김일성종합대학학보 (자연과학) 주체106(2017)년 제63권 제9호
JOURNAL OF KIM IL SUNG UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE) Vol. 63 No. 9 JUCHE106(2017).

선행처리두파라메터웃완화법들의 수렴성

황명근, 남선희

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《이미 일정한 토대가 있고 전망이 확고한 연구대상들에 힘을 넣어 세계패권을 쥐며 그 성과를 확대하는 방법으로 과학기술을 빨리 발전시켜야 합니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 39페지)

우리는 선형련립방정식을 풀기 위한 선행처리두파라메터웃완화법(선행처리TOR법)에 대하여 연구하였다.

선행연구[1, 3]에서는 각각 $P_\alpha = I + \alpha S,\ P_{SR} = I + S + R$ 와 $P_S = I + S,\ P_\alpha = I + \alpha S$ 에 의한 선행처리가우스－자이델방법의 수렴성과 수렴속도비교를 진행하였으며 선행연구[2]에서는 선행연구[3]의 선행처리기들을 일반화한 $P_{S_m} = I + S_m$ 형선행처리가우스－자이델방법의 수렴속도비교를 진행하였다.

선행연구[4]에서는 부아닌 행렬을 리용한 선행처리AOR법의 수렴성해석을 진행하였다.

그러나 선행연구들에서는 우의 선행처리기들에 의한 선행처리TOR법에 대하여 연구되지 못했다.

론문에서는 TOR법이 AOR법보다 수렴속도가 빠르다는 연구결과에 기초하여 몇가지 선행처리TOR법의 반복도식을 제기하고 선행처리TOR법들과 TOR법의 비교결과들을 증명하였으며 그에 대한 수값실험을 진행하였다.

1. 선행처리두파라메터웃완화법

다음과 같은 선형련립방정식을 론의하자.

$$Ax = b,\ A = (a_{ij}) \in \boldsymbol{R}^{n\times n},\ \ x,\ b \in \boldsymbol{R}^n \tag{1}$$

방정식 (1)의 결수행렬이 $A = I - (F + F^*) - G$ 로 분리되였다고 하자. 여기서 $-(F + F^*)$ 과 $-G$ 는 각각 A 의 엄격한 아래, 웃3각형행렬이다.

이때 TOR법의 반복도식은 $x^{(k+1)} = L_{\mathrm{TOR}}(\alpha,\ \beta)x^{(k)} + b_{\mathrm{TOR}}(\alpha,\ \beta)$ 와 같다. 여기서

$$L_{\mathrm{TOR}}(\alpha,\ \beta) \equiv L_{\mathrm{TOR}}(\overline{\alpha},\ \overline{\beta}) = (I - \overline{\alpha}F - \overline{\beta}F^*)^{-1} \cdot \{[1 - (\overline{\alpha} + \overline{\beta})]I + (\overline{\alpha} + \overline{\beta})G + \overline{\alpha}F^* + \overline{\beta}F\}, \tag{2}$$

$$b_{\mathrm{TOR}}(\alpha,\ \beta) \equiv b_{\mathrm{TOR}}(\overline{\alpha},\ \overline{\beta}) = (\overline{\alpha} + \overline{\beta})(I - \overline{\alpha}F - \overline{\beta}F^*)^{-1}d,\ \overline{\alpha} = \alpha/2,\ \overline{\beta} = \beta/2. \tag{3}$$

방정식 (1)에 대한 한가지 선행처리련립방정식을

$$\widetilde{A}x = \widetilde{b} \tag{4}$$

로 표시하고 TOR법을 적용하면 그 반복행렬은 다음과 같다.

$$\widetilde{L}_{\mathrm{TOR}}(\alpha,\ \beta) \equiv \widetilde{L}_{\mathrm{TOR}}(\overline{\alpha},\ \overline{\beta}) = (\widetilde{D} - \overline{\alpha}\widetilde{F} - \overline{\beta}\widetilde{F}^*)^{-1} \cdot \{[1 - (\overline{\alpha} + \overline{\beta})]\widetilde{D} + (\overline{\alpha} + \overline{\beta})\widetilde{G} + \overline{\alpha}\widetilde{F}^* + \overline{\beta}\widetilde{F}\} \tag{5}$$

