김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체105(2016)년 제62권 제3호 Vol. 62 No. 3 JUCHE105(2016).

2차원조종계의 마이어문제에서 한가지 값함수계산도식의 수렴성평가

김 철 혁

마이어문제를 비롯하여 많은 최량조종 및 미분경기문제의 값함수들이 하밀톤－야코비－벨만(－아이젝스)방정식의 일반풀이(점성풀이, 최소최대풀이)이며[2] 이 일반풀이개념에 기초하여 값함수계산도식들과 그 수렴성에 대한 연구가 많이 진행되고있다.

선행연구[4－6]에서는 리산동적계의 값함수계산에 기초한 계산도식, 리산동적계획원리에 기초한 계산도식, Hopf공식의 일반화에 기초한 계산도식, 프로그람최대최소에 기초한 계산도식, 생존핵에 기초한 계산도식 등 여러가지 계산도식들이 제기되였다. 그런데 이 계산도식들은 많은 경우 출발점들은 서로 다르다해도 결과적으로는 리산동적계의 값함수계산에 기초한 계산도식과 일치하거나 류사하다.

리산동적계와 련속동적계의 최량동태에서 한가지 본질적인 차이는 리산동적계에서와는 달리 련속동적계에서 특이성이 나타나는것이다.

론문에서는 선행연구[1]에서와 같은 마이어문제의 경우에 련속동적계에서 나타나는 특이성을 반영한 새로운 값함수계산도식을 제기하고 선행연구[3]의 결과에 따르는 계산도식의 성질들을 검토하였으며 1차원상태공간의 경우에 계산도식의 값함수에로의 수렴성을 밝혔다. 여기서 우리는 2차원조종계의 경우에 계산도식의 값함수에로의 수렴성을 론의하였다. 특히 벡토그람이 선분형태로 주어지는 조종계의 경우에 계산도식의 값함수에로의 수렴성을 밝혔다.

다음과 같은 마이어문제를 론의하자.

$$\dot{z} = f(t,\ z,\ \alpha),\ \ z \in \boldsymbol{R}^n,\ \ t \in I := [t_0,\ \theta],\ \ \alpha \in P \subset \boldsymbol{R}^p,\ \ \gamma(z(\cdot)) = \sigma(z(\theta)) \to \min_{\alpha} \tag{1}$$

여기서 z는 계의 상태벡토르, t는 시간변수, α는 조종벡토르, $t_0,\ \theta$는 각각 시작 및 마감시각들, P는 콤팍트모임이다. $f(t,\ z,\ \alpha)$는 모든 변수들에 관하여 평등련속이고 변수 $t,\ z$에 관하여 리프쉬츠련속인 유계함수로서 풀이의 연장성조건을 만족시키며 $\sigma(z)$는 유계리프쉬츠련속함수이다. $f(t,\ z,\ \alpha)$의 $t,\ z$에 관한 리프쉬츠상수를 L_f, 유계상수를 K로 표시한다.

이때 임의의 초기위치 $(t,\ z) \in I \times \boldsymbol{R}^n$에 대하여 문제 (1)의 최량값 $w(t,\ z)$가 존재하며 이때 값함수 $(t,\ z) \mapsto w(t,\ z)$는 유계국부리프쉬츠련속이고 경계값문제

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t,\ z) + H\left(t,\ z,\ \frac{\partial w}{\partial z}(t,\ z)\right) = 0,\ \ w(\theta,\ z) = \sigma(z) \tag{2}$$

의 점성풀이(최소최대풀이)이다.[2] 여기서 $H(t,\ z,\ s) := \min\limits_{\alpha \in P} < s,\ f(t,\ z,\ \alpha) >$.

