

공기베아링시험평대의 자세조종을 위한 수학적모형화

윤정남, 박진일

공기베아링 부상장치는 압축공기에 의하여 형성되는 공기막을 리용하여 중력작용의 영향을 없애고 부상체의 자유로운 회전을 보장한 상태에서 자세조종을 실현할수 있게 하는 실험장치로서 인공지구위성의 3자유도자세조종을 연구하는데 리용된다.[1, 4]

부상체의 자세조종을 실현하기 위해서는 조종대상의 수학적모형을 작성해야 한다.

본문에서는 피라미드배렬구조를 가진 4개의 반작용바퀴를 리용하는 경우의 수학적모형을 작성하는 문제를 고찰한다.

1. 직교3축배렬구조를 가진 위성동체의 동력학모형

부상체를 자유회전강체계로 가정하고 회전체에서의 뉴톤의 2법칙과 각운동량

$$h = I\omega \quad (1)$$

를 리용하여 회전힘과 운동관계를 표시한다. 여기서 I 는 동체의 관성모멘트행렬, ω 는 동체의 회전속도이다.

한편 힘모멘트벡토르

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix}$$

은 동체에 작용하는 총체적인 힘모멘트로서 뉴톤운동법칙에 의하여 다음과 같이 표시된다.

$$\tau = \frac{d}{dt}h = \frac{d}{dt}(I\omega) \quad (2)$$

이것이 동체에서 표현될 때 ECI(지구중심관성계)와 같은 관성자리표계에 관하여

$$\tau^b = \frac{d}{dt}(I^b \omega_{ib}^b) + \omega_{ib}^b \times (I^b \omega_{ib}^b) \quad (3)$$

와 같이 표시된다.

관성모멘트행렬은 동체자리표계에서 상수이므로 간단히 I 로 표시할수 있으며 이로 부터 웃식을 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\tau^b = I\dot{\omega}_{ib}^b + \omega_{ib}^b \times (I\omega_{ib}^b) \quad (4)$$

웃식을 변형하면

$$\dot{\omega}_{ib}^b = I^{-1}(-\omega_{ib}^b \times I\omega_{ib}^b - \tau^b) = I^{-1}(-S(\omega_{ib}^b)I\omega_{ib}^b - \tau^b)$$

로 되고 이 식을 성분별로 쓰면

$$\dot{\omega}_1 = \frac{1}{I_x}[(I_y - I_z)\omega_2\omega_3 + \tau_1]$$

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_2 &= \frac{1}{I_y}[(I_z - I_x)\omega_1\omega_3 + \tau_2] \\ \dot{\omega}_3 &= \frac{1}{I_z}[(I_x - I_y)\omega_1\omega_2 + \tau_3]\end{aligned}$$

으로 된다.

이 동력학방정식은 반작용바퀴를 고려하지 않은 경우의 위성동체의 동력학방정식이다.

만일 직교3축방향으로 3개의 반작용바퀴가 설치되어 있다면 바퀴의 운동을 고려한 전체 계의 동력학방정식은 다음과 같이 표시된다.

먼저 위성동체계가 외부로부터의 작용을 전혀 받지 않는다고 가정하면 각운동량보존의 법칙에 의하여 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\dot{L} + \omega \times L = 0 \quad (5)$$

여기서

$$L = I\omega + h \quad (6)$$

는 위성강체계가 가지고있는 전체 각운동량이고 I 는 위성동체의 관성모멘트, ω 는 위성동체의 회전속도벡터이다. 그리고 $h = I_w\omega_w$ 는 반작용바퀴의 각운동량벡터, I_w 는 바퀴구동체계의 관성모멘트행렬, ω_w 는 바퀴의 회전속도벡터이다.

식 (6)을 (5)에 대입하고 정돈하면 위성동체계의 동력학적모형은 다음과 같이 쓸수 있다.

$$I\dot{\omega} = -\omega \times (I\omega) - \omega \times h - \dot{h} \quad (7)$$

이 식을 벡터의 매개 성분별로 분해하면 다음과 같이 된다.

$$I_1\dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 + \omega_3h_2 - \omega_2h_3 + U_1 \quad (8)$$

$$I_2\dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 + \omega_1h_3 - \omega_3h_1 + U_2 \quad (9)$$

$$I_3\dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 + \omega_2h_1 - \omega_1h_2 + U_3 \quad (10)$$

여기서

$$U_i = -\dot{h}_i = -I_i\dot{\omega}_{wi} \quad (11)$$

는 반작용바퀴의 회전속도변화에 의하여 매 축에 작용하는 조종작용으로서 이것을 리용하여 자세조종을 위한 조종모멘트를 발생시킨다.

