김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제3호

부분인자구성에서 2－묶음흔적에 대한 직교론법

리응훈, 한예경

위대한 수령 **김일성**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《새로운 과학분야를 개척하며 최신과학기술의 성과를 인민경제에 널리 받아들이기 위한 연구사업을 전망성있게 하여야 합니다.》(《**김일성**전집》 제72권 292페지)

최근 연산자대수리론에서는 부분인자와 관련한 일련의 문제들이 활발히 연구되고있다.[2－5]

선행연구[3]에서 평면대수에 기초한 부분인자의 구성을 통하여 부분인자리론과 자유확률론 및 우연행렬론사이의 관계가 밝혀진 후 선행연구[4, 5]에서는 가이온－죤즈－쉴랴첸끄구성으로 불리우는 이 구성법에 대한 일종의 직교론법이 주어졌다. 이 론법의 우점은 흔적의 정값성과 그것에 따르는 폰 노이만대수들의 인자성과 같은 일련의 문제들이 우연행렬모형이나 자유확률론의 언어에 의거하지 않고 비교적 단순한 도형적론의를 통하여 해결된다는것이다.

선행연구[3]에서 제기된 문제의 하나는 보이꿀레스꾸흔적이외에도 부분인자의 구성을 담보하는 흔적들의 존재성여부를 검토하는것이였다.

선행연구[2]에서 고찰된 보이꿀레스꾸흔적에 대한 2－묶음류사는 이 문제에 대한 대표적인 실례로서 그것에 대한 정의와 취급은 자유확률론에 기초하고있다.

론문에서는 선행연구[2]에서 도입된 2－묶음보이꿀레스꾸흔적에 대하여 선행연구[4]의 의미에서의 직교론법을 연구하였다.

$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$이라고 하자. 가이온－죤즈－쉴랴첸끄구성의 출발점은 부분인자평면대수[3] $P=(P_n)_{n=0,1,2,\cdots}$과 그림 1의 얽힘들에 의하여 성분별로 정의되는 곱하기 $\wedge_k$ 및 $*$－연산이 부여된 $*$－(급수)대수

$$Gr_k(P)=\bigoplus_{n=0}^{\infty} P_{n,\,k},\ P_{n,\,k}:=P_{n+k}$$

이다. 여기서 $x\in P_{m,\,k}$, $y\in P_{n,\,k}$로서 원소들에 대한 표기는 선행연구[4]에서와 같다.(그림 1)

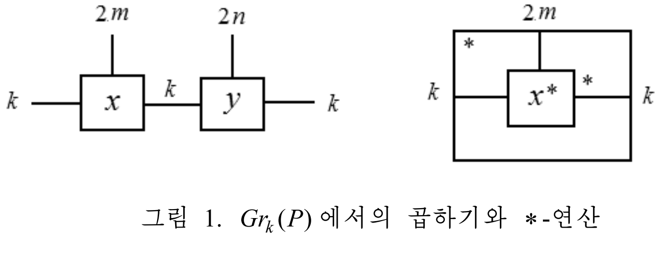

그림 1. $Gr_k(P)$에서의 곱하기와 $*$-연산

혼동할 우려가 없는 한 바깥통은 략하며 별표식이 없는 통에서는 왼쪽의 웃모서리가 특정구간을 가리킨다.

$Gr_k(P)$우의 2－묶음보이꿀레스꾸흔적 $Tr_k: Gr_k(P)\to \mathbf{C}$는 그림 2에서와 같이 성분별로 정의된다.[2] 여기서 $x\in P_{m,\,k}$이다.

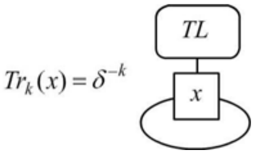

그림 2. $Gr_k(P)$ 우의 2－묶음흔적

기호 TL은 2－묶음템펄리－리브도형 즉 매 선을 끈의 쌍으로 보고 얻어지는 템펄리－리브도형들전부에 따르는 합을 의미한다. 그러므로 m이 홀수인 경우 $P_{m,k}$ 우에서 Tr_k의 값은 령으로 된다. 앞에서 지적한바와 같이 Tr_k의 흔적성과 정값성 나아가서 GNS－구성을 통하여 얻어지는 폰 노이만대수의 인자성과 부분인자들의 표준불변량 및 동형류확정은 자유해석의 언어와 결과들에 본질적으로 의거한다.

부분인자평면대수 $P=(P_n)_{n=0,1,2,\cdots}$이 주어졌다고 하자. $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$은 임의로 고정하고 취급한다.

우의 $Gr_k(P)$와 동일한 선형공간직합 $\overset{\infty}{\underset{n=0}{\oplus}}P_{n,k}$우에서 적연산 $\circ_k$를 그림 3의 얽힘에 따라 정의한다. 여기서 $x\in P_{m,k}$, $y\in P_{n,k}$이다.

