김일성종합대학학보 수 학 주체107(2018)년 제64권 제4호

기업소들사이의 경제적관계를 모형화하는 한가지 미분경기

주 광 휘

론문에서는 국제시장을 통하여 이루어지는 자원개발형기업소와 자원가공형기업소사이의 경제적관계를 모형화하는 미분경기는 비록 미분방정식들로 서술되는 복잡한 동적모형들이지만 그 풀이와 그에 의하여 결정되는 동적상태를 얻을수 있다는것을 론의하였다.

론의되는 문제는 선행연구[1]에서 정식화되였지만 그것의 풀이는 알려져있지 않다.

1. 충돌문제의 일반적인 동적모형

론문에서는 선행연구[2]에서보다 특수한 프로그람적인 동적충돌문제들을 론의한다. 즉 미분경기의 i ($i=1, \cdots, N$)째 참가자는 순수방략 $u_i(t)$ 를 리용하면서 자기의 범함수 $J_i(u)=\int_{t_0}^{t_i} f_0^i(u,\ x,\ t)dt,\ i=\overline{1,\ N}$ 을 제한조건

$$\dot{x}=f(u,\ x,\ t),\quad t\in T=[t_0,\ t_1]\subset E^1, \tag{1}$$
$$x_j(t_0)=x_j^0,\quad j=1, \cdots, n,\quad x_k(t_1)=x_k^1,\ k\in K\subset\{1, \cdots, N\},\quad u\in W\subset E$$

밑에서 최대화한다고 간주한다. 여기서 $x=(x_1,\ \cdots,\ x_n)\in E^n$, $u(t)=(u_1(t),\ \cdots,\ u_N(t))$, $U=\prod_{i=1}^N U_i$, U_i 는 유한차원공간이고 W 는 U 의 콤팍트부분모임, $u_i\in W(u^i)$, $W(u^i)$ 는 $u^i=(u_1,\ \cdots, u_{i-1}, u_{i+1},\ \cdots,\ u_N)$ 에 의한 W 의 절단면이다.

정의 1 i 째 경기자의 임의의 방략 $u_i\in W(u^{*i})\setminus u_i^*$ 에 대해서도 $\hat{u}^i(t)\neq u^{*i}(t)$ 가 성립되는 T 의 (르베그측도의 의미에서) 령아닌 모임이 $u_i(t)\neq u_i^*(t)$ 가 성립되는 T 의 부분모임으로 된다는 조건밑에서 관계식

$$J_i(\hat{u}^i(u_i),\ u_i)\leq J_i(u^*) \tag{2}$$

이 성립되는 나머지경기자들의 적어도 하나의 허용방략 $\hat{u}^i=\hat{u}^i(u_i)\in W(u_i)$ 를 설정할수 있다면 정황 $u^*\in W$ 를 i 째 경기자의 A_i^c −극값정황이라고 부르고 그 전부의 모임을 A_i^c 로 표시한다. 그리고 만일 부등식 (2)가 모든 $i=1, 2, \cdots, N$ 에 대하여 성립된다면 즉 $u^*\in A_1^c\cap\cdots\cap A_N^c=A^c$ 이면 정황 u^* 을 모든 경기자들에게 있어서 찬동된 A^c − 평형정황이라고 부른다.

정리 u^* 을 N 명이 참가하는 경기문제의 A^c − 평형정황이라고 하면 T 의 거의 도처에서

$$\dot{p}_k^i=-p^i\frac{\partial f^i}{\partial x_k}\ \ (k=\overline{1,\ n},\ \ i=\overline{1,\ N}) \tag{3}$$

들과 경계조건

$$p_k^i(t_1)=0,\ k\notin K \tag{4}$$

들을 만족시키는 N개의 령아닌 절대련속벡토르함수 $p^i(t)=(p_0^i,\ p_1^i(t),\ \cdots,\ p_n^i(t))$, $p_0^i \ge 0$, $i=1,\cdots,N$ 들이 얻어지며 해밀터니안 $H^i=p^i f^i$, $f^i=(f_0^i,\ f_1,\ \cdots,\ f_n)$은 T에서 련속이다. 그리고 u^*은 $[H^i](\hat{u}^i,\ u_i)\le[H^i](u^*),\ u_i\in W(q^{*i}),\ \hat{u}^i\in W(u_i),\ i=1,\ \cdots,\ N$을 만족시킨다.

