김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체105(2016)년 제62권 제2호 Vol. 62 No. 2 JUCHE105(2016).

경계조건을 가진 레비과정에 관한 확률적분방정식의 근사풀이에 대한 연구

김천을, 한진혁

우리는 경계조건을 가진 레비과정에 관한 확률적분방정식의 근사방정식을 구성하고 근사방정식의 풀이의 유일존재성과 근사풀이의 수렴성을 연구한다.

선행연구[3－5]에서는 초기조건과 끝점상태에 관한 경계조건을 가진 확률미분방정식의 비적합풀이의 근사풀이에 대하여 론의하였으며 선행연구[7]에서는 초기조건의 기대값과 끝점상태의 기대값사이의 관계로 되는 경계값문제의 적합풀이를 론의하였다. 선행연구[1]에서는 초기조건과 끝점상태의 기대값사이의 관계로 되는 경계값문제의 적합풀이의 유일존재성문제와 근사풀이에 대하여 연구하였다. 대부분의 론문들에서 취급한것은 위너과정에 관한 확률미분방정식이다.

선행연구[2]에서는 비약확산방정식의 1.5차근사풀이를 론의하였고 선행연구[6]에서는 초기조건을 가진 확률미분방정식의 수값풀이결과들을 종합하였다.

론문에서는 비선형경계조건을 가진 레비과정에 관한 확률적분방정식

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(r,\ X_r)dr + \int_0^t b(r,\ X_r)dW_r + \int_0^t \int_E c(r,\ X_r,\ \upsilon)p(d\upsilon,\ dr),\quad t \in [0,\ 1] \tag{1}$$
$$X_0 = \mathrm{E}(\psi(X_1) \mid \mathfrak{I}_0)$$

의 수값풀이에 대하여 론의한다. 여기서 $\{W_t\}_{t\in[0,\ 1]}$은 표준위너과정이고 $p(d\upsilon,\ dr)$는 세기가 $\varphi(d\upsilon)dr$인 뽜쏭우연측도이며 X_0은 $\mathfrak{I}_0$－가측인 우연량이다. $a,\ b$는 $[0,\ 1]\times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$인 가측함수, c는 $[0,\ 1]\times \boldsymbol{R}\times E \to \boldsymbol{R}$인 가측함수이고 $E = \boldsymbol{R}\setminus\{0\}$이며 ψ는 $\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$인 련속인 비선형함수, $\mathfrak{I}_0$은 위너과정 및 뽜쏭측도와 독립인 우연량 Ξ_0에 의하여 생성된 $\sigma-$모임벌이다.

확률적분방정식 (1)의 풀이가 초기조건 x에 관계된다는 의미에서 이 방정식의 풀이를 $\varphi_t(x)$로 표시하면 확률적분방정식 (1)은 다음과 같이 표시된다.

$$\varphi_t(x) = x + \int_0^t a(r,\ \varphi_r(x))dr + \int_0^t b(r,\ \varphi_r(x))dW_r + \int_0^t \int_E c(r,\ \varphi_r(x),\ \upsilon)p(d\upsilon,\ dr),\quad t\in[0,\ 1] \tag{2}$$
$$x = \mathrm{E}(\psi(\varphi_1(x)) \mid \mathfrak{I}_0)$$

방정식 (2)의 근사도식을 다음과 같이 구성할수 있다.

$$\hat{\varphi}_{t_n}(x) = x + \sum_{i=1}^{n-1}[a(t_i,\ \hat{\varphi}_{t_i}(x))\Delta t_i + b(t_i,\ \hat{\varphi}_{t_i}(x))\Delta W_i] + \sum_{i=1}^{n-1}\left[\int_E c(t_{n-1},\ \hat{\varphi}_{t_{n-1}}(x),\ \upsilon)p(d\upsilon,\ \Delta t_n)\right],\ n = \overline{1,\ N}$$
$$x = \mathrm{E}(\psi(\hat{\varphi}_1(x)) \mid \mathfrak{I}_0) \tag{3}$$

이 식을 적분방정식형태로 표시하면 다음과 같다.

