김일성종합대학학보 주체110(2021)년
수 학 제67권 제3호

비약을 가진 분수확률미분방정식모형에서 기하평균무지개선택권의 가격공식

김 주 경

경애하는 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《과학연구부문에서는 나라의 경제발전과 인민생활향상에서 전망적으로 풀어야 할 문제들과 현실에서 제기되는 과학기술적문제들을 풀고 첨단을 돌파하여 지식경제건설의 지름길을 열어놓아야 합니다.》

우리는 비약을 가진 분수확률미분방정식모형에서 기하평균무지개선택권의 가격화문제를 연구하였다.

선행연구[1]에서는 브라운운동으로 묘사되는 금융시장에서 기하평균선택권의 가격화문제를, 선행연구[2]에서는 끝값무지개선택권의 가격공식을 유도하였다. 선행연구[3, 4]에서는 분수브라운운동으로 묘사되는 금융시장에서 기하평균무지개선택권의 가격화문제를 연구하였다.

그러나 비약측도가 있는 금융시장에서 무지개선택권의 가격화문제는 아직 연구하지 못하였다. 그것은 비약측도가 있는 경우에 가격방정식이 편미분－적분방정식으로 유도되는데 이 방정식은 몇가지 특수한 경우에만 푸는 방법이 제기되였기때문이다.

론문에서는 분수브라운운동과 비약측도에 관한 확률미분방정식으로 묘사되는 금융시장에서 기하평균무지개선택권의 가격문제를 연구하였다. 편미분－적분방정식을 편미분방정식과 적분방정식으로 분해하여 각각의 풀이를 구하고 이 풀이들을 합성적하는 방법으로 선택권의 가격공식을 유도하였다. 이것은 독립인 두 우연량의 합의 분포가 각각의 분포의 합성적으로 표시된다는 원리에 기초하고있다. 그러나 지금까지 이 원리를 편미분－적분방정식에 적용하지 못하는것은 적분방정식의 풀이가 일반적으로 초함수이지만 미분가능한 함수모임에서 그 풀이를 찾으려고 하였기때문이다.

완비확률공간 $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ 우에서 동일독립이며 밀도함수가 $p_i(x)\ (i=1,\ 2)$ 인 우연량렬 $\{\xi_{ik}\}_{k=1,\,2,\,\cdots;\ i=1,\,2}$ 와 독립인 뽜쏭과정 $\{N_i(t),\ t\ge 0\}\ (i=1,\ 2)$ 에 대하여 복합뽜쏭과정을 다음과 같이 정의한다.

$$\xi_i(t)=\sum_{k=1}^{N_i(t)}\xi_{ik}\quad (i=1,\ 2)$$

복합뽜쏭과정으로 이루어진 옹근수우연측도 $\mu_i(dt,\ dz)\ (i=1,\ 2)$ 는 임의의 $t\in[0,\ T]$ 와 $\Gamma\in B_0=B\setminus\{0\}$ 에 대하여

$$\mu_i((0,\ t],\ \Gamma)=\sum_{k=1}^{N_i(t)}I_\Gamma(\xi_{ik})$$

로 정의한다. 여기서 B 는 $\mathbf{R}^1$ 에서 보렐모임이고 $I_\Gamma(\cdot)$ 는 Γ 에서 1을 취하고 아니면 0을 취하는 함수이다. 그리고 $\mu_i(dt,\ dz)$ 의 보정자는

$$\mathbf{E}\mu_i(dt,\ dz)=\nu_i(dt,\ dz)=\nu_i(dz)dt=\lambda_i p_i(z)dzdt$$

와 같다. 옹근수우연측도 $\mu_i(dt,\ dz)$ 를 중심화하면

$$\tilde{\mu}_i(dt,\ dz)=\mu_i(dt,\ dz)-\nu_i(dt,\ dz)$$

이다. 그러면 복합뽜쏭과정은 적분형식으로 다음과 같이 표시할수 있다.

