3차원6각기하에서 다군중성자확산방정식의 가로적분처리에 대한 연구

허일문, 옥금혁, 서철

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《주체적인 핵동력공업을 창설하고 첨단과학기술의 토대우에서 발전시켜나가야 합니다.》

고속증식로나 WWER형가압경수로의 로심은 6각기둥형연료집합체로 구성되여있다. 현재까지 정방형연료집합체로 구성된 로심에 대하여서는 현대거친그물방법의 하나인 매듭그린함수법이 광범히 적용되였으나 6각기하에 대하여서는 거의나 적용된것이 없다.[1, 2, 4, 5] 6각기하에서 매듭그린함수법의 계산모형이 소개[3]되였으나 가로적분처리를 포함한 구체적인 수학적처리에서는 2차원모형으로 국한되여있다. 다군확산방정식의 가로적분처리는 매듭법들에서 보편적으로 거치는 선행공정이다.

론문에서는 3차원6각기하에서 다군중성자확산방정식의 가로적분처리와 관련한 수학적모형을 확립하였다.

균질화된 매듭 k에서 다군중성자확산방정식은 다음과 같다.

$$-D_g^k\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi_g^k(x,\ y,\ z)+\Sigma_{r,\,g}^k\Phi_g^k(x,\ y,\ z)=Q_g^k(x,\ y,\ z) \tag{1}$$

여기서

$$Q_g^k(x,\ y,\ z)=\left(\sum_{g'\neq g}\Sigma_{g\to g'}^k+\frac{\chi_g}{k}\sum_{g'=1}^{G}\nu_g\Sigma_{gg'}^k\right)\Phi_{g'}^k(x,\ y,\ z) \tag{2}$$

이다.

방정식 (1)을 매듭 k에 대하여 체적적분하면 매듭중성자평형방정식은 다음과 같다.

$$\frac{1}{3a}\sum_{x=x,\,u,\,v}[J_{gx}^k(a)-J_{gx}^k(-a)]+\frac{1}{2a_z^k}[J_{gz}^k(a_z^k)-J_{gz}^k(-a_z^k)]+ \\ +\Sigma_{R,\,g}^k\overline{\Phi}_g^k=\overline{Q}_g^k \tag{3}$$

여기서 a는 6각형의 마주한 면사이거리의 1/2이며 a_z^k는 매듭높이의 1/2이다.(그림) 그리고

$$\overline{\Phi}_g^k=\frac{1}{V_k}\int_{-a_z^k}^{a_z^k}dz\int_{-a}^{a}dx\int_{-y_s(x)}^{y_s(x)}\Phi_g^k(x,\ y,\ z)dy \tag{4}$$

$$\overline{Q}_g^k=\frac{1}{V_k}\int_{-a_z^k}^{a_z^k}dz\int_{-a}^{a}dx\int_{-y_s(x)}^{y_s(x)}Q_g^k(x,\ y,\ z)dy \tag{5}$$

는 각각 매듭평균중성자묶음과 매듭평균중성자원천이다.

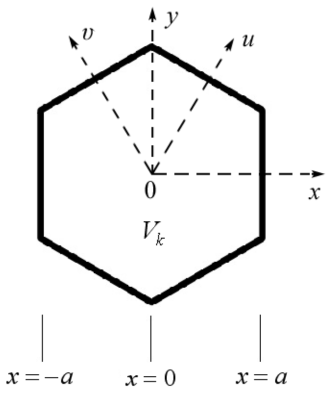

그림. 6각형매듭에서 자리표계선정

여기서

$$V_k = \int_{-a_z^k}^{a_z^k} dz \int_{-a}^{a} dx \int_{-y_s(x)}^{y_s(x)} dy = 4\sqrt{3}a^2 a_z^k$$

는 매듭 k의 체적이며 $y_s(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}(2a - |x|)$ 이다. 또한

$$J_{gx}^k(\pm a) = \frac{1}{2a_z^k} \int_{-a_z^k}^{a_z^k} dz \left\{ \frac{1}{2y_s(x)} \int_{-y_s(x)}^{y_s(x)} \left[-D_g^k \frac{\partial}{\partial x} \Phi_g^k(x,\ y,\ z) \right] dy \right\}_{x=\pm a} \tag{6}$$

$$J_{gx}^k(\pm a_z^k) = \frac{1}{2\sqrt{3}a^2} \int_{-a}^{a} dx \left\{ \int_{-y_s(x)}^{y_s(x)} \left[-D_g^k \frac{\partial}{\partial x} \Phi_g^k(x,\ y,\ z) \right] dy \right\}_{x=\pm a_z^k} \tag{7}$$

는 각각 $x(x = x,\ u,\ v)$축 및 z축방향의 면평균정미중성자흐름이다.

