김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제1호

함수축소인자를 가진 숨은변수프락탈보간곡면의 함차원평가

윤철희, 리미경

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《첨단돌파전을 힘있게 벌려야 나라의 과학기술전반을 빨리 발전시키고 지식경제의 토대를 구축해나갈수 있습니다.》

선행연구[3]에서는 함수수직비례인자를 가진 숨은변수 두변수프락탈보간함수의 구성법을 제기하고 보간함수의 횔데르련속성과 자료모임의 섭동에 관한 안정성을, 선행연구[2]에서는 수직비례인자의 섭동에 관한 안정성을 증명하였다. 그러나 구성한 숨은변수프락탈보간곡면의 함차원을 평가하지 못하였다.

론문에서는 선행연구[2]에서 제기한 숨은변수프락탈보간곡면의 함차원의 한계를 평가하였다.

1. 반복함수계와 숨은변수두변수프락탈보간함수의 구성

여기서는 선행연구[2]에서 구성한 반복함수계와 숨은변수두변수프락탈보간함수에 대하여 소개한다.

P_0을 $\mathbf{R}^3$에서의 다음과 같은 자료모임이라고 하자.

$$P_0=\{(x_i,\ y_j,\ z_{ij})\in\mathbf{R}^3:\ i=0,\ 1,\ \cdots,\ n;\ j=0,\ 1,\ \cdots,\ m\}$$
$$(x_0<x_1<\cdots<x_n,\ y_0<y_1<\cdots<y_m)$$

이 자료모임 P_0을 $\mathbf{R}^4$에서의 다음과 같은 자료모임 P로 확장하자.

$$P=\{(x_i,\ y_j,\ z_{ij},\ t_{ij})\in\mathbf{R}^4:\ i=0,\ 1,\ \cdots,\ n;\ j=0,\ 1,\ \cdots,\ m\}$$

여기서 t_{ij}들은 자유변수들이다.

다음과 같은 기호들을 약속하자.

$$\vec{x}=(x,\ y),\ \vec{x}_{ij}=(x_i,\ y_j),\ \vec{z}=(z,\ t),\ \vec{z}_{ij}=(z_{ij},\ t_{ij}),\ N_{nm}=\{1,\ \cdots,\ n\}\times\{1,\ \cdots,\ m\}$$
$$I_{x_i}=[x_{i-1},\ x_i],\ I_{y_j}=[y_{j-1},\ y_j],\ I_x=[x_0,\ x_n],\ I_y=[y_0,\ y_m],\ E=I_x\times I_y,\ E_{ij}=I_{x_i}\times I_{y_j}$$

임의의 $(i,\ j)\in N_{nm}$에 대하여 넘기기 $L_{x_i}:I_x\to I_{x_i}$, $L_{y_j}:I_y\to I_{y_j}$ 들은

$$L_{x_i}(\{x_0,\ x_n\})=\{x_{i-1},\ x_i\},\ L_{y_j}(\{y_0,\ y_m\})=\{y_{j-1},\ y_j\}$$

인 축소동형넘기기라고 하자.

넘기기 $\vec{L}_{ij}:E\to E_{ij}$를 $\vec{L}_{ij}(\vec{x})=(L_{x_i}(x),\ L_{y_j}(y))$로 정의하면 이 넘기기는 E의 끝점들에 E_{ij}의 끝점들을 대응시킨다. 다시말하여

$$\vec{L}_{ij}(\vec{x}_{\alpha\beta})=\vec{x}_{ab},\ a\in\{i-1,\ i\},\ b\in\{j-1,\ j\},\ \alpha\in\{0,\ n\},\ \beta\in\{0,\ m\}$$

이제 넘기기 $\vec{F}_{ij}: E\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ $(i=1,\ \cdots,\ n,\ j=1,\ \cdots,\ m)$ 을 다음과 같이 정의하자.

