

충분리와 모체균렬이 있는 직교다층복합판의 유효역세기모형과 구부림해석

우성학, 로충일

경애하는 최고령도자 김정은동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《기계공학, 금속공학, 열공학, 재료공학을 비롯한 중요부문 기술공학들을 빨리 발전시키고 그 성과를 여러 경제부문에 적극 받아들여야 합니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 40페이지)

선행연구[2]에서는 충분리와 모체균렬이 있는 직교다층복합판의 국부역세기결정문제를 고찰하였고 선행연구[3]에서는 역시 충분리와 모체균렬이 있는 직교다층복합판의 면내당김에 대한 파괴규준을 설정하였다.

론문에서는 충분리와 모체균렬을 가진 직교다층복합판의 역세기를 근사적으로 결정하는 유효역세기모형을 제기하고 가로분포짐을 받는 직교다층복합판의 구부림문제를 통하여 정확성을 검증하였다.

1. 충분리와 모체균렬이 있는 직교다층복합판의 유효역세기모형

변의 길이가 a , b 이고 두께가 h 인 직교다층복합판에 가로분포짐 q 가 작용한다.(그림 1의 ㄱ)) 판의 내부에는 충분리와 모체균렬이 존재한다. 충분리는 일반적으로 직4각형, 원형, 타원형 등 여러가지 형태로 존재하지만 여기서는 직4각형모양의 충분리만을 고찰한다. 그리고 모체균렬은 충분리에 수직이고 모체와 섬유를 다같이 관통하며 1개 층에 국한될수도 있고 여러층을 포함할수도 있다.

판을 충분리와 모체균렬을 포함하는 손상구역과 결함이 없는 비손상구역으로 나누고 손상구역에서 충분리와 모체균렬을 포함하는 립방체요소를 선택하자.(그림 1의 ㄴ))

립방체요소의 길이와 너비는 요소의 k 째 층에 존재하는 충분리의 치수($a_k \times b_k$)와 같고 두께는 판두께와 같다. 충분리우에는 길이 b_k , 깊이 δ_k 인 모체균렬이 수직으로 놓여있고 그것의 길이방향은 y 축과 일치한다.

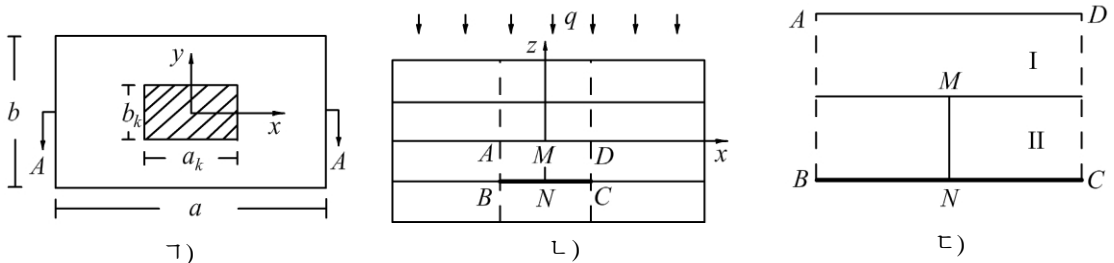


그림 1. 충분리와 모체균렬이 있는 직교다층복합판

ㄱ) 자리표계, ㄴ) A-A 자름면, ㄷ) 손상구역

손상구역에서 선택한 요소의 역세기를 국부역세기, 판 전체역세기를 전체역세기라고 부른다. 전체역세기는 손상구역과 비손상구역에서의 역세기를 구하고 매 구역의 면적에 해당하는 무게를 고려하여 결정한다.

손상구역에서의 역세기를 결정하기 위한 유효역세기모형을 보자.

유효역세기모형은 손상구역의 k 째 층에서의 국부역세기결정에 기초한 모형이다. 손상구역에서 충분리와 모체균렬을 포함하는 k 째 층의 국부역세기는

$$(C_{ij}^e)_k = (C_{ij})_k - (\Delta C_{ij}^e)_k \quad (i, j=1, 2, 4, 5, 6) \quad (1)$$

