

관성바퀴흔들이의 극배치조절기설계의 한가지 방법

리영심, 백수영

경애하는 최고령도자 김정은동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《과학자, 기술자들은 당이 마련해준 과학기술로마의 날개를 활짝 펴고 과학적재능과 열정을 총폭발시켜 누구나 다 높은 과학기술성과들을 내놓음으로써 부강조국건설에 이바지하는 참된 애국자가 되여야 합니다.》

관성바퀴흔들이조종원리는 위성의 자세안정화나 인간형로봇의 자세 및 보행조종, 선박의 항행운동조종을 비롯하여 여러 분야에 널리 응용되고있다.

일반적으로 관성바퀴흔들이의 조종에는 선형2차조절기나 PID조절기, 미끄럼상태조종기 등 여러가지 방법들이 리용된다.[1]

PID조절기는 흔들리각도의 편차량만을 리용하기때문에 조종의 질이 낮으며 선형2차조절기는 PID조절기보다는 조종의 질이 높지만 흔들리본체의 각도를 정확히 령으로 보내지 못하는 결함을 가지고있다.[2] 또한 로바스트조종이나 적응조종방법[3]들은 실시간계산량이 많은것으로 하여 그 실현에서 제한을 받는다.

론문에서는 관성바퀴흔들이의 동력학방정식으로부터 수학적모형을 작성하고 실시간계산량이 적은 극배치조절기설계의 한가지 방법을 제안하였다.

1. 관성바퀴흔들이의 구조와 수학적모형

관성바퀴흔들이의 구조를 그림 1에 보여주었다.

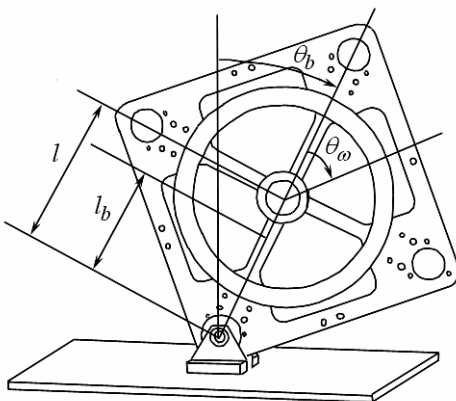


그림 1. 관성바퀴흔들이의 구조

그림 1에서 θ_b 는 흔들리본체의 기울어진 각도, θ_ω 는 모멘트바퀴의 흔들리본체에 관한 변위각, l 은 전동기축과 회전축사이거리, l_b 는 흔들리본체의 질량중심과 회전축사이거리이다.

주어진 대상의 수학적모형화를 얻기 위하여 관성바퀴흔들이에서 모멘트평형방정식을 세우면

$$m_b g l_b \sin \theta_b + m_\omega g l \sin \theta_\omega - T_m + M_\omega - M_b = I_{\text{total}} \ddot{\theta}_b \quad (1)$$

로 된다. 여기서 m_b 는 흔들리본체질량, m_ω 는 바퀴질량, T_m 은 전동기의 회전모멘트이다. 그리고 M_ω 는 바퀴마찰력에 의한 모멘트, M_b 는 흔들리본체마찰력에 의한 모멘트, I_{total} 은 흔들리전체의 관성모멘트로서 다음과 같다.

$$M_\omega = C_\omega \dot{\theta}_\omega, \quad M_b = C_b \dot{\theta}_b, \quad I_{\text{total}} = I_b + m_\omega l^2$$

따라서 흔들이본체의 각가속도는 다음과 같이 표시할수 있다.

$$\ddot{\theta}_b = \frac{(m_b l_b + m_\omega l)g \sin \theta_b - T_m - C_b \dot{\theta}_b + C_\omega \dot{\theta}_\omega}{I_b + m_\omega l^2}$$

한편 관성바퀴 흔들이의 운동방정식은

$$\ddot{\theta}_\omega = \frac{T_m - M_\omega}{I_\omega} - \ddot{\theta}_b = \frac{(I_b + I_\omega + m_\omega l^2)(T_m - C_\omega \dot{\theta}_\omega)}{I_\omega(I_b + m_\omega l^2)} - \frac{(m_b l_b + m_\omega l)g \sin \theta_b - C_b \dot{\theta}_b}{I_\omega(I_b + m_\omega l^2)}$$

이며 이때 비선형방정식은 다음과 같다.