이제 값함수의 근사계산을 위한 유한계차도식을 도입하기 위하여

$$t\in I,\ t+\Delta\in I,\ t<\theta,\ \Delta>0,\ z\in \boldsymbol{R}^n,\ \Delta_{x_i}:=a_i\Delta>0,\ i=1,\ \cdots,\ n,\ \Delta_z:=\min_{i=1,\ \cdots,\ n}\Delta_{x_i}$$

라고 하자. 유계리프쉬츠련속함수 $u(z)$ 는 $t+\Delta$ 시각에서의 값함수 $z\mapsto w(t+\Delta,\ z)$ 의 근사로서 그것의 리프쉬츠상수는 L_u 라고 하자.

t 시각에서의 값함수구성에 대하여 론의하므로 의미가 명백한 모든 경우들에 t 에 의존하는 기호들에서 t 를 생략한다.

또한 모임 $M:=\{m=(\omega_1,\ \cdots,\ \omega_n):\omega_i=+\vee-,\ i=1,\cdots,\ n\}$ 에 기초하여 다음의 기호들을 도입하자.

$$T_m:=\boldsymbol{R}^{\omega_1}\times\boldsymbol{R}^{\omega_2}\times\cdots\times\boldsymbol{R}^{\omega_n},\ D_m u(z):=(d_1^{\omega_1}u(z),\ \cdots,\ d_n^{\omega_n}u(z)),\ m=(\omega_1,\ \cdots,\ \omega_n)\in M;$$

$$T_{m_1,\ \cdots,\ m_k}:=\bigcap_{i=1}^{k}T_{m_i},\ m_1,\cdots,m_k\in M$$

여기서 $d_i^+u(z):=[u(z\,\|\,x_i+\Delta_{x_i})-u(z)]/\Delta_{x_i},\ d_i^-u(z):=[u(z)-u(z\,\|\,x_i-\Delta_{x_i})]/\Delta_{x_i},\ i=1,\cdots,n,$

$\boldsymbol{R}^+:=[0,\ +\infty),\ \boldsymbol{R}^-:=(-\infty,\ 0],\ z=(x_1,\ \cdots,\ x_{i-1},\ x_i,\ x_{i+1},\ \cdots,\ x_n),\ z\,\|\,x_j:=(x_1,\ \cdots,\ x_{i-1},\ x_j,\ x_{i+1},\ \cdots,\ x_n).$

앞으로 렬 $m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_{2^k}\in M\ \ (k=0,\cdots,n)$ 은 $m_i\neq m_j\,(i\neq j,\ i,\ j\in 1,\cdots,2^k)$ 가 되도록 구성된다고 본다.

$|M|=2^n$ 이므로 $\boldsymbol{R}^n$ 은 2^n 개의 분구 T_m 들로 분할되며 $T_{m_1,\cdots,m_{2^k}}\neq\{0\}\ \ (k=0,\cdots,\ n-1)$ 이면 이 모임의 차원수는 $n-k$ 이다. 그리고 $T_{m_1,\ \cdots,\ m_{2^n}}=\{0\}$ 이다.

다음의 량들을 도입하자.

$$F_m(z,\ u):=\operatorname*{Arg\,min}_{f\in f(z,\ P)}<D_m u(z),\ \ f>,\ m\in M;\ \tilde{F}_{m_1,\cdots,m_{2^k}}(z,\ u):=co\bigcup_{i=1}^{2^k}F_{m_i}(z,\ u)$$

$$H_{m_1,\cdots,m_{2^k}}(z,\ u):=\min_{f\in\Psi_{m_1,\cdots,m_{2^k}}(z,\ u)}<D_{m_1}u(z),\ \ f>,\ \ m_1,\cdots,m_{2^k}\in M$$

여기서 $\Psi_{m_1,\cdots,m_{2^k}}(z,\ u):=\tilde{F}_{m_1,\cdots,m_{2^k}}(z,\ u)\bigcap T_{m_1,\cdots,m_{2^k}};\ \min\phi=+\infty.$

