

다음 (x_n) 이 꼬쉬렬이라는것을 보자. 만일 (x_n) 이 꼬쉬렬이 아니라면

$$\exists\varepsilon>0,\ \exists m_k;\ n_k(m_k>n_k>k),\ d(x_{m_k},\ x_{n_k})\ge\varepsilon \tag{7}$$

$$d(x_{m-1_k},\ x_{n_k})<\varepsilon \tag{8}$$

이 성립한다.(여기서 m_k 는 식 (7)이 성립하는 최소의 정의 옹근수이다.)

식 (7), (8)에 의하여

$$\varepsilon\le d(x_{m_k},\ x_{n_k})\le d(x_{m_k},\ x_{m_k-1})+d(x_{m_k-1},\ x_{n_k})<d(x_{m_k},\ x_{m_k-1})+\varepsilon \tag{9}$$

이고 다시 삼각부등식을 쓰면

$$d(x_{m_k},\ x_{n_k})\le d(x_{m_k},\ x_{m_k-1})+d(x_{m_k-1},\ x_{n_k-1})+d(x_{n_k-1},\ x_{n_k})$$

$$d(x_{m_k-1},\ x_{n_k-1})\le d(x_{m_k-1},\ x_{m_k})+d(x_{m_k},\ x_{n_k})+d(x_{n_k},\ x_{n_k-1})$$

이 나오며 $k\to\infty$ 이면 우의 부등식과 식 (6), (8), (9)에 의하여

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{m_k-1},\ x_{n_k-1})=\varepsilon$$

이다. $m_k>n_k$ 이고 x_{m_k-1} 과 x_{n_k-1} 은 비교가능하므로($x_{m_k-1}\ge x_{n_k-1}$) $x=x_{m_k-1},\ y=x_{n_k-1}$ 로 놓으면 x 와 y 는 비교가능하고 식 (4)에 의하여

$$\begin{aligned}&\psi(d(x_{m_k},\ x_{n_k}))\le\psi(M_g(Tx_{m_k-1},\ Tx_{n_k-1}))-\phi(M_g(Tx_{m_k-1},\ Tx_{n_k-1}))=\\&=\psi(\max\{d(x_{m_k-1},\ x_{n_k-1}),\ d(x_{m_k-1},\ x_{m_k}),\ d(x_{n_k-1},\ x_{n_k}),\ [d(x_{m_k-1},\ x_{n_k})+d(x_{n_k-1},\ x_{m_k})]/2\})-\\&-\phi(\max\{d(x_{m_k-1},\ x_{n_k-1}),\ d(x_{m_k-1},\ x_{m_k}),\ d(x_{n_k-1},\ x_{n_k}),\ [d(x_{m_k-1},\ x_{n_k})+d(x_{n_k-1},\ x_{m_k})]/2\})\end{aligned}$$

$k\to\infty$ 이면 $\psi(\varepsilon)\le\psi(\varepsilon)-\phi(\varepsilon)$ $(\phi(\varepsilon)=0,\ \varepsilon=0)$ 이다. 이것은 모순이다. $(\varepsilon>0)$ 따라서 (x_n) 은 꼬쉬렬이다.

X 는 완비이므로 $x_n\to z\in X$ $(n\to\infty)$ 이다.

T 는 련속이므로 $z=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}Tx_{n-1}=Tz$ 이고 z 는 T 의 부동점이다.(증명끝)

정리 3으로부터 다음의 결과가 나온다.

따름 $(X,\ \le)$ 는 반순서모임, $(X,\ d)$ 는 거리 d 에 관하여 완비공간, $T:X\to X$ 인 련속, 비감소넘기기이고 만일 $x,\ y\in X$ $(x\ge y)$ 에 대하여 조건 (4)를 만족시킨다고 하자.

이때 $\exists x_0\in X;\ x_0\le Tx_0$ 이면 T 는 X 에서 부동점을 가진다.

주의 1 따름은 선행연구[6]의 기본결과인 정리 4의 반순서거리공간에로의 일반화이다.

정리 6 $(X, \le)$ 는 반순서모임, (X, d) 는 거리 d 에 관하여 완비공간, $T: X \to X$ 인 련속, 비감소넘기기이고 만일 $x, y \in X$ $(x \ge y)$ 에 대하여 $d(x, Tx)/2 \le d(x, y)$ 이면 조건 (2)를 만족시킨다고 하자.

이때 $\exists x_0 \in X;\ x_0 \le Tx_0$ 이면 T 는 X 에서 부동점을 가진다. 여기서 ψ, ϕ 들은 정리 3에서와 같다.

주의 2 정리 6은 선행연구[4]에서 고찰한 정리 2의 일반화이다.

정리 7 $(X, \le)$ 는 반순서모임, (X, d) 는 거리 d 에 관하여 완비공간, $T: X \to X$ 인 련속, 비감소넘기기이고 만일 $x, y \in X,\ x \ge y$ 에 대하여 $d(x, Tx)/2 \le d(x, y)$ 이면 조건 (3)을 만족시킨다고 하자.

이때 $\exists x_0 \in X;\ x_0 \le Tx_0$ 이면 T 는 X 에서 부동점을 가진다. 여기서 ψ, ϕ 들은 정리 3에서와 같다.

주의 3 정리 6은 선행연구[1]에서 고찰한 정리의 일반화이다.

참 고 문 헌

[1] 김명훈; 수학, 3, 54, 주체105(2016).
[2] B. E. Roades; Nonlinear Anal., 47, 2683, 2001.
[3] P. N. Dhutta, B. S. Choudhury; Fixed Point Theory Appl., Article ID 406368, 2008.
[4] J. Harjani, K. Sadarangani; Nonlinear Anal., 72, 1188, 2010.
[5] B. S. Choudhury et al.; Nonlinear Anal., 74, 2116, 2011.
[6] S. L. Singgh et al.; Filomat, 29, 7, 1481, 2015.

주체108(2019)년 3월 15일 원고접수

Fixed Point Theorems for a Generalized Weakly Contractive Mapping in Partially Ordered Metric Spaces

Kim Myong Hun, Kang Jong Su

In this paper, we improve the fixed point theorems for a generalized weakly contractive mapping in complete metric spaces to corresponding those in partially ordered metric spaces.

Key words: fixed point, partially ordered metric space