김일성종합대학학보 (자연과학) 주체104(2015)년 제61권 제2호
JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE) Vol. 61 No. 2 JUCHE104(2015).

불확정성대체계의 분산 H_∞ 출력반결합조종기 설계의 한가지 방법

리 진 성

경애하는 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《인민경제 모든 부문에서 과학기술발전에 선차적인 힘을 넣고 과학기술과 생산을 밀착시켜 우리의 자원과 기술로 생산을 늘이며 나아가서 설비와 생산공정의 CNC화, 무인화를 적극 실현하여야 합니다.》

기술공학을 비롯한 각종 령역에서 대체계들이 생겨나면서 대체계의 조종문제에 관심을 돌리게 되였다.

대체계의 분산조종은 대체계가 가지고있는 특성으로부터 최근에 초점이 집중되여 일련의 연구결과들을 얻었지만 구체적이고 일반적인 연구를 진행하지 못하고 개별적인 인자에만 주의를 돌리였다.[1]

이로부터 론문에서는 호상관련을 고려한 불확정성대체계의 분산 H_∞ 출력반결합조종기 설계에 대한 한가지 방법을 제기하고 모의실험을 통하여 그 유효성을 검증하였다.

1. 공칭대체계의 분산 H_∞ 출력반결합조종기설계

N개의 부분체계들로 구성된 불확정성대체계의 상태방정식은 다음과 같이 표시할수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= (A_{ii}+\Delta A_{ii})x_i(t)+(B_{1i}+\Delta B_{1i})u_i(t)+ \\ &\quad + B_{2i}\omega_i(t)+\sum_{j=1,\ j\neq i}^{N}(A_{ij}+\Delta A_{ij})x_j(t)\ , \\ z_i(t) &= C_{1i}x_i(t)+D_{1i}u_i(t)\ , \\ y_i(t) &= C_{2i}x_i(t)+D_{2i}\omega_i(t). \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 $x_i(t)\in R^{n_i}$, $\omega_i(t)\in R^{r_i}$, $u_i(t)\in R^{m_i}$, $z_i(t)\in R^{l_i}$, $y_i(t)\in R^{p_i}$ $(i=1,\ \cdots,\ N)$은 각각 i 째 부분체계의 상태, 섭동, 조종입력, 평가출력 및 측정출력벡토르들이고 행렬 A_{ii}, B_{1i}, B_{2i}, C_{1i}, D_{1i}, C_{2i}, D_{2i}는 적당한 차수의 상수행렬이며 A_{ij}는 j 째 부분체계와 i 째 부분체계의 호상관련행렬이다.

이때 체계의 불확정성은 다음과 같은 조건을 만족시킨다고 가정하자.

$$|\Delta A_{ij}|<R_{ij},\ |\Delta B_{1i}|<S_i,\quad i,\ j=1,\ \cdots,\ N \tag{2}$$

여기서 R_{ij}와 S_i는 부아닌 원소를 가진 상수행렬이다.

목적은 $(A_{ii},\ B_{1i},\ C_{2i})$가 안정가능하고 관측가능할 때 대체계 (1)에 대하여 닫긴대체계를 점근안정하게 하고 $\|z(t)\|_2^2\le\gamma\|\omega(t)\|_2^2$를 만족시키는 분산출력반결합조종기

$$\begin{aligned}&\dot{x}_{ci}(t)=A_{ci}x_{ci}(t)+B_{ci}y_i(t),\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ N\\&u_i(t)=C_{ci}x_{ci}(t)\end{aligned}\tag{3}$$

를 설계하는것이다.

이를 위해 먼저 N개의 부분체계

$$\begin{aligned}&\dot{x}_i(t)=A_{ii}x_{ii}(t)+B_{2i}\omega_i(t)+\sum_{j=1,\ j\neq i}^{N}A_{ij}x_j(t),\\&z_i(t)=C_ix_i(t)\end{aligned}\tag{4}$$

로 구성된 대체계가 점근안정하고 H_∞성능지표를 만족시키기 위한 조건을 보자.

