김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체106(2017)년 제63권 제7호 Vol. 63 No. 7 JUCHE106(2017).

외부흐름마당에서 최량조종문제의 한가지 수값근사법

로 은 주

위대한 수령 **김일성**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《우리는 사회주의건설의 실천에서 나서는 긴절한 과학기술적문제들을 제때에 풀어야 하며 선진적인류가 이룩한 선진과학성과들을 끊임없이 받아들여 우리 나라의 과학을 가까운 기간에 전반적으로 세계적수준에 올려세워야 할것입니다.》(《**김일성**전집》 제27권 390페지)

일반적으로 아이코날방정식 특히 비등방성아이코날방정식에 대하여서는 엄밀한 풀이를 얻을수 없다.

비등방성아이코날방정식의 점성수값풀이방법에는 고속쓸기법, 순서화된 상승법, 완화된 고속전진법, 파면확장법 등이 있다.[1, 2]

선행연구[1]에서는 대역적인 최량자리길문제에 대응되는 등방성하밀톤-야코비방정식을 풀기 위한 딕스트라형방법을 제기하였다.

선행연구[2]에서는 등방성하밀톤-야코비방정식에 대한 고속전진법을 제기하고 특수한 경우의 비등방성하밀톤-야코비방정식에 대하여 순서화된 상승알고리듬을 제기하였다.

선행연구[3]에서는 하밀톤-야코비방정식을 풀기 위한 WENO방법을 론의하였다.

론문에서는 외부흐름마당에서 최량궤도문제에 대한 하밀톤-야코비방정식을 푸는데서 구조화된 3각형그물에서의 특성곡선에 의한 한가지 고속전진법을 제기하기 위한 문제를 고찰한다.

론문의 결과는 앞으로 특성곡선에 의한 한가지 고속전진법에 효과적으로 적용될수 있다.

다음과 같이 주어지는 조종계에 대하여 론의하자.

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(y(t))\cdot\alpha(t) + d(y(t),\ t),\ t>0 \tag{1}$$

$$y(0) = x\in\Omega \tag{2}$$

여기서 $y(t)$는 t시각 계의 상태이고 $f:\boldsymbol{R}^n\to[0,\ +\infty)$이며 가측함수 $\alpha(\cdot):[0,\ +\infty)\to S_1$은 조종이다. 또한

$$S_1=\{a\in\boldsymbol{R}^n\mid\ \|a\|=1\}$$

이고 Ω는 $\boldsymbol{R}^n$의 유계열린구역이며 $d:\boldsymbol{R}^n\times[0,\ +\infty)\to\boldsymbol{R}^n$은 t시각 계에 작용하는 외부흐름마당이다.

초기점 $x\in\Omega$로부터 출발하고 조종 $\alpha(\cdot)$에 대응되는 계 (1)의 궤도가 Ω의 경계에 도착하는 첫 시각을 $T_x(\alpha)$로 표시하자. 즉 $T_x(\alpha):=\inf\{t\ge 0\mid y_{x,\ \alpha}(t)\in\partial\Omega\}$라고 하자. 여기서 $y_{x,\ \alpha}(t)$는 초기상태 $y(0)=x$와 조종 $\alpha(\cdot)$에 대응되는 계 (1)의 풀이의 t시각의 상태를 표현한다.

론문에서 론의할 문제는 매 초기상태 (2)에 대하여 계 (1)의 궤도들가운데서

$$T_x(\alpha) \to \inf \tag{3}$$

인 조종과 대응되는 궤도를 구하는것이다.

이때의 조종을 초기상태 x에 관한 최량조종, 대응되는 궤도를 초기상태 x에 관한 최량궤도라고 부른다.

우에서 설정한 최량조종문제의 값함수는 다음과 같다.

$$T(x) = \inf_{\alpha(\cdot)\in\Lambda} T_x(\alpha), \ \ x \in \Omega \tag{4}$$

$T(x)$는 최량궤도가 초기상태 x로부터 Ω의 경계에 도달되는 첫 시각이다.

최량궤도를 얻는데만 주목을 돌린다면 식 (4)에서 $T(x)$를 최량궤도가 Ω의 경계에서 x에 도달되는 첫 시각으로 간주하여도 무방하므로

$$T(x) = \begin{cases} \inf\limits_{\alpha(\cdot)\in\Lambda} T_x(\alpha), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

로 놓는다.

최량조종문제 (1)—(3)에 대하여 다음의 가정들이 성립된다고 하자.

가정 1 $f(x)$는 리프쉬츠련속이며 $0 \le f(x) \le F$, $x \in \Omega$가 성립된다. 여기서 F는 흐름마당에 관계되는 조종계의 최대속도로서 상수이다.

가정 2 흐름마당 $d(y,\ t)$는 리프쉬츠련속함수이다.

가정 3 흐름마당 $d(y,\ t)$는 $0 \le \| d(y,\ t) \| \le F$, $t \in [0,\ +\infty)$, $x \in \Omega$를 만족시킨다.

최량조종문제 (1)—(3)에 대응되는 하밀톤—야코비방정식은 다음과 같다.

$$\begin{cases} \min\limits_{a\in S_1}\{(\nabla T(x)\cdot a) f(x) + \nabla T(x)\cdot d(x,\ T(x))\} = 1, & x \in \Omega \\ T(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{5}$$

방정식 (5)에서 최소값을 주는 조종을 고려하면 다음과 같은 방정식 (5)와 동등한 하밀톤—야코비방정식을 얻는다.

$$\begin{cases} \| \nabla T(x) \| f(x) + \nabla T(x)\cdot d(x,\ T(x)) = 1, & x \in \Omega \\ T(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{6}$$

방정식 (5)는 가장 일반적인 아이코날하밀톤—야코비방정식인 비동차비등방성아이코날방정식의 한 형태이다.

