김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제4호

리만다양체에서 β－반대칭비계량접속의 호상접속에 대하여

량주영, 허달윤

선행연구[4]에서는 반대칭접속개념이 제시되였고 선행연구[5]에서는 꼬임률을 가진 계량접속이 연구되였다. 선행연구[10]에서는 리만다양체 $(M,\ g)$에서

$$\nabla_k g_{ij}=0,\ T_{ij}^k=\pi_j\delta_i^k-\pi_i\delta_j^k$$

를 만족시키는 접속을 반대칭계량접속으로 정의하고 접속 ∇에 관한 곡률텐소르가 령이면 레비－찌비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$이 도입된 리만다양체 $(M,\ g,\ \overset{\circ}{\nabla})$가 공형평탄다양체로 된다는것을 증명하였으며 리만다양체 $(M,\ g,\ \nabla)$가 일정곡률다양체로 되기 위한 조건을 밝혔다.

선행연구[2]에서는

$$\nabla_k g_{ij}=-\pi_i g_{jk}-\pi_j g_{ik},\ T_{ij}^k=\pi_j\delta_i^k-\pi_i\delta_j^k$$

를 만족시키는 반대칭비계량접속을 새롭게 정의하고 그 성질을 연구하였으며 접속 ∇에 관한 곡률텐소르가 령이면 리만다양체 $(M,\ g,\ \overset{\circ}{\nabla})$가 사영평탄다양체로 된다는것을 증명하였다. 선행연구[6, 7]에서는

$$\nabla_k g_{ij}=-2\pi_i g_{jk}-2\pi_j g_{ik},\ T_{ij}^k=\pi_j\delta_i^k-\pi_i\delta_j^k$$

를 만족시키는 새로운 반대칭비계량접속을 제시하고 그 성질을 밝혔으며 이 접속이 슈르의 정리의 조건을 만족시킨다는것을 증명하였다. 선행연구[1]에서는

$$\nabla_k g_{ij}=-(1+t)(\pi_i g_{jk}+\pi_j g_{ik}),\ T_{ij}^k=\pi_j\delta_i^k-\pi_i\delta_j^k$$

를 만족시키는 반대칭비계량접속을 정의하고 이 접속의 공액대칭성과 일정곡률성이 연구되였으며 선행연구[3]에서는 중력의 스칼라텐소르리론에 대한 기하학적모형으로 되는 반대칭비계량접속이 연구되였다. 선행연구[8]에서는 사영공형반대칭접속의 일정곡률성조건이 연구되였고 선행연구[9]에서는 중력마당과 전자기마당의 고전적통일리론에 반대칭접속의 호상접속이 리용되고있다는것이 연구되였다.

론문에서는 선행연구에서 이미 연구된 반대칭접속들을 특수경우로 포함하고있는 β－반대칭비계량접속을 제시하고 그것의 호상접속에 관한 평탄성, 공액대칭성, 일정곡률성조건을 구하려고 한다.

리만다양체 $(M,\ g)$에서 임의의 $\beta\in\mathbf{R}$에 대하여 식

$$\nabla_k g_{ij}=(\beta-1)(\pi_i g_{jk}+\pi_j g_{ik}),\ T_{ij}^k=\pi_j\delta_i^k-\pi_i\delta_j^k \tag{1}$$

를 만족시키는 접속 ∇를 β－반대칭비계량접속이라고 부르겠다.

$\beta=-t$이면 이 접속은 선행연구[1]에서 연구된 반대칭접속족이다.

β－반대칭비계량접속의 접속결수는

$$\Gamma_{ij}^k=\{{}_{ij}^{k}\}+\pi_j\delta_i^k-\beta g_{ij}\pi^k \tag{2}$$

이다. $\beta=1$이면 β－반대칭비계량접속 ∇는 선행연구[10]에서 연구된 반대칭계량접속이고 $\beta=1$이면 선행연구[2]에서 연구된 반대칭비계량접속이며 $\beta=-1$이면 선행연구[6, 7]에서

연구된 반대칭비계량접속이다. 이러한 사실로부터 β－반대칭비계량접속은 선행론문들에서 고찰된 반대칭비계량접속의 일반화로 되는 접속족이다. 선행연구[1]에서는 우에서 제시한 반대칭접속족을 연구하였으나 그것의 호상접속에 대해서는 연구하지 못하였다. 그러므로 β－반대칭비계량접속 ∇의 호상접속 $\overset{m}{\nabla}$을 보기로 하겠다.

