

렙톤반응 $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ 의 산란자름면면적에 미치는 스핀편극의 영향

리육철, 고영해

위대한 수령 김일성동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《선진과학기술을 받아들이는데서 주체를 철저히 세워야 합니다.》(《김일성전집》 제68권 92페이지)

지난 시기 컴퓨터에 의한 기호연산방법이 없을 때에는 소립자산란과정들에서 스핀편극상태를 고려함이 없이 산란자름면면적을 계산하였다.[2, 3] 그후 Mathematica와 Matlab같은 응용프로그램들의 출현과 함께 기호연산이 가능하게 되면서 소립자반응들에서 스핀편극상태가 미치는 영향을 고려하는 연구들[1, 4]이 진행되었다.

선행연구[1]에서는 쿼크산란에 미치는 전자의 스핀편극의 영향을 디랙방정식을 리용하여 계산하였다. 여기서는 S-행렬방법을 리용하지 않고 초기상태를 회전시켜 마감상태와 일치시키는 상관연산자를 리용하였다. 구체적인 스핀편극상태에서 컴퓨터의 기호연산기능을 리용하여 소립자반응의 산란자름면면적을 계산한 대표적인 실례는 콤프톤산란과 제동복사에 대한 계산결과이다.

선행연구[4]에서는 전하와 함께 자기모멘트를 고려한 파인만도표규칙을 제기하고 그것에 기초하여 렙톤반응 $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ 의 산란자름면면적을 섭동론1차에서 계산하였다.

우리는 렙톤반응 $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ 에서 전자와 뮤온의 스핀편극상태가 산란자름면면적에 주는 영향을 연구하였다.

렙톤반응 $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ 을 기술하는 파인만도표는 그림 1과 같다.

입사하는 전자 및 양전자의 운동량을 p_1, p_2 로, 충돌후 생성되는 뮤온과 그 반립자의 운동량을 각각 p'_1, p'_2 로 놓고 운동량공간에서의 파인만도표규칙에 따라 S행렬의 2차항을 표시하면 다음과 같다.

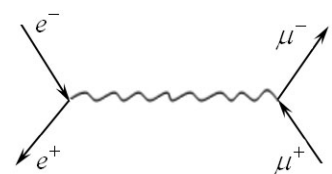


그림 1. 파인만도표

$$S_{if}^{(2)} = (2\pi)^4 (i) e^2 \frac{\delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2)}{(p_1 + p_2)^2} M_{if} \quad (1)$$

$$M_{if} = (\bar{u}' \gamma_\mu v') (\bar{v} \gamma^\mu u)$$

여기서 $u_{(r)}(p_1)$ 과 $v_{(s)}(p_2)$, $u'_{(r)}(p'_1)$ 와 $v'_{(s)}(p'_2)$ 는 각각 입사전자와 양전자, 생성되는 뮤온과 그 반립자의 파동함수, r 및 s 는 스핀상태를 나타내는 첨수로서 1이면 스핀윗상태(+1/2), 2이면 스핀아래상태(-1/2)의 파동함수로 된다.

매 경우 파동함수들의 구체적인 모양은 다음과 같다.

$$u_{(1)}(p) = \frac{(\hat{p} + m)}{\sqrt{2m(m+E)}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \\ 0 \\ \frac{1}{2} p_z \sqrt{\frac{2}{m(E+m)}} \\ \frac{1}{2} (p_x + ip_y) \sqrt{\frac{2}{m(E+m)}} \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$u_{(2)}(p) = \frac{(\hat{p} + m)}{\sqrt{2m(m+E)}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \\ \frac{1}{2} (p_x - ip_y) \sqrt{\frac{2}{m(E+m)}} \\ -\frac{1}{2} p_z \sqrt{\frac{2}{m(E+m)}} \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$v_{(1)}(p) = \frac{(-\hat{p} + m)}{\sqrt{2m(m+E)}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (p_x - ip_y) \sqrt{\frac{2}{m(E+m)}} \\ -\frac{1}{2} p_z \sqrt{\frac{2}{m(E+m)}} \\ \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$v_{(2)}(p) = \frac{(-\hat{p} + m)}{\sqrt{2m(m+E)}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (p_x + ip_y) \sqrt{\frac{2}{m(E+m)}} \\ \frac{1}{2} p_z \sqrt{\frac{2}{m(E+m)}} \\ 0 \\ \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \end{pmatrix} \quad (5)$$

단위시간당, 단위체적당 이행확률은 다음과 같다.

$$\frac{dw_{if}}{dtdV} = \frac{(2\pi)^4}{s^2} e^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) |M_{if}|^2 \frac{m_\mu d^3 p'_1}{(2\pi)^3 p_1^0} \frac{m_\mu d^3 p'_2}{(2\pi)^3 p_2^0} \quad (6)$$

여기서 $s = (p_1 + p_2)^2$ 은 만델슈타인변수, $|M_{if}|^2$ 은 파인만불변 2제곱진폭이다.

