김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체104(2015)년 제61권 제1호 Vol. 61 No. 1 JUCHE104(2015).

# 섬유강화탄성 및 점탄성겹재료판의 림계짐해석

송성관, 김정남

선행연구[1, 2]에서는 각각 대칭 및 반대칭직교점탄성다층복합판의 림계짐해석을 진행하였으며 선행연구[3]에서는 겹재료판의 탄성림계짐해석을 진행하였으나 점탄성변형때의 림계짐에 대한 해석은 진행하지 못하였다.

론문에서는 섬유강화재료로 된 탄성 및 점탄성겹재료판의 림계짐에 대하여 해석하였다.

## 1. 기본관계식

겹재료판에 면내힘 $N_1^0$, $N_2^0$, $N_{12}^0$이 작용할 때 평형방정식은 다음과 같다.[1]

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 M_1}{\partial x_1^2}+2\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 M_2}{\partial x_2^2}+N_1^0\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+N_2^0\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+2N_{12}^0\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}=0\\&\frac{\partial M_1}{\partial x_1}+\frac{\partial M_{12}}{\partial x_2}=Q_1\\&\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial M_2}{\partial x_2}=Q_2\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

여기서 $M_1$, $M_2$는 각각 $x_1$, $x_2$축에 수직인 면에 작용하는 단위길이당 구부림모멘트, $M_{12}$는 $x_1$, $x_2$면에 작용하는 단위길이당 틀음모멘트, $Q_1$, $Q_2$는 각각 $x_1$, $x_2$축에 수직인 면에 작용하는 단위길이당 자르는 힘이다.

상태방정식은 다음과 같다.

탄성변형의 경우는

$$\left.\begin{aligned}&M_1=D_1\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial {x_1}^2}+\frac{1}{\Gamma_1}\frac{\partial Q_1}{\partial x_1}\right)+\nu_{21}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial {x_2}^2}+\frac{1}{\Gamma_2}\frac{\partial Q_2}{\partial x_2}\right)\right]\\&M_2=D_2\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial {x_2}^2}+\frac{1}{\Gamma_2}\frac{\partial Q_2}{\partial x_2}\right)+\nu_{12}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial {x_1}^2}+\frac{1}{\Gamma_1}\frac{\partial Q_1}{\partial x_1}\right)\right]\\&M_{12}=D_3\left(2\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{1}{\Gamma_1}\frac{\partial Q_1}{\partial x_2}+\frac{1}{\Gamma_2}\frac{\partial Q_2}{\partial x_1}\right)\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

이다. 여기서

$$D_1=\frac{E_1t_fh^2}{2(1-\nu_{12}\nu_{21})},\ D_2=\frac{E_2t_fh^2}{2(1-\nu_{12}\nu_{21})},\ D_3=G_{12}t_fh^2,\ \Gamma_1=G_{13c}t_c,\ \Gamma_2=G_{23c}t_c\tag{3}$$

이고 점탄성변형의 경우는 식 (2)에 있는 $D_i$가 연산자 $\tilde{D}_i$로 넘어가며

$$\tilde{D}_i f = D_i\left[f - \int_0^t K_i(t-\tau)f(\tau)d\tau\right] \tag{4}$$

로 된다.

식 (2)를 방정식 (1)에 대입하면 다음과 같다.

$$\left.\begin{aligned}
&L_D w + \frac{1}{\Gamma_1}\left[D_1\frac{\partial^3 Q_1}{\partial x_1^3} + (\nu_{12}D_2 + 2D_3)\frac{\partial^3 Q_1}{\partial x_1 \partial x_2^2}\right] + \frac{1}{\Gamma_2}\left[D_2\frac{\partial^3 Q_2}{\partial x_2^3} + (\nu_{21}D_1 + 2D_3)\frac{\partial^3 Q_2}{\partial x_1^2 \partial x_2}\right] + \\
&\qquad + N_1^0\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + N_2^0\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + 2N_{12}^0\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \\
&Q_1 = D_1\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + \frac{1}{\Gamma_1}\frac{\partial^2 Q_1}{\partial x_1^2} + \nu_{21}\frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\nu_{21}}{\Gamma_2}\frac{\partial^2 Q_2}{\partial x_1 \partial x_2}\right) + D_3\left(2\frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{1}{\Gamma_1}\frac{\partial^2 Q_1}{\partial x_2^2} + \frac{1}{\Gamma_2}\frac{\partial^2 Q_2}{\partial x_1 \partial x_2}\right) \\
&Q_2 = D_2\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3} + \frac{1}{\Gamma_2}\frac{\partial^2 Q_2}{\partial x_2^2} + \nu_{12}\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \frac{\nu_{12}}{\Gamma_2}\frac{\partial^2 Q_1}{\partial x_1 \partial x_2}\right) + D_3\left(2\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \frac{1}{\Gamma_2}\frac{\partial^2 Q_2}{\partial x_1^2} + \frac{1}{\Gamma_1}\frac{\partial^2 Q_1}{\partial x_1 \partial x_2}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

