김일성종합대학학보 주체107(2018)년
수 학 제64권 제4호

비약을 가진 일반화된 혼합분수브라운운동환경에서 유럽식구매선택권의 가격공식

김경희, 윤심

론문에서는 금융실천에서 제기되는 문제인 비약을 가진 일반화된 혼합분수브라운운동환경에서 유럽식구매선택권의 가격공식을 구하는 문제를 연구하였다.

선행연구[1]에서는 분수브라운운동환경에서 유럽식구매선택권, 교환선택권, 아시아선택권의 가격공식들을 구하였으며 비약잡음까지 포함한 분수브라운운동환경에서 유럽식구매선택권의 가격공식을 구하였다.

선행연구[2]에서는 혼합분수브라운운동이 $H\in(3/4,\ 1)$일 때 브라운운동과 동등한 가치를 가진다는데로부터 혼합분수브라운운동에 대하여 연구하였으며 비약잡음까지 포함시킨 혼합분수브라운운동환경에서 여러가지 금융적문제들에 대하여 론의하였다.

비약잡음과 일반화된 혼합분수브라운운동으로 묘사되는 금융시장모형은 다음과 같다.

$$p(t)=r_d\,p(t)dt,\ \ p(0)=1$$

$$dS(t)=S(t)(\mu-\lambda\mu_{J(t)})dt+\sum_{i=1}^{N}\sigma_i dB_{H_i}(t)+\sigma\, dB(t)+(e^{J(t)}-1)dN(t) \tag{*}$$

여기서 $P(t)$는 무위험자산, r_d는 내화리윤률로서 상수, $S(t)$는 주식가격과정, $\mu,\ \sigma_i$ 들은 상수들이다. H_i는 $H_i>3/4$을 만족시키는 허스트파라메터이고 $N(t)$는 주식가격에 영향을 주는 비약잡음으로서 파라메터가 λ인 뽜쏭과정이며 $\{T_i\}$는 $N(t)$의 비약시각이다.

$\{J(T_i)\}$는 T_i시각의 비약크기를 나타내는 독립이고 동일분포하는 우연량이다.

우연성원천들인 $B_{H_i}(t)$와 $B(t),\ \ N(t)$, $e^{J(t)}-1$들은 서로 독립이라고 가정한다.

일반화된 혼합분수브라운운동은 브라운운동과 허스트지수 H_i를 가진 분수브라운운동의 선형결합 즉 $z_t^H=\sum_{i=1}^{N}\sigma_i B_{H_i}(t)+\sigma B(t)$로 된다. 여기서 $\sigma,\ \sigma_i$는 실수이다.

$\{\mathfrak{F}_t^H\},\ 0\le t<T$는 혼합분수브라운운동으로 생성된 $\sigma-$모임벌흐름족이다.

정리 1 $T>0$이고 $\gamma_i\ (i=1,\ \cdots,\ N)$는 $\mathrm{supp}\gamma_i\subset[0,\ T]$인 련속함수, $\theta(t)$는 $\{F_t\}-$적합과정이며 $K_i(i=1,\ \cdots,\ N)$는 $\mathrm{supp}K_i\subset[0,\ T]$이고 $\int_{\boldsymbol{R}}K_i(s)\phi_i(s,\ t)ds=\gamma_i(t),\ 0\le t\le T$를 만족시킨다고 하자. 여기서 $\phi_i(s,\ t)=H_i(2H_i-1)|s-t|^{2H_i-2}$이다.

그러면 $\dfrac{dP^*}{dP}=\exp\left(\sum_{i=1}^{N}\left(-\int_{\mathbf{R}}K_i(t)dB_{H_i}(t)-\dfrac{1}{2}|K_i|_\phi^2\right)-\int_{\mathbf{R}}\theta(u)\,dB(u)-\dfrac{1}{2}\int_{\mathbf{R}}\theta^2(u)du\right)$인 측도 P^*이 존재하여 $\hat{B}(t)=B(t)+\int_0^t\theta(u)du$, $\hat{B}_{H_i}(t)=B_{H_i}(t)+\int_0^t\gamma_i(s)ds$로 정의되는 $\left\{\sum_{i=1}^{N}\hat{B}_{H_i}(t)+\hat{B}(t)\right\}$는 일반화된 혼합분수브라운운동으로 된다.

