김일성종합대학학보 (자연과학) 주체104(2015)년 제61권 제7호
JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE) Vol. 61 No. 7 JUCHE104(2015).

한 형태의 비선형다항분수계미분방정식의 세점경계값 문제에 대한 풀이의 존재성조건

최희철, 김광련

선행연구[1]에서는 단항비선형분수계미분방정식의 두점경계값문제에 대한 풀이의 존재성문제를 론의하였으며 선행연구[2]에서는 단항비선형분수계미분방정식의 세점경계값문제에 대한 풀이의 존재성결과를 얻었다.

론문에서는 선행연구[2]에서의 결과를 다항의 경우로 확장하였다.

론의의 편리성을 위하여 비교적 단순한 다음의 방정식에 대하여 론의하자.

$$ {}^cD^q x(t) = f(t,\ x(t),\ {}^cD^p x(t)),\ \ 0<p<q<1 \tag{1}$$

$$ \alpha x(0)+\beta x(T)=\gamma x(\eta),\ \ \alpha+\beta\neq\gamma \tag{2}$$

여기서 ${}^cD^q$ 는 캐푸터의미의 미분연산자를 표시한다.

이제 $y(t):={}^c D^p x(t)$ 라고 정의하면 $y(t)$ 가 련속이라는 가정밑에서 $x(t)=I^q y(t)+C_0$, $C_0=[\gamma I^q y(\eta)-\beta I^q y(T)]/(\alpha+\beta-\gamma)$ 가 성립된다.

정의 ${}^cD^q x(t)\in \boldsymbol{C}[0,\ T]$ 인 $x(t)$ 가 경계값문제 (1), (2)를 만족시킬 때 $x(t)$ 를 경계값문제 (1), (2)의 풀이라고 부른다.

보조정리 1 경계값문제 (1), (2)를 푸는 문제는 $\boldsymbol{C}[0,\ T]$ 우에서 다음의 문제를 푸는것과 동등하다.

$$ y(t)=f\left(t,\ I^q y(t)+\frac{1}{\alpha+\beta-\gamma}[\gamma I^q y(\eta)-\beta I^q y(T)],\ \ I^{q-p}y(t)\right) \tag{3}$$

$$ x(t)=I^q y(t)+[\gamma I^q y(\eta)-\beta I^q y(T)]/(\alpha+\beta-\gamma) \tag{4}$$

증명 경계값문제 (1), (2)의 풀이를 $x(t)$ 라고 할 때 $y(t):={}^c D^q x(t)$ 가 문제 (3), (4)를 만족시킨다는것은 분명하다. 또한 식 (3)을 만족시키는 y 와 식 (4)에 의해 결정되는 x 가 식 (1)을 만족시킨다는것은 분명하다.

이제 식 (4)를 만족시키는 x 가 경계조건 (2)를 만족시킨다는것을 보자.

$$ x(0)=[\gamma I^q y(\eta)-\beta I^q y(T)]/(\alpha+\beta-\gamma)=:[\omega]/(\alpha+\beta-\gamma)$$

$$ x(T)=I^q y(T)+\frac{1}{\alpha+\beta-\gamma}[\gamma I^q y(\eta)-\beta I^q y(T)],\quad x(\eta)=I^q y(\eta)+\frac{1}{\alpha+\beta-\gamma}[\gamma I^q y(\eta)-\beta I^q y(T)]$$

$$ \alpha x(0)+\beta x(T)-\gamma x(\eta)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta-\gamma}[\omega]+\beta I^q y(T)+\frac{\beta}{\alpha+\beta-\gamma}[\omega]-\gamma I^q y(\eta)-\frac{\gamma}{\alpha+\beta-\gamma}[\omega]=$$

$$ =\frac{[\omega]}{\alpha+\beta-\gamma}(\alpha+\beta-\gamma)+\beta I^q y(T)-\gamma I^q y(\eta)=[\omega]-[\omega]=0$$

(증명끝)

