제한없는 검은통다목적최량화문제의 한가지 풀이알고리듬

김주성, 주광휘

검은통다목적최량화문제를 풀기 위하여 선행연구[2]에서는 믿음구역법을 리용하여 선행연구[1]에서 개발된 직접탐색법보다 성능이 더 좋은 알고리듬을 제기하였으며 이 믿음구역알고리듬에 의하여 얻어지는 근사파레토최량풀이들에 대한 목적함수그라디엔트가 령에로 수렴한다는것을 증명하였다.

론문에서는 목적함수의 개수가 3개이상이고 그것들이 모두 검은통함수인 다목적최량화문제를 풀기 위하여 균형보간모임을 선택하는 최소나무법을 새롭게 내놓고 이에 기초하여 믿음구역법으로 일정한 파레토근사최량풀이모임을 구하는 알고리듬을 제기하였다.

1. 예 비 지 식

n변수다목적최량화문제

$$\min_{x\in X} F(x)=[f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_p(x)] \tag{1}$$

를 보기로 하겠다. 여기서 X는 $\mathbf{R}^n$의 부분공간이며 $F: X\to\mathbf{R}^p$는 벡토르값함수이다.

정의 $W=\{w_1,\ w_2,\ \cdots,\ w_m\}$을 X의 벡토르모임이라고 하자.

우선 이 모임의 영상 $F(W)=\{F(w_1),\ F(w_2),\ \cdots,\ F(w_m)\}$에 속하는 매 벡토르의 끝점을 정점으로 하는 완전그라프를 생각하자.

매 릉에 이 릉과 접속된 두 정점사이의 유클리드거리로서 무게를 주자. G를 이 그라프의 최소생성나무라고 하고 G의 릉모임을 V라고 하자.

그리고 $W_i=\{w_k \mid (w_k,\ w_i)\in V\}$일 때 $\max\limits_{w_k\in W_i} d(w_k,\ w_i)$를 G에 관한 정점 w_i의 고립도라고 한다.

다음 G에 관한 매 정점의 고립정도를 모두 계산하고 그 값이 가장 큰 점을 선택한다.

$$\max_{w_k\in W_i} d(w_k,\ w_s)=\max_{j=1,\cdots,m}\ \max_{w_k\in W_i} d(w_k,\ w_j)$$

이때 w_s를 모임 $W=\{w_1,\ w_2,\ \cdots,\ w_m\}$에서의 최소생성나무 G에 대한 최고고립점이라고 한다.

2. 풀이알고리듬

$B(x,\ \Delta)=\{y\in\mathbf{R}^n : \|y-x\|\le\Delta\}$를 중심이 x이고 반경이 Δ인 믿음구역, $\Delta^{(k)}(x)$를 알고리듬의 k째 순환에 의하여 결정되는 $x\in X$에서의 믿음구역반경이라고 하자.

1) 초기화

보간점의 개수 d, 초기점 $x^{(0)}$, 초기믿음구역반경 $\Delta^{(0)}(x^{(0)})\in(0,\ \Delta_{\max}]$, 그리고 파라

메터들을 $\Delta_{\max}>0$, $\Delta_{\text{tol}}\ge 0$, $\delta>0$, $\eta\in[0,\ 1)$, $\tau_{dec}\in(0,\ 1)$, $\tau_{inc}>1$, $\mu>\beta>0$, $\omega\in(0,1)$, $k=1$로 설정한다. 다음 $F(x^{(0)})=[f_1(x^{(0)}),\ f_2(x^{(0)}),\ \cdots,\ f_p(x^{(0)})]$을 구하고 $X^{(0)}=\{x^{(0)}\}$으로 놓는다.

2) 순환단계

걸음 1 (반복결정)

$X^{(k-1)}$에서의 최대고립점 $x_c^{(k)}$을 결정하고 믿음구역반경을 $\Delta^{(k-1)}(x_c^{(k)})$라고 하자.

기준점을 $r^{(k)}=F(x_c^{(k)})$로 놓고 $Y^{(k)}=\phi$, $\Delta_0^{(k)}=\Delta^{(k-1)}(x_c^{(k)})$로 정한다.

