김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제3호

리만다양체에서 반대칭계량접속의 호상접속에 대하여

허달윤, 리광호

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《기초과학을 끊임없이 심화발전시키지 않고서는 첨단과학기술을 연구도입할수도 없고 새로운 높은 수준의 과학기술을 연구개발할수도 없습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제22권 21페지)

선행연구[5]에서는 리만다양체에서 반대칭계량접속이 처음으로 정의되고 그 성질이 밝혀졌으며 선행연구[2]에서는 반대칭접속의 호상접속의 물리적의미와 함께 그 성질들이 밝혀졌다. 선행연구[1]에서는 릿찌사분대칭계량접속의 호상접속들이 연구되였다. 선행연구[3]에서는 비계량접속의 공액대칭조건이 연구되였으며 선행연구[4]에서는 일반화된 사분대칭재귀계량접속의 공액대칭조건과 일정곡률조건들이 고찰되였다.

론문에서는 반대칭접속에 대한 선행연구결과에 기초하여 반대칭계량접속의 호상접속의 기하학적성질과 공액대칭조건, 일정곡률성을 밝힌다.

반대칭계량접속 ∇는

$$\nabla_k g_{ij}=0\,,\ \ T_{ij}^{k}=\pi_j\delta_i^k-\pi_i\delta_j^k$$

를 만족시키는 접속으로 정의되였으며 ∇의 접속결수는

$$\Gamma_{ij}^{k}=\begin{Bmatrix}k\\ ij\end{Bmatrix}+\pi_j\delta_i^k-g_{ij}\pi^k \tag{1}$$

로 표시되였다. 여기서 $\begin{Bmatrix}k\\ ij\end{Bmatrix}$는 레비－찌비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$의 접속결수로서 크리스토펠기호이며 π_j는 주어진 1－형식 π의 성분이다.[5]

반대칭계량접속 ∇의 호상접속 $\overset{m}{\nabla}$의 접속결수는 식 (1)로부터

$$\overset{m}{\Gamma}{}_{ij}^{k}=\begin{Bmatrix}k\\ ij\end{Bmatrix}+\pi_i\delta_j^k-g_{ij}\pi^k \tag{2}$$

이고 이 식에 의하여 호상접속 $\overset{m}{\nabla}$은

$$\begin{aligned}\overset{m}{\nabla}_k g_{ij}&=-2\pi_k g_{ij}+\pi_i g_{jk}-\pi_j g_{ik}\\ \overset{m}{T}{}_{ij}^{k}&=\pi_i\delta_j^k-\pi_j\delta_i^k\end{aligned} \tag{3}$$

를 만족시키는 비계량접속이다. 호상접속 $\overset{m}{\nabla}$의 곡률텐소르는 식 (2)에 의하여

$$\overset{m}{R}{}_{ijk}^{l}=K_{ijk}^{l}+g_{ik}a_j^l-g_{jk}a_i^l+\delta_k^l\pi_{ij} \tag{4}$$

또는

$$\overset{m}{R}{}_{ijk}^{l}=K_{ijk}^{l}+g_{ik}a_j^l-g_{jk}a_i^l+\delta_k^l\overset{m}{\pi}_{ij}-\delta_k^l\overset{m}{\pi}_{ji} \tag{5}$$

이다. 여기서 K_{ijk}^{l} 은 레비－찌비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$ 의 곡률텐소르이고

$$a_{ik}=\overset{\circ}{\nabla}_i\pi_k-\pi_i\pi_k,\ \pi_{ij}=\overset{\circ}{\nabla}_i\pi_j-\overset{\circ}{\nabla}_j\pi_i,\ \overset{m}{\pi}_{ij}=\overset{\circ}{\nabla}_i\pi_j$$

