김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체106(2017)년 제63권 제12호 Vol. 63 No. 12 JUCHE106(2017).

한 형태의 비선형분수계미분방정식의 경계값문제에 대한 교대구역분해단조반복법

림명길, 리성림

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《기초과학은 과학기술강국을 떠받드는 주추입니다. 기초과학이 든든해야 나라의 과학기술이 공고한 토대우에서 끊임없이 발전할수 있습니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 40페지)

많은 현실문제들이 분수계미분방정식에 의하여 모형화된다.

선행연구[1, 2]에서는 비선형분수계미분방정식의 경계값문제에 대한 웃풀이와 아래풀이를 리용하는 단조반복법들에 대하여 론의하였다.

론문에서는 한 형태의 비선형분수계미분방정식의 경계값문제에 대한 교대구역분해단조반복법을 론의한다.

다음의 분수계경계값문제를 론의하자.

$$D^{\delta}u(t)+g(t,\ u)=0,\quad t\in(0,\ 1),\ \ 1<\delta\le 2 \tag{1}$$

$$u(0)=a\,,\ \ u(1)=b \tag{2}$$

여기서 $g:[0,\ 1]\times \boldsymbol{R}\to \boldsymbol{R}$는 련속함수이고 D^{δ}는 δ계캐푸터도함수이다.

$\delta>0,\ m-1<\delta\le m,\ \ m\in \boldsymbol{N}$에 대하여 캐푸터도함수는 다음과 같이 정의된다.

$$D^{\delta}f(t)=\frac{1}{\Gamma(m-\delta)}\int_0^t (t-s)^{m-1-\delta}f^{(m)}(s)ds \tag{3}$$

정의[1] 함수 $v(t)\in C^2([0,\ 1],\ \boldsymbol{R})$가

$$D^{\delta}v(t)+g(t,\ v)\ge 0,\ \ t\in(0,\ 1),\ \ 1<\delta\le 2,\ \ v(0)\le a\,,\ \ v(1)\le b$$

를 만족시킬 때 문제 (1), (2)의 아래풀이라고 부른다. 류사하게 함수 $w(t)\in C^2([0,\ 1],\ \boldsymbol{R})$가 우의 반대부등식들을 만족시키면 문제 (1), (2)의 웃풀이라고 부른다.

만일 $v(t)\le w(t),\ \forall t\in[0,\ 1]$이면 v와 w는 순서화된 아래, 웃풀이라고 부른다.

보조정리 1[1] $r(t)<0,\ \forall t\in[0,\ 1]$이고 $z(t)\in C^2([0,\ 1],\ \boldsymbol{R})$가 유계라고 하자.

이때 $z(t)$가 $D^{\delta}z(t)+r(t)z(t)\le 0\ \ (t\in(0,\ 1)),\ \ z(0),\ z(1)\ge 0$이면 $z(t)\ge 0,\ \forall t\in[0,\ 1]$이다.

보조정리 1은 $[0,\ 1]$의 닫긴부분구간 $[\alpha,\ \beta]$에서도 성립된다.

보조정리 2[1] v와 w가 문제 (1), (2)의 임의의 아래, 웃풀이라고 할 때 $g(t,\ u)$가 u에 대하여 엄격히 감소하면 v와 w는 순서화된다. 즉 $v(t)\le w(t),\ \forall t\in[0,\ 1]$이다.

보조정리 3[1] $g(t,\ u)$가 u에 대하여 엄격히 감소하면 문제 (1), (2)는 기껏 하나의 풀이를 가진다.

문제 (1), (2)의 순서화된 아래, 웃풀이 $v(t),\ w(t)$가 주어졌다고 하자.

이때 모임 $[v,\ w]$ 를 $[v,\ w]:=\{f\in C^2([0,1],\ \boldsymbol{R}): v\le f\le w\}$ 로 정의한다.

다음으로 $g(t,\ u)$ 가 u 에 대하여 엄격히 감소하고 $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ 가 $[v,\ w]$ 에서 아래로 유계 즉

$$-c\le \frac{\partial g}{\partial u}(t,\ \xi)<0,\ \forall\xi\in[v,\ w] \tag{4}$$

인 정수 c 가 존재한다고 하자.

