

4원수를 리용한 뿔보르의 수학적모형화

강정수, 남광현, 리준일

선행연구들[1]에서는 뿔보르에 대한 수학적모형화를 오일러각을 리용하여 진행하였는데 이 방법들의 제한성은 계산량이 많고 모형이 복잡한것이다. 특히 오일러각을 리용하는 경우 특이성이 나타나는것을 피할수 없게 된다.

론문에서는 4원수를 리용하여 계산량이 간단하고 특이성이 나타나지 않는 수학적모형화방법을 제안하고 모의실험을 통하여 제안된 방법의 효과성을 검증하였다.

뿔보르의 수학적모형화를 위해 4원수의 기초개념을 고찰하자.

단위 4원수를 다음과 같이 정의한다.[2]

$$q = [q_0, q_1, q_2, q_3]^T, q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \quad (1)$$

만일 4원수 p 와 q 가

$$p = [p_0, p_1, p_2, p_3]^T, q = [q_0, q_1, q_2, q_3]^T \quad (2)$$

와 같다고 할 때 4원수의 더하기는 일반벡토르에서의 더하기와 같다.

$$p + q = [p_0 + q_0, p_1 + q_1, p_2 + q_2, p_3 + q_3]^T \quad (3)$$

한편 공액4원수를 다음과 같이 정의한다.

$$q^* = [q_0, -q_1, -q_2, -q_3]^T \quad (4)$$

이때 공액4원수와 거꾸4원수사이 관계는 다음과 같다.

$$q^{-1} = q^* / \|q\| \quad (5)$$

다른 한편 4원수의 곱하기는 다음과 같이 정의한다.

$$p \circ q = \begin{bmatrix} p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 \\ p_1q_0 + p_0q_1 + p_2q_3 - p_3q_2 \\ p_2q_0 + p_0q_2 + p_3q_1 - p_1q_3 \\ p_3q_0 + p_0q_3 + p_1q_2 - p_2q_1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

단위4원수에 대하여 다음의 관계식도 성립한다.

$$q \circ q^{-1} = p \circ p^* = e = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (7)$$

4원수를 리용하면 벡토르의 회전관계를 다음과 같이 표시할수 있다.

$$v' = q \circ \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} \circ q^{-1} \quad (8)$$

또한 4원수의 미분은 다음과 같이 표시된다.

$$\dot{q} = \frac{1}{2} q \circ \begin{bmatrix} 0 \\ w_b \end{bmatrix} = \frac{1}{2} Q \begin{bmatrix} 0 \\ w_b \end{bmatrix} \quad (9)$$

4원수를 리용한 수학적모형화과정은 다음과 같다.

뿔보트의 수학적모형을 작성하기 위해 그림 1에서 보는바와 같이 3개의 자리표계를 도입하였다. 그림 1에서 W 는 관성자리표계, R 는 뿔의 무게중심에 위치한 뿔자리표계, B 는 본체의 무게중심에 위치한 본체자리표계이다.

우선 뿔보트에 작용하는 힘에 대해 고찰하자.

그림 2에서 보는바와 같이 뿔보트본체에 작용하는 힘은 다음과 같다.

$$\dot{P}_b = m_b \ddot{x}_b = m_b g_w + F_b \quad (10)$$

여기서 P_b 는 본체의 운동량(관성자리표계), x_b 는 본체의 무게중심의 위치(관성자리표계), m_b 는 본체의 질량, F_b 는 뿔이 본체에 가하는 힘(관성자리표계)이며 $g_w = [0 \ 0 \ -g]^T$ 이다.

