김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제4호

행렬나무정리에 의한 완전그라프와 완전다조그라프의 결합그라프에서의 생성나무개수 평가

우 승 식

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《과학과 기술이 매우 빨리 발전하고있는 오늘의 현실은 기초과학을 발전시킬것을 더욱 절실하게 요구하고있습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제11권 138페지)

그라프에서의 생성나무개수평가문제는 콤퓨터과학에서의 프로그람설계, 생물학 등 여러 분야에서 리론실천적으로 제기되는 셈세기조합의 중요한 분야이다.

론문에서는 키르히호프행렬에 의한 행렬나무정리를 리용하여 완전그라프 K_n과 완전다조그라프 $K_{n_1,n_2,\cdots,n_k}$의 표식붙은 결합그라프 $K_n\oplus K_{n_1,n_2,\cdots,n_k}$에서의 생성나무개수를 평가하였다.

정점모임이 서로 비교차하는 두 그라프 $G_1=(V_1,\ E_1)$과 $G_2=(V_2,\ E_2)$에 대하여 정점모임은 $V_1\cup V_2$이고 릉모임은 $E_1\cup E_2\cup E(V_1,\ V_2)$인 새로운 그라프를 G_1과 G_2의 결합그라프(join graph)라고 부르고 $G=G_1\oplus G_2$로 표시한다. $E(V_1,\ V_2)=\{(i,\ j)\,|\,i\in V_1,\ j\in V_2\}$이다.

두 그라프 $G_1=(V_1,\ E_1),\ G_2=(V_2,\ E_2)$의 강적그라프(strong product graph)를 다음과 같이 정의하고 $G_1\otimes G_2=(V,\ E)$로 표시한다.

즉 정점모임은 두 그라프의 정점모임의 데까르트적 $V:=V_1\times V_2$이고 릉모임 E는 다음과 같다.

$G_1\otimes G_2$의 두 정점 $vu,\ v'u'(v,\ v'\in V_1,\ u,\ u'\in V_2)$사이의 릉은 다음의 세가지 조건중 어느 하나가 성립할 때 존재한다.

ㄱ) $\{v,\ v'\}\in E_1,\ u=u'$

ㄴ) $\{u,\ u'\}\in E_2,\ v=v'$

ㄷ) $\{v,\ v'\}\in E_1,\ \{u,\ u'\}\in E_2$

또한 정점모임은 두 그라프의 정점모임의 데까르트적 $V:=V_1\times V_2$이고 릉모임 E는 ㄱ) 혹은 ㄴ)를 만족시키는 두 정점 $vu,\ v'u'\ (v,\ v'\in V_1,\ u,\ u'\in V_2)$사이의 릉들로 이루어진 그라프를 이 두 그라프 $G_1=(V_1,\ E_1),\ G_2=(V_2,\ E_2)$의 데까르트적그라프(cartesian product graph)라고 부르고 $G_1\square G_2=(V,\ E)$로 표시한다.

그라프 G의 두 정점 $u,\ v$사이 릉의 개수를 정점쌍 $(u,\ v)$의 다중도 또는 릉 $(u,\ v)$의 다중도라고 부르고 $l_G(u,\ v)$로 표시한다.

그라프 G의 정점 v에 이웃하고있는 릉의 개수를 이 정점의 차수라고 부르고 $d_G(v)$로 표시한다.

$n-$정점다중그라프 G에 대하여 $n\times n$행렬 $L(G)=(l_{ij})_{n,n}$으로서 i번째 주대각선에는 정점 v_i의 차수 즉 $l_{ii}=d_G(v_i)$가 놓이고 $i\neq j$일 때에는 두 정점 v_i와 v_j가 이웃이면 $l_{ij}=-l_G(v_i,\ v_j)$, 이웃이 아니면 $l_{ij}=0$이 놓이는 행렬 $L(G)$를 G의 키르히호프행렬이라고

부른다.

선행연구[3]에서는 임의의 $n-$정점다중그라프 G에 대하여 $L(G)$의 임의의 주대각선성분에 대한 여소행렬식은 서로 같으며 그 값은 G의 생성나무개수와 같다는것을 밝혔다. 이것을 행렬나무정리라고 부른다.

선행연구[4]에서는 조합적방법으로 완전그라프 K_n과 완전2조그라프 $K_{p,q}$의 표식붙은 결합그라프 $K_n \oplus K_{p,q}$에서의 생성나무개수를 평가하였다.

선행연구[1]에서는 행렬나무정리를 리용하여 완전그라프 K_n과 완전다조그라프 $K_{n_1, n_2, \cdots, n_t}$의 강적그라프 $K_n \otimes K_{n_1, n_2, \cdots, n_t}$의 생성나무개수를 평가하였으며 선행연구[2]에서는 같은 방법으로 데까르트적그라프 $K_n \square K_{n_1, n_2, \cdots, n_t}$의 생성나무개수를 평가하였다. 그러나 선행연구[4]에서는 완전그라프 K_n과 완전2조그라프 $K_{p,q}$의 결합그라프 $K_n \oplus K_{p,q}$에서의 생성나무개수를 평가하였지만 그것을 일반화하여 완전그라프 K_n과 완전다조그라프 $K_{n_1, n_2, \cdots, n_t}$의 결합그라프 $K_n \oplus K_{p,q}$에서의 생성나무개수는 평가하지 못하였다.

