김일성종합대학학보 (자연과학) 주체106(2017)년 제63권 제7호
JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE) Vol. 63 No. 7 JUCHE106(2017).

p－라쁠라스연산자를 가진 한가지 비선형분수계미분방정식의 여러점경계값문제를 풀기 위한 하르웨블레트연산행렬법

정금성, 양철명

최근 많은 론문들에서 분수계미분방정식의 수값풀이를 계산하는데서 효과적인 하르웨블레트연산행렬법에 대하여 론의하고있다.

선행연구[2]에서는 블로크임풀스함수계를 정의하고 리만－류빌분수계적분연산자에 의한 블로크임풀스연산행렬을 구성하였으며 선행연구[1, 3]에서는 블로크임풀스연산행렬[2]에 기초하여 분수계적분연산자에 의한 하르웨블레트연산행렬을 유도하고 하르웨블레트연산행렬법을 리용한 여러 분수계미분방정식들의 수값풀이계산실례를 주었다.

선행연구[4]에서는 분수계적분의 정의와 하르웨블레트의 성질, 라쁠라스변환을 리용하여 분수계적분을 근사계산하는 새로운 하르웨블레트연산행렬을 유도하였으며 이에 기초하여 한가지 분수계볼테라적분방정식의 근사풀이계산도식을 구성하고 그 수렴성을 해석하였다.

선행연구[5, 6]에서는 하르웨블레트함수들의 분수계적분을 계산하여 배치점들에서의 분수계적분값들을 원소로 가지는 정확한 하르웨블레트연산행렬을 구성하였다.

우의 결과들에 기초하여 론문에서는 선행연구[5]에서와 같은 하르웨블레트연산행렬을 리용하여 다음의 p－라쁠라스연산자를 가진 비선형분수계미분방정식의 m점경계값문제

$$D_{0+}^{\beta}(\varphi_p(D_{0+}^{\alpha}u))(t)=f(t,\ u(t)),\ \ 0<t<1, \tag{1}$$

$$u(0)=0,\ \ D_{0+}^{\gamma}u(1)=\sum_{i=1}^{m-2}\xi_i D_{0+}^{\gamma}u(\eta_i), \tag{2}$$

$$D_{0+}^{\alpha}u(0)=0,\ \varphi_p(D_{0+}^{\gamma}u)(1)=\sum_{i=1}^{m-2}\zeta_i\varphi_p(D_{0+}^{\gamma}u)(\eta_i) \tag{3}$$

의 수값풀이계산도식을 제기하고 수렴성을 해석하였다. 여기서 D_{0+}^{α}, D_{0+}^{β}, D_{0+}^{γ}는 리만－류빌분수계도함수이고 $1<\alpha,\ \beta\le 2,\ 0<\gamma\le 1,\ \ 0<\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i<1$이며 조건

$$\alpha-\gamma-1>0,\ \ \sum_{i=1}^{m-2}\xi_i\eta_i^{\alpha-\gamma-1}<1,\ \sum_{i=1}^{m-2}\zeta_i\eta_i^{\beta-1}<1$$

을 가정한다. 또한 함수 f는 $f\in C([0,\ 1]\times[0,\ +\infty),\ [0,\ +\infty))$이고

$$\varphi_p(s)=|s|^{p-2}s,\ \ p>1,\ \ \varphi_p^{-1}=\varphi_q,\ \ 1/p+1/q=1.$$

f의 α계분수계적분을 $I_{0+}^{\alpha}f(t):=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s)ds\ (t,\ \alpha>0)$와 같이 정의한다.[1]

$S_n:=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}[(2i+1)^{\alpha}-(2i)^{\alpha}]\ \ (0<\alpha<1)$이라고 할 때 $S_n\le(n+1)^{\alpha}$이 성립된다.

정의 1 [7] $t\in(0,\ 1]$ 에 대하여 다음과 같은 함수모임을 하르웨블레트라고 부른다.

$$h_0(t)=\frac{1}{\sqrt{l}},\ \ h_i(t)=\frac{1}{\sqrt{l}}\cdot\begin{cases}2^{j/2}, & (k-1)/2^j<t\le(k-1/2)/2^j\\ -2^{j/2}, & (k-1/2)/2^j<t\le k/2^j\\ 0, & t\le(k-1/2)/2^j\vee t\le k/2^j\end{cases},\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ l-1$$

여기서 $l=2^s,\ s\in\boldsymbol{N}$ 이며 $(j,\ k)$ 는 $i=2^j+k-1$ 을 만족시키는 옹근수쌍이다.

