김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제2호

통계다양체에서 일반화된 공액접속의 몇가지 성질

정강민, 민철림

론문에서는 통계다양체에서 일반화된 공액접속의 특성을 연구하였다.

선행연구[1, 2]에서는 통계다양체에서 공액인 접속개념이 도입되고 그것이 통계적추론에서 중요한 역할을 한다는것을 밝혔다.

선행연구[4]에서는 공액접속개념을 일반화하여 일반화된 공액접속, 준공액접속개념을 도입하였으며 선행연구[3, 5]에서는 쌍대준공액접속의 개념을 도입하여 일반화된 공액접속과 준공액접속사이의 관계를 명백히 하였다.

우리는 준리만다양체우에서 일반화된 공액접속을 연구한다. 사영동등, 쌍대사영동등과의 관계속에서 일반화된 공액접속과 준공액접속, 쌍대준공액접속들사이의 관계를 밝히며 또한 통계다양체우에서 준공액접속과 쌍대준공액접속의 통계구조를 주기 위한 조건들을 연구한다.

$(M,\ g)$를 준리만다양체라고 하고 ∇를 M우의 아핀접속이라고 할 때 g에 관한 공액접속 ∇^*은

$$Xg(Y,\ Z)=g(\nabla_X Y,\ Z)+g(Y,\ \nabla^*_X Z)\ \ (\forall X,\ Y,\ Z\in\Gamma(TM)) \tag{1}$$

로 정의된다.[1]

정의로부터 알수 있는바와 같이 레비－치비따접속은 자기공액이며 공액접속은 레비－치비따접속의 일반화이다.

$(M,\ g)$를 준리만다양체라고 하고 ∇를 M우의 아핀접속, τ를 M우의 1－형식이라고 하자.

τ에 의한 ∇의 g에 관하여 일반화된 공액접속 $\overline{\nabla}^*$은

$$Xg(Y,\ Z)=g(\nabla_X Y,\ Z)+g(Y,\ \overline{\nabla}^*_X Z)-\tau(X)g(Y,\ Z)\ \ (\forall X,\ Y,\ Z\in\Gamma(TM)) \tag{2}$$

로 정의된다.[5]

τ에 의한 ∇의 g에 관하여 준공액접속 $\hat{\nabla}^*$은

$$Xg(Y,\ Z)=g(\nabla_X Y,\ Z)+g(Y,\ \hat{\nabla}^*_X Z)+\tau(Z)g(X,\ Y)\ \ (\forall X,\ Y,\ Z\in\Gamma(TM)) \tag{3}$$

로 정의된다.[4]

τ에 의한 ∇의 g에 관하여 쌍대준공액접속 $\breve{\nabla}^*$은

$$\begin{aligned}Xg(Y,\ Z)=g(\nabla_X Y,\ Z)+g(Y,\ \breve{\nabla}^*_X Z)-\tau(X)g(Y,\ Z)-\tau(Y)g(X,\ Z)\\ \forall X,\ Y,\ Z\in\Gamma(TM)\end{aligned} \tag{4}$$

로 정의된다.[3]

∇와 ∇'를 M우의 아핀접속들이라고 할 때 M우의 1－형식 τ가 있어서

$$\nabla'_X Y=\nabla_X Y+\tau(Y)X+\tau(X)Y\ \ (\forall X,\ Y\in\Gamma(TM)) \tag{5}$$

가 성립하면 ∇'는 ∇와 τ에 의해 사영동등하다고 말한다.

∇와 ∇''를 M우의 아핀접속들이라고 할 때 M우의 1－형식 τ가 있어서

$$\nabla''_X Y = \nabla_X Y - g(X,\ Y)\tau^{\#} \quad (\forall X,\ Y \in \Gamma(TM)) \tag{6}$$

가 성립할 때 ∇''는 ∇와 τ에 의해 쌍대사영동등하다고 말한다. 여기서 $\tau^{\#}$은 $g(X,\ \tau^{\#}) = \tau(X)$ $\forall X \in \Gamma(TM)$를 만족시키는 M우의 벡토르마당이다.[4]

선행연구[3]의 명제 1.2(명제 1.3)로부터 준리만다양체우의 아핀접속과 사영동등(쌍대사영동등)한 접속의 일반화된 공액접속과 쌍대준공액(준공액)접속은 쌍대사영동등(사영동등)하다는것을 알수 있다.