앞으로 경계값문제 (1), (2)의 $g(t,\ u)$ 는 식 (4)를 만족시킨다고 가정한다.

구역분해단조반복법에 대하여 론의하자.

$v^{(0)}$ 과 $w^{(0)}$ 을 경계값문제 (1), (2)의 순서화된 아래, 웃풀이로 택한다.

구간 $[0,1]$ 을 2개의 중첩구간 $[0,\ \beta]$ 와 $[\alpha,\ 1]$ $(0<\alpha<\beta<1)$로 나눈다.

먼저 아래풀이반복도식을 구성하자.

초기자료를 $v_1^{(0)}=v_2^{(0)}=v^{(0)}$ 으로 놓는다.

부분구간 $[0,\ \beta]$ 에서 다음의 선형분수계경계값문제를 푼다.

$$-D^\delta v_1^{(k)}+cv_1^{(k)}=cv_1^{(k-1)}+g(t,\ v_1^{(k-1)}),\ \ t\in(0,\ \beta) \tag{5}$$

$$v_1^{(k)}(0)=a\ ,\ \ v_1^{(k)}(\beta)=v_2^{(k-1)}(\beta) \tag{6}$$

부분구간 $[\alpha,\ 1]$ 에서 다음의 선형분수계경계값문제를 푼다.

$$-D^\delta v_2^{(k)}+cv_2^{(k)}=cv_2^{(k-1)}+g(t,\ v_2^{(k-1)}),\ \ t\in(\alpha,\ 1) \tag{7}$$

$$v_2^{(k)}(\alpha)=v_1^{(k)}(\alpha)\ ,\ \ v_2^{(k)}(1)=b \tag{8}$$

앞으로 $v_1^{(k)}$ 와 $v_2^{(k)}$ 는 다음과 같이 리해한다.

$$v_1^{(k)}(t):=\begin{cases}v_1^{(k)}(t), & t\in[0,\ \beta]\\ v_2^{(k-1)}(t), & t\in(\beta,\ 1]\end{cases}\ ,\ \ v_2^{(k)}(t):=\begin{cases}v_1^{(k)}(t), & t\in[0,\ \alpha)\\ v_2^{(k)}(t), & t\in[\alpha,\ 1]\end{cases} \tag{9}$$

다음으로 웃풀이반복도식을 구성하자.

초기자료 $w_1^{(0)}=w_2^{(0)}=w^{(0)}$ 으로 놓는다.

부분구간 $[0,\ \beta]$ 에서 다음의 선형분수계경계값문제를 푼다.

$$-D^\delta w_1^{(k)}+cw_1^{(k)}=cw_1^{(k-1)}+g(t,\ w_1^{(k-1)}),\ \ t\in(0,\ \beta) \tag{10}$$

$$w_1^{(k)}(0)=a\ ,\ \ w_1^{(k)}(\beta)=w_2^{(k-1)}(\beta) \tag{11}$$

부분구간 $[\alpha,\ 1]$ 에서 다음의 선형분수계경계값문제를 푼다.

$$-D^\delta w_2^{(k)}+cw_2^{(k)}=cw_2^{(k-1)}+g(t,\ w_2^{(k-1)}),\ \ t\in(\alpha,\ 1) \tag{12}$$

$$w_2^{(k)}(\alpha)=w_1^{(k)}(\alpha),\ \ w_2^{(k)}(1)=b \tag{13}$$

$w_1^{(k)}$ 와 $w_2^{(k)}$ 에 대하여서도 식 (9)와 마찬가지로 연장할수 있다.

웃풀이반복도식에 대한 론의는 아래풀이반복도식과 류사하므로 아래풀이반복도식에 중점을 두고 론의한다.

정리 1 우의 반복도식에 대하여 다음의 성질들이 성립된다.

① 렬 $v_1^{(k)},\ k\ge1$ (혹은 $v_2^{(k)},\ k\ge1$)은 증가하는 함수렬이며 $v_2^{(k)}\ge v_1^{(k)}\ge v_2^{(k-1)},\ \ k\ge1$.

