김일성종합대학학보 (수학)　　주체107(2018)년 제64권 제1호

해밀턴－야꼬비방정식의 한가지 풀이법과 응용

허명송, 차동혁

론문에서는 최근시기 많은 주목을 끌고있는 한가지 형태의 해밀턴－야꼬비방정식에 대한 연구를 진행하고 최량조종문제와 고화질화상확대에로의 응용문제를 취급하였다.

우리는 최량궤도문제의 값함수가 만족시켜야 할 방정식인 동시에 고화질화상확대에 적용가능한 방정식으로 되는 아이코날형해밀턴－야꼬비방정식의 점성풀이를 효과적으로 풀기 위한 한가지 방법을 연구하였으며 실험결과를 통하여 론문에서 제기한 방법의 효과성을 검증하였다.

선행연구[1]에서는 등방성아이코날방정식에 대하여 한가지 수치풀이법인 고속전진법을 제기하였다. 고속전진법은 그후에 비구조화된 그물우에서 일부 비등방성아이코날방정식에로 확장되였다.[2]

선행연구[3]에서는 해밀턴－야꼬비방정식을 리산화하기 위한 방법으로서 반라그랑쥬안도식을 제기하였으며 최소시간조종문제풀이에 적용하였다.

선행연구[4]에서는 고속전진법, 고속쓸기법 등을 비롯한 단순알고리듬들이 일반적인 정적해밀턴－야꼬비방정식을 다 풀수 있겠는가에 대하여 론의하고 부정적인 결론을 내리였다. 해밀턴－야꼬비방정식의 점성풀이를 구성하기 위한 한가지 방법은 ENO유한계차도식과 WENO계차도식이라고 볼수 있는데 WENO계차도식은 반복법으로서 여러 현실문제들에서 고차정밀도로 수렴한다는것이 확증되였다.[5]

론문에서는 등방성아이코날형해밀턴－야꼬비방정식들에 대하여 효과성이 검증된 선행의 알고리듬을 비등방성인 경우에로의 적용가능성을 론의하고 점성풀이를 효과적으로 구하기 위한 한가지 알고리듬을 제기하였다. 또한 값함수가 만족시켜야 할 방정식이 아이코날형해밀턴－야꼬비방정식으로 귀착되는 최량조종문제와 최근에 화상정보처리에서 주목되고있는 고화질화상확대에로의 응용에 대한 연구를 진행하였다.

$\mathbf{R}^2$에서 닫긴곡선 $\Gamma(t=0)\subset X\subset\mathbf{R}^2$의 시간에 따르는 전개에 관한 아이코날형해밀턴－야꼬비방정식의 초기값문제를 고찰한다.

$$\phi_t(x,\ t)+F(x)\,|\nabla\phi(x,\ t)|=0 \tag{1}$$

방정식 (1)에서 $\phi:\ \mathbf{R}^2\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$이고 시각 $t=0$에서 $\phi(x,0)$은 곡선 $\Gamma(t=0)\subset X\subset\mathbf{R}^2$에 대한 부호붙은 거리함수 즉

$$\phi(x,\ 0)=\begin{cases}-d(x), & x\in\Gamma^0\\ \ \ d(x), & x\notin\Gamma^0\end{cases} \tag{2}$$

이다. 여기서 Γ^0은 곡선 Γ의 안쪽을 의미하며 $d(x)$는 $x\in\mathbf{R}^2$로부터 곡선 Γ까지의 유클리드거리이다. 방정식 (1)에서 $F:\ \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}_+$는 전개곡선 Γ가 $x\in\mathbf{R}^2$를 지나는 속도를

의미한다. 초기값문제 (1), (2)의 풀이 $\phi(x,\ t)$에 의해 닫긴곡선 $\Gamma(t=0)\subset X\subset \mathbf{R}^2$의 시간에 따르는 전개 $\Gamma(t)=\{x|\phi(x,\ t)=0\}$을 얻을수 있다.

보조정리 함수 F에 대하여

$$F(x)>0,\quad x\in\mathbf{R}^2 \tag{3}$$

이라고 하자. 이때 임의의 시각 $t(>0)$에서 전개곡선 $\Gamma(t)$우의 매 점 x에서의 전개방향은 x를 지나는 ϕ의 령수준모임의 외법선단위벡토르방향이다. 즉

$$\hat{h}(t)=\frac{\nabla\phi(x,\ t)}{|\nabla\phi(x,\ t)|}$$

정리 임의의 $x\in\mathbf{R}^2$에 대하여 $F(x)>0$이라고 하자. 이때 방정식 (1)은

$$F\,|\nabla T(x)|=1 \tag{4}$$

와 동등하다. 여기서 $T(x)$는 전개곡선 Γ가 $x\in\mathbf{R}^2$을 지나는 최소시각이다.

