김일성종합대학학보 주체107(2018)년
수학 제64권 제2호

무한시간프락탈정-역방향확률미분방정식의 풀이의 유일존재성에 대한 연구

김송련, 신명국

론문에서는 금융수학을 비롯하여 확률조종리론에서 의의를 가지는 프락탈정-역방향확률미분방정식의 풀이의 유일존재성을 밝혔다.

선행연구[2]에서는 유한시간프락탈정-역방향확률미분방정식의 풀이의 유일존재성을 연구하였으며 선행연구[1]에서는 무한시간인 경우에 대하여 프락탈역방향확률미분방정식의 풀이의 유일존재성에 대하여 연구하였다.

선행연구[3]에서는 비약이 있는 정-역방향확률미분방정식의 풀이의 유일존재성에 대하여 연구하였다.

우리는 정방향과 역방향이 결합된 무한시간프락탈정-역방향확률미분방정식의 풀이의 유일존재성을 증명하였다.

가우스과정 $B^{(H)}(t)=(B_1^{(H_1)}(t),\ \cdots,\ B_m^{(H_m)}(t))$는 확률공간 $(\Omega,\ \mathscr{F}^{(H)},\ \boldsymbol{P}^{(H)})$우에서 정의되고 허스트지수가 $H=(H_1,\ \cdots,\ H_m)\in(1/2,\ 1)^m$인 m차원프락탈브라운운동이라고 하자. 여기서 $\mathscr{F}^{(H)}=\bigvee_{t\geq 0}\mathscr{F}_t^{(H)}$이고 $\mathscr{F}_t^{(H)}$는 $B_t^{(H)}$에 의하여 생성된 σ-모임벌흐름이다.

다음과 같은 프락탈정-역방향확률미분방정식을 론의하자.

$$\begin{aligned} &dX(t)=b(t,\ X_t,\ Y_t,\ Z_t)dt+\sigma(t,\ X_t,\ Y_t,\ Z_t)\ dB_t^{(H)},\quad X(0)=x_0 \\ &-dY(t)=f(t,\ X_t,\ Y_t,\ Z_t)dt-Z(t)\ dB_t^{(H)},\quad 0\leq t<\infty \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 $x_0\in\mathbf{R}^n$이며 $b,\ \sigma,\ f$들은 모두 $\Omega\times[0,\ +\infty)\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^{n\times d}$에서 정의되고 각각 $\mathbf{R}^n,\ \mathbf{R}^{n\times d},\ \mathbf{R}^n$에서 값을 취하는 함수로서 $(t,\ x,\ y,\ z)$에 관하여 C^1급함수들이다.

선행연구들에서 언급된 몇가지 정의들을 다시 보기로 하자.

$$\langle f,\ g\rangle:=\mathrm{E}\int_D\langle f(t),\ g(t)\rangle dt,\quad \langle f,\ g\rangle_k:=\mathrm{E}\int_D e^{-kt}\langle f(t),\ g(t)\rangle dt$$

$$\langle f,\ g\rangle_{L_\Phi^{1,2}(m)}:=\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^m\int_D\int_D f_i(s)\cdot g_i(t)\Phi_{H_i}(s,\ t)dsdt+\sum_{i,\ j=1}^m\left(\int_D D_{j,\ s}^\Phi f_i(s)ds\right)\left(\int_D D_{i,\ t}^\Phi g_j(t)dt\right)\right]$$

$$\langle f,\ g\rangle_{L_{\Phi,\ k}^{1,2}(m)}:=$$

$$:=\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^m\int_D\int_D(e^{-\left(\frac{k}{2}\right)s}f_i(s))\cdot(e^{-\left(\frac{k}{2}\right)t}g_i(t))\Phi_{H_i}(s,\ t)dsdt\right]+\sum_{i,\ j=1}^m\left(\int_D e^{-\left(\frac{k}{2}\right)s}D_{j,\ s}^\Phi f_i(s)ds\right)\left(\int_D e^{-\left(\frac{k}{2}\right)t}D_{i,\ t}^\Phi g_j(t)dt\right)$$

여기서 $D_{j,\ t}^\Phi Y$는 ω_k에 관한 말랴빈 Φ도함수

$$D_{k,\ s}^\Phi Y:=\int_D\Phi_{H_k}(s,\ t)D_{k,\ t}Ydt=\int_D\Phi_{H_k}(s,\ t)\frac{\partial Y}{\partial\omega_k}(t,\ \omega)dt$$

이며

$$\|f\|^2:=\langle f,\ f\rangle<\infty,\ \ \|f\|_k^2:=\langle f,\ f\rangle_k<\infty,\ \ \|f\|_{L_\Phi^{1,2}}^2:=\langle f,\ f\rangle_{L_\Phi^{1,2}}<\infty,\ \ \|f\|_{L_{\Phi,k}^{1,2}}^2:=\langle f,\ f\rangle_{L_{\Phi,k}^{1,2}}<\infty$$

인 함수 f 전부의 모임을 각각 $L^2(m)$, $L_k^2(m)$, $L_\Phi^{1,2}(m)$, $L_{\Phi,k}^{1,2}(m)$ 으로 표시한다.

