김일성종합대학학보 (자연과학) 주체106(2017)년 제63권 제11호
JOURNAL OF KIM IL SUNG UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE) Vol. 63 No. 11 JUCHE106(2017).

사전실시판매선택권의 2분나무모형에서 최량실시경계

오형철, 전일광

최근 금융수학에서 널리 리용되고있는 2분나무모형에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다.

선행연구[3]에서는 리자률과 배당률, 파동률이 상수인 경우 유럽식선택권의 2분나무모형에 의한 가격공식과 그 수렴성을 연구하였으며 사전실시선택권의 2분나무법에 의한 가격공식과 가격의 기초자산가격, 시간변수에 관한 단조성, 최량실시경계의 존재성과 단조성을 연구하였다.

선행연구[2, 4, 5]에서는 사전실시선택권의 2분나무법에 의한 가격의 수렴성을, 선행연구[6]에서는 전환성채권의 2분나무법을 연구하였다.

한편 선행연구[4]에서는 시간의존결수를 가지는 유럽식선택권의 편속모형을 주고 그 풀이공식을 구하였으며 선행연구[1]에서는 시간의존결수를 가지는 유럽식선택권의 2분나무가격공식과 그 수렴성을 연구하였다.

론문에서는 시간의존결수를 가지는 경우 사전실시판매선택권의 2분나무모형에서 최량실시경계의 존재성과 단조성문제를 연구하였다.

$r(t)$를 리자률, $q(t)$를 기초자산의 배당률, $\sigma(t)$를 기초자산가격의 파동률, u를 가격오름폭($u>1$)이라고 하고 $0<\underline{\sigma}\le\sigma(t)\le\overline{\sigma}$라고 가정하자.

이때 시간축의 격자를 다음과 같이 정의한다.[2]

$t_0=0$, $\sigma_0=\sigma(t_0)$, $\Delta t_0=(\ln u)^2/\sigma_0^2$, $t_1=t_0+\Delta t_0=(\ln u)^2/\sigma_0^2$이라고 할 때 $t_1\le T$이면 $\sigma_1=\sigma(t_1)$, $\Delta t_1=(\ln u)^2/\sigma_1^2$, $t_2=t_1+\Delta t_1=(\ln u)^2\cdot(1/\sigma_0^2+1/\sigma_1^2)$로 놓는다.

귀납적으로 $t_n\le T$일 때 다음과 같이 놓는다.

$$\sigma_n=\sigma(t_n),\, \Delta t_n=(\ln u)^2/\sigma_n^2,\ t_{n+1}=t_n+\Delta t_n=(\ln u)^2\cdot(1/\sigma_0^2+\cdots+1/\sigma_n^2)$$

이 과정을 $t_N\le T<t_{N+1}$일 때까지 계속한다.

이때 분할점개수 N은 u와 T에 관계되며 다음의 식들이 성립된다.

$$(\ln u)^2/\overline{\sigma}^2\le\Delta t_n\le(\ln u)^2/\underline{\sigma}^2,\ T\underline{\sigma}^2/(\overline{\sigma}^2(\ln u)^2)<N\le T\overline{\sigma}^2/(\underline{\sigma}^2(\ln u)^2)$$

$u\downarrow 1$이면 $N\to+\infty$, $0\le T-t_N<\Delta t_N=(\ln u)^2/\sigma_N^2\to 0$이다.

이제 다음과 같이 표시하자.

$$r_n=r(t_n),\ q_n=q(t_n),\ \sigma_n=\sigma(t_n),\ \eta_n=1+q_n\Delta t_n,\ \rho_n=1+r_n\Delta t_n\ (\Delta t_n=t_{n+1}-t_n),\ n=0,\,1,\,\cdots,\,N-1$$

자산가격 S축의 격자를 $S_j=S_0u^j\ (j=n,\ n-1,\cdots,-n+1,\ -n)$으로 정의한다.

2분나무법에 의한 가격공식을 론의하기 위하여 다음과 같이 가정하자.

$$0<d<1<u,\ d\eta_n<\rho_n<u\eta_n \tag{1}$$

이때 $\theta_n=(\rho_n/\eta_n-d)/(u-d)$로 놓으면 $0<\theta_n<1$이다.

$V_j^n=V(S_j,\ t_n)$으로 표시하면 사전실시선택권의 2분나무가격공식은 다음과 같다.

$$V_j^N=\varphi_j,\ V_j^n=\max\{[\theta_n V_{j+1}^{n+1}+(1-\theta_n)V_{j-1}^{n+1}]/\rho_n,\ \varphi_j\},\ n=N-1,\cdots,1,0 \quad (2)$$

여기서 $\varphi_j=(E-S_j)^+$ (하강기대) 또는 $\varphi_j=(S_j-E)^+$ (상승기대)이다.