$$\hat{\varphi}_{t_n}(x) = x + \int_0^{t_n} a(t_{n_r},\ \hat{\varphi}_{t_{n_r}}(x))dr + \int_0^{t_n} b(t_{n_r},\ \hat{\varphi}_{t_{n_r}}(x))dW_r + \int_0^{t_n}\int_E c(t_{n_r},\ \hat{\varphi}_{t_{n_r}}(x),\ \upsilon)p(d\upsilon,\ dr) \quad (4)$$

$$x = \mathrm{E}(\psi(\hat{\varphi}_1(x)) \mid \Im_0)$$

방정식 (3) 혹은 방정식 (4)가 방정식 (2)의 근사방정식으로 되겠는가 즉 방정식 (3)(또는 방정식 (4))의 풀이가 방정식 (2)의 풀이에로 수렴하겠는가를 밝히려면 우선 방정식 (3)의 풀이가 존재하겠는가부터 따져보아야 한다.(방정식 (3)과 방정식 (4)는 동등한 방정식이므로 앞으로는 반복지적하지 않기로 한다.)

1. 초기조건을 가진 오일레르형근사풀이의 몇가지 성질

경계조건을 가진 확률적분방정식 (1)의 풀이를 수값적으로 모의하기 위하여 먼저 경계조건을 제외한 초기조건에 관한 확률적분방정식 (2)의 근사방정식을 구성하자.

시간구간 [0, 1] 의 임의의 분할 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$ 에 대하여 $n_t = \max_n\{n : t_n \le t\}$, $\Delta t_n = t_n - t_{n-1},\ \delta = \max_n\{\Delta t_n\}$ 을 정의하면 오일레르근사도식은 다음과 같다.

$$\hat{\varphi}_{t_n}(x) = \hat{\varphi}_{t_{n-1}}(x) + a(t_{n-1},\ \hat{\varphi}_{t_{n-1}}(x))\Delta t_{n-1} + b(t_{n-1},\ \hat{\varphi}_{t_{n-1}}(x))\Delta W_{n-1} + \int_E c(t_{n-1},\ \hat{\varphi}_{t_{n-1}},\ \upsilon)p(d\upsilon,\ \Delta t_{n-1}) =$$

$$= x_0 + \sum_{i=1}^{n-1}[a(t_i,\ \hat{\varphi}_{t_i}(x))\Delta t_i + b(t_i,\ \hat{\varphi}_{t_i}(x))\Delta W_i] + \sum_{i=1}^{n-1}\left[\int_E c(t_i,\ \hat{\varphi}_i,\ \upsilon)p(d\upsilon,\ \Delta t_i)\right] \quad (5)$$

여기서 $\Delta W_i = W(t_i) - W(t_{i-1}),\ i = 1,\ \cdots,\ N$ 이다.

식 (5)를 적분형태로 표시하면 다음과 같다.

$$\hat{\varphi}_{t_n}(x) = x + \int_0^{t_n} a(t_{n_r},\ \hat{\varphi}_{t_{n_r}}(x))dr + \int_0^{t_n} b(t_{n_r},\ \hat{\varphi}_{t_{n_r}}(x))dW_r + \int_0^{t_n}\int_E c(t_{n_r},\ \hat{\varphi}_{t_{n_r}}(x),\ \upsilon)p(d\upsilon,\ dr) \quad (6)$$

정리 1 [6] $a,\ b$ 는 조건 $H_1,\ H_2$ 를 만족시키는 가측함수이며 조건 H_3 이 성립되는 상수 $c > 0$ 이 존재한다.

H_1) $\exists K_1 > 0,\ \exists K_2 > 0,\ \exists K_3 > 0,\ \forall t_1,\ t_2 \in [0,\ 1],\ \forall x,\ y \in \boldsymbol{R}$ 에 대하여

$$|a(t_1,\ x) - a(t_2,\ y)| \le K_1(|t_1 - t_2| + |x - y|),\ |b(t_1,\ x) - b(t_2,\ y)| \le K_2(|t_1 - t_2| + |x - y|),$$

$$\int_E |c(t_1,\ x,\ \upsilon) - c(t_2,\ y,\ \upsilon)|\varphi(d\upsilon) \le K_3(|t_1 - t_2| + |x - y|).$$

