김일성종합대학학보 주체107(2018)년
수 학 제64권 제4호

# 시간의존립쉬츠결수를 가지는 마르꼬브사슬역방향확률미분방정식의 풀이의 유일존재성

오훈, 김문철

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《우리는 현실발전의 요구에 맞게 나라의 과학기술을 빨리 발전시켜야 하겠습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제11권 134페지)

선행연구[1]에서는 련속시간, 셀수 있는 상태를 가진 마르꼬브사슬 $X$가 주어졌을 때 다음과 같은 마르꼬브사슬역방향확률미분방정식의 풀이의 유일존재성을 증명하였다.

$$Y_t = \xi + \int_{]t,\, T]} f(\omega,\, u,\, Y_{u-},\, Z_u)du - \int_{]t,\, T]} Z_u^{\mathrm{T}} dM_u,\ \ 0 \le t \le T \tag{1}$$

여기서 $M$은 $X$의 반마르팅게일분해에서 마르팅게일부분이다.

선행연구[2]에서는 처음으로 우연끝시각을 가지는 마르꼬브사슬역방향확률미분방정식의 풀이의 유일존재성을 생성자에 대한 평등립쉬츠조건밑에서 증명하였다.

론문에서는 우연끝시각을 가지는 역방향확률미분방정식에 대하여 생성자가 일반적으로 시간의존립쉬츠결수를 가지는 경우 유일존재성을 증명하였다.

완비확률토대 $(\Omega,\ \mathscr{F},\ P,\ \boldsymbol{F})$, $\boldsymbol{F}=\{\mathscr{F}_t\}$ 우에서 정의된 련속시간 셀수 있는 상태를 가진 마르꼬브사슬 $X$가 주어졌다고 하자. 여기서 $\{\mathscr{F}_t\}$는 $X$에 의해 생성된 $\sigma$ －모임벌증가족을 완비화한것으로 놓는다. 일반성을 잃지 않고 $X$가 $\mathbf{R}^N (N\in \mathbf{N}\cup\{\infty\})$의 표준토대벡토르 $e_i$에서 값을 취한다고 가정한다. 여기서 $N$은 마르꼬브사슬의 상태들의 수를 나타낸다.

마르꼬브사슬 $X$의 생성연산자(이행비률행렬)를 $A_t$로 놓으면 $(A_t)_{ij}$는 $t$시각에 상태 $e_i$로부터 $e_j$에로의 이행비률이며 $(A_t)_{ij}\ge 0,\ i\ne j$, $\forall j,\ \sum_i (A)_{ij}=0$이다.

론의를 간단히 하기 위하여 이행비률행렬 $A=(A_t)_{ij}$는 련속이라고 가정한다.

이때 $X$는 $X_t = X_0 + \int_{]0,\, t]} A_u X_{u-} du + M_t$와 같은 반마르팅게일분해(혹은 두브－메이어분해)를 가진다.[1] 여기서 $M$은 순수 비약을 가진 마르팅게일로서 국부유한변동과정이다.

$\tau$를 거의 유한인 $\boldsymbol{F}$ －정지시각, $\xi$를 $\mathbf{R}$에서 값을 취하는 $\mathscr{F}_\tau$ －가측우연량, $f:\Omega\times\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^N\to\mathbf{R}$라고 할 때 완비확률토대 $(\Omega,\ \mathscr{F},\ P,\ \boldsymbol{F})$ 우에서 정의된 우연끝시각을 가지는 다음과 같은 역방향확률미분방정식을 생각하자.

$$Y_t = \xi + \int_{]t,\, \tau]} f(\omega,\, u,\, Y_{u-},\, Z_u)du - \int_{]t,\, \tau]} Z_u^{\mathrm{T}} dM_u,\ \ \ 0 \le t \le \tau \tag{2}$$

정의[1] 생성자 $f$에 대하여 다음과 같은 조건들을 만족시키는 우연마당 $\lambda:\Omega\times\boldsymbol{R}^+\times\times\boldsymbol{R}^N\times\boldsymbol{R}^N\to\boldsymbol{R}^N$이 존재할 때 $f$는 $\gamma$ －균형적이라고 말한다.

① $f(\omega, t, y, z) - f(\omega, t, y, z') = (z - z')^{\mathrm{T}}(\lambda(\omega, t, z, z') - AX_{t-})$

② $\forall e_i, \exists\gamma > 0, \ e_i^{\mathrm{T}}\lambda(\omega, t, z, z')/(e_i^{\mathrm{T}}AX_{t-}) \in [\gamma, \gamma^{-1}]$

③ $\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\lambda(\omega, t, z, z') = 0$ (여기서 $\mathbf{1}$은 모든 성분이 1인 벡토르이다.)

