김일성종합대학학보 수 학
주체110(2021)년 제67권 제1호

퇴화정점에서 린접정점들을 구하는 한가지 방법

허명호, 림수범

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《현대과학기술의 빠른 발전은 기초과학의 성과에 토대하고있으며 과학기술분야에서의 자립성은 기초과학분야에서부터 시작됩니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제10권 485페지)

가해인 선형제한우묵계획법문제는 현실에서 제기되는 대표적인 최량화문제이다.

0−1선형계획법문제도 가해인 선형제한우묵계획법문제로 변환되므로 선형제한우묵계획법문제의 응용성은 계속 넓어지고있다.

선행연구[2]에서는 선형제한우묵계획법문제를 풀기 위하여 허용구역이 불퇴화구역인 경우에 국부극값점으로 되는 정점을 심플렉스최량화방법의 기본변환을 리용하여 구하고 1차유효절단부등식을 리용하여 그 정점이 최량점으로 되는 단체를 허용구역에서 절단하면서 최량점을 찾는 방법들을 제기하였다.

일반적으로 얻어진 정점에 대한 목적함수의 값이 린접정점들에서보다 더 좋을 때 그 정점이 국부극값점으로 된다.

그러나 얻어진 정점이 퇴화점인 경우 심플렉스최량화방법의 기본변환에 의해서는 린접정점들을 구할수 없으며 절단부등식이 유효부등식이 되지 못하여 그 절단부등식으로는 허용구역을 절단할수 없다. 이 경우에 선행연구[3]에서는 가지절단법을 리용하고있는데 문제의 규모가 커지는 경우에는 이 방법도 적용할수 없다.

그러므로 규모가 큰 선형제한을 가진 우묵계획법문제에 대한 일반적인 풀이법은 아직 제기되지 못하였다. 이 문제의 최량점을 찾기 위해서는 퇴화정점에서 린접정점들을 모두 찾는 방법이 연구되여야 한다.

론문에서는 불퇴화정점과 퇴화정점에 대한 몇가지 성질들을 밝히고 불룩다면추의 골격을 구하는 방법을 리용하여 불룩다면체의 퇴화정점에서 린접정점들에로 향하는 방향벡토르들을 전부 구하는 한가지 방법을 제기하였다.

동차련립1차부등식 $Ax \le 0$의 풀이모임인 불룩다면추의 골격을 $A^{\angle}$로 표시하자.

주의 1[1] $L=\{x=(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_n)^{\mathrm{T}}\mid Ax=0\}\ne\{0\}$, $p_j=\{x\in\mathbf{E}^n\mid \xi_j\ge 0\}$이라고 하자. 이때 $Ax=0$에서 자유미지수들이 $\xi_1,\ \cdots,\ \xi_k$이고 이것들의 하나에는 1을 주고 나머지것들에는 모두 0을 줌으로써 생겨나는 풀이들이 이루는 기본계를 $d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_k$라고 하면

$$L\cap\left(\bigcap_{j=1}^{k}p_j\right)=(d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_k)^{\angle}$$

이다.

주의 2[1] 행렬 A의 행벡토르 $a=(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_l)$에 대하여 다음과 같이 그 성분들의 첨수들을 분류하자. 즉

$$N_a^+=\{i\mid \alpha_i>0\},\ N_a^0=\{j\mid \alpha_j=0\},\ N_a^-=\{k\mid \alpha_k<0\}$$

이다. 그리고 행렬 B의 j째 렬을 b_j, i째 행을 $b^{(i)}$로 표시하면 다음의 관계식이 성립한다.

$$B^{\angle}\cap p_q=\left\{x=\sum_{i\in N^+}\sigma_i b_i+\sum_{j\in N^0}\sigma_j b_j+\sum_{i\in N^+}\sum_{k\in N^-}\sigma_{ik}b_{ik}\middle|\sigma_i\ge 0,\ \sigma_j\ge 0,\ \sigma_{ik}\ge 0\right\}=$$

$$=(b_{i_1},\ \cdots,\ b_{i_r},\ b_{j_1},\ \cdots,\ b_{j_s},\ b_{j_1k_1},\ \cdots,\ b_{j_rk_t})^{\angle}$$

여기서 $N^+,\ N^0,\ N^-$는 각각 $N^+_{b^{(q)}},\ N^0_{b^{(q)}},\ N^-_{b^{(q)}}$를 간단히 표시한것이고 $N^+=\{i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_r\},\ N^0=\{j_1,\ j_2,\ \cdots,\ j_s\},\ N^-=\{k_1,\cdots,\ k_t\}$이고 $b_{ik}=(-\beta_{qk})b_i+\beta_{qi}b_k$이며 β_{qj}는 행렬 B의 q째 행벡토르 $b^{(q)}$의 j째 성분이다.

