김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체105(2016)년 제62권 제8호 Vol. 62 No. 8 JUCHE105(2016).

시간에 관한 다항합성분수계도함수를 가지는 공간-시간 선형분수계반응-확산방정식의 풀이

박승진, 리국철

경애하는 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《과학연구부문에서 최첨단돌파전을 힘있게 벌려 경제발전과 국방력강화, 인민생활향상에 이바지하는 가치있는 연구성과들을 많이 내놓아야 합니다.》

분수계확산방정식은 퍼지는 매질의 확산과정을 묘사하는것으로 하여 중요하게 쓰인다.

고전반응-확산방정식모형화에서 개체밀도 $u(x,\ t)$는 위치 x와 시간 t에서 다음의 가장 간단한 형태의 반응-확산방정식의 풀이로 된다.

$$\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t}=d\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial x^2}+R(u) \tag{1}$$

여기서 d는 확산결수이고 $R(u)$는 선형 또는 비선형인 원천항이다.

보통의 반응-확산방정식에 의한 확산과정의 모형화는 느리게 확산되는 과정을 취급하는 부족점으로 하여 실지 많은 확산현상들에 대한 모형화에는 적합치 않다.

그러나 분수계반응-확산방정식은 우와 같은 부족점이 없이 확산현상들을 모형화한다.

선행연구[4]에서는 다음의 일반화된 공간-시간분수계확산방정식을 론의하였다.

$$D_{0+}^{\mu,\ \nu}u(x,\ t)=K_{\mu,\ \nu}\frac{\partial^{\alpha}}{\partial|x|^{\alpha}}u(x,\ t),\ t>0,\ -\infty<x<+\infty$$

선행연구[1]에서는 다음의 공간-시간선형분수계반응-확산방정식의 풀이를 구하였다.

$$D_t^{\alpha,\ \beta}u(x,\ t)=\lambda\frac{\partial^{\gamma}}{\partial|x|^{\gamma}}u(x,\ t)+cu(x,\ t)+\phi(x,\ t),\ t>0,\ -\infty<x<\infty$$

실지 응용에서 일부 현상들은 다항확산방정식들로 모형화된다.

다항시간분수계확산방정식은 여러 계수의 시간분수계확산방정식의 한가지 특수경우이며 이 경우에 무게함수는 정의무게결수를 가지는 디라크델타함수들의 유한선형결합형태로 된다.

선행연구[2]에서는 다음의 다항분수계확산방정식의 풀이를 구하였다.

$$P_{\alpha,\ \alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n}(D_t)u(x,\ t)=k\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial x^2}+f(x,\ t),\ 0<x<L,\ t>0$$

여기서 $P_{\alpha,\ \alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n}(D_t)u(x,\ t)=D_t^{\alpha}+\sum_{i=1}^{n}d_iD_t^{\alpha_i}$이다.

론문에서는 우의 다항분수계도함수 $P_{\alpha,\ \alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n}(D_t)u(x,\ t)$에서의 시간에 관한 리만-류빌분수계도함수 $D_t^{\alpha_i}u(x,\ t)$대신에 일반화된 분수계도함수들로 된 시간에 관한 다항합성분

수계도함수를 생각하고 공간도함수로서 비대칭도가 령인 리스－헬러분수계도함수를 가지는 공간－시간선형분수계반응－확산방정식을 연구하였으며 그것의 풀이표시식을 라쁠라스변환과 푸리에변환을 리용하여 구하였다.

정의 1[3, 4] 함수 $u(t)\in L_1[0,\ T]$와 $\alpha>0,\ n=\lceil\alpha\rceil,\ 0\le\beta\le1$에 대하여

$$D_{0+}^{\alpha,\ \beta}u(t):=\left(I_{0+}^{\beta(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}(I_{0+}^{(1-\beta)(n-\alpha)}u)\right)(t),\quad I_{0+}^{(1-\beta)(n-\alpha)}u(t)\in AC^n(\overline{\boldsymbol{R}}_+),\ \ t>0$$

을 일반화된 α계 β형리만－류빌분수계도함수라고 부르고 $D_{0+}^{\alpha,\ \beta}$를 일반화된 α계 β형리만－류빌분수미분연산자 또는 합성분수계도함수라고 부른다.

