김일성종합대학학보 주체107(2018)년
(수학) 제64권 제1호

이동분수계체비쉐브직교함수를 리용한 공간분수계 확산방정식의 점배치법

강영숙, 김현진

론문에서는 제2종의 이동분수계체비쉐브직교함수들을 리용하여 공간분수계편미분방정식을 풀기 위한 근사풀이법에 대한 연구를 진행하며 수치실험을 통하여 그 풀이방법이 효과적이라는것을 밝혔다.

1. 선행연구결과와 문제설정

최근에 스펙트르방법들이 많은 연구자들에 의하여 급속히 개발되였다. 스펙트르방법의 본질적인 우점은 적은 연산에 의하여 정확한 결과에 도달할수 있다는데 있다.[5, 7]

한편 체비쉐브다항식들과 그것을 리용한 미분방정식의 근사풀이에 대한 연구가 중요하게 진행되고있다.

선행연구에서는 제1종의 이동체비쉐브다항식을 리용하여 분수계확산방정식을 풀기 위한 방법[2]을 고찰하였다.

공간분수계편미분방정식은 분수계편미분방정식의 한 형태로서 많은 연구자들이 수치적으로 풀었다.[2－4]

또한 선행연구에서는 제2종의 이동체비쉐브다항식을 리용하여 공간분수계확산방정식을 풀기 위한 방법[3]을 제기하고 수치실험을 통하여 방법의 효과성을 보여주었으며 선형분수계미적분방정식을 풀기 위한 스펙트르점배치법[5]을 고찰하였다. 그리고 분수계야꼬비직교함수의 개념과 성질[1]들이 연구되였다.

선행연구에서 제기된 스펙트르점배치법들에서는 근사풀이가 속하는 공간을 직교다항식들에 의하여 생성되는 공간으로 보고 근사풀이를 진행하였다.

많은 경우에 분수계미분방정식의 정확한 풀이의 분수계도함수는 특이성[5, 6]을 가진다. 그런데 다항식의 분수계도함수는 그러한 성질을 가지지 않는다. 근사풀이가 속하는 공간을 정확한 풀이가 가지고있는 성질을 가진 함수들의 공간으로 택하는것이 스펙트르방법의 계산효과를 높일수 있는 하나의 방도이다.

이로부터 론문에서는 제2종의 이동체비쉐브다항식을 변형시켜 제2종의 이동분수계체비쉐브직교함수를 구성하며 그것들에 의하여 생성되는 공간을 근사풀이공간으로 선택하고 공간분수계편미분방정식을 풀기 위한 새로운 수치풀이법을 제기하고 풀이방법이 유용하다는것을 수치실험을 통하여 밝혔다.

1) 캐푸터분수계미분연산자

정의 1[3] μ계의 캐푸터분수계도함수연산자 D^{μ}는 다음과 같이 정의된다.

① μ가 자연수가 아닌 경우

$$D^{\mu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\mu)} \int_0^x \frac{f^{(m)}(t)}{(x-t)^{\mu-m+1}} dt, \ \mu > 0 \tag{1}$$

여기서 $m-1<\mu<m, \ m\in\mathbf{N}, \ x>0$ 이다.

② $\mu\in\mathbf{N}$ 에 대하여 캐푸터분수계미분연산자는 보통의 옹근수계미분연산자와 일치한다.

옹근수계미분과 류사하게 캐푸터분수계도함수연산자는 선형연산자이다. 즉 다음의 식이 성립한다.

$$D^{\mu}(af(x)+bg(x)) = aD^{\mu} f(x) + bD^{\mu} g(x) \tag{2}$$

여기서 $a, \ b$ 는 상수들이다.

