김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체106(2017)년 제63권 제3호 Vol. 63 No. 3 JUCHE106(2017).

다목적선형계획법문제의 유효풀이에 대한 한가지 연구

리흥일, 박영성

우리는 다목적선형계획법문제의 유효풀이에 대한 한가지 성질을 연구하였다.

선행연구[1, 2]에서는 파라메터를 가지는 다목적선형계획법문제에 대한 성질과 그 풀이법에 대하여, 선행연구[3, 4]에서는 다목적선형계획법문제의 쌍대문제와 추에 대한 일반화에 대하여 연구하였다.

선행연구들에서는 일부 목적함수결수행렬이 가지고있는 구체적인 성질은 분석하지 못하고 유효풀이에 대한 일반적인 성질과 그 풀이법에 대하여 론의하였다.

론문에서는 목적함수결수벡토르들이 다른 목적함수결수벡토르들의 정수결수1차결합으로 표시되는 경우 다목적선형계획법문제가 유효풀이를 가지기 위한 한가지 새로운 필요충분조건과 성질에 대하여 밝혔다.

다음의 다목적선형계획법문제에 대하여 론의하자.

$c_i \in \boldsymbol{R}^n,\ i=1, \cdots, k$ 는 렬벡토르이고 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 이며 $b\in \boldsymbol{R}^m$ 이라고 하자.

$$\max c_i^{\mathrm{T}} x\ \ (i=1, \cdots, k),\ \ Ax\le b,\ \ x\ge 0 \tag{1}$$

여기서 $c_i \ne 0$ 이다.

$\overline{C}$ 는 $c_i^{\mathrm{T}}=(c_{i1},\ c_{i2}, \cdots,\ c_{in})$, $i=1, \cdots, k$ 를 행으로 하는 행렬로서 $k\times n$ 형행렬이다. 즉

$$\overline{C}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kn} \end{pmatrix}.$$

이 행렬을 목적함수결수행렬이라고 부른다.

$X=\{x\in \boldsymbol{R}^n \mid Ax\le b,\ x\ge 0\}$ 은 허용구역이고 E_X 는 다목적선형계획법문제 (1)의 모든 유효풀이들의 모임이며 $X\ne E_X\ne \phi$ $(E_X\subset X)$ 이라고 하자.

목적함수결수행렬에서 일부 행벡토르들이 다른 행들의 정수결수1차결합에 의하여 표시되는 경우가 있다.

$\bar{I}=\{1, 2, \cdots, k\}$ 이고 $I\subset \bar{I}$ $(|I|=p)$ 라고 할 때 임의의 $j\in \bar{I}\setminus I$ 에 대하여 적당한 $\sigma_{ji}>0$ $(i\in I)$ 이 있어서

$$c_j=\sum_{i\in I}\sigma_{ji}c_i \tag{2}$$

로 표시된다고 하자.

C 는 $c_i^{\mathrm{T}},\ i\in I$ 를 행으로 가지는 $p\times n$ 형행렬이고

$$Z=\{z\in \boldsymbol{R}^p \mid z=Cy,\ \ y\in X\},\ \ E_z=\{z\in \boldsymbol{R}^p \mid z=Cy,\ \ y\in E_X\}$$

이며 $\lambda\in \boldsymbol{R}^p,\ \lambda>0$ 이고 $z\in \boldsymbol{R}^p,\ (x,\ u)\in \boldsymbol{R}^n\times \boldsymbol{R}^p$ 라고 하자.

$\overline{C}$ 에 의한 다목적선형계획법문제의 유효풀이와 C 에 의한 다목적선형계획법문제의 유효풀이사이관계를 보기 위하여 다음과 같은 선형계획법문제를 정식화하자.

$$\max\{\lambda^{\mathrm{T}}u \mid Ax \le b,\ u \ge z,\ Cx = u,\ x \ge 0\} \tag{3}$$

이 문제의 변수는 $(x,\ u)$ 이다.

정리 1 $z \in Z$ 가 E_z 의 원소이기 위해서는 $(y,\ z)$ 가 문제 (3)의 최량풀이일것이 필요하고 충분하다. 이때 $(y,\ z)$ 에서 $z = Cy$ 이다.

증명(필요성) $z \in E_z$ 라고 하면 $z = Cy$ 인 유효풀이 y 가 존재한다.

이때 $Cx > Cy$ 인 $x \in X$ 는 존재하지 않는다.

만일 존재한다고 하면 적어도 하나의 $x \in X$ 에 대하여 $Cx \ge Cy$ 이고 $c_i x > c_i y$ 인 $i \in I$ 가 존재한다.

이때 y 는 유효풀이이므로 적어도 하나의 $j \in \bar{I} \setminus I$ 에 대하여 $c_j x > c_i y$ 이다.

식 (2)에 의하여 $\sum_{i \in I} \sigma_{ji} c_i x < \sum_{i \in I} \sigma_{ji} c_i y$ 가 성립된다.

이제 $(y,\ z) \in \boldsymbol{R}^{n+p}$, $z = Cy$ 가 문제 (3)의 최량풀이이라는것을 증명하자.

물론 허용풀이로 된다.

$(y,\ z)$ 가 최량이 아니라고 하자. 즉 허용풀이 $(x,\ u)$ 가 존재하여 $\lambda^{\mathrm{T}}u > \lambda^{\mathrm{T}}z$ 이다.

그러면 $Cx = u \ge z = Cy$ 이고 $\lambda^{\mathrm{T}}Cx > \lambda^{\mathrm{T}}z = \lambda^{\mathrm{T}}Cy$ 이다. 이것은 모순이다.

따라서 $(y,\ z) \in \boldsymbol{R}^{n+p}$, $z = Cy$ 는 문제 (3)의 최량풀이이다.