$$\vec{F}_{ij}(\vec{x},\ \vec{z})=\begin{pmatrix} s_{ij}(L_{ij}(\vec{x}))z+s'_{ij}(L_{ij}(\vec{x}))t+q_{ij}(\vec{x}) \\ \tilde{s}_{ij}(L_{ij}(\vec{x}))z+\tilde{s}'_{ij}(L_{ij}(\vec{x}))t+\tilde{q}_{ij}(\vec{x}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s_{ij}(L_{ij}(\vec{x})) & s'_{ij}(L_{ij}(\vec{x})) \\ \tilde{s}_{ij}(L_{ij}(\vec{x})) & \tilde{s}'_{ij}(L_{ij}(\vec{x})) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} q_{ij}(\vec{x}) \\ \tilde{q}_{ij}(\vec{x}) \end{pmatrix} \tag{1}$$

여기서 함수 $s_{ij},\ s'_{ij},\ \tilde{s}_{ij},\ \tilde{s}'_{ij}: E_{ij}\to\mathbf{R}$ 들은 절대값이 1보다 작은 임의의 립쉬츠함수들이며 함수 q_{ij}, $\tilde{q}_{ij}: E\to\mathbf{R}$ 들은 다음의 조건들을 만족시키는 립쉬츠함수들이다.

$$\alpha\in\{0,\ n\},\ \beta\in\{0,\ m\},\ a\in\{i-1,\ i\},\ b\in\{j-1,\ j\},\ L_{x_i}(x_\alpha)=x_a,\ L_{y_j}(y_\beta)=y_b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{ij}(\vec{x}_{\alpha\beta},\ \vec{z}_{\alpha\beta})=\vec{z}_{ab}$$

$D\subset\mathbf{R}^2$ 가 $\vec{z}_{ij}$ $(i=1,\ \cdots,\ n;\ j=1,\ \cdots,\ m)$ 들을 포함하는 구역이라고 하고 변환 $\vec{W}_{ij}: E\times D\to E_{ij}\times\mathbf{R}^2$ 을 다음과 같이 정의한다.

$$\vec{W}_{ij}(\vec{x},\ \vec{z})=(\vec{L}_{ij}(\vec{x}),\ \vec{F}_{ij}(\vec{x},\ \vec{z}))\ \ (i=1,\ \cdots,\ n;\ j=1,\ \cdots,\ m)$$

함수 f 에 대하여 $\overline{f}=\sup_x|f(x)|$ 로 표시하고 $\overline{S}=\max_{i,\,j}\{\overline{s}_{ij}+\overline{\tilde{s}}_{ij},\ \overline{s}'_{ij}+\overline{\tilde{s}}'_{ij}\}$ 라고 하자.

정리 1[2] $\overline{S}<1$ 이면 $\mathbf{R}^2$ 우에서의 유클리드거리와 동등한 거리 ρ_θ 가 있어서 변환 $\vec{W}_{ij}$ $(i=1,\ \cdots,\ n;\ j=1,\ \cdots,\ m)$ 들은 거리 ρ_θ 에 관하여 축소변환으로 된다.

따라서 확장된 자료모임 P 에 대응하는 반복함수계

$$\{\mathbf{R}^4;\ \vec{W}_{ij}\ \ (i=1,\ \cdots,\ n,\ j=1,\ \cdots,\ m)\}$$

를 구성할수 있고 이에 대하여 다음의 정리가 성립한다.

정리 2[2] 자료모임 P 를 보간하는 어떤 련속넘기기 $\vec{f}$ 가 있어서 $\vec{f}$ 의 그라프는 반복함수계의 불변모임으로 된다.

이제 벡토르값함수 $\vec{f}: E\to\mathbf{R}^2$ 을 $\vec{f}=(f_1(x,\ y),\ f_2(x,\ y))$ 로 표시하면 함수 $f_1: E\to\mathbf{R}$ 는 주어진 자료모임 P_0을 보간하고 함수 $f_2(x,\ y)$ 는 모임

$$\{(x_i,\ y_j,\ t_{ij})=(\vec{x}_{ij},\ t_{ij})\in\mathbf{R}^3:\ i=1,\ \cdots,\ n;\ j=1,\ \cdots,\ m\}$$

을 보간한다.

