김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제1호

한가지 형태의 p−라쁠라스연산자를 가진 비선형다항분수계 미분방정식의 여러점경계값문제의 정인 풀이의 유일존재성

장경준, 정금성

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《우리는 과학기술을 발전시켜도 남들이 걸은 길을 따라만 갈것이 아니라 우리 과학자들의 애국충정과 우리 인민의 슬기와 민족적자존심을 폭발시켜 년대와 년대를 뛰여넘으며 비약해나가야 합니다.》

최근 많은 론문들에서 p−라쁠라스연산자를 가진 비선형분수계미분방정식풀이의 존재성에 대한 연구가 활발히 진행되고있다.

선행연구[2]에서는 p−라쁠라스연산자를 가진 비선형단항분수계미분방정식의 세점경계값문제의 정인 풀이의 존재성을 연구하였으며 선행연구[1]에서는 p−라쁠라스연산자가 들어있지 않는 비선형다항분수계미분방정식의 m점경계값문제풀이의 유일존재성에 대하여 론의하였다.

선행연구[2, 3]에서는 축소넘기기원리와 부동점지수리론을 리용하여 p−라쁠라스연산자를 가진 비선형단항분수계미분방정식의 m점경계값문제풀이의 존재성을 증명하였으며 선행연구[4]에서는 몇가지 부동점정리들을 소개하고 그에 기초하여 p−라쁠라스연산자를 가진 비선형다항분수계미분방정식의 두점경계값문제풀이가 존재하기 위한 조건들을 밝혔다.

우의 결과들에 기초하여 론문에서는 다음의 p−라쁠라스연산자를 가진 비선형다항분수계미분방정식의 m점경계값문제

$$\begin{cases} D_{0+}^{\beta}(\varphi_p(D_{0+}^{\alpha}x(t))) = f(t,\ x(t),\ D_{0+}^{\gamma}x(t)),\ 0<t<1 \\ D_{0+}^{\gamma}x(0)=0,\ D_{0+}^{\delta}x(1)=\sum_{i=1}^{m-2}\xi_i D_{0+}^{\delta}x(\eta_i) \\ D_{0+}^{\alpha}x(0)=0,\ \varphi_p(D_{0+}^{\alpha}x(1))=\sum_{i=1}^{m-2}\zeta_i\varphi_p(D_{0+}^{\alpha}x(\eta_i)) \end{cases} \tag{1}$$

의 정인 풀이의 유일존재성을 밝힌다. 여기서

$$1<\alpha,\ \beta\le 2,\ 0<\gamma,\ \delta<1,\ 0<\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i<1\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m-2)$$

이고 이에 대하여 조건

$$3<\alpha+\beta\le 4,\ \gamma<\delta,\ \alpha-\delta-1>0,\ \sum_{i=1}^{m-2}\xi_i\eta_i^{\alpha-\delta-1}<1,\ \sum_{i=1}^{m-2}\zeta_i\eta_i^{\beta-1}<1$$

을 가정하며 $D_{0+}^{\alpha},\ D_{0+}^{\beta},\ D_{0+}^{\gamma},\ D_{0+}^{\delta}$ 들은 모두 리만−류빌분수계도함수들이다. 또한 함수 f는 $f\in C([0,\ 1]\times[0,\ +\infty)\times[0,\ +\infty);\ [0,\ +\infty))$를 만족시키며 $\varphi_p(s)=|s|^{p-2}s,\ p>1$이다.

정의 $x\in X:=\{u\,|\,u\in C[0,\ 1],\ D_{0+}^{\alpha}u\in C[0,\ 1],\ D_{0+}^{\beta}(\varphi_p(D_{0+}^{\alpha}u))\in C[0,\ 1]\}$ 에 대하여 문제 (1)의 미분방정식과 경계조건들을 만족시킬 때 함수 $x(t)$ 를 경계값문제 (1)의 풀이라고 부른다.

