김일성종합대학학보 (수학)　　주체107(2018)년 제64권 제1호

1차원분수계미분방정식의 안장마디분지와 안정성교체분지에 관한 연구

김상문, 왕영철

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《기초과학을 끊임없이 심화발전시키지 않고서는 첨단과학기술을 연구도입할수도 없고 새로운 높은 수준의 과학기술을 연구개발할수도 없습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제22권 21폐지)

미분방정식은 현실의 많은 대상들을 모형화하고 그것을 연구하기 위한 수학적수단으로 된다.[1, 2]

현실적인 문제들을 모형화하는데서 대부분의 미분방정식들이 외적요인을 나타내는 보조변수항을 포함하게 되는데 그 보조변수의 변화에 따라서 미분방정식의 풀이가 어떻게 변화되는가를 고찰하며 나아가서 카오스현상을 연구하는데서 미분방정식의 분지에 관한 리론이 중요하게 쓰이고있다.[1]

따라서 지난 시기 옹근수계미분방정식의 분지와 1차원미분방정식에서 일어나는 안장마디분지, 쇠스랑분지, 안정성교체분지에 대한 연구[1]가 심화되였다.

보통 옹근수계도함수 및 중적분을 복소수계까지 확장한것을 그 력사적유래와 불러온 습관에 따라 분수계도함수 및 분수계적분이라고 부르며 분수계도함수와 적분이 들어있는 분수계미분방정식과 분수계적분방정식이 활발히 연구되고있다.[2－13]

또한 분수계미분방정식인 경우 평형점의 안정성을 판정하기 위한 여러가지 조건들이 연구되고 특히 편각에 의한 안정성판정조건[4]이 밝혀짐으로써 평형점의 안정성판정에서 전진이 이룩되였다.

현재 구체적인 분수계미분방정식의 분지와 카오스현상은 리론적으로, 수치적으로 연구되고있다.[5, 12, 13]

그러나 일반적인 1차원분수계상미분방정식의 분지에 대한 연구는 심화되지 못하였다.

론문에서는 도함수계수가 $0<\alpha<1$인 경우 실함수공간에서 분수계미분방정식의 안장마디분지와 안정성교체분지가 일어나기 위한 충분조건을 연구하였다.

1. 안장마디분지출현조건

정리 1 (안장마디분지에 관한 정리)

$$(D^{\alpha}x)(t)=f(x,\ \mu)\ (0<\alpha<1) \tag{1}$$

$f:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$가 C^2급넘기기로서 다음의 조건을 만족시키면 식 (1)은 $\mu=0$에서 안장마디분지를 일으킨다.

① $f(0,\ 0)=0$

② $f_x(0,\ 0)=0$

③ $f_\mu(0,\ 0)\times f_{xx}(0,0)<0$

증명 $f_\mu(0,0)\neq 0$이므로 음함수정리로부터 정수 $\delta,\ \varepsilon$과 유일한 함수 $\mu=\mu(x)$가 있어서 식 $f(x,\ \mu(x))=0$이 성립한다. 그리고 조건 ①로부터 $\mu(0)=0$이다.

$f(x,\ \mu(x))=0$의 량변을 x에 관해서 미분하면

$$f_x(x,\ \mu(x))+f_\mu(x,\ \mu(x))\mu'(x)=0 \tag{2}$$

이 성립하며 이 식의 량변을 다시 x에 관해서 미분하면

$$\begin{aligned} &f_{xx}(x,\ \mu(x))+2f_{x\mu}(x,\ \mu(x))\mu'(x)+\\ &+f_{\mu\mu}(x,\mu(x))\mu'(x)^2+f_\mu(x,\mu(x))\mu''(x)=0 \end{aligned} \tag{3}$$

이 성립한다. 식 (2)로부터

$$\mu'(0)=\frac{-f_x(0,0)}{f_\mu(0,0)}=0$$

이 성립하며 식 (3)과 조건 ③으로부터

$$\mu''(0)=\frac{-f_{xx}(0,0)}{f_\mu(0,0)}>0$$

이 성립한다. 이제 $f_{xx}(0,0)<0$인 경우를 고찰하면

$$\frac{\partial}{\partial x}[f_x(x,\mu(x))]_{x=0}=[f_{xx}(x,\mu(x))+f_{x\mu}(x,\mu(x))\mu'(x)]_{x=0}=f_{xx}(0,0)<0$$

이 성립하며 따라서 $f_x(x,\mu(x))$는 $x=0$에서 감소된다.

