김일성종합대학학보 주체109(2020)년
물리학 제66권 제1호

거친그물해석유한계차법에 의한 공액중성자 확산방정식의 풀이

허일문, 김명철, 서철

공액중성자묶음(중성자가치)은 주어진 위치와 에네르기를 가진 중성자가 로심전공간에서 원자로출력(분렬련쇄반응)에 주는 상대적기여몫을 표현하는데 이것은 섭동론적방법에 의한 반응도온도결수계산과 지연중성자유효몫, 즉발중성자수명을 비롯한 동력학적파라메터들의 계산에 리용된다.[1, 2] 한편 로심물리계산의 효률성을 높이는 문제와 관련하여 거친그물안에서 중성자묶음분포를 해석함수로 근사시키고 유효확산결수를 도입하여 정확도를 높이는 거친그물해석유한계차법(ACMFDM)이 현재 주목되고있다. 현재까지 1차원1군인 경우에 대한 계산모형이 소개되여 다차원2군문제에도 적용되였으나 일반적인 3차원다군문제에 대한 계산모형과 코드들은 공개되여있지 않다.[3, 4]

우리는 거친그물해석유한계차법을 적용하여 3차원다군공액중성자확산방정식의 수치풀이체계를 확립하였다.

1. 수치계산모형

1차원균질평판계에서 공액중성자묶음(중성자가치)에 관한 고유값방정식(파동방정식)

$$\frac{d^2\Phi^*(x)}{dx^2}+B^2\Phi^*(x)=0$$

의 해석풀이는 다음과 같다.

$$\Phi^*(x)=A\cos Bx+C\sin Bx$$

균질화된 n번째 매듭에서 매듭중심과 오른쪽 경계에서 공액중성자묶음값을 각각 Φ_n^*, Φ_s^*로 표시하면 공액중성자묶음분포는 다음과 같다.

$$\Phi_n^*(x)=\Phi_n^*\cos Bx+\frac{1}{\sin\dfrac{Ba_n}{2}}\left(\Phi_s^*-\Phi_n^*\cos\frac{Ba_n}{2}\right)\sin Bx$$

마찬가지로 린접한 $n+1$번째 매듭에서 공액중성자묶음분포는 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\Phi_{n+1}^*(x)=\Phi_{n+1}^*\cos Bx+\frac{1}{\sin\dfrac{Ba_{n+1}}{2}}\left(\Phi_{n+1}^*\cos\frac{Ba_{n+1}}{2}-\Phi_s^*\right)\sin Bx$$

공액중성자묶음과 가치흐름사이의 관계식 $J^*(x)=D\dfrac{d\Phi^*(x)}{dx}$를 리용하면 다음식이 얻어진다.

$$J^*\left(\frac{a_n}{2}\right)=\frac{2D_n}{a_n}(C_n^s\Phi_s^*-C_n^f\Phi_n^*),\quad J^*\left(-\frac{a_{n+1}}{2}\right)=\frac{2D_{n+1}}{a_{n+1}}(C_{n+1}^f\Phi_{n+1}^*-C_{n+1}^s\Phi_s^*)$$

여기서 $C_n^s=\dfrac{Ba_n/2}{\tan(Ba_n/2)}$, $C_n^f=\dfrac{Ba_n/2}{\sin(Ba_n/2)}$이다.

$J^*\left(\frac{a_n}{2}\right)=J^*\left(-\frac{a_{n+1}}{2}\right)$을 리용하여 Φ_s^*을 소거하여 정돈하면 다음과 같이 된다.

$$J^*\left(\frac{a_n}{2}\right)=D_{n+1}^L\Phi_{n+1}^*-D_n^R\Phi_n^*$$

여기서

$$D_n^L=2\left(a_n\frac{1}{D_n}+a_{n-1}\frac{C_n^s}{D_{n-1}C_{n-1}^s}\right)^{-1}C_n^f,\quad D_n^R=2\left(a_n\frac{1}{D_n}+a_{n+1}\frac{C_n^s}{D_{n+1}C_{n+1}^s}\right)^{-1}C_n^f$$

를 방향의존유효확산결수라고 한다.

