김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체104(2015)년 제61권 제6호 Vol. 61 No. 6 JUCHE104(2015).

분수계미분방정식의 평형점의 안정성판정을 위한 한가지 방법

김철, 리영도

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《선진과학기술을 받아들이기 위한 사업을 적극적으로 벌려야 하겠습니다.

선진과학기술을 받아들이는것은 나라의 과학기술을 빨리 발전시키기 위한 중요한 방도의 하나로 됩니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제15권 499～500페지)

론문에서는 다음의 선형분수계지연미분방정식의 령풀이의 안정성에 대하여 연구하였다.

$$D^{\alpha}x(t)=Ax(t)+Bx(t-\tau)\,,\quad t\ge 0 \tag{1}$$

여기서 $D^{\alpha}x(t)$는 $x(t)$의 정규분수도함수, $A=(a_{ij}),\ B=(b_{ij})$는 n차행렬, $0<\alpha\le 1,\quad \tau\ge 0,$ $x(t)\in \boldsymbol{R}^n$이다.

선행연구[5]에서는 분수계미분방정식 $D^{\alpha}x(t)=f(x(t))$의 평형점의 안정성을 야코비행렬 $A=(a_{ij})_{i,\ j=1,\ \cdots,\ n}$의 고유값에 의해 판정할수 있다는것을 밝히였다.

선행연구[1]에서는 선행연구[5]의 결과에 기초하여 분수계미분방정식 $D^{\alpha}x(t)=f(x(t))$의 평형점이 안정하기 위한 조건을 특성함수의 실수부와 허수부를 리용하여 얻고 분수계미분방정식의 평형점의 안정성을 판정하는 해석적인 식에 대하여 론의하였다.

현실의 많은 모형들이 분수계지연미분방정식으로 묘사되는것으로 하여 여러 론문들에서 분수계지연미분방정식의 령풀이의 안정성을 론의하였다.

선행연구[2, 3]에서는 분수계지연미분방정식의 령풀이가 점근안정하기 위한 조건을 라쁠라스변환을 리용하여 특성다항식의 령점이 안정구역에 놓이기 위한 조건으로 귀착시켰으며 선행연구[4]에서는 분수계지연미분방정식에 라쁠라스변환을 실시하여 얻은 특성다항식만을 놓고 그것의 실수부와 허수부를 리용하여 선행연구[2]에서의 안정구역에 놓이기 위한 판정식을 얻었다.

론문에서는 라쁠라스변환을 리용하지 않고 선형분수계지연미분방정식 (1)의 령풀이가 안정하기 위한 해석적인 판정식을 얻고 수값실례를 통하여 그 효과성을 보여주었다.

1. 기본결과

정의 계 (1)의 량변에 라쁠라스변환을 실시하여 얻은 계의 특성다항식과 특성방정식은 각각 다음과 같이 정의한다.

$$\Delta(s,\ \tau)=\det[s^{\alpha}I-A-Be^{-s\tau}] \tag{2}$$

$$\Delta(s,\ \tau)=0 \tag{3}$$

다음의 정리에서는 계 (1)의 령풀이가 점근안정하기 위한 충분조건을 얻는다.

정리 1 계 (1)의 령풀이가 점근안정하기 위하여서는 다음의 두 조건이 성립될것이 충분하다.

i) 행렬 $A+B$ 의 모든 고유값들이 조건 $|\arg(\lambda(A+B))|>\alpha\pi/2$ 를 만족시킨다.

ii) $\forall y\in[-M^{1/\alpha},\ M^{1/\alpha}],\ \tau\geq 0$

$$\Delta(r,\ \tau)=\det[r(\cos(\alpha\pi/2)+i\sin(\alpha\pi/2))I-A-Be^{-ir^{1/\alpha}\tau}]\neq 0$$

$$\Delta(r,\ \tau)=\det[r(\cos(\alpha\pi/2)-i\sin(\alpha\pi/2))I-A-Be^{ir^{1/\alpha}\tau}]\neq 0$$

증명 여기서는 $\forall\tau\geq 0$, $\Delta(s,\ \tau)=0$ 의 모든 뿌리가 복소수평면의 왼쪽 열린반평면에 놓인다는것 즉 모든 뿌리의 실수부가 0보다 작다는것을 증명하면 된다.[6]

조건 i)로부터 $\det(\lambda I-A-B)=0$ 의 모든 뿌리는 다음의 식을 만족시킨다.

$$|\arg(\lambda)|>\alpha\pi/2 \tag{4}$$

$\lambda=s^{\alpha}$ 으로 놓으면 $s=\lambda^{1/\alpha}$ 이다.

