김일성종합대학학보　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　주체109(2020)년
수 학　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　제66권　제1호

직적계에서 예민쌍의 존재성에 관한 한가지 연구

석춘경, 주현희

우리는 최근 첨단연구분야의 하나로 되고있는 카오스의 특징을 반영하는 중요한 징표들중의 하나인 초기조건에 관한 예민한 의존성(간단히 예민성)을 고찰하면서 유전족 $\mathscr{F}$ 를 리용하여 도입된 $\mathscr{F}$ －예민쌍에 대하여 연구하였다.

초기상태의 작은 변화가 극적으로 다른 동태를 가진다는데 주목을 돌리고 연구되여 온 초기조건에 관한 예민성은 카오스의 가장 본질적인 속성으로 출현하여 카오스연구에서 중요한 부분을 이루고있다.

예민성에 대한 연구가 활발히 진행되면서 계의 예민정도를 나타낼수 있는 각이한 형태의 예민성개념들이 출현하였다. 또한 리－요크카오스와 예민성의 개념을 련관시키는 리－요크예민성과 리－요크쌍의 개념이 도입되여 연구되였으며 이 과정에 선행연구[3]에서는 그라프넘기기에서 리－요크쌍의 존재성이 리－요크카오스현상을 나타낸다는 사실을 증명하였다.

선행연구[2]에서는 $\mathscr{F}$ －예민쌍, 거의도처 $\mathscr{F}$ －예민쌍의 존재성에 대한 개념과 그것들사이의 관계문제 그리고 위상력학계에 $\mathscr{F}$ －예민쌍이 거의도처에서 존재하기 위한 여러가지 충분조건들을 밝혔다.

한편 두 넘기기 f, g 와 직적넘기기 $f\times g$ 의 동력학적거동들사이의 호상관계를 연구하는것은 동력학계연구에서 보편적으로 제기되는 문제이다.

선행연구[1]에서는 직적넘기기 $f\times g$ 의 예민성과 개별적인 넘기기 f 와 g 들의 예민성사이의 관계문제 즉 $\mathscr{F}$ －예민성, 다중－$\mathscr{F}$ －예민성, $(\mathscr{F}_1,\ \mathscr{F}_2)$ －예민성들에 대하여 직적넘기기와 개별적인 넘기기사이의 관계문제를 연구하였다.

론문에서는 직적넘기기의 $\mathscr{F}$ －예민쌍의 거의도처존재성과 개별적넘기기들의 $\mathscr{F}$ －예민쌍의 거의도처존재성사이의 관계문제를 연구하였으며 유전족을 리용하여 리－요크예민쌍의 개념을 세분화한 $(\mathscr{F}_1,\ \mathscr{F}_2)$ －예민쌍을 정의하고 직적넘기기의 $(\mathscr{F}_1,\ \mathscr{F}_2)$ －예민쌍존재성과 개별적넘기기들의 $(\mathscr{F}_1,\ \mathscr{F}_2)$ －예민쌍존재성사이의 관계문제를 연구하였다.

정의 1 $\mathbf{Z}^+$ 가 부아닌 옹근수들의 모임, $\mathscr{P}=\mathscr{P}(\mathbf{Z}^+)$ 가 $\mathbf{Z}^+$ 의 부분모임들전부의 족이며 $\mathscr{F}\subset\mathscr{P}$ 에 대하여 $F_1\subset F_2$ 이고 $F_1\in\mathscr{F}$ 일 때 $F_2\in\mathscr{F}$ 이면 $\mathscr{F}$ 를 유전족이라고 부른다.

