김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제1호

함수수직비례인자를 가지는 비선형프락탈보간곡선

김진명, 김현진

프락탈보간곡선은 많은 자연적인 대상들을 모형화하기 위한 강력한 도구로서 수학이나 응용과학의 여러 분야에서 광범히 응용되고있다.[1, 2, 7, 9] 프락탈보간함수의 그라프는 어떤 반복함수계(IFS)의 흡인체로서 그 개념은 잘 알려진 바나흐(Banach)축소원리의 자연적인 일반화로서 소개되고 새로운 프락탈보간함수의 구성과 분석을 위한 강력한 도구로 되고있다.[1, 2] 특히 IFS와 흡인체의 련관성은 프락탈보간곡선의 구성에서 매우 중요하다.

보통의 방법에서 선형프락탈보간함수의 존재성은 바나흐부동점정리에 따른다. 새로운 IFS와 프락탈보간함수를 구성하기 위하여 부동점리론에서 얻은 잘 알려진 부동점결과들을 리용할수 있다.[5－8] 그러나 프락탈보간곡선을 얻는 보통의 방법은 선형프락탈보간곡선인 경우에 효과적이지만 비선형프락탈보간곡선인 경우에 적용할수 없다.[1, 2, 7, 9] 선행연구[7]에서는 바나흐부동점정리대신에 라코치(Rakotch)부동점정리를 리용하여 비선형프락탈보간함수를 생성하는 방법을 제시하였다.

이 론문에서는 특수한 함수수직비례인자를 리용하여 새로운 비선형프락탈보간함수를 얻기 위하여 라코치부동점정리를 보다 일반화한 게라티(Geraghty)부동점정리[3]를 적용함으로써 선행연구[7]의 결과들을 개선하였으며 얻어진 결과의 효과성을 론증하기 위하여 명백한 실례를 제시하였다.

먼저 프락탈보간리론에서 일부 기초적인 개념들을 서술한다.

N을 1보다 큰 정의 옹근수라고 하고 $I=[x_0,\ x_N]\subset \mathbf{R}$라고 하자. $\{x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_N\}$이 I의 분할이고 $y_0,\ y_1,\ \cdots,\ y_N$이 주어진 실수인 자료점들의 모임

$$\{(x_i,\ y_i)\in I\times \mathbf{R} : i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ N\}$$

이 주어졌다고 하자. $I_i:=[x_{i-1},\ x_i]\subset I$로 정하고 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ N$에 대하여 $l_i : I\to I_i$를 어떤 $0\le\lambda<1$에 대하여

$$l_i(x_0)=x_{i-1},\ l_i(x_N)=x_i,\ |l_i(x')-l_i(x'')|\le\lambda|x'-x''|\ (x',\ x''\in I)$$

인 축소동형넘기기라고 하자.

어떤 $-\infty<a<b<+\infty$에 대하여 $K:=I\times[a,\ b]$라고 하자. 또한 넘기기 $F_i : K\to[a,\ b]$가 련속이고 어떤 $k\ge 0,\ 0\le\alpha<1$가 있어서 임의의 $x',\ x''\in I,\ y',\ y''\in[a,\ b]$와 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ N$에 대하여

$$F_i(x_0,\ y_0)=y_{i-1},\ F_i(x_N,\ y_N)=y_i,\ |F_i(x',\ y')-F_i(x'',\ y'')|\le k|x'-x''|+\alpha|y'-y''|$$

이 성립한다고 하자. 그리고 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ N$에 대하여 함수 $w_i : K\to K$를 $w_i:=(l_i(x),\ F_i(x,\ y))$로 정의하자. 반슬리(Barnsley)는 다음의 결과를 내놓았다.

