김일성종합대학학보 주체107(2018)년
(수학) 제64권 제1호

마감소득미분경기에서 값함수 및 최량방략의 한가지 근사풀이법

리 국 환

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《기초과학을 발전시키지 않고서는 인민경제 여러 부문에서 나서는 과학기술적문제를 원만히 풀어나갈수 없습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제11권 138페지)

우리는 마감소득미분경기에서 값함수 및 최량방략의 근사풀이에 대한 연구를 진행하였다.

선행연구[1－4]에서 리산동적계의 값함수계산에 기초한 계산도식, 리산동적계획원리에 기초한 계산도식, Hopf공식의 일반화에 기초한 계산도식, 프로그람최대최소에 기초한 계산도식, 생존핵에 기초한 계산도식 등 여러가지 계산도식들이 제기되였다. 특히 선행연구[1]에서는 론의점근방에서의 단편선형근사에 기초한 값함수계산도식을 제기하였다. 한편 이 계산도식들에 기초한 최량방략구성에 대한 문제는 선행연구[3, 4]를 제외하고는 미지의 문제로 남아있거나 일부 경우들에 극값묘준방략을 적용하고있지만 그 수렴성평가가 진행되여 있지 않다.

론문에서는 마감소득미분경기에 대하여 다중선형보간에 기초한 한가지 값함수계산도식을 제기하고 그 성질들과 수렴성을 평가한데 기초하여 동일한 직립방체그물에서 단편상수보간방략을 구성하고 그것의 보편최량성을 증명하였다.

마감소득미분경기

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,\ x,\ u,\ \upsilon) \\ x \in \mathbf{R}^n,\ t \in I := [t_{00},\ \theta],\ \ u \in P \subset \mathbf{R}^p,\ \upsilon \in Q \subset \mathbf{R}^q \\ \gamma(x(\cdot)) = \sigma(x(\theta)) \to \min\limits_u \max\limits_\upsilon \end{cases} \tag{1}$$

를 론의하자. 여기서 t는 시간변수, t_{00}, θ는 각각 운동의 처음 및 마감시각들, x는 계의 상태벡토르, u, υ는 각각 첫째 및 둘째 경기자의 조종벡토르들, P, Q는 각각 콤팍트들이다. 첫째 경기자(조종 u)의 목적은 소득을 최소화하는것이고 둘째 경기자(조종 υ)의 목적은 최대화하는것이다. 함수 $f(\cdot)$는 모든 변수들에 관하여 유계평등련속(유계상수 K)이고 변수 t, x에 관한 리프쉬츠조건(리프쉬츠상수 L_f)과 풀이의 연장성조건을 만족시킨다.

또한 아이젝쓰조건

$$\min_{u\in P}\max_{\upsilon\in Q} < s,\ \ f(t,\ x,\ u,\ \upsilon) >= \max_{\upsilon\in Q}\min_{u\in P} < s,\ \ f(t,\ x,\ u,\ \upsilon) > (=: H(t,\ x,\ s)),$$

$$\forall (t,\ x) \in I \times \mathbf{R}^n,\ \forall s \in \mathbf{R}^n$$

을 만족시킨다. 목적함수 $\sigma(\cdot)$는 유계리프쉬츠련속함수이다.(리프쉬츠상수 L_σ)

임의의 초기위치 $(t,\ x) \in I \times \mathbf{R}^n$에 대하여 문제 (1)의 경기값 $w^*(t,\ x)$가 존재하며 이때

값함수 $(t,\ x)\mapsto w^*(t,\ x)$ 는 유계리프쉬츠련속함수(리프쉬츠상수를 L_{w^*} 로 표시한다.)로서 다음의 경계값문제의 최소최대풀이(또는 점성풀이)이다.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w(t,\ x)}{\partial t}+H\left(t,\ x,\ \dfrac{\partial w(t,\ x)}{\partial x}\right)=0,\ (t,\ x)\in[t_{00},\ \theta)\times\mathbf{R}^n \\ w(\theta,\ x)=\sigma(x),\ x\in\mathbf{R}^n\end{cases} \tag{2}$$

방략 $U^0\div u^0(t,\ x)$ 가 있어서 임의의 위치 $(t_0,\ x_0)\in I\times\mathbf{R}^n$ 으로부터 이 방략에 의하여 생성되는 매 운동 $x(\cdot)$ 가 부등식 $\sigma(x(\theta))\le w^*(t_0,\ x_0)$ 을 만족시키면 이 방략을(첫째 경기자의) 보편최량방략이라고 부른다.

