김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체105(2016)년 제62권 제7호 Vol. 62 No. 7 JUCHE105(2016).

고계도함수에 의한 1 : 1공진의 발생조건

최정학, 김주경

분지의 발생조건을 명백히 밝히는것은 공학에서 론의되는 여러가지 계의 거동과 변화과정을 연구하는데서 중요한 문제로 나선다.

선행연구[2]에서는 2계도함수가 령이라는 조건밑에서 1∶1공진의 발생조건을 밝혔으며 선행연구[1, 3]에서는 고계도함수조건밑에서 쇠스랑분지형거동에 대하여 연구하였다.

론문에서는 고계도함수에 의한 여차원이 2인 분지의 1∶1공진의 발생조건을 표준형을 리용하지 않는 방법으로 연구하였다.

두 파라메터2차원리산력학계

$$x \mapsto f(x,\ \alpha),\ \ x=(x_1,\ \ x_2)\in \boldsymbol{R}^2,\ \ \alpha=(\alpha_1,\ \ \alpha_2)\in \boldsymbol{R}^2 \tag{1}$$

에 대하여 $f(x,\ \alpha)$는 충분히 미끈한 함수로서 $\alpha=(0,\ 0)$에서 $D_f(0,\ 0)$의 고유값이 $\lambda_{1,\ 2}=1$인 부동점 $x=(0,\ 0)$을 가진다고 하자.

계 (1)을 적당한 자리표변환을 실시하여 다음과 같이 변화시킬수 있다.[3]

$$y_1 \mapsto g(y_1,\ y_2\ ;\ \alpha_1,\ \alpha_2),\ \ y_2 \mapsto h(y_1,\ y_2\ ;\ \alpha_1,\ \alpha_2)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y_1}(0,\ 0;0,\ 0)=\frac{\partial g}{\partial y_2}(0,\ 0\ ;\ 0,\ 0)=\frac{\partial h}{\partial y_2}(0,\ 0\ ;\ 0,\ 0)=1,\ \ \frac{\partial h}{\partial y_1}(0,\ 0\ ;\ 0,\ 0)=0 \tag{2}$$

우리는 계 (2)에 대하여 고계도함수에 의한 1∶1공진이 일어나기 위한 충분조건을 밝힌다.

1∶1공진의 전형적인 분지도식은 그림과 같다.

분지도식을 해석하면 다음과 같다.

1) $(\alpha_1,\ \alpha_2)$평면의 원점 (0, 0)을 지나는 곡선 $\alpha_1=\alpha_1(\alpha_2)$가 $\alpha_2=0$근방에서 정의되여 $(\alpha_1(\alpha_2),\ \alpha_2)$에서 계 (2)는 접이분지를 일으킨다.

이때 $\alpha_1>\alpha_1(\alpha_2)$가 성립되면 부동점은 없다.(구역 ①)

또한 $\alpha_1<\alpha_1(\alpha_2)$일 때 $\alpha_2<0$이면 하나의 점근안정부동점과 안장점이 존재한다.(구역 ②)

$\alpha_2>0$이면 하나의 불안정부동점과 안장점이 존재한다.(구역 ④)

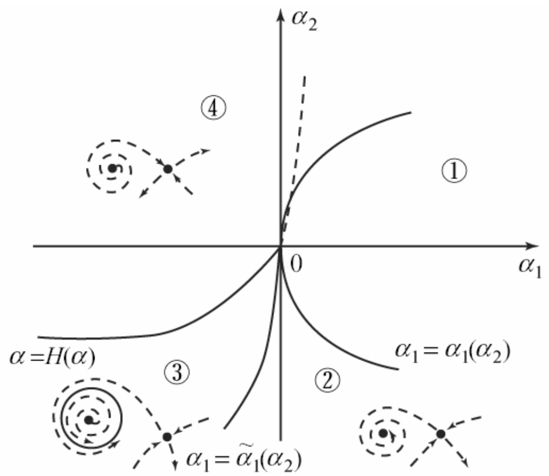

그림. 1∶1공진의 분지도식

2) $(\alpha_1,\ \alpha_2)$평면의 원점 (0, 0)을 지나는 곡선 $\alpha_1=\tilde{\alpha}_1(\alpha_2)$가 $\alpha_2=0$근방에서 정의되여 $\alpha_2<0$이면 $(\tilde{\alpha}_1(\alpha_2),\ \alpha_2)$에서 점근안정부동

