김일성종합대학학보 (자연과학) 주체105(2016)년 제62권 제3호
JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE) Vol. 62 No. 3 JUCHE105(2016).

리만다양체에서 α －형사영반대칭접속의 쌍대접속과 호상접속

허달윤, 박경실

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《현시대는 과학과 기술의 시대이며 과학과 기술이 류례없이 빠른 속도로 발전하는것은 현대과학기술발전의 중요한 특징입니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제15권 485페지)

론문에서는 최근 리만기하학분야에서 새롭게 제기되는 α －형사영반대칭접속의 쌍대접속과 호상접속을 론의하고 α －형사영반대칭접속의 공액대칭조건과 호상접속사이의 등곡률성조건을 새롭게 밝혔으며 α －형사영반대칭접속과 그것의 호상접속의 일정곡률성조건을 증명하였다.

선행연구[1]에서는 리만다양체에서 π －반대칭비계량접속의 쌍대접속과 호상접속을 새롭게 제기하고 그것들의 공액대칭조건들을 밝혔다.

선행연구[3]에서는 비계량대칭접속의 등곡률성문제를 제기하고 곡률텐소르에 일정한 조건을 줄 때 등곡률성이 성립된다는것을 밝혔다.

선행연구[4]에서는 비계량접속의 특수형태인 아마리－첸쪼브접속의 공액대칭성문제가 론의되였으나 비대칭접속인 경우는 론의하지 못하였다.

선행연구[2]에서는 사영반대칭접속의 특수한 형태인 α －형사영반대칭접속에 대한 사영적성질을 연구하였으나 이 접속의 공액대칭성과 호상접속사이의 등곡률성문제는 론의하지 못하였다.

반대칭비계량접속이 물리적마당에서 소립자의 운동특성을 반영하고있으므로 이 조건들은 물리적마당연구에서 중요한 의의를 가진다.

여기서는 이 문제에 주목을 돌려 α －형사영반대칭접속의 공액대칭조건과 등곡률성조건 그리고 이 접속과 그것의 호상접속의 일정곡률성조건을 연구한다.

정의 리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 정의된 사영반대칭접속 ∇ 의 사영성분 ψ 와 반대칭성분 π 가 1차관련 즉 $\psi=\alpha\pi$ 일 때 ∇ 를 α －형사영반대칭접속이라고 부른다.

α －형사영반대칭접속 ∇ 는 $\alpha\in\boldsymbol{R}$ 에 대하여

$$\nabla_k g_{ij}=-(\alpha-1)\varphi_k g_{ij}-\frac{\alpha+1}{2}\varphi_i g_{kj}-\frac{\alpha-1}{2}\varphi_j g_{ki},\ \ T_{ij}^k=\varphi_j\delta_i^k-\varphi_i\delta_j^k \tag{1}$$

을 만족시키는 접속으로서 접속결수 Γ_{ij}^k 는 $\Gamma_{ij}^k=\left\{{k \atop ij}\right\}+\dfrac{\alpha-1}{2}\varphi_i\delta_j^k+\dfrac{\alpha+1}{2}\varphi_j\delta_i^k$ 으로 표시된다. 여기서 $\left\{{k \atop ij}\right\}$는 레비－찌비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$ 의 접속결수로서 크리스토펠기호이며 φ_i 는 1－형식 π 의 성분이다.

α －형사영반대칭접속의 쌍대접속 $\overset{*}{\nabla}$ 의 접속결수 $\overset{*}{\Gamma}{}_{ij}^{k}$ 은

$$\overset{*}{\Gamma}{}_{ij}^{k}=\left\{ {k \atop ij} \right\}-\frac{\alpha-1}{2}\varphi_i\delta_j^k-\frac{\alpha+1}{2}g_{ij}\varphi^k \tag{2}$$

이고 호상접속 $\overline{\nabla}$ 의 접속결수 $\overline{\Gamma}{}_{ij}^{k}$ 는

$$\overline{\Gamma}{}_{ij}^{k}=\left\{ {k \atop ij} \right\}+\frac{\alpha+1}{2}\varphi_i\delta_j^k+\frac{\alpha-1}{2}\varphi_j\delta_i^k . \tag{3}$$