H_2) $\exists C_1 > 0,\ \exists C_2 > 0,\ \exists C_3 > 0,\ \forall t \in [0, 1],\ \forall x \in \boldsymbol{R},\ \upsilon \in E$ 에 대하여

$$|a(t,\ x)| \le C_1(1 + |x|),\ |b(t,\ x)| \le C_2(1 + |x|),\ \int_E |c(t,\ x,\ \upsilon)|\varphi(d\upsilon) \le C_3(1 + |x|).$$

H_3) 초기조건 x 가 $\mathrm{E}|x|^2 < \infty$ 일 때

$$\sup_{s \in [0,\ t]} \mathrm{E}|\hat{\varphi}_{t_{n_s}}(x) - \varphi_s(x)|^2 \le c\delta,\ t \in [0,\ 1]. \quad (7)$$

근사식 (5) (혹은 식 (6))의 풀이에 대하여 다음의 성질들이 성립된다.

보조정리 1 함수 a, b, c 가 조건 H_1, H_2 를 만족시키는 가측함수들일 때 H_3 을 만족시키는 $\Im_0$ －가측인 $\forall x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}$, $\forall t \in [0, 1]$ 에 대하여

$$\sup_{t_n < t} \mathrm{E} | \hat{\varphi}_{t_n}(x_1) - \hat{\varphi}_{t_n}(x_2) |^2 \le 4\mathrm{E} | x_1 - x_2 |^2 e^{4(K_1^2 + K_2^2 + K_3)}$$

이 성립된다. 여기서 K_1, K_2 와 K_3 은 함수 a, b 와 c 의 리프쉬츠상수들이다.

보조정리 2 함수 a, b, c 가 조건 H_1, H_2 를 만족시키는 가측함수이고 임의의 $t \in [0, 1]$ 과 H_3 을 만족시키는 임의의 $\Im_0$ －가측인 $x \in \boldsymbol{R}$ 에 대하여 다음의 식이 성립된다.

$$\sup_{t_n \le t} \mathrm{E} | \hat{\varphi}_{t_n}(x) |^2 \le (4\mathrm{E} | x |^2 + (8C_1^2 + 8C_2^2 + 4C_3)) e^{8C_1^2 + 8C_2^2 + 4C_3}$$

2. 경계조건을 가진 근사방정식의 풀이의 유일존재성

여기서는 우에서 론의된 보조정리들에 기초하여 근사방정식 (4)의 풀이의 유일존재성을 밝히게 된다.

$y = \mathrm{E}[\psi(\hat{\varphi}_1(x)) | \Im_0]$ 을 초기조건으로 하는 근사식 (6)의 풀이의 존재성을 보기로 하자. 여기서 함수 ψ 는 다음의 조건을 만족시키는 련속함수이다.

H_4) $0 < \eta < M$ 인 적당한 η 가 있어서 $|\psi(x) - \psi(y)| \le \eta | x - y |$ 이다. 여기서 M 은 미리 정해진 정수이다.

보조정리 3 a, b, c 가 조건 H_1, H_2 를 만족시키는 가측함수들이고 x 는 $\mathrm{E} | x |^2 < \infty$ 인 $\Im_0$ －가측인 우연량이라고 할 때 $y = \mathrm{E}[\psi(\hat{\varphi}_1(x)) | \Im_0]$ 을 초기조건으로 하는 근사식 (6)의 풀이는 유일존재한다.

정리 2 a, b, c 가 조건 H_1, H_2 를 만족시키는 가측함수들이고 x 는 조건 H_3 을 만족시키는 $\Im_0$ －가측인 우연량이라고 할 때 근사식 (4)의 풀이는 유일존재한다.

증명 경계조건을 가진 방정식 (4)에서 경계조건을 제외하면 근사식 (6)과 동등하다.

근사식 (6)은 $\mathrm{E} | x |^2 < \infty$ 인 초기조건 x 에 대하여 풀이가 유일존재한다.

이로부터 경계조건 $x = \mathrm{E}(\psi(\hat{\varphi}_1(x)) | \Im_0)$ 을 만족시키는 x 가 존재하면 그러한 x 를 초기조건으로 하는 방정식 (2)의 풀이가 유일존재하므로 근사식 (4)의 풀이가 유일존재한다고 말할수 있다.

