김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제4호

비등질비선형슈뢰딩게르형방정식의 꼬쉬문제

기례경, 안진명

론문에서는 수학과 물리학에서 많이 론의되고있는 비선형슈뢰딩게르형방정식

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u + a\Delta^2 u = f(u) \\ u(0,\ x) = u_0(x) \end{cases} \tag{1}$$

에 대한 연구를 진행하였다. 여기서 $u(t,\ x)$는 $(t,\ x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$에 관한 복소수값함수이며 Δ는 라쁠라스연산자, $f(u)$는 비선형항이다. 그리고 $a \in \{0,\ 1\}$이다. $a = 0$인 경우는 수학과 물리학에서 광범히 연구되고있는 슈뢰딩게르방정식이고 $a = 1$인 경우도 역시 잘 알려진 4계슈뢰딩게르방정식이다.

비선형항이 $f(u) = \lambda |u|^\sigma u$ ($\lambda \in \mathbf{R}$)인 경우 즉 고전적인 비선형슈뢰딩게르방정식과 4계슈뢰딩게르방정식은 이미 지난 30여년동안 광범히 연구되였다.

최근에는 비선형항이 $f(u) = V(x)|u|^\sigma u$인 경우 특히 $V(x) = \lambda |x|^{-b}$ ($b > 0$, $\lambda \in \mathbf{R}$)일 때 그 연구가 활발히 진행되고있다. 비선형항 $f(u) = V(x)|u|^\sigma u$의 물리적배경에 대해서는 선행연구[5]를 참고할수 있다.

우리는 최근 활발히 연구되고있는 비등질비선형슈뢰딩게르형방정식의 꼬쉬문제

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u + a\Delta^2 u = \lambda |x|^{-b} |u|^\sigma u \\ u(0,\ x) = u_0(x) \end{cases} \tag{2}$$

의 풀이의 유일존재성에 대한 연구를 진행하였다. 여기서 $\lambda \in \mathbf{R}$, $b > 0$, $a \in \{0,\ 1\}$이다.

방정식 (2)는 다음의 동등한 적분형식

$$u(t) = S(t)u_0 - i\lambda \int_0^t S(t-\tau)|x|^{-b} |u(\tau)|^\sigma u(\tau) d\tau \tag{3}$$

를 가진다. 여기서 $S(t) = F^{-1} e^{it(|\xi|^2 - a|\xi|^4)} F$이다. 표준적인 척도론의로부터 $s < n/2$일 때 방정식 (2)의 쏘볼레브공간 $\dot{H}^s(\mathbf{R}^n)$에 대한 림계제곱지수는 다음과 같이 주어진다.

$$\sigma_s = \begin{cases} \dfrac{4-2b}{n-2s},\ a = 0 \\ \dfrac{8-2b}{n-2s},\ a = 1 \end{cases} \tag{4}$$

비등질비선형슈뢰딩게르형방정식의 꼬쉬문제 (2)의 풀이의 유일존재성에 대한 연구는 최근에 활발히 진행되고있다.

선행연구[2−4]에서는 $a = 0$이고 $0 < b < \min\{2,\ n\}$, $0 < \sigma < \sigma^*$일 때 $H^1(\mathbf{R}^n)$에서 방정식 (2)의 풀이의 국부적 및 대역적유일존재성을 연구하였다.

선행연구[5]에서는 슈트리카르츠평가에 기초한 축소넘기기원리를 리용하여 $H^s(\mathbf{R}^n)$ $(0 \le s \le 1)$에서 방정식 (2)의 풀이의 국부적 및 대역적유일존재성을 증명하였다.

구체적으로 보면 $0<\sigma<\sigma_s$ 이고 $0<b<\widetilde{2}$, $0<s\le\min\left\{\dfrac{n}{2},\ 1\right\}$ 인 경우 $H^s(\mathbf{R}^n)$ 의 임의의 초기값에 대하여 방정식 (2)는 유일한 국부적풀이를 가진다는것을 증명하였다. 여기서

$$\widetilde{2}=\begin{cases}\dfrac{n}{3}, & n=1,\ 2,\ 3\\ 2, & n\ge 4\end{cases} \tag{5}$$

이다. 또한 일부 대역적결과들도 얻었다.