정의 2 [7] $t_k=(k-1/2)/l,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ l$ 에 대하여 다음의 l 차원행렬을 하르웨블레트행렬이라고 부른다.

$$H=\begin{pmatrix}h_0(t_1) & h_0(t_2) & \cdots & h_0(t_l)\\ h_1(t_1) & h_1(t_2) & \cdots & h_1(t_l)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ h_{l-1}(t_1) & h_{l-1}(t_2) & \cdots & h_{l-1}(t_l)\end{pmatrix}$$

이 정의로부터 하르웨블레트행렬이 표준직교행렬이라는것을 알수 있다.

$y\in C(0,\ 1]$ 에 대하여 $\hat{y}(t)=\sum_{i=0}^{l-1}c_ih_i(t)$ 를

$$\hat{y}(t_k)=y(t_k),\ \ k=1,\ 2,\ \cdots,\ l \tag{4}$$

이 성립되도록 결수 $c_i,\ i=0,1,\ \cdots,\ l-1$ 을 결정하자.

$H_l(t)=(h_0(t),\ h_1(t),\ \cdots,\ h_{l-1}(t))^{\mathrm{T}},\ C=(c_0,\ c_1,\ \cdots,\ c_{l-1})^{\mathrm{T}}$ 라고 하면 $\hat{y}(t)=C^{\mathrm{T}}H_l(t)$ 이며 이로부터 $Y=(y(t_1),\ y(t_2),\ \cdots,\ y(t_l))$ 이라고 놓으면 식 (4)는 $Y=C^{\mathrm{T}}H$ 로 쓸수 있다.

또한 H 는 표준직교행렬이므로 결수벡토르 C^{T} 와 $\hat{y}(t)$ 는 $C^{\mathrm{T}}=YH^{\mathrm{T}},\ \hat{y}(t)=YH^{\mathrm{T}}H_l(t)$ 로 결정된다.

보조정리 1 [5] 하르웨블레트함수들의 α 계적분은 다음과 같이 계산된다.

$$I_{0+}^{\alpha}h_0(t)=\frac{t^{\alpha}}{\sqrt{l}\Gamma(\alpha+1)},\ \ I_{0+}^{\alpha}h_i(t)=\frac{2^{\frac{j}{2}}}{\sqrt{l}\Gamma(\alpha+1)}\cdot\begin{cases}0, & t\le\dfrac{k-1}{2^j}\\ \left(t-\dfrac{k-1}{2^j}\right)^{\alpha}, & \dfrac{k-1}{2^j}<t\le\dfrac{k-1/2}{2^j}\\ \left(t-\dfrac{k-1}{2^j}\right)^{\alpha}-2\left(t-\dfrac{k-1/2}{2^j}\right)^{\alpha}, & \dfrac{k-1/2}{2^j}<t\le\dfrac{k}{2^j}\\ \left(t-\dfrac{k-1}{2^j}\right)^{\alpha}-2\left(t-\dfrac{k-1/2}{2^j}\right)^{\alpha}+\left(t-\dfrac{k}{2^j}\right)^{\alpha}, & t>\dfrac{k}{2^j}\end{cases}$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ l-1$$

α 계적분에 대한 하르웨블레트연산행렬 Q^{α} 은 다음과 같다.[5]

$$Q^{\alpha}H_l(t)=(I_{0+}^{\alpha}h_0(t),\ I_{0+}^{\alpha}h_1(t),\ \cdots,\ I_{0+}^{\alpha}h_{l-1}(t))^{\mathrm{T}}$$

정의 3 함수 $u(t)$ 가 경계값문제 (1)－(3)의 풀이이라는것은 $u(t)$ 에 대하여

$$u\in X=\{x\,|\,x\in C[0,\ 1],\ D_{0+}^{\alpha}x\in C[0,\ 1],\ \varphi_p(D_{0+}^{\alpha}x)\in C[0,\ 1],\ D_{0+}^{\beta}(\varphi_p(D_{0+}^{\alpha}x))\in C[0,\ 1]\}$$

이면서 미분방정식 (1)과 경계조건 (2), (3)이 만족된다는것을 말한다.

