김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제4호

일반화된 리만－류빌분수계미분방정식에 대한 적분경계값문제풀이의 존재성

리영도, 박은철

지금까지 여러가지 형태의 분수계도함수의 정의가 나왔으나 가장 대표적인 정의는 리만－류빌과 캐푸토의미의 도함수이다.

선행연구[2, 4]에서는 일반화된 리만－류빌분수계미분방정식에 대한 초기값문제의 풀이의 존재성과 안정성을 연구하였으며 선행연구[3]에서는 여러점경계값문제의 풀이의 존재성을 밝혔다.

론문에서는 쉐퍼부동점정리와 바나흐축소원리를 리용하여 공명이 아닌 경우 일반화된 리만－류빌분수계미분방정식에 대한 적분경계값문제의 풀이의 존재성에 대하여 연구하였다.

우리는 다음과 같은 적분경계값문제의 풀이의 존재성에 대하여 고찰하려고 한다.

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha,\,\beta}x(t)=f(t,\ x(t),\ D_{0+}^{\alpha_0,\,\beta}x(t)),\ t\in(0,\ T]=:J\setminus\{0\} \\ I_{0+}^{1-\gamma}x(0)=\int_0^T g(s)x(s)ds \end{cases} \tag{1}$$

여기서 $D_{0+}^{\alpha,\,\beta}x(t)$ 는 α 계 β 형 일반화된 리만－류빌분수계도함수, $0<\alpha_0<\alpha<1,\ 0\le\beta\le1$, $\gamma=\alpha+\beta-\alpha\beta$, $\gamma_0=\alpha_0+\beta-\alpha_0\beta$, $\gamma_1=\beta(1-\alpha_0)+\gamma-\gamma_0$, $g\in C[J,\ \mathbf{R}_+]$, $f:J\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 는 $x\in C_{1-\gamma}[J,\ \mathbf{R}]$, $y\in C_{1-\gamma_1}[J,\ \mathbf{R}]$ 에 대하여 $f(\cdot,\ x(\cdot),\ y(\cdot))\in C_{1-\gamma}[J,\ \mathbf{R}]$ 인 함수이고 $\int_0^T g(s)s^{\gamma-1}ds\ne\Gamma(\gamma)$ 이다.

정의 1[5] 함수 f 의 α 계 β 형 왼쪽일반화된 리만－류빌분수계도함수는 다음과 같이 정의된다.

$$D_{0+}^{\alpha,\,\beta}f(t):=(I_{0+}^{\beta(1-\alpha)}D(I_{0+}^{(1-\beta)(1-\alpha)}f))(t)\ \ (0<\alpha<1,\ 0\le\beta\le1)$$

여기서 $D:=d/dt$ 이다.

정의 2[1] $0\le\gamma<1$ 일 때 구간 J 에서 무게붙은 련속함수공간은 다음과 같이 정의된다.

$$C_\gamma[J,\ \mathbf{R}]:=\{f:J\to\mathbf{R}\,|\,t^\gamma f(t)\in C[J,\ \mathbf{R}]\},\ C_{1-\gamma}^{\gamma}[J,\ \mathbf{R}]:=\{f\in C_{1-\gamma}[J,\ \mathbf{R}]\,|\,D^\gamma f\in C_{1-\gamma}[J,\ \mathbf{R}]\}$$

그러면 $C_\gamma[J,\ \mathbf{R}]$ 는 노름 $\|f\|_{C_\gamma}=\|t^\gamma f\|_C$ 에 관하여 바나흐공간으로 된다.

보조정리 1[3] $\alpha>0,\ \beta>0$ 이면 다음의 식이 성립한다.

$$(I_{0+}^{\alpha}s^{\beta-1})(t)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}t^{\beta+\alpha-1},\ (D_{0+}^{\alpha}s^{\alpha-1})(t)=0\ \ (0<\alpha<1)$$

보조정리 2[3] $\alpha>0,\ \beta>0$ 이고 $t\in[0,\ T]$ 일 때 $f\in L^1(J)$ 이면

$$(I_{0+}^{\alpha}I_{0+}^{\beta}f)(t)=(I_{0+}^{\alpha+\beta}f)(t),\ (D_{0+}^{\alpha}I_{0+}^{\alpha}f)(t)=f(t)$$

가 성립한다. 특히 $f\in C_\gamma[J,\ \mathbf{R}]$ 또는 $f\in C[J,\ \mathbf{R}]$이면 우의 등식들은 각각 $t\in(0,\ T]$ 또는 $t\in[0,\ T]$에서 성립한다.

