김일성종합대학학보
(자연과학)
주체104(2015)년 제61권 제4호

JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(NATURAL SCIENCE)
Vol. 61 No. 4 JUCHE104(2015).

한가지 형태의 비선형다항임풀스미분방정식의 풀이의 존재성

최희철, 김광혁

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《과학과 기술이 매우 빨리 발전하고있는 오늘의 현실은 기초과학을 발전시킬것을 더욱 절실하게 요구하고있습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제11권 138페지)

최근 분수계미분방정식은 많은 물리적현상을 모형화하는데서 강력한 수단으로 되는것으로 하여 광범히 연구되고있다.

선행연구[1]에서는 임풀스단항분수계미분방정식의 풀이유일존재성을, 선행연구[2]에서는 3계임풀스미분방정식의 주기경계값문제의 풀이의 존재성을 론의하였다.

론문에서는 다음의 비선형다항임풀스분수계미분방정식에 대한 풀이의 존재조건에 대하여 론의하였다.

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha x(t) = f(t,\ x(t),\ {}^cD^\beta x(t)),\ t \in I = [0,\ T],\ \ t \neq t_k \\ \Delta x(t)|_{t=t_k} = I_k(x(t_k^-)),\ \ k = 1, \cdots, m \\ x(0) = x_0,\quad 0 < \beta < \alpha < 1 \end{cases} \tag{1}$$

여기서 X는 B형공간, $f \in C(I \times X,\ X)$이고

$I_k : X \to X,\ x_0 \in X,\ 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m < t_{m+1} = T,\ \Delta x(t)|_{t=t_k} = x(t_k^+) - x(t_k^-),\ \ x(t_k^+) = \lim_{h \to 0+0} x(t+h).$

일반성을 잃지 않고 $m = 2$라고 하자.

몇가지 정의를 주자.

$$PC([0,\ T],\ X) = \{x \in ([0,\ T] \to X) \mid x \in C((t_k,\ t_{k+1}],\ X),\ k = 0, 1,\ 2,$$
$$x(t_k^+)\text{와 } x(t_k^-)\text{가 존재},\ x(t_k) = x(t_k^-)\}$$

여기서 $t_0 = 0$이다.

이 PC공간에서의 노름은 sup−노름이다. 즉 $\|x\|_{pc} = \sup\{|x(t)| \mid t \in [0,\ T]\}$.

정의 ${}^cD^\alpha x(t)$, $x \in PC([0,\ T],\ X)$이고 x가 방정식 (1)을 만족시킬 때 x를 비선형다항임풀스분수계미분방정식 (1)의 풀이라고 한다.

우선 f가 자기변수들에 관하여 련속이라고 하고 론의하자.

f와 I_k에 대한 구체적인 조건은 후에 주기로 하자.

먼저 방정식 (1)과 동등한 적분방정식을 유도하자.

$y(t) := {}^cD^\alpha x(t)$라고 하면 다음의 식이 성립된다.

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s) ds = x_0 + I^\alpha y(t),\ \ t \in [0,\ t_1] \tag{2}$$

$$x(t)=x_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}y(s)ds+I_1\left(x_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}y(s)ds\right)+$$
$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t}(t-s)^{\alpha-1}y(s)ds=x_0+I^{\alpha}y(t)+I_1(x_0+I^{\alpha}y(t)|_{t=t_1}),\quad t\in(t_1,\ t_2] \tag{3}$$

$$x(t)=x_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}y(s)ds+I_1\left(x_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}y(s)ds\right)+$$
$$+I_2\left(x_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}y(s)ds\right)+I_1\left(x_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}y(s)ds\right)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_2}^{t}(t-s)^{\alpha-1}y(s)ds=$$
$$=x_0+I^{\alpha}y(t)+I_1(x_0+I^{\alpha}y(t)|_{t=t_1})+I_2(x_0+I^{\alpha}y(t)|_{t=t_2}+I_1(x_0+I^{\alpha}y(t)|_{t=t_1})) \tag{4}$$

이제 $x^{(\beta)}(t)$의 식을 보자.

식 (2)－(4)로부터 $x^{(\beta)}(t)=I^{\alpha-\beta}y(t)$, $t\in[0,\ T]$이다.

