김일성종합대학학보 주체107(2018)년
물리학 제64권 제4호

진공요동의 영향을 받으면서 운동하는 고전립자의 운동방정식과 진공속에서 립자의 확산결수

김일광, 김광일, 안영준

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《기초과학에 대한 근시안적인 관점을 버리고 기초과학연구에 계속 힘을 넣어 첨단과학기술을 비롯한 과학기술발전의 원리적, 방법론적기초를 튼튼히 다져나가야 합니다.》

(《**김정일**선집》 증보판 제22권 22페지)

량자력학은 고전립자들과 달리 미시립자들이 립자성과 함께 파동성도 가진다는 실험적사실들을 고려하여 립자의 2중적성질을 반영한 파동함수의 개념을 받아들이고 그것이 복종하는 운동법칙을 밝혔다. 량자력학은 고전력학의 내용들을 일정하게 계승하면서도 확률적파동성이라는 립자성과 전혀 상반되는 성질도 고려하여 작성한 슈뢰딩거방정식을 기초로 하는 학문체계이다. 슈뢰딩거방정식은 그 어떤 기본원리로부터 론리적인 유도과정을 통하여 이끌어낸 방정식이 아니며 실험적으로 관측된 미시립자들의 이중성을 반영하여 작성한 공리적성격의 운동법칙이다. 선행연구[2, 7]에서는 확산방정식과 슈뢰딩거방정식의 류사성으로부터 확률과정인 브라운운동과 량자력학의 련관성을 고찰하였다. 특히 비상대론적인 브라운운동의 특성을 분석하여 슈뢰딩거방정식과 류사한 립자의 운동방정식을 유도하였으며 상대론적인 경우에 해당하는 클라인－고르돈방정식을 수학적으로 고찰하였다.[5, 8, 10, 11] 또한 브라운운동과 슈뢰딩거방정식의 관계에 대해서도 론의[1, 4]하였다. 한편 진공과 진공의 요동특성에 대한 연구[3, 6, 9]도 심화되고있다.

우리는 진공이 바로 질량이 매우 작은 고전립자운동에서 확률적인 운동특성을 발현시키는 기본요인이라는 착상을 제기하고 그것에 기초하여 립자의 운동을 고전력학적 및 확률적운동의 관점에서 고찰하였다. 다시말하여 고전립자가 진공요동의 영향을 받으면서 운동하면 뉴톤력학적인 운동과 함께 확률과정론적인 브라운운동도 하게 되며 이로부터 립자의 운동에서 립자성과 함께 확률적인 파동성도 나타난다는것을 제기하였다.

1. 진공요동을 받는 고전립자의 확산에 의한 포텐샬에네르기

진공속에서 고전립자의 운동에 대한 몇가지 특징에 대하여 보자.

특징은 우선 진공속에서 립자는 항시적인 우연요동을 당하며 이로부터 립자의 자리표와 운동량, 각운동량과 에네르기 등 동력학적량들은 어떤 평균값으로부터 일정한 분산을 가진다는것이다. 다시말하여 립자의 운동과정은 요동확률과정으로 된다.

특징은 다음으로 진공속에서 립자의 력학적에네르기값은 일정한 분산을 가지지만 에네르기산일은 없다는것이다.

사실상 진공속에서 운동하는 고전립자는 아무런 저항힘도 받지 않는다. 관성자리표계에서 고전립자들이 공간속에서 운동할 때 외부의 힘을 받지 않는 한 저절로 감속되거나

가속되지 않으며 본래의 력학적운동상태를 유지한다는것은 력학의 초보적인 원리이다.

이것은 외부힘의 포텐샬마당이 없을 때 진공속에서 고전립자의 평균에네르기는 진공과의 호상작용과정(부단한 우연요동힘을 받는 과정)에 루실되지 않는다는것을 의미한다.

보통 기체나 액체와 같은 매질속에서 운동하는 립자는 열운동하는 매질분자들과의 무질서한 충돌로 인한 요동운동을 하며 동시에 자기의 운동에네르기를 매질에 넘겨주면서 점차 열평형상태로 넘어간다. 그러나 진공에서는 이런 현상이 일어나지 않는다. 다시말하면 진공속에서는 외부힘이 작용하지 않으면 립자의 요동운동으로 하여 에네르기값은 순간적으로 변할수 있지만 립자의 평균에네르기는 변하지 않는다고 보아야 한다.

