김일성종합대학학보　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　주체110(2021)년
수 학　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　제67권　제3호

변지수헤르쯔－모리공간우에서 분수적분연산자의 유계성

채 규 성

경애하는 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《우리는 자기 땅에 발을 붙이고 눈은 세계를 볼데 대한 장군님의 뜻대로 높은 목표와 리상을 가지고 투쟁하며 모든 면에서 세계를 디디고 올라서야 합니다.》

다음과 같은 분수적분연산자를 생각하자.

$$T_{\Omega,\,\mu}f(x):=\text{p.v.}\int_{\mathbf{R}^n}\frac{\Omega(x,\ x-y)}{|x-y|^{n-\mu}}f(y)dy\ \ (f\in S(\mathbf{R}^n)) \tag{*}$$

여기서 n은 자연수이고 μ는 $0\le\mu<n$인 실수이며 함수 $\Omega(x,\ z)$는 $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$우에서 정의된 함수로서 다음의 조건들을 만족시킨다.

① $\Omega(x,\ \lambda z)=\Omega(x,\ z)\ \ (\forall x,\ z\in\mathbf{R}^n,\ \forall\lambda>0)$

② $\int_{S^{n-1}}\Omega(x,\ z')d\sigma(z')=0\ \ (\forall x\in\mathbf{R}^n)$

선행연구[3]에서는 $\Omega\equiv1$인 경우에 분수적분연산자 (*)의 변지수르베그공간우에서의 유계성을, 선행연구[4]에서는 변지수헤르쯔－모리공간 $MK_{q,\,p(\cdot)}^{\alpha,\,\lambda}$우에서의 유계성을, 선행연구[2]에서는 변지수헤르쯔공간 $K_{q,\,p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),\,\lambda}$우에서의 유계성에 관한 충분조건들을 밝혔다. 그리고 선행연구[1]에서는 분수적분연산자 (*)의 변지수헤르쯔－모리공간 $MK_{q,\,p(\cdot)}^{\alpha,\,\lambda}$우에서의 유계성에 관한 충분조건을 밝혔다. 또한 선행연구[7]에서는 $K_{q,\,p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),\,\lambda}$우에서의 다중선형칼데론－지그문드연산자의 유계성을 밝혔다.

한편 1968년에 헤르쯔는 절대수렴하는 푸리에변환을 연구하면서 헤르쯔공간들을 도입하였고 그후 많은 저자들에 의하여 헤르쯔형공간에서 특이적분연산자들의 유계성이 연구되였다.[1, 2, 4, 5, 7] 그러므로 론문에서는 분수적분연산자 (*)에 대하여 변지수헤르쯔－모리공간 $MK_{q,\,p(\cdot)}^{\alpha,\,\lambda}$에서 $\alpha(\cdot)$이 함수인 경우의 공간인 $MK_{q,\,p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),\,\lambda}$우에서의 유계성에 관한 충분조건을 연구하였다. $\alpha(\cdot)$이 함수인 경우에 대한 연구는 변지수르베그공간 및 쏘볼레브공간우에서 미분방정식의 풀이의 성질을 연구하는데서 아주 중요하다.[2, 3]

공간 $MK_{q,\,p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),\,\lambda}$우에서의 분수적분연산자 (*)의 유계성에 관한 충분조건을 연구하는데서 기본문제는 함수 $\alpha(\cdot)$이 어떤 조건을 만족시키는 경우에 변지수헤르쯔－모리공간 $MK_{q,\,p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),\,\lambda}$우에서 연산자 (*)의 유계성이 만족되겠는가 하는것이다.

이 문제를 해결하기 위하여 $\alpha(\cdot)$이 함수라는것을 고려하여 변지수공간에서 많이 리용되고있는 원점과 무한대에서의 $\alpha(\cdot)$이 휠데르련속이라는 조건을 주고 선행연구[7]에서와 류사하게 변지수헤르쯔－모리공간 $MK_{q,\,p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),\,\lambda}$우의 노름을 그것과 동등한 노름으로 바꾸었다. 그다음 선행연구[4]에서의 공간분할법을 리용하여 분수적분연산자 (*)에 대한 변

지수헤르쯔－모리공간우에서의 유계성에 관한 한가지 충분조건을 얻었다.

기본결과를 서술하는데 필요한 몇가지 개념들을 도입하자.

