김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제4호

임풀스조건을 가지는 한가지 비선형다항분수계미분방정식의 하이어스-울람안정성

리선혁, 리영도

분수계미분방정식은 여러 분야의 많은 현상들을 모형화할수 있는 위력한 수단인것으로 하여 그에 대한 연구는 더욱 심화되고있다.[2]

분수계미분방정식에 대한 연구에서 최근 많이 진행되고있는 분야의 하나가 바로 하이어스-울람안정성이다.

선행연구[4]에서 처음으로 제시된 안정성문제는 울람안정성이라고 정식화되였으며 그에 대한 첫 부분적인 해답은 선행연구[3]에서의 바나흐공간에서 진행되였고 선행연구[5]에서는 하이어스의 정리의 일반화된 결과를 얻어냈다. 미분방정식의 울람안정성은 그것이 풀이의 존재성과 근사풀이의 리론적기초를 주는것으로 하여 중요한 내용을 이루며 선행연구[6]에서 처음으로 시작되게 되였다.

최근 옹근수계뿐아니라 분수계미분방정식의 울람안정성에 대하여서도 많은 결과들이 나오고있다.

선행연구[7]에서는 분수계미분방정식

$$^{c}D^{\alpha}x(t)=f(t,\ x(t)),\ t\in[a,\ b]$$

에 대하여 하이어스-울람안정성과 하이어스-울람-라씨아스안정성을 론의하였으며 선행연구[8]에서는 두가지 형태의 상결수선형분수계미분방정식에 대하여 하이어스-울람안정성과 하이어스-울람-라씨아스안정성의 충분조건을 얻어냈다. 이밖에도 분수계미분 및 적분방정식의 하이어스-울람안정성과 관련한 론문들을 선행연구[1, 9, 10]에서 찾아볼수 있다.

또한 일부 론문들에서는 임풀스조건을 가지는 분수계미분방정식의 풀이의 존재성과 유일성, 하이어스-울람안정성에 대하여 론의하였다.

선행연구[11, 12]에서는 일반화된 그론월부등식을 리용하여 초기조건 및 적분경계조건을 가지는 임풀스단항분수계미분방정식의 풀이의 존재성을 론의하고 분수계미분방정식의 하이어스-울람-라씨아스안정성을 고찰하였다.

대부분의 결과들이 단항인 경우로 제한되고있는것으로 하여 론문에서는 임풀스조건을 가지는 다음의 다항분수계미분방정식에 대하여 연구하였다.

$$\begin{cases} ^{c}D_{0+}^{\alpha}u(t)=f(t,\ u(t),\ ^{c}D_{0+}^{\beta}u(t)),\ t\in J'=J\setminus\{t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_m\},\ J=[0,\ T] \\ \Delta u(t_j):=u(t_j^{+})-u(t_j^{-})=I_j(u(t_j^{-})),\ j=1,\ 2,\cdots,\ m \\ u(0)=u_0 \end{cases} \tag{1}$$

여기서 $0<\beta<\alpha<1$이고 f와 I_j는 $f:J\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$, $I_j:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$인 련속함수들이며 $u_0\in\mathbf{R}$, $0=t_0<t_1<\cdots<t_m<t_{m+1}=T$, $u(t_j^{+})=\lim\limits_{h\to 0+0}u(t_j+h)$, $u(t_j^{-})=\lim\limits_{h\to 0-0}u(t_j+h)$이다.

정의 1 [2] 함수 $f\in L_1[a,\ b]$의 아래한계가 a인 $\alpha>0$계분수적분은

$$I_{a+}^{\alpha}f(t):=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau,\ a\le \mathrm{t}\le b$$

로 정의된다. 여기서 $\Gamma(\cdot)$는 감마함수이다.

정의 2[2] 함수 f의 $\alpha>0$계분수도함수는

$${}^{C}D_{a+}^{\alpha}f(t):=I_{a+}^{n-\alpha}[D^n f(t)]=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau$$

로 정의된다. 여기서 $f^{(n)}\in L_1[a,\ b]$, $n=[\alpha]+1$이다.

