김일성종합대학학보 주체107(2018)년
수 학 제64권 제4호

재생되는 다중봉사기구를 가진 $M/G/1$형 2위상반복봉사계

공련숙, 손정경

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《수학, 물리학, 화학, 생물학과 같은 기초과학부문에서 과학기술발전의 원리적, 방법론적기초를 다져나가면서 세계적인 연구성과들을 내놓아야 합니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 40페지)

론문에서는 재생되는 다중봉사기구를 가진 $M/G/1$ 형 2위상반복봉사계에서 휴가를 가지며 반복요청의 분포가 일반분포에 따르는 경우 계의 상태확률에 대한 확률모함수를 얻었다.

선행연구[1]에서는 봉사기구가 작업도중 한번의 휴가와 하나의 봉사기구를 가지는 반복봉사계의 특성을 해석하였다.

선행연구[2]에서는 휴가를 고려하는 $M/G/1$ 형 2위상반복봉사계에서 반복요청의 도착분포가 지수분포에 따르는 경우에 대하여 봉사계의 특성을 해석하였다.

선행연구[3]에서는 휴가를 고려하는 $M/G/1$ 형 2위상반복봉사계에서 반복요청의 도착분포가 일반분포에 따르는 경우를 론의하였다.

1. 봉사계의 서술

요청이 도착률 λ 를 가진 뽜쏭과정에 따라 1개의 봉사기구로 이루어진 봉사계에로 도착한다. 그 요청은 $1-b$ 의 확률로 계를 리탈하거나 b 의 확률로 반복요청모임에 포함된다. 이 모임에서 요청들은 분포함수 $R(t)$ 를 가지고 일반분포에 따라 계에 도착한다. 첫째 위상에서 봉사는 분포함수 $S_1(t)$ 로서 의무적으로, 둘째 위상의 다중봉사는 분포함수가 $S_{2m}(t)$ $(1\le m\le M)$ 인 봉사로서 p 의 확률로 받을수도 있고 q 의 확률로 받지 않을수도 있다. 한편 봉사기구는 요청이 없는 시각에는 분포함수 $V(t)$, 라쁠라스–스틸테스변환(LST) $V^*(\theta)$ 를 가진 일반분포에 따라 휴가에 들어간다. 봉사도중 고장이 일어나면 봉사기구는 요청의 봉사를 중지하고 수리를 기다리게 된다. 봉사기구의 수명시간들은 매 위상에 대하여 각각 비률 $\alpha_1,\ \alpha_{2m}$ $(1\le m\le M)$ 을 가진 지수분포에 따른다고 하자. 봉사기구의 수리시간의 분포는 일반분포에 따른다.

2위상에서 고장상태를 각각 $D_1,\ D_{2j}$ $(1\le j\le M)$ 로, 분포함수 $D_1(y),\ D_{2j}(y)$, $LST\gamma_1^*(\theta)=E[e^{-\theta D_1}]$, $\gamma_{2j}^*(\theta)=E[e^{-\theta D_{2j}}]$, k 차유한모멘트 $\gamma_1^{(k)}$, $\gamma_{2j}^{(k)}$ $(1\le j\le M)$, 봉사기구의 수리시간의 분포는 $G_1,\ G_{2j}$, 분포함수 $G_1(y),\ G_{2j}(y)$, $LSTG_1^*(\theta)=E[e^{-\theta R_1}]$, $G_{2j}^*(\theta)=E[e^{-\theta R_{2j}}]$, k 차유한모멘트 $g_1^{(k)},\ g_{2j}^{(k)}$, $R_1^0(t),\ R_{2j}^0(t),\ D_1^0(t),\ D_{2j}^0(t)$ 는 매 위상에서의 봉사도중에 일어나는 중단으로 하여 발생하는 지연시간과 수리시간을 표시한다.

