김일성종합대학학보 주체110(2021)년
수 학 제67권 제1호

상하풀이법을 리용한 적분경계조건을 가지는 일반화된 리만－류빌분수계미분방정식의 풀이의 존재성

리영도, 박은철

최근 분수계미분방정식에 대한 연구가 광범히 진행되는 과정에 지금까지 많이 리용되여온 리만－류빌과 캐푸토의 의미에서의 도함수를 일반화한 리만－류빌분수계도함수와 그것을 가지는 분수계미분방정식에 대한 연구가 활발히 진행되고있다. 선행연구[2]에서는 일반화된 리만－류빌분수계도함수의 개념이 도입되고 초기조건과 경계조건을 가지는 일반화된 리만－류빌분수계미분방정식의 현실모형들이 제시되였다. 그리고 선행연구[3]에서는 일반화된 리만－류빌분수계미분방정식에 대한 초기값문제

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha,\ \beta}x(t)=f(t,\ x(t))\ \ (t\in J\setminus\{0\}) \\ I_{0+}^{1-\gamma}x(0)=x_0 \end{cases}$$

의 풀이의 존재성과 안정성에 대하여 연구하였다. 여기서 $D_{0+}^{\alpha,\ \beta}$ 는 일반화된 리만－류빌의 의미에서의 α 계 β 형미분연산자이고 $0<\alpha<1,\ 0\le\beta\le1$, $\gamma:=\alpha+\beta-\alpha\beta$, $J:=[0,\ T]$ 이다. 또한 선행연구[4]에서는 일반화된 리만－류빌분수계미분방정식에 대한 여러점경계값문제

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha,\ \beta}x(t)=f(t,\ x(t),\ D_{0+}^{\alpha,\ \beta}x(t))\ \ (t\in J\setminus\{0\}) \\ I_{0+}^{1-\gamma}x(0)=\sum_{i=1}^{m}c_i x(\tau_i)\ \ (\tau_i\in J) \end{cases}$$

의 풀이의 존재성을 밝혔다. 여기서 $\Gamma(\gamma)\ne\sum_{i=1}^{m}c_i(\tau_i)^{\gamma-1}$ 이다. 또한 선행연구[1]에서는 일반화된 리만－류빌분수계미분방정식에 대한 적분경계값문제

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha,\ \beta}x(t)=f(t,\ x(t),\ D_{0+}^{\alpha_0,\ \beta}x(t))\ \ (t\in J\setminus\{0\}) \\ I_{0+}^{1-\gamma}x(0)=\int_0^T g(s)x(s)ds \end{cases}$$

의 풀이의 존재성과 유일존재성에 관한 충분조건을 밝혔다. 이와 같이 각이한 조건을 가진 일반화된 리만－류빌분수계미분방정식의 풀이의 존재성에 관한 결과들이 얻어졌지만 그 풀이법에 관한 론문은 찾아볼수 없었다. 그러므로 론문에서는 일반화된 리만－류빌분수계미분방정식에 대한 적분경계값문제

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha,\ \beta}x(t)=f(t,\ x(t))\ \ (t\in J\setminus\{0\}) \\ I_{0+}^{1-\gamma}x(0)=\int_0^T g(s)x(s)ds \end{cases} \tag{1}$$

의 상하근사풀이법을 얻으려고 한다. 여기서 $g\in C[J,\ \mathbf{R}_+]$ 이고 $f:J\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 는 임의의

$x(\in C_{1-\gamma}[J,\ \mathbf{R}])$ 에 대하여 $f(\cdot,\ x(\cdot))\in C_{1-\gamma}[J,\ \mathbf{R}]$ 인 함수이며 $\int_0^T g(s)s^{\gamma-1}ds<\Gamma(\gamma)$ 이다.

