김일성종합대학학보 주체110(2021)년
수 학 제67권 제1호

리만다양체에서 α －반대칭재귀계량접속의 호상접속에 대하여

곽금혁, 허달윤

선행연구[4]에서는 리만다양체에서 반대칭계량접속이 처음으로 제시되였고 선행연구[2]에서는 중력의 스칼라－텐소르리론에 대한 기하학적모형으로 되는 반대칭비계량접속이 연구되였다. 선행연구[1]에서는 선행연구[4]에서 연구된 접속과 선행연구[2]에서 연구된 접속의 호모토피로 되는 새로운 반대칭비계량접속으로서 α －반대칭재귀계량접속을 식

$$\nabla_k g_{ij} = 2\alpha\pi_k g_{ij},\ T_{ij}^k = \pi_j\delta_i^k - \pi_i\delta_j^k \tag{1}$$

를 만족시키는 접속으로 정의하고 그 성질을 연구하였다. 이 접속의 접속결수는

$$\Gamma_{ij}^k = \left\{ {k \atop ij} \right\} - \alpha\pi_i\delta_j^k - (\alpha-1)\pi_j\delta_i^k + (\alpha-1)g_{ij}\pi^k \tag{2}$$

이다. 보는것처럼 이 접속은 $\alpha=0$ 이면 선행연구[4]에서 연구된 반대칭계량접속이며 $\alpha=1$ 이면 선행연구[2]에서 연구된 반대칭비계량접속이 되는 반대칭비계량접속족의 호모토피이다. 선행연구[3]에서는 리만다양체에서 주어진 반대칭접속의 호상접속이 중력마당과 전자기마당의 고전적인 통일마당론에서 새로운 반대칭접속으로 리용되고있다는것을 보여주었다.

론문에서는 선행연구[1]에서 연구된 α －반대칭재귀계량접속의 호상접속에 관한 곡률텐소르의 성질들과 공액대칭조건 및 일정곡률조건을 새롭게 밝혔다.

α －반대칭재귀계량접속 ∇ 의 호상접속 $\overset{m}{\nabla}$ 의 접속결수는 식 (1)과 (2)로부터

$$\overset{m}{\Gamma}{}_{ij}^k = \left\{ {k \atop ij} \right\} - (\alpha-1)\pi_i\delta_j^k - \alpha\pi_j\delta_i^k + (\alpha-1)g_{ij}\pi^k \tag{3}$$

이며 호상접속 $\overset{m}{\nabla}$ 은

$$\overset{m}{\nabla}_k g_{ij} = 2(\alpha-1)\pi_k g_{ij} + \pi_i g_{jk} + \pi_j g_{ik},\ \overset{m}{T}{}_{ij}^k = \pi_i\delta_j^k - \pi_j\delta_i^k \tag{4}$$

를 만족시킨다. 그리고 식 (3)으로부터 호상접속 $\overset{m}{\nabla}$ 에 관한 곡률텐소르는 다음과 같이 표시된다는것을 알수 있다.

$$R_{ijk}^l = K_{ijk}^l + \delta_i^l a_{jk} - \delta_j^l a_{ik} + g_{jk}b_i^l - g_{ik}b_j^l - (\alpha-1)\delta_k^l\pi_{ij} \tag{5}$$

여기서 K_{ijk}^l 은 레비－치비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$ 에 관한 곡률텐소르이고

$$a_{ik} := \alpha\left(\overset{\circ}{\nabla}_i\pi_k + \alpha\pi_i\pi_k - \frac{\alpha-1}{2}g_{ik}\pi_p\pi^p\right)$$

$$b_{ik} := (\alpha-1)\left(\overset{\circ}{\nabla}_i\pi_k + (\alpha-1)\pi_i\pi_k - \frac{\alpha}{2}g_{ik}\pi_p\pi^p\right) \tag{6}$$

$$\pi_{ij} := \overset{\circ}{\nabla}_i\pi_j - \overset{\circ}{\nabla}_j\pi_i$$

이다.

정리 1 리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 α －반대칭재귀계량접속의 호상접속 $\overset{m}{\nabla}$ 에 대하여 1－형식 π 가 닫긴형식이면 호상접속 $\overset{m}{\nabla}$ 에 대한 체적곡률텐소르는 령이다.