다음 기호표식의 복잡성을 피하기 위해 다음의 기호들을 약속하자.

$$V=(X,\ Y,\ Z),\ \ A(t,\ V)=(-f,\ b,\ \sigma)^{\mathrm{T}}(t,\ V)$$

$$\langle A(t,\ V),\ V\rangle:=\langle -f,\ X\rangle+\langle b,\ Y\rangle+\langle\sigma,\ Z\rangle_{L_\Phi^{1,2}}$$

$$\langle V,\ V\rangle:=|V|^2=\langle X,\ X\rangle+\langle Y,\ Y\rangle+\langle Z,\ Z\rangle_{L_\Phi^{1,2}}$$

또한 $\sigma_i,\ \theta_i\in L_\Phi^{1,2}(m),\ i=1,2,\cdots,n$ 인 $\sigma=(\sigma_1,\cdots,\sigma_m)^{\mathrm{T}}$, $\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_m)^{\mathrm{T}}$ 에 대하여 $\langle\sigma,\ \theta\rangle_{L_\Phi^{1,2}(n\times m)}:=\sum_{i=1}^n\langle\sigma_i,\ \theta_i\rangle_{L_\Phi^{1,2}}$ 와 같이 정의한다.

가정 1 $A(t,\ V)$ 는 V 에 관하여 약단조성조건을 만족시킨다. 즉

$$\exists\mu>0:\forall\ V,\ V'\in L^2\times L^2\times L_\Phi^{1,2},\ \ \langle A-A',\ V-V'\rangle\le-\mu|V-V'|^2.$$

가정 2 $A(t,\ V)$ ($\forall V\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^{n\times d}$)를 $[0,\ +\infty)$ 에서 정의된 $\mathscr{F}_t^{(H)}$ −적합과정이라고 하면 $A(0,\ V)\in L^2(0,\ +\infty:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^{n\times d})$ 이다.

가정 3 $A(t,\ V)$ 는 V 에 관하여 리프쉬츠조건을 만족시킨다. 즉

$$\exists l>0:\forall V,\ V'\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^{n\times d},\ t\le T,\ \ |A(t,\ V)-A'(t,\ V')|\le l|V-V'|.$$

론문에서는 이 가정들이 성립한다는 조건밑에서 프락탈정−역방향확률미분방정식 (1)의 풀이 $(X_t,\ Y_t,\ Z_t)\in L_k^2\times L_k^2\times L_{\Phi,k}^{1,2}$ 의 유일존재성을 밝히기로 한다.

먼저 $\theta\in[0,\ 1]$ 을 파라메터로 하는 확률미분방정식

$$\begin{aligned}&dX^\theta(t)=[\theta b(t,\ V^\theta(t))-\mu(1-\theta)Y^\theta(t)+\varphi(t)]dt+[\theta\sigma(t,\ V^\theta(t))-\mu(1-\theta)Z^\theta(t)+\Psi(t)]dB_t^{(H)},\\&-dY^\theta(t)=[\theta f(t,\ V^\theta(t))+\mu(1-\theta)X^\theta(t)+\gamma(t)]dt-Z^\theta(t)dB_t^{(H)},\ \ X^\theta(0)=x_0,\ \ 0\le t<+\infty\end{aligned}\tag{2}$$

의 풀이 $(X^\theta(\cdot),\ Y^\theta(\cdot),\ Z^\theta(\cdot))\in L_k^2\times L_k^2\times L_{\Phi,k}^{1,2}$ 에 대하여 론의하자. 여기서 $\varphi,\Psi,\ \gamma$ 는 $[0,\ +\infty)$ 에서 정의되고 각각 $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}^{n\times d}$, $\mathbf{R}^n$ 에서 값을 취하는 함수들로서 $L^2([0,\ +\infty))$ 에 속한다.

$\theta=1,\ \varphi=\Psi=\gamma=0$ 일 때 방정식 (2)는 식 (1)과 동등해진다.

