김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체105(2016)년 제62권 제5호 Vol. 62 No. 5 JUCHE105(2016).

비선형프락탈정－역방향확률미분방정식풀이의 비교정리

신명국, 문철

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《선진과학기술을 받아들이기 위한 사업을 적극적으로 벌려야 하겠습니다.

선진과학기술을 받아들이는것은 나라의 과학기술을 빨리 발전시키기 위한 중요한 방도의 하나로 됩니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제15권 499～500페지)

론문에서는 프락탈정－역방향확률미분방정식의 풀이의 비교정리에 대하여 연구하였다.

선행연구에서는 $H=1/2$ 인 경우 위너－빠쏭형역방향확률미분방정식[3]과 위너형정－역방향확률미분방정식[2]의 풀이의 유일존재성과 비교정리가 증명되였다.

프락탈정－역방향확률미분방정식($H>1/2$)의 풀이의 유일존재성은 선행연구[1]에서 증명되였다.

우리는 프락탈정－역방향확률미분방정식($H>1/2$)의 풀이의 비교정리를 증명한다.

$B^{(H)}(t)=(B_1^{(H_1)}(t), \cdots, B_m^{(H_m)}(t))$ 는 확률공간 $(\Omega, \mathscr{F}^{(H)}, \boldsymbol{P}^{(H)})$ 우에서 정의되고 허스트지수가 $H=(H_1, \cdots, H_m)\in(1/2, 1)^m$ 인 m차원프락탈브라운운동이라고 하자. 여기서 $\mathscr{F}_t^{(H)}$ 는 $B_t^{(H)}$ 에 의하여 생성된 $\sigma-$모임벌흐름이고 $\mathscr{F}^{(H)}=\bigvee_{t\ge 0}\mathscr{F}_t^{(H)}$ 이다.

다음과 같은 프락탈정－역방향확률미분방정식을 론의하자.

$$dX(t)=b(t, X_t, Y_t, Z_t)dt+\sigma(t, X_t, Y_t, Z_t)\, dB_t^{(H)}, \quad X(0)=x_0 \tag{1}$$

$$-dY(t)=f(t, X_t, Y_t, Z_t)dt-Z(t)\, dB_t^{(H)}, \quad Y(T)=QX(T)+R \tag{2}$$

여기서 $x_0\in\boldsymbol{R}^n$ 이며 b, σ, f 들은 모두 $\Omega\times[0, T]\times\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^{n\times d}$ 에서 정의되고 각각 $\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{R}^{n\times d}$, $\boldsymbol{R}^n$ 에서 값을 취하는 함수들이다. 또한 $T>0$ 이고 Q, R 는 적당한 차원의 상수행렬들이다.

기호표식의 복잡성을 피하기 위해 다음의 기호들을 약속하자.

$$V=(X, Y, Z), \quad A(t, V)=\begin{pmatrix}-f\\ b\\ \sigma\end{pmatrix}(t, V)$$

$$\langle A(t, V), V\rangle:=\langle -f, X\rangle+\langle b, Y\rangle+\langle\sigma, Z\rangle_{L_\phi^{1,2}}, \quad \langle V, V\rangle:=|V|^2=\langle X, X\rangle+\langle Y, Y\rangle+\langle Z, Z\rangle_{L_\phi^{1,2}}$$

$\langle f, g\rangle_{L_\phi^{1,2}}$ 는 선행연구[2]에서 지적된것과 같다. 즉

$$\langle f, g\rangle_{L_\phi^{1,2}(m)}:=\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^m\int_{\boldsymbol{R}}\int_{\boldsymbol{R}} f_i(s)\cdot g_i(s)\Phi_{H_i}(s, t)dsdt+\sum_{i, j=1}^m\left(\int_{\boldsymbol{R}} D_{j, t}^\Phi f_i(t)dt\right)\left(\int_{\boldsymbol{R}} D_{i, t}^\Phi g_j(t)dt\right)\right].$$

여기서 $D^{\Phi}_{j,\ t}Y$ 는 ω_k 에 관한 말랴빈 Φ 도함수로서 다음과 같다.

$$D^{\Phi}_{k,\ s}Y := \int_{\boldsymbol{R}} \Phi_{H_k}(s,\ t) D_{k,\ t} Y dt = \int_{\boldsymbol{R}} \Phi_{H_k}(s,\ t) \frac{\partial Y}{\partial \omega_k}(t,\ \omega) dt$$

$\| f \|_{L^{1,2}_{\Phi}} := \langle f,\ f \rangle_{L^{1,2}_{\phi}} < \infty$ 인 함수 f 전부의 모임을 $L^{1,2}_{\Phi}(m)$ 으로 정의한다.

