김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제2호

반순서노름공간에서 증가연산자의 부동점정리

림 창 일

반순서노름공간에서 증가연산자의 부동점정리는 여러 방정식들의 상, 하풀이법에서 풀이의 존재성과 존재범위, 풀이에로 수렴하는 반복렬 등을 주는 위력한 수단으로 되고 있다.

선행연구[2]에서는 반순서바나흐공간의 순서추에 대한 일련의 가정하에서

$$Tu << u,\ v << Tv \tag{*}$$

를 만족시키는 콤팍트, 련속, 증가연산자 $T:[u,\ v]\to X$ 의 부동점의 존재성을 고찰하였다.

선행연구[1]에서는 반순서노름공간의 순서추에 대한 일련의 가정하에서 콤팍트, 련속, 증가연산자 $T:P\to X$ ($P\subset X$:순서추)가 식 (*)을 만족시킬 때 적어도 하나의 부동점을 가지며 $(u,\ v)_c$ 의 어떤 점에서 시작되는 반복렬이 부동점에로 수렴한다는것을 밝혔다.

선행연구[1]에서는 선행연구[2]에서와 같이 넘기기의 위상도를 리용하지 않고 비선형스칼라넘기기를 리용하였다.

이외에도 $\exists v\in X,\ v<<Tv$ (혹은 $v\le Tv$)를 만족시키는 증가연산자 T 에 대한 부동점정리들에 대하여서도 연구되고있다.[1, 4]

론문에서는 선행연구[1, 2]의 방법과는 달리 쪼른의 보조정리를 리용하여 순서추에 대한 아낙, 정칙추의 조건을 아낙추로 낮추고 선행연구[1]의 기본정리의 결과를 증명하였다.

1. 기 초 개 념

론문의 서술에 필요한 몇가지 개념들을 준다.

정의 1[5] 실노름공간 E 의 부분모임 P 가 다음의 조건을 만족시킬 때 P 를 순서추라고 부른다.

① P 는 비지 않은 닫긴모임으로서 $P\ne\{\theta\}$ 이다.

② 임의의 $x,\ y\in P$ 와 부아닌 임의의 실수 $a,\ b$ 에 대하여 $ax+by\in P$ 가 성립한다.

③ $P\cap(-P)=\{\theta\}$

순서추 P 의 아낙점모임이 비지 않으면 P 를 아낙추라고 부른다.

순서추 $P\subseteq E$ 가 주어지면 실노름공간 E 에서 P 에 관한 반순서를 다음과 같이 정의할수 있다.

$$x\le y \overset{def}{\Leftrightarrow} y-x\in P$$

다음과 같은 기호들도 약속한다.

$$x<y:=y-x\in P\setminus\{\theta\},\quad x<<y:=y-x\in \mathrm{int}(P)$$

여기서 $\mathrm{int}(P)$ 는 P 의 아낙점모임을 의미한다. 이러한 반순서관계가 도입된 실노름공간 E 와 순서추 P 의 쌍 $(E,\ P)$ 를 반순서노름공간이라고 부른다.

정의 2[6] $A\subseteq E$ 의 임의의 원소 a 에 대하여 $a\le b$ ($b\le a$)가 성립하는 E 의 원소 b

를 A의 상계(하계)라고 부른다. 임의의 상계(또는 하계) b에 대하여 $b_0 \le b$ (또는 $b \le b_0$)가 성립하는 상계(또는 하계) b_0을 A의 상한(또는 하한)이라고 부르고 $b_0 = \sup A$ (또는 $b_0 = \inf A$)로 표시한다. 모임 A가 상계(또는 하계)를 가지면 모임 A는 우로 유계(또는 아래로 유계)이다고 말한다. 우로 유계(또는 아래로 유계)인 모임을 우로 순서유계(또는 아래로 순서유계)이다고 말한다.

정의 3[1] 반순서노름공간 E의 순서추 P에 관한 반순서관계에 대하여 다음의 부등식이 만족되면 순서추 P를 정규추라고 부른다.

$$\exists N > 0,\ \forall x,\ y \in E,\ \theta \le x \le y \Rightarrow \| x \| \le N \| y \|$$

그리고 우의 부등식을 만족시키는 최소의 정의상수 N을 P의 정규상수라고 부른다. 우의 부등식에서 $y = x \ne \theta$ 되게 잡으면 $N \ge 1$임은 분명하다.

정의 4[6] 반순서노름공간 E의 증가렬이 순서추 P에 관한 반순서에 관하여 우로 유계일 때 E에서 수렴하면 순서추 P를 정칙추라고 부른다. 즉

$$\exists b \in E,\ a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le \cdots \le b$$

를 만족시키는 E의 렬 $\{a_n\}$에 대하여 E의 원소 a가 있어서

$$\lim_{n\to\infty} \| a_n - a \| = 0$$

이 성립한다. 이것은 아래로 유계인 E의 모든 감소렬이 수렴한다는것과 동등하다.

