김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제1호

비용제한이 있는 대중봉사계의 도착속도와 봉사속도 조종에서 평균최량방략의 존재성

전용철, 김옥경

우리는 대중봉사계의 조종문제를 연구하였다.

선행연구[3]에서는 유연한 요청들을 가지는 봉사계에서 가격과 안정상태를 위한 봉사속도절환으로 소득을 최대화하는 문제를 연구하였다. 선행연구[1]에서는 비용제한이 없는 경우 평균소득을 최대화하는 대중봉사계의 조종에서 최량방략의 존재성을 밝혔으며 선행연구[2]에서는 평균소득최량방략의 근사계산방법에 대하여 연구하였다.

론문에서는 비용제한이 있는 대중봉사계의 도착속도와 봉사속도조종에서 평균소득최량방략의 존재성에 대하여 론의한다.

요청들의 도착흐름은 도착속도가 λ 인 뽜쏭흐름이며 요청들에 대한 봉사시간은 파라메터가 μ 인 지수분포에 따른다. 봉사계에 있는 요청수에 따라 도착속도와 봉사속도를 봉사계에 있는 요청수를 i 라고 할 때 도착속도는 $\lambda+a_1(i)$ 로, 봉사속도는 $\mu+a_2(i)$ 로 조종할 수 있다고 가정한다. $a_1(i)$, $a_2(i)$ 들은 모든 i 에 대하여 각각 $[a_1^0,\ a_1^1]$, $[a_2^0,\ a_2^1]$ 에 속하며

$$\mu+a_2(i)>\lambda+a_1(i)>0\,,\ \ \frac{\mu+a_2^0}{\lambda+a_1^1}>z_0>1$$

이라고 가정한다. $a(i)=(a_1(i),\ a_2(i))$ 로 놓는다. 도착속도와 봉사속도가 각각 $a_1(i)$, $a_2(i)$ 만큼 증가할 때 드는 비용은 $c(i,\ a(i))$ 이다.

$$\sup_{a\in A}|c(i,\ a(i))|<M_0z^i$$

이라고 가정한다. 봉사계에 있는 요청수가 i 일 때 단위시간당 봉사계의 소득은 $1<z<z_0$ 에 대하여 p_0z^i 이다. $p_0>0$ 은 고정된 상수이다. 이때 봉사계의 순소득은 다음과 같다.

$$r(i,\ a(i))=p_0z^i-c(i,\ a(i))$$

평균소득은 방략 $\pi=(\pi_t)\in\Pi$ 에 대하여

$$\overline{V}(i,\ \pi)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E\int_0^T r(x(t),\ \pi_t)dt\,,\ \ i\in S$$

이며 평균비용은

$$J_c(i,\ \pi)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E\int_0^T c(x(t),\ \pi_t)dt\,,\ \ i\in S$$

이다. 봉사계는 평균비용을 β 보다 작게 하면서 평균소득을 최대로 하려고 한다.

$$U=\{\pi\in\Pi\mid\ J_c(i,\ \pi)\le\beta\}\,,\ \ i\in S$$

를 생각한다.

$$F=\prod_{i\in S}A(i)$$

$$\zeta(i,\ u(i),\ a(i))=u(i-1)(\mu+a_2(i))+u(i+1)(\lambda+a_1(i))$$

로 놓는다. 상수 $\gamma\ge 0$ 과 모든 $i\in S$, $a\in A(i)$ 에 대하여 함수

$$b^\gamma(i,\ a)=r(i,\ a)-\gamma c(i,\ a)$$

를 도입한다. 매 $\gamma\ge 0$, 방략 $\pi=(\pi_t,\ t\ge 0)\in\Pi$ 와 $i\in S$ 에 대하여 다음과 같이 놓는다.

