김일성종합대학학보 수 학
주체107(2018)년 제64권 제4호

쌍평등분포에 기초한 2차원감마－빠쏭분포의 구성과 그 특성

주진, 한광룡

1. 선행연구결과와 문제설정

선행연구[4]에서는 화리예－감벨－모젠스턴쌍평등분포(FGMC)에 기초하여 부분분포가 띠염분포인 2차원분포모형을 제기하고 그것의 모함수를 얻었다.

선행연구[3]에서는 한가지 2차원련속－띠염분포로서 지수－기하분포를 제기하고 분포의 통계적성질들을 밝혔으며 선행연구[1, 2]에서는 화리예－감벨－모젠스턴쌍평등분포에 기초한 한가지 2차원련속－띠염분포로서 감마－기하분포, 감마－2항분포를 연구하고 분포특성을 밝혔다.

선행연구[5]에서는 감마분포와 2항분포를 결합한 베타－2항분포에 대하여 연구하였다.

론문에서는 쌍평등분포에 기초한 2차원감마－빠쏭분포와 그 특성에 대하여 연구하였다.

2. FGMC 2차원감마－빠쏭분포의 확률함수

우연량 X 는 감마분포 $\Gamma(k,\ \lambda)$ 에 따른다고 하자.($k\geq 1$ 은 자연수라고 가정한다.) 즉 X 의 밀도함수와 분포함수는 각각

$$f_1(x)=f(x;k,\ \lambda)=\frac{(\lambda x)^{k-1}}{\Gamma(k)}\lambda e^{-\lambda x}\quad (x\geq 0)$$

$$F_1(x)=F(x;k,\ \lambda)=1-\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(\lambda x)^j}{j!}e^{-\lambda x}\quad (x\geq 0)\tag{1}$$

이라고 하자. 여기서 $\Gamma(p)=\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$ 는 감마함수이다.

그리고 우연량 N 은 빠쏭분포 $\mathrm{Po}(p)$ 에 따른다고 하자. 즉

$$p_n=P(N=n)=\frac{p^n}{n!}e^{-p}\quad (n=1,\ 2,\cdots)\tag{2}$$

이제 X 와 N 의 분포함수를 각각

$$F_1(x)=P(X\leq x),\ F_2(n)=P(N\leq n)$$

이라고 표시하고 $(X,\ N)$ 의 쌍평등분포함수는 FGMC 즉

$$C(u_1,\ u_2)=u_1u_2[1+\alpha(1-u_1)(1-u_2)]\ (0\leq u_1,\ u_2\leq 1)\tag{3}$$

라고 가정한다.

그러면 2차원우연량 $(X,\ N)$ 의 분포함수는 다음과 같이 표시된다.

$$F(x,\ n)=P(X\le x,\ N\le n)=C(F_1(x),\ F_2(n))= \\ =F_1(x)F_2(n)[1+\alpha\overline{F}_1(x)\overline{F}_2(n)] \tag{4}$$

여기서 $\overline{F}_i$ 는 생존함수 즉 $\overline{F}_i=1-F_i$ 이다.

분포식 (4)를 FGMC 2차원감마－뽜쏭분포라고 부른다.

그리고 함수 $f(x,\ n)=\dfrac{d}{dx}P(X\le x,\ N=n)$ 을 2차원우연량 $(X,\ N)$ 의 밀도－확률함수라고 부르며 함수 $f(x|n)=\dfrac{f(x,\ n)}{P(n)}$ 을 조건부밀도－확률함수라고 부른다.

정리 1 FGMC 2차원감마－뽜쏭분포에 따르는 우연량 $(X,\ N)$ 의 밀도－확률함수는 다음과 같다.

$$f(x,\ n)=\frac{d}{dx}P(X\le x,\ N=n)=$$

$$=e^{-p}f_1(x)\frac{p^n}{n!}+\alpha e^{-2p}\frac{p^n}{n!}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\frac{p^i}{n!}-\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{p^i}{n!}\right]\left[f_1(x)-2\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(\lambda x)^{j+k-1}}{\Gamma(k)\Gamma(j+1)}\lambda e^{-2\lambda x}\right] \tag{5}$$

$(x\ge 0,\ n=1,\ 2,\cdots)$

여기서 $f_1(x)$ 는 식 (1)로 정의되는 감마분포 $\Gamma(k,\ \lambda)$ 의 밀도함수이다.