한편 진공속에서의 립자의 요동자리길을 정확하게 해석하려면 진공요동힘이 립자에 주는 우연적인 힘에 대한 시간적정보를 구체적으로 알아야 하는데 사실 이것은 불가능하다. 이런 조건에서는 립자의 력학적상태를 확률적으로 표시하는 량을 받아들여야 한다.

이로부터 우리는 고전립자가 공간자리표 $\boldsymbol{r}$ 의 근방에 나타날 확률밀도라는 량을 받아들이고 $\rho(\boldsymbol{r},\ t)$ 라고 표시하겠다. 1개 립자의 운동을 고찰하는 경우에는 항상 $\rho(\boldsymbol{r},\ t)\geq 0$ 일뿐아니라 다음의 관계식도 성립해야 한다.

$$\int \rho(\boldsymbol{r},\ t)\,dV=1 \tag{1}$$

$\rho(\boldsymbol{r},\ t)$ 는 공간속에서 요동힘을 받는 고전립자의 확률적인 분포밀도를 표시하는 하나의 상태량이라고 말할수 있다. 무질서한 요동힘을 받는 립자는 필연적으로 우연적인 브라운운동을 하며 나아가서 피크의 확산법칙에 따르는 확산운동도 동반된다.

립자의 공간적인 분포확률이 불균일할 때 생기는 확산흐름밀도는 다음과 같다.

$$\rho\upsilon_{\mathrm{d}}=-D\,\nabla\rho \tag{2}$$

여기서 υ_{d} 는 확산표류속도, D 는 진공매질속에 있는 립자의 확산결수이다. 식 (2)의 물리적의미는 립자가 많이 나타나는 장소로부터 립자가 적게 나타나는 장소로 립자의 확률적인 표류흐름 즉 확률밀도의 평균화과정이 진행된다는것이다.

따라서 립자의 존재확률밀도가 불균일하면 요동확산에 의한 확률적인 표류속도가 나타날수 있고 결국 립자는 확산흐름에 의한 다음과 같은 보충적인 운동에네르기를 더 얻을수 있는 가능성을 가진다.

$$\frac{1}{2}m\upsilon_{\mathrm{d}}^{2}=\frac{1}{2}mD^{2}\left(\frac{\nabla\rho}{\rho}\right)^{2} \tag{3}$$

이 에네르기는 립자의 공간적인 존재확률의 분포에 관계되는 에네르기로서 포텐샬에네르기이다.

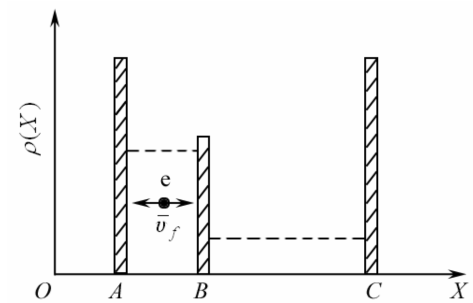

그림. 1차원공간에서 립자의 존재확률밀도

식 (3)의 물리적의미를 명백하게 하기 위하여 다음과 같은 간단한 경우를 실례들어 보겠다. 그림에서처럼 1차원공간에서 요동운동하는 립자 e가 구간 AB와 BC에 서로 다른 확률로 있는 경우를 생각하자.(가상적인 확률크기는 점선으로 그렸다.) 여기서 A, B, C는 요동립자가 구간 AB 혹은 BC에 있도록 억류하는 포텐샬장벽이라고 하겠다.

립자의 존재확률은 구간 BC에서보다 구간 AB

에서 더 큰 상태에 있다. 이 실례는 립자의 공간적인 존재확률이 불균일한 특수한 경우에 해당한다.

