

립자의 체적함유률이 큰 립자강화복합재료의 유효탄성 결수결정에 관한 한가지 근사방법

최진명, 김철혁

위대한 령도자 김정일동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《현시대는 과학과 기술의 시대이며 과학과 기술이 류레없이 빠른 속도로 발전하는것은 현대과학기술발전의 중요한 특징입니다.》(《김정일선집》 중보판 제15권 485페이지)

선행연구[1]에서는 립자들사이의 호상작용이 없다는 비현실적인 가정을 극복하기 위하여 립자의 체적비가 증가할 때에 립자들사이에 호상작용이 나타나도록 회석방법을 수정하여 유효탄성결수결정식을 제기하였다.

선행연구[2]에서는 강화립자의 체적함유률이 대략 25%보다 작은 일반적인 립자강화복합재료인 경우에 유효탄성결수식을 제기하였다.

선행연구[3]에서는 온도의 영향을 받는 지르코늄/티탄원기둥각체에서 아낙층과 바깥층은 각각 티탄과 지르코늄으로 구성되고 그사이에 2개의 재료상이 혼합되어 립자의 체적함유률이 0~1의 범위에서 연속적으로 변하는 경사층이 존재하는 경사기능재료에서 다목적최량화문제를 고찰하였다. 이와 같이 선행연구에서는 강화립자의 체적함유률이 큰 경우에 성립하는 유효탄성결수에측식을 제기하지 못하였다.

논문에서는 모리-다나카방법을 확장하여 립자의 체적함유률이 큰 경우에도 복합재료의 유효탄성결수를 예측할수 있는 한가지 근사방법을 제기하였다.

1. 기본관계식

모재구역과 립자구역에서의 평균변형의 집중정도를 나타내는 텐소르 \mathbf{G} 를 다음과 같이 도입하자.

$$\begin{aligned}\mathbf{G}:\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_{\Omega_1} &= \langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_{\Omega_2} \\ \langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_{\Omega} &= v_1\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_{\Omega_1} + v_2\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_{\Omega_2} = v_1\mathbf{G}^{-1}:\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_{\Omega_2} + v_2\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_{\Omega_2} = \\ &= (v_1\mathbf{G}^{-1} + v_2\mathbf{I}):\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_{\Omega_2} = \mathbf{A}^{-1}:\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_{\Omega_2}\end{aligned}\quad (1)$$

이때 텐소르 \mathbf{G} 가

$$v_2 \rightarrow 0: \mathbf{G} = \mathbf{C} \quad (2)$$

$$v_2 \rightarrow 1: \mathbf{G} = \mathbf{G}_1 \quad (3)$$

을 만족시키도록 결정한다.

$v_2 \rightarrow 1 (v_1 \rightarrow 0)$ 일 때 식 (3)을 다음과 같이 표시한다.

$$\xi(v_2) = \frac{\langle tr\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_{\Omega_2}}{\langle tr\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_{\Omega}} \left(\frac{\langle tr\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_{\Omega_1}}{\langle tr\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_{\Omega}} \right)^{-1} = \frac{1}{\gamma'} \quad (4)$$

여기서 γ' 는 $v_2 \rightarrow 1 (v_1 \rightarrow 0)$ 인 경우에 립자구역과 전체 구역에서의 평균체적변형비이다.

이러한 경우에는 립자재료가 대부분의 체적을 차지하며 모재의 체적은 아주 작아진다. 이 상태는 마치 립자재료가 모재를 포함한것처럼 볼수 있다.

그러므로 보강재료(립자)가 모재의 역할을 하고 그 거꿀도 성립한다고 가정한다. $v_2 \rightarrow 0$ 인 경우와는 반대로 모재의 체적률이 령으로 수렴한다는 견지에서 회석방법과 모리-다나까의 고찰방법을 적용한다.

식 (4)로부터 다음의 식이 성립한다.

$$\gamma' = \lim_{v_1 \rightarrow 0} \frac{\langle tr\varepsilon \rangle_{\Omega_1}}{\langle tr\varepsilon \rangle_{\Omega}} = \frac{k_2}{\alpha' k_1 + k_2(1 - \alpha')} = \frac{k_2 + 4\mu_2/3}{k_1 + 4\mu_2/3} = \frac{1}{\gamma_1} \quad (5)$$

$$\alpha' = \frac{1 + v_2}{3(1 - v_2)} = \frac{3k_2}{3k_2 + 4\mu_2}, \quad v = \frac{3k - 2\mu}{6k + 2\mu} \quad (6)$$

따라서

$$v_2 \rightarrow 1 (v_1 \rightarrow 0); \quad \xi(v_2) \rightarrow \frac{1}{\lim_{v_2 \rightarrow 1} \gamma'} = \gamma_1 = \frac{k_1 + 4\mu_2/3}{k_2 + 4\mu_2/3} \quad (7)$$

함수 $\xi(v_2)$ 와 $\eta(v_2)$ 의 정의로부터 다음식이 성립한다.

