

고고자기복각, 편각자료의 스플라인보간에서 정의구역 초과현상을 극복하기 위한 한가지 방법

김일남, 전준명, 신래경

위대한 령도자 김정일동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《우리는 과학기술분야에서 이룩한 성과에 만족하지 말고 나라의 과학기술을 새로운 높은 단계으로 발전시키기 위하여 적극 투쟁하여야 합니다.》(《김정일선집》 증보판 제11권 133페이지)

론문에서는 고고자기복각, 편각자료를 스플라인보간할 때 나타나는 정의구역초과현상을 고지자기극이동경로보간에 기초한 방법 [2]으로 극복할수 있다는데 대하여 서술하였다.

1. 문 제 설 정

복각, 편각의 영년변화자료들을 스플라인보간할 때 자주 정의구역초과현상이 나타난다.[1]

이때 년도에 따르는 마당세기와 복각, 편각자료는 표 1과 같고 스플라인보간된 복각과 편각은 표 2와 같다.

표 1. 년도에 따르는 마당세기(T)와 복각(Inc), 편각(Dec)

특성량	년도									
	1100	1115	1118	1125	1150	1162	1174	1175	1187	1200
$T(nT)$	55 000	56 000	54 000	53 000	51 000	56 000	55 400	52 600	54 600	54 500
$I(^{\circ})$	67.77	72.75	52.09	64.80	70.98	59.90	52.09	70.74	61.58	65.71
$D(^{\circ})$	0.19	-56.49	31.79	8.98	-75.77	-87.20	31.79	31.64	1.29	10.76

표 2. 스플라인보간된 복각과 편각(보간간격 5년)

특성량	보간년도									
	1100	1105	1110	1115	...	1180	1185	1190	1195	1200
$SI(^{\circ})$	67.77	142.63	123.85	72.75	...	110.34	81.50	32.35	11.05	65.71
$SD(^{\circ})$	0.19	-319.34	-258.08	-56.49	...	-167.42	-67.87	103.82	184.43	10.76

표 2에서 SI 와 SD 는 스플라인보간된 복각과 편각이다.

표 1과 같이 각이한 년도에 해당하는 복각 $I(1), I(2), \dots, I(n)$ 과 편각 $D(1), D(2), \dots, D(n)$ 이 주어졌을 때 스플라인보간된 복각은 90° 이상, 스플라인보간된 편각은 180° 이상되는 경우가 있다.(표 2에서 4각형안의 수값들) 이것이 정의구역초과현상이다.

우리는 복각, 편각자료에 대한 스플라인보간을 진행할 때 나타나는 정의구역초과현상을 극복하기 위하여 고지자기극이동경로보간에 기초한 방법을 고찰하였다.

2. 고지자기극이동경로보간방법

1) 복각, 편각자료와 마당세기자료가 함께 주어진 경우

먼저 다음 식을 리용하여 지자기모멘트 M_1, M_2 와 지자기극위치 $P_1(\Phi_{01}, A_{01}), P_2(\Phi_{02}, A_{02})$ 를 계산한다.

$$T_X = T_A \cos I_A \cos D_A, \quad T_Y = T_A \cos I_A \sin D_A, \quad T_Z = T_A \sin I_A \quad (1)$$

$$g_1^1 = \frac{1}{2} [\cos \lambda_A (T_Z \cos \varphi_A - 2T_X \sin \varphi_A) - 2T_Y \sin \lambda_A] \quad (2)$$

$$h_1^1 = (T_Y + g_1^1 \sin \lambda_A) / \cos \lambda_A \quad (3)$$

$$g_1^0 = [T_X + (g_1^1 \cos \lambda_A + h_1^1 \sin \lambda_A) \sin \varphi_A] / \cos \varphi_A \quad (4)$$

$$M = R^3 \sqrt{(g_1^0)^2 + (g_1^1)^2 + (h_1^1)^2} \quad (5)$$

$$\theta = \operatorname{arccot} \left(\frac{1}{2} \tan I_A \right) \quad (6)$$

$$\Phi_0 = \arcsin(\sin \varphi_A \cos \theta + \cos \varphi_A \sin \theta \cos D_A) \quad (7)$$

$$\beta = \arcsin(\sin \theta \sin D_A / \cos \Phi_0) \quad (8)$$

$$A_0 = \beta + \lambda_A \quad (\cos \theta \geq \sin \varphi_A \sin \Phi_0 \text{ 일 때}) \quad (9)$$

$$A_0 = \pi - \beta + \lambda_A \quad (\cos \theta < \sin \varphi_A \sin \Phi_0 \text{ 일 때}) \quad (10)$$

여기서 M 은 지자기모멘트, T_A 는 A 지역에서 지자기마당세기, T_X, T_Y, T_Z 는 각각 지자기마당세기(T_A)의 X, Y, Z 방향성분, g_1^0, g_1^1, h_1^1 은 1계 1차 가우스조화결수들, R 는 지구의 반경, φ_A, λ_A 는 A 지역의 위도와 경도, Φ_0, A_0 은 고지자기극위치의 위도와 경도, Dec_A, Inc_A 는 A 지역에서 고지자기마당의 복각과 편각, $p_{01}(\Phi_{01}, A_{01})$ 은 구자리표계에서 t_1 시기의 고지자기극위치, $p_{02}(\Phi_{02}, A_{02})$ 는 구자리표계에서 t_2 시기의 고지자기극위치이다.

