김일성종합대학학보 주체110(2021)년
수 학 제67권 제2호

제한이 있는 비선형계획법문제를 풀기 위한 한가지 개선된 궤도방법

오용범, 차봄이

제한이 있는 비선형계획법문제를 풀기 위한 동적궤도방법들[1, 2]이 많이 연구되였다.

선행연구[1, 2]에서는 제한이 있는 비선형계획법문제를 확대된 라그랑쥬함수의 최소화문제로 넘기고 궤도에 기초하여 푸는 방법을 연구하였다. 그러나 이 방법에서는 임의의 문제에 대하여 일률적으로 파라메터를 설정하는 수법이 제기되지 못한것으로 하여 일부 문제에 대하여서는 특정한 파라메터를 지적하지 않으면 발산한다.

론문에서는 파라메터설정을 요구하지 않는 새로운 걸음크기갱신절차와 DFP－준뉴톤법[3]을 리용한 한가지 개선된 궤도방법을 제안하였다. 우리는 선행연구[1]에서 지적한 71개 문제에 대한 수치실험을 통하여 제안한 방법이 대부분의 문제들에서 더 효률적이며 지어 선행연구[2]에서 특정한 파라메터를 지적하지 않으면 발산하는 9개의 문제들에 대하여서도 수렴한다는것을 확증하였다.

다음과 같은 제한이 있는 비선형계획법문제에 대하여 보기로 하자.

$$\begin{aligned} &c_i(x)\ge 0,\ i\in I\\ &c_i(x)=0,\ \ i\in E,\ \ x\in X \\ &f(x)\Rightarrow \min \end{aligned}\tag{1}$$

여기서 X는 $\mathbf{R}^n$의 비지 않은 열린모임, $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R},\ c_i:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}\ (i\in I\cup E)$이다. 그리고 $m:=|I\cup E|$로 정의한다.

우선 문제 (1)을 확장된 라그랑쥬함수의 최소화문제로 전환시킨다.

등식제한과 부등식제한에 대한 일반적인 확장된 라그랑쥬함수는 다음과 같다.

$$\phi_A(x,\ \lambda;\mu)=f(x)-\sum_{i\in E\cup(I\cap A_s(x))}\lambda_i c_i(x)+\frac{1}{2\mu}\sum_{i\in E\cup(I\cap A_s(x))}c_i^2(x)-\sum_{i\in I\setminus A_s(x)}\frac{\mu}{2}(\lambda_i)^2\tag{2}$$

여기서 $\lambda_i\ (i=1,\ \cdots,\ m)$는 라그랑쥬승수들이고 $\mu>0$은 벌칙파라메터이며 $A_s(x)$는 점 x에서 등식으로 되는 부등식제한들의 첨수모임이다.

우선 DFP－준뉴톤법을 동적궤도에 적용한다.

DFP－준뉴톤법의 방향들을 리용하여 다음과 같은 련립상미분방정식을 생각한다.

$$\ddot{x}=-G\nabla_x\phi_A(x,\ \lambda;\mu),\ x(0)=x^0,\ \dot{x}(0)=0\tag{3}$$

$$\ddot{\lambda}=-H\nabla_\lambda\phi_A(x,\ \lambda;\mu),\ \lambda(0)=\lambda^0,\ \dot{\lambda}(0)=0\tag{4}$$

$$\ddot{\mu}=-\mu,\ \mu(0)=\mu^0,\ \dot{\mu}(0)=0\tag{5}$$

여기서 G는 n차정의정값행렬, H는 m차정의정값행렬이다.

련립상미분방정식 (3)－(5)의 풀이를 다음과 같은 방법으로 구한다.

$$\begin{cases} x^{k+1}=x^k+\upsilon^k\Delta t_x^k\\ \upsilon^{k+1}=\upsilon^k-G_k\nabla_x\phi_A(x^k,\ \lambda^k;\mu^k)\Delta t_x^k\end{cases}\tag{6}$$

$$\begin{cases} \lambda_i^{k+1} = \lambda_i^k + w_i^k \Delta t_\lambda^k,\ i \in E;\ \lambda_i^{k+1} = \max\{\lambda_i^k + w_i^k \Delta t_\lambda^k\},\ i \in I \\ w^{k+1} = w^k + H_k \nabla_\lambda \phi_A(x^k,\ \lambda^k;\ \mu^k)\Delta t_\lambda^k \end{cases} \tag{7}$$

여기서 G_k 와 H_k 는 DFP－준뉴톤법에 의하여 생성된 n, m 차원정의정값행렬이다.

