김일성종합대학학보 주체109(2020)년
물리학 제66권 제2호

2중흔들이모형에 기초한 흔들이의 비등방성

최철민, 김영광

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《최신과학기술분야의 성과를 종합해보면 그것은 례외없이 물리학을 비롯한 기초과학의 성과에 토대하고있습니다.》(《**김정일**전집》 제4권 410페지)

푸코흔들이에 대한 연구[1, 2]에서는 비관성기준계에 고정된 수학흔들이모형에 기초하여 운동자리길모양을 해석하였다. 이 모형에서는 수학흔들이가 모든 방향에 대하여 동일한 진동수를 가지고있기때문에 모든 방향에 대하여 진동특성이 다 같으며 초기위상차가 없으면 추의 운동자리길은 1차원조화진동으로 표시된다.[3] 이런 흔들이가 회전운동하는 비관성계에서 진동하면 진동면이 일정한 방향으로 회전한다.[4, 5] 푸코흔들이는 길이를 수십m정도로 할 때에만 타원자리길을 그리면서 일정한 방향으로 돌아가고 길이를 짧게 만들면 운동자리길이 복잡한 2차원도형을 그리면서 임의의 방향으로 돌아가기때문에 지구자전에 의한 진동면의 회전을 관측할수 없다. 그러나 이에 대한 리론적인 해석이 제기된것은 없다.

우리는 2중흔들이모형에 기초하여 비등방성흔들이의 운동자리길을 해석하고 푸코흔들이의 운동자리길특성을 해석할수 있는 한가지 방도를 제기하였다.

원기둥막대기에 고정한 흔들이와 그것의 운동을 해석하기 위한 2중흔들이모형을 그림 1에 보여주었다.

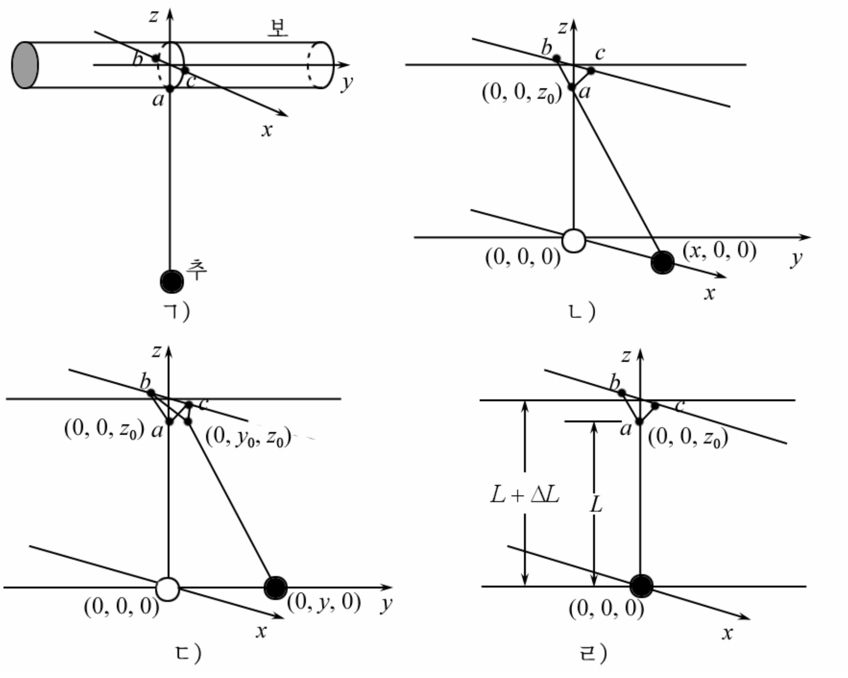

그림 1. 원기둥막대기에 고정한 흔들이와 그것의 운동을 해석하기 위한 2중흔들이모형

원기둥막대기에 고정한 흔들이(그림 1의 ㄱ))가 x축방향으로 운동(그림 1의 ㄴ))한다면 a점을 지지점으로 하여 운동하기때문에 흔들이의 길이는 그림 1의 ㄹ)에서와 같이 L이다. 만일 흔들이가 y축방향으로 운동(그림 1의 ㄷ))한다면 b와 c를 지지점으로 운동하기때문에 흔들이의 길이는 $L+\Delta L$이다. 원기둥에 매단 흔들이는 흔들이의 방향에 따라 흔들이의 길이가 달라지기때문에 진동수도 역시 방향에 따라 다른 비등방성을 가진다. 이러한 흔들이가 멎어있는 기준계에서 공기의 저항이 없이 운동한다면 흔들이에는 중력과 장력만이 작용하기때문에 운동방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{T} + m\boldsymbol{g} \tag{1}$$

이 식을 성분별로 갈라쓰면

$$\begin{cases} m\ddot{x} = T_x \\ m\ddot{y} = T_y \\ m\ddot{z} = T_z - mg \end{cases} \tag{2}$$

와 같은 관계를 얻을수 있다. 흔들이에 작용하는 힘들사이의 관계(그림 2)로부터 실의 장력에 대한 자리표성분들은 각각 다음과 같다.

