김일성종합대학학보 수 학
주체108(2019)년 제65권 제4호

여러수준반복법과 가우스－에르미뜨구적법을 리용한 역방향확률미분방정식의 한가지 효률적인 수치도식

허 승 룡

론문에서는 확률미분방정식분야에서 중요한 위치를 차지하는 역방향확률미분방정식의 수치풀이에 대하여 연구하였다.

선행연구[1]에서는 여러수준반복법과 몽떼－까를로법을 결합하여 계산복잡도를 줄이는 한가지 수치방법을 제기하였다. 몽떼－까를로근사방법은 다중적분의 근사를 비롯하여 높은 차원의 적분을 근사시키는데서는 계산량을 줄이는데서 효과적이지만 낮은 차원인 경우에는 다른 근사방법들(실례로 가우스－에르미뜨구적법)에 비해 정확도가 현저히 떨어진다.

우리는 1차원역방향확률미분방정식에 대하여 수학적기대값근사에서 몽떼－까를로법 대신 가우스－에르미뜨구적법을 리용하여 계산복잡도를 보다 줄이는 한가지 효률적인 수치도식을 제기하였다.

1. 수 치 도 식

다음과 같은 역방향확률미분방정식을 생각하자.

$$y_t = g(W_T) + \int_t^T f(s,\ y_s,\ z_s)ds - \int_t^T z_s dW_s \tag{1}$$

여기서 $f:[0,\ T]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 이고 W 는 1차원위너과정이다.

비선형헤이만－까스공식에 의하여 역방향확률미분방정식 (1)의 풀이 $(y_t,\ z_t)$ 는

$$y_t = u(t,\ W_t),\ z_t = u_x(t,\ W_t)$$

로 표시된다. 여기서 $u(t,\ x)$ 는 다음과 같은 편미분방정식의 풀이이다.

$$u_t(t,\ x) + \frac{1}{2}u_{xx}(t,\ x) + f(t,\ u,\ u_x) = 0 \tag{2}$$

이로부터

$$\begin{aligned} u(t,\ x) &= E[y_t \mid W_t = x] = \\ &= E[g(x + W_T - W_t)] + \int_t^T E[f(s,\ u(s,\ x + W_s - W_t),\ u_x(s,\ x + W_s - W_t))]ds \end{aligned} \tag{3}$$

Bismut−Elworlthy−Li의 공식[2]을 리용하면

$$\begin{aligned} u_x(t,\ x) &= E\left[g(x + W_T - W_t)\frac{W_T - W_t}{T - t}\right] + \\ &+ \int_t^T E\left[f(s,\ u(s,\ x + W_s - W_t),\ u_x(s,\ x + W_s - W_t))\frac{W_s - W_t}{s - t}\right]ds \end{aligned} \tag{4}$$

식 (3), (4)를 리용하여 $(u,\ u_x)$의 근사풀이를 반복법으로 구할수 있다.

$\phi : \mathrm{Lip}([0,\ T]\times\mathbf{R},\ \mathbf{R}^2)\to \mathrm{Lip}([0,\ T]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2)$ (여기서 $\mathrm{Lip}(V_1,\ V_2)$는 $V_1\to V_2$인 립쉬츠련속함수들의 모임)를 다음과 같이 정의하자.

$$\begin{aligned}[\phi(v)](t,\ x) &:= E\left[g(x+W_T-W_t)\left(1,\ \frac{W_T-W_t}{T-t}\right)\right]+\\ &+\int_t^T E\left[(F(v)(s,\ x+W_s-W_t))\left(1,\ \frac{W_s-W_t}{s-t}\right)\right]ds,\ v\in \mathrm{Lip}([0,\ T]\times\mathbf{R},\ \mathbf{R}^2)\end{aligned} \tag{5}$$

여기서 $F:\mathrm{Lip}([0,\ T]\times\mathbf{R},\ \mathbf{R}^2)\to \mathrm{Lip}([0,\ T]\times\mathbf{R},\ \mathbf{R}^2)$는 $[F(v)](t,\ x):=f(t,\ v(t,\ x))$로 정의되는 넘기기이다. 그러면 바나흐부동점정리에 의하여 방정식 (5)의 유일한 부동점 $v_\infty(\cdot,\ \cdot)$가 있어서 임의의 $t\in[0,\ T),\ x\in\mathbf{R}$에 대하여

$$\lim_{k\to\infty} v_k(t,\ x)=v_\infty(t,\ x)=[\phi(v_\infty)](t,\ x)=(u(t,\ x),\ u_x(t,\ x)) \tag{6}$$

가 성립하며 피카드반복렬을

$$v_k(t,\ x)=[\phi(v_{k-1})](t,\ x)$$

로 구성할수 있다.

