김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제4호

우연결수를 가지는 두변수옹근수값 p차자기회귀모형의 파라메터추정량의 점근적성질

유강혁, 최혁일

론문에서는 두변수옹근수값시계렬자료들을 모형화하는데 리용할수 있는 우연결수를 가지는 두변수옹근수값 p차자기회귀과정의 파라메터추정량의 성질에 대하여 연구하였다.

선행연구[1]에서는 부분분포가 기하분포인 부2항감소연산자에 기초한 두변수INAR(1)모형의 파라메터추정량의 성질에 대하여 론의하였으며 선행연구[2]에서는 두변수옹근수값 1차자기회귀모형의 파라메터추정량의 성질과 그것의 점근분포에 대하여 론의하였다.

1. BRCINAR(p)과정의 성질

회귀방정식

$$\boldsymbol{X}_t=\boldsymbol{A}_{t,1}\circ\boldsymbol{X}_{t-1}+\cdots+\boldsymbol{A}_{t,p}\circ\boldsymbol{X}_{t-p}+\boldsymbol{e}_t=$$
$$=\begin{pmatrix}\alpha_{1,1}^{(t)} & 0\\ 0 & \alpha_{2,1}^{(t)}\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}X_{t-1,1}\\ X_{t-1,2}\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}\alpha_{1,p}^{(t)} & 0\\ 0 & \alpha_{2,p}^{(t)}\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}X_{t-p,1}\\ X_{t-p,2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e_{t,1}\\ e_{t,2}\end{pmatrix}\tag{1}$$

를 만족시키는 두변수옹근수값 p차자기과정(BRCINAR(p))은 다음의 성질을 가진다.

성질 BRCINAR(p)과정 $\{\boldsymbol{X}_t\}_{t\in\mathbf{Z}}$가 강정상과정이라면 임의의 $t\ge1$, $k\ge1$, $i=1,\ 2$에 대하여 다음의 관계식이 성립한다.

① $E(X_{t,i}|X_{t-j,i},\ 1\le j\le p)=\sum_{j=1}^{p}\alpha_{i,j}X_{t-j,i}+\lambda_i$

② $E(X_{t,i})=\dfrac{\lambda_i}{1-\sum_{j=1}^{p}\alpha_{i,j}}$

③ $\mathrm{Var}(X_{t,i}|X_{t-j,i},\ \alpha_{i,j}^{(t)},\ 1\le j\le p)=\sum_{j=1}^{p}\alpha_{i,j}^{(t)}(1-\alpha_{i,j}^{(t)})X_{t-j,i}+\sigma_i^2$

④ $\mathrm{Var}(X_{t,i}|X_{t-j,i},\ 1\le j\le p)=\sum_{j=1}^{p}[\sigma_{i,j}^2X_{t-j,i}^2+(\alpha_{i,j}-\alpha_{i,j}^2-\sigma_{i,j}^2)X_{t-j,i}]+\sigma_i^2$

⑤ $\mathrm{Cov}(X_{t,1},\ X_{t,2}|X_{t-j,1},\ X_{t-j,2},\ 1\le j\le p)=\phi$

⑥ $r_{i,j}(k)=\sum_{l=1}^{p}\alpha_{i,l}r_{i,j}(k-l),\ \ r_{i,j}(k)=\mathrm{Cov}(X_{t+k,i},\ X_{t,j})$

$$\mathrm{Var}(X_{t,i})=\frac{1}{1-\sum_{j=1}^{p}(\sigma_{i,j}^2+\alpha_{i,j}^2)}\left[\sum_{j=1}^{p}\left((\alpha_{i,j}-\alpha_{i,j}^2)\frac{\lambda_i}{1-\sum_{j=1}^{p}\alpha_{i,j}}+\right.\right.$$

⑦

$$\left.\left.+\sigma_{i,j}^2\frac{\lambda_i}{1-\sum_{j=1}^{p}\alpha_{i,j}}\left(\frac{\lambda_i}{1-\sum_{j=1}^{p}\alpha_{i,j}}-1\right)\right)+\sigma_i^2+2\sum_{\substack{k,l=1\\k>l}}^{p}\alpha_{i,k}\alpha_{i,k}r_{i,k-l}\right]$$

식 (1)을 만족시키는 BRCINAR(p)과정 $\{\boldsymbol{X}_t\}_{t\in\mathbf{Z}}$ 에 대하여 $\sum_{j=1}^{p}\alpha_{i,j}<1,\ i=1,\ 2$ 이고 $E(\boldsymbol{A}_t\otimes\boldsymbol{A}_t')$의 최대절대고유값이 1보다 작으면 $\{\boldsymbol{X}_t\}_{t\in\mathbf{Z}}$ 는 강정상에르고드과정이다.

