김일성종합대학학보 주체107(2018)년
수 학 제64권 제3호

M/M/S형대중봉사계에서 계에 대한 정보를 아는 경우의 결심채택에 대한 연구

명찬길, 송대혁

론문에서는 M/M/S형대중봉사계에서 요청들이 계의 상태에 대한 정보를 아는 경우에 최량적인 결심채택방안에 대하여 론의하였다.

선행연구[1]에서는 M/M/1형대중봉사계에서 계에 대한 정보를 아는 경우 단순선형보상가격구조에 관한 결심채택에 대하여 연구하였으며 선행연구[2, 3]에서는 마르꼬브휴가를 가지는 봉사계에 대하여 계에 대한 정보를 아는 경우와 모르는 경우 요청들의 최량결심채택방안에 대하여 론의하였다.

선행연구[4]에서는 봉사자휴가를 가진 Geo/Geo/1형대중봉사계에서 계에 대한 정보를 아는 경우 결심채택에 대한 요청의 최량방안을 연구하였으며 선행연구[5]에서는 다중휴가를 가지는 3개의 봉사기구가 병렬로 이루어진 봉사체계에서 최량결심채택방안의 유일존재성을 해명하였다.

다음과 같은 대중봉사계의 모형을 생각하자.

요청들은 도착속도 λ를 가지고 뽜쏭분포에 따라 도착하고 봉사기구는 S개이다. 봉사기구들이 다 가동하면 도착한 요청은 결심채택을 하여 봉사계에 들어가거나 리탈한다. 요청들의 봉사시간들은 파라메터 $1/\mu$을 가지고 지수적으로 분포되며 봉사규칙은 FCFS규칙이다. 도착시간들과 봉사시간들은 서로 독립이다.

t순간에 봉사계의 상태를 $\{I(t),\ J(t),\ t\geq 0\}$으로 표시하자. 여기서 $I(t)$는 t시간에 봉사기구들의 상태를 의미하며 $J(t)$는 t순간에 봉사계안에 있는 요청들의 수이다.

$I(t)=0$이면 적어도 하나의 봉사기구가 비여있다는것이고 $I(t)=1$이면 봉사기구들모두가 가동상태에 있다는것을 의미한다.

봉사과정 $\{I(t),\ J(t),\ t\geq 0\}$이 상태공간 $\{0,\ 1\}\times\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$을 가진 2차원련속시간마르꼬브사슬이라는것은 명백하다.

다음으로 계에 대한 정보를 아는 경우의 결심채택에 대하여 론의하자.

봉사기구들이 적어도 하나가 비여있으면 도착한 요청은 즉시 봉사받으며 도착한 요청들가운데서 봉사계에 들어가기로 결심한 요청들에 대하여 이 정보가 리용된다.

도착한 요청들가운데서 봉사계에 들어가기로 결심한 요청은 이 정보를 가지고 봉사계에 대한 리득을 정확하게 평가할수 있다.

결심채택방안렬 $[n,\ p]$에서 요청의 최량결심채택방안이 존재하면 구할수 있다. 여기서 n은 줄의 길이이며 $p\ (0\leq p\leq 1)$는 도착한 요청이 봉사계로 들어갈 확률이다.

결심채택방안이 $[n,\ p]$일 때 도착한 요청들가운데서 봉사계에 들어가기로 결심한 요청이 상태 $(i,\ k)$에서 봉사를 받기 전까지의 평균기다림시간을 $\Phi[n,\ p](i,\ k)$로 표시하자. 여기서 i는 봉사기구의 상태를 의미하며 k는 봉사계에 있는 요청들의 수이다.

모든 요청들은 결심채택방안 $[n,\ p]$에 따른다.

$$\Phi[n,\ p](1,\ S+k)=(k+1)/(S\mu)\quad (k=0, 1, \cdots,\ n-1)$$

봉사계의 줄의 길이가 n일 때 평균기다림시간은 다음과 같다.

$$\Phi[n,\ p](1,\ S+n)=p\times(n+1)/(S\mu)+(1-p)\times 0=p(n+1)/(S\mu)$$

먼저 다음과 같은 표시들을 도입하자.

$S[n,\ p](S+k)=R-C\Phi[n,\ p](1,\ S+k),\ n\ge 0,\ 0\le k\le n$, $n_e\equiv \max\{k\ge 0; S[n,\ 0](k)>0\}$

정리 1 M/M/S형대중봉사계에서 불확정조건에서의 요청의 결심채택방안은 다음과 같다.

1) $S[n,\ p](n_e)\ge 0$이면 결심채택방안은 $[n, 1]$이다.

2) $S[n,\ p](n_e)<0$이면 결심채택방안은 $[n_e,\ p_e],\ 0<p_e<1$이다.

여기서 p_e는 $S[n,\ p](n_e)=0$의 유일한 풀이이고 $p_e=RS\mu/[C(n_e+1)]$이다.