분산체계에서 랴뿌노브함수는 다음과 같이 쓸수 있다.

$$V(x_i)=\sum_{i=1}^{N}\left\{x_i^T(t)P_ix_i(t)+\sum_{j=1}^{N}\int_0^t x_j^T(s)Q_{ij}x_j(s)ds-\sum_{j=1}^{N}\int_0^t x_j^T(s)Q_{ij}x_j(s)ds\right\}$$

이제 웃식에 도함수를 취하면

$$\dot{V}(x_i)=\sum_{i=1}^{N}\left\{2\dot{x}_i^T(t)P_i\dot{x}_i(t)+\sum_{j=1}^{N}x_j^T(t)Q_{ij}x_j(t)-\sum_{j=1}^{N}x_j^T(t)Q_{ij}x_j(t)\right\}=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\left\{x_i^T(t)(A_{ii}^TP_i+P_iA_{ii})x_i(t)+2x_i^T(t)P_i(\sum_{j=1,j\neq i}^{N}A_{ij}x_j(t))+\right.$$

$$\left.+2x_i^T(t)P_iB_{2i}\omega_i(t)+\sum_{j=1}^{N}x_j^T(t)Q_{ij}x_j(t)-\sum_{j=1}^{N}x_j^T(t)Q_{ij}x_j(t)\right\}=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\left\{x_i^T(t)(A_{ii}^TP_i+P_iA_{ii}+\sum_{j=1,\ j\neq i}^{N}Q_{ij})x_i(t)+2x_i^T(t)P_i\left(\sum_{j=1,\ j\neq i}^{N}A_{ij}x_j(t)\right)+\right.$$

$$\left.+2x_i^T(t)P_iB_{2i}\omega_i(t)-\sum_{j=1,\ j\neq i}^{N}x_j^T(t)Q_{ij}x_j(t)\right\}$$

로 된다. 이때 만일 $\omega_i(t)=0(i=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$이라면

$$\dot{V}(x_i)=\sum_{i=1}^{N}\xi_i^T\tilde{\gamma}_i\xi_i^T\tag{5}$$

와 같이 쓸수 있다. 여기서

$$\xi_i=[x_i(t)^T,\ x_1(t)^T,\ \cdots,\ x_{i-1}(t)^T,\ x_{i+1}(t)^T,\ \cdots,\ x_N(t)^T]^T,$$

$$\tilde{\gamma}_i=\begin{bmatrix}\bar{\gamma}_i & P_iA_{i1} & \cdots & P_iA_{i(i-1)} & P_iA_{i(i+1)} & \cdots & P_iA_{iN}\\ * & -Q_{i1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ * & * & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ * & * & * & -Q_{i(i-1)} & 0 & \cdots & 0\\ * & * & * & * & -Q_{i(i+1)} & \cdots & 0\\ * & * & * & * & * & \ddots & \vdots\\ * & * & * & * & * & * & -Q_{iN}\end{bmatrix},$$

$$\bar{\gamma}_i = A_{ii}{}^T P_i + P_i A_{ii} + \sum_{j=1,\ j\neq i}^{N} Q_{ji}$$

이다.

그러므로 $\omega_i(t)=0 (i=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ 인 조건에서 $\tilde{\gamma}_i<0$ 이면 $\dot{V}(x_i)<0$ 이므로 공칭대체계 (4)는 점근안정하다.

다음으로 H_∞ 성능지표를

$$J=\int_0^\infty \sum_{i=1}^N (z_i{}^T(t) z_i{}^T(t) - \gamma\omega_i{}^T(t)\omega_i(t))dt$$

로 놓으면

$$J=\int_0^\infty \sum_{i=1}^N [(z_i{}^T(t) z_i{}^T(t) - \gamma\omega_i{}^T(t)\omega_i(t)) + \dot{V}(x_i)]dt - V(\infty) \le$$
$$\le \int_0^\infty \sum_{i=1}^N [(z_i{}^T(t) z_i{}^T(t) - \gamma\omega_i{}^T(t)\omega_i(t)) + \dot{V}(x_i)]dt = \int_0^\infty (\sum_{i=1}^N \varsigma_i^T \Xi_i \varsigma_i)dt$$

로 된다. 여기서 $\varsigma_i(t)=[\xi_i(t)^T\ \ \omega_i(t)^T]^T$ 이다.

만일 $\Xi_i<0$ 이 성립하면 $J\le 0$ 이므로 $\|z(t)\|_2^2 \le \gamma \|\omega(t)\|_2^2$ 이며 체계는 H_∞ 성능지표를 만족시킨다. 여기서

$$\Xi_i=\begin{bmatrix} \gamma_i & P_iA_{i1} & \cdots & P_iA_{i(i-1)} & P_iA_{i(i+1)} & \cdots & P_iA_{iN} & P_iB_{2i} \\ * & -Q_{i1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & * & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & -Q_{i(i-1)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -Q_{i(i+1)} & \cdots & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & * & * & * & -Q_{iN} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\gamma_i \end{bmatrix}<0, \qquad (6)$$

$$\gamma_i = A_{ii}{}^T P_i + P_i A_{ii} + \sum_{j=1,\ j\neq i}^{N} Q_{ji} + C_i{}^T C_i.$$

그러므로 정의 상수 $\gamma>0$ 에 대하여 대칭인 정인정값행렬 $P_i,\ Q_{ij}(i,\ j=1,\ \cdots,\ N)$ 가 있어서 식 (6)과 같은 LMI가 성립할 때 대체계 (4)는 점근안정하고 H_∞ 성능지표를 만족시킨다.

