김일성종합대학학보 주체110(2021)년
수 학 제67권 제1호

검은통다목적최량화문제를 풀기 위한 한가지 믿음구역법

김주성, 주광휘

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《최신과학기술에 기초하여 나라의 경제를 현대화, 정보화하기 위한 투쟁을 힘있게 벌려야 합니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제22권 22페지)

선행연구[2]에서는 검은통두목적최량화문제에서 근사풀이들의 분포특성을 개선하기 위하여 거리평균법에 의한 최고고립점선택법과 그에 기초한 풀이알고리듬을 제기하였다. 선행연구[4]에서는 하나의 목적함수만이 검은통함수인 다목적최량화문제에서 1개의 파레토근사풀이를 구하는 알고리듬을 제기하고 선행연구[3]에서는 파레토근사풀이들의 분포성을 평가하는데 밀집함수를 리용하였다.

론문에서는 2개이상의 목적함수들이 모두 검은통함수인 다목적최량화문제에서 밀집함수를 리용하여 근사파레토풀이들의 분포특성을 개선하는 한가지 믿음구역법을 제기하고 계산실험을 통하여 알고리듬의 효과성을 검증하였다.

n변수다목적최량화문제

$$\min_{x\in X} F(x)=[f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_p(x)] \tag{1}$$

를 보기로 하겠다. 여기서 X는 $\mathbf{R}^n$의 부분공간이며 $F: X\to\mathbf{R}^p$는 벡토르값함수이다.

정의 1[1] 두 벡토르 $x_u,\ x_v\in X$에 대하여

$$f_i(x_u)\le f_i(x_v),\quad \forall i\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ p\}$$
$$f_l(x_u)< f_l(x_v),\quad \exists l\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ p\}$$

이면 $F(x_u)$는 $F(x_v)$를 지배한다고 말하고 $F(x_u)\prec F(x_v)$로 표시한다.

정의 2[1] $F(x)\prec F(\hat{x})$인 $x\in X$가 존재하지 않을 때 $\hat{x}\in X$를 대역적파레토최량점 또는 대역적유효점이라고 부른다. 그리고 $F(\hat{x})$을 대역적유효값이라고 부르며 대역적유효점들의 모임의 상을 파레토면이라고 부른다.

정의 3[1] 임의의 $x\in N(\hat{x})\cap X$에 대하여 $F(x)\prec F(\hat{x})$이 성립하지 않는 $\hat{x}$의 열린근방 $N(\hat{x})$이 존재할 때 $\hat{x}\in X$를 국부파레토최량점이라고 부른다. 그리고 $F(\hat{x})$을 국부유효값이라고 부르며 국부유효점모임의 상을 국부파레토면이라고 부른다.

정의 4[1] 함수 $f(x): \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$에 대하여 주어진 점에서의 함수값은 알고있지만 함수의 해석적표시를 알수 없을 때 이 함수를 검은통함수라고 부른다.

정의 5 다목적최량화문제 (1)에서 목적함수공간의 자리표축 $f_1,\ f_2,\cdots,\ f_p$방향의 단위벡토르를 $\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_p$라고 하자. 이때 $G=(\min f_1,\ \min f_2,\ \cdots,\ \min f_p)$, $B=(\max f_1,\ \max f_2,\ \cdots,\ \max f_p)$를 각각 다목적최량화문제 (1)의 리상점, 최악점이라고 부른다. 그리고 $\boldsymbol{v}_1$을 GB방향의 단위벡토르라고 할 때 G를 원점으로 하고 $\boldsymbol{v}_1$에 수직인 초평면을 다목적최량화문제 (1)의 사영초평면이라고 부른다.

