

분수계리까찌미분방정식의 풀이를 구하기 위한 수정된 가속호모토피섭동법

김주경, 최정학

최근 분수계리까찌미분방정식의 해석적근사풀이를 구하기 위한 호모토피해석법, 호모토피섭동법[1]과 그 변종방법들[2], 변분반복법 등 여러가지 방법들이 연구되고있다.

논문에서는 변결수 및 상결수분수계리까찌미분방정식에 대하여 선행풀이법들에 비하여 수렴성과 근사도가 높은 수정된 가속호모토피섭동법(MAHPM)을 연구한다.

다음의 분수계리까찌미분방정식에 대하여 논의하자.

$$({}^c D_{a+}^\alpha u)(t) + A(t)u(t) + B(t)u^2(t) = f(t), \quad 0 < t < T, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (1)$$

$$u(0) = c \quad (2)$$

여기서 ${}^c D_{a+}^\alpha u$ 는 캐푸터의미에서의 α 계분수미분연산자이다.

이제 $A(t)u(t) = L(u)$, $B(t)u^2(t) = N(u)$ 로 놓자.

호모토피를 $p \in [0, 1]$ 이라고 할 때 다음과 같이 구성하자.

$$u' + L(u) - f(t) = p[u' - N(u) - D^\alpha u] \quad (\text{또는 } u' - f(t) = p[u' - A(u) - N(u) - D^\alpha u]) \quad (3)$$

이때 $p=0$ 이면 $u' + L(u) = f(t)$ (또는 $u' = f(t)$) 이고 $p=1$ 이면 식 (1)이 성립된다.

$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} p^k u_k$ 를 식 (3)에 넣으면 다음의 식이 성립된다.

$$(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)' + L(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots) - f(t) = p[(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)' - N(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots) - D^\alpha(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)]$$

이때 p 의 제곱결수들을 대비하면

$$\left. \begin{aligned} p_0 : u'_0 + L_0(u_0) &= f(t), & u_0(0) &= c \\ p_1 : u'_1 + L_1(u_0, u_1) &= u'_0 - N_0(u_0) - D^\alpha(u_0), & u_1(0) &= 0 \\ p_2 : u'_2 + L_2(u_0, u_1, u_2) &= u'_1 - N_1(u_0, u_1) - D^\alpha(u_1), & u_2(0) &= 0 \\ p_3 : u'_3 + L_3(u_0, u_1, u_2, u_3) &= u'_2 - N_2(u_0, u_1, u_2) - D^\alpha(u_2), & u_3(0) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

또는

$$\left. \begin{aligned} p_0 : u'_0 &= f(t), & u_0(0) &= c \\ p_1 : u'_1 &= u'_0 - L_1(u_0) - N_0(u_0) - D^\alpha(u_0), & u_1(0) &= 0 \\ p_2 : u'_2 &= u'_1 - L_2(u_0, u_1) - N_1(u_0, u_1) - D^\alpha(u_1), & u_2(0) &= 0 \\ p_3 : u'_3 &= u'_2 - L_3(u_0, u_1, u_2) - N_2(u_0, u_1, u_2) - D^\alpha(u_2), & u_3(0) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

을 얻는다. 여기서

$$\begin{aligned} L(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots) &= L_0(u_0) + pL_1(u_0 + u_1) + \dots, \\ N(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots) &= N_0(u_0) + pN_1(u_0 + u_1) + \dots. \end{aligned}$$

이때 비선형항 $N(u)$ 는 He의 다항식이라고 불리우는 다음의 다항식으로 전개된다.

$$N(u) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n(u_0, u_1, \dots, u_n), \quad H_n(u_0, u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial p^n} \left[N \left(\sum_{k=0}^n p^k u_k \right) \right]_{p=0}, \quad n \geq 0$$

논문에서는 $\hat{H}_n(u_0, u_1, \dots, u_n) = N(S_n) - \sum_{k=0}^{n-1} \hat{H}_k$, $n \geq 1$ 로 정의되는 $\hat{H}_n(u_0, u_1, \dots, u_n)$ 을

리용한다. 이때 $S_n = \sum_{i=0}^m u_i(x)$ 이고 $\hat{H}_0 = N(u_0)$ 이다.

만일 비선형항이 $N(u) = u^2$ 이면 H_i 와 \hat{H}_i 를 다음과 같이 구할수 있다.

$$\begin{aligned} H_0 &= u_0^2, \quad H_1 = 2u_0u_1, \quad H_2 = u_1^2 + 2u_0u_2, \quad H_3 = 2u_1u_2 + 2u_0u_3, \quad H_4 = u_2^2 + 2u_1u_3 + 2u_0u_4, \dots \\ \hat{H}_0 &= u_0^2, \quad \hat{H}_1 = 2u_0u_1 + u_1^2, \quad \hat{H}_2 = 2u_0u_2 + 2u_1u_2 + u_2^2, \quad \hat{H}_3 = 2u_0u_3 + 2u_1u_3 + 2u_2u_3 + u_3^2, \\ \hat{H}_4 &= 2u_0u_4 + 2u_1u_4 + 2u_2u_4 + 2u_3u_4 + u_4^2, \dots \end{aligned}$$

이처럼 가속화된 도식을 리용한 처음 4개의 다항식은 본래공식을 리용한 4개의 다항식을 포함하는것으로 하여 본래의 도식보다 수렴속도가 빠르게 된다.

이로부터 초기값문제 (1), (2)의 풀이는 $u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)$ 로서 $\phi_N(t) = \sum_{n=0}^{N-1} u_n(t)$ 로 구해진다.

