김일성종합대학학보 (수학)
주체107(2018)년 제64권 제1호

일반화된 선행처리기를 리용한 선행처리 두파라메터웃완화법에 대한 연구

황명근, 김경석

위대한 수령 **김일성**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《새로운 과학분야를 개척하며 최신과학기술의 성과를 인민경제에 널리 받아들이기 위한 연구사업을 전망성있게 하여야 합니다.》(《**김일성**전집》 제72권 292페지)

선행연구[4, 5]에서는 포괄적인 반복법인 TOR법을 제기하고 수렴성해석을 진행하였다. 선행처리기 $P_S = I + S$ 와 $P_{SR} = I + S + R$ 에 의해 선행처리된 선형련립방정식에 TOR법을 적용한 선행처리 TOR법의 계산도식을 구성하고 결수행렬이 $M-$행렬일 때 수렴성해석[1]을 진행하였다. 여기서 S는 령아닌 웃빗대각선을 가진 행렬이고 R는 웃빗대각선과 마지막행이 령아닌 행렬이다. 선행처리 TOR법[1]에 대하여 결수행렬이 $Z-$행렬일 때 수렴성해석을 진행[2]하고 비교정리를 얻었다.

론문에서는 일반화된 선행처리기를 가진 선행처리두파라메터웃완화반복법(선행처리 TOR법)에 대하여 론의하였다.

조건수를 줄이기 위하여 선행처리기 P가 단위대각선을 가진 부아닌 불퇴화행렬일 때 $PAx = Pb$에 대한 선행처리 TOR법의 계산도식을 구성하고 결수행렬이 $H-$행렬과 $M-$행렬일 때 수렴성해석을 진행하며 수치실험을 진행하였다.

1. 계 산 도 식

선형련립방정식

$$Ax = b \quad (A \in \mathbf{R}^{n\times n},\ x,\ b \in \mathbf{R}^n,\ \det(A) \neq 0) \tag{1}$$

를 풀자. A가 단위대각선을 가지며

$$A = I - (V + V^*) - U \tag{2}$$

로 분리된다고 하자. 여기서 I는 단위행렬이고 $-(V+V^*)$은 A의 엄격아래3각형부분이며 $-U$는 식 (2)를 만족시키는 령대각선을 가진 행렬이다. 실수 $\alpha,\ \beta \geq 0$에 대하여 TOR법의 계산도식은 다음과 같다.

$$x^{(k+1)} = H(\alpha,\ \beta)x^{(k)} + b(\alpha,\ \beta) \tag{3}$$

여기서

$$\begin{aligned} H(\alpha,\ \beta) &= (I - \overline{\alpha}V - \overline{\beta}V^*)^{-1}\{[1-(\overline{\alpha}+\overline{\beta})]I + (\overline{\alpha}+\overline{\beta})U + \overline{\alpha}V^* + \overline{\beta}V\} \\ b(\alpha,\ \beta) &= (2I - \overline{\alpha}V - \overline{\beta}V^*)^{-1}b/(\overline{\alpha}+\overline{\beta}),\ \overline{\alpha} = \alpha/2,\ \overline{\beta} = \beta/2 \end{aligned} \tag{4}$$

이고 α와 β는 실파라메터이고 $\alpha+\beta\neq 0$이다. 그리고 $B=V+V^*+U$는 야꼬비행렬이다.

식 (1)을 선행처리하여

$$\overline{A}x=\overline{b} \tag{5}$$

로 표시하자. 여기서 $\overline{A}=PA,\ \overline{b}=Pb$이고 선행처리기 P는 단위대각선을 가진 부아닌 불퇴화행렬이다. 이제 $\overline{A}$를

$$\overline{A}=\overline{D}-(\overline{L}+\overline{L}^*)-\overline{U} \tag{6}$$

로 분리하자. 여기서 $\overline{D}$는 대각선행렬이고 $-(\overline{L}+\overline{L}^*)$과 $\overline{U}$들은 각각 $\overline{A}$의 엄격아래3각형부분과 엄격웃3각형부분이다. $\overline{A}$의 원소들을 $\overline{a}_{ij}\ (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$라고 하면

$$\overline{a}_{ij}=\begin{cases}1+\displaystyle\sum_{k=1,\,k\neq i}^{n}p_{ik}a_{kj} & (1\le i,\ j\le n,\ i=j)\\ p_{ij}+\displaystyle\sum_{k=1,\,k\neq i}^{n}p_{ik}a_{kj} & (1\le i,\ j\le n,\ i\neq j)\end{cases} \tag{7}$$