정리 1 [1, 2] 우에서 정의된 IFS $\{K, w_i : i=1,\ 2,\ \cdots,\ N\}$는 $G=\bigcup_{i=1}^{N} w_i(G)$인 유일한 비지 않은 콤팍트모임 $G\subset\mathbf{R}^2$를 가진다. 그러면 G는 $f(x_i)=y_i\ (i=0,\ 1,\ \cdots,\ N)$를 만족시키는 련속함수 $f : I\to[a,\ b]$이다.

그라프가 IFS의 흡인체로 되는 함수 $f(x)$를 자료 $\{(x_i,\ y_i): i=0,\ 1,\ \cdots,\ N\}$에 대응하는 프락탈보간함수라고 부른다.[1, 2]

이제 어떤 $-\infty < a < b < +\infty$에 대하여 유클리드거리 d_0을 가진 콤팍트거리공간 $K := I\times[a,\ b]$에서 고찰하겠다.

축소동형 $l_i : I \to I_i$를 $l_i(x) := a_i x + e_i$이고 모든 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ N$에 대하여 실수 $a_i,\ e_i$를 $l_i(I)=I_i$가 성립되게 선택하여 정의하자.

$\varphi:(0,\ +\infty)\to(0,\ +\infty)$를 임의의 $t>0$에 대하여 $\alpha(t):=\varphi(t)/T<1$이고 함수

$$(0,\ +\infty)\ni t\to\frac{\varphi(t)}{t}$$

가 비증가(또는 비감소 또는 련속)인 비감소함수라고 하자. 그리고 $s_i:[a,\ b]\to\mathbf{R}$는 $\varphi-$축소이고 $d_i: I\to\mathbf{R}$는 $\max_{x\in I}|d_i(x)|\le 1$이며 립쉬츠상수가 L_{d_i}인 립쉬츠함수라고 하자.

다음 비선형변환

$$w_i\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}l_i(x)\\ F_i(x,\ y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_i x+e_i\\ c_i x+d_i(x)s_i(y)+f_i\end{pmatrix}$$

들인 IFS $\{K, w_i : i=1,\ 2,\ \cdots,\ N\}$를 고찰하자. 여기서 변환들은 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ N$에 대하여

$$w_i\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{i-1}\\ y_{i-1}\end{pmatrix},\ w_i\begin{pmatrix}x_N\\ y_N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_i\\ y_i\end{pmatrix}$$

에 따르는 자료에 의하여 규정되며 s_i들은 게라티축소(같은 함수 φ에 대하여)이다.

그러면 임의의 $(x,\ y'),\ (x,\ y'')\in K\subset\mathbf{R}^2$에 대하여

$$|F_i(x,\ y')-F_i(x,\ y'')|=|d_i(x)||s_i(y')-s_i(y'')|\le|s_i(y')-s_i(y'')|\le\varphi(|y'-y''|)$$

가 성립한다. 또한 선행연구[7]의 $a_i,\ e_i,\ c_i,\ f_i$와 비교하여

$$a_i=\frac{x_i-x_{i-1}}{x_N-x_0},\ e_i=\frac{x_N x_{i-1}-x_0 x_i}{x_N-x_0},\ c_i=\frac{y_i-y_{i-1}}{x_N-x_0}-\frac{d_i(x_N)s_i(y_N)-d_i(x_0)s_i(y_0)}{x_N-x_0},$$

$$f_i=\frac{x_N y_{i-1}-x_0 y_i}{x_N-x_0}-\frac{x_N d_i(x_0)s_i(y_0)-x_0 d_i(x_N)s_i(y_N)}{x_N-x_0}$$

을 얻는다. $C(I)$는 련속함수 $f: I=[x_0,\ x_N]\to[a,\ b]$들의 모임을 의미한다. $C^*(I)\subset C(I)$는 $f(x_0)=y_0,\ f(x_N)=y_N$인 련속함수 $f: I\to[a,\ b]$들의 모임 즉

$$C^*(I):=\{f\in C(I): f(x_0)=y_0,\ f(x_N)=y_N\}$$

이라고 하자. 그리고 $C^{**}(I)\subset C^*(I)\subset C(I)$는 주어진 자료점들

$$\{(x_i,\ y_i)\in K=[x_0,\ x_N]\times[a,\ b]: i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ N\}$$

