김일성종합대학학보 주체110(2021)년
수 학 제67권 제1호

한가지 형태의 선형다항분수계편미분－적분방정식의 해석적풀이

정성국, 최희철

경애하는 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《과학기술을 확고히 앞세우고 과학기술과 생산을 밀착시키며 경제건설에서 제기되는 모든 문제들을 과학기술적으로 풀어나가는 기풍을 세워 나라의 경제발전을 과학기술적으로 확고히 담보하여야 합니다.》

론문에서는 과학과 기술의 많은 문제해결에서 나서는 선형다항분수계편미분－적분방정식의 풀이를 얻기 위한 문제를 연구하였다.

선행연구[3]에서는 비국부감쇠항을 가지는 시공간분수계편미분방정식

$$P(D_{0+}^*)u(x,\ t)+\mu_1(-\Delta)^{q_1/2}u(x,\ t)+\mu_2 t^{\gamma-1}E_{\beta,\gamma}(-\omega t^{\beta})*(-\Delta)^{q_2/2}u(x,\ t)=f(x,\ t) \quad (1)$$

$$P(D_{0+}^*)u(x,\ t)=\left(D_{0+}^{\alpha}+\sum_{i=1}^{p}a_i D_{0+}^{\alpha_i}\right)u(x,\ t),\ 0\le a_p\le\cdots\le\alpha\le 2,\ 0\le q_i\le 2\ \ (i=1,\ 2)$$

의 해석적인 풀이를 얻기 위하여 분수계상미분－적분방정식

$$P(D_{0+}^*)y(t)+\mu_1 y(t)+\mu_2\int_0^t(t-\tau)^{\gamma-1}E_{\beta,\gamma}(-\omega(t-\tau)^{\beta})y(\tau)d\tau=f(t) \quad (2)$$

의 해석적풀이를 얻고 변수분리법을 리용하여 편미분방정식의 풀이를 얻었다.

또한 선행연구[2]에서는 한변수미태그－레플러함수에 의한 적분연산자를 새롭게 정의하고 그것의 성질을 밝혔다.

선행연구[1]에서는 일반화된 여러변수미태그－레플러함수에 의한 적분연산자를 새롭게 정의하고 그것의 성질을 밝혔으며 그에 기초하여 식 (2)를 보다 일반화된 분수계상미분－적분방정식

$$P(D_{0+}^*)u(t)+\sum_{j=1}^{K}\eta_j\int_0^t(t-\tau)^{\gamma_j-1}E_{\beta_j,\gamma_j}^{\rho_j}(-\omega_j(t-\tau)^{\beta_j})u(\tau)d\tau=f(t) \quad (3)$$

의 초기값문제의 해석적풀이를 얻었다.

론문에서는 식 (1)을 보다 일반화된 분수계편미분－적분방정식

$$P(D_{0+}^*)u(x,\ t)+\sum_{j=1}^{K}t^{\gamma_j-1}E_{\beta,\gamma_j}^{\rho_j}(-\omega t^{\beta})*(-\Delta)^{q_j/2}u(x,\ t)=f(x,\ t) \quad (4)$$

의 해석적풀이를 얻는다. 우선 분수계라쁠라스연산자의 스펙트르표현을 리용하여 시공간분수계편미분－적분방정식을 시간분수계상미분－적분방정식으로 변환한다. 다음 시간분수계상미분－적분방정식의 해석적풀이를 얻고 이로부터 시공간분수계편미분－적분방정식의 풀이를 얻는다.

론문에 필요한 여러가지 개념과 정리들을 보기로 하자.