증명 증명은 임의의 f_i, $g \in L^2(P)$에 대하여 다음과 같다는것을 밝히면 충분하다.

$$E_{P^*}\exp\left\{\int_{\mathbf{R}} f_i d\hat{B}_{H_i}(t)\right\} = E_P\exp\left\{\int_{\mathbf{R}} f_i dB_{H_i}(t)\right\},\quad E_{P^*}\exp\left\{\int_{\mathbf{R}} f_i d\hat{B}_{H_i}(t)\right\} = E_P\exp\left\{\int_{\mathbf{R}} f_i dB_{H_i}(t)\right\}$$

임의의 i에 대하여 다음의 식이 성립된다.

$$E_{P^*}\exp\left\{\int_{\mathbf{R}} f_i d\hat{B}_{H_i}(t)\right\} = E_P\exp\left\{\int_{\mathbf{R}} f_i d\hat{B}_{H_i}(t)\right\}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{N}\int_{\mathbf{R}} K_i dB_{H_i} - \frac{1}{2}|K_i|_\phi^2 - \int_{\mathbf{R}}\theta(u)dB(u) - \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}}\theta^2(u)du\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{2}|f_i|_\phi^2\right\} = E_P\exp\left\{\int_{\mathbf{R}} f_i dB_{H_i}(t)\right\}$$

마찬가지로 다른 식도 증명할수 있다.

$\{\hat{B}_{H_i}(t)\}_{i=1,\ \cdots,\ N}$이 분수브라운운동이고 $\hat{B}(t)$가 브라운운동이므로 $\left\{\sum_{i=1}^{N}\hat{B}_{H_i}(t) + \hat{B}(t)\right\}$는 일반화된 혼합분수브라운운동이 된다.(증명끝)

$\widetilde{E}_t[\cdot]$은 $\mathscr{F}_t^H$에 관한 준-조건부기대값을 의미한다.

보조정리 1 f가 $\widetilde{E}_t[f(B_{H_1}(T),\ \cdots,\ B_{H_N}(T),\ B(T))] < \infty$인 함수라고 하자.

그러면 임의의 $0<t<T$, σ, σ_i $(i=1,\ \cdots,\ N)$에 대하여 다음의 식이 성립된다.

$$\widetilde{E}_t\left[f\left(\sum_{i=1}^{N}\sigma_i B_{H_i}(T) + \sigma B(T)\right)\right] =$$

$$= \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\left[\sum_{i=1}^{N}\sigma_i^2\cdot(T^{2H_i} - t^{2H_i}) + \sigma^2(T-t)\right]}}\exp\left(-\frac{\left(x - \sum_{i=1}^{N}\sigma_i B_{H_i}(t) - \sigma B(t)\right)^2}{2\left[\sum_{i=1}^{N}\sigma_i^2\cdot(T^{2H_i} - t^{2H_i}) + \sigma^2(T-t)\right]}\right)f(x)dx$$

이제 다음의 변수변환을 생각하자.

$$\sum_{i=1}^{N}\sigma_i B_{H_i}^*(T) + \sigma B^*(T) = \sum_{i=1}^{N}\sigma_i(B_{H_i}(T) - \sigma_i t^{2H_i}) + \sigma(B(T) - \sigma t),\quad 0 \le t \le T$$

그러면 정리 1에 의하여 $\frac{dP^*}{dP} = Z(T) = \exp\left[\sum_{i=1}^{N}\sigma_i B_{H_i}(T) + \sigma B(T) - \frac{1}{2}\sigma^2 t - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sigma_i^2 t^{2H_i}\right]$으로 정의되는 측도 P^*밑에서 $\sum_{i=1}^{N}\sigma_i B_{H_i}^*(T) + \sigma B^*(T)$는 새로운 혼합분수브라운운동이 된다.

측도 P^*에 관한 준-조건부기대값을 $\widetilde{E}_{\hat{P}^*}[\cdot]$으로 표시하자.

보조정리 2 f가 $\widetilde{E}_t\left[f\left(\sum_{i=1}^{N}\sigma_i B_{H_i}(T) + \sigma B(T)\right)\right] < \infty$인 함수라고 하면 임의의 $0<t<T$에 대하여 $\widetilde{E}_{\hat{P}^*}\left[f\left(\sum_{i=1}^{N}\sigma_i B_{H_i}(T) + \sigma B(T)\right)\right] = \frac{1}{Z(t)}\widetilde{E}_t\left[f\left(\sum_{i=1}^{N}\sigma_i B_{H_i}(T) + \sigma B(T)\right)Z(T)\right]$가 성립된다.

