김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제2호

곱하기모듈의 씨스펙트르에서 기초열린모임들의 콤팍트성

한성철, 배원석

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《우리는 발전된 나라들에서 이룩한 과학기술의 성과를 널리 받아들이고 그것을 더욱 발전시킴으로써 최신과학기술의 높은 봉우리를 빨리 점령하여야 합니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제11권 142페지)

선행연구[2]에서는 가환환우의 곱하기모듈에 대하여 씨스펙트르에서 기초열린모임은 모두 콤팍트모임이라는 명제가 정식화되였으나 그 증명은 본질적인 오유를 포함하고있고 완성되지 못하였다. 사실 이 명제를 증명하는것은 씨스펙트르의 위상적성질에 대한 연구에서 중요한 의의를 가진다. 론문에서는 가환환우의 곱하기모듈의 씨스펙트르에서 매 기초열린모임은 콤팍트모임이라는것을 새롭게 증명하며 선행연구[2]에서의 증명의 관건적인 오유를 보여주는 반례를 서술한다.

R는 령이 아닌 단위원소를 가진 임의의 가환환이고 Λ는 임의의 비지 않은 첨수모임이라고 하자. 그리고 선행연구 [1, 2]에서 나오는 몇가지 개념들과 결과들을 소개하자.

$R-$모듈 M은 임의의 부분모듈 N에 대하여 R의 어떤 이데알 I가 있어서 $N=IM$일 때 곱하기$R-$모듈이라고 부른다. 론문에서 M은 곱하기$R-$모듈이다.

M의 부분모듈 N과 K에 대하여 R의 이데알 I와 J가 있어서 $N=IM$, $K=JM$일 때 $N\cdot K:=IJM$을 N과 K의 적이라고 부른다. 또한 M의 원소 m과 n에 대하여 $m\cdot n:=\langle m\rangle\cdot\langle n\rangle$으로 약속한다. 그리고 N이 M의 부분모듈일 때 $N\le M$으로 표시하고 $(N:M):=\{r\in R\mid rM\subseteq N\}$으로 놓는다. 또한 M의 어떤 참부분모듈 N이 있어서 임의의 $r(\in R)$, $x(\in M)$에 대하여 $rx\in N$이면 $x\in N$ 또는 $r\in(N:M)$일 때 N을 M의 씨부분모듈이라고 부른다. 그리고 M의 씨부분모듈들전부의 모임을 $\mathrm{Spec}(M)$으로 표시한다. 론문에서는 $\mathrm{Spec}(M)\neq\varnothing$이라고 가정한다. 또한 $N\le M$일 때 N을 포함하는 M의 씨부분모듈들전부의 사귐을 N의 근기라고 부르고 $\sqrt{N}$으로 표시한다. 그리고 N을 포함하는 M의 씨부분모듈이 없는 경우에는 $\sqrt{N}:=M$으로 약속한다.

$\varnothing\neq S\subseteq M$일 때 $V(S):=\{P\in\mathrm{Spec}(M)\mid S\subseteq P\}$로 놓자.

보조정리 1 [1] 곱하기$R-$모듈 M의 참부분모듈 P에 대하여 다음의 사실들은 서로 동등하다.

① P는 M의 씨부분모듈이다.

② 만일 $U,\ V\le M$이고 $U\cdot V\subseteq P$이면 $U\subseteq P$ 또는 $V\subseteq P$이다.

③ 만일 $m,\ m'\in M$이고 $m\cdot m'\subseteq P$이면 $m\in P$ 또는 $m'\in P$이다.

보조정리 2 [2] M이 곱하기$R-$모듈일 때 다음의 사실들이 성립한다.

① 만일 $N,\ K\le M$이면 $V(N)\cup V(K)=V(NK)=V(N\cap K)$이다.

② 임의의 $\lambda(\in\Lambda)$에 대하여 $N_\lambda\le M$이면 $\displaystyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda}V(N_\lambda)=V\left(\sum_{\lambda\in\Lambda}N_\lambda\right)$이다.

③ 만일 $N,\ K\le M$이고 $V(N)\subseteq V(K)$이면 $K\subseteq\sqrt{N}$이다.

