김일성종합대학학보 주체107(2018)년
수 학 제64권 제3호

제곱두값선택권의 가격공식

최대성, 오형철

선행연구[2, 3]에서는 1계, 2계두값선택권의 가격공식을 자산두값선택권과 현금두값선택권으로 나누어 확률적방법으로 유도하였다. 선행연구[5]에서는 편미분방정식의 가격모형을 통하여 n계 자산두값선택권과 n계 현금두값선택권의 가격공식을 유도하고 회사채권가격모형 및 가격공식유도에 응용하였다.

론문에서는 자산두값선택권과 현금두값선택권을 다 같이 포함하는 제곱두값선택권의 개념을 도입하고 그것의 가격공식에 대하여 연구함으로써 선행연구[3, 5]에서의 두값선택권보다 더 많은 복잡한 금융계약들의 가격을 통일적으로 고찰할수 있는 방법을 준다.

1. α－제곱표준선택권

정의 1 r, q, σ들이 각각 리자률 그리고 기초자산의 배당률과 파동률이라고 할 때 다음의 블랙－숄즈방정식의 끝값문제를 고찰하자.

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2x^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+(r-q)x\frac{\partial V}{\partial x}-rV=0 \ \ (0<t<T,\ x>0) \tag{1}$$

$$V(x,\ T)=x^{\alpha} \tag{2}$$

선행연구[6]에 의하면 이 방정식의 풀이는 다음과 같이 주어진다.

$$V(x,\ t)=\frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_0^{\infty}\frac{1}{z}e^{-\frac{1}{2\sigma^2(T-t)}\left(\ln\frac{x}{z}+\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right)^2}z^{\alpha}dz \tag{3}$$

이 $V(x,\ t)$를 마감리득이 x^{α}인 제곱표준선택권 또는 α－제곱표준선택권의 가격이라고 부른다. α－제곱표준선택권의 가격을 $M^{\alpha}(x,\ t)$로 표시한다.

이때 α－제곱표준선택권의 가격공식은 다음의 정리로부터 얻을수 있다.

정리 1 α－제곱표준선택권의 가격은 블랙－숄즈방정식 (1), (2)의 풀이로서

$$M^{\alpha}(x,\ t)=e^{\mu\cdot(T-t)}x^{\alpha} \tag{4}$$

이며 여기서

$$\mu(r,\ q,\ \sigma,\ \alpha)=(\alpha-1)r-\alpha q+\frac{\sigma^2}{2}(\alpha^2-\alpha)$$

이다.

증명 식 (2)로부터

$$V(x,\ t)=\frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_0^{\infty}\frac{1}{z}e^{-\frac{1}{2\sigma^2(T-t)}\left(\ln\frac{x}{z}+\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right)^2}z^{\alpha}dz$$

이다. 변수변환을 다음과 같이 실시하자.

$$y = \left(\ln\frac{x}{z} + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2} + \alpha\sigma^2 \right)(T-t) \right)(\sigma\sqrt{(T-t)})^{-1}$$

이때 피적분식에서 지수함수의 제곱지수를 다음과 같이 고찰하자.

$$-\frac{1}{2\sigma^2(T-t)}\left(\ln\frac{x}{z} + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right)(T-t) \right)^2 =$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2(T-t)}\left(y\sigma\sqrt{(T-t)} - \alpha\sigma^2(T-t) \right)^2 =$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2(T-t)}\left(y^2\sigma^2(T-t) - 2\alpha\sigma^2(T-t)y\sigma\sqrt{(T-t)} + \alpha^2\sigma^4(T-t)^2 \right) =$$

$$= -\frac{y^2}{2} + \alpha\sigma\sqrt{(T-t)}y - \frac{\sigma^2}{2}\alpha^2(T-t) =$$

$$= -\frac{y^2}{2} + \alpha\left(\ln\frac{x}{z} + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2} + \alpha\sigma^2 \right)(T-t) \right) - \frac{\sigma^2}{2}\alpha^2(T-t) =$$

$$= -\frac{y^2}{2} + \alpha\ln\frac{x}{z} + \alpha(r-q)(T-t) + \frac{(\alpha^2-\alpha)\sigma^2}{2}(T-t)$$