을 지나는 련속함수들의 모임 즉

$$C^{**}(I):=\{f\in C^*(I): f(x_i)=y_i,\ i=0,\ 1,\ \cdots,\ N\}$$

이라고 하자. $C(I)$우의 거리 $d_{C(I)}$를 모든 $g, h\in C(I)$에 대하여

$$d_{C(I)}(g,\ h):=\max_{x\in[x_0,\ x_N]}|g(x)-h(x)|$$

로 정의하자. 그러면 $(C(I),\ d_{C(I)})$와 $(C^*(I),\ d_{C(I)})$, $(C^{**}(I),\ d_{C(I)})$는 완비거리공간이다.

모든 $f\in C^*(I)$에 대하여 넘기기 $T:C^*(I)\to C(I)$를 임의의

$$x\in[x_{i-1},\ x_i],\ i=1, 2,\ \cdots,\ N$$

에 대하여

$$Tf(x):=F_i(l_i^{-1}(x),\ f(l_i^{-1}(x)))$$

로 정의하자.

보조정리 모든 $f\in C^*(I)$에 대하여 $Tf\in C^{**}(I)$이다. 즉 $T:C^*(I)\to C^{**}(I)$이고 $n\geq 2$에 대하여

$$T^n:C^{**}(I)\to C^{**}(I)$$

이다.

정리 2 N을 1보다 큰 정의 옹근수라고 하자. $\{K, w_i:i=1, 2,\ \cdots,\ N\}$을 자료모임 $\{(x_i,\ y_i):i=0,\ 1,\ \cdots,\ N\}$에 대응하는 우에서 정의된 IFS라고 하자. 그러면 연산자 T는 게라티축소이다.(넘기기 $T:C^*(I)\to C^*(I)$로 고찰할 때) 그러므로 T의 부동점인 유일한 련속함수 $f:I\to[a,\ b]$가 존재한다. 특히 $i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ N$에 대하여 $f(x_i)=y_i$이다. 더우기 f의 그라프 G는 $\{K;\ w_1,\ \cdots,\ w_N\}$에 관하여 불변이다. 즉

$$G=\bigcup_{i=1}^N w_i(G)$$

이다.

정리 3 N을 1보다 큰 정의 옹근수라고 하자. 그리고 s_i는 유계함수라고 하자. $\{K, w_i:i=1,\ 2,\ \cdots,\ N\}$은 자료모임 $\{(x_i,\ y_i):i=0,\ 1,\ \cdots,\ N\}$과 관련한 우에서 정의된 IFS를 의미한다. 그러면 모든 $i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ N$에 대하여 w_i가 d_θ에 관하여 게라티축소넘기기인 유클리드거리 d_0과 동등한 $K=I\times[a,\ b]$의 거리 d_θ가 존재한다. 특히 $G=\bigcup_{i=1}^N w_i(G)$인 유일한 비지 않은 콤팍트모임 $G\subset K=I\times[a,\ b]$가 존재한다.

증명 K우의 거리 d_θ를

$$d_\theta((x',\ y'),\ (x'',\ y'')):=|x'-x''|+\theta|y'-y''|$$

로 정의한다. 여기서 θ는 앞으로 특징짓게 되는 정의 실수이다.

$$|d_i(x')-d_i(x'')|\leq L_{d_i}|x'-x''|$$

이고

$$F_i(x,\ y):=c_ix+d_i(x)s_i(y)+f_i$$

이므로

$$|F_i(x',\ y')-F_i(x'',\ y'')|\leq(|c_i|+\sup_{y''\in D(s_i)}|s_i(y'')|L_{d_i})|x'-x''|+|s_i(y')-s_i(y'')|$$

이다.

