김일성종합대학학보 주체110(2021)년
수 학 제67권 제2호

한가지 모호여러점경계값문제의 (2)－풀이가 존재하기 위한 필요충분조건

신기남, 권승혁

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《우리는 현실발전의 요구에 맞게 나라의 과학기술을 빨리 발전시켜야 하겠습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제11권 134페지)

우리는 모호분수계미분방정식의 여러점경계값문제

$$({}^cD_{0+}^{\alpha,\,2}y)(t)\oplus b\otimes({}^cD_{0+}^{\beta,\,2}y)(t)\oplus c\otimes y(t)=f(t),\ t\in(0,\ 1) \tag{1}$$

$$y(0)=y_0+\sum_{k=1}^{m}\mu_k y(\tau_k),\ \tau_k\in(0,\ 1] \tag{2}$$

의 (2)－풀이가 존재하기 위한 필요충분조건을 연구하였다. 여기서

$$0<\beta<\alpha\le 1,\ \ b,\ c\in\mathbf{R},\ \mu_k\in\mathbf{R}_+,\ k=\overline{1,\ m},\ \ J=[0,\ 1],\ \ f\in C(J,\ \mathbf{R_F})$$

이다. 일반성을 잃지 않고 $b>0,\ c>0$인 경우만을 고찰하기로 한다.

선행연구[1]에서는 H-차를 리용하여 모호분수계미분방정식의 초기값문제의 풀이의 개념에 대하여 연구하였으며 선행연구[2]에서는 모호분수계미분방정식의 풀이의 존재성을 구하는 문제를 주어진 방정식을 동등한 모호분수계적분방정식으로 변환하고 이 방정식의 풀이의 존재성을 구하는 방법으로 해결하였다. 이와 같은 방법은 선행연구[3－7]에서도 제기되였다. 그러나 선행연구[8]에서는 모호분수계미분방정식과 그로부터 변환한 모호분수계적분방정식이 일반적으로 동등하지 않다는것을 증명하였다.

이로부터 모호분수계미분방정식의 풀이의 존재성의 문제를 모호분수계적분방정식으로 변환하여 연구하는 수법을 개선하여야 할 필요성이 제기되고있다.

론문에서는 모호분수계미분방정식의 여러점경계값문제를 구간연산에 의하여 부등식제한을 가진 절단방정식계로 변환하는 수법을 리용하여 문제 (1), (2)의 (2)－풀이가 절단방정식의 풀이로 되며 절단방정식의 풀이가 련속인 모호수를 생성하고 생성된 모호수가 문제 (1), (2)의 (2)－풀이라는 방법 즉 모호선형분수계미분방정식의 여러점경계값문제에 대하여 (2)－풀이가 존재하기 위한 필요충분조건을 연구하였다.

정의 1 ${}^cD_{0+}^{\alpha,2}y\in C(J,\ \boldsymbol{R_F}),\ {}^cD_{0+}^{\beta,2}y\in C(J,\ \boldsymbol{R_F})$인 $y\in C(J,\ \mathbf{R_F})$가 식 (1), (2)를 만족시킬 때 y를 여러점경계값문제 (1), (2)의 (2)－풀이라고 부른다.

보조정리 1[6] $f:(a,\ b)\to\mathbf{R_F}$이고 f의 절단을 $[f(t)]^r:=[f_1(t,\ r),\ f_2(t,\ r)]$로 표시하자. 이때 $0<\beta\le 1$이고 f가 ${}^c[2-\beta]-$미분가능하면

$$[{}^cD_{0+}^{\beta,2}f(t)]^r=[{}^cD_{0+}^{\beta}f_2(t,\ r),\ {}^cD_{0+}^{\beta}f_1(t,\ r)]$$

가 성립한다.

