김일성종합대학학보 주체107(2018)년
수 학 제64권 제4호

한가지 형태의 비선형다항임풀스분수계미분방정식의 적분경계값문제에 대한 피보나치연산행렬법

홍성금, 김광혁

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《제국주의자들의 경제기술적봉쇄를 짓부시고 우리의 자강력을 급격히 증대시키며 모든 부문을 빨리 발전시키자면 과학기술을 생명선으로 틀어쥐고나가야 합니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 38페지)

론문에서는 수많은 수학적모형들로 제기되는 비선형다항임풀스분수계미분방정식의 풀이의 존재성을 론의한 기초우에서 풀이를 구하는 피보나치연산행렬법을 제기하고 일반피보나치다항식합렬의 수렴성해석을 진행하였다. 또한 선행연구에서 일부 잘못된 표현식들을 수정하였다.

1. 선행연구결과와 문제설정

선행연구[1－3]에서는 단항인 경우 각이한 적분경계조건을 가지는 임풀스분수계미분방정식의 풀이의 존재성과 유일존재성결과를 얻었다.

또한 선행연구[4]에서는 적분경계조건을 가지는 다항임풀스분수계미분방정식의 풀이의 존재성과 피보나치다항식에 대한 캐푸터분수계도함수의 연산행렬을 구성하고 선형분수계미분방정식과 비선형분수계미분방정식의 피보나치연산행렬법을 고찰하였으며 함수가 피보나치다항식합렬로 전개될 때 수렴성해석과 오차평가를 진행하였다.

그런데 선행연구의 연산행렬표시식에서 정확하지 못한 부분들이 나타났다. 구체적으로 보면 분수계미분연산행렬을 이루는 원소 $\zeta_\alpha(i,\ j)$를 표현하는데서 유한합조건에서 조건 $k+1\ge j$가 없었다.

론문에서는 증명을 통하여 아래와 같이 표현해야 정확하다는것을 밝혔다.

$$\zeta_\alpha(i,\ j)=j\sum_{\substack{k=\lceil\alpha\rceil\\(i+k)\text{odd}\\(j+k)\text{odd}\\k+1\ge j}}^{i}\frac{(-1)^{(k-j+1)/2}k!\left(\frac{i+k-1}{2}\right)!}{\left(\frac{i-k-1}{2}\right)!\left(\frac{k-j+1}{2}\right)!\left(\frac{k+j+1}{2}\right)!\Gamma(k+1-\alpha)}$$

또한 실험결과들을 통하여 선행연구[5]에서 1계피보나치연산행렬의 원소의 표시가 잘못되였으며 정확한 표현식을 확인하였다.

그러므로 우리는 선행연구에서 지적한 잘못된 표현들을 바로 수정하고 피보나치다항식에 대한 분수계적분연산행렬을 구성하였으며 분수계미분연산행렬과 분수계적분연산행렬을 리용하여 다음의 다항임풀스분수계미분방정식의 근사풀이를 구하는 방법을 제시하

고 피보나치다항식합렬의 수렴성을 론의하였다.

$$\begin{cases} {}^{C}D_0^{\alpha}x(t) = f(t,\ x(t),\ {}^{C}D_0^{\beta}x(t))\ \ (t \in l = [0,\ 1],\ t \neq t_k,\ k = 1,\ 2,\ \cdots,\ m) \\ \Delta x(t_k) = I_k(x(t_k^-)),\ \Delta x'(t_k) = J_k(x(t_k^-)) \\ x(0) = 0,\ aI^{\gamma}x(1) + bx'(1) = c \end{cases} \tag{1}$$

여기서

$$f \in C(l \times \mathbf{R} \times \mathbf{R},\ \mathbf{R})\ \ (I_k,\ J_k \in C(\mathbf{R},\ \mathbf{R})),\ 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m < t_{m+1} = 1$$
$$1 < \alpha \le 2,\ 0 < \beta < 1,\ 1 < \gamma < 2\ \ (a,\ b,\ c \in \mathbf{R})\ \ a \neq -b\Gamma(\gamma + 2)$$
$$\Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k^-),\ \Delta x'(t_k) = x'(t_k^+) - x'(t_k^-)$$

이다.

