김일성종합대학학보 주체107(2018)년
수 학 제64권 제2호

비동차블랙－숄즈방정식의 풀이의 몇가지 성질

오형철, 김지석

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《과학기술의 종합적발전추세와 사회경제발전의 요구에 맞게 새로운 경계과학을 개척하고 발전시키는데 큰 힘을 넣어야 합니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 40페지)

선택권가격에 대한 블랙－숄즈공식[3]이 나온 이후 블랙－숄즈방정식은 금융수학에서 특히는 선택권과 많은 다른 증권들의 가격계산에서 가장 중요한 도구의 하나로 되였다. 표준적인 구매 및 판매선택권가격이 블랙－숄즈방정식의 특수한 초기값문제의 풀이라는것과 그 풀이표시[3]가 주어졌고 그 가격함수는 단조성과 불룩성을 가진다는 사실[6]이 밝혀졌다.

선행연구[4]에서는 임의의 초기값함수를 가지는 블랙－숄즈방정식의 풀이가 마감수익함수의 단조성이나 불룩성과 같은 질적성질들을 계승한다는것을 증명하였다.

선행연구[2]에서는 선행연구[4]의 결과들을 파동률이 시간뿐아니라 기초자산가격의 미끈한 함수인 경우로 일반화하였다. 선행연구[7]에서는 파동률의 공간변수에 관한 미분가능성을 국부휠데르련속성으로 바꾸어 선행연구[2]의 결과를 일반화하였다. 임의의 마감수익을 가지는 블랙－숄즈방정식의 풀이의 더 일반적인 공식[10]도 밝혀졌다. 선행연구[2, 4, 6, 7]들에서 모두 동차블랙－숄즈미(적)분방정식을 취급한 반면에 선행연구[8]에서는 곁수들에 대한 정칙성가정하에서 일반적인 (비동차)포물형방정식의 풀이의 불룩성보존을 연구하였다. 한편 선행연구[9]에서는 선행연구[2]에서의 그라디엔트평가보다 더 엄격한 블랙－숄즈방정식의 풀이의 한가지 그라디엔트평가를 주었다.

한편 계약위반가능 회사채권의 가격문제들에서는 비동차항을 가지는 블랙－숄즈방정식이 자주 제기되고있다.[1, 10, 11]

론문에서는 계약위반가능 회사채권의 가격문제들에서 제기되는 비동차블랙－숄즈방정식의 초기값문제의 풀이표시를 주고 최소－최대평가, 그라디엔트평가, 풀이의 공간변수에 관한 단조성, 불룩성과 같은 일반성질을 연구하였다.

1. 비동차블랙－숄즈방정식에 대한 최소－최대평가

이 소절에서는 비동차블랙－숄즈편미분방정식의 초기값문제의 풀이표시를 고찰하고 그것의 최소값과 최대값을 평가한다.

무위험리자률 $r(t)$, 기초자산의 배당률 $q(t)$, 기초자산가격과정의 파동률 $\sigma(t)$, 마감수익 $f(x)$ 그리고 비동차항 $g(x)$를 가지는 비동차블랙－숄즈편미분방정식의 초기값문제는 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial^2(t)}{2}x^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+(r(t)-q(t))x\frac{\partial V}{\partial x}-r(t)V+g(x)=0\ (0\le t<T,\ 0<x<+\infty) \quad (1)$$

$$V(x,T)=f(x) \quad (2)$$

이 론문전반에서 $r(t)$, $q(t)$, $\sigma(t)$, $f(x)$와 $g(x)$들은 자기의 정의역에서 모두 토막련속이라고 가정한다. 다음과 같은 표기를 리용한다.

$$\bar{r}(t,\ T)=\int_t^T r(s)ds,\ \bar{q}(t,\ T)=\int_t^T q(s)ds,\ \overline{\sigma^2}(t,\ T)=\int_t^T \sigma^2(s)ds(0\le t<T) \quad (3)$$

$$d^{\pm}\left(\frac{x}{K},\ t,\ T\right)=\left(\sqrt{\overline{\sigma^2}(t,\ T)}\right)^{-1}\left[\ln\left(\frac{x}{K}\right)+\bar{r}(t,\ T)-\bar{q}(t,\ T)\pm\frac{\overline{\sigma^2}(t,\ T)}{2}\right] \quad (4)$$