방정식 (1)에 대하여 보조정리 1을 리용하여 구간연산을 진행하면 방정식 (1)에 대한 절단방정식계는 다음과 같다.

$$\begin{cases} {}^cD_{0+}^{\alpha}y_2(t,\ r)+b\,{}^cD_{0+}^{\beta}y_2(t,\ r)+cy_1(t,\ r)=f_1(t,\ r) \\ {}^cD_{0+}^{\alpha}y_1(t,\ r)+b\,{}^cD_{0+}^{\beta}y_1(t,\ r)+cy_2(t,\ r)=f_2(t,\ r) \\ y_1(t,\ r)\le y_2(t,\ r) \\ {}^cD_{0+}^{\alpha}y_2(t,\ r)\le {}^cD_{0+}^{\alpha}y_1(t,\ r),\ {}^cD_{0+}^{\beta}y_2(t,\ r)\le {}^cD_{0+}^{\beta}y_1(t,\ r) \end{cases} \tag{3}$$

또한 $[y_0]^r :=[y_{0,1}(r),\ y_{0,2}(r)]$라고 하면 식 (2)의 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{cases} y_1(0,\ r)=y_{0,1}(r)+\sum_{k=1}^{m}\mu_k y_1(\tau_k,\ r) \\ y_2(0,\ r)=y_{0,2}(r)+\sum_{k=1}^{m}\mu_k y_2(\tau_k,\ r) \end{cases} \tag{4}$$

정의 2 ${}^cD_{0+}^{\alpha}y_1(\cdot,\ r),\ {}^cD_{0+}^{\alpha}y_2(\cdot,\ r)\in C(J)$인 쌍 $(y_1(t,\ r),\ y_2(t,\ r))$가 식 (3), (4)를 만족시킬 때 $(y_1(t,\ r),\ y_2(t,\ r))$를 절단문제 (3), (4)의 풀이라고 부른다.

$\lambda:=1\Big/\left(1-\sum_{k=1}^{m}\mu_k\right)$의 표시를 리용하자.

보조정리 2 식 $0<\sum_{k=1}^{m}\mu_k<1$이 성립한다고 하자.

① 절단문제 (3), (4)의 풀이를 $(y_1(t,\ r),\ y_2(t,\ r))$라고 할 때

$$\varphi_1(t,\ r):={}^cD_{0+}^{\alpha}y_1(t,\ r),\quad \varphi_2(t,\ r):={}^cD_{0+}^{\alpha}y_2(t,\ r)$$

로 정의되는 $\varphi_1(t,\ r),\ \varphi_2(t,\ r)$는 $C(J)$에서 문제

$$\begin{cases} \varphi_2(t,\ r)+bI_{0+}^{\alpha-\beta}\varphi_2(t,\ r)+cI_{0+}^{\alpha}\varphi_1(t,\ r)=f_1(t,\ r)-c\cdot\lambda\left(y_{0,1}(r)+\sum_{k=1}^{m}\mu_k I_{0+}^{\alpha}\varphi_1(\tau_k,\ r)\right) \\ \varphi_1(t,\ r)+bI_{0+}^{\alpha-\beta}\varphi_1(t,\ r)+cI_{0+}^{\alpha}\varphi_2(t,\ r)=f_2(t,\ r)-c\cdot\lambda\left(y_{0,2}(r)+\sum_{k=1}^{m}\mu_k I_{0+}^{\alpha}\varphi_2(\tau_k,\ r)\right) \\ \varphi_2(t,\ r)\le\varphi_1(t,\ r) \\ I_{0+}^{\alpha}\varphi_1(t,\ r)+\lambda\left(y_{0,1}(r)+\sum_{k=1}^{m}\mu_k I_{0+}^{\alpha}\varphi_1(\tau_k,\ r)\right)\le I_{0+}^{\alpha}\varphi_2(t,\ r)+\lambda\left(y_{0,2}(r)+\sum_{k=1}^{m}\mu_k I_{0+}^{\alpha}\varphi_2(\tau_k,\ r)\right) \end{cases} \tag{5}$$

를 만족시킨다.

② $C(J)$에서 문제 (5)의 풀이 $\varphi_1(t,\ r),\ \varphi_2(t,\ r)$에 대하여

$$\begin{cases} y_1(t,\ r)=I_{0+}^{\alpha}\varphi_1(t,\ r)+\lambda\left(y_{0,1}(r)+\sum_{k=1}^{m}\mu_k I_{0+}^{\alpha}\varphi_1(\tau_k,\ r)\right) \\ y_2(t,\ r)=I_{0+}^{\alpha}\varphi_2(t,\ r)+\lambda\left(y_{0,2}(r)+\sum_{k=1}^{m}\mu_k I_{0+}^{\alpha}\varphi_2(\tau_k,\ r)\right) \end{cases} \tag{6}$$

는 절단문제 (3), (4)의 풀이이다.

