김일성종합대학학보 주체107(2018)년
수 학 제64권 제2호

분포된 계수를 가지는 분수계확산방정식에 대한 계차풀이법

리추명, 림명길

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《기초과학을 발전시키지 않고서는 인민경제 여러 부문에서 나서는 과학기술적문제를 원만히 풀어나갈수 없습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제11권 138페지)

우리는 분포된 계수를 가지는 2차원분수계확산방정식을 풀기 위한 한가지 계차도식에 대하여 론의하고 도식의 안정성과 수렴성을 연구하였다.

선행연구[2, 5]에서는 공간분수계미분방정식을 풀기 위한 4차의 정확도를 가진 계차도식을 고찰하였다. 선행연구[3]에서는 합성심프슨공식과 무게붙은 평행이동그론월드계차(TWSGD)연산자를 리용하여 분포된 계수를 가지는 2차원시간분수계부분확산방정식에 대하여 $O(\tau^2|\ln\tau|+h_1^4+h_2^4+\Delta\gamma^4)$의 정확도를 가진 교대방향도식을 유도하였다.

다음의 분포된 계수를 가지는 2차원분수계부분확산방정식을 고찰하자.

$$\begin{aligned} D_t^\eta u(x,\ y,\ t)=K_1^+{}_aD_x^\alpha u(x,\ y,\ t)+K_1^-{}_xD_b^\alpha u(x,\ y,\ t)+K_2^+{}_cD_y^\beta u(x,\ y,\ t)+ \\ +K_2^-{}_yD_d^\beta u(x,\ y,\ t)+f(x,\ y,\ t),\ \ (x,\ y,\ t)\in\Omega\times(0,\ T] \end{aligned} \tag{1}$$

$$u(x,\ y,\ t)=\phi(x,\ y,\ t),\ (x,\ y,\ t)\in\partial\Omega\times(0,\ T] \tag{2}$$

$$u(x,\ y,\ 0)=u_0(x,\ y),\ (x,\ y)\in\overline{\Omega} \tag{3}$$

여기서 분포된 시간분수계도함수 $D_t^\eta u(x,\ y,\ t)$는 $D_t^\eta u(x,\ y,\ t)=\int_0^1\eta(\gamma){}_0^cD_t^\gamma u(x,\ y,\ t)d\gamma$로 정의된다. $\eta(\gamma)$는 $\eta(\gamma)\in C^4([0,\ 1])$, $\eta(\gamma)\ge 0,\ \int_0^1\eta(\gamma)d\gamma=c_0>0$인 함수이고 ${}_0^cD_t^\gamma u(x,\ y,\ t)$는 $0<\gamma<1$인 캐푸토분수계도함수이며 ${}_aD_x^\alpha$, ${}_xD_b^\alpha$, ${}_cD_y^\beta$, ${}_yD_d^\beta$는 $1<\alpha,\ \beta\le 2$인 왼쪽 및 오른쪽 리만－류빌분수계도함수들이다. $\Omega=(a,\ b)\times(c,\ d)$이고 확산결수 $K_i^+,\ K_i^-$는 $K_i^++K_i^-\ne 0$ $(i=1,\ 2)$을 만족시키는 비부인 상수들이다.

이 론문에서는 초기경계값문제 (1)－(3)에 대하여 $O(\tau^2+h_1^4+h_2^4+\Delta\gamma^4)$의 정확도를 가진 음계차도식을 유도하고 그것의 안정성과 수렴성을 론의하였다.