이다. 여기서 $(C_{ij})_k$ 는 균렬이 없는 경우의 탄성역세기상수들이고 ΔC_{ij}^e 는 k 째 층에서의 모체균렬로 인한 증분량들이다. 증분탄성역세기상수들은 $0 \leq (\Delta C_{ij}^e)_k \leq (C_{ij})_k$ 를 만족시키며 균렬이 없는 경우에는 $(\Delta C_{ij}^e)_k = 0$ 이고 균렬확대로 하여 요소층이 완전히 손상된 경우에는 $(\Delta C_{ij}^e)_k = (C_{ij})_k$ 로 된다. $(C_{ij}^e)_k$ 에 대응한 변환된 환산역세기 $(\bar{Q}_{ij})_k$ 들은

$$(\bar{Q}_{ij}^e)_k = (\bar{Q}_{ij})_k - (\Delta \bar{Q}_{ij}^e)_k \quad (2)$$

로 된다. 여기서 $(\bar{Q}_{ij})_k$ 는 다층판리론에서 알려진 변환된 환산역세기[1]이고 $(\Delta \bar{Q}_{ij}^e)_k$ 는 손상구역의 k 째 층의 변환된 증분환산역세기로서 $\Delta C_{ij}^e = f(A, F, G, \varphi_{ij}, h^e)$ 에 의해 표시된다.[2] 이때 A, F, G 는 균렬치수와 재료특성에 관계되는 상수들이고 φ_{ij} 는 균렬자리표계에서의 역세기관계식, h^e 는 균렬끝에서의 응력집중을 고려한 두께이다.

$(\Delta C_{ij}^e)_k$ 에 의한 증분환산역세기결정방법[2]은 모체균렬의 국부적특성을 정확히 반영한 방법이지만 계산과정이 복잡한 부족점이 있다.

유효역세기모형은 충분리와 모체균렬이 있는 판의 변형과정에 대한 실험적고찰[5]에 기초하고있다. 손상구역에서 모체균렬을 포함한 층($ABCD$)을 균렬의 끝점(M)을 지나는 수평선에 의해 2개의 층(I, II)으로 나누자.(그림 1의 ㄷ) 균렬이 없는 옷층(I)은 비손상구역과 같으므로 이 층에서의 변환된 증분환산역세기는 $(\Delta \bar{Q}_{ij}^e)_I = (\bar{Q}_{ij})_k$ 이다.

한편 아래층(II)은 균렬 MN 에 의해 독립적인 2개의 부분구역으로 분리되어있으므로 당김에 대한 역세기는 령 $((\Delta \bar{Q}_{ij}^e)_{II} = 0)$ 이고 누름에 대해서는 비손상구역에서와 같다 $((\Delta \bar{Q}_{ij}^e)_I = (\bar{Q}_{ij})_k)$ 고 볼수 있다. 아래층(II)이 당김과 누름에 각이하게 저항하므로 k 째 층(I∪II)에서의 증분환산역세기는 중립면에 관한 층의 위치를 고려하여 다음과 같이 결정된다.

$$(\Delta \bar{Q}_{ij}^e)_k = \frac{\delta_k}{t_k} \cdot (Q_{ij})_k [1 - H(z)], \quad H(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases} \quad (3)$$

여기서 δ_k 는 k 째 층에 존재하는 균렬의 깊이이고 t_k 는 k 째 층의 두께이며 $H(z)$ 는 헤비사이드함수이다. 옷식을 고려하면 식 (2)로부터

$$(\bar{Q}_{ij}^e)_k = \eta_k (Q_{ij})_k, \quad \eta_k(z) = 1 - \frac{\delta_k}{t_k} [1 - H(z)] \quad (4)$$

이다. 이 식은 k 째 층의 일상태를 반영한 유효역세기로 된다.

유효역세기모형 (4)에 따라 매 구역에서의 당김 및 구부림역세기 $A_{ij}, D_{ij}, A_{ij}^e, D_{ij}^e$ 들

은 다음과 같이 표시된다.

$$1\text{-구역}; \quad A_{pp} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{pp})_k (z_k - z_{k-1}), \quad D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (5)$$

$$2\text{-구역}; \quad A_{pp}^e = \sum_{k=1}^N \eta_k (\bar{Q}_{pp})_k (z_k - z_{k-1}), \quad D_{ij}^e = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \eta_k (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (6)$$

여기서 N 은 층개수이고 $p=4, 5; ij=11, 12, 22, 66$ 이다.

2. 1차자름변형리론에 기초한 구부림해석

1) 판의 전체역세기결정

1차자름변형리론에 따라 판의 변위성분들은 다음과 같이 표시된다.

$$u(x, y) = u_0(x, y) + z\psi_x(x, y), \quad v(x, y) = v_0(x, y) + z\psi_y(x, y), \quad w = w_0(x, y)$$

여기서 ψ_x, ψ_y 는 각각 중간면의 x, y 축주위로의 회전각이다.

