김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체104(2015)년 제61권 제8호 Vol. 61 No. 8 JUCHE104(2015).

제한된 도달가능성행렬의 축차계산에 의한 프로젝트망의 복잡성실현의 한가지 개선방법

문경호, 박영진

망의 복잡성을 규정하고 평가하는데서 엄격성척도(RT)[1]가 가장 좋은것으로 알려져 있는데 RT에 대한 직접조종이 어렵기때문에 이것은 망발생단계에서는 리용되지 못하고 발생된 망의 복잡성을 평가하는데서만 주로 리용[2]되였다. 한편 규정된 RT값으로 표현되는 복잡성을 가지는 프로젝트망을 얻을수 있는 방법[3]이 있지만 이 방법은 규모가 큰 망의 구조를 발생할 때 상당히 많은 시간을 요구한다.

론문에서는 제한된 도달가능성행렬의 축차계산에 의하여 요구되는 RT값으로 표현되는 복잡성을 가지는 규모가 큰 망을 보다 적은 시간동안에 발생하는 한가지 방법에 대하여 론의한다.

1. 망발생과 엄격성척도, 린접행렬, 제한된 도달가능성행렬사이의 관계

RT에 대한 론의에 필요한 정의와 성질들은 다음과 같다.

정의 1[2] 방향그라프 $G=(N,\ A)$가 주어져서 절점 $j\in N$이 만일

① $j=i$ 혹은

② 시작절점 i와 마감절점 j를 가지는 방향경로가 존재한다면 절점 i로부터 도달가능하다고 하며 이때

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & j\text{가 } i\text{로부터 도달가능할 때}\\ 0, & \text{그렇지 않을 때}\end{cases}$$

을 가지는 행렬 $R=(r_{ij})_{N\times N}$을 방향그라프 G의 도달가능성행렬이라고 한다.

정의 2[2] $G=(N,\ A)$를 유일한 시작절점 1, 유일한 마감절점 $n=|N|$, 도달가능성행렬 R를 가지는 무순환방향그라프라고 하자. 그리고 $r_{ij}=r_{ji}=0$인 절점쌍 $i,\ j\in N$ 사이의 가상적인 무방향호를 선택호, Π_d는 G에서 선택호들의 수,

$$\Pi_d^{\max}=\frac{(n-2)(n-3)}{2}$$

는 G에서 가능한 선택호들의 최대수라고 하자.

이때 RT는

$$RT=1-\frac{\Pi_d}{\Pi_d^{\max}}=1-\frac{n(n-1)-2\sum_{i,\ j\in N}r_{ij}}{(n-2)(n-3)}$$

로 정의된다.

정리 1 RT의 성질[2]

① $RT \in [0,\ 1]$

② 병렬방향그라프에 대하여 $RT = 0$ 이다.

③ 직렬방향그라프에 대하여 $RT = 1$ 이다.

④ 비중복호들의 삽입은 RT를 증가시킨다.

⑤ 중복호들의 삽입은 RT에 영향을 주지 않는다.

정의 3[3] $G = (N,\ A)$ 를 도달가능성행렬 R를 가지는 무순환방향그라프라고 하자. 이때 $\overline{R} = R - I$ 인 행렬 $\overline{R} = (\overline{r}_{ij})_{i,\ j \in N}$ 을 G 의 제한된 도달가능성행렬이라고 한다. 여기서 I는 단위행렬이다.

정의 4[3] $G = (N,\ A)$ 를 무순환방향그라프라고 하자. 이때

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i\text{가 } j\text{를 선행할 때}, (i,\ j) \in A \\ 0, & \text{그렇지 않을 때} \end{cases}$$

를 가지는 행렬 $A = (a_{ij})_{i,\ J \in N}$ 을 G 의 린접행렬이라고 한다.

