김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제2호

# 블로크$H-$행렬에 대한 블로크여러분리두단계TOR법

황명근, 김성남

론문에서는 결수행렬이 블로크$H-$행렬인 대규모선형련립방정식을 풀기 위한 병행블로크풀이법을 고찰하였다. 선행연구[2, 4]에서는 $H-$행렬에 대한 여러분리 AOR법을 제기하고 수렴성해석을 진행하였으며 선행연구[6]에서는 블로크두단계반복법의 수렴성해석을 진행하였다. 선행연구[5]에서는 여러분리 TOR법이 여러분리 AOR법의 수렴성을 개선한다는것을 증명하였다. 블로크$H-$행렬의 정의는 선행연구[1]에서 처음으로 제기되였다. 선행연구[3]에서는 선행연구[1]에서의 블로크$H-$행렬의 정의에 기초하여 블로크세줄대각선블로크$H-$행렬에 대한 $LU$분해의 안정성을 해석하였다. 그러나 $LU$분해는 결수행렬이 보다 복잡한 블로크행렬인 대규모선형련립방정식을 푸는데는 적합하지 않다.

이 론문에서는 선행연구[2], [6]의 방법들을 결합하여 다처리기체계에서 대규모선형련립방정식을 풀기 위한 병행알고리듬인 블로크여러분리두단계 TOR법을 제기하고 결수행렬이 블로크$H-$행렬이라는 가정밑에서 수렴성해석을 진행하며 수치실례를 통하여 제기된 방법의 효과성을 보여주었다.

## 1. 블로크여러분리두단계TOR법의 계산도식

불퇴화블로크선형련립방정식

$$AX=B \tag{1}$$

의 풀이를 고찰하자. 여기서

$$A=(A_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n},\ A_{ij}\in\mathbf{R}^{n_i\times n_j},\ 1\le i,\ j\le L,\ \det(A_{ll})\ne 0,\ 1\le l\le L,\ \sum_{l=1}^{L}n_l=n$$

$$X=(x_1^{\mathrm T},\ x_2^{\mathrm T},\ \cdots,\ x_L^{\mathrm T})^{\mathrm T},\ x_l\in\mathbf{R}^{n_l},\ B=(b_1^{\mathrm T},\ b_2^{\mathrm T},\ \cdots,\ b_L^{\mathrm T})^{\mathrm T},\ b_l\in\mathbf{R}^{n_l}$$

이제 $l=1,\ 2,\ \cdots,\ L$에 대하여 $A=B_l-C_l,\ D_l=\mathrm{diag}(B_l)$이고 $L_l+L_l^*\in\mathbf{R}^{n\times n}$과 $U_l\in\mathbf{R}^{n\times n}$들은 각각 $-B_l$의 엄격한 아래3각형행렬과 웃3각형행렬이라고 하자. 그러면 두단계여러분리

$$B_l:D_l-(L_l+L_l^*),\ U_l;\ C_l;\ E_l\ \ (l=1,\ 2,\ \cdots,\ L)$$

를 얻는다.

어떤 실상수 $\alpha,\ \beta\ge 0,\ \alpha+\beta\ne 0$에 대하여

$$M_l(\alpha,\ \beta)=\frac{1}{\alpha+\beta}(2D_l-\alpha L_l-\beta L_l^*)$$

$$N_l(\alpha,\ \beta)=\frac{1}{\alpha+\beta}\{[2-(\alpha+\beta)]D_l+(\alpha+\beta)U_l+\alpha L_l^*+\beta L_l\}$$

로 놓으면 $M_l(\alpha,\ \beta),\ N_l(\alpha,\ \beta)\ (l=1,\ 2,\ \cdots,\ L)$는 $A$의 분리로 된다. 이때 식 (1)을 풀기 위한 블로크동시여러분리두단계 TOR법을 얻는다.

$$\begin{aligned}X^{(p+1)} = &\sum_{l=1}^{L} E_l\{(M_l^{-1}(\alpha,\ \beta)N_l(\alpha,\ \beta))^{q(l,\ p)}X^{(p)} + \\ &+\sum_{j=0}^{q(l,\ p)-1}(M_l^{-1}(\alpha,\ \beta)N_l(\alpha,\ \beta))^j M_l^{-1}(\alpha,\ \beta)(C_l X^{(p)}+B)\}\end{aligned} \tag{2}$$

류사하게 식 (1)을 풀기 위한 블로크비동시여러분리두단계 TOR법을 얻는다.

