김일성종합대학학보 JOURNAL OF KIM IL SUNG UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체105(2016)년 제62권 제5호 Vol. 62 No. 5 JUCHE105(2016).

비미끈최소화문제에서 거꿀랴뿌노브정리에 기초한 반그라디엔트법적용에 대한 연구

리 국 환

론문에서는 비미끈비불룩최소화문제에서 거꿀랴뿌노브정리에 기초한 반그라디엔트법의 적용에 관한 연구를 진행하였다.

선행연구[1－3]에서는 각이한 비미끈비불룩최소화문제들을 설정하고 반그라디엔트미분포함에 관한 목적함수준위모임의 국부점근안정성을 밝히고 클라크일반화그라디엔트를 리용한 반그라디엔트법알고리듬의 목적함수준위모임에로의 근사수렴성을 밝혔다.

우리는 비특이국부리프쉬츠함수의 제한이 없는(또는 있는) 최소화문제에서 반그라디엔트미분포함에 관한 극소값점모임의 국부점근안정성을 밝히고 거꿀랴뿌노브정리에 의한 미끈한 랴뿌노브함수의 존재에 기초하여 클라크일반화그라디엔트를 리용하는 반그라디엔트법알고리듬의 동일한 극값을 가지는 극값점모임에로의 수렴성을 밝혔다.

B는 $\boldsymbol{R}^n$의 열린 단위구를 표시하며 $x \to \partial A^\infty$는 A의 경계점으로 수렴하는 또는 A가 비유계이면 성질 $\|x\| \to +\infty$를 가지는 A에 속하는 점 x들의 렬을 표시한다.

$\alpha : \boldsymbol{R}_{\geq 0} \to \boldsymbol{R}_{\geq 0}$이 $\alpha(0) = 0$인 엄격히 증가하는 비유계련속함수이면 이 함수는 K_∞－클라스에 속한다고 말한다.[4]

함수 $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$와 모임 $S \subseteq \boldsymbol{R}^n$이 주어졌다고 하자.

정의 1 모임 $M \subset S$에 대하여 다음의 조건들이 성립되면 모임 M을 S에서의 극소모임(극대모임)이라고 부른다.

i) $x_1,\ x_2 \in M \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

ii) $\exists \varepsilon > 0 : x \in M \wedge y \in [(M + \varepsilon B) \setminus M] \cap S \Rightarrow f(x) < f(y)\ \ (f(x) > f(y))$

앞으로 전기간 함수 $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$는 상수함수가 아닌 비특이국부리프쉬츠함수이며 이 함수의 극소모임전부의 합모임을 M_*, 극대모임전부의 합모임을 M^*로 표시한다.

보조정리 1 S가 $\boldsymbol{R}^n$ 혹은 닫긴련결모임이라고 하면 다음과 같다.

i) S에서의 극소 및 극대모임들은 닫긴모임들이다.

ii) f가 S에서 유한개의 극소 및 극대모임들을 가지면 $M_*,\ M^*$은 서로 사귀지 않는 닫긴모임들이다.

$F(\cdot)$은 $\boldsymbol{R}^n$을 $\boldsymbol{R}^n$의 부분모임들로 넘기는 다가넘기기라고 하자.

정의 2[3] 콤팍트모임 $A \subset \boldsymbol{R}^n$이 미분포함 $\dot{x} \in F(x)$에 대하여 다음의 조건을 만족시킬 때 국부점근안정하다고 말한다.

i) 임의의 $\varepsilon > 0$에 대하여 $\delta > 0$이 존재하여 모든 $x \in A + \delta\overline{B}$에 대하여 매 풀이 $\phi \in S_F(x)$는 $[0,\ +\infty)$에서 정의되고 $\phi(t) \in A + \varepsilon\overline{B},\ \forall t \geq 0$을 만족시킨다.

ii) 풀이 $\phi \in S_F(x)$가 $[0, +\infty)$에서 정의되고 $\lim_{t\to+\infty} d(\phi(t), A)=0$을 만족시키는 점 x들의 모임 G는 A의 근방을 포함한다.(이 모임을 A의 흡입구역이라고 부른다.) 여기서 $S_F(x)$는 초기점이 $x\in\boldsymbol{R}^n$인 미분포함의 최대풀이들의 모임이다.