이제부터 론의하는 BRCINAR(p)과정은 우의 조건을 만족시키는 강정상에르고드과정이라고 가정한다.

2. BRCINAR(p)모형의 파라메터에 대한 추정량

여기서는 BRCINAR(p)모형의 파라메터 $\alpha_{i,j},\ \lambda_i,\ \phi,\ i=1,\ 2,\ j=1,\ \cdots,\ p$ 들에 대한 파라메터추정량의 성질에 대하여 론의한다.

정리 1 BRCINAR(p)모형의 파라메터 $\alpha_{i,j},\ \lambda_i,\ \phi,\ i=1,\ 2,\ j=1,\ \cdots,\ p$ 들에 대한 율－월커추정량 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_i^{YW}=\hat{\boldsymbol{R}}_{ij}^{-1}(p)\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{ij}(p)$, $\hat{\lambda}_i^{YW}=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\hat{e}_{t,i}$, $\hat{\phi}^{YW}=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(X_{t,1}-\overline{X}_1)(X_{t,2}-\overline{X}_2)$ 들은 강일치추정량이다. 여기서

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_i^{YW}=(\hat{\alpha}_{i,1}^{YW},\ \hat{\alpha}_{i,2}^{YW},\ \cdots,\ \hat{\alpha}_{i,p}^{YW})',\ \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{ij}(p)=(\hat{\gamma}_{ij}(1),\ \hat{\gamma}_{ij}(2),\ \cdots,\ \hat{\gamma}_{ij}(p))',\ i=1,\ 2$$

$$\hat{\boldsymbol{R}}_{ij}(p)=\begin{pmatrix}\hat{\gamma}_{ij}(0) & \hat{\gamma}_{ij}(-1) & \cdots & \hat{\gamma}_{ij}(1-p)\\ \hat{\gamma}_{ij}(1) & \hat{\gamma}_{ij}(0) & \cdots & \hat{\gamma}_{ij}(2-p)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \hat{\gamma}_{ij}(p-1) & \hat{\gamma}_{ij}(p-2) & \cdots & \hat{\gamma}_{ij}(0)\end{pmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{ij}(k)=\frac{1}{n-k}\sum_{t=1}^{n-k}(X_{t+k,i}-\overline{X}_i)(X_{t,j}-\overline{X}_j),\ i=1,\ 2$$

이다.

BRCINAR(p)과정의 성질 ①을 리용하면 파라메터 $\boldsymbol{\Theta}_i=(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i',\ \lambda_i)'$ 에 대한 조건부최소두제곱추정량은

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{\Theta}_1',\boldsymbol{\Theta}_2')=\sum_{t=1}^{n}(\boldsymbol{X}_t-E(\boldsymbol{X}_t|\boldsymbol{X}_{t-j},\ 1\le j\le p))'(\boldsymbol{X}_t-E(\boldsymbol{X}_t|\boldsymbol{X}_{t-j},\ 1\le j\le p))=$$

$$=\sum_{t=1}^{n}\left(X_{t,1}-\sum_{j=1}^{p}\alpha_{1,j}X_{t-j,1}-\lambda_1\right)^2+\sum_{t=1}^{n}\left(X_{t,2}-\sum_{j=1}^{p}\alpha_{2,j}X_{t-j,2}-\lambda_2\right)^2 \tag{2}$$

을 최소화함으로써 얻어진다. 따라서 조건부최소두제곱추정량은

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{\Theta}_1',\ \boldsymbol{\Theta}_2')}{\partial \alpha_{i,k}}=-2\displaystyle\sum_{t=1}^{n}\left(X_{t,i}-\sum_{j=1}^{p}\alpha_{i,j}X_{t-j,i}-\lambda_i\right)X_{t-k,i}=0,\ i=1,\ 2,\ k=1,\ \cdots,\ p\\ \dfrac{\partial \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{\Theta}_1',\ \boldsymbol{\Theta}_2')}{\partial \lambda_i}=-2\displaystyle\sum_{t=1}^{n}\left(X_{t,i}-\sum_{j=1}^{p}\alpha_{i,j}X_{t-j,i}-\lambda_i\right)=0,\ i=1,\ 2\end{cases}$$

