김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제2호

값구역이 제한된 화상복원문제에 대한 분할브레그만방법

리금혁, 김종철

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《첨단돌파전을 힘있게 벌려야 나라의 과학기술전반을 빨리 발전시키고 지식경제의 토대를 구축해나갈수 있습니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 39페지)

론문에서는 화상처리에서 많이 제기되는 화상복원의 수학적방법에 대한 연구를 진행하였다.

선행연구에서는 화상복원을 위한 제한이 있는 최소화문제와 제한이 없는 최소화문제에 대한 분할브레그만방법들의 수렴성과 제한이 없는 최소화문제에 화소값들이 량쪽으로 제한되여있다는 조건을 추가할 때의 분할브레그만방법의 수렴성이 연구되였다.

론문에서는 제한이 있는 최소화문제에 화소값들이 량쪽으로 제한되여있다는 조건을 추가할 때의 분할브레그만알고리듬을 제기하고 그 수렴성들을 증명하였다.

화상복원은 보통 거꿀문제로서 정식화된다. 단순하게 하기 위해 화상을 그것의 렬들을 련결시켜 $\mathbf{R}^n$의 벡토르로서 표시한다. 화상복원의 목적은

$$f = Au + \varepsilon \tag{1}$$

으로서 정의되는 관측화상 $f \in \mathbf{R}^l$ 로부터 미지화상 $u \in \mathbf{R}^n$ 을 구하는것이다. 여기서 ε 은 분산이 σ 인 백색가우스잡음이고 $A \in \mathbf{R}^{l \times n}$ 은 선형연산자로서 화상합성적제거문제에서는 합성적연산자이고 화상손상회복문제에서는 사영연산자이며 화상잡음제거문제에서는 항등연산자이다.

$D \in \mathbf{R}^{m \times n}$ $(m \ge n)$이 $\mathbf{R}^n$에서 $\mathbf{R}^m$에로 작용하는 분해연산자라고 부르는 선형변환이라고 하자. 행렬 D는 리산푸리에변환, 국부코시누스변환, 웨블레트변환 또는 프레임레트변환 혹은 리산그라디엔트연산자들에 의해 얻어질수 있다. 이제 미지화상 $u \in \mathbf{R}^n$의 분해결수 Du가 $\mathbf{R}^m$에서 성글다고 가정하자. 즉 결수 Du의 비령원소들의 개수가 작다고 가정하자. Du가 가장 성긴 식 (1)의 풀이는 항 $\| Du \|_1$를 포함하는 최소화문제를 풀어 얻어진다.(여기서 $\| \cdot \|_1$은 l_1노름을 표시한다.) 즉 그것은 제한이 없는 최소화문제

$$\min_u \| Du \|_1 + \frac{\lambda}{2} \| Au - f \|_2^2 \tag{2}$$

의 풀이를 찾는 문제 혹은 그것은 제한이 있는 최소화문제

$$\min_u \| Du \|_1, \quad Au = f \tag{3}$$

의 풀이를 찾는 문제로 정식화될수 있다.

식 (2), (3)은 리산화된 편미분방정식에 기초한 방법과 웨블레트프레임에 기초한 방법들을 비롯하여 화상처리와 거꿀문제처리에 적용될수 있다.

현재 제한이 없는 최소화문제 (2)와 제한이 있는 최소화문제 (3)을 풀기 위한 대표적인 방법은 선행연구[3]에서 제기된 제한이 없는 분할브레그만알고리듬과 제한이 있는 분

할브레그만알고리듬이라고 볼수 있다. 선행연구[3]에서는 이 알고리듬들이 여러가지 편미분방정식에 기초한 화상복원모형들에 적용될 때 효과적이라는것을 보여주었다. 선행연구[4]에서는 선행연구[3]에서 제기한 두가지 알고리듬에 대한 수렴성을 증명하였다. 선행연구[1]에서 우리는 선형화된 분할브레그만알고리듬을 제기하여 매 부분문제들이 양적인 형식의 풀이를 가지게 하였으며 그 수렴성을 증명하였다.

화상의 화소값은 빛량자 총수 또는 에네르기와 같은 물리적량들을 표시한다. 이 값은 보통 부아니며 또 화상표시를 위해 리용되는 유한비트수때문에 웃한계 또는 포화값을 가진다. 실례로 수자화상에서 화소값들은 [0, 255]사이에 있다. 직관적인 방법은 제한이 없는 문제를 풀고 다음에 회복된 값들을 본래 값구역에로 사영하는것이다. 그러나 이 방법은 회복된 화상에서 거짓잔물결이 나타나게 한다. 그러므로 복원문제에서 미리 제한을 주어야 한다.[2]

선행연구[2]에서는 $a=0$ 이고 $b=255$ 인 $C=\{u\in\mathbf{R}^n \mid a\le u_i\le b\ (\forall i=1,\ \cdots,\ n)\}$ 에 대해 최소화문제

$$\min_{u\in C}\|Du\|_1+\frac{\lambda}{2}\|Au-f\|_2^2 \tag{4}$$

를 풀기 위한 분할브레그만방법의 수렴성을 도글라스—라치포드분할법과의 동등성[5]에 기초하여 론의하였다. 그렇지만 최소화문제

$$\min_{u\in C}\|Du\|_1,\ \ Au=f \tag{5}$$

에 적용된 분할브레그만방법에 대해 론의하지 못하였다. 이로부터 론문에서는 문제 (5)를 풀기 위한 분할브레그만알고리듬을 제시하고 그 수렴성을 증명하였다.

