김일성종합대학학보 (자연과학)
주체106(2017)년 제63권 제10호

JOURNAL OF KIM IL SUNG UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE)
Vol. 63 No. 10 JUCHE106(2017).

한가지 일반계수의 비선형다항분수계미분방정식의 적분경계값문제에 대한 풀이의 존재조건

최희철, 박순애

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《현시대는 과학기술의 시대이며 과학기술의 발전수준은 나라의 종합적국력과 지위를 규정하는 징표로 됩니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 38페지)

많은 물리적계들은 개체군력학계, 피흐름모형들, 화학공학과 세포체계들과 같은 여러가지 응용들에서 나타나는 적분경계조건들에 의하여 보다 더 잘 설명될수 있다.

선행연구[1]에서는 순서바나흐공간에서 샤우데르부동점정리와 바나흐부동점정리를 리용하여 적분경계값문제의 풀이의 유일존재성을, 선행연구[2]에서는 분수계적분경계조건을 가지는 경계값문제의 풀이의 존재성을, 선행연구[3]에서는 적분경계조건을 가지는 비선형분수계적분－미분방정식에 대한 경계값문제의 풀이의 유일존재성을, 선행연구[4]에서는 비국부적분경계조건을 가지는 분수계련립미분방정식의 풀이의 존재성을, 선행연구[5]에서는 적분경계조건을 가지는 분수계미분방정식의 풀이의 유일존재성을 론의하였다.

선행연구[6－8]에서는 여러가지 형태의 적분경계조건을 가지는 단항분수계미분방정식들에 대한 풀이의 유일존재성을 고찰하였다.

론문에서는 선행연구들[1－8]에서 도함수의 계수에 준 제한조건을 $0<\sigma<2$로 확장하고 경계조건을 보다 일반적인 경계조건으로 바꾼 다항비선형분수계미분방정식에 대한 적분경계값문제의 풀이의 유일존재조건에 대하여 론의한다.

론문에서 고찰하는 적분경계값문제는

$$^{c}D_{0+}^{q}u(t) = f(t,\ u(t),\ ^{c}D_{0+}^{\sigma}u(t)),\quad t\in[0,\ 1], \tag{1}$$

$$\alpha_1 u(0)+\beta_1 u(1)+\gamma_1 u'(0)+\delta_1 u'(1)=\int_0^1 g(s,\ u)ds, \tag{2}$$

$$\alpha_2 u(0)+\beta_2 u(1)+\gamma_2 u'(0)+\delta_2 u'(1)=\int_0^1 h(s,\ u)ds \tag{3}$$

와 같다. 여기서 $0<\sigma<q\le 2$, $\begin{vmatrix}\alpha_1+\beta_1 & \beta_1+\gamma_1+\delta_1\\ \alpha_2+\beta_2 & \beta_2+\gamma_2+\delta_2\end{vmatrix}=:p\neq 0$이다.

주의 1 선행연구[1]에서는 $\alpha,\ \delta>0,\ \beta,\ \gamma\ge 0$ 혹은 $\alpha,\ \delta\ge 0,\ \beta,\ \gamma>0$임을 가정하였다. 그러므로 $u(0)=\int_0^1 g(s,\ u)ds,\quad u(1)=\int_0^1 h(s,\ u)ds$인 경우를 배제하고있다. 그러나 우리의 경우는 이 경우까지도 포괄한다. 사실 $\alpha_1=1,\ \ \gamma_1=\delta=\beta_1=0,\ \gamma_2=\delta_2=\alpha_2=0,\ \ \beta_2=1$일 때 $\begin{vmatrix}\alpha_1 & 0\\ \beta_2 & \beta_2\end{vmatrix}=1\neq 0$이다.

주의 2 경계조건 (2)는 선행연구[1－8]의 경계조건들을 특수경우로 포함한다.

일반성을 잃지 않고 $1<\sigma<q<2$ 라고 가정하자.