이다. 식 (2)와 (3)을 리용하면 호상접속 $\overset{m}{\nabla}$ 의 쌍대접속 $\overset{m*}{\nabla}$ 의 접속결수는

$$\overset{m*}{\Gamma}{}_{ij}^{k}=\begin{Bmatrix}k\\ij\end{Bmatrix}-\pi_i\delta_j^k+\pi_j\delta_i^k \tag{6}$$

이고 $\overset{m*}{\nabla}$ 의 곡률텐소르는

$$\overset{m*}{R}{}_{ijk}^{l}=K_{ijk}^{l}+\delta_j^l a_{ik}-\delta_i^l a_{jk}-\delta_k^l\pi_{ij} \tag{7}$$

이다. 식 (6)으로부터

$$\overset{m*}{\Gamma}{}_{(ij)}^{k}=\begin{Bmatrix}k\\ij\end{Bmatrix} \tag{8}$$

이다.

식 (8)로부터 다음의 정리가 쉽게 증명된다.

정리 1 리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 반대칭계량접속 ∇ 에 대한 호상접속 $\overset{m}{\nabla}$ 의 쌍대접속 $\overset{m*}{\nabla}$ 은 레비－찌비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$ 와 사영동등하다.

이제

$$A_{ijk}^{l}:=a_i^l g_{jk}-\overset{m}{\pi}_{ij}\,\delta_k^l$$

로 놓으면 식 (5)를 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\overset{m}{R}{}_{ijk}^{l}=K_{ijk}^{l}-A_{ijk}^{l}+A_{jik}^{l} \tag{9}$$

이로부터 다음의 정리가 쉽게 증명된다.

정리 2 $A_{ijk}^{l}=A_{jik}^{l}$ 일 때 접속변환 $\overset{\circ}{\nabla}\to\overset{m}{\nabla}$ 에 관하여 곡률텐소르는 보존된다.

정리 3 리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 반대칭계량접속 ∇ 의 호상접속 $\overset{m}{\nabla}$ 에 대한 곡률텐소르가 령이면 리만다양체 $(M,\ g,\ \overset{\circ}{\nabla})$ 는 공형평탄이다.

증명 식 (4)와 (7)을 더하면 다음과 같다.

$$\overset{m}{R}{}_{ijk}^{l}+\overset{m*}{R}{}_{ijk}^{l}=2K_{ijk}^{l}+\delta_j^l a_{ik}-\delta_i^l a_{jk}+g_{ik}a_j^l-g_{jk}a_i^l \tag{10}$$

이 식을 $i,\ l$ 에 관하여 축약하면 다음과 같다.

$$\overset{m}{R}_{jk}+\overset{m*}{R}_{jk}=2K_{jk}-(n-1)a_{jk}-g_{jk}a_i^i \tag{11}$$

이다. 이 식의 량변에 g^{jk} 를 곱하고 축약하면

$$\overset{m}{R}+\overset{m*}{R}=2K-2(n-1)a_i^i$$

이다. 이 식으로부터

$$a_i^i = \frac{1}{2(n-1)}\left[2K - \left(\overset{m}{R} + \overset{m*}{R}\right)\right]$$

이 얻어진다. 이 식을 식 (11)에 넣고 a_{jk} 를 구하면 다음과 같다.

$$a_{jk} = \frac{1}{n-2}\left\{2K_{jk} - \left(\overset{m}{R}_{jk} + \overset{m*}{R}_{jk}\right) - \frac{g_{jk}}{2(n-1)}\left[2K - \left(\overset{m}{R} + \overset{m*}{R}\right)\right]\right\}$$

