

조건부변분법에 의한 자기마당수직구배영상화

김송검, 최영남

자기마당수직구배는 자기마당에 비하여 얇은 깊이에 있는 이상체들에 대한 분해능이 더 좋고 정상마당과 지표불균일성의 영향도 덜 받는다. 자철광이나 티탄자철광과 같은 자성이 높은 광물들이 많이 포함된 표사광상인 경우 여러 수준에서 자기마당을 관측하고 자기마당수직구배값들의 분포특성을 연구하여 광체의 공간적분포를 예측할수 있다.

론문에서는 조건부변분법에 의한 자기마당수직구배영상화방법을 제기하고 모형계산실험을 통하여 방법의 믿음성과 효과성을 검증하였다.

1. 조건부변분법에 의한 자기마당수직구배영상화방법

지구물리저골문제를 조건부변분문제로 보고 라그랑주승수법을 적용하여 무조건변분문제 넘기면 다음과 같은 물성함수에 대한 근사적인 선형관계식을 얻을수 있다.[1]

$$\rho_r(\xi) \approx \tilde{\rho}_r(\xi, \lambda) = P_r^2(\xi) \sum_{i=1}^N \lambda_i Q_r^{(i)}(\xi) = P_r^2(\xi)(\lambda, Q_r(\xi)) \quad (1)$$

여기서 λ 는 길이가 N (관측값의 수)인 라그랑주승수벡토르이며 선형대수련립방정식

$$A\lambda = f_\delta \quad (2)$$

의 근사풀이이다. 그리고 $f_\delta = f + \delta f$ 는 장애 δf 가 포함된 관측값벡토르, A 는 대칭행렬 $(N \times N)$ 로서 그 원소들은 핵함수 $Q_r(\xi)$ 들과 무게함수 $P_r(\xi)$ 에 의하여 결정된다.

$\lambda = A^{-1}f_\delta$ 을 식 (1)에 넣으면 다음의 식을 얻는다.

$$\rho_r(\xi) \approx \tilde{\rho}_r(\xi, S_r) = P_r^2(\xi)(f_\delta, S_r(\xi)) \quad (3)$$

여기서 $S_r(\xi)$ 는 선형대수련립방정식

$$AS_r(\xi) = Q_r(\xi) \quad (4)$$

의 풀이이다.

선형대수련립방정식 (2)의 오른쪽에는 장애가 포함된 관측값벡토르가 들어있고 식 (4)의 오른쪽에는 정확히 계산할수 있는 핵함수벡토르가 들어있다. 그러므로 우리는 식 (4)로부터 $S_r(\xi)$ 를 추정하고 식 (3)에 의하여 물성함수를 결정하였다.

행렬 A 의 원소들은 다음의 식으로 계산한다.

$$a_{ij} = a_{ji} = \sum_{r=1}^{nR} \int_{\Omega_r} P_r^2(\xi) Q_r^{(i)}(\xi) Q_r^{(j)}(\xi) d\mu_r(\xi), \quad (i, j = \overline{1, N}) \quad (5)$$

행렬 A 를 2개의 삼각행렬의 적으로 분해하고 그것을 풀어 령차근사벡토르 $S_r^{(0)}(\xi)$ 를 계산한다. n 번째 근사풀이벡토르는 다음과 같이 계산한다.

$$S_r^{(n)}(\xi) = p_n S_r^{(n-1)}(\xi) + q_n r^{(n-1)}, \quad n=1, 2, \dots \quad (6)$$

여기서 $r^{(n-1)} = Q_r(\xi) - AS_r^{(n-1)}$ 이고 결수 p_n, q_n 은 최소화조건

$$F = \|Q_r(\xi) - AS_r^{(n)}(\xi)\|^2 = \min_{p_n, q_n} \quad (7)$$

으로부터 결정된다.

반복계산은 다음의 조건을 만족시킬 때까지 진행한다.

$$\frac{2\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\|}{\|x^{(n)}\| + \|x^{(n-1)}\|} \leq \varepsilon \quad (8)$$

여기서 $x = S_r(\xi)$, $\varepsilon = 10^{-8} \sim 10^{-5}$ 이다.

계산한 근사풀이벡터모임가운데서 다음의 조건

$$\left. \begin{aligned} \|\tilde{\rho}^{(p+1)}\|^2 &< \|\tilde{\rho}^{(p)}\|^2, \quad p = \overline{1, P-1} \\ \delta_{\min}^2 &\leq \|\tilde{\rho}^{(p)}\|^2 \leq \delta_{\max}^2, \quad p = \overline{1, P} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

을 만족시키는 허용근사풀이모임을 얻는다. 다음 추정된 물성파라미터에 의하여 계산된 모형마당과 관측마당사이의 오차두제곱합이 가장 작은 풀이를 안정한 풀이로 선택한다. 여기서 P 는 허용근사풀이모임의 수이고 $\delta_{\min}, \delta_{\max}$ 는 각각 연구대상의 물성정보에 기초하여 해석자가 설정하는 물성의 아래, 윗한계값이다.

