김일성종합대학학보 수학 주체108(2019)년 제65권 제1호

목표－초점공정능력지수의 추정량개선

한광룡, 전순영

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《과학기술부문에서 첨단돌파전을 힘있게 벌려야 하겠습니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 39페지)

론문에서는 목표－초점공정능력지수에 대하여 평균두제곱오차가 보다 작은 추정량을 새로 구성하고 그 성질을 연구하였다.

1. 문 제 설 정

선행연구[2, 3]에서는 목표값에 관한 제품개체들의 변동 및 제조공장의 웃, 아래명세한계와 결합된 목표－초점공정능력지수 $C_{pm}=\dfrac{S_U-S_L}{6\tau}$ 을 도입하였다. 여기서 S_U, S_L 은 공정에 대한 웃, 아래명세한계들이고 $\tau=\sqrt{\sigma^2+(\mu-T)^2}$ 은 목표값 T 로부터의 기대두제곱편차의 2차뿌리이며 μ 는 공정평균이다.

선행연구[2, 4, 5]에서는 웃, 아래명세한계가 있을 때 정규공정에 대하여 목표－초점공정능력지수의 추정량들을 제기하고 그 분포함수를 연구하였다. 또한 선행연구[6, 7]에서는 우연측정오차들이 자기상관인 자료에 대하여 $\mu=T$ 인 공정능력지수에 대한 추론을 진행하고 비정규인 경우로서 품질특성 X 가 형태파라메터 $\alpha>0$ 과 척도파라메터 $\beta>0$ 을 가진 빈바움－싸운더분포 $BS(\alpha,\ \beta)$ 에 따를 때 해당한 공정능력지수추정을 위한 브트스트랩믿음구간을 연구하였다.

론문에서는 선행연구에서의 목표－초점공정능력지수 C_{pm} 의 추정을 개선하기 위하여 두제곱오차가 보다 작은 추정량을 새로 구성하고 추정량의 성질과 분포 및 점근분포를 밝히며 C_{pm} 의 구간추정과 가설검정을 진행하였다.

2. 목표－초점공정능력지수에 대한 추정개선

$X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ 이 정규모집단 $\mathrm{N}(\mu,\ \sigma^2)$ 에서 취한 크기 n 인 표본일 때 σ 의 정확한 추정은 매우 중요하다.

σ 의 추정량은 μ 를 모르는 경우에

$$\hat{\sigma}=S_1=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$$

을, μ 를 아는 경우에

$$\hat{\sigma}_0=S_0=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}$$

을 리용하고있는것이 보통인데 σ^2의 추정량으로서 $\hat{\sigma}^2$을 리용할 때와는 달리 $\hat{\sigma}$은 σ에 대하여 평균두제곱오차가 최소로 되는 최량추정량으로는 되지 못한다.[1] 그러나 선행연구[3]에서는 목표－초점공정능력지수 C_{pm}의 추정량을 공정표준편차 σ의 추정량 $\hat{\sigma}$을 리용하여 구성하였다. 즉

$$\hat{C}_{pm}=\frac{S_U-S_L}{6\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-T)^2}}$$

선행연구[1]에서 고찰한바와 같이 $X_1,\ \cdots,\ X_n$이 정규분포 $\mathrm{N}(\mu,\ \sigma^2)$으로부터의 표본일 때 평균두제곱오차최소의 의미에서 σ의 최량추정량은 다음과 같다.

$$\hat{\sigma}=\frac{1}{a(n)}S_0\ \text{(평균 }\mu\text{를 아는 경우)},\ \hat{\sigma}=\frac{1}{b(n)}S_1\ \text{(평균 }\mu\text{를 모르는 경우)}$$

여기서

$$a(n)=\sqrt{2/n}\,\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)},\ b(n)=\sqrt{2/(n-1)}\,\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n-1)/2)}$$

분명히 공정표준편차의 추정은 표본수가 큰가, 작은가에 따라 정확도가 달라지며 또 어떤 통계량을 추정량으로 취하는가에 따라 그 성질도 달라진다.

이제 우에서 언급한 C_{pm}의 추정량 $\hat{C}_{pm}$이 어떤 추정방법으로 얻어질수 있는가를 먼저 밝혀보자.

