김일성종합대학학보 (자연과학) 주체106(2017)년 제63권 제7호
JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE) Vol. 63 No. 7 JUCHE106(2017).

비섭동형씸플렉티크넘기기의 불변고리에 대한 국부적 유일성정리에서 성립조건결수의 정량적평가

신경령, 정우환

하밀톤계에서의 불변고리의 존재성은 행성계의 안정성문제나 립자가속장치에서의 립자의 긴시간동안의 안정한 회전을 보장하는 문제, 자기마당에 의한 고온플라즈마의 가두어넣기문제 등 자연과학과 기술공학의 여러 문제들에서 중요하게 제기된다.

지난 시기 하밀톤계에서의 불변고리의 존재성이 많이 연구되였으며 현재 불변고리의 국부적유일성문제도 여러 측면에서 연구되고있다.

선행연구[1]에서는 어느 범위정도까지 섭동된 유일한 고리가 존재하는가 하는 문제를 설정하였다.

선행연구[2]에서는 일정한 조건밑에서 디오판투스고리들의 합모임의 어떤 닫긴부분모임우에서 고리의 유일성을, 선행연구[3]에서는 평면고리구역을 그자체로 넘기는 면적보존꼬임넘기기에 관한 불변고리의 유일성을 론의하였다.

선행연구[4]에서는 특정한 하밀톤계들의 불변고리가 존재하게 되는 섭동의 한계에 대하여 연구하였으며 선행연구[5, 6]에서는 두 불변고리가 충분히 가까우면 한 고리가 다른 고리의 회전으로 표시된다는것을 증명하였다. 그러나 불변고리의 국부적유일성이 담보되는 한계를 정량적으로 주지 않고있다.

론문에서는 비섭동형씸플렉티크넘기기에 관한 불변고리의 국부적유일성이 성립되는 불변고리들사이의 거리의 한계를 정량적으로 구하였다.

정의 1 [7] $\upsilon=(\upsilon_1,\ \cdots,\ \upsilon_n)\in\boldsymbol{R}^n$ 이라고 하면 어떤 $\gamma>0$ 과 $\sigma\ge n$ 에 대하여 조건 $|l\cdot\upsilon-m|\ge\gamma/\|l\|^\sigma$ $(l\in\boldsymbol{Z}^n\setminus\{0\},\ m\in\boldsymbol{Z})$ (여기서 $\|l\|:=|l_1|+\cdots+|l_n|$)이 만족될 때 υ 는 디오판투스조건을 만족시킨다고 말한다.

우의 조건을 만족시키는 벡토르 $\upsilon\in\boldsymbol{R}^n$ 들의 모임을 $\mathfrak{D}^n(\gamma,\ \sigma)$ 로 표시한다.

보조정리 1 [5] $\upsilon\in\mathfrak{D}^n(\gamma,\sigma)$ 라고 하고 넘기기 $h:\boldsymbol{T}^n:=\boldsymbol{R}^n/\boldsymbol{Z}^n\to\boldsymbol{R}^{2n}$ 이 U_ρ 에서 해석적이며 $\langle h\rangle:=\int_{\boldsymbol{T}^n}h(\theta)d\theta=0$ 이라고 하자.

이때 임의의 $0<\delta<\rho$ 에 대하여 계차방정식 $u(\theta)-u(\theta+\upsilon)=h(\theta)$ 는 평균값 $\langle u\rangle$ 가 령이고 $U_{\rho-\delta}$ 우에서 실해석적인 유일풀이 $u:\boldsymbol{T}^n\to\boldsymbol{R}^{2n}$ 을 가지며 평가 $\|u\|_{\rho-\delta}\le c_0\gamma^{-1}\delta^{-\sigma}\|h\|_\rho$ 가 성립된다. 여기서 c_0 은 n 와 σ 에 의존되는 상수이다.

$X\subset\boldsymbol{C}^n$ 은 $X\subset\overline{\operatorname{int}X}$ 를 만족시키고 $\overline{X}$ 는 콤팍트모임이라고 하자.

