김일성종합대학학보 주체107(2018)년
수 학 제64권 제2호

반단조거리를 가진 반순서모임에서 일반화된 약축소넘기기에 대한 쌍부동점의 유일성정리

김 명 훈

우리는 최근에 많이 론의되고있는 완비거리공간에서 축소넘기기에 대한 바나흐의 부동점정리를 일반화하기 위한 연구를 진행하였다.

락스미칸담 등은 반순서모임에서 혼합단조넘기기에 대한 쌍부동점정리[2]를 제기하였고 사메트는 일반화된 메어－킬러넘기기가 엄격혼합단조이고 일정한 가정을 만족시키면 쌍부동점[3]을 가진다는것을 증명하였다.

또한 단라스는 반순서모임에서 일반화된 메어－킬러넘기기를 보다 일반화하고 간소화된 대칭메어－킬러넘기기에 대한 쌍부동점정리[4]를 내놓았다.

한편 코흐리는 완비거리공간에서 일반화된 약축소넘기기에 대한 부동점의 유일존재성정리를 증명[5]하였다.

이 론문에서는 반순서모임에서 단라스의 대칭메어－킬러축소넘기기에 대한 쌍부동점의 존재성정리[4]를 일반화된 약축소넘기기에 대한 쌍부동점의 존재성정리에로 개선한데 이어 쌍부동점의 유일성정리를 증명한다.

정의 1[2] 다음의 조건들을 만족시키는 두변수넘기기 $A: X\times X\to X$ 를 혼합단조넘기기라고 부른다.

① $x_1,\ x_2,\ y\in X\ \ (x_1\le x_2)\Rightarrow A(x_1,\ y)\le A(x_2,\ y)$

② $x,\ y_1,\ y_2\in X\ \ (y_1\le y_2)\Rightarrow A(x,\ y_1)\ge A(x,\ y_2)$

정의 2[2] $A(x,\ y)=x,\ A(y,\ x)=y$ 일 때 $(x,\ y)\in X\times X$ 를 A의 쌍부동점, $A(x,\ x)=x$ 일 때 $x\in X$ 를 A의 부동점이라고 부른다.

정의 3 $(x,\ y),\ (u,\ v)\in X\times X\ \ ((x,\ y)\le(u,\ v))\overset{d}{\longleftrightarrow} x\le u,\ y\ge v$

정리 1[2] $(X,\ \le)$: 반순서모임, $(X,\ d)$: 완비거리공간, $A: X\times X\to X$ 가 혼합단조넘기기일 때 $\exists\Phi:[0,\ \infty)\to[0,\ \infty),\ \Phi(t)<t,\ \lim\limits_{s\to t}\Phi(s)<t\ \ (\forall t>0)$ 에 대하여

$$d(A(x,\ y),\ A(u,\ v))\le\Phi\left(\frac{d(x,\ u)+d(y,\ v)}{2}\right)\ (\forall x,\ y,\ u,\ v\in X\ \ (x\le u,\ y\ge v))\qquad(1)$$

가 성립된다.

다음의 사실을 가정하자.

① A는 련속이다.

② X 에 대하여 다음의 성질들이 성립한다.

ㄱ) $(x_n)\subset X$ 가 비감소렬이고 $x_n\to x\Rightarrow x_n\le x\ \ (\forall n)$ 이다.

ㄴ) $(y_n)\subset X$ 가 비증가렬이고 $y_n\to y\Rightarrow y_n\ge y\ \ (\forall n)$ 이다.

이때 $x_0\le A(x_0,\ y_0),\ y_0\ge A(y_0,\ x_0)\Rightarrow A$는 쌍부동점을 가진다.

또한 $x_0,\ y_0$ 이 비교가능하면 A는 부동점을 가진다.

정의 4[3] $(X, \le)$: 반순서모임, (X, d): 완비거리공간이고 $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0;\ x,\ y,\ u,\ v\in X\ \ (x\le u,\ y\ge v)$ 에 대하여

$$\varepsilon\le\frac{d(x,\ u)+d(y,\ v)}{2}<\varepsilon+\delta\Rightarrow d(A(x,\ y),\ A(u,\ v))<\varepsilon \tag{2}$$

을 만족시키면 $A: X\times X\to X$ 를 일반화된 메어－킬러넘기기라고 부른다.

