김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제1호

불퇴화부분행렬을 가진 블로크행렬의 MP－거꿀의 표시식

명 금 철

행렬의 일반화된 거꿀리론은 선형대수학의 중요한 연구분야의 하나로서 행렬대수, 수리통계, 안정성리론, 정보리론 등 수학과 여러 린접과학부문들에서 중요하게 리용된다.

$m\times n$ 형복소행렬전부의 모임을 $\mathbf{C}^{m\times n}$ 으로, 위수가 r 인 $m\times n$ 형복소행렬전부의 모임을 $\mathbf{C}_r^{m\times n}$ 으로 표시하고 $R(A)$ 와 $R(A)^{\perp}$ 를 각각 $A\in\mathbf{C}^{m\times n}$ 의 렬공간과 렬공간의 직교보공간이라고 하자.

M 을 $\mathbf{C}^n$ 의 부분공간이라고 할 때 우로의 넘기기 $P_M:\mathbf{C}^n\to M$ 이 $x\in M$ 이면 $P_M(x)=x$ 이고 $x\in M^{\perp}$ 이면 $P_M(x)=0$ 일 때 P_M 을 직교사영넘기기라고 부른다.

정의[2] $A\in\mathbf{C}^{m\times n}$ 에 대하여 다음의 행렬방정식들을 만족시키는 $B\in\mathbf{C}^{n\times m}$ 이 존재할 때 B 를 A 의 무어-펜로즈거꿀행렬 또는 간단히 MP－거꿀행렬이라고 부르고 A^+ 로 표시한다. 여기서 ∗은 행렬의 전위공액을 의미한다.

$$ABA=A,\ BAB=B,\ (AB)^*=AB,\ (BA)^*=BA$$

A^+ 가 $A\in\mathbf{C}^{m\times n}$ 의 MP－거꿀행렬이기 위해서는 $AA^+=P_{R(A)}$, $A^+A=P_{R(A^*)}$ 을 만족시킬것이 필요하고 충분하다.

다음의 블로크행렬들이 주어졌다고 하자.

$$M=\begin{pmatrix}A & C\\ B & D\end{pmatrix}\in\mathbf{C}^{m\times n},\ A\in\mathbf{C}^{k\times l},\ B\in\mathbf{C}^{s\times l},\ C\in\mathbf{C}^{k\times t},\ D\in\mathbf{C}^{s\times t}\tag{1}$$

단위행렬을 I 또는 I_n 으로 표시하고 $E_G=I-GG^+$, $F_G=I-G^+G$ 라고 하자.

행렬 (1)에 대한 MP－거꿀행렬의 블로크표시식을 얻기 위한 연구는 많이 진행되였다.

선행연구[1]에서는 $S=D-CA^+B$ 에 대하여 $M^+=\begin{pmatrix}A^++A^+BS^+CA^+ & -A^+BS^+\\ -S^+CA^+ & S^+\end{pmatrix}$ 이기 위해서는 $E_AB=0$, $CF_A=0$, $BF_S=0$, $E_SC=0$ 일것이 필요하고 충분하다는것을 증명하였다.

선행연구[3]에서는 $M=\begin{pmatrix}A & B\\ B^* & D\end{pmatrix}$ 가 부의정값행렬이고 $A=A^*\in\mathbf{C}^{m\times m}$, $D=D^*\in\mathbf{C}^{n\times n}$, $S=D-B^*A^+B$ 일 때 블로크행렬 M 의 MP－거꿀이 $M^+=\begin{pmatrix}A^++A^+BS^+B^*A^+ & -A^+BS^+\\ -S^+B^*A^+ & S^+\end{pmatrix}$ 로 표시되기 위한 필요충분조건들을 얻었다.

$S_A=D-BA^+C$ 라고 할 때 조건 $R(B^*)\subseteq R(A^*)$, $R(C)\subseteq R(A)$ 를 만족시키면 M 은 $M=\begin{pmatrix}I_k & 0\\ BA^+ & I_s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & S_A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_l & A^+C\\ 0 & I_t\end{pmatrix}$ 로 분해되고 조건 $R(B)\subseteq R(S_A)$, $R(C^*)\subseteq R(S_A^*)$ 을 만족시키면 M^+ 는 다음과 같이 표시된다.[2]

$$M^+=\begin{pmatrix} I_l & -A^+C \\ 0 & I_t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & S_A^+ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ -BA^+ & I_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A^+ + A^+CS_A^+BA^+ & -A^+CS_A^+ \\ -S_A^+BA^+ & S_A^+ \end{pmatrix}$$

선행연구[2]에서는 블로크행렬 M 을

$$M=\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ BA^+ & I_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & E_AC \\ BF_A & S_A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_l & A^+C \\ 0 & I_t \end{pmatrix}=XNY$$

로 분해하고 각각 조건 $BF_A=0$ 과 $E_AC=0$ 을 만족시키는 경우, $S_A=0$ 인 경우, D 가 정방행렬이고 S_A 가 불퇴화행렬인 경우에 M 의 MP－거꿀행렬의 표시식을 얻었다.

