김일성종합대학학보 주체107(2018)년
수 학 제65권 제3호

가환반환에서 덜기씨합동관계모임의 위상적성질

한 성 철

반환은 환과 분배속을 둘 다 일반화한 대수계이며 최량화와 그라프, 자동체, 형식언어, 알고리듬, 부호, 암호리론 등 각이한 분야들에서 널리 응용되고있다. 반환은 환과 같은 분배법칙에 의해 련결되는 더하기와 곱하기라는 두 2원산법을 가진다. 그러나 환에서와는 달리 반환에서는 덜기산법이 허용되지 않으므로 환이데알리론의 많은 결과들이 반환에로 그대로 확장되지 않는다. 이런 차이를 줄이기 위하여 반환의 덜기이데알개념이 도입되였다.

선행연구[1]에서는 임의의 반환에 대하여 그 덜기합동관계들과 덜기이데알들사이에 완전단일넘기기가 존재한다는것을 증명하였다. 그리고 선행연구[6]에서는 B_1 −대수우의 비자명한 극대합동관계들의 모임이 자리스끼위상에 관하여 포화씨이데알모임과 위상동형이며 이 공간들은 둘 다 스펙트르공간이라는것을 증명하였다.

사실 B_1 −대수는 령원소와 단위원소를 가지면서 더하기제곱같기인 가환반환이며 포화이데알은 다름아닌 덜기이데알이다.[7]

론문에서는 령원소와 단위원소를 가진 임의의 가환반환에 대하여 그 덜기씨합동관계들전부의 모임은 자리스끼위상에 관하여 덜기씨이데알들전부의 모임과 위상동형이며 이 두 공간들은 다 스펙트르공간이라는것을 증명한다.

론문에서 R 는 령원소 0과 단위원소 1을 가지면서 $0\neq 1$ 인 가환반환이다. 그리고 $I(R)$ 는 R 의 이데알들전부의 모임을 표시하며 $\mathrm{Spec}(R)$ 와 $\mathrm{Spec}_k(R)$ 는 각각 R 의 씨이데알들전부의 모임과 덜기씨이데알들전부의 모임을 표시한다. 또한 R 의 이데알 A 에 대하여 $\overline{A}$ 와 $\sqrt{A}$ 는 각각 A 의 덜기페포와 근기를 표시한다.

R 우의 동등관계 $\equiv$ 은 임의의 $a,\ b,\ c\in R$ 에 대하여 만일 $a\equiv b$ 이면 $a+c\equiv b+c,\ ac\equiv bc$ 일 때 R 우의 합동관계라고 부른다.

R 우의 합동관계 θ 가 주어지면 그 합동류들전부로 이루어지는 상모임 $R/\theta=\{[x]|\ x\in R\}$ 는 두 산법 $[x]+[y]:=[x+y]$ 와 $[x]\cdot[y]:=[xy]$ 에 관하여 반환을 이루는데 이 반환 R/θ 를 θ 에 의한 R 의 잉여반환이라고 부른다. 이때 $[0]$ 은 R/θ 의 령원소이다.

A 가 R 의 이데알이면 $x\kappa_A y \Leftrightarrow \exists\, a, b\in A,\ x+a=y+b$ 에 의하여 R 우의 합동관계 κ_A 가 정의된다. 이때 $\overline{A}$ 는 잉여반환 R/κ_A 의 령원소이다.[4]

θ 가 R 우의 합동관계이고 R 의 어떤 이데알 A 가 있어서 $\theta=\kappa_A$ 일 때 θ 를 덜기합동관계라고 부른다.[1]

$\varnothing\neq S\subseteq R$ 일 때 $V(S):=\{P\in \mathrm{Spec}_k(R)|\ S\subseteq P\}$ 로 놓으면 $\mathrm{Spec}_k(R)$ 의 부분모임족 $\{V(S)|\ \varnothing\neq S\subseteq R\}$ 는 닫긴모임에 관한 위상공리들을 만족시키는데 이렇게 도입되는 위상을 $\mathrm{Spec}_k(R)$ 우의 자리스끼위상이라고 부른다.[2]

보조정리 1 [1] θ 가 R 우의 합동관계이면 잉여반환 R/θ 의 령원소 $O(=[0])$ 은 R 의 덜기이데알이다.