이제 $h>0$을 리산화걸음의 크기라고 하고 S와 B는 $\mathbf{R}^2$의 서로 사귀지 않는 두 부분모임으로서 각각 모임 X와 ∂X의 리산화그물점(직4각형그물점)들의 모임이라고 하자.

$\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2$를 $\mathbf{R}^2$의 서로 직교하는 단위벡토르들이라고 하고

$$w_1=h\boldsymbol{e}_1,\ \ w_2=h\boldsymbol{e}_2,\ \ w_3=-h\boldsymbol{e}_1,\ \ w_4=-h\boldsymbol{e}_2$$

라고 놓으면 그물점 $x\in S$에 대하여 이웃한 그물점들의 모임을

$$N(x)=\{x+w_\alpha\mid \alpha=1,\cdots,\ 4\}$$

로 쓸수 있다. 방정식 (4)의 리산화된 형식은

$$[\max(\max(D_{ij}^{-x}T,\ 0),\ -\min(D_{ij}^{+x}T,\ 0))^2+\max(\max(D_{ij}^{-y}T,\ 0),\ -\min(D_{ij}^{+y}T,\ 0))^2]=\frac{1}{F_{ij}^2} \tag{5}$$

로 주어진다. 방정식 (5)에서 $D_{ij}^{-x}T$와 $D_{ij}^{+x}T$는 각각

$$D_{ij}^{-x}T=(T_{ij}-T_{i-1,\ j})/h\,,\ \ D_{ij}^{+x}T=(T_{i+1,\ j}-T_{ij})/h$$

로 정의한다. 여기서 T_{ij}와 F_{ij}는 각각 그물점$(i,\ j)$에서의 T와 F의 값이다.

리산화된 아이코날형해밀턴−야꼬비방정식의 풀이알고리듬은 다음과 같다.

풀이알고리듬

초기화

걸음 1 $L=\varnothing,\ U=\varnothing$로 놓는다. $k=0$으로 놓고 턱값 Th_0을 정한다.

걸음 2 매 $x\in B$에 대하여 $T(x)=0$으로 놓고 최소원소우선절차로 x를 L에 첨가시킨다. 매 그물점 $x\in S$에 대하여 $T(x)=\infty$로 놓는다.

갱신

걸음 1 최대원소마감절차로 L의 한 그물점 x를 L로부터 제거한다.

걸음 2 L로부터 제거된 그물점 x의 매 $y\in N(x)\cap S$에 대하여 만일 $T(y)>T(x)$이면 후보값 $\tilde{T}(y)$를 방정식 (5)에 의하여 계산한다.

걸음 3 만일 $T(y)>\tilde{T}(y)$이면 $T(y)=\tilde{T}(y)$로 놓고 y가 L에 속해있지 않으면 y를 최소원소우선절차로 L 또는 U에 첨가한다.

걸음 4 $L \neq \varnothing$ 이면 걸음 1(갱신단계)로, $L = \varnothing$ 이면 걸음 5로 이행한다.

걸음 5 $U = \varnothing$ 이면 알고리듬을 중지한다.

$U \neq \varnothing$ 이면 $k = k+1$ 로 놓고 턱값 Th_k 를 다시 정한다. U 의 매 원소에 대하여 턱값 Th_k 를 가지고 최소원소우선절차에 따라 L 에로 이동시킨다.

걸음 6 걸음 1(갱신단계)로 이행한다.

우에서 제기한 아이코날형해밀턴－야꼬비방정식의 풀이알고리듬이 고화질화상확대에로 어떻게 응용되는가를 론의한다. 고화질화상확대문제는 1개의 저해상도화상으로부터 고해상도화상을 얻어내는 문제이다.

고화질화상확대문제에서는 화상을 확대하는 과정에 본래화상의 고주파정보들이 없어지지 않도록 하는것이 본질적인 문제이다. 다시말하여 고화질화상확대문제에서는 화상을 확대하여도 본래화상의 화질이 될수록 그대로 보장될것을 요구한다.

