베르쥬－와이스만평형풀이를 구하는 한가지 계산도식

주 광 휘

우리는 N 인비협력경기에서 베르쥬－와이스만평형풀이의 존재성과 그것을 구하는 한가지 방법에 대한 연구를 진행하였다.

선행연구[1－4]에서는 베르쥬－와이스만평형을 정의하고 강담보베르쥬－와이스만평형풀이의 존재성을 밝혔다.

론문에서는 N 인비협력경기에서 담보베르쥬－와이스만평형풀이를 정식화하고 그것을 구하는 한가지 계산도식을 주었다.

N 인비협력경기 $\Gamma^{(N)} =< N,\ \{X_i\}_{i\in\mathrm{N}},\ \{u_i(x)\}_{i\in\mathrm{N}} >$ $(\mathrm{N}=\{1,\ 2,\ \cdots,\ N\})$ 에서 담보베르쥬－와이스만평형풀이의 정식화를 보자.

먼저 모든 $i\in\mathrm{N}$ 에 대하여 i 째 경기자에 있어서의 최소값함수와 최대값함수

$$\underline{u}_i[x_i]=\min_{x_{-i}\in X_{-i}} u_i(x_i,\ x_{-i})=u_i(x_i,\ \underline{x}_{-i}(x_i))$$

$$\overline{u}_i[x_i]=\max_{x_{-i}\in X_{-i}} u_i(x_i,\ x_{-i})=u_i(x_i,\ \overline{x}_{-i}(x_i))$$

를 도입한다. 여기서

$$x_i\in X_i$$

$$x_{-i}=(x_1,\ \cdots,\ x_{i-1},\ x_{i+1},\ \cdots,\ x_N)\in X_{-i}=\prod_{j\in\mathrm{N},\ j\neq i} X_j$$

$$(x_i,\ x_{-i})=(x_1,\ \cdots,\ x_{i-1},\ x_i,\ x_{i+1},\ \cdots,\ x_N)=x\in X$$

다음으로 비협력경기 $< N,\ \{X_i\}_{i\in\mathrm{N}},\ \{\overline{u}_i[x_i]\}_{i\in\mathrm{N}} >$ 에서 베르쥬평형성조건을 만족시키는 정황 즉

$$\overline{u}_i[x_i^*]=u_i(x^*)\ \ (i\in\mathrm{N}) \tag{1}$$

을 만족시키는 정황 $x^*=(x_1^*,\ \cdots,\ x_N^*)$ 들전부의 모임을 X^* 로 표시하겠다.

또한 모임 X^* 에서 개인적합리성조건을 만족시키는 정황 즉 N－기준문제

$$< \{X_i\}_{i\in\mathrm{N}},\ \{\underline{u}_i[x_i]\}_{i\in\mathrm{N}} >$$

에서

$$\max_{x_i\in X_i}\underline{u}_i[x_i]=\underline{u}_i[\underline{x}_i]\le u_i(\overline{x}^*)\ \ (i\in\mathrm{N})$$

을 만족시키는 정황을 $\overline{x}^*$ 로 표시하겠다. 즉 $\overline{x}^*\in X^*$ 로 된다.

정의 1 주어진 경기 $\Gamma^{(N)}$ 에서 다음의 두 조건을 만족시키는 쌍 $(\overline{x}^*,\ \overline{u}^*)\in X\times\mathbf{R}^N$ 을 $\Gamma^{(N)}$ 의 담보베르쥬－와이스만평형풀이라고 부른다. 즉

ㄱ) $\overline{x}^*\in X^*$. 여기서 X^* 은 비협력경기

$$\Gamma = < N,\ \{X_i\}_{i\in \mathrm{N}},\ \{\overline{u}_i[x_i]\}_{i\in \mathrm{N}} > \quad (2)$$

에서 조건 (1)을 만족시키는 정황 $x^* \in X$ 들의 모임이다.

