김일성종합대학학보 수 학 주체108(2019)년 제65권 제4호

정화상복원의 한가지 수학적모형에 대한 연구

송 주 혁

정화상복원은 주어진 화상에서 부분적으로 잃어진 정보를 복원하거나 주어진 화상에 있는 불필요한 대상을 삭제하되 화상에 인위적인 부분이 없도록 하는 방법이다.

여기에는 변분문제에 의하여 화상에 들어있는 구조정보를 리용하는 방법, 표본에 의하여 무늬정보를 리용하는 방법, 우의 두 방법에 의거하여 화상의 구조정보와 무늬정보를 동시에 리용하는 방법들이 있다.[1]

한편 등방성 및 비등방성해밀턴－야코비방정식의 수치풀이를 효과적으로 구하기 위한 연구도 심화되고있다.[2]

론문에서는 선행연구들에서 리용된 모형들과 다른 화상복원의 한가지 수학적모형을 제기하였다. 즉 해밀턴－야코비방정식의 점성풀이에 의한 화상평활 및 강조모형을 화상복원에 리용되도록 개조하기 위한 연구를 진행하였다.

해밀턴－야코비방정식의 점성풀이에 의한 화상평활 및 강조모형은 다음과 같다.[3]

$$I_t = h(|\nabla G \times I|) \times \mathrm{cur}\,|\nabla I|$$

론문에서는 ∇I 를 리용하는 한가지 화상평활 및 강조모형을 제안하고 그에 기초하여 화상복원문제를 취급하였다.

$I_0 : \overline{\Omega} \to \mathbf{R}^+$ 는 주어진 화상이고 $\Omega_0 \subset \Omega$ 는 복원하여야 할 구역이며

$$S(\tilde{I}\ ;\overline{\Omega}) := \{\, I \in C^4(\overline{\Omega},\ \mathbf{R}^+) \,|\, I = BL(\tilde{I}) + G_\sigma \}$$

라고 하자. 여기서 $BL(\cdot)$ 은 유계선형연산자, G_σ는 가우스잡음, $\tilde{I}$ 은 주어진 화상이 어떤 의미에서 손상되였다고 할 때 손상이 없는 리상적인 화상을 표현한다. 즉 함수족 $S(\tilde{I}\ ;\overline{\Omega})$ 는 리상적인 화상에 손상과 함께 가능한 잡음이 섞인 화상들의 모임으로 볼수 있다.

먼저 화상평활 및 강조문제에 대하여 론의하자.

함수족 $S(\tilde{I}\ ;\overline{\Omega})$ 에서 목적범함수 $J(I)$ 를 $J(I) = \int_\Omega h(|\Delta I|)\, d\Omega + \int_\Omega \theta (I - I_0)^2 d\Omega$ 와 같이 정의한다. 여기서 $h : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ 는 $|\Delta I|$에 관해 부아닌 증가함수이다. $|\Delta I|$는 화상의 평활화정도를 나타내며 θ는 무게상수이다.

$h(\cdot)$이 증가함수이므로 $|\Delta I|$가 클수록 범함수값인 화상의 에네르기는 커지게 된다.

한편 잡음이 제거된 평활화된 화상 I 는 주어진 화상 I_0과 근사할것이 필요하다. 이것은 $J(I)$ 가 I 의 라쁠라시안의 크기에만 관계되면 $|\Delta I| = 0$ 일 때 최소값을 취하게 되며 이때의 화상 $\tilde{I}$ 은 일반적으로 주어진 화상 I_0과 거리가 먼 화상이 될수 있기때문이다.

$J(I)$ 의 둘째 항은 I_0과 $\tilde{I}$ 이 근사할것을 요구한다.

결국 화상평활 및 강조문제는 함수족 $S(\tilde{I}\ ;\overline{\Omega})$ 에서 목적범함수 $J(I)$ 에 최소를 주는 함수 $\tilde{I}$ 을 구하는 극값문제로 귀착된다.

정리 함수 $h:\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$가 엄격증가인 불룩함수라고 할 때 $\tilde{I}$이 $J(I)$에 최소를 주면 $\tilde{I}$은 $I_t + \Delta K(|\Delta I|,\ \Delta I) + \theta(I - I_0) = 0$을 만족시킨다. 여기서 $\Delta K(|\Delta I|,\ \Delta I) = c(|\Delta I|) \cdot \Delta I$이고 $c(\cdot)$은 $|\Delta I|$에 관한 함수이다.