보조정리 3 식 $0<q:=\dfrac{b}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}+\dfrac{c}{\Gamma(\alpha+1)}\left(1+\sum_{k=1}^{m}\mu_k \Big/ \left(1-\sum_{k=1}^{m}\mu_k\right)\right)<1$ 이 만족된다고 하자.

① 적분방정식 $U(t)+bI_{0+}^{\alpha-\beta}U(t)-cI_{0+}^{\alpha}U(t)-c\cdot\lambda\sum_{k=1}^{m}\mu_k I_{0+}^{\alpha}U(\tau_k)=g(t),\ t\in[0,\ 1]$ 은 $C(J)$ 에서 유일풀이를 가진다. 여기서 $J=[0,\ 1],\ g\in C(J)$ 이다.

② 련립적분방정식

$$\begin{cases} U_2(t)+bI_{0+}^{\alpha-\beta}U_2(t)+cI_{0+}^{\alpha}U_1(t)=g_1(t)-c\cdot\lambda\cdot\sum_{k=1}^{m}\mu_k I_{0+}^{\alpha}U_1(\tau_k) \\ U_1(t)+bI_{0+}^{\alpha-\beta}U_1(t)+cI_{0+}^{\alpha}U_2(t)=g_2(t)-c\cdot\lambda\cdot\sum_{k=1}^{m}\mu_k I_{0+}^{\alpha}U_2(\tau_k) \end{cases} \tag{7}$$

는 $C(J)\times C(J)$ 에서 유일풀이를 가진다. 여기서 $g_1,\ g_2\in C(J)$ 이다. 그 유일풀이를 $(U_1^*(t),\ U_2^*(t))^{\mathrm{T}}$ 로 표시할 때 다음의 평가식이 성립한다.

$$\max\{\|U_1^*\|_{C(J)},\ \|U_2^*\|_{C(J)}\}\le\frac{1}{1-q}\max\{\|g_1\|_{C(J)},\ \|g_2\|_{C(J)}\}$$

정리 1(필요조건) 모호여러점경계값문제 (1), (2)가 (2)−풀이를 가지며 보조정리 2, 3의 조건을 만족시킨다고 하자. $y(t)$ 를 (1), (2)의 (2)−풀이, $y(t)$ 의 절단을 $(y_1(t,\ r),\ y_2(t,\ r))$ 라고 할 때 $y(t)$ 에 대하여 다음의 사실들이 성립한다.

① $(y_1(t,\ r),\ y_2(t,\ r))$ 는 절단문제 (3), (4)의 풀이이다.

② $d([f(t)]^r)=f_2(t,\ r)-f_1(t,\ r)$, $d([y_0]^r)=y_{0,2}(r)-y_{0,1}(r)$ 라고 할 때 적분방정식

$$U(t)+bI_{0+}^{\alpha-\beta}U(t)-cI_{0+}^{\alpha}U(t)=-d([f(t)]^r)+c\cdot\lambda\left(d([y_0]^r+\sum_{k=1}^{m}\mu_k I_{0+}^{\alpha}U(\tau_k)\right),\ t\in[0,\ 1]$$

$$I_{0+}^{\alpha}U(t)+\lambda\left(d([y_0]^r)+\sum_{k=1}^{m}\mu_k I_{0+}^{\alpha}U(\tau_k)\right)\ge 0$$

은 유일한 정이 아닌 풀이를 가진다.

③ $r_1,\ r_2\in[0,\ 1],\ r_1\le r_2,\ \Delta f_1(t):=f_1(t,\ r_2)-f_1(t,\ r_1),\ \Delta f_2(t):=f_2(t,\ r_2)-f_2(t,\ r_1),\ \ \Delta y_{0,1}:=y_{0,1}(r_2)-y_{0,1}(r_1)$, $\Delta y_{0,2}:=y_{0,2}(r_2)-y_{0,2}(r_1)$ 이라고 할 때 련립적분방정식

