김일성종합대학학보 (자연과학) 주체103(2014)년 제60권 제12호
JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE) Vol. 60 No. 12 JUCHE103(2014).

한가지 리산최소두제곱프락탈근사의 오차평가

정수경, 강영숙

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《선진과학기술을 받아들이기 위한 사업을 적극적으로 벌려야 하겠습니다.

선진과학기술을 받아들이는것은 나라의 과학기술을 빨리 발전시키기 위한 중요한 방도의 하나로 됩니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제15권 499～500페지)

최근 프락탈함수, 프락탈보간함수의 구성과 응용에 대한 연구가 많이 진행되고있다.

선행연구[1, 2, 5]에서는 보통의 보간조건외에 어떤 함수관계식을 더 만족시키는 프락탈보간함수의 그라프가 어떤 반복함수계의 불변모임으로 계산된다는데 대하여 밝히고 프락탈보간함수의 구성도식을 제기하였으며 선행연구[3, 4]에서는 한 형태의 프락탈보간함수들의 모임이 선형공간을 이룬다는것을 밝혔다.

리산자료에 대한 최소두제곱근사를 구하는 전통적인 방법들(다항식에 의한 근사, 삼각다항식에 의한 근사, 스플라인에 의한 근사 등)에서는 구하려는 근사를 토대함수들의 1차결합으로 표시하고 그것의 결수를 계산하기 위한 정규방정식을 푸는 방법을 리용한다.

론문에서는 리산최소두제곱프락탈근사를 구하는 문제를 축소넘기기공간의 원소를 구하는 문제로 귀착시켜 구하기 위한 한가지 방법을 제기하고 근사풀이의 오차를 평가하였으며 아트락타의 하우스도르프차원의 웃한계를 평가하였다.

1. 리산최소두제곱프락탈근사를 구하는 한가지 방법과 오차평가

1) 리산최소두제곱프락탈근사를 구하는 한가지 계산도식

$\Delta=\{(x_i,\ y_i)\in \boldsymbol{R}^2 : i=0, \cdots, N\}$, $a=x_0<x_1<\cdots<x_N=b$ 와 $s_1,\ s_2, \cdots,\ s_N$ 들이 주어졌다고 하자. 여기서 $0<s_i<1,\ i=1, \cdots, N$ 이라고 가정한다.

또한 $I_i=[x_{i-1},\ x_i],\ i=1, \cdots, N$ 으로 표시하고

$$J_i=[\hat{x}_{i-1},\ \hat{x}_i],\ \hat{x}_{i-1},\ \hat{x}_i\in\{x_0,\ x_1, \cdots,\ x_N\},\ |J_i|>|I_i|,\ i=1, \cdots, N$$

이 주어졌다고 하자.

$$u_i : J_i\to I_i,\ u_i(x)=a_ix+b_i \tag{1}$$

라고 하자. 여기서 $a_i,\ b_i$ 들은 식 $a_i\hat{x}_{i-1}+b_i=x_{i-1},\ a_i\hat{x}_i+b_i=x_i$ 로부터 구해진다.

이제 $[a,\ b]$ 에서 정의된 련속함수로서 다음의 조건을 만족시키는 함수들을 생각하자.

$$f(x)=s_i\cdot f(u_i^{-1}(x))+p_i(u_i^{-1}(x)),\ \ p_i(x)=c_ix+d_i,\ \ x\in I_i,\ \ i=1, \cdots, N \tag{2}$$

$$s_if(\hat{x}_{i-1})+p_i(\hat{x}_{i-1})=f(x_{i-1}),\ \ s_if(\hat{x}_i)+p_i(\hat{x}_i)=f(x_i) \tag{3}$$

이러한 $f\in C[a,\ b]$ 들전체의 모임을 $\mathscr{F}$ 로 표시하면 $\mathscr{F}$ 의 함수 $f(x)$ 의 그라프는 국부적인 자기상사성을 만족시키며 $\mathscr{F}$ 는 $N+1$ 차원선형공간으로 된다.

정의 R^2의 자료점모임 $\{(\bar{x}_i,\ z_i):\ i=0, 1, \cdots,\ m\}$이 주어졌다고 하자. 여기서 $m>N$이고

$$\{x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_N\}\subset\{\bar{x}_0,\ \cdots,\ \bar{x}_m\} \tag{4}$$

이라고 가정한다.

$$\min_{f\in\mathscr{F}}\sum_{i=0}^{m}(f(\bar{x}_i)-z_i)^2 \tag{5}$$

의 풀이로 되는 $f^*\in\mathscr{F}$를 리산최소두제곱프락탈근사라고 부른다.