이때 다음의 식이 성립한다.

$$\vec{f}(x,\ y)=\vec{F}_{ij}(\vec{L}_{ij}^{-1}(x,\ y),\ \vec{f}(\vec{L}_{ij}^{-1}(x,\ y)))=\vec{F}_{ij}(\vec{L}_{ij}^{-1}(x,\ y),\ f_1(\vec{L}_{ij}^{-1}(x,\ y)),\ f_2(\vec{L}_{ij}^{-1}(x,\ y))),\ (x,\ y)\in E_{ij}$$

$$\begin{aligned} f_1(x,\ y)&=s_{ij}(x,\ y)f_1(\vec{L}_{ij}^{-1}(x,\ y))+s'_{ij}(x,\ y)f_2(\vec{L}_{ij}^{-1}(x,\ y))+q_{ij}(\vec{L}_{ij}^{-1}(x,\ y)) \\ f_2(x,\ y)&=\tilde{s}_{ij}(x,\ y)f_1(\vec{L}_{ij}^{-1}(x,\ y))+\tilde{s}'_{ij}(x,\ y)f_2(\vec{L}_{ij}^{-1}(x,\ y))+\tilde{q}_{ij}(\vec{L}_{ij}^{-1}(x,\ y)) \end{aligned} \tag{2}$$

2. 숨은변수프락탈보간곡면의 함차원경계평가

여기서는

$$x_i=x_0+\frac{x_n-x_0}{n}i,\ y_j=y_0+\frac{y_n-y_0}{n}j\ \ (i,\ j=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$$

에서 자료모임이 주어지고 식 (1)에서 함수축소인자들이 다음의 조건을 만족시키는 경우

앞에서 구성한 숨은변수프락탈보간곡면의 함차원의 한계에 대하여 론의한다.

$$s_{ij}(x,\ y)s'_{ij}(x,\ y)\ge 0,\ \tilde{s}_{ij}(x,\ y)\tilde{s}'_{ij}(x,\ y)\ge 0,\ (x,\ y)\in E\ (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

먼저 함차원의 개념을 소개한다.

정의[1] 모임 A에 대하여 극한 $\lim_{\delta\to 0}\frac{\log N_\delta(A)}{-\log\delta}$ 가 존재한다면 이 극한을 모임 A의 함차원으로 정의하고 $\dim_B A$로 표시한다. 즉

$$\dim_B A=\lim_{\delta\to 0}\frac{\log N_\delta(A)}{-\log\delta}$$

여기서 $N_\delta(A)$는 모임 A를 피복하는 반경이 δ인 구들의 최소개수이다.

다음의 기호들을 약속하자.

$$P_{0x_\alpha}=\left\{\left(x_0+\frac{x_n-x_0}{n}\alpha,\ y_0+\frac{y_n-y_0}{n}j,\ z_{\alpha j}\right)\in\mathbf{R}^3:\ j=0,\ 1,\ \cdots,\ n\right\}\ (\alpha=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$$

$$P_{0y_\beta}=\left\{\left(x_0+\frac{x_n-x_0}{n}i,\ y_0+\frac{y_n-y_0}{n}\beta,\ z_{i\beta}\right)\in\mathbf{R}^3:\ i=0,\ 1,\ \cdots,\ n\right\}\ (\beta=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$$

$$\underline{\omega}_{ij}=\min_{(x,\ y)\in E_{ij}}\{|s_{ij}(x,\ y)|,\ |s'_{ij}(x,\ y)|\},\ \underline{\tilde{\omega}}_{ij}=\min_{(x,\ y)\in E_{ij}}\{|\tilde{s}_{ij}(x,\ y)|,\ |\tilde{s}'_{ij}(x,\ y)|\}$$

$$\overline{\omega}_{ij}=\max_{(x,\ y)\in E_{ij}}\{|s_{ij}(x,\ y)|,\ |s'_{ij}(x,\ y)|\},\ \overline{\tilde{\omega}}_{ij}=\max_{(x,\ y)\in E_{ij}}\{|\tilde{s}_{ij}(x,\ y)|,\ |\tilde{s}'_{ij}(x,\ y)|\}$$

$$\underline{\lambda}=\sum_{i,\ j=1}^{n}(\underline{\omega}_{ij}+\underline{\tilde{\omega}}_{ij}),\ \overline{\lambda}=\sum_{i,\ j=1}^{n}(\overline{\omega}_{ij}+\overline{\tilde{\omega}}_{ij})$$

