김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제3호

# 비등질공간에서 칼데론－지그문드연산자의 약(1, 1)형성과 코트라형부등식

채 규 성

론문에서는 최근 수학과 물리학의 여러 분야에서 많이 연구되고있는 칼데론－지그문드특이적분연산자의 유계성에 대한 문제를 고찰하였다.

1950년대에 제기된 칼데론－지그문드연산자에 대한 연구는 현대해석학의 중심과제의 하나로서 광범히 연구되고있다.

칼데론－지그문드특이적분연산자의 내용과 방법들은 현대수학과 현대물리학의 여러 분야들 특히는 조화해석과 류체력학, 화상처리, 편미분방정식리론들에서 가장 기초적으로 제기되는 문제이다.

거리측도공간 $(X,\ \mu)$가 임의의 $x\in X$와 임의의 $r>0$에 대하여

$$\mu(B(x,\ 2r))\le C_\mu \mu(B(x,\ r)) \tag{1}$$

를 만족시키면 거리측도공간 $(X,\ \mu)$를 등질공간[1]이라고 부른다. 여기서

$$B(x,\ r)=\{y\in X:\rho(x,\ y)<r\}$$

이다. 조건 (1)은 칼데론－지그문드특이적분연산자리론에서 기초적인 역할을 노는 부등식이다. 그러나 1990년대부터는 조건 (1)보다 더 일반적인 조건에서도 칼데론－지그문드연산자의 유계성이 나올수 있다는것을 론증한데 기초하여 이에 대한 연구가 활발히 진행되고있다.[1－5] 칼데론－지그문드특이적분연산자리론에서는 크게 두가지 방향 즉 공간에 대한 가정과 특이적분의 핵함수에 대한 가정들을 일반화하는 방향에서 연구가 진행되고있다.

론문에서는 공간을 비등질로, 핵함수를 $\theta$ －형으로 가정한데 기초하여 선행결과들을 일반화하였다.

정의 1 [1] $X$는 거리공간이고 라돈측도 $\mu$는

$$\mu(B(x,\ r))\le Cr^n$$

을 만족시킨다고 하자. 그리고 다음의 성질을 만족시키는 함수 $\lambda: X\times(0,\ \infty)\to(0,\ \infty)$가 존재한다고 하자.

① 임의의 $x\in X$에 대하여 $r\mapsto\lambda(x,\ r)$는 증가함수이다.

② 상수 $C_\lambda>0$이 있어서 임의의 $x\in X,\ r>0$에 대하여 $\lambda(x,\ 2r)\le C_\lambda\lambda(x,\ r)$이다.

③ 모든 $x\in X,\ r>0$에 대하여 $\mu(x,\ r):=\mu(B(x,\ r))\le\lambda(x,\ r)$이다.

이때 $X$를 비등질공간이라고 부른다.

론문의 서술에서는 선행연구[1, 3]에서의 개념과 기호들을 편의상 그대로 리용한다.

$\alpha,\ \beta>1$에 대하여 $\mu(\alpha B)\le\beta\mu(B)$를 만족시키는 구 $B$를 $(\alpha,\ \beta)$－쌍배구라고 부른다.

$\theta$는 $\mathbf{R}^+=(0,\ \infty)$에서 $\displaystyle\int_0^1\frac{\theta(t)}{t}dt<\infty$인 부아닌 비감소함수라고 하자.

정의 2[1] $K(x,\ y)$ 는 $(X)^2$ 의 대각선 $x=y$ 와 떨어진데서 정의된 국부적분가능한 함수로서 어떤 $C>0$ 이 있어서 크기평가

$$|K(x,\ y)|\le C\min\left\{\frac{1}{\lambda(x,\ (x,\ y))},\ \frac{1}{\lambda(y,\ (x,\ y))}\right\} \tag{2}$$

과 미끈성평가 즉 $d(x,\ x')\le Cd(x,\ y)$ 일 때는

$$|K(x,\ y)-K(x',\ y)|+|K(y,\ x)-K(y,\ x')|\le C\frac{1}{\lambda(x,\ d(x,\ y))}\theta\left(\frac{d(x,\ x')}{d(x,\ y)}\right) \tag{3}$$

를 만족시킨다고 하자. 이러한 조건을 만족시키는 핵 $K(x,\ y)$ 를 칼데론－지그문드핵이라고 부르고 $\theta-CZK$ 에 속한다고 말한다. 이때 선형연산자 $T$ 가 임의의 유계인 대를 가지는 $f\in L^{\infty}(\mu)$ 에 대하여 $x\notin \operatorname{supp} f$ 일 때

$$T(f)(x)=\int_X K(x,\ y)f(y)d\mu(y) \tag{4}$$

를 만족시키면 선형연산자 $T$ 를 $K$ 를 핵으로 가지는 칼데론－지그문드연산자라고 부른다.

