김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제2호

유한개의 층분리와 모체균렬이 있는 직교다층복합판의 억세기결정과 구부림해석

로 충 일

선행연구[2]에서는 판중심에 1개의 층분리와 모체균렬만이 있는 직교다층복합판의 국부억세기결정문제를 고찰하였고 선행연구[3]에서는 역시 1개의 층분리와 모체균렬만이 있는 직교다층복합판의 면내당김에 대한 파괴규준을 설정하였다. 선행연구[4]에서는 여러개의 층분리와 모체균렬을 가진 다층보의 확장층별해석법을 고찰하였다.

론문에서는 유한개의 층분리와 모체균렬을 가진 직교다층복합판의 억세기를 해석적으로 결정하고 1차자름변형리론에 기초하여 가로짐을 받는 판의 구부림문제를 해석하였으며 ANSYS에 의한 유한요소모의를 통하여 정확성을 검증하였다.

1. 유한개의 층분리와 모체균렬이 있는 직교다층복합판의 억세기결정

먼저 1차자름변형리론에 해당한 직교다층복합판의 억세기특성량들을 결정하자. 변의 길이가 a, b이고 두께가 h인 직교다층복합판에 가로분포짐 q가 작용한다. 판의 내부에 존재하는 층분리는 직4각형모양이며 모체균렬은 층분리에 수직이고 모체와 섬유를 다같이 관통하며 1개층에 국한될수도 있고 여러층을 포함할수도 있다. 판에는 여러개의 층분리와 모체균렬들이 분포되여있으며 린접한 균렬들사이의 호상관계는 없다고 본다.

판에 분포된 층분리와 모체균렬에 따라 판을 손상구역과 비손상구역으로 나누고 e째 손상구역에서 층분리와 모체균렬을 포함하는 립방체요소를 선택하자.

립방체요소의 길이와 너비는 요소의 k째 층에 존재하는 층분리의 치수$(a_k \times b_k)$와 같고 두께는 판두께와 같다. 층분리우에는 길이와 너비가 $(b_k \times \delta_k)$인 모체균렬이 수직으로 놓여있다. 모체균렬의 길이방향은 y축과 일치한다.

손상구역에서 선택한 요소의 억세기를 국부억세기, 판전체의 억세기를 전체 억세기라고 부르기로 한다.

먼저 유효억세기모형에 따라 손상구역에서의 국부억세기를 결정하자.

e째 손상구역에서 층분리와 모체균렬이 있는 k째 층의 변환된 환산억세기는

$$(\overline{Q}_{ij}^{e})_k = \eta_k^{(e)} (Q_{ij})_k, \quad \eta_k^{(e)}(z) = 1 - \frac{\delta_k^{(e)}}{t_k}[1 - H(z)] \tag{1}$$

이다. 여기서 $\delta_k^{(e)}$는 e째 손상구역의 k째 층에 존재하는 균렬의 길이이고 t_k는 k째 층의 두께이며 $H(z)$는 헤비사이드함수로서

$$H(z) = \begin{cases} 1, & z \ge 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$$

이다.

유효억세기모형 (1)에 따라 매 구역에서의 당김 및 구부림억세기[1] A_{ij}, D_{ij}, A_{ij}^e, D_{ij}^e 들은 다음과 같이 표시된다.

$$1-\text{구역};\qquad A_{pp}=\sum_{k=1}^{N}(\overline{Q}_{pp})_k(z_k-z_{k-1}),\ \ D_{ij}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{N}(\overline{Q}_{ij})_k(z_k^3-z_{k-1}^3) \tag{2}$$

$$2-\text{구역};\qquad A_{pp}^e=\sum_{k=1}^{N}\eta_k^{(e)}(\overline{Q}_{pp})_k(z_k-z_{k-1}),\ \ D_{ij}^e=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{N}\eta_k^{(e)}(\overline{Q}_{ij})_k(z_k^3-z_{k-1}^3) \tag{3}$$

$$(N-\text{층 개수},\ \ p=6,\ 7;\ ij=11,\ 12,\ 22,\ 66)$$

다음으로 판의 전체억세기를 결정하자. 전체억세기는 손상구역과 비손상구역에서의 억세기를 구하고 매 구역의 면적에 해당한 무게를 결합하여 결정한다.

판의 중간면의 면적을 S, 비손상구역과 손상구역에 해당한 면적을 각각 S_1과 S_2, e째 손상구역에 해당한 면적을 S^e로 표시하면

$$S_2=\sum_{e=1}^{K}S^e,\ \ S_1+S_2=S \tag{4}$$

이다. 1차자름변형리론에 의한 판의 전에네르기식은 다음과 같다.

$$V=\frac{1}{2}\iint_S\Lambda dxdy=\frac{1}{2}\left(\iint_{S_1}\Lambda_0 dxdy+\sum_{e=1}^{K}\iint_{S^e}\Lambda^e dxdy\right) \tag{5}$$

여기서

$$\Lambda=\Lambda_0+\sum_{e=1}^{K}\Lambda^e,\ \ \Lambda_0=\sum_{s=1}^{3}\Lambda_{s0}(A_{ij},\ D_{ij}),\ \ \Lambda^e=\sum_{s=1}^{3}\Lambda_{s0}^e(A_{ij}^e,\ D_{ij}^e) \tag{6}$$

이다.

