김일성종합대학학보 주체110(2021)년
수 학 제67권 제3호

비자률분수계비선형련립미분방정식의 령풀이가 점근안정하기 위한 충분조건

김 철

우리는 α $(1<\alpha<2)$계캐푸토도함수를 가진 비자률분수계비선형련립미분방정식의 령풀이의 점근안정성에 대한 새로운 충분조건을 연구하였다.

선행연구[2]에서는 계수 α가 $(1,\ 2)$에 놓이는 경우에 선형 및 비선형섭동을 가진 비자률분수계미분방정식의 국부적 및 대역적점근안정성에 대한 충분조건을 일반화된 그론월의 부등식을 리용하여 유도하였다. 그리고 이 결과를 리용하여 선형상태반결합조종을 통하여 불안정한 분수계미분방정식의 안정화를 제안하였다.

론문에서는 선행연구[2]에서와 같이 계수 α가 $(1,\ 2)$에 놓이는 섭동을 가진 분수계미분방정식에서의 령풀이의 점근안정성에 대하여 론의한다.

우리는 먼저 선행연구[1]의 결과가 선행연구[2]의 일반화로 된다는것을 증명하고 점근안정성판정에 편리한 한가지 판정법을 제안한다. 끝으로 선행연구[2]의 결과와 대비한 론문의 방법의 효과성을 보여주는 선형상태반결합조종실례들을 준다.

론문에서 $\sigma(A)$는 행렬 $A\in C^{n\times n}$의 고유값들의 모임을 표시하고 행렬과 벡토르의 노름은 각각 $\|y\|=\sum_{i=1}^{n}|y_i|$와 $\|A\|=\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$으로 표기하는데 여기서 y_i와 a_{ij}들은 벡토르 y와 행렬 A의 원소들이다. 그리고 α계리만－류빌분수계적분, 캐푸토분수계도함수, 미태그－레플레르함수, 두보조변수미태그－레플레르함수, 미태그－레플레르행렬함수와 령풀이의 점근안정성에 대하여서는 선행연구[2]에서의 정의와 같다.

우리는 다음과 같은 선형 및 비선형섭동을 가진 n차원분수계미분방정식을 고찰한다.

$$ {}^{C}D^{\alpha}x(t)=Ax(t)+Q(t)x(t) \tag{1}$$

$$ {}^{C}D^{\alpha}x(t)=Ax(t)+f(t,\ x(t)) \tag{2}$$

초기조건은 다음과 같다.

$$ x^{(k)}(0)=x_{0k},\ k=0,\ 1 \tag{3}$$

여기서 $x(t)=(x_1(t),\ x_2(t),\cdots,x_n(t))^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$, $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$, $t\in[0,+\infty)$이고 ${}^{C}D^{\alpha}x(t)={}^{C}D_{0+,\ t}^{\alpha}x(t)$는 $\alpha\in(1,\ 2)$계캐푸토도함수이다. 그리고 $Q(t):[0,\ \infty)\to\mathbf{R}^{n\times n}$은 련속인 행렬값함수이며 $f:[0,\ \infty)\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$은 련속인 함수이다.

분수계미분방정식 (1), (2)의 점근안정성에 대한 선행연구[1]의 충분조건이 선행연구[2]의 충분조건의 일반화로 된다는것을 증명하기 위하여 방정식 (1), (2)의 점근안정성판정에서 리용하기 편리한 몇가지 충분조건에 대하여 보자.

정리 1 다음의 조건들밑에서 $\sup_{t\ge0}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}\|E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^{\alpha}A)Q(\tau)\|d\tau<1$이 성립된다.

① 어떤 상수 $M>0$이 있어서 임의의 $t\in[0,\ +\infty)$에 대하여 $\|Q(t)\|<M$이다.

