김일성종합대학학보 JOURNAL OF KIM IL SUNG UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체104(2015)년 제61권 제8호 Vol. 61 No. 8 JUCHE104(2015).

비선형임풀스분수계미분방정식의 초기값문제에 대한 한가지 음계차근사풀이의 수렴성

최희철, 박준민

우리는 최근에 활발히 연구되고있는 분수계임풀스미분방정식의 계차근사풀이법에 대하여 론의하였다.

선행연구[1]에서는 한가지 캐푸터임풀스분수계미분방정식풀이의 유일존재성을 론의하였으며 선행연구[2]에서는 옹근수계(1계)임풀스미분방정식의 초기값문제에 대한 한가지 계차근사알고리듬을 제기하였으나 아무러한 수값해석적인 리론취급을 하지 않았다.

선행연구[3]에서는 분수계편미분방정식에 대한 한가지 계차근사도식을 제기하고 근사도식의 안정성과 근사풀이의 수렴성을 론의하였다. 그러나 안정성과 수렴성의 론의에는 수렴상수가 반복번호에 따라 커지는것과 같은 일정한 오유가 있다는것을 확인할수 있다.

론문에서는 선행연구[1]에서와 류사한 분수계임풀스미분방정식에 대하여 선행연구[3]의 분수계도함수근사식을 리용하는 한가지 음계차근사도식을 제기하고 근사도식의 안정성과 근사풀이의 정확한 풀이에로의 수렴성을 론의한다.

우리는 다음의 문제에 대한 계차법을 론의하려고 한다.

$$\begin{cases} {}^cD_{t_k}^{\alpha}x(t)=f(t,\ x(t)), & t\in(t_k,\ t_{k+1}) \\ \Delta x(t_{k+1})=I_{k+1}(x(t_{k+1}^-)), & k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m \\ x(0)=x_0 \end{cases} \tag{1}$$

이 식에 들어있는 기호의 의미는 다음과 같다.

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_m<t_{m+1}=1,\ \ 0<\alpha<1,\ \ {}^cD_{t_k}^{\alpha}x(t):=\left(I_{t_k}^{\alpha}\circ\frac{d}{dt}\right)x(t),\ \ I_{a+}^{\alpha}x(t):=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t\frac{x(s)ds}{(t-s)^{1-\alpha}},\ \ x>a$$

1. 계차근사도식과 예비적결과들

몇가지 기호약속을 하자.

$$N_k\in\mathbf{N},\ \ T_k:=t_{k+1}-t_k,\ \ \tau_k:=T_k/N_k,\ \ t_n^k:=n\cdot\tau_k,\ \ n=0,\ 1,\ \cdots,\ N_k,\ \ k=0,\ \cdots,\ m$$

정리 1[3] $0<\alpha<1$이라고 하자.

이때 캐푸터도함수 ${}^cD_{t_k}^{\alpha}x(t)$는 $[0,\ T]$에서 다음과 같이 근사된다.

$${}^cD_{t_k}^{\alpha}x(t_{n+1})=\frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{j=0}^{n}b_j(x(t_{n+1-j})-x(t_{n-j}))+O(\tau^{1+\alpha}) \tag{2}$$

여기서 $\tau:=T/N,\ \ t_n:=n\cdot\tau,\ \ n=0,\ 1,\cdots,\ N,\ \ b_j:=(j+1)^{1-\alpha}-j^{1-\alpha}$.

b_k에 관하여 다음의 사실이 성립된다.

보조정리 1 [3] $b_j > 0\ (j = 0, \cdots, n)$, $1 = b_0 > b_1 > \cdots > b_n\ (b_n \to 0,\ n \to \infty)$

보조정리 2 $\forall j \in \boldsymbol{N},\ b_j * b_j \le b_{j-1} * b_{j+1}$; $\min\limits_{j \in \{1, \cdots, n\}} \{b_j \cdot b_{n-j}\} = \begin{cases} b_{n'}^2, & n = 2n',\ n' \in \boldsymbol{N} \\ b_{n'} \cdot b_{n'+1}, & n = 2n'+1,\ n' \in \boldsymbol{N} \end{cases}$

식 (2)를 리용하면 식 (1)의 첫 식에 대한 다음의 평가식이 성립된다.

$$\frac{\tau_k^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^{n} b_j (x(t_{n+1-j}^k) - x(t_{n-j}^k)) = f(t_{n+1}^k,\ x(t_{n+1}^k)) + O(\tau_k^{1+\alpha})$$