캐푸터분수계도함수에 대하여 다음의 결과를 얻을수 있다.

$$c \text{가 상수이면 } D^{\mu} c = 0 \tag{3}$$

$$D^{\mu} x^n = \begin{cases} 0, & n\in\mathbf{N}_0, \ n<\lceil\mu\rceil \\ \dfrac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\mu)} x^{(n-\mu)}, & n\in\mathbf{N}_0, \ n\ge\lceil\mu\rceil \end{cases} \tag{4}$$

기호 $\lceil\mu\rceil$는 μ와 같거나 큰 가장 작은 옹근수를 표시하는 기호이다. 또한 $\mathbf{N}_0=\{0, \ 1, \ 2, \ \cdots\}$ 이다.[6]

2) 제2종의 체비쉐브다항식

제2종의 체비쉐브다항식 $U_n(x)$ 는 구간 $[-1, \ 1]$ 우에서 정의된 x 에 관한 n 차직교다항식이다.[3] $U_n(x)$ 의 해석적표시식은 다음과 같다.

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} \tag{5}$$

여기서 $x=\cos\theta, \ \theta\in[0, \ \pi]$ 이다.

다항식들의 모임 $\{U_n(x)\}$ 는 구간 $[-1, \ 1]$ 우에서 스칼라적

$$< U_n(x), \ U_m(x) >= \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} U_n(x) \, U_m(x) dx \tag{6}$$

에 관하여 직교한다. 즉 다음의 식이 성립한다.

$$< U_n(x), \ U_m(x) >= \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} U_n(x) U_m(x) dx = \begin{cases} 0, & n\ne m \\ \pi/2, & n=m \end{cases} \tag{7}$$

여기서 $\sqrt{1-x^2}$ 은 무게함수이다. $U_n(x)$ 는 다음의 재귀관계식을 리용하여 얻을수 있다.

$$\begin{aligned} &U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x) \ \ (n=2, \ 3, \ \cdots) \\ &U_0(x)=1, \ U_1(x)=2x \end{aligned} \tag{8}$$

n 차의 제2종의 체비쉐브다항식 $U_n(x)$ 에 대하여 다음의 식이 성립한다.

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{\lceil n/2\rceil} (-1)^k \binom{n-k}{k} (2x)^{n-2k}, \ n>0 \tag{9}$$

감마함수의 성질을 리용하여 이 식을 다음과 같이 다시 쓸수 있다.

$$U_n(x)=\sum_{k=0}^{\lceil n/2\rceil}(-1)^k 2^{n-2k}\frac{\Gamma(n-k+1)x^{n-2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-2k+1)},\ n>0 \tag{10}$$

여기서 $\lceil n/2\rceil$은 $n/2$의 옹근수부를 표시한다.

2. 제2종의 이동분수계체비쉐브직교함수와 그 성질

정의 2 제2종의 이동체비쉐브분수계직교함수를 다음과 같이 정의한다. 여기서 $U_n(x)$는 우에서 정의된 제2종의 체비쉐브다항식이다.

$$U_n^{(\lambda)}(x):=U_n(2x^{\lambda}-1),\ \lambda>0 \tag{11}$$

정리 제2종의 이동체비쉐브직교함수는 다음의 성질을 만족시킨다.

① 다음의 양적인 표시식을 만족시킨다.

$$U_n^{(\lambda)}(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k 2^{2n-2k}\frac{\Gamma(2n-k+2)x^{\lambda(n-k)}}{\Gamma(k+1)\Gamma(2n-2k+2)} \tag{12}$$

$$U_0^{(\lambda)}(x)=1,\ U_1^{(\lambda)}(x)=4x^{\lambda}-2$$

② $U_i^{(\lambda)}(0)=(-1)^i(i+1)$, $U_i^{(\lambda)}(1)=i+1$

③ 함수 $U_n^{(\lambda)}(x)$들은 구간 $[0,\ 1]$우에서 다음의 직교관계를 가진다.

$$(U_n^{(\lambda)}(x),\ U_m^{(\lambda)}(x))=\int_0^1 w^{(\lambda)}(x)U_n^{(\lambda)}(x)U_m^{(\lambda)}(x)dx=\begin{cases}0, & n\neq m\\ \pi/8, & n=m\end{cases} \tag{13}$$

여기서 $w^{(\lambda)}(x)$는 다음과 같이 정의된 무게함수이다.

$$w^{(\lambda)}(x)=\lambda x^{\lambda-1}\sqrt{x^{\lambda}-x^{2\lambda}}=\lambda x^{(3\lambda)/2-1}\sqrt{1-x^{\lambda}} \tag{14}$$

