김일성종합대학학보 주체109(2020)년
물리학 제66권 제2호

# 일반화된 하트리-포크근사방법에 의한 몇가지 가벼운 핵들의 평균２제곱반경계산

김태성, 김련희, 오수일

위대한 수령 **김일성**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《…원자력부문의 과학자들이 원자력에 대한 연구사업을 더 적극적으로 하도록 하여야 합니다.》(《**김일성**전집》 제60권 352페지)

론문에서는 일반화된 하트리-포크근사방법을 리용하여 일부 가벼운 핵들의 평균2제곱반경을 계산하고 선행연구[2－5]결과와 비교하여 핵의 바닥상태계산에서 일반화된 하트리-포크근사방법의 정확성을 고찰하였다.

핵구조연구에서는 하트리-포크방법이 많이 리용되고있으며 그중에서 많이 쓰이는 방법은 하트리-포크-보골류보브근사방법[3]과 스카임-하트리-포크방법[4]이다. 그러나 이 방법들은 다계의 바닥상태계산에만 적용할수 있다.

핵의 바닥상태뿐만아니라 려기상태까지 동시에 구하기 위한 연구사업이 진행되여왔으며 그 과정에 일반화된 하트리-포크근사방법이 제기되였다.[1]

일반화된 하트리-포크방정식은 다음과 같다.

$$\sum_{\beta} b_{\beta} \sum_{P} \varepsilon_P \left( \sum_{i=1}^{N} \langle \beta_i' | \hat{f}_i | P\beta_i \rangle \prod_{k\neq i}^{N} \delta_{\beta_k',\, P\beta_k} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j>i}^{N} \langle \beta_i' \beta_j' | \hat{g}_{ij} | P\beta_i P\beta_j \rangle \prod_{k\neq i,\, j}^{N} \delta_{\beta_k',\, P\beta_k} \right) = \mu b_{\beta'} \tag{1}$$

$$\sum_{\beta'\beta} b_{\beta'}^{*} b_{\beta} \sum_{P} \varepsilon_P \left( \sum_{i=1}^{N} \hat{f}_i | P\beta_i \rangle \delta_{\beta_i' p} \prod_{k\neq i}^{N} \delta_{\beta_k',\, P\beta_k} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j\neq i}^{N} \langle \beta_j' | \hat{g}_{ij} | P\beta_j \rangle | P\beta_i \rangle \delta_{\beta_i' p} \prod_{k\neq i,\, j}^{N} \delta_{\beta_k', P\beta_k} \right) = \lambda_p | p \rangle \tag{2}$$

여기서 상태벡토르 $|\beta_i\rangle$는

$$|\beta_i\rangle = |n_i J_i L_i M_i\rangle = \frac{R_{n_i L_i}(r)}{r} Y_{J_i M_i}^{L_i}(\Omega) \tag{3}$$

이고

$$Y_{J_i M_i}^{L_i}(\Omega) = \sum_{s_i=-1/2}^{1/2} \left\langle L_i M_i - s_i \frac{1}{2} s_i \middle| J_i M_i \right\rangle Y_{L_i M_i - s_i}(\Omega) \chi_{1/2,\, s_i} \tag{4}$$

로서 구면스피노르이다. 일반적으로 $N$개 핵자로 이루어진 핵의 하밀토니안은

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{N} \left[ -\frac{1}{2m} \Delta_i + V(\boldsymbol{r}_i) \right] + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j>i}^{N} V(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{r}_j) = \sum_{i=1}^{N} \hat{f}_i + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j>i}^{N} \hat{g}_{ij} \tag{5}$$

이다.

방정식계 (1)과 (2)를 푸는 방법은 다음과 같다.[2]

먼저 초기 한립자파동함수 $|p\rangle$를 가정한다. 다음 방정식계 (1)을 풀어 전개결수 $b_{\beta}$와 고유값 $\mu$를 구한다. 그다음 그것을 방정식계 (2)에 대입하여 한립자파동함수 $|p\rangle$와

한립자에네르기준위 $\lambda_p$ 를 구한다. 이 결과를 리용하여 풀이결과들이 더이상 변하지 않을 때까지 방정식계 (1)과 (2)를 푸는 과정을 계속 반복진행한다.

