김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체106(2017)년 제63권 제5호 Vol. 63 No. 5 JUCHE106(2017).

대중봉사계의 도착과 봉사속도조종에서 할인비용최량방략의 근사계산

전 용 철

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《인민경제 모든 부문의 생산기술공정과 생산방법, 경영활동을 새로운 과학적토대우에 올려세우기 위한 연구사업도 강화하여야 합니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제11권 138페지)

선행연구[3]에서는 대중봉사계 M/M/1/K에서 계의 상태에 따라 요청들의 입장을 조종할 때의 작업주기에 대하여, 선행연구[2]에서는 요청들의 입장계획화문제에서 최량계획을 구하기 위한 국부탐색방법과 아래한계에 대하여, 선행연구[1]에서는 대중봉사계의 도착과 봉사속도조종에서 할인비용최량방략의 존재성에 대하여 론의하였다.

론문에서는 할인비용을 최소화하는 도착속도와 봉사속도조종에서 최량방략의 근사계산방법에 대하여 론의한다.

다음과 같은 구조를 가지는 대중봉사계를 생각한다.

요청들의 도착흐름은 도착속도가 λ인 뽜쏭흐름이며 요청들에 대한 봉사시간은 파라메터가 μ인 지수분포에 따른다. 봉사계에 있는 요청수에 따라 도착속도와 봉사속도를 조종할수 있다고 가정한다. 요청수를 i 라고 할 때 도착속도는 $\lambda + a_1(i)$ 이고 봉사속도는 $\mu + a_2(i)$ 이다. $a(i) = (a_1(i),\ a_2(i))$ 로 놓고 도착속도와 봉사속도가 각각 $a_1(i)$, $a_2(i)$ 만큼 증가할 때 드는 비용은 $c(i,\ a(i))$ 이다. $a_1(i)$, $a_2(i)$ 들은 모든 i 에 대하여 각각 $[a_1^0,\ a_1^1]$, $[a_2^0,\ a_2^1]$ 에 속하며 $\mu + a_2(i) > \lambda + a_1(i) > 0$ 이고 모든 $i \in S$ 에 대하여 $c(i,\ a(i)) \geq 0$ 이라고 가정한다. 할인인자는 α 이다. 봉사계는 할인된 비용을 최소로 하려고 한다.

체계를 다음과 같은 마르꼬브결정과정으로 서술한다.

체계의 요청수 i 는 계의 상태, $S = \{0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$ 은 상태공간이고 $a(i) = (a_1(i),\ a_2(i))$ 는 작용이며 $A(i) = [a_1^0,\ a_1^1] \times [a_2^0,\ a_2^1]$ 은 작용공간이다.

이행속도 $q(j \mid i,\ a(i))$ 는 $i = 0$ 과 $a(i) \in A(0)$ 에 대하여

$$q(1 \mid 0,\ a(0)) = -q(0 \mid 0,\ a(0)) = \lambda + a_1(0),$$

$$q(j \mid 0,\ a(0)) = 0,\ \ j \geq 2$$

이고 $i \geq 1$ 과 $a(i) \in A(i)$ 에 대하여 $q(j \mid i,\ a(i)) = \begin{cases} \mu + a_2(i), & j = i - 1 \\ -(\lambda + \mu) - a_1(i) - a_2(i), & j = i \\ \lambda + a_1(i), & j = i + 1 \\ 0, & |j - i| > 1 \end{cases}$ 이다.

$K = \{(i,\ a(i)) : i \in S,\ a(i) \in A(i)\}$ 로 놓으면 매 $i \in S$ 에 대하여 $q_i(a) = -q(i \mid i,\ a)$ 라고 할 때 $q^*(i) = \sup\limits_{a \in A(i)} q_i(a) < \infty$ 를 만족시킨다.

$\{S, A(i), q(j|i, a(i)), c(i, a(i))\}$가 주어졌을 때 시간 t에 따르는 상태 i의 변화를 나타내는 과정 $x(t)$는 마르꼬브결정과정이다.

