김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제2호

지반과 련결된 동흡진기의 최량설계방법

요성주, 강현상

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《과학자, 기술자들은 현실에 튼튼히 발을 붙이고 사회주의건설의 실천이 제기하는 문제들을 연구대상으로 삼고 과학연구사업을 진행하여야 하며 연구성과를 생산에 도입하는데서 나서는 과학기술적문제들을 책임적으로 풀어야 합니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제15권 492페지)

선행연구[1]에서는 지반과 련결된 동흡진기의 한가지 모형을 제기하고 그것의 동적결수에 대한 관계식을 유도하였다. 선행연구[2, 3]에서는 제안된 동흡진기에 대하여 그것의 공진응답이 최소로 되는 최량파라메터들을 구하는 관계식을 부동점리론으로 유도하였다. 그러나 그 관계식으로 구한 최량파라메터들이 지반이 있는 동흡진기의 공진응답을 실제로는 최소로 하지 못한다는것을 선행연구[1]에서 밝혔다.

론문에서는 동흡진기의 실제적인 제작조건하에서 H_∞ 최량화방법을 리용하여 최대진폭응답을 최소화하는 주파수비와 감쇠비에 대한 관계식들을 유도하였다.

그림 1은 기본체계 $(M-K)$ 에 설치된 동흡진기 $(m-k-c$체계$)$ 의 모형을 보여주었다.

선행연구[4]에서 제기한 동흡진기의 진폭비 $|X_1/X_{st}|_B$ 는 다음과 같다.

$$|G_B(\lambda)|=\left|\frac{X_1}{X_{st}}\right|_B=\sqrt{\frac{(\gamma^2-\lambda^2)^2+(2\zeta\gamma\lambda)^2}{[(1-\lambda^2)(\gamma^2-\lambda^2)-\mu\gamma^2\lambda^2]^2+(2\zeta\gamma\lambda)^2(1+\mu\gamma^2-\lambda^2)^2}} \tag{1}$$

여기서 $X_{st}=F/K$, $\lambda=\omega/\sqrt{K/M}$, $\gamma=\sqrt{k/m}\big/\sqrt{K/M}$, $\mu=m/M$, $\zeta=c/2\sqrt{mk}$ 이다.

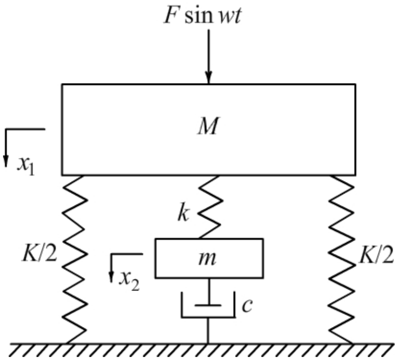


그림 1. 기본체계 $(M-K)$ 에 설치된 동흡진기 $(m-k-c$체계$)$ 의 모형

H_∞ 최량화에서 목적함수는 려진에 대한 기본체계의 응답의 최대동적결수를 최소화하는것이다. 즉

$$\max(|G_B(\lambda,\ \gamma_{opt\_B},\ \zeta_{opt\_B})|)=\min(\max_{\gamma,\ \zeta}|G_B(\lambda)|) \tag{2}$$

식 (1)은 다음의 형태로 다시 쓸수 있다.

$$|G_B(\lambda)|=\sqrt{\frac{A+B\zeta^2}{C+D\zeta^2}} \tag{3}$$

여기서

$$A=(\gamma^2-\lambda^2)^2,\ B=(2\gamma\lambda)^2$$
$$C=[(1-\lambda^2)(\gamma^2-\lambda^2)-\mu\gamma^2\lambda^2]^2$$
$$D=(2\gamma\lambda(1-\lambda^2+\mu\gamma^2))^2$$

이다.

식 (1)을 리용하여 3개의 감쇠비 ζ=0.001, 0.2, 0.5에서 $\mu=0.1$, $\gamma=1$인 모형의 주파수응답을 계산하고 결과를 그림 2에 보여주었다.