1차원공간에서 다군공액중성자확산방정식은 다음과 같다.

$$-\frac{d}{dx}\left(D_g\frac{d\Phi_g^*}{dx}\right)+\Sigma_{R,\,g}\Phi_g^*=S_g$$

여기서 원천항은 $S_g=\sum_{g'=g+1}^{G}\Sigma_{g\to g'}\Phi_{g'}^*+\frac{1}{k}(\nu\Sigma_f)_g\sum_{g'=1}^{G}\chi_{g'}\Phi_{g'}^*$ 이다.

편리상 군첨수를 생략하고 요소구역에서 적분

$$-\int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}}\frac{d}{dx}[J^*(x)]dx+\int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}}\Sigma_R\Phi^*dx=\int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}}Sdx$$

를 진행하여 정돈하면 다음과 같이 된다.

$$-D_{n+1}^L\Phi_{n+1}^*+(D_n^R+D_n^L+\Sigma_{Rn}\Delta x_n)\Phi_n^*-D_{n-1}^R\Phi_{n-1}^*=S_n\Delta x_n$$

이것을 3차원공간에로 확장하면 다음의 식을 얻는다.

$$-\alpha_{i-1jk}^R\Phi_{i-1jk}^*-\beta_{ij-1k}^R\Phi_{ij-1k}^*-\gamma_{ijk-1}^R\Phi_{ijk-1}^*+\delta_{ijk}\Phi_{ijk}^*-\alpha_{i+1jk}^L\Phi_{i+1jk}^*-\beta_{ij+1k}^L\Phi_{ij+1k}^*-\gamma_{ijk+1}^L\Phi_{ijk+1}^*=$$
$$=S_{ijk}\Delta x_i\Delta y_j\Delta z_k$$

다시 쓰면

$$\Phi_{ijk}^*=\frac{1}{\delta_{ijk}}(\alpha_{i-1jk}^R\Phi_{i-1jk}^*+\beta_{ij-1k}^R\Phi_{ij-1k}^*+\gamma_{ijk-1}^R\Phi_{ijk-1}^*+\alpha_{i+1jk}^L\Phi_{i+1jk}^*+$$
$$+\beta_{ij+1k}^L\Phi_{ij+1k}^*+\gamma_{ijk+1}^L\Phi_{ijk+1}^*+S_{ijk}\Delta x_i\Delta y_j\Delta z_k)$$

로 된다.

결수들은 다음과 같다.

$$\alpha_{ijk}^L=2\left(\Delta x_i\frac{1}{D_{ijk}}+\Delta x_{i-1}\frac{C_{ijk}^s}{D_{i-1jk}C_{i-1jk}^s}\right)^{-1}C_{ijk}^f\Delta y_j\Delta z_k,$$

$$\alpha_{ijk}^R=2\left(\Delta x_i\frac{1}{D_{ijk}}+\Delta x_{i+1}\frac{C_{ijk}^s}{D_{i+1jk}C_{i+1jk}^s}\right)^{-1}C_{ijk}^f\Delta y_j\Delta z_k,$$

$$\beta_{ijk}^L=2\left(\Delta y_j\frac{1}{D_{ijk}}+\Delta y_{j-1}\frac{C_{ijk}^s}{D_{ij-1k}C_{ij-1k}^s}\right)^{-1}C_{ijk}^f\Delta x_i\Delta z_k,$$

$$\beta_{ijk}^{R}=2\left(\Delta y_j\frac{1}{D_{ijk}}+\Delta y_{j+1}\frac{C_{ijk}^{s}}{D_{i\,j+1k}C_{ij+1k}^{s}}\right)^{-1}C_{ijk}^{f}\Delta x_i\Delta z_k\,,$$

$$\gamma_{ijk}^{L}=2\left(\Delta z_k\frac{1}{D_{ijk}}+\Delta z_{k-1}\frac{C_{ijk}^{s}}{D_{i\,jk-1}C_{ijk-1}^{s}}\right)^{-1}C_{ijk}^{f}\Delta x_i\Delta y_j\,,$$

$$\gamma_{ijk}^{R}=2\left(\Delta z_k\frac{1}{D_{ijk}}+\Delta z_{k+1}\frac{C_{ijk}^{s}}{D_{i\,jk+1}C_{ijk+1}^{s}}\right)^{-1}C_{ijk}^{f}\Delta x_i\Delta y_j\,,$$

$$\delta_{ijk}=\alpha_{ijk}^{L}+\alpha_{ijk}^{R}+\beta_{ijk}^{L}+\beta_{ijk}^{R}+\gamma_{ijk}^{L}+\gamma_{ijk}^{R}+\Sigma_{R,\,ijk}\Delta x_i\Delta y_j\Delta z_k$$

경계조건은 다음과 같다.