$$\frac{\xi(v_2)}{\eta(v_2)} = \frac{\langle tr\varepsilon \rangle_{\Omega_2} / \langle tr\varepsilon \rangle_{\Omega_1}}{\langle tr\varepsilon \rangle_{\Omega_2} / \langle tr\varepsilon \rangle_{\Omega}} = \frac{\langle tr\varepsilon \rangle_{\Omega}}{\langle tr\varepsilon \rangle_{\Omega_1}} = F(v_2) \Rightarrow \xi(v_2) = \eta(v_2)F(v_2) \quad (8)$$

모리-다나까방법에서는 $\xi(v_2)$ 를 γ 로 근사화하였다. 이것을 식 (8)에 대입하면 모리-다나까방법에서 함수 $F(v_2)$ 는

$$F(v_2) = \frac{\frac{\gamma}{1 - v_2 + v_2\gamma}}{\frac{k_1 + \frac{4}{3}\mu_1 + (1 - v_2)(k_2 - k_1)}{k_2 + \frac{4}{3}\mu_1}} = 1 - v_2 + v_2\gamma$$

로서 $F(0)=1$, $F(1)=\gamma$ 인 경계조건을 만족시키는 v_2 에 관한 선형함수이다. 즉 모리-다나까방법에서의 함수 $F(v_2)$ 는 앞의 경계조건을 만족시키지 않는다.

이제 $v_2 \rightarrow 1 (v_1 \rightarrow 0)$ 일 때의 $\xi(v_2)$ 의 경계조건 $\gamma_1 = \frac{k_1 + 4\mu_2/3}{k_2 + 4\mu_2/3}$ 을 고려하여 $\xi(v_2)=\gamma_1$ 로 가정하고 $\eta(v_2)$ 와 $F(v_2)$ 를 결정하면 다음과 같다.

$$\eta(v_2) = \frac{k_1 + \frac{4}{3}\mu_2}{k_2 + \frac{4}{3}\mu_2 - v_2(k_2 - k_1)}, \quad F(v_2) = (\gamma_1 - 1)v_2 + 1$$

이다. 여기서 $\eta(v_2)$ 의 경계값은 $\eta(0)=\gamma_1$, $\eta(1)=1$ 로서 경계조건을 만족시키지 않으며 $F(v_2)$ 는 $F(0)=1$, $F(1)=\gamma_1$ 이라는 경계조건을 만족시킨다.

우에서 진행한 고찰로부터 논문에서는 $\xi(v_2)$ 를 $F(0)=1$, $F(1)=\gamma_1$ 인 경계조건을 만족시키는 선형함수 $F(v_2)=(\gamma_1-1)v_2+1$ 과 $\eta(0)=\gamma$, $\eta(1)=1$ 인 경계조건을 만족시키는 모

리-다나카방법에서의 $\eta(v_2)$ 와의 적으로 가정한다.

이때 함수 $\xi(v_2)$ 를 다음과 같이 표시할수 있다.

$$\xi(v_2) = \eta(v_2)F(v_2) = \frac{\left(k_1 + \frac{4}{3}\mu_1\right)((\gamma_1 - 1)v_2 + 1)}{k_1 + \frac{4}{3}\mu_1 + (1 - v_2)(k_2 - k_1)} \quad (9)$$

이 식이 조건 $\xi(0) = \gamma$, $\xi(1) = \gamma_1$ 을 만족시킨다는것은 쉽게 확인할수 있다.

식 (9)를 유효체적변형결수식 $\left(\frac{v_1}{\xi} + v_2 = \frac{1}{\eta}\right)$ 에 대입하여 η 를 결정하면 다음과 같다.

$$\eta = \frac{\frac{\left(k_1 + \frac{4}{3}\mu_1\right)((\gamma_1 - 1)v_2 + 1)}{k_1 + \frac{4}{3}\mu_1 + (1 - v_2)(k_2 - k_1)}}{1 - v_2 + v_2 \frac{\left(k_1 + \frac{4}{3}\mu_1\right)((\gamma_1 - 1)v_2 + 1)}{k_1 + \frac{4}{3}\mu_1 + (1 - v_2)(k_2 - k_1)}} \quad (10)$$

복합재료의 체적변형결수는 다음과 같이 구한다.

$$k^* = k_1 + v_2(k_2 - k_1)\eta \quad (11)$$

같은 방법으로 자름탄성결수를 결정한다.

$$\mu^* = \mu_1 + v_2(\mu_2 - \mu_1)\varsigma \quad (12)$$

$$\varsigma = \frac{\varphi}{(1 - v_2 + v_2\varphi)} \quad (13)$$

$$\varphi(v_2) = \frac{\Phi((\psi_1 - 1)v_2 + 1)}{\Phi + (1 - v_2)(\mu_2 - \mu_1)}, \quad \Phi = \mu_1 + \frac{\mu_1(9k_1 + 8\mu_1)}{6(k_1 + 2\mu_1)} \quad (14)$$

$$\psi_0 = \rho = \frac{\mu_1 + \frac{(9k_1 + 8\mu_1)\mu_1}{6k_1 + 12\mu_1}}{\mu_2 + \frac{(9k_1 + 8\mu_1)\mu_1}{6k_1 + 12\mu_1}} \quad (15)$$

$$\psi_1 = \frac{\mu_1 + \frac{(9k_2 + 8\mu_2)\mu_2}{6k_2 + 12\mu_2}}{\mu_2 + \frac{(9k_2 + 8\mu_2)\mu_2}{6k_2 + 12\mu_2}} \quad (16)$$

식 (11)과 (12)를 리용하여 복합재료의 유효탄성결수와 자름탄성결수를 결정할수 있다.

