김일성종합대학학보 수학 주체107(2018)년 제64권 제2호

쌘드위치복합판의 변위해석에 대한 연구

송성관, 안일진

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《과학자, 기술자들은 현실에 튼튼히 발을 붙이고 사회주의건설의 실천이 제기하는 문제들을 연구대상으로 삼고 과학연구사업을 진행하여야 하며 연구성과를 생산에 도입하는데서 나서는 과학기술적문제들을 책임적으로 풀어야 합니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제15권 492페지)

우리는 현시기 기계 및 건설부문에서 광범히 리용되고있는 쌘드위치복합판의 변위해석에 대하여 연구하였다.

선행연구[1]에서는 다층복합판의 면외변위에 대하여 취급하였고 선행연구[2]에서는 림계짐해석을 진행하였다.

론문에서는 쌘드위치복합판이 면내 및 면외힘을 받을 때 변위를 해석하는 방법에 대하여 연구하였다.

1. 기본관계식

아래우에 두께가 얇은 판이 있고 가운데에 속심이 들어있는 쌘드위치복합판을 고찰하자. 아래판과 웃판은 직교이방성재료로 되여있다.

판의 웃면에는 수직으로 분포짐이 작용하고 경계에는 면내힘이 주어졌다.

판의 중간면에 x_1, x_2축을, 두께방향으로 x_3축을 택하자. 이때 판에서 평형방정식은 다음과 같이 표시된다.[1]

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial N_1}{\partial x_1}+\frac{\partial N_{12}}{\partial x_2}=0\\
&\frac{\partial N_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial N_2}{\partial x_2}=0\\
&\frac{\partial Q_1}{\partial x_1}+\frac{\partial Q_2}{\partial x_2}+q-\overline{N}_1\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}-\overline{N}_2\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}-2\overline{N}_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}=0\\
&\frac{\partial M_1}{\partial x_1}+\frac{\partial M_{12}}{\partial x_2}=Q_1\\
&\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial M_2}{\partial x_2}=Q_2
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

여기서 N_1, N_2는 각각 x_1, x_2방향의 단위길이당 법선속힘이고 N_{12}는 x_1x_2면에서의 단위길이당 접선속힘이다. 그리고 M_1, M_2는 각각 x_1, x_2축에 수직인 면에 작용하는 단위길이당 구부림모멘트, M_{12}는 x_1x_2면에서의 틀음모멘트이고 Q_1, Q_2는 각각 x_1, x_2축에 수직인 면에 작용하는 단위길이당 자르는 힘이며 q는 겉면에 수직인 단위면적당 분포힘이다.

또한 $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$는 각각 x_1, x_2축에 수직인 경계면에 작용하는 단위길이당 법선힘이고 $\overline{N}_{12}$는 경계면에 접하는 단위길이당 접선힘이다.

판에서의 상태방정식은 다음과 같다.[3]

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_{11i}=\frac{1}{E_{1i}t_f}(N_{1i}-\nu_{12i}N_{2i}),\quad \varepsilon_{22i}=\frac{1}{E_{2i}t_f}(N_{2i}-\nu_{21i}N_{1i})\\
&\varepsilon_{12i}=\frac{1}{G_{12}t_f}N_{21i},\quad \varepsilon_{13i}=\frac{Q_1}{G_{13}t_c},\quad \varepsilon_{23i}=\frac{Q_2}{G_{23}t_c}\\
&M_1=D_1\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\frac{1}{\Gamma_1}\frac{\partial Q_1}{\partial x_1}\right)+\nu_{21}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\frac{1}{\Gamma_2}\frac{\partial Q_2}{\partial x_2}\right)\right]\\
&M_2=D_2\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\frac{1}{\Gamma_2}\frac{\partial Q_1}{\partial x_2}\right)+\nu_{12}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\frac{1}{\Gamma_1}\frac{\partial Q_1}{\partial x_1}\right)\right]\\
&M_{12}=D_3\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{1}{\Gamma_1}\frac{\partial Q_1}{\partial x_2}+\frac{1}{\Gamma_2}\frac{\partial Q_2}{\partial x_1}\right]
\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

여기서 첨수 $i=1, 2$는 각각 아래판과 웃판을 의미하고 t_f는 아래판과 웃판의 두께, t_c는 속재료판의 두께이다. 또한

$$\left.\begin{aligned}
&D_1=\frac{E_1t_fh^2}{2(1-\nu_{12}\nu_{21})},\quad D_2=\frac{E_2t_fh^2}{2(1-\nu_{12}\nu_{21})},\quad D_3=G_{12}t_fh^2\\
&\Gamma_1=G_{13c}t_c,\quad \Gamma_2=G_{23c}t_c
\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

