김일성종합대학학보 (자연과학)
주체105(2016)년 제62권 제2호

JOURNAL OF KIM IL SUNG UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE)
Vol. 62 No. 2 JUCHE105(2016).

일반화된 초기하연산자에 의하여 정의된 해석함수의 미분종속과 그 응용

김무영, 리은심

경애하는 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《과학연구부문에서 최첨단돌파전을 힘있게 벌려 경제발전과 국방력강화, 인민생활향상에 이바지하는 가치있는 연구성과들을 많이 내놓아야 합니다.》

론문에서는 해석함수의 미분종속에 대한 몇가지 성질을 연구하였다.

선행연구[2－4]에서는 함수 $f\in \boldsymbol{A}$에 대하여

$$\left(\frac{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1]f(z)}{z}\right)^{\mu}\prec q(z)\ \text{ 혹은 }\ q(z)\prec\left(\frac{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1]f(z)}{z}\right)^{\mu}$$

이기 위한 충분조건을, 선행연구[5]에서는 $(\Omega_z^\alpha f(z)/z)^\mu \prec q(z)$ 이기 위한 충분조건을 구하였다.

론문에서는 $\left(\frac{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1]f(z)}{z}\right)^{\mu}\prec q(z)$ 혹은 $q(z)\prec\left(\frac{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1]f(z)}{z}\right)^{\mu}$ 이기 위한 새로운 충분조건을 구하고 $(\Omega_z^\alpha f(z)/z)^\mu \prec q(z)$ 혹은 $q(z)\prec(\Omega_z^\alpha f(z)/z)^\mu$ 이기 위한 충분조건을 구하는데 응용하여 선행연구[5]의 결과를 일반화하였다.

단위원 $U=\{z\in \boldsymbol{C}:|z|<1\}$ 에서 해석적인 함수들의 모임을 $H(U)$로 표시하고 $n\in \boldsymbol{N}$, $a\in \boldsymbol{C}$ 에 대하여 $f(z)=a+\sum_{k=n}^{\infty}a_k z^k$ 모양의 함수 $f\in H(U)$ 들의 모임을 $H[a,\ n]$ 으로 표시하자.

$A=\{f\in H(U): f(0)=f'(0)-1=0\}$ 이라고 하면

$$K:=\left\{f\in A:\mathrm{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>0,\ \ z\in U\right\},\quad S^*:=\left\{f\in A:\mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}>0,\ \ z\in U\right\}$$

를 각각 불룩함수족, 별형함수족이라고 부른다.

정의 1[6] 함수 f와 g가 단위원 U에서 해석적이라고 하자.

이때 조건 $w(0)=0,\ |w(z)|<1,\ z\in U$ 와 $f(z)=g(w(z)),\ z\in U$ 를 만족시키는 U에서 해석적인 함수 w가 있으면 함수 f는 g에 종속된다고 하고 g는 f에 공액종속된다고 하며 $f\prec g$ 혹은 $f(z)\prec g(z),\ z\in U$ 로 표시한다.

정의 2[1] $\overline{U}:=\{z\in \boldsymbol{C}:|z|\le 1\}$ 이라고 하자.

이때 $\overline{U}\setminus E(f)$ 우에서 해석적이고 1：1인 함수 f 들의 모임을 Q로 표시한다. 여기서 $E(f):=\{\xi\in\partial U:\lim_{z\to\xi}f(z)=\infty\}$ 이고 $f'(\zeta)\ne 0,\ \zeta\in\partial U\setminus E(f)$ 이다.

