김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제1호

2차원다항시간분수계확산파동방정식에 대한 해석적풀이

조신혁, 맹은숙

우리는 최근시기 활발히 연구되고있는 시간다항분수계편미분방정식풀이의 해석적표시에 대하여 연구하였다.

선행연구[3]에서는 적분항을 가지는 시간분수계단항확산－파동방정식의 해석적풀이에 대하여 연구하였으며 선행연구[4, 5]에서는 각각 공간변수가 1차원인 경우와 2차원인 경우에 대하여 시간분수계확산－파동방정식의 풀이의 해석적표시에 대하여 론의하였다.

론문에서는 공간변수가 2차원인 경우에 적분항을 포함하고있는 다항시간분수계확산－파동방정식에 대하여 변수분리법과 라쁠라스연산자의 스펙트르전개를 리용하여 풀이의 해석적표시를 얻었다.

분수계확산방정식은 과학과 기술의 많은 분야들에서 제기되는 여러가지 물리적현상들을 모형화하고 그에 대한 연구를 진행하는데서 중요한 역할을 한다. 선행연구들에서는 1차원 혹은 단항시간(또는 공간)분수계미분방정식에 대하여 연구하였으며 최근에 시간다항분수계미분방정식이 복잡한 물리적계와 생태계를 모의하는데서 중요하게 쓰이고있는데로부터 그에 대한 연구가 진행되고있다.

시간분수계도함수의 계수가 0과 1사이에 있을 때의 시간분수계미분방정식을 시간분수계확산방정식이라고 하고 계수가 1과 2사이에 있을 때를 시간분수계파동방정식이라고 하며 0과 2사이에 있을 때를 시간분수계확산－파동방정식이라고 부른다.

시간분수계확산방정식과 확산－파동방정식은 전파방정식의 일반화이며 중요한 물리적의미를 가지는 방정식들로서 많은 과학자들이 이에 대한 연구를 진행해오고있다.

선행연구[1]에서는 공간분수계전파방정식을 연구하고 그것의 기본풀이에 대한 푸리에변환을 얻었으며 선행연구[2]에서는 분수계전파방정식의 꼬쉬문제에 대한 기본풀이의 성질을 연구하였다.

선행연구[3]에서는 감쇠를 가지는 다음의 단항확산－파동방정식에 대하여 변수분리법을 리용하여 해석적풀이를 얻었으며 음적인 계차도식을 이끌어냈다.

$$\begin{cases} {}_0D_t^{\alpha}u(x,\ t)+\lambda\dfrac{\partial u(x,\ t)}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial x^2}+\mu s(x,\ t)\ \ (0<x<L,\ 0\le t\le T) \\ u(x,\ 0)=f(x),\ \dfrac{\partial u(x,\ 0)}{\partial t}=g(x),\quad 0\le x\le L \\ u(0,\ t)=u(L,\ t)=0,\quad 0\le t\le T \end{cases}$$

이 문제에서의 분수계도함수는 캐푸터분수계도함수이며 $1<\alpha\le 2$이다. 우의 방정식에서 $\alpha=2$로 놓으면 이것은 전기선에서 전기적흐름을 모형화한 전파방정식이다.

선행연구[4]에서는 감쇠를 가지는 다음의 1차원시공간확산－파동분수계미분방정식

$$P(D_{0+}^{*})u(x,\ t)+\mu_1(-\Delta)^{q_1/2}u(x,\ t)+\mu_2 t^{\gamma-1}E_{\beta,\ \gamma}(-wt^{\beta})*(-\Delta)^{q_2/2}u(x,\ t)=f(x,\ t)$$

에 대하여 다음과 같은 일반화된 혼합경계조건하에서의 해석적풀이를 구하였다.

$$b_0\frac{\partial u(0,\ t)}{\partial x}+c_0u(0,\ t)=g_0(t),\ b_L\frac{\partial u(L,\ t)}{\partial x}+c_Lu(L,\ t)=g_L(t),\ t\in[0,\ T]$$

여기서

$$P(D_{0+}^*)u(x,\ t)=\left(D_{0+}^\alpha+\sum_{i=1}^p a_iD_{0+}^{\alpha_i}\right)u(x,\ t)$$

이고 α와 α_i들은 0과 2사이에 있다.