주의 임의의 $f\in T_{m_1,\cdots,\ m_{2^k}}$ 에 대하여 $<D_m u(z),\ f>=\mathrm{const},\ m=m_1,\ \cdots,\ m_{2^k}$ 이므로 $H_{m_1,\cdots,m_{2^k}}(z,\ u)$ 의 정의에서 $D_{m_1}u(z)$ 의 대신에 임의의 $D_{m_i}u(z),\ i\in 1,\cdots,\ 2^k$ 를 선택하여도 값은 달라지지 않는다. 즉

$$H_{m_1,\cdots,\ m_{2^k}}(z,\ u)=\min_{f\in\Psi_{m_1,\cdots,\ m_{2^k}}(z,\ u)}<D_{m_i}u(z),\ \ f>,\ \forall i\in 1,\cdots,\ 2^k.$$

연산자 $u\mapsto\Pi(t,\ \Delta,\ u)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\upsilon(z)=\Pi(t,\ \Delta,\ u)(z):=\begin{cases}u(z)+\Delta\displaystyle\min_{k=0,\cdots,\ n}\ \min_{m_1,\cdots,\ m_{2^k}\in M}H_{m_1,\cdots,m_{2^k}}(z,\ u), & \Delta>0\\ u(z), & \Delta=0\end{cases}\qquad(3)$$

함수 $z\mapsto\upsilon(z):\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ 는 값함수 $z\mapsto w(t,\ z)$ 의 t 시각근사로서 취급된다.

성질 1 $co\,f(z,\ P)$ 는 상대적으로 엄격히 불룩인 콤팍트이다.

우의 성질밑에서 다음의 사실이 성립된다.

$$F_m(z,\ u)=\operatorname*{Arg\,min}_{f\in f(z,\ P)}<D_m u(z),\ \ f>=\begin{cases}\{f^{(u,\ m)}(z)\},\ \neg(D_m u(z)\perp f(z,\ P))\\ \quad f(z,\ P)\ ,\qquad D_m u(z)\perp f(z,\ P)\end{cases}\ (m\in M\ )$$

여기서 $f^{(u,\ m)}(z)\in f(z,\ P)$ 는 $<D_m u(z),\ f^{(u,\ m)}(z)>=\min\limits_{f\in f(z,\ P)}<D_m u(z),\ f>$ 인 유일한 벡토르이다.

이로부터

$$\tilde{F}_{m_1,\ \cdots,\ m_{2^k}}(z,\ u)=co\bigcup_{i=1}^{2^k}F_{m_i}(z,\ u)=\begin{cases}co\{f^{(u,\ m_i)}(z)\},\ \neg(D_{m_i}u(z)\perp f(z,\ P)),\ \forall i\in 1,\ \cdots,\ 2^k\\ co\ f(z,\ P), \qquad D_{m_j}u(z)\perp f(z,\ P),\ \exists j\in 1,\ \cdots,\ 2^k\end{cases}.$$

성질 1이 성립된다고 하면 함수 $(t,\ z)\mapsto H_{m_1,\ \cdots,\ m_{2^k}}(t,\ z,\ u)$ 의 유한값모임 Z 는 비지 않으면 닫긴모임이며 이때 주어진 함수는 이 모임에서 유계련속이다.

식 (3)의 연산자 Π 에 대하여 선행연구[1]에서는 선행연구[3]에서 근사도식의 수렴성조건으로 제시된 성질 1－4, 6, 8들이 일반차원공간에서 성립되며 성질 5, 7들은 1차원상태공간에서 성립된다는것을 밝혔다.

론문에서는 선행연구[3]의 성질 5, 7들이 2차원상태공간에서 벡토그람이 선분인 조종계에 대하여 성립된다는것을 밝힌다.

