김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제4호

비선형적분을 포함하는 다항분수계미분방정식을 풀기 위한 스펙트르점배치법

조선향, 강영숙

론문에서는 비선형적분을 포함하는 다항분수계미분방정식을 풀기 위한 스펙트르점배치법을 연구하였다.

선행연구[1－3]에서는 선형 또는 비선형적분을 포함하는 단항분수계미분방정식을 다항식스플라인, 아도미안분해법, 혼합점배치법을 리용하여 풀었다. 또한 선행연구[4]에서는

$$y(t)=\sum_{j=0}^{r} d_j\,{}_a^cD_t^{\alpha_j}y(t)+\lambda G\left(t,\ y(t),\ \int_a^t k(t,\ s)F(s,\ y(s))ds\right)+f(t)\ \ (t\in[a,\ b])$$

$$y(a)=0,\ 0<\alpha_j\le 1$$

형태의 분수계미적분방정식을 풀기 위한 한가지 점배치도식을 제기하고 $d_j\in[0,\ 1)$ $(j=0,\ 1\ 2,\ \cdots,\ r)$, $-1<\lambda<1$인 조건하에서 수렴성을 론의하였다.

선행연구[5]에서는 분수계미적분방정식을 풀기 위한 준스펙트르적분행렬을 계산하는 방법을 주고 구체적인 변결수선형, 비선형분수계미적분방정식에 대한 계산도식을 유도하였으며 선형인 경우 수렴성을 증명하였다.

론문에서는

$$\begin{aligned}&{}_a^cD_t^{\delta}y(t)=\sum_{j=0}^{r} d_j\,{}_a^cD_t^{\alpha_j}y(t)+\lambda G\left(t,\ y(t),\ \int_a^t k(t,\ s)F(s,\ y(s))ds\right)+f(t)\\&y^{(j)}(a)=\chi_j\ \ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ \lceil\delta\rceil-1)\qquad\qquad(1)\\&0<\alpha_j\le\delta\ \ (j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ r)\end{aligned}$$

와 같은 형태의 분수계미적분방정식에 대한 스펙트르점배치법의 계산도식을 제기하고 풀이의 유일존재성과 근사풀이의 수렴성해석, 수치실험을 진행하였다.

정의 [5] $-1=\tau_0<\cdots<\tau_{N+1}=1$인 가우스점들 $\{\tau_k\in(-1,\ 1)\}_{i=1}^N$에 대한 왼쪽, 오른쪽 $\gamma-$계준스펙트르적분행렬(FPIM)들은 다음과 같이 정의된다.

$${}_{-1}^{\tau}I_{ki}^{\gamma}={}_{-1}I_{\tau_k}^{\gamma}L_i(\tau)\ \ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ N+1;\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$$

$${}_{\tau}^{1}I_{ki}^{\gamma}={}_{\tau_k}I_1^{\gamma}L_i(\tau)\ \ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ N;\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$$

여기서 $\{L_i(\tau)\}_{i=1}^N$들은 $L_i(\tau)=\prod_{j=1,\ j\ne i}^{N}\dfrac{\tau-\tau_j}{\tau_i-\tau_j}$인 라그랑쥬토대이다.

보조정리 1 [5] $\{\tilde p_j(\tilde\tau)\}_{j=0}^{N-1}$을 구간 $[0,\ 1]$에서 $\{p_j(\tau)\}_{j=0}^{N-1}$에 대응하는 직교다항식이라고 하고 $\tilde p_j(\tilde\tau)=\sum_{m=0}^{j}\tilde c_m^j\tilde\tau^m$이라고 가정하자. $\{\tilde c_m^j\}_{m=0}^j$는 전개결수이다. 그러면 왼쪽 FPIM들

은 정확히 다음과 같이 계산될수 있다.

$$ {}_{-1}^{\tau}I_{ki}^{\gamma} = 2^{\gamma}\,\tilde{\omega}_i \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\tilde{p}_j(\tilde{\tau}_i)}{\tilde{\lambda}_j} \left(\sum_{m=0}^{j} \tilde{c}_m^{\,j} \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\gamma+1)} \tilde{\tau}_k^{m+\gamma} \right) \ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ N+1;\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ N) $$

$$ {}_{-1}^{\tau}I_{ki}^{\gamma} = 2^{\gamma}\,\hat{\tilde{\omega}}_i \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\hat{\tilde{p}}_j(\hat{\tilde{\tau}}_i)}{\tilde{\lambda}_j} \left(\sum_{m=0}^{j} \tilde{c}_m^{\,j} \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\gamma+1)} \hat{\tilde{\tau}}_k^{m+\gamma} \right) \ (k,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ N) $$

