김일성종합대학학보 JOURNAL OF KIM IL SUNG UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체104(2015)년 제61권 제5호 Vol. 61 No. 5 JUCHE104(2015).

목표모임에로의 도달시각을 가지는 혼합조종문제에 대한 준변분부등식의 점성풀이

허명송, 오광남, 황철준

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《선진과학기술을 받아들이기 위한 사업을 적극적으로 벌려야 하겠습니다.

선진과학기술을 받아들이는것은 나라의 과학기술을 빨리 발전시키기 위한 중요한 방도의 하나로 됩니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제15권 499~500페지)

선행연구에서는 무한시간혼합조종문제를 설정하고 비용함수들이 유계[1] 및 비유계[2]인 경우에 값함수가 만족하여야 할 준변분부등식을 유도하고 그것의 점성의 의미에서의 풀이의 유일성을 증명하였다.

론문에서는 목표모임에로의 도달시각을 가지는 혼합최량조종문제를 설정하고 동적계획법의 원리를 응용하여 그것의 값함수가 점성의 의미에서의 하밀톤－야코비변분부등식의 유일한 풀이라는것을 증명하였다.

1. 값함수의 련속성

여기서는 목표모임에로의 도달시각을 가지는 혼합최량조종문제의 값함수의 련속성과 유일성에 대한 론의를 위하여 필요한 가정들을 주었다.

혼합조종계의 련속계에서 련속조종에 따르는 상태의 전개는 상미분방정식

$$\dot{y}(t)=f(y(t),\ q(t),\ u(t)),\quad y(0)=x$$

로 표현된다. 여기서 $q(t)\in I=\{1,\ 2,\ \cdots\}$은 리산변수이다. 또한 $f=\{f_i\},\ f_i:\Omega_i\times X\to\Omega_i$이고 $\Omega=\bigcup_i\Omega_i$ (Ω_i는 $\boldsymbol{R}^{d_i}$의 닫긴련결부분모임)이며 X는 련속조종모임으로서

$$X=\{a:[0,\ \infty)\to U\,|\,u(\cdot):\ \text{가측},\ U:\ \text{콤팍트거리공간}\}.$$

t시각의 혼합조종계의 상태를 $(y_x(t,\ u),\ q(t))$라고 하자.

혼합조종계에서는 초기상태로부터 출발한 궤도가 이미 설정된 무조건이행모임 A와 조종자의 결심에 따라 이행하는 이행모임 C에 도달하면 다른 상태공간의 초기모임 D에로 이행하게 된다.

$$A=\bigcup_i A_i,\ A_i\subset\Omega_i\subset\boldsymbol{R}^{d_i},\ \ C=\bigcup_i C_i,\ C_i\subset\Omega_i\subset\boldsymbol{R}^{d_i},\ \ D=\bigcup_i D_i,\ D_i\subset\Omega_i\subset\boldsymbol{R}^{d_i}$$

초기점 x에서 출발한 궤도가 이행모임 A에 도달한 시각들의 모임을 $\{\tau_i\}$, 이행모임 C에서 이행을 결심한 시각들의 모임을 $\{\xi_i\}$라고 하자.

모임 $A,\ C,\ D$와 넘기기 $f,\ g$에 대하여 선행연구[1]에서의 가정들을 주자.

이제 어떤 $j\in I$에 대하여 다음의 가정들을 만족시키는 목표모임 $\Gamma\subset\Omega_j$를 생각하자.

가정 1 $\Gamma \subset \Omega_j$ 는 닫긴모임이고 $\partial\Gamma$ 는 콤팍트이며

$$d(\Gamma,\ D_j) \ge \beta > 0,\ d(\Gamma,\ A_j) \ge \beta > 0,\ d(\Gamma,\ C_j) \ge \beta > 0\ .$$

가정 2 $\Gamma \subset \Omega_j$ 에서 횡단조건이 만족된다.

론문에서는 조종 $(u(\cdot),\ v,\ \xi_i,\ y(\xi_i)')$ 에 대하여 모임 Γ 를 목표모임으로 하는 다음의 혼합조종문제를 론의하였다.

