김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제1호

통계다양체에서 상대곡률텐소르마당의 가환성

민 철 림

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《과학연구부문에서는 나라의 경제발전과 인민생활향상에서 전망적으로 풀어야 할 문제들과 현실에서 제기되는 과학기술적문제들을 풀고 첨단을 돌파하여 지식경제건설의 지름길을 열어놓아야 합니다.》

론문에서는 통계다양체에서 α –접속의 상대곡률텐소르마당들사이의 관계를 연구하였다.

선행연구[2]에서는 통계다양체에서 α –접속의 곡률텐소르마당의 일반화로서 상대곡률텐소르마당의 개념을 도입하였다.

통계다양체에서 α –접속의 곡률텐소르마당의 성질은 1−접속과 (−1)−접속의 곡률텐소르마당의 성질과 밀접히 련관되여있으며[3, 4] 이것을 상대곡률텐소르마당에로 일반화하여 선행연구[1]에서는 통계다양체에서 상대곡률텐소르마당 $R^{(\alpha,\ \beta)}$의 $\alpha,\ \beta$에 관한 가환성문제가 령이 아닌 임의의 실수 σ에 대하여 상대곡률텐소르마당 $R^{(\sigma,\ -\sigma)}$와 $R^{(-\sigma,\ \sigma)}$의 일치성문제와 동등하다는것을 밝혔다.

그러나 σ가 령이 아닌 임의의 실수라고 할 때 $R^{(\sigma,\ -\sigma)}$와 $R^{(-\sigma,\ \sigma)}$가 일치하기 위한 조건은 밝혀진것이 없다.

론문에서는 σ가 령이 아닌 임의의 실수라고 할 때 통계다양체에서 상대곡률텐소르마당 $R^{(\sigma,\ -\sigma)}$와 $R^{(-\sigma,\ \sigma)}$가 일치하기 위한 조건들을 밝혔다.

통계다양체 $(M,\ g,\ \nabla)$에서 임의의 두 실수 $\alpha,\ \beta$에 대하여 $\nabla^{(\beta)}$에 관한 $\nabla^{(\alpha)}$의 상대곡률텐소르마당은

$$R^{(\alpha,\ \beta)}(X,\ Y)Z = \nabla_X^{(\alpha)}\nabla_Y^{(\beta)}Z - \nabla_Y^{(\beta)}\nabla_X^{(\alpha)}Z - \nabla_{[X,\ Y]}^{(\alpha)}Z \quad (\forall X,\ Y,\ Z \in \Gamma(TM)) \tag{1}$$

로 정의된다.[2]

상대곡률텐소르마당의 정의로부터 $R^{(\alpha,\ \beta)}$는 $\alpha,\ \beta$에 관하여 가환이 아니라는것을 알수 있다. 이와 관련하여 다음의 사실이 성립한다.

명제 1[1] $(M,\ g,\ \nabla)$가 통계다양체라고 하고 $\alpha,\ \beta$가 서로 다른 임의의 두 실수라고 하자. 이때 $R^{(\alpha,\ \beta)} = R^{(\beta,\ \alpha)}$이기 위해서는 령 아닌 실수 σ가 있어서 $R^{(\sigma,\ -\sigma)} = R^{(-\sigma,\ \sigma)}$일것이 필요하고 충분하다.

우의 명제에 기초하여 론문에서는 령이 아닌 임의의 실수 σ에 대하여 상대곡률텐소르마당 $R^{(\sigma,\ -\sigma)}$와 $R^{(-\sigma,\ \sigma)}$이 일치하기 위한 필요충분조건들을 밝히며 $R^{(\sigma,\ -\sigma)}$이 령이라는것은 $R^{(-\sigma,\ \sigma)}$이 령이라는것과 동등하다는것을 보여주는 몇가지 관계식들도 제시한다.

먼저 상대곡률텐소르마당 령 아닌 임의의 실수 σ에 대하여 $R^{(\sigma,\ -\sigma)}$와 $R^{(-\sigma,\ \sigma)}$가 일치하기 위한 조건들에 대하여 보자.