이제 식 (1)의 네번째, 다섯번째 식을 세번째 식에 대입하면

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x_1^2}+2\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 M_2}{\partial x_2^2}-q+\overline{N}_1\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+2\overline{N}_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}+\overline{N}_2\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}=0\tag{4}$$

이 얻어진다. 식 (2)를 식 (1)의 첫 두 식과 식 (4)에 대입하면 다음의 식이 얻어진다.

$$\left.\begin{aligned}
L_Au_1=0\\
L_Au_2=0
\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

$$\begin{aligned}
&L_Dw+\frac{1}{\Gamma_1}\left[D_1\frac{\partial^3 Q_1}{\partial x_1^3}+(\nu_{12}D_2+2D_3)\frac{\partial^3 Q_1}{\partial x_1\partial x_2^2}\right]+\frac{1}{\Gamma_2}\left[D_2\frac{\partial^3 Q_2}{\partial x_2^3}+(\nu_{21}D_1+2D_3)\frac{\partial^3 Q_2}{\partial x_1^2\partial x_2}\right]=\\
&\qquad=q-\overline{N}_1\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}-\overline{N}_2\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}-2\overline{N}_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}
\end{aligned}\tag{6}$$

여기서

$$\left.\begin{aligned}
&L_A=\frac{A_3}{A_2}\frac{\partial^4}{\partial x_1^4}+\left(1-\nu_{12}\nu_{21}-2\nu_{12}\frac{A_3}{A_1}\right)\frac{\partial^4}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+\frac{A_3}{A_1}\frac{\partial^4}{\partial x_2^4}\\
&L_D=D_1\frac{\partial^4}{\partial x_1^4}+(2\nu_{21}D_1+4D_3)\frac{\partial^4}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+D_2\frac{\partial^4}{\partial x_2^4}
\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

이고 A_1, A_2, A_3은 각각 다음과 같다.

$$A_1 = \frac{2E_1 t_f}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad A_2 = \frac{2E_2 t_f}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad A_3 = 2G_{12} t_f \tag{8}$$

또한 식 (2)의 마지막 3개의 식을 식 (1)의 네번째, 다섯번째 식에 대입하면 다음의 식이 얻어진다.

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= D_1\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + \frac{1}{\Gamma_1}\frac{\partial^2 Q_1}{\partial x_1^2} + \nu_{21}\frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\nu_{21}}{\Gamma_2}\frac{\partial^2 Q_2}{\partial x_1 \partial x_2}\right) + \\ &\quad + D_3\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{1}{\Gamma_1}\frac{\partial^2 Q_2}{\partial x_2^2} + \frac{1}{\Gamma_2}\frac{\partial^2 Q_2}{\partial x_1 \partial x_2}\right) \\ Q_2 &= D_2\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3} + \frac{1}{\Gamma_2}\frac{\partial^2 Q_2}{\partial x_2^2} + \nu_{12}\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \frac{\nu_{12}}{\Gamma_2}\frac{\partial^2 Q_2}{\partial x_1 \partial x_2}\right) + \\ &\quad + D_3\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \frac{1}{\Gamma_2}\frac{\partial^2 Q_2}{\partial x_1^2} + \frac{1}{\Gamma_1}\frac{\partial^2 Q_1}{\partial x_1 \partial x_2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

식 (5)에서 u_1, u_2를 구하고 식 (6), (9)를 련립시켜 풀면 변위 w와 속힘 Q_1, Q_2가 완전히 결정된다.

2. 변위와 자르는 힘의 계산

이제 판의 네 경계 $x_1 = 0,\ a$; $x_2 = 0,\ b$에서 단순지지된 쌘드위치판에 수직인 균등분포짐 q_0과 면내힘 $\overline{N}_1 = P,\ \overline{N}_2 = \overline{N}_{12} = 0$이 작용하는 경우를 고찰하자.

식 (6), (9)의 풀이형태를 다음과 같은 2중삼각합렬로 표시하면 자유지지경계조건을 만족시킨다는것을 알수 있다.

$$\left.\begin{aligned} w(x_1,\ x_2) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin\frac{m\pi x_1}{a}\sin\frac{n\pi x_2}{b} \\ Q_1(x_1,\ x_2) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \cos\frac{m\pi x_1}{a}\sin\frac{n\pi x_2}{b} \\ Q_2(x_1,\ x_2) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \sin\frac{m\pi x_1}{a}\cos\frac{n\pi x_2}{b} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

이때

$$q_0 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin\frac{m\pi x_1}{a}\sin\frac{n\pi x_2}{b}, \quad q_{mn} = \frac{16 q_0}{\pi^2 mn} \tag{11}$$

으로 표시하고 식 (10), (11)을 식 (6), (9)에 대입한 다음 $\gamma = m\pi/a,\ s = n\pi/b$로 표시하면 다음과 같은 a_{mn}, b_{mn}, c_{mn}에 관한 방정식이 얻어진다.

