김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제3호

3단기둥매듭우의 수술다양체의 기본군

리강일, 최현일

일반적으로 매듭우의 덴의 수술은 3차원다양체를 얻는 중요한 방법의 하나이며 그것에 대한 연구는 계속 활발해지고있다. 다양체의 많은 위상적성질들은 기본군의 대수적구조를 통하여 연구된다.[1－3, 5]

선행연구[7]에서는 꼬인 매듭우의 덴의 수술을 연구하면서 수술결수가 얼마일 때 얻어진 3차원다양체의 기본군이 왼쪽불변인 순서를 가지는가를 밝혔다. 이때 수술다양체의 기본군의 유한표시와 그 기본군의 적당한 행렬군에로의 표현이 리용되였다. 선행연구[4]에서는 꼬인 매듭의 A－다항식을 연구하면서 매듭의 기본군의 유한표시를 리용하였다.

한편 꼬인 매듭은 3단기둥매듭의 특수한 클라스를 이룬다. 선행연구[6]에서는 특수한 3단기둥매듭인 $(-2, 3, 7)$－매듭에 대하여 매듭의 A－다항식과 덴의 순환수술사이의 관계를 밝혔다. 그러나 일반적인 3단기둥매듭우의 수술다양체에 대하여 기본군의 유한표시는 얻어지지 않았다. 그러므로 론문에서는 교대적인 3단기둥매듭으로 제한하고 그 매듭우의 수술다양체에 대하여 기본군의 유한표시를 얻으려고 한다.

이를 위하여 첫 단계로서 교대적인 3단기둥매듭의 한 클라스 즉 모든 단이 홀수개의 교점들을 가지는 경우를 보기로 하자.

기둥매듭 K가 3개의 단 a, b, c를 가지며 단에 교점들이 각각 l, m, n개 있다고 하자. 그리고 단 a, b, c의 교점들의 부호를 각각 $\varepsilon(a), \varepsilon(b), \varepsilon(c)$로 표시하자. 그러면 기둥매듭 K가 교대매듭이기 위해서는

$$\varepsilon(a)=\varepsilon(b)=\varepsilon(c)$$

가 성립할것이 필요하고 충분하다는것은 이미 알려져있다.

또한 이 매듭의 사영도를 한바퀴 돌 때 단의 아래가지들은 서로 다른 방향을 가진다. 그러므로 매듭의 방향을 적당히 선택하여 이 매듭의 사영도를 한바퀴 돌 때 그림과 같이 오른쪽 아래가지를 따라 단으로 들어오고 왼쪽 아래가지를 따라 단에서 나가도록 하자. 그리고 매듭의 사영도에서 단 a와 b를 련결하는 아래가지에 대응하는 생성원소를 x, 단 a와 c를 련결하는 아래가지에 대응하는 생성원소를 y, 단 b와 c를 련결하는 아래가지에 대응하는 생성원소를 z로 표시하자.

한편 일반적으로 S^3에서 매듭 K우의 p/q－수술다양체의 기본군의 표시는 매듭 K의 군의 표시에 1개의 정의관계식 $\mu^p\lambda^q=1$을 보충하면 얻을수 있다. 여기서 μ는 K의 경선이고 λ는 기본위선이다. 그러므로 매듭우의 수술다양체의 기본군을 결정하는 문제는 매듭군의 표시와 매듭의 기본위선을 결정하는 문제에 귀착된다.

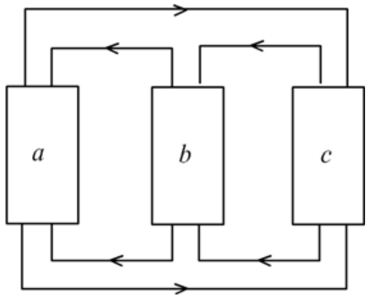

그림. 매듭의 방향

다른 한편 매듭군의 표시는 위르팅거의 방법으로 구할수 있다.

또한 매듭 K의 기본위선 λ는 주어진 방향에 따라 매듭의 사영도를 한바퀴 돌면서 아래가지를 따라 교점을 지날 때마다 웃가지를 곱하는 방법으로 구한다.

이러한 방법들을 리용하여 교대적인 3단기둥매듭의 군의 표시와 기본위선을 구하자.

우선 매듭군의 표시를 구하자.