(충분성) $(y,\ z) \in \boldsymbol{R}^{n+p}$, $z = Cy$ 가 문제 (3)의 최량풀이이라고 하자.

따라서 $\lambda^{\mathrm{T}}u > \lambda^{\mathrm{T}}z$ 인 허용풀이 $(x,\ u)$ 가 존재하지 않는다. 이것은 $Cx > Cy$ 인 x 가 존재하지 않는다는것을 의미한다.

y 가 문제 (1)의 유효풀이가 아니라고 하자. 즉 $\exists x \in X,\ \overline{C}x > \overline{C}y$ 라고 하자.

우의 사실로부터 $Cx = Cy$ 이므로 적당한 $j \in \bar{I} \setminus I$ 에 대하여 $c_j x > c_j y$ 이다. 즉

$$\sum_{i \in I} \sigma_{ji} c_i x > \sum_{i \in I} \sigma_{ji} c_i y\,.$$

이것은 우의 사실과 모순된다.

따라서 y 는 문제 (1)의 유효풀이로 된다. 그러므로 $z = Cy \in E_z$ 이다.(증명끝)

문제 (3)의 쌍대문제를 생각하면 다음의 성질이 성립된다는것을 알수 있다.

정리 2 $\lambda > 0,\ \lambda \in \boldsymbol{R}^p$ 라고 하면 $\Omega = \{(\alpha,\ \beta) \in \boldsymbol{R}^{n+p} \mid A^{\mathrm{T}}\alpha - C^{\mathrm{T}}\beta,\ \alpha \ge 0,\ \beta \ge 0\}$ 이라고 할 때 $X \ne E_X \ne \phi$ 이라는 조건밑에서 Ω 는 적어도 하나의 정점을 가진다.

증명 가정 $X \ne E_X \ne \phi$ 밑에서 y 를 다목적선형계획법문제 (1)의 유효풀이이라고 하자.

매 정수벡토르 $\lambda \in \boldsymbol{R}^p$ 에 대하여 $(y,\ z)$ ($\in \boldsymbol{R}^{n+p}$, $z = Cy$)는 문제 (3)의 최량풀이로 된다.

이 문제의 쌍대문제는 다음의 형태를 가진다.(여기서 변수는 $\alpha \in \boldsymbol{R}^m,\ \beta,\ \gamma \in \boldsymbol{R}^p$ 이다.)

$$\min\{b^{\mathrm{T}}\alpha - z^{\mathrm{T}}\beta \mid A^{\mathrm{T}}\alpha - C^{\mathrm{T}}\gamma \ge 0,\ -\beta + \gamma = \lambda,\ \alpha \ge 0,\ \beta \ge 0\}$$

이 문제를 $\min\{b^{\mathrm{T}}\alpha - z^{\mathrm{T}}\beta \mid A^{\mathrm{T}}\alpha - C^{\mathrm{T}}\beta \ge C^{\mathrm{T}}\lambda,\ \alpha \ge 0,\ \beta \ge 0\}$ 과 같이 변형하자.

선형계획법문제의 쌍대성으로부터 우의 문제는 최량풀이를 가진다. 즉 이 문제의 허

용모임 Ω는 비지 않은 모임이다.

$\alpha \ge 0$, $\beta \ge 0$이므로 Ω는 하나의 정점을 가진다.(증명끝)

Ω의 정점들의 비지 않은 모임을 $V(\Omega)$라고 하자.

정리 1, 2에 기초하여 정수벡토르 $\lambda = (1, 1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}} \in \boldsymbol{R}^p$를 선택하고 매 $z \in \boldsymbol{R}^p$에 다음과 같은 함수값을 대응시키자.

$$\bar{g}(z) = \min\{b^{\mathrm{T}}\alpha - z^{\mathrm{T}}\beta \mid A^{\mathrm{T}}\alpha - C^{\mathrm{T}}\beta \ge C^{\mathrm{T}}\lambda,\ 0 \le \alpha \le \bar{\alpha},\ 0 \le \beta \le \bar{\beta}\}$$

여기서 $\bar{\alpha}$와 $\bar{\beta}$는 $\boldsymbol{R}^m$, $\boldsymbol{R}^p$의 주어진 벡토르이다.

이때 $V(\Omega) \subset \{(\alpha, \beta) \mid 0 \le \alpha \le \bar{\alpha},\ 0 \le \beta \le \bar{\beta}\}$가 성립된다.

함수 $g: \boldsymbol{R}^p \to \boldsymbol{R}$, $g(z) = \bar{g}(z) - \lambda^{\mathrm{T}} z$를 정의하자.

정리 3 $y \in X$가 문제 (1)의 유효풀이이기 위해서는 $z = Cy$인 z에 대하여 $g(z) = 0$일것이 필요하고 충분하다.(증명생략)

참 고 문 헌

[1] 리종욱 등; 최량화방법, **김일성**종합대학출판사, 34～68, 주체88(1999).

[2] Ta Van Tu; European J. Oper. Res., 122, 570, 2000.

[3] M. Murat et al.; European J. Oper. Res., 212, 535, 2011.

[4] Dinh The Luc; European J. Oper. Res., 210, 158, 2011.

주체105(2016)년 11월 5일 원고접수

On a Property of Efficient Solution in Multiobjective Linear Programming

Ri Hong Il, Pak Yong Song

We consider a property of the efficient solution in the multiobjective linear programming.

We analyze a dependence of row vectors of the coefficient matrix of the objective functions in multiobjective linear programming and propose a new necessary and sufficient condition to be the efficient solution based on it.

Key words: multiobjective linear programming, efficient solution, coefficient matrix