선행연구[4]에서는 단위원소 1을 가진 결합환우의 (2, 2, 0)행렬이 MP－거꿀을 가지기 위한 조건을 얻었다.

론문에서는 블로크행렬 (1)의 부분행렬 D 가 정방행렬이고 불퇴화행렬인 경우에 M^+ 의 블로크표시식을 얻었다.

보조정리 1[2] 행렬 $N\in\mathbf{C}^{m\times n}$, $X\in\mathbf{C}^{m\times m}$, $Y\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 에 대하여 다음의 사실들이 성립된다.

① $M_1=XN$ 이라고 할 때 X 가 불퇴화행렬이고 $XE_N=E_N$ 이면

$$M_1M_1^+=(I+R)NN^+(I+R^*R)^{-1}(I+R^*),\ R=E_N(I-X^{-1})$$

② $M_2=NY$ 이라고 할 때 Y 가 불퇴화행렬이고 $F_NY=F_N$ 이면

$$M_2^+M_2=(I+L^*)(I+LL^*)^{-1}N^+N(I+L),\ L=(I-Y^{-1})F_N$$

보조정리 2 $M\in\mathbf{C}_r^{m\times n}$, $r<\min\{m, n\}$ 에 대하여 $QMP=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 을 만족시키는 불퇴화행렬 $Q\in\mathbf{C}^{m\times m}$, $P\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 이 존재하고 정방행렬 $Q\cdot Q^*$ 과 $P^*\cdot P$ 가 각각 블로크표시 $Q\cdot Q^*=\begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{pmatrix}$, $P^*\cdot P=\begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix}$ 를 가질 때 M 의 MP－거꿀은 다음과 같다.

$$M^+=P\cdot\begin{pmatrix} I_r & -S_2S_4^{-1} \\ -T_4^{-1}T_3 & T_4^{-1}T_3S_2S_4^{-1} \end{pmatrix}\cdot Q$$

여기서

$$S_1\in\mathbf{C}^{r\times r},\ S_2\in\mathbf{C}^{r\times(m-r)},\ S_3\in\mathbf{C}^{(m-r)\times r},\ S_4\in\mathbf{C}^{(m-r)\times(m-r)}$$

$$T_1\in\mathbf{C}^{r\times r},\ T_2\in\mathbf{C}^{r\times(n-r)},\ T_3\in\mathbf{C}^{(n-r)\times r},\ T_4\in\mathbf{C}^{(n-r)\times(n-r)}$$

블로크행렬 $M=\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}\in\mathbf{C}^{m\times n}$ 의 부분행렬 D 가 불퇴화행렬이고

$$S_D=A-CD^{-1}B,\ P=\begin{pmatrix} I_k & CD^{-1} \\ 0 & I_s \end{pmatrix},\ Q=\begin{pmatrix} I_l & 0 \\ D^{-1}B & I_s \end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix} S_D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

라고 하면 블로크행렬 M 은 다음과 같이 분해할수 있다.

$$M=\begin{pmatrix} I_k & CD^{-1} \\ 0 & I_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_l & 0 \\ D^{-1}B & I_s \end{pmatrix}=PNQ \tag{2}$$

정리 1 식 (2)와 같이 주어진 블로크행렬 $M=PNQ$ 에 대하여

$$M^+=(I+V^*)\,(I+VV^*)^{-1}Z(I+U^*U)^{-1}\,(I+U^*)$$

이 성립된다. 여기서 $U=E_N(I-P^{-1})$, $V=(I-Q^{-1})F_N$, $Z=Q^{-1}N^+P^{-1}$ 이다.

증명 $T=PN$, $W=NQ$ 라고 할 때 $P^{-1}=\begin{pmatrix} I_k & -CD^{-1} \\ 0 & I_s \end{pmatrix}$, $Q^{-1}=\begin{pmatrix} I_l & 0 \\ -D^{-1}B & I_s \end{pmatrix}$ 이므로 행렬 P, Q 는 불퇴화행렬들이다.

그리고 $E_N=I-NN^+$, $F_N=I-N^+N$ 이고 $N^+=\begin{pmatrix} S_D^+ & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}$ 이므로

$$E_N=I-\begin{pmatrix} S_DS_D^+ & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_{S_D} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad F_N=I-\begin{pmatrix} S_D^+S_D & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} F_{S_D} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$PE_N=\begin{pmatrix} I_k & CD^{-1} \\ 0 & I_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{S_D} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_{S_D} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=E_N,\quad F_NQ=\begin{pmatrix} F_{S_D} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ D^{-1}B & I_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} F_{S_D} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=F_N$$

이 성립되므로 보조정리 1의 조건들을 모두 만족시킨다.

따라서 $TT^+=(I+U)NN^+(I+U^*U)^{-1}(I+U^*)$, $W^+W=(I+V^*)(I+VV^*)^{-1}N^+N(I+V)$ 가 성립된다. 여기서 $U=E_N(I-P^{-1})$, $V=(I-Q^{-1})F_N$ 이다.