$a=0$ 과 $a=1$ 일 때 $H^s(\mathbf{R}^n)$ $(0\le s\le 1)$에서 방정식 (2)의 풀이의 유일존재성을 증명한다. 이를 위하여 비선형항 $\lambda|x|^{-b}|u|^{\sigma}u$ 에 대한 새로운 평가들을 진행하고 비선형분산방정식연구에서 위력한 방법인 슈트리카르츠평가에 기초한 축소넘기기원리를 리용한다.

보조정리 1 [6] $S_2(t)=F^{-1}e^{it|\xi|^2}F$ 이고 $2\le p,\ r\le 2^*$, $p,\ r\ne\infty$ 라고 하자. 이때

$$\|S_2(t)\phi\|_{L^{\gamma(p)}(I,\dot{H}^s_p)}\le C\|\phi\|_{\dot{H}^s} \tag{6}$$

$$\left\|\int_0^t S_2(t-\tau)f(\tau,\ x)d\tau\right\|_{L^{\gamma(p)}(I,\dot{H}^s_p)}\le C\|f\|_{L^{\gamma(r)'}(I,\dot{H}^s_{r'})} \tag{7}$$

이 성립한다. 여기서 $I\subset\mathbf{R}$ 는 구간이고

$$2^*:=\begin{cases}\dfrac{2n}{(n-2)}, & n>2\\ \infty, & n\le 2\end{cases},\quad \frac{1}{\gamma(\cdot)}=\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\cdot}\right) \tag{8}$$

이다.

보조정리 2 [1] $S_4(t)=F^{-1}e^{it(|\xi|^2-|\xi|^4)}F$, $2\le p,\ r\le 4^*$, $p,\ r\ne\infty$ 라고 하자. 이때

$$\|S_4(t)\phi\|_{L^{\beta(p)}(I,\dot{H}^s_p)}\le C\|\phi\|_{\dot{H}^s} \tag{9}$$

$$\left\|\int_0^t S_4(t-\tau)f(\tau,\ x)d\tau\right\|_{L^{\beta(p)}(I,\dot{H}^s_p)}\le C\|f\|_{L^{\beta(r)'}(I,\dot{H}^s_{r'})} \tag{10}$$

이 성립한다. 여기서 $I\subset\mathbf{R}$ 는 구간이고

$$4^*:=\begin{cases}2n/(n-4), & n>4\\ \infty, & n\le 4\end{cases},\quad \frac{1}{\beta(\cdot)}=\frac{n}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\cdot}\right) \tag{11}$$

이다.

주의 1 $B=B(0,\ 1)=\{x\in\mathbf{R}^n;|x|\le 1\}$ 이고 $b>0$ 이라고 하자. 이때 $n/\gamma>b$ 이면 $|x|^{-b}\in L^{\gamma}(B)$ 이 성립한다. 사실

$$\int_B |x|^{-\gamma b}\,dx=c\int_0^1 r^{-\gamma b}r^{n-1}dr=c_1 r^{n-\gamma b}\Big|_0^1<+\infty$$

가 성립한다. 류사하게 $n/\gamma<b$ 이면 $|x|^{-b}\in L^{\gamma}(B^C)$ 이 성립한다.

보조정리 3 $n=1,\ 2$ 이고 $0\le s<\frac{n}{2}$, $0<b<n-s$, $0<\sigma<\frac{4-2b}{n-2s}$ 라고 하자. 이때

$$\inf_{2\le r<\infty}\| |x|^{-b}|u|^{\sigma} v\|_{L^{\gamma(r)'}(I,\ L^{r'})}\le C(T^{\theta_1}+T^{\theta_2})\sup_{2\le r<\infty}\|u\|^{\sigma}_{L^{\gamma(r)}(I,\ \dot{H}^s_r)}\sup_{2\le r<2^*}\|v\|_{L^{\gamma(r)}(I,\ L^r)} \tag{12}$$

$$\inf_{2\le r<\infty}\| |x|^{-b}|u|^{\sigma} u\|_{L^{\gamma(r)'}(I,\ \dot{H}^s_{r'})}\le C(T^{\theta_1}+T^{\theta_2})\sup_{2\le r<\infty}\|u\|^{\sigma+1}_{L^{\gamma(r)}(I,\ \dot{H}^s_r)} \tag{13}$$

이 성립한다. 여기서 $I=[0,\ T]$, θ_1, $\theta_2>0$ 이고 $\gamma(r)$ 는 식 (8)에 정의되여있다.