모임 $D\subset\mathbf{R}^2$과 D우에서 정의된 함수 f에 대하여 다음과 같은 기호를 리용한다.

$$R_f[D]=\sup\{|f(x_2)-f(x_1)|:\ x_1,\ x_2\in D\}$$

정리 3 $f_1(x,\ y)$는 우에서 구성한 숨은변수 두변수프락탈보간함수이고 한 직선에 놓이지 않는 세 보간점 $(x_\alpha,\ y_{j_1},\ z_{\alpha j_1}),\ (x_\alpha,\ y_{j_2},\ z_{\alpha j_2}),\ (x_\alpha,\ y_{j_3},\ z_{\alpha j_3})\in P_{0x_\alpha}$ $(y_{j_1}<y_{j_2}<y_{j_3})$ (또는 $(x_{i_1},\ y_\beta,\ z_{i_1\beta}),\ (x_{i_2},\ y_\beta,\ z_{i_2\beta}),\ (x_{i_3},\ y_\beta,\ z_{i_3\beta})\in P_{0y_\beta}$ $(x_{i_1}<x_{i_2}<x_{i_3})$)이 있다고 하자. 이때 $t_{\alpha j_1},\ t_{\alpha j_2},\ t_{\alpha j_3}$(또는 $t_{i_1\beta},\ t_{i_2\beta},\ t_{i_3\beta}$)을 $(z_{\alpha j_k}-z_{\alpha j_l})(t_{\alpha j_k}-t_{\alpha j_l})>0$ (또는 $(z_{i_k\beta}-z_{i_l\beta})(t_{i_k\beta}-t_{i_l\beta})>0$) $(k,\ l=1,\ 2,\ 3,\ k\ne l)$이면서 세 점 $(x_\alpha,\ y_{j_1},\ t_{\alpha j_1})$, $(x_\alpha,\ y_{j_2},\ t_{\alpha j_2})$, $(x_\alpha,\ y_{j_3},\ t_{\alpha j_3})$ (또는 $(x_{i_1},\ y_\beta,\ t_{i_1\beta})$, $(x_{i_2},\ y_\beta,\ t_{i_2\beta})$, $(x_{i_3},\ y_\beta,\ t_{i_3\beta})$)이 한직선에 놓이지 않도록 선택하자.

그러면 $f_1(x,\ y)$의 그라프의 함차원은 다음과 같이 평가할수 있다.

① 만일 $\underline{\lambda}>n$이면 $1+\log_n\underline{\lambda}\le\dim_B Gr(f_1)\le 1+\log_n\overline{\lambda}$이다.

② 만일 $\overline{\lambda}\le n$이면 $\dim_B Gr(f_1)=2$이다.

증명 먼저 ①을 증명하자.

P_{0x_α}의 세 보간점이 한 직선에 놓이지 않는 경우에 대하여 론의하자. 한 점 $(x_\alpha,\ y_{j_2},\ z_{\alpha j_2})$로부터 두 점 $(x_\alpha,\ y_{j_1},\ z_{\alpha j_1}),\ (x_\alpha,\ y_{j_3},\ z_{\alpha j_3})$을 지나는 직선까지의 $z-$축거리를 H로, 점 $(x_\alpha,\ y_{j_2},\ t_{\alpha j_2})$으로부터 두 점 $(x_\alpha,\ y_{j_1},\ t_{\alpha j_1})$, $(x_\alpha,\ y_{j_3},\ t_{\alpha j_3})$을 지나는 직선까지의 $t-$축거리를 h로 표시하면 가정에 의하여 분명 $H\cdot h>0$이다.

