김일성종합대학학보 주체107(2018)년
수 학 제64권 제3호

슈르의 정리를 만족시키는 공형반대칭접속에 대하여

허 달 윤

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《우리는 과학기술강국건설에 박차를 가하여 짧은 기간에 나라의 과학기술발전에서 새로운 비약을 이룩하며 과학으로 흥하는 시대를 열고 사회주의건설에서 혁명적전환을 가져와야 합니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 38페지)

선행연구[1]에서는 슈르의 정리를 만족시키는 한가지 형태의 반대칭비계량접속을 정의하고 그것의 성질을 연구하였다. 레비－찌비따접속에 관한 슈르의 정리는 오래전에 연구되였고 최근시기에 아마리－첸쪼브접속에 대해서도 슈르의 정리[2]가 연구되였다. 그러나 일반적으로 비대칭비계량접속에 관해서는 슈르의 정리를 증명하는것이 의연히 난문제로 제기되고있다. 선행연구[3]에서는 각이한 형태의 비대칭계량접속을 제시하였으나 슈르의 정리에 대해서는 연구하지 않았다.

론문에서는 공형반대칭접속으로 되는 한가지 새로운 형태의 반대칭비계량접속에 대한 슈르의 정리를 연구하고 그 성질들을 밝혔다.

리만다양체 $(M,\ g)$ 우의 1－형식 π 에 대하여 다음의 조건을 만족시키는 반대칭비계량접속 ∇ 는 공형반대칭접속이다.

$$\nabla_k g_{ij} = \pi_k g_{ij} - \pi_i g_{jk} - \pi_j g_{ik},\ T_{ij}^k = \pi_j \delta_j^k - \pi_i \delta_j^k \tag{1}$$

이 접속의 접속결수는 다음과 같다.

$$\Gamma_{ij}^k = \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix} - \frac{1}{2}(\pi_i \delta_j^k - \pi_j \delta_i^k - g_{ij}\pi_k) \tag{2}$$

(여기서 $\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}$ 는 레비－찌비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$ 의 접속결수이고 π_i 는 1－형식 π 의 성분이다.)

정리 1 (공형반대칭접속 ∇ 에 관한 슈르의 정리) $\dim M > 2$ 인 리만다양체 $(M,\ g)$ 우의 공형반대칭접속 ∇ 에 대하여 임의의 점 $p(\in M)$ 에서의 단면곡률이 2차원방향 E (T_pM 의 임의의 2차원부분공간)의 선택에 무관계하면 리만다양체 $(M,\ g,\ \nabla)$ 는 일정곡률을 가진다.

증명 리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 반대칭비계량접속 ∇ 에 관한 곡률텐소르의 제2종의 비앙끼항등식은 다음과 같다.

$$\nabla_h R_{ijk}^l + \nabla_i R_{jhk}^l + \nabla_j R_{hik}^l = 2(\pi_h R_{ijk}^l + \pi_i R_{jhk}^l + \pi_j R_{hik}^l) \tag{3}$$

그리고 접속 ∇ 에 관한 단면곡률이 임의의 점 p 에서의 2차원방향 E 의 선택에 무관계하면 곡률텐소르는 다음과 같다.

$$R_{ijk}^l = K(p)(\delta_j^l g_{ik} - \delta_i^l g_{jk}) \tag{4}$$

따라서 식 (4)를 식 (3)에 넣으면 다음과 같다.

$$\nabla_h K(\delta_j^l g_{ik} - \delta_i^l g_{jk}) + \nabla_i K(\delta_h^l g_{jk} - \delta_j^l g_{hk}) + \nabla_j K(\delta_i^l g_{hk} - \delta_h^l g_{ik}) +$$
$$+ K(\delta_j^l \nabla_h g_{ik} - \delta_i^l \nabla_h g_{jk} + \delta_h^l \nabla_i g_{jk} - \delta_j^l \nabla_i g_{hk} + \delta_i^l \nabla_j g_{hk} - \delta_h^l \nabla_j g_{ik}) =$$

$$=2K\pi_h(\delta_j^l g_{ik}-\delta_i^l g_{jk})+\pi_i(\delta_h^l g_{jk}-\delta_j^l g_{hk})+\pi_j(\delta_i^l g_{hk}-\delta_h^l g_{ik})$$