부등식 (4)로부터 $|\arg(s)|>\pi/2$ 가 성립되며 이때 s 는 다음의 특성방정식의 뿌리이다.

$$\det(s^{\alpha}I-A-B)=0$$

즉 방정식 $\det(s^{\alpha}I-A-B)=0$ 의 모든 뿌리는 부의 실수부를 가진다.

한편 계 (1)의 특성다항식은 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\Delta(s,\ \tau)=(s^{\alpha})^{n}+P_{1}(s^{\alpha})^{n-1}+\cdots+P_{n-1}(s^{\alpha})+P_{n} \tag{5}$$

여기서 $P_i\ (i=1,\cdots,n)$ 는 지수함수 $e^{-s\tau}$ 에 관한 다항식이며 그 결수는 행렬 $A,\ B$ 의 원소들의 합과 적으로 되여있다.

식 (5)에서 $\forall\tau\geq 0,\ \mathrm{Re}(s)\geq 0$ 이라고 가정하면 $|e^{-s\tau}|\leq 1$ 이고 $P_i\ (i=1,\cdots,n)$ 는 유계이다.

표시 $Q=\max\limits_{1\leq i\leq n}|P_i|,\ \ M=1+Q$ 를 도입하자.

이때 $|s^{\alpha}|>M,\ \mathrm{Re}(s)\geq 0$ 이면 다항식 (2)는 다음과 같이 평가된다.

$$\begin{aligned}|\Delta(s,\ \tau)|&=|(s^{\alpha})^{n}+P_{1}(s^{\alpha})^{n-1}+\cdots+P_{n-1}s^{\alpha}+P_{n}|\geq\\&\geq|(s^{\alpha})^{n}|-Q[1+|s^{\alpha}|+\cdots+|(s^{\alpha})^{n-1}|]=|(s^{\alpha})^{n}|-Q[(|(s^{\alpha})^{n}|-1)/(|s^{\alpha}|-1)]\geq\\&\geq|(s^{\alpha})^{n}|-Q(|(s^{\alpha})^{n}|-1)/Q=1>0\end{aligned}$$

그러므로 $|s^{\alpha}|>M,\ \mathrm{Re}(s)\geq 0$ 일 때 방정식 (3)은 뿌리를 가지지 않는다.

$\lambda=s^{\alpha}$ 이므로 특성방정식은 $\Delta(\lambda,\ \tau)=\det(\lambda I-A-Be^{-\lambda 1/\alpha\tau})=0$ 과 같이 표시된다.

조건 i)로부터 $\Delta(s,\ 0)=0$ 은 왼쪽 열린반평면에서만 뿌리를 가진다.

τ 가 0부터 련속적으로 증가할 때 방정식 (3)이 오른쪽 열린반평면에서 뿌리를 가지자면 $\exists s\ (|s|<M^{1/\alpha})$, s 가 허축을 지나야 한다.

변환 $\lambda=s^{\alpha}$ 에 의하여 허축은 오른쪽 열린반평면의 그림의 두 반직선 OB, OC로 넘어간다. 조건 ii)는 두 반직선우에서 특성방정식이 뿌리를 가지지 않는다는것을 보여준다.

따라서 s 가 허축을 지난다는것은 모순되며 $\Delta(s,\ 0)=0$ 의 모든 뿌리는 왼쪽 열린반평면에 놓인다.(증명끝)

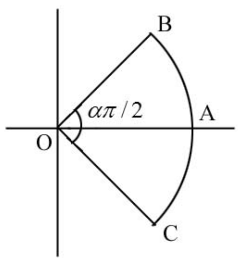

그림. 편각의 평가구역

정리 1은 계 (1)의 령풀이가 점근안정하기 위한 충분조건을 주는 정리이지만 여기서 조건 ii)는 초월부등식이므로 그것을 리용하기가 불편하다.

그러므로 다음의 정리에서는 정리 1의 조건 ii)를 개선한 충분조건을 준다.

정리 2 계 (1)의 령풀이가 점근안정하기 위하여서는 조건 i)과 다음의 조건이 성립될것이 충분하다.

iii) $\forall y \in R$, 다음의 복소함수행렬들의 모든 고유값이 부의 실수부를 가진다.

$$G(y) = [A + B - re^{i\pi\alpha/2} I]^{-1} B - I/2,\ \ G_1(y) = [A + B - re^{-i\pi\alpha/2} I]^{-1} B - I/2$$

즉 $\mathrm{Re}[\lambda(G(y))] < 0$ 이다.

정리 2는 조건 ii)와 조건 iii)이 동등하다는것을 밝히면 쉽게 증명된다.

n 차행렬 C 를 $C = A + B$ 로 놓으면 조건 i)은 다음식과 동등하다.

$$|\arg \lambda(C)| > \alpha\pi/2 \tag{6}$$

행렬 C 의 특성다항식은 다음과 같다.

$$\Delta_n(\lambda) = \det(\lambda I - C) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n \tag{7}$$

복소수평면에서 그림과 같은 부채형을 생각하자.