이를 위하여 단의 가지들에 대응하는 생성원소들에 번호를 다음과 같이 붙이자. 즉 매 교점들에 우로 올라가면서 차례로 자연수번호를 붙인다. 실례로 단 a에 대하여 i번째 교점에서 웃가지에 대응하는 생성원소를 $a_i\ (1\le i\le l)$로 표시하자. 그러면 단 a에서 첫 교점을 지나는 단의 아래가지와 마지막교점을 지나는 단의 웃가지를 제외한 모든 가지들에 대응하는 생성원소들에는 번호를 가진다. 그리고 단의 끝교점들을 아래로 지나는 이 가지들에 대응하는 생성원소들을 각각 a_0, a_{l+1}로 표시하자. 이때 다음의 명제가 성립한다.

명제 1 단 a에서 오른쪽 아래가지가 들어오고 왼쪽 아래가지가 나간다고 하자. 이때 단의 가지들에 대응하는 생성원소들은 아래가지들에 대응하는 생성원소들에 의하여 다음과 같이 표시된다.

$$a_i=\begin{cases}(a_1a_0^{-1})^{(i-1)/2}a_1(a_0a_1^{-1})^{(i-1)/2} & (i\text{가 홀수인 경우})\\ (a_1a_0^{-1})^{i/2-1}a_1(a_0a_1^{-1})^{i/2} & (i\text{가 짝수인 경우})\end{cases}$$

이 명제로부터 곧 x, y, z가 매듭군 $G(:=G(K))$의 유한표시에서의 생성원소들로 된다는것을 알수 있다.

이 명제로부터 다음의 결과가 얻어진다.

정리 1 교대적인 3단기둥매듭에 대하여 l, m, n들이 모두 홀수라고 하자. 이때 매듭군의 표시는 다음과 같다.

1) $\varepsilon(a)=\varepsilon(b)=\varepsilon(c)=1$인 경우

$$\begin{aligned}G=\langle x,\ y,\ z\mid\ &(xy^{-1})^{(l-1)/2}x(yx^{-1})^{(l+1)/2}=(zx^{-1})^{(m-1)/2}z(xz^{-1})^{(m-1)/2},\\ &(zx^{-1})^{(m-1)/2}z(xz^{-1})^{(m+1)/2}=(yz^{-1})^{(n-1)/2}z(zy^{-1})^{(n-1)/2}\rangle\end{aligned}$$

2) $\varepsilon(a)=\varepsilon(b)=\varepsilon(c)=-1$인 경우

$$\begin{aligned}G=\langle x,\ y,\ z\mid\ &(yx^{-1})^{(l-1)/2}y(xy^{-1})^{(l-1)/2}=(xz^{-1})^{(m-1)/2}z(zx^{-1})^{(m+1)/2},\\ &(xz^{-1})^{(m-1)/2}x(zx^{-1})^{(m-1)/2}=(zy^{-1})^{(n-1)/2}z(yz^{-1})^{(n+1)/2}\rangle\end{aligned}$$

증명 우선 $\varepsilon(a)=\varepsilon(b)=\varepsilon(c)=1$인 경우를 보기로 하자.

이 경우에 단의 아래가지들에 대응하는 생성원소들은 다음과 같이 표시된다.

$$a_0=y,\ a_1=x,\ b_0=x,\ b_1=z,\ c_0=z,\ c_1=y$$

그리고 웃가지들에 대응하는 생성원소들사이에는 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$a_{l+1}=b_m,\ b_{m+1}=c_n,\ c_{n+1}=a_l$$

그러므로 명제 1을 리용하면 다음의 관계식들이 얻어진다.

$$(a_1a_0^{-1})^{(l-1)/2}a_1(a_0a_1^{-1})^{(l+1)/2}=(b_1b_0^{-1})^{(m-1)/2}b_1(b_0b_1^{-1})^{(m-1)/2}$$

$$(b_1b_0^{-1})^{(m-1)/2}b_1(b_0b_1^{-1})^{(m+1)/2}=(c_1c_0^{-1})^{(n-1)/2}c_1(c_0c_1^{-1})^{(n-1)/2}$$

$$(c_1c_0^{-1})^{(n-1)/2}c_1(c_0c_1^{-1})^{(n+1)/2}=(a_1a_0^{-1})^{(l-1)/2}a_1(a_0a_1^{-1})^{(l-1)/2}$$

