

령역세기모형을 리용한 분포된 층분리와 모체손상을 가진 다층복합판의 좌굴해석

신수혁, 우성학

경애하는 최고령도자 김정은동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《기계공학, 금속공학, 열공학, 재료공학을 비롯한 중요부문 기술공학들을 빨리 발전 시키고 그 성과를 여러 경제부문에 적극 받아들여야 합니다.》

우리는 복합재료리용에서 중요하게 제기되는 손상된 다층복합판의 좌굴문제를 고찰 하였다.

선행연구[1]에서는 층분리와 균열이 있는 다층복합판의 처짐문제를 유효역세기모형을 리용하여 고찰하였으며 선행연구[2, 3]에서는 층분리를 가진 다층복합판의 좌굴문제를 유한요소법으로 고찰하였다.

본문에서는 령역세기모형을 도입하여 층분리와 모체손상이 있는 다층복합판의 좌굴 문제를 해석적으로 고찰하였으며 ANSYS모의를 통하여 정확성을 확증하였다.

1. 손상층에 대한 령역세기모형과 전체 역세기결정

령역세기모형은 손상을 가진 판의 손상층에 대한 고찰에 기초하고있다. 모체손상이 층두께방향으로 성장하여 섬유다리가 형성되거나 나아가서 섬유층분리나 섬유파괴가 생긴다면 손상층의 구부림과 자름에 대한 저항은 현저히 약화된다. 현실에서 자주 보는것 처럼 반복 또는 충격가로짐에 의해 다층판의 국부구역에서 층분리와 모체손상이 생기고 그것이 성장하여 층두께를 관통함으로써 층의 섬유화 및 파괴를 일으킨다. 이렇게 되면 손상층은 구부림, 자름뿐아니라 당김, 누름도 받지 못하며 결국 층의 역세기는 령으로 된다. 따라서 손상구역에서 k 째 손상층에 대하여 다음식을 쓸수 있다.

$$(\bar{Q}_{ij}^e)_k = 0 \quad (1)$$

이 식은 손상층의 령국부역세기 즉 국소부위의 완전손상을 표시한다.

령역세기모형 (1)에 따라 손상층의 역세기는 령으로, 비손상층의 역세기는 비손상구역에서의 역세기와 같다는것을 고려하면

$$(\bar{Q}_{ij}^e)_k = (1 - \delta_{k\gamma}^{(e)}) \cdot (\bar{Q}_{ij})_k, \quad \delta_{k\gamma}^{(e)} = \begin{cases} 1, & k = \gamma^{(e)} \\ 0, & k \neq \gamma^{(e)} \end{cases} \quad (2)$$

이다. 판의 중간면의 면적을 S , 비손상구역과 손상구역의 면적을 각각 S_u 와 S_d , e 째 손상구역의 면적을 S^e , 판에 존재하는 손상구역의 개수를 M 으로 표시하면 다음과 같다.

$$S_d = \sum_{e=1}^M S^e, \quad S_u + S_d = S \quad (3)$$

전체 역세기를 얻기 위하여 대칭직교층복합판의 에네르기범함수를 리용한다. 판의 전에네르기는

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint_S \Lambda(A_{ij}, D_{ij}) dx dy = \frac{1}{2} \left(\iint_{S_u} \Lambda^u dx dy + \sum_{e=1}^M \iint_{S^e} \Lambda^e dx dy \right) \quad (4)$$

로 주어진다. 여기서

$$\Lambda^u = \sum_{s=1}^3 \Lambda_s^u(A_{ij}, D_{ij}), \quad \Lambda^e = \sum_{s=1}^3 \Lambda_s^e(A_{ij}^e, D_{ij}^e) \quad (5)$$

이다. $A_{ij}, D_{ij}, A_{ij}^e, D_{ij}^e$ 들은 각각 비손상구역과 손상구역에서의 당김 및 구부림역세기들이다. 비손상구역과 손상구역의 면적에 따르는 무게비를 도입하여 전체 역세기를 도입하면 손상이 없는 판의 알려진 풀이를 리용하여 손상을 가진 문제의 풀이를 쉽게 얻을수 있다.