이 식을 식 (10)에 넣고 정돈하면서

$$\overset{m}{C}{}^l_{ijk} := \overset{m}{R}{}^l_{ijk} - \frac{1}{n-2}\left(\delta_i^l \overset{m}{R}_{jk} - \delta_j^l \overset{m}{R}_{jk} + g_{jk}\overset{m}{R}{}^l_i - g_{ik}\overset{m}{R}{}^l_j\right) - \frac{\overset{m}{R}}{(n-1)(n-2)}(\delta_j^l g_{ik} - \delta_i^l g_{jk})$$

$$\overset{m*}{C}{}^l_{ijk} := \overset{m*}{R}{}^l_{ijk} - \frac{1}{n-2}\left(\delta_i^l \overset{m*}{R}_{jk} - \delta_j^l \overset{m*}{R}_{jk} + g_{jk}\overset{m*}{R}{}^l_i - g_{ik}\overset{m*}{R}{}^l_j\right) - \frac{\overset{m*}{R}}{(n-1)(n-2)}(\delta_j^l g_{ik} - \delta_i^l g_{jk})$$

$$\overset{\circ}{C}{}^l_{ijk} := K^l_{ijk} - \frac{1}{n-2}(\delta_i^l K_{jk} - \delta_j^l K_{jk} + g_{jk}K_i^l - g_{ik}K_j^l) - \frac{K}{(n-1)(n-2)}(\delta_j^l g_{ik} - \delta_i^l g_{jk}) \tag{12}$$

로 놓으면

$$\overset{m}{C}{}^l_{ijk} + \overset{m*}{C}{}^l_{ijk} = 2\overset{\circ}{C}{}^l_{ijk} \tag{13}$$

이다.

이제 $\overset{m}{R}{}^l_{ijk} = 0$ 이라고 하면 식 (12)로부터 $\overset{m}{C}{}^l_{ijk} = \overset{m*}{C}{}^l_{ijk} = 0$ 이 성립한다는것이 나온다. 따라서 식 (13)에 의하여 $\overset{\circ}{C}{}^l_{ijk} = 0$ 이 성립한다. 이것은 리만다양체 $(M,\ g,\ \overset{\circ}{\nabla})$ 가 공형평탄이라는것을 의미한다.(증명끝)

리만다양체 $(M,\ g)$ 우의 비계량접속 ∇ 에 대하여 $R^l_{ijk} = R^{l*}_{ijk}$ 이면 ∇ 를 공액대칭접속, $R^l_{jk} = \overset{*}{R}_{jk}$ 이면 ∇ 를 공액릿찌대칭접속이라고 부른다.

정리 4 리만다양체 $(M,\ g)$ 우의 반대칭계량접속 ∇ 에 대한 호상접속 $\overset{m}{\nabla}$ 이 공액대칭접속이기 위해서는 그것이 공액릿찌대칭접속일것이 필요하고 충분하다.

증명 식 (4)와 (7)로부터

$$\overset{m*}{R}{}^l_{ijk} = \overset{m}{R}{}^l_{ijk} + \delta_j^l a_{ik} - \delta_i^l a_{jk} + g_{jk}a_i^l - g_{ik}a_j^l - 2\delta_k^l \pi_{ij} \tag{14}$$

이다. 이 식을 $i,\ l$ 에 관하여 축약하면 다음의 식이 얻어진다.

$$\overset{m*}{R}_{jk} = R_{jk} - na_{jk} + 2\pi_{jk} \tag{15}$$

이 식을 $j,\ k$ 에 관하여 빗대칭화하고 $a_{jk} - a_{kj} = \pi_{jk}$ 라는것을 고려하면 다음의 식이 얻어진다.

$$\pi_{jk} = \frac{1}{n-4}\left[\left(\overset{m}{R}_{jk} - \overset{m}{R}_{kj}\right) - \left(\overset{m*}{R}_{jk} - \overset{m*}{R}_{kj}\right)\right]$$

이 식을 (15)에 넣고 a_{jk}를 구하면 다음과 같다.

$$a_{jk}=\frac{1}{n}\left\{\overset{m}{R}_{jk}-\overset{m*}{R}_{jk}+\frac{2}{n-4}\left[\left(\overset{m}{R}_{jk}-\overset{m}{R}_{kj}\right)-\left(\overset{m*}{R}_{jk}-\overset{m*}{R}_{kj}\right)\right]\right\}$$