또한 $\sigma_i,\ \theta_i \in L^{1,2}_{\Phi}(m)\ \ (i=1,\ \cdots,\ n)$ 인 $\sigma=(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_m)^{\mathrm{T}}$, $\theta=(\theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\ \theta_m)^{\mathrm{T}}$ 에 대하여 $\langle \sigma,\ \theta \rangle_{L^{1,2}_{\Phi}(n\times m)} := \sum_{i=1}^{n} \langle \sigma_i,\ \theta_i \rangle_{L^{1,2}_{\Phi}}$ 와 같이 정의한다.

가정 1 $A(t,\ V)$ 는 V 에 관하여 약단조성조건을 만족시킨다. 즉

$$\exists \mu > 0 : \forall V,\ V' \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^{n\times d},\quad \forall t \le T,$$

$$-\langle f(t,\ V) - f(t,\ V'),\ X - X' \rangle \le -\mu |X - X'|^2,$$

$$\langle b(t,\ V) - b(t,\ V'),\ Y - Y' \rangle \le -\mu |Y - Y'|^2,$$

$$\langle \sigma(\cdot,\ V) - \sigma(\cdot,\ V'),\ Z - Z' \rangle_{L^{1,2}_{\phi}} \le -\mu \| Z - Z' \|^2_{L^{1,2}_{\phi}}.$$

가정 2 $\forall V \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^{n\times d}$, $A(t,\ V) : [0,\ T]$ 에서 정의된 $\mathscr{F}^{(H)}_t$ －적합과정이며

$$A(t,\ 0) \in L^2(0,\ T : \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^{n\times d}).$$

가정 3 $A(t,\ V)$ 는 V 에 관하여 리프쉬츠조건을 만족시킨다. 즉

$$\exists l > 0 : \forall V,\ V' \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^{n\times d},\ \ t \le T,\ \ |A(t,\ V) - A(t,\ V')| \le l |V - V'|.$$

가정 4 $g(x) = Qx + R$

우의 가정들이 성립될 때 방정식 (1), (2)의 풀이 $(X_t,\ Y_t,\ Z_t) \in L^{1,2}_{\Phi}$ 의 유일존재성은 선행연구[1]에서 증명되였다.

론문에서는 방정식 (1), (2)의 풀이에 대한 비교정리를 증명한다.

$(X_1(\cdot),\ Y_1(\cdot),\ Z_1(\cdot)),\ (X_2(\cdot),\ Y_2(\cdot),\ Z_2(\cdot))$ 을 각각 $X_1(0) = x_1 \in \boldsymbol{R}^n$, $X_2(0) = x_2 \in \boldsymbol{R}^n$ 에 대응되는 방정식 (1), (2)의 풀이라고 하자. 그리고

$$(\hat{X}(t),\ \hat{Y}(t),\ \hat{Z}(t)) := (X_1(t) - X_2(t),\ Y_1(t) - Y_2(t),\ Z_1(t) - Z_2(t)),\ \hat{b} := b(t,\ V_1) - b(t,\ V_2),$$

$$\hat{\sigma} := \sigma(t,\ V_1) - \sigma(t,\ V_2),\ \ \hat{f} := f(t,\ V_1) - f(t,\ V_2),\ \ \hat{x} = x_1 - x_2$$

라고 놓자.

그러면 $(\hat{X}(t),\ \hat{Y}(t),\ \hat{Z}(t))$ 는 다음의 방정식들을 만족시킨다.

$$d\hat{X}(t) = \hat{b}(t)dt + \hat{\sigma}(t)dB^{(H)}_t,\ \ d\hat{Y}_t = -\hat{f}(t)dt + \hat{Z}(t)dB^{(H)}_t,\ \ \hat{X}(0) = \hat{x},\ \ \hat{Y}(T) = Q\hat{X}(T)$$

보조정리 가정 1－4가 성립된다고 하면 $\mathrm{E}(\langle \hat{X}(t),\ \hat{Y}(t) \rangle) \ge 0$, $t \in [0,\ T]$ 가 성립된다.