정리 1 $X_1,\ \cdots,\ X_n$이 정규분포 $\mathrm{N}(\mu,\ \sigma^2)$으로부터의 표본일 때 목표－초점공정능력지수 C_{pm}의 최대우도추정량은 다음과 같다.

$$\hat{C}_{pm}=\frac{S_U-S_L}{6\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-T)^2}}$$

그리고 $\hat{C}_{pm}$은 C_{pm}의 일치추정량이다. 즉 $\hat{C}_{pm}\xrightarrow{P}C_{pm}\ \ (n\to\infty)$

증명 먼저 $X_1,\ \cdots,\ X_n$이 정규분포 $\mathrm{N}(\mu,\ \sigma^2)$으로부터의 표본일 때 $\hat{\sigma}_T^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-T)^2$이 $\sigma_t^2=\sigma^2+(\mu-T)^2$의 최대우도추정량임을 밝히자.

사실

$$\hat{\sigma}_T^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-T)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+(\overline{X}-T)^2=\hat{\sigma}^2+(\overline{X}-T)^2$$

에서 $\hat{\sigma}^2$은 σ^2의 최대우도추정량이고 $\overline{X}$는 μ의 최대우도추정량이므로 최대우도추정량의 불변성에 의하여 $\hat{\sigma}_T^2$은 $\sigma_t^2=\sigma^2+(\mu-T)^2$의 최대우도추정량으로 된다는것이 나온다. 다시 최대우도추정량의 불변성을 리용하면 $\hat{C}_{pm}=\frac{S_U-S_L}{6\hat{\sigma}_T}$이 $C_{pm}=\frac{S_U-S_L}{6\sigma_T}$의 최대우도추정량으로 된다는것이 나온다. $\hat{C}_{Pm}$의 일치성은 $\hat{\sigma}_T^2$의 σ_T^2에로의 일치성으로부터 분명하다.(증명끝)

이제 $X_1, \cdots, X_n$이 정규분포 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$으로부터의 작은 표본($n \le 30$)일 때 C_{pm}의 추정량을 개선하는 문제를 생각한다. 우에서 언급한 정규분포의 표준편차의 최량추정에 기초하여 공정능력지수 C_{pm}의 추정량을 다음과 같이 구성한다.

$$\widetilde{C}_{pm} = b(n)\frac{S_U - S_L}{6\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - T)^2}}$$

문제는 공정능력지수 C_{pm}에 대한 이 추정량의 평균두제곱오차와 앞의 추정량 $\hat{C}_{pm}$의 평균두제곱오차를 비교하는것이다. 이와 관련하여 다음의 사실이 성립한다.

정리 2 $X_1, \cdots, X_n$이 정규분포 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$으로부터의 표본일 때 목표－초점공정능력지수 C_{pm}의 최대우도추정량 $\hat{C}_{pm}$과 추정량 $\widetilde{C}_{pm}$에 대하여 다음의 사실이 성립한다.

$$E(\widetilde{C}_{pm} - C_{pm})^2 \le E(\hat{C}_{pm} - C_{pm})^2$$

이제 목표－초점공정능력지수에 대한 다음의 추정량의 분포 및 점근분포들에 대하여 고찰하자.

정리 3 $X_1, \cdots, X_n$이 정규분포 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$으로부터의 표본일 때 목표－초점공정능력지수 C_{pm}의 추정량 $\widetilde{C}_{pm}$은 비심파라메터 $\delta = n(\mu - T)^2$이고 자유도가 n인 비심 $\chi-$분포의 거꿀에 $\sqrt{n}a(n)(S_U - S_L)/(6\sigma)$을 곱한것과 같은 분포에 따른다.

정리 4 목표－초점공정능력지수 C_{pm}의 추정량 $\widetilde{C}_{pm}$에 대하여 다음의 점근정규성이 성립한다.

$$\sqrt{n}(\widetilde{C}_{pm} - C_{pm}) \xrightarrow{d} \mathrm{N}\left(0,\ \frac{(S_U - S_L)^2}{144\sigma_T^6}[2\sigma^2(\sigma_T^2 + (\mu - T)^2)]\right)$$

정리 5 목표－초점공정능력지수 C_{pm}에 대하여 추정량 $\widetilde{C}_{pm}$에 기초한 정확한 $1-\alpha$ 믿음구간과 점근$1-\alpha$ 믿음구간은 각각 다음과 같다.

