김일성종합대학학보　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　주체110(2021)년
수 학　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　제67권　제2호

심플렉티크쌍에 의하여 유도된 $k-$플렉티크벡토르공간에서 부분공간의 성질

리원학, 손영심

경애하는 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《과학기술의 종합적발전추세와 사회경제발전의 요구에 맞게 새로운 경계과학을 개척하고 발전시키는데 큰 힘을 넣어야 합니다.》

선행연구[1]에서는 심플렉티크기하학에서의 뇌터의 정리를 $k-$ 플렉티크기하학에로 일반화한 결과를 얻었으며 선행연구[2]에서는 다르부의 정리를, 선행연구[3]에서는 모멘트넘기기를 일반화하여 여러가지 결과들을 얻었다. 또한 선행연구[4]에서는 심플렉티크구조로부터 유도되는 $k-$ 플렉티크구조에 대한 연구가 진행되였으며 선행연구[2]에서는 G_2-공간에 대한 연구가 진행되였다. 그러나 선행연구들에서는 심플렉티크쌍으로부터 유도된 $k-$플렉티크구조에 대한 연구는 진행되지 못하였다. 그러므로 론문에서는 심플렉티크쌍으로부터 유도되는 한가지 새로운 류형의 $k-$플렉티크벡토르공간을 구성하고 그것의 부분공간들이 등방부분공간으로 되기 위한 조건과 라그랑쥬부분공간으로 되기 위한 조건을 구하려고 한다. 심플렉티크쌍으로부터 유도된 $k-$플렉티크구조에 대한 연구는 해밀턴력학계와 조화형식의 연구를 위한 중요한 수학적기초를 마련하는것으로 된다.

정의 1 V는 $2n$차원실벡토르공간이고 $\omega,\ \tau$는 서로 보충적인 핵잎층구조를 가지는 빗대칭쌍1차형식들이라고 하자. 이때 $\omega,\ \tau$의 위수가 각각 $2d,\ 2n-2d$ (여기서 d는 n이하의 부아닌 옹근수)이면 $(\omega,\ \tau)$를 위수가 $(2d,\ 2n-2d)$인 V우의 심플렉티크쌍이라고 부른다.[5]

벡토르공간 V우에 심플렉티크쌍 $(\omega,\ \tau)$가 정의되여있으면 이 벡토르공간 V는 ω와 τ를 각각 자체의 심플렉티크구조로 가지는 2개의 심플렉티크벡토르공간의 직합으로 표시된다. 이 2개의 심플렉티크벡토르공간을 각각 $V_\omega,\ V_\tau$로 표시하겠다.

정의 2 k는 정의 옹근수이고 V는 실벡토르공간이며 $\omega\in\Lambda^{k+1}V^*$이라고 하자. 이때 ω가 불퇴화형식이면 $(V,\ \omega)$를 차수가 $k+1$인 $k-$플렉티크벡토르공간이라고 부르며 ω를 V우의 차수가 $k+1$인 $k-$플렉티크형식이라고 부른다.[4]

$(V,\ \omega)$는 차수가 $k+1$인 $k-$플렉티크벡토르공간이고 E는 V의 부분공간이라고 하자. 이때 $l\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ k\}$에 대하여

$$E^{\perp,\ l}=\{v\in V\mid \omega(v,\ u_1,\ \cdots,\ u_l,\ \cdots)=0,\ \forall u_1,\ \cdots,\ u_l\in E\}$$

를 E의 l차원직교보공간이라고 부른다.

정의 3 $(V,\ \omega)$는 차수가 $k+1$인 $k-$플렉티크벡토르공간이고 E는 V의 벡토르부분공간이라고 하자. 이때 $1\le l\le k$인 어떤 l에 대하여 $E\subseteq E^{\perp,\,l}$이면 $l-$등방부분공간, $E=E^{\perp,\ l}$이면 $l-$라그랑쥬부분공간, $E\cap E^{\perp,\ k}=\{0\}$이면 $k-$플렉티크부분공간이라고 부른다.[4]

보조정리 $(\omega,\ \tau)$를 V우의 심플렉티크쌍이라고 할 때 $\omega\wedge\tau$는 V의 차수가 4인 $k-$플렉티크형식으로 된다.