정의 3[1] $\alpha_i \in \boldsymbol{C},\ i=1, 2, \cdots, l$ 과 $\beta_j \in \boldsymbol{C} \setminus \{0, -1, -2, \cdots\},\ j=1, 2, \cdots, m$ 에 대하여

$$H_m^l(\alpha_1,\ \alpha_2, \cdots,\ \alpha_l\ ;\ \beta_1,\ \beta_2, \cdots,\ \beta_m): A \to A,$$

$$H_m^l(\alpha_1,\ \alpha_2, \cdots,\ \alpha_l\ ;\ \beta_1,\ \beta_2, \cdots,\ \beta_m) f(z) := z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_{n-1}(\alpha_2)_{n-1}\cdots(\alpha_l)_{n-1}}{(\beta_1)_{n-1}(\beta_2)_{n-1}\cdots(\beta_m)_{n-1}} \frac{a_n z^n}{(n-1)!}$$

을 일반화된 초기하연산자라고 부른다. 여기서

$$(a)_n := \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = \begin{cases} 1, & n=0 \\ a(a+1)\cdots(a+n-1), & n \in \boldsymbol{N} \end{cases}.$$

간단히 $H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1] f(z) := H_m^l(\alpha_1,\ \alpha_2, \cdots,\ \alpha_l\ ;\ \beta_1,\ \beta_2, \cdots, \beta_m) f(z)$ 로 표시한다.

1. 기 본 결 과

보조정리 $z(H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1] f(z))' = (\beta_1 - 1) H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1 - 1] f(z) - (\beta_1 - 2) H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1] f(z)$

정리 1 $h \in H[1, 1]$ 은 단위원 U 에서 불룩이고 $\delta,\ \mu \in \boldsymbol{C} \setminus \{0\},\ \operatorname{Re}\delta \geq 0$ 이라고 하자.

이때 함수 $f \in \boldsymbol{A}$ 가 조건

$$[1 - \delta\mu(\beta_1 - 1)] \left(\frac{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1] f(z)}{z} \right)^{\mu} + \delta\mu(\beta_1 - 1) \left(\frac{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1] f(z)}{z} \right)^{\mu} \left(\frac{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1 - 1] f(z)}{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1] f(z)} \right) \prec h(z),\ z \in U$$

를 만족시키면 $\left(\frac{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1] f(z)}{z} \right)^{\mu} \prec q(z) \prec h(z),\ z \in U$ 이고 $q(z) = \frac{1/\delta}{z^{1/\delta}} \int_0^z h(t) t^{1/\delta - 1} dt$ 는 U 에서 불룩이고 최량인 우월함수이다.

증명 $p(z) := \left(\frac{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1] f(z)}{z} \right)^{\mu}$ 이라고 하고 량변을 로그미분하면 보조정리에 의하여

$$zp'(z) = \mu(\beta_1 - 1) \left(\frac{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1] f(z)}{z} \right)^{\mu} \left(\frac{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1 - 1] f(z)}{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1] f(z)} - 1 \right)$$

이다. 따라서

$$p(z) + \delta z p'(z) = \left(\frac{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1] f(z)}{z} \right)^{\mu} + \delta\mu(\beta_1 - 1) \left(\frac{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1] f(z)}{z} \right)^{\mu} \left(\frac{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1 - 1] f(z)}{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1] f(z)} - 1 \right) =$$

$$= [1 - \delta\mu(\beta_1 - 1)] \left(\frac{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1] f(z)}{z} \right)^{\mu} + \delta\mu(\beta_1 - 1) \left(\frac{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1] f(z)}{z} \right)^{\mu} \left(\frac{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1 - 1] f(z)}{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1] f(z)} \right) \prec h(z)$$

이면 선행연구[1]의 정리 3.1에 의하여 $p(z) = (H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1] f(z)/z)^{\mu} \prec q(z) \prec h(z),\ z \in U$ 이고 $q(z) = \frac{1/\delta}{z^{1/\delta}} \int_0^z h(t) t^{1/\delta - 1} dt$ 는 U 에서 불룩이고 최량인 우월함수이다.(증명끝)