정리 1 (비동차블랙－숄즈방정식의 풀이표시) 부아닌 상수 A, B, α, β가 있어서

$$|f(x)|\le Ax^{\alpha\ln x},\ |g(x)|\le Bx^{\beta\ln x}(a.e.\ x>0) \quad (5)$$

가 성립한다고 가정하자. 그러면 식 (1), (2)의 풀이는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} V(x,t;T)&=e^{-\bar{r}(t,\ T)}\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{\sigma^2}(t,T)}}\frac{1}{z}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[d^-\left(\frac{x}{z},\ t,\ T\right)\right]^2\right\}f(z)dz+\\ &+\int_t^T e^{-\bar{r}(t,\ \tau)}\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{\sigma^2}(t,\tau)}}\frac{1}{z}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[d^-\left(\frac{x}{z},\ t,\ \tau\right)\right]^2\right\}g(z)dzd\tau\ (0\le t<T) \end{aligned} \quad (6)$$

증명 식 (1), (2)의 풀이는 식 (1)의 대응동차방정식의 초기값 $f(x)$를 가지는 풀이와 비동차방정식의 초기값 0을 가지는 풀이의 합으로 주어진다. 선행연구[10]의 보조정리 1에 의하여 대응동차방정식의 초기값 $f(x)$를 가지는 풀이는 $f(x)$에 대한 조건 (5)밑에서 식 (6)의 첫항으로 주어진다.

이제 비동차방정식 (1)의 초기값 0을 가지는 풀이는 듀아멜원리를 리용하여 풀수 있다. $\tau\in(0,\ T)$를 고정하고 $W(x,\ t;\tau)$가 다음의 초기값문제의 풀이라고 하자.

$$\begin{cases} W_t+\dfrac{\sigma^2(t)}{2}x^2W_{xx}+(r(t)-q(t))xW_x-r(t)W=0\ \ (0\le t<\tau,\ x>0\ ) \\ W(x,\ \tau)=g(x)(x>0) \end{cases}$$

이것은 초기값 $g(x)$를 가지는 동차블랙－숄즈방정식이고 다시 선행연구[10]의 보조정리에 의하여 그 풀이는 $g(x)$에 관한 조건 (5)밑에서 다음과 같이 주어진다.

$$W(x,\ t;\tau)=e^{-\bar{r}(t,\ \tau)}\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{\sigma^2}(t,\tau)}}\frac{1}{z}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[d^-\left(\frac{x}{z},\ t,\ \tau\right)\right]^2\right\}g(z)dz$$

듀아멜원리에 따라 $\int_t^T W(x,t;\tau)d\tau\ (0\le t<T,\ x>0)$는 초기값 0을 가지는 비동차방정식의 풀이이다. 이리하여 식 (6)을 얻는다.(증명끝)

주의 1 정리 1은 선행연구[10]의 보조정리 1을 비동차방정식에로 일반화한다.

따름 1 (비동차블랙－숄즈방정식에 대한 최소－최대평가)

$f(x)$ 와 $g(x)$ 가 유계라고 하자. 그리고

$$m(f)=\inf_x f(x),\ M(f)=\sup_x f(x),\ m(g)=\inf_x g(x),\ M(g)=\sup_x g(x)$$

라고 하자. $V(x,t)$ 가 식 (1), (2)의 풀이라고 하자.

그러면 다음의 최소－최대평가가 성립한다.