— 대칭경계

$$\Phi_{0jk}^{*}=\Phi_{1jk}^{*},\quad \Phi_{i0k}^{*}=\Phi_{i1k}^{*},\ \Phi_{ij0}^{*}=\Phi_{ij1}^{*}\ (\text{경계면대칭일 때})$$

$$\Phi_{0jk}^{*}=\Phi_{2jk}^{*},\quad \Phi_{i0k}^{*}=\Phi_{i2k}^{*},\ \Phi_{ij0}^{*}=\Phi_{ij2}^{*}\ (\text{중간면대칭일 때})$$

— 진공경계

외삽경계에서 공액중성자묶음이 령이므로 1차원진공경계에서 정미공액중성자흐름은

$$J^{*}\left(\frac{a_N}{2}\right)=-\left\{BD_N\sin\frac{Ba_N}{2}-\frac{BD_N}{\tan\frac{Ba_N}{2}}\left[\frac{1}{\left(1+\tan\frac{Ba_N}{2}\Big/2.13BD_N\right)\cos\frac{Ba_N}{2}}-\cos\frac{Ba_N}{2}\right]\right\}\Phi_N^{*}$$

이며 경계요소에서의 계차방정식은 다음과 같다.

$$(\delta_N+D_N^{L}+\Sigma_{RN}\Delta x_N)\Phi_N^{*}-D_{N-1}^{R}\Phi_{N-1}^{*}=S_N\Delta x_n$$

여기서

$$\delta_N=BD_N\sin\frac{Ba_N}{2}-\frac{BD_N}{\tan\frac{Ba_N}{2}}\left[\frac{1}{\left(1+\tan\frac{Ba_N}{2}\Big/2.13BD_N\right)\cos\frac{Ba_N}{2}}-\cos\frac{Ba_N}{2}\right]$$

이다. 이것을 3차원으로 확장하면 경계요소 $i=I,\ j=J,\ k=K$에 해당한 식은 다음과 같다.

$$\Phi_{Ijk}=\frac{\alpha_{I-1jk}^{R}\Phi_{I-1jk}^{*}+\beta_{Ij-1k}^{R}\Phi_{Ij-1k}^{*}+\gamma_{Ijk-1}^{R}\Phi_{Ijk-1}^{*}+\beta_{Ij+1k}^{L}\Phi_{Ij+1k}^{*}+\gamma_{Ijk+1}^{L}\Phi_{Ijk+1}^{*}+S_{Ijk}\Delta x_I\Delta y_j\Delta z_k}{\delta_I^{jk}+\alpha_{Ijk}^{L}+\beta_{Ijk}^{L}+\beta_{Ijk}^{R}+\gamma_{Ijk}^{L}+\gamma_{Ijk}^{R}+\Sigma_R\Delta x_I\Delta y_j\Delta z_k},$$

$$\Phi_{iJk}=\frac{\alpha_{i-1Jk}^{R}\Phi_{i-1Jk}^{*}+\beta_{iJ-1k}^{R}\Phi_{iJ-1k}^{*}+\gamma_{iJk-1}^{R}\Phi_{iJk-1}^{*}+\alpha_{i+1Jk}^{L}\Phi_{i+1Jk}^{*}+\gamma_{iJk+1}^{L}\Phi_{iJk+1}^{*}+S_{iJk}\Delta x_i\Delta y_J\Delta z_k}{\delta_J^{ki}+\alpha_{iJk}^{L}+\alpha_{iJk}^{R}+\beta_{iJk}^{L}+\gamma_{iJk}^{L}+\gamma_{iJk}^{R}+\Sigma_R\Delta x_i\Delta y_J\Delta z_k},$$

