

# SVM을 리용한 미지리산비선형MIMO체계에 대한 새로운 근사내부모형조종체계의 설계방법

김 철 진

위대한 령도자 김정일동지께서는 다음과 같이 지적하시였다.

《생산의 자동화를 적극 다그쳐 인민경제의 전면적자동화를 실현하려면 자동화공학과 전 자공학을 발전시켜야 합니다.》(《김정일선집》 제4권 증보판 485페이지)

현재 미지리산비선형다변량체계에 대한 근사내부모형조종방법에 관한 연구결과는 매우 적다. 선행연구[1, 2]에서는 단층신경망과 다층신경망을 리용하여 비선형리산MIMO체계의 직접내부모형조종방법과 근사내부모형조종방법을 제기하였지만 부분체계들사이에 존재하는 호상간섭을 고려하지 않았으며 신경망과 관련한 본질적인 부족점을 극복하지 못하였다.

본문에서는 미지리산비선형MIMO체계에 대하여 SVM-NARMA모형에 기초한 내부모형조종체계의 한가지 설계방법을 제기하고 체계출력오차의 최종평등유계성과 로바스트성을 론증하였으며 강한 비선형성을 가진 비아핀리산체계에 대한 모의실험을 통하여 그 효과성을 검증하였다.

## 1. 리산비선형MIMO체계의 근사입력-출력모형

### 1) SVM-NARMA모형

여기서는 다음과 같이 표현되는 일반적인 비선형리산MIMO체계를 고찰한다.

$$\begin{aligned} y(k+1) &= F[y(k), y(k-1), \dots, y(k-n+1), u(k), u(k-1), \dots \\ &\quad \dots, u(k-n+1)] + d_k = F[\mathbf{Z}(k), u(k)] + d_k \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $n$ 은 체계의 차수,  $y \in R^m$ ,  $u \in R^m$ 은 체계의 출력과 입력,  $F \in R^{m \times 2n} \rightarrow R^m$ 은 미지 비선형함수벡토르,  $F \in C^\infty$ 이며  $d_k (\|d_k\| \leq d_0)$ 는 섭동 등 체계에 존재하는 불확정성을 표현한다. 그리고 일반성을 잃음이 없이  $F(0, 0) = 0$ 이고 체계의 모형은 미지이며 다만 체계의 차수  $n$ 만을 안다고 가정한다.

식 (1)은 체계의 NARMA모형을 표현한다.

한편 SVM은 일종의 만능근사기이므로 체계모형 (1)을 임의의 정확도로 근사화하는  $n$ 개의 SVM이 꼭 존재한다. 이로부터 체계 (1)은 다음과 같은 SVM-NARMA근사모형으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} y(k+1) &= S[y(k), y(k-1), \dots, y(k-n+1), u(k), u(k-1), \dots, u(k-n+1)] = \\ &= S[\mathbf{Z}(k), u(k)] + \xi_k + d_k = S[\mathbf{Z}(k), u(k)] + \xi_k + d_k \end{aligned} \quad (2)$$

여기서  $\mathbf{Z}(k) = [y(k), y(k-1), \dots, y(k-n+1), u(k-1), \dots, u(k-n+1)]$ 이며  $S[\cdot] \in R^m$ 은 SVM동정모형,  $\xi_k \in R^m (\|\xi_k\| \leq \xi_0, \xi_0$ 은 충분히 작은 정수)은 모형화오차이다.

## 2) SVM-NARMA 모형의 근사화

SVM-NARMA모형 (2)는 원활한 함수들에 의해 표현되므로 테일러합렬전개를 리용하여 선형화할수 있는데  $[\mathbf{Z}(k-1), u(k-1)]$ 에 관한 1차테일러전개식은 다음과 같다.

$$y(k+1) = S[\mathbf{Z}(k), u(k)] + \xi_k = S[\mathbf{Z}(k-1), u(k-1)] + \frac{\partial S[\mathbf{Z}(k-1), u(k-1)]}{\partial u(k-1)} \Delta u(k) + \frac{\partial S[\mathbf{Z}(k-1), u(k-1)]}{\partial u(k-1)} \Delta \mathbf{Z}(k) + \xi_k + d_k \quad (3)$$

한편  $y(k) = S[\mathbf{Z}(k-1), u(k-1)] + \xi_{k-1} + d_{k-1}$ 을 고려하면 식 (3)은 다음과 같다.

$$y(k+1) = y(k) + \frac{\partial S[\mathbf{Z}(k-1), u(k-1)]}{\partial u(k-1)} \Delta u(k) + \frac{\partial S[\mathbf{Z}(k-1), u(k-1)]}{\partial u(k-1)} \Delta \mathbf{Z}(k) + \xi_k - \xi_{k-1} + d_k - d_{k-1} \quad (4)$$

