김일성종합대학학보 JOURNAL OF KIM IL SUNG UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체106(2017)년 제63권 제2호 Vol. 63 No. 2 JUCHE106(2017).

평면띠염동력학계의 안정성교체분지형거동에 관한 연구

리청해, 김상문

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《기초과학은 과학기술강국을 떠받드는 주추입니다. 기초과학이 든든해야 나라의 과학기술이 공고한 토대우에서 끊임없이 발전할수 있습니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 40페지)

론문에서는 파라메터가 없는 2차원띠염동력학계의 안정성교체분지형거동을 연구한다.

선행연구들[1, 2, 6]에서는 미분방정식의 오른변의 1계 및 2계편도함수들이 령이 아닌 경우 안장마디분지형, 안정성교체분지형거동을 하기 위한 충분조건은 밝혔으나 1계 및 2계편도함수들이 령인 경우에는 아무런 결과도 얻지 못하였다.

선행연구[5]에서는 미분방정식의 오른변의 고계도함수들이 령인 경우 안장마디분지, 안정성교체분지 등이 일어나기 위한 충분조건을, 선행연구[4]에서는 미분방정식의 오른변의 1계 및 2계편도함수들이 령인 경우 $\boldsymbol{R}^2$에서 정의된 자동련립미분방정식의 궤도들이 안장마디분지형거동과 안정성교체형거동을 하기 위한 충분조건을 밝혔다. 그러나 선행연구[4]에서는 어느 하나의 변수에 관한 편도함수조건들로만 되여있다.

선행연구[3]에서는 미분방정식의 오른변의 1계 및 고계편도함수들이 두 변수에 관하여 령인 경우에도 $\boldsymbol{R}^2$에서 정의된 자동련립미분방정식의 궤도들이 안장마디분지형거동과 안정성교체분지형거동을 하기 위한 충분조건을 밝혔다.

론문에서는 $\boldsymbol{R}^2$에서 정의된 띠염동력학계의 궤도들이 안정성교체분지형거동을 하기 위한 충분조건을 밝힌다.

띠염력학계

$$x \mapsto f(x) \tag{1}$$

에 대하여 론의하자. 여기서 $x=(y,\ z)\in \boldsymbol{R}^2,\ \ f\in C^2(\boldsymbol{R}^2),\ \ f=(f_0^1,\ \ f_0^2)$이다. 즉

$$y\mapsto f^1(y,\ z)+y,\ \ z\mapsto f^2(y,\ z)+z\,.$$

이제 f가 다음과 같이 표시되였다고 하자.

$$f^1(y,\ z)=F^1(y,\ z)\cdot g(y,\ z),\ \ f^2(y,\ z)=F^2(y,\ z)\cdot g(y,\ z)$$

보조정리 함수 $g=g(y,\ z):\boldsymbol{R}^2\to \boldsymbol{R},\ g\in C^2(\boldsymbol{R}^2)$가 다음의 조건들을 만족시킨다고 하자.

i) $g(0,\ 0)=0$

ii) $g_y(0,\ 0)\cdot g_z(0,\ 0)<0$

이때 정수 $\delta>0,\ \varepsilon>0$과 유일한 함수 $z:(-\varepsilon,\ \varepsilon)\to(-\delta,\ \delta)$가 있어서 다음의 사실들이 성립된다.

① $(y_0,\ z_0)\in(-\varepsilon,\ \varepsilon)\times(-\delta,\ \delta)$, $g(y_0,\ z_0)=0 \Leftrightarrow z_0=z(y_0)$

② $z(0)=0$

③ $z'(0)>0$

증명 $g_z(0,\ 0)\neq 0$ 이므로 음함수정리로부터 ①이 성립되는 $\delta>0,\ \varepsilon>0$ 과 유일한 함수 $z=z(y)$ 가 존재하며 따라서 다음의 식이 성립된다.

$$g(y,\ z(y))=0 \tag{2}$$

조건 i)과 ①로부터 $z(0)=0$ 이 성립된다.

