김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제2호

역방향확률미분방정식을 리용한 아시아식선택권의 한가지 수치풀이방법

허승룡, 김천을

론문에서는 역방향확률미분방정식을 리용하여 아시아식선택권에 대한 한가지 근사도식을 제기하였다.

각이한 선택권의 가격들은 역방향확률미분방정식의 풀이에 의하여 표시된다.[1－4]

t 시각에서의 무위험자산을 S_t^0 이라고 하고 리자률을 r_t 라고 하면 다음의 식이 성립한다.[1, 2]

$$dS_t^0 = S_t^0 r_t dt$$

또한 다음의 확률미분방정식에 의해 표시되는 d 개의 위험자산 $S_t^i \ (i=\overline{1,\ d})$ 가 있다고 하자.

$$dS_t^i = S_t^i \left(b_t^i dt + \sum_{j=1}^d \sigma_t^{i,j} dW_t^j \right)$$

그리고 $b_t = (b_t^1,\ \cdots,\ b_t^d)$, $\sigma_t = (\sigma_t^{i,j})$ 라고 하고 $b_t - r_t 1 = \sigma_t \lambda_t$ 를 만족시키는 λ_t 가 존재한다고 하자. 이때 t 시각의 전체 자산 Y_t 는

$$dY_t = \sum_{i=1}^d \pi_t^i \frac{dS_t^i}{S_t^i} + \left(Y_t - \sum_{i=1}^d \pi_t^i \right) \frac{dS_t^0}{S_t^0} \quad = \pi_t(\sigma_t dW_t + b_t dt) + (Y_t - \pi_t 1) r_t dt =$$
$$= (r_t Y_t + \pi_t \sigma_t \lambda_t) dt + \pi_t \sigma_t dW_t$$

이다.[1, 2] $Z_t := \pi_t \sigma_t$ 로 놓으면 우의 식은 $-dY_t = -r_r Y_t dt - Z_t \lambda_t dt - Z_t dW_t$ 로 되며 역방향확률미분방정식으로 표현된다.

종점조건은 유럽식선택권인 경우 $Y_T = \varphi(S_T)$ 이고 산수평균아시아식선택권인 경우 $Y_T = \varphi\left(1/T \int_0^T S_t dt \right)$ 이며 회고선택권인 경우 $Y_T = \varphi_2(\min_{0 \le t \le T} S_t)$ 또는 $Y_T = \varphi_2(\max_{0 \le t \le T} S_t)$ 이다.[1, 2]

아시아식선택권에 대한 수치풀이도식들에 대하여서는 선행연구[1]에서 비교적 상세히 론의되였다.

산수평균아시아식선택권과 관계되는 일반적인 정역방향확률미분방정식은 다음과 같다.[1, 2]

$$\begin{cases} X_t = X_0 + \int_0^t b(s,\ X_s) ds + \int_0^t \sigma(s,\ X_s) dW_s \\ Y_t = \varphi\left(\frac{1}{T} \int_0^T X_t dt \right) + \int_t^T f(s,\ X_s,\ Y_s,\ Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s \end{cases} \tag{1}$$

식 (1)에서 종점조건이 정방향풀이의 범함수로 표시되므로 비마르꼬브형정역방향확률

미분방정식으로 볼수 있다.

마르꼬브형정역방향확률미분방정식인 경우 역방향확률미분방정식의 풀이의 t 시각에서의 값이 정방향풀이의 t 시각에서의 값에만 의존하므로 유한차원공간분할을 리용하여 강근사도식을 얻어낼수 있다.

비마르꼬브형인 경우에는 공간분할을 리용할수 없으며 역방향성분의 수치풀이가 정방향풀이의 모의에 따라 달라지는 약근사도식[3]을 리용한다. 그러나 식 (1)의 역방향성분에서 종점조건이 정방향성분의 적분에 관계되는 특수한 점을 리용하면 그것과 동등한 마르꼬브정역방향확률미분방정식을 얻을수 있다. 이것은 식 (1)에 대하여 강근사도식을 얻을수 있다는것을 말해준다.