식 (8), (9)는 관성바퀴에 의한 조종력이 유일한 외력으로 작용한다고 가정하였을 때의 강체계의 모형이다.

사실 반작용바퀴를 리용한 공기베어링부상체의 자세조종문제는 외력의 영향을 극복하면서 지정된 자세를 정확히 유지하도록 바퀴의 회전속도변화를 일으켜 조종을 진행하는 문제이다.

따라서 외란의 영향까지도 고려한 부상체강체계의 전체 동력학모형은 다음과 같이 쓸수 있다.

$$I_1\dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 + \omega_3h_2 - \omega_2h_3 + U_1 + \tau_{d1} \quad (12)$$

$$I_2\dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 + \omega_1h_3 - \omega_3h_1 + U_2 + \tau_{d2} \quad (13)$$

$$I_3\dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 + \omega_2h_1 - \omega_1h_2 + U_3 + \tau_{d3} \quad (14)$$

위성자세조종을 위한 조종대상의 모형은 그림 1과 같다.

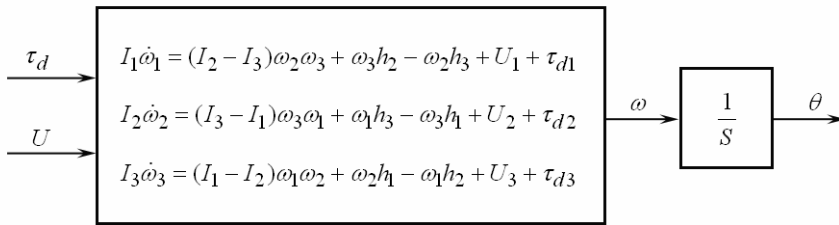


그림 1. 위성자세조종을 위한 조종대상의 모형

2. 피라미드형식의 반작용바퀴구조배열을 가진 위성동체의 동력학모형

4개의 배렬구조를 실현하는 방법들중에는 직교3축+중심1축배렬구조와 피라미드형배렬구조가 있다.(그림 2)

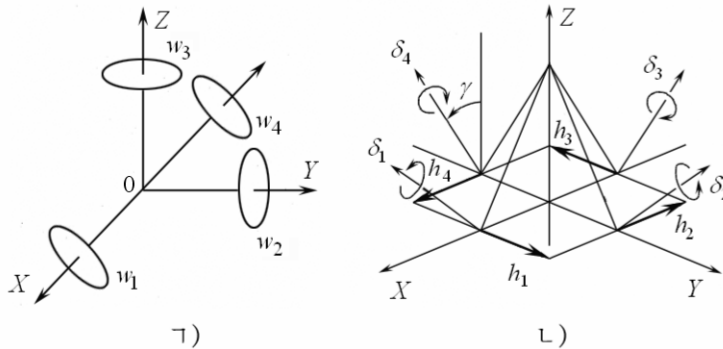


그림 2. 4개의 반작용바퀴배렬구조

1) 직교3축+중심1축배렬구조, 2) 피라미드배렬구조

직교3축+중심1축배렬구조는 원래의 직교3축배렬구조에 매 축으로부터 45° 떨어진 중심축에 1개의 반작용바퀴를 더 설치한 형식이다.

이 배렬형식에서는 정상적인 동작시에는 여유바퀴를 리용하지 않고 3개의 직교바퀴들만을 리용하여 자세조종을 진행한다.

만일 3개의 바퀴중에서 1개가 고장나면 여유바퀴를 조종에 인입하여 협동동작으로 자세조종을 계속 수행한다.

피라미드배렬구조는 4개의 반작용바퀴들이 피라미드모양으로 배치된 형식이다. 이 배렬형식에서는 정상동작시에 4개의 바퀴가 다 조종에 참가한다. 만일 1개의 바퀴에서 고장이 발생하면 나머지 3개를 리용하여 역시 협동동작으로 자세조종을 진행한다.

4개의 반작용바퀴를 리용한 자세조종방식은 매 개별적인 전동기의 고장확률이 같은 조건에서는 3개의 바퀴를 리용하는 방식에 비하여 위성의 고장확률을 줄일수 있는것으로 하여 현재 널리 리용되고있다.