로 표시된다. 그리고 $p_{ij}+\displaystyle\sum_{k=1,\,k\neq i}^{n}p_{ik}a_{kj}\le 0\ \ (1\le i,\ j\le n,\ i\neq j)$이라고 가정하자. 이제

$$\overline{D}=\mathrm{diag}(1+\sum_{k=1,\,k\neq i}^{n}p_{ik}a_{kj}),\ \ P=I+P_1+P_2$$

$$P_1U=E_1+F_1+G_1,\ \ P_2(L+L^*)=E_2+F_2+G_2$$

로 정의한다. 여기서 E_1과 E_2는 대각선행렬이고 F_1과 F_2, P_1은 엄격아래3각형행렬이며 G_1과 G_2, P_2는 엄격웃3각형행렬이다. 그리고 $P_i,\ E_i,\ F_i,\ G_i\ \ (i=1,\ 2)$들은 부아닌 행렬이다. 따라서 식 (8)의 오른변의 행렬들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&\overline{D}=I-E_1-E_2,\ \ \overline{U}=U-P_2+P_2U+G_1+G_2\\&\overline{L}+\overline{L}^*=L+L^*-P_1+P_1(L+L^*)+F_1+F_2\ge 0\end{aligned} \tag{8}$$

식 (5)의 TOR법의 계산도식은 다음과 같다.

$$x^{(k+1)}=\overline{H}(\alpha,\ \beta)x^{(k)}+\overline{b}(\alpha,\ \beta) \tag{9}$$

여기서

$$\overline{H}(\alpha,\ \beta)=(\overline{D}-\overline{\alpha}\overline{L}-\overline{\beta}\overline{L}^*)^{-1}\{[1-(\overline{\alpha}+\overline{\beta})]\overline{D}+(\overline{\alpha}+\overline{\beta})\overline{U}+\overline{\alpha}\overline{L}^*+\overline{\beta}\overline{L}\} \tag{10}$$

2. 수 렴 성

보조정리 1 [3] 행렬 $A=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n}$이 불퇴화 $M-$행렬이고 $P=(p_{ij})\ge 0$이 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$일 때 $p_{ii}=1$이며

$$p_{ij}+\sum_{k=1,\,k\neq i}^{n}p_{ik}a_{kj}\le 0\ \ (1\le i,\ j\le n,\ i\neq j) \tag{11}$$

이라고 하자. 그러면 PA도 불퇴화 $M-$행렬이다.

보조정리 2 [1] 행렬 $A=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n}$이 $H-$행렬이고 $A=M-N$이 $H-$량립분리이면

$\rho(M^{-1}N)<1$이 성립한다. 즉 이 분리는 수렴분리이다.

보조정리 3[3] 행렬 $A=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n}$이 $H-$행렬이라고 하자. $P=(p_{ij})\geq 0$이 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$일 때 $p_{ii}=1$이고 $1\leq i,\ j\leq n,\ i\neq j$일 때 $a_{ij}\geq 0$이면 $p_{ij}=0$, $a_{ij}<0$이면 $0\leq p_{ij}\leq|a_{ij}|$라고 하자. 그러면 PA도 $H-$행렬이다.

보조정리 4[3] 행렬 $A=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n}$이 불퇴화 $M-$행렬이라고 하자. 그러면 임의의 $0<\varepsilon\leq\varepsilon_0$에 대하여 행렬 $A(\varepsilon)=(a_{ij}(\varepsilon))$도 불퇴화 $M-$행렬이다. 여기서

$$a_{ij}(\varepsilon)=\begin{cases}a_{ij},\ a_{ij}\neq 0\\ -\varepsilon,\ a_{ij}=0\end{cases}$$

보조정리 5[3] 행렬 $A=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n}$이 부아닌 행렬이라고 하자. 그러면

① 어떤 벡토르 $x>0$에 대하여 $\alpha x\leq Ax$이면 $\alpha\leq\rho(A)$가 성립한다.

② 어떤 벡토르 $x>0$에 대하여 $Ax\leq\beta x$이면 $\rho(A)\leq\beta$가 성립한다.

그리고 A가 기약행렬이고 어떤 $x>0$에 대하여 $Ax\leq\beta x$이면 $\rho(A)\leq\beta$가 성립한다. 여기서 $\alpha,\ \beta$는 정인 상수이다.

