

수력충격해석에서 흐름벡토르분리방법의 응용에 대한 연구

구남철, 장대욱

위대한 수령 김일성동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《과학기술을 발전시켜 인민경제 모든 부문의 생산기술공정과 생산방법, 경영활동을 보다 새로운 과학적도대우에 올려세워야 합니다.》(《김일성전집》 제68권 55페이지)

수력충격현상은 물공급계통들에서 여러가지 원인에 의하여 발생하는 현상으로서 심한 경우에는 계통설비들을 파괴하고 정상적인 물공급에 지장을 준다. 그러므로 수력충격현상을 정확히 예측하는것은 관로망설계에서와 물공급망의 안정한 운영을 보장하는데서 중요한 문제로 나선다.

선행연구[1-5]에서는 특성선방법에 의하여 저수지-관-발브체계와 뿔프-발브-관체계에서 발생하는 수력충격을 해석하는 문제들을 취급하였다.

본문에서는 흐름벡토르분리방법을 리용하여 수력충격해석을 위한 한가지 계산도식을 제기하고 저수지-관-발브체계에서 발브의 닫김에 의하여 발생하는 수력충격해석에 적용하는 문제를 취급하였다.

1. 기본관계식

직경이 일정한 관로에서 발생하는 수력충격흐름의 해석을 위한 기본방정식들은 보존형식으로 다음과 같이 표시할수 있다.[1-3]

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = J(U) \quad (1)$$

여기서

$$U = \begin{bmatrix} H \\ Q \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 \\ RQ|Q| \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & a^2/gA \\ gA & 0 \end{bmatrix}$$

은 각각 풀이벡토르, 원천벡토르, 결수행렬들이다. 흐름벡토르 F 는 $F(U) = AU$ 로 표시할수 있으므로 기본방정식은 보존형식으로 다음과 같이 표시할수 있다.[3]

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = J(U) \quad (2)$$

초기조건은

$$U(x, 0) = U_s(x)$$

이다. 여기서 $U_s(x)$ 는 정상상태에서의 압력수두나 류량과 같이 알려진 값들이다. 흐름방정식을 풀기 위한 수치도식은 흐름마당을 통하여 섭동이 전파되는 속도와 방향을 반영하여야 한다. 풍상도식은 특성선을 따라서 섭동의 전파방향을 보다 적당히 수치적으로

모의할수 있게 구성된 도식이다. 흐름벡토르분리방법은 흐름을 통한 섭동의 전파를 정확히 고려하기 위하여 개발된 방법이다. 원천항을 가진 편미분방정식의 분리에 기초하여 식 (2)를 다음과 같은 2개의 방정식계의 풀이를 결정하는 문제로 귀착시킬수 있다.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} &= 0 \\ U(x, 0) &= U_s(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow U^*(x, t_0) \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= J(U) = 0 \\ U(x, t_0) &= U^*(x, t_0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow U(x, t) \quad (4)$$

여기서 $U^*(x, t_0)$ 은 t_0 순간에 식 (3)의 풀이이고 $U(x, t_0)$ 은 $U^*(x, t_0)$ 을 초기조건으로 하는 식 (4)의 풀이이다.

먼저 흐름벡토르방법을 리용하여 원천항이 없는 식 (3)의 풀이를 구한다. 수치풀이를 위하여 계산구역 L (관의 길이)을 길이가 $\Delta x = L/N$ 인 N 개의 검사체적(CV) 또는 유한체적(FV)으로 분할한다. 이때 자리표 $x = (i-1)\Delta x$ 는 매 검사체적의 중심점이고 자리표 $x = (i-1/2)\Delta x$ 는 검사면(CS)의 자리표로 된다.(그림 1)