한편 입사흐름밀도와 단위체적당 표적립자수의 적은 다음과 같다.

$$B = \frac{1}{m_e^2} \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_e^4} \quad (7)$$

질량중심계에서 보면 $p_1 = (E, p)$, $p_2 = (E, -p)$, 한편 $E \geq m_\mu \approx 200m_e$ 이므로 $E^2 \approx p^2$, $(p_1 p_2) = E^2 + p^2 \approx 2E^2$, $B \approx 2E^2 / m_e^2 = s^2 / 2m_e^2$ 이다.
따라서 유효산란자름면면적은 다음과 같다.

$$d\sigma = \frac{dw_{if}}{dtdV} \frac{1}{B} = \alpha^2 \frac{2m_e^2 m_\mu^2}{s^2} \delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) |M_{if}|^2 \frac{d^3 p'_1}{p_1^0} \frac{d^3 p'_2}{p_2^0} \quad (8)$$

이제 $d^3 p'_2 / p_2^0 = d^4 p'_2 \delta(p_2'^2 - m_\mu^2)$ 을 리용하면 다음과 같다.

$$d\sigma = \frac{dw_{if}}{dtdV} \frac{1}{B} = \alpha^2 \frac{4m_e^2 m_\mu^2}{s^2} \delta((p_1 + p_2 - p'_1)^2 - m_\mu^2) |M_{if}|^2 \frac{d^3 p'_1}{p_1^0} \quad (9)$$

질량중심계에서 $(p_1 + p_2 - p'_1)^2 - m_\mu^2 = (p_1 + p_2)^2 - 2p'_1(p_1 + p_2) + p_1'^2 - m_\mu^2 = s - 4Ep_1^0 = 4E(E - p_1^0)$ 이므로 $\delta((p_1 + p_2 - p'_1)^2 - m_\mu^2) = \frac{1}{4E} \delta\left(p_1^0 - \frac{s}{4E}\right)$ 이다.

한편 $\frac{d^3 p'_1}{p_1^0} = \frac{|p'_1|^2 d|p'_1| d\Omega}{p_1^0} \approx p_1^0 dp_1^0 d\Omega$ 이므로 식 (9)로부터 다음식이 성립한다.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{s^2} (4m_e^2 m_\mu^2) \frac{1}{4E} \frac{s}{4E} |M_{if}|^2 = \frac{\alpha^2}{s^2} (m_e^2 m_\mu^2) |M_{if}|^2 \quad (10)$$

전자와 양전자의 초기 4차원운동량과 뮤온과 그 반립자의 마감 4차원운동량을 다음과 같이 설정한다.

$$\begin{aligned} p_1 &= (E, p, 0, 0) \\ p_2 &= (E, -p, 0, 0) \\ p'_1 &= (E, p' \cos \theta, 0, p' \sin \theta) \\ p'_2 &= (E, -p' \cos \theta, 0, -p' \sin \theta) \end{aligned} \quad (11)$$

이것을 식 (10)에 대입하여 미분산란자름면면적을 계산하면 다음과 같다.(계산에서 $E \gg m_e$ 를 리용하였다.)

$$\begin{aligned} (\uparrow\uparrow, \uparrow\uparrow) &= (\uparrow\uparrow, \downarrow\downarrow) = (\downarrow\downarrow, \uparrow\uparrow) = (\downarrow\downarrow, \downarrow\downarrow) = \frac{\alpha^2}{4E^2 s} (m_\mu + (E - m_\mu) \cos^2 \theta)^2 \\ (\uparrow\uparrow, \uparrow\downarrow) &= (\uparrow\uparrow, \downarrow\uparrow) = (\downarrow\downarrow, \uparrow\downarrow) = (\downarrow\downarrow, \downarrow\uparrow) = \frac{\alpha^2}{16E^2 s} (E - m_\mu)^2 \sin^2(2\theta) \\ (\uparrow\downarrow, \uparrow\uparrow) &= (\uparrow\downarrow, \downarrow\downarrow) = (\downarrow\uparrow, \uparrow\uparrow) = (\downarrow\uparrow, \downarrow\downarrow) = 0 \\ (\uparrow\downarrow, \uparrow\downarrow) &= (\downarrow\uparrow, \downarrow\uparrow) = (\uparrow\downarrow, \downarrow\uparrow) = (\downarrow\uparrow, \uparrow\downarrow) = \frac{\alpha^2}{4s} \end{aligned} \quad (12)$$

여기서 괄호안의 앞의 두 화살표는 입사립자들의 스핀상태를 나타내며 뒤의 두 화살표는 산란립자들의 스핀상태를 나타낸다.