즉

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{t=1}^{n}X_{t-j,i}X_{t-k,i}\right)\hat{\alpha}_{i,j}+\left(\sum_{t=1}^{n}X_{t-k,i}\right)\hat{\lambda}_i=\sum_{t=1}^{n}X_{t,i}X_{t-k,i}\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{t=1}^{n}X_{t-j,i}\right)\hat{\alpha}_{i,j}+n\hat{\lambda}_i=\sum_{t=1}^{n}X_{t,i}\end{cases},\ i=1,\ 2,\ k=1,\ \cdots,\ p$$

로부터 구할수 있는데 행렬로 표시하면

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}}_i^{CLS}=\boldsymbol{D}_i^{-1}\boldsymbol{F}_i,\ i=1,\ 2 \tag{3}$$

이다. 여기서

$$\boldsymbol{D}_i=\begin{pmatrix}\sum_{t=1}^{n}X_{t-1,i}^2 & \sum_{t=1}^{n}X_{t-2,i}X_{t-1,i} & \cdots & \sum_{t=1}^{n}X_{t-p,i}X_{t-1,i} & \sum_{t=1}^{n}X_{t-1,i}\\ \sum_{t=1}^{n}X_{t-1,i}X_{t-2,i} & \sum_{t=1}^{n}X_{t-2,i}^2 & \cdots & \sum_{t=1}^{n}X_{t-p,i}X_{t-2,i} & \sum_{t=1}^{n}X_{t-2,i}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \sum_{t=1}^{n}X_{t-1,i}X_{t-p,i} & \sum_{t=1}^{n}X_{t-2,i}X_{t-p,i} & \cdots & \sum_{t=1}^{n}X_{t-p,i}^2 & \sum_{t=1}^{n}X_{t-p,i}\\ \sum_{t=1}^{n}X_{t-1,i} & \sum_{t=1}^{n}X_{t-2,i} & \cdots & \sum_{t=1}^{n}X_{t-p,i} & n\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}_i=\begin{pmatrix}\sum_{t=1}^{n}X_{t,i}X_{t-1,i}\\ \sum_{t=1}^{n}X_{t,i}X_{t-2,i}\\ \vdots\\ \sum_{t=1}^{n}X_{t,i}X_{t-p,i}\\ \sum_{t=1}^{n}X_{t,i}\end{pmatrix}$$

이다.

BRCINAR(p)과정 $\{\boldsymbol{X}_t\}_{t\in\mathbf{Z}}$가 강정상에르고드과정이므로 $g(\boldsymbol{\Theta}_i)=E(X_{t,i}\,|\,X_{t-j,i},\ 1\le j\le p)$

라고 하면

$$\frac{1}{n}\boldsymbol{D}_i \to E\left(\frac{\partial g(\boldsymbol{\Theta}_i)}{\partial \boldsymbol{\Theta}_i}\frac{\partial g(\boldsymbol{\Theta}_i)}{\partial \boldsymbol{\Theta}_i'}\right) = \boldsymbol{V}_i \quad (\text{거의}) \tag{4}$$

가 성립한다.

이제 조건부최소두제곱추정량 $\hat{\boldsymbol{\Theta}}_i^{CLS}$ 의 점근분포를 유도하기 위하여 임의의 $i \in \{1,\ 2\}$ 와 $k \in \{1,\ 2,\ \cdots,\ p\}$ 에 대하여

$$\Im_n = \sigma\{\boldsymbol{X}_{1-p},\ \cdots,\ \boldsymbol{X}_0,\ \boldsymbol{X}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{X}_n\}$$

$$M_n^{(i)} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{\Theta}_1',\ \boldsymbol{\Theta}_2')}{\partial \lambda_i} = \sum_{t=1}^{n}\left(X_{t,i} - \sum_{j=1}^{p}\alpha_{i,j}X_{t-j,i} - \lambda_i\right) \tag{5}$$

$$M_n^{(i,k)} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{\Theta}_1',\ \boldsymbol{\Theta}_2')}{\partial \alpha_{i,k}} = \sum_{t=1}^{n}\left(X_{t,i} - \sum_{j=1}^{p}\alpha_{i,j}X_{t-j,i} - \lambda_i\right)X_{t-k,i} \tag{6}$$

라고 하자.

