김일성종합대학학보 수 학
주체110(2021)년 제67권 제3호

리만다양체에서 사영공형반대칭비계량접속족에 대하여

허달윤, 곽금혁

경애하는 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《과학자, 기술자들은 당이 마련해준 과학기술룡마의 날개를 활짝 펴고 과학적재능과 열정을 총폭발시켜 누구나 다 높은 과학기술성과들을 내놓음으로써 부강조국건설에 이바지하는 참된 애국자가 되여야 합니다.》

선행연구[1]에서는 접속결수가

$$\overset{t}{\Gamma}{}_{ij}^{k} = \left\{ {k \atop ij} \right\} + \pi_j \delta_i^k + t g_{ij} \pi^k \tag{1}$$

로 표시되는 반대칭비계량접속족에 대하여 연구하였다. 이 접속족은 $t = -1$인 경우에

$$\nabla_k g_{ij} = 0, \quad T_{ij}^k = \pi_j \delta_i^k - \pi_i \delta_j^k$$

를 만족시키는 반대칭계량접속으로 되고[5] $t = 0$인 경우에는

$$\nabla_k g_{ij} = -\pi_i g_{jk} - \pi_j g_{ik}, \quad T_{ij}^k = \pi_j \delta_i^k - \pi_i \delta_j^k$$

를 만족시키는 반대칭비계량접속으로 되며[2] $t = 1$인 경우에는

$$\nabla_k g_{ij} = -2\pi_i g_{jk} - 2\pi_j g_{ik}, \quad T_{ij}^k = \pi_j \delta_i^k - \pi_i \delta_j^k$$

를 만족시키는 반대칭비계량접속으로서 슈르의 정리와 류사한 성질을 가진다.[3] 그리고 선행연구[4]에서는 사영공형반대칭접속이 연구되였다.

론문에서는 선행연구[1]에서 연구된 반대칭비계량접속족의 측지선들과 공통측지선을 가지는 접속들 그리고 일정한 각을 가지는 곡선우의 접속들을 포괄하는 사영공형반대칭비계량접속족을 새롭게 정의하고 이 접속족에 속하는 매 접속의 곡률텐소르의 성질, 레비－치비따접속과의 관계, 공액대칭이기 위한 조건 및 곡률이 일정하기 위한 조건을 구한다.

접속결수가 식 (1)로 표시되는 반대칭비계량접속족 $\overset{t}{\nabla}$에 대하여 다음의 식이 성립한다.[1]

$$\overset{t}{\nabla}_k g_{ij} = -(1+t)(\pi_i g_{jk} + \pi_j g_{ik}), \quad T_{ij}^k = \pi_j \delta_i^k - \pi_i \delta_j^k \tag{2}$$

리만다양체 (M, g)에서 접속족 $\overset{t}{\nabla}$에 속하는 매 접속과 공형동등인 접속들의 족 $\overset{c}{\nabla}$를 공형반대칭비계량접속족이라고 부른다.

접속족 $\overset{c}{\nabla}$에 속하는 매 접속의 접속결수는 다음과 같이 표시된다.

$$\overset{c}{\Gamma}{}_{ij}^{k} = \left\{ {k \atop ij} \right\} + \sigma_i \delta_j^k + (\sigma_j + \pi_j) \delta_i^k - g_{ij}(\sigma^k - t\pi^k)$$

여기서 $\sigma_i = \partial_i \sigma$인데 σ에 대하여 $\bar{g}_{ij} = e^{2\sigma} g_{ij}$가 성립한다.

또한 리만다양체 (M, g)에서 접속족 $\overset{t}{\nabla}$에 속하는 매 접속과 사영동등한 접속들의 족 $\overset{p}{\nabla}$를 사영반대칭비계량접속족이라고 부른다.

접속족 $\overset{p}{\nabla}$에 속하는 매 접속의 접속결수는 다음과 같이 표시된다.

$$\overset{p}{\Gamma}{}_{ij}^{k}=\left\{{k \atop ij}\right\}+\psi_i\delta_j^k+(\psi_j+\pi_j)\delta_i^k+tg_{ij}\pi^k$$

여기서 ψ_i는 1－형식이다.

