김일성종합대학학보 주체107(2018)년
수 학 제64권 제3호

시간변수에 대한 특이성을 가진 한가지 형태의 p−라쁠라스 분수계미분방정식의 여러점경계값문제의 정인 풀이의 존재성

정금성, 서정혁

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《기초과학을 발전시키지 않고서는 인민경제 여러 부문에서 나서는 과학기술적문제를 원만히 풀어나갈수 없습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제11권 138페지)

우리는 최근시기 많이 론의되고있는 시간변수에 대한 특이성을 가진 비선형 p−라쁠라스분수계미분방정식의 여러점경계값문제의 정인 풀이의 존재성에 대하여 연구하였다.

선행연구[3]에서는 추에서의 부동점지수리론을 리용하여 p−라쁠라스연산자를 가진 비선형분수계미분방정식의 m점경계값문제의 풀이의 존재성과 그 개수를 밝히였으며 선행연구[2]에서는 축소넘기기의 원리를 리용하여 선행연구[3]에서 론의한 문제보다 고계인 경우에 풀이의 유일존재성을 해결하였다.

선행연구[4]에서는 크라스노셀스끼의 부동점정리를 리용하여 비동차항이 시간변수와 공간변수에 관하여 특이인 분수계미분방정식의 무한점경계값문제에 대하여 정인 풀이의 존재성을 론의하였다.

론문에서는 우의 결과들에 기초하여 선행연구[2]의 문제에 시간변수에 대한 특이성을 가정한 다음의 m−점경계값문제

$$D_{0+}^{\beta}(\varphi_p(D_{0+}^{\alpha}x))(t)=q(t)f(t,\ x(t))\ \ (0<t<1) \tag{1}$$

$$x(0)=0,\ D_{0+}^{\gamma}x(1)=\sum_{i=1}^{m-2}\xi_i D_{0+}^{\gamma}x(\eta_i) \tag{2}$$

$$D_{0+}^{\alpha}x(0)=0,\ \varphi_p(D_{0+}^{\alpha}x)(1)=\sum_{i=1}^{m-2}\zeta_i\varphi_p(D_{0+}^{\alpha}x)(\eta_i) \tag{3}$$

의 정인 풀이의 존재성을 밝히였다. 여기서 $D_{0+}^{\alpha},\ D_{0+}^{\beta},\ D_{0+}^{\gamma}$는 리만−류빌분수계도함수이고 $1<\alpha,\ \beta\le 2,\ 0<\gamma\le 1,\ 0<\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i<1$이며 이에 대하여 조건

$$\alpha-\gamma-1>0,\ \sum_{i=1}^{m-2}\xi_i\eta_i^{\alpha-\gamma-1}<1,\ \sum_{i=1}^{m-2}\zeta_i\eta_i^{\beta-1}<1$$

을 가정한다.

그리고 함수 f와 q는 각각 $f\in C([0,\ 1]\times[0,\ +\infty),\ [0,\ +\infty)),\ q\in C((0,\ 1),\ [0,\ +\infty))$와

$$\lim_{t\to 0+}q(t)=+\infty,\ \ \lim_{t\to 1-}q(t)=+\infty$$

를 만족시키며 함수 $\varphi_p(s)=|s|^{p-2}s,\ p>1$에 대해서는 $\varphi_p^{-1}=\varphi_q,\ \ 1/p+1/q=1$이 성립된다.

보조정리 1 [2] $y\in C[0,\ 1]\ (1<\alpha\le 2,\ 0<\gamma\le 1)$이라고 하자. 그러면 분수계미분방정식

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha}u(t)+y(t)=0 \ \ (0<t<1) \\ u(0)=0,\ D_{0+}^{\gamma}u(1)=\sum_{i=1}^{m-2}\xi_i D_{0+}^{\gamma}u(\eta_i) \end{cases} \tag{4}$$

는 유일풀이

$$u(t)=\int_0^1 G(t,\ s)y(s)ds \tag{5}$$

를 가진다. 여기서

$$G_1(t,\ s)=\begin{cases} \dfrac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\gamma-1}-(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & (0\le s\le t\le 1) \\ \dfrac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha)} & (0\le t\le s\le 1) \end{cases}$$

$$G_2(t,\ s)=\begin{cases} \dfrac{t^{\alpha-1}}{A\Gamma(\alpha)}\sum_{0\le s\le\eta_i}\xi_i[\eta_i^{\alpha-\gamma-1}(1-s)^{\alpha-\gamma-1}-(\eta_i-s)^{\alpha-\gamma-1}] & (t\in[0,\ 1]) \\ \dfrac{t^{\alpha-1}}{A\Gamma(\alpha)}\sum_{\eta_i\le s\le 1}\xi_i\eta_i^{\alpha-\gamma-1}(1-s)^{\alpha-\gamma-1} & (t\in[0,\ 1]) \end{cases}$$

$$G(t,\ s)=G_1(t,\ s)+G_2(t,\ s)$$

$$A=1-\sum_{i=1}^{m-2}\xi_i\eta_i^{\alpha-\gamma-1}$$

보조정리 2[2] $z\in C[0,\ 1],\ 1<\beta\le 2$ 라고 하자. 그러면 분수계미분방정식

$$\begin{cases} D_{0+}^{\beta}v(t)+z(t)=0 \ \ (0<t<1) \\ v(0)=0,\ v(1)=\sum_{i=1}^{m-2}\zeta_i v(\eta_i) \end{cases} \tag{6}$$