보조정리 $(M,\ g,\ \nabla)$가 통계다양체라고 하자. 이때 령 아닌 임의의 실수 σ에 대하여 $R^{(\sigma,\ -\sigma)} = R^{(-\sigma,\ \sigma)}$이기 위해서는

$$(\nabla_X^{(\sigma)}K)(Y,\ Z)+(\nabla_Y^{(\sigma)}K)(X,\ Z)+2K(\nabla_X^{(\sigma)}Y,\ Z)=0\quad(\forall X,\ Y,\ Z\in\Gamma(TM))\qquad(2)$$

이 성립할것이 필요하고 충분하다. 여기서 $K(X,\ Y)=\nabla_X^*Y-\nabla_XY\ (\forall X,\ Y\in\Gamma(TM))$은 변형텐소르마당이며 $\nabla^{(\sigma)}$는 $\sigma-$접속이다.

증명 임의의 $X,\ Y,\ Z\in\Gamma(TM)$에 대하여

$$R^{(\sigma,\ -\sigma)}(X,\ Y)Z=\nabla_X^{(\sigma)}\nabla_Y^{(-\sigma)}Z-\nabla_Y^{(-\sigma)}\nabla_X^{(\sigma)}Z-\nabla_{[X,Y]}^{(\sigma)}Z=$$
$$=\nabla_X^{(\sigma)}(\nabla_Y^{(\sigma)}Z+\sigma K(Y,Z))-(\nabla_Y^{(\sigma)}\nabla_X^{(\sigma)}Z+\sigma K(Y,\ \nabla_X^{(\sigma)}Z))-\nabla_{[X,Y]}^{(\sigma)}Z=$$
$$=R^{(\sigma)}(X,\ Y)Z+\sigma\{\nabla_X^{(\sigma)}(K(Y,\ Z))-K(Y,\ \nabla_X^{(\sigma)}Z))\}$$
$$R^{(-\sigma,\ \sigma)}(X,\ Y)Z=\nabla_X^{(-\sigma)}\nabla_Y^{(\sigma)}Z-\nabla_Y^{(\sigma)}\nabla_X^{(-\sigma)}Z-\nabla_{[X,Y]}^{(-\sigma)}Z=$$
$$=\nabla_X^{(\sigma)}\nabla_Y^{(\sigma)}Z+\sigma K(X,\ \nabla_Y^{(\sigma)}Z)-\nabla_Y^{(\sigma)}(\nabla_X^{(\sigma)}Z+\sigma K(X,\ Z))-(\nabla_{[X,Y]}^{(\sigma)}Z+\sigma K([X,\ Y],\ Z))=$$
$$=R^{(\sigma)}(X,\ Y)Z+\sigma\{K(X,\ \nabla_Y^{(\sigma)}Z)-\nabla_Y^{(\sigma)}(K(X,\ Z))-K([X,\ Y],\ Z)\}$$

이 성립한다. 한편

$$(\nabla_X^{(\sigma)}K)(Y,\ Z)=\nabla_X^{(\sigma)}(K(Y,\ Z))-K(\nabla_X^{(\sigma)}Y,\ Z)-K(Y,\ \nabla_X^{(\sigma)}Z)\quad(\forall X,\ Y,\ Z\in\Gamma(TM))$$

으로부터

$$\nabla_X^{(\sigma)}(K(Y,\ Z))-K(Y,\ \nabla_X^{(\sigma)}Z)=(\nabla_X^{(\sigma)}K)(Y,\ Z)+K(\nabla_X^{(\sigma)}Y,\ Z)\quad(\forall X,\ Y,\ Z\in\Gamma(TM))$$

이고 류사하게

$$\nabla_Y^{(\sigma)}(K(X,\ Z))-K(X,\ \nabla_Y^{(\sigma)}Z)=(\nabla_Y^{(\sigma)}K)(X,\ Z)+K(\nabla_Y^{(\sigma)}X,\ Z)\quad(\forall X,\ Y,\ Z\in\Gamma(TM))$$

