김일성종합대학학보 JOURNAL OF KIM IL SUNG UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체106(2017)년 제63권 제7호 Vol. 63 No. 7 JUCHE106(2017).

한가지 블로크행렬의 드라진거꿀행렬표시식

백 원 욱

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《현시대는 과학기술의 시대이며 과학기술의 발전수준은 나라의 종합적국력과 지위를 규정하는 징표로 됩니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 38페지)

행렬의 드라진거꿀행렬리론은 미분방정식과 계차방정식, 마르꼬브사슬, 최량조종 등 과학기술의 여러 분야에 광범히 응용되고있다.

임의의 n차행렬 $A\in \boldsymbol{C}^{n\times n}$에 대하여 그것의 드라진거꿀행렬 A^{D}는 유일존재하며 A에 관한 다항식형태로 표시된다.[1]

블로크행렬의 드라진거꿀행렬을 그것의 요소블로크들에 의하여 표시하는 문제는 아직까지 미해명문제로 되고있으며 현재까지 일련의 제한조건밑에서 그것에 대한 연구가 진행되고있다.

선행연구[2, 3]에서는 각각 $ABC=O,\ D=O$인 경우와 $BD^iC=O,\ i=0, 1, 2, \cdots, n-1$인 경우에 블로크행렬 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}$의 드라진거꿀행렬을 구하였다.

론문에서는 한가지 새로운 조건밑에서 블로크행렬의 드라진거꿀행렬을 구하였다.

정의 1 n차행렬 $A\in \boldsymbol{C}^{n\times n}$에 대하여 $\mathrm{rank}\,(A^{k+1})=\mathrm{rank}(A^k)$을 만족시키는 부아닌 최소옹근수 k를 A의 지표라고 하고 $k=\mathrm{ind}(A)$로 표시한다. 령행렬의 지표는 1로 한다.

정의 2 n차행렬 $A\in \boldsymbol{C}^{n\times n}$에 대하여 $AX=XA,\ XAX=X,\ A^kXA=A^k$ $(k=\mathrm{ind}(A))$을 만족시키는 n차행렬 $X(\in \boldsymbol{C}^{n\times n})$를 A의 드라진거꿀행렬이라고 하고 $X=A^{\mathrm{D}}$로 표시한다.

$A^{\pi}=I-AA^{\mathrm{D}}$ ($I\in \boldsymbol{C}^{n\times n}$는 단위행렬)로 정의한다.

보조정리 1[3] $A\in \boldsymbol{C}^{m\times m},\ B\in \boldsymbol{C}^{m\times n},\ C\in \boldsymbol{C}^{n\times m},\ D\in \boldsymbol{C}^{n\times n}$이라고 하자.

만일 블로크행렬 $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}$가 조건 $BD^iC=O$ $(i=0, 1, \cdots, n-1)$를 만족시키면 M의 드라진거꿀행렬은 $M^{\mathrm{D}}=\begin{pmatrix} A^{\mathrm{D}} & X \\ Y & D^{\mathrm{D}}+Z\end{pmatrix}$로 표시된다. 여기서

$$X=\sum_{k=0}^{s-1}(A^{\mathrm{D}})^{k+2}BD^kD^{\pi}+A^{\pi}\sum_{k=0}^{r-1}A^kB(D^{\mathrm{D}})^{k+2}-A^{\mathrm{D}}BD^{\mathrm{D}},$$

$$Y=\sum_{k=0}^{r-1}(D^{\mathrm{D}})^{k+2}CA^kA^{\pi}+D^{\pi}\sum_{k=0}^{s-1}D^kC(A^{\mathrm{D}})^{k+2}-D^{\mathrm{D}}CA^{\mathrm{D}},$$

$$Z=\sum_{k=0}^{s-1}Y_{k+2}BD^kD^{\pi}+\sum_{k=0}^{t-1}(D^{\pi}C_k-Y_0A^k)B(D^{\mathrm{D}})^{k+2}-YBD^{\mathrm{D}},$$

