김일성종합대학학보 수 학
주체107(2018)년 제64권 제3호

한가지 조건밑에서 2×2블로크행렬의 드라진거꿀행렬표시

백 원 욱

위대한 수령 **김일성**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《새로운 과학분야를 개척하며 최신과학기술의 성과를 인민경제에 널리 받아들이기 위한 연구사업을 전망성있게 하여야 합니다.》(《**김일성**전집》 제72권 292페지)

드라진거꿀행렬에 관한 리론은 미분방정식, 최량조종 등 과학과 기술의 여러 분야에 널리 응용되고있는것으로 하여 활발히 연구되고있다.

모든 n차행렬 $A\in\mathbf{C}^{n\times n}$에 대하여 그것의 드라진거꿀행렬 A^{D}는 유일존재하며 그것은 A에 관한 다항식형태로 표시된다는것은 이미 알려져있다.[1]

블로크행렬의 드라진거꿀행렬을 그것의 요소블로크들에 의하여 표시하는 문제는 아직까지 완전히 해결되지 못하였고 일련의 제한조건밑에서 부분적으로 해결되였다.

선행연구[2]에서는 $ABC=O,\ D=O$인 경우에, 선행연구[3]에서는 $BD^iC=O\ (i=0,\cdots,n)$인 경우에 각각 블로크행렬 $\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}$의 드라진거꿀행렬을 구하였다.

론문에서는 선행연구결과들을 리용하여 한가지 새로운 조건밑에서 블로크행렬의 드라진거꿀행렬을 구하였다.

n차행렬 $A\in\mathbf{C}^{n\times n}$에 대하여 $\operatorname{rank}(A^{k+1})=\operatorname{rank}(A^k)$을 만족시키는 부아닌 최소의 옹근수 k를 A의 지표라고 부르고 $k=\operatorname{ind}(A)$로 표시한다. 또한 n차행렬 $A\in\mathbf{C}^{n\times n}$에 대하여 조건 $AX=XA,\ XAX=X,\ A^kXA=A^k$ ($k=\operatorname{ind}(A)$)들을 만족시키는 n차행렬 $X\in\mathbf{C}^{n\times n}$을 A의 드라진거꿀행렬이라고 부르고 $X=A^{\mathrm{D}}$로 표시한다.

$A^\pi=I-AA^{\mathrm{D}}$ ($I\in\mathbf{C}^{n\times n}$는 단위행렬)로 정의한다.

보조정리 1[2] $A\in\mathbf{C}^{m\times m},\ B\in\mathbf{C}^{m\times n},\ C\in\mathbf{C}^{n\times m}$이라고 할 때 반삼각블로크행렬 $R=\begin{pmatrix} A & B\\ C & O\end{pmatrix}$가 조건 $ABC=O$를 만족시키면 $R^{\mathrm{D}}=\begin{pmatrix} \Omega^{\mathrm{D}}A & \Omega^{\mathrm{D}}B\\ C\Omega^{\mathrm{D}} & C(\Omega^{\mathrm{D}})^2AB\end{pmatrix}$가 성립된다. 여기서

$$\Omega^{\mathrm{D}}=(A^2+BC)^{\mathrm{D}}=\sum_{i=0}^{\eta-1}((BC)^{\mathrm{D}})^{i+1}A^{2i}A^\pi+\sum_{i=0}^{\mu-1}(BC)^\pi(BC)^i(A^{\mathrm{D}})^{2i+2}$$

이고 $\mu=\operatorname{ind}(BC)$, $\eta=\operatorname{ind}(A^2)$, $\Omega=A^2+BC$이다.

