김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제3호

한가지 일반화된 르베그공간에서 하우스돌프연산자의 유계성

채 규 성

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《수학, 물리학, 화학, 생물학과 같은 기초과학부문에서 과학기술발전의 원리적, 방법론적기초를 다져나가면서 세계적인 연구성과들을 내놓아야 합니다.》

론문에서는 최근 수학과 물리학의 여러 분야에서 많이 취급되고있는 변지수모리－헤르쯔공간우에서 하우스돌프연산자의 유계성에 대한 문제를 연구하였다.

하우스돌프연산자에 관한 연구는 푸리에합렬의 존재성과 그 합을 구하는 하우스돌프의 방법과 마르꼬브모멘트문제로부터 시작되였으며 현재까지 푸리에합렬리론에서 광범히 리용되고있다.

Φ가 반실축 $(0, \infty)$에서 정의된 함수일 때 Φ에 의하여 생성되는 하우스돌프연산자는

$$H_\Phi f(x) = \int_0^\infty \frac{\Phi(t)}{t} f\left(\frac{x}{t}\right) dt \tag{1}$$

형태로 주어진다.

함수 Φ를 적당히 선택하면 하우스돌프연산자는 하디연산자와 케자로연산자, 하디－리틀우드－폴리아연산자, 리만－류빌의 분수적분연산자와 같은 조화해석에서 나오는 많은 연산자들로 귀착된다.[2, 3, 7, 8]

하우스돌프연산자에 대한 리론은 조화해석과 류체력학, 화상처리, 편미분방정식리론들에서 가장 기초적으로 제기되는 문제이다.

하우스돌프연산자는 Φ가 $\mathbf{R}^n$의 가측함수일 때

$$H_\Phi f(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\Phi(y)}{|y|^n} f\left(\frac{x}{|y|}\right) dy \tag{2}$$

형태로 주어진다.

최근 20여년간 여러 함수공간들에서 하우스돌프연산자의 유계성과 관련한 많은 결과들이 얻어졌다.[2－5, 10]

론문에서는 르베그공간에서의 결과를 보다 일반적인 변지수모리－헤르쯔공간에로 확장하는 문제를 연구하였다.

변지수모리－헤르쯔공간에 대하여 간단히 소개한다.

$$\mathrm{P}(\mathbf{R}^n) := \{p : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \mid \text{가측함수}\}$$

$p \in \mathrm{P}(\mathbf{R}^n)$일 때 $p^+ = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbf{R}^n} p(x)$, $p^- = \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\mathbf{R}^n} p(x)$로 표시한다.

$$L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n) := \left\{ f : \mathbf{R}^n\text{에서 가측함수} \,\middle|\, \rho_{p(\cdot)}(f) = \int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^{p(x)}\, dx < +\infty \right\}$$

를 변지수르베그공간 $L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$이라고 부르고 이때

$$\| f \|_{p(\cdot)} = \inf\left\{ \mu > 0 \,\middle|\, \rho_{p(\cdot)}\left(\frac{1}{\mu} f\right) \le 1 \right\}$$

를 변지수르베그공간 $L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$ 에서 함수 f 의 반노름으로 정의한다. $p(x) \equiv p$ 가 상수함수이면 고전적인 L^p 공간이다.

$L_{loc}^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n) := \{ f : \mathbf{R}^n$에서 가측함수$|$ 임의의 콤팍트모임 $K \subset \mathbf{R}^n$에 대하여 $f \in L^{p(\cdot)}(K)$ $\}$
로 표시한다.

함수 $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 는 만일 어떤 상수 $c_{\log} > 0$ 이 있어서 임의의 $x,\ y \in \mathbf{R}^n$ 에 대하여

$$| g(x) - g(y) | \le \frac{c_{\log}}{\log(e + 1/|x - y|)}$$

를 만족시키면 국부로그-휠데르련속이라고 부른다. 만일 임의의 $x \in \mathbf{R}^n$ 에 대하여

$$| g(x) - g(0) | \le \frac{c_{\log}}{\log(e + 1/|x|)}$$

를 만족시키면 원점에서 로그-휠데르련속, 어떤 상수 $c_{\log} > 0,\ g_\infty \in \mathbf{R}$ 가 있어서

$$| g(x) - g_\infty) | \le \frac{c_{\log}}{\log(e + |x|)}$$

를 만족시키면 무한대에서 로그-휠데르련속이라고 부른다.