$$T_x = -\frac{x - x_0}{L}T, \quad T_y = -\frac{y - y_0}{L}T, \quad T_z = \frac{z_0}{L}T$$

따라서 식 (2)는 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\dfrac{x - x_0}{L}T \\ m\ddot{y} = -\dfrac{y - y_0}{L}T \\ m\ddot{z} = \dfrac{z_0}{L}T - mg \end{cases} \tag{3}$$

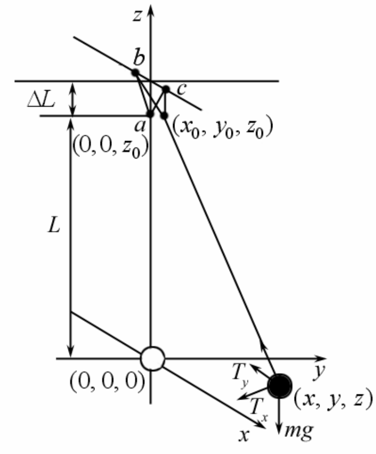

그림 2. 흔들이에 작용하는 힘들사이의 관계

흔들이의 기울임각이 대단히 작다면 추가 xy평면우에서 2차원적인 운동을 한다고 볼수 있으며 이때 $T \approx mg$, $z_0 \approx L$과 같은 관계가 성립한다. 이것을 식 (3)에 넣고 정돈하면 운동방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{g}{L}(x - x_0) \\ \ddot{y} = -\dfrac{g}{L}(y - y_0) \end{cases} \tag{4}$$

한편 편기각이 대단히 작다고 보면 $x_0 = 0$, $y_0 = \dfrac{\Delta L}{L + \Delta L}y$와 같은 관계식을 얻을수 있다. 이것을 식 (4)에 대입하면 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{g}{L}x \\ \ddot{y} = -\dfrac{g}{L + \Delta L}y \end{cases} \tag{5}$$

그림 1로부터 $L_x = L$, $L_y = L + \Delta L$이므로 $\omega_x = \sqrt{\dfrac{g}{L_x}}$, $\omega_y = \sqrt{\dfrac{g}{L_y}}$라고 하면 식 (5)는

다음과 같이 표시된다.

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega_x^2 x \\ \ddot{y} = -\omega_y^2 y \end{cases} \tag{6}$$

이 방정식의 풀이는

$$\begin{cases} x = x_0 \sin \omega_x t \\ y = y_0 \sin(\omega_y t + \varphi_0) \end{cases} \tag{7}$$

이다. 여기서 φ_0은 초기자리각이다.

이것은 흔들이의 운동특성이 방향에 따라 다르게 나타난다는것을 보여준다. 그림 1의 ㄹ)에서 흔들이의 길이들사이에

$$L_y / L_x \approx 1$$

과 같은 관계가 성립하기때문에 진동수들사이에도

$$\omega_y / \omega_x \approx 1$$

과 같은 관계가 성립한다. 여기서 $\omega_x = \omega_0$, $\omega_y = \omega_0 + \Delta\omega$이면 식 (7)은 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{cases} x = x_0 \sin \omega_0 t \\ y = y_0 \sin(\omega_0 t + \Delta\omega t + \varphi_0) \end{cases} \tag{8}$$

여기서

$$\varphi(t) = \Delta\omega t + \varphi_0 \tag{9}$$

과 같이 표시하면 식 (8)은

$$\begin{cases} x = x_0 \sin \omega_0 t \\ y = y_0 \sin(\omega_0 t + \varphi(t)) \end{cases} \tag{10}$$

와 같이 표시할수 있다.

진동방정식에 대한 콤퓨터모의결과를 그림 3에 보여주었다.