1. 반그라디엔트미분포함에 관한 극소값점모임의 국부점근안정성

여기서는 비미끈최소화문제 $\min_{x\in\boldsymbol{R}^n} f(x)$에 대하여 반그라디엔트미분포함

$$\dot{x}\in F_f(x):=-\partial_C f(x) \tag{1}$$

에 관한 f의 극소값점모임의 국부점근안정성을 평가한다.

가정 1 i) $\bar{f}\in\boldsymbol{R}$에 대하여 모임 $X:=\{x\in\boldsymbol{R}^n: f(x)\le\bar{f}\}$는 비지 않은 유계모임이다.

ii) 목적함수 f의 정류점모임 $C=\{x\in\boldsymbol{R}^n: 0\in\partial_C f(x)\}$는 유한개의 ($\boldsymbol{R}^n$에서의) 극소 및 극대모임들의 합으로 이루어진다.(극대모임은 존재하지 않을수 있다.)

$A:=M_*\cap X$, $X^c:=X\setminus M^*$이라고 놓자.

정리 1 가정 1을 만족시키는 비특이국부리프쉬츠함수 $f:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$에 대하여 $A\subset \operatorname{int}X$라고 하면 A는 비지 않은 콤팍트모임이고 식 (1)에 관하여 국부점근안정하며 흡입구역 G는 X^c를 포함하며 A를 제외하고는 다른 정류점을 포함하지 않는다.

증명 가정 1과 보조정리 1을 리용하면 A가 비지 않은 콤팍트모임이라는것을 쉽게 알수 있다.

이제 국부점근안정성조건을 증명하자.

가정 1, 보조정리 1에 의하여 A와 M^*은 서로 사귀지 않는 닫긴모임들이므로 $A\subset \operatorname{int}X^c$이다.

따라서 $x_0\in X^c$일 때 $\phi\in S_{F_f}(x_0)$에 대하여 $\lim_{t\to+\infty} d(\phi(t), A)=0$을 증명하면 충분하다.

$\phi(t)\in X^c\setminus A$인 t들에서 $f(\phi(t))$는 엄격히 단조감소하므로 $x_0\in X^c\setminus A$일 때 ϕ는 M^*의 적당한 근방에 놓이지 않고 $C=M_*\cup M^*$이며 $C\cap X=A\cup(M^*\cap X)$이므로 극한식이 성립된다.

다음으로 정의 2의 i)을 증명하기 위하여 $A+\varepsilon\overline{B}\subset X^c$인 임의의 $\varepsilon>0$을 택하자.

가정 1로부터 콤팍트모임 A를 다음의 성질을 가지는 유한개의 서로 사귀지 않는 콤팍트모임 $M_1, M_2, \cdots, M_m$들로 분할할수 있다.

$$x_1, x_2\in M_i \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)=: f_i \ \ (\forall i=1,\cdots,m) \tag{2}$$

$$\exists\varepsilon_i>0: x\in(M_i+\varepsilon_i B)\setminus M_i \Rightarrow f(x)>f_i \ \ (\forall i=1,\cdots,m) \tag{3}$$

여기서 ε_i들을 $0<\varepsilon_i<\varepsilon$이면서 모임 $M_i+\varepsilon_i B$들이 서로 사귀지 않도록 작게 택한다.