다음의 비동차련립1차방정식의 부아닌 풀이를 론의하자.

$$\overline{A}x=\overline{b},\ x\ge 0 \tag{1}$$

여기서 $\overline{A}\in\mathbf{R}^{m\times n},\ \overline{b}\in\mathbf{R}^m,\ x=(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{E}^n,\ \mathrm{rank}\overline{A}=m<n,\ k=n-m$이다.

이제 $S=\{x\,|\,\overline{A}x=\overline{b},\ x\ge 0\}$이 정점이 있는 불룩다면체라고 하면 식 (1)의 풀이공간의 차원수는 k이다.

심플렉스최량화방법의 기본변환에 의하여 식 (1)은 다음과 같이 변경시킬수 있다.

$$x_2=A'x_1+b,\ (x_1^{\mathrm{T}},\ x_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\ge 0 \tag{2}$$

여기서 $A'=(\alpha_{ij})_{m,k},\ b=(\beta_1,\ \cdots,\ \beta_m)^{\mathrm{T}}\ge 0,\ x_1=(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_k)^{\mathrm{T}},\ x_2=(\xi_{k+1},\ \cdots,\ \xi_n)^{\mathrm{T}}$이다.

이때 $x^0=(x_1^{\mathrm{T}},\ x_2^{\mathrm{T}})=(\underbrace{0,\ \cdots,\ 0}_{k},\ \beta_1,\ \cdots,\ \beta_m)^{\mathrm{T}}$는 불룩다면체 S의 정점(비동차련립1차방정식의 특수풀이)이며 대응동차방정식의 풀이의 기본계는 k개로서 $(0,\ \cdots,\ 0,\ \overset{(i)}{1},\ 0,\ \cdots,\ 0,\ \alpha_{1i},\ \cdots,\ \alpha_{mi},\ 0)^{\mathrm{T}}\ (i=\overline{1,\ k})$들이다.

주의 3 임의의 $i\,(1\le i\le k)$에 대하여 적당한 $j\,(1\le j\le m)$가 있어서 $\alpha_{ji}<0$이다. 만일 적당한 $i_0\,(1\le i_0\le k)$이 있어서 임의의 $j\,(1\le j\le m)$에 대하여 $\alpha_{ji_0}\ge 0$이라고 하면 임의의 정수 λ에 대하여 $\beta_j+\lambda\alpha_{ji_0}\ge 0\,(j=\overline{1,\ m})$이므로 비유계방향벡토르 $x=(\underbrace{\lambda,\ \cdots,\ \lambda}_{k},\ \beta_1+\lambda\alpha_{1i},\ \cdots,\ \beta_m+\lambda\alpha_{mi})^{\mathrm{T}}$는 허용구역의 원소이다. 이것은 허용구역이 유계라는데 모순된다.

주의 4 임의의 $i\,(1\le i\le k)$에 대하여 $\theta_i=\min\left\{\dfrac{\beta_j}{-\alpha_{ji}}\middle|\alpha_{ji}<0\right\}>0$이면

$$x^i=(0,\ \cdots,\ 0,\ \overset{(i)}{1},\ 0,\ \cdots,\ 0,\ \alpha_{1i},\ \cdots,\ \alpha_{mi})^{\mathrm{T}}$$

는 x^0에서 린접정점으로 향하는 방향이며 린접정점까지의 거리는 θ_i, 린접정점 $(\overline{x}_i)$은 $\overline{x}_i=x_0+\theta_i x^i$이다.

보조정리 1 불룩다면체 S의 정점이 불퇴화정점이면 린접정점의 개수는 k이다.

증명 정점 x^0이 불룩다면체 S의 불퇴화정점이면 정인 성분의 개수는 m, 령인 성분의 개수는 k이다. 그러므로 $\beta_j>0\,(j=\overline{1,\ m})$이다.

