김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제1호

준상결수선형분수계련립미분방정식의 령풀이의 안정성연구

김 철

론문에서는 준상결수선형분수계미분방정식의 령풀이의 점근안정성을 연구하였다.

풀이의 안정성은 상미분방정식에서뿐아니라 분수계미분방정식에서도 매우 중요하게 제기되고있다. 분수계미분방정식은 보통의 미분방정식보다 많은 현상들을 더 잘 설명하는것으로 하여 광범히 연구되고있으며 여기서 방정식의 풀이에 대한 질론적해석은 특별히 중요한 문제로 제기된다.

최근에 분수계미분방정식에서 풀이의 안정성은 활발히 연구[1－10]되고있다.

상결수분수계선형련립미분방정식에서 결수행렬의 고유값의 편각이 풀이의 안정성평가에서 중요한 역할을 한다.

선행연구[7]에서는 ${}^cD^{\alpha}x(t)=\lambda x(t)$ 의 령풀이가 $|\arg(\lambda)|>\alpha\pi/2$ 이면 점근안정하고 $|\arg(\lambda)|<\alpha\pi/2$ 이면 불안정하다는것을 밝혔다.

선행연구[9]에서는 분수계방정식 $D^{\alpha}x(t)=f(x(t))$ 의 평형점의 안정성을 연구하였다. 행렬 A 의 고유값의 편각의 절대값이 모두 $\alpha\pi/2$ 보다 크면 평형점은 안정하고 적어도 하나의 절대값이 $\alpha\pi/2$ 보다 작으면 불안정하다는것을 밝혔다. 여기서 $A=(a_{ij})_{ij=\overline{1,\ n}}$ 이고 a_{ij} $(i, j=\overline{1,\ n})$ 들은 평형점에서 평가되는 오른변의 야꼬비행렬의 원소들이다.

론문에서는 다음의 준상결수분수계선형동차련립미분방정식

$$
{}^cD^{\alpha}x(t)=Ax(t)+Q(t)x(t) \tag{1}
$$

의 령풀이가 안정하기 위한 조건을 론의한다. 여기서 ${}^cD^{\alpha}$ 는 캐푸토분수도함수이고 $t\in(0,\ +\infty)$, $x(t)\in\mathbf{R}^n$, $0<\alpha\le 1$, $Q(t):[0,\ \infty)\to\mathbf{R}^{n\times n}$ 은 련속행렬값함수, A 는 n 차행렬로서 불퇴화이다.

선행연구[3]에서는 $\alpha=1$ 인 경우 A 의 고유값의 실수부가 모두 부수이고 $\int_0^{\infty}\|B(s)\|ds$ 가 유한이면 식 (1)의 령풀이가 지수안정하다는것을 밝혔다.

선행연구[5]에서는

$$
{}^cD^{\alpha}[x(t)-g(t,\ x(t))]=Ax(t)+f(t,\ x(t))
$$

에 대하여 행렬 A 의 고유값의 편각의 절대값이 모두 $\alpha\pi/2$ 보다 크고

$$
\|f(t,\ x(t))\|\le M_1\|x\|,\ \|g(t,\ x(t))\|\le M_2\|x\|
$$

이면 령풀이가 점근안정하다는것을 증명하였다.

선행연구[8]에서는

$$
{}^cD^{\alpha}x(t)=Ax(t)+f(t,\ x(t))
$$

에 대하여 행렬 A의 고유값의 편각의 절대값이 모두 $\alpha\pi/2$보다 크고

$$\| f(t,\ x(t))\| \le M_1 \| x\|$$

이면 령풀이가 점근안정하다는것을 밝혔다.

론문에서는 행렬 A의 고유값의 편각의 절대값이 모두 $\alpha\pi/2$보다 크다는 조건밑에서 $Q(t)$가 어떤 조건을 만족시킬 때 식 (1)의 령풀이가 점근안정한가를 고찰한다.

지수함수 e^z의 일반화이며 분수계미분방정식에서 상미분방정식에서의 지수함수와 같은 역할을 하는 함수

$$E_\alpha(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)},\ \ \alpha>0,\ z\in\mathbf{C}$$

를 미따크－레플레르함수[2]라고 부른다. 그리고 함수

$$E_{\alpha,\ \beta}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)},\ \ \alpha>0,\ \beta>0,\ z\in\mathbf{C}$$

를 두파라메터를 가지는 미따크－레플레르함수[2]라고 부른다. 여기서 $\beta=1$ 이면 $E_{\alpha,\ \beta}(z)=E_\alpha(z)$이다.

