김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체105(2016)년 제62권 제7호 Vol. 62 No. 7 JUCHE105(2016).

정의관련인 위험을 가지는 한가지 최량재보험연구

김철호, 로영춘

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《선진과학기술을 받아들이기 위한 사업을 적극적으로 벌려야 하겠습니다.

선진과학기술을 받아들이는것은 나라의 과학기술을 빨리 발전시키기 위한 중요한 방도의 하나로 됩니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제15권 499～500페지)

우리는 보험기관이 자연재해위험들을 반영한 정의관련이 있는 위험들에 대하여 재보험을 하는 경우 유용함수에 관한 한가지 최량성기준에 따라 합리적인 재보험을 결정하였다.

재보험은 한 보험기관이 받은 보험대상이 가지고있는 위험들을 여러 보험기관들에 나누어주어 그 위험을 함께 담보하는 보험의 한 형태이다.

선행연구들[2－4]에서는 위험량들의 정의관련성, 코퓰러련관에 관한 개념들과 성질들을 연구하였으며 선행연구[1]에서는 보험기관이 재보험을 분양하는 경우 경영활동을 안전하게 하기 위한 최량재보험문제를 론의하였다.

보험기관이 받은 모든 위험들을 다른 재보험회사들에 분양하는 경우 보험기관에 남은 자금은

$$R(t) = x + a\pi(g(Z))t - \sum_{i=1}^{N(t)} g_i(Z_i) \tag{1}$$

로 표시할수 있다. 여기서 x는 초기자금, a는 청구세기, $\pi(g(Z))$는 재보험협정을 체결한 이후 원보험기관이 받는 보험료, $N(t)$는 청구개수, Z_i는 재보험협정을 체결하기 이전 원보험기관에 들어오는 i째 청구량, $g_i(Z_i)$는 청구 Z_i에 대하여 i째 재보험협정을 체결한 이후 원보험기관에 들어오는 청구량이다.

이 모형에서 원보험기관의 원래 총위험은 $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$ 이고 재보험협정체결이후 원보험기관이 책임지는 총위험은 $S^g(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} g_i(Z_i)$ 이다.

이제 원보험기관이 받는 보험료를 $P = (1+\beta)\mathrm{E}S^g(t) = (1+\beta)\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{N(t)} g_i(Z_i)\right)$ (여기서 β는 보험기관의 고정된 안정짐)로 고정시키는 경우 보험기관에 남은 평균자금이 최대로 되게 재보험을 합리적으로 결정하는 문제 즉 어떤 유용함수 $u(\cdot)$에 관하여

$$\inf_{g\in D_n^P} \mathrm{E}\{u(S^g(t))\} = \inf_{g\in D_n^P} \mathrm{E}\left\{u\left(\sum_{i=1}^{N(t)} g_i(Z_i)\right)\right\}, \tag{2}$$

$D_n^P = \{g = (g_1,\ g_2, \cdots,\ g_n) \mid g_i(Z) : 0 \le g_i(Z) \le Z$에 관하여 증가함수, $\mathrm{E}\{S^g(t)\}(1+\beta) = P\}$

인 재보험을 결정하는 문제를 론의하자.

우리는 청구위험 $\{Z_i\}_{i\ge 1}$ 이 독립우연량렬이 아니고 정의관련을 가지는 경우 보험기관이 최량성기준 (2)를 만족시키는 합리적인 재보험방식을 결정하는 문제를 론의한다.

1. 정의관련인 위험량에 관한 성질

정의 1[2] 임의의 $x \in \boldsymbol{R}$ 에 대하여 확률 $P\{X > x \mid Y = y\}$ 가 $y \in S(Y)$ 에 관하여 증가할 때 우연량 X 가 우연량 Y 에서 확률적으로 증가한다고 말하고 $X \uparrow_{SI} Y$ 로 표시한다. 여기서 $S(Y)$ 는 우연량 Y 에 대하여 $P\{Y \in S(Y)\} = 1$ 인 보렐모임(Y 의 대)이다.

