김일성종합대학학보 수 학
주체109(2020)년 제66권 제2호

아인슈타인다양체에서 공형릿찌사분대칭접속에 대하여

윤금성, 허달윤

선행연구[1]에서는 리만다양체에서 릿찌사분대칭계량접속에 대하여 연구하였으며 선행연구[2]에서는 아인슈타인다양체에서 릿찌사분대칭접속들을 새롭게 정의하고 그것의 성질과 사영적성질을 연구하였다. 선행연구[4]에서는 비계량접속의 공형적성질을 밝히고 그것의 기하학적성질을 연구하였으며 선행연구[5]에서는 리만다양체에서 일반화된 사분대칭재귀계량접속의 기하학적성질을 밝혔다. 선행연구[3]에서는 반대칭비계량접속의 물리적모형이 제시되였다.

론문에서는 선행연구[2]에서 제시된 아인슈타인다양체에서의 릿찌사분대칭접속 $\overset{R}{\nabla}$ 와 공형동등한 공형릿찌사분대칭접속들을 새롭게 정의하고 이 접속의 평탄성, 이 접속과 레비－찌비따접속과의 관계, 공액대칭조건 등 이 접속의 기하학적성질을 밝혔다. 그리고 공형릿찌사분대칭접속에 관한 슈르의 정리를 연구하고 일정곡률을 가지는 공형릿찌사분대칭접속이 물리적모형에 의하여 설명된다는것을 밝혔다.

선행연구[2]에서는 아인슈타인다양체 $(M,\ g)$ 에서 릿찌사분대칭접속 $\overset{R}{\nabla}$ 를 접속결수가

$$\overset{R}{\Gamma}{}_{ij}^{k}=\{{}_{ij}^{k}\}+\frac{1+t}{2}\rho\pi_j\delta_i^k-\frac{1-t}{2}\rho\pi_i\delta_j^k,\ \forall t\in\mathbf{R}$$

인 접속족으로 정의하였다. 이 접속족은 아인슈타인다양체 $(M,\ g)$ 에서 식

$$\overset{R}{\nabla}_k\, g_{ij}=(1-t)\rho\pi_k g_{ij}-\frac{1+t}{2}\rho\pi_i g_{jk}-\frac{1+t}{2}\rho\pi_j g_{ik},\ T_{ij}^k=\rho(\pi_j\delta_i^k-\pi_i\delta_j^k) \tag{1}$$

를 만족시킨다. 여기서 ρ 는 아인슈타인방정식 $R_{jk}=\rho g_{jk}$ 의 결수이고 $\{{}_{ij}^{k}\}$ 는 레비－찌비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$ 의 접속결수이다.

정의 아인슈타인다양체 $(M,\ g)$ 에서 릿찌사분대칭접속 $\overset{R}{\nabla}$ 와 공형동등한 접속 $\overset{c}{\nabla}$ 를 공형릿찌사분대칭접속이라고 부른다.

아인슈타인다양체 $(M,\ g)$ 에서 계량의 공형변환은 $g_{ij}\to\bar{g}_{ij}=\rho^{2\sigma}g_{ij}$ 로 정의된다. 그러므로 정의에 의하여 아인슈타인다양체 $(M,\ g)$ 에서 공형릿찌사분대칭접속 $\overset{c}{\nabla}$ 는 식 (1)로부터

$$\overset{R}{\nabla}_k\, \bar{g}_{ij}=(1-t)\rho\pi_k\bar{g}_{ij}-\frac{1+t}{2}\rho\pi_i\bar{g}_{jk}-\frac{1+t}{2}\rho\pi_j\bar{g}_{ik},\ T_{ij}^k=\rho(\pi_j\delta_i^k-\pi_i\delta_j^k) \tag{2}$$

를 만족시키는 접속으로서 접속결수는 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned}\overset{c}{\Gamma}{}_{ij}^{k}&=\{{}_{ij}^{\bar{k}}\}+\frac{1+t}{2}\rho\pi_j\delta_i^k-\frac{1-t}{2}\rho\pi_i\delta_j^k=\\&=\{{}_{ij}^{k}\}+\left(\sigma_i-\frac{1-t}{2}\rho\pi_i\right)\delta_j^k+\left(\sigma_j+\frac{1+t}{2}\rho\pi_j\right)\delta_i^k-g_{ij}\sigma^k\end{aligned} \tag{3}$$