초기상태가 $i\in S$일 때 방략 $\pi=(\pi_t)\in\Pi$의 기대할인비용은 다음과 같이 정의된다.

$$J_\alpha(i, \pi)=\mathrm{E}\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t}c(x(t), \pi_t)dt\right]$$

할인최량화문제에서 최량값함수는 $i\in S$에 대하여 $J_\alpha^*(i)=\inf_{\pi\in\Pi}J_\alpha(i, \pi)$이며 $\varepsilon\ge 0$이 주어졌을 때 마르꼬브방략 $\pi^*\in\Pi$의 할인비용 $\varepsilon-$최량성은 $J_\alpha(i, \pi^*)\le J_\alpha^*(i)+\varepsilon,\ i\in S$라는것을 의미한다.

$\varepsilon=0$에 대하여 우의 부등식이 성립될 때 즉 $J_\alpha(i, \pi^*)=J_\alpha^*(i),\ i\in S$일 때 $\pi^*\in\Pi$를 할인비용최량방략(또는 $\alpha-$할인비용최량방략)이라고 부른다.

기호 $\zeta(i, u(i), a(i))=u(i-1)(\mu+a_2(i))+u(i+1)(\lambda+a_1(i))$를 리용한다.

매 고정된 $f\in F$에 대하여 연산자 T_f와 T를 다음과 같이 정의한다.

$$T_f v(i)=\frac{c(i, f)}{\alpha+q_i(f)}+\frac{1}{\alpha+q_i(f)}\zeta(i, v, f),\ Tv(i)=\inf_{a\in A(i)}\left\{\frac{c(i, f)}{\alpha+q_i(a)}+\frac{1}{\alpha+q_i(a)}\zeta(i, v, a)\right\}\quad(1)$$

여기서 v는 S우에서 정의된 부아닌 함수이다.

보조정리 1 모든 $f\in F$에 대하여

$$V_0^f=0,\ V_{n+1}^f=T_f V_n^f,\quad n\ge 0\quad(2)$$

이 성립된다고 하면 $\{V_n^f\}$는 $n\ge 0$에 관하여 비감소하며 $\lim_{n\to\infty}V_n^f=J_\alpha(f)$가 성립된다.

보조정리 2 $$V_0^*=0,\quad V_{n+1}^*=TV_n^*,\quad n\ge 0\quad(3)$$

이면 $\{V_n^*\}$은 $n\ge 0$에 관하여 비감소하며 모든 $f\in F$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}V_n^*=J_\alpha(f)$이다.

증명 $c(i, a)\ge 0$이고 T가 단조이므로 식 (1), (3)으로부터 모든 $n\ge 0$에 대하여 $V_{n+1}^*\ge V_n^*$이라는것을 알수 있다. 이로부터 $\{V_n^*\}$이 $n\ge 0$에 관하여 비감소라는것이 증명된다.

모든 $f\in F$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}V_n^*=J_\alpha(f)$라는것을 귀납법으로 증명하기 위하여 임의로 $f\in F$를 취하면 식 (2), (3)으로부터 $V_0^*\le V_0^f$라는것이 나온다.

어떤 $n\ge 0$에 대하여 $V_n^*\le V_n^f$라고 가정하자.

그러면 식 (2), (3)으로부터 $V_{n+1}^*\le TV_n^*\le TV_n^f\le T_f V_n^f\le V_{n+1}^f$가 나온다.

$n\to\infty$로 놓으면 보조정리 1에 의하여 $\lim_{n\to\infty}V_n^*\le J_\alpha(f)$가 성립된다.(증명끝)

모든 $i\in S$에 대하여 $m\to\infty$일 때 $f_m(i)\to f(i)$인 $\{f_n\}$의 부분렬 $\{f_m\}$이 존재하면 방략 $f\in F$를 F에서 렬 $\{f_n\}$의 극한점이라고 부른다.

정리 1 $\sup_{i\in S}|c(i, a(i))|<\infty$이고 V_n^*이 식 (3)으로 정의된다고 하면 다음의 사실들이 성립된다.