보조정리 1 BRCINAR(p)과정 $\{\boldsymbol{X}_t\}_{t\in\mathbf{Z}}$ 에 대하여 $E(|X_{t,i}|^4) < \infty,\ i = 1,\ 2$ 이면

$$\frac{1}{\sqrt{n}}M_n^{(i)} \xrightarrow{D} \mathrm{N}(0,\ \sigma_{\lambda,i}^2),\ \ \frac{1}{\sqrt{n}}M_n^{(i,k)} \xrightarrow{D} \mathrm{N}(0,\ \sigma_{\alpha,i,k}^2) \tag{7}$$

이 성립한다. 여기서

$$\sigma_{\lambda,i}^2 = E\left(\left(X_{1,i} - \sum_{j=1}^{p}\alpha_{i,j}X_{1-j,i} - \lambda_i\right)^2\right),\ \ \sigma_{\alpha,i,k}^2 = E\left(\left(X_{1,i} - \sum_{j=1}^{p}\alpha_{i,j}X_{1-j,i} - \lambda_i\right)^2 X_{1-k,i}^2\right)$$

이다.

이제 $\widetilde{\boldsymbol{M}}_n^{(i)} = (M_n^{(i,1)},\ M_n^{(i,2)},\ \cdots,\ M_n^{(i,p)},\ M_n^{(i)})'$ 라고 하면 다음의 결과가 성립한다.

보조정리 2 BRCINAR(p)과정 $\{\boldsymbol{X}_t\}_{t\in\mathbf{Z}}$ 에 대하여 $E(|X_{t,i}|^4) < \infty,\ i = 1,\ 2$ 이면

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\widetilde{\boldsymbol{M}}_n^{(i)} \xrightarrow{D} \mathrm{N}(\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{W}_i) \quad (\text{거의}) \tag{8}$$

가 성립한다. 여기서

$$\boldsymbol{W}_i = E\left(\frac{\partial g(\boldsymbol{\Theta}_i)}{\partial \boldsymbol{\Theta}_i}u(\boldsymbol{\Theta}_i)u(\boldsymbol{\Theta}_i)\frac{\partial g(\boldsymbol{\Theta}_i)}{\partial \boldsymbol{\Theta}_i'}\right)$$

이다.

정리 2 BRCINAR(p)과정 $\{\boldsymbol{X}_t\}_{t\in\mathbf{Z}}$ 에 대하여 $E(|X_{t,i}|^4) < \infty,\ i = 1,\ 2$ 이면 임의의 $i \in \{1,\ 2\}$ 에 대하여

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\Theta}}_i^{CLS} - \boldsymbol{\Theta}_i) \xrightarrow{D} \mathrm{N}(\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{V}_i^{-1}\boldsymbol{W}_i\boldsymbol{V}_i^{-1})$$

이 성립한다.

증명 식 (5)와 (6)으로부터 임의의 $i \in \{1,\ 2\}$ 에 대하여

$$\boldsymbol{\Theta}_i = \boldsymbol{D}_i^{-1}(\boldsymbol{F}_i - \widetilde{\boldsymbol{M}}_n^{(i)}) \tag{9}$$

이 성립한다. 따라서 식 (3)과 (9)로부터

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}}_i^{CLS} - \boldsymbol{\Theta}_i = \boldsymbol{D}_i^{-1}\widetilde{\boldsymbol{M}}_n^{(i)} \tag{10}$$

이 성립한다. 그러면 식 (10)은

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\Theta}}_i^{CLS} - \boldsymbol{\Theta}_i) = \left(\frac{1}{n}\boldsymbol{D}_i\right)^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \tilde{\boldsymbol{M}}_n^{(i)}$$

로 쓸수 있으므로 선행연구[4]의 명제 6.3.8과 식 (4), (8)을 리용하면

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\Theta}}_i^{CLS} - \boldsymbol{\Theta}_i) \xrightarrow{D} \mathrm{N}(\mathbf{0},\ \boldsymbol{V}_i^{-1}\boldsymbol{W}_i\boldsymbol{V}_i^{-1})$$

이 성립한다.(증명끝)

다음으로 BRCINAR(p)과정 $\{\boldsymbol{X}_t\}_{t\in\mathbf{Z}}$ 의 파라메터 ϕ의 조건부최소두제곱추정량을 구성한다.

이제

$$Y_t = (X_{t,1} - E(X_{t,1} | \boldsymbol{X}_{t-j},\ 1 \le j \le p))(X_{t,2} - E(X_{t,2} | \boldsymbol{X}_{t-j},\ 1 \le j \le p))$$

라고 하면

$$E(Y_t | \boldsymbol{X}_{t-j},\ 1 \le j \le p) = \mathrm{Cov}(X_{t,1},\ X_{t,2} | \boldsymbol{X}_{t-j},\ 1 \le j \le p) = \phi$$