론문에서는 일반화된 하트리-포크근사방법을 리용하여 가벼운 핵들의 바닥상태에서 평균2제곱반경을 계산하고 DZ모형[5]으로 계산한 결과와 비교함으로써 고찰하는 근사방법의 정확성을 평가하기로 한다.

식 (5)에서 $V(\boldsymbol{r})$ 와 $V(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{r}_j)$ 를 어떻게 선택하는가는 핵계의 성질을 정확히 반영하는 문제뿐만아니라 자체모순없는 마당방법으로 이 방정식계를 푸는데 많은 영향을 준다. 따라서 중심력포텐샬부분을 핵의 평균포텐샬마당과 매우 근사하게 줌으로써 호상작용포텐샬의 영향을 작게 하였다. 그러면 방정식계를 자체모순없는 마당방법으로 풀수 있게 된다.[2]

론문에서는 핵의 중심포텐샬을 우드스-싹손포텐샬로 놓고 그속에서 핵자들이 서로 조화진동하면서 운동한다고 될수록 간단한 경우에 대하여 고찰하기로 한다. 핵자수가 $A$, 원자번호가 $Z$, 중성자수가 $N(=A-Z)$ 인 핵의 하밀토니안은 다음과 같이 표현된다.

$$\hat{H}=\sum_{i=1}^{A}\left[-\frac{\hbar^2}{2m_i}\Delta_i+V^{(\mathrm{np})}(r_i)+D\hat{\boldsymbol{l}}_i^2+C\hat{\boldsymbol{l}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{s}}_i\right]+\frac{1}{2}\sum_{i}^{A}\sum_{j\neq i}^{A}k(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)^2 \tag{6}$$

론문에서는 다음과 같은 우드스-싹손포텐샬을 리용하였다.

$$V^{(\mathrm{np})}(r)=-V_0^{(\mathrm{np})}\left[1+\exp\left(\frac{r-R}{a}\right)\right]^{-1} \tag{7}$$

여기서 $i$는 핵자의 번호, n은 중성자, p는 양성자를 의미하며 $V_0^{(\mathrm{np})}$ 는 포텐샬깊이로서 양성자와 중성자에 대하여 약간 차이나는데 여기서는 가벼운 핵을 대상으로 하기때문에 같은 값으로 취급하였다. 그리고 $R$ 는 핵반경으로서 $R=r_0A^{1/3}$ 로 계산되며 $r_0=1.2\mathrm{fm}$ 로 선택하였다. $a$ 는 분산파라메터로서 핵의 표면에서 핵밀도가 령으로 되게 하는 비률을 의미하며 $k$ 는 핵자-핵자호상작용결수이고 $D$ 와 $C$ 는 궤도호상작용과 스핀-궤도호상작용특성을 반영하는 결수들이다.

우선 결합에네르기를 실험값과 맞추는 방법으로 파라메터 $V_0$ 과 $a$ 를 구하였다.(표 1) 이렇게 하면 마수가 나오는 한립자준위배치가 얻어지게 된다. 이 한립자준위파동함수들을

표 1. 결합에네르기에 맞추기한 몇가지 핵들의 파라메터값들

| 핵 | 실험값[7]/MeV | $V_0$ /MeV | $a$ /fm |
|---|---|---|---|
| $^2$H | 2.224 573 | 21.353 48 | 0.95 |
| $^3$H | 8.481 821 | 25.099 91 | 0.95 |
| $^3$He | 7.718 058 | 22.422 45 | 1.20 |
| $^4$He | 28.295 674 | 33.094 11 | 1.20 |
| $^5$He | 27.410 | 30.193 10 | 1.30 |
| $^5$Li | 26.330 | 29.588 60 | 1.30 |
| $^6$Li | 31.994 55 | 30.773 38 | 1.30 |
| $^7$Li | 39.244 55 | 32.051 17 | 1.30 |

초기파동함수들로 선택하고 자체모순없는 마당방법을 리용하여 일반화된 하트리–포크방정식계 (1)과 (2)를 푼다. 결과 얻어진 중수소핵과 초중수소핵, 헬리움동위핵들, 리티움동위핵들의 바닥상태동경부분파동함수그라프를 그림 1～3에 보여주었다. 이에 기초하여 여러 핵의 바닥상태파동함수뿐아니라 양성자, 중성자밀도의 평균2제곱반경과 중성자피복두께 등을 구할수 있다.