증명 식 (4)를 x 로 미분하면

$$\frac{d}{dx}F(x,\ n)=\frac{d}{dx}P(X\le x,\ N\le n)=f_1(x)F_2(n)[1-\alpha(1-2\overline{F}_1(x))\overline{F}_2(n)] \tag{6}$$

여기서

$$\frac{d}{dx}\overline{F}_1(x)=\frac{d}{dx}[1-F_1(x)]=-f_1(x)$$

한편

$$\overline{F}_2(n)=P(N\ge n+1)=\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{p^i}{i!}e^{-e}$$

$$F_2(n)=1-\overline{F}_2(n)=P(N\le n)=1-\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{p^i}{i!}e^{-p}=e^{-p}\sum_{i=0}^{n}\frac{p^i}{i!}$$

그리고 식 (1)을 리용하면 식 (6)으로부터

$$\frac{d}{dx}F(x,\ n)=e^{-p}\sum_{i=0}^{n}\frac{p^i}{i!}\left[\left(1-\alpha\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{p^i}{i!}e^{-p}\right)f_1(x)+2\alpha\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{p^i}{i!}e^{-p}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(\lambda x)^{j+k-1}}{\Gamma(k)\Gamma(j+1)}\lambda e^{-2\lambda x}\right]$$

그러므로 $(X,\ N)$ 의 밀도－확률함수는

$$f(x,\ n)=\frac{d}{dx}P(X\le x,\ N=n)=$$

$$=\frac{d}{dx}P(X\le x,\ N\le n)-\frac{d}{dx}P(X\le x,\ N\le n-1)=$$

$$=e^{-p}f_1(x)\frac{p^n}{n!}+\alpha e^{-2p}\frac{p^n}{n!}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\frac{p^i}{n!}-\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{p^i}{n!}\right]\left[f_1(x)-2\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(\lambda x)^{j+k-1}}{\Gamma(k)\Gamma(j+1)}\lambda e^{-2\lambda x}\right]$$

(증명끝)

3. FGMC 2차원감마－빠쏭분포의 특성값

정리 2 $(X,\ N)$이 FGMC 2차원감마－빠쏭분포에 따르면

$$Cov(X,\ N)=\frac{p(1-k)}{\lambda}+\frac{p\alpha}{2\lambda}e^{-2p}\left[\frac{1}{\lambda}-2\sum_{j=0}^{k-1}\frac{k}{\lambda}\cdot\frac{C_{j+k}^{k}}{2^{j+k+1}}\right]\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{p^n}{n!}\right)^2+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^n}{n!}\frac{p^{n+1}}{(n+1)!}\right)$$

이 성립한다.

4. FGMC 2차원감마－빠쏭분포의 모멘트

여기서는 $E(X^r N^m)$을 구한다.($r\ge 1,\ m\ge 1$은 옹근수)

정리 3 $(X,\ N)$이 FGMC 2차원감마－빠쏭분포에 따른다고 하자. 이때 다음식이 성립한다.

$$E(X^r N^m)=e^{-p}\frac{1}{\lambda^r}\cdot\frac{\Gamma(k+r)}{\Gamma(k)}\sum_{n=1}^{\infty}n^m\frac{p^n}{n!}+$$

$$+\alpha e^{-2p}\left[\frac{1}{\lambda^r}\cdot\frac{\Gamma(k+r)}{\Gamma(k)}-2\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{\lambda^r}\cdot\frac{\Gamma(j+k+r)}{\Gamma(k)\Gamma(j+1)2^{j+k+r}}\right]\sum_{n=1}^{\infty}n^m\frac{p^n}{n!}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\frac{p^i}{i!}-\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{p^i}{i!}\right]$$

$$r=1,\ 2,\cdots\ ;\ m=1,\ 2,\cdots$$

5. FGMC 2차원감마－빠쏭분포의 조건부분포와 그 특성값

$(X,\ N)$은 FGMC 2차원감마－빠쏭분포에 따른다고 하자.