이제 위험중성측도 $\hat{P}_H$ 를 $\dfrac{d\hat{P}_H}{dP}=\exp\left(-\int_0^T K_i(s)dB_{H_i}(s)-\dfrac{1}{2}|K_i|_{\phi,t}^2\right)=Z(T)$ 로 정의하자.

여기서 적당한 i 를 고정하였을 때 다음과 같다.

$$K_i(T,\ s)=(\mu+r_f-r_d)(Ts-s^2)^{1/2-H_i}/(2\sigma_i H_i(2H_i-1)\Gamma(2-2H_i)\Gamma(2H_i-1)\cos(\pi(H_i-1/2)))$$

그러면 정리 1로부터 $\sum_{i=1}^N \sigma_i\hat{B}_{H_i}(t)+\sigma\hat{B}(t)=(\mu+r_f-r_d)t+\sum_{i=1}^N \sigma_i B_{H_i}(t)+\sigma B(t)$ 라고 하면 측도 $\hat{P}_H$ 밑에서 $\left\{\sum_{i=1}^N \sigma_i\hat{B}_{H_i}(t)+\sigma\hat{B}(t)\right\}$ 는 일반화된 혼합분수브라운운동이 된다.

측도 $\hat{P}_H$ 에 관한 준-조건부기대값을 $\widetilde{E}_{\hat{P}_H}[\cdot]$ 으로 표시하자.

보조정리 3 유계인 우연청구 $F\in L^2$ 의 매 시각 $t\in[0,\ T]$ 에서 가격은 $F(t)=e^{-r_d(T-t)}\widetilde{E}_{\hat{P}_H}[F\,|\,\mathscr{F}_t^H]$ 로 주어진다.

정리 2 모형 $(*)$ 로 주어진 비약을 가진 일반화된 혼합분수브라운운동으로 묘사된 금융시장에서 실시가격이 K이고 만기일이 T인 유럽식구매선택권의 t시각의 가격은

$$C(S(t),\ t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n(T-t)^n}{n!}e^{-\lambda(T-t)}\varepsilon_n\left\{S(t)\prod_{i=1}^n e^{J(T_i)}\exp[-(r_f+\lambda\mu_{J(t)})(T-t)]N(d_1)-K\exp[-r_d(T-t)]N(d_2)\right\}$$

로 된다. 여기서 ε_n 은 $\sum_{i=1}^n J(T_i)$ 의 분포에 관한 수학적기대값을 표시하며

$$d_1=\frac{\ln\dfrac{S(t)}{K}+(r_d-r_f-\lambda\mu_{J(t)})(T-t)+\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^N\sigma_i^2(T^{2H_i}-t^{2H_i})+\dfrac{1}{2}\sigma^2(T-t)+\sum_{i=1}^n J(T_i)}{\left(\sum_{i=1}^N\sigma_i^2(T^{2H_i}-t^{2H_i})+\sigma^2(T-t)\right)^{1/2}}$$

$$d_2=\frac{\ln\dfrac{S(t)}{K}+(r_d-r_f-\lambda\mu_{J(t)})(T-t)-\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^N\sigma_i^2(T^{2H_i}-t^{2H_i})-\dfrac{1}{2}\sigma^2(T-t)+\sum_{i=1}^n J(T_i)}{\left(\sum_{i=1}^N\sigma_i^2(T^{2H_i}-t^{2H_i})+\sigma^2(T-t)\right)^{1/2}}$$

증명 보조정리 3으로부터

$$C(S(t),\ t)=\widetilde{E}_{\hat{P}_H}[e^{-r_d(T-t)}(S(T)-K)\,|\,\mathscr{F}_t^H]=e^{-r_d(T-t)}\{\widetilde{E}_{\hat{P}_H}S(T)\mathbf{1}_{[S_n(T)>K]}\,|\,\mathscr{F}_t^H\}-K\widetilde{E}_{\hat{P}_H}[(S(T)-K)^+\,|\,\mathscr{F}_t^H]$$

가 성립된다. 여기서 $\mathbf{1}_{[S_n(T)>K]}$ 는 특성함수이다.

