김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제1호

M행렬에 대한 한가지 선행처리AOR법

황명근, 김경석

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《우리는 과학기술강국건설에 박차를 가하여 짧은 기간에 나라의 과학기술발전에서 새로운 비약을 이룩하며 과학으로 흥하는 시대를 열고 사회주의건설에서 혁명적전환을 가져와야 합니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 38페지)

론문에서는 선형련립방정식을 풀기 위한 한가지 선행처리AOR반복법을 연구하였다. 그리고 불퇴화 M 행렬에 대한 방법의 수렴성과 비교정리를 증명하였다.

1. 선행연구결과와 문제설정

선형련립방정식

$$Ax = b,\ A \in \mathbf{R}^{n\times n}\ \ (x,\ f \in \mathbf{R}^n) \tag{1}$$

의 풀이를 구하는 문제를 고찰하자. 선형대수련립방정식을 풀기 위한 반복법들의 수렴속도를 높이기 위하여 많은 선행처리방법들이 연구되였다.[1－4]

선행연구[3]에서는 선행처리기 $P_{\alpha\beta}$ 를 제기하고 기본반복법들을 포괄하는 반복법인 AOR법에 적용하였다. 여기서 $\alpha,\ \beta$ 는 상수들이고 행렬 $P_{\alpha\beta}$ 는 다음과 같다.

$$P_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ 0 & & & 1 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ -a_{n1}\alpha - \beta & & & & & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

선행연구[2]에서는 선행처리기 $P_1(\gamma\beta)$ 를 제기하고 AOR법에 적용하였다. 그리고 선행연구[3]의 선행처리AOR법보다 수렴속도가 개선된다는것을 밝혔다. 여기서

$$P_1(\gamma\beta) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ -\gamma_2 a_{21} - \beta_2 & 1 & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ -\gamma_i a_{i1} - \beta_i & & & 1 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ -\gamma_n a_{n1} - \beta_n & & & & & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

이고 $\gamma = [0,\ \gamma_2,\ \cdots,\ \gamma_i,\ \cdots,\ \gamma_n] \in \mathbf{R}^n,\ \gamma_i \ge 0\ \ (i = 2,\ \cdots,\ n),\ \beta_i\ \ (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 들은

$$0 \le \gamma_i \le 1,\ -\gamma_i a_{i1} + a_{i1} \le \beta_i \le -\gamma_i a_{i1}\ \ (i = 2,\ \cdots,\ n)$$

을 만족시키는 상수들이다. 선행연구[5]에서는 선형상보성문제에 대하여 다음의 선행처리기 P를 구성하고 선행처리SSOR알고리듬의 수렴성해석을 진행하였다. 여기서

$$P \equiv P(p_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & p_{1k_1} & \cdots & p_{1k_l} & \\ & \ddots & \vdots & & \vdots & \\ & & 1 & & p_{k_1k_l} & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & & p_{k_rk_1} & & 1 & \\ & & \vdots & & \vdots & \ddots \\ & & p_{k_nk_1} & & p_{k_nk_l} & & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

이고 $p_{ii} = 1$이며 원소 $p_{ik_m} (m \in \{1,\ 2,\ \cdots,\ l\} \equiv S,\ 1 \le l \le n$이고 l은 b의 정인 성분의 개수) 은 조건 $p_{ik_m} = -a_{ik} / a_{k_mk_m} \ge 0\ (i \ne k_m)$을 만족시키고 나머지는 모두 0이다.

선행처리기 (4)는 구성하기 쉽고 결수행렬의 l개 렬들을 리용하므로 선형대수련립방정식을 풀기 위한 선행처리AOR법의 수렴속도를 더욱 개선할수 있다. 특히 $a_{ii} = 1$이면 결수행렬의 원소들로 직접 선행처리기가 구성된다.

따라서 론문에서는 선행처리기

$$P \equiv P(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & a_{1k_1} & \cdots & a_{1k_l} & \\ & \ddots & \vdots & & \vdots & \\ & & 1 & & a_{k_1k_l} & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & & a_{k_rk_1} & & 1 & \\ & & \vdots & & \vdots & \ddots \\ & & a_{k_nk_1} & & a_{k_nk_l} & & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

을 리용한 선행처리AOR알고리듬을 제기하고 수렴성과 비교정리를 증명하고 수값실례를 주었다.