$$\xi_i(t)=\int_0^t\int_{|z|>0} z\mu_i(ds,\ dz)=m_i t+\int_0^t\int_{|z|>0} z\tilde{\mu}_i(ds,\ dz)$$

$$m_i=\int_{|z|>0} z\nu_i(dz)\ \ (i=1,\ 2)$$

금융시장에는 두가지 자산이 있다. 하나는 위험이 없는 자산으로서 가격과정 $S_0(t)$ 가 다음의 미분방정식을 만족시킨다고 가정한다.

$$dS_0(t)=rS_0(t)dt,\ S_0(0)=1 \tag{1}$$

여기서 r 는 리자률이다.

다른 하나는 련속위험과 비약위험이 있는 2개의 위험자산으로서 가격과정 $S_i(t)$ $(i=1,\ 2)$ 가 다음의 확률미분방정식을 만족시킨다고 가정한다.

$$\begin{cases} dS_i(t)=\tilde{a}_i S_i(t)dt+\sigma_i S_i(t)dB_i^H(t)+S_i(t)d\left(\sum_{k=1}^{N_i(t)}\xi_{ik}\right) \\ S_i(0)=S_i\ \ (i=1,\ 2) \end{cases} \tag{2}$$

또는

$$\begin{cases} dS_i(t)=a_i S_i(t)dt+\sigma_i S_i(t)dB_i^H(t)+S_i(t)\int_{|z|>0} z\tilde{\mu}_i(dt,\ dz) \\ S_i(0)=S_i\ \ (i=1,\ 2) \end{cases} \tag{3}$$

여기서 $a_i=\tilde{a}_i+m_i=\tilde{a}_i+\lambda_i\mathbf{E}(\xi_{i1})$ 은 기대수익률, σ_i 는 변동률이다. $B_1^H(t)$ 와 $B_2^H(t)$ 는 파라메터가 $H\in(0,\ 1)$ 인 분수브라운운동이고 상관결수는 ρ 이다.

위험중성측도 P^* 을 라돈—니코딤의 도함수가

$$\frac{dP^*}{dP}=Z(T) \tag{4}$$

$$dZ(t)=\sum_{i=1}^2\theta_i(t)Z(t)dB_i^H(t)+\sum_{i=1}^2\int_{|z|>0}\gamma_i(t,\ z)Z(t)\tilde{\mu}_i(dt,\ dz),\ 0\le t\le T \tag{5}$$

를 만족시키도록 취한다. 여기서 $\theta_i(t),\ \gamma(t,\ z)$ 는

$$\int_0^t\theta_i(s)\phi(s,\ t)ds=(a_i-r)/\sigma_i,\ \gamma_i(t,\ z)=0$$

$$\phi(s,\ t)=H(2H-1)|t-s|^{2H-2}$$

을 만족시킨다. 그러면 기르싸노브정리에 의하여 위험중성측도 P^* 에서

$$B_i^{*H}(t)=B_i^H(t)+\int_0^t\int_0^t\theta_i(s)\phi(s,\ \tau)dsd\tau \tag{6}$$

로 정의되는 $\{B_i^{*H}(t)\}_{t\in[0,\ T]}$ 는 분수브라운운동이다. 그러므로 위험중성측도 P^* 에서 자산

가격방정식은

$$dS_i(t) = rS_i(t)dt + \sigma_i S_i(t)dB_i^{*H}(t) + S_i(t)\int_{|z|>0} z\tilde{\mu}_i(dt,\ dz) \tag{7}$$

로 표시된다. 시간구간 $[0,\ t]$ 에서 기초자산 $\{S_i(\tau)\}$ 에 대한 기하평균은

$$\exp\{I_i(t)/t\},\quad I_i(t) = \int_0^t \ln S_i(\tau)\,d\tau \quad (i=1,\ 2)$$

이다. 실시가격이 K 이고 만기일이 T 일 때 $(\min(\exp\{I_1(T)/T\},\ \exp\{I_1(T)/T\}) - K)^+$ 는 기하평균무지개선택권의 지불액이다. $V(t,\ S_1,\ S_2,\ I_1,\ I_2)$ 를 이 선택권의 t 시각의 가격이라고 하면 다음의 결과가 나온다. 여기서 $S_1,\ S_2,\ I_1,\ I_2$ 는 t 시각의 $S_1(t),\ S_2(t),\ I_1(t),\ I_2(t)$ 의 값이다.