$$\left(\frac{\chi_{1-\alpha/2}(n-1,\ \delta)}{\sqrt{n}a(n)}\widetilde{C}_{pm},\ \frac{\chi_{\alpha/2}(n-1,\ \delta)}{\sqrt{n}a(n)}\widetilde{C}_{pm}\right)$$

$$\left(\widetilde{C}_{pm} - z_{\alpha/2}\frac{(S_U - S_L)\sqrt{2\hat{\sigma}^2(\hat{\sigma}_T^2 + (\overline{X} - T)^2)}}{\sqrt{144n}\hat{\sigma}_T^6},\ \widetilde{C}_{pm} + z_{\alpha/2}\frac{(S_U - S_L)\sqrt{2\hat{\sigma}^2(\hat{\sigma}_T^2 + (\overline{X} - T)^2)}}{\sqrt{144n}\hat{\sigma}_T^6}\right)$$

여기서 $\chi_{\alpha/2}(n-1,\ \delta),\ \chi_{1-\alpha/2}(n-1,\ \delta)$는 자유도 $n-1$이고 비심파라메터

$$\delta = \sum_{i=1}^{n}\delta_i^2 = n(\mu - T)^2$$

인 비심$\chi-$분포의 α점들이고 $z_{\alpha/2}$는 표준정규분포의 α점이다.

정리 6 공정의 측정값이 정규모집단에 따를 때 목표－초점공정능력지수에 대한 한측가설 $H_0 : C_{pm} = c_0,\ H_1 : C_{pm} > c_0$과 $H_0 : C_{pm} = c_0,\ H_1 : C_{pm} < c_0$에 대하여 수준$\alpha$ 기각구역은 각각 다음과 같다.

$$\left\{\widetilde{C}_{pm} < \frac{b(n)\sqrt{n-1}}{\chi_{1-\alpha}(n-1,\ \delta)}c_0\right\},\ \left\{\widetilde{C}_{pm} > \frac{b(n)\sqrt{n-1}}{\chi_{\alpha}(n-1,\ \delta)}c_0\right\}$$

그리고 량측가설 $H_0 : C_{pm} = c_0$, $H_1 : C_{pm} \neq c_0$ 에 대하여 수준 α 기각구역은

$$\left\{\widetilde{C}_{pm} < \frac{b(n)\sqrt{n-1}}{\chi_{1-\alpha/2}(n-1,\ \delta)}c_0\right\} \text{ 또는 } \left\{\widetilde{C}_{pm} > \frac{b(n)\sqrt{n-1}}{\chi_{\alpha/2}n-1,\ \delta)}c_0\right\}$$

이다. 여기서 $\chi_{1-\alpha/2}(n-1,\ \delta)$, $\chi_{\alpha/2}(n-1,\ \delta)$ 는 비심파라메터 $\delta = n(\mu - T)^2$ 이고 자유도가 n 인 비심 χ - 분포의 α 점들이다.

목표－초점공정능력지수의 추정량 $\widetilde{C}_{pm}$ 은 선행연구에서 제기된 추정량보다 두제곱편차가 작은 추정량이므로 공정에서 작은 표본수를 가지고 공정평균을 목표값 T 에 맞추려고 할 때는 목표－초점공정능력지수를 $\widetilde{C}_{pm}$ 로 추정하는것이 가장 합리적이며 어느 정규공정에서나 이 추정량을 쓸수 있다.

참 고 문 헌

[1] 한광룡; 조선민주주의인민공화국 과학원통보, 6. 10, 주체97(2008).

[2] L. K. Chan; J. Quality Technol., 20, 162, 1988.

[3] T. C. Hsiang, G. Taguchi; A Tutorial on Quality Control and Assurance-the Taguchi Methods, Annual Meeting, Las Vegas, Nevada, 76～90, 1985.

[4] K. Vännman, S. Kotz; Scand. J. Statist., 22, 477, 1995.

[5] A. W. Peter; Statistics and Probability Leterrs, 47, 249, 2000.

[6] V. Leiva et al; Journal of Applied Statistics, 41, 9, 1881, 2014.

[7] Micahele Scagliarini; Journal of Applied Statistics, 37, 1, 147, 2010.

주체107(2018)년 9월 8일 원고접수

Improvement of Estimator for Target-Focus Process Capability Indices

Han Kwang Ryong, Jon Sun Yong

Process capability indices(PCIs) are used to determine whether a production process is capable of producing items within specification tolerance.

In this paper, we newly construct estimator in view of minimum mean square error on target-focus capability indices and study property, distribution, asymptotic distribution, confidence interval and testing hypotesses of the estimator.

Key words: process capability index, estimator