모임 X 에서 련속이고 1－주기적이며 $\operatorname{int}X$ 에서 실해석적인 넘기기

$$K:X\to\boldsymbol{R}^{2n};\ (z_1,\cdots,z_j,\cdots,\ z_n)\mapsto K(z_1,\cdots,z_j,\cdots,\ z_n)$$

들 전체의 모임을 $\mathscr{P}(X,\ \boldsymbol{R}^{2n})$과 같이 표시한다.[5]

$\mathscr{P}(X,\ \boldsymbol{R}^{2n})$은 노름 $\|K\|=\sup\limits_{z\in X}|K(\theta)|=\sup\limits_{z\in X}\max\limits_{1\le j\le 2n}|K_j(z)|$에 관하여 바나흐공간으로 된다.

$Y\subset \boldsymbol{R}^{2n}$일 때 $\mathscr{P}(X,\ Y)=\{K\in\mathscr{P}(X,\ \boldsymbol{R}^{2n})\ ;\ K(X)\subset Y\}$, $\rho>0$에 대하여

$$U_\rho=\{z\in\boldsymbol{C}^n\ ;|\operatorname{Im}z|<\rho\},\quad \overline{U}_\rho=\{z\in\boldsymbol{C}^n\ ;|\operatorname{Im}z|\le\rho\}$$

라고 놓는다.

앞으로 론문에서는 $\mathscr{P}(\rho)=\mathscr{P}(\overline{U}_\rho,\ \boldsymbol{R}^{2n})$으로 한다.

$\boldsymbol{U}^{2n}$을 $\boldsymbol{R}^n$의 열린모임 U와 $\boldsymbol{T}^n$의 직적 즉 $\boldsymbol{U}^{2n}=\boldsymbol{T}^n\times U$와 같이 표시되는 모임이거나 $\boldsymbol{R}^{2n}$의 열린모임이라고 하고 실해석적인 완전씸플렉티크넘기기 $f:\boldsymbol{U}^{2n}\to\boldsymbol{U}^{2n}$과 벡토르 $\upsilon\in\mathscr{D}^n(\gamma,\sigma)$가 주어졌다고 하자.

정의 2[5] 넘기기 $K\in\mathscr{P}(\rho)$가 다음의 조건들을 만족시키면 K는 불퇴화라고 말하며 불퇴화넘기기들의 모임을 $\mathscr{NP}(\rho)$로 표시한다.

① n차행렬값함수 $N(\theta)$가 있어서 다음의 식이 성립된다.

$$N(\theta)(DK(\theta)^{\mathrm{T}}DK(\theta))=I_n \tag{1}$$

여기서 I_n은 n차단위행렬이다.

② 행렬값함수 $S(\theta)=P(\theta+\upsilon)^{\mathrm{T}}[Df(K(\theta))J(K(\theta))^{-1}P(\theta)-J(K(\theta+\upsilon))^{-1}P(\theta+\upsilon)]$의 평균 $\langle S\rangle:=\int_{\boldsymbol{T}^n}S(\theta)$는 불퇴화행렬이다. 여기서 $P(\theta)=DK(\theta)N(\theta)$ $(\theta\in\boldsymbol{T}^n)$이다.

이제 $R_\upsilon:\boldsymbol{T}^n\to\boldsymbol{T}^n$을 $R_\upsilon(\theta)=\theta+\upsilon$와 같이 정의하고 다음의 방정식에 대하여 론의하자.

$$f\circ K=K\circ R_\upsilon \tag{2}$$

묻기 $K:\boldsymbol{T}^n\to\boldsymbol{U}^{2n}$이 식 (2)의 풀이이면 모임 $\mathscr{T}=K(\boldsymbol{T}^n)$은 f에 관한 불변고리가 된다. 즉 K는 f의 불변고리 $\mathscr{T}$의 방정식으로 된다.

보조정리 2 $\upsilon\in\mathscr{D}^n(\gamma,\ \sigma)$라고 하고 다음의 조건들이 만족된다고 하자.

① S의 평균 $\langle S\rangle$는 불퇴화이다.

② $u=(u_x,\ u_y):\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n$은 U_ρ에서 실해석적이고 모든 변수들에 관하여 1－주기적이며 $u_y:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$의 평균은 령이다.

