김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제1호

콤팍트다양체우의 강압적해밀턴방정식의 불변모임이기 위한 조건

정우환, 오세영

해밀턴방정식은 자연과학과 기술공학에서 제기되는 여러 대상체계들을 서술하는데 많이 사용되고있다. 미분방정식의 정성적리론에서 기본은 불변모임을 찾고 그 성질을 밝히는것이다.[7] 해밀턴방정식의 정성적성질연구에서 중요하게 제기되는 불변모임은 평형점, 주기궤도와 불변고리 및 카오스적불변모임이다.

해밀턴계에서의 불변고리의 존재성문제에 대하여서는 1954년 꼴모고로브(Kolmogorov), 1963년 아몰드(Amold), 1962년 모저(Moser)에 의하여 거의적분가능계인 경우 섭동파라메터가 충분히 작을 때 섭동해밀턴계에 불변고리들이 존재한다는것이 처음으로 밝혀졌으며 그후 많은 선행연구[4, 6, 8, 10, 12, 13]들에서 여러 형태의 섭동형 및 비섭동형해밀턴계에 대한 불변고리의 존재정리들이 제시되였다.

한편 해밀턴방정식의 카오스적불변모임에 관한 연구도 심화되고있다.

선행연구[2, 11]에서는 독립적으로 섭동파라메터가 커질 때 KAM불변고리를 일반화한 Aubry-Mather불변모임이 나타난다는것을 밝히고 KAM불변고리의 붕괴현상을 해명하였다. 그리고 선행연구[5]에서는 Aubry-Mather불변모임을 해밀턴－야꼬비방정식의 점성풀이로부터 구성하였다. 또한 k 차원고리 $\mathbf{T}^k$ 의 여접다발우에서 정의된 초선형적인 해밀턴계에 대하여 어떤 함수의 도함수의 그라프가 불변모임이기 위해서는 그 함수가 해밀턴－야꼬비방정식의 풀이가 될것이 필요하고 충분하다는것을 밝혔다.

이상의 선행연구들에 대한 분석에 기초하여 론문에서는 다음과 같은 문제들을 연구하였다.

첫째로, 콤팍트다양체의 여접다발우에서 정의된 강압적해밀턴함수에 관한 해밀턴방정식이 완비라는것을 밝혔다.

둘째로, 콤팍트다양체의 여접다발우에서 정의된 강압적해밀턴방정식에 관하여 어떤 함수의 도함수의 그라프가 불변모임이기 위해서는 그 함수가 해밀턴－야꼬비방정식의 풀이가 될것이 필요하고 충분하다는 사실을 밝혔다.

론문에서 얻어진 결과들은 콤팍트다양체의 여접다발우에서 정의된 강압적해밀턴방정식의 불변모임을 찾는 문제를 해밀턴－야꼬비방정식을 푸는 문제에 귀착시킨다. 이것은 해밀턴－야꼬비방정식에 대하여 풀이의 존재성을 밝히는 점성풀이리론[3, 9]이나 풀이를 구하는 고속계산법리론[15]이 구축되여있는 조건에서 일반적인 콤팍트모임우에서 정의된 해밀턴방정식의 불변모임을 찾는 중요한 방법을 제기한것으로 된다.

기호약속 $d,\ N\in\mathbf{N}$ 을 고정한다. $M\subset\mathbf{R}^N$ 을 d 차원 C^∞ 콤팍트다양체라고 한다. 이때 M 의 접다발은 $TM=M\times\mathbf{R}^d$ 와 같이 주어지고 $(\mathbf{R}^d)^*$ 를 $\mathbf{R}^d$ 의 쌍대선형공간이라고 할 때 M 의 여접다발은 $T^*M=M\times(\mathbf{R}^d)^*$ 와 같이 주어진다. 여기서 리스의 유계선형범함수의 표시정리에 의하여 $(\mathbf{R}^d)^*$ 와 $\mathbf{R}^d$ 를 동일시하여 $T^*M=M\times\mathbf{R}^d$ 로 간주한다.

정의 1 [5] C^r 급함수($r\ge 2$) $H: M\times\mathbf{R}^d\to\mathbf{R},\ (x,\ p)\mapsto H(x,\ p)$ 를 다양체 M 우의 해

밀턴함수라고 부른다. 이제 $x \in M$ 에 관하여 평등적으로 $|H(x,\ p)|/\|p\| \to +\infty$ $(\|p\| \to +\infty)$ 가 성립할 때 함수 $H: M \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ 를 다양체 M 우의 초선형적해밀턴함수라고 부른다.

정의 2 $x \in M$ 에 관하여 평등적으로 $|H(x,\ p)| \to +\infty$ $(\|p\| \to +\infty)$ 가 성립할 때 함수 $H: M \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ 를 다양체 M 우의 강압적해밀턴함수라고 부른다.

