김일성종합대학학보 주체107(2018)년
수 학 제64권 제3호

미분연산자에 의하여 정의되는 해석함수들의 한가지 부분족에서의 종속성질

오진철, 한예경

선행연구[1－3, 5]에서는 미분연산자 $D^n: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$ $(n \in \mathbf{N} \cup \{0\})$ 에 의하여 정의된 복소수차함수족 $G_n(\lambda,\ b)$ 와 평등별형함수족에서 종속인자의 성질을 연구하였다.

론문에서는 일반화된 미분연산자 $D_\lambda^n: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$ 에 의하여 정의된 해석함수의 부분족 $G_{n,\lambda}(\delta,\ b)$ 에서 종속인자에 대한 성질들을 고찰하였다.

단위원 $U := \{z \in \mathbf{C}: |z| < 1\}$ 에서 해석적인 함수 $f(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} a_j z^j$ 들의 모임을 $\boldsymbol{A}$ 로 표시한다. 그리고 $K := \left\{f \in \boldsymbol{A}: \mathrm{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0,\ z \in U\right\}$ 를 불룩함수족이라고 부른다.

f 와 g 는 단위원 $U := \{z \in \mathbf{C}: |z| < 1\}$ 에서 해석적이라고 하자. 이때 조건 $\omega(0) = 0,\ |\omega(z)| < 1\ (z \in U)$ 와 $f(z) = g(\omega(z))\ (z \in U)$ 를 만족시키는 $U := \{z \in \mathbf{C}: |z| < 1\}$ 에서 해석적인 함수 ω 가 있으면 함수 f 는 g 에 종속된다고 말하고 $f \prec g$ 로 쓴다. 그리고 f 가 g 에 종속될 때 g 를 f 의 우월함수라고 부른다.

선행연구[4]에서는 일반화된 미분연산자를 다음의 조건

$$\begin{aligned}
&D_\lambda^0 f(z) = f(z)\\
&D_\lambda^1 f(z) = (1-\lambda) f(z) + \lambda z f'(z)\\
&\qquad\cdots\\
&D_\lambda^n f(z) = D_\lambda(D_\lambda^{n-1} f(z))
\end{aligned}$$

를 만족시키는 선형연산자 $D_\lambda^n: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$ $(n \in \mathbf{N} \cup \{0\},\ \lambda \ge 0)$ 로 정의하고 연구하였다.

선형연산자 $D_\lambda^n: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$ 는 전개식 $D_\lambda^n f(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} (1 + (j-1)\lambda)^n a_j z^j$ 과 등식

$$z(D_\lambda^n f(z))' = \frac{1}{\lambda} D_\lambda^{n+1} f(z) - \frac{1-\lambda}{\lambda} D_\lambda^n f(z)$$

를 만족시킨다. $b \in \mathbf{C} \setminus \{0\},\ \delta \ge 0$ 이라고 하자. 이때 조건

$$\mathrm{Re}\left\{1 + \frac{1}{b}\left[(1-\delta)\frac{D_\lambda^n f(z)}{z} + \delta(D_\lambda^n f(z))' - 1\right]\right\} > 0\ \ (z \in U)$$

을 만족시키는 함수 $f \in \boldsymbol{A}$ 들의 모임을 $G_{n,\lambda}(\delta,\ b)$ 로 표시한다. 보조변수 $n,\ \lambda,\ \delta,\ b$ 에 각이한 값을 주면 이미 연구된 여러가지 해석함수의 부분족들을 얻는다. 실례로 $G_{n,1}(\delta,\ b) \equiv G_n(\delta,\ b)$ [1], $G_{0,1}(\delta,\ b) \equiv G(\delta,\ b)$, $G_{0,1}(0,\ 1-\alpha) \equiv G_\alpha$, $G_{0,1}(1,\ 1-\alpha) \equiv R_\alpha$ 이다.

$\{C_j\}_{j=1}^{\infty}$ 는 복소수렬이고 $f \in \boldsymbol{A}$ 이라고 하자. 이때 $\sum_{j=1}^{\infty} a_j c_j z^j \prec f(z)$ $(a_1 = 1,\ z \in U)$ 이면 $\{C_j\}_{j=1}^{\infty}$ 를 종속인자렬이라고 부른다.[1]

보조정리 $f \in G_{n,\lambda}(\delta,\ b)$ 이기 위해서는

$$\left| \frac{(1-\delta)\dfrac{D_\lambda^n f(z)}{z} + \delta (D_\lambda^n f(z))' - 1}{(1-\delta)\dfrac{D_\lambda^n f(z)}{z} + \delta (D_\lambda^n f(z))' - 1 + 2b} \right| < 1 \ (z \in U) \tag{1}$$

일것이 필요하고 충분하다.

