김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제3호

적분법과 방사토대보간법에 의한 검은통함수의 대역적최량화

림 광, 오용범

1. 선행연구와 문제설정

련속인 검은통함수의 대역적최량화는 공학설계와 공업 및 은행업무에서 광범히 리용되고있다.

론문에서는 검은통함수를 방사토대함수로 보간하여 대역적최량화하는 한가지 방법을 연구한다.

이제 다음의 대역적최량화문제를 보기로 하자.

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &x_L \le x \le x_U \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 $f(x): \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ 는 련속인 검은통함수이며 $x_L,\ x_U \in \mathbf{R}^d$ 이다. $f(x)$ 의 도함수는 구할 수 없다고 하자. $D \subset \mathbf{R}^d$ 는 $D = \{x \mid x_L \le x \le x_U\}$ 로 정의되는 콤팍트모임이다.

선행연구[2]에서는 검은통함수를 방사토대함수로 보간하여 최량화하는 알고리듬을 처음으로 제기하였다.

선행연구[3]에서는 반노름함수가 매우 작은 값을 가질 때 대역적최량화를 실현하기 힘들므로 반노름함수로부터 얻어지는 함수 $h_n(y)$ 의 대역적최대화대신에 함수 $-\log(h_n(y))$ 의 대역적최소화를 실현하였다.

선행론문에 대한 연구로부터 론문에서는 다음의 문제들을 해결하려고 한다.

첫째로, 방사토대보간함수를 다항식모양으로 재구성하여 그것의 최량값을 적분법[1]에 의하여 구한다.

둘째로, 반노름함수를 재구성하여 최량화를 보다 쉽게 한다.

2. 적분법을 리용한 방사토대보간법

우선 방사토대보간함수를 다항식모양으로 재구성하자.

이제 주어진 방사토대보간함수 $s(x)$ 를 다음과 같이 재구성하고 결수들은 보간조건 $(x_1,\ f(x_1)),\ \cdots,\ (x_n,\ f(x_n))$ 을 만족시키도록 다음과 같이 결정한다.

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi(\| x - x_i \|^2) + b^{\mathrm{T}} x + a,\quad x \in D \tag{2}$$

이때 방사토대함수 $\phi(r) = r^3$ 으로 설정하면 방사토대보간함수 $s_n(x)$ 는 다항식모양으로 된다.

먼저 D 우에서 $s_n(x)$ 의 대역적최소값 γ 를 적분법[1]으로 구하자.

보조정리 1 (량쪽 제한을 가진 다항식함수의 적분법을 리용한 최량화)

$$\gamma_m = g_{\max} - \left(\frac{\int_D (g_{\max} - g(x))^m dx}{\int_D dx} \right)^{1/m} \tag{3}$$

여기서 m은 정의 옹근수이고 $g_{\max}$은 다항식함수 $g(x)$의 허용구역 D에서의 어떤 상계값이다.

이제 $\gamma := \lim_{m\to\infty} \gamma_m$을 정의하면 γ는 구역 D에서의 함수 $g(x)$의 대역적최소값으로 된다.

우의 보조정리를 리용하여 방사토대보간함수 $s_n(x)$의 대역적최소값 γ를 구한다.

다음으로 목표값 f_n^*의 설정에 대하여 보기로 하자.

이제 α를 $f(x_{\alpha(1)}) \le \cdots \le f(x_{\alpha(n)})$이 되도록 하는 $\{1, \cdots, n\}$의 치환으로 정하자. 또한 n_0을 초기값점의 개수라고 하고 임의의 자연수 N을 선택(보통 $N = 5$)하고 $\mathrm{mod}(n - n_0, N + 1) \ne N$인 $n \ge n_0$에 대하여 f_n^*을 다음과 같이 결정하자.

$$f_n^* = \gamma - W_n \left(\max_{1\le i \le k_n} f(x_{\alpha(i)}) - \gamma \right) = \gamma - W_n (f(x_{\alpha(k_n)}) - \gamma) \tag{4}$$

여기서

$$W_n = \left[\frac{\mathrm{mod}(N - (n - n_0),\ N + 1)}{N} \right]^2$$

$$k_n = \begin{cases} n & (\mathrm{mod}(n - n_0,\ N+1) = 0\text{인 경우}) \\ k_{n-1} - \left\lfloor \dfrac{\mathrm{mod}(n - n_0,\ N+1)}{N} \right\rfloor & (\text{다른 경우}) \end{cases} \tag{5}$$

여기서 $\lfloor \cdot \rfloor$은 옹근수부를 나타내고 $\mathrm{mod}(a,\ b) = a \bmod b$를 의미하며 $\mathrm{mod}(n - n_0,\ N + 1) = N$인 $n \ge n_0$에 대하여서는 $f_n^* = \gamma$로 놓는다.

이제 다음단계의 점 y^*을 구하자.

