한가지 정상해밀턴-야꼬비방정식에 대한 려파도식의 구성과 수렴성

김주혁, 허명송

최근시기 해밀턴-야꼬비방정식에 대한 연구는 최량조종문제에서뿐아니라 부식공정을 비롯하여 많은 분야에서 광범히 진행되고있다. 많은 경우 해밀턴-야꼬비방정식의 해석적풀이를 일반적으로 구할수 없는 사정과 관련하여 점성풀이에로 수렴하는 수값풀이를 구하는 문제에 대한 연구가 심화되고있다.

선행연구[1]에서는 처음으로 해밀턴-야꼬비방정식에 대한 두가지 근사도식을 제기하고 크랜달-리옹오차평가를 내놓았으며 선행연구[2]에서는 시간에 의존하지 않는 정상해밀턴-야꼬비방정식에 대하여 수렴하는 고차도식을 구성하였다.

선행연구[3]에서는 고차도식과 수렴하는 1차단조도식을 결합하여 아이코날방정식에 대한 려파도식을 구성하였으며 선행연구[4]에서는 선행연구[3]에서 제기한 려파함수를 리용하여 정상 및 비정상해밀턴-야꼬비방정식들에 대한 한가지 수렴하는 려파도식을 구성하고 계산실험결과들을 주었다. 여기서 구성된 려파도식은 1차단조도식의 섭동형태를 취하는데 결합방식이 1차단조도식과 고차도식의 리산화결과들을 결합시킨것 즉 1차수값해밀턴함수와 고차수값해밀턴함수를 먼저 구하고 그것들을 인위적으로 결합시키는것이다.

론문에서는 한가지 정상해밀턴-야꼬비방정식의 풀이를 구하기 위하여 그것에 대응되는 비정상해밀턴-야꼬비방정식에 대한 려파도식을 구성하며 수렴성을 증명하였다.

우리가 구성한 려파도식은 결합방식이 도함수에 대한 고차근사와 1차근사를 결합하여 수값해밀턴함수자체를 새롭게 구성한것으로 하여 시간에 관한 고차근사를 적용할수 있다.

다음의 1차원해밀턴-야꼬비방정식에 대하여 론의하자.

$$\lambda u + H(x,\ u_x) = 0,\ x \in \mathbf{R} \tag{1}$$

여기서 λ는 립쉬츠련속인 점성풀이 u가 유일존재하게 선택되는 적당한 정의상수이다.

실수모임 $(-\infty,\ +\infty)$를 등분할하고 분할간격을 Δx라고 하자.

이때 방정식 (1)에 대한 1차단조 및 고차도식은 각각 다음과 같이 정의된다.[1]

모든 $i \in \mathbf{Z}$에 대하여

$$\lambda u_i + \hat{H}(x_i,\ D^M u_i) = 0,\ \ \lambda u_i + \hat{H}(x_i,\ D^H u_i) = 0 \tag{2}$$

이 성립한다. 여기서 u_i는 마디점 x_i에서 풀이 u의 근사이고 $\hat{H}$은 수값해밀턴함수,

$$D^M u_i = (D^- u_i,\ D^+ u_i),\ \ D^\pm u_i = \pm(u_{i\pm 1} - u_i)/\Delta x$$

는 각각 마디점 x_i에서 풀이 u의 오른쪽, 왼쪽도함수값에 대한 1차근사,

$$D^H u_i = (D^{l,\ -} u_i,\ D^{l,\ +} u_i),\ \ D^{l,\ \pm} u_i = \pm(u(x \pm l\Delta x) - u(x))/\Delta x$$

는 마디점 x_i에서 풀이 u의 오른쪽, 왼쪽도함수값에 대한 고차근사이다.

한편 방정식 (1)에 대응되는 비정상해밀턴-야꼬비방정식은 다음과 같다.[4]

$$\begin{cases} u_t + \lambda u + H(x,\ u_x) = 0,\ (x,\ t) \in \mathbf{R} \times (0,\ \infty) \\ u(x,\ 0) = u_0(x), \qquad\qquad x \in \mathbf{R} \end{cases} \tag{3}$$

방정식 (1)의 풀이는 비정상방정식 (3)의 풀이의 $t \to \infty$ 일 때의 극한이다.

그것은 분할마디점 j 에서 시간에 관한 리산화를 하면

$$(u_j^{n+1} - u_j^n)/\Delta t + \lambda u_j^n + \hat{H}(x,\ D^- u_j^n,\ D^+ u_j^n) = 0,\ j \in \mathbf{Z}$$

인데 $t \to \infty$ 즉 $n \to \infty$ 이면 첫 항이 령에로 수렴하기때문이다.

