김일성종합대학학보 주체107(2018)년
수 학 제64권 제3호

비종점소득미분경기에서 한가지 단편상수보간방략 구성 및 보편최량성에 대한 연구

김향, 리국환

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《자연과학전문교육에서는 학생들에게 기초과학지식을 깊이있게 가르쳐주며 매개 전공분야에서 기초로 되는 과학기술지식을 폭넓게 체득시키도록 하여야 합니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제18권 454페지)

우리는 비종점소득미분경기에서 시간－상태공간의 동일한 직립방체그물에서 값함수계산도식과 이 도식을 리용한 보편최량방략의 동시적인 구성에 대한 연구를 진행하였다.

해밀턴－야꼬비－벨만방정식의 일반화풀이(점성풀이)개념에 기초하여 많은 최량조종 및 미분경기문제의 값함수계산도식들과 그 수렴성에 대한 연구[1－4]가 진행되고있다. 이와 함께 얻어진 값함수계산도식에 기초한 최량방략구성에 대한 문제는 최량조종문제를 취급한 선행연구[3]를 제외하고는 미지의 문제로 남아있거나 일부 경우[4]에 극값묘준방략을 적용하고있지만 그 수렴성평가에 대한 연구는 진행되여있지 않다.

론문에서는 일반형태의 비종점소득미분경기에 대하여 직립방체그물에서 다중선형보간에 기초한 한가지 값함수계산도식을 제기하고 이 도식을 리용한 단편상수보간방략을 구성하였으며 그 보편최량성을 증명하였다.

다음의 비종점소득미분경기를 론의하자.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,\ x,\ u,\ v) \\ x \in \mathbf{R}^n,\ t \in I := [0,\ \theta],\ \ u \in P \subset \mathbf{R}^p,\ v \in Q \subset \mathbf{R}^q \\ \gamma(x(\cdot)) = \min\limits_{t\in[0,\ \theta]} \sigma(t,\ x(t)) \to \min\limits_{u}\max\limits_{v} \end{cases} \tag{1}$$

여기서 t 는 시간변수, θ 는 경기의 마감시각, x 는 계의 상태벡토르, $u,\ v$ 는 각각 첫째 및 둘째 경기자의 조종벡토르들, $P,\ Q$ 는 각각 콤팍트들이다.

첫째 경기자(조종 u)의 목적은 소득을 최소화하는것이고 둘째 경기자(조종 v)의 목적은 최대화하는것이다. 함수 $f(\cdot)$ 는 $t,\ x$ 에 관하여 립쉬츠련속(립쉬츠상수 L_f)이고 대역적풀이의 존재조건을 만족시키는 유계평등련속함수(유계상수 K)로서 아이젝쓰조건

$$\min_{u\in P}\max_{v\in Q} < s,\ f(t,\ x,\ u,\ v) >= \max_{v\in Q}\min_{u\in P} < s,\ f(t,\ x,\ u,\ v) > (=: H(t,\ x,\ s))$$

$$\forall (t,\ x) \in I \times \mathbf{R}^n,\ \forall s \in \mathbf{R}^n$$

을 만족시키며 함수 $\sigma(\cdot)$ 는 유계립쉬츠련속함수(립쉬츠상수 L_σ)라고 가정한다.

우의 조건밑에서 임의의 초기위치 $(t,\ x) \in I \times \mathbf{R}^n$ 에 대하여 문제 (1)의 경기값 $w^*(t,\ x)$ 가 존재하며 이때 값함수 $(t,\ x) \mapsto w^*(t,\ x)$ 는 유계립쉬츠련속함수로서 해밀턴－야꼬비－벨만－아이젝쓰방정식의 최소최대풀이(또는 점성풀이)이다.

방략 $U^0/u^0(t,\ x)$가 있어서 임의의 위치 $(t_0,\ x_0)\in I\times\mathbf{R}^n$으로부터 이 방략에 의하여 생성되는 매 운동 $x(\cdot)$이 부등식 $\min\limits_{t\in[t_0,\ \theta]}\sigma(t,\ x(t))\le w^*(t_0,\ x_0)$을 만족시키면 이 방략을 (첫째 경기자의)보편최량방략이라고 부른다.

$\Delta>0,\ \gamma>0,\ \Delta_{\xi_i}:=\gamma\Delta,\ i=\overline{1,\ n}$라고 하자. 시간축 t의 구간 I에 평등분할 $\pi=\{0=\tau_0<\tau_1<\cdots<\tau_N=\theta\}$ (여기서 $\Delta=\tau_{i+1}-\tau_i$), 상태공간 $\mathbf{R}^n$에 직립방체그물 $GR=\{x_{GR}=(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n)^{\mathrm{T}}:\ \xi_i=\xi_{0i}+j_i\Delta_{\xi_i},\ i=\overline{1,\ n},\ j_i=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\}$ (여기서 $\xi_{0i},\ i=\overline{1,\ n}$은 임의로 고정시킨 상수이다.)을 생각하자.

