김일성종합대학학보 JOURNAL OF KIM IL SUNG UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체103(2014)년 제60권 제7호 Vol. 60 No. 7 JUCHE103(2014).

그린함수에 의한 선형동차정규분수계 미분방정식의 풀이표시

박 순 애

우리는 리만—류빌의 그린함수에 의한 변결수선형동차정규분수계미분방정식의 해석적인 풀이표시문제를 고찰하였다.

선행연구[4]에서는 단항과 2항인 경우 상결수선형동차정규분수계미분방정식에 대하여 풀이의 표준기본계를 고찰하였고 선행연구[3]에서는 일반화된 행렬지수함수를 리용하여 상결수련립정규분수계미분방정식에 대하여 최고계도함수가 0과 1사이에 있는 경우의 풀이표시식을 구하였으며 선행연구[5]에서는 단항인 경우 변결수선형동차정규분수계미분방정식에 대하여 $\alpha-$보통점근방에서 풀이표시를 구하였다. 여기서는 상결수인 경우와 변결수에 대해서는 특수한 경우에 관해서만 고찰하였다.

선행연구[1]에서는 일반형태의 련속변결수선형동차정규분수계미분방정식에 대하여 도함수계수의 근접관계에 따르는 해석적인 풀이공식을 방정식의 결수에 의하여 구하였다.

론문에서는 선행연구[1]에서 고찰한 일반형태의 련속변결수선형동차정규분수계미분방정식의 풀이의 표준기본계를 구하는 다른 한가지 방법을 고찰하였다.

정의 1[2] $R=(-\infty,\ +\infty)$, $R_+=(0,\ +\infty)$로 표시하며 함수 $f:(0,\ T]\to R\ (\forall T>0)$와 $0\le\gamma<1$인 실수 γ에 대하여 $t^\gamma f^{(n)}(t)\in C[0,\ T]$인 함수 f들의 모임을 $C_\gamma^n[0,\ T]$로 표시한다. 특히 $C_\gamma^0[0,\ T]$를 $C_\gamma[0,\ T]$로 표시한다.

정의 2[2] $n-1<\alpha\le n,\ \ n\in N$, $I^{n-\alpha}f\in C_\gamma^n[0,\ T],\ \ 0\le\gamma<1$일 때

$$^cD_{0+}^\alpha f(t)=D_{0+}^\alpha\left[f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}t^k\right]$$

를 정규(Caputo)의미에서 함수 f의 α계분수도함수라고 부른다. 특히 $\alpha=n$일 때 $^cD_{0+}^\alpha f(t)=D_{0+}^\alpha f(t)=D^n f(t)$로 표시한다.

다음의 변결수선형동차정규분수계미분방정식을 고찰하자.

$$^cD_{0+}^{\alpha_0}y(t)=-\sum_{i=1}^m a_i(t)^cD_{0+}^{\alpha_i}y(t),\quad 0<t<T \tag{1}$$

여기서 $T>0$은 임의의 실수이며 $\alpha_0,\ \alpha_i\in R_+,\ \ i=1,\cdots,\ m$은 $\alpha_0>\alpha_1>\cdots>\alpha_m\ge 0$과 같은 순서관계를 가지며 $n_0,\ n_i$는 $n_0-1<\alpha_0\le n_0,\ \ n_i-1<\alpha_i\le n_i,\ i=1,\cdots,\ m$인 자연수이다.

다음의 초기조건을 생각하자.

$$D^k y(t)|_{t=+0}=b_k\in R,\ \ k=0,\ 1,\cdots,\ n_0-1 \tag{2}$$

정의 3 동차방정식 (1)을 만족 즉 ${}^{c}D_{0+}^{\alpha_0}y_j(t) = -\sum_{i=1}^{m} a_i(t){}^{c}D_{0+}^{\alpha_i}y_j(t), \quad 0<t<T$ 이고 초기조건 $D^k y_j(t)|_{t=+0} = \begin{cases} 1, & j=k \\ 0, & j\neq k \end{cases}$, $k,\ j=0, \cdots, n_0-1$ 을 만족시키는 함수계 $y_j(t)$ 를 동차방정식 (1)의 풀이의 표준기본계라고 부른다.