정의 2[3] 조건부수학적기대값이 존재하는 임의의 증가함수 $u : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ 에 대하여 $\mathrm{E}[u(X_1, X_2, \cdots, X_n) \mid Y = y]$ 가 $y \in S(Y)$ 에 관하여 증가할 때 우연벡토르 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 은 우연량 Y 에서 확률적으로 증가한다고 말하고 $(X_1, X_2, \cdots, X_n) \uparrow_{SI} Y$ 로 표시한다.

정의 3[3] 우연벡토르 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 에서 임의의 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 에 대하여

$$(X_1, X_2, \cdots, X_{i-1}, X_{i+1}, \cdots, X_n) \uparrow_{SI} X_i$$

일 때 우연벡토르 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 은 확률적으로 정의관련(PDS)을 가진다고 말한다.

정의 4 기대값이 존재하는 임의의 불룩함수 u 에 대하여 $\mathrm{E}[u(X)] \le \mathrm{E}[u(Y)]$ 일 때 $X \le_{CX} Y$ 라고 표시하고 X 는 불룩순서로 Y 보다 크지 않다고 말한다.

보조정리 1[3] $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 과 우연량 Y 에 대하여 $(X_1, X_2, \cdots, X_n) \uparrow_{SI} Y$ 이면 $(Y, X_1, X_2, \cdots, X_n) \uparrow_{SI} Y$ 이고 $u : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^k,\ k \in \boldsymbol{N}$ 인 임의의 증가함수 u 에 대하여

$$u(X_1, X_2, \cdots, X_n) \uparrow_{SI} Y .$$

보조정리 2[2] 우연량 X 에 대하여 $\mathrm{E}[h_1(X)] \le \mathrm{E}[h_2(X)]$ 인 증가하는 함수 h_1, h_2 는 $\exists \alpha \in \boldsymbol{R} \cup \{+\infty\} : x < \alpha \Rightarrow h_1(x) \ge h_2(x),\ \ x > \alpha \Rightarrow h_1(x) \le h_2(x)$ 이면 $h_1(X) \le_{CX} h_2(X)$ 이다.

보조정리 3 우연량 X, Y 에 대하여 $Y \uparrow_{SI} X$ 이면 $h_1(X) \le_{CI} h_2(X)$ 인 증가하는 함수 h_1, h_2 에 대하여 $h_1(X) + Y \le_{CX} h_2(X) + Y$ 이다.

정리 1 우연벡토르 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 이 PDS인 우연벡토르일 때 증가하는 함수렬 $F_i, G_i, i = 1, 2, \cdots, n$ 에 대하여 $F_i(X_i) \le_{CX} G_i(X_i)$ 이면 다음의 관계를 만족시킨다.

$$\sum_{i=1}^{n} F_i(X_i) \le_{CX} \sum_{i=1}^{n} G_i(X_i)$$

증명 보조정리 1에 의하여 임의의 $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 에 대하여

$$\sum_{i=1}^{k-1} F_i(X_i) + \sum_{i=k+1}^{n} G_i(X_i) \uparrow_{SI} X_k .$$

여기서 $k > j \Rightarrow \sum_{i=k}^{j} a_i = 0$ 이다.

한편 보조정리 3에 의하여 임의의 $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 에 대하여

$$\sum_{i=1}^{k-1} F_i(X_i) + \sum_{i=k+1}^{n} G_i(X_i) + F_k(X_k) \le_{CX} \sum_{i=1}^{k-1} F_i(X_i) + \sum_{i=k+1}^{n} G_i(X_i) + G_k(X_k)$$

이며 이것은

$$\sum_{i=1}^{k} F_i(X_i) + \sum_{i=k+1}^{n} G_i(X_i) \le_{CX} \sum_{i=1}^{k-1} F_i(X_i) + \sum_{i=k}^{n} G_i(X_i) \tag{3}$$

로 된다.

