김일성종합대학학보 JOURNAL OF KIM IL SUNG UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체105(2016)년 제62권 제9호 Vol. 62 No. 9 JUCHE105(2016).

합성힘을 받는 점탄성다층복합판의 변위해석

송성관, 유준하

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《선진과학기술을 받아들이기 위한 사업을 적극적으로 벌려야 하겠습니다.

선진과학기술을 받아들이는것은 나라의 과학기술을 빨리 발전시키기 위한 중요한 방도의 하나로 됩니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제15권 499～500페지)

선행연구[1]에서는 면내힘이 작용할 때 점탄성다층복합판의 변위를 구하는 문제를 해석하였으며 선행연구[2, 3]에서는 면외힘이 작용할 때 변위를 구하는 문제를 해석하였으나 면내힘과 면외힘이 동시에 작용할 때의 변위해석은 진행하지 못하였다.

론문에서는 탄성지반우에 있는 섬유강화점탄성다층복합판에 면내힘과 면외힘이 동시에 작용할 때의 변위에 대하여 론의하였다.

1. 기본관계식

섬유강화다층복합판에 면내힘과 면외힘이 동시에 작용할 때 기본관계식을 취급하자.

판재료는 유전형점탄성재료이다.

속힘으로 표시된 평형방정식은 다음과 같다.

$$\left.\begin{aligned} & N_{x,\ x}+N_{xy,\ y}=0 \\ & N_{xy,\ x}+N_{y,\ y}=0 \\ & M_{x,\ xx}+2M_{xy,\ xy}+M_{y,\ yy}+\overline{N}_x w_{,\ xx}+2\overline{N}_{xy} w_{,\ xy}+\overline{N}_y w_{,\ yy}+q-cw=0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

여기서 $N_x,\ N_y$는 각각 $x,\ y$축에 수직인 면에 작용하는 단위길이당 당김힘과 누름힘이고 N_{xy}는 x축에 수직으로 작용하는 y방향의 단위길이당 자름힘이다. 또한 $M_x,\ M_y$는 각각 $x,\ y$축에 수직으로 작용하는 단위길이당 구부림모멘트이고 M_{xy}는 xy면에 작용하는 단위길이당 틀음모멘트이다. 그리고 q는 판의 웃면 $z=-h/2$에 작용하는 단위면적당 z방향의 외력이고 c는 $z=h/2$에 있는 지반결수, w는 z방향의 변위이다. $\overline{N}_x,\ \overline{N}_y$는 각각 $x,\ y$방향으로 작용하는 단위길이당 면내힘이고 $\overline{N}_{xy}$는 x축에 수직으로 작용하는 단위길이당 y방향의 면내힘이다.

관계식 (1)에 속힘과 중간면의 변형, 곡률사이의 관계식[1]을 대입하면 방정식

$$\begin{bmatrix} \overline{L}_{11} & \overline{L}_{12} & \overline{L}_{16} \\ \overline{L}_{12} & \overline{L}_{22} & \overline{L}_{26} \\ \overline{L}_{16} & \overline{L}_{26} & \overline{L}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q+\overline{N}_x w_{,\ xx}+2\overline{N}_{xy_{,\ xy}}+\overline{N}_y w_{,\ yy}-cw \end{Bmatrix} \tag{2}$$

이 얻어진다. 여기서 u_0, v_0, w 는 각각 중간면우에 있는 점의 x, y, z 축방향의 변위성분이고 $\overline{L}_{ij}$ 는 시간에 관한 적분미분연산자들이다.[2]

반대칭직교다층복합판에 누르는 면내힘 $\overline{N}_x = P$ 와 면외힘 q 가 작용하는 경우를 론의하자.

이 경우에 식 (2)로부터 다음의 방정식이 얻어진다.

$$\left.\begin{aligned} &\overline{A}_{11}u_{0,\,xx} + \overline{A}_{66}u_{0,\,yy} + (\overline{A}_{12} + \overline{A}_{66})v_{0,\,xy} - \overline{B}_{11}w_{,\,xxx} = 0 \\ &(\overline{A}_{12} + \overline{A}_{66})u_{0,\,xy} + \overline{A}_{66}v_{0,\,xx} + \overline{A}_{11}v_{0,\,yy} + \overline{B}_{11}w_{,\,yyy} = 0 \\ &\overline{D}_{11}(w_{,\,xxxx} + w_{,\,yyyy}) + 2(\overline{D}_{12} + 2\overline{D}_{66})w_{,\,xxyy} - \overline{B}_{11}(u_{0,\,xxx} - v_{0,\,yyy}) - q + Pw_{,\,xx} + cw = 0 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

여기서 $\overline{A}_{ij}$, $\overline{B}_{ij}$, $\overline{D}_{ij}$ 는 각각 당김억세기, 결합억세기, 구부림억세기에 대응되는 적분연산자이다.

2. 풀 이 방 법

방정식 (3)을 풀기 위하여 네 경계 $x=0,\ a$; $y=0,\ b$ 에서 단순지지되였다고 하자.