이제 이 반복도식을 다음과 같이 변형한다.

$$\begin{aligned}v_k(t,\ x) &= v_1(t,\ x)+\sum_{l=1}^{k-1}[v_{l+1}(t,\ x)-v_l(t,\ x)]=\\ &=[\phi(v_0)](t,\ x)+\sum_{l=1}^{k-1}\big([\phi(v_l)](t,\ x)-[\phi(v_{l-1})](t,\ x)\big)=\\ &=E\left[g(x+W_T-W_t)\left(1,\ \frac{W_T-W_t}{T-t}\right)\right]+\\ &+\sum_{l=0}^{k-1}\int_t^T E\left[(f(s,\ v_l(s,\ x+W_s-W_t))-I_{l\neq 0}f(s,\ v_l(s,\ x+W_s-W_t)))\left(1,\ \frac{W_s-W_t}{s-t}\right)\right]ds\end{aligned} \tag{7}$$

이제 도식 (7)에 대하여 시간적분항은 르쟝드르구적법으로 근사시키고 수학적기대값은 가우스—에르미뜨구적법에 의하여 근사시키면 역방향확률미분방정식 (1)에 대한 다음의 수치도식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned}v_{n,M,Q}(t,\ x) &= \hat{E}^{n,0,M}\left[g(x+W_T-W_t)\left(1,\ \frac{W_T-W_t}{T-t}\right)\right]+\\ &+\sum_{s\in[t,\ T]} q^{Q,[t,\ T]}(s)\sum_{l=1}^{k-1}\hat{E}^{n,l,M}\Big[(f(s,\ v_l(s,\ x+W_s-W_t))-\\ &-I_{\{l\neq 0\}}f(s,\ v_l(s,\ x+W_s-W_t)))\left(1,\ \frac{W_s-W_t}{s-t}\right)\Big]\end{aligned}$$

여기서 $q^{Q,[t,\ T]}(\cdot)$는 르쟝드르구적법에서 무게결수들로서 $[-1,\ 1]$에서 Q차르쟝드르다항식의 뿌리들을 $c_i^n,\ i=\overline{1,\ n}$라고 할 때 다음과 같이 표시된다.

$$q^{Q,[t,T]}(s):=\begin{cases}\int_t^T\left[\prod_{c_i^n\neq\frac{2s-(T+t)}{T-t},\,i=\overline{1,\ n}}\frac{2x-(T-t)c_i^n-(T+t)}{2s-(T-t)c_i^n-(T+t)}\right]dx, & \frac{2s-(T+t)}{T-t}\in\{c_1^n,\ \cdots,\ c_n^n\}\\ 0, & \frac{2s-(T+t)}{T-t}\notin\{c_1^n,\ \cdots,\ c_n^n\}\end{cases}$$

우의 수치도식에서 $v_{n,M,Q}(t,\ x)$는 시공간점 $(t,\ x)$에서 식 (1)의 풀이

$$(Y^{t,x},\ Z^{t,x})=(u(t,\ x),\ u_x(t,\ x))$$

에 대한 근사이다.

역방향확률미분방정식 (1)의 생성자 f가 조종변수 Z에 무관계하다고 할 때 $Y^{t,x}$만을 근사시키려면 다음과 같은 수치도식을 리용하면 된다. 복잡성을 피하기 위해 $Y^{\tau,x}$의 근사도 같은 기호 $v_{n,M,Q}(t,\ x)$로 표시하기로 한다.

$$v_{n,M,Q}(t,\ x)=\hat{E}^{n,0,M}[g(x+W_T-W_t)]+$$
$$+\sum_{s\in[t,\ T]}q^{Q,[t,\ T]}(s)\sum_{l=1}^{k-1}\hat{E}^{n,l,M}[f(s,\ v_l(s,\ x+W_s-W_t))-I_{\{l\neq 0\}}f(s,\ v_l(s,\ x+W_s-W_t))] \tag{8}$$

론문에서는 수치도식 (8)에 대하여 오차평가를 진행한다.