먼저 방정식 (2)에서 $\theta=0$ 인 경우 즉 다음의 상결수선형프락탈정−역방향확률미분방정식을 론의하자.

$$\begin{aligned}&dX^0(t)=[-\mu Y^0(t)+\varphi(t)]\,dt+[-\mu Z^0(t)+\Psi(t)]\,dB_t^{(H)},\ \ X^0(0)=x_0\\&-dY^0(t)=[-\mu X^0(t)+\gamma(t)]dt-Z^0(t)\,dB_t^{(H)},\ \ 0\le t<+\infty\end{aligned}\tag{3}$$

보조정리 $\varphi(t),\ \Psi(t),\ \gamma(t)$ 가 $F_t^{(H)}$ −적합과정들이고 $L_{\Phi,k}^{1,2}(m)$ 에 속한다고 하자.

이때 방정식 (3)은 유일풀이 $(X^0,\ Y^0,\ Z^0)\in L_k^2\times L_k^2\times L_{\Phi,k}^{1,2}$ 를 가진다.

정리 1 가정 1−3이 성립되면 $\forall x_0\in\mathbf{R}^n$, $\varphi,\gamma,\ \Psi\in L_{\Phi,k}^{1,2}$, $\exists\delta_0>0:\forall\delta\in[0,\ \delta_0]$ 에 대하여 식 (3)은 $\theta=\delta\ (\delta\ne0)$ 일 때 유일풀이 $(X^\delta(\cdot),\ Y^\delta(\cdot),\ Z^\delta(\cdot))\in L_k^2\times L_k^2\times L_{\Phi,k}^{1,2}$ 를 가진다.

증명 가정에 의하여 임의의 쌍 $\upsilon=(x,\ y,\ z)\in L_k^2\times L_k^2\times L_{\Phi,\,k}^{1,\,2}$ 에 대하여 다음의 정—역방향확률미분방정식을 론의하자.

$$\begin{aligned} dX(t) &= [-\mu Y(t)+\delta(b(t,\ \upsilon(t))+\mu y(t))+\varphi(t)]dt+ \\ &\quad +[-\mu Z(t)+\delta(\sigma(t,\ \upsilon(t))+\mu z(t))+\Psi(t)]dB_t^{(H)} \\ -dY(t) &= [\mu X(t)+\delta(f(t,\ \upsilon(t))-\mu x(t))+\gamma(t)]dt-Z(t)dB_t^{(H)},\ X(0)=x_0 \end{aligned} \tag{4}$$

$(x,\ y,\ z)\in L_k^2\times L_k^2\times L_{\Phi,\,k}^{1,\,2}$ 라고 하면 보조정리로부터 방정식 (4)는 유일풀이

$$(X^0(\cdot),\ Y^0(\cdot),\ Z^0(\cdot))\in L_k^2\times L_k^2\times L_{\Phi,\,k}^{1,\,2}$$

를 가진다.

방정식 (4)에 의하여 정의되는 연산자 $I_\delta:\upsilon\in L_k^2\times L_k^2\times L_{\Phi,\,k}^{1,\,2}\mapsto V\in L_k^2\times L_k^2\times L_{\Phi,\,k}^{1,\,2}$ 를 생각하자.

$$\upsilon'=(x',\ y',\ z'),\quad V'=(X',\ Y',\ Z')$$

$$\hat{\upsilon}=(x-x',\ y-y',\ z-z')=(\hat{x},\ \hat{y},\ \hat{z}),\ \hat{V}=(X-X',\ Y-Y',\ Z-Z')=(\hat{X},\hat{Y},\ \hat{Z})$$

$[0,\ \infty]$ 에서 $e^{-kt}\langle\hat{X},\ \hat{Y}\rangle$ 에 변환공식을 적용하고 량변에 수학적기대값을 취하면 다음식을 얻을수 있다.