목적함수 J 는 다음의 식으로 주어진다.

$$J(x,\ q,\ u(\cdot),\ v,\ \xi_i,\ y(\xi_i)') =$$

$$= \int_0^{t_k(u)} K(y_x(t,\ u),\ q(t),\ u(t))e^{-\lambda t}dt + \sum_{\tau_i < t_x(u)} C_a(x_i,\ q_i,\ v)e^{-\lambda\tau_i} +$$

$$+ \sum_{\xi_i < t_x(u)} C_c(y(\xi_i),\ q(\xi_i),\ y(\xi_i)',\ q(\xi_i)')e^{-\lambda\xi_i} + e^{-\lambda t_x(u)}h(y_x(t,\ u),\ u)$$

여기서 λ 는 정의상수이고

$$K: \Omega \times I \times X \to \boldsymbol{R},\quad C_a: A \times I \times V_1 \to \boldsymbol{R},\quad C_c: C \times I \times D \times I \to \boldsymbol{R},\quad h: \Gamma \to \boldsymbol{R}$$

는 비용함수이다. V_1 은 리산조종모임이다.

무한시간혼합조종문제와는 달리 목표모임에로의 도달시각을 가지는 혼합조종문제에서는 초기상태모임 $\Omega \setminus \Gamma$ 를 가지며 궤도가 목표모임에 도달하는 순간에 상태의 전개가 끝나며 목적함수값은 이 순간까지의 전체 비용들의 합으로 계산된다.

목표모임에 상태궤도가 도달하는 시각(도달시각)은 다음과 같이 정의된다.

$$t_x(u) = \begin{cases} +\infty, & \{t \mid y_x(t,\ u) \in \Gamma\} = \phi \\ \min\{t \mid y_x(t,\ u) \in \Gamma\}, & \{t \mid y_x(t,\ u) \in \Gamma\} \ne \phi \end{cases}$$

이때 값함수 V 는 다음과 같이 정의된다.

$$V(x,\ q) = \inf_{\theta \in (X \times V_1 \times [0,\ +\infty) \times D)} J(x,\ q,\ u(\cdot),\ v,\ \xi_i,\ y(\xi_i)') \tag{1}$$

비용함수 $h,\ K,\ C_a,\ C_c$ 는 다음의 가정들을 만족시킨다.

가정 3 $h \in C(\Gamma),\ h(x) \ge 0,\ x \in \Gamma$

가정 4 K 는 x 에 관하여 리프쉬츠련속이며 u 에 관하여 평등련속이다. 또한 $|K(x,\ q,\ u)| \le K_0,\ \forall(x,\ q,\ u) \in \Omega \times I \times U$ 가 성립된다. 여기서 K_0 은 K 의 유계상수이다.

가정 5 $C_a,\ C_c$ 는 $x,\ u$ 에 관하여 평등련속, 아래로 유계이고 특히 C_a 는 x 에 관하여 리프쉬츠련속이며

$$|C_a(x,\ q,\ v)| \le C_0,\ \forall(x,\ q,\ v) \in \Omega \times I \times V_1$$

이 성립된다. 여기서 C_0 은 C_a 의 유계상수이다.

또한 $C_c(x,\ q,\ y,\ q') < C_c(x,\ q,\ z,\ q') + C_c(z,\ q,\ y,\ q'),\ \forall x \in C_q,\ z \in D \bigcap C_{q'},\ y \in D_{q'}$ 가 성립된다.

이때 값함수의 련속성과 관련한 다음의 정리가 성립된다.

정리 1(값함수의 련속성) 선행연구[1]에서의 가정들과 가정 1－5가 만족된다고 하자.

만일 식 (1)에 의하여 정의되는 $V(x,\ q)$ 가 $\partial\Gamma$ 에서 하반련속이면 V 는 $\Omega \setminus \overline{\Gamma}$ 에서 유계이며 련속이다.

2. 하밀톤-야코비변분부등식의 풀이의 유일성

여기서는 준변분부등식을 유도하고 2개의 점성풀이사이의 비교결과를 리용하여 준변분부등식의 점성풀이의 유일성을 론증하였다.

정리 2(동적계획법의 최량성원리) $V(x,\ q)$가 값함수 (1)로 주어지는 혼합최량조종문제의 값함수라고 하자.

이때 초기점 x에서 출발하여 조종 u에 따르는 궤도가 τ_1시각에 이행모임 A에 도달하여 처음으로 이행하였다고 하면

$$V(x,\ q)=\inf_u\left\{\int_0^{\tau_1}K(y_x(t,\ u),\ q(t),\ u(t))e^{-\lambda t}dt+e^{-\lambda\tau_1}MV(x_1,\ q_1)\right\}.$$

여기서 $MV(x,\ q)=\inf_{v\in V_1}\{V(g(x,\ q,\ v),\ q)+C_a(x,\ q,\ v)\}$이다.