정리 1 $A=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n}$이 $H-$행렬이고 $\alpha,\ \beta\in[0,\ 1],\ 0<\overline{\alpha}+\overline{\beta}<1$이며 불퇴화행렬 $P=(p_{ij})\geq 0$이 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$일 때 $p_{ii}=1$이고 $1\leq i,\ j\leq n,\ i\neq j$일 때 $a_{ij}\geq 0$이면 $p_{ij}=0$이며 $a_{ij}<0$이면 $0\leq p_{ij}\leq|a_{ij}|$라고 하자. 그러면 분리

$$PA=\overline{M}(\overline{\alpha},\ \overline{\beta})-\overline{N}(\overline{\alpha},\ \overline{\beta})=$$
$$=\frac{1}{\overline{\alpha}+\overline{\beta}}(\overline{D}-\overline{\alpha}\overline{L}-\overline{\beta}\overline{L}^{*})-\frac{1}{\overline{\alpha}+\overline{\beta}}\{[1-(\overline{\alpha}+\overline{\beta})]\overline{D}+(\overline{\alpha}+\overline{\beta})\overline{U}+\overline{\beta}\overline{\alpha}\overline{L}^{*}+\overline{\alpha}\overline{L}\}$$

는 $H-$량립분리이고 $\rho(\overline{H}(\alpha,\ \beta))<1$이다.

증명 보조정리 3에 의하여 PA는 $H-$행렬이다.

이제 $<PA>=(\overline{a}_{ij}),\ <\overline{M}>-|\overline{N}|=(\overline{b}_{ij})$로 놓자. $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$에 대하여

$$\overline{a}_{ij}=\left|1+\sum_{k=1,\ k\neq j}^{n}p_{ik}a_{kj}\right|$$

$$\overline{b}_{ij}=\frac{1}{\overline{\alpha}+\overline{\beta}}\left[\left|1+\sum_{k=1,\ k\neq j}^{n}p_{ik}a_{kj}\right|-\left|\left(1+\sum_{k=1,\ k\neq j}^{n}p_{ik}a_{kj}\right)(1-(\overline{\alpha}+\overline{\beta}))\right|\right]=\overline{a}_{ij}$$

가 성립하므로 $<PA>$와 $<\overline{M}>-|\overline{N}|$의 대각선원소들은 같다.

$1\leq i<j\leq n$일 때 $<PA>$의 웃3각형원소들은

$$\overline{a}_{ij}=-\left|p_{ij}+\sum_{k=1,\ k\neq j}^{n}p_{ik}a_{kj}\right|,\ \overline{b}_{ij}=\frac{1}{\overline{\alpha}+\overline{\beta}}\left[(\overline{\alpha}+\overline{\beta})\left|p_{ij}+\sum_{k=1,\ k\neq j}^{n}p_{ik}a_{kj}\right|\right]=\overline{a}_{ij}$$

가 성립하므로 $<PA>$와 $<\overline{M}>-|\overline{N}|$의 웃3각형원소들은 같다.

$1\leq j<i\leq n$일 때 $<PA>$의 아래3각형원소들은 $\overline{a}_{ij}=-\left|p_{ij}+\sum_{k=1,\ k\neq j}^{n}p_{ik}a_{kj}\right|$이다. 이제 $1\leq N_2$

$\le N_1 \le n$ 이라고 하고

$$\overline{L}=(l_{ij})=-|\,p_{ij}+\sum_{k=1,\,k\ne j}^{n}p_{ik}a_{kj}\,|,\ 1\le i\le N_1,\ \overline{L}^*=(l_{ij}^*)=-\left|p_{ij}+\sum_{k=1,k\ne j}^{n}p_{ik}a_{kj}\right|,\ N_2\le i\le n$$

으로 놓으면

$$\overline{b}_{ij}=\frac{1}{\overline{\alpha}+\overline{\beta}}|\,\alpha\overline{L}+\beta\overline{L}^*\,|-\frac{1}{\overline{\alpha}+\overline{\beta}}|\,\beta\overline{L}+\alpha\overline{L}^*\,|=-|\,\overline{L}+\overline{L}^*\,|=\overline{a}_{ij}$$

가 성립하므로 $<PA>$와 $<\overline{M}>-|\overline{N}|$의 아래3각형원소들은 같다.

결국 $<PA>=<\overline{M}(\overline{\alpha},\ \overline{\beta})>-|\overline{N}(\overline{\alpha},\ \overline{\beta})|$이고 $PA=\overline{M}(\overline{\alpha},\ \overline{\beta})-\overline{N}(\overline{\alpha},\ \overline{\beta})$가 $H-$량립분리라는것이 증명된다. 따라서 보조정리 2로부터 $\rho(\overline{H}(\alpha,\ \beta))<1$이 성립한다.(증명끝)

정리 2 $A=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n}$이 불퇴화 $M-$행렬이고 $\alpha,\ \beta\in[0,\ 1],\ 0<\overline{\alpha}+\overline{\beta}<1$이며 불퇴화 행렬 $P=(p_{ij})\ge 0$이 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$일 때 $p_{ii}=1$이고 $1\le i,\ j\le n,\ i\ne j$일 때 식 (10)이 성립하고 $P_1(L+L^*)+F_1+F_2\ge P_1$이 성립한다고 하자. 그러면 $\rho(H(\alpha,\ \beta))<1$일 때 $\rho(\overline{H}(\alpha,\ \beta))\le\rho(H(\alpha,\ \beta))<1$이 성립하며 $\rho(H(\alpha,\ \beta))>1$이고

$$p_{ij}+\sum_{k=1,\,k\ne i}^{n}p_{ik}a_{kj}>0\ \ (1\le i,\ \ j\le n,\ \ i\ne j)$$

일 때 $\rho(\overline{H}(\alpha,\ \beta))\ge\rho(H(\alpha,\ \beta))>1$이 성립한다.