여기서

$$\widetilde{A}=(I+\widetilde{S})A,\ \ \widetilde{b}=(I+\widetilde{S})b,\ \ \widetilde{S}=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-a_{n1}&0&\cdots&0\end{bmatrix},\tag{6}$$

$$\widetilde{A}=[I+\widetilde{S}-(F+F^*)+\widetilde{S}G]-G=\widetilde{D}-(\widetilde{F}+\widetilde{F}^*)-G,$$

$$\widetilde{D}=\mathrm{diag}(\widetilde{d}_1,\ \widetilde{d}_2,\cdots,\ \widetilde{d}_n),\ \ \widetilde{d}_i=1,\ \ i=1,\ 2,\cdots,\ n-1,\ \ \widetilde{d}_n=1-a_{1n}a_{n1},\tag{7}$$

$$\widetilde{S}G=\begin{bmatrix}0&0&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0\\0&a_{12}a_{n1}&a_{13}a_{n1}&\cdots&a_{1n}a_{n1}\end{bmatrix}.$$

다른 선행처리련립방정식을

$$\overline{A}x=\overline{b}\tag{8}$$

로 표시하고 TOR법을 적용하면 그 반복행렬은 다음과 같다.

$$\overline{L}_{\mathrm{TOR}}(\alpha,\ \beta)\equiv\overline{L}_{\mathrm{TOR}}(\overline{\alpha},\ \overline{\beta})=(I-\overline{\alpha}\overline{F}-\overline{\beta}\overline{F}^*)^{-1}\cdot\{[1-(\overline{\alpha}+\overline{\beta})]\overline{D}+(\overline{\alpha}+\overline{\beta})\overline{G}+\overline{\alpha}\overline{F}^*+\overline{\beta}\overline{F}\}\tag{9}$$

여기서

$$\overline{A}=(I+\overline{S})A,\ \ \overline{b}=(I+\overline{S})b,\ \ \overline{S}=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&-a_{1n}\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{bmatrix},\tag{10}$$

$$\overline{A}=[I+\overline{S}-G-\overline{S}(F+F^*)]-(F+F^*)=\overline{D}-(F+F^*)-\overline{G},$$

$$\overline{D}=\mathrm{diag}(\overline{d}_1,\ \overline{d}_2,\cdots,\ \overline{d}_n),\ \ \overline{d}_i=1,\ \ i=2,3,\cdots,\ n,\ \ \overline{d}_1=1-a_{1n}a_{n1},$$

$$\overline{S}(F+F^*)=\begin{bmatrix}a_{n1}a_{1n}&a_{n2}a_{1n}&a_{n3}a_{1n}&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}.$$

2. 수렴속도비교

정의 행렬 $A=(a_{ij})$에 대하여 $a_{ij}\le 0,\ \forall i,\ j\in\{1,2,\cdots,\ n\},\ i\ne j,\ A^{-1}\ge 0$ 이면 $M-$행렬, $\forall i,\ j\in\{1,\ 2,\cdots,\ n\},\ a_{ii}>0,\ a_{ij}\le 0\ (i\ne j)$ 이면 $L-$행렬, $a_{ij}\le 0,\ \forall i,\ j\in\{1,2,\cdots,\ n\},\ i\ne j$ 이면 $Z-$행렬이라고 부른다.

먼저 $L-$행렬인 경우에 대하여 론의하자.

보조정리 1 반복행렬 (2)와 식 (5), (9)는 각각 다음과 같이 표시된다.

