김일성종합대학학보 JOURNAL OF KIM IL SUNG UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체106(2017)년 제63권 제1호 Vol. 63 No. 1 JUCHE106(2017).

씸플렉트묻기렬에 의한 씸플렉트불변량과 $(\boldsymbol{R}^{2n},\ \omega_0)$에서 묻기들사이 관계

김정현, 정은경

씸플렉트불변량연구에서 중요한것은 씸플렉트묻기의 성질을 밝히는것이다.

선행연구[2]에서는 씸플렉트구를 씸플렉트기둥체로 보내는 씸플렉트묻기의 특성을 보여주는 그로모브정리를 증명하였다. 선행연구[1]에서는 두 씸플렉트다양체사이에 여러개의 씸플렉트묻기렬에 대하여 특히 여러개의 씸플렉트구들에 의하여 타원체나 그밖의 다양체들을 채우는 방법에 대하여 연구하였으며 선행연구[3]에서는 씸플렉트타원체의 구로의 묻기문제를 제기하고 몇가지 묻기를 구성하였다.

론문에서는 씸플렉트타원체에서의 씸플렉트묻기렬에 의한 묻기의 특성과 이로부터 유도되는 씸플렉트불변량을 구하고 그것의 성질을 밝힌다.

$B^{2n}(a)$를 씸플렉트다양체라고 하자. $P_K(M,\ \omega)\in(0,\ 1]$을 만족시키는 씸플렉트묻기 $E_k(B^n)$들의 모임 $\{\psi_i\}_{i=1}^k$를 생각하자.

V를 유한체적을 가진 다양체라고 할 때 묻기렬 $\{\psi_i\}_{i=1}^k$가 $k\mathrm{Vol}(U)=\mathrm{Vol}(V)$를 만족시키면 $\{\psi_i\}_{i=1}^k$를 U에 의한 V의 씸플렉트완전k묻기렬이라고 부른다.

U에 의한 V의 씸플렉트완전k묻기렬 $\{\psi_i\}_{i=1}^k$는 U를 V로 보내면서 U의 영상들이 서로 사귀지 않는 k개의 씸플렉트묻기들로 이루어진 모임으로서 k개의 U의 체적과 V의 체적이 같아지게 되는 묻기들의 모임이다.

어떤 씸플렉트다양체 V를 씸플렉트적으로 채우기하는 U로서는 V와 같은 차원의 씸플렉트구나 씸플렉트타원체가 될수 있다.

보조정리 1 $B^{2n}(a)$를 $B^{2n}(a)=\left\{(x,\ y)\in\boldsymbol{R}^{2n}\,\middle|\,\sum_{i=1}^n(x_i^2+y_i^2)<\frac{a}{\pi}\right\}$로 정의된 씸플렉트구라고 하면 k^n개 씸플렉트구에 의한 $B^{2n}(\pi)$의 씸플렉트k묻기렬이 존재한다.

증명 반경이 $r<\sqrt{1/k}\ (k\in\boldsymbol{N})$인 임의의 r에 대하여 k^n개의 구 $B^{2n}(\pi r^2)$을 생각하자.

$D(r):=\{x^2+y^2\le r\}\subset\boldsymbol{R}^2$, $D(r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n):=D(r_1)\times\cdots\times D(r_n)$으로 하고 $D(1,\ \cdots,\ 1)$을 k^n개의 $D(r,\ \cdots,\ r)$에 의하여 채우자.

이를 위하여 $D(1)$을 k개의 쪼박 $P_i(1/k)$들로 나눈다. 즉 극자리표계가 도입된 평면에서 모임 $P_i\left(\frac{1}{k}\right)$을 $P_i\left(\frac{1}{k}\right):=\left\{(\rho,\ \theta)\in D(1)\mid\frac{2(i-1)\pi}{k}\le\theta<\frac{2i\pi}{k}\right\},\ i=1,\ \cdots,\ k$로 정의하면 $P_i\left(\frac{1}{k}\right)$은 면적이 π/k인 $D(1)$의 부분모임으로 된다.

$r<\frac{1}{k}$에 대하여 면적을 보존하는 미분동형넘기기 $\sigma_i:D(r)\to P_i\left(\frac{1}{k}\right)$, $i=1,\cdots,k$를

$|z|^2 = x^2 + y^2 \le \alpha$ 일 때 $|\sigma_i(z)|^2 \le k\alpha + \left(\frac{1}{k} - r\right)$ 가 성립되도록 정의한다.

