김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제3호

모호선형다항분수계미분방정식의 두점경계값문제에 대한 (1, 2)－풀이의 구성적존재성

권승혁, 최희철

1. 선행연구결과와 문제설정

모호미분방정식은 현실에서 제기되는 문제들에 대한 수학적모형화의 좋은 수단으로서 모호최량조종문제[1], 에이즈발병문제[2] 등에 대한 연구에서 제기된다.

선행연구[3]에서는 2계모호미분방정식의 경계값문제

$$y''(t)=f(t,\ y(t),\ y'(t)),\ y(0)=\gamma_0,\ y(1)=\gamma_1$$

의 풀이법을 연구하였는데 절단방정식풀이의 존재성에 대한 론의만을 진행하였고 모호풀이의 존재성에 대한 론의는 진행되지 않았다.

론문에서는 (1, 2)－형도함수를 가지는 모호분수계미분방정식의 두점경계값문제

$$({}^cD_{1,\,2}^{\alpha}y)(t)\oplus b(t)\otimes({}^cD_{1,\,2}^{\beta}y)(t)\oplus c(t)\otimes y(t)=f(t),\ t\in(0,\ 1) \tag{1}$$

$$y(0)=y_0,\ y(1)=y_1\ (y,\ f\in C(I,\ R_F),\ y_0,\ y_1\in R_F,\ 1<\beta<\alpha\le 2) \tag{2}$$

의 풀이의 존재성과 점차근사도식에 의한 근사풀이법에 대하여 연구하였다.

2. 모호선형다항분수계미분방정식의 두점경계값문제에 대한 (1, 2)-풀이의 구성적존재조건

정의 1 ${}^cD_{1,\,2}^{\alpha}y\in C(I,\ R_F)$인 y가 식 (1), (2)를 만족시킬 때 y를 식 (1), (2)의 풀이라고 부른다.

식 (1)의 절단방정식을 표시

$$[y(t)]^r:=[y_1(t,\ r),\ y_2(t,\ r)],\quad [f(t)]^r:=[f_1(t,\ r),\ f_2(t,\ r)]$$

를 리용하여 구해보면 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{cases} {}^cD_{0+}^{\alpha}y_2(t,\ r)+b(t){}^cD_{0+}^{\beta}y_2(t,\ r)+c(t)y_1(t,\ r)=f_1(t,\ r) \\ {}^cD_{0+}^{\alpha}y_1(t,\ r)+b(t){}^cD_{0+}^{\beta}y_1(t,\ r)+c(t)y_2(t,\ r)=f_2(t,\ r) \\ {}^cD_{0+}^{\alpha}y_2(t,\ r)\le{}^cD_{0+}^{\alpha}y_1(t,\ r) \\ {}^cD_{0+}^{\beta}y_2(t,\ r)\le{}^cD_{0+}^{\beta}y_1(t,\ r) \\ y_1(t,\ r)\le y_2(t,\ r) \end{cases} \tag{3}$$

또한 경계조건도 표시

$$[y_0]^r:=[y_{0,1}(r),\ y_{0,2}(r)],\ [y_1]^r:=[y_{1,1}(r),\ y_{1,2}(r)]$$

를 리용하면 다음과 같다.

$$y_1(0,\ r)=y_{0,1}(r),\ y_2(0,\ r)=y_{0,2}(r),\ y_1(1,\ r)=y_{1,1}(r),\ y_2(1,\ r)=y_{1,2}(r) \tag{4}$$

정의 2 ${}^cD_{0+}^{\alpha}y_1(t,\ r),\ {}^cD_{0+}^{\alpha}y_2(t,\ r)\in C(I)$ 인 쌍 $(y_1(t,\ r),\ y_2(t,\ r))$ 가 식 (3), (4)를 만족시킬 때 $(y_1(t,\ r),\ y_2(t,\ r))$ 를 식 (3), (4)의 풀이라고 부른다.

정리 1 ① $(y_1(t,\ r),\ y_2(t,\ r))$ 를 식 (3), (4)의 풀이라고 하면 관계식

$${}^cD_{0+}^{\alpha}y_1(t,\ r)=u_1(t,\ r),\ {}^cD_{0+}^{\alpha}y_2(t,\ r)=u_2(t,\ r)$$

로 결정되는 $(u_1(t,\ r),\ u_2(t,\ r))$ 는 $C(I)\times C(I)$ 에서 다음의 문제를 만족시킨다.