$$L_{\mathrm{TOR}}(\alpha,\ \beta)\equiv[1-(\overline{\alpha}+\overline{\beta})]I+(\overline{\alpha}+\overline{\beta})G+(\overline{\alpha}+\overline{\beta})(1-\overline{\alpha})(F+F^*)+T$$

$$T=(\overline{\alpha}+\overline{\beta})(I-\overline{\alpha}F-\overline{\beta}F^*)^{-1}\times\{(\overline{\alpha}F+\overline{\beta}F^*)[(1-\overline{\alpha})(F+F^*)+G]+(\overline{\alpha}-\overline{\beta})F^*\}$$

$$\widetilde{L}_{\text{TOR}}(\alpha,\ \beta)\equiv[1-(\overline{\alpha}+\overline{\beta})]\widetilde{D}+(\overline{\alpha}+\overline{\beta})G+(\overline{\alpha}+\overline{\beta})(1-\overline{\alpha})(\widetilde{F}+\widetilde{F}^*)+\widetilde{T}$$
$$\widetilde{T}=(\overline{\alpha}+\overline{\beta})(\widetilde{D}-\overline{\alpha}\widetilde{F}-\overline{\beta}\widetilde{F}^*)^{-1}\times\{(\overline{\alpha}\widetilde{F}+\overline{\beta}\widetilde{F}^*)[(1-\overline{\alpha})(\widetilde{F}+\widetilde{F}^*)+G]+(\overline{\alpha}-\overline{\beta})\widetilde{F}^*\}$$
$$\overline{L}_{\text{TOR}}(\alpha,\ \beta)\equiv[1-(\overline{\alpha}+\overline{\beta})]\overline{D}+(\overline{\alpha}+\overline{\beta})\overline{G}+(\overline{\alpha}+\overline{\beta})(1-\overline{\alpha})(F+F^*)+\overline{T}$$
$$\overline{T}=(\overline{\alpha}+\overline{\beta})(\overline{D}-\overline{\alpha}F-\overline{\beta}F^*)^{-1}\times\{(\overline{\alpha}F+\overline{\beta}F^*)[(1-\overline{\alpha})(F+F^*)+\overline{G}]+(\overline{\alpha}-\overline{\beta})F^*\}$$

보조정리 2 행렬 A 와 $\widetilde{A},\ \overline{A}$ 들이 각각 식 (1), (4), (8)의 결수행렬이고 A 가 $0<a_{i,\ i+1}a_{i+1,\ i}$, $i=1,2,\cdots,n-1$, $0<a_{1n}a_{n1}<1$ 을 만족시키는 기약L—행렬이며 $0\le\alpha+\beta<2$, $0\le\alpha,\ \beta\le1,\ \alpha\ne0,\ \beta\ne1$ 이라고 하자.

그러면 $L_{\text{TOR}}(\alpha,\ \beta)$ 와 $\widetilde{L}_{\text{TOR}}(\alpha,\ \beta)$, $\overline{L}_{\text{TOR}}(\alpha,\ \beta)$ 들은 부아닌 기약행렬이다.

증명 A 가 기약L—행렬이므로 보조정리 1에 의하여

$$(I-\overline{\alpha}F-\overline{\beta}F^*)^{-1}=I+(\overline{\alpha}F)+(\overline{\alpha}F)^2+\cdots+(\overline{\alpha}F)^{n-1}+(\overline{\beta}F^*)+(\overline{\beta}F^*)^2+\cdots+(\overline{\beta}F^*)^{n-1}.$$

식 (10)으로부터 $T\ge0$ 이므로 A 는 부아닌 행렬이다.

A 의 기약성으로부터 $[1-(\overline{\alpha}+\overline{\beta})]I+(\overline{\alpha}+\overline{\beta})G+(\overline{\alpha}+\overline{\beta})(1-\overline{\alpha})(F+F^*)$ 이 기약이므로 $L_{\text{TOR}}(\alpha,\ \beta)$ 는 기약행렬이다.

류사하게 식 (6), (7)로부터 $0<a_{1n}a_{n1}<1$ 일 때 $\widetilde{D}\ge0,\ \widetilde{F}+\widetilde{F}^*\ge0,\ \widetilde{G}=G$ 가 성립된다.

