김일성종합대학학보 (정보과학)

주체107(2018)년 제64권 제1호

LMI에 기초한 PID조정수법의 개선에 대한 연구

허일건, 공영수

정적출력반결합(SOF: Static Output Feedback)조종은 조종리론과 응용에서 아주 중요한 역할을 놀고있다. 그런데 상태반결합의 경우와는 달리 체계를 안정화하는 SOF증폭도를 구하는것은 쉬운 일이 아니다. 가장 효과적인 방법의 하나는 선형행렬부등식(LMI)[2]을 리용하는 방법으로서 지난 10년간 이것에 기초한 SOF설계방법들이 제안되였다. 선행연구[3]에서는 반복LMI(ILMI)수법으로 SOF조종기설계문제를 풀기 위한 방법을 제안하였다. 후에 그것이 다변수PID조종기설계문제에 적용되였다.[1] 이 방법들에서는 안정성조건이 충분조건으로 되게 하기 위하여 새로운 추가변수를 도입하였는데 이러한 추가변수들의 도입으로 알고리듬의 계산성능이 높지 못하였다.

론문에서는 추가적인 변수도입이 없이 SOF문제들을 풀기 위한 ILMI알고리듬을 제안하고 수값실례를 통하여 제안된 방법의 알고리듬이 선행한 방법들에서 제기된 알고리듬보다 좋은 결과를 내며 수렴속도가 빠르다는것을 확인하였다.

1. SOF안정화

다음과 같은 체계를 생각하자.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z(t) = C_1 x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t) \\ y(t) = C_2 x(t) + D_{21} w(t) \end{cases} \tag{1}$$

여기서 $x(t) \in R^n$ 은 상태벡토르이고 $w(t) \in R^r$ 는 외부입력신호이며 $u(t) \in R^m$ 은 조종입력이다. 그리고 $z \in R^q$ 는 조종입력이고 $y(t) \in R^p$ 는 측정출력이며. A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_{11}, D_{12}, D_{21} 은 해당한 차원수의 상수행렬들이다.

체계 (1)에 대하여 $(A,\ B_2)$ 는 안정가능하며 $(C_2,\ A)$ 는 검출가능하다고 가정한다.

이때 SOF안정화문제는 다음과 같은 SOF조종기를 설계하는것이다.

$$u(t) = Fy(t) \tag{2}$$

식 (2)에서 $F \in R^{m \times p}$ 는 $w(t) = 0$ 인 경우의 닫긴체계

$$\dot{x} = (A + B_2 F C_2) x(t) \tag{3}$$

를 안정화한다.

닫긴체계 (3)이 안정이기 위한 필요충분조건은

$$P(A + B_2 F C_2) + (A + B_2 F C_2)^{\mathrm{T}} P < 0 \tag{4}$$

을 만족시키는 $P = P^{\mathrm{T}} > 0$ 이 존재하는것이다.

조건 (4)는 BMI로서 불룩최량화문제가 아니다. 선행연구[3]에서 제안된 ILMI방법은

새로운 변수 X를 도입하여 $X \neq P$일 때의 안정성조건이 충분조건으로 되게 하였다. 그리고 반복수법을 리용하여 X를 P에 접근시키는것을 목적으로 X와 P사이에서 반복계산을 진행하였다.

한편 선행연구[4]에서 제안된 대용LMI공식에서는 새로운 변수 L과 M을 도입하여 $L \neq R^{-1}B_2P$ 혹은 $M \neq FC_2$인 경우에 안정성조건이 충분조건으로 되도록 하였다. 여기서도 역시 L과 M을 $R^{-1}B_2P$와 FC_2에 접근시키는것을 목적으로 반복수법을 적용하였다. 명백한것은 도입된 변수들이 반복절차의 마지막단계에서의 P와 F에 관한 정보로부터 얻어진다는것이다. 즉 P를 유도하면서 마지막단계에서 얻어진 P를 리용하여 추가변수들을 표현하였다. 사실 P에 관한 정보는 추가변수들을 도입하지 않고도 직접 리용할수 있다. 실례로 P를 유도한 다음 다음단계에서 그것을 리용하여 F를 유도할수 있다. 상대적으로 F는 P를 리용하여 유도할수 있다. 그러므로 선행연구[3, 4]의 반복절차에서 리용된 추가변수들이 필요없으며 P와 F사이에서 직접 반복계산을 진행할수 있다.