$N(t)$ 를 t 시각의 궤도에 있는 요청수, $C(t)$ 를 봉사계의 각이한 상태를 표시하는 함수

라고 하자. 계의 각이한 상태를 표시하기 위하여 다음의 보조함수를 도입하자.

$$Y(t)=\begin{cases}0, & t\text{시각에 계가 비여있는 상태}\\ 1, & t\text{시각에 계가 FPS봉사를 진행하는 상태}\\ 2, & t\text{시각에 계가 SPS봉사를 진행하는 상태}\\ 3, & t\text{시각에 FPS봉사를 진행하다가 중단되여 수리를 기다리는 상태}\\ 4, & t\text{시각에 SPS봉사를 진행하다가 중단되여 수리를 기다리는 상태}\\ 5, & t\text{시각에 계가 FPS봉사를 진행하다가 수리하는 상태}\\ 6, & t\text{시각에 계가 SPS봉사를 진행하다가 수리하는 상태}\\ 7, & t\text{시각에 계가 휴가에 들어간 상태}\end{cases}$$

그러면 t 시각에 계의 상태는 마르꼬브과정 $\{N(t), C(t)\}$ 로 표시할수 있다. 여기서 $Y(t)=0$ 이면 $N(t)=0,\ C(t)=0,\ Y(t)=1$ 이면 $C(t)=B_1^0(t),\ Y(t)=2$ 이면 $C(t)=B_{2j}^0(t),\ Y(t)=3$ 이면 $C(t)=D_1^0(t),\quad Y(t)=4$ 이면 $C(t)=D_{2j}^0(t),\quad Y(t)=5$ 이면 $C(t)=R_1^0(t),\quad Y(t)=6$ 이면 $C(t)=R_{2m}^0(t)$, $Y(t)=7$ 이면 $C(t)=V(t)$ 이다.

주어진 문제설정에 기초하여 아래와 같은 1계미분방정식들을 생각하자.

$$\mu_1(x)dx=\frac{dB_1(x)}{1-B_1(x)},\quad \mu_{2m}(x)dx=\frac{dB_{2m}(x)}{1-B_{2m}(x)}$$

$$\eta_1(y)dy=\frac{dD_1(y)}{1-D_1(y)},\quad \eta_{2m}(y)dy=\frac{dD_{2m}(y)}{1-D_{2m}(y)}$$

$$\zeta_1(y)dy=\frac{dG_1(y)}{1-G_1(y)},\quad \zeta_{2m}(y)dy=\frac{dG_{2m}(y)}{1-G_{2m}(y)}$$

$$\upsilon(x)dx=\frac{dV(x)}{(1-V(x))}$$

2. 에르고드성조건

요청들에 대한 봉사가 끝나는 순간, 봉사기구에 대한 정비가 끝나는 순간, 수리가 끝나는 순간들의 렬을 $\{t_n; n\in N\}$ 으로 표시하자. 우연벡토르렬 $Z_n=\{N(t_n+),\ C(t_n+)\}$ 은 주어진 봉사계에 대하여 마르꼬브사슬을 형성한다. 여기서 $N(t)$ 는 기다리고있는 요청수를 표시하며 $C(t)$ 는 봉사의 각이한 상태 즉 비여있는 상태, 첫째 단계봉사, 두번째 단계에서의 각이한 류형의 봉사, 각이한 류형의 봉사도중의 수리시간, 정비상태 즉 $C\{(t),\ t\ge 0\}=\{\xi_0(t),\ \xi_1(t),\ \xi_{2j}(t),\ \xi_{3j},\ \xi_4(t)\ (t\ge 0,\ 1\le j\le n)\}$ 을 표시한다.

마르꼬브사슬 $\{Z_n; n\in N\}$ 이 에르고드적이기 위한 필요충분조건에 대하여 보기로 하자.

