김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체106(2017)년 제63권 제4호 Vol. 63 No. 4 JUCHE106(2017).

퇴화형분산방정식의 기본풀이의 평가와 그 응용

채규성, 리옥

우리는 현대수학과 물리학에서 많이 연구되고있는 한가지 퇴화형분산방정식의 풀이의 유일존재성과 관련한 문제에 대하여 연구하였다.

론문에서는 다음과 같은 분산방정식을 론의한다.

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,\ x)-P(D)u(t,\ x)+V(t,\ x)u(t,\ x)=F(t,\ x) \\ u(0,\ x)=u_0(x),\ t\in \boldsymbol{R},\ x\in \boldsymbol{R}^n \end{cases} \tag{1}$$

여기서 $D=\dfrac{1}{i}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\ \dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)$, $n\ge 2$ 이고 상함수 $P:\boldsymbol{R}^n\to \boldsymbol{R}$ 는 $m(\ge 2$, m ; 짝수)계퇴화타원형다항식이며 $V(t,\ x)$ 는 실값포텐샬, $F(t,\ x)$ 는 비동차항이다.

적분방정식 $u(t,\ x)=W(t)u_0(x)+\int_0^t W(t-s)[F(s)-V(s)u(s)]ds$ 의 풀이를 방정식 (1)의 풀이로 정의한다. 여기서 $W(t)u_0(x):=F^{-1}(e^{itP}Fu_0)=(2\pi)^{-n/2}\int_{\boldsymbol{R}^n} e^{itP(\xi)+i\langle x,\ \xi\rangle}Fu_0(\xi)d\xi$ 이다.

방정식 (1)의 풀이의 L^p 평가를 얻자면 진동적분인 $F^{-1}(e^{itP})(x)$ 를 평가하여야 한다.

상함수 P 가 타원형이면 부분적분법에 의하여 $F^{-1}(e^{itP})(x)$ 가 매 $t\ne 0$ 에 대하여 변수 x 에 관하여 무한번 미분가능하다.[7]

$F^{-1}(e^{itP(\xi)})(x)$ 의 변수 t, x 에 관한 점적평가를 얻자면 몇가지 보충적인 가정들이 요구된다.

앞으로 일반성을 잃지 않고 $\xi\ne 0$ 에 대하여 $P_m(\xi)>0$ 이라고 가정한다. 여기서 $P_m(\xi)$ 는 $P(\xi)$ 의 주요부이다.

$P_m(\xi)$ 의 헤씨안행렬이 $HP_m(\xi):=\det\left(\dfrac{\partial^2 P_m(\xi)}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\right)\ne 0,\ \xi\ne 0$ 을 만족시킬 때 다항식 P 를 불퇴화다항식이라고 부른다. 이 조건은 P_m 의 수준초곡면 $\Sigma:=\{\xi\in \boldsymbol{R}^n : P_m(\xi)=1\}$ 의 가우스곡률이 도처에서 령이 아니라는 조건과 동등하다.[1, 4, 7]

또한 선행연구[7]에서는 $\xi_1^4+6\xi_1^2\xi_2^2+\xi_2^4$, $\xi_1^m+\xi_2^m\ (m=4, 6, \cdots)$ 과 같은 퇴화인 타원형다항식 P 에 대한 진동적분 $F^{-1}(e^{itP})(x)$ 를 평가하는것이 어려우므로 다음과 같은 조건 (H_b) 를 도입하였다.

조건 (H_b) $\{\lambda_k(\xi)\}_1^n$ 은 $HP_m(\xi)$ (헤씨안행렬)의 고유값들이고 $0<b<1$ 일 때 다음과 같다.

① $\max\limits_{1\le k\le n}|\lambda_k(\xi)|^{-1}=O(|\xi|^{-(m-2)b})\ \ (|\xi|\to\infty)$

② $\{\lambda_k(\xi)\}_1^n$ 들은 모두 같은 부호를 가진다.

$b=1$ 일 때 조건 (H_1) 은 P 의 불퇴화성조건과 동등하다.

이로부터 $b<1$ 일 때 조건 (H_b) 는 퇴화조건으로 되며 b 는 P 의 퇴화성을 반영하는 중요한 지수로 된다.