여기서 $\{\tilde{\tau}_i,\ \tilde{\omega}_i\}_{i=1}^{N}$, $\{\hat{\tilde{\tau}}_i,\ \hat{\tilde{\omega}}_i\}_{i=1}^{N}$ 들은 이동가우스, 라다우점들과 구적무게들의 모임이다.

분수계미적분방정식 (1)에 대한 스펙트르점배치도식을 유도하자.

변수변환 $t=(b-a)\tau/2+(b+a)/2$ 를 실시하면 방정식 (1)은 다음과 같이 표시된다.

$$ \left(\frac{2}{b-a}\right)^{\delta} {}_{-1}^{\ c}D_{\tau}^{\delta}\tilde{y}(\tau) = \sum_{j=1}^{r} d_j \left(\frac{2}{b-a}\right)^{\alpha_j} {}_{-1}^{\ c}D_{\tau}^{\alpha_j}\tilde{y}(\tau) + \lambda\tilde{G}\left(\tau,\ \tilde{y}(\tau),\ \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{\tau}\tilde{k}(\tau,\ \xi)\tilde{F}(\xi,\ \tilde{y}(\xi))d\xi\right) + \tilde{f}(\tau) \tag{2} $$

$$ \tilde{y}^{(j)}(-1) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{j}\chi_j \ \ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ \lceil\delta\rceil-1) \tag{3} $$

여기서

$$ \tilde{y}(\tau) = y\left(\frac{b-a}{2}\tau+\frac{b+a}{2}\right),\ \tilde{f}(\tau) = f\left(\frac{b-a}{2}\tau+\frac{b+a}{2}\right) $$

$$ \tilde{k}(\tau,\ \xi) = k\left(\frac{b-a}{2}\tau+\frac{b+a}{2},\ \frac{b-a}{2}\xi+\frac{b+a}{2}\right) $$

$$ \tilde{F}(\xi,\ \tilde{y}(\xi)) = F\left(\frac{b-a}{2}\xi+\frac{b+a}{2},\ y\left(\frac{b-a}{2}\xi+\frac{b+a}{2}\right)\right) $$

$$ \tilde{G}\left(\tau,\ \tilde{y}(\tau),\ \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{\tau}\tilde{k}(\tau,\ \xi)\tilde{F}(\xi,\ \tilde{y}(\xi))d\xi\right) = G\left(\frac{b-a}{2}\tau+\frac{b+a}{2},\ y\left(\frac{b-a}{2}\tau+\frac{b+a}{2}\right),\right. $$
$$ \left. \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{\tau} k\left(\frac{b-a}{2}\tau+\frac{b+a}{2},\ \frac{b-a}{2}\xi+\frac{b+a}{2}\right) F\left(\frac{b-a}{2}\xi+\frac{b+a}{2},\ y\left(\frac{b-a}{2}\xi+\frac{b+a}{2}\right)\right)d\xi \right) $$

량변에 분수계적분연산자 ${}_{-1}I_{\tau}^{\delta}$ 를 작용시키고 초기조건을 대입하면 다음식이 얻어진다.

$$ \tilde{y}(\tau) = \sum_{j=1}^{r} d_j \left(\frac{b-a}{2}\right)^{\delta-\alpha_j} {}_{-1}I_{\tau}^{\delta\text{-}\alpha_j}\tilde{y}(\tau) + \sum_{j=0}^{\lceil\delta\rceil-1} \frac{((b-a)/2)^j\chi_j}{j!}(\tau+1)^j + \left(\frac{b-a}{2}\right)^{\delta} {}_{-1}I_{\tau}^{\delta}\tilde{f}(\tau) + $$
$$ +\lambda\left(\frac{b-a}{2}\right)^{\delta} {}_{-1}I_{\tau}^{\delta}\tilde{G}\left(\tau,\ \tilde{y}(\tau),\ \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{\tau}\tilde{k}(\tau,\ \xi)\tilde{F}(\xi,\ \tilde{y}(\xi))d\xi\right) - $$
$$ -\sum_{j=1}^{r} d_j \left(\frac{b-a}{2}\right)^{\delta-\alpha_j} \sum_{i=0}^{\lceil\alpha_j\rceil-1} \frac{((b-a)/2)^i\chi_i}{\Gamma(i+\delta-\alpha_j+1)}(\tau+1)^{i+\delta-\alpha_j} \tag{4} $$