정의 다음의 두 조건을 만족시키는 R 우의 합동관계 θ 를 씨합동관계라고 부른다.

① $\theta \neq R \times R$

② $(ab)\,\theta\,0$ 이면 $a\,\theta\,0$ 또는 $b\,\theta\,0$ 이다.

R 우의 덜기씨합동관계들전부의 모임을 $\mathrm{CSpec}_k(R)$ 로 표시한다.

보조정리 2 다음의 사실들이 성립된다.

① R 우의 합동관계 θ 가 씨합동관계이기 위해서는 잉여반환 R/θ 의 령원소 $O_{R/\theta}$ 가 R 의 씨이데알일것이 필요하고 충분하다.

② R 의 이데알 P 에 대하여 합동관계 κ_P 가 R 우의 씨합동관계이기 위해서는 $\overline{P}$ 가 R 의 씨이데알일것이 필요하고 충분하다.

증명 ① 만일 θ 가 씨합동관계이면 $\theta \neq R \times R$ 이므로 $O_{R/\theta} \neq R$ 이다.

만일 $a,\ b \in R$ 이고 $ab \in O_{R/\theta}$ 이면 $(ab)\,\theta\,0$ 이므로 $a\,\theta\,0$ 이거나 $b\,\theta\,0$ 이다.

따라서 $a \in O_{R/\theta}$ 이거나 $b \in O_{R/\theta}$ 이다.

거꾸로 만일 $O_{R/\theta}$ 가 씨이데알이면 $O_{R/\theta} \neq R$ 이므로 $\theta \neq R \times R$ 이다.

만일 $a,\ b \in R$ 이고 $(ab)\,\theta\,0$ 이면 $ab \in O_{R/\theta}$ 이므로 $a \in O_{R/\theta}$ 이거나 $b \in O_{R/\theta}$ 이다.

따라서 $a\,\theta\,0$ 이거나 $b\,\theta\,0$ 이다.

② $O_{R/\kappa_P} = \overline{P}$ 이므로 ①로부터 나온다.(증명끝)

$\varnothing \neq S \subseteq R$ 일 때 $W(S) := \{\theta \in \mathrm{CSpec}_k(R) \mid S \subseteq O_{R/\theta}\}$ 로 놓자.

보조정리 1과 보조정리 2의 ①을 리용하면 다음의 결과가 증명된다.

보조정리 3 다음의 사실들이 성립된다.

① $W(\{0\}) = \mathrm{CSpec}_k(R)$, $W(R) = \varnothing$

② $\varnothing \neq S \subseteq T \Rightarrow W(T) \subseteq W(S)$

③ $\varnothing \neq S \subseteq R \Rightarrow W(S) = W(\langle S \rangle) = W(\overline{\langle S \rangle})$

④ $A \in I(R) \Rightarrow W(A) = W(\sqrt{A})$

⑤ $A,\ B \in I(R) \Rightarrow W(A) \cup W(B) = W(AB) = W(A \cap B)$

⑥ $\{A_i \mid i \in \Lambda\} \subseteq I(R) \Rightarrow W\left(\sum_{i \in \Lambda} A_i\right) = \bigcap_{i \in \Lambda} W(A_i)$

보조정리 3의 ①, ③, ⑤, ⑥은 $\mathrm{CSpec}_k(R)$ 의 부분모임족 $\{W(S) \mid \varnothing \neq S \subseteq R\}$ 가 닫긴모임에 관한 위상공리들을 만족시킨다는것을 보여준다. 이렇게 도입되는 위상을 $\mathrm{CSpec}_k(R)$ 우의 자리스끼위상이라고 부른다.

정리 1 자리스끼위상에 관하여 $\mathrm{CSpec}_k(R)$ 는 $\mathrm{Spec}_k(R)$ 와 위상동형이다.

증명 $\kappa:\ \mathrm{Spec}_k(R) \to \mathrm{CSpec}_k(R)$ 와 $\iota:\ \mathrm{CSpec}_k(R) \to \mathrm{Spec}_k(R)$ 를 각각 $\kappa(P) := \kappa_P$ 와 $\iota(\theta) := O_{R/\theta}$ 에 의하여 정의하자.