정리 1 기초자산가격과정 $\{S_i(t)\}$ 가 방정식 (7)을 만족시킨다고 하자. 그러면 기하평균무지개구매선택권의 t 시각의 가격 $V(t,\ S_1,\ S_2,\ I_1,\ I_2)$ 는 다음의 편미분—적분방정식을 만족시킨다.

$$\begin{aligned}&\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{2}\sigma_i^2 Ht^{2H-1}S_i^2\frac{\partial^2 V}{\partial S_i^2} + 2\sigma_1\sigma_2\rho Ht^{2H-1}S_1S_2\frac{\partial^2 V}{\partial S_1\partial S_2} + \sum_{i=1}^{2}\left[rS_i\frac{\partial V}{\partial S_i} + \ln S_i\frac{\partial V}{\partial I_i}\right] - rV + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{2}\int_{|z|>0}\left[V(t,\ S_i(1+z),\ \cdot\ ) - V(t,\ \cdot\ ) - zS_i\frac{\partial V}{\partial S_i}\right]v_i(dz) = 0\end{aligned} \tag{8}$$

$$V(T,\ S_1,\ S_2,\ I_1,\ I_2) = (\min(\exp\{I_1/T\},\ \exp\{I_2/T\}) - K)^+$$

증명 $V(t,\ S_1(t),\ S_2(t),\ I_1(t),\ I_2(t))$ 에 적분변환공식을 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}V(T,\cdot) = V(t,\cdot) + \int_t^T\Bigg\{&\frac{\partial V}{\partial t} + \sigma_1^2 Hs^{2H-1}S_1^2\frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + \sigma_2^2 Hs^{2H-1}S_2^2\frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} + \\ &+ 2\sigma_1\sigma_2\rho Hs^{2H-1}S_1S_2\frac{\partial^2 V}{\partial S_1\partial S_2} + \ln S_1\frac{\partial V}{\partial I_1} + \ln S_2\frac{\partial V}{\partial I_2} + rS_1\frac{\partial V}{\partial S_1} + rS_2\frac{\partial V}{\partial S_2} + \\ &+ \int_{|z|>0}\left[V(s,\ S_1(1+z),\ \cdot\ ) - V(s,\ S_1,\ \cdot\ ) - zS_1\frac{\partial V}{\partial S_1}\right]v_1(dz) + \\ &+ \int_{|z|>0}\left[V(s,\ \cdot,\ S_2(1+z),\ \cdot\ ) - V(s,\ \cdot,\ S_2,\ \cdot\ ) - zS_2\frac{\partial V}{\partial S_2}\right]v_2(dz)\Bigg\}ds + \\ &+ \int_t^T\left[\sigma_1S_1\frac{\partial V}{\partial S_1}dB_1^{*H} + \sigma_2S_2\frac{\partial V}{\partial S_2}dB_2^{*H}\right]ds + \\ &+ \int_t^T\Bigg\{\int_{|z|>0}[V(s,\ S_1(1+z),\ \cdot\ ) - V(s,\ S_1,\ \cdot\ )]\mu_1(ds,\ dz) + \\ &+ \int_{|z|>0}[V(s,\ \cdot,\ S_2(1+z),\ \cdot\ ) - V(s,\ \cdot,\ S_2,\ \cdot\ )]\mu_2(ds,\ dz)\Bigg\}\end{aligned}$$