1) $$m(f)e^{-\bar{r}(t,\ T)}+m(g)\int_t^T e^{-\bar{r}(t,\ \tau)}d\tau \le V(x,\ t)\le M(f)e^{-\bar{r}(t,\ T)}+$$

$$+M(g)\int_t^T e^{-\bar{r}(t,\ \tau)}d\tau\ \ (0\le t<T) \tag{7}$$

2) $E_f=\{z: f(z)>m(f)\}$, $F_f=\{z: f(z)<M(f)\}$ 라고 하자. $|E_f|>0$ 또는 $|E_g|>0$ 이면 마감시각이전의 임의의 시각에 다음의 엄격한 아래평가식이 성립한다. 여기서 $|\cdot|$ 은 르베그측도이다.

$$m(f)e^{-\bar{r}(t,\ T)}+m(g)\int_t^T e^{-\bar{r}(t,\ \tau)}d\tau < V(x,\ t)\ (0\le t<T) \tag{8}$$

류사하게 $|F_f|>0$ 또는 $|F_g|>0$ 이면 다음의 평가식이 성립한다.

$$V(x,\ t)<M(f)e^{-\bar{r}(t,\ T)}+M(g)\int_t^T e^{-\bar{r}(t,\ \tau)}d\tau\ (0\le t<T) \tag{9}$$

따름 2 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 $f(0+)$, $g(0+)$ 와 $f(+\infty)$, $g(+\infty)$ 가 존재하는 함수들이라고 하자. $V(x,t)$ 가 식 (1), (2)의 풀이라고 하자. 그러면 $V(0+,\ t)$ 와 $V(+\infty,\ t)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$V(0+,\ t)=f(0+)e^{-\bar{r}(t,\ T)}+g(0+)\int_t^T e^{-\bar{r}(t,\ \tau)}d\tau$$

$$V(+\infty,\ t)=f(+\infty)e^{-\bar{r}(t,\ T)}+g(+\infty)\int_t^T e^{-\bar{r}(t,\ \tau)}d\tau$$

2. 비동차항을 가지는 경우에 단조성과 불룩성 보존

이 소제목에서는 련속마감수익과 비동차항을 가지는 비동차블랙－숄즈방정식의 초기값문제의 풀이의 공간변수에 관한 도함수와 풀이의 단조성, 불룩성을 고찰한다.

정리 2 (비동차블랙－숄즈방정식의 풀이의 x－그라디엔트) $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 련속이고 토막미분가능한 함수들이고 $\exists A,\ \alpha>0$,

$$|f(x)|,\ |f'(x)|,\ |g(x)|,\ |g'(x)|\le Ax^{\alpha\ln x}(a.e.\ x>0)$$

를 만족시킨다고 하자. $V(x,t)$ 가 식 (1), (2)의 풀이라고 하자. 그러면 다음의 결론들을 얻는다.

1) $$\frac{\partial V}{\partial x}(x,\ t)=\frac{e^{-\bar{q}(t,\ T)}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(y+\sqrt{\overline{\sigma^2}(t,\ T)}\right)^2} f'(xc(y,\ t,\ T))dy+$$

$$+\int_t^T \frac{e^{-\bar{q}(t,\ \tau)}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(y+\sqrt{\overline{\sigma^2}(t,\ \tau)}\right)^2} g'(xc(y,\ t,\ \tau))dyd\tau\ \ (0\le t<T) \tag{10}$$

여기서 $c(y,\ t,\ T)$는 $c(y,\ t,\ T)=\exp\left\{-y\sqrt{\overline{\sigma^2}(t,\ T)}+\bar{r}(t,\ T)-\bar{q}(t,\ T)-\frac{1}{2}\overline{\sigma^2}(t,\ T)\right\}$이다.

2) $f(x)$와 $g(x)$가 증가(감소)이면 $V(x, t)$도 역시 $x-$증가(감소)이다.

3) $f'(0+),\ g'(0+)$와 $f'(+\infty),\ g'(+\infty)$가 존재하면 $\partial_x V(0+,\ t),\ \partial_x V(+\infty,\ t)$는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x}(0+,\ t)&=f'(0+)e^{-\bar{q}(t,\ T)}+g'(0+)\int_t^T e^{-\bar{q}(t,\ \tau)}d\tau\\ \frac{\partial V}{\partial x}(+\infty,\ t)&=f'(+\infty)e^{-\bar{q}(t,\ T)}+g'(+\infty)\int_t^T e^{-\bar{q}(t,\ \tau)}d\tau\end{aligned} \tag{11}$$