이때 임의의 $0<\delta<\min\{1,\ \rho/2\}$에 대하여 $U_{\rho-2\delta}$에서 실해석적인 함수

$$\xi=(\xi_x,\ \xi_y):\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n$$

이 있어서 방정식 $\mathscr{L}_\upsilon\xi(\theta):=\begin{pmatrix}I_n & S(\theta)\\ O & I_n\end{pmatrix}\xi(\theta)-\xi(\theta+\upsilon)=u(\theta)$와 조건

$$\langle\xi_x\rangle=0, \tag{3}$$

$$\langle\xi_y\rangle=(\langle S\rangle)^{-1}(\langle u_x\rangle-\langle S(\theta)\tilde{\xi}_y\rangle) \tag{4}$$

가 만족된다. 여기서 $\tilde{\xi}_y(\theta)=\xi_y-\langle\xi_y\rangle$이다.

또한 $c=(1+|\langle S(\theta)\rangle^{-1}|)(1+2n\|DK\|_\rho^2\|N\|_\rho^2|J^{-1}|_{C^1,\ \mathscr{B}r})^2(|f|_{C^1,\ \mathscr{B}r}+1)^2(1+\gamma\delta^\sigma)^2(1+c_0)^2$이라고 하면 $\|\xi\|_{\rho-2\delta}<c\gamma^{-2}\delta^{-2\sigma}\|u\|_\rho$가 성립된다.

증명 방정식 $\mathcal{L}_v\xi=(u_x,\ u_y)^{\mathrm{T}}$는 다음과 같은 모양으로 쓸수 있다.

$$\xi_x(\theta)-\xi_x(\theta+v)=u_x(\theta)-S(\theta)\xi_y(\theta),\ \ \xi_y(\theta)-\xi_y(\theta+v)=u_y(\theta)$$

먼저 다음의 방정식에 대하여 론의하자.

$$\xi_y(\theta)-\xi_y(\theta+v)=u_y(\theta) \tag{5}$$

$v\in\mathcal{D}^n(\gamma,\sigma)$ 이고 $\langle u_y\rangle=0$ 이므로 보조정리 1로부터 임의의 $0<\delta<\rho/2$ 에 대하여 $U_{\rho-2\delta}$ 에서의 임의의 평균값을 가지는 방정식 (5)의 실해석적인 풀이 ξ_y 의 존재성이 나오며 평가 $\|\xi_y\|_{\rho-\delta}\le c_0\gamma^{-1}\delta^{-\sigma}\|u_y\|_\rho+|\langle\xi_y\rangle|$가 성립된다.

만일 $\langle\xi_y\rangle$가 식 (4)에 의하여 정의되면

$$\langle\xi_y\rangle=(\langle S\rangle)^{-1}(\langle u_x\rangle-\langle S(\theta)\tilde{\xi}_y\rangle)\Rightarrow\langle u_x\rangle-\langle S(\theta)\xi_y(\theta)\rangle=0.$$

즉 $\xi_x(\theta)-\xi_x(\theta+v)=u_x(\theta)-S(\theta)\xi_y(\theta)$ 의 평균이 령인 유일풀이 ξ_x가 있어서

$$\|\xi_x\|_{\rho-2\delta}\le c_0\gamma^{-1}\delta^{-\sigma}\|u_x(\theta)-S(\theta)\xi_y(\theta)\|_{\rho-\delta}.$$

또한 $\tilde{\xi}_y$ 는 $\langle\tilde{\xi}_y\rangle=0$ 과 $\tilde{\xi}_y(\theta)-\tilde{\xi}_y(\theta+v)=u_y(\theta)$ 를 만족시킨다.

그러므로 보조정리 1로부터 $\|\tilde{\xi}_y\|_{\rho-\delta}\le c_0\gamma^{-1}\delta^{-\sigma}\|u_y\|_\rho$ 가 성립되므로

$$|\langle S(\theta)\tilde{\xi}_y\rangle|\le\|S(\theta)\|_\rho\|\tilde{\xi}_y\|_\rho\le 2n\|DK\|_\rho^2\|N\|_\rho^2|J^{-1}|_{C^1,\,\mathcal{B}r}(|f|_{C^1,\,\mathcal{B}r}+1)\cdot c_0\gamma^{-1}\delta^{-\sigma}\|u_y\|_\rho.$$