주의 1 정칙추는 정규추이다. 그러나 거꿀은 일반적으로 성립하지 않는다.[3]

정의 5 반순서노름공간 $(E,\ P)$의 비지 않은 부분모임 A의 모든 순서부분모임들이 상대콤팍트모임이면 모임 A를 준콤팍트모임이라고 부른다. 분명히 콤팍트모임은 준콤팍트모임이지만 거꿀은 일반적으로 성립하지 않는다. 실례로 반순서바나흐공간 L^p ($p \ge 1$)의 모든 순서구간들은 준콤팍트모임들이다. 이것은 추의 정칙성으로부터 곧 나온다. 그러나 L^p의 순서구간들은 일반적으로 콤팍트모임이 아니다.

정의 6[1] $(E_1,\ P_1)$, $(E_2,\ P_2)$가 반순서노름공간일 때 연산자 $T: D \to (E_2,\ P_2),\ D \subseteq E_1$가 $x,\ y \in D$에 대하여

$$x \le_{P_1} y \Rightarrow Tx \le_{P_2} Ty$$

를 만족시키면 T를 증가연산자라고 부른다. $A \subseteq D$가 유계모임일 때 $T(A)$가 상대콤팍트모임이면 연산자 T를 콤팍트연산자라고 부른다.

2. 기 본 결 과

반순서노름공간에서 단조증가연산자의 부동점정리를 쪼른의 보조정리를 리용하여 증명한다.

보조정리 1[3](쪼른의 보조정리) 반순서모임의 매개 순서모임들이 상계를 가지면 그때 주어진 반순서모임은 극대원소를 가진다.

쪼른의 보조정리로부터 반순서모임의 매개 순서모임들이 상계를 가질 때 극대순서부분모임의 존재성이 담보된다.

보조정리 2 반순서노름공간 E에서 렬 $\{x_n\}$과 단조증가렬 $\{y_n\}$에 대하여 다음의 사실이 성립한다.

$$\forall n \in \mathbf{N},\ x_n \le y_n (x_n \to x,\ y_n \to y) \Rightarrow x \le y$$

증명 임의의 $n\in\mathbf{N}$ 에 대하여 $[x_n)$ 은 닫긴모임이고 $n\le m$ 일 때 $y_m\in[x_n)$ 이므로 $y\in[x_n)$ 이다. 즉 $x_n\le y$ 이다. 한편 $(y]$ 가 닫긴모임이고 $x_n\in(y]$ 이므로 $x\in(y]$ 이다. 따라서 $x\le y$ 이다.(증명끝)

다음의 보조정리는 반순서노름공간의 비지 않은 상대콤팍트순서모임의 상한과 하한의 존재성을 담보해준다.

보조정리 3 반순서노름공간의 비지 않은 순서모임 M 이 상대콤팍트모임이면 다음의 사실이 성립한다.

$\exists x_0,\ y_0\in\overline{M}$: ① $x_0=\inf M,\ y_0=\sup M$

② $\exists (x_n),\ (y_n)\subseteq M,\ x_n\to x_0,\ y_n\to y_0$

정리 1 E 를 순서추 $P\subseteq E$ 에 관한 반순서노름공간이라고 하고 연산자 $T:P\to E$ 는 증가넘기기로서 다음의 조건을 만족시킨다고 하자.

① $A=\{x\in P: x\le Tx\}\ne\varnothing$

② $T(A)$ 는 준콤팍트모임이다.

이때 T 는 A 에서 적어도 하나의 부동점을 가진다. 또한 T 가 련속인 경우에는 임의의 $x\in A$ 에 대하여 $\{T^n x\}$ 가 부동점에로 수렴한다.

증명 T 가 증가이므로 $T(A)\subseteq A$ 이다. 쪼른의 보조정리로부터 $T(A)$ 의 극대순서부분모임 M 을 취할수 있다. $T(A)$ 가 준콤팍트모임이므로 보조정리 3으로부터 M 의 상한이 존재한다. 그 상한을 x^* 이라고 하자. 그러면 M 의 임의의 원소 y 에 대하여 $y\le x^*$ 이 성립하며 T 가 증가이므로 $y\le Ty\le Tx^*$ 이다. 이로부터 $x^*\le Tx^*$ 이다. 한편 M 의 극대성으로부터 $x^*=Tx^*$ 즉 x^* 은 T 의 부동점이다.