여기서 $\sigma_i = \partial_i \sigma$, $\sigma^k = g^{kl}\sigma_l$ 이다. 그리고 공형릿찌사분대칭접속 $\overset{c}{\nabla}$ 에 관한 곡률텐소르는 식 (3)으로부터

$$\overset{c}{R}{}^l_{ijk} = K^l_{ijk} + \delta^l_j a_{ik} - \delta^l_i a_{jk} + g_{ik}\sigma^l_j - g_{jk}\sigma^l_i - \frac{1-t}{2}\delta^l_k \omega_{ij} \tag{4}$$

이다. 여기서 K^l_{ijk} 은 레비－찌비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$ 에 관한 곡률텐소르이고

$$a_{ik} = \overset{\circ}{\nabla}_i\left(\sigma_k + \frac{1+t}{2}\rho\pi_k\right) - \left(\sigma_i + \frac{1+t}{2}\rho\pi_i\right)\left(\sigma_k + \frac{1+t}{2}\rho\pi_k\right) + \frac{1+t}{2} g_{ik}\rho\pi_p\sigma^p$$

$$\sigma_{ik} = \overset{\circ}{\nabla}\sigma_k - \sigma_i\sigma_k + g_{ik}\sigma_p\sigma^p \tag{5}$$

$$\omega_{ij} = \overset{\circ}{\nabla}_i\,\omega_j - \overset{\circ}{\nabla}_j\,\omega_i,\ \ \omega_i = \rho\pi_i$$

이다.

정리 1 아인슈타인다양체 $(M,\ g)$ 에서 공형릿찌사분대칭접속 $\overset{c}{\nabla}$ 에 관하여 1－형식 $\omega = (\omega_i)$ 가 닫긴형식이면 아인슈타인다양체 $(M,\ g,\ \overset{c}{\nabla})$ 는 체적평탄이다.

증명 식 (4)를 $k,\ l$ 에 관하여 축약하면

$$\overset{c}{P}_{ij} = \overset{\circ}{P}_{ij} + a_{ij} - a_{ji} + \sigma_{ji} - \sigma_{ij} - \frac{1-t}{2} n\omega_{ij}$$

이다. 그런데 $\overset{\circ}{P}_{ij} = 0$ 이고 식 (5)로부터 $a_{ij} - a_{ji} = \dfrac{1+t}{2}\omega_{ij}$, $\sigma_{ij} - \sigma_{ji} = 0$ 이므로

$$\overset{c}{P}_{ij} = \left(\frac{1+t}{2} - \frac{1-t}{2} n\right)\omega_{ij}$$

이다. 이때 1－형식 ω 가 닫긴형식이면 $\omega_{ij} = 0$ 이므로 $\overset{c}{P}_{ij} = 0$ 이다. 따라서 아인슈타인다양체 $(M,\ g,\ \overset{c}{\nabla})$ 는 체적평탄이다.(증명끝)

주의 1 아인슈타인다양체 $(M,\ g,\ \overset{c}{\nabla})$ 의 체적평탄성은 보조변수 t 에 무관계하다.

정리 2 아인슈타인다양체 $(M,\ g)$ 에서 공형릿찌사분대칭접속 $\overset{c}{\nabla}$ 에 관한 곡률텐소르가 령이면 아인슈타인다양체 $(M,\ g,\ \overset{\circ}{\nabla})$ 는 공형평탄이다.

증명 식 (3)을 리용하면 아인슈타인다양체 $(M,\ g)$ 에서 공형릿찌사분대칭접속 $\overset{c}{\nabla}$ 는 리만계량 g_{ij} 에 관하여 식

$$\overset{c}{\nabla}_k g_{ij} = -2\left(\sigma_k - \frac{1-t}{2}\rho\pi_k\right)g_{ij} - \frac{1+t}{2}\rho\pi_i g_{jk} - \frac{1+t}{2}\rho\pi_j g_{ik},\ \ T^k_{ij} = \rho(\pi_j\delta^k_i - \pi_i\delta^k_j) \tag{6}$$

를 만족시킨다. 따라서 식 (3)과 (6)을 리용하면 접속 $\overset{c}{\nabla}$ 의 쌍대접속 $\overset{c*}{\nabla}$ 의 접속결수는

$$\overset{*}{\Gamma}{}^k_{ij} = \left\{{}^{\,k}_{ij}\right\} - \left(\sigma_i - \frac{1-t}{2}\rho\pi_i\right)\delta^k_j + \sigma_j\delta^k_i - g_{ij}\left(\sigma^k - \frac{1+t}{2}\rho\pi^k\right) \tag{7}$$

이다. 그리고 식 (7)을 리용하면 $\overset{c*}{\nabla}$의 곡률텐소르는 다음과 같다.