보조정리 1 [10] $\alpha>0$ 이고 $f(x)\in L_p(a,\ b)$ $(1\le p\le\infty)$ 이면 같기식 $(D_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\alpha}f)(x)=f(x)$ 가 $[a,\ b]$ 의 거의 도처에서 성립된다.

보조정리 2 [10] $\alpha>0,\quad f\in I_{a+}^{\alpha}(L_p)$ $(1\le p\le\infty)$ 이면 $(I_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha})f(x)=f(x)$ 가 성립된다.

보조정리 3 [9] $\alpha>0$ 이고 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 가 $[a,\ b]$ 에서 평등수렴하는 련속함수렬이라고 하면 분수계적분연산자와 극한과정을 서로 바꿀수 있다. 즉 $(I_a^{\alpha}\lim\limits_{k\to\infty}f_k)(x)=(\lim\limits_{k\to\infty}I_a^{\alpha}f_k)(x)$.

특히 함수렬 $\{I_a^{\alpha}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 는 평등수렴한다.

다음의 표시약속을 하자.

$$W^{\sigma}[0,\ 1]:=\left\{u\ \middle|\ u\in C^{n-1}[0,\ 1],\ {}^{c}D_{0+}^{\sigma}u\in C[0,\ 1],\ u(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{u^{(k)}(0)}{k!}x^k\in I_{0+}^{\sigma}(C[0,\ 1]),\ n-1<\sigma\le n\right\}\tag{4}$$

함수공간 $W^{\sigma}[0,\ 1]$ 에서의 노름은 다음과 같이 정의한다.

$$\forall u\in W^{\sigma}[0,\ 1],\ \ \|u\|_{W^{\sigma}[0,\ 1]}:=\sum_{k=0}^{n-1}\|u^{(k)}\|_{C[0,\ 1]}+\|{}^{c}D_{0+}^{\sigma}u\|_{C[0,\ 1]}\tag{5}$$

정리 1 공간 $(W^{\sigma}[0,\ 1],\ \|\cdot\|_{W^{\sigma}[0,\ 1]})$ 은 바나흐공간이다.

증명 $\sigma\in\boldsymbol{N}$ 인 경우는 $W^{\sigma}[0,\ 1]=C^{\sigma}[0,\ 1]$ 로 되므로 $\sigma\notin\boldsymbol{N}$ 인 경우만을 증명한다.

먼저 식 (4)에서 $n=1$ 즉 $0<\sigma<1$ 일 때 증명하자.

이때 함수공간 $W^{\sigma}[0,\ 1]\ (0<\sigma<1)$ 은

$$W^{\sigma}[0,\ 1]:=\{u\,|\,u\in C^{0}[0,\ 1]=C[0,\ 1],\ \ {}^{c}D_{0+}^{\sigma}u\in C[0,\ 1],\ u(x)-u(0)\in I_{0+}^{\sigma}(C[0,\ 1]),\ 0<\sigma<1\}$$

로 되며 이 공간에서의 노름은 식 (5)에 의하여 $\|u\|_{W^{\sigma}[0,\ 1]}=\|u\|_{C[0,\ 1]}+\|{}^{c}D_{0+}^{\sigma}u\|_{C[0,\ 1]}$ 이다.

이제 $(W^{\sigma}[0,\ 1],\ \|\cdot\|_{W^{\sigma}[0,\ 1]})$ $(0<\sigma<1)$ 의 완비성을 증명하자.

$\{u_n\}$ 이 함수공간 $W^{\sigma}[0,\ 1]$ $(0<\sigma<1)$ 의 기본렬이라고 하자.

노름의 정의로부터 $\{u_n\}$ 은 $C[0,\ 1]$ 의 기본렬이고 $\{{}^{c}D_{0+}^{\sigma}u_n\}$ 역시 $C[0,\ 1]$ 의 기본렬이다. 따라서 $C[0,\ 1]$ 의 완비성으로부터

$\exists u_*\in C[0,\ 1];\ u_n\xrightarrow{C[0,\ 1]}u_*\ (n\to\infty)$, $\exists v_*\in C[0,\ 1];\ \ {}^{c}D_{0+}^{\sigma}u_n\xrightarrow{C[0,\ 1]}v_*\ (n\to\infty)$.

