김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체106(2017)년 제63권 제5호 Vol. 63 No. 5 JUCHE106(2017).

완비거리공간에서의 부동점정리와 한가지 형태의 임풀스분수계미분방정식의 풀이의 유일존재성

강현심, 리미경

최근에 바나흐공간에서의 넘기기의 부동점정리들을 리용하여 임풀스분수계미분방정식의 풀이의 존재성과 유일성에 대한 연구가 심화되고있다.

선행연구[3]에서는 $0<q<1$ 인 경우, 선행연구[2]에서는 $1<q<2$ 인 경우 다음과 같은 형태의 임풀스분수계미분방정식의 풀이의 존재성과 유일존재성에 대하여 밝혔다.

$$\begin{cases} {}^c D_t^q u(t)=f(t,\ u(t)), & t\in J':=J\setminus\{t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_m\},\ J=[0,\ T] \\ \Delta u(t_l)=y_l, & l=1,\ 2,\ \cdots,\ m,\ y_l\in \boldsymbol{R} \\ u(0)=u_0 \end{cases} \tag{1}$$

여기서 $f: J\times \boldsymbol{R}\to \boldsymbol{R}$ 는 련속함수이고 $u_0\in \boldsymbol{R},\ 0=t_0<t_1<\cdots<t_m<t_{m+1}=T$ 이다.

한편 선행연구[1]에서는 바나흐공간에서의 임풀스분수계미분방정식에 대하여 연구하였는데 넘기기들에 대하여서는 강한 축소조건들을 주었다.

론문에서는 방정식 (1)을 일반화하여 다음과 같은 형태의 임풀스분수계미분방정식에 대하여 풀이의 유일존재성을 새로운 부동점정리를 리용하여 밝혔으며 선행연구[3]에서와는 달리 k －노름을 도입함으로써 축소조건을 훨씬 약화시켰다.

$$\begin{cases} {}^c D_t^q u(t)=f(t,\ u(t)), & t\in J':=J\setminus\{t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_m\},\ J=[0,\ T] \\ \Delta u(t_l)=J_l(u(t_l^-)), & l=1,\ 2,\ \cdots,\ m \\ u(0)=u_0 \end{cases} \tag{2}$$

여기서 E 는 반순서바나흐공간이고 $0<q<1$, $u_0\in E$, $\Delta u(t_l)=u(t_l^+)-u(t_l^-),\ l=1,\ 2,\ \cdots,\ m$ 이며 넘기기 $f: J\times E\to E$ 는 련속이고 $J_l: E\to E,\ l=1,\ 2,\ \cdots,\ m$ 이다.

이미 선행연구[1]에서 방정식 (2)와 동등한 다음의 적분방정식을 얻었다.

$$u(t)=u_0+\sum_{0<t_l<t} J_l(u(t_l^-))+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1} f(s,\ u(s))\,ds,\ \ t\in J \tag{3}$$

선행연구[1]에서는 방정식 (3)의 풀이의 유일존재성을 밝혀 방정식 (2)의 풀이의 유일존재성을 주장하였다.

구간 $J=[0,\ T]$ 에서 련속인 넘기기공간 $C(J,\ E)=\{u: J\to E \mid u$ 는 련속$\}$ 은 노름 $\|u\|_C:=\sup_{t\in J}\|u(t)\|,\ \ u\in C(J,\ E)$ 에 관하여 바나흐공간으로 되며 단편련속인 넘기기공간 $PC(J,\ E)=\{u: J\to E \mid u\in C((t_l,\ t_{l+1}],\ E),\ u(t_l^+),\ u(t_l^-)$ 가 존재하여 $u(t_l^-)=u(t_l),\ l=0,1,\ \cdots,\ m\}$ 도 노름 $\|u\|_{PC}:=\sup_{t\in J}\|u(t)\|,\ u\in PC(J,\ E)$ 에 관하여 바나흐공간으로 된다.

특히 공간 $PC(J,\ E)$ 에 k －노름 $\|u\|_k := \sup_{t\in J} e^{-kt}\|u(t)\|,\ u\in PC(J,\ E)$ 를 도입하면 $(PC(J,\ E),\ \|\cdot\|_k)$ 도 역시 바나흐공간으로 된다.

이때 $\forall u\in PC(J,\ E),\ \|u\|_k \le \|u\|_{PC}$ 이므로 노름 $\|\cdot\|_{PC}$ 와 $\|\cdot\|_k$ 는 동등하다.

정의 $u\in PC(J,\ E)$ 가 방정식 (2)를 만족시키면 u 를 방정식 (2)의 풀이이라고 부른다.