ㄴ) N－기준문제 $< \{X_i\}_{i\in \mathrm{N}},\ \{\underline{u}_i[x_i]\}_{i\in \mathrm{N}} >$ 에서

$$\max_{x_i\in X_i} \underline{u}_i[x_i] = \underline{u}_i[\underline{x}_i] \le u_i(\overline{x}^*)\ \ (i\in \mathrm{N})$$

이 성립된다. 여기서 $\overline{u}^* = (u_1(\overline{x}^*),\ \cdots,\ u_N(\overline{x}^*)) \in \mathbf{R}^N$ 이다.

경기 (2)에 함수

$$\varphi(x,\ z) = \max_{i\in \mathrm{N}} (u_i(z_i,\ x_{-i}) - u_i(z)) \quad (3)$$

를 대응시키겠다. 여기서 $z = (z_1,\ \cdots,\ z_N) \in X$ 이다.

함수 $\varphi(x,\ z)$ 의 안장점 $(x^0,\ z^*)$ 은 부등식

$$\varphi(x,\ z^*) \le \varphi(x^0,\ z^*) \le \varphi(x^0,\ z)\ \ (\forall x,\ z\in X) \quad (4)$$

로 정의된다.

보조정리 1 안장점 $(x^0,\ z^*)$ 의 두번째 성분 $z^* = x^* \in X$ 는 경기 Γ 에서 베르쥬평형성조건 (1)을 만족시킨다.

증명 $z = x^0$ 일 때에 식 (4)에서 (3)을 고려하면

$$\varphi(x^0,\ x^0) = \max_{i\in \mathrm{N}} (u_i(x_i^0,\ x_{-i}^0) - u_i(x^0)) = 0$$

을 얻는다. 따라서 식 (3), (4)로부터

$$\varphi(x,\ z^*) = \max_{i\in \mathrm{N}} (u_i(z_i^*,\ x_{-i}) - u_i(z^*)) \le 0\ \ (\forall x\in X)$$

이 나온다.

이로부터 매개 $i\in \mathrm{N}$ 에 대하여

$$u_i(z_i^*,\ x_{-i}) - u_i(z^*) \le 0\ \ (\forall x\in X)$$

이거나 또는 모든 $x\in X$ 에 대하여

$$u_i(z_i^*,\ x_{-i}) \le u_i(z^*)\ \ (i\in \mathrm{N})$$

로 된다. 따라서 안장점의 두번째 성분 $z^* \in X$ 는 베르쥬평형성조건 (1)을 만족시킨다.(증명끝)

보조정리 2[2] 경기 (2)에서 모임 X_i 들은 $\mathbf{R}^{n_i}$ 에서 콤팍트(유계닫긴모임)이고 소득함수 $u_i(x)$ 들은 $X = \prod_{i\in \mathrm{N}} X_i$ 에서 련속이라고 하자. 이때 식 (3)의 함수 $\varphi(x,\ z)$ 는 $X\times X$ 에서 련속이다.

보조정리 3[1] S 를 내부를 가지는 $\mathbf{R}^n$ 의 콤팍트불룩모임이라고 하자. 만일 φ 를 S 를 S 에로 넘기는 련속넘기기라면 넘기기 φ 의 부동점 즉 $x^* \in S$, $x^* \in \varphi(x^*)$ 이 존재한다.

N 인비협력경기에서 담보베르쥬－와이스만평형풀이의 존재성에 대하여 고찰하자.

Γ 의 매 콤팍트모임 $X_i \subset \mathbf{R}^{n_i}$ $(i\in \mathrm{N})$가 있어서 보렐 δ－모임벌 $B(X_i)$ 들과 정황들의

모임 $X=\prod_{i\in\mathrm{N}} X_i$ 가 있어서 보렐 $\delta-$ 모임벌 $B(X)$ 를 만들자. $B(X)$ 는 보렐 $\delta-$ 모임벌 $B(X_i)$ $(i\in\mathrm{N})$들의 원소들의 직적전부를 포함한다고 가정한다.

i 째 경기자의 혼합방략 $\upsilon_i(\cdot)$ 를 콤팍트 X_i 우에서의 확률측도와 동일시한다.

