김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체103(2014)년 제60권 제9호 Vol. 60 No. 9 JUCHE103(2014).

내재적인 위약금을 가지는 회사채권가격의 결합2인자모형

전 창 원

론문에서는 내재적인 위약금을 가지는 계약위반가능한 회사채권가격의 구조－약화결합2인자모형에 대하여 연구하였다.

선행연구[5]에서는 돌발계약위반도가 리자률의 선형함수인 경우 구조－약화결합모형으로 계약위반가능한 회사채권가격의 반해석적인 공식을 연구하였으며 선행연구[1, 4]에서는 돌발계약위반도가 우연과정일 때 구조－약화결합3인자모형으로 회사채권의 가격을 모형화하고 가격공식을 주었다.

선행연구[6]에서는 회사가치와 계약위반경계가 리산적으로 주어지고 돌발계약위반도가 회사가치의 함수로 주어지는 경우 회사채권가격모형을 연구하였다.

선행연구[1, 4－6]에서는 위약금이 외재적이라(회사가치에 무관계하다.)고 가정하였다.

한편 선행연구[3]에서는 내재적인 위약금을 가지는 리산리자표채권의 가격을 구조법으로 모형화하고 합성선택권방법으로 연구하였으며 선행연구[2]에서는 내재적인 위약금을 가지는 계약위반가능한 회사채권가격의 구조－약화결합1인자모형을 상결수고계두값선택권[7]을 리용하여 연구하였다.

여기서는 돌발계약위반도와 계약위반경계가 리산적으로 주어지는 경우 내재적인 위약금을 가지는 회사채권가격의 구조－약화결합2인자모형을 시간의존결수를 가지는 고계두값선택권을 리용하여 연구하였다.

가정 1 리자률은 위험중성측도밑에서 다음의 모형을 만족시킨다.

$$dr_t = a_r(r,\ t)dt + s_r(t)dW_1(t),\ \ a_r(r,\ t) = a_1(t) - a_2(t)r \tag{1}$$

여기서 W_1은 표준위너과정이다.

가정 2 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = T$ 이고 $t_1, \cdots,\ t_N$ 들은 공포일들이며 T는 채권마감일, 채권의 액면가격은 1(화페단위)이다.

매 $i = 0, \cdots,\ N-1$에 대하여 구간 $[t,\ t+dt] \cap [t_i,\ t_{i+1}]$ 에서 돌발계약위반이 일어날 확률은 $\lambda_i dt$ 이다. 여기서 돌발계약위반도 λ_i 는 상수이다.

가정 3 회사가치 V_t 는 위험중성측도밑에서 기하브라운운동을 만족시킨다.

$$dV(t) = (r_t - b)V(t)dt + s_V(t)V(t)dW_2(t)$$

여기서 W_2 는 표준위너과정이고 $E(dW_1,\ dW_2) = \rho dt$ 이다.

웃식으로부터 알수 있는바와 같이 회사는 단위회사가치당 b(상수)의 비률로 배당을 련속적으로 지불한다.

가정 4 계약위반경계는 시간 t_i $(i = 1, \cdots,\ N)$에서만 주어진다. 즉 예측가능한 계약위반은 $V(t_i) \le K_i Z(r,\ t_i;T)$ $(i = 1, \cdots,\ N)$일 때 일어난다. 여기서 K_i 는 채무량을 반영하는 상수이고 $Z(r,\ t;T)$ 는 무위험무리자채권의 가격이다.

가정 5 예측가능계약위반이 발생하는 경우 위약금은 $R_{ed} = R_e \cdot \alpha \cdot V$ 로 주어진다.

돌발계약위반이 발생하는 경우 위약금은 $R_{ud} = \min\{Z(r,\ t),\ R_u \cdot \alpha \cdot V\}$ 로 주어진다. 여기서 위약금률 $0 \le R_e,\ R_u \le 1$ 은 상수들이고 $0 < \alpha < 1$ 은 채권발행수와 관련되는 상수이다.