전체 당김 및 구부림역세기라고 부르는 량 $\bar{A}_{pp}, \bar{D}_{ij}$ 를 다음과 같이 도입하자.

$$\begin{aligned} \bar{A}_{pp} &= A_{pp} \frac{S_u}{S} + \frac{\left(\sum_{e=1}^M A_{pp}^e S^e \right)}{S} \quad (p = 4, 5) \\ \bar{D}_{ij} &= D_{ij} \frac{S_u}{S} + \frac{\left(\sum_{e=1}^M D_{ij}^e S^e \right)}{S} \quad (ij = 11, 12, 22, 66) \end{aligned} \quad (6)$$

전에너지식 (4)는

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^3 \sum_p \left(\iint_S \bar{F}_{ij} \bar{\Lambda}_{sp} dx dy \right) = \frac{1}{2} \iint_S \bar{\Lambda}(\bar{A}_{ij}, \bar{D}_{ij}) dx dy = \bar{\Pi} \quad (7)$$

이다. 식 (7)에서

$$\bar{F}_{ij} = \begin{cases} \bar{A}_{ij} & (ij = 44, 55) \\ \bar{D}_{ij} & (ij = 11, 12, 22, 66) \end{cases}$$

이고 $\bar{\Lambda}_{sp}$ 는 식 (5)에서 A_{ij}, D_{ij} 및 A_{ij}^e, D_{ij}^e 의 결수들이다. 식 (6), (7)에서 보는것처럼 전체 역세기 $\bar{A}_{pp}, \bar{D}_{ij}$ 들은 분포된 충분리와 모체손상(간단히 DMC)들이 있는 판의 역세기에 해당하는 결함없는 판의 등가역세기로 되며 $\bar{\Pi}$ 는 등가판의 전에너지로 된다. 결국 손상을 가진 판문제를 형식상 손상이 없는 문제로 바꿀수 있는 식을 얻었다. 따라서 이 역세기들을 리용하여 분포된 DMC를 가진 판의 구부림문제를 다층판리론으로 고찰할수 있다.

령역세기모형을 리용하는 경우 전체 역세기들은 다음과 같이 결정된다.

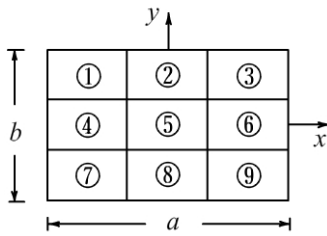
$$\begin{aligned} \bar{A}_{pp} &= \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{pp})_k \left(1 - \frac{1}{S} \sum_{e=1}^M \delta_{k\gamma}^{(e)} S^e \right) (z_k - z_{k-1}) \quad (p = 4, 5) \\ \bar{D}_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k \left(1 - \frac{1}{S} \sum_{e=1}^M \delta_{k\gamma}^{(e)} S^e \right) (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (ij = 11, 12, 22, 66) \end{aligned} \quad (8)$$

당김과 구부림의 결함역세기 B_{ij} 에 대하여서도 $\bar{A}_{pp}, \bar{D}_{ij}$ 와 같은 방법으로 전체 결함역세기 \bar{B}_{ij} 를 정의할수 있다. 비록 대칭직교다층판이라고 하여도 손상층의 국부 및 령역세

기의 영향으로 손상구역에서 결합역세기는 일반적으로 령이 아니다. 그러나 개별적손상 구역이 비손상구역에 비하여 매우 작으므로 \bar{B}_{ij} 는 고찰하지 않는다.

2. 수치모의와 결과분석

앞에서 제기한 령역세기모형에 기초한 전체 역세기결정방법을 리용하여 단순지지된 대칭다층복합판의 좌굴문제를 고찰하자.



판의 길이와 너비는 $a=b=0.3\text{m}$ 이고 두께는 $h=0.004\text{m}$ (8 개 층)이다. 매 층의 두께는 $t_k=0.0005\text{m}$ 로서 다 같고 적층 구조는 $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]_s$ 이며 층재료는 다음의 특성량을 가진 유리/에폭시재료이다.

$$E_{11}=38.6\text{GPa}, E_{22}=8.27\text{GPa}, \nu_{12}=\nu_{13}=0.26, \nu_{23}=0.35$$

$$G_{12}=G_{13}=4.14\text{GPa}, G_{23}=3.06\text{GPa}$$

그림 1. DMC쌍의 행렬분포 상태

층분리의 길이와 너비는 $a_k=0.03\text{m}$, $b_k=0.03\text{m}$ 이고 모체 손상의 길이와 깊이는 $l_k=0.03\text{m}$, $d_k=0.0005\text{m}$ 이다.

