

## 유효자리수정확도에 기초한 불록2차제한을 가진 불록계획법 문제에 대한 내점법알고리즘의 걸음수평가

정일형, 리홍일

본문에서는 유효자리수정확도에 기초하여 불록2차제한을 가진 불록계획법문제를 푸는 내점법으로서 허용형주경로추적법을 리용한 알고리즘의 다항식성을 평가하였다.

선행연구[3]에서는 정확한 자료를 취급하는 경우에 불록계획법문제를 푸는 내점법알고리즘의 걸음수를, 선행연구[2]에서는 유효자리수정확도에 기초하여 선형계획법문제에 대한 내점법알고리즘의 걸음수를 평가하였다.

선행연구[1]에서는 선형계획법문제의 조건수에 대한 평가를 진행하고 그것에 기초하여 내점법알고리즘의 다항식성을 평가하였다.

우리는 유효자리수정확도에 기초하여 불록2차제한을 가진 불록계획법문제를 푸는 내점법으로서 허용형주경로추적법을 리용한 알고리즘의 다항식성을 평가하였다.

다음과 같은 불록2차제한을 가진 불록계획법문제를 보기로 하자.

$$f_i(x) \leq 0 \ (i=1, \dots, m), \ c^T x \Rightarrow \min \quad (1)$$

여기서  $f_i(x) = x^T Q_i x / 2 + P_i x + b_i$  는 불록함수이고  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $Q_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $P_i \in \mathbf{R}^n$ ,  $b_i \in \mathbf{R}$ ,  $m \geq n$  이다.

이 문제의 쌍대문제는 다음과 같다.

$$\sum_{i=1}^m y_i \nabla f_i(x) + c = 0, \ y_i \geq 0, \ i=1, \dots, m \quad (2)$$

$$c^T x + \sum_{i=1}^m y_i f_i(x) \Rightarrow \max$$

여기서  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbf{R}^n$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbf{R}^m$  이다.

문제 (1)과 그것의 쌍대문제 (2)를  $\alpha = (Q, P, b, c)$  로 표현하기로 한다. 여기서

$$Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_m)^T \in \mathbf{R}^{(mn) \times n}, \ P = (P_1, P_2, \dots, P_m)^T \in \mathbf{R}^{m \times n}$$

주어진 문제에 대하여 노름을  $\|\alpha\|_\infty = \max\{\|Q\|_\infty, \|P\|_\infty, \|b\|_\infty, \|c\|_\infty\}$  와 같이 정의한다.

문제들의 공간에서 모임

$$F = \left\{ (Q, P, b, c) \in \mathbf{R}^L \mid \exists x \in \mathbf{R}^n, \exists y \in \mathbf{R}^m : f_i(x) \leq 0, \ i=1, \dots, m, \sum_{i=1}^m y_i \nabla f_i(x) + c = 0, \ y \geq 0 \right\}$$

$$L = (mn) \times n + m \times n + n + m$$

은 허용구역이 비지 않고 최량목적함수값이 유계인 문제들의 모임이다.

$\alpha = (Q, P, b, c)$  에 대하여 거리  $\rho(\alpha) = \text{dist}_\infty(\alpha, \partial F) = \inf\{\|\Delta\alpha\|_\infty \mid \alpha + \Delta\alpha \in \partial F\}$  는 문제  $\alpha$ 로부터  $\partial F$ 까지의 거리를 나타낸다. 여기서  $\partial F$  는 모임  $F$ 의 경계를 나타낸다.

임의의 문제에 대하여 걸수들을 상수배하여도 허용구역과 최량값이 달라지지 않으므로  $\|\alpha\|_\infty \leq 1$ 로 가정한다. 이 가정밑에서는  $\rho(\alpha) \leq 1$ 로 된다.

주어진 문제  $\alpha = (Q, P, b, c)$ 에 대하여 문제 (1)의 허용구역은 다음과 같다.

$$P(\alpha) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid f_i(x) \leq 0 \ (i=1, \dots, m)\}$$

허용구역  $P(\alpha)$ 는 유계이고 비지 않은 내부를 가지고있다고 가정한다.

