

2 차원대칭흐름에서 마흐줄기높이와 미끄럼선의 모양을 예측하기 위한 한가지 방법

리만영, 최성국

경애하는 김정은동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《기초과학이 든든해야 나라의 과학기술이 공고한 토대우에서 끊임없이 발전할수 있습니다.》

마흐반사현상은 초음속흐름과 관련된 여러 실천적문제들에서 많이 나타난다. 실례로 초음속 및 극초음속흐름에서 운동하는 비행체들의 흡입구설계와 항공기를 비롯한 로켓 기관의 추진장치설계에서 마흐줄기의 높이를 결정하는것은 중요한 문제로 나선다.[1, 5]

선행연구[1]에서는 켄기뒤모서리에서 발생하는 프란틀-마이어파가 처음으로 미끄럼선과 사귀는 점에 음속목이 형성된다는 가정하에 마흐줄기높이를 결정하기 위한 해석적 방법을 제기하였다. 선행연구[2]에서는 켄기뒤모서리로부터 형성되는 여러개의 프란틀-마이어파를 고찰하였지만 미끄럼선의 앞부분을 직선으로 가정하였다. 선행연구[3, 4]에서는 균일한 흐름으로 보던 반사충격파뒤의 구역에서 여러가지 팽창파들이 존재한다고 보고 마흐줄기높이를 결정하기 위한 연구를 진행하였다.

본문에서는 미끄럼선우에서 발생하는 팽창파와 압축파의 영향을 고려하여 마흐줄기 높이와 미끄럼선의 모양을 결정하기 위한 한가지 계산방법을 제기하고 실험결과 및 선행의 이론적결과들과 비교하여 그 타당성을 검증하였다.

1. 마흐반사에 대한 3 충격리론

일반적인 충격파반사와 달리 마흐반사에서는 입사파, 반사파와 마흐줄기로 구성된 3개의 충격파가 생기며 3개의 충격파가 사귀는 점을 3중점이라고 한다. 이때 3중점근방에서의 흐름특성량들은 3충격리론으로부터 구할수 있다.[1]

충격파의 앞과 뒤의 흐름상태는 각각 (i) , (j) 로, 흐름의 마흐수는 M , 압력은 p , 밀도는 ρ , 음속은 a , 입사각은 β , 흐름의 기울어짐각은 θ 로 표시할 때 다음의 식이 성립한다.

$$\left. \begin{aligned} M_j &= F(M_i, \beta_j), \theta_j = S(M_i, \beta_j), p_j = p_i G(M_i, M_j) \\ \rho_j &= \rho_i H(M_i, \beta_j), a_j = a_i A(M_i, \beta_j) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

여기서

$$F(M, \beta) = \left\{ \frac{1 + (\gamma - 1)M^2 \sin^2 \beta + \left[\frac{1}{4}(\gamma + 1)^2 - \gamma \sin^2 \beta \right] M^4 \sin^2 \beta}{\left[\gamma M^2 \sin^2 \beta - \frac{1}{2}(\gamma - 1) \right] \left[\frac{\gamma - 1}{2} M^2 \sin^2 \beta + 1 \right]} \right\}^{1/2}$$

$$\begin{aligned}
 S(M, \beta) &= \arctan \left[2 \cot \beta \frac{M^2 \sin^2 \beta - 1}{M^2(\gamma + \cos 2\beta) + 2} \right] \\
 G(M, \beta) &= \frac{2}{\gamma + 1} \left[\gamma M^2 \sin^2 \beta - \frac{\gamma - 1}{2} \right] \\
 H(M, \beta) &= \frac{(\gamma + 1)M^2 \sin^2 \beta}{(\gamma - 1)M^2 \sin^2 \beta + 2} \\
 A(M, \beta) &= \frac{[(\gamma - 1)M^2 \sin^2 \beta + 2]^{1/2} [2\gamma M^2 \sin^2 \beta - (\gamma - 1)]^{1/2}}{(\gamma + 1)M \sin \beta}
 \end{aligned} \tag{2}$$

식 (1)을 3개의 충격파에 대하여 각각 적용하면 15개의 방정식이 얻어진다. 미끄럼선을 따라 양쪽에서 압력이 같다는 조건으로부터

$$p_2 = p_3 \tag{3}$$

이다. 또한 2개의 경계조건을 적용하면

$$\theta_3 = \theta_1 - \theta_2 \tag{4}$$

$$\theta_1 = \theta_w \tag{5}$$

이다. 식 (1)–(5)를 결합하면 방정식개수는 18개이고 변수개수는 $M_1, M_2, M_3, p_1, p_2, p_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, a_1, a_2, a_3, \rho_1, \rho_2, \rho_3$ 으로서 18개이므로 이 방정식계는 닫기며 3중점근방에서 흐름특성량들을 구할수 있다.