보조정리 3[3] $0<\alpha<1,\ 0\le\gamma<1$이라고 하자. 만일 $f\in C_\gamma[J,\ \mathbf{R}]$이고 $I_{0+}^{1-\alpha}f\in C_\gamma^1[J,\ \mathbf{R}]$이면 $I_{0+}^\alpha D_{0+}^\alpha f(t)=f(t)-\dfrac{I_{0+}^{1-\alpha}f(0)}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}$ $(t\in J)$이 성립한다.

보조정리 4[3] $0\le\gamma<1$이고 $f\in C_\gamma[J,\ \mathbf{R}]$이면 $I_{0+}^{1-\alpha}f(0):=\lim\limits_{t\to0^+}I_{0+}^{1-\alpha}f(t)=0$ $(0\le\gamma<\alpha)$이 성립한다.

보조정리 5[3] $\alpha>0,\ \beta>0$이고 $\gamma=\alpha+\beta-\alpha\beta$일 때 $f\in C_{1-\gamma}^\gamma[J,\ \mathbf{R}]$이면

$$I_{0+}^\gamma D_{0+}^\gamma f=I_{0+}^\alpha D_{0+}^{\alpha,\,\beta}f,\ D_{0+}^\gamma I_{0+}^\alpha f=D_{0+}^{\beta(1-\alpha)}f$$

가 성립한다.

보조정리 6[3] $f\in L^1(J)$, $D_{0+}^{\beta(1-\alpha)}f\in L^1(J)$이면 $D_{0+}^{\alpha,\beta}I_{0+}^\alpha f=I_{0+}^{\beta(1-\alpha)}D_{0+}^{\beta(1-\alpha)}f$가 성립한다.

보조정리 7(쉐퍼부동점정리)[5] E를 바나흐공간, $T:E\to E$를 완전련속연산자, $V:=\{u\in E\,|\,u=\delta(Tu),\ 0<\delta<1\}$이 유계모임이라고 하면 T는 E에서 부동점을 가진다.

정리 1 $x\in C_{1-\gamma}^\gamma[J,\ \mathbf{R}]$를 문제 (1)의 풀이라고 할 때 $D_{0+}^{\alpha,\,\beta}x(t)=u(t)$에 의해 규정되는 $u\in C_{1-\gamma}[J,\ \mathbf{R}]$는 적분방정식

$$u(t)=f\left(t,\ Zt^{\gamma-1}\int_0^T g(s)I_{0+}^\alpha u(s)ds+I_{0+}^\alpha u(t),\ Z\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma_1)}t^{\gamma-1}\int_0^T g(s)I_{0+}^\alpha u(s)ds+I_{0+}^{\alpha-\alpha_0}u(t)\right)\quad(2)$$

를 만족시킨다. 거꾸로 방정식 (2)를 만족시키는 $u\in C_{1-\gamma}[J,\ \mathbf{R}]$에 대하여

$$x(t)=Zt^{\gamma-1}\int_0^T g(s)I_{0+}^\alpha u(s)ds+I_{0+}^\alpha u(t)\quad\left(Z=1\Big/\left[\Gamma(\gamma)-\int_0^T g(s)s^{\gamma-1}ds\right]\right)\quad(3)$$

는 문제 (1)의 풀이이다.

정리 2 다음의 가정들을 만족시킨다고 하자.

가정 1 함수 $x\mapsto f(t,\ x,\ y),\ y\mapsto f(t,\ x,\ y)$가 임의의 $t\in J$와 $x\in C_{1-\gamma}[J,\ \mathbf{R}]$, $y\in C_{1-\gamma_1}[J,\ \mathbf{R}]$에 대하여 $C_{1-\gamma}[J,\ \mathbf{R}]$에서 련속이다.

가정 2 적당한 상수 $L,\ M,\ N>0$이 있어서 임의의 $t_1,\ t_2\in J$와 $x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2\in\mathbf{R}$에 대하여 $|t_1^{1-\gamma}f(t_1,\ t_1^{\gamma-1}x_1,\ t_1^{\gamma_1-1}y_1)-t_2^{1-\gamma}f(t_2,\ t_2^{\gamma-1}x_2,\ t_2^{\gamma_1-1}y_2)|\le L|t_1-t_2|+M|x_1-x_2|+N|y_1-y_2|$가 성립한다.

가정 3 $\lim\limits_{t\to0}t^{1-\gamma}f(t,\ x,\ y)=0$ $(x,\ y\in\mathbf{R})$이 성립한다.

