

면내 및 면외힘을 받는 섬유강화점탄성다층복합판의 변위해석에 대한 한가지 연구

백명진, 송성관

위대한 령도자 김정일동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《현시대는 과학과 기술의 시대이며 과학과 기술이 류레없이 빠른 속도로 발전하는것은 현대과학기술발전의 중요한 특징입니다.》(《김정일선집》 증보판 제15권 485페이지)

선행연구[1]에서는 섬유강화탄성복합판에 면내 및 면외힘이 작용할 때의 변위해석을, 선행연구[2]에서는 겹재료판에 면내 및 면외힘이 작용할 때의 변위해석을 취급하였다.

선행연구[3]에서는 등방성섬유강화점탄성다층복합판의 변위해석을 하였지만 비등방성 변위해석은 취급되지 못하였다.

론문에서는 탄성지반우에 있는 점탄성다층복합판에 면내 및 면외힘이 작용할 때 변위에 대하여 고찰하였다.

1. 기본관계식

탄성지반우에 있는 섬유강화다층복합판에 면내힘과 면외힘이 동시에 작용할 때 기본관계식을 취급하자.

판재료는 유전형점탄성재료이다.

다층판의 중간면에 자리표축 x, y 를, 그것에 수직되게 아래로 z 축을 택하자.

속힘으로 표시된 평형방정식에 상태방정식과 변형과 변위사이의 관계식을 대입하면 다음과 같은 행렬형태로 표시된 변위성분에 대한 방정식

$$\begin{bmatrix} \tilde{L}_{11} & \tilde{L}_{12} & \tilde{L}_{16} \\ \tilde{L}_{12} & \tilde{L}_{22} & \tilde{L}_{26} \\ \tilde{L}_{16} & \tilde{L}_{26} & \tilde{L}_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q - cw + \bar{N}_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\bar{N}_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \bar{N}_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

이 얻어진다. 이 식에서 u_0, v_0, w 는 각각 중간면우에 있는 점의 x, y, z 방향변위성분들이며 \tilde{L}_{ij} ($i, j=1, 2, 6$) 들은 다음과 같이 표시되는 시간에 관한 적분미분연산자들이다.

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{11} &= \tilde{A}_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\tilde{A}_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \tilde{A}_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \tilde{L}_{12} &= \tilde{A}_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (\tilde{A}_{12} + \tilde{A}_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \tilde{A}_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \tilde{L}_{22} &= \tilde{A}_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\tilde{A}_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \tilde{A}_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{L}_{16} &= - \left[\tilde{B}_{11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3\tilde{B}_{16} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + (\tilde{B}_{12} + 2\tilde{B}_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + \tilde{B}_{26} \frac{\partial^3}{\partial y^3} \right] \\ \tilde{L}_{26} &= - \left[\tilde{B}_{16} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (\tilde{B}_{12} + 2\tilde{B}_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + 3\tilde{B}_{26} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + \tilde{B}_{22} \frac{\partial^3}{\partial y^3} \right] \\ \tilde{L}_{66} &= \tilde{D}_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 4\tilde{D}_{16} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 2(\tilde{D}_{12} + 2\tilde{D}_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 4\tilde{D}_{26} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + \tilde{D}_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4}\end{aligned}\quad (2)$$

여기서

$$\begin{aligned}(\tilde{A}_{ij}, \tilde{B}_{ij}, \tilde{D}_{ij}) &= \sum_{k=1}^m (\tilde{Q}_{ij})_k \left[\left(h_m - h_{m-1}, \frac{1}{2}(h_m^2 - h_{m-1}^2), \frac{1}{3}(h_m^3 - h_{m-1}^3) \right) \right] \quad (i, j=1, 2, 6) \\ (\tilde{Q}_{ij})_k f &= (\bar{Q}_{ij})_k \left[f - \int_0^t (\Gamma_{ij})^k (t-\tau) f(\tau) d\tau \right]\end{aligned}$$

이다. 옷식에 들어있는 $(\bar{Q}_{ij})_k$ 는 k 째 판의 변환된 환산역세기이고 $(\tilde{Q}_{ij})_k$ 는 k 째 판에서의 시간연산자이며 $(\Gamma_{ij})^k$ 는 k 째 판의 점성을 특징짓는 완화핵이다. 완화핵은 실험에 의하여 결정된다.

$(\bar{Q}_{ij})_k$ 는 환산역세기 Q_{ij} 와 다음과 같이 련관되어있다.

$$\begin{aligned}(\bar{Q}_{11})_k &= Q_{11}c_k^4 + Q_{22}s_k^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s_k^2c_k^2 \\ (\bar{Q}_{12})_k &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})s_k^2c_k^2 + Q_{12}(s_k^4 + c_k^4) \\ (\bar{Q}_{22})_k &= Q_{11}s_k^4 + Q_{22}c_k^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s_k^2c_k^2 \\ (\bar{Q}_{16})_k &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})s_k^3c_k - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})s_k^3c_k \\ (\bar{Q}_{26})_k &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})s_k^3c_k - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})s_k^3c_k \\ (\bar{Q}_{66})_k &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})s_k^2c_k^2 + Q_{66}(s_k^4 + c_k^4)\end{aligned}\quad (3)$$

여기서 $s_k = \sin \theta_k$, $c_k = \cos \theta_k$ 이고 θ_k 는 k 번째 층의 경사각이며 Q_{ij} ($i, j=1, 2, 6$) 는

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{21}\nu_{12}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_1}{1 - \nu_{21}\nu_{12}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{21}\nu_{12}}, \quad Q_{66} = G_{12} \quad (4)$$

이다.

