김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제3호

분해에 의한 p-라뻘라스연산자를 가진 한가지 비선형분수계 미분방정식에 대한 적분경계값문제의 풀이법

박순애, 최희철

우리는 한 형태의 p-라뻘라스연산자를 가진 비선형분수계미분방정식에 대한 적분경계값문제의 한가지 풀이법을 연구하였다.

선행연구[2]에서는 베르누이웨블레트에 대한 리만－류빌분수계적분연산자의 연산행렬을 구성하고 캐푸토분수계도함수를 가진 분수계미분방정식의 초기값문제와 두점경계값문제를 푸는 한가지 수치풀이방법을 제기하였다.

선행연구[3]에서는 하르웨블레트연산행렬을 리용하여 캐푸터분수계도함수를 가지는 분수계편미분방정식을 푸는 방법을 제기하였다.

론문에서는 분해를 리용하여 p-라뻘라스연산자를 가진 비선형분수계미분방정식에 대한 적분경계값문제

$$ {}^cD_{0+}^{\beta}\varphi_p({}^cD_{0+}^{\alpha}x(t)) = f(t,\ x(t)),\ t\in(0,\ 1) \tag{1}$$

$$ x(0)=\int_0^1 g(s)x(s)ds,\ x(1)=0 \tag{2}$$

$$ \varphi_p({}^cD_{0+}^{\alpha}x(0)) = \varphi_p({}^cD_{0+}^{\alpha}x(1)) = \int_0^1 h(s)\varphi_p({}^cD_{0+}^{\alpha}x(s))ds \tag{3}$$

의 풀이를 구하는 한가지 방법에 대하여 론의한다. 여기서 φ_p는 $\varphi_p(s) := |s|^{p-2}s$로 정의되며 $1<\alpha,\ \beta\le 2,\ p>1,\ g,\ h\in C[0,\ 1],\ h\ge 0,\ J:=[0,\ 1],\ f\in C(J,\ \mathbf{R})$이다.

다음과 같은 가정을 한다.

가정 1 $|f(t,\ x)|\le a(t)+b(t)|x|^{p-1}\ (\forall x\in\mathbf{R},\ t\in[0,\ 1])$

가정 2 $|f(t,\ x_1)-f(t,\ x_2)|\le L|x_1-x_2|\ (\exists L>0;\ \forall x_1,\ x_2\in(-\delta_0,\ \delta_0))$

보조정리 1 [2] 적분경계값문제 (1), (2), (3)은 다음의 두 적분경계값문제로 분해된다.

$$ {}^cD_{0+}^{\beta}z(t) = f(t,\ (Wz)(t)),\ t\in(0,\ 1),\ z(0)=z(1)=\int_0^1 h(s)z(s)ds \tag{4}$$

$$ \begin{gathered} {}^cD_{0+}^{\alpha}x(t) = y(t),\ t\in(0,\ 1),\ y(t)=\varphi_q(z(t)) \\ x(0)=\int_0^1 g(s)x(s)ds,\ x(1)=0 \end{gathered} \tag{5}$$

보조정리 2 문제 (5)의 풀이는 다음과 같이 표시된다.

$$ x(t) = \frac{-(1-t)}{1-\sigma_1}\int_0^1\int_0^1 G(\tau,\ s,\ \alpha)g(\tau)y(s)dsd\tau - \int_0^1 G(t,\ s,\ \alpha)y(s)ds $$

다음의 보조문제를 생각하자.

$$ {}^{c}D_{0+}^{\beta}z(t)=\sigma(t),\ t\in[0,1],\ 1<\beta\le 2,\ z(0)=z(1)=\int_0^1 h(s)z(s)ds \qquad (6)$$

적분경계값문제 (6)의 풀이 $z(t)$는 다음과 같이 표시된다.[1]

$$ z(t)=\frac{-1}{1-\sigma_2}\int_0^1\int_0^1 h(s)\,G(s,\ \tau,\ \beta)\,\sigma(\tau)d\tau ds-\int_0^1 G(t,\ s,\ \beta)\,\sigma(s)ds $$

여기서 $G(t,\ s,\ \beta):=\dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\begin{cases} t\,(1-s)^{\beta-1}-(t-s)^{\beta-1}, & t\ge s\\ t\,(1-s)^{\beta-1}, & t<s\end{cases}$ 이다.

정의 $z\in W^{\beta}[0,\ 1]$인 함수 $z(t)$가 식 (4)를 만족시킬 때 함수 $z(t)$를 식 (4)의 풀이라고 부른다.

보조정리 3 $z(t)$가 문제 (4)의 풀이이기 위해서는 $z(t)$가 $C[0,\ 1]$에서

$$ z(t)=\frac{-1}{1-\sigma_2}\int_0^1\int_0^1 h(s)\,G(s,\ \tau,\ \beta)f(s,\ (Wz)(s))d\tau ds-\int_0^1 G(t,\ s,\beta)\ f(s,\ (Wz)(s))\,ds \qquad (7)$$

의 풀이일것이 필요하고 충분하다.