이제 조종량이 체계관성의 영향을 충분히 억제할수 있다고 가정하자. 즉

$$\left| \frac{\partial S[\xi_k, u(k-1)]}{\partial \mathbf{Z}(k-1)} (\mathbf{Z}(k) - \mathbf{Z}(k-1)) \right| \ll \left| \frac{\partial S[\mathbf{Z}(k-1), u(k-1)]}{\partial u(k-1)} \Delta u(k) \right|, \\ \xi_k \in [\mathbf{Z}(k-1), \mathbf{Z}(k)].$$

그러면 식 (4)를 다음과 같이 간단히 쓸수 있다.

$$y(k+1) = y(k) + \frac{\partial S[\mathbf{Z}(k-1), u(k-1)]}{\partial u(k-1)} \Delta u(k) + \beta_k + v_k = y(k) + S_u \Delta u(k) + \beta_k + v_k \quad (5)$$

여기서  $S_u = \left[ \frac{\partial S[\mathbf{Z}(k-1), u(k-1)]}{\partial u(k-1)} \right] \in R^{m \times m}$ ,  $\beta_k (\|\beta_k\| \leq \beta_0, \beta_0$ 은 유계인 정수)는 모형화오차의 총합,  $v_k (\|v_k\| \leq v_0, v_0$ 은 유계인 정수)는 섭동을 포함한 모든 불확정성들을 반영한다.

오차항과 불확정성을 무시하면 최종적인 SVM-NARMA근사모형은 다음과 같이 표현된다.

$$y(k+1) = y(k) + S_u (\Delta u_n(k) + \Delta u_c(k)) \quad (6)$$

## 2. SVM에 기초한 내부모형조종과 안정성

SVM에 기초한 내부모형조종체계의 구성도는 그림 1과 같다.

한편 조종은 공칭SVM조종과 로

바스트조종으로 구성된다.

$$u(k) = u(k-1) + \Delta u(k) = u(k-1) + \Delta u_n(k) + \Delta u_c(k) \quad (7)$$

여기서  $\Delta u_n(k)$ 는 공칭조종,  $\Delta u_c(k)$

는 로바스트조종을 표시한다.

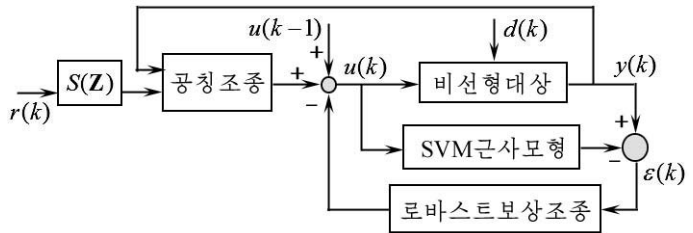


그림 1. SVM근사내부모형조종체계

### 1) 공칭SVM조종기설계와 체계의 안정성

희망하는 출력자리길이  $r(k)$ 라고 하자. 그러면 근사모형 (6)에 기초하여 SVM을 리용한 근사공칭조종법칙을 다음과 같이 설계할수 있다.

$$\begin{aligned}\Delta u_n(k) &= S_u^t (S_u S_u^t + \alpha_1)^{-1} [r(k+1) - y(k)] \\ \Delta u_{nj}(k) &= S_{uj}^t (S_u S_u^t + \alpha_1)^{-1} [r(k+1) - y(k)]\end{aligned}\quad (8)$$

여기서  $\alpha_1 = \text{diag}(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1m})$ ,  $\alpha_{1j} \geq 0$  ( $j=1, 2, \dots, m$ ) 은 유계인 상수들이다.

한편 출력오차를  $e(k) = r(k) - y(k)$  로 정의하면

$$e(k+1) = r(k+1) - y(k+1) = r(k+1) - y(k) - S_u \Delta u_n(k) - \beta_k \quad (9)$$

로 쓸수 있다.