주의 1 $D_{0+}^{\alpha,\ 0}u(t)\equiv D_{0+}^{\alpha}u(t),\ D_{0+}^{\alpha,\ 1}u(t)\equiv {}^{c}D_{0+}^{\alpha}u(t)$이다. 즉 합성분수계도함수는 $\beta=0$일 때는 리만－류빌분수계도함수와 일치하고 $\beta=1$일 때는 캐푸터분수계도함수와 일치한다.

정의 2[1－3] $F\{{}_xD_\theta^\gamma u(x)\ ;\ k\}=-\psi_\gamma^\theta(k)\tilde{u}(k)$와 같이 정의되는 분수계도함수 ${}_xD_\theta^\gamma u(x)$를 계수가 $\gamma\ (0<\gamma\le2)$이고 비대칭도가 θ인 리스－헬러분수계도함수라고 부른다. 여기서 $\psi_\gamma^\theta(k)=|k|^\gamma\ e^{i(\operatorname{sign}k)\theta\pi/2},\ |\theta|<\min\{\gamma,\ 2-\gamma\}$이고 $\tilde{u}(k)$는 $u(x)$의 푸리에변환

$$\tilde{u}(k)=F\{u(x)\ ;\ k\}=\int_{-\infty}^{\infty}u(x)e^{ikx}dx$$

이며 푸리에거꿀변환은 $u(x)=F^{-1}\{\tilde{u}(k)\ ;\ x\}=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{u}(k)e^{-ikx}dk$.

비대칭도가 $\theta=0$일 때 γ계리스－헬러분수계도함수는 다음과 같다.

$$\frac{d^\gamma}{d|x|^\gamma}u(x):={}_xD_\theta^\gamma u(x)=F^{-1}\{-|k|^\gamma\ \tilde{u}(k)\ ;\ x\}\tag{2}$$

정의 3[1－3] 다항미따그－레플레르함수는 n차원인 경우 다음과 같이 정의된다.

$$E_{(a_1,\ \cdots,\ a_n),\ b}(z_1,\ \cdots,\ z_n)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{l_1+\cdots+l_n=k\\ l_1\ge0,\ \cdots,\ l_n\ge0}}\frac{k!}{l_1!\cdots l_n!}\left(\prod_{i=1}^{n}z_i^{l_i}\bigg/\Gamma\left(b+\sum_{i=1}^{n}a_il_i\right)\right)$$

여기서 $b>0,\ a_i>0,\ |z_i|<\infty,\ i=1,\ \cdots,\ n$이다.

보조정리 1[1] $n-1<\mu\le n,\ n\in\boldsymbol{N},\ 0\le\nu\le1$에 대하여 합성분수계도함수의 라쁠라스변환은 $L[D_{0+}^{\mu,\ \nu}u(t)](s)=s^\mu L[u(t)](s)-\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}s^{n-k-1-\nu(n-\mu)}\frac{d^k}{dt^k}(I_{0+}^{(1-\nu)(n-\mu)}u)(0+)$와 같다.

보조정리 2 $h(t)\in L_1(\boldsymbol{R}),\ \varphi(t)\in L_1(\boldsymbol{R})$이면 합성적 $h*\varphi=(h*\varphi)(t)=\displaystyle\int_0^t h(t-x)\varphi(x)dx$의 라쁠라스변환은 $(L(h*\varphi))(p)=(Lh)(p)(L\varphi)(p)$와 같다.

