김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체105(2016)년 제62권 제11호 Vol. 62 No. 11 JUCHE105(2016).

리산화된 하밀톤－야코비방정식의 인과성조건

원정윤, 허명송

경애하는 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《기초과학은 과학기술강국을 떠받드는 주추입니다. 기초과학이 든든해야 나라의 과학기술이 공고한 토대우에서 끊임없이 발전할수 있습니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 40페지)

비선형최량조종문제의 최량반결합조종을 구성하는데서 벨만의 최량성원리에 의해 유도된 하밀톤－야코비방정식의 점성풀이를 구하는것이 중요하다.

한편 비선형편미분방정식인 하밀톤－야코비방정식의 수값풀이법에 대한 연구가 많이 진행되고있다.[1－4]

직4각형그물우에서의 등방성아이코날형하밀톤－야코비방정식의 수값풀이법(Dijkstra－형알고리듬)[4]은 일반적으로 비등방성을 가진 최량조종문제풀이에는 적용불가능하다.

비구조화된 그물우에서의 일부 비등방성아이코날방정식의 수값풀이법(FMM)[4]은 특수한 경우의 비등방성을 가진 최량조종문제의 풀이법이라고 볼수 있다. 비구조화된 그물우에서 일정한 조건을 만족시키는 비등방성하밀톤－야코비방정식을 풀기 위한 OUM은 인과성조건을 만족시킨다는 담보가 없으며 따라서 그물점들을 단 한번 통과하는 방법(Dijkstra－형알고리듬과 FMM과 같이)으로는 되지 못한다. 더우기 비구조화된 그물우에서의 방법은 알고리듬의 실행에서 효과적인 방법으로 되지 않는다.

선행연구[1]에서는 비구조화된 그물우에서의 방법[2－4]들의 제한성들을 극복하기 위하여 단체그물우에서의 최소시간조종문제에 대응되는 리산화된 하밀톤－야코비방정식의 풀이법을 제기하면서 인과성조건을 만족시키도록 갱신그물점모임을 선택하는 한가지 수법을 제기하였다. 그러나 최소시간조종문제가 아닌 일반적인 비선형최량조종문제에 대하여 선행연구[1]의 수법이 가능하다는 담보는 아직 없다.

론문에서는 리산화된 비등방성하밀톤－야코비방정식이 인과성을 만족시키기 위한 충분조건들을 정식화하고 증명하였다. 이 충분조건들은 갱신그물점모임구성알고리듬에서 리용된다.

다음과 같이 주어지는 조종계를 생각하자.

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(y(t),\ \alpha(t))\cdot\alpha(t),\quad t>0 \tag{1}$$

$$y(0) = x \in \Omega \tag{2}$$

여기서 $y(t)$는 t시각 계의 상태이고 $f:\boldsymbol{R}^d\times A\to\boldsymbol{R}$이며 $\alpha(\cdot):[0,\ +\infty)\to A$는 단편련속조종이다. 또한 Ω는 $\boldsymbol{R}^d$의 유계리프쉬츠열린구역이며

$$A=\{a\in\boldsymbol{R}^d \mid \|a\|=1\},\quad \Lambda:=\{\alpha(\cdot)\mid\alpha:[0,\ +\infty)\to A\}.$$

$A_f(x)=\{taf(x,\ a)\,|\,a\in A,\ 0\le t\le 1\}$, $t_x(\alpha):=\inf\{\tau\ge 0\,|\,y_{x,\ \alpha}(\tau)\in\partial\Omega\}$로 놓자. 여기서 $t_x(\alpha)$는 초기상태 x에서 출발하고 조종 $\alpha(\cdot)$에 대응되는 조종계 (1)의 풀이(궤도)가 Ω의 경계에 도달되는 첫 시각을 의미한다.