이제 구역 E에 변환 W_{ij}를 한번 적용하면 식 (1)로부터 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$\begin{aligned}F_{ij}^1(x,\ y,\ z,\ t)-F_{ij}^1(x,\ y,\ z',\ t')&=s_{ij}(L_{ij}(x,\ y))(z-z')+s'_{ij}(L_{ij}(x,\ y))(t-t')\\ F_{ij}^2(x,\ y,\ z,\ t)-F_{ij}^2(x,\ y,\ z',\ t')&=\widetilde{s}_{ij}(L_{ij}(x,\ y))(z-z')+\widetilde{s}'_{ij}(L_{ij}(x,\ y))(t-t')\end{aligned}\tag{3}$$

$Gr(f_1)$은 구역 E에서 정의된 련속함수의 그라프이므로 $E_{ij}\times\mathbf{R}\cap Gr(f_1)$을 피복하는 ε_r구들의 최소의 개수는 길이가 $\underline{\omega}_{ij}(H+h)$인 z축에 평행인 선분토막을 피복하는 ε_r구의 개수보다는 크고 직4각형구역 $E_{ij}\times R_{f_1}[E_{ij}]$를 피복하는 ε_r구의 개수보다는 작다. 그런데

$$\begin{aligned}|f_1(x,\ y)-f_1(\bar{x},\ \bar{y})|\le L_s d((x,\ y),\ (\bar{x},\ \bar{y}))\cdot\bar{f}_1+\overline{\omega}_{ij}\cdot|f_1(L_{x_i}^{-1}(x),\ L_{y_j}^{-1}(y))-f_1(L_{x_i}^{-1}(\bar{x}),\ L_{y_j}^{-1}(\bar{y}))|+\\ +L_{s'}d((x,\ y),\ (\bar{x},\ \bar{y}))\cdot\bar{f}_2+\overline{\omega}_{ij}\cdot|f_2(L_{x_i}^{-1}(x),\ L_{y_j}^{-1}(y))-f_2(L_{x_i}^{-1}(\bar{x}),\ L_{y_j}^{-1}(\bar{y}))|+\\ +L_q d((L_{x_i}^{-1}(x),\ L_{y_j}^{-1}(y)),\ (L_{x_i}^{-1}(\bar{x}),\ L_{y_j}^{-1}(\bar{y})))\end{aligned}$$

이므로

$$R_{f_1}[E_{ij}]\le\overline{\omega}_{ij}\cdot(R_{f_1}[E]+R_{f_2}[E])+\sqrt{2}M/n,\quad R_{f_2}[E_{ij}]\le\overline{\widetilde{\omega}}_{ij}\cdot(R_{f_1}[E]+R_{f_2}[E])+\sqrt{2}\widetilde{M}/n\tag{4}$$

이다. 여기서 $M=L_s\cdot\bar{f}_1+L_{s'}\cdot\bar{f}_2+nL_q$, $\widetilde{M}=L_{\widetilde{s}}\cdot\bar{f}_1+L_{\widetilde{s}'}\cdot\bar{f}_2+nL_{\widetilde{q}}$ 이다. 따라서

$$\sum_{i,j=1}^n\left[\frac{\underline{\omega}_{ij}(H+h)}{\varepsilon_r}\right]\le N(\varepsilon_r)\le\sum_{i,\ j=1}^n\left(\left[\frac{\overline{\omega}_{ij}(R_{f_1}[E]+R_{f_2}[E])+\sqrt{2}M/n}{\varepsilon_r}\right]+1\right)\left(\left[\frac{1}{n\varepsilon_r}\right]+1\right)^2$$

$$\sum_{i,j=1}^n\left(\frac{\underline{\omega}_{ij}(H+h)}{\varepsilon_r}-1\right)\le N(\varepsilon_r)\le\sum_{i,j=1}^n\left(\frac{\overline{\omega}_{ij}(R_{f_1}[E]+R_{f_2}[E])+\sqrt{2}M/n}{\varepsilon_r}+1\right)\left(\frac{1}{n\varepsilon_r}+1\right)^2$$

$$\frac{\Phi(\mathrm{H}_1)}{\varepsilon_r}-n^2\le N(\varepsilon_r)\le\left(\frac{\Phi(\mathrm{U}_1)}{\varepsilon_r}+n^2\right)\left(\frac{1}{n\varepsilon_r}+1\right)^2$$

