김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제3호

비선형원천항을 가진 2차원시간분수계파동방정식에 대한 시간수렴차수 2를 가지는 계차도식

김종철, 김광혁

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《나라의 과학기술을 세계적수준에 올려세우자면 발전된 과학기술을 받아들이는것과 함께 새로운 과학기술분야를 개척하고 그 성과를 인민경제에 적극 받아들여야 합니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제11권 138~139페지)

론문에서는 캐푸토분수계도함수에 대한 고차정확도의 근사공식을 리용하여 비선형원천항을 가진 2차원시간분수계파동방정식에 대한 계차도식을 구성하고 풀이의 유일존재성을 밝히며 도식이 무조건안정하고 리산 H^1 – 노름에 관해 시간수렴차수 2를 가진다는것을 증명하였다.

1. 문제설정

론문에서는 다음의 시간분수계파동방정식을 고찰한다.

$$\frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma}(x,\ y,\ t)=\Delta u(x,\ y,\ t)-\frac{\partial u}{\partial t}(x,\ y,\ t)+f(x,\ y,\ t)+g(u(x,\ y,\ t)) \tag{1}$$
$$(x,\ y)\in\Omega,\ t\in(0,\ T]$$

$$u(x,\ y,\ t)=\varphi(x,\ y,\ t),\ (x,\ y)\in\partial\Omega,\ t\in[0,\ T] \tag{2}$$

$$u(x,\ y,\ 0)=\phi(x,\ y),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,\ y,\ 0)=\psi(x,\ y),\ (x,\ y)\in\Omega \tag{3}$$

여기서 $\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$, $\Omega=(0,\ L_1)\times(0,\ L_2)$ 이고 $\partial\Omega$ 는 Ω 의 경계이며 $(x,\ y)\in\partial\Omega$ 일 때 $\varphi(x,\ y,\ 0)=\phi(x,\ y),\ \frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,\ y,\ 0)=\psi(x,\ y)$ 이다. 그리고 $1<\gamma<2$ 이고 $\frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma}$ 는

$$\frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma}(x,\ y,\ t)=\frac{1}{\Gamma(2-\gamma)}\int_0^t\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(x,\ y,\ s)\frac{1}{(t-s)^{\gamma-1}}ds,\ t>0$$

으로 정의되는 γ 계의 캐푸토분수계도함수를 표시한다.

론문에서는 $f,\ g,\ \varphi,\ \phi,\ \psi$ 가 모두 자기의 정의역에서 충분히 미끈한 함수들이며 문제 (1)－(3)이 유일한 풀이 $u(x,\ y,\ t)\in C^{(3,\ 4,\ 4)}(\overline{\Omega}\times[0,\ T])$ 를 가진다고 가정한다.

선행연구[1]에서는 식 (1)에서 1계시간도함수항이 없고 $g(u)\equiv 0$ 인 경우에 리산 L^2 – 노름과 L^∞ – 노름에 관하여 시간수렴차수 $3-\gamma$ 를 가지는 계차도식을 제기하였다.

선행연구[2]에서는 식 (1)에서 $\gamma=2,\ g(u)=u^3$ 인 옹근수계 2차원반선형파동방정식에 대하여 비선형인 계차도식과 선형화된 계차도식을 제기하고 두 도식의 풀이의 유일존재성과 시간방향과 공간방향에서 모두 리산 H^1 – 노름에 관해 시간수렴차수 2를 가진다는

것을 밝혔다.

선행연구[4]에서는 식 (1)에서 1계시간도함수항이 없고 $g(u)\equiv 0$ 인 경우에 시간수렴차수 2를 가지는 계차도식을 구성하고 안정성과 수렴성을 해석하였다.

론문에서는 비선형원천항을 가진 2차원시간분수계파동방정식 (1)－(3)에 대하여 첫 시간수준에서만 비선형이고 기타 수준들에서는 선형인 음계차도식을 제기하고 풀이의 유일존재성과 무조건안정성을 밝히며 리산 H^1 －노름에 관해 시간수렴차수 2를 가진다는것을 증명하였다.