따라서 다음과 같은 매듭군의 정의관계식들이 얻어진다.

$$(xy^{-1})^{(l-1)/2}x(yx^{-1})^{(l+1)/2}=(zx^{-1})^{(m-1)/2}z(xz^{-1})^{(m-1)/2}$$
$$(zx^{-1})^{(m-1)/2}z(xz^{-1})^{(m+1)/2}=(yz^{-1})^{(n-1)/2}y(zy^{-1})^{(n-1)/2} \quad (1)$$
$$(yz^{-1})^{(n-1)/2}y(zy^{-1})^{(n+1)/2}=(xy^{-1})^{(l-1)/2}x(yx^{-1})^{(l-1)/2}$$

다음으로 $\varepsilon(a)=\varepsilon(b)=\varepsilon(c)=-1$ 인 경우를 보기로 하자.

이 경우에 단의 아래가지들에 대응하는 생성원소들은 다음과 같이 표시된다.

$$a_0=x,\ a_1=y,\ b_0=z,\ b_1=x,\ c_0=y,\ c_1=z$$

그리고 웃가지들에 대응하는 생성원소들사이에는 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$a_l=b_{m+1},\ b_m=c_{n+1},\ c_n=a_{l+1}$$

그러므로 명제 1을 리용하면 다음의 관계식들이 얻어진다.

$$(a_1a_0^{-1})^{(l-1)/2}a_1(a_0a_1^{-1})^{(l-1)/2}=(b_1b_0^{-1})^{(m-1)/2}b_1(b_0b_1^{-1})^{(m+1)/2}$$
$$(b_1b_0^{-1})^{(m-1)/2}b_1(b_0b_1^{-1})^{(m-1)/2}=(c_1c_0^{-1})^{(n-1)/2}c_1(c_0c_1^{-1})^{(n+1)/2}$$
$$(c_1c_0^{-1})^{(n-1)/2}c_1(c_0c_1^{-1})^{(n-1)/2}=(a_1a_0^{-1})^{(l-1)/2}a_1(a_0a_1^{-1})^{(l+1)/2}$$

따라서 매듭군의 다음과 같은 정의관계식들이 얻어진다.

$$(yx^{-1})^{(l-1)/2}y(xy^{-1})^{(l-1)/2}=(xz^{-1})^{(m-1)/2}x(zx^{-1})^{(m+1)/2}$$
$$(xz^{-1})^{(m-1)/2}x(zx^{-1})^{(m-1)/2}=(zy^{-1})^{(n-1)/2}z(yz^{-1})^{(n+1)/2} \quad (2)$$
$$(zy^{-1})^{(n-1)/2}z(yz^{-1})^{(n-1)/2}=(yx^{-1})^{(l-1)/2}y(xy^{-1})^{(l+1)/2}$$

그러면 식 (1)과 (2)에서 마지막관계식을 무시하면 결론이 얻어진다.(증명끝)

다음으로 기본위선을 결정하자.

이를 위하여 우선 매 단을 지나는 경로에 따르는 가지들에 대응하는 생성원소들의 적을 다음과 같이 계산한다. 실례로 단 a로 들어갔다가 그 단의 모든 교점들을 지나고 a에서 나가는 경로라고 하자. 이때 경로의 아래가지들을 따라 단의 교점을 지날 때마다 그 교점을 우로 지나는 가지에 대응하는 생성원소의 $\varepsilon(a)$제곱을 차례로 곱한다.

이렇게 얻어진 식을 경로의 적이라고 부르겠다. 그리고 경로를 따라 단의 아래로부터 우로 올라가면 그 경로를 오르는 경로, 우로부터 아래로 내려가면 내리는 경로라고 부르겠다. 또한 단 a의 아래가지들이 다른 방향을 가질 때 오르는 경로의 적을 a^+로, 내리는 경로의 적을 a^-로 표시하겠다.

경로의 적에 관한 다음의 사실이 성립한다.

명제 2 단 a에서 아래가지들이 서로 다른 방향을 가진다고 하자. 이때 단 a의 경로들의 적은 다음과 같다.