이제 $\mu_k := \tau_k^\alpha \cdot \Gamma(2-\alpha)$라고 표시하면 이 식을 다음과 같이 변경하여 쓸수 있다.

$$x(t_{n+1}^k) = b_n x(t_0^k) + \sum_{j=0}^{n-1} (b_j - b_{j+1}) x(t_{n-j}^k) + \mu_k \cdot f(t_{n+1}^k,\ x(t_{n+1}^k)) + R_{n+1}^k \tag{3}$$

$$\exists c_1 > 0;\ | R_{n+1}^k | \le c_1 \cdot \tau_k^{1+2\alpha} \tag{4}$$

이제 x_n^k을 $x(t_n^k)$의 근사값으로, f_n^k을 $f(t_n^k,\ x(t_n^k))$의 근사값으로 약속하면 식 (1)의 첫 식에 대한 다음의 계차근사식을 얻는다.

$$x_{n+1}^k = b_n x_0^k + \sum_{j=0}^{n-1} (b_j - b_{j+1}) x_{n-j}^k + \mu_k \cdot f_{n+1}^k,\ x_1^k = b_0 x_0^k + \mu_k \cdot f_1^k$$
$$k = 0, \cdots, m,\ n = 1, \cdots, N_k - 1 \tag{5}$$

식 (1)의 둘째 식은 $x(t_{k+1} + 0) = x(t_{k+1} - 0) + I_{k+1}(x(t_{k+1} - 0)),\ k = 0, \cdots, m$과 같이 쓸수 있다.

그러므로 다음의 근사식을 생각할수 있다.

$$x_0^k = x_{N_{k-1}}^{k-1} + I_k(x_{N_{k-1}}^{k-1})\ (k = 1, 2, \cdots, m),\ x_0^0 = x_0 \tag{6}$$

결국 식 (1)에 대한 계차근사도식은 식 (5), (6)과 같다.

2. 계차도식의 안정성해석

초기조건 $x(0) = x_0$에서 δ만 한 오차가 생겨 초기조건이 $x(0) = x_0 + \delta$로 되였다고 하고 이 오차가 어떻게 증폭되는가를 보자.

x_0과 $x_0 + \delta$를 초기조건으로 하는 식 (5), (6)의 근사풀이를 각각 (x_n^k), $(\tilde{x}_n^k)$로 표시하고 $\rho_n^k := x_n^k - \tilde{x}_n^k$, $f_n^k := f(t_n^k,\ x_n^k)$, $\tilde{f}_n^k := f(t_n^k,\ \tilde{x}_n^k)$이라고 하자.

정의 $\exists c_0 > 0;\ \max\limits_{n,\ k} | \rho_n^k | \le c_0 | \rho_0^0 |$이 성립되면 식 (5), (6)은 안정하다고 말한다.

가정 1 $\exists L > 0;\ \forall x,\ y \in \boldsymbol{R},\ | f(t,\ x) - f(t,\ y) | \le L | x - y |$

가정 2 $\exists L_k > 0;\ \forall x,\ y \in \boldsymbol{R},\ | I_k(x) - I_k(y) | \le L_k | x - y |$

정리 2 가정 1, 2와 조건

$$\tau_k^\alpha \le \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)L} \min\left\{ \sum_{j=1}^{n} b_j e^{-(n\tau_k)^{1-\alpha}} (e^{((n-j+1)\tau_k)^{1-\alpha}} - e^{((n-j)\tau_k)^{1-\alpha}}),\ (e^{\tau_k^{1-\alpha}} - 1) \right\},\ n = \overline{1,\ N_k},\ k = \overline{0,\ m} \tag{7}$$

이 만족되면 계차도식 (5), (6)은 안정하다.(증명생략)

이제부터 정리 2의 조건이 만족되기 위한 충분조건을 해명하자.

가정 3 $0.5<\alpha<1$

정리 3 가정 3과 조건 $(1/N_k)^{2\alpha-1}\le\frac{1}{e\cdot\Gamma(2-\alpha)\cdot L}\min\{2N_k\cdot b_{N_k}^2,\ 1\}$, $k=\overline{0,\ m}$ 이 만족되면 정리 2의 조건 (7)이 성립된다.