다음의 표식을 약속하자.

$$ B:=\int_0^1 b(s)ds\cdot\left(\frac{2}{\Gamma(\beta)}\right)^{p}\cdot\left(\frac{\|h\|_{c[0,1]}}{1-\sigma_2}+1\right)\cdot\left(1+\frac{\|g\|_{C[0,1]}}{1-\sigma_1}\right)^{p-1} $$

$X:=C[0,\ 1]$이라고 하자. 식 (7)의 오른변을 $Tz(t)$로 표시하면 식 (7)을 연산자방정식 형태로 다음과 같이 쓸수 있다. 여기서 T는 X에서 련속이다.

$$ z=Tz,\ \ z\in C[0,\ 1] \qquad (8)$$

정리 1 $0<B<1$이면 적분방정식 (8)은 적어도 1개의 풀이를 가진다.

다음의 가정을 하자.

$$ w:=\frac{4L(p-1)C^{q-2}}{\Gamma(\beta)^2}\cdot\left(\frac{\|g\|_{C[0,1]}}{1-\sigma_1}+1\right)\cdot\left(\frac{\|h\|_{C[0,1]}}{(1-\sigma_2)}+1\right) $$

정리 2 $0<w<1$이고 가정 2를 만족시키면 적분방정식 (7)의 풀이는 유일하다.

$L_2[0,\ 1]$에서 적분방정식 (7)의 수치풀이법에 대하여 론의하자.

$L_2[0,\ 1]$의 하르웨블레트는 $L_2[0,\ 1]$의 토대이다. 이 토대를 $\{h_0(t),\ h_1(t),\ \cdots,\ h_n(t),\ \cdots\}$으로 표시하자. 여기서

$$ h_0(t)=1/\sqrt{m} $$

$$ h_i(t)=\frac{1}{\sqrt{m}}\begin{cases} 2^{j/2}, & (k-1)/2^j<t\le(k-1/2)/2^j\\ -2^{j/2}, & (k-1/2)/2^j<t\le k/2^j\\ 0, & \text{기타}\end{cases} $$

이며 $j,\ k$는 i의 옹근수분해이다.

이때 식 (7)의 풀이 $z(t)$는 $z(t)=\sum_{i=0}^{\infty}c_i h_i(t)$로 표시된다.

이제 $z(t)$에 대한 근사풀이를 $z_n(t) := \sum_{i=0}^{n} c_i h_i(t)$ 형태로 놓자. 여기서

$$C := (c_0,\ c_1,\ \cdots,\ c_n)^{\mathrm{T}},\ \ H(t) := (h_0(t),\ h_1(t),\ \cdots,\ h_n(t))^{\mathrm{T}}$$

를 리용하면 $z_n(t) = C^{\mathrm{T}} H(t)$이다. 이제 $z_n(t)$를 식 (7)의 $z(t)$에 대입하고 점 $t = t_k$를 점배치하자.

$$z_n(t_k) = \frac{-1}{1-\sigma_2} \int_0^1 \int_0^1 h(s)\, G(s,\ \tau,\ \beta) f(s,\ (Wz_n)(s)) d\tau ds - \int_0^1 G(t_k,\ s,\ \beta)\, f(s,\ (Wz_n)(s))\, ds$$

$$k = \overline{1,\ n+1} \tag{9}$$

점배치방정식 (9)의 풀이의 존재성은 련속문제의 풀이의 존재성으로부터 나온다.

정리 3 점배치방정식 (9)를 만족시키는 $(z_n(t_1),\ \cdots,\ z_n(t_{n+1}))$은 유일존재한다.

하르웨블레트연산행렬법에 의한 점배치근사방정식의 풀이법을 고찰하자.

우선 점배치방정식 (9)에 들어있는 $(Wz_n)(s)$의 근사계산에 대하여 론의하자.

$m \in \mathbf{N},\ C^{(m)} = (c_0^{(m)},\ c_1^{(m)},\ \cdots,\ c_n^{(m)}\ )$이 결정되였다고 하자.

$$\bar{z}_n(t) = [C^{(m)}]^{\mathrm{T}} H(t)$$

$$W(\bar{z}_n)(t) = \frac{-(1-t)}{1-\sigma_1} \int_0^1 \int_0^1 G(\tau,\ s,\ \alpha)\, g(\tau)\, \varphi_q(\bar{z}_n(s)) ds d\tau - \int_0^1 G(t,\ s,\ \alpha)\, \varphi_q(\bar{z}_n(s))\, ds \tag{10}$$

식 (10)의 첫항의 적분(I_D)을 근사계산하자.

$$D_1^{\mathrm{T}} = (g(t_1) \cdot A_0(t_1),\ \cdots,\ g(t_{n+1}) \cdot A_0(t_{n+1})) H_{matrix}^{\mathrm{T}} \tag{11}$$

$$E_k^{\mathrm{T}} = (G(t_k,\ s_1,\ \alpha) \cdot \varphi_q(\bar{z}_n(s_1)),\ \cdots,\ G(t_k,\ s_{n+1},\ \alpha)\, \varphi_q(\bar{z}_n(s_{n+1}))) \cdot H_{matrix}^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

따라서 I_D의 계산은 다음과 같이 진행한다.