$n-1<\alpha<n$인 α에 대하여 구간 $[a,\ b]$에서 정의된 함수 $u(x)$의 왼쪽 및 오른쪽 α계 리만－류빌도함수는 각각 다음과 같이 정의된다.[1, 6]

$${}_aD_x^\alpha u(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x\frac{u(\xi)}{(x-\xi)^{\alpha-n+1}}d\xi$$

$${}_xD_b^\alpha u(x)=\frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_x^b\frac{u(\xi)}{(\xi-x)^{\alpha-n+1}}d\xi$$

$n-1<\gamma<n$인 γ에 대하여 함수 $u(t)$의 γ계캐푸토도함수는 다음과 같이 정의된다.[1, 6]

$$ {}_0^cD_t^\gamma u(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\gamma)}\int_0^t \frac{u^{(n)}(\zeta)}{(t-\zeta)^{\gamma-n+1}}d\zeta \quad (t\in(0,\ +\infty)) $$

정리 1 $0<\gamma<1$인 γ에 대하여 함수 $y(t)\in C^4[0,\ T]$가 다음의 분수계미분방정식의 풀이라고 하자.

$$ \begin{cases} {}_0^cD_t^\gamma y(t)=Ay(t)+f(t) \\ y(0)=0 \end{cases} $$

여기서 A는 $C^4[0,\ T]\to C^4[0,\ T]$인 연산자이고 f는 $f\in C^4[0,\ T]$, ${}_0D_t^{-\gamma}f(t)\in C^4[0,\ T]$를 만족시키는 함수이다. 이때 다음식이 성립한다.

$$ y'(0)=y''(0)=y'''(0)=y^{(4)}(0)=0 $$

수렬 $\{g_k^{(\alpha)}\}$ $(\alpha\in\mathbf{R}^+)$는 함수 $(1-z)^\alpha$의 제곱합렬전개식의 결수들의 렬이라고 하자. 즉

$$ (1-z)^\alpha=\sum_{k=0}^\infty(-1)^k\binom{\alpha}{k}z^k=\sum_{k=0}^\infty\frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k+1)}z^k=\sum_{k=0}^\infty g_k^{(\alpha)}z^k \tag{4} $$

그러면 $\{g_k^{(\alpha)}\}$의 원소들은 다음식을 만족시킨다.[4]

$$ g_0^{(\alpha)}=1,\ g_k^{(\alpha)}=(-1)^k\binom{\alpha}{k}=\left(1-\frac{\alpha+1}{k}\right)g_{k-1}^{(\alpha)} \tag{5} $$

$M_1,\ M_2,\ N$은 비렁인 정의 옹근수, $h_1=(b-a)/M_1,\ h_2=(d-c)/M_2,\ \tau=T/N$이고

$$ \Omega_h:=\{(x_i,\ y_j)\,|\,0\le i\le M_1,\ 0\le j\le M_2\}\cap\Omega,\ \Omega_\tau=\{t_n\,|\,0\le n\le N\} $$

이라고 정의하자. $v=\{v_{i,\,j}\in\mathbf{R}\,|\,0\le i\le M_1,\ 0\le j\le M_2\}$는 그물 Ω_h 우에서의 그물함수이고 $V=\{v\,|\,v=\{v_{i,\,j}\}\}$는 Ω_h 우에서 그물함수들의 모임이라고 하자. 임의의 그물함수 $v\in V$에 대하여 2계계차연산자를 $\delta_x^2v_{i,\,j}=(v_{i+1,\,j}-2v_{i,\,j}+v_{i-1,\,j})/h_1^2$, $\delta_y^2v_{i,\,j}=(v_{i,\,j+1}-2v_{i,\,j}+v_{i,\,j-1})/h_2^2$로 정의한다. 구간 $[0,\ 1]$을 $2J$개의 부분구간으로 분할하고 $\Delta\gamma=1/(2J)$, $\gamma_l=l\Delta\gamma$, $0\le l\le 2J$로 놓자.