증명 V 의 임의의 $u_1(\neq 0)$ 에 대하여 어떤 u_2, u_3, u_4 가 존재하여

$$(\omega\wedge\tau)(u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4)\neq 0$$

이 성립한다는것을 밝히면 된다.

이를 위해서는 일반성을 잃지 않고 $(e_1, \cdots, e_n;\ f_1, \cdots, f_n)$ 을 심플렉티크쌍 (ω, τ) 에 관한 표준토대 즉

$$\omega(e_i,\ e_j)=\omega(f_i,\ f_j)=\tau(e_i,\ e_j)=\tau(f_i,\ f_j)=0$$

$$\omega(e_i,\ f_i)=1\ (1\le i\le d),\ \omega(e_i,\ f_i)=0\ (d+1\le i\le n)$$

$$\tau(e_i,\ f_i)=0\ (1\le i\le d),\ \tau(e_i,\ f_i)=1\ (d+1\le i\le n)$$

을 만족시키는 V 의 토대라고 하고 u_1 이 토대벡토르인 경우에만 증명하면 충분하다.

우선 $u_1=e_i\ (1\le i\le d)$ 인 경우에

$$u_2=f_i,\ u_3=e_j,\ u_4=f_j\ \ (1\le i\le d,\ d+1\le j\le n)$$

로 놓으면

$$(\omega\wedge\tau)(u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4)=\sum_{\sigma\in S_4}\operatorname{sgn}(\sigma)\omega(u_{\sigma(1)},\ u_{\sigma(2)},\ u_{\sigma(3)},\ u_{\sigma(4)})=\omega(e_i,\ f_i)\tau(e_j,\ f_j)+0=1\neq 0$$

이 성립한다.

다음으로 다른 토대벡토르인 경우에도 마찬가지방법으로 증명할수 있다.

결국 $\omega\wedge\tau$ 는 벡토르공간 V 의 차수가 4인 $k-$플렉티크형식으로 된다.(증명끝)

V 를 심플렉티크쌍 (ω, τ) 가 정의된 벡토르공간이라고 하자.

정리 1 E 가 $(V, \omega\wedge\tau)$ 의 1－등방부분공간이기 위해서는 E 가 (V_ω, ω) 의 등방부분공간이거나 (V_τ, τ) 의 등방부분공간일것이 필요하고 충분하다.

증명 (필요성) 우선 E 가 (V_ω, ω) 의 등방부분공간일 때 $(V, \omega\wedge\tau)$ 의 1－등방부분공간이라는것을 증명하자.

E 가 (V_ω, ω) 의 등방부분공간이므로 임의의 $u_1, u_2(\in E)$ 에 대하여 $\omega(u_1, u_2)=0$ 이 성립한다. 따라서

$$(\omega\wedge\tau)(u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4)=\sum_{\sigma\in S_4}\operatorname{sgn}(\sigma)\omega(u_{\sigma(1)},\ u_{\sigma(2)})\tau(u_{\sigma(3)},\ u_{\sigma(4)})=0$$

이 성립한다. 그러므로 E 는 V 의 1－등방부분공간으로 된다.

다음으로 E 가 (V_τ, τ) 의 등방부분공간인 경우에도 $(V, \omega\wedge\tau)$ 의 1－등방부분공간으로 된다는것은 마찬가지로 증명된다.

(충분성) E 가 (V_ω, ω) 의 등방부분공간도, (V_τ, τ) 의 등방부분공간도 아닌 경우에는 $(V, \omega\wedge\tau)$ 의 1－등방부분공간이 아니라는것을 증명하자.

우선 E 가 (V_ω, ω) 의 부분공간이면서 등방이 아닌 경우를 보기로 하자. 이 경우에 어떤 $u_1(\in E)$ 이 존재하여 임의의 령이 아닌 $u_2(\in E)$ 에 대하여 $\omega(u_1, u_2)\neq 0$ 이 성립한다. 따라서 $\tau(u_3, u_4)\neq 0$ 인 임의의 $u_3, u_4(\in V_\tau\subset V)$ 에 대하여

$$(\omega\wedge\tau)(u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4)=\sum_{\sigma\in S_4}\operatorname{sgn}(\sigma)\omega(u_{\sigma(1)},\ u_{\sigma(2)})\tau(u_{\sigma(3)},\ u_{\sigma(4)})=\omega(u_1,\ u_2)\tau(u_3,\ u_4)\neq 0$$

이 성립한다. 그러므로 E 는 $(V, \omega\wedge\tau)$ 의 1－등방부분공간이 아니다.

