김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제1호

무한시간구간에서 정의된 한가지 변분부등식풀이의 유일성

오형철, 조성산

론문에서 우리는 경계과학인 금융수학에서 제기되는 한가지 변분부등식의 풀이의 유일성을 연구하였다.

선행연구[4]에서는 선택권가격의 리산모형과 미분방정식모형들을 제시하였으며 특히 상결수를 가지는 사전실시선택권과 영구사전실시선택권가격의 자유경계문제모형과 변분부등식모형을 주고 자유경계문제모형의 가격공식을 유도하였다.

선행연구[6]에서는 상결수를 가지는 영구사전실시선택권가격의 2분나무모형에서 풀이의 유일존재성과 풀이표시, 최량실시경계를 주었다. 선행연구[5]에서는 사전실시선택권의 2분나무법가격과 변분부등식모형의 양계차도식에 의한 가격의 수렴성이 연구되였다.

선행연구[1]에서는 영구사전실시선택권가격 변분부등식문제의 풀이의 유일성과 그 계차방정식의 풀이의 유일존재성과 풀이표시, 최량실시경계를 주었다. 선행연구[1, 4, 5, 6]에서의 특징은 영구사전실시선택권가격이 시간에 무관계하다는 전제하에서 가격모형을 세우고 연구한것이다.

선행연구[6]에서는 시간의존결수를 가지는 사전실시선택권가격의 2분나무모형에 대한 연구, 변분부등식모형의 양계차도식에 대한 연구가 진행되였다. 그러나 시간의존결수를 가지는 경우에 영구사전실시선택권가격은 시간에 따라 변하므로 분명 선행연구[1, 4, 5, 6]의 방법으로 고찰하기는 어렵다. 사실 사전실시선택권가격에서 실시일이 무한대에로 갈 때의 극한을 영구사전실시선택권가격으로 보는것이 자연스럽지만 일반적으로 사전실시선택권가격에서 마감일이 무한대에로 갈 때의 극한이 시간에 무관계하다고 단정하기는 곤난하다.

론문에서는 마감일이 무한대에로 갈 때 사전실시선택권가격의 변분부등식모형의 극한으로 얻어지는 무한시간구간에서 정의된 한가지 변분부등식풀이의 유일성을 연구하였다.

1. 사전실시선택권가격의 극한

$r,\ q,\ \sigma > 0$은 상수일 때 블랙－숄즈편미분연산자를

$$-LV = -\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - (r-q)S\frac{\partial V}{\partial S} + rV$$

와 같이 정의한다. $V(S,\ t,\ T)$를 마감일이 T인 사전실시판매선택권의 가격 즉 변분부등식

$$\begin{aligned} &\min\{-LV,\ V-\phi\} = 0 && (0<t<T,\ S>0) \\ &V(S,\ T,\ T) = \phi(S) = (E-S)^+ && (S>0) \\ &V(\infty,\ t,\ T) = 0 && (0<t<T) \end{aligned} \tag{1}$$

의 풀이라고 하자. 이 풀이는 유일존재하고 $V(S,\ t,\ T)$는 S와 t에 관하여 단조감소하며 T에 관하여 단조증가한다.[4] 또한 $V(S,\ t,\ T)$는 유계이다. 즉

$$0 \le (E-S)^+ \le V(S,\ t,\ T) \le E,\ 0 < S < \infty,\ 0 \le t \le T \tag{2}$$

이로부터 다음의 극한함수가 존재하며 유계이다.

$$\begin{aligned} &U(S,\ t) = \lim_{T\to\infty} V(S,\ t,\ T) = \sup_T V(S,\ t,\ T)\ \ (0 < S < \infty,\ 0 \le t < \infty) \\ &(E-S)^+ \le U(S,\ t) \le E \qquad\qquad\qquad (0 < S < \infty,\ 0 \le t < \infty) \end{aligned} \tag{3}$$

이 $U(S,\ t)$ 는 S 와 t 에 관하여 단조감소하며 다음문제의 풀이라고 보는것이 자연스럽다.

$$\begin{aligned} &\min\{-LU,\ U-\phi\} = 0, \qquad t > 0,\ S > 0 \\ &V(0+,\ t) = E,\ V(+\infty,\ t) = 0,\ S > 0 \end{aligned} \tag{4}$$

이것은 영구사전실시선택권가격의 새로운 모형이라고 볼수 있으며 시간의존결수를 가지는 경우에 대한 연구에서도 리용할수 있다.

