김일성종합대학학보 (자연과학) 주체105(2016)년 제62권 제2호
JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE) Vol. 62 No. 2 JUCHE105(2016).

하우스돌프공간에서 련속넘기기가 유한형의 부분밀기에 위상반공액이기 위한 필요충분조건

최윤미, 주현희

밀기력학계는 구조가 단순하지만 아주 풍부한 카오스적거동을 가지고있어 이 밀기력학계와의 비교를 통하여 력학계의 카오스적성질이 많이 연구되고있다.[1, 2]

선행연구[1]에서는 거리공간에서 정의된 련속넘기기가 유한형의 부분밀기에 위상반공액이기 위한 다음의 충분조건을 구하였다.

정리 1 [1] (X, d) 는 거리공간, $V_1, \cdots, V_m$ $(m \ge 2)$ 은 둘씩 사귀지 않는 X 의 콤팍트부분모임, $A = (a_{ij})_{m \times m}$ 은 이행행렬이라고 하자.

이때 련속넘기기 $f: D := \bigcup_{i=1}^{m} V_i \to X$ 가 $V_1, \cdots, V_m$ 에서 엄격한 $A-$ 쌍확장넘기기이면 콤팍트부분모임 $\Lambda \subset D$ 가 있어서 $f(\Lambda) = \Lambda$ 이고 $f: \Lambda \to \Lambda$ 은 $\sigma_A: \Sigma_m^+(A) \to \Sigma_m^+(A)$ 에 위상반공액이다. 더우기 $h(\sigma_A) > 0$ 이면 f 는 리-요크의미에서 카오스적이다.

론문에서는 하우스돌프위상공간에서 정의된 련속넘기기가 m 차이행행렬 A 에 관한 유한형의 부분밀기에 위상반공액이기 위한 필요충분조건을 구하고 하우스돌프공간에서 엄격한 $A-$ 쌍확장넘기기의 한가지 성질을 밝혔다.

보조정리 X 를 하우스돌프위상공간, $f: D \subset X \to X$ 를 련속넘기기, A 를 m 차이행행렬이라고 할 때 둘씩 서로 비교차하는 콤팍트부분모임 $V_1, \cdots, V_m \subset D$ 가 존재하여 임의의 $\alpha = (a_0, a_1, \cdots) \in \Sigma_m^+(A)$ 에 대하여 $V_\alpha := \bigcap_{i=0}^{\infty} f^{-i}(V_{a_i}) \ne \phi$ 이면 임의의 $\alpha, \beta \in \Sigma_m^+(A)$ $(\alpha \ne \beta)$ 에 대하여 $V_a \cap V_\beta = \phi$ 이 성립된다.

증명 $\alpha = (a_0, a_1, \cdots) \in \Sigma_m^+(A)$ 일 때 $V_{a_0 a_1 \cdots a_k} := \bigcap_{i=0}^{k} f^{-i}(V_{a_i})$ $(k \ge 0)$ 라고 놓자.

$\beta = (b_0, b_1, \cdots)$ 일 때 $\alpha \ne \beta$ 이면 $\exists k \ge 0 : a_k \ne b_k$ 이므로 $V_{a_k} \cap V_{b_k} = \phi$ 이다.

일반적으로 $f^k(A \cap f^{-k}(B)) = f^k(A) \cap B$ 가 성립되므로 다음의 식이 성립된다.

$$\begin{aligned} f^k(V_{a_0 a_1 \cdots a_k}) &= f^k(V_{a_0} \cap f^{-1}(V_{a_1}) \cap \cdots \cap f^{-k}(V_{a_k})) = \\ &= f^k(V_{a_0} \cap f^{-1}(V_{a_1}) \cap \cdots \cap f^{-(k-1)}(V_{a_{k-1}})) = f^k(V_{a_0 a_1 \cdots a_{k-1}}) \cap V_{a_k} \end{aligned} \tag{1}$$

따라서 $f^k(V_{a_0 a_1 \cdots a_k}) \subset V_{a_k}$ 가 성립된다. 마찬가지로 $f^k(V_{b_0 \cdots b_k}) \subset V_{b_k}$ 가 성립된다.