이 식을 식 (1)을 리용하여 정돈하면 다음과 같다.

$$\nabla_h K(\delta_j^l g_{ik}-\delta_i^l g_{jk})+\nabla_i K(\delta_h^l g_{jk}-\delta_j^l g_{hk})+\nabla_j K(\delta_i^l g_{hk}-\delta_h^l g_{ik})=0$$

계속하여 이 식을 $i,\ l$ 에 관하여 축약하면 다음과 같다.

$$(n-2)(\nabla_j K g_{hk}-\nabla_h K g_{jk})=0$$

그러므로 이 식에 g^{jk} 를 곱하고 축약하면 다음과 같다.

$$(n-1)(n-2)\nabla_h K=0$$

그런데 $\dim M>2$ 이므로 따라서 $K=\text{const}$ 이다.(증명끝)

슈르의 정리를 만족시키는 공형반대칭접속 ∇ 에 관한 곡률텐소르는 다음과 같다.

$$R_{ijk}^l=K_{ijk}^l+\delta_j^l a_{ik}-\delta_i^l a_{jk}+g_{jk}b_i^l-g_{ik}b_j^l-\delta_k^l\pi_{ij} \tag{5}$$

여기서 K_{ijk}^l 은 레비－찌비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$ 의 곡률텐소르이고 다음식들이 성립된다.

$$a_{ik}=\frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{\nabla}_i\pi_k-\frac{1}{2}\pi_i\pi_k-\frac{1}{2}\pi_p\pi^p\right),\ b_{ik}=\frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{\nabla}_i\pi_k+\frac{1}{2}\pi_i\pi_k\right),\ \pi_{ij}=\frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{\nabla}_i\pi_j-\overset{\circ}{\nabla}_j\pi_i\right)$$

접속 ∇ 의 쌍대접속 $\overset{*}{\nabla}$ 의 접속결수는 다음과 같이 표시된다.

$$\overset{*}{\Gamma}{}_{ij}^k=\begin{Bmatrix}k\\ij\end{Bmatrix}+\frac{1}{2}(\pi_i\delta_j^k-\pi_j\delta_i^k-g_{ij}\pi^k) \tag{6}$$

그리고 곡률텐소르는 다음과 같이 표시된다.

$$\overset{*}{R}{}_{ijk}^l=K_{ijk}^l+\delta_i^l b_{jk}-\delta_j^l b_{ik}+g_{ik}a_j^l-g_{jk}a_i^l+\delta_k^l\pi_{ij} \tag{7}$$

접속 ∇ 의 호상접속 $\overline{\nabla}$ 의 접속결수는 다음과 같이 표시된다.

$$\overline{\Gamma}{}_{ij}^k=\begin{Bmatrix}k\\ij\end{Bmatrix}+\frac{1}{2}(\pi_i\delta_j^k-\pi_j\delta_i^k+g_{ij}\pi^k)$$

그리고 곡률텐소르는 다음과 같이 표시된다.

$$\overline{R}{}_{ijk}^l=K_{ijk}^l+\delta_i^l\overline{a}_{jk}-\delta_j^l\overline{a}_{ik}+g_{jk}b_i^l-g_{ik}b_j^l+\delta_k^l\pi_{ij} \tag{8}$$

여기서

$$\overline{a}_{ik}=\frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{\nabla}_i\pi_k+\frac{1}{2}\pi_i\pi_k-\frac{1}{2}g_{ik}\pi_p\pi^p\right)$$

이다.

주의 1 식 (1)과 (6)으로부터 다음식이 성립된다.

$$\frac{\Gamma_{ij}^k+\overset{*}{\Gamma}{}_{ij}^k}{2}=\begin{Bmatrix}k\\ij\end{Bmatrix}$$

정리 2 리만다양체 $(M,\ g)$ 에서

$$U_{ijk}^l=R_{ijk}^l+\overset{*}{R}{}_{ijk}^l \tag{9}$$

이라고 하면 U_{ijk}^l 은 다음의 성질들을 가진다.

