김일성종합대학학보
(자연과학)
주체106(2017)년 제63권 제12호

JOURNAL OF KIM IL SUNG UNIVERSITY
(NATURAL SCIENCE)
Vol. 63 No. 12 JUCHE106(2017).

면내 및 면외힘을 받는 비대칭직교탄성다층 복합판의 변위해석

송성관, 리은경

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《이미 일정한 토대가 있고 전망이 확고한 연구대상들에 힘을 넣어 세계패권을 쥐며 그 성과를 확대하는 방법으로 과학기술을 빨리 발전시켜야 합니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 39페지)

선행연구[1]에서는 비대칭직교다층복합판이 탄성지반우에서 면외힘을 받을 때의 변위에 대하여 론의하였으나 면내힘과 면외힘을 동시에 받는 경우에 대하여 해석하지 못하였으며 선행연구[2]에서는 탄성지반우에서 면내 및 면외힘을 받는 반대칭직교다층판변위해석에 국한되였다. 선행연구[3]에서는 섬유강화복합판의 일반관계식을 제기하였으나 구체적인 변위해석은 하지 못하였다.

론문에서는 보다 일반적인 경우로서 탄성지반우에서 면내당김과 면외구부림힘을 받는 비대칭직교다층복합판의 변위해석에 대하여 론의하였다.

1. 기본관계식

다층판의 중간면에 자리표축 x, y를, 두께방향으로 z축을 택하자.

이때 속힘으로 표시된 평형방정식은 다음과 같다.[3]

$$\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial N_y}{\partial y}=0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}+q-cw+\overline{N}_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2\overline{N}_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\overline{N}_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \tag{3}$$

여기서 N_x, N_y는 각각 x, y축의 수직면에 작용하는 단위길이당 당김(누름)힘이고 N_{xy}는 x축의 수직면에 작용하는 y방향의 단위길이당 자르는 힘이다. M_x, M_y는 각각 x, y축의 수직면에 작용하는 단위길이당 구부림모멘트이고 M_{xy}는 xy면에 작용하는 단위길이당 틀음모멘트이다. 그리고 q는 판의 웃면 $z=-h/2$에 작용하는 단위면적당 z방향의 면외힘, c는 탄성지반결수, w는 z방향의 변위성분, $\overline{N}_x$, $\overline{N}_y$는 각각 x, y방향으로 작용하는 단위길이당 면내힘, $\overline{N}_{xy}$는 x축의 수직면에 작용하는 단위길이당 y방향의 면내힘이다.

다층복합판에서 속힘 및 모멘트와 중간면의 변형, 곡률사이의 관계식[1]을 식 (1)－(3)에 대입하고 행렬형태로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{16} \\ L_{12} & L_{22} & L_{26} \\ L_{16} & L_{26} & L_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q - cw + \overline{N}_x \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\overline{N}_{xy} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \overline{N}_y \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

여기서 u_0, v_0, w 는 각각 중간면의 x, y, z 방향변위성분들이며 L_{ij} $(i,\ j = 1,\ 2,\ 6)$ 들은 다음의 식으로 주어지는 미분연산자들이다.

$$L_{11} = A_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_{66}\frac{\partial^2}{\partial y^2},\quad L_{12} = (A_{12} + A_{66})\frac{\partial^2}{\partial x \partial y},\quad L_{22} = A_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$L_{16} = -\left[B_{11}\frac{\partial^3}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66})\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}\right],\quad L_{26} = -\left[(B_{12} + 2B_{66})\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + B_{22}\frac{\partial^3}{\partial y^3}\right] \quad (5)$$

$$L_{66} = D_{11}\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22}\frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

방정식 (4)를 풀기 위하여 판이 네 경계 $x = 0,\ a : y = 0,\ b$ 에서 단순지지되였다고 하자.

