김일성종합대학학보 JOURNAL OF KIM IL SUNG UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체105(2016)년 제62권 제10호 Vol. 62 No. 10 JUCHE105(2016).

LMI에 기초한 불확정대체계의 분산 로바스트상태반결합조종기설계

리 진 성

경애하는 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《인민경제의 현대화, 정보화실현의 전략적목표는 모든 생산공정을 자동화, 지능화하고 공장, 기업소들을 무인화하는것입니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 48페지)

선행연구들[2－4]에서는 대체계의 각이한 조종기설계방법을 제기하였으나 동정의 부정확성 등 여러가지 요인으로 생기는 불확정성에 대해서는 론의하지 못하였다.

론문에서는 불확정대체계가 로바스트안정이기 위한 분산로바스트상태반결합조종기를 LMI방법에 기초하여 설계하였다.

1. LMI에 기초한 분산로바스트상태반결합조종기설계

N개의 부분체계들로 구성되여있는 불확정대체계의 상태방정식은 다음과 같이 표시할수 있다.

$$\dot{x}_i(t)=[A_i+\Delta A_i]x_i(t)+[B_i+\Delta B_i]u_i(t)+\sum_{j=1,\ j\neq i}^{N}[A_{ij}+\Delta A_{ij}]x_j(t),\quad i=1,\ \cdots,\ N \tag{1}$$

여기서 $x_i(t)\in R^{n_i}$, $u_i(t)\in R^{m_i}$는 i째 부분체계의 상태 및 조종력벡토르, A_i, B_i는 상수행렬, $A_{ij}(j\neq i)$는 i째 부분체계와 j째 부분체계사이의 호상관련행렬이다.

이때 체계의 불확정성이 다음과 같은 조건을 만족시킨다고 가정하자.

$$|\Delta A_{ij}|<E_{aij},\ \ |\Delta B_i|<E_{bi},\quad i,\ j=1,\ \cdots,\ N \tag{2}$$

여기서 $|\Delta A_{ij}|<E_{aij}$, $|\Delta B_i|<E_{bi}$는 행렬의 매개 원소 $|a_{ij}|<e_{ij}$를 의미하며 E_{aij}, E_{bi}는 실상수행렬이다.

그러면 매개의 부분체계에 대하여 1개의 상태반결합조종기는 다음과 같이 설계할수 있다.

$$u_i(t)=K_ix_i(t) \tag{3}$$

이제 반결합증폭도행렬 $K_i\in R^{m_i\times n_i}$가 닫긴대체계의 안정성을 보장하는 문제를 론의하자. 이를 위해 식 (3)을 식 (1)에 넣으면 닫긴체계의 상태방정식은

$$\dot{x}_i=[A_i+\Delta A_i]x_i+[B_i+\Delta B_i]K_ix_i+\sum_{j=1,\ j\neq i}^{N}[A_{ij}+\Delta A_{ij}]x_j \tag{4}$$

로 된다.

한편 분산체계에서 랴뿌노브함수를 다음과 같이 쓸수 있다.

$$V(x)=x^T Px=\sum_{i=1}^{N} x_i^T P_i x_i \tag{5}$$

식 (5)에 도함수를 취하면 다음식이 얻어진다.

$$\begin{aligned}\dot V(x)=\sum_{i=1}^{N}(\dot x_i^T P_i x_i+x_i^T P_i \dot x_i)=\sum_{i=1}^{N}\Big\{x_i^T(A_i^T P_i+P_iA_i+\Delta A_i^T P_i+P_i\Delta A_i+\\ +K_i^T B_i^T P_i+P_iB_iK_i+K_i^T\Delta B_i^T P_i+P_i\Delta B_iK_i)x_i+2x_i^T P_i\sum_{j=1,\, j\neq i}^{N}(A_{ij}+\Delta A_{ij})x_j\Big\}\end{aligned} \tag{6}$$

식 (6)에서 매개 항은 다음과 같이 변환할수 있다.

$$\alpha_i P_i P_i+\alpha_i^{-1}\Gamma(E_{aii})\ge P_i\Delta A_i+\Delta A_i^T P_i$$

$$\beta_i P_i P_i+\beta_i^{-1}K_i^T\Gamma(E_{bi})K_i\ge P_i\Delta B_iK_i+K_i^T\Delta B_i^T P$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}2x_i^T P_i\sum_{j=1,\, j\neq i}^{N}(A_{ij}+\Delta A_{ij})x_j\le\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1,\, j\neq i}^{N}[x_i^T P_i(A_{ij}A_{ij}^T+\Delta A_{ij}\Delta A_{ij}^T)P_ix_i+2x_j^T x_j]\le\\ \le\sum_{i=1}^{N}(x_i^T P_iF_{1i}P_ix_i+x_i^T P_iF_{2i}P_ix_i+F_{3i}x_i^T x_i),\ (\alpha=1)\end{aligned} \tag{7}$$