본문에서는 피라미드배렬구조를 가지는 위성동체의 동력학모형을 보기로 한다.

피라미드형식의 반작용바퀴배렬구조를 가진 부상체의 동력학적모형은 다음과 같이 표시된다.

$$(J_b - CJ_w C^{-1})\dot{\omega} + \omega \times H + Cu_w = u_{\text{ext}} \quad (15)$$

$$H = J_b \omega + CJ_w \Omega \quad (16)$$

$$\dot{\Omega} = J_w^{-1} u_w - C^{-1} \dot{\omega} \quad (17)$$

여기서 J_b 는 위성동체의 관성모멘트, J_w 는 바퀴의 관성모멘트, ω 는 위성동체의 회전각속도, Ω 는 바퀴의 회전각속도, C 는 DCM행렬(Direction Cosine Matrix: 방향코시누스행렬), u_{ext} 는 외부작용력(외란), H 는 위성동체-바퀴계의 전체 각운동량벡토르, u_w 는 바퀴구동용무솔직류전동기에서 발생하는 회전구동모멘트이다.

식 (16)과 (17)을 식 (15)에 대입하고 정돈하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$J_b \dot{\omega} + \omega \times (J_b \omega + CJ_w \Omega) + CJ_w \dot{\Omega} = u_{\text{ext}} \quad (18)$$

윗식에서 알 수 있는바와 같이 바깥계로부터의 작용력이 없는 한 동체와 반작용바퀴의 각운동량 총합의 변화(원변)는 없으며 이것은 각운동량보존의 법칙으로부터도 알 수 있다.

식 (18)을 조종입력과 외란에 의한 동체자세응답특성을 나타내는 운동방정식의 형태로 쓰기 위하여 원변의 두번째와 세번째 항을 오른쪽으로 넘겨서 다음과 같은 형태의 동력학방정식을 얻는다.

$$J_b \dot{\omega} + \omega \times (J_b \omega + CJ_w \Omega) = -CJ_w \dot{\Omega} + u_{\text{ext}} \quad (19)$$

이로부터 반작용바퀴의 회전속도 Ω 를 변화시켜 부상체의 자세를 조종하는 자세조종방식을 적용할 수 있다. 그림 3에 피라미드형식의 반작용바퀴의 배열구조를 가지는 공기베어링부상체의 기구학적구조를 보여주었다.

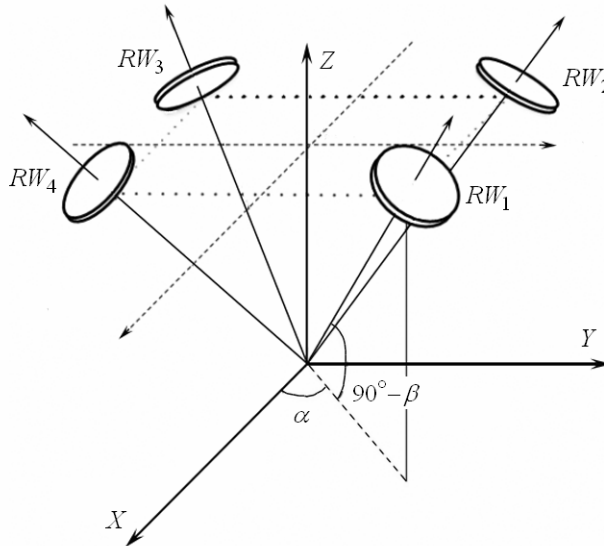


그림 3. 피라미드형식의 반작용바퀴의 배열구조를 가지는 공기베어링부상체의 기구학적구조

이러한 구조의 반작용바퀴배열에서 DCM행렬은 다음과 같이 구성된다.

$$C = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cdot \sin \beta & -\sin \alpha \cdot \sin \beta & -\cos \alpha \cdot \sin \beta & \sin \alpha \cdot \sin \beta \\ \sin \alpha \cdot \sin \beta & \cos \alpha \cdot \sin \beta & -\sin \alpha \cdot \sin \beta & -\cos \alpha \cdot \sin \beta \\ \cos \beta & \cos \beta & \cos \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (20)$$

이 행렬은 4개의 반작용바퀴의 주축들에서 발생하는 회전모멘트가 위성동체의 회요

축, 종요축, 편요축방향으로의 회전모멘트로 각각 전환되는 과정을 표현하는 변환행렬로서의 기능을 수행한다.

