김일성종합대학학보 (수학)
주체107(2018)년 제64권 제1호

드라진거꿀을 리용한 특이분수리산시간선형계의 일반풀이의 표시식

명 금 철

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《새로운 과학기술분야를 개척하기 위한 사업도 전망성있게 밀고나가야 합니다. 나라의 과학기술을 세계적수준에 올려세우자면 발전된 과학기술을 받아들이는것과 함께 새로운 과학기술분야를 개척하고 그 성과를 인민경제에 적극 받아들여야 합니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제11권 138~139페지)

행렬의 일반화된 거꿀리론은 선형대수학의 중요한 연구분야의 하나로서 미분방정식과 계차방정식리론, 행렬대수, 수리통계, 최량조종리론, 수치해석, 안정성리론, 정보리론 등 수학리론과 여러 린접과학부문들의 발전에서 중요한 의의를 가진다.[1－5]

론문에서는 행렬의 드라진거꿀을 리용하여 특이분수리산시간선형계의 일반풀이의 표시식을 연구하였다.

정의 1 n차복소행렬 $A\in \mathbf{C}^{n\times n}$에 대하여 $\mathrm{rank}(A^k)=\mathrm{rank}(A^{k+1})$을 만족시키는 최소의 부아닌 옹근수 k를 행렬 A의 지표라고 부르고 $\mathrm{Ind}(A)$로 표시한다.[2]

정의 2 $A\in \mathbf{C}^{n\times n}$이고 $k:=\mathrm{Ind}(A)$라고 할 때

$$BAB=B,\ \ AB=BA,\ \ A^{k+1}B=A^k$$

을 만족시키는 행렬 $B\in \mathbf{C}^{n\times n}$가 존재하면 B를 A의 드라진거꿀이라고 부르고 A^D로 표시한다.[2, 3]

$x_0:=c$로 놓고 다음의 특이계차방정식을 생각하자.

$$Ax_{n+1}=Bx_n+f_n\ \ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \tag{1}$$

정의 3 행렬 $A,\ B\in \mathbf{C}^{m\times m}$($A$는 퇴화행렬)이고 벡토르 $f_n\in \mathbf{C}^m$일 때 초기값 c를 가진 특이계차방정식 (1)이 한 풀이 x_n을 가지면 벡토르 $c(\in \mathbf{C}^m)$를 특이계차방정식 (1)의 허용초기벡토르라고 부른다.[2]

정의 4 초기값을 가진 특이계차방정식 (1)이 매 허용초기벡토르 c에 대하여 유일한 풀이를 가질 때 특이계차방정식 (1)을 조종가능한 특이계차방정식이라고 부른다.[2]

다음과 같은 선형계차방정식

$$E\Delta^\alpha x_{i+1}=Ax_i+Bu_i\ \ (i\in \mathbf{Z}_+,\ l-1<\alpha<l,\ l\in \mathbf{N}) \tag{2}$$

가 주어졌다고 하자. 여기서

$$x_i\in \mathbf{R}^n,\ u_i\in \mathbf{R}^m,\ E,\ A\in \mathbf{R}^{n\times n},\ B\in \mathbf{R}^{n\times m}$$
$$\det E=0,\quad \det(Ez-A)\neq 0,\ z\in \mathbf{C}$$

$$\Delta^{\alpha} x_i = \sum_{k=0}^{i} c_k x_{i-k} \quad (l-1<\alpha<l,\ l\in\mathbf{N}) \tag{3}$$

$$c_k = (-1)^k \binom{\alpha}{k} \ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots),\ \binom{\alpha}{k} := \begin{cases} 1 & (k=0) \\ \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ \cdots\ (\alpha-k+1)}{k!} & (k=1,\ 2,\ \cdots) \end{cases}$$

이다. 이때 이 선형계차방정식 (2)를 정칙함을 가진 특이분수리산시간선형계라고 부른다.[3]

특이분수리산시간선형계의 풀이를 얻기 위하여 식 (2)에 (3)을 대입하면 다음의 등식이 얻어진다.

$$Ex_{i+1} = Fx_i - \sum_{k=1}^{i} Ec_{k+1} x_{i-k} + Bu_i \quad (i\in\mathbf{Z}_+)$$

여기서 $F = A - Ec_1$이다. 그리고 이 등식의 량변에 행렬 $(Ec-F)^{-1}$을 곱하면 다음과 같다.

$$\overline{E}x_{i+1} = \overline{F}x_i - \sum_{k=1}^{i} \overline{E}c_{k+1} x_{i-k} + \overline{B}u_i \quad (i\in\mathbf{Z}_+) \tag{4}$$

여기서 $\overline{E} = (Ec-F)^{-1}E,\ \overline{F} = (Ec-F)^{-1}F,\ \overline{B} = (Ec-F)^{-1}B$ 이다. 따라서 특이분수리산시간선형계 (2)의 풀이의 연구는 특이계차방정식 (4)의 풀이의 연구에로 귀착시킬수 있다.