$x = \mathrm{E}(\psi(\hat{\varphi}_1(x)) | \Im_0)$ 을 만족시키는 x 의 존재성을 밝히기 위하여

$$x_{m+1} = \mathrm{E}(\psi(\hat{\varphi}_1(x_m)) | \Im_0), \ m = 0, 1, 2, \cdots \tag{8}$$

인 점렬을 생각하자. 여기서 $\hat{\varphi}_1(x_m)$ 은 초기조건이 x_m 인 근사식 (6)의 풀이이다.

이제 방정식 (4)의 점차근사도식

$$\hat{\varphi}_{t_n}(x_m) = x_m + \int_0^{t_n} a(t_{n_r}, \hat{\varphi}_{n_r}(x_m)) dr + \int_0^{t_n} b(t_{n_r}, \hat{\varphi}_{n_r}(x_m)) dW_r + \int_0^{t_n}\int_E c(t_{n_r}, \hat{\varphi}_{n_r}(x_m), \upsilon) p(d\upsilon, dr), \ n = \overline{1, N}$$

$$x_{m+1} = \mathrm{E}(\psi(\hat{\varphi}_1(x_m)) | \Im_0), \quad m = 0, 1, 2, \cdots$$

을 만들어 $m \to \infty$ 일 때 근사식 (6)을 만족시키는 $\{x_m\}$ 의 수렴성을 밝히면 될것이다.

ψ 에 대한 조건 H_4 와 조건부기대값의 성질 그리고 보조정리 1에 의하여

$$\mathrm{E} | x_{m+1} - x_m |^2 \le \mathrm{E}(\mathrm{E}(\psi(\hat{\varphi}_1(x_m)) - \psi(\hat{\varphi}_1(x_{m-1})) | \Im_0)^2) \le$$

$$\le \mathrm{E}[\mathrm{E}(\psi(\hat{\varphi}_1(x_m))-\psi(\hat{\varphi}_1(x_{m-1})))^2 \mid \Im_0] \le \mathrm{E}(\psi(\hat{\varphi}_1(x_m))-\psi(\hat{\varphi}_1(x_{m-1})))^2 \le$$
$$\le \eta^2\ \mathrm{E}|\hat{\varphi}_1(x_m)-\hat{\varphi}_1(x_{m-1})|^2 \le \eta^2\ 4e^{4(K_1^2+K_2^2+K_3)}\,\mathrm{E}\,|x_m - x_{m-1}|^2$$

으로 되는데 $\alpha = \eta^2\ 4e^{4(K_1^2+K_2^2+K_3)}$ 으로 놓으면 $\mathrm{E}\,|x_{m+1}-x_m|^2 \le \alpha\,\mathrm{E}\,|x_m - x_{m-1}|^2$ 이 얻어진다.

조건 H_4 에서 $M = e^{-2(K_1^2+K_2^2+K_3)}/2$ 으로 놓으면 $0<\eta<M$ 이므로 $0<\alpha<1$ 이고 따라서

$$\mathrm{E}\,|x_{m+1}-x_m|^2 \le \alpha^m \mathrm{E}\,|x_1 - x_0|^2 \tag{9}$$

이 성립된다. 그런데

$$\mathrm{E}\,|x_1 - x_0|^2 \le \mathrm{E}[\mathrm{E}(\psi(\hat{\varphi}_1(x_0))-x_0) \mid \Im_0]^2 \le \mathrm{E}[\mathrm{E}(\psi(\hat{\varphi}_1(x_0))-x_0)^2 \mid \Im_0] \le$$
$$\le \mathrm{E}(\psi(\hat{\varphi}_1(x_0))-x_0)^2 = \mathrm{E}(\psi(\hat{\varphi}_1(x_0))-\psi(0)+\psi(0)-x_0)^2 \le$$
$$\le 2[\mathrm{E}(\psi(\hat{\varphi}_1(x_0))-\psi(0))^2 + (\psi(0)-x_0)^2] \le 3[\eta\mathrm{E}(\hat{\varphi}_1(x_0))^2 + \psi^2(0) - \mathrm{E}\,|x_0|^2]$$