임풀스분수계미분방정식 (2)에 대하여 다음의 가정들을 리용한다.

가정 1 넘기기 $f: J\times E\to E$ 에 대하여 $\forall u\in C(J,\ E),\ f(\cdot,\ u(\cdot))\in C(J,\ E)$ 이다.

가정 2 $\exists q_2\in(0,\ q),\ \exists h(t)\in L^{1/q_2}(J,\ \boldsymbol{R}),\ \forall u,\ v\in E,\ \|f(t,\ u)-f(t,\ v)\|\le h(t)\cdot\|u-v\|$

가정 3 넘기기 $J_l: E\to E,\ l=1,\ 2,\ \cdots,\ m$ 에 대하여

$$\exists L_l\ge 0,\ \forall u,\ v\in E \Rightarrow \|J_l(u)-J_l(v)\|\le L_l\|u-v\|.$$

정리 1 X 에 거리 d 가 정의되여 $(X,\ d)$ 가 완비거리공간이라고 하자.

만일 넘기기 $T: X\to X$ 가 $\forall x,\ y\in X$, $\Psi(d(Tx,\ Ty))\le\Phi(d(x,\ y))$ 를 만족시키면 넘기기 T 는 X 에서 유일한 부동점을 가지며 $\forall x_0\in X$, 반복렬 $\{T^n x_0\}$ 은 부동점에로 수렴한다. 여기서 Ψ 는 일반화된 거리변경함수[1]이고 $\Phi:[0,\ \infty)\to[0,\ \infty)$ 는 $\forall t>0,\ \Psi(t)>\Phi(t)$ 인 오른쪽 상반련속함수이다.(증명생략)

정리 1을 리용하면 임풀스분수계미분방정식 (2)에 대하여 다음의 정리가 성립된다.

정리 2 공간 E 가 바나흐공간이고 가정 1－3이 성립되며 $L=\max_{1\le l\le m}\{L_l\}<1$ 이면 방정식 (2)는 $PC(J,\ E)$ 에서 유일풀이를 가진다.

증명 넘기기 $F: PC(J,\ E)\to PC(J,\ E)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$(Fu)(t)=u_0+\sum_{0<t_l<t} y_l+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1} f(s,\ u(s))\,ds\ ,\ t\in J$$

이때 넘기기 F 가 $PC(J,\ E)\to PC(J,\ E)$ 라는것을 증명하자.

임의의 $u\in PC(J,\ E)$ 에 대하여 가정 1에 의하여 $f(t,\ u(t))\in PC(J,\ E)$ 이다. 즉

$$\|f(\cdot,\ u(\cdot))\|_{PC}<\infty.$$

또한 임의의 $t,\ t+\delta\in(t_l,\ t_{l+1}]$ 에 대하여

$$\|(Fu)(t+\delta)-(Fu)(t)\|\le\|f(\cdot,\ u(\cdot))\|_{PC}/\Gamma(q)\cdot\{2\delta^q+[t^q-(t+\delta)^q]\}/q\to 0\quad(\delta\to 0)$$

이 성립되므로 $Fu\in C((t_l\ \ t_{l+1}],\ E),\ l=1,\ 2,\ \cdots,\ m$ 이고 따라서 $Fu\in PC(J,\ E)$ 이다.

임의의 $u,\ v\in PC(J,\ E)$ 에 대하여 다음의 식이 성립된다.

$$\|Fu-Fv\|_k=\sup_{t\in J} e^{-kt}\|Fu(t)-Fv(t)\|=$$

$$=\sup_{t\in J} e^{-kt}\left\|\sum_{0<t_l<t}[J_l(u(t_l^-))-J_l(v(t_l^-))]+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}[f(s,\ u(s))-f(s,\ v(s))]\,ds\right\|\le$$

$$\le\sup_{t\in J} e^{-kt}\left\|\sum_{0<t_l<t}[J_l(u(t_l^-))-J_l(v(t_l^-))]\right\|+\frac{1}{\Gamma(q)}\sup_{t\in J} e^{-kt}\left\|\int_0^t (t-s)^{q-1}[f(s,\ u(s))-f(s,\ v(s))]ds\right\|$$

우선 $\dfrac{1}{\Gamma(q)}\sup_{t\in J} e^{-kt}\left\|\int_0^t (t-s)^{q-1}[f(s,\ u(s))-f(s,\ v(s))]\,ds\right\|$ 를 평가하자.