몇가지 표식들을 도입하자.

$$\upsilon(\cdot)=(\upsilon_1(\cdot),\ \cdots,\ \upsilon_N(\cdot))$$

$$u_i(\upsilon)=\int_X u_i(x)\upsilon(dx)=\int_X u_i(x)\upsilon_1(dx_1)\cdots\upsilon_N(dx_N)$$

$$\overline{u}_i[\upsilon_i]=\int_{X_i}\overline{u}_i[x_i]\upsilon_i(dx_i)$$

경기

$$\widetilde{\Gamma}=<N,\ \{\upsilon_i\}_{i\in\mathrm{N}},\ \{\overline{u}_i[\upsilon_i]\}_{i\in\mathrm{N}}> \tag{5}$$

를 경기 Γ 의 혼합확대라고 부른다.

정의 2 만일

$$\overline{u}_i[\upsilon_i^*]=u_i(\upsilon^*)\ \ (i\in\mathrm{N}) \tag{6}$$

이면 혼합방략에서의 정황 $\upsilon^*(\cdot)\in\{\upsilon\}$ 는 경기 (5)에 있어서 베르쥬평형성조건을 만족시킨다고 말한다.

식 (6)에 의하여 정의되는 정황 $\upsilon^*(\cdot)\in\{\upsilon\}$ 전부의 모임을 $\{\upsilon^*\}$ 로 표시하겠다.

보조정리 4 경기 (2)에서 모든 $i\in\mathrm{N}$ 에 대하여 모임 X_i 는 콤팍트이고 소득함수 $u_i[x_i]$ 는 X_i 에서 련속이라고 하자. 그리고 베르쥬평형성조건 (6)을 만족시키는 혼합방략에서의 정황들의 모임 $\{\upsilon^*\}$ 은 비지 않았다고 하자.

이때 $\{\upsilon^*\}$ 은 경기 (2)의 혼합방략에서의 정황들의 모임 $\{\upsilon\}$ 의 부분모임으로서 약자기콤팍트로 된다.

따름 공간 $\mathbf{R}^N$ 에서 모임

$$u(\{\upsilon^*\})=\bigcup_{\upsilon(\cdot)\in\{\upsilon^*\}}u(\upsilon)$$

의 콤팍트성(닫김성과 유계성)이 성립된다.

보조정리 5 만일 함수 $u_i(x)$ 들이 X 에서 련속이고 모임 X_i $(i\in\mathrm{N})$들이 콤팍트이면 함수

$$\varphi(x,\ z)=\max_{i\in\mathrm{N}}(u_i(z_i,\ x_{-i})-u_i(z))$$

가 있어서 임의의 $\mu(\cdot)\in\{\upsilon\}$, $\upsilon(\cdot)\in\{\upsilon\}$ 에 대하여

$$\max_{i\in\mathrm{N}}\int_{X\times X}(u_i(z_i,\ x_{-i})-u_i(z))\mu(dx)\upsilon(dz)\le$$
$$\le\int_{X\times X}\max_{i\in\mathrm{N}}(u_i(z_i,\ x_{-i})-u_i(z))\mu(dx)\upsilon(dz)$$

가 성립된다.

정리 1 만일 경기 (2)에서 모임 X_i 들이 비지 않은 콤팍트이고 매개 i 째 경기자의 소득함수 $u_i(x)$ 가 X 에서 련속이면 경기 (5)에는 베르쥬평형성조건 (6)을 만족시키는 혼합방략에서의 정황 $v^*(\cdot)\in\{v\}$ 가 존재한다.

N 인비협력경기

$$\Gamma^{(N)} =< N,\ \{X_i\}_{i\in \mathrm{N}},\ \{u_i(x)\}_{i\in \mathrm{N}} >$$

에 있어서 혼합방략에서의 베르쥬－와이스만평형풀이의 개념을 정식화하자. 이를 위하여 경기 $\Gamma^{(N)}$ 에 그것의 혼합확대

$$\widetilde{\Gamma}^{(N)} =< N,\ \{v_i\}_{i\in \mathrm{N}},\ \{u_i(v)\}_{i\in \mathrm{N}} >$$

을 대응시키겠다. $\Gamma^{(N)}$ 에서와 같이 $\widetilde{\Gamma}^{(N)}$ 에서 $\mathrm{N}=\{1,\ \cdots,\ N\}$ 은 경기자들의 순서번호들의 모임이다. $\widetilde{\Gamma}^{(N)}$ 에서는 순수방략 $x_i\in X_i\subset \mathbf{R}^{n_i}$ 를 가진 매 경기자 $i\in \mathrm{N}$ 이 콤팍트 X_i 의 보렐 $\delta-$모임벌에서 정의된 확률측도 $v_i(\cdot)$ 인 혼합방략들도 사용할수 있다.

