김일성종합대학학보 주체107(2018)년
수학 제64권 제2호

완전그라프와 완전다조그라프의 강적그라프에서의 생성나무개수평가

우 승 식

그라프에서의 생성나무개수평가문제는 효과적인 알고리듬설계, 망의 안전성평가, 유전체연구 등 여러 분야에서 리론실천적으로 많이 제기되는 리산수학의 중요한 분야이다.

그라프 $G_i=(V_i,\ U_i),\ i=1,\ 2$ 에 대하여 다음의 3가지 조건중 어느 하나가 성립될 때 $G_1\otimes G_2$ 의 정점 vu, $v'u'$ $(v,\ v'\in V_1,\ \ u,\ u'\in V_2)$ 사이의 릉이 존재한다는 가정밑에서 강적그라프를 정의하고 $G_1\otimes G_2=(V,\ U)$ 로 표시한다.

① $\{v,\ v'\}\in U_1,\ u=u'$, ② $\{u,\ u'\}\in U_2,\ v=v'$, ③ $\{v,\ v'\}\in U_1,\ \ (u,\ u')\in U_2$

특히 릉모임 U 가 우의 ①과 ②가운데서 어느 하나만을 만족시키는 두 정점 $vu,\ \ v'u'$ $(v,\ v'\in V_1,\ u,\ u'\in V_2)$ 사이릉들로 이루어진 그라프를 이 두 그라프 $G_1=(V_1,\ U_1)$, $G_2=(V_2,\ U_2)$ 의 데까르뜨적그라프라고 부르고 $G_1\square G_2=(V,\ U)$ 로 표시한다.

그라프 G 의 두 정점 $u,\ v$ 사이릉의 개수를 정점쌍 $(u,\ v)$ 의 다중도 또는 릉 $(u,\ v)$ 의 다중도라고 부르고 $l_G(u,\ v)$ 로, 정점 v 에 이웃하고있는 릉의 개수를 이 정점의 차수라고 부르고 $d_G(v)$ 로 표시한다.

G 에 대하여 $a_{ij}:=\begin{cases}0, & i=j\\ l_G(v_i,\ v_j), & i\neq j\end{cases}$ 와 같은 n 차행렬 $A(G)=(a_{ij})_{n,\ n}$ 을 G 의 이웃행렬, $d_{ij}:=\begin{cases}d_G(v_i), & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$ 와 같은 n 차행렬 $D(G)=(d_{ij})_{n,\ n}$ 을 G 의 차수행렬이라고 부른다.

임의의 $n-$정점다중그라프 G 에 대하여 n 차행렬 $L(G)=D(G)-A(G)$ 의 임의의 주대각선원소에 대한 여소행렬식은 서로 같으며 그 값은 G 의 생성나무개수와 같다.[2]

선행연구[1]에서는 강적그라프 $K_n\otimes K_{p,\ q}$, $K_n\otimes K_{p,\ q,\ r}$, 데까르뜨적그라프 $K_n\square K_{p,\ q}$ 에서의 생성나무개수를, 선행연구[3]에서는 1∶1넘기기에 의한 방법으로 완전다조그라프에서의 생성나무개수를, 선행연구[4]에서는 $m-$중그라프 $K_n^m+\alpha G$ 에서, 선행연구[5]에서는 각각 순환그라프와 쌍곡그라프에서의 생성나무개수를 평가하였다.

론문에서는 키르히호프행렬에 의한 행렬나무정리를 리용하여 선행연구[2]결과의 일반화인 표식붙은 강적그라프 $K_n\otimes K_{n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_t}$ 에서의 생성나무개수를 평가하였다. 또한 이 수법을 리용하여 데까르뜨적그라프 $K_n\square K_{p,\ q,\ r}$ 의 생성나무개수를 평가하였다.

앞으로 표식붙은 그라프만을 생각하며 G 의 생성나무개수를 $\upsilon(G)$ 로 표시한다.

$K_n\otimes K_{n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_t}$ 와 $K_n\square K_{p,\ q,\ r}$ 에서의 생성나무개수를 평가하자.

먼저 K_n 과 $K_{n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_t}$ 의 강적그라프 $K_n\otimes K_{n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_t}$ 에서의 생성나무개수를 평가하자.

정리 1 강적그라프 $K_n\otimes K_{n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_t}$ 의 생성나무개수는 다음과 같다.

$$\upsilon(K_n \otimes K_{n_1,\, n_2,\, \cdots,\, n_t}) = n^{nm-2} m^{t-2} \prod_{i=1}^{t} (m_i+1)^{(n-1)n_i} \prod_{i=1}^{t} m_i^{\,n_i-1} = n^{n(m-1)} \prod_{i=1}^{t} (m_i+1)^{(n-1)n_i}\, \upsilon(K_n)\upsilon(K_{n_1,\, n_2,\, \cdots,\, n_t})$$

여기서 $m = n_1 + n_2 + \cdots + n_t$, $m_i = \sum_{j=1}^{t} n_j \ (j \neq i)$ 이다.

