김일성종합대학학보 JOURNAL OF KIM IL SUNG UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체106(2017)년 제63권 제3호 Vol. 63 No. 3 JUCHE106(2017).

한 형태의 혼합최량조종문제의 하밀톤－야코비변분부등식

허명송, 허경심

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《우리는 과학기술강국건설에 박차를 가하여 짧은 기간에 나라의 과학기술발전에서 새로운 비약을 이룩하며 과학으로 흥하는 시대를 열고 사회주의건설에서 혁명적전환을 가져와야 합니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 38페지)

우리는 혼합조종계에 동적계획법의 원리를 적용하여 값함수가 점성의 의미에서 준변분부등식의 유일풀이로 된다는것을 론의한다.

선행연구[2]에서는 혼합조종계에 대하여 무한시간최량조종문제에 대한 값함수의 오른쪽 련속성과 동적계획법의 원리를 리용하여 값함수가 만족시켜야 할 편미분방정식을 유도하고 그것의 풀이를 구하는 한가지 알고리듬을 제기하였다.

선행연구[1]에서는 우에서 제기한 혼합조종모형에 따르는 무한시간최량조종문제를 이행모임이 빈모임이 아닌 경우에로 확장하고 값함수가 횔더련속이고 유계인 경우 이것이 점성의 의미에서 준변분부등식의 유일풀이이라는것을 증명하였다.

론문에서는 궤도가 어떤 상태공간의 도달모임에 도달하게 되면 상태전개가 끝나게 되며 그 시각까지의 비용들의 합에 의하여 목적함수값이 계산되는 혼합조종문제에로 선행연구[2, 3]의 결과를 확장하였다.

론문의 기본목적은 혼합최량조종문제에 대하여 값함수가 준변분부등식의 유일한 점성풀이이라는것을 증명하는것이다.

련속조종계는 다음의 상미분방정식으로 서술된다.

$$\dot{y}(t) = f(y(t),\ q(t),\ u(t)) \tag{1}$$

$$y(0) = x \tag{2}$$

리산상태 $q(t)$는 t시각에 상태가 어느 공간의 련속계에서 이동하는가를 표시해주는 상태변수로서 $y(t)\in\Omega_i$이면 $q(t)=i$이고 이때 방정식 (1)은 $\dot{y}(t) = f_i(y(t),\ u(t))$와 같이 쓸 수 있다. 여기서 $f_i:\Omega_i\times u\to\Omega_i$이고 u는 련속조종모임으로서 다음과 같다.

$$u=\{a:[0,\ \infty)\to U \mid u(\cdot):\text{가측},\ U:\text{콤팍트거리공간}\}$$

상미분방정식 (1), (2)에 따라 전개되는 상태를 $(y_x(t,\ u),\ q(t))$라고 하자.

궤도가 이행모임 C_q에 도달하면 조종자는 매 시각의 이행여부에 대하여 결심할수 있으며 만일 이행하면 다른 상태공간의 초기모임 $D_{q'}$에로 상태가 옮겨지므로 그 공간에서의 련속조종에 따라 계속 움직이게 된다.

모임 A, C, D와 넘기기 $f,\ g$에 대하여 다음의 가정들을 주자.

가정 1 임의의 $i\in I$에 대하여 Ω_i는 $\boldsymbol{R}^{d_i}$의 열린련결모임의 페포이다.

가정 2 $A_i,\ C_i,\ D_i$는 닫긴모임이고 $\partial A_i,\ \partial C_i$는 C^2급이며 임의의 $x_i \in D_i$에 대하여 $\partial A_i \supseteq \partial \Omega_i$이다.

$U,\ V_1$이 콤팍트거리공간이라고 하자.

가정 3 $g: A \times I \times V_1 \to D$는 유계이고 리프쉬츠련속이다.

$q(t)=i$일 때 g는 $g_i: A_i \times V_1 \to D_j$로 표시된다.

가정 4 $f: \Omega \times I \times u \to \Omega$는 x에 관하여 리프쉬츠련속이며 u에 관하여 평등련속이다.

가정 5(횡단조건) 임의의 $i \in I$에 대하여 A_i는 콤팍트이고 적당한 상수 $\xi_0 > 0$이 있어서

$$f_i(x_0,\ u)\cdot\eta(x_0) \le -2\xi_0,\ \forall x_0 \in \partial A_i,\ u \in U$$

이다. 여기서 $\eta(x)$는 점 x에서의 ∂A_i에 대한 외법선단위벡토르이다.

같은 가정을 이행모임 C_i에 대하여 줄수 있다.

가정 6 $\inf d(A_i,\ C_i) \ge \beta > 0,\ \inf d(A_i,\ D_i) \ge \beta > 0$이 성립된다. 여기서 $d(A,\ B)$는 모임 $A,\ B$사이의 거리이다.

이제 어떤 $j \in I$에 대하여 도달모임이라고 부르는 $\Gamma \subset \Omega_j$를 생각하자.

이 모임은 다음의 가정을 만족시킨다.