다음으로 E 가 (V_τ, τ) 의 부분공간이면서 등방이 아닌 경우에 E 는 $(V, \omega\wedge\tau)$ 의 1－

등방부분공간이 아니라는것이 마찬가지로 증명된다.

다음으로 E가 V_ω의 부분공간도, V_τ의 부분공간도 아닌 경우를 보기로 하자. 이 경우에 E의 차원수가 2이상이므로 E에는 다음과 같은 1차독립인 두 벡토르가 존재한다.

$$u_1=u_{1\omega}+u_{1\tau}=\sum_{i=1}^n(x_{1i}e_i+y_{1i}f_i)\in E\ \ (u_{1\omega}\neq 0)$$

$$u_2=u_{2\omega}+u_{2\tau}=\sum_{i=1}^n(x_{2i}e_i+y_{2i}f_i)\in E\ \ (u_{2\tau}\neq 0)$$

그러므로 각각 $1\le k\le d,\ d+1\le l\le n$인 어떤 $k,\ l$이 존재하여 다음의 4개의 식들가운데서 적어도 하나가 성립한다.

$$\frac{x_{1k}}{x_{2k}}\neq\frac{x_{1l}}{x_{2l}},\ \frac{x_{1k}}{x_{2k}}\neq\frac{y_{1l}}{y_{2l}},\ \frac{y_{1k}}{y_{2k}}\neq\frac{x_{1l}}{x_{2l}},\ \frac{y_{1k}}{y_{2k}}\neq\frac{y_{1l}}{y_{2l}}$$

따라서 일반성을 잃지 않고

$$\frac{x_{1k}}{x_{2k}}\neq\frac{x_{1l}}{x_{2l}}$$

이 성립한다고 하자. 이때 $u_3=f_k,\ u_4=f_l$로 놓으면

$$\begin{aligned}
&(\omega\wedge\tau)(u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4)=\\
&=(\omega\wedge\tau)\left(\sum_{i=1}^n(x_{1i}e_i+y_{1i}f_i),\ \sum_{i=1}^n(x_{2i}e_i+y_{2i}f_i),\ u_3,\ u_4\right)=\\
&=(\omega\wedge\tau)\left(\sum_{i=1}^n x_{1i}e_i,\ \sum_{i=1}^n x_{2i}e_i,\ u_3,\ u_4\right)+(\omega\wedge\tau)\left(\sum_{i=1}^n x_{1i}e_i,\ \sum_{i=1}^n y_{2i}f_i,\ u_3,\ u_4\right)+\\
&+(\omega\wedge\tau)\left(\sum_{i=1}^n y_{1i}f_i,\ \sum_{i=1}^n x_{2i}e_i,\ u_3,\ u_4\right)+(\omega\wedge\tau)\left(\sum_{i=1}^n y_{1i}f_i,\ \sum_{i=1}^n y_{2i}f_i,\ u_3,\ u_4\right)=\\
&=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_{1i}x_{2j}(\omega\wedge\tau)(e_i,\ e_j,\ u_3,\ u_4)=\\
&=-\sum_{i=1}^d\sum_{j=d+1}^n x_{1i}x_{2j}\omega(e_i,\ f_k)\tau(e_j,\ f_l)+\sum_{i=1}^d\sum_{j=d+1}^n x_{1i}x_{2j}\omega(e_j,\ f_k)\tau(e_i,\ f_l)=\\
&=-x_{1k}x_{2l}+x_{2k}x_{1l}\neq 0
\end{aligned}$$

이 성립한다. 그러므로 E는 $(V,\ \omega\wedge\tau)$의 1−등방부분공간이 아니다.(증명끝)

정리 2 다음의 사실들이 성립한다.

① E가 V_ω의 부분공간이거나 V_τ의 부분공간이면 E는 $(V,\ \omega\wedge\tau)$의 2−등방부분공간이다.