이므로 임의의 $X,\ Y,\ Z\in\Gamma(TM)$에 대하여

$$R^{(\sigma,\ -\sigma)}(X,\ Y)Z-R^{(-\sigma,\ \sigma)}(X,\ Y)Z=$$
$$=\sigma\{\nabla_X^{(\sigma)}(K(Y,\ Z))-K(Y,\ \nabla_X^{(\sigma)}Z)\}-\sigma\{K(X,\ \nabla_Y^{(\sigma)}Z)-\nabla_Y^{(\sigma)}(K(X,\ Z))-K([X,\ Y],\ Z)\}=$$
$$=\sigma\{(\nabla_X^{(\sigma)}K)(Y,\ Z)+K(\nabla_X^{(\sigma)}Y,\ Z)\}+\sigma\{(\nabla_Y^{(\sigma)}K)(X,\ Z)+K(\nabla_Y^{(\sigma)}X,\ Z)+K([X,\ Y],\ Z)\}$$

이고 $\nabla^{(\sigma)}$가 대칭접속이라는데로부터

$$\nabla_X^{(\sigma)}Y-\nabla_Y^{(\sigma)}X-[X,\ Y]=0\quad(\forall X,\ Y\in\Gamma(TM))$$

을 리용하면 임의의 $X,\ Y,\ Z\in\Gamma(TM)$에 대하여

$$R^{(\sigma,\ -\sigma)}(X,\ Y)Z-R^{(-\sigma,\ \sigma)}(X,\ Y)Z=$$
$$=\sigma\{(\nabla_X^{(\sigma)}K)(Y,\ Z)+(\nabla_Y^{(\sigma)}K)(X,\ Z)+K(\nabla_X^{(\sigma)}Y,\ Z)+K(\nabla_Y^{(\sigma)}X,\ Z)+K([X,\ Y],\ Z)\}$$
$$=\sigma\{(\nabla_X^{(\sigma)}K)(Y,\ Z)+(\nabla_Y^{(\sigma)}K)(X,\ Z)+2K(\nabla_X^{(\sigma)}Y,\ Z)\}$$

이 성립하며 이로부터 결론이 나온다.(증명끝)

따름 1 $(M,\ g,\ \nabla)$가 통계다양체라고 하자. 이때 $R^{(1,\ -1)}=R^{(-1,\ 1)}$이기 위해서는

$$(\nabla_XK)(Y,\ Z)+(\nabla_YK)(X,\ Z)+2K(\nabla_XY,\ Z)=0\quad(\forall X,\ Y,\ Z\in\Gamma(TM))$$

이 성립할것이 필요하고 충분하다. 여기서 $K(X,\ Y)=\nabla_X^*Y-\nabla_XY\ (\forall X,\ Y\in\Gamma(TM))$는 변형텐소르마당이다.

정리 1 $(M,\ g,\ \nabla)$가 평탄통계다양체라고 하고 σ가 령이 아닌 임의의 실수라고 하자. 이때 $R^{(\sigma,\ -\sigma)}=R^{(-\sigma,\ \sigma)}$이기 위해서는 $\nabla K=0$일것이 필요하고 충분하다. 여기서

$$K(X,\ Y)=\nabla_X^*Y-\nabla_XY\quad(\forall X,\ Y\in\Gamma(TM))$$

은 변형텐소르마당이다.

증명 $(M,\ g,\ \nabla)$가 평탄하므로 임의의 점 $p\in M$에는 ∇의 접속결수 Γ_{ij}^k가 령으로 되는 지도근방 $(U_p,\ x^1,\ \cdots,\ x^n)$이 존재한다. 여기서 $n=\dim M$이다.

식 (2)를 지도근방우에서 성분으로 표시하면

$$\nabla_i^{(\sigma)}K_{jk}^l+\nabla_j^{(\sigma)}K_{ik}^l+2\Gamma^{(\sigma)}{}_{ij}^{p}K_{pk}^l=0$$

이고

$$\nabla_i^{(\sigma)}K_{jk}^l=\partial_iK_{jk}^l-\Gamma^{(\sigma)}{}_{ij}^{p}K_{pk}^l-\Gamma^{(\sigma)}{}_{ik}^{p}K_{jp}^l+\Gamma^{(\sigma)}{}_{ip}^{l}K_{jk}^p$$

$$\nabla_j^{(\sigma)}K_{ik}^l=\partial_jK_{ik}^l-\Gamma^{(\sigma)}{}_{ji}^{p}K_{pk}^l-\Gamma^{(\sigma)}{}_{jk}^{p}K_{ip}^l+\Gamma^{(\sigma)}{}_{jp}^{l}K_{ik}^p$$

