김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체105(2016)년 제62권 제11호 Vol. 62 No. 11 JUCHE105(2016).

경로평균소득을 최대화하는 대중봉사계의 도착속도와 봉사속도의 조종

전용철, 량영일

선행연구[1]에서는 뽜쏭도착과 지수분포봉사를 가지는 한봉사기구봉사계에서 입장과 봉사속도의 동시적조종문제를 연구하였다. 조종기는 매 상태에서 봉사속도를 선택하며 도착하는 요청들을 거절할수 있다.

선행연구[3]에서는 대중봉사계 M/M/1/K에서 계의 상태에 따라 요청들의 입장을 조종할 때의 작업주기에 대하여, 선행연구[2]에서는 요청들의 입장계획화문제에서 최량계획을 구하기 위한 국부탐색방법과 아래한계에 대하여 론의하였다.

우리는 대중봉사계 M/M/1에서 경로평균소득을 최대화하는 도착속도와 봉사속도의 동시적조종문제에 대하여 연구하였다.

다음과 같은 구조를 가지는 대중봉사계를 생각하자.

요청들의 도착흐름은 도착속도가 λ인 뽜쏭흐름이며 요청들에 대한 봉사시간은 파라메터가 μ인 지수분포에 따른다. 봉사계에 있는 요청수에 따라 도착속도와 봉사속도를 조종할수 있다고 가정한다. 봉사계에 있는 요청수를 i라고 할 때 도착속도는 $\lambda+a_1(i)$이고 봉사속도는 $\mu+a_2(i)$이다. $a(i)=(a_1(i),\ a_2(i))$로 놓는다.

도착속도와 봉사속도가 각각 $a_1(i)$, $a_2(i)$만큼 증가할 때 드는 비용은 $c(i,\ a(i))$이다.

봉사계에 있는 요청수가 i일 때 단위시간당 봉사계의 비용은 $p_0 i$이다. $p_0>0$은 고정된 비용파라메터이다. $a_1(i)$, $a_2(i)$들은 모든 i에 대하여 각각 $[a_1^0,\ a_1^1]$, $[a_2^0,\ a_2^1]$에 속한다고 가정한다. 봉사계는 평균소득을 최대로 하려고 한다.

체계를 다음과 같은 마르꼬브결정과정으로 론의하자.

체계에 있는 요청수는 i이며 상태공간은 $S=\{0, 1, 2, \cdots\}$이다.

작용은 $a(i)=(a_1(i),\ a_2(i))$이며 작용공간은 $A(i)=[a_1^0,\ a_1^1]\times[a_2^0,\ a_2^1]$이다.

이행속도 $q(j\,|\,i,\ a(i))$는 $i=0$과 $a(i)\in A(0)$에 대하여

$$q(1\,|\,0,\ a(0))=q(0\,|\,0,\ a(0))=a_2(0)\,, \tag{1}$$

$$q(j\,|\,0,\ a(0))=0,\quad j\ge 2 \tag{2}$$

이고 $i\ge 1$과 $a(i)\in A(i)$에 대하여 다음과 같다.

$$q(j\,|\,i,\ a(i))=\begin{cases}\mu+a_2(i), & j=i-1\\ -(\lambda+\mu)-a_1(i)-a_2(i), & j=i\\ \lambda+a_1(i), & j=i+1\\ 0, & |\,j-i\,|>1\end{cases} \tag{3}$$

$K=\{(i,\ a(i)):i\in S,\ a(i)\in A(i)\}$라고 할 때 K에서 정의되는 소득함수는

$$r(i,\ a(i))=-p_0 i-c(i,\ a(i))\,. \tag{4}$$

$\{S,\ A(i),\ q(j\,|\,i,\ a(i)),\ r(i,\ a(i))\}$ 가 주어졌을 때 시간 t 에 따르는 요청수 i 의 변화를 나타내는 과정 $x(t)$ 는 마르꼬브결정과정이다.