2. PAOR알고리듬과 비교정리

A가 단위대각선을 가진 불퇴화행렬이라고 가정하자. 행렬 A의 임의의 분리 $A = M - N$에 대하여 선형련립방정식 (1)의 풀이를 구하는 반복은

$$x^{i+1} = M^{-1}Nx^i + M^{-1}b\ \ (i = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

로 된다. 여기서 M은 불퇴화행렬이다. $A = I - L - U$로 분리된다고 하자. 여기서 $I,\ L,\ U$들은 각각 단위행렬과 엄격아래3각형행렬, 엄격웃3각형행렬이다. AOR반복법은

$$x^{(i+1)} = (I - rL)^{-1}[(1-\omega)I + (\omega - r)L + \omega U]x^{(i)} + (I - rL)^{-1}\omega b\ \ (i = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

로 정의된다.[2] 그것의 반복행렬은

$$L_{\gamma\omega} = (I - rL)^{-1}[(1-\omega)I + (\omega - r)L + \omega U] \tag{6}$$

이다. 여기서 $\omega,\ \gamma$들은 파라메터들이고 $\omega \ne 0$이다.

정의 1 [2] 불퇴화행렬 $A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n \times n}$에 대하여 $\forall i = j,\ a_{ij} \ge 0$이고 $\forall i \ne j,\ a_{ij} \le 0$이

면 A를 L행렬이라고 부른다. $i \neq j$일 때 $a_{ij} \leq 0$이고 $A^{-1} \geq 0$이면 A를 M행렬이라고 부른다. $n \geq 2$일 때 어떤 치환행렬 P에 의하여

$$PAP^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

로 표시될 때 $A = (a_{ij}) \in \mathbf{C}^{n \times n}$을 가약행렬, 이런 치환행렬이 없을 때 A를 기약행렬이라고 부른다. 여기서 $A_{11} \in \mathbf{C}^{n \times n}$, $A_{22} \in \mathbf{C}^{(n-1) \times (n-1)}$이다.

정의 2[2] 행렬 $A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n \times n}$에 대하여 $A = M - N$이고 M이 불퇴화일 때 $A = M - N$을 A의 하나의 분리라고 부르고 M이 불퇴화M행렬이고 $N \geq 0$일 때 A의 M분리라고 부른다.

$A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $b = (b_i) \in \mathbf{R}^n$인 문제 (1)에 대하여

$$\widetilde{A} = PA = (\widetilde{a}_{ij}),\ \widetilde{b} = Pb = (\widetilde{b}_i) \tag{7}$$

로 표시하자. 여기서 P는 식 (5)를 만족시킨다. 그러면

$$\widetilde{a}_{ij} = \begin{cases} a_{ij} + \sum\limits_{m \in S} a_{ik_m} a_{k_m j}, & i \notin \{k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_r\}\ (j \in \mathbf{N}) \\ a_{ij} + \sum\limits_{m \in S,\, i \notin k_m} a_{ik_m} a_{k_m j}, & i \in \{k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_r\}\ (j \in \mathbf{N}) \end{cases} \tag{8}$$

$$\widetilde{b}_i = \begin{cases} b_i + \sum\limits_{m \in S} a_{ik_m} b_{k_m}, & i \notin \{k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_r\}\ (j \in \mathbf{N}) \\ b_i + \sum\limits_{m \in S,\, i \notin k_m} a_{ik_m} b_{k_m}, & i \in \{k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_r\}\ (j \in \mathbf{N}) \end{cases} \tag{9}$$

가 성립한다. 이제

$$\widetilde{A} = \widetilde{D} - \widetilde{L} - \widetilde{U} \tag{10}$$

로 놓자. 여기서 $\widetilde{D}$, $\widetilde{L}$과 $\widetilde{U}$들은 각각 $\widetilde{A}$의 대각선행렬과 엄격아래 및 웃3각형행렬들이고

$$\begin{gathered} \widetilde{D} = I - D_1 - D_2,\ \widetilde{L} = L - P_2 - L_1 - L_2 \\ \widetilde{U} = U - P_1 - U_1 - U_2 + P_1 U,\ P = P_1 + P_2 + I \\ P_2 U = D_2 - U_2 - L_2,\ (P_1 + P_2)L = D_1 - U_1 - L_1 \end{gathered} \tag{11}$$