따름 1 $\delta,\ \mu\in\boldsymbol{C}\setminus\{0\},\ \mathrm{Re}\,\delta\ge 0$에 대하여 함수 $f\in\boldsymbol{A}$가 조건

$$[1-\delta\mu(\beta_1-1)]\left(\frac{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1]f(z)}{z}\right)^{\mu}+\delta\mu(\beta_1-1)\left(\frac{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1]f(z)}{z}\right)^{\mu}\left(\frac{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1-1]f(z)}{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1]f(z)}\right)\prec\frac{1+Az}{1+Bz},\ z\in U$$

를 만족시키면 $\left(\frac{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1]f(z)}{z}\right)^{\mu}\prec q(z)=\frac{1/\delta}{z^{1/\delta}}\int_0^z\frac{1+At}{1+Bt}\cdot t^{1/\delta-1}dt=\frac{1}{\delta}\int_0^1\frac{1+Azu}{1+Bzu}\cdot u^{1/\delta-1}du$ 이고 q는 불룩이며 최량인 우월함수이다.

정리 2 $h\in H[1,\ 1]$은 단위원 U에서 불룩이고 $\delta,\ \mu\in\boldsymbol{C}\setminus\{0\},\ \mathrm{Re}\,\delta>0$이라고 하자.

그리고 $f\in\boldsymbol{A}$이고 $(H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1]f(z)/z)^{\mu}\in H[1,\ 1]\cap Q$이며

$$\left[1-\delta\mu(\beta_1-1)\right]\left(\frac{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1]f(z)}{z}\right)^{\mu}+\delta\mu(\beta_1-1)\left(\frac{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1]f(z)}{z}\right)^{\mu}\left(\frac{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1-1]f(z)}{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1]f(z)}\right)$$

는 U에서 단엽이라고 하자.

이때

$$h(z)\prec\left[1-\delta\mu(\beta_1-1)\right]\left(\frac{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1]f(z)}{z}\right)^{\mu}+\delta\mu(\beta_1-1)\left(\frac{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1]f(z)}{z}\right)^{\mu}\left(\frac{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1-1]f(z)}{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1]f(z)}\right)$$

이면 $q(z)\prec(H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1]f(z)/z)^{\mu},\ z\in U$ 이고 q는 최량인 종속함수이다. 여기서

$$q(z)=\frac{1/\delta}{z^{1/\delta}}\int_0^z h(t)t^{1/\delta-1}dt\ .$$

증명 $p(z):=(H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1]f(z)/z)^{\mu}$이라고 하고 량변을 로그미분하면

$$zp'(z)=\mu(\beta_1-1)\left(\frac{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1]f(z)}{z}\right)^{\mu}\left(\frac{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1-1]f(z)}{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1]f(z)}-1\right).$$

그리하여

$$h(z)\prec p(z)+\delta zp'(z)=[1-\delta\mu(\beta_1-1)]\left(\frac{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1]f(z)}{z}\right)^{\mu}+$$

$$+\delta\mu(\beta_1-1)\left(\frac{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1]f(z)}{z}\right)^{\mu}\left(\frac{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1-1]f(z)}{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1]f(z)}\right),\quad z\in U$$

가 성립되면 선행연구[7]의 따름 2.2에 의하여 $q(z)\prec(H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1]f(z)/z)^{\mu},\ z\in U$ 이고 $q(z)=\frac{1/\delta}{z^{1/\delta}}\int_0^z h(t)t^{1/\delta-1}dt$ 는 최량인 종속함수이다.(증명끝)

따름 2 $\delta,\ \mu\in\boldsymbol{C}\setminus\{0\},\ \mathrm{Re}\,\delta>0$이라고 하자.

$f\in\boldsymbol{A}$이고 $(H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1]f(z)/z)^{\mu}\in H[1,\ 1]\cap Q$이며

$$[1-\delta\mu(\beta_1-1)]\left(\frac{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1]f(z)}{z}\right)^{\mu}+\delta\mu(\beta_1-1)\left(\frac{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1]f(z)}{z}\right)^{\mu}\left(\frac{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1-1]f(z)}{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1]f(z)}\right)$$

는 U 에서 단엽이라고 하자.

