

란류경계층의 속도결손층흐름에 대한 한가지 $k-\omega$ 란류모형의 예측성능에 관한 연구

김 정 필

위대한 령도자 김정일동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《우리는 남이 한걸음 걸을 때 열걸음, 백걸음으로 달려 과학기술발전에서 하루빨리 세계 선진수준에 올라서야 합니다.》(《김정일선집》 증보판 제15권 485페이지)

우리는 새롭게 제기한 한가지 $k-\omega$ 모형을 리용하여 란류경계층의 속도결손층흐름에 대한 수값연구를 진행하였다.

선행연구[1]에서는 윌콕스가 1998년에 제기한 표준 $k-\omega$ 모형[2]의 무한경계조건 의존성 문제를 연구한데 기초하여 이 문제를 극복하기 위한 한가지 $k-\omega$ 모형을 제기하고 수값계산실험을 통하여 제기한 모형의 타당성을 검증하였다.

본문에서는 제기된 두방정식 $k-\omega$ 란류모형의 실천적인 적용가능성을 평가하기 위하여 발달된 란류경계층의 속도결손층흐름에 적용하고 다른 두방정식란류모형들에 의한 계산결과 및 선행실험자료들과 비교하여 제기된 모형의 타당성을 검증하였다.

1. 문 제 설 정

클라우제의 속도결손법칙[2]이 성립되는 자기상사란류경계층의 경우 경계층내부에서의 흐름속도는 마찰속도 u_τ 에 비례하는 자유흐름속도로부터의 작은 편차로 표시되므로 속도결손층흐름에 대한 연구에서 어떤 미소과라메터들 즉 레널즈수의 거꿀수와 u_τ/\bar{U}_e 에 의한 섭동풀이법을 적용할수 있다. 여기서는 특이섭동법에 기초한 연구결과[2]를 리용하여 문제설정을 진행한다.

비압축성2차원정상평판란류경계층흐름에 관한 련속 및 운동방정식과 이미 제기한 $k-\omega$ 모형수송방정식들 그리고 보충관계식과 모형상수들은 각각 다음과 같이 표시된다.[1, 2]

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\bar{P}}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \nu_T) \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right] \quad (2)$$

$$\bar{U} \frac{\partial k}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial k}{\partial y} = \tau_{xy} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} - \beta_0^* k \omega + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \sigma_k \nu_T) \frac{\partial k}{\partial y} \right] \quad (3)$$

$$\bar{U} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \alpha \frac{\omega}{k} \tau_{xy} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \sigma_\omega \nu_T) \frac{\partial \omega}{\partial y} \right] + \frac{2(\nu + \delta_\omega \nu_T)}{k} \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial k}{\partial y} \quad (4)$$

$$\nu_T = \frac{k}{\omega} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 0.268, \quad \beta_0 = 0.072, \quad \beta_0^* = 0.09, \quad \sigma_k = \sigma_\omega = 0.95 \\ \beta &= \beta_0 f_\beta, \quad f_\beta = \frac{1+67\chi_\omega}{1+80\chi_\omega}, \quad \chi_\omega = \left| \frac{\Omega_{ij}\Omega_{jk}S_{ki}}{(\beta_0^*\omega)^3} \right| \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

특이섭동법에 기초하여 위의 방정식들을 연구하기 위하여 다음과 같은 무차원자리표를 도입한다.

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{y}{\Delta(x)}, \quad \Delta = \frac{\bar{U}_e \delta^*}{u_\tau}$$

여기서 δ^* 은 경계층밀립두터이, L 은 흐름방향의 특성길이이며 $\delta^* \ll L$ 임을 가정하면 흐름함수와 운동학적회리점성은 위의 량들에 의하여 다음과 같이 전개된다.