그림에서 보는것처럼 동흡진기의 감쇠비와 무관계한 사귑점들인 O와 P, Q가 있다. 이 점들을 부동점이라고 한다. $\lambda=0$ 을 식 (1)에 대입하면 진폭비 $G_B(0)=1$ 이 나온다. 이것은 그림 2에서 부동점 O에 대응한다. 다른 부동점 P, Q를 찾기 위하여 $\zeta=0$ 과 ∞ 에서 주파수응답곡선을 고찰한다. 주파수응답곡선들이 $\zeta=0$ 과 ∞ 에서 다 부동점 P와 Q를 지나기때문에 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\frac{A}{C}=\frac{B}{D} \tag{4}$$

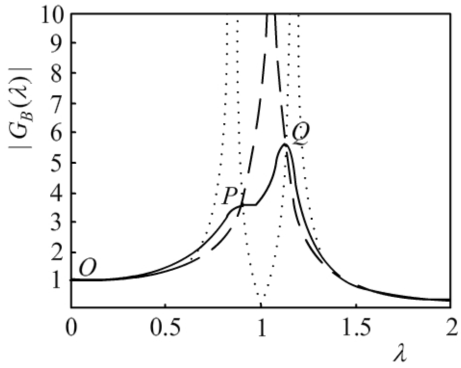


그림 2. 3개의 감쇠비 ζ =0.001, 0.2, 0.5에서 μ =0.1, γ =1인 모형의 주파수응답

$\lambda_P \neq 0$, $\lambda_Q \neq 0$ 이므로 방정식 (4)는 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\left(\frac{\gamma^2-\lambda^2}{(1-\lambda^2)(\gamma^2-\lambda^2)-\mu\lambda^2\gamma^2}\right)^2=\left(\frac{1}{1-\lambda^2+\mu\gamma^2}\right)^2 \tag{5}$$

식 (5)의 량변에 2차뿌리를 취하면

$$\frac{\gamma^2-\lambda^2}{(1-\lambda^2)(\gamma^2-\lambda^2)-\mu\lambda^2\gamma^2}=\pm\frac{1}{1-\lambda^2+\mu\gamma^2} \tag{6}$$

이다. $\zeta=0$ 과 ∞ 에서 응답이 반대위상을 가지므로 식 (6)의 오른변에 미누스부호를 취하면 다음과 같다.

$$\frac{\gamma^2-\lambda^2}{(1-\lambda^2)(\gamma^2-\lambda^2)-\mu\lambda^2\gamma^2}=-\frac{1}{1-\lambda^2+\mu\gamma^2} \tag{7}$$

방정식 (7)을 다음과 같이 다시 쓸수 있다.

$$2\lambda^4-2(1+\gamma^2+\mu\gamma^2)\lambda^2+2\gamma^2+\mu\gamma^4=0 \tag{8}$$

식 (8)의 뿌리 λ_P , λ_Q 는 다음과 같이 얻어진다.

$$\lambda_{P,Q}=\sqrt{\frac{1+\gamma^2+\mu\gamma^2\pm\sqrt{1-2(1-\mu)\gamma^2+(1+\mu^2)\gamma^4}}{2}} \tag{9}$$

이 두 뿌리들에서 주파수응답의 진폭은 감쇠비 ζ 와 독립이다. 그것들은 다음과 같다.

$$|G_B(\lambda_P)|=\left|\frac{1}{1-\lambda_P^2+\mu\gamma^2}\right|=\frac{2}{1-\gamma^2+\mu\gamma^2+\sqrt{1-2(1-\mu)\gamma^2+(1+\mu^2)\gamma^4}} \tag{10}$$

$$|G_B(\lambda_Q)|=\left|\frac{1}{1-\lambda_Q^2+\mu\gamma^2}\right|=-\frac{2}{1-\gamma^2+\mu\gamma^2-\sqrt{1-2(1-\mu)\gamma^2+(1+\mu^2)\gamma^4}} \tag{11}$$

임의의 감쇠비에서 주파수응답은 이 3개의 부동점 O, P, Q를 포함하여야 한다. 이 동흡진기설계의 H_∞ 최량화는 다음과 같이 정식화할수 있다.

만일 함수 $|G_B(\gamma,\ \zeta,\ \lambda)|$가 변수 ζ 와 독립인 어떤 점 S_n 을 가지며 S_n 에서 응답진폭이 $|G_B(\lambda)|\ \forall\lambda\in\mathbf{R}^+$ 의 대역최대이라면 γ 는 최량조화주파수이고 ζ 는 최량감쇠이다. $|G_B(\lambda_P)|$와 $|G_B(\lambda_Q)|$를 $\mu=0.1$ 에 대하여 식 (10)과 (11)에 따라 계산하고 $|G_B(\lambda_O)|$와 합

