김일성종합대학학보 수 학

주체108(2019)년 제65권 제3호

레비백색잡음확률공간에서 위크적의 몇가지 성질

김주경, 정강혁

분수브라운운동에 의한 백색잡음확률공간 $\boldsymbol{L}^2(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mathscr{P})$ 의 확률토대, 위크적의 정의와 성질들, 확률도함수와 위크적에 의한 확률적분의 정의가 완성되였고 확률변환공식이 유도되여 확률미분방정식리론과 조종리론, 금융수학 등에서 광범히 응용되고있다.

확률해석학은 분수브라운운동의 출현으로 보다 더 활기를 띠게 되였으며 옥센달(B. Oksendal[1])의 분수브라운운동에 의한 확률해석과 응용에서는 거의 완성된 구성체계를 갖추고 금융에서 응용되고있다. 여기서는 분수브라운운동이 정의되는 확률공간을 구성하고 L^2- 확률공간의 토대를 완벽하게 실현함으로써 위크적과 같은 새로운 우연량들의 적이 정의되여 확률적분을 보다 넓은 령역에서 정의할수 있게 하였다.[1, 2] 프레이(Frei[3])와 북크(Bock[4])는 위크적의 개념을 보다 명백히 하고 회색백색잡음리론을 제기하였다. 그러나 레비확률공간에서도 위크적은 정의되여있지만 분수브라운운동에서와 같이 좋은 성질이 없는것으로 하여 레비과정에 관한 확률적분정의는 더 확장되지 못하였다.

그러므로 우리는 비약측도로 정의한 레비백색잡음공간에서 위크적의 여러가지 성질들을 연구하였다.

레비측도 $\nu(dz)$ 가 주어졌다고 하자. 이때 실함수공간 $\boldsymbol{L}_\nu^2(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R})$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\boldsymbol{L}_\nu^2(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}) := \left\{ g : \|g\|_\nu^2 = \int_0^{+\infty}\int_{|z|>0} |g(s,\ z)|^2\,\nu(dz)ds < \infty \right\}$$

$$\langle f,\ g\rangle_\nu := \int_0^{+\infty}\int_{|z|>0} f(s,\ z)g(s,\ z)\nu(dz)ds$$

확률공간 $(\Omega_\nu,\ \mathscr{F}_\nu,\ \mathscr{P}_\nu)$ 를 다음의 세 요소로 구성한다. 요소사건공간은 $\Omega_\nu := \boldsymbol{S}'(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R})$ 즉 $\boldsymbol{S}(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R})$ (무한대에서 급속히 감소하는 함수들의 공간)의 공액공간이다. $\mathscr{F}_\nu$ 는 $\boldsymbol{S}'(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R})$ 의 보렐기둥모임으로 만들어지는 $\sigma-$모임벌이다. 보흐네르-밀로스정리에 의하여 가측공간 $(\Omega_\nu,\ \mathscr{F}_\nu)$ 우에서 확률측도 $\mathscr{P}_\nu$ 가 존재하여 다음의 식이 성립한다.

$$\int_\Omega \exp(i<\omega,\ f>)d\boldsymbol{P}(\omega) = \exp\left\{\int_0^{+\infty}\int_{|z|>0}[e^{if(t,\,z)} - 1 - if(t,\ z)]\nu(dz)dt\right\} \tag{1}$$

이때 $(\Omega_\nu,\ \mathscr{F}_\nu,\ \mathscr{P}_\nu)$ 를 레비백색잡음확률공간이라고 부른다.

레비백색잡음확률공간 $(\Omega_\nu,\ \mathscr{F}_\nu,\ \mathscr{P}_\nu)$ 에서

$$<\omega,\ I_{[0,\,t]}(s)z> = \int_0^t\int_{|z|>0} z\widetilde{N}(ds,\ dz) \tag{2}$$

으로 정의되는 $N(ds,\ dz,\ \omega)$ 는 레비측도 $\nu(dz)$ 로 구성되는 뽜쏭옹근수우연측도이고

$\widetilde{N}(ds,\ dz,\ \omega)$는 $N(ds,\ dz,\ \omega)$의 중심화한 측도이다.

다음으로 선행연구[2]에서 론의한 공간 $\boldsymbol{L}^2(\Omega_\nu,\ \mathscr{F}_\nu,\ \mathscr{P}_\nu)$의 토대를 보기로 하자.