정의 5[4] 임의의 쌍 (x, y)들이 상계 또는 하계를 가지면 반순서모임 $(X, \le)$ 을 준순서모임이라고 부른다.

주의 1[1] X : 준순서모임 $\Leftrightarrow\forall x,\ y\in X,\ \exists z\in X$; z 는 $x,\ y$ 와 비교가능하다.

정리 2[3] $(X, \le)$: 반순서모임, (X, d): 완비거리공간, $A: X\times X\to X$ 가 일반화된 메어－킬러넘기기, 엄격혼합단조넘기기이고 다음의 조건들을 만족시킨다고 하자.

① A는 련속이다.

② X 는 다음의 성질을 가진다.

ㄱ) $(x_n)\subset X$ 가 비감소렬이고 $x_n\to x\Rightarrow x_n\le x\ (\forall n)$

ㄴ) $(y_n)\subset X$ 가 비증가렬이고 $y_n\to y\Rightarrow y_n\ge y\ (\forall n)$

이때 $x_0<A(x_0,\ y_0),\ y_0\ge A(y_0,\ x_0)$ 이면 A는 쌍부동점을 가진다.

또한 $x_0,\ y_0$ 이 비교가능하면 A는 부동점을 가진다.

$(X, \le)$가 준순서모임이면 A의 매 쌍부동점은 같은 성분을 가진다. 즉 A는 부동점을 가진다.

특히 $(X, \le)$가 준순서모임이면 A는 $X\times X$ 에서 유일한 쌍부동점을 가지고 A는 X 에서 유일한 부동점을 가진다.

정의 6[4] $(X, \le)$: 반순서모임, d: X 에서의 거리일 때 적당한 상수 $c\ge 1$이 있어서 $x,\ y,\ u,\ v\ (x\le u\le v\le y)$ 에 대하여 $d(u,\ v)\le c\cdot d(x,\ y)$ 를 만족시키면 d 를 반단조거리라고 부른다.

특히 $c=1$이면 d 를 단조거리라고 부른다.

정의 7[5] 다음조건을 만족시키는 함수 $\Psi:[0,\ \infty)\to[0,\ \infty)$ 를 거리변경함수라고 부른다.

① Ψ 는 련속이고 비감소함수이다.

② $\Psi(t)=0\Leftrightarrow t=0$

정의 8[5] $(X,\ d)$: 거리공간, T: $X\to X$ 인 넘기기일 때, 임의의 $x,\ y\in X$ 에 대하여

$$\Psi(d(Tx,\ Ty))\le\Psi(m(x,\ y))-\Phi(\max\{d(x,\ y),\ d(y,\ Ty)\}) \tag{3}$$

를 만족시키면 T 를 일반화된 약축소넘기기라고 부른다. 여기서

$$m(x,\ y):=\max\left\{d(x,\ y),\ d(x,\ Tx),\ d(y,\ Ty),\ \frac{1}{2}[d(x,\ Ty)+d(y,\ Tx)]\right\}$$

이고 Ψ, Φ 는 거리변경함수이다.

정의 9[4] $(X, \le)$: 반순서모임, $x,\ y\in X,\ x\le y$ 일 때 $[x,\ y]:=\{z\in X\mid x\le z\le y\}$ 이다.

정리 3[4] $(X, \le)$: 반순서모임, d 는 X 에서의 반단조완비거리, $A: X\times X\to X$ 가 혼합단조성을 가진 대칭메어－킬러축소넘기기이고 다음의 두 성질중 하나를 만족시킨다고 하자.

① A는 다음의 성질을 가진다.

비감소렬 $(x_n)\subset X$, 비증가렬 $(y_n)\subset X$ 에 대하여 $x_n\to x,\ y_n\to x\ (n\to\infty)$ 이고 $x_n\le y_n$, $\forall n$ 이면 $A(x_n,\ y_n)\to A(x,\ x)$ 혹은 $A(y_n,\ x_n)\to A(x,\ x),\ n\to\infty$ 를 만족시킨다.

② X 는 다음의 성질을 가진다.