α －형사영반대칭접속 ∇ 와 $\overset{*}{\nabla}$, 호상접속에 대응되는 곡률텐소르를 구하면

$$R_{ijk}{}^{l}=K_{ijk}{}^{l}+\delta_j^l\tau_{ik}-\delta_i^l\tau_{jk}+\delta_k^l\beta_{ij} , \tag{4}$$

$$\overset{*}{R}_{ijk}{}^{l}=K_{ijk}{}^{l}+g_{ik}\tau_j^l-g_{jk}\tau_i^l-\delta_k^l\beta_{ij} , \tag{5}$$

$$\overline{R}_{ijk}{}^{l}=K_{ijk}{}^{l}+\delta_j^l\overline{\tau}_{ik}-\delta_i^l\overline{\tau}_{jk}+\delta_k^l\overline{\beta}_{ij} \tag{6}$$

이다. 여기서

$$\begin{aligned}\tau_{ik}&=\frac{\alpha+1}{2}\left(\overset{\circ}{\nabla}_i\varphi_k-\frac{\alpha+1}{2}\varphi_i\varphi_k\right),\quad \beta_{ij}=\frac{\alpha-1}{2}\left(\overset{\circ}{\nabla}_i\varphi_j-\overset{\circ}{\nabla}_j\varphi_i\right),\\ \overline{\tau}_{ik}&=\frac{\alpha-1}{2}\left(\overset{\circ}{\nabla}_i\varphi_k-\frac{\alpha-1}{2}\varphi_i\varphi_k\right),\quad \overline{\beta}_{ij}=\frac{\alpha+1}{2}\left(\overset{\circ}{\nabla}_i\varphi_j-\overset{\circ}{\nabla}_j\varphi_i\right).\end{aligned} \tag{7}$$

식 (4), (5)로부터

$$\overset{*}{R}_{ijk}{}^{l}=R_{ijk}{}^{l}+\delta_i^l\tau_{jk}-\delta_j^l\tau_{ik}+g_{ik}\tau_j^l-g_{jk}\tau_i^l-2\delta_k^l\beta_{ij} \tag{8}$$

이며 식 (4), (6)으로부터

$$\overline{R}_{ijk}{}^{l}=R_{ijk}{}^{l}+\delta_j^l\alpha_{ik}-\delta_i^l\alpha_{jk}+\delta_k^l\gamma_{ij} \tag{9}$$

이다. 여기서 $\alpha_{ik}=\overline{\tau}_{ik}-\tau_{ik}$, $\gamma_{ij}=\overline{\beta}_{ij}-\beta_{ij}$.

먼저 α －형사영반대칭접속 ∇ 의 공액대칭조건을 구하자.

정리 1 리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 α －형사영반대칭접속 ∇ 에 대하여 텐소르

$$\begin{aligned}\overset{*}{V}_{ijk}{}^{l}&=\overset{*}{R}_{ijk}{}^{l}-\frac{1}{n}\left(\delta_i^l\overset{*}{R}_{jk}-\delta_j^l\overset{*}{R}_{ik}+g_{ik}\overset{*}{R}{}_j^l-g_{jk}\overset{*}{R}{}_i^l\right)+\frac{2(\alpha-1)}{n[n(\alpha+1)+4(\alpha-1)]}\cdot\\ &\cdot\left[\delta_i^l\left(\overset{*}{R}_{jk}-\overset{*}{R}_{ki}\right)-\delta_j^l\left(\overset{*}{R}_{ik}-\overset{*}{R}_{ki}\right)+g_{ik}\left(\overset{*}{R}{}_j^l-\overset{*}{R}{}_{\cdot j}^{l}\right)-g_{jk}\left(\overset{*}{R}{}_j^l-\overset{*}{R}{}_{\cdot j}^{l}\right)+n\delta_k^l\left(\overset{*}{R}_{ij}-\overset{*}{R}_{ji}\right)\right]\end{aligned} \tag{10}$$

은 접속변환 $\nabla\to\overset{*}{\nabla}$ 에 관한 불변량이다.

