김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제1호

통계다양체에서 $\alpha-$접속의 상대곡률텐소르의 몇가지 성질

최위영, 민철림

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《기초과학은 과학기술강국을 떠받드는 주추입니다. 기초과학이 든든해야 나라의 과학기술이 공고한 토대우에서 끊임없이 발전할수 있습니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 40페지)

선행연구[1]에서는 통계다양체에서 쌍대인 두 접속의 곡률텐소르들사이의 관계식을, 선행연구[3]에서는 통계다양체에서 접속의 곡률텐소르의 성질을 연구하였고 선행연구[4]에서는 $\alpha-$접속의 곡률텐소르의 표시식을 제시하였으며 선행연구[2]에서는 $\alpha-$접속의 곡률텐소르의 일반화로서 상대곡률텐소르를 정의하고 그것의 성질을 론의하였다.

론문에서는 $\alpha-$접속의 상대곡률텐소르의 특수한 형태들사이의 관계 및 $\alpha-$접속의 상대곡률텐소르와 곡률텐소르사이의 관계를 연구하였다.

먼저 통계다양체에서 $\alpha-$접속의 상대곡률텐소르의 개념과 그것의 특수한 형태들사이의 관계를 보자.

임의의 실수 $\alpha,\ \beta$에 대하여 $R^{(\alpha,\ \beta)}(X,\ Y)Z=\nabla_X^{(\alpha)}\nabla_Y^{(\beta)}Z-\nabla_Y^{(\beta)}\nabla_X^{(\alpha)}Z-\nabla_{[X,\ Y]}^{(\alpha)}Z$를 $\nabla^{(\beta)}$에 관한 $\nabla^{(\alpha)}$의 상대곡률텐소르마당이라고 부른다.[2]

$\nabla^{(\beta)}$에 관한 $\nabla^{(\alpha)}$의 상대곡률텐소르마당은 두 접속 $\nabla^{(\alpha)}$와 $\nabla^{(\beta)}$의 비가환성을 특징짓는다.

명제 1 $(M,\ g,\ \nabla)$를 통계다양체라고 하자.

이때 임의의 실수 $\alpha,\ \beta$와 임의의 $X,\ Y,\ Z\in\Gamma(TM)$에 대하여 다음의 식이 성립된다.

$$R^{(\alpha,\ \beta)}(X,\ Y)Z+R^{(\beta,\ \alpha)}(X,\ Y)Z=-R^{(\alpha,\ \beta)}(Y,\ X)Z-R^{(\beta,\ \alpha)}(Y,\ X)Z \tag{1}$$

증명 상대곡률텐소르마당의 정의로부터 임의의 실수 $\alpha,\ \beta$와 임의의 $X,\ Y,\ Z\in\Gamma(TM)$에 대하여

$$R^{(\alpha,\ \beta)}(X,\ Y)Z=\nabla_X^{(\alpha)}\nabla_Y^{(\beta)}Z-\nabla_Y^{(\beta)}\nabla_X^{(\alpha)}Z-\nabla_{[X,\ Y]}^{(\alpha)}Z$$

$$R^{(\beta,\ \alpha)}(X,\ Y)Z=\nabla_X^{(\beta)}\nabla_Y^{(\alpha)}Z-\nabla_Y^{(\alpha)}\nabla_X^{(\beta)}Z-\nabla_{[X,\ Y]}^{(\beta)}Z$$

$$R^{(\alpha,\ \beta)}(Y,\ X)Z=\nabla_Y^{(\alpha)}\nabla_X^{(\beta)}Z-\nabla_X^{(\beta)}\nabla_Y^{(\alpha)}Z-\nabla_{[Y,\ X]}^{(\alpha)}Z$$

$$R^{(\beta,\ \alpha)}(Y,\ X)Z=\nabla_Y^{(\beta)}\nabla_X^{(\alpha)}Z-\nabla_X^{(\alpha)}\nabla_Y^{(\beta)}Z-\nabla_{[Y,\ X]}^{(\beta)}Z$$

가 성립되며 리괄호의 반가환성으로부터 우의 식들을 변끼리 더하면

$$R^{(\alpha,\ \beta)}(X,\ Y)Z+R^{(\beta,\ \alpha)}(X,\ Y)Z+R^{(\alpha,\ \beta)}(Y,\ X)Z+R^{(\beta,\ \alpha)}(Y,\ X)Z=0$$

이 얻어지므로 이로부터 명제의 주장이 성립된다.(증명끝)

명제 1에서 $\alpha=\beta$이면 식 (1)은 $R^{(\alpha)}(X,\ Y)Z=-R^{(\alpha)}(Y,\ X)Z,\ \forall X,\ Y,\ Z\in\Gamma(TM)$으로 되는데 이것은 아핀접속으로서의 $\alpha-$접속의 곡률텐소르가 일반적으로 가지는 성질이다.