1) $\varepsilon(a)=-1$인 경우

$$a^+=\begin{cases}(a_0^{-1})^{(l-1)/2}a_1^{-1}(a_0a_1^{-1})^{(l-1)/2} & (l\text{이 홀수인 경우})\\ (a_0^{-1})^{l/2-1}a_1^{-1}(a_0a_1^{-1})^{l/2-1} & (l\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

$$a^-=\begin{cases}(a_1a_0^{-1})^{(l-1)/2}(a_1^{-1})^{(l-1)/2} & (l\text{이 홀수인 경우})\\ (a_1a_0^{-1})^{l/2}(a_1^{-1})^{l/2} & (l\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

2) $\varepsilon(a)=1$인 경우

$$a^+=\begin{cases}(a_1)^{(l-1)/2}(a_0a_1^{-1})^{(l-1)/2} & (l\text{이 홀수인 경우})\\ (a_1)^{l/2}(a_0a_1^{-1})^{l/2} & (l\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

$$a^-=\begin{cases}(a_1a_0^{-1})^{(l-1)/2}a_1a_0^{(l-1)/2} & (l\text{이 홀수인 경우})\\ (a_1a_0^{-1})^{l/2-1}a_1a_0^{l/2-1} & (l\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

여기서 l은 단 a의 교점수이다.

끝으로 교대적인 3단기둥매듭의 기본위선 λ를 구하자.

λ를 구하는 방법은 다음과 같다.

ㄱ. 가지 y에 대응하는 경선을 따라 p번 돈다.

ㄴ. c단으로 들어갔다가 b단에서 나온다.

ㄷ. 가지 x에 대응하는 경선을 따라 q번 돈다.

ㄹ. a단으로 들어갔다가 c단에서 나온다.

ㅁ. 가지 z에 대응하는 경선을 따라 r번 돈다.

ㅂ. b단으로 들어갔다가 a단에서 나온다.

즉 기본위선 λ는 다음과 같이 표시된다.

$$\lambda=y^pc^+b^-x^qa^+c^-z^rb^+a^-$$

이 위선에 대하여 다음의 사실이 성립한다.

정리 2 교대적인 3단기둥매듭에 대하여 $l,\ m,\ n$들이 모두 홀수라고 하자. 이때 매듭의 기본위선은 다음과 같이 표시된다.

1) $\varepsilon(a)=\varepsilon(b)=\varepsilon(c)=1$인 경우

$$\lambda=(zy^{-1})^{(n-1)/2}(zx^{-1})^{(m+1)/2}(yx^{-1})^{(l-1)/2}(yz^{-1})^{(n+1)/2}(xz^{-1})^{(m-1)/2}(xy^{-1})^{(l+1)/2}$$

2) $\varepsilon(a)=\varepsilon(b)=\varepsilon(c)=-1$인 경우

$$\lambda=(yz^{-1})^{(n+1)/2}(xz^{-1})^{(m-1)/2}(xy^{-1})^{(l+1)/2}(zy^{-1})^{(n-1)/2}(zx^{-1})^{(m+1)/2}(yx^{-1})^{(l-1)/2}$$

증명 우선 $\varepsilon(a)=\varepsilon(b)=\varepsilon(c)=1$인 경우를 보기로 하자.

명제 2로부터 다음의 식이 얻어진다.

$$c^+b^-=c_1^{(n-1)/2}(c_0c_1^{-1})^{(n-1)/2}(b_1b_0^{-1})^{(m-1)/2}b_1b_0^{(m-1)/2}=$$
$$=y^{(n-1)/2}(zy^{-1})^{(n-1)/2}(zx^{-1})^{(m-1)/2}zx^{(m-1)/2}$$
$$a^+c^-=a_1^{(l-1)/2}(a_0a_1^{-1})^{(l-1)/2}(c_1c_0^{-1})^{(n-1)/2}c_1c_0^{(n-1)/2}=$$
$$=x^{(l-1)/2}(yx^{-1})^{(l-1)/2}(yz^{-1})^{(n-1)/2}yz^{(n-1)/2}$$
$$b^+a^-=b_1^{(m-1)/2}(b_0b_1^{-1})^{(m-1)/2}(a_1a_0^{-1})^{(l-1)/2}a_1a_0^{(l-1)/2}=$$
$$=z^{(m-1)/2}(xz^{-1})^{(m-1)/2}(xy^{-1})^{(l-1)/2}xy^{(l-1)/2}$$