정의 1 [2] 함수 f 의 일반화된 리만－류빌의 의미에서의 α 계 β 형왼쪽분수도함수는 다음과 같이 정의된다.

$$D_{0+}^{\alpha,\ \beta}f(t):=(I_{0+}^{\beta(1-\alpha)}D(I_{0+}^{(1-\beta)(1-\alpha)}f))(t)\ \ (0<\alpha<1,\ 0\le\beta\le 1)$$

여기서 $D:=d/dt$ 이다.

$C[J,\ \mathbf{R}]$ 는 노름 $\|x\|_C:=\max_{t\in J}\{|x(t)|\}$ 가 도입된 바나흐공간이고 $L^1(J)$ 는 르베그적분가능한 함수 $x:J\to\mathbf{R}$ 들로 이루어진 공간으로서 이 공간에 노름

$$\|x\|_1:=\int_0^T|x(s)|ds$$

가 도입되여있다고 하자.

정의 2 [2] $0\le\gamma<1$ 일 때 구간 J 우에서 련속인 함수 f 들의 무게붙은 공간 $C_\gamma[J,\ \mathbf{R}]$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$C_\gamma[J,\ \mathbf{R}]:=\{f:J\to\mathbf{R}\mid t^\gamma f(t)\in C_\gamma[J,\ \mathbf{R}]\}$$

그러면 $C_\gamma[J,\ \mathbf{R}]$ 는 노름 $\|f\|_{C_\gamma}:=\|t^\gamma f\|_C$ 에 관하여 바나흐공간으로 된다. 또한 모임

$$C_\gamma^n[J,\ \mathbf{R}]:=\{f\in C^{n-1}[J,\ \mathbf{R}]\mid\ f^{(n)}\in C_\gamma[J,\ \mathbf{R}]\}$$

는 노름

$$\|f\|_{C_\gamma^n}:=\sum_{i=0}^{n-1}\|f^{(i)}\|_C+\|f^{(n)}\|_{C_\gamma}\ \ (n\in\mathbf{N})$$

에 관하여 바나흐공간으로 된다는것도 분명하다. 마찬가지로 모임

$$C_{1-\gamma}^\gamma[J,\ \mathbf{R}]:=\{f\in C_{1-\gamma}[J,\ \mathbf{R}]\mid\ D_{0+}^\gamma f\in C_{1-\gamma}[J,\ \mathbf{R}]\}$$

도 노름

$$\|f\|_{C_{1-\gamma}^\gamma}:=\|f\|_{C_{1-\gamma}}+\|D_{0+}^\gamma f\|_{C_{1-\gamma}}$$

에 관하여 바나흐공간으로 된다.

보조정리 1 [2] $0<\alpha<1,\ \beta>0$ 이면 다음의 식들이 성립한다.

$$(I_{0+}^\alpha s^{\beta-1})(t)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}t^{\beta+\alpha-1}$$

$$(D_{0+}^\alpha s^{\alpha-1})(t)=0$$

보조정리 2 [2] 임의의 $f(\in L^1(J))$ 에 대하여 다음의 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned}&(I_{0+}^\alpha I_{0+}^\beta f)(t)=(I_{0+}^{\alpha+\beta}f)(t)\\&(D_{0+}^\alpha I_{0+}^\alpha f)(t)=f(t)\end{aligned}\quad(\alpha>0,\ \beta>0,\ t\in J)$$

보조정리 3 [2] 임의의 $f(\in C_\gamma[J,\ \mathbf{R}])$ 에 대하여 $I_{0+}^{1-\alpha}f\in C_\gamma^1[J,\ \mathbf{R}]$ 이면 다음의 식이 성립한다.

$$I_{0+}^{\alpha}D_{0+}^{\alpha}f(t)=f(t)-\frac{I_{0+}^{1-\alpha}f(0)}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}\ \ (0<\alpha<1,\ 0\le\gamma\le 1,\ t\in J) \tag{2}$$

보조정리 4[2] 임의의 $f(\in C_{\gamma}[J,\ \mathbf{R}])$이면 다음의 식이 성립한다.