명제 2 $(M,\ g,\ \nabla)$를 통계다양체라고 할 때 서로 다른 임의의 두 실수 $\alpha,\ \beta$에 대

하여 $R^{(\alpha,\ \beta)}=R^{(\beta,\ \alpha)}$이기 위해서는 $R^{(1,\ -1)}=R^{(-1,\ 1)}$일것이 필요하고 충분하다.

증명 임의의 두 실수 $\alpha,\ \beta$에 대하여 다음의 식이 성립된다.[2]

$$R^{(\alpha,\ \beta)}=\frac{(1+\alpha)(1+\beta)}{4}R+\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{4}R^*+\frac{(1+\alpha)(1-\beta)}{4}R^{(1,\ -1)}+\frac{(1-\alpha)(1+\beta)}{4}R^{(-1,\ 1)} \quad (2)$$

여기서 R^*은 접속 ∇의 쌍대접속 ∇^*의 곡률텐소르이다.

류사하게

$$R^{(\beta,\ \alpha)}=\frac{(1+\alpha)(1+\beta)}{4}R+\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{4}R^*+\frac{(1-\alpha)(1+\beta)}{4}R^{(1,\ -1)}+\frac{(1+\alpha)(1-\beta)}{4}R^{(-1,\ 1)}$$

이 성립되며 우의 두 식을 변끼리 덜면 $2(R^{(\alpha,\ \beta)}-R^{(\beta,\ \alpha)})=(\alpha-\beta)(R^{(1,\ -1)}-R^{(-1,\ 1)})$이 얻어진다. 이로부터 명제의 주장이 성립된다.(증명끝)

다음으로 $\alpha-$접속의 곡률텐소르와 상대곡률텐소르사이의 관계에 대하여 론의하자.

보조정리 $(M,\ g,\ \nabla)$를 통계다양체라고 하자.

이때 임의의 실수 $\alpha\,(\alpha^2\neq 1)$에 대하여 다음의 식이 성립된다.

$$R^{(1,\ -1)}+R^{(-1,\ 1)}=\frac{1}{1-\alpha^2}\{4R^{(\alpha)}-(1+\alpha)^2R-(1-\alpha)^2R^*\} \quad (3)$$

증명 사실 식 (2)로부터 임의의 실수 α에 대하여

$$R^{(\alpha,\ \alpha)}=\frac{(1+\alpha)(1+\alpha)}{4}R+\frac{(1-\alpha)(1-\alpha)}{4}R^*+\frac{(1+\alpha)(1-\alpha)}{4}R^{(1,\ -1)}+\frac{(1-\alpha)(1+\alpha)}{4}R^{(-1,\ 1)}=$$

$$=\frac{(1+\alpha)^2}{4}R+\frac{(1-\alpha)^2}{4}R^*+\frac{(1-\alpha^2)}{4}(R^{(1,\ -1)}+R^{(-1,\ 1)})$$

이 성립된다. 즉 $\alpha^2\neq 1$인 임의의 실수 α에 대하여 식 (3)이 성립된다.

한편 상대곡률텐소르의 정의로부터 임의의 실수 α에 대하여 $R^{(\alpha,\ \alpha)}=R^{(\alpha)}$이므로 보조정리가 증명된다.(증명끝)

따름 $(M,\ g,\ \nabla)$를 통계다양체라고 할 때 $R^{(1,\ -1)}+R^{(-1,\ 1)}=4R^{(0)}-R-R^*$이 성립된다.

우의 보조정리와 따름으로부터 $\alpha-$접속의 상대곡률텐소르와 곡률텐소르사이의 관계식을 얻을수 있다.

명제 3 $(M,\ g,\ \nabla)$를 통계다양체라고 하자.

이때 임의의 실수 $\alpha,\ \beta$에 대하여 다음의 식이 성립된다.

$$R^{(\alpha,\ \beta)}+R^{(\beta,\ \alpha)}=\{4(1-\alpha\beta)R^{(0)}+(2\alpha\beta+\alpha+\beta)R+(2\alpha\beta-\alpha-\beta)R^*\}/2$$

증명 식 (2)로부터

$$2(R^{(\alpha,\ \beta)}+R^{(\beta,\ \alpha)})=(1+\alpha)(1+\beta)R+(1-\alpha)(1-\beta)R^*+(1-\alpha\beta)(R^{(1,\ -1)}+R^{(-1,\ 1)})$$