편의상 $B_k = B(0,\ 2^k),\ R_k = B_k \setminus B_{k-1},\ \chi_k = \chi_{R_k},\ k \in \mathbf{Z}$ 로 표시하자.

정의[11] $0 < q < \infty,\ p \in \mathrm{P}(\mathbf{R}^n),\ 0 \le \lambda < \infty$ 이고 $\alpha : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 는 $\alpha \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$ 이라고 하자. 이때 변지수모리-헤르쯔(Morrey-Herz)공간은

$$MK_{q,p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),\lambda} := \{ f \in L_{loc}^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n \setminus \{0\}) \mid \| f \|_{MK_{q,p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),\lambda}} < \infty \}$$

$$\| f \|_{MK_{q,p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),\lambda}} = \sup_{L \in \mathbf{Z}} 2^{-L\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{L} \| 2^{k\alpha(\cdot)q} f \chi_k \|_{L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}^q \right)^{1/q}$$

에 의하여 정의된다.

변지수모리-헤르쯔공간에서 만일 $\alpha(\cdot)$ 와 $p(\cdot)$ 가 상수함수이고 $\lambda = 0$ 이면 공간은 고전적인 헤르쯔공간이 되고 $\alpha(\cdot) = \gamma / p,\ q = p$ 이면 무게붙은 르베그공간이 된다.

선행연구[8]에서는 $\alpha(\cdot)$ 가 상수인 변지수모리-헤르쯔공간에서 반선형연산자들의 유계성에 대한 충분조건들을 얻었다.

선행연구[1]에서는 선행연구[8]의 결과를 $\alpha(\cdot)$ 와 $\lambda(\cdot)$ 가 함수인 경우의 변지수모리-헤르쯔공간에서 특이적분반선형연산자들의 일정한 족에로 일반화하였다.

선행연구[9]에서는 하우스돌프연산자의 특수한 경우인 하디연산자에 대하여 변지수모리 및 하디-모리공간에서 유계성의 충분조건들을 얻었다.

론문에서는 르베그공간에서 하우스돌프연산자의 유계성과 관련한 선행연구[2]의 결과와 선행연구[9]에서의 결과를 변지수모리-헤르쯔공간에로 일반화하는 문제를 연구하였다. 론문에서는 선행연구[1]의 기호들과 기초적인 부등식들을 그대로 리용한다.

기본결과의 증명에 필요되는 다음의 보조정리를 도입한다.

보조정리 1 [6] $1 \le p(\cdot) \le \infty$ 이고 $p'(\cdot)$ 는

$$\frac{1}{p(\cdot)}+\frac{1}{p'(\cdot)}=1$$

을 만족시킨다고 하자. 이때

$$\int |fg|d\mu \le r_p \| f\|_{L^{p(\cdot)}} \| g\|_{L^{p'(\cdot)}}$$

이 성립한다. 여기서 $r_p=1+(1/p)^- -(1/p)^+$ 이다.

보조정리 2 $(X,\ M,\ \mu),\ (Y,\ N,\ \nu)$ 들은 $\sigma-$유한측도공간이고 $f:X\times Y$ 우의 $M\times N-$가측함수라고 하자. $1\le p(\cdot)\le\infty$ 이고 임의의 $y\in Y$ 에 대하여 $f(\cdot,\ y)\in L^{p(\cdot)}(\mu)$ 이면 부등식

$$\left\|\int f(\cdot,\ y)d\nu(y)\right\|_{L^{p(\cdot)}} \le C\int \| f(\cdot,\ y)\|_{L^{p(\cdot)}}\, d\nu(y)$$

가 성립한다.