이러한 착상에 기초하여 다음과 같은 새로운 알고리듬을 제기한다.

선행연구[3]에서 언급된바와 같이

$$P(A+B_2FC_2)+(A+B_2FC_2)^{\mathrm{T}}P-\alpha P<0 \tag{5}$$

이 만족되면 복소수 s-평면에서 닫긴체계행렬 $A+B_2FC_2$의 고유값들은 실수축에서 점 $\alpha/2$를 지나면선 허수축에 평행인 직선의 왼쪽 부분에 놓인다. 따라서 식 (5)를 만족시키는 $\alpha \leq 0$이 구해지면 SOF안정화문제의 풀이가 결정된다.

알고리듬의 요점은 P의 초기값을 찾는것이다. 그런데 F가 알려지지 않았기때문에 LMI를 리용하여 식 (4)를 만족시키는 P를 유도할수 없다.

이제 $V_1=PB_2F$로 설정하면 식 (4)는 다음과 같이 된다.

$$PA+A^{\mathrm{T}}P+V_1C_2+C_2^{\mathrm{T}}V_1^{\mathrm{T}}<0 \tag{6}$$

식 (6)에서는 B_2를 무시하므로 P가 모든 정보를 고려하지 못한다.

한편 식 (4)에 앞뒤로 각각 $L=P^{-1}$을 곱하면 다음과 같은 부등식이 얻어진다.

$$(A+B_2FC_2)L+L(A+B_2FC_2)^{\mathrm{T}}<0 \tag{7}$$

그리고 $V_2=FC_2L$로 설정하면 식 (7)은 다음과 같이 된다.

$$AL+LA^{\mathrm{T}}+B_2V_2+V_2^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}<0 \tag{8}$$

한편 $L=P^{-1}$이므로 $PL=I$이며 LMI

$$\begin{bmatrix} P & I \\ I & L \end{bmatrix} \geq 0 \tag{9}$$

에 관해서 $\mathrm{trace}(PL)$을 최소화하는 방법으로 선형화를 진행할수 있다.

P의 초기값을 결정하기 위한 알고리듬은 다음과 같다.

알고리듬 1 (SOF안정화문제에서 P의 초기값결정알고리듬)

① $i=1$, $P_0=I$, $L_0=I$로 설정한다.

② P_i, L_i, V_1, V_2에 대하여 LMI조건

$$P_iA+A^{\mathrm{T}}P_i+V_1C_2+C_2^{\mathrm{T}}V_1^{\mathrm{T}}<0 \tag{10}$$

$$AL_i+L_iA^{\mathrm{T}}+B_2V_2+V_2^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}<0 \tag{11}$$

$$\begin{bmatrix} P_i & I \\ I & L_i \end{bmatrix} \geq 0 \tag{12}$$

밑에서 $\mathrm{trace}(P_i L_{i-1} + L_i P_{i-1})$을 최소화한다.

③ 설정된 허용오차 ε_1에 대하여 $\mathrm{trace}(P_i L_i) - n < \varepsilon_1$이면 $P = P_i$로 설정하고 알고리듬을 정지시킨다.

④ 설정된 허용오차 ε_2에 대하여 $\mathrm{trace}(P_i L_i) - \mathrm{trace}(P_{i-1} L_{i-1}) < \varepsilon_2$이면 이 알고리듬으로 P의 초기값을 결정할수 없으므로 알고리듬을 정지시킨다.

⑤ $i = i+1$로 놓고 ②로 간다.