그러므로 방정식 (3)에 대한 근사도식을 구성하고 $t \to \infty$ 일 때의 극한을 구하는 방법으로 방정식 (1)의 풀이를 구할수 있다.

여기서 $\hat{H}$ 은 수값해밀턴함수인데 대표적인 수값해밀턴함수로서 다음과 같은 락스－흐리드리흐수값해밀턴함수를 들수 있다.

$$\hat{H}^{LF}(x,\ D^-,\ D^+) := H(x,\ (D^- + D^+)/2) - c_0(D^+ - D^-)/2,\ \ c_0 > 0$$

$\Delta t > 0$ 을 시간걸음이라고 하고 주어진 시간분할, 공간분할에 대하여 마디점 $(x_i,\ t_n) = (i\Delta x,\ n\Delta t),\ \ i \in \mathbf{Z},\ \ n \in \mathbf{Z}_+$ 에서 방정식 (3)의 점성풀이 u 의 근사를 u_i^n 로 표시하자.

도함수에 대한 고차근사와 1차근사를 결합한 방정식 (3)에 대한 한가지 새로운 형태의 려파도식을 다음과 같이 구성한다.

$$\begin{cases} (u_i^{n+1} - u_i^n)/\Delta t + \lambda u_i^n + \hat{H}(x_i,\ D^H u_i^n + \varepsilon F((D^M u_i^n - D^H u_i^n)/\varepsilon)) = 0 \\ u_i^0 = u_0(x_i) \end{cases},\ \ i \in \mathbf{Z},\ \ n \ge 0 \tag{4}$$

여기서 $F: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ 은 적당히 정의되는 려파함수이고 $\varepsilon = \varepsilon_{\Delta t,\ \Delta x}$ 는 $\lim\limits_{\Delta t,\ \Delta x \to 0} \varepsilon_{\Delta t,\ \Delta x} = 0$ 을 만족시키는 적당히 선택되는 정의파라메터이다.

려파도식 (4)의 반리산도식은 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\begin{cases} \partial_t u_i(t) + \lambda u_i(t) + \hat{H}(x_i,\ D^H u_i(t) + \varepsilon F((D^M u_i(t) - D^H u_i(t))/\varepsilon)) = 0 \\ u_i(0) = u_0(x_i) \end{cases},\ \ i \in \mathbf{Z} \tag{5}$$

반리산도식 (5)에 대하여 전변동감소룽게－쿠타도식을 리용하여 시간에 관한 고차근사를 구성할수 있다.

도식 (4)에서의 려파함수 $F: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ 를 $F(x) = \begin{cases} 0,\ \|x\| \le 1 \\ x,\ \|x\| > 1 \end{cases}$ 과 같이 정의한다.

수값해밀턴함수 $\hat{H}$ 에 대하여 다음의 가정을 준다.

가정 1 $\hat{H}$ 은 모든 변수들에 관하여 립쉬츠련속이다.

가정 2 모든 $x,\ p \in \mathbf{R}$ 에 대하여 $\hat{H}(x,\ p,\ p) = H(x,\ p)$ 가 성립된다.

가정 3 $\hat{H} = \hat{H}(x,\ p_1,\ p_2)$ 에 대하여 $\partial h^M / \partial p_1 \ge 0$, $\partial h^M / \partial p_2 \le 0$ 이고 다음의 CFL조건이 성립된다.

$$\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\frac{\partial \hat{H}}{\partial p_1}(x,\ p_1,\ p_2) - \frac{\partial \hat{H}}{\partial p_2}(x,\ p_1,\ p_2)\right) \le 1$$

려파함수의 정의로부터 $\| D^M u_i^n - D^H u_i^n \| \le \varepsilon$ 이면 $F = 0$ 이고 려파도식 (4)는 공간변수에 관하여 고차근사로 되며 반대로 $\| D^M u_i^n - D^H u_i^n \| > \varepsilon$ 이면 순수한 1차단조도식으로 된다.

정상방정식 (1)의 풀이는 적당한 턱값 $\delta > 0$ 에 대하여 조건

$$\max_{i\in\mathbf{Z}}|(u_i^{n+1}-u_i^n)/\Delta t|\le\delta \quad (6)$$

가 만족될 때 얻어진다. 결국 식 (4), (6)으로부터 얻어지는 방정식 (1)의 근사풀이 $u_i^n,\ i\in\mathbf{Z}$는 다음의 성질을 만족시킨다.

$$\lambda u_i^n+\hat{H}(x_i,\ D^H u_i^n+\varepsilon F((D^M u_i^n-D^H u_i^n)/\varepsilon))\le\delta \quad (7)$$

다음으로 려파도식의 수렴성을 밝히자.