주의 2 함수 $u(x,\ t)$의 $0<\alpha_i\le1,\ 0<\beta_i\le1$인 t에 관한 합성분수계도함수를 ${}_tD_{0+}^{\alpha_i,\ \beta_i}u(x,\ t)$로, t에 관한 α계분수계적분을 ${}_tI_{0+}^{\alpha}u(x,\ t)$로 표시한다.

정의 4 $u(x,\ t)$의 합성분수계도함수들의 유한선형결합 ${}_tD_{0+}^{\alpha_0,\ \beta_0}u(x,\ t)+\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i\,{}_tD_{0+}^{\alpha_i,\ \beta_i}u(x,\ t)$를 $u(x,\ t)$의 다항합성분수계도함수라고 부른다.

다음의 다항공간－시간선형분수계반응－확산방정식을 보자.

$$ {}_tD_{0+}^{\alpha_0,\ \beta_0}u(x,\ t)+\sum_{i=1}^{n}a_i\,{}_tD_{0+}^{\alpha_i,\ \beta_i}u(x,\ t)=\lambda\frac{\partial^\gamma}{\partial|x|^\gamma}u(x,\ t)+cu(x,\ t)+\phi(x,\ t) \tag{3} $$

$$ u(\pm\infty,\ t)=0,\ \ t>0 \tag{4} $$

$$ (I_t^{(1-\beta_i)(1-\alpha_i)}u(x,\ t))_{t\to 0+}=g_i(x),\ \ i=0,\ \cdots,\ n,\ \ -\infty<x<\infty \tag{5} $$

여기서 $t>0,\ -\infty<x<\infty$ 이고 ${}_tD_{0+}^{\alpha_0,\ \beta_0}u(x,\ t)+\sum_{i=1}^{n}a_i\,{}_tD_{0+}^{\alpha_i,\ \beta_i}u(x,\ t)$ 는 다항합성분수계도함수, ${}_tD_{0+}^{\alpha_i,\ \beta_i}u(x,\ t)$ 는 $0<\alpha_i,\ \beta_i\le 1$ 인 t에 관한 함수 $u(x,\ t)$ 의 합성분수계도함수, $\frac{\partial^\gamma}{\partial|x|^\gamma}$ 는 계수가 $\gamma\ (0<\gamma\le 2,\ \ \gamma\ne 1)$ 이고 비대칭도가 령인 리스－헬러분수계도함수, $\lambda>0$ 은 확산결수, $c>0$ 은 반응항을 가지는 상수, $\phi(x,\ t)$ 는 원천을 표시한다. 그리고 $g_i(x)\in L_1(\boldsymbol{R})$, $\phi(x,\ t)\in L_1(\boldsymbol{R}\times[0,\ +\infty))$ 이다.

일반성을 잃지 않고 순서관계 $\alpha_0\ge\alpha_1\ge\cdots\ge\alpha_n$ 이 성립된다고 가정한다.

계수가 같은 경우 형이 큰 도함수를 앞첨수로 잡는다.

주의 3 함수 $u(t)\in L_1[0,\ T]$ 에 대하여 조건

$$ I_{0+}^{(1-\beta)(n-\alpha)}u(t)\in AC^n[0,\ T],\ n=\lceil\alpha\rceil,\ \ \alpha>0,\ \ 0\le\beta\le 1 \tag{6} $$

이 성립되면 $\frac{d^n}{dt^n}(I_{0+}^{(1-\beta)(n-\alpha)}u(t))$ 가 거의도처에서 존재하고 적분가능하며 따라서 함수 $u(t)$ 의 합성분수계도함수 $D_{0+}^{\alpha,\ \beta}u(t)$ 가 존재하며 적분가능하다. 즉 조건 (6)은 합성분수계도함수가 존재하기 위한 한가지 충분조건으로 된다. 우리는 $u(t)$ 가 조건 (6)을 만족시킬 때 $u(t)$ 의 적분가능한 $D_{0+}^{\alpha,\ \beta}u(t)$ 가 존재한다고 말한다.

