김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제3호

한가지 비선형다항분수계미분방정식의 반주기경계값문제에 대한 점배치연산행렬법

최희철, 신영심

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《과학연구부문에서는 나라의 경제발전과 인민생활향상에서 전망적으로 풀어야 할 문제들과 현실에서 제기되는 과학기술적문제들을 풀고 첨단을 돌파하여 지식경제건설의 지름길을 열어놓아야 합니다.》

선행연구[1, 2]에서는 야꼬비다항식과 모자함수에 기초한 연산행렬을 얻고 선형분수계약특이적분-미분방정식을 푸는데 응용하였다. 근사풀이의 정확한 풀이에로의 수렴성을 L_2, L_∞ – 노름으로 평가하였다. 선행연구[3]에서는 평행이동2종체비쉐브다항식에 기초한 분수계적분의 연산행렬을 구하고 다항분수계미분방정식을 푸는데 응용하였다. $O(M^{-k})$ 정도의 수렴속도평가식을 얻었다. 그러나 그 수렴속도평가는 본질상 연산행렬법으로 구한 근사풀이의 수렴성평가가 아니라 근사풀이의 형태를 평행이동2종체비쉐브다항식의 유한1차결합으로 놓고 그 결합결수를 구했을 때의 수렴속도평가식이다.

론문에서는 한가지 형태의 비선형다항분수계미분방정식의 반주기경계값문제에 대한 점배치연산행렬법의 도식을 주고 이 도식으로 얻은 근사풀이가 정확한 풀이에로 평등수렴한다는것을 증명하였다.

고찰하는 문제는 다음과 같다.

$$ {}^cD_{0+}^{\alpha}u(t)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t){}^cD_{0+}^{\alpha_i}u(t)+\sum_{i=1}^{m}\mu_i(t){}^cD_{0+}^{\beta_i}u(t)+\sigma(t)u(t)=f(t,\ u(t)),\ t\in[0,\ 1] \tag{1}$$

$$\lambda_i\in C[0,\ 1]\ (i=0,\ 1,\ \cdots,\ n),\ 1<\alpha_1<\cdots<\alpha_n<\alpha\le 2$$

$$\mu_i\in C[0,\ 1]\ (i=0,\ 1,\ \cdots,\ n),\ 0<\beta_1<\cdots<\beta_m<1,\ \sigma\in C[0,\ 1]$$

$$u(1)=\mu\int_0^1 u(s)ds,\ u'(0)+u'(1)=0 \tag{2}$$

정의 ${}^cD_{0+}^{\alpha}u\in C[0,\ 1]$ 인 u 가 식 (1), (2)를 만족시킬 때 u 를 문제 (1), (2)의 풀이라고 부른다.

정리 1 $f:[0,\ T]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 는 련속이라고 하자. $u(t)$ 가 (1), (2)의 풀이이면 $y(t):={}^cD_{0+}^{\alpha}u(t)$ 로 결정되는 $y(t)$ 는 $C[0,\ 1]$ 에서 적분방정식

$$\begin{aligned} y(t)=&f\left(t,\ \int_0^1 G(t,\ s)y(s)ds\right)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t)I_{0+}^{\alpha-\alpha_i}y(t)-\sum_{i=1}^{m}\mu_i(t)I_{0+}^{\alpha-\beta_i}y(t)+\\ &+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\frac{\mu_i(t)\cdot t^{1-\beta_i}}{\Gamma(2-\beta_i)}I_{0+}^{\alpha-1}y(t)|_{t=1}-\sigma(t)\int_0^1 G(t,\ s)y(s)ds \end{aligned} \tag{3}$$

의 풀이이다.

거꾸로 $y(t)$가 적분방정식 (3)의 풀이이면 식

$$u(t)=\int_0^1 G(t,\ s)y(s)ds$$

로 결정되는 $u(t)$는 문제 (1), (2)의 풀이이다. 여기서

$$G(t,\ s)=\begin{cases}\dfrac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\dfrac{\mu}{4(1-\mu)\Gamma(\alpha+1)}[4(1-s)^{\alpha}-4\alpha(1-s)^{\alpha-1}+\alpha(\alpha-1)(1-s)^{\alpha-2}]+\\ \qquad +\dfrac{1}{2\Gamma(\alpha)}[(1-t)(\alpha-1)(1-s)^{\alpha-2}-2(1-s)^{\alpha-1}],\ 0\le s\le t\le 1\\ \dfrac{\mu}{4(1-\mu)\Gamma(\alpha+1)}[4(1-s)^{\alpha}-4\alpha(1-s)^{\alpha-1}+\alpha(\alpha-1)(1-s)^{\alpha-2}]+\\ \qquad +\dfrac{1}{2\Gamma(\alpha)}[(1-t)(\alpha-1)(1-s)^{\alpha-2}-2(1-s)^{\alpha-1}],\ 0\le t\le s\le 1\end{cases}$$

이다.