① $U^l_{[ijk]}=0,\ U_{jk}=U_{kj},\ P_{ij}=0\ (P_{ij}=U^k_{ijk})$

② $U_{ij(kl)}=0$

③ $U_{ijkl}=U_{klij}$

증명 식 (5)와 (7)을 변끼리 더하고 $\alpha_{ik}:=a_{ik}-b_{ik}$ 로 놓으면 식 (9)는 다음과 같이 고쳐진다.

$$U^l_{ijk}=2K^l_{ijk}+\delta^l_j\alpha_{ik}+g_{ik}\alpha^l_j-g_{jk}\alpha^l_i \tag{10}$$

이 식으로부터 $K^l_{[ijk]}=0$ 과 $\alpha_{ik}=\alpha_{ki}$ 라는것을 리용하면 성질 ①이 증명된다.

또한 $R^l_{ijk}=-\overset{*}{R}{}^l_{ijk}$ 을 리용하면 성질 ②도 증명된다.

식 (10)으로부터

$$U_{ijkl}=2K_{ijkl}+g_{jl}\alpha_{ik}-g_{il}\alpha_{jk}+g_{ik}\alpha_{jl}-g_{jk}\alpha_{il}$$

이므로 $\alpha_{ik}=\alpha_{ki}$ 라는것을 리용하면 성질 ③이 증명된다.(증명끝)

주의 2 정리 2는 U^l_{ijk} 이 K^l_{ijk} 의 성질을 그대로 가지고있다는것을 보여준다.

정리 3 $\dim M>3$ 인 리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 식

$$C^l_{ijk}+\overset{*}{C}{}^l_{ijk}=2\overset{\circ}{C}{}^l_{ijk} \tag{11}$$

은 접속변환 $\overset{\circ}{\nabla}\to\nabla,\ \nabla\to\overset{*}{\nabla}$ 에 관하여 불변이다. 여기서 C^l_{ijk}, $\overset{*}{C}{}^l_{ijk}$ 및 $\overset{\circ}{C}{}^l_{ijk}$ 은 각각 접속 $\nabla,\ \overset{*}{\nabla}$ 및 $\overset{\circ}{\nabla}$ 에 관한 와일공형곡률텐소르이다. 즉

$$\begin{aligned}
C^l_{ijk}&=R^l_{ijk}-\frac{1}{n-2}(\delta^l_iR_{jk}-\delta^l_jR_{ik}+g_{jk}R^l_i-g_{ik}R^l_j)-\frac{R}{(n-1)(n-2)}(\delta^l_jg_{ik}-\delta^l_ig_{jk})\\
\overset{*}{C}{}^l_{ijk}&=\overset{*}{R}{}^l_{ijk}-\frac{1}{n-2}(\delta^l_i\overset{*}{R}_{jk}-\delta^l_j\overset{*}{R}_{ik}+g_{jk}\overset{*}{R}{}^l_i-g_{ik}\overset{*}{R}{}^l_j)-\frac{\overset{*}{R}}{(n-1)(n-2)}(\delta^l_jg_{ik}-\delta^l_ig_{jk})\\
\overset{\circ}{C}{}^l_{ijk}&=K^l_{ijk}-\frac{1}{n-2}(\delta^l_iK_{jk}-\delta^l_jK_{ik}+g_{jk}K^l_i-g_{ik}K^l_j)-\frac{K}{(n-1)(n-2)}(\delta^l_jg_{ik}-\delta^l_ig_{jk})
\end{aligned} \tag{12}$$

증명 식 (10)을 $i,\ l$ 에 관하여 축약하면 다음과 같다.

$$R_{jk}+\overset{*}{R}_{jk}=2K_{jk}-(n-1)\alpha_{jk}-g_{jk}\alpha^i_i \tag{13}$$

이 식의 량변에 g^{jk} 를 곱하면 다음과 같다.