증명 식 (8)을 i 와 l 에 관하여 축약하면 다음과 같다.

$$\overset{*}{R}_{jk}=R_{jk}+n\tau_{jk}-g_{jk}\tau_i^i-2\beta_{kj} \tag{11}$$

이 식을 j 와 k 에 관하여 빗대칭화하고 식 (7)을 리용하여 β_{jk} 를 구하면

$$\beta_{jk}=\frac{\alpha-1}{n(\alpha+1)+4(\alpha-1)}\left[\left(\overset{*}{R}_{jk}-\overset{*}{R}_{kj}\right)-(R_{jk}-R_{kj})\right]. \tag{12}$$

식 (12)를 식 (11)에 넣어 τ_{jk} 를 구하면

$$\tau_{jk}=\frac{1}{n}\left\{\overset{*}{R}_{jk}-R_{jk}+g_{jk}\tau_i^i-\frac{2(\alpha-1)}{n(\alpha+1)+4(\alpha-1)}\left[\left(\overset{*}{R}_{jk}-\overset{*}{R}_{kj}\right)-(R_{jk}-R_{kj})\right]\right\} \tag{13}$$

이며 식 (12), (13)을 식 (8)에 넣고 정돈하면서

$$V_{ijk}{}^l=R_{ijk}{}^l-\frac{1}{n}(\delta_i^lR_{jk}-\delta_j^lR_{ik}+g_{ik}R_j^l-g_{jk}R_i^l)+\frac{2(\alpha-1)}{n[n(\alpha+1)+4(\alpha-1)]}\cdot$$
$$\cdot[\delta_i^l(R_{jk}-R_{kj})-\delta_j^l(R_{ik}-R_{ki})+g_{ik}(R_j^l-R_{\cdot j}^l)-g_{jk}(R_j^l-R_{\cdot j}^l)+n\delta_k^l(R_{ij}-R_{ji})] \tag{14}$$

라고 하면

$$\overset{*}{V}_{ijk}{}^l=V_{ijk}{}^l \tag{15}$$

이다.(증명끝)

정리 2 리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 α －형사영반대칭접속 ∇ 가 공액대칭이기 위해서는 그것이 공액릿찌대칭일것이 필요하고 충분하다.(증명생략)

α －형사영반대칭접속 ∇ 와 그것의 호상접속 $\overline{\nabla}$ 사이의 등곡률성조건을 구하자.

정리 3 리만다양체 $(M,\ g)$ $(\dim M>3)$ 에서 α －형사영반대칭접속 ∇ 에 관하여

$$\overline{P}_{ijk}{}^l=\overline{R}_{ijk}{}^l-\frac{1}{n-1}(\delta_i^l\overline{R}_{jk}-\delta_j^l\overline{R}_{ik})-$$
$$-\frac{1}{(n-1)(n-3)}[\delta_i^l(\overline{R}_{jk}-\overline{R}_{kj})-\delta_j^l(\overline{R}_{ik}-\overline{R}_{ki})+(n-1)\delta_k^l(\overline{R}_{ij}-\overline{R}_{ji})]$$

는 접속변환 $\nabla\to\overline{\nabla}$ 에 관한 불변량이다.

증명 식 (9)를 i, l 에 관하여 축약하면 다음과 같다.

$$\overline{R}_{jk}=R_{jk}-(n-1)\alpha_{jk}-\gamma_{jk} \tag{16}$$

이 식을 j, k 에 관하여 빗대칭화하면

$$\overline{R}_{jk}-\overline{R}_{kj}=R_{jk}-R_{kj}-(n-1)(\alpha_{jk}-\alpha_{kj})-2\gamma_{jk}$$

이며 식 (7)을 리용하면 $\alpha_{jk}-\alpha_{kj}=-\gamma_{jk}$ 이다.