이때 경계조건은 다음과 같다.[3]

$$\left.\begin{aligned} x = 0,\ a : w = 0,\quad M_x = B_{11}\frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{12}\frac{\partial v_0}{\partial y} - D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \\ y = 0,\ b : w = 0,\quad M_y = B_{12}\frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{22}\frac{\partial v_0}{\partial y} - D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

이제 구하려는 변위성분 u_0, v_0, w 를

$$u_0 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{u}_{mn}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},\quad v_0 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{v}_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b},\quad w = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{w}_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \quad (7)$$

로 놓으면 경계조건 (6)을 만족시킨다. 여기서 a, b 는 판의 길이와 너비, m, n 은 각각 처짐의 x, y 방향반파개수들이다.

면외힘 q를 다음과 같이 표시하자.

$$q = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} q_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \quad (8)$$

특수경우로 균등분포힘 q_0 의 경우에는 $q_{mn} = 16q_0/(\pi^2 mn)$ 이다.

면내당김힘은 다음과 같이 작용한다고 하자.

$$\overline{N}_x = P_1,\quad \overline{N}_y = \overline{N}_{xy} = 0 \quad (9)$$

식 (7)－(9)를 방정식 (4)와 식 (5)에 대입하면 다음의 방정식들이 얻어진다.

$$T_{11}\overline{u}_{mn} + T_{12}\overline{v}_{mn} + T_{13}\overline{w}_{mn} = 0,\quad T_{12}\overline{u}_{mn} + T_{22}\overline{v}_{mn} + T_{23}\overline{w}_{mn} = 0,\quad T_{13}\overline{u}_{mn} + T_{23}\overline{v}_{mn} + T_{33}\overline{w}_{mn} = q_{mn} \quad (10)$$

여기서

$$T_{11} = \gamma^2 A_{11} + s^2 A_{66},\quad T_{12} = \gamma s(A_{12} + A_{66}),\quad T_{13} = -[\gamma^3 B_{11} + (B_{12} + 2B_{66})\gamma s^2],\quad T_{22} = \gamma^2 A_{66} + s^2 A_{22},$$

$$T_{23} = -[\gamma^2 s(B_{12} + 2B_{66}) + s^3 B_{22}],\ T_{33} = \gamma^4 D_{11} + 2\gamma^2 s^2 (D_{12} + 2D_{66}) + s^4 D_{22} + \gamma^2 P_1 + c,$$
$$\gamma = m\pi / a,\quad s = n\pi / b.$$

방정식 (10)을 풀면 $\bar{u}_{mn}$, $\bar{v}_{mn}$, $\bar{w}_{mn}$이 얻어지는데 그 결과는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\bar{u}_{mn} &= q_{mn}(T_{12}T_{23} - T_{13}T_{22})/[-T_{13}^2 T_{22} + 2T_{12}T_{13}T_{23} - T_{11}T_{23}^2 + T_{33}(T_{11}T_{22} - T_{12}^2)] \\
\bar{v}_{mn} &= q_{mn}(T_{12}T_{13} - T_{11}T_{23})/[-T_{13}^2 T_{22} + 2T_{12}T_{13}T_{23} - T_{11}T_{23}^2 + T_{33}(T_{11}T_{22} - T_{12}^2)] \\
\bar{w}_{mn} &= q_{mn}(T_{11}T_{22} - T_{12}^2)/[-T_{13}^2 T_{22} + 2T_{12}T_{13}T_{23} - T_{11}T_{23}^2 + T_{33}(T_{11}T_{22} - T_{12}^2)]
\end{aligned} \tag{11}$$

2. 계 산 실 례

유리/에폭시비대칭다층복합판에서 섬유의 배렬방향이 $0^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ$일 때를 고찰하자. 다층판의 기하학적 및 력학적특성량들은 다음과 같다.

$$a = 2\text{m},\ b = 1\text{m},\ h = 0.04\text{m},\ N = 4,\ h_1 = h_2 = h_3 = h_4,\ h = h_1 + h_2 + h_3 + h_4$$
$$E_1 = 38.6\text{GPa},\ E_2 = 8.27\text{GPa},\ G_{12} = 4.14\text{GPa},\ \nu_{12} = 0.26,\ c = 9\ 620\text{N/m}^3$$
$$N_x = P = 40\text{N/m},\ q_0 = 0.5\text{MPa}$$

다층판의 층에 따르는 기하학적특성량들은 표 1과 같다.

