김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체104(2015)년 제61권 제7호 Vol. 61 No. 7 JUCHE104(2015).

두 행렬합의 드라진거꿀의 한가지 표시식에 대한 연구

민선경, 명금철

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《선진과학기술을 받아들이기 위한 사업을 적극적으로 벌려야 하겠습니다.

선진과학기술을 받아들이는것은 나라의 과학기술을 빨리 발전시키기 위한 중요한 방도의 하나로 됩니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제15권 499～500페지)

행렬합의 드라진거꿀(D－거꿀)에 관한 리론은 미분방정식리론, 계차방정식리론, 마르꼬브사슬리론 등 여러 분야들에서 중요하게 리용되고있다.[4, 5]

행렬의 D－거꿀리론에서 중요한 문제인 행렬합의 D－거꿀에 대하여서는 선행연구[1]에서 먼저 론의되였다.

일반적으로 $(P+Q)^{\mathrm{D}}$를 $P,\ Q,\ P^{\mathrm{D}},\ Q^{\mathrm{D}}$의 함수로 표시하는 문제는 아주 어려운 문제이며 미해명문제로 남아있다.[2]

선행연구[1]에서는 n차복소행렬 $P,\ Q$에 대하여 $PQ=QP=0$일 때의 $P+Q$의 D－거꿀의 표시식을, 선행연구[2]에서는 $PQ=0$일 때의 $P+Q$의 D－거꿀의 표시식을, 선행연구[3]에서는 $PQP=0,\ PQ^2=0$일 때와 $QPQ=0,\ P^2Q=0$일 때의 표시식을, 선행연구[6]에서는 n차복소행렬 $P,\ Q$가 조건 $PQ^{\mathrm{D}}=0,\ Q^{\pi}PQ=0,\ P^r=0$을 만족시킬 때 $(P+Q)^{\mathrm{D}}$의 표시식을 얻었다.

론문에서는 n차복소행렬 $P,\ Q$가 조건 $PQ^{\mathrm{D}}=0,\ P^{\mathrm{D}}Q=0$을 만족시키는 경우에 $(P+Q)^{\mathrm{D}}$의 표시식을 얻었다.

정의 n차복소행렬 A에 대하여 다음의 조건들을 만족시키는 n차복소행렬 $X\in\boldsymbol{C}^{n\times n}$을 D－거꿀이라고 부르고 A^{D}로 표시한다.

i) $A^{k+1}X=A^k$

ii) $XAX=X$

iii) $AX=XA$

여기서 k는 $\mathrm{rank}(A^k)=\mathrm{rank}(A^{k+1})$을 만족시키는 최소의 부아닌 옹근수이다. 이 k를 행렬 A의 지수라고 부르며 $\mathrm{Ind}(A)$로 표시한다.[1]

그리고 $I-AA^{\mathrm{D}}$를 A^{π}로 표시한다.

$\mathrm{Ind}(A)=r$인 $A\in\boldsymbol{C}^{n\times n}$에 대하여 불퇴화이며 코닐포텐트블로크형태인 $A=T\begin{pmatrix} C & O \\ O & N \end{pmatrix}T^{-1}$이 존재한다. 여기서 C는 불퇴화행렬, N은 위수가 r인 코닐포텐트행렬이다.

이로부터 $A^{\mathrm{D}}=T\begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}T^{-1},\ A^{\pi}=I-AA^{\mathrm{D}}=T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}T^{-1}$이다.[7]

보조정리 $M_1=\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$, $M_2=\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & A \end{pmatrix}$이고 $A,\ B$는 $\mathrm{Ind}(A)=r$, $\mathrm{Ind}(B)=s$인 정방행렬이라고 하면 $M_1^{\mathrm{D}}=\begin{pmatrix} A^{\mathrm{D}} & 0 \\ X & B^{\mathrm{D}} \end{pmatrix}$, $M_2^{\mathrm{D}}=\begin{pmatrix} B^{\mathrm{D}} & X \\ 0 & A^{\mathrm{D}} \end{pmatrix}$이다. 여기서

$$X=(B^{\mathrm{D}})^2\left(\sum_{i=0}^{r-1}(B^{\mathrm{D}})^i CA^i\right)A^{\pi}+B^{\pi}\left(\sum_{i=0}^{s-1}B^iC(A^{\mathrm{D}})^i\right)(A^{\mathrm{D}})^2-B^{\mathrm{D}}CA^{\mathrm{D}}.$$

