

현탁액에서 립자들의 충돌특성해석

조현우, 김서연, 김철희

현탁액에서 립자의 침강운동해석[1-3]에서 분립체의 개수가 많을수록, 침강속도차가 클수록 충돌확률이 클것이 명백하지만 그것이 현탁계에 어느 정도로 영향을 미치겠는가를 정량적으로 평가하자면 침강운동과정에 일어나는 립자들사이의 충돌특성을 해석하여야 한다.

우리는 침강운동에서의 충돌특성을 고찰하면서 립자들의 평균충돌회수를 계산하는 식을 유도하였다.

1. 충돌해석모형

그림에서와 같이 너비 B , 높이 H , 면적 $S_0=BH$ 인 계에 분포밀도함수가 $f(r)$ 인 N 개의 립자가 분포되어있는 계에서 단위면적당 알갱이수는

$$Q = \frac{N}{HB} \quad (1)$$

으로 된다.

고찰을 편리하게 하기 위하여 N 개의 립자를 $r_1 < r_2 < \dots < r_{i-1} < r_i < \dots < r_n$ 이고 $\Delta r = r_i - r_{i-1}$ 인 n 개의 크기 등급으로 나누고 크기가 r_i 인 립자수를 N_i , 그 분포 함수(비율)를 p_i 라고 하면

$$N = \sum_{i=1}^n N_i \quad (2)$$

$$p_i = \frac{N_i}{N} = f(r_i) \Delta r \quad (3)$$

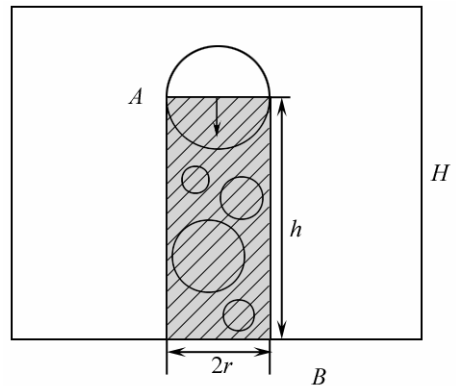


그림. 충돌해석모형

로 된다.

2. 립자들의 평균충돌회수

먼저 그림과 같이 바닥으로부터 h 만 한 높이에서 침강되는 1개의 립자 A 의 충돌을 고찰하기로 한다.

립자 A 가 침강하기 시작하여 바닥에 가라앉을 때까지 그림의 사선친 구역을 통과하게 되므로 이 구역안에 분포되어있는 알갱이들과의 충돌을 고찰하자.

이때 사선친 구역안의 립자중에서 립자 A 보다 큰 립자는 침강속도가 보다 빨라 충돌하지 않고 먼저 가라앉게 되므로 립자 A 보다 작은 립자들에 대해서만 고려하면 된다. 즉 립자 A 의 크기를 r_i 라고 하면 크기가 $r_1 \sim r_{i-1}$ 인 립자들과만 충돌할 가능성이 가지게 된다.

립자 A가 침강하는 자리길 즉 사선친 구역의 면적은 $S_i=2r_i h$ 이며 이 구역안에 놓이는 크기가 $r_1 \sim r_{i-1}$ 인 립자수는 각각 다음과 같다.

$$n_1 = \frac{S_i}{HB} N_1 = \frac{2r_i h}{HB} N p_1 \quad (4)$$

\vdots

$$n_{i-1} = \frac{S_i}{HB} N_{i-1} = \frac{2r_i h}{HB} N p_{i-1} \quad (5)$$

립자 A가 h 만 한 거리를 침강하는 시간은

$$t = h/v_i \quad (6)$$

이며 이 시간동안에 사선친 구역안의 립자들중에서 완전히 가라앉아 충돌에 참가하지 않는 크기가 $r_1 \sim r_{i-1}$ 인 립자들의 수는 각각 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} n_1 \frac{v_1 t}{h} &= n_1 \frac{v_1}{v_i} = n_1 \frac{r_1^2}{r_i^2} \\ &\vdots \\ n_{i-1} \frac{v_{i-1} t}{h} &= n_{i-1} \frac{v_{i-1}}{v_i} = n_{i-1} \frac{r_{i-1}^2}{r_i^2} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

t 시간동안에 가라앉지 않고 사선친 구역에 남아있는 즉 립자 A와 충돌하는 립자수는 각각

$$\left. \begin{aligned} n_1 - n_1 \frac{r_1^2}{r_i^2} &= n_1 \left(1 - \frac{r_1^2}{r_i^2} \right) \\ &\vdots \\ n_{i-1} - n_{i-1} \frac{r_{i-1}^2}{r_i^2} &= n_{i-1} \left(1 - \frac{r_{i-1}^2}{r_i^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

이며 그것들의 합 즉 크기가 r_i 이고 침강거리가 h 인 립자 A와 충돌하는 립자의 수는

$$m(r_i, h) = n_1 \left(1 - \frac{r_1^2}{r_i^2} \right) + n_2 \left(1 - \frac{r_2^2}{r_i^2} \right) + \cdots + n_{i-1} \left(1 - \frac{r_{i-1}^2}{r_i^2} \right) \quad (9)$$

으로 표시된다.