이때 국부점근안정성조건 i)의 증명을 위해서는 매 i에 대하여 적당한 $\delta_i>0$이 존재하여 모든 $x\in M_i+\delta_i\overline{B}$에 대하여 매 풀이 $\phi\in S_{F_f}(x)$가 $\phi(t)\in M_i+\varepsilon_i\overline{B}(\subset M+\varepsilon\overline{B}),\ \forall t\ge 0$을 만족시킨다는것을 증명하면 충분하다.

식 (3)으로부터 $\min_{x\in\partial(M_i+\varepsilon_i\overline{B})} f(x)=:\alpha>f_i$이다.

한편 M_i의 콤팍트성과 f의 련속성, 식 (2), (3)으로부터 적당한 $0<\delta_i<\varepsilon_i$가 존재하여 $x\in M_i+\delta_i\overline{B}$ 일 때 $f_i\le f(x)<\alpha$가 성립된다. 따라서 모든 $x\in M_i+\delta_i\overline{B}$에 대하여 매 풀이 $\phi\in S_{F_f}(x)$는 $\phi(t)\in M_i+\varepsilon_i B,\ \forall t\ge 0$을 만족시킨다.(증명끝)

정리 1과 선행연구[4]의 결과들을 결합하면 다음의 사실이 성립된다.

정리 2 정리 1의 조건이 성립된다고 하면 A는 비지 않은 콤팍트모임이다.

그리고 $X^c\subset G$이면서 모임 A를 제외하고는 다른 정류점을 포함하지 않는 적당한 열린구역 G에서 $\omega: G\to \boldsymbol{R}_{\ge 0}$이 $\omega(x)=0\leftrightarrow x\in A$; $\lim\limits_{x\to\partial G^\infty}\omega(x)=+\infty$인 련속함수일 때 C^∞미끈함수 $V: G\to \boldsymbol{R}_{\ge 0}$과 K_∞−클라스의 함수 $\alpha_1,\ \alpha_2$가 존재하여

$$\alpha_1(\omega(x))\le V(x)\le \alpha_2(\omega(x)),\quad \max_{d\in F_f(x)}\langle \nabla V(x),\ d\rangle \le -V(x)$$

이다. 여기서 $F_f(x):=-\partial_C f(x)$이다.

2. 제한이 없는 최소화문제에서 반그라디엔트법알고리듬의 수렴성

다음의 제한이 없는 비미끈최량화문제를 보자.

$$\min_{x\in \boldsymbol{R}^n} f(x) \tag{4}$$

여기서는 가정 1의 기호들을 그대로 리용한다.

가정 1에 의하여 함수 f의 정류점모임 C를 극값에 따라 서로 사귀지 않는 극소모임 $M_i,\ i=1,\cdots,m_1$, 극대모임 $M_i,\ i=m_1+1,\cdots,m$들로 분할할수 있다.

$$X^*:=\{x\in X:\ 0\in\partial_C f(x)\},\ A:=M_*\cap X,\ A^*:=M^*\cap X,\ A_i:=M_i\cap X,\ i=1,\cdots,\ m$$

$A_i,\ i=1,\cdots,m$들중에서 비지 않은 모임들을 다시 $A_i:=M_i\cap X$로 표시한다.

이제 $\tau_k>0,\ \lim\limits_{k\to\infty}\tau_k=0,\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}\tau_k=+\infty$라고 하자.

반그라디엔트법알고리듬 1

걸음 1 초기점 $x_1\in\boldsymbol{R}^n$을 선택하고 $k:=1$로 놓는다.

걸음 2 $0\in\partial_C f(x_k)$이면 중지한다.

걸음 3 임의의 $d_k\in F_f(x_k):=-\partial_C f(x_k)$를 계산한다.

걸음 4 $\tau_k>0$을 선택하고 $x_{k+1}=x_k+\tau_k d_k,\ k:=k+1$로 놓고 걸음 2로 간다.