$$\begin{cases} U_2(t)+bI_{0+}^{\alpha-\beta}U_2(t)+cI_{0+}^{\alpha}U_1(t)=\Delta f_1(t)-c\cdot\lambda\left(\Delta y_{0,1}+\sum_{k=1}^{m}\mu_k I_{0+}^{\alpha}U_1(\tau_k)\right) \\ U_1(t)+bI_{0+}^{\alpha-\beta}U_1(t)+cI_{0+}^{\alpha}U_2(t)=\Delta f_2(t)-c\cdot\lambda\left(\Delta y_{0,2}+\sum_{k=1}^{m}\mu_k I_{0+}^{\alpha}U_2(\tau_k)\right) \\ I_{0+}^{\alpha}U_1(t)+\lambda\left(\Delta y_{0,1}+\sum_{k=1}^{m}\mu_k I_{0+}^{\alpha}U_1(\tau_k)\right)\ge 0,\ I_{0+}^{\alpha}U_2(t)+\lambda\left(\Delta y_{0,2}+\sum_{k=1}^{m}\mu_k I_{0+}^{\alpha}U_2(\tau_k)\right)\le 0 \end{cases}$$

은 유일한 풀이 $U_1(t),\ U_2(t)$ 를 가지며 $U_1(t)\le 0,\ U_2(t)\ge 0$ 이다.

보조정리 2로부터 문제 (3), (4)의 풀이의 유일존재성문제는 문제 (5)의 풀이의 유일존재성문제에 귀착된다. 한편 문제 (5)의 셋째, 넷째 부등식을 제외한 적분방정식의 풀이의 유일존재성은 보조정리 3에 의하여 담보된다. 이제 이 유일풀이가 셋째, 넷째 부등식을 만족시키기 위한 충분조건을 고찰하자.

보조정리 4 보조정리 2, 3의 조건이 만족된다고 하자. 만일 적분방정식

$$U(t)+bI_{0+}^{\alpha-\beta}U(t)-cI_{0+}^{\alpha}U(t)=-d([f(t)]^r)+c\lambda\cdot\left(d([y_0]^r)+\sum_{k=1}^{m}\mu_k I_{0+}^{\alpha}U(\tau_k)\right),\ t\in[0,\ 1]$$

$$I_{0+}^{\alpha}U(t)+\lambda\left(d([y_0]^r)+\sum_{k=1}^{m}\mu_k I_{0+}^{\alpha}U(\tau_k)\right)\ge 0$$

이 정이 아닌 풀이를 가지면 ${}^cD_{0+}^{\alpha}y_2(t,\ r)\le{}^cD_{0+}^{\alpha}y_1(t,\ r)$가 성립한다.

보조정리 4의 가정을 만족시키면

$$ {}^cD_{0+}^{\alpha}y_2(t,\ r)\le{}^cD_{0+}^{\alpha}y_1(t,\ r),\ t\in[0,\ 1],\ r\in[0,\ 1] \tag{8}$$

이 성립하고 보조정리 2의 넷째 부등식과 보조정리 4로부터 다음의 결과들이 나온다.

$$y_1(t,\ r)\le y_2(t,\ r),\ t\in[0,\ 1],\ r\in[0,\ 1] \tag{9}$$

$$ {}^cD_{0+}^{\beta}y_2(t,\ r)\le{}^cD_{0+}^{\beta}y_1(t,\ r),\ t\in[0,\ 1],\ r\in[0,\ 1] \tag{10}$$

따라서 식 (8)－(10)으로부터 구간족

$$\{U_{\alpha}(t,\ r):=[{}^cD_{0+}^{\alpha}y_2(t,\ r),\ {}^cD_{0+}^{\alpha}\ y_1(t,\ r)],\ r\in[0,\ 1]\}$$

$$\{U_{\beta}(t,\ r):=[{}^cD_{0+}^{\beta}y_2(t,\ r),\ {}^cD_{0+}^{\beta}y_1(t,\ r)],\ r\in[0,\ 1]\}$$

$$\{U_0(t,\ r):=[y_1(t,\ r),\ y_2(t,\ r)],\ r\in[0,\ 1]\}$$

들을 얻을수 있다. 이 구간족들이 모호수를 생성한다는것을 고찰하자.

보조정리 5[9] $\{U_r\,|\,r\in[0,\ 1]\}$이 다음의 세 조건을 만족시키는 실수구간족이라고 하자.