표 1. $0^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ$인 경우 기하학적특성량

층의 번호 k	섬유방향	$(z_k - z_{k-1})/\text{m}$	$[(z_k^2 - z_{k-1}^2)/2]/\text{m}^2$	$[(z_k^3 - z_{k-1}^3)/3]/\text{m}^3$
1	0°	1×10^{-2}	-15×10^{-5}	2.33×10^{-6}
2	0°	1×10^{-2}	-5×10^{-5}	0.33×10^{-6}
3	90°	1×10^{-2}	5×10^{-5}	0.33×10^{-6}
4	0°	1×10^{-2}	15×10^{-5}	2.33×10^{-6}

환산억세기를 구하면 다음과 같다.

$$Q_{11} = E_1/(1 - \nu_{21}\nu_{12}) = 39.17\text{GPa},\ Q_{22} = \nu_{12}E_1/(1 - \nu_{21}\nu_{12}) = 8.39\text{GPa}$$
$$Q_{12} = E_2/(1 - \nu_{21}\nu_{12}) = 2.19\text{GPa},\ Q_{66} = G_{12} = 4.14\text{GPa}$$

$k = 1,\ 2,\ 4$에서 $\theta = 0^\circ$이므로 $\bar{Q}_{11} = Q_{11}$, $\bar{Q}_{22} = Q_{22}$, $\bar{Q}_{12} = Q_{12}$, $\bar{Q}_{66} = Q_{66}$, $\bar{Q}_{16} = \bar{Q}_{26} = 0$이고 $k = 3$에서 $\theta = 90^\circ$이므로 $\bar{Q}_{11} = Q_{22}$, $\bar{Q}_{22} = Q_{11}$, $\bar{Q}_{12} = Q_{12}$, $\bar{Q}_{66} = Q_{66}$, $\bar{Q}_{16} = \bar{Q}_{26} = 0$이다.

먼저 당김억세기 A_{ij}, 결합억세기 B_{ij}, 구부림억세기 D_{ij}를 구하자.

$$A_{11} = \sum_{k=1}^{4} \bar{Q}_{11}^{(k)}(z_k - z_{k-1}) = Q_{11}\cdot 10^{-2}\times 3 + Q_{22}\cdot 10^{-2},\quad A_{12} = Q_{12}\times 10^{-2}\times 4,$$
$$A_{22} = Q_{22}\cdot 10^{-2}\times 3 + Q_{11}\cdot 10^{-2},\quad A_{66} = Q_{66}\times 10^{-2}\times 4$$
$$B_{11} = \sum_{k=1}^{4} \bar{Q}_{11}^{(k)} \frac{1}{2}(z_k^2 - z_{k-1}^2) = Q_{11}(-5\cdot 10^{-5}) + Q_{22}(5\cdot 10^{-5}) = -B_{22},\ B_{12} = B_{66} = 0$$
$$D_{11} = \sum_{k=1}^{4} \bar{Q}_{11}^{(k)}(z_k^3 - z_{k-1}^3)/3 = Q_{11}(233\times 2 + 33)\cdot 10^{-8} + Q_{22}\cdot 33\cdot 10^{-8}$$
$$D_{12} = Q_{12}(233\times 2 + 33\times 2)\cdot 10^{-8},\quad D_{66} = Q_{66}(233\times 2 + 33\times 2)\cdot 10^{-8}$$
$$D_{22} = Q_{22}(233\times 2 + 33)\cdot 10^{-8} + Q_{11}\cdot 33\cdot 10^{-8}$$