증명 식 (5)에서 $k,\ l$ 에 대한 축약을 실시하면 호상접속 $\overset{m}{\nabla}$ 의 체적곡률텐소르는

$$P_{ij}=\overset{\circ}{P}_{ij}+a_{ji}-a_{ij}+b_{ij}-b_{ji}-n(\alpha-1)\pi_{ij}$$

이다. 여기서 $\overset{\circ}{P}_{ij}$ 는 레비－치비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$ 에 대한 체적곡률텐소르로서 $\overset{\circ}{P}_{ij}=0$ 이다. 그러므로 식 (6)으로부터

$$a_{ji}-a_{ij}=-\alpha(\overset{\circ}{\nabla}_i\pi_j-\overset{\circ}{\nabla}_j\pi_i)=-\alpha\pi_{ij}$$

$$b_{ij}-b_{ji}=(\alpha-1)(\overset{\circ}{\nabla}_i\pi_j-\overset{\circ}{\nabla}_j\pi_i)=(\alpha-1)\pi_{ij}$$

가 성립한다. 따라서 1－형식 π 가 닫긴형식이므로

$$P_{ij}=-\pi_{ij}-n(\alpha-1)\pi_{ij}=-[n(\alpha-1)+1]\pi_{ij}=0$$

이다.(증명끝)

정리 2 리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 α －반대칭재귀계량접속 ∇ 의 호상접속 $\overset{m}{\nabla}$ 이 공액대칭이기 위해서는 그것들의 릿치곡률텐소르들이 같을것이 필요하고 충분하다.

증명 식 (3)과 (4)로부터 호상접속 $\overset{m}{\nabla}$ 에 대한 쌍대접속 $\overset{m*}{\nabla}$ 의 접속결수는 다음과 같이 표시된다는것을 알수 있다.

$$\overset{m*}{\Gamma}{}_j^k=\left\{{k \atop ij}\right\}-(\alpha-1)\pi_i\delta_j^k-(\alpha-1)\pi_j\delta_i^k+\alpha g_{ij}\pi^k \tag{7}$$

따라서 이 식을 리용하면 쌍대접속 $\overset{m*}{\nabla}$ 에 관한 곡률텐소르는 다음과 같다.

$$\overset{m*}{R}{}_{ijk}^l=K_{ijk}^l+\delta_i^l b_{jk}-\delta_j^l b_{ik}+g_{jk}a_i^l-g_{ik}a_j^l-(\alpha-1)\delta_k^l\pi_{ij} \tag{8}$$

그러므로 $\alpha_{ik}:=a_{ik}-b_{ik}$ 로 놓으면 식 (5)와 (8)로부터 다음의 관계식이 성립한다.

$$\overset{m*}{R}{}_{ijk}^l=R_{ijk}^l+\delta_j^l\alpha_{ik}-\delta_i^l\alpha_{jk}+g_{jk}\alpha_i^l-g_{ik}\alpha_j^l \tag{9}$$

따라서 이 식을 $i,\ l$ 에 관하여 축약하면 다음과 같다.

$$\overset{m*}{R}_{jk}=\overset{m}{R}_{jk}-n\alpha_{jk}+g_{jk}\alpha_i^i$$

그러므로 이 식으로부터 다음의 식이 성립한다.

$$\alpha_{jk}=\frac{1}{n}(\overset{m}{R}_{jk}-n\alpha_{jk}+g_{jk}\alpha_i^i)$$

이 식을 식 (9)에 대입하고 정돈하면 다음과 같다.

$$\overset{m*}{R}{}_{ijk}^l-\frac{1}{n}(\delta_i^l\overset{m*}{R}_{jk}-\delta_j^l\overset{m*}{R}_{ik}+g_{jk}\overset{m*}{R}{}_i^l-g_{ik}\overset{m*}{R}{}_j^l)=\overset{m}{R}{}_{ijk}^l-\frac{1}{n}(\delta_i^l\overset{m}{R}_{jk}-\delta_j^l\overset{m}{R}_{ik}+g_{jk}\overset{m}{R}{}_i^l-g_{ik}\overset{m*}{R}{}_j^l) \tag{10}$$

따라서 $\overset{m*}{R}{}_{ijk}^l=\overset{m}{R}{}_{ijk}^l$ 이면 분명히 $\overset{m*}{R}_{jk}=\overset{m}{R}_{jk}$ 이다.

