김일성종합대학학보 JOURNAL OF KIM IL SUNG UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체104(2015)년 제61권 제5호 Vol. 61 No. 5 JUCHE104(2015).

페트리망에서 교착상태의 존재성조건에 관한 연구

김현정, 한도욱

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《과학과 기술이 매우 빨리 발전하고있는 오늘의 현실은 기초과학을 발전시킬것을 더욱 절실하게 요구하고있습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제11권 138페지)

론문에서는 리산신호에 의한 반결합조종체계를 비롯하여 여러가지 조종체계들의 조종방식을 확립하는데 많이 응용되고있는 페트리망의 교착과 관련된 몇가지 결과들을 제기하였다.

선행연구[1]에서는 교착회복을 가진 시간페트리망의 반결합조종알고리듬을, 선행연구[2, 3]에서는 쏘프트웨어검증을 위한 페트리망언어의 한가지 형식을 제기하였다. 그런데 선행연구[1]에서 리용한 페트리망에서 주어진 상태가 교착상태이기 위한 필요충분조건은 임의의 페트리망을 대상으로 한것이 아니기때문에 일반적이지 못한 결함이 있다.

여기서는 이러한 사실을 고려하여 구체적인 페트리망에서 교착의 존재성조건에 관한 몇가지 결과들을 제기하였다.

4원조 $C=(P,\ T,\ I,\ O)$ 를 페트리망이라고 부른다. 여기서 $P=\{p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_m\}$ 은 위치들의 모임, $T=\{t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n\}$ 은 이행(변환)들의 모임이고 $P\cap T=\phi$ 이다. $I:T\to P^{\infty}$ 는 입력함수, $O:T\to P^{\infty}$ 는 출력함수이다.

임의의 이행 t_j 에 대하여 $p_i\in I(t_j)$ 이면 위치 p_i 를 이행 t_j 의 입력위치라고 부르고 $p_i\in O(t_j)$ 이면 p_i 를 이행 t_j 의 출력위치라고 부른다.

임의의 이행 t_j 와 임의의 위치 p_i 에 대하여 $I(t_j)$ 에 p_i 가 들어있는 반복회수를 $\#(p_i,\ I(t_j))$ 로 표시하고 $O(t_j)$ 에 p_i 가 들어있는 반복회수를 $\#(p_i,\ O(t_j))$ 로 표시한다. 그리고 행렬 $D^-=(D^-[j,\ i])$ 와 $D^+=(D^+[j,\ i])$ 를 생각하고 $D=D^+-D^-$ 를 결합행렬이라고 부른다. 여기서 $D^-[j,\ i]=\#(p_i,\ I(t_j))$ 이고 $D^+[j,\ i]=\#(p_i,\ O(t_j))$ 이다.

매 위치 p_i 에 부아닌 옹근수를 대응시키는 함수 $\mu:P\to N\cup\{0\}$ 을 생각하고 $\mu=(\mu(p_1),\ \mu(p_2),\ \cdots,\ \mu(p_m))$ 을 페트리망 C 의 상태라고 부른다. 초기상태 μ_0 이 주어졌을 때 C 를 초기상태 μ_0 이 주어진 망이라고 부르고 $C(\mu_0)=(P,\ T,\ I,\ O,\ \mu_0)$ 으로 표시한다.

상태 μ 가 주어졌을 때 이행 t_j 와 임의의 위치 p_i 에 대하여 $\mu(p_i)\geq\#(p_i,\ I(t_j))$ 가 성립된다고 하면 이행 t_j 는 발화가능하다고 말한다. 그리고 발화가능한 이행 t_j 가 발화하면 페트리망의 상태는 μ 로부터 μ' 로 변화되는데 그 관계식은 임의의 위치 p_i 에 대하여 $\mu'(p_i)=\mu(p_i)-\#(p_i,\ I(t_j))+\#(p_i,\ O(t_j))$ 이다.

일반적으로 어떤 발화렬 $w=t_{j_1}t_{j_2}\cdots t_{j_k}$ 가 있어서 상태 μ_0 으로부터 상태 μ 가 도달된

다는것을 $\mu_0[w>\mu$ 로 표시한다. 그리고 초기상태 μ_0 으로부터 도달가능한 상태전부의 모임을 도달가능성모임이라고 부르고 $R(C,\ \mu_0)$ 으로 표시한다.

