김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체106(2017)년 제63권 제11호 Vol. 63 No. 11 JUCHE106(2017).

플라즈마에서 복사 및 자기마당이 비행체의 초음속운동에 주는 영향

예성철, 박경일

초음속비행체의 운동과 관련하여 복사기체력학과 플라즈마력학의 혼합령역인 복사플라즈마력학분야에 대한 관심이 더 높아지고있다.[2－6] 초음속비행체의 대기권돌입시 형성되는 충격파전선과 제동점사이의 플라즈마에 대한 연구는 그 취급이 복잡하고 해석적풀이가 어려운것으로 하여 복사기체력학적범위에서 에네르기보존방정식에 복사흐름항만을 첨가하여 설정한 방정식계를 수값풀이법으로 근사풀이를 구하는것으로 제한하였다.

우리는 초음속흐름에서 기체력학적특성량분포에 주는 복사 및 자기마당의 영향을 해석적으로 연구하였다.

복사와 자기마당의 영향이 있는 경우 초음속비행체운동시 발생하는 플라즈마흐름에 대한 방정식계를 다음과 같이 설정하였다.

$$P=\rho RT \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\rho u)+(1+y)\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)=0 \tag{2}$$

$$\begin{aligned}(1+y)\frac{\partial P^t}{\partial y}+\rho v(1+y)\frac{\partial v}{\partial y}+\rho u\frac{\partial v}{\partial\theta}-\rho u^2=\frac{4}{3}\frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(1+y)\frac{\partial v}{\partial y}\right]-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\\+\frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}(\mu u\cot\theta)+\frac{\mu}{Re}\frac{\partial u}{\partial y}\cot\theta-\mu_e H_x\frac{\partial H_x}{\partial y}\end{aligned} \tag{3}$$

$$\frac{\partial P}{\partial\theta}+\rho v(1+y)\frac{\partial u}{\partial y}+\rho u\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\mu}{Re}\frac{\partial u}{\partial y}+\rho uv=\frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(1+y)\frac{\partial u}{\partial y}\right]-\frac{u}{Re}\frac{\partial\mu}{\partial y}+\frac{\mu}{Re}\frac{\partial u}{\partial y} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\frac{\rho u}{2}\frac{\partial h}{\partial\theta}+\rho v\frac{1+y}{2}\frac{\partial h^t}{\partial y}=v(1+y)\frac{\partial P^t}{\partial y}+u\frac{\partial P}{\partial\theta}+\mu\frac{(1+y)}{Re}\left[(1+y)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{1+y}\right)\right]^2+\\+\frac{1}{RePr}\left[(1+y)\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+2k\frac{\partial T}{\partial y}\right]-(1+y)\mathrm{div}q_R-\mu_e(1+y)\frac{\partial H_x}{\partial y}\left(vH_y-\nu_H\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\end{aligned} \tag{5}$$

$$h=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{P}{\rho} \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(vH_y-\nu_H\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)=0 \tag{7}$$

$$n_j L_{R\nu}\frac{\partial I_\nu}{\partial y_j}=-I_y+\frac{\sigma}{\pi}T^4 \tag{8}$$

여기서 ρ는 밀도, R는 기체상수, $u=u'/U_\infty$는 물체겉면에 대한 접선방향의 기체흐름속도,

$\upsilon = \upsilon'/U_\infty$는 물체걸면에 대한 법선방향의 기체흐름속도, $P^t = P + P_R = P + a_R T^4/3$는 일반기체압력+복사압력, $\mu = \mu'/\mu_\infty$는 점성결수, μ_e는 자기투자률, Re는 레이놀즈수, h^t는 복사엔탈피+기체의 엔탈피, $\mathrm{div} q_R$는 복사흐름의 발산도, $\nu_H = 1/(\mu_e \sigma_e)$는 자기점성결수, σ_e는 전기전도도, P_r는 프란틀수, $I_\nu(r, \Omega)$는 자리벡토르 r와 방향벡토르의 함수로 표시되는 복사세기 $(\varphi = 0)$, σ는 스쩨판－볼츠만상수, $L_{R\nu}$는 복사자유주행거리이다.