이제 1부터 k까지의 자연수들로 된 첨수모임 즉 $I = \{i_1, i_2, \cdots, i_n\}$, $i_p \in \{1, 2, \cdots, k\}$ 를 생각하면 이런 첨수모임들은 k^n 개 존재하며 매 첨수모임 I 에 대하여 넘기기 ψ_I^r 을

$$\psi_I^r = \psi_{\{i_1, \cdots, i_n\}}^r : D(r, \cdots, r) \to P_{i_1}\left(\frac{1}{k}\right) \times P_{i_2}\left(\frac{1}{k}\right) \times \cdots \times P_{i_n}\left(\frac{1}{k}\right) \subset D(1, \cdots, 1),$$

$$\psi_I^r(x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n) = (\sigma_{i_1}(x_1, y_1), \cdots, \sigma_{i_n}(x_n, y_n))$$

으로 정의하면 $i \ne j$ 일 때 σ_i 와 σ_j 의 영상이 사귀지 않으므로 서로 다른 첨수모임 $I = \{i_1, i_2, \cdots, i_n\}$ 과 $J = \{j_1, j_2, \cdots, j_n\}$ 에 대하여 $\mathrm{Im}\psi_I^r \cap \mathrm{Im}\psi_J^r = \phi$ 이다.

이제 $\psi_I^r(B^{2n}(\pi r^2)) \subset \mathrm{int}\, B^{2n}(\pi)$ 라는것을 증명하자.

$B^{2n}(\pi r^2)$ 은 $D(r, \cdots, r)$ 의 부분모임이므로 $\forall (x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n) \in B^{2n}(\pi r^2) \subset D(r, \cdots, r)$, $\alpha_i = x_i^2 + y_i^2$ 이라고 하면 면적보존미분동형넘기기 σ 의 정의로부터

$$|\sigma_{i_j}(x_j, y_j)|^2 \le k\alpha_j + \left(\frac{1}{k} - r\right), \ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \le r < \frac{1}{k}$$

이므로

$$\sum_{j=1}^{n} |\sigma_{i_j}(x_j, y_j)|^2 \le k(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) + \frac{n}{k} - nr \le (k-n)r + \frac{n}{k} < (k-n)\frac{1}{k} + \frac{n}{k} = 1$$

이 성립된다. 즉 $\psi_I^r(B^{2n}(\pi r^2)) \subset \mathrm{int}\, B^{2n}(\pi)$ 가 성립된다.(증명끝)

보조정리 1에서는 반경이 1인 씸플렉트구를 보다 작은 반경을 가지는 k^n 개의 구들에 의하여 채우기를 진행하였는데 이때 구의 반경은 $r < \frac{1}{k}$ 로 된다는것을 밝혔다.

이와 같은 채우기에서 중요한것은 k 개의 구들이 씸플렉트다양체로 묻기될 때 구의 반경이 최대로 얼마로 되는가 하는것이다.

한 씸플렉트타원체를 다른 타원체로 묻기할 때 그들사이의 체적비가 스칼라불변량이 된다[3]는데로부터 론문에서는 다음과 같은 $P_k(M, \omega)$ 를 정의한다.

(M, ω) 를 씸플렉트다양체라고 하면 $B^{2n}(a)$ 에 의한 (M, ω) 의 씸플렉트 $k-$묻기렬이 존재할 때 수 $P_k(M, \omega)$ 를 $P_k(M, \omega) = \sup_a \left(\frac{k|B^{2n}(a)|}{\mathrm{Vol}(M, \omega)}\right)$ 로 정의한다. 여기서 $|B^{2n}(a)|$ 는 표준씸플렉트다양체 $(\boldsymbol{R}^{2n}, \omega_0)$ 의 부분모임인 $B^{2n}(a)$ 의 르베그측도로서 표준씸플렉트형식 ω_0 에 관한 체적 $\mathrm{Vol}(B^{2n}(a)) = \int_{B^{2n}(a)} \frac{1}{n!}\omega_0^n$ 과 일치한다.

정의로부터 분명히 $P_k(M, \omega) \in (0, 1]$ 이 성립되며 완전 k 묻기렬이 존재하는 경우 $P_k(M, \omega) = 1$ 이라는것을 알수 있다.

