김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체106(2017)년 제63권 제11호 Vol. 63 No. 11 JUCHE106(2017).

적분경계조건을 가지는 분수계미분방정식의 최대, 최소풀이를 구하기 위한 단조반복법

량지성, 림명길

많은 현실문제들이 분수계미분방정식에 의하여 모형화된다.

선행연구[1]에서는 비선형분수계미분방정식의 경계값문제에 대하여 웃풀이와 아래풀이를 리용하는 단조반복법이 론의되였으며 선행연구[2, 3]에서는 적분경계조건을 가지는 비선형분수계미분방정식의 풀이의 존재성과 다중성이 론의되였다.

론문에서는 다음의 적분경계조건을 가지는 분수계미분방정식의 최대, 최소풀이를 구하기 위한 단조반복법을 론의한다.

$$D^{\delta}u(t)=f(t,\ u(t)),\ \ t\in(0,\ 1),\ \ 0<\delta\le 1 \tag{1}$$

$$u(0)=\int_0^1 g(s)u(s)ds \tag{2}$$

여기서 $f:[0,\ 1]\times\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ 는 련속함수이고 $g(t)\ge 0,\ \forall t\in[0,\ 1]$ 이며 D^{δ} 는 δ 계캐푸터도함수이다. 또한 f 는 변수 u 에 관하여 미분가능한 함수이다.

$\delta>0,\ \ m-1<\delta\le m,\ \ m\in\boldsymbol{N}$ 에 대하여 캐푸터도함수는 다음과 같이 정의된다.[1, 2]

$$D^{\delta}u(t)=\frac{1}{\Gamma(m-\delta)}\int_0^t (t-s)^{m-1-\delta}u^{(m)}(s)ds \tag{3}$$

함수 $v(t)\in C^1([0,\ 1],\ \boldsymbol{R})$ 가 $D^{\delta}v(t)\le f(t,\ v)\ \ (t\in(0,\ 1),\ 0<\delta\le 1)$, $v(0)\le\int_0^1 g(s)v(s)ds$ 를 만족시킬 때 $v(t)$ 를 문제 (1), (2)의 아래풀이라고 부르며 함수 $w(x)\in C^1([0,\ 1],\ \boldsymbol{R})$ 가 우의 반대부등식들을 만족시키면 문제 (1), (2)의 웃풀이라고 부른다.

만일 $v(t)\le w(t),\ \forall t\in[0,\ 1]$ 이면 v 와 w 를 각각 순서화된 아래, 웃풀이라고 부른다.

다음과 같은 초기값문제에 대하여 론의하자.

$$D^{\delta}z(t)=r(t)z(t)+p(t)\ \ (t\in(0,1)),\ \ z(0)=z_0 \tag{4}$$

보조정리 1 $0<\delta\le 1,\ \ r,\ p\in C[0,\ 1]$ 일 때 초기값문제 (4)는 유일풀이 $z\in C[0,\ 1]$ 을 가진다. 이때 $z(t)$ 는 레졸벤트핵 $R(t,\ s)$ 에 의하여 $z(t)=T^*(t)+\int_0^t R(t,\ s)T^*(s)ds$ 로 표시된다.

여기서 $T^*(t):=z_0+J_0^{\delta}p(t)$, $J_0^{\delta}p(t)=\dfrac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^t (t-s)^{\delta-1}p(s)ds$ 이고

$$k(t,\ s):=\frac{1}{\Gamma(\delta)}(t-s)^{\delta-1}r(s)\ ,\ \ k_1(t,\ s):=k(t,\ s)\ ,\ \ k_j(t,\ s):=\int_s^t k(t,\ \tau)k_{j-1}(\tau,\ s)d\tau\ ,\ \ j=2,3,\ \cdots$$

이며 $R(t,\ s)=\sum_{j=1}^{\infty}k_j(t,\ s)$ 로 정의한다.

보조정리 2(정값결과) $z(t)\in C^1([0,\ 1],\ \boldsymbol{R})$ 이고 $r(t)\ge 0,\ g(t)\ge 0,\ \forall t\in[0,\ 1]$ 이라고 하자. 만일 $z(t)$ 가 $D^\delta z(t)-r(t)z(t)\ge 0\ (t\in(0,\ 1)),\ z(0)\ge 0$ 이면 $z(t)\ge 0,\ \forall t\in[0,\ 1]$ 이다.