정리 1(자산가격에 관한 단조성) V_j^n $(n=0,1,\cdots,N,\ j=0,\pm1,\pm2,\cdots)$이 사전실시판매선택권의 가격일 때 $V_j^n \ge V_{j+1}^n$이 성립된다.

정리 2(시간변수에 관한 단조성) V_j^n $(n=0,1,\cdots,N,\ j=0,\pm1,\pm2,\cdots)$이 사전실시판매선택권의 가격이고 다음의 조건이 만족된다고 하면 $V_j^{n-1}\ge V_j^n$이 성립된다.

① $r(t)/\sigma^2(t)$는 t —단조증가이다.

② $q(t)/\sigma^2(t)$는 t —단조감소이다.

③ $d\eta_n \le \rho_n \le u\eta_n$

다음으로 근사최량실시경계의 존재성에 대하여 론의하자.

정리 3 V_j^n $(n=0,1,\cdots,N,\ j=0,\pm1,\pm2,\cdots)$이 사전실시판매선택권의 가격이고 정리 2의 조건 ①—③이 만족된다고 하면 매 t_n $(0\le n\le N-1)$에 대하여 어떤 j_n이 있어서 다음의 사실들이 성립된다.

$$V_j^n=\varphi_j\ \ (j\le j_n),\ V_j^n>\varphi_j\ \ (j=j_n+1),\ V_j^n\ge\varphi_j\ \ (j\ge j_n+2) \quad (3)$$

증명 일반성을 잃지 않고 $E=1$이라고 하자.

그러면 $V_j^N=(1-S_j)^+=\varphi_j$ $(j=0,\pm1,\cdots)$이고 따라서 다음의 식이 성립된다.

$$\varphi_j=V_j^N=0\ (j\ge0)\,;\ \varphi_j=V_j^N>0\ \ (j\le-1)$$

$j\ge0$일 때 $V_j^{N-1}=\max\{[\theta_{N-1}\varphi_{j+1}+(1-\theta_N)\varphi_{j-1}]/\rho_{N-1},\ \varphi_j\}$이므로 $V_j^{N-1}\ge0=V_j^N=\varphi_j$가 성립되며 특히 $j\ge1$이면 $\varphi_{j+1}=\varphi_j=\varphi_{j-1}=0$이므로 $V_j^{N-1}=V_j^N=0=\varphi_j$ 즉 $V_j^{N-1}=\varphi_j$.

$j=0$일 때 $\varphi_{-1}>0$이므로 $V_0^{N-1}>0=V_0^N=\varphi_0$ 즉

$$V_0^N>\varphi_0. \quad (4)$$

$j\le-1$일 때를 고찰하자.

$$\begin{aligned}V_j^{N-1}&=\max\{[\theta_{N-1}V_{j+1}^N+(1-\theta_{N-1})V_{j-1}^N]/\rho_{N-1},\ \varphi_j\}=\\&=\max\{[\theta_{N-1}(1-S_{j+1})+(1-\theta_{N-1})(1-S_{j-1})]/\rho_{N-1},\ \varphi_j\}=\\&=\max\{1/\rho_{N-1}-(u^j/\rho_{N-1})\cdot\rho_{N-1}/\eta_{N-1},\ 1-u^j\}=\max\{1/\rho_{N-1}-u^j/\eta_{N-1},\ 1-u^j\}\end{aligned}$$

$\eta_{N-1}>1$ 즉 $q_{N-1}>0$인 경우 $j\to-\infty$일 때 $1/\rho_{N-1}-u^j/\eta_{N-1}\to1/\rho_{N-1}<1$, $1-u^j\to1$이므로 $y=1/\rho_{N-1}-x/\eta_{N-1}$와 $y=1-x$의 그라프들을 비교하면 그것들은 1—4분구에서 사귈수 있고 $j_{N-1}=\max\{j\le-1,\ j\in\mathbf{Z}\,|\,1/\rho_{N-1}-u^j/\eta_{N-1}\le1-u^j\}$으로 정의된다.

이때 $j\le j_{N-1}$이면 $1/\rho_{N-1}-u^j/\eta_{N-1}<1-u^j$이고 $V_j^{N-1}=1-u^j=\varphi_j$이며 $-1\ge j\ge j_{N-1}+1$이면 $1/\rho_{N-1}-u^j/\eta_{N-1}>1-u^j$이고 $V_j^{N-1}>\varphi_j$이다.