한편 $\langle\xi_y\rangle=(\langle S\rangle)^{-1}(\langle u_x\rangle-\langle S(\theta)\tilde{\xi}_y\rangle)$, $\|\xi_y\|_{\rho-\delta}\le c_0\gamma^{-1}\delta^{-\sigma}\|u_y\|_\rho+|\langle\xi_y\rangle|$이므로

$$\|\xi_y\|_{\rho-\delta}\le c_0\gamma^{-1}\delta^{-\sigma}\|u_y\|_\rho+|\langle S(\theta)\rangle^{-1}|\cdot$$
$$\cdot[\|u_x\|_\rho+2n\|DK\|_\rho^2\|N\|_\rho^2|J^{-1}|_{C^1,\,\mathcal{B}r}(|f|_{C^1,\,\mathcal{B}r}+1)c_0\gamma^{-1}\delta^{-\sigma}\|u_y\|_\rho]\le$$
$$\le(1+|\langle S(\theta)\rangle^{-1}|)(1+\gamma\delta^\sigma)^2(1++2n\|DK\|_\rho^2\|N\|_\rho^2|J^{-1}|_{C^1,\,\mathcal{B}r})(|f|_{C^1,\,\mathcal{B}r}+1)\cdot(1+c_0)\gamma^{-2}\delta^{-2\sigma}\|u\|_\rho,$$
$$\|\xi_x\|_{\rho-2\delta}\le c_0\gamma^{-1}\delta^{-\sigma}\|u_x(\theta)-S(\theta)\xi_y(\theta)\|_{\rho-\delta}\le$$
$$\le c_0\gamma^{-1}\delta^{-\sigma}(\|u_x(\theta)\|_{\rho-\delta}+\|S(\theta)\|_{\rho-\delta}\|\xi_y(\theta)\|_{\rho-\delta})\le$$
$$\le(1+|\langle S(\theta)\rangle^{-1}|)(1+2n\|DK\|_\rho^2\|N\|_\rho^2|J^{-1}|_{C^1,\,\mathcal{B}r})^2(|f|_{C^1,\,\mathcal{B}r}+1)^2(1+\gamma\delta^\sigma)^2\cdot$$
$$\cdot(1+c_0)^2\gamma^{-2}\delta^{-2\sigma}\|u\|_\rho$$

가 성립된다.

우의 $\|\xi_y\|_{\rho-\delta}$에 대한 평가식과 $\|\xi_x\|_{\rho-2\delta}$에 대한 평가식으로부터

$$\|\xi\|_{\rho-2\delta}\le(1+|\langle S(\theta)\rangle^{-1}|)(1+2n\|DK\|_\rho^2\|N\|_\rho^2|J^{-1}|_{C^1,\,\mathcal{B}r})^2(|f|_{C^1,\,\mathcal{B}r}+1)^2\cdot$$
$$\cdot(1+\gamma\delta^\sigma)^2(1+c_0)^2\gamma^{-2}\delta^{-2\sigma}\|u\|_\rho=c\gamma^{-2}\delta^{-2\sigma}\|u\|_\rho$$

가 성립된다.(증명끝)

$\rho>0$ 을 고정하고 $\delta=\min\{1,\rho/8\}$, $K_0\in\mathcal{NP}(\rho)$를 식 (2)의 근사풀이이라고 하자.

이때 어떤 $r>0$ 이 있어서 $f:\boldsymbol{U}^{2n}\to\boldsymbol{U}^{2n}$ 이 모임 $\mathcal{B}_r=\{z\in\boldsymbol{C}^{2n};\ \inf\limits_{|\mathrm{Im}\,\theta|<\rho}|z-K_0(\theta)|<r\}$ 우로 해석연장된다고 가정하면 다음의 정리가 성립된다.

정리 $v\in\mathcal{D}^n(\gamma,\ \sigma)$ 라고 하고 $K_1,K_2\in\mathcal{NP}(\rho)$ 가 $K_1(U_\rho)\subset\mathcal{B}_{r},\ K_2(U_\rho)\subset\mathcal{B}_r$ 를 만족시키는 방정식 (2)의 풀이이라고 하자.