정의 2 주어진 방략 u^{*i}에 대하여 하나의 방략 $u_i^*=W(u^{*i})$만이 i째 경기자에 있어서 허용방략으로 되거나 또는 임의의 방략 $u_i^*=W(u^{*i})$에 대하여 $J_i(\hat{u}^i,\ u_i)\le J_i(u^*)$이 성립되는 적어도 하나의 허용방략 $\hat{u}^i=\hat{u}^i(u_i)\in W(u_i)$를 설정할수 있으면 정황 $u^*\in W$를 i째 경기자의 A_i－극값점이라고 부르고 그 전부의 모임을 A_i로 표시한다.

그리고 모든 $i=1,\ 2,\cdots,\ N$에 있어서 $J_i(\hat{u}^i,\ u_i)\le J_i(u^*)$이 정황 $u^*\in W$에서 만족된다면 즉 $u^*\in A_1\cap\cdots\cap A_N=A$이면 정황 u^*을 A－평형정황이라고 부른다.

2. 두 기업소의 경기적인 동적모형

어떤 시간구간 $T=(t_0,\ t_1)$에서 두 기업소가 국제시장을 통하여 호상작용한다고 하자.

그중 한 기업소는 자원가공형기업소로서 자체의 자원이 불충분한 기업소이고 다른 기업소는 첫번째 기업소의 경영활동에 필요한 자원들을 개발하여 그 기업소에 제공하는 자원개발형기업소이다. 그리고 첫번째 기업소의 총생산량은 함수 $h=H(z,\ x_1,\ t)$에 의하여 모형화된다. 여기서 $x_1(t)$는 기초자금이고 $z(t)$는 자연부원이다. 두번째 기업소의 수입은 자연부원의 채취와 첫번째 기업소의 경영활동에 필요한 자연부원을 보충하는 또는 전적으로 보장하는 자원수출에만 의존한다.

만일 δ를 자금의 감가상각결수, u_1을 투자속도라고 하면 $x_1(t)$의 동적상태는 방정식 $\dot{x}_1=u_1-\delta\cdot x_1,\ x_1(0)=x_1^0$으로 주어진다. 여기서 x_1^0은 $t=0$에서의 자금의 가치이다.

경기자 1(첫번째 기업소)은 자연부원을 구입하여 속도 $u_2(t)$로 소비하고 경기자 2(두번째 기업소)는 속도 $v_1(t)$로 자원을 개발하거나 또는 자기의 자원을 보충하는 다른 자원을 생산한다. 만일 t순간에 경기자 1, 2의 자연부원들의 크기들을 각각 $x_3(t)$, $x_2(t)$로 표시하면 생산에 필요한 자원부원수요에 대한 동적상태는 방정식 $\dot{x}_2=-u_2(t)$, $x_2(0)=x_2^0$, $\dot{x}_3=-v_1(t),\ \ x_3(0)=x_3^0$ 들로 표시할수 있다. 여기서 x_2^0과 x_3^0은 t_0순간에 경기자들의 자연부원들이다.

자연부원의 고갈에 따르는 채취에 드는 지출의 증가는 단위시간당 지수적의존성 $\beta_1u_2/(e^{\alpha_1x_2}-1),\ \ \beta_2v_1/(e^{\alpha_2x_3}-1)$로 표현된다. 만일 경기자 1에 의한 경기자 2의 자원의 수입속도를 $u_3(t)$로 표시하면 $0\le\int_{t_0}^{t}u_3(s)ds\le\int_{t_0}^{t}v_1(s)ds,\ \ t\in[t_0,\ t_1]$이 성립되여야 한다.

함수 $h(u_2+ku_3,\ x_1,\ t)$는 모든 변수들에 관하여 련속이라고 가정한다. 결수 k는 자원의 대신 또는 교체와 관련된 결수이다. 이 결수가 크면 클수록 경기자 1에 있어서 수입되는 자원 u_3이 자체의 자원 u_2보다 더 좋은것으로 된다.

경기자 2는 자기의 자연부원을 경기자 1에게 어떤 가격 $v_2(t)>0$에 따라 판매한다.