① 임의의 $r\in[0,\ 1]$에 대해서 U_r는 비지 않은 콤팍트구간

② $0<\alpha<\beta\le 1$이면 $U_{\beta}\subseteq U_{\alpha}$

③ $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=r$인 임의의 비감소렬 $r_n\in(0,\ 1]$이 주어졌을 때 $U_r=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}U_{r_n}$이다.

그러면 유일한 모호수 $u\in\mathbf{R_F}$가 존재하여 임의의 $r\in[0,\ 1]$에 대해 $[u]^r=U_r$이고

$$[u]^0=cl\left(\bigcup_{r\in[0,1]}U_r\right)$$

이다. 다음의 기호를 약속한다.

$$r_1,\ r_2\in[0,\ 1],\ r_1\le r_2$$

$$\Delta f_1(t):=f_1(t,\ r_2)-f_1(t,\ r_1),\ \Delta f_2(t):=f_2(t,\ r_2)-f_2(t,\ r_1)$$

$$\Delta y_1(t):=y_1(t,\ r_2)-y_1(t,\ r_1),\ \Delta y_2(t):=y_2(t,\ r_2)-y_2(t,\ r_1)$$

$$U_1(t):=\varphi_1(t,\ r_2)-\varphi_1(t,\ r_1),\ U_2(t):=\varphi_2(t,\ r_2)-\varphi_2(t,\ r_1)$$

$$\Delta y_{0,1}:=y_{0,1}(r_2)-y_{0,1}(r_1),\ \Delta y_{0,2}:=y_{0,2}(r_2)-y_{0,2}(r_1)$$

이때 관계식

$$\Delta f_1(t)\ge 0,\ \Delta f_2(t)\le 0,\ \Delta y_{0,1}\ge 0,\ \Delta y_{0,2}\le 0$$

이 성립한다.

정리 2 ① 보조정리 2, 3의 조건들이 성립된다고 하자.

② 련립적분방정식

$$\begin{cases} U_2(t)+bI_{0+}^{\alpha-\beta}U_2(t)+cI_{0+}^{\alpha}U_1(t)=\Delta f_1(t)-c\cdot\lambda\left(\Delta y_{0,1}+\sum_{k=1}^{m}\mu_k I_{0+}^{\alpha}U_1(\tau_k)\right) \\ U_1(t)+bI_{0+}^{\alpha-\beta}U_1(t)+cI_{0+}^{\alpha}U_2(t)=\Delta f_2(t)-c\cdot\lambda\left(\Delta y_{0,2}+\sum_{k=1}^{m}\mu_k I_{0+}^{\alpha}U_2(\tau_k)\right) \\ I_{0+}^{\alpha}U_1(t)+\lambda\left(\Delta y_{0,1}+\sum_{k=1}^{m}\mu_k I_{0+}^{\alpha}U_1(\tau_k)\right)\ge 0 \\ I_{0+}^{\alpha}U_2(t)+\lambda\left(\Delta y_{0,2}+\sum_{k=1}^{m}\mu_k I_{0+}^{\alpha}U_2(\tau_k)\right)\le 0 \end{cases}$$

은 유일한 풀이 $U_1(t),\ U_2(t)$를 가지며 $U_1(t)\le 0,\ U_2(t)\ge 0$이다.

이제 구간족 $\{U_\alpha(t,\ r)\,|\,r\in[0,\ 1]\}$, $\{U_\beta(t,\ r)\,|\,r\in[0,\ 1]\}$, $\{U_0(t,\ r)\,|\,r\in[0,\ 1]\}$들이 생성한 모호수값함수들을 각각 $\tilde{y}_\alpha(t),\ \tilde{y}_\beta(t),\ \tilde{y}_0(t)$로 표시하자. 이때 다음의 사실이 성립한다.

정리 3 모호수값함수 $\tilde{y}_\alpha(t),\ \tilde{y}_\beta(t),\ \tilde{y}_0(t)$들은 구간 J에서 련속이다.

정리 4 다음의 관계식들이 성립한다.

$$\tilde{y}_0(t)=\tilde{y}_0(0)\oplus I_{0+}^{\alpha}\tilde{y}_\alpha(t),\quad \tilde{y}_\beta(t)=I_{0+}^{\alpha-\beta}\tilde{y}_\alpha(t),\quad {}^{c}D_{0+}^{\alpha,2}\tilde{y}_0(t)=\tilde{y}_\alpha(t)$$

정리 4로부터 $\tilde{y}_0(t)$가 정의 1의 의미에서 문제 (1), (2)의 (2)－풀이라는 결론이 나온다.

