경제예측에서 마르꼬브분석법의 리용에 대한 리해

김 종 철

경애하는 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《인민경제 모든 부문에서 온갖 예비와 가능성을 최대한 동원하여 생산적앙양을 일으키기 위한 경제작전과 지휘를 짜고들며 현행계획과 전망적인 단계별 발전전략을 과학적으로 세우고 그대로 완강하게 집행해나가야 합니다.》

인민경제 모든 부문에서 생산적앙양을 일으키기 위하여서는 경제발전과정에 대한 예측결과에 기초하여 기업전략, 경제전략을 과학적으로 세우고 그것을 완강하게 집행해나가야 한다.

경제적현상과 과정의 변화발전과정은 두가지 류형으로 구분할수 있다. 한가지 류형은 확정적인 변화과정이고 다른 한가지는 우연성을 가지는 불확정적인 변화과정이다. 현실에서 대부분의 변화과정은 우연과정이다. 우연적인 변화과정을 반영한 시계렬이 무리력성을 가진 마르꼬브사슬일 때 마르꼬브분석법에 의하여 예측할수 있다.

마르꼬브분석법은 특정한 변수에 대한 현재상태의 움직임을 분석하여 미래의 추세를 예측하는 확률적방법이다.

마르꼬브분석법에서는 상태전이확률을 리용하는데 마르꼬브사슬 $Z(t), t\in T$ 의 첫걸음전이확률 $P_{ij}(i, j=1, 2, \cdots, n)$ 로 구성된 n 차행렬

$$P=(P_{ij})_{n\times n}=\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & Pnn \end{bmatrix}$$

을 첫걸음상태전이확률행렬이라고 한다.

일반적으로 k 걸음상태전이확률 $P_{ij}(k)(i,\ j=1, 2, \cdots, n)$ 로 구성된 n 차행렬

$$P(k)=(P_{ij}(k))_{n\times n}=\begin{bmatrix} P_{11}(k) & P_{12}(k) & \cdots & P_{1n}(k) \\ P_{21}(k) & P_{22}(k) & \cdots & P_{2n}(k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{n1}(k) & P_{n2}(k) & \cdots & Pnn(k) \end{bmatrix}$$

을 k 걸음상태전이확률행렬이라고 한다.

첫걸음상태전이확률행렬 P는 t 시각체계의 각 상태가 $t+1$시각체계의 각 상태에 도달하는 변화법칙성을 묘사한다. 실례로 행렬 P의 i 행의 원소 $P_{ij}(j=1,2, \cdots, n)$ 는 t 시각상태 i 가 $t+1$시각체계안의 각 상태에로 향하는 전이의 가능성을 말한다.

표 1

	$t+1$시각체계의 각 상태			
t 시각 상태 i	1	2	…	n
전이확률 P_{ij}	P_{i1}	P_{i2}	…	P_{in}

두걸음전이확률행렬 $P(2)=(P_{ij}(2))_{n\times n}$ 에 대하여 $P_{ij}(2)$ 는 t 시각의 상태 i 가 $t+2$ 시각

의 상태 j에로의 전이확률을 표시한다.

완전확률의 공식으로부터 $P_{ij}(2)$와 P_{ij} 사이의 관계는 아래와 같다.

$$P_{ij}(2) = P\{Z_{t+2} = j \mid Z_t = i\} =$$
$$= \sum_{r=1}^{n} P\{Z_{t+1} = r \mid Z_t = i\} P\{Z_{t+2} = j \mid Z_{t+1} = r\} = \sum_{r=1}^{n} P_{ir} \cdot P_{rj} \qquad (1)$$

행렬곱하기와 식 (1)로부터 $P(2) = P^2$이라는것을 알수 있다. 일반적으로 k걸음전이확률행렬과 첫걸음전이확률행렬 P 사이에는 다음과 같은 관계가 있다.

$P = (P_{ij})_{n\times n}$와 $P(k) = (P_{ij}(k))_{n\times n}$가 각각 마르꼬브사슬의 첫걸음과 k걸음전이확률행렬일 때 $P(k) = P^k$, $k = 1, 2, 3, \cdots, n$ 즉 k걸음전이확률행렬은 첫걸음전이확률행렬의 k제곱과 같다는것이다.

