김일성종합대학학보 (수학) 주체107(2018)년 제64권 제1호

시간의존결수를 가지는 아시아식산수평균판매선택권의 2분나무법과 한가지 양적계차도식

오형철, 김학영

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《수학은 모든 자연과학의 기초로 될뿐아니라 사회현상을 연구하는데서도 중요한 수단으로 됩니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제10권 478페지)

선행연구[1, 5]에서는 유럽식선택권의 2분나무법이 블랙－숄즈방정식의 특수한 양적계차도식과 동등하다는것을 밝히고 2분나무법의 수렴성을 편미분방정식적방법을 리용하여 밝혔다.

선행연구[2]에서는 사전실시상승기대선택권에 대한 2분나무법에 의한 가격의 수렴성을 편미분방정식의 점성풀이리론을 리용하여 증명하였다. 선행연구[4]에서는 경로유관선택권의 2분나무법의 수렴성을 편미분방정식적방법으로 연구하였다. 앞에서 설명한 결과들에서는 모두 리자률, 기초자산의 배당률과 파동률과 같은 중요결수들이 상수라고 가정하였다.

리자률, 기초자산의 배당률과 파동률과 같은 금융결수들은 일반적으로 시간에 따라 변하므로 선행연구[3]에서는 유럽식선택권모형으로서 시간의존결수를 가지는 블랙－숄즈편미분방정식을 연구하고 일반화된 블랙－숄즈공식을 주었다.

선행연구[6, 7]에서는 시간의존결수를 가지는 사전실시하강기대선택권의 2분나무법과 양적계차도식을 연구하였다. 그리고 시간의존결수를 가지는 경우에 적합한 특수한 시간분할방법을 찾고 그것을 리용하여 2분나무법 및 양적계차도식과의 관계를 밝혀 2분나무법의 수렴성을 증명하였다.[7]

론문에서는 리자률과 기초자산의 배당률, 파동률이 시간에 의존할 때 아시아식산수평균판매선택권의 공정가격제정을 위한 2분나무법과 양적계차도식사이의 동등성을 고찰하였다.

이에 기초하여 론문에서는 시간의존결수를 가지는 아시아식산수평균판매선택권의 공정가격제정을 위한 2분나무법의 수렴성에 대하여 연구하였다.

1. 예비지식

아시아식산수평균선택권의 경로유관변수는 다음과 같이 주어진다.

$$A_t = \frac{1}{t}\int_0^t S(\tau)d\tau$$

$V(S,\ A,\ t)$를 아시아식산수평균판매선택권의 가격이라고 하자.($S,\ A,\ t$는 서로 독립)

$r(t)$가 리자률, $q(t)$가 기초자산의 배당률, $\sigma(t)$가 기초자산가격의 파동률이라고 하자. 이때 아시아식산수평균판매선택권의 가격모형은 다음과 같다.[3]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t}+\dfrac{1}{t}(S-A)\dfrac{\partial V}{\partial A}+\dfrac{1}{2}\sigma^2(t)S^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2}+r(t)S\dfrac{\partial V}{\partial S}-r(t)V=0 \;\; (0\le S<\infty,\; 0<t\le T) \\ V(S,\; T)=(S-K)^+\vee(K-S)^+ \end{cases}$$

선택권의 생존구간 $[0, T]$를 N개의 구간 $0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_N=T$로 분할하자. 그리고

$$r_n=r(t_n),\; q_n=q(t_n),\; \sigma_n=\sigma(t_n),\;\; \eta_n=1+q_n\Delta t_n,\; \rho_n=1+r_n\Delta t_n \quad (\Delta t_n=t_{n+1}-t_n;\; n=\overline{0,\; N-1})$$

으로 표시한다. 시간구간분할점 $t_n(n=0, \cdots, N)$들을 다음과 같이 정의한다.

