김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체103(2014)년 제60권 제11호 Vol. 60 No. 11 JUCHE103(2014).

계수발취검사에 기초한 원형확률편차 CEP평가방법

한광룡, 안승철

위대한 수령 **김일성**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《통계는 사회주의건설에서 매우 중요한 역할을 합니다. 정확한 통계가 있어야 옳은 계획을 세울수 있고 모든 사업을 과학적으로 해나갈수 있습니다. 통계는 곧 사회주의입니다.》(《**김일성**전집》 제43권 368페지)

론문에서는 명중정확도인 원형확률편차 CEP(Circular Error Probability)의 검사방법을 실천에 편리하도록 새롭게 적용하기 위한 문제로서 계수발취검사에 의한 원형확률편차평가방법을 새로 연구하였다.

보통 CEP에 대한 검정방법에는 베이스방법과 시행수를 고정한 우도비검정방법 그리고 계량 χ^2법이 있는데 이것들은 모두 미리 규정된 원형목표에 대한 크기 n인 표본을 전제로 하고있다.[1－3]

여기서는 생산자위험과 수요자위험을 고려한 적당한 원형목표의 반경 R를 규정하고 그것에 기초하여 원형목표에 명중한 회수를 가지고 CEP를 쉽게 검증할수 있는 새로운 계수검사방법을 제기하였다.

1. CEP의 개념과 검정방법

성분들이 서로 독립인 2차원정규분포우연량 $(X,\ Y)$에 대하여

$$P[(X-a_x)^2+(Y-a_y)^2 \le R^2]=0.5$$

일 때 정수 R를 원형확률편차라고 하고 CEP 또는 R_{50}으로 표시한다. 즉 CEP는

$$\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\iint\limits_{x^2+z^2\le R^2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-a_x)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(z-a_y)^2}{\sigma_y^2}\right]\right\}dxdz=0.5$$ 를 만족시킨다.

CEP가 작을수록 락점 $(X,\ Y)$는 산포중심 $(a_x,\ a_y)$의 주위에 더욱 집중된다.

락점에 대한 계통오차는 없고($a_x=a_y=0$) 우연오차가 원형산포$(\sigma_x=\sigma_y=\sigma)$할 때 즉 명중원의 중심이 분포중심에 놓이는 원형분포일 때 반경이 R인 원형목표의 명중확률은

$$P(c_R)=1-e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{R}{\sigma}\right)^2} \tag{1}$$

으로 되며 이로부터 원형확률편차의 정의를 리용하면 $R_{50}=1.177\ 4\sigma$가 나온다.

따라서 원형분포할 때 원형목표명중확률 (1)을 CEP로 표시하면

$$P(c_R)=1-e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1.177\ 4R}{R_{50}}\right)^2}. \tag{2}$$

대부분 $\sigma_x \approx \sigma_y$ 이므로 식 (1)이나 식 (2)가 널리 쓰인다.

CEP의 평가문제는 가설 $H_0: \mathrm{CEP} = \mathrm{CEP}_0$, $H_1: \mathrm{CEP} = \lambda \mathrm{CEP}_0$ (여기서 CEP_0 은 확정한 요구값)의 검정문제와 같은데 여기에는 대체로 다음과 같은 두가지 방법이 있다.

① 베이스방법

리론적락점은 원중심이고 $R_i = k_i \sigma_0$ $(i=1,\ 2;1<k_i<\lambda_1; \sigma_0 = \mathrm{CEP}_0/1.177\ 4)$ 을 반경으로 하여 2개의 원 $\Theta_1,\ \Theta_2$ 를 그린다. B 는 시험하여 어떤 원안에 떨어질 사건, A 는 명중정확도가 H_0 을 만족시킬 사건이라고 한다.

시험의 결과가 Θ_i 에 떨어지는 경우 명중정확도가 H_0 을 만족시킬 사건의 사후확률 $P_i(A)$ 를 원인의 확률공식에 따라 구하며 시험의 결과가 Θ_i 에 떨어지지 않는 경우에도 마찬가지이다.

생산자위험과 수요자위험을 각각 $\alpha,\ \beta$ 라고 할 때 $P_i(A) \ge (1-\alpha)/(1-\alpha+\beta)$ 가 두 원에 대하여 모두 성립되면 H_0 을 접수하고 $P_i(A) \le \alpha/(1+\alpha-\beta)$ 가 두 원에 대하여 모두 성립되면 H_0 을 거절한다. 또한 이 두가지를 모두 만족하지 않으면 시험을 계속한다.

