김일성종합대학학보 주체110(2021)년
수 학 제67권 제3호

융합프레임에 관하여 성긴표현을 가지는 신호의 개선된 평등회복조건

최철국, 조유성

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《기초과학을 끊임없이 심화발전시키지 않고서는 첨단과학기술을 연구도입할수도 없고 새로운 높은 수준의 과학기술을 연구개발할수도 없습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제22권 21페지)

우리는 최근시기 신호압축수감분야에서 활발히 연구되고있는 융합프레임에 관하여 성긴표현을 가지는 신호에 대한 평등회복에 대하여 연구하였다. 여기서 중요한 조건은 수감행렬이 만족시켜야 할 융합프레임에 관한 제한등거리넘기기성(FRIP)이다.

론문에서는 융합프레임에 관한 제한등거리넘기기상수에 대한 개선된 평가를 얻었다.

압축수감은 선행연구[1, 2]에 의하여 처음으로 연구되였는데 여기서 본질적인 가정은 신호의 성김성이다. 구체적으로 선형관측

$$y = Ax + e \tag{1}$$

로부터 차원수가 대단히 큰 성긴신호를 회복하는 문제이다.[1－5] 여기서 A는 $m \times n$형 수감행렬$(m << n)$이고 $e \in \mathbf{R}^m$은 관측오차를 모형화한 잡음항이다.

융합프레임은 고전적인 프레임이 전체적인 수감계를 효과적으로 표현하지 못할 때 리용할수 있는 새로운 개념이다. 융합프레임은 부분공간들의 프레임이라는 이름으로 선행연구[7]에서 처음으로 도입되였다. 프레임인 경우는 신호를 1차원공간으로만 사영하지만 융합프레임인 경우에는 신호를 다차원부분공간에로 사영한다. 많은 경우 신호들은 고전적인 성김성보다도 구조적인 성김성을 가진다는것을 알수 있다.

선행연구[7]에서는 표준압축수감문제를 융합프레임에 의하여 성긴표현을 가지는 신호에 대한 압축수감문제로 일반화하였다.

정의 1[7] $(W_i)_{i=1}^N$을 힐베르트공간 $\mathbf{R}^M$의 부분공간들의 족, $(v_i)_{i=1}^N$을 매 성분이 정인 무게벡토르라고 하자.

이때 상수 $0 < A \le B < \infty$가 존재하여

$$A \| x \|_2^2 \le \sum_{i=1}^N v_i^2 \| P_i(x) \|_2^2 \le B \| x \|_2^2,\ \forall x \in \mathbf{R}^M$$

이 성립하면 $(W_i,\ v_i)_{i=1}^N$을 $\mathbf{R}^M$의 융합프레임이라고 부른다. 여기서 $P_i(x)$는 부분공간 W_i우로의 직교사영연산자이다.

상수 $A,\ B$를 융합프레임한계라고 부른다. 보통 한계라고 할 때 최량한계로 생각한다.

$\mathbf{R}^M$의 융합프레임 $(W_j)_{j=1}^N$에 대하여 공간 $\boldsymbol{H}$를 다음과 같이 정의하자.

$$\boldsymbol{H} = \{\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_j)_{j=1}^N : \boldsymbol{x}_j \in W_j\ \ (\forall j = 1,\ 2,\ \cdots,\ N)\} \tag{2}$$

$(\boldsymbol{x}_j)_{j=1}^N \in \boldsymbol{H}$에 대하여 융합프레임에 관한 혼합 $l_{q,\,p}$－노름을 다음과 같이 정의한다.

$$\|(\boldsymbol{x}_j)_{j=1}^N\|_{q,\,p}=\left(\sum_{j=1}^N(\|\boldsymbol{x}_j\|_q)^p\right)^{1/p}$$

$\|\boldsymbol{x}\|_{q,\,0}=\#\{j:\boldsymbol{x}_j\neq 0\}$으로 정의되는 $l_{q,\,0}-$노름은 q에 무관계하므로 보통 $l_{2,\,0}-$노름으로 생각한다. $l_{q,\,0}-$노름은 노름공리를 만족시키지 않지만 편리상 노름표시를 쓴다.

정의 2[2, 8] $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_j)_{j=1}^N\in\boldsymbol{H}$에 대하여 $\|\boldsymbol{x}\|_{2,\,0}\le s$가 성립하면 $\boldsymbol{x}$는 융합흐레임에 관하여 $s-$성글다고 말한다.