정의 2 $\mathscr{F}$ 에 대하여 $\mathscr{P}$ 의 부분모임 $k\mathscr{F}=\{F\in\mathscr{P}\mid \mathbf{Z}^+\setminus F\notin\mathscr{F}\}$ 를 족 $\mathscr{F}$ 의 쌍대족이라고 부르고 유전족 $\mathscr{F}_1$ 과 $\mathscr{F}_2$ 에 대하여 적 $\mathscr{F}_1\cdot\mathscr{F}_2$ 를 $\mathscr{F}_1\cdot\mathscr{F}_2=\{F_1\cap F_2\mid F_1\in\mathscr{F}_1,\ F_2\in\mathscr{F}_2\}$ 로 정의하며 유전족 $\mathscr{F}$ 에 대하여 $\mathscr{F}\cdot\mathscr{F}\subset\mathscr{F}$ 일 때 $\mathscr{F}$ 를 휠터족이라고 부른다.

정의 3 리산력학계 $(X,\ f)$ 와 유전족 $\mathscr{F}$ 가 주어졌다고 하자.

이때 어떤 상수 $\delta>0$ 이 있어서 $\{n\in\mathbf{Z}^+\mid d(f^n(x),\ f^n(y))>\delta\}\in\mathscr{F}$ 를 만족시키는 쌍 $(x,\ y)\in X\times X$ 를 f 의 $(\mathscr{F},\ \delta)$ －예민한 쌍이라고 부른다.

또한 어떤 상수 $\delta>0$ 이 있어서 임의의 비지 않은 열린모임 $U\subset X$ 에 대하여 f 의

$(\mathscr{F},\ \delta)$ −예민한 쌍 $(x,\ y)$ 가 $U\times U$ 에 들어있을 때 력학계 $(X,\ f)$ 는 거의도처에서 $\mathscr{F}$ −예민쌍을 가진다고 말한다. 여기서 δ 는 정수이다.

정의 4 $\mathscr{F}_1$ 과 $\mathscr{F}_2$ 를 유전족이라고 하면 $LY_{\mathscr{F}_1,\ \mathscr{F}_2}(\varepsilon,\ f)$ 는 다음과 같이 표시된다.

$$LY_{\mathscr{F}_1,\ \mathscr{F}_2}(\varepsilon,\ f)=\{(x,\ y)\in X\times X\,|\,\forall\lambda>0,$$

$$\{n\in\mathbf{Z}^+\,|\,d(f^n(x),\ f^n(y))<\lambda\}\in\mathscr{F}_1,\ \{n\in\mathbf{Z}^+\,|\,d(f^n(x),\ f^n(y))\geq\varepsilon\}\in\mathscr{F}_2\}$$

이때 $LY_{\mathscr{F}_1,\ \mathscr{F}_2}(\varepsilon,\ f)$ 에 속하는 매 쌍을 $(\mathscr{F}_1,\ \mathscr{F}_2)$ −예민쌍이라고 부른다.

명제 X , Y 를 콤팍트거리공간, $f:X\to X$, $g:Y\to Y$ 를 련속넘기기라고 하고 $\mathscr{F}$ 를 유전족이라고 하자.

$k\mathscr{F}$ 가 휠터족일 때 직적넘기기 $f\times g$ 가 $(\mathscr{F},\ \delta)$ −예민쌍을 가지기 위해서는 f 또는 g 가 $(\mathscr{F},\ \delta/\sqrt{2})$ −예민쌍을 가질것이 필요하고 충분하다.

다음의 정리에서는 $\mathscr{F}$ −예민성보다 강한 성질인 $\mathscr{F}$ −예민쌍의 거의도처존재성에 대하여 직적넘기기와 개별적넘기기들사이의 관계문제를 밝힌다.

정리 1 X , Y 를 콤팍트거리공간, $f:X\to X$, $g:Y\to Y$ 를 련속넘기기라고 하고 $\mathscr{F}$ 를 유전족이라고 하자.

그러면 $k\mathscr{F}$ 가 휠터족일 때 $f\times g$ 가 거의도처에서 $(\mathscr{F},\ \delta)$ −예민쌍을 가지기 위해서는 f 또는 g 가 거의도처에서 $(\mathscr{F},\ \delta/\sqrt{2})$ −예민쌍을 가질것이 필요하고 충분하다.

증명 (충분성) 넘기기 f 가 $(\mathscr{F},\ \delta/\sqrt{2})$ −예민쌍을 거의도처에서 가진다고 하자.