그러므로 이러한 자원판매로부터 경기자 2의 수익금의 속도는 v_2v_1과 일치한다.

정식화되는 문제에서 조종변수 $u=(u_1,\ u_2,\ u_3)$과 $v=(v_1,\ v_2)$는 부값으로 될수 없고

지내 클수도 없으므로 제한 $0\le u_1\le u_1^0$, $0\le u_2\le u_2^0$, $0\le u_3\le u_3^0$, $0\le v_1\le v_1^0$ 을 만족시킨다.

경기자들의 순리득을 반영하는 소득함수들은 각각

$$J_1=\int_T e^{-\gamma_1 t}[h(u_2+ku_3,\ x_1,\ t)-u_1-\beta_1 u_2(e^{\alpha_1 x_2}-1)^{-1}-v_2 u_3]dt \tag{5}$$

$$J_2=\int_T e^{-\gamma_2 t}[v_2 u_3-\beta_2 v_1(e^{\alpha_2 x_3}-1)]dt \tag{6}$$

로 정의된다.

3. 두 기업소의 간략화된 모형

단순한 해석적연구를 위하여 h 로서 $h=A(t)x_1^q z^r$ 를 리용하겠다. 여기서 q, r 는 선택된 어떤 제곱지수이다. 또한 경기자 1은 자체자원을 가지고있지 못하고 경기자 2에게서 반드시 사와야 하는 경우로 제한한다.

이러한 경우에 5개의 조종변수는 2개의 조종변수로 줄어든다. 즉 조종변수 u_2 와 u_3, v_1 대신에 모두 1개 변수 $v=u_2=u_3=v_1$ 의 도입이 가능하게 된다. 이때 $h=A(t)\sqrt{x_1 v}$ 로 취할수 있다. 여기서 $A(t)$ 는 주어진 자체의 기술진보를 나타내는 결수이다.

β 를 1로 놓고 $\alpha=\alpha_2$ 를 도입하면 경기문제 (5), (6)은

$$J_1=\int_T[A(t)\sqrt{x_1(t)v(t)}-u(t)-v(t)]dt\ ,\ \ J_2=\int_T\left[1-\frac{1}{e^{\alpha x_2}-1}\right]v(t)dt$$

$$\dot{x}_1=u-x_1\cdot\delta,\ \ x_1(t_0)=x_1^0,\ \ \dot{x}_2=v,\ \ x_2(t_0)=x_2^0,\ \ 0\le u\le u^0,\ \ 0\le v\le v^0$$

의 형태를 취한다.

이 문제를 풀기 위하여 정리에서 주어진 평형성필요조건을 리용한다. 즉

$$H^1=p_0^1(A\sqrt{x_1 v}-u-v)+p_1^1(u-x_1\delta)-p_2^1 v,\ \ H^2=p_0^2(1-1/(e^{\alpha x_2}-1))v+p_1^2(u-x_1\delta)-p_2^2 v$$

여기서 $p_0^1=p_0^2=1$ 이고 라그랑쥬승수 p_1^1, p_2^1, p_1^2, p_2^2 들은 각각 다음의 형태들을 취하는 방정식 (3), (4)를 만족시킨다.

$$\begin{aligned}&\dot{p}_1^1=-\partial H^1/\partial x_1=-p_0^1 A\sqrt{v/x_1}+p_1^1\delta,\ \ p_1^1(t)=0\\&\dot{p}_2^2=-\partial H^2/\partial x_2=-p_0^2\alpha\, v\, e^{\alpha x_2}/(e^{\alpha x_2}-1)^2,\ \ p_2^2(t)=0\\&\dot{p}_2^1=-\partial H^1/\partial x_2=0,\ \ p_2^1(t)=0\\&\dot{p}_2^1=-\partial H^1/\partial x_2=0,\ \ p_2^1(t)=0\end{aligned} \tag{7}$$

방정식 (7)의 풀이

$$p_1^1(t)=\frac{1}{2}e^{\delta t}\int_t^{t_1}A(t)e^{-\delta\tau}\sqrt{\frac{v}{x_1}}d\tau\ge 0\ ,\ \ p_2^2(t)=\alpha^{\delta t}\int_t^{t_1}\frac{v(\tau)e^{\alpha x_2}}{(e^{\alpha x_2}-1)^2}d\tau\ge 0\ ,\ \ p_2^1(t)\equiv 0\ ,\ \ p_1^2(t)\equiv 0$$

을 고려하면 해밀터니안 H^1 과 H^2 는

$$H^1=(A\sqrt{x_1 v}-v)+(p_1^1-1)u-p_1^1 x_1\delta=K_1\sqrt{v}-v+K_2 u-K_3$$

$$H^2=[(1-1/(e^{\alpha x_2}-1))-p_2^2]v=Kv$$

의 형태를 취한다.

