김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체105(2016)년 제62권 제1호 Vol. 62 No. 1 JUCHE105(2016).

반대칭사영접속을 가진 리만다양체에서 슈르의 정리의 확장

허달윤, 김방철

론문에서는 리만다양체에서 반대칭비계량접속의 한 형태인 반대칭사영접속에 대하여 슈르의 정리가 성립된다는것을 새롭게 밝혔다.

지난 시기 특수한 형태의 비계량대칭접속인 아마리－첸쪼브접속에 대한 슈르의 정리[4], 반대칭계량접속에 대한 슈르의 정리[3], 한 형태의 반대칭비계량접속에 대한 슈르의 정리[1]가 연구되였다.

우리는 선행연구[2]에서 반대칭비계량접속의 한 형태로 정식화된 반대칭사영접속에 대한 슈르의 정리를 연구한다.

슈르의 정리는 리만다양체의 구조연구에서 중요한 역할을 한다.

리만다양체 $(M,\ g)$에서 반대칭사영접속 ∇는 어떤 1－형식 ψ와 π에 대하여

$$\begin{aligned}\nabla_k g_{ij} &= -2\psi_k g_{ij} - \psi_i g_{jk} - \psi_j g_{ki},\\ T_{ij}^k &= \varphi_j \delta_i^k - \varphi_i \delta_j^k\end{aligned} \tag{1}$$

를 만족시키는 접속으로서 접속결수는 다음과 같다.

$$\Gamma_{ij}^k = \{_{ij}^k\} + \psi_i \delta_j^k + (\psi_j + \varphi_j)\delta_i^k - g_{ij}\varphi^k \tag{2}$$

여기서 $\{_{ij}^k\}$는 레비－찌비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$에 관한 접속결수이고 $\psi_i,\ \varphi_i$는 각각 1－형식 ψ와 π의 성분이다.

그리고 ∇에 대한 곡률텐소르는

$$R_{ijk}{}^l = K_{ijk}{}^l + \delta_j^l \alpha_{ik} - \delta_i^l \alpha_{jk} + g_{ik}\beta_j^l - g_{jk}\beta_i^l + \delta_k^l \psi_{ij}$$

이다. 여기서 $K_{ijk}{}^l$은 레비－찌비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$에 관한 곡률텐소르이고

$$\alpha_{ik} = \overset{\circ}{\nabla}_i(\psi_k + \varphi_k) - (\psi_i + \varphi_i)(\psi_k + \varphi_k) + g_{ik}(\psi_p + \varphi_p)\varphi^p,$$

$$\beta_i = \overset{\circ}{\nabla}_i \varphi_k - \varphi_i \varphi_k,\ \psi_{ij} = \overset{\circ}{\nabla}_i \psi_j - \overset{\circ}{\nabla}_j \psi_i .$$

반대칭사영접속 ∇의 호상접속 $\overline{\nabla}$는

$$\overline{\nabla}_k g_{ij} = -2(\psi_k + \varphi_k) g_{ij} - (\psi_i - \varphi_i) g_{jk} - (\psi_j - \varphi_j) g_{ki},\ \overline{T}_{ij}{}^k = \varphi_i \delta_j^k - \varphi_j \delta_i^k \tag{3}$$

를 만족시키는 접속으로서 접속결수는

$$\overline{\Gamma}_{ij}{}^k = \{_{ij}^k\} + (\psi_i + \varphi_i)\delta_j^k + \psi_j \delta_i^k - g_{ij}\varphi^k \tag{4}$$

이고 $\overline{\nabla}$에 관한 곡률텐소르는

$$\overline{R}_{ijk}{}^l = K_{ijk}{}^l + \delta_j^l \gamma_{ik} - \delta_i^l \gamma_{jk} + g_{ik}\beta_j^l - g_{jk}\beta_i^l - \delta_k^l \rho_{ij}$$

이다. 여기서

$$\gamma_{ik} = \overset{\circ}{\nabla}_i \psi_k - \psi_i \psi_k + g_{ik}\psi_p \varphi^p, \quad \rho_{ik} = \overset{\circ}{\nabla}_i(\psi_j + \varphi_j) - \overset{\circ}{\nabla}_j(\psi_j + \varphi_j).$$

곡률텐소르 $R_{ijk}{}^l$ 에 대한 제2종비앙끼다항식은 다음과 같다.

$$\nabla_h R_{ijk}{}^l + \nabla_i R_{jhk}{}^l + \nabla_j R_{hik}{}^l = 2(\varphi_h R_{ijk}{}^l + \varphi_i R_{jhk}{}^l + \varphi_j R_{hik}{}^l)$$

$R_{ijkl} = g_{lp} R_{ijk}{}^p$ 이므로 이 식으로부터

$$\begin{aligned}&\nabla_h R_{ijkl} + \nabla_i R_{jhkl} + \nabla_j R_{hikl} = \\ &= 2(\varphi_h R_{ijkl} + \varphi_i R_{jhkl} + \varphi_j R_{hikl}) + Q_{hlp} R_{ijk}^{\ \ \ p} + Q_{ilp} R_{jhk}^{\ \ \ p} + Q_{jlp} R_{hik}^{\ \ \ p}\end{aligned} \tag{5}$$

가 성립된다. 여기서 $Q_{kij} = \nabla_k g_{ij}$ 이다.