량쪽제한을 가진 화상복원문제에 대한 분할브레그만반복알고리듬을 고찰하자.

먼저 식 (5)에서 항 $\|Du\|_1$ 을 가분인 항 $\|d\|_1$ 로 바꾸고 다음에 식 (5)에 새로운 제한 $d=Du$ 를 추가한다. 즉 식 (5)는

$$\min_{u\in C}\|d\|_1,\ Au=f,\ d=Du \tag{6}$$

로 된다. 량쪽제한이 없는 문제에 대한 분할브레그만방법의 유도방법[1, 3, 4]에 기초하여 량쪽제한을 가진 화상회복문제 (6)에 대하여 $c^0=0,\ b^0=0,\ d^0=0$ 이라고 하면 분할브레그만반복알고리듬

$$u^{k+1}=\arg\min_{u\in C}\frac{\mu}{2}\|Au-f+c^k\|_2^2+\frac{\lambda}{2}\|Du-d^k+b^k\|_2^2 \tag{7}$$

$$d^{k+1}=\arg\min_{d}\|d\|_1+\frac{\lambda}{2}\|d-Du^{k+1}-b^k\|_2^2 \tag{8}$$

$$b^{k+1}=b^k+\delta_b(Du^{k+1}-d^{k+1}) \tag{9}$$

$$c^{k+1}=c^k+\delta_c(Au^{k+1}-f) \tag{10}$$

를 얻을수 있다. 식 (7)은 목적함수의 헤쎄행렬이 정의정값이라고 하면 유일한 풀이를 가지며 그라디엔트사영법을 리용하여 풀수 있다. 식 (8)은 $\|d\|_1$ 이 련속이므로 유일한 풀이를 가지며 수축연산자를 리용하여 d 의 최량값을 양적으로 계산할수 있다.[6] 즉 단순히

$$d_j^{k+1}=T((Du^{k+1})_j+b_j^k,\ 1/\lambda)\ \ (j=1,\ \cdots,\ m)$$

에 의해 계산할수 있다. 여기서

$$T(x,\ r) := \frac{x}{|x|}\max(|x|-r,\ 0)$$

량쪽제한을 가진 화상복원문제에 대한 분할브레그만반복알고리듬의 수렴성을 고찰하자.

식 (7)의 풀이 u^{k+1}에 대해 쿤－타커조건으로부터

$$0 = \mu A^{\mathrm{T}}(Au^{k+1} - f + c^k) + \lambda D^{\mathrm{T}}(Du^{k+1} - d^k + b^k) - \beta^{k+1} + \gamma^{k+1} \tag{11}$$

$$\beta_i^{k+1} \ge 0 \ \ (\forall i = 1,\ \cdots,\ n) \tag{12}$$

$$\gamma_i^{k+1} \ge 0 \ \ (\forall i = 1,\ \cdots,\ n) \tag{13}$$

$$(a - u_i^{k+1})\beta_i^{k+1} = 0 \ \ (\forall i = 1,\ \cdots,\ n) \tag{14}$$

$$(u_i^{k+1} - b)\gamma_i^{k+1} = 0 \ \ (\forall i = 1,\ \cdots,\ n) \tag{15}$$

인 라그랑쥬승수 β^{k+1}과 γ^{k+1}이 존재한다. 식 (8)에 대해서는 최량점에서 반그라디엔트에 관한 정리[7]로부터 다음의 사실이 얻어진다.

$$0 = p^{k+1} + \lambda(d^{k+1} - Du^{k+1} - b^k),\ \ p^{k+1} \in \partial \| d^{k+1} \|_1 \tag{16}$$

정리 $\mu > 0,\ \lambda > 0,\ 0 < \delta_b \le 1,\ 0 < \delta_c < 2$ 이며 C가 유계닫긴불룩모임이라고 하자. 이때 (5)의 풀이를 u^*로 표시하면 분할브레그만반복 (7)－(10)에 의해 얻어지는 렬 $\{u^k\}$에 대하여 다음의 사실들이 성립한다.

$$\lim_{k\to+\infty} \| Au^k - f \|_2 = 0,\ \ \lim_{k\to+\infty} \| Du^k \|_1 = \| Du^* \|_1 \tag{17}$$

특히 식 (5)가 유일한 풀이 u^*을 가진다면 다음식이 성립한다.

$$\lim_{k\to+\infty} \| u^k - u^* \|_2 = 0 \tag{18}$$

참 고 문 헌

[1] 김일성종합대학학보 수학, 64, 1, 49. 주체107(2018).

[2] B. L. Shi et al.; Applied Mathematics and Computation, 250, 402, 2015.

[3] T. Goldstein et al.; SIAM Journal on Imaging Sciences, 2, 323, 2009.

[4] J. F. Cai et al.; SIAM Interdisciplinary Journal, 8, 2, 337, 2009.

[5] S. Setzer; SSVMCV5567, 464, 2009.

[6] J. L. Starck et al.; Sparse Image and Signal Processing, Cambridge, 153～156, 2010.

[7] J. M. Borwein et al.; Convex Analysis and Nonlinear Optimization, Springer, 30～35, 2006.

주체107(2018)년 12월 5일 원고접수

Split Bregman Method for Image Restoration Problem in Restricted Range

Ri Kum Hyok, Kim Jong Chol

In this paper, we prove the convergence of the split Bregman method for the constrained minimization problem when the bilateral constraint is added.

Key words: image restoration, bilateral constraint, alternating split Bregman method