

직류-직류승압변환기의 분수계모형에 대한 안정성

최정학, 김상문

직류-직류승압변환기는 태양빛전지 등을 리용하여 얻은 직류전기를 필요한 용도의 전압으로 변화시키는 장치로서 그것에 대한 정확한 수학적모형을 작성하고 해석을 진행하는것은 변환기의 질개선을 위한 중요한 문제의 하나이다.

론문에서는 직류승압변환기에 대한 분수계모형을 제기하고 그것의 안정성을 해석하여 옹근수계도함수를 리용한 모형에서보다 안정한 파라메터구역이 더 넓어진다는것을 밝혔으며 Matlab에 의한 모의실험을 통하여 논문의 결과를 확증하였다.

직류-직류승압변환기의 수학적모형은 그림의 회로에 기초하여 작성된다.[1]

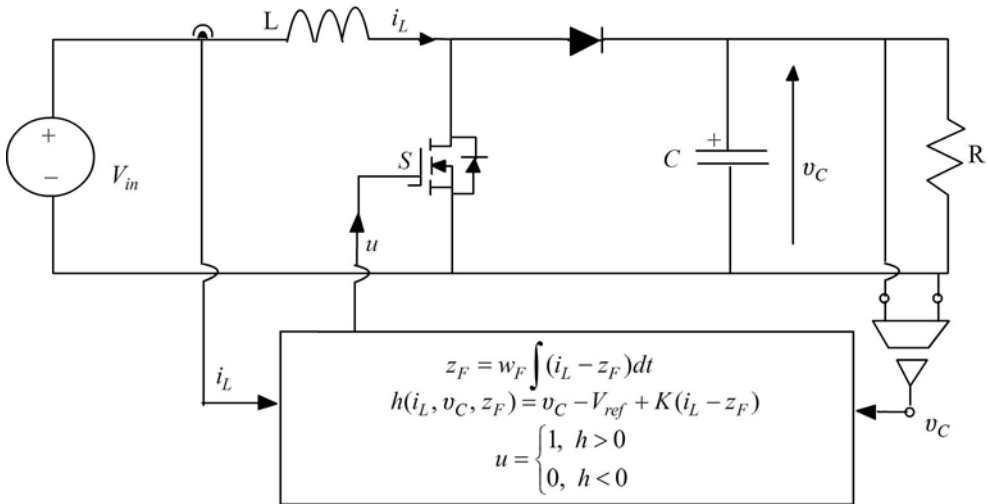


그림. 직류-직류승압변환기회로

선행연구[1]에서는 미끄럼조종방식으로 조종되는 위의 회로에 대하여 다음과 같은 수학적모형을 작성하고 해석하였다.

$$\begin{cases} L \frac{di_L}{dt} = V_{in} - uv_C \\ C \frac{dv_C}{dt} = ui_L - \frac{v_C}{R} \\ \frac{dz_F}{dt} = w_F (i_L - z_F) \end{cases} \quad (1)$$

그림과 식 (1)에서 v_C 와 i_L 은 각각 어떤 순간에 축전기와 선류의 전압과 전류이고 w_F 는 차단주파수이며 z_F 는 식 (1)의 세번째 식에 의하여 얻어지는 새 변수이다. 그리고 V_{ref} 는 참조전압이다. u 는 조종으로서 스위치가 꺼지면 1, 켜지면 0값을 취한다.

그림에서와 같이 선행연구[1]에서는 절환곡면을

$$h(i_L, v_C, z_F) = v_C - V_{ref} + K(i_L - z_F) = 0$$

과 같이 구성하고 변수변환

$$i_L = V_{in} \sqrt{\frac{C}{L}} x, \quad v_C = V_{in} y, \quad z_F = i_L + \frac{v_C - V_{ref} - V_{in} z}{K}, \quad t = \sqrt{LC} \tau$$

를 진행하여 다음의 모형

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = 1 - uy \\ \frac{dy}{d\tau} = ux - ay \\ \frac{dz}{d\tau} = u(x - ky) + (w - a)y - wz + k - wy_r \end{cases} \quad (2)$$

를 얻었으며 필리포프(Filippov)의 리론을 리용하여 미끄럼곡면우에 사영한 2차원미끄럼 벡토르마당을 구성하고 그것에 대한 분지해석을 진행하였다. 여기서 $y_r = V_{ref}/V_{in}$ 이다.