선행연구[7]에서는 P 가 조건 (H_b) $(0<b<1)$ 를 만족시킬 때 평가

$$|F^{-1}(e^{itP})(x)| \le C(|t|^{-\sigma}+|t|^{\rho}),\ t\ne 0$$

을 얻었는데 이 평가는 변수 x 에 관한 감소에 대한 평가가 부족한 결함이 있다.

론문의 기본목적은 조건 (H_b) 밑에서 변수 $t,\ x$ 에 관한 $F^{-1}(e^{itP})(x)$ 를 평가하고 진동적분연산자 $W(t)$ 의 L^p-L^q 평가에 기초하여 한가지 시간의존포텐샬을 가지는 분산방정식 (1)에 대한 풀이의 유일존재성을 얻는것이다.

이를 위하여 선행연구[5, 6]의 방법으로 보간리론을 적용하고 선행연구[3]의 방법을 고계인 경우로 확장하여 방정식 (1)의 풀이가 유일존재하기 위한 포텐샬과 비동차항의 범위를 확정하였다.

다음의 방정식을 론의하자.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,\ x)=iP(D)u(t,\ x)\\ u(0,\ x)=u_0(x),\ \ t\in\boldsymbol{R},\ \ x\in\boldsymbol{R}^n\end{cases}\tag{2}$$

$D=-i\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1},\ \cdots,\ \dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)$, $P:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ 가 비동차타원형다항식으로서 조건 $(\mathrm{H}_b)(0\le b\le 1)$ 를 만족시키면 $|\xi|\ge L$ 에 대하여 $|\lambda_k|\ge C|\xi|^{(m-2)b}$, $|\nabla P(\xi)|\ge C|\xi|^{m-1}$ 이 성립되는 $L>0$ 이 존재한다.

푸리에변환에 의하여 방정식 (2)의 풀이는 다음과 같다.

$$u(t,\ x)=I(t,\ \cdot)^{*}u_0(x),\ u_0\in S(\boldsymbol{R}^n),\ \ I(t,\ x):=(2\pi)^{n/2}\int_{\boldsymbol{R}^n}e^{itP(\xi)+i\langle x,\ \xi\rangle}d\xi$$

기본풀이 $I(t,\ x)$ 를 다음과 같이 두 부분으로 가를수 있다.

$$I(t,\ x)=\int_{\boldsymbol{R}^n}e^{itP(\xi)+i\langle x,\ \xi\rangle}\gamma(\xi)d\xi+\int_{\boldsymbol{R}^n}e^{itP(\xi)+i\langle x,\ \xi\rangle}(1-\gamma(\xi))d\xi=I_1(t,\ x)+I_2(t,\ x),\ \ \gamma(\xi)=\begin{cases}0,\ |\xi|<L\\1,\ |\xi|>L\end{cases}$$

앞으로 $t,\ x,\ \xi$ 에 무관계한 상수들을 필요한 경우를 제외하고는 C 로 표시한다.

정리 1 P 가 비동차타원형다항식이고 조건 (H_b), $b\in[1/2,\ 1]$ 을 만족시킨다고 하자. 그러면 적당한 상수 $L,\ C>0$ 이 있어서 다음의 식이 성립된다.

$$|I_1(t,\ x)|=\begin{cases}C|t|^{-n/2}\ (1+|t|^{-1}|x|)^{-\mu_b}, & |t|\ge 1\\ C|t|^{-\sigma_b}\ (1+|t|^{-\beta_b}|x|)^{-\mu_b}, & 0<|t|\le 1\end{cases}\tag{3}$$

여기서 $\sigma_b=\dfrac{n}{(m-2)(2b-1)+2}$, $\mu_b=\dfrac{n(m-2)(2b-1)}{2(m-1)}$, $\beta_b=\dfrac{2(m-2)(b-1)+1}{(m-2)(2b-1)+2}$ 이다.

정리 1과 $I_2(t,\ x)$ 에 대한 론의를 통하여 $I_2(t,\ x)$ 에 대한 다음의 평가를 얻을수 있다.