한편 $V_{a_k} \cap V_{b_k} = \phi \Rightarrow f(V_{a_0 \cdots a_k}) \cap f(V_{b_0 \cdots b_k}) = \phi$ 이므로 $V_{a_0 \cdots a_k} \cap V_{b_0 \cdots b_k} = \phi$ 이고 따라서 $V_\alpha \cap V_\beta = \phi$ 이다.(증명끝)

정리 2 X 를 하우스돌프위상공간, 넘기기 $f:D\subset X\to X$ 를 련속넘기기, 행렬 A 를 m 차이행행렬이라고 할 때 f 의 콤팍트불변모임 $V\subset D$ 가 존재하여 $f|_V$ 가 유한형의 부분밀기 $\sigma_A:\Sigma_m^+(A)\to\Sigma_m^+(A)$ 에 위상반공액이기 위해서는 둘씩 서로 사귀지 않고 비지 않은 콤팍트모임 $V_1,\cdots,V_m\subset D$ 가 존재하여 $\forall\alpha=(a_0,\ a_1,\cdots)\in\Sigma_m^+(A)$, $\bigcap_{i=0}^{\infty}f^{-i}(V_{a_i})\neq\phi$ 일것이 필요하고 충분하다.

증명(필요성) 가정에 의하여 f 의 콤팍트불변모임 $V\subset D$ 와 우로의 련속넘기기 $h:V\to\Sigma_m^+(A)$ 가 있어서 $h\circ f|_V=\sigma_A\circ h$ 이다.

$B_i:=\{(a_0,a_1,\cdots)\in\Sigma_m^+(A)\,|\,a_0=i\}$ 로 하면 $B_i\neq\phi$ 이고 콤팍트모임이며 $B_i\cap B_j=\phi\ (i\neq j)$ 이다. 또한 $\forall i\ (1\le i\le m),\ V_i:=h^{-1}(B_i)$ 로 하면 $V_1,\cdots,V_m$ 들은 둘씩 서로 사귀지 않는 콤팍트모임이다.

이제 임의의 $k\ge0$ 에 대하여 $V_{a_1\cdots a_k}:=\bigcap_{i=0}^{k}f^{-i}(V_{a_i})\neq\phi$ 임을 말하면 충분하다.

이를 위하여 다음의 식이 성립됨을 밝히자.

$$h\circ f^k(V_{a_1\cdots a_k})=B_{a_k}\tag{2}$$

$k=0$ 일 때는 $h(V_{a_0})=B_{a_0}$ 이므로 식 (2)가 성립된다.

$k-1\ (\ge1)$ 일 때 성립된다고 가정하면 k 일 때 다음의 식이 성립된다.

$$\begin{aligned}h\circ f^k(V_{a_0\cdots a_k})&=h\circ f\circ f^{k-1}(V_{a_0\cdots a_k})=h\circ f[f^{k-1}(V_{a_0\cdots a_{k-1}}\cap f^{-k}(V_{a_k}))]=\\&=h\circ f[f^{k-1}(V_{a_0\cdots a_{k-1}}\cap f^{-(k-1)}(f(V_{a_k})))]=h\circ f[f^{k-1}(V_{a_0\cdots a_{k-1}}\cap f^{-1}(V_{a_k}))]=\\&=h(f^k(V_{a_0\cdots a_{k-1}})\cap V_{a_k})=\ h(V_{a_k})=B_{a_k}\end{aligned}$$

한편 $h\circ f[f^{k-1}(V_{a_0\cdots a_{k-1}})]=\sigma\circ h(B_{a_{k-1}})=\sigma(B_{a_{k-1}})\supset B_{a_k}$ 이므로 $\alpha\in B_{a_k}$ 이면

$$\exists c\in f^{k-1}(V_{a_0\cdots a_{k-1}})\ :\ h\circ f(c)=\alpha\,,\quad f(c)=V_{a_k}\,.$$

그러므로 식 (1)로부터 $f(c)\in f^k(V_{a_0\cdots a_{k-1}})\cap V_{a_k}\ =f^k(V_{a_0\cdots a_k})$ 이다.

이로부터 $\alpha=h\circ f(c)\in h\circ f^k(V_{a_0\cdots a_k})$ 즉 $B_{a_k}\subset h\circ f^k(V_{a_0\cdots a_k})$ 이므로 식 (2)가 성립된다. 그리고 $B_{a_k}\neq\phi$ 이므로 $V_{a_0\cdots a_k}\neq\phi$ 이다.

V 가 콤팍트모임, $V_{a_0\cdots a_k}\supset V_{a_0\cdots a_{k+1}}$ 이고 $V_{a_0\cdots a_k}\subset V\ (k\ge0)$ 들이 콤팍트모임이라는데로부터 $\bigcap_{i=0}^{\infty}f^{-i}(V_{a_i})\neq\phi$ 이 나온다.

(충분성) 가정에 의하여 둘씩 서로 사귀지 않고 비지 않은 콤팍트모임 $V_1,\cdots,V_m\subset D$ 가 존재하여 임의의 $\alpha=(a_0,\ a_1,\cdots)\in\Sigma_m^+(A)$ 에 대하여 $V_\alpha:=\bigcap_{i=0}^{\infty}f^{-i}(V_{a_i})\neq\phi$ 이 성립된다.