가정 2에 의하여 다음과 같다.

$$\frac{1}{\Gamma(q)}\sup_{t\in J} e^{-kt}\left\|\int_0^t (t-s)^{q-1}[f(s,\ u(s))-f(s,\ v(s))]\,ds\right\| \le$$

$$\le \frac{1}{\Gamma(q)}\sup_{t\in J} e^{-kt}\int_0^t (t-s)^{q-1}\cdot h(s)\cdot \|u(s)-v(s)\|\,ds \le$$

$$\le \frac{\Gamma((q-q_2)/(1-q_2))}{\Gamma(q)}\|h\|_{L^{1/q_2}(J)}\,(1-q)^{(q-q_2)/(1-q_2)}\frac{1}{k^{(q-q_2)/(1-q_2)}}$$

따라서 $\beta=\dfrac{q-q_2}{1-q_2}>0,\ \alpha=\dfrac{\Gamma((q-q_2)/(1-q_2))}{\Gamma(q)}\|h\|_{L^{1/q_2}(J)}\,(1-q)^{(q-q_2)/(1-q_2)}>0$ 이라고 하면

$$\frac{1}{\Gamma(q)}\sup_{t\in J} e^{-kt}\left\|\int_0^t (t-s)^{q-1}[f(s,\ u(s))-f(s,\ v(s))]\,ds\right\| \le \frac{\alpha}{k^{\beta}}\|u-v\|_k . \tag{4}$$

다음으로 $\sup_{t\in J} e^{-kt}\left\|\sum_{0<t_l<t}[J_l(u(t_l^-))-J_l(v(t_l^-))]\right\|$ 을 평가하자.

가정 3에 의하여

$$\sup_{t\in J} e^{-kt}\left\|\sum_{0<t_l<t}[J_l(u(t_l^-))-J_l(v(t_l^-))]\right\| \le \sup_{t\in J} e^{-kt}\sum_{0<t_l<t}\|J_l(u(t_l^-))-J_l(v(t_l^-))\| \le$$

$$\le \max\left\{\sup_{t\in(t_1,\ t_2]} e^{-kt}L_1\|u(t_1^-)-v(t_1^-)\|,\ \sup_{t\in(t_2,\ t_3]} e^{-kt}(L_1\|u(t_1^-)-v(t_1^-)\|+L_2\|u(t_2^-)-v(t_2^-)\|),\ \cdots,\right.$$

$$\left.\sup_{t\in(t_m,\ T]} e^{-kt}(L_1\|u(t_1^-)-v(t_1^-)\|+\cdots+L_m\|u(t_m^-)-v(t_m^-)\|)\right\}\le$$

$$\le \max\{L_1e^{-kt_1}\|u(t_1)-v(t_1)\|,\ e^{-k(t_2-t_1)}L_1e^{-kt_1}\|u(t_1^-)-v(t_1^-)\|+L_2e^{-kt_2}\|u(t_2^-)-v(t_2^-)\|,\ \cdots,$$

$$e^{-k(t_m-t_1)}L_1e^{-kt_1}\|u(t_1^-)-v(t_1^-)\|+\cdots+L_me^{-kt_m}\|u(t_m^-)-v(t_m^-)\|\}$$

가 성립되며 $\Delta t=\min_{l=2,\cdots,m}\{t_l-t_{l-1}\}$ 이라고 하면 다음의 식이 성립된다.

$$\sup_{t\in J} e^{-kt}\left\|\sum_{0<t_l<t}[J_l(u(t_l^-))-J_l(v(t_l^-))]\right\| \le$$

$$\le \max\{L_1\|u-v\|_k,\ e^{-k\Delta t}L_1\|u-v\|_k+L_2\|u-v\|_k,\cdots,\ e^{-k(m-1)\Delta t}L_1\|u-v\|_k+\cdots+L_m\|u-v\|_k\}=$$

$$=\|u-v\|_k\cdot\max\{L_1,\ e^{-k\Delta t}L_1+L_2,\ \cdots,\ e^{-k(m-1)\Delta t}L_1+\cdots+L_m\}$$

k가 충분히 크면 $\alpha/k^{\beta}+L+1/e^{k\Delta t}<1$ 이 되게 할수 있다.