보조정리 4 $0\le s\le 1$, $n>2s$, $0<b<\min\{4,\ n-2s\}$, $0<\sigma<\frac{8-2b}{n-2s}$ 라고 하면

$$\inf_{2\le r<4^*}\| |x|^{-b}|u|^{\sigma} v\|_{L^{\beta(r)'}(I,\ L^{r'})}\le C(T^{\theta_1}+T^{\theta_2})\sup_{2\le r<4^*}\|u\|^{\sigma}_{L^{\beta(r)}(I,\ \dot{H}^s_r)}\sup_{2\le r<4^*}\|v\|_{L^{\beta(r)}(I,\ L^r)} \tag{14}$$

$$\inf_{2\le r<4^*}\| |x|^{-b}|u|^{\sigma} u\|_{L^{\beta(r)'}(I,\ \dot{H}^s_{r'})}\le C(T^{\theta_1}+T^{\theta_2})\sup_{2\le r<4^*}\|u\|^{\sigma+1}_{L^{\beta(r)}(I,\ \dot{H}^s_r)} \tag{15}$$

이 성립한다. 여기서 $I=[0,\ T]$, θ_1, $\theta_2>0$ 이고 4^*과 $\beta(r)$ 는 식 (11)에 정의되여있다.

정리 1 $a=0$ 이고 $n=1,\ 2$, $0\le s<\frac{n}{2}$, $0<b<n-s$, $0<\sigma<\frac{4-2b}{n-2s}$ 라고 하자. 그러면 임의의 $u_0\in H^s(\mathbf{R}^n)$ 에 대하여 어떤 $T(>0)$ 가 존재하여 식 (2)는 유일한 풀이

$$u\in\bigcap_{2\le r<\infty}L^{\gamma(r)}([0,\ T],\ H^s_r(\mathbf{R}^n)) \tag{16}$$

를 가진다. 여기서 $\gamma(p)$ 는 식 (8)에 정의되여있다.

증명 $X=\bigcap_{2\le r<\infty}L^{\gamma(p)}([0,\ T],\ H^s_r(\mathbf{R}^n))$, $\|u\|_X=\sup_{2\le r<\infty}\|u\|_{L^{\gamma(r)}(I,\ L^r)}+\sup_{2\le r<\infty}\|u\|_{L^{\gamma(r)}(I,\ \dot{H}^s_r)}$ 라고 하자. $M>0$, $T>0$ 에 대하여 완비거리공간

$$D=\{u\in X:\|u\|_X\le M\},\ \ d(u,\ v)=\sup_{2\le r<\infty}\|u-v\|_{L^{\gamma(r)}(I,\ L^r)}$$

을 정의하자. 다음 넘기기

$$G:u(t)\to S_2(t)u_0-i\lambda\int_0^t S_2(t-\tau)|x|^{-b}|u(\tau)|^{\sigma}u(\tau)d\tau$$

를 고찰하자. 여기서 기본은 어떤 $T,\ M>0$ 이 있어서 $G:(D,\ d)\to(D,\ d)$ 가 축소넘기기라는것을 증명하는것이다. 보조정리 1로부터

$$\|Gu\|_X\le C\left(\|u_0\|_{H^s}+\inf_{2\le r<\infty}\| |x|^{-b}|u|^{\sigma}u\|_{L^{\gamma(r)'}(I,\ L^{r'})}+\inf_{2\le r<\infty}\| |x|^{-b}|u|^{\sigma}u\|_{L^{\gamma(r)'}(I,\ \dot{H}^s_{r'})}\right) \tag{17}$$

$$d(Gu,\ Gv)\le C\inf_{2\le r<\infty}\| |x|^{-b}|u|^{\sigma}u-|x|^{-b}|v|^{\sigma}v\|_{L^{\gamma(r)'}(I,\ L^{r'})} \tag{18}$$