예측가능한 계약위반때의 위약금과 돌발계약위반때의 위약금을 다른 형태로 준것은 돌발계약위반때의 위약금이 무위험채권의 현재가격보다 더 커지는것을 피하기 위해서이다.

가정 6 시간구간 $(t_i,\ t_{i+1}]$ 에서 채권가격은 충분히 미끈한 두변수함수 $C_i(V,\ r,\ t)$ 로 주어진다.($i = 0, 1, \cdots, N-1$)

우리가 풀어야 할 문제는 우의 가정밑에서 가격함수 $C_i(V,\ r,\ t)$($i = 0, \cdots, N-1$)들의 표시식을 구하는것이다.

채권가격의 편미분방정식모형에 대하여 고찰하자.

가정 1밑에서 마감일이 T이고 액면가격이 1인 무위험무리자채권의 현재가격 $Z(r,\ t;T)$ 는 다음과 같은 문제의 풀이로 된다.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Z}{\partial t} + \dfrac{1}{2} s_r^2(t) \dfrac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + a(r,\ t)\dfrac{\partial Z}{\partial r} - rZ = 0 \\ Z(r,\ T) = 1 \end{cases} \tag{2}$$

이 문제의 풀이는 다음과 같이 주어진다.

$$Z(r,\ \ t\,;T) = e^{A(t,\ T) - B(t,T)r}. \tag{3}$$

여기서 $A(t,\ T)$ 와 $B(t,\ T)$ 는 리자률의 구체적모형에 따라 다르게 주어진다. 례하면 리자률이 Vasicek모형을 만족시키면 즉 모형 (1)에서의 결수 $a_1(t),\ a_2(t),\ s_r(t)$ 들이 모두 상수이면 $A(t,\ T)$ 와 $B(t,\ T)$ 는 각각 다음과 같이 주어진다.

$$A(t,\ T) = -\int_t^T \left[a_2 B(u,\ T) - \frac{1}{2} s_r^2 B^2(u,\ T) \right] du,\ \ B(t,\ T) = \frac{1 - e^{-a_2(T-t)}}{a_2} \tag{4}$$

가정 1, 3밑에서 돌발계약위반도가 상수 λ, 돌발계약위반때 위약금이 R_{ud} 인 채권가격은 다음의 편미분방정식을 만족시킨다.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[s_V^2(t) V^2 \frac{\partial^2 C}{\partial V^2} + 2\rho\, s_V(t) s_r(t) V \frac{\partial^2 C}{\partial V \partial r} + s_r^2(t) \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} \right] + (r-b)V\frac{\partial C}{\partial V} + a_r(r,\ t)\frac{\partial C}{\partial r} - (r+\lambda)C + \lambda R_{ud} = 0$$

이리하여 $C_N(V,\ r,\ t) \equiv 1$ 과 같이 놓으면 가정 1－6밑에서 우리의 채권가격은 다음과 같은 문제의 풀이로 된다.

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[s_V^2(t) V^2 \frac{\partial^2 C_i}{\partial V^2} + 2\rho s_V(t) s_r(t) V \frac{\partial^2 C_i}{\partial V \partial r} + s_r^2(t) \frac{\partial^2 C_i}{\partial r^2} \right] + (r-b)V\frac{\partial C_i}{\partial V} + a_r(r,\ t)\frac{\partial C_i}{\partial r} -$$

$$-(r+\lambda_i)C_i + \lambda_i \min\{Z(r,\ t),\ R_u \cdot \alpha \cdot V\} = 0 \tag{5}$$

$$C_i(t_{i+1}) = C_{i+1}(t_{i+1}) \cdot 1\{V > K_{i+1}Z\} + R_e \cdot \alpha \cdot V \cdot 1\{V \le K_{i+1}Z\},\ t_i \le t < t_{i+1},\ \ i = 0,\ \cdots,\ N-1$$

시간의존결수를 가지는 고계두값선택권의 가격공식과 그것의 적분을 잘 리용하면 우리는 아래와 같이 문제 (5)의 풀이공식을 얻을수 있다.