$$R+\overset{*}{R}=2K-2(n-1)\alpha^i_i$$

그러므로

$$\alpha^i_i=\frac{1}{2(n-1)}(2K-R-\overset{*}{R})$$

이다. 이 식을 식 (13)에 넣으면

$$\alpha_{jk}=\frac{1}{n-2}\left[2K_{jk}-(R_{jk}+\overset{*}{R}_{jk})-\frac{g_{jk}}{2(n-1)}(2K-R-\overset{*}{R})\right]$$

이다. 이 식을 식 (10)에 넣고 (12)를 리용하면 식 (11)이 얻어진다.(증명끝)

정리 4 $\dim M>3$ 인 리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 슈르의 정리를 만족시키는 공형반대칭접속 ∇가 일정곡률을 가지면 리만계량은 공형평탄이다.

증명 $R_{ijk}^l=K(\delta_j^l g_{ik}-\delta_i^l g_{jk})$ 이면 $C_{ijk}^l=0$ 이다. 따라서 식 (11)로부터 $\overset{\circ}{C}{}_{ijk}^l=0$ 이다. 그러므로 리만계량은 공형평탄이다.(증명끝)

정리 5 $\dim M>3$ 인 리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 공형반대칭접속 ∇ 에 관하여 다음의 관계식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} C_{[ijk]}^l+\overset{*}{C}{}_{[ijk]}^l=0 \\ W_{[ijk]}^l+\overset{*}{W}{}_{[ijk]}^l=0 \end{aligned} \tag{14}$$

여기서 W_{ijk}^l 과 $\overset{*}{W}{}_{[ijk]}^l$ 은 접속 ∇와 $\overset{*}{\nabla}$에 관한 와일사영곡률텐소르이다. 즉

$$\begin{aligned} W_{ijk}^l &= R_{ijk}^l-\frac{1}{n-1}(\delta_i^l R_{jk}-\delta_j^l R_{ik}) \\ \overset{*}{W}{}_{ijk}^l &= \overset{*}{R}{}_{ij}^l-\frac{1}{n-1}(\delta_i^l \overset{*}{R}_{jk}-\delta_j^l \overset{*}{R}_{ik}) \end{aligned} \tag{15}$$

증명 식 (11)을 $i,\ j,\ k$ 에 관하여 량변을 빗대칭화하면 $\overset{\circ}{C}{}_{[ijk]}^l=0$ 이라는 사실로부터 식 (14)의 첫번째 식이 증명된다. 그리고 식 (15)의 량변을 빗대칭화하면서 정리 2의 1)을 리용하면 식 (14)의 두번째 식이 증명된다.(증명끝)

정리 6 리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 공형반대칭접속 ∇에 대하여

$$V_{ijk}^l=R_{ijk}^l+\overline{R}_{ijk}^l \tag{16}$$

이 성립한다고 하면 다음식이 성립된다.

$$V_{[ijk]}^l=0 \tag{17}$$

증명 식 (5)와 (8)을 합하면 식 (16)으로부터

$$V_{ijk}^l=2K_{ijk}^l+\delta_i^l(\overline{a}_{jk}-a_{jk})-\delta_j^l(\overline{a}_{ik}-a_{ik})+2g_{jk}b_i^l-2g_{ik}b_j^l \tag{18}$$

이다. 이 식에 $i,\ j,\ k$ 에 따르는 원순환을 실시하고 변들끼리 합하면 식 (17)이 얻어진다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] Han Yanling and et al.; International Journal of Geometry, 5, 1, 47, 2016.

[2] T. Kurose and et al.; Tohoku. Math. J(2) 4b 427, 2007.

[3] M. M. Tripathi; Int. Elec. J. Geom, 1, 15, 2008.

주체107(2018)년 3월 10일 원고접수

On a Conformal Semi-Symmetric Connection Satisfying the Schur's Theorem

Ho Tal Yun

In this paper, we proved the Schur's Theorem of the connection that satisfies the relation

$$\nabla_k g_{ij} = \pi_k g_{ij} - \pi_i g_{jk} - \pi_j g_{ik},\ T_{ij}^k = \pi_j \delta_j^k - \pi_i \delta_j^k$$

and we studied the geometrical properties of this connection.

Key words: Schur's theorem, semi-symmetry, non-metric connection