$$\left.\begin{aligned} &(d_{11} - \gamma^2 p)a_{mn} + d_{12} b_{mn} + d_{13} c_{mn} = q_{mn} \\ &d_{21} a_{mn} + d_{22} b_{mn} + d_{23} c_{mn} = 0 \\ &d_{31} a_{mn} + d_{32} b_{mn} + d_{33} c_{mn} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

여기서 d_{ij}는 다음과 같다.

$$\left.\begin{aligned}
d_{11} &= D_{11}\gamma^4 + 2(\nu_{21}D_1 + 4D_3)\gamma^2 s^2 + D_2 s^4 \\
d_{12} &= [D_1\gamma^3 + (\nu_{12}D_2 + 2D_3)\gamma s^2]/\Gamma_1 \\
d_{13} &= [D_2 s^3 + (\nu_{21}D_1 + 2D_3)\gamma^2 s]/\Gamma_2 \\
d_{21} &= D_1(\gamma^3 + \nu_{21}\gamma s^2) + 2D_3 s^2 \\
d_{22} &= 1 + D_1\gamma^2/\Gamma_1 + D_3 s^2/\Gamma_1 \\
d_{23} &= D_1\nu_{21}\gamma s/\Gamma_2 + D_3\gamma s/\Gamma_2 \\
d_{31} &= D_3(s^3 + \nu_{12}\gamma^2 s) + 2D_3\gamma^2 s \\
d_{32} &= D_2\nu_{12}\gamma s/\Gamma_1 + D_3\gamma s/\Gamma_1 \\
d_{33} &= 1 + D_2 s^2/\Gamma_2 + D_3\gamma^2/\Gamma_2
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

련립방정식 (12)를 풀면 a_{mn}, b_{mn}, c_{mn}이 구해지는데 a_{mn}은 다음과 같다.

$$a_{mn} = \frac{\begin{vmatrix} q_{mn} & d_{12} & d_{13} \\ 0 & d_{22} & d_{23} \\ 0 & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_{11} - \gamma^2 p & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix}} \tag{14}$$

식 (14)를 식 (10)에 대입하면 $w(x_1,\ x_2)$가 완전히 결정된다.

3. 계 산 실 례

아래판과 웃판은 탄소/에폭시수지로 되여있고 가운데의 속심은 폴리에스테르수지로 되여있는 쌘드위치복합판을 고찰하자.

판의 기하학적 및 력학적특성량들은 다음과 같다.

$$a = 1\,\mathrm{m},\quad b = 0.8\,\mathrm{m},\quad h = 0.1\,\mathrm{m},\quad t_f = 0.01\,\mathrm{m},\quad t_c = 0.08\,\mathrm{m}$$

$$E_1 = 1.0\times10^{11}\,\mathrm{Pa},\quad E_2 = 1.0\times10^{10}\,\mathrm{Pa},\quad G_{12} = 5.0\times10^{9}\,\mathrm{Pa}$$

$$G_{13c} = G_{23c} = 1.0\times10^{9}\,\mathrm{Pa},\quad \nu_{12} = 0.3,\quad \nu_{21} = 0.03$$

$$q_0 = 1.0\times10^{4}\,\mathrm{Pa},\quad q_{11} = \frac{1.6\times10^5}{\pi^2}\,\mathrm{Pa},\quad P = 0.8\times10^{5}\,\mathrm{N/m}$$

이 량들을 식 (13), (14)에 대입하면 $m = n = 1$인 경우에 판의 중심에서 처짐이 다음과 같이 얻어진다.

$$w_{11} = 1.22\times10^{-3}\,\mathrm{m}$$

식 (10)은 급격히 수렴하는 합렬로 되는데

$$w_{33} = 1.27\times10^{-3}\,\mathrm{m},\quad w_{55} = 1.30\times10^{-3}\,\mathrm{m}$$

로 된다. 즉 $m = n = 5$까지 제한시켰을 때 $m = n = 1$에 대한 상대오차는 6%로 된다.

맺 는 말

쌘드위치복합재료판의 x축방향의 변위를 구하는 방법을 제기하였다. 류사한 방법으로 x_1, x_2방향의 변위도 구할수 있다.

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보(자연과학), 61, 1, 19, 주체104(2015).

[2] **김일성**종합대학학보(자연과학), 57, 8, 16, 주체100(2011).

[3] A. Boudjemai; Engineering and Technology, World Academy of Science, 222～229, 2012.

주체106(2017)년 12월 5일 원고접수

Displacement Analysis of Sandwich Composite Laminate

Song Song Gwan, *An IL Jin*

We obtained the displacement equation of sandwich elastic composite laminate subjected by compound force and considered the analysis method about the displacement.

Key words: sandwich composite laminate, displacement, compound force