

3축회전체비행조종실험기구의 수학적모형작성

전충일, 박은순

위대한 령도자 김정일동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《인민경제 모든 부문의 생산기술공정과 생산방법, 경영활동을 새로운 과학적도대우에 올려세우기 위한 연구사업도 강화하여야 합니다.》(《김정일선집》 증보판 제11권 138페이지)

선행연구[1]에서는 비행정보측정장치를 설계제작한데 기초하여 그것의 수학적모형을 작성하지 않고 자세추정측면에서만 취급하였다.

선행연구[2]에서는 인공지구위성을 모의한 3축운동모의기를 설계제작하고 무술직류전동기를 리용한 3축회전운동을 실현한 대상의 수학적모형을 작성하였다.

론문에서는 중요축, 횡요축, 편요축에서의 회전체의 운동과 직류전동기모형을 결합한 동력학적모형에 기초하여 3축회전체비행조종실험기구의 수학적모형을 작성하였다.

1. 3축회전체비행조종실험기구의 기구학적구성

제작한 3축회전체비행조종실험기구의 구조를 그림 1에 보여주었다.

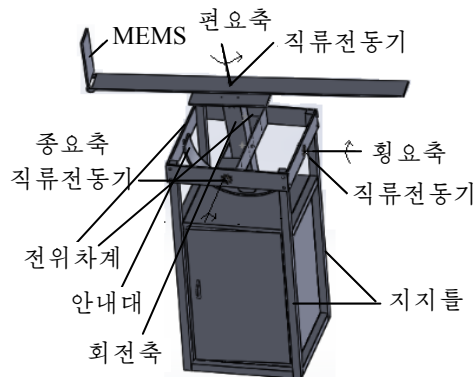


그림 1. 3축회전체비행조종실험기구의 구조

3축회전체비행조종실험기구는 활등모양의 로라안내대, 그우에 놓인 회전대, 회전팔, 3개의 직류전동기, 3개의 전위차계, 판성수감장치, 지지틀로 되어있다. 활등모양의 로라안내대는 중요축주위로 $\pm 40^\circ$ 범위에서 회전하며 로라안내대우에 설치된 회전대는 횡요축주위로 $\pm 40^\circ$ 범위에서 회전한다. 또한 중요, 횡요축주위로 회전하는 회전대우에 설치된 회전팔은 $\pm 180^\circ$ 범위에서 회전한다.

3축회전체비행조종실험기구는 3개의 회전부분 즉 로라안내대와 회전대, 회전팔, 판성수감장치, 중요전동기를 포함하는 횡요부분, 회전대와 회전팔, 판성수감장치, 편요전동기를 포함하는 중요부분, 회전팔과 판성수감장치를 포함하는 편요부분들로 이루어진다.

2. 3축회전체비행조종실험기구의 수학적모형

이제 3축회전체비행조종실험기구의 횡요, 종요, 편요각들을 각각 ϕ, θ, ψ 라고 하면 3축회전각속도들은 $\omega_r(\dot{\phi}), \omega_p(\dot{\theta}), \omega_y(\dot{\psi})$ 이다.(그림 2)

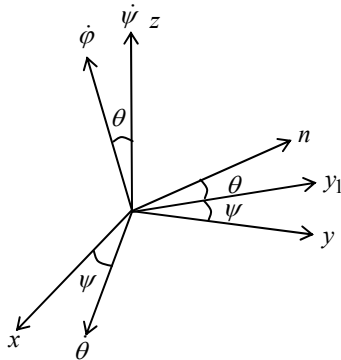


그림 2에서 회전체동체계에서의 각속도는

$$\omega^{rpn} = \omega_p + \omega_y = \omega_p \mathbf{p} + \omega_y \cos \theta \mathbf{r} + \omega_y \sin \theta \mathbf{n} \quad (1)$$

이고 3축각속도들은

$$\omega_r = \omega_r \mathbf{r}, \quad \omega_p = \omega_p \mathbf{p}, \quad \omega_y = \omega_p \mathbf{p} + \omega_y \cos \theta \mathbf{r} + \omega_y \sin \theta \mathbf{n} \quad (2)$$

이며 횡요부분의 운동량모멘트는 $\mathbf{H}_r = I_r(\omega_r + \omega_p + \omega_y)$ 이다.

여기서 횡요부분이 축대칭이라고 가정하면 관성행렬의 모멘트는

$$I_r = \text{diag}[I_{rr}, I_{rpn}, I_{ryn}]$$

이다. 그리고 횡요부분에서 작용하는 외부회전모멘트는

$$\mathbf{M}_{rr} = \dot{\mathbf{H}}_r^{rpn} + \omega^{rpn} \times \mathbf{H}_r = M_{rr} \mathbf{r} + M_{rp} \mathbf{p} + M_{rn} \mathbf{n} \quad (3)$$

이다.