$(\Omega,\ \mathcal{F},\ \boldsymbol{P},\ (\mathcal{F}_t))$를 완비확률토대, $W=(W_t)_{t\ge 0}$를 1차원 $(\mathcal{F}_t)$ －위너과정이라고 하자.

방정식 (1)에 대하여 다음과 같은 가정을 준다.

① 어떤 상수 $M\ge 0$이 있어서

$$|b(t,\ x)-b(t,\ y)|+|\sigma(t,\ x)-\sigma(t,\ y)|\le M\,|x-y|$$

이다.

② $f,\ \varphi$는 립쉬츠성을 만족시키는 비우연가측함수이며

$$|f(t,\ 0,\ 0,\ 0)|+|\varphi(0)|\le K$$

이다.

반마르팅게일에 관한 부분적분공식을 리용하면

$$\frac{1}{T}\int_0^T X_t dt=\frac{1}{T}\left(TX_T-\int_0^T tdX_t-[t,\ X_t]_0^T\right)=\frac{1}{T}\int_0^T (T-t)dX_t+x_0=$$

$$=\int_0^T \frac{T-t}{T}b(t,\ X_t)dt+\int_0^T \frac{T-t}{T}\sigma(t,\ X_t)dW_t+x_0$$

이다. 일반적으로 $X_t=x_0+\int_0^t b(s,\ X_s)ds+\int_0^t \sigma(s,\ X_s)dW_s$ 의 형태를 가지는 확률미분방정식의 풀이는 마르꼬브성을 만족시킨다.

방정식 (1)의 종점조건에서 $X_t^2=\frac{1}{T}\int_0^T X_t dt$ 가 우와 류사한 형태로 표시되므로 변수치환에 의해 마르꼬브형으로 바꾸어보자.

다음과 같이 기호약속을 하자.

$$X_t^1:=X_t,\ X_t^2:=x_0+\int_0^t \frac{T-s}{T}b(s,\ X_s)ds+\int_0^t \frac{T-s}{T}\sigma(s,\ X_s)dW_s$$

$$\overline{X}_t=(X_t^1,\ X_t^2)^{\mathrm{T}},\ x=(x_1,\ x_2)^{\mathrm{T}},\ b_1(t,\ x):=b(t,\ x_1),\ b_2(t,\ x):=\frac{T-t}{T}b(s,\ x_1)$$

$$\overline{b}(t,\ x):=(b_1(t,\ x),\ b_2(t,\ x)),\ \overline{\sigma}(t,\ x):=(\sigma_1(t,\ x),\ \sigma_2(t,\ x))$$

$$\bar{f}(t,\ x,\ y,\ z):=f(t,\ x_1,\ y,\ z),\ \psi(x):=\varphi(x_2)$$

그러면 식 (1)은 다음과 같은 동등한 마르꼬브형정역방향확률미분방정식으로 쓸수 있다.

$$\begin{cases} \overline{X}_t = \overline{X}_0 + \int_0^t \overline{b}(s,\ \overline{X}_s)ds + \int_0^t \overline{\sigma}(s,\ \overline{X}_s)dW_s\ (0 \le t \le T) \\ Y_t = \psi(\overline{X}_T) + \int_t^T \bar{f}(s,\ \overline{X}_s,\ Y_s,\ Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s\ (0 \le t \le T) \end{cases} \tag{2}$$

이때 다음의 정리가 성립한다.

정리 1 정역방향확률미분방정식 (2)의 풀이를 $(X_t^1,\ X_t^2,\ Y_t,\ Z_t)_{t\in[0,\ 1]}$ 라고 하면 $(X_t^1,\ Y_t,\ Z_t)_{t\in[0,\ 1]}$ 은 정역방향확률미분방정식 (1)의 풀이로 된다.