이와 관련하여 다음의 사실들이 성립한다.

명제 1 $(M,\ g)$를 준리만다양체, ∇를 M우의 아핀접속이라고 하자. $\overline{\nabla}^*$을 τ에 의한 ∇의 g에 관하여 일반화된 공액접속, $\hat{\nabla}^*$을 τ에 의한 ∇의 g에 관하여 준공액접속이라고 하면 $\overline{\nabla}^*$은 $\hat{\nabla}^*$과 τ에 의해 사영동등하다.

증명 식 (2)에서 (3)을 덜면 임의의 $X,\ Y,\ Z \in \Gamma(TM)$에 대하여

$$g(Y,\ \overline{\nabla}^*_X Z) = g(Y,\ \hat{\nabla}^*_X Z) + \tau(Z)g(X,\ Y) + \tau(X)g(Y,\ Z) =$$
$$= g(Y,\ \hat{\nabla}^*_X Z + \tau(Z)X + \tau(X)Z)$$

가 성립한다. 즉

$$\overline{\nabla}^*_X Z = \hat{\nabla}^*_X Z + \tau(Z)X + \tau(X)Z \quad (\forall X,\ Z \in \Gamma(TM))$$

이며 명제의 주장이 성립한다.(증명끝)

명제 2 $(M,\ g)$를 준리만다양체, ∇를 M우의 아핀접속이라고 하자. $\overline{\nabla}^*$을 τ에 의한 ∇의 g에 관하여 일반화된 공액접속, $\breve{\nabla}^*$을 τ에 의한 ∇의 g에 관하여 쌍대준공액접속이라고 하면 $\overline{\nabla}^*$은 g에 관하여 $\breve{\nabla}^*$과 τ에 의해 쌍대사영동등하다.

증명 식 (2)에서 (4)를 덜면 임의의 $X,\ Y,\ Z \in \Gamma(TM)$에 대하여

$$g(Y,\ \overline{\nabla}^*_X Z) = g(Y,\ \breve{\nabla}^*_X Z) - \tau(Y)g(X,\ Z) = g(Y,\ \breve{\nabla}^*_X Z - g(X,\ Z)\tau^{\#})$$

이 성립한다. 여기서 $\tau^{\#}$는 $g(X,\ \tau^{\#}) = \tau(X)$ $(\forall X \in \Gamma(TM))$에 의해 정의되는 M우의 벡토르마당이다. 즉

$$\overline{\nabla}^*_X Z = \breve{\nabla}^*_X Z - g(X,\ Z)\tau^{\#} \quad (\forall X,\ Z \in \Gamma(TM))$$

이며 명제의 주장이 성립한다.(증명끝)

$(M,\ g)$를 준리만다양체, φ를 M우의 미끈한 함수라고 하자. 계량의 공형변화 $\overline{g} = e^{\varphi}g$를 생각한다. ∇를 M우의 아핀접속으로서 g에 관하여 계량적이라고 가정하고 $\overline{\nabla}$를 M우의 아핀접속으로서 $\overline{g}$에 관하여 계량적이라고 가정하면 $\overline{\nabla}$는 $d\varphi$에 의한 ∇의 g에 관하여 일반화된 공액접속이며 국부자명하다는것을 쉽게 알수 있다.

M우의 아핀접속 ∇가 계량적이라는 조건밑에서 다음의 사실이 성립한다.

명제 3 $(M,\ g)$를 준리만다양체, ∇를 M우의 아핀접속이라고 하자. 또한 $\hat{\nabla}^*$을 τ에 의한 ∇의 g에 관하여 준공액접속, $\breve{\nabla}^*$을 τ에 의한 ∇의 g에 관하여 쌍대준공액접속이라고 하자. ∇가 g에 관하여 계량적 즉 $\nabla g = 0$이면 $\breve{\nabla}^*$은 τ에 의한 $\hat{\nabla}^*$의 g에 관하여 일반화된 공액접속이다.