그림 2. 횡요(ϕ), 종요(θ), 편요(ψ) 각들사이의 관계

식 (1)과 (3)을 결합하면 다음과 같다.

$$\mathbf{M}_{rr} = \ddot{\phi} I_{rr} + (\ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta) I_{rr} \quad (4)$$

우와 같은 방법으로 하면 종요부분과 편요부분의 운동량모멘트는

$$\mathbf{H}_p = \mathbf{H}_r + I_p(\omega_p + \omega_y) \quad (5)$$

$$\mathbf{H}_y = \mathbf{H}_p + I_{yy} \omega_y \quad (6)$$

이다. 여기서 종요, 편요부분의 관성행렬모멘트는

$$I_p = \text{diag}[I_{pr}, I_{pp}, I_{pn}]$$

이다.

동체계로부터 관성계으로의 회전형렬은

$$R^{rpn}(\psi, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \cos \theta & \sin \psi \sin \theta \\ \sin \psi & \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (7)$$

이다.

식 (3)을 리용하여 종요와 편요부분에 작용하는 외부회전모멘트성분을 얻으면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M_{pp} &= (I_{rpn} + I_{pp})\ddot{\theta} + I_{rr}\dot{\phi}\dot{\psi}\sin\theta + \\ &+ (I_{rr} + I_{pr} - I_{rpn} - I_{pn})\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} M_{yz} &= (I_{yy} + I_{rpn} + I_{pn})\ddot{\psi} + I_{rr}(\ddot{\phi}\cos\theta - \dot{\phi}\dot{\theta}\sin\theta) + \\ &+ (I_{rr} + I_{pr} - I_{rpn} - I_{pn})(\ddot{\phi}\cos^2\theta - \dot{\phi}\dot{\theta}\sin 2\theta) \end{aligned} \quad (9)$$

M_{pp}, M_{yz} 는 종요, 편요전동기들에 의해 산생된다.

실험장치의 수학적모형은 식 (4), (8), (9)를 결합하여 얻는다.

$$\tau - T_f = M \quad (10)$$

여기서 $\tau = [\tau_r, \tau_p, \tau_y]^T$ 는 3개 전동기들의 회전모멘트벡토르, $M = [M_{rr}, M_{pp}, M_{yy}]^T$ 는 부하회전모멘트벡토르, $T_f = [T_{fr}, T_{fp}, T_{fy}]^T$ 는 코리올리 및 원심힘을 비롯한 외란회전모멘트벡토르이다.

수학적모형 (10)은 오일러각으로 표현된 관성수감장치의 자세변화와 직접 관련된 3개 축에 대한 전동기회전모멘트들과 회전각들사이의 관계를 보여준다.

한편 논문에서 설계한 실험장치에서는 감속기가 일체화된 직류전동기를 리용하여 회전체를 구동하므로 전동체계를 고려한 회전체의 수학적모형을 유도할 때 감속기의 감속비를 고려하여야 한다.

이때의 횡요축, 종요축, 편요축전동기들의 모형은 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\tau_r &= R_1 u_r - P_1 \dot{\phi} \\ \tau_p &= R_2 u_p - P_2 \dot{\theta} \\ \tau_y &= R_3 u_y - P_3 \dot{\psi}\end{aligned}\quad (11)$$

여기서

$$\begin{aligned}R_1 &= D_r \frac{K_{mr}}{R_a}, R_2 = D_p \frac{K_{mp}}{R_a}, R_3 = D_y \frac{K_{my}}{R_a}, \\ P_1 &= D_r^2 \frac{K_{mr}^2}{R_a}, P_2 = D_p^2 \frac{K_{mp}^2}{R_a}, P_3 = D_y^2 \frac{K_{my}^2}{R_a}\end{aligned}$$

이다.

식 (10)을 다시 쓰면

$$H(q)\ddot{q} + L(q, \dot{q})\dot{q} = Ru - T_f \quad (12)$$

이다. 여기서 $q = [\phi, \theta, \psi]^T$ 는 회전체자세각벡토르, $R = [R_1, R_2, R_3]^T$, $H(q)$ 는 회전체관성행렬이다. $u = [u_r, u_p, u_y]^T$ 는 횡요축, 종요축, 편요축전동기들에 걸어주는 직류전압이다.

$$\begin{aligned}H(q) &= \begin{bmatrix} I_1 & 0 & I_1 \cos \theta \\ 0 & I_2 & 0 \\ I_1 \cos \theta & 0 & I_4 + I_3 \cos^2 \theta \end{bmatrix}, \\ L(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} -P_2 & -I_1 \dot{\psi} \sin \theta & 0 \\ I_1 \dot{\psi} \sin \theta & 0 & I_3 \dot{\psi} \sin \theta \cos \theta \\ -I_1 \dot{\theta} \sin \theta & -I_3 \dot{\psi} \sin \theta \cos \theta & -I_3 \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta - P_3 \end{bmatrix} \\ I_1 &= I_{rr}, I_2 = I_{rpn} + I_{pp} \\ I_3 &= I_{rr} + I_{rp} - I_{rpn} - I_{pn}, I_4 = I_{yy} + I_{rpn} + I_{pn} \\ x &= [q, \dot{q}]^T = [\phi, \theta, \psi, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T \\ \dot{x} &= H^{-1}[Ru - T_f - L(q, \dot{q})\dot{q}]\end{aligned}\quad (13)$$

식 (11)과 (12), (13)을 결합하면 3축회전체비행조종실험기구의 수학적모형은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + ET_f \\ y &= Cx\end{aligned}\quad (14)$$

여기서

$$A = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 \\ 0_3 & H^{-1}L \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0_3 \\ R \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0_3 \\ H^{-1} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

이다.

