김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제2호

인자들이 증가되는 경우 렬첨가에 의한 여러수준 초포화계획의 $E(\chi^2)$ −최량성기준의 아래한계

김철호, 김성혁

론문에서는 실험인자들이 증가되는 경우 실험회수를 늘이지 않으면서 여러수준초포화계획에 렬을 첨가하여 합리적인 최량초포화계획을 구성하는 문제를 연구하였다.

선행연구[2]에서는 여러수준초포화계획의 최량성기준으로서 $E(\chi^2)$ −최량성기준을 내놓았고 선행연구[1]에서는 불완전블로크계획을 리용하여 $E(\chi^2)$ −최량초포화계획구성방법을 연구하였으며 선행연구[1, 3]에서는 평등계획을 리용하여 새로운 여러수준초포화계획을 구성하고 그것의 최량성들을 밝혔다.

선행연구[4]에서는 초포화계획행렬에 행들을 첨가하여 새로운 최량초포화계획을 구성하는 방법으로 여러수준초포화계획을 구성하였으며 선행연구[5]에서는 이미 만들어진 최량초포화계획들의 결합으로 새로운 여러수준최량초포화계획을 구성하였다.

우리는 여러수준초포화계획에 렬을 첨가하여 $E(\chi^2)$ − 최량성기준의 의미에서 최량초포화계획이 되는 아래한계를 결정하고 몇가지 여러수준초포화계획을 구성하였다.

$d \in D(n,\ S^m)$ 을 가능한 처리의 개수가 $\upsilon = S^m$ 이고 m 개의 렬 $a_1, \cdots, a_m$ 과 $a_j \in \{0, 1, 2, \cdots,\ S-1\}$ 수준을 가지는 계획이라고 하자. 그리고 다음의 기호들을 약속하자.

$\Delta(m) = \{kl \mid 1 \le k,\ l \le m\}$, $\phi(k,\ l) = S^2 \sum_{\alpha=0}^{S-1}\sum_{\beta=0}^{S-1}(n_{\alpha\beta}^{kl})^2,\ kl \in \Delta(m)$ 이고 n_α^j 는 F_j 인자의 α 수준을 가지는 회수이며 $n_{\alpha\beta}^{kl}$ 은 $F_k,\ F_l$ 인자들이 $\alpha,\ \beta$ 수준을 가지는 회수이다.

정의 1 [2] 임의의 $d \in D(n,\ S^m)$ 에서 렬들을 $C_{d_1}, C_{d_2}, \cdots, C_{d_m}$ 이라고 하면

$$E(\chi^2(d)) = \frac{1}{m(m-1)}\sum_{j_1=1}^{m}\ \sum_{j_2(\ne j_1)=1}^{m}\chi^2(C_{d_{j1}},\ C_{d_{j2}}),\ \ \chi^2(C_{d_{j_1}},\ C_{d_{j_2}}) = \frac{S^2}{n}\sum_{\alpha=1}^{S}\sum_{\beta=1}^{S}\left(n_{\alpha\beta}^{j_1 j_2} - \frac{n}{S^2}\right)^2$$

라고 할 때 $E(\chi^2)$ 이 최소로 되는 계획을 여러수준 $E(\chi^2)$ −최량초포화계획이라고 부른다.

우의 식을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$E(\chi^2(d)) = \frac{1}{m(m-1)}\sum_{j_1=1}^{m}\ \sum_{j_2(\ne j_1)=1}^{m}\ \sum_{j_1=1}^{S-1}\ \sum_{j_2(\ne j_1)=1}^{S-1}\frac{S^2}{N}\cdot\left(n_{\alpha\beta}^{j_1 j_2} - \frac{n}{S^2}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{nm(m-1)}\sum_{j_1=1}^{m}\ \sum_{j_2(\ne j_1)=1}^{m} S^2\left[\sum_{j_1=1}^{S-1}\ \sum_{j_2(\ne j_1)=1}^{S-1}(n_{\alpha\beta}^{j_1 j_2})^2 - \frac{n^2}{S^2}\right] = \frac{1}{nm(m-1)}\sum_{j_1=1}^{m}\ \sum_{j_2(\ne j_1)=1}^{m}\phi(j_1,\ j_2) - n \tag{*}$$

이제 $d \in D(n,\ S^m)$ 을 여러수준초포화계획이라고 하고 r 개의 렬을 더 첨가하면 $(m+r)$ 개 렬을 가지는 초포화계획들을 생각할수 있는데 $D(n,\ S^{m+r})$ 를 $(n \times (m+r))$ 형초포화계획족이라고 하자.