$u>1$이라고 하자. 먼저

$$t_0=0,\; \sigma_0=\sigma(t_0),\; \Delta t_0=\frac{(\ln u)^2}{\sigma_0^2},\; t_1=t_0+\Delta t_0=(\ln u)^2\cdot\frac{1}{\sigma_0^2}$$

이라고 정의한다. $t_1\le T$이면 다음과 같이 정의한다.

$$\sigma_1=\sigma(t_1),\; \Delta t_1=\frac{(\ln u)^2}{\sigma_1^2},\; t_2=t_1+\Delta t_1=(\ln u)^2\cdot\left(\frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{1}{\sigma_1^2}\right)$$

귀납적으로 $t_n\le T$이면 다음과 같이 정의한다.

$$\sigma_n=\sigma(t_n),\; \Delta t_n=\frac{(\ln u)^2}{\sigma_n^2},\; t_{n+1}=t_n+\Delta t_n=(\ln u)^2\cdot\left(\frac{1}{\sigma_0^2}+\cdots+\frac{1}{\sigma_n^2}\right)$$

이 과정을 $t_N\le T<t_{N+1}$일 때까지 계속한다. 이때 분할점개수 N은 u와 T 그리고 $\sigma(t)$에 관계된다.

$$0<\underline{\sigma}\le\sigma(t)\le\overline{\sigma}$$

와 같이 가정하면 시간분할간격 Δt_n의 크기와 분할점개수의 아래우평가를 얻을수 있다.

Δt_n의 정의로부터

$$\frac{(\ln u)^2}{\overline{\sigma}^2}\le\Delta t_n\le\frac{(\ln u)^2}{\underline{\sigma}^2},\;\; \frac{T\underline{\sigma}^2}{(\ln u)^2}-1<N\le\frac{T\overline{\sigma}^2}{(\ln u)^2}$$

과 $u\downarrow 1$이면 $N\to+\infty$ 및 $0\le T-t_N<\Delta t_N=(\ln u)^2\cdot(1/\sigma_N^2)\to 0$이 성립한다.

2. 시간의존결수의 경우 아시아식산수평균선택권가격의 양적계차도식

아시아식산수평균선택권가격의 기본방정식은 다음과 같다.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t}+\dfrac{1}{t}(S-A)\dfrac{\partial V}{\partial A}+\dfrac{1}{2}\sigma^2(t)S^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2}+r(t)S\dfrac{\partial V}{\partial S}-r(t)V=0 \;\; (0\le S<\infty,\; 0<t\le T) \\ V(S, T)=(S-K)^+\vee(K-S)^+ \end{cases}$$

$[t_n,\; t_{n+1}]$에서 1계편미분방정식

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{t}(S-A)\frac{\partial V}{\partial A}=0$$

의 특성곡선

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{1} = \dfrac{dA}{\frac{1}{t}(S-A)} \\ A(t_n) = A_n \qquad (t_n \le t \le t_{n+1}) \end{cases}$$

을 생각하자. 이것의 풀이는 $A(t) = S - (t_n / t)(S - A_n)$ 이다. 이 특성곡선우에서 방정식은 다음과 같이 변환된다.

$$\frac{dV}{dt}\left(S,\, S - \frac{t_n}{t}(S - A_n),\, t\right) + \left.\left(\frac{\sigma^2(t)}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r(t)S\frac{\partial V}{\partial S} - r(t)V\right)\right|_{\left(S,\, S - \frac{t_n}{t}(S-A_n),\, t\right)} = 0 \quad (1)$$

$$(t_n \le t \le t_{n+1})$$

Δt_n 과 동차의 무한소를 무시하면 다음의 식을 얻는다.

$$\frac{d}{dt}V\left(S, S - \frac{t_n}{t}(S - A_n),\ t\right) + \frac{\sigma^2(t)}{2} S \frac{d}{dS}\left(S \frac{d}{dS} V\left(S, S - \frac{t_n}{t}(S - A_n),\ t\right)\right) +$$

$$+\left(r(t) - \frac{\sigma^2(t)}{2}\right) S \frac{d}{dS} V\left(S \frac{d}{dS} V\left(S, S - \frac{t_n}{t}(S - A_n),\ t\right)\right) - r(t)V\left(S \frac{d}{dS} V\left(S, S - \frac{t_n}{t}(S - A_n),\ t\right)\right) = 0$$

$$(t_n \le t \le t_{n+1})$$

$$U(S,\ t) := V\left(S,\ S - \frac{t_n}{t}(S - A_n),\ t\right)$$

라고 놓자. 이때

$$\frac{d}{dS}V\left(S,\ S - \frac{t_n}{t}(S - A_n),\ t\right) = \frac{\partial}{\partial S}U(S,\ t)$$

