김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제3호

아인슈타인다양체에서 공형리찌사분대칭재귀계량접속에 대하여

윤금성, 허달윤

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《기초과학이 든든해야 나라의 과학기술이 공고한 토대우에서 끊임없이 발전할수 있습니다.》

선행연구[3]에서는 리만다양체에서 사영반대칭접속과 공형반대칭접속이, 선행연구[5]에서는 리만다양체에서 반대칭재귀계량접속의 사영적성질이 연구되였다. 선행연구[4]에서는 비계량접속의 공액대칭성문제가, 선행연구[1]에서는 아인슈타인다양체에서 리찌사분대칭계량접속에 대하여 연구되였으며 선행연구[2]에서는 반대칭비계량접속의 물리적모형이 제시되였다.

론문에서는 선행연구[1]에서 연구된 아인슈타인다양체에서의 리찌사분대칭계량접속과 공형동등한 공형리찌사분대칭재귀계량접속을 새롭게 정의하고 이 접속의 체적평탄성조건과 공액대칭성조건, 레비－찌비따접속과의 관계, 일정곡률성조건을 밝히고 슈르의 정리를 만족시키는 리찌사분대칭비계량접속의 새로운 형태를 제기하였다.

아인슈타인다양체 $(M,\ g)$에서 리찌사분대칭계량접속 $\overset{R}{\nabla}$는 국부적으로

$$\overset{R}{\nabla}_k\, g_{ij}=0,\ T_{ij}^k=\rho(\pi_j\delta_i^k-\pi_i\delta_j^k)$$

를 만족시키는 접속으로서 접속결수는 다음과 같이 표시된다.[1]

$$\overset{R}{\Gamma}{}_{ij}^k=\left\{{k \atop ij}\right\}+\rho(\pi_j\delta_i^k-\rho\pi_i\delta_j^k)$$

여기서 $\left\{{k \atop ij}\right\}$는 레비－찌비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$의 접속결수이고 ρ는 아인슈타인방정식 $R_{jk}=\rho g_{jk}$의 결수이다.

정의 아인슈타인다양체 $(M,\ g)$에서 리찌사분대칭계량접속 $\overset{R}{\nabla}$와 공형동등인 접속 $\overset{c}{\nabla}$를 공형리찌사분대칭재귀계량접속이라고 부른다.

알려진바와 같이 접속 $\overset{R}{\nabla}$와 공형동등인 접속 $\overset{c}{\nabla}$는 계량의 공형변환

$$g_{ij}\to\bar{g}_{ij}:=e^{2\sigma}g_{ij}$$

에 의하여 생성된 계량 $\bar{g}_{ij}$에 관하여

$$\overset{c}{\nabla}_k\,\bar{g}_{ij}=0,\ T_{ij}^k=\rho(\pi_j\delta_i^k-\pi_i\delta_j^k)$$

를 만족시키며 계량 g_{ij}에 관하여

$$\overset{c}{\nabla}_k\, g_{ij}=-2\sigma_k g_{ij},\ T_{ij}^k=\rho(\pi_j\sigma_i^k-\pi_i\sigma_j^k) \tag{1}$$

를 만족시킨다. 이 식은 $\overset{c}{\nabla}$가 재귀계량접속이라는것을 보여준다.

아인슈타인다양체 $(M,\ g)$ 에서 공형리찌사분대칭재귀계량접속 $\overset{c}{\nabla}$ 의 접속결수는 식 (1)로부터 다음과 같이 표시된다는것을 알수 있다.

$$\overset{c}{\Gamma}{}^k_{ij}=\left\{{}^{\,k}_{ij}\right\}+\sigma_i\delta^k_j+(\sigma_j+\rho\pi_j)\delta^k_i-g_{ij}(\delta^k+\rho\pi^k)\tag{2}$$

그리고 접속 $\overset{c}{\nabla}$ 의 쌍대접속 $\overset{c*}{\nabla}$ 의 접속결수는 식 (1)과 (2)로부터 다음과 같이 표시된다는 것을 알수 있다.

$$\overset{c^*}{\Gamma}{}^k_{ij}=\left\{{}^{\,k}_{ij}\right\}-\sigma_i\delta^k_j+(\sigma_j+\rho\pi_j)\delta^k_i-g_{ij}(\delta^k+\rho\pi^k)\tag{3}$$

또한 식 (2)와 (3)을 리용하면 접속 $\overset{c}{\nabla}$ 와 $\overset{c*}{\nabla}$ 의 곡률텐소르들은 각각 다음과 같이 표시된다는것을 알수 있다.