2. 마흐줄기높이와 미끄럼선의 모양을 예측하기 위한 계산방법

선행연구[1, 2]에서는 미끄럼선의 TB 부분을 직선으로 가정하고 마흐줄기높이를 예측하기 위한 계산방법을 제기하였다. 선행연구[3]에서는 미끄럼선우에서 압력이 감소하는 원인을 그우에서 팽창파가 발생하는것과 연관시켜 고찰하였다. 이 팽창파들은 반사충격파의 앞부분(TF)과 사귀여 그 모양을 변화시키며 또한 켜기뒤모서리로부터 나온 팽창파와도 사귀다. 켜기모서리에서 생긴 팽창파들이 반사충격파를 지나서 미끄럼선과 사귀 때 미끄럼선에서 변곡점(실례로 점 B)들이 생긴다. 점 B 의 아래부분에서 팽창파(FB)와 미끄럼선이 사귀면 그것의 반사파로서 팽창파 혹은 압축파가 발생할수 있다.

우리는 이 파들을 압축파로, 반사충격파의 앞부분(TF)을 직선으로 보고 마흐줄기높이와 미끄럼선의 모양을 예측하기 위하여 다음과 같은 계산방법을 확립하였다.

단계 1 3충격리론으로부터 3중점 T 근방에서 흐름특성량들을 구한다.

단계 2 마흐줄기높이를 가정한다. 선행연구[1]로부터 마흐줄기뒤에서의 흐름은 준1차원흐름으로 가정할수 있다. 따라서 마흐줄기높이 H_m 과 음속목에서의 높이 H_E 는 준1차원흐름리론에 의해 다음의 식으로 표시된다.

$$\frac{H_m}{H_E} = \sigma(\bar{M}_m) \tag{6}$$

여기서 \bar{M}_m 는 마흐줄기뒤에서의 평균마흐수이며 $\sigma(M)$ 은 다음과 같이 표시된다.

$$\sigma(M) = \frac{1}{M} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{(\gamma + 1)/(\gamma - 1)}$$

단계 3 반사충격파 r 의 모양과 팽창파 R_C 의 모양, 점 F, G 에서의 흐름특성량들을

구한다.(그림 1)

반사충격파 r 의 세기와 방향은 3충격리론으로부터 구해지며 켜기뒤모서리에서 발생한 팽창파 R_C 와 점 F 에서 사귈다. 반사충격파의 앞부분(TF)을 직선이라고 가정한다. 켜기뒤모서리에서 발생하는 팽창파 R_C 를 일정한 간격으로 유한개 고찰한다면 다음의 식을 리용하여 점 F, G 주위에서 흐름 특성량들을 구할수 있다.

$$\left. \begin{aligned} M_2 &= F(M_1, \beta_2), \quad p_2 = p_1 G(M_1, \beta_2), \quad \theta_2 = S(M_1, \beta_2) \\ \nu(M_3) - \nu(M_1) &= \theta_3 - \theta_1, \quad p_3 = p_1 \chi(M_1, M_3) \\ \nu(M_5) - \nu(M_2) &= \theta_5 - \theta_2, \quad p_5 = p_2 \chi(M_2, M_5) \\ M_4 &= F(M_3, \beta_4), \quad p_4 = p_3 G(M_3, \beta_4), \quad \theta_4 = S(M_3, \beta_4) \\ p_4 &= p_5, \quad \theta_4 = \theta_5 \end{aligned} \right\}$$

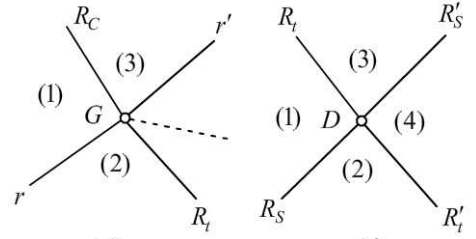


그림 1. 반사충격파와 팽창파들의 호상작용

ㄱ) 반사충격파와 팽창파의 호상작용,
ㄴ) 팽창파들의 호상작용

(7)

여기서

$$\chi(M_1, M_2) = \left(\frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_2^2} \right)^{\gamma/(\gamma - 1)}$$

이다. 구해진 점 F, G 주위의 흐름특성량들은 다음단계에서 점 $D_{(m,n)}$ 의 위치와 그 주위 흐름특성량들을 구하는데 리용된다.