$V:=\bigcup_{\alpha\in\Sigma_m^+(A)}V_\alpha$ 라고 놓으면 V 는 f 의 콤팍트불변모임이다.

먼저 $f(V)=V$ 임을 밝히자.

$y\in f(V)$ 이면 $\exists x\in V: f(x)=y$ 이므로 $\exists\alpha\in\Sigma_m^+(A): x\in V_\alpha$ 이다.

이 사실을 리용하면 $f(x)\in f(V_\alpha)=f\left(V_{a_0}\cap f^{-1}\left(\bigcap_{i=0}^{\infty} f^{-i}(V_{a_{i+1}})\right)\right)=f(V_{a_0})\cap V_{\sigma(\alpha)}$ 이고 따라서 $f(x)=y\in V_{\sigma(\alpha)}$ 이다. 즉 $f(V)\subset V$ 이다.

$x\in V$ 이면 $\exists\alpha\in\Sigma_m^+(A): x\in V_\alpha$ 이고 따라서 $f(x)\in f(V_{a_0})\cap V_{\sigma(\alpha)}\in V$ 이므로 $V\subset f(V)$.

다음으로 V 가 콤팍트모임임을 밝히자.

우선 $V\subset\bigcup_{i=1}^{m} V_i$ 이다.

사실 $x\in V$ 이면 $\exists\alpha\in\Sigma_m^+(A): x\in V_\alpha=\bigcap_{i=0}^{\infty} f^{-i}(V_{a_i})=V_{a_0}\cap f^{-1}(V_{a_1})\cdots$ 이므로 $x\in V_{a_0}\subset\bigcup_{i=1}^{m} V_i$.

그런데 $V_i\ (1\le i\le m)$ 들이 콤팍트이므로 V 의 닫김성만 증명하면 된다.

$\{x_n\}$ 을 $n\to\infty$ 일 때 $x_n\to x$ 인 V 의 렬이라고 하면 $\forall n\ge 1,\ \exists\alpha_n\in\Sigma_m^+(A): x_n\in V_{\alpha_n}$ 이다.

$\Sigma_m^+(A)$ 가 콤팍트모임이므로 $\{\alpha_n\}$ 은 수렴하는 부분렬을 가진다.

일반성을 잃지 않고 $\{\alpha_n\}$ 이 $\alpha'=(a_0',\ a_1',\cdots)$ 으로 수렴한다고 가정하자. 여기서 $\forall n\ge 1,\ \alpha_n=(a_0^n,\ a_1^n,\cdots)$ 으로 표시한다.

그러면 $\forall k\ge 1,\ \exists N_k: n>N_k\Rightarrow|\alpha_n-\alpha'|<1/2^{k+1}$ 이고 이때 $a_0^n=a_0,\ a_1^n=a_1',\ \cdots,\ a_k^n=a_k'$.

$\bigcap_{i=0}^{n} f^{-i}(V_{a_i})=:V_{a_0a_1\cdots a_n}$ 으로 표시하면 $V_{a_0a_1\cdots a_n}$ 은 콤팍트이고 $V_{a_0a_1\cdots a_{n+1}}\subset V_{a_0a_1\cdots a_n}\ (n\ge 0)$ 이다. 따라서 $V_{a_n}\subset V_{a_0a_1\cdots a_k}$ 이고 이로부터 $\forall n>N_k,\ x_n\in V_{a_n}\subset V_{a_0a_1\cdots a_k}$ 이다.

$V_{a_0a_1\cdots a_k}$ 의 콤팍트성에 의하여 $x\in V_{a_0a_1\cdots a_k}$ 이고 k 의 임의성에 의하여

$$x\in\bigcap_{k=0}^{\infty} V_{a_0a_1\cdots a_k}=V_\alpha\subset V$$

이다. 따라서 V 는 콤팍트모임이다.

다음으로 $f|_V$ 가 σ_A 에 위상반공액임을 증명하자.

넘기기 $h:V\to\Sigma_m^+(A)$ 를 $h(x)=\alpha=(a_0,\ a_1,\ \cdots)\in\Sigma_m^+(A),\ x\in V_\alpha$ 로 정의하자.

$x\in V$ 이면 $\exists\alpha=(a_0,a_1,\cdots)\in\Sigma_m^+(A): x\in V_\alpha,\ h(x)=\alpha$ 이다.