$$\psi(x, y) \approx \bar{U}_e \Delta \left[\eta - \frac{u_\tau}{\bar{U}_e} F_1(\xi, \eta) + O\left(\frac{u_\tau}{\bar{U}_e}\right) \right] \quad (7)$$

$$v_T(x, y) \approx \bar{U}_e \delta^* [N_0(\xi, \eta) + O(1)] \quad (8)$$

위의 식들에서 1차 및 2차항으로 전개를 제한하면 흐름속도는

$$\bar{U}(x, y) \approx \bar{U}_e \left[1 - \frac{u_\tau}{\bar{U}_e} U_1(\xi, \eta) + O\left(\frac{u_\tau}{\bar{U}_e}\right) \right] \quad (9)$$

로 표시되고 식 (7)–(9)들을 식 (1)과 (2)에 고려하면 다음과 같은 변형된 운동방정식이 얻어진다.

$$2\sigma_T \xi \frac{\partial U_1}{\partial \xi} = (\alpha_T - 2\beta_T - 2\omega_T) \eta \frac{\partial U_1}{\partial \eta} + (\beta_T - 2\omega_T) U_1 + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[N_0 \frac{\partial U_1}{\partial \eta} \right] \quad (10)$$

여기서

$$\alpha_T \equiv \frac{2}{C_f} \frac{d\delta^*}{dx}, \quad \beta_T \equiv \frac{\delta^*}{\tau_w} \frac{dP}{dx}, \quad \sigma_T \equiv \frac{\delta^*}{C_f x}, \quad \omega_T \equiv \frac{\delta^*}{C_f u_\tau} \quad (11)$$

식 (11)에서 α_T 와 ω_T 는 β_T 에 관한 함수이다. 속도결손층과 로그층과의 맞춤조작을 하고 몇가지 연산을 진행하면

$$\omega_T = -\frac{1}{2} \beta_T + O\left(\frac{u_\tau}{\bar{U}_e}\right) \quad (12)$$

가 얻어지고 식 (11)의 α_T 와 β_T 를 칼만의 운동량적분방정식에 적용하면

$$\alpha_T \frac{d\theta}{dx} = \left[1 + \frac{2+H}{H} \beta_T \right] \frac{d\delta^*}{dx} \quad (13)$$

이 얻어진다. 섭동풀이를 리용하여 θ 와 δ^* 을 결정하면 다음의 사실이 성립한다.

우선 δ^* 을 계산하면 U_1 과 U_2 에 대한 적분상수가 생긴다. 즉

$$\int_0^\infty U_1(\eta) d\eta = 1, \quad \int_0^\infty U_n(\eta) d\eta = 0 \quad (n \geq 2) \quad (14)$$

또한 경계층의 형태파라미터는 다음과 같다.

$$\text{Re}_{\delta^*} \rightarrow \infty, \quad \frac{u_\tau}{\bar{U}_e} \rightarrow 0 \quad \text{일 때} \quad H \sim 1 + O\left(\frac{u_\tau}{\bar{U}_e}\right)$$

따라서 운동량적분방정식 (13)으로부터 다음의 식이 얻어진다.

$$\alpha_T = 1 + 3\beta_T \quad (15)$$

우의 결과로부터 레널즈수가 큰 경우 식 (10)에 대한 상사폴이의 존재조건은 평형파라미터 β_T 가 상수이어야 한다는것을 알수 있다. 식 (12)와 (15)로부터 식 (10)의 결수들사이에는 다음의 관계가 성립된다는것을 알수 있다.

$$\alpha_T - 2\beta_T - 2\omega_T = 1 + 2\beta_T, \quad \beta_T - 2\omega_T = 2\beta_T \quad (16)$$

