김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제2호

새로운 프락탈보간곡면의 함차원평가

김진명, 정성준

프락탈보간곡선은 많은 자연적인 대상들을 모형화하기 위한 강력한 도구로서 수학이나 응용과학의 여러 분야에서 광범히 응용되고있다.

론문에서는 프락탈보간곡선으로부터 유도되는 프락탈보간곡면의 함차원평가에 대한 연구를 진행하였다.

프락탈보간함수는 1986년에 반슬리가 반복함수계를 리용하여 프락탈도형들을 생성하는 방법을 제기하면서 출현하였다.[1]

현재 프락탈특성을 가지는 여러가지 프락탈보간함수에 대한 연구가 각이한 방향에서 활발히 진행되고있으며 특히 프락탈보간함수들을 생성하여 근사리론과 콤퓨터도형학, 화상압축 등 많은 분야에 광범히 리용하고있다.[1－6]

$\mathbf{R}^2$ 우의 프락탈보간함수의 그라프를 프락탈보간곡면이라고 부른다. 프락탈보간곡면의 구성법에 대해서는 많이 연구되고있다.

선행연구[2－4, 6]에서는 함수의 련속성을 보장하기 위하여 3각형구역에서의 보간점들과 아핀반복함수계를 리용하여 프락탈보간곡면을 구성하였으며 각이한 조건밑에서 직4각형구역에서의 프락탈보간곡면의 구성법이 연구되였다. 또한 다양한 프락탈보간곡면에 대하여 미끈성, 안정성, 차원수 등 여러가지 성질들도 연구되였다.[3, 6]

선행연구[3]에서는 아핀프락탈보간함수로부터 유도되는 프락탈보간곡면의 함차원을 계산하였다.

론문에서는 선행연구[3]의 결과를 일반화하여 함수수직비례인자를 리용한 프락탈보간곡선으로부터 유도되는 프락탈보간곡면의 함차원을 평가하였다.

먼저 프락탈보간곡선으로부터 유도되는 프락탈보간곡면을 구성하자.

$E = I \times J$ 를 $\mathbf{R}^2$ 의 직4각형구역이라고 하고

$$\{(x_i,\ y_j,\ z_{ij}) : i = 0,\ 1, \cdots,\ n,\ j = 0,\ 1,\ \cdots,\ m\}$$

을 주어진 자료모임이라고 하자. 여기서 $I = [x_0,\ x_n]$, $J = [y_0,\ y_m]$ 이고 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, $y_0 < y_1 < \cdots < y_m$ 이다. $i = 1,\ \cdots,\ n$, $j = 1,\ \cdots,\ m$ 에 대하여 $I_i := [x_{i-1},\ x_i]$, $J_j := [y_{j-1},\ y_j]$ 라고 하자.

넘기기 $L_j : J \to J_j$ 를

$$L_j(y_0) = y_{j-1},\ L_j(y_m) = y_j$$

인 선형넘기기라고 하자. 그러면 L_j 는 축소동형넘기기로 된다. $i = 1,\ \cdots,\ n$; $j = 1,\ \cdots,\ m$ 에 대하여 $F_{ij} : J \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 를

$$F_{x_i, j}(y,\ z) = s_j(y)(z - d_{x_i}(y)) + b_{x_i}(L_j(y))$$

로 정의하자. 여기서 $d_{x_i}(y_0) = z_{i0}$, $d_{x_i}(y_m) = z_{im}$, $b_{x_i}(y_j) = z_{ij}$ 이고 d_{x_i} 는 J 에서, b_{x_i} 는 J_j 에서 선형인 함수이다. 그리고 s_j 는 $\max_{y \in J} s_j(y) < 1$ 인 련속함수이다. 이때 $u_i(y)$ 를 반복함