거꾸로 $\overset{m*}{R}_{jk}=\overset{m}{R}_{jk}$ 이면 식 (10)으로부터 $\overset{m*}{R}{}^l_{ijk}=\overset{m}{R}{}^l_{ijk}$ 이 성립한다는것을 알수 있다.(증명끝)

정리 3 리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 α －반대칭재귀계량접속의 호상접속 $\overset{m}{\nabla}$ 에 관한 곡률텐소르가 령이면 리만다양체 $(M,\ g,\ \overset{\circ}{\nabla})$ 는 공형평탄이다.

증명 식 (5)와 (8)를 합하고

$$\beta_{ik}:=a_{ik}+b_{ik}$$

로 놓으면

$$\overset{m}{R}{}^l_{ijk}+\overset{m*}{R}{}^l_{ijk}=2K^l_{ijk}+\delta^l_i\beta_{jk}-\delta^l_j\beta_{ik}+g_{jk}\beta^l_i-g_{ik}\beta^l_j-2(\alpha-1)\delta^l_k\pi_{ij} \tag{11}$$

가 성립한다. 따라서 이 식을 $i,\ l$ 에 관하여 축약하면 다음과 같다.

$$\overset{m}{R}_{jk}+\overset{m*}{R}_{jk}=2K_{jk}+(n-2)\beta_{jk}+g_{jk}\beta^i_i+2(\alpha-1)\pi_{jk} \tag{12}$$

그러므로 이 식을 $j,\ k$ 에 관하여 빗대칭화하면 다음의 식이 성립한다.

$$\overset{m}{R}_{[jk]}+\overset{m*}{R}_{[jk]}=2K_{[jk]}+(n-2)\beta_{[jk]}+4(\alpha-1)\pi_{jk} \tag{13}$$

그런데 식 (6)에 의하여

$$\beta_{[jk]}=(2\alpha-1)\pi_{jk}$$

이다. 따라서 이 식을 식 (13)에 넣으면 다음의 식이 얻어진다.

$$\pi_{jk}=\frac{1}{n(2\alpha-1)-2}(\overset{m}{R}_{[jk]}+\overset{m*}{R}_{[jk]}-2K_{[jk]}) \tag{14}$$

한편 식 (12)의 량변에 g^{jk} 를 곱하고 축약을 실시하면

$$\overset{m}{R}+\overset{m*}{R}=2K+2(n-1)\beta^i_i$$

가 성립한다. 이 식에서 β^i_i 를 구하면 다음과 같다.

$$\beta^i_i=\frac{1}{2(n-1)}(\overset{m}{R}+\overset{m*}{R}-2K) \tag{15}$$

따라서 식 (14)와 (15)를 식 (12)에 대입하고 β_{jk} 를 구하면 다음과 같다.

$$\beta_{jk}=\frac{1}{n-2}\left[\overset{m}{R}_{jk}+\overset{m*}{R}_{jk}-2K_{jk}-\frac{g_{jk}}{2(n-1)}(\overset{m}{R}+\overset{m*}{R}-2K)-\frac{2(\alpha-1)}{n(2\alpha-1)-2}\left(\overset{m}{R}_{[jk]}+\overset{m*}{R}_{[jk]}-2K_{[jk]}\right)\right] \tag{16}$$

그러므로 식 (14)와 (16)을 식 (11)에 넣고 정돈하면 다음과 같다.

$$\overset{m}{R}{}^l_{ijk}-\frac{1}{n-2}(\delta^l_i\overset{m}{R}_{jk}-\delta^l_j\overset{m}{R}_{ik}+g_{jk}\overset{m}{R}{}^l_i-g_{ik}\overset{m}{R}{}^l_j)+$$

$$+\frac{\overset{m}{R}}{(n-1)(n-2)}(\delta^l_i g_{jk}-\delta^l_j g_{ik})+\frac{2(\alpha-1)}{(n-2)[(2\alpha-1)n-2]}\cdot$$

$$\cdot[\delta^l_i(\overset{m}{R}_{jk}-\overset{m}{R}_{kj})-\delta^l_j(\overset{m}{R}_{ik}-\overset{m}{R}_{ki})+g_{jk}(\overset{m}{R}{}^l_i-\overset{m}{R}{}^l_{\cdot i})-g_{ik}(\overset{m}{R}{}^l_j-\overset{m}{R}{}^l_{\cdot j})+(n-2)\delta^l_k(\overset{m}{R}_{ij}-\overset{m}{R}_{ji})]+$$