동차방정식 (1)의 있을수 있는 가능한 형태를 모두 고찰하기 위하여 도함수계수 $\alpha_i \in R_+,\quad i=0,\ 1, \cdots,\ m$ 에 대하여 다음과 같은 첨수모임 H_j 를 도입한다.

$$H_j := \{i : 0 \le \alpha_i \le j,\quad i=1, \cdots,\ m\}, \quad j=0,\ 1, \cdots,\ n_0-1 \tag{3}$$

이때 $h_j = \min H_j \ \ (H_j \neq \phi)$ 로 표시한다.

그러면 다음과 같은 경우들이 있게 된다.

i) $H_0 \neq \phi$ 인 경우이다.

ii) $\exists j_0 \in \{0,\ 1, \cdots,\ n_0-2\}$, $H_{j_0}=\phi,\ \ H_{j_0+1}\neq\phi$ 인 경우 즉 $H_j=\phi, \quad j=0,\ 1, \cdots,\ j_0$ 이고 $H_j \neq \phi,\ \ j=j_0+1, \cdots, n_0-1$ 인 경우이다.

iii) $H_{n_0-1}=\phi$ 인 경우이다.

정의 4 변결수선형동차정규분수계미분방정식 (1)에 대하여 도함수계수근접관계에 따르는 i), ii), iii)경우일 때의 방정식 (1)을 각각 Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ형선형동차정규분수계미분방정식이라고 부른다.

변결수선형동차정규분수계미분방정식 (1)의 풀이의 표준기본계

$$L({}^{c}D_{0+})y_j(t) \equiv {}^{c}D_{0+}^{\alpha_0}y_j(t) + \sum_{i=1}^{m} a_i(t){}^{c}D_{0+}^{\alpha_i}y_j(t) = 0 \tag{4}$$

와 초기조건

$$D^k y_j(t)\Big|_{t=+0} = \begin{cases} 1, & j=k \\ 0, & j\neq k \end{cases}, \quad k,\ j=0,\ 1, \cdots,\ n_0-1 \tag{5}$$

을 만족시키는 함수계 $y_j(t),\ \ j=0,\ 1,\ \cdots,\ n_0-1$ 을 구하자.

정리 $n_0=n_1$ 이고 $0<\gamma<\alpha_0-n_0+1$ 인 γ 에 대하여 $a_i \in C_\gamma^1[0,\ T],\ \ i=1, \cdots,\ m$ 이며 경우 i)이 성립된다고 하면 방정식 (1)의 풀이의 표준기본계 $y_j(t) \in C_\gamma^{n_0}[0,\ T],\ \ j=0, 1, \cdots, n_0-1$ 은 유일존재하며

$$y_j(t) = \Phi_{j+1}(t) + \int_0^t G_R(t,\ \tau)\sum_{i=h_j}^{m} a_i(\tau)\Phi_{j+1-\alpha_i}(\tau)d\tau = \Phi_{j+1}(t) + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}I_{0+}^{\alpha_0}\left[\sum_{i=1}^{m} a_i(t)I_{0+}^{\alpha_0-\alpha_i}\right]^k \sum_{i=h_j}^{m} a_i(t)\Phi_{j+1-\alpha_i}(t),$$
$$j=0, 1, \cdots,\ n_0-1 \tag{6}$$

로 된다. 여기서 $G_R(t,\ \tau)$ 는 ${}^{R}L(D_{\tau+}) = D_{\tau+}^{\alpha_0} + \sum_{i=1}^{m} a_i(t)D_{\tau+}^{\alpha_i}$ 의 그린함수이다.[1]

증명 가정으로부터 선행연구[1]의 결과에 의해 풀이의 표준기본계의 유일존재성이 나오며 식 (6)의 두번째 같기식은 선행연구[1]에서 증명된 풀이의 표준기본계와 같으므로 식 (6)의 첫번째 같기식을 계산하여 식 (6)이 성립된다는것을 말하면 된다.

변환

$$y_j(t) = Y_j(t) + \Phi_{j+1}(t), \quad j = 0, 1, \cdots, n_0 - 1 \tag{7}$$

을 생각하자. 여기서 $\Phi_{j+1}(t) = t^j / j!$ 이고 $Y_j(t)$ 는 미지함수이다.

먼저 초기조건 (5)에 변환 (6)을 실시하면

$D^k y_j(t)|_{t=+0} = D^k Y_j(t)|_{t=+0} + D^k \Phi_{j+1}(t)|_{t=+0} = D^k Y_j(t)|_{t=+0} + \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \ne k \end{cases} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \ne k \end{cases}$ 여야 하므로 미지함수 $Y_j(t)$ 에 대한 초기조건은 $D^k Y_j(t)|_{t=+0} = 0$ 으로 된다.