④ $U_n^{(\lambda)}(x)$들은 다음의 점화관계식을 만족시킨다.

$$U_n^{(\lambda)}(x)=2(2x^{\lambda}-1)U_{n-1}^{(\lambda)}(x)-U_{n-2}^{(\lambda)}(x)\ \ (n=2,\ 3,\ \cdots) \tag{15}$$

$$U_0^{(\lambda)}(x)=1,\ U_1^{(\lambda)}(x)=4x^{\lambda}-2$$

다음과 같은 무게붙은 스칼라적공간을 생각하자.

$$L^2_{w^{(\lambda)}}(0,\ 1)=\left\{u\ \middle|\ \int_0^1 w^{(\lambda)}(x)u^2(x)dx<+\infty\right\} \tag{16}$$

이 공간에서 스칼라적은 다음과 같이 정의된다.

$$(U_n^{(\lambda)}(x),\ U_m^{(\lambda)}(x)):=\int_0^1 w^{(\lambda)}(x)U_n^{(\lambda)}(x)U_m^{(\lambda)}(x)dx \tag{17}$$

여기서 $w^{(\lambda)}(x)$는 우에서 정의된 무게함수이다.

$$w^{(\lambda)}(x)=\lambda x^{\lambda-1}\sqrt{x^{\lambda}-x^{2\lambda}}=\lambda x^{(3\lambda/2)-1}\sqrt{1-x^{\lambda}}$$

함수 $U_n^{(\lambda)}(x)$들은 공간 $L^2_{w^{(\lambda)}}(0,\ 1)$의 직교계이다.

다음의 함수공간을 생각하자.

$$F_n^{(\lambda)}:=\mathrm{sapn}\{U_0^{(\lambda)}(x),\ U_1^{(\lambda)}(x),\ \cdots,\ U_n^{(\lambda)}(x)\} \tag{18}$$

공간 $F_n^{(\lambda)}$는 $L^2_{w^{(\lambda)}}(0,\ 1)$의 부분공간이다. $g \in L^2_{w^{(\lambda)}}(0,\ 1)$의 이 부분공간우로의 직교사영을 $g_m(x) \in L^2_{w^{(\lambda)}}(0,\ 1)$이라고 하면 그것은 다음과 같이 계산된다.

$$g_m(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i U_i^{(\lambda)}(x) \tag{19}$$

여기서

$$a_i = \langle g(x),\ U_i^{(\lambda)}(x) \rangle / \langle U_i^{(\lambda)}(x),\ U_i^{(\lambda)}(x) \rangle = \frac{8}{\pi}\int_0^1 g(x) w^{(\lambda)}(x) U_i^{(\lambda)}(x) dx \tag{20}$$

$0 < \mu \le \lambda$에 대하여 캐푸터도함수의 정의와 선형성, 식 (12)에 의하여 다음의 식이 성립한다.

$$D^{\mu}(U_i^{(\lambda)}(x)) = \sum_{k=0}^{i} (-1)^k 2^{2i-2k} \frac{\Gamma(2i-k+2)}{\Gamma(k+1)\Gamma(2i-2k+2)} D^{\mu}(x^{\lambda(i-k)}) \tag{21}$$

이것을 식 (4)를 리용하여 계산하면 다음의 식을 얻는다.

$$D^{\mu}(U_i^{(\lambda)}(x)) = \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^k 2^{2i-2k} \frac{\Gamma(2i-k+2)\Gamma(\lambda i-\lambda k+1) x^{\lambda i-\lambda k-\mu}}{\Gamma(k+1)\Gamma(2i-2k+2)\Gamma(\lambda i-\lambda k+1-\mu)} \tag{22}$$

$g_m(x)$의 도함수를 구하자.

$$D^{\mu}(g_m(x)) = \sum_{i=0}^{m} a_i D^{\mu}(U_i^{(\lambda)}(x)) = \sum_{i=1}^{m} a_i D^{\mu}(U_i^{(\lambda)}(x)) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{i-1} a_i N_{i,k}^{(\mu,\lambda)} x^{\lambda i-\lambda k-\mu} \tag{23}$$

여기서

$$N_{i,k}^{(\mu,\lambda)} = (-1)^k 2^{2i-2k} \frac{\Gamma(2i-k+2)\Gamma(\lambda i-\lambda k+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(2i-2k+2)\Gamma(\lambda i-\lambda k+1-\mu)} \tag{24}$$

실례 1 $g(x) = x^{2\lambda},\ \lambda = 1/3$이라고 하자.