수계 $\{J\times\mathbf{R}, w_{x_i, j} : j=1, \cdots, m\}$ 에 의하여 생성되는 자료모임 $\{(y_j, z_{ij}) : j=0, \cdots, m\}$ 을 보간하는 프락탈보간함수라고 하자. 여기서 $j=1, \cdots, m$ 에 대하여

$$w_{x_i, j}(y, z)=(L_j(y), F_{x_i, j}(y, z)) \tag{1}$$

이다. 마찬가지로 임의의 $y\in[y_0, y_m]$ 에 대하여 $f(\cdot, y)$ 를 반복함수계

$$\{I\times\mathbf{R}, \widetilde{w}_{y, i} : i=1, \cdots, n\}$$

에 의하여 생성되는 자료모임 $\{(x_i, u_i(y)) : i=0, 1, \cdots, n\}$ 을 보간하는 프락탈보간함수라고 하자. 여기서 $i=1, \cdots, n$ 에 대하여

$$\widetilde{w}_{y,i}(x, z)=(\widetilde{L}_i(x), \widetilde{F}_{y,i}(x, z))$$

$$\widetilde{F}_{y,i}(x, z)=\widetilde{s}_i(x)(z-d_y(x))+b_y(L_i(x))$$

이다. 이렇게 하면 두변수련속함수 $f : E\to\mathbf{R}$ 를 구성할수 있다. 이 함수의 그라프는 자료모임

$$\{(x_i, y_j, z_{ij}) : i=0, 1, \cdots, n; \ j=0, 1, \cdots, m\}$$

을 보간하는 프락탈보간곡면이다.

다음 구성한 프락탈보간곡면의 함차원평가에 필요한 정의와 보조정리들을 서술한다.

정의[3] 함수 f 를 닫긴구역 G 우의 련속함수라고 하고 γ 를 부아닌 실수라고 하자.

$$O_{f;\gamma}^{G}(x):=\sup_{x'\in G[x;\gamma]}|f(x')-f(x)|$$

를 G 에 대한 점 x 에서 f 의 γ −중심진동이라고 부른다. 그리고

$$V_{f;\gamma}(G):=\int_G O_{f;\gamma}^{G}(x)dx$$

를 구역 G 에서 함수 f 의 γ −중심변동이라고 부른다.

보조정리 1[3] 함수 f 의 그라프의 함차원은 다음의 공식에 의하여 계산할수 있다.

$$\overline{\dim}_B\Gamma(f; G)=\limsup_{\gamma\to 0+}\left(n+1-\frac{\log V_{f;\gamma}(G)}{\log\gamma}\right) \tag{2}$$

$$\underline{\dim}_B\Gamma(f; G)=\liminf_{\gamma\to 0+}\left(n+1-\frac{\log V_{f;\gamma}(G)}{\log\gamma}\right) \tag{3}$$

보조정리 2 우에서 구성한 프락탈보간함수에 대하여 어떤 $y\in[c, d]$ 가 있어서 점모임 $\{(x_i, u_i(y)); i=0, 1, \cdots, n\}$ 가 한직선우에 놓이지 않으면 어떤 구간 $[\alpha, \beta]\subset[c, d]$ 가 있어서 모든 $y\in[\alpha, \beta]$ 에 대하여 $\{(x_i, u_i(y)); i=0, 1, \cdots, n\}$ 이 한직선우에 놓이지 않는다.

증명 프락탈보간함수 f 의 련속성으로부터 분명하다.(증명끝)

보조정리 3[3] ① 만일 $g(x)$ 가 구간 I 에서 미분가능한 함수이면

$$0\le V_{g;\gamma}(I)\le 2\max_{x\in I}|g'(x)|\cdot|I|\cdot\gamma$$

가 성립한다.