증명 $\sum_{j=1}^{n}b_j((n-j+1)^{1-\alpha}-(n-j)^{1-\alpha})=\sum_{j=1}^{n}b_j\cdot b_{n-j}\ge n\cdot\min_{j\in\{1,\ \cdots,\ n\}}\{b_j\cdot b_{n-j}\}$

보조정리 2와 b_j 의 감소성에 의하여 $\min_{j\in\{1,\ \cdots,\ n\}}\{b_j\cdot b_{n-j}\}\ge b_{n'+1}\cdot b_{n'+1}$ 이므로

$$\sum_{j=1}^{n}b_j((n-j+1)^{1-\alpha}-(n-j)^{1-\alpha})\ge n\cdot b_{n'+1}\cdot b_{n'+1}\ge 2\cdot n'\cdot b_{n'+1}\cdot b_{n'+1}.$$

한편

$$2\cdot n'\cdot b_{n'+1}\cdot b_{n'+1}=2\cdot n'\cdot b_{n'+1}\cdot b_{n'+1}\cdot\frac{((n'+1)^{1-\beta})^2}{((n'+1)^{1-\beta})^2}=2\cdot(b_{n'+1}\cdot(n'+1)^{1-\beta})^2\cdot\frac{n'}{(n'+1)}\cdot\frac{1}{(n'+1)^{1-2\beta}},$$

$$1-2\beta=\alpha+\beta-2\beta=\alpha-\beta=\alpha-(1-\alpha)=2\alpha-1>0$$

이므로 $b_{n'+1}\cdot(n'+1)^{1-\beta}$ 의 n' 에 관한 감소성에 의하여 $2\cdot n'\cdot b_{n'+1}\cdot b_{n'+1}$ 은 n' 에 관한 감소이다. 따라서

$$\sum_{j=1}^{n}b_j((n-j+1)^{1-\alpha}-(n-j)^{1-\alpha})\ge 2N_k\cdot b_{N_k}^2,$$

$$\tau_k^{2\alpha-1}\le\frac{1}{e\cdot\Gamma(2-\alpha)\cdot L}\min\left\{\sum_{j=1}^{n}b_j((n-j+1)^{1-\alpha}-(n-j)^{1-\alpha})\ ,1\right\},\ n=\overline{1,\ N_k},\ k=\overline{0,\ m},$$

$$\tau_k^{\alpha}\le\frac{\tau_k^{1-\alpha}}{e\cdot\Gamma(2-\alpha)\cdot L}\sum_{j=1}^{n}b_j((n-j+1)^{1-\alpha}-(n-j)^{1-\alpha})=$$

$$=\frac{1}{e\cdot\Gamma(2-\alpha)\cdot L}\sum_{j=1}^{n}b_j((\tau_k\cdot(n-j+1))^{1-\alpha}-(\tau_k\cdot(n-j))^{1-\alpha})\le$$

$$\le\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\cdot L}\sum_{j=1}^{n}b_j(e^{-(n\tau_k)^{1-\alpha}}(\tau_k\cdot(n-j+1))^{1-\alpha}-(\tau_k\cdot(n-j))^{1-\alpha}).$$

$x>y>0\to e^x-e^y>x-y$ 이므로

$$\frac{\sum_{j=1}^{n}b_j(e^{-(n\tau_k)^{1-\alpha}}(\tau_k\cdot(n-j+1))^{1-\alpha}-(\tau_k\cdot(n-j))^{1-\alpha})}{\Gamma(2-\alpha)\cdot L}\le\frac{\sum_{j=1}^{n}b_je^{-(n\tau_k)^{1-\alpha}}(e^{(\tau_k\cdot(n-j+1))^{1-\alpha}}-e^{(\tau_k\cdot(n-j))^{1-\alpha}})}{\Gamma(2-\alpha)\cdot L}$$

이 성립되며 따라서

$$\tau_k^{\alpha}\le\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\cdot L}\sum_{j=1}^{n}b_je^{-(n\tau_k)^{1-\alpha}}(e^{(\tau_k\cdot(n-j+1))^{1-\alpha}}-e^{(\tau_k\cdot(n-j))^{1-\alpha}}).\tag{8}$$

또한 가정으로부터 $\tau_k^{2\alpha-1}\le\frac{1}{e\cdot\Gamma(2-\alpha)\cdot L}$ 이므로

$$\tau_k^\alpha \le \frac{\tau_k^{1-\alpha}}{e\cdot\Gamma(2-\alpha)\cdot L} \le \frac{\tau_k^{1-\alpha}\cdot e^{-\tau_k^{1-\alpha}}}{\Gamma(2-\alpha)\cdot L} \le \frac{(e^{2\tau_k^{1-\alpha}} - e^{\tau_k^{1-\alpha}})\cdot e^{-\tau_k^{1-\alpha}}}{\Gamma(2-\alpha)\cdot L} \le \frac{(e^{\tau_k^{1-\alpha}}-1)}{\Gamma(2-\alpha)\cdot L} \tag{9}$$

이 성립된다.