론문에서는 문제 (5)와 동등한

$$\min_{T\in\mathscr{T}}\| B_m f_T-\hat{z}\|_E^2 \tag{6}$$

의 풀이 $T^*\in\mathscr{T}$을 근사적으로 구하고 T^*의 부동점을 리산최소두제곱프락탈근사로 리용하였다. 여기서 $B_m f_T:=(f_T(\bar{x}_0),\ f_T(\bar{x}_1),\ \cdots,\ f_T(\bar{x}_m)),\ \hat{z}=(z_0,\ z_1, \cdots,\ z_m)$.

$\mathscr{F}$의 원소 f에 $(f(x_0),\ f(x_1), \cdots,\ f(x_N))$을 대응시키는 선형동형넘기기를 Ψ로 표시하자. 즉 $\Psi(f)=(f(x_0),\ f(x_1), \cdots,\ f(x_N))$이라고 하자.

$$f\in C[a,\ b],\ (Tf)(x)=s_i\cdot f(u_i^{-1}(x))+p_i(u_i^{-1}(x)),\ x\in I_i,\ i=1, \cdots, N$$

과 같은 연산자를 생각하자. 여기서 $s_i,\ u_i$들은 앞에서와 같고 $p_i(x)=c_i x+d_i$는 다음의 식으로 결정한다.

$$s_i y_{J(i)-1}+p_i(\hat{x}_{i-1})=y_{i-1},\ s_i y_{J(i)}+p_i(\hat{x}_i)=y_i,\ (y_0,\ y_1, \cdots,\ y_N)\in\boldsymbol{R}^{N+1},\ i=1, \cdots,\ N$$

$y_{J(i)}$는 $\hat{x}_i=x_{J(i)},\ \hat{x}_{i-1}=x_{J(i)-1}$에 대응되는 y값이다.

$\Psi(f)=(f(x_0),\ f(x_1), \cdots,\ f(x_N))$ 으로부터 $c_i,\ d_i$ 들이 유일하게 결정되며 따라서 $(y_0,\ y_1, \cdots,\ y_N)\in\boldsymbol{R}^{N+1}$이 주어지면 연산자 T가 유일하게 결정된다.

함수공간 $\mathscr{F}=\{f\in C[a,\ b]: f(x_i)=y_i,\ i=0, 1,\ \cdots,\ N\}$을 생각하면 T는 $\mathscr{F}$를 $\mathscr{F}$로 넘기는 축소넘기기이다.

따라서 $\mathscr{F}$에는 T의 부동점이 유일존재한다. 그것을 f_T로 표시하면 f_T는 $\mathscr{F}$에 속한다. 즉 T는 프락탈함수를 부동점으로 가지는 연산자이다.

이러한 연산자들전체의 모임을 $\mathscr{T}$로 표시한다.

$T\in\mathscr{T}$에 f_T를 대응시키는 넘기기를 $\tilde{\Psi}$로 표시하자.

$X_m=\{(p_0,\ y): p_0=(\bar{x}_0,\ \bar{x}_1,\ \cdots, \bar{x}_m)^T$는 고정, $y=(y_0, \cdots, y_m)^T,\ y_i\in\boldsymbol{R},\ i=0, \cdots,\ m\}$이라고 하면 $X_m=p_0\times R^{m+1}$이라고 볼수 있으며 본질상 R^{m+1}과 같다.

X_m에서 작용하는 연산자 T_m을 다음과 같이 정의한다.

$$T_m(p_0,\ y)=(p_0,\ \bar{\boldsymbol{y}}),\quad \bar{\boldsymbol{y}}=(\bar{y}_0, \bar{y}_1, \cdots, \bar{y}_m)^T \tag{7}$$

여기서 $\bar{y}_i$는 $\bar{x}_i\in I_l,\ \bar{x}_{J(i)}\le u_l^{-1}(\bar{x}_i)\le\bar{x}_{J(i)+1}$일 때

$$\bar{y}_i=s_l(y_{J(i)}+y_{J(i)+1})/2+p_l(u_l^{-1}(\bar{x}_i)) \tag{8}$$

로 정의한다. T_m은 $s_i,\ c_i,\ d_i,\ i=1, \cdots, N$에 의하여 결정되며 $c_i,\ d_i,\ i=1, \cdots, N$들을 결정하는것은 $x_0, \cdots, x_N$들에서 함수값들을 결정하는것과 동등하다.

$$\|(T_m(p_0, \hat{\boldsymbol{z}}))_2-\hat{\boldsymbol{z}}\|_E=\|\bar{\hat{\boldsymbol{z}}}-\hat{\boldsymbol{z}}\|_E\to\min \tag{9}$$

인 T_m^*을 구한다.