선행연구[3]에서는 $q := \mathrm{Ind}(\overline{E})$ 일 때 허용초기벡토르 x_0을 가진 특이계차방정식 (4)의 한 풀이가 다음과 같이 표시된다는것을 증명하였다.

$$\begin{aligned} x_i &= (\overline{E}^D\overline{F})^i \overline{E}^D\overline{E}x_0 + \sum_{k=0}^{i-1} \overline{E}^D(\overline{E}^D\overline{F})^{i-k-1}\left(\overline{B}u_k - \sum_{j=1}^{k} \overline{E}c_{j+1}x_{k-j}\right) + \\ &+ (\overline{E}\overline{E}^D - I)\sum_{k=0}^{q-1} (\overline{E}^D\overline{F})^k \overline{F}^D\overline{B}u_{i+k} \end{aligned} \tag{5}$$

그런데 이 증명에 일부 오유들이 있고 방정식 (2)에서 x_i는 $x_1,\ \cdots,\ x_{i-1}$과 $u_0,\ \cdots,\ u_{i-1}$에 의하여 주어지는데 x_i의 표시식 (5)에는 식 (2)에 들어있지 않는 입력벡토르 $u_i,\ u_{i+1},\ \cdots,\ u_{i+q-1}$이 더 들어있다.

론문에서는 특이분수리산시간선형계 (2)의 일반풀이의 표시식과 상태벡토르 $x_1,\ \cdots,\ x_{i-1}$, 입력벡토르 $u_0,\ \cdots,\ u_{i-1}$에만 관계되는 특이분수리산선형계 (2)의 풀이의 표시식을 새롭게 얻었다.

정리 1 특이계차방정식 (1)이 조종가능할 때 일반풀이는 다음과 같다.

$$x_n = (\overline{A}^D\overline{B})^n \overline{A}\,\overline{A}^D q + \overline{A}^D \sum_{i=0}^{n-1} (\overline{A}^D\overline{B})^{n-i-1} \bar{f}_i - (I - \overline{A}\,\overline{A}^D)\sum_{i=0}^{k-1} (\overline{A}^D\overline{B})^i \overline{B}^D \bar{f}_{n+i}$$

여기서 $\overline{A} := (\lambda A - B)^{-1}A,\ \overline{B} := (\lambda A - B)^{-1}B,\ \bar{f}_i := (\lambda A - B)^{-1} f_i,\ k := \mathrm{Ind}(\overline{A}),\ q\in\mathbf{C}^m$ 이고 풀이 x_n은 λ에 무관계하다. 그리고

$$\overline{w} := -(I - \overline{A}\,\overline{A}^D)\sum_{i=0}^{k-1} (\overline{A}\overline{B}^D)^i \overline{B}^D \bar{f}_i$$

로 놓으면 벡토르 c가 허용초기벡토르이기 위해서는 $c\in\{\overline{w} + R(\overline{A}^k)\}$일것이 필요하고 충분하다.[2]

이제 정리 1과 식 (4)를 리용하여 특이분수리산시간선형계 (2)의 일반풀이의 표시식을 구하자.

정리 2 x_0을 허용초기벡토르로 가지면서 조건

$$\Delta^{\alpha} x_i = \sum_{k=0}^{i} c_k x_{i-k}$$

를 만족시키는 특이분수리산시간선형계 (2)의 일반풀이는 다음과 같다.

$$x_i = (\overline{E}^D \overline{F})^i \overline{E}^D \overline{E} x_0 + \sum_{k=0}^{i-1} \overline{E}^D (\overline{E}^D \overline{F})^{i-k-1} \left(\overline{B} u_k - \sum_{j=1}^{k} \overline{E} c_{j+1} x_{k-j} \right) +$$

$$+ (\overline{E}\overline{E}^D - I) \sum_{k=0}^{q-1} (\overline{E}\overline{F}^D)^k \overline{F}^D \left(\overline{B} u_{i+k} - \sum_{j=1}^{i+k} \overline{E} c_{j+1} x_{i+k-j} \right)$$

여기서 $q := \mathrm{Ind}(\overline{E})$ 이다.