실례 1 $\frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} = 2y(t) - y^2(t) + 1, \quad x > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad y(0) = 0$ (4)

$\alpha=1$ 일 때 문제 (4)의 정확한 풀이는 $y(t) = 1 + \sqrt{2} \tanh(\sqrt{2}t + \log[(\sqrt{2}-1)/(\sqrt{2}+1)]/2)$ 이다.

초기값문제 (4)의 풀이는 Mathcad에 의하여 구하였다.

정확한 풀이와 4차근사풀이들을 비교하면 그림 1과 같다.

그림 1에서 보는바와 같이 근사풀이는 $t=1.2$ 까지 정확한 풀이와 일치한다.

$$u(1.2) = 1.95, \quad y(1.2) = 1.95$$

선행연구들에서는 구간 $[0, 1]$ 에 대하여 정확한 풀이와 연구된 풀이와의 비교실험을 하였지만 $t=0.9$ 부터는 차이났다. 그러나 MAHPM에 의한 풀이는 $t=1.2$ 까지 일치함으로써 이 방법이 다른 방법들보다 수렴구역이 넓다는것을 보여주고있다.

이제 초기점을 $t=1.2$ 로 옮기면 $u(1.5) = 2.195, \quad y(1.5) = 2.195$ 이다.(그림 2)

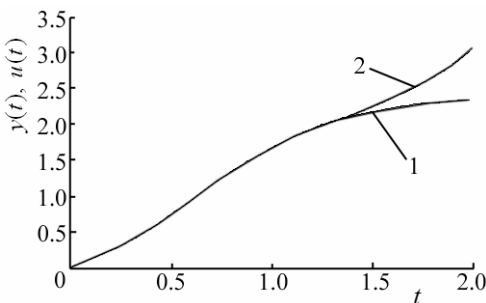


그림 1. 정확한 풀이와 4차근사풀이들의 비교
1- $y(t)$, 2- $u(t)$

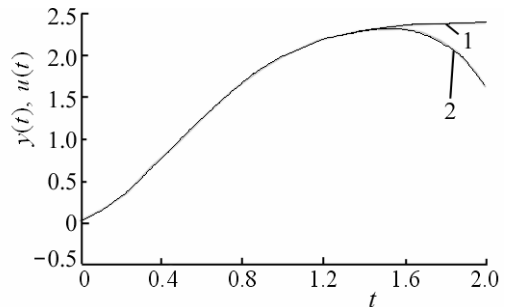


그림 2. $t=1.2$ 로 옮겼을 때의 비교
1, 2는 그림 1에서와 같음.

그림 2에서 보는바와 같이 초기점을 $t=1.2$ 로 옮겼을 때 근사풀이가 훨씬 넓은 구간으로 확장된다.

실례 2
$$\frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} = ty(t) - ty^2(t), \quad t > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad y(0) = 2 \quad (5)$$

$\alpha=1$ 일 때 문제 (5)의 정확한 풀이는 $y(t) = 1/[1 - 0.5\exp(-t^2/2)]$ 이다.

실례 1과 마찬가지로 Mathcad를 리용하여 이 초기값문제의 풀이를 구하자.

문제 (5)는 $x=1$ 이면 분수계로지스틱방정식으로 되며 변결수분수계리까찌미분방정식의 3차근사풀이들의 합과 정확한 풀이의 그래프는 그림 3과 같다.

$t=0.8$ 에서 풀이들이 일치하였으므로 초기점을 옮기자.

$$u(0.8) = 1.577, \quad y(0.8) = 1.577$$

그림 4에서 보는바와 같이 초기점을 $t=0.8$ 로 옮겼을 때 풀이구간은 점차 확장된다.

$$u(1.2) = 1.329, \quad y(1.2) = 1.329$$

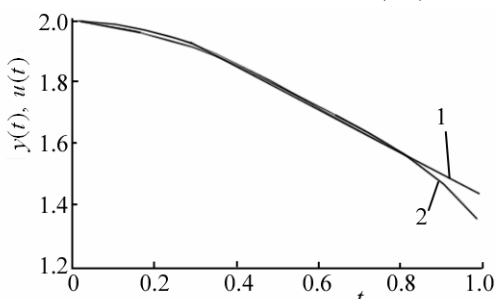


그림 3. 정확한 풀이와 4차근사풀이들의 비교
1, 2는 그림 1에서와 같음.

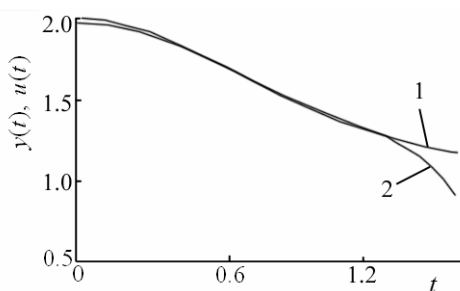


그림 4. $t=0.8$ 로 옮겼을 때의 비교
1, 2는 그림 1에서와 같음.

그림 4와 수값결과는 초기값문제 (5)의 풀이가 초기점을 옮기면 보다 넓은 구간으로 확장된다는것을 보여준다.

참 고 문 헌

[1] S. Jitendra et al.; Appl. Math. Model., 35, 1937, 2011.

[2] I. L. Kalla; Jurnal of Fractional Calculus and Applications, 16, 3, 1, 2012.

주체105(2016)년 4월 5일 원고접수

Modified Acceleration Homotopy Perturbation Method for Solving Fractional Order Riccati Differential Equation

Kim Ju Gyeong, Choe Jong Hak

We studied the modified acceleration homotopy perturbation method(MAHPM) to solve the initial value problem of fractional order Riccati differential equation with variable coefficients and the method that find the global solution by moving the initial points.

The obtained results agreed well with the exact solution of given problems.

Key word: fractional order Riccati differential equation