그러면 $X\times Y$ 의 임의의 비지 않은 열린모임 W 에 대하여 열린모임 $U\subset X,\ V\subset Y$ 가 있어서 $U\times V\subset W$ 가 성립된다. f 가 $(\mathscr{F},\ \delta/\sqrt{2})$ −예민쌍을 거의도처에서 가지므로 어떤 $x_1,\ x_2\in U$ 가 존재하여 $\{n\in\mathbf{Z}^+\,|\,d_X(f^n(x_1),\ f^n(x_2))>\delta/\sqrt{2}\}\in\mathscr{F}$ 가 성립된다.

이때 임의의 $y_1,\ y_2\in V$ 에 대하여 $(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2)\in U\times V\subset W$ 는 $(\mathscr{F},\ \delta)$ −예민쌍을 이룬다. 따라서 임의의 비지 않은 열린모임 $W\subset X\times Y$ 에 대하여 $(\mathscr{F},\ \delta)$ −예민쌍이 존재하므로 직적력학계 $(X\times Y,\ f\times g)$ 는 거의도처에서 $(\mathscr{F},\ \delta)$ −예민쌍을 가진다.

(필요성) 넘기기 f 와 g 가 거의도처에서 $(\mathscr{F},\ \delta/\sqrt{2})$ −예민쌍을 가지지 않는다고 하자. 즉 X 와 Y 의 어떤 비지 않은 열린모임 U 와 V 가 있어서 임의의 $x_1,\ x_2\in U$ 와 임의의 $y_1,\ y_2\in V$ 에 대하여 $(x_1,\ x_2)$, $(y_1,\ y_2)$ 는 $(\mathscr{F},\ \delta/\sqrt{2})$ −예민쌍들이 아니라고 하면 비지 않은 열린모임 $U\times V\subset X\times Y$ 는 $(\mathscr{F},\ \delta)$ −예민쌍을 가지지 않는다.

이것은 $f\times g$ 가 거의도처에서 $(\mathscr{F},\ \delta)$ −예민쌍을 가진다는 조건에 모순된다.(증명끝)

다음의 정리에서 $(\mathscr{F}_1,\ \mathscr{F}_2)$ −예민쌍존재성에 대하여 직적넘기기와 개별적넘기기들사이의 관계문제를 론의한다.

정리 2 X , Y 를 콤팍트거리공간, $f:X\to X$, $g:Y\to Y$ 를 련속넘기기라고 하고 $\mathscr{F}_1,\ \mathscr{F}_2$ 를 유전족이라고 하면 $k\mathscr{F}_2$ 가 휠터족일 때 직적넘기기 $f\times g$ 가 $(\mathscr{F}_1,\ \mathscr{F}_2)$ −예민쌍을 가지기 위해서는 f 또는 g 가 $(\mathscr{F}_1,\ \mathscr{F}_2)$ −예민쌍을 가질것이 필요하고 충분하다.

증명(충분성) 일반성을 잃지 않고 력학계 $(X,\ f)$ 가 $(\mathscr{F}_1,\ \mathscr{F}_2)$ −예민쌍을 가진다고 하자. 즉 어떤 $(x_1,\ x_2)\in X\times X$ 가 있어서

$$\forall\lambda>0,\ \{n\in\mathbf{Z}^+\,|\,d_X(f^n(x_1),\ f^n(x_2))<\lambda\}\in\mathscr{F}_1,\ \{n\in\mathbf{Z}^+\,|\,d_X(f^n(x_1),\ f^n(x_2))\geq\delta\}\in\mathscr{F}_2$$

가 성립된다고 하면 임의의 $y\in Y$ 에 대하여 $(x_1,\ y),\ (x_2,\ y)\in X\times Y$ 는 $(\mathscr{F}_1,\ \mathscr{F}_2)$ －예민쌍을 이룬다. 따라서 직적력학계 $(X\times Y,\ f\times g)$ 도 $(\mathscr{F}_1,\ \mathscr{F}_2)$ －예민쌍을 가진다.

