김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제1호

SFT공간우에서 정의된 선형세포자동체의 위상적엔트로피

김 진 현

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《이미 일정한 토대가 있고 전망이 확고한 연구대상들에 힘을 넣어 세계패권을 쥐며 그 성과를 확대하는 방법으로 과학기술을 빨리 발전시켜야 합니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 39페지)

세포자동체는 수학, 물리학, 화학, 정보과학 등 많은 분야들에서 응용되고있는것으로 하여 세계적으로 광범히 연구되고있다.[1－7]

선행연구[2]에서는 $\mathbf{Z}_m$ 우의 n 차원선형세포자동체의 에르고드성, 위상이행성 등을 연구하였다. 선행연구[3]에서는 완전량측기호렬공간우에서 정의된 선형세포자동체의 마르꼬브측도에 관한 엔트로피를 구하고 마감에서 유한형의 부분량측기호렬공간우에서 정의된 선형세포자동체의 위상적엔트로피를 구할수 있겠는가 하는 문제점을 제기하였다.

선행연구[1]에서는 선형세포자동체의 확장으로서 약치환적인 세포자동체를 정의하고 이 넘기기에 대한 측도론적엔트로피와 위상적엔트로피에 대하여 연구하였으며 이로부터 선형세포자동체의 위상적엔트로피에 대한 계산공식을 유도하였다.

론문에서는 선형세포자동체에 대하여 정의되는 유한형의 부분량측기호렬공간을 구성하였으며 그우에서의 위상적엔트로피를 계산하였는데 이것은 선행연구[3]에서 제기하였던 첫번째 문제의 부분적인 해결로 된다.

1. 기 초 지 식

정의 1[3] M 을 0과 1로 이루어진 m 차기약행렬이고 $\Omega=\mathbf{Z}_m^{\mathbf{Z}}$ 라고 하자

$$X_M := \{x\in\Omega \mid \forall n\in\mathbf{Z},\ M_{x_n x_{n+1}}=1\}$$

을 M 에 의하여 결정되는 유한형의 부분량측기호렬공간이라고 약속한다.

이 기호렬공간우에서 정의된 밀기넘기기를 유한형의 부분밀기(subshift of finite type, 간단히 SFT)라고 부른다. 유한형의 부분량측기호렬공간을 SFT공간이라고 부르기도 한다.

정의 2[3] 블로크함수 $f:\mathbf{Z}_m^{2r+1}\to\mathbf{Z}_m$ 가 주어졌을 때 임의의 $x\in\Omega=\mathbf{Z}_m^{\mathbf{Z}}$ 와 $i\in\mathbf{Z}$ 에 관하여 $F(x)_i=f(x_{i-r},\ \cdots,\ x_{i+r})$ 로 정의한다.

이때 F 를 Ω 우의 세포자동체라고 부르고 f 를 F 의 국부함수라고 부른다. 특히 F 의 국부함수가

$$f=\sum_{i=-r}^{r}a_i x_i,\ a_i\in\mathbf{Z}$$

로 표시될 때 F 를 선형세포자동체라고 부른다.

주의 론문에서는 우의 행렬 M 을 X_M 의 기반행렬이라고 부르겠다.

2. 기 본 결 과

$f:\mathbf{Z}_m^{2r+1}\to\mathbf{Z}_m$ 이

$$f(x_{-r},\ \cdots,\ x_0,\ \cdots,\ x_r)=\sum_{i=-r}^{r}a_i x_i(\bmod p)$$

로 주어진 경우 f 를 국부함수로 가지는 선형세포자동체

$$\begin{aligned}&F:X_M\to X_M\\&F(x)_i=f(x_{i-r},\ \cdots,\ x_{i+r})\end{aligned}\tag{1}$$

의 위상적엔트로피를 고찰한다. 여기서 X_M 은 기반행렬이 M 인 유한형의 량측부분밀기공간이다.

1) 선형세포자동체가 정의되는 유한형의 량측부분밀기공간의 구성

일반적으로 선형세포자동체 F 를 유한형의 부분량측기호렬공간으로 제한하면 넘기기가 정의되지 않을수도 있다.