립자의 평균요동운동속도를 $\bar{v}_f$ 라고 하면 립자가 포텐샬장벽 B에 한번 충돌하고 반사되면서 받는 운동량변화는 평균 $2m\bar{v}_f$ 이다. 그런데 립자가 단위시간동안에 포텐샬장벽 B에 부딪치는 회수는 립자의 존재확률밀도가 작은 장벽 B의 오른쪽 면보다 존재확률밀도가 큰 장벽 B의 왼쪽 면에서 더 크다.

그러므로 립자의 존재확률밀도가 공간에서 불균일하면 립자는 포텐샬장벽 B에 x축방향으로의 힘을 주게 되며 결국 립자는 일할수 있는 능력을 가지게 된다. 바로 이것이 립자의 공간적인 존재확률밀도의 불균일에 의하여 생기게 되는 에네르기 즉 확산포텐샬이다. 앞으로 이 에네르기를 U_d 라고 표시하겠다.

2. 확산포텐샬을 고려한 진공속에서 고전립자의 운동방정식

진공속에서 립자의 요동확산으로 인하여 생기는 확산포텐샬을 고려한 고전립자의 확률적운동방정식을 고찰하자.

립자의 해밀턴함수밀도는 다음과 같다.

$$H=\rho\left[\frac{1}{2m}(\nabla S)^2+U(\boldsymbol{r},\ t)+\frac{mD^2}{2}\left(\frac{\nabla\rho}{\rho}\right)^2\right] \tag{4}$$

여기서 량 H,ρ,S,U 는 일반적으로 자리표 $\boldsymbol{r}$ 와 시간 t 에 관계된다. 그리고 $S(\boldsymbol{r},t)$ 는 립자의 동력학적상태를 표시하는 스칼라량으로서 작용이다.

작용 $S(\boldsymbol{r},t)$ 와 립자의 운동량은 $\boldsymbol{p}=\nabla S$ 의 관계에 있다. 립자의 해밀턴함수밀도는 립자의 상태를 대표하는 량 S 와 ρ 로 표시할수 있으며 이 량들을 정준변수로 선택하면 다음과 같은 정준방정식을 얻는다.

$$\left.\begin{aligned}-\frac{\partial\rho}{\partial t}&=\frac{\partial H}{\partial S}-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial\left(\dfrac{\partial S}{\partial x_i}\right)}\\ -\frac{\partial S}{\partial t}&=\frac{\partial H}{\partial\rho}-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial x_i}\right)}\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

여기서 $\boldsymbol{r}=\{x_1,\ x_2,\ x_3\}$ 이다. 식 (4)와 (5)로부터 다음의 식을 얻을수 있다.

$$\left.\begin{aligned}-\frac{\partial S}{\partial t}&=\frac{(\nabla S)^2}{2m}+U(\boldsymbol{r},\ t)+\frac{mD^2}{2}\left[\left(\frac{\nabla\rho}{\rho}\right)^2-\frac{2\Delta\rho}{\rho}\right]\\ -\frac{\partial\rho}{\partial t}&=\frac{1}{m}(\nabla\rho\nabla S+\rho\Delta S)\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

식 (6)에서 첫번째 식은 확산포텐샬을 고려한 해밀턴－야꼬비방정식이고 두번째 식은 확률련속방정식이다. 이제 $\rho\geq 0$ 이라는것을 고려하면서 다음과 같은 새로운 변수 $Q(\boldsymbol{r},t)$ 를 받아들이자.

$$\rho = \rho_0 e^{-2Q} \tag{7}$$

여기서 ρ_0 은 ρ 와 물리적으로 본이 같은 상수이고 Q 는 무본량인데 값범위는 $-\infty < Q < +\infty$ 이다. 그러면 식 (6)은 다음과 같이 된다.

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial S}{\partial t} &= \frac{(\nabla S)^2}{2m} + U(\boldsymbol{r},\ t) + 2mD^2[\Delta Q - (\nabla Q)^2] \\ -\frac{\partial Q}{\partial t} &= \frac{1}{m}\left(\nabla Q \nabla S - \frac{1}{2}\Delta S\right) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

이제 비선형련립편미분방정식 (8)을 보다 간단하게 표시하기 위하여 다음과 같은 새로운 복소수량 P 를 받아들이겠다.

$$P = \frac{S}{f} + iQ \tag{9}$$

여기서 f 는 작용 S 와 물리적본이 같은 임의로 선택한 상수이다.