2. 계차도식의 유도

3개의 정의 옹근수 $M_1,\ M_2,\ N$ 을 취하고 $h_1 = L_1/M_1,\ h_2 = L_2/M_2,\ \tau = T/N$ 라고 하자.

$$
\begin{aligned}
&x_n = nh_1,\ y_m = mh_2,\ t_k = k\tau\\
&\Omega_h = \{(n,\ m)\,|\,1\le n\le M_1-1,\ 1\le m\le M_2-1\}\\
&\Gamma_h = \{(n,\ m)\,|\,(x_n,\ y_m)\in\partial\Omega,\ 0\le n\le M_1,\ 0\le m\le M_2\}\\
&\overline{\Omega}_h = \Omega_h\cup\Gamma_h = \{(n,\ m)\,|\,0\le n\le M_1,\ 0\le m\le M_2\}\\
&\Omega_\tau = \{k\,|\,0\le k\le N\}
\end{aligned}
$$

으로 표시하자. $\overline{\Omega}_h$ 우에서 정의된 그물함수공간

$$
V_h = \{u\,|\,u=\{u_{n,\,m}\,|\,(n,\ m)\in\overline{\Omega}_h\}\},\ \dot{V}_h = \{u\,|\,u\in V_h;\ u_{n,\,m}=0\ \ (n,\ m)\in\Gamma_h\}
$$

들을 도입하자.

$\upsilon\in V_h$ 에 대하여 다음의 표시들을 도입한다.

$$
\begin{aligned}
&\delta_x\upsilon_{n+1/2,\,m} = \frac{1}{h_1}(\upsilon_{n+1,\,m}-\upsilon_{n,\,m}),\ \delta_x^2\upsilon_{n,\,m} = \frac{1}{h_1}(\delta_x\upsilon_{n+1/2,\,m}-\delta_x\upsilon_{n-1/2,\,m})\\
&\delta_y\upsilon_{n,\,m+1/2} = \frac{1}{h_2}(\upsilon_{n,\,m+1}-\upsilon_{n,\,m}),\ \delta_y^2\upsilon_{n,\,m}^k = \frac{1}{h_2}(\delta_y\upsilon_{n,\,m+1/2}-\delta_y\upsilon_{n,\,m-1/2})\\
&\Delta_h u_{n,\,m} = \delta_x^2 u_{n,\,m}+\delta_y^2 u_{n,\,m}
\end{aligned}
$$

Ω_τ 우에서 정의된 그물함수 $w=\{w^k\,|\,0\le k\le N\}$ 에 대하여

$$
\delta_t w^{1/2} = \frac{1}{\tau}(w^1-w^0),\ w^{1/2} = \frac{1}{2}(w^1+w^0)
$$

으로 표시한다.

뒤에서는 선행연구[3]에서 정의된 다음의 수렬 $\{c_n^{(k+1)}\}$ 을 리용한다.

$$
\begin{aligned}
&0<\alpha<1,\ \sigma = 1-\frac{\alpha}{2},\ t_{k+\sigma} = (k+\sigma)\tau\\
&a_0 = \sigma^{1-\alpha},\ a_l = (l+\sigma)^{1-\alpha}-(l-1+\sigma)^{1-\alpha}\\
&b_l = \frac{1}{2-\alpha}[(l+\sigma)^{2-\alpha}-(l-1+\sigma)^{2-\alpha}]-\frac{1}{2}[(l+\sigma)^{1-\alpha}+(l-1+\sigma)^{1-\alpha}],\ l\ge 1
\end{aligned}
$$

로 표시하자. 이때 $k=0$ 에 대해서는

$$c_0^{(k+1)} = a_0$$

으로, $k \geq 1$에 대해서는

$$c_n^{(k+1)} = \begin{cases} a_0 + b_1, & n = 0 \\ a_n + b_{n+1} - b_n, & 1 \leq n \leq k-1 \\ a_k - b_k, & n = k \end{cases}$$

로 정의하고

$$g_n^{(k+1)} = \frac{1}{\tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)} c_{k-n}^{(k+1)}$$

로 표시하자.

다음의 3개의 보조정리가 문제 (1)—(3)에 대한 계차도식을 유도할 때 리용된다.

보조정리 1 [4] $f \in C^3[0,\ T]$라고 가정하면

$$D_{\hat{t}} f(t_k) \equiv \frac{1}{2\tau}[(2\sigma+1)f(t_{k+1}) - 4\sigma f(t_k) + (2\sigma-1)f(t_{k-1})] = \frac{df}{dt}(t_{k+\sigma}) + O(\tau^2),\ k \geq 1$$

이 성립한다.