판의 중간면의 면적을 S , 비손상구역과 손상구역에 해당하는 면적을 각각 S_1 과 S_2 로 표시하면 $S_1 + S_2 = S$ 이고 판의 전에너지식은 다음과 같다.

$$V = \frac{1}{2} \iint_S \Lambda dx dy = \frac{1}{2} \left(\iint_{S_1} \Lambda_0 dx dy + \iint_{S_2} \Lambda^e dx dy \right) \quad (7)$$

여기서

$$\Lambda = \Lambda_0 + \Lambda^e, \quad \Lambda_0 = \sum_{r=1}^3 \Lambda_{r0}(A_{ij}, D_{ij}), \quad \Lambda^e = \sum_{r=1}^3 \Lambda_{r0}^e(A_{ij}^e, D_{ij}^e)$$

이다.

$$\begin{aligned} \Lambda_{10} &= -2lA_{55}w_{,x}\psi_x + D_{11}(\psi_{x,x})^2 + D_{66}(\psi_{x,y})^2 - lA_{55}(\psi_x)^2 + 2(D_{12} + D_{66})\psi_{y,xy}\psi_x \\ \Lambda_{20} &= -2A_{44}w_{,y}\psi_y + 2(D_{12} + D_{66})\psi_{x,xy}\psi_y + D_{66}(\psi_{y,x})^2 + D_{22}(\psi_{y,y})^2 - lA_{44}(\psi_y)^2 \\ \Lambda_{30} &= lA_{55}(w_{,x})^2 + lA_{44}(w_{,y})^2 - P_x(w_{,x})^2 - P_y(w_{,y})^2 + 2lA_{55}\psi_{x,x}w + 2lA_{44}\psi_{y,y}w - 2qw \\ \Lambda_{10}^e &= -2lA_{55}^ew_{,x}\psi_x + D_{11}^e(\psi_{x,x})^2 + D_{66}^e(\psi_{x,y})^2 - lA_{55}^e(\psi_x)^2 + 2(D_{12}^e + D_{66}^e)\psi_{y,xy}\psi_x \\ \Lambda_{20}^e &= -2A_{44}^ew_{,y}\psi_y + 2(D_{12}^e + D_{66}^e)\psi_{x,xy}\psi_y + D_{66}^e(\psi_{y,x})^2 + D_{22}^e(\psi_{y,y})^2 - lA_{44}^e(\psi_y)^2 \\ \Lambda_{30}^e &= lA_{55}^e(w_{,x})^2 + lA_{44}^e(w_{,y})^2 + 2lA_{55}^e\psi_{x,x}w + 2lA_{44}^e\psi_{y,y}w - 2qw \end{aligned}$$

웃식에서 $l=5/6$ 은 자름보정인수[4]이다.

식 (7)의 오른변의 피적분항에서 비손상구역에 해당하는 첫째 항에는 면적에 따른 무게 S_1/S 를 주고 둘째 항에는 S_2/S 를 주어 전체 면적에 관하여 적분하면 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\iint_{S_1} F_{ij} \varphi(x, y) dx dy + \iint_{S_2} F_{ij}^e \varphi(x, y) dx dy = \iint_S [F_{ij} S_1/S + F_{ij}^e S_2/S] \varphi(x, y) dx dy \quad (8)$$

$$(F = A, D)$$

전체역세기를 $\bar{A}_{pp}, \bar{D}_{ij}$ 로 표시하면

$$\begin{aligned}\bar{A}_{pp} &= A_{pp}S_1/S + A_{pp}^e S_2/S \\ \bar{D}_{ij} &= D_{ij}S_1/S + D_{ij}^e S_2/S \quad (ij=11, 12, 22, 66; \quad p=4, 5)\end{aligned}\quad (9)$$

로 되고 식 (8)은 다음의 형태로 쓸수 있다.

$$\iint_{S_1} F_{ij} \varphi(x, y) dx dy + \iint_{S_2} F_{ij}^e \varphi(x, y) dx dy = \iint_S \bar{F}_{ij} \varphi(x, y) dx dy, \quad (\bar{F} = \bar{A}, \bar{D}) \quad (10)$$

식 (5), (6), (9), (10)에 따라 전체 판의 당김 및 구부림역세기들은 각각 다음과 같이 결정된다.

$$\begin{aligned}\bar{A}_{pp} &= \frac{1}{S} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (S_1 + \eta_k S_2) (z_k - z_{k-1}) \\ \bar{D}_{ij} &= \frac{1}{3S} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (S_1 + \eta_k S_2) (z_k^3 - z_{k-1}^3) \\ (ij &= 11, 12, 22, 66; \quad p=4, 5)\end{aligned}\quad (11)$$

식 (10)에서 보는것처럼 전체역세기 \bar{A}_{pp} , \bar{D}_{ij} 들은 충분리와 모체균열이 있는 판의 역세기에 해당하는 결함이 없는 판의 전체역세기이다. 따라서 이 역세기들을 리용하여 충분리와 모체균열이 있는 판의 구부림문제를 일반다층판리론으로 고찰할수 있다.

