김일성종합대학학보 수 학
주체110(2021)년 제67권 제2호

정의 위상적엔트로피를 가지는 동력학계의 유전족에 의한 한가지 카오스성에 관한 연구

안위정, 김진현

경애하는 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《과학연구부문에서는 나라의 경제발전과 인민생활향상에서 전망적으로 풀어야 할 문제들과 현실에서 제기되는 과학기술적문제들을 풀고 첨단을 돌파하여 지식경제건설의 지름길을 열어놓아야 합니다.》

선행연구[10]에서는 주기점을 가지는 비주기적인 위상이행적인 계가 리－요크의 의미에서 카오스적이라는것을 밝힘으로써 드바니의 카오스성으로부터 리－요크의 의미에서의 카오스성이 나온다는것을 밝혔다. 선행연구[9]에서는 위상적엔트로피가 정이면(즉 위상적카오스이면) 리－요크의 의미에서 카오스적이라는것을 밝혔다. 우의 론문에서는 에르고드리론을 리용하여 결과를 유도했는데 선행연구[11]에서는 같은 결과를 조합론적인 방법으로 증명하였다.

선행연구[5]에서는 위상적엔트로피가 정이면 임의의 $n\ge 2$ 에 대하여 리－요크의 의미에서 $n-$카오스적이라는것을 밝힘으로써 선행연구[9]의 결과를 확장하였다.

또한 선행연구[12]에서는 위상적엔트로피가 정이면 2형태의 분포적카오스성을 가진다는것을 증명하였다.

선행연구[2]에서는 리－요크의 의미에서의 평균$n-$카오스개념을 정의하고 위상적엔트로피가 정이면 리－요크의 의미에서의 카오스적이라는 선행연구[12]의 결과를 리－요크의 의미에서의 평균$n-$카오스에로 확장하였다.

또한 선행연구[1]에서는 우의 결과를 자연수렬에 의한 리－요크의미에서의 평균$n-$카오스성에로 일반화하였다.

최근시기 위상이행성과 초기조건에 관한 예민한 의존성, 카오스성 등 동력학계의 기초개념들을 유전족을 리용하여 세분화하여 연구하고있다.

선행연구[4]에서는 유전족을 리용하여 카오스성의 또 다른 개념의 하나인 $(\mathcal{F}_1,\ \mathcal{F}_2)-$카오스성을 정의하고 이에 대하여 연구하였다.

선행연구[6, 8]에서는 우의 개념을 확장하여 유전족을 리용한 카오스성의 보다 강한 개념인 $(\mathcal{F}_1,\ \mathcal{F}_2)-n-$카오스성을 정의하고 이에 대하여 연구하였다.

선행연구[3]에서는 위상적엔트로피가 정이면 $1\frac{1}{2}$ 형태의 분포적카오스적 즉 임의의 $s\in(0,\ 1)$에 대하여 $(\overline{M}(1),\ \overline{M}(s))-$카오스적이라는것을 밝혔다.

론문에서는 유전족을 리용한 다중카오스성 즉 $(\mathcal{F}_1,\ \mathcal{F}_2)-n-$카오스성을 고찰하고 위상적엔트로피가 정이면 충분히 작은 $s>0$ 에 대하여 $(\overline{M}(1),\ \overline{M}(s))-n-$카오스적이라는것을 증명하였다.

위상동력학계 $(X,\ T)$는 콤팍트거리공간 X 와 X 를 그자체로 보내는 우로의 련속넘기기 $T:X\to X$ 의 쌍을 의미한다.

$(X,\ T)$는 위상동력학계이고 μ는 X의 보렐 $\sigma-$대수 $\mathcal{B}$ 우에서 정의된 보렐확률측도, $\mathcal{B}_\mu$는 μ에 의한 $\mathcal{B}$의 완비화라고 하자.