보조정리 2 [3] $f \in C^3[0,\ T]$, $\alpha \in (0,\ 1)$이라고 가정하면

$$\frac{d^\alpha f}{dt^\alpha}(t_{k+\sigma}) = \sum_{n=0}^{k} g_n^{(k+1)}[f(t_{n+1}) - f(t_n)] + O(\tau^{3-\alpha})$$

가 성립한다.

보조정리 3 [5] $0 < \alpha < 1$일 때 $1 \leq k \leq N$에 대하여 다음의 2개의 등식들이 성립한다.

$$f(t_{k+\sigma}) = f^{k+\sigma} + O(\tau^2),\ 0 \leq k \leq N-1 \tag{4}$$

$$g(v(t_{k+\sigma})) = g(v^{k+\sigma}) + O(\tau^2),\ 1 \leq k \leq N-1 \tag{5}$$

여기서

$$f^{k+\sigma} = \sigma f^{k+1} + (1-\sigma) f^k,\ g(v^{k+\sigma}) = (1+\sigma) g(v^k) - \sigma g(v^{k-1})$$

이다.

$$\alpha = \gamma - 1,\ v(x,\ y,\ t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,\ y,\ t) \tag{6}$$

로 놓자.

비선형원천항 g에 대하여 $g \in C^2(\mathbf{R})$이고 적당한 정의 상수 C_g와 L_g가 있어서

$$|g''(y)| \leq C_g |y| \text{(또는 } |g''(y)| \leq C_g),\ |g(y) - g(z)| \leq L_g |y - z|\ (\forall y,\ z \in \mathbf{R})$$

라고 가정하자.

그물함수

$$U_{n,m}^k = u(x_n,\ y_m,\ t_k),\ V_{n,m}^k = v(x_n,\ y_m,\ t_k),\ F_{n,m}^k = f(x_n,\ y_m,\ t_k)\ (n,\ m) \in \overline{\Omega}_h,\ k \in \Omega_\tau$$

들을 도입하자.

보조정리 1—3으로부터 자름오차가 $O(\tau^2 + h_1^2 + h_2^2)$인 다음과 같은 계차도식을 구성할수 있다.

$$g_0^{(1)}(v_{n,m}^1 - v_{n,m}^0) = \sigma\Delta_h u_{n,m}^1 + (1-\sigma)\Delta_h u_{n,m}^0 - \sigma v_{n,m}^1 - (1-\sigma)v_{n,m}^0 + F_{n,m}^\sigma + \\ + \sigma g(u_{n,m}^1) + (1-\sigma)g(u_{n,m}^0) \ \ (n,\ m) \in \Omega_h$$

$$\sum_{i=0}^{k} g_i^{(k+1)}(v_{n,m}^{i+1} - v_{n,m}^i) = \sigma\Delta_h u_{n,m}^{k+1} + (1-\sigma)\Delta_h u_{n,m}^k - \sigma v_{n,m}^{k+1} - (1-\sigma)v_{n,m}^k + F_{n,m}^{k+\sigma} + \\ + (1+\sigma)g(u_{n,m}^k) - \sigma g(u_{n,m}^{k-1}) \ \ (n,\ m) \in \Omega_h,\ 1 \le k \le N-1 \tag{7}$$

$$\delta_t \Delta_h u_{n,m}^{1/2} = \Delta_h v_{n,m}^{1/2} \ \ (n,\ m) \in \Omega_h$$

$$D_{\hat{t}} \Delta_h u_{n,m}^k = \sigma\Delta_h v_{n,m}^{k+1} + (1-\sigma)\Delta_h v_{n,m}^k \ \ (n,\ m) \in \Omega_h,\ 1 \le k \le N-1$$

$$u_{n,m}^0 = \phi(x_n,\ y_m),\ v_{n,m}^0 = \psi(x_n,\ y_m) \ \ (n,\ m) \in \Omega_h$$

$$u_{n,m}^k = \varphi(x_n,\ y_m,\ t_k),\ v_{n,m}^k = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x_n,\ y_m,\ t_k) \ \ (n,\ m) \in \Gamma_h,\ 0 \le k \le N$$

3. 계차도식의 해석

정리 1 τ와 $h_1,\ h_2$를

$$\frac{1}{2}\tau^{1+\alpha}\Gamma(2-\alpha)\max\{4\sigma^\alpha(h_1^{-2} + h_2^{-2}),\ L_g[1 - 2\sigma^\alpha\Gamma(2-\alpha)(h_1^{-2} + h_2^{-2})\tau^{1+\alpha}]^{-1}\} < 1 \tag{8}$$

이 성립하도록 택하면 도식 (7)은 유일한 풀이를 가진다.