S가 유계이므로 임의의 $i\,(1\le i\le k)$에 대하여 적당한 $j\,(1\le j\le m)$가 있어서 $\alpha_{ji}<0$이고 임의의 $i\,(1\le i\le k)$에 대하여 린접정점까지의 거리(θ_i)는 정이다. 주의 1에 의하여 $(0,\ \cdots,\ 0,\ \overset{(i)}{1},\ 0,\ \cdots,\ 0,\ \alpha_{1i},\ \cdots,\ \alpha_{mi},\ 0)^{\mathrm{T}}\ (i=\overline{1,\ k})$들은 $A'x_1-x_2=0,\ (x_1^{\mathrm{T}},\ x_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\ge 0$의 골격이며

이때 린접정점들은 $\bar{x}_i = x_0 + \theta_i x^i \ (i = \overline{1,\ k})$ 이다. 즉 불퇴화정점 x^0 에서 린접정점의 개수는 k이다.(증명끝)

우의 보조정리에 의하여 임의의 $i\,(1 \le i \le k)$ 에 대하여 $\theta_i > 0$ 이면 정점 x^0 은 불룩다면체 S의 불퇴화정점이다. 그러나 불룩다면체 S의 정점의 린접정점개수가 k라고 해서 그 정점이 불퇴화정점이라는것은 일반적으로 성립하지 않는다.

주의 5 적당한 $i_0\,(1 \le i_0 \le k)$ 이 있어서 $\theta_{i_0} = 0$ 이면 정점 x^0 은 불룩다면체 S의 퇴화정점이다. 왜냐하면 적당한 $i_0\,(1 \le i_0 \le k)$ 이 있어서 $\theta_{i_0} = \min\left\{ \dfrac{\beta_j}{-\alpha_{ji_0}} \middle| \alpha_{ji_0} < 0 \right\} = \dfrac{\beta_{j_{i_0}}}{-\alpha_{j_{i_0}}} = 0$ 이라고 하면 $\beta_{j_{i_0}} = 0$ 이기때문이다.

보조정리 2 $\beta_j \ge 0\,(j = \overline{1,\ m})$이고 적당한 $j_0\,(1 \le j_0 \le m)$ 이 있어서

$\beta_{j_0} = 0,\ \alpha_{j_0 i} < 0\,(i = \overline{1,\ k})$ 이면 불룩다면체 S는 한점모임으로서 $S = \{x^0\}$ 이다.

증명 적당한 $j_0\,(1 \le j_0 \le m)$ 이 있어서 $\beta_{j_0} = 0,\ \alpha_{j_0 i} < 0\,(i = \overline{1,\ k})$ 이라고 하자. 그러면 $\xi_{k+j_0} = \alpha_{j0,1}\xi_1 + \cdots + \alpha_{j0,k}\xi_k \Leftrightarrow \xi_{k+j_0} + (-\alpha_{j0,1})\xi_1 + \cdots + (-\alpha_{j0,k})\xi_k = 0$ 이다. 이때 결수들이 모두 정수이므로 부아닌 풀이는 $\xi_1 = \cdots = \xi_k = \xi_{k+j_0} = 0$ 뿐이다.

선행연구[1]의 불룩다면모임의 표시방법에 대한 보조정리에 의하여 x가 불룩다면모임 S의 원소이기 위하여서는 $x = x^0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i \ge 0,\ \alpha_i \ge 0$ 인 $\alpha_i (i = \overline{1,\ k})$ 들이 있을것이 필요하고 충분하다. 따라서 식 (1)의 풀이는 x^0 뿐이다.(증명끝)

주의 6 $\beta_j \ge 0\,(j = \overline{1,\ m})$ 이고 적당한 $j_0\,(1 \le j_0 \le m)$ 이 있어서 $\beta_{j_0} = 0,\ \alpha_{j_0 i} \le 0\,(i = \overline{1,\ k})$ 이면 식 (1)의 풀이들에서 $\xi_i = 0\,(i \in I)$ 이다. 여기서 $I = \{i \mid \alpha_{j_0 i} < 0,\ 1 \le i \le k\}$ 이다.

주의 7 1차원경계의 령이 아닌 성분의 개수는 기껏 $(m+1)$ 이므로 정점에서 린접정점으로 향하는 방향벡토르의 령이 아닌 성분의 개수도 기껏 $(m+1)$ 이다.

실례 1 풀이공간의 차원수와 린접정점의 개수가 같은 다음의 비동차련립1차방정식의 부아닌 풀이를 론의하자.

$$\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3 = 0,\ \ \xi_1 - 3\xi_2 + \xi_4 = 0,\ \ -2\xi_1 + \xi_2 + \xi_5 = 0$$
$$-3\xi_1 + \xi_2 + \xi_6 = 0,\ \ \xi_1 + \xi_7 = 2,\ \ \xi_2 + \xi_8 = 3$$
$$\xi_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,\ 8}$$

풀기 $\xi_1,\ \xi_2,\ \tau$ 를 자유미지수로 하여 시초표를 구성하면 다음과 같다.(표 1)

표 1. 시초표(1)

ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6	ξ_7	ξ_8	
-1	-1	2	3	-1	0	ξ_1
2	3	-1	-1	0	-1	ξ_2
0	0	0	0	2	3	1

표 1에서 정점 $x^0 = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 2,\ 3)^{\mathrm{T}}$ 는 퇴화정점이며 1행과 2행의 θ_i 들을 구하면 모두 령이다.