한편 경계값문제 (1)－(3)을 동등한 형태의 적분방정식으로 넘기면 다음과 같다.

$$u(t)=\int_0^1 G(t,\ s)\varphi_p^{-1}\left(\int_0^1 H(s,\ \tau)f(\tau,\ u(\tau))d\tau\right)ds \tag{5}$$

이때 $A=1-\sum_{i=1}^{m-2}\xi_i\eta_i^{\alpha-\gamma-1},\ B=1-\sum_{i=1}^{m-2}\zeta_i\eta_i^{\beta-1}$ 으로 놓으면

$$\int_0^1 H(s,\ \tau)f(\tau,\ u(\tau))d\tau=-I_{0+}^{\beta}f(s,\ u(s))-\frac{1}{B}\left[\sum_{i=1}^{m-2}\zeta_i I_{0+}^{\beta}f(s,\ u(s))|_{s=\eta_i}-I_{0+}^{\beta}f(s,\ u(s))|_{s=1}\right]s^{\beta-1},$$

$$\int_0^1 G(t,\ s)y(s)ds=-I_{0+}^{\alpha}y(t)-\frac{\Gamma(\alpha-\gamma)}{A\Gamma(\alpha)}\left[\sum_{i=1}^{m-2}\xi_i I_{0+}^{\alpha-\gamma}y(t)|_{t=\eta_i}-I_{0+}^{\alpha-\gamma}y(t)|_{t=1}\right]t^{\alpha-1}$$

이므로 $G(t,\ s)\le G_*(s,\ s):=(1-s)^{\alpha-\gamma-1}/(A\Gamma(\alpha)),\ H(t,\ s)\le H_*(s,\ s):=(1-s)^{\beta-1}/(B\Gamma(\beta))$ 이다.

$1/p+1/q=1,\ \varphi_p^{-1}=\varphi_q$ 로부터 식 (5)를 다시 쓰면

$$\begin{aligned}u(t)=&I_{0+}^{\alpha}\varphi_q\left[I_{0+}^{\beta}f(t,\ u(t))+\frac{1}{B}\left[\sum_{i=1}^{m-2}\zeta_i I_{0+}^{\beta}f(t,\ u(t))|_{t=\eta_i}-I_{0+}^{\beta}f(t,\ u(t))|_{t=1}\right]t^{\beta-1}\right]+\frac{\Gamma(\alpha-\gamma)}{A\Gamma(\alpha)}\cdot\\&\cdot\left\{\sum_{i=1}^{m-2}\xi_i I_{0+}^{\alpha-\gamma}\varphi_q\left[I_{0+}^{\beta}f(t,\ u(t))+\frac{1}{B}\left[\sum_{i=1}^{m-2}\zeta_i I_{0+}^{\beta}f(t,\ u(t))|_{t=\eta_i}-I_{0+}^{\beta}f(t,\ u(t))|_{t=1}\right]t^{\beta-1}\right]\right|_{t=\eta_i}-\\&-I_{0+}^{\alpha-\gamma}\varphi_q\left[I_{0+}^{\beta}f(t,\ u(t))+\frac{1}{B}\left[\sum_{i=1}^{m-2}\zeta_i I_{0+}^{\beta}f(t,\ u(t))|_{t=\eta_i}-I_{0+}^{\beta}f(t,\ u(t))|_{t=1}\right]t^{\beta-1}\right]\left.\right|_{t=1}\left.\right\}t^{\alpha-1}.\end{aligned} \tag{6}$$

보조정리 2[8] p－라쁠라스연산자에 대하여 다음의 성질들이 성립된다.

① $1<p<2,\ xy>0,\ |x|,\ |y|\ge m>0$ 이면 $|\varphi_p(x)-\varphi_p(y)|\le(p-1)m^{p-2}|x-y|$ 이다.

② $p>2,\ |x|,|y|\le M$ 이면 $|\varphi_p(x)-\varphi_p(y)|\le(p-1)M^{p-2}|x-y|$ 이다.