식 (16)과 모형수송방정식에 대하여 k, ω 에 관한 섭동폴이형태[2]를 리용하면 $U_1(\eta)$ 를 결정하기 위한 운동방정식과 제기한 모형수송방정식들은 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\frac{d}{d\eta} \left(N_0 \frac{dU_1}{d\eta} \right) + (1 + 2\beta_T) \eta \frac{dU_1}{d\eta} + 2\beta_T U_1 = 0 \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_k \frac{d}{d\eta} \left(N_0 \frac{dK_0}{d\eta} \right) + (1 + 2\beta_T) \eta \frac{dK_0}{d\eta} + 2\beta_T K_0 + \sqrt{\beta_0^*} \left[N_0 \left(\frac{dU_1}{d\eta} \right)^2 - W_0 K_0 \right] &= 0 \\ \sigma_\omega \frac{d}{d\eta} \left(N_0 \frac{dW_0}{d\eta} \right) + (1 + 2\beta_T) \eta \frac{dW_0}{d\eta} + (1 + 4\beta_T) W_0 + \\ + \sqrt{\beta_0^*} \left[\alpha \left(\frac{dU_1}{d\eta} \right)^2 - \frac{\beta_0}{\beta_0^*} W_0^2 \right] + \frac{2\sigma_\omega}{W_0} \frac{dK_0}{d\eta} \frac{dW_0}{d\eta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$N_0 = K_0 / W_0$$

한편 무차원함수 U_1, K_0, W_0 에 대한 경계조건들은 자유흐름과 고체결면으로 다가가는 두 경우에 대하여 각각 다음과 같이 표시할수 있다.[3]

$$U_1(\eta) \rightarrow 0, K_0(\eta) \rightarrow 0, W_0(\eta) \rightarrow 0 \quad (\eta \rightarrow \infty \text{ 일 때}) \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} U_1(\eta) &\sim \frac{1}{k} (-\ln \eta + u_0 - u_1 \eta \ln \eta + \dots) \\ \frac{dU_1}{d\eta} &\rightarrow -\frac{1}{k\eta} \\ K_0(\eta) &\sim (1 + k_1 \eta \ln \eta + \dots) \\ W_0(\eta) &\sim \frac{1}{k\eta} (1 + w_1 \eta \ln \eta + \dots) \end{aligned} \right\} \quad (\eta \rightarrow 0 \text{ 일 때}) \quad (20)$$

우의 식들에서 결수 k_1, w_1, u_1 들의 표기를 일치시키기 위하여 $\alpha^* \equiv \sqrt{\beta_0^*}$ 로 정의하면 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{2\beta_T / \kappa}{\sigma_k \kappa^2 / (2\alpha^*) - 1} \\ u_1 &= \frac{[\beta_0 / (\alpha\beta_0^*) + 2\sigma_\omega / (\alpha\sigma_k)] [\sigma_k \kappa^2 / (2\alpha^*)]}{1 - \beta_0 / (\alpha\beta_0^*)} k_1 \\ \omega_1 &= \frac{[1 + 2\sigma_\omega / (\alpha\sigma_k)] [\sigma_k \kappa^2 / (2\alpha^*)]}{1 - \beta_0 / (\alpha\beta_0^*)} k_1 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

결수 u_0 은 질량보존에 관한 적분제한조건인 식 (14)의 첫번째 식으로부터 결정된다.

결국 자기상사란류경계층의 경우 속도결손층에 대한 수값해석을 진행하기 위해서는 변형된 운동방정식 (18)과 k 와 ω 에 대한 수송방정식 (19)에 질량보존에 대한 적분제한조건 (14)와 경계조건 (19), (20)을 고려하여 풀어야 한다.

2. 예 측 성 능

논문에서는 루벨-멜리크변환[5]을 리용하여 위에서 고찰한 방정식계와 경계조건들을 변환하여 수값계산을 진행하였다.

평형파라미터들의 값이 각각 $\beta_T = 0$ ($Re_{\delta^*} = 2 \times 10^4$)[3], $\beta_T = 8.7$ ($Re_{\delta^*} = 3.7 \times 10^4$)[4]인 경우 결손층에서의 속도프로필을 비교하였다.(그림)