정의 1 n변수함수

$$E_{(a_1,\cdots,a_n),\,b}(z_1,\ \cdots,\ z_n)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l_1,\,\cdots,\,l_n\ge 0}^{l_1+\cdots+l_n=k}\begin{pmatrix} k \\ l_1,\ \cdots,\ l_n\end{pmatrix}\frac{\prod_{j=1}^{n} z_j^{l_j}}{\Gamma\left(b+\sum_{j=1}^{} a_j l_j\right)},\ b>0$$

으로 정의된 $E_{(a_1,\cdots,a_n),\,b}(z_1,\ \cdots,\ z_n)$을 여러변수미태그－레플러함수라고 부른다. 여기서 $\begin{pmatrix} k \\ l_1,\ \cdots,\ l_n\end{pmatrix}:=\frac{k!}{l_1!,\ \cdots,\ l_n!}$ $(k,\ l_1,\ \cdots,\ l_n\in\mathbf{N}_0)$이고 $(\rho)_k:=\rho(\rho+1)\cdots(\rho+k-1),\ (\rho)_0:=1$이다.

정의 2[4] 다음과 같이 정의되는 함수 $E^{\rho}_{(b_1,\cdots,b_n),\,a}(z_1,\ \cdots,\ z_n)$을 일반화된 여러변수미태그－레플러함수라고 부른다.

$$E^{\rho}_{(a_1,\cdots,a_n),\,b}(z_1,\ \cdots,\ z_n):=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\rho)_k}{k!}\sum_{l_1,\,\cdots,\,l_n\ge 0}^{l_1+\cdots+l_n=k}\begin{pmatrix} k \\ l_1,\ \cdots,l_n\end{pmatrix}\frac{\left(\prod_{j=1}^{n} z_j^{l_j}\right)}{\Gamma\left(\sum_{j=1}^{n} l_j\cdot a_j+b\right)}$$

정의 3[3] 라쁠라스연산자$(-\Delta)$가 유계구역 D에서 고유값 λ_n^2에 대응하는 고유함수 Ψ_n들의 완비직교모임을 가진다고 하자. 즉

$$(-\Delta)\Psi_n=\lambda_n^2\Psi_n$$

이고 D의 경계에서 $\mathrm{B}(\Psi)=0$이 성립한다. 여기서 $\mathrm{B}(\Psi)=0$은 3개의 동차경계조건들중의 하나이다.

$$\Phi:=\left\{f=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\Psi_n,\ c_n=<f,\ \Psi_n>,\ \sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2|\lambda_n|^{\alpha}<\infty\right\}$$

이때 라쁠라스연산자의 제곱을 다음과 같이 정의한다.

$$(-\Delta)^{\alpha/2}f:=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\lambda_n^{\alpha}\Psi_n$$

정의 4[1] 다음의 연산자를 일반화된 여러변수미태그－레플러분수적분연산자라고 부른다.

$$\varepsilon^{\rho,\,(\lambda_1,\,\cdots,\,\lambda_n)}_{(\beta_1,\,\cdots,\,\beta_n),\alpha}:C[0,\ 1]\to C[0,\ 1]$$

$$(\varepsilon^{\rho,\,(\lambda_1,\,\cdots,\,\lambda_n)}_{(\beta_1,\,\cdots,\,\beta_n),\alpha}f)(t):=\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}E^{\rho}_{(\beta_1,\,\cdots,\,\beta_n),\,\alpha}(-\lambda_1(t-s)^{\beta_1},\ \cdots,\ -\lambda_n(t-s)^{\beta_n})f(s)ds\ (\alpha,\ \beta_1,\ \cdots,\ \beta_n>0)$$

$$(\varepsilon^{0,\,(\lambda_1,\,\cdots,\,\lambda_n)}_{(\beta_1,\,\cdots,\,\beta_n),\,0}f)(t):=f(t)$$

다음의 다항분수계상미분－적분방정식의 초기값문제를 고찰하자.

$$P(D_{0+}^{*})u(t)+\sum_{j=1}^{K}\eta_j\int_0^t(t-\tau)^{\gamma_j-1}E^{\rho_j}_{\beta,\gamma_j}(-\omega(t-\tau)^{\beta})u(\tau)d\tau=f(t) \tag{5}$$