이다. 여기서 D_1, D_2들은 대각선행렬들이고 L_1, L_2, P_2들은 엄격아래3각형행렬들이며 U_1, U_2, P_1들은 엄격3각형행렬들이다. 그러면 PAOR(선행처리 AOR)방법의 반복행렬은 다음과 같이 정의된다.

$$L_{\gamma\omega}^{P} = (\widetilde{D} - r\widetilde{L})^{-1}[(1-\omega)\widetilde{D} + (\omega - r)\widetilde{L} + \omega\widetilde{U}] \tag{12}$$

식 (5)로부터 PA가 M행렬의 특성을 보존한다. 즉 $\widetilde{a}_{ij} \leq 0,\ i \neq j$ 또는 동등하게

$$a_{ij} + \sum_{m \in S} a_{ik_m} a_{k_m j} \leq 0,\ i \notin \{k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_r\}\ (i \neq j) \tag{13}$$

$$a_{ij} + \sum_{m \in S,\, i \notin k_m} a_{ik_m} a_{k_m j} \leq 0,\ i \in \{k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_r\}\ (i \neq j) \tag{14}$$

가 성립한다.

보조정리 1[5] $A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n \times n}$이 불퇴화$M$행렬이고 식 (5)가 성립한다고 하자. 식 (6)

에 의하여 주어진 P가 식 (13), (14)를 만족시킨다고 하자. 그러면 $\widetilde{A}=PA$는 불퇴화M 행렬이다.

보조정리 2[3] $A=M-N$이 행렬 A의 M 분리라고 하자. 그러면 $\rho(M^{-1}N)<1$이기 위해서는 A가 불퇴화M 행렬일것이 필요하고 충분하다.

식 (10)에서 분명히 다음식이 성립된다.

$$\widetilde{D}:=(d_{ii}),\ d_{ii}=\begin{cases}1+\sum\limits_{m\in S}a_{ik_m}a_{k_m i}>0, & i\notin\{k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_r\}\\ 1+\sum\limits_{m\in S,\, i\neq k_m}a_{ik_m}a_{k_m i}>0, & i\in\{k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_r\}\end{cases}$$

$$\widetilde{L}:=(l_{ij}),\ l_{ij}=\begin{cases}-a_{ij}-\sum\limits_{m\in S}a_{ik_m}a_{k_m j}, & i\notin\{k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_r\}\ (i>j)\\ -a_{ij}-\sum\limits_{m\in S,\, i\neq k_m}a_{ik_m}a_{k_m j}, & i\in\{k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_r\}\ (i>j)\\ 0, & \text{기타}\end{cases}$$

$$\widetilde{U}:=(u_{ij}),\ u_{ij}=\begin{cases}-a_{ij}-\sum\limits_{m\in S}a_{ik_m}a_{k_m j}, & i\notin\{k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_r\}\ (i<j)\\ -a_{ij}-\sum\limits_{m\in S,\, i\neq k_m}a_{ik_m}a_{k_m j}, & i\in\{k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_r\}\ (i<j)\\ 0, & \text{기타}\end{cases}$$

정리 1 $A=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n}$이 불퇴화$M$ 행렬이고 $0\le r<\omega\le 1$이라고 하자. 그러면 $\rho(L_{r,\,\omega})<1$일 때 $\rho(L_{r,\,\omega}^{P})<1$이 성립한다.