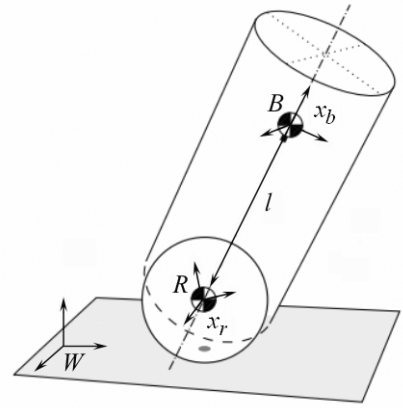


그림 1. 3차원모형작성을 위한 뿔보트

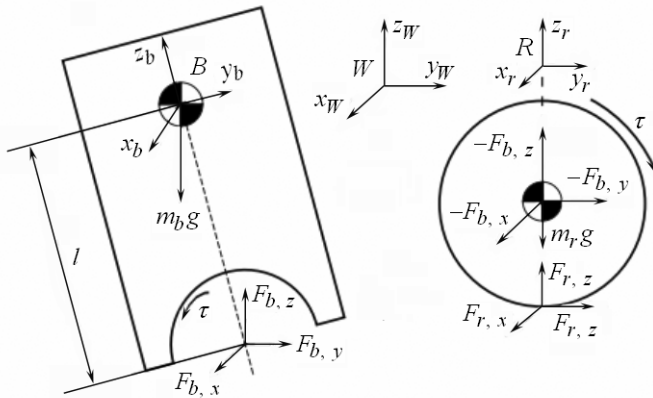


그림 2. 뿔보트에 작용하는 힘에 대한 해석

한편 뿔에 작용하는 힘은 다음과 같다.

$$\dot{P}_r = m_r \ddot{x}_r = m_r g_w + F_r - F_b \quad (11)$$

여기서 P_r 는 뿔의 운동량(관성자리표계), x_r 는 뿔의 무게중심의 위치(관성자리표계), m_r 는 뿔의 질량, F_r 는 땅이 뿔에 가하는 힘(관성자리표계)이다.

다음으로 뿔보트에 작용하는 모멘트에 대해 고찰하자.

뿔보트본체에 작용하는 모멘트는 다음과 같다.

$$\dot{L}_b = \tau + (-d_b) \times F_b \quad (12)$$

여기서 τ 는 입력모멘트, $d_b = x_b - x_r$ 는 뿔의 무게중심으로부터 본체의 무게중심까지의 벡토르, d_b 는

$$d_b = q_b \circ x_{b, B} \circ q_b^{-1}, \quad x_{b, B} = [0 \ 0 \ 0 \ l]^T \quad (13)$$

이다.

한편 뿔에 작용하는 모멘트는 다음과 같다.

$$\dot{L}_r = -\tau + (r_w) \times F_r \quad (14)$$

여기서 $r_w = [0 \ 0 \ -r_r]^T$ 는 뿔의 무게중심으로부터 뿔과 지면사이의 접촉점까지의 벡토르(관성자리표계)이다.

다음으로 뿔보트의 각가속도와 운동량모멘트사이 관계는 다음과 같다.

$$\dot{w}_b = -I_b^{-1} \Omega_{w_b} L_b + I_b^{-1} \dot{L}_b \quad (15)$$

$$\dot{w}_r = -I_r^{-1} \Omega_{w_r} L_r + I_r^{-1} \dot{L}_r \quad (16)$$

여기서 w_b, w_r 는 본체와 뿔의 각속도(관성자리표계), I_b 는 본체의 관성행렬(본체자리표계), I_r 는 뿔의 관성행렬(뿔자리표계), L_b, L_r 는 본체와 뿔의 운동량모멘트(관성자리표계)이다.

이때 다음의 관계가 성립하게 된다.

$$x_b = x_r + q_b \circ x_{b,B} \circ q_b^* \quad (17)$$

여기서 $x_{b,B} = [0 \ 0 \ 1]^T$ 는 뿔의 무게중심으로부터 본체의 무게중심까지의 벡토르(본체자리표계), q_b 는 본체의 방위를 나타내는 4원수이다.