여기서

$$P(D_{0+}^{*}):={}^{c}D_{0+}^{\alpha}+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,{}^{c}D_{0+}^{\alpha_i},\ 0\le\alpha_n\le\alpha_{n-1}\le\cdots\le\alpha_1\le\alpha$$

$$\lambda_j,\ \eta_j,\ \omega_j\in\mathbf{R},\ \gamma_j>0,\ \rho_j>0,\ \beta>0$$

이다.

$$u^{(i)}(0)=u_0^i\in\mathbf{R},\ i=0,\ 1,\ \cdots,\ J=\lceil\alpha\rceil-1 \tag{6}$$

$$\bar{f}(t):=f(t)-P(D_{0+}^{*})\left(\sum_{i=0}^{J}\frac{t^i}{i!}u_0^i\right)-\sum_{j=1}^{K}\eta_j\int_0^t(t-\tau)^{\gamma_j-1}E_{\beta_j,\gamma_j}^{\rho_j}(-\omega_j(t-\tau)^{\beta_j})\left(\sum_{i=0}^{J}\frac{\tau^i}{i!}u_0^i\right)d\tau$$

정리 1 [1] 적분－미분방정식 (5), (6)의 풀이는 다음과 같다.

$$u(t)=\sum_{i=0}^{J}\frac{t^i}{i!}u_0^i+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\sum_{l_1+\cdots+l_K=k}\binom{k}{l_1,\ \cdots,\ l_K}\prod_{j=1}^{K}(\eta_j)^{l_k}\varepsilon_{\beta,\ \sum_{j=1}^{K}\gamma_j l_j}^{\sum_{j=1}^{K}\rho_j l_j,\ w}\circ\varepsilon_{(\alpha-\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha-\alpha_n),\ (k+1)\alpha}^{k+1,(\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n)}\bar{f}(t) \tag{7}$$

우선 비국부감쇠항을 가지는 다음의 시공간분수계확산방정식을 고찰하자.

$$P(D_{0+}^{*})u(x,\ t)+\sum_{j=1}^{K}t^{\gamma_j-1}E_{\beta,\gamma_j}^{\rho_j}(-\omega t^{\beta})*(-\Delta)^{q_j/2}u(x,\ t)=f(x,\ t) \tag{8}$$

$$u(x,\ 0)=\varphi(x),\ 0<x<L \tag{9}$$

$$b_0\frac{\partial u(0,\ t)}{\partial x}+c_0u(0,\ t)=g_0(t),\ b_L\frac{\partial u(L,\ t)}{\partial x}+c_Lu(L,\ t)=g_L(t),\ t\in[0,\ T] \tag{10}$$

여기서

$$(x,\ t)\in[0,\ L]\times[0,\ T],\ P(D_{0+}^{*}):={}^{c}D_{0+}^{\alpha}+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,{}^{c}D_{0+}^{\alpha_i}\ \ (\lambda_j,\ \eta_j,\ \omega_j\in\mathbf{R})$$

$$\gamma_j>0,\ \rho_j>0,\ \beta>0,\ 0\le\alpha_n\le\cdots\le\alpha\le1,\ 0\le q_i\le2\ \ (i=\overline{1,\ K})$$

이고 $b_0,\ b_L,\ c_0,\ c_L$은 일정한 상수이다.

론문에서는 경계조건 (10)과 초기조건 (9)를 만족시키는 식 (8)의 해석적풀이를 구하려고 한다.

먼저 비동차경계조건을 동차경계조건으로 변환한다.

$$u(x,\ t):=W(x,\ t)+v(x,\ t) \tag{11}$$

여기서 $W(x,\ t)$는 미지함수이고 $v(x,\ t)$는 다음과 같다.

$$v(x,\ t)=\frac{c_Lg_0(t)-c_0g_L(t)}{b_0c_L-c_0b_L-Lc_0c_L}x+\frac{b_0g_L(t)-b_Lg_0(t)-Lc_Lg_0(t)}{b_0c_L-c_0b_L-Lc_0c_L}$$

식 (11)을 (8)－(10)에 대입하면 다음과 같은 방정식을 얻는다.