그러면 $L+1/e^{k\Delta t}<1$ 이므로

$e^{-k\Delta t}L_1+L_2<L+1/e^{k\Delta t}<1,$

$e^{-2k\Delta t}L_1+e^{-k\Delta t}L_2+L_3\le L+(e^{-k\Delta t}L_1+L_2)/e^{k\Delta t}<L+1/e^{k\Delta t}<1,\ \cdots,\ e^{-k(l-1)\Delta t}L_1+$

$+e^{-k(l-2)\Delta t}L_2+\cdots+L_l<L+(e^{-k(l-2)\Delta t}L_1+e^{-k(l-3)\Delta t}L_2+\cdots+L_{l-1})/e^{k\Delta t}<L+1/e^{k\Delta t}<1$

이고 결과 다음의 식이 성립된다.

$$\sup_{t\in J} e^{-kt}\left\|\sum_{0<t_l<t}[J_l(u(t_l^-))-J_l(v(t_l^-))]\right\| \le \left(L+\frac{1}{e^{k\Delta t}}\right)\|u-v\|_k \tag{5}$$

따라서 식 (4), (5)에 의하여 $\| Fu - Fv \|_k \le \left(L + \frac{1}{e^{k\Delta t}} + \frac{\alpha}{k^\beta} \right) \| u - v \|_k$, $u,\ v \in PC(J,\ E)$이다.

그러면 넘기기 $F: PC(J,\ E) \to PC(J,\ E)$는 함수 $\Psi(t) = t,\ \Phi(t) = \left(L + \frac{1}{e^{k\Delta t}} + \frac{\alpha}{k^\beta} \right) t$에 대하여 정리 1의 모든 가정들을 만족시킨다.

따라서 정리 1에 의하여 넘기기 F는 $PC(J,\ E)$에서 유일한 부동점을 가지는데 이 부동점은 선행연구[1]에 의하여 방정식 (2)의 풀이로 된다.(증명끝)

실지 정리 1에 의하여 정리 2에서 임의의 $u_* \in PC(J,\ E)$를 시작점으로 하는 반복렬의 수렴성이 담보된다. 다시말하여

$$v_0 = u_*,\quad v_n = u_0 + \sum_{0<t_l<t} J_l(v_{n-1}(t_l^-)) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s,\ v_{n-1}(s))\, ds,\ t \in J,\ n = 1,\ 2,\ \cdots$$

은 방정식의 풀이에로 노름 $\|\cdot\|_k$에 관하여 수렴하며 노름 $\|\cdot\|_{PC}$에 관하여서도 수렴한다.

따름 공간 E가 바나흐공간이고 가정 1－3이 성립되면 다음의 방정식은 $PC(J,\ E)$에서 유일풀이를 가진다.

$${}^c D_t^q u(t) = f(t,\ u(t))\ \ (t \in J'),\ \Delta u(t_l) = y_l\ \ (l = 1,\ 2,\ \cdots,\ m),\ u(0) = u_0$$

따름으로부터 선행연구[1]에서의 축소조건 $\| h \|_{L^{1/q_2}(J)} T^{(1+\alpha)(1-q_2)} / [\Gamma(q)(1+\alpha)^{1-q_2}] < 1$을 제거할수 있다는것을 알수 있다. 이런 축소조건을 만족시키지 않으면서 따름에 의하여 풀이의 존재성이 담보되는 임풀스분수계미분방정식에 대하여 아래의 실례에서 보기로 한다.

실례 다음의 임풀스분수계미분방정식의 풀이의 유일존재성에 대하여 밝히자.

$$\begin{cases} {}^c D_t^{1/2} x_n(t) = [5x_n(t) + x_{n+1}(t)] / e^t, & t \in [0,\ 1/2) \cup (1/2,\ 1] \\ x_n(0) = 1/n^2 \\ x_n(1/2^+) = x_n(1/2^-) + 1/2^n, & n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots \end{cases} \tag{6}$$

$E = l^1 = \left\{ x = (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots) \mid \sum_{n=1}^\infty | x_n | < \infty \right\}$는 노름 $\| x \| = \sum_{n=1}^\infty | x_n |$, $x \in E$에 관하여 바나흐공간이다.

넘기기 $f: [0,\ 1] \times E \to E$를

$$f(t,\ u) = (f_1(t,\ u),\ \cdots,\ f_n(t,\ u),\ \cdots),\ f_n(t,\ u) = (5u_n + u_{n+1}) / e^t,\ t \in [0,\ 1],\ u = (u_1,\cdots,\ u_n,\ \cdots) \in E$$

로 정의하고 $y_1 = (1/2,\ 1/2^2,\ \cdots,\ 1/2^n,\ \cdots)$, $u_0 = (1,\ 1/2^2,\ 1/3^2,\ \cdots,\ 1/n^2,\ \cdots) \in E$로 표시하자.

그러면 방정식 (6)은 다음과 같이 표시할수 있다.

$$\begin{cases} {}^c D_t^{1/2} x(t) = f(t,\ x(t)),\ t \in [0,\ 1/2) \cup (1/2,\ 1] \\ \Delta x_n(1/2) = y_1 \\ x(0) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

이제 방정식 (7)의 넘기기가 따름의 모든 가정들을 만족시킨다는것을 증명하자.