$a,\ b:[0,\ 1]\to\boldsymbol{R}$ 에 대하여 $a(t)\le b(t),\ t\in[0,\ 1]$ 일 때 $[a,\ b]=\{f:[0,\ 1]\to\boldsymbol{R}: a\le f\le b\}$ 로 정의한다.

경계값문제 (1), (2)의 순서화된 아래, 웃풀이 $v(t),\ w(t)$ 가 주어졌다고 하자.

앞으로 $f(t,\ u)$ 가 u 에 대하여 단조증가하고 정수 c 가 존재하여

$$0<c\le\frac{\partial f}{\partial u}(t,\ \xi),\ \forall\xi\in[v,\ w] \tag{5}$$

를 만족시킨다고 하자.

식 (5) 대신 $0<c\le\frac{\partial f}{\partial u}(t,\ \xi),\ \ \forall\xi\in\left(\min_{t\in[0,\ 1]}v(t),\ \ \max_{t\in[0,\ 1]}w(t)\right)$ 라고 하면 다음의 결과가 성립된다.

보조정리 3 초기조건을 가지는 선형분수계미분방정식 $D^\delta u-cu=q(t),\ t\in(0,\ 1)$, $u(0)=u_0$ 의 풀이 $u(t)$ 는 $u(t)=u_0E_{\delta,\ 1}(ct^\delta)+\int_0^t(t-s)^{\delta-1}E_{\delta,\ \delta}(c(t-s)^\delta)q(s)ds$ 이다.

$v^{(0)}$ 과 $w^{(0)}$ 을 각각 구간 $[0,\ 1]$ 에서 경계값문제 (1), (2)의 유계이고 순서화된 아래, 웃풀이 $v(t),\ w(t)$ 로 택한다. 즉 $v^{(0)}(t)\equiv v(t),\ w^{(0)}(t)\equiv w(t)$ 로 한다.

먼저 아래풀이반복도식을 구성한다.

적분경계조건을 가지는 다음의 선형분수계미분방정식을 풀자.

$$D^\delta v^{(k)}-cv^{(k)}=-cv^{(k-1)}+f(t,\ v^{(k-1)}),\ t\in(0,\ 1) \tag{6}$$

$$v^{(k)}(0)=\int_0^1 g(s)v^{(k-1)}(s)ds$$

보조정리 3으로부터 다음의 식이 성립된다.

$$v^{(k)}(t)=E_{\delta,\ 1}(ct^\delta)\int_0^1 g(s)v^{(k-1)}(s)ds+\int_0^t(t-s)^{\delta-1}E_{\delta,\ \delta}(c(t-s)^\delta)(-cv^{(k-1)}(s)+f(s,\ v^{(k-1)}(s)))ds \tag{7}$$

다음 웃풀이반복도식을 구성한다.

적분경계조건을 가지는 다음의 선형분수계미분방정식을 풀자.

$$D^\delta w^{(k)}-cw^{(k)}=-cw^{(k-1)}+f(t,\ w^{(k-1)}),\ t\in(0,\ 1) \tag{8}$$

$$w^{(k)}(0)=\int_0^1 g(s)w^{(k-1)}(s)ds$$

보조정리 3으로부터 다음과 같다.

$$w^{(k)}(t)=E_{\delta,\ 1}(ct^\delta)\int_0^1 g(s)w^{(k-1)}(s)ds+\int_0^t(t-s)^{\delta-1}E_{\delta,\ \delta}(c(t-s)^\delta)(-cw^{(k-1)}(s)+f(s,\ w^{(k-1)}(s)))ds \tag{9}$$

이로부터 함수렬 $\{v^{(k)}\},\ \{w^{(k)}\}$가 얻어진다.

정리 1 우에서 얻은 함수렬 $\{v^{(k)}\},\ \{w^{(k)}\}$에 대하여 다음의 사실들이 성립된다.

① $v^{(k)}(w^{(k)}),\ k\ge 1$은 문제 (1), (2)의 단조증가(단조감소)하는 아래(웃)풀이렬이다.

② $v^{(k)}\le w^{(k)},\ \forall k\ge 1$

증명 $k \geq 1$일 때 $v^{(k)} \geq v^{(k-1)}$이며 $v^{(k)}$가 아래풀이임을 귀납법으로 증명하자.

$k=1$인 경우 $D^{\delta} v^{(1)} - cv^{(1)} = -cv^{(0)} + f(t,\ v^{(0)}),\ t \in (0,\ 1)$ 이고 $v^{(0)}$은 아래풀이이므로 $D^{\delta} v^{(0)} \leq f(t,\ v^{(0)}),\ t \in (0, 1),\ 0 < \delta \leq 1$이며 $D^{\delta}(v^{(1)} - v^{(0)}) - c(v^{(1)} - v^{(0)}) \geq 0$이다.