보조정리 2로부터 κ 와 ι 는 다 잘 정의되며 $\kappa \circ \iota = \mathrm{id}_{\mathrm{CSpec}_k(R)}$, $\iota \circ \kappa = \mathrm{id}_{\mathrm{Spec}_k(R)}$ 이다.

κ 와 ι 가 련속이라는것을 보여주자. G 가 $\mathrm{CSpec}_k(R)$ 의 임의의 닫긴모임이면 R 의 어떤 비지 않은 부분모임 S 가 있어서 $G = W(S)$ 이다. 이때

$$P \in \kappa^{-1}(G) \Leftrightarrow \kappa_P = \kappa(P) \in G = W(S) \Leftrightarrow S \subseteq O_{R/\kappa_P} = \overline{P} = P \Leftrightarrow P \in V(S)$$

이므로 $\kappa^{-1}(G) = V(S)$ 이고 이것은 $\mathrm{Spec}_k(R)$ 의 닫긴모임이다.

따라서 κ 는 련속이다.

H 가 $\mathrm{Spec}_k(R)$ 의 임의의 닫긴모임이면 R 의 어떤 비지 않은 부분모임 S 가 있어서 $H=V(S)$ 이다.

이때 $\theta\in\iota^{-1}(H)\Leftrightarrow O_{R/\theta}=\iota(\theta)\in H=V(S)\Leftrightarrow S\subseteq O_{R/\theta}\Leftrightarrow\theta\in W(S)$ 이므로 $\iota^{-1}(H)=W(S)$ 이고 이것은 $\mathrm{CSpec}_k(R)$ 의 닫긴모임이다. 따라서 ι 는 련속이다.

이로부터 κ 와 ι 는 둘 다 위상동형넘기기들이다.(증명끝)

X 를 위상공간이라고 하자.

Y 가 X 의 닫긴모임일 때 만일 $Y=\overline{\{y\}}$ 인 y 가 존재하면 이 y 를 Y 의 일반점이라고 부른다. 만일 X 가 콤팍트, T_0 －공간이고 X 에서 임의의 유한개의 콤팍트열린모임들의 사귐이 콤팍트열린모임으로 되며 임의의 기약닫긴모임이 일반점을 가진다면 X 를 스펙트르공간이라고 부른다.[5]

정리 2 자리스끼위상에 관하여 $\mathrm{CSpec}_k(R)$ 와 $\mathrm{Spec}_k(R)$ 는 스펙트르공간이다.

증명 정리 1로부터 $\mathrm{Spec}_k(R)$ 에 대해서만 보여주면 된다.

선행연구[2]의 정리와 그 따름, 선행연구[3]의 보조정리 4의 ①에 의하여 $\mathrm{Spec}_k(R)$ 는 콤팍트공간이고 $\mathrm{Spec}_k(R)$ 에서 임의의 유한개의 콤팍트열린모임들의 사귐은 다시 콤팍트열린모임으로 된다. 선행연구[4]의 명제 7.20에 의하여 $\mathrm{Spec}(R)$ 가 T_0 －공간이므로 그 부분공간인 $\mathrm{Spec}_k(R)$ 는 T_0 －공간이다. 선행연구[3]의 정리 3에 의하여 $\mathrm{Spec}_k(R)$ 에서 임의의 기약닫긴모임은 일반점을 가진다. 따라서 $\mathrm{Spec}_k(R)$ 는 스펙트르공간이다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보(자연과학), 62, 11, 23, 주체105(2016).

[2] **김일성**종합대학학보 수학, 64, 3, 80, 주체107(2018).

[3] **김일성**종합대학학보 수학, 65, 1, 118, 주체108(2019).

[4] J. S. Golan; Semirings and their Applications, Kluwer Academic, 66～103, 1999.

[5] M. Hochster; Trans. Amer. Math. Soc., 142, 43, 1969.

[6] P. Lescot; J. Pure Appl. Algebra, 216, 1004, 2012.

[7] P. Lescot; Osaka J. Math., 52, 721, 2015.

주체108(2019)년 3월 15일 원고접수

Topological Property of the Set of Subtractive Prime Congruences on a Commutative Semiring

Han Song Chol

For any commutative semiring with zero and identity, we prove that the set of all the subtractive prime congruences is homeomorphic to the set of all the subtractive prime ideals for the Zariski topologies and they are both spectral spaces.

Key words: semiring, subtractive ideal, prime ideal, Zariski topology, congruence