그람-슈미트직교화과정과 표준화를 진행하면 사영초평면의 자리표단위벡토르들은

$$\boldsymbol{v}_2=\frac{\boldsymbol{u}_2-(\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_1}{|\boldsymbol{u}_2-(\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_1|},\ \boldsymbol{v}_3=\frac{\boldsymbol{u}_3-(\boldsymbol{u}_3\cdot\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_1-(\boldsymbol{u}_3\cdot\boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{u}_3-(\boldsymbol{u}_3\cdot\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_1-(\boldsymbol{u}_3\cdot\boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{v}_2|},\ \cdots\ ,$$

$$\boldsymbol{v}_p=\frac{\boldsymbol{u}_p-(\boldsymbol{u}_p\cdot\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_1-(\boldsymbol{u}_p\cdot\boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{v}_2-\cdots-(\boldsymbol{u}_p\cdot\boldsymbol{v}_{p-1})\boldsymbol{v}_{p-1}}{|\boldsymbol{u}_p-(\boldsymbol{u}_p\cdot\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_1-(\boldsymbol{u}_p\cdot\boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{v}_2-\cdots-(\boldsymbol{u}_p\cdot\boldsymbol{v}_{p-1})\boldsymbol{v}_{p-1}|}$$

과 같다.

목적함수공간의 벡토르를 사영초평면에로 넘기는 사영넘기기를 $\Pr(\cdot):\mathbf{R}^p\to\mathbf{R}^{p-1}$이라고 할 때 근사풀이 $F(x)=[f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_p(x)]$의 사영점은 $\Pr(F(x))=((F(x)\cdot\boldsymbol{v}_2),\ (F(x)\cdot\boldsymbol{v}_3),\ \cdots,\ (F(x)\cdot\boldsymbol{v}_p))$로 주어진다.

정의 6[3] 다목적최량화문제 (1)의 목적함수공간의 근사풀이값벡토르 $\boldsymbol{r}_i=F(x_i)$, $i=1,\ \cdots,\ N$들을 사영초평면 Π에로 사영하자. 이때 사영점 $c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_N$들을 근사풀이 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N$에 대한 문제 (1)의 사영풀이모임이라고 부르며 사영초평면 Π에서 주어진 함수

$$\Omega_\sigma(c_i;x)=\exp[-\|x-c_i\|_2^2/\sigma],\ \Omega_\sigma(c_i;\cdot):\mathbf{R}^{p-1}\to\mathbf{R},\ \sigma>0$$

을 영향결수 σ에 관한 사영점 c_i의 영향함수라고 부른다.

정의 7[3] 다목적최량화문제 (1)의 근사풀이모임 $\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N\}$에 대한 사영풀이모임을 $\{c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_N\}$이라고 하자. 이때 함수 $D(x)=\sum_{i=1}^{N}\Omega_\sigma(c_i;x)$, $D:\mathbf{R}^{p-1}\to\mathbf{R}$를 근사풀이모임 $\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N\}$과 영향결수 σ에 대한 사영초평면 Π에서의 밀집함수라고 부르며 $D(x),\ x\in\Pi$를 Π에서 x의 밀집도라고 부른다. 그리고 $D(c_{iso})=\min_{i=1,\ \cdots,\ N}D(c_i)$일 때 c_{iso}를 $\{c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_N\}$의 최고고립점이라고 부른다.

근사풀이 $x\in\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N\}$의 사영점 $\Pr(x)$의 밀집도를 x의 밀집도라고 부르고 사영초평면우의 최고고립점 c_{iso}의 원상 $\Pr^{-1}(c_{iso})$를 $\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N\}$의 최고고립점이라고 부른다.

알고리듬(다목적최량화알고리듬)

1) 파라메터설정

보간점의 개수 d, $\Delta_{\max}>0$, $\Delta_{tol}\ge0$, $\delta>0$, $0\le\eta_0\le\eta_1<1$, $\mu>0$, $\tau_{dec}\in(0,\ 1)$, $\tau_{inc}>1$, $\omega\in(0,\ 1)$, 초기점 $x^{(0)}$, 초기믿음구역반경을 $\Delta^{(0)}(x^{(0)})\in(0,\ \Delta_{\max}]$으로 놓는다.

다음 $F(x^{(0)})=[f_1(x^{(0)}),\ f_2(x^{(0)}),\ \cdots,\ f_p(x^{(0)})]$을 구하고 $X^{(0)}=\{x^{(0)}\}$, $k=1$로 놓는다.