곡률텐소르 $\overline{R}_{ijk}{}^l$ 에 대해서는

$$\begin{aligned}&\nabla_h \overline{R}_{ijkl} + \nabla_i \overline{R}_{jhkl} + \nabla_j \overline{R}_{hikl} = \\ &= -2(\varphi_h \overline{R}_{ijkl} + \varphi_i \overline{R}_{jhkl} + \varphi_j \overline{R}_{hikl}) + \overline{Q}_{hlp} \overline{R}_{ijk}{}^p + \overline{Q}_{ilp} \overline{R}_{jhk}{}^p + \overline{Q}_{jlp} \overline{R}_{hik}{}^p\end{aligned} \tag{6}$$

이다. 여기서 $\overline{Q}_{kij} = \overline{\nabla}_k g_{ij}$ 이다.

리만다양체 $(M,\ g)$ 의 임의의 점 p 에서 주어진 접속에 대한 자름면곡률이 2차원방향선택에 무관계하면 곡률텐소르는

$$R_{ijkl} = K(p)(g_{il} g_{jk} - g_{ik} g_{jl}). \tag{7}$$

$K(p) = \mathrm{const}$ 이면 리만다양체는 주어진 접속에 대하여 일정곡률을 가진다고 말한다.

이제 반대칭사영접속 ∇ 와 그것의 호상접속 $\overline{\nabla}$ 에 대해 확장된 슈르의 정리를 정식화하고 증명하자.

정리 1 n 차원련결리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 $n \geq 3$ 인 경우에 임의의 점 p 에서 반대칭사영접속 ∇ 에 관한 자름면곡률이 2차원방향의 선택에 무관계하고

$$\psi_h = -2\varphi_h \tag{8}$$

이면 리만다양체 $(M,\ g,\ \overset{\circ}{\nabla})$ 은 일정곡률을 가진다.

증명 식 (7)을 식 (5)에 넣고 식 (1)을 리용하면

$$\begin{aligned}&\nabla_h K(g_{il} g_{jk} - g_{ik} g_{jl}) + \nabla_i K(g_{jl} g_{ik} - g_{jk} g_{hl}) + \\ &\quad + \nabla_j K(g_{hl} g_{ik} - g_{hk} g_{il}) - K[\psi_h(g_{il} g_{jk} - g_{ik} g_{jl}) + \\ &\quad + \psi_i(g_{jl} g_{hk} - g_{jk} g_{hl}) + \psi_j(g_{hl} g_{ik} - g_{hk} g_{il})] = \\ &= 2K[\varphi_h(g_{il} g_{jk} - g_{ik} g_{jl}) + \varphi_i(g_{jl} g_{hk} - g_{jk} g_{hl}) + \varphi_j(g_{hl} g_{ik} - g_{hk} g_{il})].\end{aligned}$$

이 식을 정돈하면

$$\begin{aligned}&[\nabla_h K - K(\psi_h + 2\varphi_h)](g_{il} g_{jk} - g_{ik} g_{jl}) + [\nabla_i K - K(\psi_i + 2\varphi_i)](g_{jl} g_{hk} - g_{jk} g_{hl}) + \\ &\quad + [\nabla_j K - K(\psi_j + 2\varphi_j)](g_{hl} g_{ik} - g_{hk} g_{il}) = 0\end{aligned}$$

이다. 이 식에 g^{jk} 를 곱하고 $j,\ k$ 에 관하여 축약하면

$$(n-2)\{[\nabla_h K - K(\psi_h + 2\varphi_h)]g_{il} - [\nabla_i K - K(\psi_i + 2\varphi_i)]g_{hl}\} = 0$$

이 성립되며 이 식에 g^{il} 을 곱하고 $i,\ l$ 에 관하여 축약하면

$$(n-1)(n-2)[\nabla_h K - K(\varphi_h + 2\varphi_h)] = 0 \tag{9}$$

이 성립된다.(증명끝)

식 (8)을 리용하면 식 (9)로부터 $K = \mathrm{const}$ 이다.