비감소렬 $(x_n)\subset X$, 비증가렬 $(y_n)\subset X$ 에 대하여 $x_n\to x,\ y_n\to x\ (n\to\infty)$ 이고 $x_n\le y_n$, $\forall n$ 이면 $x_n\le x\le y_n,\ \forall n$ 이 성립된다.

이때 만일 $x_0,\ y_0\in X$ 들이 비교가능하고

$$x_0\le A(x_0,\ y_0),\ y_0\ge A(y_0,\ x_0) \tag{4}$$

이면 A 는 부동점 $x^*\in X$ 를 가지며

$$A^n(x,\ y)\to x^*,\ n\to\infty\ (\forall x,\ y\in[x_n,\ y_n])$$

가 성립한다.

특히 ②가 성립하면 $x^*\in[x_0,\ y_0]$ 이고 $(x^*,\ x^*)$ 은 A 의 유일한 쌍부동점이며 x^* 은 A 의 유일한 부동점이다.

명제 1[4] $(X,\ \le)$: 반순서모임, d: X 에서의 반단조거리라고 하자. 이때

$$(x_n),\ (y_n),\ (u_n)\in X,\ x\in X,\ x_n\le u_n\le y_n,\ n\in\mathbf{N},\ x_n\to x,\ y_n\to x\ (n\to\infty)$$

이면 $u_n\to x,\ n\to\infty$ 가 성립된다.

명제 2[4] $(X,\ \le)$: 반순서모임, d: X 에서의 반단조거리이고

$$(x_n),\ (y_n)\subset X\ (x_n\le y_n,\ n\in\mathbf{N})$$

에 대하여 다음의 사실중 하나가 성립된다고 하자.

① $\bigcap\limits_{n\ge 0}[x_n,\ y_n]\ne\varnothing$

② (x_n): 비감소렬, (y_n): 비증가렬, d: X 에서의 완비거리이다.

만일 $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,\ y_n)=0$ 이면 $(x_n),\ (y_n)$ 은 수렴하고 같은 극한 x 를 가진다.

특히 ①이 성립하면 $\bigcap\limits_{n\ge 0}[x_n,\ y_n]=\{x\}$ 가 성립한다.

정리 4 $(X,\ \le)$: 반순서모임, d: X 에서의 거리, $A: X\times X\to X$ 가 혼합단조넘기기이고 $x_n=A^n(x_0,\ y_0),\ y_n=A^n(y_0,\ x_0)\ (x_0,\ y_0\in X)$ 이면 A^n 은 혼합단조, (x_n) 은 비감소렬, (y_n) 은 비증가렬이다.

증명 $x_1\le x_2\Rightarrow A(x_1,\ y)\le A(x_2,\ y)$ 이다.

$A^2(x_1,\ y)=A(A(x_1,\ y),\ y)\le A(A(x_2,\ y),\ y)=A^2(x_2,\ y)$ 가 성립된다.

… … …

$A^n(x_1,\ y)\le A^n(x_2,\ y)$

마찬가지로 $y_1\le y_2\Rightarrow A(x,\ y_1)\ge A(x,\ y_2)$ 이고 $A^n(x,\ y_1)\ge A^n(x,\ y_2)$ 이다. 즉 A^n 은 혼합단조이고 따라서

$$x_n=A^n(x_0,\ y_0)\le A^{n+1}(x_0,\ y_0)=x_{n+1}$$

$$y_n=A^n(y_0,\ x_0)\ge A^{n+1}(y_0,\ x_0)=y_{n+1}$$

이다.

그러므로 (x_n) 은 비감소렬, (y_n) 은 비증가렬이다.(증명끝)

정리 5 $(X, \le)$: 반순서모임, d: X 에서의 거리, $A: X\times X \to X$ 가 혼합단조, 일반화된 약축소넘기기이면

$$\lim_{n\to\infty} d(A^n(x,\ y),\ A^n(y,\ x)) = 0\ (\forall x,\ y\in X\text{에 대하여 } x,\ y\text{는 비교가능}) \qquad (5)$$

이 성립된다.

정리 6 $(X, \le)$: 반순서모임, d: X 에서의 반단조완비거리, $A: X\times X \to X$ 가 혼합단조성을 가진 일반화된 약축소넘기기이고 다음의 사실중 하나가 성립된다고 하자.