정의 리만다양체 $(M,\ g)$에서 접속족 $\overset{t}{\nabla}$에 속하는 매 접속과 공형동등하면서 사영동등한 접속들의 족 ∇를 사영공형반대칭비계량접속족이라고 부른다.

사영공형반대칭비계량접속족 ∇에 속하는 매 접속의 접속결수는 다음과 같이 표시된다.

$$\Gamma_{ij}^{k}=\left\{{k \atop ij}\right\}+(\psi_i+\sigma_i)\delta_j^k+(\psi_j+\sigma_j+\pi_j)\delta_i^k-g_{ij}(\sigma^k-t\pi^k) \tag{3}$$

이 접속족에 대하여 다음의 식이 성립한다.

$$\nabla_k g_{ij}=-2(\psi_k+\sigma_k)g_{ij}-[\psi_i+(1+t)\pi_i]g_{jk}-[\psi_j+(1+t)\pi_j]g_{ik} \tag{4}$$

$$T_{ij}^k=\pi_j\delta_i^k-\pi_i\delta_j^k$$

정리 1 리만다양체 $(M,\ g)$에서 1－형식 ψ와 π가 닫긴형식이면 사영공형반대칭비계량접속족 ∇에 속하는 매 접속의 체적곡률텐소르는 령이다.

증명 식 (2)를 리용하면 사영공형반대칭비계량접속족 ∇에 속하는 매 접속에 관한 곡률텐소르는 다음과 같이 표시된다.

$$R_{ijk}^{l}=K_{ijk}^{l}+\delta_j^l a_{ik}-\delta_i^l a_{jk}+g_{ik}b_j^l-g_{jk}b_i^l+\delta_k^l\psi_{ij} \tag{5}$$

여기서 K_{ijk}^l은 레비－치비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$에 관한 곡률텐소르이고

$$\begin{aligned}
a_{ik}&=\overset{\circ}{\nabla}_i(\psi_k+\sigma_k+\pi_k)+(\psi_i+\sigma_i+\pi_i)(\psi_k+\sigma_k+\pi_k)-g_{ik}\pi_p(\sigma^p-t\pi^p)\\
b_{ik}&=\overset{\circ}{\nabla}_i(\sigma_k-t\pi_k)-(\sigma_i-t\pi_i)(\sigma_k-t\pi_k)+g_{ik}(\psi_p+\sigma_p)(\sigma^p-t\pi^p)\\
\psi_{ij}&=\overset{\circ}{\nabla}_i\psi_j-\overset{\circ}{\nabla}_j\psi_i
\end{aligned} \tag{6}$$

이다. 이 식 (5)를 $k,\ l$에 관하여 축약하면 다음과 같다.

$$P_{ij}=\overset{\circ}{P}_{ij}+a_{ij}-a_{ji}+b_{ji}-b_{ij}+n\psi_{ij} \tag{7}$$

여기서 P_{ij}와 $\overset{\circ}{P}_{ij}$는 ∇와 $\overset{\circ}{\nabla}$에 대한 체적곡률텐소르이며 $\overset{\circ}{P}_{ij}=0$이다. 그리고 식 (6)을 리용하면

$$a_{ij}-a_{ji}=\psi_{ij}+\pi_{ij},\ \ b_{ij}-b_{ji}=-t\pi_{ij}$$

라는것을 알수 있다. 여기서 $\pi_{ij}=\overset{\circ}{\nabla}_i\pi_j-\overset{\circ}{\nabla}_j\pi_i$이다. 그러므로 이 식을 식 (7)에 넣고 정돈하면 다음의 식이 성립한다.

$$P_{ij}=(n+1)\psi_{ij}+(t+1)\pi_{ij}$$

따라서 1－형식 ψ와 π가 닫긴형식이면 $\psi_{ij}=0,\ \pi_{ij}=0$이므로 $P_{ij}=0$이다.

