김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체105(2016)년 제62권 제10호 Vol. 62 No. 10 JUCHE105(2016).

직교우연량렬을 리용한 역방향확률 미분방정식의 수값풀이법

원영준, 김문철

역방향확률미분방정식은 금융수학을 비롯한 여러 분야에서 대단히 중요한 역할을 하며 이에 대한 연구 특히 수값풀이를 구하기 위한 연구가 광범히 진행되고있다.

선행연구[1, 2]에서는 역방향확률미분방정식의 수값풀이를 구하기 위하여 조건부수학적기대값을 증분의 밀도함수를 리용하여 모의하였으며 일반화된 $\theta-$도식을 제기하였다.

이로부터 론문에서는 조건부수학적기대값을 모의하기 위하여 직교우연량렬의 리용방법을 연구하였으며 반복법을 리용하여 수값풀이도식을 제기하고 그 오차를 평가하였다.

완비확률토대 $(\Omega,\ \Im,\ P,\ (\Im_t))$우에서 주어진 $\Im_T-$가측인 우연량 $\xi=g(W_T)$가 두제곱적분가능한 우연량이라고 하면 이또의 표현정리에 의하여 과정 $z(s,\ \omega)$가 존재한다.

$\xi=\mathrm{E}[\xi]+\int_0^T z(s,\ \omega)dW$의 조건부수학적기대값은 $z(s,\ \omega)$를 리용하여 구할수 있다.

$z(s,\ \omega)$를 구하기 위하여 에르미트다항식렬 $H_n(T,\ x)=\frac{(-T)^n}{n!}e^{x^2/(2T)}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2/(2T)})$에 의해 만들어지는 우연량렬 $(H_n(T,\ W_T))$는 다음의 성질들을 가진다.

① $H_n(T,\ W_T)=\int_0^T H_{n-1}(s,\ W_s)dW$

② $\forall n,\ \mathrm{E}[H_n(T,\ W_T)]=\mathrm{E}\left[\int_0^T H_{n-1}(s,\ W_s)dW\right]=0$

③ $\forall m\neq n,\ \mathrm{E}[H_n(T,\ W_T)H_m(T,\ W_T)]=0$

다항식렬 $H_n(T,\ x)=\frac{(-T)^n}{n!}e^{x^2/(2T)}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2/(2T)})$가 두제곱적분가능한 함수공간의 토대로 되므로 임의의 두제곱적분가능한 우연량 $\xi=g(W_T)$를 직교에르미트우연량렬 $(H_n(T,\ W_T))$에 의하여 전개할수 있다.

정리 1 임의의 $\xi\in L^2(\Omega,\ \Im,\ P)$에 대하여 $\Im_T-$가측인 직교우연량렬 $H_n(T,\ W_T)$를 리용하면 $\xi=\mathrm{E}[\xi]+\sum_{n=1}^{\infty}a_nH_n(T,\ W_T)=\mathrm{E}[\xi]+\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\langle g(W_T),\ H_n(T,\ W_T)\rangle H_{n-1}(T,\ W_s)dW$가 성립된다. 여기서 $f_T(x)$는 정규분포 $N(0,\ T)$의 밀도함수, g는 ξ에 의해 정해지는 가측함수이다.

정리 1을 리용하면 2제곱적분가능한 ξ의 조건부수학적기대값은 다음과 같다.

$$\forall t < T, \quad \mathrm{E}[\xi \mid \Im_t] = \mathrm{E}[\xi] + \int_0^t z(s,\ \omega)dW = \mathrm{E}[\xi] + \sum_{n=1}^{\infty} \langle g(W_T),\ H_n(T,\ W_T) \rangle H_n(T,\ W_T) =$$

$$= \mathrm{E}[\xi] + \sum_{n=1}^{\infty} \langle g(W_T),\ H_n(T,\ W_T) \rangle H_n(t,\ W_t) =$$

$$= \mathrm{E}[\xi] + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) H_n(T,\ x) f_T(x) dx \right) H_n(t,\ W_t)$$

보조정리 1 $\Im_T$ − 가측인 $\forall \xi \in L^2(\Omega,\ \Im,\ P)$ 에 대하여 $\xi_N = \mathrm{E}[\xi] + \sum_{n=1}^{N} a_n H_n(T,\ W_T)$ 이고 $\mathrm{E} \mid \xi - \xi_N \mid^2 < \varepsilon$ 이면 $\mathrm{E}\left[\int_0^T \mid z(s,\ \omega) - z_N(s,\ \omega) \mid^2 ds \right] < \varepsilon$ 이 성립된다.

