김일성종합대학학보 JOURNAL OF KIM IL SUNG UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체104(2015)년 제61권 제12호 Vol. 61 No. 12 JUCHE104(2015).

# 키르히호프행렬나무정리에 의한 완전다조그라프의 생성나무개수평가

우승식, 박영성

그라프에서의 생성나무개수평가문제는 콤퓨터과학에서의 프로그람설계, 생물학 등 여러 분야에서 리론실천적으로 수많이 제기되는 셈세기조합의 중요한 분야이다.

론문에서는 표식붙은 $m-$중완전다조그라프 $K^m_{n_1, n_2, \cdots, n_k}$ 의 생성나무개수를 평가한 다음 표식붙은 $m-$중결합그라프 $K^m_{p, q} \oplus G$ 의 생성나무개수를 평가하였다.

정점모임이 서로 비교차하는 그라프 $G_1 = (V_1, E_1)$ 과 $G_2 = (V_2, E_2)$ 에 대하여 정점모임은 $V_1 \cup V_2$ 이고 릉모임은 $E_1 \cup E_2 \cup E(V_1, V_2)$ 인 새로운 그라프를 $G_1$ 과 $G_2$ 의 결합그라프라고 부르고 $G = G_1 \oplus G_2$ 로 표시한다. 여기서 $E(V_1, V_2) = \{(i, j) | i \in V_1, j \in V_2\}$ 이다.

정점모임이 서로 비교차하는 $k$ 개의 그라프 $G_i = (V_i, E_i), i = 1, \cdots, k$ 를 정점개수가 각각 $|V_i| = n_i, i = 1, \cdots, k$ 이고 릉개수는 0인 그라프라고 하자.

이때 결합그라프 $G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_k$ 를 완전 $k$ 조그라프 혹은 완전다조그라프라고 부르고 $K_{n_1, n_2, \cdots, n_k}$ 로, 그라프 $G$ 의 두 정점 $u, v$ 사이의 릉의 개수를 정점쌍 $(u, v)$ 의 다중도 또는 릉 $(u, v)$ 의 다중도라고 부르고 $l_G(u, v)$ 로 표시한다.

두 정점 $u, v$ 사이에 릉이 있을 때 그 릉의 다중도가 1인 그라프를 단순그라프, 그렇지 않은 그라프를 다중그라프라고 부른다.

다중그라프로서 두 정점 $u, v$ 사이에 릉이 있으면 이 릉들의 다중도가 모두 $m$ 인 그라프를 $m-$다중그라프라고 부르고 $G^m$ 으로 표시한다. 또한 그라프 $G$ 의 정점 $v$ 에 이웃하고있는 릉의 개수를 이 정점의 차수라고 부르고 $d_G(v)$ 로 표시한다.

또한 $n-$ 정점다중그라프 $G$ 에 대하여 $a_{ij} := \begin{cases} 0, & i = j \\ l_G(v_i, v_j), & i \neq j \end{cases}$ 와 같은 $n$ 차행렬 $A(G) = (a_{ij})_{n, n}$ 을 $G$ 의 이웃행렬, $d_{ij} := \begin{cases} d_G(v_i), & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ 와 같은 $n$ 차행렬 $D(G) = (d_{ij})_{n, n}$ 을 $G$ 의 차수행렬이라고 부른다.

선행연구[1]에서는 임의의 $G$ 에 대하여 $n$ 차행렬 $L(G) = D(G) - A(G)$ (이 행렬을 키르히호프행렬이라고 부른다.)의 임의의 주대각선원소에 대한 여소행렬식은 서로 같으며 그 값은 $G$ 의 생성나무개수와 같다는것을 밝혔고 선행연구[2]에서는 $m \to \infty$ 일 때 완전두조그라프 $K_{m, n}$ 의 생성수림개수가 점근적으로 론의되였다.

선행연구[3]에서는 완전그라프, 선행연구[3, 5]에서는 완전두조그라프에서의 생성나무개수를 평가하였다.

선행연구[4, 6]에서는 완전3조그라프와 완전다조그라프에서의 생성나무개수를 1∶1넘기기에 의한 방법으로 평가하였다.

론문에서는 키르히호프행렬에 의한 행렬나무정리를 리용하여 표식붙은 완전다조그라프 $K_{n_1,\,n_2,\,\cdots,\,n_k}$ 의 생성나무개수를 평가하였다. 또한 이 수법을 리용하여 $m-$중결합그라프 $K^m_{p,\,q}\oplus G$ 의 생성나무개수를 평가하였다.

