김일성종합대학학보 주체110(2021)년
수 학 제67권 제3호

빠쏭도착과 지수봉사를 가진 유한원천봉사계의 경영계획

명찬길, 박윤정

경애하는 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《우리는 과학기술을 발전시켜도 남들이 걸은 길을 따라만 갈것이 아니라 우리 과학자들의 애국충정과 우리 인민의 슬기와 민족적자존심을 폭발시켜 년대와 년대를 뛰여넘으며 비약해나가야 합니다.》

우리는 현실에서 제기되는 한가지 형태의 봉사계의 경영계획에 대하여 연구하였다.

선행연구[1]에서는 평형상태에서 보수지연계약이 절대로 유리하지 않다는것을 연구하였으며 선행연구[4]에서는 봉사시간이 빠른 봉사들에 대하여 값을 더 지불하며 고정가격계약과 토막선형가격계약, 비선형가격계약들에 대한 봉사계약들에 대하여 포괄적으로 연구하고 콤퓨터모의실험을 통해 가격과 봉사를 끝내는 시간에 대한 비선형함수를 도입하는것이 보다 효과적이라는 결과를 얻어냈다.

선행연구[2]에서는 여러명의 봉사자들을 가진 봉사계에서 서로 다른 가격모형을 리용하여 봉사를 끝내는 시간과 가격입출에 의해 제기되는 불확실한 량의 작업과제를 놓고 경쟁하는 조건에 대하여 연구하였으며 선행연구[3]에서는 빠쏭도착과 지수봉사를 가진 무한원천봉사계의 경영계획에 대하여 연구하였다.

론문에서는 빠쏭도착과 지수봉사를 가진 유한원천의 봉사계에 대한 경영계획을 설정하고 평형상태에 대한 분석을 리용하여 봉사계에 받아들일수 있는 최대손님수를 론의하였으며 리득함수를 분석하였다.

1. 모형설정

원천에 N 명의 손님들이 있고 K명의 봉사성원들이 봉사활동을 진행하는 봉사계가 있다고 하자. 손님들은 파라메터가 λ인 빠쏭분포에 따라 도착하며 봉사시간은 파라메터가 μ인 지수분포에 따른다. 손님의 리탈시간은 파라메터가 β인 지수분포에 따르며 도착시간들과 봉사시간들, 리탈시간들은 서로 독립이다. 대중봉사계에서 평균리득금을 최대로 하는 유한용량 $m \le N$을 결정하자. 여기서 $m \ge 1$은 결정변량이다. 계의 용량이 m이라는 조건밑에서 계안에 이미 m명의 손님들이 있다면 도착하게 되는 손님들은 거절된다. R를 새로 도착하는 손님이 거절될 확률이라고 하자. 이 경우는 계안에 m명의 손님들이 있을 때 일어난다.

다음표시들을 도입하자.

M: 계안에 있는 평균요청수

Z: 도착한 손님이 봉사를 끝까지 받지 못하고 봉사계를 리탈할 확률

r: 매 손님이 내는 평균봉사료금

d: 선불금

g: 손님의 리탈에 의해 일어나는 손실비

c: 봉사를 진행하는 봉사성원에게 단위시간동안 지불되는 자금

단위시간당 봉사계가 얻게 되는 평균리득금은 다음과 같다.

$$\pi(m)=\lambda[(N-M)-(N-m)R][(1-Z)r+Z(d-g)]-cK \quad (1)$$

식 (1)에서 첫번째 항은 봉사를 끝까지 받는 손님들이 내는 봉사료금이며 두번째 항은 리탈로 인한 손실비이며 세번째 항은 봉사성원들에게 지불되는 자금이다.

평균리득금은 유한용량 m에 관계되므로 m에 관한 리득함수로 된다.

리득함수 $\pi(m)$을 최대화하는 봉사계의 용량 m^*을 결정하는 문제 즉 $\max_m\{\pi(m)\}$을 푸는 문제가 나선다.

대중봉사계에서 도착한 매 손님들은 다음과 같은 조건을 지켜야 한다.

① 선불금 d는 반환할수 없다.

② 봉사를 다 받았을 때 $r-d$의 돈을 내야 한다.

봉사성원들은 계안에 있는 손님들이 균등하게 배당된다.

2. 평형상태분석

다음과 같은 표시를 도입하자.

p_i를 계안에 $i\,(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m)$명의 손님이 있을 정상상태확률이라고 하자.