$$I_{0+}^{1-\alpha}f(0):=\lim_{t\to 0^+}I_{0+}^{1-\alpha}f(t)=0\ \ (0\le\gamma<\alpha<1) \tag{3}$$

보조정리 5[3] $\alpha>0,\ \beta>0$이고 $\gamma:=\alpha+\beta-\alpha\beta$일 때 임의의 $f(\cdot,\ x(\cdot))(\in C_{1-\gamma}^{\gamma}[J,\ \mathbf{R}])$에 대하여 다음의 식들이 성립한다.

$$I_{0+}^{\gamma}D_{0+}^{\gamma}f=I_{0+}^{\alpha}D_{0+}^{\alpha,\ \beta}f$$

$$D_{0+}^{\gamma}I_{0+}^{\alpha}f=D_{0+}^{\beta(1-\alpha)}f$$

보조정리 6[3] $\alpha>0,\ \beta>0$일 때 $f(\in L^1(J)$에 대하여 $D_{0+}^{\beta(1-\alpha)}f\in L^1(J)$이면 다음의 식이 성립한다.

$$D_{0+}^{\alpha,\ \beta}I_{0+}^{\alpha}f=I_{0+}^{\beta(1-\alpha)}D_{0+}^{\beta(1-\alpha)}f$$

보조정리 7[1] $f:J\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$를 임의의 $x(\in C_{1-\gamma}[J,\ \mathbf{R}])$에 대하여 $f(\cdot,\ x(\cdot))\in C_{1-\gamma}[J,\ \mathbf{R}]$인 함수라고 하자. 이때 함수 $x(\in C_{1-\gamma}^{\gamma}[J,\ \mathbf{R}])$가 문제 (1)의 풀이이기 위해서는 다음과 같은 적분방정식을 만족시킬것이 필요하고 충분하다.

$$x(t)=Zt^{\gamma-1}\int_0^T g(s)I_{0+}^{\alpha}f(s,\ x(s))ds+I_{0+}^{\alpha}f(t,\ x(t)) \tag{4}$$

여기서 $Z:=\dfrac{1}{\Gamma(\gamma)-\int_0^T g(s)s^{\gamma-1}ds}$이다.

적분방정식 (4)의 오른변을 $Ax(t)$로 표시하자. 그러면 방정식 (4)의 풀이의 존재성은 연산자 A의 부동점의 존재성에 귀착된다.

정의 3 $f,\ g(\in C_{1-\gamma}[J,\ \mathbf{R}])$에 대하여 순서관계 $\le$는 다음과 같이 정의한다.

$$f\le g\overset{d}{\Leftrightarrow}f(t)\le g(t)\ \ (\forall t\in(0,\ T])$$

정의 4 $x_*(\in[v,\ u])$이 순서구간 $[v,\ u]$에 속하는 연산자 A의 부동점들가운데서 가장 작은 부동점이면 최소부동점, 가장 큰 부동점이면 최대부동점이라고 부른다. 여기서

$$[v,\ u]:=\{f\in C_{1-\gamma}[J,\ \mathbf{R}]\mid v\le f\le u\}$$

이다.

풀이의 존재성을 밝히기 위하여 다음과 같은 가정들을 주자.

가정 1 문제 (1)의 상풀이 $u(t)$와 하풀이 $v(t)$가 존재한다.

가정 2 임의의 $t(\in J)$와 임의의 $x(\in C_{1-\gamma}[J,\ \mathbf{R}])$에 대하여 함수 $x\mapsto f(t,\ x)$는 $C_{1-\gamma}[J,\ \mathbf{R}]$에서 련속이다.

가정 3 $x_1<x_2$이면 임의의 $t(\in J\setminus\{0\})$에 대하여 $f(t,\ x_1)<f(t,\ x_2)$이다.