$$\begin{aligned}X^{(p+1)} = &\sum_{l\in J(L)} E_l\{(M_l^{-1}(\alpha,\ \beta)N_l(\alpha,\ \beta))^{q(l,\ p)}X^{(\tau(l,\ p))} + \\ &+\sum_{j=0}^{q(l,\ p)-1}(M_l^{-1}(\alpha,\ \beta)N_l(\alpha,\ \beta))^j M_l^{-1}(\alpha,\ \beta)(C_l X^{(\tau(l,\ p))}+B)\} + \sum_{l\notin J(L)} E_l X^{(p)}\end{aligned} \tag{3}$$

여기서 $q(l,\ p)$는 $l$째 처리기의 $p$째 반복에서 내부반복회수이고 $\tau(l,\ p)$는 $l$째 처리기의 $p$째 반복까지의 전체 반복회수이다.

## 2. 수렴성정리

정의 1[5] $n\times n$ 형실행렬 $A=(a_{ij})$가 불퇴화라고 하자. $i\neq j$에 대하여 $a_{ij}\leq 0$이고 $A^{-1}\geq 0$이면 $A$를 $M-$행렬이라고 부른다.

정의 2[3] $A=(A_{ij})_{L\times L}\in \mathbf{C}^{n\times n}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ L)$이 불퇴화라고 하자. 행렬 $\overline{\mu}(A)=(m_{ij})$를 $A$의 블로크비교행렬이라고 부른다. 그리고 $\overline{\mu}(A)$가 $M-$행렬이면 $A$를 블로크$H-$행렬이라고 부르고 $A\in H_B$로 표시한다. 여기서

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ -\|A_{ii}^{-1}A_{ij}\|, & i\neq j\end{cases}$$

이다.

정의 3[3] $A=(A_{ij})_{L\times L}\in \mathbf{R}^{n\times n}$에 대하여 $[A]=(\|A_{ij}\|)\in \mathbf{R}^{L\times L}$을 $A$의 블로크절대값이라고 부른다.

보조정리 1[5] $A\in H_B$에 대하여 $[A^{-1}]\leq \mu(A)^{-1}[D^{-1}(A)]$가 성립한다.

정의 4[5] $A\in \mathbf{R}^{n\times n}$일 때 $\mu(A)=\mu(M)-[D^{-1}(M)N]$이면 $A=M-N$을 $H_B-$량립분리라고 부른다.

보조정리 2[5] $A=M-N$이 $H_B-$량립분리이면 $A\in H_B$이다.

보조정리 3[5] $H_1,\ H_2,\ \cdots,\ H_l,\ \cdots,\ H_l\in \mathbf{R}^{n\times n}$들이 부아닌 행렬이고

$$H_l \upsilon \leq \theta\upsilon \quad (l=1,\ 2,\ \cdots)$$

를 만족시키는 실수 $\theta\in[0,\ 1]$과 정인 벡토르 $\upsilon\in \mathbf{R}^n$이 존재하면

$$\rho(K_l)\leq\theta<1$$

이 성립한다. 여기서 $K_l=H_l\cdots H_2H_l$이고 $\lim\limits_{l\to\infty}k_l=0$이다.

정리 1 $A\in H_B$이고 $A=B_l-C_l$은 $H_B-$량립분리라고 하자. $0<\alpha+\beta<2$에 대하여

$B_l = M_l(\alpha,\ \beta) - N_l(\alpha,\ \beta)$ 이며 $E_l$ 은 $\sum_{l=1}^{L} E_l = I_n$ 과 $\sum_{l=1}^{L} [E_l] \le I_L$ 을 만족시킨다고 하자. 그러면 임의의 초기벡토르 $X^{(0)}$ 과 $q(l,\ p) \ge 1$ $(l = 1,\ 2,\ \cdots,\ L;\ p = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ 인 임의의 내부반복렬 $\{q(l,\ p)\}$ 에 대하여 식 (2)는 (1)의 유일풀이에로 수렴한다.

정리 2　$A \in H_B$ 이고 $A = B_l - C_l$ 은 $H_B$－량립분리라고 하자. $0 < \alpha + \beta < 2$ 에 대하여 $B_l = M_l(\alpha,\ \beta) - N_l(\alpha,\ \beta)$ 이며 $E_l$ 은 $\sum_{l=1}^{L} E_l = I_n$ 과 $\sum_{l=1}^{L} [E_l] \le I_L$ 을 만족시킨다고 하자. 그러면 임의의 초기벡토르 $X^{(0)}$ 과 임의의 $q(l,\ p) \ge 1$ $(l = 1,\ 2,\ \cdots,\ L;\ p = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ 인 반복렬 $\{q(l,\ p)\}$ 와 $\tau(l,\ p) \ge 1$ $(l = 1,\ 2,\ \cdots,\ L,\ p = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ 인 반복렬 $\{\tau(l,\ p)\}$ 에 대하여 식 (3)은 (1)의 유일풀이에로 수렴한다.