정리 1 만일 희망하는 출력자리길의 변화가 유계 즉  $\|r(k+1) - r(k)\| \leq \Delta r$  이라면 SVM에 기초한 근사내부모형조종법칙 (8)에 의한 출력오차는 모든  $k$  에 대하여 최종평등유계이다. 즉

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e(k)\| \leq c_2 / (1 - c_1).$$

여기서  $c_1 = \|\alpha_1(\lambda I_m + \alpha_1)^{-1}\|$ ,  $c_2 = c_1 \Delta r + \beta_0$ ,  $\lambda \geq 0$  은 행렬  $S_u S_u^t$  의 최소고유값이다.(증명생략)

## 2) 불확정성보상과 로바스트성

여기서는 불확정성을 보상하는 로바스트조종법칙을 다음과 같이 구성한다.

$$\Delta u_c(k) = -S_u S_u^t (S_u S_u^t + \alpha_2)^{-1} F(z) \varepsilon(k) \quad (10)$$

그러면 닫힌체계의 모형은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}y(k+1) &= y(k) + S_u \Delta u_n(k) - (I_m - S_u^t (S_u S_u^t + \alpha_2)^{-1} F(z))(\beta_k + d_k) = \\ &= y(k) + S_u \Delta u_n(k) - F_d(\beta_k + d_k)\end{aligned}\quad (11)$$

여기서  $F(z)$  는 저주파대역력파기로서 다음과 같이 설계한다.

$$F(z) = \text{diag}(F_1, F_2, \dots, F_m) = \text{diag}\left(\frac{1-r_2}{1-r_2 z^{-1}}\right), \quad 0 \leq r_2 < 1.$$

그리고  $\alpha_2 = \text{diag}(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{2m})$  은 무계행렬이며  $\alpha_{2j} \geq 0$  ( $j=1, 2, \dots, m$ ) 은 유계인 상수들이다.

이때 SVM근사내부모형조종법칙은 식 (6), (10)을 고려하면 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned}u(k) &= u(k-1) + S_u S_u^t (S_u S_u^t + \alpha_1)^{-1} (r(k+1) - y(k)) - \\ &\quad - S_u S_u^t (S_u S_u^t + \alpha_2)^{-1} F(z) \varepsilon(k)\end{aligned}\quad (12)$$

한편  $\varepsilon(k) = -z^{-1}(\beta_k + v_k)$  이므로 닫힌체계는 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\begin{aligned}y(k+1) &= y(k) + S_u \Delta u_n(k) - (I_m - S_u^t (S_u S_u^t + \alpha_2)^{-1} F(z))(\beta_k + v_k) = \\ &= y(k) + S_u \Delta u_n(k) - F_d(\beta_k + v_k)\end{aligned}\quad (13)$$

여기서  $F_d = (I_m - S_u^t (S_u S_u^t + \alpha_2)^{-1})$ ,  $0 \leq F_d < I_m$  이다.

정리 2 만일 희망하는 출력자리길의 변화가 유계, 즉  $\|r(k+1) - r(k)\| \leq \Delta r$  이라면 SVM에 기초한 근사내부모형조종법칙 (12)에 의한 출력오차는 모든  $k$  에 대하여 최종평등유계이다. 즉

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e(k)\| \leq (c_3 + c_4) / (1 - c_1).$$

여기서  $c_1 = \|\alpha_1(\lambda I_m + \alpha_1)^{-1}\|$ ,  $c_3 = c_1 \Delta r$ ,  $c_4 = \|F_d(\beta_k + v_k)\|$ ,  $\lambda \geq 0$  은 행렬  $S_u S_u^t$  의 최소고유값이다.(증명생략)

### 3. SVM에 기초한 내부모형조종의 실현

우에서 고찰한 SVM근사내부모형조종을 실현하자면 우선 SVM을 리용하여 미지체계의 NARMA모형을 동정하여야 한다. 여기서는  $\varepsilon$ -무감도SVM를 리용한다.

측정된 학습자료  $\{D_i, y_i\}, i=1, \dots, l, D_i=[Z_i, u_i] \in R^{2n}, y_i \in R$  와  $\varepsilon$ -무감도SVM회귀원리에 기초하여 다음과 같은 풀이를 얻는다.

$$f(D) = \langle \omega \cdot \phi(D) \rangle + b = \sum_{i=1}^{nsv} (\alpha_i - \alpha_i^*) K(D \cdot D_{is}) + b \quad (14)$$

여기서  $D_{is}$  는 지지벡토르,  $K(\cdot)$  는 핵함수,  $nsv$  는 지지벡토르의 개수,  $\alpha_i, \alpha_i^*, b$  는 2차계획 문제의 풀이로 결정되는 벡토르이다.

