김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제1호

청구수관련을 가진 복합뽜쏭위험모형에 대한 최량비례제재보험방략연구

김철호, 리원암

론문에서는 청구수관련이 있는 위험들을 가지는 보험기관에서 재보험을 합리적으로 결정하기 위한 문제를 연구하였다.

선행연구[2-4]에서는 파산확률이 최소로 되는 최량비례제재보험과 그것의 방략 그리고 투자방략의 결정문제들을, 선행연구[5]에서는 련관있는 위험을 가지는 뽜쏭위험과정을, 선행연구[1]에서는 분산보험료원리에 기초하여 련관있는 위험을 가지는 복합뽜쏭위험모형과 확산근사위험모형에 대하여 파산확률이 최소인 최량비례제재보험결정문제를 연구하였다.

우리는 보험기관이 보험업무에서 련관있는 위험들이 있는 경우 복합뽜쏭위험모형에 대하여 기대보험료원리를 리용하여 지수유용함수가 최대로 되는 최량비례제재보험결정문제를 연구하였다.

이제 보험기관이 $m \ge 2$의 련관된 보험업무증권들을 가진다고 가정하자.

그러면 $l\ (l=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 째 보험위험에 대하여 $X_i^{(l)}\ (i=1,\ 2,\ \cdots)$ 은 분포함수 $F_l(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 0<F_l(x)<1, & x\ge 0\end{cases}$ 에 따르는 우연청구량이며 $EX_i^{(l)}=\mu_l$ 이고 매 l 에 대하여 모멘트생성함수 $M_l(r)=E(e^{rX^{(l)}})$ 이 존재한다고 가정한다.

이때 l 째 위험족에 대하여 총 청구량은 $S_l(t)=\sum_{i=1}^{\widetilde{N}_l(t)} X_i^{(l)}$ 이다. 여기서 $l\ (l=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 째 보험위험에서 독립청구량렬 $X_i^{(l)}\ (i=1,\ 2,\ \cdots)$ 과 청구수과정 $\widetilde{N}_l(t)$ 는 독립이다.

실천에서 보험기관의 m개 업무족들은 보통 어떤 방법으로 련관되게 되며 이로부터 보험기관에 들어오는 총 청구량은 련관된 위험들의 결합으로 나타난다.

이제 m개의 청구수과정들에 대하여 련관되여있는 위험모형을 다음과 같이 생각하자.

$$\widetilde{N}_l(t)=N_l(t)+N(t)$$

여기서 $N_l(t)\ (l=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$, $N(t)$ 는 세기가 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_m,\ \lambda$ 인 독립뽜쏭과정들이고 m개의 위험들의 련관성은 계수과정 $N(t)$ 에 의해 집중되여있다.

따라서 m개의 위험족들에 의하여 생성되는 총 청구수과정은 다음과 같다.

$$S_t=\sum_{\ell=1}^{m} S_l(t)=\sum_{l=1}^{m}\sum_{i=1}^{N_l(t)+N(t)} X_i^{(l)} \tag{1}$$

매 위험족에서 $0<r<\zeta^l$ 에 대하여 $E(X^{(l)}e^{rX^{(l)}})=M_l'(r)$ 가 존재한다.

$\lim_{r\to\zeta^{(l)}} E(X^{(l)}e^{rX^{(l)}})=\infty$, $0<\zeta^l<+\infty$ 라고 가정하자.

보험기관에 어떤 t시각에 남아있는 자금과정은 $R_t=u_0+ct-S_t$ 이다. 여기서 u_0 은 초

기자금, c는 단위시간당 보험료, S_t는 $\tilde{\lambda} = \sum_{\ell=1}^{m} \lambda_\ell + \lambda$를 가지는 복합뽜쏭과정이고 변화된 청구크기우연량 X'의 분포함수는 $F_{X'}(x) = \sum_{l=1}^{m} \frac{\lambda_l}{\tilde{\lambda}} F_{X^{(l)}}(x) + \frac{\lambda}{\tilde{\lambda}} F_{\sum_{l=1}^{m} X^{(l)}}(x)$로 주어진다.

$a_\ell = (\lambda_l + \lambda) E(X^{(l)})$이라고 놓고 다음과 같은 가정을 주자.

가정 1 보험기관은 매 위험량 $X_i^{(l)}$ $(l = 1, 2, \cdots, m)$에 대하여 비례제보험의 책임비률 $q_{lt} \in [0, 1]$을 가지며 청구의 일부를 련속적으로 재보험기관에 넘긴다.

