

변하는 시간지연을 가진 체계의 로바스트조종을 위한 최량외란관측기설계의 한가지 방법

김정룡, 윤정남

경애하는 김정은동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《과학기술을 발전시키는것은 사회주의강국의 뿌리를 마련하기 위한 중요한 사업입니다.》

외란관측기(DOB)에 기초한 로바스트조종은 조종체계에서 외란의 영향을 억제하고 조종성능을 개선하기 위하여 널리 이용되고있다.[1, 2]

DOB를 리용하여 로바스트조종을 구성할 때 조종대상이 가지고있는 시간지연특성은 닫긴고리체계의 안정성요구로 하여 외란억제대역을 심히 제한시킨다.[3]

그러나 같은 대역제한속에서도 외란억제성능을 개선할수 있는 여유는 여전히 존재한다.

본문에서는 변하는 시간지연에 대한 로바스트안정성조건하에서 최량화된 외란억제성능을 얻기 위하여 닫긴고리체계의 로바스트안정성조건을 유도하고 외란억제성능과 이 조건을 함께 반영하는 구조적속박이 있는 H_∞ 혼합감도문제를 제기하고 가상고리정형법을 리용하여 이 문제를 구조적속박이 없는 표준 H_∞ 조종문제로 변환하고 그 풀이법에 의하여 해석적으로 푸는 방법을 제안하였다.

1. 닫긴고리체계의 로바스트안정성

변하는 시간지연을 가진 조종대상의 수학적모형은 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\tilde{P}(s) = \tilde{P}_0(s)e^{-\tilde{T}_d s}, \quad \tilde{T}_d \in [0, T_d] \quad (1)$$

여기서 $\tilde{P}_0(s)$ 는 시간지연이 없는 공칭모형이고 \tilde{T}_d 와 T_d 는 각각 변하는 시간지연과 그것의 최대값이다.

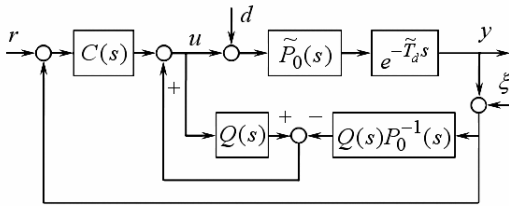


그림 1. 외란관측기(DOB)를 리용한 시간지연 체계의 로바스트조종체계

환경으로부터의 외부외란을 없애기 위하여 외란관측기를 리용한 시간지연체계의 로바스트조종체계를 그림 1과 같이 구성하였다.

그림 1에서 $P_0(s)$ 는 공칭모형이고 $C(s)$ 는 반결합조종기이다. 그리고 $Q(s)$ 는 Q -러파기로서 $P_0^{-1}(s)$ 의 실현성을 담보하는데 리용되는 저역통과러파기(LPF)이다.

그림 1로부터 외란관측기를 포함하는 반결합조종기의 입출력관계는 다음과 같이 쓸수 있다.

$$y = (I + P_0 C)^{-1} P_0 C \cdot r + (I + P_0 C)^{-1} P_0 (I - Q) \cdot d + (I + P_0 C)^{-1} (P_0 C + Q) \cdot \xi \quad (2)$$

이때 닫긴고리체계의 감도함수와 상보감도함수는 다음과 같다.

$$S(s) = (I + P_0 C)^{-1} (I - Q), \quad T(s) = (I + P_0 C)^{-1} (P_0 C + Q) \quad (3)$$

선행연구[3]에서는 모형불확정성이나 시간지연에 대한 로바스트안정성을 담보하기 위하여 외란관측기내부고리의 로바스트안정성만을 고려하였다. 그러나 이러한 조종체계는 로바스트안정성조건의 유도에서 반결합조절기외부고리를 고려하지 않은것으로 하여 시간지연변동에 대한 닫힌체계의 로바스트안정성을 담보할수 없다.

모형변동에 대하여 전체 닫힌고리체계에 대한 로바스트안정성의 완전한 조건을 유도하기 위하여 조종기 $C(s)$ 를 포함하는 외부반결합고리를 고려하여 그림 1의 구성도를 그림 2와 같이 변환할수 있다.