2) 1차자름변형리론에 기초한 구부림해석

앞에서 결정한 판의 전체역세기를 리용하여 주어진 대칭직교다층복합판의 최대처짐과 응력을 해석적으로 구하고 ANSYS에 의한 모의결과와 비교하여 유효역세기모형의 정확성을 평가한다.

판의 네 변은 단순지지되고 가로균등분포힘이 작용한다.(그림 1의 ㄱ), ㄴ))

가로짐을 받는 대칭직교다층판의 구부림미분방정식은 에네르기범함수식 (7)의 정류조건으로부터 얻는다. 미지함수와 가로분포짐의 2중푸리에전개식

$$\begin{aligned}w(x, y) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N W_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \quad \psi_x(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \Phi_{mn} \cos \alpha_m x \sin \beta_n y \\ \psi_y(x, y) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N P_{mn} \sin \alpha_m x \cos \beta_n y, \quad q = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N q_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \\ &\left(\alpha_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{b} \right)\end{aligned}\quad (12)$$

를 대입하면 1차자름변형리론에 의한 판의 처짐방정식[4]은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}[L_{ij}]\{W_{mn} \quad \Phi_{mn} \quad P_{mn}\}^T &= \{0 \quad 0 \quad q_{mn}\}^T, \quad L_{ij} = L_{ji} \\ L_{11} &= \bar{D}_{11}\alpha_m^2 + \bar{D}_{66}\beta_n^2 + \bar{I}_{55}, \quad L_{12} = (\bar{D}_{12} + \bar{D}_{66})\alpha_m\beta_n, \quad L_{13} = \bar{I}_{55}\alpha_m \\ L_{22} &= \bar{D}_{66}\alpha_m^2 + \bar{D}_{22}\beta_n^2 + \bar{I}_{44}, \quad L_{23} = \bar{I}_{44}\beta_n, \quad L_{33} = \bar{I}_{55}\alpha_m^2 + \bar{I}_{44}\beta_n^2\end{aligned}\quad (13)$$

균등분포짐의 경우 식 (12)에서 $q_{mn} = (16q)/(mn\pi^2)$ 이다.

다음의 기하학적 및 력학적특성을 가진 판의 처짐 및 응력상태를 해석하자.

판의 길이와 너비는 $a=30\text{cm}$, $b=20\text{cm}$ 이고 두께는 $h=8\text{mm}$ (8개 층)이다. 매 층의 두께는 $t_k=1\text{mm}$ 로서 다 같고 적층구조는 $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]_s$ 이며 층재료는 다음의 특성량을

가진 유리/에폭시재료이다.

$$E_{11} = 38.6\text{GPa}, E_{22} = E_{33} = 8.27\text{GPa}, G_{12} = G_{13} = 4.14\text{GPa}, G_{23} = 5.1\text{GPa}$$

$$\nu_{12} = \nu_{13} = 0.26, \nu_{23} = 0.3$$

충분리의 길이와 너비는 $a_k = 2\text{cm}$, $b_k = 1.5\text{cm}$ 이고 모체균렬의 길이와 깊이는 $l_k = 1.5\text{cm}$, $\delta_k = 0.5\text{mm}$ 이다. 가로분포집은 $q = 0.5\text{MPa}$ 이다. 판의 맨 윗층을 첫번째 층으로, 맨 아래층을 마지막층(8째 층)으로 볼 때 손상구역에서 충분리는 6째 층과 7째 층사이에 있고 모체균렬은 6째 층안에 있다.

따라서 식 (4)로부터 $\eta_k(z) = \begin{cases} 0.5 & (k=6) \\ 1 & (k \neq 6) \end{cases}$ 이다. 아래의 표에서는 맨 아래층바깥면의 가

운데점에서의 최대처짐과 응력세기에 대한 유효역세기모형에 의한 해석풀이와 실제 판의 ANSYS모의결과, 고전다층판리론(CLT)풀이를 대비적으로 보여준다.