방정식 (1)에 대하여 x축에 수직인 두 방향에 대한 가로적분을 실시하자.

루실항의 x축성분에 대한 가로적분식은 다음과 같다.

$$\int_{-a_z^k}^{a_z^k} dz \int_{-y_s(x)}^{y_s(x)} \left[-D_g^k \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi_g^k(x,\ y,\ z) \right] dy = \int_{-a_z^k}^{a_z^k} dz \int_{-y_s(x)}^{y_s(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left[-D_g^k \frac{\partial}{\partial x} \Phi_g^k(x,\ y,\ z) \right] dy =$$

$$= \frac{d}{dx} \int_{-a_z^k}^{a_z^k} dz \int_{-y_s(x)}^{y_s(x)} \left[-D_g^k \frac{\partial}{\partial x} \Phi_g^k(x,\ y,\ z) \right] dy - y_s'(x) \left\{ \int_{-a_z^k}^{a_z^k} \left[-D_g^k \frac{\partial}{\partial x} \Phi_g^k(x,\ y,\ z) \right]_{y=y_s(x)} dz + \right.$$

$$\left. + \int_{-a_z^k}^{a_z^k} \left[-D_g^k \frac{\partial}{\partial x} \Phi_g^k(x,\ y,\ z) \right]_{y=-y_s(x)} dz \right\} = \frac{d}{dx} J_{gx}^k(x) - y_s'(x)[J_{gx}^k(x,\ y_s(x)) + J_{gx}^k(x,\ -y_s(x))] \tag{8}$$

여기서

$$J_{gx}^k(x) = \int_{-a_z^k}^{a_z^k} dz \int_{-y_s(x)}^{y_s(x)} \left[-D_g^k \frac{\partial}{\partial x} \Phi_g^k(x,\ y,\ z) \right] dy \tag{9}$$

는 가로적분중성자흐름이며

$$J_{gx}^k(x,\ \pm y_s(x)) = \int_{-a_z^k}^{a_z^k} \left[-D_g^k \frac{\partial}{\partial x} \Phi_g^k(x,\ y,\ z) \right]_{y=\pm y_s(x)} dz \tag{10}$$

이다. 식 (8)에서 라이브니쯔공식[3]

$$\frac{d}{dx} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,\ y) dy = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,\ y) dy + \frac{d\beta}{dx} f(x,\ \beta) - \frac{d\alpha}{dx} f(x,\ \alpha)$$

를 리용하였다. 한편 가로적분중성자묶음을 다음과 같이 정의한다.

$$\Phi_{gx}^k(x) = \int_{-a_z^k}^{a_z^k} dz \int_{-y_s(x)}^{y_s(x)} \Phi_g^k(x,\ y,\ z) dy \tag{11}$$

라이브니쯔공식을 리용하여 가로적분중성자흐름과 가로적분중성자묶음사이의 관계를 구하면 다음과 같다.

$$J_{gx}^k(x) = -D_g^k \frac{d}{dx}\Phi_{gx}^k(x) + D_g^k y_s'(x)[\Phi_g^k(x,\ y_s(x)) + \Phi_g^k(x,\ -y_s(x))] \tag{12}$$

여기서

$$\Phi_g^k(x,\ \pm y_s(x)) = \int_{-a_z^k}^{a_z^k} \Phi_g^k(x,\ y,\ z)\Big|_{y=\pm y_s(x)} dz \tag{13}$$

이다. 식 (12)를 미분하면 다음의 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}J_{gx}^k(x) = &-D_g^k \frac{d^2}{dx^2}\Phi_{gx}^k(x) + D_g^k y_s'(x)\frac{d}{dx}[\Phi_g^k(x,\ y_s(x)) + \Phi_g^k(x,\ -y_s(x))] \\ &+ D_g^k y_s''(x)[\Phi_g^k(x,\ y_s(x)) + \Phi_g^k(x,\ -y_s(x))]\end{aligned} \tag{14}$$