실례 1 $m=3$ 인 경우에

$$M=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

이고 완전기호렬공간에서의 넘기기 $f:\mathbf{Z}_3^3\to\mathbf{Z}_3$, $f(x_{-1},\ x_0,\ x_1)=(x_{-1}+x_0+x_1)\bmod 3$ 이 주어졌다고 하자. 그러면 f 를 국부함수로 가지는 세포자동체 $F:\mathbf{Z}_m^{\mathbf{Z}}\to\mathbf{Z}_m^{\mathbf{Z}}$ 는 분명히 선형이다. 그러나 $x=(\cdots111\cdots)\in X_M$ 에 대하여 $F(x)=(\cdots000\cdots)\notin X_M$ 이므로 F 는 X_M 우에서 정의되지 않는다.

아래에서 임의의 선형세포자동체가 정의될수 있는 기반행렬을 구성하였다.

정리 1 기반행렬 M 이 다음의 조건을 만족시킨다고 하자.

$$M_{ij}=\begin{cases}1, & p\mid i\text{이고 } p\mid j\text{일 때}\\0, & \text{기타}\end{cases}\tag{2}$$

그러면 X_M 은 p 의 배수인 기호들로만 이루어지는 기호렬들의 모임으로서 유한형의 부분밀기공간이 된다. 이때 임의의 선형세포자동체에 대하여 X_M 은 Ω 의 닫긴불변부분모임으로 된다. 여기서 p 는 m 의 약수이다.

증명 국부함수가

$$f(x_{-r},\ \cdots,\ x_0,\ \cdots,\ x_r)=\sum_{i=-r}^{r}a_i x_i(\bmod p)$$

인 선형세포자동체 $F:X_M\to X_M$, $F(x)_i=f(x_{i-r},\ \cdots,\ x_{i+r})$ 가 주어졌다고 하자.

M 의 구성으로부터 $x\in X_M\Leftrightarrow\forall n\in\mathbf{Z},\ p\mid x_n$ 이다.

한편 $x\in X_M$ 일 때 $F(x)$ 의 n 번째 기호는 $F(x)_n=\sum_{i=-r}^{r}a_i x_{n-i}$ 이다.

$\forall n\in\mathbf{Z}$, $p\,|\,x_n$ 이므로 $p\,|\,(\sum_{i=-r}^{r} a_i x_{n-i}) = F(x)_n$ 즉 $F(x)\in X_M$ 이다. 따라서 X_M 은 선형세포자동체 F 에 관하여 불변이다.

X_M 이 닫긴모임이라는것을 증명하자.

X_M 의 점렬 $\{\alpha^n\}$ 이 어떤 기호렬 α 에로 수렴한다고 하자.

이때 M 의 구성으로부터 X_M 은 p 의 배수인 기호들로만 구성되는 기호렬들의 모임으로 된다. 그러므로 X_M 의 점렬 $\{\alpha^n\}$ 도 p 의 배수들로만 구성되는 기호렬로 되여있으며 그 극한기호렬 α 도 분명히 p 의 배수들로 구성된다. 따라서 α 는 X_M 의 점렬로 되며 X_M 은 닫긴모임이다.

그러므로 X_M 은 선형세포자동체 F 에 관한 닫긴불변부분모임이다.(증명끝)

실례 2 $m=4$ 일 때 기반행렬 M 이

$$M=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

과 같이 주어졌을 때 유한형의 량측부분밀기공간 X_M 은 기호 0과 2로 이루어진 완전량측밀기공간으로 된다.

이때 $f:\mathbf{Z}_4^{2r+1}\to\mathbf{Z}_4$, $f(x_{-r},\,\cdots,\,x_0,\,\cdots,\,x_r)=\sum_{i=-r}^{r} a_i x_i (\mathrm{mod}\,4)$ 를 국부함수로 가지는 X_M 우의 선형세포자동체 $F:X_M\to X_M$, $F(x)_i = f(x_{i-r},\cdots,x_{i+r})$ 가 정의된다. 그것은 $F(x)_i=\sum_{i=-r}^{r} a_i x_i (\mathrm{mod}\,4)$ 이고 매개 x_i 가 2의 배수이므로 우의 식에서 $F(x)_i$ 도 2의 배수로 되며 따라서 기호렬 $F(x)$ 에서의 매개 기호 $F(x)_i,\ i\in\mathbf{Z}$ 가 모두 2의 배수이므로 $F(x)\in M$ 이기때문이다.