$\sum_{i=1}^N \sigma_i\hat{B}_{H_i}(t)+\sigma\hat{B}(t)=(\mu+r_f-r_d)t+\sum_{i=1}^N \sigma_i B_{H_i}(t)+\sigma B(t)$ 라고 하면 $\sum_{i=1}^N \hat{B}_{H_i}(t)+\hat{B}(t)$ 는 $\hat{P}_H$ 밑에서 새로운 일반화된 혼합분수브라운운동이 되며 모형 $(*)$ 로부터 다음과 같다.

$$S(T)=S(t)\exp[(r_d-r_f-\lambda\mu_{J(t)})(T-t)+$$
$$+\sum_{i=1}^N\sigma_i(\hat{B}_{H_i}(T)-\hat{B}_{H_i}(t))+\sigma(\hat{B}(T)-\hat{B}(t))-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N\sigma_i^2(T^{2H_i}-t^{2H_i})-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)+\sum_{i=1}^{N(T-t)}J(T_i)\Bigg]$$

$$S_n(T)=S(t)\exp[(r_d-r_f-\lambda\mu_{J(t)})(T-t)+$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\sigma_i(\hat{B}_{H_i}(T)-\hat{B}_{H_i}(t))+\sigma(\hat{B}(T)-\hat{B}(t))-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sigma_i^2(T^{2H_i}-t^{2H_i})-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)+\sum_{i=1}^{n}J(T_i)\Bigg]$$

로 놓으면 다음의 식이 성립된다.

$$C(S(t),\ t)=e^{-r_d(T-t)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n(T-t)^n}{n!}e^{-\lambda(T-t)}\varepsilon_n\{\widetilde{E}_{\hat{P}_H}[S_n(T)\cdot\mathbf{1}_{[S_n(T)>K]}\,|\,\mathfrak{F}_t^H]-K\widetilde{E}_{\hat{P}_H}[\mathbf{1}_{[S_n(T)>K]}\,|\,\mathfrak{F}_t^H]\}$$

먼저 우의 식의 둘째 항 $\widetilde{E}_{\hat{P}_H}[\mathbf{1}_{[S_n(T)>K]}\,|\,\mathfrak{F}_t^H]$를 평가하자.

보조정리 1로부터 $\widetilde{E}_{\hat{P}_H}[\mathbf{1}_{[S_n(T)>K]}\,|\,\mathfrak{F}_t^H]=\int_{-d_2}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-z^2/2}d_Z=\int_{-\infty}^{d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-z^2/2}d_Z=N(d_2)$ 이다.

다음으로 첫째 항 $\widetilde{E}_{\hat{P}_H}[S_n(T)\cdot\mathbf{1}_{[S_n(T)>K]}\,|\,\mathfrak{F}_t^H]$를 평가하자.

이제 $\sum_{i=1}^{N}\sigma_i B_{H_i}^*(t)+\sigma B^*(t)=\sum_{i=1}^{N}\sigma_i(\hat{B}_{H_i}(t)-\sigma_i t^{2H_i})+\sigma(\hat{B}(t)-\sigma t)$ 라고 하자.

정리 1에 의하여 적당한 확률측도 P_H^*이 있어서 $\sum_{i=1}^{N}B_{H_i}^*(t)+B^*(t)$는 새로운 일반화된 혼합분수브라운운동이 된다.

사실 P_H^*는 $\frac{dP_H^*}{dP_H}=\exp\left[\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\hat{B}_{H_i}(T)+\sigma\hat{B}(T)-\frac{1}{2}\sigma^2T-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sigma_i{}^2T^{2H_I}\right]=X(T)$ 로 정의된다.

$$S(T)=S(t)\exp\left[(r_d-r_f-\lambda\mu_{J(t)})(T-t)+\sum_{i=1}^{N(T-t)}J(T_i)\right]\times X_T/X_t$$

$$\widetilde{E}_{\hat{P}_H}[S_n(T)\cdot\mathbf{1}_{[S_n(T)>K]}\,|\,\mathfrak{F}_t^H]=S(t)\exp\left[(r_d-r_f-\lambda\mu_{J(t)})(T-t)+\sum_{i=1}^{N(T-t)}J(T_i)\right]N(d_1)$$

이로부터 정리가 증명된다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] X. T. Wang; Physica, A 389, 4, 789, 2010.
[2] W. L. Xiao et al.; Physica, A 391, 6418, 2012.

주체107(2018)년 6월 5일 원고접수

Pricing Formula for European Call Option in Generalized Mixed Fractional Brownian Motion with Jumps

Kim Kyong Hui, Yun Sim

We discuss the pricing formula for European call option in generalized mixed fractional Brownian motion with jumps which is suggested in financial practice.

Key word: European call option