식 (8), (9)로부터 정리의 결론이 나온다.(증명끝)

가정 4 $\omega := \dfrac{e\cdot\Gamma(2-\alpha)\cdot L}{2(2^{2-\alpha}-1)^2} \le 1$

정리 4 가정 3, 4밑에서 정리 3의 조건이 성립된다.

따름 가정 1－4밑에서 계차도식 (5), (6)은 안정하다.

3. 근사풀이의 수렴성

안정성의 론의에서 준 가정 1－4가 성립된다고 가정하자.

편리상 $\hat{x}_{n+1}^k$을 점 t_{n+1}^k에서 문제 (1)의 정확한 풀이, x_{n+1}^k을 계차근사풀이라고 하자.

$$\eta_{n+1}^k := \hat{x}_{n+1}^k - x_{n+1}^k$$

그러면 식 (3)－(5)로부터

$$\eta_{n+1}^k = b_n\eta_0^k + \sum_{j=0}^{n-1}(b_j - b_{j+1})\eta_{n-j}^k + \mu_k\cdot[f(t_{n+1}^k,\ \hat{x}_{n+1}^k) - f(t_{n+1}^k,\ x_{n+1}^k)] + R_{n+1}^k,$$

$$|\eta_{n+1}^k| \le b_n|\eta_0^k| + \sum_{j=0}^{n-1}(b_j - b_{j+1})|\eta_{n-j}^k| + \mu_k\cdot L\cdot|\eta_{n+1}^k| + |R_{n+1}^k|.$$

안정성의 증명에서와 마찬가지로 론의하면 다음의 식이 성립된다.

$$(1-\mu_k\cdot L)|\eta_1^k| \le b_0|\eta_0^k| + |R_1^k|,\ \|\eta_1^k\|_1 \le \|\eta_0^k\|_0 + e^{-\tau_k^\beta}R_1^k/(1-\mu_k\cdot L)$$

한편 $e^{-\tau_k^\beta}/(1-\mu_k\cdot L) \le 1 \leftrightarrow e^{-\tau_k^\beta} \le (1-\mu_k\cdot L) \leftrightarrow \mu_k\cdot L \le 1 - e^{-\tau_k^\beta} \le e^{-\tau_k^\beta}(e^{\tau_k^\beta}-1) \le e^{\tau_k^\beta}-1$ 이므로 $\|\eta_1^k\|_1 \le \|\eta_0^k\|_0 + |R_1^k|$이 성립된다.

$$|\eta_2^k| \le b_1|\eta_0^k| + (b_0 - b_1)|\eta_1^k| + \mu_k\cdot L\cdot|\eta_2^k| + |R_2^k| \leftrightarrow (1-\mu_k\cdot L)|\eta_2^k| \le b_1|\eta_0^k| + (b_0-b_1)|\eta_1^k| + |R_2^k|$$

$$\begin{aligned}(1-\mu_k\cdot L)\|\eta_2^k\|_2 &\le b_1 e^{-(2\tau_k)^\beta}\|\eta_0^k\|_0 + (b_0-b_1)e^{-(2\tau_k)^\beta+\tau_k^\beta}\cdot\|\eta_1^k\|_1 + e^{-(2\tau_k)^\beta}|R_2^k| \le \\ &\le e^{-(2\tau_k)^\beta+\tau_k^\beta}[b_1e^{-\tau_k^\beta}\|\eta_0^k\|_0 + (b_0-b_1)\|\eta_1^k\|_1] + e^{-(2\tau_k)^\beta}|R_2^k| \le \\ &\le [b_1e^{-\tau_k^\beta}\|\eta_0^k\|_0 + (b_0-b_1)[\|\eta_0^k\|_0 + |R_1^k|]] + e^{-(2\tau_k)^\beta}|R_2^k| \le \\ &\le [b_1e^{-\tau_k^\beta}\|\eta_0^k\|_0 + (b_0-b_1)\|\eta_0^k\|_0] + (b_0-b_1)|R_1^k| + e^{-(2\tau_k)^\beta}|R_2^k|\end{aligned}$$

$$\|\eta_2^k\|_2 \le \|\eta_0^k\|_0[b_1e^{-\tau_k^\beta} + (b_0-b_1)]/(1-\mu_k\cdot L) + ((b_0-b_1)|R_1^k| + e^{-(2\tau_k)^\beta}|R_2^k|)/(1-\mu_k\cdot L)$$

$$\frac{b_1e^{-\tau_k^\beta}+(b_0-b_1)}{1-\mu_kL} \le 1 \leftrightarrow b_1e^{-\tau_k^\beta} + (b_0-b_1) \le 1-\mu_kL \leftrightarrow \mu_kL \le b_1(1-e^{-\tau_k^\beta}) = e^{-\tau_k^\beta}b_1(e^{\tau_k^\beta}-1) \le b_1(e^{\tau_k^\beta}-1)$$