이 함수의 $\mu = 1/2$계캐푸터도함수를 정의 1에 따라 계산한 결과는 다음과 같다.

$$D^{0.5} x^{2\lambda} = \frac{\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(2\lambda+1-0.5)} x^{(2\lambda-0.5)} = \frac{\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(2\lambda+0.5)} x^{(2\lambda-0.5)}$$

$g(x)$를 선행연구[3]에서와 같이 제2종의 이동체비쉐브다항식에 의하여 전개할 때 전개결수는 다음과 같다.

$$\{0.608\ 788,\ 0.221\ 377,\ -0.023\ 719,\ 0.007\ 441,\ -0.003\ 256,\ 0.001\ 698,\ \cdots\}$$

또한 $g(x)$를 제2종의 이동체비쉐브분수계직교함수에 의하여 전개할 때 전개결수는 다음과 같다.

$$a_0 = 5/16,\ a_1 = 1/4,\ a_2 = 1/16,\ a_i = 0\ \ (i = 3,\ \cdots)$$

따라서 $g(x)$를 제2종의 이동체비쉐브다항식에 의하여 근사시킬 때보다 제2종의 이동체비쉐브분수직교함수에 의하여 근사시킬 때 m의 개수가 더 작다.

주의 선행연구에서 $g(x) = x^2$을 실례로 제2종의 이동체비쉐브다항식에 의한 전개를 하였는데 이때 $m = 3$으로 택하여 근사의 오차가 령이였다. $g(x) = x^2,\ \lambda = 1$이면 $m = 2$, $\lambda = 1/2$이면 $m = 4$로 택하여 오차가 령이다. $g(x) = x^{2\lambda},\ \lambda = 1/3$을 제2종의 이동체비쉐브다항식에 의한 전개를 할 때 오차가 령이 되게 할수 없다.

$m = 2$로 택하고 $g_2(x)$의 도함수를 식 (23), (24)에 따라 계산하면 다음과 같다.

$$D^{0.5}(x^{2\lambda})=\sum_{i=0}^{2}a_iD^{\mu}(U_i^{(\lambda)}(x))=\sum_{i=1}^{2}a_iD^{\mu}(U_i^{(\lambda)}(x))=$$

$$=\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=0}^{i-1}a_iN_{i,k}^{(\mu,\lambda)}x^{\lambda i-\lambda k-0.5}=a_1N_{1,0}^{(0.5,\lambda)}x^{\lambda-0.5}+a_2N_{2,0}^{(0.5,\lambda)}x^{2\lambda-0.5}+a_2N_{2,1}^{(0.5,\lambda)}x^{2\lambda-\lambda-0.5}=$$

$$=\frac{\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(2\lambda+0.5)}x^{2\lambda-0.5}$$

이것은 정의에 의하여 계산된 결과와 꼭같다.

$\lambda=1$일 때 이상의 론의는 제2종의 이동체비쉐브다항식인 경우의 론의와 같아진다.

3. 제2종의 이동체비쉐브분수계직교함수를 리용한 공간분수계확산방정식의 근사풀이

제2종의 이동체비쉐브분수계직교함수를 리용하여 공간분수계확산방정식의 근사풀이를 구하는 방법을 고찰하자. 다음과 같은 1차원공간분수계확산방정식을 론의하자.

$$\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t}=p(x)\frac{\partial^{\mu}u(x,\ t)}{\partial x^{\mu}}+q(x,\ t) \tag{25}$$

$0<x<1,\ 0<t\le T$ 이고 μ 는 $1<\mu\le 2$ 인 분수계공간도함수의 분수계수이다. 함수 $q(x,\ t)$ 는 원천항이다.