적분항이 포함된 시간다항분수계미분방정식의 풀이를 얻기 위하여 주어진 방정식을 적분방정식으로 변환하고 분수계라쁠라스연산자의 스펙트르표현정리를 리용하여 감쇠항을 가지는 다항시공간분수계편미분방정식으로부터 적분항을 가지는 시간다항분수계미분방정식으로 변환하였다. 변환된 시간다항분수계미분방정식의 해석적풀이를 구하고 그것을 리용하여 감쇠항을 가지는 시공간분수계편미분방정식의 해석적풀이를 구하였다.

선행연구[5]에서는 다음과 같은 2차원시간다항분수계확산파동방정식을 론의하였다.

$$P_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_{k2}}({}_0^cD_t)u(x,\ y,\ t)+d_1\frac{\partial u(x,\ y,\ t)}{\partial t}+P_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{k1}}({}_0^cD_t)u(x,\ y,\ t)+d_2u(x,\ y,\ t)=$$
$$=d_3\Delta u(x,\ y,\ t)+f(x,\ y,\ t)$$

여기서 $(x,\ y)\in\Omega=(0,\ L_x)\times(0,\ L_y),\ 0<t\le T$이다.

먼저 동차방정식의 풀이를 구하고 변수분리법을 리용하여 우의 방정식의 해석적풀이표시식을 얻었다. 다음 수치풀이법을 론의하고 그것의 안정성과 수렴성을 해석하였으며 그에 대한 수치실례들을 주었다.

우리는 최근시기 진행되고있는 시간분수계확산—파동방정식에 대한 연구정형을 분석한데 기초하여 공간변수에 관하여 2차원이며 적분항을 포함하는 시간변수에 관한 확산—분수계미분방정식풀이의 해석적표시를 구하고 수치풀이에 대한 연구를 진행하려고 한다. 즉 방정식

$$P_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_{k2}}({}_0^cD_t)u(x,\ y,\ t)+d_1\frac{\partial u(x,\ y,\ t)}{\partial t}+P_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{k1}}({}_0^cD_t)u(x,\ y,\ t)+$$
$$+d_4t^{\beta-1}*\Delta u(t,\ x,\ y)+d_2u(x,\ y,\ t)=d_3\Delta u(x,\ y,\ t)+f(x,\ y,\ t) \tag{1}$$

에 대하여 초기조건

$$u(x,\ y,\ 0)=\phi(x,\ y),\ \ \frac{\partial u(x,\ y,\ 0)}{\partial t}=\psi(x,\ y),\ (x,\ y)\in\Omega \tag{2}$$

와 동차경계조건

$$u(0,\ y,\ t)=u(L_x,\ y,\ t)=0\ \ (0\le y\le L_y,\ 0\le t\le T) \tag{3}$$
$$u(x,\ 0,\ t)=u(x,\ L_y,\ t)=0\ \ (0\le x\le L_x,\ 0\le t\le T) \tag{4}$$

을 만족시키는 풀이의 해석적표시를 구하려고 한다. 여기서

$$P_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{k_1}}({}_0^cD_t)u(x,\ y,\ t)=\sum_{i_1=1}^{k_1}p_{i_1}({}_0^cD_t^{\alpha_{i_1}}u(x,\ y,\ t))$$

$$P_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_{k_1}}({}_0^cD_t)u(x,\ y,\ t)=\sum_{i_2=1}^{k_2}q_{i_2}({}_0^cD_t^{\beta_{i_2}}u(x,\ y,\ t))$$

$$k(t)*\Delta u(x,\ y,\ t)=\int_0^t k(t-\tau)\Delta u(x,\ y,\ \tau)d\tau$$

$$0<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_{k_1}<1,\ 1<\beta_1<\beta_2<\cdots<\beta_{k_2}<2$$

이다. 여기서 분수계도함수는 캐푸터의미에서의 분수계도함수 즉

$${}_0^cD_t^\gamma u(x,\ t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(n-\gamma)}\displaystyle\int_0^t (t-s)^{n-\gamma-1}\dfrac{\partial^n u(x,\ y,\ \tau)}{\partial s^n}ds, & \gamma\notin N_0\\ \dfrac{\partial^\gamma u(x,\ y,\ t)}{\partial t^\gamma}, & \gamma\in N_0\end{cases}$$

이다.

우의 문제를 해결하기 위하여 우리는 변수분리법을 리용하여 주어진 문제를 공간변수에 관한 옹근수계편미분방정식과 시간변수에 관한 분수계미분방정식을 작성하고 2차원라쁠라스연산자의 스펙트르전개를 라쁠라스변환을 리용하여 풀이의 해석적표시를 얻었다.