2) 파레토면탐색

걸음 1(최고고립점결정 및 초기화단계)

$k=1$일 때 $X^{(0)}$의 유일한 원소 $x^{(0)}$을 이 모임의 최고고립점 $x_c^{(1)}$로 설정한다.

$k>1$일 때

① 비지배점모임 $X^{(k-1)}=\{x_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ N\}$에 관한 사영초평면에서의 밀집함수 $D(x)$를 결정한다.

② $x_i\in X^{(k-1)},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ N$에서의 밀집도 $D(x_i)$들을 계산하고 $\gamma^{(k)}(x_i)=D(x_i)$로 한다.

③ $x_c^{(k)} = \arg\min\{\gamma^{(k)}(x_i)\ \ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ N)\}$를 $X^{(k-1)}$의 최고고립점 $x_c^{(k)}$로 선택한다.

그리고 $x_c^{(k)}$에 대응하는 믿음구역반경을 $\Delta^{(k-1)}(x_c^{(k)})$라고 하자. 기준점을 $r^{(k)} = F(x_c^{(k)})$로 주고 $Y^{(k)} = \phi$, $\Delta_0^{(k)} = \Delta^{(k-1)}(x_c^{(k)})$로 정한다. $j=1$로 놓는다.

걸음 2(풀이탐색단계)

$\widetilde{\Delta}^{(k,\ j)} = \omega^{j-1}\Delta_0^{(k)}$로 놓는다.

$B(x_c^{(k)},\ \widetilde{\Delta}^{(k,\ j)})$에서 보간점모임 $\{y_1^{(k,\ j)},\ y_2^{(k,\ j)},\ \cdots,\ y_d^{(k,\ j)}\}$를 결정하고 $f_i^{(k)} = f_i$의 근사모형 $m_i^{(k,\ j)}$, $i=1,\ 2,\ \cdots,\ p+1$을 구성한다. 즉

$$m_i^{(k,\ j)}(x_c^{(k)} + s) = c_i^{(k,\ j)} + s^{\mathrm{T}} g_i^{(k,\ j)} + \frac{1}{2} s^{\mathrm{T}} H_i^{(k,\ j)} s$$

이다. 다음 $Y_j^{(k)} = \{y_1^{(k,\ j)},\ y_2^{(k,\ j)},\ \cdots,\ y_d^{(k,\ j)}\}$로 놓는다.

믿음구역 $B(x_c^{(k)},\ \widetilde{\Delta}^{(k,\ j)})$에서 한목적문제들을 모두 풀고

$$z_i^{(k,\ j)} = \arg\min\{m_i^{(k,\ j)}(x) : x \in B(x_c^{(k)},\ \widetilde{\Delta}^{(k,\ j)})\},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ p+1$$

$$Z_j^{(k)} = \{z_1^{(k,\ j)},\ z_2^{(k,\ j)},\ \cdots,\ z_{p+1}^{(k,\ j)}\}$$

로 놓는다. 만일

$\widetilde{\Delta}^{(k,\ j)} \le \max\{\Delta_{tol},\ \min\limits_{i=1,\cdots,p+1} \mu \| g_i^{(k,\ j)} \|\}$이면

$$\hat{g}_i^{(k)} = g_i^{(k,\ j)},\ \ \hat{m}_i^{(k)} = m_i^{(k,\ j)},\ \ \hat{z}_i^{(k)} = z_i^{(k,\ j)},\ \ i=1,\ 2,\ \cdots,\ p+1$$

$$\Delta_c^{(k)} = \min\left[\max\left\{\widetilde{\Delta}^{(k,\ j)},\ \min_{i=1,\cdots,p+1} \mu \| g_i^{(k,\ j)} \|\right\},\ \Delta_0^{(k)}\right]$$

로 놓고 걸음 3에로 이행한다.

그렇지 않은 경우에는 j를 하나 증가시키고 걸음 2에로 이행한다.