② 렬 $w_1^{(k)},\ k\ge1$ (혹은 $w_2^{(k)},\ k\ge1$)은 감소하는 함수렬이며 $w_2^{(k)}\le w_1^{(k)}\le w_2^{(k-1)},\ \ k\ge1$.

③ $v_1^{(k)}\le w_1^{(k)}$ (혹은 $v_2^{(k)}\le w_2^{(k)}$) $\forall k\ge1$

정리 2 경계값문제 (1), (2)에서 $g(t, u)$가 조건 (4)를 만족시킨다고 하자.

그리고 $v_1^{(k)}$, $w_1^{(k)}$ (혹은 $v_2^{(k)}$, $w_2^{(k)}$)는 우의 반복도식에 의한 반복렬이라고 하자.

이때 렬 $\{v_1^{(k)}\}$, $\{w_1^{(k)}\}$ (혹은 $\{v_2^{(k)}\}$, $\{w_2^{(k)}\}$)는 v^*, $w^*(v^* \le w^*)$에로 평등수렴한다.

증명 $\{v_1^{(k)}\}$는 단조증가렬이고 $w_1^{(0)}$에 의한 우로 유계이므로 어떤 함수 v_1^*에로 수렴하며 $\{v_2^{(k)}\}$는 단조증가렬이고 $w_2^{(0)}$에 의한 아래로 유계이므로 어떤 함수 v_2^*에로 수렴한다.

정리 1의 ①로부터 $v_2^{(k)} \ge v_1^{(k)} \ge v_2^{(k-1)}$, $k \ge 1$이므로 $v_1^* = v_2^* = v^*$이다.

마찬가지로 $\{w_1^{(k)}\}$, $\{w_2^{(k)}\}$도 같은 함수 w^*로 수렴한다.

렬 $\{v_1^{(k)}\}$, $\{w_1^{(k)}\}$는 연장의 의미에서 콤빡트모임 $[0, 1]$에서의 련속함수렬이므로 디니의 정리에 의하여 평등수렴한다.

정리 1에 의하여 $v_1^{(k)} \le w_1^{(k)}$ (혹은 $v_2^{(k)} \le w_2^{(k)}$), $\forall k \ge 1$이고

$$v^* = \lim_{k\to\infty} v_1^{(k)} \le \lim_{k\to\infty} w_1^{(k)} = w^* \quad (\text{혹은 } v^* = \lim_{k\to\infty} v_2^{(k)} \le \lim_{k\to\infty} w_2^{(k)} = w^*)$$

이다.(증명끝)

정리 3 정리 2의 가정밑에서 $v^* = w^* = u$이다. 여기서 u는 문제 (1), (2)의 풀이이다.

증명 부분구간 $(0, \beta)$와 $(\alpha, 1)$에서

$$D^\delta v^*(t) + g(t, v^*) = 0 \ (t \in (0, \beta)), \ D^\delta v^*(t) + g(t, v^*) = 0 \ (t \in (\alpha, 1)), \ u(0) = a, \ u(1) = \beta$$

이므로 v^*은 문제 (1), (2)의 풀이로 된다.

마찬가지로 w^*도 문제 (1), (2)의 풀이로 된다.

따라서 보조정리 3으로부터 $v^* = w^* = u$이다.(증명끝)

다음으로 반복도식에서 제기되는 선형분수계경계값문제 (5), (6)(혹은 문제 (10), (11))과 문제 (7), (8)(혹은 문제 (12), (13))에 대하여 론의한다.

보조정리 4 u가 선형분수계경계값문제 $D^\delta u + cu = f$, $t \in (\alpha, 1)$, $u(\alpha) = a$, $u(1) = b$의 풀이이기 위해서는 그것이 다음의 적분방정식의 풀이일것이 필요하고 충분하다.