② $\mathrm{Re}(\lambda_i(A))<0$ 이고 $\omega=-\max\{\mathrm{Re}(\lambda)\,|\,\lambda\in\sigma(A)\}>(MK_2\Gamma(\alpha))^{1/\alpha}$ 이다. 여기서 $K_2>0$ 은 $\|e^{At}\|\le K_2e^{-\omega t}$ 을 만족시키는 수이고 $\lambda_i(A)$ 는 A 의 고유값이다.

증명 선행연구[2]의 정리와 조건 ②로부터 $\|E_{\alpha,\,\alpha}(Au^\alpha)\|\le\|e^{Au^\alpha}\|\le K_2e^{-\omega t^\alpha}\le K_2e^{-\omega t}$ 이 나오며 따라서 다음의 식이 성립된다.

$$\sup_{t\ge 0}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}\|E_{\alpha,\,\alpha}((t-\tau)^\alpha A)Q(\tau)\|\,d\tau\le MK_2\sup_{t\ge 0}\int_0^t u^{\alpha-1}e^{-wu}du=$$

$$=MK_2\int_0^{+\infty}u^{\alpha-1}e^{-wu}du=MK_2\int_0^{+\infty}\left(\frac{z}{w}\right)^{\alpha-1}e^{-z}\frac{dz}{w}=MK_2\frac{1}{w^\alpha}\int_0^{+\infty}z^{\alpha-1}e^{-z}dz=\frac{MK_2\Gamma(\alpha)}{w^\alpha}<1$$

(증명끝)

주의 1 정리 1에서 조건들은 선행연구[2]에서 정리 1의 조건과 같고 정리 1의 결론은 선행연구[1]의 선형계에 대한 충분조건이다. 따라서 선행연구[1]에서의 선형계의 충분조건은 선행연구[2]의 정리 1의 일반화이다.

따름 1 다음의 조건들이 만족되면 분수계미분방정식 (1)은 점근안정하다.

① 어떤 상수 $M>0$ 이 있어서 임의의 $t\in[0,\,+\infty)$ 에 대하여 $\|Q(t)\|<M$ 이다.

② $\sigma(A)\subset\{\lambda\in C\setminus\{0\}\,:\,|\arg(\lambda)|>\alpha\pi/2\}$ 이고

$$\omega=-\max\{\mathrm{Re}(\lambda)\,|\,\lambda\in\sigma(A)\}>MN/\alpha \tag{4}$$

이다. 여기서 $N>0$ 은 $\|e^{At}\|\le Ne^{-\omega t}$ 을 만족시키는 상수이다.

정리 2 다음의 조건들이 만족되면 방정식 (2)의 령풀이는 점근안정하다.

① $f(t,\,x)$ 가 $\lim\limits_{\|x\|\to 0}\|f(t,\,x)\|/\|x\|=0$ ($t\ (\ge 0)$ 에 대하여 평등적으로)을 만족시킨다.

② $\sigma(A)\subset\{\lambda\in C\setminus\{0\}\,:\,|\arg(\lambda)|>\alpha\pi/2\}$ 이고

$$\omega=-\max\{\mathrm{Re}(\lambda)\,|\,\lambda\in\sigma(A)\}>1/\alpha\,. \tag{5}$$

증명 방정식 (2)와 초기조건 (3)의 풀이표시[1]로부터 임의의 $x_0\in\mathbf{R}^n$ 에 대하여 연산자 $T_{x_0}:C([0,\,\infty)\,;\mathbf{R}^n)\to C([0,\,\infty)\,;\mathbf{R}^n)$ 을 다음과 같이 정의하자.

$$T_{x_0}\zeta(t)=E_{\alpha,\,1}(t^\alpha A)x_{01}+tE_{\alpha,\,2}(t^\alpha A)x_{02}+\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\,\alpha}((t-\tau)^\alpha A)f(\tau,\,\zeta(\tau))d\tau$$

조건 $\lim\limits_{\|x\|\to 0}\|f(t,\,x)\|/\|x\|=0$ 으로부터 적당한 상수 $\delta>0$ 이 존재하여 $\|x(t)\|\le\delta$ 일 때 $\|f(t,\,x(t))\|\le\|x(t)\|/N$ 이 성립된다. 여기서 $N>0$ 은 $\|e^{At}\|\le Ne^{-\omega t}$ 을 만족시키는 상수이다.