① $\lim_{n\to\infty}V_n^*=J_\alpha^*$

② 모든 $i\in S$에 대하여 $f_n\in F\ (n\ge 0)$가

$$V_{n+1}^*(i)=\min_{a\in A(i)}\left\{\frac{c(i,\ a)}{\alpha+q_i(a)}+\frac{1}{\alpha+q_i(a)}\zeta(i,\ V_n^*,\ a)\right\}=\frac{c(i,\ f_n(i))}{\alpha+q_i(f_n(i))}+\frac{1}{\alpha+q_i(f_n(i))}\zeta(i,\ V_n^*,\ f_n(i)) \tag{4}$$

를 만족시키면 $\{f_n\}$의 임의의 극한점은 할인비용최량정상방략이다.

증명 가정으로부터 극한점 f^*의 존재성이 나오므로 모든 $i\in S$에 대하여 $\{f_n\}$의 부분렬 $\{f_m\}$이 있어서 $\lim_{m\to\infty} f_m(i)=f^*(i)$이다.

$u^*=\lim_{n\to\infty}V_n^*$이라고 하면 보조정리 2에 의하여 $u^*\ge 0$이다.

식 (4)에 의하여 $u^*(i)\ge \dfrac{c(i,\ f^*)}{\alpha+q_i(f^*)}+\dfrac{1}{\alpha+q_i(f^*)}\zeta(i,\ u^*,\ f^*)$이 성립된다. 따라서 선행연구[1]에 의하여 $u^*\ge J_\alpha(f^*)$이 성립되며 보조정리 2를 고려하면 다음의 식이 나온다.

$$J_\alpha(f^*)=u^*=\inf_{f\in F}J_\alpha(f) \tag{5}$$

그리고 적당한 $f_\alpha\in F$가 있어서 모든 $i\in S$에 대하여 다음의 식이 성립된다.

$$J_\alpha^*(i)=\min_{a\in A(i)}\left\{\frac{c(i,\ a)}{\alpha+q_i(a)}+\frac{1}{\alpha+q_i(a)}\zeta(i,\ J_\alpha^*,\ a)\right\}=\frac{c(i,\ f_\alpha)}{\alpha+q_i(f_\alpha)}+\frac{1}{\alpha+q_i(f_\alpha)}\zeta(i,\ V_n^*,\ f_\alpha) \tag{6}$$

선행연구[1]와 식 (6)에 의하여 $J_\alpha^*\ge J_\alpha(f_\alpha)$이며 따라서 $J_\alpha^*=\inf_{f\in F}J_\alpha(f)$이다.

이 사실과 식 (5)는 $J_\alpha(f^*)=u^*=J_\alpha^*$이라는것을 의미한다.(증명끝)

정리 1의 ①은 최량할인비용함수 J_α^*을 근사화하는 반복알고리듬을 주며 ②는 할인비용최량정상방략이 식 (4)로 주어지는 반복도식을 만족시키는 $\{f_n\}$의 극한점으로 된다는것을 보여준다.

이제 상태공간과 작용공간이 유한인 유한마르꼬브결정과정의 특수한 경우에 할인비용문제를 풀기 위한 반복계산알고리듬에 대하여 보기로 한다.

보조정리 3 유한마르꼬브결정과정모형에서 모든 $f\in F$에 대하여 $J_\alpha(f)$는 방정식 $\alpha u(i)=c(i,\ f)-u(i)q_i(f)+\zeta(i,\ u,\ f)$의 유일한 유계풀이이다.(증명생략)

다음의 방정식을 만족시키는 J_α^*과 f_α를 구하는 반복알고리듬에 대하여 보자.

$$J_\alpha^*(i)=\frac{c(i,\ f_\alpha)}{\alpha+q_i(f_\alpha)}+\frac{1}{\alpha+q_i(f_\alpha)}\zeta(i,\ J_\alpha^*,\ f_\alpha)=\min_{a\in A(i)}\left\{\frac{c(i,\ a)}{\alpha+q_i(a)}+\frac{1}{\alpha+q_i(a)}\zeta(i,\ J_\alpha^*,\ a)\right\} \tag{7}$$

주어진 $f\in F$, $i\in S$, $a\in A(i)$에 대하여 다음의 식들에 대하여 생각하자.

$$D_f(i,\ a)=c(i,\ a)-J_\alpha(i,\ f)q_i(f)+\zeta(i,\ J_\alpha,\ f)$$

$$E_f(i)=\{a\in A(i)\,|\,D_f(i,\ a)<\alpha J_\alpha(i,\ f)\}$$

이때 f와 관계되는 개선된 방략 $h\in F$를 다음과 같이 정의한다.