증명 $S[n,\ 0](n)>S[n,\ 1](n)>S[n,\ 1](n+1)=S[n+1,\ 0](n+1)$이다.

먼저 $S[n,\ p](n_e)\ge 0$인 경우를 보자.

$k\ (0\le k\le n_e)$번째 요청이 봉사계에로 들어오면 그것의 평균리득은

$$S[n_e,\ 1](k)\ge S[n_e,\ 1](n_e)$$

이므로 요청은 봉사계로 들어가는것을 택한다. 그리고 n_e+1번째 요청이 봉사계에 들어가면 그것의 평균리득이 $S[n_e,\ 1](n_e+1)=S[n_e+1,\ 0](n_e+1)\le 0$이 된다. 따라서 n_e+1번째 요청은 봉사계를 리탈한다. 그러므로 $[n_e, 1]$은 요청의 최량결심채택방안이 된다.

이 경우 모든 요청들은 결심채택방안 $[n_e, 1]$에 따른다.

$S[n,\ p](n_e)<0$인 경우를 론의하자.

$S[n_e,\ 0](n_e)>0$과 $S[n_e,\ 1](n_e)<0$이 성립된다고 하자.

$S[n_e,\ p](n_e)$는 p에서 련속이므로 $S[n_e,\ p_e](n_e)=0$인 유일한 $0<p_e<1$이 존재하므로 $S[n_e,\ p](n_e)=R-Cp(n_e+1)/(S\mu)=0$이다. 따라서 $p_e=RS\mu/[C(n_e+1)]$이다.

모든 요청들은 결심채택방안 $[n_e,\ p_e]$를 리용한다.

들어가기로 결심한 요청이 봉사계에 $k\ (1\le k\le n_e-1)$개의 요청들이 있다는 정보를 알았을 때 그 요청의 평균리득은 $S[n_e,\ p_e](k)>S[n_e,\ p_e](n_e)=0$이다.

따라서 요청은 들어갈것을 결심한다.

만일 봉사계에 n_e+1개의 요청들이 있다는 정보를 알았을 때 그 요청의 평균리득은 $S[n_e,\ p_e](n_e+1)<S[n_e,\ p_e](n_e)=0$이다. 따라서 그 요청은 리탈한다.

봉사계에 n_e개의 요청들이 있다는 정보를 알았을 때 이 요청의 평균리득은 0이다.(증명끝)

정리 2 M/M/S형대중봉사계의 불확정조건에서 요청들에 의하여 선택된 결심채택방안들이 증가함에 따라 $I[x]$는 감소한다.

증명 요청들이 결심채택방안들인 $[x_1]$과 $[x_2]\ (x_1<x_2)$에 따른다고 하자.

$I(x_1)$과 $I(x_2)$와의 크기관계를 론의하자.

$I(x_1)<I(x_2)$이면 $S[x](k)$가 단조이므로 $S[x_1](I(x_2))>S[x_2](I(x_2))\ge 0$이 성립되고 $I(x_1)$은 $S[x_1](k)\ge 0$에 대하여 최대옹근수가 아니다. 이것은 모순이므로 $I(x_1)\ge I(x_2)$이다.

임의의 $0\le p_1,\ p_2\le 1$에 대하여 $I(x_1)>I(x_2)$이면 다음의 식이 성립된다.

$$I(x_1)+1 \ge I(x_1)+p_1 \ge I(x_2)+1 \ge I(x_2)+p_2$$

요청들이 결심채택방안 $[x_2]$에 따를 때 봉사계에 들어가기로 결심한 요청이 선택한 결심채택방안 $[x_1]$은 $[x_2]$보다 작지 않다.

$I(x_1)=I(x_2)$이면 $S[x_1](I(x_1))>0$이 성립된다.

만일 $S[x_1](I(x_1))=0$이면

$$S[x_2](I(x_2))<S[x_1](I(x_2))=S[x_1](I(x_1))=0$$

인데 이것은 $I(x_2)$의 정의에 모순된다. 이 경우에 $[x_1]$에 대한 요청들의 결심채택은 $I(x_1)+1$이다.

$S[x_2](I(x_2))\ge 0$이므로 다른 요청들이 결심채택으로서 $[x_2]$를 리용할 때 봉사계에 들어가기로 결심한 요청의 최량결심채택방안은 $I(x_2)+1$이거나 $I(x_2)+p_2$이다.

$$I(x_1)+1=I(x_2)+1>I(x_2)+p_2$$

따라서 $x_1<x_2$인 경우에 봉사계에 들어가기로 결심한 요청이 선택한 결심채택방안 $[x_1]$은 결심채택방안 $[x_2]$를 선택한것보다 크다.