공간 $\boldsymbol{L}^2(\lambda)$를 $\mathbf{R}_+=[0,\ +\infty)$에서 정의되고 르베그측도 μ(또는 dt)에 관하여 2중적분가능한 함수들의 공간이라고 하자. $\boldsymbol{L}^2(\lambda)$에서 표준직교계로 차수가 $1/2$인 Laguerre함수계 $\{\xi_j(t)\}$를 생각한다. 공간 $\boldsymbol{L}^2_\nu(\mathbf{R})$를 레비측도 ν에 관하여 $\mathbf{R}$에서 2중적분가능한 함수들의 공간이라고 하고 $\{P_j(z)\}$를 이 공간의 완비표준직교계(다항식계)라고 한다.

다음의 함수렬을 정의하자.

$$\delta_k(t,\ z):=\xi_j(t)P_i(z)\ \ (t\in\mathbf{R}_+,\ z\in\mathbf{R})$$

다중첨수 $\alpha\in J$에 대하여

$$m(\alpha)=\max(k|\alpha_k\neq 0)=n,\ |\alpha|=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k=m$$

일 때 텐소르적 $\delta^{\otimes\alpha}$를

$$\begin{aligned}\delta^{\otimes\alpha}&=\delta_1^{\otimes\alpha_1}\otimes\cdots\otimes\delta_n^{\otimes\alpha_n}((t_1,\ z_1),\ \cdots,\ (t_m,\ z_m))=\\&=\delta_1(t_1,\ z_1)\cdots\delta_1(t_{\alpha_1},\ z_{\alpha_1})\cdots\delta_n(t_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}+1},\ z_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}+1})\cdots\delta_n(t_m,\ z_m)\end{aligned}$$

으로 정의한다. 여기서 $\delta_k^{\otimes 0}=1$이다. 표시 $\delta^{\hat{\otimes}\alpha}$는 함수 $\delta^{\otimes\alpha}$을 대칭화한 함수이다.

공간 $\boldsymbol{L}^2(\Omega_\nu,\ \mathscr{F}_\nu,\ \mathscr{P}_\nu)$ (간단히 $\boldsymbol{L}^2(\mathscr{P}_\nu)$)를 확률측도 $\mathscr{P}_\nu$에 관하여 2중적분가능한 우연량들의 공간이라고 하자. 이때 이 공간에서 완비직교계 $\{K_\alpha\}_{\alpha\in J}$가 구성된다.[2] 여기서 $K_\alpha:=\boldsymbol{I}_{|\alpha|}(\delta^{\hat{\otimes}\alpha})$이고

$$\boldsymbol{I}_m(f):=m!\int_0^{+\infty}\int_{|z|>0}\int_0^{t_1}\int_{|z|>0}\cdots\int_0^{t_{m-1}}\int_{|z|>0}f(t_1,\ z_1,\ \cdots,\ t_m,\ z_m)\widetilde{N}(dt_1,\ dz_1)\cdots\widetilde{N}(dt_m,\ dz_m)\ \ (f\in\boldsymbol{L}^2_{\nu,\ m})$$

(3)

$$\boldsymbol{L}^2_{\nu,\ m}=\boldsymbol{L}^2_{\nu,\ m}(\mathbf{R}^m)=\Big\{f(t_1,\ z_1,\ \cdots,\ t_m,\ z_m);\\ \|f\|^2_{\nu,\ m}=\int_0^{+\infty}\int_{|z|>0}\int_0^{t_1}\int_{|z|>0}\cdots\int_0^{t_{m-1}}\int_{|z|>0}|f(t_1,\ z_1,\ \cdots,\ t_m,\ z_m)|^2\,\nu(dz_1)dt_1\cdots\nu(dz_m)dt_m<\infty\Big\}$$

보조정리 1 [2] 임의의 $F\in\boldsymbol{L}^2(\mathscr{P}_\nu)$에 대하여 $\{c_\alpha\}_{\alpha\in J}$가 유일존재하여

$$F=\sum_{\alpha\in J}c_\alpha K_\alpha \tag{4}$$

로 표시되며 노름은 $\|F\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\mathscr{P}_\nu)}=\sum_{\alpha\in J}c_\alpha\alpha!$이다.