따라서 식 (1)의 두번째 식을 리용하면

$$(zy^{-1})^{(n-1)/2}(zx^{-1})^{(m+1)/2}x=(zy^{-1})^{(n-1)/2}(zx^{-1})^{(m-1)/2}z=$$
$$=(zy^{-1})^{(n-1)/2}[(yz^{-1})^{(n-1)/2}y(zy^{-1})^{(n-1)/2}(zx^{-1})^{(m+1)/2}]=$$
$$=y(zy^{-1})^{(n-1)/2}(zx^{-1})^{(m+1)/2}$$

이 성립하고 식 (1)의 첫번째 식을 리용하면

$$z(xz^{-1})^{(m-1)/2}(xy^{-1})^{(l+1)/2}=[(xz^{-1})^{(m-1)/2}(xy^{-1})^{(l-1)/2}x(yx^{-1})^{(l+1)/2}](xy^{-1})^{(l+1)/2}=$$
$$=(xz^{-1})^{(m-1)/2}(xy^{-1})^{(l-1)/2}x=(xz^{-1})^{(m-1)/2}(xy^{-1})^{(l+1)/2}y$$

가 성립한다. 그러므로 다음의 식이 얻어진다.

$$\lambda = y^p c^+ b^- x^q a^+ c^- z^r b^+ a^- =$$
$$= y^p (y^{(n-1)/2}(zy^{-1})^{(n-1)/2}(zx^{-1})^{(m+1)/2}x^{(m+1)/2})x^q(x^{(l-1)/2}(yx^{-1})^{(l-1)/2}(yz^{-1})^{(n+1)/2}z^{(n+1)/2})\cdot$$
$$\cdot z^r(z^{(m-1)/2}(xz^{-1})^{(m-1)/2}(xy^{-1})^{(l+1)/2}y^{(l+1)/2}) =$$
$$= y^p (y^{(n-1)/2}y^{(m+1)/2}(zy^{-1})^{(n-1)/2}(zx^{-1})^{(m+1)/2})x^q(x^{(l-1)/2}(yx^{-1})^{(l-1)/2}(yz^{-1})^{(n+1)/2}z^{(n+1)/2})\cdot$$
$$\cdot z^r((xz^{-1})^{(m-1)/2}(xy^{-1})^{(l+1)/2}y^{(m-1)/2}y^{(l+1)/2})$$

그런데 $p+q+r=-(l+m+n)$이여야 한다. 그러므로

$$p:=-m-\frac{n+l}{2},\ q:=-\frac{l-1}{2},\ r:=-\frac{n+1}{2}$$

로 놓자. 그러면 기본위선 λ는 다음과 같이 간단히 표시된다.

$$\lambda = (zy^{-1})^{(n-1)/2}(zx^{-1})^{(m+1)/2}(yx^{-1})^{(l-1)/2}(yz^{-1})^{(n+1)/2}(xz^{-1})^{(m-1)/2}(xy^{-1})^{(l+1)/2}$$

다음으로 $\varepsilon(a)=\varepsilon(b)=\varepsilon(c)=-1$인 경우를 보기로 하자.

명제 2로부터 다음의 식이 얻어진다.

$$c^+b^- = (c_0^{-1})^{(n-1)/2}c_1^{-1}(c_0c_1^{-1})^{(n-1)/2}(b_1b_0^{-1})^{(m-1)/2}(b_1^{-1})^{(m-1)/2} =$$
$$= (y^{-1})^{(n-1)/2}z^{-1}(yz^{-1})^{(n-1)/2}(xz^{-1})^{(m-1)/2}(x^{-1})^{(m-1)/2}$$
$$a^+c^- = (a_0^{-1})^{(l-1)/2}a_1^{-1}(a_0a_1^{-1})^{(l-1)/2}(c_1c_0^{-1})^{(n-1)/2}(c_1^{-1})^{(n-1)/2} =$$
$$= (x^{-1})^{(l-1)/2}y^{-1}(xy^{-1})^{(l-1)/2}(zy^{-1})^{(n-1)/2}(z^{-1})^{(n-1)/2}$$
$$b^+a^- = (b_0^{-1})^{(m-1)/2}b_1^{-1}(b_0b_1^{-1})^{(m-1)/2}(a_1a_0^{-1})^{(l-1)/2}(a_1^{-1})^{(l-1)/2} =$$
$$= (z^{-1})^{(m-1)/2}x^{-1}(zx^{-1})^{(m-1)/2}(yx^{-1})^{(l-1)/2}(y^{-1})^{(l-1)/2}$$