이제

$$\exp\left(a\ln\frac{x}{z} \right) = \frac{x^\alpha}{z^\alpha}$$

$$dy = -\frac{dz}{z}\left(\sigma\sqrt{(T-t)} \right)^{-1}$$

$$\mu = (\alpha-1)r - \alpha q + \frac{\sigma^2}{2}(\alpha^2 - \alpha)$$

그리고 $z = 0 \Rightarrow y = +\infty$, $z = +\infty \Rightarrow y = -\infty$ 라는것을 고려하면

$$V(x,\ t) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_0^\infty \frac{1}{z} e^{-\frac{1}{2\sigma^2(T-t)}\left(\ln\frac{x}{z} + \left(r-q-\frac{\sigma^2}{2} \right)(T-t) \right)^2} z^\alpha dz =$$

$$= e^{\mu(T-t)}x^\alpha \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy =$$

$$= e^{\mu(T-t)}x^\alpha$$

이다.(증명끝)

2. 제곱두값선택권

정의 2 α －제곱표준선택권에 기초한 두값계약을 α －제곱두값선택권이라고 부른다.
정의로부터 α －제곱두값선택권의 가격은 끝값조건

$$V(x,\ T) = x^\alpha \cdot 1\ (sx > s\xi) \tag{5}$$

를 만족시키는 식 (1)의 풀이이다.[3, 5] 여기서 $s(= +$ 또는 $-)$를 상 및 하 두값선택권의 부호지시자라고 부르며 α －제곱두값선택권의 가격을 $(M^{\alpha})_{\xi}^{s}(x,\ t)$로 표시한다.

$$(M^{\alpha})_{\xi}^{+}(x,\ T)+(M^{\alpha})_{\xi}^{-}(x,\ T)=M^{\alpha}(x,\ T)$$

이므로 α －제곱표준선택권가격과 대응하는 상 α －제곱두값선택권 및 하 α －제곱두값선택권의 가격사이에는 다음의 대칭관계가 성립한다.

$$(M^{\alpha})_{\xi}^{+}(x,\ t)+(M^{\alpha})_{\xi}^{-}(x,\ t)=M^{\alpha}(x,\ t),\ \ t<T$$

정리 2 α －제곱두값선택권의 가격은 다음과 같이 주어진다.

$$(M^{\alpha})_{\xi}^{s}(x,\ t)=e^{\mu(T-t)}x^{\alpha}N(sd) \tag{6}$$

여기서

$$d=d(x/\xi,\ r,\ q,\ \sigma,\ \alpha,\ T-t)=\left(\ln\frac{x}{\xi}+\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}+\alpha\sigma^2\right)(T-t)\right)\left(\sigma\sqrt{T-t}\right)^{-1}$$

$$N(d)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d}e^{-y^2/2}dy$$

증명 정리의 가정으로부터

$$(M^{\alpha})_{\xi}^{s}(x,\ t)=\frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_0^{\infty}\frac{1}{z}e^{-\frac{1}{2\sigma^2(T-t)}\left(\ln\frac{x}{z}+\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right)^2}z^{\alpha}1(sz>s\xi)dz$$

이다. 정리 1에서와 같이 변수변환을 다음과 같이 실시하자.

$$y=\left(\ln\frac{x}{z}+\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}+\alpha\sigma^2\right)(T-t)\right)\left(\sigma\sqrt{(T-t)}\right)^{-1}$$

이로부터 다음의 식이 성립한다.