가격과정 $V(t,\ \cdot)$를 할인하면 $\tilde{V}(t,\ \cdot)=e^{-rt}V(t,\ \cdot)$이고 다시 방정식을 작성하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
e^{-rT}V(T,\cdot)=e^{-rt}V(t,\cdot)+\int_t^T\Bigg\{&\frac{\partial V}{\partial t}-rV+\sigma_1^2Hs^{2H-1}S_1^2\frac{\partial^2V}{\partial S_1^2}+\sigma_2^2Hs^{2H-1}S_2^2\frac{\partial^2V}{\partial S_2^2}+\\
&+2\sigma_1\sigma_2\rho Hs^{2H-1}S_1S_2\frac{\partial^2V}{\partial S_1\partial S_2}+\ln S_1\frac{\partial V}{\partial I_1}+\ln S_2\frac{\partial V}{\partial I_2}+rS_1\frac{\partial V}{\partial S_1}+rS_2\frac{\partial V}{\partial S_2}+\\
&+\int_{|z|>0}\left[V(s,\ S_1(1+z),\ \cdot)-V(s,\ S_1,\ \cdot)-zS_1\frac{\partial V}{\partial S_1}\right]\nu_1(dz)+\\
&+\int_{|z|>0}\left[V(s,\cdot,\ S_2(1+z),\ \cdot)-V(s,\cdot,\ S_2,\ \cdot)-zS_2\frac{\partial V}{\partial S_2}\right]\nu_2(dz)\Bigg\}ds+\\
&+\int_t^T\left[\sigma_1S_1e^{-rs}\frac{\partial V}{\partial S_1}dB_1^{*H}(s)+\sigma_2S_2e^{-rs}\frac{\partial V}{\partial S_2}dB_2^{*H}(s)\right]ds+\\
&+\int_t^T\Bigg\{e^{-rs}\int_{|z|>0}[V(s,\ S_1(1+z),\ \cdot)-V(s,\ S_1,\ \cdot)]\tilde{\mu}_1(ds,\ dz)+\\
&+e^{-rs}\int_{|z|>0}[V(s,\ \cdot,\ S_2(1+z),\cdot)-V(s,\cdot,\ S_2,\cdot)]\tilde{\mu}_2(ds,\ dz)\Bigg\}
\end{aligned}
$$

위험중성측도하에서 할인한 가격과정은 마르팅게일이다. $\mathbf{E}^*$은 P^*의 수학적기대값이다.

$$V(t,\cdot)=e^{-r(T-t)}\,\mathbf{E}^*[V(T,\cdot)\,|\,\mathcal{F}_t] \tag{9}$$

이고 량변에 조건부기대값을 취하면 마르팅게일항들은 령이므로 정리의 결과가 나온다.(증명끝)

다음으로 방정식 (8)을 풀기 위하여 이 방정식을 다음의 2개의 방정식 즉 편미분방정식과 적분방정식으로 각각 분해한다.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial t}+\sigma_1^2Ht^{2H-1}S_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial S_1^2}+\sigma_2^2Ht^{2H-1}S_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial S_2^2}+2\sigma_1\sigma_2\rho Ht^{2H-1}S_1S_2\frac{\partial^2 f}{\partial S_1\partial S_2}+\\
&\quad+\ln S_1\frac{\partial f}{\partial I_1}+\ln S_2\frac{\partial f}{\partial I_2}+\tilde{r}_1S_1\frac{\partial f}{\partial S_1}+\tilde{r}_2S_2\frac{\partial f}{\partial S_2}-rf=0 \qquad (10)\\
&f(T,\ S_1,\ S_2,\ I_1,I_2)=(\min\{\exp(I_1/T),\ \exp(I_2/T)\}-K)^+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial g}{\partial t}+\int_{|z|>0}[g(t,\ S_1(1+z),\ S_2)-g(t,\ S_1,\ S_2)]\,\nu_1(dz)+\\
&\quad+\int_{|z|>0}[g(t,\ S_2,\ S_2(1+z))-g(t,\ S_2,\ S_2)]\,\nu_2(dz)=0 \qquad (11)\\
&g(T,\ S_1,\ S_2)=\delta(S_1,\ S_2)
\end{aligned}
$$

여기서 $\tilde{r}_i=r-m_i=r-\int_{|z|>0}z\nu_i(dz)$이고 $\delta(S_1,\ S_2)$는 디라크함수이다.