는 유일풀이

$$v(t)=\int_0^1 H(t,\ s)z(s)ds \tag{7}$$

를 가진다. 여기서

$$H_1(t,\ s)=\begin{cases} \dfrac{t^{\beta-1}(1-s)^{\beta-1}-(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} & (0\le s\le t\le 1) \\ \dfrac{t^{\beta-1}(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} & (0\le t\le s\le 1) \end{cases}$$

$$H_2(t,\ s)=\begin{cases} \dfrac{t^{\beta-1}}{B\Gamma(\beta)}\sum_{0\le s\le\eta_i}\zeta_i[\eta_i^{\beta-1}(1-s)^{\beta-1}-(\eta_i-s)] & (t\in[0,\ 1]) \\ \dfrac{t^{\beta-1}}{B\Gamma(\beta)}\sum_{\eta_i\le s\le 1}\zeta_i\eta_i^{\beta-1}(1-s)^{\beta-1} & (t\in[0,\ 1]) \end{cases}$$

$$H(t,\ s)=H_1(t,\ s)+H_2(t,\ s)$$

$$B=1-\sum_{i=1}^{m-2}\zeta_i\eta_i^{\beta-1}$$

이다.

정의 1 함수 $x(t)$가 다음과 같은 조건들을 만족시킬 때 경계값문제 (1)－(3)의 풀이라고 부른다.

① $x\in\{y\,|\,y\in C[0,\ 1],\ D_{0+}^{\gamma}y\in C[0,\ 1],\ D_{0+}^{\alpha}y\in C[0,\ 1],\ \varphi_p(D_{0+}^{\alpha}y)\in C[0,\ 1]\}$이다.

② $x(t)$는 미분방정식 (1)과 경계조건 (2)－(3)을 만족시킨다.

E를 노름 $\|u\|:=\max_{0\le t\le 1}|u(t)|$가 도입된 바나흐공간 $C[0,\ 1]$이라고 하고

$$P=\{u\in E\,|\,u(t)\ge 0,\ t\in[0,\ 1]\}$$

을 생각하자.

정의 2 함수 $x(t)$가 다음과 같은 조건들을 만족시킬 때 경계값문제 (1)－(3)의 정인 풀이라고 부른다.

① $x\in P$이다.

② $x(t)$는 경계값문제 (1)－(3)의 풀이이다.

보조정리 3[1] 연산자 A가 바나흐공간 X의 유계닫긴불룩모임 D를 자체로 넘기는 완전련속연산자이면 D에는 연산자 A의 부동점이 존재한다.

가정 1 $\exists\sigma_1,\ \sigma_2\in(0,\ 1);\ \lim_{t\to 0+}t^{\sigma_0}q(t)=q_0>0,\ \lim_{t\to 1-}(1-t)^{\sigma_1}q(t)=q_1>0$

보조정리 4 가정 1이 성립한다고 하자. 그리고 임의의 $\beta\in(1,\ 2]$와 임의의 $F\in C[0,\ 1]$에 대하여 함수 $K(t)$를 다음과 같이 정의하자.

$$K(t):=\int_0^t(t-s)^{\beta-1}q(s)F(s)ds$$

그러면 닫긴구간 $[0,\ 1]$에서 $K(t)<+\infty$이다.

증명 $q\in C(0,\ 1),\ F\in C[0,\ 1]$이고 $q(t)$가 $t=0$과 $t=1$에서 특이성을 가지므로 다음의 사실들이 성립한다.

$F\in C[0,\ 1]$이라는 사실로부터 $\exists M_F\ge 0;\ \forall t\in[0,\ 1],\ |F(t)|\le M_F$이다.

$\lim_{t\to 0+}t^{\sigma_0}q(t)=q_0>0$이므로 $\exists\delta_1>0;\ \forall t(0<t<\delta_1),\ |t^{\sigma_0}q(t)-q_0|<q_0/2$이 성립된다. 이때 $|t^{\sigma_0}q(t)-q_0|\le q_0/2$은 $q_0/2<t^{\sigma_0}q(t)<3q_0/2$과 동등하다.