증명 $$\overline{E} x_{i+1} = \overline{E} (\overline{E}^D \overline{F})^{i+1} \overline{E}^D \overline{E} x_0 + \sum_{k=0}^{i} \overline{E}\overline{E}^D (\overline{E}^D \overline{F})^{i-k} \left(\overline{B} u_k - \sum_{j=1}^{k} \overline{E} c_{j+1} x_{k-j} \right) +$$

$$+ \overline{E} (\overline{E}\overline{E}^D - I) \sum_{k=0}^{q-1} (\overline{E}^D \overline{F})^k \overline{F}^D \left(\overline{B} u_{i+k+1} - \sum_{j=1}^{i+k} \overline{E} c_{j+1} x_{i+k-j+1} \right) =$$

$$= \overline{F} (\overline{E}^D \overline{F})^i \overline{E}^D \overline{E} x_0 + \sum_{k=0}^{i-1} \overline{E}\overline{E}^D (\overline{E}^D \overline{F})^{i-k} \left(\overline{B} u_k - \sum_{j=1}^{k} \overline{E} c_{j+1} x_{k-j} \right) +$$

$$+ \overline{E}\overline{E}^D \overline{B} u_i - \overline{E}\overline{E}^D \sum_{j=1}^{i} \overline{E} c_{j+1} x_{i-j} +$$

$$+ (\overline{E}\overline{E}^D - I) \sum_{k=0}^{q-1} (\overline{E}\overline{F}^D)^{k+1} \overline{F}\, \overline{F}^D \left(\overline{B} u_{i+k+1} - \sum_{j=1}^{i+k} \overline{E} c_{j+1} x_{i+k-j+1} \right) =$$

$$= \overline{F} (\overline{E}^D \overline{F})^i \overline{E}^D \overline{E} x_0 + \sum_{k=0}^{i-1} (\overline{E}^D \overline{F})^{i-k} \left(\overline{B} u_k - \sum_{j=1}^{k} \overline{E} c_{j+1} x_{k-j} \right) +$$

$$+ \overline{E}\overline{E}^D \overline{B} u_i - \overline{E}\overline{E}^D \sum_{j=1}^{i} \overline{E} c_{j+1} x_{i-j} +$$

$$+ (\overline{E}\overline{E}^D - I) \sum_{k=1}^{q-1} (\overline{E}\overline{F}^D)^k \overline{F}\, \overline{F}^D \left(\overline{B} u_{i+k} - \sum_{j=1}^{i+k} \overline{E} c_{j+1} x_{i+k-j} \right) =$$

$$= \overline{F} (\overline{E}^D \overline{F})^i \overline{E}^D \overline{E} x_0 + \sum_{k=0}^{i-1} (\overline{E}^D \overline{F})^{i-k} \left(\overline{B} u_k - \sum_{j=1}^{k} \overline{E} c_{j+1} x_{k-j} \right) +$$

$$+ \overline{E}\overline{E}^D \overline{B} u_i - \overline{E}\overline{E}^D \sum_{j=1}^{i} \overline{E} c_{j+1} x_{i-j} +$$

$$+(\overline{E}\overline{E}^D-I)\sum_{k=1}^{q-1}(\overline{E}\overline{F}^D)^k\left(\overline{B}u_{i+k}-\sum_{j=1}^{i+k}\overline{E}c_{j+1}x_{i+k-j}\right)=$$

$$=\overline{F}(\overline{E}^D\overline{F})^i\overline{E}^D\overline{E}x_0+\sum_{k=0}^{i-1}(\overline{E}^D\overline{F})^{i-k}\left(\overline{B}u_k-\sum_{j=1}^{k}\overline{E}c_{j+1}x_{k-j}\right)+$$

$$+\overline{E}\overline{E}^D\overline{B}u_i-\overline{E}\overline{E}^D\sum_{j=1}^{i}\overline{E}c_{j+1}x_{i-j}-(\overline{E}\overline{E}^D-I)\left(\overline{B}u_i-\sum_{j=1}^{i}\overline{E}c_{j+1}x_{i-j}\right)+$$