정리 1 수 P_1 은 씸플렉트불변량이다.(증명생략)

P_1 은 씸플렉트불변량이며 그로모브너비사이에 $P_1(M, \omega)\mathrm{Vol}(M, \omega) = (\omega_G(M, \omega))^n / n!$ 의 관계가 있다.

그러면 일반적으로 $k>1$인 경우 수 P_k들이 어떤 성질을 가지는가를 보자.

정리 2 $2\le k\le 2^n$에 대하여 $P_k(B^{2n}(\pi),\ \omega_0)=\dfrac{k}{2^n}$가 성립된다.

증명 $k\le 2^n$개의 묻기렬은 $r<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$일 때 늘 존재한다.

이로부터 그 반경들의 상한으로서 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$을 잡고 수 $P_k(B^{2n}(\pi),\ \omega_0)$을 계산하면

$$P_k(B^{2n}(\pi),\ \omega_0)=\sup_r\left\{\frac{\dfrac{k(\pi r^2)^n}{n!}}{\dfrac{\pi^n}{n!}}\right\}=k\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}=\frac{k}{2^n}$$

이다. 즉 $P_k(B^{2n}(\pi),\ \omega_0)=\dfrac{k}{2^n}$이다.(증명끝)

M을 체적형식 Ω에 의한 유한체적을 가지는 련결인 n차원다양체, U를 르베그측도가 $|U|$인 $\boldsymbol{R}^n$의 열린부분모임, $B^n(A)$를 반경이 $\sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$인 열린구라고 하자.

$\coprod_{i=1}^{k}B^n(A)$를 $(M,\ \Omega)$로 보내는 체적보존묻기가 존재할 때 수 $\nu_k(M,\ \Omega)$를

$$\nu_k(M,\ \Omega)=\sup\left\{\frac{k\,|B^n(A)|}{\mathrm{Vol}(M,\ \Omega)}\right\}$$

로 정의하자.

한편 U를 $\boldsymbol{R}^n$의 유계구역이라고 할 때 $E_k(U)=\sup\left\{\dfrac{k\,|B^n(a)|}{|U|}\right\}$와 같이 정의된 수 $E_k(U)$를 생각하자. 여기서 상한은 k개의 $B^n(a)$들이 U로 평행이동될 때 영상들이 사귀지 않게 되는 상한이다.

보조정리 2 수 $E_k,\ P_k,\ V_k$는 다음의 성질을 가진다.

① 체적형식 Ω가 씸플렉트형식 ω에 의해 유도되였다고 하면 임의의 $k\in\boldsymbol{N}$에 대하여 $\nu_k(M,\ \omega)=1$이 성립된다.

② $E_k(B^n)\le k/2^n$

③ U를 $\boldsymbol{R}^{2n}$의 유계구역이라고 할 때 $E_k(U)\le P_k(U)\le V_k(U)=1$이 성립된다.

보조정리 2는 주어진 다양체를 구에 의하여 채울 때 평행이동에 의하여 채우는가, 씸플렉트묻기에 의하여 채우는가, 체적보존묻기에 의하여 채우는가에 따라 채워지는 정도가 다르다는것을 보여주며 이로부터

$$(1-P_k(M,\ \omega)),\ (P_k(M,\ \omega)-E_k(M,\ \omega))$$

는 씸플렉트와 체적보존, 씸플렉트와 평행이동의 차이를 지적하는 량적지표라고도 할수 있다.

정리 3 ($E_k(B^{2n})$과 $P_k(B^{2n})$ 사이관계) $E_k(B^{2n})\le P_k(B^{2n})/2^n,\ 2\le k\le 2^n$

이 정리로부터 씸플렉트묻기렬에 의해 정의된 $P_k(B^{2n})$은 평행이동에 의해 정의된 $E_k(B^{2n})$보다 훨씬 크다는것을 알수 있다.

참 고 문 헌

[1] P. Biran; Progr. Math., 202, 507, 2001.

[2] H. Hofer et al.; Birkhauser Advanced Texts, Verlag, 45～341, 1994.

[3] D. Mcduff; Ann. of Math., 175, 1191, 2012.

주체105(2016)년 9월 5일 원고접수

Symplectic Invariant via the Sequence of the Symplectic Embeddings and the Relation with the Other Embeddings in $(\boldsymbol{R}^{2n},\ \omega_0)$

Kim Jong Hyon, Jong Un Gyong

We studied some properties of the symplectic embeddings sequence and found the relation with the other embeddings and invariant.

Key words: symplectic embeddings sequence, invariant