경기 $\widetilde{\Gamma}^{(N)}$ 에서 i 째 경기자의 소득함수는

$$u_i(v)=\int_X u_i(x)v(dx)$$

형태를 가진다.

세 단계를 리용하여 경기 $\Gamma^{(N)}$ 에 있어서 혼합방략에서의 담보베르쥬－와이스만평형풀이 $(\overline{v}^*(\cdot),\ \overline{u}^*)$ 의 개념을 도입하자.

단계 1 모든 $i\in \mathrm{N}$ 에 대하여 i 째 경기자에 있어서의 최소값함수 $\underline{u}_i[x_i]$ 와 최대값함수 $\overline{u}_i[x_i]$ 를 구한다.

단계 2 베르쥬평형성조건을 만족시키는 정황 즉 혼합방략에서의 N 인비협력경기 (5)에 있어서 조건 (6)을 만족시키는 혼합방략에서의 정황 $v^*(\cdot)$ 전부의 모임 $\{v^*\}$ 을 구하는것이다. 즉 $v^*(\cdot)$ 은 경기 (5)에서 베르쥬평형성조건 (6)을 만족시킨다.

단계 3 모임 $\{v^*\}$ 에서 개인적합리성조건을 만족시키는 혼합방략들의 정황 즉 $N-$기준문제 $<\{v^*\},\ \{u_i(v)\}_{i\in \mathrm{N}}>$ 에서 임의의 $v(\cdot)\in\{v\}$ 에 있어서

$$\max_{v_i}\underline{u}_i[v_i]=\underline{u}_i[\underline{v}_i]\le u_i(\overline{v}^*)=\overline{u}_i^*\quad (i\in \mathrm{N})$$

이 성립되는 $\overline{v}^*(\cdot)\in\{v^*\}$ 을 구하는것이다. 즉 $\overline{v}^*(\cdot)$ 는 경기 (5)에서 개인적합리성조건을 만족시킨다.

결과로 얻어진 쌍 $(\overline{v}^*(\cdot),\ \overline{u}^*=(\overline{u}_1^*,\ \cdots,\ \overline{u}_N^*))$ 을 $\Gamma^{(N)}$ 에서 혼합방략에서의 담보베르쥬－와이스만평형풀이, 혼합방략에서의 정황 $\overline{v}^*(\cdot)$ 를 담보베르쥬－와이스만평형정황, N 차원벡토르 $\overline{u}^*$ 을 담보베르쥬－와이스만평형소득벡토르라고 부른다.

정리 2 경기 $\Gamma^{(N)}$ 에서 다음의 조건들이 성립된다고 하자. 즉

ㄱ) 모임 $X_i\subset \mathbf{R}^{n_i}$ $(i\in \mathrm{N})$는 비지 않은 불룩콤팍트들이다.

ㄴ) 매 경기자의 소득함수 $u_i(x_i,\ x_{-i})$ 는 X_i 에서 모든 변수들에 관하여 련속이고 임

의의 $x \in X$ 에 대하여 $x_{-i} \in X_{-i} = \prod_{j \neq i} X_j$ 에 관하여 엄격불룩이다.

이때 경기 $\widetilde{\Gamma}^{(N)}$ 에 있어서 혼합방략에서의 담보베르쥬—와이스평형풀이가 존재한다.

담보베르쥬—와이스만평형풀이를 구하는 계산도식은 다음과 같다.