이때 상수 $c^* = 2^{2\sigma+1} n\cdot(1+\|DK_2\|_\rho)(1+\|N_2\|_\rho)(2n\rho^{-1}+3\|D^2K_1\|_0)(1+|J^{-1}|_{C^2,\ \mathscr{B}r}\|N_2\|_\rho)c$ 에 대하여 $\gamma^{-2}\delta^{-2\sigma}c^*\|K_1-K_2\|_\rho<1$ 이 만족되면 $\tau\in\Theta:=\{\tau\in\boldsymbol{R}^n: |\tau|<\|K_1-K_2\|_\rho\}$ 가 존재하여 $K_1\circ R_\tau = K_2$ 가 성립된다. 여기서 c 는 보조정리 2에서 K 를 K_2 로 놓을 때 주어지는 상수이며 N_2 는 식 (1)에서 K 를 K_2 로 놓을 때 정의되는 넘기기이다.

증명 보조정리 2와 선행연구[5]로부터 적당한 $\tau_1\in\Theta:=\{\tau\in\boldsymbol{R}^n: |\tau|<\|K_1-K_2\|_\rho\}$ 가 있어서 $\hat{c}:=\|DK_2\|_\rho\,(1+|J^{-1}|_{C^2,\ \mathscr{B}r}\|N_2\|_\rho)c$ 에 대하여 다음의 식이 성립된다.

$$\|K_1\circ R_{\tau_1}-K_2\|_{\rho-2\delta}<\hat{c}\gamma^{-2}\delta^{-2\sigma}\|K_1-K_2\|_\rho^2$$

이때 $K_1\circ R_{\tau_1}$ 도 식 (2)의 풀이이므로 우의 론의를 다시 적용할수 있다.

이와 같은 과정을 반복하면 $|\tau_m-\tau_{m-1}|\le\|K_1\circ R_{\tau_{m-1}}-K_2\|_{\rho_{m-1}}$ 을 만족시키는 렬 $\{\tau_m\}_{m\ge1}$ 이 있어서

$$\|K_1\circ R_{\tau_m}-K_2\|_{\rho_m}\le c\gamma^{-2}\delta_m^{-2\sigma}\|K_1\circ R_{\tau_{m-1}}-K_2\|_{\rho_{m-1}}^2\le\cdots$$
$$\cdots\le(\hat{c}\gamma^{-2})^{2^m}[\delta_m^{-2\sigma}\delta_{m-1}^{-2^2\sigma}\delta_{m-2}^{-2^3\sigma}\cdots\delta_1^{-2^{m+1}\sigma}]\|K_1-K_2\|_\rho^{2^{m+1}}\le(\hat{c}\gamma^{-2}\delta_1^{-2\sigma}2^{2\sigma}\|K_1-K_2\|_\rho)^{2^{m+1}}$$

을 만족시킨다. 여기서 $m\ge1$ 에 대하여 $\delta_1=\rho/8,\ \ \delta_{m+1}=\delta_m/2,\ \ \rho_m=\rho-\sum_{j=1}^m\delta_j$.

$\gamma^{-2}\delta^{-2\sigma}c^*\|K_1-K_2\|_\rho<1$ 이라는 조건으로부터 렬 $\{\tau_m\}_{m\ge1}$ 은 수렴하며 그 극한을 τ 라고 놓으면 정리가 성립된다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] H. W. Broer et al.; Handbook of Dynamical Systems, Springer, 3～136, 2008.

[2] H. W. Broer et al.; Ergodic Theory Dynam. Systems, 27, 713, 2007.

[3] C. Carminati et al.; Nonlinearity, 25, 177, 2012.

[4] A. Celletti et al.; Angew. Math. Phys., 57, 33, 2006.

[5] J. Villanueva et al.; Nonlinearity, 18, 855, 2005.

[6] R. de la Llave et al.; J. Differential Equations, 245, 1243, 2008.

[7] R. de la Llave; Proc. Sympos. Pure Math., 69, 175, 2001.

주체106(2017)년 3월 5일 원고접수

Quantitative Estimation of Realization Condition Coefficients in KAM Theorem for Symplectic Maps not to be Written as a Perturbation of Integrable One

Sin Kyong Ryong, Jong U Hwan

We give a quantitative estimation of the realization condition coefficients of KAM theorem for real analytic symplectic maps which do not require either to be written in action-angle variables or to be a perturbation of integrable one.

Key words: symplectic map, KAM theorem