M 이 곱하기 $R-$ 모듈일 때 $\mathrm{Spec}(M)$ 의 부분모임족 $\{V(S)\mid \varnothing\neq S\subseteq M\}$ 은 닫긴모임에 관한 위상공리들을 만족시킨다. 이렇게 도입되는 위상을 $\mathrm{Spec}(M)$ 우의 자리스끼위상이라고 부른다. 그리고 이때 $\mathrm{Spec}(M)$ 을 M 의 씨스펙트르라고 부른다.

$\mathrm{Spec}(M)$ 의 열린모임 $\mathrm{Spec}(M)\setminus V(S)$ 를 $D(S)$ 로 표시하자. 그리고 매 원소 $m(\in M)$ 에 대하여 $V(m):=V(\langle m\rangle)$, $D(m):=D(\langle m\rangle)$ 으로 놓자. 이때 $D(m)$ 을 $\mathrm{Spec}(M)$ 의 기초열린모임이라고 부른다.

보조정리 3[2] M 이 곱하기 $R-$ 모듈이면 $\{D(m)\mid m\in M\}$ 은 $\mathrm{Spec}(M)$ 의 열린모임토대로 된다.

보조정리 4[1] N 이 곱하기 $R-$ 모듈 M 의 참부분모듈이고 $A=(N:M)$ 이면 $\sqrt{N}=\sqrt{A}M$ 이다.

정리[2] M 이 곱하기 $R-$ 모듈이면 $\mathrm{Spec}(M)$ 의 매 기초열린모임은 콤팍트모임이다.

증명 보조정리 3에 의하여 기초열린모임들로 이루어진 피복만 생각하면 된다. 그러므로 $D(f)$ 가 $\mathrm{Spec}(M)$ 의 기초열린모임이고 $D(f)\subseteq\bigcup_{t\in\Lambda}D(f_t)$ 라고 하자. 그리고 $N:=\langle\{f_t\mid t\in\Lambda\}\rangle$ 로 놓자. 그러면 보조정리 2의 ②에 의하여

$$V(f)\supseteq\bigcap_{t\in\Lambda}V(f_t)=V\left(\sum_{t\in\Lambda}\langle f_t\rangle\right)=V(N)$$

이다. 그런데 보조정리 2의 ③에 의하여 $\langle f\rangle\subseteq\sqrt{N}$ 이고 보조정리 4에 의하여 $\sqrt{N}=\sqrt{A}M$ 이다. 여기서 $A=(N:M)$ 이다. 그러므로 $f\in\langle f\rangle\subseteq\sqrt{A}M$ 이고 어떤 $r_1, \cdots, r_s$ $(\in\sqrt{A})$ 와 $m_1, \cdots, m_s(\in M)$ 가 존재하여 $f=\sum_{i=1}^{s}r_im_i$ 이다. $1\le i\le s$ 인 임의의 i 에 대하여 정의 옹근수 l_i 가 존재하여 $r_i^{l_i}\in A$ 이고 R 의 어떤 이데알 I_i 가 존재하여 $\langle m_i\rangle=I_iM$ 이다. 이제 $l:=\sum_{i=1}^{s}l_i$ 로 놓자. 그러면

$$f=\sum_{i=1}^{s}r_im_i\in\sum_{i=1}^{s}r_i\langle m_i\rangle=\sum_{i=1}^{s}r_iI_iM=\left(\sum_{i=1}^{s}r_iI_i\right)M$$

이고

$$f^l\subseteq\left(\sum_{i=1}^{s}r_iI_i\right)^lM\subseteq\left(\sum_{i=1}^{s}r_i^{l_i}I_i^{l_i}\right)M\subseteq\left(\sum_{i=1}^{s}r_i^{l_i}I_i\right)M=\sum_{i=1}^{s}r_i^{l_i}I_iM=\sum_{i=1}^{s}r_i^{l_i}\langle m_i\rangle=\sum_{i=1}^{s}\langle r_i^{l_i}m_i\rangle$$

이다. $1\le i\le s$ 인 임의의 i 에 대하여 $r_i^{l_i}m_i\in AM=N=\sum_{t\in\Lambda}\langle f_t\rangle$ 이므로

$$r_1^{l_1}m_1=r_{11}f_{11}+\cdots+r_{1n_1}f_{1n_1}$$
$$\cdots\qquad\cdots$$
$$r_s^{l_s}m_s=r_{s1}f_{s1}+\cdots+r_{sn_s}f_{sn_s}$$