$$\overset{c}{R}{}^l_{ijk}=K^l_{ijk}+\delta^l_j a_{ik}-\delta^l_i a_{jk}+g_{ik}a^l_j-g_{jk}a^l_i\tag{4}$$

$$\overset{c*}{R}{}^l_{ijk}=K^l_{ijk}+\delta^l_j a_{ik}-\delta^l_i a_{jk}+g_{ik}a^l_j-g_{jk}a^l_i\tag{5}$$

여기서 K^l_{ijk} 은 레비－찌비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$ 의 곡률텐소르이며

$$a_{ik}:=\overset{\circ}{\nabla}(\sigma_k+\rho\pi_k)-(\sigma_i+\rho\pi_i)(\sigma_k+\rho\pi_k)+\frac{1}{2}g_{ik}(\sigma_p+\rho\pi_p)(\sigma^p+\rho\pi^p)$$

이다.

아인슈타인다양체에서 접속 ∇ 에 관하여 $R^l_{ijk}=0$ 이면 ∇ 를 평탄접속, $R_{jk}=0$ 이면 ∇ 를 리찌평탄접속, $P_{ij}=0$ 이면 ∇ 를 체적평탄접속, $R^l_{ijk}=\overset{*}{R}{}^l_{ijk}$ 이면 ∇ 를 공액대칭접속이라고 부른다.

정리 1 아인슈타인다양체 $(M,\ g)$ 에서 $\overset{c}{\nabla}$ 를 공형리찌사분대칭재귀계량접속이라고 하자. 그러면 $\overset{c}{\nabla}$ 는 체적평탄접속인 동시에 공액대칭접속이다.

증명 우선 식 (4)의 량변을 $k,\ l$ 에 관하여 축약하면

$$P_{ij}=\overset{\circ}{P}_{ij}+a_{ij}-a_{ji}+a_{ji}-a_{ij}=\overset{\circ}{P}_{ij}$$

이다. 그런데 $\overset{\circ}{P}_{ij}=0$ 이므로 $P_{ij}=0$ 이다. 따라서 $\overset{c}{\nabla}$ 는 체적평탄접속이다.

또한 식 (4)와 (5)를 비교하면 $R^l_{ijk}=\overset{*}{R}{}^l_{ijk}$ 이다. 따라서 접속 $\overset{c}{\nabla}$ 는 공액대칭접속이다.(증명끝)

주의 1 정리 1은 공형리찌사분대칭재귀계량접속 $\overset{c}{\nabla}$ 가 공액대칭성을 가지는 비계량접속의 실례라는것을 보여준다.

정리 2 n 차원아인슈타인다양체 $(M,\ g)$ 에서 공형리찌사분대칭재귀계량접속 $\overset{c}{\nabla}$ 에 관한 곡률텐소르가 령이면 접속 $\overset{\circ}{\nabla}$ 는 공형평탄접속이다.

증명 식 (4)의 량변을 $i,\ l$ 에 관하여 축약하면

$$\overset{c}{R}_{jk} = K_{jk} - (n-1)a_{jk} - g_{jk}a_i^i \tag{6}$$

이다. 이 식의 량변에 g^{jk}를 곱하고 축합을 실시하면

$$\overset{c}{R} = K - 2(n-1)a_i^i$$

이다. 이 식으로부터 a_i^i를 구하면

$$a_i^i = \frac{1}{2(n-1)}(K - \overset{c}{R})$$

이다. 이 식을 식 (6)에 넣고 a_{jk}를 구하면

$$a_{jk} = \frac{1}{n-2}\left[K_{jk} - \overset{c}{R}_{jk} - \frac{g_{jk}}{2(n-1)}(K - \overset{c}{R})\right]$$

이다. 그리고 이 식을 식 (4)에 대입하여 정돈하고

$$\begin{aligned} \overset{c}{C}{}^l_{ijk} &:= \overset{c}{R}{}^l_{ijk} - \frac{1}{n-2}(\delta_i^l \overset{c}{R}_{jk} - \delta_j^l \overset{c}{R}_{ik} + g_{ik}\overset{c}{R}{}^l_j - g_{jk}\overset{c}{R}{}^l_i) + \frac{\overset{c}{R}}{(n-1)(n-2)}(\delta_i^l g_{jk} - \delta_j^l g_{ik}) \\ \overset{\circ}{C}{}^l_{ijk} &:= K^l_{ijk} - \frac{1}{n-2}(\delta_i^l K_{jk} - \delta_j^l K_{ik} + g_{ik}K^l_j - g_{jk}K^l_i) + \frac{K}{(n-1)(n-2)}(\delta_i^l g_{jk} - \delta_j^l g_{ik}) \end{aligned} \tag{7}$$