$$\begin{cases} u_2(t,\ r)+b(t)I_{0+}^{\alpha-\beta}u_2(t,\ r)+c(t)((1-t)y_{0,1}(r)+ty_{1,1}(r))-c(t)\int_0^1 G(t,\ s)u_1(s,\ r)ds=f_1(t,\ r) \\ u_1(t,\ r)+b(t)I_{0+}^{\alpha-\beta}u_1(t,\ r)+c(t)((1-t)y_{0,2}(r)+ty_{1,2}(r))-c(t)\int_0^1 G(t,\ s)u_2(s,\ r)ds=f_2(t,\ r) \\ u_2(t,\ r)\le u_1(t,\ r) \\ (1-t)(y_{0,2}(r)-y_{0,1}(r))+t(y_{1,2}(r)-y_{1,1}(r))+I_{0+}^{\alpha}(u_2(t,\ r)-u_1(t,\ r))-I_{0+}^{\alpha}(u_2(t,\ r)-u_1(t,\ r))|_{t=1}\cdot t\ge 0 \end{cases} \tag{5}$$

② $C(I)\times C(I)$ 에서 식 (5)를 만족시키는 $(u_1(t,\ r)-u_2(t,\ r))$ 에 대하여 다음의 식으로 결정되는 $(y_1(t,\ r)-y_2(t,\ r))$ 는 식 (3), (4)의 풀이이다.

$$\begin{aligned} y_1(t,\ r)&=(1-t)y_{0,1}(r)+ty_{1,1}(r)-\int_0^1 G(t,\ s)u_1(s,\ r)ds \\ y_2(t,\ r)&=(1-t)y_{0,2}(r)+ty_{1,2}(r)-\int_0^1 G(t,\ s)u_2(s,\ r)ds \end{aligned} \tag{6}$$

가정 1 $\dfrac{\|b\|}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}+\dfrac{2\|c\|}{\Gamma(\alpha+1)}<1$

기호약속을 하자.

$$len(g)(t,\ r):=g_2(t,\ r)-g_1(t,\ r),\ len(u)(t,\ r):=\bar{u}_1(t,\ r)-\bar{u}_2(t,\ r)$$

$$g_1(t,\ r):=f_1(t,\ r)-c(t)((1-t)y_{0,1}(r)+ty_{1,1}(r))$$

$$g_2(t,\ r):=f_2(t,\ r)-c(t)((1-t)y_{0,2}(r)+ty_{1,2}(r))$$

$$B(u):=b(t)I_{0+}^{\alpha-\beta}u+c(t)\int_0^1 Guds$$

$$L(\cdot):=b(t)I_{0+}^{\alpha-\beta}(\cdot)+c(t)\begin{pmatrix} 0 & \int_0^1 G\cdot ds \\ \int_0^1 G\cdot ds & 0 \end{pmatrix}(\cdot)$$

가정 2 $(I-B)(len(g))\ge 0$

정리 2 가정 1, 2가 만족되면 방정식 (5)의 풀이 $u_1(t,\ r),\ u_2(t,\ r)$ 에 대하여 $u_1(t,\ r)\ge u_2(t,\ r)$ 가 성립한다.

증명 우선 연산자 B에 대하여 그린함수의 웃한계평가 $G(t,\ s)\le \frac{s(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ 을 리용하면

$$\left\| bI_{0+}^{\alpha-\beta}u+c\int_0^1 G(t,\cdot)ud\right\| \le \frac{\|b\|}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\cdot\|u\|+\|c\|\left\|\int_0^1 \frac{s(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}u(s,\ r)ds\right\| \le q\cdot\|u\|$$

을 알수 있으며 따라서 연산자 B에 대하여 $\|B\|\le q<1$을 얻을수 있다.

이상의 사실들로부터 $len(u)=(I+B)^{-1}len(g)$이며 정리의 가정에 의하여

$$len(u)=(I+B)^{-1}len(g)=(I-B+B^2-\cdots+(-1)^n B^n+\cdots)len(g)=$$
$$=(I-B)^{-1}len(g)+B^2(I-B)len(g)+B^4(I-B)len(g)\cdots\ge 0$$

이라는것을 알수 있다.(증명끝)

가정 3

$$c(t)((1-t)\cdot len(y_0)+t\cdot len(y_1))\ge \frac{2\Gamma(\alpha-\beta+1)\Gamma(\alpha+2)-\Gamma(\alpha-\beta+1)\|c\|}{\Gamma(\alpha-\beta+1)\Gamma(\alpha+2)-\Gamma(\alpha+2)\|b\|-\Gamma(\alpha-\beta+1)\|c\|}\|len(g)\|$$

가정 4 $(I-L)\widetilde{g}(t)\ge 0$

보조정리 1 가정 1, 2, 3이 만족되면 다음의 평가식이 성립한다.