정의 3 C^r 급함수($r \geq 2$) $H: M \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ 가 주어졌을 때 다양체 $M \times \mathbf{R}^d$ 우의 상미분방정식

$$dx/dt = \nabla_p H(x,\ p),\ dp/dt = -\nabla_x H(x,\ p)\ \ ((x, p) \in M \times \mathbf{R}^d) \tag{1}$$

를 H 를 해밀턴함수로 하는 해밀턴방정식이라고 부른다. 여기서 $\nabla_x H(x,\ p),\ \nabla_p H(x,\ p)$ 는 각각 변수 x 에 관한 그라디엔트, 변수 p 에 관한 그라디엔트를 표시한다. 이제 $(x_0,\ p_0) \in M \times \boldsymbol{R}^d$ 라고 하고 초기조건

$$x(0) = x_0,\ p(0) = p_0 \tag{1$'$}$$

을 만족시키는 식 (1)의 연장불가능풀이를 $(x(t),\ p(t)) = \varphi_t^H(x_0,\ p_0),\ t \in I(x_0,\ p_0)$ 로 표시한다. 여기서 $I(x_0,\ p_0) \subset \mathbf{R}$ 는 $(x_0,\ p_0)$ 에 의존되는 열린구간이다.

$$D_H = \{(t,\ (x_0,\ p_0)) \in \mathbf{R} \times T^* M\ ;\ t \in I(x_0,\ p_0)\}$$

일 때 넘기기

$$\varphi^H : D_H \to T^* M\ ; (t,\ (x_0,\ p_0)) \mapsto \varphi_t^H(x_0,\ p_0)$$

를 해밀턴방정식 (1)의 흐름이라고 부른다. 임의의 $(x_0,\ p_0) \in M \times \mathbf{R}^d$ 에 대하여 $I(x_0,\ p_0) = \mathbf{R}$ 가 성립할 때 해밀턴방정식 (1)은 완비이다고 말한다. 이때 $D_H = \mathbf{R} \times T^* M$ 가 성립한다. 식 (1)이 완비일 때 해밀턴방정식 (1)의 흐름은

$$\varphi^H : \mathbf{R} \times (M \times \mathbf{R}^d) \to (M \times \mathbf{R}^d)\ ; (t,\ (x_0,\ p_0)) \mapsto \varphi_t^H(x_0,\ p_0)$$

으로 주어지는 넘기기이다.

보조정리 1 M 은 C^∞ 콤팍트다양체이고 $H: T^* M \to \mathbf{R}$ 는 강압적해밀턴함수라고 하자. 이때 임의의 $c \in \mathbf{R}$ 에 대하여 해밀턴함수 H 의 수준모임

$$H_c = \{(x,\ p) \in T^* M : H(x,\ p) = c\} \tag{2}$$

는 콤팍트모임이다.

정리 1 M 은 C^∞ 콤팍트다양체이고 $H: M \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ 는 강압적해밀턴함수라고 하자. 이때 H 를 해밀턴함수로 하는 해밀턴방정식 (1)은 완비이다.

증명 $(x_0,\ p_0) \in T^* M$ 을 임의로 취하고 $c = H(x_0,\ p_0) \in \mathbf{R}$ 로 놓는다. 해밀턴함수 H 는 해밀턴방정식 (1)의 제1적분이므로 임의의 $t \in I(x_0,\ p_0)$ 에 대하여 $H(\varphi_t^H(x_0,\ p_0)) = c$ 가 성립한다. 따라서 임의의 $t \in I(x_0,\ p_0)$ 에 대하여 $\varphi_t^H(x_0,\ p_0) \in H_c$ 가 성립한다.

이제 미분방정식 (1)의 오른변함수의 정의역을 $M \times \mathbf{R}^d$ 로부터 $H_c \times \mathbf{R}^d \subset M \times \mathbf{R}^d$ 로 제한하여 얻는 미분방정식을 (1)$'$ 로 표시하고 (1)$'$의 흐름을

$$\psi_t^H(x,\ p),\ t \in I'(x,\ p)\ \ ((x,\ p) \in H_c)$$

로 표시하자. 이때 상미분방정식의 초기값문제의 연장불가능풀이의 유일성으로부터

$$I'(x_0,\ p_0) = I(x_0,\ p_0) \tag{3}$$

$$\psi_t^H(x_0,\ p_0) = \varphi_t^H(x_0,\ p_0),\ (\forall t \in I'(x_0,\ p_0) = I(x_0,\ p_0)) \tag{4}$$

가 성립한다.

