제한을 가지고 분배되는 확률모형에서의 생존확률방정식

김주경, 김철호

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《과학기술부문에서는 해당 과학기술문제해결에서 제일 걸린 문제, 가장 큰 실리를 보장할수 있는 문제를 종자로 선택하고 하나하나 풀어나가야 합니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제20권 381페지)

선행연구[3]에서는 제한이 있는 한가지 확률모형에서 최량화문제를 설정하고 생존확률방정식을 유도하여 최량방략을 결정하였고 선행연구[1, 2]에서는 조건을 가지는 확률모형에서 주목하는 사건이 일어나기 전까지 나누어지는 분배량의 기대값이 최대가 되는 제한문제와 시각을 연구하였다.

론문에서는 일정한 제한을 가지고 분배되는 확률모형에서 생존확률을 만족시키는 방정식을 연구하였다.

론문에서는 완비확률공간 $(\Omega,\ \mathscr{F},\ \{\mathscr{F}_t\},\ \boldsymbol{P})$ 에서

$$X(t)=u-ct+\sum_{i=1}^{N_\lambda(t)}\xi_i+\sigma w(t)-\sum_{j=1}^{N_\gamma(t)}\eta_j$$

와 같은 확률모형을 연구대상으로 한다. 여기서 $X(t)$ 는 t 시각의 특성값, u 는 초기특성값, $c>0$ 은 어떤 상수, $\{w(t)\}_{t\in\mathbf{R}^+}$ 는 표준브라운운동이고 $\sigma>0$ 이다. $\{N_\lambda(t)\}_{t\in\mathbf{R}^+}$, $\{N_\gamma(t)\}_{t\in\mathbf{R}^+}$ 는 각각 세기가 λ, γ 인 뽜쏭과정이며 $\{\xi_i\}_{i=1,\ 2,\ \cdots}$, $\{\eta_j\}_{j=1,\ 2,\ \cdots}$ 은 각각 독립, 동일분포하는 입력우연량렬, 분배우연량렬이다. $\xi_1,\ \eta_1$ 의 밀도함수는 각각 $p_\xi(z),\ p_\eta(y)$ 이다.

복합뽜쏭과정은 확률련속이고 시간에 관하여 균일한 독립증분과정이므로 특성량에 대한 우연과정 $\{X(t)\}$ 도 확률련속이고 시간에 관하여 균일한 독립증분과정이다.

주기적으로 특성량의 일부는 분배되는데 이때 분배는 특성이 일정한 한계값이상일 때에만 진행된다고 하자.

분배는 특성이 령이 되지 않을 정도로 하는것이 원칙이다.

특성이 령보다 작아지는 시각 즉 $T_x:=\inf\{t:\geq 0,\ X(t)\leq 0\,|\,X(0)=x\}$ 를 특성의 파산시각이라고 부르고 $\psi(x)=\boldsymbol{P}\{T_x<0\}$ 을 특성의 파산확률이라고 부른다.

확률과정 $\{X(t)\}$ 가 확률련속이므로 파산시각은 정지시각이다.

$\Phi(x)=1-\psi(x)$ 를 특성의 생존확률이라고 부른다.

$b(>0)$ 는 일정한 한계를 나타내는 정의상수라고 할 때 특성값이 한계값 b 이하인 경우에는 분배를 진행하지 않고 그 이상일 때에만 분배를 진행한다.

이때 특성의 파산확률에 대하여 다음의 정리가 성립된다.

정리 1 $0<x<b$ 인 경우에

$$\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_1(x)-c\frac{\partial}{\partial x}\psi_1(x)-(\lambda+\gamma)\psi_1(x)+\lambda\int_0^{b-x}\psi_1(x+z)p_\xi(z)dz=0 \qquad (1)$$

이, $b<x<\infty$ 인 경우에 다음의 식이 성립된다.

$$\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_2(x)-c\frac{\partial}{\partial x}\psi_2(x)-(\lambda+\gamma)\psi_2(x)+\lambda\int_0^{\infty}\psi_2(x+z)p_\xi(z)dz+$$

$$+\gamma\int_0^{b-x}\psi_2(x-z)p_\eta(z)dz+\gamma\int_{b-x}^{x}\psi_1(x-z)p_\eta(z)dz=0 \tag{2}$$

$\psi(0)=0$

방정식 (1), (2)보다 일반화된 다음의 방정식풀이에 대하여 보기로 하자.