$$\overset{c*}{R}{}^l_{ijk} = K^l_{ijk} + \delta^l_j \sigma_{ik} - \delta^l_i \sigma_{jk} + g_{ik} a^l_j - g_{jk} a^l_i + \frac{1-t}{2} \delta^l_k \omega_{ij} \tag{8}$$

따라서 식 (4)와 (8)을 합하고 $b_{ik} = a_{ik} + \sigma_{ik}$ 로 놓으면

$$\overset{c}{R}{}^l_{ijk} + \overset{c*}{R}{}^l_{ijk} = 2K^l_{ijk} + \delta^l_j b_{ik} - \delta^l_i b_{jk} + g_{ik} b^l_j - g_{jk} b^l_i \tag{9}$$

이다. 이 식을 i, l 에 관하여 축약하면 다음과 같다.

$$\overset{c}{R}_{jk} + \overset{c*}{R}_{jk} = 2K_{jk} - (n-2) b_{jk} - g_{jk} b^i_i \tag{10}$$

따라서 이 식의 량변에 g^{jk} 를 곱하고 축약하면 다음과 같다.

$$\overset{c}{R} + \overset{c*}{R} = 2K - 2(n-1) b^i_i$$

그러므로 이 식으로부터 b^i_i 를 구하면

$$b^i_i = \frac{1}{2(n-1)} \left[2K - \left(\overset{c}{R} + \overset{c*}{R} \right) \right]$$

이다. 우의 식을 식 (10)에 대입하고 b_{jk} 를 구하면 다음과 같다.

$$b_{jk} = \frac{1}{n-2} \left\{ 2K_{jk} - \left(R_{jk} + \overset{*}{R}_{jk} \right) - \frac{g_{jk}}{2(n-1)} \left[2K - \left(\overset{*}{R} + \overset{c*}{R} \right) \right] \right\}$$

그리고 이 식을 식 (9)에 대입하고

$$\overset{c}{C}{}^l_{ijk} = \overset{c}{R}{}^l_{ijk} - \frac{1}{n-2} \left(\delta^l_i \overset{c}{R}_{jk} - \delta^l_j \overset{c}{R}_{ik} + g_{jk} \overset{c}{R}{}^l_i - g_{ik} \overset{c}{R}{}^l_j \right) + \frac{\overset{c}{R}}{(n-1)(n-2)} (\delta^l_i g_{jk} - \delta^l_j g_{ik})$$

$$\overset{c*}{C}{}^l_{ijk} = \overset{c*}{R}{}^l_{ijk} - \frac{1}{n-2} \left(\delta^l_i \overset{c*}{R}_{jk} - \delta^l_j \overset{c*}{R}_{ik} + g_{jk} \overset{c*}{R}{}^l_i - g_{ik} \overset{c*}{R}{}^l_i \right) + \frac{\overset{c*}{R}}{(n-1)(n-2)} (\delta^l_i g_{jk} - \delta^l_j g_{ik}) \tag{11}$$

$$\overset{\circ}{C}{}^l_{ijk} = K^l_{ijk} - \frac{1}{n-2} (\delta^l_i K_{jk} - \delta^l_j K_{ik} + g_{jk} K^l_i - g_{ik} K^l_j) + \frac{K}{(n-1)(n-2)} (\delta^l_i g_{jk} - \delta^l_j g_{ik})$$

로 놓으면

$$\overset{c}{C}{}^l_{ijk} + \overset{c*}{C}{}^l_{ijk} = 2 \overset{c}{C}{}^l_{ijk} \tag{12}$$

이 성립한다. 그런데 $\overset{c}{R}{}^l_{ijk} = 0$ 이면 $\overset{c*}{R}{}^l_{ijk} = 0$ 이고 식 (11)로부터 $\overset{c}{C}{}^l_{ijk} = \overset{c*}{C}{}^l_{ijk} = 0$ 이다. 따라서 식 (12)로부터 $\overset{\circ}{C}{}^l_{ijk} = 0$ 이다. 그러므로 아인슈타인다양체 $(M,\ g,\ \overset{\circ}{\nabla})$ 는 공형평탄이다.(증명끝)

주의 2 아인슈타인다양체 $(M,\ g,\ \overset{\circ}{\nabla})$ 의 공형평탄성도 $\overset{c}{\nabla}$ 의 t 에 무관계하다.