께 그림 3의 ㄱ)에 보여주었다. 그림 3의 ㄱ)에서 $|G_B(\lambda_P)|$와 $|G_B(\lambda_Q)|$는 사귐점 R를 가진다. $|G_B(\lambda_P)|=|G_B(\lambda_Q)|$를 풀어서 이 사귐점에서 최량주파수를 결정할수 있다.[2, 3]

$$\gamma_R=\sqrt{\frac{1}{1-\mu}} \tag{12}$$

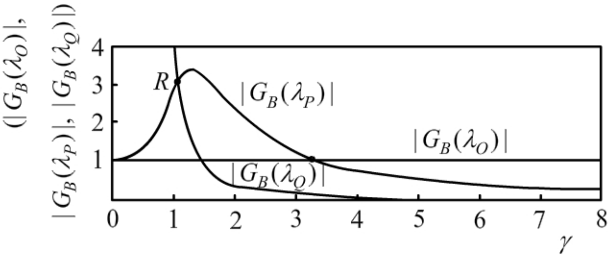
부동점 P와 Q에서 각각 도함수가 령인 2개의 서로 다른 감쇠값들이 있다는것을 알수 있다. 최량감쇠값은 편리하게 이 두 감쇠값들의 평균을 취한다.

$$\zeta_R=\sqrt{\frac{3\mu}{8(1-0.5\mu)}} \tag{13}$$

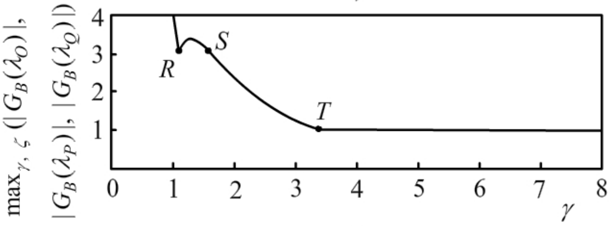
주파수 γ_R와 감쇠 ζ_R를 동흡진기의 최량주파수와 감쇠로 한다.[2] 기본질량 M의 무차원공진진폭의 근사값은 다음과 같이 유도된다.

$$\left|\frac{X_1}{X_{st}}\right|_{\max\_B}=(1-\mu)\sqrt{\frac{2}{\mu}} \tag{14}$$

그러나 실제로 식 (12)－(14)에 의하여 결정되는 최량화결과는 대역적인 최소를 주지는 못한다.(그림 3)



ㄱ)



ㄴ)

그림 3. $\mu=0.1$에 대하여 고유주파수비에 따르는 동흡진기의 응답진폭
ㄱ) $|G_B(\lambda_O)|, |G_B(\lambda_P)|, |G_B(\lambda_Q)|$의 응답진폭,
ㄴ) $\max_{\gamma,\,\zeta}(|G_B(\lambda_O)|, |G_B(\lambda_P)|, |G_B(\lambda_Q)|)$의 응답진폭

그림 3의 ㄴ)에서 알수 있는바와 같이 $|G_B(\lambda_P)|$의 곡선에 $|G_B(\gamma_R,\ \lambda_p)|=|G_B(\gamma_S,\ \lambda_p)|$인 점 S가 있다. γ가 γ_S보다 크면 무차원공진진폭은 더 작아질수 있다. 식 (10)과 (14)를 리용하고 $|G_B(\lambda_P)|=|X_1/X_{st}|_{\max_B}$를 고려하면 그림 3의 ㄴ)의 점 S에서 주파수비 γ_S를 구할수 있다.

$$\gamma_S=\sqrt{\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{\mu})(1-\sqrt{2\mu})}{\sqrt{\mu}(1-\mu)}} \tag{15}$$

그림 3의 ㄴ)에서 보여준바와 같이 점 R는

$$\max_{\gamma,\,\zeta}(|G_B(\lambda_O)|, |G_B(\lambda_P)|, |G_B(\lambda_Q)|)$$

의 국부최소점이지만 점 T는 대역최소이다. 리론적으로 질량 M의 무차원공진진폭은 주파수가 점 R에서가 아니라 점 T에서 취해진다면 1로 축소될수 있다. 주파수비 γ_T는 $|G_B(\lambda_P)|=1$을 풀어 찾을수 있다.

$$\gamma_T=\sqrt{\frac{2(1-\mu)}{\mu}} \tag{16}$$

그러나 우의 식으로 얻은 γ_T가 실천에 적용하기에는 너무 클수 있다. 실천에서 진동계의 설계에는 다음과 같은 제한이 있다.

$$0<\mu\le 0.25 \tag{17 ㄱ}$$

$$k \le K \qquad (17\ ㄴ)$$

$$\zeta_{opt\_B} \le 1 \qquad (17\ ㄷ)$$

동흡진기의 주파수비를 다음과 같이 다시 쓸수 있다.

$$\gamma = \sqrt{\frac{k}{K\mu}} \qquad (18)$$

$k \le K$, $\mu \le 0.25$ 인 실제적인 제한을 고려하면 식 (18)을 리용하여 모형의 최량주파수 파라메터의 범위를 결정할수 있다.

$$\gamma_S \le \gamma_{opt\_B} \le \sqrt{\frac{1}{\mu}},\ \ 0 < \mu \le 0.25 \qquad (19)$$

