

## 잔류응력을 고려한 보구조물의 구부림진동응력결정

강진혁, 리철수

구조물의 잔류응력제거에서 진동시효과정에 구조물에 생기는 응력을 정확히 결정하는 것은 진동시효의 효과성을 높이는데서 중요한 문제로 제기된다.

선행연구[1]에서는 구조에 조성된 잔류응력을 고려하지 않고 보구조물의 진동시효과정에 생기는 진동응력을 결정하였으며 선행연구[2]에서는 압전박막의 공진특성에 주는 균일한 초기응력의 영향을 고찰하였다.

본문에서는 용접부의 잔류응력분포를 고려한 보구조물의 구부림진동응력을 결정하기 위한 연구를 진행하였다.

자름면높이가 작은 보구조에 대하여 용접부근방에 조성된 잔류응력은 축방향으로 작용하며 높이와 너비방향으로 균일하다고 볼수 있다. 일정한 자름면을 가지는 보의 축방향 잔류응력을 고려한 구부림진동미분방정식은 다음과 같이 표시된다.[2]

$$EJ \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} - A\sigma_r(x) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = P \quad (1)$$

여기서  $EJ$ 는 보의 구부림역세기,  $\rho$ ,  $A$ 는 각각 재료의 밀도와 보의 자름면적,  $V$ 는 보의 처짐,  $\sigma_r(x)$ 는 보의 축방향을 따르는 자름면에 작용하는 축방향잔류응력,  $P$ 는 보에 작용하는 분포점이다.(그림 1)

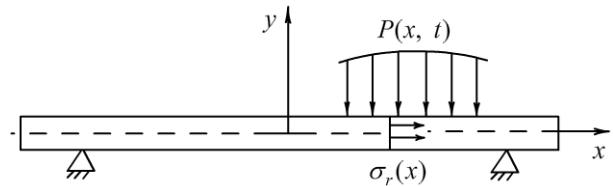


그림 1. 잔류응력을 가지는 보

### 1. 잔류응력을 가지는 보의 구부림고유진동

잔류응력을 가지는 보구조의 고유진동방정식은 다음과 같다.

$$EJ \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} - A\sigma_r(x) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

방정식 (2)는 변결수4계동차편미분방정식으로서 정확한 풀이를 구할수 없으므로 해밀턴원리를 리용하여 근사적방법으로 풀이를 구하기로 한다.

축방향잔류응력을 고려한 보의 동력학적구부림문제에 대한 특성함수는 다음과 같이 표시된다.

$$\chi = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{-l/2}^{l/2} \left[ \rho A \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 + \sigma_r(x) A \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 - EJ \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx dt \quad (3)$$

여기서  $T = 2\pi/\omega$ 는 고유진동의 주기이다.

특성길이  $l_0 = l/2$ 과 재료의 류동한계  $\sigma_s$ 를 리용하여 무차원자리표  $\eta = x/l_0$ 와 무차원응력  $S(\eta) = \sigma_r(x)/\sigma_s$ 를 도입하고 고유진동방정식 (2)의 풀이를

$$V(x, t) = l_0 v(\eta) \sin(\omega t + \varphi) \quad (4)$$

형태로 결정하자. 이때 식 (3)은 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} \chi = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{-1}^1 & \left[ \rho A \omega^2 l_0^2 v^2(\eta) \cos^2(\omega t + \varphi) + \sigma_s A S(\eta) [v'(\eta)]^2 \sin^2(\omega t + \varphi) - \right. \\ & \left. - EJ \frac{1}{l_0^2} [v''(\eta)]^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \right] l_0 d\eta dt \end{aligned} \quad (5)$$

지점의 무차원자리표를  $\eta_4$  로 표시하고 진동형식을 근사적으로 다음과 같은 형태로 결정하자.

$$V(\eta) = (\eta^2 - \eta_4^2)(\alpha_1 + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \eta^2) \quad (6)$$

$\rho A l_0^4 / (EJ) = c_1$ ,  $\sigma_s A l_0^2 / (EJ) = c_2$  로 표시하고 식 (5)에 (6)을 대입한 다음 시간에 관하여 적분하면 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} \chi = \frac{EJT}{4l_0} \int_{-1}^1 & \{ c_1 \omega^2 [(\eta^2 - \eta_4^2)a_1 + (\eta^3 - \eta_4^2 \eta)a_2 + (\eta^4 - \eta_4^2 \eta^2)a_3]^2 + \\ & + c_2 S(\eta) [2\eta a_1 + (3\eta^2 - \eta_4^2)a_2 + (4\eta^3 - 2\eta_4^2 \eta)a_3]^2 - [2a_1 + 6\mu a_2 + (12\eta^2 - 2\eta_4^2)a_3]^2 \} d\eta \end{aligned} \quad (7)$$