나머지부분의 증명은 정리 1의 증명과 비슷하다.(증명끝)

정리 3 다음의 조건들밑에서 $\sup\limits_{t\ge 0}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}L\|E_{\alpha,\,\alpha}((t-\tau)^\alpha A)\|\,d\tau<1$ 이 성립된다.

① $f(t,\,x(t))$ 는 다음의 대역평등립쉬츠조건(립쉬츠상수 $L>0$)을 만족시킨다.

$$\|f(t,\,x)-f(t,\,y)\|\le L\|x-y\|,\ \ \forall t\ (\ge 0),\ \ \forall x,\ y\in\mathbf{R}^n$$

② $\mathrm{Re}(\lambda_i(A))<0$ 이고 $\omega=-\max\{\mathrm{Re}(\lambda)\,|\,\lambda\in\sigma(A)\}>(LK_2\Gamma(\alpha))^{1/\alpha}$ 이다. 여기서 K_2 는 $\|e^{At}\|\le K_2e^{-\omega t}$ 을 만족시키는 상수이고 $\lambda_i(A)$ 는 A 의 고유값이다.

주의 2 정리 2에서 조건들은 선행연구[2]의 정리 3의 조건들과 같고 정리 3의 결론은 선행연구[1]의 비선형계에 대한 충분조건이다. 따라서 선행연구[1]의 비선형계의 충분조건은 선행연구[2]의 정리 3의 일반화이다.

따름 2 다음의 조건들이 만족되면 방정식 (2)의 령풀이는 점근안정하다.

① $f(t,\ x)$ $f(t,\ x(t))$는 다음의 대역평등립쉬츠조건을 만족시킨다.

$$\| f(t,\ x)-f(t,\ y)\| \le L\| x-y\| \quad \forall t\ (\ge 0),\ \forall x,\ y\in \mathbf{R}^n$$

② $\sigma(A)\subset \{\lambda \in C\setminus \{0\} : |\arg(\lambda)|>\alpha\pi/2\}$이고

$$\omega =-\max\{\mathrm{Re}(\lambda)\,|\,\lambda \in \sigma(A)\}>LN/\alpha \tag{6}$$

이다. 여기서 $N>0$은 $\| e^{At}\| \le Ne^{-\omega t}$을 만족시키는 상수이다.

다음으로 비자률분수계미분방정식을 안정화하는 선형상태반결합에 대하여 보자.

선형상태반결합조종기 $u(t)=Kx(t)$를 가진 다음의 비자률분수계미분방정식을 고찰하자.

$${}^C D^\alpha x(t)=Ax(t)+Q(t)x(t)+u(t)=(A+K)x(t)+Q(t)x(t) \tag{7}$$

$${}^C D^\alpha x(t)=Ax(t)+f(t,\ x(t))+u(t)=(A+K)x(t)+f(t,\ x(t)) \tag{8}$$

여기서 행렬 K는 반결합량이고 어떤 상수 $M>0$이 있어서 임의의 $t\in (0,\ +\infty)$에 대하여 $\| Q(t)\| <M$이며 $f(t,\ x)$는 $f(t,\ 0)=0$을 만족시킨다.

식 (4)－(6)이 성립되도록 적당한 행렬 K를 선택하여 방정식 (7)과 (8)의 령풀이가 점근안정하도록 할수 있으며 다음의 실례로 그것을 확인할수 있다.

수치모의에서는 PECE(예측자－수정자)알고리듬[3]을 리용하였다.