가정 1 $\forall(t^1,\ x^1,\ y^1),\ (t^2,\ x^2,\ y^2)\in \boldsymbol{R}^3$,

$$|f(t^1,\ x^1,\ y^1)-f(t^2,\ x^2,\ y^2)|\le l_0|t^1-t^2|+l_1|x^1-x^2|+l_3|y^1-y^2|.$$

$(\theta y)(t):=f(t,\ I^q y(t)+[\gamma I^q y(\eta)-\beta I^q y(T)]/(\alpha+\beta-\gamma),\ I^{q-p}y(t))$ 라고 하고 $\forall x,\ y\in \boldsymbol{C}[0,\ T]$ 에 대하여 θ 의 축소성에 대하여 론의하자.

$$\|\theta x-\theta y\|\le l_1\left\|I^q(x-y)+\frac{1}{\alpha+\beta-\gamma}[\gamma I^q(x(\eta)-y(\eta))-\beta I^q(x(\eta)-y(\eta))]\right\|+l_2\|I^{q-p}(x(t)-y(t))\|$$

$$\|I^q(x(t)-y(t))\|\le T^q\|x-y\|/\Gamma(q+1) \tag{5}$$

$$\|I^q(x(\eta)-y(\eta))\|\le \eta^q\|x-y\|/\Gamma(q+1) \tag{6}$$

$$\|I^q(x(T)-y(T))\|\le T^q\|x-y\|/\Gamma(q+1) \tag{7}$$

$$\|I^{q-p}(x-y)(t)\|\le T^{q-p}\|x-y\|/\Gamma(q-p+1) \tag{8}$$

가정 2 $\omega^*:=\dfrac{T^q l_1}{\Gamma(q+1)}\left(1+\dfrac{\eta^q|\gamma|}{T^q|\alpha+\beta-\gamma|}+\dfrac{|\beta|}{|\alpha+\beta-\gamma|}\right)+l_2\dfrac{T^{q-p}}{\Gamma(q-p+1)},\ 0<\omega^*<1$

계산식 (5)－(8)과 가정 2로부터 곧 다음의 정리가 증명된다.

정리 1 $\omega^*<1$ 일 때 식 (3)을 만족시키는 y 는 $\boldsymbol{C}[0,\ T]$ 에서 유일존재한다. 따라서 경계값문제 (1), (2)의 풀이는 유일존재한다.

다음으로 경계값문제 (1), (2)의 풀이의 존재정리를 보자.

$$\Phi y(t):=f(t,\ I^q y(t),\ I^{q-p}y(t)),$$

$$\psi y(t):=f\left(t,\ I^q t+\frac{1}{\alpha+\beta-\gamma}[\gamma I^q y(\eta)-\beta I^q y(T)],\ I^{q-p}y(t)-f(t,\ I^q y(t),\ I^{q-p}y(t))\right)$$

의 표시식을 리용하면 우에서 정의한 θ 는 $\theta y(t)=\phi y(t)+\psi y(t)$ 와 같이 표시된다.

이제 $\phi,\ \psi$ 를 평가하자.

가정 3 $\exists a^*\ge 0;\ b_1,\ b_2>0;\ \forall(t,\ u_1,\ u_2)\in \boldsymbol{R}^3,\ |f(t,\ u_1,\ u_2)|\le a^*+b_1|u_1|+b_2|u_2|$

가정 3을 리용하면

$$|\phi y(t)|\le a^*+\frac{b_1T^q}{T(g+1)}\|y\|+\frac{b_2T^{q-p}}{T(q-p+1)}\|y\|,\ |\psi y(t)|\le\frac{l_1}{|\alpha+\beta-\gamma|}\left[\frac{|\gamma|\eta^q}{\Gamma(q+1)}+\frac{|\beta|T^q}{\Gamma(q+1)}\right]\|y\|.$$

가정 4 $q^*:=\dfrac{b_1T^q}{\Gamma(q+1)}+\dfrac{b_2T^{q-p}}{\Gamma(q+1)}+\dfrac{l_1}{\Gamma(q+1)|\alpha+\beta-\gamma|}[|\gamma|\eta_q+|\beta|T^q]<1$

이제 $B_r:=\{y\in \boldsymbol{C}[0,\ T]\,|\,\|y\|\le r\}$ 이고 $x,\ y\in B_r$ 라고 하면 $\|\Phi x+\psi y\|\le a^*+g^*r$ 이다.