설정한 방정식계의 풀이는 다음과 같은 렌켄－규고니오의 관계식으로 결정되는 경계조건에 의존한다.

$$\frac{p_{0s}}{p_\infty} = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)}{\nu+1},\ \frac{\rho_{0s}}{\rho_\infty} = \frac{\upsilon_\infty}{\upsilon_{0s}} = \frac{(\gamma+1)M_1^2}{2+(\gamma-1)M_1^2},\ \frac{T_{0s}}{T_\infty} = \frac{[2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)][2+(\gamma-1)M_1^2]}{(\gamma+1)^2 M_1} \tag{9}$$

여기서 $\rho_\infty, \upsilon_\infty, p_\infty, T_\infty$ ($\rho_{0s}, \upsilon_{0s}, p_{0s}, T_{0s}$)는 충격파전선앞(뒤)에서 기체의 밀도, 속도, 압력, 온도, $M_1 = U_\infty / a_1 (a_1 = \sqrt{\gamma R T_1})$은 마흐수이다.

렌켄－규고니오관계식에 복사에네르기, 복사의 세기 및 가로자기마당을 고려한 경우[1] 충격파전선의 앞뒤에서 흐름의 비 $\upsilon_{0s}/U_\infty = \xi$는 다음과 같이 표시된다.

$$\xi = \frac{1}{2}\left[\frac{\gamma_e - 1}{\gamma_e + 1} + \frac{2\gamma_e(p_e + h_1^2)}{\gamma_e + 1}\right] + \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\gamma_e - 1}{\gamma_e + 1} + \frac{2\gamma_e(p_e + h_1^2)}{\gamma_e + 1}\right]^2 + \gamma\frac{2-\gamma_e}{\gamma_e+1}h_1^2\right\}^{1/2} \tag{10}$$

여기서

$$h_1 = \frac{H_1}{(2mu_1/\mu_e)^{1/2}}\ ,\quad p_e = (R_{p_1}+1)f(R_{p_2})p\ ,\quad p = \gamma^{-1}M_1^{-2}\ ,\quad f(R_{p_2}) = [\xi_2 - g(R_{p_2})]/(\xi_2 - 1)\ ,$$

$$g(R_{p_2}) = \frac{(R_{p_2}+1)(8R_{p_1}+r^2+1)}{(R_{p_1}+1)(8R_{p_2}+r^2+1)},\ r = \frac{\gamma+1}{\gamma-1},\ \gamma_e = \frac{4(\gamma-1)R_{p_2}+\gamma}{3(\gamma-1)R_{p_2}+1}$$ 이다.

저온기체속에서 전파하는 센 충격파인 경우 전선앞에서 $R_{p_1} << 1$이고 뒤에서 $R_{p_2} >> 1$이라고 하면 $\gamma = 5/3$에 대하여 $\gamma_e = 4/3$이고 $P_e = P\frac{[\xi - (r^2+1)/8]}{(\xi - 1)} \approx \frac{9}{16}P\ \left(\xi \approx \frac{1}{7}\right)$이다.

따라서 식 (10)에 대한 근사공식은 다음과 같다.

$$\xi = \frac{1}{2}\left[\frac{\gamma_e - 1}{\gamma_e + 1} + \frac{2\gamma_e(9P/16 + h_1^2)}{\gamma_e + 1}\right] + \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\gamma_e - 1}{\gamma_e + 1} + \frac{2\gamma_e(9P/16 + h_1^2)}{\gamma_e + 1}\right]^2 + 8\frac{2-\gamma_e}{\gamma_e+1}h_1^2\right\}^{1/2} \tag{11}$$

가로자기마당이 없는 경우에는

$$\xi = 1/7 + 9P/14 = 1/7 + 27/(70M_1^2)\,. \tag{12}$$

복사의 영향을 받는 플라즈마충격파에서 온도의 비는 다음과 같다.

$$\frac{T_2}{T_1} = \left\{\frac{R_{p_1}+1}{R_{p_1}} + \frac{6(M_{e_1}^2 - 1)[\gamma + 20(\gamma-1)R_{p_1} + 16(\gamma-1)R_{p_1}^2]}{7R_{p_1}[1+12(\gamma-1)R_{p_1}]}\right\}^{1/4} \tag{13}$$

여기서 $M_{e_1}^2 = \frac{\upsilon_{0s}^2}{c_{R0}^2} = \frac{M_1^2(1+12(\gamma-1)R_{p_1})}{1+20R_{p_1}+16R_{p_1}^2(\gamma-1)/\gamma}$은 음속도에 복사를 고려한 경우의 유효마흐수이며 c_{R0}은 복사플라즈마에서 단열음속도이다.