우의 두 식으로부터 $\gamma_{jk}=\frac{1}{n-3}[(\overline{R}_{jk}-\overline{R}_{kj})-(R_{jk}-R_{kj})]$ 이며 이 식을 식 (16)에 넣어 α_{jk} 를 구하면

$$\alpha_{jk}=\frac{1}{n-1}\left\{R_{jk}-\overline{R}_{kj}-\frac{1}{n-3}[(\overline{R}_{jk}-\overline{R}_{kj})-(R_{jk}-R_{kj})]\right\}.$$

이 식들을 식 (9)에 넣고 정돈하면서

$$P_{ijk}{}^l=R_{ijk}{}^l-\frac{1}{n-1}(\delta_i^lR_{jk}-\delta_j^lR_{ik})-\frac{1}{(n-1)(n-3)}[\delta_i^l(R_{jk}-R_{kj})-\delta_j^l(R_{ik}-R_{ki})+(n-1)\delta_k^l(R_{ij}-R_{ji})]$$

라고 하면 $\overline{P}_{ijk}{}^l=P_{ijk}{}^l$ 이다.(증명끝)

주의 $W_{ijk}{}^l=R_{ijk}{}^l-\frac{1}{n-1}(\delta_i^lR_{jk}-\delta_j^lR_{ik})$ 가 ∇ 의 와일사영곡률텐소르임을 고려하면 $P_{ijk}{}^l=W_{ijk}{}^l-H_{ijk}{}^l$ 이다. 여기서 $H_{ijk}{}^l=\frac{1}{(n-1)(n-3)}[\delta_i^l(R_{jk}-R_{kj})-\delta_j^l(R_{ik}-R_{ki})+(n-1)\delta_k^l(R_{ij}-R_{ji})]$ 이고 $W_{ijk}{}^l$ 은 와일사영곡률

텐소르이다.

따라서 α －형사영반대칭접속 ∇ 에서 1－형식 π 가 닫긴형식이면 $H_{ijk}{}^{l}=0$ 이므로 $W_{ijk}{}^{l}=\overset{\circ}{W}_{ijk}{}^{l}$ 이다.

정리 4 리만다양체 $(M,\ g)$ $(\dim M>3)$ 에서 α －형사영반대칭접속 ∇ 와 그것의 호상접속 $\overline{\nabla}$ 가 등곡률이기 위해서는 릿찌곡률텐소르들이 같을것이 필요하고 충분하다.

증명 $\overline{R}_{ijk}{}^{l}=R_{ijk}{}^{l}$ 이면 $\overline{R}_{jk}=R_{jk}$ 이다. 거꾸로 정리 3을 리용하면 $\overline{R}_{jk}=R_{jk}$ 일 때 식 (10), (14), (15)로부터 $\overline{R}_{ijk}{}^{l}=R_{ijk}{}^{l}$ 이 성립된다.(증명끝)

다음으로 α －형사영반대칭접속과 그것의 호상접속의 일정곡률성을 론의하자.

리만다양체 $(M,\ g)$ 의 임의의 점 p 에서 자름면곡률이 2차원자름면의 선택에 무관계하면 곡률텐소르는 다음과 같이 표시된다.

$$R_{ijkl}=k(p)(g_{il}g_{jk}-g_{ik}g_{jl}) \tag{17}$$

이때 $k(p)=\text{const}$ 이면 대응되는 접속은 일정곡률을 가진다고 말한다.

정리 5 리만다양체 $(M,\ g)$ 가 련결이고 $\dim M\geq 3$ 인 경우에 α －형사영반대칭접속 ∇ 가 일정곡률을 가지기 위해서는 $\alpha=1$ 일것이 필요하고 충분하다.

증명 식 (1), (17), α －형사영반대칭접속 ∇ 의 곡률텐소르에 대한 제2종비양끼항등식을 리용하면

$$\begin{gathered}[\nabla_h K-(\alpha-3)K\varphi_h](g_{il}g_{jk}-g_{ik}g_{jl})+[\nabla_i K-(\alpha-3)K\varphi_i](g_{jl}g_{hk}-g_{jk}g_{hl})+\\+[\nabla_j K-(\alpha-3)K\varphi_j](g_{hl}g_{ik}-g_{hk}g_{il})=\\=2K[\varphi_h(g_{il}g_{jk}-g_{ik}g_{jl})+\varphi_i(g_{jl}g_{hk}-g_{jk}g_{hl})+\varphi_j(g_{hl}g_{ik}-g_{hk}g_{il})].\end{gathered}$$

이 식에 g^{jk} 를 곱하고 축약하면

$$(n-2)\{\delta_i^l[\nabla_h K-(\alpha-1)K\varphi_h]-\delta_h^l[\nabla_i K-(\alpha-1)K\varphi_i]\}=0\,.$$

이제 다시 i , l 에 관하여 축약하면

$$(n-1)(n-2)[\nabla_h K-(\alpha-1)K\varphi_h]=0$$

이며 이 식이 $n\geq 3$ 인 경우에 $K=\text{const}$ 이기 위해서는 $\alpha=1$ 일것이 필요하고 충분하다는것을 보여준다.