가정 7 $\Gamma \subset \Omega_j$는 닫긴모임이고 $\partial\Gamma$는 콤팍트이며

$$d(\Gamma,\ D_j) \ge \beta > 0,\ \ d(\Gamma,\ A_j) \ge \beta > 0,\ \ d(\Gamma,\ C_j) \ge \beta > 0.$$

가정 8 모임 Γ에서 횡단조건이 만족된다.

목적함수 J는 다음의 식으로 주어진다.

$$J(x,\ q,\ u(\cdot),\ u,\ \xi_i,\ y(\xi_i)') = \tag{3}$$
$$= \int_0^{t_x(u)} K(y_x(t,\ u),\ q(t),\ u(t))e^{-\lambda t}dt + e^{-\lambda t_x(u)}h(y_x(t,\ u),\ u)$$

여기서 λ는 정의상수이고 $K: \Omega \times I \times u \to \boldsymbol{R}$, $h: \Gamma \to \boldsymbol{R}$는 비용함수이다.

도달시각은 다음과 같이 정의된다.

$$t_x(u) = \begin{cases} +\infty, & \{t \mid y_x(t,\ u) \in \Gamma\} = \phi \\ \min\{t \mid y_x(t,\ u) \in \Gamma\}, & \{t \mid y_x(t,\ u) \in \Gamma\} \ne \phi \end{cases}$$

이때 값함수 V는 다음과 같이 정의된다.

$$V(x,\ q) = \inf_{\theta \in u \times V_1 \times [0,\ +\infty) \times D} J(x,\ q,\ u(\cdot),\ u,\ \xi_i,\ y(\xi_i)') \tag{4}$$

비용함수 $h,\ K$는 다음의 가정을 만족시킨다.

가정 9 $h \in \Gamma,\ h(x) \ge 0,\ \ x \in \Gamma$

가정 10 K는 x에 관하여 리프쉬츠련속이며 u에 관하여 평등련속이다. 또한 리프쉬츠상수 K_0이 있어서

$$K(x,\ q,\ u) \le K_0,\ \forall (x,\ q,\ u) \in \Omega \times I \times U$$

를 만족시킨다.

다음으로 상태 $(x,\ q)$에서 출발하여 조종 u에 따라 이행모임 A에 처음으로 도달하는 시각 $t(x,\ q,\ u)$와 A까지의 부호화된 거리함수 d를 정의하자.

$$t(x,\ q,\ u) = \inf\{t > 0 \mid y(t) \in A_q,\ y(0) = x,\ \dot{y}(t) = f_a(y(t),\ u(t))\}$$

$$d(x,\ q)=\begin{cases}-d(x,\ \partial A_q), & x\in \operatorname{int}A_q\\ 0, & x\in\partial A_q\\ d(x,\ \partial A_q), & x\in \operatorname{out}A_q\end{cases}$$

여기서 $\operatorname{int}A_q = A_q\setminus\partial A_q$, $\operatorname{out}A_q$는 A_q의 나머지모임이다.

혼합조종문제 (1)－(3)에 관한 동적계획법의 최량성원리를 론의하고 값함수가 점성의 의미에서 만족시켜야 할 준변분부등식을 유도하자.

정리 1 (동적계획법의 최량성원리) 혼합최량조종문제 (1)－(3)의 값함수를 $V(x,\ q)$라고 할 때 초기점 x에서 출발하여 조종 u에 따르는 궤도가 τ_1시각에 이행모임에 도달하여 처음으로 이행하였다고 하면

$$xV(x,\ q)=\inf_u\left\{\int_0^{\tau_1}K(y_x(t,\ u),\ q(t),\ u(t))e^{-\lambda t}dt+e^{-\lambda\tau_1}MV(x_1,\ q_1)\right\}$$

이 성립된다. 여기서 $MV(x,\ q)=\inf_{u\in V_1}\{V(g(x,\ q,\ u),\ q)\}$이다.

또한 궤도가 ξ_1시각에 이행모임 C에서 처음으로 이행하였다고 하면

$$V(x,\ q)=\inf_u\left\{\int_0^{\xi_1}K(y_x(t,\ u),\ q(t),\ u(t))e^{-\lambda t}dt+e^{-\lambda\xi_1}NV(y(\xi_1),\ q)\right\}$$

이 성립된다. 여기서 $NV(x,\ q)=\inf_{(x',\ q')\in D\times I}\{V(x',\ q')\}$이다.

임의의 $T>0$에 대하여

$V(x)=$

$$=\inf_{u,\ \xi_i,\ y(\xi_1)'}\left\{\int_0^{T\wedge t_x(u)}K(y_x(t,\ u),\ q(t),\ u(t))e^{-\lambda t}dt+e^{-\lambda(T\wedge t_x(u))}V(y_x(T\wedge t_x(u),\ u),\ q(T\wedge t_x(u),\ u))\right\}$$

가 성립된다. 여기서 $a\wedge b=\min\{a,\ b\}$이다.

이제 값함수가 만족시켜야 할 하밀톤－야코비변분부등식을 유도하자.

