김일성종합대학학보 주체107(2018)년
(수학) 제64권 제1호

선형직4각형분할에 대한 일반화된 보로노이거꿀문제의 최량풀이구성알고리듬에 대한 연구

림충혁, 김성철

우리는 선형직4각형분할에 대하여 일반화된 보로노이거꿀문제의 최량풀이알고리듬을 연구하였다.

일반화된 보로노이거꿀문제의 풀이법에 대해서는 많이 연구되였으며 특히 선행연구[6]에서는 선형직4각형분할에 대한 일반화된 보로노이거꿀문제의 최량풀이구성알고리듬을 내놓았다.

론문에서는 선형직4각형분할에 대하여 선행연구[6]의 방법보다 단순하면서 최량성을 쉽게 증명할수 있는 한가지 일반화된 보로노이거꿀문제의 최량풀이구성알고리듬을 제기하였다.

1. 문제설정

보로노이리론에서는 평면에서 주어진 점들의 유한모임 S의 원소들을 지점이라고 부른다. 보로노이도식은 패턴인식, 편의시설들의 위치결정, 로보트이동, 지도작성, 결정학 등 많은 실천들에서 응용된다.

정의 1[1] S를 지점들의 모임이라고 하자. S의 한 지점 p에 대하여 다음의 모임을 S의 지점 p의 보로노이구역이라고 부르고 $\mathrm{Vor}(p)$로 표시한다.

$$\mathrm{Vor}(p)=\{x\in\mathbf{R}^2 \mid S\text{의 모든 지점 } q\text{에 대하여 } \|x-p\|\le\|x-q\|\text{이다.}\}$$

여기서 $\|p-q\|$는 평면에서 점 p와 q사이의 유클리드거리를 표시한다.

$\mathrm{Vor}(S)$는 S의 다른 임의의 지점 q보다 p에 더 가까운 모든 점 x들의 모임이다. 구역들사이의 경계우에 놓이는 점들은 제일 가까운 지점을 유일하게 가지지 않는다. 보로노이도식 $\mathrm{Vor}(S)$는 이 경계들의 모임이다. 즉 제일 가까운 지점이 둘이상인 모든 점들의 모임이다.

정의 2[3] 평면직선그라프 G에 대하여 그것이 평면의 어떤 점모임 S의 보로노이도식과 같게 될수 있는가, 만일 그렇다면 그 점모임 S를 찾는 문제를 보로노이거꿀문제라고 부른다.

보로노이거꿀에 대한 수학적인 론의는 처음 선행연구[4]에서 제기되였다. 그후 선행연구[5]에서 보다 효률적인 알고리듬이 제기되였으며 선행연구[7, 8]에서 선형계획법의 도움으로 더욱 개선되였다.

선행연구[9]에서는 선형계획법을 리용하여 S의 위치를 확정하였다.

보로노이거꿀문제에서는 보로노이도식의 정의로부터 1개 구역안에 꼭 1개 지점만을 놓아야 하는 제한조건이 존재한다. 따라서 모든 평면직선그라프 G에 대하여 그것과 일치

하는 보로노이도식이 항상 존재하지는 않는다. 이로부터 선행연구[2]에서는 1개 구역안에 2개 이상의 지점을 배치할수 있도록 하는 일반화된 보로노이거꿀문제가 제기되였다.

정의 3[6] 매 구역 $t_i \in T$ 에 1개 혹은 그 이상의 지점들의 모임 S_i 를 배치하여 T 의 모든 릉들이 보로노이도식 $\mathrm{Vor}(S)$ 의 릉들과 일치하고 $\forall i,\ j\,(i \neq j): S_i \cap S_j = \varnothing$ 인 조건을 만족시키도록 하는 문제를 일반화된 보로노이거꿀문제라고 부른다.(여기서 $S = \bigcup_i S_i$ 이다.) (그림 1)

