

# 속심의 구부러짐억제기를 고려한 접재료판의 림계짐해석

송성관, 김혁남

위대한 령도자 김정일동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《현시대는 과학과 기술의 시대이며 과학과 기술이 류레없이 빠른 속도로 발전하는것은 현대과학기술발전의 중요한 특징입니다.》(《김정일선집》 증보판 제15권 485페이지)

선행연구[1]에서는 접재료판의 아래, 위 다층판을 등가단층판으로 귀착시켜 얻어지는 유효구부러짐억제기에 의하여 림계짐을 해석하였으며 선행연구[2]에서는 접재료판의 구부러짐변위를 고찰하였다. 선행연구[3]에서는 접재료판의 림계짐은 고유진동수를 구하는 방법과 유사하다는것을 연구하였지만 그것의 구체적결과는 유도하지 못하였다.

본문에서는 접재료판의 아래판과 윗판을 다층판그대로 모형화하고 속심의 구부러짐억제기가 접재료판의 거동에 미치는 영향을 분석하였다.

## 1. 기본관계식

그림과 같이 경계에서 누르는 면내힘을 받는 접재료판을 고찰하자. 자리표축  $x, y$ 는 중간면에 도입되었고  $a, b$ 는 판의 변의 길이이고  $N_{x0}, N_{y0}$ 은 각각  $x, y$  축방향의 초기짐이다.

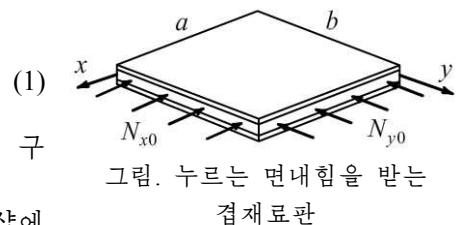
이제 다음과 같은 짐보조변수  $\lambda$ 를 도입하자.

$$N_x = -\lambda N_{x0}$$

$$N_y = -\lambda N_{y0}$$

접재료판이 안정성을 상실하는 짐보조변수  $\lambda$ 를 구하자.

이제 접재료판에 면내짐이 작용할 때 변형포텐셜에 네르기  $U$ 와 외력의 포텐셜  $\Omega$ 는 다음과 같이 표시된다.



$$U = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[ \left( \frac{\partial \chi_{xz}}{\partial x} \right)^2 D_{11} + \left( \frac{\partial \chi_{yz}}{\partial y} \right)^2 D_{22} + 2 \frac{\partial \chi_{xz}}{\partial x} \frac{\partial \chi_{yz}}{\partial y} D_{12} + \left( \frac{\partial \chi_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \chi_{yz}}{\partial y} \right)^2 D_{66} + \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} - \chi_{xz} \right)^2 \bar{S}_{11} + \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} - \chi_{yz} \right)^2 \bar{S}_{22} \right] dy dx \quad (2)$$

$$\Omega = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[ N_x \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + N_y \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right] dy dx \quad (3)$$

식 (2)와 (3)에서  $w_0$ 은 중간면우에 있는 점의  $z$  방향의 변위성분이고  $\chi_{xz}, \chi_{yz}$ 는 법선의 회전각이다. 또한  $D_{11}, D_{22}, D_{12}, D_{66}$ 은 접재료판의 구부러짐억제기이고  $\bar{S}_{11}, \bar{S}_{22}$ 는 자름억제기이다.

이제 전에너지  $U + \Omega$ 의 극값조건에 의하여 짐보조변수  $\lambda$ 를 구하자.

## 2. 풀 이 방 법

먼저 네 경계  $x=0, a: y=0, b$ 에서 단순지지된 겹재료판의 림제짐을 구하자.

$$\left. \begin{aligned} x=0, a: w_0=0, \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}=0, \chi_{yz}=0 \\ y=0, b: w_0=0, \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}=0, \chi_{xz}=0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

이제  $w_0, \chi_{xz}, \chi_{yz}$ 를 다음과 같이 취하면 식 (4)를 만족시킨다.

$$\left. \begin{aligned} w_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ \chi_{xz} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\chi_{xz})_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ \chi_{yz} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\chi_{yz})_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

식 (5)를 식 (2), (3)에 대입하면 전에너지의 극값조건에 의하여 다음식

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(U + \Omega)}{\partial(\chi_{xz})_{mn}} &= 0 \\ \frac{\partial(U + \Omega)}{\partial(\chi_{yz})_{mn}} &= 0 \\ \frac{\partial(U + \Omega)}{\partial w_{mn}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

이 얻어진다.

