김일성종합대학학보 JOURNAL OF KIM IL SUNG UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체105(2016)년 제62권 제4호 Vol. 62 No. 4 JUCHE105(2016).

3단프레쩰얽힘의 카우프만괄호

윤룡한, 리강일

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《선진과학기술을 받아들이기 위한 사업을 적극적으로 벌려야 하겠습니다.

선진과학기술을 받아들이는것은 나라의 과학기술을 빨리 발전시키기 위한 중요한 방도의 하나로 됩니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제15권 499～500페지)

론문에서는 현시기 그 응용이 광범하고 세계적인 관심을 모으는 과학연구분야인 매듭리론에서 3단프레쩰얽힘의 카우프만괄호를 계산하는 공식을 유도하였다.

선행연구[1]에서는 카우프만괄호라고 하는 새로운 얽힘불변량을 구성하고 그것으로 죤즈다항식을 새롭고 단순하게 정의하였다.

도표 D의 카우프만괄호는 다음의 얽힘관계로 정의된다.

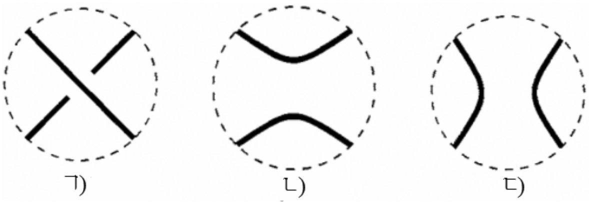

그림 1. 도표 D의 카우프만괄호
ㄱ) D_+, ㄴ) D_0, ㄷ) D_∞

i) $\langle\ \rangle_{D \cup O} = (-A^2 - A^{-2})\langle\ \rangle_D$

ii) $\langle\ \rangle_{D_+} = A\langle\ \rangle_{D_0} + A^{-1}\langle\ \rangle_{D_\infty}$

한편 카우프만괄호는 다른 방식으로 정의할수도 있다.

얽힘의 사영도를 D, D의 사귐점들의 모임을 $C(D)$, D의 교차수를 $c(D)$로 표시하자.

$s: C(D) \to \{-1, 1\}$을 D의 상태라고 부르고 D의 상태전부모임을 $S(D)$로 표시하자.

$s \in S(D)$에 대하여 $\langle D|_s \rangle = A^{\sum_{c \in C(D)} s(C)} (-A^2 - A^{-2})^{|sD|-1}$으로 놓자. 여기서 sD는 그림 2에 주어진 규칙대로 D의 사귐점을 제거한 도표이며 $|sD|$는 sD의 성분개수이다.

이때 D의 카우프만괄호 $\langle D \rangle$는 $\langle D \rangle = \sum_{s \in S(D)} \langle D|_s \rangle$로 된다.[2]

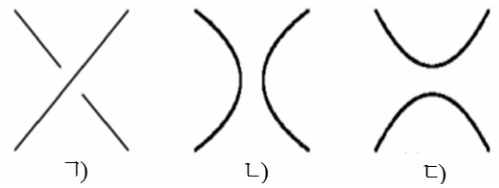

그림 2. 사귐점없애기
ㄱ) 사귐점 c, ㄴ) $s(c) = 1$일 때, ㄷ) $s(c) = -1$일 때

또한 이미 알려진 많은 매듭들은 3단프레쩰매듭으로 표시할수 있다.[4]

실례로 0_1 매듭은 $P(1, 1, -1)$, 3_1은 $P(1, 1, 1)$, 6_1은 $P(3, 1, 1)$로 표시할수 있다.

선행연구[3]에서는 $a, b, c \in \boldsymbol{N}$이고 m이 짝수인 경우 프레쩰매듭 $P(\underbrace{1, \cdots, 1}_{m}, a, b, c)$의 카우프만괄호를 계산하였다. 이때 $m = 0$으로 놓으면 $a, b, c \in \boldsymbol{N}$인 경우의 3단프레쩰매듭 $P(a, b, c)$의 카우프만괄호는 계산할수 있다.

어떤 매듭의 카우프만괄호를 알 때 그것의 거울대칭인 매듭의 카우프만괄호를 계산할수 있으며 $P(a, b, c) = P(c, b, a)$이므로 a, b, c가운데서 어느 하나가 부인 경우에 카우프

만괄호를 계산하는 공식을 구하면 3단프레첼얽힘의 카우프만괄호를 구하는 공식이 완전히 주어진다. 그러나 이러한 공식은 선행연구[3]의 결과로부터는 얻을수 없다.

론문에서는 $a, b, c \in \boldsymbol{N}$ 인 경우만이 아니라 모든 경우에 3단프레첼얽힘 $P(a, b, c)$의 카우프만괄호를 구하는 공식을 유도하였다. 이 공식을 리용하여 3단프레첼매듭의 수술에 의하여 얻어지는 3차원다양체의 성질을 밝힐수 있다.