이것은 $x_0, \cdots, x_N$ 에서의 함수값 $y_0^*, \cdots, y_N^*$ 을 구한것과 같다.

최종적으로 $T^* = \widetilde{\Psi}^{-1}(y_0^*, \cdots, y_N^*)$ 인 T^* 의 부동점을 구하여 그것을 우리가 구하려는 리산최소두제곱프락탈함수에 대한 하나의 근사로 리용한다.

2) 근사풀이의 오차평가

T_m 과 T 사이의 호상관계, 근사풀이의 오차평가식에 대하여 보자.

보조정리 X 는 바나흐공간, T 는 X 에서의 축소넘기기이고 그 축소상수가 c 라고 할 때 $f \in X$ 에 대하여 $\| f - Tf \| < \varepsilon$ 이 성립되면 T 의 부동점

$$f_T \text{ 는 } \| f_T - f \| < \varepsilon/(1-c)$$

을 만족시킨다.

$(p_0,\ \boldsymbol{y}),\ (p_0,\ \boldsymbol{g}) \in X_m$ 에 대하여 $(p_0,\ \boldsymbol{y}) + (p_0,\ \boldsymbol{g}) := (p_0,\ \boldsymbol{y} + \boldsymbol{g}),\ \lambda(p_0,\ \boldsymbol{y}) := (p_0,\ \lambda \boldsymbol{y})$ 로, $\| (p_0,\ \boldsymbol{y}) \| := \max\limits_{0 \le i \le m} | y_i |$ 로 정의하자.

명제 1 T_m 은 X_m 에서 작용하는 축소연산자이다.

증명 $(p_0,\ \boldsymbol{y}),\ (p_0,\ \boldsymbol{g}) \in X_m$,

$$\| T_m(p_0,\ \boldsymbol{y}) - T_m(p_0,\ \boldsymbol{g}) \| = \| (p_0,\ \bar{\boldsymbol{y}}) - (p_0,\ \bar{\boldsymbol{g}}) \| = \| (p_0,\ \bar{\boldsymbol{y}} - \bar{\boldsymbol{g}}) \| = \max_i | \bar{y}_i - \bar{g}_i |,$$

$$| \bar{y}_i - \bar{g}_i | \le s_l (| y_{J(i)} - g_{J(i)} | + | y_{J(i)+1} - g_{J(i)+1} |)/2 \le s_l \max_i | y_i - g_i | = s_l \| (p_0,\ \boldsymbol{y} - \boldsymbol{g}) \|,$$

$c = \max\{| s_1 |, \cdots, | s_N |\}$ 으로 놓으면 T_m 은 c 를 축소상수로 하는 축소연산자이다.(증명끝)

$X_m = \boldsymbol{R}^{m+1}$ 로 하고 T_m 은 $\boldsymbol{R}^{m+1}$ 에서 작용하는 연산자로 보자.

그러면 T 와 T_m 사이의 관계를 그림과 같이 도식화할수 있다.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{F} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "B_m"'] & \mathfrak{F} \arrow[d, "B_m"] \\ R^{m+1} \arrow[r, "T_m"] & R^{m+1} \end{tikzcd}$$

그림. T 와 T_m 사이의 관계도식

명제 2 $\{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_m\}$ 이 등간격으로 주어졌다고 하면 $g \in \mathfrak{F}$ 에 대하여 $\| T_m B_m g - B_m T g \|_{X_m} \to 0$ 이 성립된다.

정리 1 $T,\ T_m$ 이 같은 $s_i,\ c_i,\ d_i,\ i = 1, \cdots, N$ 에 의하여 결정된다고 하자.($T,\ T_m$ 의 축소상수는 s_i 들에 의하여 결정되므로 $\mathfrak{F}$ 의 원소들과 T_m 에 대하여 축소상수 c 가 같다.)

$\bar{x}_0, \bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_m$ 에 대하여 $\bar{x}_i \in I_l$ 일 때 $u_l^{-1}(\bar{x}_i) \in \{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_m\}$ 이라고 하자.

이때 $B_m f_T = T_m B_m f_T$ 가 성립되며 또한 $\| B_m f_T - \hat{\boldsymbol{z}} \| \le \| T_m \hat{\boldsymbol{z}} - \hat{\boldsymbol{z}} \| / (1-c)$ 이 성립된다.

