김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체105(2016)년 제62권 제2호 Vol. 62 No. 2 JUCHE105(2016).

리만다양체에서 공형반대칭접속의 공액대칭성과 일정곡률조건

허달윤, 리주향

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《과학기술을 발전시켜야 나라의 경제를 빨리 추켜세울수 있으며 뒤떨어진 기술을 앞선 기술로 갱신하여 생산을 끊임없이 높여나갈수 있습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제20권 62페지)

론문에서는 기초수학의 한 분야인 리만기하학에서 최근시기 활발히 연구되고있는 공형반대칭접속에 대한 문제를 론의하였다.

선행연구[1]에서는 리만다양체에서 레비－찌비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$과 공형동등인 반대칭접속을 공형반대칭접속으로 정의하고 곡률텐소르가 령이기 위한 조건을 밝혔으며 그것이 반대칭비계량접속이라는것을 지적하였다. 반대칭비계량접속에 대한 연구에서는 그것의 공액대칭성과 일정곡률성을 확증하는것이 어려운 문제의 하나로 제기되고있다.

선행연구[3, 5]에서는 비계량대칭접속의 특수한 형태인 아마리－첸쪼브접속의 공액대칭조건과 일정곡률성이 밝혀졌고 선행연구[2]에서는 한 형태의 반대칭비계량접속에 대한 일정곡률성이, 선행연구[4]에서는 레비－찌비따접속의 일정곡률성이 론의되였다.

론문에서는 선행연구들의 결과에 기초하여 반대칭비계량접속의 한 형태인 공형반대칭접속의 공액대칭성과 일정곡률조건, 그것의 호상접속의 공액대칭조건과 일정곡률조건을 새롭게 밝혔다. 이것은 중력마당리론과 전자기마당론에서 립자의 자리길특성을 연구하는데 리용될것이다.

리만다양체 (M, g)에서 리만계량 g_{ij}의 공형변환 $g_{ij}\to\bar{g}_{ij}=e^{2\sigma}g_{ij}$와 어떤 1－형식 π가 있어서

$$\nabla_k g_{ij}=-2\sigma_k g_{ij},\ T_{ij}^k=\varphi_j\delta_i^k-\varphi_i\delta_j^k \tag{1}$$

을 만족시키는 접속 ∇을 공형반대칭접속이라고 한다.[1] 여기서 $\sigma_k=\partial_k\sigma$이고 φ_i는 1－형식 π의 성분이며 T_{ij}^k는 ∇의 꼬임률텐소르이다.

공형반대칭접속 ∇의 접속결수는

$$\Gamma_{ij}^k=\{{}_{ij}^k\}+\sigma_i\delta_j^k+(\varphi_j+\sigma_j)\delta_i^k-g_{ij}(\sigma^k+\varphi^k) \tag{2}$$

이다. 여기서 $\{{}_{ij}^k\}$는 리만계량 g_{ij}에 관한 크리스토펠기호이다.

공형반대칭접속 ∇의 곡률텐소르는 식 (2)를 리용하면

$$R_{ijk}{}^l=K_{ijk}{}^l+\delta_j^l\alpha_{ik}-\delta_i^l\alpha_{jk}+g_{ik}\alpha_j^l-g_{jk}\alpha_i^l \tag{3}$$

이다. 여기서 $K_{ijk}{}^{l}$은 리만계량 g_{ij}에 관한 레비－찌비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$의 곡률텐소르이고

$$\alpha_{jk}=\overset{\circ}{\nabla}_j(\sigma_k+\varphi_k)-(\sigma_j+\varphi_j)(\sigma_k+\varphi_k)+g_{jk}(\sigma_p+\varphi_p)(\sigma^p+\varphi^p)/2.$$

곡률텐소르 $R_{ijk}{}^{l}$에 관한 제1종비앙끼항등식은 $R_{ijk}{}^{l}+R_{jki}{}^{l}+R_{kij}{}^{l}=-(\delta_i^l\varphi_{jk}+\delta_j^l\varphi_{ki}+\delta_k^l\varphi_{ij})$이고 제2종비앙끼항등식은

$$\nabla_h R_{ijk}{}^{l}+\nabla_i R_{jhk}{}^{l}+\nabla_j R_{hik}{}^{l}=2(\varphi_h R_{ijk}{}^{l}+\varphi_i R_{jhk}{}^{l}+\varphi_j R_{hik}{}^{l}) \tag{4}$$

이다. 여기서 $\varphi_{jk}=\overset{\circ}{\nabla}_j\varphi_k-\overset{\circ}{\nabla}_k\varphi_j$이다.