④ $\forall\alpha \in \mathbf{R}; \ \lambda(\omega, t, z + \alpha\mathbf{1}, z') = \lambda(\omega, t, z, z')$

$X$가 $\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\lambda = 0, \forall i, \ e_i^{\mathrm{T}}\lambda(t, \omega)/(e_i^{\mathrm{T}}AX_{t-}) \in [\gamma, \gamma^{-1}]$인 예측가능한 과정 $\lambda(t, \omega)$를 보정자로 가지게 되는 확률측도들의 족을 $\mathcal{Q}_\gamma$로 놓는다.

선행연구[2]에서 평등립쉬츠조건밑에서 방정식 (2)의 풀이의 유일존재성을 증명하였으나 풀이한계에 대해서는 간단히 언급만 하고 구체적인 평가식은 주지 않았다.

풀이한계에 대한 평가식까지 첨부된 결과는 다음과 같다.

**보조정리 1** 마르꼬브사슬역방향확률미분방정식 (2)에 대하여 다음과 같은 조건들이 성립된다고 하자.

① $\xi$는 $\mathcal{F}_\tau$－가측우연량이다.

② 어떤 비감소함수 $K_1, K_2 : \mathbf{R}^+ \to [1, \infty[$와 상수 $\beta, \tilde{\beta} > 0$이 있어서

$$\forall Q \in \mathcal{Q}_\gamma; \ E^Q[\xi \mid \mathcal{F}_t] \le K_1(t), \ E^Q[(1+\tau)^{1+\beta} \mid \mathcal{F}_t] \le K_1(t), \ E^Q[K_1(\tau)^{1+\tilde{\beta}} \mid \mathcal{F}_t] \le K_2(t)$$

가 성립된다. 여기서 $E^Q[\cdot]$은 측도 $Q$에 관한 수학적기대값을 의미한다.

③ $f : \Omega \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$는 $\gamma$－균형적이다.

④ 어떤 상수 $c_1, c_2 \in \mathbf{R}, \ \tilde{\beta} \in [0, \beta]$가 있어서 임의의 $s, t, y, y' \in \mathbf{R}, z \in \mathbf{R}^N$에 대하여

$$|f(\omega, t, 0, 0)| \le c_1(1 + t^{\tilde{\beta}}), \ \int_s^t \frac{f(\omega, u, y, z) - f(\omega, u, y', z)}{y - y'} du \le c_2$$

가 성립한다.

⑤ $\sup_{t \ge 0} \| A_t \| < \infty, \ \| A_t \| := \mathrm{Tr}[A_t A_t^{\mathrm{T}}]$

⑥ $f(\omega, t, y, z)$는 $y$에 관하여 평등립쉬츠련속성을 만족시킨다.

이때 미분방정식 (2)는 $|Y_t| \le (1 + c_1)e^{c_2} |K_1(t)|$인 유일한 적합풀이를 가진다.

주의 1 보조정리 1의 조건 ③, ⑤로부터 $f(\omega, t, y, z)$는 $z$에 대하여 평등립쉬츠성을 만족시킨다.

이제 시간변환을 리용한 몇가지 결과들을 보기로 하자.

$\phi(t)$를 $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\})$우에서 시간변환이라고 하자.

**보조정리 2** $\tilde{\mathcal{F}}_t := \mathcal{F}_{\phi^{-1}(t)}$로 놓으면 $\tilde{X}_t := X_{\phi^{-1}(t)}$는 $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\tilde{\mathcal{F}}_t\})$우의 마르꼬브사슬이며 $\tilde{X}_t = \tilde{X}_0 + \int_{]0, t]} \tilde{A}_u \tilde{X}_u du + \tilde{M}_t$와 같은 분해를 가진다. 여기서

$$\tilde{A}_u = A_{\phi^{-1}(u)} \cdot \phi^{-1}(u)', \ \phi^{-1}(u)' = \frac{d}{du}\phi^{-1}(u), \ \tilde{M}_t := M_{\phi^{-1}(t)}$$

**보조정리 3** 생성자 $f : \Omega \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$가 $\gamma$－균형적이면 다음식은 $\gamma$－균형적이다.

$$\tilde{f}(\omega, s, y, z) := f(\phi^{-1}(s), y, z) \cdot \phi^{-1}(s)'$$

이제 시간변환 $\phi(t) := \int_0^t \alpha^2(s) ds$를 도입하자. 여기서 $\alpha^2(t) = c(t) + \| A_t \| + c_1 + 1$이다.

$c(t), \|A_t\|$에 대한 가정으로부터 적분은 잘 정의되며 $\phi(t)$는 엄격히 증가하는 절대련속인 함수이다. 그러므로 $\phi^{-1}(t)$가 존재하여 엄격히 증가하며 절대련속성을 만족시킨다.