궤도가 ξ_1시각에 이행모임 C에서 처음으로 이행하였다고 하면

$$V(x,\ q)=\inf_u\left\{\int_0^{\xi_1}K(y_x(t,\ u),\ q(t),\ u(t))e^{-\lambda t}dt+e^{-\lambda\xi_1}NV(y(\xi_1),\ q(\xi_1))\right\}.$$

여기서 $NV(x,\ q)=\inf_{(x',\ q')\in D\times I}\{V(x',\ q')+C_c(x,\ q,\ x',\ q')\}$이다.

임의의 $T>0$에 대하여

$$V(x,\ q)=\inf_{u,\ v,\ \xi_i,\ y(\xi_i)'}\left\{\int_0^{T\wedge t_x(u)}K(y_x(t,\ u),\ q(t),\ u(t))e^{-\lambda t}dt+\sum_{\tau_i<T}C_a(x_i,\ q_i,\ v)e^{-\lambda\tau_i}+\right.$$

$$\left.+\sum_{\xi_i<T}C_c(y(\xi_i),\ q(\xi_i),\ y(\xi_i)',\ q(\xi_i)')e^{-\lambda\xi_i}+e^{-\lambda(T\wedge t_x(u))}V(y_x(T\wedge t_x(u),\ u),\ q(T\wedge t_x(u)))\right\}$$

가 성립된다. 여기서 $a\wedge b=\min\{a,\ b\}$이다.

이제 동적계획법의 최량성원리에 기초하여 값함수가 만족시켜야 할 하밀톤-야코비변분부등식을 유도하자.

련속과 리산조종을 다같이 포함하고있는 혼합조종문제의 값함수가 만족시켜야 할 편미분방정식은 준변분부등식으로 표시된다.

그리고 준변분부등식에 포함되는 혼합조종도달문제의 하밀토니안은 혼합조종무한시간문제의 하밀토니안과 같다. 즉

$$H(x,\ q,\ p):=\sup_{u\in U}\{[-K(x,\ q,\ u)-f(x,\ q,\ u)\cdot p]/\lambda\}.$$

이때 값함수가 하밀톤-야코비변분부등식의 점성풀이라는것을 보여주는 다음의 정리가 성립된다.

정리 3 정리 1의 가정밑에서 식 (1)에 의하여 주어지는 목표모임에로의 도달시각을 가지는 혼합최량조종문제의 값함수는 점성의 의미에서 다음의 준변분부등식을 만족시킨다.

$$\begin{cases} V(x,\ q)-MV(x,\ q)=0,\ \ (x,\ q)\in A\times I \\ \max\{V(x,\ q)-NV(x,\ q),\ V(x,\ q)+H(x,\ q,\ D_xV(x,\ q))\}=0,\ (x,\ q)\in C\times I \\ V(x,\ q)+H(x,\ q,\ D_xV(x,\ q))=0,\ (x,\ q)\in \Omega\setminus(A\cup C\cup\Gamma)\times I \\ V(x,\ q)-h(x)=0,\ \ (x,\ q)\in\partial\Gamma\times\{j\} \end{cases} \tag{2}$$

다음의 정리는 선행연구[1]의 결과를 디리흘레경계값문제의 비교결과에로 확장한 정리이다.

정리 4 정리 1의 가정밑에서 식 (1)로 정의되는 값함수가 련속함수이면 이것은 준변분부등식 (2)의 점성의 의미에서의 유일한 풀이이다.

증명 증명의 기본수법은 선행연구[1]에서의 수법과 기본적으로 일치하므로 여기서는 선행연구[1]와의 비교속에서 차이나는 점만을 강조하여 간단히 증명하였다.

$u_1,\ u_2$를 $\overline{\Omega\setminus\Gamma}$에서 유계이며 련속인 준변분부등식 (2)의 두 점성풀이라고 하자.

$\Omega\times\Omega$에서 정의되는 다음의 보조함수 Φ를 다음과 같이 생각하자.

$$\Phi^q(x,\ y)=u_1(x)-u_2(y)-|x-y|^2/\varepsilon-k(|x|^2+|y|^2),\ (x,\ y)\in\Omega_q\times\Omega_q$$

여기서 $\varepsilon,\ k$는 충분히 작은 정수들이다.

이제 $\sup\limits_q \sup\limits_{\Omega_q\times\Omega_q}\Phi^q(x,\ y)\le 0$임을 증명하자.

만일 $\sup\limits_q \sup\limits_{\Omega_q\times\Omega_q}\Phi^q(x,\ y)=C>0$이라고 하고 k를 $k<\min\{C/2,\ C'/2\}$가 되게 고정하자. 여기서 C'는 $C_a,\ C_c$가 아래로 유계가 되도록 정해진 상수이다.