이제 $y(t)$에 관한 (1)의 변경한 방정식은

$$\begin{cases} y(t)=f(t,\ x_0+I^{\alpha}y(t),\ I^{\alpha-\beta}y(t)), & t\in[0,\ t_1] \\ y(t)=f(t,\ x_0+I^{\alpha}y(t)+I_1(x_0+I^{\alpha}y(t)|_{t=t_1}),\ I^{\alpha-\beta}y(t)), & t\in(t_1,\ t_2] \\ y(t)=f(t,\ x_0+I^{\alpha}y(t)+I_1(x_0+I^{\alpha}y(t)|_{t=t_1})+I_2(x_0+I^{\alpha}y(t)|_{t=t_2}+ \\ \qquad +I_1(x_0+I^{\alpha}y(t)|_{t=t_1})),\ I^{\alpha-\beta}y(t)), & t\in(t_2,\ t_3] \end{cases} \tag{5}$$

결국 방정식 (1)을 푸는 문제는 식 (5)의 풀이 $y(t)$를 얻은 다음 식 (2)－(4)에 넣어 $x(t)$를 구하는 문제로 된다.

표시의 편리성을 위하여 $S(x_0,\ \alpha,\ y(t)):=x_0+I^{\alpha}y(t)$라고 하면 식 (5)는 다음과 같이 쓸수 있다.

$$y(t)=\begin{cases} f(t,\ S(x_0,\alpha,\ y(t)),\ I^{\alpha-\beta}y(t)), & t\in[0,\ t_1] \\ f(t,\ x_0+I^{\alpha}y(t)+I_1(x_0+I^{\alpha}y(t)|_{t=t_1}),\ I^{\alpha-\beta}y(t)), & t\in(t_1,\ t_2] \\ f(t,\ x_0+I^{\alpha}y(t)+I_1(x_0+I^{\alpha}y(t)|_{t=t_1})+I_2(x_0+I^{\alpha}y(t)|_{t=t_2}+ \\ \qquad +I_1(x_0+I^{\alpha}y(t)|_{t=t_1})),\ I^{\alpha-\beta}y(t)), & t\in(t_2,\ t_3] \end{cases} \tag{6}$$

식 (6)의 오른변을 $(Fy)(t)$라고 표시하면 식 (6)의 풀이의 존재성문제는 F의 PC에서의 부동점 즉 $y(t)=(Fy)(t)$인 $y(t)$의 존재성에 관한 문제로 된다.

먼저 대역적존재성에 대하여 론의하자.

가정 1　$\forall x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2\in\boldsymbol{R}$: $|f(t,\ x_1,\ y_1)-f(t,\ x_2,\ y_2)|\le l_1|x_1-x_2|+l_2|y_1-y_2|$

$t\in[0,\ t_1]$인 경우 $y_1,\ y_2\in C[0,\ t_1]$이라고 하면 $|Fy_1-Fy_2|\le l_1|I^{\alpha}(y_1-y_2)|+l_2|I^{\beta}(y_1-y_2)|$이고 $|I^{\alpha}y(t)|\le t^{\alpha}\|y\|_{C[0,\ t]}/\Gamma(\alpha+1)$임을 고려하면

$$|Fy_1-Fy_2|\le(l_1T^{\alpha}/\Gamma(\alpha+1)+l_2T^{\alpha-\beta}/\Gamma(\alpha-\beta+1))\|y_1-y_2\|_{PC[0,\ T]}.$$

$t\in(t_1,\ t_2]$인 경우 $y_1,\ y_2\in C[t_1,\ t_2]$라고 하면

$$|Fy_1-Fy_2|\le\left(\frac{l_1T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{l_2T^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\right)\|y_1-y_2\|_{PC[0,\ T]}+l_1|I_1(S(x_0,\ \alpha,\ y_1(t_1)))-I_1(S(x_0,\ \alpha,\ y_2(t_1)))|\ .$$

가정 2 $\forall x_1,\ x_2\in\boldsymbol{R}:\ |I_k(x_1)-I_k(x_2)|\le\mu_k|x_1-x_2|,\ \ k=1,\ 2$

$$|I_1(S(x_0,\ \alpha,\ y_1(t_1)))-I_1(S(x_0,\ \alpha,\ y_2(t_1)))|\le\mu_1|S(x_0,\ \alpha,\ y_1(t_1))-S(x_0,\ \alpha,\ y_2(t_1))|\le$$

$$\le\frac{\mu_1}{\Gamma(\alpha+1)}t_1^\alpha\|y_1-y_2\|_{C[0,\ t_1]}\le\frac{\mu_1T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|y_1-y_2\|_{PC[0,\ T]}$$

$$|Fy_1-Fy_2|\le\left(\frac{l_1T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{l_1\mu_1T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{l_2T^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\|y_1-y_2\|_{PC[0,\ T]}$$