여기서

$$F_{1i}=\sum_{j=1,\, j\neq i}^{N}A_{ij}A_{ij}^T,\quad F_{2i}=\sum_{j=1,\, j\neq i}^{N}\Omega(E_{aij}),\quad F_{3i}=2(N-1)I$$

$$\Omega(E_{aij})\ge\Delta A_{ij}\Delta A_{ij}{}^T,\ \Gamma(E_{aii})\ge\Delta A_{ii}^T\Delta A_{ii}$$

$$\Omega(E_{aij})=\begin{cases}\|E_{aij}E_{aij}^T\|I, & \|E_{aij}E_{aij}^T\|I<n\cdot diag(E_{aij}E_{aij}^T)\\ n\cdot daig(E_{aij}E_{aij}^T), & \text{기 타}\end{cases}$$

$$\Gamma(E_{aii})=\begin{cases}\|E_{aii}^T E_{aii}\|I, & \|E_{aii}^T E_{aii}\|I<m\cdot diag(E_{aii}^T E_{aii})\\ m\cdot daig(E_{aii}^T E_{aii}), & \text{기 타}\end{cases}$$

이며 n, m은 ΔA_{ij}의 행과 렬의 차수이다.

식 (7)을 식 (6)에 넣으면 다음의 식이 얻어진다.

$$\begin{aligned}\dot V(x)\le\sum_{i=1}^{N}x_i^T[A_1^T P_i+P_iA_i+\alpha_iP_iP_i+\alpha_i^{-1}\Gamma(E_{aii})+K_i^T B_i^T P_i+P_iB_iK_i+\\ +\beta_iP_iP_i+\beta_i^{-1}K_i^T\Gamma(E_{bi})K_i+P_iF_{1i}P_i+P_iF_{2i}P_i+F_{3i}]x_i\end{aligned}$$

따라서 랴뿌노브안정성정리로부터 다음의 부등식

$$\begin{aligned}A_1^T P_i+P_iA_i+\alpha_iP_iP_i+\alpha_i^{-1}\Gamma(E_{aii})+K_i^T B_i^T P_i+P_iB_iK_i+\\ +\beta_iP_iP_i+\beta_i^{-1}K_i^T\Gamma(E_{bi})K_i+P_iF_{1i}P_i+P_iF_{2i}P_i+F_{3i}<0\end{aligned} \tag{8}$$

이 성립하면 식 (8)은 정인정값대칭행렬 P_i를 풀이로 가지며 결국 대체계 (1)은 분산상태반결합에 의하여 안정하다는것을 알수 있다.

이제

$$\Gamma(E_{aij})=\Gamma(E_{aij})^{1/2}\Gamma(E_{aij})^{1/2},\quad \Gamma(E_{bi})=\Gamma(E_{bi})^{1/2}\Gamma(E_{bi})^{1/2}$$

로 놓고 식 (8)의 매 항의 량쪽에 P_i^{-1}을 곱한 다음 $X_i=P_i^{-1}$, $Y_i=K_iX_i$로 놓으면

$$\begin{aligned}&X_iA_i^T+A_iX_i+\alpha_iI+\alpha_i^{-1}X_i\Gamma(E_{aii})X_i+Y_i^TB_i^T+B_iY_i+\\&+\beta_iI+\beta_i^{-1}Y_i^T\Gamma(E_{bi})Y_i+F_{1i}+F_{2i}+X_iF_{3i}X_i<0\end{aligned}\tag{9}$$

으로 되며 Schur의 보조정리로부터 식 (9)는 다음과 같은 LMI로 귀착된다.

$$\begin{bmatrix}\vec{A}_i & X_i\Gamma(E_{aii})^{1/2} & Y_i^T\Gamma(E_{bi})^{1/2} & X_i\\ \Gamma(E_{aii})^{1/2}X_i & -\alpha_iI & 0 & 0\\ \Gamma(E_{bi})^{1/2}Y_i & 0 & -\beta_iI & 0\\ X_i & 0 & 0 & -F_{3i}^{-1}\end{bmatrix}<0\tag{10}$$

여기서

$$\vec{A}_i=X_iA_i^T+A_iX_i+(\alpha_i+\beta_i)I+Y_i^TB_i^T+B_iY_i+F_{1i}+F_{2i}$$

이다.