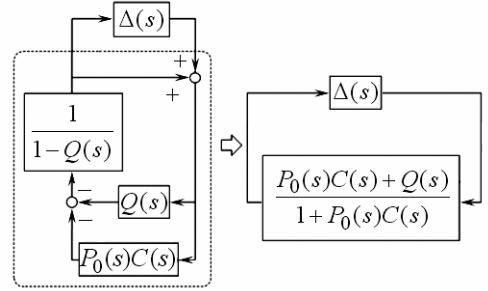


그림 2. 닫힌고리체계의 로바스트 안정성해석

그림 2로부터 외란관측기를 포함하는 닫힌고리체계가 다음과 같은 조건을 만족시킬 때 시간지연변동에 대하여 안정이라는것을 알수 있다.

$$\bar{\sigma}(e^{-j\tilde{T}_d\omega} - I) \cdot T(j\omega) < 1, \forall \omega \in [0, \infty) \quad (4)$$

이제 $|W_U(j\omega)| > \bar{\sigma}(e^{-j\tilde{T}_d\omega} - I)$ 를 만족시키는 상한함수 W_U 와 공칭의 열린고리전달 함수 $L_0(s) = P_0(s)C(s)$ 를 리용하면 H_∞ 노름에 의하여 식 (4)를 다음과 같은 충분조건으로 확장할수 있다.

$$\|W_U(s)T(s)\|_\infty = \|W_U(s)(1 + L_0(s))^{-1}(L_0(s) + Q(s))\|_\infty < 1 \quad (5)$$

식 (5)는 표준 H_∞ 조종문제를 리용하여 풀기 어려우며 이것을 풀기 위하여 보다 이해하기 쉬운 다음과 같은 충분조건으로 넘긴다.

$$|L_0(j\omega) + Q(j\omega)| < |W_U^{-1}(j\omega)(1 + L_0(j\omega))|, \forall \omega \in [0, \infty) \quad (6)$$

식 (6)은 다음의 조건이 성립하기만 하면 언제나 만족된다.

$$|Q(j\omega)| < |W_U^{-1}(j\omega)(1 + L_0(j\omega))| - |L_0(j\omega)|, \forall \omega \in [0, \infty) \quad (7)$$

식 (7)을 로바스트안정성충분조건으로 리용할수 있지만 이 조건은 $E(\omega)$ 로 정의되는 오른쪽항이 령보다 클 때에만 성립하며 따라서 닫힌고리체계가 안정이기 위한 필요충분조건은 다음과 같이 된다.

$$E(\omega) = |W_U^{-1}(j\omega)(1 + L_0(j\omega))| - |L_0(j\omega)|, E(\omega) > 0, \forall \omega \in [0, \infty) \quad (8)$$

이제 상한함수 $W_Q(s)$ 를

$$|W_Q(j\omega)|^{-1} < E(\omega), \forall \omega \quad (9)$$

와 같이 선택하고 이러한 상한함수에 대하여 다음의 조건이 만족되면 외란관측기를 가진 닫힌고리체계는 모형변동에 대하여 로바스트안정으로 된다.

$$|Q(j\omega)| < |W_Q^{-1}(j\omega)|, \forall \omega \in [0, \infty) \quad (10)$$

식 (10)은 H_∞ 노름의 형태로 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\|W_Q(s)Q(s)\|_\infty < 1 \quad (11)$$

2. 외란억제성능

식 (2)와 (3)으로부터 반결합조종기가 이미 설계되었다고 할 때 외란을 충분히 억제하기 위하여서는 닫힌고리체계의 감도함수 $S(s)=1-Q(s)$ 가 가능한것 작아야 한다는것을 알수 있다. 따라서 다음과 같은 목적함수를 리용한다.

$$\max \gamma, |\gamma \cdot W_S(j\omega)(I-Q(j\omega))| < 1 \quad \text{혹은} \quad \|\gamma \cdot W_S(s)(I-Q(s))\|_{\infty} < 1 \quad (12)$$

다른 한편 외란관측기의 Q-려파기는 공칭모형의 상대차수와 같거나 큰 상대차수를 가져야 한다.

$$Q(s) \in \Omega_k$$

여기서

$$\Omega_k = \left\{ G(s) \mid G(s) = \frac{M(s)}{N(s)}, N = \sum_{i=0}^n a_i s^i, M = \sum_{j=0}^q a_j s^j, n = q + k \right\} \quad (13)$$

이다.

식 (11), (12), (13)을련립하면 시간지연변동에 대하여 닫힌고리체계의 로바스트안정성을 만족시키면서 최량의 외란억제성능을 가지는 외란관측기의 설계를 위한 목적함수를 다음과 같이 얻게 된다.

$$\max \gamma, \left\| \frac{\gamma \cdot W_S(s)(I-Q(s))}{W_Q(s)Q(s)} \right\|_{\infty} < 1, Q(s) \in \Omega_k \quad (14)$$

식 (14)는 시간지연변동에 대하여 로바스트안정인 외란관측기내부고리의 설계절차를 닫힌고리체계의 안정성을 담보하는 외란관측기설계예로 확장할수 있다는것을 보여준다.

