김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체104(2015)년 제61권 제2호 Vol. 61 No. 2 JUCHE104(2015).

리만다양체에서 α형(π, ω)반대칭비계량접속에 대한 사영불변량

허달윤, 김은경

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《과학기술을 발전시켜야 나라의 경제를 빨리 추켜세울수 있으며 뒤떨어진 기술을 앞선 기술로 갱신하여 생산을 끊임없이 높여나갈수 있습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제20권 62페지)

론문에서는 현대물리학에서 기하학적모형으로 널리 리용하고있는 반대칭비계량접속에 대한 연구에서 얻어진 한가지 새로운 결과를 제기하였다.

선행연구[1]에서는 비계량대칭접속이 도입된 리만다양체의 한 형태인 통계다양체에서 접속의 성질을 밝혔으며 선행연구[2]에서는 리만다양체에서 레비찌비따접속과 사영동등인 반대칭접속을 사영반대칭접속으로 정의하고 그것의 기하학적성질을 밝혔다.

선행연구[3]에서는 반대칭비계량접속의 한 형태인 반대칭재귀계량접속의 불변량을, 선행연구[4]에서는 사영반대칭접속의 사영불변량을 구하고 그 성질을 밝혔으며 또한 선행연구[5]에서도 새로운 형태의 반대칭비계량접속을 론의하였다.

론문에서는 반대칭재귀계량접속[3]을 일반화하여 새로운 α형(π, ω)반대칭비계량접속을 정의하고 새로운 한가지 형태의 사영불변량을 구하고 그 특성을 밝혔다.

정의 리만다양체 (M, g)에서 어떤 1－형식 ω와 π에 대하여

$$\nabla_k g_{ij} = -2(\alpha-1)\omega_k g_{ij} - \alpha\omega_i g_{jk} - \alpha\omega_j g_{ik}, \quad T_{ij}^k = \varphi_j \delta_i^k - \varphi_i \delta_j^k \tag{1}$$

를 만족시키는 접속 ∇를 α형(π, ω)반대칭비계량접속이라고 부른다. 여기서 $\alpha \in R$이다.

α형(π, ω)반대칭비계량접속은 α에 관한 반대칭비계량접속족이다.

$\alpha = 0$이면 식 (1)은

$$\nabla_k g_{ij} = 2\omega_k g_{ij}, \quad T_{ij}^k = \varphi_j \delta_i^k - \varphi_i \delta_j^k \tag{2}$$

이고 $\alpha = 1$이면

$$\nabla_k g_{ij} = -\omega_i g_{jk} - \omega_j g_{ik}, \quad T_{ij}^k = \varphi_j \delta_i^k - \varphi_i \delta_j^k \tag{3}$$

이며 $\alpha = 2$이면

$$\nabla_k g_{ij} = -2\omega_k g_{ij} - 2\omega_i g_{jk} - 2\omega_j g_{ik}, \quad T_{ij}^k = \varphi_j \delta_i^k - \varphi_i \delta_j^k . \tag{4}$$

조건 $\pi = 0$밑에서 식 (4)로 표시되는 접속은 선행연구[1]에서, $\omega = \pi$인 조건밑에서 식 (3)으로 표시되는 접속은 선행연구[5]에서 론의되였으며 많은 연구들에서는 사영불변량을 와일사영곡률텐소르와 련관시켰다.

그런데 선행연구[3]에서는 식 (2)로 정의된 접속을 반대칭재귀계량접속으로 정의하고 그것의 사영불변량을

$$W_{ijk}^{\ \ l}=R_{ijk}^{\ \ l}+\frac{1}{n-2}(\delta_j^l R_{ik}-\delta_i^l R_{jk}+g_{ik}R_j^l-g_{jk}R_i^l)-\frac{1}{n(n-2)}(\delta_j^l B_{ik}-\delta_i^l B_{jk}+g_{ik}B_j^l-g_{jk}B_i^l+(n-2)\delta_k^l B_{ij}) \tag{5}$$

형태로 구하였다. 여기서 B_{ik}는 체적곡률텐소르를 표시한다.

식 (5)는 와일사영곡률텐소르형태와 전혀 다른 형태이다.

식 (1)로 정의된 α형$(\pi,\ \omega)$반대칭비계량접속은 선행연구에서 연구된 접속의 일반화로 된다.

론문에서는 일반화된 α형$(\pi,\ \omega)$반대칭비계량접속의 사영불변량을 와일사영곡률텐소르와 련관시켜 새롭게 구하려고 한다.

