김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제4호

특이성을 가진 한가지 형태의 비선형다항분수계미분방정식의 적분경계값문제에 대한 연산행렬법

오규남, 강정수

론문에서는 분수계미분방정식의 수치풀이계산에서 많이 쓰이는 하르웨블레트연산행렬을 리용하여 시간변수에 관한 특이성을 가진 한가지 형태의 비선형다항분수계미분방정식의 비선형적분경계값문제에 대한 수치풀이법에 대하여 연구하였다.

선행연구[1]에서는 시간변수에 관하여 특이성을 가진 비선형분수계미분방정식의 비선형적분경계값문제의 풀이의 존재성과 상하풀이법을, 선행연구[2]에서는 방정식이 단항인 경우 여러점경계값문제를 풀기 위한 하르웨블레트연산행렬법을 연구하였고 선행연구[3]에서는 하르웨블레트연산행렬법을 리용하여 선형분수계편미분방정식의 수치풀이를 구하고 수렴성해석과 오차평가를 진행하였으며 선행연구[4]에서는 하르웨블레트연산행렬과 점배치법을 리용하여 최고계도함수계수가 1이하인 비선형다항분수계미분방정식의 초기값문제를 풀기 위한 계산도식을 제기하고 수치실례를 통한 수렴성해석을 진행하였지만 비선형적분경계값문제에 대한 수치풀이론의는 전혀 진행하지 못하였다.

우리는 선행연구[1]에서 론의한 비선형적분경계값문제의 풀이의 유일존재성을 증명하고 하르웨블레트연산행렬과 점배치법을 리용한 수치풀이계산도식의 수렴성을 해석하였다.

먼저 시간변수에 관하여 특이성을 가진 비선형분수계미분방정식의 적분경계값문제

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha}y(t)+f(t,\ y(t),\ D_{0+}^{\beta}y(t))=0,\ t\in(0,\ 1) \\ y(0)=0,\ \ D_{0+}^{\beta}y(1)=\int_0^1 g(s,\ y(s))ds \end{cases} \tag{1}$$

에 대응하는 적분방정식을 유도하고 그것의 풀이의 유일존재성을 론의하자. 여기서 $D_{0+}^{\alpha},\ D_{0+}^{\beta}$ 는 계수가 $1<\alpha<2,\ 0<\beta<1,\ 1<\alpha-\beta<2$ 인 리만-류빌분수계도함수들이며 $f\in C((0,\ 1)\times[0,\ +\infty)\times[0,\ +\infty),\ [0,\ +\infty))$ 이고 $f(t,\cdot,\cdot)$ 은 $t=0$ 과 $t=1$ 에서 특이이다. 즉 $\lim_{t\to0+}f(t,\cdot,\ \cdot)=+\infty$, $\lim_{t\to1-}f(t,\ \cdot,\cdot)=+\infty$ 이고 $g\in C([0,\ 1]\times[0,\ +\infty),\ [0,\ +\infty))$ 이다.

가정 1[1] $[0,\ +\infty)\times[0,\ +\infty)$ 에서 련속인 비부값함수 $f_1(x_1,\ x_2)$, $f_2(x_1,\ x_2)$ 들이 있어서 어떤 정수 $\sigma_1,\ \sigma_2\in(0,\ 1)$ 에 대하여 다음의 식들이 성립된다.

$$\lim_{t\to0+}t^{\sigma_1}f(t,\ x_1,\ x_2)=f_1(x_1,\ x_2),\quad \lim_{t\to1-}(1-t)^{\sigma_2}f(t,\ x_1,\ x_2)=f_2(x_1,\ x_2)$$

함수 F 를 $$F(t,x_1,x_2):=\begin{cases} t^{\sigma_1}(1-t)^{\sigma_2}f(t,\ x_1,\ x_2), & (t,\ x_1,\ x_2)\in(0,\ 1)\times[0,\ +\infty)\times[0,\ +\infty) \\ f_1(x_1,\ x_2), & t=0,\ (x_1,\ x_2)\in[0,\ +\infty)\times[0,\ +\infty) \\ f_2(x_1,\ x_2), & t=1,\ (x_1,\ x_2)\in[0,\ +\infty)\times[0,\ +\infty) \end{cases}$$

로 정의하면 가정 1이 성립될 때 $F\in C([0,\ 1]\times[0,\ +\infty)\times[0,\ +\infty),\ [0,\ +\infty))$ 임을 알수 있다.

