김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체104(2015)년 제61권 제2호 Vol. 61 No. 2 JUCHE104(2015).

비약잡음이 있는 프락탈블랙－숄즈모형에서 교환선택권의 가격공식

김 경 희

론문에서는 유럽식구매선택권에 대한 가격공식에 대한 선행연구[1]의 증명에서 몇가지 오유를 발견하고 이러한 오유를 수정한 다음 이 결과를 비약을 가진 프락탈블랙－숄즈모형에서 교환선택권에 대한 가격공식으로 확장하였다.

비약을 가진 프락탈블랙－숄즈모형은 다음과 같다.[1]

$$B(t)=(r_d-r_f)B(t)dt,\quad B(0)=1$$
$$dS(t)=S(t)((\mu-\lambda\mu_\xi)dt+\sigma dB_H(t)+(e^\xi-1)dN(t)),\ S(0)=S \tag{1}$$

여기서 r_d, r_f 는 각각 단기내화리윤률, 외화리윤률이고 $S(t)$ 는 내화로 관측된 단위외화의 t 시각의 교환률이며 μ, σ 는 상수로 가정한다. $B_H(t)$, $N(t)$ 는 각각 프락탈브라운운동, 파라메터 λ 를 가진 뽜쏭과정이다. ξ 는 t시각의 비약크기의 퍼센트로서 독립이고 동일분포하는데 분포는 $(e^\xi-1)\sim N(\mu_\xi,\ \delta_\xi^2)$ 이다. 세가지 우연성원천들인 프락탈브라운운동 $B_H(t)$, 뽜쏭과정 $N(t)$, 비약크기 $e^\xi-1$ 들은 서로 독립이라고 가정한다.

화폐들은 주권들과는 서로 다르며 더우기는 기하브라운운동이 화폐수익의 동태를 정확히 포착할수 없는데로부터 화폐선택권에 대하여서는 표준적인 선택권가격모형에 의해서 가격이 잘못 정해진다.[4]

선행연구[3]에서는 주권가격과정에서 나타나는 이상한 변동을 포착하기 위하여 뽜쏭비약을 가진 비약확산과정을 제기하였다.

선행연구[2]에서는 기하프락탈브라운운동을 리용하여 선택권가격화에 대한 프락탈블랙－숄즈공식을 유도하였으며 선행연구[1]에서는 뽜쏭비약과 프락탈브라운운동을 결합한 프락탈블랙－숄즈모형 (1)과 류사한 모형을 처음으로 제기하고 유럽식구매선택권에 대한 가격공식을 유도하였으나 준조건부기대값계산에서 일련의 오유가 있다.

론문에서는 비약이 있는 프락탈블랙－숄즈모형에서 유럽식구매선택권과 교환선택권의 가격공식을 유도하여 선행한 가격공식을 일반화하였다.

보조정리 1[2] 프락탈확률미분방정식 $dX(t)=X(t)(\mu dt+\sigma dB_H(t)),\ X(0)=x$ 의 풀이는 $X(t)=x\exp(\sigma B_H(t)+\mu t-\sigma^2t^{2H}/2)$ 으로 표시된다.

보조정리 2[2] f 를 $\mathrm{E}[f(B_H(T))]<\infty$ 인 함수라고 하자.

이때 임의의 $t<T$ 에 대하여 $\tilde{\mathrm{E}}_t[f(B_H(T))]=\int_R \frac{1}{\sqrt{2\pi(T^{2H}-t^{2H})}}\exp\left(-\frac{(x-B_H(t))^2}{2(T^{2H}-t^{2H})}\right)f(x)dx$

가 성립된다.

이제 $\theta\in\boldsymbol{R}$ 라고 하자.

과정 $B_H^*(t)=B_H(t)+\theta t^{2H}=B_H(t)+\int_0^t 2H\theta\tau^{2H-1}d\tau$, $0\le t\le T$ 는 프라탈길싸노브정리에 의하여 새로운 측도 μ^* 밑에서 프라탈브라운운동으로 된다. 여기서 측도 μ^* 은 $\frac{d\mu^*}{d\mu}=Z^*(t)=\exp\left(-\theta B_H(t)-\frac{\theta^2}{2}t^{2H}\right)$으로 정의된다.

측도 μ^*에 관한 준-조건부기대값을 $\tilde{\mathrm{E}}_t^*[\cdot]$이라고 하면 다음의 결과가 성립된다.