우선 $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ 우에서 정의된 함수 $\Omega(x,\ z)$ 가 조건

$$\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})\times L^r(S^{n-1})} := \sup_{x\in\mathbf{R}^n}\left(\int_{S^{n-1}}|\Omega(x,\ z')|^r\, d\sigma(z')\right)^{1/r} < +\infty$$

를 만족시키면 함수 $\Omega(x,\ z)$ 는 $L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})\times L^r(S^{n-1})$ 에 속한다고 말한다. 또한 Ω 가 우의 조건 ①, ② 그리고

$$\int_0^1 \frac{\omega_r(\delta)}{\delta} d\delta < +\infty$$

를 만족시키면 핵함수 $\Omega(x,\ z)$ 는 L^r －디니의 조건을 만족시킨다고 말한다. 여기서

$$\omega_r(\delta) := \sup_{x\in\mathbf{R}^n,\ |\rho|<\delta}\left(\int_{S^{n-1}}|\Omega(x,\ \rho z') - \Omega(x,\ z')|^r\, d\sigma(z')\right)^{1/r}$$

이고 $\rho \in O(n)$ 이며 $|\rho| := \sup_{z'\in S^{n-1}} |\rho z' - z'|$ 이다.

다음으로

$$\mathrm{P}(\mathbf{R}^n) := \{p : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \mid p\text{는 정값가측함수}\}$$

라고 하자. 그리고 $p \in \mathrm{P}(\mathbf{R}^n)$ 일 때

$$p^+ := \inf\{B \mid \mu(\{x \mid p(x) > B\}) = 0\},\quad p^- := \sup\{C \mid \mu(\{x \mid p(x) < C\}) = 0\}$$

으로 놓자. 또한 변지수르베그공간 $L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$ 을 다음과 같이 정의하자.

$$L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n) := \left\{ f : \mathbf{R}^n\text{우의 가측함수} \,\middle|\, \rho_{p(\cdot)}(f) := \int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^{p(x)}\, dx < +\infty \right\}$$

이때 $L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$ 우에서의 함수 f 의 반노름을 다음과 같이 정의한다.

$$\|f\|_{p(\cdot)} := \inf\left\{ \mu > 0 \,\middle|\, \rho_{p(\cdot)}\left(\frac{1}{\mu} f\right) \le 1 \right\}$$

특수하게 $p(x) \equiv p$ 이면 즉 $p(x)$ 가 상수함수이면 변지수르베그공간 $L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$ 은 고전적인 L^p 공간으로 된다.

또한 공간 $L^{p(\cdot)}_{loc}(\mathbf{R}^n)$ 을 다음과 같이 놓자.

$$L^{p(\cdot)}_{loc}(\mathbf{R}^n) := \{f : \mathbf{R}^n\text{우의 가측함수} \mid \text{임의의 콤팍트모임 } K \subset \mathbf{R}^n\text{에 대하여 } f \in L^{p(\cdot)}(K)\}$$

또한 함수 $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 는 만일 어떤 상수 $c_{\log}(>0)$ 가 있어서 임의의 $x(\in \mathbf{R}^n)$ 에 대하여

$$|g(x) - g(0)| \le \frac{c_{\log}}{\log(e + 1/|x|)}$$

가 만족되면 원점에서 로그－휠데르련속이다고 말한다. 그리고 어떤 상수 $c_{\log}(>0)$ 와 어떤 상수 $g_\infty(\in \mathbf{R})$ 가 있어서 임의의 $x(\in \mathbf{R}^n)$ 에 대하여

$$|g(x)-g_\infty|\le\frac{c_{\log}}{\log(e+|x|)}$$

가 만족되면 함수 g 는 무한대에서 로그－휠데르련속이다고 말한다.

또한 하디－리틀우드연산자 M 이 $L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$ 우에서 유계인 함수 $p(\cdot)$ 들의 모임을 $B(\mathbf{R}^n)$ 으로 표시하자. 여기서 $p(\cdot)$ 은 $p^->1$, $p^+<+\infty$ 인 함수이다.

또한 간단히 하기 위하여 $B_k:=B(0,\ 2^k)$, $R_k:=B_k\setminus B_{k-1}$, $\chi_k:=\chi_{R_k}$ $(k\in\mathbf{Z})$ 로 표시하자.