$\{\alpha_i\}_{i\in I}$가 X의 가측모임들로 이루어진 유한분할들의 셀수 있는 족이라고 할 때 $\alpha=\bigvee_{i\in I}\alpha_i$를 가측분할이라고 부른다. α가 가측분할일 때 $\alpha^-=\bigvee_{n=1}^{\infty}T^{-n}\alpha$로 약속한다.

α의 원소들의 합으로 표시되는 $A\in\mathcal{B}_\mu$들은 $\mathcal{B}_\mu$의 부분 $\sigma-$대수를 이루는데 이것을 $\alpha^\wedge$ 혹은 α로 표시한다. 분명히 $(\alpha^-)^\wedge=(\alpha^\wedge)^-(\mathrm{mod}\ \ \mu)$이다.

α가 가측분할일 때 $\mathcal{B}_\mu$의 어떤 부분 $\sigma-$대수 $\mathcal{F}$가 존재하여 $\alpha^\wedge=\mathcal{F}\,(\mathrm{mod}\ \ \mu)$가 성립한다. 이때 $\mu=\int_X\mu_x d\mu(x)$가 성립한다. 여기서 $\mu_x\in\mathcal{M}(X)$이고 $\mu-$a.e. $x\in X$에 대하여 $\mu_x(\alpha(x))=1$이며 $\alpha(x)$는 x를 포함하는 분할 α의 원소를 의미한다. 이것을 $\mathcal{F}$ 우에서의 보렐측도 μ의 적분분해라고 부른다.

$n\ge2$일 때 $(x_1,\ \cdots,\ x_n)\in X^{(n)}$에 대하여

$$\lim_{k\to+\infty}\max_{1\le i<j\le n}d(T^kx_i,\ T^kx_j)=0$$

을 만족시키면 쌍 $(x_1,\ \cdots,\ x_n)$은 $n-$ 점근적이다고 말한다. 점근 $n-$ 쌍들의 모임을 $\mathrm{Asy}_n(X,\ T)$로 표시한다.

$(X,\ d)$는 콤팍트거리공간이고 $\mathcal{F}_1,\ \mathcal{F}_2$를 유전족이라고 하자. 그리고 T를 $T:X\to X$인 련속넘기기라고 하자. $D\subset X$가 임의의 서로 다른 $n\ge2$개의 점 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\in D$에 대하여 다음의 조건을 만족시키면 D를 $(X,\ T)$의 $(\mathcal{F}_1,\ \mathcal{F}_2)-n-$스크람블모임이라고 부른다.

① 임의의 $t>0$에 대하여 $\{k\in\mathbf{Z}_+:\max\limits_{1\le i<j\le n}d(T^kx_i,\ T^kx_j)<t\}\in\mathcal{F}_1$

② 어떤 $\delta>0$이 존재하여 $\{k\in\mathbf{Z}_+:\min\limits_{1\le i<j\le n}d(T^kx_i,\ T^kx_j)>\delta\}\in\mathcal{F}_2$

X에 셀수 없는 $(\mathcal{F}_1,\ \mathcal{F}_2)-n-$스크람블모임이 존재하면 $(X,\ T)$는 $(\mathcal{F}_1,\ \mathcal{F}_2)-n-$카오스적이다고 말한다.

다음의 기호약속을 하자.

$$W^s(x,\ T):=\{y\in X:\ d(T^nx,\ T^ny)\to0\}$$

정리의 증명을 위하여 몇가지 보조정리들을 보기로 하자.

보조정리 1 $(X,\ T)$가 위상동력학계이고 $\mu\in\mathcal{M}^e(X,\ T)$이며 $h_\mu(T)>0$이라고 하자. $\mu=\int_X\mu_X d\mu(x)$가 μ의 $\mathrm{P}_\mu(T)$ 우에서의 적분분해[2]라고 하면 $\mu-$a.e. $x\in X$에 대하여

$$\overline{W^s(x,\ T)\cap\mathrm{supp}(\mu_x)}=\mathrm{supp}(\mu_x)$$

가 성립한다.