실례 1 다음과 같은 비자률분수계미분방정식을 고찰하자.

$${}^C D^\alpha X(t)=AX(t)+f(t,\ X(t)),\ \alpha =1.3 \tag{9}$$

여기서 $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$이고 $f(t,\ X)=\begin{pmatrix} x_2\sin t+\sin x_1 \\ -x_1\sin t+\sin x_2 \end{pmatrix}$는 립쉬츠조건($L=2$)을 만족시킨다.

계 (9)는 선행연구[2]의 실례 5와 같고 식 (9)의 령풀이는 불안정하다.

분수계미분방정식 (9)에 다음과 같은 선형상태반결합조종을 하자.

$$u(t)=KX(t)$$

여기서 $K=\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$이다.

그러면 조종계는 다음과 같다.

$${}^C D^\alpha X(t)=(A+K)X(t)+f(t,\ x(t))$$

이제 $K=\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3.55 \end{pmatrix}$로 선택하면 $A+K=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1.55 \end{pmatrix}$이고 $\| e^{(A+K)t}\| \le e^{-1.55t}$이다.

$$\omega =-\max\{\mathrm{Re}(\lambda)\,|\,\lambda \in \sigma(A+K)\}=1.55<1.568\ 3=(2\times \Gamma(1.3))^{1/1.3}$$

이므로 선행연구[2]의 따름 3을 리용하여서는 조종계의 령풀이는 점근안정하다고 결론할수 없다.

그러나 $\omega =-\max\{\mathrm{Re}(\lambda)\,|\,\lambda \in \sigma(A+K)\}=1.55>1.538\ 5=\dfrac{2}{1.3}=\dfrac{LN}{\alpha}$이므로 따름 2에 의하여 조종계의 령풀이는 점근안정하다.

실례 2 다음과 같은 비자률분수계미분방정식을 고찰하자.

$$^{C}D^{\alpha}X(t) = AX(t) + Q(t)X(t), \ \alpha = 1.2 \tag{10}$$

여기서 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ 이고 $Q(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0.55\sin t \\ 0.55\sin t & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 이다.

분명히 모든 $t \ge 0$, $\| Q(t) \| \le M = 0.55$ 이고 $\sigma(A) \subset \{\lambda \in C \setminus \{0\} : |\arg(\lambda)| > \alpha\pi/2\}$ 이다.

$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t & e^{-t}\sin t \\ -e^{-t}\sin t & e^{-t}\cos t \end{pmatrix}$ 이므로 $\| e^{At} \| \le 2e^{-t}$ 이다.

$M = 0.55$ 이고 $N = 2$ 이므로 $(MN\Gamma(\alpha))^{1/\alpha} = (0.55 \times 2 \times \Gamma(1.2))^{1/1.2} = 1.008\ 31$ 은 선행연구[2]의 정리 1에서 제안한 값이다. 그런데 $\max\{\mathrm{Re}(\lambda) | \lambda \in \sigma(A)\} = -1$ 이므로 선행연구[2]의 정리 1의 조건에 맞지 않는다. 그러나 $MN/\alpha = 1.1/1.2 < 1$ 이고 따름 1의 조건에는 맞는다. 따라서 선형상태반결합조종을 안해도 분수계미분방정식 (10)은 점근안정하다.

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보 수학, 65, 2, 53, 주체108(2019).

[2] B. K. Lenka et al.; Nonlinear Dyn., 85, 167, 2016.

[3] K. Diethelm et al.; Nonlinear Dyn., 29, 3, 2002.

주체110(2021)년 3월 5일 원고접수

The Sufficient Conditions of Asymptotic Stability of Trivial Solutions of Nonautonomous Fractional Order Nonlinear Systems

Kim Chol

This paper investigates the asymptotic stability of nonautonomous fractional order nonlinear systems with Caputo derivative of order $1 < \alpha < 2$.

Adding either linear or nonlinear nonautonomous perturbations to linear fractional differential systems, new sufficient conditions are derived for the asymptotic stability of the zero solutions of the perturbed systems.

Keywords: fractional differential equation, stability, Caputo derivative