그러므로 우에서 구성한 기반행렬 M 에 의하여 구성되는 유한형의 량측부분밀기공간우에서 임의의 선형세포자동체가 정의되게 된다.

2) 유한형의 량측부분밀기공간에서 정의된 선형세포자동체의 위상적엔트로피평가

명제[1] $m=p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot\cdots\cdot p_n^{k_n}$ 을 m 의 표준씨인수분해라고 하고 F 를 $\Omega=\mathbf{Z}_m^{\mathbf{Z}}$ 우의 선형세포자동체로서 그것의 국부함수는 $f=\sum_{i=-r}^{r} a_i x_i (\mathrm{mod}\,m)$ 라고 하자. 그러면

$$h_{top}(F)=\sum_{i=1}^{n} h_{top}(F_i)=\sum_{i=1}^{n} k_i(\overline{r_i}-\overline{l_i})\log p_i$$

가 성립한다. 여기서 $C_i=\{j:(a_j,p_i)=1\}\cup\{0\}$, $\overline{r_i}=\max C_i$, $\overline{l_i}=\min C_i$ 이고 F_i 는 $f_i=f \bmod p_i^{k_i}$ 를 국부함수로 가지는 $\mathbf{Z}_{p_i^{k_i}}^{\mathbf{Z}}$ 우에서 정의된 선형세포자동체이다.

정리 2 M 이 조건 (2)를 만족시키는 기반행렬이고 F 는 식 (1)과 같이 정의되는 SFT공간 X_M 우의 선형세포자동체라고 하면

$$h_{top}(F|_{X_M})=\sum_{i=1}^{n}(k_i-t_i)(\overline{r_i}-\overline{l_i})\log p_i$$

이다. 여기서 $m=p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot\cdots\cdot p_n^{k_n}$, $p=p_1^{t_1}\cdot p_2^{t_2}\cdot\cdots\cdot p_n^{t_n}$ 은 각각 m 과 p 의 표준씨인수분해이며 $C_i=\{j:(a_j,p_i)=1\}\cup\{0\}$, $\overline{r_i}=\max C_i$, $\overline{l_i}=\min C_i$ 이다.

증명 정리 1로부터 X_M 은 F 의 닫긴불변부분모임으로 되며 이로부터 $F|_{X_M}$ 은 정의된다. 기호렬 $x=(\cdots x_{-n}\cdots x_{-1}x_0x_1\cdots x_n\cdots)\in X_M\subset \mathbf{Z}_m^{\mathbf{Z}}$ 에 대하여 기호렬 x/p 를

$$\frac{x}{p}=\left(\cdots\frac{x_{-n}}{p}\cdots\frac{x_{-1}}{p}\frac{x_0}{p}\frac{x_1}{p}\cdots\frac{x_n}{p}\cdots\right)\in \mathbf{Z}_{m/p}^{\mathbf{Z}}$$

로 정의하자. 또한 기호렬 $x=(\cdots x_{-n}\cdots x_{-1}x_0x_1\cdots x_n\cdots)\in \mathbf{Z}_{m/p}^{\mathbf{Z}}$ 에 대하여 기호렬 $px\in X_M$ 을 $(px)_m=px_m$, $m\in\mathbf{Z}$ 로 정의하자. 넘기기 $\varphi:X_M\to \mathbf{Z}_{m/p}^{\mathbf{Z}}$, $x\mapsto x/p$ 를 생각하면 이 넘기기는 위상동형넘기기이다. 이제 F_q' (q 는 m 의 약수)를

$$f_q':\mathbf{Z}_q^{2r+1}\to\mathbf{Z}_q,\ f_q'(x_{-r},\ \cdots,\ x_r):=\sum_{i=-r}^{r}a_ix_i \bmod q$$

를 국부함수로 가지는 완전기호렬공간 $\mathbf{Z}_q^{\mathbf{Z}}$ 우의 선형세포자동체라고 정의하자.

