김일성종합대학학보 주체109(2020)년
화 학 제66권 제4호

# 프락탈해면체의 기공분포에 관한 연구

김진성, 오기철, 최명룡

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《수학, 물리학, 화학, 생물학을 비롯한 기초과학을 발전시켜 그것이 나라의 과학기술을 발전시키는데 더 잘 이바지하도록 하여야 하겠습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제11권 138페지)

우리는 프락탈기하학의 원리를 촉매 및 흡착제의 기공분포연구에 적용하기 위한 기초연구를 진행하였다.

## 1. 문제설정

다공체의 내부구조를 반영하고있는 세르핀스끼해면체가 프락탈도형이라는데 대하여서는 이미 잘 알려져있다.[1] 이 해면체의 원시도형은 바른6면체이며 출발도형은 원시도형의 매 릉을 3등분하여 생기는 작은 27개의 바른6면체중에서 가운데부분의 7개를 제거하여 3차원적으로 직교하는 구멍통로를 가지는 도형이다. 나머지 20개의 바른6면체들에 대하여 우와 같은 조작을 반복하면 그것들은 출발도형의 구멍직경에 비해 1/3로 작은 구멍을 가진 자기상사성을 가진 요소체로 된다. 매 변의 축소단계들에서의 요소체들에 대하여 이런 조작을 무한번 반복할수 있다. 그러면 원시도형에는 직경이 릉길이의 1/3인 1개의 구멍통로로부터 시작하여 직경이 릉길이의 1/9, 1/27, 1/81, …인 구멍통로가 각각 20개, 400개, 8 000개, …이 생기는데 이것을 구멍이 숭숭 뚫린 해면체로 볼수 있다.

세르핀스끼해면체에 대한 표상에 토대하여 보다 일반적인 프락탈해면체에 대하여 생각할수 있다. 다시말하면 세르핀스끼해면체에서와는 달리 원시도형인 바른6면체를 $1/n^3$로 축소시키면서 구멍뚫린 요소체들로 이루어진 프락탈해면체들을 생각할수 있다. 그러면 해면체들에서의 기공직경과 구멍개수는 축소배수 $n$에 따라 달라지게 된다.

다공성담체촉매와 흡착제들에서 그것들의 재질과 제조조건에 따라 기공직경이 변하고 그것들의 분포가 달라지므로 기이한 모양을 나타내는 $n$=3인 프락탈도형(코흐곡선, 세르핀스끼주단, 세르핀스끼해면체 등)보다도 임의의 $n$값에 대응한 프락탈도형들에 대한 연구가 더 심화되고있다.

다공성고체의 구조와 겉면특성을 프락탈과 결부시켜 연구하는것이 하나의 새로운 추세로 되고있지만 대부분은 비표면적과 같은 겉면특성연구에 국한되여있다.[2, 3] 일부 선행연구들에 기공구조프락탈이라는 표현도 쓰고있지만 그것은 고체내부에서 기공통로들의 총적인 구조에 관한것이 아니다.

최근에 다공성세라믹스의 기공구조를 연구하는데 세르핀스끼주단을 리용한 자료들이 발표되였다.[4]

우리는 다공체의 내부구조를 반영하는 프락탈해면체들에 대한 프락탈차원을 결정하는 일반적원리, 기공체적과 기공분포함수를 계산하는 원리를 해석적으로 밝힘으로써 비석, 활성탄, 각종 촉매와 담체들의 기공분포함수계산방법을 연구하였다.

## 2. 해면체의 프락탈차원

엄격한 자기상사성을 가진 프락탈도형에서 상사차원과 위상차원(하우스돌프차원)이 일치한다는것은 이미 잘 알려져있다. 상사차원은 도형의 상사비와 한번 축소할 때 축소도형이 몇개 생겨나는가를 알면 프락탈차원수계산식 (1)에 따라 쉽게 결정할수 있다.

$$D = \frac{\lg N}{\lg \beta} \tag{1}$$

여기서 $N$은 축소된 도형의 개수, $\beta$는 상사비이다.

세르핀스끼해면체에서 릉을 1/3($\beta$)로 축소하면 20개의 축소된 바른6면체들이 생겨난다. 그러므로

$$D_{1/3} = \frac{\lg 20}{\lg 3} = 2.726\ 8$$

이다.