와 이 지도근방우에서 $\Gamma_{ij}^k=0$이므로 $\sigma-$접속의 접속결수가

$$\Gamma^{(\sigma)}{}_{ij}^{k}=\frac{1+\sigma}{2}K_{ij}^k$$

로 표시된다는것을 리용하면

$$\partial_iK_{jk}^l+\partial_jK_{jk}^l=0$$

이 성립하며 $\Gamma_{ij}^k=0$을 고려하면

$$\nabla_iK_{jk}^l+\nabla_jK_{ik}^l=0$$

이다. 여기서 K_{ij}^k는 변형텐소르마당 K의 텐소르성분이다. 즉 임의의 $X,\ Y,\ Z\in\Gamma(TM)$에 대하여

$$(\nabla_XK)(Y,\ Z)+(\nabla_YK)(X,\ Z)=0 \tag{3}$$

이 성립하며 식 (3)과 변형텐소르마당 K의 대칭성을 리용하면 임의의 $X,\ Y,\ Z\in\Gamma(TM)$에 대하여

$$(\nabla_XK)(Y,\ Z)=-(\nabla_YK)(X,\ Z)=-(\nabla_YK)(Z,\ X)=(\nabla_ZK)(Y,\ X)=$$
$$=(\nabla_ZK)(X,\ Y)=-(\nabla_XK)(Z,\ Y)=-(\nabla_XK)(Y,\ Z)$$

이므로 결론이 나온다.(증명끝)

따름 2 $(M,\ g,\ \nabla)$가 평탄통계다양체라고 하자. 이때 $R^{(1,\ -1)}=R^{(-1,\ 1)}$이기 위해서는 $\nabla K=0$일것이 필요하고 충분하다. 여기서 $K(X,\ Y)=\nabla_X^*Y-\nabla_XY\quad(\forall X,\ Y\in\Gamma(TM))$는 변형텐소르마당이다.

실례 $(M,\ g,\ \nabla)$가 n차원평탄통계다양체라고 하고 국부평탄자리표계에서 변형텐소르마당 K의 텐소르성분들이 $K_{ij}^{\ k}=c\ \ (c:$상수)로 주어진다고 하자.

분명히 국부평탄자리표계에서 $\partial_iK_{jk}^l=0\quad(\forall i,\ j,\ k,\ l\in\{1,\ \cdots,\ n\})$이므로 $\nabla K=0$이 성립한다. 따라서 임의의 실수 σ에 대하여 $R^{(\sigma,\ -\sigma)}=R^{(-\sigma,\ \sigma)}$이다.

다음으로 곡률텐소르마당의 성질을 상대곡률텐소르마당에로 일반화한 몇가지 사실들에 대하여 보자.

명제 2 $(M,\ g,\ \nabla)$가 통계다양체라고 하자. 이때 임의의 두 실수 $\alpha,\ \beta$에 대하여

$$R^{(\alpha,\ \beta)}(X,\ Y)Z+R^{(\beta,\ \alpha)}(Y,\ X)Z=0\ \ (\forall X,\ Y,\ Z\in\Gamma(TM))$$

이 성립한다.

증명 식 (1)로부터 임의의 두 실수 $\alpha,\ \beta$에 대하여

$$R^{(\alpha,\ \beta)}(X,\ Y)Z=\nabla_X^{(\alpha)}\nabla_Y^{(\beta)}Z-\nabla_Y^{(\beta)}\nabla_X^{(\alpha)}Z-\nabla_{[X,\ Y]}^{(\alpha)}Z\quad(\forall X,\ Y,\ Z\in\Gamma(TM))$$

$$R^{(\beta,\ \alpha)}(Y,\ X)Z=\nabla_Y^{(\beta)}\nabla_X^{(\alpha)}Z-\nabla_X^{(\alpha)}\nabla_Y^{(\beta)}Z-\nabla_{[Y,\ X]}^{(\beta)}Z\quad(\forall X,\ Y,\ Z\in\Gamma(TM))$$