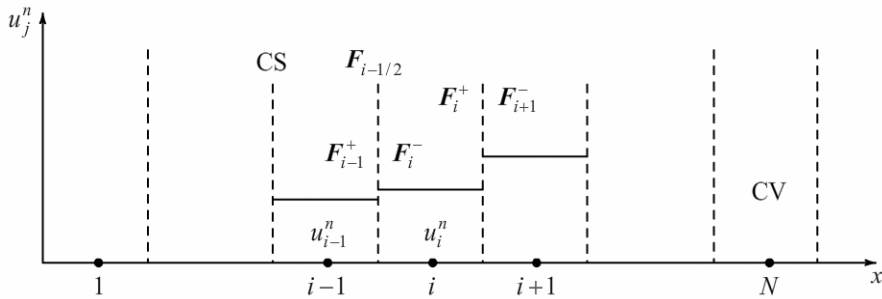


그림 1. 계산그물

시간걸음의 크기는 $\Delta t = \Delta x/a$ 이며 매 순간 $t_n = n\Delta t$ (n 은 시간걸음의 첨수)로 표시된다. 식 (3)의 풀이를 얻자면 그것의 적분형식을 리용하여야 한다. 임의의 유한체적 또는 검사체적 $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [t_n, t_{n+1}]$ 에서 식 (3)의 적분은 다음과 같이 표시된다.

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \frac{Cr}{a} (F_{i-1/2} - F_{i+1/2}) = 0 \quad (5)$$

여기서

$$U_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U(x, t^n) dx, \quad U_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U(x, t^{n+1}) dx$$

$$F_{i-1/2} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} F[U(x_{i-1/2}, t)] dt, \quad F_{i+1/2} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} F[U(x_{i+1/2}, t)] dt$$

이며 $Cr(a\Delta t/\Delta x)$ 는 크란트수이다. 흐름벡토르 F 를 분리하자면 먼저 식 (2)의 야코비안행렬 A 의 고유값과 고유행렬, 오른쪽고유벡토르들을 결정하여야 한다. 식

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{a^2}{gA} \\ gA & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

으로부터 고유값과 고유값행렬은

$$\lambda_1 = -a, \quad \lambda_2 = +a \quad (6)$$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & +a \end{bmatrix} \quad (7)$$

로 된다. 여기서 I 는 단위행렬이다. 오른쪽고유벡토르는 다음의 식

$$A = KAK^{-1} \quad (8)$$

을 만족시키도록 결정한다. 즉

$$K = \begin{bmatrix} -a & +a \\ gA & gA \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$K^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1/a & 1/gA \\ +1/a & 1/gA \end{bmatrix} \quad (10)$$

고유값행렬을 정의 고유값과 부의 고유값에 대응하는 행렬로 분해하면 다음과 같다.

$$A = A^+ + A^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & +a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$A^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & +a \end{bmatrix}, \quad A^- = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

식 (9)–(11)을 식 (8)에 대입하면 행렬 A 는 정의 고유값과 부의 고유값에 대응하는 행렬로 분해된다.

$$A = KAK^{-1} = K(A^+ + A^-)K^{-1} = KA^+K^{-1} + KA^-K^{-1} = A^+ + A^- \quad (12)$$

여기서

$$A^+ = \begin{bmatrix} +a/2 & a^2/2gA \\ gA/2 & +a/2 \end{bmatrix}, \quad A^- = \begin{bmatrix} -a/2 & a^2/2gA \\ gA/2 & -a/2 \end{bmatrix}$$

흐름벡토르가 $F(U) = AU$ 로 표시된다는것을 고려하면 흐름벡토르 F 를 다음과 같이 분해할수 있다.

$$F(U) = AU = (A^+ + A^-)U = A^+U + A^-U = F^+(U) + F^-(U) \quad (13)$$

여기서

$$F^+(U) = \begin{bmatrix} +a/2 & a^2/2gA \\ gA/2 & +a/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aH/2 + a^2Q/2gA \\ gAH/2 + aQ/2 \end{bmatrix}$$

$$F^-(U) = \begin{bmatrix} -a/2 & a^2/2gA \\ gA/2 & -a/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -aH/2 + a^2Q/2gA \\ gAH/2 - aQ/2 \end{bmatrix}$$

따라서 구역내부의 임의의 점사면 $i+1/2$ 에서 흐름벡토르 $F_{i+1/2}$ 는 다음과 같이 표시된다.(그림 1)

$$F_{i+1/2} = F_i^+(U_i^n) + F_{i+1}^-(U_{i+1}^n) \quad (14)$$

$$F_{i+1/2} = \begin{bmatrix} \frac{a}{2}(H_i^n - H_{i+1}^n) + \frac{a^2}{2gA}(Q_i^n + Q_{i+1}^n) \\ \frac{gA}{2}(H_i^n + H_{i+1}^n) + \frac{a}{2}(Q_i^n - Q_{i+1}^n) \end{bmatrix} \quad (15)$$

다음으로 식 (3)의 풀이를 초기조건으로 가지는 식 (4)의 풀이는 다음과 같은 4차룽게-쿠타도식을 리용하여 푼다.