증명 $K_n \otimes K_{n_1,\, n_2,\, \cdots,\, n_t}$ 의 정점들을 다음과 같이 순서화하자.

K_n 의 정점모임은 $\{x_1,\, x_2, \cdots,\, x_n\}$ 으로 순서화하고 $K_{n_1,\, n_2,\, \cdots,\, n_t}$ 의 정점모임은 이 그라프의 첫번째 정점모임의 n_1 개의 정점들을 먼저 순서화하고 그뒤에 두번째 정점모임의 n_2 개의 정점들을 순서화하며 마지막으로 t 번째 정점모임의 n_t 개의 정점들을 순서화하면 $K_n \otimes K_{n_1,\, n_2,\, \cdots,\, n_t}$ 의 키르히호프행렬은 nm 차행렬로서 다음과 같다.

$$L = L(K_n \otimes K_{n_1,\, n_2,\, \cdots,\, n_t}) =$$

$$= \begin{bmatrix}
a_1'E_{n_1} & -1_{n_1,n_2} & \cdots & -1_{n_1,n_t} & -E_{n_1} & -1_{n_1,n_2} & \cdots & -1_{n_1,n_t} & \cdots & -E_{n_1} & -1_{n_1,n_2} & \cdots & -1_{n_1,n_t} \\
-1_{n_2,n_1} & a_2'E_{n_2} & \cdots & -1_{n_2,n_t} & -1_{n_2,n_1} & -E_{n_2} & \cdots & -1_{n_2,n_t} & \cdots & -1_{n_2,n_1} & -E_{n_2} & \cdots & -1_{n_2,n_t} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-1_{n_t,n_1} & -1_{n_t,n_2} & \cdots & a_t'E_{n_t} & -1_{n_t,n_1} & -1_{n_t,n_2} & \cdots & -E_{n_t} & \cdots & -1_{n_t,n_1} & -1_{n_t,n_2} & \cdots & -E_{n_t} \\
-E_{n_1} & -1_{n_1,n_2} & \cdots & -1_{n_1,n_t} & a_1'E_{n_1} & -1_{n_1,n_2} & \cdots & -1_{n_1,n_t} & \cdots & -E_{n_1} & -1_{n_1,n_2} & \cdots & -1_{n_1,n_t} \\
-1_{n_2,n_1} & -E_{n_2} & \cdots & -1_{n_2,n_t} & -1_{n_2,n_1} & a_2'E_{n_2} & \cdots & -1_{n_2,n_t} & \cdots & -1_{n_2,n_1} & -E_{n_2} & \cdots & -1_{n_2,n_t} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-1_{n_t,n_1} & -1_{n_t,n_2} & \cdots & -E_{n_t} & -1_{n_t,n_1} & -1_{n_t,n_2} & \cdots & a_t'E_{n_t} & \cdots & -1_{n_t,n_1} & -1_{n_t,n_2} & \cdots & -E_{n_t} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-E_{n_1} & -1_{n_1,n_2} & \cdots & -1_{n_1,n_t} & -E_{n_1} & -1_{n_1,n_2} & \cdots & -1_{n_1,n_t} & \cdots & a_1'E_{n_1} & -1_{n_1,n_2} & \cdots & -1_{n_1,n_t} \\
-1_{n_2,n_1} & -E_{n_2} & \cdots & -1_{n_2,n_t} & -1_{n_2,n_1} & -E_{n_2} & \cdots & -1_{n_2,n_t} & \cdots & -1_{n_2,n_1} & a_2'E_{n_2} & \cdots & -1_{n_2,n_t} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-1_{n_t,n_1} & -1_{n_t,n_2} & \cdots & -E_{n_t} & -1_{n_t,n_1} & -1_{n_t,n_2} & \cdots & -E_{n_t} & \cdots & -1_{n_t,n_1} & -1_{n_t,n_2} & \cdots & a_t'E_{n_t}
\end{bmatrix}$$

여기서 $a_i' = nm_i + n - 1,\ i = 1, \cdots, t$ 이고 E_p 는 p 차단위행렬, $a_i'E_p$ 는 주대각선원소들은 모두 a_i' 이고 나머지원소들은 령인 p 차행렬이며 $-1_{p,\, q}$ 는 모든 성분들이 -1 인 $p \times q$ 형행렬이다.

이 행렬에서 첫번째 행과 렬을 제거하여 얻어진 $(mn-1)$ 차행렬의 행렬식은 선행연구[2]에 의하여 $K_n \otimes K_{n_1,\, n_2,\, \cdots,\, n_t}$ 의 생성나무개수 $\upsilon(K_n \otimes K_{n_1,\, n_2,\, \cdots,\, n_t})$ 와 같다.