$$C_0=O,\ C_k=\sum_{i=0}^{k-1}D^iCA^{k-i-1},\ Y_0=\sum_{i=0}^{r-1}(D^{\mathrm{D}})^{i+1}CA^iA^{\pi}+D^{\pi}\sum_{i=0}^{s-1}D^iC(A^{\mathrm{D}})^{i+1},$$

$$Y_k=\sum_{i=0}^{r-1}(D^{\mathrm{D}})^{k+i+1}CA^iA^{\pi}+D^{\pi}\sum_{i=0}^{s-1}D^iC(A^{\mathrm{D}})^{k+i+1}-\sum_{i=0}^{k-1}(D^{\mathrm{D}})^{i+1}C(A^{\mathrm{D}})^{k-i}$$

이고 $r=\mathrm{ind}(A),\ s=\mathrm{ind}(D),\ t=\mathrm{ind}\begin{pmatrix}A & O\\ C & D\end{pmatrix}$이다.

보조정리 2[2] $A\in \boldsymbol{C}^{m\times m},\ B\in \boldsymbol{C}^{m\times n},\ C\in \boldsymbol{C}^{n\times m}$ 일 때 반삼각블로크행렬 $R=\begin{pmatrix}A & B\\ C & O\end{pmatrix}$가 조건 $BCA=O$를 만족시키면 $R^{\mathrm{D}}=\begin{pmatrix}A\Omega^{\mathrm{D}} & \Omega^{\mathrm{D}}B\\ C\Omega^{\mathrm{D}} & CA(\Omega^{\mathrm{D}})^2B\end{pmatrix}$가 성립된다. 여기서 $\Omega=A^2+BC$,

$$\Omega^{\mathrm{D}}=(A^2+BC)^{\mathrm{D}}=\sum_{i=0}^{\mu-1}(A^{\mathrm{D}})^{2i+2}(BC)^i(BC)^{\pi}+\sum_{i=0}^{\eta-1}A^{\pi}A^{2i}((BC)^{\mathrm{D}})^{i+1},\ \mu=\mathrm{ind}(BC),\ \eta=\mathrm{ind}(A^2).$$

보조정리 2의 조건을 만족시키는 반삼각블로크행렬 R에 대하여

$$\Omega^{\pi}=I-\Omega\Omega^{\mathrm{D}}=A^{\pi}-\Omega^{\mathrm{D}}BC=(BC)^{\pi}-A^2\Omega^{\mathrm{D}},\ R^{\pi}=\begin{pmatrix}\Omega^{\pi} & -A\Omega^{\mathrm{D}}B\\ -CA\Omega^{\mathrm{D}} & I-C\Omega^{\mathrm{D}}B\end{pmatrix},$$

$$R^j=\begin{cases}\begin{pmatrix}\Omega^k & A\Omega^{k-1}B\\ CA\Omega^{k-1} & C\Omega^{k-1}B\end{pmatrix},\ j=2k\\ \begin{pmatrix}A\Omega^k & \Omega^kB\\ C\Omega^k & CA\Omega^{k-1}B\end{pmatrix},\ j=2k+1\end{cases},\quad k\ge 1$$

이 성립된다. 여기서 $\Omega^k=(A^2+BC)^k=\sum_{i=0}^{k}A^{2i}(BC)^{k-i}$ 이다.