$l:\Omega\times S_1\to\boldsymbol{R}$, $q:\overline{\Omega}\to\boldsymbol{R}$라고 할 때 초기상태 x, 조종 $\alpha(\cdot)$에 대응되는 목적함수는

$$J(x,\ \alpha)=\int_0^{t_x(\alpha)} l(y_{x,\ \alpha}(t),\ \alpha(t))dt+q(y_{x,\ \alpha}(t_x(\alpha)))\to\min \tag{3}$$

으로 주어진다.

우리의 문제는 계 (1), (2)에 대응되는 궤도들가운데서 목적함수 (3)에 최소를 주는 조종과 궤도를 구하는것이다. 이때의 조종을 x에 관한 최량조종, 대응되는 궤도를 최량궤도라고 부른다.

최량조종문제 (1)－(3)에 대한 값함수는 다음과 같다.

$$V(x)=\begin{cases}\inf\limits_{\alpha(\cdot)\in\Lambda} J(x,\ \alpha(\cdot)), & x\in\Omega\\ q(x), & x\in\partial\Omega\end{cases} \tag{4}$$

가정 ① $f,\ l,\ q$는 각각 자기변수에 관하여 리프쉬츠련속이다.

② $f(x)>0$, $l(x)>0,\ \forall x\in\Omega$이고 $q(x)\ge 0,\ \forall x\in\partial\Omega$이다.

③ $A_f(x)$는 닫긴불룩모임이다.

값함수 $V(\cdot)$에 관한 하밀톤－야코비방정식은 다음과 같다.

$$\max_{a\in A}\{-(\nabla V(x)\cdot a)f(x,\ a)-l(x,\ a)\}=0\ \ (x\in\Omega),\ \ V(x)=q(x)\ \ (x\in\partial\Omega) \tag{5}$$

하밀톤－야코비방정식 (5)는 비선형편미분방정식이므로 이 방정식의 해석적풀이를 구하는것은 일반적으로 어려운 문제이다.

우리는 값함수 $V(\cdot)$의 수값풀이를 구하는 한가지 방법에 대하여 론의한다.

$\zeta=(\zeta_1,\ \zeta_2,\ \cdots,\ \zeta_n)$을 $\sum_{i=1}^{n}\zeta_i=1,\ \zeta_i\ge 0,\ 1\le i\le n$인 n차원무게중심자리표벡토르라고 하고 Ξ_n을 n차원무게중심자리표벡토르들전부의 모임이라고 하자.

어떤 단체 s에 대하여 상태 $\tilde{x}_s\in s$는 $\zeta\in\Xi_{n_s}$에 의해 표시될수 있다.

$\tilde{\Xi}_n$은 제한조건 $\zeta_i\ge 0,\ 1\le i\le d$가 없는 n차원무게중심자리표벡토르들의 모임이고 $x\in\Omega$에 대하여 $\tau_s(x,\ \zeta)=\|\tilde{x}_s(\zeta)-x\|$, $a_s(x,\ \zeta)=(\tilde{x}_s(\zeta)-x)/\tau_s(x,\ \zeta)$라고 정의하자.

x가 주어졌을 때는 $\tau_s(\zeta)=\tau_s(x,\ \zeta)$, $a_s(\zeta)=a_s(x,\ \zeta)$라고 쓸수도 있다는것을 주의하여 둔다.

$x+ta$가 $t>0$일 때 s와 사귀면 $a\in S_1$은 x로부터 s와 사귄다고 말한다.

다음의 식으로 정의되는 수값하밀톤함수 $\underline{H}$를 생각한다.

$$\underline{H}(x,\ S,\ \phi,\ \mu)=\max_{\substack{s\in S\\ \zeta\in\Xi_{n_s}}}\left\{\left(\mu-\sum_{i=1}^{n_s}\zeta_i\phi(x_i^s)\right)\Big/\tau_s(x,\ \zeta)\cdot f(x,\ a_s(x,\ \zeta))-l(x,\ a_s(x,\ \zeta))\right\}$$

여기서 $x\in\Omega$이고 S는 $\overline{\Omega}$에서 $x\notin s$인 단체 s들의 모임이며 벡토르 x_i^s-x들은 독립이다. 또한 $\phi:\overline{\Omega}\to\boldsymbol{R}$는 유계함수이고 $\mu\in\boldsymbol{R}$이다.

