김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체105(2016)년 제62권 제10호 Vol. 62 No. 10 JUCHE105(2016).

리산하밀톤-야코비방정식의 한가지 풀이법

최효심, 허명송

비선형최량조종문제의 최량반결합조종을 구성하는데서 벨만의 최량성원리에 의해 유도된 하밀톤-야코비방정식의 점성풀이를 구하는것이 기본문제이다.

한편 하밀톤-야코비방정식은 비선형편미분방정식이므로 수값풀이법에 대하여 많이 연구되고있다.[1-4] 직4각형그물우에서 등방성아이코날형하밀톤-야코비방정식에 대한 수값풀이법(Dijkstra-형알고리듬)[4]은 일반적으로 비등방성을 가진 최량조종문제의 풀이법에는 적용불가능하다. 비구조화된 그물우에서 일부 비등방성아이코날방정식의 수값풀이계산방법(FMM)[4]은 특수한 경우의 비등방성을 가진 최량조종문제의 풀이법이라고 볼수 있다.

선행연구[1]에서는 비구조화된 그물우에서 제기된 방법들[2-4]의 제한성들을 극복하기 위하여 단체그물우에서의 최소시간조종문제에 대응되는 리산화된 하밀톤-야코비방정식의 풀이법을 제기하였다.

최소시간조종문제가 아닌 일반적인 비선형최량조종문제에 대하여 선행연구[1]의 수법이 가능하다는 담보는 아직 없다.

론문에서는 한 형태의 최량조종문제에 대응되는 리산하밀톤-야코비방정식의 풀이알고리듬을 제기하고 그 수렴성을 증명하였다.

다음과 같이 주어지는 조종계를 생각하자.

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(y(t),\ \alpha(t))\cdot\alpha(t),\quad t>0 \tag{1}$$

$$y(0) = x\in\Omega \tag{2}$$

여기서 $y(t)$는 t시각 계의 상태이고 $f:\boldsymbol{R}^d\times A\to\boldsymbol{R}$이며 $\alpha(\cdot):[0,\ +\infty)\to A$는 단편련속조종이며 Ω는 $\boldsymbol{R}^d$의 유계리프쉬츠열린구역이다. 그리고

$$A=\{a\in\boldsymbol{R}^d\mid \|a\|=1\},\quad \Lambda:=\{\alpha(\cdot)\mid\alpha:[0,\ +\infty)\to A\}.$$

$A_f(x)=\{t\cdot a\cdot f(x,\ a)\mid a\in A,\ 0\le t\le 1\}$, $t_x(\alpha):=\inf\{\tau\ge 0\mid y_{x,\ \alpha}(\tau)\in\partial\Omega\}$로 놓자. 여기서 $t_x(\alpha)$는 초기상태 x에서 출발하고 조종 $\alpha(\cdot)$에 대응되는 조종계 (1)의 풀이(궤도)가 Ω의 경계에 도달되는 첫 시각을 의미한다.

$l:\Omega\times S_1\to\boldsymbol{R}$, $q:\overline{\Omega}\to\boldsymbol{R}$라고 할 때 초기상태 x, 조종 $\alpha(\cdot)$에 대응되는 목적함수는

$$J(x,\ \alpha)=\int_0^{t_x(\alpha)} l(y_{x,\ \alpha}(t),\ \alpha(t))dt+q(y_{x,\ \alpha}(t_x(\alpha)))\to\min \tag{3}$$

으로 주어진다. 이때 우리의 문제는 계 (1), (2)에 대응되는 궤도들가운데서 목적함수 (3)에 최소를 주는 조종과 궤도를 구하는 문제로 된다.

최량조종문제 (1)-(3)에 대한 값함수는 다음과 같다.

$$V(x)=\begin{cases}\inf\limits_{\alpha(\cdot)\in\Lambda} J(x,\ \alpha(\cdot)), & x\in\Omega\\ q(x), & x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{4}$$

다음의 가정을 받아들인다.

가정 ① $f,\ l,\ q$ 는 각각 자기변수에 관하여 리프쉬츠련속이다.