로 놓으면

$$\overset{c}{C}{}^l_{ijk} = \overset{\circ}{C}{}^l_{ijk} \tag{8}$$

이다. 그런데 $\overset{c}{R}{}^l_{ijk} = 0$이면 식 (7)로부터 $\overset{c}{C}{}^l_{ijk} = 0$이라는것이 나온다. 따라서 식 (8)로부터 $\overset{\circ}{C}{}^l_{ijk} = 0$이라는것이 나온다. 그러므로 접속 $\overset{\circ}{\nabla}$는 공형평탄이다.(증명끝)

주의 2 선행연구[1]의 결과를 리용하면 정리 2는 공형리찌사분대칭재귀계량접속과 레비－찌비따접속사이의 관계가 리찌사분대칭계량접속과 레비－찌비따접속사이의 관계와 같다는것을 보여준다는것을 알수 있다.

이제 $\omega_i := \rho\pi_i$를 성분으로 하는 1－형식을 ω라고 하자. 그러면 다음의 따름이 성립한다.

[따름] 아인슈타인다양체 $(M,\ g)$에서 공형리찌사분대칭재귀계량접속 $\overset{c}{\nabla}$에 대하여 다음의 사실들이 성립한다.

① $\overset{c}{C}{}^l_{ijk} + \overset{c}{C}{}^l_{jki} + \overset{c}{C}{}^l_{kij} = 0$ (9)

② ω가 닫긴형식이면 $\overset{c}{R}{}^l_{ijk} + \overset{c}{R}{}^l_{jki} + \overset{c}{R}{}^l_{kij} = 0$ (10)

증명 우선 식 (8)로부터 $\overset{\circ}{C}{}^l_{ijk} + \overset{\circ}{C}{}^l_{jki} + \overset{\circ}{C}{}^l_{kij} = 0$이라는 사실에 의하여 식 (9)가 얻어진다.

다음으로 식 (4)로부터

$$\overset{c}{R}{}^l_{ijk} + \overset{c}{R}{}^l_{jki} + \overset{c}{R}{}^l_{kij} = \delta_i^l(a_{kj} - a_{jk}) + \delta_j^l(a_{ik} - a_{ki}) + \delta_k^l(a_{ji} - a_{ij})$$

가 성립한다는것이 나온다. 그런데

$$a_{ij}-a_{ji}=\nabla_i\omega_j-\nabla_j\omega_i$$

이므로 ω가 닫긴형식이면 $a_{ij}-a_{ji}=0$이다. 따라서 식 (10)이 얻어진다.(증명끝)

아인슈타인다양체 $(M,\ g)$의 임의의 점 p에서의 접속 ∇에 관한 단면곡률이 2차원방향 $E(T_p(M)$에서의 임의의 2차원부분공간)의 선택에 무관계하면 곡률텐소르는 다음과 같이 표시된다.

$$R_{ijk}^{l}=k(p)(\delta_i^l g_{jk}-\delta_j^l g_{ik}) \tag{11}$$

그리고 $k(p)=\text{const}$이면 아인슈타인다양체 $(M,\ g,\ \nabla)$는 일정곡률다양체이다.

정리 3 련결인 $n(>2)$차원아인슈타인다양체 $(M,\ g)$에서 공형리찌사분대칭재귀계량접속 $\overset{c}{\nabla}$에 관한 단면곡률이 2차원방향의 선택에 무관계하고

$$\rho\pi_h+\sigma_h=0 \tag{12}$$

이면 아인슈타인다양체 $(M,\ g,\ \overset{c}{\nabla})$는 일정곡률다양체이다.

증명 아인슈타인다양체 $(M,\ g,\ \overset{c}{\nabla})$에서 공형리찌사분대칭재귀계량접속 $\overset{c}{\nabla}$에 관한 곡률텐소르에 대한 제2종의 비앙끼항등식

$$\overset{c}{\nabla}_h \overset{c}{R}{}_{ijk}^{l}+\overset{c}{\nabla}_i \overset{c}{R}{}_{jhk}^{l}+\overset{c}{\nabla}_j \overset{c}{R}{}_{hik}^{l}=T_{hi}^{p}\overset{c}{R}{}_{jpk}^{l}+T_{ij}^{p}\overset{c}{R}{}_{hpk}^{l}+T_{jh}^{p}\overset{c}{R}{}_{ipk}^{l}$$