3. 외란관측기의 최량설계

식 (14)는 그 구조적제약조건식 (13)으로 하여 표준 H_{∞} 조종설계문제에서의 풀이법에 의하여 직접 풀리지 않으며 따라서 논문에서는 가상고리정형방법을 리용하였다.

이제 가상고리함수 \tilde{L} 을 다음과 같이 정의하자.

$$\tilde{L}(s) = (I - Q(s))^{-1} Q(s) \quad (15)$$

그러면 Q-려파기는 가상고리함수에 의하여 다음과 같이 된다.

$$Q(s) = \tilde{L}(s)(I + \tilde{L}(s))^{-1}, I - Q(s) = (I + \tilde{L}(s))^{-1} \quad (16)$$

식 (16)을 리용하면 최량화문제 (14)는 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\max \gamma, \left\| \frac{\gamma \cdot W_S(s)(I + \tilde{L}(s))^{-1}}{W_Q(s)\tilde{L}(s)(I + \tilde{L}(s))^{-1}} \right\|_{\infty} < 1, \tilde{L}(s) \in \Omega_k \quad (17)$$

한편 $\tilde{L}(s) \in \Omega_k$ 를 가상조종대상 $\tilde{G}(s)$ 와 가상조종기 $\tilde{K}(s)$ 로 분해하자.

$$\tilde{L}(s) = \tilde{G}(s)\tilde{K}(s) \quad (18)$$

여기서 안정한 가상조종대상 $\tilde{G}(s)$ 가 조종대상공칭모형의 상대차수 k 를 그대로 보존하도록 선택한다. 실례로 $\tilde{G}(s) = 1/(s + \alpha)^k$ 로 할수 있는데 여기서 α 는 임의의 정의 실수이다.

그러면 최량화문제 (17)은 최량의 $\tilde{K}^*(s)$ 를 찾는것과 동등하다.

$$\max_{\gamma} \gamma, \left\| \begin{bmatrix} \gamma \cdot W_S(s)(I + \tilde{G}(s)\tilde{K}(s))^{-1} \\ W_Q(s)\tilde{G}(s)\tilde{K}(s)(I + \tilde{G}(s)\tilde{K}(s))^{-1} \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < 1, \tilde{K}(s) \in RL_{\infty} \quad (19)$$

그리고 최량의 $Q^*(s)$ 는 $\tilde{K}^*(s)$ 를 포함하는 식 (17)과 (19)로부터 얻을수 있으며 이 두 최량화문제의 동등성은 선행연구[2]에서 증명되었다.

식 (19)는 표준 H_{∞} 조종문제의 형식으로 되어있으며 따라서 DGKF방법[4]으로 풀수 있다. 이때 그 풀이 $\tilde{K}^*(s)$ 는 Ω_k 의 제한을 받지 않는다. 그대신 γ -최대화방법으로 령인 상대차수를 가진 최량의 $\tilde{K}^*(s)$ 를 얻는것으로 구조적속박조건을 만족시킨다.

4. 검증실험과 모의실험 및 결과분석

앞에서 고찰한 설계절차에 따라 시간지연변동을 가진 하나의 사보조종대상에 대하여 로바스트안정이면서도 최량의 외란억제성능을 가지는 외란관측기를 다음과 같이 설계한다.

우선 체계가 경사형태의 외란($q=1$)을 제거하고 표준 H_{∞} 조종문제의 전제조건을 만족하도록 감도무계를 $W_S=1/(s+\lambda)^2$ 과 같이 선택한다.

조종대상은 시간지연변동을 가진 다음과 같은 사보체계라고 하자.

$$\tilde{P}(s) = s^{-2} \cdot e^{-\tilde{T}_d s}, \tilde{T}_d \in [0, T_d], T_d = 0.2$$

그리고 위의 대상과 그것에 대하여 설계한 PD조종기, $W_U=T_d \cdot s$ 에 대하여 구성한 상보감도함수가 그림 3에서 보는바와 같이 100rad/s보다 큰 주파수에서 -30dB보다 작은 진폭과 -40dB/dec의 진폭감쇠를 가지도록 하자. 이때 원래의 검출잡음억제성능을 유지하도록 하기 위하여 상보감도무계를 식 (9)를 만족시키도록 $W_Q=(1.6T_d s)(0.01s+1)$ 과 같이 선택한다.