보조정리 1[2] 함수 $f(x)=(x-a)^p$에 대하여 $p>-1,\ \alpha>0$이라고 하면

$$I_{a+}^{\alpha}f(t)=\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\alpha+p+1)}(t-a)^{\alpha+p}$$

가 성립한다.

보조정리 2[2] 만일 $\alpha\in\mathbf{R}_+$, $n-1<\alpha\le n$, $n\in\mathbf{N}$, $f\in AC^n[a,\ b]$이면

$$I_{a+}^{\alpha}\,{}^{c}D_{a+}^{\alpha}f(t)=f(t)-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(a)}{j!}(t-a)^j$$

가 성립한다.

정의 3 ${}^{c}D_{0+}^{\alpha}u\in PC(J,\ \mathbf{R})$ 인 함수 $u(t)$가 방정식 (1)을 만족시키면 그 함수를 방정식 (1)의 풀이라고 부른다.

다음의 부등식을 생각하자.

$$\begin{cases}\|{}^{c}D_{0+}^{\alpha}u(t)-f(t,\ u(t),\ {}^{c}D_{0+}^{\beta}u(t))\|_{PC}\le\varepsilon,\ t\in J' \\ |\Delta u(t_j)-I_j(u(t_j^-))|\le\varepsilon\ \ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)\end{cases}\tag{2}$$

여기서 $\|\cdot\|_{PC}$는 PC－노름으로서 $\|u\|_{PC}=\sup\limits_{t\in J}|u(t)|$이다.

정의 4 만일 ${}^{c}D_{0+}^{\alpha}v\in PC(J,\ \mathbf{R})$인 함수 $v(t)$가 부등식 (2)를 만족시키면 함수 $v(t)$를 부등식 (2)의 풀이라고 부른다.

정의 5 만일 적당한 상수 $K>0$이 있어서 임의의 $\varepsilon>0$과 부등식의 풀이 $u\in PC(J,\ \mathbf{R})$에 대하여 부등식 $\|u-u_0\|_{PC}<K\varepsilon$을 만족시키는 방정식 (1)의 풀이 $u_0\in PC(J,\ \mathbf{R})$가 존재하면 방정식 (1)은 하이어스－울람안정하다고 말한다.

보조정리 3 $I^{\alpha}e^{kt}\le\dfrac{e^{kt}}{k^{\alpha}}$이 성립한다.

주의 함수 $v\in PC(J,\ \mathbf{R})$가 부등식 (2)의 풀이이기 위하여서는 적당한 함수 $g\in PC(J,\ \mathbf{R})$와 렬 $g_j\in\mathbf{R}\ (j=1,\ 2,\cdots,\ m)$가 있어서 다음의 조건들을 만족시킬것이 필요하고 충분하다.

$$\begin{aligned}&\|g\|_{PC}\le\varepsilon,\ |g_j|\le\varepsilon\ \ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)\\ &{}^{c}D^{\alpha}v(t)=f(t,\ v(t),\ {}^{c}D^{\beta}v(t))+g(t),\ t\in J'\\ &\Delta v(t_j)=I_j(v(t_j^-))+g_j\ \ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)\end{aligned}\tag{3}$$

보조정리 4 $u(t)$가 방정식 (1)의 풀이이면 ${}^{c}D^{\alpha}u(t)=y(t)$인 $y(t)$는 다음의 적분방정식의 풀이이다.

$$y(t)=\begin{cases} f(t,\ u_0+I^\alpha y(t),\ I^{\alpha-\beta}y(t)),\ t\in[0,\ t_1) \\ f(t,\ u_0+I^\alpha y(t)+I_1(u(t_1^-)),\ I^{\alpha-\beta}y(t)),\ t\in(t_1,\ t_2) \\ f(t,\ u_0+I^\alpha y(t)+I_1(u(t_1^-))+I_2(u(t_2^-)),\ I^{\alpha-\beta}y(t)),\ t\in(t_2,\ t_3) \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ f(t,\ u_0+I^\alpha y(t)+\sum_{i=1}^{m}I_i(u(t_i^-)),\ I^{\alpha-\beta}y(t)),\ t\in(t_m,\ T) \end{cases} \tag{4}$$

여기서

$$u(t_i^-)=u_0+\sum_{j=1}^{i-1}I_j(u(t_j^-))+I^\alpha y(t)|_{t=t_i},\ u(t_1^-)=u_0+I^\alpha y(t)|_{t=t_1}$$

이다.