또한 고에너지극한($E/m_\mu \rightarrow \infty$)에서 미분산란자름면면적을 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 (\uparrow\uparrow, \uparrow\uparrow) &= (\uparrow\uparrow, \downarrow\downarrow) = (\downarrow\downarrow, \uparrow\uparrow) = (\downarrow\downarrow, \downarrow\downarrow) = \frac{\alpha^2}{4s} \cos^4 \theta \\
 (\uparrow\uparrow, \uparrow\downarrow) &= (\uparrow\uparrow, \downarrow\uparrow) = (\downarrow\downarrow, \uparrow\downarrow) = (\downarrow\downarrow, \downarrow\uparrow) = \frac{\alpha^2}{16s} \sin^2(2\theta) \\
 (\uparrow\downarrow, \uparrow\uparrow) &= (\uparrow\downarrow, \downarrow\downarrow) = (\downarrow\uparrow, \uparrow\uparrow) = (\downarrow\uparrow, \downarrow\downarrow) = 0 \\
 (\uparrow\downarrow, \uparrow\downarrow) &= (\downarrow\uparrow, \downarrow\uparrow) = (\uparrow\downarrow, \downarrow\uparrow) = (\downarrow\uparrow, \uparrow\downarrow) = \frac{\alpha^2}{4s}
 \end{aligned} \tag{13}$$

식 (13)의 계산결과는 그림 2와 같다.

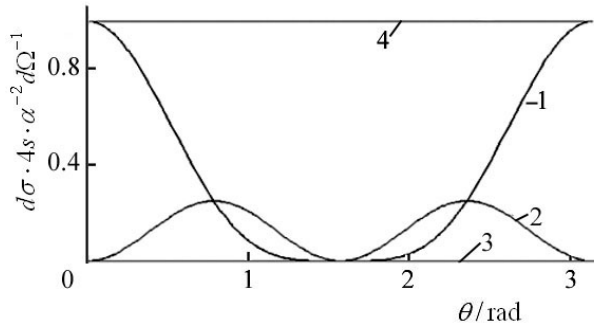


그림 2. 각이한 스핀상태에서 미분산란자름면면적
1-4는 각각 $\alpha^2 \cos^4 \theta / 4s$, $\alpha^2 \sin^2 2\theta / 16s$, 0, $\alpha^2 / 4s$ 일 때

그림 2로부터 다음과 같은 사실을 알 수 있다.

첫째로, 스핀상태가 산란전에 평행인것이 산란후에도 평행으로 되는 산란과정의 자름면면적은 산란각이 0, π 일 때 제일 크고 $\pi/2$ 일 때 거의 0에 가깝다.

둘째로, 스핀상태가 산란전에 평행인것이 산란후에 반평행으로 되는 산란과정의 자름면면적은 산란각이 0, $\pi/2$, π 일 때 거의 0에 가깝고 $\pi/2$, $3\pi/4$ 일 때 제일 크다.

셋째로, 스핀상태가 산란전에 반평행인것이 산란후에도 평행으로 되는 산란과정은 거의 일어나지 않는다.

넷째로, 스핀상태가 산란전에 반평행인것이 산란후에도 반평행으로 되는 산란과정의 자름면면적은 산란각에 관계없이 최대값을 가진다.

맺 는 말

1) 입사방향이 스핀편극방향에 수직이고 산란면이 스핀편극방향에 평행인 경우 입사립자들의 스핀편극방향이 반평행일 때에는 산란립자들의 스핀편극방향이 항상 반평행으로 된다.

2) 입사방향이 스핀편극방향에 수직이고 산란면이 스핀편극방향에 수직인 경우 입사립자들의 스핀편극방향이 평행이면 산란립자들의 스핀편극방향도 평행이고 입사립자들의 스핀편극방향이 반평행이면 산란립자들의 스핀편극방향도 반평행으로 된다.

3) 입사방향이 스핀편극방향에 평행인 경우 입사립자들의 스핀편극방향이 평행이면 반응이 일어나지 않는다.

참 고 문 헌

- [1] 김일성 종합대학학보(자연과학), 60, 1, 58, 주체103(2014).
- [2] 고영해 등; 량자마당론기본, 김일성 종합대학출판사, 37~356, 주체89(2000).
- [3] 리광 등; 조선민주주의인민공화국 과학원통보, 4, 39, 주체98(2009).
- [4] G. Laskaris; Phys. Rev., D 89, 024002, 2014.

주체104(2015)년 8월 5일 원고접수

Spin Polarization Dependence of the Lepton Reaction $e^-e^+\rightarrow\mu^-\mu^+$ on the Scattering Cross Section

Ri Uk Chol, Ko Yong Hae

A method for calculating the cross section area of the lepton reaction $e^-e^+\rightarrow\mu^-\mu^+$ in various spin polarization states was suggested and the results were analyzed according to graphs.

In the case of the incident direction being perpendicular to the spin polarization direction and the reaction plane being parallel to the spin polarization direction, if the spin polarization directions of the incident particles are anti-parallel each other, the spin polarization directions of the product particles are always anti-parallel.

In the case of the incident direction being perpendicular to the spin polarization direction and the reaction plane being perpendicular to the spin polarization direction, if the spin polarization directions of the incident particles are parallel each other, the spin polarization directions of the product particles are also parallel and if the spin polarization directions of the incident particles are anti-parallel each other, the spin polarization directions of the product particles are also anti-parallel.

In the case of the incident direction being parallel to the spin polarization direction if the spin polarization directions of the incident particles are parallel each other, the reaction can't be produced.

Key words: Lepton reaction, spin polarization effect