앞으로 표식붙은 그라프만을 론의하며 $G$ 의 생성나무개수를 $\upsilon(G)$ 로 표시한다.

## 1. $m-$중완전다조그라프 $K^m_{n_1,\,n_2,\,\cdots,\,n_k}$ 의 생성나무개수평가

먼저 정점모임은 $k$ 개의 비교차정점모임(정점분할모임)들의 합으로 되여있고 $i$ 번째 정점분할모임에 들어있는 정점개수는 $n_i$ 이며 총정점개수는 $n=n_1+n_2+\cdots+n_k$ 인 완전다조그라프로서 릉다중도가 $m$ 인 $K^m_{n_1,\,n_2,\,\cdots,\,n_k}$ 에서의 생성나무개수를 평가하자.

정리 1 $m-$중완전다조그라프 $K^m_{n_1,\,n_2,\,\cdots,\,n_k}$ 의 생성나무개수는 다음과 같다.

$$\upsilon(K^m_{n_1,\,n_2,\,\cdots,\,n_k})=n^{k-2}m^{n-1}\cdot\prod_{i=1}^{k}(n-n_i)^{n_i-1} \tag{1}$$

증명 $K^m_{n_1,\,n_2,\,\cdots,\,n_k}$ 의 정점들을 첫번째 정점분할모임에 들어있는 정점들로부터 $k$ 번째 정점분할모임에 들어있는 정점들순서로 번호화를 하면 이 그라프의 키르히호프행렬은

$$L=L(K^m_{n_1,\,n_2,\,\cdots,\,n_k})=\begin{bmatrix} M_1 & -m & \cdots & -m \\ -m & M_2 & \cdots & -m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -m & -m & \cdots & M_k \end{bmatrix}$$

와 같다. 여기서 $M_i$ 는 $n_i$ 차행렬로서 $M_i=\begin{bmatrix} m(n-n_i) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m(n-n_i) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m(n-n_i) \end{bmatrix},\ i=\overline{1,\ k}$.

이 행렬에서 첫번째 행과 첫번째 렬을 제거하여 얻어진 $(n-1)$ 차행렬을 $L_1$ 이라고 하면 $K^m_{n_1,\,n_2,\,\cdots,\,n_k}$ 의 생성나무개수 $\upsilon(K^m_{n_1,\,n_2,\,\cdots,\,n_k})$ 는 선행연구[1]에 의하여 $\det L_1$ 과 같다.

이 행렬식의 마지막행에 $n$ 차원행벡토르 $(0,\ 0,\cdots,\ 0,\ 1)$ 을, 마지막렬에 $n$ 차원렬벡토르 $(m,\ m,\ \cdots,\ m,\ 1)^{\mathrm{T}}$ 를 보충하여 얻어진 $n$ 차행렬식 $\det(L_2)$ 도 $\det(L_1)$ 과 같다. 즉

$$\upsilon(K^m_{n_1,\,n_2,\,\cdots,\,n_k})=\det(L_2)=\begin{vmatrix} M_1' & -m & \cdots & -m & m \\ -m & M_2 & \cdots & -m & m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -m & -m & \cdots & M_k & m \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

여기서 $M_1'$ 는 $M_1$ 에서 첫 행과 첫 렬을 제거한 $(n_1-1)$ 차소행렬이다.

이 행렬식의 마지막렬을 나머지 모든 렬들에 더하면

$$\upsilon(K^m_{n_1,\, n_2,\, \cdots,\, n_k}) = \det(L_2) = \begin{vmatrix} M_1'+m & 0 & \cdots & 0 & m \\ 0 & M_2+m & \cdots & 0 & m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_k+m & m \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

여기서 소행렬 $M_1'+m$ 은 $(n_1-1)$ 차행렬로서 다음과 같다.

$$M'+m = \begin{bmatrix} m(n-n_1+1) & m & \cdots & m \\ m & m(n-n_1+1) & \cdots & m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m & m & \cdots & m(n-n_1+1) \end{bmatrix}$$

그리고 소행렬 $M_i+m$ 은 $n_i$ 차행렬로서 다음과 같다.

$$M_i+m = \begin{bmatrix} m(n-n_i+1) & m & \cdots & m \\ m & m(n-n_i+1) & \cdots & m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m & m & \cdots & m(n-n_i+1) \end{bmatrix},\ i=\overline{2,\ k}$$