$$+(\overline{E}\overline{E}^D-I)\sum_{k=0}^{q-1}(\overline{E}\overline{F}^D)^k\left(\overline{B}u_{i+k}-\sum_{j=1}^{i+k}\overline{E}c_{j+1}x_{i+k-j}\right)=$$

$$=\overline{F}(\overline{E}^D\overline{F})^i\overline{E}^D\overline{E}x_0+\sum_{k=0}^{i-1}(\overline{E}^D\overline{F})^{i-k}\left(\overline{B}u_k-\sum_{j=1}^{k}\overline{E}c_{j+1}x_{k-j}\right)+\overline{B}u_i-$$

$$-\sum_{j=1}^{i}\overline{E}c_{j+1}x_{i-j}+(\overline{E}\overline{E}^D-I)\sum_{k=0}^{q-1}(\overline{E}\overline{F}^D)^k\left(\overline{B}u_{i+k}-\sum_{j=1}^{i+k}\overline{E}c_{j+1}x_{i+k-j}\right)$$

이고

$$\overline{F}x_i=\overline{F}(\overline{E}^D\overline{F})^i\overline{E}^D\overline{E}x_0+\sum_{k=0}^{i-1}\overline{F}\,\overline{E}^D(\overline{E}^D\overline{F})^{i-k-1}\left(\overline{B}u_k-\sum_{j=1}^{k}\overline{E}c_{j+1}x_{k-j}\right)+$$

$$+\overline{F}(\overline{E}\overline{E}^D-I)\sum_{k=0}^{q-1}(\overline{E}\overline{F}^D)^k\overline{F}^D\left(\overline{B}u_{i+k}-\sum_{j=1}^{i+k}\overline{E}c_{j+1}x_{i+k-j}\right)=$$

$$=\overline{F}(\overline{E}^D\overline{F})^i\overline{E}^D\overline{E}x_0+\sum_{k=0}^{i-1}(\overline{E}^D\overline{F})^{i-k}\left(\overline{B}u_k-\sum_{j=1}^{k}\overline{E}c_{j+1}x_{k-j}\right)+$$

$$+(\overline{E}\overline{E}^D-I)\sum_{k=0}^{q-1}(\overline{E}\overline{F}^D)^k\left(\overline{B}u_{i+k}-\sum_{j=1}^{i+k}\overline{E}c_{j+1}x_{i+k-j}\right)$$

이다. 따라서

$$\overline{E}x_{i+1}=\overline{F}x_i-\sum_{k=1}^{i}\overline{E}c_{k+1}x_{i-k}+\overline{B}u_i$$

가 성립하므로 정리의 결과가 증명된다.(증명끝)

정리 2에서 얻은 일반풀이의 표시식에서 i번째 상태벡토르 x_i는 $i+q-1$개의 입력벡토르들과 $i+q-2$개의 상태벡토르들에 의하여 표시된다. 이때 $i=0$이면

$$x_0=\overline{E}^D\overline{E}x_0+(\overline{E}\overline{E}^D-I)\sum_{k=0}^{q-1}(\overline{E}\overline{F}^D)^k\overline{F}^D\left(\overline{B}u_k-\sum_{j=1}^{k}\overline{E}c_{j+1}x_{k-j}\right)$$

이므로 주어진 입력벡토르 u_i로부터 허용초기벡토르들의 모임을 얻을수 있다.

정리 2로부터 선행연구[3]의 결과가 나온다.

따름 허용초기벡토르 x_0을 가진 특이계차방정식 (4)의 한 풀이는 다음과 같다.[3]

$$x_i = (\overline{E}^D\overline{F})^i\overline{E}^D\overline{E}x_0 + \sum_{k=0}^{i-1}\overline{E}^D(\overline{E}^D\overline{F})^{i-k-1}\left(\overline{B}u_k - \sum_{j=1}^{k}\overline{E}c_{j+1}x_{k-j}\right) +$$

$$+(\overline{E}\overline{E}^D - I)\sum_{k=0}^{q-1}(\overline{E}\overline{F}^D)^k\overline{F}^D\overline{B}u_{i+k}$$

여기서 $q = \mathrm{Ind}(\overline{E})$ 이다.