이고 보조정리 2에 의하여 $\mathrm{E}|\hat{\varphi}_t(x_0)|^2 \le 4e^{4(2C_1{}^2+2C_2{}^2+C_3)}[\mathrm{E}\,|x_0|^2 + (2C_1{}^2 + 2C_2{}^2 + C_3)] < \infty$ 이며 함수 ψ 는 0 점에서 련속이므로 $\psi(0)<\infty$ 이고 조건에 의하여 $\mathrm{E}|x_0|^2<\infty$ 이다. 따라서 식 (9)에서 $m\to\infty$ 이면 오른변은 령으로 수렴되므로 $\{x_m\}$ 은 기본렬임을 알수 있다.

보조정리 3의 증명과정에서 본바와 같이 $x_{m+1} = \mathrm{E}(\psi(\hat{\varphi}_1(x_m)) \mid \Im_0),\ \ m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ 에 대하여 $\mathrm{E}\,|x_m|^2 < \infty,\ m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ 이 성립된다.

L^2 공간의 완비성으로부터 $x_{m+1} = \mathrm{E}(\psi(\hat{\varphi}_1(x_m)) \mid \Im_0),\ \ m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ 의 2제곱평균수렴극한이 존재하며 그 극한을 $\hat{X}_0$ 으로 표시하면 $\hat{X}_0 = \mathrm{E}(\psi(\hat{\varphi}_1(\hat{X}_0)) \mid \Im_0)$ 을 만족시키는 $\hat{X}_0$ 이 존재함을 알수 있다.(증명끝)

3. 경계조건을 가진 근사방정식의 풀이의 오차평가

근사방정식 (4)의 풀이를 식 (1) 혹은 식 (2)의 근사풀이로 리용할수 있겠는가를 밝히자.
식 (2)의 풀이를 $\{\varphi_t(X_0)\}$ 으로 표시하면 다음의 정리가 성립된다.

정리 3 $a,\ b,\ c$ 가 조건 $H_1,\ H_2$ 를 만족시키는 가측함수, ψ 가 $M = 2^{-3/2}e^{-2(K_1^2+K_2^2+K_3)}$ 인 조건 H_4 를 만족시키는 련속함수이면 $\sup\limits_{t\in[0,\,1]} E\,|\hat{\varphi}_{t_n}(\hat{X}_0) - \varphi_t(X_0)|^2 \le C'\delta$ 가 성립된다. 여기서 $\hat{X}_0 = \mathrm{E}(\psi(\hat{\varphi}_1(\hat{X}_0) \mid \Im_0))$ 이고 $X_0 = \mathrm{E}(\psi(\varphi_1(X_0) \mid \Im_0))$ 이다.

증명 먼저 $\mathrm{E}\,|\hat{X}_0 - X_0|^2 \le C_2\delta$ 임을 밝히자.

$\hat{X}_0$ 과 X_0 의 정의에 의하여

$$\mathrm{E}\,|\hat{X}_0 - X_0|^2 \le \mathrm{E}\,|\mathrm{E}(\psi(\hat{\varphi}_1(\hat{X}_0)) - \psi(\varphi_1(X_0))) \mid \Im_0|^2 \le \mathrm{E}[\mathrm{E}(\psi(\hat{\varphi}_1(\hat{X}_0)) - \psi(\varphi_1(X_0)))^2 \mid \Im_0] \le$$
$$\le \mathrm{E}(\psi(\hat{\varphi}_1(\hat{X}_0)) - \psi(\varphi_1(X_0)))^2 \le \eta^2 \mathrm{E}\,|(\hat{\varphi}_1(\hat{X}_0)) - (\varphi_1(X_0))|^2 \le$$
$$\le 2\eta^2[\mathrm{E}\,|(\hat{\varphi}_1(\hat{X}_0)) - (\varphi_1(\hat{X}_0))|^2 + \mathrm{E}\,|(\varphi_1(\hat{X}_0)) - (\varphi_1(X_0))|^2]$$

으로 되며 보조정리 1과 정리 1에 의하여 다음과 같이 된다.