$$k:=\max_{i=1,\ 2,\ \cdots,\ N}(|c_i|+\sup_{y''\in D(s_i)}|s_i(y'')|L_{d_i})$$

라고 하면 모든 $(x',\ y'),\ (x'',\ y'')\in K$에 대하여

$$|F_i(x',\ y')-F_i(x'',\ y'')|\leq k|x'-x''|+\varphi(|y'-y''|)$$

이다. 여기서 $\varphi:(0,\ +\infty)\to(0,\ +\infty)$ 는 $t>0$ 일 때 $\varphi(t)<t$ 이고 $t\to\varphi(t)/t$ 는 비증가(또는 비감소 또는 편속)인 비감소함수이므로 모든 $(x',\ y'),\ (x'',\ y'')\in K$ 에 대하여

$$d_\theta(w_i(x',\ y'),\ \ w_i(x'',\ y''))\le(|a_i|+\theta k)|x'-x''|+\theta\varphi(|y'-y''|)$$

이 성립한다. $(x',\ y'),\ (x'',\ y'')\in K$ 이고 $(x',\ y')\ne(x'',\ y'')$ 이라고 하자.

$\varphi:(0,\ +\infty)\to(0,\ +\infty)$ 는 비감소함수이고 모든 $t>0$ 에 대하여 $\varphi(t)<t$ 이므로

$$d_\theta(w_i(x',\ y'),\ \ w_i(x'',\ y''))\le$$

$$\le\max\left\{\max_{i=1,\ 2,\ \cdots,\ N}|a_i|+\theta k+\theta,\ \frac{\varphi(|x'-x''|+|y'-y''|)}{|x'-x''|+|y'-y''|}\right\}d_\theta((x',\ y'),\ (x'',\ y''))$$

를 얻는다. $N>1$ 이므로 모든 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ N$ 에 대하여

$$0<a_i:=\frac{x_i-x_{i-1}}{x_N-x_0}<1$$

이다.

$$\theta:=\frac{1-\max_{i=1,\ 2,\ \cdots,\ N}|a_i|}{2(k+1)}$$

라고 하면 $0<\max_{i=1,\ 2,\ \cdots,\ N}|a_i|+\theta k+\theta<1$ 이고 $k\ge0$ 이므로 $0<\theta<1$ 을 얻는다. 모든 $t>0$ 에 대하여

$$\beta(t):=\max\left\{\max_{i=1,\ 2,\ \cdots,\ N}|a_i|+\theta k+\theta,\ \frac{\varphi(t)}{t}\right\}$$

라고 하면 $\alpha(t):=\varphi(t)/t$ 이고 α 가 비증가(또는 비감소 또는 편속)이므로 β 가 비증가(또는 비감소 또는 편속)이라는것을 알수 있으며 임의의 $(x',\ y'),\ (x'',\ y'')\in K,\ \ (x',\ y')\ne(x'',\ y'')$ 에 대하여

$$d_\theta(w_i(x',\ y'),\ w_i(x'',\ y''))\le\beta(d((x',\ y'),\ (x'',\ y'')))d_\theta((x',\ y'),\ (x'',\ y''))$$

가 성립한다. 여기서

$$d((x',\ y'),\ (x'',\ y'')):=|x'-x''|+|y'-y''|$$

이다. $0<\theta<1$ 이므로 w_i 는 $(K,\ d_\theta)$ 에서 게라티축소이다. 한편 거리 d_θ 는 K 우의 유클리드거리 d_0 과 동등하다.[7] 따라서 $(K,\ d_\theta)$ 는 완비거리공간이므로 $w_i:K\to K$ 는 $(K,\ d_\theta)$ 에서 게라티축소이며 K 에서 유일한 부동점을 가진다. 하우스돌프거리의 정의에 의하여 두 거리의 동등성으로부터 그것들이 생성하는 하우스돌프거리의 동등성을 얻는다.[6] 그러므로 $(K,\ d_0)$ 에 대하여 $G=\bigcup_{i=1}^{N}w_i(G)$ 인 유일한 비지 않은 콤팍트모임 $G\subset K$ 가 존재한다.(증명끝)