② $f(x)>0$, $l(x)>0,\ \forall x\in\Omega$ 이고 $q(x)\ge 0,\ \forall x\in\partial\Omega$ 이다.

③ $A_f(x)$ 는 닫긴불룩모임이다.

값함수 $V(\cdot)$ 에 관한 하밀톤－야꼬비방정식은 다음과 같다.

$$\begin{cases}\max\limits_{a\in A}\{-(\nabla V(x)\cdot a)f(x,\ a)-l(x,\ a)\}=0, & x\in\Omega\\ V(x)=q(x), & x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{5}$$

방정식 (5)의 해석적풀이를 구하는것은 일반적으로 어려운 문제이다.

우리는 값함수 $V(\cdot)$ 의 수값풀이를 구성하는 한가지 방법에 주목을 돌린다.

지금 $\zeta=(\zeta_1,\ \zeta_2,\ \cdots,\ \zeta_n)$ 을 $\sum\limits_{i=1}^{n}\zeta_i=1,\ \zeta_i\ge 0,\ 1\le i\le n$ 인 n 차원무게중심자리표벡토르라고 하고 Ξ_n 을 n 차원무게중심자리표벡토르들전부의 모임이라고 하자.

어떤 단체 s 에 대하여 상태 $\tilde{x}_s\in s$ 는 $\varsigma\in\Xi_{n_s}$ 에 의해 표시될수 있다.

$\tilde{\Xi}_n$ 을 제한조건 $\zeta_i\ge 0,\ 1\le i\le d$ 가 없는 n 차원무게중심자리표벡토르들의 모임이라고 하자. $x\in\Omega$ 에 대하여 $\tau_s(x)=\|\tilde{x}_s(\zeta)-x\|$, $a_s(x,\ \zeta)=(\tilde{x}_s(\zeta)-x)/\tau_s(x,\ \zeta)$ 라고 정의하고 다음의 식으로 정의되는 수값하밀톤함수 $\underline{H}$ 를 생각하자.

$$\underline{H}(x,\ S,\ \phi,\ \mu)=\max_{\substack{\zeta\in\Xi_{n_s}\\ s\in S}}\left\{\left(\mu-\sum_{i=1}^{n_s}\zeta_i\phi(x_i^s)\right)\Big/\tau_s(x,\ \zeta)\cdot f(x,\ a_s(x,\ \zeta))-l(x,\ a_s(x,\ \zeta))\right\}$$

여기서 $x\in\Omega$ 이고 S 는 $\overline{\Omega}$ 에서 $x\notin s$ 인 단체 s 들의 모임, 벡토르 x_i^s-x 들은 독립이며 $\phi:\overline{\Omega}\to\boldsymbol{R}$ 는 유계함수이고 $\mu\in\boldsymbol{R}$ 이다.

단체그물 G 가 주어졌다고 하고 다음의 리산화된 하밀톤－야코비방정식을 보자.

$$\underline{H}(x,\ S(x),\ \underline{u},\ \underline{u}(x))=0,\ x\in\underline{\Omega}\tag{6}$$

$$\underline{u}(x)=q(x),\ x\in\underline{\partial\Omega}\tag{7}$$

우리가 주목하는것은 리산화된 하밀톤－야코비방정식 (6), (7)을 만족시키는 함수 $\underline{u}:X\to\boldsymbol{R}$ 를 구하는것이다.

리산화된 하밀톤－야코비방정식의 풀이알고리듬은 다음과 같다.

걸음 1 $\underline{\upsilon}(x)=\infty$, $x\in\underline{\Omega}$ 로, $\underline{\upsilon}(x)=q(x)$, $x\in\underline{\partial\Omega}$ 로 초기화한다.

걸음 2 $\overleftarrow{Y}(x)=\{x\}$, $\vec{Y}(x)=\{x\}$, $x\in X$ 로 초기화하고 매 $x\in\underline{\Omega}$ 에 대하여 $\overleftarrow{Y}(x)$, $\vec{Y}(x)$ 를 갱신그물점계산알고리듬에 의해 갱신한다.

걸음 3 $H=X$ 로 놓는다.