다음으로 식 (4)에 변환 (6)을 실시하자.

식 (4)의 첫 항에 변환을 실시하면 정규분수계도함수의 선형성에 의하여

$${}^cD_{0+}^{\alpha_0} y_j(t) = {}^cD_{0+}^{\alpha_0}[Y_j(t) + \Phi_{j+1}(t)] = {}^cD_{0+}^{\alpha_0} Y_j(t) + {}^cD_{0+}^{\alpha_0} \Phi_{j+1}(t)\,. \tag{8}$$

정규분수계도함수의 정의에 의하여 식 (8)의 두번째 항은

$${}^cD_{0+}^{\alpha_0}[\Phi_{j+1}(t)] = D_{0+}^{\alpha_0}\left[\Phi_{j+1}(t) - \sum_{k=0}^{n_0-1} D^k \Phi_{j+1}(0)\Phi_{k+1}(t)\right] = D_{0+}^{\alpha_0}[\Phi_{j+1}(t) - \Phi_{j+1}(t)] = 0$$

즉 다음과 같다.

$${}^cD_{0+}^{\alpha_0} y_j(t) = {}^cD_{0+}^{\alpha_0} Y_j(t) \tag{9}$$

식 (4)의 둘째 항에 변환을 실시하면

$$\sum_{i=1}^{m} a_i(t)\,{}^cD_{0+}^{\alpha_i} y_j(t) = \sum_{i=1}^{m} a_i(t)\,{}^cD_{0+}^{\alpha_i}[Y_j(t) + \Phi_{j+1}(t)] = \sum_{i=1}^{m} a_i(t)[{}^cD_{0+}^{\alpha_i} Y_j(t) + {}^cD_{0+}^{\alpha_i} \Phi_{j+1}(t)]\,. \tag{10}$$

가정으로부터 방정식이 I형인 경우이고 $n_0 = n_1$ 이므로 선행연구[3]에서의 결과로부터 ${}^cD_{0+}^{\alpha_i} \Phi_{j+1}(t) = \begin{cases} D_{0+}^{\alpha_i} \Phi_{j+1}(t), & i \ge h_j \\ 0, & i < h_j \end{cases}$ 로 되고 따라서 식 (10)은 다음과 같다.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i(t)\,{}^cD_{0+}^{\alpha_i} y_j(t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_i(t)\,{}^cD_{0+}^{\alpha_i} Y_j(t) + \sum_{i=h_j}^{m} a_i(t) D_{0+}^{\alpha_i} \Phi_{j+1}(t) = \sum_{i=1}^{m} a_i(t)\,{}^cD_{0+}^{\alpha_i} Y_j(t) + \sum_{i=h_j}^{m} a_i(t) \Phi_{j+1-\alpha_i}(t)$$

우의 식과 식 (9)로부터 방정식 (4)는 변환 (7)에 의하여 다음의 식에 귀착된다.

$${}^cD_{0+}^{\alpha_0} Y_j(t) + \sum_{i=1}^{m} a_i(t)\,{}^cD_{0+}^{\alpha_i} Y_j(t) = -\sum_{i=h_j}^{m} a_i(t) \Phi_{j+1-\alpha_i}(t)$$

동차초기값문제 (4), (5)는 다음의 비동차초기값문제로 넘어간다.

$${}^cD_{0+}^{\alpha_0} Y_j(t) + \sum_{i=1}^{m} a_i(t)\,{}^cD_{0+}^{\alpha_i} Y_j(t) = -\sum_{i=h_j}^{m} a_i(t) \Phi_{j+1-\alpha_i}(t) \tag{11}$$

$$D^k Y_j(t)|_{t=+0} = 0 \tag{12}$$

그런데 정규분수계도함수의 정의로부터 초기조건 (12)밑에서는

$${}^cD_{0+}^{\alpha_0} Y_j(t) = D_{0+}^{\alpha_0} Y_j(t), \quad {}^cD_{0+}^{\alpha_i} Y_j(t) = D_{0+}^{\alpha_i} Y_j(t)$$

이므로 비동차정규분수계미분방정식 (11)은 비동차리만－류빌분수계미분방정식

$$D_{0+}^{\alpha_0} Y_j(t) + \sum_{i=1}^{m} a_i(t) D_{0+}^{\alpha_i} Y_j(t) = -\sum_{i=h_j}^{m} a_i(t) \Phi_{j+1-\alpha_i}(t) \tag{13}$$

로 넘어간다.