우와 같은 조건에 기초하여 닫긴대체계

$$\dot{x}_{c1i}(t)=A_{c1i}x_{c1i}(t)+B_{c1i}\omega_i(t)+\sum_{j=1,\ j\neq i}^{N} A_{c1ij}x_{c1j}(t), \qquad (7)$$
$$z_i(t)=C_{c1i}x_{c1i}(t)$$

를 구성하면 전체 체계는 점근안정하고 H_∞ 지표를 만족시킨다. 여기서

$$x_{c1i}(t)=\begin{bmatrix} x_i(t) \\ x_{ci}(t) \end{bmatrix},\ A_{c1i}=\begin{bmatrix} A_{ii} & B_{1i}C_{ci} \\ B_{ci}C_{2i} & A_{ci} \end{bmatrix},\ B_{c1i}=\begin{bmatrix} B_{2i} \\ B_{ci}D_{2i} \end{bmatrix}$$

$$A_{c1ij}=\begin{bmatrix} A_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ C_{c1i}=\begin{bmatrix} C_{1i}{}^T \\ D_{1i}C_{ci}{}^T \end{bmatrix}^T.$$

정리 1 임의의 정의 상수 $\gamma>0$ 에 대하여 대칭인 정인정값행렬 X_i, Y_i, $\overline{Q}_{ij}(i=1, 2, \cdots, N)$ 와 행렬 W_{1i}, W_{2i}, W_{3i}, U_i, V_i 가 있어서 다음식

$$\Theta_i(X_i,\ Y_i,\ \overline{Q}_{ij},\ W_{1i},\ W_{2i},\ W_{3i})=$$

$$=\begin{bmatrix} \Theta_{i11} & \Pi_{i1} & \cdots & \Pi_{i(i-1)} & \Pi_{i(i+1)} & \cdots & \Pi_{iN} & \Lambda_{1i} & \Lambda_{2i}{}^T \\ * & -\overline{Q}_{i1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & -\overline{Q}_{i(i-1)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\overline{Q}_{i(i+1)} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & * & * & * & -\overline{Q}_{iN} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\gamma I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix}<0, \tag{8}$$

$$\begin{bmatrix} X_i & I \\ I & Y_i \end{bmatrix}>0, \tag{9}$$

$$U_iV_i^T=I-X_iY_i \tag{10}$$

를 만족시킬 때 분산 H_∞ 출력반결합조종기의 파라메터는 다음과 같이 결정할수 있다.[2]

$$A_{ci}=(V_i)^{-1}W_{1i}(U_i),\ B_{ci}=(V_i)^{-1}W_{2i},\ C_{ci}=W_{3i}(U_i)^T \tag{11}$$

여기서

$$\Theta_{i11}=\begin{bmatrix} J_{i11} & J_{i21}{}^T \\ J_{i21} & J_{i22} \end{bmatrix}+\sum_{j=1, j\neq i}^{N}\overline{Q}_{ij},\ \overline{Q}_{ij}=\begin{bmatrix} \overline{Q}_{ij1} & \overline{Q}_{ij2}{}^T \\ \overline{Q}_{ij2} & \overline{Q}_{ij3} \end{bmatrix},$$

$$J_{i11}=A_{ii}X_i+B_{1i}W_{3i}+(A_{ii}X_i+B_{1i}W_{3i})^T,$$

$$J_{i21}=A_{ii}{}^T+Y_iA_{ii}X_i+W_{2i}C_{2i}X_i+Y_iB_{1i}W_{3i}+W_{1i},$$

$$J_{i22}=Y_iA_{ii}+W_{2i}C_{2i}+(Y_iA_{ii}+W_{2i}C_{2i})^T,$$

$$\Pi_{ij}=\begin{bmatrix} A_{ij}X_i & A_{ij} \\ Y_iA_{ij}X_i & Y_iA_{ij} \end{bmatrix},\Lambda_{1i}=\begin{bmatrix} B_{2i} \\ YB_{2i}+W_{2i}D_{2i} \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_{2i}=\begin{bmatrix} C_{1i}X_i+D_{1i}W_{3i} & C_{1i} \end{bmatrix}\ \ (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ N,\ \ j\neq i)$$

이다.

