

## 지구의 편평률과 대기저항의 영향을 받는 위성운동

최진혁, 김명권

위성운동과 그 수명에 대한 연구는 지난 수십년동안 많이 진행되었다. 근지구궤도위성(LEO: Low Earth Orbit)의 경우 지구편평률과 대기저항에 의한 섭동은 아주 중요하다. 그 섭동운동방정식을 푸는 방법에는 해석적방법, 반해석적방법, 수치적분방법 등이 있다.

본문에서는 대기저항과 지구편평률에 대한 수학적모형을 제시하고 수치적분방법의 하나인 4차룽게-쿠타방법(R-K4방법)을 리용하여 대기저항과 지구의 편평률의 영향을 받는 위성의 운동방정식을 풀었다. 초기조건으로는 1개의 초기위치와 3개의 서로 다른 초기속도들을 주었으며 위성이 지구중력에서 벗어날 때까지의 결과들을 해석하고 위성이 근지구궤도를 벗어나게 되는 시간을 분석하였다.

지구와 위성사이의 만유인력외에 다른 추가적인 섭동힘들이 없을 때 위성운동방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} \quad (1)$$

여기서  $\mu=GM$ ,  $G$ 는 만유인력상수,  $M$ 은 지구질량이다. 섭동이 존재하면 식 (1)의 오른쪽에 추가적인 섭동가속도가 추가되어야 한다. 여기서는 지구의 편평률과 대기저항으로 인한 섭동을 취급하므로 운동방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_A \quad (2)$$

여기서  $\mathbf{a}_O$ ,  $\mathbf{a}_A$ 는 각각 지구의 편평률과 대기저항으로 하여 생긴 가속도이다. 2계미분방정식 (2)는 다음과 같은 2개의 1계미분방정식으로 쓸수 있다.

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} &= -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_A \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

직각자리표계에서 식 (3)의 방정식계는 다음과 같이 표시된다.

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= v_x \\ \dot{y} &= v_y \\ \dot{z} &= v_z \\ \dot{v}_x &= -\frac{\mu x}{r^3} + a_{Ox} + a_{Ax} \\ \dot{v}_y &= -\frac{\mu y}{r^3} + a_{Oy} + a_{Ay} \\ \dot{v}_z &= -\frac{\mu z}{r^3} + a_{Oz} + a_{Az} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

지구중력포텐셜은 퍼조화항으로 모형화할수 있다.[3] 그 표현식에서 2차퍼조화결수  $J_2$ 가 차수가 그 이상인 결수들보다 400배이상 크다. 따라서 여기서는  $J_2$ 만을 고려하였다.

이 고차피조화결수들을 무시하고 스칼라포텐셜함수의 구배를 고려하면  $x, y, z$ 방향에서 지구의 편평률에 의한 가속도성분들은 다음과 같이 표시된다.

$$\left. \begin{aligned} a_{Ox} &= -\frac{1}{2r^7} [3\mu R^2 J_2 x(x^2 + y^2 - 4z^2)] \\ a_{Oy} &= -\frac{1}{2r^7} [3\mu R^2 J_2 y(x^2 + y^2 - 4z^2)] \\ a_{Oz} &= -\frac{1}{2r^7} [3\mu R^2 J_2 z(3x^2 + 3y^2 - 2z^2)] \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

여기서  $R = 6\,378.136\,3\text{km}$ ,  $\mu = GM = 398\,600.436\,233\text{km}^3/\text{s}^2$ ,  $J_2 = 1\,082.63 \times 10^{-6}$ 이다.

대기저항으로 인한 가속도는 다음과 같다.

$$\mathbf{a}_A = -\frac{1}{2} \rho \frac{C_D A}{m} |\mathbf{v}_r| \mathbf{v}_r \quad (6)$$

여기서  $\rho$ 는 대기밀도,  $C_D$ 는 저항계수,  $A$ 는 속도벡토르에 수직인 위성의 자름면적,  $m$ 은 위성의 질량,  $\mathbf{v}_r$ 는 대기에 대한 위성의 상대속도벡토르이다.

