김일성종합대학학보 (자연과학) 주체103(2014)년 제60권 제11호
JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE) Vol. 60 No. 11 JUCHE103(2014).

곱하기변환에 의하여 정의된 해석함수의 부분족에서 베르나디적분연산자의 성질

김무영, 민상주

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《인민경제의 규모가 커지고 현대적인 과학기술수단들이 경제관리에 널리 리용되고있는 현실은 사회주의경제를 과학적인 방법론에 기초하여 관리운영할것을 요구하고있습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제10권 485페지)

우리는 곱하기변환에 의하여 정의된 해석함수모임에서 베르나디적분연산자의 성질을 연구하였다.

선행연구[1－4]에서는 함수 $f\in\boldsymbol{A}$에 대하여 다음의 적분연산자의 몇가지 성질을 연구하였다.

$$F(z):=I_\gamma[f](z)=\frac{1+\gamma}{z^\gamma}\int_0^z f(t)t^{\gamma-1}dt$$

선행연구[1]에서는 $\gamma\in N$, $A,\ B\in\boldsymbol{R}$, $-1\le B<A\le 1$에 대하여

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}\prec\frac{1+Az}{1+Bz}\Rightarrow\frac{zF'(z)}{F(z)}\prec\frac{1+Az}{1+Bz},\ \ z\in U$$

임을, 선행연구[2]에서는 $\gamma\in\boldsymbol{R}$, $\gamma>-1, A,\ B,\ D,\ E\in\boldsymbol{R}$, $-1\le B<A\le 1$, $-1\le E\le 0<D\le 1$에 대하여 $\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\prec\dfrac{1+Az}{1+Bz}\Rightarrow\dfrac{zF'(z)}{F(z)}\prec\dfrac{1+Dz}{1+Ez}$, $z\in U$ 임을 밝혔다.

그리고 선행연구[3]에서는 $r\in\boldsymbol{R}$, $0<r\le 1$에 대하여 $\gamma=1$일 때

$$1+rz+\frac{rz}{2+rz}\prec\frac{zf'(z)}{f(z)}\prec 1+z+\frac{z}{2+z}\Rightarrow 1+rz\prec\frac{zF'(z)}{F(z)}\prec 1+z,\ \ z\in U$$

임을 밝혔으며 선행연구[4, 5]에서는 각각 다음과 같다는것을 밝혔다.

$$\frac{D_\lambda^{\beta+1}f(z)}{D_\lambda^\beta f(z)}\prec q(z)\Rightarrow\frac{D_\lambda^{\beta+1}F(z)}{D_\lambda^\beta F(z)}\prec q(z),\ \ z\in U$$

$$\frac{D_\lambda^{\beta+2}f(z)}{D_\lambda^{\beta+1}f(z)}\prec q(z)\Rightarrow\frac{D_\lambda^{\beta+2}F(z)}{D_\lambda^{\beta+1}F(z)}\prec q(z),\ \ z\in U$$

우리는 곱하기변환에 의하여 정의된 해석함수의 부분족에서 적분연산자 $I_\gamma[f]$의 성질을 연구하여 선행연구[1, 3]의 결과를 일반화하였으며 선행연구[4]의 결과를 확장하였다.

단위원 $U=\{z\in\boldsymbol{C}:|z|<1\}$에서 해석적인 함수들의 모임을 $H(U)$로 표시하고 $f(0)=0$, $f'(0)=1$로 표준화된 함수 $f\in H(U)$들의 모임을 $\boldsymbol{A}$로 표시한다.

그리고

$$S^* := \left\{ f \in \boldsymbol{A} : \mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} > 0,\ z \in U \right\},\ \ K := \left\{ f \in \boldsymbol{A} : \mathrm{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0,\ z \in U \right\}$$

를 각각 별형함수족, 불룩함수족이라고 부른다.

정의 1[6] 연산자 $D_\lambda^\beta : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$ $(\beta \ge 0,\ \lambda \ge 0)$ 는 $D_\lambda^\beta f(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty}[1+(j-1)\lambda]^\beta a_j z^j$ 에 의하여 정의한다.