이제 식 (3)에 $k=n$부터 $k=1$까지 적용하면

$$\sum_{i=1}^{n} F_i(X_i) \le_{CX} \sum_{i=1}^{n-1} F_i(X_i) + \sum_{i=n}^{n} G_i(X_i) \le_{CX} \sum_{i=1}^{n-2} F_i(X_i) + \sum_{i=n-1}^{n} G_i(X_i) \le \cdots \le_{CX} \sum_{i=1}^{1} F_i(X_i) + \sum_{i=2}^{n} G_i(X_i) \le_{CX} \sum_{i=1}^{n} G_i(X_i)$$

가 성립되므로 정리결과가 나온다.(증명끝)

정리 2 $(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)$, $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 들이 PDS인 동일한 코퓰러를 가지는 우연벡토르들이라고 할 때 $Y_i \le_{CX} Z_i$, $i=1, 2, \cdots, n$이면 $\sum_{i=1}^{n} Y_i \le_{CX} \sum_{i=1}^{n} Z_i$ 이다.

증명 F_i, G_i 를 Y_i, Z_i 의 분포함수라고 하면 정리의 가정으로부터 $(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)$ 과 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 은 $[0, 1]^n$ 우에서 정의된 PDS인 평등분포하는 우연벡토르 $(U_1, U_2, \cdots, U_n)$ 이 있어서 코퓰러 $C(u_1, u_2, \cdots, u_n) = P(U_1 \le u_1, U_2 \le u_2, \cdots, U_n \le u_n)$ 을 가진다.

한편 코퓰러의 성질에 의하여 분포함수 F_i, G_i 들에 관하여 왼쪽 련속이고 증가하는 일반화된 거꿀함수 F_i^{-1}, G_i^{-1} 들이 있어서

$$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n) = (F_1^{-1}(U_1), F_2^{-1}(U_2), \cdots, F_n^{-1}(U_n)),$$

$$(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n) = (G_1^{-1}(U_1), G_2^{-1}(U_2), \cdots, G_n^{-1}(U_n)).$$

따라서 정리의 가정과 정리 1의 결과를 리용하면 $\sum_{i=1}^{n} Y_i \le_{CX} \sum_{i=1}^{n} Z_i$ 이다.(증명끝)

2. 최량재보험결정

다음의 손실초과협정모임을 생각하자.

$$D_n^{p^*} = \{g^d = (g^{d_1}, g^{d_2}, \cdots, g^{d_n}) \mid g^d \in D_n^p,\ g^{d_i}(X_i) = X_i \wedge d_i,\ d_i \ge 0,\ i=1, 2, \cdots, n\}$$

여기서 $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 은 손실초과협정의 면책벡토르이고 $g^d = (g^{d_1}, g^{d_2}, \cdots, g^{d_n})$ 은 n개 위험들에 대한 손실초과협정방략이다.

정리 3 우연벡토르 $(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)$ 이 PDS인 위험벡토르라고 하면 임의의 재보험방략 $g = (g_1, g_2, \cdots, g_n) \in D_n^p$ 에 대하여 $\sum_{i=1}^{n} g^{d_i} \le_{CX} \sum_{i=1}^{n} g_i(Z_i)$ 인

$$g^d = (g^{d_1}, g^{d_2}, \cdots, g^{d_n}) \in D_n^{p^*}$$

이 존재한다. 여기서 d_i 는 $\mathrm{E}[Z \wedge d_i] = \mathrm{E}[g_i(Z_i)]$ 에 의하여 결정된다.

증명 임의의 재보험에 대하여 $0 \le \mathrm{E}[g_k(Z_k)] \le \mathrm{E}[Z_k]$ 이며 $G(x) = \mathrm{E}[Z_k \wedge x]$ 는 $G(0)=0$, $G(\infty) = \mathrm{E}[Z_k]$ 이고 $x \in [0, \infty]$ 에서 증가련속이다.