정의 1[1] $D_{0+}^{\alpha}y\in C[0,\ 1]$ 인 함수 $y\in C[0,\ 1]$ 이 경계값문제 (1)을 만족시킬 때 $y(t)$ 를 적분경계값문제 (1)의 풀이라고 부른다.

보조정리 1 [1] 가정 1이 성립된다고 할 때 $y(t)$가 경계값문제 (1)의 풀이이기 위해서는 $x(t) := D_{0+}^{\beta} y(t)$로 주어지는 함수 $x(t)$가 적분방정식

$$x(t) = \int_0^1 G(t,\ s) f(s,\ I_{0+}^{\beta} x(s),\ x(s))\, ds + t^{\alpha-\beta-1} \int_0^1 g(s,\ I_{0+}^{\beta} x(s)) ds \tag{2}$$

의 $C[0,\ 1]$에서의 풀이일것이 필요하고 충분하다. 여기서

$$G(t,\ s) := \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta)} \begin{cases} (t-ts)^{\alpha-\beta-1} - (t-s)^{\alpha-\beta-1}, & 0 \le s \le t \le 1 \\ (t-ts)^{\alpha-\beta-1}, & 0 \le t \le s \le 1 \end{cases}$$

이다. X를 노름 $\|x\| := \max_{0 \le t \le 1} |x(t)|$가 도입된 바나흐공간 $C[0,\ 1]$이라고 하고 X에서 추 P를 $P = \{x \in X \mid x(t) \ge 0,\ t \in [0,\ 1]\}$로 정의한다.

가정 2 [1] $[0,\ 1]$에서 부아닌 련속함수 $a(t),\ b(t),\ c(t)$들이 존재하여 임의의 $(t,\ x_1,\ x_2) \in [0,\ 1] \times [0,\ +\infty) \times [0,\ +\infty)$에 대하여

$$F(t,\ x_1,\ x_2) = t^{\sigma_1}(1-t)^{\sigma_2} f(t,\ x_1,\ x_2) \le a(t) + b(t)x_1 + c(t)x_2$$

가 성립되며 $[0,\ 1]$에서 부아닌 련속함수 $p(t),\ q(t)$들이 존재하여 임의의 $(t,\ x) \in [0,\ 1] \times [0,\ +\infty)$에 대하여 $g(t,\ x) \le p(t) + q(t)x$가 성립된다.

우리는 $M_a := \|a\|,\ M_b := \|b\|,\ M_c := \|c\|,\ M_p := \|p\|,\ M_q := \|q\|,\ \delta := A \cdot B(1-\sigma_1,\ 1-\sigma_2)$, $A_1 := (\delta M_b + M_q)\Gamma(\beta+1) + \delta M_c,\ A_2 := \delta M_a + M_p$라고 약속한다.

가정 3 [1] $A_1 < 1$

가정 4 [1] 적당한 상수 $r > 0$이 존재하여 $(1-A_1)r \ge A_2$가 성립된다.

가정 5 적당한 상수 $l_1,\ l_2 > 0$이 존재한다고 하자.