가정 4 $Z_*<1$이 성립한다. 여기서

$$Z_*=M\frac{1}{\Gamma(\alpha)}B(\gamma,\ \alpha)\left(|Z|g_*\frac{T^{\alpha+\gamma}}{\alpha+\gamma}+T^\alpha\right)+$$
$$+N\left(|Z|\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma_1)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}B(\gamma,\ \alpha)g_*\frac{T^{\alpha+\gamma}}{\alpha+\gamma}+\frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha_0)}B(\gamma,\ \alpha-\alpha_0)T^{\alpha-\alpha_0}\right)$$

이때 $g_* = \max_{t \in J} |g(t)|$이다. 그러면 문제 (1)은 적어도 하나의 풀이를 가진다.

정리 3 다음의 가정들을 만족시킨다고 하자.

가정 5 함수 $f: J \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 는 임의의 $x, y \in C_{1-\gamma}[J, \mathbf{R}]$ 에 대하여 $x \to f(t, x, y)$, $y \to f(t, x, y) \in C_{1-\gamma}[J, \mathbf{R}]$라고 할 때 적당한 상수 $P, Q > 0$이 있어서

$$|f(t, u_1, t^{\gamma_1 - \gamma} v_1) - f(t, u_2, t^{\gamma_1 - \gamma} v_2)| \le P|u_1 - u_2| + Q|v_1 - v_2| \ (u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbf{R})$$

가 성립한다.

가정 6 $P\dfrac{B(\gamma, \alpha)}{\Gamma(\alpha)}\left(g_* \dfrac{T^{\alpha+\gamma}}{\alpha+\gamma} + T^{\alpha+\gamma-1}\right) + Q\left(Z\dfrac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma_1)}\dfrac{B(\gamma, \alpha)}{\Gamma(\alpha)} g_* \dfrac{T^{\alpha+\gamma}}{\alpha+\gamma} + \dfrac{B(\gamma, \alpha-\alpha_0)}{\Gamma(\alpha-\alpha_0)} T^{\alpha}\right) < 1$

이 성립하면 문제 (1)은 유일한 풀이를 가진다.

실례 다음의 일반화된 리만－류빌분수계미분방정식에 대한 적분경계값문제를 고찰하자.

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha, \beta} x(t) = [\sin(t^{1-\gamma} x(t) + t^{1-\gamma_1} D_{0+}^{\alpha_0, \beta} x(t))]/(5t^{1-\gamma}) \ (t \in (0, 1]) \\ I_{0+}^{1-\gamma} x(0) = \int_0^1 g(s)x(s)ds \end{cases} \tag{4}$$

여기서 $\alpha = 1/2, \beta = 1/2, \gamma = 3/4$ 이고 $g(t) = t^2$ 이며 $\alpha_0 = 1/3, \gamma_0 = 2/3, \gamma_1 = 5/12$ 이다.

$f(t, x, y) = \sin(t^{1-\gamma} x + t^{1-\gamma_1} y)/t^{1-\gamma}$ 이므로 임의의 $t \in (0, 1]$과 임의의 $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbf{R}_+$ 에 대하여 가정 1－3을 만족시킨다는것을 쉽게 알수 있다. 또한 $M = 0.2, N = 0.2$ 이므로 $Z_* \approx 0.89 < 1$ 이다. 따라서 가정 4를 만족시킨다. 결국 식 (4)는 적어도 하나의 풀이를 가진다.

참 고 문 헌

[1] A. A. Kilbas et al.; Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, 147～238, 2006.

[2] D. Vivek et al.; Fract. Calc. Appl. Anal., 21, 4, 1120, 2018.

[3] D. Vivek et al.; Mediterr. J. Math., 15, 1, 2018.

[4] J. Wang et al.; Appl. Math. Comput., 266, 850, 2015.

[5] R. Hilfer, Application of Fractional Calculus in Physics, World Scientific, 82～157, 1999.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

The Existence of Solutions of Integral Boundary Value Problem for Generalized Riemman-Liouville Fractional Differential Equation

Ri Yong Do, Pak Un Chol

We study the existence of the solutions of the integral boundary value problems for the generalized Riemman-Liouville fractional differential equations at non-resonance.

We obtain an existence condition of the solutions for the integral boundary value problems using the Schaefer fixed point theorem. Finally, we illustrate our result with an example.

Key words: generalized Riemman-Liouville derivative, Schaefer fixed point theorem