만일 $\alpha=0$ 이라면 즉 첫번째 바퀴 RW_1 과 세번째 바퀴 RW_3 의 주축이 XZ 평면에 놓인다면 DCM행렬은 다음과 같이 된다.

$$C = \begin{bmatrix} \sin \beta & 0 & -\sin \beta & 0 \\ 0 & \sin \beta & 0 & -\sin \beta \\ \cos \beta & \cos \beta & \cos \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (21)$$

모든 바퀴들의 회전방향은 그림 3에서 보여준바와 같이 우로 뻗어나오는 방향을 정의의 방향으로 정한다.

부상체에서 횡요회전이 일어나는 동작과정을 그림 4에서 보여주었다.

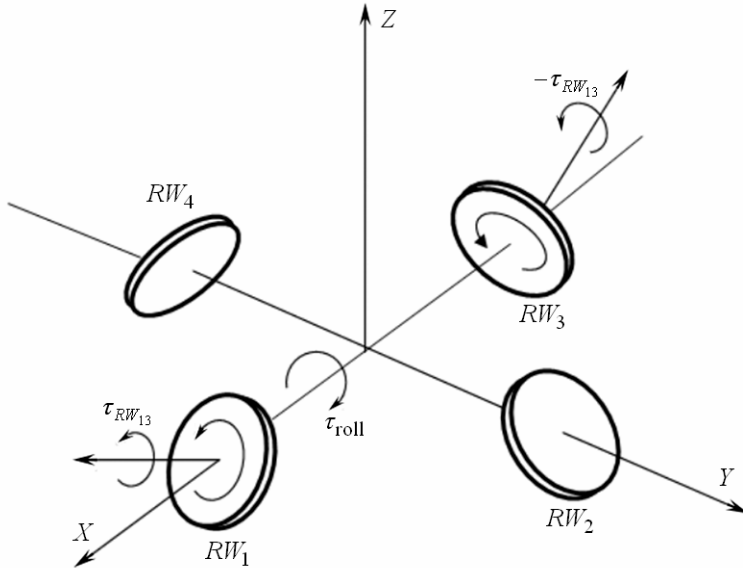


그림 4. 부상체에서 횡요회전이 일어나는 동작과정

그림 4에서 첫번째 바퀴와 세번째 바퀴가 각각 가속 및 감속(또는 두번째 바퀴와 반대방향으로의 가속)을 같은 크기로 진행할 때 부상체는 횡요축주위로의 회전힘을 받지만 종요축이나 편요축주위로의 회전힘은 받지 않는다는것은 다음과 같은 계산과정을 통하여 알수 있다.

$$\begin{bmatrix} \tau_{roll} \\ \tau_{pitch} \\ \tau_{yaw} \end{bmatrix} = C \cdot \begin{bmatrix} \tau_{RW_1} \\ \tau_{RW_2} \\ \tau_{RW_3} \\ \tau_{RW_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \beta & 0 & -\sin \beta & 0 \\ 0 & \sin \beta & 0 & -\sin \beta \\ \cos \beta & \cos \beta & \cos \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{RW_{13}} \\ 0 \\ -\tau_{RW_{13}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sin \beta \cdot \tau_{RW_{13}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

마찬가지로 두번째와 네번째 바퀴가 각각 가속 및 감속(또는 두번째 바퀴와 반대방향으로의 가속)을 같은 크기로 진행할 때의 동작과정을 그림 5에서 보여주었다.

그림 5에서 동체는 종요축주위로의 회전힘을 받지만 횡요축이나 편요축주위로의 회

전힘을 받지 않는데 이것을 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \tau_{roll} \\ \tau_{pitch} \\ \tau_{yaw} \end{bmatrix} = C \cdot \begin{bmatrix} \tau_{RW_1} \\ \tau_{RW_2} \\ \tau_{RW_3} \\ \tau_{RW_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \beta & 0 & -\sin \beta & 0 \\ 0 & \sin \beta & 0 & -\sin \beta \\ \cos \beta & \cos \beta & \cos \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{RW_{24}} \\ 0 \\ -\tau_{RW_{24}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\sin \beta \cdot \tau_{RW_{24}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