론문에서는 완전그라프 K_n과 완전3조그라프 $K_{p,q,r}$의 표식붙은 결합그라프 $K_n \oplus K_{p,q,r}$에서의 생성나무개수를 평가하고 이 평가공식과 이미 선행연구에서 밝힌 완전그라프 K_n과 완전2조그라프 $K_{p,q}$의 표식붙은 결합그라프 $K_n \oplus K_{p,q}$에서의 생성나무개수평가공식의 일반적특징을 분석한데 기초하여 이 평가공식들을 완전그라프 K_n과 완전다조그라프 $K_{n_1, n_2, \cdots, n_t}$의 표식붙은 결합그라프 $K_n \otimes K_{n_1, n_2, \cdots, n_t}$에서의 생성나무개수공식으로 일반화하고 그것을 키르히호프행렬에 의한 행렬나무정리를 리용하여 확증하였다.

명제 n차행렬식에 대하여 다음의 사실이 성립한다.

$$\begin{vmatrix} a_1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & a_2 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = (a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1)\left(1-\frac{1}{a_1+1}-\frac{1}{a_2+1}-\cdots-\frac{1}{a_n+1}\right)$$

결합그라프 $K_n \oplus K_{p,q,r}$의 정점들을 다음과 같은 순서로 표식하자. 먼저 K_n의 정점들을 앞에 놓고 그다음에 $K_{p,q,r}$에서 p개의 정점들, q개의 정점들, r개의 정점들을 차례로 놓는다. 그러면 그라프 $K_n \oplus K_{p,q,r}$는 $m := n+p+q+r$개의 정점들을 가진다.

정리 1 결합그라프 $K_n \oplus K_{p,q,r}$의 생성나무개수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \nu(K_n \oplus K_{p,q,r}) &= (n+p+q+r)^{n+1}(n+q+r)^{p-1}(n+p+r)^{q-1}(n+p+q)^{r-1} = \\ &= m^{n+1}(m-p)^{p-1}(m-q)^{q-1}(m-r)^{r-1} \end{aligned} \tag{1}$$

선행연구[4]에서는 조합적방법으로 완전그라프 K_n과 완전2조그라프 $K_{p,q}$의 결합그라프 $K_n \oplus K_{p,q}$에서의 생성나무개수를 평가하였는데 그 결과는 다음과 같다.

$$\nu(K_n \oplus K_{p,g}) = (n+p+q)^n (n+p)^{q-1}(n+q)^{p-1} = (m')^n (m'-p)^{p-1}(m'-q)^{q-1} \tag{2}$$

여기서 $m' := n+p+q$이다.

식 (1)과 (2)를 비교하여보면 완전그라프 K_n과 완전다조그라프 $K_{n_1, n_2, \cdots, n_t}$의 표식붙

은 결합그라프 $K_n \otimes K_{n_1, n_2, \cdots, n_t}$ 에서의 생성나무개수공식은 다음과 같이 추측할수 있다.

$$m := n + n_1 + n_2 + \cdots + n_t;\ m_i := m - n_i \ \ (i = \overline{1,\ t})$$

로 놓으면

$$\nu(K_n \oplus K_{n_1, n_2, \cdots, n_t}) = m^{n+t-2} \prod_{i=1}^{t} m_i^{\ n_i - 1}$$

이다.

정리 2 결합그라프 $K_n \oplus K_{n_1, n_2, \cdots, n_t}$ 의 생성나무개수는 다음과 같다.

$$\nu(K_n \oplus K_{n_1, n_2, \cdots, n_t}) = m^{n+t-2} \prod_{i=1}^{t} m_i^{\ n_i - 1} \tag{3}$$

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보 수학, 64, 2, 102, 주체107(2018).

[2] 우승식; 조선민주주의인민공화국 과학원통보, 4, 15, 주체106(2017).

[3] C. Godsil, G. Royle; Algebraic Graph Theory, Springer, 279～301, 2001.

[4] S. S. U; Electronic Journal of Graph Theory and Applications, 4, 2, 171, 2016.

주체109(2020)년 6월 5일 원고접수

Enumeration for the Number of Spanning Trees in the Join One of the Complete Graph and Complete Multipartite Graph by Using the Matrix-tree Theorem

U Sung Sik

In this paper, we have enumerated the number of spanning trees in the join $K_n \oplus K_{n_1, n_2, \cdots, n_t}$ of the complete graph K_n and the complete multipartite graph $K_{n_1, n_2, \cdots, n_t}$ by using the matrix-tree theorem based on the Kirchhoff matrix.

Keywords: spanning tree, join graph, complete multipartite graph