이 얻어지고 식 (4)로부터 $R^{(1,\ -1)}+R^{(-1,\ 1)}=4R^{(0)}-R-R^*$이므로

$$2(R^{(\alpha,\ \beta)}+R^{(\beta,\ \alpha)})=(1+\alpha)(1+\beta)R+(1-\alpha)(1-\beta)R^*+(1-\alpha\beta)(4R^{(\alpha)}-R-R^*)=$$

$$=\{4(1-\alpha\beta)R^{(0)}+(2\alpha\beta+\alpha+\beta)R+(2\alpha\beta-\alpha-\beta)R^*\}$$

이다. 즉 명제의 주장이 성립된다.(증명끝)

명제 3과 류사하게 다음의 사실이 성립된다.

명제 4 $(M,\ g,\ \nabla)$를 통계다양체라고 하자.

이때 임의의 두 실수 $\alpha,\ \beta\ \ (\alpha^2\neq 1)$에 대하여 다음의 식이 성립된다.

$$R^{(\alpha,\ \beta)}+R^{(\beta,\ \alpha)}=\{4(1-\alpha\beta)R^{(\alpha)}-(\alpha-\beta)[(1+\alpha)^2R-(1-\alpha)^2R^*]\}/(2(1-\alpha^2))$$

증명 식 (2)로부터 다음의 식이 성립된다.

$$2(R^{(\alpha,\ \beta)}+R^{(\beta,\ \alpha)})=(1+\alpha)(1+\beta)R+(1-\alpha)(1-\beta)R^*+(1-\alpha\beta)(R^{(1,\ -1)}+R^{(-1,\ 1)})$$

한편 $\alpha^2\neq 1$이면 보조정리로부터 $R^{(1,\ -1)}+R^{(-1,\ 1)}=\dfrac{1}{1-\alpha^2}\{4R^{(\alpha)}-(1+\alpha)^2R-(1-\alpha)^2R^*\}$ 이 성립되므로

$$2(R^{(\alpha,\ \beta)}+R^{(\beta,\ \alpha)})=(1+\alpha)(1+\beta)R+(1-\alpha)(1-\beta)R^*+\frac{1-\alpha\beta}{1-\alpha^2}\{4R^{(\alpha)}-(1+\alpha)^2R-(1-\alpha)^2R^*\}=$$

$$=\frac{1}{1-\alpha^2}\{4(1-\alpha\beta)R^{(\alpha)}-(\alpha-\beta)[(1+\alpha)^2R-(1-\alpha)^2R^*]\}$$

이다. 즉 명제의 주장이 성립된다.(증명끝)

$\alpha-$접속의 상대곡률텐소르마당들의 합은 $\alpha-$접속의 곡률텐소르마당들에 관하여 다음과 같이 표시된다.[2]

$$R^{(\alpha,\ \beta)}(X,\ Y)Z+R^{(\beta,\ \alpha)}(X,\ Y)Z=$$

$$=R^{(\alpha)}(X,\ Y)Z+R^{(\beta)}(X,\ Y)Z+\frac{(\alpha-\beta)^2}{4}\{K(X,\ K(Y,\ Z))-K(Y,\ K(X,\ Z))\}$$

여기서 $K(X,\ Y)=\nabla_X^*Y-\nabla_XY$는 변형텐소르마당이다.

웃식에서 알수 있는바와 같이 $\alpha-$접속의 상대곡률텐소르마당들의 합을 $\alpha-$접속의 곡률텐소르마당들의 합만으로 표시하지 못하고 변형텐소르마당을 포함시켜 표시하고있다.

그러나 명제 3, 4는 $\alpha-$접속의 상대곡률텐소르마당들의 합을 $\alpha-$접속의 곡률텐소르마당들의 합만으로 표시하고있다. 이것은 우리의 결과가 선행연구결과를 일정한 의미에서 개선한것이라고 말할수 있다.

참 고 문 헌

[1] S. Amari et al.; Methods of Information Geometry, AMS & Oxford University Press, 34～56, 2000.

[2] O. Calin et al.; Geometric Modeling in Probability and Statistics, Springer, 76～92, 2014.

[3] C. R. Min et al.; Diff. Geom. Appl., **41**, 39, 2015.

[4] J. Zhang; AISM, **59**, 161, 2007.

주체107(2018)년 9월 8일 원고접수

Some Properties of Relative Curvature Tensor of α–Connection on Statistical Manifolds

Choe Wi Yong, Min Chol Rim

We characterize the non-commutativity of relative curvature tensor of α–connection and establish a relation between curvature tensor and relative curvature tensor without difference tensor on statistical manifolds.

Key words: statistical manifold, relative curvature tensor, α–connection