① A는 다음의 성질을 가진다.

$(x_n)\subset X$ 는 비감소렬, $(y_n)\subset X$ 는 비증가렬, $x_n\to x,\ y_n\to x\ (n\to\infty,\ x_n\le y_n),\ \forall n$ 이면 $A(x_n,\ y_n)\to A(x,\ x)$ 혹은 $A(y_n,\ x_n)\to A(x,\ x),\ n\to\infty$ 가 성립된다.

② X 는 다음의 성질을 가진다.

$(x_n)\subset X$ 는 비감소렬, $(y_n)\subset X$ 는 비증가렬, $x_n\to x,\ y_n\to x\ (n\to\infty,\ x_n\le y_n),\ \forall n$ 이면 $x_n\le x\le y_n,\ \forall n$ 이 성립된다.

이때 $x_0,\ y_0\in X$ 가 비교가능하고

$$x_0\le A(x_0,\ y_0),\ y_0\ge A(y_0,\ x_0) \qquad (4)$$

이면 A는 부동점 $x^*\in X$ 를 가지며

$$A^n(x,\ y)\to x^*,\ n\to\infty\ (\forall x,\ y\in[x_n,\ y_n])$$

가 성립된다.

특히 ②가 성립하면 $(x^*,\ x^*)\ (x^*\in[x_0,\ y_0])$ 은 A의 유일한 쌍부동점이고 x^* 은 A의 유일한 부동점이다.

정리 7 $(X, \le)$: 반순서모임, d: X 에서의 반단조완비거리, $A: X\times X \to X$ 가 혼합단조성을 가진 일반화된 약축소넘기기, $(X\times X, \le)$: 준순서모임, A: 쌍부동점 $(x^*,\ y^*)$ 을 가진다고 하자.

이때 $x^*=y^*$ 이고 $(x^*,\ x^*)$ 은 $X\times X$ 에서 A의 유일한 쌍부동점이며 x^*는 X 에서 A의 유일한 부동점이다.

또한 $A^n(x,\ y)\to x^*\ (n\to\infty)\ (\forall x,\ y\in X)$ 이다.

정리 8 정리 6의 가정에 $(X\times X, \le)$ 가 준순서모임이라는 가정을 주면 $(x^*,\ x^*)$ 은 $X\times X$ 에서 A의 유일한 쌍부동점, x^* 은 X 에서 A의 유일한 부동점이며

$$A^n(x,\ y)\to x^*\ \ (\forall x,\ y\in X)$$

이 성립된다.

증명 정리 6에 의하여 x^* 은 A의 부동점이고($(x^*,\ x^*)$ 는 A의 쌍부동점) 정리 7에 의하여 그 부동점은 유일하다.(증명끝)

이로부터 반순서모임에서 단라스의 대칭메어－킬러축소넘기기에 대한 쌍부동점의 존재성정리는 일반화된 약축소넘기기에 대한 쌍부동점의 존재성정리에로 개선되였고 쌍부동점의 유일성정리가 증명되였다.

주의 2 우의 결과들은(정리 7, 8) 선행연구[2, 3]의 부동점정리를 일반화한 선행연구[4]의 결과를 개선한것이다.

참 고 문 헌

[1] J. J. Nieto et al.; Order, 22, 3, 223, 2005.
[2] V. Lakshmikantham et al.; Nonlinear Anal., 70, 12, 4341, 2009.
[3] B. Samet; Nonlinear Anal., 72, 12, 4508, 2010.
[4] Mircea-Dan Rus; Nonlinear Anal., 74, 1804, 2011.
[5] B. S. Choudhury et al.; Nonlinear Anal., 74, 2116, 2011.

주체106(2017)년 12월 5일 원고접수

Uniqueness Theorems of Coupled Fixed Points for Generalized Weakly Contractive Mappings in Partially Ordered Metric Spaces with Semi-Monotone

Kim Myong Hun

In this paper, we prove the uniqueness theorems of coupled fixed points for generalized weakly contractive mappings in partial ordered metric spaces with semi-monotone metric.

Key words: fixed point, coupled fixed point, generalized weakly contractive mapping, semi-monotone metric