대기밀도를 간단한 지수함수모양으로 표시하자.

$$\rho = \rho_{pa} e^{\frac{r_{pa} - r}{H}} \quad (7)$$

여기서  $\rho_{pa}$ 는 초기근지점에서의 밀도이고  $r_{pa}$ 는 지구표면으로부터 위성까지의 초기거리,

$r = |\mathbf{r}|$ ,  $H$ 는 척도화된 높이이다. 량  $B^* = \frac{C_D A}{m}$ 를 탄도상수라고 부른다.

대기가 지구와 같은 각속도로 회전한다고 가정하였으므로 상대속도벡토르는

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (8)$$

이다. 여기서  $\boldsymbol{\omega}$ 는 지구의 관성자전각속도인데 다음과 같이 주어진다.

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_e \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

여기서  $\omega_e = 7.292\,115\,486 \times 10^{-5} \text{rad/s}$ 이다. 식 (8)과 (9)로부터 상대속도벡토르는

$$\mathbf{v}_r = \begin{pmatrix} v_x + \omega_e r_y \\ v_y - \omega_e r_x \\ v_z \end{pmatrix} \quad (10)$$

와 같다. 식 (7), (10)과  $B^*$ 을 식 (6)에 대입하면 대기저항으로 인한 가속도성분

$$\left. \begin{aligned} a_{Ax} &= -\frac{1}{2} \left[ \rho_{pa} \exp\left(\frac{r_{pa} - r}{H}\right) \sqrt{(v_x + \omega_e r_y)^2 + (v_y - \omega_e r_x)^2 + v_z^2} \cdot (v_x + \omega_e r_y) B^* \right] \\ a_{Ay} &= -\frac{1}{2} \left[ \rho_{pa} \exp\left(\frac{r_{pa} - r}{H}\right) \sqrt{(v_x + \omega_e r_y)^2 + (v_y - \omega_e r_x)^2 + v_z^2} \cdot (v_y - \omega_e r_x) B^* \right] \\ a_{Az} &= -\frac{1}{2} \left[ \rho_{pa} \exp\left(\frac{r_{pa} - r}{H}\right) \sqrt{(v_x + \omega_e r_y)^2 + (v_y - \omega_e r_x)^2 + v_z^2} \cdot v_z B^* \right] \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

을 얻을수 있다.

이렇게 하면 지구의 편평률과 대기저항의 영향을 받으면서 운동하는 위성의 운동방정식의 수학적모형화가 완성된다. 지수포텐셜형태의 대기모형에서 척도화된 높이와  $\rho_{pa}$ 는 표로부터 계산할수 있다.[2]

표. 초기근지점에서의 밀도와 척도화된 높이

$r_{pa}/\text{km}$	$\rho_{pa}/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	$H/\text{km}$	$r_{pa}/\text{km}$	$\rho_{pa}/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	$H/\text{km}$
0	1.225	7.249	150	$2.070 \times 10^{-9}$	22.523
25	$3.899 \times 10^{-2}$	6.349	180	$5.464 \times 10^{-10}$	29.740
30	$1.774 \times 10^{-2}$	6.682	200	$2.784 \times 10^{-10}$	37.105
40	$3.972 \times 10^{-3}$	7.554	250	$7.248 \times 10^{-11}$	45.546
50	$1.057 \times 10^{-3}$	8.382	300	$2.418 \times 10^{-11}$	53.628
60	$3.206 \times 10^{-4}$	7.714	350	$9.518 \times 10^{-12}$	53.298
70	$8.770 \times 10^{-5}$	6.549	400	$3.725 \times 10^{-12}$	58.515
80	$1.905 \times 10^{-5}$	5.799	450	$1.585 \times 10^{-12}$	60.828
90	$3.396 \times 10^{-6}$	5.382	500	$6.967 \times 10^{-13}$	63.822
100	$5.297 \times 10^{-7}$	5.877	600	$1.454 \times 10^{-13}$	71.835
110	$9.661 \times 10^{-8}$	7.263	700	$3.614 \times 10^{-14}$	88.667
120	$2.438 \times 10^{-8}$	9.473	800	$1.170 \times 10^{-14}$	124.64
130	$8.484 \times 10^{-9}$	12.636	900	$5.245 \times 10^{-15}$	181.05
140	$3.845 \times 10^{-9}$	16.149	1 000	$3.019 \times 10^{-15}$	268.00

4차롱계-쿠타방법을 리용하여 초기위치를 고정시키고 초기속도를 변화시키면서 미분방정식 (4)를 풀었다. 이때  $\mathbf{r}_0 = (0, -5\ 888.972\ 7, -3\ 400)\text{ km}$ , 탄도상수는  $B^* = 0.096\text{ m}^2/\text{kg}$ , 3개의 초기속도는  $\mathbf{v}_0 = (7.6, 0, 0), (7.7, 0, 0), (7.8, 0, 0)\text{ km/s}$  이다.[1] 표에 보여준 값들에서 보간을 실시하여 척도화된 높이( $H$ ),  $\rho_{pa}$ 의 중간값을 얻었다.