식 (2)를 y 에 관하여 미분하면

$$g_y(y,\ z(y))+g_z(y,\ z(y))\cdot z'(y)=0 \tag{3}$$

이고 $g_z(y,\ z(y))\neq 0$ 이므로 $z'(y)=-g_y(y,\ z(y))/g_z(y,\ z(y))$ 가 성립된다.

따라서 $z'(0)=-g_y(0,\ 0)/g_z(0,\ 0)>0$ 이 성립된다.(증명끝)

정리 $g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ 가 보조정리의 조건을 만족시키고 $F^1, F^2:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ 가 다음의 조건을 만족시킨다고 하자.

$$F^l(y,\ 0)=0,\ F_y^l(y,\ 0)=0\ \ (l=1,\ 2),\ \ F_z^1(0,\ 0)=0,\ \ F_z^2(0,\ 0)\neq 0 \tag{4}$$

이때 정수 $\varepsilon>0$ 과 띠염력학계 (1)의 2개의 부동점곡선 $(y,\ 0)$, $(y,\ z(y)),\ \ y\in(-\varepsilon,\ \varepsilon)$ 이 존재하여 $\sigma=+1$ 일 때 $y\in(-\varepsilon,\ 0)$ 에서 부동점 $(y,\ 0)$ 은 안정하고 부동점 $(y,\ z(y))$ 는 불안정하며 $y\in(0,\ \varepsilon)$ 에서 $(y,\ 0)$ 은 불안정하고 $(y,\ z(y))$ 는 안정하다.

$\sigma=-1$ 일 때에는 우와 반대로 된다. 여기서 $\sigma:=\mathrm{sign}[F_z^2(0,\ 0)\cdot g_y(0,\ 0)]$ 이다.

(이런 형태의 궤도의 거동을 원점근방에서 파라메터가 없는 계에서의 안정성교체분지형거동이라고 부른다.)

증명 식 (4)로부터 $F^l(y,\ 0)=0,\ \ l=1,2$ 이므로

$$f^1(y,\ 0)=F^1(y,\ 0)\cdot g(y,\ 0)=0,\quad f^2(y,\ 0)=F^2(y,\ 0)\cdot g(y,\ 0)=0$$

이 성립되고 $g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ 가 보조정리의 조건을 만족시키므로 정수 $\delta>0,\ \varepsilon>0$ 과 유일한 함수 $z:(-\varepsilon,\ \varepsilon)\to(-\delta,\ \delta)$ 이 있어서 $g(y,\ z(y))=0$ 이다. 따라서

$$f^1(y,\ z(y))=F^1(y,\ z(y))\cdot g(y,\ z(y))=0,\quad f^2(y,\ z(y))=F^2(y,\ z(y))\cdot g(y,\ z(y))=0$$

이므로 $(y,\ 0)$ 과 $(y,\ z(y))$ 는 띠염력학계 (1)의 부동점곡선이다.

부동점의 안정성을 판정하기 위하여 부동점곡선에서 띠염력학계 (1)의 1차근사계의 결수행렬의 고유값의 부호를 론의하자.

부동점곡선에서 띠염력학계 (1)의 1차근사계의 결수행렬은 부동점곡선에서 띠염력학계 (1)의 야코비행렬 $J=\begin{pmatrix} f_y^1+1 & f_z^1 \\ f_y^2 & {f_z}^2+1 \end{pmatrix}$ 과 같으며

$$\det(J-\lambda I)=\begin{vmatrix} f_y^1+1-\lambda & f_z^1 \\ f_y^2 & {f_z}^2+1-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-\lambda\cdot(f_y^1+f_z^2+2)+(f_y^1f_z^2-f_z^1f_y^2)+f_y^1+f_z^2+1=0.$$

$[f_y^1f_z^2-f_z^1f_y^2]|_{(y,\ 0)}$ 을 계산하자.