다음 수소, 헬리움, 리티움동위원소들의 밀도분포를 그림 4～6에 보여주었다. 일반적으로 하트리–포크방법에서 중성자 혹은 양성자밀도는 다음과 같이 주어진다.

$$\rho_q(\boldsymbol{r}) = \sum_{\beta \in q} w_\beta \Psi_\beta^+(\boldsymbol{r}) \Psi_\beta(\boldsymbol{r}) \quad (q \text{ 는 중성자 혹은 양성자}) \tag{8}$$

여기서 $\Psi_\beta$는 상태 $\beta$로 주어진 한립자파동함수이며 $w_\beta$는 $\beta$상태의 점유률이다.

중성자와 양성자밀도의 평균2제곱반경, 중성자피복두께는 다음과 같은 식을 리용하여 평가할수 있다.[6]

$$r_q = \left\langle r_q^2 \right\rangle^{1/2} = \left( \frac{\int r^2 \rho_q dr}{\int \rho_q dr} \right)^{1/2} \tag{9}$$

$$t = r_\mathrm{n} - r_\mathrm{p} = \left\langle r_\mathrm{n}^2 \right\rangle^{1/2} - \left\langle r_\mathrm{p}^2 \right\rangle^{1/2} \tag{10}$$

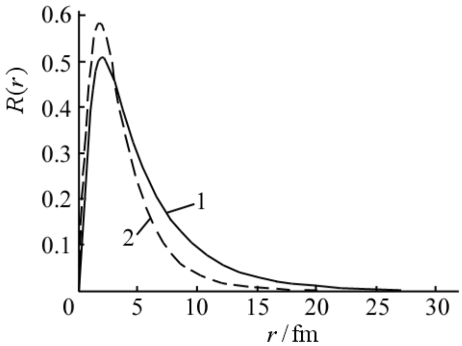


그림 1. 중수소(1)와 초중수소(2)핵의 바닥상태 동경부분파동함수그라프

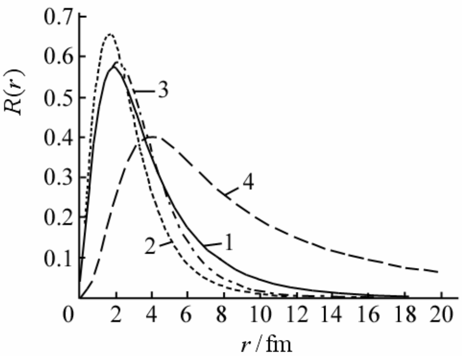


그림 2. 헬리움동위핵들의 바닥상태 동경부분파동함수그라프

1－$^3$He, 2－$^4$He, 3－$^5$He($L=0$), 4－$^6$He($L=1$)

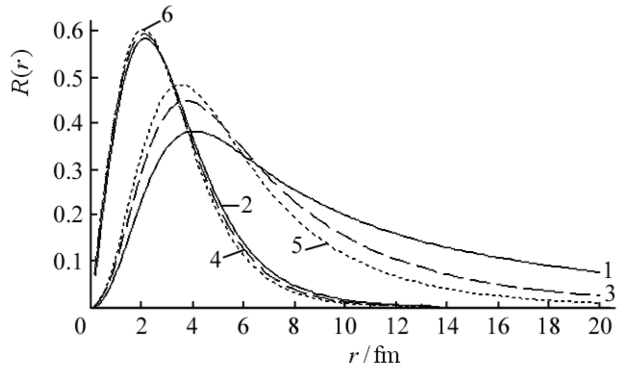


그림 3. 리티움동위핵들의 바닥상태동경부분파동함수그라프

1－$^5$Li($L=0$), 2－$^5$Li($L=1$), 3－$^6$Li($L=0$), 4－$^6$Li($L=1$), 5－$^7$Li($L=0$), 6－$^7$Li($L=1$)