최근 옹근수계로 현상을 모형화하는것보다 분수계도함수를 리용하여 모형화하는것이 보다 정확하다는 사실이 밝혀지면서 분수계에 대한 연구가 널리 진행되고있다.[2, 3, 6]

특히 축전기와 선류에서 전압과 전류사이의 관계가 각각 $I(t) = C \cdot {}^c D_t^\alpha V(t)$ [7]와 $V(t) = L \cdot {}^c D_t^\alpha I(t)$ [8]라는 사실이 밝혀지고 분수계미끄럼조종에 대한 연구[5]가 심화됨으로써 전기회로모형을 분수계도함수를 리용하여 작성하고 모형에 대한 해석을 보다 풍부히 할수 있게 되었다. 여기서 ${}^c D_t^\alpha$ 는 시간 t 에 관한 캐푸토의미에서의 분수계도함수이다.

태양빛전지를 리용한 전원과 같이 전원의 질이 좋지 못한 경우 전기회로모형을 분수계도함수를 가지고 보다 정확히 해석하는것은 실천적으로 더욱 중요한 문제로 나선다.

따라서 논문에서는 직류-직류승압변환기에 대한 다음과 같은 분수계모형을 제기한다.

$$\begin{cases} L \cdot {}^c D_t^\alpha i_L = V_{in} - uv_C \\ C \cdot {}^c D_t^\alpha v_C = ui_L - \frac{v_C}{R} \quad (0 < \alpha < 1) \\ {}^c D_t^\alpha z_F = w_F(i_L - z_F) \end{cases} \quad (3)$$

선행연구[1]에서와 류사하게 변수변환

$$i_L = \frac{V_{in}}{L} x, \quad v_C = V_{in} y, \quad z_F = i_L + \frac{v_C - V_{ref} - V_{in} z}{K}$$

를 진행하면

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha x = 1 - uy \\ {}^c D_t^\alpha y = ubx - ay \\ {}^c D_t^\alpha z = u(bx - ky) + (w - a)y - wz + k - wy_r \end{cases} \quad (4)$$

가 얻어진다. 여기서 $a = 1/RC$, $b = 1/LC$, $k = K/L$, $w = w_F$ 이다. 미끄럼곡면으로 사영하면 다음의 2차원계를 얻는다.

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha x = -bx + ay^2 - wy(y - y_r) \\ {}^c D_t^\alpha y = k(bx - ay^2) + bwx(y - y_r) \end{cases} \quad (5)$$

다음 계 (5)에 대하여 파라미터 k 의 변화에 따르는 평형점의 안정성의 변화를 해석하자. 이를 위하여 다음의 정리를 소개한다.

정리 1 [5]캐푸토분수계미분방정식

$${}^c D_t^\alpha x = f(x) \quad (x \in \mathbf{R}^n), f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n \quad (0 < \alpha < 2)$$

의 평형점은 그 점에서의 오른쪽의 야코비행렬의 모든 고유값이 조건

$$|\arg(\text{eig}(J))| = |\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2} \quad (6)$$

를 만족시키면 점근안정하다.

계 (5)는 3개의 평형점

$$P_1 = \left(\frac{a}{b} y_r^2, y_r \right), P_2 = (0, 0), P_3 = \left(\frac{k(k - wy_r)}{b(a - w)}, \frac{(k - wy_r)}{(a - w)} \right)$$

를 가진다.

이때 조종하려는 점은 $P_1 = (ay_r^2/b, y_r)$ 이므로 P_1 에 대하여서만 고찰하기로 한다.

정리 2 계 (5)의 평형점 $P_1 = (ay_r^2/b, y_r)$ 는

$$\sqrt{\frac{4bwy_r(k_0 - ay_r)}{[ay_r(wy_r - 2k_0) - b]^2}} - 1 = \tan \frac{\alpha\pi}{2} \quad (7)$$

인 k_0 에 대하여 $k > k_0$ 이면 점근안정하고 $k < k_0$ 이면 불안정하다.

특히

$$k_{1,2} = \frac{awy_r^2 - b}{2ay_r} + \frac{bw \pm \sqrt{bw(w - 2a)(2a^2 y_r^2 + b)}}{2a^2 y_r}$$

일 때 $k < k_1$ 이면 불안정마디점, $k_1 < k < k_0$ 이면 불안정초점, $k_0 < k < k_2$ 이면 점근안정한 초점, $k_2 < k$ 이면 점근안정한 마디점이 된다.