정리 2 $0<x<b$인 경우에 식 (3)은 (4)와 동등하다.

$$\frac{\sigma^2}{2}\varphi_1''(x)-c\varphi_1'(x)-(\lambda+\gamma)\varphi_1(x)+\lambda\int_0^{b-x}\varphi_1(x+z)p_\xi(z)dz=g(x) \tag{3}$$

$$\varphi_1(x)=F_1(x)+\hat{\lambda}\int_0^b\varphi_1(u)G_3(x,\ u)du \tag{4}$$

여기서 $G_3(x,\ y)=-\int_0^y\widetilde{K}(x,\ u)p_\xi(y-u)du,\ \ F_1(x)=\frac{a_1}{1-e^{-b}}g_0(x)+\frac{2}{\sigma^2}\int_0^b g(u)\widetilde{K}(x,\ u)du$

$$f_0(x)=1-e^{-x}-\hat{\lambda}\int_0^b(1-e^{-y})G_3(x,\ y)dy+\frac{2}{\sigma^2}\int_0^b g_1(y)\widetilde{K}(x,\ y)dy$$

$$g_1(x)=e^{-x}\left(\frac{\sigma^2}{2}-c-(\lambda+\gamma)-\lambda\int_0^{b-x}e^{-z}p_\xi(z)dz\right)+\lambda+\gamma-\lambda p_\xi(b-x)$$

$$\widetilde{K}(x,\ y)=\begin{cases}c_3(x)(e^{\beta_1 y}-e^{\beta_2 y}), & 0<y<x\\ c_4(x)e^{\beta_1 y}+c_5(x)e^{\beta_2 y}, & x\le y<b\end{cases} \tag{5}$$

$$c_3(x)=\frac{e^{-\beta_1 x}-e^{(\beta_2-\beta_1)b-\beta_2 x}}{(\beta_1-\beta_2)(e^{(\beta_2-\beta_1)b}-1)}<0,\ c_4(x)=\frac{e^{-\beta_2 x}-e^{-\beta_1 x}}{(\beta_1-\beta_2)(1-e^{(\beta_1-\beta_2)b})}>0,\ c_5(x)=\frac{e^{-\beta_2 x}-e^{-\beta_1 x}}{(\beta_1-\beta_2)(e^{(\beta_2-\beta_1)b}-1)}<0$$

$\beta_1,\ \beta_2$는 2차방정식 $\sigma^2\beta^2/2+c\beta-(\lambda+\gamma)=0$의 $\beta_1>0>\beta_2$인 두 실뿌리이다.

증명 식 (5)로 표시된 함수 $\widetilde{K}(x,\ y)$는 다음의 방정식의 풀이이다.

$$\sigma^2\widetilde{K}''_{yy}(x,\ y)/2+c\widetilde{K}'_y(x,\ y)-(\lambda+\gamma)\widetilde{K}(x,\ y)=0$$

$$\widetilde{K}(x,\ 0)=0,\ \widetilde{K}(x,\ b)=0,\ \widetilde{K}'_y(x,\ x+)-\widetilde{K}'_y(x,\ x-)=1,\ \widetilde{K}(x,\ x+)=\widetilde{K}(x,\ x-)$$

함수 $\varphi_1(x)$가 방정식 (3)의 풀이라면 함수 $w(x)=\varphi_1(x)-a_1(1-e^{-x})/(1-e^{-b})$은 다음의 방정식풀이로 된다.