$M_1'+m$ 의 매 렬에 들어있는 원소들의 합은 $m(n-1)$, $M_i+m$ 의 매 렬에 들어있는 원소들의 합은 $mn$ 이므로 첫 $n_1-1$ 개의 행들에는 $-1/[m(n-1)]$ 을, 마지막행을 제외한 나머지 행들에는 $-1/(mn)$ 을 곱하여 마지막행에 더하면 다음과 같다.

$$\upsilon(K^m_{n_1,\, n_2,\, \cdots,\, n_k}) = \det(L_2) = \begin{vmatrix} M_1'+m & 0 & \cdots & 0 & m \\ 0 & M_2+m & \cdots & 0 & m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_k+m & m \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{vmatrix}$$

$$\alpha = 1-\frac{n_1-1}{n-1}-\frac{n_2}{n}-\cdots-\frac{n_k}{n} = \frac{n-n_1}{n(n-1)}$$

따라서 행렬식의 성질에 의하여 다음과 같다.

$$\upsilon(K^m_{n_1,\, n_2,\, \cdots,\, n_k}) = \det(L_2) = \det(M_1'+m)\cdot\det(M_2+m)\cdot\cdots\cdot\det(M_k+m)\cdot\alpha$$

이제 소행렬식 $\det(M_1'+m)\cdot\det(M_2+m)\cdot\cdots\cdot\det(M_k+m)$ 들을 계산하자.

소행렬 $M_1'+m$ 에 $n_1$ 차원행벡토르 $(m,\ m,\ \cdots,\ m,\ 1)$ 과 $n_1$ 차원렬벡토르 $(0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}$ 를 첨가한 행렬의 행렬식은 원래 행렬식과 같으므로 다음과 같다.

$$\det(M_1'+m) = \begin{vmatrix} m(n-n_1+1) & m & \cdots & m & 0 \\ m & m(n-n_1+1) & \cdots & m & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m & m & \cdots & m(n-n_1+1) & 0 \\ m & m & \cdots & m & 1 \end{vmatrix} = [m(n-n_1)]^{n_1-1}\cdot\beta_1$$

여기서 $\beta_1 = 1+(n_1-1)/(n-n_1) = (n-1)/(n-n_1)$ 이다.

마찬가지로 $M_i+m,\ i=2,\ \cdots,\ k$ 에 $n_i+1$차원행벡토르 $(m,\ m,\ \cdots,\ m,\ 1)$과 $n_i+1$차원렬벡토르 $(0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}$를 첨가한 행렬의 행렬식은 원래 행렬식과 같으므로

$$\det(M_i+m)=\begin{vmatrix} m(n-n_i+1) & m & \cdots & m & 0\\ m & m(n-n_i+1) & \cdots & m & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ m & m & \cdots & m(n-n_i+1) & 0\\ m & m & \cdots & m & 1\end{vmatrix}=[m(n-n_i)]^{n_i}\cdot\beta_i.$$

여기서 $\beta_i=1+n_i/(n-n_i)=n/(n-n_i),\ i=2,\ \cdots,\ k$ 이다.

따라서 $m-$중완전다조그라프 $K^m_{n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_k}$ 의 생성나무개수는

$$\begin{aligned}\upsilon(K^m_{n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_k})&=\det(L_2)=\det(M_1'+m)\cdot\det(M_2+m)\cdot\cdots\cdot\det(M_k+m)\cdot\alpha=\\&=[m(n-n_1)]^{n_1-1}\cdot\beta_1\cdot[m(n-n_2)]^{n_2}\cdot\beta_2\cdot\cdots\cdot[m(n-n_k)]^{n_k}\cdot\beta_k\cdot\alpha=\\&=[m(n-n_1)]^{n_1-1}\cdot\frac{n-1}{n-n_1}\cdot[m(n-n_2)]^{n_2}\cdot\frac{n}{n-n_2}\cdot\cdots\cdot[m(n-n_k)]^{n_k}\cdot\frac{n}{n-n_k}\cdot\frac{n-n_1}{n(n-1)}=\\&=n^{k-2}m^{n_1-1+n_2+\cdots+n_k}\cdot\prod_{i=1}^{k}(n-n_i)^{n_i-1}=n^{k-2}m^{n-1}\cdot\prod_{i=1}^{k}(n-n_i)^{n_i-1}\end{aligned}$$

과 같다.(증명끝)

따름 1 완전다조그라프 $K_{n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_k}$ 의 생성나무개수는 다음과 같다.