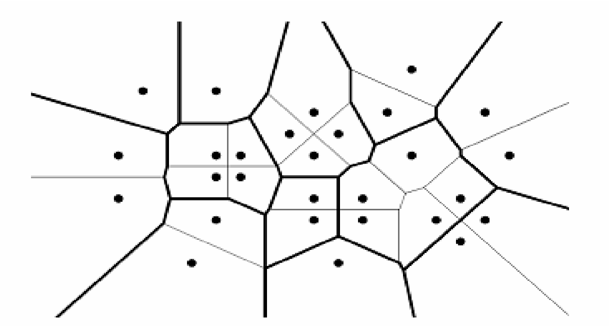

그림 1. 일반화된 보로노이거꿀문제

이 경우에 평면직선그라프 G 에는 새 정점들과 릉들이 추가된다. 그러나 본래의 정점 및 릉들은 모두 보존되여야 한다.

일반화된 보로노이거꿀문제의 풀이 S 는 늘 존재하며 여기서 기본목적은 그것의 크기를 최소화하는데 있다.[3]

선형직4각형분할이란 평면의 직4각형에 대한 분할로서 분할의 매 분할구역들이 모두 직4각형이고 그 중심들이 일직선상에 놓이게 하는 분할을 의미한다.

분할구역개수가 n 인 선형직4각형분할 T 에 대하여 아래의 사실이 성립한다.

명제 1[6] T 의 모든 분할구역들의 너비가 다같은 경우 일반화된 보로노이거꿀문제의 최량풀이의 지점개수는 n 이다.

명제 2[6] 2개의 서로 다른 너비를 가진 직4각형을 포함한 직4각형분할의 일반화된 보로노이거꿀문제의 최량풀이의 지점개수는 2이다.

명제 3[6] 3개의 직4각형으로 이루어진 직4각형분할에 대하여 일반화된 보로노이거꿀문제의 최량풀이의 지점개수는 4이하이다.

명제 4[6] 너비가 비증가(혹은 비감소)순서로 되여있는 n 개의 직4각형으로 이루어진 선형직4각형분할 T 에 대하여 일반화된 보로노이거꿀문제의 최량풀이의 지점개수는 n 이다.

이러한 결과들로부터 선행연구[6]에서는 $O(n)$ 시간동안에 선형직4각형분할의 일반화된 보로노이거꿀문제의 최량풀이를 구성하는 알고리듬을 내놓았다. 이 알고리듬에서는 매 분할구역들의 너비들의 증가 및 감소상태에 대한 조사과정이 요구된다. 또한 알고리듬이 최량풀이를 준다는것에 대한 명백한 증명이 없다.

론문에서는 선형직4각형분할에 대한 일반화된 보로노이거꿀의 최량풀이를 구성하는 보다 간단한 알고리듬을 제기하고 그 최량성을 증명하였다.

2. 선형직4각형분할에 대한 일반화된 보로노이거꿀문제의 최량풀이구성알고리듬

선형직4각형분할 T 의 분할구역들을 $T_1, \cdots, T_n$ 이라고 하고 그 분할구역들의 길이를 $L_1, \cdots, L_n$ 이라고 하며 T_i 의 왼변을 l_i, 오른변을 r_i 라고 하자.

α 를 T_1 의 왼변 l_1 로부터 알고리듬에 의해 T_1 에 찍혀질 첫 지점까지의 거리라고 하자.

이때 선형직4각형분할 T 에 대한 일반화된 보로노이거꿀문제의 최량풀이구성알고리듬은 다음과 같다.