② 만일 상수 $\lambda\neq 0$ 와 ζ 에 대하여 $\tau(t)=\lambda t+\zeta \ (t\in I)$ 이고 $g(x)$ 가 $\tau(I)$ 우의 련속함수이면 다음식이 성립한다.

$$V_{g\circ\tau;\gamma}(I)=\tfrac{1}{|\lambda|}V_{g;|\lambda|\gamma}(\tau(I))$$

③ g 가 구간 I 우의 련속함수라고 하면

$$\sum_{i=1}^{n} V_{g;\gamma}(I_i) \le V_{g;\gamma}(I) \le \sum_{i=1}^{n} V_{g;\gamma}(I_i) + 2(n-1)V_g(I)\gamma$$

이다. 여기서 $V_g(I) = \sup_{x\in I} g(x) - \inf_{x\in I} g(x)$ 이다.

보조정리 4 $f(x,\ y)$ $((x,\ y)\in E)$ 를 우에서 정의한 프락탈보간함수라고 하자. 정의 실수 β_1과 β_2가 존재하여 임의의 $\gamma \ge 0$과 $y\in J$ 에 대하여 다음의 식이 성립한다.

$$\sum_{i=1}^{n} \underline{\tilde{s}_i} a_i V_{f(\cdot,\,y);\frac{\gamma}{a_i}}(I) - \beta_1\gamma \le V_{f(\cdot,\,y);\gamma}(I) \le \sum_{i=1}^{n} \overline{\tilde{s}_i} a_i V_{f(\cdot,\,y);\frac{\gamma}{a_i}}(I) + \beta_2\gamma$$

여기서 $\underline{\tilde{s}_i} = \min_{x\in I} |\tilde{s}_i(x)|$, $\overline{\tilde{s}_i} = \max_{x\in I} |\tilde{s}_i(x)|$ 이다.

증명 $f(\cdot,\ y)$ 는 프락탈보간함수이므로 구성법으로부터 $x\in I_i$ 이면

$$f(x,\ y) = \tilde{s}_i(L_i^{-1}(x))(f(L_i^{-1}(x), y) - \tilde{d}_y(L_i^{-1}(x))) + \tilde{b}_y(x) = \tilde{s}_i(L_i^{-1}(x)) f(L_i^{-1}(x), y) + p_{i,y}(L_i^{-1}(x))$$

이다. L_i 는 축소상수가 $a_i = x_i - x_{i-1}$ 인 축소선형넘기기이므로 보조정리 3으로부터

$$V_{f(\cdot,\,y);\gamma}(I) \ge \sum_{i=1}^{n} [\underline{\tilde{s}_i} V_{f(L_i^{-1}(\cdot),\,y);\gamma}(I_i) - V_{p_{i,y}\circ L_i^{-1};\gamma}(I_i)] = \sum_{i=1}^{n} [\underline{\tilde{s}_i} a_i V_{f(\cdot,\,y);\gamma/a_i}(I) - a_i V_{p_{i,y};\gamma/a_i}(I)] \ge$$

$$\ge \sum_{i=1}^{n} \underline{\tilde{s}_i} a_i V_{f(\cdot,\,y);\gamma/a_i}(I) - 2|I| \sum_{i=1}^{n} |p'_{i,\,y}(x)| \cdot \gamma$$

가 성립한다. $p_{i,y}$ 는 몇개의 축소넘기기들의 합이므로 어떤 $M>0$ 이 존재하여 $|p'_{i,y}(x)| < M$ 이 성립한다. 따라서 $\beta_1 := 2nM|I|$ 이면 보조정리의 첫번째 부등식이 성립한다. 류사한 방법으로 보조정리 3을 리용하여 두번째 부등식도 증명할수 있다.(증명끝)

보조정리 5 $\underline{\Lambda} = \sum_{i=1}^{n} \underline{\tilde{s}_i} > 1$, $\underline{a} = \min\{a_i : i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m\}$ 이고 임의의 $y\in[\alpha,\ \beta]\subset[c,\ d]$ 에 대하여 자료모임 $\{(x_i,\ u_i(y)) : i = 0,\ 1,\ \cdots,\ n\}$ 이 한 직선우에 놓이지 않는다고 하자. 그러면 정의 상수 C 가 존재하여 임의의 $y\in[\alpha,\ \beta]$ 와 $\gamma\in[0,\ \underline{a}^k]$ 에 대하여

$$V_{f(\cdot,\,y);\gamma}(I) \ge C\cdot \underline{\Lambda}^k \cdot \gamma$$

가 성립한다.