선행연구[3]에 의하여 방정식 (10)의 풀이는 다음과 같다.

$$f(t,\ S_1,\ S_2,\ I_1,\ I_2) = S_1^* e^{-r(T-t)+\sigma_1^2\tau/2} N_2(d_{11},\ d_{12};\ \rho_1) + \\ + S_2^* e^{-r(T-t)+\sigma_2^2\tau/2} N_2(d_{11},\ d_{12};\ \rho_2) - Ke^{-r(T-t)} N_2(d_{31},\ d_{32};\ \rho) \tag{12}$$

$$d_{11} = \frac{\ln(S_1^*/K) + \sigma_1^{*2}(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma_1^* \sqrt{(T^{2H} - t^{2H})}}$$

$$d_{12} = \frac{\ln(S_2^*/S_1^*) + (\rho\sigma_1^*\sigma_2^* - \sigma_1^{*2})(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma_{12}^* \sqrt{(T^{2H} - t^{2H})}}$$

$$d_{21} = \frac{\ln(S_2^*/K) + \sigma_2^{*2}(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma_2^* \sqrt{(T^{2H} - t^{2H})}} \tag{13}$$

$$d_{22} = \frac{\ln(S_1^*/S_2^*) + (\rho\sigma_1^*\sigma_2^* - \sigma_2^{*2})(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma_{12}^* \sqrt{(T^{2H} - t^{2H})}}$$

$$d_{31} = \frac{\ln(s_1^*/K)}{\sigma_1^* \sqrt{T^{2H} - t^{2H}}},\ d_{32} = \frac{\ln(s_2^*/K)}{\sigma_2^* \sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}$$

$$\rho_1 = \frac{\rho\sigma_2^* - \sigma_1^*}{\sigma_{12}^*},\ \rho_2 = \frac{\rho\sigma_1^* - \sigma_2^*}{\sigma_{12}^*},\ \sigma_{12} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}$$

이고 $t=0$ 에서

$$S_i^* = \exp\left\{\ln S_i(0) + \frac{\tilde{r}_i T}{2} + \frac{H\sigma_i^2 T^{2H}}{2H+1} - \frac{T^{2H}\sigma_i^2}{2}\right\}\ (i=1,\ 2) \\ \sigma_i^* = \sigma_i \sqrt{1 - \frac{4H}{2H+1} + \frac{H}{H+1}}\ \ (i=1,\ 2,\ 12) \tag{14}$$

이며 $N_2(x,\ y,\ \rho)$ 는 상관결수가 ρ 인 $(x,\ y)$ 에서 정규분포함수값이다.

정리 2 방정식 (11)의 풀이는 다음과 같다.

$$g(t,\ S_1,\ S_2) = \sum_{l_1,\ l_2=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^{l_1}\lambda_1^{l_1}(T-t)^{l_1+l_2}}{l_1!l_2!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)(T+t)} \tilde{p}_1^{*l_1}(S_1)\tilde{p}_2^{*l_2}(S_2) \tag{15}$$

증명 변수변환을 다음과 같이 진행하자.

$$x = \ln(S_1),\ y = \ln(S_2),\ h(z) = \ln(1+z),\ g(t,\ S_1,\ S_2) = u(t,\ x,\ y)$$