캐푸토도함수와 리만—류빌도함수사이에 다음의 관계식이 성립한다.[1, 5]

$$ {}_0D_t^\gamma f(t)=\frac{f(0)t^{-\gamma}}{\Gamma(1-\gamma)}+{}_0^cD_t^\gamma f(t)\quad(0<\gamma<1) $$

만일 $f(0)=0$이면 ${}_0D_t^\gamma f(t)={}_0^cD_t^\gamma f(t)$가 성립한다.[1, 5]

$N^{m+\alpha}(\mathbf{R})=\left\{f\,\middle|\,f\in L_1(\mathbf{R}),\ \int_{-\infty}^{\infty}(1+|\omega|)^{m+\alpha}\,|\hat f(\omega)|\,d\omega<\infty\right\}$로 정의하자.($\hat f(\omega)$는 푸리에변환)

보조정리 1 [3, 5] $0<\gamma<1$인 γ에 대하여 $u(t)$의 령연장 $\tilde u(t)\in N^{2+\gamma}(\mathbf{R})$가 성립하면 $\tau\to 0$일 때

$$ {}_{-\infty}D_t^\gamma u(t)=\frac{1}{\tau^\gamma}\sum_{k=0}^{[t/\tau]}\omega_k^{(\gamma)}u(t-k\tau)+O(\tau^2) $$

이 성립한다. 여기서 결수 $\omega_k^{(\gamma)}$들은 다음과 같이 계산된다.

$$ \begin{gathered} \omega_0^{(\gamma)}=\rho_1g_0^{(\gamma)},\ \omega_k^{(\gamma)}=\rho_1g_k^{(\gamma)}+\rho_2g_{k-1}^{(\gamma)}=(\rho_1(1-(\alpha+1)/k)+\rho_2)g_{k-1}^{(\gamma)}\quad(k>1) \\ \rho_1=(2+\alpha)/2,\ \rho_2=-\alpha/2 \end{gathered} \tag{6} $$

$1<\alpha\le 2$ 에 대하여 $h>0,\ \lambda_1=\dfrac{\alpha^2+3\alpha+2}{12},\ \lambda_0=\dfrac{4-\alpha^2}{6},\ \lambda_{-1}=\dfrac{\alpha^2-3\alpha+2}{12}$ 이고 $u\in C^2([a,$ $b])$ 에 대하여 다음의 연산자를 정의하자.

$$H_x^\alpha u(x)=(1+c_\alpha h^2\delta^2)u(x),\ c_\alpha=\frac{-\alpha^2+\alpha+4}{24} \tag{7}$$

보조정리 2 [6] $u(x)\in C[a,\ b],\ u(a)=u(b)=0$ 이고 $\tilde{u}(x)\in N^{4+\alpha}(\mathbf{R})$ 라고 하자. 그러면 임의의 걸음값 h 에 대하여 다음식이 성립한다.

$$H_x^\alpha({}_aD_x^\alpha u(x))=\frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{\left[\frac{x-a}{h}\right]}\mu_k^{(\alpha)}u(x-(k-1)h)+O(h^4)$$

$$H_x^\alpha({}_xD_b^\alpha u(x))=\frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{\left[\frac{b-x}{h}\right]}\mu_k^{(\alpha)}u(x+(k-1)h)+O(h^4)$$

여기서 결수들은 다음과 같다.

$$\mu_0^{(\alpha)}=\lambda_1 g_0^{(\alpha)},\ \mu_1^{(\alpha)}=\lambda_1 g_1^{(\alpha)}+\lambda_0 g_0^{(\alpha)},\ \mu_k^{(\alpha)}=\lambda_1 g_k^{(\alpha)}+\lambda_0 g_{k-1}^{(\alpha)}+\lambda_{-1} g_{k-2}^{(\alpha)}\ \ (k>1)$$

보조정리 3 [5] $f\in C^{2+m}(\mathbf{R})$ 이면 $0<\gamma<1$ 인 γ 에 대하여 $f\in N^{\gamma+m}(\mathbf{R})$ 가 성립한다.

초기경계값문제 (1)—(3)이 유일한 풀이 $u(x,\ y,\ t)\in C_{x,\ y,\ t}^{6,\ 6,\ 4}(\Omega)$ 를 가지며 임의로 고정한 $(x,\ y,\ t)\in\Omega$ 에 대하여 ${}_0^cD_t^\gamma u(x,\ y,\ t)$ 가 γ 에 관하여 구간 $[0,\ 1]$ 에서 4계련속미분가능하다고 가정한다.

