김일성종합대학학보 수 학
주체107(2018)년 제64권 제2호

라쁠라스변환을 리용하여 분수계미분방정식의 울람안정성을 판정하는 한가지 방법

리 영 도

자연과 사회의 여러 현상들을 수학적으로 모형화하고 해석하는 수단인 분수계미분방정식리론에서 안정성해석은 광범히 연구되고있다. 일반적으로 분수계미분방정식의 근사풀이가 정확한 풀이의 가까이에 놓여있는가 하는 개념을 울람안정성[2]이라고 부르고있다.

선행연구[3]에서는 바나흐공간에서 울람안정성문제를 해결하였으며 선행연구[4]에서는 그것을 일반화한 결과를 밝혔다.

1990년대부터 1계 및 고계미분방정식의 울람안정성에 대한 연구[7－9]가, 최근시기에는 분수계미분방정식의 하이어스－울람, 하이어스－울람－라씨아스안정성에 대한 연구[5, 6, 10]가 활발히 진행되고있다.

선행연구[5, 6]에서는 캐푸토도함수를 가지는 분수계미분방정식 $({}^CD_{0+}^{\alpha}y)(x)=F(x,\ y(x))$의 하이어스－울람안정성을 각각 부동점정리와 그론월부등식을 리용하여 밝혔다.

이 론문에서는 캐푸토도함수를 가지는 두가지 형태의 선형분수계미분방정식의 하이어스－울람－라씨아스안정성을 라쁠라스변환을 리용하여 판정하기 위한 방법을 연구하였다.

론문에서는 다음의 선형분수계미분방정식들에 대하여 고찰한다.

$$({}^CD_{0+}^{\alpha}y)(x)-\lambda y(x)=f(x) \tag{1}$$

$$({}^CD_{0+}^{\alpha}y)(x)-\lambda({}^CD_{0+}^{\beta}y)(x)=g(x) \tag{2}$$

여기서 $x>0,\ \lambda\in\mathbf{R},\ n-1<\alpha\le n,\ m-1<\beta\le m,\ m,\ n\in\mathbf{N},\ m\le n$이고 $f(x)$와 $g(x)$는 $\mathbf{R}_+$에서 정의된 실함수, ${}^CD_{0+}^{\alpha}$는 α계캐푸토도함수이다.

1. 예 비 지 식

정의 1 (하이어스－울람안정성)

분수계미분방정식 $F(f,\ y,\ D^{\alpha_1}y,\ \cdots,\ D^{\alpha_n}y)=0$에 대하여 주어진 $\varepsilon>0$과 $|F(f,\ y,\ D^{\alpha_1}y,\ \cdots,\ D^{\alpha_n}y)|\le\varepsilon$인 y에 대하여 $|y(x)-Y(x)|\le l(\varepsilon),\ \lim\limits_{\varepsilon\to0}l(\varepsilon)=0$을 만족시키는 분수계미분방정식의 풀이 $Y(x)$가 존재하면 주어진 분수계미분방정식은 하이어스－울람안정하다고 말한다.

정의 2 (하이어스－울람－라씨아스안정성)

정의 1에서 $\varepsilon,\ l(\varepsilon)$대신에 $\varphi(x),\ \psi(x)$로 바꾸었을 때 주어진 분수계미분방정식은 하이어스－울람－라씨아스안정하다고 말한다. 여기서 $\varphi(x),\ \psi(x)$는 y, Y에 양적으로 의존하지 않는 정인 실값함수이다. 다음의 보조정리들에서는 라쁠라스변환의 성질들을 준다.

보조정리 1 [1] $L\{y_1(x) * y_2(x)\} = L\{y_1(x)\}L\{y_2(x)\}$이다. 여기서

$$y_1(x) * y_2(x) = \int_0^x y_1(x-\xi) y_2(\xi) d\xi$$

이다.