$$\widetilde{L}_{\text{TOR}}(\alpha,\ \beta)\equiv[1-(\overline{\alpha}+\overline{\beta})]\widetilde{D}+(\overline{\alpha}+\overline{\beta})G+(\overline{\alpha}+\overline{\beta})(1-\overline{\alpha})(\widetilde{F}+\widetilde{F}^*)+\widetilde{T}\ge0$$
$$\widetilde{T}=(\overline{\alpha}+\overline{\beta})(\widetilde{D}-\overline{\alpha}\widetilde{F}-\overline{\beta}\widetilde{F}^*)^{-1}\times\{(\overline{\alpha}\widetilde{F}+\overline{\beta}\widetilde{F}^*)[(1-\overline{\alpha})(\widetilde{F}+\widetilde{F}^*)+G]+(\overline{\alpha}-\overline{\beta})\widetilde{F}^*\}\ge0$$

또한 $[1-(\overline{\alpha}+\overline{\beta})]\widetilde{D}+(\overline{\alpha}+\overline{\beta})G+(\overline{\alpha}+\overline{\beta})(1-\overline{\alpha})(\widetilde{F}+\widetilde{F}^*)+\widetilde{T}$ 의 기약성과 $\widetilde{T}\ge0$ 에 의하여 $\widetilde{L}_{\text{TOR}}(\alpha,\ \beta)$ 의 기약성이 증명된다.

류사하게 $\overline{L}_{\text{TOR}}(\alpha,\ \beta)$ 가 부아닌 기약행렬임을 증명할수 있다.(증명끝)

정리 1 행렬 A 가 $0<a_{i,\ i+1}a_{i+1,\ i}$, $i=1,2,\cdots,n-1$, $0<a_{1n}a_{n1}<1$ 을 만족시키는 기약L—행렬이고 $L_{\text{TOR}}(\alpha,\ \beta)$, $\widetilde{L}_{\text{TOR}}(\alpha,\ \beta)$, $\overline{L}_{\text{TOR}}(\alpha,\ \beta)$ 들은 식 (2), (5), (9)로 정의된다고 하자.

이때 $0\le\alpha,\ \beta\le1,\ \alpha\ne0,\ \beta\ne1$, $0\le\alpha+\beta<2$ 이고 $\rho(L_{\text{TOR}}(\alpha,\ \beta))<1$ 이라고 하면

$$0<\rho(\widetilde{L}_{\text{TOR}}(\alpha,\ \beta))<\rho(L_{\text{TOR}}(\alpha,\ \beta))<1,\ \ 0<\rho(\overline{L}_{\text{TOR}}(\alpha,\ \beta))<\rho(L_{\text{TOR}}(\alpha,\ \beta))<1$$

이 성립된다.

증명 $L_{\text{TOR}}(\alpha,\beta)$, $\widetilde{L}_{\text{TOR}}(\alpha,\beta)$, $\overline{L}_{\text{TOR}}(\alpha,\beta)$ 는 부아닌 기약행렬들이다. 그러므로 $L_{\text{TOR}}(\alpha,\ \beta)x=\lambda x$ 를 만족시키는 벡토르 $x>0$ 이 존재한다. 여기서 $\rho(L_{\text{TOR}}(\alpha,\ \beta))=\lambda$ 이다.

따라서 다음의 식이 성립된다.

$$(\overline{\alpha}+\overline{\beta})G=(\overline{\alpha}+\overline{\beta})\widetilde{G}\equiv(I-\overline{\alpha}F-\overline{\beta}F^*)-[1-(\overline{\alpha}+\overline{\beta})]I-(\overline{\beta}\widetilde{F}+\overline{\alpha}\widetilde{F}^*)\tag{11}$$

첫째 부등식을 증명하자.

식 (5)로부터 벡토르 $x>0$ 에 대하여 다음의 식이 성립된다.

$$\widetilde{L}_{\text{TOR}}(\overline{\alpha},\ \overline{\beta})x-\lambda x=(\widetilde{D}-\overline{\alpha}\widetilde{F}-\overline{\beta}\widetilde{F}^*)^{-1}\cdot\{[1-(\overline{\alpha}+\overline{\beta})]\widetilde{D}+(\overline{\alpha}+\overline{\beta})\widetilde{G}+\overline{\alpha}\widetilde{F}^*+\overline{\beta}\widetilde{F}\}x-\lambda(\widetilde{D}-\overline{\alpha}\widetilde{F}-\overline{\beta}\widetilde{F}^*)x\tag{12}$$

