김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제1호

한가지 비선형다항분수계미분방정식의 하이어스-울람 안정성판정법

리영도, 리선혁

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《현대과학기술의 빠른 발전은 기초과학의 성과에 토대하고있으며 과학기술분야에서의 자립성은 기초과학분야에서부터 시작됩니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제10권 485폐지)

우리는 최근시기 광범히 연구되고있는 비선형다항분수계미분방정식의 하이어스-울람안정성을 판정하는 한가지 충분조건을 연구하였다.

1. 선 행 연 구

최근 분수계미분방정식에서 많이 연구되고있는 분야의 하나는 울람안정성리론이다.

선행연구[1]에서 다음의 문제가 제시되였다. 어떤 조건하에서 근사적으로 가법적인 넘기기의 가까이에 가법적인 넘기기가 존재하겠는가? 선행연구[2]에서는 바나흐공간에서의 부분적인 해답이 주어졌으며 선행연구[3]에서는 하이어스의 정리의 현저한 일반화를 고찰하였다.

선행연구[4]의 결과로부터 미분방정식의 울람안정성에 대한 연구가 시작되였으며 그 후 고전미분방정식의 울람안정성에 대한 여러가지 결과들이 나오게 되였다.

선행연구[5, 6]에서는 분수계비선형단항미분방정식의 하이어스-울람안정성과 하이어스-울람-라씨아스안정성을 론의하였다.

선행연구[7]에서는 선형다항분수계미분방정식에 대하여, 선행연구[8]에서는 분수계임풀스미분방정식의 울람안정성이 연구되였다.

론문에서는 유한시간구간에서 다음과 같은 비선형다항분수계미분방정식의 하이어스-울람안정성을 론의한다.

$$ {}^{c}D_{0+}^{\alpha}u(t)=f(t,\ u(t),\ {}^{c}D_{0+}^{\beta}u(t)) \tag{1}$$

여기서 ${}^{c}D_{0+}^{\alpha}$는 $\alpha\in(1,\ 2)$계캐푸토분수계도함수이고 $0<\beta<\alpha$이며 $0<t<b<+\infty$이다.

2. 예 비 지 식

정의 1[4] 함수 $f\in L_1[a,\ b]$의 아래한계가 a인 $\alpha>0$계분수적분은

$$I_{a+}^{\alpha}f(t):=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t(t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau\ \ (a\le t\le b)$$

로 정의된다. 여기서 $\Gamma(\cdot)$은 감마함수이다.

정의 2[4] 함수 f의 $\alpha>0$계분수도함수는

$$ {}^{c}D_{a+}^{\alpha}f(t):=I_{a+}^{n-\alpha}[D^{n}f(t)]=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{t}\frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau $$

로 정의된다. 여기서 $f^{(n)}\in L_1[a,\ b],\ n=[\alpha]+1$ 이고 $[\alpha]$ 는 α 의 옹근수부이다.

보조정리 1[5] 함수 $f(x)=(x-a)^p$ 에 대하여 $p>-1,\ \alpha>0$ 이라고 하자. 그러면

$$ I_{a+}^{\alpha}f(t)=\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\alpha+p+1)}(t-a)^{\alpha+p} $$

보조정리 2[5] 만일 $\alpha\in\mathbf{R}_+$, $n-1<\alpha\le n$, $n\in\mathbf{N}$, $f\in AC^n[a,\ b]$ 이면

$$ I_{a+}^{\alpha}\,{}^{c}D_{a+}^{\alpha}f(t)=f(t)-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(a)}{j!}(t-a)^{j} $$

정의 3 ${}^{c}D_{0+}^{\alpha}u\in C[0,\ b]$ 인 함수 $u(t)$ 가 방정식 (1)을 만족시키면 그 함수를 방정식 (1)의 풀이라고 부른다.