론문에서 설계한 3축회전체비행조종실험기구의 물리적파라미터값들은 표와 같다.

표. 3축회전체비행조종실험기구의 물리적파라미터값

No.	파라미터	값	의 미
1	$I_{rr} / (\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	0.055	1 횡요축회전부의 관성모멘트
2	$I_{pp} / (\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	0.048	6 종요축회전부의 관성모멘트
3	$I_{yy} / (\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	0.075	편요축회전부의 관성모멘트
4	m_r / kg	1.7	횡요축회전부의 질량
5	m_p / kg	1.5	종요축회전부의 질량
6	m_y / kg	1.2	편요축회전부의 질량
7	l_r / m	0.36	횡요축회전부의 직경
8	l_p / m	0.36	종요축회전부의 직경
9	l_y / m	0.5	편요축회전부의 직경
10	$K_m / (\text{rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1})$	0.104	역기전력상수
11	R_m / Ω	5.6	전기자저항
12	D_r	360	횡요전동기의 감속비
13	D_p	360	종요전동기의 감속비
14	D_y	49	편요전동기의 감속비

횡요, 종요, 편요축에 대한 직류전동기들은 특성이 다르고 감속비만 다르다.

이로부터 3축회전체비행조종실험기구의 조종공학특성은 다음과 같다.

첫째로, 3축상에서의 3개 직류전동기의 전압을 조작량으로 하고 회전체의 횡요, 종요, 편요각도를 조종량으로 하는 다입력-다출력체계이다.

둘째로, 강한 비선형성을 가지는 대상이다.

계의 상태로 되는 회전체가 이루는 각도는 3각함수의 형태로 조종량에 영향을 미치며 이것은 동적인 비선형성을 나타내므로 실험체계의 주되는 비선형성으로 나타난다.

셋째로, 외란과 불확정성을 가진 체계이다.

3축회전체실험기구에서 중력의 유효집중심이 3개 축들의 교차점으로부터 리탈되는 경우에 외란을 받게 되며 이 외란은 불확정성으로 나타난다.

3. 모형검증실험 및 결과분석

앞에서 작성한 수학적모형의 검증을 위하여 실험으로 편요축전동기에 $u = \sin(4t)$ 의 전압을 걸어주고 그때의 회전체의 편요각을 측정한 실험곡선과 식 (14)의 미분방정식을 풀어서 계산한 값과 비교실험을 진행하였다.(그림 3)

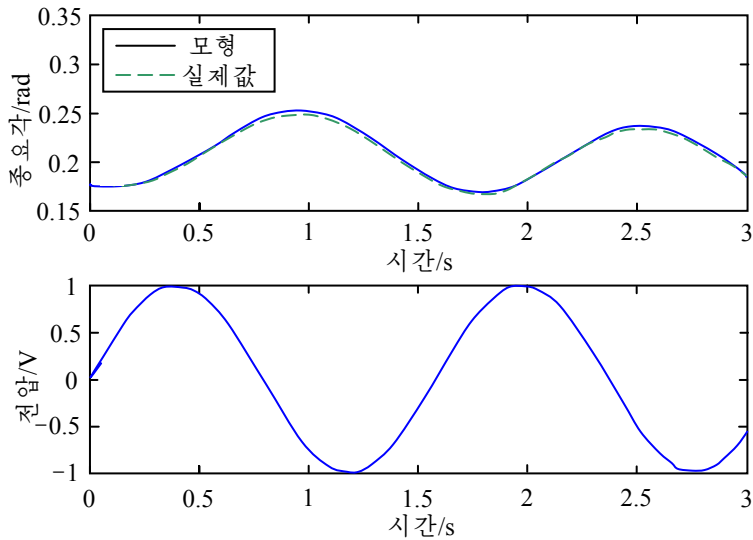


그림 3. 장치실험자료와 모형출력곡선

그림 3으로부터 우리가 작성한 모형이 대상의 특성을 정확히 반영한 모형이라는것을 알수 있다.

맺는 말

3축회전체비행조종실험기구의 동력학적모형에 기초하여 상태공간모형을 작성하고 컴퓨터모의실험으로 그 효과성을 검증하였다.

참고 문헌

- [1] Der Ming Ma, Jaw Kuen Shiau; Department of Aerospace Engineering, 12, 1, 2014.
- [2] Xie Yue; IEEE Trans, 15, 552, 2012.

주체109(2020)년 5월 5일 원고접수

A Study on Mathematical Modeling of 3 Axis Rotary Flight Control Experimental Device Based on Dynamic Model

Jon Chung Il, Pak Un Sun

In this paper we build mathematical model of 3 axis rotary flight control experimental device on the basis of dynamic model which combines movement of rotary on roll, pitch and yaw axis with model of DC motor.

Keywords: rotary, flight control, modeling, 3 axis control