변분부등식 (4)는 공간변수구역과 시간변수구역이 둘 다 무한구간으로서 선행연구[2, 3]에서 론의한 변분부등식풀이의 유일존재성에 관한 일반론의 적용범위에 들지 않는다.

2. 극값원리와 유일성

$U(S,\ t)$ 가 식 (4)의 풀이이라면 $U(S,\ t) = (E-S)^+$ 인 구역 Σ_1 (실시구역)에서 $-LU > 0$ 이 성립하고 $U(S,\ t) > (E-S)^+$ 인 구역 Σ_2 (보유유지구역)에서 $-LU = 0$ 이 성립한다. 식 (4)의 풀이는 늘 부아니다.

구역 $A\,(0 \le a < b \le \infty,\ T > 0)$의 포물경계를 다음과 같이 정의한다.

$$\partial_p A = \{a\} \times (0,\ T) \cup \{b\} \times (0,\ T) \cup (a,\ b) \times \{T\}$$

정리 1 (블랙－숄즈편미분연산자에 대한 극값원리)

① $V(S,\ t) \in C^{2,1}(A)$ 에 대하여 $-LV < (>) 0,\ (S,\ t) \in A$ 이라고 하면 V 의 부(정)가 아닌 최대(소)값은 A 의 포물내부에서 도달불가능하다. 나아가서 $-LV \le (\ge) 0,\ (S,\ t) \in A$ 이면

$$\sup_{x\in A} V(x) = \sup_{x\in\partial_p A} V^+(x)\ \ (\inf_{x\in A} V(x) = \inf_{x\in\partial_p A} V^-(x)) \tag{5}$$

가 성립한다.

② $t > 0$ 를 고정한다. $A_t = \{(S,\ t) \in A\} = (a,\ b) \times \{t\}$ 일 때

$$-LV < 0,\ (S,\ t) \in A_t$$

이고 $V_t \le 0$ (t 에 관한 단조감소)이면

$$\sup_{x\in A_t} V(x) = \max\{V^+(a,\ t),\ V^+(b,\ t)\}$$

가 성립한다.

(증명) ① 사실 $-LV < 0$ 임에도 불구하고 포물내부에서 부가 아닌 최대값을 취한다고 가정하면 포물내부의 점 $x_0 = (S_0,\ t_0)$ 이 있어서

$$V(x_0) = \max_{x\in A} V(x) = M \ge 0$$

으로 된다. 그러면 $a<S_0<b,\ 0\le t_0<T$ 가 성립한다. 만일 $a<S_0<b,\ 0<t_0<T$ 이면

$$V_t(x_0)=V_S(x_0)=0\,,\ \ V_{SS}(x_0)\le 0$$

으로 된다. 그러면

$$-LV(x_0)=-V_t-\frac{\sigma^2}{2}S^2V_{SS}-(r-q)SV_S+rV\Big|_{x_0}\ge 0$$

이 성립한다. 이것은 $-LV<0$ 에 모순이다. 만일 $a<S_0<b,\ t_0=0$ 이면

$$-V_t(x_0)\ge 0,\ \ V_S(x_0)=0\,,\ \ V_{SS}(x_0)\le 0$$

이 성립한다. 즉 $-LV(x_0)\ge 0$ 이 성립한다. 이것은 $-LV<0$ 에 모순이다. $-LV\le 0$ 인 경우에는 $u=V-\varepsilon$ 으로 놓을 때 $-Lu=-LV-r\varepsilon<0$ 이고 따라서 $\sup\limits_{x\in A}u(x)=\sup\limits_{x\in\partial_p A}u^+(x)$ 가 성립한다. 이로부터

$$\sup_{x\in A}V(x)\le\sup_{x\in A}u(x)+\varepsilon=\sup_{x\in\partial_p A}u^+(x)+\varepsilon\le\sup_{x\in\partial_p A}V^+(x)+\varepsilon$$

이 성립한다. ε 을 령에로 보내면 식 (5)가 나온다.