근사풀이형태를 $\tilde{y}_N(\tau) = \sum_{k=1}^{N+1} y_k L_k(\tau)$ 로 놓고 식 (5)에 대입할 때 점배치점에서 대입차가

령이 되도록 근사도식을 구성하겠다. 비선형함수 G 와 F 를 라그랑쥬근사시킨 다음 가우스점을 점배치하고 FPIM을 리용하면 근사도식은 다음과 같이 된다.

$$\hat{\tilde{y}}_k=\sum_{j=1}^{r}d_j\left(\frac{b-a}{2}\right)^{\delta-\alpha_j}\left(\sum_{i=1}^{N+1}{}_{-1}^{\tau}I_{ki}^{\delta\text{-}\alpha_j}\hat{\tilde{y}}_i\right)+\left(\frac{b-a}{2}\right)^{\delta}{}_{-1}I_{\tau_k}^{\delta}\tilde{f}(\tau)+$$
$$+\sum_{j=0}^{\lceil\delta\rceil-1}\frac{((b-a)/2)^j\chi_j}{j!}(\tau_k+1)^j-\sum_{j=1}^{r}d_j\left(\frac{b-a}{2}\right)^{\delta-\alpha_j}\sum_{i=0}^{\lceil\alpha_j\rceil-1}\frac{((b-a)/2)^i\chi_i}{\Gamma(i+\delta-\alpha_j+1)}(\tau_k+1)^{i+\delta-\alpha_j}+$$
$$+\lambda\left(\frac{b-a}{2}\right)^{\delta}\sum_{i=1}^{N+1}{}_{-1}^{\tau}I_{ki}^{\delta}\tilde{G}\left(\tau_i,\ \hat{\tilde{y}}_i,\ \frac{b-a}{2}\sum_{l=1}^{N+1}\tilde{F}(\tau_l,\ \hat{\tilde{y}}_l)\int_{-1}^{\tau_i}\tilde{k}(\tau_i,\ \xi)L_l(\xi)d\xi\right) \tag{5}$$

련립대수방정식을 풀어 $\{\hat{\tilde{y}}_k\}_{k=1}^{N+1}$ 들을 구한 다음 라그랑쥬보간하여 근사풀이를 얻는다. 변환 $\tau=(2t-a-b)/(b-a)$ 를 실시하여 구간 $[a,\ b]$에로 넘긴다.

보조정리 2 함수 G 와 f 가 련속이라고 하자. 함수 $y(t)\in C^{\lceil\delta\rceil}[a,\ b]$ 가 분수계미적분방정식 (1)의 풀이이면 $h(t)={}_a^cD_t^{\delta}y(t)$ 로 정의되는 함수 $h(t)$ 는 $C[a,\ b]$ 에서 분수계적분방정식

$$h(t)=\sum_{j=1}^{r}d_j\,{}_aI_t^{\delta-\alpha_j}h(t)+\sum_{j=1}^{r}d_j\sum_{i=\lceil\alpha_j\rceil}^{\lceil\delta\rceil-1}\frac{\chi_i}{\Gamma(i-\alpha_j+1)}(t-a)^{i-\alpha_j}+$$
$$+\lambda G\left(t,\ {}_aI_t^{\delta}h(t)+\sum_{j=1}^{\lceil\delta\rceil-1}\frac{\chi_j}{j!}(t-a)^j,\ \int_a^t k(t,\ s)F\left(s,\ {}_aI_s^{\delta}h(s)+\sum_{j=1}^{\lceil\delta\rceil-1}\frac{\chi_j}{j!}(s-a)^j\right)ds\right)+f(t) \tag{6}$$

의 풀이이다. 거꾸로 $h(t)$ 가 식 (6)의 풀이이면

$$y(t)={}_aI_t^{\delta}h(t)+\sum_{j=1}^{\lceil\delta\rceil-1}\frac{\chi_j}{j!}(t-a)^j$$

인 $y(t)\in C^{\lceil\delta\rceil}[a,\ b]$ 는 식 (1)의 풀이이다.

