김일성종합대학학보 (자연과학) 주체103(2014)년 제60권 제11호
JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE) Vol. 60 No. 11 JUCHE103(2014).

리만다양체에서 사영접속의 쌍대접속에 대한 호상접속의 몇가지 성질

허달윤, 김혜경

사영접속은 리만다양체에서 사영변환과 련결되여 연구되였으며 레비－찌비따접속이 도입된 리만다양체에서 사영불변량이 와일사영곡률텐소르로 된다는것은 널리 알려졌다.

그후 레비－찌비따접속과 사영동등한 사영접속이 연구되였으며 고찰된 사영접속은 많은 경우에 대칭인것으로 론의되였다.

선행연구[1]에서는 사영접속이 비계량접속이라는 사실에 주목을 돌리고 사영접속의 쌍대접속에 대하여 론의하고 그것의 기하학적성질을 론의하였으며 선행연구[2]에서는 레비－찌비따접속과 사영동등한 반대칭접속을 고찰하였다.

선행연구[3]에서는 사영반대칭접속의 사영불변량과 함께 그 성질들을 고찰하였으며 선행연구[4]에서는 대칭접속들사이의 등곡률성문제를 론의하였다.

또한 선행연구[5]에서는 반대칭접속의 호상접속이 새로운 형태의 접속으로 정의되고 그것의 물리적모형을 론의하였다.

여기서는 사영접속은 비계량대칭접속이지만 그것의 쌍대접속은 새로운 형태의 반대칭비계량접속이라는 사실에 기초하여 그것의 호상접속의 기하학적성질과 등곡률성조건에 대하여 연구하였다.

리만다양체 $(M,\ g)$에서 레비－찌비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$과 사영동등한 사영접속 ∇의 접속결수는 다음과 같이 표시된다.

$$\Gamma_{ij}^k = \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix} + \psi_i \delta_j^k + \psi_j \delta_i^k \tag{1}$$

여기서 $\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}$는 레비－찌비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$의 접속결수이며 ψ_i는 1－형식 ψ의 성분이다.

접속결수 (1)로 표시되는 접속은 $\nabla_k g_{ij} = -\psi_i g_{jk} - \psi_j g_{ik} - 2\psi_k g_{ij}$, $T_{ij}^k = 0$을 만족시킨다.

이 식으로부터 사영접속 ∇의 쌍대접속 $\overset{*}{\nabla}$은

$$\overset{*}{\nabla}_k g_{ij} = \psi_i g_{jk} + \psi_j g_{ik} + 2\psi_k g_{ij},\ \overset{*}{T}_{ij}{}^k = \psi_j \delta_i^k - \psi_i \delta_j^k$$

를 만족시키는 접속으로서 접속결수는

$$\overset{*}{\Gamma}_{ij}{}^k = \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix} - \psi_i \delta_j^k - g_{ij} \psi^k . \tag{2}$$

선행연구[1]에서는 사영접속 ∇의 쌍대접속 $\overset{*}{\nabla}$이 연구되였다.

론문에서는 사영접속 ∇의 쌍대접속 $\overset{*}{\nabla}$이 반대칭비계량접속이라는 사실과 이러한 접속의 호상접속에 대한 물리적모형이 제시되였다[5]는 사실에 기초하여 $\overset{*}{\nabla}$의 호상접속 $\overline{\overset{*}{\nabla}}$의 몇가지 성질을 론의하였다.

사영접속 ∇의 쌍대접속 $\overset{*}{\nabla}$에 대한 호상접속 $\overline{\overset{*}{\nabla}}$는 $\overline{\overset{*}{\nabla}}_k g_{ij} = 2\psi_i g_{jk} + 2\psi_j g_{ik}$를 만족시키는 접속으로서 접속결수는

$$\overline{\overset{*}{\Gamma}}_{ij}{}^k = \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} - 2\psi_j \delta_i^k - g_{ij}\psi^k .$$