이제 $u_*\in W^{\sigma}[0,\ 1]\ (0<\sigma<1)$ 임을 보자.

$\{{}^{c}D_{0+}^{\sigma}u_n\}$ 이 $C[0,\ 1]$ 에서 v_* 로 평등수렴하므로 보조정리 3에 의하여 $\{I_{0+}^{\sigma}\,{}^{c}D_{0+}^{\sigma}u_n\}$ 은 $C[0,\ 1]$ 에서 $I_{0+}^{\sigma}v_*$ 에로 평등수렴한다. 그런데 $I_{0+}^{\sigma}\,{}^{c}D_{0+}^{\sigma}u_n=I_{0+}^{\sigma}D_{0+}^{\sigma}[u_n(x)-u_n(0)]$ 이고 $u_n\in W^{\sigma}[0,\ 1]$ 이므로 $u_n(x)-u(0)\in I_{0+}^{\sigma}(C[0,\ 1])$ 이 성립된다.

보조정리 2에 의하여 $I_{0+}^{\sigma}\,{}^{c}D_{0+}^{\sigma}u_n=u_n(x)-u_n(0)$ 이며 $u_n(x)-u_n(0)$ 은 $I_{0+}^{\sigma}v_*$ 에로 평등수렴한다. 따라서 $u_*(x)-u_*(0)=I_{0+}^{\sigma}v_*$ 이며 $v_*\in C[0,\ 1]$ 이므로 $u_*(x)-u_*(0)\in I_{0+}^{\sigma}(C[0,\ 1])$ 이다.

한편 $u_*(x)-u_*(0)=I_{0+}^{\sigma}v_*$ 로부터 $D_{0+}^{\sigma}[u_*(x)-u_*(0)]$ 이 존재하고 보조정리 1로부터

$${}^{c}D_{0+}^{\sigma}u_*(x)=D_{0+}^{\sigma}[u_*(x)-u_*(0)]=D_{0+}^{\sigma}I_{0+}^{\sigma}v_*=v_*$$

이 성립된다. 즉 ${}^{c}D_{0+}^{\sigma}u_*\in C[0,\ 1]$ 이며 $\|u_n-u_*\|_{W^{\sigma}[0,\ 1]}\to 0\ (n\to\infty)$ 이 성립된다.

따라서 함수공간 $(W^{\sigma}[0,\ 1], \|\cdot\|_{W^{\sigma}[0,\ 1]})$ $(0<\sigma<1)$ 은 바나흐공간이다.

다음으로 식 (4)에서 $n=2$ 즉 $1<\sigma<2$ 일 때 증명하자.

이때 함수공간 $W^{\sigma}[0,\ 1]$ 은

$W^{\sigma}[0,\ 1]:=\{u \mid u\in C^1[0,\ 1],\ {}^cD_{0+}^{\sigma}u\in C[0,\ 1],\ u(x)-u(0)-u'(0)x\in I_{0+}^{\sigma}(C[0,\ 1]),\ 1<\delta<2\}$
로 되며 이 공간에서의 노름은 식 (5)에 의하여 다음의 식이 성립된다.

$$\|u\|_{W^{\sigma}[0,\ 1]}=\|u\|_{C[0,\ 1]}+\|u'\|_{C[0,\ 1]}+\|{}^cD_{0+}^{\sigma}u\|_{C[0,\ 1]}$$

이제 $(W^{\sigma}[0,\ 1], \|\cdot\|_{W^{\sigma}[0,\ 1]})$ $(1<\sigma<2)$ 의 완비성을 증명하자.