이때 문제는 확장된 여러수준초포화계획 $d(n,\ S^{m+r})$ 이 $E(\chi^2)-$ 최량초포화계획으로 되도록 보충한 r 개의 렬계획 $d\in D(n,\ S^r)$ 을 구성하는것이다.

여기서는 확장된 여러수준초포화계획에 대한 $E(\chi^2)-$ 최량성기준의 아래한계를 구하며 여기에 도달하는 렬보충여러수준 $E(\chi^2)-$ 최량초포화계획들을 구성하는 방법을 연구하였다.

초포화계획 $d(n,\ S^m)$ 에 r 개의 렬계획 $d\in D(n,\ S^r)$ 을 첨가한 $d(n,\ S^{m+r})$ 의 $E(\chi^2)-$ 최량성기준의 아래한계를 보기로 하자.

정의 2 알려진 초포화계획 $d(n,\ S^m)$ 에 r 개의 렬계획 $d\in D(n,\ S^r)$ 을 첨가한 초포화계획 $d(n,\ S^{m+r})\in D^E(n,\ S^{m+r})$ 의 $E(\chi^2)-$ 기준값이 아래한계값에 도달하면 이때 이 계획을 초포화계획족 $d(n,\ S^{m+r})$ 에서의 $E(\chi^2)-$ 최량초포화계획이라고 부른다.

보조정리[3] 임의의 여러수준초포화계획 $d(n,\ S^m)$ 에 대하여

$$E(\chi^2(d))\ge LB[d(n,\ S^m)],\quad LB[d(n,\ S^m)]=\frac{(S-1)n[(S-1)m-n+1]}{2(n-1)(m-1)}$$

정리 임의의 확장된 계획 $Z=(X:A)\in D(n,\ S^{m+r})$ (A: 임의의 계획)에 대하여

$$E[\chi^2(Z)]\ge LB(Z)$$

가 성립된다. 여기서

$$LB(Z)=\frac{1}{n(m+r)(m+r-1)}\{nm(m-1)LB_X[d(n,\ S^m)]+$$
$$+nr(r-1)LB_A[d(n,\ S^m)]+2G(S,\ m,\ r)+2n\}-n$$

이고 $G(S,m,r)=\min\left\{\sum_{j_1=1}^{m}\sum_{j_2=m+1}^{m+r}\phi(j_1,\ j_2)\right\}$ 이며 $LB(X)$, $LB(A)$ 는 다음과 같다.

$$LB_X[d(n,\ S^m)]=\frac{(S-1)n[(S-1)m-n+1]}{(n-1)(m-1)},\quad LB_A[d(n,\ S^m)]=\frac{(S-1)n[(S-1)r-n+1]}{(n-1)(r-1)}$$

증명 $Z=(X:A),\ X\in D(n,\ S^m),\ A\in D(n,\ S^r)$ 라고 하자.

그러면 식 (*)로부터 다음의 식이 성립된다.

$$E[\chi^2(Z)]=\frac{1}{n(m+r)(m+r-1)}\sum_{j_1=1}^{m+r}\sum_{j_2(\ne j_1)=1}^{m+r}\phi(j_1,\ j_2)-n=\frac{1}{n(m+r)(m+r-1)}\cdot$$
$$\cdot\left[\sum_{j_1=1}^{m}\sum_{j_2(\ne j_1)=1}^{m}\phi(j_1,\ j_2)+\sum_{j_1=m+1}^{m+r}\sum_{j_2(\ne j_1)=m+1}^{m+r}\phi(j_1,\ j_2)+\sum_{j_1=m+1}^{m+r}\sum_{j_2=1}^{m}\phi(j_1,\ j_2)+\sum_{j_1=1}^{m}\sum_{j_2=m+1}^{m+r}\phi(j_1,\ j_2)\right]-n$$