정리 1 리만다양체 $(M,\ g)$에서 식 (1)로 정의되는 공형반대칭접속은 공액대칭이다.

증명 식 (1)로 정의되는 ∇의 쌍대접속 $\overset{*}{\nabla}$의 접속결수 $\overset{*}{\Gamma}{}_{ij}^{k}$는 $\overset{*}{\Gamma}{}_{ij}^{k}=\Gamma_{ij}^k+Q_{ij}^k$로 정해진다. 여기서 $Q_{ij}^k=g^{kl}Q_{ijl}$, $Q_{kij}=-2\sigma_k g_{ij}$이다.

따라서 식 (1), (2)를 리용하면 $\overset{*}{\Gamma}{}_{ij}^{k}=\{{}_{ij}^{k}\}-\sigma_i\delta_j^k+(\sigma_j+\varphi_j)\delta_i^k-g_{ij}(\sigma^k+\varphi^k)$이므로 쌍대접속 $\overset{*}{\nabla}$의 곡률텐소르를 구하면

$$\overset{*}{R}{}_{ijk}{}^{l}=K_{ijk}{}^{l}+\delta_j^l\alpha_{ik}-\delta_i^l\alpha_{jk}+g_{ik}\alpha_j^l-g_{jk}\alpha_i^l. \tag{5}$$

식 (3)과 (5)를 비교하면 $\overset{*}{R}{}_{ijk}{}^{l}=R_{ijk}{}^{l}$이다. 따라서 ∇는 공액대칭이다.(증명끝)

리만다양체 $(M,\ g)$의 임의의 점에서 자름면곡률이 2차원방향의 선택에 무관계하면

$$R_{ijkl}=K(P)(g_{il}g_{jk}-g_{ik}g_{jl}) \tag{6}$$

이 성립된다.

만일 $K(P)=\text{const}$이면 리만다양체 $(M,\ g)$는 일정곡률을 가진다고 말한다.[5]

정리 2 련결인 $n\,(n\ge 3)$차원리만다양체 $(M,\ g)$의 임의의 점에서 자름면곡률이 2차원방향의 선택에 무관계한 공형반대칭접속에 대하여

$$\varphi_h=-\sigma_h \tag{7}$$

이면 리만다양체 $(M,\ g)$는 일정곡률을 가진다.

증명 식 (4)로부터 $R_{ijkl}=g_{lp}R_{ijk}{}^{p}$임을 고려하면 다음의 식이 성립된다.

$$\nabla_h R_{ijkl}+\nabla_i R_{jhkl}+\nabla_j R_{hikl}=\nabla_h g_{lp}R_{ijk}^p+\nabla_i g_{lp}R_{jhk}^p+\nabla_j g_{lp}R_{hik}^p+2(\varphi_h R_{ijkl}+\varphi_i R_{jhkl}+\varphi_j R_{hikl})$$

이 식에 식 (6)을 넣고 정돈하면 다음과 같다.

$$[\nabla_h K-2K(\varphi_h+\sigma_h)](g_{il}g_{jk}-g_{ik}g_{jl})+[\nabla_i K-2K(\varphi_i+\sigma_i)](g_{jl}g_{hk}-g_{jk}g_{hl})+$$
$$+[\nabla_j K-2K(\varphi_j+\sigma_j)](g_{hl}g_{ik}-g_{hk}g_{il})=0$$

여기에 g^{il}을 곱하고 $i,\ l$에 관한 축약을 실시하면

$$(n-1)[\nabla_h K-2K(\varphi_h+\sigma_h)]g_{jk}+[\nabla_i K-2K(\varphi_i+\sigma_i)](\delta_j^i g_{hk}-\delta_h^i g_{jk})-$$
$$-(n-1)[\nabla_j K-2K(\varphi_j+\sigma_j)]g_{hk}=0.$$

이 식의 량변에 g^{jk}를 곱하고 $j,\ k$에 관한 축약을 실시하고 정돈하면

$$(n-1)(n-2)[\nabla_h K - 2K(\varphi_h + \sigma_h)] = 0 . \tag{8}$$

식 (8)은 $\varphi_h = -\sigma_h$ 이면 $K = \text{const}$ 임을 보여준다.