② E는 벡토르공간 $(V,\ \omega\wedge\tau)$의 부분공간이고 $E_\omega=\mathrm{Pr}_\omega(E),\ E_\tau=\mathrm{Pr}_\tau(E)$라고 하자. 여기서 $\mathrm{Pr}_\omega,\ \mathrm{Pr}_\tau$는 벡토르공간 V의 부분공간 $V_\omega,\ V_\tau$우로의 자연사영넘기기들이다. 이때 E_ω가 $(V_\omega,\ \omega)$의 등방부분공간이고 E_τ가 $(V_\tau,\ \tau)$의 등방부분공간이면 E는 2−등방부분공간이다.

증명 ①을 증명하자.

우선 E가 V_ω의 부분공간이라고 하자. 그러면 임의의 $u_1,\ u_2,\ u_3(\in E)$과 임의의 $u_4(\in V)$

에 대하여

$$\omega\wedge\tau(u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4)=\sum_{\sigma\in S_4}\mathrm{sgn}(\sigma)\omega(u_{\sigma(1)},\ u_{\sigma(2)})\tau(u_{\sigma(3)},\ u_{\sigma(4)})=0$$

이 성립한다. 그것은 $\tau(u_{\sigma(3)},\ u_{\sigma(4)})=0$ 이기때문이다. 그러므로 E 는 $(V,\ \omega\wedge\tau)$ 의 2－등방부분공간이다.

다음으로 E 가 V_τ 의 부분공간인 경우에도 마찬가지로 증명된다.

②를 증명하자.

E_ω 가 $(V_\omega,\ \omega)$ 의 등방부분공간이고 E_τ 가 $(V_\tau,\ \tau)$ 의 등방부분공간이라고 하자. 그러면 임의의 $u_1,\ u_2,\ u_3(\in E)$ 과 임의의 $u_4(\in V)$ 에 대하여

$$\begin{aligned}\omega\wedge\tau(u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4)&=\sum_{\sigma\in S_4}\mathrm{sgn}(\sigma)\omega(u_{\sigma(1)},\ u_{\sigma(2)})\tau(u_{\sigma(3)},\ u_{\sigma(4)})=\\&=\sum_{\sigma\in S_4}\mathrm{sgn}(\sigma)\omega(u_{\sigma(1)\omega},\ u_{\sigma(2)\omega})\tau(u_{\sigma(3)\tau},\ u_{\sigma(4)\tau})=0\end{aligned}$$

이 성립한다. 여기서 임의의 i 에 대하여 $u_i=u_{i\omega}+u_{i\tau}\ (u_{i\omega}\in V_\omega,\ u_{i\tau}\in V_\tau)$ 이다.(증명끝)

실례 $k-$플렉티크벡토르공간 $(V,\ \omega\wedge\tau)$ 에서 $(V_\omega,\ \omega)$ 의 표준토대를 $e_1,\ e_2,\ f_1,\ f_2$ 라고 하고 $(V_\tau,\ \tau)$ 의 표준토대를 $e_3,\ e_4,\ f_3,\ f_4$ 라고 하자. 그러면 부분공간 $E=\mathrm{span}\{e_1+e_3,\ f_1+e_4,\ e_2\}$ 는 $(V,\ \omega\wedge\tau)$ 의 2－등방부분공간으로 된다. 그러나 부분공간 $E=\mathrm{span}\{e_1+e_3,\ f_1+e_4,\ e_2+e_4\}$ 는 $(V,\ \omega\wedge\tau)$ 의 2－등방부분공간이 아니다.

주의 1 우의 실례는 E_ω 가 $(V_\omega,\ \omega)$ 의 등방부분공간이 아니거나 E_τ 가 $(V_\tau,\ \tau)$ 의 등방부분공간이 아닌 경우에는 E 가 2－등방부분공간일수도 있고 아닐수도 있다는것을 보여주고있다.

정리 3 E 가 $k-$플렉티크벡토르공간 $(V,\ \omega\wedge\tau)$ 의 1－라그랑쥬부분공간이기 위해서는 E 가 $(V_\omega,\ \omega)$ 의 라그랑쥬부분공간이거나 $(V_\tau,\ \tau)$ 의 라그랑쥬부분공간일것이 필요하고 충분하다.