$$J_b^\gamma(i,\ \pi)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E\int_0^T b^\gamma(x(t),\ \pi_t)dt$$

$$J_b^{*\gamma}(i)=\sup_{\pi\in\Pi_s}J_b^\gamma(i,\ \pi)$$

$$g_b^{*\gamma}=J_b^{*\gamma}(i)$$

S 우의 임의의 가측함수 $w\ge 1$ 에 대하여 S 우의 실가측함수 u 의 무게붙은 상한노름을 생각한다.

$$\|u\|_w=\sup_{x\in S}\{w(x)^{-1}|u(x)|\}$$

그리고 다음의 공간을 리용한다.

$$B_w(S)=\{u\mid \|u\|_w<\infty\}$$

$u_b^\gamma(i)\in B_w(S)$ 에 대하여

$$A_\gamma^*(i)=\{a\in A(i)\mid g_b^{*\gamma}=b^\gamma(i,\ a)+\zeta(i,\ u_b^\gamma(i),\ a(i))\}$$

$$\overline{F}_\gamma^*=\{f\in F\mid f(i)\in A_\gamma^*(i),\ i\in S\}$$

로 놓는다. 선행연구[1]에 의하여 $\overline{F}_\gamma^*$ 은 비지 않는다. 그러므로

$$\overline{\Pi}_s^\gamma=\{\pi\in\Pi_s\mid \pi(A_\gamma^*(i)\mid i)=1,\ i\in S\}$$

로 놓으면 $\overline{\Pi}_s^\gamma$ 도 비지 않는다.

매 상수 $\gamma\ge 0$ 에 대하여 임의로 고정한 $f^\gamma\in\overline{F}_\gamma^*$ 를 취하고 $\overline{V}(i,\ f^\gamma)$, $J_c(i,\ f^\gamma)$, $J_b^\gamma(i,\ f^\gamma)$ 를 각각 $\overline{V}(\gamma)$, $J_c(\gamma)$, $J_b^\gamma(\gamma)$ 로 표시한다. 그러면 선행연구[1]에 의하여 모든 $i\in S$ 와 $f^\gamma\in\overline{F}_\gamma^*$ 에 대하여 $J_b^\gamma(i,\ f^\gamma)=g_b^{*\gamma}$ 이며 따라서 $J_b(\gamma)=g_b^{*\gamma}$ 이다.

$\gamma\ge 0$ 과 모든 $i\in S$, $a\in A(i)$ 에 대하여 함수 $J_c(\gamma)=J_c(i,\ f^\gamma),\ f^\gamma\in F_\gamma^*$ 로 놓는다.

보조정리 1 설정된 조종모형에 대하여

$$\overline{\gamma}=\inf\{\gamma\ge 0\mid J_c(\gamma)\le\beta\}$$

는 유한이다. 즉 $\overline{\gamma}$ 는 구간 $[0,\ \infty)$ 안에 있다.

보조정리 2 적당한 $\gamma_0\ge 0$ 과 $\pi^*\in\Pi_s$ 가 있어서

$$J_c(i,\ \pi^*)=\beta,\ J_b^{\gamma_0}(i,\ \pi^*)=g_b^{*\gamma_0}$$

이면 방략 π^* 은 제한있는 평균소득최대화문제의 최량방략이다.

정리 설정된 조종모형에서 제한있는 평균소득최대화문제의 최량정상방략 또는 우연화된 최량정상방략이 존재한다.

증명 보조정리 1에 의하여 상수 $\overline{\gamma}$ 는 구간 $[0,\ \infty)$ 안에 있다. 그러므로 $\overline{\gamma}=0$ 과 $\overline{\gamma}>0$

의 두가지 경우로 갈라서 증명하자.

먼저 $\bar{\gamma}=0$ 인 경우를 증명하자.