이 사실과 $f_x(x,\mu(x))|_{x=0}=0$이라는 사실을 고려하면 매 $x\in(0,\delta)$에서는 $f_x(x,\mu(x))<0$이고 매 $x\in(-\delta,0)$에서는 $f_x(x,\mu(x))>0$이며 따라서

$$\arg(f_x(x,\mu(x)))=\pi>\frac{\alpha\pi}{2}\ \ (x\in(0,\delta))$$

가 성립한다. 그러므로 편각에 의한 안정성판정조건에 의하여 평형점들은 점근안정하다.

한편

$$\arg(f_x(x,\mu(x)))=0<\frac{\alpha\pi}{2}\ \ (x\in(-\delta,0))$$

이므로 편각에 의한 안정성판정조건에 의하여 평형점들은 불안정하다.

$f_{xx}(0,0)>0$인 경우에는 반대결과가 성립한다. 그러므로 방정식 (1)은 $\mu=0$에서 안장마디분지를 일으킨다.(증명끝)

2. 안정성교체분지출현조건

정리 2 (안정성교체분지에 관한 정리) $f:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$가 C^3급넘기기로서 다음의 조건을 만족시키면 식 (1)은 $\mu=0$에서 안정성교체분지를 일으킨다.

① $f(0,\ \mu)=0$

② $f_x(0,\ 0)=0$

③ $f_\mu(0,\ 0)=0$

④ $f_{xx}(0,\ 0)\times f_{x\mu}(0,\ 0)<0$

증명 함수 $F:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 를

$$F(x,\mu)=\begin{cases}\dfrac{f(x,\mu)}{x}, & x\neq 0\\ f_x(0,\ \mu), & x=0\end{cases}$$

으로 정의하면 F 는 C^2 급함수이고

$$f(x,\ \mu)=xF(x,\ \mu)\ \ (x\in\mathbf{R}\setminus\{\mathbf{0}\},\ \mu\in\mathbf{R}) \tag{4}$$

가 성립한다. 따라서

$$f_x(x,\ \mu)=F(x,\ \mu)+xF_x(x,\ \mu)$$
$$f_{xx}(x,\ \mu)=2F_x(x,\ \mu)+xF_{xx}(x,\ \mu)$$

이므로

$$F(0,\ 0)=f_x(0,\ 0)=0 \tag{5}$$

$$F_x(0,\ 0)=\frac{1}{2}f_{xx}(0,\ 0)\neq 0 \tag{6}$$

$$F_\mu(0,\ 0)=f_{x\mu}(0,\ 0)\neq 0 \tag{7}$$

이 성립한다. 식 (5), (6)과 음함수정리로부터 정수 $\delta,\ \varepsilon$ 과 유일한 C^2 급함수 $x:(-\varepsilon,\varepsilon)\to$ $\to(-\delta,\delta)$ 가 있어서

$$F(x(\mu),\ \mu)=0$$
$$x'(0)=\frac{F_\mu(0,\ 0)}{F_x(0,\ 0)}=-\frac{f_{x\mu}(0,\ 0)}{f_{xx}(0,\ 0)}>0$$

이 성립한다. 또한 가정과 식 (5)로부터 $x(0)=0$ 이 나온다.

이제 $f_{xx}(0,\ 0)<0$ 인 경우를 생각하자. 가정 ④로부터

$$\left.\frac{d}{d\mu}[f_x(0,\ \mu)]\right|_{\mu=0}=f_{x\mu}(0,\ 0)>0$$

이고 따라서 $f_x(0,\ \mu)$ 는 $\mu=0$ 에서 μ 에 관하여 증가하게 된다.