$\{u_n\}$ 이 $W^{\sigma}[0,\ 1]$ $(1<\sigma<2)$ 의 기본렬이라고 하면

$$\exists u_*\in C[0,\ 1];\ u_n\Rightarrow u_*,\ \exists \upsilon_*\in C[0,\ 1];\ u_n'\Rightarrow \upsilon_*,\ \exists w_*\in C[0,\ 1];\ {}^cD_{0+}^{\sigma}u_n\Rightarrow w_*.$$

이제 $u_*\in W^{\sigma}[0,\ 1]$ $(1<\sigma<2)$ 임을 보자.

u_n' 는 υ_* 에로 평등수렴하므로 $\int_0^x u_n'(t)dt$ 는 $\int_0^x \upsilon_*(t)dt$ 에로 평등수렴한다.

따라서 $u_*(x)-u_*(0)=\int_0^x \upsilon_*(t)dt$ 가 성립된다.

$\upsilon_*\in C[0,\ 1]$ 임을 고려하면 $u_*\in C^1[0,\ 1],\ u_*'(x)=\upsilon_*(x)$ 이다.

한편 $\{{}^cD_{0+}^{\sigma}u_n\}$ 이 w_* 에로 평등수렴하므로 $\{I_{0+}^{\sigma}\,{}^cD_{0+}^{\sigma}u_n\}$ 은 $I_{0+}^{\sigma}w_*$ 에로 평등수렴한다.

그런데 $I_{0+}^{\sigma}\,{}^cD_{0+}^{\sigma}u_n=I_{0+}^{\sigma}D_{0+}^{\sigma}[u_n(x)-u_n(0)-u_n'(0)]$ 이고 $u_n\in W^{\sigma}[0,\ 1]$ 이므로

$$u_n(x)-u_n(0)-u_n'(0)x\in I_{0+}^{\sigma}(C[0,\ 1])$$

임을 고려하면 $I_{0+}^{\sigma}\,{}^cD_{0+}^{\sigma}u_n=u_n(x)-u_n(0)-u_n'(0)x$ 는

$$u_*(x)-u_*(0)-\upsilon_*(0)x=u_*(x)-u_*(0)-u_*'(0)x$$

로 평등수렴한다. 따라서 $u_*(x)-u_*(0)-u_*'(0)x=I_{0+}^{\sigma}w_*$ 이 성립된다.

한편 ${}^cD_{0+}^{\sigma}u_*(x)=D_{0+}^{\sigma}[u_*(x)-u_*(0)-u_*'(0)x]=D_{0+}^{\sigma}I_{0+}^{\sigma}w_*=w_*$ 이므로 ${}^cD_{0+}^{\sigma}u_*(x)\in C[0,\ 1]$ 이며 $u_*\in W^{\sigma}[0,\ 1]$ 이고 $\|u_n-u_*\|_{W^{\sigma}[0,\ 1]}\to 0$ $(n\to\infty)$ 이다.

이리하여 $(W^{\sigma}[0,\ 1], \|\cdot\|_{W^{\sigma}})$ $(1<\sigma<2)$ 은 바나흐공간이라는것이 증명된다.(증명끝)

귀납적방법으로 임의의 $n\in \boldsymbol{N}$ 에 대하여 $n-1<\sigma<n$ 일 때 함수공간 $(W^{\sigma}[0,\ 1], \|\cdot\|_{W^{\sigma}})$ 이 바나흐공간이라는것을 증명할수 있다.

보조정리 4 $1<q\le 2,\ y,\ \phi,\ \psi\in C[0,\ 1]$ 이라고 하면 적분경계값문제

$$ {}^cD_{0+}^{q}u(t)=y(t),\ \ t\in[0,\ 1], \tag{6}$$

$$\alpha_1\, u(0)+\beta_1\, u(1)+\gamma_1\, u'(0)+\delta_1\, u'(1)=\int_0^1 \varphi(s)ds, \tag{7}$$

$$\alpha_2\, u(0)+\beta_2\, u(1)+\gamma_2\, u'(0)+\delta_2\, u'(1)=\int_0^1 \psi(s)ds \tag{8}$$

의 풀이 $u\in W^{\sigma}[0,\ 1]$ $(1<\sigma<2)$ 은 다음과 같이 표시된다.