방정식 (11)의 종점조건을 $g_n(T,\ S_1,\ S_2) = \varphi_n(S_1,\ S_2)$ 로 교체하자. $\{\varphi_n(S_1,\ S_2)\}_{n=1,\ 2,\ \cdots}$ 은 매 n 에 대하여 $[0,\ \infty)$ 에서 정의되고 무한번미분가능한 함수이며 $n \to \infty$ 일 때 $\delta(S_1,\ S_2)$ 에로 수렴하는 함수렬이다. $\varphi_n(S_1,\ S_2)$ 의 변수변환된 함수는 $\tilde{\varphi}_n(x,\ y)$ 이다. 그러면 방정식 (11)은 다음의 방정식으로 넘어간다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \int_{|z|>0} [u(t,\ x+h(z),\ y) - u(t,\ x,\ y)]\nu_1(dz) + \\ + \int_{|z|>0} [u(t,\ x,\ y+h(z)) - u(t,\ x,\ y)]\nu_2(dz) = 0,\ (t,\ x,\ y) \in [0,\ T] \times \mathbf{R}^2 \\ u(T,\ x,\ y) = \tilde{\varphi}_n(x,\ y) \tag{16}$$

함수 $u(t,\ x,\ y)$의 변수 $x,\ y$에 관한 푸리에변환과 거꿀변환은 각각

$$\hat{u}(t,\ w,\ \upsilon)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}u(t,\ x,\ y)e^{i(xw+y\upsilon)}dxdy$$

$$u(t,\ x,\ y)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{u}(t,\ w,\ \upsilon)e^{-i(xw+y\upsilon)}dwd\upsilon$$

이므로 방정식 (16)은 다음과 같다.

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i(xw+y\upsilon)}\left[\frac{d}{dt}+\lambda(t,\ w,\ \upsilon)\right]\hat{u}(t,\ w,\ \upsilon)dwd\upsilon=0$$

여기서

$$\lambda(t,\ w,\ \upsilon)=\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{-h(z)w}-1)\nu_1(dz)+\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{-h(z)w}-1)\nu_2(dz)=$$

$$=\lambda_1\int_{-\infty}^{+\infty}[(e^{-h(z)w}-1)p_1(z)]dz+\lambda_2\int_{-\infty}^{+\infty}[(e^{-h(z)w}-1)p_2(z)]dz=$$

$$=\lambda_1(\Psi_1(w)-1)+\lambda_2(\Psi_2(\upsilon)-1)$$

이고 $\Psi_1(w),\ \Psi_2(\upsilon)$는 $h(\xi_{11}),\ h(\xi_{21})$의 특성함수들이다.

따라서 방정식

$$\left[\frac{d}{dt}+\lambda(t,\ w,\ \upsilon)\right]\hat{u}(t,\ w,\ \upsilon)=0$$

$$\hat{u}(T,\ w,\ \upsilon)=\hat{\varphi}_n(w,\ \upsilon)$$

의 풀이는 매 n에 대하여

$$\hat{u}_n(t,\ w,\ \upsilon)=\hat{\varphi}_n(w,\ \upsilon)\exp\{\lambda_1(T-t)(\Psi_1(w)-1)+\lambda_2(T-t)(\Psi_2(\upsilon)-1)\} \tag{17}$$

이다. 푸리에거꿀변환을 실시하면

$$u_n(t,\ x,\ y)=\tilde{\varphi}_n(\cdot,\cdot)*\tilde{u}(t,\ x,\ y)$$

이다. 여기서 $\tilde{u}(t,\ x,\ y)$는 $\exp\{\lambda_1(T-t)(\Psi_1(w)-1)+\lambda_2(T-t)(\Psi_2(\upsilon)-1)\}$의 푸리에거꿀변환이고 $f(\cdot,\cdot)*g(x,\ y)$는 변수 $x,\ y$에 관한 합성적이다.

본래의 변수로 다시 변환하면

$$g_n(t,\ S_1,\ S_2)=\varphi_n(\cdot,\ \cdot)*\tilde{g}(t,\ S_1,\ S_2)$$

이며 극한을 취하면

$$g(t,\ S_1,\ S_2)=\delta(\cdot,\ \cdot)*\tilde{g}(t,\ S_1,\ S_2)=\tilde{g}(t,\ S_1,\ S_2)$$