고화질화상확대문제는 현실에서 많이 제기되는 중요한 문제라는데로부터 그에 대한 여러가지 방법들이 광범히 제기되였지만 특히 하나의 화상으로부터의 고화질화상확대는 여전히 어려운 문제로 되고있다.

론문에서는 화상을 확대하는 과정에 고주파정보들이 없어지는 현상을 막기 위한 방법의 하나로서 해밀턴－야꼬비방정식의 점성풀이를 리용하여 본래화상의 고주파성분들을 보존하기 위한 방법을 적용하며 우에서의 수치풀이알고리듬이 고속알고리듬이라는 우점을 적용하여 화상확대의 고속화를 진행한다.

또한 임의의 화상에도 적용가능한 bicubic의 화상확대의 우점을 살리기 위하여 bicubic의 화상확대방법을 화상확대알고리듬에 결합시킨다.

이제 화상을 확대하는 과정에 고주파정보들이 없어지는 현상을 막기 위한 방법을 론의한다. 화상평활 및 강조모형에서 대표적인 모형은 ALM모형으로서 다음과 같다.[6]

$$I_t = g(|\nabla G * I|)\,\kappa\,|\nabla I| \tag{6}$$

여기서 $I(x,\ t): \Omega \times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ 는 t 시각의 화상으로서 $t=0$ 인 경우의 $I(x,\ 0)$ 은 주어진 초기화상 즉 원화상을 의미한다. $\kappa(x) = \mathrm{div}\dfrac{\nabla I(x)}{|\nabla I(x)|}$ 는 화소 $x \in \Omega$ 에서의 곡률, G 는 가우시안핵이며 기호 $*$은 합성적이다. $F(x) = g(|\nabla G * I|)\,\kappa(x)$ 로 놓으면 방정식 (6)은 앞에서 론의한 아이코날형해밀턴－야꼬비방정식의 형태에 귀착된다.

론문에서는 화상평활 및 강조모형으로서 속도함수를 다음의 두 경우로 택하였다.

$$F(x) = \min\{\kappa(x),\ 0\},\quad F(x) = \max\{\kappa(x),\ 0\}$$

우의 론의를 종합하여 고화질화상확대방법을 다음과 같은 몇가지 단계로 서술한다.

단계 1 (화상의 륜곽정보의 보존)

이 단계는 주어진 화상의 륜곽정보를 얻고 그것을 보존하는 단계이다. 목적은 화상을 확대하는 과정에 고주파정보들이 없어지는 현상을 막기 위한 방법을 제기하기 위한 준비를 마련하는것이다.

화상의 륜곽정보를 얻는 여러가지 수법들(례컨대 쏘니연산자, 프레위츠연산자 등)이 있지만 잡음에 너무 예민하다는 제한성이 있으므로 한가지 새로운 방법을 제기한다. 이를 위하여 주어진 화상을 초기화상 $I(x,\ 0)$ 으로 하여 방정식 (6)을 우의 수치풀이알고리듬을

적용하여 풀어 평활 및 강조된 화상 $I(x,\ T_e)$를 얻는다. 초기화상 $I(x,\ 0)$과 평활 및 강조된 화상 $I(x,\ T_e)$를 리용하여 륜곽화상 $I_c(x)$를 다음과 같이 얻는다.

$$I_c(x)=\begin{cases}1, & |I(x,\ 0)-I(x,\ T_e)|\ge T_d\\ 0, & |I(x,\ 0)-I(x,\ T_e)|< T_d\end{cases}$$

여기서 T_d는 턱값이다. 륜곽화상 $I_c(x)$는 주어진 화상의 매 화소가 화상의 륜곽을 나타내는데 참가하는 화소인가 아닌가를 표현한다.

단계 2(화상확대)

이 단계는 주어진 화상을 확대하는 단계이다. 임의의 화상에 대하여 적용가능하며 실행시간이 빠른 bicubic의 화상확대방법의 우점을 그대로 살리기 위하여 이 단계에서 화상확대를 bicubic방법으로 화상을 확대한다. photoshop의 화상확대방법과의 본질적차이는 주어진 화상뿐아니라 단계 1에서 구한 마스크화상도 bicubic방법으로 확대한다는데 있다.

단계 3(륜곽정보보존－고화질화상생성단계)

photoshop의 bicubic방법의 제한성은 확대된 화상의 륜곽정보가 보존되지 못하고 흐려지는것이다. 이 제한성을 극복하기 위하여 확대된 화상의 륜곽마스크를 리용한다. 확대된 화상의 륜곽마스크와 화상평활 및 강조모형 (6)의 수치풀이에 의해 평활, 확대된 화상이 강조된 화상이 확대된 고화질화상으로 된다.