증명 L이 부아닌 엄격아래3각형행렬이고 $I-rL$이 불퇴화M 행렬이므로

$$A=\frac{1}{\omega}(I-rL)-\frac{1}{\omega}[(1-\omega)I+(\omega-r)L+\omega U]$$

는 M 분리이다. $\rho(L_{r,\,\omega})<1$이므로 A는 불퇴화M 행렬이다. 보조정리 1에 의하여 $\widetilde{A}$도 불퇴화M 행렬이다. $d_{ii}>0\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$이므로 $\widetilde{D}^{-1}\ge 0$이고 $I-rD_P^{-1}L_P$는 불퇴화M 행렬이다. 그러므로

$$\widetilde{M}=\frac{1}{\omega}(\widetilde{D}-r\widetilde{L})=\frac{1}{\omega}(I-r\widetilde{D}^{-1}\widetilde{L})$$

은 불퇴화M 행렬이다. 한편 다음식이 성립한다.

$$\widetilde{N}=\frac{1}{\omega}[(1-\omega)\widetilde{D}+(\omega-r)\widetilde{L}+\omega\widetilde{U}]\ge 0$$

따라서 $\widetilde{A}=\widetilde{M}-\widetilde{N}$은 M 분리이다. 보조정리 2에 의하여 $\rho(L_{r,\,\omega}^{P})<1$이 성립한다.(증명끝)

다음으로 새로운 PAOR법이 선행한 PAOR법들의 수렴성을 개선한다는것을 보여주는 비교정리를 고찰한다.

정리 2 $A=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n}$이 M 행렬이고 $0\le r<\omega\le 1$이라고 하자. 그러면

$$\rho(L_{r,\,\omega}^{P})\le\rho(L_{r,\,\omega}^{P1})<1\quad \text{또는}\quad \rho(L_{r,\,\omega}^{P})\ge\rho(L_{r,\,\omega}^{P1})>1$$

이 성립한다.

증명 먼저 A가 기약행렬이라고 하자. $\overline{A}=P1A=\overline{D}-\overline{L}-\overline{U}$, $\overline{b}=P1b$로 놓으면 $\overline{A}x=\overline{b}$의 반복행렬 $L_{r,\omega}^{P1}$은 기약불퇴화행렬이고 $L_{r,\omega}^{P1}\boldsymbol{x}=\overline{\lambda}\boldsymbol{x}$, $\overline{\lambda}=\rho(L_{r,\omega}^{P1})$인 정인 벡토르 $\boldsymbol{x}$가 존재하며 $L_{r,\omega}$의 표시식으로부터 다음의 동등한 방정식들을 얻는다.[2]

$$[(1-\omega-\lambda)I+(\omega-r+\lambda r)L+\omega U]\boldsymbol{x}=0 \tag{15}$$

$$(\lambda-1)(I-rL)\boldsymbol{x}=\omega(L+U-I)\boldsymbol{x} \tag{16}$$

식 (10)과 (11), (15), (16), (17)로부터 다음식을 얻는다.

$$\begin{aligned}L_{r,\omega}^{P}\boldsymbol{x}-\overline{\lambda}\boldsymbol{x}&=(\widetilde{D}-r\widetilde{L})^{-1}[(1-\omega)\widetilde{D}+(\omega-r)\widetilde{L}+\omega\widetilde{U}-\overline{\lambda}(\widetilde{D}-r\widetilde{L})]\boldsymbol{x}=\\&=(\widetilde{D}-r\widetilde{L})^{-1}[(1-\omega-\overline{\lambda})\widetilde{D}+(\omega-r-\overline{\lambda}r)\widetilde{L}+\omega\widetilde{U}]\boldsymbol{x}=\\&=(\widetilde{D}-r\widetilde{L})^{-1}(\overline{\lambda}-1)[(1-r)(D_1+D_2)+(1-r)P_2+P_1+r(P_2U+U_2)]\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

여기서 $(1-r)(D_1+D_2)+(1-r)P_2+P_1+r(P_2U+U_2)\geq 0$이다.

따라서 $\overline{\lambda}<1$이면 $L_{r,\omega}^{P}\boldsymbol{x}\leq\overline{\lambda}\boldsymbol{x}$이므로 $\rho(L_{r,\omega}^{P})\leq\rho(L_{r,\omega}^{P1})<1$이 성립한다.

한편 $\overline{\lambda}>1$이면 $L_{r,\omega}^{P}\boldsymbol{x}\geq\overline{\lambda}\boldsymbol{x}$이므로 $\rho(L_{r,\omega}^{P})\geq\rho(L_{r,\omega}^{P1})>1$이 성립한다.