이고 $\Phi(a)=\sum_{i=1}^{n^2}a_i\ \ (a=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{n^2})^{\mathrm{T}})$, $\mathrm{H}_1=(\underline{\omega}_{11}(H+h),\ \underline{\omega}_{12}(H+h),\ \cdots,\ \underline{\omega}_{nn}(H+h))^{\mathrm{T}}$

$$\begin{aligned}\mathrm{U}_1=\Bigg(&(\overline{\omega}_{11}+\overline{\widetilde{\omega}}_{11})(R_{f_1}[I]+R_{f_2}[I])+\frac{\sqrt{2}(M+\widetilde{M})}{n},\ (\overline{\omega}_{12}+\overline{\widetilde{\omega}}_{12})(R_{f_1}[I]+R_{f_2}[I])+\frac{\sqrt{2}(M+\widetilde{M})}{n},\\ &\cdots,\ (\overline{\omega}_{nn}+\overline{\widetilde{\omega}}_{nn})(R_{f_1}[I]+R_{f_2}[I])+\frac{\sqrt{2}(M+\widetilde{M})}{n}\Bigg)^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

이다. 매 부분구역 E_{ij}들에 변환 W_{kl}을 같은 방법으로 다시한번 실시한다면 다음식이 얻어진다.

$$\sum_{i,j=1}^n\sum_{k,l=1}^n\left(\frac{\underline{\omega}_{kl}(\underline{\omega}_{ij}+\underline{\widetilde{\omega}}_{ij})(H+h)}{\varepsilon_r}-1\right)\le N(\varepsilon_r)\le\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\left(\frac{\overline{\omega}_{kl}(R_{f_1}[E_{ij}]+R_{f_2}[E_{ij}])+\sqrt{2}M/n^2}{\varepsilon_r}+1\right)\left(\frac{1}{n^2\varepsilon_r}+1\right)^2\tag{5}$$

이제 모든 원소가 다 1인 n차행렬 C와 다음의 행렬들을 생각하자.

$\underline{S}=\mathrm{diag}(\underline{\omega}_1+\underline{\tilde{\omega}}_1,\ \underline{\omega}_2+\underline{\tilde{\omega}}_2,\ \cdots,\ \underline{\omega}_n+\underline{\tilde{\omega}}_n)$, $\overline{S}=\mathrm{diag}(\overline{\omega}_1+\overline{\tilde{\omega}}_1,\ \overline{\omega}_2+\overline{\tilde{\omega}}_2,\ \cdots,\ \overline{\omega}_n+\overline{\tilde{\omega}}_n)$

그러면 식 (5)를 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\frac{\Phi(\mathrm{H}_2)}{\varepsilon_r}-n^4\le N(\varepsilon_r)\le\left(\frac{\Phi(\mathrm{U}_2)}{\varepsilon_r}+n^4\right)\left(\frac{1}{n^2\varepsilon_r}+1\right)^2$$

여기서 $\mathrm{H}_2=\underline{S}C\mathrm{H}_1$, $\mathrm{U}_2=\overline{S}C\mathrm{U}_1+\sqrt{2}(M+\tilde{M})\,I$ 이다. k를 $\varepsilon_r<1/n^k\le n\varepsilon_r$가 성립하도록 선택하자. 구역 E에 변환 W_{ij}를 k번 련속 실시하면 다음과 같은 평가식을 얻을수 있다.

$$\frac{\Phi(\mathrm{H}_k)}{\varepsilon_r}-n^{2k}\le N(\varepsilon_r)\le\left(\frac{\Phi(\mathrm{U}_k)}{\varepsilon_r}+n^{2k}\right)\left(\frac{1}{n^k\varepsilon_r}+1\right)^2 \tag{6}$$