주어진 블록2차제한을 가진 블록계획법문제를 풀기 위한 한가지 내점알고리즘을 보기로 하자.[3]

$\Phi(x, \mu) = \frac{c^T x}{\mu} - \sum_{i=1}^m \log(-f_i(x))$ 를 블록계획법문제 (1)의 로그장벽함수라고 할 때 로그

장벽함수  $\Phi(x, \mu)$ 의 그라디언트와 2계편도함수행렬은 다음과 같다.

$$g(x, \mu) = \nabla \Phi(x, \mu) = \frac{c}{\mu} + A(x)^T D(x)^{-1} e_m, \quad H(x, \mu) = \nabla^2 \Phi(x, \mu) = \sum_{i=1}^m \frac{Q_i}{-f_i(x)} + A(x)^T D(x)^{-2} A(x)$$

$$e_m = (1, \dots, 1)^T, \quad A(x) = (a_1(x), \dots, a_m(x))^T, \quad a_i(x) = Q_i x / 2 + P_i, \quad D(x) = \text{diag}(-f_1(x), \dots, -f_m(x))$$

점  $(x, \mu)$ 에서 로그장벽함수의 뉴턴방향은  $h(x, \mu) = -H(x, \mu)^{-1} g(x, \mu)$ 이다.

논문에서는 허용형주경로추적법[3]에 대하여 유효자리수정확도를 도입한 경우에 알고리즘의 걸음수를 평가하려고 한다.

주어진 블록2차제한을 가진 블록계획법문제 (1)은 다음과 같이 표현된다.

$$A(x)x + b \leq 0, \quad c^T x \Rightarrow \min \quad (3)$$

주어진 문제  $\alpha$ 가 유계인 최량값  $z^*$ 을 가진다고 하면  $\exists K \geq 1; z^* \leq K$ 이다.

주어진 문제에 제한  $c^T x \leq K$ 를 추가하여도 최량풀이에는 변화가 없으므로 문제 (3)에 이 제한까지 추가한 블록계획법문제  $\bar{\alpha}$ 에 주경로추적법알고리즘을 적용한다.

$$\bar{A}(x) = \begin{pmatrix} A(x) \\ c^T \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b \\ -K \end{pmatrix}, \quad \bar{c} = c \quad (4)$$

확장문제  $\bar{\alpha}$ 에 해당하는 로그장벽함수의 그라디언트와 2계편도함수행렬은 다음과 같다.

$$g(x, \mu) = \frac{c}{\mu} + \bar{A}(x)^T \bar{D}(x)^{-1} e_{m+1}, \quad H(x, \mu) = \sum_{i=1}^m \frac{Q_i}{-f_i(x)} + \bar{A}(x)^T \bar{D}(x)^{-2} \bar{A}(x)$$

$$\bar{D}(x) = \text{diag}(-f_1(x), \dots, -f_m(x), K - c^T x) \quad (5)$$

유효자리수정확도에 기초한 알고리즘의 걸음수평가를 진행하기에 앞서 행렬의 고유값과 관련한 다음의 몇가지 성질을 증명한다.

**성질 1** [2]  $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ,  $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_m)$ ,  $\bar{\lambda}_{\min}$ ,  $\bar{\lambda}_{\max}$ 를 각각 행렬  $A^T D^{-2} A$ 의 최소, 최대고유값,  $\lambda_{\min}$ ,  $\lambda_{\max}$ 를 각각 행렬  $A^T A$ 의 최소, 최대고유값이라고 하자.