정리의 조건 ①을 만족시키는 쌍 $(x_1,\ \cdots,\ x_n)\in X^{(n)}$들의 모임을 A_n, 조건 ②에서 $s\in(0,\ 1)$에 대하여 적당한 $t_{n,\,s}>0$이 있어서 $\{k\in\mathbf{Z}_+:\min\limits_{1\le i<j\le n}d(T^kx_i,\ T^kx_j)>t_{n,\,s}\}\in\overline{M}(s)$를 만족시키는 쌍 $(x_1,\ \cdots,\ x_n)\in X^{(n)}$들의 모임을 $B_{n,\,s}$, 조건 ②를 만족시키는 쌍 $(x_1,\ \cdots,\ x_n)\in X^{(n)}$

들의 모임을 B_n이라고 하자. $(n\ge 2)$

$$\lim_{N\to\infty}\inf\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\max_{1\le i<j\le n}d(T^kx_i,\ T^kx_j)=0$$

을 만족시키는 서로 다른 $n\ge 2$개의 점 $x_1,\ \cdots,\ x_n\in X$ 들의 쌍 $(x_1,\ \cdots,\ x_n)\in X^{(n)}$ 들의 모임을 $P_n(X,\ T)$라고 하자. 그러면 다음의 보조정리가 성립한다.

보조정리 2 $\mathrm{Asy}_n(X,\ T)\subset P_n(X,\ T)\subset A_n$이 성립한다.

$\mu\in\mathcal{M}(X,\ T)$ 이고 $\mu=\int_X\mu_x d\mu(x)$ 를 $\mathrm{P}_\mu(T)$ 우에서의 μ 의 적분분해라고 하자. 이때 $n\ge 2$에 대하여 $\lambda_n(\mu)$를 $\lambda_n(\mu):=\int_X\mu_x^{(n)}d\mu(x)$로 정의하자. 여기서 $\mu_x^{(n)}=\underbrace{\mu_x\times\cdots\times\mu_x}_{n}$이다.

$\mu\in\mathcal{M}^e(X,\ T)$이고 $h_\mu(T)>0$이면 $\mu-$a.e. $x\in X$ 에 대하여 μ_x 는 비원자적이고 $\lambda_n(\mu)\in\mathcal{M}(X^{(n)},\ T^{(n)})$이다.

이때 $T^{(n)}$에 대한 $\lambda_n(\mu)$의 생성점전부의 모임을 G_n이라고 하자. 즉

$$(x_1,\ \cdots,\ x_n)\in G_n \Leftrightarrow \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\delta_{(T^{(n)})^i(x_1,\ \cdots,\ x_n)}\to\lambda_n(\mu)$$

그러면 선행연구[7]의 따름 4.20으로부터 $\lambda_n(\mu)(G_n)=1$이다.

보조정리 3 $\mu\in\mathcal{M}^e(X,\ T)$ 일 때 임의의 $s\in(0,\ 1)$ 에 대하여 $G_n\subset B_{n,\ s}$ 이고 $\mu-$a.e. $x\in X$ 에 대하여 $G_n\cap\mathrm{supp}(\mu_x)^{(n)}$은 $\mathrm{supp}(\mu_x)^{(n)}$에서 조밀하다.

보조정리 4 임의의 $0<s<\eta/\mathrm{diam}(X)$에 대하여 $D_{n,\ \eta}\subset B_{n,\ s}$ $(\eta>0)$ 즉

$$D_{n,\ \eta}\subset B_n$$

이 성립한다.

정리 $(X,\ T)$가 위상동력학계이고 $h_\mu(T)>0$ 인 불변에르고드측도 μ 가 존재하면 $\mu-$a.e. $x\in X$ 에 대하여 마이씨엘스키모임

$$K_x\subseteq\overline{W^s(x,\ T)}\cap\overline{W^u(x,\ T)}$$

가 존재하여 임의의 $n\ge 2$와 서로 다른 n 개의 점 $x_1,\ \cdots,\ x_n\in K_x$에 대하여 다음의 사실들이 만족된다.