로 표시된다. 여기서 $r_{ij_i}\in R$, $f_{ij_i}\in\{f_t\mid t\in\Lambda\}$ $(1\le i\le s$, $1\le j_i\le n_i)$이다. 그러므로 Λ 의 어떤 비지 않은 유한부분모임 Γ 가 존재하여

$$\{f_{ij_i}\mid 1\le i\le s,\ 1\le j_i\le n_i\}=\{f_t\mid t\in\Gamma\}$$

이다. 따라서 $1 \le i \le s$ 인 모든 i 에 대하여 $r_i^{l_i} m_i \in \langle \{ f_t \mid t \in \Gamma \} \rangle$ 이고 이로부터

$$f^l \subseteq \sum_{i=1}^{s} \langle r_i^{l_i} m_i \rangle \subseteq \langle \{ f_t \mid t \in \Gamma \} \rangle$$

이다. 그러므로 보조정리 1과 보조정리 2의 ②에 의하여

$$V(f) = V(f^l) \supseteq V(\langle \{ f_t \mid t \in \Gamma \} \rangle) = V\left(\sum_{t \in \Gamma} \langle f_t \rangle \right) = \bigcap_{t \in \Gamma} V(f_t)$$

이다. 따라서 $D(f) \subseteq \bigcup_{t \in \Gamma} D(f_t)$ 이다. 그러므로 $D(f)$ 는 콤팍트모임이다.(증명끝)

선행연구[2]에서의 정리의 증명에 대하여 관건적인 오유는 다음의 틀린 명제를 리용한것이다. 즉 곱하기 $R-$ 모듈 M 의 부분모듈 $N = \langle \{ f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \} \rangle$ 와 원소 $f (\in M)$ 에 대하여 만일 $\sqrt{\langle f \rangle} \subseteq \sqrt{N}$ 이면 Λ 의 어떤 유한부분모임 L 이 존재하여 $f = \sum_{i \in L} r_i f_i$ 이다. 여기서 $r_i \in \sqrt{(N:M)}$ $(i \in L)$이다.

만일 이 명제가 옳다면 분명히 $f \in N$ 이여야 한다. 그러나 다음의 반례는 우의 명제가 옳지 않다는것을 보여준다.

반례 곱하기 $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}-$ 모듈 $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ 에서 부분모듈 $\langle (4,\ 2) \rangle$ 를 포함하는 씨부분모듈들은 $(2\mathbf{Z}) \times \mathbf{Z}$ 와 $\mathbf{Z} \times (2\mathbf{Z})$ 뿐이므로

$$\sqrt{\langle (4,\ 2) \rangle} = ((2\mathbf{Z}) \times \mathbf{Z}) \bigcap (\mathbf{Z} \times (2\mathbf{Z})) = (2\mathbf{Z}) \times (2\mathbf{Z})$$

이다. 한편 $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ 의 원소 $(2,\ 4)$ 에 대하여 부분모듈 $\langle (2,\ 4) \rangle$ 를 포함하는 씨부분모듈들도 $(2\mathbf{Z}) \times \mathbf{Z}$ 와 $\mathbf{Z} \times (2\mathbf{Z})$ 뿐이므로

$$\sqrt{\langle (2,\ 4) \rangle} = ((2\mathbf{Z}) \times \mathbf{Z}) \bigcap (\mathbf{Z} \times (2\mathbf{Z})) = (2\mathbf{Z}) \times (2\mathbf{Z})$$

이다. 따라서 $\sqrt{\langle (2,\ 4) \rangle} = \sqrt{\langle (4,\ 2) \rangle}$ 가 성립하지만 $(2,\ 4) \notin \langle (4,\ 2) \rangle$ 이다.

참 고 문 헌

[1] R. Ameri; Int. J. Math. Sci., 27, 1715, 2003.
[2] R. Ameri; Houston J. Math., 36, 2, 337, 2010.

주체108(2019)년 12월 15일 원고접수

Compactness of Basic Open Sets in the Prime Spectrum of a Multiplication Module

Han Song Chol, Pae Won Sok

In this paper, we prove that every basic open set is compact in the prime spectrum of a multiplication module over a commutative ring with nonzero identity.

Keywords: multiplication module, prime submodule, Zariski topology