걸음 3(축소비계산단계)

$y \in Y_j^{(k)}$에서의 축소비

$$\rho^{(k)}(y) = \frac{f_{p+1}^{(k)}(x_c^{(k)}) - f_{p+1}^{(k)}(y)}{\hat{m}_{p+1}^{(k)}(x_c^{(k)}) - \hat{m}_{p+1}^{(k)}(\hat{z}_{p+1}^{(k)})}$$

를 계산하고 $Y^{(k)} \leftarrow \{y \in Y_j^{(k)} : \rho^{(k)}(y) \ge \eta_0\}$로 놓는다.

$z \in Z_j^{(k)}$에 대해서는

$$\rho^{(k)}(z) = \frac{f_i^{(k)}(x_c^{(k)}) - f_i^{(k)}(z)}{\hat{m}_i^{(k)}(x_c^{(k)}) - \hat{m}_i^{(k)}(z)}\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ p+1)$$

를 계산하고 $Z^{(k)} \leftarrow \{z \in Z_j^{(k)}\}$로 놓는다.

걸음 4(믿음구역반경갱신단계)

$y \in Y^{(k)}$의 믿음구역반경을

$$\Delta^{(k)}(y) = \begin{cases} \min\{\tau_{inc}\Delta_c^{(k)},\ \Delta_{\max}\}, & \rho^{(k)}(y) \ge \eta_1 \\ \tau_{dec}\Delta_c^{(k)}, & \rho^{(k)}(y) < \eta_1 \end{cases}$$

로, $z \in Z^{(k)}$의 믿음구역반경을

$$\Delta^{(k)}(z) = \begin{cases} \Delta_c^{(k)}, & \rho^{(k)}(z) \ge \eta_1 \\ \tau_{dec}\Delta_c^{(k)}, & \rho^{(k)}(z) < \eta_1 \end{cases}$$

로, $x \in X^{(k-1)}$의 믿음구역반경을

$$\Delta^{(k)}(x) \in \begin{cases} \Delta_c^{(k)}, & x = x_c^{(k)} \\ \Delta^{(k-1)}(x), & x \ne x_c^{(k)} \end{cases}$$

로 설정한다.

걸음 5(비지배모임갱신단계)

벡토르값

$$F(x) = [f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_p(x)],\ x \in X^{(k-1)} \cup Y^{(k)} \cup Z^{(k)}$$

들을 비교하고 비지배점모임 $X^{(k)}$를 결정한다.

걸음 6(풀이판정단계)

① 만일 $\max\{\Delta^{(k)}(x) : x \in X^{(k)}\} \ge \Delta_{tol}$ 이고 $\rho^{(k)}(x) \ge \eta_1$ 인 $x \in Y^{(k)}$가 있으면 $j = 1$로 놓고 k를 증가시킨 다음 걸음 1에로 이행한다.

② 만일 $\max\{\Delta^{(k)}(x) : x \in X^{(k)}\} \ge \Delta_{tol}$ 이고 모든 $x \in Y^{(k)}$에 대하여 $\rho^{(k)}(x) < \eta_1$ 이며 $\tau_{dec}\Delta_c^{(k)} \ge \Delta_{tol}$ 이면 $x_c^{(k+1)} = x_c^{(k)}$, $\Delta_0^{(k+1)} = \tau_{dec}\Delta_c^{(k)}$로 놓고 k를 하나 증가시키고 걸음 2에로 이행한다.

③ 그렇지 않으면 알고리듬을 끝낸다.

목적함수 $f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_{p+1}$과 그것의 그라디엔트들이 뜻구역에서 립쉬츠련속이라고 가정하자. 초기점 $x^{(0)}$과 반경 $\Delta_{\max}$에 대하여 수준모임

$$L_i(x^{(0)}) = \{x \in \mathbf{R}^n : f_i(x) \le f_i(x^{(0)})\}\ (i = 1,\ \cdots,\ p)$$

$$L(x^{(0)}) = \bigcup_{x \in \bigcup_{i \in 1, \cdots, p} L_1(x^{(0)})} B(x,\ \Delta_{\max})$$

을 생각하고 다음과 같은 가정들을 주겠다.