이제 역방향확률미분방정식이 다음과 같이 주어졌다고 하자.

$$y_t^{n+1} = \xi + \int_t^T f(s,\ y_s^n,\ z_s^n) ds - \int_t^T z_s^{n+1} dW,\ \xi = g(W_T) \tag{1}$$

초기과정 $(y^0 = 0,\ z^0 = 0)$ 으로부터 출발하여 $y_t^{n+1} = \xi + \int_t^T f(s,\ y_s^n,\ z_s^n) ds - \int_t^T z_s^{n+1} dW$ 에 의해 과정쌍렬 $(y^n,\ z^n)$ 이 생성되면 함수 f 의 리프쉬츠조건에 의하여 $(y^n,\ z^n)$ 이 풀이 $(y,\ z)$ 에로 수렴한다는것은 이미 밝혀져있다. 즉 노름 $\| (y,\ z) \|_\beta := \left(\mathrm{E}\left[\int_0^T e^{\beta s} (y_s^2 + z_s^2) ds \right] \right)^{1/2}$ 을 도입하면 이 노름의 의미에서 수렴한다.

$\xi^n = \xi + \int_0^T f(s,\ y_s^n,\ z_s^n) ds$ 라고 하면 두제곱적분가능한 우연량의 위너과정에 의한 표현정리에 의하여 어떤 과정 z_s^{n+1}이 있어서 $\xi^n = \mathrm{E}[\xi^n] + \int_0^T z_s^{n+1} dW$ 가 성립된다.

이 식에서 나오는 z_s^{n+1}을 앞에서와 같이 직교우연량렬로 표시하여

$$y_s^{n+1} = \mathrm{E}[\xi^n \mid \Im_s] - \int_0^s f(s,\ y_s^n,\ z_s^n) ds = \xi^n - \int_s^T z_s^{n+1} dW$$

를 계산한다.

$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ 이고 $\Delta t = t_{n+1} - t_n = \dfrac{T}{N}$ 라고 하면 역방향확률미분방정식의 수값풀이를 구하기 위한 수값풀이도식은 다음과 같다.

걸음 1 매 시각 t_n 에서 초기값을 $y_{t_n}^0 = 0,\ z_{t_n}^0 = 0$ 으로 놓는다.

걸음 2 $\xi^k = y_{n+1} + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s,\ y_s^k,\ z_s^k) ds$ 로 놓고 $\xi^k = \mathrm{E}[\xi^k] + \int_0^{t_{n+1}} z_s^{k+1} dW$ 에 의하여 z_s^{k+1} 을 결정한다.

걸음 3 $y_{t_n}^{k+1} = \mathrm{E}[\xi^k] + \int_0^{t_n} z_s^{k+1} dW$

걸음 4 $\mathrm{E} | y_{t_n}^{k+1} - y_{t_n}^k |^2 + \mathrm{E}\left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} | z_s^{k+1} - z_s^k |^2 \, ds \right] < \varepsilon$ 이 될 때까지 걸음 2, 3을 $k+1$번 반복한다.

보조정리 2 수값풀이의 오차한계 ε 가 주어졌을 때 우의 수값풀이알고리듬에 의한 매 걸음 t_n 에서의 수값풀이의 오차는 $\mathrm{E}[y_{t_n} - y_n]^2 + \mathrm{E}\left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} (z_s - z_{t_n})^2 ds \right] < \varepsilon$ 이다.