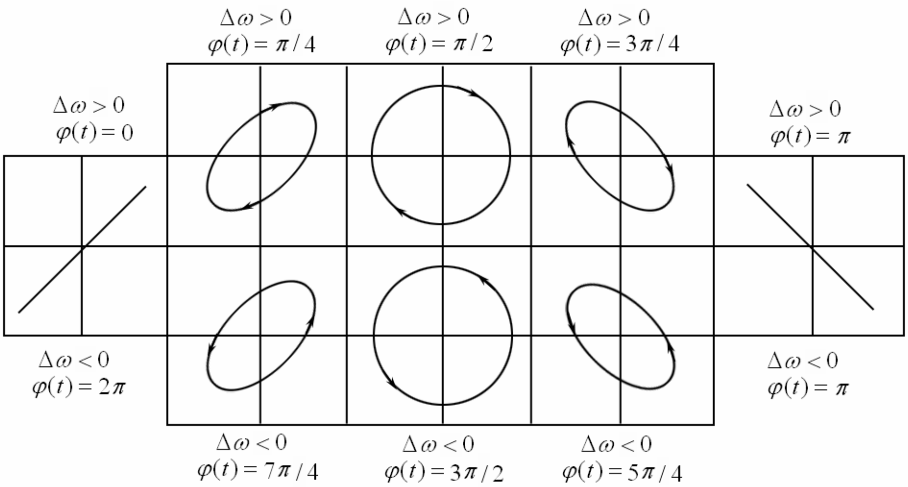

그림 3. 진동방정식에 대한 콤퓨터모의결과

그림 3에서 보는바와 같이 흔들이의 운동자리길은 리사쥬도형과 류사한 모양을 가지면서 시간에 따라 그 모양이 주기적으로 변한다. 그것은 운동방정식의 풀이에 들어있는 자리각차가 시간에 따라 변하기때문이다. 그림 3에서 $\varphi(t)=0$ 일 때 흔들이의 운동자리길은 직선모양이다. 그러나 시간이 지남에 따라 타원으로 되였다가 $\varphi(t)=\pi/2$ 로 되면 원으로 된다. 그다음 타원으로 되였다가 $\varphi(t)=\pi$ 로 되면 운동자리길은 다시 직선으로 된다. 같은 방법으로 $\varphi(t)=\pi$ 로부터 $\varphi(t)=2\pi$ 로 변할 때에는 우의 경우와 반대경로를 따라 변한다. 여기서 운동자리길의 변화속도는 자리각차의 변화속도와 같다.

한편 식 (9)로부터 자리각차의 변화속도는 진동수편차에 비례한다.

$$\frac{\varphi(t)-\varphi_0}{t}=\Delta\omega \tag{11}$$

운동자리길의 회전방향도 역시 진동수편차의 부호에 따라 달라진다.(표 1)

표 1. 운동자리길의 진동수편차와 회전방향

	$0<\varphi(t)<\pi$	$\pi<\varphi(t)<2\pi$
$\Delta\omega>0$	시계바늘방향	시계바늘반대방향
$\Delta\omega<0$	시계바늘반대방향	시계바늘방향

따라서 흔들이의 회전방향을 알면 어느 방향의 진동수가 큰가 하는것을 판단할수 있다. 흔들이가 제작되면 흔들이의 길이편차는 흔들이의 기구상수로 규정되며 따라서 진동수편차도 흔들이의 기구상수로 규정된다. 이것은 흔들이의 진동수편차를 흔들이의 비등방성을 평가하는 정량지표로 리용할수 있다는것을 보여준다.

표 2에 제안된 비등방성수학흔들이와 등방성수학흔들이의 모형을 비교하여 보여주었다.

표 2. 제안된 비등방성수학흔들이와 등방성수학흔들이의 모형

구분	비등방성수학흔들이	등방성수학흔들이[1]
흔들이의 운동방정식	$\begin{cases}\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega_0^2x\\ \frac{d^2y}{dt^2}=-(\omega_0+\Delta\omega)^2y\end{cases}$	$\begin{cases}\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega_0^2x\\ \frac{d^2y}{dt^2}=-\omega_0^2y\end{cases}$
운동방정식풀이	$\begin{cases}x=x_0\sin\omega_0t\\ y=y_0\sin(\omega_0t+\varphi(t))\end{cases}$	$\begin{cases}x=x_0\sin\omega_0t\\ y=y_0\sin(\omega_0t+\varphi_0)\end{cases}$
자리각차	$\varphi(t)=\Delta\omega t+\varphi_0$	$\varphi_0=$ 일정

표 2에서 보는바와 같이 선행연구들에서 제기한 리상화된 수학흔들이모형에서는 지지점이 1개의 점으로 되여있기때문에 흔들이의 비등방성을 론의할수 없다. 따라서 흔들이의 운동자리길은 닫긴 리사쥬도형으로 된다. 그러나 비등방성흔들이에서는 흔들이의 지지점이 운동방향에 따라 달라지며 따라서 흔들이의 길이가 달라진다. 이로 인하여 운동방향에 따라 고유진동수가 달라지면서 운동자리길이 열린 리사쥬도형으로 된다. 이것은 흔들이가 운동과정에 비등방성을 가진다는것을 보여준다.

맺 는 말

2중흔들이의 모형에 기초하여 비등방성수학흔들이의 운동특성을 해석하였다. 비등방성수학흔들이의 운동자리길은 열린 리사쥬도형으로 된다. 이 모형을 리용하면 푸코흔들이에서 나타나고있는 비등방성을 원리적으로 해석할수 있다.

참 고 문 헌

[1] D. Arovas; Lecture Notes on Classical Mechanics, Department of Physics University of California, 1～220, 2013.
[2] P. Lynch; Proceedings of the Royal Irish Academy, C 116, 1, 15, 2016.
[3] H. R. Salva et al.; Rev. Sci. Instrum., 81, 115102, 2010.
[4] A. Beléndez et al.; Computers and Mathematics with Applications, 64, 1602, 2012.
[5] W. B. I. Somerville; Quarterly Journal of the Royal Astrophysical Society, 13, 40, 1972.

주체108(2019)년 12월 5일 원고접수

The Anisotropy of Pendulum Based on the Double Pendulum Model

Choe Chol Min, Kim Yong Gwang

We analyzed trajectory of anisotropic pendulum based on the double pendulum model and suggested a method for analyzing the trajectory of the Foucault pendulum.

Keywords: anisotropy, pendulum, double pendulum