서로 다른 초기속도의 경우 탈출시간은 다음과 같다.

$\mathbf{v}_0 = (7.6, 0, 0), (7.7, 0, 0), (7.8, 0, 0)\text{ km/s}$  일 때 위성은 각각 3 222.645 833 333 330d후, 6 523.695 833 333 334d후, 9 150.111 111 111 100d후에 탈출한다.

초기속도가  $\mathbf{v}_0 = (7.8, 0, 0)\text{ km/s}$  인 경우 1, 3, 7d동안의 위성궤도를 그림에 보여주었다.

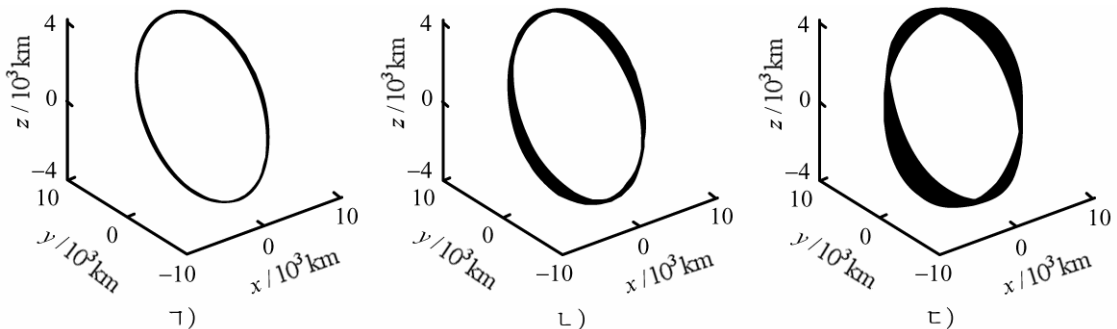


그림. 1, 3, 7d동안의 위성궤도

ㄱ) 1d, ㄴ) 3d, ㄷ) 7d

그림에서 보는바와 같이 지구의 편평률과 대기저항은 매우 짧은 시간주기(1, 3, 7d)인 경우에도 위성궤도에 영향을 미친다.

## 맺는 말

지구의 편평률과 대기저항에 대한 모형을 제기하고 초기위치와 속도가 주어진 경우 위성이 지구를 벗어날 때까지 지구편평률과 대기저항의 영향을 받는 위성의 운동방정식을 연구하였다. 지수함수형태의 대기밀도모형을 리용하였으며 룡계-쿠타방법으로 방정식을 풀어 탈출시간을 구하였다. 근지구궤도위성에서 지구의 편평률과 대기저항이 주요한 섭동인자라는것을 확인하였다.

## 참고 문헌

- [1] P. Hao et al.; Acta Astronautica, doi: 10.1016/j.actaastro.2019.05.014.
- [2] J. T. Emmert et al.; Advances in Space Research, doi: 10.1016/j.asr.2016.07.036.
- [3] S. T. Aghav; Artificial Satellites, 49, 2, 3, 2014.

주체109(2020)년 6월 5일 원고접수

## On the Motion of Satellite under the Effects of Oblateness of the Earth and Atmospheric Drag

*Choe Jin Hyok, Kim Myong Gwon*

We suggested the models of the oblateness of the earth and atmospheric drag and when an initial position and velocities were given, we studied the equations governing motion of the satellite under the effects of the oblateness of the earth and atmospheric drag till it diverged from the earth. We used the exponential atmospheric density model and implemented R-K method and found the collapsed time. We confirmed that the oblateness of the earth and the atmospheric drag were the main perturbation factors for the motion of the low earth orbit satellite.

Keywords: oblateness of the earth, atmospheric drag, satellite