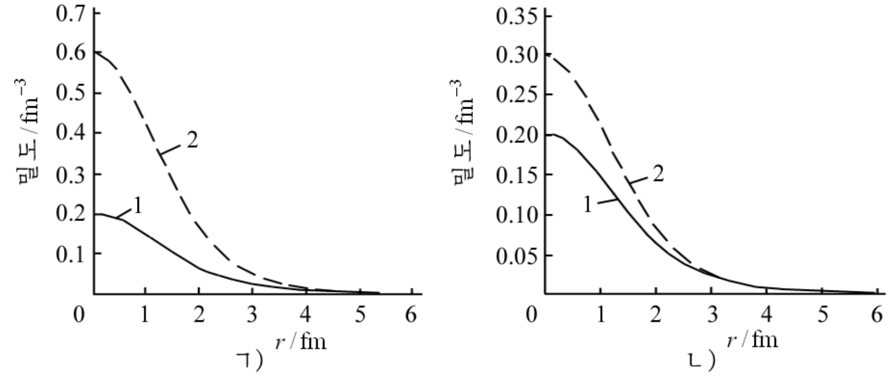


그림 4. 수소동위핵들의 밀도분포

ㄱ) 중성자밀도분포, ㄴ) 양성자밀도분포, 1－$^2$H, 2－$^3$H

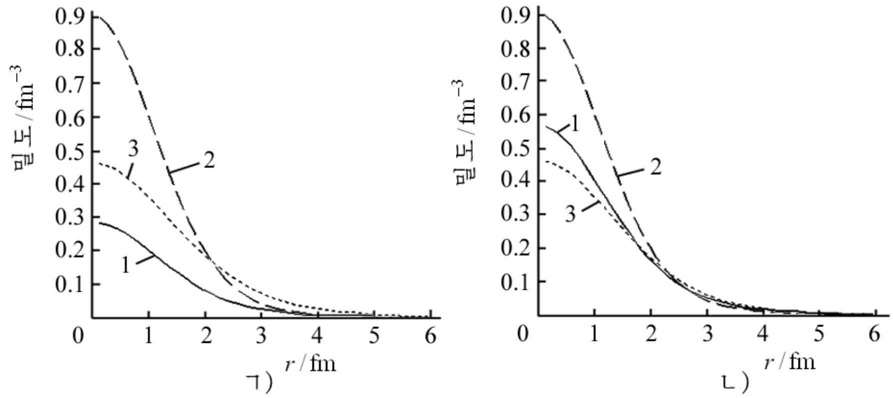


그림 5. 헬리움동위핵들의 밀도분포

ㄱ) 중성자밀도분포, ㄴ) 양성자밀도분포, 1－$^3$H, 2－$^4$H, 3－$^5$H

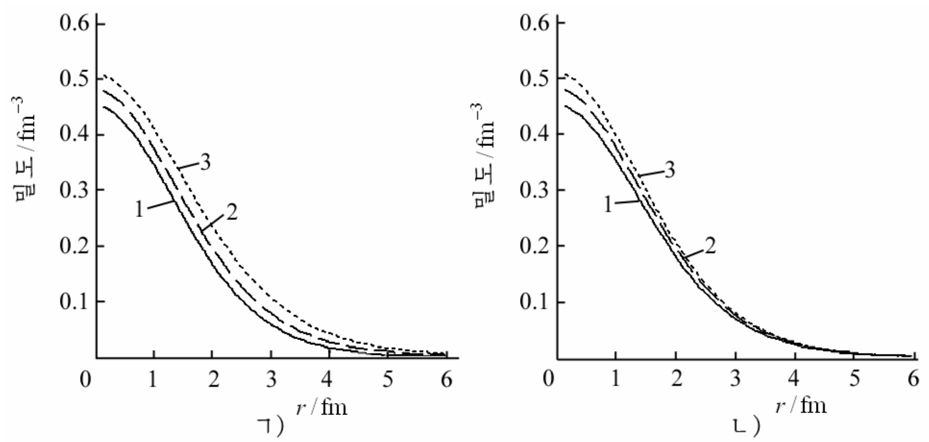


그림 6. 리티움동위핵들의 밀도분포

ㄱ) 중성자밀도분포, ㄴ) 양성자밀도분포, 1－$^5$H, 2－$^6$H, 3－$^7$H

매 핵의 중성자와 양성자밀도의 평균2제곱반경과 중성자피복두께에 대한 계산결과를 표 2에 주었다.

