주기경계조건을 가지는 한가지 분수계미분방정식에 대한 단조반복법

최희철, 박순애

론문에서는 주기경계조건을 가진 단항분수계경계값문제에 대한 상하풀이를 리용하는 단조반복법을 론의하였다.

많은 주기경계값문제들이 풀이를 가지지 않으며 또 풀이가 있다고 해도 유일성이 담보되지 않는다. 이런 사정으로부터 많은 연구자들이 주기경계값문제의 풀이의 존재성과 근사풀이법[1−5]에 주의를 돌리고있다.

론문에서는 다음과 같은 비선형분수계미분방정식에 대한 주기경계값문제를 론의한다.

$$ {}^{c}D_{0+}^{\alpha}u(t) = f(t,\ u(t)) \ \ (t \in [0,\ T],\ T>0) \tag{1}$$

$$ u(0) = u(T) \tag{2}$$

여기서 $0<\alpha<1$이다.

선행연구[2]에서는 겹상하풀이를 리용하는 일반화된 단조반복법을 제기하고 주어진 경계값문제를 푸는 방법을 제기하였으나 상하풀이가 휠더련속일것을 요구하였다. 선행연구[5]에서는 우의 문제를 선형주기경계값문제렬로 바꾸어 취급하였다. 그러므로 휠더련속인 상하풀이가 주어져야 한다는 가정이 필요하다. 이외에도 많은 론문들에서 식 (1)의 $f(t,\ u(t))$가 유계이든가 립쉬츠련속이라는 가정을 주고있다.

론문에서는 문제 (1), (2)에 대하여 $f(t,\ u(t))$가 련속이고 적당한 $\lambda>0$에 대해 $\lambda x+f(t,\ x)$가 증가라는 가정하에서 상하풀이를 리용하는 단조반복법을 취급한다.

정의 1 ${}^{c}D_{0+}^{\alpha}u,\ u\in C[0,\ T]$인 u가 식 (1), (2)를 만족시킨다면 u를 식 (1), (2)의 풀이라고 부른다.

함수

$$E_{\alpha}(z) := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}\ \ (\alpha>0),\ \ E_{\alpha,\ \beta}(z) := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\ \ (\alpha>0)$$

들을 미태그-레플러함수, 일반화된 미태그-레플러함수라고 부른다.

정의 2 ${}^{c}D_{0+}^{\alpha}u,\ u\in C[0,\ T]$인 u가 부등식

$$ {}^{c}D_{0+}^{\alpha}u(t) \ge f(t,\ u),\ t\in(0,\ T]$$
$$ u(0)\ge u(T)$$

를 만족시킨다면 u를 식 (1), (2)의 상풀이라고 부른다.

정의 3 ${}^{c}D_{0+}^{\alpha}u,\ u\in C[0,\ T]$인 u가 부등식

$$ {}^{c}D_{0+}^{\alpha}u(t) \le f(t,\ u),\ t\in(0,\ T]$$
$$ u(0)\le u(T)$$

를 만족시킨다면 u를 식 (1), (2)의 하풀이라고 부른다.

보조정리 1 [1] $0<\alpha\le 1$에 대하여 다음의 사실들이 성립한다.

① $E_{\alpha}(x)>0,\ E_{\alpha,\alpha}(x)>0,\ x\in\mathbf{R}$

② $E_{\alpha}(x)$는 $\mathbf{R}$에서 증가함수이다.

③ $E_{\alpha,\alpha}(x)\le\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)},\ x\in(-\infty,\ 0]$

보조정리 2 $\forall\alpha>0,\ I_{0+}^{\alpha}:C[0,\ T]\to C[0,\ T]$는 완전련속연산자이다.

보조정리 3 $A\in L_c(C[0,\ T]),\ B\in L(C[0,\ T])$이면 $B\circ A\in L_c(C[0,\ T])$이다. $L_c(C[0,\ T])$는 $C[0,\ T]$에서의 완전련속연산자공간이다.