여기서 $\mathrm{H}_k=\underline{S}C\mathrm{H}_{k-1}$, $\mathrm{U}_k=\overline{S}C\mathrm{U}_{k-1}+\sqrt{2}n^{k-2}(M+\tilde{M})\,I$ 이다. 그러면

$$\mathrm{H}_k=\underline{S}C\mathrm{H}_{k-1}=(\underline{S}C)^2\mathrm{H}_{k-2}=\cdots=(\underline{S}C)^{k-1}\mathrm{H}_1$$

$$\mathrm{U}_k=(\overline{S}C)^{k-1}\mathrm{U}_1+(\overline{S}C)^{k-2}\sqrt{2}(M+\tilde{M})+(\overline{S}C)^{k-3}\sqrt{2}n(M+\tilde{M})+\cdots+\sqrt{2}n^{k-2}(M+\tilde{M})\,I$$

인데 행렬 $\underline{S}C$과 $\overline{S}C$는 정인 기약행렬이므로 두 행렬은 각각 고유값

$$\underline{\lambda}=\sum_{i,j=1}^{n}(\underline{\omega}_{ij}+\underline{\tilde{\omega}}_{ij}),\quad \overline{\lambda}=\sum_{i,j=1}^{n}(\overline{\omega}_{ij}+\overline{\tilde{\omega}}_{ij})$$

에 대응하는 다음의 조건을 만족시키는 정인 고유벡토르 $\underline{e}$, $\overline{e}$를 가진다.

$$\underline{e}\le\mathrm{H}_1,\ \overline{e}\ge\mathrm{U}_1,\ \overline{e}\ge\frac{\sqrt{2}(M+\tilde{M})I}{n}$$

그러면

$$N(\varepsilon_r)\ge\frac{\Phi(\mathrm{H}_k)}{\varepsilon_r}-n^{2k}=\frac{\Phi((\underline{S}C)^{k-1}\mathrm{H}_1)}{\varepsilon_r}-n^{2k}\ge\frac{\Phi((\underline{S}C)^{k-1}\underline{e})}{\varepsilon_r}-n^{2k}\ge\frac{\underline{\lambda}^{k-1}}{\varepsilon_r}\left(\Phi(\underline{e})-\frac{n^k}{\underline{\lambda}^{k-1}}\right)$$

이고 가정에 의하여 $\underline{\lambda}>n$ 이므로

$$\lim_{\varepsilon_r\to0}\frac{\log N(\varepsilon_r)}{-\log\varepsilon_r}\ge\lim_{\varepsilon_r\to0}\left(1+\frac{(k-1)\log\underline{\lambda}}{k\log n}-\frac{\log(\Phi(\underline{\mathrm{e}})-n^k/\underline{\lambda}^{k-1})}{\log\varepsilon_r}\right)=1+\frac{\log\underline{\lambda}}{\log n}=1+\log_n\underline{\lambda} \tag{7}$$

한편 $\underline{\lambda}>n$ 이면 $\overline{\lambda}\ge\underline{\lambda}>n$ 이므로 식 (6)에 의하여

$$N(\varepsilon_r)\le\left(\frac{\Phi(\mathrm{U}_k)}{\varepsilon_r}+n^{2k}\right)\left(\frac{1}{n^k\varepsilon_r}+1\right)^2=$$

$$=\left[\frac{\Phi((\overline{S}C)^{k-1}\mathrm{U}_1+(\overline{S}C)^{k-2}\sqrt{2}(M+\tilde{M})+\cdots+\sqrt{2}n^{k-2}(M+\tilde{M})\,I)}{\varepsilon_r}+n^{2k}\right]\left(\frac{1}{n^k\varepsilon_r}+1\right)^2=$$

$$=\left(\frac{(\overline{\lambda}^{k-1}+n\overline{\lambda}^{k-2}+\cdots+n^{k-1})\Phi(\overline{e})}{\varepsilon_r}+n^{2k}\right)\left(\frac{1}{n^k\varepsilon_r}+1\right)^2= \tag{8}$$