2. 몇가지 실례

제기한 방법을 레증하기 위해 논문의 방법과 Hashin-Shtrikman경계, Mori-Tanaka방법으로 결정한 2상복합재료의 유효탄성결수와 자름탄성결수들을 비교하였다.

또한 검증을 위해 이러한 이론예측결과들과 실험자료들과의 비교를 진행하였다.

그림에서는 특성값들이 $E(1)=3.0$ GPa, $\nu(1)=0.4$, $E(2)=76$ GPa, $\nu(2)=0.23$ 인 유리-에폭시복합재료의 유효탄성결수와 자름탄성결수들을 보여준다.

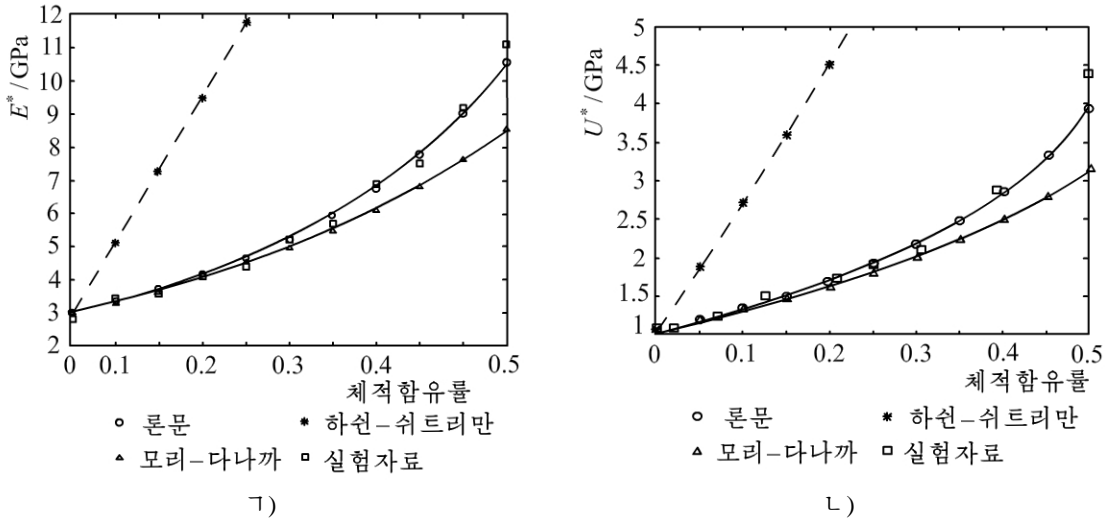


그림. 유리-에폭시복합재료의 유효탄성결수와 유효자름탄성결수

그림에서 보는것처럼 유리-에폭시복합재료의 경우 론문의 방법에 의한 유효탄성결수와 자름탄성결수는 낮은 체적함유율에서는 다른 예측값들보다 실험자료와 더 잘 일치하며 높은 체적함유율에서는 실험자료에 더 가깝다.

실례를 통하여 론문의 방법이 보다 합리적이며 주위립자호상작용을 정확히 반영한다는것을 알수 있다.

맺는 말

론문에서는 평균응력과 평균변형의 개념을 리용하여 강화립자의 체적함유율이 큰 경우에도 주위립자의 영향을 반영하는 립자강화복합재료의 유효특성을 평가하기 위한 한가지 고찰을 진행하고 모리-다나카의 방법에 기초한 한가지 근사식을 제기하였다. 론문의 결과는 립자의 체적함유율이 작은 경우에는 모리-다나카방법의 결과와 가깝지만 립자의 체적함유율이 큰 경우에는 그로부터 벗어나 실험자료로 접근하는데 이것은 주위립자의 영향을 보다 더 효과적으로 반영한다는것을 의미한다.

참고문헌

- [1] T. Mori et al.; Acta Metall, 21, 71, 1973.
- [2] I. Tarek et al.; Solid and Structure, John Wiely & Sons, 2, 407, 2004.
- [3] D. Shuhong; International Journal of Solids and Structures, 51, 1149, 2014.

An Approximate Method for the Effective Elastic Moduli Determination of Particle-Reinforced Composites with High Particulate Volume Fraction

Choe Jin Myong, Kim Chol Hyok

This paper presents a prediction method for determining the effective elastic moduli of particle-reinforced composites using the average stress and strain concepts.

We obtain the effective elastic moduli expressions that hold even at high particulate volume fractions by extending the results at low particulate volume fraction(weak interaction between particles).

Key words: effective elastic modulus, volume fraction