적분방정식 (6)으로부터 경계값문제 (1)－(3)의 수값풀이계산을 위한 다음의 계산도식이 나온다.

걸음 1 점 $t_i,\ i=1,2,\cdots,\ l$ 들을 배치하고 다음의 수들과 벡토르들을 계산한다.

$$A=1-\sum_{i=1}^{m-2}\xi_i\eta_i^{\alpha-\gamma-1},\quad B=1-\sum_{i=1}^{m-2}\zeta_i\eta_i^{\beta-1},\quad T_\alpha=\{t_1^{\alpha-1},\ t_2^{\alpha-1},\ \cdots,\ t_l^{\alpha-1}\},\quad T_\beta=\{t_1^{\beta-1},\ t_2^{\beta-1},\ \cdots,\ t_l^{\beta-1}\}$$

$$I^{\alpha}=Q^{\alpha}H,\ I^{\alpha-\gamma}=Q^{\alpha-\gamma}H,\ I^{\beta}=Q^{\beta}H,\ P_\eta^{\beta}=\{Q^{\beta}H_l(\eta_1),\ Q^{\beta}H_l(\eta_2),\ \cdots,\ Q^{\beta}H_l(\eta_{m-2})\}$$

$$P_1^{\beta}=Q^{\beta}H_l(1),\ P_\eta^{\alpha-\gamma}=\{Q^{\alpha-\gamma}H_l(\eta_1),\ Q^{\alpha-\gamma}H_l(\eta_2),\ \cdots,\ Q^{\alpha-\gamma}H_l(\eta_{m-2})\},\ P_1^{\alpha-\gamma}=Q^{\alpha-\gamma}H_l(1)$$

걸음 2 초기함수 $u_0\in E$ 를 준다.

걸음 3 n째 근사풀이 u_n으로부터의 $n+1$째 근사풀이 u_{n+1}의 구성과정은 다음과 같다.

i) $F_n=\{f(t_1,u_n(t_1)),\ f(t_2,\ u_n(t_2)),\ \cdots,\ f(t_l,\ u_n(t_l))\}$ 을 구성하고 결수벡토르 $C_n^{\mathrm{T}}=F_nH^{\mathrm{T}}$ 를 계산한다.

ii) $X_n=C_n^{\mathrm{T}}I^{\beta},\ K_n=C_n^{\mathrm{T}}P_\eta^{\beta}$ 과 수 $e_n=C_n^{\mathrm{T}}P_1^{\beta}$ 을 계산하고 이에 기초하여 벡토르 W_n 을 $W_n=-X_n-\frac{1}{B}\left(\sum_{i=1}^{m-2}\zeta_i(K_n)_i-e_n\right)\cdot T_\beta$ 와 같이 구성한다.

iii) $V_n=\{(W_n)_1^{q-1},\ (W_n)_2^{q-1},\ \cdots,\ (W_n)_l^{q-1}\}$ 을 구성하고 결수벡토르 $D_n^{\mathrm{T}}=V_nH^{\mathrm{T}}$ 를 계산한다.

iv) $Y_n = D_n^{\mathrm{T}} I^{\alpha}$, $M_n = D_n^{\mathrm{T}} P_{\eta}^{\alpha-\gamma}$ 과 수 $g_n = D_n^{\mathrm{T}} P_1^{\alpha-\gamma}$ 을 계산하고 이에 기초하여 벡토르 U_{n+1} 을 $U_{n+1} = -Y_n - \dfrac{\Gamma(\alpha-\gamma)}{A\Gamma(\alpha)}\left(\sum_{i=1}^{m-2}\xi_i (M_n)_i - g_n\right)\cdot T_{\alpha}$ 와 같이 구성한다.