그러므로 우의 두 식을 식 (14)에 넣고

$$\overset{m}{V}{}^{l}_{ijk}:=\frac{1}{n}\left(\delta^l_i\overset{m}{R}_{jk}-\delta^l_j\overset{m}{R}_{ik}+g_{ik}\overset{m}{R}{}^l_j-g_{jk}\overset{m}{R}{}^l_i\right)-\frac{2}{n(n-4)}\left[\delta^l_i\left(\overset{m}{R}_{jk}-\overset{m}{R}_{kj}\right)-\delta^l_j\left(\overset{m}{R}_{ik}-\overset{m}{R}_{ki}\right)+\right.$$
$$\left.+g_{ik}\left(\overset{m}{R}{}^l_j-\overset{m}{R}{}^l_{.j}\right)+g_{jk}\left(\overset{m}{R}{}^l_i-\overset{m}{R}{}^l_{.i}\right)+n\delta^\ell_k\left(\overset{m}{R}_{ij}-\overset{m}{R}_{ji}\right)\right]$$

$$\overset{m*}{V}{}^{l}_{ijk}:=\frac{1}{n}\left(\delta^l_i\overset{m*}{R}_{jk}-\delta^l_j\overset{m*}{R}_{ik}+g_{ik}\overset{m*}{R}{}^l_j-g_{jk}\overset{m*}{R}{}^l_i\right)-\frac{2}{n(n-4)}\left[\delta^l_i\left(\overset{m*}{R}_{jk}-\overset{m*}{R}_{kj}\right)-\delta^l_j\left(\overset{m*}{R}_{ik}-\overset{m*}{R}_{ki}\right)+\right.$$
$$\left.+g_{ik}\left(\overset{m*}{R}{}^l_j-\overset{m*}{R}{}^l_{.j}\right)+g_{jk}\left(\overset{m*}{R}{}^l_i-\overset{m*}{R}{}^l_{.i}\right)+n\delta^\ell_k\left(\overset{m*}{R}_{ij}-\overset{m*}{R}_{ji}\right)\right]\tag{16}$$

로 놓으면 다음의 식이 얻어진다.

$$\overset{m}{V}{}^{l}_{ijk}=\overset{m*}{V}{}^{l}_{ijk}\tag{17}$$

따라서 식 (16)과 (17)로부터 $\overset{m}{R}{}^l_{ijk}=\overset{m*}{R}{}^l_{ijk}$ 이기 위해서는 $\overset{m}{R}_{jk}=\overset{m*}{R}_{jk}$ 이 성립할것이 필요하고 충분하다는것이 나온다.(증명끝)

선행연구[5]에서는 반대칭계량접속 ∇가 도입된 리만다양체가 군다양체로 되면 일정곡률다양체로 된다는것이 증명되였다. 그러나 다음의 정리는 반대칭계량접속 ∇의 호상접속 $\overset{m}{\nabla}$이 도입된 리만다양체는 일정곡률다양체로 되지 않는다는것을 보여준다.

정리 5 련결인 리만다양체 $(M,\ g)$ ($\dim M\ge 3$)우의 반대칭계량접속 ∇의 호상접속 $\overset{m}{\nabla}$에 관한 단면곡률이 임의의 점 p에서의 2차원방향 E(즉 T_pM의 임의의 2차원부분공간)의 선택에 무관계하다고 하자. 이때 리만다양체 $(M,\ g,\ \overset{m}{\nabla})$이 일정곡률다양체로 되기 위해서는 $\pi_h=0$이 성립할것이 필요하고 충분하다.