선행연구[2]에서와 같이 다음단계의 점 y^*은 반노름함수 $\sigma(s_n^y)$의 최소값으로 결정하며 $\sigma(s_n^y)$의 최소화는 다음함수의 최소화와 동등하다.

$$h_n(y) = \frac{1}{[s_n(y) - f_n^*]^2} \left[-(u(y)^{\mathrm{T}} v(y)^{\mathrm{T}}) \begin{pmatrix} \Phi & P \\ P^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u(y) \\ v(y) \end{pmatrix} \right], \quad y \in D \tag{6}$$

여기서 $u(y) = (\phi(\| y - x_1 \|^2), \cdots, \phi(\| y - x_n \|^2))^{\mathrm{T}}$, $v(y) = (p_1(y), \cdots, p_{\hat{m}}(y))^{\mathrm{T}}$이다.

실지계산에서는 $h_n(y)$를 최량화하는것이 매우 어렵다. 그리하여 다음함수를 정의하고 그것의 대역적최대값 β를 적분법으로 구하자.

$$V_n(y) := -(u(y)^{\mathrm{T}} v(y)^{\mathrm{T}}) \begin{pmatrix} \Phi & P \\ P^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u(y) \\ v(y) \end{pmatrix}, \quad y \in D \tag{7}$$

그리고 식 (6)을 최량화하는 대신에 다음함수를 최량화한다.

$$h_n^*(y) = \frac{\beta}{[s_n(y) - f_n^*]^2}, \quad y \in D \tag{8}$$

이제 이 최량점을 새로운 보간점 x_{n+1}로 정하고 자료 $(x_1,\ f(x_1)),\ \cdots,\ (x_n,\ f(x_n))$, $(x_{n+1},\ f(x_{n+1}))$를 보간하는 새로운 방사토대보간함수를 구성하고 우의 론의를 반복하여 목적함수의 최량값에 대한 근사값을 계산한다.

3. 알고리듬의 수렴성

여기서는 론문에서 제시된 알고리듬의 수렴성을 증명한다.

정리 1 콤팍트모임 D에서 련속인 함수에 대하여 알고리듬에 의하여 생성되는 점렬이 D에서 조밀하면 알고리듬은 수렴한다.[2]

정리 1로부터 이 알고리듬에 의하여 생성되는 점렬이 구역 D에서 조밀하다는것을 밝혀야 한다.

먼저 다음의 보조정리들을 보기로 하자.

보조정리 2 $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$을 알고리듬에 의하여 생성된 점렬이라고 하자. 이때 임의의 수렴하는 부분렬 $(x_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$에 대하여

$$\lim_{k\to\infty}\Delta_{n_k}^{\rho}\mu_{n_k-1}(x_{n_k})=\infty$$

가 성립한다. 여기서 $\mu_n(\cdot)$과 $\Delta_{n_k}^{\rho}$는 선행연구[2]에서 정의하였다.

보조정리 3 $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$을 알고리듬에 의하여 생성된 점렬이라고 하고 n_0을 초기점개수라고 하자. 적당한 $y_0\in D$가 있어서 점렬 $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$의 어느 한 점도 포함하지 않는 근방 $N_\delta:=\{x\in\mathbf{R}^d : \|x-y_0\|<\delta\},\ \delta>0$이 존재한다고 가정하자. 그러면 y_0과 δ에만 관계되는 $K>0$이 존재하여 다음의 사실이 성립한다.

$$\mu_n(y_0)\le K,\ \forall n\ge n_0 \tag{9}$$

우의 보조정리 2와 3으로부터 다음의 정리가 증명된다.

정리 2 $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$을 알고리듬에 의하여 생성된 점렬, s_n은 자료 $(x_i,\ f(x_i))\ (i=1,\ \cdots,\ n)$를 보간하는 방사토대보간함수이고 f_n^*은 식 (4)로 주어지는 목표값이다. 그러면 점렬 $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$은 구역 D에서 조밀하다.

증명 귀유법으로 증명하자.

적당한 점 $y_0\in D$이 있어서 그것의 근방 $U=\{x\in\mathbf{R}^d : \|x-y_0\|<\delta\},\ \delta>0$에 보간점이 하나도 없다고 가정하자. 이때 알고리듬에 의하여 생성된 점렬에 대하여 다음과 같은 사실이 성립한다.

$$g_n(x_{n+1})\le g_n(y_0),\ n\ge n_0$$

여기서 n_0은 초기점개수이다.

한편 알고리듬에서 목표값선택으로부터 적당한 부분렬 $(n_k)_{k\in\mathbf{N}}$이 있어서 다음의 관계식이 성립한다.

$$\min_{y\in D}s_{n_k-1}(y)-f_{n_k-1}^*>\tau\Delta_{n_k-1}^{\rho/2}\|s_{n_k-1}\|_\infty\ge 0,\ k\in\mathbf{N}$$

점렬 $(x_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$은 콤팍트모임에서 택한것이며 따라서 수렴하는 부분렬을 가진다.

일반성을 잃지 않고 점렬 $(x_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$이 수렴한다고 하자.