여기서 $L_D$ 는 다음과 같은 미분연산자이다.

$$L_D = D_1\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + (2\nu_{21}D_1 + 4D_3)\frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + D_2\frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \tag{6}$$

점탄성변형의 경우는 식 (4)를 고려하여 방정식 (5)를 변환하면 된다.

이때 $\tilde{L}_D$ 는 다음과 같이 표시되는 미적분연산자이다.

$$\tilde{L}_D = \tilde{D}_1\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + (2\nu_{21}\tilde{D}_1 + 4\tilde{D}_3)\frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \tilde{D}_2\frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \tag{7}$$

## 2. 림계짐해석

네경계 $x_1 = 0$, $a$; $x_2 = 0$, $b$ 에서 자유지지된 겹재료판에 $x_1 = 0$, $a$ 에 단위길이당 누르는 힘 $N_1^0$ 이 작용할 때 림계짐을 구하자.

1) 탄성변형의 경우

방정식 (5)에 $N_1^0 \neq 0$, $N_2^0 = N_{12}^0 = 0$ 을 대입하고 $w$ 와 $Q_1$, $Q_2$ 를

$$\omega = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x_1 \sin\frac{n\pi}{b}x_2,\ Q_1 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}\cos\frac{m\pi}{a}x_1 \sin\frac{n\pi}{b}x_2,\ Q_2 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x_1 \cos\frac{n\pi}{b}x_2 \tag{8}$$

로 표시하면 자유지지경계조건을 만족시킨다.

이제 $\gamma = m\pi/a,\ s = n\pi/b$ 로 표시하고 식 (8)을 방정식 (5)에 대입하면 $a_{mn}$, $b_{mn}$, $c_{mn}$ 에 관한 다음과 같은 동차방정식이 얻어진다.

$$\left.\begin{aligned}
&(d_{11} - \gamma^2 N_1^0)a_{mn} + d_{12}b_{mn} + d_{13}c_{mn} = 0 \\
&d_{21}a_{mn} + d_{22}b_{mn} + d_{23}c_{mn} = 0 \\
&d_{31}a_{mn} + d_{32}b_{mn} + d_{33}c_{mn} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

여기서 $d_{ij}$ 는 다음과 같다.

$$\left.\begin{aligned}
d_{11} &= D_1\gamma^4 + 2(\nu_{21}D_1 + 4D_3)\gamma^2 s^2 + D_2 s^4 \\
d_{12} &= [D_1\gamma^3 + (\nu_{12}D_2 + 2D_3)\gamma s^2]/\Gamma_1 \\
d_{13} &= [D_2 s^3 + (\nu_{21}D_1 + 2D_3)\gamma^2 s]/\Gamma_2 \\
d_{21} &= D_1(\gamma^3 + \nu_{21}\gamma s^2) + 2D_3\gamma s^2 \\
d_{22} &= 1 + D_1\gamma^2/\Gamma_1 + D_3 s^2/\Gamma_1 \\
d_{23} &= D_1\nu_{21}\gamma s/\Gamma_2 + D_3\gamma s/\Gamma_2 \\
d_{31} &= D_2(s^3 + \nu_{12}\gamma^2 s) + 2D_3\gamma^2 s \\
d_{32} &= D_2\nu_{12}\gamma s/\Gamma_1 + D_3\gamma s/\Gamma_1 \\
d_{33} &= 1 + D_2 s^2/\Gamma_2 + D_3\gamma^2/\Gamma_2
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

방정식 (9)로부터 다음의 식이 얻어진다.

$$N_1^0 = \frac{\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_{22} & d_{23} \\ d_{32} & d_{33} \end{vmatrix}} \frac{1}{\gamma^2} \tag{11}$$

여기서 $d_{ij}$ 는 판의 력학적, 기하학적특성량과 자연수 $m, n$ 에 관계되는 기지량이다.