가우스핵함수

$$K(D \cdot D_{is}) = \exp\left(\frac{-\|D - D_{is}\|^2}{2\delta^2}\right) \quad (15)$$

을 리용하면 미지비선형리산체계의 NARMA모형 (2)에 대한 SVM-NARMA근사모형은 다음과 같이 표현된다.

$$y_i(k+1) = S_j[\mathbf{Z}(k), u(k)] = \sum_{i=1}^{nsvp} (\alpha_{ji} - \alpha_{ji}^*) K_i[(\mathbf{Z}(k), u(k)), (Z_{jis}, u_{jis})] + b_j \quad (16)$$

이로부터 조종법칙 (8)의 행렬  $S_u = [S_{pq}], p, q=1, 2, \dots, m$  을 직접 유도할수 있다. 즉

$$S_{pq} = \frac{\partial S_p[\mathbf{Z}(k), u(k)]}{\partial u_q(k-1)} = -\frac{1}{\sigma_p^2} \sum_{i=1}^{nsvp} (\alpha_{pi} - \alpha_{pi}^*) (u_q(k-1) - u_{pis, q}) \mathbf{K}_p[(\mathbf{Z}(k), u(k)), (Z_{pis}, u_{pis})].$$

여기서  $u_{pis, q}$  는  $u_{pis}$  의  $2n-m+q$  번째 원소이다.

### 4. 모의실험 및 결과분석

다음과 같은 강한 비선형성을 가진 2입력-2출력비아핀리산체계[3, 4]를 고찰하자.

$$\begin{aligned} y_1(k+1) &= 0.2 \cos(2y_1(k) + y_1(k-1)) + 0.2(2y_2(k) + y_2(k-1)) + \\ &\quad + 0.2 \sin(0.2(y_1(k) + y_1(k-1)) + u_1(k) + u_1(k-1) + u_2(k-1) + 0.1) + \\ &\quad + \left( \frac{u_1(k) + u_1(k-1) + u_2(k-1)}{1 + \cos(y_1(k) + 0.2y_2(k))} \right) - 0.2 \\ y_2(k+1) &= 0.2 \sin(2y_1(k) + y_1(k-1)) + 2(2y_2(k) + y_2(k-1)) + \\ &\quad + 0.2 \sin(0.2(y_2(k) + y_2(k-1)) + u_2(k) + u_2(k-1) + u_1(k-1) + 0.1) + \\ &\quad + \left( \frac{u_2(k) + u_2(k-1) + u_1(k-1)}{1 + \sin(0.2y_1(k) + y_2(k))} \right), \quad k > 0 \\ y_1(k) &= 0, \quad y_2(k) = 0, \quad k \leq 0 \end{aligned}$$

여기서 체계변수들의 범위는 기지라고 가정한다.

한편 체계의 SVM-NARMA모형동정을 위한 입력신호로

$$u_1(k) = 0.125 + 0.375 \sin\left(\frac{\pi k}{50}\right), u_2(k) = 0.4 + 0.475 \cos\left(\frac{\pi k}{50}\right)$$

를 취한다. 그리고 모의에서 리용한  $\varepsilon$ -무감도SVM의 파라미터는  $C = 100$ ,  $\delta_1 = 0.55$ ,  $\delta_2 = 0.88$ 이다.

초기조건이  $[y_1(0), y_2(0)] = [0, 0]$ ,  $\alpha_0 = 1.2$  일 때의 희망하는 출력자리길

$$r_1(k) = 0.3 + 0.05 \left( \sin\left(\frac{\pi k}{50}\right) + \sin\left(\frac{\pi k}{100}\right) + \sin\left(\frac{\pi k}{150}\right) \right)$$

$$r_2(k) = 0.6 + 0.1 \left( \sin\left(\frac{\pi k}{50}\right) + \sin\left(\frac{\pi k}{100}\right) + \sin\left(\frac{\pi k}{150}\right) \right)$$

에 대한 조종체계의 추종성능과 닫힌체계의 로바스트성능은 그림 2, 3과 같다.