보조정리 4[1] $h\in C[0,\ T]$일 때 꼬쉬문제

$$
\begin{aligned}
&{}^{c}D_{0+}^{\alpha}u(t)+\lambda u(t)=h(t)\\
&u(0)=b
\end{aligned}
$$

의 풀이는 다음과 같이 표시된다.

$$u(t)=bE_{\alpha}[-\lambda x^{\alpha}]+\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[-\lambda(x-t)^{\alpha}]h(t)dt$$

보조정리 5 $0<\beta\le\alpha$라고 하자. 그러면 다음의 평가식들이 성립한다.

$$({}^{c}D_{0+}^{\beta}E_{\alpha}[-\lambda t^{\alpha}])(x)=-\lambda x^{\alpha-\beta}E_{\alpha,\alpha-\beta+1}[-\lambda x^{\alpha}]$$

$${}^{c}D_{0+}^{\alpha}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[-\lambda(x-t)^{\alpha}]f(t)dt=f(x)-\lambda\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[-\lambda(x-t)^{\alpha}]f(t)dt$$

정리 1 $f:[0,\ T]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$는 련속이라고 하자. 임의의 $\lambda>0$에 대하여 식 (1), (2)는 $C[0,\ T]$에서 다음의 적분방정식과 동등하다.

$$u(t)=u(T)E_{\alpha}[-\lambda t^{\alpha}]+\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[-\lambda(t-s)^{\alpha}](f(s,\ u(s))+\lambda u(s))ds \tag{3}$$

여기서 $u(T)$는

$$u(0)=u(T)=\frac{\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[-\lambda(T-s)^{\alpha}](f(s,\ u(s))+\lambda u(s))ds}{1-E_{\alpha}[-\lambda T^{\alpha}]} \tag{4}$$

로 결정된다. 적분방정식 (3)을 다음과 같이 쓸수 있다.

$$y(t)=(Ay)(t)$$

$$(Ay)(t):=y(T)E_{\alpha}[-\lambda t^{\alpha}]+\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[-\lambda(t-s)^{\alpha}](f(s,\ y(s))+\lambda y(s))ds$$

방정식 (3)의 풀이의 존재성은 연산자 A의 부동점존재성에 귀착되므로 아래에서 이 문제를 론의한다.

정리 2 다음의 조건들을 가정하자.

① $f:[0,\ T]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$는 련속이다.

② 식 (1), (2)의 하풀이 $v(t)$와 상풀이 $w(t)$가 존재하여 $v(t)\le w(t)$이다.

③ $\exists\lambda>0;\ f(t,\ x)-f(t,\ y)+\lambda(x-y)\ge0,\ v\le y\le x\le w$

이때 다음의 결론이 성립한다.

① A는 순서구간 $[v,\ w]$에서 최소부동점 x^*, 최대부동점 y^*을 가진다.

② 반복도식

$$x_n = Ax_{n-1},\ y_n = Ay_{n-1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$
$$x_0 = v,\ y_0 = w$$

에 의해 얻어지는 렬은 수렴하며 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y^*$이 성립한다.

증명 1단계 $x_0 \le Ax_0$, $y_0 \ge Ay_0$임을 고찰하자.

$x_0 = v$가 식 (1), (2)의 하풀이이므로 적당한 $q(t)\ge 0,\ \varepsilon \ge 0$이 존재하여

$$^cD_{0+}^{\alpha} v(t) = f(t,\ v) - q(t),\ t\in(0,\ T] \tag{5}$$
$$v(0) = v(T) - \varepsilon \tag{6}$$

이 성립한다. 그러므로 식 (5), (6)과 동등한 다음의 적분방정식을 얻는다.

$$v(t) = (v(T)-\varepsilon)E_{\alpha}[-\lambda t^{\alpha}] + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[-\lambda(t-s)^{\alpha}](f(s,\ v(s)) + \lambda v(s) - q(s))ds$$

따라서

$$x_0 = v(t) \le v(T)E_{\alpha}[-\lambda t^{\alpha}] + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[-\lambda(t-s)^{\alpha}](f(s,\ v(s)) + \lambda v(s))ds = (Av)(t) = Ax_0$$

즉 $x_0 \le Ax_0$이 나온다. 마찬가지로 $y_0 \ge Ay_0$임을 증명할수 있다.

2단계 $x_n = Ax_{n-1},\ y_n = Ay_{n-1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$에 의해 얻어진 렬은 다음의 부등식을 만족시킨다.

$$x_0 \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le \cdots \le y_n \le y_{n-1} \le \cdots \le y_2 \le y_1 \le y_0 \tag{7}$$

사실 $x_0 \le Ax_0 = x_1,\ y_0 \ge Ay_0 = y_1$이고 정리 2의 가정 ③에 의하여 $x_1 = Ax_0 \le Ay_0 = y_1$이므로 $x_0 \le x_1 \le y_1 \le y_0$이다. 이 과정을 계속하여 식 (7)을 얻는다.