$X=x$라는 조건밑에서 N의 조건부분포는 다음과 같다.

$$f_{N|X=x}(n\,|\,x)=e^{-p}\frac{p^n}{n!}+\alpha e^{-2p}\frac{p^n}{n!}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\frac{p^i}{i!}-\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{p^i}{i!}\right]\left[1-2\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(\lambda x)^j}{\Gamma(j+1)}e^{-\lambda x}\right]$$

다음으로 $N=n$이라는 조건밑에서 X의 조건부밀도함수를 구하면 다음과 같다.

$$f_{X|N=n}(x\,|\,n)=f_1(x)+\alpha e^{-p}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\frac{p^i}{i!}-\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{p^i}{i!}\right]\left[f_1(x)-2\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(\lambda x)^{j+k-1}}{\Gamma(k)\Gamma(j+1)}\lambda e^{-2\lambda x}\right]$$

정리 4 $(X,\ N)$이 FGMC 2차원감마－빠쏭분포에 따르면

$$E(N\,|\,X=x)=pe^{-p}+\alpha pe^{-2p}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{p^n}{n!}\right)-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^n}{n!}\frac{p^{n+1}}{(n+1)!}\right]\left[1-2\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(\lambda x)^j}{\Gamma(j+1)}e^{-\lambda x}\right]$$

$$E(N^2\,|\,X=x)=2pe^{-p}+2\alpha pe^{-2p}\alpha e^{-2p}\sum_{n=1}^{\infty}n^2\frac{p^n}{n!}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\frac{p^i}{i!}-\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{p^i}{i!}\right]\left[1-2\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(\lambda x)^j}{\Gamma(j+1)}e^{-\lambda x}\right]$$

$$E(X\,|\,N=n)=\frac{k}{\lambda}+\alpha e^{-p}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\frac{p^i}{i!}-\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{p^i}{i!}\right]\left[\frac{k}{\lambda}-2\sum_{j=0}^{k-1}\frac{k}{\lambda}\cdot\frac{C_{j+k}^{k}}{2^{j+k+1}}\right]$$

$$E(X^2 \mid N=n)=\frac{k(1+k)}{\lambda^2}+\alpha e^{-p}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\frac{p^i}{i!}-\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{p^i}{i!}\right]\left[\frac{k(1+k)}{\lambda^2}-2\sum_{j=0}^{k-1}\frac{k(1+k)}{\lambda^2}\cdot\frac{C_{j+k+1}^{k+1}}{2^{j+k+2}}\right]$$

이 성립한다.

참 고 문 헌

[1] 김은혜; 대학교원론문집(자연과학부문), 11, 50, 주체106(2017).

[2] 김은혜; 조선민주주의인민공화국 과학원통보, 4, 12, 주체106(2017).

[3] J. K. Tomasz et al.; Journal of Statistical Planning and Inference, 134, 501, 2005.

[4] E. P. Violetta et al.; Journal of Statistical Planning and Inference, 139, 3891, 2009.

[5] K. R. Coombes, http:cran.r-project.org/web/packages/Tail Rank/…/beta binomial.pdf, 2, 14, 2018.

주체107(2018)년 6월 5일 원고접수

Construction of Bivariate Gamma-Poisson Distributions Based on Copula and Their Characteristics

Ju Jin, Han Kwang Ryong

In this paper, we introduce bivariate distributions with Farlie–Gumbel–Morgenstern copula, two marginal distributions of which are Gamma distribution and Poisson distribution respectively, and study their statistical characteristics.

Key words: distribution, Copula