새로운 량 P 에 대한 식을 얻기 위하여 식 (8)의 첫번째 식에 $1/f$ 를 곱하고 두번째 식에 i 를 곱한 다음 서로 합하고 정리하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{S}{f} + iQ\right) = \frac{f}{2m}\left[\nabla\left(\frac{S}{f} + iQ\right)\right]^2 - \frac{if}{2m}\Delta\left(\frac{S}{f} + iQ\right) + \left(\frac{2mD^2}{f} - \frac{f}{2m}\right)[\Delta Q - (\nabla Q)^2] + \frac{U(\boldsymbol{r},\ t)}{f} \tag{10}$$

상수량 f 는 임의로 선택할수 있는 량이므로 우리는 그것을 식 (11)이 만족되도록 선정할수 있다.

$$\frac{2mD^2}{f} - \frac{f}{2m} = 0 \tag{11}$$

그러면 상수량 f 는 다음과 같다.

$$f = 2mD \tag{12}$$

그러면 식 (10)을 다음과 같이 간단하게 쓸수 있다.

$$-\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{f}{2m}[(\nabla P)^2 - i\Delta P] + \frac{U(\boldsymbol{r},\ t)}{f} \tag{13}$$

식 (13)을 풀어서 P 를 구하고 그것의 실수부와 허수부를 가르면 S 와 Q 를 알수 있다. 한편 식 (13)의 풀이 P 의 값범위는 식 (8)의 풀이의 전평면값구역 $(S,\ Q)$ 에 1 : 1 대응된다. 그러나 복소수량에 대한 비선형편미분방정식 (13)은 수학적으로 다루기 어렵기때문에 다음과 같은 변수변환을 하겠다.

$$P = -i \ln \frac{\psi}{\sqrt{\rho_0}} \tag{14}$$

그러면 식 (13)은 새로운 복소수함수 ψ 에 대한 식으로 넘어간다. 식 (14)에서 함수 ψ 의 물리적본은 상수량 $\sqrt{\rho_0}$ 의 본과 같다. 식 (14)를 식 (13)에 넣고 정리하면 ψ 에 대한 다음의 식이 얻어진다.

$$if\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{f^2}{2m}\Delta\psi + U(\boldsymbol{r},\ t)\psi \tag{15}$$

이것이 바로 진공요동의 영향을 받는 고전립자의 확률동력학적인 운동상태를 표시하는 방정식인데 그 모양은 잘 알려져있는 슈뢰딩거방정식과 같다. 그런데 립자의 운동은 한가지 운동법칙에 복종해야 한다. 그러므로 두가지 방정식이 완전히 일치하자면 $f=\hbar$로 되여야 한다. 이로부터 진공속에서 질량이 m인 고전립자의 확산결수는 식 (12)로부터

$$D=\frac{\hbar}{2m}. \tag{16}$$

실례로 전자의 질량 $m_e = 9.11\cdot 10^{-28}\,\mathrm{g}$, 플랑크상수 $h = 6.625\cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$를 식 (16)에 넣고 계산하면 진공속에서 전자의 확산결수 $D_e = 0.579\,\mathrm{cm^2/s}$이고 양성자의 확산결수 D_p는 그것의 질량이 전자의 질량보다 1 836배 크므로 $D_p = 3.154\cdot 10^{-4}\,\mathrm{cm^2/s}$이다.

이제 $f=\hbar$를 식 (15)에 대입하면 잘 알려진 슈뢰딩거파동방정식이 얻어진다.