가정 2 보험기관은 t시간에 비례제재보험방략 $q_t = (q_{1t}, q_{2t}, \cdots, q_{mt})$를 가지며 재보험료 $\delta(q_t)$로 지불한다.

재보험료계산은 기대보험료원리를 리용하여 $\delta(q) = \sum_{l=1}^{m} (1+\eta_l)(1-q_l) a_l$ 로 한다.

가정 3 보험기관은 남은 모든 자금을 투자률 $r(\geq 0)$를 가지고 무위험자산에 투자한다.

이제 $\{R_t^q,\ t \geq 0\}$을 보험기관에 남은 련합된 자금과정이라고 하자. 여기서 R_t^q는 보험기관이 비례제재보험방략 q_t를 선택한 경우 t시각에 보험기관에 남은 자금이다.

이 과정은 다음과 같이 표시된다.

$$dR_t^q = [rR_t^q + (c - \delta(q_t))]dt - \sum_{\ell=1}^{m} q_{lt} dS_l(t) \tag{2}$$

우리는 보험기관이 T시간까지 최종자산의 기대유용함수가 최대로 되게 하는것을 목적으로 한다. 이제 $u(x)$를 $u' > 0$, $u'' < 0$인 유용함수라고 하고 목적함수로서

$$J^q(t,\ x) = E[u(R_T^q) \mid R_t^q = x] \tag{3}$$

로 놓자. 그리고 대응되는 값함수를

$$V(t,\ x) = \sup_q J^q(t,\ x) \tag{4}$$

라고 하자. 여기서 유용함수로서 다음과 같은 지수유용함수를 리용하기로 한다.

$$u(x) = -\rho e^{-\upsilon x} / \upsilon \quad (\rho > 0,\ \upsilon > 0) \tag{5}$$

우리의 문제는 련관있는 청구들이 들어오고 보험기관에 남은 과정이 복합뽜쏭위험모형 (2)로 표시되고 남은 자금을 무위험자산에 투자하며 재보험료가 기대보험료원리로 계산되고 지수유용함수 (5)에 의한 값함수 (4)를 리용하여 최량비례제재보험방략을 구하는것이다.

$C^{1,2}$를 편도함수 ϕ_t, ϕ_x, ϕ_{xx}들이 $[0, T] \times \mathbf{R}$에서 련속인 함수들인 $\phi(t, x)$들의 공간이라고 하면 설정한 위험모형 (2)에 의하여 만들어진 목적함수 (3)의 값함수 (4)의 최량풀이는 값함수 V가 경계조건

$$V(t,\ x) = u(x) \tag{6}$$

를 가지고 $[0, T] \times \mathbf{R}$에서 해밀턴—야꼬비—벨만방정식 $\sup_q A^q V(t,\ x) = 0,\ t < T$를 만족시킬 때 존재한다. 여기서 위험모형 (2)에 대하여 다음의 식이 성립된다.

$$A^q V(t,\ x) = V_t + [rx + c - \delta(q)]V_x + \sum_{\ell=1}^{m} \lambda E[V(t,\ x - q_l X^{(l)}) - V(t,\ x)] + \lambda E\left[V\left(t,\ x - \sum_{\ell=1}^{m} q_l X^{(l)}\right) - V(t,\ x)\right]$$

정리 1 $W\in C^{1,\ 2}$ 를 경계조건 $W(t,\ x)=u(x)$ 를 만족시키는 $\sup_q A^q V(t,\ x)=0,\ t<T$ 의 고전적풀이라고 하면 $V(t,\ x)=W(t,\ x)$ 가 성립된다. 그리고 q^* 이 모든 $(t,\ x)\in[0,\ T]\times\mathbf{R}$ 에 대하여 $A^{q^*}V(t,\ x)=0$ 을 만족시킨다면 $q^*(t,\ R_t^*)=(q_1^*(t,\ R_t^*),\ q_2^*(t,\ R_t^*),\ \cdots,\ q_m^*(t,\ R_t^*))$ 은 값함수 (4)에 대한 최량방략이다. 여기서 R_t^* 은 최량방략에서의 남은 자금과정이다.

다음으로 복합뽜쏭위험모형 (2)에 대하여 유용함수 (5)에 의하여 값함수가 식 (3), (4)로 표시되는 최량비례제재보험방략 $q_t^*=(q_{1t}^*,\ q_{2t}^*,\ \cdots,\ q_{mt}^*)$ 을 구하는 문제를 풀어보자.