식 (17)로부터 뿔보트본체와 뿔사이에 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\ddot{x}_b - \ddot{x}_r + \Omega_{d_b} \dot{w}_b = \Omega_{w_b} \Omega_{w_b} d_b \quad (18)$$

또한 뿔과 바닥사이에는 미끄럼이 존재하지 않으므로 다음의 식이 성립한다.

$$\dot{x}_r = \Omega_{r_w} w_r \quad (19)$$

그리고 위의 식을 미분하면 다음의 식을 얻을수 있다.

$$\ddot{x}_r = \Omega_{r_w} \dot{w}_r \quad (20)$$

식 (10)–(20)을 리용하면 다음과 같은 상태방정식들을 얻을수 있다.

$$(I_b + m_b \Omega_{d_b} \Omega_{d_b}) \dot{w}_b - m_b \Omega_{d_b} \Omega_{r_w} \dot{w}_r = \tau - \Omega_{w_b} I_b w_b - m_b \Omega_{d_b} g_w + m_b \Omega_{d_b} \Omega_{w_b} \Omega_{w_b} d_b \quad (21)$$

$$[I_r - (m_r + m_b) \Omega_{r_w} \Omega_{r_w}] \dot{w}_r + m_b \Omega_{r_w} \Omega_{d_b} \dot{w}_b = -\tau - \Omega_{w_r} I_r w_r - (m_r + m_b) \Omega_{r_w} g_w + m_b \Omega_{r_w} \Omega_{w_b} \Omega_{w_b} d_b \quad (22)$$

다음으로 뿔보트에 작용하는 모멘트를 환산해보자.

그림 3으로부터 뿔의 결면에 작용하는 접선힘들은 각각 다음과 같이 표시된다.

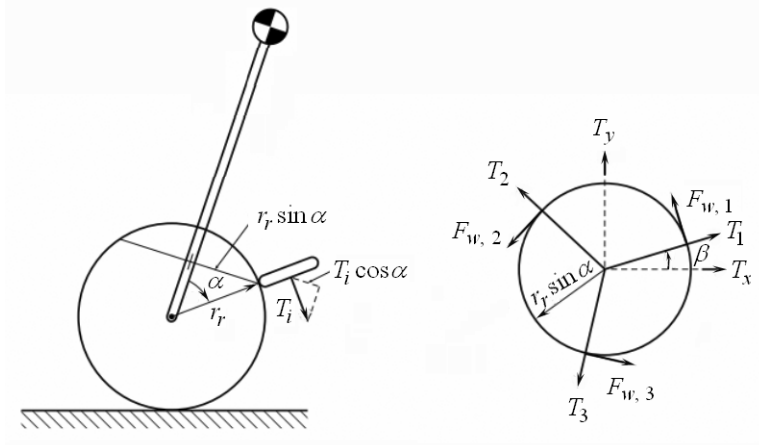


그림 3. 구동바퀴에서 생성되는 모멘트와 접선힘

$$F_{w,1} = \frac{\tau_1}{r_d} \begin{bmatrix} -\sin \beta \\ \cos \beta \\ 0 \end{bmatrix}, F_{w,2} = \frac{\tau_2}{r_d} \begin{bmatrix} -\sin(\beta + 2\pi/3) \\ \cos(\beta + 2\pi/3) \\ 0 \end{bmatrix}, F_{w,3} = \frac{\tau_3}{r_d} \begin{bmatrix} -\sin(\beta - 2\pi/3) \\ \cos(\beta - 2\pi/3) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

여기서 r_d 는 바퀴의 반경, τ_1, τ_2, τ_3 은 전동기 1, 2, 3의 출력모멘트이다.

뿔의 중심으로부터 힘의 작용점까지의 벡토르는 다음과 같다.

$$r_{w,1} = r_r \begin{bmatrix} \cos \beta \sin \alpha \\ \sin \beta \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix}, r_{w,2} = r_r \begin{bmatrix} \cos(\beta + 2\pi/3) \sin \alpha \\ \sin(\beta + 2\pi/3) \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix}, r_{w,3} = r_r \begin{bmatrix} \cos(\beta - 2\pi/3) \sin \alpha \\ \sin(\beta - 2\pi/3) \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (24)$$

여기서 r_r 는 뿔의 반경이다.

따라서 뿔에 작용하는 힘모멘트는 다음과 같다.(본체자리표계)

$$\tau_b = r_{w,1} \times F_{w,1} + r_{w,2} \times F_{w,2} + r_{w,3} \times F_{w,3} \quad (25)$$

한편 기준자리표계에서의 힘모멘트는 다음과 같다.

$$\tau = q_b^{-1} \circ \tau_b \circ q_b \quad (26)$$

우리는 뿔보트의 수학적모형에 대한 검증을 위해 Matlab를 리용하여 모의실험을 진행하였다.