$$u(t)=I_0^q y(t)+\frac{\beta\beta_2-\delta\beta_1+t\gamma\beta_1-t\alpha\beta_2}{p}\cdot I_0^q y(t)\Big|_{t=1}+\frac{\beta\delta_2-\delta\delta_1+t\gamma\delta_1-t\alpha\delta_2}{p}\cdot I_0^{q-1}y(t)\Big|_{t=1}+A(t)$$

$$A(t)=\frac{\delta-t\gamma}{p}\int_0^1\varphi(s)ds-\frac{\beta-t\alpha}{p}\int_0^1\psi(s)ds,\ \alpha=\alpha_1+\beta_1,\ \beta=\beta_1+\gamma_1+\delta_1,\ \gamma=\alpha_2+\beta_2,\ \delta=\beta_2+\gamma_2+\delta_2$$

정리 2 $f\in C([0,\ 1]\times\boldsymbol{R}^2)$ 라고 할 때 $u\in W^{\sigma}[0,\ 1]\ (1<\sigma<2)$ 이 문제 (1)－(3)의 풀이이기 위해서는 u 가 다음의 적분미분방정식의 풀이일것이 필요하고 충분하다.

$$u(t)=I_0^q f(t,\ u(t),\ {}^cD_{0+}^{\sigma}u(t))+\frac{\beta\beta_2-\delta\beta_1+t\gamma\beta_1-t\alpha\beta_2}{p}I_0^q f(t,\ u(t),\ {}^cD_{0+}^{\sigma}u(t))|_{t=1}+$$
$$+\frac{\beta\delta_2-\delta\delta_1+t\gamma\delta_1-t\alpha\delta_2}{p}I_0^{q-1}f(t,\ u(t),\ {}^cD_{0+}^{\sigma}u(t))|_{t=1}+\frac{\delta-t\gamma}{p}\int_0^1 g(s,\ u)ds-\frac{\beta-t\alpha}{p}\int_0^1 h(s,\ u)ds \tag{9}$$

바나흐축소원리를 리용하여 풀이의 유일존재성을 론의하자.

가정 1 $\exists k_0>0:\forall t,\ \forall(u,\ v),\ (\bar{u},\ \bar{v})\in\boldsymbol{R}^2,\ |f(t,\ u,\ v)-f(t,\ \bar{u},\ \bar{v})|\le k_0(|u-\bar{u}|+|v-\bar{v}|)$

가정 2 $\exists k_1>0:\forall t,\ \ \forall u,\ \bar{u}\in\boldsymbol{R},\ |g(t,\ u)-g(t,\ \bar{u})|\le k_1|u-\bar{u}|$

가정 3 $\exists k_2>0:\forall t,\ \ \forall u,\ \bar{u}\in\boldsymbol{R},\ |h(t,\ u)-h(t,\ \bar{u})|\le k_2|u-\bar{u}|$

다음의 표시를 받아들이자.

$$d_1(t)=\frac{\beta\beta_2-\delta\beta_1+t\gamma\beta_1-t\alpha\beta_2}{p},\ d_2(t)=\frac{\beta\delta_2-\delta\delta_1+t\gamma\delta_1-t\alpha\delta_2}{p},\ d_3(t)=\frac{\delta-t\gamma}{p},\ d_4(t)=-\frac{\beta-t\alpha}{p}$$

이때 식 (9)는 다음과 같이 쓸수 있다.

$$(Tu)(t)=I_0^q f(t,\ u(t),\ {}^cD_{0+}^{\sigma}u(t))+d_1(t)I_0^q f(t,\ u(t),\ {}^cD_{0+}^{\sigma}u(t))|_{t=1}+$$
$$+d_2(t)I_0^{q-1}f(t,\ u(t),\ {}^cD_{0+}^{\sigma}u(t))|_{t=1}+d_3(t)\int_0^1 g(s,\ u)ds+d_4(t)\int_0^1 h(s,\ u)ds \tag{10}$$