주의 1 $\beta = n,\ \lambda = 1$ 이면 싸라겐연산자 $D_1^n = D^n$ 을 얻는다.

정의 2[7] 선형연산자 $I_\lambda^n : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$ $(\lambda > -1,\ n \in Z)$, $I_\lambda^n f(z) := z + \sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{j+\lambda}{1+\lambda}\right)^n a_j z^j$ 을 곱하기변환이라고 부른다.

주의 2 $\lambda = 0$ 이면 싸라겐연산자 $I_0^n = D^n$ 을 얻는다.

정의 3 함수 f 와 g 가 단위원 U 에서 해석적이라고 하자.

이때 조건 $w(0) = 0$, $|w(z)| < 1$, $z \in U$ 와 $f(z) = g(w(z))$, $z \in U$ 를 만족시키는 단위원 U 에서 해석적인 함수 w 가 있으면 함수 f 는 g 에 종속된다고 말하고 g 는 f 에 공액종속된다고 말하며 $f \prec g$ 혹은 $f(z) \prec g(z)$, $z \in U$ 로 표시한다.

f 가 g 에 종속될 때 g 를 f 의 우월함수라고 부르며 f 의 모든 우월함수 $\tilde{g}$ 에 대하여 $g \prec \tilde{g}$ 이면 g 를 f 의 최량인 우월함수라고 부른다.

g 가 f 에 공액종속될 때 g 의 모든 공액종속 $\tilde{f}$ 에 대하여 $\tilde{f} \prec f$ 이면 f 를 g 의 최량인 종속함수라고 부른다.

정의 4[3] $\overline{U} = \{z \in \boldsymbol{C} : |z| < 1\}$ 이라고 하자.

이때 $\overline{U} \setminus E(f)$ 우에서 해석적이고 1：1인 함수 f 들의 모임을 Q 로 표시한다. 여기서 $E(f) := \left\{\zeta \in \partial U : \lim_{z \to \zeta} f(z) = \infty\right\}$ 이고 $f'(\zeta) \ne 0$, $\zeta \in \partial U \setminus E(f)$ 이다.

정리 1 $h \in H(U)$ 는 단위원 $U = \{z \in \boldsymbol{C} : |z| < 1\}$ 에서 불룩함수이고 $\gamma \in \boldsymbol{C}$, $\mathrm{Re}\gamma \ge 0$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$, $\lambda > -1$ 에 대하여 $\mathrm{Re}\{(1+\lambda)h(z) + (\gamma - \lambda)\} > 0$, $z \in U$ 를 만족시킨다고 하자.

그리고 함수 $f \in \boldsymbol{A}$ 에 대하여 다음과 같이 정의하자.

$$F(z) := I_\gamma[f](z) = \frac{1+\gamma}{z^\gamma}\int_0^z f(t)t^{\gamma-1}dt \tag{1}$$

이때 함수 $f \in \boldsymbol{A}$ 가 미분종속 $\frac{I_\lambda^{n+1} f(z)}{I_\lambda^n f(z)} \prec h(z)$, $z \in U$ 를 만족시키면 $\frac{I_\lambda^{n+1} F(z)}{I_\lambda^n F(z)} \prec h(z)$, $z \in U$ 가 성립된다.

증명 식 (1)로부터 $\gamma F(z) + zF'(z) = (1+\gamma) f(z)$ 를 얻는다.