정리 2 리만다양체 $(M,\ g)$에서 사영공형반대칭비계량접속족 ∇에 속하는 매 접속에 관한 곡률텐소르가 령이면 리만다양체 $(M,\ g,\ \overset{\circ}{\nabla})$는 공형평탄이다.

증명 식 (3)과 (4)를 리용하면 접속족 ∇에 속하는 매 접속의 쌍대접속들의 족 $\overset{*}{\nabla}$에 대하여 다음의 식이 성립한다.

$$\overset{*}{\Gamma}{}^k_{ij} = \left\{ {k \atop ij} \right\} - (\psi_i + \sigma_i)\delta^k_j + (\sigma_j - t\pi_j)\delta^k_i - g_{ij}(\psi^k + \sigma^k + \pi^k)$$

이 식으로부터 쌍대접속족 $\overset{*}{\nabla}$에 속하는 매 접속에 관한 곡률텐소르는 다음과 같다는것을 알수 있다.

$$\overset{*}{R}{}^l_{ijk} = K^l_{ijk} + \delta^l_j b_{ik} - \delta^l_i b_{jk} + g_{ik} a^l_j - g_{jk} a^l_i - \delta^l_k \psi_{ij} \tag{8}$$

따라서 식 (5)와 (8)을 변끼리 합하고 $\alpha_{ik} := a_{ik} + b_{ik}$로 놓으면 다음의 식이 얻어진다.

$$\overset{*}{R}{}^l_{ijk} + R^l_{ijk} = 2K^l_{ijk} + \delta^l_j \alpha_{ik} - \delta^l_i \alpha_{jk} + g_{ik}\alpha^l_j - g_{jk}\alpha^l_i \tag{9}$$

그러므로 이 식을 i, l에 관하여 축약하면 다음과 같다.

$$\overset{*}{R}_{jk} + R_{jk} = 2K_{jk} - (n-2)\alpha_{jk} - g_{jk}\alpha^i_i \tag{10}$$

따라서 이 식의 량변에 g^{jk}를 곱하면 다음의 식이 얻어진다.

$$\overset{*}{R} + R = 2K - 2(n-1)\alpha^i_i$$

그러므로

$$\alpha^i_i = \frac{1}{2(n-1)}(2K - R - \overset{*}{R})$$

이 성립한다. 이 식을 식 (10)에 넣고 α_{jk}를 구하면 다음과 같다.

$$\alpha_{jk} = \frac{1}{n-2}\left[2K_{jk} - (\overset{*}{R}_{jk} + R_{jk}) - \frac{g_{jk}}{2(n-1)}(2K - R - \overset{*}{R}) \right]$$

따라서 이 식을 식 (9)에 넣고 정돈하고

$$C^l_{ijk} := R^l_{ijk} - \frac{1}{n-2}(\delta^l_i R_{jk} - \delta^l_j R_{ik} + g_{jk}R^l_i - g_{ik}R^l_j) + \frac{R}{(n-1)(n-2)}(\delta^l_i g_{jk} - \delta^l_j g_{ik})$$

$$\overset{*}{C}{}^l_{ijk} := \overset{*}{R}{}^l_{ijk} - \frac{1}{n-2}(\delta^l_i \overset{*}{R}_{jk} - \delta^l_j \overset{*}{R}_{ik} + g_{jk}\overset{*}{R}{}^l_i - g_{ik}\overset{*}{R}{}^l_j) + \frac{\overset{*}{R}}{(n-1)(n-2)}(\delta^l_i g_{jk} - \delta^l_j g_{ik})$$

$$\overset{\circ}{C}{}^l_{ijk} := K^l_{ijk} - \frac{1}{n-2}(\delta^l_i K_{jk} - \delta^l_j K_{ik} + g_{jk}K^l_i - g_{ik}K^l_j) + \frac{K}{(n-1)(n-2)}(\delta^l_i g_{jk} - \delta^l_j g_{ik}) \tag{11}$$

로 놓으면 다음의 식이 얻어진다.

$$C^l_{ijk} + \overset{*}{C}{}^l_{ijk} = 2\overset{\circ}{C}{}^l_{ijk} \tag{12}$$

그러므로 $R^l_{ijk} = 0$이라고 하면 $\overset{*}{R}{}^l_{ijk} = 0$이며 따라서 식 (11)로부터 $C^l_{ijk} = \overset{*}{C}{}^l_{ijk} = 0$이 성립한다. 그러므로 식 (12)로부터 $\overset{\circ}{C}{}^l_{ijk} = 0$이다. 이것은 리만다양체 $(M,\ g,\ \overset{\circ}{\nabla})$가 공형평탄이라는것을 의미한다.