편리상 DMC쌍이 행렬형태로 분포되었다고 하고 매 쌍에 번호를 붙이자.(그림 1) DMC들은 해당 요소구역의 중심에 있으며 그것들의 개수(M)와 분포사이에에는 다음의 규칙이 성립한다.

$$M=1-(5), M=3-(4)(5)(6), M=5-(1)(3)(5)(7)(9), \\ M=7-(1)(3)(4)(5)(6)(7)(9), M=9-(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)$$

일반적으로 모체손상이 있는 층번호 $\gamma^{(e)}$ 는 손상구역에 따라 각이하다. 여기서는 일반성을 잃지 않고 계산상 편리를 위해 모든 손상구역에서 DMC의 위치는 같다($\gamma^{(e)}=\gamma$)고 가정한다. 전체 역세기방법에 따라 판의 좌굴짐은 이미 알려진 다층복합판의 좌굴짐 공식에서 역세기를 전체 역세기로 단순히 바꾸어 얻을수 있다.

우선 한축누름판의 림계짐을 해석적으로 결정하자. 한축누름($P_x \neq 0, P_y = 0$)의 경우 좌굴은 힘작용방향에 수직으로 1개의 반파를 형성하면서 발생한다. 따라서 림계짐($n=1$)은

$$P_{x,cr} = -\left(\frac{\pi}{ma}\right)^2 \left[\bar{D}_{11}m^4 + 2(\bar{D}_{12} + 2\bar{D}_{66})m^2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \bar{D}_{22} \left(\frac{a}{b}\right)^4 \right] \quad (9)$$

이다. 해당한 좌굴모드를 특징짓는 반파개수 m 은 가로세로비 a/b 와 세기비 $\mu = (\bar{D}_{11}/\bar{D}_{22})^{1/4}$ 사이의 알려진 부등식에 따라 결정된다. 즉

$$m=1; \frac{a}{b} \leq \sqrt{2}\mu, \quad m=2; \sqrt{2}\mu \leq \frac{a}{b} \leq \sqrt{6}\mu, \quad m=3; \sqrt{6}\mu \leq \frac{a}{b} \leq \sqrt{12}\mu, \dots \quad (10)$$

DMC를 가진 판의 경우 μ 값은 적층순서나 재료속성에만 관계되지 않고 DMC의 위치(γ)와 DMC의 수에 따라 각이하게 결정된다.

그림 2는 두가지 경우의 DMC 즉 6층과 7층사이에 층분리를, 6층에 모체손상을 가진 경우($\gamma=6$)와 7층과 8층사이에 층분리를, 7층에 모체손상을 가진 경우($\gamma=7$)에 대하여 무

차원림계짐 $\bar{P}_{x,cr}$ ($\bar{P}_{x,cr} = P_{x,cr} / P_{x,cr}^0$) 의 DMC개수 M 에 따르는 변화상태를 보여준다. 여기서 $P_{x,cr}^0$ 는 $M=0$ 즉 손상이 없는 다층판의 림계짐이다.

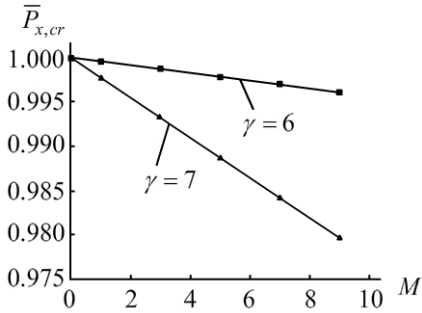


그림 2. $\bar{P}_{x,cr} - M$ 사이의 관계

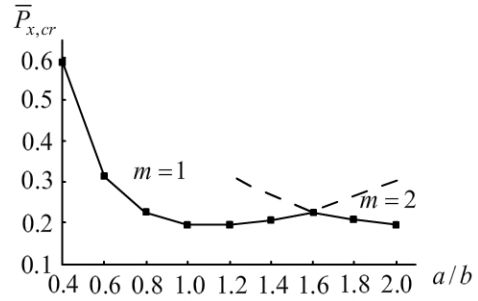


그림 3. $\bar{P}_{x,cr} - a/b$ 사이의 관계
($M=5$, $\gamma=7$ 인 경우)

DMC의 개수가 증가하는데 따라 림계짐은 감소하며 $M=3$ 일 때 $\gamma=6$ 인 경우의 값이 $\gamma=7$ 인 경우보다 0.99 % 크며 $M=7$ 일 때는 1.28% 크다. 이것은 DMC의 개수와 위치가 판의 림계짐에 다같이 영향을 준다는것을 보여주며 특히 DMC의 위치가 판의 림계짐에 큰 영향을 미친다는것을 알수 있다.