칼데론－지그문드연산자 $T$ 와 관련된 최대연산자 $T_*$ 은

$$T_*(f)(x)=\sup_{\varepsilon>0}|T_\varepsilon(f)(x)|$$

로 정의한다. 여기서

$$T_\varepsilon(f)(x)=\int_{d(x,\ y)\ge\varepsilon} K(x,\ y)f(y)d\mu(y)$$

이다.

선행연구[6]에서는 칼데론－지그문드특이적분연산자를 일반화하여 등질공간 $(\mathbf{R}^n,\ \mu)$ 에서 $\theta$ －형칼데론－지그문드연산자의 약(1, 1)형성을, 선행연구[2]에서는 비등질공간 $(\mathbf{R}^n,\ \mu)$ 에서 칼데론－지그문드연산자의 약(1, 1)형성과 코트라형부등식을 증명하였다. 그리고 선행연구[3]에서는 비등질공간 $(\mathbf{R}^n,\ \mu)$ 에서 $\theta$ －형칼데론－지그문드연산자의 약(1, 1)형성과 코트라형부등식을, 선행연구[4]에서는 비등질공간 $(X,\ \mu)$ 에서 칼데론－지그문드연산자의 유계성을 고찰하였다.

론문에서는 비등질공간 $(X,\ \mu)$ 에로 $\theta$ －형칼데론－지그문드특이적분연산자리론을 일반화하는 문제를 연구한다.

론문에서는 선행연구[1, 5]의 평가방법에 한가지 공간분할법을 첨가하여 칼데론－지그문드연산자의 약(1, 1)형성을 증명하고 이에 기초하여 코트라형부등식을 얻었다. 증명에서는 비등질공간 $(X,\ \mu)$ 에 대한 칼데론－지그문드분해정리를 리용하였다.

론문에서 얻은 결과들은 선행연구[1, 3, 5]의 결과들을 일반화한다.

다음의 보조정리는 비등질공간의 칼데론－지그문드분해정리이다.

보조정리[1](칼데론－지그문드분해정리) $1\le p<\infty$ 일 때 임의의 $f\in L^p(\mu)$ 와 임의의

$$t>0\quad (\mu(X)=\infty \text{이면 } t>\beta_0\|f\|_p/\mu(X))$$

에 대하여 다음의 사실들이 성립한다. 여기서 $\beta_0>\max\{C_\lambda^{3\log_2 6},\ 6^{3n}\}$ 이다.

① 유한개의 겹친 구들의 족 $\{6Q_j\}$ 가 있어서 $\{Q_j\}$ 는 서로 비교차하는 족이고

$$\frac{1}{\mu(6Q_j)}\int_{Q_j}|f|^p\,d\mu>\frac{t^p}{\beta_0} \tag{5}$$

이 성립한다.

$$\forall\eta>1,\ \frac{1}{\mu(6^2\eta Q_j)}\int_{\eta Q_j}|f|^p\,d\mu\le\frac{t^p}{\beta_0} \tag{6}$$

이 성립한다.

$$X\setminus\bigcup_j 6Q_j \text{ 의 } \mu-\text{거의 도처에서 } |f|\le t \tag{7}$$

가 성립한다.

② 임의의 $i$ 에 대하여 $R_i$ 는 $l(R_i)>6^2 l(Q_i)$ 인 $Q_i$ 와 같은 중심을 가지는 $(3\times6^2,\ C_\lambda^{\log_2 3\times6^2+1})$ −쌍배구라고 하고 $\omega_i=\dfrac{\chi_{6Q_k}}{\sum_K\chi_{6Q_k}}$ 로 표시하자. 이때 같은 부호를 가지며 $\mathrm{supp}\varphi_i\subset R_i$ 인 함수족 $\{\varphi_i\}$ 가 있어서

$$\int\varphi_i d\mu=\int_{6Q_i}f\omega_i d\mu \tag{8}$$

$$\sum_i|\varphi_i|\le\gamma t \tag{9}$$

가 성립한다. 여기서 $\gamma$ 는 $(X,\ \mu)$ 에만 의존하는 상수이다. 그리고 $p=1$ 이면 $\|\varphi_i\|_\infty\,\mu(R_i)\le C\int_X|\omega_i f|\,d\mu$ 이고 $1<p<\infty$ 이면

$$\|\varphi_i\|_{L^p(\mu)}(\mu(R_i))^{1/p'}\le\frac{C}{t^{p-1}}\int_X|\omega_i f|^p\,d\mu$$

이다.