또한 함수 f 와 g 에 대하여 그것들에 무관계한 상수 C_1 과 C_2 가 있어서

$$C_1 f\le g\le C_2 f$$

가 만족되면 $f\approx g$ 로 표시한다.

정의[1] q 는 정의 실수이고 $p\in \mathrm{P}(\mathbf{R}^n)$ 이며 $\lambda(\cdot)$ 은 정값함수이고 $\alpha\in L^\infty(\mathbf{R}^n)$ 이라고 하자. 이때 변지수헤르쯔－모리공간 $MK_{q,\ p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),\ \lambda}$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$MK_{q,\ p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),\ \lambda}:=\{f\in L_{loc}^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n\setminus\{0\})\,|\,\|f\|_{MK_{q,\,p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),\lambda}}<+\infty\}$$

여기서

$$\|f\|_{MK_{q,\,p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),\lambda}}:=\sup_{L\in\mathbf{Z}}\left\{2^{-L\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{L}\|2^{k\alpha(\cdot)q}f\chi_k\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbf{R}^n)}^q\right)^{1/q}\right\}$$

이다. 특히 $\alpha(\cdot)$ 과 $p(\cdot)$ 이 상수함수이고 $\lambda=0$ 이면 변지수헤르쯔－모리공간 $MK_{q,\ p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),\ \lambda}$ 는 고전적인 헤르쯔공간으로 되고 즉 $MK_{q,\,p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),0}=K_{q,\,p(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}$ 이고 $\alpha(\cdot)=\gamma/p$ 이면 변지수헤르쯔－모리공간 $MK_{q,\ p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),\ \lambda}$ 는 무게붙은 르베그공간 즉 $MK_{p,\,p}^{\gamma/p,\,p}(\mathbf{R}^n)=L^p(\mathbf{R}^n,\ |x|^\gamma)$ 이다.

보조정리 1 [1] $p(\cdot)$ 은 $1\le p(\cdot)\le+\infty$ 인 함수이고 $p'(\cdot)$ 은 조건

$$\frac{1}{p(\cdot)}+\frac{1}{p'(\cdot)}=1$$

을 만족시키는 함수라고 하자. 이때

$$\int|fg|\,d\mu\le r_p\|f\|_{L^{p(\cdot)}}\|g\|_{L^{p'(\cdot)}}$$

이 성립한다. 여기서 $r_p:=1+1/p^- -1/p^+$ 이다.

보조정리 2 q 는 정의 실수이고 $p\in \mathrm{P}(\mathbf{R}^n)$ 이며 λ 는 부아닌 실수이고 $\alpha\in L^\infty(\mathbf{R}^n)$ 이라고 하자. 이때 만일 α 가 원점과 무한대에서 로그－휠데르련속이면

$$\|f\|_{MK_{q,\,p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),\lambda}}\approx\max\left\{\sup_{L\le0,\ L\in\mathbf{Z}}\left[2^{-L\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{L}2^{k\alpha(0)q}\|f\chi_k\|_{L^{p(\cdot)}}^q\right)^{1/q}\right],\right.$$

$$\left.\sup_{L>0,\ L\in\mathbf{Z}}\left[2^{-L\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}2^{k\alpha(0)q}\|f\chi_k\|_{L^{p(\cdot)}}^q\right)^{1/q}+2^{-L\lambda}\left(\sum_{k=0}^{L}2^{k\alpha_\infty q}\|f\chi_k\|_{L^{p(\cdot)}}^q\right)^{1/q}\right]\right\}$$

이 성립한다.

증명 우선 α 가 무한대에서 로그함수적으로 감소하므로 임의의 $k(>0)$ 와 $x\,(\in R_k)$ 에 대하여

$$k|\alpha(x)-\alpha_\infty|\le\frac{k}{\log(e+|x|)}\le 1$$

이 성립한다. 따라서 $2^{k\alpha(\cdot)}\approx 2^{k\alpha_\infty}$ 이므로

$$\|2^{k\alpha(\cdot)}f\chi_{R_k}\|_{p(\cdot)}\approx 2^{k\alpha_\infty}\|f\chi_{R_k}\|_{p(\cdot)}$$

이 성립한다.