정의 1 함수 $f:[a,\ +\infty)\to\mathbf{R}$ 의 $\alpha(>0)$ 계리만－류빌분수계적분은

$$(I_{a+}^\alpha f)(x):=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt,\quad (x>a)$$

로 정의된다.

정의 2 $f\in C^{m+1}([0,\ T])$ 이고 $m<\alpha\le m+1$, $m\in\mathbf{N}$ 일 때 변수 t 에 관한 α 계캐푸터분수계도함수를 다음과 같이 정의한다.

$$({}_0^cD_t^\alpha f)(t)=(I_{0+}^{m+1-\alpha}f^{(m+1)})(t)=\frac{1}{\Gamma(m+1-\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha}f^{(m+1)}(\tau)d\tau$$

여기서 $t>0$ 이다.

보조정리 1 [4] 캐푸터분수계도함수의 라쁠라스변환은 다음과 같다.

$$\mathcal{L}\{({}_0^cD_t^\alpha f)(t);\ s\}=s^\alpha F(s)-\sum_{i=0}^m s^{\alpha-i-1}f^{(i)}(0),\ t>0$$

여기서 $m<\alpha\le m+1,\ m\in\mathbf{N}$ 이고 $F(s)$ 는 $f(t)$ 의 라쁠라스변환이다.

보조정리 2 [5] 동차경계조건

$$u(0,\ y,\ t)=u(L_x,\ y,\ t)=0,\ 0\le y\le L_y,\ 0\le t\le T$$

$$u(x,\ 0,\ t)=u(x,\ L_y,\ t)=0,\ 0\le x\le L_x,\ 0\le t\le T$$

을 가지는 2차원라쁠라스연산자 $-\Delta=-\partial^2/\partial x^2-\partial^2/\partial y^2$ 는 유계구역 $\Omega=[0,\ L_x]\times[0,\ L_y]$ 에서 다음과 같은 완비직교고유함수계 φ_{mn} 과 대응하는 고유값들인 λ_{mn}^2 을 가진다.

$$\lambda_{mn}^2=\frac{m^2\pi^2}{L_x^2}+\frac{n^2\pi^2}{L_y^2},\ \varphi_{mn}=\sin\frac{m\pi x}{L_x}\sin\frac{n\pi y}{L_y}\ (m,\ n=1,\ 2,\ \cdots)$$

보조정리 3 분수계미분방정식

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} p_i ({}_0^c D_t^{\mu_i}) x(t) + pt^{\beta-1} * x(t) = f(t) \\ x^{(i)}(0) = x_0^i \quad (i = 0,\ 1,\ \cdots,\ m_1) \end{cases}$$

이 주어졌다고 하자. 여기서 $\mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_n \ge 0$ 이고 $m_i < \mu_i \le m_i + 1$ 이다. 그러면 우의 방정식풀이는

$$\begin{aligned} x(t) = f(t) * g(t\,;\, p;\, p_1, \cdots,\ p_n\,;\, \mu_1, \cdots,\ \mu_n\,;\, \beta) + \\ + h(t\,;\, p;\, p_1, \cdots,\ p_n;\, \mu_1,\ \cdots,\ \mu_n;\, x_0^0, \cdots,\ x_0^{m_1};\, \beta) \end{aligned} \tag{5}$$

이다. 여기서

$$g(t\,;\, p;\, p_1, \cdots, p_n;\, \mu_1, \cdots, \mu_n;\, \beta) = \mathcal{L}^{-1}\left(1 \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{n} p_i s^{\mu_i} + \frac{p\Gamma(\beta)}{s^{\beta}} \right) \right) \tag{6}$$

$$h(t\,;\, p;\, p_1,\ \cdots,\ p_n;\, \mu_1,\ \cdots,\ \mu_n;\, x_0^0,\ \cdots,\ x_0^{m_1};\, \beta) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{j=0}^{m_i} s^{\mu_i - j - 1} x_0^j}{\sum_{i=1}^{n} p_i s^{\mu_i} + \frac{p\Gamma(\beta)}{s^{\beta}}} \right) \tag{7}$$

이다.