다음 가상대상 $\tilde{G}=1/(s+\delta)^2$ 을 선택한다. 여기서 $\delta>0$ 은 최량풀이결과에 영향을 주지 않기때문에 임의로 선택될수 있는데 실례로 $\delta=10$ 으로 선택한다. 이때 가상대상에 대한 표준 H_{∞} 조종문제의 확장조종대상의 차수는 W_S 와 \tilde{G} 의 차수들의 합과 같이 4이다. 그러나 식 (19)의 γ -최량화과정에 풀이의 1개 차수가 낮아지게 되며 결과적으로 3차로 된다.

한편 그림 3으로부터 $L_0(s)=P_0(s)C(s)$ 가 $\|W_U(s)(1+L_0(s))^{-1}L_0(s)\|_{\infty}<1$ 을 만족시킨다는것을 알수 있으며 이것은 $E(\omega)>0$ 임을 말해준다.

여기에 기초하여 최량화문제 (19)를 풀기 위하여 표준 H_{∞} 조종문제의 풀이법을 리용한다.

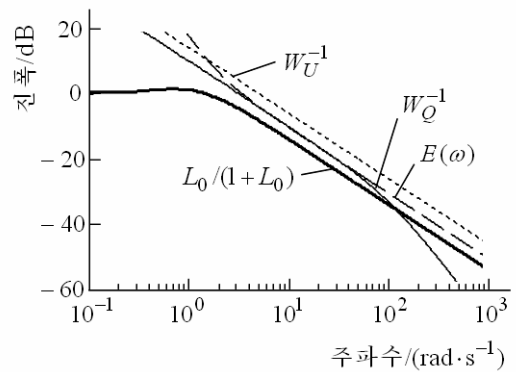


그림 3. 무계함수들과 외란관측기가 없는 닫힌고리체계

풀이결과 최량의 가상조종기 $\tilde{K}^*(s)$ 는 $\gamma_{\max} = 3.8825$ 에서 다음과 같이 얻어진다.

$$\tilde{K}^*(s) = \frac{312.473 \cdot 8(s+1.281)(s+10)^2}{(s+103.1)(s+0.01)^2}$$

여기서 중복령점 -10 은 \tilde{G} 의 중복극점으로부터 생긴것이며 중복극점 -0.01 은 W_S 의 λ 로부터 생긴것이다. 그러므로 식 (19)에 의하여 근사적인 최량열린고리함수 \tilde{L}^* 을 다음과 같이 얻을수 있다.

$$\tilde{L}^* = \frac{312.473 \cdot 8(s+1.281)}{s^2(s+103.1)}$$

최종적으로 식 (16)에 의하여 최량의 Q-러파기를 다음과 같이 얻을수 있다.

$$Q^* = \frac{312.5s + 400.3}{s^3 + 103.1s^2 + 312.5s + 400.3}$$

그림 4는 Q^* 이 식 (9)–(14)를 만족시킨다는것 즉 시간지연변동에 대하여 로바스트안정이며 최량의 외란억제성능을 준다는것을 보여준다.

한편 Q^* 을 가지는 DOB의 외란억제성능과 식 (11)을 만족시키는 2항결수모형

$$Q_b = \frac{3(\sigma \cdot s) + 1}{(\sigma \cdot s)^3 + 3(\sigma \cdot s)^2 + 3(\sigma \cdot s) + 1}$$

중에서 가장 낮은 시상수 $\sigma = 0.4$ 를 가지는 즉 최대의 대역폭을 가지는 Q_b 에 의한 DOB의 외란억제성

능을 비교하자.

그림 5에 2개의 감도함수 $S_{b1} = 1 - Q_{b1}$ 과 $S^* = 1 - Q^*$ 의 곡선을 보여주었다. 그림 5에서 보는바와 같이 $0 \sim 20 \text{ rad/s}$ 의 주파수에서 S^* 이 S_{b1} 보다 약 5dB 작다는것을 알수 있다. 이것은 Q^* 을 리용한 외란관측기에 의하여 억제된 외란이 Q_{b1} 을 리용한것보다 1.8배 더 작다는것을 의미한다. 이것을 검증하기 위하여 MATLAB SIMULINK로 모의를 진행하였다.

그림 6에 진폭이 1이고 주파수가 0.6 rad/s 인 시누스외란에 대한 두 조종체계의 응답을 보여주었다.

