평균소득을 최대화하는 대중봉사계의 조종에서 편위최량방략의 근사계산

전 용 철

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《인민경제 모든 부문의 생산기술공정과 생산방법, 경영활동을 새로운 과학적토대우에 올려세우기 위한 연구사업도 강화하여야 합니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제11권 138페지)

선행연구[3]에서는 대중봉사계 M/M/1에서 요청들의 입장과 봉사속도의 조종문제를 연구하였다. 조종기는 매 상태에서 봉사속도를 선택하며 도착하는 요청들을 거절할수 있다.

선행연구[4]에서는 대중봉사계 M/M/1/K에서 계의 상태에 따라 요청들의 입장을 조종할 때의 작업주기에 대하여, 선행연구[1]에서는 평균소득을 최대화하는 도착속도와 봉사속도의 동시적조종에서 편위최량방략의 존재성과 몇가지 성질들에 대하여 연구하였다.

론문에서는 평균소득을 최대화하는 도착속도와 봉사속도조종에서 편위최량방략의 근사계산방법에 대하여 론의한다.

우리는 선행연구[1]에서와 같은 대중봉사계를 생각한다.

체계도 선행연구[1]에서와 같은 마르꼬브결정과정으로 서술하며 이행속도 $q(j\,|\,i,\ a(i))$ 역시 선행연구[1]에서와 같다.

$K=\{(i,\ a(i)):i\in S,\ a(i)\in A(i)\}$ 라고 할 때 소득함수는 K 에서 정의되는 함수로서

$$r(i,\ a(i))=-p_0 i-c(i,\ a(i))$$

이며 초기상태가 $i\in S$ 일 때 방략 $\pi=(\pi_t)\in\Pi$ 의 기대평균소득은 다음과 같이 정의된다.

$$V(i,\ \pi)=\lim_{T\to\infty}V_T(i,\ \pi)$$

여기서 $V_T(i,\ \pi)=\dfrac{1}{T}\mathrm{E}\left[\int_0^T r(x(t),\ \pi_t)dt\right]$ 이다.

평균소득최량화문제에서 최량값함수는 모든 초기상태 $i\in S$ 에 대하여 다음과 같다.

$$V^*(i)=\sup_{\pi\in\Pi}V(i,\ \pi)$$

확정정상방략들의 모임을 F, 평균소득최량확정정상방략모임을 F_A 로 표시한다.

확정정상방략 $f\in F$ 가 주어졌을 때 소득과 편위는 다음과 같다.

$$g(f)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}V_T(i,\ f),\ \ h_f(i)=\int_0^\infty[\mathrm{E}r(x(t),\ f)-g(f)]dt,\ \ i\in S$$

$\hat{h}(i)=\sup\limits_{f\in F_A}h_f(i)$, $i\in S$ 로 정의되는 함수를 최량편위함수라고 부르며 $h_f=\hat{h}$ 일 때 $f\in F_A$ 를 편위최량방략이라고 부른다.

다음의 조건들이 성립될 때 편위최량정상방략이 존재한다.[1]

① $\mu+a_2^0-\lambda-a_1^1>0$

② $i\geq 1$ 에 대하여 $\lambda+a_1(i)>0$, $\mu+a_2(i)>0$ 이고 $a_1(0)\geq 0$, $a_2(0)=0$ 이다.

③ 적당한 상수 $M>0$ 이 있어서 모든 i 에 대하여 $\sup_{a\in A}|c(i,\ a(i))|<M(i+1)$ 이 성립된다.

S 우의 임의의 가측함수 $w\geq 1$ 에 대하여 S 우의 실가측함수 u 의 무게붙은 상한노름 $\|u\|_w=\sup_{x\in S}\{w(x)^{-1}|u(x)|\}$ 를 생각하자.

그리고 공간 $B_w(S)=\{u:\|u\|_w<\infty\}$ 를 리용한다.

기호 $\varsigma(i,\ u(i),\ a(i))=u(i-1)(\mu+a_2(i))+u(i+1)(\lambda+a_1(i))$ 를 리용한다.

이때 $(g,\ u,\ \upsilon)\in \boldsymbol{R}\times B_w(S)\times B_w(S)$ 에 대하여

$$g=\max_{a\in A(i)}\{r(i,\ a)+\varsigma(i,\ u(i),\ a(i))\},\ i\in S, \tag{1}$$

$$u(i)=\max_{a\in A_0(i)}\{\varsigma(i,\ \upsilon(i),\ a(i))\},\ i\in S \tag{2}$$

이면 편위최량방정식을 만족시킨다고 말한다. 여기서 $A_0(i)$ 는 식 (1)에 최대값을 주는 작용 $a\in A(i)$ 들의 모임이다.

편위최량방략의 근사계산을 위한 알고리듬은 다음과 같다.

걸음 1 임의의 방략 $f\in F$ 를 선택한다.

걸음 2 소득 $g(f)$ 와 f 의 편위 h_f 를 결정한다.

먼저 방정식 $\begin{cases}\varsigma(i,\ \mu_f(i),\ f(i))=0,\ i\in S\\ \sum_{j\in S}\mu_f(j)=1\end{cases}$ 을 풀어 불변확률측도 μ_f 를 결정한다.