단계 4 미끄럼선이 팽창파 R_i 와 처음으로 사귀는 점 B 까지 미끄럼선(TB)의 모양과 교차점 $D_{(m,n)}$ 에서의 흐름특성량들을 구한다.

미끄럼선아래의 흐름은 선행연구[1]로부터 준1차원흐름으로 되며 이 흐름구역에서 압력감소는 다음의 식에 의하여 표시할수 있다.

$$\frac{dp}{p} = \frac{\gamma M_b^2}{1 - M_b} \frac{dH_s}{H_s} \quad (8)$$

따라서 압력감소는 해당한 위치에서 미끄럼선의 높이 H_s 와 관련된다. 여기서 M_b 는 미끄럼선아래에서의 마흐수이다. 마흐수 M_b 인 미끄럼선의 높이 H_s 와 음속목의 높이 H_E 는 준1차원흐름관계식으로 표현된다.

또한 기하학적으로 H_s 의 변화는 미끄럼선과 그 점에서 흐름방향으로 그은 접선이 수평축과 이루는 각의 함수로 표현된다.

$$dH_s = -\theta dx \quad (9)$$

미끄럼선우에서 각 θ 의 변화는 팽창파를 발생시킨다. 미끄럼선우에서 흐름의 마흐수를 M_a 라고 하자. 마흐각이 μ_a 인 팽창파에 대하여 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned} d\theta &= \nu(M_a + dM_a) - \nu(M_a) \\ \frac{p + dp}{p} &= \chi(M_a, M_a + dM_a) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\sin \mu_a = \frac{1}{M_a}$$

여기서 $\nu(M)$ 은 프란틀-마이어함수이다. 즉

$$\nu(M) = \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)} \arctan \sqrt{\left[\frac{\gamma-1}{\gamma+1}(M^2-1)\right]} - \arctan \sqrt{M^2-1} \quad (11)$$

우의 방정식들을 리용하여 매 걸음단계에서 미끄럼선의 모양과 팽창과 R_S 의 방향을 알수 있다.

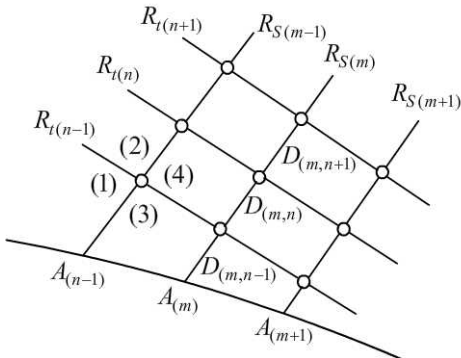


그림 2. 반사충격파와 미끄럼선 사이의 흐름구역에서 파들의 호상작용

반사충격파와 미끄럼선사이의 흐름구역(그림 2)에서는 팽창과 R_t 와 R_S 가 사귀게 된다.[3] 그림 1의 L)에서와 같이 팽창과 R_t 와 미끄럼선에서 발생한 팽창과 R_S 는 점 $D_{(m,n)}$ 에서 사귀며 이때 생긴 팽창파들은 R'_t 와 R'_S 이다. 그리고 흐름특성량들사이의 관계식은 다음과 같이 표시된다.

$$\left. \begin{aligned} \nu(M_2) - \nu(M_1) &= \theta_2 - \theta_1, \quad p_2 = p_1 \chi(M_1, M_2) \\ \nu(M_3) - \nu(M_1) &= \theta_3 - \theta_1, \quad p_3 = p_1 \chi(M_1, M_3) \\ \nu(M_4) - \nu(M_2) &= \theta_4 - \theta_2, \quad p_4 = p_2 \chi(M_2, M_4) \\ \nu(M_4) - \nu(M_3) &= \theta_4 - \theta_3, \quad p_4 = p_3 \chi(M_3, M_4) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

런립방정식 (12)를 리용하여 구역 (1), (2)의 흐름특성량들을 구한 조건에서 구역 (3), (4)의 흐름특성량과 팽창과 R'_t 와 R'_S 의 방향을 얻을수 있다.

매 걸음단계에서 파들의 사귀점 $D_{(m,n)}$ 에서 흐름특성량들과 $R'_{t(n)}$ 의 방향과 점 $D_{(m,n)}$ 의 자리표는 우의 방정식으로부터 계산된다. 만일 사귀점 $D_{(m,1)}$ 의 자리표가 미끄럼선의 자리표와 일치한다면 점 B로 된다. 이때 계산을 중지하고 다음단계으로 넘어간다.