따라서 식 (7)이 성립되면 리만다양체 (M, g) 는 일정곡률을 가진다.(증명끝)

정리 2는 식 (1), (2)로부터 반대칭비계량접속

$$\nabla_k g_{ij} = 2\varphi_k g_{ij}, \quad T_{ij}^k = \varphi_j \delta_i^k - \varphi_i \delta_j^k, \quad \Gamma_{ij}^k = \{_{ij}^k\} - \varphi_i \delta_j^k$$

이 일정곡률을 가지는 반대칭비계량접속이라는것을 새롭게 보여준다.

선행연구[6]에서는 이러한 형태의 접속에 대한 물리적의미는 밝혔으나 그것이 일정곡률을 가진다는것은 밝히지 못하였다.

리만다양체 (M, g) 에서 공형반대칭접속 ∇ 의 호상접속 $\overline{\nabla}$ 는

$$\overline{\nabla}_k g_{ij} = -2(\sigma_k + \varphi_k) g_{ij} + \varphi_i g_{jk} + \varphi_j g_{ki}, \quad \overline{T}_{ij}^k = \varphi_i \delta_j^k - \varphi_j \delta_i^k \tag{9}$$

을 만족시키는 접속으로서 접속결수는 다음과 같다.

$$\overline{\Gamma}_{ij}^k = \{_{ij}^k\} + (\sigma_i + \varphi_i)\delta_j^k + \sigma_j \delta_i^k - g_{ij}(\sigma^k + \varphi^k) \tag{10}$$

호상접속 $\overline{\nabla}$ 의 곡률텐소르는 식 (10)을 리용하면

$$\overline{R}_{ijk}{}^l = K_{ijk}{}^l + \delta_j^l \sigma_{ik} - \delta_i^l \sigma_{jk} + g_{ik}\tau_j^l - g_{jk}\tau_i^l + \delta_k^l \varphi_{ij} \tag{11}$$

이다. 여기서 $\sigma_{ik} = \overset{\circ}{\nabla}_i \sigma_k - \sigma_i \sigma_k$, $\tau_{ik} = \overset{\circ}{\nabla}_i (\sigma_k + \varphi_k) - (\sigma_i + \varphi_i)(\sigma_k + \varphi_k) + g_{ik}\sigma_p(\sigma^p + \varphi^p)$ 이다.

정리 3 $n\,(n > 4)$ 차원리만다양체 (M, g) 에서 공형반대칭접속 ∇ 의 호상접속 $\overline{\nabla}$ 가 공액대칭이기 위해서는 그것의 릿찌곡률텐소르와 쌍대접속의 릿찌곡률텐소르가 같을것 즉 $\overset{*}{\overline{R}}_{jk} = \overline{R}_{jk}$ 일것이 필요하고 충분하다.

증명 $\overline{\nabla}$ 의 쌍대접속 $\overset{*}{\overline{\nabla}}$ 의 접속결수는 $\overset{*}{\overline{\Gamma}}{}_{ij}^k = \{_{ij}^k\} - (\sigma_i + \varphi_i)\delta_j^k + (\sigma_j + \varphi_j)\delta_i^k - g_{ij}\sigma^k$ 이고 곡률텐소르는

$$\overset{*}{\overline{R}}_{ijk}{}^l = K_{ijk}{}^l + \delta_j^l \tau_{ik} - \delta_i^l \tau_{jk} + g_{ik}\sigma_j^l - g_{jk}\sigma_i^l - \delta_k^l \varphi_{ij} \tag{12}$$

이며 식 (11), (12)로부터

$$\overset{*}{\overline{R}}_{ijk}{}^l = \overline{R}_{ijk}{}^l + \delta_j^l \rho_{ik} - \delta_i^l \rho_{jk} + g_{jk}\rho_i^l - g_{ik}\rho_j^l - 2\delta_k^l \varphi_{ij} \tag{13}$$

이다. 여기서 $\rho_{ik} = \tau_{ik} - \sigma_{ik}$ 이다.