보조정리 1로부터 H_c가 콤팍트이므로 (1)′는 완비이므로 $I'(x_0,\ p_0) = \mathbf{R}$가 성립한다. 따라서 $I(x_0,\ p_0) = I'(x_0,\ p_0) = \mathbf{R}$가 성립한다. 그런데 $(x_0,\ p_0)$이 T^*M의 임의의 점이였으므로 식 (1)은 완비이다.(증명끝)

보조정리 2[14] $M,\ N$은 C^r다양체$(r \ge 1)$이고 $f: M \to N$은 C^r넘기기라고 하자. 이때 f의 그라프

$$Graph(f) = \{(x,\ f(x)) \in M \times N\ ;\ y = f(x)\} \tag{5}$$

는 직적다양체 $M \times N$의 C^r부분다양체이다.

보조정리 3[1] $n \in \mathbf{N}$이고 $U \subset \mathbf{R}^{2n}$은 열린모임,

$$f: U \subset \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}\ ;\ z = (x,\ y) \mapsto f(x,\ y) = (f_1(x,\ y), f_2(x,\ y))^{\mathrm{T}}$$

및

$$\Phi: U \subset \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^n\ ;\ z = (x,\ y) \mapsto \Phi(x,\ y)$$

를 C^r급넘기기$(r \ge 1)$라고 하자. 그리고 모임 $S = \{(x,\ y) \in U\ ;\ \Phi(x,\ y) = 0 \in \mathbf{R}^n\}$이 $\mathbf{R}^{2n}$의 n차원 C^r부분다양체라고 가정한다. 그러면 $U \subset \mathbf{R}^{2n}$이 열린모임일 때 부분다양체 $S \subset U$가 미분방정식

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x,\ y),\ \frac{dy}{dt} = f_2(x,\ y) \tag{6}$$

의 흐름 φ_t에 관하여 불변이기 위해서는

$$D\Phi(x,\ y) f(x,\ y) = 0\ \ ((x,\ y) \in S) \tag{7}$$

이 성립할것이 필요하고 충분하다.

정의 4 $P \in \mathbf{R}^d,\ c \in \mathbf{R}$라고 하자. 이때 미지함수 $u: M \to \mathbf{R}$에 관한 1계편미분방정식

$$H(x,\ P + \nabla u)) = c \tag{8}$$

를 해밀턴－야꼬비방정식이라고 부른다.

정리 2 $H: M \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$가 C^r급강압적해밀턴함수라고 할 때($r \ge 2$) 해밀턴함수가 H인 해밀턴방정식 (1)을 고찰하자. C^2급함수 $u: M \to \mathbf{R}$와 점 $P \in \mathbf{R}^d$에 대하여 $x \mapsto (x,\ P + \nabla u(x))$로 정의되는 넘기기 $P + \nabla u: M \to M \times \mathbf{R}^d$의 그라프

$$S := Graph(P + \nabla u) = \{(x,\ P + \nabla u(x)) \in M \times \mathbf{R}^d\ ;\ x \in M\}$$

가 H의 해밀턴흐름 φ_t^H에 관하여 불변이기 위해서는 함수 $u: M \to \mathbf{R}$가 어떤 $c \in \mathbf{R}$에 관하여 해밀턴－야꼬비방정식 (8)의 풀이가 될것이 필요하고 충분하다.

증명 u가 C^2급이므로 보조정리 2로부터 S는 $M \times \mathbf{R}^d$의 C^1급부분다양체이다. 그리고 점 $(x,\ p) \in M \times \mathbf{R}^d$가 $(x,\ p) \in S$이기 위해서는 $p = P + \nabla u(x)$가 성립할것이 필요하고 충분하다. 이제 C^1급넘기기 $\Phi: M \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$를

$$\Phi(x,\ p) = P + \nabla u(x) - p\quad ((x,\ p) \in M \times \mathbf{R}^d)$$

로 정의하자. 이때

$$S = \{(x,\ p) \in M \times \mathbf{R}^d\ ;\ \Phi(x,\ p) = 0\} \tag{9}$$

이 성립한다. 해밀턴방정식 (1)에 대하여 C^1급넘기기 $X: M\times\mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d$ 를

$$X(x,\ p)=\begin{pmatrix} \nabla_p H(x,\ p) \\ -\nabla_x H(x,\ p)\end{pmatrix} \tag{10}$$

로 정의한다. 변수 z를 $z=(x,\ p)\in M\times\mathbf{R}^d$ 로 정의하면 해밀턴방정식 (1)은

$$\frac{dz}{dt}=X(z) \tag{11}$$

와 같이 표시된다. 정리 1로부터 해밀턴방정식 (11)은 완비이다. 한편 보조정리 3으로부터 부분다양체 $S=Graph(P+\nabla u)\subset M\times\mathbf{R}^d$ 가 해밀턴방정식 (11)의 흐름 φ_t^H 에 관하여 불변이기 위해서는

$$D\Phi(x,\ p)X(x,\ p)=0\ \ ((x,\ p)\in S) \tag{12}$$

이 성립할것이 필요하고 충분하다. 여기서

$$D\Phi(z)=D\Phi(x,\ p)=(D_x\Phi(x,\ p),\ D_p\Phi(x,\ p))=(\nabla^2 u(x),\ -I) \tag{13}$$

가 성립한다. 식 (13)에서 $\nabla^2 u(x)=\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_i}\right)$는 함수 $u(x)$의 헤쎄행렬(d차행렬)이며 I는 d차단위행렬이다.