$$h(i)\in E_f(i)\ \ (E_f(i)\ne\phi),\ \ h(i)=f(i)\ \ (E_f(i)=\phi) \tag{8}$$

방략 h를 리용할 때의 비용이 f를 리용할 때의 비용을 초과하지 않으므로 f의 방략 h는 개선된 방략으로 된다. 즉 $h\ne f$ 이면 $J_\alpha(f)\succeq J_\alpha(h)$ 이다. 여기서 기호 $\succeq$ 는 $u(i)\ge \upsilon(i)$이고 적어도 하나의 $i\in S$에 대하여 $u(i)>\upsilon(i)$라는것을 의미한다.

보조정리 4 임의의 주어진 $f \in F$ 에 대하여 $h \in F$ 가 식 (8)로 주어지고 $h \neq f$ 라고 가정하면 $J_\alpha(f) \succeq J_\alpha(h)$ 가 성립된다.

증명 식 (8)에서 h 의 정의와 $h \neq f$ 라는 가정으로부터 보조정리 3에 의하여

$$\alpha J_\alpha(f) \succeq c(h) + Q(h) J_\alpha(f) \tag{9}$$

이다. 따라서 선행연구[1]에 의하여 $J_\alpha(f) \geq J_\alpha(h)$ 이다.

그러므로 보조정리 3에서의 유일성과 식 (9)에 의하여 $J_\alpha(f) \succeq J_\alpha(h)$ 이다.(증명끝)

보조정리 3을 리용하여 할인비용최량방략을 계산하는 방략반복알고리듬을 다음과 같이 구성할수 있다.

걸음 1 임의의 $f \in F$ 를 취하기 위하여 $k = 0$, $f_k = f$ 로 놓는다.

걸음 2 방략을 평가하기 위하여 $J_\alpha(f_k) = [\alpha I - Q(f_k)]^{-1} c(f_k)$ 를 구한다. 여기서 I 는 단위행렬이고 Q 는 이행속도행렬이다.

걸음 3 방략을 개선한다.

식 (8)에 의하여 방략 f_{k+1} 을 구한다. 여기서 f 와 h 대신 f_k 와 f_{k+1} 을 넣는다.

걸음 4 $f_{k+1} = f_k$ 이면 다음의 정리에 의하여 f_{k+1} 이 할인비용최량이므로 알고리듬을 중지한다. 그렇지 않으면 k 를 1만큼 증가시키고 걸음 2로 이행한다.

정리 2 매 고정된 할인인자 $\alpha > 0$ 에 대하여 할인비용방략반복알고리듬은 유한반복회수로 할인비용최량정상방략을 내놓는다.

증명 $\{f_k\}$ 를 할인비용방략반복알고리듬에서의 방략들의 렬이라고 하면 보조정리 4에 의하여 $J_\alpha(f_k) \succeq J_\alpha(f_{k+1})$ 이다. 즉 k 가 증가하면 $J_\alpha(f_k)$ 는 감소한다.

그러므로 $\{f_k,\ k = 0, 1, 2, \cdots\}$ 의 매 방략들은 다르다.

방략수가 유한이므로 반복은 유한번만에 끝나야 한다.

알고리듬이 f_α^* 로 표시되는 방략에서 중지되였다면 f_α^* 은 방정식 (7)을 만족시킨다.

따라서 f_α^* 은 선행연구[1]에 의하여 할인비용최량으로 된다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] 김일성종합대학학보(자연과학), 62, 11, 7, 주체105(2016).

[2] S. Ceschia et al.; Comput. Oper. Res., 38, 1452, 2011.

[3] A. A. Hanbali et al.; Oper. Res. Lett., 38, 1, 2010.

주체106(2017)년 1월 5일 원고접수

Approximate Calculation of Discounted-Cost Optimal Policies in Arrival and Service Rate Control of a Queue

Jon Yong Chol

We considered a joint arrival and service rate control problem for the M/M/1 queue to minimize nonnegative discounted-cost. When arrival and service rates took continuous values, we proposed a calculation algorithm of optimal policy and proved convergence of the algorithm.

Key words: queue, control