T 가 련속인 경우 임의의 $x\in A$ 에 대하여 $x_n:=T^n(x)$ 로 놓으면 렬 $\{x_n\}$ 은 단조증가렬이므로 수렴하며 그 극한은 T 의 부동점이다.(증명끝)

주의 2 정리 1은 선행연구[1]의 정리 3.5에서 공간 E 의 순서추에 대한 정칙성가정과 연산자 T 의 련속성가정을 제거할수 있다는것을 보여준다. 그리하여 정리 1은 선행연구[1]의 정리 3.5를 일반화한다.

정의 7[1] E 의 두 원소 $u_-,\ u_+$ 에 대하여 $(u_-,\ u_+)_c$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$(u_-,\ u_+)_c:=\{z\in E: z=tu_++(1-t)u_-, 0<t<1\}$$

다음의 보조정리는 이 론문의 기본결과에서 중요한 역할을 하는 $t\le T(t)$ 를 만족시키는 $t\in(u_-,\ u_+)_c$ 의 존재성을 담보해준다.

보조정리 4[1] E 는 아낙추 $P\subseteq E$ 를 가진 반순서노름공간이고 $T:P\to E$ 는 련속넘기기라고 하자. 만일

$$\exists u_-,\ u_+\in P,\ u_-<u_+,\ u_+<<Tu_+,\ Tu_-<<u_-$$

이면 그때

$$\exists u^*,\ u_*\in(u_-,\ u_+)_c,\ u^*\le Tu^*,\ Tu_*\le u_*$$

가 성립한다.

증명 $Tu_-<<u_-$ 이므로 적당한 $\delta>0$ 이 있어서 $B_\delta(u_- - Tu_-)\subset \mathring{P}$ 이다. 또한 련속넘기기 $u\mapsto u-Tu$ 에 의한 $B_\delta(u_- - Tu_-)$ 의 원상은 구 $B_\varepsilon(u_-)$ 를 포함한다. 따라서 $B_\varepsilon(u_-)$ 의 임의

의 원소 u에 대하여 $u-Tu>>0$이 성립한다. 마찬가지로 $B_\varepsilon(u_+)$의 임의의 원소 u에 대하여 $u-Tu<<0$이 성립한다. $\varepsilon>0$을 충분히 작게 취하면 $B_\varepsilon(u_-)\cap B_\varepsilon(u_+)=\varnothing$ 되게 할수 있다.

$p(t):=\{(1-t)u_-+tu_+\}(t\in[0,\ 1])$로 놓으면 충분히 작은 $t_-\in(0,\ 1)$과 1에 충분히 가까운 $t_+\in(0,\ 1)$이 존재하여 $u_*:=p(t_-)\in B_\varepsilon(u_-),\ u^*:=p(t_+)\in B_\varepsilon(u_+)$이 성립한다.

그러면 $u_*,\ u^*\in(u_-,\ u_+)_c$이며

$$Tu_*<<u_*,\ Tu^*>>u^*$$

이 성립한다. 따라서 보조정리의 결과가 성립한다.(증명끝)

정리 2 E는 아낙추 $P\subseteq E$를 가진 반순서노름공간이고 $T:P\to E$는 련속인 증가넘기기로서 정리 1의 조건 ①, ②를 만족시킨다고 하자. 만일

$$\exists u_-,\ u_+\in P,\ u_-<u_+,\ u_+<<Tu_+,\ Tu_-<<u_-$$

이면 그때 T는 부동점 u_0을 가지며

$$\exists t\in(u_-,\ u_+)_c,\ t\le T(t),\ \lim_{n\to\infty}T^n(t)=u_0$$

이다.

증명은 앞의 보조정리 4와 정리 1을 리용하면 쉽게 나온다.

주의 3 정리 2는 선행연구[1]의 기본결과인 정리 3.12에서 순서추의 정칙성을 제거할수 있다는것을 보여준다. 그리하여 정리 2는 선행연구[1]의 기본결과인 정리 3.12를 일반화한다.

참 고 문 헌

[1] P. Zangenehmehr et a1.; Positivity, 19, 333, 2015.
[2] V. Kostrykin, A. Oleynik; Fixed Point Theory Appl., 12, 211, 2012.
[3] K. Deimling; Nonlinear Functional Analysis, Springer, 250~267, 1985.
[4] C, Çevik et a1.; J. Nonlinear Sci. Appl., 10, 1424, 2017.
[5] W. S. Du; Nonlinear Anal., 72, 5, 2259, 2010.
[6] T. Abdeljawad; Numer. Funct. Anal. Optim., 32, 5, 477, 2011.

주체108(2019)년 12월 15일 원고접수

Fixed Point Theorems of Increasing Operators in Partially Ordered Normed Spaces

Rim Chang Il

In this paper, we prove some lemmas and then establish fixed point theorems for increasing operators in a partially ordered normed space by using Zorn’s lemma. This paper generalizes the previous results by removing the regularity condition for the order cone.

Keywords: fixed point, increasing operator, partially ordered normed space