② 시험수를 고정한 우도비검정방법

시행수가 n 일 때 가설 H_0, H_1 에 대한 우도비를 렐레이분포밀도에 기초하여 계산하면 $F = \lambda_0^{-2n} \lambda_1^{-2n} \exp\left[\dfrac{\lambda_0^2 - \lambda_1^{-2}}{2\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{n} r_i^2\right]$ 과 같다.

이때 $F \le \beta/(1-\alpha)$ 이면 H_0 을 접수하고 $F \ge (1-\beta)/\alpha$ 이면 H_0 을 거절한다.

이 두가지가 모두 만족되지 않으면 사전에 정한 자름위험 α' 와 β' 를 리용하여 $F \le \beta'/(1-\alpha')$ 일 때 H_0 을 접수하고 그렇지 않으면 H_0 을 거절한다.

2. CEP검정의 계수발취검사로의 전환근거와 원리

실천에서는 CEP에 대한 검정을 비률에 관한 계수발취검사방식으로 전환시켜 진행하는것이 매우 간편하고 쉬우며 리용하기 좋다. 그것은 CEP의 검증을 반경 R 인 가상적인 목표를 규정한 다음 이 목표를 명중한 회수를 가지고 진행하면 실천적으로 매우 편리하기때문이다.

이제 목표점을 중심으로 반경 R 인 어떤 원을 가상적인 목표로 규정하고 락점이 이 원안에 들어가면 명중, 원밖에 떨어지면 실패라고 규정하기로 한다.

이렇게 되면 CEP검정시험은 《성패》형시험으로 된다.

매번 목표를 명중할 확률을 p 라고 할 때 n 번 시험하여 k 번 명중할 확률은 $P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ $(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ 인데 식 (1)로부터 알수 있는바와 같이 원의 명중확률 p 는 명중정확도지표 σ 에 의존한다. 즉 $p = p(\sigma)$ 이다.

따라서 명중정확도지표가 σ_0 일 때 원 R 를 명중할 확률은 $p = p(\sigma_0)$ 으로 표시된다. 이로부터 명중정확도 σ 의 검정(결국 CEP 의 검정)을 명중확률 $p(\sigma_0)$ 의 검정으로 전환할수 있다. 즉 가설 $H_0: p(\sigma) \le p(\sigma_0)$ 의 검정문제로 귀착시킬수 있다. 이리하여 명중정확도지표로서의 CEP 의 검정을 비률에 대한 계수발취검사로 전환할수 있다.

3. 계수발취검사에 의한 CEP의 검정방법

락점부근의 지표면을 하나의 평면으로 본다. 락점의 자리표는 $(X,\ Z)$이고 세로, 가로방향편차 $X,\ Z$들이 서로 독립이며 $(X,\ Z)$는 정규분포 $N(a_x,\ a_y,\ \sigma_x^2,\ \sigma_y^2)$에 따른다.

이때 락점의 반경방향편차 r는 렐레이분포에 따른다.

이제 CEP가 그것에 대한 지표 CEP_0보다 크지 않을것을 요구할 때 다음의 가설을 세울수 있다.

$$H_0:\ \mathrm{CEP}=\mathrm{CEP}_0\ \text{(령가설)},\ H_1:\mathrm{CEP}=\lambda\mathrm{CEP}_0,\ \lambda>1\ \text{(대립가설)}$$

여기서 CEP_0은 확정한 요구값이며 감별비 λ는 생산자와 수요자의 공동합의에 따라 결정된다.

일반성을 잃지 않고 령가설에 대응되는 사격정확도와 사격밀집도를 각각 $a_x=a_z=a_0,\ \sigma_x=\sigma_z=\sigma_0$으로 표시하자. 즉 락점에 대한 계통오차는 두 자리표방향에서 같고$(a_x=a_z)$ 우연오차가 원형산포$(\sigma_x=\sigma_z)$한다고 하자.

대립가설에 대응되는 사격정확도와 사격밀집도가 각각 다음과 같이 표시된다고 하자.

$$a_x=a_z=a_1=\lambda a_0\,,\ \sigma_x=\sigma_z=\sigma_1=\lambda\sigma_0$$

이제 CEP의 평가방법을 보기로 하자.