방정식 (3)의 풀이형태를

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{u}_0 \cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \\ v_0 &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{v}_0 \sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b} \\ w &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{w}_0 \sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

로 놓고 분포힘 q 를 다음과 같이 표시하자.

$$q = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \quad (5)$$

식 (4), (5)를 방정식 (3)에 대입하면 다음과 같다.

$$\left.\begin{aligned} &\overline{T}_{11}\overline{u}_0 + \overline{T}_{12}\overline{v}_0 + \overline{T}_{13}\overline{w} = 0 \\ &\overline{T}_{12}\overline{u}_0 + \overline{T}_{22}\overline{v}_0 + \overline{T}_{23}\overline{w} = 0 \\ &\overline{T}_{13}\overline{u}_0 + \overline{T}_{23}\overline{v}_0 + (\overline{T}_{33} - c + P\gamma^2)\overline{w} = q_{mn} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

여기서 $\overline{T}_{11} = \gamma^2\overline{A}_{11} + s^2\overline{A}_{66}$, $\overline{T}_{12} = \gamma s(\overline{A}_{12} + \overline{A}_{66})$, $\overline{T}_{13} = -\gamma^3\overline{B}_{11}$, $\overline{T}_{22} = \gamma^2\overline{A}_{66} + s^2\overline{A}_{11}$, $\overline{T}_{23} = s^2\overline{B}_{11}$, $\overline{T}_{33} = (\gamma^2 + s^4)\overline{D}_{11} + 2\gamma^2 s^2(\overline{D}_{12} + 2\overline{D}_{66})$ 이고 $\gamma = m\pi/a$, $s = n\pi/b$, m, $n = 1, 2, \cdots$ 이다.

방정식 (6)을 라쁠라스변환하면 다음의 결과가 얻어진다.

$$\overline{w}^* = \frac{q_{mn}^*}{\Delta^* + c - P\gamma^2} \quad (7)$$

$$\Delta^* = T_{23}^* + \frac{2T_{12}^*T_{23}^*T_{13}^* - T_{22}^*T_{13}^{*\,2} - T_{11}^*T_{23}^{*\,2}}{T_{11}^*T_{22}^* - T_{12}^{*\,2}} \quad (8)$$

식 (7)을 거꿀변환하면 $\overline{w}$ 가 구해진다. $\overline{u}_0$, $\overline{v}_0$ 도 류사한 방법으로 구할수 있다.

3. 계산실례

다층판은 $0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$ 로 되였고 $a=0.2\text{m}$, $b=0.2\text{m}$, $E_1=80\text{GPa}$, $E_2=10\text{GPa}$, $N=4$, $h_1=h_2=h_3=h_4$, $c=9\,617\text{N/m}^3$, $\Gamma_1=12\cdot10^{-3}e^{-0.06t}$, $\Gamma_2=4\cdot10^{-3}e^{-0.02t}$, $\Gamma_3=2\cdot10^{-3}e^{-0.01t}$, $q_0=0.5\text{MPa}$, $P=40\text{N/m}$ 이라고 하자.

이때 T_{ij}^* 을 구하면 $m=n=1$인 경우에

$$T_{11}^*=[6.505\,4-0.048/(p+0.06)-0.002/(p+0.02)-0.004/(p+0.01)]\pi^2 10^8,$$
$$T_{12}^*=[1.600\,6-0.004\,8/(p+0.02)-0.002/(p+0.01)]\pi^2 10^8,$$
$$T_{13}^*=[0.875\,7-0.012/(p+0.06)+0.000\,5/(p+0.02)]\pi^3 10^6,$$
$$T_{22}^*=[18.521\,6-0.192\,2/(p+0.06)-0.008/(p+0.02)-0.004/(p+0.01)]\pi^2 10^8,$$
$$T_{23}^*=[-7.008\,4-0.096\,1/(p+0.06)+0.004/(p+0.02)]\pi^3 10^6,$$
$$T_{33}^*=[27.875\,7-0.271\,7/(p+0.06)-0.014\,4/(p+0.02)-0.002\,7/(p+0.01)]\pi^4 10^4$$

이고 이것을 식 (7), (8)에 대입하면 $\overline{w}_{11}^*=81\times10^4/(\Delta^*+1\,345)$ 로 된다.

웃식을 거꿀변환하면 $\overline{w}_{11}=0.042\,6\text{m}$ 이다.

점성을 무시하면 $\overline{w}_{11}=0.034\,8\text{m}$ 이 되는데 점성으로 인하여 변위는 22.4% 증가한다.

m, n이 1이 아닌 경우에도 류사한 방법으로 구할수 있다.

m, n 이 커짐에 따라 식 (4)는 급격히 감소하는 합렬로 되는데 $m=n=3$ 인 경우는 $m=n=1$인 경우에 비하여 6.5% 증가한다.

참고문헌

[1] **김일성**종합대학학보(자연과학), 60, 3, 26, 주체103(2014).

[2] **김일성**종합대학학보(자연과학), 61, 7, 23, 주체104(2015).

[3] A. Boudiemal; Engineering and Technology, World Academy of Science, 44～66, 2012.

주체105(2016)년 5월 5일 원고접수

Displacement Analysis of Viscoelastic Composite Laminate Subjected by Compound Forces

Song Song Gwan, Yu Jun Ha

We considered the displacement of a fiber reinforced viscoelastic composite laminates subjected by compound forces. We obtained the displacement equation of an antisymmetric cross-ply viscoelasitic composite laminates and presented the analysis method on displacement.

Key words: compound force, viscoelastic, displacement