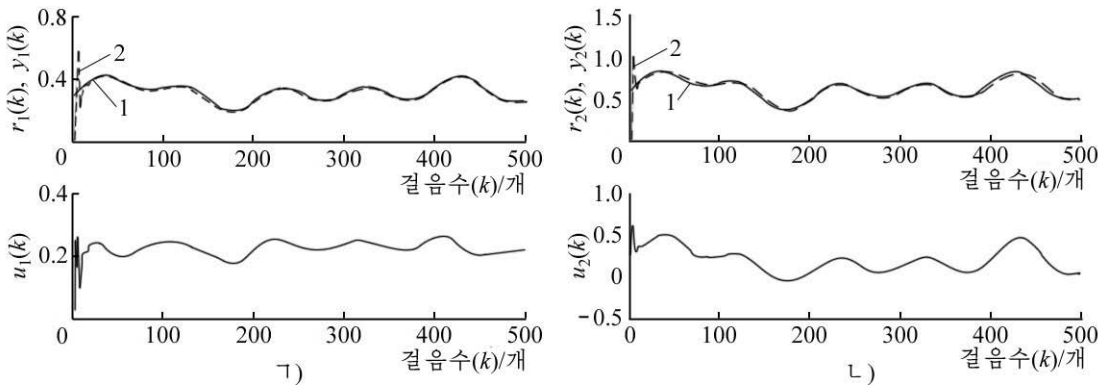


그림 2. SVM근사공칭체계의 추종특성

ㄱ) 출력 1에 대한 목표자리길( $r_1(k)$ , 곡선 1), 추종자리길( $y_1(k)$ , 곡선 2) 및 조종입력( $u_1(k)$ ),  
ㄴ) 출력 2에 대한 목표자리길( $r_2(k)$ , 곡선 1), 추종자리길( $y_2(k)$ , 곡선 2) 및 조종입력( $u_2(k)$ )

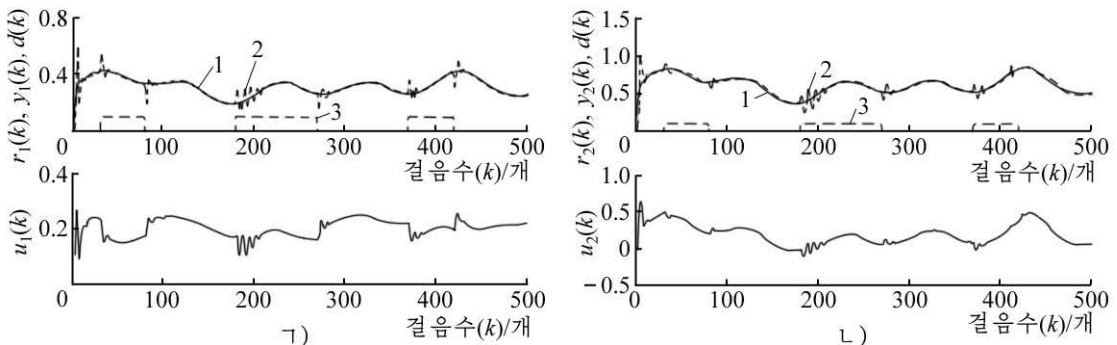


그림 3. SVM근사내부모형조종체계의 로바스트특성

ㄱ) 출력 1에 대한 목표자리길( $r_1(k)$ , 곡선 1), 추종자리길( $y_1(k)$ , 곡선 2), 섭동( $d(k)$ , 곡선 3) 및 조종입력( $u_1(k)$ ),  
ㄴ) 출력 2에 대한 목표자리길( $r_2(k)$ , 곡선 1), 추종자리길( $y_2(k)$ , 곡선 3), 섭동( $d(k)$ , 곡선 3) 및 조종입력( $u_2(k)$ )

그림 2, 3에서 보는바와 같이 SVM근사내부모형조종은 희망하는 출력자리길을 잘 추종하며 로바스트성능도 매우 좋다. 섭동이 비교적 클 때  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ 를 적당히 선정하면 체계의 안정성과 추종특성을 담보할수 있다.

## 맺 는 말

미지비선형리산MIMO체계에 대하여 SVM에 기초한 내부모형조종체계설계의 한가지 방법을 고찰하였다. 모의실험을 통하여 공칭조종법칙의 파라미터를 적당히 선정하면 체계의 안정성을 담보하고 로바스트조종법칙의 파라미터를 적당히 선정하면 불확정성의 영향을 감소시켜 로바스트성을 개선할수 있으며 엄격한 상대도를 가지지 않는 체계는 물론 비최소위상체계와 비아핀체계도 안정화할수 있다는것을 확증하였다.

## 참 고 문 헌

- [1] K. S. Narendra et al.; Neural Networks, 7, 737, 1994.
- [2] S. S. Ge et al.; IEEE Trans. on Automatic Control, 49, 2001, 2004.
- [3] O. Adetona et al.; IEEE Trans. on Neural Networks, 11, 102, 2000.
- [4] 金哲进 等; 清华大学学报(自然科学版), 49, 1880, 2009.

주체103(2014)년 4월 5일 원고접수

## **A Design Method of New Approximate Internal Model Control System for Unknown Discrete Nonlinear MIMO Systems using SVM**

*Kim Chol Jin*

This paper proposed a new internal model control approach for unknown nonlinear MIMO discrete systems using the support vector machine (SVM). The stability and robustness of the closed-loop system have been verified using Lyapunov method. The proposed method can be applied to systems with not well defined relative degree, to non-minimum phase systems and to non-affine systems. Simulation results demonstrate the effectiveness of the proposed control approach.

Key words: support vector machine, internal model control, unknown nonlinear discrete systems