한편 $v^{(1)}(0) = \int_0^1 g(s) v^{(0)}(s) ds$, $v^{(0)}(0) \leq \int_0^1 g(s) v^{(0)}(s) ds$ 이므로 $v^{(1)}(0) - v^{(0)}(0) \geq 0$이다.

따라서 보조정리 2로부터 $v^{(1)} - v^{(0)} \geq 0$ 즉 $v^{(1)} \geq v^{(0)}$이다.

$$D^{\delta} v^{(1)} - f(t,\ v^{(1)}) = c(v^{(1)} - v^{(0)}) - \frac{\partial f}{\partial u}(t,\ \xi)(v^{(1)} - v^{(0)}) \leq 0,\ t \in (0,\ 1),\ \xi \in [v^{(0)},\ v^{(1)}],$$

$$v^{(1)}(0) = \int_0^1 g(s) v^{(0)}(s) ds \leq \int_0^1 g(s) v^{(1)}(s) ds \leq \int_0^1 g(s) v^{(1)}(s) ds$$

이므로 따라서 $v^{(1)}$은 아래풀이이다.

$n=k$일 때 성립된다고 가정하고 $n=k+1$일 때 증명하자.

$$D^{\delta} v^{(k)} - cv^{(k)} = -cv^{(k-1)} + f(t,\ v^{(k-1)})\ \ (t \in (0,\ 1)),\ \ v^{(k)}(0) = \int_0^1 g(s) v^{(k-1)}(s) ds,$$

$$D^{\delta} v^{(k+1)} - cv^{(k+1)} = -cv^{(k)} + f(t,\ v^{(k)})\ \ (t \in (0,\ 1)),\ \ v^{(k+1)}(0) = \int_0^1 g(s) v^{(k)}(s) ds$$

로부터 대응되는 식들을 덜고 평균값정리를 적용하면

$$D^{\delta}(v^{(k+1)} - v^{(k)}) - c(v^{(k+1)} - v^{(k)}) = \left(-c + \frac{\partial f}{\partial u}(t,\ \xi)\right)(v^{(k)} - v^{(k-1)}) \geq 0,\ t \in (0,\ 1),\ \xi \in [v^{(k-1)},\ v^{(k)}],$$

$$v^{(k+1)}(0) - v^{(k)}(0) = \int_0^1 g(s)(v^{(k)}(s) - v^{(k-1)}(s)) ds \geq 0$$

이며 보조정리 2에 의해 단조성결과가 나온다. 또한

$$D^{\delta} v^{(k+1)} - f(t,\ v^{(k+1)}) = c(v^{(k+1)} - v^{(k)}) - \frac{\partial f}{\partial u}(t,\ \xi)(v^{(k+1)} - v^{(k)}) \leq 0,\ t \in (0,\ 1),\ \xi \in [v^{(k-1)},\ v^{(k)}],$$

$$v^{(k+1)}(0) = \int_0^1 g(s) v^{(k)}(s) ds \leq \int_0^1 g(s) v^{(k+1)}(s) ds$$

가 성립되며 이로부터 $v^{(k)}$는 아래풀이이다.

$w^{(k)}$가 문제 (1), (2)의 단조감소하는 웃풀이렬이라는것도 우와 같이 증명할수 있다.

$v^{(k)}$가 아래풀이이므로 $D^{\delta} v^{(k)}(t) \leq f(t,\ v^{(k)}),\ t \in (0,\ 1),\ 0 < \delta \leq 1$이고 $w^{(k)}$가 웃풀이이므로 $D^{\delta} w^{(k)}(t) \geq f(t, w^{(k)}),\ t \in (0,\ 1),\ 0 < \delta \leq 1$이다.