증명 (필요성) E 가 $(V,\ \omega\wedge\tau)$ 의 1－라그랑쥬부분공간이므로 $E=E^{\perp,\ 1}$ 이다. 따라서 $E\subset E^{\perp,\ 1}$ 이므로 정리 1로부터 E 는 $(V_\omega,\ \omega)$ 의 등방부분공간 또는 $(V_\tau,\ \tau)$ 의 등방부분공간으로 된다. 그러므로 일반성을 잃지 않고 E 가 $(V_\omega,\ \omega)$ 의 등방부분공간이라고 하자. 그러면 $E\subset E^{\perp,\ \omega}$ 가 성립한다. 여기서 $E^{\perp,\ \omega}$ 는 E 의 V_ω 에서의 ω 에 관한 직교보공간이다. 그런데 정의에 의하면

$$E^{\perp,\ \omega}=\{u_1\in V_\omega\mid\ \omega(u_1,\ u_2)=0,\ \forall u_2\in E\}$$

$$E^{\perp,\ 1}=\{u_1\in V\mid\ (\omega\wedge\tau)(u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4)=0,\ \forall u_2\in E;\ \forall u_3,\ u_4\in V\}$$

이다. 그러므로 $E^{\perp,\ \omega}\subset E^{\perp,\ 1}$ 이다. 따라서 $E\subset E^{\perp,\ \omega}\subset E^{\perp,\ 1}$ 이다. 그런데 E 가 $(V,\ \omega\wedge\tau)$ 의 1－라그랑쥬부분공간이라는 조건에 의하여 $E=E^{\perp,\ 1}$ 이다. 그러므로 $E=E^{\perp,\ \omega}$ 이며 따라서 $(V_\omega,\ \omega)$ 의 라그랑쥬부분공간으로 된다.

(충분성) E 가 $(V_\omega,\ \omega)$ 의 라그랑쥬부분공간이라고 하자. 그러면 $E=\mathrm{span}\{e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_d\}$ 로 되는 $(V_\omega,\ \omega)$ 의 토대 $e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_d$ 가 존재한다.

$$\omega\wedge\tau(e_i,\ u,\ u_3,\ u_4)=0\ \ (\forall e_i(1\le i\le d),\ \forall u\in E,\ \forall u_3,\ u_4\in V)$$

$$\omega\wedge\tau(e_i,\ e_1,\ f_1,\ f_i)\neq 0\ \ (\forall e_i(d+1\le i\le n),\ e_1\in E)$$

$$\omega\wedge\tau(f_i,\ e_i,\ e_{d+1},\ f_{d+1})\neq 0\ \ (\forall f_i(1\le i\le d),\ \forall e_i\in E)$$

$$\omega\wedge\tau(f_i,\ e_1,\ f_1,\ e_i)\neq 0\ \ (\forall f_i(d+1\leq i\leq n),\ e_1\in E)$$

이므로 $E=E^{\perp,\,1}$이다. 즉 E는 $(V,\ \omega\wedge\tau)$의 1－라그랑쥬부분공간이다.(증명끝)

정리 4 V_ω와 V_τ는 k－플렉티크벡토르공간 $(V,\ \omega\wedge\tau)$의 2－라그랑쥬부분공간이다.

또한 $(V_\omega,\ \omega)$의 라그랑쥬부분공간과 $(V_\tau,\ \tau)$의 라그랑쥬부분공간의 직합으로 표시되는 부분공간은 $(V,\ \omega\wedge\tau)$의 2－라그랑쥬부분공간이다.

증명 우선 V_ω가 $(V,\ \omega\wedge\tau)$의 2－라그랑쥬부분공간이라는것을 증명하자.