아인슈타인다양체 $(M,\ g)$ 에서 접속 ∇ 의 쌍대접속을 $\overset{*}{\nabla}$ 이라고 하고 대응하는 곡률텐소르를 R^l_{ijk}, $\overset{*}{R}{}^l_{ijk}$ 이라고 하면 $R^l_{ijk} = \overset{*}{R}{}^l_{ijk}$ 일 때 접속 ∇ 를 공액대칭접속, $R_{jk} = \overset{*}{R}_{jk}$ 일 때

접속 ∇를 공액릿찌대칭접속이라고 부른다.

정리 3 아인슈타인다양체 $(M,\ g)$에서 공형릿찌사분대칭접속 $\overset{c}{\nabla}$가 공액대칭접속이기 위해서는 그것이 공액릿찌대칭접속일것이 필요하고 충분하다.

증명 식 (8)에서 식 (4)를 덜고 $d_{ik} = a_{ik} - \sigma_{ik}$로 놓으면

$$\overset{c*}{R}{}^l_{ijk} = \overset{c}{R}{}^l_{ijk} + \delta^l_i d_{jk} - \delta^l_j d_{ik} + g_{ik} d^l_j - g_{jk} d^l_i + (1-t)\delta^l_k \omega_{ij} \tag{13}$$

이다. 이 식을 $i,\ l$에 관하여 축약하면

$$\overset{c*}{R}_{jk} = \overset{c}{R}_{jk} + n d_{jk} - g_{jk} d^i_i + (t-1)\omega_{jk} \tag{14}$$

이다. 이 식을 $j,\ k$에 관하여 빗대칭화하고 $d_{jk} - d_{kj} = \frac{1+t}{2}\omega_{jk}$라는것을 리용하여 ω_{jk}를 구하면

$$\omega_{jk} = \frac{2}{(n+2)t+(n-2)}\left[\left(\overset{c*}{R}_{ji} - \overset{c*}{R}_{ij}\right) - \left(\overset{c}{R}_{jk} - \overset{c}{R}_{kj}\right)\right] \tag{15}$$

이다. 이 식을 식 (14)에 넣고 d_{jk}를 구하면

$$d_{jk} = \frac{1}{n}\left\{\overset{c*}{R}_{jk} - \overset{c}{R}_{jk} + g_{jk} d^i_i + \frac{2(t-1)}{(n+2)t+(n-2)}\left[\left(\overset{c*}{R}_{jk} - \overset{c*}{R}_{kj}\right) - \left(\overset{c}{R}_{jk} - \overset{c}{R}_{kj}\right)\right]\right\} \tag{16}$$

이다. 따라서 식 (15)와 (16)을 식 (13)에 대입하고 정돈하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
&\overset{c}{R}{}^l_{ijk} - \frac{1}{n}\left(\delta^l_i \overset{c}{R}_{jk} - \delta^l_j \overset{c}{R}_{ik} + g_{ik} \overset{c}{R}{}^l_j - g_{jk} \overset{c}{R}{}^l_i\right) - \frac{2(t-1)}{n[(n+2)t+(n-2)]}\left[\delta^l_i\left(\overset{c}{R}_{jk} - \overset{c}{R}_{kj}\right) - \right.\\
&\left. - \delta^l_j\left(\overset{c}{R}_{ik} - \overset{c}{R}_{ki}\right) + g_{ik}\left(\overset{c}{R}{}^l_j - \overset{c}{R}{}^l_{ij}\right) - g_{jk}\left(\overset{c}{R}{}^l_i - \overset{c}{R}{}^l_{ii}\right) + \delta^l_k\left(\overset{c}{R}_{ij} - \overset{c}{R}_{ji}\right)\right] = \\
&= \overset{c*}{R}{}^l_{ijk} - \frac{1}{n}\left(\delta^l_i \overset{c*}{R}_{jk} - \delta^l_j \overset{c*}{R}_{ik} + g_{ik} \overset{c*}{R}{}^l_j - g_{jk} \overset{c*}{R}{}^l_i\right) - \frac{2(t-1)}{n[(n+2)t+(n-2)]}\left[\delta^l_i\left(\overset{c*}{R}_{jk} - \overset{c*}{R}_{kj}\right) - \right.\\
&\left. - \delta^l_j\left(\overset{c*}{R}_{ik} - \overset{c*}{R}_{ki}\right) + g_{ik}\left(\overset{c*}{R}{}^l_j - \overset{c*}{R}{}^l_{ij}\right) - g_{jk}\left(\overset{c*}{R}{}^l_i - \overset{c*}{R}{}^l_{ii}\right) + \delta^l_k\left(\overset{c*}{R}_{ij} - \overset{c*}{R}_{ji}\right)\right]
\end{aligned} \tag{17}$$

그러므로 $\overset{c}{R}{}^l_{ijk} = \overset{c*}{R}{}^l_{ijk}$이면 $\overset{c}{R}_{jk} = \overset{c*}{R}_{jk}$이다.