최량비례제재보험방략을 구하는 문제는 경계조건 $V(T,\ x)=u(x)$ 를 가지고 방정식

$$\sup\left\{V_t+[rx+c-\delta(q)]V_x+\sum_{l=1}^m\lambda_l E[V(t,\ x-q_lX^{(l)})-V(t,\ x)]+\lambda E\left[V\left(t,\ x-\sum_{l=1}^m q_lX^{(l)}\right)-V(t,\ x)\right]\right\}=0$$

의 고전적풀이를 구하는 문제로 된다.

경계조건을 가지는 이 방정식의 고전적풀이를 함수형태가

$$V(t,\ x)=-\rho\exp[-\upsilon xe^{r(T-t)}+h(T-t)]/\upsilon \tag{7}$$

인 풀이로 구하는 방법을 적용하기로 하자. 여기서 $h(\cdot)$ 은 식 (7)이 경계조건 (6)의 풀이로 되게 하는 적당한 함수이다.

경계조건 $V(T,\ x)=u(x)$ 로부터 $h(0)=0$ 이라는것을 쉽게 알수 있다.

한편 식 (7)로부터 다음의 식이 나온다.

$$\begin{cases} V_t=V(t,\ x)[\upsilon xre^{r(T-t)}-h'(T-t)],\ V_x=V(t,\ x)[-\upsilon e^{r(T-t)}],\ V_{xx}=V(t,\ x)[\upsilon^2e^{2r(T-t)}] \\ E[V(t,\ x-q_lX^{(l)})-V(t,\ x)]=V(t,\ x)[M_l(\upsilon q_le^{r(T-t)})-1] \\ E\left[V\left(t,\ x-\sum_{l=1}^m q_lX^{(l)}\right)-V(t,\ x)\right]=V(t,\ x)\left[\prod_{l=1}^m M_l(\upsilon q_le^{r(T-t)})-1\right] \end{cases} \tag{8}$$

이때 식 (6), (8)을 리용하여 $t<T$ 일 때 다음의 식을 얻는다.

$$\inf\left\{-h'(T-t)-c\upsilon e^{r(T-t)}-\sum_{l=1}^m\lambda_l-\lambda+\delta(q)\upsilon e^{r(T-t)}+\sum_{l=1}^m\lambda_lM_l(\upsilon q_le^{r(T-t)})+\lambda\prod_{l=1}^m M_l(\upsilon q_le^{r(T-t)})\right\}=0$$

$$g(q)=\delta(q)\upsilon e^{r(T-t)}+\sum_{l=1}^m\lambda_lM_l(\upsilon q_le^{r(T-t)})+\lambda\prod_{l=1}^m M_l(\upsilon q_le^{r(T-t)}) \tag{9}$$

이라고 놓으면 임의의 $t\in[0,\ T]$ 에 대하여

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g(q)}{\partial q_l}=\left(-(1+\eta_l)a_l+M_l'(\upsilon q_le^{r(T-t)})\left(\lambda_\ell+\lambda\prod_{j\neq l}M_j(\upsilon q_je^{r(T-t)})\right)\right)\cdot\upsilon e^{r(T-t)} \\ \dfrac{\partial^2 g(q)}{\partial q_l^2}=M_l''(\upsilon q_le^{r(T-t)})\left(\lambda_l+\lambda\prod_{j\neq l}M_j(\upsilon q_je^{r(T-t)})\right)\cdot\upsilon^2e^{2r(T-t)}>0 \\ \dfrac{\partial^2 g(q)}{\partial q_l\partial q_k}=\lambda M_l'(\upsilon q_le^{r(T-t)})M_k'(\upsilon q_ke^{r(T-t)})\prod_{j\neq l,\ k}M_j(\upsilon q_je^{r(T-t)})\cdot\upsilon^2e^{2r(T-t)} \end{cases}$$

$l \neq k,\ l,\ k=1, 2, \cdots,\ m,\ M_l''(r)=E((X^{(l)})^2 \cdot e^{rX^{(l)}})$ 을 만족시킨다.

보조정리 1 모든 $l=1,\ 2,\ \cdots,\ m$ 에 대하여 $g(q)$ 는 q_l 에 관한 불룩함수이다.

이제 $g(q)$ 와 $(q_1(T-t),\ q_2(T-t), \cdots,\ q_m(T-t))$ 를 최소로 하는것은 방정식

$$-(1+\eta_l)a_l + M_l'(vq_le^{r(T-t)}) \times \left(\lambda_l + \lambda \prod_{j \neq l} M_j(vq_je^{r(T-t)}) \right) = 0 \tag{10}$$

의 풀이와 관련된다.