정리 2 정리 1의 가정밑에서 다음의 평가식이 성립된다.

$$|I(t,\ x)|=\begin{cases}C(1+|t|^{-1}|x|)^{-\mu_b}, & |t|\ge 1\\ C|t|^{-\sigma_b}\ (1+|t|^{-\beta_b}|x|)^{-\mu_b}, & 0<|t|\le 1\end{cases}\tag{4}$$

주의 1 선행연구[2]에서는 P가 불퇴화일 때 다음의 평가를 주었다.

$$|I(t,\ x)|=\begin{cases} C(1+|t|^{-1}|x|)^{-\mu_b}, & |t|\ge 1 \\ C|t|^{-n/m}(1+|t|^{-1/m}|x|)^{-\mu_b}, & 0<|t|\le 1 \end{cases} \tag{5}$$

$b=1$이면 $\sigma_b=n/m,\ \beta_b=1/m$이므로 정리 1은 선행연구[2]에서 얻은 평가 (5)의 일반화로 되며 조건 (H_b)밑에서 다음의 평가를 보여주었다.

$$|I_1(t,\ x)|=\begin{cases} C|t|^{-\rho_b}, & |t|\ge 1 \\ C|t|^{-\sigma_b}, & 0<|t|\le 1 \end{cases},\quad \rho_b=\frac{n[(m-3)-b(m-2)]}{(m-2)(2b-1)+2}\ge -\frac{n}{2}$$

즉 정리 1은 선행연구[7]에서 얻은 평가의 개선으로 된다.

그리고 선행연구[4]에서는 조건 (H_b)밑에서 다음의 평가를 얻었다.

$$|I(t,\ x)|\le C|t|^{-n(1+(1-b)(m-2))/m}(1+|t|^{-1/m}|x|)^{\mu_b},\ 0<|t|\le 1$$

간단한 계산에 의하여 $n(1+(1-b)(m-2))/m\ge\sigma_b,\ 1/m\ge\beta_b$이므로 정리 1은 선행연구[4]에서 얻은 평가의 개선으로 된다.

다음 P는 m차타원형다항식이고 $\Delta_b=\{(p,\ q):(1/p,\ 1/q)\in ABCD\}$라고 하자. 여기서

$$A=(1/2,\ 1/2),\ B=(1,\ 1/\tau_b),\quad C=(1,\ 0),\ D=(1/\tau_b,\ 0),$$
$$\tau_b=2(m-1)/[(m-2)(2b-1)],\ b\in[1/2,\ 1],\ 1/\tau_b+1/\tau_b'=1.$$

$b=1/2$인 경우에는 $\tau_b=\infty\wedge\tau'_b=1$이다.

정리 3 P가 조건 (H_b)를 만족시킨다고 하면 다음의 식이 성립된다.

$$\|W(t)\|_{L^p-L^q}\le\begin{cases} C|t|^{\sigma_b\left(1-\frac{2}{p}\right)+\beta_b n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}, & 0<|t|\le 1 \\ C|t|^{n\left|\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right|}, & |t|>1 \end{cases}$$

여기서 $(p,\ q)\in\Delta_b$이다. 그리고 $(p,\ q)=(1,\ \tau_b)$일 때 L^1을 H^1로 바꾸면 된다.

주의 2 정리 3과 같은 조건밑에서 선행연구[4]에서는 다음과 같은 L^p-L^q평가를 얻었다.

$$\|W(t)\|_{L^p-L^q}\le C|t|^{-n(1+(1-b)(m-2))(2/p-1)/m},\ 0<|t|\le 1$$

주의 1에서와 같이 $n(1+(1-b)(m-2))/m\ge\sigma_b$이므로 정리 3은 선행연구[4]에서 얻은 결과의 개선으로 된다.

앞으로 구간 I는 다음의 두 경우중 하나로 가정하고 론의한다.