가정 4 적당한 $l(\in C_{1-\gamma}[J,\ \mathbf{R}^+])$과 $\rho(\in C[J,\ \mathbf{R}^+])$가 존재하여 다음의 부등식이 성립한다.

$$|f(t,\ x)|\le l(t)+\rho(t)|x|\ \ (\forall t\in J\setminus\{0\},\ \forall x\in\mathbf{R})$$

다음의 정리는 문제 (1)의 풀이의 존재성과 풀이법을 제시해준다.

정리 1 가정 1－4가 만족된다고 하자. 그러면 다음의 사실들이 성립한다.

① A는 순서구간 $[v, u]$에서 최소부동점 x_*과 최대부동점 y_*을 가진다.

② 다음과 같이 정의된 렬 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$은 수렴한다.

$$x_0 := v,\ y_0 := u,\ x_n := Ax_{n-1},\ y_n := Ay_{n-1}\quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

이때

$$\lim_{n\to+\infty} x_n := x_*,\ \lim_{n\to+\infty} y_n := y_*$$

이다.

다음의 가정들을 주자.

가정 5 적당한 $q(\in C_{1-\gamma}[J,\ \mathbf{R}])$가 존재하여

$$|f(t,\ x)| \le q(t)|x|\ (\forall t\in(0,\ T],\ \forall x\in\mathbf{R})$$

가 성립한다.

가정 6 $\left(\frac{z}{\Gamma(\alpha)}g^*\frac{T^{\alpha+\gamma}}{\alpha+\gamma}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}T^{\alpha}\right)B(\gamma,\ \alpha)q^* < 1$

여기서 $g^* := \|g\|_C$, $q^* := \|q\|_{C_{1-\gamma}}$ 이다.

다음의 정리는 문제 (1)의 풀이가 어떤 경우에 존재하지 않는가를 보여준다.

정리 2 가정 5, 6이 만족된다고 하자. 그러면 문제 (1)은 풀이를 가지지 않는다.

실례 다음의 문제를 고찰하자.

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha,\ \beta}x(t) = -tx^2(t) \\ I_{0+}^{1-\gamma}x(0) = \int_0^1 g(s)x(s)ds \end{cases} \tag{5}$$

여기서 $\alpha = 1/4,\ \beta = 1/3,\ \gamma = 1/2$, $g(t) = t^{1/2}$ 이다.

우선 $x(t)\equiv 0$ 은 하풀이이다. 또한 $x(t) = t^{-1/2}$ 은 상풀이이다. 사실

$$D_{0+}^{\alpha,\beta} = I_{0+}^{\beta(1-\alpha)}D_{0+}^{\gamma},\ D_{0+}^{\alpha,\beta}(t^{-1/2}) = 0$$

$$I_{0+}^{1/2}t^{-1/2} = \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1)}t^0 = \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1)} = \sqrt{\pi},\ I_{0+}^{1-\gamma}x(0) = \sqrt{\pi} \ge \int_0^1 t^{1/2}t^{-1/2}dt = 1$$

이다. 또한 가정 2－4가 만족된다는것은 쉽게 알수 있다. 따라서 문제 (5)는 구간 $[0,\ t^{-1/2}]$에서 적어도 1개의 풀이를 가진다.

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보 수학, **65**, 4, 27, 주체108(2019).

[2] R. Hilfer; Application of Fractional Calculus in Physics, World Scientific, 1∼197, 1999.

[3] D. Vivek et al.; Fract. Calc. Appl. Anal., **21**, 4, 1120, 2018.

[4] D. Vivek et al.; Mediterr. J. Math., **15**, 1, 2018.

주체109(2020)년 9월 5일 원고접수

The Existence of the Solution for Generalized Riemann-Liouville Fractional Differential Equation with Integral Boundary Condition Using the Upper and Lower Solution Method

Ri Yong Do, Pak Un Chol

In this paper, we study the upper and lower solution method for generalized Riemann-Liouville fractional differential equation with integral boundary condition.

Keywords: upper and lower solution method, fractional differential equation