결국 비동차초기값문제 (11), (12)의 풀이를 구하는 문제는 비동차리만－류빌분수계미분방정식 (13)의 풀이를 구하는 문제에 귀착된다.

방정식 (13)의 그린함수는 다음과 같다.

$$G_R(t;\tau) = \Phi_{\alpha_0}(t-\tau) + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} I_{\tau+}^{\alpha_0} \left[\sum_{i=1}^{m} a_i(t) I_{\tau_+}^{\alpha_0-\alpha_i} \right]^k \sum_{i=1}^{m} a_i(t) \Phi_{\alpha_0-\alpha_i}(t-\tau)$$

따라서 방정식 (13)의 풀이는

$$Y_j(t) = -\int_0^t G_R(t\,;\,\tau) \sum_{i=h_j}^{m} a_i(\tau) \Phi_{j+1-\alpha_i}(\tau) d\tau =$$

$$= -\int_0^t \left\{ \Phi_{\alpha_0}(t-\tau) + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} I_{\tau+}^{\alpha_0} \left[\sum_{i=1}^{m} a_i(t) I_{\tau_+}^{\alpha_0-\alpha_i} \right]^k \sum_{i=1}^{m} a_i(t) \Phi_{\alpha_0-\alpha_i}(t-\tau) \right\} \cdot \sum_{i=h_j}^{m} a_i(\tau) \Phi_{j+1-\alpha_i}(\tau) d\tau =$$

$$= -I_{0+}^{\alpha_0} \sum_{i=h_j}^{m} a_i(t) \Phi_{j+1-\alpha_i}(t) + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+2} I_{0+}^{\alpha_0} \left[\sum_{i=1}^{m} a_i(t) I_{0+}^{\alpha_0-\alpha_i} \right]^k \sum_{i=1}^{m} a_i(t) I_{0+}^{\alpha_0-\alpha_i} \sum_{i=h_j}^{m} a_i(t) \Phi_{j+1-\alpha_i}(t) =$$

$$= -I_{0+}^{\alpha_0} \sum_{i=h_j}^{m} a_i(t) \Phi_{j+1-\alpha_i}(t) + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+2} I_{0+}^{\alpha_0} \left[\sum_{i=1}^{m} a_i(t) I_{0+}^{\alpha_0-\alpha_i} \right]^{k+1} \sum_{i=h_j}^{m} a_i(t) \Phi_{j+1-\alpha_i}(t) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} I_{0+}^{\alpha_0} \left[\sum_{i=1}^{m} a_i(t) I_{0+}^{\alpha_0-\alpha_i} \right]^k \sum_{i=h_j}^{m} a_i(t) \Phi_{j+1-\alpha_i}(t)$$

즉 방정식 (11), (12)의 풀이는 $Y_j(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} I_{0+}^{\alpha_0} \left[\sum_{i=1}^{m} a_i(t) I_{0+}^{\alpha_0-\alpha_i} \right]^k \sum_{i=h_j}^{m} a_i(t) \Phi_{j+1-\alpha_i}(t)$ 이다.

따라서 변결수선형동차정규분수계미분방정식 (1)의 풀이의 표준기본계는 다음과 같다.

$$y_j(t) = \Phi_{j+1}(t) + Y_j(t) =$$

$$= \Phi_{j+1}(t) + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} I_{0+}^{\alpha_0} \left[\sum_{i=1}^{m} a_i(t) I_{0+}^{\alpha_0-\alpha_i} \right]^k \sum_{i=h_j}^{m} a_i(t) \Phi_{j+1-\alpha_i}(t), \ \ j = 0, 1, \cdots, \ n_0 - 1$$

따라서 식 (6)이 성립된다.(증명끝)