우의 가정으로부터 정적분의 성질에 의하여 구간 $[0, 1]$ 에 드는 어떤 γ_0 이 있어서

$$D_t^\eta u(x,\ y,\ t)={}_0^cD_t^{\gamma_0}u(x,\ y,\ t)\int_0^1\eta(\gamma)d\gamma$$

가 성립한다. 정리 1에 의하여 $u(x,\ y,\ t)$ 의 시간축으로의 령연장 $\tilde{u}(x,\ y,\ t)$ 에 대하여 $\tilde{u}(x,\ y,\ t)\in C_t^4(\mathbf{R})$ 가 성립하며 보조정리 2로부터 $\tilde{u}(x,\ y,\ t)\in N^{2+\gamma}(\mathbf{R})$ 가 나온다.

표시를 간단히 하기 위하여 아래의 기호를 리용한다.

$$D_x^\alpha=K_1^+{}_aD_x^\alpha+K_1^-{}_xD_b^\alpha,\ \delta_x^\alpha=K_1^+\delta_{x,+}^\alpha+K_1^-\delta_{x,-}^\alpha,\ D_y^\beta=K_2^+{}_cD_y^\beta+K_2^-{}_yD_d^\beta$$

$$\delta_y^\beta=K_2^+\delta_{y,+}^\beta+K_2^-\delta_{y,-}^\beta,\ \Delta_{\alpha,\beta}=D_x^\alpha+D_y^\beta$$

그물마디점 $(x_i,\ y_j,\ t_n)$ 에서 왼변의 분수계도함수와 오른변의 함수값들을

$$U_{i,\ j}^n=u(x_i,\ y_j,\ t_n),\ f_{i,\ j}^n=f(x_i,\ y_j,\ t_n),\ D_t^\eta U_{i,j}^n=(D_t^\eta u)(x_i,\ y_j,\ t_n)$$

$$\Delta_{\alpha,\ \beta}U_{i,\ j}^n=(\Delta_{\alpha,\ \beta}u)(x_i,\ y_j,\ t_n)\ \ (0\le i\le M_1,\ 0\le j\le M_2,\ 0\le n\le N)$$

으로 표시하면 그물마디점 $(x_i,\ y_j,\ t_n)$ 에서 방정식 (1)은 다음과 같다.

$$D_t^\eta U_{i,j}^n=\Delta_{\alpha,\beta}U_{i,j}^n+f_{i,j}^n\ \ (1\le i\le M_1,\ 1\le j\le M_2,\ 1\le n\le N) \tag{8}$$

합성심프슨공식을 리용하여 분포된 시간분수계도함수를 근사시키면 다음과 같다.

$$D_t^\eta U(x_i,\ y_j,\ t_n)=\Delta\gamma\sum_{l=0}^{2J}d_l\eta(\gamma_l){}_0^cD_t^{\gamma_l}U(x_i,\ y_j,\ t_n)+O(\Delta\gamma^4)$$

무게붙은 평행이동그론월드계차연산자를 리용하여 웃식의 오른변에 있는 캐푸토도함수를 근사시키면 보조정리 1에 의하여 다음식이 얻어진다.

$$\Delta\gamma\sum_{l=0}^{2J}d_l\eta(\gamma_l)\cdot\frac{1}{\tau^{\gamma_l}}\sum_{k=0}^{n}\omega_k^{(\gamma_l)}U_{i,j}^{n-k}=\Delta_{\alpha,\beta}U_{i,j}^n+f_{i,j}^n+O(\tau^2+\Delta\gamma^4) \tag{9}$$

$$0\le i\le M_1,\ 0\le j\le M_2,\ 1\le n\le N$$

리만－류빌분수계도함수를 근사시키기 위하여 식 (7)로 정의되는 연산자 H_x^α 와 H_y^β 를 웃식의 량변에 적용시키면 다음식이 얻어진다.