증명 $$f_T(x) = T f_T(x) = s_l \cdot f_T(u_l^{-1}(x)) + p_l(u_l^{-1}(x)),\ x \in I_l$$

$$(B_m f_T(x))_i = s_l \cdot f_T(u_l^{-1}(\bar{x}_i)) + p_l(u_l^{-1}(\bar{x}_i))$$

$$B_m f_T = (f_T(\bar{x}_0),\ \cdots,\ f(\bar{x}_m))$$

$$T_m B_m f_T = T_m(f_T(\bar{x}_0), \cdots,\ f(\bar{x}_m))$$

$$(T_m B_m f_T)_i = s_l \cdot f_T(u_l^{-1}(\bar{x}_i)) + p_l(u_l^{-1}(\bar{x}_i))$$

따라서 $B_m f_T = T_m B_m f_T$ 가 성립된다.

$$\| B_m f_T - \hat{\boldsymbol{z}} \| \le \| B_m f_T - T_m \hat{\boldsymbol{z}} \| + \| T_m \hat{\boldsymbol{z}} - \hat{\boldsymbol{z}} \| \le c \| B_m f_T - \hat{\boldsymbol{z}} \| + \| T_m \hat{\boldsymbol{z}} - \hat{\boldsymbol{z}} \| \|$$

이므로 $\| B_m f_T - \hat{\boldsymbol{z}} \| \le \| T_m \hat{\boldsymbol{z}} - \hat{\boldsymbol{z}} \| / (1-c)$ 이 성립된다.(증명끝)

$\varepsilon_2 =\| T_m^* B_m f_{T^*} - B_m f_{T^*} \| = \| T_m^* B_m f_{T^*} - B_m T^* f_{T^*} \|$ 이라고 하자.

정리 2 문제 (6)으로 결정된 T^* 의 부동점 즉 우리가 구한 근사풀이는

$$\| B_m f_{T^*} - \hat{\boldsymbol{z}} \| \le (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/(1-c)$$

를 만족시킨다. 여기서 c 는 축소연산자 T_m^* 의 축소상수이고 $\| T_m^* \hat{\boldsymbol{z}} - \hat{\boldsymbol{z}} \| = \varepsilon_1$ 이다. 특히 정리 1의 가정이 만족되면 $\varepsilon_2 = 0$ 이 성립된다.

증명
$$\| B_m f_{T^*} - \hat{\boldsymbol{z}} \| \le \| B_m f_{T^*} - f_{T_m^*} \| + \| f_{T_m^*} - \hat{\boldsymbol{z}} \|$$

우선 $\| T_m^* B_m f_{T^*} - B_m f_{T^*} \|$ 을 평가하면 명제 2에 의하여 이 식은 령으로 수렴한다.

$\boldsymbol{p} := T_m^* B_m f_{T^*} - B_m f_{T^*}$, $\boldsymbol{p} = (p_1, \cdots, p_m)$ 이라고 하자.

$\bar{x}_i \in I_l$, $\bar{x}_{J(i)} \le u_l^{-1}(\bar{x}_i) \le \bar{x}_{J(i)+1}$ 일 때

$$p_i = s_l (f_{T^*}(\bar{x}_{J(i)}) + f_{T^*}(\bar{x}_{J(i)+1}))/2 + p_l(u_l^{-1}(\bar{x}_i)) - s_l f_{T^*}(u_l^{-1}(\bar{x}_i)) - p_l(u_l^{-1}(\bar{x}_i)) =$$
$$= s_l ((f_{T^*}(\bar{x}_{J(i)}) + f_{T^*}(\bar{x}_{J(i)+1}))/2 - f_{T^*}(u_l^{-1}(\bar{x}_i)).$$

또한 $\varepsilon_2 = \max\{ | p_i |, \ i = 1, \cdots, N\}$ 이다.

보조정리로부터 $\| f_{T_m^*} - B_m f_{T^*} \| = \varepsilon_2 /(1-c)$, $c = \max\{ | s_i |, \ i = 1, \cdots, N\}$ 이 성립된다.

$\| T_m^* \hat{\boldsymbol{z}} - \hat{\boldsymbol{z}} \|_E = \varepsilon_1$ 이라고 하면 역시 보조정리로부터 $\| f_{T_m^*} - \hat{\boldsymbol{z}} \|_E = \varepsilon_1 /(1-c)$ 이 성립된다.