이 경우 렬 $f^{\gamma_k}\in\overline{F}^*_{\gamma_k}$ 이 있어서 $k\to\infty$ 일 때 $\gamma_k\downarrow 0$ 이다. F 가 콤팍트이므로 일반성을 잃지 않고 $f^{\gamma_k}\to\bar{f}\in F$ 라고 가정할수 있다. 이때 모든 $k\ge 1$ 에 대하여 $J_c(i,\ f^{\gamma_k})\le\beta$ 이며 $\bar{f}\in U$ 라는것이 나온다. 그리고 매 $\pi\in U$ 에 대하여

$$J_b(r_k)=J_b^{\gamma_k}(i,\ f^{r_k})\ge J_b^{\gamma_k}(i,\ \pi)$$

이다. $\overline{M}>0$ [1]이 있어서 다음식이 성립한다.

$$\overline{V}(i,\ f^{\gamma_k})-\overline{V}(i,\ \pi)\ge\gamma_k[J_c(i,\ f^{\gamma_k})-J_c(i,\ \pi)]\ge -2\gamma_k\overline{M} \tag{1}$$

식 (1)에서 $k\to\infty$ 로 놓으면 다음식을 얻는다.

$$\overline{V}(i,\ \bar{f})-V(i,\ \pi)\ge 0\ ,\quad \pi\in U$$

이것은 $\bar{f}$ 가 제한있는 평균소득최대화문제의 최량방략이라는것을 의미한다.

다음으로 $\bar{\gamma}>0$ 인 경우를 증명하자.

$J_c(\gamma')=\beta$ 를 만족시키는 어떤 $r'\in(0,\ \infty)$ 가 존재한다면 $f^{\gamma'}\in\overline{F}^*_{\gamma'}$ 이 있어서

$$J_c(\gamma')=J_c(i,\ f^{\gamma'})=\beta$$
$$J_b^{*\gamma'}(i)=J_b^{\gamma'}(i,\ f^{r'})$$

이다. 그러므로 보조정리 2에 의하여 $f^{r'}$ 는 제한있는 평균소득최대화문제의 최량방략이다.

이제 모든 $r\in(0,\ \infty)$ 에 대하여 $J_c(\gamma)\ne\beta$ 라는것을 가정하면 $\bar{\gamma}$ 가 구간 $(0,\ \infty)$ 에 있으므로 2개의 정수렬 $\{\gamma_k\}$ 와 $\{\delta_k\}$ 가 있어서 $\gamma_k\uparrow\bar{\gamma}$ 이고 $\delta_k\downarrow\bar{\gamma}$ 이다. F 가 콤팍트이므로 $f^{\gamma_k}\to f^1\in F$ 인 $f^{\gamma_k}\in\overline{F}^*_{\gamma_k}$ 와 $f^{\delta_k}\to f^2\in F$ 인 $f^{\delta_k}\in\overline{F}^*_{\delta_k}$ 들을 취할수 있다. 이때 $f^1,\ f^2\in\overline{F}^*_{\bar{\gamma}}$ 이다. 따라서 $J_c(i,\ f^1)\ge\beta$ 이고 $J_c(i,\ f^2)\le\beta$ 이다.

$J_c(i,\ f^1)=\beta$ 또는 $J_c(i,\ f^2)=\beta$ 이면 보조정리 2에 의하여 f^1 또는 f^2 가 제한있는 평균소득최대화문제의 최량방략이라는것이 나온다. 그러므로

$$J_c(i,\ f^1)>\beta,\ \ J_c(i,\ f^2)<\beta \tag{2}$$

인 경우를 증명하면 된다. 이제 f^1 과 f^2 를 리용하여 정상방략렬 $\{f_n\}$ 을 모든 $n\ge 1$ 과 $i\in S$ 에 대하여 다음과 같이 구성한다.

$$f_n(i)=\begin{cases} f^1(i), & i<n \\ f^2(i), & i\ge n\end{cases}$$

분명히 $f_1=f^1$ 이고 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f^1$ 이다. 따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}J_c(i,\ f_n)=J_c(i,\ f^1)$ 이다.

$f^1,\ f^2\in\overline{F}^*_{\bar{\gamma}}$ 이므로 $J_c(i,\ f^1)<\beta$ 이다. 적당한 n^* 이 있어서 $J_c(i,\ f_{n^*})=\beta$ 이면 보조정리 2와 $f_{n^*}\in\overline{F}^*_{\bar{\gamma}}$ 이라는 사실로부터 f_{n^*} 은 최량정상방략이다.