증명 반대칭계량접속 ∇의 호상접속 $\overset{m}{\nabla}$에 대한 제2종의 비앙끼항등식은 다음과 같다.

$$\overset{m}{\nabla}_h\overset{m}{R}{}^l_{ijk}+\overset{m}{\nabla}_i\overset{m}{R}{}^l_{jhk}+\overset{m}{\nabla}_j\overset{m}{R}{}^l_{hik}=-2\left(\pi_h\overset{m}{R}{}^l_{ijk}+\pi_i\overset{m}{R}{}^l_{jhk}+\pi_j\overset{m}{R}{}^l_{hik}\right)\tag{18}$$

그런데 단면곡률이 임의의 점 p에서의 2차원방향의 선택에 무관계하면

$$\overset{m}{R}{}^l_{ijk}=k(p)(\delta^l_ig_{jk}-\delta^l_jg_{ik})$$

가 성립한다. 그러므로 이 식을 제2종의 비앙끼항등식에 넣고 정돈하면서 식 (3)을 리용하면

$$(\nabla_hk-\pi_hk)(\delta^l_ig_{jk}-\delta^l_jg_{ik})+(\nabla_ik-\pi_ik)(\delta^l_jg_{hk}-\delta^l_hg_{jk})+(\nabla_jk-\pi_jk)(\delta^l_hg_{ik}-\delta^l_ig_{hk})=0$$

이다. 이 식을 $i,\ l$에 관하여 축약하면 다음의 식이 얻어진다.

$$(n-2)(\nabla_h k-\pi_h k)g_{jk}+(2-n)(\nabla_j k-\pi_j k)g_{hk}=0$$

따라서 이 식에 g^{jk}를 곱하고 축약하면 다음의 식이 얻어진다.

$$(n-1)(n-2)(\nabla_h k-\pi_h k)=0$$

이것은 $\dim M\ge 3$인 경우에 $K=\text{const}$이기 위해서는 $\pi_h=0$이 성립할것이 필요하고 충분하다는것을 보여준다.(증명끝)

주의 1 $\pi_h=0$이면 $\nabla=\overset{\circ}{\nabla}$이다. 이것은 $\pi_h\ne 0$일 때 $(M,\ g,\ \overset{m}{\nabla})$이 일정곡률다양체로 되지 않는다는것을 보여준다. 이것은 $\overset{m}{\nabla}$이 ∇와 다른 성질을 가진다는것을 의미한다.

끝으로 반대칭재귀계량접속에 대한 호상접속의 일정곡률성에 대하여 보기로 하자.

반대칭재귀계량접속 $\overset{r}{\nabla}$는 관계식

$$\overset{r}{\nabla}_k g_{ij}=2\omega_k g_{ij}$$

$$\overset{r}{T}{}^k_{ij}=\pi_j\delta^k_i-\pi_i\delta^k_j$$

를 만족시키는 접속으로서 접속결수는 다음과 같이 표시된다.

$$\overset{r}{\Gamma}{}^k_{ij}=\begin{Bmatrix}k\\ ij\end{Bmatrix}-\omega_i\delta^k_j-(\omega_j-\pi_j)\delta^k_i+g_{ij}(\omega^k-\pi^k)$$

그리고 접속 $\overset{r}{\nabla}$의 호상접속 $\overset{rm}{\nabla}$은 관계식

$$\begin{gathered}\overset{rm}{\nabla}_k g_{ij}=2(\omega_k-\pi_k)g_{ij}+g_{ik}\pi_j+g_{jk}\pi_i\\ \overset{rm}{T}{}^k_{ij}=\pi_i\delta^k_j-\pi_j\delta^k_i\end{gathered}\tag{19}$$

를 만족시키는 접속으로서 접속결수는 다음과 같이 표시된다.

$$\overset{rm}{\Gamma}{}^k_{ij}=\begin{Bmatrix}k\\ ij\end{Bmatrix}-\omega_j\delta^k_i-(\omega_i-\pi_i)\delta^k_j+g_{ij}(\omega^k-\pi^k)$$

정리 6 련결인 리만다양체 $(M,\ g)$ $(\dim M\ge 3)$우의 반대칭재귀계량접속 $\overset{r}{\nabla}$의 호상접속 $\overset{rm}{\nabla}$에 관한 단면곡률이 임의의 점 p에서의 2차원방향 E(즉 T_pM의 임의의 2차원부분공간)의 선택에 무관계하다고 하자. 이때

$$2\omega_h=\pi_h\tag{20}$$

이면 리만다양체 $(M,\ g,\ \overset{rm}{\nabla})$은 일정곡률다양체로 된다.