정리 가정 1－6밑에서 우리의 채권가격은 다음과 같이 주어진다.

$$C_i(V,\ r,\ t) = Z(r,\ t) \cdot u_i(V / Z(r,\ t)\,,\ t),\ t_i \le t < t_{i+1},\ \ i = 0,\ \cdots,\ N-1 \tag{6}$$

$$u_i(x,\ t)=e^{-\lambda_i(t_{i+1}-t)}\left\{e^{-\sum_{k=i+1}^{N-1}\lambda_k(t_{k+1}-t_k)}B^{+\ \cdots\ +}_{K_{i+1}\cdots K_N}(x, t\ ;t_{i+1},\cdots,\ t_N\ ;0,\ b,\ S_X(\cdot))+\right.$$

$$+R_e\alpha\sum_{m=i}^{N-1}e^{-\sum_{k=i+1}^{m}\lambda_k(t_{k+1}-t_k)}A^{+\ \cdots +\ \ -}_{K_{i+1}\cdots K_m K_{m+1}}(x,\ t\ ;t_{i+1},\cdots,\ t_m,\ t_{m+1};0,\ b,\ S_X(\cdot))+$$

$$+\sum_{m=i+1}^{N-1}\lambda_m e^{-\sum_{k=i+1}^{m-1}\lambda_k(t_{k+1}-t_k)}\int_{t_m}^{t_{m+1}}e^{-\lambda_m(\tau-t_m)}\left[B^{+\ \cdots\ +\ \ +}_{K_{i+1}\cdots K_m\frac{1}{R_u\alpha}}(x,\ t\ ;t_{i+1},\cdots,\ t_m,\ \tau\ ;0,\ b,\ S_X(\cdot))+\right.$$

$$\left.\left.+R_u\cdot\alpha\cdot A^{+\ \cdots\ +\ \ -}_{K_{i+1}\cdots K_m\frac{1}{R_u\alpha}}(x,\ t\ ;t_{i+1},\cdots,\ t_m,\ \tau\ ;0,\ b,\ S_X(\cdot))\right]d\tau\right\}+$$

$$+\lambda_i\int_t^{t_{i+1}}e^{-\lambda_i(\tau-t)}\left[B^{+}_{\frac{1}{R_u\alpha}}(x,\ t\ ;\tau\ ;0,\ b,\ S_X(\cdot))+R_u\cdot\alpha\cdot A^{-}_{\frac{1}{R_u\alpha}}(x,\ t\ ;\tau\ ;0,\ b,\ S_X(\cdot))\right]d\tau \tag{7}$$

$$S_X^2(t)=s_V^2(t)+2\rho\cdot s_V(t)\cdot s_r(t)\cdot B(t,\ T)+[s_r(t)\cdot B(t,\ T)]^2\ge 0 \tag{8}$$

여기서 $B^{+\cdots+}_{K_1\cdots K_m}(x,\ t\ ;t_1,\cdots,\ t_m\ ;0,\ b,\ s_X(\cdot))$, $A^{+\ \cdots\ +\ \ -}_{K_1\cdots K_{m-1}K_m}(x,\ t\ ;t_1,\cdots,\ t_m\ ;0,\ b,\ s_X(\cdot))$은 각각 리자률이 0, 배당률이 b, 파동률이 $S_X(t)$인 경우 m계현금 및 자산두값선택권의 가격이다.

증명 가정 1－6밑에서 채권가격모형은 문제 (5)로 주어진다.

문제 (5)에서 다음의 가격계산단위변환을 리용한다.

$$x=V/Z(r,\ t),\quad u_i(x,\ t)=C_i(V,\ r,\ t)/Z(r,\ t),\quad t_i\le t<t_{i+1},\quad i=0,\cdots,\ N-1 \tag{9}$$

여기서 $Z(r,\ t)$는 식 (3)에서 주어진 무위험채권의 가격이다.