$$P(D_{0+}^{*})W(x,\ t)+\sum_{j=1}^{K}t^{\gamma_j-1}E_{\beta,\gamma_j}^{\rho_j}(-\omega t^{\beta})*(-\Delta)^{q_j/2}W(x,\ t)=\tilde{f}(x,\ t) \tag{12}$$

$$b_0\frac{\partial W(0,\ t)}{\partial x}+c_0W(0,\ t)=0,\ b_L\frac{\partial W(L,\ t)}{\partial x}+c_LW(L,\ t)=0,\ t\in[0,\ T] \tag{13}$$

$$W(x,\ 0)=\varphi(x)-\frac{c_Lg_0(0)-c_0g_L(0)}{b_0c_L-c_0b_L-Lc_0c_L}x-\frac{b_0g_L(0)-b_Lg_0(0)-Lc_Lg_0(0)}{b_0c_L-c_0b_L-Lc_0c_L} \tag{14}$$

여기서

$$\widetilde{f}(x,\ t) := f(x,\ t) - P(D_{0+}^{*})v(x,\ t) - \sum_{j=1}^{K} t^{\gamma_j - 1} E_{\beta,\gamma_j}^{\rho_j}(-\omega t^{\beta}) * (-\Delta)^{q_j/2} v(x,\ t)$$

이제 $W(x,\ t),\ \widetilde{f}(x,\ t)$가 다음과 같이 변수분리된다고 하자.

$$W(x,\ t) = \sum_{m=0}^{\infty} w_m(t)\Psi_m(x),\ \widetilde{f}(x,\ t) = \sum_{m=0}^{\infty} \widetilde{f}_m(t)\Psi_m(x) \tag{15}$$

식 (15)를 (12)와 (14)에 대입하면 초기조건을 가진 분수계상미분－적분방정식을 얻는다.

$$P(D_{0+}^{*})w_m(t) + \sum_{j=1}^{K} \lambda_m^{q_j} \int_0^t (t-\tau)^{\gamma_j - 1} E_{\beta,\gamma_j}^{\rho_j}(-\omega(t-\tau)^{\beta}) w_m(\tau) d\tau = \widetilde{f}_m(t) \tag{16}$$

$$w_m(0) = \int_0^L W(x,\ 0)\Psi_m(x)dx \tag{17}$$

정리 1에 의하여 방정식 (16), (17)의 풀이는 다음과 같다.

$$w_m(t) = w_m(0) + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \left(\sum_{j=1}^{K} \lambda_m^{q_j} \varepsilon_{\beta,\gamma_j}^{\rho_j, w} \right)^k \circ \varepsilon_{(\alpha-\alpha_1,\cdots,\alpha-\alpha_n),(k+1)\alpha}^{k+1,(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)} \widetilde{\widetilde{f}}_m(t) =$$

$$= w_m(0) + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \sum_{l_1+\cdots+l_K=k} \binom{k}{l_1,\ \dots,\ l_K} \prod_{j=1}^{K} (\lambda_m^j)^{l_k} \varepsilon_{\beta,\sum_{j=1}^{K}\gamma_j l_j}^{\sum_{j=1}^{K}\rho_j l_j,\ w} \circ \varepsilon_{(\alpha-\alpha_1,\cdots,\alpha-\alpha_n),(k+1)\alpha}^{k+1,(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)} \widetilde{\widetilde{f}}_m(t) \tag{18}$$

여기서 $\widetilde{\widetilde{f}}_m(t) = \widetilde{f}_m(t) - w_m(0)\sum_{j=1}^{K}\eta_j \cdot \int_0^t (t-\tau)^{\gamma_j-1} E_{\beta_j,\gamma_j}^{\rho_j}(-\omega_j(t-\tau)^{\beta_j})d\tau$ 이다.