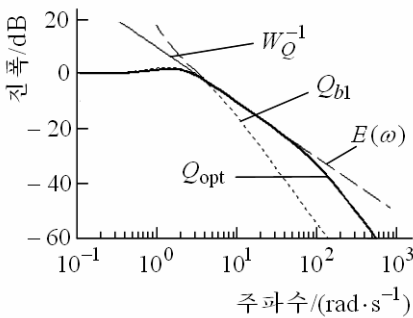


그림 4. 닫힌고리체계의 로바스트 안정성분석

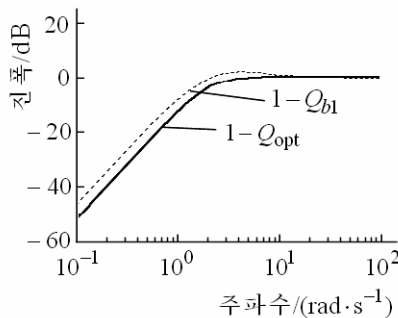


그림 5. 2개의 감도함수 $S_{b1} = 1 - Q_{b1}$ 과 $S^* = 1 - Q^*$ 의 곡선

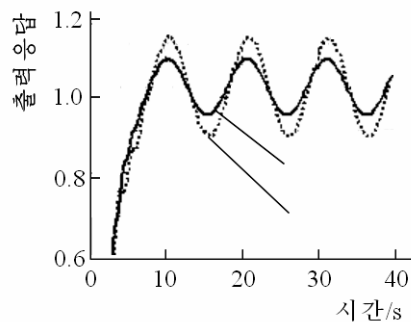


그림 6. 시누스외란에 대한 두 조종체계의 응답

모의는 $\tilde{T}_d = 0.18$ 의 조건하에서 진행되었다.

모의결과 외란관측기가 없는 닫힌고리체계의 오차 증폭도가 0.735 3이라는데 주목하면 이 외란으로 인한 오차의 진폭은 0.735 3이라는것을 알수 있다. 그리고 Q^* 을 리용했을 때의 오차진폭은 0.064이고 Q_{bl} 을 리용했을 때에는 0.115로서 이것은 그림 5에서의 설계결과와 일치하다는것을 알수 있다.

그림 7에 단위계단외란에 대한 체계들의 오차응답을 보여주었다. 그림 7에서 보는바와 같이 역시 Q^* 을 가지는 체계의 외란억제성능이 Q_{bl} 을 가진 체계보다 더 높다는것을 알수 있다.

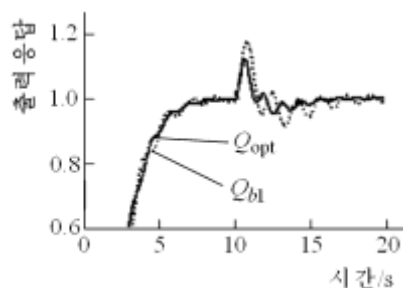


그림 7. 단위계단외란에 대한 체계의 오차응답

맺 는 말

시간지연체계에 대한 외란관측기를 포함한 닫힌고리의 로바스트안정성의 새로운 조건을 체계의 상보감도함수의 변화와 소증폭도정리를 리용하여 구성하였다. 다음 이 조건과 외란억제성능을 반영하는 구조적제약들을 결합하여 하나의 H_∞ 혼합감도최량화문제를 정의하였다. 이것은 가상고리분해에 의하여 제약이 없는 표준 H_∞ 조종문제로 변환되며 그 풀이법에 의해 풀수 있다. 검증실패와 모의결과는 제안된 설계방법이 체계의 외란억제성능과 로바스트안정성을 개선할수 있다는것을 보여주었다.

참 고 문 헌

- [1] Hao Yin et al.; Asian Journal of Control, 22, 2, 831, 2020.
- [2] Jianbo Su et al.; International Journal of Robust and Nonlinear Control, 25, 16, 2894, 2015.
- [3] Yun Jong Nam et al.; IEEE Transactions on Industrial Electronics, 60, 7, 2701, 2013.
- [4] K. Glover et al.; SIAM J. Control and Optimization, 29, 2, 283, 1991.

주체109(2020)년 11월 5일 원고접수

A Design of Optimized Disturbance Observer for Robust Control of Time-Varying Delay System

Kim Jong Ryong, Yun Jong Nam

We considered a robust stability condition of the closed loop system and composed an H_∞ mixed sensitivity problem with structural constraint to obtain the optimized disturbance suppression performance under robust stability condition against the variable time delay.

Then, we analytically solved this problem by using pseudo loop factorization method.

Keywords: time delay system, disturbance observer, robust control