거꾸로 적분방정식 (4)를 만족시키는 $y(t)$에 대하여

$$u(t)=u_0+\sum_{i=1}^{j}I_i(u(t_i^-))+I^\alpha y(t),\ t\in(t_j,\ t_{j+1})\ (j=0,\ 1,\ \cdots,\ m)$$

은 방정식 (1)의 풀이이다. 여기서 $t_0=0,\ t_{m+1}=T$이다.

다음의 보조정리에서는 적분방정식 (4)의 풀이의 존재성을 보여준다.

보조정리 5 가정 ① $\forall x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2\in\mathbf{R},\ \exists l_1,\ l_2>0;$

$$|f(t,\ x_1,\ y_1)-f(t,\ x_2,\ y_2)|\le l_1|x_1-x_2|+l_2|x_2-y_2|$$

가정 ② $\forall x_1,\ x_2\in\mathbf{R},\ \exists\mu_i>0;\ |I_i(x_1)-I_i(x_2)|\le\mu_i|x_1-x_2|\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$

가정 ①, ②를 만족시키면 적분방정식 (4)는 유일한 풀이를 가진다.

보조정리 6 $v(t)$가 방정식 (3)의 풀이이면 ${}^cD^\alpha v(t)=x(t)$인 $x(t)$는 적분방정식

$$x(t)=\begin{cases} f(t,\ u_0+I^\alpha x(t),\ I^{\alpha-\beta}x(t))+g(t),\ t\in[0,\ t_1) \\ f(t,\ u_0+I^\alpha x(t)+I_1(v(t_1^-))+g_1,\ I^{\alpha-\beta}y(t))+g(t),\ t\in(t_1,\ t_2) \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ f(t,\ u_0+I^\alpha x(t)+\sum_{i=1}^{m}I_i(v(t_i^-))+\sum_{i=1}^{m}g_i,\ I^{\alpha-\beta}x(t))+g(t),\ t\in(t_m,\ T] \end{cases} \tag{5}$$

의 풀이이다.

거꾸로 적분방정식 (5)를 만족시키는 $x(t)$에 대하여

$$v(t)=u_0+\sum_{i=1}^{j}I_i(v(t_i^-))+\sum_{i=1}^{j}g_i+I^\alpha x(t),\ t\in(t_j,\ t_{j+1}) \tag{6}$$

에 의하여 얻어지는 $v(t)$는 방정식 (3)의 풀이이다.

방정식 (1)에 대한 하이어스—울람안정성에 대하여 보자.

정리 가정 ①과 ②를 만족시키면 방정식 (1)은 하이어스—울람안정하다.

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보 수학, 65, 1, 68, 주체108(2019).
[2] A. A. Kilbas et al.; Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, 183～232, 2006.
[3] S. M. Ulam; A Collection of Mathematical Problems, Interscience Publishers, 127～154, 1968.
[4] D. H. Hyers; Proc. Natl. Acad. Sci., 27, 222, 1941.
[5] Th. M. Rassias; Proc. Amer. Math. Soc., 72, 297, 1978.
[6] M. Obloza; Rocznik Nauk. Dydakt. Prace Mat., 13, 259, 1993.
[7] J. Wang et al.; Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 17, 2530, 2012.
[8] J. Wang et al.; Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., 63, 1, 2011.
[9] O. Masakazu et al.; Appl. Math. Lett., 63, 102, 2017.
[10] G. Zhuo et al.; J. Appl. Math. Comput., 53, 599, 2017.
[11] J. Wang et al.; Comput. Math. Appl., 64, 3389, 2012.
[12] A. I. Mohamed; J. Contemp. Math. Anal., 50, 209, 2015.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

Hyers-Ulam Stability of a Nonlinear Multi-Term Fractional Differential Eqaution with Impulsive Condition

Ri Son Hyok, Ri Yong Do

In this paper, we study Hyers-Ulam stability of a nonlinear multi-term fractional differential equation with impulsive condition.

Key words: Hyers-Ulam stability, fractional differential equation