이때 우리는 상한의 정의로부터 $\Phi^1(x_k,\ y_k)>C-k>C/2$가 만족되는 점 $(x_k,\ y_k)$를 찾을수 있다.

일반성을 잃지 않고 $(x_k,\ y_k)\in\Omega_1\times\Omega_1$이라고 하자.

Φ^1이 $\Omega_1\times\Omega_1$의 어떤 점 $(x_0,\ y_0)$에서 최대값을 가진다고 하자.

사실 이런 값은 존재하게 되는데 그것은 Φ의 구조로부터 $|x|,\ |y|\to\infty$일 때 $\Phi^1(x,\ y)\to-\infty$이기때문이다.

먼저 유일성증명을 위하여 Φ^1과 $(x_0,\ y_0)$이 우와 같이 정의되였다고 하면 $\varepsilon,\ k$에 무관계한 어떤 상수 D와 $\hat{D}$이 있어서 $|x_0-y_0|^2/\varepsilon\le D$, $\sqrt{k}\,|x_0|,\ \sqrt{k}\,|y_0|\le\hat{D}$이 성립되므로 $|x_0-y_0|^2/\varepsilon\le\omega_k(\sqrt{C\varepsilon})$이다. 여기서 $\omega_k(x)$는 $[0,\ R(k)]\to[0,\ +\infty)$로서 $\lim\limits_{s\to+0}\omega_k(s)=0$인 함수이고 $R(k)$는 k에 의존하고 ε에 무관계한 상수이다.

만일 $j\ne1$ 즉 $\Gamma\notin\Omega_1$이라고 하면 선행연구[1]의 주장들이 그대로 우리의 증명에 리용된다.

그러나 $\Gamma\in\Omega_1$이라고 하면 $(x_0,\ y_0)$이 Γ에 속하는 경우를 마저 론의하여야 한다.

$(x_0,\ y_0)\in\Gamma\times A$이거나 $(x_0,\ y_0)\in A\times\Gamma$라고 하면 가정 1로부터 우의 결과에 모순되는 결과를 얻는다.

$(x_0,\ y_0)\in\Gamma\times C$ 또는 $(x_0,\ y_0)\in C\times\Gamma$인 경우에도 마찬가지이다.

이제 $(x_0,\ y_0)\in\Gamma\times\Gamma$ 또는 $(x_0,\ y_0)\in\Gamma\times\Omega\setminus(A\cup C\cup\Gamma)$, $(x_0,\ y_0)\in\Omega\setminus(A\cup C\cup\Gamma)\times\Gamma$인

경우를 보자.

일반성을 잃지 말고 $x_0 \in \partial\Gamma$ 라고 하자.

u_1, u_2가 각각 점성아래풀이와 웃풀이이므로 $\partial\Gamma$ 에서 $u_1 \le u_2$ 를 얻는다.

이때 다음의 식이 성립된다.

$$\Phi^1(x_0,\ y_0) = u_1(x_0) - u_2(y_0) - \frac{1}{\varepsilon}|x_0 - y_0|^2 - k(|x_0|^2 + |y_0|^2) \le$$
$$\le u_1(x_0) - u_2(x_0) + u_2(x_0) - u_2(y_0) \le u_2(x_0) - u_2(y_0)$$

ε을 충분히 작게 잡으면 보조정리의 사실로부터 $\Phi^1(x_0,\ y_0) \le 0$ 인데 이것은

$$\sup_q \sup_{\Omega_q \times \Omega_q} \Phi^q(x,\ y) = C > 0$$

에 모순이다.

증명의 나머지부분은 선행연구[1]에서와 같으므로 여기서는 소개하지 않는다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] S. Dharmatti et al.; SIAM J. Control. Optim., 44, 1259, 2005.

[2] M. S. Branicky et al.; IEEE Trans. Automat. Control., 43, 31, 1998.

주체104(2015)년 1월 5일 원고접수

The Viscosity Solution of Quasi-Variational Inequality on the Hybrid Optimal Control Problem with Reach Time to a Target Set

Ho Myong Song, O Kwang Nam and *Hwang Chol Jun*

The hybrid optimal control problem with reach time to a target set is established and the associated value function is characterized as a unique solution of quasi-variational inequality in the viscosity sense using the dynamic programming principle and the transversality condition.

Key words: hybrid control, quasi-variational inequality, viscosity solution, dynamic programming