이때 $n+1$째 근사풀이 $u_{n+1}(t)$ 는 다음과 같이 구성된다.

$$u_{n+1}(t) = -D_n^{\mathrm{T}} Q^{\alpha} H_l(t) - \frac{\Gamma(\alpha-\gamma)}{A\Gamma(\alpha)}\left(\sum_{i=1}^{m-2}\xi_i (M_n)_i - g_n\right) t^{\alpha-1}$$

우의 계산도식에서 보여주지는 않았지만 걸음 3에서 계산되는 C_n^{T} 에 의하여 $t\in(0,\ 1]$ 에서 함수 $z_n(t) := f(t,\ u_n(t))$ 의 하르웨블레트근사함수 $\hat{z}_n(t) = C_n^{\mathrm{T}} H_l(t)$ 가 얻어진다. 여기에 $Q^{\beta} H_l(t) = I_{0+}^{\beta} H_l(t)$ 임을 고려하면 W_n 은 함수 $w_n(t) = \int_0^1 H(t,\ s)\hat{z}_n(s)ds$ 의 배치점들에서의 함수값벡토르이고 V_n 은 함수 $\upsilon_n(t) = \varphi_q(w_n(t))$ 의 배치점들에서의 함수값벡토르이며 D_n^{T} 에 의하여 $t\in(0,\ 1]$ 에서 $\upsilon_n(t)$ 의 하르웨블레트근사함수 $\hat{\upsilon}_n(t) = D_n^{\mathrm{T}} H_l(t)$ 가 얻어진다.

따라서 $u_{n+1}(t) = \int_0^1 G(t,\ s)\hat{\upsilon}_n(s)ds$ 로 된다.

한편 문제 (1)－(3)의 풀이는 $u_*(t) = \int_0^1 G(t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 H(s,\ \tau) f(\tau,\ u_*(\tau))d\tau\right)ds$ 이므로 함수 $z_*(t) := f(t,\ u_*(t)),\ w_*(t) := \int_0^1 H(t,\ s)z_*(s)ds,\ \upsilon_*(t) := \varphi_q(w_*(t))$ 를 정의하면 $u_*(t) = \int_0^1 G(t,\ s)\upsilon_*(s)ds$ 로 쓸수 있다.

$\overline{M} = (\alpha-\gamma)^{p-1} A^{p-1} B\Gamma(\alpha)^{p-1}\Gamma(\beta)$ 라고 표시하자.

가정 1 비부값함수 $g,\ h\in C[0,\ 1]$ 이 존재하여 $\|h\| < \overline{M}$ 이며 $\forall(t,\ x)\in[0,\ 1]\times[0,\ r]$ 에 대하여 $f(t,\ x) \le g(t) + h(t)x^{p-1}$ 이 성립된다. 여기서 r 는 $r = [\|g\|/(\overline{M} - \|h\|)]^{q-1}$ 인 상수이다.

가정 2 문제 (1)－(3)의 풀이 u_* 은 $E := \{u\in X \mid \|u\| \le r\}$ 에서 유일존재한다.

보조정리 3 가정 1이 성립된다고 할 때 $\|u_n\| \le r$ 이면 $\|u_{n+1}\| \le r$ 이다.

보조정리 3으로부터 $\forall n,\ \|u_n\| \le r$ 임을 쉽게 알수 있다.

$C := \max\limits_{t\in[0,\ 1],\ x\in[0,\ r]} f(t,\ x)$ 라고 표시하자.

평등련속성을 리용하면 $\forall\varepsilon > 0$ 에 대하여 $\exists l_H \in \boldsymbol{N}$ 이 있어서 점 $t_i,\ i = 1, 2, \cdots,\ l_H$ 들을 배치하여 $\forall t\in(0,\ 1],\ \exists k : t\in(t_k - 1/(2l_H),\ t_k + 1/(2l_H)],\ \ |H(t, s) - H(t_k, s)| < \varepsilon / C$ 이 성립된다.

마찬가지로 $\forall\varepsilon > 0$ 에 대하여 $\exists l_G^f \in \boldsymbol{N}$ 이 있어서 점 $t_i,\ i = 1,\ 2, \cdots,\ l_G^f$ 들을 배치하여 $\forall t\in(0,\ 1],\ \exists k:\ t\in(t_k - 1/(2l_G^f),\ t_k + 1/(2l_G^f)],\ \ |f(t,\ u_n(t)) - f(t_k,\ u_n(t_k))| < \varepsilon$ 이 성립된다.