그런데 $f_x(0,\ \mu)|_{\mu=0}=f_x(0,\ 0)=0$ 이므로

$$f_x(0,\ \mu)<0,\ \mu\in(-\varepsilon,\ 0)$$
$$f_x(0,\ \mu)>0,\ \mu\in(0,\ \varepsilon)$$

이 성립하며 한편 $f_x(x,\ \mu)=F(x,\ \mu)+xF_x(x,\ \mu)$ 이므로 $f_x(x(\mu),\ \mu)=x(\mu)F_x(x(\mu),\ \mu)$ 가 성립한다. 따라서

$$\left.\frac{d}{d\mu}[f_x(x(\mu),\ \mu)]\right|_{\mu=0}=\left.\frac{d}{d\mu}[x(\mu)F_x(x(\mu),\ \mu)]\right|_{\mu=0}=x'(0)f_{xx}(0,\ 0)=-f_{x\mu}(0,\ 0)<0$$

이 성립하며 $f_x(x(\mu),\ \mu)$ 는 $\mu=0$ 에서 μ 에 관하여 감소하게 된다.

$f_x(x(0),\ 0)=f_x(0,\ 0)=0$ 이므로

$$f_x(x(\mu),\ \mu)>0,\ \ \mu\in(-\varepsilon,\ 0)$$
$$f_x(x(\mu),\ \mu)<0,\ \ \mu\in(0,\ \varepsilon)$$

이 성립하며 따라서

$$\arg(f_x(x(\mu),\ \mu)) = \pi > \frac{\alpha\pi}{2}\ (\mu \in (0,\ \varepsilon))$$

이고 편각에 의한 안정성판정조건에 의하여 평형점들은 점근안정하다.

한편

$$\arg(f_x(x(\mu),\ \mu)) = 0 < \frac{\alpha\pi}{2}\ (\mu \in (-\varepsilon,\ 0))$$

이므로 편각에 의한 안정성판정조건에 의하여 평형점들은 불안정하다. 따라서 방정식 (1)은 $\mu = 0$ 에서 안정성교체분지를 일으킨다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] 정우환 등; 미분방정식, **김일성**종합대학출판사, 253～269, 주체104(2015).

[2] **김일성**종합대학학보(자연과학), 48, 3, 20, 주체91(2002).

[3] **김일성**종합대학학보(자연과학), 56, 6, 12, 주체99(2010).

[4] 김철; 과학원통보, 4, 15, 주체97(2008).

[5] M. S. Abdelouhab et al.; Indian Journal of Industrial and Applied Mathematics, 6, 2, 105, 2015.

[6] P. Arena et al.; International J. Bifur. Chaos., 8, 7, 1527, 1998.

[7] S. Das; Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls, Springer, 178～218, 2008.

[8] S. B. Hadid et al.; PanAmer. J. Math., 6, 1, 57, 1996.

[9] R. Hilfer et al.; FCAA., 12, 3, 299, 2009.

[10] A. A. Kilbas et al.; Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, 279～346, 2006.

[11] H. C. O et al.; Fractional Calculus and Applied Analysis, 17, 1, 79, 2014.

[12] J. W. Michael et al.; Physica D., 241, 947, 2012.

[13] M. S. Tavazoei et al.; Physica D., 237, 2628, 2008.

주체106(2017)년 8월 10일 원고접수

A Research on Saddle-Node and Transcritical Bifurcations in Fractional Differential Equations of One Dimension

Kim Sang Mun, Wang Yong Chol

In this paper, we find sufficient conditions for saddle-node and transcritical bifurcations in the general fractional differential equations of one dimension

$$(D^{\alpha}x)(t) = f(x,\ \mu) \quad 0 < \alpha < 1$$

Key words: fractional differential equation, bifurcation, saddle-node bifurcation, transcritical bifurcation