$E=V_\omega$라고 하자. 그러면 $E\subset V_\omega$이므로 E는 $(V,\ \omega\wedge\tau)$의 2－등방부분공간이다. 즉 $E\subset E^{\perp,\,2}$이다. 이때 만일 $E\neq E^{\perp,\,2}$라고 하면 $E=V_\omega$이므로 어떤 령이 아닌 $\upsilon(\in V_\tau)$가 존재하여 임의의 $u_2,\ u_3(\in V_\omega)$과 임의의 $u_4(\in V)$에 대하여 $(\omega\wedge\tau)(\upsilon,\ u_2,\ u_3,\ u_4)=0$이 성립한다. 그런데 이 $\upsilon(\in V_\tau)$에 대하여 $u_4(\in V_\tau)$가 존재하여 $\tau(\upsilon,\ u_4)\neq 0$이 성립한다. 따라서

$$(\omega\wedge\tau)(\upsilon,\ e_1,\ f_1,\ u_4)=\omega(e_1,\ f_1)\tau(\upsilon,\ u_4)\neq 0$$

이므로 모순이다. 결국 V_ω는 $(V,\ \omega\wedge\tau)$의 2－라그랑쥬부분공간이다.

다음으로 V_τ가 $(V,\ \omega\wedge\tau)$의 2－라그랑쥬부분공간이라는것도 마찬가지로 증명된다.

L_ω는 $(V_\omega,\ \omega)$의 라그랑쥬부분공간이고 L_τ는 $(V_\tau,\ \tau)$의 라그랑쥬부분공간이며 $E=L_\omega\oplus L_\tau$라고 하자. 그리고 L_ω의 토대를 $e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_d$, L_τ의 토대를 $e_{d+1},\ e_{d+2},\ \cdots,\ e_n$이라고 하자. 이때 이 토대들을 확장하여 $(V,\ \omega\wedge\tau)$의 표준토대 $e_1,\ \cdots,\ e_n,\ f_1,\ \cdots,\ f_n$을 만들수 있다.

한편 임의의 $u(\in E)$와 임의의 $u_2,\ u_3(\in E)$ 및 임의의 $u_4(\in V)$에 대하여

$$(\omega\wedge\tau)(u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4)=\sum_{\sigma\in S_4}\omega(u_{\sigma(1)},\ u_{\sigma(2)})\tau(u_{\sigma(3)},\ u_{\sigma(4)})=0$$

이 성립한다. 그러므로 $E\subset E^{\perp,\,2}$이다.

이제 $E\neq E^{\perp,\,2}$라고 하자. 그러면 $\upsilon\notin E$인 $\upsilon(\notin E^{\perp,\,2})$가 존재한다. 이때 임의의 $u_2,\ u_3(\in E)$과 임의의 $u_4(\in V)$에 대하여 $(\omega\wedge\tau)(\upsilon,\ u_2,\ u_3,\ u_4)=0$이 성립하여야 한다. 즉 $\upsilon=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i+y_if_i$로 놓으면

$$(\omega\wedge\tau)(v,\ u_2,\ u_3,\ u_4)=(\omega\wedge\tau)\left(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i,\ u_2,\ u_3,\ u_4\right)+(\omega\wedge\tau)\left(\sum_{i=1}^{n}y_if_i,\ u_2,\ u_3,\ u_4\right)=$$

$$=(\omega\wedge\tau)\left(\sum_{i=1}^{n}y_if_i,\ u_2,\ u_3,\ u_4\right)=0$$

이여야 한다. 그런데 $\upsilon\notin E$이므로 y_i들가운데는 령이 아닌것이 존재한다. 따라서 일반성을 잃지 않고 $y_1\neq 0$이라고 하고 $u_2=e_1,\ u_2=e_{d+1},\ u_3=f_{d+1}$로 놓자. 그러면

$$\omega\wedge\tau(\upsilon,\ u_2,\ u_3,\ u_4)=\sum_{i=1}^{n}y_i(\omega\wedge\tau)(f_i,\ u_2,\ u_3,\ u_4)=\omega\wedge\tau(f_1,\ e_1,\ e_{d+1},\ f_{d+1})=-y_1\neq 0$$

이 성립한다. 이것은 모순이다. 따라서 $E=E^{\perp,\,2}$이다. 즉 E는 $(V,\ \omega\wedge\tau)$의 2－라그랑쥬부분공간이다.(증명끝)

정리 5 E는 k－플렉티크벡토르공간 $(V,\ \omega\wedge\tau)$의 2－등방부분공간이라고 하자. 이때 E

를 확장하여 2－라그랑쥬부분공간이 되도록 할수 있다.