$f(V_\alpha)=f\left(\bigcap_{i=0}^{\infty} f^{-i}(V_{a_i})\right)=f(V_{a_0})\cap\bigcap_{i=0}^{\infty} f^{-i}(V_{a_{i+1}})=f(V_{a_0})\cap V_{\sigma(\alpha)}$ 이므로 $f(V_\alpha)\subset V_{\sigma(\alpha)}$ 즉 $f(x)\in V_{\sigma(\alpha)}$ 이다. 이로부터 $h(f(x))=\sigma(\alpha)$ 즉 $h\circ f(x)=\sigma(\alpha)=\sigma(h(x))=\sigma\circ h(x)$ 이다.

$h:\Lambda\to\Sigma_m^+(A)$ 가 우로의 넘기기임은 분명하다.

h 의 련속성을 보자.

$\forall x\in V,\ \exists\alpha\in\Sigma_m^+(A): x\in V_\alpha,\ \alpha=(a_0,\ a_1,\ \cdots)$ 이고 $\forall\varepsilon>0,\ \exists k\ge 1,\ 1/2^{k+1}<\varepsilon$ 이다.

이때 $x\in V_{a_0\cdots a_k}$ 이다.

길이가 $k+1$ 인 임의의 허용가능한 유한렬 $b_0\cdots b_k$ 에 대하여 $V_{b_0\cdots b_k}$ 는 콤팍트모임이고 $b_0b_1\cdots b_k\ne b_0'b_1'\cdots b_k'$ 이면 $V_{b_0b_1\cdots b_k}\cap V_{b_0'b_1'\cdots b_k'}=\phi$ 이다.

X 가 하우스돌프공간이므로 $V_{a_0\cdots a_n}$ 의 어떤 근방 U 가 존재하여 길이가 $k+1$ 인 임의의 허용가능한 유한렬 $b_0, b_1, \cdots, b_k$ 에 대하여 $b_0 b_1 \cdots b_k \ne a_0 \cdots a_k$ 이므로 $U \cap V_{b_0 \cdots b_k} = \phi$ 이다.

따라서 $x' \in U \cap V$ 이면 $x' \in V_{a_0 \cdots a_k}$ 이다.

이로부터 $h(x') = \alpha' = (a_0 a_1 \cdots a_k a'_{k+1} a'_{k+2} \cdots) \in \Sigma_m^+(A)$ 로 놓으면 $\rho(\alpha,\ \alpha') \le 1/2^{k+1} < \varepsilon$ 이다. 즉 h 는 V 에서 련속이다.(증명끝)

다음의 명제는 정리 1과 정리 2사이의 관계를 보여준다.

명제 X 를 하우스돌프공간, $V_1, \cdots, V_m\ (m \ge 2)$ 을 둘씩 비교차하는 비지 않은 콤팍트부분모임들이라고 하고 A 를 m 차이행행렬이라고 하자.

이때 $f : D := \bigcup_{i=1}^{m} V_i \to X$ 가 련속이고 $V_1, \cdots, V_m$ 우의 엄격한 $A-$쌍확장넘기기이면 임의의 $\alpha = (a_0,\ a_1,\ \cdots) \in \Sigma_m^+(A)$ 에 대하여 $\bigcap_{i=0}^{\infty} f^{-i}(V_{a_0}) \ne \phi$ 이 성립된다.

정리 2와 우의 명제로부터 다음의 따름이 나온다.

따름 X 를 거리공간, $V_1, \cdots, V_m\ (m \ge 2)$ 을 둘씩 비교차하는 비지 않은 콤팍트부분모임들, A 를 m 차이행행렬이라고 하자.

련속넘기기 $f : D := \bigcup_{i=1}^{n} V_i \to X$ 가 $V_1, \cdots, V_m$ 우의 엄격한 $A-$쌍확장넘기기일 때 콤팍트불변모임 $\Lambda \subset D\ (f(\Lambda) \subset \Lambda)$ 가 존재하여 $f|_\Lambda$ 은 부분밀기 σ_A 에 위상반공액이다.

특히 σ_A 의 위상적엔트로피 $h(\sigma_A) > 0$ 이면 f 는 리－요크의미에서 카오스적이다.

참 고 문 헌

[1] X. Zhang et al.; Proceedings of the AMS, 141, 2, 585, 2013.

[2] Y. Shi et al.; Solitons and Fractals, 39, 2138, 2009.

주체104(2015)년 10월 5일 원고접수

A Necessary and Sufficient Condition for a Continuous Map on Hausdorff Space to be Topologically Semi-Conjugate to a Subshift of Finite Type

Choe Yun Mi, Ju Hyon Hui

We studied a necessary and sufficient condition for a continuous map defined on Hausdorff space to be topologically semi-conjugate to the subshift for some $m \times m$ transitive matrix A and a property of strictly A-coupled expanding map on Hausdorff space.

Key word: Hausdorff space