다음으로 식 (11)을 리용하여 x_1 과 x_2, y_1 과 y_2, z_1 과 z_2 를 구한다.

$$x = R \cos \Phi_0 \cos A_0, \quad y = R \cos \Phi_0 \sin A_0, \quad z = R \sin \Phi_0 \quad (11)$$

여기서 R 는 지구의 반경, Φ_0, A_0 는 고지자기극위치의 위도와 경도, x 는 점 P 의 X 자리표(북쪽방향), y 는 점 P 의 Y 자리표(동쪽방향), z 는 점 P 의 Z 자리표(연직웃방향)이다.

이때 두 점사이의 중심각 α 는 다음과 같다.

$$\alpha = \arccos(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) \quad (12)$$

이제 벡토르 $\overrightarrow{OP_1}$ 과 $\overrightarrow{OP_2}$ 에 수직인 축 $\overrightarrow{OP_3}$ 을 생각하면 $\overrightarrow{OP_2}$ 는 $\overrightarrow{OP_1}$ 을 $\overrightarrow{OP_3}$ 축주위로 α 만큼 회전시켜 얻을수 있다. 벡토르 $\overrightarrow{OP_3}$ 은 $\overrightarrow{OP_1}$ 과 $\overrightarrow{OP_2}$ 의 벡토르적으로 결정한다.

$$\overrightarrow{OP_3} = \overrightarrow{OP_1} \times \overrightarrow{OP_2} \quad (13)$$

구체적으로 $\overrightarrow{OP_3}$ 의 성분들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_3 &= y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ y_3 &= z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ z_3 &= x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{aligned} \quad (14)$$

이때 회전변환행렬 $rot(\alpha)$ 는 다음과 같이 표시된다.

$$rot(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha + x_3^2 k & x_3 y_3 k - z_3 \sin \alpha & x_3 z_3 k + y_3 \sin \alpha \\ x_3 y_3 k + z_3 \sin \alpha & \cos \alpha + y_3^2 k & y_3 z_3 k - x_3 \sin \alpha \\ x_3 z_3 k - y_3 \sin \alpha & y_3 z_3 k + x_3 \sin \alpha & \cos \alpha + z_3^2 k \end{pmatrix} \quad (15)$$

여기서 $k=1-\cos \alpha$ 이다.

회전변환행렬 $rot(\alpha)$ 에 의하여 점 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 과 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 사이에는 다음과 같은 식이 성립한다.

$$(x_2, y_2, z_2) = (x_1, y_1, z_1) \times rot(\alpha) \quad (16)$$

다음으로 극이동경로 $P_1 P_2$ 에 대응한 중심각 α 를 필요한 정확도에 따라 n 개로 등분하고 $P_1 P_2$ 위에 놓이는 모든 경로보간점 $P_{int}(i)(x_{int}(i), y_{int}(i), z_{int}(i))$ 들을 구한다.

$$\Delta \alpha = \alpha / n \quad (17)$$

$$(x_{int}(i), y_{int}(i), z_{int}(i)) = (x_1, y_1, z_1) \times rot(i \cdot \Delta \alpha) (i=0, 1, 2, \dots, n) \quad (18)$$

여기서 $x_{int}(i), y_{int}(i), z_{int}(i)$ 는 경로보간점 $P_{int}(i)$ 의 X, Y, Z 자리표값이다.

그 다음 $x_{int}(i), y_{int}(i), z_{int}(i)$ 를

$$\Phi_0 = \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), \quad A_0 = \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \quad (19)$$

에 대입하여 $\Phi_{0int}(i)$ 와 $A_{0int}(i)$ 를 구한다. 여기서 $\Phi_{0int}(i)$ 와 $A_{0int}(i)$ 는 극이동경로보간점의 위도와 경도이다. 그리하여 점 P_1 과 P_2 사이의 모든 경로보간점들이 결정된다.