우선 가정 1이 만족된다는것을 밝히자.

$\forall u \in C([0,\ 1],\ E),\ \forall t,\ t+\delta \in [0,\ 1],$

$$\| f(t+\delta,\ u(t+\delta)) - f(t,\ u(t)) \| \le \sum_{n=1}^\infty \left| \frac{5u_n(t+\delta)e^\delta + u_{n+1}(t+\delta)e^\delta - 5u_n(t) - u_{n+1}(t)}{e^{(t+\delta)}} \right| =$$

$$= \sum_{n=1}^\infty \frac{| e^\delta \{5[u_n(t+\delta) - u_n(t)] + [u_{n+1}(t+\delta) - u_{n+1}(t)]\} - (1 - e^\delta)[5u_n(t) + u_{n+1}(t)] |}{e^{(t+\delta)}} \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\delta}\,|5[u_n(t+\delta)-u_n(t)]+[u_{n+1}(t+\delta)-u_{n+1}(t)]|+|(1-e^{\delta})[5u_n(t)+u_{n+1}(t)]|}{e^{(t+\delta)}} \le$$

$$\le \frac{6e^{\delta}\,\|u(t+\delta)-u(t)\|+6|1-e^{\delta}|\cdot\|u(t)\|}{e^{(t+\delta)}} = \frac{6\|u(t+\delta)-u(t)\|}{e^{t}} - \frac{6|1-e^{\delta}|\cdot\|u(t)\|}{e^{(t+\delta)}} \to 0 \ (\delta \to 0)$$

이므로 넘기기 $f:[0,\ 1]\times E \to E$ 는 가정 1을 만족시킨다.

다음으로 가정 2가 만족된다는것을 밝히자.

$\forall t \in [0,\ 1],\ \forall u,\ v \in E$,

$$\|f(t,\ u)-f(t,\ v)\| = \sum_{n=1}^{\infty}|f_n(t,\ u)-f_n(t,\ v)| \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5|u_n-v_n|+|u_{n+1}-v_{n+1}|}{e^{t}} \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6|u_n-v_n|}{e^{t}} = \frac{6}{e^{t}}\|u-v\|$$

이고 $\forall q_2 \in (0,\ q),\ h(t)=6/e^{t} \in L_{1/q_2}(J,\ \boldsymbol{R})$ 이다.

한편 $J_1(u)=y_1,\ u\in E$ 의 리프쉬츠축소상수는 $L_1=0$ 이므로 가정 3과 $L_1<1$ 을 만족시키고 따라서 따름에 의하여 방정식 (7)은 $PC(J,\ E)$ 에서 유일풀이를 가진다. 특히

$$v^0 \in E,\ v^m=(v_1^m,\ v_2^m,\ \cdots,\ v_n^m,\ \cdots),\ v_n^m(t)=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^t \frac{3\,v_n^{m-1}(s)+v_{n+1}^{m-1}(s)}{(1+3\,e^{t})\,e^{2t}\,\sqrt{t-s}}ds, & t\in\left[0,\ \dfrac{1}{2}\right] \\ \dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^t \frac{3\,v_n^{m-1}(s)+v_{n+1}^{m-1}(s)}{(1+3\,e^{t})\,e^{2t}\,\sqrt{t-s}}ds, & t\in\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right] \end{cases},\quad m=1,\ 2,\ \cdots$$

은 풀이로 수렴한다.

주의 우의 실례에서 $\forall q_2 \in (0,\ q),\ \dfrac{\|h\|_{L^{1/q_2}}}{\Gamma(1/2)\{1-1/[2(1-q_2)]\}^{1-q_2}} > 1.07$ 이므로 선행연구[3]결과를 리용할수 없다.

참 고 문 헌

[1] 김일성종합대학학보(자연과학), 61, 11, 13, 주체104(2015).

[2] Jinrong Wang et al.; Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., 17, 4384, 2012.

[3] M. Feckan et al.; Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., 17, 3050, 2012.

주체106(2017)년 1월 5일 원고접수

A Fixed Point Theorem in a Complete Metric Space and the Existence and Uniqueness of Solution for an Impulsive Fractional Differential Equation

Kang Hyon Sim, Ri Mi Gyong

We obtain a fixed point theorem in a complete metric space, apply it to one type of the impulsive fractional differential equation and prove the existence and uniqueness of its solution.

Key words: contractive principle, impulsive fractional differential equation