초기상태가 $i \in S$ 일 때 방략 $\pi = (\pi_t) \in \Pi$ 의 경로평균소득은 다음과 같이 정의된다.

$$V_p(i,\ \pi) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T r(x(t),\ \pi_t)dt$$

주어진 $\varepsilon \ge 0$ 에 대하여 적당한 상수 g^* 이 있어서 $P(V_p(i,\ \pi^*) - \varepsilon) = 1\ \ ((i,\ \pi^*) \ge g^*)$ 이고 모든 $i \in S$ 와 $\pi \in \Pi$ 에 대하여 $P(V_p(i,\ \pi)) = 1\ \ (V_p(i,\ \pi) \le g^*)$ 이면 방략 $\pi^* \in \Pi$ 를 ε －PAR－최량방략이라고 부른다. $\varepsilon = 0$ 일 때 0－PAR－최량방략을 간단히 PAR－최량방략이라고 부른다.

정리 다음의 조건들이 성립되면 PAR－최량정상방략이 존재한다.

i) $\mu + a_2^0 - \lambda - a_1^1 > 0$

ii) $i \ge 1$ 에 대하여 $\lambda + a_1(i) > 0$, $\mu + a_2(i) > 0$ 이고 $a_1(0) \ge 0$, $a_2(0) = 0$ 이다.

iii) 적당한 상수 $M > 0$ 이 있어서 모든 i 에 대하여 $\sup_{a\in A}|\,c(i,\ a(i))| < M(i+1)$ 이 성립된다.

증명 선행연구[4]에 의하여 다음의 조건들이 성립되면 정리의 결론이 나온다.

① S 우의 함수 $w \ge 1$ 과 상수 $c_0 \ne 0$, $b_0 \ge 0$, $L_0 > 0$ 이 있어서 모든 $(i,\ a) \in K$ 에 대하여

$$\sum_{j\in S} w(j)q(j\,|\,i,\ a) \le c_0 w(i) + b_0 \tag{5}$$

이고 모든 $i \in S$ 에 대하여

$$q^*(i) \le L_0 w(i) \tag{6}$$

이다. 여기서 $q^*(i) = \sup_{a\in A} q_i(a)$, $q_i(a) = -q(i\,|\,i,\ a)$ 이다.

② 모든 $(i,\ a) \in K$ 에 대하여 적당한 상수 $M_0 > 0$ 이 있어서 $|\,r(i,\ a)| \le M_0 w(i)$ 이다.

③ 매 고정된 확정정상방략 $f \in F$ 와 $k \ne i+1$ 인 임의의 $i,\ k \in S$ 에 대하여

$$\sum_{j\ge k} q(j\,|\,i,\ f(i)) \le \sum_{j\ge k} q(j\,|\,i+1,\ \ f(i+1)).$$

④ $k = 1, 2$ 에 대하여 S 우의 부아닌 함수 $w_k^* \ge 1$ 과 상수 $c_k^* > 0$, $b_k^* \ge 0$, $M_k^* > 0$ 이 있어서 모든 $i \in S$ 와 $(i,\ a) \in K$ 에 대하여 다음의 식들이 성립된다.

$$w^2(i) \le M_1^* w_1^*(i),\quad \sum_{j\in S} w_1^*(j)q(j\,|\,i,\ a) \le -c_1^* w_1^*(i) + b_1^*$$

$$|\,q^*(i)w(i)|^2 \le M_2^* w_2^*(i),\quad \sum_{j\in S} w_2^*(j)q(j\,|\,i,\ a) \le -c_2^* w_2^*(i) + b_2^*$$

조건 ①의 증명 모든 $i \in S$ 에 대하여 $w(i) = i+1$ 로 놓고 $c_1 = [\mu + a_2^0 - \lambda - a_1^0]/2 > 0$ 으로 놓는다. $i = 0$ 일 때 식 (1), (2)와 조건 i), ii)로부터 다음의 식이 나온다.