이제 가정 ①, ②를 리용하여 식 (2)의 특징량들에 대하여 성립하는 결과들을 보기로 하자.

정리 2 $\overline{b},\ \overline{\sigma},\ \bar{f},\ \psi$ 는 립쉬츠련속이며 다음의 식

$$|\bar{f}(t,\ 0,\ 0,\ 0)| + |\psi(0)| = |f(t,\ 0,\ 0,\ 0)| + |\varphi(0)| \le K$$

가 성립한다.

정리 2로부터 마르꼬브형정역방향확률미분방정식 (2)에 대하여 풀이의 유일존재성을 위한 표준적인 조건들이 성립하며 비선형헤이만—카스공식에 의하여 식 (2)의 풀이는 다음과 같이 표시된다.

$$Y_t = u(t, X_t),\ Z_t = \nabla u(t,\ X_t)\sigma(t,\ X_t)$$

여기서 $u(t, x)$ 는 다음과 같은 반선형포물선형편미분방정식의 풀이이다.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{2} \overline{b}_i(t,\ x)\dfrac{\partial u(t,\ x)}{\partial x_i} + \dfrac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} \overline{\sigma}_i(t,\ x)\overline{\sigma}_j^{\mathrm{T}}(t,\ x)\dfrac{\partial^2 u(t,\ x)}{\partial x_i \partial x_j} + \bar{f}(t,\ x,\ u,\ \nabla u \cdot \sigma) = 0 \\ u(T,\ x) = \psi(x)\ \ (x \in \mathbf{R}^2) \end{cases}$$

만일 식 (2)에서 확산과정이 시공간점 $(t,\ x)$ 에서 시작된다면 $Y_s^{t,\ x} = u(s,\ X_s^{t,\ x})$, $Z_t = \nabla u(s,\ X_s^{t,\ x})\sigma(s,\ X_s^{t,\ x})$ 로 표시할수 있다.

이제 론문의 기본목적인 수치도식을 유도하자.

시간구간 $[0,\ T]$ 의 분할 $0 = t_0 < \cdots < t_N = T$ 에 대하여 $t_{n+1} - t_n = h = T/N$ 라고 하고 $\Delta t_{n,\ k} = t_{n+k} - t_n$, $W_{t_n,\ t} = W_t - W_{t_n}$, $W_{n,\ k} = W_{t_{n+k}} - W_{t_n}$ 으로 정의하자.

$\mathcal{F}_s^{t,\ x} (t \le s \le T)$ 를 시공간점 $(t,\ x)$ 로부터 출발한 확산과정 $\{x + X_r - X_t,\ t \le r \le s\}$ 에 의하여 생성된 $\sigma-$모임벌이라고 하고 $E_s^{t,\ x}[X] := E[X \mid \mathcal{F}_s^{t,\ x}],\ E_t^x[X] := E[X \mid \mathcal{F}_t^{t,\ x}]$ 로 정의한다.

마르꼬브형정역방향확률미분방정식에 대한 근사도식으로서 잘 알려진 C—N도식[4]을 리용하자. $Y^N = \psi(\overline{X}^N),\ Z^N = \psi_x(\overline{X}^N)\overline{\sigma}(t_N,\ \overline{X}^N)$ 이 주어졌을 때 $n = N-1,\ \cdots,\ 1,\ 0$ 에 대하여 $\overline{X}^{n+1},\ Y^n,\ Z^n$ 을 다음과 같이 구한다.