3단계 렬 $\{x_n\},\ \{y_n\}$은 콤팍트이다. 먼저 $\{x_n\},\ \{y_n\}$들은 평등유계임을 증명하자. $v,\ w\in C[0,\ T]$이므로 $\exists M>0;\ \forall t\in[0,\ T],\ |v(t)|\le M,\ |w(t)|\le M$이다. $x_0 \le x_n \le y_n \le y_0$임을 고려하면 $0 < x_n(t) - x_0(t) \le w(t) - v(t),\ 0 < y_0(t) - y_n(t) \le w(t) - v(t)$이다. 따라서 $\{x_n\},\ \{y_n\}$들은 평등유계이다.

다음으로 $\{x_n\},\ \{y_n\}$의 구간 $[0,\ T]$에서의 동정도련속성을 증명하자.

$\{x_n\},\ \{y_n\}$의 구간 $[0,\ T]$에서의 동정도련속성을 증명하기 위하여 $t_1,\ t_2\in[0,\ T]$라고 하자. 먼저 $t_1 = 0$인 경우를 고찰하자.

$$\overline{M} := \left(\max_{s\in[0,T],\ y\in[-M,M]} |f(s,\ y)| + \lambda M\right)$$

$$x_n(t) = (Ax_{n-1})(t) = x_{n-1}(T)E_{\alpha}[-\lambda t^{\alpha}] + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[-\lambda(t-s)^{\alpha}](f(s,\ x_{n-1}(s)) + \lambda x_{n-1}(s))ds$$

이므로

$$x_n(t_1) = x_{n-1}(T)$$

$$x_n(t_2) = x_{n-1}(T)E_{\alpha}[-\lambda t_2^{\alpha}] + \int_0^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[-\lambda(t_2-s)^{\alpha}](f(s,\ x_{n-1}(s)) + \lambda x_{n-1}(s))ds$$

이다. 따라서

$$|x_n(t_2)-x_n(t_1)|\le|x_{n-1}(T)|\cdot|E_\alpha[-\lambda t_2{}^\alpha]-1|+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}|f(s,\ x_{n-1}(s))+\lambda x_{n-1}(s)|ds\le$$

$$\le M\cdot|E_\alpha[-\lambda t_2{}^\alpha]-1|+\frac{\overline{M}}{\Gamma(\alpha_n)}\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}ds=M\cdot|E_\alpha[-\lambda t_2{}^\alpha]-1|+\frac{t_2{}^\alpha\overline{M}}{\Gamma(\alpha+1)}$$

결국 $\{x_n\}$은 $t_1=0$에서 동정도련속이다.

다음으로 $t_1>0$인 경우를 보자. 일반성을 잃지 않고 $t_1<t_2$라고 하자.

$$x_n(t_1)=x_{n-1}(T)E_\alpha[-\lambda t_1^\alpha]+\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[-\lambda(t_1-s)^\alpha](f(s,\ x_{n-1}(s))+\lambda x_{n-1}(s))ds$$

$$x_n(t_2)=x_{n-1}(T)E_\alpha[-\lambda t_2^\alpha]+\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[-\lambda(t_2-s)^\alpha](f(s,\ x_{n-1}(s))+\lambda x_{n-1}(s))ds$$

$$|x_n(t_2)-x_n(t_1)|\le M|E_\alpha[-\lambda t_2^\alpha]-E_\alpha[-\lambda t_1^\alpha]|+$$

$$+|\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[-\lambda(t_2-s)^\alpha](f(s,\ x_{n-1}(s))+\lambda x_{n-1}(s))ds-$$

$$-\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[-\lambda(t_1-s)^\alpha](f(s,\ x_{n-1}(s))+\lambda x_{n-1}(s))ds|\le M|E_\alpha[-\lambda t_2^\alpha]-E_\alpha[-\lambda t_1^\alpha]|+$$

$$+|\int_0^{t_1}(t_2-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[-\lambda(t_2-s)^\alpha](f(s,\ x_{n-1}(s))+\lambda x_{n-1}(s))ds-$$

$$-\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[-\lambda(t_1-s)^\alpha](f(s,\ x_{n-1}(s))+\lambda x_{n-1}(s))ds|+$$

$$+|\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[-\lambda(t_2-s)^\alpha](f(s,\ x_{n-1}(s))+\lambda x_{n-1}(s))ds|\le$$

$$\le M|E_\alpha[-\lambda t_2^\alpha]-E_\alpha[-\lambda t_1^\alpha]|+\frac{\overline{M}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}|(t_2-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}|+\frac{\overline{M}}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}ds\le$$

$$\le M|E_\alpha[-\lambda t_2^\alpha]-E_\alpha[-\lambda t_1^\alpha]|+\frac{\overline{M}}{\Gamma(\alpha+1)}(|t_2^\alpha-t_1^\alpha|+2|t_2-t_1|^\alpha)$$