2. 비구조적불확정성을 가진 대체계의 분산 H_∞ 출력반결합조종기설계

정리 2 임의의 정의 상수 $\gamma>0$ 에 대하여 $\alpha_i>0,\ \beta_i>0$ 과 대칭인 정인정값행렬 X_i, Y_i, $\overline{Q}_{ij}(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ 와 임의의 행렬 W_{1i}, W_{2i}, W_{3i}, U_i, V_i 가 존재하여 식 (9),

(10)을 만족시키고 다음식

$$\Psi_i(X_i,\ Y_i,\ \overline{Q}_{ij},\ W_{1i},\ W_{2i},\ W_{3i},\ \alpha_i,\ \beta_i)=$$

$$=\begin{bmatrix} \overline{\Theta}_{i11} & \Pi_{i1} & \cdots & \Pi_{i(i-1)} & \Pi_{i(i+1)} & \cdots & \Pi_{iN} & \Lambda_{1i} & \Lambda_{2i}^T \\ * & -\overline{Q}_{i1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\overline{Q}_{i(i-1)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\overline{Q}_{i(i+1)} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & * & * & * & -\overline{Q}_{iN} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\gamma I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix}<0 \tag{12}$$

이 성립할 때 분산출력반결합조종기 (3)의 파라메터는 식 (11)과 같다.[3] 여기서

$$\overline{\Theta}_{i11}=\begin{bmatrix} \overline{J}_{i11} & \overline{J}_{i21}{}^T \\ \overline{J}_{i21} & \overline{J}_{i22} \end{bmatrix}+\sum_{j=1,\ j\neq i}^{N}(\overline{Q}_{ij}+\overline{Z}_{ij}),$$

$$\overline{Z}_{ij}=\begin{bmatrix} \alpha_i{}^{-1}\Omega(R_{ij}) & \alpha_i{}^{-1}\Omega(R_{ij})^T Y_i \\ \alpha_i{}^{-1}Y_i\Omega(R_{ij}) & \alpha_i{}^{-1}Y_i\Omega(R_{ij})Y_i \end{bmatrix},$$

$$\tilde{Q}_{ij}=\begin{bmatrix} \overline{Q}_{ij1}-\alpha_i X_i{}^2 & \overline{Q}_{ij2}{}^T-\alpha_i X_i \\ \overline{Q}_{ij2}-\alpha_i X_i & \overline{Q}_{ij3}-\alpha_i I \end{bmatrix}\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ N,\ j\neq i),$$

$$\overline{J}_{i11}=A_{ii}X_i+B_{1i}W_{3i}+(A_{ii}X_i+B_{1i}W_{3i})^T+(\alpha_i+\beta_i)I+\alpha_i{}^{-1}X_i\Gamma(R_{ij})X_i+$$
$$+\beta_i^{-1}W_{3i}{}^T\Gamma(S_i)W_{3i},$$

$$\overline{J}_{i21}=A_{ii}{}^T+Y_iA_{ii}X_i+W_{2i}C_{2i}X_i+Y_iB_{2i}W_{3i}+W_{1i}+(\alpha_i+\beta_i)Y_i+\alpha_i{}^{-1}\Gamma(R_{ij})X_i,$$

$$\overline{J}_{i22}=Y_iA_{ii}+W_{2i}C_{2i}+(Y_iA_{ii}+W_{2i}C_{2i})^T+(\alpha_i+\beta_i)Y_i^2+\alpha_i{}^{-1}\Gamma(R_{ij})$$

이다.

증명 다음과 같은 행렬들을 정의하자.

$$H_i=\begin{bmatrix} H_{11} & H_{21}{}^T \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \Delta A_{ii}X_i+\Delta B_{1i}W_{3i}+X_i\Delta A_{ii}{}^T+W_{3i}{}^T\Delta B_{1i}{}^T & \Delta A_{ii}+X_i\Delta A_{ii}{}^TY_i+W_{3i}{}^T\Delta B_{1i}{}^TY_i \\ \Delta A_{ii}{}^T+Y_i\Delta A_{ii}X_i+Y_i\Delta B_{1i}W_{3i} & Y_i\Delta A_{ii}+\Delta A_{ii}{}^TY_i \end{bmatrix},$$

$$H_{\Pi_{ij}}=\begin{bmatrix} \Delta A_{ij}X_i & \Delta A_{ij} \\ Y_i\Delta A_{ij}X_i & Y_i\Delta A_{ij} \end{bmatrix},\ Z_{\tilde{Q}_{ij}}=\begin{bmatrix} \alpha_iX_i{}^2 & \alpha_iX_i \\ \alpha_iX_i & \alpha_iI \end{bmatrix},$$