이며 식 (1)은 블랙—숄즈방정식

$$\frac{\partial}{\partial t}U(S,\ t) + \frac{\sigma^2(t)}{2} S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} U(S,\ t) + r(t)S\frac{\partial}{\partial S}U(S,\ t) - r(t)U(S,\ t) = 0$$

으로 된다. 여기에 독립변수변환 $x = \ln S$ 를 실시하면 다음의 식

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}U(x,\ t) + \dfrac{\sigma^2(t)}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}U(x,\ t) + r(t)\dfrac{\partial}{\partial x}U(x,\ t) - r(t)U(x,\ t) = 0 \\ U(x,\ T) = (e^x - K)^+ \vee (K - e^x)^+ \end{cases} \quad (2)$$

를 얻는다. $x_m = m\Delta x\ \ (-\infty < m < \infty)$, 시간분할은 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = T,\quad \Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ 으로 놓자. 그리고 $U_m^n = U(x_m,\ t_n)$ 으로 표시하자. 이때 식 (2)의 양적계차도식은 $\alpha = \sigma_n^2 \Delta t_n / \Delta x^2$ 이라고 놓으면 다음과 같이 쓸수 있다.

$$U_m^n = \frac{1}{1 + r_n\Delta t_n}\left[(1-\alpha)U_m^{n+1} + \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\left(r_n - \frac{\sigma_n^2}{2}\right)\frac{\Delta t_n}{\Delta x}\right)U_{m+1}^{n+1} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\left(r_n - \frac{\sigma_n^2}{2}\right)\frac{\Delta t_n}{\Delta x}\right)U_{m-1}^{n+1}\right] \quad (3)$$

특히 2분나무법의 시간분할을 리용하면 즉 $1 - \sigma_n^2 \Delta t_n / \Delta x^2 = 0$ 일 때 식 (3)은

$$U_m^n = \frac{1}{1+r_n\Delta t_n}\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{\Delta t_n}}{\sigma_n}\left(r_n-\frac{\sigma_n^2}{2}\right)\right)U_{m+1}^{n+1}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{\Delta t_n}}{\sigma_n}\left(r_n-\frac{\sigma_n^2}{2}\right)\right)U_{m-1}^{n+1}\right] \tag{4}$$

과 같이 변경된다. 또한

$$a_n = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{\Delta t_n}}{\sigma_n}\left(r_n-\frac{\sigma_n^2}{2}\right)\right)$$

이라고 하면 식 (4)는 다음과 같이 쓸수 있다.

$$V(S,\ A_n,\ t_n) = \frac{1}{1+r_n\Delta t_n}[a_nV(Su,\ A_n^u,\ t_{n+1})+(1-a_n)V(Sd,\ A_n^d,\ t_{n+1})]$$

정리 1 $\alpha \le 1$ 및 $1-(1/\sigma_n^2)|r_n-\sigma_n^2/2|\Delta x \ge 0$일 때 양적계차도식 (3)은 안정하다.

증명 사실 도식의 안정성을 증명하기 위해서는 일반성을 잃지 않고 다음의 사실만을 말하면 된다. $n=N$일 때 $\max\limits_{-\infty<m<\infty} U_m^N \le \varepsilon$이면 그때 모든 $0\le n<N$에 대하여 부등식 $\max\limits_{-\infty<m<\infty} U_m^n \le \varepsilon$이 성립한다.

먼저 $n=N-1$일 때 $\alpha\le 1$ 및 $1-(1/\sigma_n^2)|r_n-\sigma_n^2/2|\Delta x\ge 0$이므로 웃평가식이 성립한다.

거꿀방향귀납법을 리용하면 $0\le n<N$일 때 $\max\limits_{-\infty<m<\infty} U_m^n\le\varepsilon$이 성립한다.(증명끝)

정의[3] $L_\Delta u=0$이 편미분방정식 $Lu=0$으로부터 리산화를 거쳐 얻어진 계차방정식이라고 하자. 만약 충분히 미끈한 함수 w에 대하여

$$\lim_{\Delta t,\Delta x\to 0}|L_\Delta w - Lw| = 0$$

이 성립하면 계차도식 $L_\Delta u=0$은 $Lu=0$과 일치적이다고 말한다.