$$(1-t)\cdot len(y_0)(t,\ r)+t\cdot len(y_1)(t,\ r)-I_{0+}^{\alpha}len(\overline{u})(t,\ r)+I_{0+}^{\alpha}len(\overline{u})(t,\ r)|_{t=1}\cdot t\ge 0$$

이제는 얻어진 련립방정식의 풀이가 모호수를 생성한다는것을 보자. 구간족

$$\{U_\alpha(t,\ r):=[{}^cD_{0+}^{\alpha}y_2(t,\ r),\ {}^cD_{0+}^{\alpha}y_1(t,\ r)],\ r\in[0,\ 1]\} \tag{7}$$
$$\{U_\beta(t,\ r):=[{}^cD_{0+}^{\beta}y_2(t,\ r),\ {}^cD_{0+}^{\beta}y_1(t,\ r)],\ r\in[0,\ 1]\} \tag{8}$$
$$\{U_0(t,\ r):=[y_1(t,\ r),\ y_2(t,\ r)],\ r\in[0,\ 1]\} \tag{9}$$

들을 생각하자.

정리 3 구간족 (7)－(9)는 련속인 모호수를 생성한다.

생성된 모호수값함수들을 리용하여 식

$$\widetilde{y}_*\oplus\widetilde{y}_0\otimes t\oplus I_{0+}^{\alpha}\widetilde{y}_\alpha|_{t=1}\otimes t=\widetilde{y}_0\oplus\widetilde{y}_1\otimes t\oplus I_{0+}^{\alpha}\widetilde{y}_\alpha \tag{10}$$

을 얻을수 있다.

보조정리 2 ${}^cD_{1,1}^{\alpha}\widetilde{y}_*=\widetilde{y}_\alpha$, ${}^cD_{1,1}^{\beta}\widetilde{y}_*=\widetilde{y}_\beta$이다.

증명 식 (10)의 량변이 α계미분가능하므로 량변에 ${}^cD_{1,2}^{\alpha}$을 취하면

$${}^cD_{1,2}^{\alpha}\widetilde{y}_*\oplus{}^cD_{1,2}^{\alpha}(\widetilde{y}_0\otimes t)\oplus{}^cD_{1,2}^{\alpha}(I_{0+}^{\alpha}\widetilde{y}_\alpha|_{t=1}\otimes t)={}^cD_{1,2}^{\alpha}\widetilde{y}_0\oplus{}^cD_{1,2}^{\alpha}(\widetilde{y}_1\otimes t)\oplus{}^cD_{1,2}^{\alpha}I_{0+}^{\alpha}\widetilde{y}_\alpha$$

을 얻을수 있다. ${}^cD_{1,2}^{\alpha}(\widetilde{y}_0\otimes t)=0,\ {}^cD_{1,2}^{\alpha}(I_{0+}^{\alpha}\widetilde{y}_\alpha|_{t=1}\otimes t)=0$ 이므로 ${}^cD_{1,2}^{\alpha}\widetilde{y}_*={}^cD_{1,2}^{\alpha}I_{0+}^{\alpha}\widetilde{y}_\alpha=\widetilde{y}_\alpha$로 된다. 마찬가지방법으로 ${}^cD_{1,2}^{\beta}\widetilde{y}_*=\widetilde{y}_\beta$를 얻을수 있다.(증명끝)

3. 결 론

론문에서 우리는 모호두점경계값문제의 (1, 2)－형풀이가 존재하기 위한 한가지 충분조건과 풀이방법을 얻었다. 결론적으로 모호미분방정식의 풀이를 얻자면 그것의 절단방정식과 함께 (1, 2)－형을 담보하는 부등식조건을 고려하여야 하며 그것의 풀이의 존재성은 모호미분방정식의 결수들과 비동차항, 모호경계조건에 의존한다는것을 알수 있다.

참 고 문 헌

[1] R. M. Jafelice et al.; Bull. Math. Biol., 66, 6, 1597, 2004.
[2] D. O'Regan et al.; Nonlinear Anal., 54, 405, 2003.
[3] A. Khastan et al.; Nonlinear Anal., 72, 3583, 2010.

주체108(2019)년 3월 15일 원고접수

Constructive Existence of (1, 2)－Solutions to Two-Point Boundary Value Problems for Fuzzy Linear Multi-term Fractional Differential Equations

Kwon Sung Hyok, *Choe Hui Chol*

In this paper, we consider the constructive existence of (1, 2)－solutions to two-point boundary value problems for a class of fuzzy fractional differential equations.

Key words: fuzzy fractional differential equation, generalized Hukuhara derivative