② $a<S_0<b$ 이고 $V(S_0,\ t)=\max\limits_{A_t}V(S,\ t)=M\ge 0$ 이면

$$V_S(S_0,\ t)=0\,,\ \ V_{SS}(S_0,\ t)\le 0$$

이고 t 에 관한 단조감소성가정으로부터 $-V_t(S_0,\ t)\ge 0$ 이며 이로부터 $-LV(S_0,\ t)\ge 0$ 이 성립한다.(증명끝)

보조정리 1 $V(S,\ t)$ 가 식 (4)의 풀이이고 $V(S,\ t)=(E-S)^+$ 일 때 $q\ge 0$ 이면 $S\le\min\{rE/q,\ E\}$ 가, $q<0$ 이면 $S\le E$ 가 성립한다.

(증명) 우선 $V(S,\ t)=(E-S)^+$ 이면 $S\le E$ 이라는데 주의하자.[4] 왜냐하면 이때 S 는 실시구역에 들고 만일 $S>E$ 이라고 가정하면 $(E-S)^+=0$ 이고 실시리득이 없으므로 보유를 유지하는것이 좋으며 따라서 S 는 보유유지구역에 든다는 모순이 나온다. 이로부터 이때 $V(S,\ t)=E-S$ 로 쓸수 있다. 또한 식 (4)는

$$\min\{-LV,\ V-(E-S)\}=0$$

으로 되고 $(V-(E-S))=0$ 이므로 $-LV=rE-qS\ge 0$ 이고 따라서 $q\ge 0$ 이면 $S\le rE/q$ 가 성립한다.(증명끝)

보조정리 2 $V(S,\ t)$ 가 식 (4)의 풀이라고 하고 $t>0$ 을 고정하자. 이때

① $V(S_0,\ t)=(E-S_0)^+$ 인 $S_0>0$ 이 있으면 $\forall S<S_0$ 에 대하여

$$V(S,\ t)=(E-S)^+$$

가 성립한다.

② $V(S_1,\ t)>(E-S_1)^+$ 인 $S_1>0$ 이 있으면 $\forall S>S_1$ 에 대하여

$$V(S,\ t)>(E-S)^+$$

가 성립한다.

(증명) ① 보조정리 1로부터 $S_0\le rE/q$ 가 성립한다. 결론을 부정하면 즉

$$0 < \exists S < S_0 : V(S,\ t) > E - S \tag{6}$$

이면 식 (6)이 성립하는 최대구간을 $(a,\ b)(b \le S_0)$ 라고 놓자. 그러면 $S = a$ 와 $S = b$ 에서

$$V(S,\ t) = (E - S)$$

가 성립한다. 이 구간에서는 $\min\{-LV,\ V - \phi\} = 0$ 으로부터

$$-LV = 0\ ,\ \ V - (E - S) > 0$$

이 성립한다. 따라서

$$-L(V - (E - S)) = L(E - S) = qS - rE < 0\ (\because q \ge 0 \Rightarrow S < S_0 \le rE / q\ )$$

이 성립한다. 따라서 정리 1의 ②로부터 $V - (E - S)$ 는 부가 아닌 최대값을 경계에서만 취한다. 그런데

$$V(a,\ t) - (E - S) = 0,\ V(b,\ t) - (E - S) = 0$$

이므로

$$V(S,\ t) - (E - S) \le 0,\ \ a < \forall S < b$$

이며 이것은 식 (*)에 모순이다.

② $\exists S_2 > S_1 : V(S_2,\ t) = (E - S_2)^+$ 이면 ①의 결론으로부터 $V(S_1,\ t) = (E - S_1)^+$ 이다. 이것은 가정에 모순된다. 따라서 결론이 성립한다.(증명끝)

정리 2(실시경계의 존재성) $V(S,\ t)$ 가 식 (4)의 풀이이고 t 에 관하여 단조감소일 때 임의의 $t > 0$ 에 대하여 어떤 $s(t)(\le \min\{rE / q,\ E\})$ 가 있어서 $0 < S < s(t)$ 이면 $V(S,\ t) = E - S$, $s(t) < S$ 이면 $V(S,\ t) > (E - S)^+$ 가 성립한다.