복사전달방정식 (8)에 모멘트근사를 적용하여 그것을 순수 미분방정식으로 변환하면 복사세기의 모멘트는 $I_0(r)=\int I_\nu(r,\omega)d\omega, \cdots, I_{ny_iy_j}(r)=\int I_\nu(r,\omega)n_i(n_j)^{n-1}d\omega$ 이며 복사흐름은 $q_R=\int_\Omega I_\nu(r,\omega)n_i d\omega$ 이다.

복사세기에 관한 식을 구면조화함렬로 전개하면 $I_\nu(r,\omega)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}A_l^m(r)Y_l^m(\omega)$ 로 되며 복사전달방정식은 다음과 같은 1차근사의 복사전달방정식으로 변환된다.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(L_{R\nu}\frac{\partial q_R}{\partial y}\right)-3\frac{q_R}{L_{R\nu}}-16\sigma T^3\frac{\partial T}{\partial y}=0 \tag{14}$$

식 (14)를 선형화하면

$$\begin{aligned}\frac{\partial q_R'}{\partial y}=A_1\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u'}{\partial\theta}+\left[\frac{A_1}{(1+y)^2}-\frac{A_2}{1+y}\right]\frac{\partial u'}{\partial\theta}-A_1\frac{\partial^2 v'}{\partial y^2}-\left(A_3+\frac{2A_1}{1+y}\right)\frac{\partial v'}{\partial y}+\\+\left(\frac{A_4}{1+y}+A_5\right)v'-\left(\frac{A_6}{1+y}+A_7\right).\end{aligned} \tag{15}$$

여기서 $G=\dfrac{1}{p_0/(\rho_0T_0)+B_u}$, $A_1=\dfrac{1}{2}Gv_0$, $A_2=GP_0\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\gamma}{\gamma-1}\dfrac{p_0}{\rho_0T_0}+\dfrac{3}{2}\rho_0B_u\right)$, $A_4=-2H_\nu G$,
$A_6=2GH_\nu v_0$, $A_3=2P_0+GR_uL_e^{-1}v_0-A_2$, $A_5=\dfrac{P_0}{v_0}H_\nu\left(\dfrac{\gamma}{\gamma-1}G\dfrac{P_o}{\rho_0T_0}+3\rho_0B_uG-4\right)$, $A_7=-A_5v_0$,
복사압력수 $B_u=(2/3)[a_RT_0{}^4/(\rho_0v_0{}^2)]v_0^2/T_0$, 자기마당의 특성크기 $L_e=1/(\sigma_0\mu_ev_0)$, 자기압력수 $R_H=\mu_eH_0^2/(\rho_0v_0^2)$, $H_\nu=R_HL_e^{-1}v_0$ 인 무본량들을 도입하였다.

또한 속도포텐샬 $u'=\partial\varphi/\partial\theta$, $v'=\partial\varphi/\partial y$ 를 식 (15)에 대입하고 $1+y=t$, $(1/b)d\varphi/dy=Z$ 라고 놓으면 다음과 같은 미분방정식을 얻는다.

$$t\frac{d^2Z}{dt^2}+(a_1t+a_2)\frac{dZ}{dt}-(a_3+a_4t)Z+a_6t+a_5=0 \tag{16}$$

여기서 $s=(A_1+8G\delta T_0^3L_{R\nu_0}v_0/3)^{-1}$, $a_1=s(16G\delta T_0^3L_{R\nu_0}\mu_eH_0^2/(3\nu_H\rho_0)+A_3)$, $a_2=2A_1s$, $a_3=A_4s$, $a_4=A_5s$, $a_5=bA_6s$, $a_6=bA_7s$.