린접정점으로 향하는 방향벡토르를 구하기 위하여 $\beta_j = 0$ 인 렬과 자유미지수 $\xi_1,\ \xi_2$ 로서 다음의 표를 구성한다.(표 2의 ㄱ)부분)

표 2. 계산표(1)

	No.	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6	
ㄱ)	1	1	0	(−1)	−1	2	3	X_1
	2	0	1	2	3	(−1)	−1	X_2
ㄴ)	3(1, 2)	2/3	1/3	0	1/3	1	5/3	
ㄷ)	4(2, 3)	1/3	2/3	1	5/3	0	1/3	

정수가 많고 부수가 적은 렬(ξ_3렬)의 1행의 원소 -1을 주목한다.

표 2의 ㄱ)부분에서 1행과 ξ_3렬에 정수가 있는 2행과의 정수1차결합을 하여 얻어지는 새행의 ξ_3렬 원소가 령이 되도록 한다.

그러기 위하여 1행에 $\dfrac{2}{-(-1)+2}=\dfrac{2}{3}$를 곱하고 2행에 $\dfrac{-(-1)}{-(-1)+2}=\dfrac{1}{3}$을 곱하여 성분들끼리 더한 값들을 3행에 기입한다.(표 2의 ㄴ)부분)

ξ_3렬에 정수가 없으므로 1행을 표에서 제거한다. 제거한다는 의미에서 1행의 마지막 부분을 X_1로 표시한다.

정수가 많고 부수가 적은 렬(ξ_5렬)의 2행의 원소 -1을 주목한다.

표 2의 ㄱ), ㄴ)부분에서 2행과 ξ_5렬에 정수가 있는 3행과의 정수1차결합을 하여 얻어지는 새행의 ξ_5렬의 원소가 령이 되도록 한다.

그러기 위하여 2행에 $\dfrac{1}{-(-1)+1}=\dfrac{1}{2}$을 곱하고 3행에 $\dfrac{-(-1)}{-(-1)+1}=\dfrac{1}{2}$을 곱하여 성분들끼리 더한 값들을 4행에 기입한다.(표 2의 ㄷ)부분)

ξ_5렬에 정수가 없으므로 2행을 표에서 제거한다. 제거한다는 의미에서 2행의 마지막 부분을 X_2로 표시한다. 표 2의 ξ_j렬들에 부수가 없으므로 x^0에서 린접정점의 개수는 2이고 린접정점으로 향하는 벡토르들의 ξ_1, ξ_2성분들은 $(2/3,\ 1/3)^{\mathrm{T}}$, $(1/3,\ 2/3)^{\mathrm{T}}$이다.

그러므로 x^0의 린접정점들에로 향하는 방향벡토르들은 다음과 같다.

$$x^1=\frac{2}{3}(1,\ 0,\ -1,\ -1,\ 2,\ 3,\ -1,\ 0)^{\mathrm{T}}+\frac{1}{3}(0,\ 1,\ 2,\ 3,\ -1,\ -1,\ 0,\ -1)^{\mathrm{T}}=$$

$$=\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ 0,\ \frac{1}{3},\ 1,\ \frac{5}{3},\ -\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right)^{\mathrm{T}}$$

$$x^2=\frac{1}{3}(1,\ 0,\ -1,\ -1,\ 2,\ 3,\ -1,\ 0)^{\mathrm{T}}+\frac{2}{3}(0,\ 1,\ 2,\ 3,\ -1,\ -1,\ 0,\ -1)^{\mathrm{T}}=$$

$$=\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 1,\ \frac{5}{3},\ 0,\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right)^{\mathrm{T}}$$

그러므로 정점 x^0에서 x^1방향에로의 린접정점까지의 거리는

$$\theta_1=\min\left\{\frac{2}{-\left(-\dfrac{2}{3}\right)},\ \frac{3}{-\left(-\dfrac{1}{3}\right)}\right\}=3$$

이고 x^2 방향에로의 린접정점까지의 거리는

$$\theta_2 = \min\left\{\frac{2}{-\left(-\frac{1}{3}\right)},\ \frac{3}{-\left(-\frac{2}{3}\right)}\right\} = \frac{9}{2}$$

이며 린접정점들은 다음과 같다.