증명 $y\in[\alpha,\ \beta]$ 를 하나 고정하자. 두 점 $(x_0,\ f(x_0,\ y))$ 와 $(x_n,\ f(x_n,\ y))$ 를 맺는 선분 l 에 놓이지 않는 점 $(x_i,\ f(x_i,\ y))$ $(0<i<n)$ 가 존재한다. 이 점으로부터 l 까지의 z 축에 관한 거리(즉 이 점을 지나며 z 축에 평행인 직선과 l 과의 사귐점까지의 거리)중에서 최대값을 $h(y)$ 라고 하고 이것을 점모임 $\{(x_i,\ f(x_i,\ y)) : 0\le i\le n\}$ 의 높이라고 부르자.

편속성으로부터 $h = \min_{y\in[\alpha,\ \beta]} h(y) > 0$ 이다. 따라서 $i_i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ 일 때 $\tilde{w}_{y,i_1}$ 에 의하여 z 축에 평행인 선분은 z 축에 평행인 선분으로 넘어가므로 점모임 $\{\tilde{w}_{y,i_1}(x_i,\ f(x_i,\ y)) : 0\le i\le n\}$ 의 높이는 $\underline{\tilde{s}_{i_1}} h$ 이상이다.[6]

마찬가지로 $\{\tilde{w}_{y,i_k}\circ\cdots\circ\tilde{w}_{y,i_1}(x_i,\ f(x_i,\ y)) : 0\le i\le n\}$ 의 높이는 $\underline{\tilde{s}_{i_k}}\cdots\underline{\tilde{s}_{i_1}} h$ 이상이다. 따라서 $x,\ x'\in \tilde{L}_{i_k}\circ\cdots\circ\tilde{L}_{i_1}$ 일 때 $|f(x,\ y) - f(x',\ y)|$ 의 최대값은 $\underline{\tilde{s}_{i_k}}\cdots\underline{\tilde{s}_{i_1}} h$ 이상이다. 즉

$$V_{f(\cdot,y);\gamma}(\tilde{L}_{i_k}\circ\cdots\circ\tilde{L}_{i_1})\ge \underline{\tilde{s}_{i_k}}\cdots\underline{\tilde{s}_{i_1}}h\gamma$$

이다. 따라서 보조정리 3으로부터

$$V_{f(\cdot,y);\gamma}(I)\ge \sum_{i_k,\ \cdots,\ i_1=1}^{n}V_{f(\cdot,y);\gamma}(\tilde{L}_{i_k}\circ\cdots\circ\tilde{L}_{i_1})\ge \sum_{i_k,\ \cdots,\ i_1=1}^{n}\underline{\tilde{s}_{i_k}}\cdots\underline{\tilde{s}_{i_1}}h\gamma=h\underline{\Lambda}^k\gamma$$

가 성립한다.(증명끝)

이제 $\overline{\Lambda}=\sum_{i=1}^{n}\overline{\tilde{s}_i}$ 라고 하고 방정식

$$\sum_{i=1}^{n}\underline{\tilde{s}_i}a_i^{\underline{D}-1}=1,\ \sum_{i=1}^{n}\overline{\tilde{s}_i}a_i^{\overline{D}-1}=1$$

의 풀이를 $\underline{D}$, $\overline{D}$ 라고 하자.

보조정리 6 $f(x,\ y)$ 를 우에서 구성한 프락탈보간곡면이라고 하자.