걸음 2 매 순환 $j=1,\ 2,\ \cdots$에 대하여

① 2차회귀모형

$\tilde{\Delta}^{(k)}=\omega^{j-1}\Delta_0^{(k)}$로 놓는다. $B(x_c^{(k)},\ \tilde{\Delta}^{(k)})$에서 보간모임 $\{y_1^{(j)},\ y_2^{(j)},\ \cdots,\ y_d^{(j)}\}$를 결정하고 $f_i^{(k)}$의 근사모형 $\tilde{m}_i^{(j)}$ $(i=1,\ \cdots,\ p+1)$을 구성한다. 즉

$$\tilde{m}_i^{(j)}(x_c^{(k)}+s)=\tilde{c}_i^{(j)}+s^{\mathrm{T}}\tilde{g}_i^{(j)}+\frac{1}{2}s^{\mathrm{T}}\tilde{H}_i^{(j)}s$$

$$Y^{(k)}\leftarrow Y^{(k)}\bigcup\{y_1^{(j)},\ y_2^{(j)},\ \cdots,\ y_d^{(j)}\}$$

② 특이검사

만일

$$\tilde{\Delta}^{(k)}\le\max\{\Delta_{\text{tol}},\ \min_{i=1,\cdots,p+1}\mu\|\tilde{g}_i^{(j)}\|,\ i=1,\ \cdots,\ p+1\}$$

이면

$$\Delta_c^{(k)}=\min[\max\{\tilde{\Delta}^{(k)},\ \beta\min_{i=1,\cdots,p+1}\|\tilde{g}_i^{(j)}\|\},\ \Delta_0^{(k)}]$$

로 놓고 걸음 3에로 이행한다. 그렇지 않은 경우에는 j를 증가시키고 걸음 ①에로 이행한다.

걸음 3 (한목적문제)

$$z_i^{(k)}=\arg\min\{m_i^{(k)}(x):x\in B(x_c^{(k)},\ \Delta_c^{(k)})\}$$

걸음 4 (축소비)

새로 계산된 점들에서의 축소비를 다음과 같이 계산한다. 즉 $y\in Y^{(k)}$에 대해서는

$$\rho^{(k)}(y)=\frac{f_{p+1}^{(k)}(x_c^{(k)})-f_{p+1}^{(k)}(y)}{m_{p+1}^{(k)}(x_c^{(k)})-m_{p+1}^{(k)}(z_{p+1}^{(k)})}$$

$z\in\{z_1^{(k)},\ z_2^{(k)},\ \cdots,\ z_{p+1}^{(k)}\}$에 대해서는

$$\rho^{(k)}(z)=\frac{f_i^{(k)}(x_c^{(k)})-f_i^{(k)}(z)}{m_i^{(k)}(x_c^{(k)})-m_i^{(k)}(z)}\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ p+1)$$

로 계산하고 $x\in X^{(k-1)}$에 대해서는 $\rho^{(k)}(x)=\rho^{(k-1)}(x)$로 놓는다. 다음 $Y^{(k)}$에서 축소비가 충분하지 않은 표본점들은 제거한다. 즉

$$Y^{(k)}\leftarrow\{y\in Y^{(k)}:\rho^{(k)}(y)\ge\eta\}$$

걸음 5 (믿음구역반경의 갱신)

① $y\in Y^{(k)}$에 대해서는

$$\Delta^{(k)}(y)\in[\Delta_c^{(k)},\ \min\{\tau_{inc}\Delta_c^{(k)},\ \Delta_{\max}\}]$$

② $z\in\{z_1^{(k)},\ z_2^{(k)},\ \cdots\ z_{p+1}^{(k)}\}$에 대해서는

$$\Delta^{(k)}(z)\in\begin{cases}[\Delta_c^{(k)},\ \min\{\tau_{inc}\Delta_c^{(k)},\ \Delta_{\max}\}], & \rho^{(\mathrm{k})}(z)\ge\eta\\ [\tau_{dec}\Delta_c^{(k)}], & \rho^{(\mathrm{k})}(z)<\eta\end{cases}$$

③ $x\in\chi^{(k-1)}$에 대해서는

$$\Delta^{(k)}(x)\in\begin{cases}\Delta_c^{(k)}, & x=x_c^{(k)}\\ \Delta^{(k-1)}(x), & x\ne x_c^{(k)}\end{cases}$$

로 설정한다.