정리 2 다음의 조건들을 만족시킨다고 하자.

① 적당한 상수 $L\ge 0$이 존재하여 임의의 $t\in[0,\ 1]$ $(x_1,\ x_2\in\mathbf{R})$에 대하여 $|f(t,\ x_1)-f(t,\ x_2)|\le L|x_1-x_2|$가 성립한다.

② $q:=(L+\|\sigma\|)\cdot w_{\alpha,\,\mu}+\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\|\lambda_i\|}{\Gamma(\alpha-\alpha_i+1)}+\sum_{i=1}^{m}\left(\dfrac{1}{\Gamma(\alpha-\beta_i+1)}+\dfrac{1}{2\Gamma(2-\beta_i)\Gamma(\alpha)}\right)\|\mu_i\|<1$

$$w_{\alpha,\,\mu}:=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left(1+\left|\frac{1}{1-\mu}\right|\right)+\left|\frac{\mu}{1-\mu}\right|\cdot\frac{1}{\Gamma(\alpha+2)}+\max\left|\frac{\mu}{4(1-\mu)}+\frac{1-t}{2}\right|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}$$

그러면 문제 (1), (2)는 유일풀이를 가진다.

J를 구간 $[0,\ 1]$의 등분할구간의 개수, $h=1/J$, $t_k=k\cdot h$ $(k=0,\ 1,\ \cdots,\ J)$라고 하자. 다음의 함수[1]들을 생각하자.

$$\psi_0(t):=\begin{cases}\dfrac{h-t}{h},\ 0\le t\le t_1\\ 0,\qquad \text{기타}\end{cases}$$

$$\psi_i(t):=\begin{cases}(t-t_{i-1})/h,\ (t_{i-1}\le t\le t_i)\\ \dfrac{t_{i+1}-t}{h},\qquad (t_i\le t\le t_{i+1},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ J-1)\\ 0,\qquad \text{기타}\end{cases}$$

$$\psi_J(t):=\begin{cases}\dfrac{t-t_{J-1}}{h},\ t_{J-1}\le t\le 1\\ 0,\qquad \text{기타}\end{cases}$$

몇가지 기호약속을 하자.

$$\Psi_J(t):=(\psi_0(t),\ \psi_1(t),\ \psi_2(t),\ \cdots,\ \psi_J(t))^{\mathrm{T}}$$
$$(I_{0+}^{\alpha}\Psi_J)(t):=((I_{0+}^{\alpha}\psi_0)(t),\ (I_{0+}^{\alpha}\psi_1)(t),\ (I_{0+}^{\alpha}\psi_2)(t),\ \cdots,\ (I_{0+}^{\alpha}\psi_J)(t))^{\mathrm{T}}$$

$$P_J^\alpha := \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \begin{pmatrix} 0 & \zeta_1(\alpha) & \zeta_2(\alpha) & \zeta_3(\alpha) & \cdots & \zeta_J(\alpha) \\ 0 & 1 & \xi_1(\alpha) & \xi_2(\alpha) & \cdots & \xi_{J-1}(\alpha) \\ 0 & 0 & 1 & \xi_1(\alpha) & \cdots & \xi_{J-2}(\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & \xi_{J-3}(\alpha) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(J+1)\times(J+1)}$$

여기서

$$\zeta_k(\alpha) := k^\alpha(\alpha-k+1)+(k-1)^{\alpha+1} \ \ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ J)$$

$$\xi_k(\alpha) := (k+1)^{\alpha+1}-2k^{\alpha+1}+(k-1)^{\alpha+1} \ \ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ J-1)$$

이다.

주의 근사적으로 평가식 $(I_{0+}^\alpha \Psi_J)(t) \simeq P_J^\alpha \Psi_J(t)$ 가 성립한다. P_J^α 를 분수계적분 I_{0+}^α 의 연산행렬이라고 부른다. 임의의 행렬 A 의 $k+1$ 째 렬을 $Col_k(A)$ 로 표시하면

$$(I_{0+}^\alpha \Psi_J)(t_j) = P_J^\alpha \Psi_J(t_j) = Col_j(P_J^\alpha) \ \ (j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ J)$$

이다.

반주기경계값문제에 대한 연산행렬법의 알고리듬은 다음과 같다.

걸음 1 적분방정식 (3)의 근사풀이를 분수계적분의 연산행렬을 리용하여 푼다.