연산자 Π 는 2차원상태공간에서 $\Delta>0$ 일 때 다음과 같이 표시된다.

$$\Pi(t,\ \Delta,\ u)(z)=u(z)+\Delta\min\left\{\min_{m\in M}H_m(z,\ u),\ \min_{m_1,\ m_2\in M}H_{m_1,\ m_2}(z,\ u),\ \min_{m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4\in M}H_{m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4}(z,\ u)\right\}=$$

$$=u(z)+\Delta\min\left\{\min_{i=1,\ 4}H_i(z,\ u),\ \min_{i=1,\ 4}H_{i,\ i+1}(z,\ u),\ H_{1,\ 2,\ 3,\ 4}(z,\ u)\right\}$$

우에서 기호를 간단히 표시하기 위하여 다음과 같이 대응시키였다.

$$\begin{array}{cccccc}M=\{m:m= & (+,\ +), & (-,\ +), & (-,\ -), & (+,\ -)\} \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \{i:i= & 1\vee 5, & 2, & 3, & 4\}\end{array}$$

먼저 연산자 Π 가 잘 정의된다는것을 보자.

명제 1 매 $(z,\ u)$ 에 대하여 $H_i(z,\ u),\ H_{i,\ i+1}(z,\ u),\ H_{1,\ 2,\ 3,\ 4}(z,\ u)$ 들중 적어도 하나는 유한이다.

명제 2 성질 1이 성립된다고 할 때 $H_{i,\ i+1}(z,\ u)$ 는 $\neg[D_l u(z)\perp f(z,\ P)],\ l=i,\ i+1$, $i=1,\cdots,4$ 이면 다음과 같다.

$$H_{i,\ i+1}(z,\ u)=\begin{cases}<D_i u(z),\ g^{(u,\ i)}(z)>,\ g_1^{(u,\ i)}(z)\neq 0\wedge 0\leq\lambda^{(u,\ i)}(z)\leq 1\wedge(-1)^{1+(i\bmod 3)}g_2^{(u,\ i)}(z)\geq 0;\\ \qquad H_i(z,\ u)=H_{i+1}(z,\ u)<+\infty,\ f^{(u,\ i)}(z)=f^{(u,\ i+1)}(z)\in T_{i,\ i+1}\\ +\infty, \qquad \text{기타}\end{cases}$$

여기서

$$g^{(u,\ 1)}(z)=(0,\ g_2^{(u,\ 1)}(z)),\ g^{(u,\ 2)}(z)=(g_2^{(u,\ 2)}(z),\ 0),$$

$$g^{(u,\ 3)}(z)=(0,\ g_2^{(u,\ 3)}(z)),\ g^{(u,\ 4)}(z)=(g_2^{(u,\ 4)}(z),\ 0),$$

$$g_2^{(u,\ i)}(z)=\lambda^{(u,\ i)}(z)\cdot f_{1+(i\bmod 2)}^{(u,\ i)}(z)+(1-\lambda^{(u,\ i)}(z))\cdot f_{1+(i\bmod 2)}^{(u,\ i+1)}(z),$$

$$\lambda^{(u,\ i)}(z)=\frac{f_{2-(i\bmod 2)}^{(u,\ i+1)}(z)}{g_1^{(u,\ i)}(z)},\ g_1^{(u,\ i)}(z)=f_{2-(i\bmod 2)}^{(u,\ i+1)}(z)-f_{2-(i\bmod 2)}^{(u,\ i)}(z).$$

2차원상태공간에서 조종계 (1)의 벡토그람이

$$co\, f(z,\ P)=[a(z),\ b(z)] \tag{4}$$

인 경우를 구체적으로 보자. 여기서 $f(t,\ z,\ \alpha)$ 의 가정에 따라 $a(z)=(a_1(z),\ a_2(z))$, $b(z)=(b_1(z),\ b_2(z))\in \boldsymbol{R}^2$ 은 리프쉬츠함수들이다.

이때 성질 1은 응당 성립된다.

이제 연산자 Π에 대하여 선행연구[3]의 다음과 같은 성질이 성립된다.

성질 2(단조성) $1-\sqrt{2}K\Delta/\Delta_z>0$ 이라고 하자.

이때 모든 $z\in \boldsymbol{R}^2$ 에 대하여 $u(z)\ge \upsilon(z)$ 가 성립하면 다음의 부등식이 성립된다.

$$\Pi(t,\ \Delta,\ u)(z)\ge \Pi(t,\ \Delta,\ \upsilon)(z),\ \forall z\in \boldsymbol{R}^2$$

명제 3 상수 C_3^2 가 존재하여 두 점 $z_1,\ z_2$ 에 대하여 다음의 사실이 성립된다.