$$\Delta\gamma\sum_{l=0}^{2J}d_l\eta(\gamma_l)\cdot\frac{1}{\tau^{\gamma_l}}\sum_{k=0}^{n}\omega_k^{(\gamma_l)}H^{\alpha,\beta}U_{i,j}^{n-k}=H_x^\alpha H_y^\beta D_x^\alpha U_{i,j}^n+H_x^\alpha H_y^\beta D_y^\beta U_{i,j}^n+H_x^\alpha H_y^\beta f_{i,j}^n+O(\tau^2+\Delta\gamma^4) \tag{10}$$

보조정리 2를 적용하면 다음식이 얻어진다.

$$\Delta\gamma\sum_{l=0}^{2J}d_l\eta(\gamma_l)\cdot\frac{1}{\tau^{\gamma_l}}\sum_{k=0}^{n}\omega_k^{(\gamma_l)}H_x^\alpha H_y^\beta U_{i,j}^{n-k}=H_y^\beta\delta_x^\alpha U_{i,j}^n+H_x^\alpha\delta_y^\beta U_{i,j}^n+H_x^\alpha H_y^\beta f_{i,j}^n+R_{i,j}^n \tag{11}$$

이때 어떤 상수 B_1 이 있어서 $|R_{i,j}^n|\le B_1(\tau^2+h_1^4+h_2^4+\Delta\gamma^4)$ 이 성립한다.

초기경계조건

$$U_{i,j}^0=0,\ \ 0\le i\le M_1,\ \ 0\le j\le M_2 \tag{12}$$

$$U_{i,j}^n=\phi(x_i,\ y_j,\ t_n),\ (x_i,\ y_j)\in\Omega_h,\ 0\le n\le N \tag{13}$$

을 고려하면 다음의 계차도식을 얻는다.

$$\Delta\gamma\sum_{l=0}^{2J}d_l\eta(\gamma_l)\cdot\frac{1}{\tau^{\gamma_l}}\sum_{k=0}^{n}\omega_k^{(\gamma_l)}H_x^\alpha H_y^\beta u_{i,j}^{n-k}=H_y^\beta\delta_x^\alpha u_{i,j}^n+H_x^\alpha\delta_y^\beta u_{i,j}^n+H_x^\alpha H_y^\beta f_{i,j}^n \tag{14}$$

$$1\le i\le M_1-1,\ 1\le j\le M_2-1,\ 1\le n\le N$$

$$u_{i,j}^0=0,\ 0\le i\le M_1,\ 0\le j\le M_2 \tag{15}$$

$$u_{i,j}^n=\phi(x_i,\ y_j,\ t_n),\ (x_i,\ y_j)\in\partial\Omega_h,\ 0\le n\le N \tag{16}$$

도식의 안정성과 수렴성에 관한 기본결과는 다음과 같다.

$V_h=\{u=\{u_{i,j}\}\,|\,u_{i,j}=0,\ (x_i,\ y_j)\in\partial\Omega_h\}$ 는 Ω_h 우에서의 그물함수공간이라고 하자. 임의의 그물함수 $u,\ v\in V_h$ 에 대하여 스칼라적과 노름을 다음과 같이 정의한다.

$$(u,\ v)=h_1h_2\sum_{i=1}^{M_1-1}\sum_{j=1}^{M_2-1}u_{i,j}v_{i,j},\ \ \|u\|=\sqrt{(u,\ u)}$$

그물 $\Omega_h\times\Omega_\tau$ 에서 주어진 그물함수

$$u=\{u_{i,j}^n\in\mathbf{R}\,|\,u_{i,j}^n=0,(x_i,\ y_j)\in\partial\Omega_h,\ 1\le i\le M_1,\ 1\le j\le M_2,\ 1\le n\le N\}$$

의 노름을 다음과 같이 정의하자.