앞에서 구한 $\bar{Q}_{ij}\ (i,\ j = 1,\ 2,\ 6)$들을 웃식에 대입하면 다음의 결과가 얻어진다.

$$A_{11}=1.259\text{GPa}\cdot\text{m},\ A_{12}=8.76\cdot10^{-2}\text{GPa}\cdot\text{m},\ A_{22}=6.434\cdot10^{-1}\text{GPa}\cdot\text{m},$$
$$A_{66}=1.656\cdot10^{-1}\text{GPa}\cdot\text{m},\ B_{11}=-1.539\cdot10^{-3}\text{GPa}\cdot\text{m}^2,\ B_{22}=1.539\cdot10^{-3}\text{GPa}\cdot\text{m}^2$$
$$B_{12}=B_{66}=0,\ \ D_{11}=1.986\ 2\cdot10^{-4}\text{GPa}\cdot\text{m}^3,\ \ D_{22}=5.488\ 6\cdot10^{-5}\text{GPa}\cdot\text{m}^3$$
$$D_{12}=1.167\ 3\cdot10^{-5}\text{GPa}\cdot\text{m}^3,\ \ D_{66}=2.202\cdot10^{-5}\text{GPa}\cdot\text{m}^3$$

이 량들을 식 (10)에 대입하면 $m=n=1$의 경우에

$T_{11}=4.736,\ T_{12}=1.248,\ T_{13}=0.005\ 96,\ T_{22}=6.752,\ T_{23}=-0.047\ 64,\ T_{33}=0.007\ 43$

을 얻으며 식 (11)에 대입하고 $q_{mn}=0.81\text{MPa}$임을 고려하면 $\overline{w_{11}}=0.091\ 2\text{m}$를 얻는다.

m, n의 변화에 따르는 판중심에서의 처짐변위 w는 표 2와 같다.

표 2. m, n의 변화에 따르는 판중심에서의 처짐변위 w

n	m				
	1	3	5	7	9
1	0.091 2	0.093 1	0.093 3	0.093 4	0.093 4
3	0.097 6	0.100 6	0.101 1	0.101 2	0.101 2
5	0.098 6	0.102 0	0.102 7	0.102 8	0.102 9
7	0.098 8	0.102 5	0.103 2	0.103 4	0.103 5
9	0.098 9	0.102 7	0.103 4	0.103 7	0.103 8

표 2로부터 다음의 결론을 얻는다.

첫째, 반파개수 m, n이 증가함에 따라 판중심의 처짐 w는 증가하면서 어떤 일정한 값으로 수렴한다.

둘째, m, n이 증가함에 따라 w는 증가하지만 $m=n=5$인 경우부터는 그 증가량이 $m=5,\ n=3$인 경우에 비하여 1.5%, $m=3,\ n=5$인 경우에 비하여 0.6%로서 매우 작으며 $m=n=9$인 경우에는 거의 령으로 된다.

셋째, 최대처짐($x=a/2,\ y=b/2,\ m=n=9$)은 $w\approx0.104\text{m}$이다.

참 고 문 헌

[1] 김일성종합대학학보(자연과학), 61, 7, 23, 주체104(2015).
[2] 김일성종합대학학보(자연과학), 62, 9, 20, 주체105(2016).
[3] A. K. Ghamsari; Journal of Composites Materials, 49, 27, 2015.

주체106(2017)년 8월 5일 원고접수

Displacement Analysis of Asymmetrical Cross-Ply Elastic Laminated Composite Plate Subjected to In-Plane Force and External Force

Song Song Gwan, Ri Un Gyong

We analysed the displacement of a fiber reinforced asymmetrical cross-ply laminated composite on elastic foundation, subjected to in-plane force and external force. We derived the displacement equation of asymmetric cross-ply laminates composite plate and considered the method of displacement analysis. The validation is demonstrated by numerical examples.

Key words: cross-ply laminate, asymmetrical laminate, displacement equation