보조정리 1 적분방정식

$$u(t)=\int_0^1 G(t,\ s)\varphi_q\left(\int_0^1 H(s,\ \tau)f(\tau,\ I_{0+}^{\gamma}u(\tau),\ u(\tau))d\tau\right)ds \tag{2}$$

의 풀이 $u\in C[0,\ 1]$에 대하여 경계값문제 (1)의 풀이 x는

$$x(t)=I_{0+}^{\gamma}u(t),\ t\in[0,\ 1]$$

로 표시될것이 필요하고 충분하다. 여기서 q는 $1/p+1/q=1$을 만족시키는 수이다.

증명 경계값문제 (1)의 풀이 x에 대하여 $u(t)=D_{0+}^{\gamma}x(t)$ 로 놓으면 경계값문제 (1)의 풀이 x는 u에 관하여 $x(t)=I_{0+}^{\gamma}u(t),\ t\in[0,\ 1]$로 유일하게 표시되며 이때 u는 분수계미분방정식의 m점경계값문제

$$\begin{cases} D_{0+}^{\beta}(\varphi_p(D_{0+}^{\alpha-\gamma}u(t)))=f(t,\ I_{0+}^{\gamma}u(t),\ u(t)),\ 0<t<1 \\ u(0)=0,\ D_{0+}^{\delta-\gamma}u(1)=\sum_{i=1}^{m-2}\xi_i D_{0+}^{\delta-\gamma}u(\eta_i) \\ D_{0+}^{\alpha-\gamma}u(0)=0,\ \varphi_p(D_{0+}^{\alpha-\gamma}u(1))=\sum_{i=1}^{m-2}\zeta_i\varphi_p(D_{0+}^{\alpha-\gamma}u(\eta_i)) \end{cases} \tag{3}$$

의 풀이로 된다.

또한 경계값문제 (3)의 풀이 u가 적분방정식 (2)형태로 유일하게 표시된다는것을 쉽게 증명할수 있다.(증명끝)

E를 노름 $\|u\|=\max_{0\le t\le 1}|u(t)|$가 도입된 바나흐공간 $C[0,\ 1]$이라고 하고 $P=\{u\in E\,|\,u(t)\ge 0,\ t\in[0,\ 1]\}$이라고 놓자. 임의의 $u\in P$에 대하여

$$\forall t\in[0,\ 1],\ I_{0+}^{\gamma}u(t)=\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^t (t-s)^{\gamma-1}u(s)ds\ge 0$$

이므로 $I_{0+}^{\gamma}u\in P$이다. 따라서 임의의 $u\in P$에 대하여 연산자 T를

$$Tu(t):=\int_0^1 G(t,\ s)\varphi_q\left(\int_0^1 H(s,\ \tau)f(\tau,\ I_{0+}^{\gamma}u(\tau),\ u(\tau))d\tau\right)ds$$

로 정의하면 T는 $T(P)\subset P$인 연산자이다.

$\overline{M}=[(\alpha-\delta)A\Gamma(\alpha-\gamma)]^{p-1}B\Gamma(\beta)$ 라고 놓고 다음의 조건들을 가정한다.

가정 1 비부값함수 $a,\ b,\ c\in C[0,\ 1]$이 존재하여

$$M_a:=\|a\|>0,\ M_b:=\|b\|>0,\ M_c:=\|c\|>0$$

$$\frac{M_b}{\Gamma(\gamma+1)^{p-1}}+M_c<\overline{M}$$

이며 이때

$$\forall(t,\ x,\ y)\in[0,\ 1]\times[0,\ R_1]\times[0,\ R_2],\ f(t,\ x,\ y)\le a(t)+b(t)x^{p-1}+c(t)y^{p-1}$$

이 성립된다. 여기서

$$R_2:=\left(\frac{M_a}{\left(\overline{M}-\frac{M_b}{\Gamma(\gamma+1)^{p-1}}-M_c\right)}\right)^{q-1},\quad R_1:=\frac{R_2}{\Gamma(\gamma+1)}$$

이다.