식 (2)와 우의 접속결수를 리용하면 $\overset{*}{\nabla}$과 $\overline{\overset{*}{\nabla}}$에 따르는 곡률텐소르들은 각각

$$\overset{*}{\nabla}_{ijk}{}^l = K_{ijk}^l + g_{ik}\psi_j^l - g_{jk}\psi_i^l - \delta_k^l \beta_{ij}, \quad (3)$$

$$\overline{\overset{*}{R}}_{ijk}{}^k = K_{ijk}^l + g_{ik}\psi_j^l - g_{jk}\psi_i^l + \delta_i^l \overline{\psi}_{jk} - \delta_j^l \overline{\psi}_{ik} \quad (4)$$

이다. 여기서 $\psi_{ik} = \overset{\circ}{\nabla}_i \psi_k - \psi_i \psi_k$, $\overline{\psi}_{ik} = \overset{\circ}{\nabla}_i \psi_k + \psi_i \psi_k + g_{ik}\psi_p \psi^p$, $\beta_{ij} = \overset{\circ}{\nabla}_i \psi_j - \overset{\circ}{\nabla}_j \psi_i$이다.

정리 1 리만다양체 $(M,\ g)$에서 사영접속 ∇의 쌍대접속 $\overset{*}{\nabla}$에 대한 호상접속 $\overline{\overset{*}{\nabla}}$가 일정곡률을 가지면 $n \geq 3$일 때 리만다양체 $(M,\ g,\ \overset{\circ}{\nabla})$은 공형평탄이다.

증명 호상접속 $\overline{\overset{*}{\nabla}}$의 쌍대접속 $\overline{\overset{*}{\overset{*}{\nabla}}}$을 보면 그것의 접속결수는 다음과 같다.

$$\overline{\overset{*}{\overset{*}{\Gamma}}}_{ij}{}^k = \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} + \psi_j \delta_i^k + g_{ij}\psi^k \quad (5)$$

식 (5)에 따르는 곡률텐소르는 $\overline{\overset{*}{\overset{*}{R}}}_{ijk}{}^l = K_{ijk}^l - g_{ik}\overline{\psi}_j^l + g_{jk}\overline{\psi}_i^l - \delta_i^l \psi_{jk} + \delta_j^l \psi_{ik}$이다.

식 (4)와 식 (5)를 합하면서 $\alpha_{ik} = \psi_{ik} - \overline{\psi}_{ik}$라고 하면

$$\overline{\overset{*}{R}}_{ijk}{}^l + \overline{\overset{*}{\overset{*}{R}}}_{ijk}{}^l = 2K_{ijk}^l + g_{ik}\alpha_j^l - g_{jk}\alpha_i^l - \delta_i^l \alpha_{jk} + \delta_j^l \alpha_{ik} . \quad (6)$$

식 (6)을 $i,\ l$에 관해 축약하면 다음과 같다.

$$\overline{\overset{*}{R}}_{jk} + \overline{\overset{*}{\overset{*}{R}}}_{jk} = 2K_{jk} - (n-2)\alpha_{jk} - g_{jk}\alpha_i^i \quad (7)$$

이 식의 량변에 g^{jk}를 곱하고 축약을 실시하면

$$\overline{\overset{*}{R}} + \overline{\overset{*}{\overset{*}{R}}} = 2K - 2(n-1)\alpha_i^i .$$

이로부터 $\alpha_i^i = \dfrac{1}{2(n-1)}\left[2K - \left(\overline{\overset{*}{R}} + \overline{\overset{*}{\overset{*}{R}}} \right) \right]$이 성립되며 이 식을 식 (7)에 넣고 α_{jk}를 구하면

$$\alpha_{jk}=\frac{1}{n-2}\left\{2K_{jk}-\left(\overset{\overline{*}}{R}_{jk}+\overset{\overset{*}{\overline{*}}}{R}_{jk}\right)-\frac{g_{jk}}{2(n-1)}\left[2K-\left(\overset{\overline{*}}{R}+\overset{\overset{*}{\overline{*}}}{R}\right)\right]\right\}.$$

다시 이 식을 식 (6)에 넣고 정돈하면

$$\overset{\overline{*}}{C}_{ijk}{}^{l}+\overset{\overset{*}{\overline{*}}}{C}_{ijk}{}^{l}=2\overset{\circ}{C}_{ijk}{}^{l} \tag{8}$$