$H_i(z_1,\ u),\ H_i(z_2,\ u)<+\infty$ 이면 $|H_i(z_1,\ u)-H_i(z_2,\ u)|\le L_u C_3^2\|z_1-z_2\|$.

$[z_1,\ z_2]\subset\{z:\ H_{i,\ i+1}(z,\ u)<+\infty\}$ 이면 $|H_{i,\ i+1}(z_1,\ u)-H_{i,\ i+1}(z_2,\ u)|\le L_u C_3^2\|z_1-z_2\|$.

여기서 $C_3^2=\sqrt{2}(L_f+2K/\Delta_z)$.

명제 4 함수 $(t,\ z)\mapsto \upsilon(t,\ z)=\Pi(t,\ \Delta,\ u)(z)$ 는 련속이다.

성질 3 $|\Pi(t,\ \Delta,\ u)(z_1)-\Pi(t,\ \Delta,\ u)(z_2)|\le \exp(C_3^2\Delta)L_u\|z_1-z_2\|,\ \forall z_i\in \boldsymbol{R}^2,\ i=1,\ 2$

따라서 2차원상태공간에서 조건 (4)가 성립되는 조종계 (1)에 대하여 근사도식의 수렴성에 관한 선행연구[3]의 결과를 리용하면 다음의 정리를 정식화할수 있다.

정리 함수 w 는 경계값문제 (2)의 일반풀이이고 구간 I 의 분할

$$\Gamma=\{t_0<t_1<\cdots<t_N=\theta\}\ \ (\Delta=t_{i+1}-t_i,\ i=0,\cdots,\ N-1)$$

에 대하여 연산자 F 에 의한 근사도식이 다음의 공식들에 의하여 결정된다고 하자.

$$u_\Gamma(\theta,\ z)=\sigma(z),\ u_\Gamma(t,\ z)=\Pi(t,\ t_{i+1}-t,\ u_\Gamma(t_{i+1},\ \cdot))(z),\ t\in[t_i,\ t_{i+1}),\ z\in \boldsymbol{R}^n \tag{5}$$

그러면 근사도식 (5)는 수렴성오차 $\sqrt{\Delta}$ 로 문제 (2)의 일반화풀이(즉 값함수) w 에로 수렴한다. 이때 $\|u_\Gamma-w\|\le C\sqrt{\Delta}$ 가 성립된다. 여기서 $\|u_\Gamma-w\|=\max\limits_{(t,\ z)\in I\times \boldsymbol{R}^n}|u_\Gamma(t,\ z)-w(t,\ z)|$.

마감으로 2차원상태공간에서 벡토그람이 선분이 아닌 경우에 계산도식의 값함수에로의 수렴성을 몇가지 수값실험들을 통하여 평가하자.

우리는 마이어문제 (1)에서 $z=(x_1,\ x_2)\in \boldsymbol{R}^2,\ I=[0,\ 1]$ 이라고 할 때 $f(t,\ z,\ \alpha),\ \sigma(z)$, P 들이 다음과 같이 주어지는 경우들에 대한 수값실험을 진행하였다.

① $f(t,\ z,\ \alpha)=(\alpha_1,\ \alpha_2),\ \sigma(z)=(x_1^2+x_2^2)^{1/2},\ P=\{(\alpha_1,\ \alpha_2):\ \alpha_1^2+\alpha_2^2\le 1\}$

② $f(t,\ z,\ \alpha)=(\alpha_1,\ \alpha_2),\ \sigma(z)=-(x_1^2+x_2^2)^{1/2},\ P=\{(\alpha_1,\ \alpha_2):\ \alpha_1^2+\alpha_2^2\le 1\}$