이며 리괄호의 빗대칭성과 변형텐소르마당 $K(X,\ Y)=\nabla^*_XY-\nabla_XY\ (\forall X,\ Y\in\Gamma(TM))$를 리용하면 임의의 $X,\ Y,\ Z\in\Gamma(TM)$에 대하여

$$R^{(\alpha,\ \beta)}(X,\ Y)Z+R^{(\beta,\ \alpha)}(Y,\ X)Z=\nabla_{[X,Y]}^{(\beta)}Z-\nabla_{[X,Y]}^{(\alpha)}Z=\frac{\alpha-\beta}{2}K([X,\ Y],\ Z)$$

가 성립한다.

$X,\ Y,\ Z\in\Gamma(TM)$을 접다발 TM의 틀의 원소들로 택하면 $[X,\ Y]=0$이므로 이때

$$R^{(\alpha,\ \beta)}(X,\ Y)Z+R^{(\beta,\ \alpha)}(Y,\ X)Z=0$$

이 성립하며 상대곡률텐소르마당의 선형성으로부터 결론이 나온다.(증명끝)

따름 3 $(M,\ g,\ \nabla)$가 통계다양체라고 하면 임의의 실수 σ에 대하여

$$R^{(\sigma,\ -\sigma)}(X,\ Y)Z+R^{(-\sigma,\ \sigma)}(Y,\ X)Z=0\ (\forall X,\ Y,\ Z\in\Gamma(TM))$$

이 성립한다.

명제 2에서 $\alpha=\beta$로 놓으면 $\alpha-$접속의 곡률텐소르마당의 빗대칭성을 보여주는 식이 얻어지며 이로부터 명제 2는 곡률텐소르마당의 빗대칭성을 상대곡률텐소르마당에로 일반화한것이라고 말할수 있다. 명제 2로부터 임의의 두 실수 $\alpha,\ \beta$에 대하여 $R^{(\alpha,\ \beta)}=0$과 $R^{(\beta,\ \alpha)}=0$이 동등하다는것을 알수 있다.

다음의 정리는 임의의 두 실수 $\alpha,\ \beta$에 대하여 $R^{(\alpha,\ \beta)}=0$과 $R^{(-\alpha,\ -\beta)}=0$이 동등하다는것을 보여준다.

정리 2 $(M,\ g,\ \nabla)$가 통계다양체라고 하고 $\alpha,\ \beta$가 임의의 두 실수라고 할 때

$$g(R^{(\alpha,\ \beta)}(X,\ Y)Z,\ W)+g(R^{(-\alpha,\ -\beta)}(X,\ Y)W,\ Z)=0\quad(\forall X,\ Y,\ Z,\ W\in\Gamma(TM))$$

이 성립한다.

증명 식 (1)로부터 임의의 실수 $\alpha,\ \beta$와 임의의 $X,\ Y,\ Z,\ W\in\Gamma(TM)$에 대하여

$$g(R^{(\alpha,\ \beta)}(X,\ Y)Z,\ W)=g(\nabla_X^{(\alpha)}\nabla_Y^{(\beta)}Z-\nabla_Y^{(\beta)}\nabla_X^{(\alpha)}Z-\nabla_{[X,Y]}^{(\alpha)}Z,\ W)$$

$$g(R^{(-\alpha,\ -\beta)}(X,\ Y)W,\ Z)=g(\nabla_X^{(-\alpha)}\nabla_Y^{(-\beta)}W-\nabla_Y^{(-\beta)}\nabla_X^{(-\alpha)}W-\nabla_{[X,Y]}^{(-\alpha)}W,\ Z)$$