보조정리 3[2] f가 $\mathrm{E}[f(B_H(T))]<\infty$인 함수라고 하자.

이때 매 $t<T$에 대하여 $\tilde{\mathrm{E}}_t^*[f(B_H(T))]=\frac{1}{Z(t)}\tilde{\mathrm{E}}_t[f(B_H(T))Z(T)]$이다.

보조정리 4[2] (프라탈위험-중성가격정리) 유계인 F_T^H-가측인 청구 $F\in L^2(\mu)$의 매 시각 $t\in[0,\ T]$에서의 가격은 $F(t)=e^{-r(T-t)}\tilde{\mathrm{E}}_t[F]$로 주어진다.

정리 1 비약잡음이 있는 프라탈블랙-숄즈모형 (1)에서 유럽식선택권의 가격공식은 다음과 같이 주어진다.

$$V(S(t),\ t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n(T-t)^n}{n!}e^{-\lambda(T-t)}\varepsilon_n\left\{S(t)\exp\left(-\lambda\mu_\xi(T-t)+\sum_{j=1}^n\xi_j\right)\Phi(d_+)-Ke^{-(r_d-r_f)(T-t)}\Phi(d_-)\right\}$$

여기서 $d_\pm=\frac{\ln(S(t)/K)+\sum_{j=1}^n\xi_j+(r_d-r_f-\lambda\mu_\xi)(T-t)}{\sigma\sqrt{T^{2H}-t^{2H}}}\pm\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T^{2H}-t^{2H}}$ 이고 ε_n은 $\exp\left(\sum_{j=1}^n\xi_j\right)$의 분포에 관한 수학적기대값연산자를 의미한다.

증명 모형 (1)은 리식기회를 가지지 않으며 완비이다.

그러므로 위험중성측도 $\hat{P}_H$ 밑에서 모형 (1)은

$$dS(t)=S(t)\{(r_d-r_f)dt+\sigma d\hat{B}_H(t)+(e^\xi-1)dN(t)\} \tag{2}$$

로 표시된다. 여기서 위험중성측도 $\hat{P}_H$은 $\frac{d\hat{P}_H}{dP_H}=\exp\left\{-\theta B_H(t)-\frac{\theta^2}{2}t^{2H}\right\}$에 의하여 정의되고 이 측도밑에서 $\hat{B}_H(t)=B_H(t)+\theta t^{2H}$은 프라탈브라운운동으로 되며

$$\theta=(\mu-\lambda\mu_\xi+r_f-r_d)/\sigma.$$

방정식 (2)의 풀이는 선행연구[1]에 의하여

$$S(T)=S(t)\exp\left\{(r_d-r_f-\lambda\mu_\xi)(T-t)-\frac{1}{2}\sigma^2(T^{2H}-t^{2H})+\sigma(\hat{B}_H(T)-\hat{B}_H(t))+\sum_{j=1}^{N(T-t)}\xi_j\right\}$$

로 표시된다. 보조정리 4에 의하여 유럽식구매선택권 $F=(S(T)-K)^+$의 t시각의 가격은 $V(S(t),\ t)=e^{-(r_d-r_f)(T-t)}\tilde{\mathrm{E}}_t[F]=e^{-(r_d-r_f)(T-t)}\tilde{\mathrm{E}}_{\hat{P}_H}[F\,|\,\mathbf{F}_t^H]$로 되며

$$S_n(T)=S(t)\exp\left\{(r_d-r_f-\lambda\mu_\xi)(T-t)-\frac{1}{2}\sigma^2(T^{2H}-t^{2H})+\sigma(\hat{B}_H(T)-\hat{B}_H(t))+\sum_{j=1}^{n}\xi_j\right\}$$

로 정의하면

$$V(S(t),\ t)=e^{-(r_d-r_f)(T-t)}\widetilde{\mathrm{E}}_{\hat{P}_H}[(S(T)-K)^+\,|\,\boldsymbol{F}_t^H]=$$
$$=e^{-(r_d-r_f)(T-t)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n(T-t)^n}{n!}e^{-\lambda(T-t)}\widetilde{\mathrm{E}}_{\hat{P}_H}[(S(T)-K)^+\,|\,\boldsymbol{F}_t^H], \tag{3}$$
$$\widetilde{\mathrm{E}}_{\hat{P}_H}[(S(T)-K)^+\,|\,\mathbf{F}_t^H]=\widetilde{\mathrm{E}}_{\hat{P}_H}[S_n(T)\chi_{\{S_n(T)>K\}}\,|\,\mathbf{F}_t^H]-K\widetilde{\mathrm{E}}_{\hat{P}_H}[\chi_{\{S_n(T)>K\}}\,|\,\mathbf{F}_t^H] \tag{4}$$

이므로 우선 $\widetilde{\mathrm{E}}_{\hat{P}_H}[\chi_{\{S_n(T)>K\}}\,|\,\mathbf{F}_t^H]$를 평가하자.