이 등식의 량변에 곱하기변환을 실시하면

$$\gamma I_\lambda^n F(z) + z(I_\lambda^n F(z))' = (1+\gamma) I_\lambda^n f(z),\ \ \gamma I_\lambda^{n+1} F(z) + z(I_\lambda^{n+1} F(z))' = (1+\gamma) I_\lambda^{n+1} f(z)$$

가 성립되며

$$\frac{I_\lambda^{n+1} f(z)}{I_\lambda^n f(z)} = \frac{(1+\lambda)\dfrac{I_\lambda^{n+2}F(z)}{I_\lambda^{n+1}F(z)} + (\gamma-\lambda)}{(1+\lambda)+(\gamma-\lambda)\dfrac{I_\lambda^{n}F(z)}{I_\lambda^{n+1}F(z)}}. \tag{2}$$

이제 $p(z) := \dfrac{I_\lambda^{n+1}F(z)}{I_\lambda^n F(z)}$ 로 놓으면 $z(I_\lambda^{n+1}F(z))' = zp'(z)I_\lambda^n F(z) + p(z)z(I_\lambda^n F(z))'$ 이고 이로부터

$$(1+\lambda)\frac{I_\lambda^{n+2}F(z)}{I_\lambda^{n+1}F(z)} = (1+\lambda)p(z) + \frac{zp'(z)}{p(z)} \tag{3}$$

를 얻는다.

식 (3)을 식 (2)에 넣으면 다음과 같다.

$$\frac{I_\lambda^{n+1} f(z)}{I_\lambda^n f(z)} = p(z) + \frac{zp'(z)}{(1+\lambda)p(z)+(\gamma-\lambda)} \tag{4}$$

정리의 조건에 의하여 $p(z) + \dfrac{zp'(z)}{(1+\lambda)p(z)+(\gamma-\lambda)} \prec h(z)$, $z \in U$ 이므로 선행연구[8]에 의하여 $\dfrac{I_\lambda^{n+1}F(z)}{I_\lambda^n F(z)} \prec h(z)$, $z \in U$ 이다.(증명끝)

주의 3 정리 1에서 $\lambda = n = 0$, $h(z) = \dfrac{1+Az}{1+Bz}$ 로 취하면 선행연구[1]의 정리 1의 결과와 일치한다.

주의 4 정리 1에서 $\lambda = 0$ 으로 놓으면 선행연구[4]에서 $\lambda = 0$, $\beta = n$ 으로 놓은 결과와 일치한다.

정리 2 $h \in H(U)$ 는 단위원 U 에서 불룩함수이고 $\lambda \in \boldsymbol{R}$, $\lambda > -1$ 과 $\gamma \in \boldsymbol{C}$, $\mathrm{Re}\gamma \ge 0$ 에 대하여 미분방정식 $q(z) + \dfrac{zq'(z)}{(1+\lambda)q(z)+(\gamma-\lambda)} = h(z)$ 는 $q(z) \prec h(z)$ 이고 $q(0) = h(0) = a$ 인 단엽인 풀이 q 를 가진다고 하자.

그리고 함수 $f \in \boldsymbol{A}$ 에 대하여 $F(z) := I_\gamma[f](z) = \dfrac{1+\gamma}{z^\gamma}\displaystyle\int_0^z f(t)t^{\gamma-1}dt$ 라고 하자.

이때 함수 $f \in \boldsymbol{A}$ 가 미분종속 $\dfrac{I_\lambda^{n+1} f(z)}{I_\lambda^n f(z)} \prec h(z)$, $z \in U$ 를 만족시키면 $\dfrac{I_\lambda^{n+1}F(z)}{I_\lambda^n F(z)} \prec q(z)$, $z \in U$ 이고 q 는 최량인 우월함수이다.

증명 정리 1의 증명에서와 같이 $p(z) := I_\lambda^{n+1}F(z)/I_\lambda^n F(z)$ 로 놓으면

$$\frac{I_\lambda^{n+1} f(z)}{I_\lambda^n f(z)} = p(z) + \frac{zp'(z)}{(1+\lambda)p(z)+(\gamma-\lambda)}.$$

정리의 조건에 의하여 $p(z) + \dfrac{zp'(z)}{(1+\lambda)p(z)+(\gamma-\lambda)} \prec h(z)$, $z \in U$ 이므로 선행연구[8]에 의하여 $I_\lambda^{n+1}F(z)/I_\lambda^n F(z) \prec q(z)$, $z \in U$ 가 성립되고 q 는 최량인 우월함수이다.(증명끝)

주의 5 정리 2에서 $n = \lambda = 0$, $\gamma = 1$, $h(z) = 1 + z + \dfrac{z}{2+z}$ 로 놓으면 선행연구[3]의 정리 2와 일치한다.