그러면 조건 (6)은 식 (7)이 부채형 OCB에서 뿌리를 가지지 않는다는것과 동등하다.

이때 부채형의 반경 r 는 $r \to \infty$ 로 생각한다.

λ 가 활등 AB와 반직선 BO를 따라 A에서 O까지 변할 때 다항식 $\Delta_n(\lambda)$ 의 편각의 증분을 $\underset{\mathrm{ABO}}{\Delta} \arg(\Delta_n(\lambda))$ 로 표시하면 다음의 정리가 성립된다.

정리 3[1] $\Delta_n(r\cos(\alpha\pi/2) + i\sin(\alpha\pi/2)) \neq 0,\ \forall r > 0$ 이고 $\underset{\mathrm{ABO}}{\Delta} \arg(\Delta_n(\lambda)) = k\pi$ 라고 하자.

이때 $\Delta_n(\lambda)$ 가 편각의 절대값이 $\alpha\pi/2$ 보다 큰(작은) 뿌리들만 가지기 위해서는 $k = 0$ ($0 < k \le n$)일것이 필요하고 충분하다.

정리 3에서는 조건 (6)과 동등한 판정조건을 얻었다.

이제 $\Delta_n(\lambda)$ 의 편각의 변화대신 $e^{-in\pi\alpha/2}\Delta_n(\lambda)$ 의 편각의 변화에 대하여 보자.

사실 $\Delta_n(\lambda)$ 에 $e^{-in\pi\alpha/2}$ 를 곱하면 $\Delta_n(\lambda)$ 의 최고차항을 간단히 표시할수 있다. 그리고 편각의 변화에서는 달라지는것이 없다. 즉 $\underset{\mathrm{ABO}}{\Delta} \arg(\Delta_n(\lambda)) = \underset{\mathrm{ABO}}{\Delta} \arg(e^{-in\pi\alpha/2}\Delta_n(\lambda))$.

다음의 정리에서는 편각의 절대값이 $\alpha\pi/2$ 보다 큰 뿌리들의 개수 k 에 대한 양적표시식을 구함으로써 계 (1)의 령풀이가 점근안정하기 위한 구체적인 판정조건을 얻었다.

정리 4 $e^{-in\pi\alpha/2}\Delta_n(\lambda)$ 의 실수부와 허수부를 각각 $M(r),\ N(r)$ 라고 하고 $\rho_1 \ge \cdots \ge \rho_q > 0$ 이 $M(r) = 0$ 의 정의실수뿌리들(중복도까지 고려)이라고 하면 계 (1)의 령풀이가 점근안정하기 위하여서는 다음의 조건들이 성립될것이 충분하다.

iv) $\dfrac{\alpha}{2} n + \dfrac{\alpha}{2} n \operatorname{sgn} N(0)(-1)^q + \sum_{j=1}^{q} (-1)^{j-1} \operatorname{sgn} N(\rho_j) = 0$ ($\alpha n \le 1$)

$$\frac{\alpha}{2} n + \left(1 - \frac{\alpha}{2} n\right) \operatorname{sgn} N(0)(-1)^q + \sum_{j=1}^{q} (-1)^{j-1} \operatorname{sgn} N(\rho_j) = 0 \quad (\alpha n > 1)$$

v) $\forall y \in \boldsymbol{R}$ 에 대하여 다음의 복소함수행렬의 모든 고유값이 부의 실수부를 가진다.

$$G(y) = [A + B - (iy)^{\alpha} I]^{-1} B - I/2$$

정리 2, 3으로부터 조건 iv)에서 다음의 식들이 성립됨을 증명하면 된다.

$$k=\frac{\alpha}{2}n+\frac{\alpha}{2}n\,\mathrm{sgn}\,N(0)(-1)^q+\sum_{j=1}^{q}(-1)^{j-1}\mathrm{sgn}\,N(\rho_j)=0\quad(\alpha n\le 1)$$

$$k=\frac{\alpha}{2}n+\left(1-\frac{\alpha}{2}n\right)\mathrm{sgn}\,M(0)(-1)^q+\sum_{j=1}^{q}(-1)^{j-1}\mathrm{sgn}\,N(\rho_j)=0\quad(\alpha n>1)$$

정리 4의 증명은 다음의 보조정리들로부터 곧 나온다.

보조정리 1 $M(r)+iN(r)=A(r)e^{i\phi(r)}$ 이라고 하자. 여기서 $A(r)>0$ 이고 $\Delta\phi(r)$ 는 r 가 $+\infty$ 부터 0 까지 변할 때 $\phi(r)$ 의 편각변화를 표시한다.