A^c –평형정황의 정의와 우의 정리에 의하여 주어진 미분경기의 풀이의 탐색문제를 하나 또는 몇개의 단순한《국부적인》정적문제들에로 귀착시킬수 있다.

이러한 정적경기들에서 소득함수들로는 해밀터니안 H^1과 H^2가 된다.

그리고 두 해밀터니안이 동시에 불변형태를 가지는 그러한 자리길구역들에서《국부적인》정적경기문제가 론의된다.

만일 어떤 순간 t'에 하나의 해밀터니안이 자기의 형태를 변화시키면 이 순간부터 다른 어떤 순간 t''까지 자리길에서 두번째《국부적인》문제가 풀리게 되며 이러한 과정이 계속된다. 그 결과로 전체의 자리길을 따라 (매 구역에서 순차적으로 맞물려진 조종들로 구성되는) 얻어진 조종이 바로 주어진 미분경기에서 참가자들의 행동의 방략들로 정의된다.

평면$(u,\ v)$에서 함수 $H_1 = \text{const}$의 수준곡선들을 보면 일반적으로 $K_1 \gg 2\sqrt{v}$이기때문에 $K_2 > 0$에 대하여 $dv/du < 0$을 얻게 된다.

그림에서 보는바와 같이 정4각형 EFGL에서 H_1의 수준곡선들은 $K_2 > 0$인 때 부인 경사도를 가지고 $K_2 < 0$인 때 정인 경사도를 가진다. $H_2 = \text{const}$의 수준곡선들은 v축에 평행이다.

정4각형 EFGL에서 $K_2 > 0$인 경우에 대응하는 (즉 시간구간 $(t_0,\ t')$에서) 첫번째《국부적인》정적경기의 모든 평형정황들을 구해보겠다. 이 경기의 소득함수들을 $H_1 = (u,\ v)$, $H_2 = (u,\ v)$라고 할 때 A_i–극값정황들과 A–평형정황은

$$A_1 = [\text{FGLMF}],\ A_2 = [\text{GL}],\ A = [\text{GL}]$$

이고 마지막부분구간 $(t',\ t_1)$에서 평형정황들은

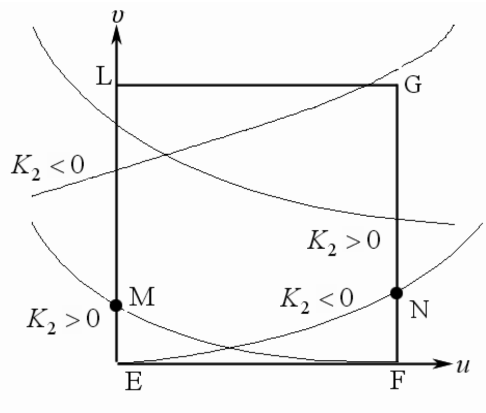

그림. 수준곡선그라프

$$A_1 = [\text{GLENG}],\ A_2 = [\text{GL}],\ A = [\text{GL}],\ B_1 = [\text{GL}],\ B_2 = B = L,\ \overline{D}_1 = \overline{D}_2 = \overline{D} = L$$

로 된다.

참 고 문 헌

[1] В. Э. Смольяков и др.; Труды ИСА РАН., 33, 12, 35, 2008.

[2] А. А. Чикрий и др.; Тр. ИММ УрО РАН, 19, 4, 308, 2013.

주체107(2018)년 6월 5일 원고접수

A Differential Game Modeling Economic Relations between Enterprises

Ju Kwang Hwi

We study a solution of a differential game modeling economic relations between two enterprises.

Key words: differential game, modeling, equilibrium