식 (4)와 보조정리로부터 다음의 식이 성립된다.

$$[f_y^1 f_z^2 - f_z^1 f_y^2]|_{(y,\,0)} =$$
$$= \{[F_y^1(y,\,z)\cdot g(y,\,z) + F^1(y,\,z)\cdot g_y(y,\,z)]\cdot[F_z^2(y,\,z)\cdot g(y,\,z) + F^2(y,\,z)\cdot g_z(y,\,z)] -$$
$$-[F_z^1(y,\,z)\cdot g(y,\,z) + F^1(y,\,z)\cdot g_z(y,\,z)]\cdot[F_y^2(y,\,z)\cdot g(y,\,z) + F^2(y,\,z)\cdot g_y(y,\,z)]\}|_{(y,\,0)} = 0$$

$[f_y^1 f_z^2 - f_z^1 f_y^2]|_{(y(z),\,z)}$ 를 계산하자.

보조정리로부터 $g(y,\ z(y)) = 0$ 이므로 다음의 식이 성립된다.

$$[f_y^1 f_z^2 - f_z^1 f_y^2]|_{(y,\,z(y))} = F^1(y,\ z(y))\cdot g_y(y,\ z(y))\cdot F^2(y,\ z(y))\cdot g_z(y,\ z(y)) -$$
$$- F^1(y,\ z(y))\cdot g_z(y,\ z(y))\cdot F^2(y,\ z(y))\cdot g_y(y,\ z(y)) = 0$$

따라서

$$\det(J - \lambda I)|_{(y,\,z(y))} = [\lambda^2 - \lambda\cdot(f_y^1 + f_z^2 + 2) + f_y^1 + f_z^2 + 1]|_{(y,\,z(y))} = 0,$$
$$\det(J - \lambda I)|_{(y,\,0)} = [\lambda^2 - \lambda\cdot(f_y^1 + f_z^2 + 2) + f_y^1 + f_z^2 + 1]|_{(y,\,0)} = 0$$

이 성립되므로 $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = f_y^1 + f_z^2 + 1$ 로 된다.

이제 부동점 $(y, 0)$ 의 안정성을 평가하자.

$(y,\ 0)$ 에서 고유값이 $\lambda_1(y,\ 0) = 1$ 이므로 λ_2 에 의하여 안정성(점근안정성은 아니다.)과 불안정성이 결정된다.

부동점곡선 $(y,\ 0)$ 에서 $\lambda_2(y,\ 0)$ 의 부호를 결정하자.

$$\lambda_2(y,\ 0) = f_y^1(y,\ 0) + f_z^2(y,\ 0) + 1 =$$
$$= [F_y^1\cdot g + F^1\cdot g_y + F_z^2\cdot g + F^2\cdot g_z + 1]|_{(y,\,0)} = F_z^2(y,\,0)\cdot g(y,\,0) + 1$$

보조정리로부터 $\lambda_2(y, 0)|_{y=0} = 1$ 이 성립된다.

한편 $\left.\dfrac{d}{dy}[\lambda_2(y,\ 0)]\right|_{y=0} = [F_{zy}^2(y,\ 0)\cdot g(y,\ 0) + F_z^2(y,\ 0)\cdot g_y(y,\ 0)]|_{y=0} = F_z^2(0,0)\cdot g_y(0,0)$,

$\lambda_2(0,\ 0) = 1$ 임을 고려하면 $\sigma := \mathrm{sign}[F_z^2(0,\ 0)\cdot g_y(0,\ 0)]$ 이라고 할 때 부동점 $(y,\ 0)$ 은 $\sigma = 1$ 이면 $y \in (-\varepsilon,\ 0)$ 에서 $|\lambda_2| < 1$ 즉 안정하고 $y \in (0,\ \varepsilon)$ 에서는 $|\lambda_2| > 1$ 즉 불안정하다.

$\sigma = -1$ 이면 우의 경우와 반대로 된다.

다음으로 부동점 $(y,\ z(y))$ 의 안정성을 평가하자.