보조정리 2 [1] $\alpha > 0,\ n-1 < \alpha \le n,\ n \in \mathbf{N}$이고 $y \in C^n(\mathbf{R}_+)$이며 $\forall b > 0,\ y^{(n)} \in L_1(0,\ b)$라고 하자. 또한 $|y^{(n)}(x)| \le Be^{q_0 x}(x > b > 0,\ q_0 \equiv \mathrm{const},\ B > 0,\ q_0 > 0)$이 성립한다고 하자. 이때 $L\{y(x)\}$와 $L\{D^n y(x)\}$가 존재하고 $\lim_{x \to \infty}(D^k y)(x) = 0(\ k = \overline{0,\ n-1})$이 성립하면 다음의 식이 성립한다.

$$L\{{}^C D_{0+}^{\alpha} y(x)\}(s) = s^{\alpha} L\{y(x)\}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1}(D^k y)(0)$$

특히 $0 < \alpha \le 1$이면

$$L\{{}^C D_{0+}^{\alpha} y(x)\}(s) = s^{\alpha} L\{y(x)\}(s) - s^{\alpha-1} y(0)$$

이다.

보조정리 3 [1] $\mathrm{Re}(s) > 0,\ \lambda \in \mathbf{C},\ |\lambda s^{-\alpha}| < 1$이면

$$L\{x^{\beta-1} E_{\alpha,\,\beta}(\lambda x^{\alpha})\}(s) = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha} - \lambda}$$

이다. 특히 $\alpha = \beta$이면

$$L\{x^{\alpha-1} E_{\alpha,\,\alpha}(\lambda x^{\alpha})\}(s) = \frac{1}{s^{\alpha} - \lambda}$$

이다. 여기서 $E_{\alpha,\,\beta}(\lambda x^{\alpha})$은 미타그－레플러함수이다.

2. 기 본 결 과

여기서는 분수계미분방정식 (1)과 (2)의 하이어스－울람－라씨아스안정성을 밝힌다.

정리 1 $\lambda \in \mathbf{R},\ n-1 < \alpha \le n,\ n \in \mathbf{N}$이고 $f(x)$는 $(0,\ +\infty)$에서 정의된 실값함수라고 하자. 만일 함수 $y: (0,\ \infty) \to \mathbf{R}$가 임의의 $x > 0$과 단조증가인 함수 $\varphi(x) > 0$에 대하여 부등식

$$|({}^C D_{0+}^{\alpha} y)(x) - \lambda y(x) - f(x)| \le \varphi(x)$$

를 만족시키면 부등식 $|y - Y| \le \psi(x)$를 만족시키는 분수계미분방정식 (1)의 풀이 $Y: (0,\ \infty) \to \mathbf{R}$가 있다. 여기서 $\psi(x) = x^{\alpha}\varphi(x) E_{\alpha,\alpha+1}(|\lambda| x^{\alpha})$이다.

증명 $k = 0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$에 대하여 $y^{(k)}(0) = b_k$로 놓자.

$H(x) = ({}^C D_{0+}^{\alpha} y)(x) - \lambda y(x) - f(x)$라고 하면 보조정리 2로부터 다음의 결론을 얻는다.

$$L\{H(x)\} = L\{({}^C D_{0+}^{\alpha} y)(x) - \lambda y(x) - f(x)\} =$$
$$= s^{\alpha} L\{y(x)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} y^k(0) - \lambda L\{y(x)\} - L\{f(x)\} = (s^{\alpha} - \lambda) L\{y(x)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} b_k - L\{f(x)\}$$

따라서

$$L\{y(x)\}=\frac{\sum_{k=0}^{n}s^{\alpha-k-1}b_k+L\{f(x)\}}{s^\alpha-\lambda}+\frac{L\{H(x)\}}{s^\alpha-\lambda} \tag{3}$$

이다. 이제

$$Y(x)=\sum_{k=0}^{n-1}b_k x^k E_{\alpha,\,k+1}(\lambda x^\alpha)+\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\,\alpha}[\lambda(x-t)^\alpha]f(t)dt \tag{4}$$

로 놓으면 보조정리 1과 3으로부터 다음의 식이 성립한다.

$$L\{Y(x)\}=L\left\{\sum_{k=0}^{n-1}b_k x^k E_{\alpha,\,k+1}(\lambda x^\alpha)\right\}+L\left\{\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\,\alpha}[\lambda(x-t)^\alpha]f(t)dt\right\}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}b_k L\{x^k E_{\alpha,\,k+1}(\lambda x^\alpha)\}+L\{x^{\alpha-1}E_{\alpha,\,\alpha}(\lambda x^\alpha)\}L\{f(x)\}=\frac{\sum_{k=0}^{n-1}b_k s^{\alpha-(k+1)}+L\{f(x)\}}{s^\alpha-\lambda} \tag{5}$$

따라서

$$L\{({}^cD_{0+}^\alpha Y)(x)-\lambda Y(x)\}=s^\alpha L\{Y(x)\}-\sum_{k=0}^{n-1}s^{\alpha-k-1}b_k-\lambda\{Y(x)\}=L\{f(x)\}$$

이다. L 이 1:1변환이므로 $({}^cD_{0+}^\alpha Y)(x)-\lambda Y(x)=f(x)$ 이다.