가 성립한다. 특성함수의 유일성에 의하여 식 (17)의

$$\exp\{\lambda_1(T-t)(\Psi_1(w)-1)\},\ \exp\{(T-t)(\Psi_2(\upsilon)-1)\}$$

은 복합뽜쏭과정 $\sum_{k=1}^{N_1(t)}h(\xi_{1k}),\ \sum_{k=1}^{N_2(t)}h(\xi_{2k})$의 특성함수들이다. 즉 함수

$$\tilde{u}(t,\ x,\ y)=\sum_{l_1=0}^{\infty}\frac{[\lambda_1(T-t)]^{l_1}}{l_1!}e^{-\lambda_1(T-t)}\tilde{p}_1^{*l_1}(x)\sum_{l_2=0}^{\infty}\frac{[\lambda_2(T-t)]^{l_2}}{l_2!}e^{-\lambda_2(T-t)}\tilde{p}_2^{*l_2}(y)$$

의 푸리에변환이다. 따라서 방정식 (11)의 풀이는

$$g(t,\ S_1,\ S_2)=\sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{\infty}\frac{[\lambda_1(T-t)]^{l_1}[\lambda_2(T-t)]^{l_2}}{l_1!l_2!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)(T-t)}\tilde{p}_1^{*l_1}(S_1)\tilde{p}_2^{*l_2}(S_2)$$

이다.(증명끝)

정리 3 방정식 (10), (11)의 풀이를 각각 $f(t,\ S_1,\ S_2,\ I_1,\ I_2)$, $g(t,\ S_1,\ S_2)$로 표시하고

$$V(t,\ S_1,\ S_2,\ I_1,\ I_2)=f(t,\ \cdot,\ \cdot,\ I_1,\ I_2)*g(t,\ S_1,\ S_2) \tag{18}$$

라고 하면 $V(t,\ S_1,\ S_2,\ I_1,\ I_2)$는 방정식 (8)의 풀이이다.

증명 V가 방정식 (8)을 만족시킨다는것을 증명하자. 합성적의 정의에 의하여

$$V(t,\ S_1,\ S_2,\ I_1,\ I_2)=f(t,\ \cdot,\ \cdot,\ I_1,\ I_2)*g(t,\ S_1,\ S_2,\ I_1,\ I_2)=$$

$$=\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}}f(t,\ S_1-y_1,\ S_2-y_2,\ I_1,\ I_2)g(t,\ y_1,\ y_2,\ I_1,\ I_2)dy_1dy_2= \tag{19}$$

$$=\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}}f(t,\ y_1,\ y_2,\ I_1,\ I_2)g(t,\ S_1-y_1,\ S_2-y_2,\ I_1,\ I_2)dy_1dy_2$$

이다. 식 (19)에 의하여

$$\frac{\partial}{\partial t}V(t,\ S_1,\ S_2,\ I_1,\ I_2)=\frac{\partial}{\partial t}[f(t,\ \cdot,\ \cdot,\ I_1,\ I_2)*g(t,\ S_1,\ S_2,\ I_1,\ I_2)]=$$

$$=\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}}\frac{\partial}{\partial t}f(t,\ S_1-y_1,\ S_2-y_2,\ I_1,\ I_2)g(t,\ y_1,\ y_2,\ I_1,\ I_2)dy_1dy_2=$$

$$=\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}}f(t,\ y_1,\ y_2,\ I_1,\ I_2)\frac{\partial}{\partial t}g(t,\ S_1-y_1,\ S_2-y_2,\ I_1,\ I_2)dy_1dy_2$$

이다. 식 (19)의 둘째 등식을 리용하면

$$\frac{\partial}{\partial S_i}V(t,\ S_1,\ S_2,\ I_1,\ I_2)=\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}}\frac{\partial}{\partial S_i}f(t,\ S_1-y_1,\ S_2-y_2,\ I_1,\ I_2)g(t,\ y_1,\ y_2,\ I_1,\ I_2)dy_1dy_2$$

$$\frac{\partial}{\partial S_i^2}V(t,\ S_1,\ S_2,\ I_1,\ I_2)=\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}}\frac{\partial}{\partial S_i^2}f(t,\ S_1-y_1,\ S_2-y_2,\ I_1,\ I_2)g(t,\ y_1,\ y_2,\ I_1,\ I_2)dy_1dy_2$$