[따름 1] $n_0 > n_1$이고 $a_i \in C[0,\ T],\ i = 1, \cdots, m$이며 경우 i)이 성립된다고 하면 동차방정식 (1)의 풀이의 표준기본계 $y_j(t) \in C^{\alpha_0,\ n_0-1}[0,\ T],\ \ j = 0,\ 1, \cdots, n_0 - 1$은 유일존재하며

$$y_j(t) = \Phi_{j+1}(t) + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} I_{0+}^{\alpha_0} \left[\sum_{i=1}^{m} a_i(t) I_{0+}^{\alpha_0-\alpha_i} \right]^k \sum_{i=h_j}^{m} a_i(t) \Phi_{j+1-\alpha_i}(t), \ \ j = 0, 1, \cdots, \ n_1 - 1,$$

$$y_j(t) = \Phi_{j+1}(t) + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} I_{0+}^{\alpha_0} \left[\sum_{i=1}^{m} a_i(t) I_{0+}^{\alpha_0-\alpha_i} \right]^k \sum_{i=1}^{m} a_i(t) \Phi_{j+1-\alpha_i}(t), \ \ j = n_1,\ n_1 + 1, \cdots, \ n_0 - 1\,.$$

따름 2 $n_0 = n_1$ 이고 $0 < \gamma < \alpha_0 - n_0 + 1$ 인 γ 에 대하여 $a_i \in C_\gamma^1[0,\ T],\ i = 1, \cdots,\ m$ 이며 경우 ii)가 성립된다고 하면 동차방정식 (1)의 풀이의 표준기본계 $y_j(t) \in C_\gamma^{n_0}[0,\ T]$, $j = 0, 1, \cdots,\ n_0 - 1$ 은 유일존재하며 다음과 같이 표시된다.

$$y_j(t) = \Phi_{j+1}(t),\ \ j = 0, 1, \cdots,\ j_0,$$

$$y_j(t) = \Phi_{j+1}(t) + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1} I_{0+}^{\alpha_0}\left[\sum_{i=1}^{m} a_i(t) I_{0+}^{\alpha_0 - \alpha_i}\right]^k \sum_{i=h_j}^{m} a_i(t)\Phi_{j+1-\alpha_i}(t),\ \ j = j_0 + 1, \cdots,\ n_0 - 1$$

따름 3 $n_0 > n_1$ 이고 $a_i \in C[0,\ T],\ \ i = 1, \cdots, m$ 이며 경우 ii)가 성립된다고 하면 동차방정식 (1)의 풀이의 표준기본계 $y_j(t) \in C^{\alpha_0, n_0 - 1}[0,\ T],\ j = 0, 1, \cdots,\ n_0 - 1$ 은 유일존재하며

$$y_j(t) = \Phi_{j+1}(t),\ \ j = 0, 1, \cdots,\ j_0,$$

$$y_j(t) = \Phi_{j+1}(t) + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1} I_{0+}^{\alpha_0}\left[\sum_{i=1}^{m} a_i(t) I_{0+}^{\alpha_0 - \alpha_i}\right]^k \sum_{i=h_j}^{m} a_i(t)\Phi_{j+1-\alpha_i}(t),\ \ j = j_0 + 1, \cdots,\ n_1 - 1,$$

$$y_j(t) = \Phi_{j+1}(t) + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1} I_{0+}^{\alpha_0}\left[\sum_{i=1}^{m} a_i(t) I_{0+}^{\alpha_0 - \alpha_i}\right]^k \sum_{i=1}^{m} a_i(t)\Phi_{j+1-\alpha_i}(t),\ \ j = n_1,\ n_1 + 1, \cdots,\ n_0 - 1.$$

참 고 문 헌

[1] 박순애 등; 조선민주주의인민공화국 과학원통보, 5, 4, 주체100(2011).

[2] A. A. Kilbas et al.; North-Holl and Math. Studies, 69, 204, 2006.

[3] B. Bonilla et al.; Appl. Math. and Comput., 187, 68, 2007.

[4] Yi Zheng Hu et al.; J. of Comput. and Appl. Math., 4, 1, 2007.

[5] A. A. Kilbas et al.; Appl. Math. and Comput., 187, 239, 2007.

주체103(2014)년 3월 5일 원고접수

Representation of Solution of Linear Homogeneous Caputo Fractional Differential Equation by the Green Function

Pak Sun Ae

We consider a method to obtain canonical fundamental system of linear homogeneous caputo fractional differential equation with continuous variable coefficients by using the Green function of Riemann-Liouville.

Here we consider the initial value problem for function $y(t)$ satisfying linear homogeneous fractional differential equation ${}^cD_{0+}^{\alpha_0} y(t) = -\sum_{i=1}^{m} a_i(t) {}^cD_{0+}^{\alpha_i} y(t),\ \ 0 < t < T$ and the initial condition $D^k y_j(t)|_{t=+0} = b_k \in R$, $k = 0,\ 1, \cdots,\ n_0 - 1$.

Key words: canonical fundamental system, Green function