일반적으로 바른6면체를 $1/n$로 축소할 때 구멍을 제외한 나머지축소도형이 몇개 생겨나는가를 보기로 하자. 그것은 세르핀스끼해면체에서 구멍에 해당한 도형의 개수인 7이라는 수자가 어떻게 나왔는가를 음미해보면 쉽게 알수 있다. 구멍길에는 매 방향으로 3개의 축소도형이 놓일수 있는데 교차점에 있을수 있는것은 1개뿐이므로 3×3－2=7이다. 그러므로 $1/n$로 릉의 길이를 축소할 때 구멍길에 놓일수 있는 축소체의 개수는

$$N_{기공}=3\times n-2 \tag{2}$$

이다. 결국 실제로 존재하게 되는 축소체의 개수는

$$N=n^3-N_{기공}= n^3-3n+2 \tag{3}$$

이다. 따라서 릉의 길이를 $1/n$씩 축소하여 이루어지는 프락탈해면체의 차원수는 다음과 같다.

$$D = \frac{\lg N}{\lg n} = \frac{\lg(n^3-3n+2)}{\lg n} \tag{4}$$

프락탈해면체에 대한 직관적인 표상을 명백히 하기 위하여 그림 1에 프락탈해면체의 립체도형을 주었다.

그리고 그림 2에는 프락탈해면체들에서 각이한 크기의 기공들의 복잡한 얽힘을 보여주는 세르핀스끼해면체의 자름면을 립체도형으로 주었다.

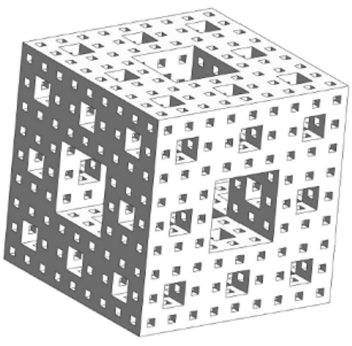

그림 1. 프락탈해면체의 립체도형

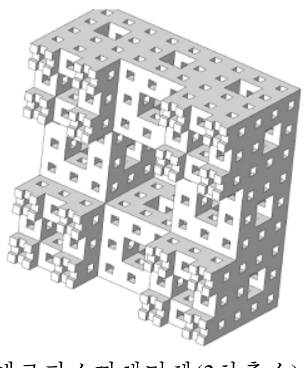

그림 2. 세르핀스끼해면체(3차축소)의 자름면

표 1에 식 (4)를 리용하여 계산한 각이한 축소배수 $n$에 따르는 프락탈차원수들을 주었다.

표 1. 각이한 축소배수 $n$에 따르는 프락탈차원수

| $n$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 20 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $D$ | 2.000 0 | 2.726 8 | 2.877 4 | 2.931 8 | 2.957 0 | 2.970 7 | 2.478 7 | 2.984 1 | 2.987 7 | 2.997 6 | 2.999 7 | 2.999 9 |

표 1에서 보는것처럼 프락탈해면체들의 프락탈차원수는 2와 3사이에 있다. 정성적으로 생각하여도 $n$이 매우 크면 구멍의 직경($1/n$)은 매우 작게 되며 그 해면체는 사실상 립방체와 같으므로 프락탈차원수는 3으로 된다. 해석적으로 해면체가 취할수 있는 최대의 프락탈차원수값은

$$\lim_{n\to\infty} D = 3 \tag{5}$$

이다.

## 3. 프락탈해면체에서의 기공분포에 관한 정량적해석

다공체들의 기공분포는 $r$ 또는 $\Delta r$에 따르는 기공분포함수

$$f(r) = \frac{\Delta V}{\Delta r} \tag{6}$$

로 표시할수 있다. 여기서 $V$는 기공체적, $r$는 기공반경이다.

프락탈해면체에서 매 축소단계에서의 기공체적은 기공이 몇개의 요소체들로 이루어졌는가와 기공의 개수를 알면 쉽게 계산할수 있다. 엄밀한 자기상사성을 가지는 단위프락탈해면체의 경우 매 축소단계에서 구멍의 직경은 $1/n$, $1/n^2$, $1/n^3$, …과 같이 되며 $i$번째 축소단계에서는 $1/n^i$로 된다. 기공은 3차원적으로 직교하는 립방체이므로 축소회수에 따르는 단위프락탈해면체의 기공체적은 표 2와 같다.

표 2. 축소회수에 따르는 단위프락탈해면체의 기공체적

| 축소회수 | 요소기공의 체적 | 요소기공의 수 | 축소단계에서의 기공체적 |
|---|---|---|---|
| 1 | $1/n^3$ | $3n-2$ | $(3n-2)/n^3$ |
| 2 | $1/n^6$ | $(3n-2)(n^3-3n+2)$ | $(3n-2)(n^3-3n+2)/n^6$ |
| 3 | $1/n^9$ | $(3n-2)(n^3-3n+2)^2$ | $(3n-2)(n^3-3n+2)^2)/n^9$ |
| … | … | … | … |
| $i$ | $1/n^{3i}$ | $(3n-2)(n^3-3n+2)^{i-1}$ | $(3n-2)(n^3-3n+2)^{i-1}/n^{3i}$ |

$\Delta V_i$는 $i$번 축소했을 때의 기공체적에서 그전 단계 $(i-1)$에서의 기공체적을 던 차이다. 결국 임의의 단계에서 새로 생겨나는 기공체적은

$$\Delta V_i = V_1\left(\frac{n^3-3n+2}{n^3}\right)^{i-1} = V_1(1-V_1)^{i-1} \tag{7}$$

이다.

