김일성종합대학학보 수 학

주체108(2019)년 제65권 제2호

리만다양체에서 한가지 형태의 반대칭접속족에 대하여

허 달 윤

론문에서는 리만기하학분야에서 최근에 연구되고있는 리만다양체에서 반대칭접속족의 한가지 새로운 형태를 제시하고 그 성질을 연구한다.

리만다양체에서 반대칭접속은 선행연구[4]에서 처음으로 도입되였고 선행연구[5]에서는 반대칭계량접속을, 선행연구[1, 2]에서는 특수한 형태의 반대칭비계량접속을, 선행연구[3]에서는 일정곡률을 가지는 반대칭비계량접속을 연구하였다.

선행연구결과에 기초하여 우리는 반대칭접속들로 된 접속족을 새롭게 제시하고 그것의 기하학적성질들을 연구한다.

선행연구[1, 3]에서 연구된 반대칭비계량접속들은 우리가 제기한 반대칭접속족의 특수한 형태들이며 선행연구[5]에서 연구된 반대칭계량접속도 론문에서 제시된 반대칭접속족의 한가지 특수한 형태이다.

리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 임의의 $X,\ Y\in T(M)$ 과 1－형식 π 에 대하여 $T(X,\ Y)=\pi(Y)X-\pi(X)Y$ 인 접속을 반대칭접속이라고 한다.[4]

리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 반대칭접속족 ∇ 는 $\forall X,\ Y\in T(M)$ 과 1－형식 π 에 대하여

$$\nabla_X Y=\overset{\circ}{\nabla}_X Y+\pi(Y)X+tg(X,\ Y) \tag{1}$$

로 표시된다. 이 접속들은 t 에 따르는 접속족으로 된다. 여기서 $\overset{\circ}{\nabla}$ 은 레비찌비따접속이고 $t\in\mathbf{R}$ 는 접속족을 표시하는 보조변수이다.

이 접속족은 다음의 식들을 만족시킨다.

$$\nabla_Z g(X,\ Y)=-(1+t)(\pi(X)g(Y,\ Z)+\pi(Y)g(Y,\ Z)),\ T(X,\ Y)=\pi(Y)X-\pi(X)Y \tag{2}$$

식 (1)의 국부표시는

$$\Gamma_{ij}^k=\{_{ij}^k\}+\pi_j\delta_i^k+tg_{ij}\pi^k \tag{3}$$

이다. 여기서 $\{_{ij}^k\}$ 는 레비찌비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$ 의 접속결수이고 π_i 는 1－형식 π 의 성분이다.

식 (2)의 국부표시는 다음과 같다.

$$\nabla_k g_{ij}=-(1+t)(\pi_i g_{jk}+\pi_j g_{ik}),\ T_{ij}^k=\pi_j\delta_i^k-\pi_i\delta_j^k \tag{4}$$

식 (4)는 $t=0$ 이면 $\nabla_k g_{ij}=-\pi_i g_{jk}-\pi_j g_{ik}$, $T_{ij}^k=\pi_j\delta_i^k-\pi_i\delta_j^k$ 로 표시되며 $t=1$ 이면 $\nabla_k g_{ij}=-2\pi_i g_{jk}-2\pi_j g_{ik}$, $T_{ij}^k=\pi_j\delta_i^k-\pi_i\delta_j^k$ 로, $t=-1$ 이면 $\nabla_k g_{ik}=0$, $T_{ij}^k=\pi_{j_i}{}^k-\pi_i\delta_j^k$ 로 표시된다.

반대칭접속족 ∇ 의 곡률텐소르는 식 (3)에 의하여

$$R_{ijk}^l=K_{ijk}^l+\delta_j^l\alpha_{ik}-\delta_i^l\alpha_{jk}+g_{jk}\beta_i^l-g_{ik}\beta_j^l \tag{5}$$

이다. 여기서 K_{ijk}^l 은 레비찌비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$ 에 관한 곡률텐소르이고

$$\alpha_{ik}=(\overset{\circ}{\nabla}_i\pi_k-\pi_i\pi_k-tg_{ik}\pi_p\pi^p),\quad \beta_{ik}=t(\overset{\circ}{\nabla}_i\pi_k+t\pi_i\pi_k)$$