지수함수의 일반화로 리용되는 행렬지수함수와 비슷하게

$$E_{\alpha,\ \alpha}(Az) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k z^k}{\Gamma(\alpha(k+1))},\ \ \alpha>0,\ A=(a_{ij})_{n\times n},\ z\in\mathbf{C}$$

를 행렬미따크－레플레르함수[4]라고 부른다. 여기서 $a_{ij}\in\mathbf{R},\ A=(a_{ij})_{n\times n},\ \alpha\in(0,\ 1]$이다.

명제[8] n차행렬 A의 고유값들의 모임이 $\sigma(A)\subset\{\lambda\in\mathbf{C}\setminus\{0\} : |\arg(\lambda)|>\alpha\pi/2\}$를 만족시킨다고 하자. 이때 다음의 사실이 성립한다.

① $\lim\limits_{t\to\infty}\| E_\alpha(t^\alpha A)\|=0$ ② $\int_0^\infty t^{\alpha-1}\| E_{\alpha,\ \alpha}(t^\alpha A)\| dt<\infty$

식 (1)의 령풀이가 점근안정하기 위한 조건들을 정식화해보자.

정리 1 행렬 A의 고유값모임이 $\sigma(A)\subset\{\lambda\in\mathbf{C}\setminus\{0\} : |\arg(\lambda)|>\alpha\pi/2\}$를 만족시키고 $Q(t)$가

$$q := \sup_{t\ge0}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\| E_{\alpha,\ \alpha}((t-\tau)^\alpha A)Q(\tau)\| d\tau<1 \tag{2}$$

을 만족시키면 식 (1)의 령풀이는 점근안정하다.

증명 식 (1)의 령풀이가 점근안정하다는것은 $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \| x_0\|<\delta$ 일 때 $\| x(t:\ 0,\ x_0)\|<\varepsilon$이고 $\lim\limits_{t\to\infty} x(t:\ 0,\ x_0)=0$이 성립한다는것이다.

우선 명제로부터 $1<\sup\limits_{t\ge0}\| E_\alpha(t^\alpha A)\|<\infty$이므로 $\forall\varepsilon>0$에 대하여

$$\delta := \frac{(1-q)\varepsilon}{\sup\limits_{t\ge0}\| E_\alpha(t^\alpha A)\|}\in(0,\ \varepsilon)$$

으로 놓자. 한편 초기조건 $x(0)=x_0$을 가진 식 (1)의 풀이는

$$x(t)=E_{\alpha}(t^{\alpha}A)x_0+\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\ \alpha}((t-\tau)^{\alpha}A)Q(\tau)x(\tau)d\tau$$

를 만족시킨다.[10] 이제 $\forall x_0\in\mathbf{R}^n$ 에 대하여 연산자

$$T_x:\ C([0,\ \infty);\ \mathbf{R}^n)\to C([0,\ \infty);\ \mathbf{R}^n)$$

을

$$T_{x_0}\zeta(t)=E_{\alpha}(t^{\alpha}A)x_0+\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\ \alpha}((t-\tau)^{\alpha}A)Q(\tau)\zeta(\tau)d\tau$$

로 정의하면 넘기기 T_{x_0} 의 부동점은 초기조건 $x(0)=x_0$ 을 만족시키는 식 (1)의 풀이이다.

먼저 $\|x_0\|\le\delta$ 에 대하여 $\|x(t:\ 0,\ x_0)\|<\varepsilon$ 이라는것을 보자.

$B_{C^{\infty}}(0,\ \varepsilon):=\{\zeta\in C([0,\ \infty);\ \mathbf{R}^n)\ :\|\zeta\|_{\infty}\le\varepsilon\}$ 으로 놓자. 여기서 $\|\zeta\|_{\infty}:=\sup_{t\ge0}\|\zeta(t)\|<\infty$ 이다.