이제 $u,\ \bar{u}\in W^{\sigma}[0,\ 1]\ (1<\sigma<2)$ 에 대하여 다음과 같다고 하자.

$$\hat{d}_1:=\max_i\max_t|d_i(t)|,\ \hat{d}_2:=\max_i\max_t|d_i'(t)|,\ \hat{d}_3:=\max_i\max_t|{}^cD_{0+}^{\sigma}d_i(t)|,\quad i=1,\cdots,\ 4$$
$$\omega_i:=\max\{((1+\hat{d}_{i+1})/\Gamma(q+1)+\hat{d}_{i+1}/\Gamma(q))k_0,\quad(\hat{d}_{i+1}\cdot k_1+\hat{d}_{i+1}\cdot k_2)\},\ i=0,1,\ 2$$

정리 3 $\omega_0+\omega_1+\omega_2<1$ 이면 문제 (1)－(3)의 풀이는 $W^{\sigma}[0,\ 1]\ (1<\sigma<2)$ 에서 유일존재한다.

증명 바나흐부동점정리를 리용하기 위하여 식 (10)에 의해 정의되는 T 에 대하여 $u(t)\in W^{\sigma}[0,\ 1]\ (1<\sigma<2)$ 이면 $(Tu)(t)\in W^{\sigma}[0,\ 1]$ 이다.

$\forall u,\ \bar{u}\in W^{\sigma}[0,\ 1]\ (1<\sigma<2)$ 에 대하여 다음의 식이 성립된다는것을 증명하자.

$$\|T(u)-T(\bar{u})\|_{W_2}\le(\omega_0+\omega_1+\omega_2)\|u-\bar{u}\|_{W^{\sigma}[0,\ 1]}$$

먼저 $u(t)\in W^{\sigma}[0,\ 1]\ (1<\sigma<2)$ 이면 $(Tu)(t)\in W^{\sigma}[0,\ 1]$ 임을 증명하자.

식 (10)에서 둘째, 셋째, 넷째 항들이 1차식이므로 $(Tu)(t)$ 는 다음과 같이 쓸수 있다.

$$(Tu)(t)=I_0^q f(t,\ u(t),\ {}^cD_{0+}^{\sigma}u(t))+(At+B) \tag{11}$$

$(Tu)(t)\in W^{\sigma}[0,\ 1]\ (1<\sigma<2)$ 임을 말하자면 다음의 식이 성립된다는것을 증명하면 된다.

$$(Tu)(t)\in C^1[0,\ 1],\ {}^cD_{0+}^{\sigma}(Tu)(t)\in C[0,\ 1],\ (Tu)(t)-(Tu)(0)-(Tu)'(0)t\in I^{\sigma}(C[0,\ 1])$$

식 (11)로부터 $q-1>0$ 이므로 $(Tu)'(t)=(I_0^{q-1}f(t,\ u(t),\ {}^cD_{0+}^{\sigma}u(t))+A)\in C[0,\ 1]$ 이 나오며 따라서 $(Tu)(t)\in C^1[0,\ 1]$ 이 성립된다.

한편 캐푸터분수계도함수의 정의와 성질, $1<\sigma<q<2$ 임을 고려하면

${}^cD_{0+}^{\sigma}(Tu)(t)={}^cD_{0+}^{\sigma}I_0^q f(t,\ u(t),\ {}^cD_{0+}^{\sigma}u(t))+{}^cD_{0+}^{\sigma}(At+B)=I_0^{q-\sigma}f(t,\ u(t),\ {}^cD_{0+}^{\sigma}u(t))\in C[0,\ 1]$.

다음으로 $(Tu)(t)-(Tu)(0)-(Tu)'(0)t\in I^{\sigma}(C[0,\ 1])$ 임을 증명하자.

이것은 $(Tu)(t)-(Tu)(0)-(Tu)'(0)\,t=I_0^q f(t,\ u(t),\ {}^cD_{0+}^{\sigma}u(t))$ 이므로

$$I_0^q f(t,\ u(t),\ {}^cD_{0+}^{\sigma}u(t))=I_0^{\sigma}\varphi(t) \tag{12}$$

로 되는 $\varphi(t)\in C[0,\ 1]$의 존재성을 증명하면 된다.