증명 $\| y_{t_{n+1}} - g_{n+1}(W_{t_{n+1}}) \|^2 < \varepsilon$ 이 되게 함수 g_{n+1} 을 선택한다.

$$y_{t_n} = y_{t_{n+1}} + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s,\ y_s,\ z_s) ds - \int_{t_n}^{t_{n+1}} z_s dW,\ \ \xi_{n+1} = y_{n+1} + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s,\ y_s,\ z_s) ds$$

로 놓으면 $y_n = \mathrm{E}[\xi^k] + \int_0^{t_n} z_s^{k+1} dW$ 가 성립된다.

$$\| \xi - y_n \| < \varepsilon \Rightarrow \mathrm{E}\left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} (z_s - z_{t_n})^2 \right] \le \mathrm{E}\left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} (z_s - z_s^k)^2 \right] + \mathrm{E}\left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} (z_s^k - z_{t_n})^2 \right] < \frac{\varepsilon}{2} \text{ 이므로}$$

$$\mathrm{E}[y_{t_n} - y_n]^2 \le \mathrm{E}[\xi - \xi^k]^2 + \mathrm{E}\left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} (z_s - z_s^k)^2 ds \right] < \frac{\varepsilon}{2}.$$

따라서 $\mathrm{E}[y_{t_n} - y_n]^2 + \mathrm{E}\left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} (z_s - z_{t_n})^2 ds \right] < \varepsilon$ 이 성립된다.(증명끝)

수값풀이의 오차를 평가하기 위하여 $t \in (t_i,\ t_{i+1}]$ 일 때 t시각에서의 수값풀이를 $(y_t^\pi,\ z_t^\pi)$ 라고 하고

$$y_t^\pi := y_i - (t - t_i) f(t,\ y_i,\ z_i) + \int_{t_i}^{t} z_s^\pi dW, \quad t_i < t \le t_{i+1}$$

로 놓는다.

정리 2 역방향확률미분방정식의 반복법에 의한 수값풀이알고리듬의 오차는 임의의 정수 ε에 대하여 분할의 차수가 충분히 클 때

$$\sup_{t \in [0,\ T]} \mathrm{E}[y_t - y_t^\pi]^2 + \mathrm{E}\left[\int_0^T | z_s - z_s^\pi |^2 \, ds \right] < \varepsilon.$$

증명 역방향확률미분방정식 (1)의 t 에서의 수치풀이의 오차는 다음과 같다.

$$y_t - y_t^\pi = \int_{t_i}^{t} (f(s,\ y_s,\ z_s) - f(s,\ y_i,\ z_i)) ds + \int_{t_i}^{t} (z_s - z_s^\pi) dW$$

f 의 리프쉬츠조건을 리용하면 다음의 식들이 성립된다.

$$\exists L>0,\ |f(s,\ y_s,\ z_s)-f(s,\ y_i,\ z_i)|\le L(|y_s-y_i|+|z_s-z_i|) \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[y_t-y_t^\pi]^2 &\le \mathrm{E}\left[\int_{t_i}^{t}|f(s,\ y_s,\ z_s)-f(s,\ y_i,\ z_i)|^2\,ds\right]+\mathrm{E}\left[\int_{t_i}^{t}(z_s-z_s^\pi)^2\,ds\right]\le\\ &\le \mathrm{E}\left[L\int_{t_i}^{t}(|y_s-y_{t_i}|^2+|y_{t_i}-y_i|^2+|z_s-z_i|^2)ds\right]+\mathrm{E}\left[\int_{t_i}^{t}(z_s-z_s^\pi)^2\,ds\right]\end{aligned} \tag{3}$$

보조정리 2의 결과를 리용하면 매 분할시각 t_i 에서 다음과 같다.

$$\mathrm{E}\left[|y_{t_i}-y_i|^2+\int_{t_i}^{t}|z_s-z_i|^2\,ds\right]<\varepsilon$$

또한 확률적분변환공식을 적용하면

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[y_{t_i}-y_i]^2+\mathrm{E}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}}|z_s-z_s^\pi|^2\,ds\right]-\mathrm{E}[y_{t_{i+1}}-y_{i+1}]^2=\\ =2\int_{t_i}^{t_{i+1}}\mathrm{E}[(y_s-y_s^\pi)(f(s,\ y_s,\ z_s)-f(s,\ y_{t_i}^\pi,\ z_{t_i}^\pi))]ds.\end{aligned}$$