$\bar{x}^1 = x_0 + \theta_1 x^1 = (2,\ 1,\ 0,\ 1,\ 3,\ 5,\ 0,\ 2)^{\mathrm{T}}$, $\bar{x}^2 = x_0 + \theta_2 x^2 = (1.5,\ 3,\ 4.5,\ 7.5,\ 0,\ 1.5,\ 0.5,\ 0)^{\mathrm{T}}$

실례 2 풀이공간의 차원수보다 린접정점의 개수가 큰 다음의 비동차련립1차방정식의 부아닌 풀이를 론의하자.

$$\xi_1 + \xi_3 + \xi_4 = 1,\ \ -\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 + \xi_5 = 0$$

$$\xi_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,\ 5}$$

풀기 $\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \tau$ 를 자유미지수로 하여 시초표를 구성하면 다음과 같다.(표 3)

풀이의 기본계는 3개로서

표 3. 시초표(2)

ξ_4	ξ_5	
–1	1	ξ_1
0	–1	ξ_2
–1	1	ξ_3
1	0	1

$x^1 = (1,\ 0,\ 0,\ -1,\ 1)^{\mathrm{T}}$, $x^2 = (0,\ 1,\ 0,\ 0,\ -1)^{\mathrm{T}}$, $x^3 = (0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 1)^{\mathrm{T}}$

이고 $x^0 = (0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}}$ 는 퇴화정점이며

$$\theta_1 = \frac{1}{-(-1)} = 1,\ \theta_2 = \frac{0}{-(-1)} = 0,\ \theta_3 = \frac{1}{-(-1)} = 1$$

이다.

그러므로 $x^1,\ x^3$ 은 x^0 에서 린접정점에로 향하는 방향벡토르이다.

린접정점에로 향하는 방향벡토르들을 구하기 위하여 $\beta_j = 0$ 인 렬과 자유미지수 $\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3$ 으로서 다음의 표를 구성한다.(표 4의 ㄱ)부분)

표 4. 계산표(2)

	No.	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_5	
ㄱ)	1	1	0	0	1	
	2	0	1	0	(–1)	X_1
	3	0	0	1	1	
ㄴ)	4(2, 1)	1/2	1/2	0	0	
	5(2, 3)	0	1/2	1/2	0	

ξ_5 렬의 2행의 원소 –1을 주목한다.

표 4의 ㄱ)부분에서 2행과 ξ_5 렬에 정수가 있는 1행, 3행과의 정수1차결합을 진행하여 얻어지는 새행의 ξ_5 렬의 원소가 령이 되도록 한다.

그러기 위하여 1행에 $\frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$ 을 곱하고 2행에 $\frac{-(-1)}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$ 을 곱하여 성분들끼리 더한 값들을 3행에 기입하고 2행에 $\frac{-(-1)}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$ 을 곱하고 3행에 $\frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$ 을 곱하여 성분들끼리 더한 값들을 4행에 기입한다.(표 4의 ㄴ)부분)

ξ_5 렬에 정수가 없으므로 2행을 표에서 제거한다. 제거한다는 의미에서 1행의 마지막

부분을 X_1로 표시한다.

표 4의 ξ_j 렬들에 부수가 없으므로 x^0에서 린접정점으로 향하는 방향벡토르들은 $(1,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}}$, $(0,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}$ 외에 $(0.5,\ 0.5,\ 0)^{\mathrm{T}}$, $(0,\ 0.5,\ 0.5)^{\mathrm{T}}$이며 x^0의 린접정점들은 다음과 같다.

$$\bar{x}^1=(1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}},\ \bar{x}^3=(0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}},\ \bar{x}^2=(0.5,\ 0.5,\ 0,\ 0.5,\ 0)^{\mathrm{T}},\ \tilde{x}^2=(0,\ 0.5,\ 0.5,\ 0.5,\ 0)^{\mathrm{T}}$$

참 고 문 헌

[1] 오용범; 최량화방법, **김일성**종합대학출판사, 17～18, 주체99(2010).

[2] Mazin Abed Mohammed et al.; Journal of Computational Science, 21, 232, 2017.

[3] Christian Tilk et al.; European Journal of Operational Research, 276, 549, 2019.

주체109(2020)년 9월 5일 원고접수

A Method of Finding Neighboring Vertices in the Degenerative Vertex

Ho Myong Ho, *Rim Su Bom*

In this paper, we studied the method of finding all neighboring vertices when the vertices were degenerative with the result that the optimal point of large-scale concave programming problem with linear restraint could be found.

Keywords: degenerative vertex, concave programming problem with linear restraint