이 두 결과를 덜고 평균값정리를 적용하면 다음의 식이 성립된다.

$$D^{\delta}(w^{(k)}(t) - v^{(k)}(t)) \geq f(t,\ w^{(k)}) - f(t,\ v^{(k)}) = \frac{\partial f}{\partial u}(t,\ \xi)(w^{(k)} - v^{(k)}),\ t \in (0, 1),\ \xi \in [v^{(k)},\ w^{(k)}]$$

또한 식 (6), (8)로부터 $w^{(k)}(0) - v^{(k)}(0) = \int_0^1 g(s)(w^{(k)}(s) - v^{(k)}(s)) ds \geq 0$이 성립되며 따라서 $\frac{\partial f}{\partial u} \geq 0$이고 보조정리의 가정을 고려하면 $v^{(k)}(t) \leq w^{(k)}(t),\ \forall t \in [0,\ 1]$이 나온다.(증명끝)

정리 2 경계값문제 (1), (2)의 아래, 웃풀이렬 $\{ v^{(k)} \}$, $\{ w^{(k)} \}$ $(k \geq 1)$는 v^*, w^* $(v^{(k)} \leq w^{(k)})$에로 평등수렴한다.(증명생략)

보조정리 4 $[a,\ b]$를 순서화된 바나흐공간 X의 부분모임 Y의 구간, $Q:[a,\ b]\to[a,\ b]$를 비감소넘기기라고 하자.

이때 $[a,\ b]$의 임의의 단조렬 $\{x_n\}$에 대하여 $\{Qx_n\}$ $(\subset Q([a,\ b]))$이 수렴하면 a, b의 Q－반복렬은 각각 Q의 최소, 최대부동점으로 수렴한다.

정리 3 조건 (5)의 가정밑에서 v^*, w^*은 각각 문제 (1), (2)의 $[v^{(0)},\ w^{(0)}]$에서의 최소, 최대풀이이다.

증명 v^*이 문제 (1), (2)의 풀이임을 증명하자.

$v^{(k)}(0)=\int_0^1 g(s)v^{(k-1)}(s)ds$이고 정리 2로부터 $\{\ v^*\ \}$이 평등수렴하므로 극한 $k\to\infty$를 취하면 $v^*(0)=\int_0^1 g(s)v^*(s)ds$가 성립된다.

또한 식 (6)으로부터 $D^\delta v^{(k)}-cv^{(k)}=-cv^{(k-1)}+f(t,\ v^{(k-1)})$이다.

연산자 I^δ를 량변에 취하면 $v^{(k)}+c_0^{(k)}-cI^\delta v^{(k)}=-cI^\delta v^{(k-1)}+I^\delta f(t,\ v^{(k-1)})$이다.

함수 f가 련속함수이고 $\{v^*\}$이 평등수렴하므로 극한 $k\to\infty$를 취하면

$$v^*+c_0^{(\infty)}-cI^\delta v^*=-cI^\delta v^*+I^\delta f(t,\ v^*).\tag{10}$$

이때 $c_0^{(\infty)}=\lim_{k\to\infty}v^{(k)}(0)=\lim_{k\to\infty}\int_0^1 g(s)v^{(k-1)}(s)ds=\int_0^1 g(s)v^*(s)ds$이다.

식 (10)의 량변에 D^δ를 실시하면 l이 상수함수일 때 $D^\delta l=0$이므로 $D^\delta v^*=f(t,\ v^*)$이다. 따라서 v^*은 문제 (1), (2)의 풀이로 되며 마찬가지로 w^*도 문제 (1), (2)의 풀이로 된다.

보조정리 4를 리용하여 v^*, w^*이 각각 $[v^{(0)},\ w^{(0)}]$에서 최소, 최대풀이라는것을 증명하기 위하여 $X=C[0,\ 1]$, $[a,\ b]=[v^{(0)},\ w^{(0)}]$이라고 놓자.

$Qu:=E_{\delta,1}(ct^\delta)\int_0^1 g(s)u(s)ds+\int_0^t(t-s)^{\delta-1}E_{\delta,\delta}(c(t-s)^\delta)(-cu(s)+f(s,\ u(s)))$라고 할 때 정리 1의 증명과 마찬가지로 하면 $Q:[v^{(0)},\ w^{(0)}]\to[v^{(0)},\ w^{(0)}]$이 비감소넘기기라는것이 나온다.

또한 $[v^{(0)},\ w^{(0)}]$의 임의의 단조렬 $\{u_k\}$에 대하여 $\{Qu_k\}$ $(\subset Q([a,\ b]))$는 $C[0,\ 1]$에서 수렴한다. 따라서 v^*, w^*은 각각 $[v^{(0)},\ w^{(0)}]$에서 최소, 최대풀이다.(증명끝)

식 (7), (9)의 오른변에 있는 적분을 중합심프손공식으로 근사시키자.