모든 $k\in\mathbf{N}$에 대하여 x_{n_k}는 $h^*_{n_k-1}(x)$의 대역적최대점이다. 그러므로 $f^*_{n_k-1}>-\infty$에 대하여

$$\mu_{n_k-1}(x_{n_k})[s_{n_k-1}(x_{n_k})-f^*_{n_k-1}]^2\le\mu_{n_k-1}(y_0)[s_{n_k-1}(y_0)-f^*_{n_k-1}]^2$$

이 성립한다.

만일 $\|s_{n_k-1}\|_\infty>0$이면 다음과 같다.

$$\mu_{n_k-1}(x_{n_k})\le\mu_{n_k-1}(y_0)\left[\frac{s_{n_k-1}(y_0)-f^*_{n_k-1}}{s_{n_k-1}(x_{n_k})-f^*_{n_k-1}}\right]^2\le\mu_{n_k-1}(y_0)\left[1+\frac{|s_{n_k-1}(y_0)-s_{n_k-1}(x_{n_k})|}{s_{n_k-1}(x_{n_k})-f^*_{n_k-1}}\right]^2\le$$

$$\le\mu_{n_k-1}(y_0)\left[1+\frac{1}{\tau\Delta^{\rho/2}_{n_k}}\frac{|s_{n_k-1}(y_0)-s_{n_k-1}(x_{n_k})|}{\|s_{n_k-1}\|_\infty}\right]^2\le\mu_{n_k-1}(y_0)\left[1+\frac{2}{\tau\Delta^{\rho/2}_{n_k}}\right]^2$$

또한 $\|s_{n_k-1}\|_\infty=0$이면 다음의 사실이 성립한다.

$$\mu_{n_k-1}(x_{n_k})\le\mu_{n_k-1}(y_0)\le\mu_{n_k-1}(y_0)\left[1+\frac{2}{\tau\Delta^{\rho/2}_{n_k}}\right]^2$$

이제 얻어진 식의 량변에 $\Delta^{\rho}_{n_k}$를 곱하자.

$$\Delta^{\rho}_{n_k}\mu_{n_k-1}(x_{n_k})\le\mu_{n_k-1}(y_0)\left[\Delta^{\rho/2}_{n_k}+\frac{2}{\tau}\right]^2\qquad(10)$$

보조정리 2에 의하여 식 (10)의 왼변은 $k\to\infty$이면 ∞에로 간다. 그러나 보조정리 2에 의하여 $\mu_n(y_0)$은 n과 무관계한 상수보다 작다. 이것은 모순이다. 따라서 근방 U에는 점렬 (x_n)의 점이 적어도 하나 있다. 따라서 점렬 $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$은 콤팍트모임 D에서 조밀하다.(증명끝)

4. 수 치 실 험

실례 1

$$\min f(x)=\frac{-1}{(x-0.15)^2+0.001},\quad 0\le x\le 1$$

우의 함수의 최량점에 대하여 선행방법과 이 론문의 방법을 비교하면 다음과 같다.(정확한 최량점은 $x^*=0.15$이고 최량값은 $f(x^*)=-1\,000$이다.)

방법 \ 점개수	6	7	…	21	22	23
선행연구[3]	1	0.112 819	…	0.148 55	0.148 57	0.148 16
론문의 방법	1	0.148 221	…	0.148 178	0.148 169	0.148 56

실례 2(라스트리진함수)

$$\min f(x)=\sum_{i=1}^{2}[x_i^2-\cos(2\pi x_i)],\quad -2\le x_i\le 2\quad(i=1,\ 2)$$

정확한 최량점은 $x^* = (0,\ 0)^{\mathrm{T}}$ 이고 최량값은 $f(x^*) = -2$ 이다.

방법 \ 점개수	15	16	…	24
선행연구[3]	$(2,\ 1.8)^{\mathrm{T}}$	$(1.34,\ 2.876\cdot 10^{-5})^{\mathrm{T}}$	…	$(1.132\cdot 10^{-11},\ -9.112\cdot 10^{-9})^{\mathrm{T}}$
론문의 방법	$(2,\ 1.7)^{\mathrm{T}}$	$(0.32,\ -7.86\cdot 10^{-7})^{\mathrm{T}}$	…	$(4.213\cdot 10^{-13},\ -4.24\cdot 10^{-11})^{\mathrm{T}}$

참 고 문 헌

[1] 오용범; 조선민주주의인민공화국 과학원통보, 2, 24, 주체107(2018).

[2] H.-M. Gutmann.; J. Glob. Optim., 19, 3, 201, 2001.

[3] Z. Zhou et al.; J. Glob. Optim., 70, 757. 2018.

주체108(2019)년 3월 15일 원고접수

Black-Box Global Optimization Based on Integral Method and Radial Basis Function Interpolation Method

Rim Kwang, O Yong Bom

In this paper, we calculate an optimal value of a radial basis function using integral method for black-box global optimization, develop a method generating a new interpolation point, and verify the numerical stability and efficiency by solving some well-known problems.

Key words: radial basis function interpolation, integral method