증명 $\overset{rm}{\nabla}$의 단면곡률이 임의의 점 p에서의 2차원방향 E의 선택에 무관계하면

$$\overset{rm}{R}{}^l_{ijk}=k(p)(\delta^l_i g_{jk}-\delta^l_j g_{ik})$$

가 성립한다. 이 식을 제2종의 비앙끼항등식 (18)에서 $\overset{m}{R}_{ijk}$대신 $\overset{rm}{R}{}^l_{ijk}$을 갈아넣고 식 (19)

를 리용하면 다음식이 얻어진다.

$$[\nabla_h k+(2\omega_h-\pi_h)k](\delta_i^l g_{jk}-\delta_j^l g_{ik})+[\nabla_i k+(2\omega_i-\pi_i)k](\delta_j^l g_{hk}-\delta_h^l g_{jik})+$$
$$+[\nabla_j k+(2\omega_j-\pi_j)k](\delta_h^l g_{ik}-\delta_i^l g_{hk})=0$$

그리고 이 식을 i, l에 관하여 축약하면 다음의 식이 얻어진다.

$$[\nabla_h k+(2\omega_h-\pi_h)k](n-2)g_{jk}+[\nabla_j k+(2\omega_j-\pi_j)k](n-2)g_{hk}=0$$

또한 이 식에 g^{jk}를 곱하고 축약하면 다음의 식이 얻어진다.

$$(n-1)(n-2)[\nabla_{h'} k+(2\omega_h-\pi_h)k]=0$$

그런데 $\dim M\geq 3$이므로 $K=\text{const}$인 경우는 $2\omega_h=\pi_h$가 성립하는 경우뿐이다.(증명끝)

주의 2 반대칭계량접속의 호상접속은 일반적으로 일정곡률을 허용하지 않지만 반대칭재귀계량접속의 호상접속은 일정곡률을 허용한다. 식 (19)와 (20)으로부터 슈르의 정리를 만족시키는 반대칭재귀계량접속의 호상접속 $\overset{m}{\nabla}$은 방정식

$$\nabla_k g_{ij}=-\pi_k g_{ij}+\pi_i g_{ik}+\pi_j g_{ik}$$
$$T_{ij}^k=\pi_i\delta_j^k-\pi_j\delta_j^k$$

를 만족시키는 접속으로서 접속결수는

$$\Gamma_{ij}^k=\begin{Bmatrix}k\\ij\end{Bmatrix}+\frac{1}{2}(\pi_i\delta_j^k-\pi_j\delta_i^k-g_{ij}\pi^k)$$

로 표시된다는것을 알수 있다.

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보 수학, 64, 2, 52. 주체107(2018).
[2] E. S. Stepanva; Journal of Mathematical Sciences, 147, 1, 6507, 2007.
[3] I. Suhendro; Progress in Physics, 4, 10, 47, 2007.
[4] W. X. Tang et al.; Filomat, 32, 1, 207, 2018.
[5] K.Yano; Rev. Roum. Math. Pures et Apple, 15, 1579, 1970.

주체108(2019)년 3월 15일 원고접수

On the Mutual Connection of a Semi-Symmetric Metric Connection in a Riemannian Manifold

Ho Tal Yun, Ri Kwang Ho

In this paper, we newly discovered the geometrical properties of the mutual connection of a semi-symmetric metric connection in a Riemannian manifold. And we studied a conjugate symmetry condition of the mutual connection and a constant curvature condition of the mutual connection.

Key words: semi-symmetric metric connection, mutual connection