① 임의의 $t>0$에 대하여 $\{k\in\mathbf{Z}_+:\max_{1\le i<j\le n}d(T^kx_i,\ T^kx_j)<t\}\in\overline{M}(1)$이다.

② 적당한 정수 $a_n>0$이 있어서 임의의 $s\in(0,\ a_n)$에 대하여

$$\{k\in\mathbf{Z}_+:\min_{1\le i<j\le n}d(T^kx_i,\ T^kx_j)>t_{n,\ s}\}\in\overline{M}(s)$$

가 성립하게 되는 $t_{n,\ s}>0$이 존재한다. 여기서 a_n은 n에만 관계되는 상수이다.

증명 $\mu=\int_X\mu_x d\mu(x)$를 $\mathrm{P}_\mu(T)$우에서의 μ의 적분분해라고 하자.

보조정리 1에 의하여 어떤 $X_1\in\mathcal{B}_\mu$ $(\mu(X_1)=1)$가 존재하여 임의의 $x\in X_1$에 대하여 $\overline{W^s(x,\ T)}\cap\mathrm{supp}(\mu_x)=\mathrm{supp}(\mu_x)$가 성립한다.

분명히 $W^s(X, T)^{(n)} \subset \mathrm{Asy}_n(X, T)$ 이다. 그러므로

$$\mathrm{Asy}_n(X, T) \cap \mathrm{supp}(\mu_x)^{(n)} \supset W^s(X, T)^{(n)} \cap \mathrm{supp}(\mu_x)^{(n)} = (W^s(X, T) \cap \mathrm{supp}(\mu_x))^{(n)}$$

이 성립하고 $\overline{W^s(x, T) \cap \mathrm{supp}(\mu_x)} = \mathrm{supp}(\mu_x)$ 이므로

$$\overline{\mathrm{Asy}_n(X, T) \cap \mathrm{supp}(\mu_x)^{(n)}} = \mathrm{supp}(\mu_x)^{(n)}$$

이다. 즉 임의의 $x \in X_1$에 대하여 $\mathrm{Asy}_n(X, T) \cap \mathrm{supp}(\mu_x)^{(n)}$ 은 $\mathrm{supp}(\mu_x)^{(n)}$ 에서 조밀하다.

한편

$$P_n(X, T) = \bigcap_{m=1}^{+\infty} \bigcap_{l=1}^{+\infty} \left(\bigcup_{N \ge l} \left\{ (x_1, \cdots, x_n) \in X^{(n)} : \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \max_{1 \le i < j \le n} d(T^k x_i, T^k x_j) < \frac{1}{m} \right\} \right)$$

이므로 $P_n(X, T)$ 는 G_δ －모임이다.

또한 보조정리 2에 의하여 $\mathrm{Asy}_n(X, T) \subset P_n(X, T)$ 이므로 임의의 $x \in X_1$ 에 대하여 $P_n(X, T) \cap \mathrm{upp}(\mu_x)^{(n)}$ 은 $\mathrm{supp}(\mu_x)^{(n)}$ 의 조밀한 G_δ －모임이다.

한편 보조정리 3에 의하여 어떤 $X_2 \in \mathcal{B}_\mu(\mu(X_2) = 1)$ 가 존재하여 임의의 $x \in X_2$ 에 대하여 $G_n \cap \mathrm{supp}(\mu_x)^{(n)}$ 은 $\mathrm{supp}(\mu_x)^{(n)}$ 의 조밀한 모임이고 그리고 G_n 이 조밀한 모임이다. 보조정리 3의 증명에서 알수 있는바와 같이 $\lambda_n(\mu)(\Delta^{(n)}) = 0$ 이다.