표 2. 중성자와 양성자밀도의 평균2제곱반경과 중성자피복두께(fm)

| 핵 | 중성자 | 양성자 | 피복두께 | DZ모형[4] | 핵 | 중성자 | 양성자 | 피복두께 | DZ모형[4] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $^{2}$H | 2.028 6 | 2.030 9 | −0.002 3 | 1.998 4 | $^{5}$He | 1.895 3 | 1.608 7 | 0.286 6 | 1.858 2 |
| $^{3}$H | 1.699 8 | 1.701 2 | −0.001 4 | 1.657 9 | $^{5}$Li | 1.621 8 | 1.919 0 | −0.297 2 | 2.055 2 |
| $^{3}$He | 1.889 1 | 1.890 6 | −0.001 5 | 2.035 1 | $^{6}$Li | 1.852 5 | 1.853 7 | −0.001 2 | 2.037 9 |
| $^{4}$He | 1.527 6 | 1.528 5 | −0.000 9 | 1.941 4 | $^{7}$Li | 1.986 7 | 1.805 1 | 0.181 6 | 2.011 1 |

일반적으로 무거운 핵들에서는 핵중심밀도가 중심근방에서는 일정하게 유지되다가 표면근방으로 가면서 급격히 감소하지만 그림 4～6에서 보는바와 같이 가벼운 핵들에서는 핵중심밀도가 유지되지 못하고 핵표면으로 가면서 급격히 감소한다. 또한 동위핵들의 밀도분포를 비교하면 원자번호가 클수록 동위핵들의 중성자밀도분포(혹은 양성자밀도분포)에서의 차이가 심하지 않고 원자번호가 작을수록 밀도분포의 차이는 심하다는것을 알수 있다.

또한 표 2로부터 중성자수가 양성자수에 비하여 많을수록 중성자피복두께는 정의 값을 가지고 더 커진다는것을 알수 있다. 이것은 가벼운 핵들에서는 중성자수가 양성자수에 비하여 그리 크지 않기때문에 대체로 중성자피복두께는 부의 값을 가지며 중성자가 핵을 전반적으로 덮지 못한다는것을 보여준다.

다음으로 계산결과와 선행연구결과[5]를 비교하면 마수핵인 $^{4}$He에서 제일 많이 차이난다는것을 알수 있다. 선행연구[5]에서 제기한 DZ모형은 마수핵을 특별히 잘 맞추도록 설계되여있으므로 계산결과들은 마수핵에서는 잘 맞지 않는다는 결론을 얻게 된다.

## 맺 는 말

1) 일반화된 하트리-포크근사방법으로 일부 가벼운 핵들의 평균2제곱반경을 계산하고 그 결과들을 DZ모형결과들과 비교함으로써 새 방법의 정확성을 평가하였다.

2) 일반화된 하트리-포크근사방법이 마수핵을 제외한 가벼운 핵들의 결합에네르기와 구조적성질들을 비교적 잘 설명한다는것을 밝혔다.

## 참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보 물리학, 65, 1, 124, 주체108(2019).
[2] **김일성**종합대학학보 물리학, 65, 4, 99, 주체108(2019).
[3] S. Goriely et al.; Phys. Rev., C 88, 061302, 2013.
[4] Ali A. Alzubadi, Duaa Majid Hameed; World Journal of Nuclear Science and Technology, 7, 67, 2017.
[5] J. Mendoza-Temis et al.; Nuclear Physics, A 843, 14, 2010.
[6] M. Brack et al.; Phys. Lett., 5, 36, 1985.
[7] G. Audi, A. H. Wapstra; Nucl. Phys., A 565, 1, 1993.

주체108(2019)년 12월 5일 원고접수

# Calculation of Mean Square Radius of Some Light Nuclei with the Generalized Hartree-Fock Approximation Method

*Kim Thae Song*, *Kim Ryon Hui* and *O Su Il*

We calculated the mean square radius of some light nuclei with the generalized Hartree-Fock approximation method and compared the results with DZ model results to assess the accuracy of the new method. We cleared that the generalized Hartree-Fock approximation method could relatively well explain the binding energies and structural properties of light nuclei except the magic nuclei.

Keywords: Hartree-Fock approximation, many-body problem