값함수계산을 위한 유한계차연산자를 정의하는데 필요한 다중선형보간공식을 보자.

$$\Delta>0,\ \gamma>0,\ \Delta_{\xi_i}:=\gamma\Delta,\ i=\overline{1,\ n} \tag{3}$$

이라고 놓고 상태공간 $\mathbf{R}^n$ 의 매 $\xi_i(i=\overline{1,\ n})$ 축을 공간걸음 Δ_{ξ_i} 에 따라 분할한데 기초하여 얻은 직립방체그물

$$GR=\{x_{GR}=(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n):\ \xi_i=\xi_{0i}+j_i\Delta_{\xi_i},\ i=\overline{1,\ n},\ j_i=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\} \tag{4}$$

(여기서 $\xi_{0i},\ i=\overline{1,\ n}$ 들은 임의로 선택하여 고정시킨 수들이다.)에서 임의의 그물세포 $gd=\prod_{i=1}^{n}[\underline{\xi}_i,\ \overline{\xi}_i]$ 를 생각하자. 여기서 $\underline{\xi}_i,\ \overline{\xi}_i=\underline{\xi}_i+\Delta_{\xi_i}$ 는 ξ_i 축의 아래웃살창값들이다. 선택된 직립방체에서 2^n 개의 정점들에 번호를 붙이여 $y_k^{gd},\ k=\overline{1,\ 2^n}$ 로 표시하고 매 번호 $k\in\overline{1,\ 2^n}$ 에 2진표시 $j^k=(j_1^k,\ \cdots,\ j_n^k)$ 를 대응시키자. 여기서

$$j_i^k=\begin{cases}0\ \ (k\text{째 정점 } y_k^{gd}\text{의 } \xi_i\text{축값이 } \underline{\xi}_i\text{이면}) \\ 1\ \ (k\text{째 정점 } y_k^{gd}\text{의 } \xi_i\text{축값이 } \overline{\xi}_i\text{이면})\end{cases}$$

다음의 함수를 도입한다.

$$\omega_k(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)=\prod_{i=1}^{n}(1-a_i)^{1-j_i^k}a_i^{j_i^k},\ k=\overline{1,\ 2^n}$$

그리고 점 $x=(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n)\in gd$ 에 대하여

$$\omega_k^{gd}(x)=\omega_k\left(\frac{\xi_1-\underline{\xi}_1}{\Delta_{\xi_1}},\ \cdots,\ \frac{\xi_n-\underline{\xi}_n}{\Delta_{\xi_n}}\right),\ k=\overline{1,\ 2^n}$$

이라고 놓자.

분명히 $x=\sum_{k=1}^{2^n}y_k^{gd}\cdot\omega_k^{gd}(x)$ 이며 정점 $y_k^{gd},\ k=\overline{1,\ 2^n}$ 들에 각각 값 $\varphi(y_k^{gd}),\ k=\overline{1,\ 2^n}$ 들이 대응되여있다고 할 때 점 x 에서의 이 값들의 다중선형보간값은

$$ML(\varphi)(x)=\sum_{k=1}^{2^n}\varphi(y_k^{gd})\cdot\omega_k^{gd}(x)$$

이다.

함수 $\varphi:\ \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^1$의 다중선형보간함수 $ML(\varphi)(\cdot)$를 다음과 같이 구성한다. 임의의 점 $x=(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n)\in\mathbf{R}^n$과 이 점을 포함하는 GR의 그물세포 $gd(x)=\prod_{i=1}^n[\underline{\xi}_i,\ \overline{\xi}_i]$를 생각하자. 여기서 $\underline{\xi}_i\le\xi_i\le\overline{\xi}_i,\ i=\overline{1,\ n}$이다.

이때 점 x는

$$x=\sum_{k=1}^{2^n}y_k^{gd(x)}\cdot\omega_k^{gd(x)}(x)$$

로 표시되며 이 점에서의 다중선형보간값 $ML(\varphi)(x)$는

$$ML(\varphi)(x)=\sum_{k=1}^{2^n}\varphi(y_k^{gd(x)})\cdot\omega_k^{gd(x)}(x)$$

이다.

보조정리 1 함수 $\varphi:\ \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^1$이 리프쉬츠상수함수 L_φ인 리프쉬츠련속함수라고 하자. 이때 임의의 점 $x\in\mathbf{R}^n$에 대하여 다음의 부등식이 성립한다.

$$|ML(\varphi)(x)-\varphi(x)|\le\frac{\sqrt{n}}{2}L_\varphi\gamma\Delta$$

증명 사실 다음의 부등식이 성립한다.

$$|ML(\varphi)(x)-\varphi(x)|\le\sum_{k=1}^{2^n}|\varphi(y_k^{gd(x)})-\varphi(x)|\cdot\omega_k^{gd(x)}(x)\le$$

$$\le L_\varphi\sum_{k=1}^{2^n}\|y_k^{gd(x)}-x\|\cdot\omega_k^{gd(x)}(x)\le\frac{\sqrt{n}}{2}L_\varphi\gamma\Delta$$

(증명끝)

보통의 노름 $\|\cdot\|$와 함께 1-노름 $\|\cdot\|_1$을 생각하자. 여기서 $x=(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n)\in\mathbf{R}^n$일 때 $\|x\|_1:=\sum_{i=1}^n|\xi_i|$이다.