보조정리 2 $\forall t \in [0,\ T]$ 에 대하여 $\hat{q}=(\hat{q}_1,\ \cdots,\ \hat{q}_m),\ \tilde{q}=(\tilde{q}_1,\ \cdots,\ \tilde{q}_m)$ 을 방정식 (10)의 두 풀이라고 하면 $\hat{q}=\tilde{q}$ 이다.

이제 $m=2$ 인 경우 $n_1=vq_1e^{r(T-t)}$, $n_2=vq_2e^{r(T-t)}$ 이라고 하면 식 (9)는 다음과 같다.

$$-(1+\eta_1)a_1 + M_1'(n_1)(\lambda_1+\lambda M_2(n_2))=0, \quad -(1+\eta_2)a_2 + M_2'(n_2)(\lambda_2+\lambda M_1(n_1))=0 \tag{11}$$

보조정리 3 $M_i^{-1}(M_i'^{-1})$ 을 $M_i(M_i')$ $(i=1,\ 2)$ 의 거꿀함수라고 하면 부등식 $\begin{cases} M_2^{-1}(1+\eta_1+\eta_1\lambda_1/\lambda) > M_2'^{-1}((1+\eta_2)\mu_2) \\ M_1^{-1}(1+\eta_2+\eta_2\lambda_2/\lambda) > M_1'^{-1}((1+\eta_1)\mu_1) \end{cases}$ 혹은 $\begin{cases} M_2^{-1}(1+\eta_1+\eta_1\lambda_1/\lambda) < M_2'^{-1}((1+\eta_2)\mu_2) \\ M_1^{-1}(1+\eta_2+\eta_2\lambda_2/\lambda) < M_1'^{-1}((1+\eta_1)\mu_1) \end{cases}$ 이 만족될 때 방정식 (11)은 유일한 정인뿌리 $(\tilde{n}_1,\ \tilde{n}_2)$ 를 가진다.

보조정리 3으로부터 $\overline{n}_1=vq_1(T-t)e^{r(T-t)}$, $\overline{n}_2=vq_2(T-t)e^{r(T-t)}$ 으로 얻어지며

$$q_1(T-t)=\overline{n}_1e^{-r(T-t)}/v,\ \ q_2(T-t)=\overline{n}_2e^{-r(T-t)}/v$$

로 쓸수 있다.

이로부터 $\overline{n}_1,\ \overline{n}_2$ 가 안정짐 $\eta_1,\ \eta_2$ 에 관하여 상수의존성이 있다는것을 쉽게 알수 있다.

정리 2 $(\overline{n}_1,\ \overline{n}_2)$ 를 방정식 (11)의 유일한 정인 뿌리라고 하고

$$\hat{q}_1(T-t)=M_1'^{-1}\left[\frac{(1+\eta_1)a_1}{\lambda_1+\lambda M_2(ve^{r(T-t)})}\right] \cdot \frac{e^{-r(T-t)}}{v}$$

$$\hat{q}_2(T-t)=M_1'^{-1}\left[\frac{(1+\eta_2)a_2}{\lambda_2+\lambda M_1(ve^{r(T-t)})}\right] \cdot \frac{e^{-r(T-t)}}{v}$$

이라고 하자. 그리고 함수 h_i $(i=1,\ \cdots,\ 5)$ 들이 다음과 같이 정의되였다고 하자.

$$h_i(T-t)=\tilde{h}_i(T-t)+c_i \quad (i=1,\ 2,\ 4,\ 5)$$

$$h_3(T-t)=-\frac{cv(e^{r(T-t)}-1)}{r}-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda)(T-t)+\int_0^{T-t}(\lambda_1M_1(ve^{rs})+\lambda_2M_2(ve^{rs})+\lambda M_1(ve^{rs})M_2(ve^{rs}))ds$$

그러면 $\overline{n}_1 \le \overline{n}_2$ 인 경우 임의의 $t \in [0,\ T]$ 에 대하여 모형 (2)에 대한 최량재보험방략 $q_{1t}^*,\ q_{2t}^*$ 은 $(q_{1t}^*,\ q_{2t}^*)=\begin{cases} (q_1(T-t),\ q_2(T-t)), & 0 \le t \le t_2 \\ (\hat{q}_1(T-t),\ 1), & t_2 \le t \le t_{01} \\ (1,\ 1), & t_{01} \le t \le T \end{cases}$ 이고 값함수 $V(t,\ x)$ 는 다음과 같다.

