김일성종합대학학보 물리학
주체107(2018)년 제64권 제3호

무게잔차법에 의한 로심중성자묶음분포계산을 위한 일반화된 유한요소방정식

전성제, 김성지

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《…우리 나라의 실정에 맞는 수력발전소, 화력발전소, 원자력발전소를 건설하는데서 나서는 과학기술적문제를 풀도록 하여야 합니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제11권 135페지)

원자로계산모형에서 중심으로 되는 구성요소는 로심에서 정력학적중성자거동을 분석하는 계산모듈들이다. 이 정력학적계산은 일반적으로 주어진 로심배치를 특징짓는 증식고유값 $k_{유효}$와 다군중성자묶음에 관한 다군확산방정식의 풀이에 기초한다.

유한계차법은 조밀한 그물구조와 많은 계산용량 및 계산시간을 필요로 한다. 다군확산방정식의 유한계차법과 다른 근사방법들은 다군매듭법, 유한요소법, 특성선법 등이다.[1－3]

우리는 무게잔차법을 리용하여 각이한 류형(구형, 원기둥형, 4각기둥형, 6각기둥형 등)의 로심에서 중성자묶음분포를 계산하기 위한 일반화된 유한요소방정식을 얻었다.

1. 무게잔차법에 의한 국부적유한요소방정식

정상상태의 다군중성자확산방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$-\nabla D_g(\boldsymbol{r})\cdot\nabla\Phi_g(\boldsymbol{r})+\Sigma_g(\boldsymbol{r})\Phi_g(\boldsymbol{r})=\frac{\chi_g}{k_{유효}}\sum_{g'=1}^{G}[\nu\Sigma_{f\,g'}(\boldsymbol{r})]\Phi_{g'}(\boldsymbol{r})+\sum_{g'=1}^{g-1}\Sigma_{sg'\to g}(\boldsymbol{r})\cdot\Phi_g(\boldsymbol{r}) \quad (1)$$

방정식 (1)에서 원천항을 다음과 같이 표시하자.

$$f(\boldsymbol{r})=\frac{\chi_g}{k_{유효}}\sum_{g'=1}^{G}[\nu\Sigma_{f\,g'}(\boldsymbol{r})]\Phi_{g'}(\boldsymbol{r})+\sum_{g'=1}^{g-1}\Sigma_{sg'\to g}(\boldsymbol{r})\cdot\Phi_g(\boldsymbol{r}) \quad (2)$$

식 (2)를 리용하면 방정식 (1)은 다음과 같이 간단히 표시된다.

$$-\nabla D_g(\boldsymbol{r})\cdot\nabla\Phi_g(\boldsymbol{r})+\Sigma_g(\boldsymbol{r})\Phi_g(\boldsymbol{r})=f(\boldsymbol{r}) \quad (3)$$

문제를 풀기 위하여서는 다음과 같은 경계조건이 주어져야 한다.

첫째로, 중성자묶음은 외부외삽경계에서 0이여야 한다.

$$\Phi_g(R)=0$$

여기서 R는 계의 외부경계면의 자리표이다.

둘째로, 대칭축과 대칭면에서 중성자흐름밀도는 0이다.

$$\nabla\Phi_g(r_0)=0$$

여기서 r_0은 대칭축과 대칭면의 자리표이다.

식 (3)의 풀이를 $\hat{\Phi}_g$라고 하면 잔차 ε이 생기는데 다음과 같이 표시할수 있다.

$$T\hat{\Phi}_g-\hat{f}_g=\varepsilon \quad (4)$$

여기서 연산자 T는 다음과 같다.

$$T = -\nabla D_g(\mathbf{r}) \cdot \nabla + \Sigma_g(\mathbf{r})$$

이제 무게함수모임 V_i를 만들고 스칼라적을 0이라고 표시하자.

$$(\varepsilon_i \ \ V_i) = 0 \tag{5}$$

무게잔차법에서 무게함수 V_i는 토대함수 N_i와 같게 만든 시험함수이다. 식 (5)에 토대함수와 식 (4)를 대입하면 다음식이 얻어진다.

$$-(\nabla D_g \cdot \nabla \hat{\Phi}_g,\ N_i) + (\Sigma_g \hat{\Phi}_g,\ N_i) = (\hat{f}_g,\ N_i) \tag{6}$$

식 (6)의 첫항에 가우스정리를 리용하면 다음식이 얻어진다.

$$(D_g \nabla \hat{\Phi}_g,\ \nabla N_i) + (\Sigma_g \hat{\Phi}_g,\ N_i) - \int_\Gamma D_g \nabla \hat{\Phi}_g N_i ds = (\hat{f}_g,\ N_i) \tag{7}$$