단계 5 점 B를 지나서 미끄럼선의 모양을 결정한다.

전달된 팽창과 R_t 들이 미끄럼선과 사귀 다음 미끄럼선아래의 흐름구역은 여전히 준1차원흐름으로 볼수 있으며 흐름특성량들사이의 관계식은 그대로 적용할수 있다.

미끄럼선에 팽창과 R_t 가 입사하면 반사파 C_S 를 발생시킨다. 팽창과 $R_{t(n-1)}$ 가 미끄럼선과 점 $C_{(n-1)}$ 에서 사귀었다고 하자.(그림 3) 이때 다음의 식이 성립된다.

$$\left. \begin{aligned} M_a &= F(M_a + dM_{a1}, \beta_a) \\ (p_a + dp_a) &= (p_a + dp_{a1})G(M_1, \beta_a) \\ \theta_a &= S(M_a + dM_{a1}, \beta_a) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

경사충격파관계식 (13)으로부터 반사파 $C_{S(n-1)}$ 의 방향 및 파뒤에서의 흐름특성량을 알수 있다.

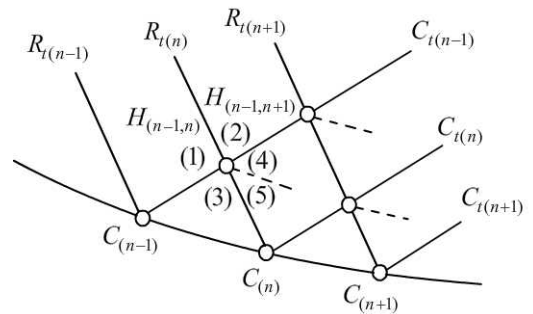


그림 3. 점 B의 뒤에서 압축파와 팽창파와의 호상작용

다음 런립방정식 (7)로부터 매 사검점 $H_{(n-1,n)}$, $H_{(n-1,n+1)}$ 등에서의 뒤흐름특성량들과 팽창과 $R'_{t(n)}$, $R'_{t(n+1)}$ 의 방향을 구할수 있다. 그러면 팽창과 $R'_{t(n)}$ 와 점 $C_{(n-1)}$ 에서 흐름방향으로 그은 직선이 사귀는 점이 미끄럼선의 점 $C_{(n)}$ 으로 된다. 이 과정을 반복하여 미끄럼선의 모양을 결정한다.

단계 6 주어진 미끄럼선의 최소점이 음속목의 높이 H_E 와 일치하는가를 검사한다. 만약 일치하지 않는다면 단계 2부터 단계 5까지 반복한다.

3. 결과 및 분석

그림 4에 각이한 마흐수조건에서 계산된 결과와 실험결과 및 선행의 이론적결과들을 보여준다. $M_0 = 3.98$, $\theta_w = 23^\circ$ 일 때 실험결과와의 오차는 10.8%(선행연구[2]에서 13.3%, 선행연구[3]에서는 6.4%)이고 $M_0 = 4.96$, $\theta_w = 28^\circ$ 일 때 실험결과와의 오차는 3.7%(선행연구[2]에서 16.9%, 선행연구[3]에서는 7.2%)이다.

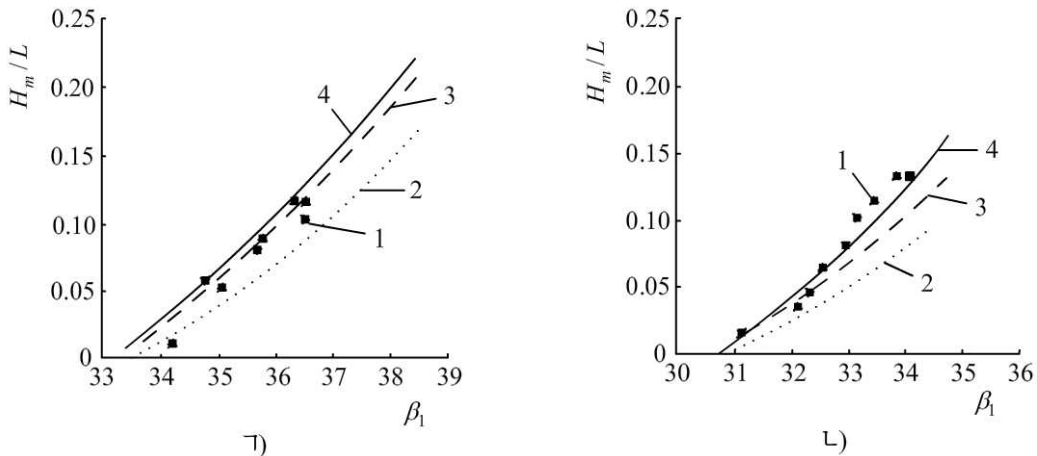


그림 4. 계산된 결과와 실험결과 및 선행의 이론적결과들과의 비교

㉠) $M_0 = 3.98$ 인 경우, ㉡) $M_0 = 4.96$ 인 경우

(1-실험결과, 2-선행연구[2], 3-선행연구[3], 4-논문결과)