$$\frac{\partial}{\partial S_1S_2}V(t,\ S_1,\ S_2,\ I_1,\ I_2)=\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}}\frac{\partial}{\partial S_1S_2}f(t,\ S_1-y_1,\ S_2-y_2,\ I_1,\ I_2)g(t,\ y_1,\ y_2,\ I_1,\ I_2)dy_1dy_2$$

$$\frac{\partial}{\partial I_i}V(t,\ S_1,\ S_2,\ I_1,\ I_2)=\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}}\frac{\partial}{\partial I_i}f(t,\ S_1-y_1,\ S_2-y_2,\ I_1,\ I_2)g(t,\ y_1,\ y_2,\ I_1,\ I_2)dy_1dy_2$$

여기서 $g(t,\ y_1,\ y_2,\ I_1,\ I_2)$는 I_i에 무관계하므로 I_i에 관한 편도함수는 령이다. 식 (19)의 셋째 등식을 리용하면

$$\int_{|z|>0}V(t,\ S_1+z_1,\ S_2,\ I_1,\ I_2)\nu_1(dz)+\int_{|z|>0}V(t,\ S_{11},\ S_2+z,\ I_1,\ I_2)\nu_2(dz)=$$

$$=\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}}\left[\int_{|z|>0}f(t,\ y_1,\ y_2,\ I_1,\ I_2)g(t,\ S_1+z-y_1,\ S_2-y_2,\ I_1,\ I_2)\nu_1(dz)+\right.$$

$$\left.+\int_{|z|>0}f(t,\ y_1,\ y_2,\ I_1,\ I_2)g(t,\ S_1-y_1,\ S_2+z-y_2,\ I_1,\ I_2)\nu_2(dz)\right]dy_1dy_2$$

가 성립한다.

웃식들을 대응하는 결수를 고려하여 항별로 더하면 방정식 (8)이 성립한다.

풀이에 종점조건을 대입하면

$$
\begin{aligned}
V(T,\ S_1,\ S_2,\ I_1,\ I_2) &= \iint_{\mathbf{R}\,\mathbf{R}} f(T,\ S_1-y_1,\ S_2-y_2,\ I_1,\ I_2)g(T,\ y_1,\ y_2)dy_1dy_2 = \\
&= (\min\{\exp(I_1/T),\ \exp(I_2/T)\}-K)^+ \iint_{\mathbf{R}\,\mathbf{R}} \delta(y_1,\ y_2)dy_1dy_2 = \\
&= (\min\{\exp(I_1/T),\ \exp(I_2/T)\}-K)^+
\end{aligned}
$$

가 성립한다.(증명끝)

이상에서 본바와 같이 식 (18)은 기하평균무지개선택권의 가격공식이다. 즉 기하평균무지개선택권의 가격은 편미분방정식의 풀이인 (12)와 적분방정식의 풀이 (15)의 합성적으로 표시할수 있다. 또한 복합뽜쏭과정의 우연량 ξ_{i1} $(i=1,\ 2)$ 들의 분포가 주어지면 해석적인 풀이를 구할수 있다.

참 고 문 헌

[1] Alessandra Diazzi et al.; Mathematical Methods in the Applied Sciences, 41, 17, 2018.
[2] G. Colldeforns Papiol et al.; Applied Numerical Mathematics, 117, 115, 2017.
[3] Lu Wang et al.; Physica, A494, 8, 2018.
[4] J. Y. Wang et al.; Review of Derivatives Research, 20, 2, 91, 2017.

주체110(2021)년 3월 5일 원고접수

Price Formula of the Geometric Average Rainbow Options in a Fractional Stochastic Differential Equation Model with Jump

Kim Ju Gyong

In this paper, we consider the pricing problem of the geometric average rainbow options in financial market driven by a stochastic differential equation with the fractional Brownian motion and jump measure.

Keywords: geometric average, rainbow option