공간 $\mathbf{R}^n$의 직립방체그물 GR의 임의의 그물세포 $gd=\prod\limits_{i=1}^{n}[\underline{\xi}_i,\ \overline{\xi}_i]$를 생각하자. 여기서 $\underline{\xi}_i,\ \overline{\xi}_i=\underline{\xi}_i+\Delta_{\xi_i}$는 ξ_i축의 아래웃살창값들이다. 선택된 직립방체에서 2^n개의 정점들에 번호를 붙이고 자리표를 $y_k^{gd},\ k=\overline{1,\ 2^n}$로 표시하자. 매 번호 $k\in\overline{1,\ 2^n}$에 2진표시 $j^k=(j_1^k,\ \cdots,\ j_n^k)$를 대응시키자. 여기서

$$j_i^k=\begin{cases}0, & y_k^{gd}\text{의 } i\text{째 성분이 } \underline{\xi}_i\text{이면}\\ 1, & y_k^{gd}\text{의 } i\text{째 성분이 } \overline{\xi}_i\text{이면}\end{cases}$$

이다. 또한 다음의 함수들을 도입한다.($k=\overline{1,\ 2^n}$)

$$\omega_k(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)=\prod_{i=1}^{n}(1-a_i)^{1-j_i^k}a_i^{j_i^k},\ k=\overline{1,\ 2^n}$$

$$\omega_k^{gd}(x)=\omega_k\left(\frac{\xi_1-\underline{\xi}_1}{\Delta_{\xi_1}},\ \cdots,\ \frac{\xi_n-\underline{\xi}_n}{\Delta_{\xi_n}}\right),\ x=(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n)^{\mathrm{T}}\in gd$$

함수 $\varphi:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^1$을 생각하자. 임의의 점 $x=(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$과 이 점을 포함하는 GR의 그물세포 $gd(x)=\prod\limits_{i=1}^{n}[\underline{\xi}_i,\ \overline{\xi}_i]$를 생각하자. 여기서 $\underline{\xi}_i\le\xi_i\le\overline{\xi}_i,\ i=\overline{1,\ n}$이다.

이때 점 x에서의 다중선형보간값은

$$ML(\varphi)(x)=\sum_{k=1}^{2^n}\varphi(y_k^{gd})\cdot\omega_k^{gd}(x)$$

이다.

유계립쉬츠련속함수 $\varphi(\cdot):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^1$이 주어진다고 하자.(립쉬츠상수 L_φ) 이때 함수

$$\widetilde{\Pi}(t,\ \Delta,\ \varphi)(x)=\min_{u\in P}\ \max_{f\in cof(t,\ x,\ u,\ Q)}\varphi(x+\Delta f)$$

에 기초하여 연산자 $\varphi\mapsto\Pi(t,\ \Delta,\ \varphi)$를 다음과 같이 정의한다.

$$\Pi(t,\ \Delta,\ \varphi)(x):=\begin{cases}ML(\widetilde{\Pi}(t,\ \Delta,\ \varphi))(x), & \Delta>0\\ \varphi(x), & \Delta=0\end{cases}$$

이때 다음의 사실이 성립한다.

정리 1 구간 I의 분할 $\pi=\{0=\tau_0<\tau_1<\cdots<\tau_N=\theta\}$ (여기서 $\Delta=\tau_{i+1}-\tau_i,\ i=\overline{0,\ N-1}$)

에 대하여 근사도식이 다음의 공식들에 의하여 결정된다고 하자.

$$\overline{w}_\pi(\theta,\ x) = ML(\sigma(\theta,\ \cdot))(x),\ x \in \mathbf{R}^n$$

$$\overline{w}_\pi(t,\ x) = \min\{\Pi(t,\ \tau_{i+1} - t,\ \overline{w}_\pi(\tau_{i+1},\ \cdot))(x),\ \sigma(t,\ x)\},\ t \in [\tau_i,\ \tau_{i+1}),\ x \in \mathbf{R}^n,\ i = \overline{0,\ N-1}$$

이때 평가식 $\| \overline{w}_\pi - w^* \| \le C\sqrt{\Delta}$ 이 성립한다. 여기서

$$\| \overline{w}_\pi - w^* \| := \max_{(t,\ x) \in I \times \mathbf{R}^n} | \overline{w}_\pi(t,\ x) - w^*(t,\ x) |$$

이다.

직립방체그물 $\pi \times GR$ 의 매 정점 $(\tau_i,\ x_{GR})$ 에서의 조종

$$U^0(\tau_i,\ x_{GR}) = \arg\min_{u \in P} \max_{f \in cof(\tau_i,\ x_{GR},\ u,\ Q)} \overline{w}_\pi(\tau_{i+1},\ x_{GR} + \Delta f)$$

에 기초하여 τ_i 시각에 $\mathbf{R}^n$ 에서의 조종함수 $U^C(\tau_i,\ \cdot)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$U^C(\tau_i,\ x) = U^0(\tau_i,\ x_{GR}),\ x_{GR} = x_{GR}(x) = \arg\min_{y \in GR(\tau_i)} \| y - x \|,\ x \in \mathbf{R}^n(\tau_i) \qquad (2)$$

우리는 시간구간 I 의 분할 π 에 기초한 첫째 경기자의 결음조종절차로서 $U^C(\tau_i,\ \cdot)$, $\tau_i \in \pi$ 를 택하고 이 절차의 보편최량성을 평가하려고 한다.