정리 1 분수계미적분방정식 (1)에 대하여 다음의 조건을 만족시킨다고 하자.

① $G(t,\ y,\ z)$ 는 t 에 관하여 구간 $[a,\ b]$에서 련속이다.

② $G(t,\ y,\ z)$ 는 $y,\ z$ 에 관하여 립쉬츠련속이다.($m_2,\ m_3$ 이 립쉬츠상수)

③ $F(t,\ y)$ 는 y 에 관하여 립쉬츠련속이다.(M은 립쉬츠상수)

④ $\displaystyle\sum_{j=1}^{r}\frac{|d_j|(b-a)^{\delta-\alpha_j}}{\Gamma(\delta-\alpha_j+1)}+|\lambda|m_2\frac{(b-a)^{\delta}}{\Gamma(\delta+1)}+|\lambda|m_3BM\frac{(b-a)^{\delta+1}}{\Gamma(\delta+1)}<1$

이때 식 (1)은 유일풀이를 가진다.

정리 2 분수계미적분방정식 (1)에 대하여 다음의 조건을 만족시킨다고 하자.

① 정리 1의 조건 ①의 풀이 $y(t)$ 와 t 의 함수 $G,\ F$ 에 대하여 $y,\ G,\ F\in H_{w^{(\alpha,\beta)}}^{m}(a,\ b)$ $(m\geq1)$ 이다.

② $G(t,\ y,\ z)$ 는 t 에 관하여 구간 $[a,\ b]$에서 련속이다.

③ $G(t, y, z)$는 y, z에 관하여 립쉬츠련속이다.(m_2, m_3이 립쉬츠상수)

④ $F(t, y)$는 y에 관하여 립쉬츠련속이다.(립쉬츠상수 M)

이때 도식 ⑤의 풀이는 $N \to \infty$일 때 정확한 풀이 $y(t)$에로 수렴한다.

실례 다음의 비선형적분을 포함하는 분수계미적분방정식

$$ {}_0^cD_t^{2.5}y(t) = y(t) + {}_0^cD_t^{0.5}y(t) + 0.5\,{}_0^cD_t^2 y(t) + t^2\int_0^t (t-s)^2 y^2(s)ds + f(t)$$

$$f(t) = -1.5e^t - 1.5e^{-t} + t^3 - 2t^5/5 - t^2\mathrm{ch}(t)\mathrm{sh}(t)$$

$$y(0) = 0 \ \ (0 \le t \le 1)$$

을 풀자. 이 방정식의 정확한 풀이는 $y(t) = e^t + e^{-t}$이다.

$(\alpha, \beta) = (-0.5, -0.5)$, $N = 5$일 때 우의 계산도식을 리용하여 얻은 근사풀이는

$$y(t) = 2 + 0.000\ 165\ 679t + 0.998\ 364t^2 + 0.006\ 401\ 97t^3 + 0.071\ 944\ 8t^4 + 0.009\ 302\ 92t^5$$

이다. N을 증가시키면서 오차를 구하면 오차가 $O(10^{-N})$정도라는것을 알수 있다.

참 고 문 헌

[1] E. A. Rawashdeh; Appl. Math. Comput., 176, 1, 2006.

[2] R. C. Mittal et al.; Int. J. Appl. Math. Mech., 4, 87, 2008.

[3] F. Dubois et al.; Numer. Algorithms, 34, 303, 2003.

[4] M. R. Eslahchi; J. Comput. Appl. Math., 257, 105, 2014.

[5] T. Xiaojun et al.; Commun Nonlinear Sci. Numer. Simulat., 30, 248, 2016.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

Spectral Collocation Method for Solving Multi-Order Fractional Differential Equation with Nonlinear Integral

Jo Son Hyang, Kang Yong Suk

In this paper, we present a method to approximately solve multi-order fractional differential equations with nonlinear integral using fractional pseudospectral integration matrices(FPIM). We construct a spectral collocation scheme, study the existence of the solution, prove the convergence and give an example to show the efficiency of this method.

Key word: fractional pseudospectral integration matrix