마지막으로 다음 식들을 리용하여 보간값 $D_{int}(i), I_{int}(i)$ 를 계산한다.

$$g_1^0 = \frac{M}{R^3} \sin \Phi_{0int}(i) \quad (20)$$

$$g_1^1 = \frac{M}{R^3} \cos \Phi_{0int}(i) \cos A_{0int}(i) \quad (21)$$

$$h_1^1 = \frac{M}{R^3} \cos \Phi_{0int}(i) \sin A_{0int}(i) \quad (22)$$

$$T_X(i) = g_1^0 \cos \varphi_A - (g_1^1 \cos \lambda_A + h_1^1 \sin \lambda_A) \sin \varphi_A \quad (23)$$

$$T_Y(i) = -g_1^1 \sin \lambda_A + h_1^1 \cos \lambda_A \quad (24)$$

$$T_Z(i) = 2[g_1^0 \sin \varphi_A + (g_1^1 \cos \lambda_A + h_1^1 \sin \lambda_A) \cos \varphi_A] \quad (25)$$

$$I_{int}(i) = \arctan \left(\frac{T_Z(i)}{\sqrt{(T_X(i))^2 + (T_Y(i))^2}} \right) \quad (26)$$

$$D_{int}(i) = \arctan(T_Y(i)/T_X(i)) \quad (27)$$

2) 복각, 편각자료가 주어진 경우

먼저 주어진 편각, 복각자료들을 리용하여 식 (6)–(10)을 계산한다.

다음으로 임의의 값 $M > 0$ 과 $R > 0$ 을 대입하여 식 (20)–(27)을 계산한다.

복각자료만 주어진 경우와 편각자료만 주어진 경우는 계산실험결과에서 고찰한다.

지금까지 위에서 고찰한 내용은 2개의 고지자기극위치가 주어진 경우였다. 2개 이상의 고지자기극위치가 주어진 경우에는 위에서 고찰한 방법을 반복하면 된다.

3. 계 산 결 과

1) 복각, 편각자료와 마당세기자료가 함께 주어진 경우

복각, 편각자료와 마당세기자료가 함께 주어진 경우 표 1에 주어진 복각 및 편각에 대한 보간결과는 그림 1과 같다.

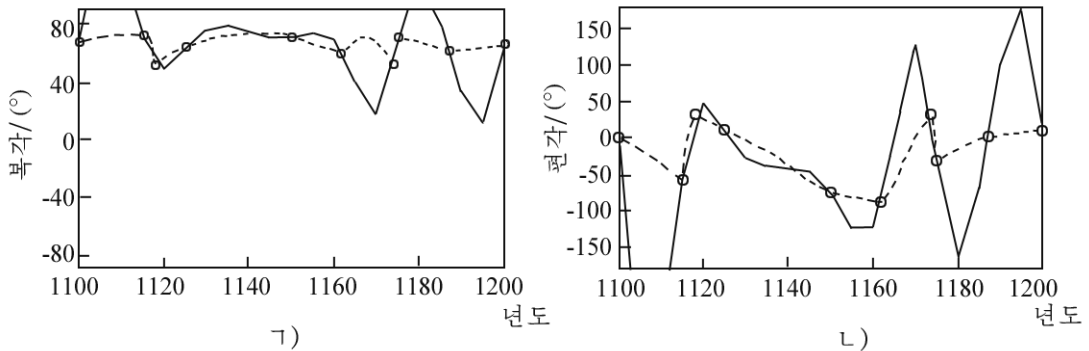


그림 1. 복각, 편각, 마당자료가 주어진 경우 복각 및 편각에 대한 보간결과

ㄱ) 복각보간결과, ㄴ) 편각보간결과

그림 1에서 동그라미는 표 1에 주어진 복각 및 편각, 실선은 복각 및 편각의 스플라인보간곡선, 점선은 복각 및 편각의 고지자기극이동경로보간곡선이다. 그리고 스플라인보간곡선이 잘려온 부분은 정의구역초과구간이다.

2) 복각과 편각자료가 주어진 경우

년대에 따르는 복각과 편각은 표 3과 같다.

표 3. 년대에 따르는 복각과 편각

특성량	년도					
	550	574	580	650	675	700
$I/(^{\circ})$	62.07	40.47	62.66	70.75	58.57	58.48
$D/(^{\circ})$	9.79	16.51	-72.49	-65.49	0.34	-84.20

이때 복각과 편각에 대한 보간결과는 그림 2와 같다.