∇에 대한 쌍대접속족 $\overset{*}{\nabla}$의 접속결수는 $\overset{*}{\Gamma}{}^k_{jk} = \{^k_{ij}\} - t\delta^k_i \pi_j - g_{ij}\pi^k$이고 곡률텐소르는

$$\overset{*}{R}{}^l_{ijk} = K^l_{ijk} + \delta^l_i \beta_{jk} - \delta^l_j \beta_{ik} + g_{ik}\alpha^l_j - g_{jk}\alpha^l_i \tag{6}$$

이며 ∇에 대한 호상접속족 $\overline{\nabla}$의 접속결수는 $\overline{\Gamma}{}^k_{jk} = \{^k_{ij}\} + \pi_i \delta^k_j + t g_{ij}\pi^k$이고 곡률텐소르는

$$\overline{R}{}^l_{ijk} = K^l_{ijk} + g_{jk}\beta^l_i - g_{ik}\beta^l_j + \delta^l_k \pi_{ij} \tag{7}$$

이다. 여기서 $\pi_{ij} = \overset{\circ}{\nabla}_i \pi_j - \overset{\circ}{\nabla}_j \pi_i$이다.

보조정리 1 리만다양체 $(M,\ g)$ $(\dim M > 2)$에서

$$C^l_{ijk} + \overset{*}{C}{}^l_{ijk} = 2\overset{\circ}{C}{}^l_{ijk} \tag{8}$$

은 접속변환 $\overset{\circ}{\nabla} \to \nabla\, ;\, \overset{\circ}{\nabla} \to \overset{*}{\nabla}$에 관하여 불변이다. 여기서 C^l_{ijk}, $\overset{*}{C}{}^l_{ijk}$, $\overset{\circ}{C}{}^l_{ijk}$ 은 각각 접속 $\nabla, \overset{*}{\nabla}, \overset{\circ}{\nabla}$에 관한 와일공형곡률텐소르로서 다음과 같다.

$$C^l_{ijk} = R^l_{ijk} - (\delta^k_i R_{jk} - \delta^l_j R_{ik} + g_{jk}R^l_i - g_{ik}R^l_j)/(n-2) - R(\delta^l_j g_{ik} - \delta^l_i g_{jk})/[(n-1)(n-2)]$$

$$\overset{*}{C}{}^l_{ijk} = \overset{*}{R}{}^l_{ijk} - (\delta^k_i \overset{*}{R}_{jk} - \delta^l_j \overset{*}{R}_{ik} + g_{jk}\overset{*}{R}{}^l_i - g_{ik}\overset{*}{R}{}^l_j)/(n-2) - \overset{*}{R}(\delta^l_j g_{ik} - \delta^l_i g_{jk})/[(n-1)(n-2)]$$

$$\overset{\circ}{C}{}^l_{ijk} = K^l_{ijk} - (\delta^k_i K_{jk} - \delta^l_j K_{ik} + g_{jk}K^l_i - g_{ik}K^l_j)/(n-2) - K(\delta^l_j g_{ik} - \delta^l_i g_{jk})/[(n-1)(n-2)]$$

증명 식 (5)와 (6)을 합하고 $a_{ik} = \alpha_{ik} - \beta_{ik}$라고 하면 다음과 같다.

$$R^l_{ijk} + \overset{*}{R}{}^l_{ijk} = 2K^l_{ijk} + \delta^l_j a_{ik} - \delta^l_i a_{jk} + g_{ik}a^l_j - g_{jk}a^l_i \tag{9}$$

이 식을 $i,\ l$에 관하여 축약하면

$$R_{jk} + \overset{*}{R}_{jk} = 2K_{jk} - (n-2)a_{jk} - g_{jk}a^i_i \tag{10}$$

이며 이 식의 량변에 g^{jk}을 곱하면 $R + \overset{*}{R} = 2K - 2(n-1)a^i_i$가 성립된다.

이로부터 $a^i_i = [2K - (R + \overset{*}{R})]/[2(n-1)]$이며 이 식을 식 (10)에 넣고 a_{jk}를 구하면

$$a_{jk} = [2K_{jk} - (R_{jk} + \overset{*}{R}_{jk}) - g_{jk}(K - R - \overset{*}{R})/(2(n-1))]/(n-2)$$

이다. 이 식을 식 (9)에 넣고 정돈하면 식 (8)이 얻어진다.(증명끝)

정리 1 리만다양체 $(M,\ g,\ \nabla)$에서 반대칭접속족 ∇가 령곡률을 가지면 리만다양체 $(M,\ g,\ \overset{\circ}{\nabla})$은 공형평탄이다.