에 식 (11)을 대입하고 식 (1)을 리용하면

$$\overset{c}{\nabla}_h k(\delta_i^l g_{jk}-\delta_j^l g_{ik})+\overset{c}{\nabla}_i k(\delta_j^l g_{hk}-\delta_h^l g_{jk})+\overset{c}{\nabla}_j k(\delta_h^l g_{jk}-\delta_i^l g_{hk})-$$
$$-2k[(\sigma_h+\rho\pi_h)(\delta_i^l g_{jk}-\delta_j^l g_{ik})+(\sigma_i+\rho\pi_i)(\delta_j^l g_{hk}-\delta_h^l g_{jk})+(\sigma_j+\rho\pi_j)(\delta_h^l g_{jk}-\delta_i^l g_{hk})]=0$$

이 성립한다. 따라서 이 식을 $i,\ l$에 관하여 축약하면

$$(n-2)(g_{jk}\overset{c}{\nabla}_h k-g_{hk}\overset{c}{\nabla}_j k)-2(n-2)k[(\sigma_h+\rho\pi_h)g_{jk}-(\sigma_j+\rho\pi_j)g_{hk}]=0$$

이 성립한다. 그러므로 이 식에 g^{jk}를 곱하고 축합을 실시하면

$$(n-1)(n-2)[\overset{c}{\nabla}_h k-2(\sigma_h+\rho\pi_h)k]=0$$

이 성립한다. 그런데 $n>2$이므로 이 식으로부터

$$\overset{c}{\nabla}_h k-2(\sigma_h+\rho\pi_h)k=0$$

이 성립한다. 따라서 조건 (12)가 만족되면 $k(p)=\text{const}$이다. 그러므로 아인슈타인다양체 $(M,\ g,\ \overset{c}{\nabla})$는 일정곡률다양체이다.(증명끝)

주의 3 슈르의 정리의 조건을 만족시키는 공형리찌사분대칭재귀계량접속 $\overset{c}{\nabla}$는 식 (1)과 (2)로부터 다음과 같이 표시된다는것을 식 (12)를 리용하면 알수 있다.

$$\overset{c}{\nabla}_k g_{ij}=-2\sigma_k g_{ij},\ T_{ij}^k=\sigma_j\delta_i^k-\sigma_i\delta_j^k$$
$$\overset{c}{\Gamma}{}_{ij}^{k}=\left\{{k \atop ij}\right\}-\sigma_i\delta_j^k\ \ (\sigma_i=-\rho\pi_i) \tag{13}$$

이 접속은 선행연구[2]에서 중력의 스칼라텐소르리론의 기하학적모형으로 제시되였다. 그러나 선행연구[2]에서는 이 접속의 일정곡률성을 밝히지 못하였다. 정리 3은 선행연구[2]에서 제시된 중력의 스칼라텐소르리론의 기하학적모형으로 되는 접속이 아인슈타인다양체에서 슈르의 정리의 조건

을 만족시키는 공형리찌사분대칭재귀계량접속이라는것을 보여준다. 선행연구[1]에서 연구된 리찌사분대칭계량접속에 대해서는 슈르의 정리의 조건이 만족되지 않는다.

공형리찌사분대칭재귀계량접속 $\overset{c}{\nabla}$의 호상접속 $\overset{cm}{\nabla}$의 접속결수는 식 (2)에 의하여

$$\overset{cm}{\Gamma}{}_{ij}^{k} = \{{}_{ij}^{k}\} + (\sigma_i + \rho\pi_i)\delta_j^k + \sigma_j\delta_i^k - g_{ij}(\sigma^k + \rho\pi^k) \tag{14}$$

로 표시되며 다음의 식을 만족시킨다는것을 알수 있다.

$$\begin{aligned} \overset{cm}{\nabla}_k g_{ij} &= -2(\sigma_k + \rho\pi_k)g_{ij} + \rho\pi_i g_{jk} + \rho\pi_j g_{ik} \\ \overset{cm}{T}{}_{ij}^{k} &= \rho(\pi_i\delta_j^k - \pi_j\delta_i^k) = -T_{ij}^k \end{aligned} \tag{15}$$

정리 4 련결인 $n(>2)$ 차원아인슈타인다양체 $(M,\ g)$ 에서 공형리찌사분대칭재귀계량접속 $\overset{c}{\nabla}$의 호상접속 $\overset{cm}{\nabla}$ 에 관한 단면곡률이 2차원방향의 선택에 무관계하고

$$\rho\pi_h + 2\sigma_h = 0 \tag{16}$$

이면 아인슈타인다양체 $(M,\ g,\ \overset{cm}{\nabla})$ 은 일정곡률다양체이다.