해밀턴원리에 의하여  $\partial \chi / \partial a_i = 0$  ( $i=1, 2, 3$ ) 이므로

$$\begin{cases} (H_{11}^0 \omega^2 + H_{11})a_1 + H_{12}a_2 + (H_{13}^0 \omega^2 + H_{13})a_3 = 0 \\ H_{12}a_1 + (H_{22}^0 \omega^2 + H_{22})a_2 + H_{23}a_3 = 0 \\ (H_{13}^0 \omega^2 + H_{13})a_1 + H_{23}a_2 + (H_{33}^0 \omega^2 + H_{33})a_3 = 0 \end{cases} \quad (8)$$

이 얻어진다. 여기서

$$H_{11}^0 = c_1 \left( \frac{2}{5} - \frac{4}{3} \eta_4^2 + 2\eta_4^4 \right), \quad H_{11} = 4c_2 d_2 - 8, \quad H_{12} = c_2 (6d_3 - 2\eta_4^2 d_1)$$

$$H_{13}^0 = c_1 \left( \frac{2}{7} - \frac{4}{5} \eta_4^2 + \frac{2}{3} \eta_4^4 \right), \quad H_{13} = c_2 (8d_4 - 4\eta_4^2 d_2) - (16 - 8\eta_4^2)$$

$$H_{22}^0 = c_1 \left( \frac{2}{7} - \frac{4}{5} \eta_4^2 + \frac{2}{3} \eta_4^4 \right), \quad H_{22} = c_2 (9d_4 - 6\eta_4^2 d_2 + \eta_4^4 d_0) - 24$$

$$H_{23} = c_2 (12d_5 - 10\eta_4^2 d_3 + 2\eta_4^4 d_1), \quad H_{33}^0 = c_1 \left( \frac{2}{9} - \frac{4}{7} \eta_4^2 + \frac{2}{5} \eta_4^4 \right)$$

$$H_{33} = c_2 (16d_6 - 16\eta_4^2 d_4 + 4\eta_4^4 d_2) - \left( \frac{288}{5} - 32\eta_4^2 + 8\eta_4^4 \right)$$

$$d_n = \int_{-1}^1 S(\eta) \eta^n d\eta \quad (n=1, 2, \dots, 6)$$

우의 동차방정식이 령아닌 풀이를 가지려면 결수행렬식

$$\begin{vmatrix} H_{11}^0 \omega^2 + H_{11} & H_{12} & H_{13}^0 \omega^2 + H_{13} \\ H_{12} & H_{22}^0 \omega^2 + H_{22} & H_{23} \\ H_{13}^0 \omega^2 + H_{13} & H_{23} & H_{33}^0 \omega^2 + H_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

이어야 한다. 이 방정식을 풀면 3개의 고유진동수  $\omega_i (i=1, 2, 3)$  와 대응하는 결수  $a'_{ji} (i, j=1, 2, 3)$  가 얻어지며 식 (8)로부터 그것에 대응하는 3개의 고유형식들은 다음과 같이 결정된다.

$$v_i(\eta) = (\eta^2 - \eta_4^2)(a'_{1i} + a'_{2i}\eta + a'_{3i}\eta^2) \quad (i=1, 2, 3)$$

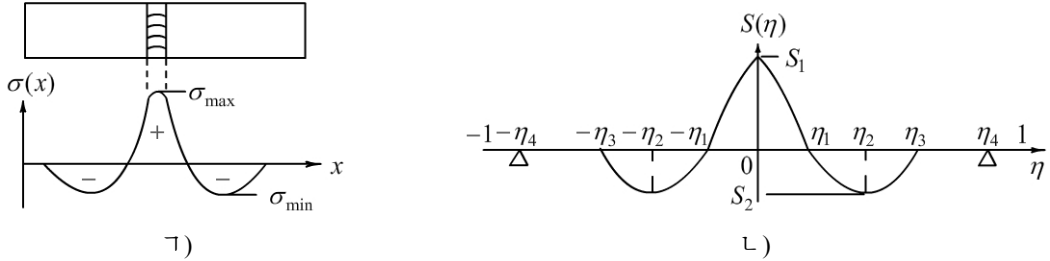


그림 2. 용접부에서의 잔류응력분포

ㄱ) 용접부에서의 잔류응력분포형태, ㄴ) 무차원자리표에 따르는 잔류응력분포곡선

금속을 맞댐용접하는 경우 용접부근방에서의 잔류응력은 그림 2의 ㄱ)에서와 같은 형태로 분포된다.[3] 이러한 잔류응력분포는 무차원자리표에서 다음과 같이 표시할수 있다.(그림 2의 ㄴ))

$$S(\eta) = \begin{cases} 0 & (-1 \leq \eta \leq -\eta_3) \\ S_1(\eta) & (-\eta_3 \leq \eta \leq 0) \\ S_1(-\eta) & (0 \leq \eta \leq \eta_3) \\ 0 & (\eta_3 \leq \eta \leq 1) \end{cases} \quad (10)$$

$$S_1(\eta) = (\eta - \eta_1)(\eta - \eta_3)(b_1 + b_2\eta + b_3\eta^2 + b_4\eta^3) \quad (11)$$

