김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제1호

가환반환의 덜기씨스펙트르에서 기약모임

한 성 철

최량화와 그라프, 자동체, 형식언어, 알고리듬, 부호, 암호리론 등 각이한 분야들에서 널리 응용되고있는 반환은 환과 같은 분배법칙에 의해 련결되는 더하기와 곱하기라는 두 2원산법을 가진다. 그러나 환에서와는 달리 반환에서는 덜기산법이 허용되지 않으므로 환이데알리론의 많은 결과들이 반환에로 그대로 확장되지 않는다. 이런 차이를 줄이기 위하여 반환의 덜기이데알개념이 도입되였다.

단위원소를 가진 가환환의 씨이데알모임에 자리스끼위상이 도입된 씨스펙트르는 가환대수학과 대수적기하학에서 중요한 역할을 한다.[3]

선행연구[4]에서는 B_1 －대수의 포화씨이데알모임에 자리스끼위상을 도입하고 그 공간에서 기약닫긴모임은 한점모임의 페포로 된다는것을 증명하였다. 사실 B_1 －대수는 령원소와 단위원소를 가지면서 더하기제곱같기인 가환반환이며 포화이데알은 다름아닌 덜기이데알이다.

론문에서는 령원소와 단위원소를 가진 임의의 가환반환에 대하여 그 덜기씨이데알모임이 자리스끼위상에 관한 기약모임이기 위한 필요충분조건들을 준다. 론문의 결과들은 선행연구[2, 4]의 결과를 특수경우로 포함한다.

론문에서 R 는 령원소 0과 단위원소 1을 가지면서 $0\neq 1$ 인 가환반환이고 $I(R)$ 와 $KI(R)$, $\mathrm{Spec}_k(R)$ 는 각각 R 의 이데알들과 덜기이데알들, 덜기씨이데알들전부의 모임을 표시한다. 또한 R 의 이데알 A 에 대하여 $\overline{A}$ 와 $\sqrt{A}$ 는 각각 A 의 덜기페포와 근기를 표시한다. 특히 R 의 령근기 $\sqrt{\{0\}}$ 을 $\mathrm{Nil}(R)$ 로 표시한다.

앞으로 $X:=\mathrm{Spec}_k(R)$ 로 한다. 그러면 $X\neq\varnothing$ 이다.

보조정리 1 [1] $A\in KI(R)$ 이면 $\sqrt{A}=\bigcap\limits_{A\subseteq P\in X}P$ 이다.

$\varnothing\neq S\subseteq R$ 일 때 $V(S):=\{P\in X \mid S\subseteq P\}$ 로 놓자.

보조정리 2 [1] 다음의 사실들이 성립된다.

① $\varnothing\neq S\subseteq T\Rightarrow V(S)=V(\langle S\rangle)=V(\overline{\langle S\rangle})$

② $A,\ B\in I(R)\Rightarrow V(A)\bigcup V(B)=V(AB)=V(A\bigcap B)$

$\mathrm{Spec}_k(R)$ 의 부분모임족 $\{V(S)\mid \varnothing\neq S\subseteq R\}$ 는 닫긴모임에 관한 위상공리들을 만족시키는데 이렇게 도입되는 위상을 자리스끼위상이라고 부르고 이 자리스끼위상이 도입된 위상공간 $\mathrm{Spec}_k(R)$ 를 R 의 덜기씨스펙트르라고 부른다.[1]

$\varnothing\neq S\subseteq R$ 일 때 X 의 열린모임 $X\setminus V(S)$ 를 X_S 로 표시하면 $X_S=\{P\in X\mid S\not\subseteq P\}$ 이다. 특히 $a\in R$ 일 때 $X_{\{a\}}$ 를 간단히 X_a 로 표시하고 X 의 기초열린모임이라고 부른다.[1]

보조정리 3 [1] 기초열린모임족 $\{X_a\mid a\in R\}$ 는 X 우의 자리스끼위상에 관한 열린모임토대이다.

$0\neq f\in R$ 일 때 어떤 $r,\ s\in R$ 가 있어서 $1+rf=sf$ 이면 f 를 R 의 반단원이라고 부른다.

f가 R의 반단원이기 위해서는 $\overline{Rf}=R$일것이 필요하고 충분하다.[2]

비지 않은 위상공간 Z에서 임의의 두 비지 않은 열린모임들의 사귐이 늘 비지 않을 때 Z를 기약공간이라고 부른다.