2. 방법의 효과성검증

2차원다각형체의 자기마당수직구배계산식(ΔT_z)을 모형으로 리용하였다.

$$\Delta T_z(x, z) = 2J \frac{\sin j_0}{\sin j} \sum_{k=1}^m \sin Q_k \left[\cos E_k \left(\frac{h_k - z}{S_{1k}} - \frac{h_{k+1} - z}{S_{2k}} \right) - \sin E_k \left(\frac{R_{2k}}{S_{2k}} - \frac{R_{1k}}{S_{1k}} \right) \right]$$

$$Q_k = \pi/2 - D_0, \quad D_0 = \arctan(x_{ok}/h_{ok}), \quad x_{ok} = x_{k+1} - x_k, \quad h_{ok} = h_k - h_{k+1},$$

$$E_k = D_0 - \pi/2 - (j + j'), \quad S_{1k} = R_{1k}^2 + W_{1k}^2, \quad S_{2k} = R_{2k}^2 + W_{2k}^2, \quad R_{1k} = x_k - x,$$

$$R_{2k} = x_{k+1} - x, \quad W_{1k} = h_k - z, \quad W_{2k} = h_{k+1} - z$$

여기서 J 는 자화세기, j_0 은 지자기마당의 복각, j 는 감응자화벡터의 복각을 탐사자름면에 사영한 각, j' 는 감응자화벡터와 잔류자화벡터의 합벡터의 복각을 탐사선자름면에 사영한 각(감응자화를 가정하는 경우에 $j = j'$), m 은 다각형의 모서리수, x_k 와 x_{k+1} 은 각각 다각형의 k 번째와 $k+1$ 번째 모서리의 가로자리표, h_k 와 h_{k+1} 은 각각 다각형의 k 번째와 $k+1$ 번째 모서리의 깊이자리표이다.

먼저 선행한 정보가 주어졌을 때와 주어지지 않았을 때 방법의 효과성을 평가하기 위하여 모양이 단순한 표사광체자름면에 대한 해석을 진행하였다.(그림 1)

해석자름면을 $10 \times 5 = 50$ 개의 요소체들로 나누었다. 그리고 계산점의 수는 21개, 계산점사이간격은 1(상대단위)로 하였으며 자기감수를 $\Delta \mathcal{H} = 0.005 \text{SI}$ 인 이상요소체의 수를 14개, 정상지자기마당세기는 $T_0 = 52 \text{ 000nT}$, 자화벡터의 복각은 90° , 탐사선의 자방위각은 $A = 0^\circ$ 로 하였다.(모든 경우 감응자화라고 가정한다.)

선행한 정보를 고려하지 않은 경우 관측마당과 이론모형마당사이의 오차두제곱합

$ds_1 = 0.032\ 78$ 이고 고려한 경우에는 $ds_1 = 0.005\ 9$ 이다.

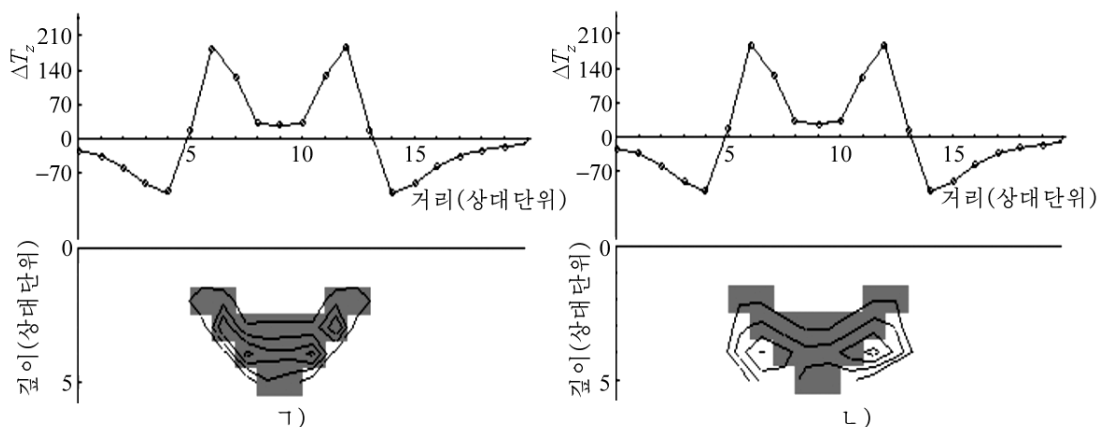


그림 1. ΔT_z 곡선과 해석결과

Г) 선행한 정보를 고려하지 않은 경우, Л) 선행한 정보를 고려한 경우
○ 관측값, — 해석마당

그림 1에서 보는바와 같이 선행한 정보를 고려한 경우나 고려하지 않은 경우에도 이 상체의 공간적분포를 비교적 정확히 알아낼수 있다. 그러나 선행한 정보를 고려하지 않은 경우에는 거꿀문제풀이의 다가성으로 하여 자기감수률값들이 실제값들과 많이 차이 나지만 선행한 정보들을 고려한 경우에는 자기감수률값들이 비교적 실제값에 근사하다.

추정결과에 얻어진 파라메터값들은 표와 같다.