또한 $(R^{\mathrm{D}})^j=\begin{cases}\begin{pmatrix}(\Omega^{\mathrm{D}})^k & A(\Omega^{\mathrm{D}})^{k+1}B\\ CA(\Omega^{\mathrm{D}})^{k+1} & C(\Omega^{\mathrm{D}})^{k+1}B\end{pmatrix},\ j=2k\ (k\ge 1)\\ \begin{pmatrix}A(\Omega^{\mathrm{D}})^{k+1} & (\Omega^{\mathrm{D}})^{k+1}B\\ C(\Omega^{\mathrm{D}})^{k+1} & CA(\Omega^{\mathrm{D}})^{k+2}B\end{pmatrix},\ j=2k+1\ (k\ge 0)\end{cases}$ 이 성립된다. 여기서

$$(\Omega^{\mathrm{D}})^k=\sum_{i=0}^{\mu-1}(A^{\mathrm{D}})^{2k+2i}(BC)^i(BC)^{\pi}+\sum_{i=0}^{\eta-1}A^{\pi}A^{2i}((BC)^{\mathrm{D}})^{k+i}-\sum_{i=1}^{k-1}(A^{\mathrm{D}})^{2i}((BC)^{\mathrm{D}})^{k-i}\quad (k>1).$$

보조정리 3 $A\in \boldsymbol{C}^{m\times m},\ B\in \boldsymbol{C}^{m\times n},\ C\in \boldsymbol{C}^{n\times m},\ D\in \boldsymbol{C}^{n\times n}$이라고 할 때

$$BCA=O,\ \ CA^iBD=O\ (i=0,1,\cdots,m)$$

가 만족되면 3×3블로크행렬 $N=\begin{pmatrix}D & C & O\\ O & A & B\\ D & C & O\end{pmatrix}$의 드라진거꿀행렬은 다음과 같다.

$$N^{\mathrm{D}}=\begin{pmatrix}D^{\mathrm{D}} & DU_1+C\Omega^{\mathrm{D}} & U_1B\\ V_1-(A^{\mathrm{D}})^2B & AW_1+BU_1+A\Omega^{\mathrm{D}} & W_1B+\Omega^{\mathrm{D}}B\\ D^{\mathrm{D}} & DU_1+C\Omega^{\mathrm{D}} & U_1B\end{pmatrix}$$

여기서 $U_1=\sum_{i=0}^{\rho-1}(D^{\mathrm{D}})^{2i+4}C_2\Omega^i\Omega^{\pi}+D^{\pi}\sum_{i=0}^{\nu-1}D^{2i}C_2(\Omega^{\mathrm{D}})^{i+2}-(D^{\mathrm{D}})^2C_2\Omega^{\mathrm{D}}$,

$$V_1=\sum_{i=0}^{s-1}(A^{\mathrm{D}})^{i+2}BD^iD^{\pi}+A^{\pi}\sum_{i=0}^{r-1}A^iB(D^{\mathrm{D}})^{i+2}-A^{\mathrm{D}}BD^{\mathrm{D}},$$

$$W_1=\sum_{i=0}^{\rho-1}V_{2i+4}C_2\Omega^i\Omega^{\pi}+\sum_{i=0}^{\delta-1}(A^{\pi}B_{2i}-V_0D^{2i})C_2(\Omega^{\mathrm{D}})^{i+2}-V_2C_2\Omega^{\mathrm{D}},$$

$$V_0=\sum_{i=0}^{s-1}(A^{\mathrm{D}})^{i+1}BD^iD^{\pi}+A^{\pi}\sum_{i=0}^{r-1}A^iB(D^{\mathrm{D}})^{i+1},$$

$$B_0=O,\ B_k=\sum_{i=0}^{k-1}A^iBD^{k-i-1}\ (k>0),\ C_2=CA+DC,$$

$$\nu=\mathrm{ind}(D^2),\ \rho=\mathrm{ind}(\Omega),\ \delta=\mathrm{ind}\begin{pmatrix}A^2 & B_2\\ O & D^2\end{pmatrix}.$$

정리 1 $A\in\boldsymbol{C}^{m\times m}$, $B\in\boldsymbol{C}^{m\times n}$, $C\in\boldsymbol{C}^{n\times m}$, $D\in\boldsymbol{C}^{n\times n}$이라고 하자.