가정 3 $\forall t\in[0,\ 1],\ \forall x,\ y\in[0,\ r]$; $|f(t,\ x) - f(t,\ y)| < L|x - y|$

가정 4 $\exists\overline{m} > 0,\ \exists\delta\in[1,\ 2]$, $\forall(t,\ x)\in[0,\ 1]\times[0,\ r]$; $f(t,\ x) \ge \overline{m}t^{\delta-1}$

보조정리 4 $K_0 := \dfrac{\overline{m}}{2B\Gamma(\beta+2)}\sum_{i=1}^{m-2}\zeta_i(\eta_i^{\beta-1} - \eta_i^{\beta})$ 으로 놓으면 가정 1－4밑에서

$$w_n(t) \ge K_0 t^{\beta-1},\quad t\in[0,\ 1]$$

이 성립되고 이와 마찬가지로 하면 가정 2, 4가 성립될 때 $w_*(t) \ge K_0 t^{\beta-1}$, $t \in [0, 1]$이며 $K_1 := \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\left[1+\frac{1}{B}\sum_{i=1}^{m-2}\zeta_i(\eta_i^{\beta-1}-\eta_i^{\beta})\right]$ 에 대하여 $\int_0^1 H(t, s)ds \le K_1 t^{\beta-1}$, $t \in [0, 1]$이다.

정리 1 $p > 2$이고 가정 1ー4가 성립되며 J_1, J_2를 다음과 같이 표시하자.

$$J_1 := \frac{(q-1)K_1 L}{A(\alpha-\gamma)\Gamma(\alpha)K_0^{2-q}},\quad J_2 := \frac{q-1}{A\Gamma(\alpha)K_0^{2-q}}\left[\frac{K_1}{\alpha-\gamma}+\frac{2^{(\beta-1)(2-q)}}{(\beta-1)(q-2)+1}\right]$$

이때 $J_1 < 1$이면 평가식 $\| u_* - u_n \| \le J_1^n \| u_* - u_0 \| + (1-J_1^n)J_2/(1-J_1)\cdot\varepsilon$이 성립된다.

보조정리 5 $M_0 := (\| g \| + \| h \| r^{p-1})/(B\Gamma(\beta))$ 으로 놓고 가정 1이 성립된다고 하면 $w_n(t) \le M_0$, $t \in [0, 1]$이 성립된다.

우와 마찬가지로 하면 가정 1, 2가 성립될 때 $w_*(t) \le M_0$, $t \in [0, 1]$이다.

정리 2 $1 < p < 2$이고 가정 1ー3이 성립되며 J_3, J_4를 다음과 같이 표시하자.

$$J_3 := (q-1)Lr^{2-p}/(\beta\overline{M}),\ J_4 := (q-1)r^{2-p}/(\beta\overline{M})\cdot[1+B\Gamma(\beta+1)]$$

이때 $J_3 < 1$이면 평가식 $\| u_* - u_n \| \le J_3^n \| u_* - u_0 \| + (1-J_3^n)J_4/(1-J_3)\cdot\varepsilon$이 성립된다.

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보(자연과학), 62, 3, 9, 주체105(2016).

[2] A. Kilicman et al.; Appl. Math. Comput., 187, 250, 2007.

[3] Y. Li et al.; Appl. Math. Comput., 216, 2276, 2010.

[4] H. Saeedi et al.; Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., 21, 3, 535, 2011.

[5] S. Saha Ray et al.; Appl. Math. Comput., 218, 5239, 2012.

[6] S. Saha Ray et al.; Appl. Math. Comput., 220, 659, 2013.

[7] L. Wang et al.; Appl. Math. Comput., 227, 66, 2014.

[8] X. Liu et al.; Comput. Math. Appl., 64, 3267, 2012.

주체106(2017)년 3월 5일 원고접수

Haar Wavelet Operational Matrix Method for Solving Multi-Point Boundary Value Problem of a Nonlinear Fractional Differential Equation with *p*-Laplacian Operator

Jong Kum Song, Yang Chol Myong

An efficient numerical method for the solution of *m*-point boundary value problem of nonlinear fractional differential equation with *p*-Laplacian operator is discussed.

We have applied a numerical procedure involving Haar wavelet operational matrix of fractional order integration operator.

Key word: Haar wavelet operational matrix method