알고리듬

입력자료: 선형직4각형분할 T (즉 분할구역개수 n, 매 분할구역들의 길이 $L_1, \cdots, L_n$)

출력자료: T 에 대한 일반화된 보로노이거꿀문제의 풀이(즉 지점모임 $\{P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_m\}$, 여기서 m 은 보로노이지점들의 개수)

과정:

련립부등식

$$\begin{cases} \alpha > 0 \\ \alpha < L_1 \\ \alpha > L_1 - L_2 \\ \alpha < L_1 - L_2 + L_3 \\ \cdots \end{cases} \qquad (*)$$

에 대하여 첫 i 개의 식으로 이루어진 련립부등식은 풀이를 가지고 $i+1$ 개의 식으로 이루어진 련립부등식은 풀이를 가지지 않는다고 하자.

i 가 짝수인 경우

$$\begin{cases} \alpha > 0 \\ \alpha < L_1 \\ \cdots \\ \alpha < L_1 - L_2 + L_3 - \cdots + L_{i-1} \end{cases}$$

i 가 홀수인 경우

$$\begin{cases} \alpha > 0 \\ \alpha < L_1 \\ \cdots \\ \alpha > L_1 - L_2 + L_3 - \cdots - L_{i-1} \end{cases}$$

이 련립부등식을 풀면 α 의 구간이 정해지는데 α 를 이 구간의 임의의 값으로 택한다.

이에 기초하여 T_1 로부터 T_{i-1} 까지 가면서 지점 $P_1, \cdots, P_{i-1}$ 을 출력한다.

우선 T_1 의 왼변 l_1 로부터 α 만큼 떨어진 거리에 지점 P_1 을 찍는다.

r_1 에 관하여 P_1 과 대칭인 지점 P_2 를 T_2 에 찍고 r_2 에 관하여 P_2 와 대칭인 지점 P_3 을 T_3 에 찍는다. 이 과정을 반복하여 지점 P_{i-1} 을 T_{i-1} 에 찍는다.

T_{i-1} 을 지점 P_{i-1} 을 지나는 수직선에 의하여 2개의 분할구역 T_{i-1}^l, T_{i-1}^r 로 나눈다.(여기서 T_{i-1}^l 은 왼쪽 분할구역, T_{i-1}^r 는 오른쪽 분할구역이다.)

T 에서 분할구역 $T_1, \cdots, T_{i-2}, T_{i-1}^l$ 을 제거하고

$$T_1 = T_{i-1}^r, \quad T_2 = T_i, \quad T_3 = T_{i+1}, \quad \cdots, \quad T_{n-i+2} = T_n$$

으로 놓고 제일 마지막분할구역에 지점이 찍힐 때까지 알고리듬을 반복한다.

실례 그림 2와 같이 주어진 한가지 선형직4각형분할에 대하여 알고리듬으로 지점을 찍는 과정은 그림 3과 같이 진행된다.

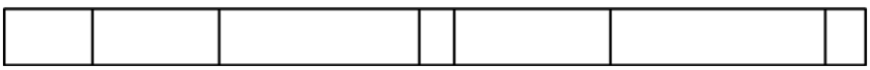

그림 2. 한가지 선형직4각형분할

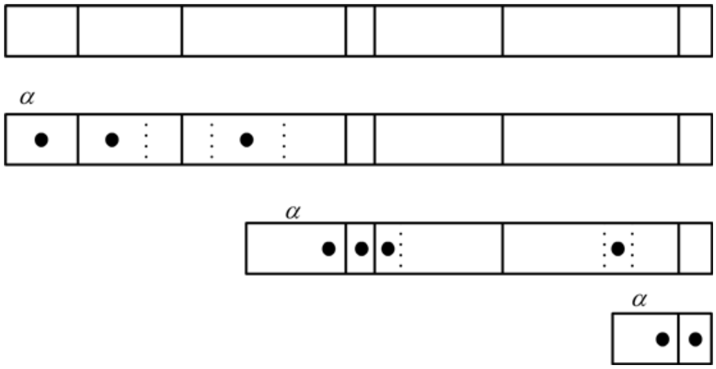

그림 3. 그림 2에 대한 알고리듬의 적용과정

이 알고리듬의 시간복잡도가 $O(n)$ 이라는것을 쉽게 알수 있다.

정리 우의 알고리듬에 의하여 찍혀진 점들은 선형직4형분할의 일반화된 보로노이거꿀문제의 최량풀이이다.

증명 알고리듬에서 점을 찍는 한번의 반복과정은 실제로 아래와 같다.