련립방정식 $Ax=b$에 대하여 수치실험을 진행하였다. 여기서

$$A=\begin{bmatrix}1 & -0.1 & -0.2 & 0 & -0.3 & -0.5\\ -0.2 & 1 & -0.3 & 0 & -0.4 & -0.1\\ 0 & -0.3 & 1 & -0.6 & -0.2 & 0\\ -0.2 & -0.3 & -0.1 & 1 & -0.1 & -0.3\\ 0 & -0.3 & -0.2 & -0.1 & 1 & -0.2\\ -0.2 & -0.3 & 0 & -0.3 & -0.1 & 1\end{bmatrix},\ \ \mathrm{cond}(A)=56.794\ 3$$

선행연구의 실례에서 $\mathrm{cond}(A_S)=45.745\ 5$ [1], $\mathrm{cond}(A_{SR})=42.820\ 0$ [2]이다. 여기서

$$A_S=(I+S)A=P_SA,\ \ A_{SR}=(I+S+R)A=P_{SR}A$$

이다.

다음의 2개의 선행처리기에 대하여 수치실험을 진행하자.

$$P_1=\begin{bmatrix}1 & 0.1 & 0.2 & 0 & 0.3 & 0.5\\ 0 & 1 & 0.3 & 0 & 0.4 & 0.1\\ 0 & 0 & 1 & 0.6 & 0.2 & 0\\ 0 & 0 & 0.1 & 1 & 0.1 & 0.3\\ 0 & 0.3 & 0 & 0.1 & 1 & 0.2\\ 0.2 & 0.3 & 0 & 0.3 & 1 & 1\end{bmatrix},\ P_2=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 0 & 3 & 5\\ 0 & 1 & 3 & 0 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 6 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 0 & 3 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

이라고 하면 $\det(P_1)=300,\ \det(P_2)=-300$이고

$$P_1A=\begin{bmatrix} 1 & -0.01 & -0.04 & 0 & -0.09 & -0.25 \\ 0 & 1 & -0.09 & 0 & -0.16 & -0.01 \\ 0 & 0 & 1 & -0.06 & -0.04 & 0 \\ 0 & 0 & -0.01 & 1 & -0.01 & -0.09 \\ 0 & -0.09 & 0 & -0.01 & 1 & -0.04 \\ -0.04 & -0.09 & 0 & -0.09 & -0.1 & 1 \end{bmatrix},\ \mathrm{cond}(P_1A)=1.246\ 26$$

$$P_2A=\begin{bmatrix} 1 & -0.01 & -0.4 & 0 & -0.9 & -2.5 \\ 0 & 1 & -0.9 & 0 & -1.6 & -0.1 \\ 0 & 0 & 1 & -3.6 & -0.4 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1 & 1 & -0.1 & -0.9 \\ 0 & -0.9 & 0 & -0.1 & 1 & -0.4 \\ -0.4 & -0.9 & 0 & -0.9 & -0.1 & 1 \end{bmatrix},\ \mathrm{cond}(P_2A)=12.344\ 4$$

이다.

수치실례들에서 보게 되는바와 같이 론문에서 주어진 선행처리기에 의하여 선행처리된 련립방정식들의 조건수가 매우 작아진다.

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보(자연과학), 61, 10, 2, 주체102(2013).

[2] 황명근, 김경석; 수학, 232, 1, 54, 주체106(2017).

[3] P. F. Dai et al.; Journal of Computational and Applied Mathematics, 317, 100, 2017.

[4] D. W. Chang; Journal of Computational and Applied Mathematics, 72, 169, 1996.

[5] D. W. Chang; Computer Mathematics with Applications, 41, 215, 2001.

주체106(2017)년 8월 10일 원고접수

A Preconditioned Two-Parameter Overrelaxation Method by a Generalized Preconditioner

Hwang Myong Gun, Kim Kyong Sok

We present a generalized preconditioner for solving the system of linear equations with nonsingular *M*-matrix and *H*-matrix. Our preconditioner improves the convergence rate of two-parameter overrelaxation iterative methods.

Key words: preconditioner, nonnegative matrix, comparison theorem, linear complementarity, two-parameter overrelaxation iterative method