표. 최대처짐과 응력세기

	해석풀이	ANSYS	CLT	상대오차 (해석/ANSYS)	상대오차 (해석/CLT)
최대처짐 ($\times 10^{-3}\text{m}$)	0.7748	0.7997	0.7180	3.25%	7.3%
응력세기 ($\times 10^7\text{Pa}$)	7.2468	7.6317	7.8080	5.3%	7.74%

그림 2는 균렬끝점으로부터의 z 방향거리(높이)에 따르는 응력세기의 변화특성을 보여 주었다. 균렬끝점($z = -1.5\text{mm}$)에서 해석풀이와 ANSYS모의결과와의 상대오차는 5.3%, 고전탄성판리론과의 상대오차는 7.74%로서 비교적 크지만 z 가 증가함에 따라 $z = -0.5\text{mm}$ 에서는 4.77, 6.7%, $z = 0.5\text{mm}$ 에서는 3.3, 4.41%로 급격히 작아진다.

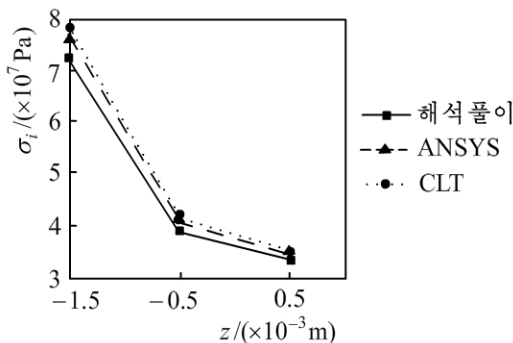


그림 2. 응력세기의 변화특성($\sigma_i - z$)

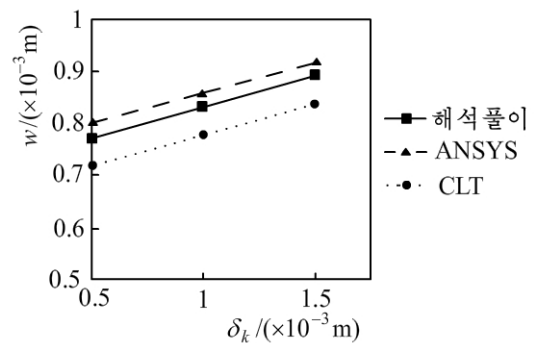


그림 3. 처짐변화특성($w - \delta$)

그림 3에서는 균렬길이 $\delta = \sum_{k=1}^8 \delta_k$ 의 증가에 따르는 처짐변화특성을 보여준다. 충분리는 앞에서와 같이 6째 층과 7째 층사이에 있고 균렬깊이는 $0.5 < \delta < 1.5$, $\Delta\delta = 0.5$ 로 증가한다. 해석풀이와 ANSYS모의결과, 고전다층판리론을 비교하면 상대오차는 $\delta = 0.5$ 일 때

3.25, 7.3%, $\delta=1$ 일 때 2.94, 6.9%, $\delta=1.5$ 일 때 2.7, 6.2%이다.

계산결과들은 유효역세기모형이 충분리와 모체균열이 있는 판의 효과적인 해석수단으로 된다는것을 보여준다.

맺는 말

충분리와 모체균열을 가진 직교다층복합판의 유효역세기모형을 제기하고 가로짐을 받는 직교다층복합판의 구부림문제를 통하여 정확성을 검증하였다.

손상구역과 비손상구역에서의 역세기를 구하고 매 구역의 면적에 해당하는 무게로 결합하여 전체역세기를 해석적방법으로 결정하였으며 이에 기초하여 가로분포짐을 받는 판의 구부림문제를 해석하였다. 얻어진 풀이를 ANSYS모의결과와 비교하여 정확성을 검증하였으며 모체균열이 판의 세기특성에 주는 영향을 평가하였다. 모의결과는 유효역세기모형이 판의 국부적손상특성을 충분히 반영하는 효과적인 방법이라는것을 보여준다.

참고 문헌

- [1] 송성관; 복합재료력학, 김일성종합대학출판사, 39~41, 주체103(2014).
- [2] In-Bong Kim et al.; Composite Structures 196, 127, 2018.
- [3] L. Zubillaga et al.; Composite Structures 127, 10, 2015.
- [4] V. Birman; Plate Structures, Springer, 173~225, 2011.
- [5] F. L. Matthews et al.; Finite Element Modelling of Composite Materials and Structures, CRC Press, 143~144, 2000.

주체107(2018)년 12월 5일 원고접수

The Effective Stiffness Model and Bending Analysis of Cross-Ply Laminated Composite Plates with a Delamination and Matrix Crack

U Song Hak, Ro Chung Il

We present an effective stiffness model to determine the stiffness of the cross-ply laminated composite plate with a delamination and matrix crack and validate it through bending analysis under the lateral load.

Key words: delamination, matrix crack, laminated composite plate