$1<\sigma<q<2$ 이므로 분수적분의 반군적성질을 리용하면 다음과 같다.

$$I_0^q f(t,\ u(t),\ {}^cD_{0+}^{\sigma}u(t))=I_0^{\sigma}I_0^{q-\sigma}f(t,\ u(t),\ {}^cD_{0+}^{\sigma}u(t))$$

$q-\sigma>0$ 이므로 $I_0^{q-\sigma}f(t,\ u(t),\ {}^cD_{0+}^{\sigma}u(t))\in C[0,\ 1]$ 이며 $\varphi(t):=I_0^{q-\sigma}f(t,\ u(t),\ {}^cD_{0+}^{\sigma}u(t))$ 로 놓으면 식 (12)가 성립되는 $\varphi(t)\in C[0,\ 1]$이 존재한다.

이리하여 $(Tu)(t)-(Tu)(0)-(Tu)'(0)\,t\in I^{\sigma}(C[0,\ 1])$이 나온다.

다음으로 $\forall u,\ \bar{u}\in W^{\sigma}[0,\ 1]\,(1<\sigma<2)$ 에 대하여 다음의 식이 성립된다는것을 증명하자.

$$\|T(u)-T(\bar{u})\|_{W^{\sigma}[0,\ 1]}\le(\omega_0+\omega_1+\omega_2)\|u-\bar{u}\|_{W^{\sigma}[0,\ 1]}$$

임의의 $u,\ \bar{u}\in W^{\sigma}[0,\ 1]\,(1<\sigma<2)$ 에 대하여

$$|(Tu)(t)-(T\bar{u})(t)|\le k_0(\|u-\bar{u}\|_{\infty}+\|{}^cD_{0+}^{\sigma}u-{}^cD_{0+}^{\sigma}\bar{u}\|_{\infty})\cdot$$
$$\cdot(I_0^q1+\hat{d}_1\cdot I_0^q1|_{t=1}+\hat{d}_1\cdot I_0^{q-1}1|_{t=1})+(\hat{d}_1\cdot k_1+\hat{d}_1\cdot k_2)\|u-\bar{u}\|_{\infty}$$

이 성립되며 $I_0^q1+\hat{d}_1\cdot I_0^q1|_{t=1}+\hat{d}_1\cdot I_0^{q-1}1|_{t=1}\le(1+\hat{d}_1)/\Gamma(q+1)+\hat{d}_1/\Gamma(q)$ 이므로

$$|(Tu)(t)-(T\bar{u})(t)|\le((1+\hat{d}_1)/\Gamma(q+1)+\hat{d}_1/\Gamma(q))k_0\|u-\bar{u}\|_{W^{\sigma}[0,\ 1]}+$$
$$+(\hat{d}_1\cdot k_1+\hat{d}_1\cdot k_2)\|u-\bar{u}\|_{W^{\sigma}[0,\ 1]}\le\omega_0\|u-\bar{u}\|_{W^{\sigma}[0,\ 1]}$$

이 나온다. 따라서 $\|T(u)-T(\bar{u})\|_{\infty}\le\omega_0\|u-\bar{u}\|_{W^{\sigma}[0,\ 1]}$이 성립된다.

한편

$$(T'u)(t)=I_0^{q-1}f(t,\ u(t),\ {}^cD_{0+}^{\sigma}u(t))+d_1'(t)\,I_0^q f(t,\ u(t),\ {}^cD_{0+}^{\sigma}u(t))|_{t=1}+$$
$$+d_2'(t)\,I_0^{q-1}f(t,\ u(t),\ {}^cD_{0+}^{\sigma}u(t))|_{t=1}+d_3'(t)\int_0^1 g(s,\ u)ds+d_4'(t)\int_0^1 h(s,\ u)ds$$