이를 위하여

① 적분방정식 (3)의 풀이형태를 $y(t) := \sum_{k=0}^{J} c_k \psi_k(t) = C_J^{\mathrm{T}} \Psi_J(t)$ 로 놓는다.

$$C_J^{\mathrm{T}} := (c_0,\ c_1,\ \cdots,\ c_J)$$

② 그러면 다음의 근사식을 얻는다.

$$\int_0^1 G(t,\ s)y(s)ds \approx C_J^{\mathrm{T}}\left(P_J^\alpha \Psi_J(t) + \left(\frac{\mu}{1-\mu} P_J^{\alpha+1} - \frac{1}{1-\mu} P_J^\alpha + \left(\frac{\mu}{4(1-\mu)} + \frac{1-t}{2} \right) P_J^{\alpha-1} \right) \Psi_J(1) \right)$$

이제 표시 $Q(t) := P_J^\alpha \Psi_J(t) + \left(\frac{\mu}{1-\mu} P_J^{\alpha+1} - \frac{1}{1-\mu} P_J^\alpha + \left(\frac{\mu}{4(1-\mu)} + \frac{1-t}{2} \right) P_J^{\alpha-1} \right) \Psi_J(1)$ 을 리용하면

$$\int_0^1 G(t,\ s)y(s)ds \approx C_J^{\mathrm{T}} Q(t)$$

이다.

③ 적분방정식 (3)의 y 에 ①의 식을 대입하고 연산행렬을 리용하여 다음의 점배치방정식을 얻는다.

$$C_J^{\mathrm{T}} \Psi_J(t_k) = f(t_k,\ C_J^{\mathrm{T}} Q(t_k)) - C_J^{\mathrm{T}} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t_k) P_J^{\alpha-\alpha_i} \right) \Psi_J(t_k) - C_J^{\mathrm{T}} \left(\sum_{i=1}^{m} \mu_i(t_k) P_J^{\alpha-\beta_i} \right) \Psi_J(t_k) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\mu_i(t_k)\cdot t_k^{1-\beta_i}}{\Gamma(2-\beta_i)} \right) C_J^{\mathrm{T}} P_J^{\alpha-1} \Psi_J(1) - \sigma(t_k) C_J^{\mathrm{T}} Q(t_k) \ \ (k=0,\ 1,\ \cdots,\ J) \qquad (4)$$

$\Psi_J(t_k) = (0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ \underset{(k+1)\text{째}}{1},\ 0,\ \cdots,\ 0)^{\mathrm{T}}$ 를 리용하면 식 (4)를 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\begin{aligned} c_k &= f(t_k,\ C_J^{\mathrm{T}} Q(t_k)) - C_J^{\mathrm{T}} \cdot Col_k\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t_k) P_J^{\alpha-\alpha_i}\right) - C_J^{\mathrm{T}} \cdot Col_k\left(\sum_{i=1}^{m} \mu_i(t_k) P_J^{\alpha-\beta_i}\right) + \\ &+ \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\mu_i(t_k)\cdot t_k^{1-\beta_i}}{\Gamma(2-\beta_i)}\right) C_J^{\mathrm{T}} \cdot Col_J(P_J^{\alpha-1}) - \sigma(t_k) C_J^{T} Q(t_k)\ \ (k=0,\ 1,\ \cdots,\ J) \end{aligned} \tag{5}$$

여기서 $Q(t_k) = Col_k(P_J^{\alpha}) + Col_J\left(\frac{\mu}{1-\mu} P_J^{\alpha+1} - \frac{1}{1-\mu} P_J^{\alpha} + \left(\frac{\mu}{4(1-\mu)} + \frac{1-t_k}{2}\right) P_J^{\alpha-1}\right)$ 이다.

④ 비선형련립방정식 (5)를 풀어 $C_J^{\mathrm{T}} = (c_0,\ c_1,\ \cdots,\ c_J)$ 를 구한다.

⑤ $\hat{y}(t) = \sum_{k=0}^{J} c_k \psi_k(t) = C_J^{\mathrm{T}} \Psi_J(t)$ 를 적분방정식 (3)의 점배치근사풀이로 놓는다.

걸음 2 $\hat{u}(t) := C_J^{\mathrm{T}} Q(t)$ 를 반주기경계값문제 (1), (2)의 근사풀이로 결정한다.

정리 3 정리 2의 조건들이 만족된다고 하자. 그러면 비선형련립방정식 (5)는 유일풀이를 가진다.

$y(t)$ 를 적분방정식 (3)의 풀이, $\hat{y}(t) = \sum_{k=0}^{J} c_k \psi_k(t) = C_J^{\mathrm{T}} \Psi_J(t)$ 를 적분방정식의 점배치근사풀이라고 하자.

정리 4 다음의 조건을 가정하자.

① 적당한 상수 $l,\ L \ge 0$ 들이 존재하여 임의의 $t_1,\ t_2 \in [0,\ 1]$ $(x_1,\ x_2 \in \mathbf{R})$ 에 대하여 $| f(t_1,\ x_1) - f(t_2,\ x_2) | \le l\,| t_1 - t_2 | + L\,| x_1 - x_2 |$가 성립된다.