$$\ln z=\left(\ln x+\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}+\alpha\sigma^2\right)(T-t)\right)-y\left(\sigma\sqrt{(T-t)}\right)$$

$$1(sz>s\xi)=1(s\ln z>s\ln\xi)=$$

$$=1\left(s\left(\ln x+\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}+\alpha\sigma^2\right)(T-t)-y\left(\sigma\sqrt{(T-t)}\right)\right)>s\ln\xi\right)=1\ (sy<sd)$$

$$dy=-\frac{dz}{z}$$

적분식을 정돈하면

$$(M^{\alpha})_{\xi}^{+}(x,\ t)=e^{\mu(T-t)}x^{\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}1(sy<sd)dy=I$$

이다. $y'=sy$, $dy'=sdy$ 라고 하자. 이때

$$I=e^{\mu(T-t)}x^{\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}s\int_{-s\infty}^{s\infty}e^{-\frac{y'^2}{2}}1(y'<sd)dy'=e^{\mu(T-t)}x^{\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{sd}e^{-\frac{y'^2}{2}}dy'=$$

$$=e^{\mu(T-t)}x^{\alpha}N(sd)$$

이다.(증명끝)

주의 1 마감리득함수의 두값조건이 보다 일반적인 형태를 가지는 경우를 보자. 즉

$$V(x,\ t)=x^{\alpha}\cdot 1(sx^{\beta}>s\xi) \tag{7}$$

이라고 하자. 이때

$$1(sx^{\beta}>s\xi)=1(s\cdot \mathrm{sgn}(\beta)x>s\cdot \mathrm{sgn}(\beta)\xi^{1/\beta})=1(tx>t\xi')$$

로 되므로 식 (1), (7)의 풀이는 $t=s\cdot \mathrm{sgn}(\beta)$, $\zeta=\xi^{1/\beta}$ 로 놓고 고찰하면 $(M^{\alpha})_{\zeta}^{t}(x,\ t)$ 로 된다.

주의 2 α －제곱두값선택권은 $\alpha=0$ 이면 현금두값선택권이고 $\alpha=1$ 이면 자산두값선택권으로 된다. 정리 2는 선행연구[2, 3, 5]의 1계두값선택권에 대한 결과들을 특수경우로 포함한다. 또한 아래에서 보는바와 같이 α －제곱두값선택권을 리용하면 현금두값선택권이나 자산두값선택권으로 표시되지 않는 금융계약의 가격을 표시할수 있다. 즉 제곱두값선택권은 현금두값선택권과 자산두값선택권을 포함하는 더 넓은 금융계약의 부류이다.

3. 리자률선택저금계약

리자률선택조항이 있는 저금계약에서 저금계약의 소유자는 만기일에 국내의 리자률과 외국의 리자률중에서 하나를 선택할수 있는 권리를 가진다. 그러므로 이 계약은 일종의 리자률교환선택권이다.[1]

r_d 는 국내중앙은행리자률, r_f 는 외국중앙은행리자률, $X(t)$ 는 국내화페/외화의 환률, $1/X(t)$ 는 외화/국내화페의 환률이라고 하고 다음과 같은 가정을 받아들이자.

① 저금액은 국내화페로 1(화페단위)이고 r_d, r_f 는 다 상수이며 통화팽창률은 1이라고 가정한다.

② 만기일지불은 다음과 같다.

$$V_f=V_d\cdot X^{-1}(T)=\max\{e^{r_d\cdot T}X^{-1}(T),\ X^{-1}(0)e^{r_f\cdot T}\}\ (\text{외화})$$

③ 환률 $X(t)$ 는 가르만－콜하겐모형[4]을 만족시킨다.

$$\frac{dX(t)}{X(t)}=\lambda\cdot dt+\sigma\cdot dW(t)$$

④ 선택권의 국내화페가격은 결정론적인 함수 $V_d=V_d(X,\ t)$ 로 주어진다. 또한 외화가격은 결정론적인 함수 $V_f=V_f(X,\ t)$ 로 주어진다.