$$V(t,\ x)=\begin{cases} -\rho\exp\{-vxe^{r(T-t)}+h_1(T-t)\}/v, & 0 \le t \le t_2 \\ -\rho\exp\{-vxe^{r(T-t)}+h_2(T-t)\}/v, & t_2 \le t \le t_{01} \\ -\rho\exp\{-vxe^{r(T-t)}+h_3(T-t)\}/v, & t_{01} \le t \le T_2 \end{cases}$$

또한 $\overline{n}_1 \ge \overline{n}_2$ 인 경우 임의의 $t \in [0,\ T]$ 에 대하여 모형 (2)에 대한 최량재보험방략

q_{1t}^*, q_{2t}^*은 $(q_{1t}^*,\ q_{2t}^*)=\begin{cases}(q_1(T-t),\ q_2(T-t)), & 0\le t\le t_1\\ (1,\ \hat{q}_2(T-t)), & t_1\le t\le t_{02}\\ (1,\ 1), & t_{02}\le t\le T\end{cases}$ 이고 값함수 $V(t,\ x)$는 다음과 같다.

$$V(t,\ x)=\begin{cases}-\rho\exp\{-vxe^{r(T-t)}+h_4(T-t)\}/v, & 0\le t\le t_1\\ -\rho\exp\{-vxe^{r(T-t)}+h_5(T-t)\}/v, & t_1\le t\le t_{02}\\ -\rho\exp\{-vxe^{r(T-t)}+h_3(T-t)\}/v, & t_{02}\le t\le T\end{cases}$$

정리를 통하여

$h_1(T-t_2)=h_2(T-t_2)$, $h_2(T-t_1)=h_3(T-t_1)$, $h_4(T-t_1)=h_5(T-t_1)$, $h_5(T-t_2)=h_3(T-t_2)$

이므로 값함수 $V(t,\ x)$는 $[0,\ T]\times\mathbf{R}$에서 련속함수이다. 그리고

$$\begin{cases}h_1'(T-t_2)=-c\bar{n}_2-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda+(1+\eta_1)a_1(\bar{n}_1-\bar{n}_2))+\\ \qquad +\lambda_1M_1(\bar{n}_1)+M_2(\bar{n}_2)(\lambda_2+\lambda M_1(\bar{n}_1))=h_2'(T-t_2)\\ h_2'(T-t_1)=-cve^{r(T-t_{01})}-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda)+\lambda_1M_1(ve^{r(T-t_{01})})+\\ \qquad +M_2(ve^{r(T-t_{01})})(\lambda_2+\lambda M_1(ve^{r(T-t_{01})}))=h_3'(T-t_{01})\\ h_4'(T-t_1)=-c\bar{n}_1-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda+(1+\eta_2)a_2(\bar{n}_2-\bar{n}_1))+\\ \qquad +\lambda_1M_1(\bar{n}_1)+M_2(\bar{n}_2)(\lambda_2+\lambda M_1(\bar{n}_1))=h_5'(T-t_1)\\ h_5'(T-t_{02})=-cve^{r(T-t_{02})}-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda)+\lambda_2M_2(ve^{r(T-t_{02})})+\\ \qquad +M_1(ve^{r(T-t_{02})})(\lambda_1+\lambda M_2(ve^{r(T-t_{02})}))=h_3'(T-t_{02})\end{cases}.$$

이므로 $V(t,\ x)\in C^{1,\ 2}$이며 이것은 해밀턴—야꼬비—벨만방정식의 고전적풀이이다.

참 고 문 헌

[1] Z. Liang et al.; Scand. Actuar. J., 2, 178, 2014.

[2] Z. Liang et al.; Insurance Math. Econom. 49, 207, 2011.

[3] M. Taksar; Math. Econ., 47, 246, 2010.

[4] M. Taksar; Finance Stoch., 7, 97, 2003.

[5] Guo, J. et al.; Insurance Math. Econom., 31, 205, 2002.

주체107(2018)년 9월 8일 원고접수

Study on an Optimal Proportional Reinsurance Strategy for the Compound Poisson Risk Model with Correlation of Claim Number

Kim Chol Ho, Ri Won Am

We study the problem of an optimal reinsurance strategy on the occassion of dependent risks in insurance business. We study the optimal proportional reinsurance strategy maximizing the exponential utility under the expected value premium principle for the compound Poisson risk model with correlation of claim number in insurance business.

Key words: proportional reinsurance, correlation of claim number