$$\overline{Z}_i=\sum_{j=1,\ j\neq i}^{N}\overline{Z}_{ij},$$

$$Z_i=\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{21}{}^T \\ Z_{21} & Z_{22}\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix} (\alpha_i+\beta_i)I+\alpha_i{}^{-1}X_i\Gamma(R_{ij})X_i+\beta_i^{-1}W_{3i}{}^T\Gamma(S_i)W_{3i} & (\alpha_i+\beta_i)Y_i+\alpha_i{}^{-1}X_i\Gamma(R_{ij})^T \\ (\alpha_i+\beta_i)Y_i+\alpha_i{}^{-1}X_i\Gamma(R_{ij}) & (\alpha_i+\beta_i)Y_i^2+\alpha_i{}^{-1}\Gamma(R_{ij})\end{bmatrix}$$

그러면 식 (2)에 의하여

$$H_i\le Z_i,\quad \begin{bmatrix} 0 & H_{\Pi_{ij}} \\ H_{\Pi_{ij}}{}^T & 0\end{bmatrix}\le\begin{bmatrix}\overline{Z}_{i1} & 0 \\ 0 & Z_{\tilde{Q}_{i1}}\end{bmatrix}$$

이므로 다음식을 얻을수 있다.

$$E_i=\begin{bmatrix} 0 & \overline{H}_{\Pi_{ij}} & 0 \\ \overline{H}_{\Pi_{ij}}{}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\le\begin{bmatrix}\overline{Z}_i & 0 & 0 \\ 0 & \overline{Z}_{\tilde{Q}_{i1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\overline{E}_i\,,$$

$$\tilde{H}_i=\begin{bmatrix} H_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\le\begin{bmatrix} Z_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}=\tilde{Z}_i$$

여기서

$$\overline{H}_{\Pi_{i1}}=\left[H_{\Pi_{i1}},\ \cdots,\ H_{\Pi_{i(i-1)}},\ H_{\Pi_{i(i+1)}},\ \cdots,\ H_{\Pi_{iN}}\right],$$

$$\overline{Z}_{\tilde{Q}_{i1}}=block\_diag\left[Z_{\tilde{Q}_{i1}},\ \cdots,\ Z_{\tilde{Q}_{i(i-1)}},\ Z_{\tilde{Q}_{i(i+1)}},\ \cdots,\ Z_{\tilde{Q}_{iN}}\right]$$

이다.

한편 $\Sigma_i=(\tilde{H}_i+E_i)-(\tilde{Z}_i+\overline{E}_i)\le 0$ 으로 놓고 다음과 같은 행렬을 정의하자.

$$G_i=\begin{bmatrix} \overline{G}_i & \overline{\Pi}_{i1} & \cdots & \overline{\Pi}_{i(i-1)} & \overline{\Pi}_{i(i+1)} & \cdots & \overline{\Pi}_{iN} & \Lambda_{1i} & \Lambda_{2i}{}^T \\ * & -\overline{Q}_{i1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & -\overline{Q}_{i(i-1)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\overline{Q}_{i(i+1)} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & * & * & * & -\overline{Q}_{iN} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\gamma I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -I\end{bmatrix}$$

여기서

$$\overline{G}_i=\begin{bmatrix} G_{i11} & G_{i21}{}^T \\ G_{i21} & G_{i22}\end{bmatrix}+\sum_{j=1,\,j\ne i}^{N}\overline{Q}_{ij}\,,$$

$$G_{i11}=(A_{ii}+\Delta A_{ii})X_i+(B_{1i}+\Delta B_{1i})W_{3i}+((A_{ii}+\Delta A_{ii})X_i+(B_{1i}+\Delta B_{1i})W_{3i})^T\,,$$

$$G_{i21}=(A_{ii}+\Delta A_{ii})^T+Y_i(A_{ii}+\Delta A_{ii})X_i+W_{2i}C_{2i}X_i+Y_i(B_{1i}+\Delta B_{1i})W_{1i}+W_{1i}\,,$$

$$G_{i31} = Y_i(A_{ii} + \Delta A_{ii}) + W_{2i}C_{2i} + (Y_i(A_{ii} + \Delta A_{ii}) + W_{2i}C_{2i})^T,$$

$$\overline{\Pi}_{ij} = \begin{bmatrix} A_{ij} + \Delta A_{ij} X_i & A_{ij} + \Delta A_{ij} \\ Y_i(A_{ij} + \Delta A_{ij})X_i & Y_i(A_{ij} + \Delta A_{ij}) \end{bmatrix}, \quad (j = 1,\ 2,\ \cdots,\ N,\quad j \neq i)$$

이며 G_i 는 Θ_i 의 A_{ii}, B_{1i}, A_{ij} 에 각각 $A_{ii} + \Delta A_{ii}$, $B_{1i} + \Delta B_{1i}, A_{ij} + \Delta A_{ij}$ 를 대입하여 얻은것이다.