부동점곡선 $(y,\ z(y))$ 에서 $\lambda_2(y,\ z(y))$ 의 부호를 결정하자.

$$\lambda_2(y,\ z(y))|_{y=0} = [f_y^1(y,\ z(y)) + f_z^2(y,\ z(y)) + 1]|_{y=0} = [F_y^1\cdot g + F^1\cdot g_y + F_z^2\cdot g + F^2\cdot g_z + 1]|_{y=0} = 1$$

한편 $\left.\dfrac{d}{dy}[\lambda_2(y,\ z(y))]\right|_{y=0} = [f_{yy}^1 + f_{yz}^1\cdot z'(y) + f_{zy}^2 + f_{zz}^2\cdot z'(y)]|_{y=0}$ 이다. 여기서

$$f_{yy}^1(y,\ z(y))|_{y=0} = [F_{yy}^1\cdot g + 2F_y^1\cdot g_y + F^1\cdot g_{yy}]|_{y=0} = 0,$$
$$f_{zy}^2(y,\ z(y))|_{y=0} = [F_{zy}^2\cdot g + F_z^2\cdot g_y + F_y^2\cdot g_z + F^2\cdot g_{zy}]|_{y=0} = F_z^2(0,\ 0)\cdot g_y(0,\ 0),$$
$$f_{yz}^1(y,\ z(y))|_{y=0} = [F_{yz}^1\cdot g + F_y^1\cdot g_z + F_z^1\cdot g_y + F^1\cdot g_{yz}]|_{y=0} = 0,$$
$$f_{zz}^2(y,\ z(y))|_{y=0} = [F_{zz}^2\cdot g + 2F_z^2\cdot g_z + F^2\cdot g_{zz}]|_{y=0} = 2F_z^2(0,\ 0)\cdot g_z(0,\ 0).$$

식 (3)을 리용하면

$$\frac{d}{dy}[\lambda_2(y,\ z(y))]\bigg|_{y=0} = F_z^2(0,\ 0)\cdot g_y(0,\ 0)+2F_z^2(0,\ 0)\cdot g_z(0,\ 0)\cdot z'(0) = -F_z^2(0,\ 0)\cdot g_y(0,\ 0)$$

이므로 $\operatorname{sign}\left\{\frac{d}{dy}[\lambda_2(y,\ z(y))]\bigg|_{y=0}\right\} = -\sigma$ 이다.

따라서 $\sigma = +1$ 이면 부동점 $(y,\ z(y))$ 는 $y\in(-\varepsilon,\ 0)$ 에서는 불안정하고 $y\in(0,\ \varepsilon)$ 에서는 안정하다.

$\sigma = -1$ 이면 우의 경우와 반대로 된다.(증명끝)

실례 $(y, z)\mapsto(y+y^2z-z^3,\ yz+z-z^2)$ 은 (0, 0) 근방에서 안정성교체분지형거동을 한다. 그것은 $F^1(y, z) := yz+z^2$, $F^2(y, z) := z$, $g(y, z) := y-z$ 라고 놓으면 정리의 조건들을 만족시키기때문이다.

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보(자연과학), 53, 3, 22, 주체96(2007).

[2] **김일성**종합대학학보(자연과학), 53, 2, 14, 주체96(2007).

[3] 김상문 등; 조선민주주의인민공화국 과학원통보, 6, 8, 주체103(2014).

[4] 김상문 등; 수학, 1, 6, 주체101(2012).

[5] F. Balibrea et a1.; Nonlinear Anal., 52, 405, 2003.

[6] S. Liebscher; Bifurcation without Parameters, Springer, 34～142, 2015.

주체105(2016)년 10월 5일 원고접수

Behavior of Transcritical Bifurcation of Discrete Dynamical System in Plane

Ri Chong Hae, Kim Sang Mun

We consider the behavior of orbits of discrete dynamical system in plane by using partial derivatives.

We study new sufficient condition for the behavior of transcritical bifurcation in the system.

Key words: bifurcation, orbit