정리 1 마르꼬브사슬 $\{Z_n,\ n\in \mathbf{N}\}$ 이 에르고드적이기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.

$$\left\{\rho_1\{1+\alpha_1(\gamma_1^{(1)}+g_1^{(1)})\}+p\sum_{m=1}^{M}\rho_2\{1+\alpha_{2m}(\gamma_{2m}^{(1)}+g_{2m}^{(1)})\}\right\}<1\ \ (\rho_1=\lambda\beta_1^{(1)}b,\ \rho_{2m}=\lambda\beta_{2m}^{(1)}b)$$

3. 봉사계의 정상분포

정리 1이 성립하면 지연상태에서 계의 상태방정식은 다음과 같다.

$$\frac{d}{dx}P_{1,n}(x)+[\lambda+\alpha_1+\mu_1(x)]P_{1,n}(x)=\lambda bP_{1,n-1}(x)+\int_0^\infty \xi_1(y)R_{1,n}(x, ydy)\ (n\geq 0)$$

$$\frac{d}{dx}P_{2m,n}(x)+[\lambda+\alpha_{2m}+\mu_{2m}(x)]P_{2m,n}(x)=\lambda bP_{i,n-1}(x)+\int_0^\infty \xi_{2m}(y)R_{2m,n}(x, ydy)\ (n\geq 0)$$

$$\frac{d}{dy}Q_{1,n}(x, y)+[\lambda+\eta_1(y)]Q_{1,n}(x, y)=\lambda bQ_{1,n-1}(x; y)\ (n\geq 0)$$

$$\frac{d}{dy}Q_{2m,n}(x, y)+[\lambda+\eta_{2m}(y)]Q_{2m,n}(x, y)=\lambda bQ_{2m,n-1}(x; y)\ (n\geq 0)$$

$$\frac{d}{dy}R_{1,n}(x, y)+[\lambda+\xi_1(y)]R_{1,n}(x, y)=\lambda bR_{1,n-1}(x; y)\ (n\geq 0)$$

$$\frac{d}{dy}R_{2m,n}(x, y)+[\lambda+\xi_{2m}(y)]R_{2m,n}(x, y)=\lambda bR_{2m,n-1}(x; y)\ (n\geq 0)$$

$$(\lambda_0+\upsilon(x))\psi_n=\int_0^\infty\sum_{m=1}^{M}\mu_{2m}(x)P_{2m,n}(x)dx+q\int_0^\infty \mu_1(x)P_{1,n}(x)dx+\int_0^\infty G_0(x)dx\ (n\geq 0)$$

$$\frac{d}{dx}G_0(x)+[\lambda+\upsilon(x)]G_0(x)=\lambda(1-b)G_0(x)\ (x>0)$$

$$\frac{d}{dx}G_n(x)+[\lambda+\upsilon(x)]G_n(x)=\lambda bG_{n-1}(x)+\lambda(1-b)G_n(x)\ (n\geq 1)$$

정리 2 정상성조건 $\rho_0<1$하에서 궤도에 있는 요청들의 봉사기구와의 접촉분포와 봉사기구의 상태확률들에 대한 PGF는 다음과 같다.

① 봉사기구가 정비상태에 있을 확률에 대한 PGF

$$\psi(z)=(1-\rho_0)\exp\left\{\frac{1}{\theta}\int_z^1\left(\frac{\chi(u)\left\{q+p\sum_{m=1}^{M}B_{2m}^*(\lambda_{2m}(u))\right\}B_1^*(\lambda_1(u))}{\left\{q+p\sum_{m=1}^{M}B_{2m}^*(\lambda_{2m}(u))\right\}B_1^*(\lambda_1(u))-u}-\lambda_0\right)\frac{du}{u}\right\}$$

② 봉사기구가 첫째 위상에 있을 확률에 대한 PGF

$$P_1(x; z)=\frac{\chi(z)\psi(z)[1-B_1(x)]\exp\{-\lambda_1(z)x\}}{\left\{q+p\sum_{m=1}^{M}B_{2m}^*(\lambda_{2m}(u))\right\}B_1^*(\lambda_1(z))-z}$$

③ 봉사기구가 둘째 위상에 있을 확률에 대한 PGF

$$P_2(x; z)=\frac{p\chi(z)\psi(z)[1-B_1(x)]\exp\{-\lambda_1(z)x\}}{\left\{q+p\sum_{m=1}^{M}B_{2m}^*(\lambda_{2m}(u))\right\}B_1^*(\lambda_1(z))-z}$$