증명 식 (4)에서 준리만계량 g의 대칭성으로부터

$$Xg(Y,\ Z)(=Xg(Z,\ Y))=g(\nabla_X Z,\ Y)+g(Z,\ \breve{\nabla}^*_X Y)-\tau(X)g(Y,\ Z)-\tau(Z)g(X,\ Y)\quad \forall X,\ Y,\ Z\in\Gamma(TM)$$

가 성립하며 웃식과 식 (3)을 더하면 임의의 $X,\ Y,\ Z\in\Gamma(TM)$에 대하여

$$2Xg(Y,\ Z)=g(\nabla_X Y,\ Z)+g(Y,\ \hat{\nabla}^*_X Z)+g(\nabla_X Z,\ Y)+g(Z,\ \breve{\nabla}^*_X Y)-\tau(X)g(Y,\ Z)$$

가 성립한다. ∇가 g에 관하여 계량적이므로 임의의 $X,\ Y,\ Z\in\Gamma(TM)$에 대하여

$$(\nabla_X g)(Y,\ Z)=Xg(Y,\ Z)-g(\nabla_X Y,\ Z)-g(\nabla_X Z,\ Y)=0$$

이며 따라서 임의의 $X,\ Y,\ Z\in\Gamma(TM)$에 대하여

$$Xg(Y,\ Z)=g(Y,\ \hat{\nabla}^*_X Z)+g(Z,\ \breve{\nabla}^*_X Y)-\tau(X)g(Y,\ Z)$$

가 성립하며 명제의 주장이 성립한다.(증명끝)

$(M,\ g)$를 준리만다양체, ∇를 M우의 아핀접속이라고 하자. $(g,\ \nabla)$가 M우의 통계구조를 이룬다는것은 아핀접속 ∇가 대칭이고 ∇g가 대칭일 때를 말한다. 이때 다양체 $(M,\ g,\ \nabla)$를 통계다양체라고 부른다.

∇^*이 g에 관한 ∇의 공액접속일 때 $(g,\ \nabla)$가 M우의 통계구조를 이루기 위해서는 $(g,\ \nabla^*)$이 M우의 통계구조를 이룰것이 필요하고 충분하다.

그러나 일반화된 공액접속이나 준공액접속, 쌍대준공액접속에 대해서는 우의 사실이 성립하지 않는다.

우리는 통계다양체우에서 준공액접속과 쌍대준공액접속의 통계구조와 관련한 몇가지 성질들을 보기로 한다.

명제 4 $(M,\ g,\ \nabla)$를 통계다양체라고 하자. ∇'를 τ에 의해 ∇와 사영동등한 M우의 아핀접속, $\hat{\nabla}'^*$을 τ에 의한 ∇'의 g에 관하여 준공액접속이라고 할 때 $(g,\ \hat{\nabla}'^*)$는 M우의 통계구조를 이룬다.

증명 $\hat{\nabla}'^*$은 τ에 의한 ∇'의 g에 관하여 준공액접속이므로

$$Xg(Y,\ Z)=g(\nabla'_X Y,\ Z)+g(Y,\ \hat{\nabla}'^*_X Z)+\tau(Z)g(X,\ Y)\ \ (\forall X,\ Y,\ Z\in\Gamma(TM))\tag{7}$$

가 성립한다. 식 (5)를 (7)에 대입하면 임의의 $X,\ Y,\ Z\in\Gamma(TM)$에 대하여

$$Xg(Y,\ Z)=g(\nabla_X Y,\ Z)+g(Y,\ \hat{\nabla}'^*_X Z)+ +\tau(Z)g(X,\ Y)+\tau(X)g(Z,\ Y)+\tau(Y)g(X,\ Z)$$

가 성립한다. 이제

$$\tilde{C}(X,\ Y,\ Z)=\tau(Z)g(X,\ Y)+\tau(X)g(Z,\ Y)+\tau(Y)g(X,\ Z)\quad \forall X,\ Y,\ Z\in\Gamma(TM)\tag{8}$$

라고 놓고 식 (1)을 리용하면

$$g(Y,\ \hat{\nabla}'^*_X Z)=g(Y,\ \nabla^*_X Z)-\tilde{C}(X,\ Y,\ Z)\ \ (\forall X,\ Y,\ Z\in\Gamma(TM))$$

가 성립한다.