론문의 기본결과는 다음과 같다.

정리 1 $T$ 가 $\theta-CZK$ 에서 핵 $K$ 를 가지는 $L^2(\mu)$ −유계인 선형연산자라고 하면 $T$ 는 약(1, 1)형이다.

증명 $f\in L^1(\mu)$ 이고 $t>0$ 이라고 하자. $t>\beta_0\|f\|_{L^1(\mu)}/\mu(X)$ 라고 하자. 보조정리에 의하여 $f=g+b$ 라고 하자. 여기서 $g=f\chi_{X\setminus\bigcup_i 6Q_i}+\sum_i\varphi_i$ 이고 $b=\sum_i b_i=\sum_i(\omega_i+\varphi_i)$ 이다. 식 (5)에 의하여

$$\mu\left(\bigcup_i 6^2Q_i\right)\le\frac{C}{t}\int_{Q_i}|f|\,d\mu\le\frac{C}{t}\int_X|f|\,d\mu$$

이다. 이제

$$\mu\left\{x\in X\setminus\bigcup_i 6^2Q_i:|T(f)(x)|>t\right\}\le\frac{C}{t}\int_X|f|\,d\mu$$

임을 보여주면 된다.

$$\mu\left\{x\in X\setminus\bigcup_i 6^2Q_i : |T(f)(x)|>t\right\}\le\mu\left\{x\in X\setminus\bigcup_i 6^2Q_i : |T(g)(x)|>t/2\right\}+$$

$$+\mu\left\{x\in X\setminus\bigcup_i 6^2Q_i :|T(b)(x)|>t/2\right\}=I_1+I_2$$

라고 하자. $I_1$을 평가하면 $|g|\le Ct$이므로 체비쉐브부등식에 의하여

$$\mu\left\{x\in X\setminus\bigcup_i 6^2Q_i : |T(g)(x)|>t/2\right\}\le\frac{C}{t^2}\int_X|g|^2\,d\mu\le\frac{C}{t}\int_X|g|\,d\mu$$

이다. 따라서

$$\int_X|g|\,d\mu\le\int_{X\setminus\bigcup_i 6Q_i}|g|\,d\mu+\sum_i\int_{R_i}|\varphi_i|\,d\mu\le\int_X|f|\,d\mu+\sum_i\mu(R_i)\|\varphi_i\|_{L^\infty(\mu)}\le$$

$$\le\int_X|f|\,d\mu+C\sum_i\int_X|f\omega_i|\,d\mu\le C\int_X|f|\,d\mu$$

즉 $\mu\left\{x\in X\setminus\bigcup_i 6^2Q_i : |T(g)(x)|>t/2\right\}\le\frac{C}{t}\int_X|f|\,d\mu$이다. $I_2$를 평가하기 위하여

$$I_2\le\frac{C}{t}\sum_i\left(\int_{X\setminus 2R_i}|Tb_i|\,d\mu+\int_{2R_i}|T\varphi_i|\,d\mu+\int_{2R_i\setminus 6^2Q_i}|T\omega_i f|\,d\mu\right)=\frac{C}{t}\sum_i(K_{i1}+K_{i2}+K_{i3})$$