이것은 요청들에 의하여 선택된 결심채택방안들이 증가함에 따라 $I[x]$는 감소한다는 것을 의미한다.(증명끝)

정리 3 M/M/S형대중봉사계에서 불확정조건에서의 정상상태확률방정식은 다음과 같다.

$$\begin{cases} (\lambda+j\mu)P(0,\ j)=\lambda P(0,\ j-1)+(j+1)\mu P(0,\ j+1)\ \ (j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ S-2) \\ [\lambda+(S-1)\mu]P(0,\ S-1)=\lambda P(0,\ S-2)+S\mu P(1,\ S) \\ (\lambda+S\mu)P(1,\ S)=\lambda P(0,\ S-1)+S\mu P(1,\ S+1) \\ (\lambda+S\mu)P(1,\ S+j)=\lambda P(S+j-1)+S\mu P(1,\ S+j+1)\ \ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1) \\ (\lambda p+S\mu)P(1,\ S+n)=\lambda pP(S+n-1)+S\mu P(1,\ S+n+1) \\ S\mu P(1,\ S+n+1)=\lambda pP(1,\ S+n) \end{cases}$$

$$\sum_{j=0}^{S-1}p(0,\ j)+\sum_{j=0}^{n+1}p(1,\ S+j)=1$$

정리 4 M/M/S형대중봉사계에서 불확정조건에서의 정상상태확률은 다음과 같다.

$$P(0,\ j)=\rho^J/j!\cdot P(0,\ 0)\ \ (j=0,1,\cdots,\ S-1)$$
$$P(1,\ S+j)=(\rho/S)^j\cdot\rho^S/S!\cdot P(0,\ 0)\ \ (j=0,1,2,\cdots,\ n-1)$$
$$P(1,\ S+n)=p(\rho/S)^n\rho^S/S!\cdot P(0,\ 0)$$
$$P(1,\ S+n+1)=p^2(\rho/S)^{n+1}\rho^S/S!\cdot P(0,\ 0)$$

여기서 $P(0,\ 0)=\left[\Delta+\dfrac{\rho^S}{S!}\dfrac{1-(\rho/S)^n}{1-\rho/S}+\left(\dfrac{\rho}{S}\right)^n\left(p+p^2\dfrac{\rho}{S}\right)\right]^{-1}$이고 $\Delta=\sum\limits_{j=0}^{S-1}\dfrac{\rho^j}{j!}$이다.

정리 5 M/M/S형대중봉사계에서 결심채택방안이 $[n,\ 0]$일 때 기다림줄이 0이면 들어가고 기다림줄이 1이면 리탈하는것이 단위시간당 봉사계에서 요청들의 리득을 최대로 되게 한다.

증명 결심채택방안 $[n,\ 0]$에서 기다림줄의 길이가 최대로 n이면 들어가고 줄의 길이가 최소한 $n+1$이면 리탈하는 방안을 론의하자.

이때 거절확률 $P_{[n,\ 0]}^{거}(1,\ S+n)$은 $P_{[n,\ 0]}^{거}(1,\ S+n)=P(1,\ S+n)$과 같다.

단위시간당 봉사계에서 요청들의 리득은 모든 요청들이 $[n, 0]$에 따를 때

$$S(n) = \lambda R[1 - P(1,\ S+n)] - C\left[\sum_{j=1}^{n} jP(1,\ S+j)\right]\ (n \ge 0)$$

로 된다.

$S(n)$을 최대화하기 위하여 $\dfrac{\lambda}{S\mu} = a,\ \dfrac{\rho^S}{S!}P(0,\ 0) = Z$ 라고 하자.

$$S(n) = \lambda R[1 - a^n Z] - CZ\left[\sum_{j=1}^{n} ja^j\right] = \lambda R - \lambda RZa^n - CZ\left[\frac{a - a^{n+1}}{(1-a)^2}\right]$$

$$\frac{d}{dn}S(n) = -n\lambda RZ^{n-1} - CZ\left[\frac{(n+1)a^n}{1-a}\right] < 0$$

$S(n)$은 n에 관하여 감소함수이다. 따라서 기다림줄이 0이면 들어가고 기다림줄이 1이면 리탈하는것이 단위시간당 봉사계에서 요청들의 리득을 최대로 되게 한다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] P. Naor; Econometrica, 37, 1, 15, 1969.

[2] P. Guo et al.; Operations Research, 59, 4, 986, 2011.

[3] P. Guo et al.; European Journal of Operational Research, 222, 2, 278, 2012.

[4] Fang Wang; Article ID 309489, 9, 2014.

[5] A Haji; Journal of Applied Mathematics and Physics, 4, 1585, 2016.

주체107(2018)년 3월 10일 원고접수

On the Decision Making under the Known Queue Information in M/M/s Queue

Myong Chan Gil, Song Tae Hyok

The decision making is derived in cases that customers know the information in M/M/s queue.

Key words: queue, exponential distribution