식 (13)을 i, l 에 관하여 축약하면

$$\overset{*}{\overline{R}}_{jk} = \overline{R}_{jk} - n\rho_{jk} + g_{jk}\rho_i^i - 2\varphi_{kj} .$$

이 식을 j, k 에 관하여 빗대칭화하고 φ_{jk} 의 빗대칭성을 고려하면서 φ_{jk} 를 구하면 $\varphi_{jk} = \dfrac{1}{n-4}\left[(\overline{R}_{jk} - \overline{R}_{kj}) - \left(\overset{*}{\overline{R}}_{jk} - \overset{*}{\overline{R}}_{kj}\right)\right]$ 이다. 이 식을 웃식에 넣어 ρ_{jk} 를 구하면

$$\rho_{jk} = \frac{1}{n}\left\{\overline{R}_{jk} - \overset{*}{\overline{R}}_{jk} + g_{jk}\rho_i^i + \frac{2}{n-4}\left[(\overline{R}_{jk} - \overline{R}_{kj}) - \left(\overset{*}{\overline{R}}_{jk} - \overset{*}{\overline{R}}_{kj}\right)\right]\right\}$$

이다. 이 식을 식 (13)에 넣고 정돈하면

$$\overset{*}{\overline{V}}{}_{ijk}^{\ l} = \overline{V}{}_{ijk}^{\ l} \tag{14}$$

이 성립된다. 여기서

$$\begin{aligned}\overset{*}{\overline{V}}{}_{ijk}^{\ l} &= \overset{*}{\overline{R}}{}_{ijk}^{\ l} - \frac{1}{n}\left(\delta_i^l \overset{*}{\overline{R}}_{jk} - \delta_j^l \overset{*}{\overline{R}}_{ik} + g_{ik} \overset{*}{\overline{R}}{}_j^l - g_{jk} \overset{*}{\overline{R}}{}_i^l -\right) - \frac{2}{n(n-4)}\left[\delta_i^l \left(\overset{*}{\overline{R}}_{jk} - \overset{*}{\overline{R}}_{kj}\right) - \right.\\ &\left. - \delta_j^l \left(\overset{*}{\overline{R}}_{ik} - \overset{*}{\overline{R}}_{ki}\right) + g_{ik}\left(\overset{*}{\overline{R}}{}_j^l - \overset{*}{\overline{R}}{}_{\cdot j}^l\right) - g_{jk}\left(\overset{*}{\overline{R}}{}_i^l - \overset{*}{\overline{R}}{}_{\cdot i}^l\right) + n\delta_k^l\left(\overset{*}{\overline{R}}_{ij} - \overset{*}{\overline{R}}_{ji}\right)\right],\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\overline{V}{}_{ijk}^{\ l} &= \overline{R}{}_{ijk}^{\ l} - \frac{1}{n}(\delta_i^l \overline{R}_{jk} - \delta_j^l \overline{R}_{ik} + g_{ik} \overline{R}{}_j^l - g_{jk} \overline{R}{}_i^l) - \frac{2}{n(n-4)}[\delta_i^l (\overline{R}_{jk} - \overline{R}_{kj}) - \\ &- \delta_j^l (\overline{R}_{ik} - \overline{R}_{ki}) + g_{ik}(\overline{R}{}_j^l - \overline{R}{}_{\cdot j}^l) - g_{jk}(\overline{R}{}_i^l - \overline{R}{}_{\cdot i}^l) + n\delta_k^l(\overline{R}_{ij} - \overline{R}_{ji})].\end{aligned}$$

식 (14), (15)로부터 $\overset{*}{\overline{R}}{}_{ijk}^{l} = \overline{R}{}_{ijk}^{l}$ 이기 위해서는 $\overset{*}{\overline{R}}_{jk} = \overline{R}_{jk}$ 일것이 필요충분하다.(증명끝)

정리 4 련결인 $n\ (n>3)$ 차원리만다양체 $(M,\ g)$ 의 임의의 점 p에서 공형반대칭접속 ∇ 의 호상접속 $\overline{\nabla}$ 에 대한 자름면곡률이 2차원방향의 선택에 무관계하고

$$2\sigma_h = -\varphi_h \tag{16}$$

이면 리만다양체 $(M,\ g)$ 는 일정곡률을 가진다.