④ 봉사의 첫째 위상에서 기구가 지연상태에 들어갈 확률에 대한 PGF

$$Q_1(x,\ y;\ z)=\frac{\alpha_1\chi(z)\psi(z)[1-B_1(x)]\exp\{-\lambda_1(z)x\}\times[1-D_1(y)]\exp\{-\chi(z)y\}}{\left\{q+p\sum_{m=1}^{M}B_{2m}^*(\lambda_{2m}(u))\right\}B_1^*(\lambda_1(z))-z}$$

⑤ 봉사의 둘째 위상에서 기구가 지연상태에 들어갈 확률에 대한 PGF

$$Q_{2m}(x,\ y;z)=\frac{p\alpha_{2m}\chi(z)B_1^*(\lambda_1(z)\psi(z))[1-B_{2m}(x)]}{\{q+pB_2^*(\lambda_2(z))\}B_1^*(\lambda_1(z))-z}\times\frac{\exp\{-\lambda_{2m}(z)x\}\times[1-D_{2m}(y)]\exp\{-\chi(z)y\}}{\{q+pB_{2m}^*(\lambda_{2m}(z))\}B_1^*(\lambda_1(z))-z}$$

⑥ 봉사의 첫째 위상에서 기구가 수리에 들어갈 확률에 대한 PGF

$$R_1(x,\ y;z)=\frac{\alpha_1\gamma_1^*(\chi(z))\chi(z)\psi(z)[1-B_1(x)]}{\left\{q+p\sum_{m=1}^{M}B_{2m}^*(\lambda_{2m}(z))\right\}B_1^*(\lambda_1(z))-z}\times\frac{\exp\{-\lambda_1(z)x\}\times[1-G_1(y)]\exp\{-\chi(z)y\}}{\left\{q+p\sum_{m=1}^{M}B_{2m}^*(\lambda_{2m}(z))\right\}B_1^*(\lambda_1(z))-z}$$

⑦ 봉사의 둘째 위상에서 기구가 수리에 들어갈 확률에 대한 PGF

$$R_{2m}(x,\ y;z)=\frac{p\sum_{m=1}^{M}\alpha_{2m}\gamma_{2m}^*(\chi(z))\chi(z)B_1^*(\lambda_1(z)\psi(z))[1-B_{2m}(x)]}{\{q+pB_{2m}^*(\lambda_{2m}(z))\}B_1^*(\lambda_1(z))-z}\times$$

$$\times\frac{\exp\{-\lambda_{2m}(z)x\}\times[1-G_{2m}(y)]\exp\{-\chi(z)y\}}{\{q+pB_{2m}^*(\lambda_{2m}(z))\}B_1^*(\lambda_1(z))-z}$$

$$\lambda_0=\lambda(1-b_0),\ \lambda_1(z)=\chi(z)+\alpha_1(1-G_1^*(\chi(z))\gamma_1^*(\chi(z))),\ \chi(z)=\lambda(1-b(z))$$

$$\lambda_{2m}(z)=\chi(z)+\alpha_{2m}(1-G_{2m}^*(\chi(z))\gamma_{2m}^*(\chi(z)))\ \ (1\le m\le M)$$

$$G(x,\ z)=\frac{\lambda P_0}{V^*(\lambda b)}[1-V(x)]e^{-\lambda b(1-z)x}$$

참 고 문 헌

[1] D. Arivudainambi et al.; Opearch, 51, 3, 434, 2014.

[2] D. Arivudainambi et al.; International J. Information & Management Science, 23, 199, 2012.

[3] G. Choudhury; International Journal of Information & Management Science, 20, 1, 2009.

주체107(2018)년 6월 5일 원고접수

$M/G/1$ Retrial Queuing Systems of Two Phases with the Reproducing Multi-Server

Kong Ryon Suk, Son Jong Gyong

In this paper, we construct a probability generating function of the system's steady-state probability when the distribution of the retrial customers refers to the general distribution in the $M/G/1$ retrial queuing system of two phases with the reproducing multi-queuing system.

Key words: multi-optional service, retrial queuing system