식 (1)로 정의된 α형$(\pi,\ \omega)$반대칭비계량접속 ∇의 접속결수는 다음과 같다.

$$\Gamma_{ij}^k=\begin{Bmatrix}k\\ij\end{Bmatrix}+(\alpha-1)\omega_i\delta_j^k+[(\alpha-1)\omega_j+\varphi_j]\delta_i^k+g_{ij}(\omega^k-\varphi^k) \tag{6}$$

이제 리만다양체 $(M,\ g)$에서 두 α형$(\pi,\ \omega)$반대칭비계량접속 ∇와 $\tilde{\nabla}$이 주어졌다고 하자.

만일 ∇와 $\tilde{\nabla}$이 동일한 측지선을 가진다면 ∇와 $\tilde{\nabla}$을 사영동등하다고 말한다.

보조정리 리만다양체 $(M,\ g)$에서 $\tilde{\nabla}$의 접속결수를

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k=\begin{Bmatrix}k\\ij\end{Bmatrix}+(\alpha-1)\tilde{\omega}_i\delta_j^k+[(\alpha-1)\tilde{\omega}_j+\tilde{\varphi}_j]\delta_i^k+g_{ij}(\tilde{\omega}^k-\tilde{\varphi}^k) \tag{7}$$

이라고 할 때 접속 ∇와 $\tilde{\nabla}$이 사영동등하기 위해서는

$$g_{ij}(\tilde{\omega}^k-\tilde{\varphi}^k)=g_{ij}(\omega^k-\varphi^k) \tag{8}$$

일것이 필요하고 충분하다. 여기서 $\tilde{\omega}_i^k$와 $\tilde{\varphi}_i^k$는 1－형식 $\tilde{\omega}^k$와 $\tilde{\varphi}^k$의 성분들이다.

증명 접속결수 Γ_{ij}^k와 $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$의 대칭부분을 A_{ij}^k와 $\tilde{A}_{ij}^k$라고 하면 ∇와 $\tilde{\nabla}$이 사영동등하기 위해서는

$$\tilde{A}_{ij}^k=A_{ij}^k+\psi_i\delta_j^k+\psi_j\delta_i^k \tag{9}$$

일것이 필요하고 충분하다. 여기서 ψ_i는 어떤 1－형식 ψ의 성분이다.

식 (9)에 식 (6)과 식 (7)을 넣고 $i,\ k$에 관해 축약하면

$$\psi_j=(\alpha-1)(\tilde{\omega}_j-\omega_j)+\frac{1}{2}(\tilde{\varphi}_j-\varphi_j)+\frac{1}{n+1}[(\tilde{\omega}_j-\tilde{\varphi}_j)-(\omega_j-\varphi_j)] \tag{10}$$

이고 식 (9)의 량변에 g^{ij}를 곱하고 축약한 다음 첨수를 내리우면

$$\psi_j=(\alpha-1)(\tilde{\omega}_j-\omega_j)+\frac{1}{2}(\tilde{\varphi}_j-\varphi_j)+\frac{n}{2}[(\tilde{\omega}_j-\tilde{\varphi}_j)-(\omega_j-\varphi_j)].$$

우의 두 식을 비교하면 $\tilde{\omega}^k-\tilde{\varphi}^k=\omega^k-\varphi^k$이다. 따라서 $\tilde{\omega}_k-\omega_k=\tilde{\varphi}^k-\varphi^k=\lambda_k$이다.

그러므로 식 (9)로부터 식 (8)이 얻어진다.(증명끝)

주의 식 (9)는 반대칭비계량접속의 사영변환을 표시한다.

식 (6)에 의하여 α형$(\pi,\ \omega)$반대칭비계량접속 ∇에 관한 곡률텐소르는

$$R_{ijk}^{\ \ l}=K_{ijk}^{\ \ l}+\delta_j^l\lambda_{ik}-\delta_i^l\lambda_{jk}+g_{jk}\upsilon_i^l-g_{ik}\upsilon_j^l+(\alpha-1)\delta_k^l\omega_{ij} \tag{11}$$

이다. 여기서 $K_{ijk}^{\ \ l}$은 레비찌비따접속 $\mathring{\nabla}$에 관한 곡률텐소르이고

$$\lambda_{ik}=\overset{\circ}{\nabla}_i[(\alpha-1)\omega_k+\varphi_k]-[(\alpha-1)\omega_i+\varphi_i][(\alpha-1)\omega_k+\varphi_k]-g_{ik}[(\alpha-1)\omega_p-\varphi_p](\omega^p-\varphi^p),$$

$$\nu_{ik}=\overset{\circ}{\nabla}_i(\omega_k-\varphi_k)+(\omega_i-\varphi_i)(\omega_k-\varphi_k),\ \ \omega_{ik}=\overset{\circ}{\nabla}_i\,\omega_k-\overset{\circ}{\nabla}_k\,\omega_i\,. \tag{12}$$