만일 알고리듬 1을 리용하여 P의 초기값을 결정할수 없다면 $w(t) = 0$에 관하여 체계 (1)의 SOF조종문제는 풀이를 가지지 않는다. 한편 P의 초기값이 결정된 다음에는 다음과 같은 ILMI알고리듬에 의하여 결정되는 SOF조종기로서 체계 (1)을 안정화한다.

알고리듬 2(SOF안정화조종기의 계산알고리듬)

① $i = 1$로 놓고 알고리듬 1에서 얻어진 값을 리용하여 $P_1 = P$로 초기화한다.

② 주어진 P_i에 대하여 LMI조건

$$P_i(A + B_2 F C_2) + (A + B_2 F C_2)^{\mathrm{T}} P_i - \alpha_i P_i < 0 \tag{13}$$

밑에서 α_i를 최소화한다.

③ $\alpha_i \leq 0$이면 F가 안정화SOF증폭도로 되므로 알고리듬의 실행을 정지시킨다.

④ $i = i+1$로 놓고 주어진 F에 대하여 LMI조건 (13)밑에서 α_i를 최소화한다.

⑤ $\alpha_i \leq 0$이면 F는 안정화SOF증폭도로 되므로 알고리듬의 실행을 정지시킨다.

⑥ 주어진 F와 α_i에 대하여 LMI조건 (13)밑에서 $\mathrm{trace}(P_i)$를 최소화한다.

⑦ 설정된 허용오차 δ에 대하여 $\| P_i - P_{i-1} \| / \| P_i \| < \delta$이면 ⑧로 가고 그렇지 않으면 $P_i = P_{i-1}$로 놓고 ②로 간다.

⑧ 체계의 SOF안정화가 불가능하므로 알고리듬의 실행을 정지시킨다.

2. SOF구조표현을 리용한 PID조종기의 설계

여기서는 식 (2)의 SOF조종기대신에 일반적으로 공업공정들에서 많이 리용되고있는 PID조종기

$$u(t) = F_1 y(t) + F_2 \int_0^t y(\theta) d\theta + F_3 \dot{y}(t) \tag{14}$$

의 증폭도행렬 $F_1,\ F_2,\ F_3 \in R^{m \times p}$를 설계하는 방법을 론의한다. 이때 일반성을 잃지 않고 식 (1)의 D_{21}은 령으로 설정하고 행렬 $I - F_3 C_2 B_2$의 거꿀행렬이 존재한다고 가정한다.

다음과 같은 변수를 도입하자.

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \int_0^t y(\theta) d\theta \end{bmatrix}, \quad \bar{y}(t) = \begin{bmatrix} C_2 x(t) \\ \int_0^t y(\theta) d\theta \\ C_2 A x(t) \end{bmatrix}$$

이때 체계 (1)과 (14)를 결합시키면

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}_1 w(t) + \bar{B}_2 u(t) \\ z(t) = \bar{C}_1 \bar{x}(t) + \bar{D}_{11} w(t) + \bar{D}_{12} u(t) \\ \bar{y}(t) = \bar{C}_2 \bar{x}(t) \end{cases} \tag{15}$$

로 된다. 여기서

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix},\ \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \bar{B}_2 = \begin{bmatrix} B_2 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$\bar{C}_{21} = [C_2 \quad 0],\ \bar{C}_{22} = [0 \quad I],\ \bar{C}_{23} = [C_2 A \quad 0],$$
$$\bar{C}_2 = [\bar{C}_{21}^{\mathrm{T}} \quad \bar{C}_{22}^{\mathrm{T}} \quad \bar{C}_{23}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},\ \bar{C}_1 = [C_1 \quad 0],$$
$$\bar{D}_{11} = D_{11},\ \bar{D}_{12} = D_{12}$$

이다. 그러면 조종기는 다음과 같이 표시할수 있다.

$$u(t) = \bar{F}\bar{y}(t) \tag{16}$$

식 (16)에서

$$\bar{F} = [\bar{F}_1 \quad \bar{F}_2 \quad \bar{F}_3],\ \bar{F}_i = (I - F_3 C_2 B_2)^{-1} F_i,\ \ i = 1,\ 2,\ 3$$

이다.