또한 선행연구[2]의 정리 1.1의 증명과정을 보면 적당한 $\tau > 0$ 이 있어서

$$W_\tau := \{(x_1, \cdots, x_n) \in X^{(n)} : \min_{1 \le i < j \le n} d(x_i, x_j) > \tau\}, \ \eta_n := \tau \cdot \lambda_n(\mu)(W_\tau) > 0$$

이라고 놓을 때 $G_n \subset D_{n, \eta_n}$ 이라는것을 알수 있다.

한편 보조정리 4에 의하여 $a_n := \eta_n / \mathrm{diam}(X)$ 이라고 놓으면 임의의 $0 < s < a_n$ 에 대하여 $D_{n, \eta_n} \subset B_{n, s}$ 즉 $G_n \subset D_{n, \eta_n} \subset B_n$ 이다.

임의의 $x \in X_2$ 에 대하여 $G_n \cap \mathrm{supp}(\mu_x)^{(n)}$ 은 $\mathrm{supp}(\mu_x)^{(n)}$ 의 조밀한 모임이므로 $D_{n, \eta_n} \cap \mathrm{supp}(\mu_x)^{(n)}$ 은 $\mathrm{supp}(\mu_x)^{(n)}$ 의 조밀한 G_δ －모임이다. 따라서 $X_0 = X_1 \cap X_2$ 라고 놓으면 $\mu(X_0) = 1$ 이고 임의의 $x \in X_0$ 에 대하여 $A_n \cap B_n \cap \mathrm{supp}(\mu_x)^{(n)}$ 은 $\mathrm{supp}(\mu_x)^{(n)}$ 의 조밀한 G_δ －모임을 포함한다.

그러면 선행연구[2]의 마이씨엘스키정리로부터 $\mathrm{supp}(\mu_x)^{(n)}$ 의 어떤 조밀한 마이씨엘스키모임 K_x 가 존재하여 임의의 $n \ge 2$ 에 대하여 $K_x \subset (A_n \cap B_n) \cup \Delta^{(n)}$ 즉 정리의 조건 ①, ②를 만족시키는 마이씨엘스키모임 K_x 가 존재한다.(증명끝)

따름 (X, T) 가 위상동력학계이고 $h_{\mathrm{top}}(T) > 0$ 이면 임의의 $n \ge 2$ 와 충분히 작은 $s \in (0, 1)$ 에 대하여 (X, T) 는 $(\overline{M}(1), \overline{M}(s)) - n -$ 카오스적이다.

참 고 문 헌

[1] J. Li, Y. Qiao; Monatsh. Math., 186, 153, 2018.
[2] W. Huang et al.; J. Functional Anal., 266, 3377, 2014.
[3] T. Downarowicz, Y. Lacroix; Ergod. Th. & Dynam. Sys., 34, 1, 110, 2014.

[4] R. Li; Nonlinear Anal., 72, 2290, 2010.
[5] J. Xiong; Sci. China Ser., A48, 7, 929, 2005.
[6] J. Li, P. Oprocha; J. Differ. Equ. Appl., 19, 6, 927, 2013.
[7] M. Einsiedler, T. Ward; Ergodic Theory with a View Towards Number Theory, Springer, 121～126, 2011.
[8] J. Li et al.; Ergod. Th. & Dynam. Sys., 35, 2587, 2015.
[9] F. Blanchard et al.; J. Reine Angew. Math., 547, 51, 2002.
[10] W. Huang, X. Ye; Topol. Appl., 117, 3, 259, 2002.
[11] D. Kerr, H. F. Li; Math. Ann., 338, 4, 869, 2007.
[12] T. Downarowicz; Proc. Amer. Math. Soc., 142, 137, 2014.

주체109(2020)년 12월 5일 원고접수

Study on a Kind of the Chaos of Dynamical System which has Positive Topological Entropy Using Furstenberg Family

An Wi Jong, Kim Jin Hyon

In this paper, we consider the multivariant chaos; namely, $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)-n-$chaos using furstenberg family and we prove that for any $s \in (0, 1)$ topological dynamical system is $(\overline{M}(1), \overline{M}(s))-n-$chaotic if it has positive entropy.

Keyword: topological entropy