다음으로 α 가 원점에서 로그함수적으로 감소하므로 류사하게 임의의 $k(<0)$ 와 $x(\in R_k)$ 에 대하여

$$\|2^{k\alpha(\cdot)}f\chi_{R_k}\|_{p(\cdot)}\approx 2^{k\alpha(0)}\|f\chi_{R_k}\|_{p(\cdot)}$$

이 성립한다. 따라서 정의 1에 의하여 보조정리의 결과가 성립한다.(증명끝)

보조정리 3 [6] μ 는 $0<\mu<n$ 인 실수이고 r 는 1이상의 실수이며 R 는 정의 실수라고 하자. 그리고 $\Omega(\in L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})\times L^r(S^{n-1}))$ 는 L^r －디니의 조건을 만족시킨다고 하자. 이때 만일 $0<\alpha<1/2$ 인 어떤 α 가 있어서 $|y|<\alpha R$ 인 임의의 y 에 대하여

$$\left(\int\limits_{R<|x|<2R}\left|\frac{\Omega(x,\ x-y)}{|x-y|^{n-\mu}}-\frac{\Omega(x,\ x)}{|x|^{n-\mu}}\right|^r dx\right)^{1/r}\le CR^{(-n+\mu+n/r)}\left(\frac{|y|}{R}+\int\limits_{|y|/(2R)}^{|y|/R}\frac{\omega_r(\delta)}{\delta}d\delta\right)$$

가 성립한다. 여기서 C 는 상수이다.

정리 μ 는 $0<\mu<n$ 인 실수이고 β 는 $0<\beta\le 1$ 인 실수이며 λ 는 정의 실수이고 $q_1,\ q_2$ 는 $0<q_1\le q_2<+\infty$ 인 실수들이라고 하자. 그리고 $\alpha(\in L^\infty(\mathbf{R}^n))$ 는 원점과 무한대에서 로그－횔데르련속이고 조건

$$\lambda<\alpha(x)<n\delta_1+\beta$$

를 만족시킨다고 하자. 또한 함수 $p_1(\cdot)(\in B(\mathbf{R}^n))$ 은 $0<\mu\le n/(p_1)_+$ 을 만족시키며 함수 $p_2(\cdot)(\in B(\mathbf{R}^n))$ 은

$$\frac{1}{p_1(x)}-\frac{1}{p_2(x)}=\frac{\mu}{n}$$

를 만족시킨다고 하자. 그리고 $\Omega\in L^\infty(\mathbf{R}^{n-1})\times L^r(S^{n-1})$ 이며

$$\int_0^1\frac{\omega_r(\delta)}{\delta^{1+\beta}}d\delta<+\infty$$

를 만족시킨다고 하자. 여기서 $r>p_2^+$ 이다. 이때 적당한 상수 $C(>0)$ 가 있어서 임의의 $f(\in MK_{q_1,\ p_1(\cdot)}^{\alpha(\cdot),\ \lambda})$ 에 대하여

$$\|T_{\Omega,\ \mu}f\|_{MK_{q_2,\ p_2(\cdot)}^{\alpha(\cdot),\ \lambda}}\le C\|f\|_{MK_{q_1,\ p_1(\cdot)}^{\alpha(\cdot),\ \lambda}}$$

가 성립한다.

[주의] α 가 상수이면 정리의 결과는 선행연구[1, 4]의 결과와 일치하므로 변지수헤르쯔－모리공간에서 얻어진 결과들의 일반화로 된다.

참 고 문 헌

[1] A. Abdalmonem et al.; J. App. Math. and Phys., 4, 787, 2016.
[2] A. Almeida et al.; J. Math. Anal. Appl., 394, 781, 2012.
[3] D. Cruz-Uribe et al.; Variable Lebesgue Spaces: Foundations and Harmonic Analysis, Springer, 13～128, 2013.
[4] M. Izuki; Hiroshima Math. J., 40, 343, 2010.
[5] H. Kwok-Pun; Mediterr. J. Math., 14, 79, 2017.
[6] J. Tan et al.; Acta Math. Sci., 58, 310, 2015.
[7] L. Yan et al.; Acta Math. Sin.(Eng. Ser.) 30, 7, 1180, 2014.

주체110(2021)년 3월 5일 원고접수

Boundedness for Fractional Integral Operators on Herz-Morrey Spaces with Variable Exponents

Chae Kyu Song

In this paper, we consider the boundedness for fractional integral operators on Herz-Morrey spaces with variable exponents. Our result is a generalization of the results in [1] and [4].

Keywords: Herz-Morrey spaces with variable exponents, fractional integral operator