식 (6)의 오른변의 피적분항에서 비손상구역에 해당한 첫째 항에는 면적에 따르는 무게 S_1/S을 주고 둘째 항에는 S_2/S를 주어 전체 면적에 관하여 적분하면 다음과 같다.

$$\iint_{S_1}F_{ij}\varphi(x,\ y)dxdy+\sum_{e=1}^{K}\iint_{S^e}F_{ij}^e\varphi(x,\ y)dxdy=\iint_S\left[F_{ij}\frac{S_1}{S}+\left(\frac{\sum_{e=1}^{K}F_{ij}^eS^e}{S}\right)\right]\varphi(x,\ y)dxdy \tag{7}$$

$$(F=A,\ D)$$

전체억세기를 $\overline{A}_{pp}$, $\overline{D}_{ij}$로 표시하면

$$\begin{aligned}\overline{A}_{pp}&=A_{pp}\frac{S_1}{S}+\left(\left(\sum_{e=1}^{K}A_{pp}^eS^e\right)\Big/S\right)\\ \overline{D}_{ij}&=D_{ij}\frac{S_1}{S}+\frac{\left(\sum_{e=1}^{K}D_{ij}^eS^e\right)}{S}\quad(ij=11,\ 12,\ 22,\ 66;\ p=6,\ 7)\end{aligned} \tag{8}$$

로 되고 식 (7)은 다음의 형태로 쓸수 있다.

$$\iint_{S_I} F_{ij}\varphi(x,\ y)dxdy + \sum_{e=1}^{K}\iint_{S^e} F_{ij}^e \varphi(x,\ y)dxdy = \iint_{S} \overline{F}_{ij}\varphi(x,\ y)dxdy\ \ (\overline{F} = \overline{D},\ \overline{A}) \tag{9}$$

식 (2), (3), (8), (9)에 따라 전체 판의 당김 및 구부림억세기들은 다음과 같이 결정된다.

$$\begin{aligned} \overline{A}_{pp} &= \frac{1}{S}\sum_{k=1}^{N}(\overline{Q}_{ij})_k (S_1 + \eta_k^{(e)} S_2)(z_k - z_{k-1}) \\ \overline{D}_{ij} &= \frac{1}{3S}\sum_{k=1}^{N}(\overline{Q}_{ij})_k (S_1 + \eta_k^{(e)} S_2)(z_k^3 - z_{k-1}^3)\ \ (ij = 11,\ 12,\ 22,\ 66;\ \ p = 6,\ 7) \end{aligned} \tag{10}$$

식 (10)에서 보는것처럼 전체억세기 $\overline{A}_{pp}$, $\overline{D}_{ij}$ 들은 유한개의 층분리와 모체균렬들이 있는 판의 억세기에 해당한 결함이 없는 판의 등가억세기로 된다. 따라서 이 억세기들을 리용하여 유한개의 층분리와 모체균렬이 있는 판의 구부림문제를 다층판리론으로 고찰할수 있다.

2. 1차자름변형리론에 기초한 구부림해석

앞에서 결정한 판의 전체억세기를 리용하여 주어진 대칭직교다층복합판의 최대처짐과 응력을 해석적으로 구하고 ANSYS에 의한 모의결과와 비교한다. 가로짐을 받는 대칭직교다층판의 구부림미분방정식은 에네르기범함수식 (5)의 정류조건으로부터 얻는다.

1차자름변형리론에 의한 판의 처짐방정식은 다음과 같다.[5]

$$\begin{aligned} &[L_{ij}]\{W_{mn}\quad \Phi_{mn}\quad P_{mn}\}^{\mathrm{T}} = \{0\quad 0\quad q_{mn}\}^{\mathrm{T}},\ L_{ij} = L_{ji} \\ &L_{11} = \overline{D}_{11}\alpha_m^2 + \overline{D}_{66}\beta_n^2 + l\overline{A}_{55},\ L_{12} = (\overline{D}_{12} + \overline{D}_{66})\alpha_m\beta_n,\ L_{13} = l\overline{A}_{55}\alpha_m \\ &L_{22} = \overline{D}_{66}\alpha_m^2 + \overline{D}_{22}\beta_n^2 + l\overline{A}_{44},\ L_{23} = l\overline{A}_{44}\beta_n,\ L_{33} = l\overline{A}_{55}\alpha_m^2 + l\overline{A}_{44}\beta_n^2 \end{aligned} \tag{11}$$

먼저 다음의 기하학적 및 력학적특성을 가진 판의 처짐 및 응력상태를 해석하자. 판의 길이와 너비는 $a = 0.3\mathrm{m}$, $b = 0.2\mathrm{m}$ 이고 두께는 $h = 8\mathrm{mm}$ (8개 층)이다. 매 층의 두께는 $t_k = 1\mathrm{mm}$ 로서 다 같고 적층구조는 [0°/90°/0°/90°]s이며 층재료는 다음의 특성량을 가진 유리/에폭시재료이다.

$$E_{11} = 38.6\mathrm{GPa},\ E_{22} = E_{33} = 8.27\mathrm{GPa},\ G_{12} = G_{13} = 4.14\mathrm{GPa},\ G_{23} = 5.1\mathrm{GPa}$$
$$\nu_{12} = \nu_{13} = 0.26,\ \nu_{23} = 0.3$$

층분리의 길이와 너비는 $a_k = 2\mathrm{cm}$, $b_k = 1.5\mathrm{cm}$ 이고 모체균렬의 길이와 깊이는 $l_k = 2.5\mathrm{cm}$, $\delta_k = 0.5\mathrm{mm}$ 이며 가로분포짐세기는 $q = 0.05\mathrm{MPa}$ 이다.