보조정리 2 함수 $\varphi:\ \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^1$이 1－노름의 의미에서 리프쉬츠상수 L_φ인 리프쉬츠련속함수라고 하자. 이때 임의의 $x_1,\ x_2\in\mathbf{R}^n$에 대하여 다음의 부등식이 성립한다.

$$|ML(\varphi)(x_1)-ML(\varphi)(x_2)|\le L_\varphi\|x_1-x_2\|_1$$

이제 $t\in I,\ t+\Delta\in I,\ t<\theta$라고 놓고 t시각에 상태공간 $\mathbf{R}^n$의 직립방체그물 GR를 생각할 때마다 GR를 $GR(t)$로 표시하겠다.

$t+\Delta$ 시각에 값함수 $x\mapsto w^*(t+\Delta,\ x)$ 의 근사함수로서 유계리프쉬츠련속함수 $\varphi(\cdot):\ \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^1$이 주어진다고 하자.(리프쉬츠상수를 L_φ로 표시한다.) 이때 함수

$$\widetilde{\Pi}(t,\ \Delta,\ \varphi)(x)=\min_{u\in P}\max_{f\in cof(t,\ x,\ u,\ Q)}\varphi(x+\Delta f) \tag{5}$$

에 기초하여 연산자 $\varphi\mapsto\Pi(t,\ \Delta,\ \varphi)$를 다음과 같이 정의한다.

$$\Pi(t,\ \Delta,\ \varphi)(x):=\begin{cases}ML(\widetilde{\Pi}(t,\ \Delta,\ \varphi))(x), & \Delta>0\\ \varphi(x), & \Delta=0\end{cases} \tag{6}$$

분할 $\pi=\{t_{00}=\tau_0<\tau_1<\cdots<\tau_N=\theta\}$ (여기서 $\Delta=\tau_{i+1}-\tau_i,\ i=\overline{0,\ N-1}$)에 대하여 연산자 Π에 의한 근사도식이 다음의 공식들에 의하여 결정된다고 하자.

$$\begin{aligned}&\overline{w}_\pi(\theta,\ x)=ML(\sigma)(x),\ x\in\mathbf{R}^n\\ &\overline{w}_\pi(t,\ x)=\Pi(t,\ \tau_{i+1}-t,\ \overline{w}_\pi(\tau_{i+1},\ \cdot))(x),\ t\in[\tau_i,\ \tau_{i+1}),\ x\in\mathbf{R}^n,\ i=\overline{0,\ N-1}\end{aligned} \tag{7}$$

이때 다음의 사실이 성립한다.

정리 1 근사도식 (7)은 수렴성오차 $\sqrt{\Delta}$로 경기값함수 $w^*(\cdot)$에로 수렴한다.

$$\|\overline{w}_\pi-w^*\|\le C\sqrt{\Delta}$$

여기서

$$\|\overline{w}_\pi-w^*\|:=\max_{(t,\ x)\in I\times R^n}|\overline{w}_\pi(t,\ x)-w^*(t,\ x)|$$

이때 함수 $\overline{w}_\pi(t,\ \cdot)$는 유계리프쉬츠련속함수로서 리프쉬츠상수 $L_{\overline{w}_\pi}\le\sqrt{n}\exp(L_f(\theta-t_{00}))L_\sigma$를 택할수 있다.

시간축 t의 구간 I에 대한 분할 π와 상태공간 $\mathbf{R}^n$의 직립방체그물 GR의 직적형태로서 시간—상태공간 $I\times\mathbf{R}^n$에 직립방체그물 $\pi\times GR$를 형성하자. 그리고 매 $\tau_i\in\pi$시각에 상태공간 $\mathbf{R}^n$ 또는 그것의 직립방체그물 GR를 생각할 때마다 $\mathbf{R}^n$을 $\mathbf{R}^n(\tau_i)$로, GR를 $GR(\tau_i)$로 표시하겠다.