T_1 을 r_1 에 관하여 대칭이동하여 T_2 와 사귀는 공통부분 T_2' 를 r_2 에 관하여 대칭이동시킨다. 또한 이것과 T_3 과의 공통부분 T_3' 를 r_3 에 관하여 대칭이동시킨다. 이 과정을 공통부분이 존재하는 동안 계속 반복한다. 만일 T_{i-1}' 를 대칭이동시킨 부분과 T_i 와의 사귐이 존재하지 않는다면 T_{i-1}' 의 임의의 내부위치에 점 P_{i-1} 을 찍고 $T_{i-2}', T_{i-3}', \cdots, T_1$ 에 우의 과정을 거꾸로 거치면서 해당한 P_{i-1} 의 대칭점들을 찍는다.

이것은 알고리듬의 련립부등식 (*)로부터 α 의 값을 선택하는 과정과 동일시된다. 즉

$$\begin{aligned}
&\alpha > 0 \\
&\alpha < L_1 \\
&\alpha > L_1 - L_2 \Leftrightarrow L_1 - \alpha < L_2 \\
&\alpha < L_1 - L_2 + L_3 \Leftrightarrow L_2 - (L_1 - \alpha) < L_3 \\
&\cdots
\end{aligned}$$

우의 알고리듬은 실제로 제일 왼쪽으로부터 련이어 최대한 많은 개수의 분할구역들에 지점을 하나씩 배치하는것이다.

알고리듬의 매 반복과정에 찍혀지는 지점 $P_1, \cdots, P_{i-2}$ 는 매 분할구역 T_j 에 지점 $P_j\,(j=\overline{1,\, i-2})$ 가 1개씩 찍혀지므로 T_1 로부터 T_{i-2} 까지 선형분할의 최량풀이로 된다.

련립부등식 (*)의 첫 i 개의 식으로 이루어진 련립부등식은 풀이를 가지고 $i+1$ 개의 식으로 이루어진 련립부등식은 풀이를 가지지 않으므로 T_1 로부터 T_{i-1} 에 지점을 1개씩 놓아서는 전체적으로 풀이를 구성하지 못한다는것을 쉽게 알수 있다. 다시말하여 T_1 로부터 T_{i-1} 까지의 분할구역들중에는 2개의 지점을 가지는 분할구역이 적어도 1개 존재하여야 한다.

지점 $P_1, \cdots, P_{i-2}$ 의 위치는 T_i 와 그다음의 분할구역들에서 보로노이지점들의 개수 및 위치결정에 영향을 주지 않는다.

그러므로 알고리듬에 의하여 찍혀지는 지점들의 모임은 일반화된 보로노이거꿀문제의 최량풀이로 된다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] S. L. Devadoss et al.; Discrete and Computational Geometry, Princeton University Press, 98 ～117, 2011.

[2] T. Almaguer et al.; Revista Cubana de Ciencias Informaticas, 1, 4, 58, 2007.

[3] G. Aloupis et al.; arXiv:1308.5550v1 [cs.CG] 26, 2013.

[4] P. Ash et al.; Geometriae Dedicata, 19, 175, 1985.

[5] F. Aurenhammer; J. Symbolic Computation, 3, 249, 1987.

[6] M. L. Gavrilova et al.; LNCS: Trans. on Comput. Sci., 20, 22, 2013.

[7] D. Hartvigsen; J. Comput., 4, 369, 1992.

[8] F.P. Schoenberg; The Computer, 46, 76, 2003.

[9] L. Yeganova; Nonlinear Analysis, 47, 1845, 2001.

주체106(2017)년 8월 10일 원고접수

A Study on an Algorithm to Construct an Optimum Solution of Generalized Voronoi Inverse Problems for Linear Rectangular Tessellations

Rim Chung Hyok, Kim Song Chol

In this paper we propose an algorithm to construct an optimum solution of the generalized Voronoi inverse problems for linear rectangular tessellations.

Key words: generalized Voronoi inverse(GVI), linear rectangular tessellation