보조정리 2[3] $A\in\mathbf{C}^{m\times m},\ B\in\mathbf{C}^{m\times n},\ C\in\mathbf{C}^{n\times m},\ D\in\mathbf{C}^{n\times n}$이라고 할 때 블로크행렬 $M=\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}$가 조건 $BD^jC=O\ (j=0,1,\cdots,n)$를 만족시키면 $M^{\mathrm{D}}=\begin{pmatrix} A^{\mathrm{D}} & X\\ Y & D^{\mathrm{D}}+Z\end{pmatrix}$가 성립된다. 여기서

$$X=\sum_{k=0}^{s-1}(A^{\mathrm{D}})^{k+2}BD^{k}D^{\pi}+A^{\pi}\sum_{k=0}^{r-1}A^{k}B(D^{\mathrm{D}})^{k+2}-A^{\mathrm{D}}BD^{\mathrm{D}}$$

$$Y=\sum_{k=0}^{r-1}(D^{\mathrm{D}})^{k+2}CA^{k}A^{\pi}+D^{\pi}\sum_{k=0}^{s-1}D^{k}C(A^{\mathrm{D}})^{k+2}-D^{\mathrm{D}}CA^{\mathrm{D}}$$

$$Z=\sum_{k=0}^{s-1}Y_{k+2}BD^{k}D^{\pi}+\sum_{k=0}^{t-1}(D^{\pi}C_{k}-Y_{0}A^{k})B(D^{\mathrm{D}})^{k+2}-YBD^{\mathrm{D}},\quad C_{0}=O,\quad C_{k}=\sum_{i=0}^{k-1}D^{i}CA^{k-i-1}$$

$$Y_{0}=\sum_{i=0}^{r-1}(D^{\mathrm{D}})^{i+1}CA^{i}A^{\pi}+D^{\pi}\sum_{i=0}^{s-1}D^{i}C(A^{\mathrm{D}})^{i+1}$$

$$Y_{k}=\sum_{i=0}^{r-1}(D^{\mathrm{D}})^{k+i+1}CA^{i}A^{\pi}+D^{\pi}\sum_{i=0}^{s-1}D^{i}C(A^{\mathrm{D}})^{k+i+1}-\sum_{i=0}^{k-1}(D^{\mathrm{D}})^{i+1}C(A^{\mathrm{D}})^{k-i}$$

이고 $\operatorname{ind}(A)=r,\ \operatorname{ind}(D)=s,\ t=\operatorname{ind}\begin{pmatrix}A & O\\ C & D\end{pmatrix}$이다.

정리 1 $A\in\mathbf{C}^{m\times m},\ B\in\mathbf{C}^{m\times n},\ C\in\mathbf{C}^{n\times m},\ D\in\mathbf{C}^{n\times n}$이라고 하자.

만일 2×2 블로크행렬 $M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$가 조건 $ABC=O,\ DCA^{i}B=O\ (i=0,1,\cdots,n)$를 만족시키면 그것의 드라진거꿀행렬은 $M^{\mathrm{D}}=\begin{pmatrix}\Omega^{\mathrm{D}}A+WA+VC & VD+\Omega^{\mathrm{D}}B\\ C\Omega^{\mathrm{D}}+CW+DU & D^{\mathrm{D}}+CV\end{pmatrix}$와 같다. 여기서

$$U=\sum_{i=0}^{r-1}(D^{\mathrm{D}})^{i+3}CA^{i}A^{\pi}+\sum_{i=0}^{s-1}D^{\pi}D^{i}C(A^{\mathrm{D}})^{i+3}-(D^{\mathrm{D}})^{2}CA^{\mathrm{D}}-D^{\mathrm{D}}C(A^{\mathrm{D}})^{2}$$

$$V=\sum_{l=0}^{\nu-1}(\Omega^{\mathrm{D}})^{l+2}B_{2}D^{2l}D^{\pi}+\Omega^{\pi}\sum_{l=0}^{\rho-1}\Omega^{l}B_{2}(D^{\mathrm{D}})^{2l+4}-\Omega^{\mathrm{D}}B_{2}(D^{\mathrm{D}})^{2}$$

$$W=\sum_{k=0}^{\eta-1}V_{k+2}C_{2}A^{2k}A^{\pi}+\sum_{k=0}^{\delta-1}(\Omega^{\pi}\Psi_{k}-V_{0}D^{2k})C_{2}(A^{\mathrm{D}})^{2k+4}-V_{1}C_{2}(A^{\mathrm{D}})^{2}$$