식 (14)를 식 (8)에 대입하면 루실항의 x축성분에 대한 가로적분식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\int_{-a_z^k}^{a_z^k} dz \int_{-y_s(x)}^{y_s(x)} \left[-D_g^k \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi_g^k(x,\ y,\ z)\right] dy = &-D_g^k \frac{d^2}{dx^2}\Phi_{gx}^k(x) + D_g^k y_s'(x)\frac{d}{dx}[\Phi_g^k(x,\ y_s(x)) + \Phi_g^k(x,\ -y_s(x))] + \\ &+ D_g^k y_s''(x)[\Phi_g^k(x,\ y_s(x)) + \Phi_g^k(x,\ -y_s(x))] - y_s'(x)[J_{gx}^k(x,\ y_s(x)) + J_{gx}^k(x,\ -y_s(x))]\end{aligned} \tag{15}$$

루실항의 y축 및 z축성분에 대한 가로적분식은 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\int_{-a_z^k}^{a_z^k} dz \int_{-y_s(x)}^{y_s(x)} \left[-D_g^k \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi_g^k(x,\ y,\ z)\right] dy &= \int_{-a_z^k}^{a_z^k} dz \int_{-y_s(x)}^{y_s(x)} \frac{\partial}{\partial y}\left[-D_g^k \frac{\partial}{\partial y}\Phi_g^k(x,\ y,\ z)\right] dy = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}[J_{gn}^k(x,\ y_s(x)) - J_{gn}^k(x,\ -y_s(x))]\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}\int_{-a_z^k}^{a_z^k} dz \int_{-y_s(x)}^{y_s(x)} \left[-D_g^k \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Phi_g^k(x,\ y,\ z)\right] dy &= \int_{-y_s(x)}^{y_s(x)} dy \int_{-a_z^k}^{a_z^k} \frac{\partial}{\partial z}\left[-D_g^k \frac{\partial}{\partial z}\Phi_g^k(x,\ y,\ z)\right] dz = \\ &= J_{gz}^k(x,\ a_z^k) - J_{gz}^k(x,\ -a_z^k)\end{aligned} \tag{17}$$

여기서

$$J_{gn}^k(x,\ \pm y_s(x)) = \int_{-a_z^k}^{a_z^k} \left[-D_g^k \frac{\partial}{\partial n}\Phi_g^k(x,\ y,\ z)\right]_{y=\pm y_s(x)} dz \tag{18}$$

는 $\pm y_s(x)$ 면에 대한 법선방향($u,\ v$축방향)의 가로적분정미중성자흐름이며

$$J_{gz}^k(x,\ \pm a_z^k) = \int_{-y_s(x)}^{y_s(x)} \left[-D_g^k \frac{\partial}{\partial z}\Phi_g^k(x,\ y,\ z)\right]_{z=\pm a_z^k} dy \tag{19}$$

이다. 식 (15), (16), (17)을 종합하면 가로적분중성자묶음에 대한 방정식은 다음과 같다.

$$-D_g^k \frac{d^2}{dx^2}\Phi_{gx}^k(x) + \Sigma_{r,\ g}^k \Phi_{gx}^k(x) = Q_{gx}^k(x) - L_{gx}^k(x) \quad (x = x,\ u,\ v) \tag{20}$$

여기서

$$Q_{gx}^k(x)=\int_{-a_z^k}^{a_z^k}dz\int_{-y_s(x)}^{y_s(x)}Q_g^k(x,\ y,\ z)dy \tag{21}$$

$$\begin{aligned}L_{gx}^k(x)=&\frac{2}{\sqrt{3}}[J_{gn}^k(x,\ y_s(x))-J_{gn}^k(x,\ -y_s(x))]+J_{gz}^k(x,\ a_z^k)-J_{gz}^k(x,\ -a_z^k)+\\&+D_g^k y_s'(x)\frac{d}{dx}[\varPhi_g^k(x,\ y_s(x))+\varPhi_g^k(x,\ -y_s(x))]+\\&+D_g^k y_s''(x)[\varPhi_g^k(x,\ y_s(x))+\varPhi_g^k(x,\ -y_s(x))]-\\&-y_s'(x)[J_{gx}^k(x,\ y_s(x))+J_{gx}^k(x,\ -y_s(x))]\end{aligned} \tag{22}$$

는 각각 가로적분중성자원천과 가로중성자루실항이다. 이제

$$y_s'(x)=-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{sgn}(x),\quad y_s''(x)=-\frac{2}{\sqrt{3}}\delta(x)$$

임을 고려하면

$$\begin{aligned}L_{gx}^k(x)=&\frac{2}{\sqrt{3}}[J_{gn}^k(x,\ y_s(x))-J_{gn}^k(x,\ -y_s(x))]+J_{gz}^k(x,\ a_z^k)-J_{gz}^k(x,\ -a_z^k)-\\&-D_g^k\frac{\mathrm{sgn}(x)}{\sqrt{3}}\cdot\frac{d}{dx}[\varPhi_g^k(x,\ y_s(x))+\varPhi_g^k(x,\ -y_s(x))]-\\&-D_g^k\frac{2\delta(x)}{\sqrt{3}}[\varPhi_g^k(x,\ y_s(x))+\varPhi_g^k(x,\ -y_s(x))]+\\&+\frac{\mathrm{sgn}(x)}{\sqrt{3}}[J_{gx}^k(x,\ y_s(x))+J_{gx}^k(x,\ -y_s(x))]\end{aligned} \tag{23}$$

이다.