구간 $[0,\ 1]$을 N(짝수)등분하고 분할점을 $t_i=ih\ (h=1/N)$, $v_i^k\approx v^{(k)}(t_i)$, $g_j=g(t_j)$, $f_j^k=f(s_j,\ v^{(k)}(s_j))$, $E_{\alpha,\beta,n}(t)=\sum_{j=0}^n\frac{t^j}{\Gamma(\alpha k+\beta)}$이라고 하면

$$v_i^k=E_{\delta,1,n}(c(ih)^\delta)\left(\frac{h}{3}\sum_{j=0}^N d_jg_jv_j^{k-1}\right)+$$
$$+\left[e_i^0hh^{\delta-1}E_{\delta,\delta,n}(ch^\delta)(-cv_{j-1}^{k-1}+f_{j-1}^{k-1})+\frac{h}{3}\sum_{j=0}^{i-e_i^0}d_{i,j}^0(ih-jh)^{\delta-1}E_{\delta,\delta,n}(c(ih-jh)^\delta)(-cv_j^{k-1}+f_j^{k-1})\right]\tag{11}$$

이 성립된다. 여기서 $e_i^0 = \begin{cases} 1, & i: 홀수 \\ 2, & i: 짝수 \end{cases}$ 이다.

$\{d_j\}_{j=0}^N$ 은 $d_0 = d_N = 1,\ d_{2j-1} = 4,\ d_{2j} = 2,\ 1 \le j \le N/2$ 인 수렬, $\{d_{i,\,j}^0\}_{j=0}^{i-e_i^0}$ 은 $d_0 = d_{i-e_i^0} = 1$, $d_{2j-1} = 4,\ d_{2j} = 2,\ 1 \le j \le (i - e_i^0)/2$ 인 수렬이다.

실례 $D^{1/2}u(t) = (u(t) + u^{1/2}(t))/15 + t,\ u(0) = \frac{7}{10}\int_0^1 su(s)ds$ 에 대한 근사풀이를 구하자.

$v^{(0)} = 0,\ w^{(0)} = e^t$ 이 각각 이 문제의 아래, 웃풀이로 된다는것은 쉽게 알수 있다.

$u \in \left(\min_{t\in[0,\,1]} v^{(0)}(t),\ \max_{t\in[0,\,1]} w^{(0)}(t) \right) \subset (0,\ 3)$, $t \in [0,\ 1]$ 일 때 $\frac{1}{15} \le f_u(u,\ t) = \frac{1}{15} + \frac{u^{-1/2}}{15}$ 이므로 $c = \frac{1}{15}$ 이다.

$N = 5\,000,\ n = 20$ 으로 놓고 식 (11)을 리용하여 근사풀이렬 $\{v^{(k)}\},\ \{w^{(k)}\}$를 얻을수 있다.

이때 오차를

$$E_1(k) := \max_{t\in[0,\,1]} |w^{(k)}(t) - w^{(k-1)}(t)|,$$

$$E_2(k) := \max_{t\in[0,\,1]} |v^{(k)}(t) - v^{(k-1)}(t)|$$

로 정의하면 허용오차한계를 $\varepsilon = 10^{-10}$ 이라고 할 때

$$E_1(27) < \varepsilon,\ \ E_2(21) < \varepsilon\ .$$

계산결과는 표와 같다.

표. 계산결과

k	$E_1(k)$	$E_2(k)$
1	1.071 737 7	0.780 369 9
5	0.020 196 3	0.004 905 2
10	$2.433\ 9 \cdot 10^{-4}$	$1.463\ 1 \cdot 10^{-5}$
15	$2.945\ 2 \cdot 10^{-6}$	$4.244\ 0 \cdot 10^{-8}$
21	$1.474\ 0 \cdot 10^{-8}$	$3.185\ 7 \cdot 10^{-11}$
25	$4.312\ 9 \cdot 10^{-10}$	$1.134\ 6 \cdot 10^{-13}$
27	$7.377\ 2 \cdot 10^{-11}$	$4.038\ 4 \cdot 10^{-14}$

참 고 문 헌

[1] M. Al-Refai et al.; Nonlinear Analysis, 74, 3531, 2011.

[2] A. Cabada et al.; J. Math. Anal. Appl., 389, 403, 2012.

[3] Mei Jia et al.; Appl. Math. Comput., 232, 313, 2014.

주체106(2017)년 7월 5일 원고접수

Monotone Iterative Technique for Maximum, Minimum Solutions of Fractional Differential Equations with Integral Boundary Conditions

Ryang Ji Song, Rim Myong Gil

We investigate maximum, minimum solutions of nonlinear fractional differential equations with integral boundary conditions by using the monotone iterative technique and show the efficiency through an example.

Key words: fractional differential equation, monotone iterative technique