보조정리 3 $u(t)\in L_1[0,\ T]$ 에 대하여 적분가능한 합성분수계도함수 $D_{0+}^{\alpha_{p_1},\ \beta_{p_1}}u(t)$ 가 존재하면 적분가능한 $D_{0+}^{\alpha_i,\ \beta_i}u(t),\ i=0,\cdots,\ p_1-1,\ p_1+1,\cdots,n$ 이 존재하며 $1-(1-\alpha_k)(1-\beta_k)<M$ 인 $D_{0+}^{\alpha_k,\ \beta_k}u(t)$ 에 대하여 $I_{0+}^{(1-\alpha_k)(1-\beta_k)}u(0+)=0$ 이 성립된다. 여기서 $0<\alpha_i\le 1,\ \ 0\le\beta_i\le 1$ ($i=0,\cdots,\ p_1-1,\ p_1+1,\cdots,\ n$)이다.

보조정리 4 라쁠라스변환에 의하여 다음의 등식들이 성립된다.

$$ L[t^{-(1-\alpha_0)(1-\beta)}E_{(\cdot),\,1-(1-\alpha_0(1-\beta))}(-\lambda t^{\alpha_0},\ -a_1t^{\alpha_0-\alpha_1},\ \cdots,\ -a_nt^{\alpha_0-\alpha_n})]=\frac{s^{-\beta(1-\alpha_0)}}{s^{\alpha_0}+\sum_{i=1}^{n}a_is^{\alpha_i}+\lambda} \tag{7} $$

$$ \frac{1}{a_0}L\left[t^{\alpha_0-\alpha_1-(1-\alpha_1)(1-\beta)}E_{(\cdot),\ 1+\alpha_0-\alpha_1-(1-\alpha_1)(1-\beta)}\left(-\frac{\lambda}{a_0}t^{\alpha_0},\ -\frac{a_1}{a_0}t^{\alpha_0-\alpha_1},\ \cdots,\ -\frac{a_n}{a_0}t^{\alpha_0-\alpha_n}\right)\right]=\frac{s^{-\beta(1-\alpha_1)}}{a_0s^{\alpha_0}+\sum_{i=1}^{n}a_is^{\alpha_i}+\lambda} \tag{8} $$

$$ L[t^{\alpha_0-1}E_{(\cdot),\ \alpha_0}(-\lambda t^{\alpha_0},\ -a_1t^{\alpha_0-\alpha_1},\ \cdots,\ -a_nt^{\alpha_0-\alpha_n})]=1\Big/\left(s^{\alpha_0}+\sum_{i=1}^{n}a_is^{\alpha_i}+\lambda\right) \tag{9} $$

여기서 편리를 위해 표시 $(\cdot)=(\alpha_0,\ \alpha_0-\alpha_1,\cdots,\ \alpha_0-\alpha_n)$ 을 리용하였다.

정리 문제 (3)－(5)의 풀이 $u(x,\ t)$는 다음과 같이 표시된다.

$$u(x,\ t)=\sum_{j=1}^{m}t^{\alpha_0-\alpha_{p_j}-(1-\alpha_{p_j})(1-\beta_{p_j})}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{g}_{p_j}(k)E_{(\cdot),\ 1+\alpha_0-\alpha_{p_j}-(1-\alpha_{p_j})(1-\beta_{p_j})}\cdot$$

$$\cdot(-(\lambda|k|^{\gamma}-c)t^{\alpha_0},\ -a_1t^{\alpha_0-\alpha_1},\ \cdots,\ -a_nt^{\alpha_0-\alpha_n})e^{-ikx}dk+\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}\int_0^t\tau^{\alpha_0-1}\cdot \tag{10}$$

$$\cdot E_{(\cdot),\ \alpha_0}((c-\lambda|k|^{\gamma})\tau^{\alpha_0},\ -a_1\tau^{\alpha_0-\alpha_1},\ \cdots,\ -a_n\tau^{\alpha_0-\alpha_n})\tilde{\phi}(k,\ t-\tau)d\tau dk$$

여기서 함수 $u(x,\ t)$에 대하여 t에 관한 적분가능한 합성분수계도함수가 존재하고 x에 관하여 절대적분가능하며 $\tilde{g}_{p_i}(k)$와 $\tilde{\phi}(k,\ t)$는 각각 함수 $g_{p_i}(x)$와 $\phi(x,\ t)$의 푸리에변환이다.