$\Omega \subset \boldsymbol{R}^2$를 3각형그물로 리산화된 직4각형구역이라고 하고 방정식 (6)의 수값계차근사도식을 유도하자.

론문에서 제기한 수값계산알고리듬은 임의의 3각형그물에서도 그대로 성립된다.

다음과 같은 단순한 그물형태인 경우에 대하여서만 론의하기로 한다.

$x = (i,\ j)$를 함수값을 구하여야 할 점이라고 하면 그 점의 린접그물점들을 다음과 같은 6개의 그물점들로 표시할수 있다.

$$x_{\mathrm{L}} = (i,\ j-1),\ x_{\mathrm{U}} = (i-1,\ j),\ x_{\mathrm{LU}} = (i-1,\ j-1)$$

$$x_{\mathrm{R}} = (i,\ j+1),\ x_{\mathrm{RD}} = (i+1,\ j+1),\ x_{\mathrm{D}} = (i+1,\ j)$$

이때 3각형 $x_{\mathrm{LU}}x_{\mathrm{U}}x$를 생각하고 이 3각형의 정점 $x_{\mathrm{LU}} = (i-1,\ j-1)$과 $x_{\mathrm{U}} = (i-1,\ j)$에서의 풀이는 알려졌다고 하자.

이제 정점 $x=(i,\ j)$에서의 값을 계산하여야 한다.

정리 최량조종문제 (1)－(3)에 대하여 가정 1－3이 만족된다고 하자.

이때 하밀톤－야코비방정식 (5)에 대한 수값근사방정식

$$(aT_{i,\ j}+b)^2+(cT_{i,\ j}+d)^2-\frac{(1-(v_1)_{i,\ j}(aT_{i,\ j}+b)-(v_2)_{i,\ j}(cT_{i,\ j}+d))^2}{F_{i,\ j}^2}=0$$

이 성립된다. 여기서 $a,\ b,\ c,\ d$는 A와 관련된 상수이며 $T_{i,\ j}$는 $(i,\ j)$에서의 근사값이다.

증명 $D_{x_{\mathrm{LU}}x}$와 $D_{x_{\mathrm{U}}x}$를 각각 3각형의 두변 $x_{\mathrm{LU}}x$와 $x_{\mathrm{U}}x$방향에로의 T의 방향도함수라고 하자.

이때 다음의 식들이 성립된다.

$$D_{x_{\mathrm{LU}}x}=\nabla T\cdot\frac{x_{\mathrm{LU}}x}{|x_{\mathrm{LU}}x|}=T_{x_1}a_{11}+T_{x_2}a_{12} \tag{7}$$

$$D_{x_{\mathrm{U}}x}=\nabla T\cdot\frac{x_{\mathrm{U}}x}{|x_{\mathrm{U}}x|}=T_x a_{21}+T_y a_{22} \tag{8}$$

여기서 T_{x_1}과 T_{x_2}는 T의 $x_1,\ x_2$성분의 편도함수이고

$$a_{11}=\frac{(x_1-x_{\mathrm{LU}1})}{|x_{\mathrm{LU}}x|},\ \ a_{12}=\frac{(x_2-x_{\mathrm{LU}2})}{|x_{\mathrm{LU}}x|}$$

$$a_{21}=\frac{(x_{\mathrm{U}1}-x_{\mathrm{LU}1})}{|x_{\mathrm{U}}x|},\ \ a_{22}=\frac{(x_{\mathrm{U}2}-x_{\mathrm{LU}2})}{|x_{\mathrm{U}}x|}$$

이며 $|x_{\mathrm{LU}}x|$와 $|x_{\mathrm{U}}x|$는 유클리드거리이다.

행렬표시로 다시 쓰면 식 (7), (8)은 $D=A\nabla T$로 된다. 여기서 $D=(D_{x_{\mathrm{LU}}x},\ D_{x_{\mathrm{U}}x})^{\mathrm{T}}$이고

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}.$$

결국 다음의 방정식이 성립된다.

$$(aT_{i,\ j}+b)^2+(cT_{i,\ j}+d)^2-\frac{(1-(v_1)_{i,\ j}(aT_{i,\ j}+b)-(v_2)_{i,\ j}(cT_{i,\ j}+d))^2}{F_{i,\ j}^2}=0$$

(증명끝)

우의 계차방정식은 앞으로 특성곡선에 의한 한가지 고속전진법을 제기하는데 효과적으로 리용되게 된다.

참 고 문 헌

[1] J. N. Tsitsiklis; IEEE Trans. Automatic Control, 40, 1528, 1995.

[2] J. A. Sethian et al.; SIAM J. Numer. Anal., 41, 1, 323, 2003.

[3] J. Zhu et al.; Commun. Comput. Phys., 15, 4, 959, 2014.

주체106(2017)년 3월 5일 원고접수

A Numerical Method of the Optimal Control Problem on Outside Flow Field

Ro Un Ju

We have derived the Hamilton-Jacobi equation concerned with the optimal trajectory problem on outside flow field. And we proposed a numerical method of the anisotropic Hamilton-Jacobi equation.

Our numerical method will be played an important role to propose the effective and new characteristic fast marching method for the numerical solution of a class of Hamilton-Jacobi equations including anisotropic Hamilton-Jacobi equations.

Key words: outside flow field, optimal control problem