정의 1 시작상태 μ_0 을 가진 페트리망 $C(\mu_0)=(P,\ T,\ I,\ O,\ \mu_0)$ 의 위치 $p_i \in P$ 가 임의의 $\mu' \in R(C,\ \mu)$ 에 대하여 $\mu'(p_i) \le 1$ 이라고 하면 p_i 는 안전한 위치라고 말한다.

매 위치가 다 안전하다면 안전한 페트리망이라고 부른다.

안전성은 기구적담보를 위한 중요한 성질이다.

만일 위치가 안전하다면 그것의 표적의 개수는 0 혹은 1이다.

정의 2 페트리망 $C(\mu_0)=(P,\ T,\ I,\ O)$ 를 생각하자.

이때 어떤 상태 $\mu \in N^m$ 이 있어서 임의의 $t_j \in T$ 와 적어도 하나의 위치 $p_i \in P$ 에 대하여 $\mu(p_i) < \#(p_i,\ I(t_j))$ $(\#(p_i,\ I(t_j)) \ne 0)$ 가 성립된다면 상태 μ 를 교착상태라고 부른다. 그리고 교착상태가 아닌 상태를 교착－자유상태라고 부른다.

페트리망은 위치를 동그라미로, 이행을 막대기로 표시하고 위치 p_i 에서 이행 t_j 에로 나가는 호를 $\#(p_i,\ I(t_j))$ 개 배치하고 t_j 에서 p_i 에로 나가는 호를 $\#(p_i,\ O(t_j))$ 개 배치하는 방법으로 여러겹방향그라프로 모형화할수 있다.

이때 상태 μ 는 매 위치 p_i 에 대응되는 동그라미안에 $\mu(p_i)$ 개의 점(돌)을 배치하는 방법으로 표시한다.

동그라미안에 표식된 점을 표적이라고 부른다.

정리 1 한겹닫긴길을 이루는 페트리망 $C=(P,\ T,\ I,\ O)$ 를 생각하자.

그러면 령아닌 임의의 상태 $\mu \in N^m\ (\ne 0)$은 교착－자유이다.

증명 페트리망 C 가 한겹닫긴길이므로 그것을 $p_1,\ t_1,\ p_2,\ t_2,\ \cdots,\ p_k,\ t_k,\ p_1$ 로 쓸수 있다.

그리고 임의의 i 에 대하여 $\#(p_i,\ I(t_i))=1$, $\#(p_{i+1},\ O(t_i))=1$ 이고 임의의 $j(\ne i)$ 에 대하여 $\#(p_j,\ I(t_i))=0$, $\#(p_j,\ O(t_i))=0$ 이다.

한편 정리의 가정으로부터 임의의 상태 $\mu \in R(C,\ \mu_0)$ 에 대하여 적어도 하나의 정인 성분이 존재하는데 그것을 $\mu(p_j)>0$ 이라고 하자.

그런데 이행 t_j 에 대하여 $\#(p_j,\ I(t_j))=1$, $\#(p_i,\ I(t_j))=0,\ \forall i \ne j$ 가 성립되므로 임의의 위치 $p_i \in P$ 에 대하여 $\mu(p_i) \ge \#(p_i,\ I(t_j))$ 가 성립된다는것이 나온다. 즉 이행 t_j 는 발화가능하고 따라서 상태 μ 는 교착－자유이다.(증명끝)

정리 2 페트리망 $C=(P,\ T,\ I,\ O)$ 가 다음의 조건들을 만족시킨다고 하면 임의의 상태 $\mu \in N^m$ 이 교착－자유상태이기 위하여서는 $\max\{\mu(p_j) - \#(p_j,\ I(t_j)),\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n\} \ge 0$ 일것이 필요하고 충분하다. 여기서 k 는 μ 의 정인 성분들의 개수이다.

i) C 는 여러겹초등닫긴길이다.

ii) 초등닫긴길을 이루는 C 의 정점순서렬을 $p_1,\ t_1,\ p_2,\ t_2,\ \cdots,\ p_k,\ t_k,\ p_1$ 이라고 하면 임의의 이행 t_j 에 대하여 $\#(p_j,\ I(t_j)) \le \#(p_{j+1},\ O(t_j))$ 이고 임의의 $p_i\ (\ne p_j)$ 에 대하여 $\#(p_i,\ I(t_j)) = \#(p_i,\ O(t_j))=0$ 이 성립된다.