이때

$$\frac{1+Az}{1+Bz} \prec [1-\delta\mu(\beta_1-1)]\left(\frac{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1]f(z)}{z}\right)^{\mu} + \delta\mu(\beta_1-1)\left(\frac{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1]f(z)}{z}\right)^{\mu}\left(\frac{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1-1]f(z)}{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1]f(z)}\right)$$

이면 $q(z)=\frac{1/\delta}{z^{1/\delta}}\int_0^z \frac{1+At}{1+Bt}\cdot t^{1/\delta-1}dt \prec \left(\frac{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1]f(z)}{z}\right)^{\mu}$, $z\in U$ 이고 q 는 최량인 종속함수이다.

정리 3 $h_i \in H[1,\ 1],\ i=1,\ 2$ 는 단위원 U 에서 불룩이고 $\delta,\ \mu \in \boldsymbol{C}\setminus\{0\},\ \mathrm{Re}\,\delta>0$, $f\in \boldsymbol{A}$, $(H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1]f(z)/z)^{\mu} \in H[1,\ 1]\cap Q$ 이며

$$[1-\delta\mu(\beta_1-1)]\left(\frac{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1]f(z)}{z}\right)^{\mu} + \delta\mu(\beta_1-1)\left(\frac{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1]f(z)}{z}\right)^{\mu}\left(\frac{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1-1]f(z)}{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1]f(z)}\right)$$

는 U 에서 단엽이라고 하자.

이때

$$h_1(z) \prec [1-\delta\mu(\beta_1-1)]\left(\frac{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1]f(z)}{z}\right)^{\mu} + \delta\mu(\beta_1-1)\left(\frac{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1]f(z)}{z}\right)^{\mu}\cdot\left(\frac{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1-1]f(z)}{H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1]f(z)}\right) \prec h_2(z)$$

이면 $q_1(z) \prec (H_m^l[\alpha_1,\ \beta_1]f(z)/z)^{\mu} \prec q_2(z),\ \ z\in U$ 이고 q_1 과 q_2 는 각각

$$q_i(z)=\frac{1/\delta}{z^{1/\delta}}\int_0^z h_i(t)t^{1/\delta-1}dt,\ i=1,\ 2$$

로 표시되는 최량인 종속함수, 최량인 우월함수이다.

2. 분수계미적분연산자에로의 응용

정리 4 $h\in H[1,\ 1]$ 은 단위원 U 에서 불룩이고 $\delta,\ \mu\in \boldsymbol{C}\setminus\{0\}$, $\mathrm{Re}\,\delta>0$, $\alpha\in(-\infty,\ 1)$ 이라고 하자.

이때 $f\in\boldsymbol{A}$ 가 조건

$$[1-\delta\mu(1-\alpha)]\left(\frac{\Omega_z^{\alpha}f(z)}{z}\right)^{\mu} + \delta\mu(1-\alpha)\left(\frac{\Omega_z^{\alpha}f(z)}{z}\right)^{\mu}\left(\frac{\Omega_z^{\alpha+1}f(z)}{\Omega_z^{\alpha}f(z)}\right) \prec h(z),\ z\in U$$

를 만족시키면 $\left(\frac{\Omega_z^{\alpha}f(z)}{z}\right)^{\mu} \prec q(z),\ z\in U$ 이고 $q(z)=\frac{1/\delta}{z^{1/\delta}}\int_0^z h(t)t^{1/\delta-1}dt$ 는 최량인 우월함수이다.

$H_1^2[2,\ 1\,;\,2-\alpha]f(z)=\Omega_z^{\alpha}f(z)$ 이므로 정리 4는 정리 1로부터 곧 나온다.

따름 3 $\lambda,\ \mu\in\boldsymbol{C},\ \mathrm{Re}(\lambda\overline{\mu})>0,\ \alpha\in\boldsymbol{R},\ -\infty<\alpha<1$ 이라고 하자.