따라서 r 가 $a^*/(1-g^*)\le r$ 로 선택된것이라고 하면 $\|\Phi x+\psi y\|\le r$ 이므로

$$\theta: B_r\to B_r.$$

가정 5 $\dfrac{l_1T^q}{\Gamma(q+1)}+\dfrac{l_2T^{q-p}}{\Gamma(q-p+1)}<1$

가정 5에 의하여 Φ 가 축소라는것은 분명하다.

이제 ψ 의 콤팍트성, 련속성을 보자.

$\forall y\in B_r,\ \|\psi_y\|\le r$ 이므로 ψ 의 B_r 에서의 평등유계성이 나오고 $\forall y\in B_r$ 에 대하여

$|\psi y(t_1)-\psi y(t_2)|=$

$$=f\left(t_1,\ I^q y(t_1)+\frac{1}{\alpha+\beta-\gamma}(\gamma I^q y(\eta)-\beta I^q y(T)),\ I^{q-p}y(t_1)\right)-f(t_1,\ I^q y(t_1),\ I^{q-p}y(t_1))-$$

$$-f\left(t_2,\ I^q y(t_2)+\frac{1}{\alpha+\beta-\gamma}(\gamma I^q y(\eta)-\beta I^q y(T)),\ I^{q-p}y(t_2)+f(t_2,\ I^q y(t_2),\ I^{q-p}y(t_2))\right)\le$$

$$\le l_0|t_1-t_2|+l_{12}|I^q y(t_1)-I^q y(t_2)|+l_2|I^{q-p}y(t_1)-I^{q-p}y(t_2)|,$$

$$|I^q y(t_1)-I^q y(t_2)|\le\gamma|2(t_2-t_1)^q+t_1^q-t_2^q|/\Gamma(q+1),$$

$$|I^{q-p}y(t_1)-I^{q-p}y(t_2)|\le\gamma|2(t_2-t_1)^q+t_1^q-t_2^q|/\Gamma(q-p+1)$$

이 성립되므로 $|\psi y(t_1)-\psi y(t_2)|\le 2l_0|t_1-t_2|+2l_1 r\left(\frac{1}{\Gamma(q+1)}+\frac{1}{\Gamma(q-p+1)}\right)\cdot|2(t_2-t_1)^q+t_1^q-t_2^q|$.

따라서 아르첼라정리에 의해 ψ 는 B_r 우에서 콤팍트이다.

보조정리 2[2] M 이 바나흐공간 X 의 닫긴 불룩이고 비지 않는 부분모임이며 다음의 조건들이 성립된다고 하면 $Z=AZ+BZ$ 인 $Z\in M$ 이 존재한다.

i) $x,\ \ y\in M\Rightarrow Ax+By\in M$

ii) A: 콤팍트, 련속

iii) B: 축소넘기기

보조정리 2에 의하여 다음의 결과를 얻는다.

정리 2 가정 1－5가 성립되면 경계값문제 (1), (2)의 풀이는 적어도 하나 존재한다.

참 고 문 헌

[1] Zhang Bing Bai et al.; J. Math. Anal. Appl., 311, 495, 2005.

[2] B. Ahmad et al.; Communications in Applied Analysis, 12, 4, 479, 2008.

주체104(2015)년 3월 5일 원고접수

Existence Condition of Solution on Three Points Boundary Value Problem of a Type of Nonlinear Multiterm Fractional Differential Equation

Choe Hui Chol, Kim Kwang Ryon

In the previous paper the existence on two points boundary value problem of monodic nonlinear fractional differential equation is studied and the result of existence of solution on three points boundary value problem of this equation is obtained.

In this paper the result of [2] is extended into the case of multiterm.

Key word: nonlinear fractional differential equation