가 성립한다. 따라서 ϕ의 조건부최소두제곱추정량은 $\{\boldsymbol{X}_t\}_{t\in\mathbf{Z}}$ 의 성질 ①을 리용하면

$$S(\phi) = \sum_{t=1}^{n} [Y_t - E(Y_t | \boldsymbol{X}_{t-1})]^2 = \sum_{t=1}^{n} \left[\left(X_{t,1} - \sum_{j=1}^{p} \alpha_{1,j} X_{t-j,1} - \lambda_1\right)\left(X_{t,2} - \sum_{j=1}^{p} \alpha_{2,j} X_{t-j,2} - \lambda_2\right) - \phi\right]^2$$

이므로 $S(\phi)$ 을 최소로 하는 추정량 $\hat{\phi}^{CLS}$ 는 방정식 $\partial S(\phi)/\partial\phi = 0$ 으로부터 얻는다. 즉

$$\hat{\phi}^{CLS} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(X_{t,1} - \sum_{j=1}^{p} \alpha_{1,j}^{CLS} X_{t-j,1} - \lambda_1^{CLS}\right)\left(X_{t,2} - \sum_{j=1}^{p} \alpha_{2,j}^{CLS} X_{t-j,2} - \lambda_2^{CLS}\right) \qquad (11)$$

이다. 그러면 $\hat{\phi}^{CLS}$ 에 대하여 다음의 결과가 성립한다.

정리 3 BRCINAR(p)과정 $\{\boldsymbol{X}_t\}_{t\in\mathbf{Z}}$ 에 대하여 $E(|X_{t,i}|^4) < \infty,\ i = 1,\ 2$ 이면

$$\sqrt{n}(\hat{\phi}^{CLS} - \phi) \xrightarrow{D} \mathrm{N}(0,\ \sigma^2)$$

이 성립한다. 여기서

$$\sigma^2 = E\left(\left(X_{t,1} - \sum_{j=1}^{p} \alpha_{1,j} X_{t-j,1} - \lambda_1\right)\left(X_{t,2} - \sum_{j=1}^{p} \alpha_{2,j} X_{t-j,2} - \lambda_2\right) - \phi\right)^2$$

이다.

증명 이제 $M_n = \sum_{t=1}^{n} (Y_t - E(Y_t | \boldsymbol{X}_{t-j},\ 1 \le j \le p))$ 이라고 하자. 그러면

$$E(M_n) = \sum_{t=1}^{n} E(Y_t - E(Y_t | \boldsymbol{X}_{t-j},\ 1 \le j \le p)) = \sum_{t=1}^{n} E(Y_t) - E(E(Y_t | \boldsymbol{X}_{t-j},\ 1 \le j \le p)) = 0$$

$$E(M_n | \mathfrak{I}_{n-1}) = E((M_{n-1} + Y_n - E(Y_n | \boldsymbol{X}_{n-j},\ 1 \le j \le p)) | \mathfrak{I}_{n-1}) =$$

$$= M_{n-1} + E(Y_n | \boldsymbol{X}_{n-j},\ 1 \le j \le p) - E(Y_n | \boldsymbol{X}_{n-j},\ 1 \le j \le p) = M_{n-1}$$

이 성립한다. 따라서 $\{M_n,\ \mathfrak{I}_{n-1},\ n \ge 0\}$ 은 평균이 0인 마르팅게일이다.

그러므로 선행연구[3]의 따름 3.2에 의하여

$$\frac{M_n}{\sqrt{n}\,\sigma} \xrightarrow{D} \mathrm{N}(0,\ 1) \tag{12}$$

이 성립한다. 그런데 식 (11)로부터 $M_n = n(\hat{\phi}^{CLS} - \phi)$ 이므로 식 (12)를 리용하면

$$\sqrt{n}(\hat{\phi}^{CLS} - \phi) \xrightarrow{D} \mathrm{N}(0,\ \sigma^2)$$

이라는것이 나온다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] M. M. Ristić et al.; Appl. Math. Lett., 25, 481, 2012.
[2] M. Yu et al.; J. Statist. Plann. Inference, 204, 153, 2020.
[3] P. Hall et al.; Martingale Limit Theory and Its Application, Academic Press, 51～65, 1980.
[4] P. J. Brockwell et al.; Time Series Theory and Methods, Springer, 204～209, 2006.

주체109(2020)년 6월 5일 원고접수

Asymptotic Properties of Parameter Estimator for Bivariate *p*th Order Random Coefficient Integer-valued Autoregressive Model

Yu Kang Hyok, *Choe Hyok Il*

In this paper, we obtain Yule-Walker and conditional least squares estimators of unknown parameters for bivariate *p*th order random coefficient integer-valued autoregressive model and derive its asymptotic properties.

Keywords: Yule-Walker estimator, conditional least squares estimator