이때  $d_{\max} = \max_i \{d_i\}$ ,  $d_{\min} = \min_i \{d_i\}$ 라고 하면 다음의 결과가 성립된다.

$$\bar{\lambda}_{\min} \geq \lambda_{\min} d_{\max}^{-2}, \quad \bar{\lambda}_{\max} \leq \lambda_{\max} d_{\min}^{-2} \quad (6)$$

**성질 2**  $\alpha = (Q, P, b, c) \in \text{int}(F)$ ,  $x \in \text{int}(P(\bar{\alpha}))$ ,  $\lambda_{\min}$ 을  $\bar{A}(x)^T \bar{A}(x)$ 의 최소고유값이라고 하면 다음과 같다.

$$\lambda_{\min} \geq \rho^2 / n, \quad \rho = \rho(\alpha) \quad (7)$$

**증명**  $\Sigma = \{B \in \mathbf{R}^{(m+1) \times n} \mid \text{rank}(B) < n\}$ 이라고 할 때  $\lambda_{\min}^{1/2} = \text{dist}_2(\bar{A}(x), \Sigma)$ 이다. 즉  $\exists E \in \mathbf{R}^{(m+1) \times n}; \bar{A} + E \in \Sigma, \|E\|_2 = \lambda_{\min}^{1/2}$ 이다.[2] 따라서  $\exists u \neq 0; (\bar{A} + E)u = 0$ 이다.

$E := \begin{pmatrix} \Delta A \\ \Delta c \end{pmatrix}$  라고 하면  $(A(x) + \Delta A)u = 0$ ,  $(c + \Delta c)u = 0$  이다. 이것은 문제  $(Q, P + \Delta A, b, \Delta c)$

가 비유계풀이를 가지는 문제들의 모임에 속한다는것을 의미한다.

따라서  $\rho \leq \|(0, \Delta A, 0, \Delta c)\|_\infty = \|E\|_\infty$  이다.

$\|E\|_\infty \leq \|E\|_F \leq \sqrt{n} \|E\|_2$  이므로 성질의 결과가 성립된다.(증명끝)

성질 3  $\alpha = (Q, P, b, c) \in \text{int}(F)$ ,  $x \in \text{int}(P(\bar{\alpha}))$  이면  $\|x\|_1 \leq K/\rho$  가 성립된다. 여기서  $K$  는 위에서 언급한 최량풀이의 상계로서  $K = \|\bar{b}\|_\infty$  로 취할수 있다.

성질 4  $\alpha = (Q, P, b, c) \in \text{int}(F)$ ,  $x \in \text{int}(P(\bar{\alpha}))$ ,  $d_i = -f_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $d_{m+1} = K - c^T x$  라고 하면  $d_i \leq 5K^2/(2\rho^2)$ ,  $i = 1, \dots, m+1$  이다.

증명  $d_i = (x^T Q_i x + P_i x + b_i)/2 \leq \|Q_i\|_\infty \|x\|_1^2/2 + \|P_i\|_\infty \|x\|_1 + \|b\|_\infty$  가 성립된다.

따라서  $\|d\|_\infty = 1$ ,  $\rho \leq 1$ ,  $K \geq 1$  이므로  $d_i \leq K^2/(2\rho^2) + K/\rho + K \leq 5K^2/(2\rho^2)$  이다.(증명끝)

확장문제  $\bar{\alpha}$  의 로그장벽함수의 2계편도함수행렬 (5)의 최소, 최대고유값을 평가하자.

$\omega_{\min}$ ,  $\omega_{\max}$ ,  $\lambda_{\min}$ ,  $\lambda_{\max}$ ,  $\bar{\lambda}_{\min}$ ,  $\bar{\lambda}_{\max}$  를 각각 2계편도함수행렬  $H$  와 행렬  $\bar{A}(x)^T \bar{A}(x)$ ,  $\bar{A}(x)^T \bar{D}(x)^{-2} \bar{A}(x)$  의 최소, 최대고유값이라고 하자.

$d_{\min} = \min_i \{d_i\}$ ,  $d_{\max} = \max_i \{d_i\}$  라고 할 때 주어진 문제의 임의의 내점에 대하여  $\bar{d} > 0$ ,  $d_i \geq \bar{d}$ ,  $i = 1, \dots, m+1$  인  $\bar{d}$  를 택할수 있으면  $d_{\min} \geq \bar{d}$  이고  $d_{\max} \leq 5K^2/(2\rho^2)$  이다.

성질 5  $\omega_{\min} \geq 4\rho^6/(25nK^4)$  (8)

증명 어떤 행렬에 반정의정값행렬을 더했을 때 최소고유값은 원래행렬의 최소고유값보다 커진다.