$$+\overset{m*}{R}{}^l_{ijk}-\frac{1}{n-2}(\delta^l_i\overset{m*}{R}_{jk}-\delta^l_j\overset{m*}{R}_{ik}+g_{jk}\overset{m*}{R}{}^l_i-g_{ik}\overset{m*}{R}{}^l_j)+$$

$$+\frac{\overset{m*}{R}}{(n-1)(n-2)}(\delta_i^l g_{jk}-\delta_j^l g_{ik})+\frac{2(\alpha-1)}{(n-2)[(2\alpha-1)n-2]}\cdot$$

$$\cdot[\delta_i^l(\overset{m*}{R}_{jk}-\overset{m*}{R}_{kj})-\delta_j^l(\overset{m*}{R}_{ik}-\overset{m*}{R}_{ki})+g_{jk}(\overset{m*}{R}{}_i^l-\overset{m*}{R}{}_{\cdot i}^{l})-g_{ik}(\overset{m*}{R}{}_j^l-\overset{m*}{R}{}_{\cdot j}^{l})+(n-2)\delta_k^l(\overset{m*}{R}_{ij}-\overset{m*}{R}_{ji})]=$$

$$=2\left[K_{ijk}^l-\frac{1}{n-2}(\delta_i^l K_{jk}-\delta_j^l K_{ik}+g_{jk}K_i^l-g_{ik}K_j^l)-\frac{K}{(n-1)(n-2)}(\delta_i^l g_{jk}-\delta_j^l g_{ik})\right]=2\overset{\circ}{C}{}_{ijk}^l \tag{17}$$

여기서 $\overset{\circ}{C}{}_{ijk}^l$ 은 레비－치비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$ 에 관한 공형곡률텐소르이다. 따라서 이 식으로부터 $\overset{m}{R}{}_{ijk}^l=0$ 이면 $\overset{m*}{R}{}_{ijk}^l=0$ 이다. 그러므로 $\overset{\circ}{C}{}_{ijk}^l=0$ 이다. 따라서 리만다양체 $(M,\ g,\ \overset{\circ}{\nabla})$ 는 공형평탄이다.(증명끝)

련결인 리만다양체 $(M,\ g)$ 의 임의의 점 p 에서 접속 ∇ 에 관한 단면곡률이 2차원방향 E ($T_p(M)$ 의 임의의 2차원부분공간)의 선택에 무관계하면 곡률텐소르는 다음과 같이 표시된다.

$$R_{ijk}^l=k(p)(\delta_i^l g_{jk}-\delta_j^l g_{ik}) \tag{18}$$

따라서 만일 $k(p)=\text{const}$ 이면 리만다양체 $(M,\ g,\ \nabla)$ 는 일정곡률다양체로 된다.

정리 4 차원이 2보다 큰 련결인 리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 α －반대칭재귀계량접속 ∇ 의 호상접속 $\overset{m}{\nabla}$ 에 관한 단면곡률이 임의의 점 p 에서 2차원방향 E 의 선택에 무관계하고

$$\alpha=\frac{1}{2} \tag{19}$$

이면 리만다양체 $(M,\ g,\ \overset{m}{\nabla})$ 은 일정곡률다양체로 된다.

증명 리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 α －반대칭재귀계량접속 ∇ 의 호상접속 $\overset{m}{\nabla}$ 에 관한 곡률텐소르에 관하여 다음과 같은 제2종의 비앙끼항등식이 성립한다.

$$\overset{m}{\nabla}_h\overset{m}{R}{}_{ijk}^l+\overset{m}{\nabla}_i\overset{m}{R}{}_{jhk}^l+\overset{m}{\nabla}_j\overset{m}{R}{}_{hik}^l=\overset{m}{T}{}_{hi}^p\overset{m}{R}{}_{jpk}^l+\overset{m}{T}{}_{ij}^p\overset{m}{R}{}_{hpk}^l+\overset{m}{T}{}_{jh}^p\overset{m}{R}{}_{ipk}^l$$

따라서 이 식에 식 (18)을 대입하고 식 (4)를 대입하면 다음의 식이 얻어진다.