초기조건은 다음과 같다.

$$u(x,\ 0)=f(x),\ 0<x<1 \tag{26}$$

경계조건은 다음과 같다.

$$u(0,\ t)=\nu_0(t),\ u(1,\ t)=\nu_1(t) \tag{27}$$

만일 $\mu=2$ 이면 방정식 (25)는 고전적인 2계확산방정식

$$\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t}=p(x)\frac{\partial^{2}u(x,\ t)}{\partial x^{2}}+q(x,\ t) \tag{28}$$

와 일치한다.

분수계확산방정식이 식 (25)로 주어지고 초기조건이 식 (26)으로 주어졌으며 경계조건이 식 (27)로 주어진 경우를 고찰하자.

체비쉐브분수점배치법을 리용하기 위하여 $u(x,\ t)$ 를 다음과 같이 근사시키겠다.

$$u_m(x,\ t)=\sum_{i=0}^{m}u_i(t)U_i^{(\lambda)}(x) \tag{29}$$

식 (23)－(25)로부터 다음의 식을 얻는다.

$$\sum_{i=0}^{m}\frac{du_i(t)}{dt}U_i^{(\lambda)}(x)=p(x)\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{i-1}u_i(t)N_{i,k}^{(\mu,\lambda)}x^{\lambda i-\lambda k-\mu}+q(x,\ t) \tag{30}$$

식 (30)에 $m+1-\lceil\mu\rceil$개의 점 x_p 를 배치한다.

$$\sum_{i=0}^{m}\frac{du_i(t)}{dt}U_i^{(\lambda)}(x_p)=p(x_p)\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{i-1}u_i(t)N_{i,k}^{(\mu,\lambda)}x_p^{\lambda i-\lambda k-\mu}+q(x_p,\ t) \tag{31}$$

$$p = 0,\ 1,\ m - \lceil \mu \rceil$$

제2종의 체비쉐브다항식 $U_m(x)$ 의 령점을 y_p 라고 하면 $x_p = ((y_p + 1)/2)^{1/\lambda}$ 은 제2종의 이동체비쉐브분수계함수 $U_m^{(\lambda)}(x)$ 의 령점이다.

점배치점으로서 제2종의 이동체비쉐브분수계직교함수 $U_{m+1-\lceil \mu \rceil}^{(\lambda)}(x)$ 의 령점들을 리용하겠다.

식 (29)를 초기조건에 대입하고 오른변을 제2종의 이동체비쉐브분수계직교함수계에 의하여 전개하여 $u_i(t)$ 에 대한 초기조건상수를 얻는다.

또한 식 (29)를 경계조건에 대입하면 $\lceil \mu \rceil$개의 방정식을 얻는다.

식 (29)를 식 (27)의 첫식에 대입하자.

$$u_m(0,\ t) = \sum_{i=0}^{m} u_i(t) U_i^{(\lambda)}(0) = \nu_0(t)$$

$$U_i^{(\lambda)}(0) = (-1)^i (i+1),\ U_i^{(\lambda)}(1) = i+1$$

이므로

$$\sum_{i=0}^{m} (-1)^i (i+1) u_i(t) = \nu_0(t) \tag{32}$$

식 (29)를 식 (27)의 둘째 식에 대입하자.

$$u_m(1,\ t) = \sum_{i=0}^{m} u_i(t) U_i^{(\lambda)}(1) = \nu_1(t)$$

$$\sum_{i=0}^{m} (i+1) u_i(t) = \nu_1(t) \tag{33}$$

디리클레조건인 경우 다음식이 성립된다.

$$\sum_{i=0}^{m} (-1)^i (i+1) u_i(t) = 0,\ \sum_{i=0}^{m} (i+1) u_i(t) = 0 \tag{34}$$

식 (31)−(33)으로 구성된 $m+1$ 개의 방정식을 생각하자. 이것은 1계상미분방정식 $m+1-\lceil \mu \rceil$개와 함수방정식 $\lceil \mu \rceil$개로 이루어져있다. 이 방정식에 초기조건을 첨부하여 푼 다음 얻어진 풀이 $u_i(t)$ $(i = 0,\ 1,\ \cdots,\ m)$ 를 식 (29)에 대입하면 구하려는 근사풀이가 얻어진다.