걸음 6 (비지배모임의 갱신)

벡토르값 $F(x)=[f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_p(x)],\ x\in X^{(k-1)}\bigcup Y^{(k)}\bigcup\{z_1^{(k)},\ z_2^{(k)},\ \cdots,\ z_{p+1}^{(k)}\}$들을 비교하고 비지배점모임 $X^{(k)}$를 결정한다.

걸음 7 (반복결정)

① 만일 $\max\{\Delta^{(k)}(x):x\in X^{(k)}\}\ge\Delta_{\mathrm{tol}}$이고 $\rho^{(k)}(x)\ge\eta$인 $x\in X^{(k)}\setminus X^{(k-1)}$가 있으면 k를 증가시키고 걸음 1에로 이행한다.

② 만일 $\max\{\Delta^{(k)}(x):x\in X^{(k)}\}\ge\Delta_{\mathrm{tol}}$이고 모든 $x\in X^{(k)}\setminus X^{(k-1)}$에 대하여 $\rho^{(k)}(x)<\eta$이면 $x_c^{(k+1)}=x_c^k$, $\Delta_0^{(k+1)}=\tau_{dec}\Delta_c^{(k)}$로 놓고 k를 증가시킨 다음 걸음 2에로 이행한다.

③ 그렇지 않으면 알고리듬을 끝낸다.

3. 파레토최량성필요조건판정

목적함수 $f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_{p+1}$과 그것의 그라디엔트들이 뜻구역에서 립쉬츠련속이라고 가정하자. 초기점 $x^{(0)}$과 반경 $\Delta_{\max}$에 대하여 수준모임

$$L_i(x^{(0)})=\{x\in\mathbf{R}^n : f_i(x)\le f_i(x^{(0)})\}\ \ (i=1,\ \cdots,\ p)$$

$$L(x^{(0)})=\bigcup_{x\in\bigcup_{i\in1,\cdots,p}L_1(x^{(0)})}B(x,\ \Delta_{\max})$$

을 생각하고 다음과 같은 가정들을 주겠다.

가정 1 목적함수 $f_i\ (i=1,\ \cdots,\ p)$들과 $f_{p+1}(\cdot\ ;\ r),\ r\in\mathbf{R}^p$ 그리고 그것의 그라디엔트 $\nabla f_i\ (i=1,\ \cdots,\ p)$와 $\nabla f_{p+1}(\cdot\ ;\ r)$들이 $L(x^{(0)})$을 포함하는 열린모임우에서 립쉬츠련속이다.

가정 2 어떤 정의상수 κ^h가 존재하여

$$\|H_i^{(k)}\|\le\kappa^h\ \ (\forall i=1,\ 2,\ \cdots,\ p+1,\ \ k\ge1)$$

가 성립한다.

가정 3 임의의 $k\ge1$과 $i=1,\ \cdots,\ p+1$에 대하여 어떤 상수 $\kappa_c\in(0,\ 1]$이 있어서

$$m_i^{(k)}(x_c^{(k)})-m_i^{(k)}(z_i^{(k)})\ge\kappa_c[m_c^{(k)}(x_c^{(k)})-m_i^{(k)}(z_{i,c}^{(k)})]$$

이 성립한다.

보조정리 1 $z_i^{(k)}$를 $m_i^{(k)}$의 최량풀이라고 하자. 이때 임의의 $k \geq 1$과 $i=1, \cdots, p+1$에 대하여

$$m_i^{(k)}(x_c^{(k)}) - m_i^{(k)}(z_i^{(k)}) \geq \frac{\kappa_c}{2} \| g_i^{(k)} \| \min\left\{ \frac{\| g_i^{(k)} \|}{\kappa^h},\ \Delta_c^{(k)} \right\}$$

가 성립한다.