토대함수인 보간함수는 경계면 Γ에서 0이라는 조건을 주면 방정식 (7)의 겉면적분항은 0으로 되며 다음식이 얻어진다.

$$(D_g \nabla \hat{\Phi}_g,\ \nabla N_i) + (\Sigma_g \hat{\Phi}_g,\ N_i) - (\hat{f}_g,\ N_i) = 0 \tag{8}$$

식 (8)에 전 체적함수 $\hat{\Phi}_g$를 대입하면 다음식이 얻어진다.

$$\begin{aligned}&(D_g \nabla N_i^T \nabla \hat{\Phi}_{gi},\ \nabla N_i) + (\Sigma_g N_i^T \hat{\Phi}_g,\ N_i) = \\ &= \sum_{g'=1}^{G} \frac{\chi_g}{\chi_{\text{eff}}} (\nu \Sigma_f)_{g'} (N_i^T \hat{\Phi}_{gi},\ N_i) + \sum_{g'=1}^{g-1} \frac{\chi_g}{\chi_{\text{eff}}} \Sigma_{sg' \to g} (N_i^T \hat{\Phi}_{gi},\ N_i)\end{aligned} \tag{9}$$

전체 구역에 대한 적분을 요소구역들에서의 적분합으로 바꾸어놓을수 있다. 이때 요소구역의 경계들에서 중성자묶음과 그것의 도함수가 련속이라는 조건을 리용한다. 그러면 식 (9)는 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\sum_{e=1}^{E} \left\{ D_g^e [A]^e [\Phi_g]^e + \Sigma_g^e [B]^e [\Phi_g]^e - \sum_{g'=1}^{G} \frac{\chi_g}{k_{\text{eff}}} (\nu \Sigma_f)_{g'}^e [B]^e [\Phi_{g'}]^e - \sum_{g'=1}^{g-1} \Sigma_{sg' \to g}^e [B]^e [\Phi_{g'}]^e \right\} = 0 \tag{10}$$

여기서 $[A]^e = \int_{V_e} [\nabla N]^T [\nabla N] dr$, $[B]^e = \int_{V_e} [N]^T [N] dr$ 이다.

방정식 (10)에서

$$L_e = D_g^e [A]^e [\Phi_g]^e + \Sigma_g^e [B]^e [\Phi_g]^e - \sum_{g'=1}^{G} \frac{\chi_g}{k_{\text{eff}}} (\nu \Sigma_f)_{g'}^e [B]^e [\Phi_{g'}]^e - \sum_{g'=1}^{g-1} \Sigma_{sg' \to g}^e [B]^e [\Phi_{g'}]^e \tag{11}$$

로 쓰면 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$\sum_{e=1}^{E} L_e = 0 \tag{12}$$

여기서 요소구역을 임의의 형태로 취하여도 합이 0이 되려면 매개 항이 0으로 되여야 한다. 그러므로 다음식이 성립한다.

$$L_e = 0 \tag{13}$$

식 (13)을 행렬형식으로 표시하면 다음과 같다.

$$[Q_g]^e [\Phi_g] = [F]^{e^e} \tag{14}$$

여기서

$$[Q_g]^e = D_g^e[A]^e + \Sigma_g^e[B]^e$$

$$[F]^e = \sum_{g'=1}^{G}\frac{\chi_g}{k_{\text{eff}}}(\nu\Sigma_f)_{g'}^e[B]^e[\Phi_{g'}]^e + \sum_{g'=1}^{g-1}\Sigma_{sg'\to g}^e[B]^e[\Phi_{g'}]^e$$

이다.

2. 일반화된 거시적유한요소방정식

거시적유한요소방정식을 얻기 위하여서는 형태함수 $[N(r)]$를 구하고 그에 의하여 전체적결수행렬과 전체적입구벡토르를 구하여야 한다. 이를 위하여 우선 결수행렬들 $[A]^e$와 $[B]^e$를 구하여야 한다. 이제 요소의 마디점수를 n이라고 하고 e번째 요소에서의 중성자묶음을 다음과 같이 표시하자.

$$\Phi_g^e(r) = \sum_{i=1}^{n} H_i(r)\alpha_{gi} = [H(r)][\alpha_g] \tag{15}$$

여기서

$$[H(r)] = [H_1(r)\ \ H_2(r)\ \ \cdots\ \ H_n(r)],$$

$$[\alpha_g]^T = [\alpha_{g1}\ \ \alpha_{g2}\ \ \cdots\ \ \alpha_{gn}]$$

이다.