정의 1 위크적 $F\Diamond G$를 다음과 같이 정의한다.

$$F=\sum a_\alpha K_\alpha,\ G=\sum b_\beta K_\beta\in(\boldsymbol{S})^*_\nu$$

$$(F\Diamond G)=\sum_{\alpha,\ \beta\in J}a_\alpha b_\beta K_{\alpha+\beta} \tag{5}$$

함수 $f(t,\ z)$ 를 $f(t,\ z)=\sum_{l=0}^{+\infty}a_l\delta_l(t,\ z)$ 로 놓으면

$$F=\int_0^{+\infty}\int_{|z|>0}f(t,\ z)\widetilde{N}(dt,\ dz)=\sum_{l=1}^{+\infty}a_lK_{\varepsilon^{(l)}}\ ,\ \ K_{\varepsilon^{(l)}}=\int_0^{+\infty}\int_{|z|>0}\delta_l(t,\ z)\widetilde{N}(dt,\ dz)$$

이다. 이때 다음의 결과가 성립한다. 여기서 $\varepsilon^{(l)}=(0,\ \cdots,\ \underset{l}{1},\ 0,\ \cdots)$ 이다.

보조정리 2 임의의 $n,\ m>0$ 에 대하여

$$K_{\varepsilon^{(n)}}=\int_0^{+\infty}\int_{|z|>0}\delta_n(t,\ z)\widetilde{N}(dt,\ dz),\ K_{\varepsilon^{(m)}}=\int_0^{+\infty}\int_{|z|>0}\delta_m(t,\ z)\widetilde{N}(dt,\ dz) \tag{6}$$

로 놓으면

$$K_{\varepsilon^{(n)}}\Diamond K_{\varepsilon^{(m)}}=K_{\varepsilon^{(n)}}K_{\varepsilon^{(m)}}-\delta_{n,\ m}$$

$$<\delta_n,\ \delta_m>_\nu=\delta_{n,\ m}=\begin{cases}1,\ n=m\\0,\ n\neq m\end{cases}$$

이 성립한다.

정리 1 $F=\int_0^{+\infty}\int_{|z|>0}f(t,\ z)\widetilde{N}(dt,\ dz),\ G=\int_0^{+\infty}\int_{|z|>0}g(t,\ z)\widetilde{N}(dt,\ dz)$ 에 대하여

$$F\Diamond G=\left(\int_0^{+\infty}\int_{|z|>0}f(t,\ z)\widetilde{N}(dt,\ dz)\right)\left(\int_0^{+\infty}\int_{|z|>0}g(t,\ z)\widetilde{N}(dt,\ dz)\right)-<f,\ g>_\nu \tag{7}$$

가 성립한다.

증명 $\left(\int_0^{+\infty}\int_{|z|>0}f(t,\ z)\widetilde{N}(dt,\ dz)\right)\Diamond\left(\int_0^{+\infty}\int_{|z|>0}g(t,\ z)\widetilde{N}(dt,\ dz)\right)=$

$$=\left(\sum_{m=0}^{+\infty}<f,\ \delta_m>_\nu K_{\varepsilon^{(m)}}(\omega)\right)\Diamond\left(\sum_{n=0}^{+\infty}<g,\ \delta_n>_\nu K_{\varepsilon^{(n)}}(\omega)\right)=$$

$$=\sum_{m,\ n=0}^{+\infty}<f,\ \delta_m>_\nu<g,\ \delta_n>_\nu K_{\varepsilon^{(m)}+\varepsilon^{(n)}}(\omega)=$$

$$=\sum_{m,\ n=0}^{\infty}<f,\ \delta_m>_\nu<g,\ \delta_n>_\nu (K_{\varepsilon^{(n)}}K_{\varepsilon^{(m)}}-\delta_{n,\ m})=$$

$$=\left(\sum_{m=0}^{+\infty}<f,\ \delta_m>_\nu K_{\varepsilon^{(m)}}(\omega)\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}<g,\ \delta_n>_\nu K_{\varepsilon^{(n)}}(\omega)\right)-\sum_{m=0}^{\infty}<f,\ \delta_m>_\nu<g,\ \delta_m>_\nu$$

따라서

$$\left(\int_0^{+\infty}\int_{|z|>0} f(t,\ z)\widetilde{N}(dt,\ dz)\right)\Diamond\left(\int_0^{+\infty}\int_{|z|>0} g(t,\ z)\widetilde{N}(dt,\ dz)\right)=$$

$$=\left(\int_0^{+\infty}\int_{|z|>0} f(t,\ z)\widetilde{N}(dt,\ dz)\right)\left(\int_0^{+\infty}\int_{|z|>0} g(t,\ z)\widetilde{N}(dt,\ dz)\right)-< f,\ g >_\nu$$