이 행렬식의 첫행에 $(a_1',\, 0_{1,\, n_1-1},\, 0_{1,\, n_2} \cdots,\, 0_{1,\, n_t},\, 0_{1,\, n_1},\, 0_{1,\, n_2}, \cdots,\, 0_{1,\, n_t}, \cdots,\, 0_{1,\, n_1},\, 0_{1,\, n_2},\, \cdots,\, 0_{1,\, n_t})$ 를, 첫렬에는 $(a_1',\, 0_{1,\, n_1-1},\, -1_{1,\, n_2} \cdots,\, -1_{1,\, n_t},\, e_{1,\, n_1},\, -1_{1,\, n_2}, \cdots,\, -1_{1,\, n_t}, \cdots,\, e_{1,\, n_1},\, -1_{1,\, n_2},\, \cdots,\, -1_{1,\, n_t})^{\mathrm{T}}$ 를 덧붙이고 a_1' 로 나누어도 행렬식은 변하지 않는다.

다음 얻어진 행렬식을 계산하기 위하여 행렬식의 성질을 여러번 적용하면

$$a_1^{n_1n-n_1-1} a_2^{n_2n-n_2} \cdots a_t^{n_tn-n_t} (a_1-n+1)(a_1-n)^{n_1-2}(a_2-n)^{n_2-1} \cdots (a_t-n)^{n_t-1} \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix}
1 & \cdots & -(n-1)/(a_1-n+1) - n(n_1-1)/(a_1-n) \\
-nn_2/(a_2-n) & \cdots & -nn_2/(a_2-n) \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
-nn_t/(a_t-n) & \cdots & 1
\end{vmatrix} =$$

$$= a_1^{n_1 n - n_1 - 1} a_2^{n_2 n - n_2} \cdots a_t^{n_t n - n_t} (a_1 - n + 1)(a_1 - n)^{n_1 - 2} (a_2 - n)^{n_2 - 1} \cdots (a_t - n)^{n_t - 1} \cdot$$
$$\cdot n^{t-1} n_2 \cdots n_t \frac{a_1(nn_1 - 1) + nn_1(1-n)}{a_1 - n + 1} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & \alpha_t \end{vmatrix}$$

가 성립된다. 여기서 $\alpha_1 = \dfrac{a_1 - n + 1}{a_1(nn_1 - 1) + nn_1(1-n)}$, $\alpha_i = \dfrac{a_i - n}{nn_i}$, $i = 2, \cdots, t$ 이다.

그런데 $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & \alpha_t \end{vmatrix} = \dfrac{1m^{t-2} n^{-1} a_1(a_1 - n)}{a_1(nn_1 - 1) + nn_1(1-n)}$ 이 성립되고 $a_i = m_i n + n$, $i = 1, \cdots, t$ 이므로 정리가 성립된다.(증명끝)

따름 강적그라프 $K_n \otimes K_{p,\ q}$ 와 $K_n \otimes K_{p,\ q,\ r}$ 의 생성나무개수는 각각 다음과 같다.

$$\upsilon(K_n \otimes K_{p,\ q}) = n^{np+nq-2} p^{q-1} q^{p-1} (p+1)^{nq-q} (q+1)^{np-p}$$

$$\upsilon(K_n \otimes K_{p,\ q,\ r}) = n^{np+nq+nr-2} (p+r)^{q-1} (q+r)^{p-1} (p+q)^{r-1} \cdot$$
$$\cdot (p+r+1)^{nq-q} (q+r+1)^{np-p} (p+q+1)^{nr-r} (p+q+r)$$

다음 $K_n \square K_{p,\,q,\,r}$ 에서의 생성나무개수를 평가하자.

정리 2 데까르뜨적그라프 $K_n \square K_{p,\,q,\,r}$ 의 생성나무개수는 다음과 같다.

$$\upsilon(K_n \square K_{p,\ q,\ r}) = (q+r+n)^{np-n-p+1} (p+r+n)^{nq-n-q+1} (p+q+n)^{nr-n-r+1} (q+r)^{p-1} (p+r)^{q-1} \cdot$$
$$\cdot (p+q)^{r-1} n^{n-2} (p+q+r)(p+q+r+n)^{2n-2}$$

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보(자연과학), 58, 12, 6, 주체106(2017).

[2] N. Biggs; Algebraic Graph Theory, Cambridge Uniiversity Press, 11~192, 1974.

[3] L. Clark; Bull. Inst. Combin. Appl., 38, 50, 2003.

[4] S. D. Nikolopoulos et al.; Discrete Math. Theor. Comput.Sci. Proc., 8, 235, 2006.

[5] M. Hamann; Combinatorica, 36, 3, 313, 2016.

주체106(2017)년 12월 5일 원고접수

Enumeration for the Number of Spanning Trees of the Strong Products of Complete Graph and Complete Multipartite Graph

U Sung Sik

We have enumerated the number of spanning trees of the labelled strong product graph $K_n \otimes K_{n_1,\, n_2,\, \cdots,\, n_t}$ by using the matrix tree theorem based on the Kirchhoff matrix. And we have enumerated the number of spanning trees of the labelled cartesian product graph $K_n \square K_{p,\,q,\,r}$ by using this technique.

Key words: spanning tree, strong product graph, cartesian product graph