이때 임의의 $t \in [0,\ 1]$과 임의의 $(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2) \in [0,\ +\infty) \times [0,\ +\infty)$에 대하여

$$|t^{\sigma_1}(1-t)^{\sigma_2} f(t,\ x_1,\ y_1) - t^{\sigma_1}(1-t)^{\sigma_2} f(t,\ x_2,\ y_2)| \le l_1 |x_1 - x_2| + l_2 |y_1 - y_2|.$$

또한 적당한 상수 $l_3 > 0$이 존재하여 임의의 $x_1,\ x_2 \in [0,\ +\infty)$에 대하여

$$|g(t,\ x_1) - g(t,\ x_2)| \le l_3 |x_1 - x_2|.$$

가정 6 $\theta := (\delta l_1 + l_3)/\Gamma(\beta+1) + \delta l_2 < 1$

정리 1 [1] 가정 1－4가 만족되면 적분방정식 (2)는 $B_r = \{x \mid x \in P \wedge \|x\| \le r\}$에서 적어도 하나의 정인 풀이를 가진다.

정리 2 가정 1－6이 만족되면 적분방정식 (2)는 B_r에서 유일풀이를 가진다.

다음으로 리만－류빌분수계적분의 하르웨블레트연산행렬에 대하여 론의하자.

정의 2 [3] $t \in (0,\ 1]$에 대하여 다음과 같은 함수들의 모임을 하르웨블레트라고 부른다.

$$h_0(t) = \frac{1}{\sqrt{m}},\ h_i(t) = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{cases} 2^{j/2}, & (k-1)/2^j < t \le (k-1/2)/2^j, \\ -2^{j/2}, & (k-1/2)/2^j < t \le k/2^j, \\ 0, & t \le (k-1)/2 \vee t > k/2^j, \end{cases} \quad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$$

여기서 $m = 2^s,\ s \in \mathbf{N}$이며 $(j,\ k)$는 $i = 2^j + k - 1$을 만족시키는 옹근수쌍이다.

정의 3 [3] $t_k = (k-1/2)/m\ (k = 1,\ 2,\ \cdots,\ m)$에 대하여 다음의 m차행렬을 하르웨블레트행렬이라고 부른다.

$$H=\begin{pmatrix} h_0(t_1) & h_0(t_2) & \cdots & h_0(t_m) \\ h_1(t_1) & h_1(t_2) & \cdots & h_1(t_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m-1}(t_1) & h_{m-1}(t_2) & \cdots & h_{m-1}(t_m) \end{pmatrix}$$

$m=2^s,\ s\in\mathbf{N}$ 으로 표시되는 자연수 m 이 주어지고 $[0,\ 1]$ 에서 m 개의 점 $\{t_k\}_{k=1}^m$ 을 $t_k=(k-1/2)/m\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 과 같이 배치하였다고 할 때 주어진 $y\in C(0,\ 1]$ 에 대하여 $\hat{y}(t)=\sum_{i=0}^{m-1}c_ih_i(t)$ 를 조건 $\hat{y}(t_k)=y(t_k)\ (k=1,\ \cdots,\ m)$ 가 성립되도록 결수 $c_i\ (i=0,\ \cdots,\ m-1)$ 를 결정하고 근사풀이 $\hat{y}(t)$ 를 계산하면 $C^{\mathrm{T}}=YH^{\mathrm{T}},\ \hat{y}(t)=YH^{\mathrm{T}}H_m(t)$ 와 같다.[2]

Q^α 를 $Q^\alpha H_m(t)=(I_{0+}^\alpha h_0(t),\ I_{0+}^\alpha h_1(t),\ \cdots,\ I_{0+}^\alpha h_{m-1}(t))^{\mathrm{T}}$ 로 정의하고 하르웨블레트행렬 H 에 Q^α 를 작용시키면 $Q^\alpha H=\begin{pmatrix} I_{0+}^\alpha h_0(t)|_{t=t_1} & I_{0+}^\alpha h_0(t)|_{t=t_2} & \cdots & I_{0+}^\alpha h_0(t)|_{t=t_m} \\ I_{0+}^\alpha h_1(t)|_{t=t_1} & I_{0+}^\alpha h_1(t)|_{t=t_2} & \cdots & I_{0+}^\alpha h_1(t)|_{t=t_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{0+}^\alpha h_{m-1}(t)|_{t=t_1} & I_{0+}^\alpha h_{m-1}(t)|_{t=t_2} & \cdots & I_{0+}^\alpha h_{m-1}(t)|_{t=t_m} \end{pmatrix}$ 으로 된다.