$H(x, \mu) = \sum_{i=1}^m \frac{Q_i}{-f_i(x)} + \bar{A}(x)^T \bar{D}(x)^{-2} \bar{A}(x)$  이므로  $\omega_{\min} \geq \bar{\lambda}_{\min}$  이다. 따라서 식 (6), (7)로부터

$\omega_{\min} \geq \lambda_{\min} \geq \lambda_{\min} d_{\max}^{-2} \geq \rho^2/n \cdot 4\rho^4/(25K^4) = 4\rho^6/(25nK^4)$  이 성립된다.(증명끝)

주어진 문제  $\bar{\alpha}$  의 최량풀이  $x^*$  에 대하여 부등식이 등식으로 되는 제한을 유효제한이라고 한다.

유효제한에 대응되는  $\bar{A}(x)$ ,  $\bar{D}(x)$  의 행렬을 각각  $\hat{A}(x)$ ,  $\hat{D}(x)$ , 비유효제한에 대응되는  $\bar{A}(x)$ ,  $\bar{D}(x)$  의 행렬을 각각  $\tilde{A}(x)$ ,  $\tilde{D}(x)$  라고 하자.

그리고  $\hat{A}(x)^T \hat{D}(x)^{-2} \hat{A}(x)$  의 최소, 최대고유값을  $\nu_{\min}$ ,  $\nu_{\max}$  이라고 하면 분명히  $\bar{A}(x)^T \bar{D}(x)^{-2} \bar{A}(x) = \hat{A}(x)^T \hat{D}(x)^{-2} \hat{A}(x) + \tilde{A}(x)^T \tilde{D}(x)^{-2} \tilde{A}(x)$  이고 어떤 행렬에 반정의정값행렬을 더했을 때 최대고유값은 원래 행렬의 최대고유값보다 커지므로  $\bar{\lambda}_{\max} \geq \nu_{\max}$  이다.

성질 6  $\exists \tilde{d} (0 < \tilde{d} < \bar{d}) : \omega_{\max} \leq n(m+1)/\tilde{d}^2$  (9)

증명 선행연구[4]로부터  $\exists M > 0$ ,  $|\omega_{\max} - \nu_{\max}| \leq M/\bar{d}$  이다. 따라서 식 (6)과  $\bar{\lambda}_{\max} \geq \nu_{\max}$ 로부터  $\omega_{\max} \leq \nu_{\max} + M/\bar{d} \leq \bar{\lambda}_{\max} + M/\bar{d} \leq \lambda_{\max} d_{\min}^{-2} + M/\bar{d} \leq \lambda_{\max}/\bar{d}^2 + M/\bar{d}$  이 성립된다.

한편  $\lambda_{\max} = \|\bar{A}^T \bar{A}\|_2$  이고  $\|a_i^T\|_\infty \leq 1$  이므로 다음과 같다.

$$\|\bar{A}\|_2 = \sup \frac{\|\bar{A}x\|_2}{\|x\|_2} = \sup \frac{\sqrt{(a_1^T x)^2 + (a_2^T x)^2 + \dots + (a_{m+1}^T x)^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}} \leq \frac{\sqrt{(m+1)(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}} \leq \sqrt{n(m+1)}$$

마찬가지로  $\|\bar{A}^T\|_2 \leq \sqrt{n(m+1)}$  이므로  $\lambda_{\max} \leq n(m+1)$  이다.

따라서  $\omega_{\max} \leq n(m+1)/\bar{d}^2 + M/\bar{d}$  이므로  $0 < \tilde{d} < \bar{d}$  인  $\tilde{d}$  을 적당히 택하면  $\omega_{\max} \leq n(m+1)/\tilde{d}^2$  이 성립된다.(증명끝)

**성질 7**  $\forall u \in \mathbf{R}^n$ ,  $\gamma_2 \|u\|_H \leq \|u\|_2 \leq \gamma_1 \|u\|_H$ ,  $\gamma_1 = 5\sqrt{n}K^2/(2\rho^3)$ ,  $\gamma_2 = \tilde{d}/\sqrt{n(m+1)}$

**증명**  $\|u\|_H^2 = u^T H u$  이므로  $\alpha_{\min} \|u\|_2^2 \leq \|u\|_H^2 \leq \alpha_{\max} \|u\|_2^2$  이다.

따라서 식 (8), (9)로부터 성질의 결과가 성립된다.(증명끝)

$\text{cond}(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$  를 행렬  $A$  의 조건수라고 하면  $\text{cond}(A) = \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$  이다.