2. 기 초 지 식

$u(x) \in L_2(0,\ 1)$이 피보나치합렬로 다음과 같이 전개[5]된다고 가정하자.

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k F_k(x)$$

여기서 n째 부분합을 $u(x)$의 근사로 생각할수 있다.

$$u(x) \approx u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k F_k(x) = C^{\mathrm{T}}\Phi(x)$$

여기서 $C^{\mathrm{T}} = [c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n]$이다.

$$\Phi(x) = [F_1(x),\ F_2(x),\ \cdots,\ F_n(x)]^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

정리 1 만일 $\Phi(x)$가 식 (2)와 같이 정의된 피보나치다항식벡토르이면 임의의 $\alpha > 0$에 대하여 다음의 관계식이 성립한다.

$$D^{\alpha}\Phi(x) = x^{-\alpha}M^{(\alpha)}\Phi(x) \tag{3}$$

행렬 $M^{(\alpha)} = (m_{i,\,j}^{(\alpha)})_{n \times n}$은 캐푸터의미에서의 α계 n차피보나치미분연산행렬이다. 즉

$$m_{i,\,j}^{(\alpha)} = \begin{cases} \zeta_{\alpha}(i,\ j),\ (i \ge \lceil \alpha \rceil,\ i \ge j) \\ 0, \qquad\qquad \text{기타} \end{cases}$$

$$\zeta_{\alpha}(i,\ j) = j \sum_{\substack{k=\lceil \alpha \rceil \\ (i+k)\mathrm{odd} \\ (j+k)\mathrm{odd} \\ k+1 \ge j}}^{i} \frac{(-1)^{(k-j+1)/2}k!\left(\frac{i+k-1}{2}\right)!}{\left(\frac{i-k-1}{2}\right)!\left(\frac{k-j+1}{2}\right)!\left(\frac{k+j+1}{2}\right)!\Gamma(k+1-\alpha)} \tag{4}$$

정리 2 만일 $\Phi(x)$가 식 (2)와 같이 정의된 피보나치다항식벡토르이면 임의의 $\alpha > 0$에 대하여 다음의 관계식이 성립한다.

$$I^{\alpha}\Phi(x) = x^{\alpha}N^{(\alpha)}\Phi(x)$$

행렬 $N^{(\alpha)}=(n_{i,j}^{(\alpha)})_{n\times n}$ 은 α 계 n 차피보나치적분연산행렬이다. 즉

$$n_{i,j}^{(\alpha)}=\begin{cases}\eta_\alpha(i,\ j), & (i\ge\lceil\alpha\rceil,\ i\ge j)\\ 0, & \text{기타}\end{cases}$$

$$\eta_\alpha(i,\ j)=j\sum_{\substack{k=0\\ (k+i)\text{odd}\\ (k+j)\text{odd}\\ k+1\ge j}}^{i}\frac{(-1)^{(k-j+1)/2}\cdot k!\left(\frac{i+k-1}{2}\right)!}{\left(\frac{i-k-1}{2}\right)!\left(\frac{k-j+1}{2}\right)!\left(\frac{k+j+1}{2}\right)!\Gamma(\alpha+k+1)}$$

3. 기본결과와 계산실례

론의를 간단히 하기 위해 $m=1,\ t_*=t_1$ 이라고 하겠다. 이때 문제 (1)은 다음과 같이 쓸수 있다.

$$^{C}D_0^\alpha x(t)=f(t,\ x(t),\ ^{C}D_0^\beta x(t))\ \ (t\in l_k,\ k=0,\ 1) \tag{5}$$

$$\Delta x(t_*)=I_1(x(t_*^-)),\ \Delta x'(t_*)=J_1(x(t_*^-)) \tag{6}$$

$$x(0)=0,\ aI^\gamma x(1)+bx'(1)=c \tag{7}$$

여기서 조건들은 식 (1)에서의 조건들과 같다.