Z의 부분모임 Y가 부분공간으로서 기약일 때 Y를 기약모임이라고 부른다.

Y가 기약모임이기 위해서는 Z의 임의의 닫긴모임 Y_1과 Y_2에 대하여 $Y\subseteq Y_1\cup Y_2$이면 $Y\subseteq Y_1$ 또는 $Y\subseteq Y_2$일것이 필요하고 충분하다.[3]

보조정리 4 다음의 사실들이 성립된다.

① $f,\ e\in R\Rightarrow X_f\cap X_e=X_{fe}$

② $X_f=\varnothing\Leftrightarrow f\in \mathrm{Nil}(R)$

③ f가 R의 반단원이기 위해서는 $X_f=X$일것이 필요하고 충분하다.

증명 ① $P\in X_f\cap X_e$이면 $f\notin P$이고 $e\notin P$이므로 $fe\notin P$이고 $P\in X_{fe}$이다.

따라서 $X_f\cap X_e\subseteq X_{fe}$이다. 류사하게 거꿀포함관계가 증명된다.

② 보조정리 1로부터 $\mathrm{Nil}(R)=\bigcap_{P\in X}P$이다. 만일 $f\in \mathrm{Nil}(R)$이면 임의의 $P\in X$에 대하여 $f\in P$이고 따라서 $X_f=\varnothing$이다. 거꿀은 류사하게 증명된다.

③ f를 R의 반단원이라고 할 때 어떤 $P\in X$가 있어서 $P\notin X_f$이면 $f\in P$이고 $\overline{Rf}\subseteq\overline{P}=P\neq R$이므로 $\overline{Rf}\neq R$이다. 이것은 f가 반단원이라는데 모순된다.

따라서 $X\subseteq X_f$이고 결국 $X=X_f$이다.

거꾸로 $X_f=X$라고 하면 임의의 $P\in X$에 대하여 $P\in X_f$이고 $f\notin P$이다.

만일 f가 R의 반단원이 아니면 $\overline{Rf}\neq R$이므로 $\overline{Rf}\subseteq Q$인 R의 덜기극대이데알 Q가 존재한다. 덜기극대이데알은 씨이데알이므로 $Q\in X$이고 따라서 $Q\in X_f$ 즉 $f\notin Q$이다. 이것은 $f\in\overline{Rf}\subseteq Q$와 모순된다. 따라서 f는 반단원이다.(증명끝)

정리 1 X가 기약공간이기 위해서는 $\mathrm{Nil}(R)$가 R의 덜기씨이데알일것이 필요하고 충분하다.

증명 (필요성) X가 기약공간이라고 하면 보조정리 1로부터 $\mathrm{Nil}(R)$는 R의 참인 덜기이데알이다. 만일 $a,\ b\in R$이고 $ab\in \mathrm{Nil}(R)$이면 보조정리 4의 ②에 의하여 $X_{ab}=\varnothing$이다.

다시 보조정리 4의 ①에 의하여 $X_a\cap X_b=\varnothing$이다. X가 기약이므로 $X_a=\varnothing$이거나 $X_b=\varnothing$ 즉 $a\in \mathrm{Nil}(R)$이거나 $b\in \mathrm{Nil}(R)$이다. 따라서 $\mathrm{Nil}(R)$는 씨이데알이다.

(충분성) 보조정리 3에 의하여 임의의 두 비지 않은 기초열린모임들의 사귐이 비지 않는다는것을 보여주면 된다. 만일 $X_a\cap X_b=\varnothing$이면 보조정리 4의 ①에 의하여 $X_{ab}=\varnothing$이므로 보조정리 4의 ②에 의하여 $ab\in \mathrm{Nil}(R)$이다.

가정에 의하여 $\mathrm{Nil}(R)$가 씨이데알이므로 $a\in \mathrm{Nil}(R)$이거나 $b\in \mathrm{Nil}(R)$이다. 다시 보조정리 4의 ②에 의하여 $X_a=\varnothing$이거나 $X_b=\varnothing$이다. 따라서 X는 기약공간이다.(증명끝)

$P\in X$일 때 보조정리 2의 ①로부터 $\overline{\{P\}}=\bigcap_{P\in V(A)}V(A)$이다.