실례로 마르꼬브사슬의 첫걸음전이확률행렬이

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

일 때 3걸음전이확률행렬 $P(3)$과 t시각의 상태 3이 $t+3$시각일 때의 매 상태에 도달하는 전이확률을 계산하면 다음과 같다.

$P(3) = P^3$이므로

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

$$P^3 = P_2 \cdot P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{7}{27} & \frac{4}{27} & \frac{16}{27} \end{bmatrix}$$

그러므로 t시각의 상태 3으로부터 $t+3$시각에 도달하는 각 상태의 전이확률은 $\frac{7}{27}$, $\frac{4}{27}$, $\frac{16}{27}$으로 된다.

P를 전이확률행렬이라고 할 때 P^k의 모든 원소는 정수로 되고 모든 행이 확률벡토르가 될 때 P는 정규확률행렬이라고 한다.

마르꼬브사슬의 t시각의 절대분포는 초기분포와 t걸음전이확률행렬의 적과 같다.

P가 정규확률행렬이면 P는 반드시 균형점 u를 가지며 k가 충분히 클 때 P^k는 u로 구성된 정상정규행렬 V에로 수렴한다. 다시말하면 최초에 어떤 상태에 놓여있었는가에 관계없이 최종적으로는 균형상태에 놓이게 된다.

그러면 균형점 u를 어떻게 결정하는가를 보자.

$up = u$ 이므로 $(P^T - I)u^T = 0$ 이고 $u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 1$ 이므로 련립1차방정식

$$\begin{cases} (P^T - I)u^T = 0 \\ u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 1 \end{cases}$$

의 풀이를 구하면 균형점 u 를 얻을수 있다.

공장, 기업소들이 자기 생산물에 대한 수요를 예측하는 문제를 보자.

기업소의 n 개 품종의 소비품 $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ 에 대한 소비자들의 소비가 마르꼬브사슬의 특징을 가지고있다고 하자. 이때 마르꼬브분석법에 의하여 n 개의 품종들에 대한 수요를 예측하는 방법은 다음과 같다.

첫째로, 수요조사를 진행한다.

여기서는 우선 전체 소비자들중에서 현재 이 n 개 품종의 소비품을 요구하는 소비자들이 차지하는 비률을 조사하여 초기분포 $P^0 = (P_1^0, P_2^0, \cdots, P_n^0)$ 을 구한다.

또한 n 개 품종의 소비품을 요구하는 소비자들의 류동상태를 조사하여 전이빈도수행렬을 구하며 더 나아가서 전이확률행렬 P 를 구한다.

둘째로, 앞으로의 소비수요를 예측한다.

초기분포 P^0 과 k 걸음전이확률행렬 $P(k)$ 의 적을 계산하면 앞으로 k 시각의 절대분포를 얻을수 있다. 즉 k 시각의 수요 $P^k = (P_1^k, P_2^k, \cdots, P_n^k) = (P_1^0, P_2^0, \cdots, P_n^0)P(k)$ 를 계산한다.

셋째로, 균형상태에 있는 소비수요를 계산한다.

만일 전이확률행렬 P 가 정규확률행렬이라고 하면 P 는 유일한 균형점 $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 을 가진다. 그리하여 최종적으로 도달한 균형상태에서 각 소비품들의 최종수요 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 을 구하게 된다.

실례로 어느 한 도시에서의 맥주소비와 관련한 마르꼬브분석법에 의한 수요예측방법을 보기로 하자.

도시에서 소비하는 맥주는 3개 공장에서 생산한다. 각각 1, 2, 3으로 표시한다.

전해 12월에 2 000명의 소비자에 대하여 조사를 진행하였다.