보조정리 2로부터

$$\widetilde{\mathrm{E}}_{\hat{P}_H}[\chi_{\{S_n(T)>K\}}\,|\,\mathbf{F}_t^H]=\widetilde{\mathrm{E}}_{\hat{P}_H}[\chi_{\{\hat{B}_H(T)>d_-^*\}}\,|\,\mathbf{F}_t^H]=\frac{1}{\sqrt{2\pi(T^{2H}-t^{2H})}}\int_{d_-^*}^{\infty}\exp\left(-\frac{(x-\hat{B}_H(t))^2}{2(T^{2H}-t^{2H})}\right)dx=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{d_-^*-\hat{B}_H(t)}{\sqrt{T^{2H}-t^{2H}}}}^{\infty}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy=\Phi\left(\frac{\hat{B}_H(t)-d_-^*}{\sqrt{T^{2H}-t^{2H}}}\right)=\Phi(d_-) \tag{5}$$

이다. 여기서 $d_-^*=\dfrac{\ln\left(\dfrac{K}{S(t)}\right)-(r_d-r_f-\lambda\mu_\xi)(T-t)+\dfrac{1}{2}\sigma^2(T^{2H}-t^{2H})-\sum_{j=1}^{n}\xi_j+\sigma\hat{B}_H(t)}{\sigma}$ 이다.

다음 $\widetilde{\mathrm{E}}_{\hat{P}_H}[S_n(T)\chi_{\{S_n(T)>K\}}\,|\,\mathbf{F}_t^H]$를 평가하자.

$B_H^*(t)=\hat{B}_H(t)-\sigma t^{2H}$으로 놓으면 프락탈길싸노브정리에 의하여 $B_H^*(t)$는 프락탈브라운운동으로 되는 확률측도 P_H^*이 존재한다.

사실 확률측도 P_H^*는 $\dfrac{dP_H^*}{d\hat{P}_H}=\exp\left\{\sigma\, d\hat{B}_H(t)-\dfrac{1}{2}\sigma^2t^{2H}\right\}=Z(t)$로 정의된다.

보조정리 3으로부터

$$\widetilde{\mathrm{E}}_{\hat{P}_H}[S_n(T)\chi_{\{S_n(T)>K\}}\,|\,\boldsymbol{F}_t^H]=S\exp\left((r_d-r_f-\lambda\mu_\xi)T+\sum_{j=1}^{n}\xi_j\right)\widetilde{\mathrm{E}}_{\hat{P}_H}[Z(T)\chi_{\{S_n(T)>K\}}\,|\,\boldsymbol{F}_t^H]=$$
$$=S\exp\left((r_d-r_f-\lambda\mu_\xi)T+\sum_{j=1}^{n}\xi_j\right)Z(t)\widetilde{\mathrm{E}}_{P_H^*}[\chi_{\{B_H(T)>d_+^*\}}\,|\,\boldsymbol{F}_t^H]=$$
$$=S_n(t)\exp((r_d-r_f-\lambda\mu_\xi)(T-t))\widetilde{\mathrm{E}}_{P_H^*}[\chi_{\{B_H(T)>d_+^*\}}\,|\,\boldsymbol{F}_t^H]= \tag{6}$$
$$=S(t)\exp\left((r_d-r_f-\lambda\mu_\xi)(T-t)+\sum_{j=1}^{n}\xi_j\right)\widetilde{\mathrm{E}}_{P_H^*}[\chi_{\{B_H^*(T)>d_+^*\}}\,|\,\boldsymbol{F}_t^H]=$$
$$=S(t)\exp\left((r_d-r_f-\lambda\mu_\xi)(T-t)+\sum_{j=1}^{n}\xi_j\right)\Phi(d_+)\ .$$

여기서 $d_+^*=d_-^*-\sigma T^{2H}$, $d_+=\dfrac{B_H^*(t)-d_+^*}{\sqrt{T^{2H}-t^{2H}}}=d_-+\sigma(T^{2H}-t^{2H})$이다.