식 (11)에서 $m, n$ 에 따르는 $N_1^0$ 을 구하고 최소값을 취하면 림계짐이 결정된다.

2) 탄성변형의 경우

이 경우는 방정식 (5)에 식 (4), (7)을 대입하여 변환한 다음 식 (8)을 대입하면 다음과 같은 연산자방정식이 얻어진다.

$$\left.\begin{aligned}
(\tilde{d}_{11} - \gamma^2 N_1^0)a_{mn} + \tilde{d}_{12}b_{mn} + \tilde{d}_{13}c_{mn} = 0 \\
\tilde{d}_{21}a_{mn} + \tilde{d}_{22}b_{mn} + \tilde{d}_{23}c_{mn} = 0 \\
\tilde{d}_{31}a_{mn} + \tilde{d}_{32}b_{mn} + \tilde{d}_{33}c_{mn} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

여기서 $\tilde{d}_{ij}$ 는 식 (10)에 대응되는 연산자이다.

식 (12)를 라쁠라스변환하면

$$N_1^0 = \frac{\begin{vmatrix} d_{11}^* & d_{12}^* & d_{13}^* \\ d_{21}^* & d_{22}^* & d_{23}^* \\ d_{31}^* & d_{32}^* & d_{33}^* \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_{22}^* & d_{23}^* \\ d_{32}^* & d_{33}^* \end{vmatrix}} \frac{1}{\gamma^2} \tag{13}$$

이 얻어진다. 여기서 $N_1^0$ 은 $m = n = 1$에 대응되는 $N_1^0$ 의 최소값 즉 림계짐이다.

식 (13)을 거꿀변환하면 $N_1^0$ 의 최소값 즉 림계짐 $P_{림}$ 이 결정된다.

## 3. 계 산 실 례

아래우판은 탄소섬유강화에폭시수지재료로 되여있고 속재료판은 알루미니움재료로 된 겹재료판을 보기로 하자.

$$a = 1\text{m},\ b = 0.8\text{m},\ h = 0.01\text{m},\ t_c = 0.002\text{m},\ t_f = 0.006\text{m},\ E_1 = 10^{11}\text{Pa}$$

$$E_2 = 10^{10}\text{Pa},\ G_{12} = 5\times10^9\text{Pa},\ G_{13c} = G_{23c} = 2\times10^{10}\text{Pa},\ \nu_{12} = 0.3$$

이 초기자료에 기초하여 $d_{ij}$와 $d_{ij}^*$을 구하고 식 (11), (13)에 대입하면 탄성 및 점탄성변형의 경우 림계짐을 구할수 있다.

이때 각이한 $m, n$에 따르는 $N_1^0$의 최소값을 탐색법으로 구하면 이 값은 $m = n = 1$인 경우에 얻어지며 탄성림계짐은 $P_{림} = 1.233\times10^7(\text{N/m})$이다.

점탄성변형의 경우 완화핵이 $K_1 = 6\times10^{-3}e^{-0.06t}$, $K_2 = 2\times10^{-3}e^{-0.02t}$, $K_3 = 1\times10^{-3}e^{-0.01t}$으로 된다고 하자.

이때 $N_1^0 = (0.915 + 0.115e^{-0.06t} + 0.124e^{-0.02t} + 0.079e^{-0.01t})\times10^7(\text{N/m})$이고 $t = 0$일 때 즉 초기탄성림계짐은 $P_{림} = 1.233\times10^7(\text{N/m})$이고 $t\to\infty$일 때 점탄성림계짐은 $0.915\times10^7(\text{N/m})$로 된다.

론문에서 보는바와 같이 점탄성변형할 때는 점성으로 하여 탄성상태에 비하여 림계짐은 25.8% 감소한다.

## 참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보(자연과학), 60, 1, 34, 주체103(2014).

[2] **김일성**종합대학학보(자연과학), 60, 3, 26, 주체103(2014).

[3] M. Rami; International Journal of Solids and Structures, 41, 3461, 2004.

주체103(2014)년 9월 5일 원고접수

## Analysis on Critical Load of Fibre Reinforced Elastic and Viscoelastic Sandwich Plate

*Song Song Gwan, Kim Jong Nam*

We considered the critical load of fibre reinforced elastic and viscoelastic sandwich plate.

We derived the stability equation of the sandwich plate and presented the analysis method on critical load. The affection of viscosity is considered by numerical examples.

Key words: critical load, sandwich plate