혼합조종도달문제의 하밀토니안은

$$H(x,\ q,\ p):=\sup_{u\in U}\left\{\frac{-K(x,\ q,\ u)-f(x,\ q,\ u)\cdot p}{\lambda}\right\}$$

와 같다.

이때 다음의 사실이 성립된다.

정리 2 가정 1－10이 만족될 때 혼합최량조종문제 (1)－(3)의 값함수가 도달모임의 경계에서 하반련속이면 값함수는 다음의 준변분부등식을 만족시킨다.

$$\begin{cases}V(x,\ q)-MV(x,\ q)=0, & (x,\ q)\in A\times I\\ \max\{V(x,\ q)-NV(x,\ q),\ V(x,\ q)+H(x,\ q,\ D_xV(x,\ q))\}, & (x,\ q)\in C\times I\\ V(x,\ q)+H(x,\ q,\ D_xV(x,\ q))=0, & (x,\ q)\in\Omega\setminus(A\cup C\cup\Gamma)\times I\\ V(x,\ q)-h(x)=0, & (x,\ q)\in\partial\Gamma\times\{j\}\end{cases}\tag{5}$$

정리 3 가정 1－10이 만족될 때 값함수가 련속함수이면 이 값함수는 점성의 의미에서 준변분부등식 (5)의 유일풀이이다.

증명 u_1, u_2를 $\overline{\Omega \setminus \Gamma}$에서 유계이며 련속인 준변분부등식 (5)의 점성풀이들이라고 하고 $\Omega \times \Omega$에서 정의되는 보조함수 Φ를 다음과 같이 생각하자.

$$\Phi^q(x,\ y) = u_1(x) - u_2(y) - \frac{|x-y|^2}{\varepsilon} - k(|x|^2 + |y|^2),\ (x,\ y) \in \Omega_q \times \Omega_q$$

여기서 $\varepsilon,\ k$는 충분히 작은 정수들이다.

이제 $\sup\limits_{q} \sup\limits_{\Omega_q \times \Omega_q} \Phi^q(x,\ y) \le 0$ 임을 증명하자.

$\sup\limits_{q} \sup\limits_{\Omega_q \times \Omega_q} \Phi^q(x,\ y) = C > 0$ 이라고 하고 k를 $\dfrac{C}{2}$보다 작게 되도록 고정하자.

이때 상한의 정의로부터 $\Phi^1(x_k,\ y_k) > C - k > \dfrac{C}{2}$가 만족되는 점 $(x_k,\ y_k)$를 취할수 있다.

일반성을 잃지 않고 $(x_k,\ y_k) \in \Omega_1 \times \Omega_1$이라고 하자.

Φ^1이 $\Omega_1 \times \Omega_1$의 어떤 점 $(x_0,\ y_0)$에서 최대값을 가진다고 하자.

사실 이런 최대값은 존재하게 되는데 그것은 Φ의 구조로부터 $|x|,\ |y| \to \infty$ 일 때 $\Phi^1(x,\ y) \to -\infty$ 이기때문이다.

이제 $(x_0,\ y_0) \in \Gamma \times \Gamma$ 또는 $(x_0,\ y_0) \in \Gamma \times \Omega \setminus (A \cup C \cup \Gamma)$, $(x_0,\ y_0) \in \Omega \setminus (A \cup C \cup \Gamma) \times \Gamma$ 인 경우를 보자.

일반성을 잃지 않고 $x_0 \in \partial\Gamma$ 라고 하자.

u_1, u_2가 각각 점성아래풀이와 웃풀이이므로 $\partial\Gamma$에서 $u_1 \le h \le u_2$를 얻는다. 이때

$$\Phi^1(x_0,\ y_0) = u_1(x_0) - u_2(y_0) - \frac{|x_0 - y_0|^2}{\varepsilon} - k(|x_0|^2 + |y_0|^2) \le$$
$$\le u_1(x_0) - u_2(x_0) + u_2(x_0) - u_2(y_0) \le u_1(x_0) - u_2(y_0)$$

이 성립된다.

ε을 충분히 작게 취하면 $\Phi^1(x_0,\ y_0) \le 0$ 인데 이것은 $\sup\limits_{q} \sup\limits_{\Omega_q \times \Omega_q} \Phi^q(x,\ y) = C > 0$ 에 모순된다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] S. Dharmatti et al.; SIAM J. Control Optim., 44, 1259, 2005.

[2] M. Pollack et al.; SIAM J. Sci. Comput., 35, 1, 122, 2013.

[3] H. Guan et al.; Math. Econ., 54, 109, 2014.

주체105(2016)년 11월 5일 원고접수

The Hamilton-Jacobi Variational Inequality for a Type of Hybrid Optimal Control Problem

Ho Myong Song, Ho Kyong Sim

The hybrid optimal control problem with reach time to a target set is addressed and the uniqueness of the associated value function is proved in this paper. We characterize it as a unique solution of a quasi-variational inequality in a viscosity sense by using the dynamic programming principle for the hybrid optimal control problem with reach time to a target set.

Key words: hybrid optimal control problem, value function