$a, b, c>0$ 인 경우 D 를 프레첼얽힘 $P(a, b, c)$의 도표라고 하면 D 는 그림 3과 같다.

C_i 를 $c(D)$ 의 부분모임들이라고 하자.

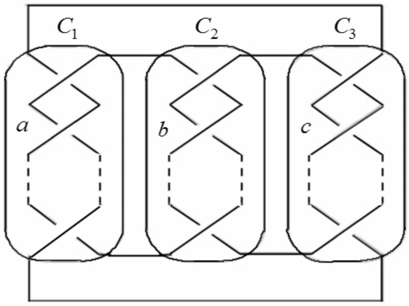

그림 3. $a, b, c>0$ 일 때의 3단프레첼얽힘 $P(a, b, c)$

$$S_{i,\ j,\ k}=\{s\in S(D)\,\|\, s^{-1}(-1)\cap C_1|=i,$$
$$|s^{-1}(-1)\cap C_2|=j,\ |s^{-1}(-1)\cap C_3|=k\}$$

로 놓으면 $s_1,\ s_2\in S_{i,\ j,\ k}$ 일 때 $\sum\limits_{c\in C(D)}s_1(c)=\sum\limits_{c\in C(D)}s_2(c)$, $|s_1D|=|s_2D|$ 이다.

$\sum\limits_{c\in C(D)}s(c)=\sigma(i,\ j,\ k)$ ($s\in S_{i,\ j,\ k}$), $|sD|=\mu(i,\ j,\ k)$ 로 표시하자.

D 의 카우프만괄호 $\langle D\rangle$ 는 다음과 같다.

$$\langle D\rangle=\sum_{s\in S(D)}\langle D|_s\rangle=\sum_{i,\ j,\ k}\ \sum_{s\in S_{i,\ j,\ k}}A^{\sigma(i,\ j,\ k)}(-A^2-A^{-2})^{\mu(i,\ j,\ k)-1}$$

$S_{i,\ j,\ k}$ 의 개수는 $C_a^iC_b^jC_c^k$ 이고 $\sigma(i,\ j,\ k)=a+b+c-2(i+j+k)$ 이다.

따라서 $\langle D\rangle=\sum\limits_{(i,\ j,\ k)\in X}C_a^iC_b^jC_c^kA^{a+b+c-2(i+j+k)}(-A^2-A^{-2})^{\mu(i,\ j,\ k)-1}$ 이다. 여기서

$$X=\{(i,\ j,\ k)\,|\,0\le i\le a,\ 0\le j\le b,\ 0\le k\le c\}.$$

$X_0=\{(i,\ j,\ k)\in X\,|\,j=k=0\}$, $X_1=\{(i,\ j,k)\in X\setminus X_0\,|\,j=0\vee k=0\}$, $X_2=\{(i,\ j,k)\in X\setminus(X_0\cup X_1)\}$ 로 놓으면 $X=X_0\cup X_1\cup X_2$, $X_0\cap X_1=\phi$, $X_0\cap X_2=\phi,\ X_1\cap X_2=\phi$ 이다.

편의상 $\delta=-A^2-A^{-2}$, $F_i=(-1)^iA^{-4i}$ 으로 놓자.

$\langle D\rangle$ 를 $(i,\ j,\ k)\in X_0$, $(i,\ j,\ k)\in X_1$, $(i,\ j,\ k)\in X_2$ 로 나누어 계산하자.

보조정리 1 $\sum\limits_{(i,\ j,\ k)\in X_0}C_a^iC_b^jC_c^kA^{a+b+c-2(i+j+k)}\delta^{\mu(i,\ j,\ k)-1}=A^{a+b+c}F_a$

보조정리 2 $\sum\limits_{(i,\ j,\ k)\in X_1}C_a^iC_b^jC_c^kA^{a+b+c-2(i+j+k)}\delta^{\mu(i,\ j,\ k)-1}=A^{a+b+c}\delta^{-2}F_a(F_b+F_c-2)$

증명 X_1 을 다음과 같은 2개의 부분모임 X_{11}, X_{12} 로 가르자.