따라서 정리가 증명된다.(증명끝)

2. 계 산 실 례

자료점모임은 다음과 같다.

$$\{(\bar{x}_i, \ z_i)\} \in \boldsymbol{R}^2 : i = 0, 1, \cdots, m\} = \{(0, \ 3.6), \ (0.1, \ 5.1), \ (0.2, \ 5.6), \ (0.3, \ 6.3), \ (0.4, \ 6.0),$$
$$(0.5, \ 5.4), \ (0.6, \ 5.6), \ (0.7, \ 5.0), \ (0.8, \ 4.2), \ (0.9, \ 3.2), \ (1.0, \ 1.7)\}, \ m = 10$$

그리고

$$\Delta = \{(x_i, \ y_i) \in \boldsymbol{R}^2 : i = 0, \ \cdots, N\}, \ N = 4,$$
$$\{x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_N\} = \{0, \ 0.2, \ 0.5, \ 1.0\},$$
$$\Delta = \{(0, \ y_0), \ (0.2, \ y_1), \ (0.5, \ y_2), \ (0.7, \ y_3), \ (1.0, \ y_4)\},$$
$$S = \{s_1, \ s_2, \ s_3, \ s_4\} = \{1/3, \ 2/5, \ 1/6, \ 1/7\},$$
$$I_1 = [0, \ 0.2], \ I_2 = [0.2, \ 0.5], \ I_3 = [0.5, \ 0.7], \ I_4 = [0.7, \ 1],$$

$J_1 = J_2 = J_3 = J_4 = [0, \ 1]$ 로 주어졌다고 하자.

식 (1)에 의하여 계산된 $u_i(x)$, $i = 1, \cdots, 4$ 는 다음과 같다.

$$u_1(x) = 0.2x, \quad u_2(x) = 0.3x + 0.2, \quad u_3(x) = 0.2x + 0.5, \quad u_4(x) = 0.3x + 0.7$$

또한 식 (5)에 의하여 계산된 c_i, d_i, $i = 1, \cdots, 4$ 는 다음과 같다.

$$c = \{-0.666\,667 y_0 + y_1 - 0.333\,333 y_4, \ 0.4 y_0 - y_1 + y_2 - 0.4 y_4,$$
$$0.166\,667 y_0 - y_2 + y_3 - 0.166\,667 y_4, \ 0.142\,857 y_0 - y_3 + 0.857\,143 y_4\}$$
$$d = \{-0.666\,667 y_0, \ -0.4 y_0 + y_1, \ 0.166\,667 y_0 + y_2, \ -0.142\,857 y_0 + y_3\}$$

식 (7), (8)으로부터 식 (9)를 만족시키는 풀이를 구해보면 다음과 같다.

$$(y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4) = (3.167\,38,\ 4.972\,74,\ 5.052\,72,\ 4.849\,87,\ 1.664\,52)$$

이로부터

$c = (2.306\,31,\ 0.681\,13,\ 0.047\,63,\ -2.970\,66)$, $d = (2.111\,59,\ 3.705\,79,\ 4.524\,82,\ 4.397\,39)$.

선행연구[5]의 정리 1로부터 반복함수계 $w_i\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_i(x) \\ s_i y + c_i x + d_i \end{pmatrix}$에 의하여 생성된 그라프는 우리가 구한 최소두제곱프락탈근사함수의 아트락타로 된다.

아트락타의 하우스도르프차원의 웃한계를 계산해보자.

선행연구[5]의 정리 4로부터 아트락타의 하우스도르프차원 D는 관계 $D \le u$를 만족시킨다. 여기서 u는 $\sum_{i-1}^{N} s_i^u = 1$의 정의풀이이다.

우의 계산실례에 대하여 하우스도르프차원은 $D \le 1.033\,5$를 만족시킨다.

참 고 문 헌

[1] M. A. Navascusa et al.; Journal of Approximation Theory, 131, 19, 2004.

[2] A. K. B. Chand et al.; SIAM J. Numer. Anal., 44, 2, 655, 2006.

[3] Kang Yong Suk; Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2, 2, 144, 2014.

[4] P. Bouboulis et al.; Journal of Computational and Applied Mathematics, 235, 3425, 2011.

[5] M. F. Barnsley; Constr. Approx., 2, 303, 1986.

주체103(2014)년 8월 5일 원고접수

The Error Estimation of a Discrete Least Square Fractal Approximation

Jong Su Gyong, Kang Yong Suk

Recently fractal interpolations and fractal approximations are widely worked.

In the previous papers researchers constructed a space of contract operators and proved the existence and uniqueness of the contract operator which generates discrete least square fractal approximation for given data set and provided a method constructing it approximately.

We give the error estimation for discrete least square fractal approximation and show an example. And we estimate Hausdorff dimension for graph of the fractal approximation in the example.

Key word: discrete least square fractal approximation