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \frac{Cr}{a}(F_{i-1/2} - F_{i+1/2})$$

단계 1 $K_1 = \Delta t J(t^n, U_i^{n+1}), U_1 = U_i^{n+1} + K_1/2$

단계 2 $K_2 = \Delta t J(t^n + \Delta t/2, U_1), U_2 = U_i^{n+1} + K_2/2$

단계 3 $K_3 = \Delta t J(t^n + \Delta t/2, U_2), U_3 = U_i^{n+1} + K_3$

단계 4 $K_4 = \Delta t J(t^n + \Delta t, U_3)$

최종적인 풀이는 다음과 같다.

$$U_i^{n+1} = U_i^{n+1} + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6 \quad (16)$$

검사면들에서의 경계조건은 $U_{1/2} = U_1$ 과 $U_{N+3/2} = U_{N+1}$ 을 만족시킨다. 저수지-관-발브체계에서 저수지의 조건($i=1$)은 부의 특성선을 따르는 리만불변량으로부터 결정된다. 즉

$$C_a H_1^{n+1} - Q_1^{n+1} = C_a H_2^n - Q_2^n$$

여기서 $C_a = gA/a$ 이다. 만일 입구손실을 무시한다면 경계에서 풀이벡토르는

$$U_1^{n+1} = \begin{bmatrix} H_1^{n+1} \\ Q_1^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{res} \\ Q_2^n + C_a(H_{res} - H_2^n) \end{bmatrix} \quad (17)$$

으로 된다. 여기서 H_{res} 는 팅겔면으로부터 저수지수면까지의 높이이다. 발브위치($i=N+1$)에서의 경계조건도 정의 특성선을 따르는 리만불변량으로부터 결정한다. 즉

$$C_a H_{N+1}^{n+1} + Q_{N+1}^{n+1} = C_a H_N^n + Q_N^n$$

관에서 발브의 순간적인 닫김에 대하여 압력수두와 류량은

$$U_{N_x+1}^{n+1} = \begin{bmatrix} H_{N_x+1}^{n+1} \\ Q_{N_x+1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{N_x}^n + C_a H_{N_x}^n \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

으로 표시되며 발브의 상대적인 닫김이 시간에 관한 함수형식으로 주어지면 발브위치에서의 조건은

$$U_{N+1}^{n+1} = \begin{bmatrix} H_{N+1}^{n+1} \\ Q_{N+1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_N^n + C_a H_N^n - Q_{N+1}^{n+1} \\ 0.5(-C_a + \sqrt{C_v^2 + 4C_p C_v}) \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$C_v = (\tau_v Q_s)^2 / (C_a H_{sN+1}), \quad C_p = Q_N^n + C_a H_N^n$$

으로 표시된다. 여기서 τ_v 는 발브의 상대적인 닫김을 표시하며 Q_s 와 H_{sN+1} 은 각각 정상상태의 발브위치에서 류량과 압력수두를 표시한다.

2. 계 산 결 과

계산에 리용된 자료들은 다음과 같다. 관의 직경은 $D=0.75\text{m}$, 관의 길이는 $L=1\,200\text{m}$, 파의 전파속도는 $a=1\,100\text{m/s}$, 저수지의 수위는 $H_{res}=120\text{m}$, 정상상태에서 류량은 $Q_s=0.45\text{m}^3/\text{s}$, 마찰인자는 $f=0.021$, 유한체적의 수는 $N=60$ 이다.

그림 2는 순간적으로 발브를 완전히 닫는 경우 발브위치에서의 압력수두를 보여준다.

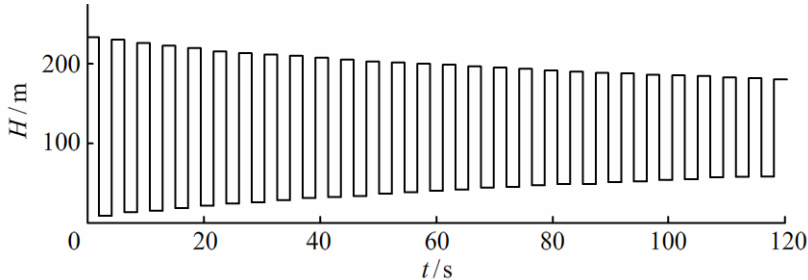


그림 2. 순간적인 발브닫김의 경우 발브위치에서 압력수두

계산결과들은 흐름벡토르분리도식이 수력충격현상을 반영한다는것을 보여준다. 계산결과에 의하면 특성선방법(MOC)과 흐름벡토르분리(FVS)에 의하여 얻어진 발브위치에서 압력수두의 최대오차는 $\Delta H_{\max}=0.03\text{m}$ 이고 상대오차는 0.025%로서 거의 동일하다.