선행연구[2]에서는 수정된 오일러방법에 의하여 걸음크기를 다음과 같이 갱신한다.

$$\hat{x}^{k+1} = x^k + \hat{\upsilon}^k \Delta t_x^k$$

$$\hat{\lambda}_i^{k+1} = \lambda_i^k + \hat{w}_i^k \Delta t_\lambda^k,\ i \in E;\ \hat{\lambda}_i^{k+1} = \max\{\lambda_i^k + \hat{w}_i^k \Delta t_\lambda^k,\ 0\},\ i \in I$$

여기서

$$\hat{\upsilon}^k = \upsilon^{k-1} - (\nabla_x \phi_A(x^k,\ \lambda^k;\ \mu^k)/2 + \nabla_x \phi_A(x^{k-1},\ \lambda^{k-1};\ \mu^{k-1}))\Delta t_x^{k-1}$$

$$\hat{w}^k = w^{k-1} + (\nabla_\lambda \phi_A(x^k,\ \lambda^k;\ \mu^k)/2 + \nabla_\lambda \phi_A(x^{k-1},\ \lambda^{k-1};\ \mu^{k-1}))\Delta t_x^{k-1}$$

이때 걸음크기를 다음과 같이 갱신한다.

$$\Delta t_i^{k+1} = \Delta t_i^k \times \max\{t_{(i,1)},\ \min\{t_{(i,2)},\ 0.9 \times \sqrt{(\hat{\varepsilon}/S_i)}\}\},\quad i = \{x,\ \lambda\}$$

여기서 $S_x = \| x^{k+1} - \hat{x}^{k+1} \|$, $S_\lambda = \| \lambda^{k+1} - \hat{\lambda}^{k+1} \|$ 이고 $t_{(i,1)}$, $t_{(i,2)}$, $i = \{x,\ \lambda\}$ 는 파라메터이다. 사실 S_x 는 다음과 같은 식으로부터 나온다.

$$S_x = \| x^{k+1} - \hat{x}^{k+1} \| = \| (\upsilon^k - \hat{\upsilon}^k)\delta t^k \| = \| (\nabla_x \phi_A(x^{k-1},\ \lambda^{k-1};\ \mu^{k-1})/2 - \nabla_x \phi_A(x^k,\ \lambda^k;\ \mu^k))\Delta t^{k-1}\Delta t^k \|$$

우의 식에서와 같이 S_x 값과 $\hat{\varepsilon}$ 사이의 크기비교는 확장된 라그랑쥬함수의 그라디엔트값의 척도화와 Δt^{k-1}, Δt^k 의 값에 관계된다. 그리하여 적용걸음크기갱신은 $t_{(x,2)}$, $t_{(\lambda,2)}$ 의 설정에 의존하게 된다.

론문에서는 파라메터설정을 필요로 하지 않는 새로운 걸음크기갱신절차를 제안한다. 립자의 자리길의 방향변화가 크면 걸음크기를 줄이고 반대로 자리길의 방향변화정도가 어떤 허용오차보다 작으면 걸음크기를 늘이도록 하였다. 이때 동적궤도는 최량점에로 수렴하게 된다. 이로부터 걸음크기는 다음과 같은 절차를 따라 갱신되도록 한다.

k 번째 단계에서 벡토르 $d_{x,1}^k$, $d_{x,2}^k$, $d_{\lambda,1}^k$, $d_{\lambda,2}^k$ 를 각각

$$d_{x,1}^k := x^k - x^{k-1},\ d_{x,2}^k := x^{k+1} - x^k$$

$$d_{\lambda,1}^k := \lambda^k - \lambda^{k-1},\ d_{\lambda,2}^k := \lambda^{k+1} - \lambda^k$$

로 정의하고 그 벡토르들사이 각 α_i^k, $i = \{x,\ \lambda\}$ 를 다음과 같이 계산한다.

$$\cos\alpha_i^k = \frac{d_{i,1}^k \cdot d_{i,2}^k}{\| d_{i,1}^k \| \cdot \| d_{i,2}^k \|},\ i = \{x,\ \lambda\}$$

자리길의 방향변화가 작으면

$$\Delta t_i^{k+1} = p \cdot cnt \cdot \Delta t_i^0,\ i = \{x,\ \lambda\}$$

로 설정한다.

$$1 - \bar{\varepsilon} \le \cos\alpha_i^k,\ i = \{x,\ \lambda\} \tag{8}$$

여기서 $\bar{\varepsilon}$ 는 충분히 작은 정수, $p = 1.5$, cnt 는 $cnt = 1$ 로부터 시작하여 $cnt = cnt + 1$ 로 갱신한다. 그러나 만일 식 (8)이 성립하지 않으면 $cnt = 1$, $\Delta t_i^{k+1} = \Delta t_i^0$ 으로 설정한다.

또한 다음과 같이 초기걸음크기를 조절하는 방법을 제안한다.

만일 $\| x^k \| > M$ 이 성립하면 다음과 같이 설정한다.

$$k=0,\ x^k=x^0,\ \upsilon^k=0$$

$$\Delta t_i^0=\Delta t_i^0/2,\ i=\{x,\ \lambda\}$$

우의 식은 초기걸음크기를 절반으로 줄이고 알고리듬을 $k=0$ 인 초기단계에서 다시 시작한다는것을 의미한다.

보조정리 1[3] G_k 와 H_k 가 DFP－준뉴톤법에 의해 생성되였다면 G_k 와 H_k 는 둘다 정의정값행렬이다.

보조정리 2 Δt_λ^k 가 론문의 방법에 의해 생성된 수렬이면 유한이다.