$$\Phi_{ijK}=\frac{\alpha_{i-1jK}^{R}\Phi_{i-1jK}^{*}+\beta_{ij-1K}^{R}\Phi_{ij-1K}^{*}+\gamma_{ijK-1}^{R}\Phi_{ijK-1}^{*}+\alpha_{i+1jK}^{L}\Phi_{i+1jK}^{*}+\beta_{ij+1K}^{L}\Phi_{ij+1K}^{*}+S_{iJk}\Delta x_i\Delta y_j\Delta z_K}{\delta_K^{ij}+\alpha_{ijK}^{L}+\alpha_{ijK}^{R}+\beta_{ijK}^{L}+\beta_{ijK}^{R}+\gamma_{ijK}^{L}+\Sigma_R\Delta x_i\Delta y_j\Delta z_K},$$

$$\Phi_{IJk}=\frac{\alpha_{I-1Jk}^{R}\Phi_{I-1Jk}^{*}+\beta_{IJ-1k}^{R}\Phi_{IJ-1k}^{*}+\gamma_{IJk-1}^{R}\Phi_{IJk-1}^{*}+\gamma_{IJk+1}^{L}\Phi_{IJk+1}^{*}+S_{IJk}\Delta x_I\Delta y_J\Delta z_k}{\delta_I^{Jk}+\delta_J^{kI}+\alpha_{IJk}^{L}+\beta_{IJk}^{L}+\gamma_{IJk}^{R}+\gamma_{iJk}^{L}+\Sigma_R\Delta x_I\Delta y_J\Delta z_k},$$

$$\Phi_{IjK}=\frac{\alpha^{R}_{I-1jK}\Phi^{*}_{I-1jK}+\beta^{R}_{Ij-1K}\Phi^{*}_{Ij-1K}+\gamma^{R}_{IjK-1}\Phi^{*}_{IjK-1}+\beta^{L}_{Ij+1K}\Phi^{*}_{Ij+1K}+S_{IjK}\Delta x_I\Delta y_j\Delta z_K}{\delta^{jK}_{I}+\delta^{Ij}_{K}+\alpha^{L}_{IjK}+\beta^{L}_{IjK}+\beta^{R}_{IjK}+\gamma^{L}_{IjK}+\Sigma_R\Delta x_I\Delta y_j\Delta z_K},$$

$$\Phi_{IJK}=\frac{\alpha^{R}_{I-1JK}\Phi^{*}_{I-1JK}+\beta^{R}_{IJ-1K}\Phi^{*}_{IJ-1K}+\gamma^{R}_{IJK-1}\Phi^{*}_{IJK-1}+S_{IJK}\Delta x_I\Delta y_J\Delta z_K}{\delta^{JK}_{I}+\delta^{KI}_{J}+\delta^{IJ}_{K}+\alpha^{L}_{IJK}+\beta^{L}_{IJK}+\gamma^{L}_{IJK}+\Sigma_R\Delta x_I\Delta y_J\Delta z_K}$$

여기서

$$\delta^{jk}_{I}=\left\{B_xD_{Ijk}\sin\frac{B_x\Delta x_I}{2}-\frac{B_xD_{Ijk}}{\tan\frac{B_x\Delta x_I}{2}}\left[\frac{1}{\left(1+\tan\frac{B_x\Delta x_I}{2}\Big/2.13B_xD_{Ijk}\right)\cos\frac{B_x\Delta x_I}{2}}-\cos\frac{B_x\Delta x_I}{2}\right]\right\}\Delta y_j\Delta z_k$$

이며 다른 δ들도 이와 류사한 식으로 표시된다. 기하학적인자는 다음과 같다.

$$B_z^2=\left(\frac{\pi}{H}\right)^2,\ B_x^2=B_y^2=\frac{B_r^2}{2},\ B_r^2=\left(\frac{2.405}{R}\right)^2$$

여기서 H는 로심의 높이, R는 등가반경이다.