한편

$$\begin{aligned}&\lambda(\widetilde{D}-\overline{\alpha}\widetilde{F}-\overline{\beta}\widetilde{F}^*)x=\\&=\{\lambda[1-(\overline{\alpha}+\overline{\beta})]\widetilde{D}+\lambda(\overline{\alpha}+\overline{\beta})[I+\widetilde{S}-(F+F^*)-\widetilde{S}G]+\lambda(\overline{\beta}\widetilde{F}+\overline{\alpha}\widetilde{F}^*)\}x\end{aligned}\tag{13}$$

이므로 식 (11), (13)을 식 (12)에 대입하면 다음의 식을 얻는다.

$$\widetilde{L}_{\mathrm{TOR}}(\overline{\alpha},\ \overline{\beta})x-\lambda x=(\widetilde{D}-\overline{\alpha}\widetilde{F}-\overline{\beta}\widetilde{F}^*)^{-1}\{[1-(\overline{\alpha}+\overline{\beta})]\widetilde{D}+(I-\overline{\alpha}F-\overline{\beta}F^*)-[1-(\overline{\alpha}+\overline{\beta})]I-$$
$$-\overline{\alpha}F^*-\overline{\beta}F-\lambda[1-(\overline{\alpha}+\overline{\beta})]\widetilde{D}-\lambda(\overline{\alpha}+\overline{\beta})[I+\widetilde{S}-(F+F^*)-\widetilde{S}G]-\lambda(\overline{\alpha}\widetilde{F}+\overline{\beta}\widetilde{F}^*)\}x=$$
$$=(\widetilde{D}-\overline{\alpha}\widetilde{F}-\overline{\beta}\widetilde{F}^*)^{-1}\{(1-\lambda)[1-(\overline{\alpha}+\overline{\beta})]\widetilde{D}+(1-\lambda)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})[I-(F+F^*)]-$$
$$-\lambda(\overline{\alpha}+\overline{\beta})\widetilde{S}(I-G)-\lambda(\overline{\alpha}\widetilde{F}+\overline{\beta}\widetilde{F}^*)\}x=$$
$$=(\widetilde{D}-\overline{\alpha}\widetilde{F}-\overline{\beta}\widetilde{F}^*)^{-1}(1-\lambda)\{[1-(\overline{\alpha}+\overline{\beta})]\widetilde{D}+(\overline{\alpha}+\overline{\beta})[\widetilde{D}-(\widetilde{F}+\widetilde{F}^*)]+(\overline{\alpha}\widetilde{F}+\overline{\beta}\widetilde{F}^*)\}x$$

분명히 $[1-(\overline{\alpha}+\overline{\beta})]\widetilde{D}+(\overline{\alpha}+\overline{\beta})[\widetilde{D}-(\widetilde{F}+\widetilde{F}^*)]+(\overline{\alpha}\widetilde{F}+\overline{\beta}\widetilde{F}^*)\geq 0$ 이 성립되고 $\lambda<1$ 이므로 $\widetilde{L}_{\mathrm{TOR}}(\alpha,\ \beta)x<\lambda x$ 이며 선행연구[1]결과로부터 $\rho(\widetilde{L}_{\mathrm{TOR}}(\alpha,\ \beta))<\lambda<1$ 이다.

둘째 부등식도 같은 방법으로 증명할수 있다.(증명끝)

다음으로 M—행렬인 경우에 대하여 론의하자.

보조정리 3[2] 행렬 A가 Z—행렬이라고 하면 다음의 사실들은 동등하다.

① A가 불퇴화M—행렬이다.

② $Ax>0$을 만족시키는 벡토르 $x>0$이 존재한다.

③ A의 임의의 약정칙분리는 수렴분리이다.

정리 2 행렬 A가 $0<a_{i,\ i+1}a_{i+1,\ i}$, $i=1, 2, \cdots, n-1$, $0<a_{1n}a_{n1}<1$을 만족시키는 M—행렬이라고 하자.