정의 4 적당한 상수 K 가 있어서 임의의 ε 과 부등식

$$ \|{}^{c}D_{0+}^{\alpha}u(t)-f(t,\ u(t),\ {}^{c}D_{0+}^{\beta}u(t))\|_{C[0,\ b]}\le\varepsilon,\ t\in[0,\ b] \tag{2} $$

를 만족시키는 임의의 함수 $u(t)$ 에 대하여

$$ \|u-u_0\|_{C[0,\ b]}\le K\varepsilon \tag{3} $$

을 만족시키는 방정식 (1)의 풀이 $u_0(t)$ 가 있으면 방정식 (1)은 하이어스－울람안정하다고 부른다. 여기서 K 는 함수 f 와 구간의 길이 b 에만 관계되며 $\|\cdot\|_{C[0,\ b]}$ 은 체비쉐브노름이다.

정의 5 ${}^{c}D_{0+}^{\alpha}u\in C[0,\ b]$ 인 함수 $u(t)$ 가 부등식 (2)를 만족시키면 그 함수를 부등식 (2)의 풀이라고 부른다.

3. 비선형다항분수계미분방정식의 하이어스－울람안정성

$u(t)$ 가 부등식 (2)의 풀이라고 하자. $h(t)$ 를

$$ h(t):={}^{c}D_{0+}^{\alpha}u(t)-f(t,\ u(t),\ {}^{c}D_{0+}^{\beta}u(t)),\ t\in[0,\ b] \tag{4} $$

로 정의하면 $\|h\|_{C[0,\ b]}\le\varepsilon$.

보조정리 3 $u(t)$ 를 부등식 (2)의 풀이라고 하자. 그러면 ${}^{c}D_{0+}^{\alpha}u(t)=v(t)$ 인 $v(t)$ 는 다음의 분수계적분방정식의 풀이이다.

$$ v(t)-f(t,\ u(0)+u'(0)t+I_{0+}^{\alpha}v(t),\ {}^{c}D_{0+}^{\beta}(u'(0)t)+I_{0+}^{\alpha-\beta}v(t))=h(t),\ t\in[0,\ b] \tag{5} $$

거꾸로

$$ u(t)=u(0)+u'(0)t+I_{0+}^{\alpha}v(t) \tag{6} $$

인 $u(t)$ 는 부등식 (2)의 풀이이다. 여기서 $v(t)$ 는 $C[0,\ b]$ 에서 방정식 (5)를 만족시킨다.

다음의 가정을 주자.

적당한 $l_1>0,\ l_2>0$ 이 있어서

$$ |f(t,\ x_1,\ y_1)-f(t,\ x_2,\ y_2)|\le l_1|x_1-x_2|+l_2|y_1-y_2| $$

가 성립한다. 여기서 $(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2)\in\mathbf{R}^2$ 이다.

보조정리 4 가정에 의해서 다음의 비선형분수계적분방정식은 $C[0,\ b]$ 에서 유일한 풀이를 가진다.

$$v(t)-f(t,\ u(0)+u'(0)t+I_{0+}^{\alpha}v(t),\ {}^{c}D_{0+}^{\beta}(u'(0)t)+I_{0+}^{\alpha-\beta}v(t))=0,\ t\in[0,\ b] \qquad (7)$$

보조정리 5 만일 $w(t)$ 가 방정식 (7)의 유일한 풀이이면 함수

$$u_0(t):=u(0)+u'(0)t+I_{0+}^{\alpha}w(t) \qquad (8)$$

는 방정식 (1)의 풀이이다.

정리 1 가정에 의하여 방정식 (1)은 하이어스－울람안정하다.