증명 (필요성) 상태 $\mu \in N^m$ 이 페트리망 C 에서 교착－자유상태라고 하면 정의로부터 어

떤 이행 $t_j \in T$ 가 있어서 임의의 $p_i \in P$ 에 대하여 $\mu(p_i) \geq \#(p_i,\ I(t_j))$ 가 성립된다. 이것은 $\mu(p_j) - \#(p_j,\ I(t_j)) \geq 0$ 이라는것을 의미하며 $\max\{\mu(p_j) - \#(p_j,\ I(t_j)),\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n\} \geq 0$ 이 성립된다는것이 곧 증명된다.

(충분성) 주어진 상태 $\mu \in N^m$ 에 대하여 $\max\{\mu(p_j) - \#(p_j,\ I(t_j)),\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n\} \geq 0$ 이 성립된다고 하자.

이제 $\max\{\mu(p_j) - \#(p_j,\ I(t_j)),\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n\} = \mu(p_{j_0}) - \#(p_{j_0},\ I(t_{j_0})) \geq 0$ 이라고 하자.

그러면 $\mu(p_{j_0}) \geq \#(p_{j_0},\ I(t_{j_0}))$ 이 성립된다.

한편 임의의 $p_i \in N^m (\neq p_{j_0})$ 에 대하여서는 $\#(p_i,\ I(t_j)) = \#(p_i,\ O(t_j)) = 0$ 이 성립된다.

따라서 임의의 $p_i \in P$ 에 대하여 $\mu(p_i) \geq \#(p_i,\ I(t_j))$ 가 성립된다. 즉 이행 t_j 는 상태 μ 에서 발화가능하다. 이리하여 상태 μ 는 교착－자유상태라는것이 증명되였다.(증명끝)

이 정리로부터 조건 i), ii)를 만족시키는 페트리망에서 주어진 상태 μ 가 교착상태이기 위하여서는 $\max\{\mu(p_j) - \#(p_j,\ I(t_j)),\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ k\} < 0$ 이 성립될것이 필요하고 충분하다는 것이 나온다.

정리 3 시작상태 μ_0 이 주어진 페트리망 $C(\mu_0) = (P,\ T,\ I,\ O,\ \mu_0)$ 이 다음과 같은 조건들을 만족시킨다고 하면 임의의 상태 $\mu \in R(C,\ \mu_0)$ 에 대하여 μ 가 C 에서 교착상태이기 위하여서는 관계식 $D^-(I - \mu) \geq 1$ 을 만족시킬것이 필요하고 충분하다. 여기서 I 는 m 차단위벡토르이다.

i) C 는 유한개의 한겹초등닫긴길로 이루어져있다.

ii) C 는 안전한 페트리망이다.

증명 (필요성) 상태 $\mu \in R(C,\ \mu_0)$ 에 대하여 μ 가 C 에서 교착상태라고 하자.

그러면 임의의 이행 $t_j \in T$ 와 $\#(p_i,\ I(t_j)) \neq 0$ 인 적어도 하나의 위치 $p_i \in P$ 에 대하여 $\mu(p_i) < \#(p_i,\ I(t_j))$ 가 성립된다. 즉 그러한 위치 p_i 에 대하여 $\#(p_i,\ I(t_j)) - \mu(p_i) > 0$ $(\#(p_i,\ I(t_j)) \neq 0)$ 이 성립되며 이것은 $\#(p_i,\ I(t_j))$ 와 $\mu(p_i)$ 가 옹근수값만을 취한다는것을 고려하면 $\#(p_i,\ I(t_j)) - \mu(p_i) \geq 1 \quad (\#(p_i, I(t_j)) \neq 0)$ 과 동등하다.