정리 식 (1)－(4)에 대하여 $d_4 \ne 0$ 이고 $f \in C([0,\ T],\ R)$ 이면 풀이는 다음과 같이 표시된다.

$$u(x,\ y,\ t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}(t) \sin\frac{m\pi x}{L_x} \sin\frac{n\pi y}{L_y}$$

여기서 $B_{mn}(t) = f_{mn}(t) * g(t\,;\, d_4;\, p_1, \cdots,\ p_n;\, \beta_1, \cdots,\ \beta_{k_2},\ 1,\ \alpha_1, \cdots,\ \alpha_{k_1};\, \beta) +$

$$+h(t\,;\, d_4;\, p_1, \cdots,\ p_n;\, \beta_1, \cdots,\ \beta_{k_2},\ 1,\ \alpha_1, \cdots,\ \alpha_{k_1};\, B_{mn}(0),\ B'_{mn}(0);\, \beta)$$

$$\begin{cases} B_{mn}(0) = \dfrac{4}{L_x L_y} \displaystyle\int_0^{L_x}\int_0^{L_y} \phi(x,\ y,\ t) \sin\frac{m\pi x}{L_x} \sin\frac{n\pi y}{L_y} dxdy \\ B'_{mn}(0) = \dfrac{4}{L_x L_y} \displaystyle\int_0^{L_x}\int_0^{L_y} \psi(x,\ y,\ t) \sin\frac{m\pi x}{L_x} \sin\frac{n\pi y}{L_y} dxdy \end{cases}$$

이고 g 와 h 는 각각 식 (6)과 (7)에 의하여 정의된다.

증명 식 (1)－(4)에 대하여 먼저 동차인 경우 즉 $f(x,\ y,\ t) = 0$ 인 경우를 보자. 변수분리법으로 풀기 위하여 $u(x,\ y,\ t) = V(x,\ y)T(t)$ 라고 놓고 방정식 (1)에 대입하면 분수계상미분방정식

$$P_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_{k2}}({}_0^c D_t) T(t) + d_1 T'(t) + P_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{k1}}({}_0^c D_t) T(t) + (d_2 + \lambda d_3) T(t) + d_4 t^{\beta-1} * T(t) = 0 \tag{8}$$

과 $x = 0,\ L_x$ 와 $y = 0,\ L_y$ 에서 경계조건

$$V(0,\ y) = V(L_x,\ y) = 0\,,\quad 0 \le y \le L_y$$

$$V(x,\ 0) = V(x,\ L_y) = 0\,,\quad 0 \le x \le L_x$$

을 가지는 선형편미분방정식

$$V_{xx}+V_{yy}+\lambda V(x,\ y)=0 \tag{9}$$

을 얻는다. 여기서 λ는 정인 상수이다. 보조정리 2에 의하여 방정식 (9)는 고유값

$$\lambda_{mn}^2=\frac{m^2\pi^2}{L_x^2}+\frac{n^2\pi^2}{L_y^2}$$

에 대응하는 풀이 $X_m(x)Y_n(y)=\sin\frac{m\pi x}{L_x}\sin\frac{n\pi y}{L_y}$ $(m,\ n=1,\ 2,\ \cdots)$를 가진다.

다음으로 비동차문제 (1)의 풀이를

$$u(x,\ y,\ t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}(t)\sin\frac{m\pi x}{L_x}\sin\frac{n\pi y}{L_y} \tag{10}$$

형태로 구하자. 이 합렬이 항별미분가능하다고 하면 $B_{mn}(t)$를 결정하기 위하여 $f(x,\ y,\ t)$를 고유함수계 $\left\{\sin\frac{m\pi x}{L_x}\sin\frac{n\pi y}{L_y}\right\}$를 리용하여 두변수푸리에전개를 진행하면

$$f(x,\ y,\ t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}f_{mn}(t)\sin\frac{m\pi x}{L_x}\sin\frac{n\pi y}{L_y} \tag{11}$$

이다. 여기서

$$f_{mn}(t)=\frac{4}{L_xL_y}\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}f(x,\ y,\ t)\sin\frac{m\pi x}{L_x}\sin\frac{n\pi y}{L_y}dxdy$$