대칭직교다층복합판의 경우를 고찰하자.

이때

$$\bar{N}_x = N, \quad \bar{N}_y = \bar{N}_{xy} = 0 \quad (5)$$

식 (1)로부터 다음의 방정식이 얻어진다.

$$\begin{bmatrix} \bar{L}_{11} & \bar{L}_{12} & \bar{L}_{16} \\ \bar{L}_{12} & \bar{L}_{22} & \bar{L}_{26} \\ \bar{L}_{16} & \bar{L}_{26} & \bar{L}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q - cw - N \frac{d^2 w}{dx^2} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

련립방정식 (6)의 셋째 식은 다음과 같다.

$$\bar{D}_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(\bar{D}_{12} + \bar{D}_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \bar{D}_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - q + cw - N \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (7)$$

2. 풀 이 법

판의 처짐 w 에 관한 연산자방정식 (7)을 풀기 위하여 경계면 $x=0, a; y=0, b$ 에서 자유지지되었다고 하자.

방정식 (7)의 풀이를 다음과 같은 2중합렬형태로 구하자.

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (8)$$

이제 힘 q 를 다음과 같은 2중합렬로 전개하자.

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (9)$$

균등분포힘인 경우에는 다음과 같다.

$$q_{mn} = \frac{16q_0}{(\pi^2 mn)} \quad (m, n=1, 3, 5, \dots) \quad (10)$$

식 (8), (10)을 방정식 (7)에 대입하면 다음의 식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 \tilde{D}_{11} \psi_{mn} + 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 (\tilde{D}_{12} + 2\tilde{D}_{66}) \psi_{mn} + \\ & + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \tilde{D}_{22} \psi_{mn} - q_{mn} + c \psi_{mn} - N \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \psi_{mn} = 0 \end{aligned}$$

이 식을 라플라스변환하면

$$\psi_{mn}^* = \frac{q_{mn}^*}{(m\pi/a)^4 D_{11}^* + 2(m\pi/a)^2 (n\pi/b)^2 (D_{12}^* + 2D_{66}^*) + (n\pi/b)^4 D_{22}^* + c - N(m\pi/a)^2} \quad (11)$$

이다. 여기서 D_{ij}^* 은 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} D_{11}^* &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{3} (Z_k^3 - Z_{k-1}^3) \tilde{Q}_{11}^{(k)} [1 - \Gamma_{11}^{(k)*}] \\ D_{12}^* &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{3} (Z_k^3 - Z_{k-1}^3) \tilde{Q}_{12}^{(k)} [1 - \Gamma_{12}^{(k)*}] \\ D_{22}^* &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{3} (Z_k^3 - Z_{k-1}^3) \tilde{Q}_{22}^{(k)} [1 - \Gamma_{22}^{(k)*}] \\ D_{66}^* &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{3} (Z_k^3 - Z_{k-1}^3) \tilde{Q}_{66}^{(k)} [1 - \Gamma_{66}^{(k)*}] \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

이 식에서 $\Gamma_{ij}^{(k)*}$ 은 k 째 판의 완화핵에 대한 라플라스변환이다.

식 (12)를 식 (11)에 대입하면 ψ_{mn}^* 이 결정되고 그것을 거꿀변환하면 ψ_{mn} 이 구해진다.

구해진 ψ_{mn} 을 식 (8)에 대입하면 변위 $w(x, y, t)$ 가 완전히 결정된다.

3. 계 산 실 레

기하학적 및 력학적특성자료가 다음과 같이 주어졌다고 하자.

$$\begin{aligned} a &= 2\text{m}, b = 1\text{m}, h = 0.04\text{m}, N = 3, h_1 = h_3 = 0.01\text{m}, h_2 = 0.02\text{m} \\ q_0 &= 0.5\text{MPa}, N = 40\text{kN/m}, E_1 = 35\text{GPa}, E_2 = 8\text{GPa}, \nu_{12} = 0.26 \\ G_{12} &= 4\text{GPa}, \Gamma_{11} = 0, \Gamma_{22} = 0.04e^{-0.1t}, \Gamma_{12} = 0.01e^{-0.1t}, \Gamma_{66} = 0.06e^{-0.5t} \end{aligned}$$

판의 배치는 다음과 같다.