총 n번 시행하였다고 하고 반경이 R인 원안에 들어가는 회수(성공수) k를 통계량으로 한다.

n번 시행에서 k번 원안에 들어갈 명중확률은

$$P(k\,|\,H_1)=C_n^k p_1^k(1-p_1)^{n-k}\,,\ P(k\,|\,H_0)=C_n^k p_0^k(1-p_0)^{n-k}$$

과 같다. 여기서

$$p_0=\iint\limits_{x^2+z^2\le R^2}\frac{1}{2\pi\sigma_0^2}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-a_0)^2}{\sigma_0^2}+\frac{(z-a_0)^2}{\sigma_0^2}\right]}dxdz\,,\ p_1=\iint\limits_{x^2+z^2\le R^2}\frac{1}{2\pi\lambda^2\sigma_1^2}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\lambda a_0)^2}{\lambda^2\sigma_0^2}+\frac{(z-\lambda a_0)^2}{\lambda^2\sigma_0^2}\right]}dxdz$$

는 각각 사격밀집도가 $\sigma_0,\ \sigma_1$일 때의 원의 명중확률이다.

다음과 같은 검정방안을 생각하자.

$k\ge c$이면 명중정확도가 요구에 맞는다고 인정한다. 즉 령가설을 접수한다.

그렇지 않은 경우에는 명중정확도가 요구에 맞지 않는다고 인정한다. 즉 령가설을 기각한다.

검정턱값 c를 변화시키면 생산자와 수요자의 위험이 변화된다.

따라서 두 위험을 분석하여 검정턱값 c를 확정할수 있다.

이때 생산자위험과 수요자위험은 각각

$$\alpha=P(k<c\,|\,H_0)=1-\sum_{k=c}^{n}C_n^k p_0^k(1-p_0)^{n-k}\,,\ \beta=P(k\ge c\,|\,H_1)=\sum_{k=c}^{n}C_n^k p_1^k(1-p_1)^{n-k}\,.$$

명중정확도평가에서는 일반적으로 두 위험이 같을것을 요구한다. 즉 $\alpha\approx\beta$.

따라서 c를 조절하여 $\rho=\alpha/\beta\approx1$이 되게 c를 조절할수 있다.

그러나 응용실천에서는 c가 옹근수이므로 c를 조절할 때 $\alpha,\ \beta$의 변화가 심하다.

그러므로 $\rho \approx 1$ 되는 적당한 c 를 찾기가 힘들다. 따라서 원의 반경 R 의 크기를 조절하여 두 위험이 기본적으로 비슷해지게 할수 있다.

실천적요구와 편리성으로부터 원형확률편차평가를 위한 다음과 같은 계수발취검사법을 확립한다.

검정가설은 앞에서와 같다.

CEP 에 대한 가설을 목표원에서의 p 에 대한 H_0: $p = p_0$ (령가설), $H_1: p = p_1$ (대립가설)로 전환한다. 여기서 $p_0 = 1 - e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1.177}{\mathrm{CEP}_0}\frac{4R^2}{}\right)}$, $p_1 = 1 - e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1.177}{\lambda \mathrm{CEP}_0}\frac{4R^2}{}\right)}$ $(\lambda > 1)$ 은 각각 명중정확도가 CEP_0, CEP_1 일 때의 원의 명중확률로서 식 (2)로 계산된다.

생산자위험 α 나 수요자위험 β 는 생산자와 수요자가 합의하여 초기선정하는데 명중확률이 p 일 때의 합격확률로서의 검사특성함수 $L(p)$ 와는 다음과 같은 관계에 있다.

$$\alpha = 1 - L(p_0),\ \beta = L(p_1)$$

1회발취검사는 제품조에서 n 개 제품을 발취하여 검사하였을 때 명중수 k 에 대하여 $k \ge c$ 이면 제품조는 합격, $k < c$ 이면 제품조는 불합격의 방식을 취하는 발취검사이다. 이것을 $(n,\ c)$ (c 는 명중수)방식이라고 한다.

1회발취검사방식에서 검사특성함수는 $L(p) = \sum_{k=c}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ 이다.

2회발취검사에서는 두 단계의 검사 즉 1차검사와 2차검사로 진행된다.

1차검사에서는 n_1 개의 표본을 발취하여 검사하였을 때 합격품수 k_1 에 대하여 $k_1 \ge c_1$ 일 때 제품조를 접수하고 $k_1 \le c_2$ 일 때 제품조를 거절하며 $c_2 < k_1 < c_1$ 일 때 2차검사로 넘어간다. 여기서 c_1 은 1차검사에서의 접수한계, c_2 는 1차검사에서의 거절한계이다.