정리 1 리만다양체 $(M,\ g)$에서 텐소르

$$\tilde{V}_{ijk}{}^l=\tilde{\omega}_{ijk}{}^l+\tilde{H}_{ijk}{}^l \tag{13}$$

은 α형$(\pi,\ \omega)$반대칭비계량접속 ∇의 사영변환 $\nabla\to\tilde{\nabla}$에 관한 불변량이다. 여기서

$$\tilde{\omega}_{ijk}{}^l=\tilde{R}_{ijk}{}^l-\frac{1}{n-1}(\delta_i^l\tilde{R}_{ik}-\delta_j^lR_{ik}), \tag{14}$$

$$\tilde{H}_{ijk}{}^l=\frac{\alpha-1}{(n-1)[(n-1)\alpha+2(\alpha-1)]}[\delta_j^l(\tilde{R}_{ik}-\tilde{R}_{ki})-\delta_i^l(\tilde{R}_{jk}-\tilde{R}_{kj})+(n-1)\delta_k^l(\tilde{R}_{ij}-\tilde{R}_{ji})] \tag{15}$$

이고 $\tilde{R}_{ijk}{}^l$는 접속 $\tilde{\nabla}$에 관한 곡률텐소르이다.

증명 접속 $\tilde{\nabla}$에 관한 곡률텐소르와 식 (11)을 리용하면

$$\tilde{R}_{ijk}{}^l=R_{ijk}{}^l+\delta_j^l(\tilde{\lambda}_{ik}-\lambda_{ik})-\delta_i^l(\tilde{\lambda}_{jk}-\lambda_{jk})+(\alpha-1)\delta_k^l(\tilde{\omega}_{ij}-\omega_{ij})\,. \tag{16}$$

이제 $\gamma_{ik}=\tilde{\lambda}_{ik}-\lambda_{ik}$, $\beta_{ij}=(\alpha-1)(\tilde{\omega}_{ij}-\omega_{ij})$라고 하면 식 (16)은

$$\tilde{R}_{ijk}{}^l=R_{ijk}{}^l+\delta_j^l\gamma_{ij}-\delta_i^l\gamma_{jk}+\delta_{ki}\beta_{ij} \tag{17}$$

이고 이 식을 $i,\ l$에 관해 축약하면 다음과 같다.

$$\tilde{R}_{jk}=R_{jk}-(n-1)\gamma_{jk}+\beta_{kj} \tag{18}$$

한편 $\gamma_{ik}-\gamma_{ki}=\alpha(\overset{\circ}{\nabla}_i\,\lambda_k-\overset{\circ}{\nabla}_k\,\lambda_i)$이고 $\beta_{ik}=(\alpha-1)(\overset{\circ}{\nabla}_i\,\lambda_k-\overset{\circ}{\nabla}_k\,\lambda_i)$이므로

$$\gamma_{ik}-\gamma_{ki}=\frac{\alpha}{\alpha-1}\beta_{ik}\,.$$

이제 식 (18)을 $j,\ k$에 관해 빗대칭화하고 웃식을 리용하여 β_{jk}를 구하면

$$\beta_{jk}=\frac{\alpha-1}{\alpha(n-1)+2(\alpha-1)}[(R_{jk}-R_{kj})-(\tilde{R}_{jk}-\tilde{R}_{kj})] \tag{19}$$

이고 이 식을 식 (18)에 넣고 γ_{jk}를 구하면

$$\gamma_{jk}=\frac{1}{n-1}\left\{R_{jk}-\tilde{R}_{jk}-\frac{\alpha-1}{\alpha(n-1)+2(\alpha-1)}[(R_{jk}-R_{kj})-(\tilde{R}_{jk}-\tilde{R}_{kj})]\right\}. \tag{20}$$

식 (19), (20)을 식 (17)에 넣고 정돈하면 $W_{ijk}{}^l=R_{ijk}{}^l-\dfrac{1}{n-1}(\delta_i^l\tilde{R}_{ik}-\delta_j^lR_{ik})$와 같다.

$$H_{ijk}{}^l=\frac{\alpha-1}{(n-1)[(n-1)\alpha+2(\alpha-1)]}[\delta_j^l(R_{ik}-R_{ki})-\delta_i^l(R_{jk}-R_{kj})+(n-1)\delta_k^l(R_{ij}-R_{ji})] \tag{21}$$

라고 하면 식 (13)이 성립된다.(증명끝)

정리 2 1－형식 ω와 π 그리고 $\tilde{\omega}$과 $\tilde{\pi}$이 닫긴형식이면 ∇와 $\tilde{\nabla}$에 따르는 와일사영곡률텐소르들은 α형$(\pi,\ \omega)$반대칭비계량접속 ∇의 사영변환 $\nabla\to\tilde{\nabla}$에 관한 불변량이다. 즉 $\tilde{W}_{ijk}{}^l=W_{ijk}{}^l$이다.