$\boldsymbol{x}^0=(\boldsymbol{x}_j^0)_{j=1}^N\in\boldsymbol{H}$라고 하고 이 벡토르에 대한 관측 $\boldsymbol{y}$가 다음의 식으로 주어진다고 가정하자.

$$\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{y}_i)_{i=1}^m=\left(\sum_{j=1}^N a_{ij}\boldsymbol{x}_j^0\right)_{i=1}^m\in\boldsymbol{K} \tag{3}$$

여기서 $\boldsymbol{K}=\{(\boldsymbol{y}_i)_{i=1}^m:\boldsymbol{y}_i\in\mathbf{R}^M,\ \forall i\in[m]\}$이고 $[m]=\{1,\ 2,\ \cdots,\ m\}$이다.

식 (4)를 행렬형식으로 표시하면

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A_I}\boldsymbol{x}^0 \tag{4}$$

과 같이 쓸수 있다. 여기서 $\boldsymbol{A_I}=(a_{ij}\boldsymbol{I}_M)_{1\le i\le m,\,1\le j\le N}$인데 $\boldsymbol{I}_M$은 M차단위행렬을 표시한다.

먼저 최소화문제

$$(\hat{\boldsymbol{c}}_j)_j=\underset{\boldsymbol{c}_j\in\mathbf{R}^{m_j}}{\operatorname{argmin}}\|(\boldsymbol{U}_j\boldsymbol{c}_j)_{j=1}^N\|_{2,\,1}\ \ \text{제한조건}\ \ \boldsymbol{A_P}(\boldsymbol{U}_j\boldsymbol{c}_j)_j=\boldsymbol{y} \tag{5}$$

를 풀어서 $(\hat{\boldsymbol{c}}_j)_j$를 구하고 $\boldsymbol{x}$의 근사풀이 $\hat{\boldsymbol{x}}=(\boldsymbol{U}_j\hat{\boldsymbol{c}}_j)_{j=1}^N$을 구한다. 여기서 $\boldsymbol{U}_j$는 융합흐레임을 이루는 부분공간 W_j의 표준직교토대를 렬벡토르로 하는 행렬이다.

행렬 $\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{U}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{U}_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \boldsymbol{U}_N\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^{MN\times\Sigma m_j}$를 도입하고 $\|\boldsymbol{U}_j\boldsymbol{c}_j\|_2=\|\boldsymbol{c}_j\|_2,\ \forall j\in[N]$을 리용하면 $\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{c}_j)_{j=1}^N$에 대하여 문제 (5)는

$$\hat{\boldsymbol{c}}=\underset{\boldsymbol{c}\in\mathbf{R}^{\Sigma m_j}}{\operatorname{argmin}}\|\boldsymbol{c}\|_{2,\,1}\ \ \text{제한조건}\ \ \boldsymbol{A_P}\boldsymbol{U}\boldsymbol{c}=\boldsymbol{y}$$

와 동등하다.

정의 3[6, 8] $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{m\times N}$이고 $(W_j)_{j=1}^N$을 $\mathbf{R}^M$의 융합흐레임, $\boldsymbol{A_P}$를 우에서 정의한 블로크행렬이라고 하자. 적당한 상수 $1>\delta>0$이 있어서 $\boldsymbol{z}=(z_i)_{i=1}^N\in\boldsymbol{H},\ \|\boldsymbol{z}\|_{2,\,0}\le s$를 만족시키는 모든 $\boldsymbol{z}$에 대하여

$$(1-\delta)\|\boldsymbol{z}\|_{2,\,2}^2\le\|\boldsymbol{A_P}\boldsymbol{z}\|_{2,\,2}^2\le(1+\delta)\|\boldsymbol{z}\|_{2,\,2}^2$$

이 성립하면 행렬 $\boldsymbol{A}$는 FRIP를 만족시킨다고 말한다. 그리고 이때 가장 작은 δ를 δ_s로 표시하고 행렬 $\boldsymbol{A}$의 차수 s인 FRIP상수라고 부른다. s가 자연수가 아닐 때에는 δ_s를 $\delta_{\lceil s\rceil}$로 정의한다.