$$\frac{\sigma^2}{2}w''(x)-cw'(x)-(\lambda+\gamma)w(x)+\lambda\int_0^{b-x}w(x+z)p_\xi(z)dz=g(x)+\frac{a_1}{1-e^{-b}}g_1(x),\ \ w(0)=0,\ \ w(b)=0 \tag{6}$$

식 (6)으로부터 $g_1(x)$는 다음과 같다.

$$g_1(x)=e^{-x}\left(\frac{\sigma^2}{2}-c-(\lambda+\gamma)-\lambda\int_0^{b-x}e^{-z}p_\xi(z)dz\right)+\lambda+\gamma-\lambda p_\xi(b-x)$$

방정식 (6)의 량변에 $\widetilde{K}(x,\ y)$를 곱하고 0부터 b까지 적분하면 다음과 같다.

$$w(x)=\hat{\lambda}\int_0^b w(z)G_3(x,\ z)dz+\frac{2}{\sigma^2}\int_0^b K(x,\ y)\left(g(y)+\frac{a_1}{1-e^{-b}}g_1(y)\right)dy$$

$$G_1(x,\ y)=-\int_0^y \widetilde{K}(x,\ u)p_\xi(y-u)du$$

따라서 함수 $\varphi_1(x)$는 방정식 (4)와 같다.(증명끝)

정리 3 편미분－적분방정식

$$\frac{\sigma^2}{2}\varphi_2''(x)-c\varphi_2'(x)-(\lambda+\gamma)\varphi_2(x)+\lambda\int_0^\infty \varphi_2(x+z)p_\xi(z)dz+\gamma\int_0^{x-b}\varphi_2(x-z)p_\eta(z)dz+$$

$$+\gamma\int_{x-b}^{x}\varphi_1(x-z)p_\eta(z)dz=f(x) \tag{7}$$

$$\varphi_2(b)=a_2,\ \varphi(\infty)=0$$

은 다음의 적분방정식과 동등하다.

$$\varphi_2(x)=F_2(x)+\hat{\lambda}\int_b^\infty \varphi_2(u)G_4(x,\ u)du+\hat{\gamma}\int_b^\infty \varphi_2(u)G_5(x,\ u)du+\hat{\gamma}\int_0^b \varphi_1(u)G_6(x,\ u)du \tag{8}$$

$$G_4(x,\ y)=-\int_b^y K(x,\ u)p_\xi(y-u)du,\ G_5(x,\ y)=\int_y^\infty K(x,\ u)p_\eta(u-y)du,\ G_6(x,\ y)=\int_b^\infty K(x,\ u)p_\eta(u-y)du$$

$$F(x)=\varphi_0 f_0(x)+\frac{2}{\sigma^2}\int_0^\infty f(u)K(x,\ u)du$$

$$f_0(x)=e^{b-x}+\mu\int_b^\infty e^{b-y}K(x,\ y)dy,\ \mu=\frac{2}{\sigma^2}\left(\lambda+\gamma-c-\frac{\sigma^2}{2}\right)$$

$$f_1(x)=e^{b-x}\left(\lambda+\gamma-c-\frac{\sigma^2}{2}-\lambda\int_0^\infty e^{-z}p_\xi(z)dz-\gamma\int_0^{x-b}e^z p_\eta(z)dz\right)$$

$$K(x,\ y)=\begin{cases}c_6(x)e^{\alpha_1 y}+c_7(x)e^{\alpha_2 y}, & b<y<x\\ c_8(x)e^{\alpha_2 y}, & x\le y<\infty\end{cases} \tag{9}$$

$$c_6(x)=-\frac{e^{-\alpha_1 x}}{\alpha_1-\alpha_2}<0,\ c_7(x)=\frac{e^{(\alpha_1-\alpha_2)b-\alpha_1 x}}{\alpha_1-\alpha_2}>0,\ \ c_8(x)=\frac{e^{(\alpha_1-\alpha_2)b-\alpha_1 x}-e^{-\alpha_2 x}}{\alpha_1-\alpha_2}<0$$

여기서 $\alpha_1,\ \alpha_2$는 $\sigma^2\alpha^2/2+c\alpha-(\lambda+\gamma)=0$의 $\alpha_1>0>\alpha_2$인 두 실뿌리이다.