이때 $\Psi_i(X_i,\ Y_i,\ \overline{Q}_{ij},\ W_{1i},\ W_{2i},\ W_{3i},\ \alpha_i,\ \beta_i) < 0$ 과 $\Sigma_i \le 0$ 으로부터

$$G_i = \Psi_i(X_i,\ Y_i,\ \overline{Q}_{ij},\ W_{1i},\ W_{2i},\ W_{3i},\ \alpha_i,\ \beta_i) + \Sigma_i < 0$$

이 성립하므로 정리 1에 의하여 정리 2가 성립한다는것을 알수 있다.(증명끝)

정리 2에서 식 (12)는 비선형행렬부등식이므로 보조실수 $\lambda_i \in (0,\ 1)$ 을 리용하여 그것의 풀이를 구할수 있다.

먼저 다음과 같은 행렬을 정의하자.

$$H_i(X_i,\ Y_i,\ \overline{Q}_{ij},\ W_{1i},\ W_{2i},\ W_{3i},\ \alpha_i,\ \beta_i,\ \lambda_i) = \Theta_i(X_i,\ Y_i,\ \overline{Q}_{ij},\ W_{1i},\ W_{2i},\ W_{3i}) + \\ + \lambda_i K_i(X_i,\ Y_i,\ W_{1i},\ W_{2i},\ W_{3i},\ \alpha_i,\ \beta_i)$$

여기서

$$K_i(X_i,\ Y_i,\ W_{1i},\ W_{2i},\ W_{3i},\ \alpha_i,\ \beta_i) = \\ = \mathrm{block\_diag}\{Z_i + \overline{Z}_i,\ Z_{\tilde{Q}_{i1}},\ \cdots,\ Z_{\tilde{Q}_{i(i-1)}},\ Z_{\tilde{Q}_{i(i+1)}},\ \cdots,\ Z_{\tilde{Q}_{iN}},\ 0,\ 0\}$$

이다.

이때

$$H_i(X_i,\ Y_i,\ \overline{Q}_{ij},\ W_{1i},\ W_{2i},\ W_{3i},\ \alpha_i,\ \beta_i,\ \lambda_i) = \\ = \begin{cases} \Theta_i(X_i,\ Y_i,\ \overline{Q}_{ij},\ W_{1i},\ W_{2i},\ W_{3i}),\ \lambda_i = 0 \\ \Psi_i(X_i,\ Y_i,\ \overline{Q}_{ij},\ W_{1i},\ W_{2i},\ W_{3i},\ \alpha_i,\ \beta_i),\ \lambda_i = 1 \end{cases}, \tag{13}$$

즉

$$H_i(X_i,\ Y_i,\ \overline{Q}_{ij},\ W_{1i},\ W_{2i},\ W_{3i},\ \alpha_i,\ \beta_i,\ \lambda_i) < 0,\ \lambda_i \in [0,\ 1] \tag{14}$$

이다. 따라서 식 (14)에서 λ 를 0부터 1사이에서 변화시키면 곧 식 (12)의 풀이를 얻을수 있다.

Schur의 보조정리로부터 식 (14)와 등가인 다음과 같은 2개의 행렬부등식들을 얻을수 있다.

$$H_{1i} = \begin{bmatrix} M_i & \Pi_j & \Lambda_{1i} & \Lambda_{21}^T & T_{1i} & T_{2i} & T_{3i} \\ * & -\tilde{Q}_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\alpha_i \lambda_i^{-1} \Gamma(R_{ii})^{-1} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\beta_i \lambda_i^{-1} \Gamma(S)^{-1} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\alpha_i \lambda_i^{-1} \left(\sum\limits_{j=1,\ j \neq i}^{N} \Omega(R_{ii}) \right)^{-1} \end{bmatrix} < 0 \tag{15}$$

$$H_{2i}=\begin{bmatrix} N_i & \Pi_j & \Lambda_{1i} & \Lambda_{21}{}^T & L_{1i} & L_{1i} & 0 \\ * & -\tilde{Q}_i & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{2i} \\ * & * & -\gamma I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\alpha_i\lambda_i{}^{-1}I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\beta_i\lambda_i{}^{-1}I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & L_{3i} \end{bmatrix}<0 \qquad (16)$$