$$\mathrm{E}\,|\hat{X}_0 - X_0|^2 \le 2\eta^2[C_1\delta + 4e^{4(K_1^2+K_2^2+K_3)}\mathrm{E}\,|\hat{X}_0 - X_0|^2]$$

$\eta < M = 2^{-3/2}e^{-2(K_1^2+K_2^2+K_3)}$ 이기때문에 $\alpha = \eta\cdot 2^{3/2}e^{2(K_1^2+K_2^2+K_3)}$ 이고

$$(1-\alpha^2)\mathrm{E}|\hat{X}_0 - X_0|^2 \le 2\eta^2 C_1\delta, \quad \mathrm{E}|\hat{X}_0 - X_0|^2 \le 2\eta^2 C_1/(1-\alpha^2)\cdot\delta = C_2\delta. \tag{10}$$

정리 1과 보조정리 1, 식 (10)에 의하여

$$\sup_{t\in[0,\,1]} \mathrm{E}|\hat{\varphi}_{t_n}(\hat{X}_0) - \varphi_t(X_0)|^2 \le \sup_{t\in[0,\,1]} \mathrm{E}|\hat{\varphi}_{t_n}(\hat{X}_0) - \varphi_t(\hat{X}_0) + \varphi_t(\hat{X}_0) - \varphi_t(X_0)|^2 \le$$

$$\le 2\left(\sup_{t\in[0,\,1]} \mathrm{E}|\hat{\varphi}_{t_n}(\hat{X}_0) - \varphi_t(\hat{X}_0)|^2 + \sup_{t\in[0,\,1]} \mathrm{E}|\varphi_t(\hat{X}_0) - \varphi_t(X_0)|^2\right) \le$$

$$\le 2(C\delta + 4e^{4(K_1^2+K_2^2+K_3)}\mathrm{E}|\hat{X}_0 - X_0|^2) \le 2(C + 4C_2 e^{4(K_1^2+K_2^2+K_3)})\delta = C'\delta$$

가 얻어진다.(증명끝)

실례 경계조건을 가진 확률적분방정식

$$X_t = X_0 + \int_0^t \left(\frac{1}{2}X_s + 6\right)ds + \int_0^t \sin X_s dW_s + \int_0^t\int_E p(dv,\, dr),\ X_0 = \mathrm{E}\left(\frac{1}{9}X_1 + 5\right)$$

의 수값풀이의 근사도식은 다음과 같이 정돈된다.

$$\hat{\varphi}_n(x_m) = \hat{\varphi}_{n-1}(x_m)(1+\Delta t/2) + 6\Delta t + \sin\hat{\varphi}_{n-1}(x_m)\Delta W_{n-1}, \quad x_{m+1} = (1+\Delta t/2)^N(x_m + 12)/9 + 11/3$$

$$\hat{\varphi}_0(x_m) = x_m, \quad n = 1,\ 2, \cdots,\ N,\ m = 0,\ 1,\ 2, \cdots$$

참 고 문 헌

[1] 김천을 등; 조선수학학회지, 2, 98, 주체102(2013).

[2] G. Albert; Stoch. Anal. Appl., 24, 1147, 2006.

[3] A. Arciniega et al.; Stoch. Anal. Appl., 22, 5, 1295, 2004.

[4] M. Ferrante et al.; Stoch. Proc. Appl., 61, 323, 1996.

[5] D. Nualart et al.; Boundary Value Problems for SDEs, The Annals of Probability, 19, 1118, 1991.

[6] E. Platen et al.; Numerical Solution of SDEs with Jumps in Finance, Springer, 23～89, 2010.

[7] Wang Yan et al.; Northeast Math. J., 23, 6, 541, 2000.

주체104(2015)년 10월 5일 원고접수

Approximate Solution of SIEs for Levi Processes with Boundary Conditions

Kim Chon Ul, Han Jin Hyok

In the previous papers SDEs for Wiener processes with boundary condition were studied.

We construct an approximate scheme of SIEs for Levi processes with relation between the initial condition and expectation to last state as boundary condition and consider existence and uniqueness of its solutions and convergence of approximate solutions.

Key words: approximate scheme, boundary value problem