증명 식 (9), (10)으로 표시된 함수 $K(x,\ y)$는 다음의 방정식풀이이다.

$$\sigma^2 K_{yy}''(x,\ y)/2+cK_y'(x,\ y)-(\lambda+\gamma)K(x,\ y)=0 \tag{10}$$

$$K(x,\ b)=0,\ K(x,\ +\infty)=0,\ \ K_y'(x,\ x+)-K_y'(x,\ x-)=1,\ K(x,\ x+)=K(x,\ x-) \tag{11}$$

식 (9)로 표시된 함수 $K(x, y)$를 방정식 (10)과 경계조건 (11)에 대입하면 함수 $w(x)=\varphi_2(x)-a_2e^{b-x}$은 다음의 방정식풀이로 된다.

$$\frac{\sigma^2}{2}w''(x)-cw'(x)-(\lambda+\gamma)w(x)+\lambda\int_0^\infty w(x+z)p_\xi(z)dz+\gamma\int_0^x w(x-z)p_\eta(z)dz+$$
$$+\gamma\int_{x-b}^{x}\varphi_1(x-z)p_\eta(z)dz=f(x)+a_2f_1(x) \quad (12)$$

$w(0)=0,\ w(\infty)=0$

$\varphi_2(x)$가 방정식 (7)의 풀이이므로 $f_1(x)$는 다음과 같다.

$$f_1(x)=e^{b-x}\left(\lambda+\gamma-c-\frac{\sigma^2}{2}-\lambda\int_0^\infty e^{-z}p_\xi(z)dz-\gamma\int_0^{x-b}e^z p_\eta(z)dz\right)$$

방정식 (12)의 량변에 $K(x,\ y)$를 곱하고 b부터 ∞까지 적분하면 다음과 같다.

$$\int_b^\infty \frac{\sigma^2}{2}w''(y)K(x,\ y)dy=\frac{\sigma^2}{2}w(x)-\frac{\sigma^2}{2}\int_b^\infty w(y)K''(x,\ y)dy,\ -\int_b^\infty cw'(y)K(x,\ y)dy=c\int_b^\infty w(y)K'(x,\ y)dy$$

$$w(x)=\hat{\lambda}\int_b^\infty w(z)G_4(x,\ z)dz+\hat{\gamma}\int_b^\infty w(z)G_5(x,\ z)dz+\hat{\gamma}\int_0^b \varphi_1(z)G_6(x,\ z)dz+\frac{2}{\sigma^2}\int_b^\infty K(x,\ y)(f(y)+a_2f_1(y))dy$$

또한 $\mu=\dfrac{2(\lambda+\gamma-c-\sigma^2/2)}{\sigma^2}$라고 하면 $f_0(x)=e^{b-x}+\mu\int_b^\infty e^{b-y}K(x,\ y)dy$가 성립된다.

따라서 함수 $\varphi_2(x)$는 방정식 (8)을 만족시킨다.(증명끝)

정리 2, 3의 결과인 재생방정식 (4), (8)을 리용하면 점차근사법에 의하여 파산확률 $\psi_1(x)$와 $\psi_2(x)$ 또는 생존확률 $\Phi_1(x)$와 $\Phi_2(x)$를 계산할수 있다.

참 고 문 헌

[1] B. Avanzia et al.; Mathematics and Economics, 41, 111, 2007.
[2] B. Avanzia et al.; Mathematics and Economics, 55, 210, 2014.
[3] H. U. Gerber et al.; Mathematics and Economics, 42, 243, 2008.

주체108(2019)년 9월 15일 원고접수

The Survival Probability Equation in a Stochastic Model Dividend with Bound

Kim Ju Gyong, Kim Chol Ho

We consider the survival probability equation in a stochastic model dividend under some bound.

Keyword: survival probability equation