**성질 8**  $\alpha = (Q, P, b, c) \in \text{int}(F)$ ,  $x \in \text{int}(P(\bar{\alpha}))$  이고  $H(x, \mu)$  를 확장문제  $\bar{\alpha}$  의 2계편도 함수행렬이라고 하면  $\text{cond}(H(x, \mu)) \leq 25n^2(m+1)K^4/(4\rho^6\tilde{d}^2)$  이다.

선행연구[3]에서는 유효자리수정확도를 도입하지 않은 경우에 알고리즘의 걸음수를 평가하였다.

우에서 증명한 성질들을 리용하여 다음의 보조정리들을 얻는다.

**보조정리 1** 점  $(x, \mu)$  에서의 뉴턴방향  $h(x, \mu) = -H(x, \mu)^{-1}g(x, \mu)$  를 계산할 때 (2진)유효자리수정확도  $\bar{t} = \log(f(m, n)) + 4\log(K) + 6\log(1/\rho) + 2\log(1/\tilde{d})$  를 리용하면 뉴턴법알고리즘은  $\|h - \tilde{h}\|_2 / \|\tilde{h}\|_2 \leq r(n) = g_1(n)/g_2(n)$  과 같은 뉴턴방향  $\tilde{h}(x, \mu)$  를 계산한다. 여기서  $f(m, n)$  은  $m$  과  $n$  의 다항식이고  $g_1(n)$  과  $g_2(n)$  은  $n$  의 다항식이다.

**보조정리 2**  $\|\tilde{h}(x, \mu)\|_{H(x, \mu)} > 1/8$  일 때  $t_1 = \bar{t} + \log(1/\beta_1)$  의 유효자리수정확도를 리용하면 다음의 결과들이 성립된다.

$$\textcircled{1} \|x - x(\mu)\|_{H(x, \mu)} \leq 5\|\tilde{h}(x, \mu)\|_{H(x, \mu)} / 2$$

여기서  $\beta_1 \leq \min\{1, \tilde{d}\rho^3/(f_1(m, n)K^2)\}$  이고  $x(\mu)$  는 중심곡선위의 점,  $f_1(m, n)$  은  $m$  과  $n$  의 다항식이다.

$$\textcircled{2} \Phi(x, \mu) - \Phi(x(\mu), \mu) \leq 4\|\tilde{h}(x, \mu)\|_{H(x, \mu)}^2$$

$$\textcircled{3} |c^T x - c^T x(\mu)| \leq \mu\sqrt{m+1}/2$$

**보조정리 3**  $\|\tilde{h}(x, \mu)\|_{H(x, \mu)} > 1/8$  일 때  $t_2 = t_1 + \log(1/\beta_2)$  의 유효자리수정확도를 리용하면 내점  $x \in \text{int}(P(\bar{\alpha}))$  에서 뉴턴방향으로 한번수탐색을 진행할 때 걸음폭  $\lambda = 1/(9\|\tilde{h}\|_H)$  을 취하면 장벽함수값의 변화량  $\Delta\Phi$  를  $\Delta\Phi > 1/140$  과 같이 취할수 있다. 여기서  $\beta_2 = \min\{1, \tilde{e}\tilde{d}^2\rho^{10}/(f_2(m, n)K^7)\}$  이다.

주경로추적알고리즘은 크게 두가지 반복부분으로 나누어볼수 있다. 즉 장벽파라미터  $\mu$  를 감소시켜  $|z^* - c^T x^k| < \varepsilon$  인  $x^k$  을 얻는 외부반복부분과 한 외부반복상에서 고찰할 때 중심곡선근방에서 떨어져있으면 중심곡선근방으로 접근시키는 내부반복부분으로 구성된다.