이다. 식 (10)과 (11)을 식 (1)에 대입하면

$$\begin{aligned}&\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{m\pi x}{L_x}\sin\frac{n\pi y}{L_y}P_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_{k2}}({}_0^cD_t)B_{mn}(t)+d_1\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B'_{mn}(t)\sin\frac{m\pi x}{L_x}\sin\frac{n\pi y}{L_y}+\\&+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{m\pi x}{L_x}\sin\frac{n\pi y}{L_y}P_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{k1}}({}_0^cD_t)B_{mn}(t)+\\&+d_4\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-\lambda_{mn}^2)\sin\frac{m\pi x}{L_x}\sin\frac{n\pi y}{L_y}t^{\beta-1}*B_{mn}(t)+d_2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}(t)\sin\frac{m\pi x}{L_x}\sin\frac{n\pi y}{L_y}=\\&=d_3\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-\lambda_{mn}^2)B_{mn}(t)\sin\frac{m\pi x}{L_x}\sin\frac{n\pi y}{L_y}+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}f_{mn}(t)\sin\frac{m\pi x}{L_x}\sin\frac{n\pi y}{L_y}\end{aligned}$$

를 얻는다. 결국 매 $m,\ n$에 대하여

$$\begin{aligned}&P_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_{k2}}({}_0^cD_t)B_{mn}(t)+d_1B'_{mn}(t)+P_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{k1}}({}_0^cD_t)B_{mn}(t)+\\&+d_{mn}B_{mn}(t)+d_4(-\lambda_{mn}^2)t^{\beta-1}*B_{mn}(t)=f_{mn}(t)\end{aligned} \tag{12}$$

를 풀어야 한다. 여기서

$$d_{mn}=d_2+d_3\left(\frac{m^2\pi^2}{L_x^2}+\frac{n^2\pi^2}{L_y^2}\right)$$

이다. 방정식 (12)에 대하여 미지함수 $B_{mn}(t)$는 초기조건 (2)로부터

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}(0)\sin\frac{m\pi x}{L_x}\sin\frac{n\pi y}{L_y}=\phi(x,\ y) \\ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B'_{mn}(0)\sin\frac{m\pi x}{L_x}\sin\frac{n\pi y}{L_y}=\psi(x,\ y) \end{cases},\ (x,\ y)\in\Omega$$

가 성립하여야 하며 결국 $B_{mn}(0)$과 $B'_{mn}(0)$은 각각 ϕ와 ψ의 푸리에결수로서 다음과 같이 결정된다.

$$\begin{cases} B_{mn}(0)=\frac{4}{L_xL_y}\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}\phi(x,\ y,\ t)\sin\frac{m\pi x}{L_x}\sin\frac{n\pi y}{L_y}dxdy \\ B'_{mn}(0)=\frac{4}{L_xL_y}\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}\psi(x,\ y,\ t)\sin\frac{m\pi x}{L_x}\sin\frac{n\pi y}{L_y}dxdy \end{cases} \tag{13}$$

이로부터 식 (12)와 (13)은 분수계초기값문제로 된다. 그러므로 보조정리 3에 의하여

$$\begin{aligned} B_{mn}(t)=&f_{mn}(t)*g(t;d_4(-\lambda_{mn}^2);\ p_1,\cdots,\ p_{k_2},d_{mn},p_1,\cdots,\ q_{k_1};\beta_1,\cdots,\ \beta_{k_2},1,\ \alpha_1,\cdots,\ \alpha_{k_1},\ 0;\beta)\\ &+h(t;d_4(-\lambda_{mn}^2);\ p_1,\cdots,\ p_{k_2},\ d_{mn},\ q_1,\cdots,\ q_{k_1};\beta_1,\cdots,\ \beta_{k_2},1,\ \alpha_1,\cdots,\ \alpha_{k_1},\ 0;B_{mn}(0),\ B'_{mn}(0);\beta) \end{aligned}$$

로 된다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] E. Orsingher et al.; Chinese Ann. Math. Ser., 24, 1, 45, 2003.
[2] L. Beghin et al.; Fract. Calc. Appl. Anal., 6, 2, 187, 2003.
[3] J. Chen et al.; Applied Mathematics and Computation, 219, 1737, 2012.
[4] Xiao-Li Ding et al.; Fractional Calculus & Applied Analysis, 21, 2, 312, 2018.
[5] Shujun Shen et al.; J. Comp. App. Math., 345, 515, 2019.

주체108(2019)년 9월 15일 원고접수

Analytic Solution for a Two-Dimensional Time Multi-Term Fractional Diffusion-Wave Equation

Jo Sin Hyok, Maeng Un Suk

In this paper, we study the analytic solution for a two-dimensional time fractional diffusion-wave equation.

By using the method of separation of variables, spectral expansion of Laplacian operator and Laplace transform, we obtain the analytic solution for the equation.

Keywords: analytic solution, diffusion-wave equation, Laplace transform