2. 오 차 평 가

수치도식 (8)의 수렴성을 판정하기 위해 다음과 같은 반노름을 도입한다.

$$\|V\|_{n,Q}:=\sum_{t\in[0,\ T]}\overline{q}^{n,Q}\left[\sup_{s\in[t,\ T]}\sup_{u\in[0,\ s]}\sup_{z\in\mathbf{R}}\sqrt{E[V^2(s,\ z+W_u)]}\right] \tag{9}$$

여기서 $V:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R},\ n,\ Q\in\mathbf{N}$이며 $\overline{q}^{n,Q}(t),\ 0\le t\le T$는 다음과 같이 정의한다.

$$\overline{q}^{n,Q}(t):=\sum_{s\in[0,\ t]}\overline{q}^{n-1,Q}(s)q^{Q,[s,\ T]}(t),\ \ \overline{q}^{0,Q}(t):=I_{\{t=0\}}$$

이 반노름에 대하여 다음과 같은 사실들이 성립한다.[2]

$$\sum_{t\in[0,\ T]}\overline{q}^{n,\ Q}(t)\frac{(T-t)^k}{k!}=\frac{T^{n+k}}{(n+k)!} \tag{10}$$

$$\|F(v_1)-F(v_2)\|_{k,Q}\le L\|v_1-v_2\|_{k,Q} \tag{11}$$

여기서 $F:\mathrm{Lip}([0,\ T]\times\mathbf{R},\ \mathbf{R})\to\mathrm{Lip}([0,\ T]\times\mathbf{R},\ \mathbf{R})$는 립쉬츠상수 L을 가지는 립쉬츠함수이고 $v_1,\ v_2\in\mathrm{Lip}([0,\ T]\times\mathbf{R},\ \mathbf{R})$이다.

$$\left\|(s,\ z)\mapsto\sum_{t\in[s,\ T]}q^{Q,[s,\ T]}(t)\cdot v(t,\ z+W_t-W_s)\right\|_{k,Q}\le\|v\|_{k+1,Q} \tag{12}$$

$$|v_1|\le|v_2|\Rightarrow\|v_1\|_{k,Q}\le\|v_2\|_{k,Q} \tag{13}$$

$$\| v \|_{k,\,Q} \le \sup_{(t,\,x)\in[0,\,T]\times\mathbf{R}} | v(t,\,x) | \frac{T^k}{k!},\quad \| 1 \|_{k,\,Q} = \frac{T^k}{k!} \tag{14}$$

보조정리 1 $n,\ M\in\mathbf{N},\ \alpha\in(0,\ 1/4)$에 대하여 n이 충분히 크면

$$\frac{(Mn)!}{(2Mn)!}T^{nM} \le \frac{e^{1/12}}{\sqrt{2}}(4e^{-1}M)^{-n},\quad \frac{(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} \le \frac{1}{n^{2\alpha n}[(2n+1)!]^{1-\alpha}}$$

이 성립한다.

보조정리 2 역방향확률미분방정식 (1)에 대하여 $f,\ g$가 충분히 미끈하다고 가정하고 v_∞가 방정식 (2)를 만족시킨다고 하자. 그러면

$$\frac{1}{(1+2L^f)^{N-1}} \| v_{n,M,Q} - v_\infty \|_{k,Q} \le (4e^{-1}M)^{-N} e^{4e^{-1}MT}(L^f + L^g) +$$
$$+ \frac{e^T T^{2Q+1}}{Q^{2\alpha Q}} \sup_{k\in\mathbf{N}} \sup_{(t,\,x)\in[0,\,T]\times\mathbf{R}} \left| \left[\left(\partial_t + \frac{1}{2}\partial_{xx} \right)^k (t,\,x) \right] (t,\,x) \right| \cdot (k!)^{\alpha-1} +$$
$$+ \sup_{k=1,\,\cdots,\,N} [(4e^{-1}M)^{-(N-k)} L^f \| v_\infty \|_{k,Q}]$$

가 성립한다. 여기서 $L^f,\ L^g$는 각각 f와 g의 립쉬츠결수들이다.

우의 보조정리에서 제시된 반노름 $\|\cdot\|_{0,\,Q}$에 관한 오차평가결과를 리용하여 절대값노름에 관한 오차를 평가할수 있다.

정리 역방향확률미분방정식 (1)에서 $f,\ g$가 충분히 미끈하다고 가정하면 다음의 결과가 성립한다.

$$(1+2L)^{-N} \sup_{(t,\,x)\in[0,\,T]\times\mathbf{R}} | v_{N,M,Q}(t,\,x) - v_\infty(t,\,x) | \le \frac{e^{4e^{-1}MT}}{(4e^{-1}M)^N} \left[1 + \sup_{(t,x)\in[0,\,T]\times\mathbf{R}} | v_\infty(t,\,x) | \right] +$$
$$+ \frac{e^T T^{2Q+1}}{Q^{2\alpha Q}} \sup_{k\in\mathbf{N}} \sup_{(t,\,x)\in[0,\,T]\times\mathbf{R}} (k!)^{\alpha-1} \left| \left[\left(\partial_t + \frac{1}{2}\partial_{xx} \right)^k v_\infty \right] (t,\,x) \right|$$