그러면 다음의 도식은 가환이다.

$$\begin{array}{ccc} X_M & \xrightarrow{F} & X_M \\ \varphi\downarrow & & \downarrow\varphi \\ \mathbf{Z}_{m/p}^{\mathbf{Z}} & \xrightarrow[F'_{m/p}]{} & \mathbf{Z}_{m/p}^{\mathbf{Z}} \end{array}$$

사실

$$x\in X_M\Rightarrow \varphi\circ F(x)=\varphi\left(\sum_{i=-r}^{r}a_ix_{n-i}\right)_{n=-\infty}^{+\infty}=\frac{1}{p}\left(\sum_{i=-r}^{r}a_ix_{n-i}\right)_{n=-\infty}^{+\infty}=$$

$$=\left(\sum_{i=-r}^{r}a_i\frac{x_{n-i}}{p}\right)_{n=-\infty}^{+\infty}=\left(\sum_{i=-r}^{r}a_i\varphi(x)_{n-i}\right)_{n=-\infty}^{+\infty}=F\circ\varphi(x)$$

이다. 그러므로 $(X_M,\ F)$ 와 $(\mathbf{Z}_{m/p}^{\mathbf{Z}},\ F'_{m/p})$ 는 위상공액이 된다. 이로부터 $h(F|_{X_M})=h(F'_{m/p})$ 가 성립한다. 따라서 명제로부터 m/p 의 씨인수분해가

$$\frac{m}{p}=p_1^{k_1-t_1}\cdot p_2^{k_2-t_2}\cdot\cdots\cdot p_n^{k_n-t_n}$$

이므로 $C_i=\{j:(a_j,p_i)=1\}\cup\{0\}$, $\overline{r_i}=\max C_i$, $\overline{l_i}=\min C_i$ 일 때

$$h(F'_{m/p})=\sum_{i=1}^{n}(k_i-t_i)(\overline{r_i}-\overline{l_i})\log p_i$$

이다. 그러므로

$$h_{top}(F|_{X_M})=\sum_{i=1}^{n}(k_i-t_i)(\overline{r_i}-\overline{l_i})\log p_i$$

이다.(증명끝)

실례 3 $m=6$일 때 기반행렬 M이

$$M=\begin{pmatrix}1&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

으로 주어진다고 하자.

이때 행렬 M에 의하여 구성되는 SFT공간 X_M에서 정의되는 선형세포자동체의 국부함수가

$$f:\mathbf{Z}_6^3\to\mathbf{Z}_6,\ f(x_{-1},\ x_0,\ x_1)=3x_{-1}+4x_0+5x_1(\mathrm{mod}\,6)$$

이라고 하자. 그러면 $m=2^1\cdot 3^1,\ p=2^1\cdot 3^0$이므로 $p_1=2,\ p_2=3,\ k_1=k_2=1,\ t_1=1,\ t_2=0$이다. 그리고 $C_1=\{-1,\ 0,\ 1\},\ C_2=\{0,\ 1\}$이므로 $\overline{r_1}=1,\ \overline{l_1}=-1,\ \overline{r_2}=1,\ \overline{l_2}=0$이다. 따라서

$$h_{top}(F|_{X_M})=(1-1)(1-(-1))\log 2+(1-0)(1-0)\log 3=\log 3$$

이다.

참 고 문 헌

[1] G. Chen; Journal of Mathematics, 2, 32, 2013.

[2] G. Cattaneo et al.; Theo. Com. Sci., 233, 147, 2000.

[3] H. Akın; Bulletin of the Malaysian Math. l Sci. Soc., 35, 171, 2012.

[4] P. Walters; An Introduction to Ergodic Theory, Springer, 1～259, 1982.

[5] S. Levy; Artificial Life: A Report from the Frontier Where Computers Meet Biology, New York, Vintage, 78～124, 1993.

[6] T. Downarowicz; Entropy in Dynamical Systems, Cambridge University Press, 1～391, 2011.

[7] S. Ruette; Chaos for Continuous Interval Maps－a Survey of Relationship Between the Various Sorts of Chaos, Springer, 1～123, 2003.

주체107(2018)년 9월 8일 원고접수

Topological Entropy of Linear Cellular Automata Defined on SFT Spaces

Kim Jin Hyon

In this paper, we study the topological entropy of linear cellular automata defined on SFT spaces. We construct an SFT space on which linear cellular automata can be defined and then we calculate the topological entropy of linear cellular automata on it.

Key words: cellular automaton, topological entropy