응답곡선에서 점 P가 최대점으로 되게 하는 동흡진기의 최량감쇠를 결정하기 위하여 부동점 P에서 도함수를 령으로 한다. 즉

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} | G_B(\lambda) |^2_{\lambda=\lambda_P} = 0 \qquad (20)$$

식 (1)과 (9), (20)을 리용하여 최량감쇠를 유도할수 있다.

$$\zeta_{opt\_B} = \sqrt{\frac{1-2\gamma^2(1-\mu)+\gamma^4(1+\mu+\mu^2)-(1-\gamma^2(1-\mu))\sqrt{1-2(1-\mu)\gamma^2+(1+\mu^2)\gamma^4}}{4\gamma^2\left(1+\gamma^2+\mu\gamma^2-\sqrt{1-2(1-\mu)\gamma^2+(1+\mu^2)\gamma^4}\right)}} \qquad (21)$$

모형의 최대주파수응답은 다음과 같이 된다.

$$\max(| G_B(\lambda,\ \mu,\ \gamma_{opt\_B},\ \zeta_{opt\_B}) |) = | G_B(\lambda_P) | = \frac{2}{1-\gamma^2+\mu\gamma^2+\sqrt{1-2(1-\mu)\gamma^2+(1+\mu^2)\gamma^4}} \qquad (22)$$

2개의 최량조화주파수와 감쇠비를 리용한 동흡진기모형의 주파수응답곡선을 점선과 실선으로 보여주었다.(그림 4) 점선은 부동점리론에 따른 식 (12), (13)을 적용한 것이고 실선은 새로운 리론에 따른 식 (19), (21)을 리용하여 식 (1)에 따라 계산한 것이다. 질량비 μ는 0.25로 취하였다. 부동점리론에 기초하여 작성된 곡선은 표준적인 두 봉우리특성을 보여주지만 그것의 공진봉우리는 새로운 리론으로 작성한 두번째 곡선의 봉우리보다 더 높다는것을 알수 있다. γ_T 와 $\zeta_T = \zeta_{opt\_B} |_{\gamma=\gamma_T}$ 를 리용한 주파수응답곡선을 계산하고 한점사슬선으로 그렸다.(그림 4)

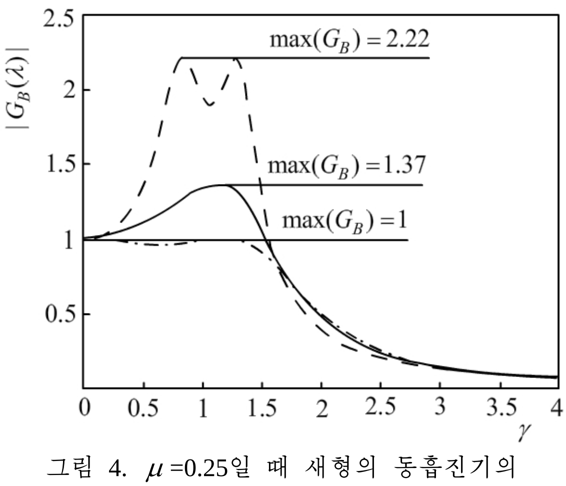


그림 4. μ=0.25일 때 새형의 동흡진기의 질량 M의 주파수응답

맺 는 말

선행연구에서는 동흡진기(DVA)의 최량화에서 일반적으로 부동점리론을 리용하였다. 그림 1에 보여준바와 같이 새롭게 제안된 지반과 련결된 동흡진기에서 부동점리론을 리용하여 얻은 최량파라메터들에 대하여 기본계의 최대동적결수가 최소로 되지 않는다. 론문에서는 H∞최량화방법을 리용하여 이 동흡진기에 더 작은 최대진폭응답을 주는 주파수비와 감쇠비를 구하였으며 그 타당성을 검증하였다.

참 고 문 헌

[1] C. Yan Lung, The Hong Kong Polytechnic University, 86～102, 2009.

[2] M. Z. Ren; Journal of Sound and Vibration, 245, 762, 2001.

[3] K. Liu et al.; Journal of Sound and Vibration, 284, 1181, 2005.

[4] M. Zilletin et al.; Journal of Sound and Vibration, 4, 1, 2012.

주체107(2018)년 12월 5일 원고접수

An Optimization Method of the Dynamic Vibration Absorber Linked on Foundation

Yo Song Ju, Kang Hyon Sang

In this paper, we propose an optimization method of the dynamic vibration absorber. The new parameters of DVA are derived and compared with classical ones based on the fixed point theory.

The results of calculation show that the vibration amplitude using new optimum parameters is smaller than the one proposed by other researchers.

Key words: Dynamic vibration absorber, Optimization, Fixed point