$$X_{11}=\{(i,\ j,k)\in X_1\,|\,k=0\},\ X_{12}=\{(i,\ j,\ k)\in X_1\,|\,j=0\}$$

$(i,\ j,\ k)\in X_{11}$ 이면 $k=0$ 이므로 $\mu(i,\ j,\ 0)=i-1+j-1+1=i+j-1$ 이다. 따라서

$$\sum_{(i,\ j,\ k)\in X_{11}}C_a^iC_b^jC_c^kA^{a+b+c-2(i+j+k)}\delta^{\mu(i,\ j,\ k)-1}=\sum_{(i,\ j,\ k)\in X_{11}}C_a^iC_b^jA^{a+b+c-2(i+j)}\delta^{\mu(i,\ j,\ k)-1}=$$

$$=A^{a+b+c}\delta^{-2}\sum_{0\le i\le a}\ \sum_{1\le j\le b}C_a^iC_b^j(A^{-2}\delta)^{i+j}=A^{a+b+c}\delta^{-2}\sum_{0\le i\le a}C_a^i(A^{-2}\delta)\sum_{1\le j\le b}C_b^j(A^{-2}\delta)^j=$$

$$=A^{a+b+c}\delta^{-2}(A^{-2}\delta+1)^a[(A^{-2}\delta+1)^b-1]=(-1)^aA^{a+b+c}\delta^{-2}A^{-4a}[(-1)^bA^{-4b}-1)].$$

마찬가지로 $$\sum_{(i,\ j,\ k)\in X_{12}} C_a^i C_b^j C_c^k A^{a+b+c-2(i+j+k)}\delta^{\mu(i,\ j,\ k)-1} = A^{a+b+c}\delta^{-2}F_a(F_c-1)$$ 이다.(증명끝)

보조정리 3 $$\sum_{(i,\ j,\ k)\in X_2} C_a^i C_b^j C_c^k A^{a+b+c-2(i+j+k)}\delta^{\mu(i,\ j,\ k)-1} = A^{a+b+c}\delta^{-2}(F_a-1)(F_b-1)(F_c-1)$$

증명 $(i,\ j,\ k)\in X_3$ 이면 $\mu(i,\ j,\ k)=i-1+j-1+k-1+2=i+j+k-1$ 이므로

$$\sum_{(i,\ j,\ k)\in X_2} C_a^i C_b^j C_c^k A^{a+b+c-2(i+j+k)}\delta^{\mu(i,\ j,\ k)-1} = \sum_{i,\ j,\ k} C_a^i C_b^j C_c^k A^{a-2i}A^{b-2j}A^{c-2k}\delta^{i+j+k-2} =$$

$$= A^{a+b+c}\delta^{-2}\sum_{1\le i\le a} C_a^i (A^{-2}\delta)^i \sum_{1\le j\le b} C_a^j (A^{-2}\delta)^j \sum_{1\le k\le c} C_a^k (A^{-2}\delta)^k =$$

$$= A^{a+b+c}\delta^{-2}[(-1)^a A^{-4a}-1][(-1)^b A^{-4b}-1][(-1)^c A^{-4c}-1] =$$

$$= A^{a+b+c}\delta^{-2}(F_a-1)(F_b-1)(F_c-1)$$

이 성립된다.(증명끝)

정리 1 $a,\ b,\ c$ 가 부아닌 옹근수, $P(a,\ b,\ c)$ 를 프레첼얽힘이라고 하자.

이때 $P(a,\ b,\ c)$ 의 도표를 D 로 표시하면

$$\langle D\rangle = A^{a+b+c}\{F_a+\delta^{-2}[F_a(F_b+F_c-2)+(F_a-1)(F_b-1)(F_c-1)]\}$$

이다. 여기서 $\delta=-A^2-A^{-2}$, $F_i=(-1)^i A^{-4i}$ 이다.

증명 보조정리 1－3으로부터

$$\langle D\rangle = \sum_{(i,\ j,\ k)\in X} C_a^i C_b^j C_c^k A^{a+b+c-2(i+j+k)}\delta^{\mu(i,\ j,\ k)-1} = \sum_{(i,\ j,\ k)\in X_0} C_a^i C_b^j C_c^k A^{a+b+c-2(i+j+k)}\delta^{\mu(i,\ j,\ k)-1} +$$

$$+ \sum_{(i,\ j,\ k)\in X_1} C_a^i C_b^j C_c^k A^{a+b+c-2(i+j+k)}\delta^{\mu(i,\ j,\ k)-1} + \sum_{(i,\ j,\ k)\in X_2} C_a^i C_b^j C_c^k A^{a+b+c-2(i+j+k)}\delta^{\mu(i,\ j,\ k)-1} =$$

$$= A^{a+b+c}\{F_a+\delta^{-2}[F_a(F_b+F_c-2)+(F_a-1)(F_b-1)(F_c-1)]\}$$

이 성립되므로 정리가 증명된다.(증명끝)

$a,\ b>0,\ c<0$ 인 경우 $P(a,\ b,\ c)$ 를 프레첼얽힘, D 를 그것의 사영도라고 하자.