가정 1 목적함수 $f_i,\ i = 1,\ \cdots,\ p$ 들과 $f_{p+1}(\cdot\ ;\ \boldsymbol{r})$, 그리고 $\boldsymbol{r} \in \mathbf{R}^p$ 들과 그것의 그라디엔트 $\nabla f_i,\ i = 1,\ \cdots,\ p$와 $\nabla f_{p+1}(\cdot\ ;\ \boldsymbol{r})$ 들이 $L(x^{(0)})$을 포함하는 열린모임우에서 립쉬츠련속이다.

가정 2 어떤 상수 $\kappa^h > 0$이 존재하여

$$\| H_i \| \le \kappa^h,\ \forall i = 1,\ 2,\ \cdots,\ p+1$$

이 성립한다. 여기서 H_i는 i째 목적함수근사모형의 헤씨안이다.

가정 3 $f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_p$는 $L(x_0)$우에서 유계이다. 즉

$$\exists \kappa_L^i,\ \kappa_U^i \in \mathbf{R}^p,\ \forall x \in L(x_0);\ \kappa_L^i \le f_i(x) \le \kappa_U^i\ \ (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ p)$$

이다.

정리 1 가정 1－3이 성립한다고 하자. 이때

$$\lim_{k \to \infty} \Delta_c^{(k)} = 0$$

이다.

정리 2 가정 1—3이 성립한다고 하자. 이때

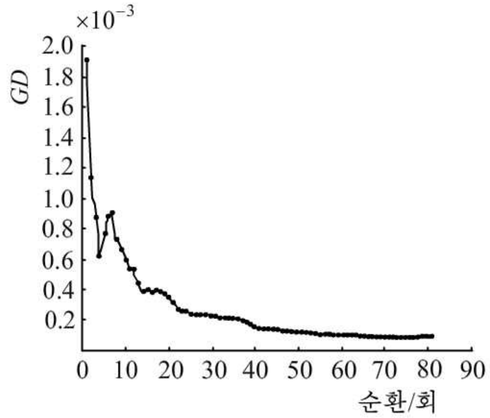
$$\liminf_{k\to\infty} \min_{i=1,\ 2,\ \cdots,\ p+1} \nabla f_i(x_c^{(k)})=0$$

이다.

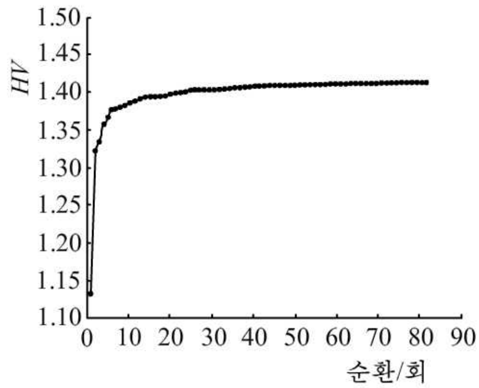
실례 1 세변수세목적최량화문제

$$f_1(\boldsymbol{x})=(1+g(\boldsymbol{x}))\cos(x_1\cdot\pi/2)\cos(x_2\cdot\pi/2)$$
$$f_2(\boldsymbol{x})=(1+g(\boldsymbol{x}))\cos(x_1\cdot\pi/2)\sin(x_2\cdot\pi/2)$$
$$f_3(\boldsymbol{x})=(1+g(\boldsymbol{x}))\sin(x_1\cdot\pi/2)$$
$$g(\boldsymbol{x})=(x_3-0.5)^2$$
$$0\le x_i\le 1,\ i=1,\ 2,\ 3$$

에 대한 실험결과를 보여준다.(그림 1) 실험에서는 파라메터들을 $x^{(0)}=(0.5,\ 0.5,\ 0.5)$, $\Delta^{(0)}(x^{(0)})=1$, $\rho=0.5$, $\delta=0.05$, $\tau_{dec}=0.5$, $\tau_{inc}=5$, $\omega=0.7$, $\Delta_{tol}=0.05$로 주었다.