정리 1 $n \in \mathbf{N} \cup \{0\},\ \lambda \ge 0,\ \delta \ge 0,\ b \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ 이라고 하자. 이때 함수 $f \in \boldsymbol{A}$ 가 조건

$$\sum_{j=2}^{\infty} [1+(j-1)\lambda]^n [1+(j-1)\delta] |a_j| \le |b| \tag{2}$$

를 만족시키면 $f \in G_{n,\lambda}(\delta,\ b)$ 이다.

증명 보조정리에 의하여 함수 $f \in \boldsymbol{A}$ 가 식 (1)을 만족시킨다는것만 말하면 된다.

$$\left| \frac{(1-\delta)\dfrac{D_\lambda^n f(z)}{z} + \delta (D_\lambda^n f(z))' - 1}{(1-\delta)\dfrac{D_\lambda^n f(z)}{z} + \delta (D_\lambda^n f(z)) - 1 + 2b} \right| =$$

$$= \left| \frac{(1-\delta)(1+\sum_{j=2}^{\infty}[1+(j-1)\lambda]^n a_j z^{j-1}) + \delta(1+\sum_{j=2}^{\infty} j[1+(j-1)\lambda]^n a_j z^{j-1}) - 1}{(1-\delta)(1+\sum_{j=2}^{\infty}[1+(j-1)\lambda]^n a_j z^{j-1}) + \delta(1+\sum_{j=2}^{\infty} j[1+(j-1)\lambda]^n a_j z^{j-1}) - 1 + 2b} \right| =$$

$$= \left| \frac{\sum_{j=2}^{\infty}[1+(j-1)\lambda]^n [1+(j-1)\delta] a_j z^{j-1}}{\sum_{j=2}^{\infty}[1+(j-1)\lambda]^n [1+(j-1)\delta] a_j z^{j-1} + 2b} \right| < \frac{\sum_{j=2}^{\infty}[1+(j-1)\lambda]^n [1+(j-1)\delta] |a_j|}{2|b| - \sum_{j=2}^{\infty}[1+(j-1)\lambda]^n [1+(j-1)\delta] |a_j|} \le 1$$

이다. 우의 부등식에서 마지막부등호는

$$\sum_{j=2}^{\infty} [1+(j-1)\lambda]^n [1+(j-1)\delta] |a_j| \le |b|$$

로부터 나오며 따라서 정리가 성립한다.(정리끝)

주의 1 정리 1에서 $\lambda = 1$ 이면 선행연구[1]의 보조정리 2와 일치한다.

정리 1의 조건 (2)를 만족시키는 함수 $f \in G_{n,\lambda}(\delta,\ b)$ 들의 모임을 $\hat{G}_{n,\lambda}(\delta,\ b)$ 로 표시한다. 특히 $\hat{G}_{n,1}(\delta,\ b) = \hat{G}_n(\delta,\ b)$ 이다.

정리 2 $f \in \hat{G}_{n,\lambda}(\delta,\ b)$ 이라고 하자. 그러면 $g \in K$ 에 대하여

$$\frac{(1+\lambda)^n(1+\delta)}{2[(1+\lambda)^n(1+\delta)+|b|]}(f*g)(z)\prec g(z)\ \ (z\in U) \tag{3}$$

이고

$$\operatorname{Re} f(z)>-\frac{(1+\lambda)^n(1+\delta)+|b|}{(1+\lambda)^n(1+\delta)}\ \ (z\in U) \tag{4}$$

가 성립한다. 그리고 종속결과 (3)에서 상수인자

$$\frac{(1+\lambda)^n(1+\delta)}{2[(1+\lambda)^n(1+\delta)+|b|]} \tag{5}$$

는 더 큰수로 바꿀수 없다.