식 (1)과 (2)로부터 호상접속 $\overset{m}{\nabla}$의 접속결수는

$$\overset{m}{\Gamma}{}_{ij}^{k}=\{{}_{ij}^{k}\}+\pi_i\delta_j^k-\beta g_{ij}\pi^k \tag{3}$$

이며 호상접속 $\overset{m}{\nabla}$은 식

$$\overset{m}{\nabla}_k g_{ij}=-2\pi_k g_{ij}+\beta(g_{ki}\pi_j+g_{kj}\pi_i),\ \ \overset{m}{T}{}_{ij}^{k}=\pi_i\delta_j^k-\pi_j\delta_i^k=-T_{ij}^k \tag{4}$$

를 만족시킨다. 이 식을 리용하면 호상접속 $\overset{m}{\nabla}$의 쌍대접속 $\overset{m*}{\nabla}$의 접속결수는

$$\overset{m*}{\Gamma}{}_{ij}^{k}=\{{}_{ij}^{k}\}-\pi_i\delta_j^k+\beta\pi_j\delta_i^k \tag{5}$$

이다. 그리고 식 (3)과 (5)로부터 $\overset{m}{\nabla}$와 $\overset{m*}{\nabla}$에 관한 곡률텐소르는 다음과 같다는것을 알수 있다.

$$\overset{m}{R}{}_{ijk}^{l}=K_{ijk}^l+g_{ik}c_j^l-g_{jk}c_i^l+\delta_k^l\pi_{ij} \tag{6}$$

$$\overset{m*}{R}{}_{ijk}^{l}=K_{ijk}^l+\delta_j^l c_{ik}-\delta_i^l c_{jk}-\delta_k^l\pi_{ij} \tag{7}$$

여기서

$$\begin{aligned} c_{ik}&=\beta(\overset{\circ}{\nabla}_i\pi_k-\beta\pi_i\pi_k)\\ \pi_{ij}&=\overset{\circ}{\nabla}_i\pi_j-\overset{\circ}{\nabla}_j\pi_i \end{aligned} \tag{8}$$

이다.

정리 1 리만다양체 $(M,\ g)$ ($\dim M>2$)에서 β－반대칭비계량접속 ∇의 호상접속 $\overset{m}{\nabla}$에 관한 곡률텐소르가 령이면 리만다양체 $(M,\ g,\ \overset{\circ}{\nabla})$는 공형평탄이다.

증명 식 (6)과 (7)을 변끼리 합하면

$$\overset{m}{R}{}_{ijk}^{l}+\overset{m*}{R}{}_{ijk}^{l}=2K_{ijk}^l+\delta_j^l c_{ik}-\delta_i^l c_{jk}+g_{ik}c_j^l-g_{jk}c_i^l \tag{9}$$

이 성립한다. 따라서 이 식의 량변을 $i,\ l$에 관하여 축약하면

$$\overset{m}{R}_{jk}+\overset{m*}{R}_{jk}=2K_{jk}-(n-2)c_{jk}-g_{jk}c_i^i \tag{10}$$

가 성립한다. 그러므로 이 식의 량변에 g^{jk}를 곱하고 축약하면

$$\overset{m}{R}+\overset{m*}{R}=2K-2(n-1)c_i^i$$

가 성립한다. 따라서

$$c_i^i=\frac{1}{2(n-1)}[2K-(\overset{m}{R}+\overset{m*}{R})]$$

이다. 이 식을 식 (7)에 대입하여 c_{jk}를 구하면 다음과 같다.

$$c_{jk}=\frac{1}{n-2}\left[2K_{jk}-(\overset{m}{R}_{jk}+\overset{m*}{R}_{jk})-\frac{2K-(\overset{m}{R}+\overset{m*}{R})}{2(n-1)}g_{jk}\right]$$

이 식을 식 (6)에 대입하고

$$\overset{m}{C}{}^{l}_{ijk}:=\overset{m}{R}{}^{l}_{ijk}+\frac{1}{n-2}(\delta^l_j\overset{m}{R}_{ik}-\delta^l_i\overset{m}{R}_{jk}+g_{ik}\overset{m}{R}{}^l_j-g_{jk}\overset{m}{R}{}^l_i)+\frac{\overset{m}{R}}{(n-1)(n-2)}(\delta^l_ig_{jk}-\delta^l_jg_{ik})$$

$$\overset{m*}{C}{}^{l}_{ijk}:=\overset{m*}{R}{}^{l}_{ijk}+\frac{1}{n-2}(\delta^l_j\overset{m*}{R}_{ik}-\delta^l_i\overset{m*}{R}_{jk}+g_{ik}\overset{m*}{R}{}^l_j-g_{jk}\overset{m*}{R}{}^l_i)+\frac{\overset{m*}{R}}{(n-1)(n-2)}(\delta^l_ig_{jk}-\delta^l_jg_{ik})$$

$$\overset{\circ}{C}{}^{l}_{ijk}:=K^l_{ijk}+\frac{1}{n-2}(\delta^l_jK_{ik}-\delta^l_iK_{jk}+g_{ik}K^l_j-g_{jk}K^l_i)+\frac{K}{(n-1)(n-2)}(\delta^l_ig_{jk}-\delta^l_jg_{ik}) \tag{11}$$