ㄱ)



ㄴ)

그림 1. 알고리듬의 순환회수에 따르는 *GD* 및 *HV*값의 변화
ㄱ) *GD*값의 변화, ㄴ) *HV*값의 변화

실례 2 비련결파레토면을 가지는 최량화문제

$$f_1(x)=x_1$$
$$f_2(x)=x_2$$
$$f_3(x)=[1+g(x)]\left(3-\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{x_i}{1+g(x)}(1+\sin(3\pi x_i))\right)\right)$$

를 보기로 하겠다. 여기서

$$x_i\in[0,\ 1],\ i=1,\ 2,\ 3,\ g(x)=1+\frac{9}{2}x_3$$

이다. 파레토면은 비련결모임으로서 4개의 련결성분들로 구성되여있으며

$$B:=\left\{y\in\mathbf{R}^3 \mid y_1,\ y_2\in[0,\ 1],\ y_3=2\cdot\left(3-\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{y_i}{2}(1+\sin(3\pi y_i))\right)\right)\right\}$$

의 부분모임이다.(그림 2)

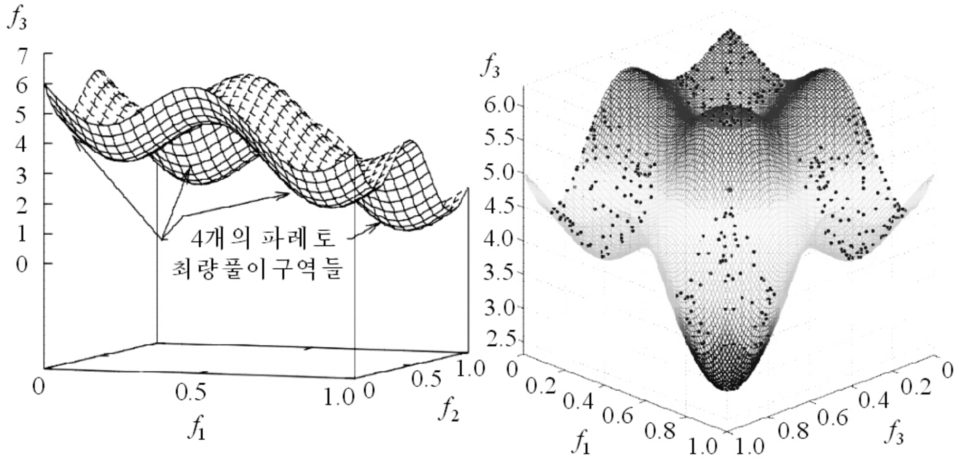


그림 2. 4개의 구역으로 분할된 DTLZ7의 풀이구역과 근사풀이모임

실험들을 통하여 밀집함수에 기초한 다목적최량화믿음구역알고리듬에 의하여 생성되는 풀이들이 파레토면과 점차 가까와지면서 그우에서 평등적으로 확산되여간다는것을 알수 있다.

참 고 문 헌

[1] A. Abraham et al.; Evolutionary Multiobjective Optimization: Theoretical Advances and Applications, Springer-Verlag, 1～302, 2005.

[2] C. Audet et al.; SIAM J. OPtim., 19, 1, 188, 2008.

[3] A. Farhang-Mehr et al.; World Congr. Comput. Intell, 1, 723, 2002.

[4] J. Thomann et al.; A Trust Region Algorithm for Heterogeneous Multiobjective Optimization, Technische Universitat Ilmenaum, 1～30, 2018.

주체109(2020)년 9월 5일 원고접수

A Trust-region Method for Solution of Black-box Multiobjective Optimization Problems

Kim Ju Song, Ju Kwang Hwi

In this paper we propose a trust-region method for solution of black-box multiobjective optimization problems which all objective functions are not shown by analytic forms. The algorithm improves distribution of approximated Pareto optimal solutions by using density function. Quoted numerical examples validate the efficiency of our method.

Keywords: multiobjective optimization, black-box multiobjective optimization