정리 2[3] $G = (N,\ A)$ 를 린접행렬 A와 도달가능성행렬 R를 가지는 무순환비중복방향그라프라고 하자. 이때 $\overline{R}$ 에 의해 A는 다음과 같이 유일하게 결정된다.

$$A = \overline{R} - \delta(\overline{R}^2)$$

$$\delta(x_{ij}) = \begin{cases} 1, & x_{ij} \ge 1\text{일 때} \\ 0, & \text{그렇지 않을 때} \end{cases}$$

정의 5[4] $G = (N,\ A)$ 를 시작절점 s, 마감절점 t, 도달가능성행렬 R를 가지는 방향그라프라고 하자. 이때 만약 $r_{sj} = 1$ 이고 $r_{st} = 1,\ \forall j \in N$ 이라면 G 는 련결된다고 말한다.

우의 정의들과 정리들로부터 RT를 리용하여 목적하는 망구조를 얻는 방식은 다음과 같다.

우선 $RT = 1$ 인 직렬그라프를 얻는다.

$$\overline{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix},\ \delta(\overline{R}^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & 1 \\ & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & 1 & 1 \\ \vdots & & 0 & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 & 0 \\ 0 & & \cdots & & & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & 0 & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

다음 정리 2의 $A = \overline{R} - \delta(\overline{R}^2)$ 을 리용하여 $\overline{R}$ 에서 우연적으로 1인 요소를 0으로 만들어나가면서 규정한 RT값에 도달할 때까지 이 과정을 반복한다. 이 1을 0으로 바꾸는 요소 $(l,\ m)$ 의 선택은 $1 < l,\ m < n$ 으로 제한되는데 그것은 모든 $j = \overline{2,\ n}$ 에 대하여 $\overline{r}_{1j} = 1$ 이고 모든 $i = \overline{1,\ n-1}$ 에 대하여 $\overline{r}_{in} = 1$ 일 때 정의에 의하여 망련결성이 유지되기때문이다.

망의 절점들의 순서화를 위하여 시작절점들은 2로부터 련속적으로 번호가 붙여지며 마감절점들은 련속적으로 번호가 붙여져서 $n-1$ 에서 끝난다.

프로젝트망의 발생에서 많은 시간이 망구조발생에서 소비된다.

n개의 활동들로 이루어진 망에 대하여 주어진 RT값을 가지는 복잡성을 실현하려면 $\overline{R}$ 에서 $(1-RT)\cdot n(n-1)/2$ 개의 요소를 령으로 만들어야 한다.

이 요소의 선택은 A를 고려하여 진행하므로 결국 $A=\overline{R}-\delta(\overline{R}^2)$ 의 계산을 $(1-RT)\cdot n(n-1)/2$ 회만큼 반복하여야 한다. 이때 A 의 계산량은 $o(n^3)$ 이며 규정된 RT에 대응하는 복잡성을 가진 망발생의 계산량은 $o(n^5)$ 으로 된다.

2. 제한된 도달가능성행렬의 축차계산에 의한 린접행렬의 고속화방법

방법의 요점은 $\overline{R}$ 의 1개 요소만을 변화시켜 새로운 A를 얻는다는것을 고려하여 $\overline{R}^2$ 값을 모두 새로 계산하지 않고 전단계에서 계산된 $\overline{R}^2$ 의 값을 리용하여 새로운 A를 얻는것이다.

이때 A계산의 고속화방법은 다음과 같다.

전단계의 $A,\ \overline{R},\ \overline{R}^2$ 이 주어졌다고 하자. 그리고 $\exists l,\ m$ 에 대하여 $A(l,\ m)=1$ 일 때 $\overline{R}$ 에서 $\overline{r}_{lm}=1$ 을 $\overline{r}_{lm}=0$ 으로 바꾼다고 하자. 여기서 $\overline{R}$ 의 구조적특성으로부터 반드시 $l<m$ 으로 된다.

이때 $\overline{R}^2$ 이 어떻게 변하는가를 보기 위하여 다음과 같은 요소로 이루어진 $n\times n$ 차 행렬 $E^{lm}=(e_{ij})_{n\times n}$ 을 생각한다.

$$e_{ij}=\begin{cases}0, & i\neq l\text{이거나 } j\neq m\text{일 때}\\ 1, & i=l\text{이고 } j=m\text{일 때}\end{cases}$$

실례로 $E^{23}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 으로 된다.