식 (9)를 문제 (5)의 첫 방정식에 대입하고

$$C_t=u_tZ-xu_xZ_t+uZ_t,\ \ VC_V=xu_xZ,\quad C_r=Z_r(u-xu_x),\quad V^2C_{VV}=x^2u_{xx}Z,$$

$$VC_{Vr}=-x^2u_{xx}Z_r,\quad C_{rr}=Z_{rr}(u-xu_x)+x^2u_{xx}Z_r^2/Z,\quad Z_r/Z=-B(t,\ T)$$

와 $Z(r,\ t)$에 관한 방정식 (2)를 고려하면 다음의 식이 얻어진다.

$$u_tZ+\frac{1}{2}x^2u_{xx}Z[s_V^2(t)+2\rho s_V(t)s_r(t)B(t)+(s_r(t)B(t))^2]-bxu_xZ-\lambda_iuZ+\lambda_iR_uZ(r,\ t)=0$$

이 식의 량변을 Z로 나누고 $S_X^2(t)=s_V^2(t)+2\rho s_V(t)\cdot s_r(t)\cdot B(t)+(s_r(t)B(t))^2$으로 놓으면 문제 (5)는 다음과 같은 1차원문제로 된다.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_i}{\partial t}+\dfrac{1}{2}S_X^2(t)x^2\dfrac{\partial^2u_i}{\partial x^2}-bx\dfrac{\partial u_i}{\partial x}-\lambda_i(u_i-R_u)=0,\ t_i<t<t_{i+1},\quad x>0\\ u_i(x,\ t_{i+1})=u_{i+1}(x,\ t_{i+1})\cdot 1\{x>K_{i+1}\}+R_e\cdot 1\{x\le K_{i+1}\},\quad x>0\,,\ i=0,\cdots,\ N-1\end{cases}$$

여기서 $u_N(x,\ t)\equiv 1$이다.

미지함수변환

$$u_i=(1-R_u)W_i+R_u\quad (i=0,1,\cdots,\ N-1) \tag{10}$$

를 실시하면 $W_N(x,\ t)\equiv 1$이라고 할 때 다음의 문제가 얻어진다.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W_i}{\partial t} + \dfrac{1}{2} S_X^2(t) x^2 \dfrac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} - bx \dfrac{\partial W_i}{\partial x} - \lambda_i W_i = 0, \quad t_i \le t < t_{i+1}, \ x > 0 \\ W_i(x,\ t_{i+1}) = W_{i+1}(x,\ t_{i+1}) \cdot 1\{x > K_{i+1}\} + \dfrac{R_e - R_u}{1 - R_u} \cdot 1\{x < K_{i+1}\}, \ x > 0, \quad i = 0, \cdots, \ N-1 \end{cases} \tag{11}$$

W_i 들을 리용하면 채권가격은 식 (6)과 같이 주어진다.

방정식 (11)을 $t \in [t_i,\ t_{i+1})$ 시각이후의 생존확률의 방정식이라고 부른다.

이 방정식은 블랙－숄즈방정식들의 모임이다. 그러나 곁수 $S_X^2(t)$ 는 상수가 아니다.

이제 방정식 (11)을 풀자.

$i = N-1$ 일 때 방정식 (11)은 다음과 같다.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W_{N-1}}{\partial t} + \dfrac{1}{2} S_X^2(t) x^2 \dfrac{\partial^2 W_{N-1}}{\partial x^2} - bx \dfrac{\partial W_{N-1}}{\partial x} - \lambda_{N-1} W_{N-1} = 0, \quad t_{N-1} \le t < t_N, \ x > 0 \\ W_{N-1}(x,\ t_N) = 1\{x > K_N\} + (R_e - R_u)/(1 - R_u) \cdot 1\{x < K_N\}, \quad x > 0 \end{cases}$$

이것은 곁수가 $\lambda_{N-1},\ \lambda_{N-1} + b,\ S_X(t)$ 이고 그 마감리득이 현금 및 자산두값선택권들의 결합으로 되는 두값선택권의 가격문제이다.