① 만약 $\underline{\Lambda}>1$ 이고 임의의 $y\in[\alpha,\ \beta]\subset[c,\ d]$ 에 대하여 $\{(x_i,\ u_i(y)): i=0,\ 1,\ \cdots,\ n\}$ 이 한직선우에 놓이지 않는다고 하면 정의 상수 C_1 과 γ_0 이 존재하여 임의의 $0<\gamma<\gamma_0$ 과 $y\in[\alpha,\ \beta]$ 에 대하여 $V_{f(\cdot,y);\gamma}(I)>C_1\gamma^{2-\underline{D}}$ 가 성립한다.

② 만약 $\overline{\Lambda}>1$ 이면 정의 상수 $C_2,\ \gamma_0$ 이 존재하여 임의의 $0<\gamma<\gamma_0$ 과 $y\in[c,\ d]$ 에 대하여 $V_{f(\cdot,y);\gamma}(I)<C_2\gamma^{2-\overline{D}}$ 가 성립한다.

③ 만약 $\overline{\Lambda}<1$ 이면 정의 상수 $C_3,\ \gamma_0$ 이 존재하여 임의의 $0<\gamma<\gamma_0$ 과 $y\in[c,\ d]$ 에 대하여 $V_{f(\cdot,y);\gamma}(I)<C_3\gamma$ 가 성립한다.

④ 만약 $\overline{\Lambda}=1$ 이면 정의 상수 $C_4,\ \gamma_0$ 이 존재하여 임의의 $0<\gamma<\gamma_0$ 과 $y\in[c,\ d]$ 에 대하여 $V_{f(\cdot,y);\gamma}(I)<C_4(-\log\gamma)\gamma$ 가 성립한다.

이상의 보조정리들을 리용하여 다음의 기본결과를 얻는다.

정리 $z=f(x,\ y)\ ((x,\ y)\in E)$ 를 우에서 정의한 프락탈보간곡면이라고 하자. 그리고 $\overline{\Lambda}=\sum_{i=1}^{n}\overline{s_i}$, $\underline{\Lambda}=\sum_{i=1}^{n}\underline{s_i}>1$ 이라고 하자. 만약 어떤 $y\in[c,\ d]$ 가 존재하여 자료모임 $\{(x_i,\ u_i(y)):$ $: i=0,\ 1,\ \cdots,\ n\}$ 이 한직선우에 놓이지 않고 $\overline{D}\ge\max\{\overline{\dim}_B\Gamma(u_i;[c,\ d]): i=0,\ 1,\ \cdots,\ n\}$ 이면

$$\underline{D}+1\le\underline{\dim}_B\Gamma(f;E)\le\overline{\dim}_B\Gamma(f;E)\le\overline{D}+1$$

이 성립한다.

증명 f 와 $f(\cdot,\ y)$ 는 련속함수이므로 $(x,\ y)\in E$ 에 대하여 $(x',\ y')\in E[(x,\ y);\gamma]$ 와 $x''\in I[x;\gamma]$ 가 존재하여 $O^E_{f;\gamma}(x,y)=|f(x',\ y')-f(x,\ y)|$, $O^I_{f(\cdot,y);\gamma}(x)=|f(x'',\ y)-f(x,\ y)|$ 가 성립한다. 여기서 $E[(x,\ y);\gamma]=E\cap[x-\gamma,\ x+\gamma]\times[y-\gamma,\ y+\gamma]$, $I[x;\gamma]=I\cap[x-\gamma,\ x+\gamma]$ 이다.