편리상 층분리와 모체균렬쌍이 대칭적으로 분포되였다고 하고 매 쌍에 번호를 붙이자.

일반적으로 모체균렬이 있는 층번호는 손상구역에 따라 각이하며 전체억세기는 식 (11)에 의해 결정된다. 여기서는 일반성을 잃지 않고 계산의 편리를 위해 모든 손상구역에서 층분리와 모체균렬의 위치는 같다고 가정한다. 따라서 판의 맨 웃층을 첫번째 층으로, 맨 아래층을 마지막층(8째 층)으로 볼 때 매 손상구역에서 층분리는 다같이 6번째 층과 7번째 층사이에 있고 모체균렬은 6번째 층안에 있으며 식 (1)로부터

$$\eta_k^{(e)} = \begin{cases} 0, & k = 6 \\ 1, & k \neq 6 \end{cases}$$

이다.

K가 증가함에 따라 처짐값들은 모두 증가한다. $K=1$일 때 해석풀이와 ANSYS모의결과의 상대오차는 3.7%로서 해석풀이값이 작으며 고전다층판리론(CLT)과의 차이는 5.1%로서 더 크다. 해석풀이와 ANSYS, 고전다층판리론과의 오차는 K가 증가함에 따라 작아지며 $K=3$에서는 3.3, 4.7%, $K=5$에서는 2.7, 4.1%, $K=7$에서는 2.49, 3.7%로 된다.

해석풀이와 ANSYS모의결과, 고전다층판리론을 비교하면 $K=1$일 때 상대오차는 6.2%로서 해석풀이가 더 크며 고전다층판리론과의 상대오차는 8.8%로 해석풀이가 더 크다. $K=3$일 때 응력세기들의 차이는 5.6, 8.4%로 감소하며 $K=5$일 때 4.5, 7.6%, $K=7$일 때는 4.0, 7.1%로 된다.

다음으로 층분리와 모체균렬쌍들의 분포상태가 처짐과 응력에 주는 영향을 보기 위하여 두가지 분포상태 즉 Ω_1 −①④⑦과 Ω_2 −④⑤⑥을 고찰한다. 억세기공식에서 명백한것처럼 Ω_1과 Ω_2의 경우 해석풀이에 의한 처짐 $(z=-4\text{mm})$과 CLT에 의한 처짐은 서로 같다. 그러나 ANSYS해석결과는 2.8% 차이난다. 해석풀이와 CLT에 의한 응력의 세기 $(z=-4\text{mm})$는 같지만 ANSYS해석에서는 3.1% 차이난다.

모의결과를 통해 대칭분포인 경우보다 비대칭분포의 경우에 판의 처짐과 응력이 더 커진다는것을 알수 있다.

맺 는 말

유한개의 층분리와 모체균렬이 있는 직교다층복합판의 전체억세기를 해석적방법으로 결정하고 가로분포짐을 받는 판의 구부림문제를 해석하였다.

판중심에서의 최대처짐과 응력세기를 결정하고 얻어진 풀이를 ANSYS모의결과와 비교하여 정확성을 검증하였으며 층분리와 모체균렬의 분포상태가 판의 세기특성에 주는 영향을 평가하였다.

모의결과는 론문의 방법이 판의 국부적손상특성을 충분히 반영한다는것을 보여준다. 이 방법은 직교대칭다층판뿐아니라 임의의 적층구조를 가진 다층복합판에도 적용할수 있다.

참 고 문 헌

[1] 송성관, 복합재료력학, **김일성**종합대학출판사, 39～41, 주체103(2014).

[2] In-Bong Kim et al.; Composite Structures, 196, 127, 2018.

[3] L. Zubillaga et al.; Composite Structures, 127, 10, 2015.

[4] D. H. Li et al.; Int. J. Numer. Meth. Engng, 101, 407, 2015.

[5] V. Birman; Plate Structures, Springer, 18~20, 173～225, 2011.

주체107(2018)년 12월 5일 원고접수

Stiffness Determination and Bending Analysis of Cross-Ply Laminated Composite Plates with Finite Delaminations and Matrix Cracks

Ro Chung Il

This paper analytically determines the stiffness of the cross-ply laminated composite plates with finite delaminations and matrix cracks, analyzes the bending problem of the composite plates under the lateral load using the first order shear deformation theory and validates it through ANSYS modelling.

Key words: delamination, stiffness, matrix crack, composite plate