증명 임의의 $\varepsilon>0$ 에 대하여 $u(t)$ 를 부등식 (2)의 풀이라고 하자. 분수계미분부등식의 풀이의 정의로부터 ${}^{c}D_{0+}^{\alpha}u(t)$ 가 존재하며 $u(0)$ 과 $u'(0)$ 도 존재한다. 따라서 보조정리 4로부터 $u(t)$ 는 다음과 같이 표시된다.

$$u(t)=u(0)+u'(0)t+I_{0+}^{\alpha}v(t)$$

여기서 $v(t)$ 는 방정식 (5)의 풀이이고

$$h(t):={}^{c}D_{0+}^{\alpha}u(t)-f(t,\ u(t),\ {}^{c}D_{0+}^{\beta}u(t)),\ t\in[0,\ b]$$

이다.

한편 보조정리 4로부터 분수계적분방정식

$$w(t)-f(t,\ u(0)+u'(0)t+I_{0+}^{\alpha}w(t),\ {}^{c}D_{0+}^{\beta}(u'(0)t)+I_{0+}^{\alpha-\beta}w(t))=0,\ t\in[0,\ b] \qquad (9)$$

는 유일풀이를 가진다. 그러므로 보조정리 5로부터

$$u_0(t):=u(0)+u'(0)t+I_{0+}^{\alpha}w(t) \qquad (10)$$

인 함수 $u_0(t)$ 는 방정식 (1)의 풀이이다.

이제 $\|u-u_0\|_{C[0,\ b]}$ 을 평가하자. 식 (6)과 (10)으로부터

$$|u(t)-u_0(t)|=|I_{0+}^{\alpha}v(t)-I_{0+}^{\alpha}w(t)| \qquad (11)$$

이다.

보조정리 4에서와 같이 벨레키노름을 쓰면 다음과 같다.

$$|I_{a+}^{\alpha}v(t)-I_{a+}^{\alpha}w(t)|\le I_{a+}^{\alpha}|v(t)-w(t)|=I_{a+}^{\alpha}e^{kt}e^{-kt}|v(t)-w(t)|\le\|v(t)-w(t)\|_k\ I_{a+}^{\alpha}e^{kt}$$

부등식

$$I_{0+}^{\alpha}e^{kt}\le\frac{e^{kt}}{k^{\alpha}}$$

로부터 다음의 부등식이 성립한다.

$$|I_{0+}^{\alpha}v(t)-I_{0+}^{\alpha}w(t)|\le\|v-w\|_k\ \frac{e^{kt}}{k^{\alpha}} \qquad (12)$$

식 (12)의 량변에 e^{-kt} 을 곱하면

$$\|I_{0+}^{\alpha}v(t)-I_{0+}^{\alpha}w(t)\|_k\le\frac{1}{k^{\alpha}}\|v-w\|_k \qquad (13)$$

이다.

식 (11)과 (13)으로부터

$$\| u-u_0 \|_k = \| I_{0+}^{\alpha} v - I_{0+}^{\alpha} w \|_k \le \frac{1}{k^{\alpha}} \| v-w \|_k \tag{14}$$

이다.

식 (5)와 (9)로부터 $|v(t)-w(t)|$는 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\begin{aligned} |v(t)-w(t)| &\le | f(t,\ u(0)+u'(0)t+I_{0+}^{\alpha}v(t),\ {}^cD_{0+}^{\beta}(u'(0)t)+I_{0+}^{\alpha-\beta}v(t)) - \\ &- f(t,\ u(0)+u'(0)t+I_{0+}^{\alpha}w(t),\ {}^cD_{0+}^{\beta}(u'(0)t)+I_{0+}^{\alpha-\beta}w(t)) | + |h(t)| \le \\ &\le l_1 | I_{0+}^{\alpha}v(t) - I_{0+}^{\alpha}w(t) | + l_2 | I_{0+}^{\alpha-\beta}v(t) - I_{0+}^{\alpha-\beta}w(t) | + |h(t)| \le \\ &\le l_1 \| v-w \|_k \frac{e^{kt}}{k^{\alpha}} + l_2 \| v-w \|_k \frac{e^{kt}}{k^{\alpha-\beta}} + |h(t)| \end{aligned}$$