① 식 (12)에 의한 $E_k^{\mathrm{T}} F_H^1 \cdot H(1)$의 계산, $k = \overline{1,\ n+1}$

② 식 (11)에 의한 $D_1^{\mathrm{T}} \cdot F_H^1 \cdot H(1)$의 계산(즉 I_D의 근사계산) (13)

다음으로 식 (10)의 둘째 항의 적분을 근사계산하자.

$$\int_0^1 G(t,\ s,\ \alpha)\, \varphi_q(\bar{z}_n(s))\, ds \approx E^{\mathrm{T}} H(s) \tag{14}$$

$$W(\bar{z}_n)(t) = \frac{-(1-t)}{1-\sigma_1} D_1^{\mathrm{T}} \cdot F_H^1 \cdot H(1) - E^{\mathrm{T}} H(t) \tag{15}$$

다음으로 점배치방정식 (9)를 풀기 위한 반복도식을 고찰하자.

$$[\bar{z}_n^{(m+1)}(t_1),\ \cdots,\ \bar{z}_n^{(m+1)}(t_{n+1})]^{\mathrm{T}} = [T_1(\bar{z}_n^{(m)}),\ \cdots,\ T_{n+1}(\bar{z}_n^{(m)})]^{\mathrm{T}} \tag{16}$$

$$T_k(\bar{z}_n^{(m)}) = \frac{-1}{1-\sigma_2} \int_0^1 \int_0^1 h(s)\, G(s,\ \tau,\ \beta) f(s,\ W(\bar{z}_n^{(m)})(s)) d\tau ds - \int_0^1 G(t_k,\ s,\ \beta)\, f(s,\ W(\bar{z}_n^{(m)})(s))\, ds \tag{17}$$

I_D의 계산에서와 마찬가지로 $T_k(\bar{z}_n^{(m)})$을 계산할수 있다.

우선 식 (17)의 첫 적분을 근사계산하자.

$$\hat{I}_D := \int_0^1\int_0^1 h(s)\, G(s,\ \tau,\ \beta) f(s,\ W(\bar{z}_n^{(m)})(s)) d\tau ds = \int_0^1 h(s) f(s,\ W(\bar{z}_n^{(m)})(s)) \left(\int_0^1 G(s,\ \tau,\ \beta) d\tau \right) ds$$

$$\hat{I}_D = \int_0^1 D^{\mathrm{T}} H(s) ds = D^{\mathrm{T}}\ F_H^1 \cdot H(1) \tag{18}$$

다음으로 식 (17)의 둘째 적분을 근사계산하자.

$$\int_0^1 G(t_n,\ s,\ \beta)\ f(s,\ W(\bar{z}_n^{(m)})(s))\ ds \approx D_k^{\mathrm{T}}\ F_H^1\ H(1) \tag{19}$$

식 (18), (19)로부터 $T_k(\bar{z}_n^{(m)}) = \dfrac{-1}{1-\sigma_2} D^{\mathrm{T}}\ F_H^1 \cdot H(1) - D_k^{\mathrm{T}}\ F_H^1\ H(1)$ 이 성립된다. 즉

$$T_k(\bar{z}_n^{(m)}) = -\left(\frac{1}{1-\sigma_2} D^{\mathrm{T}} + D_k^{\mathrm{T}} \right) F_H^1 \cdot H(1)$$

이 얻어진다.

식 (16)을 리용하면 $\bar{z}_n^{(m+1)}(t) = [C^{(m+1)}]^{\mathrm{T}} H(t)$ 이므로

$$([C^{(m+1)}]^{\mathrm{T}} H(t_1),\ \cdots,\ [C^{(m+1)}]^{\mathrm{T}} H(t_{n+1})) = (T_1(\bar{z}_n^{(m)}),\ \cdots,\ T_{n+1}(\bar{z}_n^{(m)})) =: T(C^{(m)})$$

이다.

따라서 $[C^{(m+1)}]^{\mathrm{T}} = T(C^{(m)}) H_{matrix}^{\mathrm{T}}$ 이다. 이로부터 $C^{(m+1)} = H_{matrix} \cdot T(C^{(m)})^{\mathrm{T}}$ 이다.

참 고 문 헌

[1] 박승철, 박순애; 수학, 3, 54, 주체106(2017).

[2] E. Keshavarz et al.; Appl. Math. Model., 38, 6038, 2014.

[3] A. Neamaty et al.; J. Mathematics and Computer Science, 7, 230, 2013.

주체109(2020)년 3월 15일 원고접수

A Solving Method of Integral Boundary Value Problems for a Nonlinear Fractional Differential Equations with *p*-Laplacian Operator by Using Decomposition of the Equation

Pak Sun Ae, Choe Hui Chol

In this paper, we consider a solving method of integral boundary value problem for a nonlinear fractional differential equation with *p*-Laplacian operator by using the decomposition of the equation.

Keyword: Laplacian operator