주의 론문의 결과는 선행연구[1, 2, 8, 10]의 실질적인 일반화이다. 그라프가 정리 2와 정리 3에서 서술된 IFS의 흡인체인 함수는 아핀프락탈보간함수[1, 2]와 변수파라메터를 가지는 프락탈보간함수[9], 비선형프락탈보간함수[7]를 일반화한다. $d_i(x)\equiv1$ 이고 $s_i(y)=h_iy(|h_i|<1)$ 이면 정리 2에서 얻은 함수 f 는 아핀프락탈보간함수로 된다. $d_i(x)\le1$ 이고 $s_i(y)=h_iy(|h_i|<1)$ 이면 f 는 변수파라메터를 가지는 프락탈보간함수로 된다. $d_i(x)\equiv1$ 이고 $s_i(y)$ 가 라코치축소이면 f 는 선행연구[7]의 비선형프락탈보간함수로 된다.

실례 $t\in(0,\ +\infty)$에 대하여

$$\varphi_1(t):=\frac{t}{1+t},\quad \varphi_2(t):=\max(2|\sin(t/2)|,\ t/2),\quad \varphi(t):=\max(\varphi_1(t),\ \varphi_2(t))$$

이고 자료모임 $\{(0,\ 0.2),\ (0.3,\ 0.5),\ (0.5,\ 0.3),\ (0.8,\ 0.8),\ (1,\ 0.6)\}$이 주어졌다고 하자. 또한 모든 $i=1,\ 2,\ 3,\ 4$에 대하여 $d_i(x):=2^{2i}x^i(2-x)^i$이라고 하자. $z\in[0,\ +\infty)$에 대하여

$$s_1(z):=\frac{1}{1+z},\quad s_2(z):=\frac{z}{1+z},\quad s_3(z):=\frac{z}{1+2z},\quad s_4(z):=\sin(z)$$

이라고 하자. 그러면 $s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4$는 구간 $[0,\ +\infty)$에서 바나흐축소가 아닌 게라티축소(함수 φ에 대하여)이다. 이때 $w_i(x,\ y):=(a_ix+e_i,\ c_ix+d_i(x)s_i(y)+f_i)$라고 하면 정리 2와 정리 3에 의하여 주어진 자료를 보간하는 련속함수 $f:[0,\ 1]\to\mathbf{R}$가 존재한다.

참 고 문 헌

[1] M. F. Barnsley; Constr. Approx., 2, 303, 1986.

[2] M. F. Barnsley; Fractals Everywhere, Academic Press Professional, Boston, MA, 51～109, 1993.

[3] M. A. Geraghty; Proc. Amer. Math. Soc., 40, 2, 604, 1973.

[4] J. Jachymskiand et at.; Banach Center Publ., 77, 123, 2007.

[5] G. G. Lukawska et at.; Bull. Aust. Math. Soc., 72, 441, 2005.

[6] S. Ri; Indag. Math., 27, 85, 2016.

[7] S. Ri; Fractals 25, 6, 12, 2017.

[8] F. Strobin; J. Math. Anal. Appl., 422, 99, 2015.

[9] H. Wang et at.; J. Approx. Theory., 175, 1, 2013.

[10] Y. Wang; J. Zhejiang Univ. Sci., A 8, 10, 1691, 2007.

주체108(2019)년 9월 15일 원고접수

Nonlinear Fractal Interpolation Curves with Function Nertical Factors

Kim Jin Myong, Kim Hyon Jin

In this paper, we present a method to generate the new nonlinear fractal interpolation curves using Geraghty contraction and function vertical scaling factors.

Keywords: Iterated Function System(IFS), fractal interpolation curve, Geraghty contraction