그러면 $\zeta(t)\in B_{C^{\infty}}(0,\ \varepsilon)$ 에 대하여

$$\|T_{x_0}\zeta(t)\|\le\|E_{\alpha}(t^{\alpha}A)x_0\|+\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\|E_{\alpha,\ \alpha}((t-\tau)^{\alpha}A)Q(\tau)\zeta(\tau)\|d\tau\le$$

$$\le\delta\sup_{t\ge0}\|E_{\alpha}(t^{\alpha}A)\|+\varepsilon q\ \le\varepsilon$$

이고 따라서 $T_{x_0}(B_{C^{\infty}}(0,\ \varepsilon))\subset B_{C^{\infty}}(0,\ \varepsilon)$ 이다. 또한 $\zeta(t),\ \zeta_1(t)\in B_{C^{\infty}}(0,\ \varepsilon)$ 에 대하여

$$T_{x_0}\zeta(t)-T_{x_0}\zeta_1(t)=E_{\alpha}(t^{\alpha}A)x_0+\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\ \alpha}((t-\tau)^{\alpha}A)Q(\tau)[\zeta(\tau)-\zeta_1(t)]d\tau$$

이다. 즉

$$\|T_{x_0}\zeta(t)-T_{x_0}\zeta_1(t)\|\le\|\zeta-\zeta_1\|_{\infty}\sup_{t\ge0}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\ \alpha}((t-\tau)^{\alpha}A)Q(\tau)d\tau\le q\|\zeta-\zeta_1\|_{\infty}$$

이다. 따라서 축소넘기기의 부동점정리에 의하여 연산자 T_{x_0} 은 $B_{C\infty}(0,\ \varepsilon)$ 공간에서 유일한 부동점을 가지는데 이것은 초기조건 $x(0)=x_0$ 을 만족시키는 식 (1)의 풀이이다.

결과 $\|x_0\|\le\delta$ 에 대하여 $\|x(t:\ 0,\ x_0)\|<\varepsilon,\ t\ge0$ 이 성립한다.

또한 $\lim_{t\to\infty}x(t:\ 0,\ x_0)=0$ 라는것을 증명하자.

$a:=\limsup_{t\to\infty}\|x(t)\|$ 라고 하고 $a=0$ 이라는것을 증명하면 된다. $a>0$ 이라고 하자. 이때 적당한 T 가 있어서 $t\ge T$, $\|x(t)\|\le a+\dfrac{1-q}{2q+1}a$ 이다. 명제로부터

$$\limsup_{t\to\infty}\left\|\int_0^T (t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\ \alpha}((t-\tau)^{\alpha}A)Q(\tau)x(\tau)d\tau\right\|\le$$

$$\le\varepsilon\max_{t\in[0,\ T]}\|Q(t)\|\limsup_{t\to\infty}\int_{t-T}^t \tau^{\alpha-1}\|E_{\alpha,\ \alpha}(\tau^{\alpha}A)\|d\tau=0$$

이다. x 가 T_{x_0} 의 부동점이므로

$$a = \limsup_{t\to\infty}\left\|\int_T^t (t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\ \alpha}((t-\tau)^\alpha A)Q(\tau)x(\tau)d\tau\right\| \le$$

$$\le\left(a+\frac{1-q}{2q+1}a\right)\sup\int_T^t (t-\tau)^{\alpha-1}\|E_{\alpha,\ \alpha}((t-\tau)^\alpha A)Q(\tau)\|d\tau \le \frac{a(2+q)}{2q+1}q = a\frac{2q+q^2}{2q+1} < a$$

가 성립하는데 이것은 모순이다. 따라서 $a=0$ 이다.(증명끝)

정리 2 행렬 A 의 고유값모임이 $\sigma(A)\subset\{\lambda\in\mathbf{C}\setminus\{0\} : |\arg(\lambda)|>\alpha\pi/2\}$ 를 만족시키고 적당한 정수 $m>0$ 이 있어서

$$\sup_{t\ge0}\|Q(t)\| < m \tag{3}$$

이 성립하면 식 (1)의 령풀이는 점근안정하다.

증명 명제로부터

$$0 < m := \frac{1}{2\int_0^\infty t^{\alpha-1}\|E_{\alpha,\ \alpha}(t^\alpha A)\|dt} < \infty$$

로 선택할수 있다. 이때 $Q(t)$ 가 식 (3)을 만족시키면 식 (2)를 만족시킨다. 따라서 령풀이는 점근안정하다.(증명끝)

정리 3 행렬 A 의 고유값모임이 $\sigma(A)\subset\{\lambda\in\mathbf{C}\setminus\{0\} : |\arg(\lambda)|>\alpha\pi/2\}$ 를 만족시키고

$$\lim_{t\to\infty}\|Q(t)\| = 0 \tag{4}$$

이 성립하면 식 (1)의 령풀이는 점근안정하다.