류사한 방법으로 z축방향의 가로적분중성자묶음에 대한 방정식을 얻으면 다음과 같다.

$$-D_g^k\frac{d^2}{dz^2}\varPhi_{gz}^k(z)+\Sigma_{r,\ g}^k\varPhi_{gz}^k(z)=Q_{gz}^k(z)-L_{gz}^k(z) \tag{24}$$

여기서

$$\varPhi_{gz}^k(z)=\int_{-a}^{a}dx\int_{-y_s(x)}^{y_s(x)}\varPhi_g^k(x,\ y,\ z)dy \tag{25}$$

$$Q_{gz}^k(z)=\int_{-a}^{a}dx\int_{-y_s(x)}^{y_s(x)}Q_g^k(x,\ y,\ z)dy \tag{26}$$

$$L_{gz}^k(z)=\sum_{x=x,\ u,\ v}[J_{gx}^k(a,\ z)-J_{gx}^k(-a,\ z)] \tag{27}$$

$$J_{gz}^k(\pm a,\ z)=\left\{\int_{-y_s(x)}^{y_s(x)}\left[-D_g^k\frac{\partial}{\partial z}\varPhi_g^k(x,\ y,\ z)\right]dy\right\}_{x=\pm a} \tag{28}$$

이다.

이제 가로평균중성자묶음, 가로평균정미중성자흐름, 가로평균중성자원천을 다음과 같이 정의하자.

$$\overline{\Phi}_{gx}^{k}(x)=\frac{1}{4y_s(x)a_z^k}\int_{-a_z^k}^{a_z^k}dz\int_{-y_s(x)}^{y_s(x)}\Phi_g^k(x,\ y,\ z)dy=\frac{1}{4y_s(x)a_z^k}\Phi_{gx}^k(x) \tag{29}$$

$$\overline{J}_{gx}^{k}(x)=\frac{1}{4y_s(x)a_z^k}\int_{-a_z^k}^{a_z^k}dz\int_{-y_s(x)}^{y_s(x)}\left[-D_g^k\frac{\partial}{\partial x}\Phi_g^k(x,\ y,\ z)\right]dy=\frac{1}{4y_s(x)a_z^k}J_{gx}^k(x) \tag{30}$$

$$\overline{Q}_{gx}^{k}(x)=\frac{1}{4y_s(x)a_z^k}\int_{-a_z^k}^{a_z^k}dz\int_{-y_s(x)}^{y_s(x)}Q_g^k(x,\ y,\ z)dy=\frac{1}{4y_s(x)a_z^k}Q_{gx}^k(x) \tag{31}$$

$$\overline{\Phi}_{gz}^{k}(z)=\frac{1}{2\sqrt{3}a^2}\int_{-a}^{a}dx\int_{-y_s(x)}^{y_s(x)}\Phi_g^k(x,\ y,\ z)dy=\frac{1}{2\sqrt{3}a^2}\Phi_{gz}^k(z) \tag{32}$$

$$\overline{Q}_{gz}^{k}(z)=\frac{1}{2\sqrt{3}a^2}\int_{-a}^{a}dx\int_{-y_s(x)}^{y_s(x)}Q_g^k(x,\ y,\ z)dy=\frac{1}{2\sqrt{3}a^2}Q_{gz}^k(z) \tag{33}$$

우의 정의를 방정식 (20), (24)에 대입하여 정돈하면 각각 다음과 같은 가로평균중성자묶음에 대한 방정식을 얻는다.

$$-D_g^k\frac{d^2}{dx^2}\overline{\Phi}_{gx}^k(x)+\Sigma_{r,\ g}^k\overline{\Phi}_{gx}^k(x)=\overline{Q}_{gx}^k(x)-\overline{L}_{gx}^k(x)\quad (x=x,\ u,\ v) \tag{34}$$

$$-D_g^k\frac{d^2}{dz^2}\overline{\Phi}_{gz}^k(z)+\Sigma_{r,\ g}^k\overline{\Phi}_{gz}^k(z)=\overline{Q}_{gz}^k(z)-\overline{L}_{gz}^k(z) \tag{35}$$