따라서 $\|\eta_2^k\|_2 \le \|\eta_0^k\|_0 + |R_1^k| + |R_2^k|$이 성립된다.

마찬가지로 수학적귀납법을 리용하면 $\|\eta_n^k\|_n \le \|\eta_0^k\|_0 + \sum_{i=1}^n |R_i^k|$이 성립된다.

식 (4)를 리용하면 $\|\eta_n^k\|_n \le \|\eta_0^k\|_0 + c_1\tau_k^{1+2\alpha}\cdot n \le \|\eta_0^k\|_0 + c_1\tau_k^{2\alpha}$ 이므로

$$\max_n |\eta_n^k| \le e[|\eta_0^k| + c_1 \cdot \tau_k^{2\alpha}].$$

구간 $[0,\ t_1]$에서는 $\max_n |\eta_n^0| \le c_1 \cdot e \cdot \tau_k^{2\alpha}$이 성립된다.

이제 $\tau_{\max} := \max_k \tau_k$ 라고 표시하면 $\max_n |\eta_n^0| \le c_1 \cdot e \cdot \tau_{\max}^{2\alpha}$이다.

구간 $[t_1,\ t_2]$의 초기조건에서의 오차는 식 (6)으로부터 $|\eta_0^1| \le (1+L_1)c_1 \cdot e \cdot \tau_{\max}^{2\alpha}$과 같다.

$$\max_n |\eta_n^1| \le e[(1+L_1)c_1 \cdot e \cdot \tau_{\max}^{2\alpha} + c_1 \cdot \tau_k^{2\alpha}] \le e[(1+L_1)c_1 \cdot e \cdot \tau_{\max}^{2\alpha} + c_1 \cdot e \cdot \tau_{\max}^{2\alpha}] \le e^2 c_1 \cdot \tau_{\max}^{2\alpha}(2+L_1)$$

마찬가지의 론의에 의하여 다음의 식을 얻는다.

$$\max_n |\eta_n^k| \le e[|\eta_0^k| + c_1 \cdot \tau_k^{2\alpha}] \le e^{k+1} c_1 \cdot \prod_{i=1}^{k} (2+L_i) \cdot \tau_{\max}^{2\alpha}$$

$$\max_{n,\ k} |\eta_n^k| \le e^{m+1} c_1 \cdot \prod_{i=1}^{m} (2+L_i) \cdot \tau_{\max}^{2\alpha} = c_2 \cdot \tau_{\max}^{2\alpha},\quad c_2 = e^{m+1} c_1 \cdot \prod_{i=1}^{m} (2+L_i)$$

이리하여 다음의 수렴성정리를 얻었다.

정리 5 $\exists c_2 > 0;\ \max_{n,\ k} |\eta_n^k| \le c_2 \cdot \tau_{\max}^{2\cdot\alpha}$

참 고 문 헌

[1] L. Mahto1 et al.; arXiv:1205.3619v1[math.CA], 5, 16, 2012.

[2] B. M. Randelovic et al.; Facta Universitatis (niˇs) Ser. Math. Inform., 15, 101, 2000.

[3] Qian Qian Yang et al.; Article ID 464321, 22, 2010.

주체104(2015)년 4월 5일 원고접수

Convergence of an Implicit Difference Approximate Solution on Initial Value Problem of Nonlinear Impulsive Differential Equation of Fractional Order with Fixed Time Impulses

Choe Hui Chol, Pak Jun Min

We present a difference approximate algorithm on initial value problem of the nonlinear impulsive differential equation of fractional order with fixed time impulses given by

$$\begin{cases} {}^cD_{t_k}^{\alpha} x(t) = f(t,\ x(t)), & t \in (t_k,\ t_{k+1}) \\ \Delta x(t_{k+1}) = I_{k+1}(x(t_{k+1}^-)), & k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m \\ x(0) = x_0 & \end{cases}$$

and then prove the stability of the approximate scheme and the convergence of an approximate solution to the exact solution.

Key word: difference approximate scheme