정리 1 주어진 모형에 대한 평형방정식들은 다음과 같다.

$$N\lambda p_0=(K\mu+\alpha)p_1$$

$$[(N-i)\lambda+K\mu+i\alpha]p_i=(N-i+1)\lambda\, p_{i-1}+[K\mu+(i+1)\alpha]p_{i+1}\ \ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1)$$

$$(K\mu+m\alpha)p_m=(N-m+1)\lambda\, p_{m-1}$$

$$\sum_{i=0}^{m}p_i=1$$

정리 2 주어진 모형에 대한 평형상태확률들은 다음과 같다.

$$p_0=\left\{1+\sum_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{i}\frac{(N-j+1)\lambda}{(K\mu+j\alpha)}\right\}^{-1} \quad (2)$$

$$p_i=p_0\prod_{j=1}^{i}\frac{(N-j+1)\lambda}{(K\mu+j\alpha)}\ \ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \quad (3)$$

3. 계의 효과성지표와 그 성질

계안에 있는 평균손님수

$$M=\sum_{i=1}^{m}ip_i$$

매 손님의 평균체류시간

$$W=\frac{M}{\lambda[(N-M)-(N-m)R]} \quad (4)$$

계안에 손님들이 없을 확률

$$H = p_0 = \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{i} \frac{(N-j+1)\lambda}{(K\mu + j\alpha)} \right\}^{-1} \tag{5}$$

거절확률

$$R = p_m = p_0 \prod_{j=1}^{m} \frac{(N-j+1)\lambda}{(K\mu + j\alpha)} \tag{6}$$

리탈확률

$$Z = \frac{\alpha M}{\lambda[(N-M)-(N-m)R]} \tag{7}$$

정리 3 봉사계가 비게 될 확률 H 와 거절확률 R, 리탈확률 Z 는 다음과 같은 성질들을 가지고있다.

① 봉사계가 비게 될 확률 H 는 원천에 있는 손님수 N 과 계의 용량 m 에 관하여 비증가함수이며 봉사성원수 K 에 관하여 비감소함수이다.

$N\lambda < K\mu + \alpha$ 일 때 임의의 계의 용량 m 에 대하여 계가 비게 될 확률 H 는 거절확률 R 보다 항상 크다. 즉 $H > R$ 이다. 그러나 $N\lambda \ge K\mu + \alpha$ 이면 $m < \tau$ 일 때 $H < R$, $m \ge \tau$ 일 때 $H > R$ 인 경계 $\tau > 0$ 이 존재한다.

② 리탈확률 Z 와 계에서 손님들의 평균체류시간 W 는 계의 용량 m 에 관해서 증가한다.

③ m 을 임의로 고정하면 봉사계가 비게 될 확률 H 와 리탈확률 Z 는 λ 와 N 에 거꿀비례하고 μ 와 K 에 비례한다. 그러나 거절확률 R 는 λ 와 N 에 비례하고 μ 와 K 에 관해 거꿀비례한다.

정리 4 최대로 받아들일수 있는 손님수 m^* 은 다음과 같은 성질을 가진다.

① 신용손실이 선불금보다 작다면 $(g \le d)$ 최대로 받아들일수 있는 손님수는 $m^* = N$ 이다.

② $g > d$ 로서 신용손실이 선불금보다 크다면 식 (9)에서 주어진 리득함수는 한봉우리형이며 따라서 최대로 받아들일수 있는 손님수 m^* 은 유일하다.

정리 5 $g > d$ 일 때 최대로 받아들일수 있는 손님수 m^* 에 주는 비용과 체계파라메터들의 영향은 다음과 같다.

① m^* 은 신용손실 g 가 증가하면 감소하지만 선불금 d 와 가격 r 가 증가하면 증가한다.

② m^* 은 평균적인 도착파라메터 $\lambda[(N-M)-(N-m)R]$ 가 증가하면 감소하지만 봉사파라메터 μ 와 봉사인원수 K 가 증가하면 증가한다.

참 고 문 헌

[1] T. Chen, T. Klastorin; Manufacturing Service Operation Management, 17, 3, 290, 2015.

[2] D. Gupta, E. M. Snir; Production and Operation Management, 24, 1, 159, 2015.

[3] B. Jiaru; Journal of Operational Research, 253, 777, 2016.

[4] L. P. Kerkhove; Omega.doi:10.1016/j.omega. 09.002i. 2015.

주체110(2021)년 3월 5일 원고접수

Managing Project of a Finite-Source Queue with Poisson Arrival and Experimental Service

Myong Chan Gil, Pak Yun Jong

In this paper, we consider managing project of a finite-source queue with Poisson arrival and experimental service.

We set optimization problem of mean profit function and give analysis for mean profit function.

Keywords: queue, finite-source