여기서

$$M_i=\begin{bmatrix} M_{11} & M_{21}{}^T \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}+\sum_{j=1,\ j\neq i}^{N}\overline{Q}_{ji},\ \ N_i=\begin{bmatrix} N_{11} & N_{21}{}^T \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}+\sum_{j=1,\ j\neq i}^{N}(\overline{Q}_{ji}+\lambda_i\overline{Z}_{ji}),$$

$$M_{11}=A_{ii}X_i+B_{1i}W_{3i}+(A_{ii}X_i+B_{1i}W_{3i})^T+\lambda_i(\alpha_i+\beta_i)I,$$

$$M_{21}=A_{ii}{}^T+Y_iA_{ii}X_i+W_{2i}C_{2i}X_i+Y_iB_{1i}W_{3i}+W_{1i}+\lambda_i(\alpha_i+\beta_i)Y_i,$$

$$M_{22}=Y_iA_{ii}+W_{2i}C_{2i}+(Y_iA_{ii}+W_{2i}C_{2i})Y_i+\lambda_i(\alpha_i+\beta_i)Y_i^2,$$

$$\Pi_i=\left[\Pi_{i1}\ \cdots\ \Pi_{i(i-1)}\ \ \Pi_{i(i+1)}\ \cdots\ \Pi_{iN}\right],$$

$$T_{1i}=[X_i\ \ I]^T,\ T_{2i}=[W_{3i}\ \ 0]^T,\ T_{3i}=[I\ \ Y_i]^T,$$

$$N_{11}=A_{ii}X_i+B_{1i}W_{3i}+(A_{ii}X_i+B_{1i}W_{3i})^T+\lambda_i\alpha_i{}^{-1}X_i\Gamma(R_{ii})X_i+\lambda_i\beta_iW_{3i}{}^T\Gamma(S_i)W_{3i},$$

$$N_{21}=A_{ii}^T+Y_iA_{ii}X_i+W_{2i}C_{2i}X_i+Y_iB_{1i}W_{3i}+W_{1i}+\lambda_i\alpha_i^{-1}\Gamma(R_{ii})X_i,$$

$$N_{22}=Y_iA_{ii}+W_{2i}C_{2i}+(Y_iA_{ii}+W_{2i}C_{2i})Y_i+\lambda_i\alpha_i{}^{-1}\Gamma(R_{ii}),$$

$$\tilde{Q}_i=\mathrm{block\_diag}\left[\tilde{Q}_{i1},\ \cdots,\ \tilde{Q}_{i(i-1)},\ \tilde{Q}_{i(i+1)},\ \cdots,\ \tilde{Q}_{iN}\right],$$

$$\overline{Q}_i=\mathrm{block\_diag}\left[\overline{Q}_{i1},\ \cdots,\ \overline{Q}_{i(i-1)},\ \overline{Q}_{i(i+1)},\ \cdots,\ \overline{Q}_{iN}\right],$$

$$L_{1i}=\left[I\ \ \ Y_i\right]^T,\ \ L_{2i}=\mathrm{block\_diag}\{L_{2i1},\ \cdots,\ L_{2iN}\},$$

$$L_{2ij}=\left[X_i\ \ \ I\right]^T\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ N,\ j\neq i),$$

$$L_{3i}=\mathrm{block\_diag}\{-\alpha^{-1}\lambda^{-1}I,\ \cdots,\ -\alpha^{-1}\lambda^{-1}I\}$$

이다. 이때 식 (15)는 변수 Y_i, W_{2i}, λ_i를 고정하였을 때 변수 X_i, $\overline{Q}_{ij}$, W_{1i}, W_{3i}, α_i, β_i에 관한 LMI이고 식 (16)은 변수 X_i, W_{3i}, λ_i를 고정하였을 때 변수 Y_i, $\overline{Q}_{ij}$, W_{2i}, W_{1i}, α_i, β_i에 관한 LMI이다. 따라서 λ를 점차 증가시키면서 식 (15), (16)을 교차로 풀어 식 (14), (9)를 만족시키는 풀이를 구한 다음 식 (10)에 대하여 특이값분해를 진행하여 파라메터 U_i, V_i를 얻고 식 (11)에 대입하여 조종기의 파라메터행렬을 구한다.