재료의 류동한계를  $\sigma_s$ , 용접부근방의 최대응력과 최소응력을  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_{\min}$  으로,  $S_1 = \sigma_{\max} / \sigma_s$ ,  $S_2 = \sigma_{\min} / \sigma_s$  으로 표시할 때 조건  $S(0) = S_1$ ,  $S'(0) = 0$ ,  $S(\eta_2) = S_2$ ,  $S'(\eta_2) = 0$  을 만족시키도록 식 (11)의 결수들을 결정하면 그 결수들은 다음과 같다.

$$b_1 = \frac{\eta_1 + \eta_3}{\eta_1^2 \eta_3^2} S_1, \quad b_2 = \frac{\eta_1 + \eta_3}{\eta_1 \eta_3}$$

$$b_3 = \frac{5\eta_2^2 - 4\eta_1\eta_2 - 4\eta_2\eta_3 + 3\eta_1\eta_3}{(\eta_2 - \eta_1)^2 (\eta_2 - \eta_3)^2 \eta_2^2} S_2 - \frac{3\eta_1\eta_3 + 2\eta_1\eta_2 + 2\eta_3\eta_2}{\eta_1^2 \eta_2^2 \eta_3^2} S_1$$

$$b_4 = \frac{-4\eta_2^2 + 3\eta_1\eta_2 + 3\eta_2\eta_3 - 2\eta_1\eta_3}{(\eta_2 - \eta_1)^2 (\eta_2 - \eta_3)^2 \eta_2^3} S_2 + \frac{2\eta_1\eta_3 + \eta_2\eta_1 + \eta_2\eta_3}{\eta_1^2 \eta_2^2 \eta_3^2} S_1$$

재료의 탄성결수  $E = 210\text{GPa}$ , 류동한계  $\sigma_s = 345\text{MPa}$ , 밀도  $\rho = 7800\text{kg/m}^3$  이며 길이  $l = 1\text{m}$ , 너비  $0.1\text{m}$ , 높이  $0.01\text{m}$ 인 직4각형 자름면보에 대하여  $\eta_1 = 0.05$ ,  $\eta_2 = 0.1$ ,  $\eta_3 = 0.15$ ,  $\eta_4 = 1$ ,  $S_1 = 0.9$ ,  $S_2 = -0.4$  인 경우에 3개의 고유진동수는  $\omega_1 = 159.3\text{rad/s}$ ,  $\omega_2 = 700.0\text{rad/s}$ ,  $\omega_3 = 1997.9\text{rad/s}$  로 얻어지며 대응하는 고유형식들은 다음과 같이 결정된다.

$$\begin{cases} v_1(\eta) = (\eta^2 - \eta_4^2)(1 + a'_{31}\eta^2) \\ v_2(\eta) = (\eta^2 - \eta_4^2)\eta \\ v_3(\eta) = (\eta^2 - \eta_4^2)(1 + a'_{33}\eta^2) \end{cases} \quad (12)$$

여기서  $a'_{31} = -0.2123$ ,  $a'_{33} = -7.3047$  이다.

잔류응력이 없는 경우 논문의 방법으로 고유진동수를 결정하면  $\omega_1 = 147.9 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_2 = 751.9 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_3 = 1974.4 \text{ rad/s}$  와 같다. 이로부터 잔류응력( $S_1 = 0.9$ )을 고려하는 경우 1차고유진동수는 7.7% 증가한다는것을 알수 있다.