식 (6)으로부터 짐보조변수  $\lambda$ 에 대한 다음의 방정식이 얻어진다.

$$\frac{ab}{4} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} - \lambda \left[ N_x \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + N_y \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (\chi_{xz})_{mn} \\ (\chi_{yz})_{mn} \\ w_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

이로부터 짐보조변수는 다음과 같다.

$$\lambda = \frac{\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix}}{\left[ N_x \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + N_y \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] (T_{11}T_{22} - T_{12}^2)} \quad (8)$$

웃식에서

$$\begin{aligned}
 T_{11} &= \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 D_{11} + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 D_{66} + \bar{S}_{11} \right], \quad T_{12} = \frac{2mn\pi^2}{ab} (D_{12} + D_{66}) \\
 T_{22} &= \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 D_{66} + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 D_{22} + \bar{S}_{22} \right], \quad T_{23} = -\frac{n\pi}{b} \bar{S}_{22} \\
 T_{13} &= -\frac{m\pi}{a} \bar{S}_{11}, \quad T_{33} = \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \bar{S}_{11} + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \bar{S}_{22} \right]
 \end{aligned} \tag{9}$$

이고  $m, n$  은 자연수이다.

그러므로 자연수  $m, n$  의 변화에 따르는 최소값  $\lambda$  가 구하려는 립계집에 대응되는 짐보조변수로 된다.

다음으로 네 경계  $x=0, a: y=0, b$  에 고정지지된 겹재료판의 립계집을 구하자. 이때 경계조건은 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} x=0, a: w_0=0, \frac{\partial w_0}{\partial x}=0, \chi_{yz}=0 \\ y=0, b: w_0=0, \frac{\partial w_0}{\partial y}=0, \chi_{xz}=0 \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

위의 경계조건을 만족시키도록  $w_0, \chi_{xz}, \chi_{yz}$  를 다음과 같은 형태로 표시하자.

$$\left. \begin{aligned} w_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \left( 1 - \cos \frac{m\pi x}{a} \right) \left( 1 - \cos \frac{n\pi y}{b} \right) \\ \chi_{xz} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\chi_{xz})_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ \chi_{yz} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\chi_{yz})_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

이 식을 식 (2), (3) (6)에 대입하면 식 (8)과 같은 식이 얻어진다. 여기서

$$\begin{aligned}
 T_{11} &= \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 D_{11} + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 D_{66} + \bar{S}_{11} \right] \\
 T_{12} &= \frac{2mn\pi^2}{ab} (D_{12} + D_{66}), \quad T_{13} = \frac{8}{n\pi a} \bar{S}_{11} \\
 T_{22} &= \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 D_{66} + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 D_{22} + \bar{S}_{22} \right] \\
 T_{23} &= \frac{8}{m\pi b} \bar{S}_{22}, \quad T_{33} = 3 \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \bar{S}_{11} + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \bar{S}_{22} \right]
 \end{aligned} \tag{12}$$

이다.

앞에서와 같이 자연수  $m, n$  에 의하여 표시된 짐보조변수  $\lambda$  는  $m, n$  의 변화에 따르는 최소값을 구하는 문제에 귀착된다.

### 3. 계 산 실 례

접재료판의 아래판과 옷판이 서로 대칭인 유리/에폭시재료로 되어있고 배렬방법은  $[(0/90)_2]$ 이고 력학적특성값은

$$E_1 = 35\text{GPa}, E_2 = 8\text{GPa}, \nu_{12} = 0.26, G_{12} = 4\text{GPa}$$

이다.

속심은 폴리에스테르수지로 되어있고 그것의 력학적특성값은  $E = 23\text{GPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $G = 0.77\text{GPa}$  이다.

접재료판의 전체 두께는  $0.04\text{m}$ , 속심두께는  $0.036\text{m}$ , 매개 단층판의 두께는  $0.002\text{m}$ , 판의 변의 길이는  $a = 0.2\text{m}$ ,  $b = 0.8\text{m}$  이다.

먼저 단순지지된 접재료판의 림계짐을 구하자.  $N_{y0} = 0$ 의 경우만을 고찰하겠다.

식 (1), (8)로부터

$$N_{x0}\lambda_{mn} = \frac{\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix}}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 (T_{11}T_{22} - T_{12}^2)} \quad (13)$$

을 얻는다.

$m, n$ 의 변화에 따르는  $N_{x0}\lambda_{mn}$ 을 구하고 그것의 최소값을 구하면 림계짐이 얻어진다.