보조정리 3 $\{x_k\}$ 가 론문의 방법에 의해 생성된 점렬이면 다음의 성질이 나온다.

$$\lim_{k\to\infty} c_i(x^k)=0,\ i\in E;\ \lim_{k\to\infty}\lambda_i^k c_i(x^k)=0,\ i\in I$$

보조정리 4 $\{x_k\}$ 가 론문의 방법에 의해 생성된 점렬, x^* 은 이 점렬의 극한이라고 하자. 그러면 $\lim_{k\to\infty}\left\|\nabla f(x^k)-\sum_{i\in E\cup I}\lambda_i^k\nabla c_i(x^k)\right\|=0$ 이다. 또한 x^* 이 허용점이고 MFCQ조건을 만족시킨다면 $\{\lambda^k\}$ 는 유계이며 x^* 은 쿤－타커조건을 만족시킨다. 그리고 x^* 에 대응하는 라그랑쥬승수벡토르 λ^* 이 유일하면 $\lim_{k\to\infty}\lambda^k\approx\lambda^*$ 이다.

정리 $\{x_k\}$ 가 론문의 방법에 의해 생성된 점렬이라고 하고 x^* 은 이 점렬의 극한이라고 하자. x^* 에서 엄격상보성조건을 만족하면 다음의 두가지 성질이 성립한다.

① x^* 은 문제 (1)의 허용점이다.

② 점 x^* 이 MFCQ조건을 만족하면 쿤－타커점이다.

론문에서는 선행한 알고리듬[2]과 론문에서 제안한 알고리듬에 대하여 선행연구[1]의 71개의 최량화문제들을 가지고 수치실험을 진행하였다.

선행한 알고리듬[2]에서 걸음크기갱신을 위한 파라메터설정을 $t_{(x,1)}=t_{(\lambda,1)}=0.5$ 와 $t_{(x,2)}=t_{(\lambda,2)}=2$ 를 리용하여 풀었지만 표 1에서 주어진 일부 문제들에 대해서는 특정한 파라메터 $t_{(x,2)}$ 와 $t_{(\lambda,2)}$ 를 리용하였다.

표 1. 일부 문제들에 대한 특정한 파라메터 $t_{(x,2)}$ 와 $t_{(\lambda,2)}$

No.	$t_{(x,2)}$	No.	$t_{(\lambda,2)}$
39, 43, 45, 54－59, 68, 70	1.1	45, 55, 58, 59, 61, 70	1.1
1, 6, 16, 25, 42, 44, 52	1.5	16, 17, 25, 33, 39, 44, 57	1.5

주의 모든 실험문제들에 대하여 초기점을 다음과 같이 설정한다.

$$x^0=(x_1^0,\ x_2^0,\ \cdots,\ x_n^0)$$

$$x_i^0=5-0.5i\ \ (i=1,\ \cdots,\ n)$$

여기서 n 은 매 문제의 차원수이다.

수치실험결과를 표 2에 주었다. 표 2에서 〈NOT〉는 걸음수가 500이 넘을 때까지 알고리듬이 정지되지 않았다는것을 의미한다. 또한 k 는 알고리듬이 정지되는 시간에 걸음수를 나타내며 $\|x^*-x^k\|$ 는 알고리듬에 의하여 실지최량점과 계산된 점사이의 오차를 나타낸다. 이로부터 론문의 방법이 선행한 방법보다 효과적이라는것을 알수 있다.

표 2. 수치실험결과

P	n	선행한 방법[2]			론문의 방법		
		k	$\|\|x^* - x^k\|\|$	시간	k	$\|\|x^* - x^k\|\|$	시간
1	2	52	1.43×10^{-4}	0.043 5	52	5.04×10^{-4}	0.042 1
2	2	103	8.23×10^{-4}	0.030 1	58	9.91×10^{-4}	0.019 8
3	2	137	6.42×10^{-4}	0.029 4	102	8.42×10^{-4}	0.024 5
4	2	98	3.91×10^{-4}	0.030 0	82	6.42×10^{-4}	0.023 3
5	2	NOT	3.19×10^{-3}	0.027 7	319	1.47×10^{-4}	0.018 8
…	…	…	…	…	…	…	…
71	2	NOT	3.19×10^{-1}	0.526 2	425	5.63×10^{-4}	0.492 3

참 고 문 헌

[1] T. N. B. Oliphant; Trajectory-based Methods for Solving Nonlinear and Mixed Integer Nonlinear Programming Problems University of the Witwatersrand, 1～350, 2015.

[2] M. M. Ali, T. N. B. Oliphant; J Optim. Theory Appl., 72, 603, 2018.

[3] J. A. Snyman; Practical Mathematical Optimization, Springer, 1～270, 2005.

주체109(2020)년 12월 5일 원고접수

An Improved Trajectory-based Method for Constrained Nonlinear Programming Problems

O Yong Bom, Cha Pom I

In this paper, an improved trajectory-based method for constrained nonlinear programming problems is proposed. We use a new procedure for updating step size which doesn't require a choice of parameters and DFP quasi-Newton method to reduce the CPU time of the algorithm and iteration number.

Keyword: trajectory-based method