김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제4호

한 부류 콤팍트계와 모호확장계의 위상적엔트로피사이의 관계

김 철 산

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《과학기술의 종합적발전추세와 사회경제발전의 요구에 맞게 새로운 경계과학을 개척하고 발전시키는데 큰 힘을 넣어야 합니다.》

현시기 동력학계리론에서는 콤팍트기초계와 그 모호확장계의 위상적엔트로피들사이의 관계에 대한 연구가 기본문제의 하나로 되고있다.[2－4]

우리는 한 부류 콤팍트기초계와 그 모호확장(자데의 확장)계의 위상적엔트로피들사이의 관계를 고찰하였다.

일반적으로 모호확장계의 위상적엔트로피는 기초계의 위상적엔트로피보다 작지 않다.

선행연구[2]에서는 기초계의 위상적엔트로피가 령임에도 불구하고 그 유도계의 위상적엔트로피가 무한대인 2차원의 실례를 들었다.

선행연구[4]에서는 1차원계와 그 모호확장계의 위상적엔트로피가 서로 같다는것을 증명하였으며 일반적으로 어떤 조건밑에서 기초계와 그 모호확장계의 위상적엔트로피들이 같아지겠는가 하는 문제점을 제기하였다.

론문에서는 선행연구[1]에서 모호수공간을 새롭게 분할하고 매 분할에서 모호계의 동력학적구조를 해명한데 기초하여 기초계가 혼합정규주기분해[3]를 가지면 기초계와 모호확장계의 위상적엔트로피가 서로 같다는것 다시말하여 두 위상적엔트로피가 서로 같기 위한 기초계에 관한 한가지 충분조건이 혼합정규주기분해라는것을 밝혔다.

1. 기 초 개 념

론문의 개념들과 정의들은 기본적으로 선행연구[4]에 따른다.

$(X,\ f)$ 가 거리 d 를 가지는 콤팍트리산동력학계, f 는 약열린넘기기라고 하자.[3] X 우의 모호수공간을 $\mathbf{F}_c^1(X)$ 로, 그우에서의 거리를 d_∞ 로 표시한다.[4]

편리상 선행연구[1]에서 지적된 모호수공간 $\mathbf{F}_c^1(X)$ 의 분할에 대하여 다시 소개한다. $A\in \mathbf{F}_c^1(X)$ 라고 하자. 다음의 모임 $E_A=\{\alpha\in(0,\ 1]:[A]^\alpha$ 는 정규닫긴련결모임$\}$을 생각하고 $\mathbf{F}_c^1(X)$ 를 다음과 같이 분할한다. 즉

$$\mathbf{F}_0(X)=\{A\in \mathbf{F}_c^1(X): E_A=\varnothing\}$$

$$\mathbf{F}_1(X)=\{A\in \mathbf{F}_c^1(X)\setminus \mathbf{F}_0(X):[A]^{\alpha_A^0}\text{ 이 한점모임}\}$$

$$\mathbf{F}_2(X)=\{A\in \mathbf{F}_c^1(X)\setminus \mathbf{F}_0(X):[A]^{\alpha_A^0}\text{ 이 정규닫긴련결모임}\}$$

$$\mathbf{F}_2^1(X)=\{A\in \mathbf{F}_2(X):\alpha_A^0=1\},\quad \mathbf{F}_2^2(X)=\{A\in \mathbf{F}_2(X):\alpha_A^0<1\}$$

$E_A \neq \varnothing$일 때 $\alpha_A^0 = \sup E_A \leq 1$이라고 약속한다.

그러면 분명히

$$\mathbf{F}_c^1(X) = \mathbf{F}_0(X) \cup \mathbf{F}_1(X) \cup \mathbf{F}_2(X),\ \ \mathbf{F}_i(X) \cap \mathbf{F}_j(X) = \varnothing\ (i \neq j)$$

이고

$$\mathbf{F}_2(X) = \mathbf{F}_2^1(X) \cup \mathbf{F}_2^2(X),\ \ \mathbf{F}_2^1(X) \cap \mathbf{F}_2^2(X) = \varnothing$$

이다. 모호수공간 $\mathbf{F}_c^1(X)$는 거리 d_∞에 의하여 콤팍트공간으로 되지 못한다. 따라서 계 $(\mathbf{F}_c^1(X),\ \hat{f})$의 위상적엔트로피는 선행연구[4]에서 소개한 정의에 따라 계산하여야 한다.

2. 기 본 결 과

정리 $(X,\ f)$가 콤팍트리산동력학계이고 f는 혼합정규주기분해를 가지는 약열린넘기기라고 하자. 이때

$$h(f) = \mathrm{ent}(\hat{f})$$

이다.

증명 선행연구[1]의 정리 1로부터 $F_0(X)$는 콤팍트 $\hat{f}-$불변모임이고 다음의 함수

$$\pi : X \to \mathbf{F}_0(X)$$

$$\pi : a \mapsto \hat{a}$$

은 위상동형이며 $\pi \circ f = \hat{f} \circ \pi$이다. 따라서 f와 $\hat{f}|_{\mathbf{F}_0(X)}$는 π에 의하여 위상적으로 공액이고 $h(f) = h(\hat{f}|_{\mathbf{F}_0(X)})$이므로

$$h(f) \leq \mathrm{ent}(\hat{f})$$

이다. F가 $\mathbf{F}_c^1(X)$의 콤팍트 $\hat{f}-$불변부분모임이라고 하자. Λ_F를 F우의 보렐모임족우의 에르고드측도전부의 모임이라고 하자. 변동원리[4]에 의하여

$$h(\hat{f}|_F) = \sup_{\mu \in \Lambda_F} h_\mu(\hat{f}|_F)$$

이다. 임의의 $\hat{f}-$불변측도 μ에 대하여 유일한 $A \in F$가 있어서 $\omega(A,\ \hat{f}) \neq \varnothing$이고 $\mathrm{supp}\,\mu \subset \omega(A,\ \hat{f})$이므로

$$h_\mu(\hat{f}|_F) \leq h(\hat{f}|_{\omega(A,\ \hat{f})})$$

이다. 이제 목표는 $\omega(A,\ \hat{f}) \neq \varnothing$인 임의의 $A \in F$에 대하여

$$h(\hat{f}|_{\omega(A,\ \hat{f})}) \leq h(f)$$

라는것을 증명하는것이다.