정리 1을 리용하면 식 (1), (2)로부터

$$\nabla_k g_{ij} = 4\varphi_k g_{ij} + 2\varphi_i g_{jk} + 2\varphi_j g_{kj}\,,\ \ T_{ij}{}^l = \varphi_j \delta_i^k - \varphi_i \delta_j^k$$

를 만족시키며 접속결수가

$$\Gamma_{ij}{}^k = \{{}_{ij}^k\} - 2\varphi_i \delta_j^k - \varphi_j \delta_i^k - g_{ij}\varphi^k$$

인 반대칭비계량접속은 슈르의 정리를 만족시킨다.

정리 2 n차원련결리만다양체 $(M,\ g)$에서 $n \ge 3$인 경우에 임의의 점 P에서 반대칭사영접속 ∇의 호상접속 $\overline{\nabla}$에 관한 자름면곡률이 2차원방향의 선택에 무관계하고

$$\psi_h = -\varphi_h \tag{10}$$

이면 리만다양체 $(M,\ g,\ \overline{\nabla})$는 일정곡률을 허용한다.

증명 식 $\overline{R}_{ijkl} = K(p)(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl})$을 식 (6)에 넣고 식 (3)을 리용하면

$$\begin{aligned}
&\nabla_h K(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}) + \nabla_i K(g_{jl}g_{hk} - g_{jk}g_{hl}) + \\
&\quad + \nabla_j K(g_{hl}g_{ik} - g_{hk}g_{il}) - K[(\psi_h + 3\varphi_h)(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}) + \\
&\quad + (\psi_i + 3\varphi_i)(g_{jl}g_{hk} - g_{jk}g_{hl}) + (\psi_j + 3\varphi_j)(g_{hl}g_{ik} - g_{hk}g_{il})] = \\
&= -2K[\varphi_h(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}) + \varphi_i(g_{jl}g_{hk} - g_{jk}g_{hl}) + \varphi_j(g_{hl}g_{ik} - g_{hk}g_{il})]
\end{aligned}$$

이다. 이 식을 정돈하면

$$\begin{aligned}
&[\nabla_h K - K(\psi_h + \varphi_h)](g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}) + [\nabla_i K - K(\psi_i + \varphi_i)](g_{jl}g_{hk} - g_{jk}g_{hl}) + \\
&\quad + [\nabla_j K - K(\psi_j + \varphi_j)](g_{hl}g_{ik} - g_{hk}g_{il}) = 0
\end{aligned}$$

이 성립되며 이 식에 g^{jk}를 곱하고 $j,\ k$에 관하여 축약하면

$$(n-2)\{[\nabla_h K - K(\psi_h + \varphi_h)]g_{il} - [\nabla_i K - K(\psi_i + \varphi_i)]g_{hl}\} = 0\,.$$

이 식에 다시 g^{il}을 곱하고 $i,\ l$에 관하여 축약하면

$$(n-1)(n-2)[\nabla_h K - K(\psi_h + \varphi_h)] = 0 \tag{11}$$

이 성립된다.(증명끝)

식 (10)을 리용하면 식 (11)로부터 $K = \mathrm{const}$ 이다.

정리 2를 리용하면 식 (3), (4)로부터

$$\overline{\nabla}_k g_{ij} = 2\varphi_i g_{jk} + 2\varphi_j g_{ki}\,,\ \ \overline{T}_{ij}{}^k = \varphi_i \delta_j^k - \varphi_j \delta_i^k$$

를 만족시키고 접속결수가 $\overline{\Gamma}_{ij}{}^k = \{{}_{ij}^k\} - \varphi_j \delta_i^k - g_{ij}\varphi^k$인 반대칭비계량접속의 호상접속은 슈르의 정리를 만족시킨다.

론문에서 새로운 형태의 반대칭비계량접속에 대한 슈르의 정리를 론의하였으므로 정리 1, 2는 선행연구들에서 정식화된 슈르의 정리의 확장으로 된다.

참 고 문 헌

[1] Journal of **Kim Il Sung** University (Natural Science), 2, 1, 3, Juche102(2013).
[2] Ho Tal Yun et al.; Filomat, 27, 4, 679, 2013.
[3] G. Muniraja; Int. J. Contemp. Math. Sci., 25, 3, 1223, 2008.
[4] T. Kurose et. al.; Tohoku Math. J., 46, 3, 427, 1994.

주체104(2015)년 9월 5일 원고접수

Extension of Schur's Theorem on a Riemannian Manifold with a Semi-Symmetric Projective Connection

Ho Tal Yun, Kim Pang Chol

We newly found that Schur's theorem was proved for a semi-symmetric projective connection as one form of semi-symmetric non-metric connection.

Key word: semi-symmetric projective connection