적분방정식 (2)의 근사풀이를 분수계적분의 하르웨블레트연산행렬을 리용하여 구하기 위하여 적분방정식 (2)를 다음과 같이 쓸수 있다.[1]

$$x(t)=-I_{0+}^{\alpha-\beta}f(t,\ I_{0+}^\beta x(t),\ x(t))+I_{0+}^{\alpha-\beta}f(t,\ I_{0+}^\beta x(t),\ x(t))|_{t=1}\ t^{\alpha-\beta-1}+t^{\alpha-\beta-1}\int_0^1 g(s,\ I_{0+}^\beta x(s))ds$$

이 식의 근사풀이를 구하기 위한 근사풀이계산도식은 다음과 같다.

걸음 1 점 $t_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 들을 배치하고

$$T_{\alpha-\beta}:=(t_1^{\alpha-\beta-1},\ t_2^{\alpha-\beta-1},\cdots,\ t_m^{\alpha-\beta-1}),\ I^{\alpha-\beta}:=Q^{\alpha-\beta}H,\ I^\beta:=Q^\beta H,\ P_1^{\alpha-\beta}:=Q^{\alpha-\beta}H_m(1)$$

과 벡토르들을 계산한다. 여기서 m 은 $m=2^k,\ k\in\mathbf{N}$ 인 수이다.

걸음 2 초기함수 $x_0\in B_r=\{x\,|\,x\in P\wedge\|x\|\le r\}$ 를 준다.

걸음 3 x_n 으로부터의 x_{n+1} 의 구성과정은 다음과 같다.

① 벡토르 $X_n=(x_n(t_1),\ x_n(t_2),\ \cdots,\ x_n(t_m))$ 을 구성하고 결수벡토르 $Z_n^{\mathrm{T}}=X_nH^{\mathrm{T}}$, $Y_n=Z_n^{\mathrm{T}}I^\beta$ 를 계산한다.

② 함수 $F,\ g$ 에 대하여 벡토르 $F_n=(F(t_1,\ (Y_n)_1,\ (X_n)_1),\ \cdots,\ F(t_m,\ (Y_n)_m,\ (X_n)_m))$ 과 $G_n=(g(t_1,\ (Y_n)_1),\ \cdots,\ g(t_m,\ (Y_n)_m))$ 을 구성하고 결수벡토르 $C_n^{\mathrm{T}}=F_nH^{\mathrm{T}}$, $D_n^{\mathrm{T}}=G_nH^{\mathrm{T}}$ 를 계산한다.

③ 벡토르 $A_n=C_n^{\mathrm{T}}I^{\alpha-\beta}$ 와 수 $A_n^1=C_n^{\mathrm{T}}P_1^{\alpha-\beta},\ B_n^1=D_n^{\mathrm{T}}P_1^1$ 을 계산하고 이에 기초하여 벡토르 X_{n+1} 을 $X_{n+1}=-A_n+(A_n^1+B_n^1)\cdot T_{\alpha-\beta}$ 와 같이 얻는다.

이때 $n+1$ 째 근사풀이 $x_{n+1}(t)$ 는 $x_{n+1}(t)=-C_n^{\mathrm{T}}Q^{\alpha-\beta}H_m(t)+(A_n^1+B_n^1)\cdot t^{\alpha-\beta-1}$ 이며 ③에서 계산된 X_{n+1} 에 대하여 $X_{n+1}=(x_{n+1}(t_1),\ x_{n+1}(t_2),\ \cdots,\ x_{n+1}(t_m))$ 이 성립된다.

이 결과로부터 경계값문제 (1)의 근사풀이는 다음과 같이 결정된다.

벡토르 $X_n=(x_n(t_1),\ x_n(t_2),\ \cdots,\ x_n(t_m))$ 을 구성하고 결수벡토르 $Z_n^{\mathrm{T}}=X_nH^{\mathrm{T}}$ 를 계산한다.