주의 1 정리 2는 $\overset{c}{\nabla}$와 $\overset{p}{\nabla}$에 대해서도 그대로 성립한다. 그러나 정리 1의 경우에 $\overset{p}{\nabla}$에 대해서는 정리조건이 그대로 성립하지만 $\overset{c}{\nabla}$와 $\overset{t}{\nabla}$에 대해서는 1—형식 ψ가 닫긴형식이 되여야 한다는 조건은 필요없다.

정리 3 리만다양체 $(M,\ g)$에서 사영공형반대칭비계량접속족 ∇에 속하는 매 접속이 공액대칭이기 위해서는 그것이 공액릿찌대칭이고 공액체적대칭일것이 필요하고 충분하다.

증명 $\beta_{ik} := a_{ik} - b_{ik}$로 놓으면 식 (5)와 (8)로부터 다음의 식이 얻어진다.

$$\overset{*}{R}{}_{ijk}^{l} = R_{ijk}^{l} + \delta_i^l \beta_{jk} - \delta_j^l \beta_{ik} + g_{ik}\beta_j^l - g_{jk}\beta_i^l - 2\delta_k^l \psi_{ij} \tag{13}$$

그리고 식 (13)을 i, l에 관하여 축약하고 $\psi_{ji} = -\psi_{ij}$ 라는것을 고려하면 다음의 식이 얻어진다.

$$\overset{*}{R}_{jk} = R_{jk} + n\beta_{jk} - g_{jk}\beta_i^i + 2\psi_{jk} \tag{14}$$

한편 식 (13)을 k, l에 관하여 축약하고 i를 j로, j를 k로 바꾸면 다음의 식이 얻어진다.

$$\overset{*}{P}_{jk} = P_{jk} - 2(\beta_{jk} - \beta_{kj}) - 2n\psi_{jk} = P_{jk} - 2\beta_{[jk]} - 2n\psi_{jk}$$

또한 식 (14)의 량변을 빗대칭화하면 다음과 같다.

$$\overset{*}{R}_{[jk]} = R_{[jk]} + n\beta_{[jk]} + 4\psi_{jk}$$

그러므로 우의 두 식을 련립시켜 ψ_{jk}를 구하면 다음과 같다.

$$\psi_{jk} = \frac{1}{2(n^2-4)}[2(R_{[jk]} - \overset{*}{R}_{[jk]}) + n(P_{jk} - \overset{*}{P}_{jk})]$$

따라서 이 식을 식 (14)에 넣고 β_{jk}를 구하면 다음과 같다.

$$\beta_{jk} = \frac{1}{n}\left\{\overset{*}{R}_{jk} - R_{jk} + g_{jk}\beta_i^i + \frac{1}{n^2-4}[2(\overset{*}{R}_{[jk]} - R_{[jk]}) + n(\overset{*}{P}_{[jk]} - P_{[jk]})]\right\}$$