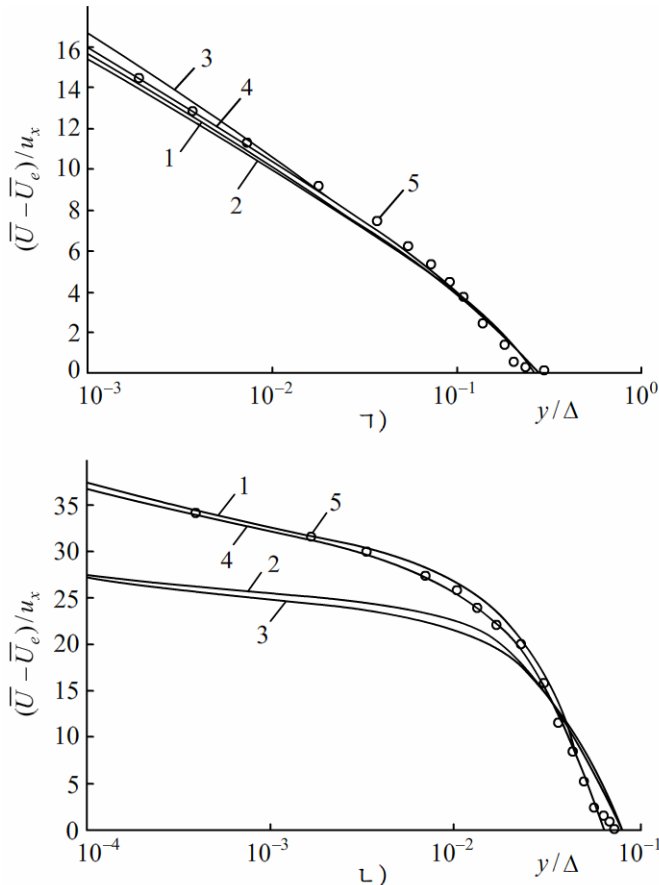


그림. 결손층에서 속도프로필의 비교

ㄱ) $\beta_T = 0$ 인 경우, ㄴ) $\beta_T = 8.7$ 인 경우

1-표준 $k-\omega$ 모형, 2-표준 $k-\epsilon$ 모형, 3-RNG $k-\epsilon$ 모형,
4-제기한 $k-\omega$ 모형, 5-측정값

$\beta_T = 0$ 의 경우 제기한 모형의 예측결과는 실험자료와의 오차가 평균 2.3%이하로서 표준 $k-\omega$ 모형의 예측결과에 비하여 측정값에 보다 가까운 값을 주고있다. 선행연구[2]에서

표준 $k-\omega$ 모형의 예측결과는 오차가 3%이하이다. 다른 두방정식란류모형들인 $k-\varepsilon$ 모형들의 예측결과들도 대체로 유사한 결과들을 보여주고있다.

$\beta_T = 8.7$ 인 경우 클라우저의 실험자료[4]와 비교하면 제기한 $k-\omega$ 모형에 의한 예측결과는 측정값들과의 오차가 평균 1.9%이하이고 표준 $k-\omega$ 모형의 예측결과는 오차가 2%이하이다. 그러나 $k-\varepsilon$ 모형들의 경우에는 y/Δ 가 감소함에 따라 30~40%이상의 작은 값을 가진다.[2]

결국 표준 $k-\omega$ 모형의 리용에서 제기되는 무한경계조건의존성문제를 극복하기 위하여 제기한 이 란류계산모형이 란류경계층에서 속도결손층흐름의 속도분포를 측정값에 비교적 가깝게 재현한다고 볼수 있다.

참 고 문 헌

- [1] 김정필, 장대육; 수학, 1, 6, 주체102(2013).
- [2] D. C. Wilcox; Turbulence Modeling for CFD, DCW Industries Inc., 117~125, 155~168, 2000.
- [3] K. Wieghardt et al.; NACA TM 1314, 1951.
- [4] F. H. Clauser; Advances in Applied Mechanics, 4, 1, 1956.
- [5] A. Rubel et al.; AIAA Paper 84-1523, 1984.

주체106(2017)년 12월 5일 원고접수

Prediction Performance of Velocity Defect Layer Flow for a Two-Equation Turbulence Model

Kim Jong Phil

In order to estimate a practical applicability of two-equation $k-\omega$ turbulence model suggested in the preceding reference[1], we applied it to the defect layer of turbulent boundary layer and compared with the computational results by another two-equation turbulence models and experimental data.

Key words: turbulent boundary layer, velocity defect layer, two-equation turbulence model