$0\leq\alpha,\ \beta\leq 1$, $0\leq\alpha+\beta<2$ 이고 $L_{\mathrm{TOR}}(\alpha,\ \beta)$, $\widetilde{L}_{\mathrm{TOR}}(\alpha,\ \beta)$, $\overline{L}_{\mathrm{TOR}}(\alpha,\ \beta)$ 들은 각각 (2), (5), (9)로 정의되며 $\rho(L_{\mathrm{TOR}}(\alpha,\ \beta))<1$ 이라고 하면

$$0<\rho(\widetilde{L}_{\mathrm{TOR}}(\alpha,\ \beta))<\rho(L_{\mathrm{TOR}}(\alpha,\ \beta))<1,$$
$$0<\rho(\overline{L}_{\mathrm{TOR}}(\alpha,\ \beta))<\rho(L_{\mathrm{TOR}}(\alpha,\ \beta))<1$$

이 성립된다.

증명 A가 M—행렬이므로 보조정리 3으로부터 $Ax>0$을 만족시키는 벡토르 $x>0$이 존재한다.

그리고 보조정리 2로부터 $L_{\mathrm{TOR}}(\alpha,\ \beta)$, $\widetilde{L}_{\mathrm{TOR}}(\alpha,\ \beta)$, $\overline{L}_{\mathrm{TOR}}(\alpha,\ \beta)$는 부아닌 기약행렬들이다.

그러므로 정리 1의 증명과정과 류사한 론의를 진행하여 정리가 증명된다.(증명끝)

3. 수값실험결과

다음의 행렬을 결수행렬로 가지는 련립방정식 $Ax=b$에 대한 선행처리TOR법에 대하여 수값실험을 진행하였다.

$$A=\begin{bmatrix}1.0 & -0.1 & -0.2 & 0 & -0.3 & -0.5\\ -0.2 & 1.0 & -0.3 & 0 & -0.4 & -0.1\\ 0 & -0.3 & 1.0 & -0.6 & -0.2 & 0\\ -0.2 & -0.3 & -0.1 & 1.0 & -0.1 & -0.3\\ 0 & -0.3 & -0.2 & -0.1 & 1.0 & -0.2\\ -0.2 & -0.3 & 0 & -0.3 & -0.1 & 1.0\end{bmatrix}$$

선행처리행렬들을 다음과 같이 선택하였다.

$$\widetilde{S}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0.2&0&0&0&0&0\end{bmatrix},\quad \overline{S}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0.5\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

이때 $\mathrm{cond}(A)=56.794\ 3$, $\mathrm{cond}(\widetilde{A})=54.235\ 8$, $\mathrm{cond}(\overline{A})=52.964\ 8$이다.

수값실험결과는 표와 같다.

표. 실험결과

α	0.100 0	0.400 0	0.500 0	0.650 0	0.800 0	0.900 0	0.900 0
β	0.900 0	0.600 0	0.500 0	0.300 0	0.050 0	0.030 0	0.010 0
$\rho(L_{\mathrm{TOR}})$	0.964 2	0.962 6	0.962 2	0.963 7	0.967 6	0.963 4	0.964 4
$\rho(\widetilde{L}_{\mathrm{TOR}})$	0.962 7	0.960 6	0.959 8	0.961 1	0.964 9	0.960 1	0.961 1
$\rho(\overline{L}_{\mathrm{TOR}})$	0.962 5	0.960 7	0.960 1	0.961 6	0.965 6	0.961 0	0.962 0

참 고 문 헌

[1] W. Li; J. Comput. Appl. Math., **182**, 81, 2005.
[2] M. Morimoto; J. Comput. Appl. Math., **234**, 209, 2010.
[3] Y. T. Li et al.; J. Comput. Appl. Math., **206**, 656, 2007.
[4] G. B. Wang et al.; J. Comput. Appl. Math., **237**, 103, 2011.

주체106(2017)년 5월 5일 원고접수

Convergence of Preconditioned Two-Parameter Overrelaxation Methods

Hwang Myong Gun, Nam Son Hui

We presented the preconditioned two-parameter overrelaxation methods solving the systems of linear equation and proved comparison results between the preconditioned two-parameter overrelaxation method and two-parameter overrelaxation method.

Key word: two-parameter overrelaxation method