증명 먼저 $(M,\ g)$에서 α형$(\pi,\ \omega)$반대칭비계량접속에 대한 릿찌곡률텐소르가 대칭이기 위해서는 1－형식 ω와 π가 닫긴형식일것이 필요하고 충분하다는것을 증명하자.

식 (11)에서 i, l 에 대한 축약을 실시하면 $R_{jk}=K_{jk}-(n-1)\lambda_{jk}-\nu_{jk}+g_{jk}\nu_i^i+(\alpha-1)\omega_{kj}$ 이며 ω_{kj} 가 빗대칭텐소르이므로 R_{jk} 가 대칭이기 위해서는 λ_{jk}, ν_{jk} 가 대칭이고 $\omega_{kj}=0$ 일것이 필요하고 충분하다.

식 (12)로부터 λ_{jk}, ν_{jk} 가 대칭이고 $\omega_{kj}=0$ 이기 위해서는 $\overset{\circ}{\nabla}_j\omega_k=\overset{\circ}{\nabla}_k\omega_j$, $\overset{\circ}{\nabla}_j\varphi_k=\overset{\circ}{\nabla}_k\varphi_j$ 일것이 필요하고 충분하다. 따라서 1－형식 ω 와 π 는 닫긴형식이여야 한다.

이 사실에 기초하여 정리 2를 증명하자.

식 (21)은 $H_{ijk}^{\ l}=0$ 이기 위해서는 $R_{jk}=R_{kj}$ 일것이 필요하고 충분하다는것을 보여준다.

또한 식 (7)에서 $\tilde{\omega}$ 과 $\tilde{\pi}$ 이 닫긴형식이면 식 (10)으로부터 ψ_j 도 닫긴형식이다.

따라서 $\tilde{\omega}$ 과 $\tilde{\pi}$ 이 닫긴형식이면 $\tilde{R}_{jk}=\tilde{R}_{kj}$ 이며 식 (15)로부터 $\tilde{H}_{ijk}^{\ l}=0$ 이다.(증명끝)

주의 선행연구[3]에서 밝혀진 사영불변량 (5)를 리용하면 정리 2를 얻을수 없다. 이러한 의미에서 식 (13)－(15)는 새로운 사영불변량이다. 정리 2는 α 형(π, ω)반대칭비계량접속의 사영불변량이 ω 와 π 가 닫긴형식인 경우에는 레비찌비따접속의 사영불변량에 귀착된다는것을 보여준다.

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보(자연과학), 58, 9, 17, 주체101(2012).

[2] Journal of **KIM IL SUNG** University(Natural Science), 2, 2, 3, Juche102(2013).

[3] Zhao Pei Biao et al.; Chin. Quart. J. of Math., 19, 4, 355, 2004.

[4] Zhao Pei Biao; Int. Math. Forum., 3, 7, 341, 2008.

[5] N. S. Agache et al.; Indian J. Pure Appl. Math., 23, 6, 399, 1992.

주체103(2014)년 10월 5일 원고접수

A Projective Invariant of the α Type (π, ω) Semi-Symmetric Non-Metric Connection in a Riemannian Manifold

Ho Tal Yun, Kim Un Gyong

We newly defined the α type (π, ω) semi-symmetric non-metric connection that satisfies the expressions $\nabla_k g_{ij}=-2(\alpha-1)\omega_k g_{ij}-\alpha\omega_i g_{jk}-\alpha\omega_j g_{ik}$, $T_{ij}^k=\varphi_j\delta_i^k-\varphi_i\delta_j^k$ where ω_i, π_i are components of any 1-forms ω, π and T_{ij}^k is torsion tensor.

We found its intrinsic projective invariant.

$$V_{ijk}^l=R_{ijk}^l-\frac{1}{n-1}(\delta_i^l R_{jk}-\delta_j^l R_{ik})+$$

$$+\frac{1}{(n-1)[(n-1)\alpha-2(\alpha-1)]}[\delta_j^l(R_{ik}-R_{ki})-\delta_i^l(R_{jk}-R_{kj})+(n-1)\delta_k^l(R_{ij}-R_{ji})]$$

Key words: Riemannian manifold, semi-symmetric non-metric connection, projective invariant