$\varnothing\neq Y\subseteq X$일 때 $\tau(Y):=\bigcap_{P\in Y}P$로 놓으면 $\tau(Y)$는 R의 참인 덜기이데알이다.

정리 2 $\varnothing \neq Y \subseteq X$ 인 Y가 기약모임이기 위해서는 $\tau(Y)$가 R의 덜기씨이데알일것이 필요하고 충분하다.

증명 (필요성) Y가 기약모임이라고 할 때 $ab \in \tau(Y)$이면 $Y \subseteq V(\{ab\})$이다.

보조정리 2의 ①, ②에 의하여 $V(\{ab\}) = V(\langle ab \rangle) = V(\langle a \rangle \langle b \rangle) = V(\langle a \rangle) \cup V(\langle b \rangle)$이고 따라서 $Y \subseteq V(\langle a \rangle) \cup V(\langle b \rangle)$이다.

Y가 기약이므로 $V(\langle a \rangle) \supseteq Y$이거나 $V(\langle b \rangle) \supseteq Y$이고 따라서 $a \in \tau(Y)$이거나 $b \in \tau(Y)$이다.

(충분성) Y_1과 Y_2가 X의 닫긴모임들이고 $Y \subseteq Y_1 \cup Y_2$이면 R의 어떤 이데알 A_1과 A_2가 있어서 $Y_1 = V(A_1)$이고 $Y_2 = V(A_2)$이다.

보조정리 2의 ②에 의하여 $Y \subseteq V(A_1) \cup V(A_2) = V(A_1 A_2)$이므로 $A_1 A_2 \subseteq \tau(Y)$이다.

$\tau(Y)$가 씨이데알이므로 $A_1 \subseteq \tau(Y)$이거나 $A_2 \subseteq \tau(Y)$ 즉 $Y \subseteq V(A_1) = Y_1$ 또는 $Y \subseteq V(A_2) = Y_2$이다.(증명끝)

따름 $P \in X$일 때 $V(P)$는 기약모임이다.

보조정리 5 $P \in X$이면 $\overline{\{P\}} = V(P)$이다.

증명 $P \in V(P)$이므로 $\overline{\{P\}} \subseteq V(P)$이다. 만일 $Q \in V(P)$이면 $P \subseteq Q$이므로 $P \in V(A)$인 임의의 A에 대하여 $A \subseteq P \subseteq Q$이고 $Q \in V(A)$이다. 따라서 $Q \in \bigcap_{P \in V(A)} V(A) = \overline{\{P\}}$이다.(증명끝)

정리 3 Y가 X의 닫긴기약모임이면 어떤 $P \in X$가 있어서 $Y = \overline{\{P\}}$이다.

증명 Y가 닫긴모임이므로 R의 비지 않은 부분모임 S가 있어서 $Y = V(S)$이다. 그리고 Y가 기약모임이므로 정리 2에 의하여 $P = \tau(Y)$는 덜기씨이데알이고 $P \in X$이다.

이제 $V(P) = Y$임을 보자.

사실 $S \subseteq \tau(Y) = P$이고 $V(S) \supseteq V(P)$이므로 $V(P) \subseteq Y$이다.

만일 $Q \in Y$이면 $P = \tau(Y) \subseteq Q$이므로 $Q \in V(P)$이고 $Y \subseteq V(P)$이다.

등식 $Y = \overline{\{P\}}$는 보조정리 5로부터 나온다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보 수학, 64, 3, 80, 주체107(2018).

[2] S. E. Atani et al.; Quasigroups Related Systems, 20, 29, 2012.

[3] M. F. Atiyah et al.; Introduction to Commutative Algebra, Addison Wesley, 1～16, 1969.

[4] P. Lescot; J. Pure Appl. Algebra, 216, 1004, 2012.

주체107(2018)년 9월 8일 원고접수

Irreducible Sets in the Subtractive Prime Spectrum of a Commutative Semiring

Han Song Chol

For any commutative semiring with zero and identity, we characterize irreducible subsets of the subtractive prime spectrum equipped with the Zariski topology.

Key words: subtractive ideal, prime ideal, Zariski topology, irreducibility