그러므로 이 식을 식 (13)에 넣고 정돈하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
&\overset{*}{R}{}_{ijk}^{l} - \frac{1}{n}(\delta_i^l \overset{*}{R}_{jk} - \delta_j^l \overset{*}{R}_{ik} + g_{ik}\overset{*}{R}{}_{j}^{l} - g_{jk}\overset{*}{R}{}_{i}^{l}) - \\
&-\frac{2}{n(n^2-4)}[\delta_i^l(\overset{*}{R}_{jk} - \overset{*}{R}_{kj}) - \delta_j^l(\overset{*}{R}_{ik} - \overset{*}{R}_{ki}) + g_{ik}(\overset{*}{R}{}_{j}^{l} - \overset{*}{R}{}_{\cdot j}^{l}) - g_{jk}(\overset{*}{R}{}_{i}^{l} - \overset{*}{R}{}_{\cdot i}^{l}) + \\
&+\delta_k^l(\overset{*}{R}_{ij} - \overset{*}{R}_{ji})] - \frac{1}{n^2-4}(\delta_i^l \overset{*}{P}_{jk} - \delta_j^l \overset{*}{P}_{ik} + g_{ik}\overset{*}{P}{}_{j}^{l} - g_{jk}\overset{*}{P}{}_{i}^{l} + \delta_k^l \overset{*}{P}_{ij}) = \\
&= R_{ijk}^{l} - \frac{1}{n}(\delta_i^l R_{jk} - \delta_j^l R_{ik} + g_{ik}R_j^l - g_{jk}R_i^l) - \\
&-\frac{2}{n(n^2-4)}[\delta_i^l(R_{jk} - R_{kj}) - \delta_j^l(R_{ik} - R_{ki}) + g_{ik}(R_j^l - R_{\cdot j}^l) - g_{jk}(R_i^l - R_{\cdot i}^l) + \\
&+\delta_k^l(R_{ij} - R_{ji})] - \frac{1}{n^2-4}(\delta_i^l P_{jk} - \delta_j^l P_{ik} + g_{ik}P_j^l - g_{jk}P_i^l + \delta_k^l P_{ij})
\end{aligned} \tag{15}$$

따라서 $\overset{*}{R}{}_{ijk}^{l} = R_{ijk}^{l}$이면 $\overset{*}{R}_{jk} = R_{jk}$, $\overset{*}{P}_{ij} = P_{ij}$가 성립한다.

거꾸로 식 (15)를 리용하면 $\overset{*}{R}_{jk} = R_{jk}$, $\overset{*}{P}_{ij} = P_{ij}$일 때 $\overset{*}{R}{}_{ijk}^{l} = R_{ijk}^{l}$가 성립한다.(증명끝)

주의 2 정리 3은 사영반대칭비계량접속족 $\overset{p}{\nabla}$ 에 대해서도 그대로 성립한다. 그러나 반대칭비계량접속족 $\overset{t}{\nabla}$ 와 공형반대칭비계량접속족 $\overset{c}{\nabla}$ 에 대해서는 공액체적대칭이라는 조건이 없이도 성립한다.

리만다양체 $(M,\ g)$ 의 어떤 점 p 에서의 단면곡률이 $E\,(T_pM$ 의 임의의 2차원부분공간)의 선택에 무관계하면 곡률텐소르는 다음과 같이 표시된다.

$$R_{ijk}^{l}=k(p)(\delta_i^l g_{jk}-\delta_j^l g_{ik}) \tag{16}$$

만일 $k(p)=\text{const}$ 이면 리만다양체 $(M,\ g)$ 는 일정곡률다양체이다.

정리 4 련결인 리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 사영공형반대칭비계량접속족 ∇ 에 속하는 매 접속에 관한 단면곡률이 E 의 선택에 무관계하고

$$\psi_h+2\sigma_h-(1-t)\pi_h=0 \tag{17}$$

이면 리만다양체 $(M,\ g,\ \nabla)$ 는 일정곡률다양체이다.

증명 리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 반대칭비계량접속족에 속하는 매 접속에 관한 제2종비앙끼항등식은 다음과 같다.

$$\nabla_h R_{ijk}^{l}+\nabla_i R_{jhk}^{l}+\nabla_j R_{hik}^{l}=2(\pi_h R_{ijk}^{l}+\pi_i R_{jhk}^{l}+\pi_j R_{hik}^{l})$$