두값선택권의 정의에 의하여 $W_{N-1}(x,\ t)$ 는 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} W_{N-1}(x,\ t) = {} & B_{K_N}^{+}(x,\ t\ ;\ t_N\ ;\ \lambda_{N-1},\ \lambda_{N-1} + b,\ S_X(\cdot)) + (R_e - R_u)/(1 - R_u) \cdot \\ & \cdot B_{K_N}^{-}(x,\ t\ ;\ t_N\ ;\ \lambda_{N-1},\ \lambda_{N-1} + b,\ S_X(\cdot)), \ t_{N-1} \le t < t_N, \ x > 0 \end{aligned} \tag{12}$$

여기서 $B_K^s(x,\ t\ ;\ T\ ;\ r(\cdot),\ q(\cdot),\ \sigma(\cdot))$ 은 선행연구[2]에서 주어진다.

식 (12)를 곁수 $r = 0,\ q = b,\ \sigma(t) = S_X(t)$ 를 가지는 현금 및 자산두값선택권의 가격으로 표시하면 다음의 식이 얻어진다.

$$W_{N-1}(x,\ t) = e^{-\lambda_{N-1}(t_N - t)} B_{K_N}^{+}(x,\ t\ ;\ t_N\ ;\ 0,\ b,\ S_X(\cdot)) + \frac{R_e - R_u}{1 - R_u} \cdot e^{-\lambda_{N-1}(t_N - t)} B_{K_N}^{-}(x,\ t\ ;\ t_N\ ;\ 0,\ b,\ S_X(\cdot))$$

$i = N-2$ 일 때 문제 (11)을 풀기 위하여서는 식 (12)를 곁수 $r = \lambda_{N-2},\ q = \lambda_{N-2} + b,$ $\sigma(t) = S_X(t)$ 인 현금 및 자산두값선택권으로 표시할 필요가 있다. 그렇게 표시하면

$$W_{N-1}(x,\ t) =$$

$$= e^{-(\lambda_{N-1} - \lambda_{N-2})(t_N - t)} \left[B_{K_N}^{+}(x,\ t\ ;\ t_N\ ;\ \lambda_{N-2},\ \lambda_{N-2} + b,\ S_X(\cdot)) + \frac{R_e - R_u}{1 - R_u} \cdot B_{K_N}^{-}(x,\ t\ ;\ t_N\ ;\ \lambda_{N-2},\ \lambda_{N-2} + b,\ S_X(\cdot)) \right].$$

웃식을 리용하면 $i = N-2$ 일 때 문제 (11)은 다음과 같다.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W_{N-2}}{\partial t} + \dfrac{1}{2} S_X^2(t) x^2 \dfrac{\partial^2 W_{N-2}}{\partial x^2} - bx \dfrac{\partial W_{N-2}}{\partial x} - \lambda_{N-2} W_{N-2} = 0, \quad t_{N-2} \le t < t_{N-1}, \ x > 0 \\ W_{N-2}(x,\ t_{N-1}) = e^{-(\lambda_{N-1} - \lambda_{N-2})(t_N - t_{N-1})} [B_{K_N}^{+}(x,\ t_{N-1}\ ;\ t_N\ ;\ \lambda_{N-2},\ \lambda_{N-2} + b,\ S_X(\cdot)) \cdot 1\{x > K_{N-1}\} + \\ \qquad + (R_e - R_u)/(1 - R_u) \cdot B_{K_N}^{-}(x,\ t\ ;\ t_N\ ;\ \lambda_{N-2},\ \lambda_{N-2} + b,\ S_X(\cdot)) \cdot 1\{x > K_{N-1}\}] + \\ \qquad + (R_e - R_u)/(1 - R_u) \cdot 1\{x < K_{N-1}\}, \ x > 0 \end{cases}$$

이것은 곁수가 $\lambda_{N-2},\ \lambda_{N-2} + b,\ S_X(t)$ 이고 마감리득이 현금 및 자산두값선택권들의 1차결합인 두값선택권가격문제이다.