따라서 식 (5), (6)을 식 (3), (4)에 대입하면 정리의 결과가 나온다.

정리 2 비약잡음이 있는 프락탈블랙－숄즈모형 (1)에서 2개 종류의 외화교환률에 관한 교환선택권의 가격공식은 다음과 같이 주어진다.

$$V(S(t),\ t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n(T-t)^n}{n!}e^{-\lambda(T-t)}\varepsilon_n\cdot$$

$$\cdot\left\{S_1(t)\exp\left(-\lambda\mu_\xi(T-t)+\sum_{j=1}^{n}\xi_j^{(1)}\right)\Phi(\tilde{d}_+)-S_2(t)\exp\left(-\lambda\mu_\xi(T-t)+\sum_{j=1}^{n}\xi_j^{(2)}\right)\Phi(\tilde{d}_-)\right\}$$

여기서 $\tilde{d}_\pm=\dfrac{\ln\left(\dfrac{S_1(t)}{S_2(t)}\right)\pm\dfrac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)^2(T^{2H}-t^{2H})+\sum_{j=1}^{n}(\xi_j^{(1)}-\xi_j^{(2)})}{(\sigma_1-\sigma_2)\sqrt{T^{2H}-t^{2H}}}$ 이다.

증명 위험중성측도 $\hat{P}_H$ 밑에서 2개의 외화교환률 $S_1(t),\ S_2(t)$ 는 다음의 방정식을 만족시킨다.

$$\begin{cases}dS_1(t)=S_1(t)\{(r_d-r_f)dt+\sigma_2 d\hat{B}_H(t)+(e^{\xi^{(1)}}-1)dN(t)\}\\ dS_2(t)=S_2(t)\{(r_d-r_f)dt+\sigma_2 d\hat{B}_H(t)+(e^{\xi^{(2)}}-1)dN(t)\}\end{cases}$$

보조정리 4를 고려하면 교환선택권의 t시각의 가격은

$$V(S_1(t),\ S_2(t),\ t)=e^{-(r_d-r_f)(T-t)}\tilde{\mathrm{E}}_{\hat{P}_H}[(S_1(T)-S_2(T))^+\,|\,\mathbf{F}_t^H]=$$

$$=e^{-(r_d-r_f)(T-t)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n(T-t)^n}{n!}e^{-\lambda(T-t)}\tilde{\mathrm{E}}_{\hat{P}_H}[(S_{1n}(T)-S_{2n}(T))^+\,|\,\mathbf{F}_t^H].\tag{7}$$

여기서 $S_{in}(T)=S_i(t)\exp\left\{(r_d-r_f-\lambda\mu_\xi)(T-t)-\dfrac{\sigma_i^2}{2}(T^{2H}-t^{2H})+\sigma_i(\hat{B}_H(T)-\hat{B}_H(t))+\sum_{j=1}^{n}\xi_j^{(i)}\right\}$ 으로 정의된다. 그리고 $\tilde{\mathrm{E}}_{\hat{P}_H}[(S_{1n}(T)-S_{2n}(T))^+\,|\,\mathbf{F}_t^H]=\tilde{\mathrm{E}}_{\hat{P}_H}\left[S_{2n}(T)\left(\dfrac{S_{1n}(T)}{S_{2n}(T)}-1\right)^+\middle|\,\mathbf{F}_t^H\right]$ 이다.

이제 $\dfrac{dQ_H}{d\hat{P}_H}=\exp\{\sigma_2\hat{B}_H(t)-\sigma_2^2t^{2H}/2\}=\tilde{Z}(t)$ 로 놓자.

