김일성종합대학학보 주체107(2018)년
수 학 제64권 제3호

류동실시가격기하평균아시아식구매선택권의 가격공식

오형철, 백금성

금융수학에서는 시간의존결수를 가지는 경우 선택권의 가격모형과 가격공식에 대하여 광범히 연구[3－6]되고있다.

선행연구[3, 4]에서는 상결수를 가지는 경우 류동실시가격기하평균아시아식구매선택권의 가격모형과 가격공식을 구하고 산수평균 및 기하평균아시아식선택권에 대한 2진나무법 등 수치방법들을 연구하였다. 또한 리자률을 비롯한 금융상수들이 시간에 의존하므로 선행연구[3]에서는 시간의존결수를 가지는 유럽식선택권의 가격모형과 가격공식을 구하였으며 선행연구[5, 6]에서는 시간의존결수를 가지는 두값선택권과 블랙－숄즈방정식을 연구하였다.

최근에는 시간의존결수를 가지는 사전실시판매선택권가격모형의 수치방법[1, 2]이 연구되였다.

론문에서는 시간의존결수를 가지는 경우 류동실시가격기하평균아시아식구매선택권의 가격모형과 가격공식을 연구하였다.

보조정리 $f(x)>0,\ g(x)$는 1대1함수라고 하자. 그러면 다음 부등식이 성립한다.

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 < \int_a^b f(x)dx\int_a^b f(x)g^2(x)dx$$

류동실시가격기하평균아시아식구매선택권의 가격모형은 구역 $\{0\le s<\infty,\ 0\le J<\infty,\ 0\le t\le T\}$에서 다음과 같다.[3]

$$\frac{\partial V}{\partial t}+J\frac{\ln S-\ln J}{t}\frac{\partial V}{\partial J}+\frac{\sigma^2(t)}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+(r(t)-q(t))S\frac{\partial V}{\partial S}-r(t)V=0 \tag{1}$$

$$V(S,J,T)=(S-J)^+ \tag{2}$$

정리 $r(t),\ q(t),\ \sigma(t)$가 적분가능한 함수이면 류동실시가격을 가지는 기하평균아시아식구매선택권의 가격은 다음과 같이 표시된다.

$$V(S,J,t)=e^{-\int_t^T q(u)du}SN(-g_1)-J^{\frac{t}{T}}S^{\frac{T-t}{T}}e^{g_0}N(-g_2) \tag{3}$$

여기서

$$g_0=-\int_t^T q(u)du-\int_t^T\left\{\left[r(u)-q(u)+\frac{\sigma^2(u)}{2}\right]\frac{u}{T}+\frac{\sigma^2(u)}{2}\frac{u^2}{T^2}\right\}du$$

$$g_1=\frac{t\ln\frac{J}{S}-\int_t^T\left[r(u)-q(u)+\frac{\sigma^2(u)}{2}\right]udu}{\sqrt{\int_t^T u^2\sigma^2(u)du}} \tag{4}$$

$$g_2 = \frac{t\ln\frac{J}{S} - \int_t^T \left\{\left[r(u) - q(u) + \frac{\sigma^2(u)}{2}\right]u - \frac{\sigma^2(u)}{2}\frac{u^2}{T}\right\}udu}{\sqrt{\int_t^T u^2\sigma^2(u)du}}$$

이다. 만일 $r(t),\ q(t), \sigma(t)$ 가 상수이면 식 (3), (4)는 다음과 같다.

$$V(S, J, t) = e^{-q(T-t)}SN(-g_1) - J^{\frac{t}{T}}S^{\frac{T-t}{T}}e^{g_0}N(-g_2) \tag{5}$$

여기서

$$\begin{aligned} g_0 &= -q(T-t) - \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{T^2 - t^2}{2T} + \frac{\sigma^2(T^3 - t^3)}{6T^2} \\ g_1 &= \frac{\sqrt{3}}{\sigma\sqrt{T^3 - t^3}}\left[t\ln\frac{J}{S} - \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{T^2 - t^2}{2}\right] \\ g_2 &= \frac{\sqrt{3}}{\sigma\sqrt{T^3 - t^3}}\left[t\ln\frac{J}{S} - \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{T^2 - t^2}{2} + \frac{\sigma^2(T^3 - t^3)}{6T}\right] \end{aligned} \tag{6}$$

이다. 이것이 상결수를 가지는 경우 류동실시가격을 가지는 기하평균아시아식구매선택권의 가격공식이다.