또한 $\lim_{t\to 1-}(1-t)^{\sigma_1}q(t)=q_1>0$이므로 $\exists\delta_2>0;\ \forall t(1-\delta_2<t<1),\ |(1-t)^{\sigma_1}q(t)-q_1|<q_1/2$이 성립된다. 마찬가지로 $|(1-t)^{\sigma_1}q(t)-q_1|<q_1/2$은 $q_1/2<(1-t)^{\sigma_1}q(t)<3q_1/2$과 동등하다. 이제 $\delta:=\min\{1/4,\ \delta_1,\ \delta_2\}$로 놓으면 다음의 식들이 성립된다.

$$\forall t\in(0,\ \delta),\ t^{\sigma_0}q(t)<3q_0/2$$

$$\exists M_q\ge 0;\ \forall t\in[\delta,\ 1-\delta],\ |q(t)|\le M_q$$

$$\forall t\in(1-\delta,\ 1),\ (1-t)^{\sigma_1}q(t)<3q_1/2$$

이 사실들을 리용하면 닫긴구간 $[0,\ 1]$에서 $K(t)<+\infty$임을 쉽게 증명할수 있다.(증명끝)

편리상

$$\overline{M}_q := \frac{3}{2} q_0 B(\beta,\ 1-\sigma_1) + \frac{1}{\beta} M_q + \frac{3}{2(\beta-\sigma_2)} q_1$$

로 놓자.

보조정리 5 보조정리 4에서 정의된 함수 $K(t)$는 $K \in C[0,\ 1]$인 함수이다.

다음의 적분방정식을 생각하자.

$$x(t) = \int_0^1 G(t,\ s)\varphi_p^{-1}\left(\int_0^1 H(s,\ \tau)q(\tau)f(\tau,\ x(\tau))d\tau\right)ds \tag{8}$$

정의 3 함수 $x(t)$가 다음과 같은 조건들을 만족시킬 때 적분방정식 (8)의 풀이라고 부른다.

① $x \in C[0,\ 1]$이다.

② $x(t)$는 적분방정식 (8)을 만족시킨다.

보조정리 6 $x(t)$가 경계값문제 (1)－(3)의 정인 풀이이기 위하여서는 $x(t)$가 적분방정식 (8)의 풀이일것이 필요하고 충분하다.

$x \in P$에 대하여 연산자 T를 다음과 같이 정의한다.

$$Tx(t) = \int_0^1 G(t,\ s)\varphi_q\left(\int_0^1 H(s,\ \tau)q(\tau)f(\tau,\ x(\tau))d\tau\right)ds \tag{9}$$

여기서 q는 $1/p+1/q=1$을 만족시키는 수이며 이때 $\varphi_q = \varphi_p^{-1}$이라는 사실이 알려져있다.

그러면 함수 $x(t)$가 적분방정식 (8)의 풀이라는것은 $x(t)$가 연산자 T의 부동점이라는 사실과 동등하다.

보조정리 7 가정 1이 성립한다고 하자. 그러면

$$T(P) \subset P$$

가 성립된다.

증명 보조정리 5로부터 $T(P) \subset E$는 쉽게 알수 있으며 임의의 $s,\ t \in [0,\ 1]$에 대하여 $G(t,\ s) \ge 0,\ H(t,\ s) \ge 0$이다. 또한 $f \in C([0,\ 1]\times[0,\ +\infty),\ [0,\ +\infty)),\ q \in C((0,\ 1),\ [0,\ +\infty))$이므로 임의의 $x \in P$에 대하여 $Tx \in P$가 분명히 성립된다.(증명끝)

보조정리 8 가정 1이 성립한다고 하자. 그러면 $T: P \to P$는 완전련속연산자이다.

가정 2 $\exists F_0 \ge 0;\ F_0 = \lim\limits_{x\to 0+} \sup\limits_{t\in[0,\ 1]} \dfrac{f(t,\ x)}{\varphi_p(x)}$

정리 가정 1, 2가 성립한다고 하자. 이때

$$F_0 < F_c \tag{10}$$

이면 경계값문제 (1)－(3)은 적어도 1개의 정인 풀이를 가진다. 여기서

$$F_c = \frac{(\alpha-\gamma)^{p-1} A^{p-1} B\Gamma(\alpha)^{p-1}\Gamma(\beta)}{\overline{M}_q}$$

이다.

참 고 문 헌

[1] 정광호 등; 근사해석, **김일성**종합대학출판사, 223～273, 주체94(2005).
[2] 정금성 등; 조선민주주의인민공화국 과학원통보, 5, 3, 주체106(2017).
[3] Z. Lü et al.; Advances in Difference Equations, 69, 1, 2014.
[4] Y. Qiao et al.; Advances in Difference Equations, 8, 1, 2017.

주체107(2018)년 3월 10일 원고접수

Existence of Positive Solutions for a Multi-point Boundary Value Problem of *p*-Laplacian Fractional Differential Equation with Singularity with Respect to Time Variable

Jong Kum Song, *So Jong Hyok*

In this paper, we investigated the existence of positive solutions of a kind of multi-point boundary value problem for nonlinear fractional differential equation with *p*-Laplacian operator.
Our problem involved a nonlinear singular function with respect to time variable and we obtained the existence results of positive solutions using the Schauder fixed point theorem.

Key words: fractional differential equation, multi-point boundary value problem, *p*-Laplacian operator