이때 $f\in\boldsymbol{A}$ 가 조건 $(1-\lambda)\left(\frac{\Omega_z^{\alpha}f(z)}{z}\right)^{\mu} + \lambda\left(\frac{\Omega_z^{\alpha}f(z)}{z}\right)^{\mu}\left(\frac{\Omega_z^{\alpha+1}f(z)}{\Omega_z^{\alpha}f(z)}\right) \prec \frac{1+Az}{1+Bz},\ z\in U$ 를 만족시키면 $\left(\frac{\Omega_z^{\alpha}f(z)}{z}\right)^{\mu} \prec q(z)=\frac{(1-\alpha)\mu}{\lambda}\int_0^1\frac{1+Azu}{1+Bzu}\cdot u^{\frac{(1-\alpha)\mu}{\lambda}}du \prec \frac{1+Az}{1+Bz}$, $z\in U$ 이고 q 는 최량인 우

월함수이다.

정리 5 $h\in H[1,\ 1]$은 U에서 불룩이고 $\delta,\ \mu\in \boldsymbol{C}\setminus\{0\}$, $\mathrm{Re}\,\delta>0$, $\alpha\in \boldsymbol{R},\ \ -\infty<\alpha<1$이라고 하자.

또한 $f\in \boldsymbol{A}$이고 $\left(\frac{\Omega_z^\alpha f(z)}{z}\right)^\mu \in H[1,\ 1]\cap Q$이며

$$(1-\delta\mu(\beta_1-1))\left(\frac{\Omega_z^\alpha f(z)}{z}\right)^\mu+\delta\mu(\beta_1-1)\left(\frac{\Omega_z^\alpha f(z)}{z}\right)^\mu\left(\frac{\Omega_z^{\alpha+1} f(z)}{\Omega_z^\alpha f(z)}\right)$$

는 U에서 단엽이라고 하자.

이때 $h(z)\prec(1-\delta\mu(\beta_1-1))\left(\frac{\Omega_z^\alpha f(z)}{z}\right)^\mu+\delta\mu(\beta_1-1)\left(\frac{\Omega_z^\alpha f(z)}{z}\right)^\mu\left(\frac{\Omega_z^{\alpha+1} f(z)}{\Omega_z^\alpha f(z)}\right),\ z\in U$이면

$$q(z)=\frac{1/\delta}{z^{1/\delta}}\int_0^z h(t)t^{1/\delta-1}dt\prec\left(\frac{\Omega_z^\alpha f(z)}{z}\right)^\mu,\quad z\in U$$

이고 q는 최량인 우월함수이다.

참 고 문 헌

[1] S. S. Miller et al.; Differential Subordinations, Theory and Applications, Marcel Dekker, 34～125, 2000.

[2] R. Aghalary et al.; Appl. Math. Computation, 187, 13, 2007.

[3] G. Murugusundaramoorthy et al.; J. Ineq. Pure Appl. Math., 7, 4, 152, 2006.

[4] S. S. Kumar et al.; Int. J. Math. Mode. Appl., 2, 4, 490, 2009.

[5] J. M. Shenan; J. Fractional Calculus and Appl., 4, 2, 182, 2013.

[6] G. I. Oros; Math. Reports, 61, 11, 155, 2009.

[7] S. S. Miller et al.; J. Math. Anal. Appl., 329, 327, 2007.

주체104(2015)년 10월 5일 원고접수

Differential Subordination for Analytic Functions defined by Generalized Hyper Geometric Operator and Its Application

Kim Mu Yong, Ri Un Sim

We obtained the some properties for subclass of analytic functions defined by the generalized hyper geometric operator $H_m^l[\alpha_1]$ and applied them to study some properties of the fractional differ integral operator. The obtained result is generalization of results of [5].

Key word: generalized hyper geometric operator