$t\in(t_2,\ T]$인 경우 $y_1,\ y_2\in C[t_2,\ T]$라고 하면

$$|Fy_1-Fy_2|\le\frac{l_1T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|y_1-y_2\|_{PC[0,\ T]}+\frac{l_1\mu_1T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|y_1-y_2\|_{PC[0,\ T]}+\frac{l_2T^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\|y_1-y_2\|_{PC[0,\ T]}+$$

$$+l_1\left|I_2(S(x_0,\ \alpha,\ y_1(t_2))+I_1(S(x_0,\ \alpha,\ y_1(t_1))))-I_2(S(x_0,\ \alpha,\ y_2(t_2))+I_1(S(x_0,\ \alpha,\ y_2(t_1))))\right|$$

$$|I_2(S(x_0,\ \alpha,\ y_1(t_2))+I_1(S(x_0,\ \alpha,\ y_1(t_1))))-I_2(S(x_0,\ \alpha,\ y_2(t_2))+I_1(S(x_0,\ \alpha,\ y_2(t_1))))|\le$$

$$\le\mu_2\left(\frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|y_1-y_2\|_{PC[0,\ T]}+\mu_1\frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|y_1-y_2\|_{PC[0,\ T]}\right).$$

따라서 다음의 식이 성립된다.

$$|Fy_1-Fy_2|\le\frac{l_1T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|y_1-y_2\|_{PC[0,\ T]}+\frac{l_1\mu_1T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|y_1-y_2\|_{PC[0,\ T]}+$$

$$+\frac{l_2T^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\|y_1-y_2\|_{PC[0,\ T]}+\frac{l_1\mu_2T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|y_1-y_2\|_{PC[0,\ T]}+\frac{l_1\mu_1\mu_2T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|y_1-y_2\|_{PC[0,\ T]}$$

이제 $q:=\frac{l_1T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}(1+\mu_1+\mu_2+\mu_1\mu_2)+\frac{l_2T^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}$ 이라고 할 때 $q<1$ 이면 F 는 $PC[0,\ T]$에서 축소이다. 따라서 $PC[0,\ T]$에서 F의 부동점 $y(t)$의 존재성이 나온다.

이리하여 다음의 정리가 증명된다.

정리 1 $q<1$이고 가정 1, 2가 만족되면 방정식 (1)의 풀이는 유일존재한다.

다음으로 F의 부동점에 대한 국부적존재에 대하여 론의하자.

f에 대하여 다음의 보충적인 가정을 하자.

가정 3 $\exists a^*\ge0,\ b_1,\ b_2>0:\ \forall(t,\ x,\ y)\in[0,\ T]\times\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R},\ \ f(t,\ x,\ y)\le a^*+b_1|x|+b_2|y|$

식 (6)에서 $\Phi y(t):=f(t,\ x_0+I^\alpha y(t),\ I^{\alpha-\beta}y(t)),\ \ t\in[0,\ T]$,

$$\Psi y(t):=\begin{cases}0, & t\in[0,\ t_1]\\ f(t,\ x_0+I^\alpha y(t)+I_1(x_0+I^\alpha y(t)|_{t=t_1}),\ I^{\alpha-\beta}y(t))-f(t,\ x_0+I^\alpha y(t),\ I^{\alpha-\beta}y(t)), & t\in(t_1,\ t_2]\\ f(t,\ x_0+I^\alpha y(t)+I_1(x_0+I^\alpha y(t)|_{t=t_1})+I_2(x_0+I^\alpha y(t)|_{t=t_2}+ & \\ \quad+I_1(x_0+I^\alpha y(t)|_{t=t_1})),\ I^{\alpha-\beta}y(t))-f(t,\ x_0+I^\alpha y(t),\ I^{\alpha-\beta}y(t)), & t\in(t_2,\ t_3]\end{cases}$$

라고 하자.

가정 4 $|I_k(x)| \le M_k = \text{const}$, $k=1, 2$

가정 3으로부터

$$\Phi y(t) \le a^* + b_1|x_0 + I^\alpha y(t)| + b_2|I^{a-\beta}y(t)| \le a^* + b_1|x_0| + \frac{b_1}{\Gamma(\alpha+1)}\|y\|_{PC} + \frac{b_2}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\|y\|_{PC}.$$

$|\Psi y(t)|$를 평가해보자.