증명 아인슈타인다양체 $(M,\ g)$ 에서 호상접속 $\overset{cm}{\nabla}$ 에 관한 곡률텐소르에 대한 제2종의 비앙끼항등식

$$\overset{cm}{\nabla}_h \overset{cm}{R}{}^l_{ijk} + \overset{cm}{\nabla}_i \overset{cm}{R}{}^l_{jhk} + \overset{cm}{\nabla}_j \overset{cm}{R}{}^l_{hik} = -\left(T_{hi}^p \overset{cm}{R}{}^l_{jpk} + T_{ij}^p \overset{cm}{R}{}^l_{hpk} + T_{jh}^p \overset{cm}{R}{}^l_{ipk} \right)$$

에 식 (11)을 대입하고 식 (15)를 리용하면

$$\begin{aligned} &\overset{cm}{\nabla}_h k(\delta_i^l g_{jk} - \delta_j^l g_{ik}) + \overset{cm}{\nabla}_i k(\delta_j^l g_{hk} - \delta_h^l g_{jk}) + \overset{cm}{\nabla}_j k(\delta_h^l g_{jk} - \delta_i^l g_{hk}) - \\ &-2k[(\sigma_h + \rho\pi_h)(\delta_i^l g_{jk} - \delta_j^l g_{ik}) + (\sigma_i + \rho\pi_i)(\delta_j^l g_{hk} - \delta_h^l g_{jk}) + (\sigma_j + \rho\pi_j)(\delta_h^l g_{jk} - \delta_i^l g_{hk})] = 0 \end{aligned}$$

이 성립한다. 따라서 이 식을 $i,\ l$ 에 관하여 축약하면

$$(n-2)(\overset{cm}{\nabla}_h k g_{jk} - \overset{cm}{\nabla}_j k g_{hk}) - (n-2)[(2\sigma_h + \rho\pi_h)g_{jk} - (2\sigma_j + \rho\pi_j)g_{hk}]k = 0$$

이 성립한다. 그러므로 이 식에 g^{jk} 를 곱하고 축합을 실시하면

$$(n-1)(n-2)[\overset{cm}{\nabla} k - (2\sigma_h + \rho\pi_h)k] = 0$$

이 성립한다. 그런데 $n > 2$ 이므로 식 (16)으로부터 $k(p) = \mathrm{const}$ 이다. 따라서 아인슈타인다양체 $(M,\ g,\ \overset{cm}{\nabla})$ 은 일정곡률다양체이다.(증명끝)

주의 4 식 (16)을 리용하면 슈르의 정리의 조건을 만족시키는 호상접속 $\overset{cm}{\nabla}$ 은

$$\overset{cm}{\nabla}_k g_{ij} = 2\sigma_k g_{ij} - 2\sigma_k g_{ij} - 2\sigma_j g_{ik},\ T_{ij}^k = 2(\sigma_j\delta_i^k - \sigma_i\delta_j^k)$$

$$\overset{cm}{\Gamma}{}_{ij}^{k} = \{{}_{ij}^{k}\} - \sigma_i\delta_j^k + \sigma_j\delta_i^k + g_{ij}\sigma^k \quad (2\sigma_i = -\rho\pi_i)$$

이다. 이 접속은 공형리찌사분대칭재귀계량접속의 호상접속으로서 슈르의 정리의 조건을 만족시키는 새로운 형태의 리찌사분대칭비계량접속이다.

참 고 문 헌

[1] 조선민주주의인민공화국 과학원통보, 6, 6, 6, 주체106(2017).
[2] K. A. Dunn; Tensor. N. S., 29, 214, 1975.
[3] Ho Tal Yun; Journal of **Kim Il Sung** University(Natural Science), 2, 2, 3, 2013.
[4] E. S. Stepanova; J. of Math. Scien., 1471, 6507, 2007.
[5] W. Wang et al.; IEJG, 10, 2, 37, 2017.

주체109(2020)년 3월 15일 원고접수

On a Ricci Quarter-Symmetric Conformal Metric Recurrent Connection in an Einstein Manifold

Yun Kum Song, *Ho Tal Yun*

In this paper we newly defined a Ricci quarter-symmetric conformal metric recurrent connection that is conformaly equivalent to a Ricci quarter-symmetric in an Einstein manifold, and studied the volume flatness condition, conjugate symmetry condition and relation with the Levi-Civita connection and constant curvature condition. And we newly studied forms of the Ricci quarter-symmetric conformal metric recurrent connection satisfying the Schur’s theorem.

Keywords: quarter-symmetric, metric recurrent connection, constant curvature, conjugate symmetry condition