$(g,\ \nabla^*)$이 M우의 통계구조를 이루고 $\tilde{C}$이 대칭이므로 $\hat{\nabla}'^*$은 꼬임률이 령이다.

임의의 $X,\ Y,\ Z\in\Gamma(TM)$에 대하여

$$(\hat{\nabla}'^*_X g)(Y,\ Z) = Xg(Y,\ Z) - g(\hat{\nabla}'^*_X Y,\ Z) - g(Y,\ \hat{\nabla}'^*_X Z) =$$
$$= Xg(Y,\ Z) - g(\nabla^*_X Y,\ Z) + \tilde{C}(X,\ Y,\ Z) - g(Y,\ \nabla^*_X Z) + \tilde{C}(X,\ Y,\ Z) =$$
$$= Xg(Y,\ Z) - g(\nabla^*_X Y,\ Z) - g(Y,\ \nabla^*_X Z) + 2\tilde{C}(X,\ Y,\ Z) =$$
$$= \nabla^*_X g(Y,\ Z) + 2\tilde{C}(X,\ Y,\ Z) = (\nabla^*_X g)(Y,\ Z) + 2\tilde{C}(X,\ Y,\ Z)$$

이므로 $\hat{\nabla}'^* g$ 는 대칭이다. 즉 $(g,\ \hat{\nabla}'^*)$ 은 M 우의 통계구조를 이룬다.(증명끝)

명제 5 $(M,\ g,\ \nabla)$ 를 통계다양체라고 하자. ∇' 를 τ 에 의해 ∇ 와 사영동등한 M 우의 아핀접속, $\breve{\nabla}'^*$ 을 τ 에 의한 ∇' 의 g 에 관하여 쌍대준공액접속이라고 할 때 $(g,\ \breve{\nabla}'^*)$ 은 M 우의 통계구조를 이룬다.

증명 선행연구[3]의 명제 1.2로부터 τ 에 의한 ∇' 의 g 에 관하여 쌍대준공액접속 $\breve{\nabla}'^*$ 은 g 에 관한 ∇ 의 공액접속 ∇^* 과 일치한다. 즉

$$\breve{\nabla}'^* = \nabla^*$$

$(M,\ g,\ \nabla)$ 가 통계다양체이므로 $(g,\ \breve{\nabla}'^*) = (g,\ \nabla^*)$ 은 M 우의 통계구조를 이룬다.(증명끝)

명제 6 $(M,\ g,\ \nabla)$ 를 통계다양체라고 하자. ∇'' 를 τ 에 의해 ∇ 와 쌍대사영동등한 M 우의 아핀접속, $\hat{\nabla}''^*$ 을 τ 에 의한 ∇'' 의 g 에 관하여 준공액접속이라고 할 때 $(g,\ \hat{\nabla}''^*)$ 은 M 우의 통계구조를 이룬다.

증명 선행연구[3]의 명제 1.3으로부터 τ 에 의한 ∇'' 의 g 에 관하여 준공액접속 $\hat{\nabla}''^*$ 은 g 에 관한 ∇ 의 공액접속 ∇^* 과 일치한다. 즉

$$\hat{\nabla}''^* = \nabla^*$$

$(M,\ g,\ \nabla)$ 가 통계다양체이므로 $(g,\ \hat{\nabla}''^*) = (g,\ \nabla^*)$ 은 M 우의 통계구조를 이룬다.(증명끝)

명제 5와 6으로부터 다음의 사실이 얻어진다.

따름 명제 5와 6의 가정하에서 M 우의 통계구조 $(g,\ \breve{\nabla}'^*)$ 과 $(g,\ \hat{\nabla}''^*)$ 은 일치한다.