매 공장들의 맥주를 소비하는 소비자들은 각각 800, 600, 600명이다. 동시에 전이빈도수행렬을 구하였다.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 320 & 240 & 240 \\ 360 & 180 & 60 \\ 360 & 60 & 180 \end{bmatrix} \end{array}$$

식에서 1행은 12월에 1공장의 제품을 소비한 800명중에서 320명은 계속 1공장의 제품을 소비하고 다른 240명, 240명은 각각 2공장과 3공장의 제품을 소비할것이라는것을 보여준다.

이 자료에 기초하여 올해 1~7월의 수요와 소비시장이 균형상태에 놓일 때 각 공장들의 맥주에 대한 수요를 예측해보자.

800, 600, 600을 2 000으로 나누어 전해 12월 각 공장들의 맥주에 대한 수요 즉 초

기분포 $P^0=(0.4,\ 0.3,\ 0.3)$ 을 구한다.

800, 600, 600으로 각각 행렬의 1행, 2행, 3행의 각 원소들을 나누어 상태이전확률행렬 P를 구한다.

$$P=\begin{bmatrix}0.4 & 0.3 & 0.3\\ 0.6 & 0.3 & 0.1\\ 0.6 & 0.1 & 0.3\end{bmatrix}$$

다음 k월의 절대분포 즉 k월의 수요 $P^k=P^0\cdot P(k)=P^0\cdot P^k\,(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 7)$ 을 계산한다.

$k=1$일 때

$$P^1=(0.4,\ 0.3,\ 0.3)\begin{bmatrix}0.4 & 0.3 & 0.3\\ 0.6 & 0.3 & 0.1\\ 0.6 & 0.1 & 0.3\end{bmatrix}=(0.52,\ 0.24,\ 0.24)$$

$k=2$일 때

$$P^2=(0.4,\ 0.3,\ 0.3)P^2=P^1P=(0.52,\ 0.24,\ 0.24)\begin{bmatrix}0.4 & 0.3 & 0.3\\ 0.6 & 0.3 & 0.1\\ 0.6 & 0.1 & 0.3\end{bmatrix}=(0.496,\ 0.252,\ 0.252)$$

$k=3$일 때

$$P^3=(0.4,\ 0.3,\ 0.3)P^3=P^2P=(0.496,\ 0.252,\ 0.252)\begin{bmatrix}0.4 & 0.3 & 0.3\\ 0.6 & 0.3 & 0.1\\ 0.6 & 0.1 & 0.3\end{bmatrix}=(0.500\,8,\ 0.249\,6,\ 0.249\,6)$$

같은 방법으로 $P^4,\ P^5,\ P^6,\ P^7$을 계산한다.

계산결과에 기초하여 수요변동표(표 2)를 작성한다.

표 2

월	3개공장의 수요		
i	P_1^i	P_2^i	P_3^i
1	0.5	0.24	0.24
2	0.49	0.252	0.252
3	0.500 8	0.249 6	0.249 6
4	0.499 84	0.250 08	0.250 08
5	0.500 032	0.249 984	0.249 984
6	0.5	0.25	0.25
7	0.5	0.25	0.25

표 2로부터 공장 1의 수요는 시간이 지나감에 따라 점점 50%정도에서 안정해지며 공장 2와 공장 3의 수요는 모두 25%정도에서 안정해진다는것을 알수 있다.

전이확률행렬 P는 정규확률행렬이기때문에 P는 유일한 균형점 u를 가진다.

$$u=(0.5,\ 0.25,\ 0.25)$$

$$\lim_{k\to\infty} P^0 P^k = u = (0.5,\ 0.25,\ 0.25)$$

즉 시간이 감에 따라 3개 공장의 수요는 안정해진다. 소비시장이 균형상태에 도달했을 때 각 공장들의 수요는 각각 50%, 25%, 25%이다.

표 2를 보면 3월에 소비시장은 기본적으로 균형상태에 이미 도달했다는것을 알수 있다.

이때 각 공장들의 수요와 균형상태때의 수요와의 오차는 1/1 000밖에 되지 않는다.

마르꼬브분석법은 수요예측외에도 로력변동, 투자방안선택, 경영전략작성, 은행대부금의 상환예측을 비롯한 각이한 경제예측에 리용할수 있다.