보조정리 3 임의의 $f\in \boldsymbol{L}^2(\mathscr{P}_\nu)$ 와 t 에 대하여

$$\exp\left\{\Diamond\int_0^{\infty}\int_{|z|>0} g(s,\ z)\widetilde{N}(ds,\ dz)\right\}=$$

$$=\exp\left\{\int_0^{\infty}\int_{|z|>0} g(s,\ z)\widetilde{N}(ds,\ dz)-\int_0^{\infty}\int_{|z|>0}(e^{g(s,\ z)}-1-g(s,\ z))\nu(dz)ds\right\} \tag{8}$$

가 성립한다.

정의 2

$$D_\nu^{1.2}:=\left\{F=\sum_{m=0}^{\infty} I_m(f_m)\in \boldsymbol{L}^2(\mathscr{P}_\nu):\| F\|_{D_\nu}^2=\sum mm!\| f_m\|_{\boldsymbol{L}_\nu^2(\mathbf{R}^n)}^2<\infty\right\}$$

$$D_{t,\,z}F:=\sum_{m=1}^{\infty} mI_{m-1}(f_m(\cdot,\ t,\ z))$$

로 정의되는 $D_{t,\,z}F$ 를 F 의 확률(말리아빈의)도함수라고 부른다. 여기서 $D_{t,\,z}$ 는 $\boldsymbol{L}^2(\mathscr{P}_\nu)$ 에서 정의되며 $\boldsymbol{L}^2(\mathscr{P}_\nu\times\nu\times dt)$ 에서 값을 가지는 연산자이고

$$f_m(\cdot,\ t,\ z)=f_m(t_1,\ z_1,\ \cdots,\ t_{m-1},\ z_{m-1},\ t,\ z)$$

이다.

또는 $F=\sum_{\alpha\in J} c_\alpha K_\alpha\in(\boldsymbol{S})_\nu^*$ 과 같이 표시되는 경우에

$$D_{t,\,z}F(\omega):=\sum_\alpha c_\alpha\sum_{i,\,j}\alpha_{\gamma(i,\,j)}K_{\alpha-\varepsilon^{\gamma(i,\,j)}}\xi_i(t)P_j(z)$$

로 정의되는 $D_{t,\,z}F$ 를 F 의 확률(말리아빈의)도함수라고 부른다.

실례 $f(t,\ z)$ 가 $\int_0^{+\infty}\int_{|z|>0}| f(t,\ z)|^2\,\nu(dz)dt<\infty$ 인 함수라고 하자. 이때

$$F(\omega)=\int_0^{+\infty}\int_{|z|>0} f(t,\ z)\widetilde{N}(dt,\ dz)$$

인 F 의 확률도함수는 $D_{t,\,z}F=f(t,\ z)$ 이다.

정리 2 임의의 $g\in \boldsymbol{L}^2(\mathscr{P}_\nu),\ F\in \boldsymbol{L}^2(\mathscr{P}_\nu),\ D_gF\in \boldsymbol{L}^2(\mathscr{P}_\nu)$ 에 대하여

$$F\Diamond\int_0^{+\infty}\int_{|z|>0} g(t,\ z)\widetilde{N}(dt,\ dz)=F\int_0^{+\infty}\int_{|z|>0} g(t,\ z)\widetilde{N}(dt,\ dz)-\langle D_{t,\,z}F,\ g\rangle_\nu$$

가 성립한다.

참 고 문 헌

[1] F. Biagini et al.; Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications, Springer, 329, 2008.

[2] Ł. Delong et al.; Stochastic Processes and their Applications, 120, 9, 1748, 2010.

[3] M. M. Frei; Carpathian Math. Publ., 10, 1, 82, 2018.

[4] W. Bock et al.; AIP Conference Proceedings, 10, 1871, 2017.

주체108(2019)년 3월 15일 원고접수

Some Properties of the Wick Product on the Levy White Noise Probability Space

Kim Ju Gyong, Jong Kang Hyok

We investigate some properties of the Wick product on the Levy white noise probability space with a jump measure.

Key words: Wick product, Levy white noise