$$\|u\|_t=\sqrt{\tau\sum_{n=1}^{N}\|u^n\|^2}$$

정리 2 $M_1,\ M_2>5$ 이고 $\{u_{i,j}^n\}$ $(0\le n\le N,\ 1\le i\le M_1,\ 1\le j\le M_2)$ 이 계차도식

$$\Delta\gamma\sum_{l=0}^{2J}d_l\eta(\gamma_l)\cdot\frac{1}{\tau^{\gamma_l}}\sum_{k=0}^{n}\omega_k^{(\gamma_l)}H_x^{\alpha}H_y^{\beta}u_{i,j}^{n-k}=H_y^{\beta}\delta_x^{\alpha}u_{i,j}^{n}+H_x^{\alpha}\delta_y^{\beta}u_{i,j}^{n}+f_{i,j}^{n} \tag{17}$$

$$1\le i\le M_1-1,\ 1\le j\le M_2-1,\ 2\le n\le N$$

$$u_{i,j}^{0}=u_{i,j},\ 0\le i\le M_1,\ 0\le j\le M_2 \tag{18}$$

$$u_{i,j}^{n}=0,\ (x_i, y_j)\in\partial\Omega_h,\ 0\le n\le N \tag{19}$$

의 풀이라고 하자. 그러면 임의의 $\gamma\in(0,\ 1)$ $(\alpha,\ \beta\in(1,\ 2])$에 대하여 다음의 평가식이 성립한다.

$$\tau\sum_{m=1}^{n}\|u^m\|^2\le\tau C_1\sum_{m=1}^{n}\|f^m\|^2+C_2\|u^0\|^2 \tag{20}$$

여기서 $C_1=8/M_{\alpha,\beta}$이고 $C_2=6M_T$는 $h_1,\ h_2,\ \tau$에 무관계한 정의 상수이다.

정리 3 모든 $\gamma\in(0,\ 1)$과 $\alpha,\ \beta\in(1,\ 2]$에 대하여 계차도식 (14)－(16)은 초기조건과 오른변에 관하여 안정하다.

정리 4 $u(x,\ y,\ t)\in C_{x,\,y,\,t}^{6,\,6,\,4}(\Omega\times[0,\ T])$는 초기값문제 (1)－(3)의 풀이이고 $M_1,\ M_2>5$, $\{u_{i,j}^n\in\mathbf{R}\,|\,0\le i\le M_1,\ 0\le j\le M_2,\ 0\le n\le N\}$은 계차도식 (14)－(16)의 풀이라고 하자.

$e_{i,j}^n=u(x_i,\ y_j,\ t_n)-u_{i,j}^n$, $0\le i\le M_1$, $0\le j\le M_2$, $0\le n\le N$이라고 하자. 이때 다음의 식이 성립한다.

$$\|e\|_t\le\sqrt{C_2T(B_1^2T+B_3^2)(b-a)(d-c)}(\tau^2+h_1^4+h_2^4+\Delta\gamma^4)$$

참 고 문 헌

[1] I. Podlubny; Fractional Differential Equations, Academic Press, 153～176, 1999.

[2] Z. Hao et al.; J. Comput. Phys., 281, 787, 2105.

[3] G.Gao, Z.Sun; J. Sci. Comput. 66, 1281, 2016.

[4] S. Vong et al.; J. Numer. Algor., 72, 195～210, 2016.

[5] C. Ji, et al.; J. Comput., 64, 959, 2015.

[6] H.－K. Pang, H.－W. Sun; J. Comput. Appl. Math., 71, 1287, 2016.

주체106(2017)년 12월 5일 원고접수

A Finite Difference Method for Distributed-Order Fractional Diffusion Equations

Ri Chu Myong, *Rim Myong Gil*

In this paper, we studied a high order finite difference scheme for solving two dimensional distributed-order fractional diffusion equations using weighted and shifted Grünwald operator. We show that our method is unconditionally stable with respect to the initial value and right hand side for all $\alpha,\ \beta\in(1,\ 2]$ and has $O(\tau^2+h_1^4+h_2^4+\Delta\gamma^4)$ convergence order.

Key words: Riemann-Liouville fractional derivative, Caputo fractional derivative