$$\Omega^{\mathrm{D}}=\sum_{i=0}^{\eta-1}((BC)^{\mathrm{D}})^{i+1}A^{2i}A^{\pi}+\sum_{i=0}^{\mu-1}(BC)^{\pi}(BC)^{i}(A^{\mathrm{D}})^{2i+2}$$

$$V_{0}=\sum_{i=0}^{\nu-1}(\Omega^{\mathrm{D}})^{i+1}B_{2}D^{2i}D^{\pi}+\Omega^{\pi}\sum_{i=0}^{\rho-1}\Omega^{i}B_{2}(D^{\mathrm{D}})^{2i+2}$$

$$V_{k}=\sum_{l=0}^{\nu-1}(\Omega^{\mathrm{D}})^{k+l+1}B_{2}D^{2l}D^{\pi}+\Omega^{\pi}\sum_{l=0}^{\rho-1}\Omega^{l}B_{2}(D^{\mathrm{D}})^{2k+2l+2}-\sum_{l=0}^{k-1}(\Omega^{\mathrm{D}})^{l+1}B_{2}(D^{\mathrm{D}})^{2k-2l}\ (k>0)$$

$$\Psi_{0}=O,\quad \Psi_{k}=\sum_{l=0}^{k-1}\Omega^{l}B_{2}D^{2(k-l-1)}\ (k>0),\quad B_{2}=AB+BD,\quad C_{2}=CA+DC$$

$$\Omega^{k}=(A^{2}+BC)^{k}=\sum_{i=0}^{k}(BC)^{k-i}A^{2i}\ (k\geq0)$$

$$(\Omega^{\mathrm{D}})^{k}=\sum_{i=0}^{\eta-1}((BC)^{\mathrm{D}})^{k+i}A^{2i}A^{\pi}+\sum_{i=0}^{\mu-1}(BC)^{\pi}(BC)^{i}(A^{\mathrm{D}})^{2k+2i}-\sum_{i=1}^{k-1}((BC)^{\mathrm{D}})^{k-i}(A^{\mathrm{D}})^{2i}\quad (k>1)$$

이고 $r=\operatorname{ind}(A),\ s=\operatorname{ind}(D)$, $\eta=\operatorname{ind}(A^{2})$, $\nu=\operatorname{ind}(D^{2})$, $\mu=\operatorname{ind}(BC)$, $\rho=\operatorname{ind}(\Omega)$, $\delta=\operatorname{ind}\begin{pmatrix}\Omega & B_{2}\\ O & D^{2}\end{pmatrix}$이다.

증명 블로크행렬 $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$를 $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} O & A & B \\ I & C & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & D \\ I & O \\ O & I \end{pmatrix}$와 같이 분해하자.

$$N=\begin{pmatrix} O & D \\ I & O \\ O & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & A & B \\ I & C & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} D & DC & O \\ O & A & B \\ I & C & O \end{pmatrix}$$ 라고 하면 $M^{\mathrm{D}}=\begin{pmatrix} O & A & B \\ I & C & O \end{pmatrix}(N^{\mathrm{D}})^2\begin{pmatrix} O & D \\ I & O \\ O & I \end{pmatrix}$이다.

$P=(DC\quad O)$, $Q=\begin{pmatrix} O \\ I \end{pmatrix}$, $R=\begin{pmatrix} A & B \\ C & O \end{pmatrix}$라고 하면 $N=\begin{pmatrix} D & P \\ Q & R \end{pmatrix}$이고 임의의 부아닌 옹근수 i에 대하여 $PR^iQ=O$이므로 보조정리 2로부터 $N^{\mathrm{D}}=\begin{pmatrix} D^{\mathrm{D}} & X \\ Y & R^{\mathrm{D}}+Z \end{pmatrix}$이다. 여기서

$$X=(DUA+D^{\mathrm{D}}C\quad O),\ Y=\begin{pmatrix} V \\ (D^{\mathrm{D}})^2+C((\Omega^{\mathrm{D}})^2B+V_2D) \end{pmatrix}$$

$$R^{\mathrm{D}}=\begin{pmatrix} \Omega^{\mathrm{D}}A & \Omega^{\mathrm{D}}B \\ C\Omega^{\mathrm{D}} & C(\Omega^{\mathrm{D}})^2AB \end{pmatrix},\ Z=\begin{pmatrix} WA+VC & O \\ CW+DU & O \end{pmatrix}$$