3. 모의실험 및 결과분석

체계의 파라메터행렬은 다음과 같다.

$$A_{11}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},\ B_{11}=\begin{bmatrix} -1 & 0.1 \\ -0.1 & 1 \end{bmatrix},\ B_{21}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{12}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0.1 & 0.02\end{bmatrix},\ C_{11}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0.1 & 1\end{bmatrix},\ C_{21}=\begin{bmatrix}-0.01 & 1\\ 0 & 0.01\end{bmatrix},$$

$$A_{22}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix},\ B_{12}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix},\ B_{21}=\begin{bmatrix}1\\ 0.5\end{bmatrix},$$

$$A_{21}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ C_{12}=\begin{bmatrix}-0.1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ C_{22}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix},$$

$$D_{11}=\begin{bmatrix}0 & 0.01\\ 0.01 & 0.1\end{bmatrix},\ D_{21}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\ D_{12}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\ D_{22}=\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix},$$

$$R_{11}=\begin{bmatrix}0.1 & 0.05\\ 0.15 & 0\end{bmatrix},\ R_{12}=\begin{bmatrix}0.05 & 0.05\\ 0 & 0.1\end{bmatrix},\ S_1=S_2=\begin{bmatrix}0 & 0.1\\ 0.05 & 0\end{bmatrix}$$

초기상태 $x=[5\ \ 5\ \ 6\ \ 6]$ 으로 놓고 $\gamma=10$, $\omega_1=\omega_2=\sin t$ 일 때 풀이를 구하면 부분체계 1과 2의 출력반결합조종기파라메터행렬은 다음과 같다.

$$A_{c1}=\begin{bmatrix}15.894\,2 & -10.976\,3\\ 62.174\,0 & -50.382\,0\end{bmatrix},\ A_{c2}=\begin{bmatrix}15.732\,1 & 1.421\,0\\ 0.925\,0 & -13.144\,1\end{bmatrix},$$

$$B_{c1}=\begin{bmatrix}2.015\,3 & -3.501\,0\\ -48.442\,4 & -3.769\,8\end{bmatrix},\ B_{c2}=\begin{bmatrix}5.002\,9 & 2.337\,0\\ -4.689\,0 & 2.422\,1\end{bmatrix},$$

$$C_{c1}=\begin{bmatrix}-5.126\,0 & 2.318\,7\\ 10.999\,8 & -4.625\,7\end{bmatrix},\ C_{c2}=\begin{bmatrix}-0.874\,3 & -2.042\,9\\ 0.935\,0 & 2.693\,2\end{bmatrix}$$

모의실험결과는 그림과 같다.

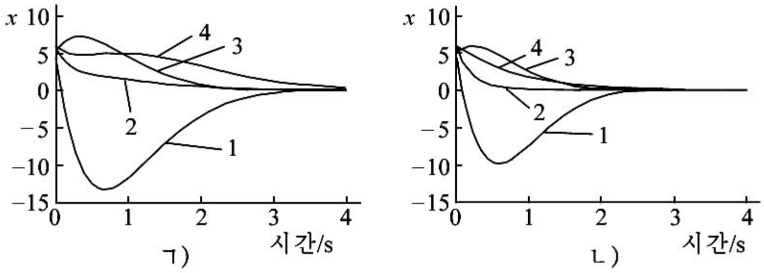

그림. 선행체계(ㄱ))와 제안한 체계(ㄴ))의 상태응답특성
1－x_{11}, 2－x_{12}, 3－x_{21}, 4－x_{22}

그림에서 보는바와 같이 론문에서 제기한 방법의 응답시간이 3s로서 선행한 방법보다 더 우월하다. 이것은 론문에서 설계한 조종기가 체계상태를 전반적으로 개선해주며 좋은 성능을 보장한다는것을 보여준다.

맺 는 말

비구조적불확정성을 가진 호상관련대체계가 점근안정하고 H_∞ 성능지표를 만족시키는 분산 H_∞ 출력반결합조종기설계문제를 설정하고 LMI방법을 리용하여 분산조종기를 설계하였으며 모의실험을 통하여 그 유효성을 검증하였다.

참 고 문 헌

[1] 김영일; 대체계조종, 김일성종합대학출판사, 141～150, 주체99(2010).
[2] 谢永芳 等; 控制与决策, 21, 7, 809, 2006.
[3] 蒋朝辉 等; 信息与控制, 35, 1, 47, 2006.

주체103(2014)년 10월 5일 원고접수

A Method of the Design of Decentralized H-Infinite Output Feedback Controller for the Uncertain Large-Scale System

Ri Jin Song

In this paper, we suggest a method of the design of decentralized H-infinite output feedback controller for uncertain large-scale interconnected systems and verified the its effectiveness to the simulation.

Key words: output feedback controller, uncertain large-scale systems