만일 $x(t)\in L_2[0,\ 1]$이고 $x(t)=\sum_{k=1}^{\infty}c_kF_k(t)$ 로 전개된다고 가정하자.

$$x(t)\approx x_n(t)=\sum_{\mathrm{k}=1}^{n}c_kF_k(t)=C^{\mathrm{T}}\Phi(t)$$

라고 하면 정리 1에 의하여 식 (5)에서 분수계도함수항들은

$$^{C}D^\alpha x(t)\approx t^\alpha C^{\mathrm{T}}M^{(\alpha)}\Phi(t),\ \ ^{C}D^\beta x(t)\approx t^{-\beta}C^{\mathrm{T}}M^{(\beta)}\Phi(t)$$

이고 식 (6), (7)에서 1계도함수와 분수계적분은

$$x'(t)\approx C^{\mathrm{T}}M^{(1)}\Phi(t),\ I^\gamma x(t)\approx t^\gamma C^{\mathrm{T}}N^{(\gamma)}\Phi(t)$$

로 근사계산할수 있다.

매 구간 l_k 에서 C^{T} 를 얻기 위하여 점배치를 진행한다.

$$t_k=\frac{k}{n-1},\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-\lceil\alpha\rceil$$

따라서 주어진 방정식과 임풀스조건, 경계조건들로 련립방정식을 구성한다.

$$\widetilde{R}(t_k)=t_k{}^\alpha C^{\mathrm{T}}M^{(\alpha)}\Phi(t_k)-f(t_k,\ C^{\mathrm{T}}\Phi(t_k),\ t^{-\beta}C^TM^{(\beta)}\Phi(t_k))=0\ \ (t\in l_k,\ k=0,\ 1)$$

$$(D^{\mathrm{T}}-C^{\mathrm{T}})\Phi(t_*)=I_1(C^{\mathrm{T}}\Phi(t_*)),\ (D^{\mathrm{T}}-C^{\mathrm{T}})M^{(1)}\Phi(t_*)=J_1(C^{\mathrm{T}}\Phi(t_*))$$

$$C^{\mathrm{T}}\Phi(0)=0,\ at^\gamma D^{\mathrm{T}}N^\gamma\Phi(1)+bD^{\mathrm{T}}M^{(1)}\Phi(1)=c$$

여기서 l_0 에서 피보나치다항식의 곁수는 C^{T} 이고 l_1 에서 피보나치다항식의 곁수는 D^{T} 이다.

우와 같은 비선형련립방정식을 뉴톤반복법을 리용하여 $C^{\mathrm{T}},\ D^{\mathrm{T}}$ 와 $x_n(t)$ 를 구한다.

$X=\{x \mid x\in PC^{\infty}(l,\ \mathbf{R})\}$ 라고 가정하자.

정리 3 만일 $x\in X$ 이고 적당한 정의 상수 M 이 있어서 $|x^{(i)}(t)|\le M^{i}\ \ (i\ge 0,\ \forall t\in[0,\ 1])$ 이면 $x(t)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k F_k(t)$ 에 대하여 다음의 사실이 성립한다.

① $|c_k|\le \dfrac{M^{k-1}\cosh(M)}{2^{k-1}(k-1)!}$

② $x(t)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k F_k(t)$ 는 절대수렴한다.

정리 4 함수 $x(t)$ 가 정리 3의 가정을 만족시킨다면 나머지항

$$e_n(t)=\sum_{k=n+1}^{\infty}c_k F_k(t)$$

는 다음의 오차한계를 가진다.

$$|e_n(t)|<\frac{\cosh(M)\cdot(M\sigma)^{n}\cdot e^{\frac{M\sigma}{2}}}{2^{n}\cdot n!}$$

참 고 문 헌

[1] 김광혁, 홍성금; 수학, 2, 4, 주체106(2017).

[2] B. Ahmad, S. Sivasundaram; Nonlinear Anal. Hybrid Syst., 4, 134, 2010.

[3] X. Fu, X. Bao; Adv. Differ. Equ., 129, 1, 2014.

[4] Y. Liu; Mathematical Methods in the Applied Sciences, 39, 5436, 2016.

주체107(2018)년 6월 5일 원고접수

Fibonacci Operational Matrix Method for Solving an Integral Boundary Value Problem of Nonlinear Multi-Term Fractional Differential Equation

Hong Song Gum, Kim Kwang Hyok

In this paper, we point out some mistakes in a known paper and study on the numerical method for the integral boundary value problem of nonlinear multi-term impulsive fractional differential equation using a Fibonacci operational matrix method. And we consider its convergence.

Key words: Caputo fractional derivative, impulsive fractional differential equation