2. 기준문제에 대한 계산결과

그림과 표에 IAEA에서 3차원PWR기준문제의 기하학적구조와 유효증식결수계산결과를 각각 보여주었다.

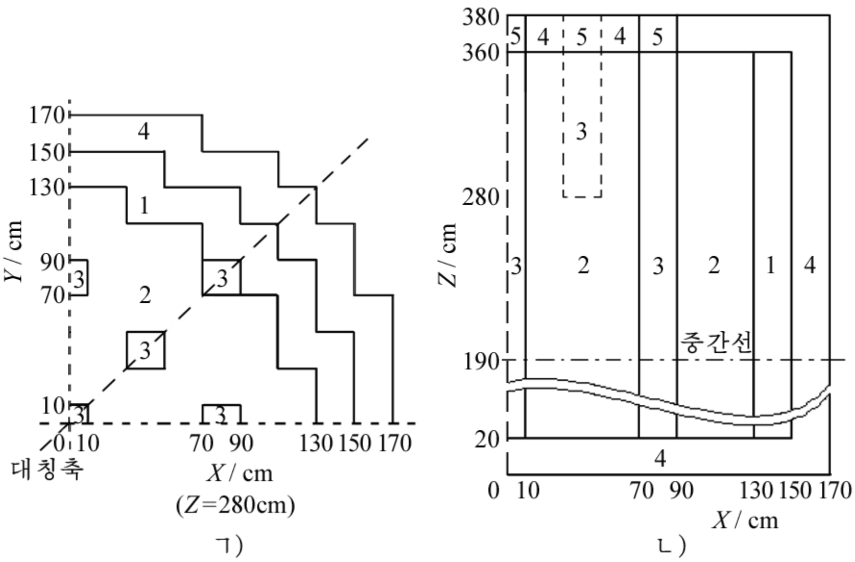

그림. IAEA에서 3차원PWR기준문제의 기하학적구조
ㄱ) 가로자름면, ㄴ) 세로자름면

표. 기준문제에 대한 유효증식결수계산결과(기준값 $k_{eff}=1.029\ 03$)

방법	계산값	상대편차/%	계산시간/s
FDM(2cm×2cm×5cm)	1.028 96	0.007	14.2
NGFM(20cm×20cm×20cm)	1.029 08	0.005	0.75
ACMFDM(20cm×20cm×20cm)	1.027 50	0.15	0.10

표를 통하여 거친그물해석유한계차법이 전형적인 세밀그물방법인 유한계차법이나 같은 크기의 거친그물을 사용한 매듭그린함수법보다 정확도는 좀 떨어지지만 계산속도가 훨씬 빠르다는것을 알수 있다. 따라서 수많은 방안들을 비교평가하여 우수한 방안을 선택하는 로심연료관리최량화계산에 적용할수 있다. 계산에 리용된 콤퓨터의 동작주파수는 3.4GHz, 주기억은 2GB이다.

맺 는 말

거친그물해석유한계차법에 기초하여 3차원다군공액중성자확산방정식의 수치풀이모형을 작성하고 기준문제의 계산결과에 대한 비교를 통하여 확립된 계산체계의 정확성과 효률성을 확증하였다.

참 고 문 헌

[1] Ali Jahanbin et al.; Annals of Nuclear Energy, 41, 110, 2012.
[2] Manuele Aufiero et al.; Annals of Nuclear Energy, 65, 78, 2014.
[3] Y. A. Chao; Proc. Math and Comp., Reactor Phys. Environ Anal. Nucl. Appl. (M & C 99) Madrid, Spain, 1999.
[4] Y. A. Chao; Proceedings of the PHYSOR 2000, Ⅸ, D, 1～17, May, 10, 2000.

주체108(2019)년 9월 5일 원고접수

Solution of Conjugation Neutron's Diffusion Equation Using Analytic Coarse Mesh Finite Difference Method(ACMFDM)

Ho Il Mun, *Kim Myong Chol* and *So Chol*

We established the numerical solving model of 3-dimensional multigroup conjugation neutron's diffusion equation based on ACMFDM and verified the correctness and effectiveness of our calculation system by means of comparision with the result of benchmark problem.

Keywords: conjugation neutron flux, benchmark problem, ACMFDM