정리 1 $Q\in \boldsymbol{C}^{n\times n}$, $s=\mathrm{Ind}(Q)$, $P\in \boldsymbol{C}^{n\times n}$, $P^{\mathrm{D}}Q=0,\ P^r=0$이면 다음의 식이 성립된다.

$$(P+Q)^{\mathrm{D}}=Q^{\mathrm{D}}+(Q^{\mathrm{D}})^2\left(\sum_{i=0}^{r+s-1}(Q^{\mathrm{D}})^iP(P+Q)^i\right)$$

증명 Q가 $Q=T\begin{pmatrix} C_Q & 0 \\ 0 & N_Q \end{pmatrix}T^{-1}$로 표시되였다고 하자. 여기서 $T,\ C_Q$는 불퇴화행렬이며 $N_Q^s=0$이다.

이때 $PQ^{\mathrm{D}}=0$이므로 P는 $P=T\begin{pmatrix} 0 & P_1 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}T^{-1}$로 표시된다.

따라서 $P+Q=T\begin{pmatrix} C_Q & P_1 \\ 0 & P_2+N_Q \end{pmatrix}T^{-1}$이다.

이때 $P_2,\ N_Q$가 제곱령행렬이므로 P_2+N_Q는 위수가 $r+s-1$인 제곱령행렬이다.

보조정리에 의하여 $(P+Q)^{\mathrm{D}}=T\begin{pmatrix} C_Q^{-1} & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}T^{-1}$이 성립된다.

또한 $Q^D=T\begin{pmatrix} C_Q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}T^{-1}$이고

$$Q^{\mathrm{D}}P(P+Q)^i=T\begin{pmatrix} C_Q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & P_1 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_Q & P_1 \\ 0 & P_2+N_Q \end{pmatrix}^i T^{-1}=T\begin{pmatrix} 0 & C_Q^{-1}P_1(P_2+N_Q)^i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}T^{-1}.$$

따라서 $Q^{\mathrm{D}}+(Q^{\mathrm{D}})^2\left(\sum_{i=0}^{t}(Q^{\mathrm{D}})^iP(P+Q)^i\right)=(P+Q)^{\mathrm{D}}$가 성립된다.(증명끝)

정리 2 $P\in \boldsymbol{C}^{n\times n}$, $r=\mathrm{Ind}(P)$, $Q\in \boldsymbol{C}^{n\times n}$, $s=\mathrm{Ind}(Q)$, $P^{\mathrm{D}}Q=0$, $PQ^{\mathrm{D}}=0$이면

$$\begin{aligned}(P+Q)^{\mathrm{D}}=&\,Q^{\mathrm{D}}\left(I+\sum_{i=0}^{t}(Q^{\mathrm{D}})^{i+1}P(P+Q)^i\right)P^{\pi}+Q^{\pi}\left(I+\sum_{k=0}^{t}(P+Q)^iQ(A^{\mathrm{D}})^{k+1}\right)A^{\mathrm{D}}-\\ &-(Q^{\mathrm{D}})^2\left(\sum_{i=0}^{t}(Q^{\mathrm{D}})^iP(P+Q)^iQ\right)P^{\mathrm{D}}-Q^{\mathrm{D}}\left(\sum_{i=0}^{t}P(P+Q)^iQ(P^{\mathrm{D}})^{i+2}\right)-\\ &-(Q^{\mathrm{D}})^2\left(\sum_{i=0}^{t-1}\sum_{k=0}^{t-1}(Q^{\mathrm{D}})^iP(P+Q)^{i+k+1}Q(P^{\mathrm{D}})^{k+2}\right)\end{aligned}$$

이 성립된다. 여기서 $t=s+r-1$이다.