보조정리 1-3을 리용하면 블록2차제한을 가진 블록계획법문제  $\alpha = (Q, P, b, c)$  에 대하여 주경로추적법알고리즘은 유효자리수정확도  $t_1$  을 리용하면 허용조건  $(\|h(x^0, \mu^0)\|_{H(x^0, \mu^0)} < \tau = 1/8)$  을 만족시키는 초기점  $(x^0, \mu^0)$  으로부터 출발하여

$$P = \left\lceil \frac{1}{\log(1-\theta)} \left( 1 + \log \left( (m+1) + \frac{(m+1)^{1/2}}{2} \right) \right) + 2\log \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) \right\rceil$$

번의 외부반복만에 허용오차가  $\varepsilon$  인 최량풀이를 계산하고 유효자리수정확도  $t_2$  를 리용하면 임의의 외부반복우에서  $Q \leq \frac{1}{\delta} \left( 1 + \left( \frac{\theta}{1-\theta} \right) (\theta(m+1) + \sqrt{m+1}) \right)$  번의 내부반복만에 허용조건  $(\|h(x^k, \mu^k)\|_{H(x^k, \mu^k)} < \tau = 1/8)$  을 만족시키는 점을 계산한다.

이 논문에서 취급한 허용형주경로추적법알고리즘에서는 허용조건을 만족시키는 초기점  $(x^0, \mu^0)$  이 주어진 경우에 논의를 진행하였다.

이제 임의의 내점으로부터 출발하여 허용조건을 만족시키는 초기점을 얻는 뉴턴법알고리즘의 걸음수를 평가하면 다음의 결과를 얻을수 있다.

$\alpha = (Q, P, b, c) \in \text{int}(F)$ ,  $\tilde{x} \in \text{int}(P(\bar{\alpha}))$ ,  $s = \min_i (-\tilde{f}_i(x))$ ,  $i=1, \dots, m+1$  이라고 하자.

뉴턴법알고리즘은 유효자리수정확도

$$\bar{v} = O(\log m + \log n + (m+1)(2 \log K + 2 \log(1/\rho) + \log(1/s)))$$

를 리용하면 허용조건  $\|h(x^0, +\infty)\|_{H(x^0, +\infty)} < \tau = 1/8$  을 만족시키는 점  $(x^0, +\infty)$  를 걸음수  $R \leq (m+1)(2 + 2 \log K + 2 \log(1/\rho) + \log(1/s))/\delta$  만에 계산한다.

정리 불록2차제한을 가진 불록계획법문제  $\alpha = (Q, P, b, c) \in \text{int}(F)$  에 대하여 주경로추적알고리즘은 허용구역안의 임의의 내점으로부터 출발하여 유효자리수정확도  $t = O(\log m + \log n + \log(1/\varepsilon) + \log(1/\tilde{d}) + m(\log K + \log(1/\rho) + \log(1/s)))$  을 리용하면

$$K \leq PQ + R = O\{\theta^2 / [(1-\theta) \log(1-\theta)] m(\log m + \log(1/\varepsilon)) + m(\log K + \log(1/\rho) + \log(1/s))\}$$

번의 걸음만에 허용오차가  $\varepsilon$  인 풀이를 계산한다.

## 참 고 문 헌

- [1] J. Dunagan et al.; Math. Program., 126, 315, 2011.
- [2] J. R. Vera; Math. Program., 80, 91, 1998.
- [3] D. D. Hertog et al.; J. Optim. Theory Appl., 73, 1, 1992.
- [4] M. H. Wright; Math. Program., 67, 265, 1994.

주체107(2018)년 6월 5일 원고접수

## Analysis of the Number of Iterations of Interior-Point Algorithm for Convex Programming with Convex Quadratic Constraints Based on Finite Precision

Jong Il Hyong, Ri Hong Il

We make the logarithmic barrier function for the convex programming with quadratic convex constraints and obtain upper bound of its Hessian's condition number. And we discuss the number of total iterations of the feasible primal interior-point algorithm for convex programming with convex quadratic constraints based on finite precision.

Key words: convex programming, finite precision