이므로

$$|(T'u)(t)-(T'\bar{u})(t)|\le k_0(\|u-\bar{u}\|_{\infty}+\|{}^cD_{0+}^{\sigma}u-{}^cD_{0+}^{\sigma}\bar{u}\|_{\infty})\cdot$$
$$\cdot(I_0^{q-1}1+\hat{d}_2\cdot I_0^q1|_{t=1}+\hat{d}_2\cdot I_0^{q-1}1|_{t=1})+(\hat{d}_2\cdot k_1+\hat{d}_2\cdot k_2)\|u-\bar{u}\|_{\infty}$$

이 성립되며 따라서 $|(T'u)(t)-(T'\bar{u})(t)|\le\omega_1\|u-\bar{u}\|_{W^{\sigma}[0,\ 1]}$이 성립된다. 또한

$$|{}^cD_{0+}^{\sigma}(Tu)(t)-{}^cD_{0+}^{\sigma}(T\bar{u})(t)|\le k_0(\|u-\bar{u}\|_{\infty}+\|{}^cD_{0+}^{\sigma}u-{}^cD_{0+}^{\sigma}\bar{u}\|_{\infty})\cdot$$
$$\cdot(I_0^{q-\sigma}1+\hat{d}_3\cdot I_0^q1|_{t=1}+\hat{d}_3\cdot I_0^{q-1}1|_{t=1})+(\hat{d}_3\cdot k_1+\hat{d}_3\cdot k_2)\|u-\bar{u}\|_{\infty}$$

이 성립되므로 $|{}^cD_{0+}^{\sigma}(Tu)(t)-{}^cD_{0+}^{\sigma}(T\bar{u})(t)|\le\omega_2\|u-\bar{u}\|_{W^{\sigma}[0,\ 1]}$이고

$$\|{}^cD_{0+}^{\sigma}(Tu)(t)-{}^cD_{0+}^{\sigma}(T\bar{u})(t)\|_{\infty}\le\omega_2\|u-\bar{u}\|_{W^{\sigma}[0,\ 1]}$$

이 나온다. 즉 $\|T(u)-T(\bar{u})\|_{W^{\sigma}[0,\ 1]}\le(\omega_0+\omega_1+\omega_2)\|u-\bar{u}\|_{W^{\sigma}[0,\ 1]}$이며 $\omega_0+\omega_1+\omega_2<1$ 이므로 바나흐부동점정리에 의하여 문제 (1)−(3)의 풀이는 $W^{\sigma}[0,\ 1]$에서 유일존재한다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] R. A. Khan et al.; Fractional Differential Calculus, 1, 1, 29, 2011.

[2] R. Khaldi et al.; Nonlinear Anal., 75, 2692, 2012.

[3] B. Ahmad et al.; Article ID 708576, 11, 2009.

[4] C. Zhu et al.; Taiwanese J. Math., 17, 6, 2039, 2013.

[5] X. Liu et al.; Electron. J. Qual. Theory of Differ. Equ., 69, 1, 2009.

[6] B. Ahmad et al.; Article ID 708576, 11, 2009.

[7] M. Benchohra et al.; Bull. Math. Anal. Appl., 2, 4, 7, 2010.

[8] B. Ahmad et al.; Acta Math. Scientia, B 31, 6, 2122, 2011.

[9] K. Diethelm; The Analysis of Fractional Differential Equations, Springer, 50～150, 2010.

[10] A. A. Kilbas et al.; Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, 20～70, 2006.

주체106(2017)년 6월 5일 원고접수

Existence Conditions of Solutions for a Nonlinear Multi-Term Fractional Differential Equations with Integral Boundary Conditions of a General Coefficient

Choe Hui Chol, Pak Sun Ae

We investigated the generalized integral boundary value problems for the nonlinear multi-term fractional differential equations involving the Caputo fractional derivative.

We established some sufficient conditions for existence and uniqueness of the solution and gave numerical examples which demonstrated our main results.

Key words: Caputo fractional derivative, nonlinear multi-term fractional differential equation, integral boundary value problem