합성행렬 $\bar{F} = [\bar{F}_1 \quad \bar{F}_2 \quad \bar{F}_3]$가 결정되면 PID조종기증폭도는 다음과 같이 결정된다.

$$F_3 = \bar{F}_3(I + C_2 B_2 \bar{F}_3)^{-1},\ \ F_2 = (I - F_3 C_2 B_2)\bar{F}_2,\ \ F_1 = (I - F_3 C_2 B_2)\bar{F}_1$$

행렬 $I - F_3 C_2 B_2$의 거꿀행렬이 존재한다는 가정밑에서 알고리듬 1, 2를 리용하면 안정화PID증폭도행렬 $F_1,\ F_2,\ F_3$을 쉽게 구할수 있다.

3. 실험 및 결과분석

체계행렬들이 다음과 같이 주어졌다고 하자.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ C_2 = [1 \quad \beta] \tag{17}$$

이때 체계의 고유값을 계산하면 1과 －1이므로 체계는 불안정하다.

이 체계에 대하여 선행한 방법[3]과 제안한 방법을 리용하여 얻은 계산결과를 표에 보여주었다.

표. 계산결과

β	방법	반결합증폭도	극점	반복회수	α
15	선행한 방법[3]	$F = -0.736\ 9$	$-0.368\ 4 \pm j3.149\ 2$	15	$-0.037\ 7$
	제안된 방법	$F = -0.133\ 3$	$-0.066\ 7 \pm j0.997\ 8$	2+1	$-7.804\ 6 \times 10^{-4}$
100	선행한 방법[3]	$F = -0.174\ 8$	$-0.087\ 4 \pm j4.058\ 6$	366	$-0.001\ 7$
	제안된 방법	$F = -0.020\ 0$	$-0.010\ 0 \pm j1.000\ 0$	2+1	$-0.001\ 2$

표에서 $l + k$ 형식으로 표시된 반복계산수에서 l은 알고리듬 1을 리용하여 P의 초기값을 계산할 때의 반복수이고 k는 알고리듬 2를 리용하여 SOF증폭도를 계산할 때의 반복수이다.

표로부터 론문에서 제안된 방법을 리용하는 경우에 선행한 방법[3]을 리용하는 경우보다 수렴속도가 훨씬 빠르다는것을 알수 있다.

맺 는 말

추가적인 변수들을 도입하지 않고 상대적으로 작은 차수의 LMI들을 리용하여 SOF안정화조종기를 설계하기 위한 ILMI알고리듬들을 제안하였다. 제안된 알고리듬을 다변수 PID조종기를 설계하는데 적용하였으며 수값실험을 통하여 제안된 알고리듬이 선행한 방법들에 비하여 수렴속도가 빠르다는것을 확증하였다.

참 고 문 헌

[1] 허일건; LMI와 조종, **김일성**종합대학출판사, 198～202, 주체104(2015).

[2] Qing-Guo Wang et al., PID Control for Multivariable Processes, Springer, 167～177, 2008.

[3] Y. Y. Cao et al., Automatica, 34, 1641, 1998.

[4] Graziano Chesi; IEEE Trans. Autom. Control, 59, 6, 1618, 2014.

주체106(2017)년 11월 5일 원고접수

Research on Improvement of PID Tuning Method using LMI

Ho Il Gon, *Kong Yong Su*

We proposed the ILMI algorithms for SOF stabilization control which avoided introduction of the additional variables, adding to lower dimensions of the LMIs than previous. The algorithms are also applied to designing the multivariable PID controller. Numerical examples show that the proposed algorithms produces faster convergence than the existing ones.

Key words: linear matrix inequality(LMI), multivariable PID control, stabilization, static output feedback(SOF)