$$\sum_{j\in S} w(j)q(j\,|\,0,\ a) = \lambda + a_1(0) \le -c_1 w(0) + [\mu + a_2^0 + \lambda + a_1^0]/2 \tag{7}$$

그리고 $i \ge 1$ 일 때

$$\sum_{j\in S} w(j)q(j\,|\,i,\ a) = \sum_{j\in S}(j+1)q(j\,|\,i,\ a) = \lambda + a_1(0) - \mu - a_2(0) \le -c_1 w(1). \tag{8}$$

식 (7)에서 $b_1=[\mu+a_2^0+\lambda+a_1^0]/2$으로 놓으면 식 (8)과 함께 식 (5)가 성립된다는것을 알수 있으며 식 (1), (3)에 의하여

$$q^*(i)\le\sup_{a\in A}[\lambda+a_1(i)+\mu+a_2(i)]=\lambda+a_1^0+\mu+a_2^0\le(\lambda+a_1^0+\mu+a_2^0)w(i)$$

이므로 $L_0=\mu+a_2^0+\lambda+a_1^0$으로 놓으면 식 (6)이 성립된다. 따라서 조건 ①이 성립된다.

조건 ②의 증명 모든 $i\in S$에 대하여 식 (4)와 조건 iii)으로부터 $|r(i,\ a(i))|\le(p_0+M)w(i)$이다. 따라서 $M_0=p_0+M$으로 놓으면 조건 ②가 성립된다는것을 알수 있다.

조건 ③의 증명 $i\ge1$이고 $k=i$일 때 다음과 같다.

$$\sum_{j\ge k}q(j\,|\,i,\ \ f(i))=\sum_{j\ge1}q(j\,|\,i,\ \ f(i+1))=q(i\,|\,i,\ \ f(i))+q(i+1\,|\,i,\ \ f(i))=-\mu+a_2(i)\le0$$

$$\sum_{j\ge k}q(j\,|\,i+1,\ \ f(i+1))=q(i\,|\,i+1,\ \ f(i+1))+q(i+1\,|\,i+1,\ \ f(i+1))+q(i+2\,|\,i+1,\ \ f(i+1))=0$$

따라서 조건 ③이 성립된다는것을 알수 있다.

조건 ④의 증명 $w_1^*(i)=i^2+1$, $M_1^*=3$으로 놓으면 적당한 정수 b_1^*이 있어서 모든 $i\in S$에 대하여 $\sum_{j\in S}w_1^*(j)q(j\,|\,i,\ a)\le-[\mu+a_2^0-\lambda-a_1^0]w_1^*(i)+b_1^*$이 성립된다는것을 알수 있다.

그리고 $w_2^*(i)=i^4+1$, $M_2^*=8(2\lambda+2\mu+a_1^1+a_2^1)$로 놓으면 적당한 정수 b_2^*이 있어서 모든 $i\in S$에 대하여 $\sum_{j\in S}w_2^*(j)q(j\,|\,i,\ a)\le-[\mu+a_2^0-\lambda-a_1^0]w_2^*(i)+b_2^*$이다.

따라서 $c_1^*=c_2^*=2c_1$로 놓을 때 조건 ④가 성립된다는것을 알수 있다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] K. M. Adusumilli et al.; Queueing Systems, 66, 2, 131, 2010.
[2] S. Ceschia et al.; Computers & Operations Research, 38, 1452, 2011.
[3] A. A. Hanbali et al.; Operations Research Letters, 38, 1, 2010.
[4] X. P. Guo et al.; IEEE Trans. Automa. Control, 52, 1139, 2005.

주체105(2016)년 7월 5일 원고접수

Arrival and Service Rate Control of a Queue to Maximize the Path-Wise Average Reward

Jon Yong Chol, Ryang Yong Il

We considered a joint arrival and service rate control problem for the M/M/1 queue to maximize the path wise average reward. When arrival and service rates take continuous values, we proved the existence of optimal stationary policy.

Key words: queue, control