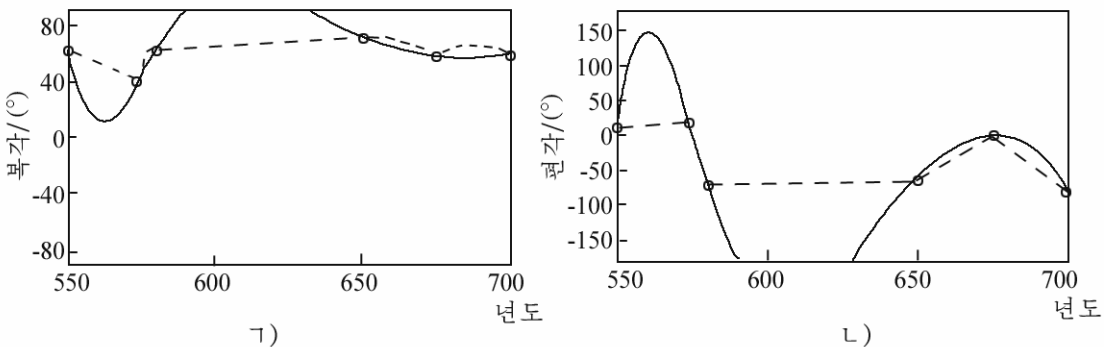


그림 2. 복각과 편각이 주어진 경우 복각 및 편각에 대한 보간결과

ㄱ) 복각보간결과, ㄴ) 편각보간결과

그림 2에서 동그라미는 표 3에 주어진 복각 및 편각, 실선은 복각 및 편각의 스플라인보간곡선, 점선은 복각 및 편각의 고지자기극이동경로보간곡선이다.

3) 복각자료만 주어진 경우

이때에는 복각자료의 수만한 편각자료를 임의로 주고 복각과 편각이 둘다 주어진 경우의 방법을 적용한다.

표 3에서 복각자료만 선택하고 편각자료는 임의로 주었을 때 보간결과를 고찰하였다.(그림 3)

그림 3에서 동그라미는 표 3에 주어진 복각, 실선은 복각의 스플라인보간곡선, 점선은 표 3에 주어진 복각과 편각을 다 리용할 때 복각의 고지자기극이동경로보간곡선, 굵은 선은 표 3에 주어진 복각만을 리용할 때 복각의 고지자기극이동경로보간곡선이다.

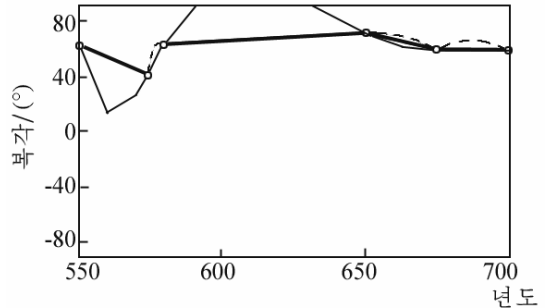


그림 3. 복각만 주어진 경우 복각의 보간결과

4) 편각자료만 주어진 경우

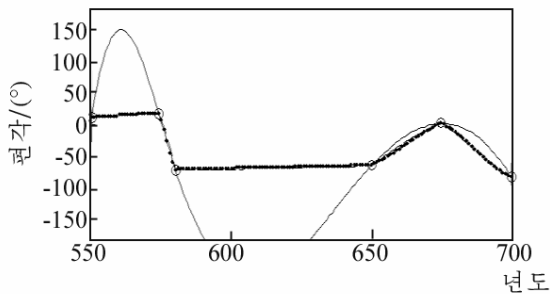


그림 4. 편각만 주어진 경우 편각의 보간결과

때 편각의 고지자기극이동경로보간곡선, 굵은 선은 표 3에 주어진 편각만을 리용할 때 편각의 고지자기극이동경로보간곡선이다.

맺는 말

고지자기극이동경로보간에 기초하여 복각과 편각자료를 보간하는것이 해석적으로 가능하며 이 방법을 리용하면 복각자료와 편각자료의 보간값이 정의구역을 초과하는 현상이 완전히 극복된다.

이 방법은 네가지 경우 즉 복각, 편각자료와 마당세기자료가 함께 주어진 경우, 복각, 편각자료만 주어진 경우, 복각자료만 주어진 경우, 편각자료만 주어진 경우에 다 적용할수 있다.

복각자료 또는 편각자료 어느 하나만이 주어지는 경우에도 복각과 편각자료가 다 주어진 경우와 매우 근사한 보간곡선을 얻을수 있다.

참 고 문 헌

- [1] R. A. Langel et al.; Journal of Geomagnetism and Geoelectricity, **38**, 573, 1986.
- [2] Y. Okada et al.; Earth, Planets and Space, **69**, 1186, 2017.

주체108(2019)년 4월 5일 원고접수

A Method to Avoid the Excess Phenomenon of the Definitional Domain in Spline Interpolation of Archeomagnetic Inclination and Declination Data

Kim Il Nam, Jon Jun Myong and Sin Thae Gyong

In this paper we have described a method to avoid the excess phenomenon of the definitional domain in spline interpolation of archeomagnetic inclination and declination data, on the basis of the interpolation method of the paleomagnetic polar wander path.

Key words: inclination, declination