이다. 따라서 $(N^{\mathrm{D}})^2=\begin{pmatrix} (D^{\mathrm{D}})^2+XY & D^{\mathrm{D}}X+X(R^{\mathrm{D}}+Z) \\ YD^{\mathrm{D}}+(R^{\mathrm{D}}+Z)Y & YX+(R^{\mathrm{D}}+Z)^2 \end{pmatrix}$이 성립되고

$$M^{\mathrm{D}}=\begin{pmatrix} O & A & B \\ I & C & O \end{pmatrix}(N^{\mathrm{D}})^2\begin{pmatrix} O & D \\ I & O \\ O & I \end{pmatrix}=(Q\quad R)\begin{pmatrix} (D^{\mathrm{D}})^2+XY & D^{\mathrm{D}}X+X(R^{\mathrm{D}}+Z) \\ YD^{\mathrm{D}}+(R^{\mathrm{D}}+Z)Y & YX+(R^{\mathrm{D}}+Z)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_0 \\ I \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \Omega^{\mathrm{D}}A+WA+VC & VD+\Omega^{\mathrm{D}}B \\ C\Omega^{\mathrm{D}}+CW+DU & D^{\mathrm{D}}+CV \end{pmatrix}$$

가 성립된다.(증명끝)

따름 1　$A\in\mathbf{C}^{m\times m}$, $B\in\mathbf{C}^{m\times n}$, $C\in\mathbf{C}^{n\times m}$, $D\in\mathbf{C}^{n\times n}$이라고 하자.

만일 2×2 블로크행렬 $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$가 조건 $ABC=O$, $DCA=O$, $DCB=O$를 만족시키면 그것의 드라진거꿀행렬은 $M^{\mathrm{D}}=\begin{pmatrix} \Omega^{\mathrm{D}}A+VC & VD+\Omega^{\mathrm{D}}B \\ C\Omega^{\mathrm{D}}+CV_2DC+(D^{\mathrm{D}})^2C & D^{\mathrm{D}}+CV \end{pmatrix}$와 같다. 여기서 V, V_2, Ω^{D}는 정리 1에서와 같다.

정리 2　$A\in\mathbf{C}^{m\times m}$, $B\in\mathbf{C}^{m\times n}$, $C\in\mathbf{C}^{n\times m}$, $D\in\mathbf{C}^{n\times n}$이라고 하자.

만일 2×2 블로크행렬 $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$가 조건 $DCB=O$, $ABD^iC=O\,(i=0,\cdots,n)$를 만족시키면 그것의 드라진거꿀행렬은 $M^{\mathrm{D}}=\begin{pmatrix} A^{\mathrm{D}}+BV & B\Omega^{\mathrm{D}}+BW+AU \\ VA+\Omega^{\mathrm{D}}C & \Omega^{\mathrm{D}}D+WD+VB \end{pmatrix}$와 같다. 여기서

$$U=\sum_{i=0}^{s-1}(A^{\mathrm{D}})^{i+3}BD^iD^{\pi}+\sum_{i=0}^{r-1}A^{\pi}A^iB(D^{\mathrm{D}})^{i+3}-(A^{\mathrm{D}})^2BD^D-A^DB(D^{\mathrm{D}})^2$$

$$V=\sum_{l=0}^{\eta-1}(\Omega^{\mathrm{D}})^{l+2}C_2A^{2l}A^{\pi}+\Omega^{\pi}\sum_{l=0}^{\rho-1}\Omega^lC_2(A^{\mathrm{D}})^{2l+4}-\Omega^{\mathrm{D}}C_2(A^{\mathrm{D}})^2$$