따라서 식 (2)의 두번째 식을 리용하면

$$(yz^{-1})^{(n+1)/2}(xz^{-1})^{(m-1)/2} = (yz^{-1})^{(n+1)/2}[(zy^{-1})^{(n-1)/2}z(yz^{-1})^{(n+1)/2}(xz^{-1})^{(m-1)/2}] =$$
$$= y(yz^{-1})^{(n+1)/2}(xz^{-1})^{(m-1)/2}$$

이 성립하고 식 (2)의 첫번째 식을 리용하면

$$(zx^{-1})^{(m+1)/2}(yx^{-1})^{(l-1)/2}y = (zx^{-1})^{(m+1)/2}[(xz^{-1})^{(m-1)/2}x(zx^{-1})^{(m+1)/2}(yx^{-1})^{(l-1)/2}] =$$
$$= z(zx^{-1})^{(m+1)/2}(yx^{-1})^{(l-1)/2}$$

이 성립한다. 그러므로 다음의 식이 얻어진다.

$$\lambda = y^p c^+ b^- x^q a^+ c^- z^r b^+ a^- =$$
$$= y^p((y^{-1})^{(n+1)/2}(yz^{-1})^{(n+1)/2}(xz^{-1})^{(m-1)/2}(x^{-1})^{(m-1)/2})\cdot$$
$$\cdot x^q((x^{-1})^{(l+1)/2}(xy^{-1})^{(l+1)/2}(zy^{-1})^{(n-1)/2}(z^{-1})^{(n-1)/2})\cdot$$
$$\cdot z^r((z^{-1})^{(m+1)/2}(zx^{-1})^{(m+1)/2}(yx^{-1})^{(l-1)/2}(y^{-1})^{(l-1)/2}) =$$
$$= y^p((y^{-1})^{(n+1)/2}(y^{-1})^{(m-1)/2}(yz^{-1})^{(n+1)/2}(xz^{-1})^{(m-1)/2})\cdot$$
$$\cdot x^q((x^{-1})^{(l+1)/2}(xy^{-1})^{(l+1)/2}(zy^{-1})^{(n-1)/2}(z^{-1})^{(n-1)/2})\cdot$$
$$\cdot z^r((zx^{-1})^{(m+1)/2}(yx^{-1})^{(l-1)/2}(y^{-1})^{(m+1)/2}(y^{-1})^{(l-1)/2})$$

그런데 $p+q+r=l+m+n$이여야 한다. 그러므로

$$p:=m+\frac{n+l}{2},\ q:=\frac{l+1}{2},\ r:=\frac{n-1}{2}$$

로 놓자. 그러면 기본위선 λ는 다음과 같이 간단히 표시된다.

$$\lambda=(yz^{-1})^{(n+1)/2}(xz^{-1})^{(m-1)/2}(xy^{-1})^{(l+1)/2}(zy^{-1})^{(n-1)/2}(zx^{-1})^{(m+1)/2}(yx^{-1})^{(l-1)/2}$$

따라서 정리의 결과가 증명된다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] S. Boyer et al.; Math. Ann., 356, 1213, 2013.
[2] A. Clay et al.; Math. Res. Lett., 18, 1085, 2011.
[3] R. Guzman; Topology Appl., 173, 142～156, 2014.
[4] Jim Hoste et al.; J. Knot Theory and its Ramifications, 13, 2, 193, 2004.
[5] D. Rolfsen; Math. Slovaca, 64, 3, 579, 2014.
[6] P. Shalen; Topology Appl., 108, 7, 2000.
[7] M. Teragaito; Canad. Math. Bull., 56, 4, 850, 2013.

주체108(2019)년 3월 15일 원고접수

The Fundamental Groups of Surgery Manifolds on 3-Strand Pretzel Knots

Ri Kang Il, Choe Hyon Il

We present a method to determine the fundamental groups of surgery manifolds on alternative 3-strand pretzel knots of which each block has an odd number of crossing points. And using this method, we obtain the finite presentation of a knot group and the preferred longitude for those knots.

Key words: pretzel knot, knot group