증명 $Q(t)$ 가 련속이고 $\lim_{t\to\infty}\|Q(t)\|=0$ 이므로 임의의 $x_0\in\mathbf{R}^n$ 에 대하여 식 (1)의 풀이가 유계이다. 유계련속벡토르값함수들의 공간 $C_\infty(\mathbf{R}^n)$ 이 노름 $\|\|_\beta$ 에 관하여 새로운 바나흐공간이 되도록 $\|\|_\infty$ 와 동등한 새로운 노름 $\|\|_\beta$ 을 도입하자.

명제에 의하여 적당한 상수 $M>1$ 이 있어서 다음의 식이 성립한다.

$$\|E_{\alpha,\ \alpha}(t^\alpha A)\|_\infty \times \|Q(t)\|_\infty \le M/\Gamma(\alpha),\quad \sup_{t\ge0}\int_0^t \tau^{\alpha-1}\|E_{\alpha,\ \alpha}(t^\alpha A)\|_\infty\, d\tau \le M \tag{5}$$

식 (4)로부터 적당한 $T>0$ 이 있어서 $\sup_{t\ge T}\|Q(t)\|_\infty \le 1/(5M)$ 이 성립한다.

이제 함수

$$\beta(t) := \begin{cases} E_\alpha(5Mt^\alpha)\ , & 0\le t\le T \\ E_\alpha(5MT^\alpha), & t\ge T\end{cases}$$

를 도입하고 유계련속벡토르값함수들의 공간 $C_\infty(\mathbf{R}^n)$ 에 속하는 임의의 함수 y 의 노름을

$$\|y\|_\beta := \sup_{t\ge0}\frac{\|y(t)\|}{\beta(t)}$$

로 정의한다. 이때 노름 $\|\|_\beta$ 는

$$\forall y\in C_\infty(\mathbf{R}^n),\ \frac{1}{\beta(T)}\|y\|_\infty \le \|y\|_\beta \le \|y\|_\infty$$

이므로 노름 $\|\|_\infty$ 와 동등하며 공간 $(C_\infty(\mathbf{R}^n), \|\|_\beta)$ 은 바나흐공간이 된다.

이 공간에서 정리 1에서처럼 넘기기 $T_{x_0}\zeta(t)$ 를

$$T_{x_0}\zeta(t) = E_\alpha(t^\alpha A)x_0 + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\ \alpha}((t-\tau)^\alpha A)Q(\tau)\zeta(\tau)d\tau$$

로 정의한다. 그러면 정리 1에서와 류사한 방법으로 식 (1)의 령풀이가 점근안정하다는것이 증명된다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] 김명하; 분수계미적분과 그 응용, **김일성**종합대학출판사, 1～214, 주체95(2006).

[2] I. Podlubny; Fractional Differential Equations, Academic Press, 1～366, 1999.

[3] Xiaoxin Laio et al.; Stability of Dynamical Systems, Elsevier, 1～719, 2007.

[4] A. A. Kilbas et al.; Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, 1~539, 2006.

[5] S. Priyadharsini; J. Frac. Calc. Appl., l7, 1, 87, 2016.

[6] Min Shi et al.; Automatica, 47, 2001, 2016.

[7] D. Matignon ; Models and Applications, 5, 145, 1998.

[8] R. Agarwal et al.; Math. Comp. Model, 52, 862, 2010.

[9] E. Ahmed et al.; J. Math. Anal. Appl., 325, 542, 2007.

[10] B. Bonilla et al.; Applied Mathematics and Computation, 187, 68, 2007.

주체107(2018)년 9월 8일 원고접수

The Study on the Stability of Trivial Solutions of Almost Linear Fractional Differential Systems

Kim Chol

In this paper, we investigate a method to test the stability of trivial solutions of almost linear fractional differential systems. If the original linear autonomous system with constant coefficients is asymptotically stable, then under the action of small nonautonomous perturbations the trivial solution of the perturbed system is also asymptotically stable.

Key words: stability, fractional differential system