그러면 측도 Q_H 밑에서 $\tilde{B}_H(t)=\hat{B}_H(t)-\sigma_2 t^{2H}$ 은 프락탈브라운운동으로 되고 보조정리 3으로부터 다음의 식이 성립된다.

$$\tilde{\mathrm{E}}_{\hat{P}_H}\left[S_{2n}(T)\left(\frac{S_{1n}(T)}{S_{2n}(T)}-1\right)^+\middle|\,\mathbf{F}_t^H\right]=\tilde{\mathrm{E}}_{\hat{P}_H}\left[S_2\exp\left\{(r_d-r_f-\lambda\mu_\xi)T+\sum_{j=1}^{n}\xi_j^{(2)}\right\}\tilde{Z}(T)\left(\frac{S_{1n}(T)}{S_{2n}(T)}-1\right)^+\middle|\,\mathbf{F}_t^H\right]=$$

$$=S_2\exp\left\{(r_d-r_f-\lambda\mu_\xi)T+\sum_{j=1}^{n}\xi_j^{(2)}\right\}\tilde{Z}(t)\tilde{\mathrm{E}}_{Q_H}\left[\left(\frac{S_{1n}(T)}{S_{2n}(T)}-1\right)^+\middle|\,\mathbf{F}_t^H\right]=$$

$$=S_2(t)\exp\left\{(r_d-r_f-\lambda\mu_\xi)(T-t)+\sum_{j=1}^{n}\xi_j^{(2)}\right\}\tilde{\mathrm{E}}_{Q_H}\left[\left(\frac{S_{1n}(T)}{S_{2n}(T)}-1\right)^+\middle|\,\mathbf{F}_t^H\right]\tag{8}$$

$t=0$, $T=t$ 로 놓고 $S_{in}(T)$ 의 표시식을 고려하면

$$\frac{S_{1n}(t)}{S_{2n}(t)}=\frac{S_1}{S_2}\exp\left\{(\sigma_1-\sigma_2)d\hat{B}_H(t)-\frac{1}{2}(\sigma_1^2-\sigma_2^2)t^{2H}+\sum_{j=1}^{n}(\xi_j^{(1)}-\xi_j^{(2)})\right\}=$$

$$=\frac{S_1}{S_2}\exp\left\{(\sigma_1-\sigma_2)d\tilde{B}_H(t)-\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)^2t^{2H}+\sum_{j=1}^{n}(\xi_j^{(1)}-\xi_j^{(2)})\right\}$$

이 성립하므로 우연과정 $\dfrac{S_{1n}(t)}{S_{2n}(t)}$ 는 확률미분방정식

$$d\left(\frac{S_{1n}(t)}{S_{2n}(t)}\right)=\frac{S_{1n}(t)}{S_{2n}(t)}((\sigma_1-\sigma_2)d\tilde{B}_H(t)+(e^{\xi_j^{(1)}-\xi_j^{(2)}})dN(t))$$

를 만족시키므로 식 (8)에서의 준조건부기대값은 우연과정 $\dfrac{S_{1n}(t)}{S_{2n}(t)}$ 에 대한 실행가격이 $K=1$ 인 유럽식구매선택권의 가격으로 될수 있다. 즉 정리 1에서

$$S_n(T)=\frac{S_{1n}(T)}{S_{2n}(T)},\ r_d-r_f=0,\ \sigma=\sigma_1-\sigma_2,\ \xi=\xi^{(1)}-\xi^{(2)},\ \mu_\xi=0,\ K=1$$

인 경우이므로 $\tilde{\mathrm{E}}_{Q_H}\left[\left(\dfrac{S_{1n}(T)}{S_{2n}(T)}-1\right)^+\middle|\mathbf{F}_t^H\right]=\dfrac{S_1(t)}{S_2(t)}\exp\left\{\sum_{j=1}^{n}(\xi_j^{(1)}-\xi_j^{(2)})\right\}\Phi(\tilde{d}_+)-\Phi(\tilde{d}_-)$.

따라서 웃식을 식 (8)에 대입하고 다시 식 (7)에 대입하면 정리가 증명된다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] Wei Lin Xiao et al.; Economic Modelling, 27, 942, 2010.

[2] C. Necula; Academy of Economics Studies Bucharest, Preprint, 23～87, 2002.

[3] C. H. Ma; Journal of Mathematical Economics, 42, 2, 131, 2006.

[4] R. Cookson; Models of Interfection Risk, 9, 5, 55, 1992.

주체103(2014)년 10월 5일 원고접수

Pricing Formula for Exchange Option in a Fractal Black-Scholes Model with Jumps

Kim Kyong Hui

We derived the pricing formula for exchange option in a fractal Black-Scholes model with jumps, so we extended pricing formula for exchange option in a standard Black-Scholes model with jumps to that in fractal model and also generalized pricing formula for European call option in a fractal Black-Scholes model with jumps to formula for exchange option.

Key words: fractal Black-Scholes model, exchange option, pricing formula