증명 $\{e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_k\}$를 E의 토대라고 하자. 그러면 E가 2－등방부분공간이므로 $E\subset E^{\perp,\ 2}$이다. 그러므로 만일 $E=E^{\perp,\ 2}$이면 E가 $(V,\ \omega\wedge\tau)$의 2－라그랑쥬부분공간으로 된다. 또한 $E\neq E^{\perp,\ 2}$인 경우 $\upsilon\in E^{\perp,\ 2}$인 $\upsilon(\notin E)$가 존재한다. 이때

$$\overline{E}=\mathrm{span}\{e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_k,\ \upsilon\}$$

라고 하면 임의의

$$u_1=\upsilon_{01}+x_1\upsilon,\ u_2=\upsilon_{02}+x_2\upsilon,\ u_3=\upsilon_{03}+x_3\upsilon(\in\overline{E}),\ u_4(\in E)$$

에 대하여

$$\begin{aligned}
&(\omega\wedge\tau)(u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4)=\\
&\quad=(\omega\wedge\tau)(\upsilon_{01},\ \upsilon_{02},\ \upsilon_{03},\ u_4)+x_1(\omega\wedge\tau)(\upsilon,\ \upsilon_{02},\ \upsilon_{03},\ u_4)+x_2(\omega\wedge\tau)(\upsilon_{01},\ \upsilon,\ \upsilon_{03},\ u_4)+\\
&\quad+x_3(\omega\wedge\tau)(\upsilon_{01},\ \upsilon_{02},\ \upsilon,\ u_4)+x_1x_2(\omega\wedge\tau)(\upsilon,\ \upsilon,\ \upsilon_{03},\ u_4)+x_2x_3(\omega\wedge\tau)(\upsilon_{01},\ \upsilon,\ \upsilon,\ u_4)+\\
&\quad+x_1x_3(\omega\wedge\tau)(\upsilon,\ \upsilon_{02},\ \upsilon,\ u_4)+x_1x_2x_3(\omega\wedge\tau)(\upsilon,\ \upsilon,\ \upsilon,\ u_4)=\\
&\quad=(\omega\wedge\tau)(\upsilon_{01},\ \upsilon_{02},\ \upsilon_{03},\ u_4)+x_1(\omega\wedge\tau)(\upsilon,\ \upsilon_{02},\ \upsilon_{03},\ u_4)-x_2(\omega\wedge\tau)(\upsilon,\ \upsilon_{01},\ \upsilon_{03},\ u_4)+\\
&\quad+x_3(\omega\wedge\tau)(\upsilon,\ \upsilon_{02},\ \upsilon_{01},\ u_4)=0
\end{aligned}$$

이 성립한다. 그러므로 $\overline{E}\subset\overline{E}^{\perp,\ 2}$이다. 그런데 $E\subset\overline{E}$이므로 $\overline{E}^{\perp,\ 2}\subset E^{\perp,\ 2}$이다. 결국 $E\subset\overline{E}\subset\overline{E}^{\perp,\ 2}\subset E^{\perp,\ 2}$이다.

이와 같은 과정을 계속하면 유한번만에 $\overline{E}=\overline{E}^{\perp,\ 2}$로 되게 할수 있다. 따라서 E를 확장하여 2－라그랑쥬부분공간이 되도록 할수 있다.(증명끝)

주의 2 실례의 첫 부분과 정리 5는 정리 4에서 지적된 형태가 아닌 2－라그랑쥬부분공간이 존재한다는것을 보여준다.

참 고 문 헌

[1] J. Herman; Noether's Theorem in Multisymplectic Geometry, Differ. Geom. Appl., 56, 260, 2018.

[2] L. Ryvkin, T. Wurzbacher; arXiv:1804.02553, 2018.

[3] J. Herman; arXiv:1807.01641, 2018.

[4] T. Barron, M. Shafiee; J. Geom. Phys., 136, 1, 2019.

[5] H. L. Her; Topol. Appl., 235, 35, 2018.

주체109(2020)년 12월 5일 원고접수

Properties of Subspaces of a $k-$plectic Vector Space Induced by Symplectic Pairs

Ri Won Hak, Son Yong Sim

In this paper we consider the properties of subspaces of a $k-$plectic vector space induced by symplectic pairs.

Keywords: $k-$plectic structure, symplectic pair, Lagrangian subspace, orthogonality