층번호(k)	층방향(θ)	Z_k / m	Z_{k-1} / m	$(Z_k^3 - Z_{k-1}^3)/\text{m}^3$
1	0°	-0.01	-0.02	7×10^{-6}
2	90°	0.01	-0.01	2×10^{-6}
3	0°	0.02	0.01	7×10^{-6}

식 (4)에 의하여

$$Q_{11} = 35.5\text{GPa}, Q_{22} = 8.4\text{GPa}, Q_{66} = 4\text{GPa}, Q_{12} = 2.1\text{GPa}$$

이고 식 (3)에 의하여

$$\begin{aligned} k &= 1, 3; \tilde{Q}_{11} = Q_{11}, \tilde{Q}_{22} = Q_{22}, \tilde{Q}_{66} = Q_{66}, \tilde{Q}_{12} = Q_{12} \\ k &= 2; \tilde{Q}_{11} = Q_{22}, \tilde{Q}_{22} = Q_{11}, \tilde{Q}_{66} = Q_{66}, \tilde{Q}_{12} = Q_{12} \end{aligned}$$

이다. 또한

$$\Gamma_{11}^* = 0, \Gamma_{22}^* = \frac{0.04}{s+0.1}, \Gamma_{66}^* = \frac{0.06}{s+0.5}, \Gamma_{12}^* = \frac{0.01}{s+0.1}$$

이다. 식 (12)로부터

$$\begin{aligned} D_{11}^* &= \frac{171.26s+16.91}{s+0.1} \times 10^3, D_{22}^* = \frac{62.86s+4.71}{s+0.1} \times 10^3 \\ D_{66}^* &= \frac{21.33s+9.38}{s+0.5} \times 10^3, D_{12}^* = \frac{11.2s+1.09}{s+0.1} \times 10^3 \end{aligned}$$

이고 식 (10)으로부터

$$q_{11}^* = \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{s} \times 10^6$$

이다.

이 량들을 식 (11)에 대입하면 ψ_{mn}^* 이 결정된다.

우선 $m=n=1$ 인 경우를 보자. 이때 식 (11)로부터

$$\psi_{11}^* = \frac{0.103\,212\,6}{p} - \frac{0.002\,024}{p+0.487\,66} - \frac{0.017\,60}{p+0.083}$$

이 얻어지고 거꼴변환하면

$$\psi_{11} = 0.103\,212\,6 - 0.017\,60e^{-0.083\,024t} - 0.002\,024e^{-0.487\,66t}$$

로 된다. ψ_{11} 은 판의 중심 즉 $x=0.5a, y=0.5b$ 에서의 z 방향의 변위이다.

이 식에서 보는바와 같이 $t=0$ 일 때의 변위 즉 초기탄성변위 $\psi_{11}^0 = 8.4 \times 10^{-2}$ 로부터 t

가 증가함에 따라 계속 증가하면서 최종변위 $\psi_{11}^{\infty} = 10.27 \times 10^{-2}$ 에 도달한다. 이와 같이 점성으로 인하여 ψ_{11} 은 22.26% 증가한다.

$m=n=7$ 까지 계산하였을 때와 $m=n=1$ 일 때의 계산값의 상대적오차는 0.2%이하이다.

이와 같이 m, n 을 증가시켜도 유사한 결과가 얻어지므로 $m=n=1$ 인 경우에도 귀착시켜도 거의 정확한 결과가 얻어진다는것을 알수 있다.

t 에 따르는 ψ_{11} 의 변화는 그림과 같다.

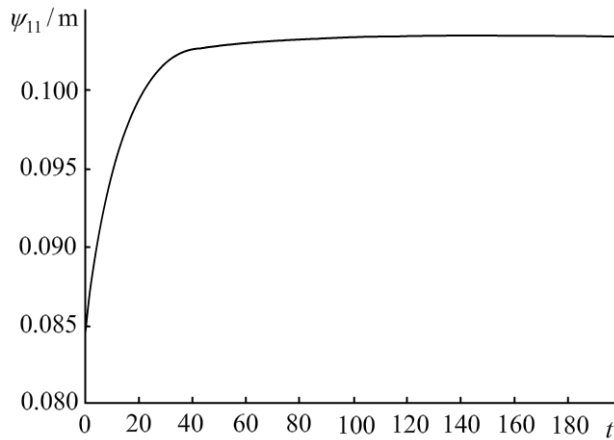


그림. t 에 따르는 ψ_{11} 의 변화

그림에서와 같이 다층복합판의 점탄성변형은 변형초기에는 급격히 증가하다가 시간이 흐름에 따라 점차 서서히 증가한다.

참 고 문 헌

- [1] 김일성종합대학학보(자연과학), 63, 12, 24, 주체106(2017).
- [2] 김일성종합대학학보(수학), 64, 2, 105, 주체107(2018).
- [3] G. A. Martynenko; Mechanics and Mechanical Engineering, 21, 2, 389, 2017.

주체107(2018)년 9월 8일 원고접수

Displacement Analysis of Fiber-Reinforced Viscoelastic Laminated Composite Plate Subjected to In-Plane and Out of Plane Load

Paek Myong Jin, Song Song Gwan

This paper represents a method to find displacement of fiber-reinforced viscoelastic laminated composite plate subjected to in-plane and out of plane loads.

We derive the displacement equation, find the solutions and verify the solution accuracy through an example.

Key words: viscoelastic material, displacement analysis, laminated composite plate