## 3. 수 치 실 레

측지점이 48개인 삼각망조종계산문제에서 제기되는 블로크선형련립방정식 $AX = F$ 를 고찰하자. 여기서

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & A_{14} & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} & A_{25} \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 & A_{35} \\ A_{14}^{\mathrm{T}} & A_{24}^{\mathrm{T}} & 0 & A_{44} & 0 \\ 0 & A_{25}^{T} & A_{35}^{\mathrm{T}} & 0 & A_{55} \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{bmatrix}$$

$$A_{11} \in \mathbf{R}^{24\times24},\ A_{22} \in \mathbf{R}^{26\times26},\ A_{33} \in \mathbf{R}^{24\times24},\ A_{44} \in \mathbf{R}^{12\times12},\ A_{55} \in \mathbf{R}^{10\times10}$$
$$A_{14} \in \mathbf{R}^{24\times12},\ A_{24} \in \mathbf{R}^{26\times12},\ A_{25} \in \mathbf{R}^{26\times10},\ A_{35} \in \mathbf{R}^{24\times10},\ X_1,\ F_1 \in \mathbf{R}^{24}$$
$$X_2,\ F_2 \in \mathbf{R}^{26},\ X_3,\ F_3 \in \mathbf{R}^{24},\ X_4,\ F_4 \in \mathbf{R}^{12},\ X_5,\ F_5 \in \mathbf{R}^{10}$$

이 방정식을 서로 다른 파라메터와 내부반복회수를 가지고 계산한 결과는 표와 같다. 계산은 $X^{(0)} = 0$ 으로부터 출발하여 $\| X^{(k)} - X^{(k-1)} \|_\infty \le 10^4$ 일 때 끝냈다. 한번 반복의 연산량이 두 방법에서 거의 같으므로 반복회수를 비교하였다.

표. 계산결과

| 내부 / 반복 | | 2 | 5 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 14 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 블로크동 | r | 1.59 | 1.6 | 1.62 | 1.63 | 1.63 | 1.64 | 1.62 | 1.63 | 1.6 | 1.64 |
| 시여러분 | w | 1.6 | 1.63 | 1.63 | 1.62 | 1.61 | 1.65 | 1.61 | 1.59 | 1.61 | 1.59 |
| 리두단계 | 외부 | 184 | 73 | 53 | 48 | 44 | 39 | 39 | 33 | 32 | 24 |
| AOR | 전체 | 368 | 365 | 371 | 384 | 396 | 390 | 429 | 396 | 448 | 480 |
| 블로크동 | $\alpha$ | 2.18 | 2.2 | 2.24 | 2.26 | 2.26 | 2.28 | 2.24 | 2.26 | 2.2 | 2.28 |
| 시여러분 | $\beta$ | 0.02 | 0.02 | 0.02 | 0.04 | 0.06 | 0.02 | 0.04 | 0.02 | 0.02 | 0.2 |
| 리두단계 | 외부 | 134 | 51 | 34 | 30 | 26 | 24 | 22 | 20 | 18 | 16 |
| TOR | 전체 | 268 | 255 | 238 | 240 | 234 | 240 | 242 | 240 | 252 | 320 |

## 참 고 문 헌

[1] C. Y. Wu et al.; Journal of Computation and Applied Mathematics, 236, 2673, 2012.
[2] S. X. Miao et al.; Applied Mathemstics Computation, 275, 156, 2016.
[3] S. X. Miao et al.; Applied Mathemstics Computation, 324, 94, 2018.
[4] D. J. Yuan; Applied Mathemstics Computation, 160, 477, 2005.
[5] D. W. Chang; Computers and Mathematics with Applications, 41, 215, 2001.
[6] Z. H. Cao; Numer. Math., 90, 47, 2001.

주체108(2019)년 12월 15일 원고접수

## Block Multisplitting Two-Stage TOR Methods for Block *H*-Matrices

*Hwang Myong Gun, Kim Song Nam*

This paper presents a class of block multisplitting two-stage TOR methods of getting their solutions by the high-speed multiprocessor systems. Under suitable assumptions, we proved the convergence properties of these multisplitting two-stage TOR methods.

Keyword: block $H-$matrix