그러므로 식 (10)의 풀이를 구하면 분산상태반결합증폭도행렬은

$$K_i=-Y_iX_i^{-1}\tag{11}$$

로 되며 대체계 (1)은 분산상태반결합에 의하여 점근안정하다.

2. 수값모의실험

실험을 위해 우리는 2개의 부분체계로 구성된 불확정대체계의 파라메터행렬을 다음과 같이 주었다.

$$A_1=\begin{bmatrix}-1.97 & -0.31\\ 0.91 & 0.8\end{bmatrix},\quad A_{12}=\begin{bmatrix}-0.5 & 0.3\\ 0 & 1.2\end{bmatrix},\quad B_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$A_2=\begin{bmatrix}-1.32 & 0.34\\ 0.1 & -0.87\end{bmatrix},\quad A_{21}=\begin{bmatrix}-0.5 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad B_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$E_{a11}=\begin{bmatrix}1 & 0.2\\ 0.3 & 0.17\end{bmatrix},\quad E_{a12}=\begin{bmatrix}0.04 & 0.01\\ 0.03 & 0.04\end{bmatrix},\quad E_{a21}=\begin{bmatrix}0.04 & 0.01\\ 0.06 & 0.01\end{bmatrix}$$

$$E_{a22}=\begin{bmatrix}0.3 & 0\\ 0 & 0.2\end{bmatrix},\quad E_{b1}=\begin{bmatrix}0.4\\ 0.2\end{bmatrix},\quad E_{b2}=\begin{bmatrix}0.2\\ 0.1\end{bmatrix}$$

이때 초기상태를 $x=[5\ \ 5\ \ 6\ \ 6]$으로 놓고 MATLAB에 의하여 선형행렬부등식 (10)을 풀면 부분체계 1과 2의 상태반결합증폭도는 다음과 같이 얻어진다.

$$K_1=[-3.010\ 7\quad -6.352\ 3],\quad K_2=[0.478\ 5\quad -2.802\ 8]$$

따라서 분산조종규칙은 다음과 같이 표시된다.

$$u_1(t)=[-3.010\ 7\quad -6.352\ 3]x_1(t),\quad u_2(t)=[0.478\ 5\quad -2.808\ 2]x_2(t)$$

모의실험결과는 그림과 같다.

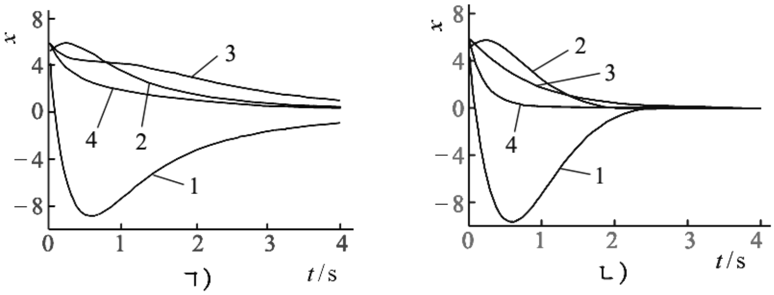

그림. 모의실험결과

ㄱ) 선행한 방법의 상태응답, ㄴ) 제안한 방법의 상태응답;
1－ x_{11} 일 때, 2－ x_{12} 일 때, 3－ x_{21} 일 때, 4－ x_{22} 일 때

모의곡선으로부터 론문에서 설계한 조종기의 상태응답이 매우 빨리 령으로 수렴한다는것을 알수 있다. 이것은 론문에서 설계한 조종기가 보다 더 효과적이라는것을 보여준다.

맺 는 말

LMI방법을 리용하여 불확정대체계의 분산로바스트상태반결합조종기를 설계하고 수값모의실험을 통하여 그 효과성을 검증하였다.

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보(자연과학), 61, 2, 17, 주체104(2015).
[2] 陈宁 等; 中南工业大学学报, 34, 1, 84, 2003.
[3] 桂卫华 等; 控制与决策, 16, 3, 329, 2001.
[4] 陈宁 等; 中南工业大学学报, 34, 6, 661, 2003.

주체105(2016)년 6월 5일 원고접수

Design of Decentralized Robust State Feedback Controller for the Uncertain Large-Scale Systems based on LMI

Ri Jin Song

We designed the decentralized robust state feedback controller for uncertain large-scale systems using LMI and verified its efficiency through the simulation.

Key words: state feedback, large-scale system, simulation