$$W=\sum_{k=0}^{\nu-1}V_{k+2}B_2D^{2k}D^{\pi}+\sum_{k=0}^{\delta-1}(\Omega^{\pi}\Psi_k-V_0A^{2k})B_2(D^{\mathrm{D}})^{2k+4}-V_1B_2(D^{\mathrm{D}})^2$$

$$\Omega^{\mathrm{D}}=\sum_{i=0}^{\nu-1}((CB)^{\mathrm{D}})^{i+1}D^{2i}D^{\pi}+\sum_{i=0}^{\mu-1}(CB)^{\pi}(CB)^i(D^{\mathrm{D}})^{2i+2}$$

$$V_0=\sum_{i=0}^{\eta-1}(\Omega^{\mathrm{D}})^{i+1}C_2A^{2i}A^{\pi}+\Omega^{\pi}\sum_{i=0}^{\rho-1}\Omega^iC_2(A^{\mathrm{D}})^{2i+2}$$

$$V_k=\sum_{l=0}^{\eta-1}(\Omega^{\mathrm{D}})^{k+l+1}C_2A^{2l}A^{\pi}+\Omega^{\pi}\sum_{l=0}^{\rho-1}\Omega^lC_2(A^{\mathrm{D}})^{2k+2l+2}-\sum_{l=0}^{k-1}(\Omega^{\mathrm{D}})^{l+1}C_2(A^{\mathrm{D}})^{2k-2l}\,(k>0)$$

$$\Psi_0=O,\ \Psi_k=\sum_{l=0}^{k-1}\Omega^lC_2A^{2(k-l-1)}(k>0),\ B_2=AB+BD,\ C_2=CA+DC$$

$$\Omega^k=(D^2+CB)^k=\sum_{i=0}^{k}(CB)^{k-i}D^{2i}(k\ge 0)$$

$$(\Omega^{\mathrm{D}})^k=\sum_{i=0}^{\nu-1}((CB)^{\mathrm{D}})^{k+i}D^{2i}D^{\pi}+\sum_{i=0}^{\mu-1}(CB)^{\pi}(CB)^i(D^{\mathrm{D}})^{2k+2i}-\sum_{i=1}^{k-1}((CB)^{\mathrm{D}})^{k-i}(D^{\mathrm{D}})^{2i}\quad(k>1)$$

이고 r, s, η, ν, μ, ρ는 정리 1에서와 같으며 $\delta=\mathrm{ind}\begin{pmatrix}A^2 & O\\ C_2 & \Omega\end{pmatrix}$이다.

따름 2 $A\in\mathbf{C}^{m\times m}$, $B\in\mathbf{C}^{m\times n}$, $C\in\mathbf{C}^{n\times m}$, $D\in\mathbf{C}^{n\times n}$이라고 하자.

만일 2×2 블로크행렬 $M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$가 조건 $DCB=O,\ ABD=O,\ ABC=O$를 만족시키면 그것의 드라진거꿀행렬은 $M^{\mathrm{D}}=\begin{pmatrix}A^{\mathrm{D}}+BV & B\Omega^{\mathrm{D}}+BV_2AB+(A^{\mathrm{D}})^2B\\ VA+\Omega^{\mathrm{D}}C & \Omega^{\mathrm{D}}D+VB\end{pmatrix}$와 같다. 여기서 V, V_2, Ω^{D}는 정리 2에서와 같다.

참 고 문 헌

[1] T. N. Greville et al.; Generalized Inverses; Theory and Application, Springer, 1～260, 2001.

[2] Deng C.; J. Math. Anal. Appl., 1, 368, 2010.

[3] Li Guo et al.; J. Appl. Math. Comput., 217, 2833, 2010.

주체107(2018)년 3월 10일 원고접수

The Representations for Drazin Inverses of the 2×2 Block Matrices

Paek Won Uk

We give the representation for Drazin inverses of the block matrices $M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$ under the condition $ABC=O,\ DCA^iB=O\ (i=0, 1, \cdots)$.

Key word: Drazin inverse