정리 3 문제 (4)에서 $A\subset \operatorname{int} X$라고 하고 초기점 $x_1\in X$에 대하여 알고리듬 1의 생성점렬 $\{x_k\}$가 모임 X에 속한다고 하면 다음과 같다.

i) $\{x_k\}$가 유한렬이면 마지막 점 x_{k_N}은 어느한 모임 $A_i,\ i=1,\cdots,m$에 속한다.

ii) $\{x_k\}$가 무한렬이면 어느한 모임 $A_i,\ i=1,\cdots,m$이 존재하여 $\lim\limits_{k\to\infty}d(x_k,\ A_i)=0$이다.

증명 정리의 조건으로부터 정리 2의 조건이 만족되므로 정리 2의 결과식들과 기호들을 그대로 리용한다.

$0<a<b<+\infty$라고 놓고 점 $x\in\{x\in\boldsymbol{R}^n:\ a<V(x)<b\}$, 벡토르 $d\in F_f(x)$, 수 $\tau>0$에 대하여 $y=x+\tau d\in\{x\in\boldsymbol{R}^n:\ V(x)<b\}$라고 하면 적당한 $\theta\in(0,\ \tau)$가 존재하여

$$V(y)-V(x)\le -\tau V(x)+\tau^2 L\|d\|^2 \le -a\tau+\tau^2 Lm^2$$

이 성립된다. 여기서 L 은 미끈함수 $\nabla V(\cdot)$ 의 모임 $\{x\in \boldsymbol{R}^n : V(x)\le b\}$ 에서의 리프쉬츠상수, m 은 $F_f(\cdot)$ 의 모임 $\{x\in \boldsymbol{R}^n : V(x)\le b\}\cup X$ 에서의 웃한계이다.

정리를 증명하기 위하여 $\{x_k\}$ $(x_1\notin X^*)$가 무한렬이라고 하자.

먼저 $\varliminf\limits_{k\to\infty} d(x_k,\ X^*)=0$ 이 성립된다는것을 쉽게 알수 있다.

이제 $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_k,\ X^*)=0$ 을 증명하자.

이것의 증명은 $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_k,\ A)=0$ 이 아니면 $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_k,\ A^*)=0$ 이라는 2자택일적증명과 동등하다.($A^*=\phi$ 의 경우에는 단순히 $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_k,\ A)=0$ 의 증명에 귀착된다.)

그런데 $\varliminf\limits_{k\to\infty} d(x_k,\ A^*)\ne 0$ 이면(또는 $A^*=\phi$ 이면) $\varliminf\limits_{k\to\infty} d(x_k,\ A)=0$ 즉 $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_k,\ A)=0$ 이고 $\varliminf\limits_{k\to\infty} d(x_k,\ A^*)=0$ 인 경우에 $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_k,\ A^*)=0$ 이라는것을 쉽게 알수 있다.

또한 $\|x_{k+1}-x_k\|\to 0\ (k\to\infty)$ 이고 $X^*=\bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i$ 이며 $A_i,\ i=\overline{1,\ m}$ 들은 서로 사귀지 않는 콤팍트모임들인것으로 하여 근방적으로 분리되므로 어떤 i 가 있어서 $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_k,\ A_i)=0$ 이다.(증명끝)

3. 제한이 있는 최소화문제에서 반그라디엔트법알고리듬의 수렴성

제한이 있는 다음의 비미끈최소화문제를 보자.

$$\min_{x\in S} h(x) \tag{5}$$

여기서 $S=\{x\in \boldsymbol{R}^n :\ g(x)\le 0\}$ 은 콤팍트모임이고 $h:\boldsymbol{R}^n\to \boldsymbol{R}$ 는 비특이리프쉬츠함수이며 $g:\boldsymbol{R}^n\to \boldsymbol{R}$ 는 슬레이쩨르조건($\exists \tilde{x}\in \boldsymbol{R}^n : g(\tilde{x})<0$)을 만족시키는 불룩함수이다.