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{E}[\langle\hat{X}(0),\ \hat{Y}(0)\rangle]+\mathrm{E}\int_0^\infty -ke^{-ks}\langle\hat{X}(s),\ \hat{Y}(s)\rangle ds+\mathrm{E}\int_0^\infty e^{-ks}\hat{X}(s)d\hat{Y}(s)+\mathrm{E}\int_0^\infty e^{-ks}\hat{Y}(s)d\hat{X}(s)- \\ &\quad -\mu\langle\hat{Z},\ \hat{Z}\rangle_{L_{\Phi,\,k}^{1,\,2}}+\delta\langle\hat{\sigma},\ \hat{Z}\rangle_{L_{\Phi,\,k}^{1,\,2}}+\delta\mu\langle\hat{Z},\ \hat{z}\rangle_{L_{\Phi,\,k}^{1,\,2}}= \\ &= \mathrm{E}\int_0^\infty -ke^{-ks}\langle\hat{X}(s),\ \hat{Y}(s)\rangle ds-\mu\mathrm{E}\int_0^\infty e^{-ks}[\langle\hat{X}(s),\ \hat{X}(s)\rangle+\langle\hat{Y}(s),\ \hat{Y}(s)\rangle]ds+\langle\hat{Z},\ \hat{Z}\rangle_{L_{\Phi,\,k}^{1,\,2}}+ \\ &\quad +\delta\,\mathrm{E}\int_0^\infty e^{-ks}[\langle -\hat{f},\ \hat{X}(s)\rangle+\langle\hat{b},\ \hat{Y}(s)\rangle]ds+\langle\hat{\sigma},\ \hat{Z}\rangle_{L_{\Phi,\,k}^{1,\,2}}+ \\ &\quad +\delta\mu\mathrm{E}\int_0^\infty e^{-ks}[\langle\hat{X}(s),\ \hat{x}(s)\rangle+\langle\hat{Y}(s),\ \hat{y}(s)\rangle]ds+\langle\hat{Z},\ \hat{z}\rangle_{L_{\Phi,\,k}^{1,\,2}}\le \\ &\le \mathrm{E}\int_0^\infty -ke^{-ks}\langle\hat{X}(s),\ \hat{x}(s)\rangle ds-\mu\|\hat{V}\|_k^2+\delta l\left(\frac{\|\hat{X}\|_k^2+\|\hat{\upsilon}\|_k^2}{2}+\frac{\|\hat{Y}\|_k^2+\|\hat{\upsilon}\|_k^2}{2}+\frac{\|\hat{Z}\|_{L_{\Phi,\,k}^{1,\,2}}+\|\hat{\upsilon}\|_k^2}{2}\right)+ \\ &\quad +3\delta\mu(\|\hat{V}\|_k^2+\|\hat{\upsilon}\|_k^2)/2= \\ &= \mathrm{E}\int_0^\infty -ke^{-ks}\langle\hat{X}(s),\ \hat{Y}(s)\rangle ds-\mu\|\hat{V}\|_k^2+\frac{3}{2}\delta l(\|\hat{V}\|_k^2+\|\hat{\upsilon}\|_k^2)+\frac{3}{2}\delta\mu(\|\hat{V}\|_k^2+\|\hat{\upsilon}\|_k^2)= \\ &= \mathrm{E}\int_0^\infty -ke^{-ks}\langle\hat{X}(s),\ \hat{Y}(s)\rangle ds-\mu\|\hat{V}\|_k^2+\frac{3}{2}\delta(l+\mu)(\|\hat{V}\|_k^2+\|\hat{\upsilon}\|_k^2) \end{aligned}$$

이제 $\int_0^\infty -ke^{-ks}\langle\hat{X}(s),\ \hat{Y}(s)\rangle ds<0$ 이면 $\mathrm{E}[\langle\hat{X}(0),\ \hat{Y}(0)\rangle]=0$ 이므로

$$\mu\|\hat{V}\|_k^2\le 3\delta(l+\mu)(\|\hat{V}\|_k^2+\|\hat{\upsilon}\|_k^2)/2$$

이 성립되며 따라서

$$\|\hat{V}\|_k^2 \le \frac{3}{2}\frac{\delta(l+\mu)}{\mu}(\|\hat{V}\|_k^2 + \|\hat{\upsilon}\|_k^2)$$

이 성립된다.

$\delta_0 = \mu/[6(l+\mu)]$ 라고 놓으면 $0<\delta_0<1$ 이며 $\forall\delta\in(0,\ \delta_0)$ 에 대하여

$$\|\hat{V}\|_k^2 \le \frac{3}{2}\frac{\delta(l+\mu)}{\mu}(\|\hat{V}\|_k^2 + \|\hat{\upsilon}\|_k^2) \le \frac{3}{2}\frac{\delta_0(l+\mu)}{\mu}(\|\hat{V}\|_k^2 + \|\hat{\upsilon}\|_k^2) = \frac{1}{4}(\|\hat{V}\|_k^2 + \|\hat{\upsilon}\|_k^2)$$

이 성립되며 따라서 $(1-1/4)\|\hat{V}\|_k^2 \le \|\hat{\upsilon}\|_k^2/4$ 이다.

그러므로 I_δ 는 축소연산자이며 유일한 부동점을 가진다.