증명 $P=T\begin{pmatrix} C_P & 0 \\ 0 & N_P \end{pmatrix}T^{-1}$ 로 표시되였다고 하자. 여기서 T, C_P 는 불퇴화행렬이며 N_P 는 위수가 r 인 제곱령행렬이다.

이때 $P^{\mathrm{D}}Q=0$ 으로부터 $Q=T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Q_1 & Q_2 \end{pmatrix}T^{-1}$ 이다.

이로부터 $P+Q=T\begin{pmatrix} C_P & 0 \\ Q_1 & N_P+Q_2 \end{pmatrix}T^{-1}$ 이며 따라서 $(P+Q)^{\mathrm{D}}=T\begin{pmatrix} C_P^{-1} & 0 \\ X & (N_P+Q_2)^{\mathrm{D}} \end{pmatrix}T^{-1}$ 이다. 여기서 $X=(N_P+Q_2)^{\pi}\left(\sum_{k=0}^{t}(N_P+Q_2)^k Q_1(C_P^{-1})^k\right)(C_P^{-1})^2-(N_P+Q_2)^{\mathrm{D}}Q_1 C_P^{-1}$.

이때 $PQ^{\mathrm{D}}=0$ 이므로 $N_P Q_2^{\mathrm{D}}=0$, $N_P^r=0$ 이고 N_P, Q_2 는 정리 1의 조건을 만족시킨다.

따라서 다음의 식들이 성립된다.

$$(N_P+Q_2)^{\mathrm{D}}=Q_2^{\mathrm{D}}+(Q^{\mathrm{D}})^2\sum_{i=0}^{t}(Q_2^{\mathrm{D}})^i N_P(N_P+Q_2)^i\ ,\ \ (N_P+Q_2)^{\pi}=Q_2^{\pi}-Q_2^{\mathrm{D}}\sum_{i=0}^{t}(Q^{\mathrm{D}})^i N_P(N_P+Q_2)^i$$

$$\begin{aligned} X &= Q_2^{\pi}\left(\sum_{k=0}^{t}(N_P+Q_2)^k Q_1(C_P^{-1})^k\right)(C_P^{-1})^2- \\ &\quad -Q_2^{\mathrm{D}}\left(\sum_{i=0}^{t}(Q_2^{\mathrm{D}})^i N_P(N_P+Q_2)^i\right)\left(\sum_{k=0}^{t}(N_P+Q_2)^k Q_1(C_P^{-1})^k\right)-(N_P+Q_2)^{\mathrm{D}}Q_1 C_P^{-1}= \\ &= Q_2^{\pi}\left(\sum_{k=0}^{t}(N_P+Q_2)^k Q_1(C_P^{-1})^k\right)(C_P^{-1})^2-Q_2^{\mathrm{D}}\left(\sum_{k=0}^{t}N_P(N_P+Q_2)^k Q_1(C_P^{-1})^k\right)(C_P^{-1})^2- \\ &\quad -(Q_2^{\mathrm{D}})^2\left(\sum_{k=0}^{t-1}\sum_{k=0}^{t-1}(B^{\mathrm{D}})^i N_P(N_P+Q_2)^{i+k+1}Q_1(C_P^{-1})^k\right)(C_P^{-1})^2-Q_2^{\mathrm{D}}Q_1 C_P^{-1}- \\ &\quad -(Q_2^{\mathrm{D}})^2\left(\sum_{i=0}^{t}(Q_2^{\mathrm{D}})^i N_P(N_P+Q_2)^i Q_1\right)C_P^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_1 &= Q^{\mathrm{D}}\left(I+\sum_{i=0}^{t}(Q^{\mathrm{D}})^{i+1}P(P+Q)^i\right)P^{\pi}= \\ &= T\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q_2^{\mathrm{D}} \end{pmatrix}+\sum_{i=0}^{t}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (Q_2^{\mathrm{D}})^{i+3}Q_1 & (Q_2^{\mathrm{D}})^{i+2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N_P(N_P+Q_2)^i \end{pmatrix}\right\}T^{-1}=T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (N_P+Q_2)^{\mathrm{D}} \end{pmatrix}T^{-1} \end{aligned}$$