그러면

$$O^I_{f(\cdot,y);\gamma}(x)\le\sup_{(x',\ y')\in E[(x,\ y);\gamma]}|f(x',\ y')-f(x,\ y)|=O^E_{f;\gamma}(x,\ y)=|f(x',\ y')-f(x,\ y)|\le$$

$$\le|f(x',\ y')-f(x',\ y)|+|f(x',\ y)-f(x,\ y)|\le|f(x',\ y')-f(x',\ y)|+O^I_{f(\cdot,y);\gamma}(x)$$

가 성립한다. $f(\cdot,\ y')$ 와 $f(\cdot,\ y)$ 는 둘 다 함수수직비례인자를 가지는 프락탈보간곡선이므로

$$|f(x',\ y')-f(x',\ y)|\le\|f(\cdot,y')-f(\cdot,y)\|_\infty\le K\sum_{i=0}^{n}|u_i(y')-u_i(y)|\le K\sum_{i=0}^{n}O_{u_i;\gamma}^{J}(y)$$

이다. 여기서 $K=\left(1+\max_{i=1,\ \cdots,\ n}\overline{\overline{s_i}}\right)\Big/\left(1-\max_{i=1,\ \cdots,\ n}\overline{\overline{s_i}}\right)$이다. 그러면

$$\int_\alpha^\beta V_{f(\cdot,y);\gamma}(I)dy\le V_{f;\gamma}(G)\le\int_c^d V_{f(\cdot,y);\gamma}(I)dy+K(b-a)\sum_{i=0}^{n}V_{u_i;y}(J) \quad (4)$$

를 얻는다. $\overline{\dim}_B\Gamma(u_i,\ J)\le\overline{D}$ 즉 $i=0,\ 1,\ \cdots,\ n$에 대하여

$$\lim_{\gamma\to0+}\sup(2-\log V_{u_i;\gamma}(J)/\log\gamma)\le\overline{D}$$

이다. 그러면 임의의 $\varepsilon>0$에 대하여 $0<\gamma_0<1$이 존재하여 $0<\gamma<\gamma_0$이면 $V_{u_i;\gamma}<\gamma^{2-\overline{D}-\varepsilon}$ 이다. 보조정리 6과 식 (4)로부터 정의 상수 $B_1,\ B_2,\ \gamma_0$이 존재하여

$$B_1\gamma^{2-\underline{D}}\le V_{f;\gamma}(E)\le B_2\gamma^{2-\overline{D}-\varepsilon}$$

이다. 식 (2)와 (3)으로부터

$$\underline{D}+1\le\underline{\dim}_B\Gamma(f;E)\le\overline{\dim}_B\Gamma(f;E)\le\overline{D}+1+\varepsilon$$

을 얻는다. $\varepsilon>0$이 임의로 작을수 있으므로

$$\underline{D}+1\le\underline{\dim}_B\Gamma(f;E)\le\overline{\dim}_B\Gamma(f;\ E)\le\overline{D}+1$$

이 성립한다.(증명끝)

주의 정리 1은 선행연구[3]의 정리 5.1의 일반화이다. 론문에서 $\tilde{s}_i(x)$와 $s_j(y)$들을 다 상수로 주면 $\underline{D}=\overline{D}$이므로 선행연구[3]에서 얻은 아핀프락탈보간곡선으로부터 유도되는 프락탈보간곡면의 차원수가 $1+\overline{D}$라는것이 나온다.

참 고 문 헌

[1] M. F. Barnsley; Constr. Approx., 2, 303, 1986.

[2] L. Dalla; Fractals 10, 1, 53, 2002.

[3] Z. Feng, X. Sun; J. Math. Anal. Appl., 412, 416, 2014.

[4] P. R. Massopust; J. Math. Anal. Appl., 151, 275, 1990.

[5] H. Wang, J. Yu; J. Approx. Theory, 175, 1, 2013.

[6] C. Yun et al.; Fractals, 23, 3, 10, 2015.

주체108(2019)년 12월 15일 원고접수

Estimation of Box-Counting Dimension of New Fractal Interpolation Surfaces

Kim Jin Myong, Jong Song Jun

In this paper, we estimate lower and upper bounds for the box-counting dimension of new fractal interpolation surfaces derived from fractal interpolation curves with function vertical scaling factors.

Keywords: box-counting dimension, fractal interpolation curve, fractal interpolation surface