속심의 구부러짐억제기를 고려하여 접재료판의 구부러짐억제기를 구하면 다음과 같이 표시된다.

$$D_{11} = 60.15\text{kN}\cdot\text{m}, D_{22} = 11.80\text{kN}\cdot\text{m}, D_{12} = 7.80\text{kN}\cdot\text{m}, D_{66} = 9.52\text{kN}\cdot\text{m}, \\ \bar{S}_{11} = \bar{S}_{22} = 18\,620\text{kN/m}$$

웃식을 식 (9)에 대입하고 얻어진 결과를 식 (13)에 대입하면  $N_{x0}\lambda_{mn}$ 은 표 1과 같다.

$N_{x0}\lambda_{mn}$ 의 최소값은  $m = n = 1$ 일 때의 값인데  $N_{x0}(\lambda_{mn})_{11} = 8\,002\text{kN/m}$ 이다.

속심의 구부러짐억제기를 무시하여 접재료판의 구부러짐억제기를 구하면 다음과 같이 표시된다.

$$D_{11} = 55.25\text{kN}\cdot\text{m}, D_{22} = 10.7\text{kN}\cdot\text{m}, D_{12} = 6.9\text{kN}\cdot\text{m}, D_{66} = 8.48\text{kN}\cdot\text{m}$$

웃식을 식 (9)에 대입하고 얻어진 결과를 식 (13)에 대입하면  $N_{x0}\lambda_{mn}$ 은 표 2와 같다.

$N_{x0}\lambda_{mn}$ 의 최소값은  $m = n = 1$ 일 때의 값인데  $N_{x0}(\lambda_{mn})_{11} = 7\,081\text{kN/m}$ 이다.

표 1.  $m, n$ 에 따르는  $N_{x0}\lambda_{mn}$

$m \backslash n$	1	2	3
1	8 002	14 875	17 190
2	9 150	15 592	18 750
3	12 240	15 600	19 230

표 2.  $m, n$ 에 따르는  $N_{x0}\lambda_{mn}$

$m \backslash n$	1	2	3
1	7 081	12 970	15 180
2	8 436	15 592	13 850
3	11 800	13 980	10 634

표 1, 2로부터 속심의 구부러짐억제기를 고려하면 림계짐은 12.8% 증가한다는것을 알

수 있다.

다음으로 고정지지된 겹재료판의 림계짐을 구하자. 이 경우에도  $N_{y0} = 0$  인 경우만을 고찰하겠다. 속심의 구부러짐억제기를 고려하여  $m, n$  의 변화에 따르는  $N_{x0}\lambda_{mn}$  을 구하면 표 3과 같다.  $N_{x0}\lambda_{mn}$  의 최소값은  $N_{x0}(\lambda_{mn})_{11} = 9\,350\text{kN/m}$  이다.

속심의 구부러짐억제기를 무시하여  $m, n$  의 변화에 따르는  $N_{x0}\lambda_{mn}$  을 구하면 표 4와 같다.

표 3.  $m, n$  에 따르는  $N_{x0}\lambda_{mn}$

$m \backslash n$	1	2	3
1	9 350	13 462	18 650
2	11 240	15 285	19 870
3	12 585	17 384	20 320

표 4.  $m, n$  에 따르는  $N_{x0}\lambda_{mn}$

$m \backslash n$	1	2	3
1	8 165	12 268	16 450
2	10 140	13 547	17 946
3	11 326	14 673	18 537

표 3, 4로부터 속심의 구부러짐억제기를 고려하면 고정지지된 겹재료판의 구부러짐억제기는 14.5% 증가한다는것을 알수 있다.

## 맺 는 말

론문에서는 겹재료판의 아래판과 옷판을 등가단층판으로 모형화하지 않고 다층판 그대로 놓고 구부러짐억제기를 구하고 림계짐을 해석하였다.

또한 속심의 구부러짐억제기가 겹재료판의 거동에 미치는 영향을 분석하였다.

## 참 고 문 헌

- [1] 김일성종합대학학보(자연과학), 61, 1, 19, 주체104(2015).
- [2] 김일성종합대학학보 수학, 65, 2, 104, 주체108(2019).
- [3] E. Kormanikova; International Journal of Mechanics, 11, 299, 2017.

주체109(2020)년 3월 15일 원고접수

## Critical Load Analysis of Sandwich Plate in Consideration of Bending Stiffness of Core

*Song Song Gwan, Kim Hyok Nam*

In this paper, we considered one method to find the critical load of sandwich plate in consideration of bending stiffness of core.

We found the critical load of sandwich plate and referred to the general relational expression and solving method.

We demonstrated the validity of the obtained solution for the calculation example.

Keyword: sandwich plate, critical load, bending stiffness