그림 3은 $M=5$, $\gamma=7$ 인 경우에 길이와 너비의 비에 따르는 무차원림계짐 $\bar{P}_{x,cr}$ 의 거동을 보여준다. $\bar{P}_{x,cr}$ 는 $a/b \leq 1.2$ 일 때 감소하고 $1.2 \leq a/b \leq 1.6$ 일 때 증가하며 이때 짐 작용방향으로 1개의 반파를 형성한다.($m=1$)

$a/b \geq 1.6$ 일 때 $\bar{P}_{x,cr}$ 는 증가하며 짐작용방향으로 2개의 반파를 형성한다.($m=2$) 이 리한 거동은 DMC가 없는 판에서와 매우 류사하다.

다음으로 $\gamma=7$ 인 경우에 M 의 변화에 따르는 림계짐값을 ANSYS를 통하여 구하고 령역세기모형을 리용하여 얻은 해석풀이값과 비교하자. 요소는 1차자름변형을 고려한 SOLSH190을 리용하였으며 요소개수는 16만개로 하였다.

표 1에 M 의 변화에 따르는 해석풀이와 유한요소풀이결과들을 보여주었다.

표 1. M 의 변화에 따르는 해석풀이와 ANSYS풀이결과

M	0	1	3	5	7	9
해석풀이 $P_{x,cr}/10^4(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	4.005 3	3.999 4	3.987 5	3.975 6	3.963 7	3.951 8
ANSYS풀이 $P_{x,cr}/10^4(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	3.954 0	3.926 0	3.897 2	3.870 4	3.823 6	3.798 8

해석풀이와 ANSYS풀이와의 오차는 $M=5$ 일 때 2.64%, $M=7$ 일 때 3.53%, $M=9$ 일 때 3.87 %이다.

DMC의 분포가 판의 좌굴에 주는 영향을 고찰하기 위하여 각이한 분포상태 즉 비대칭분포 Ω_1 (③⑤⑦), Ω_2 (①④⑦)와 대칭분포 Ω_3 (④⑤⑥)에 대하여 좌굴짐들을 계산하고 ANSYS모의결과와 비교하였다.(표 2)

표 2. 각이한 분포(Ω_i)에 따르는 림계짐의 변화($M=3$)

Ω_i	해석폴이(10^4N/m)	ANSYS폴이(10^4N/m)	Ω_i/Ω_1
Ω_1	3.987 5	3.893	1
Ω_2	3.987 5	3.900	1.001 7
Ω_3	3.987 5	3.897	1.001 0

표 2에서 보는것처럼 DMC의 변화에 따르는 림계짐차이는 매우 작다. 그러므로 DMC가 있는 판의 좌굴은 DMC의 분포형식에 크게 의존하지 않으며 따라서 령역세기모형을 리용한 판의 좌굴해석을 DMC의 개수가 주어진 경우 그 분포상태에 관계없이 적용할수 있다는것을 알수 있다.

참 고 문 헌

- [1] 김일성종합대학학보 수학, 65, 2, 82, 주체108(2019).
- [2] R. I. Mahmud et al.; Int. J. of Mechanical & Mechatronics Engineering, 18, 5, 83, 2018.
- [3] P. B. Bipin. et al.; Int. J. of Engineering Research & Technology, 5, 7, 399, 2016.

주체108(2019)년 9월 15일 원고접수

Buckling Simulation of Cross-Ply Laminated Composite Plate with Distributed Delaminations and Matrix Cracks based on Zero Stiffness Model

Sin Su Hyok, U Song Hak

In this paper, using the zero stiffness model, we consider the buckling behaviour of cross ply-laminated composite plates with distributed delaminations and matrix cracks, and also validate results through ANSYS simulation.

Keywords: zero stiffness model, matrix crack