다음의 정리에서는 계차도식의 안정성과 수렴성을 론의하기 위한 사전평가식을 유도한다. 정리에서 상수 C는 $\tau,\ h_1,\ h_2,\ k$에 무관계한 상수로서 위치에 따라 구체적인 값이 차이날수 있는 일반적인 상수를 표시한다.

가정 $c_2 := \dfrac{12g_0^{(1)}(L_1^2 + L_2^2)}{7L_g^2 L_1^2 L_2^2}$보다 작은 상수 c_0에 대해 $\tau \le c_0 < c_2$가 성립하도록 τ를 택한다.

정리 2 $u^k,\ \tilde{u}^k,\ v^k,\ \tilde{v}^k,\ p^k,\ q^k,\ F^k \in V_h,\ w^k := u^k - \tilde{u}^k,\ z^k := v^k - \tilde{v}^k \ \ (k = 0,\ \cdots,\ N)$들이 관계식

$$g_0^{(1)}(z_{n,m}^1 - z_{n,m}^0) = \sigma\Delta_h w_{n,m}^1 + (1-\sigma)\Delta_h w_{n,m}^0 - \sigma z_{n,m}^1 - (1-\sigma)z_{n,m}^0 + F_{n,m}^\sigma + \sigma[g(u_{n,m}^1) - \\ - g(\tilde{u}_{n,m}^1)] + p_{n,m}^\sigma + (1-\sigma)[g(u_{n,m}^0) - g(\tilde{u}_{n,m}^0)] \ \ (n,\ m) \in \Omega_h$$

$$\sum_{i=0}^{k} g_i^{(k+1)}(z_{n,m}^{i+1} - z_{n,m}^i) = \sigma\Delta_h w_{n,m}^{k+1} + (1-\sigma)\Delta_h w_{n,m}^k - \sigma z_{n,m}^{k+1} - (1-\sigma)z_{n,m}^k + F_{n,m}^{k+\sigma} + \\ + (1+\sigma)[g(u_{n,m}^k) - g(\tilde{u}_{n,m}^k)] - \sigma[g(u_{n,m}^{k-1}) - g(\tilde{u}_{n,m}^{k-1})] + p_{n,m}^k \ \ (n,\ m) \in \Omega_h,\ 1 \le k \le N-1$$

$$(1/\tau)\Delta_h w_{n,m}^1 = (1/\tau)\Delta_h w_{n,m}^0 + \Delta_h z_{n,m}^{1/2} + q_{n,m}^{1/2}/\tau \ \ (n,\ m) \in \Omega_h$$

$$D_{\hat{t}} \Delta_h w_{n,m}^k = \sigma\Delta_h z_{n,m}^{k+1} + (1-\sigma)\Delta_h z_{n,m}^k + q_{n,m}^{k+\sigma} \ \ (n,\ m) \in \Omega_h,\ 1 \le k \le N-1$$

$$w_{n,m}^0 = \phi(x_n,\ y_m),\ z_{n,m}^0 = \psi(x_n,\ y_m) \ \ (n,\ m) \in \Omega_h$$

$$w_{n,m}^k = 0,\ z_{n,m}^k = 0 \ \ (n,\ m) \in \Gamma_h,\ 0 \le k \le N \tag{9}$$

을 만족시킨다고 하자. 이때 가정밑에서 다음의 부등식이 성립한다.

$$\| \nabla_h w^k \|^2 \le Q_1,\ 0 \le k \le N \tag{10}$$

$$\tau \sum_{n=1}^{k} \| z^n \|^2 \le Q_1,\ 0 \le k \le N \tag{11}$$

여기서

$$Q_1 = C\Big(\| z^0 \|^2 + \tau^2 \| \nabla_h z^0 \|^2 + \| w^0 \|^2 + \| \Delta_h w^0 \|^2 + \| \nabla_h w^0 \|^2 + \\ + \| F^\sigma \|^2 + \| p^\sigma \|^2 + \| q^{1/2} \|^2 + \tau \sum_{l=0}^{k} \| F^{l+\sigma} \|^2 + \tau \sum_{l=1}^{k} \| p^l \|^2 + \tau \sum_{l=1}^{k} \| q^{l+\sigma} \|^2 \Big)$$

이다.