증명 식 (3)을 t에 관하여 라쁠라스변환하면 조건 (5)와 보조정리 1에 의하여

$$\left(s^{\alpha_0}+\sum_{i=1}^{n}a_is^{\alpha_i}\right)U(x,\ s)-s^{\beta_0(\alpha_0-1)}g_0(x)-\sum_{i=1}^{n}a_is^{\beta_i(\alpha_i-1)}g_i(x)=\lambda\frac{\partial^{\gamma}}{\partial x^{\gamma}}U(x,\ s)+cU(x,\ s)+\Phi(x,\ s) \tag{11}$$

여기서 $U(x,\ s)$와 $\Phi(x,\ s)$는 각각 함수 $u(x,\ t)$와 $\phi(x,\ t)$의 라쁠라스변환이다.

$g_i(x)=0,\ i\neq p_k,\ i=1,\ \cdots,\ n,\ k=1,\ \cdots,\ m$이므로 식 (10)은

$$\left(s^{\alpha_0}+\sum_{i=1}^{n}a_is^{\alpha_i}\right)U(x,\ s)-\sum_{j=1}^{m}a_{p_j}s^{\beta_{p_j}(\alpha_{p_j}-1)}g_{p_j}(x)=\lambda\frac{\partial^{\gamma}}{\partial x^{\gamma}}U(x,\ s)+cU(x,\ s)+\Phi(x,\ s). \tag{12}$$

이제 식 (11)을 x에 관하여 푸리에변환하면 식 (2)로부터

$$\left(s^{\alpha_0}+\sum_{i=1}^{n}a_is^{\alpha_i}\right)\tilde{U}(k,\ s)-\sum_{j=1}^{m}a_{p_j}s^{\beta_{p_j}(\alpha_{p_j}-1)}g_{p_j}(x)=\lambda\{-|k|^{\gamma}\tilde{U}(k,\ s)\}+c\tilde{U}(k,\ s)+\tilde{\Phi}(k,\ s) \tag{13}$$

로 된다. 여기서 $\tilde{U}(k,\ s)$와 $\tilde{\Phi}(k,\ s)$는 각각 함수 $U(x,\ s)$와 $\Phi(x,\ s)$의 푸리에변환들이다.

식 (12)를 간단히 하면 다음과 같다.

$$\tilde{U}(k,\ s)=\frac{\sum_{j=1}^{m}a_{p_j}s^{\beta_{p_j}(\alpha_{p_j}-1)}g_{p_j}(x)+\tilde{\Phi}(k,\ s)}{s^{\alpha_0}+\sum_{i=1}^{n}a_is^{\alpha_i}+\lambda|k|^{\gamma}-c} \tag{14}$$

이제 식 (13)을 거꿀라쁠라스변환하면 보조정리 2와 식 (7), (8)로부터

$$\tilde{u}(k,\ t)=\sum_{j=1}^{m}t^{\alpha_0-\alpha_{p_j}-(1-\alpha_{p_j})(1-\beta_{p_j})}\tilde{g}_{p_j}(k)E_{(\cdot),\ 1+\alpha_0-\alpha_{p_j}-(1-\alpha_{p_j})(1-\beta_{p_j})}(-(\lambda|k|^{\gamma}-c)t^{\alpha_0},\ -a_1t^{\alpha_0-\alpha_1},\ \cdots,\ -a_nt^{\alpha_0-\alpha_n})+$$

$$+\int_0^t\tau^{\alpha_0-1}E_{(\cdot),\ \alpha_0}((c-\lambda|k|^{\gamma})\tau^{\alpha_0},\ -a_1\tau^{\alpha_0-\alpha_1},\ \cdots,\ -a_n\tau^{\alpha_0-\alpha_n})\tilde{\phi}(k,\ t-\tau)d\tau$$

로 된다. 여기서 $\tilde{u}(k,\ t)$는 $u(x,\ t)$의 푸리에변환이다.