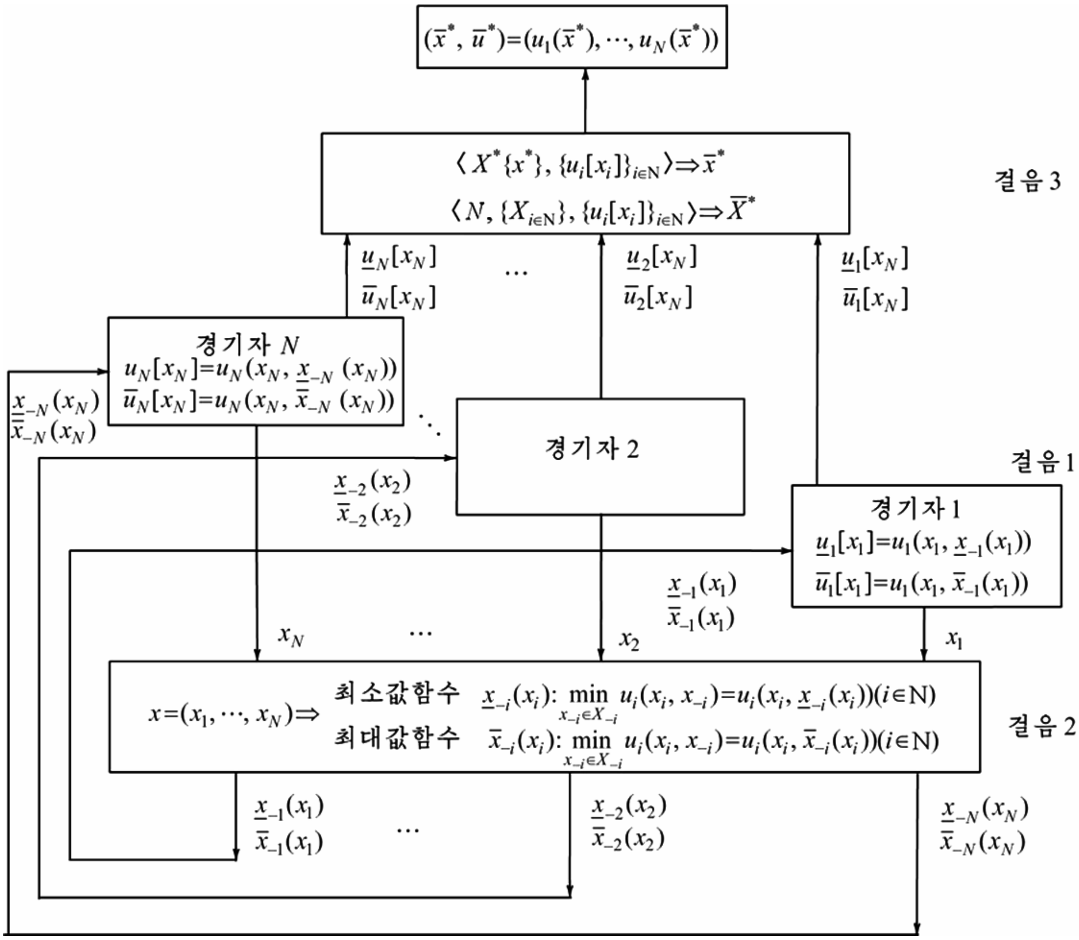

그림. 담보베르쥬—와이스만평형 $(\bar{x}^*, \bar{u}^*)$ 의 구하기

참 고 문 헌

[1] К.С. Вайсман; Линейно-квадратичные дифференциальные игры, Наукова думка, 119～143, 1994.

[2] С.О. Мащенко; Журнал обчисловательной та прикладной математики, 1, 40, 2012.

[3] A.M. Colman et al.; Journal of Mathematical Psychology, 1, 2011.

[4] R. Nessah et al.; Applied Mathematics Letters, 20, 926, 2007.

주체107(2018)년 3월 10일 원고접수

A Schema for Computation of Berge-Wysman Equilibrium Solutions

Ju Kwang Hwi

Berge-Wysman equilibrium solutions in *N*-person non-cooperative games are considered.

In this paper, we study a schema for computation of Berge-Wysman equilibrium solutions and their existence.

Key words**:** Berge equilibrium, non-cooperative game, equilibrium point