증명 $R^l_{ijk} = 0$이면 $C^l_{ijk} = \overset{*}{C}{}^l_{ijk} = 0$이고 식 (8)과 (9)를 리용하면 $\overset{\circ}{C}{}^l_{ijk} = 0$이다.

따라서 $(M,\ g,\ \overset{\circ}{\nabla})$은 공형평탄이다.(증명끝)

보조정리 2 리만다양체 $(M,\ g)$에서 반대칭접속족 ∇에 대하여 텐소르

$$V^l_{ijk} = R^l_{ijk} - (\delta^l_i R_{jk} - \delta^l_j R_{ik} + g_{ik}R^l_j - g_{jk}R^l_i)/n$$

은 접속변환 $\nabla \to \overset{*}{\nabla}$에 관한 불변량이다.

증명 식 (5), (6)으로부터 $b_{ik}=\alpha_{ik}+\beta_{ik}$ 라고 하면 다음의 식이 얻어진다.

$$\overset{*}{R}{}^l_{ijk}=R^l_{ijk}+\delta^l_i b_{jk}-\delta^l_j b_{ik}+g_{ik}b^l_j-g_{jk}b^l_i \tag{11}$$

이 식을 i, l 에 관하여 축약하면 $\overset{*}{R}_{jk}=R_{jk}+nb_{jk}-g_{jk}b^i_i$ 가 성립된다.

이로부터 b_{jk} 를 구하면 $b_{jk}=(\overset{*}{R}_{jk}-R_{jk}+g_{jk}b^i_i)/n$ 이고 이 식을 식 (11)에 넣고 정돈하면서 $\overset{*}{V}{}^l_{ijk}=\overset{*}{R}{}^l_{ijk}-(\delta^l_i\overset{*}{R}_{jk}-\delta^l_j\overset{*}{R}_{ik}+g_{ik}\overset{*}{R}{}^l_j-g_{jk}\overset{*}{R}{}^l_i)/n$ 이라고 하면 $V^l_{ijk}=\overset{*}{V}{}^l_{ijk}$ 이다.(증명끝)

보조정리 2에 의하여 다음의 정리가 쉽게 증명된다.

정리 2 리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 반대칭접속족 ∇ 가 공액대칭이기 위해서는 ∇ 와 $\overset{*}{\nabla}$ 에 대한 릿찌텐소르들이 같을것이 필요하고 충분하다.

보조정리 3 리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 일반화된 와일사영곡률텐소르

$W^l_{ijk}=R^l_{ijk}-(\delta^l_iR_{jk}-\delta^l_jR_{ik})/(n-1)-[\delta^l_i(R_{jk}-R_{kj})-\delta^l_j(R_{ik}-R_{ki})+(n-1)\delta^l_k(R_{ij}-R_{ji})]/[(n-1)(n-3)]$

는 접속변환 $\nabla\to\overline{\nabla}$ 에 관한 불변량이다.

증명 식 (5)와 (7)로부터 다음의 식이 성립된다.

$$\overline{R}{}^l_{ijk}=R^l_{ijk}+\delta^l_i\alpha_{jk}-\delta^l_j\alpha_{ik}+\delta^l_k\pi_{ij} \tag{12}$$

이 식을 i, l 에 관해 축약하면

$$\overline{R}_{jk}=R_{jk}+(n-1)\alpha_{jk}-\pi_{jk} \tag{13}$$

가 성립되며 이 식을 빗대칭화하고 $\alpha_{jk}-\alpha_{kj}=\pi_{jk}$ 임을 리용하여 π_{jk} 를 구하면

$$\pi_{jk}=[(\overline{R}_{jk}-\overline{R}_{kj})-(R_{jk}-R_{kj})]/(n-3) \tag{14}$$

이 식을 식 (13)에 넣어 α_{jk} 를 구하면 다음과 같다.

$$\alpha_{jk}=[\overline{R}_{jk}-R_{jk}+[(\overline{R}_{jk}-\overline{R}_{kj})-(R_{jk}-R_{kj})]/(n-3)]/(n-1)$$

식 (14)와 이 식을 식 (12)에 넣고

$\overline{W}{}^l_{ijk}=\overline{R}{}^l_{ijk}-(\delta^l_i\overline{R}_{jk}-\delta^l_j\overline{R}_{ik})/(n-1)-[\delta^l_i(\overline{R}_{jk}-\overline{R}_{kj})-\delta^l_j(\overline{R}_{ik}-\overline{R}_{ki})+(n-1)\delta^l_k(\overline{R}_{ij}-\overline{R}_{ji})]/[(n-1)(n-3)]$

라고 하면 $W^l_{ijk}=\overline{W}{}^l_{ijk}$ 이다.(증명끝)

보조정리 3을 리용하면 다음의 정리가 쉽게 얻어진다.