P, Q 가 불퇴화행렬이므로 직교사영넘기기의 성질로부터 다음의 식이 성립된다.

$$MM^+=P_{R(M)}=P_{R(PNQ)}=P_{R(PN)}=P_{R(T)}=TT^+$$

$$M^+M=P_{R(M^*)}=P_{R(Q^*N^*P^*)}=P_{R(Q^*N^*)}=P_{R(W^*)}=W^+W$$

$Z=Q^{-1}N^+P^{-1}$ 이라고 놓으면 M 의 MP－거꿀행렬은 $M^+=M^+MZMM^+$ 로 주어진다.

$$U=E_N(I-P^{-1})=\begin{pmatrix} 0 & E_{S_D}CD^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ V=(I-Q^{-1})F_N=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ D^{-1}BF_{S_D} & 0 \end{pmatrix}$$ 이므로

$$N^+N(I+V)=\begin{pmatrix} S_D^+S_D & 0 \\ D^{-1}BF_{S_D} & I \end{pmatrix},\quad (I+U)\,NN^+=\begin{pmatrix} S_DS_D^+ & E_{S_D}CD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

또한 $$Z=\begin{pmatrix} I_l & 0 \\ -D^{-1}B & I_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_D^+ & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_k & -CD^{-1} \\ 0 & I_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} S_D^+ & -S_D^+CD^+ \\ -D^{-1}BS_D^+ & D^{-1}BS_D^+CD^{-1}+D^{-1} \end{pmatrix}$$ 이므로 $N^+N(I+V)\,Z\,(I+U)\,NN^+=Z$ 를 만족시킨다.

따라서 $M^+=(I+V^*)\,(I+VV^*)^{-1}Z(I+U^*U)^{-1}\,(I+U^*)$ 이 성립된다.(증명끝)

정리 2 M 을 식 (2)와 같은 모양으로 표시된 블로크행렬이라고 하면 M^+ 는

$$\begin{pmatrix} (S_D^+-(HF_{S_D})^*\phi HS_D^+)+(-S_D^+K+(HF_{S_D})^*\phi(HS_D^+K+D^{-1}))\,\varphi(E_{S_D}K)^* & (-S_D^+K+(HF_{S_D})^*\phi(HS_D^+K+D^{-1}))\varphi \\ \phi(-HS_D^+)+\phi(HS_D^+K+D^{-1})\varphi(E_{S_D}K)^* & \phi(HS_D^+K+D^{-1})\varphi \end{pmatrix}$$

로 표시된다. 여기서 $H=D^{-1}B,\ K=CD^{-1}$, $\phi=(I+HF_{S_D}H^*)^{-1}$, $\varphi=(I+K^*E_{S_D}K)^{-1}$ 이다.

증명 $H=D^{-1}B,\ K=CD^{-1}$ 이라고 할 때 정리 1의 증명과정으로부터

$$Z=\begin{pmatrix} S_D^+ & -S_D^+K \\ -HS_D^+ & HS_D^+K+D^{-1} \end{pmatrix},\quad U=\begin{pmatrix} 0 & E_{S_D}K \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ V=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ HF_{S_D} & 0 \end{pmatrix}.$$

그리고 $(I+U^*U)^{-1}=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & (I+K^*E_{S_D}K)^{-1}\end{pmatrix}$, $(I+VV^*)^{-1}=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & (I+HF_{S_D}H^*)^{-1}\end{pmatrix}$이고

$$(I+U^*U)^{-1}(I+U^*)=\begin{pmatrix} I & 0 \\ (I+K^*E_{S_D}K)^{-1}(E_{S_D}K)^* & (I+K^*E_{S_D}K)^{-1}\end{pmatrix}$$

$$(I+V^*)(I+VV^*)^{-1}=\begin{pmatrix} I & (HF_{S_D})^*(I+HF_{S_D}H^*)^{-1} \\ 0 & (I+HF_{S_D}H^*)^{-1}\end{pmatrix}$$

이므로 정리 1에 의하여

$$M^+=(I+V^*)(I+VV^*)^{-1}Z(I+U^*U)^{-1}(I+U^*)=$$

$$=\begin{pmatrix} I & (HF_{S_D})^*\phi \\ 0 & \phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_D^+ & -S_D^+K \\ -HS_D^+ & HS_D^+K+D^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ \varphi(E_{S_D}K)^* & \varphi\end{pmatrix}$$

가 성립되므로 정리의 결과가 나온다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] J. K. Baksalary et al.; Linear Algebra Appl., 354, 41, 2002.

[2] J. Robles et al.; Linear Algebra Appl., 471, 353, 2015.

[3] Y.G. Tian et al.; Linear Algebra Appl., 430, 1641, 2009.

[4] H. H. Zhu et al.; Linear Algebra Appl., 472, 142, 2015.

주체107(2018)년 9월 8일 원고접수

Expressions for the Moore-Penrose Inverse of Block Matrices with a Nonsingular Submatrix

Myong Kum Chol

We study explicit expressions for the Moore-Penrose inverse of a 2×2 complex block matrix of which a submatrix is nonsingular.

Key words: block matrix, orthogonal projector