가정 2 모임 $\{x\in S: 0\in \partial_C h(x)+N_S(x)\}$ 는 유한개의(S 에서의) 극소 및 극대모임들의 합으로 이루어진다.

$L_h>0$ 은 h 의 리프쉬츠상수이고 $r_1>0$ 은 어떤 수라고 하자.

다음의 제한이 없는 비미끈최소화문제를 도입하자.

$$\min_{x\in \boldsymbol{R}^n} f_\sigma(x) \tag{6}$$

여기서 $f_\sigma(x):=h(x)+\max\{0,\ \sigma g(x)\}$, $\sigma>L_h/r_1$ 이다.

보조정리 2 $\sigma>L_h/r_1$ 일 때 다음의 사실들이 성립된다.

i) $f_\sigma|_S=h|_S$

ii) $C:=\{x\in \boldsymbol{R}^n : 0\in \partial_C f_\sigma(x)\}\subset \{x\in S: 0\in \partial_C h(x)+N_S(x)\}$

iii) 함수 f_σ 의 $\boldsymbol{R}^n$ 에서의 최소값점모임은 h 의 S 에서의 최소값점모임과 일치한다.

보조정리 2로부터 우리는 문제 (6)을 통하여 문제 (5)를 풀려고 한다.

한편 함수 f_σ는 가정 1을 만족시키며 f_σ의 정류점모임 C는 서로 사귀지 않는 극소모임 $M_i,\ i=1,\cdots,m_1$, 극대모임 $M_i,\ i=m_1+1,\cdots,m$ 들로 극값에 따라 분할할수 있다.

이제 $\tau_k>0,\ \sum_{k=1}^{\infty}\tau_k=+\infty,\ \sum_{k=1}^{\infty}\tau_k^2<+\infty$ 라고 하자.

반그라디엔트법알고리듬 2

걸음 1 초기점 $x_1\in\boldsymbol{R}^n$을 선택하고 $k:=1$로 놓는다.

걸음 2 $0\in\partial_C f_\sigma(x_k)$이면 중지한다.

걸음 3 임의의 $z_k=\dfrac{d_k}{\|d_k\|},\ d_k\in F_f(x_k):=-\partial_C f_\sigma(x_k)$를 계산한다.

걸음 4 $x_{k+1}=x_k+\tau_k z_k,\ k:=k+1$로 놓는다. 걸음 2로 간다.

정리 4 함수 $h:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$와 허용구역 S가 가정 2를 만족시키면 임의의 $x_1\in\boldsymbol{R}^n$에 대하여 알고리듬 2의 생성점렬 $\{x_k\}$는 다음의 사실을 만족시킨다.

i) $\{x_k\}$가 유한렬이면 마지막 점 x_{k_N}은 어느한 모임 $M_i,\ i=1,\cdots,m$에 속한다.

ii) $\{x_k\}$가 무한렬이면 어느한 모임 $M_i,\ i=1,\cdots,m$이 존재하여 $\lim\limits_{k\to\infty}d(x_k,\ M_i)=0$이다.

참 고 문 헌

[1] A. Bagirov et al.; Math. Meth. Oper. Res., 67, 187, 2008.

[2] P. Nistri et al.; Journal of Optimization Theory and Applications, 124, 3, 659, 2005.

[3] A. R. Teel; Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control, 112～117, 2002.

[4] A. Nedic et al.; Math. Program., A 125, 75, 2010.

주체105(2016)년 1월 5일 원고접수

Application of the Subgradient Method based on Converse Lyapunov Theorem in Nonconvex Minimization Problems

Ri Kuk Hwan

We showed the local asymptotical stability of set of local minimum points for subgradient differential inclusion and, using existence of smooth Lyapunov function via converse Lyapunov theorem, the convergence of subgradient method algorithm to extremum set with equal extremum in a number of unconstrained (and or constrained) nonconvex minimization problems of nonpathological local Lipshitz function.

Key word: nonpathological local Lipshitz function