이 성립한다. 식 (17)과 보조정리 3으로부터

$$\| Gu \|_X \le C \| u_0 \|_{H^s} + C(T^{\theta_1} + T^{\theta_2}) M^{\sigma+1} \tag{19}$$

이 성립한다. 마찬가지로 다음의 식이 성립한다.[5]

$$\| x|^{-b} |u|^{\sigma} u - |x|^{-b} |v|^{\sigma} v | \le C |x|^{-b} (|u|^{\sigma} + |v|^{\sigma}) |u - v| \tag{20}$$

따라서 식 (19)와 (20), 보조정리 3으로부터

$$d(Gu,\ Gv) \le 2C(T^{\theta_1} + T^{\theta_2}) M^{\sigma} d(u,\ v) \tag{21}$$

가 성립한다. $M = 2C \| u_0 \|_{\dot{H}^s}$ 으로 놓고 $T(>0)$ 를 $C(T^{\theta_1} + T^{\theta_2}) M^{\sigma} \le 1/4$ 이 만족되도록 택하자. 그러면 식 (19)와 (21)로부터 $G:(D,\ d) \to (D,\ d)$ 가 축소넘기기라는것이 증명되였다. 따라서 바나흐부동점정리로부터 $(D,\ d)$ 에는 식 (2)의 유일풀이가 존재한다.(증명끝)

정리 2　$a=1$ 이고 $0 \le s \le 1$, $n > 2s$, $0 < b < \min\{4,\ n-2s\}$, $0 < \sigma < \dfrac{8-2b}{n-2s}$ 라고 하자. 그러면 임의의 $u_0 \in H^s(\mathbf{R}^n)$ 에 대하여 어떤 $T(>0)$ 가 존재하여 식 (2)는 유일한 풀이

$$u \in \bigcap_{2 \le p < 4^*} L^{\beta(p)}([0,\ T],\ H_p^s(\mathbf{R}^n)) \tag{22}$$

을 가진다. 여기서 4^* 과 $\beta(p)$ 는 식 (11)에 정의되여있다.

주의 2　선행연구[2－5]에서는 모두 $a=0$ 인 경우 식 (2)의 풀이의 유일존재성을 증명하였다. 정리 1과 정리 2, 정리 3에서는 $a=0$ 인 경우와 함께 $a=1$ 인 경우에도 식 (2)의 풀이의 유일존재성을 증명하였다.

주의 3　$a=0$, $n=1,\ 2$ 인 경우 식 (2)의 풀이의 유일존재성을 밝힌 정리 1의 결과는 선행연구[5]의 결과를 개선하였다. 사실 정리 1에서는 $n=1,\ 2$ 이고 $0 < s < n/2$ 인 경우 $0 < b < n-s$ 에 대하여 식 (2)의 풀이의 유일존재성을 증명하였다. 반면에 선행연구[5]에서는 우와 같은 경우에 $0 < b < n/3$ 에 대하여 풀이의 유일존재성을 증명하였다. 이때 분명히 $n-s > n/2 > n/3$ 이 성립하므로 b 의 범위가 개선되였다.

참 고 문 헌

[1] 문학명, 김진명; 수학, 2, 52, 주체107(2018).

[2] L. G. Farah; J. Evol. Equ., 16, 1, 193, 2016.

[3] F. Genoud et al.; Discrete Contin. Dyn. Syst., 21, 1, 137, 2008.

[4] F. Genoud; J. Anal. Anwend., 31, 3, 283, 2012.

[5] C. M. Guzmán; Nonlinear Anal., 37, 249, 2017.

[6] B. X. Wang et al.; Harmonic Analysis Method for Nonlinear Evolution Equations, I, World Scientific, Singapore, 1～90, 2011.

주체109(2020)년 6월 5일 원고접수

The Cauchy Problem of the Inhomogeneous Nonlinear Schrödinger Type Equation

Ki Rye Gyong, *An Jin Myong*

In this paper we study the existence and uniqueness of solutions to the inhomogeneous nonlinear Schrödinger type equation $iu_t + \Delta u + \Delta^2 u = \lambda |x|^{-b} |u|^{\sigma} u$ with initial data in $H^s(\mathbf{R}^n)$ $(0 \le s \le 1)$.

Keywords: inhomogeneous nonlinear Schrödinger type equation, Cauchy problem