양적계차도식 (3)의 일치성을 증명하자.

$$LU = \frac{\partial U}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma(t)^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\left(r(t)-\frac{\sigma(t)^2}{2}\right)\frac{\partial U}{\partial x}-r(t)U$$

$$L_\Delta U = \frac{U_m^{n+1}-U_m^n}{\Delta t_n}+\frac{1}{2}\sigma_n^2\frac{U_{m+1}^{n+1}-2U_m^{n+1}+U_{m-1}^{n+1}}{\Delta x^2}+\left(r_n-\frac{\sigma_n^2}{2}\right)\frac{U_{m+1}^{n+1}-U_{m-1}^{n+1}}{2\Delta x}-r(t)U_m^n$$

이다. 충분히 미끈한 임의의 함수 W에 대하여 $L_\Delta W-LW$가 $\max\limits_{1\le i\le N}\Delta t_i,\ \Delta x\to 0$일 때 0에로 다가간다는것을 밝히면 양적계차도식 (3)이 $LU=0$과 일치적이라는것이 나오게 된다.

$r(t), \sigma(t)$가 련속일 때 다음의 사실들이 성립한다.

$$\left.\frac{\partial W}{\partial t}\right|_{(x_m,\,t_n)}-\frac{W_m^{n+1}-W_m^n}{\Delta t_n}\to 0\ \ (\max_{1\le i\le N}\Delta t_i,\ \Delta x\to 0)$$

$$\frac{1}{2}\sigma(t)^2\left.\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right|_{(x_m,\,t_n)}-\frac{1}{2}\sigma_n^2\frac{W_{m+1}^{n+1}-2W_m^{n+1}+W_{m-1}^{n+1}}{\Delta x^2}\to 0\ \ (\max_{1\le i\le N}\Delta t_i,\ \Delta x\to 0)$$

$$\left(r(t)-\frac{\sigma(t)^2}{2}\right)\left.\frac{\partial W}{\partial x}\right|_{(x_m,\,t_n)}-\left(r_n-\frac{\sigma_n^2}{2}\right)\frac{W_{m+1}^{n+1}-W_{m-1}^{n+1}}{2\Delta x}\to 0\ \ (\max_{1\le i\le N}\Delta t_i,\ \Delta x\to 0)$$

$$r(t)W\big|_{(x_m,\ t_n)} - r_n W_m^n = 0$$

그러므로 양적계차도식 (3)은 $r(t),\ \sigma(t)$ 가 련속일 때 일치적이다.

3. 2분나무법과 양적계차도식과의 관계

기초자산의 초기가격이 S_0 이라고 하면 2분나무법에서 S_{t_n} 은 값 $S_\alpha^n = S_0 u^{n-\alpha} d^\alpha\ (0 \le \alpha \le n)$ 들중에서 하나를 취한다.

무차익거래원리에 따르면 2분나무법에 의한 아시아식산수평균판매선택권의 가격은 다음과 같다.[3]

$$V^n(S_{t_n},\ A_{t_n}) = e^{-r_n \Delta t_n}[p_n V^{n+1}(S_{t_n}u,\ A_{t_n}^u) + (1-p_n)V^{n+1}(S_{t_n}d,\ A_{t_n}^d)]$$

여기서

$$p_n = \frac{e^{r_n \Delta t_n} - d}{u-d},\ A_{t_n}^u = \frac{t_n A_{t_n} + \Delta t_n S_{t_n} u}{t_{n+1}},\ A_{t_n}^d = \frac{t_n A_{t_n} + \Delta t_n S_{t_n} d}{t_{n+1}}$$

이다.

$\Delta t_n = (\ln u)^2 / \sigma_n^2$ 으로부터 $u = e^{\sigma_n \sqrt{\Delta t_n}},\ d = e^{-\sigma_n \sqrt{\Delta t_n}}$ 를 얻으며 따라서

$$p_n = \frac{e^{r_n \Delta t_n} - e^{-\sigma_n \sqrt{\Delta t_n}}}{e^{\sigma_n \sqrt{\Delta t_n}} - e^{-\sigma_n \sqrt{\Delta t_n}}}$$