$$W_2=Q^{\pi}\left(I+\sum_{k=0}^{t}(P+Q)^k Q(P^{\mathrm{D}})^{k+1}\right)A^D=T\begin{pmatrix} C_P^{-1} & 0 \\ -Q_2^{\mathrm{D}}Q_1 C_P^{-1}+Q_2{}^{\pi}\sum_{k}^{t}(N_P+Q_2)^k Q_1(C_P^{-1})^{k+2} & 0 \end{pmatrix}T^{-1}$$

$$W_3=-(Q_2^{\mathrm{D}})^2\left(\sum_{i=0}^{t}(Q^{\mathrm{D}})^i P(P+Q)^i Q\right)P^{\mathrm{D}}=-T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sum_{i=0}^{t}(Q_2^{\mathrm{D}})^{i+2}N_P(N_P+Q_2)^i Q_1 C_P^{-1} & 0 \end{pmatrix}T^{-1}$$

$$W_4=-Q^{\mathrm{D}}\left(\sum_{i=0}^{t}P(P+Q)^i Q(P^{\mathrm{D}})^{i+2}\right)=-T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sum_{i=0}^{t}Q_2^{\mathrm{D}}N_P(N_P+Q_2)^i Q_1(C_P^{-1})^{i+1} & 0 \end{pmatrix}T^{-1}$$

$$W_5=-(Q^{\mathrm{D}})\left(\sum_{i=0}^{t-1}\sum_{k=0}^{t-1}(Q^{\mathrm{D}})^i P(P+Q)^{i+k+1}Q(P^{\mathrm{D}})^{i+2}\right)=-T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sum_{i=0}^{t-1}\sum^{t-1}(Q^{\mathrm{D}})^i P(P+Q)^{i+k+1}Q_1(C_P^{-1})^{k+2} & 0 \end{pmatrix}T^{-1}$$

따라서 $(P+Q)^{\mathrm{D}}=W_1+W_2+W_3+W_4+W_5$ 이다. (증명끝)

실례 1 $PQ^{\mathrm{D}}=0,\ P^r=0$ 을 만족시키지만 $Q^{\pi}PQ=0$ 을 만족시키지 않는 행렬 $P,\ Q$ 들은 다음과 같다.

$$P=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&1&-1\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

실례 2 $PQ^{\mathrm{D}}=0,\ P^{\mathrm{D}}Q=0$ 을 만족시키지만 $Q^{\pi}PQP^{\pi}=0$ 을 만족시키지 않는 행렬 $P,\ Q$ 들은 다음과 같다.

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&1&-1\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

참 고 문 헌

[1] M. P. Drazin; Amer. Math., 65, 506, 1958.
[2] E. Robert et al.; Linear Algebra Appl., 322, 207, 2001.
[3] H. Yang et al.; J. Comput. Appl. Math., 235, 1412, 2011.
[4] S. L. Campbell et al.; Linear Algebra Appl., 10, 77, 1975.
[5] C. D. Meyer et al.; SIAM J. Appl. Math., 33, 1, 1977.
[6] N. C. Gonzalez; Linear Algebra Appl., 397, 229, 2005.
[7] S. L. Campbell et al.; Generalized Inverses of Linear Transformations, Dover, 34∼78, 1991.

주체104(2015)년 3월 5일 원고접수

The Study for a Representation of the Drazin Inverse of the Sum of Two Matrices

Min Son Gyong, Myong Kum Chol

In previous papers the Drazin inverse of the sum of two matrices was limited at its representation when the two matrices satisfy the condition $PQ^{\mathrm{D}}=0,\ Q^{\pi}PQ=0,\ P^r=0$.

We get a representation of $(P+Q)^{\mathrm{D}}$ when n order complex matrices $P,\ Q$ satisfy the condition $PQ^{\mathrm{D}}=0,\ P^{\mathrm{D}}Q=0$ as a generalization of its condition.

Key word: Drazin inverse