이제 식 (2)와 부등식 $\forall\alpha>0,\ \ \forall a,\ b\in\boldsymbol{R},\ \ ab\le\alpha a^2+b^2/\alpha$ 을 리용하면

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}}|z_s-z_s^\pi|^2\,ds\right]&\le\mathrm{E}[y_{t_{i+1}}-y_{i+1}]^2-\mathrm{E}[y_{t_i}-y_i]^2+\\ &+\alpha\mathrm{E}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}}|y_s-y_s^\pi|^2\,ds\right]+\frac{1}{\alpha}\mathrm{E}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}}(|y_s-y_{t_i}|^2+|y_{t_i}-y_i|^2+|z_s-z_i|^2)ds\right]\end{aligned} \tag{4}$$

이며 식 (4)의 오른변의 매 마디들에 대하여 다음의 식이 성립된다.

$$\exists C,\ \theta>0,\ \ \mathrm{E}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}}|y_s-y_s^\pi|^2\,ds\right]\le C(\theta\mathrm{E}[y_{t_i}-y_i]^2+(1-\theta)\mathrm{E}[y_{t_i}-y_i]^2)$$

보조정리 2로부터 매 걸음 t_i 에서 $\mathrm{E}[y_{t_i}-y_i]^2<\dfrac{\varepsilon}{4n}\Rightarrow\mathrm{E}\left[\displaystyle\int_{t_i}^{t_{i+1}}|y_s-y_s^\pi|^2\,ds\right]<\dfrac{\varepsilon}{4n}$ 이다.

또한 $\Delta t_n=t_{n+1}-t_n$ 으로 놓고 보조정리 2를 적용하면

$$\mathrm{E}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}}(|y_{t_i}-y_i|^2+|z_s-z_i|^2)ds\right]\le t_n\left(\mathrm{E}[y_{t_i}-y_i]^2+\mathrm{E}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}}|z_s-z_i|^2\,ds\right]\right)\le\Delta t_n\frac{\varepsilon}{8T}=\frac{\varepsilon}{8n}.$$

주어진 ε 과 분할의 차수 n 에 대하여 $\dfrac{1}{\alpha}\mathrm{E}\left[\displaystyle\int_{t_i}^{t_{i+1}}|y_s-y_{t_i}|^2\,ds\right]\le\dfrac{\varepsilon}{8n}$ 이 성립하게 α 를 결정하면 다음의 식이 성립된다.

$$\alpha\mathrm{E}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}}|y_s-y_s^\pi|^2\,ds\right]+\frac{1}{\alpha}\mathrm{E}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}}(|y_s-y_{t_i}|^2+|y_{t_i}-y_i|^2+|z_s-z_i|^2)ds\right]<\frac{\varepsilon}{4n}$$

식 (4)에서 i를 0부터 n까지 변끼리 합하면 다음과 같다.

$$\mathrm{E}\left[\int_0^T |z_s - z_s^\pi|^2\, ds\right] \le \mathrm{E}[y_T - y_N]^2 - \mathrm{E}[y_0 - y_0^\pi]^2 + \frac{\varepsilon}{4n}\cdot n \le \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$$

이 결과를 식 (3)에 대입하면

$$\forall t \in [0,\ T],\ \mathrm{E}[y_t - y_t^\pi]^2 < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \sup_{t\in[0,\ T]} \mathrm{E}[y_t - y_t^\pi]^2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

이므로 따라서 $\sup\limits_{t\in[0,\ T]} \mathrm{E}[y_t - y_t^\pi]^2 + \mathrm{E}\left[\int_0^T (z_s - z_s^\pi)^2 ds\right] < \varepsilon$이 성립된다.(증명끝)

참고문헌

[1] 리은하 등; 조선민주주의인민공화국 과학원통보, 6, 10, 주체104(2015).

[2] Wei Dong Zhao et al.; International Journal of Numerical Analysis and Modeling, 10, 876, 2013.

주체105(2016)년 6월 5일 원고접수

Simulation of BSDE using Orthogonal Random Variables

Won Yong Jun, Kim Mun Chol

We use the orthogonal random variables to estimate the control term which is the important part of the solution of BSDE and simulate the solution of BSDE using Picard's iteration.

Key word: BSDE