μ 만을 론의하려고 할 때는 $\underline{H}(\mu) = \underline{H}(x, S, \phi, \mu)$ 라고 놓는다.

단체그물 G가 주어졌다고 하고 다음의 리산화된 하밀톤－야코비방정식을 론의하자.

$$\underline{H}(x,\ S(x),\ \underline{u},\ \underline{u}(x)) = 0 \quad (x \in \underline{\Omega}),\quad \underline{u}(x) = q(x) \quad (x \in \underline{\partial\Omega}) \tag{6}$$

우리가 주목하는것은 리산화된 하밀톤－야코비방정식 (6)을 만족시키는 $\underline{u}^G : X \to \boldsymbol{R}$ 를 구하는것이다. 여기서 $\underline{\Omega}$ 와 $\underline{\partial\Omega}$ 는 각각 Ω 와 $\partial\Omega$ 의 리산화이며 $X = \underline{\Omega} \cup \underline{\partial\Omega}$ 이다. $S(x)$ 는 x의 갱신단체모임으로서 $\underline{H}$ 가 리산화된 하밀톤－야코비방정식 (6)이 인과성을 만족시키도록 선택되여야 한다.

방정식 $\underline{H}(x, S, \phi, \mu) = 0$ 이 인과성을 만족시킨다는것은 $\underline{H}(x, S, \phi, \mu) = 0$ 의 풀이 $\mu = \tilde{\mu}$ 이 $\phi(x_i^s)$ 에 의존하면 반드시 부등식 $\tilde{\mu} > \phi(x_i^s)$ 이 성립되여야 한다는것이다.[1]

인과성은 Dijkstra－형알고리듬을 리용하여 그물점 $x \in X$ 들을 $\underline{u}(x)$ 의 증가순서로 단 한번 통과하는것으로서 리산화된 하밀톤－야코비방정식 (6)의 풀이를 계산할수 있게 하는 성질이다.

$\delta \ge 0$ 이라고 하자.

$\underline{H}(x, S, \phi, \mu) = 0$ 이 δ －인과성을 만족시킨다는것은 $\underline{H}(x, S, \phi, \mu) = 0$ 의 풀이 $\mu = \tilde{\mu}$ 이 값 $\phi(x_i^s)$ 에 의존하면 $\tilde{\mu} > \phi(x_i^s) + \delta$ 를 만족시켜야 한다는것을 의미한다.

리산화된 하밀톤－야코비방정식의 인과성만족조건에 대하여 보자.

조건 1 $\max_{a \in A}\{(-p \cdot a) f(x,\ a) - l(x,\ a)\} = (-p \cdot a_s(\hat{\zeta})) f(x,\ a_s(\hat{\zeta})) - l(x,\ a_s(\hat{\zeta})) = 0$ 을 만족시키는 모든 $q \in \boldsymbol{R}^d$, $\zeta \in \Xi_{n_s}$ 에 대하여 부등식 $(x_i^s - x)(-q) > \delta$ 가 성립된다.

정리 1 $s \in S$ 가 $x \in \Omega$ 에 대하여 조건 1을 만족시킨다고 하자.

그리고 $\breve{\zeta}$ 을 $\tilde{\mu}_s = \min_{\zeta \in \Xi_{n_s}} \eta_\phi^s(\zeta)$ 에서의 최소값점이라고 하자.

이때 리산화된 하밀톤－야코비방정식은 x, s 에 대하여 δ －인과적이다.