점에 대한 나이마르크—사까분지가 일어나 닫긴불변곡선이 출현한다.(구역 ③)

$\alpha_2 > 0$ 이면 분지는 일어나지 않는다.

3) $\alpha_1 = H(\alpha_2)$ 가 $\alpha_2 = 0$ 근방에서 정의되여 이 곡선우에서 계는 호모클리니크분지를 일으킨다.

정리 계 (2)에 대하여 어떤 $n, m \in \boldsymbol{N}$ 이 있어서 다음의 조건들이 만족되면 $(\alpha_1, \alpha_2) = (0, 0)$ 에서 1∶1공진이 일어난다.

i) $\dfrac{\partial^k g}{\partial y_1^k}(0, 0; \alpha_1, \alpha_2) = \dfrac{\partial^k h}{\partial y_1^k}(0, 0; \alpha_1, \alpha_2) = 0 \ (k \le 2n-1),\ \dfrac{\partial^{2n} h}{\partial y_1^{2n}}(0, 0; 0, 0) > 0,\ \dfrac{\partial h}{\partial \alpha_1}(0, 0; 0, 0) > 0$

ii) $\dfrac{\partial^k}{\partial y_1^k}\operatorname{tr}\left[\dfrac{\partial(g, h)}{\partial(y_1, y_2)}\right](0, 0; \alpha_1, \alpha_2) = 0 \ (k \le 2m-1),\ \dfrac{\partial^{2m-1}}{\partial y_1^{2m-1}}\operatorname{tr}\left[\dfrac{\partial(g, h)}{\partial(y_1, y_2)}\right](0, 0; \alpha_1, \alpha_2) \ne 0$

iii) $\dfrac{\partial^2 h}{\partial y_1 \partial \alpha_2}(0, 0; 0, 0) > 0$

증명 계 (2)의 부동점방정식은

$$\begin{cases} G(y_1, y_2; \alpha_1, \alpha_2) = g(y_1, y_2; \alpha_1, \alpha_2) - y_1 = 0 \\ H(y_1, y_2; \alpha_1, \alpha_2) = h(y_1, y_2; \alpha_1, \alpha_2) - y_2 = 0 \end{cases},\quad \frac{\partial G}{\partial y_2}(0, 0; 0, 0) = 1$$

이므로 $(0; 0, 0) \in \boldsymbol{R}^3$ 의 적당한 근방에서 정의된 함수 $y_2 = \tilde{g}(y_1; \alpha_1, \alpha_2)$ 가 있어서 $G(y_1, \tilde{g}(y_1; \alpha_1, \alpha_2); \alpha_1, \alpha_2) = 0,\ \tilde{g}(0; 0, 0) = 0$ 이 성립된다.

한편 $\tilde{h}(y_1; \alpha_1, \alpha_2) = h(y_1, \tilde{g}(y_1; \alpha_1, \alpha_2); \alpha_1, \alpha_2)$ 는 2개의 파라메터를 가진 상공간이 1차원인 함수로서 조건 i)로부터 접이분지발생조건을 만족시킨다. 따라서 파라메터평면의 원점을 지나는 어떤 곡선이 있어서 계 (2)는 접이분지를 일으킨다.