연산자 Π, 근사도식 (7)로부터 직립방체그물 $GR(\tau_i),\ \tau_i\in\pi,\ i=\overline{0,\ N-1}$의 정점들에서의 함수값 $\overline{w}_\pi(\tau_i,\ x_{GR}),\ x_{GR}\in GR(\tau_i)$들은 함수값 $\overline{w}_\pi(\tau_{i+1},\ x_{GR}),\ x_{GR}\in GR(\tau_{i+1})$들에만 의존하여 계산된다는것을 알수 있다. 직립방체그물 $\pi\times GR$의 매 정점에서 다음과 같이 결정되는 첫째 경기자의 조종도 마찬가지이다.

$$U^0(\tau_i,\ x_{GR})=\arg\min_{u\in P}\max_{f\in cof(\tau_i,\ x_{GR},\ u,\ Q)}\overline{w}(\tau_{i+1},\ x_{GR}+\Delta f),\ (\tau_i,\ x_{GR})\in\pi\times GR,\ i=\overline{0,\ N-1} \tag{8}$$

$\mathbf{R}^n(\tau_i)$에서의 함수 $\overline{w}_\pi(\tau_i,\ \cdot)$는 값 $\overline{w}_\pi(\tau_i,\ x_{GR}),\ x_{GR}\in GR(\tau_i)$들을 다중선형보간하여 얻어진다.

$\mathbf{R}^n(\tau_i)$에서의 조종함수 $U^C(\tau_i,\ \cdot)$를 다음과 같이 정의한다.

$$U^C(\tau_i,\ x)=U^0(\tau_i,\ x_{GR}),\ x_{GR}=x_{GR}(x)=\arg\min_{y\in GR(\tau_i)}\|y-x\|,\ x\in\mathbf{R}^n(\tau_i) \tag{9}$$

이제 시간구간 I의 분할 π에 기초한 첫째 경기자의 결음조종절차로서 $U^C(\tau_i,\ \cdot),\ \tau_i\in\pi$를 택하고 이 절차의 보편최량성을 평가하자.

이 결음조종절차에 의하여 초기위치 $(t_0,\ x_0),\ t_0\in I$로부터 생성되는 결음운동은 미분

방정식

$$\begin{cases} \dot{x}_\pi(t) = f(t,\ x_\pi(t),\ U^C(\tau_i,\ x_\pi(\tau_i)),\ v(t)),\ \tau_i \le t < \tau_{i+1},\ i = \overline{i_0,\ N-1} \\ x_\pi(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{10}$$

의 풀이 $x_\pi(\cdot): [t_0,\ \theta] \to \mathbf{R}^n$ 이다. 여기서 $v(\cdot): [t_0,\ \theta] \to Q$ 는 임의의 르베그가측함수이며 τ_{i_0} 은 $\tau_{i_0} \le t_0 < \tau_{i_0+1}$ 인 시각이며 $\tau_{i_0} < t_0$ 인 경우에 $U^C(t_0,\ x_0) = U^C(\tau_{i_0},\ x_0)$ 이라고 놓는다.

정리 2 파라메터 γ 가 다음과 같이 주어진다고 하자.

$$\gamma = \rho\Delta^a,\ a > 0,\ \rho > 0$$

이때 임의의 초기위치 $(t_0,\ x_0),\ t_0 \in I$ 와 임의의 르베그가측조종 $v(\cdot): [t_0,\ \theta] \to Q$ 에 대하여 걸음조종절차 $U^C(\tau_i,\ \cdot),\ \tau_i \in \pi$ 에 의하여 생성되는 걸음운동 $x_\pi(\cdot)$ 에 대하여 평가식

$$\sigma(x_\pi(\theta)) \le w^*(t_0,\ x_0) + \psi(\Delta),\ \lim_{\Delta \to 0} \psi(\Delta) = 0$$

이 성립한다. 여기서

$$\psi(\Delta) := L_{w^*}(1+K)\Delta + C\sqrt{\Delta} + (\theta - \tau_{i_0+1})L_{\overline{w}_\pi}\left[\sqrt{n}\Delta^a \exp(L_f \Delta) + \frac{\sqrt{n}}{2}\Delta^a + \frac{1}{2}L_f(1+K)\Delta\right]$$

이다.

참 고 문 헌

[1] N. D. Botkin et al.; SIAM J. Sci. Comput., 33, 2, 992, 2011.

[2] A. M. Tarasyev; Optimal Control and Dierential Games, 88, 337, 1999.

[3] M. Falcone; International Game Theory Review, 8, 231, 2006.

[4] G. E. Ivanov; Differential Equations, 48, 4, 560, 2012.

주체106(2017)년 8월 10일 원고접수

An Approximation Calculation Method of the Value Function and Optimal Strategy in Differential Games with Terminal Payoffs

Ri Kuk Hwan

In this paper, we present an approximation scheme based on the multilinear interpolation for calculating the value function in differential games with terminal payoffs and check sufficient conditions for the convergence. Also, we construct a strategy of the piecewise constant interpolation in a cubic grid equipped with such a scheme and prove its universal optimality.

Key words: differential games with terminal payoffs, value function, optimal strategy