모의에 리용한 파라메터들은 표와 같다.

표. 모의에 리용한 파라메터

항 목	변수이름	값
뿔의 질량	m_r	2.29kg
본체의 질량	m_b	9.2kg
뿔의 반경	r_k	0.125m
바퀴의 반경	r_w	0.06m
뿔의 중심으로부터 본체의 중력중심까지의 거리	l	0.039m
뿔의 관성모멘트	θ_k	$0.023 \text{ 9 kg} \cdot \text{m}^2$
본체의 관성모멘트	$\theta_{b,x}$	$2.026 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
본체의 관성모멘트	$\theta_{b,y}$	$2.026 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
본체의 관성모멘트	$\theta_{b,z}$	$0.092 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
중력가속도	g	$9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
바퀴의 접촉점까지의 각도	α	45°
바퀴들이 놓이는 각도	$\beta_1, \beta_2, \beta_3$	$0^\circ, 120^\circ, 240^\circ$

그림 4에 중요, 횡요, 편요방향의 초기각도를 준 경우의 뿔보트의 자세각을 보여주었다. 그림 4에서 보는바와 같이 중요 및 횡요방향의 초기각도를 준 경우 뿔보트는 자유진동을 하게 되며 편요방향의 초기각도를 준 경우에는 그 상태를 유지하게 된다.

실험결과로부터 논문에서 제안한 수학적모형이 뿔보트의 특성을 잘 반영하고있다는 것을 알수 있다.

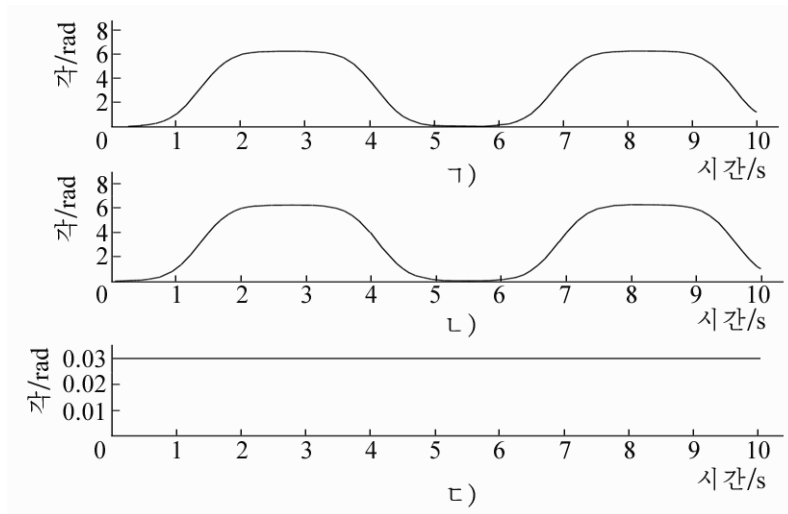


그림 4. 본체의 자세각

1) 종요방향의 초기각도를 준 경우, 2) 횡요방향의 초기각도를 준 경우, 3) 편요방향의 초기각도를 준 경우

맺는 말

4원수를 리용하여 뿔보트의 수학적모형화를 얻는 방법을 제안하고 모의실험을 통하여 얻어진 모형의 효과성을 검증하였다. 모의실험결과로부터 모형이 대상의 특성을 비교적 정확히 반영하고있다는것을 알수 있다.

참고문헌

- [1] U. Nagarajan et al.; The International Journal of Robotics Research, 33, 6, 917, 2014.
- [2] A. Hanson; Visualizing Quaternions, Morgan Kaufmann, 35~56, 2006.

주체109(2020)년 5월 5일 원고접수

The Mathematical Modeling of Ballbot by means of Quaternion

Kang Jong Su, Nam Kwang Hyon and Ri Jun Il

We proposed the mathematical modeling of ballbot by means of quaternion. The advantage of this method is that we can get a simple model free of singularity.

Keywords: quaternion, mathematical modeling, ballbot