만일 조건 $BCA=O$, $CA^iBD=O\ (i=0,1,\ \cdots,\ m)$를 만족시키면 2×2 블로크행렬 $M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$의 드라진거꿀행렬은 $M^{\mathrm{D}}=\begin{pmatrix}AW_1+BU_1+A\Omega^{\mathrm{D}} & V_2D+W_1B+\Omega^{\mathrm{D}}B\\ DU_1+C\Omega^{\mathrm{D}} & D^{\mathrm{D}}+U_1B\end{pmatrix}$와 같다. 여기서 Ω^{D}, U_1, W_1, V_2는 보조정리 3에서와 같다.

증명 행렬 $M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$를 $M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}O & A & B\\ D & C & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}O & I\\ I & O\\ O & I\end{pmatrix}$와 같이 적분해할수 있다.

$$N=\begin{pmatrix}O & I\\ I & O\\ O & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}O & A & B\\ D & C & O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}D & C & O\\ O & A & B\\ D & C & O\end{pmatrix}$$ 라고 하면 보조정리 3으로부터

$$N^{\mathrm{D}}=\begin{pmatrix}D^{\mathrm{D}} & X\\ Y & R^{\mathrm{D}}+Z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}D^{\mathrm{D}} & DU_1+C\Omega^{\mathrm{D}} & U_1B\\ V_1-(A^{\mathrm{D}})^2B & AW_1+BU_1+A\Omega^{\mathrm{D}} & W_1B+\Omega^{\mathrm{D}}B\\ D^{\mathrm{D}} & DU_1+C\Omega^{\mathrm{D}} & U_1B\end{pmatrix}$$

가 성립된다. 여기서

$$X=(DU_1+C\Omega^{\mathrm{D}}\ \ U_1B),\ Y=\begin{pmatrix}V_1-(A^{\mathrm{D}})^2B\\ D^{\mathrm{D}}\end{pmatrix},$$

$$R^{\mathrm{D}}+Z=\begin{pmatrix}Z_1 & Z_2\\ Z_3 & Z_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}AW_1+BU_1+A\Omega^{\mathrm{D}} & W_1B+\Omega^{\mathrm{D}}B\\ DU_1+C\Omega^{\mathrm{D}} & U_1B\end{pmatrix}.$$

$$(N^{\mathrm{D}})^2=\begin{pmatrix}(D^{\mathrm{D}})^2+XY & D^{\mathrm{D}}X+X(R^{\mathrm{D}}+Z)\\ YD^{\mathrm{D}}+(R^{\mathrm{D}}+Z)Y & YX+(R^{\mathrm{D}}+Z)^2\end{pmatrix}$$ 이라고 하면

$$M^{\mathrm{D}}=\begin{pmatrix}O & A & B\\ D & C & O\end{pmatrix}(N^{\mathrm{D}})^2\begin{pmatrix}O & I\\ I & O\\ O & I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}AW_1+BU_1+A\Omega^{\mathrm{D}} & V_2D+W_1B+\Omega^{\mathrm{D}}B\\ DU_1+C\Omega^{\mathrm{D}} & D^{\mathrm{D}}+U_1B\end{pmatrix}$$

가 성립된다.(증명끝)

따름 1 $A\in \boldsymbol{C}^{m\times m}$, $B\in \boldsymbol{C}^{m\times n}$, $C\in \boldsymbol{C}^{n\times m}$, $D\in \boldsymbol{C}^{n\times n}$ 이라고 하자.