$t \in (t_1, t_2]$일 때 f의 리프쉬츠련속성으로부터 $|\Psi y(t)| \le l_1|I_1(x_0 + I^\alpha y(t)|_{t=t_1})| = l_1 M_1$이고 $t \in (t_2, T]$일 때

$$|\Psi y(t)| \le l_1|I_1(x_0 + I^\alpha y(t)|_{t=t_1}) + I_2(x_0 + I^\alpha y(t)|_{t=t_2} + I_1(x_0 + I^\alpha y(t)|_{t=t_1}))| \le l_1(M_1 + M_2).$$

가정 5 $\omega^* := b_1/\Gamma(\alpha+1) + b_2/\Gamma(\alpha-\beta+1) < 1$, $r := [a^* + b_1|x_0| + l_1(M_1+M_2)]/(1-\omega^*)$, $B_r := \{y \in PC[0, T] \mid \|y\|_{PC} \le r\}$라고 하면 임의의 $x, y \in B_r$에 대하여

$$\begin{aligned}\|\Phi(x) + \Psi(x)\| &\le \|\Phi(x)\| + \|\Psi(x)\| \le \\ &\le a^* + b_1|x_0| + \frac{b_1}{\Gamma(\alpha+1)}\|x\|_{PC} + \frac{b_2}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\|x\|_{PC} + l_1(M_1+M_2) \le \\ &\le a^* + b_1|x_0| + l_1(M_1+M_2) + \left(\frac{b_1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{b_2}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\right)r \le r.\end{aligned}$$

한편 Φ는 $\dfrac{l_1}{\Gamma(\alpha+1)} + \dfrac{l_2}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} < 1$일 때 축소이다.

$\Psi(x)$가 완전련속임을 론의하자.

$\forall y \in B_r, \|\Psi y\| \le r$이므로 Ψy는 B_r에서 평등유계이다.

이제 가정 1보다 강한 다음의 가정을 주자.

가정 6 $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \boldsymbol{R}$, $\forall t_1, t_2 \in [0, T]$:

$$|f(t_1, x_1, y_1) - f(t_2, x_2, y_2)| \le l_0|t_1 - t_2| + l_1|x_1 - x_2| + l_2|y_1 - y_2|$$

$t_1^*, t_2^* \in (t_1, t_2]$인 경우에 $\forall y \in B_r$, $|(\Psi y)(t_1^*) - (\Psi y)(t_2^*)|$을 평가해보자.

$$\begin{aligned}|(\Psi y)(t_1^*) - (\Psi y)(t_2^*)| &\le 2l_0|t_1^* - t_2^*| + 2l_1|I^\alpha y(t_1^*) - I^\alpha y(t_2^*)| + 2l_2|I^{\alpha-\beta}y(t_1^*) - I^{\alpha-\beta}y(t_2^*)| \le \\ &\le 2l_0|t_1^* - t_2^*| + \left(\frac{2l_1 r}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2l_2 r}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\right)|2(t_2^* - t_1^*)^\alpha - t_2^{*\alpha} + t_1^{*\alpha}|\end{aligned}$$

마찬가지의 평가식을 $t_1^*, t_2^* \in (t_2, T]$인 경우에도 얻을수 있다.

이때 ψ가 Br에서 동정도련속이므로 아르첼라정리에 의하여 $\psi(Br)$는 콤팍트모임이다. 즉 ψ는 완전련속이다.

보조정리 바나흐공간 X의 비지 않은 부분모임 M이 닫긴, 불룩모임이라고 하자. 이때 다음의 조건들을 만족시키면 $z = Az + Bz$인 $z \in M$이 존재한다.

① $x, y \in M \Rightarrow Ax + By \in M$

② A: 완전련속

③ B: 축소넘기기

이 보조정리를 리용하면 다음의 정리가 증명된다.

정리 2 가정 3－6이 만족된다고 하자.
이때 PC의 령원소의 적당한 근방에는 방정식 (1)의 적어도 하나의 풀이가 있다.

참 고 문 헌

[1] L. Mahto et al.; arXib:1025.3619 vl[math.CA]16 may 2012.
[2] P. Ravi et al.; Electronic Journal of Differential Equations, 91, 1, 2010.

주체103(2014)년 12월 5일 원고접수

Existence of a Nonlinear Multi-Term Impulsive Differential Equation's Solution

Choe Hui Chol, Kim Kwang Hyok

We considered about the existence of solutions by extending the results of [1] to multi-term.

And we obtained the conditions for the existence and uniqueness of solution in $PC[0, T]$ under some hypothese and for the existence of at least one solution in the local domain.

Key words: fractional order derivative, nonlinear multi-term impulsive differential equation