2계두값선택권의 정의에 의하여 $W_{N-2}(x,\ t)$는 다음과 같이 표시된다.

$$W_{N-2}(x,\ t)=e^{-(\lambda_{N-1}-\lambda_{N-2})(t_N-t_{N-1})}[B^{+\ +}_{K_{N-1}K_N}(x,\ t\,;t_{N-1},\ t_N\,;\lambda_{N-2},\ \lambda_{N-2}+b,\ S_X(\cdot))+$$
$$+(R_e-R_u)/(1-R_u)\cdot B^{+\ -}_{K_{N-1}K_N}(x,\ t\,;t_{N-1},\ t_N\,;\lambda_{N-2},\ \lambda_{N-2}+b,\ S_X(\cdot))]+$$
$$+(R_e-R_u)/(1-R_u)B^{-}_{K_{N-1}}(x,\ t\,;t_{N-1};\lambda_{N-2},\lambda_{N-2}+b,\ S_X(\cdot)),\ t_{N-2}\le t<t_{N-1},\ x>0$$

여기서 $B^{s_1\ s_2}_{K_1K_2}(x,\ t\,;T_1,\ T_2;r(\cdot),\ q(\cdot),\ \sigma(\cdot))$은 선행연구[2]에서 주어진다.

$W_{N-2}(x,\ t)$를 결수 $r=0,\ q=b,\ \sigma(t)=S_X(t)$인 현금 및 자산두값선택권으로 고쳐쓰자.

$$W_{N-2}(x,\ t)=e^{-\lambda_{N-2}(t_{N-1}-t)-\lambda_{N-1}(t_N-t_{N-1})}B^{+\ +}_{K_{N-1}K_N}(x,\ t\,;t_{N-1},\ t_N\,;0,\ b,\ S_X(\cdot))+$$
$$+\frac{R_e-R_u}{1-R_u}\cdot[e^{-\lambda_{N-2}(t_{N-1}-t)-\lambda_{N-1}(t_N-t_{N-1})}B^{+\ -}_{K_{N-1}K_N}(x,\ t\,;t_{N-1},\ t_N\,;0,\ b,\ S_X(\cdot))+$$
$$+e^{-\lambda_{N-2}(t_{N-1}-t)}B^{-}_{K_{N-1}}(x,\ t\,;t_{N-1};0,\ b,\ S_X(\cdot))],\ \ t_{N-2}\le t<t_{N-1},\ \ x>0$$

수학적귀납법을 리용하면 식 (7)을 얻는다.

식 (9), (10)을 리용하여 본래의 변수에로 돌아가면 식 (6)을 얻는다.(증명끝)

주의 정리에서 r를 상수로 하면 1인자모형으로 된다. 이때 얻어지는 결과는 선행연구[2, 8]의 결과와 약간 다른데 그 차이는 위약금의 형태의 차이로부터 온다.

참 고 문 헌

[1] 류영철 등; 수학, 1, 26, 주체99(2010).

[2] 서윤철 등; 조선수학학회지, 6, 1, 17, 주체101(2012).

[3] Y. Bi et al.; Journal of Tonhji University (Natural Science), 35, 7, 989, 2007.

[4] L. Cathcart et al.; Journal of Computational Finance, 6, 3, 91, 2003.

[5] O Hyong Chol et al.; Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2, 1, 1, 2014.

[6] O Hyong Chol et al.; Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1, 2, 247, 2013.

[7] O Hyong Chol et al.; Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2, 1, 190, 2014.

주체103(2014)년 5월 5일 원고접수

Unified 2 Factors Model for a Corporate Bond with the Endogenous Penalty

Jon Chang Won

We established a unified two factors model for corporate bond with discrete default intensity and default barrier in the case with endogenous default recovery and derived the pricing formula using higher order binary options with time dependent coefficients and their integrals.

Key word: unified two-factors model