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_b = \frac{(m_b l_b + m_\omega l)g \sin \theta_b - T_m - C_b \dot{\theta}_b + C_\omega \dot{\theta}_\omega}{I_b + m_\omega l^2} \\ \ddot{\theta}_\omega = \frac{(I_b + I_\omega + m_\omega l^2)(T_m - C_\omega \dot{\theta}_\omega)}{I_\omega(I_b + m_\omega l^2)} - \frac{(m_b l_b + m_\omega l)g \sin \theta_b - C_b \dot{\theta}_b}{I_\omega(I_b + m_\omega l^2)} \end{cases} \quad (2)$$

평형점 $\theta_b = 0$ 근방에서 식 (2)를 선형화하면

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_b = \frac{(m_b l_b + m_\omega l)g \theta_b - T_m - C_b \dot{\theta}_b + C_\omega \dot{\theta}_\omega}{I_b + m_\omega l^2} \\ \ddot{\theta}_\omega = \frac{(I_b + I_\omega + m_\omega l^2)(T_m - C_\omega \dot{\theta}_\omega)}{I_\omega(I_b + m_\omega l^2)} - \frac{(m_b l_b + m_\omega l)g \theta_b - C_b \dot{\theta}_b}{I_\omega(I_b + m_\omega l^2)} \end{cases} \quad (3)$$

이다.

이제 상태벡토르를 $x = (\theta_b, \dot{\theta}_b, \dot{\theta}_\omega)^T$ 로, 출구벡토르를 $y = (\theta_b, \dot{\theta}_b)^T$ 로 잡고 조종대상의 상태방정식을 얻으면

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (4)$$

를 얻는다. 여기서 u 는 무술직류전동기의 입구전류이며 전류와 회전모멘트사이에는 다음과 같은 관계가 성립된다.

$$T_m = K_m u$$

식 (3)으로부터 식 (4)의 행렬 A , B , C , D 를 얻으면 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{(m_b l_b + m_\omega l)g}{I_b + m_\omega l^2} & -\frac{C_b}{I_b + m_\omega l^2} & \frac{C_\omega}{I_b + m_\omega l^2} \\ -\frac{(m_b l_b + m_\omega l)g}{I_b + m_\omega l^2} & \frac{C_b}{I_b + m_\omega l^2} & -\frac{C_\omega(I_b + I_\omega + m_\omega l^2)}{I_\omega(I_b + m_\omega l^2)} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{K_m}{I_b + m_\omega l^2} \\ \frac{K_m(I_b + I_\omega + m_\omega l^2)}{I_\omega(I_b + m_\omega l^2)} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. 관성바퀴흔들이의 극배치조절기설계

관성바퀴흔들이의 극배치조절기설계에 앞서 흔들이의 기구학적구조로부터 상태공간모형을 결정한다.

관성바퀴흔들이의 동력학적모형과 관련한 관성바퀴흔들이정수들은 표와 같다.

표. 관성바퀴흔들이정수들

기호	의미	값
m_b	바퀴를 제외한 흔들이본체질량	0.190kg
m_ω	관성바퀴질량	0.140kg
l_b	본체의 질량중심과 회전축사이거리	0.073m
l	전동기축과 회전축사이거리	0.082m
I_b	흔들이본체의 관성모멘트	$1.89 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
I_ω	관성바퀴의 관성모멘트	$0.223 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
C_b	흔들이본체의 마찰결수	$1.02 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
C_ω	관성바퀴의 마찰결수	$0.05 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
K_m	전동기회전모멘트상수	$2.51 \times 10^{-2} \text{ Nm/A}$

이로부터 상태공간모형을 얻으면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 87.742 \text{ 3} & -0.360 \text{ 3} & 0.017 \text{ 7} \\ -87.742 \text{ 3} & 0.360 \text{ 3} & -0.241 \text{ 9} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -8.865 \text{ 0} \\ 121.421 \text{ 1} \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \end{aligned} \quad (5)$$

한편 표본화주기를 20ms로 하고 띠엄모형을 얻으면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 1.017 \text{ 6} & 0.020 \text{ 0} & 0 \\ 1.758 \text{ 5} & 1.010 \text{ 3} & 0.000 \text{ 4} \\ -1.754 \text{ 5} & -0.010 \text{ 3} & 0.995 \text{ 2} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -0.001 \text{ 8} \\ -0.117 \text{ 3} \\ 2.423 \text{ 0} \end{bmatrix} u(k) \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \end{aligned} \quad (6)$$