증명 $h(\cdot)$이 불룩함수라는 사실로부터

$$h(\lambda|\Delta I_1| + (1-\lambda)|\Delta I_2|) \le \lambda h(|\Delta I_1|) + (1-\lambda)h(|\Delta I_2|),\ \ \lambda \in [0,\ 1] \tag{1}$$

을 얻고 민꼽스끼부등식으로부터 다음의 식이 성립된다.

$$|\Delta(\lambda I_1 + (1-\lambda)I_2)| \le \lambda|\Delta I_1| + (1-\lambda)|\Delta I_2| \tag{2}$$

또한 $h(\cdot)$이 증가함수이므로

$$h(|\Delta(\lambda I_1 + (1-\lambda)I_2)|) \le h(\lambda|\Delta I_1| + (1-\lambda)|\Delta I_2|).$$

식 (1), (2)로부터 $h(|\Delta(\lambda I_1 + (1-\lambda)I_2)|) \le \lambda h(|\Delta I_1|) + (1-\lambda)h(|\Delta I_2|)$이므로 이 식의 량변을 적분하면 $h(\cdot)$이 부아닌 함수이므로 다음의 식이 성립된다.

$$\int_\Omega h(|\Delta(\lambda I_1 + (1-\lambda)I_2)|)\,d\Omega \le \lambda \int_\Omega h(|\Delta I_1|)\,d\Omega + (1-\lambda)\int_\Omega h(|\Delta I_2|)\,d\Omega$$

한편

$$[\lambda I_1 + (1-\lambda)I_2 - I_0]^2 \le \lambda(I_1 - I_0)^2 + (1-\lambda)(I_2 - I_0)^2 \tag{3}$$

이 성립되며 식 (3)의 량변을 적분하면 다음과 같다.

$$\int_\Omega [\lambda I_1 + (1-\lambda)I_2 - I_0]^2\,d\Omega \le \lambda\int_\Omega (I_1 - I_0)^2\,d\Omega + (1-\lambda)\int_\Omega (I_2 - I_0)^2\,d\Omega \tag{4}$$

식 (4)의 량변에 θ를 곱하고 식 (3)을 더하면 $J(\lambda I_1 + (1-\lambda)\,I_2) \le \lambda J(I_1) + (1-\lambda)J(I_2)$를 얻는다.

그러므로 $J(I)$는 불룩이다.

$J(I)$의 피적분함수를 $F(I,\ I_{xx},\ I_{yy}) = h(|\Delta I|) + \theta(I - I_0)^2$, $|\Delta I| = |I_{xx} + I_{yy}|$로 놓으면

$$F_I = 2\theta(I - I_0) \tag{5}$$

이 성립된다.

$$F_{I_{xx}} = h'(|\Delta I|) \cdot \frac{\partial|\Delta I|}{\partial I_{xx}} = h'(|\Delta I|)\cdot \mathrm{sign}(\Delta I),\ \ F_{I_{yy}} = h'(|\Delta I|)\cdot\mathrm{sign}(\Delta I),\ \ \mathrm{sign}(s) = \begin{cases} -1, & s < 0 \\ 0, & s = 0 \\ 1, & s > 0 \end{cases}$$

이제 $\mathrm{sign}(\Delta I) = \begin{cases} \Delta I/|\Delta I|, & \Delta I \ne 0 \\ 0, & \Delta I = 0 \end{cases}$을 리용하면 웃식을 다음과 같이 쓸수 있다.

$$F_{I_{xx}} = F_{I_{yy}} = h'(|\Delta I|)\cdot \Delta I/|\Delta I| \tag{6}$$

따라서 식 (5), (6)으로부터 범함수 $J(I)$에 관한 오일러－라그랑쥬방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$\Delta[h'(|\Delta I|)\cdot \Delta I/|\Delta I|] + 2\theta(I - I_0) = 0 \tag{7}$$

$2\theta = \theta_0$, $c(|\Delta I|) = h'(|\Delta I|)\cdot\Delta I/|\Delta I|$로 놓으면 식 (7)을

$$\Delta(c(|\Delta I|)\cdot \Delta I) + \theta_0(I - I_0) = 0$$

과 같이 쓸수 있으며 최속하강법을 적용하면 $I_t = -\Delta[c(|\Delta I|)\cdot\Delta I] - \theta_0(I - I_0)$을 얻고

$$\Delta K(|\Delta I|,\ \Delta I) = c(|\Delta I|)\cdot\Delta I$$

임을 고려하면 정리가 증명된다.(증명끝)

화상복원은 다음과 같은 단계들로 이루어진다.

① 주어진 화상 I_0을 무늬화상과 구조화상으로 분해한다.

정리에서 얻은 화상평활—강조모형을 리용하여 화상 I_0을 평활화한 화상인 구조화상 $\tilde{I}$을 얻는다.

주어진 화상과 구조화상의 차로 얻어지는 무늬화상을 얻는다.

② 무늬화상은 무늬합성알고리듬[1]에 의하여 복원하고 구조화상은 정리에서 얻은 화상평활—강조모형을 리용한 구조복원알고리듬을 리용하여 복원한다.

③ 복원된 무늬화상과 구조화상을 합성하여 복원된 화상을 얻는다.

참 고 문 헌

[1] A. Criminisi et al.; IEEE Trans. Image Processing, 13, 9, 1200, 2004.

[2] R. Glowinski et al.; SIAM J. Sci. Comput., 38, 2, 1195, 2016.

[3] L. Alvarez et al.; SIAM J., Numer. Anal., 29, 845, 1992.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

A Mathematical Model for the Image Inpainting

Song Ju Hyok

We present a mathematical model for the simultaneous filling-in of texture and structure in regions of missing image information.

We propose a new mathematical model that can perform both image smoothing and structure inpainting in all regions to be filled-in.

Key word: image smoothing