정리 3 리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 반대칭접속족 ∇ 와 호상접속 $\overline{\nabla}$ 가 등곡률이기 위해서는 대응하는 릿찌곡률텐소르가 같을것이 필요하고 충분하다.

정리 4(반대칭접속족에 관한 슈르의 정리) 련결인 리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 반대칭접속족 ∇ 에 대하여 임의의 점 P 에서의 자름면곡률이 2차원방향 E (T_PM 의 임의의 2차원부분공간)의 선택에 무관계하다고 하자.

만일 $t=1$ 이면 리만다양체 $(M,\ g)$ 는 일정곡률다양체이다.

증명 리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 반대칭비계량접속족 ∇ 에 관한 제2종비앙끼항등식은

$$\nabla_hR^l_{ijk}+\nabla_iR^l_{jhk}+\nabla_jR^l_{hik}=2(\pi_hR^l_{ijk}+\pi_iR^l_{jhk}+\pi_jR^l_{hik}) \tag{15}$$

이다. 리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 반대칭접속족 ∇ 에 관한 자름면곡률이 2차원방향 E 의 선택에 무관계하면 $R^l_{ijk}=K(P)(\delta^l_jg_{ik}-\delta^l_ig_{jk})$ 이다.

이 식을 식 (15)에 넣고 식 (4)를 리용하면 다음과 같다.

$$\nabla_h K(\delta_j^l g_{ik} - \delta_i^l g_{jk}) + \nabla_i K(\delta_h^l g_{jk} - \delta_j^l g_{hk}) + \nabla_j K(\delta_i^l g_{hk} - \delta_h^l g_{ik}) +$$
$$+ (1+t)K[\pi_h(\delta_j^l g_{ik} - \delta_i^l g_{jk}) + \pi_i(\delta_h^l g_{jk} - \delta_j^l g_{hk}) + \pi_j(\delta_i^l g_{hk} - \delta_h^l g_{ik})] =$$
$$= 2K[\pi_h(\delta_j^l g_{ik} - \delta_i^l g_{jk}) + \pi_i(\delta_h^l g_{jk} - \delta_j^l g_{hk}) + \pi_j(\delta_i^l g_{hk} - \delta_h^l g_{ik})]$$

이 식을 정돈하고 i, l 에 관하여 축약하면

$$(n-2)[(\nabla_j K + (t-1)K\pi_j)g_{hk} - (\nabla_h K + (t-1)K\pi_h)g_{jk}] = 0$$

이다. 여기에 g^{jk} 를 곱하면 $(n-1)(n-2)(\nabla_h K + (t-1)K\pi_h) = 0$ 이다.

이로부터 $t=1$ 이면 $K = \mathrm{const}$ 이다.(증명끝)

주의 정리 5를 리용하면 슈르의 정리를 만족시키는 반대칭접속은 $t=1$ 인 경우뿐이며 이 경우에 $\nabla_k g_{ij} = -2\pi_i g_{jk} - 2\pi_j g_{ik}$, $T_{ij}^k = \pi_j \delta_i^k - \pi_i \delta_j^k$ 를 만족시키며 접속결수는 $\Gamma_{ij}^k = \left\{ {k \atop ij} \right\} + \pi_j \delta_i^k + g_{ij}\pi^k$ 이다.

이 접속은 선행연구[4]에서 일정곡률을 가지는 접속이라는것을 밝혔다.

참 고 문 헌

[1] N. S. Agache et al.; Indian J. Pure Apple Math., 23, 399, 1992.

[2] K. A. Dunn; Tensor. N. S., 29, 214, 1975.

[3] Y. Han et al.; International Journal of Geometry, 5, 1, 47, 2016.

[4] A. Hayden; Proc. London. Math. Soc., 34, 27, 1932.

[5] K. Yano; Rev. Roum. Math. Pure Apple., 15, 1579, 1970.

주체107(2018)년 12월 5일 원고접수

On One Type of a Semi-Symmetric Connection Family in the Riemannian Manifold

Ho Tal Yun

We newly present one type of a semi-symmetric connection family and study its geometric properties. Some semi-symmetric connections of the preceding study are special types of this connection family.

Key words: semi-symmetry, non-metric connection, constant curvature