모든 $n\ge 1$ 에 대하여 $J_c(i,\ f_n)\ne\beta$ 라고 가정한다.

모든 $n\ge 1$ 에 대하여 $J_c(i,\ f_n)<\beta$ 이면

$$\lim_{n\to\infty}J_c(i,\ f_n)=J_c(i,\ f^1)\le\beta$$

이다. 이것은 식 (2)에 모순된다. 그러므로 어떤 $n \ge 1$이 있어서 $J_c(i,\ f_n) > \beta$이며 이것은 $J_c(i,\ f_1) < \beta$라는 사실과 함께

$$J_c(i,\ f_{\bar{n}}) < \beta,\ J_c(i,\ f_{\bar{n}+1}) > \beta$$

인 어떤 $\bar{n}$의 존재성을 준다. 분명히 정상방략 $f_{\bar{n}}$와 $f_{\bar{n}+1}$은 기껏 1개 상태 $\bar{n}$에서만 다르다.

임의의 $p \in [0,\ 1]$에 대하여 정상방략 $f_{\bar{n}}$와 $f_{\bar{n}+1}$을 리용하여 우연화된 정상방략 π^p를 매 $i \in S$에 대하여 다음과 같이 구성한다.

$$\pi^p(a \mid i) = \begin{cases} p & (i = \bar{n},\ a = f_{\bar{n}}(\bar{n})) \\ 1 - p & (i = \bar{n},\ a = f_{\bar{n}+1}(\bar{n})) \\ 1 & (i \ne \bar{n},\ a = f_{\bar{n}}(i)) \end{cases}$$

$f_{\bar{n}},\ f_{\bar{n}+1} \in \overline{F}_{\bar{\gamma}}^* \subseteq \Pi_s^{\bar{\gamma}}$이므로 모든 $p \in [0,\ 1]$에 대하여

$$J_b^{\bar{\gamma}}(i,\ \pi^p) = J_b^{*\bar{\gamma}}(i)$$

이다. 그리고 $p \in [0,\ 1]$에 관하여 $J_c(i,\ \pi^p)$는 련속이다. 이제 $p_0 = 0$, $p_1 = 1$로 놓으면

$$J_c(i,\ \pi^{p_0}) = J_c(i,\ f_{\bar{n}+1}) > \beta,\ J_c(i,\ \pi^{p_1}) = J_c(i,\ f_{\bar{n}}) < \beta$$

이다. 따라서 $p \in [0,\ 1]$에 관한 $J_c(i,\ \pi^p)$의 련속성으로부터 적당한 $p^* \in (0,\ 1)$이 있어서

$$J_c(i,\ \pi^{p^*}) = \beta$$

이다.

$$J_b^{\bar{\gamma}}(i,\ \pi^{p^*}) = J_b^{*\bar{\gamma}}(i)$$

이므로 보조정리에 의하여 π^{p^*}이 우연화된 최량정상방략이라는것이 나온다. 이것은 기껏 1개 상태 $\bar{n}$에서만 다른 정상방략 $f_{\bar{n}}$와 $f_{\bar{n}+1}$사이에서 우연화된다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] 량영일, 전용철; 수학, 4, 3, 주체104(2015).

[2] 량영일, 전용철; 조선민주주의인민공화국 과학원통보, 6, 16, 주체105(2016).

[3] Q. C. He et al.; Operations Research Letters, 46, 134, 2018.

주체108(2019)년 9월 15일 원고접수

Existence of an Average Optimal Policy in the Cost-Constrained Control of Arrival and Service Rates of a Queue

Jon Yong Chol, Kim Ok Gyong

In this paper, we consider a joint control problem of arrival and service rates of the M|M|1 queue to maximize the average reward. When the arrival and service rates take continuous values, we prove the existence of the optimal policy to maximize the cost-constrained average rewards.

Keywords: queue, control