만일 조건 $BCA=O,\ ABD=O,\ CBD=O$ 가 만족되면 2×2 블로크행렬 $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 의 드라진거꿀행렬은 $M^{\mathrm{D}}=\begin{pmatrix} BU_1+A\Omega^{\mathrm{D}} & B(D^{\mathrm{D}})^2+BDU_2B+\Omega^{\mathrm{D}}B \\ DU_1+C\Omega^{\mathrm{D}} & D^{\mathrm{D}}+U_1B \end{pmatrix}$ 와 같다. 여기서 U_1, Ω^{D} 는 보조정리 2, 보조정리 3에서와 같으며

$$U_2=\sum_{i=0}^{\rho-1}(D^{\mathrm{D}})^{2i+6}C_2\Omega^i\Omega^{\pi}+D^{\pi}\sum_{i=0}^{\nu-1}D^{2i}C_2(\Omega^{\mathrm{D}})^{i+3}-(D^{\mathrm{D}})^4C_2\Omega^{\mathrm{D}}-(D^{\mathrm{D}})^2C_2(\Omega^{\mathrm{D}})^2.$$

정리 2 $A\in \boldsymbol{C}^{m\times m}$, $B\in \boldsymbol{C}^{m\times n}$, $C\in \boldsymbol{C}^{n\times m}$, $D\in \boldsymbol{C}^{n\times n}$ 이라고 하자.

만일 조건 $CBD=O,\ BD^iCA=O\ (i=0,1,\cdots,n)$ 이 만족되면 2×2 블로크행렬 $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 의 드라진거꿀행렬은 $M^{\mathrm{D}}=\begin{pmatrix} A^{\mathrm{D}}+U_1C & AU_1+B\Omega^{\mathrm{D}} \\ V_2A+W_1C+\Omega^{\mathrm{D}}C & DW_1+CU_1+D\Omega^{\mathrm{D}} \end{pmatrix}$ 와 같다. 여기서

$$U_1=\sum_{i=0}^{\rho-1}(A^{\mathrm{D}})^{2i+4}B_2\Omega^i\Omega^{\pi}+A^{\pi}\sum_{i=0}^{\eta-1}A^{2i}B_2(\Omega^{\mathrm{D}})^{i+2}-(A^{\mathrm{D}})^2B_2\Omega^{\mathrm{D}},$$

$$W_1=\sum_{i=0}^{\rho-1}V_{2i+4}B_2\Omega^i\Omega^{\pi}+\sum_{i=0}^{\delta-1}(D^{\pi}C_{2i}-V_0A^{2i})B_2(\Omega^{\mathrm{D}})^{i+2}-V_2B_2\Omega^{\mathrm{D}},$$

$$V_0=\sum_{i=0}^{r-1}(D^{\mathrm{D}})^{i+1}CA^iA^{\pi}+D^{\pi}\sum_{i=0}^{s-1}D^iC(A^{\mathrm{D}})^{i+1},$$

$$V_k=\sum_{i=0}^{r-1}(D^{\mathrm{D}})^{k+i+1}CA^iA^{\pi}+D^{\pi}\sum_{i=0}^{s-1}D^iC(A^{\mathrm{D}})^{k+i+1}-\sum_{i=0}^{k-1}(D^{\mathrm{D}})^{i+1}C(A^{\mathrm{D}})^{k-i},$$

$$C_0=O,\ C_k=\sum_{i=0}^{k-1}D^iCA^{k-i-1}\ (k>0),\ B_2=AB+BD,$$

$$\Omega^{\mathrm{D}}=\sum_{i=0}^{\mu-1}(D^{\mathrm{D}})^{2i+2}(CB)^i(CB)^{\pi}+\sum_{i=0}^{\nu-1}D^{\pi}D^{2i}((CB)^{\mathrm{D}})^{i+1},$$

$$(\Omega^{\mathrm{D}})^k=\sum_{i=0}^{\mu-1}(D^{\mathrm{D}})^{2k+2i}(CB)^i(CB)^{\pi}+\sum_{i=0}^{\eta-1}D^{\pi}D^{2i}((CB)^{\mathrm{D}})^{k+i}-\sum_{i=1}^{k-1}(D^{\mathrm{D}})^{2i}((CB)^{\mathrm{D}})^{k-i}\ (k>1),$$