증명

$$I := (4e^{-1}M)^{-N} e^{4e^{-1}MT}(L^f + L^g) + \frac{e^T T^{2Q+1}}{Q^{2\alpha Q}} \sup_{k\in\mathbf{N}} \sup_{(t,\,x)\in[0,\,T]\times\mathbf{R}} \left| \left[\left(\partial_t + \frac{1}{2}\partial_{xx} \right)^k v_\infty \right] (t,\,x) \right| \cdot (k!)^{\alpha-1}$$

로 놓자. 보조정리 2와 식 (11)－(14)를 리용하면

$$\sup_{(t,\,x)\in[0,\,T]\times\mathbf{R}} | v_{N,M,Q}(t,\,x) - v_\infty(t,\,x) | \le$$
$$\le \sup_{t\in[0,\,T]} \sup_{x\in\mathbf{R}} \sup_{z\in[0,\,t]} \sqrt{E(v_{N,M,Q}(t,\,x+W_z) - v_\infty(t,\,x+W_z))^2} =$$
$$= \| v_{N,M,Q}(t,\,x) - v_\infty(t,\,x) \|_{0,\,Q} \le$$
$$\le (1+2L^f)^{N-1} \left(I + \sup_{k=1,\,\cdots,\,N} \left[(4e^{-1}M)^{-(N-k)} L^f \cdot \sup_{(t,\,x)\in[0,\,T]\times\mathbf{R}} | v_\infty(t,\,x) | \frac{T^k}{k!} \right] \right) \le$$
$$\le (1+2L^f)^{N-1} \left(I + e^{4e^{-1}T} (4e^{-1}M)^{-N} L^f \cdot \sup_{(t,\,x)\in[0,\,T]\times\mathbf{R}} | v_\infty(t,\,x) | \right) =$$

$$
\begin{aligned}
&=(1+2L^f)^{N-1}\frac{e^{4e^{-1}MT}}{(4e^{-1}M)^N}\left[(L^f+L^g)+L^f\cdot\sup_{(t,\ x)\in[0,\ T]\times\mathbf{R}}|v_\infty(t,\ x)|\right]+\\
&+(1+2L^f)^{N-1}\frac{e^TT^{2Q+1}}{Q^{2\alpha Q}}\sup_{k\in N}\sup_{(t,\ x)\in[0,\ T]\times\mathbf{R}}(k!)^{\alpha-1}\left|\left[\left(\partial_t+\frac{1}{2}\partial_{xx}\right)^k v_\infty\right](t,\ x)\right|\le\\
&\le(1+2L)^N\frac{e^{4e^{-1}MT}}{(4e^{-1}M)^N}\left[1+\sup_{(t,\ x)\in[0,\ T]\times\mathbf{R}}|v_\infty(t,\ x)|\right]+\\
&+(1+2L)^N\frac{e^TT^{2Q+1}}{Q^{2\alpha Q}}\sup_{k\in\mathbf{N}}\sup_{(t,\ x)\in[0,\ T]\times\mathbf{R}}(k!)^{\alpha-1}\left|\left[\left(\partial_t+\frac{1}{2}\partial_{xx}\right)^k v_\infty\right](t,\ x)\right|
\end{aligned}
$$

여기서

$$L:=\max\{L^f,\ L^g\}$$

이다.(증명끝)

수치도식 (8)에서 기대값근사 $\hat{E}^{k,l,M}$ 을 계산할 때 매 수준 l $(0\le l\le k-1)$ 에 대하여 수학적기대값근사에 리용되는 가우스－에르미뜨구적법의 표본점수는 $M(k-l)$ 개인데 이때 오차는 정리로부터 매 수준에서 몽뗴－까를로표본수를 M^{k-l} 개로 주고 론의한 선행연구 [2]에서의 오차결과와 같다.

따라서 우리는 매우 낮은 개수의 표본점으로 선행도식에서와 꼭같은 정확도를 보장함으로써 계산복잡도를 훨씬 줄이였다.

참 고 문 헌

[1] M. Hutzenthaler et al.; arXiv:1607.03295, [math.PR], 2017.

[2] M. Fuhrman et al.; Stochastics, 74, 2, 429, 2002.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

An Effective Numerical Scheme for BSDE using Muti−level Iteration and Gauss−Hermite Quadrature Rule

Ho Sung Ryong

In this paper, we propose an effective numerical scheme for BSDE based on multi−level iteration and Gauss−Hermite quadrature rule and estimate its error.

Key word: backward stochastic differential equation