정리 2 초기조건 (9)와 경계조건 (10)을 만족시키는 방정식 (8)의 풀이는 다음과 같다.

$$u(x,\ t) = \sum_{m=0}^{\infty} w_m(t)\Psi_m(x) + \frac{c_L g_0(t) - c_0 g_L(t)}{b_0 c_L - c_0 b_L - Lc_0 c_L} x + \frac{b_0 g_L(t) - b_L g_0(t) - Lc_L g_0(t)}{b_0 c_L - c_0 b_L - Lc_0 c_L}$$

여기서 $w_m(t)$는 식 (18)에서 주어지고 $\psi_m(x)$는 λ_m에 대응하는 고유함수이다.

다음으로 시공간분수계파동방정식을 고찰하자. 즉 방정식 (8)에서

$$1 \le \alpha_n \le \cdots \le \alpha \le 2$$

인 경우이다.

$$u(x,\ 0) = \varphi(x),\ u_t'(x,\ 0) = \phi(x),\ 0 < x < L \tag{19}$$

확산방정식에서와 마찬가지로 론의하면 시공간분수계파동방정식의 해석적풀이에 대한 다음의 결론이 나온다.

정리 3 초기조건 (19)와 경계조건 (10)을 만족시키는 방정식 (8)의 풀이는

$$u(x,\ t) = \sum_{m=0}^{\infty} w_m(t)\Psi_m(x) + \frac{c_L g_0(t) - c_0 g_L(t)}{b_0 c_L - c_0 b_L - Lc_0 c_L} x + \frac{b_0 g_L(t) - b_L g_0(t) - Lc_L g_0(t)}{b_0 c_L - c_0 b_L - Lc_0 c_L}$$

이다. 여기서 $\psi_m(x)$는 λ_m에 대응하는 고유함수이고 $w_m(t)$는 다음과 같다.

$$w_m(t) = w_m(0) + tw'_m(0) + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \left(\sum_{j=1}^{K} \lambda_m^{q_j} \varepsilon_{\beta,\gamma_j}^{\rho_j, w}\right)^k \circ \varepsilon_{(\alpha-\alpha_1,\cdots,\alpha-\alpha_n),(k+1)\alpha}^{k+1,(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)} \tilde{\tilde{f}}_m(t) =$$

$$= w_m(0) + tw'_m(0) + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \sum_{l_1+\cdots+l_K=k} \binom{k}{l_1, \cdots, l_K} \prod_{j=1}^{K} (\lambda_m^j)^{l_k} \varepsilon_{\beta, \sum_{j=1}^{K}\gamma_j l_j}^{\sum_{j=1}^{K}\rho_j l_j, w} \circ \varepsilon_{(\alpha-\alpha_1,\cdots,\alpha-\alpha_n),(k+1)\alpha}^{k+1,(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)} \tilde{\tilde{f}}_m(t)$$

$$\tilde{\tilde{f}}_m(t) := \tilde{f}_m(t) - P(D_{0+}^*)(w_m(0) + tw'_m(0)) - \sum_{j=1}^{K} \eta_j \int_0^t (t-\tau)^{\gamma_j - 1} E_{\beta_j,\gamma_j}^{\rho_j}(-\omega_j (t-\tau)^{\beta_j})(w_m(0) + \tau w'_m(0)) d\tau$$

참 고 문 헌

[1] 최희철, 맹은숙; 수학, 2, 9, 주체109(2020).

[2] X. L. Ding, Y. L. Jiang; Commun Nonlinear Sci. Numer. Simulat., 17, 5143, 2012.

[3] X. L. Ding, J. J. Nieto; Fractional Calculus and Applied Analysis, 21, 2, 312, 2018.

[4] A. A. Kilbaset al.; Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, 1～270, 2006.

주체109(2020)년 9월 5일 원고접수

The Analytic Solutions for a Class of the Linear Multi-term Fractional Partial Differential-integral Equation

Jong Song Guk, Choe Hui Chol

In this paper, we obtain the analytic solutions of the linear multi-term fractional partial differential-integral equations with general mixed boundary conditions on a finite domain.

Keywords: analytic solution, multi-term fractional differential equation