다음으로 A가 가약행렬이라고 하자. 그러면 충분히 작은 $\varepsilon>0$에 대하여 행렬 $\widetilde{A}(\varepsilon)\equiv PA(\varepsilon)$은 기약 M행렬이다. 그러면

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\rho(L_{r,\omega}^{P}(\varepsilon))\leq\lim_{\varepsilon\to 0^+}\rho(L_{r,\omega}^{P1}(\varepsilon))=\rho(L_{r,\omega}^{P1})$$

이 성립한다. 따라서 기약인 경우의 증명과정을 리용하여 증명한다.(증명끝)

마지막으로 수값실례를 보자.

$$A=\begin{bmatrix}1&-0.1&-0.1&-0.2&-0.2&-0.1\\-0.3&1&-0.2&-0.1&-0.3&-0.2\\-0.2&-0.2&1&-0.5&-0.1&-0.1\\-0.1&-0.3&-0.1&1&-0.2&-0.1\\-0.2&-0.3&-0.2&-0.1&1&-0.1\\-0.3&-0.1&-0.1&-0.2&-0.1&1\end{bmatrix}$$

을 결수행렬로 가지는 선형련립방정식 $A\boldsymbol{x}=b$를 고찰한다. 선행처리기 $P1$과 P에 의한 선행처리련립방정식 $\overline{A}\boldsymbol{x}=\overline{b}$와 $\widetilde{A}\boldsymbol{x}=\widetilde{b}$에 대한 AOR법의 반복행렬을 각각 $L_{r\omega}^{P1}$, $L_{r\omega}^{P}$로 표시하자. 여기서

$$P1=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0.2&1&0&0&0&0\\0.3&0&1&0&0&0\\0.1&0&0&1&0&0\\0.2&0&0&0&1&0\\0.1&0&0&0&0&1\end{bmatrix},\ P=\begin{bmatrix}1&0&0.1&0.2&0.2&0\\0&1&0.2&0.1&0.3&0\\0&0&1&0.5&0.1&0\\0&0&0.1&1&0.2&0\\0&0&0.2&0.1&1&0\\0&0&0.1&0.2&0.1&1\end{bmatrix}$$

그러면 $\mathrm{cond}(A)=13.084\ 1$, $\mathrm{cond}(\overline{A})=10.844\ 3$, $\mathrm{cond}(\widetilde{A})=9.522\ 43$이다.

수값실험결과는 다음표와 같다.

표. 수값실험결과

r	0.1	0.4	0.8	0.5	0.1	0.3	0.1
ω	0.9	0.9	0.9	0.6	0.5	0.4	0.2
$\rho(L_{r\omega})$	0.901 60	0.885 44	0.852 04	0.919 14	0.954 32	0.951 74	0.978 13
$\rho(L_{r\omega}^{P1})$	0.868 28	0.842 72	0.784 38	0.887 74	0.926 82	0.934 37	0.970 72
$\rho(L_{r\omega}^{P})$	0.834 69	0.809 06	0.755 66	0.865 58	0.908 16	0.919 35	0.963 26

참 고 문 헌

[1] 황명근, 김경석; 수학, 232, 1, 54, 주체106(2017).

[2] C. Y. Liu, C. L. Li; East Asian J. Appl. Math., 2, 94, 2012.

[3] G. B. Wang, N. Zhang; J. Appl. Math., Comput., 37, 103, 2011.

[4] L. Wang, Y. Song; J. Comput. Appl. Math., 226, 114, 2009.

[5] P. F. Daiet et al.; J. Comput. Appl. Math., 317, 100, 2017.

주체107(2018)년 9월 8일 원고접수

A Preconditioned AOR Iterative Method for *M*-matrix

Hwang Myong Gun, Kim Kyong Sok

In this paper, we present a preconditioned AOR(PAOR) iterative method for solving the linear system $A\mathbf{x} = b$ and prove its convergence. Then we give a comparison theorem to show that the rate of convergence of the previous PAOR iterative method is faster than the rate of convergence of the previous PAOR iterative methods. Finally, we give a numerical example to illustrate our results.

Key words: precondition, AOR iterative method, comparison theorem