를 얻는다. 여기서

$$\overset{\overline{*}}{C}_{ijk}{}^{l}=\overset{\overline{*}}{R}_{ijk}{}^{l}-\frac{1}{n-2}\left(\delta_i^l\overset{\overline{*}}{R}_{jk}-\delta_j^l\overset{\overline{*}}{R}_{jk}+g_{jk}\overset{\overline{*}}{R}_i{}^l-g_{ik}\overset{\overline{*}}{R}_j{}^l\right)-\frac{\overset{\overline{*}}{R}}{(n-1)(n-2)}(\delta_j^l g_{ik}-\delta_i^l g_{jk}),$$

$$\overset{\overset{*}{\overline{*}}}{C}_{ijk}{}^{l}=\overset{\overset{*}{\overline{*}}}{R}_{ijk}{}^{l}-\frac{1}{n-2}\left(\delta_i^l\overset{\overset{*}{\overline{*}}}{R}_{jk}-\delta_j^l\overset{\overset{*}{\overline{*}}}{R}_{ik}+g_{jk}\overset{\overset{*}{\overline{*}}}{R}_i{}^l-g_{ik}\overset{\overset{*}{\overline{*}}}{R}_j{}^l\right)-\frac{\overset{\overset{*}{\overline{*}}}{R}}{(n-1)(n-2)}(\delta_j^l g_{ik}-\delta_i^l g_{jk}),$$

$$\overset{\circ}{C}_{ijk}{}^{l}=K_{ijk}^l-\frac{1}{n-2}(\delta_i^l K_{jk}-\delta_j^l K_{ik}+g_{jk}K_i^l-g_{ik}K_j^l)-\frac{K}{(n-1)(n-2)}(\delta_j^l g_{jk}-\delta_i^l g_{jk}).$$

(이 텐소르들은 각각 $\overset{\overline{*}}{\nabla}$, $\overset{\overset{*}{\overline{*}}}{\nabla}$ 및 $\overset{\circ}{\nabla}$ 에 관한 와일공형곡률텐소르들이다.)

만일 호상접속 $\overset{\overline{*}}{\nabla}$ 에 관하여 일정곡률을 가지면 $\overset{\overline{*}}{R}_{ijk}{}^{l}=\overset{\overset{*}{\overline{*}}}{R}_{ijk}{}^{l}$ 이고 $\overset{\overline{*}}{C}_{ijk}{}^{l}=\overset{\overset{*}{\overline{*}}}{C}_{ijk}{}^{l}=0$ 이므로 식 (8)에 의하여 $\overset{\circ}{C}_{ijk}{}^{l}=0$ 이다.

따라서 $n\geq 3$ 이면 리만다양체 $(M,\ g,\ \overset{\circ}{\nabla})$ 은 공형평탄이다.(증명끝)

다음으로 ∇ 의 쌍대접속 $\overset{*}{\nabla}$ 과 그것의 호상접속 $\overset{\overline{*}}{\nabla}$ 사이의 등곡률성에 대하여 보자.

정리 2 리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 사영접속 ∇ 의 쌍대접속 $\overset{*}{\nabla}$ 과 그것의 호상접속 $\overset{\overline{*}}{\nabla}$ 가 등곡률이기 위해서는 대응되는 리찌텐소르들이 같을것이 필요하고 충분하다.

증명 먼저 접속변환 $\overset{*}{\nabla}\to\overset{\overline{*}}{\nabla}$ 에 관한 불변량을 구하자.