① $I=[0,\ T],\ T>0$

② $I=[0,\ \infty)$, $\mathrm{supp}\,Fu_0\subseteq\Omega:=\{\xi\in\boldsymbol{R}^n:|\xi|>L\}$

이때 정리 3에 의하여 $W(t)$의 다음과 같은 L^p-L^q평가가 얻어진다.

$$\|W(t)u_0\|_{L^p}\le C|t|^{\sigma_b(1-2/p)}\|u_0\|_{L_p},\ t\in I$$

$b\in[1/2,\ 1]$, $m_b=(m-2)(2b-1)+2$라고 하면 실수쌍 $(q,\ r)$에 대하여 다음의 식을 만족시키는 실수쌍 $(q,\ r)$를 방정식 (2)의 허용쌍이라고 부른다.

$$\frac{1}{q}=\frac{n}{m_b}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right),\quad \begin{cases} 2\le r\le\infty, & n=1 \\ 2\le r<\infty, & 1<n\le m_b \\ 2\le r<2n/(n-m_b), & n>m_b \end{cases}$$

다음의 표시식을 도입하자.

$$L_1^q L^r := \left\{ u \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{C} : \left(\int_I \| u(t, \cdot) \|_{L^r(\boldsymbol{R}^n)}^q dt \right)^{1/q} < +\infty \right\},\ C_I L^r := C(I,\ L^r(\boldsymbol{R}^n))$$

정리 4 $u_0 \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$, $F(t,\ x) \in L_I^{q_1'} L^{r_1'}$ 이고 $(q,\ r)$ 와 $(q_1,\ r_1)$ 이 방정식 (2)의 허용쌍이면 적당한 상수 $C>0$ 이 있어서 다음과 같은 슈트리카르츠평가가 성립된다.

$$\| W(t) u_0(x) \|_{L^q{}_I L^r} \le C \| u_0 \|_{L^2},\quad \left\| \int_I W(t-s) F(s,\ x) ds \right\|_{L_I{}^q L^r} \le C \| F \|_{L_I{}^{q1} L^{r1}}$$

정리 5 $V(t,\ x)$ 는 실값포텐샬함수로서 $\frac{1}{s} + \frac{n}{m_b}\frac{1}{l} = 1$ 인 어떤 고정된 $l \in \left(\frac{m}{m_b},\ \infty \right]$, $s \in [1,\ \infty)$ 에 대하여 $V(t,\ x) \in L_I^s L^l$ 이고 $u_0 \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$ 이며 $(q_1,\ r_1)$ 은 방정식 (2)의 허용쌍이라고 하자. 또한 $F \in L_I^{q_1'} L^{r_1'}$ 이고 $P: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ 는 조건 (H_b) 를 만족시키는 $m(\ge 2)$ 계비동차타원형퇴화다항식이라고 하자.

이때 방정식 (2)는 임의의 허용쌍 $(q,\ r)$ 에 대하여 $L_I^q L^r$ 에 포함되는 유일풀이 $u \in C_I L^2$ 를 가지며 슈트리카르츠평가 $\| u \|_{L_I^q L^r} \le C_v \| u_0 \|_{L^2} + C_v \| F \|_{L_I^{qi} L^{ri}}$ 가 성립된다.

또한 $F \equiv 0$ 이면 $\| u(t) \|_{L^2} \equiv \| u_0 \|_{L^2}$, $t \in I$ 가 성립된다.

참 고 문 헌

[1] M. Balabane et al.; Trans. Amer. Math. Soc., 120, 357, 1985.
[2] S. Cui; J. Fourier Anal. Appl., 12, 605, 2006.
[3] V. Pierfelice et al.; Math. Ann., 333, 271, 2005.
[4] Y. Ding et al.; J. Math. Anal. Appl., 356, 711, 2009.
[5] C. E. Kenig et al.; Indiana Univ. Math. J., 40, 33, 1991.
[6] A. Arnold et al.; Monatsh Math., 168, 253, 2012.
[7] X. Yao et al.; J. Diff. Equation, 244, 741, 2008.

주체105(2016)년 12월 5일 원고접수

The Estimates of Fundamental Solution for Degenerate Dispersive Equation and Its Application

Chae Kyu Song, Ri Ok

We establish the global point-wise time-space estimates for the fundamental solution of dispersive equation of the form where the symbol is a real degenerate elliptic polynomial and then use such estimates to establish $L^p - L^q$ estimates of solution operator and unique-existence of solution for dispersive equation with a time-dependent potential.

Key words: degenerate dispersive equation, time-dependent potential