## 2. 잔류응력을 가지는 보의 정상구부림강제진동과 진동응력

조화외력  $P(x) \sin(\bar{\omega}t + \varphi)$  가 작용하는 경우 잔류응력을 가지는 보의 구부림진동방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^4 V}{\partial x^4} - \frac{\sigma_r(x)A}{EJ} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\rho A}{EJ} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{P(x)}{EJ} \sin \bar{\omega}t \quad (13)$$

이제  $p(\eta) = P(x)l_0^3/(EJ)$ ,  $k^4 = c_1\bar{\omega}^2$ 을 도입하고 정상강제진동의 풀이를  $V(x, t) = l_0v(\eta) \sin(\bar{\omega}t + \varphi)$  형태로 결정하자. 그러면 식 (12)로부터

$$v^{(4)}(\eta) - c_2S(\eta)v^{(2)}(\eta) - c_1\bar{\omega}^2v(\eta) = P(\eta) \quad (14)$$

가 얻어진다. 방정식 (13)의 풀이와 분포짐을 고유함수열에 의하여 다음과 같이 전개하자.

$$v(\eta) = \sum_{i=1}^m A_i^* v_i(\eta) \quad (15)$$

$$p(\eta) = \sum_{i=1}^m P_i^* v_i(\eta) \quad (16)$$

여기서  $A_i^*$ 은 결정되어야 할 미지량이며  $P_i^* = \int p(\eta)v_i(\eta)d\eta$  이다.

식 (15)와 (16)을 식 (14)에 대입하면

$$\sum_{i=1}^m [A_i^* v_i^{(4)}(\eta) - c_2S(\eta)A_i^* v_i^{(2)}(\eta) - c_1\bar{\omega}^2 A_i^* v_i(\eta)] = \sum_{i=1}^m P_i^* v_i(\eta)$$

가 얻어지며  $v_i^{(4)}(\eta) - c_2S(\eta)v_i^{(2)}(\eta) = c_1\omega_i^2 v_i(\eta)$  라는것을 고려하고  $v_i(\eta)$ 의 결수들을 비교하면

$$A_i^* = \frac{P_i^*}{c_1\omega_i^2(1-r_i^2)}$$

이 얻어진다. 여기서  $r_i = \bar{\omega}/\omega_i$  ( $i=1, 2, 3$ )이다. 따라서

$$v(\eta) = \sum_{i=1}^m \frac{v_i(\eta)}{c_1\omega_i^2 \left(1 - \frac{\bar{\omega}^2}{\omega_i^2}\right)} \cdot \int_{-1}^1 p(\eta)v_i(\eta)d\eta \quad (17)$$

보의 가운데점에 집중짐  $P(x) = P_0\delta(x)$ 가 작용하는 경우에 앞에서 구한 식 (12)를 대입하면 정상강제진동에 대한 풀이는 다음과 같이 결정된다.

$$V(\eta, t) = \frac{P_0}{\rho A} \eta_4^2 (\eta^2 - \eta_4^2) \left[ \frac{(1+a'_{31}\eta^2)}{\omega_1^2(1-r_1^2)} + \frac{(1+a'_{33}\eta^2)}{\omega_3^2(1-r_3^2)} \right] \sin \bar{\omega}t$$

보의 자름면에 생기는 속힘모멘트는 다음과 같다.

$$M = EJ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{EJP_0}{\rho A l_0} \eta_4^2 \left[ \frac{2(1 - a'_{31}\eta_4^2) + 12a'_{31}\eta^2}{\omega_1^2(1 - r_1^2)} + \frac{2(1 - a'_{33}\eta_4^2) + 12a'_{33}\eta^2}{\omega_3^2(1 - r_3^2)} \right] \sin \bar{\omega} t$$

보의 자름면에 걸리는 최대응력은 다음과 같이 결정된다.

$$\sigma_{\max}(x) = \sigma_{\text{동}}(x) + \sigma_r(x) = \frac{M_{\max}}{W} + \sigma_r(x)$$

여기서  $W$ 는 보의 자름면결수이다.

진동시효조건  $\sigma_s < \sigma_{\max} < \sigma_R$  ( $\sigma_R$ 는 비대칭결수가  $R$ 인 경우의 피로한계)를 만족시키는  $P_0$ 을 결정하여 가진력의 크기를 결정할수 있다.

## 맺는 말

축방향잔류응력이 주어진 보구조의 구부림진동에 대한 고유진동수와 고유형식을 해밀턴원리에 의하여 근사적으로 구하고 조화외력에 의한 정상강제진동과정에서의 보의 처짐특성과 진동응력을 결정하였다.

## 참고 문헌

- [1] 高永毅 等; 振动, 测试与诊断, 20, 1, 53, 2000.
- [2] 黄德进 等; 振动与冲击, 32, 10, 146, 2013.
- [3] 李继山 等; 金属热处理, 1, 30, 2001.

주체107(2018)년 9월 8일 원고접수

## The Determination of Flexible Vibrational Stress in the Beam Structure Considering Residual Stress

*Kang Jin Hyok, Ri Chol Su*

In this paper, we determine approximately natural frequencies and modes for the flexible vibration of beam structure with given residual stress, and obtain the deflection and vibrational stress of beam in the process of stationary forced vibration by harmonic force.

Key words: residual stress, beam, flexible vibration