근사풀이법의 효과성을 실례를 통하여 보여준다.

실례 2 공간분수계확산방정식

$$\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t} = p(x) \frac{\partial^{1.8} u(x,\ t)}{\partial x^{1.8}} + q(x,\ t)\ \ (0 < x < 1,\ t > 0)$$

$$u(x,\ 0) = x^{5/3}(1 - x^{5/3})$$

$$u(0,\ t) = u(1,\ t) = 0,\ t > 0$$

을 고찰하자.

확산결수와 원천항은 각각

$$p(x) = 9x^{2/15}$$

$$q(x,\ t) = e^{-t}\left(x^{10/3} - \frac{10\Gamma(2/3)}{\Gamma(13/15)} + x^{5/3}\left(-1 + \frac{70\Gamma(7/3)}{\Gamma(38/15)} \right) \right)$$

로 주어졌다. 이 방정식의 정확한 풀이는 $u(x,\ t)=x^{5/3}(1-x^{5/3})e^{-t}$ 이다.

이 방정식을 선행연구[3]에서(론문에서는 $\lambda=1$ 로 놓은데 대응한다.)의 방법대로 근사풀이하면 10^{-6} 정도의 정확도를 얻기 위하여 $m\ge 11$ 로 놓아야 한다.

$\lambda=5/3,\ m=2$ 로 놓고 방법을 적용한다.

$$u_m(x,\ t)=\sum_{i=0}^{2}u_i(t)U_i^{(\lambda)}(x) \tag{35}$$

식 (35)를 주어진 방정식에 대입하고 식 (23)을 리용하면

$$\sum_{i=0}^{2}\frac{du_i(t)}{dt}U_i^{(\lambda)}(x_p)=p(x_p)\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=0}^{i-1}u_i(t)N_{i,\,k}^{(1.8,\ \lambda)}x_p^{\lambda i-\lambda k-1.8}+q(x_p,\ t),\ \ p=0 \tag{36}$$

이 나온다. 여기서 x_p 는 제2종의 분수계이동체비쉐브함수 $U_1^{(\lambda)}(x)$ 의 뿌리이다. 그것은 다음과 같다.

$$x_p=2^{-1/\lambda}$$

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^i(i+1)u_i(t)=0,\ \ \sum_{i=0}^{m}(i+1)u_i(t)=0$$

식 (34), (36)을 련립하여 련립상미분방정식을 작성하며 초기조건으로부터 상미분방정식의 초기조건을 얻는다.

실례 2에서 배치점을 1개 선택하면 다음의 상미분방정식을 얻는다.

$$\sum_{i=0}^{2}\frac{du_i(t)}{dt}U_i^{(\lambda)}(x_0)=p(x_0)\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=0}^{i-1}u_i(t)N_{i,\,k}^{(1.8,\ \lambda)}x_0^{\lambda i-\lambda k-1.8}+q(x_0,\ t)$$

$$\frac{du_0(t)}{dt}U_0^{(\lambda)}(x_0)+\frac{du_1(t)}{dt}U_1^{(\lambda)}(x_0)+\frac{du_2(t)}{dt}U_2^{(\lambda)}(x_0)=$$
$$=p(x_0)(u_1(t)N_{1,\,0}^{(1.8,\ \lambda)}x_0^{\lambda-1.8}+u_2(t)N_{2,\,0}^{(1.8,\ \lambda)}x_0^{2\lambda-1.8}+u_2(t)N_{2,\,1}^{(1.8,\ \lambda)}x_0^{\lambda-1.8})+q(x_0,\ t)$$

이로부터 다음의 식을 얻는다.

$$\frac{du_0(t)}{dt}+\frac{du_2(t)}{dt}U_2^{(\lambda)}(x_0)=$$
$$=p(x_0)(u_1(t)N_{1,0}^{(1.8,\ \lambda)}x_0^{\lambda-1.8}+u_2(t)N_{2,\,0}^{(1.8,\ \lambda)}x_0^{2\lambda-1.8}+u_2(t)N_{2,\,1}^{(1.8,\ \lambda)}x_0^{\lambda-1.8})+q(x_0,\ t)$$