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi+U(\boldsymbol{r},\ t)\psi \tag{17}$$

식 (17)의 풀이형태를 다음과 같이 표시할수 있다.

$$\psi=\sqrt{\rho}\exp\left(i\frac{S}{\hbar}\right) \tag{18}$$

이로부터 진공매질속에서 고전립자의 공간적인 존재확률밀도 $\rho(\boldsymbol{r}, t)$, 확률흐름밀도 $\boldsymbol{J}=\rho\boldsymbol{v}$를 ψ를 리용하여 표시할수 있다.

$$\left.\begin{aligned}&\rho(\boldsymbol{r}, t)=\psi^*\psi\\&\boldsymbol{J}=\rho(\boldsymbol{r}, t)\frac{\nabla S}{m}=-\frac{i\hbar}{2m}(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*)\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

한가지 강조할것은 넘기기연산 식 (7), (9), (14)에 의하여 상태량 $(\rho,\ S)$를 복소수값함수 ψ로 넘길 때 넘기기가 1∶1넘기기로 되지 않는다는것이다. 그러므로 복소수함수론에서 지적된것처럼 ψ평면에서 무한개의 면들이 겹쌓인 리만면을 받아들인다. 그러면 P평면으로부터 ψ면으로의 련속넘기기가 정의되며 량 $\rho,\ S$들이 비약이 없이 련속이면 ψ도 정칙인 련속함수로 된다. 식 (18)에서 작용 S가 $\Delta S=\pm 2\pi\hbar$만큼 변할 때마다 함수 ψ의 값은 아래 또는 웃리만면으로 넘어간다. 즉 작용 S가 $\Delta S=n2\pi\hbar(n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$만큼 차이나는 ψ값들의 상태면들은 서로 겹쌓여있는 리만면을 이룬다. 리만면을 받아들이면 $(\rho,\ S)$면을 복소수량 ψ로 넘길 때 1∶1넘기기를 보장할수 있다. 다시말하여 이것은 상태량 ψ가 일가이고 련속일것을 요구하면 넘기기 $(\rho,\ S)\to\psi$가 1∶1넘기기로 된다는것을 의미한다.

맺 는 말

진공요동매질이 립자의 요동을 일으키는 원인으로 된다고 가정하고 그속에서 운동하는 고전립자의 확률적운동방정식을 이끌어냈으며 그 방정식의 형태가 슈뢰딩거방정식과 일치한다는것을 보여주었다. 또한 진공속에서 고전립자의 확률적운동방정식을 슈뢰딩거방정식과 비교하여 진공속에서 고전립자의 우연적요동에 의한 확산결수가 $D=\hbar/2m$이라는것을 밝혔다.

참 고 문 헌

[1] F. Smarandache et al.; Quantization in Astrophysics, Brownian Motion and Supersymmetry, Mathtiger, 72～88, 2007.

[2] I. Fenyes et al.; Physics, 131, 81, 1952.

[3] Cilad Gour et al.; Foundations of Physics, 29, 12, 1999.

[4] K. L. Chung et al.; From Brownian Motion to Schrödinger's Equation, Springer, 234～236, 2001.

[5] L. Morato et al.; J. Math. Phys., 36, 4691, 1995.

[6] P. W. Milonni; The Quantum Vacuum, Academic Press, 59～108, 1994.

[7] E. Nelson; Phys. Rev., 150, 1079, 1966.

[8] E. Nelson; Dynamical Theories of Brownian Motion, Princeton University Press, 1～147, 1967.

[9] D. Sergey; Cosmology, Quantum Vacuum and Zeta Function, Springer, 21～91, 2011.

[10] L. Nottale; Journal of Chaos, Solitons and Fractals, 4, 3, 361, 1994.

[11] G. N. Ord; Journal of Physics, A 16, 1869, 1983.

주체107(2018)년 6월 5일 원고접수

The Equation of Motion of Classical Particles under Vacuum Fluctuation and the Diffusion Coefficient of Particles in Vacuum

Kim Il Gwang, *Kim Kwang Il* and *An Yong Jun*

We proposed a postulate that vacuum is a kind of special "perturbation medium" which causes random fluctuation to the motion of particles and therefore the motion of particles in vacuum is accompanied by fluctuation and diffusion as well as Newtonian mechanical motion. Then we showed that the motion of particles obeys the stochastic law of motion in the form of Schrödinger's wave equation by utilizing this postulate and Hamiltonian formalism. We also showed that the diffusion coefficient of particles of mass m in vacuum is expressed as $D = \frac{\hbar}{2m}$.

Key words: vacuum, Schrödinger's equation, diffusion, fluctuation