도식의 수렴성을 밝히는데 필요한 다음의 리산비교결과가 성립된다.

보조정리[4] 적당한 정의상수 $K>0$이 있어서 모든 $i\in\mathbf{Z}$에 대하여 $u=(u_i)_{i\in\mathbf{Z}}$와 $v=(v_i)_{i\in\mathbf{Z}}$가 각각 다음의 부등식들을 만족시킨다고 하자.

$$\lambda u_i+\hat{H}(x_i,\ D^M u_i^n)\le 0,\ \lambda v_i+\hat{H}(x_i,\ D^M v_i^n)\ge 0,\ u_i\le K(1+|x_i|),\ v_i\ge -K(1+|x_i|)$$

그러면 부등식 $u_i\le v_i,\ i\in\mathbf{Z}$가 성립된다.

정리 1 가정들이 만족되며 부등식 (7)을 만족시키는 려파도식 (4)의 풀이 $u_i^n,\ i\in\mathbf{Z}$에 대하여 $|u_i^n|\le K(1+|x_i|)$인 정의상수 $K>0$이 있다고 하면 u^n과 방정식 (1)의 풀이 u에 대하여 다음의 평가식이 성립된다.

$$\|u^n-u\|_\infty\le C(\delta+\varepsilon+\sqrt{\Delta x}) \quad (8)$$

증명 $v_i,\ i\in\mathbf{Z}$를 가정을 만족시키는 1차단조도식 즉 식 (2)의 첫째 도식의 풀이라고 하면 그것에 대하여 Δx에 무관계한 적당한 정의상수 C가 있어서 다음의 평가식이 성립한다.

$$\max_{i\in\mathbf{Z}}|v_i-u(x_i)|\le C\sqrt{\Delta x} \quad (9)$$

이제 $G(x):=x-F(x)$로 정의되는 새로운 함수 $G:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$를 도입하면 려파함수 F의 정의로부터 $G(x)=\begin{cases}x, & \|x\|\le 1\\ 0, & \|x\|>1\end{cases}$임을 알수 있다.

려파도식의 정의 (4)로부터 다음의 식이 성립된다.

$$(u_i^{n+1}-u_i^n)/\Delta t+\lambda u_i^n+\hat{H}(x_i,\ D^M u_i^n-\varepsilon G((D^M u_i^n-D^H u_i^n)/\varepsilon))=0,\ n=0,\ 1,\ \cdots$$

$\hat{H}$의 립쉬츠련속성(립쉬츠상수 $L_{\hat{H}}$)과 함수 $G(x)$의 정의로부터 $\|G(\cdot)\|_\infty\le 1$임을 고려하면 식 (7)을 만족시키는 충분히 큰 옹근수 n에 대하여 다음의 식이 성립된다.

$$|\lambda u_i^n+\hat{H}(x_i,\ D^M u_i^n)|\le\delta+L_{\hat{H}}\varepsilon,\ i\in\mathbf{Z}$$

이 식으로부터 다음의 결과가 나온다.

$$\lambda u_i^n+\hat{H}(x_i,\ D^M u_i^n)\le\delta+L_{\hat{H}}\varepsilon,\ \lambda u_i^n+\hat{H}(x_i,\ D^M u_i^n)\ge-\delta-L_{\hat{H}}\varepsilon,\ i\in\mathbf{Z} \quad (10)$$

이제 $w_i^n=u_i^n-(\delta+L_{\hat{H}}\varepsilon)/\lambda,\ i\in\mathbf{Z}$로 놓으면 식 (10)의 첫째 부등식으로부터 부등식 $\lambda w_i^n+\hat{H}(x_i,\ D^M w_i^n)\le 0,\ i\in\mathbf{Z}$가 성립되고 보조정리로부터 $w_i^n\le v_i,\ i\in\mathbf{Z}$이므로

$$u_i^n-v_i\le(\delta+L_{\hat{H}}\varepsilon)/\lambda,\ i\in\mathbf{Z} \quad (11)$$