따라서 거의 유한인 도함수 $\phi(t)'$, $\phi^{-1}(t)'$가 존재하며 $\phi^{-1}(s)' = 1/(\phi'(\phi^{-1}(s))) = 1/\alpha^2(\phi^{-1}(s))$이다.

$\alpha^2(t) \ge 1$이므로 $\phi(t) := \int_0^t \alpha^2(s)ds \ge \int_0^t 1ds = t$이고 $t \ge \phi^{-1}(t)$이다.

보조정리 4 마르꼬브사슬역방향확률미분방정식 (2)에 대하여 보조정리 1의 조건 ①—④가 성립되며 $f: \Omega \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$에 대하여 어떤 적분가능한(르베그적분가능) 비부값함수 $c(t)$가 있어서 $|f(\omega, t, y, z) - f(\omega, t, y', z)| \le c(t)|y - y'|$이 성립된다고 하자.

이때 $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\widetilde{\mathcal{F}}_t\})$우에서 정의된 다음의 역방향확률미분방정식은 유일풀이를 가진다.

$$y_t = \xi + \int_t^{\phi(\tau)} \widetilde{f}(\omega, s, y, z)ds - \int_t^{\phi(\tau)} z_s d\widetilde{M}_s \tag{3}$$

여기서 $\widetilde{f}(\omega, s, y, z) := f(\phi^{-1}(s), y, z)\phi^{-1}(s)'$이다.

증명 $\widetilde{X}$의 생성연산자에 대하여

$$\widetilde{A}_u = A_{\phi^{-1}(u)}\phi^{-1}(u)' = A_{\phi^{-1}(u)}\frac{1}{\alpha^2(\phi^{-1}(u))} = \frac{A_{\phi^{-1}(u)}}{c(\phi^{-1}(u)) + \|A_{\phi^{-1}(u)}\| + c_1 + 1} \le \frac{A_{\phi^{-1}(u)}}{\|A_{\phi^{-1}(u)}\|}$$

이므로 $\|\widetilde{A}_u\| \le 1$ 즉 평등유계이다.

보조정리 2로부터 $\widetilde{M}_t$는 $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\widetilde{\mathcal{F}}_t\})$우의 마르꼬브과정 $\widetilde{X}_t$의 순수 불련속마르팅게일부분이고 $\widetilde{\mathcal{F}}_\tau = \widetilde{\mathcal{F}}_{\phi(\tau)} = \mathcal{F}_\tau$이므로 $\xi$는 $\widetilde{\mathcal{F}}_\tau$—가측이며 보조정리 3으로부터 $\widetilde{f}(\omega, s, y, z)$도 $\gamma$—균형적이다.

$\widetilde{K}_1 := K_1(\phi^{-1}(t)),\ \widetilde{K}_2 := K_2(\phi^{-1}(t))$로 놓으면 시간변환이 련속성과 단조성을 만족시키므로 $\mathbf{R}^+ \to [1, \infty[$인 비감소함수로 된다.

한편 $\forall Q \in \mathcal{Q}_\gamma$; $\mathrm{E}^Q[\xi \mid \widetilde{\mathcal{F}}_t] \le K_1(\phi^{-1}(t)) = \widetilde{K}_1(t)$, $\mathrm{E}^Q[\widetilde{K}_1(\widetilde{\tau})^{1+\widetilde{\beta}} \mid \widetilde{\mathcal{F}}_t] \le K_2(\phi^{-1}(t)) = \widetilde{K}_2(t)$이다.

$f: \Omega \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$에 대한 조건들을 고려하면 어떤 상수 $c \in \mathbf{R}$, $\widetilde{\beta} \in [0, \beta]$가 있어서 임의의 $y, y', z$에 대하여 다음의 식이 성립된다.

$$|\widetilde{f}(\omega, t, 0, 0)| = |f(\omega, \phi^{-1}(t), 0, 0)|\phi^{-1}(t)' \le c_1/[c(\phi^{-1}(t)) + \|A_{\phi^{-1}(t)}\| + c_1 + 1](1 + \phi^{-1}(t)^{\widetilde{\beta}}) \le 1 + \phi^{-1}(t)^{\widetilde{\beta}}$$