거꾸로 식 (17)로부터 $\overset{c}{R}_{jk} = \overset{c*}{R}_{jk}$이면 $\overset{c}{R}{}^l_{ijk} = \overset{c*}{R}{}^l_{ijk}$이다.(증명끝)

주의 3 공형릿찌사분대칭접속 $\overset{c}{\nabla}$의 공액대칭조건도 보조변수 t에 무관계하다.

공형릿찌사분대칭계량접속은 항상 공액대칭접속이라는것이 이미 알려졌다.[2]

아인슈타인다양체 $(M,\ g)$의 임의의 점 P에서 접속 ∇에 관한 단면곡률이 2차원방향 $E(T_p(M)$의 임의의 2차원부분공간)의 선택에 무관계하면 그 접속에 관한 곡률텐소르는

$$R^l_{ijk} = k(p)(\delta^l_i g_{jk} - \delta^l_j g_{ik}) \tag{18}$$

로 표시된다. 만일 $k(p) = \mathrm{const}$이면 아인슈타인다양체 $(M,\ g,\ \nabla)$는 일정곡률다양체로 된다.

정리 4 련결인 아인슈타인다양체 (M, g) $(\dim M > 2)$에서 공형릿찌사분대칭접속 $\overset{c}{\nabla}$에 관한 단면곡률이 2차원방향 E의 선택에 무관계하고

$$2\sigma_k + \frac{1+t}{2}\rho\pi_k = 0 \tag{19}$$

이면 아인슈타인다양체 $(M, g, \overset{c}{\nabla})$는 일정곡률다양체이다.

주의 4 $t = -1$이면 식 (19)로부터 $\sigma_k = 0$이다. 이 경우에 식 (6)은

$$\overset{c}{\nabla}_k g_{ij} = 2\rho\pi_k g_{ij},\ T_{ij}^k = \rho(\pi_j\delta_i^k - \pi_i\delta_j^k) \tag{20}$$

로 된다. 식 (20)을 만족시키는 접속은 선행연구[3]에서 중력의 스칼라텐소르리론에 대한 기하학적 모형으로 리용되였다. 그러나 이 접속이 정의된 아인슈타인다양체가 일정곡률다양체이라는것은 밝혀지지 않았다.

주의 5 식 (19)를 리용하면 식 (6)은

$$\overset{c}{\nabla}_k g_{ij} = 2(\sigma_k + \rho\pi_k)g_{ij} - 2\sigma_i g_{jk} - 2\sigma_j g_{ik},\quad T_{ij}^k = \rho(\pi_j\delta_i^k - \pi_i\delta_j^k)$$

로 되고 식 (3)은

$$\overset{c}{\Gamma}{}_{ij}^k = \{{}_{ij}^k\} - (\sigma_i + \rho\pi_i)\delta_j^k - \sigma_j\delta_i^k - g_{ij}\sigma^k \tag{21}$$

로 된다. 접속결수가 식 (21)로 표시되는 접속은 아인슈타인다양체 (M, g)에서 슈르의 정리를 만족시키는 공형릿찌사분대칭접속으로서 슈르의 정리를 만족시키는 비계량비대칭접속의 새로운 형태이다.

참 고 문 헌

[1] 김일성종합대학학보(자연과학), 64, 2, 52, 주체107(2018).
[2] 조선민주주의인민공화국 과학원통보, 6, 6, 7, 주체106(2017).
[3] K. A. Dunn; Tensor, N. S. 29, 214, 1975.
[4] Y. Han et al.; Facta Universitatis (NIS) Ser. Mat. Inform., 31, 2, 513, 2016.
[5] W. Tang et al.; Filomat, 32, 1, 207, 2018.

주체108(2019)년 12월 15일 원고접수

On a Conformal Ricci Quarter-Symmtic Connection in an Einstein Manifold

Yun Kum Song, Ho Tal Yun

In this paper, we define a conformal Ricci quarter-symmetric connection that is conformal equivalent to a Ricci quarter-symmertic connection in an Einstein manifold and studied the flatness, the relation with the Levi-Civita connection and conjugate symmetry condition. And we study forms of the conformal Ricci quarter-symmetric connections satisfying the Schur's theorem.

Keywords: conformal Ricci quarter-symmertic connection, conjugate symmetry