이 식에 식 (16)을 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&\nabla_h k(\delta_i^l g_{jk}-\delta_j^l g_{ik})+\nabla_i k(\delta_j^l g_{hk}-\delta_h^l g_{jk})+\nabla_j k(\delta_h^l g_{ik}-\delta_i^l g_{hk})+\\&\quad+k(\delta_i^l\nabla_h g_{jk}-\delta_j^l\nabla_h g_{ik}+\delta_j^l\nabla_i g_{hk}-\delta_h^l\nabla_i g_{jk}+\delta_h^l\nabla_j g_{ik}-\delta_i^l\nabla_j g_{hk})=\\&\quad=2k[\pi_h(\delta_i^l g_{jk}-\delta_j^l g_{ik})+\pi_i(\delta_j^l g_{hk}-\delta_h^l g_{jk})+\pi_j(\delta_h^l g_{ik}-\delta_i^l g_{hk})]\end{aligned}$$

따라서 이 식에 식 (4)를 대입하고 정돈하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&\nabla_h k(\delta_i^l g_{jk}-\delta_j^l g_{ik})+\nabla_i k(\delta_j^l g_{hk}-\delta_h^l g_{jk})+\nabla_j k(\delta_h^l g_{ik}-\delta_i^l g_{hk})-\\&\quad-k[(\psi_h+2\sigma_h-(1+t)\pi_h)(\delta_i^l g_{jk}-\delta_j^l g_{ik})+(\psi_i+2\sigma_i-(1+t)\pi_i)(\delta_j^l g_{hk}-\delta_h^l g_{jk})+\\&\quad+(\psi_j+2\sigma_j-(1+t)\pi_j)(\delta_h^l g_{ik}-\delta_i^l g_{hk})]=\\&\quad=2k[\pi_h(\delta_i^l g_{jk}-\delta_j^l g_{ik})+\pi_i(\delta_j^l g_{hk}-\delta_h^l g_{jk})+\pi_j(\delta_h^l g_{ik}-\delta_i^l g_{hk})]\end{aligned}$$

그러므로 이 식의 량변을 $i,\ l$ 에 관하여 축약하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&(n-2)(g_{jk}\nabla_h k-g_{hk}\nabla_j k)-(n-2)k[(\psi_h+2\sigma_h-(1+t)\pi_h)g_{jk}+(\psi_j+2\sigma_j-(1+t)\pi_j)g_{hk}]=\\&\quad=2(n-2)k(\pi_h g_{jk}-\pi_j g_{hk})\end{aligned}$$

따라서 이 식의 량변에 g^{jk} 를 곱하면 다음과 같다.

$$(n-1)(n-2)\nabla_h k-(n-1)(n-2)(\psi_h+2\sigma_h-(1+t)\pi_h)k=0$$

그런데 $\dim M\ge 3$ 이므로

$$\nabla_h k-(\psi_h+2\sigma_h-(1+t)\pi_h)k=0$$

이 성립한다. 그리고 조건에 의하여 다양체가 련결이고 k 가 련속이므로 $k=\text{const}$ 는 대역적으로 성립한다. 따라서 리만다양체 $(M,\ g,\ \nabla)$ 는 일정곡률다양체이다.(증명끝)

주의 3 정리 4를 리용하면 리만다양체가 일정곡률다양체로 되게 하는 반대칭비계량접속을 새롭게 제시할수 있다. 즉 일정곡률다양체로 되게 하는 반대칭비계량접속은 $t=1$ 인 경우의 접속이다.

참 고 문 헌

[1] 김일성종합대학학보 수학 65, 3, 81, 주체108(2019).
[2] N. S. Agach et al.; Indian J. Pure Appl. Math., 23, 399, 1992.
[3] Y. Han et al.; International Journal of Geometry, 5, 1, 47, 2016.
[4] Y. Han et al.; Facta Universitatis(Nis), Ser. Math. Inform., 31, 2, 513, 2016.
[5] K. Yano; Rev. Roum. Math. Pure Appl., 15, 1579, 1970.

주체110(2021)년 3월 5일 원고접수

On a Projective Conformal Semi-Symmetric Non-Metric Connection Family in the Riemannian Manifold

Ho Tal Yun, *Kwak Kum Hyok*

In this paper we newly defined a projective conformal semi-symmetric non-metric connection family and studied its conformal flat condition, conjugate symmetry condition and constant curvature condition.

Keywords: semi-symmetric non-metric connection, conjugate symmetry, constant curvature