다음으로 방정식 $\begin{cases}g=r(i,\ f)+\varsigma(i,\ h(i),\ f(i)),\ i\in S\\ \sum_{i\in S}h(i)\mu_f(i)=0\end{cases}$ 을 풀어 소득 $g(f)$ 와 f 의 편위 h_f 를 구한다.

걸음 3 다음의 방법으로 방략 $f'\in F$ 를 결정한다.

매 $i\in S$ 에 대하여

$$r(i,\ f)+\varsigma(i,\ h_f(i),\ f(i))=\max_{a\in A(i)}\{r(i,\ f)+\varsigma(i,\ h_f(i),\ a(i))\},\ h_f(i)=\max_{a\in A_0(i)}\{\varsigma(i,\ h_f(i),\ a(i))\}$$

이면 $f'(i)=f(i)$ 로 놓는다. 그렇지 않으면 우의 식들이 성립되는 $f'(i)\in A(i)$ 를 선택한다.

걸음 4 $f'=f$ 이면 알고리듬을 끝낸다. 그렇지 않으면 f 를 f' 로 교체하고 걸음 2로 간다.

$f_0\in F$ 를 반복알고리듬의 초기방략이라고 하고 $\{f_n\}$ 을 알고리듬의 반복적용에 의하여 얻어지는 정상방략들의 렬이라고 한다.

어떤 n 에 대하여 $f_n=f_{n+1}$ 이면 선행연구[1]결과에 의하여 f_n 은 평균소득최량이다.

임의의 $n\geq 0$ 에 대하여 $f_n\neq f_{n+1}$ 인 경우 $n\geq 1$ 과 $i\in S$ 에 대하여

$$\varepsilon(f_n,\ i)=r(i,\ f_n)+\varsigma(i,\ h_{f_{n-1}}(i),\ f_n(i))-[r(i,\ f_{n-1})+\varsigma(i,\ h_{f_{n-1}}(i),\ f_{n-1}(i))]$$

가 성립되므로 선행연구[2]에서와 류사하게 다음의 보조정리를 증명할수 있다.

보조정리 조건 ①－③들이 성립될 때 다음의 사실들이 성립된다.

1) 렬 $\{g(f_n)\}$은 엄격히 증가하며 유한한 극한을 가진다.

2) 모든 $i \in S$에 대하여 $n \to \infty$일 때 $\varepsilon(f_n,\ i) \to 0$이다.

보조정리의 결과를 리용하면 다음의 정리를 증명할수 있다.

정리 조건 ①—③들이 성립될 때 $g(f_n)$은 최량소득함수 g로 수렴하며 렬 $\{f_n\}$의 임의의 극한점 $f \in F$는 편위최량정상방략이다.

증명 F가 콤팍트이므로 일반성을 잃지 않고 임의의 $n \geq 0$에 대하여 $f_n \neq f_{n+1}$인 렬 $\{f_n\}$이 극한을 가진다고 할수 있다.

편위의 평등련속성에 의하여 $\{f_n\}$의 부분렬 $\{f_m\}$이 있어서 h_{f_m}은 어떤 $h \in B_w(S)$에로 점수렴한다.

그러므로 보조정리에 의하여 식 $g(f_m) \to g$, $f_m \to f$, $h_{f_m} \to h$가 성립된다.

최량방정식 (1), (2)와 $\varepsilon(f_{m+1},\ i)$의 정의로부터 모든 $i \in S$에 대하여 다음의 식이 성립된다.

$$g(f_m) = r(i,\ f_m) + \varsigma(i,\ h_{f_m},\ f_m) = \max_{a \in A(i)}\{r(i,\ a) + \varsigma(i,\ h_{f_m},\ a)\} - \varepsilon(f_{m+1},\ i)$$

$$h_{f_m}(i) = \max_{a \in A_0(i)}\{\varsigma(i,\ h_{f_m}(i),\ a(i))\}$$

이로부터 선행연구[2]에서와 류사하게 다음식이 나온다.

$$g = r(i,\ f) + \varsigma(i,\ h,\ f) = \max_{a \in A(i)}\{r(i,\ a) + \varsigma(i,\ h,\ a)\},\ \ i \in S$$

$$h(i) = \max_{a \in A_0(i)}\{\varsigma(i,\ h(i),\ a(i))\}$$

이것은 f가 편위최량방략이며 g가 최량평균소득함수라는것을 말해준다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보(자연과학), 63, 11, 19, 주체106(2017).

[2] 전용철 등; 수학, 4, 3, 주체104(2015).

[3] K. M. Adusumilli et al.; Queueing Syst., 66, 2, 131, 2010.

[4] A. A. Hanbali et al.; Oper. Res. Lett., 38, 1, 2010.

주체106(2017)년 12월 5일 원고접수

Approximate Calculation of the Bias Optimal Policy in Control of a Queue to Maximize the Average Reward

Jon Yong Chol

We consider a joint control problem of arrival and service rates of the M/M/1 queue to maximize the average reward. When the arrival and service rates take continuous values, we propose an approximate calculation algorithm of the bias optimal policy and prove the convergence of the algorithm.

Key words: queue, control, bias optimal policy