따라서

$$e^{-kt} |v(t)-w(t)| \le l_1 \| v-w \|_k \frac{1}{k^{\alpha}} + l_2 \| v-w \|_k \frac{1}{k^{\alpha-\beta}} + e^{-kt} |h(t)|$$

$$\| v-w \|_k \le \left(\frac{l_1}{k^{\alpha}} + \frac{l_2}{k^{\alpha-\beta}} \right) \| v-w \|_k + \| h \|_k \le \frac{l_1+l_2}{k^{\alpha-\beta}} \| v-w \|_k + \| h \|_k$$

이다.

이제 $q := \dfrac{l_1+l_2}{k_*^{\alpha-\beta}} > 0,\ 1-q>0,\ \dfrac{1}{k_*^{\alpha}} \dfrac{1}{1-q} \le 1$인 $k_*>0$이 존재한다는것은 쉽게 알수 있다.

그러면

$$\| v-w \|_{k_*} \le \frac{1}{1-q} \| h \|_{k_*} \tag{15}$$

이고 식 (14)과 (15)로부터 다음의 부등식이 성립된다.

$$\| u-u_0 \|_{k_*} \le \left(\frac{1}{k_*^{\alpha}} \frac{1}{1-q} \right) \| h \|_{k_*} \le \| h \|_{k_*} \tag{16}$$

다음의 부등식들은 체비쉐브노름과 벨레키노름의 동등성을 보여준다.

$$e^{-kb} \| x \|_{C[0,\ b]} \le \| x \|_k \le \| x \|_{C[0,\ b]}$$

그러면

$$e^{-k_* b} \| u-u_0 \|_{C[0,\ b]} \le \| u-u_0 \|_{k_*} \le \| h \|_{k_*} \le \| h \|_{C[0,\ b]}$$

이고 따라서

$$\| u-u_0 \|_{C[0,\ b]} \le e^{k_* b} \| h \|_{C[0,\ b]}$$

$\| h \|_{C[0,\ b]} \le \varepsilon$이므로 다음의 결과를 얻는다.

$$\| u-u_0 \|_{C[0,\ b]} \le K\varepsilon,\ K = e^{k_* b} \tag{17}$$

식 (17)은 방정식 (1)이 하이어스－울람안정하다는것을 보여준다.

정리 2 $D_1 := \{ k \mid k > (l_1+l_2)^{1/(\alpha-\beta)} \}$, $D_2 := \{ k \mid b < \ln(k^{\alpha} - k^{\beta}(l_1+l_2))^{1/k} \}$ 라고 하자. 만일 $D_1 \cap D_2 \ne \varnothing$이라면 식 (17)을 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\| u-u_0 \|_{C[0,\ b]} \le \varepsilon \tag{18}$$

참 고 문 헌

[1] S. M. Ulam; A Collection of Mathematical Problems, Interscience Publishers, 61～72, 1968.

[2] D. H. Hyers; Proc. Natl. Acad. Sci., 27, 222, 1941.

[3] Th. M. Rassias; Proc. Amer. Math. Soc., 72, 297, 1978.

[4] M. Obloza; Rocznik Nauk.-Dydakt. Prace Mat., 13, 259, 1993.

[5] J. Wang et al.; Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., 63, 1, 2011.

[6] J. Wang et al.; Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 17, 2530, 2012.

[7] C. Wang et al.; Appl. Math., 60, 383, 2015.

[8] I. A. Mohamed; J. Contemporary Math. Anal., 50, 209, 2015.

주체107(2018)년 9월 8일 원고접수

A Testing Method for the Hyers-Ulam Stability of a Nonlinear Multi-term Fractional Differential Equation

Ri Yong Do, *Ri Son Hyok*

In this paper, we study the existence of solutions and a sufficient condition for the Hyers-Ulam stability of a nonlinear multi-term fractional differential equation.

Key words: Hyers-Ulam stability, fractional differential equation