정리 3 우의 가정 ①－④밑에서 리자률선택저금계약의 가격함수 $V_f=V_f(X,\ t)$ 는 다음의 편미분방정식의 초기값문제의 풀이이다.

$$\frac{\partial V_f}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2X^2\frac{\partial^2V_f}{\partial X^2}+(\sigma^2+r_d-r_f)X\frac{\partial V_f}{\partial X}-r_fV_f=0 \tag{8}$$

$$V_f(X,\ T)=\max\{e^{r_d\cdot T}X^{-1}(T),\ X^{-1}(0)e^{r_f\cdot T}\} \tag{9}$$

식 (8)은 리자률이 r_f, 배당률이 $2r_f-r_d-\sigma^2$, 파동률이 σ 인 블랙－숄즈방정식이다. 문제 (8), (9)의 풀이를 제곱두값선택권을 리용하여 표시하여보자.

$x_0=X(0)$ 은 기지량이라는것을 고려하면서 만기지불함수 (9)를 고찰해보면

$$V_f(X,\ T)=\max\{e^{r_d\cdot T}X^{-1},\ \ x_0^{-1}e^{r_f\cdot T}\}=e^{r_dT}X^{-1}\cdot 1(e^{r_d\cdot T}X^{-1}>x_0^{-1}e^{r_f\cdot T})+$$
$$+x_0^{-1}e^{r_f\cdot T}\cdot 1(e^{r_d\cdot T}X^{-1}<x_0^{-1}e^{r_f\cdot T})=e^{r_d\cdot T}X^{-1}\cdot 1(X<K)+x_0^{-1}e^{r_f\cdot T}\cdot 1(X>K)$$

이다. 여기서 $K=x_0e^{(r_d-r_f)T}$ 이다. 따라서 정리 2로부터 선택권의 외화가격은 다음과 같이 계산된다.

$$V_f(x,\ t)=e^{r_d\cdot T}(M^{-1})_K^-(x,\ t)+x_0^{-1}e^{r_f\cdot T}(M^0)_K^+(x,\ t)=$$
$$=e^{r_d\cdot T}e^{-r_d\cdot(T-t)}X^{-1}N(-d_1)+x_0^{-1}e^{r_f\cdot T}e^{-r_f\cdot(T-t)}N(d_2)$$

와 같다. 여기서

$$d_1=\frac{\ln\dfrac{x_0^{-1}e^{r_ft}}{e^{r_dt}X^{-1}}-\dfrac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\ \ d_2=\frac{\ln\dfrac{x_0^{-1}e^{r_ft}}{e^{r_dt}X^{-1}}+\dfrac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \qquad (10)$$

이다.

주의 3 이 공식의 금융적의미는 명백하다. $e^{r_dt}X^{-1}$ 은 1국내화페단위를 국내리자률로 저금할 때의 현재 가격의 외화가격이고 $x_0^{-1}e^{r_ft}$ 는 1국내화페단위를 외국리자률로 저금할 때의 현재 가격(외화단위)이며 $N(-d_1)$ 과 $N(d_2)$ 는 이 두 량의 비률이다. 이 비률은 이 두 량중에서 어느것이 큰가에 의존하며 특히 만기일에는 반드시 하나는 0이고 다른 하나는 1이다.

참 고 문 헌

[1] S. Benninga et al.; The Journal of Derivatives, Winter, 10, 2, 1, 2002.

[2] P. Buchen; Quantitative Finance, 4, 101, 2004.

[3] P. Buchen; An Introduction to Exotic Option Pricing, CRC Press, 107～124, 2012.

[4] H. C. O et al.; arXiv:1310.8296v3 [q-fin.PR], 1～23, 2013.

[5] H. C. O et al.; Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1, 2, 247, 2013.

주체107(2018)년 3월 10일 원고접수

Pricing Formula of Power Binary Options

Choe Tae Song, O Hyong Chol

In this paper, we introduce the concept of power binary options and provide their pricing formula using partial differential equation methods. As an application we give a pricing formula of savings plans that provide a choice of indexing. Our results include the results related to asset and bond binary options.

Key words: power binary option, pricing formula