$$\upsilon(K_{n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_k})=n^{k-2}\cdot\prod_{i=1}^{k}(n-n_i)^{n_i-1}\tag{2}$$

따름 1로부터 완전두조그라프 $K_{p,\ q}$ 의 생성나무개수는 $n=p+q,\ n_1=p,\ \ n_2=q$ 이므로 $\upsilon(K_{p,\ q})=(p+q)^{2-2}\cdot p^{q-1}q^{p-1}=p^{q-1}q^{p-1}$ 이고 3조그라프 $K_{p,\ q,\ r}$ 의 생성나무개수는 $n=p+q+r,\ n_1=p,\ n_2=q,\ n_3=r$ 이므로

$$\upsilon(K_{p,\ q,\ r})=(p+q+r)(p+r)^{q-1}(q+r)^{p-1}(p+q)^{r-1}.$$

## 2. $K^m_{p,\ q}\oplus G$ 의 생성나무개수평가

여기서는 $m-$중완전두조그라프 $K^m_{p,\ q}$ 와 임의의 그라프 $G$ 와의 결합그라프의 생성나무개수에 대하여 평가한다.

정리 2 $G$를 $n$개의 정점을 가진 임의의 그라프라고 하자.

이때 이 그라프와 $m-$중완전두조그라프 $K^m_{p,\ q}$ 와의 결합그라프 $K^m_{p,\ q}\oplus G$ 의 생성나무개수는 다음과 같다.

$$\upsilon(K^m_{p,\ q}\oplus G)=(p+q)^{-1}(mp+n)^{q-1}(mq+n)^{p-1}(mp+mq+n)\det((p+q)I_n+L(G))\tag{3}$$

여기서 $I_n$은 $n$차단위행렬이고 $L(G)$는 $G$의 키르히호프행렬이다.

남은 행렬식의 첫 $n-1$개의 행들을 마지막행에 더하면 마지막행은 모든 원소들이 $p+q$이므로 이 행렬식은 수 $p+q$로 완제된다.

정리 3 $G=K_n$일 때 결합그라프 $K_{p,\,g}^m\oplus G$의 생성나무개수는 다음과 같다.

$$\upsilon(K_{p,\,q}^m\oplus G)=(p+q+n)^{n-1}(mp+n)^{q-1}(mq+n)^{p-1}(mp+mq+n)$$

또한 $G=K_n$일 때에는 $\det((p+q)I_n+L(G))=(p+q)(p+q+n)^{n-1}$이므로

$$\begin{aligned}\upsilon(K_{p,\,q}^m\oplus G)&=(p+q)^{-1}(mp+n)^{q-1}(mq+n)^{p-1}(mp+mq+n)\det((p+q)I_n+L(G))=\\&=(p+q)^{-1}(mp+n)^{q-1}(mq+n)^{p-1}(mp+mq+n)(p+q)(p+q+n)^{n-1}=\\&=(p+q+n)^{n-1}(mp+n)^{q-1}(mq+n)^{p-1}(mp+mq+n).\end{aligned}$$

따름 2 결합그라프 $K_n\oplus K_{p,\,g}$의 생성나무개수는 다음과 같다.

$$\upsilon(K_n\oplus K_{p,\,g})=(n+p+q)^n(n+p)^{q-1}(n+q)^{p-1}$$

## 참 고 문 헌

[1] N. Biggs; Algebraic Graph Theory, Cambridge University Press, 12～210, 1974.

[2] D. Stark; Discrete Mathematics, 313, 1256, 2013.

[3] M. Z. Abu-sbeih; Discrete Mathematics, 84, 205, 1990.

[4] O. Egecioglu et al.; J. of Combinatorial Theory, A 42, 15, 1986.

[5] J. Yinglie et al.; Auatralasian J. of Combinatorics, 28, 73, 2003.

[6] R. P. Lewis; Discrete Mathematics, 197, 537, 1999.

주체104(2015)년 8월 5일 원고접수

## Estimation for the Number of Generating Trees of the Complete Multipartite Graph by the Kirchhoff Matrix Tree Theorem

*U Sung Sik, Pak Yong Song*

We estimated the number of generating trees of the complete multipartite graph $K_{n_1,\,n_2,\,\cdots,\,n_k}$ and $m$-join graph $K_{p,\,q}^m\oplus G$ by using the matrix tree theorem based on the Kirchhoff matrix.

Key words: generating tree, complete multipartite graph