인과성조건이 만족되기 위한 다른 조건으로서 조건 1보다는 특수하지만 앞으로 풀이 알고리듬에서 보다 쓸모있는 조건을 더 생각하자.

$$\breve{f}(x) = \min_{a \in A} f(x,\ a),\quad \hat{f}(x) = \max_{a \in A} f(x,\ a),$$
$$\breve{l}(x) = \max_{a \in A} l(x,\ a),\quad \hat{l}(x) = \max_{a \in A} l(x,\ a),$$
$$\gamma(x) = \hat{f}(x)\hat{l}(x) / (\breve{f}(x)\breve{l}(x))$$

라고 놓자.

이때 분명히 $0 < \breve{f}(x) \le \hat{f}(x) < \infty$, $0 < \breve{l}(x) \le \hat{l}(x) < \infty$, $1 \le \gamma(x) < \infty$ 이다.

$a_i^s = \dfrac{x_i^s - x}{\| x_i^s - x \|}$ 라고 표시하고 α_{ij}^s 을 a_i^s 과 a_j^s 사이의 각이라고 하자.

또한 $\hat{\alpha}_s = \max_{i,\ j} \alpha_{ij}^s$, $\gamma_s(x) = \min_i \| x_i^s - x \|$ 라고 하자.

조건 2 $\dfrac{\delta \cdot \hat{f}(x)}{r_s(x)\breve{l}(x)} \le 1$, $\hat{\alpha}_s < \arccos\left(\dfrac{\delta \cdot \hat{f}(x)}{r_s(x)\breve{l}(x)}\right) - \arccos\left(\dfrac{1}{\gamma(x)}\right)$

정리 2 $s \in S$ 가 $x \in \Omega$ 에 대하여 조건 2를 만족시키면 s 는 x 에 대하여 조건 1을 만족시킨다.

$\hat{h}_s$ 를 단체 s의 그물정점들사이의 최대거리 즉 $\hat{h}_s = \max_{i,\,j} \| x_i^s - x_j^s \|$ 이라고 할 때 $\dfrac{\hat{h}_s}{2r_s(x)} \le 1$ 이면 부등식 $\hat{\alpha}_s \le 2\arcsin\left(\dfrac{\hat{h}_s}{2r_s(x)}\right)$ 이 성립된다.

보조정리 1 $x \in \Omega$, $s \in S$ 라고 하자.

이때 $\dfrac{\hat{h}_s}{2r_s(x)} \le 1$, $\dfrac{\delta\hat{f}(x)}{r_s(x)\breve{l}(x)} \le 1$, $2\arcsin\left(\dfrac{\hat{h}_s}{2r_s(x)}\right) < \arccos\left(\dfrac{\delta\hat{f}(x)}{r_s(x)\breve{l}(x)}\right) - \arccos\left(\dfrac{1}{\gamma(x)}\right)$ 이면 s 는 x 에 대하여 조건 2를 만족시킨다.

보조정리 2 $s \in S$ 가 x 에 대하여 조건 2를 만족시키면 s 는 x 에 대하여 조건 1을 만족시킨다.

참 고 문 헌

[1] K. Alton et al.; SIAM J. Numer. Anal., 43, 363, 2008.

[2] M. Pollack et al.; Journal of Computational Physics, 258, 31, 2014.

[3] J. A. Sethian et al.; SIAM J. Numer. Anal., 41, 1, 323, 2003.

[4] J. N. Tsitsiklis; IEEE Trans. Automat. Control., 40, 9, 1528, 1995.

주체105(2016)년 7월 5일 원고접수

On the Causality Condition of the Discrete Hamilton-Jacobi Equation

Won Jong Yun, Ho Myong Song

The causality allows Dijkstra-like algorithms to be used to compute the solution of the Hamilton-Jacobi equation in a single pass through the nodes in order of increasing value.

We propose some conditions for causality of the discrete anisotropic Hamilton-Jacobi equation.

Key words: causality, Dijkstra-like algorithm