이때 $y_n(t)$ 는 $y_n(t)=Z_n^{\mathrm{T}}Q^{\beta}H_m(t)$ 로 계산된다.

경계값문제 (1)의 근사풀이의 수렴성에 대하여 론의하자.

근사풀이계산도식의 걸음 3의 ①에서는 Z_n^{T} 를 계산하여 $t\in(0,\ 1]$ 에서 함수 $x_n(t)$ 의 하르웨블레트근사함수 $\hat{x}_n(t)=Z_n^{\mathrm{T}}H_m(t)$ 를 얻을수 있으며 ②에서는 $C_n^{\mathrm{T}},\ D_n^{\mathrm{T}}$ 를 계산하여 $\sigma_n(t):=F(t,\ I_{0+}^{\beta}\hat{x}_n(t),\ x_n(t)),\ \mu_n(t):=g(t,\ I_{0+}^{\beta}\hat{x}_n(t))$ 의 하르웨블레트근사함수 $\hat{\sigma}_n(t)=C_n^{\mathrm{T}}H_m(t)$, $\hat{\mu}_n(t)=D_n^{\mathrm{T}}H_m(t)$ 를 구할수 있다.

이로부터 $x_{n+1}(t)=\int_0^1 G(t,\ s)s^{-\sigma_1}(1-s)^{-\sigma_2}\hat{\sigma}_n(s)ds+t^{\alpha-\beta-1}\int_0^1\hat{\mu}_n(s)ds$ 이며 적분방정식 (2)의 정확한 풀이 $x_*(t)$ 는 $x_*(t)=\int_0^1 G(t,\ s)s^{-\sigma_1}(1-s)^{-\sigma_2}\sigma_*(s)ds+t^{\alpha-\beta-1}\int_0^1\mu_*(s)ds$ 와 같은 형태로 표시된다. 여기서 $\sigma_*(t),\ \mu_*(t)$ 는 $\sigma_*(t):=F(t,\ I_{0+}^{\beta}x_*(t),\ x_*(t)),\ \mu_*(t):=g(t,\ I_{0+}^{\beta}x_*(t))$ 로 정의된 함수들이다.

보조정리 2 가정 1－4가 성립된다고 하자.

이때 적분방정식 (2)의 근사풀이렬 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 에 대하여 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}\subset B_r$ 가 성립된다.

보조정리 3 임의의 $\varepsilon>0$ 에 대하여 2의 제곱이 되는 어떤 $m\in\mathbf{N}$ 이 있어서 점 $t_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 들을 배치하여 다음의 식이 성립되도록 할수 있다.

$$\forall t\in(0,\ 1],\ \exists k;\ t\in(t_k-1/(2m),\ t_k+1/(2m)],$$

$$|F(t,\ I_{0+}^{\beta}\hat{x}_n(t),\ x_n(t))-F(t_k,\ I_{0+}^{\beta}\hat{x}_n(t_k),\ x_n(t_k))|<\varepsilon,\ |g(t,\ I_{0+}^{\beta}\hat{x}_n(t))-g(t_k,\ I_{0+}^{\beta}\hat{x}_n(t_k))|<\varepsilon$$

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보 수학, 65, 2, 42, 주체108(2019).

[2] **김일성**종합대학학보(자연과학), 63, 7, 17, 주체106(2017).

[3] L. Wang et al.; Appl. Math. Comput., 227, 66, 2014.

[4] S. C. Shiralashetti et al.; Nonlinear Dyn., 83, 293, 2016.

주체109(2020)년 6월 5일 원고접수

Operational Matrix Method for an Integral Boundary Value Problem of Multi-term Nonlinear Fractional Differential Equations with Singularity

O Kyu Nam, Kang Jong Su

We prove the uniqueness of solutions for an integral boundary value problem of multi-term nonlinear fractional differential equations with singularity with respect to time variable using Banach contraction mapping principle.

And we propose the numerical scheme for obtaining numerical solutions of integral boundary value problem using Haar wavelet operational matrix and collocation method.

Keywords: Haar wavelet operational matrix method, multi-term fractional differential equation