여기서

$$\begin{aligned}\overline{L}_{gx}^k(x)=&\frac{1}{\sqrt{3}y_s(x)}[\overline{J}_{gn}^k(x,\ y_s(x))-\overline{J}_{gn}^k(x,\ -y_s(x))]+\frac{1}{2a_z^k}[\overline{J}_{gz}^k(x,\ a_z^k)-\overline{J}_{gz}^k(x,\ -a_z^k)]-\\&-D_g^k\frac{\mathrm{sgn}(x)}{2\sqrt{3}y_s(x)}\cdot\frac{d}{dx}[\overline{\Phi}_g^k(x,\ y_s(x))+\overline{\Phi}_g^k(x,\ -y_s(x))-4\overline{\Phi}_{gx}^k(x)]-\\&-D_g^k\frac{\delta(x)}{\sqrt{3}y_s(x)}[\overline{\Phi}_g^k(x,\ y_s(x))+\overline{\Phi}_g^k(x,\ -y_s(x))-2\overline{\Phi}_{gx}^k(x)]+\\&+\frac{\mathrm{sgn}(x)}{2\sqrt{3}y_s(x)}[\overline{J}_{gx}^k(x,\ y_s(x))+\overline{J}_{gx}^k(x,\ -y_s(x))]\end{aligned} \tag{36}$$

$$\overline{L}_{gz}^k(z)=\frac{1}{3a}\sum_{x=x,\ u,\ v}[\overline{J}_{gx}^k(a,\ z)-\overline{J}_{gx}^k(-a,\ z)] \tag{37}$$

는 각각 $x(x=x,\ u,\ v)$축방향과 z축방향에 대한 가로평균중성자루실항이며

$$\overline{\varPhi}_g^k(x,\ \pm y_s(x)) = \frac{1}{2a_z^k}\varPhi_g^k(x,\ \pm y_s(x)),\ \bar{J}_{gn}^k(x,\ \pm y_s(x)) = \frac{1}{2a_z^k}J_{gn}^k(x,\ \pm y_s(x)),$$

$$\bar{J}_{gx}^k(x,\ \pm y_s(x)) = \frac{1}{2a_z^k}J_{gx}^k(x,\ \pm y_s(x)),\ \bar{J}_{gz}^k(x,\ \pm a_z^k) = \frac{1}{2y_s(x)}J_{gz}^k(x,\ \pm a_z^k),$$

$$\bar{J}_{gx}^k(\pm a,\ z) = \left\{\frac{1}{2y_s(x)}\int_{-y_s(x)}^{y_s(x)}\left[-D_g^k\frac{\partial}{\partial x}\varPhi_g^k(x,\ y,\ z)\right]dy\right\}_{x=\pm a}$$

이다. 식 (36)에서 보는것처럼 정방형기하에서와 달리 6각기하에서는 가로적분처리에서 y축에 대한 적분상하단이 상수가 아니라 함수 $y_s(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}(2a - |x|)$ 인것으로 하여 가로루실항에 $\mathrm{sgn}(x)$, $\delta(x)$ 함수를 포함한 특이항들이 존재한다.

맺 는 말

3차원6각기하에서 매듭그린함수법을 적용하기 위한 첫 공정으로 되는 다군중성자확산방정식의 가로적분처리를 진행하였다.

참 고 문 헌

[1] 허일문 등; 원자력, 1, 22, 주체103(2014).
[2] R. D. Lawrence et al.; Nucl. Sci. Eng., 76, 2, 218, 1980.
[3] R. M. Ferrer et al.; INL/EXT-09-16773, 2009.
[4] 谢仲生; 核反应堆物理数值计算, 原子能出版社, 128～134, 1997.
[5] 胡永明; 反应堆物理数值计算方法, 国防科技大学出版社, 195～201, 2000.

주체109(2020)년 6월 5일 원고접수

Study on Transverse Integration Procedure of Multi-group Neutron Diffusion Equation in 3D Hexagonal Geometry

Ho Il Mun, *Ok Kum Hyok* and *So Chol*

We derived the transverse integration procedure formula of multi-group neutron diffusion equation, which is the first process for application of NGFM(Nodal Green's Function Method) in 3D hexagonal geometry.

Keywords: NGFM, hexagonal geometry, multi-group neutron diffusion equation