증명 먼저 식 (3)이 성립함을 증명하자. $f\in\hat{G}_{n,\lambda}(\delta,\ b)$ 이고 $g(z)=z+\sum_{j=2}^{\infty}c_jz^j\in K$ 라고 하자. 이때

$$\frac{(1+\lambda)^n(1+\delta)}{2[(1+\lambda)^n(1+\delta)+|b|]}(f*g)(z)=\frac{(1+\lambda)^n(1+\delta)}{2[(1+\lambda)^n(1+\delta)+|b|]}\left(z+\sum_{j=2}^{\infty}a_jc_jz^j\right)$$

이다. 따라서

$$\left\{\frac{(1+\lambda)^n(1+\delta)}{2[(1+\lambda)^n(1+\delta)+|b|]}a_j\right\}_{j=1}^{\infty}\quad (a_1=1) \tag{6}$$

이 종속인자렬이면 종속인자렬의 정의에 의하여 식 (3)이 성립한다. 그런데 렬 (6)이 종속인자렬이기 위해서는

$$\operatorname{Re}\left\{1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(1+\lambda)^n(1+\delta)}{(1+\lambda)^n(1+\delta)+|b|}a_jz^j\right\}>0\ \ (z\in U)$$

이 성립할것이 필요하고 충분하다.[1] 이를 위하여 함수

$$\psi(j)=[1+(j-1)\lambda]^n[1+(j-1)\delta]$$

를 생각하면 이 함수는 j에 관한 증가함수이다.

그러므로

$$\operatorname{Re}\left\{1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(1+\lambda)^n(1+\delta)}{(1+\lambda)^n(1+\delta)+|b|}a_jz^j\right\}=$$

$$=\operatorname{Re}\left\{1+\frac{(1+\lambda)^n(1+\delta)}{(1+\lambda)^n(1+\delta)+|b|}z+\frac{1}{(1+\lambda)^n(1+\delta)+|b|}\sum_{j=1}^{\infty}(1+\lambda)^n(1+\delta)a_jz^j\right\}\geq$$

$$\geq 1-\frac{(1+\lambda)^n(1+\delta)}{(1+\lambda)^n(1+\delta)+|b|}r-\frac{1}{(1+\lambda)^n(1+\delta)+|b|}\sum_{j=1}^{\infty}[1+(j-1)\lambda]^n[1+(j-1)\delta]|a_j|r^j>$$

$$>1-\frac{(1+\lambda)^n(1+\delta)}{(1+\lambda)^n(1+\delta)+|b|}r-\frac{|b|}{(1+\lambda)^n(1+\delta)+|b|}r=1-r>0\quad (|z|=r<1)$$

이므로 렬 (6)은 종속인자렬이다. 따라서 식 (3)이 성립한다. 부등식 (4)가 성립한다는것을

증명하기 위하여 함수 $g(z)=\frac{z}{1-z}$ 를 취하면 종속결과 (3)은

$$\frac{(1+\lambda)^n(1+\delta)}{2[(1+\lambda)^n(1+\delta)+|b|]}f(z)\prec\frac{z}{1-z}\quad(z\in U)$$

로 된다. 그런데 $\mathrm{Re}\frac{z}{1-z}\ge-\frac{1}{2}$ $(z\in U)$ 이므로 미분종속의 정의에 의하여

$$\frac{(1+\lambda)^n(1+\delta)}{2[(1+\lambda)^n(1+\delta)+|b|]}\mathrm{Re}\,f(z)>-\frac{1}{2}$$

이고 따라서 식 (4)가 성립한다.

종속인자 (5)가 최량이라는것은 함수

$$f_0(z)=z-\frac{|b|}{(1+\lambda)^n(1+\delta)}z^2$$

을 생각하면 $f_0\in\hat{G}_{n,\lambda}(\delta,\ b)$ 이고

$$\min_{z\in U}\left\{\mathrm{Re}\frac{(1+\lambda)^n(1+\delta)}{2[(1+\lambda)^n(1+\delta)+|b|]}f_0(z)\right\}=-\frac{1}{2}$$

이 성립하기때문이다.(증명끝)

주의 2 정리 2에서 $\lambda=1$ 이면 선행연구[1]의 정리 1과 일치한다.

참 고 문 헌

[1] M. K. Aouf; Applied Mathematics Letters, 22, 1581, 2009.

[2] R. M. EL-ASHWAH; Acta Universitatis Apulensis, 37, 197, 2014.

[3] H. M. Srivastava et al.; Applied Mathematics Letters, 21, 394, 2008.

[4] F. M. Al-Oboudi; Ind. J. Math. Math. Sci., 25, 28, 1429, 2004.

[5] G. St. Salagean; Lecture Notes in Math., 1013, 362, 1983.

주체107(2018)년 3월 10일 원고접수

Subordinating Properties in a Subclass of Analytic Functions Defined by the Derivative Operator

O Jin Chol, Han Ye Gyong

In this paper, we obtain the properties of the subordination factor in the subclass $G_{n,\lambda}(\delta,\ b)$ of analytic functions defined by the derivative operator $D_\lambda^n:\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}$.

Key words: derivative subordination, derivative operator