2차검사에서는 n_2 개의 표본을 발취하여 검사하였을 때 합격품수 k_2 에 대하여 $k_2 \ge c_3$ 일 때는 제품조를 접수하고 $k_2 < c_3$ 이면 제품조를 거절한다.

이 발취검사방식을 $(n_1,\ n_2 \mid c_2,\ c_1\ ;\ c_3)$ 으로 표시한다.

2회발취검사방식 $(n_1,\ n_2 \mid c_2,\ c_1\ ;\ c_3)$ 인 경우에는 (c_1, c_2, c_3 은 명중수)

$$L(p) = \sum_{k_1=c_1}^{n_1} C_{n_1}^{k_1} p^{k_1} (1-p)^{n_1-k_1} + \sum_{k_1=c_2+1}^{c_1-1} \left[C_{n_1}^{k_1} p^{k_1} (1-p)^{n_1-k_1} \sum_{k_2=c_3}^{n_3} C_{n_2}^{k_2} p^{k_2} (1-p)^{n_2-k_2} \right]$$

이며 평균시행수는 $\mathrm{E}N(p) = n_1 + n_2 \sum_{k_1=c_2+1}^{c_1-1} C_{n_1}^{k_1} p^{k_1} (1-p)^{n_1-k_1}$ 이다.

이때 1회 및 2회발취에서 취해야 할 시행수들은 련립방정식 $\alpha = 1 - L(p_0),\ \beta = L(p_1)$ 이 만족되도록 정할수 있다.

4. CEP 평가계산실례

명중정확도지표 CEP_0 이 25m라고 하고 앞에서 제기한 계수발취검사에 기초하여 보기로 하자.

반경 R 인 목표원에 7번 시행하여 7번 다 명중하였을 때 합격, 기타 경우는 불합격으

로 하는 평가규칙으로 CEP를 검정하려고 할 때 목표원의 반경 R를 얼마로 해야 하는가에 대하여 보자. 여기서 CEP에 대한 감별비는 $\lambda = 1.45$이고 수요자위험 $\beta = 0.207$을 보장하려고 한다.

주어진 평가규칙은 1회발취검사방식 $(n,\ c) = (7,\ 7)$이며 검정가설은 다음과 같다.

$$H_0:\ p = p_0\ (\text{령가설}),\ H_1: p = p_1(\text{대립가설})$$

먼저 p_1을 결정하자.

수요자위험에 관한 식으로부터 $\beta = L(p_1) = \sum_{k=7}^{7} C_n^k {p_1}^k (1-p_1)^{n-k} = p_1^7 = 0.25$ 이며 따라서 $p_1 = 1 - e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1.177\ 4R}{\lambda_1 \mathrm{CEP}_0}\right)^2} = 0.798$이고 이로부터 $R = 55.110\mathrm{m}$ 이다.

다음으로 p_0 을 결정하자.

$p_0 = 1 - e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1.177\ 4R}{\lambda_0 \mathrm{CEP}_0}\right)^2}$ 이고 여기에 우에서 구한 $R = 55.110\mathrm{m}$ 와 $\lambda_0 = 1,\ \mathrm{CEP}_0 = 25\mathrm{m}$ 를 대입하면 $p_0 = 0.965$이다.

또한 생산자위험 α는 $\alpha = 1 - L(p_0) = 1 - \sum_{k=7}^{7} C_7^k {p_0}^k (1-p_0)^{7-k} = 1 - p_0^7 = 0.217$로 계산된다.

결국 계수발취검사에 의하여 $n = 7$번 시행하여 $\alpha,\ \beta \le 0.25$범위에서 명중정확도를 평가할수 있는 1회발취검정방안을 세울수 있다.

참 고 문 헌

[1] 张士峰 等; Bayes试验分析与评估, 国防技术大学出版社, 23～365, 2004.

[2] 张士峰; 兵工学报, 22, 2, 238, 2001.

[3] 张士峰; 兵工学报, 23, 2, 255, 2002.

주체103(2014)년 7월 5일 원고접수

Estimation Method of Circular Error Probability(CEP) based on Inspection by Attributes

Han Kwang Ryong, An Sung Chol

We studied new useful method of inspection by attributes concerned with CEP estimation.

Here we solved the proper radius R of circular target considering producer's risk and consumer's risk and based on this we suggested the new single and double sampling inspection which can easily test the targeting accuracy (CEP) with the number of shot in circular target.

Key words: circular error probability, attribute inspection