조종가능성판별행렬의 위수를 계산하여 극배치가능성을 검토하였다. 관성바퀴흔들이 단진체계의 극점벡토르를 $p = [0.64 \text{ 0.73 0.58}]^T$ 로 하고 에커만의 공식을 리용하여 극배치행렬 K 를 얻으면

$$K = [-103.074 \text{ 0} \quad -12.135 \text{ 1} \quad -0.520 \text{ 3}] \quad (7)$$

이다. 이로부터 조종입력은

$$u = -kx = 103.074 \text{ 0} \theta_b + 12.135 \text{ 1} \dot{\theta}_b + 0.520 \text{ 3} \dot{\omega}_\omega \quad (8)$$

로 된다.

MATLAB를 리용하여 설계된 극배치조절기와 선형2차조절기에 대한 모의실험을 진행하였을 때 응답특성비교결과를 그림 2에 보여주었다.

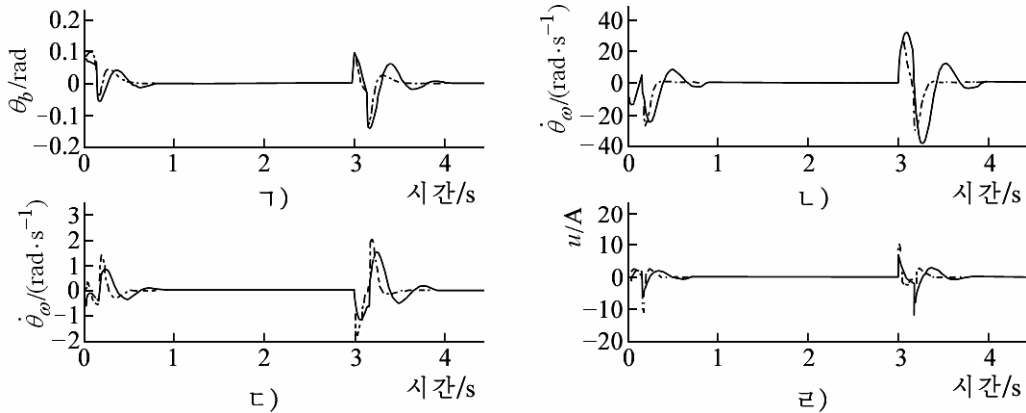


그림 2. 극배치조절기와 선형2차조절기의 응답

ㄱ), ㄴ) 외란을 주지 않았을 때 제안한 방법과 선행한 방법의 추종곡선,

ㄷ), ㄹ) 외란을 주었을 때 제안한 방법과 선행한 방법의 추종곡선

부하섭동응답특성을 보기 위하여 3s에 한번씩 주기적으로 계단형섭동을 체계에 가하였다. 표본주기는 20ms로 하였다. 모의그래프에서 보는바와 같이 극배치조절기는 선형2차조절기에 비하여 설정값응답특성과 부하섭동응답특성이 더 좋다는것을 알수 있다. 그러나 과조절량은 선형2차조절기에 비하여 약간 크다.

맺는 말

관성바퀴흔들이의 수학적모형을 작성하고 극배치조절기설계를 하였으며 MATLAB를 리용하여 모의를 진행하였다. 모의결과는 논문에서 제기한 극배치조절기에 의하여 관성바퀴흔들을 효과적으로 조종할수 있다는것을 보여준다.

참고 문헌

- [1] Fuquan Dai et al.; Mechatronics, 30, 116, 2015.
- [2] L. T. Aguilar et al.; Journal of the Franklin, 350, 92, 2013.
- [3] Johannes Mayr et al.; Mechatronics, 30, 1, 2015.

주제107(2018)년 5월 5일 원고접수

A Method of Pole Placement Controller Design for Inertia Wheel Pendulum

Ri Yong Sim, Paek Su Yong

In this paper, mathematical model of inertia wheel pendulum is made from its dynamics equation and is pole placement controller designed from it. We verified effectiveness of the proposed method through simulation experiment.

Key words: inertia wheel, pole-placement, pendulum