만일 $\int_0^\infty -ke^{-ks}\langle \hat{X}(s),\ \hat{Y}(s)\rangle ds > 0$ 이면

$$\int_0^\infty -ke^{-ks} < \hat{X}(s),\quad \hat{Y}(s) > ds > \frac{k}{2}[\|\hat{X}\|_k^2 + \|\hat{Y}\|_k^2]$$

이므로

$$\mu\|\hat{V}\|_k^2 \le \frac{3}{2}\delta(l+\mu)(\|\hat{V}\|_k^2 + \|\hat{\upsilon}\|_k^2) + \frac{k}{2}[\|\hat{X}\|_k^2 + \|\hat{Y}\|_k^2],\ \left(\mu - \frac{k}{2}\right)\|\hat{V}\|_k^2 \le \frac{3}{2}\delta(l+\mu)(\|\hat{V}\|_k^2 + \|\hat{\upsilon}\|_k^2)$$

으로 되며 우와 마찬가지로 I_δ 는 축소연산자로서 유일한 부동점을 가진다.

따라서 방정식 (4)는

$$dx(t) = [-\mu y(t) + \delta(b(t,\ \upsilon(t)) + \mu y(t)) + \phi(t)]dt + [-\mu z(t) + \delta(\sigma(t,\ \upsilon(t)) + \mu z(t)) + \psi(t)]dB_t^{(H)}$$
$$-dy(t) = [\mu x(t) + \delta(f(t,\ \upsilon(t)) - \mu x(t)) + \gamma(t)]dt - z(t)dB_t^{(H)},\quad x(0) = x_0,\quad 0 < t \le \infty$$

와 같이 쓸수 있으며 이 식을 정돈하면

$$dx(t) = [\delta b(t,\ \upsilon(t)) - \mu(1-\delta)y(t) + \phi(t)]dt + [\delta\sigma(t,\ \upsilon(t)) - \mu(1-\delta)z(t) + \psi(t)]dB_t^{(H)},\ \ x(0) = x_0$$
$$-dy(t) = [\delta f(t,\ \upsilon(t)) - \mu(1-\delta)x(t) + \gamma(t)]dt - z(t)dB_t^{(H)},\ \ 0 < t \le \infty$$

이므로 방정식 (3)은 유일풀이 $(X^\delta,\ Y^\delta,\ Z^\delta)$ 를 가진다.(증명끝)

따름 가정 1－3이 성립되고 $\exists\theta_0\in[0,\ 1),\ \forall x_0\in\mathbf{R}^n,\ \varphi,\ \gamma,\ \Psi\in L_{\Phi,\,k}^{1,\,2}$ 에 대하여 식 (3)이 유일풀이 $(X^{\theta_0}(\cdot),\ Y^{\theta_0}(\cdot),\ Z^{\theta_0}(\cdot))\in L_k^2\times L_k^2\times L_{\Phi,\,k}^{1,\,2}$ 를 가진다고 하면 $\exists\delta_0>0:\forall\delta\in[0,\ \delta_0]$ 에 대하여 방정식 (3)은 유일풀이 $(X^{\theta_0+\delta}(\cdot),\ Y^{\theta_0+\delta}(\cdot),\ Z^{\theta_0+\delta}(\cdot))\in L_k^2\times L_k^2\times L_{\Phi,\,k}^{1,\,2}$ 를 가진다.

정리 2 가정 1－3이 성립된다고 하면 $\forall x_0\in\mathbf{R}^n$ 에 대하여 방정식 (1), (2)는 유일풀이 $(X_t,\ Y_t,\ Z_t)\in L_k^2\times L_k^2\times L_{\Phi,\,k}^{1,\,2}$ 를 가진다.(증명생략)

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보(자연과학), 63, 9, 3, 주체106(2017).

[2] 신명국 등; 수학, 4, 25, 주체103(2014).

[3] B. Gherbal et al.; arXiv;1301.1948v4[math.OC] 27, Aug, 2013.

주체106(2017)년 12월 5일 원고접수

On the Existence and Uniqueness of Solution of the Infinite Horizon Fractal Forward-Backward Stochastic Differential Equations

Kim Song Ryon, Sin Myong Guk

We proved the existence and uniqueness of the solution of fractal forward-backward stochastic differential equations of a form

$$dX(t) = b(t,\ X_t,\ Y_t,\ Z_t)dt + \sigma(t,\ X_t,\ Y_t,\ Z_t)\ dB_t^{(H)},\quad X(0) = x_0,$$

$$-dY(t) = f(t,\ X_t,\ Y_t,\ Z_t)dt - Z(t)\ dB_t^{(H)},\quad 0 \le t < \infty,$$

where $B^{(H)}(t)$ is $m-$dimensional fractal Brownian motion with Hurst parameter

$$H = (H_1, \cdots,\ H_m) \in (1/2,\ 1)^m .$$

Key words: fractal Brownian motion, forward-backward stochastic differential equation