명제 7 $(M,\ g,\ \nabla)$ 를 통계다양체라고 하자. ∇'' 를 τ 에 의해 ∇ 와 쌍대사영동등한 M 우의 아핀접속, $\breve{\nabla}''^*$ 을 τ 에 의한 ∇'' 의 g 에 관하여 쌍대준공액접속이라고 할 때 $(g,\ \breve{\nabla}''^*)$ 은 M 우의 통계구조를 이룬다.

증명 $\breve{\nabla}''^*$ 은 τ 에 의한 ∇'' 의 g 에 관하여 준공액접속이므로

$$Xg(Y,\ Z) = g(\nabla''_X Y,\ Z) + g(Y,\ \breve{\nabla}''^*_X Z) - \tau(X)g(Y,\ Z) - \tau(Y)g(X,\ Z) \quad \forall X,\ Y,\ Z \in \Gamma(TM) \tag{9}$$

가 성립한다. 식 (6)을 (9)에 대입하면 임의의 $X,\ Y,\ Z \in \Gamma(TM)$ 에 대하여

$$Xg(Y,\ Z) = g(\nabla_X Y,\ Z) + g(Y,\ \breve{\nabla}''^*_X Z) - \tau(X)g(Y,\ Z) - \tau(Y)g(X,\ Z) - \tau(Z)g(X,\ Y)$$

가 성립하며 식 (1)과 (8)을 리용하면

$$g(Y,\ \breve{\nabla}''^*_X Z) = g(Y,\ \nabla^*_X Z) + \tilde{C}(X,\ Y,\ Z) \ \ (\forall X,\ Y,\ Z \in \Gamma(TM))$$

가 성립한다.

$(g,\ \nabla^*)$ 이 M 우의 통계구조를 이루고 $\tilde{C}$ 이 대칭이므로 $\breve{\nabla}''^*$ 은 꼬임률이 령이다.

임의의 $X,\ Y,\ Z\in\Gamma(TM)$ 에 대하여

$$
\begin{aligned}
(\breve{\nabla}''^{*}_X g)(Y,\ Z) &= Xg(Y,\ Z)-g(\breve{\nabla}''^{*}_X Y,\ Z)-g(Y,\ \breve{\nabla}''^{*}_X Z)=\\
&= Xg(Y,\ Z)-g(\nabla^{*}_X Y,\ Z)-\widetilde{C}(X,\ Y,\ Z)-g(Y,\ \nabla^{*}_X Z)-\widetilde{C}(X,\ Y,\ Z)=\\
&= Xg(Y,\ Z)-g(\nabla^{*}_X Y,\ Z)-g(Y,\ \nabla^{*}_X Z)-2\widetilde{C}(X,\ Y,\ Z)=\\
&= (\nabla^{*}_X g)(Y,\ Z)-2\widetilde{C}(X,\ Y,\ Z)=(\nabla^{*}_X g)(Y,\ Z)-2\widetilde{C}(X,\ Y,\ Z)
\end{aligned}
$$

이므로 $\breve{\nabla}''^{*}g$ 는 대칭이다. 즉 $(g,\ \breve{\nabla}''^{*})$ 은 M 우의 통계구조를 이룬다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] S. Amari et al.; Methods of Information Geometry, AMS & Oxford University Press, 51～80, 2000.

[2] O. Calin et al.; Geometric Modeling in Probability and Statistics, Springer, 228～242, 2014.

[3] O. Calin et al.; Trends in Differential Geometry, Complex Analysis and Mathematical Physics, World Scientific, Singapore, 24～34, 2009.

[4] S. Ivanov; Journal of Geometry, 53, 89, 1995.

[5] C. Min et al.; Diff. Geom. Appl., 41, 39, 2015.

주체107(2018)년 12월 5일 원고접수

Some Properties of Generalized Conjugate Connection on Statistical Manifolds

Jong Kang Min, Min Chol Rim

In this paper, we establish the relation among generalized conjugate connections, semi-conjugate connections and dual semi-conjugate connections associated with projective equivalence and dual-projective equivalence on semi-Riemannian manifolds.

We also study the conditions for semi-conjugate connections and dual semi-conjugate connections to give statistical structures on statistical manifolds.

Key words: conjugate connection, generalized conjugate connection, statistical manifold