나아가서 $Gr_k(P)$에서와 같은 ∗－연산에 관하여 ∗－대수가 얻어진다는것을 어렵지 않게 알수 있다. 이것을 $Fr_k(P)$로 표시한다.

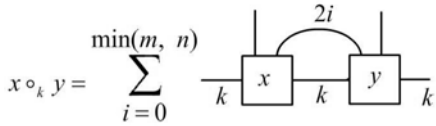

그림 3. $Gr_k(P)$ 우의 2－묶음곱하기

주어진 부분인자평면대수 P의 매 유한차원 C^*－대수 P_k에는 엄격한 정값표준흔적 tr_k가 그림 4에서와 같이 주어진다는것을 상기하자. 여기서 δ는 P의 모듈로서 $\delta>1$을 가정한다.

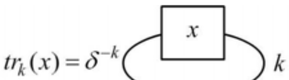

그림 4. P_k 우의 표준흔적

$\Pi_0: Fr_k(P)\to P_{0,k}=P_k$로써 령성분우로의 사영을 표시하자.

$\tau_k(x)=tr_k(\Pi_0(x))$로 놓으면 $Fr_k(P)$ 우에는 엄격한 정값흔적이 정의된다.

$x,\ y\in Fr_k(P)$에 대하여 $\langle x,\ y\rangle_k=\tau_k(x\circ_k y^*)$로 놓자. 그러면 $Fr_k(P)$는 내적공간으로서는 선행연구[4]에서의 $Gr_k(P)$와 완전히 일치한다. 그러므로 $Fr_k(P)$에서 $m\neq n$이면 $P_{m,k}\perp P_{n,k}$이며 $Fr_k(P)=\overset{\infty}{\underset{n=0}{\oplus}}P_{n,k}$는 직교직합으로 된다.

정리 1 매 $a\in Fr_k(P)$에 대하여 $L_a(\xi)=a\circ_k\xi,\ \xi\in Fr_k(P)$로 정의되는 선형넘기기

$$L_a: Fr_k(P)\to Fr_k(P)$$

는 내적공간구조에 관하여 유계이다.

증명 사실상 선행연구[4]에서의 정리 3.3의 증명에 포함된다.

$a\in P_{n,k}$라고 하자. 적연산의 정의로부터 연산자 $L_a: Gr_k\to Gr_k$는 그림 5에서와 같이 $n+1$개의 요소연산자들의 합으로 이루어진다.

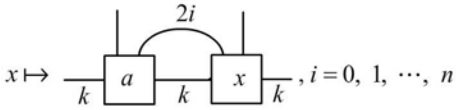

그림 5. 오른쪽곱하기연산자 L_a

이 매 연산자는 분명히 선행연구[4]의 정리 3.3의 증명에서의 L_a^{2i}와 같다. 한편으로 내적공간으로서의 $Fr_k(P)$는 선행연구[4]에서의 $Gr_k(P)$와 일치하므로 선행연구[4]의 론의를 그대로 반복하면 L_a의 유계성이 얻어진다.(증명끝)

$Fr_k(P)$는 힐베르트대수로서 왼쪽 및 오른쪽 폰 노이만대수는 유한이다. 왼쪽 폰 노이만대수를 M_k로 놓자. $Fr_k(P)$ 우의 흔적 τ_k는 M_k 우의 엄격한 정규흔적으로 유일하게 확

장된다. 그러므로 $Fr_k(P)$ 의 완비화를 $L^2(M_k)$ 로 표시할수 있다.

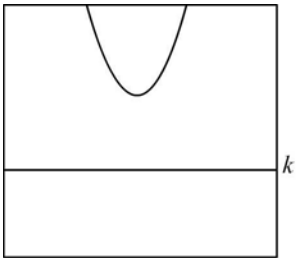

그림 6. 원소 $U \in P_{1,\,k}$

이제는 M_k 의 인자성을 확인하자.

그림 6의 얽힘으로 주어지는 $P_{1,\,k}$ 의 원소를 U 로 표시하고 U 에 의해 생성된 M_k 의 가환폰 노이만대수를 A 로 표시하자.[4]

$A-A$ 쌍모듈로서의 $L^2(M_k)$ 의 구조를 주목하자. 이를 위해 $x \in P_{n,\,k}$ 와 $p,\ q \ge 0$ 에 대하여 그림 7의 얽힘으로 주어지는 $P_{n+p+q,\,k}$ 의 원소를 $x_{p,\,q}$ 로 표시하자. 왼쪽과 오른쪽에는 각각 $p,\ q$ 개의 《고뿌》가 있다.