보조정리 1 임의의 $(\tau_i,\ x_{GR}) \in \pi \times GR,\ i \in \overline{0,\ N-1}$ 에 대하여 다음의 부등식이 성립한다.

$$\sup_{\upsilon(\cdot)} \min\{\overline{w}_\pi(\tau_{i+1},\ x_{GR} + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(\tau_i,\ x_{GR},\ U^C(\tau_i,\ x_{GR}),\ \upsilon(\tau))d\tau),\ \sigma(\tau_i,\ x_{GR})\} \le \overline{w}_\pi(\tau_i,\ x_{GR})$$

$\tau_i,\ \tau_{i+1} \in \pi\ (i \le N-1),\ x \in \mathbf{R}^n$ 이라고 하자.

미분방정식

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t,\ x(t),\ U^C(\tau_i,\ x),\ \upsilon(t)),\ \tau_i \le t < \tau_{i+1} \\ x(\tau_i) = x \end{cases} \qquad (3)$$

의 풀이 $x(\cdot): [\tau_i,\ \tau_{i+1}] \to \mathbf{R}^n$ 에 대하여 다음의 사실이 성립한다. 여기서 $\upsilon(\cdot): [\tau_i,\ \tau_{i+1}] \to Q$ 는 임의의 르베그가측함수이다.

보조정리 2 $x = x_{GR} \in GR$ 라고 하자. 이때 다음의 부등식이 성립한다.

$$\sup_{\upsilon(\cdot)} \min\{\overline{w}_\pi(\tau_{i+1},\ x(\tau_{i+1})),\ \sigma(\tau_i,\ x_{GR})\} \le \overline{w}_\pi(\tau_i,\ x_{GR}) + \frac{1}{2} L_{\overline{w}_\pi} L_f (1+K)\Delta^2$$

보조정리 3 미분방정식 (3)의 풀이 $x(\cdot)$ 에 대하여 다음의 부등식이 성립한다.

$$\sup_{\upsilon(\cdot)} \min\{\overline{w}_\pi(\tau_{i+1},\ x(\tau_{i+1})),\ \sigma(\tau_i,\ x)\} \le$$

$$\le \overline{w}_\pi(\tau_i,\ x) + \Delta\left[\sqrt{n}\gamma L_{\overline{w}_\pi} + \frac{1}{2} L_{\overline{w}_\pi} L_f (1+K)\Delta + \sqrt{n}\gamma \max\{L_{\overline{w}_\pi} \exp(L_f \Delta),\ L_\sigma\}\right]$$

이 결음조종절차에 의하여 초기위치 $(t_0,\ x_0),\ t_0 \in I$ 로부터 생성되는 결음운동은 미분방정식

$$\begin{cases} \dot{x}_\pi(t) = f(t,\ x_\pi(t),\ U^C(\tau_i,\ x_\pi(\tau_i)),\ \upsilon(t)),\ \tau_i \le t < \tau_{i+1},\ i = \overline{i_0,\ N-1} \\ x_\pi(t_0) = x_0 \end{cases}$$

의 풀이 $x_\pi(\cdot): [t_0,\ \theta] \to \mathbf{R}^n$ 이다. 여기서 $\upsilon(\cdot): [t_0,\ \theta] \to Q$ 는 임의의 르베그가측함수이다.

다음의 사실이 성립한다.

정리 2 파라메터 γ가 $\gamma=\rho\Delta^{a}$, $a>0$, $\rho>0$로 주어진다고 하자. 이때 임의의 초기위치 (t_0, x_0), $t_0\in I$ 와 임의의 르베그가측조종 $v(\cdot):[t_0, \theta]\to Q$ 에 대하여 결음조종절차 $U^{\mathrm{C}}(\tau_i, \cdot)$, $\tau_i\in\pi$에 의하여 생성되는 결음운동 $x_\pi(\cdot)$에 대하여 다음의 식이 성립한다.

$$\min_{t\in[t_0, \theta]}\sigma(t, x_\pi(t))\le w^*(t_0, x_0)+\psi(\Delta),\ \lim_{\Delta\to 0}\psi(\Delta)=0$$

참 고 문 헌

[1] N. D. Botkin.; Analysis, 14, 203, 1994.

[2] N. D. Botkin et al.; SIAM J. Sci. Comput., 33, 2, 992, 2011.

[3] N. N. Subbotina et al.; Annals of the International Society of Dynamic Games 11, 133, 2011.

[4] N. D. Botkin et al.; Applied Mathematical Modelling, 35, 4044, 2011.

주체107(2018)년 3월 10일 원고접수

Strategy Construction Based on Piecewise Constant Interpolation and its Universal Optimality in the Differential Games with Non-terminal Payoffs

Kim Hyang, *Ri Kuk Hwan*

In this paper, for the differential games with non-terminal payoffs, we constructed a strategy based on piecewise constant interpolation in a cubic grid, where the approximation scheme of the value function using the multilinear interpolation was introduced, and proved its universal optimality.

Key words: differential game, universal optimality, non-terminal payoff