한편 $\overline{R}'=\overline{R}-E^{lm}$ 이라면 $(\overline{R}')^2=(\overline{R}-E^{lm})^2=\overline{R}^2-(\overline{R}\cdot E^{lm}+E^{lm}\cdot\overline{R})+(E^{lm})^2$ 으로 된다. 여기서 $\overline{R}\cdot E^{lm}$ 즉 $\overline{R}$ 에 대한 E^{lm} 의 오른쪽 곱하기는 $\overline{R}$ 의 l 번째 렬을 m 번째 렬로 옮기는 조작으로서 그 실례는 다음과 같다.

$$\overline{R}\cdot E^{23}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&5\\0&0&8\end{pmatrix}$$

다른 한편 $E^{lm}\cdot\overline{R}$ 는 $\overline{R}$ 의 m 번째 행을 l 번째 행으로 옮기는 조작으로서 그 실례는 다음과 같다.

$$E^{23}\cdot\overline{R}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\7&8&9\\0&0&0\end{pmatrix}$$

이때 $(E^{lm})^2$ 은 $l<m$ 일 때 령행렬로 된다.

우와 같은 론의에 기초하면 $(\overline{R}\cdot E^{lm}+E^{lm}\cdot\overline{R})$ 에 대한 계산은 $\overline{R}$ 에 대한 간단한 조작으로써 실현된다.(그림)

결국 A는 다음과 같은 계산절차에 의하여 쉽게 얻어진다.

전단계의 $A,\ \overline{R},\ \overline{R}^2$ 들이 주어졌다고 하자.

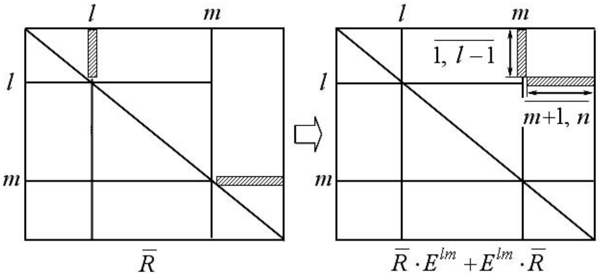

그림. $\overline{R},\ \overline{R}\cdot E^{lm}+E^{lm}\cdot\overline{R}$ 에 대한 계산조작

단계 1[요소선택]

$a_{lm}=1$ 인 $l,\ m$ 을 선택한다.

단계 2 [$\overline{R}^2$ 의 갱신, $o(n)$]

$$\overline{R}^2(i,\ m)=\overline{R}^2(i,\ m)-\overline{R}(i,\ j),\ i=\overline{1,\ l-1}$$
$$\overline{R}^2(l,\ i)=\overline{R}^2(l,\ i)-\overline{R}(m,\ i),\ i=\overline{m+1,\ n}$$

단계 3[$\overline{R}$ 의 갱신]

$$\overline{R}(l,\ m)=0$$

단계 4[A의 계산, $o(n^2)$]

$$A(i,\ j)=\overline{R}(i,\ J)-\delta(\overline{R}^2(l,\ m)),\ i=\overline{1,\ n},\ j=\overline{1,\ n}$$

린접행렬 A를 계산하는 이 알고리듬의 계산량은 $o(n^2)$이다.

따라서 우의 알고리듬으로 린접행렬 A를 계산하면 규정된 RT에 대응하는 복잡성을 가진 망발생의 계산량은 $o(n^4)$으로서 계산속도가 빨라지고 결과적으로는 보다 규모가 큰 망들을 발생할수 있다.

참 고 문 헌

[1] A. Thesen; Networks, 7, 193, 1977.

[2] C. Schwindt; Technical Report 489, Universitat Karlsruhe, 11, 1996.

[3] M. L. Fredley; Dissertation, Air Force Institute of Technology, Air University, 22～41, 2001.

[4] R. Kolisch et al.; Management Science, 41, 1693, 1995.

주체104(2015)년 4월 5일 원고접수

An Improved Method for Realization of Project Network Complexity based on Successive Calculation of Restricted Reachability Matrix

Mun Kyong Ho, Pak Yong Jin

We present an improved method for generation of the large scale project network that has complexity for a given RT value in a shorter time, using successive calculation of the restricted reachability matrix.

Key words: project scheduling, network complexity, reachability matrix