한편 페트리망 C 가 유한개의 초등닫긴길로 이루어져있다는것을 고려하면 임의의 위치 $p_i \in P$ 와 이행 $t_j \in T$ 에 대하여 $\#(p_i,\ I(t_j))$ 는 0과 1만을 값으로 취한다.

따라서 행렬 $D^- = (D^-_{j,\ i})$, $D^-_{j,\ i} = \#(p_i,\ I(t_j))$ 는 매 원소가 0 또는 1로 된 행렬이다.

또한 정리의 조건에 의하여 페트리망 C 가 안전한 페트리망이므로 임의의 위치 $p_i \in P$ 에 대하여 $\mu(p_i)$ 는 0 또는 1만을 값으로 취한다.

이와 같은 사실을 고려하면 $\#(p_i,\ I(t_j)) - \mu(p_i) \geq 1 \quad (\#(p_i,\ I(t_j)) \neq 0)$ 이라는 조건은 $\#(p_i,\ I(t_j)) = 1$ 일 때 $\mu(p_i) = 0$ 이여야 한다는것을 의미한다.

이제 $D^-(I - \mu)$ 를 생각하자.

이 식의 j 째 원소는 다음과 같다.

$$\#(p_1,\ I(t_j))(1 - \mu(p_1)) + \#(p_2,\ I(t_j))(1 - \mu(p_2)) + \cdots + \#(p_m,\ I(t_j))(1 - \mu(p_m))$$

여기서 $\#(p_i, I(t_j))=0$ 인 경우와 $\#(p_i, I(t_j))=1$ 인 경우는 모두 제외되고 $\#(p_i, I(t_j))=1$ 이고 $\mu(p_i)=0$ 인 경우만이 남는데 임의의 이행 $t_j \in T$ 에 대하여 그런 위치 $p_i \in P$ 가 적어도 하나 존재하여야 한다.

따라서 임의의 이행 $t_j \in T$ 에 대하여 조건

$$\#(p_1, I(t_j))(1-\mu(p_1)) + \#(p_2, I(t_j))(1-\mu(p_2)) + \cdots + \#(p_m, I(t_j))(1-\mu(p_m)) \ge 1$$

이 성립된다는것이 나온다.

이리하여 $D^-(I-\mu) \ge 1$ 이 성립된다.

(충분성) 주어진 상태 $\mu \in R(C, \mu_0)$ 에 대하여 조건 $D^-(I-\mu) \ge 1$ 이 성립된다고 하자.

이것은 임의의 이행 $t_j \in T$ 에 대하여

$$\#(p_1, I(t_j))(1-\mu(p_1)) + \#(p_2, I(t_j))(1-\mu(p_2)) + \cdots + \#(p_m, I(t_j))(1-\mu(p_m)) \ge 1$$

이라는것을 의미한다. 그런데 여기서 $\#(p_i, I(t_j))=0$ 인 경우와 $\#(p_i, I(t_j))=1$ 인 경우는 제외되고 $\#(p_i, I(t_j))=1$ 이고 $\mu(p_i)=0$ 인 경우만이 론의되는데 이것은 적어도 하나의 위치 p_i 가 있어서 조건 $\#(p_i, I(t_j)) - \mu(p_i) \ge 1$ $(\#(p_i, I(t_j)) \ne 0)$ 을 만족시켜야 한다는 사실과 동등하다. 이로부터 상태 μ 가 교착상태라는것이 나온다.(증명끝)

이 정리로부터 정리의 조건이 만족되는 경우에 주어진 상태 $\mu \in N^m$ 이 교착－자유이기 위하여서는 $D^-(I-\mu) \le 0$ 을 만족시킬것이 필요하고 충분하다는것이 나온다.

참 고 문 헌

[1] D. Bjorner; Software Engineering 2, Springer-Verlag, 315～355, 2006.

[2] Pawel Pawlewski; Petri Nets: Applications, In-Tech, 333～350, 2010.

[3] V. S. Alagar et al.; Specification of Software Systems, Springer-Verlag, 45～67, 2011.

주체104(2015)년 1월 5일 원고접수

Research for Existence Condition of Deadlock in Petri Net

Kim Hyon Jong, Han To Uk

We provide some results for existence of deadlock in Petri net, which is used to establish control method of control system such as feedback control system of dynamic system.

Key words: petri net, deadlock