선행연구[2]에서는 $\alpha-$부분가우스행렬 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{m\times N}$에 대하여

$$m\ge C\alpha^4\delta^{-2}\max\{(\log^2(s)+\lambda s)+(k+\log(N)),\ \log(\varepsilon^{-1})\} \tag{6}$$

이 성립하면 $1-\varepsilon$ 이상의 확률로 $\frac{1}{\sqrt{m}}\boldsymbol{A}$의 FRIP상수가 $\delta_s\le\delta$를 만족한다는것을 밝혔다.

관측잡음이 있는 경우 융합흐레임에 관하여 성긴표현을 가지는 신호의 회복을 위한 토대추적문제는 다음과 같이 정식화할수 있다.

$$\hat{\boldsymbol{c}}=\underset{\boldsymbol{c}\in\mathbf{R}^{\Sigma m_j}}{\operatorname{argmin}}\|\boldsymbol{c}\|_{2,1}\ \ \text{제한조건}\ \ \|\boldsymbol{A_P}\boldsymbol{U}\boldsymbol{c}-\boldsymbol{y}\|_{2,2}\le\eta \tag{7}$$

정리 1[2] $(W_j)_{j=1}^N$을 $\mathbf{R}^M$의 융합흐레임이라고 하고 수감행렬 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{m\times N}$이 $\delta_{2s}<\sqrt{2}-1$을 가지고 FRIP를 만족시킨다고 하자. 그리고 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{H}$에 대하여

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A_P}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e},\ \|\boldsymbol{e}\|_{2,2}\le\varepsilon$$

이라고 하자.

이때 식 (7)의 풀이 $\hat{\boldsymbol{c}}$로부터 얻어지는 $\hat{\boldsymbol{x}}$은

$$\|\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}\|_{2,2}\le C_1\varepsilon+C_2\frac{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{[s]}\|_{2,1}}{\sqrt{s}}$$

을 만족시킨다. 여기서 $C_1,\ C_2$는 FRIP상수 δ_{2s}에만 의존하는 상수, $\boldsymbol{x}_{[s]}$는 $(\boldsymbol{x}_j)_{j=1}^N$에서 $\|\boldsymbol{x}_j\|_2$이 제일 큰 s개의 성분만 취하고 나머지는 령벡토르로 놓아서 얻은 벡토르를 의미한다.

표준압축수감인 경우 성긴신호들의 평등회복을 위한 충분조건으로서 선행연구[6]에서 $\delta_{2s}<1/\sqrt{2}$이 연구되였다. 이것은 표준압축수감에서 최량인 결과이다. 선행연구[2]에서는 융합흐레임에 기초한 관측모형을 설정하고 FRIP상수에 기초하여 토대추적문제를 론의하였다. 여기서는 FRIP상수가 $\delta_{2s}<\sqrt{2}-1$인 경우에 식 (7)로부터 융합흐레임에 관한 모든 $s-$성긴벡토르들을 안정하게 회복할수 있다는것을 보았다.

론문에서는 선행한 조건들보다 더 개선된 수감행렬이 만족시켜야 할 FRIP상수에 관한 조건을 찾는다.

보조정리 1[6] $\alpha>0$과 자연수 s에 대하여 모임 $T(\alpha,\ s)\subset\mathbf{R}^{\sum m_j}$를 다음과 같이 정의하자.

$$T(\alpha,\ s)=\{\boldsymbol{v}\in\mathbf{R}^{\sum m_j}:\|\boldsymbol{v}\|_{2,\infty}\le\alpha,\ \|\boldsymbol{v}\|_{2,1}\le s\alpha\}$$

그리고 $\boldsymbol{v}\in\mathbf{R}^{\sum m_j}$에 대하여 성긴벡토르들의 모임 $U(\alpha,\ s,\ \boldsymbol{v})\subset\mathbf{R}^{\sum m_j}$를 다음과 같이 정의한다.

$$U(\alpha,\ s,\ \boldsymbol{v})=\{\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^{\sum m_j}:\operatorname{supp}(\boldsymbol{u})\subseteq\operatorname{supp}(\boldsymbol{v}),\ \|\boldsymbol{u}\|_{2,0}\le s,\ \|\boldsymbol{u}\|_{2,1}=\|\boldsymbol{v}\|_{2,1}\|\boldsymbol{v}\|_{2,\infty}\le\alpha\}$$

그러면 임의의 벡토르 $\boldsymbol{v}\in T(\alpha,\ s)$는 $\boldsymbol{v}=\sum_{i=1}^L\lambda_i\boldsymbol{u}_i$로 표시된다. 여기서 $\boldsymbol{u}_i\in U(\alpha,\ s,\ \boldsymbol{v})$이고 $0\le\lambda_i\le1,\ \sum_{i=1}^L\lambda_i=1$이다.