조건 i)로부터 조건

$$\begin{cases} G(y_1, y_2; \alpha_1, \alpha_2) = 0,\quad H(y_1, y_2; \alpha_1, \alpha_2) = 0 \\ D(y_1, y_2; \alpha_1, \alpha_2) = \det\left(\dfrac{\partial(g, h)}{\partial(y_1, y_2)}\right)(y_1, y_2; \alpha_1, \alpha_2) - 1 = 0 \end{cases}$$

을 만족시키는 곡선

$$y_1 = y_1(\alpha_2),\quad y_2 = y_2(\alpha_2),\quad \alpha_1 = \tilde{\alpha}_1(\alpha_2)$$

가 $\alpha_2 = 0$ 근방에서 존재한다.

이때 $\tilde{E} = (\tilde{y}_1(\alpha_2), \tilde{y}_2(\alpha_2))$ 는 부동점방정식을 만족시키므로 부동점 E_1 과 E_2 중 어느 하나가 될수 있다.

앞단계의 증명에서 나오는것처럼 $\alpha_2 > 0$ 이면 $D(E_1) > D(E_2) \ge 0$ 이고 $\alpha_2 < 0$ 이면 $0 \ge D(E_1) > D(E_2)$ 가 성립된다.

부동점의 파라메터에 관한 련속성으로부터 $\alpha_2 > 0$ 이면 $\tilde{E} = E_2$, $\alpha_2 < 0$ 이면 $\tilde{E} = E_1$ 이 될수 있고 곡선의 유일성으로부터 $\alpha_2 > 0$ 이면 $D(E_1) > 0$, $\alpha_2 < 0$ 이면 $D(E_2) > 0$ 을 만족시킨다.

나이마르크—사까분지가 일어나려면 부동점에서 절대값이 1인 공액복소고유값을 가져야 한다.

넘기기 $(g,\ h)$의 야코비행렬을 $\tilde{A}$이라고 하면 공액인 복소고유값을 가지기 위하여서는 $(\mathrm{tr}\tilde{A})^2-4\det\tilde{A}<0$을 만족시켜야 한다.

$\alpha_1=\alpha_1(\alpha_2)$우에서 $\det\tilde{A}=1$임을 고려하면 $|\mathrm{tr}\tilde{A}|<2$가 되여야 한다.

한편 $|\mathrm{tr}\tilde{A}|=2+\mathrm{tr}A$이므로 조건 ii), iii)으로부터 $\alpha_2>0$이면 $|\mathrm{tr}\tilde{A}|>2$, $\alpha_2<0$이면 $|\mathrm{tr}\tilde{A}|<2$가 성립된다.

따라서 곡선 $T_N=\{(\alpha_1,\ \alpha_2)\,|\,\alpha_1=\tilde{\alpha}_1(\alpha_2),\ \alpha_2<0\}$에 대하여서만 나이마르크－사까분지가 일어난다. 즉 T_N을 지날 때 안정부동점 E_1이 불안정해지면서 그 주위에 닫긴불변곡선이 출현한다.

이때 곡선 $\alpha_1=\tilde{\alpha}_1(\alpha_2)$, $\alpha_2>0$인 부분에서는 나이마르크－사까분지가 일어나지 않으므로 불안정부동점과 안장점만이 존재한다.(구역 ④)

결국 불안정부동점과 안장점만이 존재하는 구역과 2개의 부동점과 닫긴불변곡선이 존재하는 구역사이의 경계로 되는 곡선 $\alpha_1=H(\alpha_2)$가 있어서 호모클리니크분지가 일어난다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보(자연과학), 60, 2, 3, 주체103(2014).

[2] Y. A. Kuznezov; Element of Applied Bifurcation Theory, Springer, 34～79, 2004.

[3] J. C. Valverde; Acta Math., 1, 113, 2010.

주체105(2016)년 3월 5일 원고접수

An Appearance Condition of 1∶1 Resonance by Higher Order Derivative

Choe Jong Hak, Kim Ju Gyong

To clearly clarify the appearance condition of the bifurcation is important problem to study the behavior of various kinds of systems and changing process considering in the engineering.

We study an appearance condition of 1∶1 resonance of co-dimension 2 bifurcation by higher order derivative without using the standard type.

Key words: resonance, bifurcation