그러므로 $Y(x)$ 는 주어진 미분방정식의 풀이로 된다. 식 (3)과 (5)로부터

$$L\{y(x)-Y(x)\}=\frac{L\{H(x)\}}{s^\alpha-\lambda} \tag{6}$$

가 나오며 보조정리 1과 3을 리용하면

$$L\{(x^\alpha E_{\alpha,\,\alpha}(\lambda x^\alpha))*H(x)\}=L\{x^{\alpha-1}E_{\alpha,\,\alpha}(\lambda x^\alpha)\}L\{H(x)\}=\frac{L\{H(x)\}}{s^\alpha-\lambda} \tag{7}$$

가 성립한다. 식 (6)과 (7)로부터 $y(x)-Y(x)=x^{\alpha-1}E_{\alpha,\,\alpha}(\lambda x^\alpha)*H(x)$ 가 성립하며 따라서

$$|y(x)-Y(x)|=|(x^{\alpha-1}E_{\alpha,\,\alpha}(\lambda x^\alpha))*H(x)|=\left|\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\,\alpha}[\lambda(x-t)^\alpha]H(t)dt\right|=$$

$$=\left|\int_0^x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k(x-t)^{\alpha k+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}H(t)dt\right|=\left|\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x\frac{\lambda^k(x-t)^{\alpha k+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}H(t)dt\right|\le$$

$$\le\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x\left|\frac{\lambda^k(x-t)^{\alpha k+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}\right||H(t)|\,dt\le\varphi(x)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|\lambda|^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha k+\alpha-1}dt\le$$

$$\le\varphi(x)x^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(|\lambda|x^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha+1)}\le\varphi(x)x^\alpha E_{\alpha,\,\alpha+1}(|\lambda|x^\alpha)$$

로 된다.(증명끝)

정리 2　$\lambda\in\mathbf{R}$, m, $n\in\mathbf{N}$, $n-1<\alpha\le n$, $m-1<\beta\le m$, $0<\beta<\alpha$ 이고 $g(x)$ 가 $(0,\ +\infty)$ 에서 정의된 실값함수라고 하자.

만일 함수 y 가 임의의 $x>0$ 과 단조증가인 함수 $\Phi(x)>0$ 에 대하여 부등식

$$|({}^cD_{0+}^{\alpha}y)(x)-\lambda({}^cD_{0+}^{\alpha}y)(x)-g(x)|\le\Phi(x) \tag{8}$$

를 만족시키면 미분방정식 (2)의 적당한 풀이 $Y:(0,\ \infty)\to\mathbf{R}$ 가 있어서 다음의 부등식을 만족시킨다.

$$|y-Y|\le\Phi(x)x^{\alpha}E_{\alpha-\beta,\,\alpha+1}(|\lambda|\,x^{\alpha-\beta}) \tag{9}$$

증명 정리 1과 마찬가지로 $k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$ 에 대하여 $y^{(k)}(0)=b_k$ 로 놓자. $x>0$ 에 대하여 $H(x)=({}^CD_{0+}^{\alpha}y)(x)-\lambda({}^CD_{0+}^{\beta}y)(x)-g(x)$ 로 놓으면 보조정리 2로부터

$$L\{H(x)\}=(s^{\alpha}-\lambda s^{\beta})L\{y(x)\}-\sum_{k=0}^{n-1}s^{\alpha-k-1}b_k+\lambda\sum_{k=0}^{m-1}s^{\beta-k-1}b_k-L\{g(x)\} \tag{10}$$

$$L\{y(x)\}=\frac{\sum_{k=0}^{n}s^{\alpha-k-1}b_k-\lambda\sum_{k=0}^{m-1}s^{\beta-k-1}b_k+L\{g(x)\}}{s^{\alpha}-\lambda s^{\beta}}+\frac{L\{H(x)\}}{s^{\alpha}-\lambda s^{\beta}} \tag{11}$$