경우 1 $A \in \mathbf{F}_0(X)$이면 적당한 $a \in X$가 있어서 임의의 $\alpha \in (0,\ 1]$에 대하여 $[A]^\alpha = \{a\}$이다. 선행연구[1]의 정리 1과 그것의 따름에 의하여 $\hat{f}|_{\omega(A,\ \hat{f})}$와 $f|_{\omega(a,\ f)}$는 위상공액이다. 따라서

$$h(\hat{f}|_{\omega(A,\ \hat{f})}) = h(f|_{\omega(a,\ f)}) \leq h(f)$$

이다.

경우 2 $A \in \mathbf{F}_2^1(X)$ 이면 선행연구[1]의 명제 1에 의하여 $\omega(A,\ \hat{f})$ 은 주기궤도이다. 이로부터

$$h(\hat{f}|_{\omega(A,\ \hat{f})}) = 0 \le h(f)$$

라는것을 알수 있다.

경우 3 $A \in \mathbf{F}_2^2(X)$ 이고 $[A]^1 = \{a\}$ 라고 하자. 새로운 넘기기 $\varnothing : \omega(A,\ \hat{f}) \to \omega(a,\ f)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$\varnothing(P) = [P]^1$$

여기서 $P \in \omega(A,\ \hat{f})$ 이다. 선행연구[1]의 보조정리 1로부터 $P \in \omega(A,\ \hat{f})$ 이면 $[P]^1 \in \omega(a,\ f)$ 이므로 이 넘기기의 정의는 타당하다. 또한 선행연구[1]의 주의 1에 의하여 이 넘기기 $\varnothing$ 는 우로의 넘기기이며 적당한 $M > 0$ 이 있어서

$$\#\varnothing^{-1}([P]^1) \le M$$

이 성립한다. $P,\ Q \in \omega(A,\ \hat{f})$ 에 대하여

$$d(\varnothing(P),\ \varnothing(Q)) = d([P]^1,\ [Q]^1) \le d_{\infty}(P,\ Q)$$

가 성립하므로 $\varnothing$ 는 련속이다. 분명히 관계식

$$\varnothing \circ \hat{f} = f \circ \varnothing$$

이 성립한다. 이로부터 $\varnothing$ 에 의하여 모호확장 $\hat{f}$ 은 넘기기 f 에 유한 대 1인 위상반공액이라는것을 알수 있다. 따라서

$$h(\hat{f}|_{\omega(A,\ \hat{f})}) = h(f|_{\omega(a,\ f)}) \le h(f)$$

이다. 우의 세가지 경우로부터

$$\mathrm{ent}(\hat{f}) \le h(f)$$

이고 이로부터

$$h(f) = \mathrm{ent}(\hat{f})$$

이다.(증명끝)

따름 $(G,\ f)$ 가 그라프리산동력학계라고 하자. 만일 $(G,\ f)$ 가 위상이행적이면

$$h(f) = \mathrm{ent}(\hat{f})$$

이다.

증명 선행연구[1]의 두번째 따름으로부터 그라프넘기기 f 에 대하여 다음의 두가지 경우중 하나만이 성립한다.

경우 1 G 가 원둘레 S^1 에 위상동형이고 f 가 어느 한 무리회전 R_β 에 위상공액이라고 하자. $h(R_\beta) = 0$ 이라는것은 이미 알고있다. 따라서

$$h(f) = h(R_\beta) = 0$$

이다. 이 경우에 선행연구[1]의 두번째 따름으로부터 R_β 의 자데확장 $\hat{R}_\beta$ 은 $\mathbf{F}_c^1(S^1)$ 우에서 등거리동형이며 따라서 $\hat{R}_\beta$ 의 위상적엔트로피는 령이다. 그러므로

$$\mathrm{ent}(\hat{f}) = \mathrm{ent}(\hat{R}_\beta) = h(f) = 0$$

이다.

경우 2 이 경우에 역시 선행연구[1]의 두번째 따름에 의하여 f는 약열린넘기기이며 혼합정규주기분해를 가진다. 따라서

$$h(f) = \text{ent}(\hat{f})$$

이다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보 수학, 66, 1, 67, 주체109(2020).

[2] G. Acosta et al.; Topology Appl., 159, 1013, 2009.

[3] L. Alsedà et al.; J. Math. Anal. Appl., 232, 359, 1999.

[4] J. S. Cánovas, J. Kupka; Fuzzy Sets Syst., 257, 132, 2014.

주체109(2020)년 6월 5일 원고접수

The Relationship between Topological Entropies of a Compact System and the Extended Fuzzy System

Kim Chol San

In this paper, we prove that in the topological entropies the compact system with the mixed regular periodic decomposition and the extended fuzzy system are equal.

Keywords: discrete dynamical system, fuzzy discrete dynamical system