4) $f'(x)$와 $g'(x)$가 유계이면

$$m(f')e^{-\bar{q}(t,\ T)}+m(g')\int_t^T e^{-\bar{q}(t,\ \tau)}d\tau\le\frac{\partial V}{\partial x}\le M(f')e^{-\bar{q}(t,\ T)}+M(g')\int_t^T e^{-\bar{q}(t,\ \tau)}d\tau \tag{12}$$

이며 나아가서 $|E_{f'}|>0$ 또는 $|E_{g'}|>0$이면 $x-$그라디엔트에 관한 더 엄격한 평가를 얻는다.

$$m(f')e^{-\bar{q}(t,\ T)}+m(g')\int_t^T e^{-\bar{q}(t,\ \tau)}d\tau<\frac{\partial V}{\partial x}(x,\ t)\ \ (0\le t<T) \tag{13}$$

류사하게 $|F_{f'}|>0$ 또는 $|F_{g'}|>0$이면

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x,\ t)<M(f')e^{-\bar{q}(t,\ T)}+M(g')\int_t^T e^{-\bar{q}(t,\ \tau)}d\tau\ \ (0\le t<T) \tag{14}$$

가 성립한다. 여기서 $m(f'),\ M(f'),\ E_{f'},\ F_{f'}$ 들은 정리 1의 따름 1에서와 같다.

주의 2 정리 2의 4)는 상결수를 가지는 동차블랙－숄즈방정식을 연구한 선행연구[9]의 보조정리 1의 일반화이다. 선행연구[2]에서는 결수가 주기와 시간에 의존하는 동차블랙－숄즈방정식에 대한 그라디엔트평가를 얻었는데 정리 2의 평가는 그것보다 더 엄격하다.

정리 3 (비동차블랙－숄즈방정식의 풀이의 불룩성) $f(x)$와 $g(x)$가 정리 1에서와 같고 $V(x, t)$가 식 (1), (2)의 풀이라고 하자. $f(x)$와 $g(x)$가 둘 다 우로(아래로) 불룩이면 $V(x, t)$도 x에 관하여 우로(아래로) 불룩이다.

주의 3 정리 3은 잘 알려진 표준블랙－숄즈방정식의 불룩성보존결과를 비동차인 경우에로 일반화한다. 선행연구[8]에서는 일반적인 비동차포물형방정식의 풀이의 불룩성보존을 연구하였지만 그 결과는 결수의 정칙성가정때문에 정리 3의 결과를 포함하지 못한다.

참 고 문 헌

[1] R. Agliardi; Mathematical Methods in the Applied Sciences, 35, 1256, 2012.
[2] Y. Z. Bergman et al.; The Journal of Finance, 51, 1573, 1996.
[3] F. Black et al.; Journal of Political Economics, 81, 637, 1973.
[4] J. C. Cox et al.; The Journal of Finance, 31, 383, 1976.
[5] S. E. Shreve et al.; Mathematical Finance, 8, 93, 1998.
[6] L. S. Jiang ; Mathematical Models and Methods of Option Pricing, World Scientific, 101~110, 2005.
[7] S. Janson et al.; The Annals of Applied Probability, 13, 3, 890, 2003.
[8] S. Janson et al.; Journal of Differential Equations, 206, 182, 2004.
[9] H. C. O. et al.; Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1, 2, 247, 2013.
[10] H. C. O. et al.; Malaya Journal of Matematik, 2, 4, 330, 2014.
[11] H. C. O. et al.; Journal of Mathematical Analysis and Applications, 416, 314, 2016.

주체106(2017)년 12월 5일 원고접수

Some Properties of Solutions to Inhomogeneous Black-Scholes Equations

O Hyong Chol, Kim Ji Sok

We provide representations of solutions to initial value problems of inhomogeneous Black-Scholes equations and study some properties such as the min-max estimates, gradient estimates, the monotonicity and convexity of the solutions with respect to the stock price variable.

Key words: Black-Scholes equation, representation of solution, min-max estimate, monotonicity, convexity