보조정리 2 $\Delta_{\text{tol}} = 0$이라고 하자. 만일

$$\min_{i=1, \cdots, p+1} \| \nabla f_i^{(k)}(x_c^{(k)}) \| \neq 0$$

이면 알고리듬의 k째 반복에서 걸음 2는 유한번만에 끝난다.

정리 1 가정 1－3이 성립할 때 믿음구역반경은 령에로 수렴한다. 즉

$$\lim_{k \to \infty} \Delta_c^{(k)} = 0$$

정리 2 알고리듬에 의하여 얻어지는 근사파레토최량풀이들가운데서 목적함수들의 그라디엔트가 령에로 수렴하는 부분렬이 존재한다. 즉

$$\liminf_{k \to \infty} \min_{i=1, 2, \cdots, p+1} \nabla f_i(x_c^{(k)}) = 0$$

4. 계 산 실 험

$N = \{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_v\}$를 $|N| = v$인 풀이모임, $F(x_J^*)$ $(j=1, \cdots, v)$를 $F(x_j)$에 제일 가까운 파레토유효점이라고 하자. 이때 GD는

$$GD = \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{v} \| F(x_j) - F(x_j^*) \|^2}}{v}$$

와 같이 계산된다.

다음의 세변수세목적문제

$$f_1(\boldsymbol{x}) = (1 + g(\boldsymbol{x}))\cos\left(x_1 \cdot \frac{\pi}{2} \right)\cos\left(x_2 \cdot \frac{\pi}{2} \right)$$

$$f_2(\boldsymbol{x}) = (1 + g(\boldsymbol{x}))\cos\left(x_1 \cdot \frac{\pi}{2} \right)\sin\left(x_2 \cdot \frac{\pi}{2} \right)$$

$$f_3(\boldsymbol{x}) = (1 + g(\boldsymbol{x}))\sin\left(x_1 \cdot \frac{\pi}{2} \right)$$

$$g(\boldsymbol{x}) = (x_3 - 0.5)^2$$

$$0 \leq x_i \leq 1 \ (i = 1,\ 2,\ 3)$$

을 가지고 알고리듬의 성능을 평가하자.

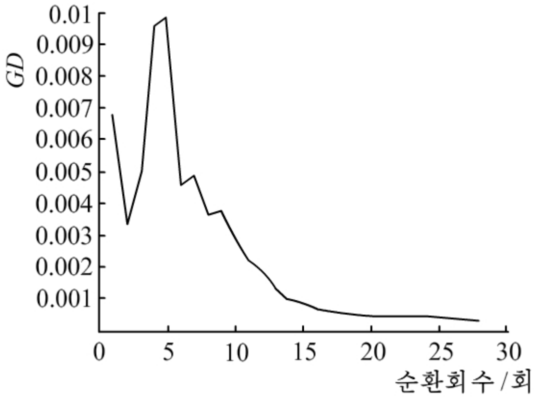

그림. 알고리듬의 순환회수에 따르는 *GD*값의 변화

그림에서 보여준바와 같이 알고리듬의 순환회수에 따르는 *GD*값의 변화를 통하여 우리는 파레토근사풀이모임이 효과적으로 얻어지며 최소생성나무를 리용함으로써 이 풀이모임이 전체 파레토면에로 점차 확산되여간다는것을 알수 있다.

참 고 문 헌

[1] C. Audet et al.; SIAM J. Optim., 19, 1, 188, 2008.
[2] J. Ryu et al.; SIAM J. Optim., 24, 1, 334, 2014.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

An Algorithm for Solution of Unconstrained Black-Box Multiobjective Optimization Problems

Kim Ju Song, Ju Kwang Hwi

In this paper, we propose an algorithm to approximate the Pareto optimal solutions of unconstrained black-box multiobjective optimization problems based on a trust-region approach. The numerical examples validate the efficiency of our method.

Key words: biobjective optimization, multiobjective optimization, trust-region approach