$i$번째 단계에서 $\Delta r$를 구해보자.

$r_i=1/n^i$이고 $r_{i-1}=1/n^{i-1}$이므로

$$\Delta V=(n-1)/n^i \tag{8}$$

이다.

그러므로 $i$번째 단계에서 기공분포함수는 다음과 같다.

$$f_i(r)=V_1\left(\frac{n^3-3n+2}{n^3}\right)^{i-1}\cdot\frac{n^i}{n-1}=\frac{3n-2}{n^3}\cdot\left(\frac{n^3-3n+2}{n^3}\right)^{i-1}\cdot\frac{n^i}{n-1} \tag{9}$$

$n\gg1$인 경우에

$$f_i(r)\approx V_1n^{i-1}=\frac{3n-2}{n^3}\cdot n^{i-1} \tag{10}$$

이다.

식 (9)는 도형을 $1/n$씩 축소할 때마다 분포함수값은 $n(n^3-3n+2)/n^3$배씩 증가한다는것을 보여준다.(표 3)

표 3. 축소배수와 축소회수에 따르는 기공분포함수

| 축소회수 | 축소배수 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 1 | 7.788 00E−01 | 6.250 00E−01 | 5.200 00E−01 | 4.444 00E−01 | 3.878 00E−01 |
| 2 | 8.642 00E−01 | 7.031 00E−01 | 5.824 00E−01 | 4.938 00E−01 | 4.273 00E−01 |
| 3 | 1.920 40E+00 | 2.373 00E+00 | 2.609 20E+00 | 2.743 50E+00 | 2.825 60E+00 |
| 4 | 4.267 40E+00 | 8.009 00E+00 | 1.168 90E+01 | 1.524 15E+01 | 1.868 33E+01 |
| 5 | 9.483 60E+00 | 2.703 00E+01 | 5.236 67E+01 | 8.467 54E+01 | 1.235 40E+02 |
| 6 | 2.107 48E+01 | 9.122 80E+01 | 2.346 00E+02 | 4.704 20E+02 | 8.168 70E+02 |
| 7 | 4.683 30E+01 | 3.078 90E+02 | 1.051 00E+03 | 2.613 44E+03 | 5.401 30E+03 |
| 8 | 1.040 70E+02 | 1.039 14E+03 | 4.708 50E+03 | 1.451 90E+04 | 3.571 50E+04 |
| 9 | 2.312 70E+02 | 3.507 11E+03 | 2.109 40E+04 | 8.066 20E+04 | 2.361 60E+05 |
| 10 | 5.139 40E+02 | 1.183 65E+04 | 9.450 20E+04 | 4.481 21E+05 | 1.561 50E+06 |
| 11 | 1.142 10E+03 | 3.994 80E+04 | 4.233 70E+05 | 2.489 60E+06 | 1.032 50E+07 |
| 12 | 2.538 00E+03 | 1.348 25E+05 | 1.896 70E+06 | 1.383 10E+07 | 6.827 20E+07 |
| 13 | 5.640 00E+03 | 4.550 34E+05 | 8.497 20E+06 | 7.683 90E+07 | 4.514 30E+08 |

한편 임의의 축소단계에 이르기까지의 총기공체적 $V=\sum_i V_i$는 $V_1$로부터 $V_i$까지 $(1-V_1)$의 비률로 감소하는 등비수렬의 합이므로

$$V=1-\left(\frac{n^3-3n+2}{n^3}\right)^i \tag{11}$$

이다. 그리고 $1-V_1=\frac{n^3-3n+2}{n^3}<1$이므로

$$\lim_{i\to\infty}V=1 \tag{12}$$

이다.

## 맺 는 말

첫째로, 바른6면체의 한변을 $n$등분하면서 이루어지는 해면체의 프락탈차원계산식을 축소배수에 관하여 새롭게 제기하였다.

둘째로, 프락탈해면체에서의 기공체적과 기공분포함수계산식을 새롭게 제기하였다.

## 참 고 문 헌

[1] 서효선; 프락탈도형학, 김일성종합대학출판사, 17～18, 주체96(2007).

[2] Hong Lin Bu et al.; Journal of Natural Gas Science and Engineering, 24, 166, 2015.

[3] Z. Skolowska et al.; International Agrophysis, 27, 329, 2013.

[4] G. Pia et al.; Ceramics International, 41, 6350, 2015.

주체109(2020)년 7월 5일 원고접수

## On the Pore Distribution of Fractal Sponge

*Kim Jin Song*, *O Ki Chol* and *Choe Myong Ryong*

We developed the method to determine the pore volume and distribution function of fractal sponges with different pore size.

Keywords: fractal, pore distribution, pore volume