③ $f(t,\ z,\ \alpha)=(\alpha_1,\ \alpha_2),\ \sigma(z)=|x_1|+|x_2|,\ P=\{(\alpha_1,\ \alpha_2):\ \alpha_1^2+\alpha_2^2\le 1\}$

④ $f(t,\ z,\ \alpha)=(\alpha_1,\ \alpha_2),\ \sigma(z)=2|x_1|+2|x_2|,\ P=\{(\alpha_1,\ \alpha_2):\ |\alpha_1|\le 0.5\alpha_2+1.5,\ |\alpha_2|\le 1\}$

⑤ $f(t,\ z,\ \alpha)=(\alpha_1,\ \alpha_2),\ \sigma(z)=2|x_1|+0.5x_2,\ P=\{(\alpha_1,\ \alpha_2):\ |\alpha_1|\le 0.5\alpha_2+1.5,\ |\alpha_2|\le 1\}$

⑥ $f(t,\ z,\ \alpha)=(x_1,\ \alpha),\ \sigma(z)=(x_1^2+x_2^2)^{1/2},\ P=[-1,\ 1]$

⑦ $f(t,\ z,\ \alpha)=(x_2,\ \alpha),\ \sigma(z)=(x_1^2+x_2^2)^{1/2},\ P=[-1,\ 1]$

이때 계산구역 $[-4,\ 4]\times[-4,\ 4]\subset \boldsymbol{R}^2$ 에서 $\Delta_z=\Delta_{x_1}=\Delta_{x_2}=a\Delta,\ \Delta=1/k$ 이고 ①－③의 경우에 $a=\sqrt{2}$, ④, ⑤의 경우에 $a=\sqrt{10}$, ⑥, ⑦의 경우에 $a=\sqrt{34}$ 라고 놓았다.

얻어진 계산결과를 선행연구[4, 5]에서 값함수에로의 수렴성이 증명된 계산도식의 계산결과와 비교하였다.

시간구간을 세분등분할하는 매 경우에 대하여 중간시각 $t=0.5$ 에서의 우리의 계산도식과 선행계산도식에 의한 계산결과들의 차(최대차)는 표와 같다.

표. 계산도식과 선행계산도식에 의한 계산결과들의 차

k	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
10	0.035 0	0	0.048 5	0	0.100 0	0	0
20	0.013 2	0	0.027 6	0	0.050 0	0	0
30	0.007 7	0	0.019 3	0	0.033 3	0	0
40	0.005 4	0	0.014 8	0	0.025 0	0	0
50	0.004 0	0	0.012 0	0	0.020 0	0	0
60	0.003 2	0	0.010 1	0	0.016 7	0	0
70	0.002 6	0	0.008 7	0	0.014 2	0	0
100	0.001 6	0	0.006 2	0	0.010 0	0	0

결과들은 시간구간을 세분할수록 차가 단조감소한다는것을 보여준다.

참 고 문 헌

[1] 리국환 등; 조선민주주의인민공화국 과학원통보, 4, 10, 주체104(2015).

[2] A. I. Subbotin; Generalized Solutions of First Order PDEs, Birkhauser, 34～78, 1994.

[3] P. E. Souganidis; J. of Differential Equations, 59, 1, 1985.

[4] N. D. Botkin et al.; SIAM J. Sci. Comput., 33, 2, 992, 2011.

[5] N. D. Botkin et al.; Applied Mathematical Modelling, 35, 8, 4044, 2011.

[6] G. E. Ivanov; Differential Equations, 48, 4, 560, 2012.

주체104(2015)년 11월 5일 원고접수

Convergence Estimation of a Computation Scheme to Value Function in Mayer Problems of Two-Dimensional Control Systems

Kim Chol Hyok

We presented a new computation scheme for constructing the value function in Mayer problems considering singularity of the movements which is often expressed in the continuous dynamic systems and checked the sufficient conditions [3] for convergence of the computation scheme. And for the two-dimensional control systems, we proved the convergence to the value function in the case when vectograms are intervals, and checked up on the convergence by several numerical experiments in the other case.

Key word: Mayer problem