이때 $k=\alpha n/2+\Delta\phi(r)/\pi$ 이다.

다음의 보조정리에서는 $\Delta\phi(r)$ 의 계산과정을 보여준다.

보조정리 2 $\rho_j\ (j=1,2,\cdots,q)$ 를 중복도까지 고려한 $M(r)=0$ 의 정의뿌리라고 하면

$$\frac{\Delta\phi(r)}{\pi}=\begin{cases}\dfrac{\alpha}{2}n(-1)^q\,\mathrm{sgn}\,N(0)+\displaystyle\sum_{j=1}^{q}(-1)^{j-1}\mathrm{sgn}\,N(\rho_j), & \alpha n\le 1\\ \left(1-\dfrac{\alpha}{2}n\right)(-1)^q\,\mathrm{sgn}\,N(0)+\displaystyle\sum_{j=1}^{q}(-1)^{j-1}\mathrm{sgn}\,N(\rho_j), & \alpha n>1\end{cases}.$$

보조정리 2는 곡선 $\{M(r)+iN(r);r\ge 0\}$ 이 허축을 지나는 여러가지 경우에 대해 편각의 변화를 론의함으로써 증명할수 있다.

2. 수값실례

다음과 같은 분수계지연미분방정식이 주어졌다고 하자.

$$D^{\alpha}\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t-\tau)\\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\tag{8}$$

그러면 $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -3 & 1\end{pmatrix}$ 로 된다.

따라서 행렬 C 의 특성다항식은 $\Delta_2(\lambda)=\lambda^2-2\lambda+10$ 이다.

$\alpha=0.3$ 인 경우를 보자.

이때 $M(r)=r^2-1.728\ 822r+5.882,\ N(r)=0.907\ 6r-8.087$ 이다.

$M(r)$ 는 정수뿌리를 가지지 않으며 공액인 복소수뿌리쌍을 가진다.

$$k=\alpha n(-1)^0/2+\alpha n\,\mathrm{sgn}\,N(0)(-1)^0/2=\alpha n/2+\alpha n(-1)/2=0$$

따라서 방정식 (8)은 조건 iv)를 만족시킨다.

조건 v)에 대하여 보자.

정리 2로부터 조건 v)는 다음의 복소함수행렬의 모든 고유값들이 부의 실수부를 가진다는것과 동등하다는것을 쉽게 따져볼수 있다.

$$G(y)=[A+B-(iy)^{\alpha}I]^{-1}B-\frac{1}{2}I=\begin{pmatrix}1-(iy)^{\alpha} & 3\\ -3 & 1-(iy)^{\alpha}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}I$$

$(iy)^{\alpha}=s$ 라고 놓으면 고유값 $\lambda[G(y)]$는 다음과 같다.

$$\lambda[G(y)]=(-s^{3/5}+s^{3/10}+(89-10s^{3/10}-7s^{3/5})^{1/2}+3)/(2s^{3/5}-4s^{3/10}+20),$$
$$-(s^{3/5}-s^{3/10}+(89-10s^{3/10}-7s^{3/5})^{1/2}-3)/(2s^{3/5}-4s^{3/10}+20)$$

$\forall y\in R,\ \lambda[G(y)]<0$ 을 만족시켜야 하는데 $y=0$ 일 때 $\lambda[G(y)]=0.621\ 6,\ -0.321\ 7$ 이므로 조건 v)를 만족시키지 않는다.

따라서 분수계지연미분방정식 (8)의 령풀이는 불안정하다.

실례에서 알수 있는바와 같이 조건 iv)를 만족시킨다고 하여도 조건 v)를 만족시키지 않는 경우가 있으며 이때 령풀이는 불안정하다.

참고문헌

[1] 김철 등; 수학, 2, 16, 주체104(2015).

[2] W. Deng et al.; Nonlinear Dyn., 48, 409, 2007.

[3] F. M. Bayat; arXiv: 1302.0505v1. 2013.

[4] Min Shi et al.; Automatica, 47, 2001, 2011.

[5] M. A. E. Ahmed; Electronic J. of Differential Equations, 29, 1, 2010.

[6] R. Caponetto et al.; Modeling and Control Applications, World Scientific, 45～67, 2010.

주체104(2015)년 2월 5일 원고접수

A Method for Testing Stability of Equilibrium of Fractional Differential Equation

Kim Chol, Ri Yong Do

We study the sufficient condition testing asymptotic stability of zero solution of linear fractional delay differential equation by not using Laplace transformation and get the analytical formula for it. And we test the effectiveness with numerical example.

Key word: fractional differential equation