따라서 $j\le j_{N-1}$이면 $V_j^{N-1}=\varphi_j$이며 $j=j_{N-1}+1$일 때 다음과 같다.

$$j_{N-1}=-1\Rightarrow j=0\Rightarrow V_j^{N-1}=V_0^{N-1}>0=\varphi_j$$

$$j_{N-1}<-1\Rightarrow j<0,\ V_j^{N-1}=1/\rho_{N-1}-u^j/\eta_{N-1}>1-u^j=\varphi_j>0$$

따라서 $j=j_{N-1}+1$이면 $V_j^{N-1}>\varphi_j$, $j\ge j_{N-1}+2$이면 $V_j^{N-1}\ge\varphi_j$가 성립된다.

이리하여 $j_{N-1}<-1$의 존재성이 증명되였다.

$q_{N-1}\le 0\Leftrightarrow \eta_{N-1}\le 1$인 경우 $y=1/\rho_{N-1}-x/\eta_{N-1}$와 $y=1-x$의 그라프는 1－4분구에서 사귈수 없고 언제나 $1/\rho_{N-1}-u^j/\eta_{N-1}<1-u^j$, $j\le -1$이 성립되므로 $V_j^{N-1}=\varphi_j=1-u^j$이다.

이 식과 식 (4)를 결합하면 $j_{N-1}=-1$이 나온다.

이제 $n=k$일 때 결론이 선다고 가정하자. 즉 j_k가 존재하여 $n=k$인 경우 식 (3)이 성립되며 $j_k\le j_{k+1}\le\cdots\le j_{N-1}\le -1$이 선다고 가정하자.

선택권가격공식 $V_j^{k-1}=\max\{[\theta_{k-1}V_{j+1}^k+(1-\theta_{k-1})V_{j-1}^k]/\rho_{k-1},\ \varphi_j\}$로부터 거꿀방향귀납법과 시간에 관한 단조성을 리용하면 $j\le j_k-1$일 때 $j+1\le j_k\Rightarrow V_{j+1}^k=\varphi_{j+1}=1-u^{j+1}$ ($j_k\le -1$)이며 $V_j^{k-1}=\max\{[\theta_{k-1}V_{j+1}^k+(1-\theta_{k-1})V_{j-1}^k]/\rho_{k-1},\ \varphi_j\}=\max\{1/\rho_{k-1}-u^j/\eta_{k-1},\ 1-u^j\}$이다.

$\eta_{k-1}>1$ 즉 $q_{k-1}>0$일 때 $j_{k-1}=\max\{j\le j_k-1,\ j\in\mathbf{Z}\mid 1/\rho_{k-1}-u^j/\eta_{k-1}\le 1-u^j\}$으로 놓으면 $j_{k-1}\le j_k-1$이고 $n=N-1$일 때와 같은 방법으로 하면

$$j\le j_{k-1}\Rightarrow V_j^{k-1}=\varphi_j,\quad j=j_{k-1}+1(\le j_k)\Rightarrow V_j^{k-1}>\varphi_j,\quad j\ge j_{k-1}+2\Rightarrow V_j^{k-1}\ge V_j^k\ge\varphi_j.$$

$\eta_{k-1}\le 1$ 즉 $q_{k-1}\le 0$일 때

$$V_j^{k-1}=\varphi_j\ \ (j\le j_k-1),\ \ V_j^{k-1}\ge V_j^k>\varphi_j\ \ (j=j_k+1),\ \ V_j^{k-1}\ge V_j^k\ge\varphi_j\ \ (j\ge j_k+2).$$

$j=j_k$일 때는 일반적으로 $V_j^k\ge\varphi_j$이고 $V_j^k>\varphi_j$인 경우에는 $j_{k-1}=j_k-1$로, $V_j^{k-1}=\varphi_j$인 경우에는 $j_{k-1}=j_k$로 놓으면 된다.(증명끝)

주의 정리 1은 선행연구[3]결과의 일반화로 된다.

참 고 문 헌

[1] 오형철 등; 조선수학학회지, 2, 94, 주체100(2011).

[2] B. Hu et al.; Jour. Comput. Appl. Math., 230, 583, 2009.

[3] L. S. Jiang; Modeling and Methods of Option Pricing, World Scientific, 34～210, 2005.

[4] L. S. Jiang et al.; J. Comput. Math., 22, 3, 371, 2004.

[5] J. Liang et al.; Numer. Math., 107, 333, 2007.

[6] M. Krasimir et al.; The Journal of Fixed Income, Winter, 79～94, 2013.

주체106(2017)년 7월 5일 원고접수

Optimal Boundary in Binomial Tree Model for American Put Option

O Hyong Chol, Jon Il Gwang

We study the existence and monotonicity of optimal boundary in binomial tree model for American put option with time dependent coefficients. We prove the existence of optimal boundary for American put option under some monotonicity assumptions on the interest rate, dividend rate and volatility.

Key words: American put option, binomial tree model