여러 부류의 화상들에 대한 고화질화상확대결과를 제시하기 위하여 식물화상을 선택하였으며 특히 여기서도 문양정보가 매우 복잡한 부분화상들에 대하여 실험한다. 즉 1개의 화상에서 문양정보가 매우 복잡한 부분화상들을 택하고 그 부분화상의 확대결과를 론의한다.

아래의 결과들은 bicubic방법과 론문에서 제기한 방법으로 각각 4배 확대한 결과들이라는것을 주의하여 둔다. 원화상에서 4각형으로 표시된 부분은 화상확대실험을 위한 부분화상이다. 이 부분화상들에 대하여 실험결과가 제시되였다.

그림 1－3은 꽃화상이다. 그림에서는 론문의 화상확대결과가 bicubic방법의 화상확대결과에서의 흐려짐효과의 제한성을 극복한 확대방법이라는것을 보여주고있다.

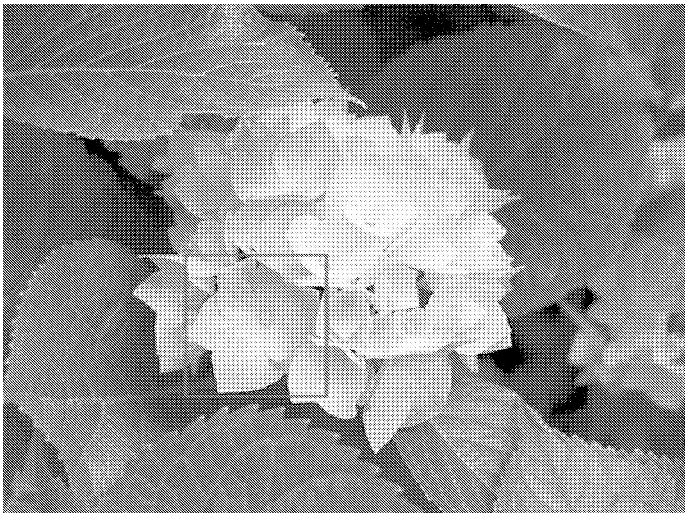

그림 1. 원화상

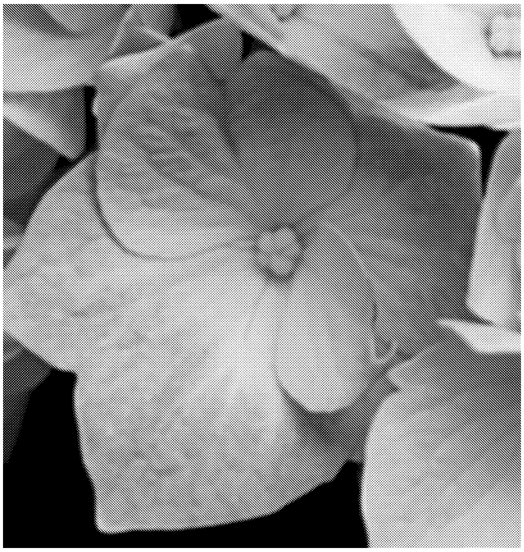
그림 2. bicubic결과


그림 3. 론문의 결과

참 고 문 헌

[1] J. A. Sethian et al.; SIAM J. Numer. Anal., 41, 1, 323, 2003.

[2] H. Liu et al.; SIAM J. Sci. Comput., 35, 1, 122, 2013.

[3] M. Falcone et al.; SIAM J. Sci. Comput., 36, 1, 350, 2014.

[4] S. Cacace et al.; SIAM J. Sci. Comput., 36, 3, 570, 2014.

[5] J. Zhu et al.; Commun. Comput. Phys., 15, 4, 959, 2014.

[6] L. Alvarez et al.; SIAM J. Numer. Anal., 29, 3, 845, 1992.

주체106(2017)년 8월 10일 원고접수

A Solving Method of the Hamilton-Jacobi Equation and Its Application

Ho Myong Song, Cha Tong Hyok

In this paper, we propose an algorithm for constructing the viscosity solution of the anisotropic Eikonal Hamilton-Jacobi equation on the nonstructural mesh. We also discuss the optimal control problem and image super-resolution problem derived to the Eikonal Hamilton-Jacobi equation.

Key words: Hamilton-Jacobi equation, optimal control, image super-resolution