걸음 4 H 가 빈모임이면 알고리듬 중지, 그렇지 않으면 걸음 5로 이행한다.

걸음 5 $x=\arg\min\limits_{y\in H}\underline{\upsilon}(y)$ 인 x 를 구하고 $H=H\setminus\{x\}$ 로 놓는다.

걸음 6 매 $y\in\overleftarrow{Y}(x)\cap H$ 에 대하여 부등식

$$\frac{\delta\cdot\hat{f}(x)}{r_s(x)\breve{l}(x)}\le 1,\ \ \hat{\alpha}_s<\arccos\left(\frac{\delta\cdot\hat{f}(x)}{r_s(x)\breve{l}(x)}\right)-\arccos\left(\frac{1}{\gamma(x)}\right)$$

이 성립되며 $x\in s$ 인 매 $s\in \underline{S}(\vec{Y}(y)\setminus H)$ 에서 $\hat{\underline{\upsilon}}(y)$ 를 계산하고 $\underline{\upsilon}(y)=\min(\underline{\upsilon}(y)\ \hat{\underline{\upsilon}}(y))$ 로 갱신한다.

걸음 7 걸음 4로 이행한다.

정리 $x\in\Omega,\ \phi\in C_b^{\infty}(\Omega)$ 라고 하자.

$k\to\infty$ 일 때 $x_k\to x, \hat{h}\to 0, \xi_k\to 0$ 인 $G_k,\ x_k\in\underline{\Omega}_k, \xi_k$ 에 대하여

$$\lim_{k\to\infty}\underline{H}(x_k,\ S_k,\ \phi+\xi_k,\ \phi(x_k)+\xi_k)=H(x,\ D\phi(x))$$

가 성립된다.

증명 $x\in\Omega,\ \phi\in C_b^{\infty}(\Omega)$ 라고 하자.

그리고 $G_k,\ x_k\in\underline{\Omega}_k,\ \xi_k$ 들을 $k\to\infty$ 일 때 $x_k\to x,\ \hat{h}\to 0,\ \xi_k\to 0$ 인 렬이라고 하자.

이때 $\breve{r}(x)=O(\breve{h})$ 이라는 사실로부터 $k\to\infty$ 일 때 $\hat{r}(x)\to 0,\ \breve{r}(x)\to 0$ 임을 알수 있다.

또한 Ω 가 유계리프쉬츠구역이므로 $x\in\Omega$ 는 $\partial\Omega$ 로부터 어떤 $\varepsilon>0$ 만 한 최소거리에 있다. 그러므로 적당한 $\tilde{k}$ 이 존재하여 모든 $k\ge\tilde{k}$ 에 대하여 $\underline{\partial\Omega}\cap B=\phi$ 이 성립된다.

$k\to\infty$ 일 때 $\hat{r}(x)\to 0$ 이라는 사실로부터

$$\lim_{k\to\infty}\underline{H}(x_k,\ S_k,\ \phi+\xi_k,\ \phi(x_k)+\xi_k)=\lim_{y\to x,\ \xi\to 0,\ \hat{r}\to 0}\underline{H}(y,\ S(y),\ \phi+\xi,\ \phi(y)+\xi)=H(x,\ D\phi(x))$$

가 성립되며 따라서 정리는 증명된다.(증명끝)

참고문헌

[1] K. Alton et al.; SIAM J. Numer. Anal., 43, 363, 2008.

[2] M. Pollack et al.; Journal of Computational Physics, 258, 31, 2014.

[3] J. A. Sethian et al.; SIAM J. Numer. Anal., 41, 1, 323, 2003.

[4] J. N. Tsitsiklis; IEEE Trans. Automat. Control., 40, 9, 1528, 1995.

주체105(2016)년 6월 5일 원고접수

A Solving Method of the Discrete Hamilton-Jacobi Equation

Choe Hyo Sim, Ho Myong Song

The causality allows Dijkstra-like algorithms to be used to compute the solution of the Hamilton-Jacobi equation in a single pass through the nodes in order of increasing value.

We propose the solution algorithm of the discrete Hamilton-Jacobi equation using the causality.

Key words: causality, discrete Hamilton-Jacobi equation