표. 추정결과($\times 10^{-4}SI$)

No.	$\Delta \mathcal{H}_1$	$\Delta \mathcal{H}_2$	No.	$\Delta \mathcal{H}_1$	$\Delta \mathcal{H}_2$	No.	$\Delta \mathcal{H}_1$	$\Delta \mathcal{H}_2$	No.	$\Delta \mathcal{H}_1$	$\Delta \mathcal{H}_2$
1	0	0	14	2.39	0	27	30.1	25.1	40	6.19	0
2	4.82	0	15	0	0	28	52.0	88.1	41	87.5	0
3	4.35	0	16	0	0	29	39.3	2.49	42	10.8	5.48
4	1.43	0	17	3.75	0	30	31.4	3.46	43	53.2	1.08
5	0	0	18	17.0	35.4	31	8.46	2.87	44	56.3	2.29
6	0	0	19	17.0	41.4	32	54.8	2.41	45	33.5	42.2
7	0	0	20	1.12	1.37	33	88.5	5.29	46	22.3	28.9
8	4.68	0	21	22.8	3.25	34	71.3	96.6	47	22.5	0
9	4.49	0	22	35.2	2.48	35	50.0	72.8	48	0	0
10	0	0	23	46.5	8.71	36	51.9	72.4	49	0	0
11	0	1.45	24	25.6	2.36	37	75.9	94.7	50	0	0
12	15.4	41.2	25	13.1	2.46	38	93.4	5.19			
13	15.4	35.3	26	14.8	25.4	39	58.9	2.52			

$\Delta \mathcal{H}_1$: 선행한 정보를 고려하지 않은 경우, $\Delta \mathcal{H}_2$: 선행한 정보를 고려한 경우

다음으로 자기감수률이 서로 다른 광체들이 분포되어있는 경우 방법의 효과성을 검증 하였다.(그림 2)

해석자름면을 $20 \times 6 = 120$ 개의 요소체들로 나누고 자름면 왼쪽에 분포된 광체의 자기감수률은 $\Delta \mathcal{H}_1 = 0.008SI$, 오른쪽에 분포된 광체의 자기감수률은 $\Delta \mathcal{H}_2 = 0.005SI$ 로 하였다. 이 상체들의 자기감수률분포를 두드러지게 하기 위하여 추정된 자기감수률값들에 대한 변환을 진행하였다.

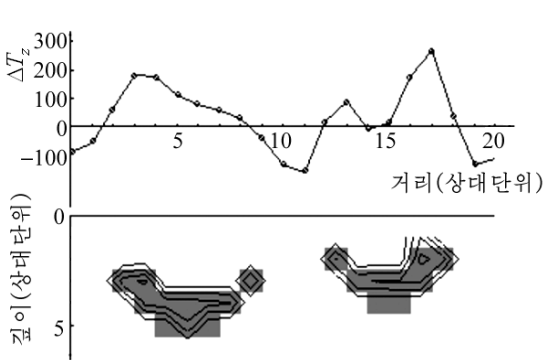


그림 2. 표사광체가 2개인 경우 해석결과
○ 관측값, — 해석마당

$$\Delta \mathcal{H} = \begin{cases} 0, & |\Delta \mathcal{H}| < \Delta \mathcal{H}_{\min} \\ \exp(|\Delta \mathcal{H}| - \Delta \mathcal{H}_{\min}), & \Delta \mathcal{H}_{\min} = |\Delta \mathcal{H}| \leq k_1 \\ (|\Delta \mathcal{H}| - k_1 + 1) \exp(k_1), & |\Delta \mathcal{H}| > k_1 \end{cases}$$

여기서 $\Delta \mathcal{H}_{\min}$ 은 탐사대상의 자기감수률아래 한계값으로서 해석자가 설정할수 있는데 우리는 $k_1 = k_2 \cdot \Delta \mathcal{H}_{\min} - \Delta \mathcal{H}_{\min}$, $k_2 = 40$, $\Delta \mathcal{H}_{\min} = 0.0019$ 로 택하였다. 모형실험에서는 선행정보를 고려하지 않았다.

그림 2에서 보는바와 같이 선행정보를 고려하지 않아도 이상체들의 분포를 비교적 정확히 알아낼수 있다.

맺는말

조건부변분법에 의한 자기마당수직구배영상화방법은 표사광상탐사자료해석에 효과적으로 적용할수 있다. 이 방법을 적용하면 연구지역의 자기감수률분포에 대한 선행정보들이 불충분한 경우에는 이상체의 룬곽을 대략적으로 밝힐수 있고 선행정보들이 충분한 경우에는 자기감수률값들을 비교적 정확히 결정할수 있다.

참고문헌

- [1] 김일성종합대학학보(자연과학), 56, 3, 190, 주체99(2010).

주체103(2014)년 10월 5일 원고접수

Magnetic Vertical Gradient Imaging based on the Conditional Variation Method

Kim Song Gom, Choe Yong Nam

We established 2-D magnetic vertical gradient imaging method based on conditional variation method and through model calculations verified the reliability and effectiveness of method.

Key word: magnetic vertical gradient imaging