식 (1)로부터 $\alpha=1$ 이면 사영반대칭접속은

$$\nabla_k g_{ij}=-\varphi_i g_{kj}-\varphi_j g_{ki},\ \ T_{ij}^{k}=\varphi_j\delta_i^k-\varphi_i\delta_j^k \tag{18}$$

을 만족시키는 접속으로서 일정곡률을 가진다.(증명끝)

정리 6 리만다양체 $(M,\ g)$ 가 련결이고 $\dim M\geq 3$ 인 경우에 α －형사영반대칭접속 ∇ 의 호상접속 $\overline{\nabla}$ 가 일정곡률을 가지기 위해서는 $\alpha=-1$ 일것이 필요하고 충분하다.

증명 식 (2), (17), 호상접속 $\overline{\nabla}$ 의 곡률텐소르에 대한 제2종비양끼항등식을 리용하면

$$\begin{gathered}[\nabla_h K-(\alpha+3)K\varphi_h](g_{il}g_{jk}-g_{ik}g_{jl})+[\nabla_i K-(\alpha+3)K\varphi_i](g_{jl}g_{hk}-g_{jk}g_{hl})+\\+[\nabla_j K-(\alpha+3)K\varphi_j](g_{hl}g_{ik}-g_{hk}g_{il})=\\=-2K[\varphi_h(g_{il}g_{jk}-g_{ik}g_{jl})+\varphi_i(g_{jl}g_{hk}-g_{jk}g_{hl})+\varphi_j(g_{hl}g_{ik}-g_{hk}g_{il})].\end{gathered}$$

이 식에 g^{jk} 를 곱하고 축약하면

$$(n-2)\{\delta_i^l[\nabla_h K-(\alpha+1)K\varphi_h]-\delta_h^l[\nabla_i K-(\alpha+1)K\varphi_i]\}=0\,.$$

다시 i, l 에 관하여 축약하면

$$(n-1)(n-2)[\nabla_h K-(\alpha+1)K\varphi_h]=0$$

이며 이 식이 $n\geq 3$ 인 경우에 $K=\text{const}$ 이기 위해서는 $\alpha=-1$ 일것이 필요하고 충분하다는 것을 보여준다.

식 (3)으로부터 $\alpha=-1$ 이면 α ㅡ형사영반대칭접속의 호상접속 $\overline{\nabla}$ 는

$$\overline{\nabla}_k g_{ij}=\varphi_i g_{jk}+\varphi_j g_{ik},\quad T_{ij}^k=\varphi_j\delta_i^k-\varphi_i\delta_j^k.$$

이 접속은 일정곡률을 가진다.

이 접속은 식 (18)에서 π 를 $-\pi$ 로 바꾼 형태이다.

이 접속의 기하학적성질은 선행연구[1]에서 구체적으로 론의되였다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보(자연과학), 59, 11, 3, 주체102(2013).

[2] Journal of **Kim Il Sung** University (Natural Science), 2, 2, 3, Juche102(2013).

[3] S. B. Edgar; Class. Quantum Grav., 10, 2545, 1993.

[4] E. S. Stepanova; Journal of Mathematical Sciences, 147, 1, 6507, 2007.

주체104(2015)년 11월 5일 원고접수

A Dual Connection and Mutual Connection of a α-Type Projective Semi-Symmetric Connection on a Riemannian Manifold

Ho Tal Yun, Pak Kyong Sil

We defined a α-type projective semi-symmetric connection on a Riemannian manifold and newly discovered its conjugate symmetry condition. And we found the equivalent curvature copies condition between α-type projective semi-symmetric connection and its mutual connection.

Key word: Riemannian manifold