보조정리 2[6] $n\ge s$라고 하자. 이때

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0,\ \sum_{i=1}^{s} a_i \geq \sum_{i=s+1}^{n} a_i$$

이면 임의의 $\alpha \geq 1$에 대하여

$$\sum_{i=s+1}^{n} a_i^{\alpha} \leq \sum_{i=1}^{s} a_i^{\alpha}$$

이 성립한다. 보다 일반적으로

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0,\ \lambda \geq 0,\ \sum_{i=1}^{s} a_i + \lambda \geq \sum_{i=s+1}^{n} a_i$$

이면 임의의 $\alpha \geq 1$에 대하여

$$\sum_{i=s+1}^{n} a_i^{\alpha} \leq s\left(\sqrt[\alpha]{\frac{\sum_{i=1}^{s} a_i^{\alpha}}{s}} + \frac{\lambda}{s}\right) \tag{8}$$

가 성립한다.

정리 2 $(W_j)_{j=1}^N$을 $\mathbf{R}^M$의 융합흐레임이라고 하고 수감행렬 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^{m \times N}$이 $\delta_{ts} < \sqrt{\frac{t-1}{t}}$, $(t > 1)$로 FRIP를 만족시킨다고 하자. 그리고 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{H}$에 대하여 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A_P x} + \boldsymbol{e},\ \| \boldsymbol{e} \|_{2,\,2} \leq \varepsilon$이라고 하자. 이때 식 (7)의 풀이 $\hat{\boldsymbol{c}}$로부터 얻어지는 $\hat{\boldsymbol{x}}$은

$$\| \boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}} \|_{2,\,2} \leq C_1 \varepsilon + C_2 \frac{\| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{[s]} \|_{2,\,1}}{\sqrt{s}}$$

을 만족시킨다. 여기서 $C_1,\ C_2$는 FRIP상수 δ_{ts}와 t에만 의존하는 상수, $\boldsymbol{x}_{[s]}$는 $(\boldsymbol{x}_j)_{j=1}^N$에서 $\| \boldsymbol{x}_j \|_2$이 제일 큰 s개의 성분만 취하고 나머지는 령벡토르로 놓아서 얻은 벡토르를 의미한다.

주의 1 융합흐레임을 이루는 모든 부분공간들의 차원수가 1인 경우 정리 2는 표준압축수감인 경우의 정리 1과 일치한다.

주의 2 우의 정리 2로부터 $\boldsymbol{x}$가 융합흐레임에 관한 $s-$성긴신호이면 안정하게 회복된다는것을 알수 있으며 또한 $\varepsilon = 0$이고 $\boldsymbol{x}$가 융합흐레임에 관한 $s-$성긴신호이면 정확하게 회복된다는것을 알수 있다.

참 고 문 헌

[1] D. L. Donoho; IEEE Trans. Inform. Theory, 52, 4, 1289, 2006.
[2] U. Ayaz et al.; Appl. Comput. Harmon. Anal., 41, 341, 2016.
[3] S. Foucart, H. Rauhut; A Mathematical Introduction to Compressive Sensing, Birkhauser, 120～185, 2013.
[4] T. T. Cai, A. Zhang; Appl. Comput. Harmon. Anal., 35, 74, 2013.
[5] E. J. Candès et al.; Comm. Pure Appl. Math. 59, 1207, 2006.
[6] T. T. Cai, A. Zhang; IEEE Trans. Inform. Theory, 60, 1, 122, 2014.

[7] P. Boufounos et al.; IEEE Trans. Inform. Theory, 57, 7, 4660, 2011.
[8] C. Wengu, G. Huanmin; arXiv: 1706.09615v1, 2017.

주체110(2021)년 3월 5일 원고접수

Uniform Recovery Condition for Signal with Fusion Sparse Representation

Choe Chol Guk, Jo Yu Song

We consider uniform recovery for signal with fusion sparse representation. The crucial condition on this problem is fusion restricted isometry property(FRIP) which the sensing matrix should satisfy.

In this paper, we establish sharp estimation of fusion restricted isometry constant for sensing matrix, yielding weaker conditions than previous work in the literature.

Keywords: compressed sensing, fusion frame