$$u(t) = (a - \alpha b) + (b - a)t + \alpha u(t) + \int_\alpha^1 G(\alpha; s, t)(cu(s) - f(s))ds + \int_0^\alpha H(s, t)g(s, u(s))ds$$

$$G(\alpha; s, t) = \begin{cases} [(t-\alpha)(1-s)^{\delta-1} - (1-\alpha)(t-s)^{\delta-1}]/\Gamma(\delta), & \alpha \le s \le t \le 1 \\ (t-\alpha)(1-s)^{\delta-1}/\Gamma(\delta), & \alpha \le t \le s \le 1 \end{cases}$$

$$H(s, t) = [(t-\alpha)(1-s)^{\delta-1} + (1-t)(\alpha-s)^{\delta-1} - (1-\alpha)(t-s)^{\delta-1}]/\Gamma(\delta)$$

보조정리 5 u가 선형분수계경계값문제 $D^\delta u + cu = f$, $t \in (0, \beta)$, $u(0) = a$, $u(\beta) = b$의 풀이이기 위해서는 그것이 다음의 적분방정식의 풀이일것이 필요하고 충분하다.

$$u(t) = a + \frac{(b-a)}{\beta}t + \int_0^\beta G(\beta; s, t)(cu(s) - f(s))ds$$

$$G(\beta; s, t) = \begin{cases} [t(\beta-s)^{\delta-1}/\beta - (t-s)^{\delta-1}]/\Gamma(\delta), & 0 \le s \le t \le \beta \\ t(\beta-s)^{\delta-1}/[\beta \cdot \Gamma(\delta)], & 0 \le t \le s \le \beta \end{cases}$$

아래풀이반복도식에 대하여 경계조건 $v_1^{(k)}(0)=a$, $v_1^{(k)}(\beta)=v_2^{(k)}(\beta)$를 가지는 문제 (5)에 보조정리 5를 적용하면 다음과 같다.

$$v_1^{(k)}(t)=a+\frac{(b-a)}{\beta}t+\int_0^{\beta}G(\beta;\ s,\ t)(cv_1^{(k)}(s)-cv_1^{(k-1)}(s)-g(s,\ v_1^{(k-1)}(s)))ds \tag{14}$$

한편 경계조건 $v_2^{(k)}(\alpha)=v_1^{(k-1)}(\alpha)$, $v_2^{(k)}(1)=b$를 가지는 문제 (7)에 보조정리 4를 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}v_2^{(k)}(t)&=(a-\alpha b)+(b-a)t+\alpha v_2^{(k)}(t)+\\&+\int_{\alpha}^{1}G(\alpha;\ s,\ t)(cv_2^{(k)}(s)-cv_2^{(k-1)}(s)-g(s,\ v_2^{(k-1)}(s)))+\int_0^{\alpha}H(s,\ t)g(s,\ v_1^{(k)}(s))ds\end{aligned} \tag{15}$$

여기서 c는 식 (4)에 의하여 정의된 상수이다.

$w_1^{(k)}(t)$, $w_2^{(k)}(t)$에 대해서도 류사하게 론의할수 있다.

맺 는 말

론문에서는 $1<\delta\le 2$인 경우에 디리흘레경계조건을 가지는 비선형분수계미분방정식에 대한 병행구역분해단조반복알고리듬을 연구하였다.

우리의 방법은 아래풀이와 웃풀이개념과 구역분해방법에 기초하고있다.

이 방법은 비선형분수계미분방정식의 수값풀이법연구분야의 폭을 넓힌것으로 된다.

수값적측면에서 이 방법을 리용하면 웃풀이, 아래풀이렬의 적은 개수의 항을 가지고도 비교적 정확도가 높은 근사를 고속으로 얻을수 있다.

이 결과는 비선형분수계미분방정식에 구역분해법을 적용한 첫 결과이다.

참 고 문 헌

[1] Mohammed Al-Refai et al.; Nonlinear Analysis, 74, 3531, 2011.

[2] Guotao Wang; J. Comput. Appl. Math., 236, 2425, 2012.

주체106(2017)년 8월 5일 원고접수

An Alternative Domain Decomposition Monotone Iterative Method for Boundary Value Problems of a Type of Nonlinear Fractional Differential Equations

Rim Myong Gil, Ri Song Rim

We present an alternative domain decomposition monotone iterative technique for boundary value problems of a fractional differential equation.

We construct two alternative domain decomposition monotone sequences of upper and lower solutions which converge uniformly to the actual solution of the problem.

Key words: domain decomposition, monotone iterative method