이것을 다음과 같이 쓰자.

$$u_0'(t)+G_1u_2'(t)=H_1u_1(t)+H_2u_2(t)+q(x_0,\ t) \tag{37}$$

여기서

$$G_1=U_2^{(\lambda)}(x_0),\ H_1=P(x_0)N_{1,\,0}^{(\lambda,\,1.8)}x_0^{\lambda-1.8},\ H_2=P(x_0)(N_{2,\,0}^{(\lambda,\,1.8)}x_0^{2\lambda-1.8}+N_{2,1}^{(\lambda,\,1.8)}x_0^{\lambda-1.8})$$

$$u_0(t)-2u_1(t)+3u_2(t)=0,\ \ u_0(t)+2u_1(t)+3u_2(t)=0 \tag{38}$$

초기조건을 분수계직교함수에 의하여 전개하면 그 전개결수는 다음과 같다.

$$\{3/16,\ 0,\ -1/16,\ 0,\ 0,\ \cdots\}$$

따라서 다음과 같은 상미분방정식의 초기조건을 얻는다.

$$u_0(0)=3/16,\ u_1(0)=0,\ u_2(0)=-1/16 \tag{39}$$

식 (37)—(39)로부터 다음의 식을 얻을수 있다.

$$(-3+G1)u_2'(t)=H_2u_2(t)+q(x_0,\ t),\ u_2(0)=-1/16$$

이 1계상미분방정식의 풀이는

$$u_2(t)=-0.062\ 5e^{-t}$$

이고 따라서 $u_0(t)=0.187\ 5e^{-t}$ 이며 $m=2$ 일 때 주어진 편미분방정식의 근사풀이는

$$u_2(x,\ t)=u_0(t)U_0^{(\lambda)}(x)+u_1(t)U_1^{(\lambda)}(x)+u_2(t)U_2^{(\lambda)}(x)=$$
$$=0.187\ 5e^{-t}-0.062\ 5e^{-t}(3-16x^{5/3}+16x^{10/3})=e^{-t}(x^{5/3}-x^{10/3})$$

으로서 정확한 풀이와 일치한다.

일반적으로 시간변수에 관한 1계련립상미분방정식을 시간 t에 관하여 리산화한 후 계차법을 적용하여 풀수 있다.

실례 2의 문제를 이동체비쉐브다항식들의 1차결합을 리용하여

$$u_m(x,\ t)=\sum_{i=0}^{m}u_i(t)U_i^{(1)}(x)$$

의 형태로 놓아 $u_0(t)=10^{-6}$ 정도의 정확도를 얻으려면 $m\geq 11$이여야 한다.

참 고 문 헌

[1] A.H. Bhrawy, M.A. Zaky; Applied Mathematical Modelling, 40, 832, 2016.

[2] M.M. Khader; Commun Nonlinear Sci. Numer. Simul., 16, 25, 35, 2011.

[3] N.H. Sweilam et al.; Chaos Solitons & Fractals, 73, 141, 2015.

[4] E. Sousa; Comput. Math. Appl., 62, 938, 2011.

[5] Xiaohua Ma, Chengming Huang; Applied Mathematical Modelling, 38, 1434, 2014.

[6] I. Podlubny; Fractional differential equations, New York Academic Press, 23～67, 1999.

[7] E.H. Doha et al.; Computers and Mathematics with Applications, 62, 2364, 2011.

주체106(2017)년 8월 10일 원고접수

A Collocation Method for Space Fractional Order Diffusion Equations based on Shifted Fractional-Order Chebyshev Orthogonal Functions

Kang Yong Suk, Kim Hyon Jin

We propose a Chebyshev fractional collocation method for solving space fractional order diffusion equations. We construct second kinds of shifted fractional-order Chebyshev orthogonal functions, present a Chebyshev collocation method for solving space fractional order diffusion equations and show the effectiveness of the proposed method using a numerical example.

Key words: shifted Chebyshev polynomial, shifted fractional-order Chebyshev orthogonal function