정리 3　$h\in H(U)$는 단위원 U에서 불룩함수이고 $\lambda\in\boldsymbol{R}$, $\lambda>-1$, $\gamma\in\boldsymbol{C}$, $\mathrm{Re}\gamma\geq 0$에 대하여 $q(z)+\dfrac{zq'(z)}{(1+\lambda)q(z)+(\gamma-\lambda)}=h(z)$는 $q(z)\prec h(z)$, $z\in U$이고 $q(0)=h(0)=a$인 단엽인 풀이 q를 가진다고 하자. 그리고 함수 $f\in\boldsymbol{A}$에 대하여 $F(z):=I_\gamma[f](z)=\dfrac{1+\gamma}{z^\gamma}\int_0^z f(t)t^{\gamma-1}dt$이고 $I_\lambda^{n+1}f(z)/I_\lambda^n f(z)$는 U에서 단엽이며 $I_\lambda^{n+1}F(z)/I_\lambda^n F(z)\in H(U)\cap Q$라고 하자.

이때 $h(z)\prec\dfrac{I_\lambda^{n+1}f(z)}{I_\lambda^n f(z)}$, $z\in U$이면 $q(z)\prec\dfrac{I_\lambda^{n+1}F(z)}{I_\lambda^n F(z)}$, $z\in U$이고 q는 최량인 종속함수이다.

증명　$p(z):=\dfrac{I_\lambda^{n+1}F(z)}{I_\lambda^n F(z)}$로 놓으면 $\dfrac{I_\lambda^{n+1}f(z)}{I_\lambda^n f(z)}=p(z)+\dfrac{zp'(z)}{(1+\lambda)p(z)+(\gamma-\lambda)}$를 얻는다.

정리의 조건에 의하여

$$h(z)\prec p(z)+\frac{zp'(z)}{(1+\lambda)p(z)+(\gamma-\lambda)}$$

이므로 선행연구[3]에 의하여 $q(z)\prec\dfrac{I_\lambda^{n+1}F(z)}{I_\lambda^n F(z)}$, $z\in U$가 성립되고 q는 가장 좋은 종속함수이다.(증명끝)

주의 6　정리 3에서 $n=\lambda=0$, $\gamma=1$로 놓고 $h(z)=1+rz+\dfrac{rz}{2+rz}$, $z\in U$, $0<r\leq 1$을 취하면 선행연구[3]의 정리 1과 일치한다.

참 고 문 헌

[1] G. L. Reddy et al.; Bull. Austral. Math. Soc., 253, 3, 387, 1982.

[2] R. M. Ali et al.; J. Math. Anal. Appl., 324, 663, 2006.

[3] G. I. Oros; Studia Univ. “Babes-Bolyai” Mathematica, 50, 1, 93, 2005.

[4] M. Acu et al.; Proceedings of the International Short Joint Research Work on Study on Calculus Operators in Univalent Function Theory, Kyoto, 1, 2006.

[5] M. Acu et al.; Proceedings of the International Short Joint Reaearch Work on Study on Calculus Operators in Univalent Function Theory, Kyoto, 11, 2006.

[6] M. Acu et al.; Int. J. Open Problems Comput. Sci. Math., 1, 1, 1, 2008.

[7] V. Ravichandran et al.; Acta Math. Vietnamica, 30, 2, 113, 2005.

[8] S. S. Miller et al.; Differential Subordination Theory and Applications, Marcel Dekker Inc., 130～140, 2000.

주체103(2014)년 7월 5일 원고접수

Properties of Bernardi Integral Operator for Subclass of Analytic Functions Definded by the Multiplier Transformation

Kim Mu Yong, Min Sang Ju

We obtained the properties of generalized Bernardi integral operator for subclass of analytic functions defined by the multiplier transformation $I_\lambda^n : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$.

The obtained result is generalization of result of [1, 3].

Key words: differential subordination, differential superordination