정리 3 초기함수 ϕ, ψ 와 오른변함수 f 및 g 에 관한 계차도식 (7)의 풀이를 $u^k,\ v^k$ $(0 \le k \le N)$ 로 표시하고 그것들이 각각 $\widetilde{\phi},\ \widetilde{\psi},\ \widetilde{f},\ \widetilde{g}$ 로 외곡된 경우의 풀이를 $\widetilde{u}^k,\ \widetilde{v}^k,\ 0 \le k \le N$ 으로 표시하면 오차 $w^k = u^k - \widetilde{u}^k,\ z^k = v^k - \widetilde{v}^k$ 에 대해 우의 가정밑에서 다음의 부등식들이 성립한다.

$$\| \nabla_h w^k \|^2 \le Q_2,\ 0 \le k \le N \tag{12}$$

$$\tau \sum_{n=1}^{k} \| z^n \|^2 \le Q_2,\ 0 \le k \le N \tag{13}$$

여기서

$$Q_2 = C\Big(\| \Psi - \widetilde{\Psi} \|^2 + \tau^2 \| \nabla_h (\Psi - \widetilde{\Psi}) \|^2 + \| \Phi - \widetilde{\Phi} \|^2 + \| \Delta_h (\Phi - \widetilde{\Phi}) \|^2 + \\ + \| \nabla_h (\Phi - \widetilde{\Phi}) \|^2 + \max_{0 \le l \le N} \| g(\widetilde{u}^1) - \widetilde{g}(\widetilde{u}^1) \|^2 + \max_{0 \le l \le N} \| F^{l+\sigma} - \widetilde{F}^{l+\sigma} \|^2 \Big)$$

이다.

정리 4 우의 가정밑에서 계차도식 (7)은 초기함수 ϕ, ψ 와 오른변함수 f 에 관하여 리산 L^2 – 노름과 리산 H^1 – 노름에 관하여 무조건안정하다.

이제는 계차도식의 수렴성을 해석한다.

$$e_{n,m}^k = U_{n,m}^k - u_{n,m}^k,\ \rho_{n,m}^k = V_{n,m}^k - v_{n,m}^k\ \ (n,\ m) \in \overline{\Omega}_h,\ 0 \le k \le N \tag{14}$$

이라고 하자.

정리 5 문제 (1)－(3)이 유일한 풀이 u 를 가지고

$$\{u_{n,m}^k,\ v_{n,m}^k \mid 0 \le n \le M,\ 0 \le m \le M_2,\ 0 \le k \le N\}$$

이 계차도식 (7)의 유일한 풀이라고 하자. 이때 $U_{n,m}^k = u(x_n,\ y_m,\ t_k)$ 로 놓고 오차를

$$e_{n,m}^k = U_{n,m}^k - u_{n,m}^k,\ \rho_{n,m}^k = V_{n,m}^k - v_{n,m}^k$$

로 표시하면 우의 가정밑에서 부등식

$$\| \nabla_h e^k \| \le C(\tau^2 + h_1^2 + h_2^2),\ \tau \sum_{n=1}^{k} \| \rho^n \|^2 \le C(\tau^2 + h_1^2 + h_2^2) \tag{15}$$

이 성립한다.

정리 6 우의 가정밑에서 계차도식 (7)은 리산 L^2 – 노름과 리산 H^1 – 노름에 관하여 수렴계수 $O(\tau^2 + h_1^2 + h_2^2)$ 을 가지고 수렴한다.

참 고 문 헌

[1] Z. G. Liu et al.; Applied Numerical Mathematics, 134, 17, 2018.
[2] T. Achouri; Numer. Methods Partial Differential Equations, 35, 200, 2019.
[3] A. A. Alikhanov; J. Comput. Phys., 280, 424, 2015.
[4] H. Sun et al.; Numer. Methods Partial Differential Equations, 32, 3, 970, 2016.
[5] G. H. Gao et al.; J. Comput. Phys., 280, 510, 2015.

주체109(2020)년 3월 15일 원고접수

Temporal Second Order Difference Scheme for 2D Fractional Wave Equation with Nonlinear Source Term

Kim Jong Chol, Kim Kwang Hyok

In this paper, a difference scheme is proposed for two-dimensional time-fractional wave equation with nonlinear source term by using the higher order approximate formula for Caputo fractional derivative.

Keyword: fractional wave equation