② $q := (L + \|\sigma\|) \cdot w_{\alpha,\ \mu} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\|\lambda_i\|}{\Gamma(\alpha-\alpha_i+1)} + \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta_i+1)} + \frac{1}{2\Gamma(2-\beta_i)\Gamma(\alpha)}\right)\|\mu_i\| < 1$

그러면 다음의 평가식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \|y-\hat{y}\|_{\max} &\le \frac{\omega(y(t),\ h)}{1-q} + \\ &+ \frac{L\cdot\|f(t,\ 0)\|_{\max}}{\Gamma(\alpha+1)(1-q)^2}(2h^{\alpha} + \alpha h) + \left(l + \frac{L\|f(t,\ 0)\|_{\max}}{\Gamma(\alpha)(1-q)}\right)\frac{h}{1-q} + \\ &+ \frac{\|f(t,\ 0)\|_{\max}}{(1-q)^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\omega(\lambda_i,\ h)}{\Gamma(\alpha-\alpha_i+1)} + \frac{\|f(t,\ 0)\|_{\max}}{(1-q)^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\|\lambda_i\|_{\max}(2^{\alpha-\alpha_i}-1)}{\Gamma(\alpha-\alpha_i+1)}h^{\alpha-\alpha_i} + \\ &+ \frac{\|f(t,\ 0)\|_{\max}}{(1-q)^2}\sum_{i=1}^{m}\frac{\omega(\mu_i,\ h)}{\Gamma(\alpha-\beta_i+1)} + \frac{\|f(t,\ 0)\|_{\max}}{(1-q)^2}\sum_{i=1}^{m}\frac{\|\mu_i\|_{\max}(2^{\alpha-\beta_i}-1)}{\Gamma(\alpha-\beta_i+1)}h^{\alpha-\beta_i} + \\ &+ \frac{\|f(t,\ 0)\|_{\max}}{2(1-q)^2}\sum_{i=1}^{m}\frac{\omega(\mu_i(t)t^{1-\beta_i},\ h)}{\Gamma(2-\beta_i)\Gamma(\alpha)} + \frac{\|f(t,\ 0)\|_{\max}}{2(1-q)^2}\sum_{i=1}^{m}\frac{\|\mu_i\|_{\max}(2^{\alpha-1}-1)}{\Gamma(2-\beta_i)\Gamma(\alpha)}h^{\alpha-1} + \\ &+ \frac{\|\sigma\|_{\max}\|f(t,\ 0)\|_{\max}}{\Gamma(\alpha+1)(1-q)^2}(2h^{\alpha} + \alpha h) + \frac{\|\sigma\|_{\max}\|f(t,\ 0)\|_{\max}}{\Gamma(\alpha)(1-q)^2}h + \frac{\omega(\sigma(t),\ h)\|f(t,\ 0)\|_{\max} C_1}{(1-q)^2} \end{aligned}$$

$u(t)$를 문제 (1), (2)의 풀이, $y(t)$를 적분방정식 (3)의 풀이, $\hat{y}(t)=\sum_{k=0}^{J} c_k \psi_k(t) = C_J^{\mathrm{T}} \Psi_J(t)$를 적분방정식의 점배치근사풀이, $\hat{u}(t) = C_J^{\mathrm{T}} Q(t)$를 반주기경계값문제 (1), (2)의 근사풀이라고 하자.

정리 5 정리 3의 가정이 성립한다고 하자. 그러면 다음의 평가식이 성립한다.

$$\| u - \hat{u} \|_{\max} \le \left(\| u' \|_{\max} + \frac{\| f(t,\ 0) \|_{\max}}{1-q} \left(\frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{2\Gamma(\alpha)} \right) \right) h + \max_{t,\, s \in [0,\, 1]} | G(t,\ s) | \cdot \| y - \hat{y} \|_{\max}$$

참 고 문 헌

[1] M. P. Tripathi et al.; Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., 18, 1327, 2013.

[2] P. Mokhtary; Applied Numerical Mathematics, 121, 52, 2017.

[3] K. M. Aleknejad et al.; Mediterr. J. Math., 13, 1377, 2016.

주체109(2020)년 3월 15일 원고접수

Collocation Operational Matrix Method for an Anti-Periodic Boundary Value Problem of Nonlinear Multi-Term Fractional Differential Equation

Choe Hui Chol, Sin Yong Sim

In this paper, we give a scheme of operational matrix method for an anti-periodic boundary value problem of nonlinear multi-term fractional differential equation and prove that the obtained approximate solution converges to exact solution uniformly.

Keywords: anti-periodic boundary condition, collocation method