증명 리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 공형반대칭접속 ∇ 의 호상접속 $\overline{\nabla}$ 에 대한 제2종비앙끼항등식

$$\overline{\nabla}_h \overline{R}{}_{ijk}^{\ l} + \overline{\nabla}_i \overline{R}{}_{jhk}^{\ l} + \overline{\nabla}_j \overline{R}{}_{hik}^{\ l} = -2(\varphi_h \overline{R}{}_{ijk}^{\ l} + \varphi_i \overline{R}{}_{jhk}^{\ l} + \varphi_j \overline{R}{}_{hik}^{\ l})$$

과 식 (6)을 리용하면

$$\begin{aligned}&[\overline{\nabla}_h K - K(2\sigma_h + \varphi_h)](g_{il} g_{jk} - g_{ik} g_{jl}) + [\overline{\nabla}_i K - K(2\sigma_i + \varphi_i)](g_{jl} g_{hk} - g_{jk} g_{hl}) + \\ &+ [\overline{\nabla}_j K - K(2\sigma_j + \varphi_j)](g_{hl} g_{ik} - g_{hk} g_{il}) = 0.\end{aligned}$$

이 식에 g^{il} 을 곱하고 축약하면

$$\begin{aligned}&(n-1)[\nabla_h K - K(2\sigma_h + \varphi_h)]g_{jk} + [\nabla_i K - K(2\sigma_i + \varphi_i)](\delta_j^i g_{hk} - \delta_h^i g_{hl}) - \\ &- (n-1)[\nabla_j K - 2K(\sigma_j + \varphi_j)]g_{hk} = 0\end{aligned}$$

이며 이 식에 다시 g^{jk} 을 곱하고 축약을 실시하면 $(n-1)(n-2)[\nabla_h K - K(2\sigma_h + \varphi_h)] = 0$ 이다.

따라서 식 (16)이 성립하면 $K = \text{const}$ 이다.(증명끝)

식 (9), (10)으로부터 반대칭비계량접속의 호상접속

$$\overline{\nabla}_k g_{ij} = -\varphi_k g_{ij} + \varphi_i g_{jk} + \varphi_j g_{ki},\ \ \overline{T}{}_{ij}^k = \varphi_i \delta_j^k - \varphi_j \delta_i^k,$$

$$\overline{\Gamma}{}_{ij}^k = \{{}_{ij}^k\} + \frac{1}{2}(\varphi_i \delta_j^k - \varphi_j \delta_i^k - g_{ij}\varphi^k)$$

은 일정곡률을 가지는 반대칭비계량접속의 호상접속이다.

참 고 문 헌

[1] Journal of **Kim Il Sung** University(Natural Science), 2, 2, 3, Juche102(2013).

[2] Journal of **Kim Il Sung** University(Natural Science), 2, 1, 3, Juche102(2013).

[3] E. S. Stepanova; J. of Math. Sci., 147, 1, 6507, 2007.

[4] S. S. Chern et al.; Lectures on Differential Geometry, World Scientific, 12～161, 2000.

[5] T. Kurose et al.; Tohoku Math. J., 4, 427, 1994.

[6] Ho Tal Yun et al.; Filomat, 27, 4, 679, 2013.

주체104(2015)년 10월 5일 원고접수

Conjugate Symmetry and a Constant Curvature Condition of Conformal Semi-Symmetric Connection on a Riemannian Manifold

Ho Tal Yun, Ri Ju Hyang

We newly studied a conjugate symmetry and a constant curvature condition of conformal semi-symmetric connection which was a type of semi-symmetric non-metric connections on a Riemannian manifold, as well as a conjugate symmetric condition and a constant curvature condition of its mutual connection.

Key word: conformal semi-symmetric connection