따라서 $G(d_k) = \mathrm{E}[Z_k \wedge d_k] = \mathrm{E}[g_k(Z_k)]$ 인 $d_k \in [0, \infty]$ 가 존재한다.

한편 모든 $Z \ge 0$ 에 대하여 $0 \le g_k(Z) \le Z$ 이고 보조정리 2를 리용하면

$$g^{d_k}(Z_k) = Z_k \wedge d_k \le_{CX} g_k(Z_k),\ k=1, 2, \cdots, n.$$

따라서 정리 2에 의하여 $\sum_{i=1}^{n} g^{d_i} = \sum_{i=1}^{n}(Z_i \wedge d_k) \le_{CX} \sum_{i=1}^{n} g_i(Z_i)$ 가 성립된다.(증명끝)

정리 4 위험량렬 $Z_1,\ Z_2,\ \cdots,\ Z_n,\ \cdots$ 과 독립인 셈세기과정 $N(t)$ 에 대하여 위험모형 (2)를 생각하자.

그러면 임의의 $n = 2,\ 3,\ \cdots$ 에 대하여 $\{Z_1,\ Z_2,\ \cdots,\ Z_n\}$ 이 PDS우연량렬이라고 하면 임의의 재보험 $g_i(Z) \in D_n^P,\ i = 1,\ 2,\ \cdots$ 에 대하여 $\sum_{i=1}^{N(t)} g^{d_i} = \sum_{i=1}^{N(t)}(Z_i \wedge d_i) \le_{CX} \sum_{i=1}^{N(t)} g_i(Z_i)$ 인 면책 $d_i \in [0,\ \infty],\ i = 1,\ 2,\ \cdots$ 이 존재한다.

증명 정리 3에 의하여 고정된 n 에 대하여 $\sum_{i=1}^{n} g^{d_i} = \sum_{i=1}^{n}(Z_i \wedge d_k) \le_{CX} \sum_{i=1}^{n} g_i(Z_i)$ 이다.

따라서 임의의 불룩함수에 대하여 $\mathrm{E}\left[u\left(\sum_{i=1}^{n} g^{d_i}\right)\right] = \mathrm{E}\left[u\left(\sum_{i=1}^{n}(Z_i \wedge d_k)\right)\right] \le \mathrm{E}\left[u\left(\sum_{i=1}^{n} g_i(Z_i)\right)\right]$

이므로

$$\mathrm{E}\left[u\left(\sum_{i=1}^{N(t)} g^{d_i}\right)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} P\{N(t) = n\}\mathrm{E}\left[u\left(\sum_{i=1}^{n}(Z_i \wedge d_k)\right)\right] \le \sum_{n=0}^{\infty} P\{N(t) = n\}\mathrm{E}\left[u\left(\sum_{i=1}^{n} g_i(Z_i)\right)\right] = \mathrm{E}\left[u\left(\sum_{i=1}^{N(t)} g_i(Z_i)\right)\right]$$

가 성립된다. 이것은 $\sum_{i=1}^{N(t)} g^{d_i} = \sum_{i=1}^{N(t)}(Z_i \wedge d_i) \le_{CX} \sum_{i=1}^{N(t)} g_i(Z_i)$ 임을 보여준다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보(자연과학), 59, 9, 7, 주체102(2013).

[2] J. Ohlin; ASTIN Bulletin, 5, 2, 249, 1969.

[3] A. Colangelo et al.; Journal of Multivariate Analysis, 99, 3, 358, 2008.

[4] Zhi Bin Liang et al.; Mathematics and Economics, 49, 207, 2011.

주체105(2016)년 3월 5일 원고접수

A Study of Optimal Reinsurance with Positively Dependent Risk

Kim Chol Ho, Ro Yong Chun

We study an optimal reinsurance on utility function in case insurer reinsures with positively dependent risk.

Key words: positively dependent risk, optimal reinsurance