결국 $\{x_n\}$은 구간 $[0,\ T]$에서 동정도련속이다. 마찬가지로 $\{y_n\}$의 동정도련속성을 밝힐수 있다.

4단계 최소부동점, 최대부동점 x^*, y^*이 존재하며 이 부동점들을 다음의 반복도식에 의해 구할수 있다.

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x^*,\quad \lim_{n\to\infty}y_n=y^*$$

사실 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$이 콤팍트이므로 이 렬에서 기본렬을 꺼낼수 있다. 한편 이 렬들의 단조

성으로부터 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 자체가 수렴렬이다. 결국 $C[0,\ T]$의 적당한 원소 x^*, y^*이 있어서

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*,\ \lim_{n\to\infty} y_n = y^*$$

이 성립한다. 연산자 A는 련속연산자이므로 x^*, y^*들은 A의 부동점들이다. 한편 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$의 단조성으로부터 x^*은 최소부동점, y^*은 최대부동점이다.(증명끝)

실례 다음의 방정식을 고찰하자.

$$^cD_{0+}^{0.8}u(t) = -u(t) + \sin(t\cdot u(t))\ \ (t\in(0,\ 1)) \tag{8}$$

$$u(0) = u(1) \tag{9}$$

이 문제는 $\alpha = 0.8,\ f(t, x) = -x + \sin(t\cdot x)$ 인 경우이므로 조건 ①, ③을 만족시킨다. 또한 $v(t)\equiv 0$은 분명히 하풀이로 된다. 그리고 $w(t) = E_{0.8}(-t^{0.8}) + 1$을 상풀이로 놓을수 있다. 사실 보조정리 1에 의해 $v(t)\le w(t)$이고 $E_{0.8}(t)$의 단조비감소성으로부터

$$w(0) = E_{0.8}(0) = 1 > E_{0.8}(-1) = w(1)$$

이다. 한편 $^cD_{0+}^{0.8}E_{0.8}(-t^{0.8}) = -E_{0.8}(-t^{0.8})$임을 고려하면

$$^cD_{0+}^{0.8}(E_{0.8}(-t^{0.8}) + 1) = {}^cD_{0+}^{0.8}(E_{0.8}(-t^{0.8})) = -E_{0.8}(-t^{0.8})$$

따라서

$$-1 + \sin(t\cdot u(t)) \le 0,\ \ t\in(0,\ 1)$$

$$^cD_{0+}^{0.8}w(t) \ge -E_{0.8}(-t^{0.8}) - 1 + \sin(t\cdot u(t)) = -w(t) + \sin(t\cdot u(t))$$

이다. 문제 (8), (9)는 $[0, E_{0.8}(-t^{0.8}) + 1]$안에 적어도 하나의 주기풀이를 가진다.

참 고 문 헌

[1] S. Stanek; Fractional Calculus and Applied Analysis, 20, 662, 2017.

[2] J. Vasundhara Devi; Communications in Applied Analysis, 12, 4, 399, 2008.

[3] J. D. Ramirez et al.; Opuscula Mathematica, 29, 3, 2009.

[4] Ruyun Ma et al.; Article ID 626054, 18, 2010.

[5] F. A. Mcrae; Communications in Applied Analysis, 14, 1, 73, 2010.

주체108(2019)년 12월 15일 원고접수

Monotone Iterative Method for a Fractional Differential Equation with Periodic Boundary Condition

Choe Hui Chol, Pak Sun Ae

In this paper, we discuss the monotone iterative method using upper and lower solutions for following fractional differential equation with a periodic boundary condition

$$^cD_{0+}^{\alpha}u(t) = f(t,\ u(t))\ \ (t\in[0,\ T],\ T>0)$$

$$u(0) = u(T)$$

where $0<\alpha<1$.

Keyword: monotone iterative method