로 놓으면

$$\overset{m}{C}{}^{l}_{ijk}+\overset{m*}{C}{}^{l}_{ijk}=2\overset{\circ}{C}{}^{l}_{ijk} \tag{12}$$

이 성립한다. 이제 $\overset{m}{R}{}^{l}_{ijk}=0$이라고 하면 $\overset{m*}{R}{}^{l}_{ijk}=0$이며 이로부터

$$\overset{m}{C}{}^{l}_{ijk}=\overset{m*}{C}{}^{l}_{ijk}=0$$

이라는것이 나온다. 따라서 식 (12)로부터 $\overset{\circ}{C}{}^{l}_{ijk}=0$이다. 그러므로 리만다양체 $(M,\ g,\ \overset{\circ}{\nabla})$는 공형평탄이다.(증명끝)

정리 2 리만다양체 $(M,\ g)$에서 $\beta-$반대칭비계량접속 ∇의 호상접속 $\overset{m}{\nabla}$이 공액대칭이기 위해서는 그것이 공액릿찌대칭일것이 필요하고 충분하다.

리만다양체 $(M,\ g)$ $(\dim M>2)$에서 접속 ∇에 관한 임의의 점 p에서의 단면곡률이 2차원방향 E의 선택에 무관계하면 곡률텐소르는 다음과 같다.

$$R^l_{ijk}=k(p)(\delta^l_ig_{jk}-\delta^l_jg_{ik})$$

정리 3 련결인 리만다양체 $(M,\ g)$ $(\dim M>2)$에서 $\beta-$반대칭비계량접속 ∇의 호상접속 $\overset{m}{\nabla}$에 관한 임의의 점 p에서의 단면곡률이 2차원방향 E의 선택에 무관계하고 $\beta=0$이면 리만다양체 $(M,\ g,\ \overset{m}{\nabla})$은 일정곡률다양체이다.

주의 1 리만다양체 $(M,\ g)$에서 $\beta-$반대칭비계량접속 ∇와 그것의 호상접속 $\overset{m}{\nabla}$에 대하여 평탄성과 공액대칭성조건에서는 차이가 없지만 일정곡률성조건에서는 차이가 있다.[1]

주의 2 정리 3은 식 (4)와 (5)로부터 리만다양체 $(M,\ g)$에서 식

$$\nabla_kg_{ij}=-2\pi_kg_{ij},\ \ T_{ij}{}^k=\pi_i\delta^k_j-\pi_j\delta^k_i$$

를 만족시키며 접속결수가

$$\Gamma_{ij}{}^k=\left\{{k \atop ij}\right\}+\pi_i\delta^k_j$$

인 비대칭비계량접속이 슈르의 정리의 조건을 만족시킨다는것을 새롭게 제시하여주고있다. 이 접속은 중력의 스칼라텐소르리론에 대한 기하학적모형[3]으로 제시된 접속이다.

참 고 문 헌

[1] 김일성종합대학학보 수학, 65, 2, 20, 주체108(2019).
[2] N. S. Agashe et al.; Indian. Pure Appl. Math., 23, 6, 399, 1992.
[3] K. A. Dunn; Tensor, 29, 214, 1975.
[4] A. Fridman et al.; Math. Zeitschrift., 21, 211, 1924.
[5] H. A. Hayden; Proc. London Math. Soc., 34, 27, 1932.
[6] Han Yanling et al.; IJG, 5, 1, 47, 2016.
[7] Tal Yun Ho; arXiv; 12124748, 1, 2012.
[8] Tal Yun Ho et al.; J. of Yanbian University(Natural Science), 40, 4, 290, 2014.
[9] I. Suhendro; Progress in Physics, 4, 47, 2007.
[10] K. Yano; Rev. Roum. Math. Pure. Appl., 15, 1579, 1976.

주체109(2020)년 6월 5일 원고접수

On the Mutual Connection of a β-semi-symmetric Non-metric Connection in a Riemannian Manifold

Ryang Ju Yong, Ho Tal Yun

In this paper, we presented the mutual connection(of a β-semi-symmetric non-metric connection) of which connection coefficient is $\overset{m}{\Gamma}{}^k_{ij} = \{^k_{ij}\} + \pi_i \delta^k_j - \beta g_{ij} \pi^k$ and studied the geometrical property of this mutual connection.

Keywords: semi-symmetric connection, non-metric connection, mutual connection