$$\begin{cases} \overline{X}^{n+1} = \overline{X}^n + \rho(t_n,\ W_{n,\ 1}) \\ Y^n = E_{t_n}^{X^n}[Y^{n+1}] + \dfrac{1}{2}h\bar{f}(t_n,\ \overline{X}^n,\ Y^n,\ Z^n) + \dfrac{1}{2}hE_{t_n}^{X^n}[\bar{f}(t_{n+1},\ \overline{X}^{n+1},\ Y^{n+1},\ Z^{n+1})] \\ \dfrac{1}{2}hZ^n = -\dfrac{1}{2}hE_{t_n}^{X^n}[Z^{n+1}] + E_{t_n}^{X^n}[Y^{n+1}W_{n,\ 1}] + \dfrac{1}{2}hE_{t_n}^{X^n}[\bar{f}(t_{n+1},\ \overline{X}^{n+1},\ Y^{n+1},\ Z^{n+1})W_{n,\ 1}] \end{cases} \tag{3}$$

여기서 정방향근사는 약2차테일러형도식[3]을 리용하였다. 즉

$$\rho(t_n,\ W_{n,1})=\bar{b}^n h+\bar{\sigma}^n W_{n,\ 1}+\frac{1}{2}\bar{\sigma}^n\bar{\sigma}_x^n(W_{n,1}^2-h)+$$
$$+\frac{1}{2}\left[\bar{\sigma}_t^n+\bar{\sigma}^n\bar{b}_x^n+\bar{b}^n\bar{\sigma}_x^n+\frac{1}{2}(\bar{\sigma}^n)^2\bar{\sigma}_{xx}^n\right]hW_{n,\ 1}+\frac{1}{2}[\bar{b}_t^n+\bar{b}^n\bar{b}_x^n+(\bar{\sigma}^n)^2\bar{b}_{xx}^n]h^2$$

이다. 실지 수치결과를 얻기 위하여서는 공간분할과 조건부수학적기대값근사를 진행하여야 한다.

다음과 같은 공간분할을 도입하자.

$$D_h:=D_{1,\,h}\times D_{2,\,h}$$
$$D_{j,\,h}:=\{x_i^j\mid x_i^j=il_j,\ l_j>0\ \ (i=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)\}$$

가측함수 g에 대하여

$$E[g(W_{n,1})]=\int_R g\left(x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2h}}\right)dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_R g(\sqrt{2h}xe^{-x^2})dx$$

이고 이것을 가우스—에르미뜨구적법에 의하여 근사시키면

$$E[g(W_{n,1})]\approx\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{j=1}^{L}w_j g(\sqrt{2h}a_j)\tag{4}$$

이다. 여기서 L은 근사에 리용된 표본점들의 수이고 $a_j(j=\overline{1,\ L})$들은 L차에르미뜨다항식 $H_L(x)$의 뿌리들이며 $w_j(j=\overline{1,\ L})$들은 대응하는 무게결수들로서 다음과 같이 표시된다.

$$w_j=\frac{2^{L+1}L!\sqrt{\pi}}{(H_L'(a_j))^2}$$

$x=(x_1,\ x_2)\in D_l$에 대하여 비선형헤인만—카스표현을 리용하면 다음과 같은 식들을 얻는다.

$$E_{t_n}^x[Y^{n+1}]=E_{t_n}^x[Y^{n+1}(X^{n+1})]=E[Y^{n+1}(x+\rho(t_n,\ W_{n,1}))]$$
$$E_{t_n}^x[Y^{n+1}W_{n,1}]=E[Y^{n+1}(x+\rho(t_n,\ W_{n,1}))W_{n,1}]$$
$$E_{t_n}^x[\bar{f}(t_{n+1},\ X^{n+1},\ Y^{n+1},\ Z^{n+1})]=$$
$$=E_{t_n}^x[\bar{f}(t_{n+1},\ x+\rho(t_n,\ W_{n,1}),\ Y^{n+1}(x+\rho(t_n,\ W_{n,1})),\ Z^{n+1}(x+\rho(t_n,\ W_{n,1})))]$$
$$E_{t_n}^x[\bar{f}(t_{n+1},\ X^{n+1},\ Y^{n+1},\ Z^{n+1})W_{n,1}]=$$
$$=E_{t_n}^x[\bar{f}(t_{n+1},\ x+\rho(t_n,\ W_{n,1}),\ Y^{n+1}(x+\rho(t_n,\ W_{n,1})),\ Z^{n+1}(x+\rho(t_n,\ W_{n,1})))W_{n,1}]$$