그림 3은 발브의 닫김이 $\tau_v=1-t/t_{\text{val}}$, $t_{\text{val}}=12\text{s}$ 로 주어지는 경우 발브위치에서의 압력수두를 보여준다. 여기서 t_{val} 은 발브의 닫김시간이다.

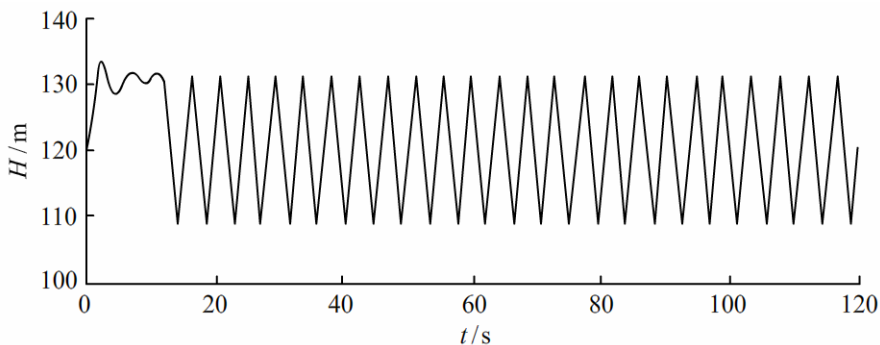


그림 3. 주어진 발브닫김의 경우 발브위치에서 압력수두

이 경우에도 MOC도식과 FVS도식에 의하여 얻어진 발브위치에서 압력수두의 최대오차는 $\Delta H_{\max}=0.02\text{m}$ 이고 상대오차는 0.13%로서 거의 동일하다.

두 계산결과들은 FVS도식이 MOC도식만큼 정확하다는것을 보여준다. 두 도식에서 계산결과가 차이나는것은 원천항(점성항)의 취급방법이 서로 차이나는데 있다. 잘 알려진 MOC도식에서는 원천항을 이전 순간의 류량값을 리용하여 결정하지만 FVS도식에서는 시간에 관한 고차정확도의 룽계-쿠라도식을 리용하여 결정한다.

맺는 말

FVS도식은 MOC도식과 함께 수력충격흐름의 해석에 응용할수 있는 한가지 도식이다. FVS도식은 MOC도식에 비하여 크란트수를 임의로 선택할수 있으므로 관의 내부에 공동이 있는 경우의 수력충격해석에서 더 우월하다고 말할수 있다.

참고 문헌

- [1] 김일성종합대학학보(자연과학), 62, 10, 13, 주체105(2016).
- [2] M. H. Chaudhry; Applied Hydraulic Transients, Van Nostrand Reinhold, 50, 2014.
- [3] S. Qiang et al.; Journal of Harbin Institute of Technology(New Series), 22, 3, 69, 2015.
- [4] T. U. Jang et al.; Journal of Harbin Institute of Technology(New Series), 23, 2, 9, 2016.
- [5] T. U. Jang et al.; Journal of Hydrodynamics, 29, 2, 243, 2017.

주체106(2017)년 8월 10일 원고접수

Study on Application of Flux Vector Splitting Approach for Water Hammer Analysis

Ku Nam Chol, Jang Tae Uk

A numerical model for analysis of the water hammer problem is presented in this paper. The model is the scheme using the flux vector splitting (FVS) approach based on the finite volume method (FVM) and splitting partial differential equations(PDEs) with source term. The governing equations for analysis of water hammer problem are described and it is transformed into an equation for FVS scheme. The FVS scheme, the solution method of ordinal differential equations(ODEs) with source term and boundary conditions are presented. The results calculated by FVS approach are compared with that obtained by using the method of characteristics(MOC) approach in the numerical tests.

Key words: water hammer, flux vector splitting, MOC