$r=\mathrm{ind}(A),\ s=\mathrm{ind}(D),\ \eta=\mathrm{ind}(A^2),\ \nu=\mathrm{ind}(D^2),\ \mu=\mathrm{ind}(CB),\ \rho=\mathrm{ind}(\Omega),\ \delta=\mathrm{ind}\begin{pmatrix} A^2 & O \\ C_2 & D^2 \end{pmatrix}.$

증명 조건으로부터 블로크행렬 $N=\begin{pmatrix} D & C \\ B & A \end{pmatrix}$ 는 정리 1을 만족시킨다. 따라서 그것의 드라진거꿀행렬은 $N^{\mathrm{D}}=\begin{pmatrix} DW_1+CU_1+D\Omega^{\mathrm{D}} & V_2A+W_1C+\Omega^{\mathrm{D}}C \\ AU_1+B\Omega^{\mathrm{D}} & A^{\mathrm{D}}+U_1C \end{pmatrix}$ 와 같다.

$T=\begin{pmatrix} O & I_n \\ I_m & O \end{pmatrix}$ (I_m, I_n 은 각각 m, n 차단위행렬)이라고 하면 $T^{-1}=\begin{pmatrix} O & I_m \\ I_n & O \end{pmatrix}$ 이고

$$M=T^{-1}NT,\ M^D=T^{-1}N^DT.$$

따라서 $M^{\mathrm{D}}=T^{-1}N^{\mathrm{D}}T=\begin{pmatrix} O & I_m \\ I_n & O \end{pmatrix}N^{D}\begin{pmatrix} O & I_n \\ I_m & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A^{\mathrm{D}}+U_1C & AU_1+B\Omega^{\mathrm{D}} \\ V_2A+W_1C+\Omega^{\mathrm{D}}C & DW_1+CU_1+D\Omega^{\mathrm{D}} \end{pmatrix}$.

(증명끝)

따름 2　$A\in \boldsymbol{C}^{m\times m}$, $B\in \boldsymbol{C}^{m\times n}$, $C\in \boldsymbol{C}^{n\times m}$, $D\in \boldsymbol{C}^{n\times n}$ 이라고 하자.

만일 조건 $CBD=O,\ DCA=O,\ BCA=O$ 가 만족되면 2×2 블로크행렬 $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$의 드라진거꿀행렬은 $M^{\mathrm{D}}=\begin{pmatrix} A^{\mathrm{D}}+U_1C & AU_1+B\Omega^{\mathrm{D}} \\ C(A^{\mathrm{D}})^2+CAU_2C+\Omega^{\mathrm{D}}C & CU_1+D\Omega^{\mathrm{D}} \end{pmatrix}$ 이다. 여기서 U_1, Ω^k, Ω^{D}, $(\Omega^{\mathrm{D}})^k$, ρ, μ, ν 는 정리 2에서와 같으며

$$U_2=\sum_{i=0}^{\rho-1}(A^{\mathrm{D}})^{2i+6}B_2\Omega^i\Omega^{\pi}+A^{\pi}\sum_{i=0}^{\eta-1}A^{2i}B_2(\Omega^{\mathrm{D}})^{i+3}-(A^{\mathrm{D}})^4B_2\Omega^{\mathrm{D}}-(A^{\mathrm{D}})^2B_2(\Omega^{\mathrm{D}})^2 .$$

참 고 문 헌

[1] T. N. Greville et al.; Generalized Inverses: Theory and Application, Springer, 1～260, 2001.

[2] C. Deng; J. Math. Anal. Appl., 368, 1, 1, 2010.

[3] Li Guo et al.; J. Appl. Math. Comput., 217, 2833, 2010.

주체106(2017)년 3월 5일 원고접수

The Representations for Drazin Inverses of the Block Matrices

Paek Won Uk

We give the representation for Drazin inverses of the block matrices $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ under the condition of $BCA=O,\ CA^iBD=O\ (i=0, 1, \cdots)$.

Key words: block matrix, Drazin inverse matrix