매 $n \ge 1$ 에 대하여 $P_{n,\,k}$ 에서 $\{x_{1,\,0},\ x_{0,\,1} :\ x \in P_{n-1,\,k}\}$ 의 직교나머지를 V_n 으로 표시하고 $V = \bigoplus_{n=1}^{\infty} V_n$ 으로 놓는다. $L^2(M_k)$ 에서 $P_{0,\,k}$ 와 V 에 의하여 생성된 $A-A$ 쌍모듈을 각각 $\overline{AP_{0,\,k}}$ 및 $\overline{AVA}$ 로 표시하면

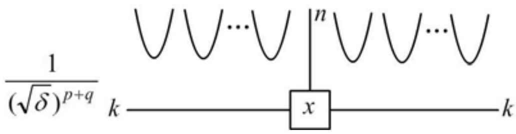

그림 7. 원소 $x_{p,\,q}$

$$L^2(M_k) = \overline{AP_{0,\,k}} \oplus \overline{AVA}$$

임을 어렵지 않게 알수 있다.([1]의 명제 2.1)

보조정리 $A-A$ 쌍모듈로서의 다음의 동형관계가 성립한다.

$$L^2(M_k) \cong l^2(\mathbf{N}) \otimes P_{0,\,k} \oplus l^2(\mathbf{N}) \otimes V \otimes l^2(\mathbf{N})$$

이 동형밑에서 $l^2(\mathbf{N}) \otimes P_{0,\,k}$ 에 대한 U 의 량쪽작용은 $id \otimes \sqrt{\delta}(S+S^*)$ 로 주어지며 $l^2(\mathbf{N}) \otimes V \otimes l^2(\mathbf{N})$ 에 대한 U 의 왼쪽 및 오른쪽작용은 각각

$$\sqrt{\delta}(S+S^*) \otimes id \otimes id\ ,\ \ id \otimes id \otimes \sqrt{\delta}(S+S^*)$$

로 주어진다. 여기서 S 는 $l^2(\mathbf{N})$ 의 단측밀기연산자이다.

정리 2 $\delta > 1$ 이면 M_k 는 II_1 − 인자이다. 나아가서 부분인자 $M_0 \subset M_1$ 의 표준불변량은 P 와 일치한다.

정리 3 $Fr_k(P)$ 와 $Gr_k(P)$ 는 힐베르트대수로서 동형이다. 여기서 $Gr_k(P)$ 는 2−묶음보이꿀레스꾸흔적에 기초한 힐베르트대수이다.

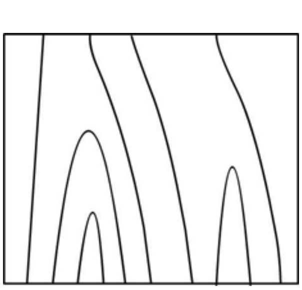

그림 8. 웃템펄리−리브도형

증명 선행연구[4]에서는 웃면의 매 표식점이 아래면의 표식점과 맺어진 다음형태의 도형을 웃템펄리−리브도형이라고 불렀다.(그림 8) 이 도형에서 모든 끈을 끈의 쌍으로 보면 웃템펄리−리브도형의 2−묶음이 얻어진다.

각각 아래면에 i 개, 웃면에 j 개의 표식점을 가진 2−묶음웃템펄리−리브도형은 $P_{i,\,k}$ 로부터 $P_{j,\,k}$ 로의 선형넘기기를 결정한다. 선행연구[4]에서와 마찬가지로

$$X,\ Y : \bigoplus_{n=0}^{\infty} P_{n,k} \to \bigoplus_{n=0}^{\infty} P_{n,k}$$

를 정의한다. 다시말하여 2－묶음웃템펄리－리브도형전부의 합을 X 로, i, j 블로크에 결수 $(-1)^{(i-j)/2}$ 을 가지고 외겹《모자》들만을 가진 2－묶음웃템펄리－리브도형들의 합을 Y 로 놓는다.

선행연구[4]에서와 마찬가지로 $X : Gr_k(P) \to Fr_k(P)$ 와 $Y : Fr_k(P) \to Gr_k(P)$ 가 서로 가역이며 힐베르트대수동형을 준다는것을 어렵지 않게 확인할수 있다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] A. Brothier; J. Funct. Anal., 262, 3839, 2012.

[2] S. Curran et al.; Proceedings of the Centre for Mathematics and Its Applications, 46, 115, 2015.

[3] A. Guionnet et al.; Clay Math. Proc., 11, 201, 2010.

[4] V. F. R. Jones et al.; Pacific J. Math., 246, 187, 2010.

[5] V. Kodiyalam, V. S. Sunder; J. Funct. Anal., 260, 2635, 2011.

주체109(2020)년 3월 15일 원고접수

Orthogonal Approach to 2-Cabled Trace in Construction of Subfactor

Ri Ung Hun, Han Ye Kyong

We suggest an orthogonal approach to the 2-cabled Voiculescu trace. This approach gives a possibility to avoid the language of random matrix model and free analysis in verification of positivity of trace or factorialty of von Neumann algebras.

Keywords: von Neumann algebra, subfactor