식 (14)를 거꿀푸리에변환하면 식 (10)이 성립되므로 정리는 증명된다.(증명끝)

다음으로 특수한 경우들에 대하여 보자.

정리에서 다항대신 단항분수계도함수를 생각하면 다음의 결과가 나온다.

따름 1 경계조건이 $u(\pm\infty,\ t)=0,\ t>0$이고 초기조건이 $(I_t^{(1-\beta)(1-\alpha)}u(x,\ t))_{t\to 0+}=g(x),$

$-\infty < x < \infty$ 일 때 시간에 관한 합성분수계도함수를 가지는 공간－시간선형분수계반응－확산방정식 ${}_tD_{0+}^{\alpha,\ \beta}u(x,\ t) = \lambda \frac{\partial^\gamma}{\partial |x|^\gamma} u(x,\ t) + cu(x,\ t) + \phi(x,\ t),\ t > 0,\ -\infty < x < \infty$ 의 풀이는

$$u(x,\ t) = t^{-(1-\alpha)(1-\beta)} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(k) E_{\alpha,\ 1-(1-\alpha)(1-\beta)}(-(\lambda |k|^\gamma - c)t^\alpha) e^{-ikx} dk +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\ \alpha}((c - \lambda |k|^\gamma)\tau^\alpha) \tilde{\phi}(k,\ t-\tau) d\tau dk.$$

정리에서 $\beta = 1$ 로 놓으면 다음의 결과가 얻어진다.

따름 2 경계조건이 $u(\pm\infty,\ t) = 0,\ t > 0$ 이고 초기조건이 $(u(x,\ t))_{t\to 0+} = g(x),\ -\infty < x < \infty$ 일 때 시간에 관한 캐푸터분수계도함수를 가지는 공간－시간선형분수계반응－확산방정식 ${}_t^cD_{0+}^\alpha u(x,\ t) = \lambda \frac{\partial^\gamma}{\partial |x|^\gamma} u(x,\ t) + cu(x,\ t) + \phi(x,\ t),\ t > 0,\ -\infty < x < \infty$ 의 풀이는 다음과 같다.

$$u(x,\ t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(k) E_\alpha(-(\lambda |k|^\gamma - c)t^\alpha) e^{-ikx} dk + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\ \alpha}((c - \lambda |k|^\gamma)\tau^\alpha) \tilde{\phi}(k,\ t-\tau) d\tau dk$$

더우기 $\gamma = 2$ 로 놓으면 시간에 관한 캐푸터분수계도함수를 가지는 시간선형분수계반응－확산방정식의 풀이를 얻는다.

참 고 문 헌

[1] M. Garg et al.; JFCA, 5, 1, 114, 2014.

[2] H. Jiang et al.; Journal of Mathematical Analysis and Applications, 389, 1117, 2012.

[3] Kim Myong Ha et al.; FCAA, 17, 1, 79, 2014.

[4] Z. Tomovski et al.; Physica, A 391, 2527, 2012.

주체105(2016)년 4월 5일 원고접수

Solution to Space-Time Linear Fractional Reaction-Diffusion Equation with Multi-Term Composite Fractional Derivative in Time

Pak Sung Jin, Ri Kuk Chol

We study multi-term linear space-time fractional reaction diffusion equation with multi-term composite fractional derivative in time and Riesz-Feller fractional derivative with skewness zero as space derivative. We apply Laplace and Fourier transforms to obtain its solution.

Key word: fractional reaction-diffusion equation