정리 5(충분조건) 보조정리 2, 3의 조건과 다음의 조건들이 만족된다고 하자.

① $$U(t)+bI_{0+}^{\alpha-\beta}U(t)-cI_{0+}^{\alpha}U(t)=-d([f(t)]^r)+c\cdot\lambda\left(d([y_0]^r)+\sum_{k=1}^{m}\mu_k I_{0+}^{\alpha}U(\tau_k)\right),\ t\in[0,\ 1]$$

$$I_{0+}^{\alpha}U(t)+\lambda\left(d([y_0]^r)+\sum_{k=1}^{m}\mu_k I_{0+}^{\alpha}U(\tau_k)\right)\ge 0$$

은 정이 아닌 풀이를 가진다.

② $r_1,\ r_2\in[0,\ 1],\ r_1\le r_2,\ \Delta f_1(t):=f_1(t,\ r_2)-f_1(t,\ r_1),\ \Delta f_2(t):=f_2(t,\ r_2)-f_2(t,\ r_1),\quad \Delta y_{0,1}:=y_{0,1}(r_2)-y_{0,1}(r_1),\ \Delta y_{0,2}:=y_{0,2}(r_2)-y_{0,2}(r_1)$이라고 할 때 련립적분방정식

$$\begin{cases} U_2(t)+bI_{0+}^{\alpha-\beta}U_2(t)+cI_{0+}^{\alpha}U_1(t)=\Delta f_1(t)-c\cdot\lambda\left(\Delta y_{0,1}+\sum_{k=1}^{m}\mu_k I_{0+}^{\alpha}U_1(\tau_k)\right) \\ U_1(t)+bI_{0+}^{\alpha-\beta}U_1(t)+cI_{0+}^{\alpha}U_2(t)=\Delta f_2(t)-c\cdot\lambda\left(\Delta y_{0,2}+\sum_{k=1}^{m}\mu_k I_{0+}^{\alpha}U_2(\tau_k)\right) \\ I_{0+}^{\alpha}U_1(t)+\lambda\left(\Delta y_{0,1}+\sum_{k=1}^{m}\mu_k I_{0+}^{\alpha}U_1(\tau_k)\right)\ge 0 \\ I_{0+}^{\alpha}U_2(t)+\lambda\left(\Delta y_{0,2}+\sum_{k=1}^{m}\mu_k I_{0+}^{\alpha}U_2(\tau_k)\right)\le 0 \end{cases}$$

은 유일한 풀이 $U_1(t),\ U_2(t)$ 를 가지며 $U_1(t)\le 0,\ U_2(t)\ge 0$ 이다.

이때 모호여러점경계값문제 (1), (2)의 (2)－풀이는 유일존재한다.

참 고 문 헌

[1] R. P. Agarwal et al.; Nonlinear Anal., 72, 2859, 2010.
[2] S. Salahshour et al.; Adv. Differ. Equ., 112, 1, 2012.
[3] T. Allahviranloo et al.; J. Intell. Fuzzy Syst., 26, 1481, 2014.
[4] P. Prakash et al.; J. Intell. Fuzzy Syst., 28, 2691, 2015.
[5] B. Bede, L. Stefanini; Fuzzy Sets and Systems, 230, 119, 2013.
[6] A. K. Haydar, R. H. Hassan; Article ID 6380978, 13, 2016.
[7] Z. Alijani et al.; Chaos, Solitons and Fractals, 131, 1, 2020.
[8] N. V. Hoa et al.; Fuzzy Sets Syst., 347, 54, 2018.
[9] G. A. Anastassiou; Fuzzy Mathematics: Approximation Theory, Springer-Verlag, 223～255, 2010.

주체109(2020)년 12월 5일 원고접수

Necessary and Sufficient Conditions for the Existence of (2)-Solution to a Fuzzy Multi-point Boundary Problem

Sin Ki Nam, Kwon Sung Hyok

In the paper, we have investigated the necessary and sufficient conditions to obtain existence of (2)-solution to a fuzzy multi-point boundary problem.

Keyword: fuzzy multi-point boundary problem