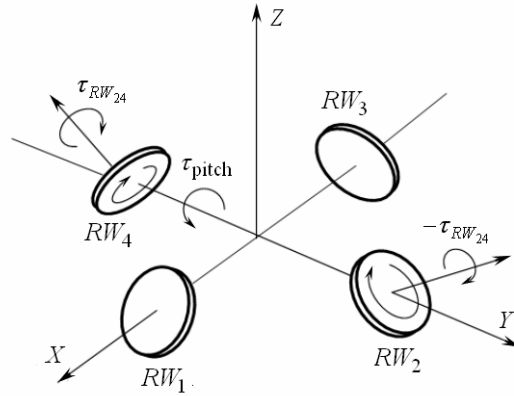


그림 5. 두번째 바퀴와 네번째 바퀴가 각각 가속 및 감속을 같은 크기로 진행할 때의 동작과정

마지막으로 편요축주위로의 회전만을 진행할 때의 동작과정을 그림 6에서 보여 주었다.

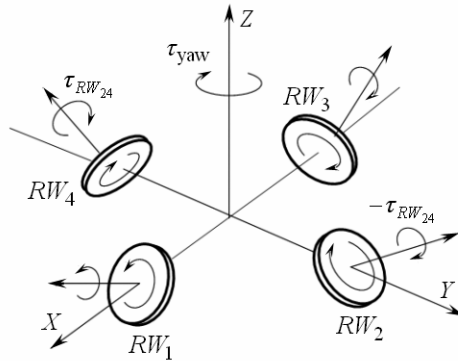


그림 6. 편요축주위로의 회전만을 진행할 때의 동작과정

이를 위한 가장 간단한 방법은 행렬 C 의 구조로부터 알수 있는바와 같이 4개의 반작용바퀴를 동시에 정(또는 부)의 방향으로 같은 크기로(τ_{RW_a}) 가속(또는 감속)시키는것인데 이것을 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \tau_{roll} \\ \tau_{pitch} \\ \tau_{yaw} \end{bmatrix} = C \cdot \begin{bmatrix} \tau_{RW_1} \\ \tau_{RW_2} \\ \tau_{RW_3} \\ \tau_{RW_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \beta & 0 & -\sin \beta & 0 \\ 0 & \sin \beta & 0 & -\sin \beta \\ \cos \beta & \cos \beta & \cos \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{RW_a} \\ \tau_{RW_a} \\ \tau_{RW_a} \\ \tau_{RW_a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4\cos \beta \cdot \tau_{RW_a} \end{bmatrix}$$

3. 조종모형의 작성

식 (15)로부터 조종체계설계를 위한 공칭모형을 얻어낼수 있다. 부상체동체의 회전운동이 서서히 진행되는 경우 이 식의 비선형항은 충분히 령에 가까운 값으로 되며 따라서 조종대상모형으로서의 부상체의 회전운동방정식은 식 (19)로부터 다음과 같이 근사화된다.

$$J_b \ddot{\theta} \approx -CJ_w \dot{\Omega} + u_{\text{ext}} \quad (22)$$

이 모형에서 조종작용은 반작용바퀴의 회전각속도벡터 $\dot{\Omega}$ 이며 조종량은 부상체의 회전각벡터 θ 이다. 이 모형으로부터 출발하여 로바스트조종을 비롯한 여러가지 자세조종방법들을 적용할수 있다.[2, 3]

앞으로의 연구에서 식 (22)를 조종대상의 공칭모형으로 하여 자세조종을 실현하는 문제를 연구한다.

맺 는 말

4개의 피라미드구조배렬의 반작용바퀴에 의하여 구동되는 공기베어링부상장치에서 DCM행렬을 리용하여 자세조종을 위한 동력학모형을 작성하는 방법을 제기하였다.

참 고 문 헌

- [1] 윤정남; 로바스트운동조종(외란관측기 응용), 고등교육도서출판사, 74~84, 주체108(2019).
- [2] Yun Jong Nam; IEEE Transactions on Industrial Electronics, 60, 7, 2700, 2013.
- [3] Yun Jong Nam; IEEE Transactions on Control Systems Technology, 22, 2, 809, 2014.
- [4] Alireza et al.; Journal of Engineering and Science, 6, 6, 83, 2017.

주체109(2020)년 2월 5일 원고접수

Mathematic Modelling for Attitude Control of Air Bearing Test Bed

Yun Jong Nam, Pak Jin Il

We proposed a method of modelling for attitude control of an air bearing test bed with four reaction wheels in pyramid configuration.

Keywords: air bearing, attitude control, reaction wheel