(증명) $t > 0$ 을 고정할 때 $(E,\ +\infty) \times \{t\}$ 가 보유유지구역에 들므로 보유유지구역은 비지 않으며 $t > 0$ 을 고정할 때 보유유지구역에 속하는 S 의 하한을 $s(t)$ 라고 놓으면 보조정리 2로부터 $(s(t),\ +\infty)$ 는 보유유지구역이고 $(0,\ s(t))$ 는 실시구역이다.(증명끝)

정리 3(풀이의 유일성) t 에 관하여 단조감소인 식 (4)의 풀이는 유일하다.

(증명) $V_1,\ V_2$ 가 식 (1)의 t 에 관하여 단조감소인 두 풀이라고 하고 $s_1(t),\ s_2(t)$ 를 각각 이 두 풀이의 실시경계라고 하자. $t > 0$ 을 고정하자. 일반성을 잃지 않고 $s_1(t) > s_2(t)$ 라고 가정하자. 이때 $S < s_2(t)$ 이면

$$V_1 = V_2 = E - S$$

이고 $S > s_1(t)$ 이면

$$LV_1 = LV_2 = 0$$

이며 $s_2(t) < S \le s_1(t)$ 에서는

$$V_1 = E - S\ ,\ \ LV_2 = 0\ ,\ \ V_2 > E - S \tag{7}$$

가 성립한다. 이제 $(s_2(t),\ \infty)$ 구간에서 $V_2 - V_1$ 을 고찰하자. $s_2(t) < S \le s_1(t)$ 에서는

$$-L(V_2 - V_1) = L(E - S) = qS - rE < 0\ \ (s < s_1(t) \le rE / q\ )$$

이고 $S > s_1(t)$ 에서는 $-L(V_2 - V_1) = 0$ 이므로 결국 구간 $(s_2(t),\ \infty)$ 에서 $-L(V_2 - V_1) \le 0$ 이다.

정리 1의 ②로부터 $[s_2(t),\ \infty)$ 에서 $V_2 - V_1$ 의 부아닌 최대값은 경계에서 취하게 된다.

그러나 $(V_2-V_1)(s_2(t),\ t)=0$, $(V_2-V_1)(\infty,\ t)=0$ 이고 따라서 $[s_2(t),\ \infty)$ 에서 $V_2-V_1\le 0$ 이 성립한다. 이것은 식 (7)에 모순이다. 이로부터 $s_1(t)=s_2(t),\ \forall t>0$ 이다.

이제 $s(t)$ 를 실시경계라고 하자. 두 풀이는 $(0,\ s(t))$ 에서 $E-S$ 와 같으므로 일치한다. $(s_1(t),\ \infty)$ 에서는 $-L(V_1-V_2)=0$ 이고 $V_1-V_2|_{(s_1(t),\ +\infty)}=0$ 이므로 정리 1로부터 $V_1=V_2$ 이다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보 수학, 65, 1, 58, 주체108(2019).

[2] M.G. Crandall et al.; Bull. Amer. Math. Soc., 27, 1, 1992.

[3] A. Friedman; Variational Principles and Free Boundary Problems, John Wiley & Sons, 118～119, 1982.

[4] L. Jiang; Mathematical Modeling and Methods for Option Pricing, Singapore: World Scientific, 45～50, 2005.

[5] L. S. Jiang et al.; Journal of Computational Mathematics, 22, 3, 371, 2004.

[6] Lin Jianwei et al.; Front. Math. China, 2, 2, 243, 2007.

주체108(2019)년 9월 15일 원고접수

The Uniqueness of the Solution to a Variational Inequality Defined on Infinite Time Interval

O Hyong Chol, Jo Song San

In this paper we study the uniqueness of the solution to a variational inequality defined on infinite time interval, which is obtained as limit of the variational inequality model for the price of American option when the maturity goes to infinity.

Keywords: American option, infinite time interval, variational inequality