$\rho=(\rho_1,\ \rho_2)$를 구체적으로 쓰면

$$\rho_1(t_n,\ W_{n,1})=b^n h+\sigma^n W_{n,1}+\frac{1}{2}\sigma^n\sigma_x^n(W_{n,1}^2-h)+$$
$$+\frac{1}{2}\left[\sigma_t^n+\sigma^n b_x^n+b^n\sigma_x^n+\frac{1}{2}(\sigma^n)^2\sigma_{xx}^n\right]hW_{n,1}+\frac{1}{2}[b_t^n+b^n b_x^n+(\sigma^n)^2 b_{xx}^n]h^2$$

$$T\rho_2(t_n,\ W_{n,1}) = (T-t_n)b^n h + (T-t_n)\sigma^n W_{n,1} + \frac{1}{2}(T-t_n)^2\sigma^n\sigma_x^n(W_{n,1}^2 - h) +$$
$$+\frac{1}{2}\left[(T-t_n)\sigma_t^n - \sigma^n + (T-t_n)^2\sigma^n b_x^n + (T-t_n)^2 b^n\sigma_x^n + \frac{1}{2}(T-t_n)^3(\sigma^n)^2\sigma_{xx}^n\right]hW_{n,1} +$$
$$+\frac{1}{2}[(T-t_n)b_t^n - b^n + (T-t_n)^2 b^n b_x^n + (T-t_n)^3(\sigma^n)^2 b_{xx}^n]h^2$$

이다. 이로부터 $x+\rho(\sqrt{2ha_i})\,(j=\overline{1,\ L})$ 에서 $(Y^{n+1},\ Z^{n+1})$ 의 값들을 얻으면 식 (3)에서 조건부수학적기대값들을 식 (4)에 의하여 근사시킬수 있다.

일반적으로 $x+\rho(\sqrt{2ha_i})\notin D_l$ 이므로 이 점들에서 $(Y^{n+1},\ Z^{n+1})$ 의 값은 공간살창점들에서 $(Y^{n+1},\ Z^{n+1})$ 의 값들에 의한 보간다항식을 구성하는 방법으로 얻는다. 이때 보간다항식의 차수는 $r\geq 3$ 으로 준다. 그리고 에르미뜨다항식의 차수는 $L\geq 2$ 로 준다.

따라서 반리산도식 (3)과 공간리산화를 통하여 임의의 시공간점 $(t_n,\ x_j^i)$ 에서 $(Y,\ Z)$ 의 근사값을 구할수 있다.

반리산도식 (3)에서 정방향성분은 2차의 수렴성을 가지는 약2차테일러형도식을 리용하고 역방향성분도 2차의 수렴성을 가지는 C－N도식을 리용하였다. 이때 정역방향확률미분방정식에 대한 수치도식 (3)도 2차의 수렴성을 가진다.

참 고 문 헌

[1] P. Boyle et al.; Mathematics and Economics, 42, 189, 2008.

[2] P. Chol Kyu et al.; arXiv:1808.01564v1 [math.NA], 2018.

[3] E. Gobet et al.; The Annals of Applied Probability, 15, 3, 2172, 2005.

[4] W. Zhao et al.; Sci. China Math., 60, 5, 923, 2017.

주체107(2018)년 12월 5일 원고접수

A Numerical Scheme for Asian Option through Backward Stochastic Differential Equation

Ho Sung Ryong, *Kim Chon Ul*

In this paper, we propose a numerical scheme for Asian option through backward stochastic differential equation and give the error analysis.

Key words: backward stochastic differential equation, Asian option