(필요성) 넘기기 f 와 g 가 $(\mathscr{F}_1,\ \mathscr{F}_2)$ －예민쌍을 가지지 않는다고 하자.

임의의 쌍 $(x_1,\ x_2)\in X\times X$ 에 대하여

$$\exists\lambda>0,\ \{n\in\mathbf{Z}^+ \mid d_X(f^n(x_1),\ f^n(x_2))\ge\lambda\}\in k\mathscr{F}_1 \tag{1}$$

이거나 다음과 같다.

$$\{n\in\mathbf{Z}^+ \mid d_X(f^n(x_1),\ f^n(x_2))<\delta\}\in k\mathscr{F}_2 \tag{2}$$

또한 임의의 쌍 $(y_1,\ y_2)\in Y\times Y$ 에 대하여

$$\exists\lambda>0,\ \{n\in\mathbf{Z}^+ \mid d_Y(g^n(y_1),\ g^n(y_2))\ge\lambda\}\in k\mathscr{F}_1 \tag{3}$$

이거나

$$\{n\in\mathbf{Z}^+ \mid d_Y(f^n(y_1),\ f^n(y_2))<\delta\}\in k\mathscr{F}_2 \tag{4}$$

이때 $(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2)\in X\times Y$ 에 대하여 식 (1) 또는 (3)이 성립하는 경우

$$\exists\lambda>0,\ \{n\in\mathbf{Z}^+ \mid d_{X\times Y}((f\times g)^n(x_1,\ y_1),\ (f\times g)^n(x_2,\ y_2))\ge\lambda\}\in k\mathscr{F}_1 \tag{5}$$

이다. 우의 경우가 성립되지 않는다면 $(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2)\in X\times Y$ 에 대하여 식 (2)와 (4)가 동시에 성립되는 경우밖에 없다.

이제 $F_1:=\{n\in\mathbf{Z}^+ \mid d_X(f^n(x_1),\ f^n(x_2))<\delta\}$, $F_2:=\{n\in\mathbf{Z}^+ \mid d_Y(g^n(y_1),\ g^n(y_2))<\delta\}$ 라고 하면 $k\mathscr{F}_2$ 가 휠터족이므로 $F_1\cap F_2\in k\mathscr{F}_2$ 가 성립된다.

그러므로 임의의 $n\in F_1\cap F_2\in k\mathscr{F}_2$ 에 대하여 다음의 식이 성립된다.

$$d_{X\times Y}((f\times g)^n(x_1,\ y_1),\ (f\times g)^n(x_2,\ y_2))=\sqrt{d_X(f^n(x_1),\ f^n(x_2))^2+d_Y(g^n(y_1),\ g^n(y_2))^2}<\sqrt{2}\delta$$

그러므로 $k\mathscr{F}_2$ 가 유전족이므로 다음의 식이 성립된다.

$$F_1\cap F_2\subset\{n\in\mathbf{Z}^+ \mid d_{X\times Y}((f\times g)^n(x_1,\ y_1),\ (f\times g)^n(x_2,\ y_2))<\sqrt{2}\delta\}\in k\mathscr{F}_2 \tag{6}$$

임의의 $(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2)\in X\times Y$ 에 대하여 식 (5) 또는 (6)이 성립된다. 이것은 직적넘기기 $f\times g$ 가 $(\mathscr{F}_1,\ \mathscr{F}_2)$ －예민쌍을 가진다는데 모순이다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] X. Wu et al.; J. Nonlinear Sci. Appl., 9, 4364, 2016.
[2] F. Tan et al.; Acta Math. Sci., 31, 1425, 2011.
[3] S. Ruette et al.; P. Am. Math. Soc., 6, 2087, 2014.

주체108(2019)년 9월 15일 원고접수

The Existence of Sensitive Pairs for Product Systems

Sok Chun Gyong, Ju Hyon Hui

We obtain the relations between a product map and its individual maps for the existence of sensitive pairs using Furstenberg families

Keywords: sensitive pair, product systems