이제 마디점 j에서의 중성자묶음을 구하면 다음과 같다.

$$\Phi_{gj}^e = \sum_{i=1}^{n} H_{ji}\alpha_{gi} \quad (j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{16}$$

따라서 요소 e에서 마디점의 중성자묶음은 다음과 같이 표시된다.

$$[\Phi_g]^e = \begin{bmatrix} \Phi_{g1} \\ \Phi_{g2} \\ \vdots \\ \Phi_{gn} \end{bmatrix} = [C]^e[\alpha_g] \tag{17}$$

여기서

$$[C]^e = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1n} \\ H_{21} & H_{22} & \cdots & H_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ H_{n1} & H_{n2} & \cdots & H_{nn} \end{bmatrix}$$

이다. 식 (17)에 의하여 행렬 $[\alpha_g]$를 구하여 식 (15)에 대입하면 다음식이 얻어진다.

$$\Phi_g^e(r) = [H(r)]^e[C]^{e^{-1}}[\Phi_g]^e \tag{18}$$

여기서

$$[N(r)]^e = [H(r)]^e[C]^{e^{-1}} \tag{19}$$

은 형태함수이다. 이 형태함수를 리용하여 결수행렬들 $[A]^e$와 $[B]^e$를 구한다.

거시적유한요소방정식은 어떤 마디점 k를 포함하는 요소들에 대한 국부유한요소방정식들을 결합하여 구한다. 방정식 (14)를 리용하여 마디점 k를 포함하는 국부유한요소방정식을 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{cases} Q_{11}^{ek_1}\Phi_{g_1}^{ek_1} + Q_{12}^{ek_1}\Phi_{g_2}^{ek_2} + \cdots + Q_{1n}^{ek_1}\Phi_{g_n}^{ek_n} = F^{ek_1} \\ Q_{21}^{ek_2}\Phi_{g_1}^{ek_1} + Q_{22}^{ek_2}\Phi_{g_2}^{ek_2} + \cdots + Q_{2n}^{ek_2}\Phi_{g_n}^{ek_n} = F^{ek_2} \\ \quad\cdots \qquad\quad \cdots \qquad\qquad \cdots \qquad \cdots \\ Q_{n1}^{ek_n}\Phi_{g_1}^{ek_1} + Q_{n2}^{ek_n}\Phi_{g_2}^{ek_2} + \cdots + Q_{nn}^{ek_n}\Phi_{g_n}^{ek_n} = F^{ek_n} \end{cases} \tag{20}$$

식 (20)의 량변을 변끼리 합하면 구하려는 거시적유한요소방정식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} &(Q_{11}^{ek_1} + Q_{21}^{ek_2} + \cdots + Q_{n1}^{ek_n})\Phi_{g_1}^{ek_1} + (Q_{12}^{ek_1} + Q_{22}^{ek_2} + \cdots + Q_{n2}^{ek_n})\Phi_{g_2}^{ek_2} + \\ &\quad + \cdots + (Q_{1n}^{ek_1} + Q_{2n}^{ek_2} + \cdots + Q_{nn}^{ek_n})\Phi_{g_n}^{ek_n} = F^{ek_1} + F^{ek_2} + \cdots + F^{ek_n} \end{aligned} \tag{21}$$

방정식 (21)을 대응하는 경계조건을 리용하여 풀면 주어진 공간에 대한 구체적인 중성자묶음분포를 얻을수 있다.

맺 는 말

1) 무게잔차법으로 로심다군중성자묶음분포를 얻기 위한 국부유한요소방정식을 구하였다.

2) 여러가지 모양(구형, 원기둥형, 직각기둥형, 6각기둥형)의 원자로로심에서 다군중성자묶음분포를 구할수 있는 거시적유한요소방정식을 얻는 일반화된 방법을 확립하였다.

참 고 문 헌

[1] A. Hebert; Ann. Nucl. Energy, 35, 363, 2008.

[2] Chuntao Tang et al.; Ann. Nucl. Energy, 36, 1013, 2009.

[3] Akio Yamamoto et al.; Nucl. Eng. and Tech., 44, 2, 129, 2007.

주체107(2018)년 3월 5일 원고접수

The Generalized Finite Element Equation for The Reactor Core Neutron Flux Distribution Calculation by The Weighted Residual Error Method

Jon Song Je, Kim Song Ji

In this paper, we obtained the local finite element equation to calculate the multi-group neutron flux distribution and discussed the method to find the macro-finite element equation for the reactor core of the various geometry.

Key words: reactor core, neutron flux distribution, weighted residual error