또한 $\tau = \inf\{t \in [0,\ T]\,;\langle \hat{X}(t),\ \hat{Y}(t) \rangle = 0\}$ 인 τ 에 대하여 $(\hat{X}(t),\ \hat{Y}(t),\ \hat{Z}(t)) I_{[\tau\wedge T,\ T]}(t) \equiv 0$ 이 성립된다.

정리(비교정리) 가정 1－4가 성립된다고 하자.

이때 $\hat{X}(0) > 0$ 이라고 하면 $\hat{Y}(0) > 0$ 이다.

그리고 임의의 $t \in (0,\ T]$ 에 대하여 $X_1(t) \ge X_2(t),\ Y_1(t) \ge Y_2(t)$ (거의)가 성립된다. 여기서 $X,\ Y \in \boldsymbol{R}^n$, $X \le Y$ 라는것은 $\forall X_i,\ Y_i\ (i=1,\ \cdots,\ n),\ X_i \le Y_i$ 를 의미한다.

증명 먼저 $\hat{X}(0)>0$ 이라고 하면 $\hat{Y}(0)>0$ 이 된다는것을 증명하자.

만일 $\hat{Y}(0)\le 0$ 이라고 하면 $\hat{Y}(0)=0$ 일 때에는 $\langle \hat{X}(0),\ \hat{Y}(0)\rangle = 0$ 이므로 $\tau=0$ 이고 보조정리로부터 $\hat{X}(0)=0$ 이 되므로 가정에 모순된다.

다음으로 $\hat{Y}(0)<0$ 이라고 하면 $\langle \hat{X}(0),\ \hat{Y}(0)\rangle < 0$ 이므로 $\mathrm{E}(\langle \hat{X}(0),\ \hat{Y}(0)\rangle)<0$ 이 나오는데 역시 보조정리의 결과에 모순된다.

따라서 첫째 결과가 증명되였다.

둘째 결과를 증명하기 위하여 다음의 기호를 약속하자.

$$\tau_X=\inf\{t\in(0,\ T];\ \hat{X}(t)=0\},\quad \tau_Y=\inf\{t\in(0,\ T];\ \hat{Y}(t)=0\}$$

그러면 분명히 $\tau\le\tau_X$, $\tau\le\tau_Y$ 이다.

보조정리로부터 $\hat{X}(t)=0\ (\forall t\ge\tau_X)$, $\hat{Y}(t)=0\ (\forall t\ge\tau_Y)$ 이고 $\hat{X}(t),\ \hat{Y}(t)$ 가 확률 1로 표본련속이며 $\hat{X}(0)>0$, $\hat{Y}(0)>0$ 이므로 $[0,\ \tau_X]$ 에서 $\hat{X}(t)\ge 0$ 이고 $[0,\ \tau_Y]$ 에서는 $\hat{Y}(t)\ge 0$ 이다.

따라서 $\hat{X}(t)\ge 0,\ \hat{Y}(t)\ge 0,\ \forall t\in[0,\ T]$ (거의)가 성립된다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] 신명국 등; 수학, 1, 34, 주체103(2014).

[2] S. Peng et al.; Stochastic Process Appl., 85, 75, 2000.

[3] S. Jingtao; Article ID 258674, 50, 2012.

주체105(2016)년 1월 5일 원고접수

Comparison Theorem of Solution of the Nonlinear Fractional Forward-Backward Linear Stochastic Differential Equations

Sin Myong Guk, Mun Chol

We proved the comparison theorem of solution of the nonlinear fractional forward-backward stochastic differential equations

$$dX(t)=b(t,\ X_t,\ Y_t,\ Z_t)dt+\sigma(t,\ X_t,\ Y_t,\ Z_t)\,dB_t^{(H)},\quad X(0)=x_0,$$

$$-dY(t)=f(t,\ X_t,\ Y_t,\ Z_t)dt-Z(t)\,dB_t^{(H)},\quad Y(T)=g(X(T))$$

where $B^{(H)}(t)$ is 1-dimensional fractional Brownian motion with Hurst parameter $H\in(1/2,\ 1)$.

Key word: fractional forward-backward stochastic differential equation