으로 표시한다. 모든 $i$에 대하여 $\int b_i d\mu=0$이므로 칼데론－지그문드연산자에 대한 가정과 표준적인 론법에 의하여

$$K_{i1}=\int_{X\setminus 2R_i}|Tb_i|\,d\mu\le\int_{X\setminus 2R_i}\int_X|K(x,\ y)-K(x,\ x_i)||b_i(y)|\,d\mu(y)d\mu(x)\le$$

$$\le\sum_{k=1}^\infty\int_{2^{k+1}R_i\setminus 2^kR_i}\int_X\frac{1}{\lambda(x,\ d(x,\ y))}\theta\left(\frac{d(x,\ x_i)}{d(x,\ y)}\right)|b_i(y)|\,d\mu(y)d\mu(x)\le$$

$$\le\sum_{k=1}^\infty\theta(2^{-k})\int_X|b_i(y)|\,d\mu(y)\le C\int_X|b_i|\,d\mu\le\int_X|f\omega_i|\,d\mu+\int_{R_i}|\varphi_i|\,d\mu\le$$

$$\le\int_X|f\omega_i|\,d\mu+\mu(R_i)\|\varphi_i\|_{L^\infty(\mu)}\le C\sum_i\int_X|f\omega_i|\,d\mu\le\int_X|f|\,d\mu$$

이다. 우의 평가에서 $\sum_{k=1}^\infty\theta(2^{-k})=\int_0^1\frac{\theta(t)}{t}dt$를 리용하였다. 한편 $T$의 $L^2(\mu)$－유계성과 $R_i$가 $(3\times 6^2,\ C_\lambda^{\log_2 3\times 6^2+1})$－쌍배구이므로 휠데르부등식에 의하여

$$K_{i2}\le\left(\int_{2R_i}|T\varphi_i|^2\,d\mu\right)^{1/2}(\mu(R_i))^{1/2}\le\left(\int_{2R_i}|\varphi_i|^2\,d\mu\right)^{1/2}(\mu(R_i))^{1/2}\le$$

$$\le C\|\varphi_i\|_{L^\infty(\mu)}\ \mu(R_i)\le C\int_X|\omega_i f|\,d\mu\le C\int_X|f|\,d\mu$$

이다. $\mathrm{supp}\,\omega_i f \subset 6Q_i$ 이므로 $x \in 2R_i \setminus 6^2 Q_i$ 에 대하여

$$K_{i3} \le C \int_{2R_i \setminus 6Q_i} \frac{1}{\lambda(x_{Q_i},\ d(x,\ x_{Q_i}))} \theta\left( \frac{d(x,\ x_i)}{d(x,\ x_{Q_i})} \right) d\mu(x) \cdot \int_X |\omega_i f|\, d\mu \le C \int_X |f|\, d\mu$$

이다. 따라서

$$I_2 \le \frac{C}{t} \sum_i \int_X |\omega_i f|\, d\mu \le \frac{C}{t} \int_X |f|\, d\mu$$

이다.(증명끝)

정리 2 $T$가 $\theta - CZK$ 에서 핵 $K$를 가지는 $L^2(\mu)$ —유계인 선형연산자라고 하자. 이때 상수 $C > 0$ 이 있어서 콤팍트대를 가지는 임의의 유계함수 $f$와 $x \in X$ 에 대하여

$$T_* f(x) \le C(M_{6,\ \eta}(Tf)(x) + M_{(5)} f(x))$$

이다. 여기서

$$M_{p,\ \rho} f(x) = \sup_{x \in Q} \left( \frac{1}{\mu(\rho Q)} \int_Q |f|^p\, d\mu \right)$$

$$M_{(\rho)} f(x) = \sup_{x \in Q} \left( \frac{1}{\mu(\rho Q)} \int_Q |f|\, d\mu \right)$$

이다.

주의 론문에서 얻은 결과들은 선행연구[1, 3, 5]의 결과들을 일반화한다.

## 참 고 문 헌


[1] T. A. Bui et al.; J. Geom. Analysis, 23, 895, 2013.

[2] F. Nazarov et al.; Inter. Math. Res. Notices, 9, 463, 1998.

[3] X. Rulong et al.; Acta Math. Appl. Sinica, English Series, 29, 2, 263, 2013.

[4] L. Suile et al.; Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 144A, 567, 2014.

[5] X. Tolsa; Publ. Math., 45, 163, 2001.

[6] K. Yabuta; Studia Math., 82, 17, 1985.


주체108(2019)년 3월 15일 원고접수

## Weak (1, 1) Estimates and Cotlar Type Inequalities for Calderön-Zygmund Operators on Non-Homogeneous Spaces

*Chae Kyu Song*

In this paper, we consider weak (1, 1)-estimate and Cotlar type inequality of Calderön-Zygmund operators on non-homogeneous space $(X,\ \mu)$. Our results are a generalization of [1, 3, 5].

Key words: non-homogeneous space, Calderön-Zygmund operator