$t \ge \phi^{-1}(t)$이므로 $1 + \phi^{-1}(t)^{\widetilde{\beta}} \le 1 + t^{\widetilde{\beta}}$이고 $|\widetilde{f}(\omega, t, 0, 0)| \le 1 + t^{\widetilde{\beta}}$이며

$$\int_s^t \frac{\widetilde{f}(\omega, u, y, z) - \widetilde{f}(\omega, u, y', z)}{y - y'}du = \int_s^t \frac{f(\omega, \phi^{-1}(u), y, z) - f(\omega, \phi^{-1}(u), y', z)}{y - y'}\phi^{-1}(u)'du =$$

$$= \int_{\phi^{-1}(s)}^{\phi^{-1}(t)} \frac{f(\omega, u, y, z) - f(\omega, u, y', z)}{y - y'}du \le c_2,$$

$$|\widetilde{f}(\omega, t, y, z) - \widetilde{f}(\omega, t, y', z)| = |f(\omega, \phi^{-1}(t), y, z) - f(\omega, \phi^{-1}(t), y', z)|/\alpha^2(\phi^{-1}(t)) \le$$

$$\le c(\phi^{-1}(t))/[c(\phi^{-1}(t)) + |A_{\phi^{-1}(t)}| + c_1]|y - y'| \le |y - y'|$$

이 성립된다. 즉 $\widetilde{f}$ 은 $y$ 에 대하여 평등립쉬츠련속성을 만족시킨다.

따라서 방정식 (3)은 보조정리 1의 모든 조건들을 다 만족시키며 $|y_t| \le 2e^{c_2}|\widetilde{K}_1(t)|$ 인 유일풀이를 가진다.(증명끝)

정리 보조정리 4의 조건들이 성립된다고 하자.

이때 방정식 (2)는 $|Y_t| \le 2e^{c_2}|K_1(t)|$ 인 유일한 적합풀이를 가진다.

증명 보조정리 4로부터 역방향확률미분방정식 (3)의 유일풀이 $(y_t,\ z_t)$ 가 존재한다.

$(Y_t,\ Z_t) = (y_{\phi(t)},\ z_{\phi(t)})$ 로 놓으면 다음의 식이 성립된다.

$$Y_{\phi^{-1}(t)} = y_t = \xi + \int_t^{\phi(\tau)} f(\phi^{-1}(s),\ y_s,\ z_s)\phi^{-1}(s)'ds - \int_t^{\phi(\tau)} z_s d\widetilde{M}_s =$$

$$= \xi + \int_t^{\phi(\tau)} f(\phi^{-1}(s),\ Y_{\phi^{-1}(s)},\ Z_{\phi^{-1}(s)})\phi^{-1}(s)'ds - \int_t^{\phi(\tau)} Z_{\phi^{-1}(s)} dM_{\phi^{-1}(s)} =$$

$$= \xi + \int_{\phi^{-1}(t)}^{\tau} f(s,\ Y_s,\ Z_s)ds - \int_{\phi^{-1}(t)}^{\tau} Z_s dM_s$$

따라서 $(Y_t,\ Z_t) = (Y_{\phi(t)},\ Z_{\phi(t)})$ 는 방정식 (1)의 풀이로 된다.

다음으로 유일성을 증명하기 위하여 $(Y_t',\ Z_t')$ 를 방정식 (1)의 또 다른 풀이라고 하자.

$(y_t',\ z_t') = (Y'_{\phi^{-1}(t)},\ Z'_{\phi^{-1}(t)})$ 로 놓으면 방정식 (3)의 풀이로 된다.

따라서 $y_t,\ y_t'$ 는 차이없는 과정들이다. 즉 $Y_{\phi^{-1}(t)},\ Y'_{\phi^{-1}(t)}$ 는 차이없는 과정들이다. 시간변환의 련속성과 단조성으로부터 $Y_t,\ Y_t'$ 는 차이없는 과정들이다. 이로부터 유일성이 증명된다.

그리고 $|Y_t| = |y_{\phi^{-1}(t)}| \le 2e^{c_2}|\widetilde{K}_1(\phi^{-1}(t))| = 2e^{c_2}|K_1(t)|$ 가 성립된다.(증명끝)

주의 2 보조정리 1의 조건 ⑤가 반드시 성립되지 않으므로 $f$ 는 $z$ 에 대하여 평등립쉬츠성을 만족시키지 않으며 립쉬츠결수는 시간에 의존하는 함수로 된다.

## 참 고 문 헌

[1] S. N. Cohen et al.; Commun. Stoch. Anal., 2, 251, 2008.

[2] S. N. Cohen; arXiv:1302.4637v1 [math.PR] 19 Feb 2013.

주체107(2018)년 6월 5일 원고접수

## Existence and Uniqueness of the Solution for Markov Chain BSDEs with Time-Dependence Lipschtz Coefficient

*O Hun, Kim Mun Chol*

We proved the existence and uniqueness of solution for the backward stochastic differential equations with time-dependence Lipschtz coefficient and stopping time as the time horizon using time change.

Key words: backward stochastic differential equation, stopping time