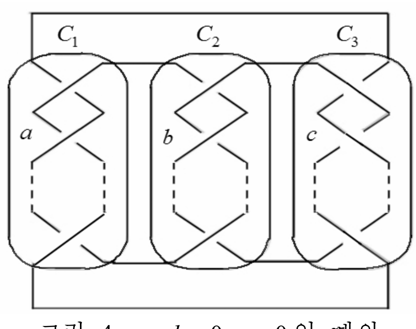

그림 4. $a,\ b>0,\ c<0$ 일 때의 3단프레첼얽힘 $P(a,\ b,\ c)$

$a,\ b>0,\ c<0$ 이므로 D 는 그림 4와 같다.

$$S_{i,\ j,\ k}=\{s\in S(D)\,|\,|s^{-1}(-1)\cap C_1|=i,$$
$$|s^{-1}(-1)\cap C_2|=j,\ |s^{-1}(1)\cap C_3|=k\}$$

로 놓자.

$S_{i,\ j,\ k}$ 의 개수는 $C_a^i C_b^j C_c^k$ 이고

$$\sigma(i,\ j,\ k)=a+b-c-2(i+j-k).$$

따라서

$$\langle D\rangle = \sum_{(i,\ j,\ k)\in X} C_a^i C_b^j C_c^k A^{a+b-c-2(i+j-k)}(-A^2-A^{-2})^{\mu(i,\ j,\ k)-1}.$$

여기서 $X=\{(i,\ j,\ k)\,|\,0\le i\le a,\ 0\le j\le b,\ 0\le k\le c\}$.

$X_0=\{(i,\ j,\ k)\in X\,|\,j=k=0\}$, $X_1=\{(i,\ j,\ k)\in X\setminus X_0\,|\,j=0\vee k=0\}$, $X_2=\{(i,\ j,\ k)\in X\setminus(X_0\cup X_1)\}$ 로 놓으면 $X=X_0\cup X_1\cup X_2, X_0\cap X_1=\phi$, $X_0\cap X_2=\phi$, $X_1\cap X_2=\phi$ 이다.

편리상 $\delta=-A^2-A^{-2}$, $F_i=(-1)^i A^{-4i}$ 로 놓자.

$\langle D\rangle$ 를 $(i,\ j,\ k)\in X_0$, $(i,\ j,\ k)\in X_1$, $(i,\ j,\ k)\in X_2$ 로 나누어 계산하자.

보조정리 4 $\sum_{(i,\ j,\ k)\in X_0} C_a^i C_b^j C_c^k A^{a+b-c-2(i+j-k)} \delta^{\mu(i,\ j,\ k)-1} = A^{a+b-c}\delta F_a$

보조정리 5 $\sum_{(i,\ j,\ k)\in X_1} C_a^i C_b^j C_c^k A^{a+b-c-2(i+j-k)} \delta^{\mu(i,\ j,\ k)-1} = A^{a+b-c}\delta^{-1} F_a [F_b + (-1)^c A^{4c} - 2]$

보조정리 6 $\sum_{(i,\ j,\ k)\in X_2} C_a^i C_b^j C_c^k A^{a+b-c-2(i+j-k)} \delta^{\mu(i,\ j,\ k)-1} = A^{a+b-c}\delta^{-1} (F_a - 1)(F_b - 1)[(-1)^c A^{4c} - 1]$

정리 2 $a,\ b,\ -c$가 부아닌 정수이고 $P(a,\ b,\ c)$가 프레첼매듭이라고 하자.

이때 $P(a,\ b,\ c)$의 도표를 D라고 하면

$$\langle D\rangle = A^{a+b-c}\{F_a\delta + \delta^{-1}[F_a(F_b + (-1)^c A^{4c} - 2)) + (F_a - 1)(F_b - 1)((-1)^c A^{4c} - 1)]\}$$

이다. 여기서 $\delta = -A^2 - A^{-2}$, $F_i = (-1)^i A^{-4i}$이다.

증명 $\langle D\rangle = \sum_{(i,\ j,\ k)\in X} C_a^i C_b^j C_c^k A^{a+b+c-2(i+j+k)} \delta^{\mu(i,\ j,\ k)-1}$이므로

$$(i,\ j,\ k)\in X_0,\ (i,\ j,\ k)\in X_1,\ (i,\ j,\ k)\in X_2$$

인 경우로 가르면 보조정리 4－6으로부터 증명하려는 식이 나온다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] L. H. Kauffman; Amer. Math. Monthly, 95, 3, 195, 1988.

[2] L. H. Kauffman; Topology, 26, 395, 1987.

[3] M. Hara et al.; arXiv: 2735v1, 12, 2011.

[4] P. Cromwell; Knots and Links, Cambridge University Press, 23～56, 2004.

주체104(2015)년 12월 5일 원고접수

The Kauffman Bracket of 3-Strands Pretzel Link

Yun Ryong Han, Ri Kang Il

We give a formula for the Kauffman bracket of 3-strands pretzel link.

Our result can be used to explain the properties of 3 dimension-manifolds that are obtained by surgeries on pretzel link $P(a,\ b,\ c)$.

Key words: Kauffman bracket, 3-strands pretzel link