이다. 한편 $\omega_i^n=u_i^n+(\delta+L_{\hat{H}}\varepsilon)/\lambda,\ i\in\mathbf{Z}$로 놓으면 식 (10)의 둘째 부등식으로부터

$$\lambda\omega_i^n+\hat{H}(x_i,\ D^M\omega_i^n)\ge 0,\ i\in\mathbf{Z}$$

이다. 보조정리로부터 부등식 $\omega_i^n\ge v_i,\ i\in\mathbf{Z}$가 성립되며 따라서 다음의 식이 성립된다.

$$u_i^n-v_i\ge-(\delta+L_{\hat{H}}\varepsilon)/\lambda,\ i\in\mathbf{Z} \quad (12)$$

이로부터 $\max_{i\in\mathbf{Z}} |u_i^n - v_i| \le (\delta + L_{\hat{H}}\varepsilon)/\lambda,\ i\in\mathbf{Z}$ 가 나오며 따라서 정리는 증명된다.(증명끝)

주의 1 평가식 (8)로부터 턱값 δ 와 파라메터 ε 을 $O(\sqrt{\Delta x})$ 정도로 취한다면 려파도식의 풀이는 수렴하며 $O(\sqrt{\Delta x})$ 정도의 오차를 가진다는것을 알수 있다.

다음의 정리는 려파도식의 점성풀이가 미끈한 구역에서 공간변수에 관한 고차의 근사도를 가진다는것을 보여준다.

정리 2 가정들이 만족되고 방정식 (1)의 점성풀이 u 는 마디점 x_i 의 근방에서 $k+1$ 계 $(k\ge 2)$ 련속미분가능하며 적당한 정의상수 $C>0$ 에 대하여 조건 $C\Delta x \le \varepsilon$ 이 만족된다고 하면 마디점 x_i 와 관련한 려파도식은

$$(u_i^{n+1} - u_i^n)/\Delta t + \lambda u_i^n + \hat{H}(x_i,\ D^H u_i^n) = 0 \tag{13}$$

으로 되며 근사도는 $O(\Delta t + \Delta x^k)$ 으로 평가된다.

증명 함수 F 의 정의로부터 조건 $\| D^M u_i^n - D^H u_i^n \| \le \varepsilon$ 이 만족되면 려파도식 (4)는 도식 (3)에 귀착되며 다음의 평가식이 성립된다.

$$\| D^M u_i^n - D^H u_i^n \| \le \| D^M u_i^n - (u_x,\ u_x) \| + \| (u_x,\ u_x) - D^H u_i^n \| \le C_M \Delta x + C_H \Delta x^k = C\Delta x$$

따라서 $C = C_M + C_H \Delta x^{k-1}$ 로 정의되는 상수 $C = C(\|\partial_x^2 u\|_\infty,\ \|\partial_x^{k+1} u\|_\infty,\ \Delta x)$ 에 대하여 만족되는 조건 $C\Delta x \le \varepsilon$ 으로부터 정리의 결과가 나오며 이때 근사도는

$$E_{S^F}(u)(x,\ t) \equiv E_{S^H}(u)(x,\ t) := |(u(x,\ t+\Delta t) - u(x,\ t))/\Delta t + \lambda u + \hat{H}(x,\ D^H u) - (u_t + \lambda u + H(x,\ u_x))| \le$$

$$\le C(\|u_{tt}\|_\infty\ \Delta t + \|\partial_x^{k+1} u\|_\infty\ \Delta x^k) = O(\Delta t + \Delta x^k)$$

과 같이 평가된다.(증명끝)

주의 2 려파도식의 반리산형식 (5)에서 시간에 관한 도함수를 고차의 룽게－쿠타도식을 리용하여 근사시키면 시간, 공간에 관한 고차의 정확도가 얻어진다.

참 고 문 헌

[1] M. G. Crandall et al.; Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 195, 1344, 1984.

[2] R. Abgrall; SIAM J. Sci. Comput., 31, 2419, 2009.

[3] A. M. Oberman et al.; J. Comput. Phys., 284, 367, 2015.

[4] O. Bokanowski et al.; SIAM J. Sci. Comput., 38, 171, 2016.

주체107(2018)년 6월 5일 원고접수

Construction of a Filtered Scheme for a Steady Hamilton-Jacobi Equation and Its Convergence

Kim Ju Hyok, Ho Myong Song

We construct a class of filtered scheme for a steady Hamilton-Jacobi equation and prove its convergence. The new proposed scheme is based on the combination of a high order scheme and the first order monotone scheme for time-dependent Hamilton-Jacobi equation.

Key word: steady Hamilton-Jacobi equation