식 (4)와 (5), $Q = \frac{N}{HB}$ 을 고려하면 식 (9)는 다음과 같이 표시된다.

$$m(r_i, h) = 2Qhr_i \left(p_1 \left(1 - \frac{r_1^2}{r_i^2} \right) + p_2 \left(1 - \frac{r_2^2}{r_i^2} \right) + \cdots + p_{i-1} \left(1 - \frac{r_{i-1}^2}{r_i^2} \right) \right) = 2Qhr_i \sum_{j=1}^{i-1} p_j \left(1 - \frac{r_j^2}{r_i^2} \right) \quad (10)$$

결국 크기가 r_i 이고 h 만 한 높이에서 침강하는 립자 A의 충돌회수는 식 (10)과 같으며 크기가 r_i 인 립자가 N_i 개 들어있으므로 그것들의 충돌회수의 합은 다음과 같다.

$$m(r_i) = 2Q(h_1 + h_2 + \cdots + h_{N_i}) r_i \sum_{j=1}^{i-1} p_j (1 - r_j^2 / r_i^2) \quad (11)$$

침강높이 h 는 가정[1]에 따라 $[0, H]$ 에서 평등분포하는 우연수이므로 우연수들의 합 $h_1 + h_2 + \cdots + h_{N_i}$ 의 수학적기대값

$$E(h_1 + h_2 + \cdots + h_{N_i}) = N_i \frac{H}{2} \quad (12)$$

임을 고려하면 크기가 r_i 인 N_i 개 립자의 평균충돌회수(수학적기대값)는 다음과 같다.

$$m(r_i) = QHN_i r_i \sum_{j=1}^{i-1} p_j \left(1 - \frac{r_j^2}{r_i^2} \right) \quad (13)$$

따라서 크기가 r_i 인 립자 1개의 평균충돌회수는

$$M(r_i) = QHr_i \sum_{j=1}^{i-1} p_j \left(1 - \frac{r_j^2}{r_i^2} \right) \quad (14)$$

이고 N 개 립자들의 평균충돌회수는

$$M_N = \sum_{i=1}^n m(r_i) = QHr_i \sum_{i=1}^n N_i \sum_{j=1}^{i-1} p_j \left(1 - \frac{r_j^2}{r_i^2} \right) = QHNr_i \sum_{i=1}^n p_i \sum_{j=1}^{i-1} p_j \left(1 - \frac{r_j^2}{r_i^2} \right) \quad (15)$$

이다. 따라서 계에서 립자 1개의 평균충돌회수는 다음과 같다.

$$M = \frac{M_N}{N} = QHr_i \sum_{i=1}^n p_i \sum_{j=1}^{i-1} p_j \left(1 - \frac{r_j^2}{r_i^2} \right) \quad (16)$$

이제 N 이 대단히 커서 연속분포로 고찰할 수 있으므로 옷식에서 $p = f(r)\Delta r$ 임을 고려하고 합기호를 적분기호로 바꾸면 계에서 립자 1개의 평균충돌회수는

$$M = QH \int_0^\infty r f(r) \int_0^r f(\xi) \left(1 - \frac{\xi^2}{r^2} \right) d\xi dr \quad (17)$$

로 되며 크기가 r 인 립자 1개의 평균충돌회수는 다음과 같이 표시된다.

$$M(r) = QHr \int_0^r f(\xi) \left(1 - \frac{\xi^2}{r^2} \right) d\xi \quad (18)$$

맺 는 말

현탁액에서 립자들의 침강운동을 고찰할 때에는 반드시 침강운동과정에 동반되는 충돌특성을 해석하여야 하는데 여기서 침강해석모형을 리용하는것이 편리하다. 현탁액에서 립자들의 충돌확률은 립자들의 립도분산이 클수록 커진다.

참 고 문 헌

- [1] 손영철 등; 계면화학, 김일성종합대학출판사, 167~178, 주체99(2010).
- [2] G. Robert et al.; Physical Chemistry, Elsevier, 1082~1148, 2006.
- [3] I. N. Levine; Physical Chemistry, Newyork Blockin University, 783~812, 2003.

주체106(2017)년 3월 5일 원고접수

Analysis of Impact Characteristics of Particles in Suspension

Jo Hyon U, Kim So Yon and Kim Chol Hui

When sedimentation motion of particles is considered in suspension, impact characteristics in the process of sedimentation motion must be analyzed, it is convenient to use the model of sedimentation analysis.

The larger dispersion of particle size is, the higher impact probability of particles in suspension is.

Key words: suspension, sedimentation, impact characteristics