이 된다. $e^{r_n \Delta t_n} = 1 + r_n \Delta t_n + O(\Delta t_n^2)$ 을 고려하면

$$p_n = \frac{e^{r_n \Delta t_n} - e^{-\sigma_n \sqrt{\Delta t_n}}}{e^{\sigma_n \sqrt{\Delta t_n}} - e^{-\sigma_n \sqrt{\Delta t_n}}} =$$

$$= \frac{1 + r_n \Delta t_n + O(\Delta t_n^2) - (\sqrt{\Delta t_n})^3 \left(1 - \sigma_n \sqrt{\Delta t_n} + \frac{1}{2}\sigma_n^2 \Delta t_n - \frac{1}{6}\sigma_n^3 (\sqrt{\Delta t_n})^3 + O(\Delta t_n^2)\right)}{1 + \sigma_n \sqrt{\Delta t_n} + \frac{1}{2}\sigma_n^2 \Delta t_n + \frac{1}{6}\sigma_n^3 (\sqrt{\Delta t_n})^3 + O(\Delta t_n^2) - \left(1 - \sigma_n \sqrt{\Delta t_n} + \frac{1}{2}\sigma_n^2 \Delta t_n - \frac{1}{6}\sigma_n^3 (\sqrt{\Delta t_n})^3\right)} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\Delta t_n}}{2\sigma_n}\left(r_n - \frac{\sigma_n^2}{2}\right) + O((\sqrt{\Delta t_n})^3)$$

과 같다. 즉 2분나무법의 도식은 다음과 같이 쓸수 있다.

$$V^n(S,\ A) = e^{-r_n \Delta t_n}[p_n V^{n+1}(Su,\ A^u) + (1-p_n)V^{n+1}(Sd,\ A^d)] =$$

$$= \frac{1}{1 + r_n \Delta t_n + O(\Delta t_n^2)}\left[\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\Delta t_n}}{2\sigma_n}\left(r_n - \frac{\sigma_n^2}{2}\right) + O((\sqrt{\Delta t_n})^3)\right)V^{n+1}(Su,\ A^u) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\Delta t_n}}{2\sigma_n}\left(r_n - \frac{\sigma_n^2}{2}\right) + O((\sqrt{\Delta t_n})^3)\right)V^{n+1}(Sd,\ A^d)\right]$$

$\Delta t_n = \sigma_n^{-2} \Delta x^2$ 이므로 Δx^2 의 고차항을 무시하면 2분나무법은 우의 양적계차도식 (4)로 된다. 이리하여 다음의 정리를 증명하였다.

정리 2 시간의존결수를 가지는 아시아식산수평균판매선택권에 대하여 2분나무법은 우

의 양적계차도식 (4)와 Δx^2 의 고차의 무한소를 무시할 때 동등하다. 즉

$$p_n = a_n + O(\Delta x^3)$$

4. 2분나무법의 일치성 및 수렴성

정리 3 시간의존결수를 가지는 아시아식산수평균선택권의 2분나무법은 $r(t)$, $\sigma(t)$가 련속일 때 일치적이며 $\sigma_n^2 \Delta t_n / \Delta x^2 \le 1$ 및 $1-(1/\sigma_n^2)|r_n - \sigma_n^2/2|\Delta x \ge 0$이면 수렴한다.

참 고 문 헌

[1] L. S. Jiang et al.; Proceedings of Conference on PDE and its Applications, World Scientific, Singapore, 106～118, 1999.

[2] L. S. Jiang et al.; Journal of Computational Mathematics, 22, 3, 371, 2004.

[3] L. S. Jiang; Modeling and Methods of Option pricing, World Scientific, Singapore, 279~307, 2005.

[4] L. S. Jiang et al.; Siam J. Numer. Anal., 42, 1094, 2004.

[5] J. Lin et al.; Front. Math. China., 2, 2, 243, 2007.

[6] H. C. O et al.; Jour. Diff. Equat., 260, 4, 3151, 2016.

[7] H. C. O et al.; arXiv:1505.04573v2 [q-fin.PR] 1～26, 2015.

주체106(2017)년 8월 10일 원고접수

The Binomial Tree Method and a Specific Explicit Difference Scheme for Asian Arithmetic Average Put Options with Time Dependent Coefficients

O Hyong Chol, Kim Hak Yong

In this paper, we prove consistency and stability of a specific explicit difference scheme for Asian arithmetic average put options with time dependent coefficients. And then we establish a relationship between this explicit difference scheme and the BTM. Thus we have convergence of the BTM for Asian arithmetic average options.

Key words: arithmetic average, Asian option, binomial tree, explicit difference scheme