$$\overset{m}{\nabla}_h k(\delta_i^l g_{jk}-\delta_j^l g_{ik})+\overset{m}{\nabla}_i k(\delta_j^l g_{hk}-\delta_h^l g_{jk})+\overset{m}{\nabla}_j k(\delta_h^l g_{ik}-\delta_i^l g_{hk})+$$
$$+(2\alpha-3)k[\pi_h(\delta_i^l g_{jk}-\delta_j^l g_{ik})+\pi_i(\delta_j^l g_{hk}-\delta_h^l g_{jk})+\pi_j(\delta_h^l g_{ik}-\delta_i^l g_{hk})]=$$
$$=-2k[\pi_h(\delta_i^l g_{jk}-\delta_j^l g_{ik})+\pi_i(\delta_j^l g_{hk}-\delta_h^l g_{jk})+\pi_j(\delta_h^l g_{ik}-\delta_i^l g_{hk})]$$

그러므로 이 식을 정돈하면 다음과 같다.

$$\overset{m}{\nabla}_h k(\delta_i^l g_{jk}-\delta_j^l g_{ik})+\overset{m}{\nabla}_i k(\delta_j^l g_{hk}-\delta_h^l g_{jk})+\overset{m}{\nabla}_j k(\delta_h^l g_{ik}-\delta_i^l g_{hk})+$$
$$+(2\alpha-1)k[\pi_h(\delta_i^l g_{jk}-\delta_j^l g_{ik})+\pi_i(\delta_j^l g_{hk}-\delta_h^l g_{jk})+\pi_j(\delta_h^l g_{ik}-\delta_i^l g_{hk})]=0$$

따라서 이 식을 $i,\ l$ 에 관하여 축약하면 다음과 같다.

$$(n-2)(\overset{m}{\nabla}_h kg_{jk} - \overset{m}{\nabla}_j kg_{hk}) + (2\alpha-1)(n-2)k(\pi_h g_{jk} - \pi_j g_{hk}) = 0$$

그러므로 이 식에 g^{jk} 를 곱하고 축약을 실시하면 다음과 같다.

$$(n-1)(n-2)[\overset{m}{\nabla}_h k + (2\alpha-1)k\pi_h] = 0$$

그런데 $\dim M > 2$ 이므로

$$\overset{m}{\nabla}_h k + (2\alpha-1)k\pi_h = 0$$

이다. 따라서 식 (19)가 만족되면 이 식으로부터 $k = \text{const}$ 이다. 그러므로 리만다양체 $(M,\ g,\ \overset{m}{\nabla})$ 은 일정곡률다양체로 된다.(증명끝)

주의 정리 4는 식 (3)과 식 (4)를 리용하면

$$\nabla_k g_{ij} = -\pi_k g_{ij} + \pi_i g_{jk} + \pi_j g_{ik},\ T_{ij}^k = \pi_i \delta_j^k - \pi_j \delta_i^k \tag{20}$$

를 만족시키며 접속결수가

$$\Gamma_{ij}^k = \left\{ {k \atop ij} \right\} + \frac{1}{2}\pi_i \delta_j^k - \frac{1}{2}\pi_j \delta_i^k - \frac{1}{2} g_{ij}\pi^k \tag{21}$$

인 비대칭비계량접속이 정의된 리만다양체는 일정곡률다양체로 된다는것을 보여준다. 그러므로 식 (20) 또는 (21)은 일정곡률다양체로 되는 새로운 형태의 비대칭비계량접속이다.

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보 수학, 66, 3, 50, 주체109(2020).

[2] K. A. Dunn; Tensor. N. S., 29, 214, 1975.

[3] I. Suhendro; Progress in Physics, 4, 47, 2007.

[4] K. Yano; Rev. Roum. Math. Pures et. Appl., 15, 1579, 1970.

주체109(2020)년 9월 5일 원고접수

On a Mutual Connection of the α – semi-symmetric Metric Recurrent Connection in a Riemannian Manifold

Kwak Kum Hyok, Ho Tal Yun

In this paper we studied properties of the curvature tensor of the mutual connection of the α-semi-symmetric metric recurrent connection and conjugate symmetry condition and constant curvature condition of the mutual connection. And we presented a new form of non-symmetric non-metric connection with constant curvature in a Riemannian manifold.

Keywords: mutual connection, conjugate symmetry, constant curvature