가정 2 $\exists L_1,\ L_2>0;\ \forall t\in[0,\ 1],\ \forall(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2)\in[0,\ R_1]\times[0,\ R_2],$

$$|f(t,\ x_1,\ y_1)-f(t,\ x_2,\ y_2)|<L_1|x_1-x_2|+L_2|y_1-y_2|$$

가정 3 $\exists\overline{m}>0,\ \exists\mu\in[1,\ 2];\ \forall(t,\ x,\ y)\in[0,\ 1]\times[0,\ R_1]\times[0,\ R_2],\ \ f(t,\ x,\ y)\ge\overline{m}t^{\mu-1}$

보조정리 2 가정 1이 성립된다고 하자. 이때

$$B_{R_2}:=\{u\in P\mid \|u\|\le R_2\}$$

로 놓으면 $T(B_{R_2})\subset B_{R_2}$ 가 성립된다.

$$K_0:=\frac{\overline{m}\Gamma(\mu)}{B\Gamma(\beta+\mu)}\sum_{i=1}^{m-2}\zeta_i(\eta_i^{\beta-1}-\eta_i^{\beta-1+\mu})$$

$$K_1:=\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\left[1+\frac{1}{B}\sum_{i=1}^{m-2}\zeta_i(\eta_i^{\beta-1}-\eta_i^{\beta})\right]$$

로 놓자.

정리 1 $p>2$에 대하여 가정 1－3이 성립되고

$$\frac{(q-1)K_0^{q-2}K_1}{A(\alpha-\delta)\Gamma(\alpha-\gamma)}\left(\frac{L_1}{\Gamma(\gamma+1)}+L_2\right)<1 \tag{4}$$

이라고 하자. 그러면 경계값문제 (3)은 B_{R_2} 에서 유일한 풀이를 가진다.

$$M_0:=\frac{M_a+\left(\frac{M_b}{\Gamma(\gamma+1)^{p-1}}+M_c\right)R_2^{p-1}}{B\Gamma(\beta)}$$

으로 놓자.

정리 2 $1<p<2$에 대하여 가정 1, 2가 성립되고

$$\frac{(q-1)R_2^{2-p}}{\beta\overline{M}}\left(\frac{L_1}{\Gamma(\gamma+1)}+L_2\right)<1 \tag{5}$$

이라고 하자. 그러면 경계값문제 (3)은 B_{R_2} 에서 유일한 풀이를 가진다.

정리 3 경계값문제 (1)이 $\Omega:=I_{0+}^{\gamma}(B_{R_2})=\{I_{0+}^{\gamma}x:x\in B_{R_2}\}$ 에서 유일풀이를 가지기 위하여서는 문제 (3)의 풀이가 B_{R_2} 에서 유일존재할것이 필요하고 충분하다. 특히 가정 3을 만족시키면 문제 (1)의 유일풀이는 정인 풀이로 된다.

참 고 문 헌

[1] 김일성종합대학학보(자연과학), 58, 7, 16, 주체101(2012).

[2] K. Jong; Mediterranean Journal of Mathematics, 15, 1, 2018.

[3] Z. Lv; Advances in Difference Equations, 69, 1, 2014.

[4] Y. Su et al.; Advances in Difference Equations, 119, 1, 2013.

주체108(2019)년 9월 15일 원고접수

Existence and Uniqueness of Positive Solutions of a Kind of Multi-point Boundary Value Problems for Nonlinear Fractional Differential Equations with *p*-Laplacian Operator

Jang Kyong Jun, Jong Kum Song

In this paper, we investigate the existence and uniqueness of positive solutions of a kind of multi-point boundary value problem for nonlinear multi-term fractional differential equations with p-Laplacian operator using the Banach contraction mapping principle.

Keywords: multi-term fractional differential equation, p-Laplacian operator