식 (16)에 대응하는 동차방정식

$$t\frac{d^2Z}{dt^2}+(a_1t+a_2)\frac{dZ}{dt}-(a_3+a_4t)Z=0 \tag{17}$$

의 풀이는 $Z=t^{-\frac{1}{2}a_2}e^{-\frac{1}{2}a_1t}GM_{k,m}(\bar{c}t)+c_2M_{k,-m}(\bar{c}t)$ 이다.
여기서

$$M_{k,m}(\bar{c}t)=t^{1/2+m}e^{-t/2}\,|F|\,((-a_1a_2-2a_3)/2\sqrt{a_1{}^2+4a_4},\ (a_2-1)/2,\ t\sqrt{a_1+4a_4}),$$
$$M_{k,-m}(\bar{c}t)=t^{1/2-m}e^{-t/2}\,|F|\,((a_1a_2+2a_3)/2\sqrt{a_1{}^2+4a_4},\ -(a_2-1)/2,\ t\sqrt{a_1+4a_4}).$$

m과 k를 윗데커방정식의 풀이와 비교하면 $m=\dfrac{1}{4}(a_2-3)$, $k=\dfrac{1}{4}(a_2-1)+\dfrac{a_1a_2+2a_3}{2\sqrt{a_1{}^2+4a_4}}$ 이

며 $\bar{a}=\dfrac{-a_1a_2-2a_3}{2\sqrt{a_1^2+4a_4}}$, $\bar{a}_1=\dfrac{1}{4}\bar{a}+\dfrac{1}{2}(3-a_2)$, $\bar{b}=\dfrac{1}{2}(a_2-1)$, $\bar{b}_1=\dfrac{1}{2}(5-a_2)$, $\bar{c}=\sqrt{a_1^2+4a_4}$ 로 놓으면

$$|F|(\bar{a},\bar{b};\bar{c}t)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{a}(\bar{a}+1)\cdots(\bar{a}+n-1)\bar{c}^n t^n}{\bar{b}(\bar{b}+1)\cdots(\bar{b}+n-1)n!},$$

$$|F|(\bar{a}_1,\bar{b}_1;\bar{c}t)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{a}_1(\bar{a}_1+1)\cdots(\bar{a}_1+n-1)\bar{c}^n t^n}{\bar{b}_1(\bar{b}_1+1)\cdots(\bar{b}_1+n-1)n!}.$$

따라서 방정식 (17)의 풀이는

$$Z=[Et^{-s_3}|F|(\bar{a},\bar{b};\bar{c}t)+Dt^{-s_4}|F|(\bar{a}_1,\bar{b}_1;\bar{c}t)]e^{-s_5t}+c\,. \tag{18}$$

그리하여 속도포텐샬 φ는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\varphi(t)=E\int\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{a}(\bar{a}+1)\cdots(\bar{a}+n-1)\bar{c}^n t^n}{\bar{b}(\bar{b}+1)\cdots(\bar{b}+n-1)n!}\right]t^{-s_3}e^{-s_5t}dt+\\ +D\int\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{a}_1(\bar{a}_1+1)\cdots(\bar{a}_1+n-1)\bar{c}^n t^n}{\bar{b}_1(\bar{b}_1+1)\cdots(\bar{b}_1+n-1)n!}\right]t^{-s_4}e^{-s_5t}dt+ct+\tilde{c}\end{aligned} \tag{19}$$

여기서 $\tilde{c}$은 적분상수, $E=c_1\bar{c}^{s_1}$, $D=c_2\bar{c}^{s_2}$ 이다.

맺 는 말

우리는 복사와 자기마당의 영향이 있는 경우 초음속비행체운동시 발생하는 플라즈마 흐름에 대한 방정식계를 설정하고 그것의 풀이를 해석적으로 얻었다.

참 고 문 헌

[1] Бай Ши-и; Динамика излучаюшего газа, Наука, 87～110, 1968.

[2] R. L. Merlino; Am. J. Phys., 75, 12, 14, 2007.

[3] Roman Kompaneetz et al.; IEEE Transactions on Plasma Science, 32, 561, 2004.

[4] Natalia Sternbeng; IEEE Transaction on Plasma Science, 37, 7, 8, 2009.

[5] W. L. Kruer; Phys. Plasma, 7, 2270, 2000.

[6] Mashasmita Das et al.; J. Appl. Phys., 110, 083512, 2011.

주체106(2017)년 7월 5일 원고접수

Influence of Radiation and Magnetic Field about the Supersonic Motion of Flying Body in Plasma

Ye Song Chol, *Pak Kyong Il*

We established an equation system of a supersonic gas flow under the influence of radiation and magnetic field, and obtained its solution in an analytical way near the stagnation point of supersonic flying body.

Key words: plasma, radiation, supersonic speed