$$Y(x)=\sum_{k=0}^{n-1}s^{\alpha-k-1}b_k+\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}E_{\alpha-\beta,\,\alpha}[\lambda(x-t)^{\alpha-\beta}]g(t)dt \tag{12}$$

$$L\{Y(x)\}=\frac{\sum_{k=0}^{n-1}b_ks^{\alpha-k-1}-\lambda\sum_{k=0}^{m-1}s^{\beta-k-1}b_k+L\{g(x)\}}{s^{\alpha}-\lambda s^{\beta}} \tag{13}$$

$$L\{({}^CD_{0+}^{\alpha}Y)(x)-\lambda({}^CD_{0+}^{\beta}Y)(x)\}=L\{g(x)\} \tag{14}$$

$$({}^CD_{0+}^{\alpha}Y)(x)-\lambda({}^CD_{0+}^{\beta}Y)(x)=g(x) \tag{15}$$

가 성립하며 나머지증명은 정리 1과 류사하다.(증명끝)

실례 다음의 분수계미분방정식에 대하여 고찰하자.

$$({}^C D_{0+}^{2}y)(x)-\frac{1}{2}({}^C D_{0+}^{\frac{3}{2}}y)(x)=\frac{3}{2}x-\frac{4}{3\sqrt{\pi}}x^{\frac{3}{2}} \tag{16}$$

여기서 $\alpha=2,\ \beta=\frac{3}{2},\ \lambda=\frac{1}{2},\ g(x)=\frac{3}{2}x-\frac{4}{3\sqrt{\pi}}x^{\frac{3}{2}}$ 이다.

$\Phi(x)=x$ 에 대하여 $y_0(x)=x^2$ 은 다음의 부등식을 만족시킨다.

$$\left|({}^C D_{0+}^{2}y)(x)-\frac{1}{2}({}^C D_{0+}^{\frac{3}{2}}y)(x)-\frac{3}{2}x+\frac{4}{3\sqrt{\pi}}x^{\frac{3}{2}}\right|<\Phi(x)$$

이때 $y_0(0)=0,\ y_0'(0)=0$ 이며 정리 2로부터 방정식 (10)의 정확한 풀이는

$$Y(x)=\int_0^x(x-t)^{\frac{1}{2}}E_{\frac{1}{2},\,2}\left[\frac{1}{2}(x-t)^{\frac{1}{2}}\right]\left(\frac{3}{2}t-\frac{4}{3\sqrt{\pi}}t^{\frac{3}{2}}\right)dt$$

이다. 그러면 정리 2로부터 $y_0(x)$의 조종함수는 $x^3 E_{\frac{1}{2},3}\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)$로 되고 다음의 부등식이 성립하게 된다.

$$|y_0(x)-Y(x)|<x^3 E_{\frac{1}{2},3}\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)$$

따라서 분수계미분방정식 (10)은 하이어스－울람－라씨아스안정하다.

참 고 문 헌

[1] A. A. Kilbas; Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, 15~80, 2006.
[2] S. M. Ulam; A Collection of Mathematical Problems, Interscience Publishers, 70~130, 1968.
[3] D. H. Hyers; Proc. Nat. Acad. Sci., 27, 222, 1941.
[4] T. M. Rassias; Proc. Amer. Math. Soc., 72, 297, 1978.
[5] J. R. Wang et al.; Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., 17, 2530, 2012.
[6] J. R. Wang et al.; Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 63, 1, 2011.
[7] H. Rezaei et al.; J. Math. Anal. Appl., 403, 244, 2013.
[8] D. Popa et al.; J. Math. Anal. Appl., 381, 530, 2011.
[9] R. Hamid et al.; Bull. Malays. Math. Sci. Soc., 38, 855, 2015.
[10] A. M. Hassan. et al.; Journal of Function Spaces, 2016, Article ID 9623587

주체106(2017)년 12월 5일 원고접수

A Method for Testing Ulam Stability of Fractional Differential Equations by using the Laplace Transformation

Ri Yong Do

In this paper, we give a method for testing Hyers-Ulam-Rassias stability of two types of linear fractional differential equations by using the Laplace transformation and illustrate it with an example.

Key words: Ulam stability, fractional differential equation, Laplace transformation, Mittag-Leffler function