식 (10), (12), (13)으로부터 $S=Graph(P+\nabla u)$가 해밀턴방정식 (11)의 흐름에 관하여 불변이기 위해서는

$$(D_x\Phi(x,\ p)\quad D_p\Phi(x,\ p))\begin{pmatrix} \nabla_p H(x,\ p) \\ -\nabla_x H(x,\ p)\end{pmatrix}=0\in\mathbf{R}^d$$

가 성립할것이 필요하고 충분하다. 따라서 $S=Graph(P+\nabla u)$가 해밀턴방정식 (11)의 흐름에 관하여 불변이기 위해서는

$$\nabla^2 u(x)\nabla_p H(x,\ p)+\nabla_x H(x,\ p)=0 \tag{14}$$

이 성립할것이 필요하고 충분하다. 그런데 식 (14)는

$$D_p H(x,\ p)\nabla^2 u(x)+D_x H(x,\ p)=0 \tag{15}$$

과 동등하다. 한편 C^2급함수 $u: M\to\mathbf{R}$가 어떤 $c\in\mathbf{R}$에 관하여 해밀턴－야꼬비방정식 (8)의 풀이이기 위해서는

$$H(x,\ P+\nabla u(x))=c\ \ (\forall x\in M) \tag{16}$$

이 성립할것이 필요하고 충분하며 식 (16)이 성립하기 위해서는 C^1급함수 $K: M\subset\mathbf{R}^N\to\mathbf{R}$를

$$K(x)=H(x,\ P+\nabla u(x))\ \ (x\in M) \tag{17}$$

로 정의할 때

$$DK(x)=0\ \ (x\in M) \tag{18}$$

이 성립할것이 필요하고 충분하다. 그런데

$$DK(x)=D_x H(x,\ P+\nabla u(x))+D_p H(x,\ P+\nabla u(x))\nabla^2 u(x) \tag{19}$$

이므로 부분다양체 $S=Graph(P+\nabla u)$가 해밀턴방정식 (1)의 흐름에 관하여 불변이기 위해서는 식 (16)이 성립할것이 필요하고 충분하다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] 정우환 등; 현대상미분방정식, **김일성**종합대학출판사, 134～136, 주체90(2001).
[2] S. Aubry et al.; Phys., 8, 3, 381, 1983.
[3] M. G. Crandall et al.; Trans. Amer. Math. Soc., 277, 1, 1983.
[4] L. H. Eliasson; Math. Phys. Electronic J., 2, 4, 1996.
[5] A. Fathi; Proc. ICM., 3, 597, 2014.
[6] J. Féjoz; arXiv:1105.5604v1 [math.DS], 1～19, 2010.
[7] W. Gangbo et al.; Advances in Mathematics, 224, 260, 2010.
[8] Wu Hwan Jong et al.; Chaos, Solitons & Fractals, 68, 114, 2014.
[9] P. L. Lions et al.; Homogenization of Hamilton-Jacobi Equation, Unpublished Preprint, 1～34, 1987.
[10] R. de la Llave et al.; Nonlinearity, 18, 855, 2005.
[11] J. Mather; Topology, 21, 4, 457, 1982.
[12] J. Pöschel; Proc. Symp. Pure. Math., 69, 707, 2001.
[13] H. Rüssmann; London Math. Soc. Lecture Note Series, 134, Cambridge Univ. Press, 5, 1989.
[14] 白岩謙一; 力学系の理論, 岩波書店, 116~118, 1974.
[15] 濱口謙一; システム制御情報学会論文誌, 28, 1, 32, 2015.

주체108(2019)년 9월 15일 원고접수

Condition to be Invariant Set of Coercive Hamiltonian Equation on Compact Manifolds

Jong U Hwan, O Se Yong

In this paper, we prove that the graph of derivative of a certain function defined on compact manifold M is invariant under the coercive Hamiltonian equation on cotangent bundle T^*M if and only if the function is a solution of the Hamilton-Jacobi equation.

Keywords: super linearity, coercive Hamiltonian system, invariant set, Hamilton-Jacobi equation