정리 3 x_0 을 허용초기벡토르로 가지면서 조건

$$\Delta^\alpha x_i = \sum_{k=0}^{i} c_k x_{i-k}$$

를 만족시키는 특이분수리산시간선형계 (2)의 한 풀이는 다음과 같다.

$$x_i = (\overline{E}^D\overline{F})^i\overline{E}^D\overline{E}x_0 + \sum_{k=0}^{i-1}\overline{E}^D(\overline{E}^D\overline{F})^{i-k-1}\left(\overline{B}u_k - \sum_{j=1}^{k}\overline{E}c_{j+1}x_{k-j}\right)$$

증명

$$\overline{E}x_{i+1} = \overline{E}(\overline{E}^D\overline{F})^{i+1}\overline{E}^D\overline{E}x_0 + \sum_{k=0}^{i}(\overline{E}^D\overline{F})^{i-k}\left(\overline{B}u_k - \sum_{j=1}^{k}\overline{E}c_{j+1}x_{k-j}\right) =$$

$$= \overline{F}(\overline{E}^D\overline{F})^i\overline{E}^D\overline{E}x_0 + \sum_{k=0}^{i-1}(\overline{E}^D\overline{F})^{i-k}\left(\overline{B}u_k - \sum_{j=1}^{k}\overline{E}c_{j+1}x_{k-j}\right) + \overline{B}u_i - \sum_{j=1}^{i}\overline{E}c_{j+1}x_{i-j}$$

이고

$$\overline{F}x_i = \overline{F}(\overline{E}^D\overline{F})^i\overline{E}^D\overline{E}x_0 + \sum_{k=0}^{i-1}\overline{F}\,\overline{E}^D(\overline{E}^D\overline{F})^{i-k-1}\left(\overline{B}u_k - \sum_{j=1}^{k}\overline{E}c_{j+1}x_{k-j}\right) =$$

$$= \overline{F}(\overline{E}^D\overline{F})^i\overline{E}^D\overline{E}x_0 + \sum_{k=0}^{i-1}(\overline{E}^D\overline{F})^{i-k}\left(\overline{B}u_k - \sum_{j=1}^{k}\overline{E}c_{j+1}x_{k-j}\right) =$$

$$= \overline{F}(\overline{E}^D\overline{F})^i\overline{E}^D\overline{E}x_0 + \sum_{k=0}^{i-1}(\overline{E}^D\overline{F})^{i-k}\left(\overline{B}u_k - \sum_{j=1}^{k}\overline{E}c_{j+1}x_{k-j}\right)$$

가 성립한다. 따라서

$$\overline{E}x_{i+1} = \overline{F}x_i - \sum_{k=1}^{i}\overline{E}c_{k+1}x_{i-k} + \overline{B}u_i$$

이므로 정리의 결과가 증명된다.(증명끝)

정리 3에서 주어진 특이분수리산시간선형계의 풀이 x_i 의 표시식에는 i 개의 입력벡토르 $u_0, \cdots, u_{i-1}$ 과 $i-1$ 개의 상태벡토르 $x_0, \cdots, x_{i-2}$ 가 들어있다. 그런데 $i=0$ 일 때 $x_0 = \overline{E}^D\overline{E}x_0$ 이므로 허용초기벡토르들의 모임은 바로 이 등식을 만족시키는 x_0 들로 구성된다.

참 고 문 헌

[1] A. Ben-Israel, T. N. E. Greville; Generalized Inverses: Theory and Applications, 2nd Edition, Springer-Verlag, 284~328, 2003.

[2] S. L. Campbell, C. D. Meyer; Generalized Inverses of Linear Transformations, SIAM, 120~184, 2009.

[3] Tadeusz Kaczorek; Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., 23, 1, 29, 2013.

[4] Tadeusz Kaczorek; Przeglad Electrotechniczny, ISSN 0033-2097, R 90NR 4/2014, 10, 2014.

[5] Klaus Robenack, Kurt Reinschke; Int. J. Appl. Math. Comput., Sci., 21, 1, 161, 2011.

주체106(2017)년 8월 10일 원고접수

Representations for the General Solutions of Descriptor Fractional Discrete-Time Linear Systems using the Drazin Inverses

Myong Kum Chol

In this paper the solutions to the state equations of descriptor fractional discrete-time linear systems with regular pencils are represented by the use of the Drazin inverses of matrices.

Key words: Drazin inverse, descriptor fractional discrete-time linear system, regular pencil