식 (3)과 식 (4)로부터

$$\overset{\overline{*}}{R}_{ijk}{}^{l}=\overset{*}{R}_{ijk}{}^{l}+\delta_i^l\overline{\psi}_{jk}-\delta_j^l\overline{\psi}_{ik}+\delta_k^l\beta_{ij} \tag{9}$$

이며 식 (9)를 $i,\ l$ 에 관해 축약하면

$$\overset{\overline{*}}{R}_{jk}=\overset{*}{R}_{jk}+(n-1)\overline{\psi}_{jk}+\beta_{kj}. \tag{10}$$

$\beta_{jk}=\overline{\psi}_{jk}-\overline{\psi}_{ik}$ 이고 $\beta_{jk}=-\beta_{kj}$ 임을 고려하면서 웃식을 빗대칭화하여 β_{jk} 를 구하면

$$\beta_{jk}=\frac{1}{n-3}\left[\left(\overset{\overline{*}}{R}_{jk}-\overset{\overline{*}}{R}_{kj}\right)-\left(\overset{*}{R}_{jk}-\overset{*}{R}_{kj}\right)\right]. \tag{11}$$

이 식을 식 (10)에 넣고 $\overline{\psi}_{jk}$ 를 구하면

$$\overline{\psi}_{jk}=\frac{1}{(n-1)(n-3)}\left\{\left[(n-2)\overline{\overset{*}{R}}_{jk}-\overline{\overset{*}{R}}_{kj}\right]-\left[(n-2)\overset{*}{R}_{jk}-\overset{*}{R}_{kj}\right]\right\}. \tag{12}$$

식 (11), (12)를 식 (9)에 넣고 정돈하면서

$$\overset{*}{V}_{ijk}{}^{l}=\overset{*}{R}_{ijk}{}^{l}+\frac{1}{(n-1)(n-3)}\left\{\delta_j^l\left[(n-2)\overset{*}{R}_{ik}-\overset{*}{R}_{ki}\right]-\delta_i^l\left[(n-2)\overset{*}{R}_{jk}-\overset{*}{R}_{kj}\right]-(n-1)\delta_k^l\left(\overset{*}{R}_{ij}-\overset{*}{R}_{ji}\right)\right\} \tag{13}$$

$$\overline{\overset{*}{V}}_{ijk}{}^{l}=\overline{\overset{*}{R}}_{ijk}{}^{l}+\frac{1}{(n-1)(n-3)}\left\{\delta_j^l\left[(n-2)\overline{\overset{*}{R}}_{ik}-\overline{\overset{*}{R}}_{ki}\right]-\delta_i^l\left[(n-2)\overline{\overset{*}{R}}_{jk}-\overline{\overset{*}{R}}_{kj}\right]-(n-1)\delta_k^l\left(\overline{\overset{*}{R}}_{ij}-\overline{\overset{*}{R}}_{ji}\right)\right\} \tag{14}$$

라고 하면

$$\overset{*}{V}_{ijk}{}^{l}=\overline{\overset{*}{V}}_{ijk}{}^{l}. \tag{15}$$

식 (13)－(15)를 리용하면 $\overset{*}{R}_{ijk}{}^{l}=\overline{\overset{*}{R}}_{ijk}{}^{l}$ 이기 위해서는 $\overset{*}{R}_{jk}=\overline{\overset{*}{R}}_{jk}$ 일것이 필요하고 충분하다는것이 얻어진다.

주의 선행연구[4]에서는 대칭접속들사이의 등곡률성조건을 론의하였다.

정리 2는 반대칭접속들사이의 등곡률성조건을 밝힌것으로서 선행연구[4]에서 얻은 결과의 확장으로 된다.

참 고 문 헌

[1] 허달윤; 조선민주주의인민공화국 과학원통보, 6, 5, 주체101(2012).

[2] Zhao Pei Biao et al.; Chin. Quart. J. of Math., 17, 4, 48, 2001.

[3] Zhao Pei Biao et al.; Int. Math. Forum., 3, 7, 341, 2008.

[4] S. B. Edgar; Class. Quantum. Grav., 10, 2445, 1993.

[5] I. Suhendro; Progress in Physics, 4, 10, 47, 2007.

주체103(2014)년 7월 5일 원고접수

Some Properties of the Mutual Connection on Dual Connection of a Projective Connection on a Riemannian Manifold

Ho Tal Yun, Kim Hye Gyong

We studied geometrical properties and curvature copy condition of the mutual connection on dual connection of projective connection by the fact that projective connection is non-metric asymmetric connection but its dual connection is a semi-symmetric non-metric connection.

Key words: dual connection, mutual connection