이고 임의의 실수 α에 대하여 $\alpha-$접속과 $(-\alpha)-$접속의 공액성으로부터

$$g(\nabla_X^{(\alpha)}\nabla_Y^{(\beta)}Z,\ W)=Xg(\nabla_Y^{(\beta)}Z,\ W)-g(\nabla_Y^{(\beta)}Z,\ \nabla_X^{(-\alpha)}W)$$

$$g(\nabla_Y^{(\beta)}\nabla_X^{(\alpha)}Z,\ W)=Yg(\nabla_X^{(\alpha)}Z,\ W)-g(\nabla_X^{(\alpha)}Z,\ \nabla_Y^{(-\beta)}W)$$

$$g(\nabla_X^{(-\alpha)}\nabla_Y^{(-\beta)}W,\ Z)=Xg(\nabla_Y^{(-\beta)}W,\ Z)-g(\nabla_Y^{(-\beta)}W,\ \nabla_X^{(\alpha)}Z)$$

$$g(\nabla_Y^{(-\beta)}\nabla_X^{(-\alpha)}W,\ Z)=Yg(\nabla_X^{(-\alpha)}W,\ Z)-g(\nabla_X^{(-\alpha)}W,\ \nabla_Y^{(\beta)}Z)$$

$$g(\nabla_{[X,\ Y]}^{(\alpha)}Z,\ W)+g(Z,\ \nabla_{[X,\ Y]}^{(-\alpha)}W)=[X,\ Y]g(Z,\ W)$$

이므로

$$
\begin{aligned}
& g(R^{(\alpha,\ \beta)}(X,\ Y)Z,\ W)+g(R^{(-\alpha,\ -\beta)}(X,\ Y)W,\ Z)= \\
&\quad =g(\nabla_X^{(\alpha)}\nabla_Y^{(\beta)}Z,\ W)-g(\nabla_Y^{(\beta)}\nabla_X^{(\alpha)}Z,\ W)-g(\nabla_{[X,Y]}^{(\alpha)}Z,\ W)+ \\
&\quad +g(\nabla_X^{(-\alpha)}\nabla_Y^{(-\beta)}W,\ Z)-g(\nabla_Y^{(-\beta)}\nabla_X^{(-\alpha)}W,\ Z)-g(\nabla_{[X,Y]}^{(-\alpha)}W,\ Z)= \\
&\quad =X\{g(\nabla_Y^{(\beta)}Z,\ W)+g(Z,\ \nabla_Y^{(-\beta)}W)\}+ \\
&\quad +Y\{g(\nabla_X^{(\alpha)}Z,\ W)-g(Z,\ \nabla_X^{(-\alpha)}W)\}-[X,\ Y]g(Z,\ W)= \\
&\quad =XYg(Z,\ W)-YXg(Z,\ W)-[X,\ Y]g(Z,\ W)= \\
&\quad =[X,\ Y]g(Z,\ W)-[X,\ Y]g(Z,\ W)= \\
&\quad =0
\end{aligned}
$$

이며 따라서 정리의 주장이 성립한다.(증명끝)

정리 2에서 $\alpha=1,\ \beta=-1$로 놓으면 다음의 따름이 곧 얻어진다.

따름 4 $(M,\ g,\ \nabla)$가 통계다양체라고 할 때

$$g(R^{(1,\ -1)}(X,\ Y)Z,\ W)+g(R^{(-1,\ 1)}(X,\ Y)W,\ Z)=0\quad (\forall X,\ Y,\ Z,\ W\in\Gamma(TM))$$

이 성립한다.

정리 2와 따름 4는 정보기하학에서 잘 알려진 관계식인

$$g(R(X,\ Y)Z,\ W)+g(R^*(X,\ Y)W,\ Z)=0\quad (\forall X,\ Y,\ Z,\ W\in\Gamma(TM))$$

을 상대곡률텐소르마당의 경우에로 일반화한것으로 된다.

참 고 문 헌

[1] 민철림 등; 대학교원론문집, 16, 31, 주체107(2018).

[2] O. Calin et al.; Geometric Modeling in Probability and Statistics, Springer, 3∼290, 2014.

[3] C. R. Min et al.; Diff. Geom. Appl., 41, 39, 2015.

[4] J. Zhang; AISM, 59, 161, 2007.

주체108(2019)년 9월 15일 원고접수

Commutativity of the Relative Curvature Tensor Field on Statistical Manifolds

Min Chol Rim

In this paper, we find the conditions for relative curvature tensor fields $R^{(\alpha,\ \beta)}$ and $R^{(\beta,\ \alpha)}$ to coincide by a difference tensor field on statistical manifolds.

Keywords: statistical manifold, relative curvature tensor field, α–connection