현재의 모형은 마흐수가 큰 경우에 선행모형에 비해 실험값과 잘 맞는다. 그러나 마흐수가 작은 경우에는 마흐줄기높이가 선행연구[3]의 모형에 비해 실험결과보다 큰 값을 가진다. 따라서 마흐수가 큰 경우에는 현재의 모형을 리용하는 것이 더 높은 정확성을 가지며 마흐수가 작은 경우에는 선행연구[3]의 모형을 그대로 리용하는 것이 합리적이라는것을 알수 있다.

오차가 생기는 원인은 반사충격파(TF)에서 팽창과(R_S)와 반사된 압축파의 영향을 무시하고 그 부분을 직선으로 가정하였기때문이다.

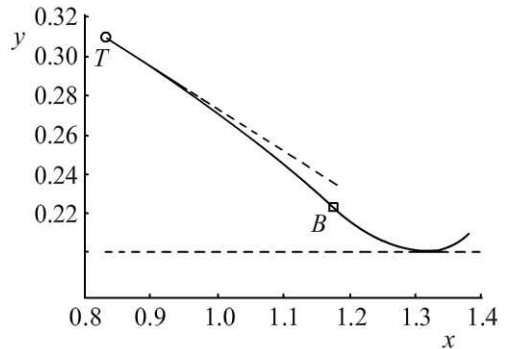


그림 5. 미끄럼선의 모양

론문의 계산방법을 리용하여 얻은 미끄럼선의 모양을 그림 5에서 보여준다. 미끄럼선의 앞부분(TB)에서 발생하는 팽창파로 하여 반사충격파뒤의 흐름은 불균일하며 미끄럼선은 불룩한 모양을 가진다. 점 B 를 지난 다음부터 미끄럼선은 팽창파와 압축파의 영향으로 우묵해지며 음속목에서는 처음흐름방향과 평행을 이룬다. 이러한 결과는 미끄럼선의 앞부분을 직선으로 가정한 선행연구[1, 2]와는 차이나지만 선행연구[3, 4]의 결과와는 거의 근사하다는것을 알수 있다.

론문에서의 연구결과는 마흐줄기높이를 포함하여 전체적인 흐름구조가 미끄럼선우에서 발생하는 팽창파의 영향을 크게 받는다는것을 보여준다.

맺 는 말

2차원대칭 흐름에서 마흐줄기높이와 미끄럼선의 모양을 결정하기 위한 한가지 해석적인 방법을 제기하였다. 론문의 방법을 리용하여 계산된 마흐줄기높이는 마흐수가 큰 경우에 선행의 해석적방법에 비하여 실험값에 더 근사한 결과를 보여주었다. 이전에 직선으로 고찰하던 미끄럼선의 앞부분은 우로 불룩한 모양을 가진다는것이 밝혀졌다.

참 고 문 헌

- [1] D. J. Azevedo et al.; AIAA J., 31, 83, 1993.
- [2] H. Li et al.; J. Fluid Mech., 341, 1, 101, 1997.
- [3] B. GAO et al.; J. Fluid Mech., 656, 29, 2010.
- [4] Chen-Yuan Bail et al.; J. Fluid Mech., 818, 116, 2017.
- [5] M. V. Chernyshov et al.; Materials Science and Engineering, 618, 012068, 10, 2019.

주체110(2021)년 3월 5일 원고접수

A Method of Predicting Mach Stem Height and Shape of Slip Line in Two-Dimensional Symmetric Flow

Ri Man Yong, Choe Song Guk

In this paper, we proposed a method of predicting the height of Mach stem and shape of slip line for Mach reflection in two-dimensional supersonic flow.

The flow fields associated with Mach reflection wave configurations in steady flows are analyzed, and an analytical model for predicting the wave configurations is proposed.

The results based on the present model agree well with the experimental results.

Keywords: Mach reflection, triple point, slip line