한편 계획 X, A 에 대하여 식 (*)을 리용하면

$$\sum_{j_1=1}^{m}\sum_{j_2(\ne j_1)=1}^{m}\phi(j_1,\ j_2)=nm(m-1)E[\chi^2(X)]+n,\quad \sum_{j_1=m+1}^{m+r}\sum_{j_2(\ne j_2)=1}^{m+r}\phi(j_1,\ j_2)=nr(r-1)E[\chi^2(A)]+n$$

이다. 이제 보조정리를 적용하고 $G(S,m,\ r)=\min\left\{\sum_{j_1=1}^{m}\sum_{j_2=m+1}^{m+r}\phi(j_1,\ j_2)\right\}$ 라고 하면 정리의 결과가 얻어진다.(증명끝)

[따름 1] 확장된 계획 $Z=(X:a)\in D(n,\ S^{m+1})$, $a=(a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$에 대하여

$$E[\chi^2(Z)]\ge LB(Z)$$

이다. 여기서 $LB(Z)=\frac{1}{n(m+1)m}\{nm(m-1)LB_X[d(n,\ S^m)]+2G(S,\ m,\ 1)+2m\}-n$이고 $G(S,\ m,\ r)$는 $G(S,\ m,\ r)=\min\left\{\sum_{j_1=1}^{m}\phi(j_1,\ m+1)\right\}$을 만족시킨다.

[따름 2] A가 직교계획인 경우 확장된 계획 $Z=(X:A)\in D(n,\ S^{m+r})$에 대하여

$$E[\chi^2(Z)]\ge LB(Z)$$

여기서 $LB(Z)=\frac{1}{n(m+1)m}\{nm(m-1)LB_X[d(n,\ S^m)]+2G(S,\ m,\ r)+2m\}-n$이고 $G(S,\ m,\ r)$는 $G(S,\ m,\ r)=\min\left\{\sum_{j_1=1}^{m}\sum_{j_2=m+1}^{m+r}\phi(j_1,\ j_2)\right\}$를 만족시킨다.

실례 3수준초포화계획 $X\in D(9,\ 3^{12})$, $A\in D(9,\ 3^{12})$이 다음과 같이 주어졌다고 하자.

$$X=\begin{pmatrix}
1&2&3&1&2&3&1&3&2&1&2&3\\
1&2&3&3&1&2&3&2&1&3&1&2\\
1&2&3&2&3&1&2&1&3&2&3&1\\
3&1&2&1&2&3&1&2&1&2&3&1\\
3&1&2&3&1&2&3&1&3&1&2&3\\
3&1&2&2&3&1&2&3&2&3&1&2\\
2&3&1&1&2&3&1&1&3&3&1&2\\
2&3&1&3&1&2&3&3&2&2&3&1\\
2&3&1&2&3&1&2&2&1&1&2&3
\end{pmatrix},\quad
A=\begin{pmatrix}
2&3&1&2&3&1&2&3&1&2&3&1\\
2&3&1&3&1&2&3&1&2&3&1&2\\
2&3&1&1&2&3&1&2&3&1&2&3\\
3&1&2&2&3&1&3&1&2&1&2&3\\
3&1&2&3&1&2&1&2&3&2&3&1\\
3&1&2&1&2&3&2&3&1&3&1&2\\
1&2&3&2&3&1&1&2&3&3&1&2\\
1&2&3&3&1&2&2&3&1&1&2&3\\
1&2&3&1&2&3&3&1&2&2&3&1
\end{pmatrix}$$

$$E(\chi^2(X))=3.272\ 7,\quad LB_X[d(9,\ 3^{12})]=3.272\ 7$$

$$E(\chi^2(A))=3.272\ 7,\quad LB_A[d(9,\ 3^{12})]=3.272\ 7,\quad G(3,\ 12,\ 12)=28\ 174.68$$