증명 평형점 $P_1 = \left(\frac{a}{b} y_r^2, y_r \right)$ 에서 계 (5)의 오른쪽의 야코비행렬을 구하면

$$J = \begin{pmatrix} -b & (2a - w)y_r \\ bk & ay_r(wy_r - 2k) \end{pmatrix}$$

이다. 미끄럼조종방식에서 평형점이 미끄럼구역에 남아있기 위한 조건 $(k - ay_r) > 0$ 으로부터 $\text{Det}(J) = bwy_r(k - ay_r) > 0$ 이므로 평형점은 안장점이 아니다. 특성방정식의 판별식

$$\Delta = (\text{tr}(J))^2 - 4\text{Det}(J) = [ay_r(wy_r - 2k) - b]^2 - 4bwy_r(k - ay_r)$$

가 정수가 되기 위한 k 의 구간을 따지면

$$k_{1,2} = \frac{awy_r^2 - b}{2ay_r} + \frac{bw \pm \sqrt{bw(w - 2a)(2a^2 y_r^2 + b)}}{2a^2 y_r}$$

에 대하여 $k < k_1$, $k_2 < k$ 로 되며 이 k 의 구간에서 J 는 2개의 실수고유값을 가지므로 평형점은 마디점으로 되고 $\text{tr}(J)$ 의 부호를 고려하면 $k < k_1$ 일 때 불안정마디점, $k_2 < k$ 일 때 점근안정한 마디점이 된다.

한편 $k_1 < k < k_2$ 일 때에는 판별식이 부수이므로 한쌍의 복소고유값을 가진다.

$k > (awy_r^2 - b)/2ay_r$ 이면 $\text{tr}(J) < 0$ 이고 $0 < \alpha < 1$ 이므로 평형점은 점근안정하다.

$k < (awy_r^2 - b)/2ay_r$ 이면 $\sqrt{\{4bwy_r(k - ay_r)/[ay_r(wy_r - 2k) - b]^2\} - 1}$ 은 k 에 관하여 증가하므로 식 (7)을 만족시키는 k_0 보다 큰 k 에 대하여 식 (6)을 만족시킨다. 따라서 $k > k_0$ 이면 평형점은 점근안정하다. (증명끝)

정리 2의 정확성을 모의실험결과를 통하여 확인하였다.

모의는 Adams-Bashforth-Moulton의 예측자-수정자알고리즘[2, 5]을 가지고 진행하였다.

$a = 0.2$, $w = 1$, $y_r = 4$, $b = 1$, $\alpha = 0.8$ 일 때 평형점은 (3.2, 4)이다. 이때

$$k_0 = 1.016, k_1 = 0.845, k_2 = 8.155$$

이다. 초기점을 (3.19, 3.99)로 주고 $k = 1.1$ 일 때와 $k = 1.0$ 일 때 모의를 진행한 결과 $k = 1.1(> k_0)$ 일 때는 평형점 (3.2, 4)으로 다가가지만 $k = 1.0(< k_0)$ 일 때에는 불안정해져서 다른 평형점 (0, 0)으로 다가간다는것을 알수 있다.

또한 옹근수계도함수를 리용한 모형(계 (1))에서는 k 가 1.375보다 클 때 안정해지지만 분수계인 경우 안정한 파라미터의 범위가 더 넓어졌다는것을 알수 있다.

참 고 문 헌

- [1] R. Cristiano et al.; <http://dx.doi.org/10.1016/j.physd.02.005>. 2017.
- [2] I. Petras; Fractional-Order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation, Higher Education Press, 29~38, 2011.
- [3] E. Ponce et al.; 18th IFAC World Congress, Milano (Italy), August 28—September 2, 13293, 2011.
- [4] P. A. Mohammad; Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., 17, 2670, 2012.
- [5] M. S. Tavazoei et al.; Physics Letters A, 367, 102, 2007.
- [6] S. K. Agrawal et al.; Chaos, Solitons & Fractals, 45, 737, 2012.
- [7] S. Westerlund et al; IEEE Trans. on Dielectrics and Electrical Insulation, 1, 826, 1994.
- [8] S. Westerlund; Dead Matter Has Memory! Causal Consulting, 29~307, 2002.

주체108(2019)년 9월 15일 원고접수

The Stability for the Fractional Order Model of DC-DC Booster Converter

Choe Jong Hak, Kim Sang Mun

In this paper, we propose the fractional order model of DC-DC booster converter and analyse the stability change of the equilibrium by the change of parameter.

Keywords: DC-DC booster converter, fractional order, stability