보조정리 3[1] $0<q<\infty,\ p\in \mathrm{P}(\mathbf{R}^n),\ 0\le\lambda<\infty$, $\alpha:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 는 $\alpha\in L^\infty(\mathbf{R}^n)$ 이라고 하자. 만일 α 가 원점과 무한대에서 로그－휠데르련속이면

$$\| f\|_{MK^{\alpha(\cdot),\lambda}_{q,p(\cdot)}} \approx \max\left\{ \sup_{L\le 0,\ L\in\mathbf{Z}} 2^{-L\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{L} 2^{k\alpha(0)q}\| f\chi_k\|^q_{L^{p(\cdot)}}\right)^{1/q},\right.$$

$$\left.\sup_{L>0,\ L\in\mathbf{Z}}\left[2^{-L\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} 2^{k\alpha(0)q}\| f\chi_k\|^q_{L^{p(\cdot)}}\right)^{1/q} + 2^{-L\lambda}\left(\sum_{k=0}^{L} 2^{k\alpha_\infty q}\| f\chi_k\|^q_{L^{p(\cdot)}}\right)^{1/q}\right]\right\}$$

이다.

정리 $0<q<\infty,\ p\in\mathrm{P}(\mathbf{R}^n),\ 1<p^-\le p^+<\infty$ 라고 하자. $0\le\lambda<\infty$ 이고 $\alpha:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 는 $\alpha\in L^\infty(\mathbf{R}^n)$ 이며 원점과 무한대에서 로그－휠데르련속이라고 하자. Φ 는 부아닌 가측함수라고 하자. 만일

$$\int_{\mathbf{R}^n}\Phi(y)|y|^{\alpha_\infty-n-(\lambda n/p^-)}\,dy<\infty \tag{3}$$

이면 H_Φ 는 $MK^{\alpha(\cdot),\lambda}_{q,p(\cdot)}$ 에서 유계이다.

따름 $p\in\mathrm{P}(\mathbf{R}^n),\ 1<p^-\le p^+<\infty$ 라고 하자. Φ 는 부아닌 가측함수라고 하자. 이때 만일

$$\int_{\mathbf{R}^n}\Phi(y)|y|^{-n-(n/p^-)}\,dy<\infty \tag{4}$$

이면 H_Φ 는 $L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$ 에서 유계이다.

주의 1 $p(\cdot)$ 가 상수이면 변지수르베그공간은 르베그공간과 일치하므로 따름은 하우스돌프연산자의 유계성에 관한 선행연구[2]의 일반화로 된다.

주의 2 p 와 α 가 상수함수일 때 정리의 결론이 선행연구[4, 10]의 결과와 일치하므로 론문의 결과는 르베그공간과 모리－헤르쯔공간에서 얻은 결과들을 일반화한다. 또한 선행연구[9]에서 얻은 하우스돌프연산자의 특수한 경우인 하디연산자에 대하여 변지수모리 및 하디－모리공간에서 유계성의 충분조건들을 일정한 조건밑에 일반화한다.

참 고 문 헌

[1] A. Almeida, D. Drihem; J. Math. Anal. Appl., 394, 781, 2012.

[2] J. C. Chen et al.; Chin. Ann. Math., 33, 537, 2012.

[3] J. C. Chen, X. R. Zhu; J. Math. Anal. Appl., 409, 1, 428, 2014.

[4] J. C. Chen et al.; Appl. Math. J. Chinese Univ., 28, 548, 2013.

[5] J. C. Chen et al.; Sci. China. Math., 61, 1647, 2018.

[6] L. Diening et al.; Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 5～526, 2011.

[7] G. Gao et al.; Math. Inequal. Appl., 18, 155, 2015.

[8] M. Izuki et al.; Hiroshima Math. J., 40, 343, 2010.

[9] Ho Kwok-Pun; Mediterr. J. Math., 14, 79, 2017.

[10] J. Ruan, D. Fan; Math. Inequal. Appl., 19, 565, 2016.

[11] Lu Yan, Zhu Yue Ping; Acta Mathematica Sinica, 30, 7, 1180, 2014.

주체109(2020)년 3월 15일 원고접수

Boundedness for the Hausdorff Operators on a Kind of Generalized Lebesgue Spaces

Chae Kyu Song

In this paper, we consider the boundedness for the Hausdorff operators on the Morrey-Herz spaces with the variable exponents to be a kind of generalized Lebesgue spaces. Our results are a generalization of [2] and [4, 9, 10].

Keywords: Morrey-Herz Spaces with Variable Exponents, Hausdorff Operators