이때 초포화계획 A를 렬첨가한 새로운 초포화계획 $Z=(X:A)\in D(9,\ 3^{24})$은 다음과 같다.

$$Z=\begin{pmatrix}
1&2&3&1&2&3&1&3&2&1&2&3&2&3&1&2&3&1&2&3&1&2&3&1\\
1&2&3&3&1&2&3&2&1&3&1&2&2&3&1&3&1&2&3&1&2&3&1&2\\
1&2&3&2&3&1&2&1&3&2&3&1&2&3&1&1&2&3&1&2&3&1&2&3\\
3&1&2&1&2&3&1&2&1&2&3&1&3&1&2&2&3&1&3&1&2&1&2&3\\
3&1&2&2&3&1&2&3&2&3&1&2&3&1&2&1&2&3&2&3&1&3&1&2\\
3&1&2&2&3&1&2&3&2&3&1&2&3&1&2&1&2&3&2&3&1&3&1&2\\
2&3&1&1&2&3&1&1&3&3&1&2&1&2&3&2&3&1&1&2&3&3&1&2\\
2&3&1&3&1&2&3&3&2&2&3&1&1&2&3&3&1&2&2&3&1&1&2&3\\
2&3&1&2&3&1&2&2&1&1&2&3&1&2&3&1&2&3&3&1&2&2&3&1
\end{pmatrix}$$

이 계획은

$$E(\chi^2(Z))=3.91,\ LB(Z)=3.91,\ G(3,\ 12,\ 12)=28\ 174.68,\ LB_Z[d(9,\ 3^{24})]=3.91$$

이며 따라서 $E(\chi^2)$－최량초포화계획이다. $n=6,\ 8,\ 9$인 경우 몇가지 렬첨가에 의한 최량초포화 또는 근사계획들은 표와 같다.

표. $n=6,\ 8,\ 9$인 경우 렬첨가에 의한 합리적인 여러수준초포화계획들

실험점수	$d(n,\ S^m)$	$LB_X[d(n,\ S^m)]$	$E(\chi^2(X))$	$d(n,\ S^{m+r})$ 에서 r값	$E(\chi^2(Z))=$ $=LB(Z)$	$LB_Z[d(n,\ S^{m+r})]$	$\frac{LB_Z[d(n,\ S^{m+r})]}{E(\chi^2(Z))}$
6	$d(6,\ 3^5)$	2	2	2	3.28	2.40	0.730
				6	3.09	2.70	0.880
				9	3.05	2.83	0.920
				12	2.97	2.90	0.970
				14	2.94	2.90	0.995
				15	2.96	2.96	1.000
8	$d(8,\ 4^7)$	4	4.37	1	4.20	4.16	0.99
				2	4.10	4.10	1.00
				4	4.24	4.24	1.00
				6	4.50	4.50	1.00
				7	4.6	4.60	1.00
9	$d(9,\ 3^{12})$	3.272 7	3.272 7	3	4.11	3.53	0.850
				6	4.23	3.70	0.875
				9	4.11	3.82	0.930
				12	3.91	3.91	1.000

참 고 문 헌

[1] 황철규 등; 조선민주주의인민공화국 과학원통보, **1**, 379, 주체106(2017).

[2] Fang K. T. et al.; J. Statist. Plann. Inference, **86**, 239, 2000.

[3] M. L. Aggarwal et al.; J. Statist. Plann. Inference, **121**, 127, 2004.

[4] V. K. Guptaa et al.; J. Statist. Plann. Inference, **142**, 2402, 2012.

[5] S. D. Georgiou; J. Statist. Plann. Inference, **144**, 92, 2014.

주체108(2019)년 12월 15일 원고접수

Lower Bound of $E(\chi^2)$－Optimal Criterion for Multi-Level Supersaturated Design to Addition of Rows in the Case That Factors Increase

Kim Chol Ho, Kim Song Hyok

In case of addition of rows to a multi-level supersaturated design, we give the lower bound for an $E(\chi^2)$－optimal supersaturated design and study the method for constructing some multi-level $E(\chi^2)$－optimal supersaturated designs.

Keyword: multi-level supersaturated design