$$=\left(\frac{\Phi(\overline{\mathrm{e}})}{\varepsilon_r}\frac{\overline{\lambda}^{k-1}(1-n/\overline{\lambda}^k)}{1-n/\overline{\lambda}}+n^{2k}\right)\left(\frac{1}{n^k\varepsilon_r}+1\right)^2\ge(n+1)^2\frac{\overline{\lambda}^{k-1}}{\varepsilon_r}\left(\Phi(\overline{\mathrm{e}})\frac{1-n/\overline{\lambda}^k}{1-n/\overline{\lambda}}+\frac{n^k}{\overline{\lambda}^{k-1}}\right)=\frac{\overline{\lambda}^{k-1}}{\varepsilon_r}\gamma$$

가 성립한다. 여기서 $\gamma=(n+1)^2\left(\Phi(\bar{e})\frac{1-n/\bar{\lambda}^k}{1-n/\bar{\lambda}}+\frac{n^k}{\bar{\lambda}^{k-1}}\right)>0$ 이다.

따라서

$$\frac{\log N(\varepsilon_r)}{-\log\varepsilon_r}\le 1-\frac{(k-1)\log\bar{\lambda}}{\log\varepsilon_r}-\frac{\log\gamma}{\log\varepsilon_r}\le 1+\frac{(k-1)\log\bar{\lambda}}{k\log n}-\frac{\log\gamma}{\log\varepsilon_r}$$

$$\lim_{\varepsilon_r\to 0}\frac{\log N(\varepsilon_r)}{-\log\varepsilon_r}\le\lim_{\varepsilon_r\to 0}\left(1+\frac{(k-1)\log\bar{\lambda}}{k\log n}-\frac{\log\gamma}{\log\varepsilon_r}\right)=1+\frac{\log\bar{\lambda}}{\log n}=1+\log_n\bar{\lambda}\tag{9}$$

이며 식 (7), (9)에 의하여 ①이 증명된다.

이제는 ②를 증명하자. 가정에 의하여 $\bar{\lambda}<n$ 이므로 식 (8)에 의하여 다음의 평가식을 얻을수 있다.

$$N(\varepsilon_r)\le\left(\frac{\Phi(\bar{e})}{\varepsilon_r}\frac{n^{k-1}(1-\bar{\lambda}^k/n^k)}{1-\bar{\lambda}/n}+n^{2k}\right)(n+1)^2=\frac{n^{k-1}}{\varepsilon_r}\beta$$

여기서 $\beta=\left(\Phi(\bar{e})\frac{1-\bar{\lambda}^k/n^k}{1-\bar{\lambda}/n}+n\right)(n+1)^2>0$ 이다. 그러면

$$\lim_{\varepsilon_r\to 0}\frac{\log N(\varepsilon_r)}{-\log\varepsilon_r}\le\lim_{\varepsilon_r\to 0}\left(1-\frac{(k-1)\log n}{\log\varepsilon_r}-\frac{\log\beta}{\log\varepsilon_r}\right)\le\lim_{\varepsilon_r\to 0}\left(1+\frac{(k-1)\log n}{k\log n}-\frac{\log\beta}{\log\varepsilon_r}\right)=2$$

이다. 그런데 $\dim_B Gr(f_1)\ge 2$ 이므로 $\dim_B Gr(f_1)=2$ 이다. 즉 ②가 증명된다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] K. Falconer; Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications, John Wiley & Sons, 15～67, 1990.

[2] Yun CH, Li MK; AEJM, 12, 2, 1950021, 2019.

[3] Yun CH, Li MK; Fractals, 27, 2, 1950018, 2019.

주체108(2019)년 9월 15일 원고접수

Estimation for Box-Counting Dimension of Hidden Variable Fractal Interpolation Surface with Function Contractivity Factors

Yun Chol Hui, Ri Mi Gyong

In this paper, we present a upper and lower bound of the box-counting dimension of the hidden variable fractal interpolation surface with function contractivity factors which is constructed in [2].

Keywords: hidden variable fractal interpolation function, box-counting dimension, iterated function system.