증명 다음과 같이 변수를 변환하자.

$$x = \ln S,\ y = \frac{t\ln J + (T-t)\ln S}{T},\ V = U(x, y,\ t) \tag{7}$$

그러면 직접계산을 통해 식 (1), (2)는 다음과 같이 전환된다.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\sigma^2(t)}{2}\left(\frac{T-t}{T}\right)^2\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \sigma^2(t)\frac{T-t}{T}\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} + \frac{\sigma^2(t)}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \\ &\quad + \left[r(t) - q(t) - \frac{\sigma^2(t)}{2}\right]\left[\frac{T-t}{T}\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial x}\right] - r(t)U = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

$$U|_{t=T} = V\big|_{t=T} = (S - J)^+\Big|_{t=T} = (e^x - e^y)^+ = U_0(x, y) \tag{9}$$

이리하여 류동실시가격을 가지는 기하평균아시아식구매선택권가격모형은 변환 (7)밑에서 구역 $\{(x,\ y) \in \mathbf{R}^2,\ 0 \le t \le T\}$ 에서의 초기값문제 (8), (9)의 풀기문제로 된다.

$$\hat{U}(\xi,\ \eta,\ t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} U(x,\ y,\ t)e^{-i(\xi x + \eta y)}dxdy$$

이라고 하자. 방정식 (8)의 량변에 $x,\ y$ 에 관한 푸리에변환을 실시하면 t 의 함수로서 $\hat{U}$ 이 만족시키는 다음의 상미분방정식을 얻는다.($\xi,\ \eta$ 는 보조변수로 본다.)

$$\frac{d\hat{U}}{dt} - \frac{\sigma^2(t)}{2}\left(\xi + \frac{T-t}{T}\eta\right)^2\hat{U} + i\left[r(t) - q(t) - \frac{\sigma^2(t)}{2}\right]\left(\xi + \frac{T-t}{T}\eta\right)\hat{U} - r(t)\hat{U} = 0 \tag{10}$$

끝값조건 (9)에 푸리에변환을 실시하면 다음식을 얻는다.

$$\hat{U}(T)=\hat{U}_0(\xi,\eta) \tag{11}$$

상미분방정식의 초기값문제 (10), (11)을 풀면 다음식을 얻는다.

$$\hat{U}(\xi,\eta,t)=\hat{U}_0(\xi,\eta)e^{-\int_t^T\left\{\frac{\sigma^2(u)}{2}\left(\xi+\frac{T-t}{T}\eta\right)^2-i\left[r(u)-q(u)-\frac{\sigma^2(u)}{2}\right]\left(\xi+\frac{T-t}{T}\eta\right)+r(u)\right\}du}$$

거꿀변환을 하기 편리하게 지수를 $\xi,\ \eta$에 관하여 전개하면 다음식을 얻는다.

$$\hat{U}(\xi,\eta,t)=\hat{U}_0(\xi,\eta)e^{-(d_1\xi^2+2d_2\xi\eta+d_3\eta^2)+i(d_4\xi+d_5\eta)-d_6}=\hat{U}_0(\xi,\eta)\cdot g(\xi,\eta) \tag{12}$$

여기서

$$d_1=\int_t^T\frac{\sigma^2(u)}{2}du,\qquad d_2=\int_t^T\frac{\sigma^2(u)}{2}\frac{T-u}{T}du$$

$$d_3=\int_t^T\frac{\sigma^2(u)}{2}\left(\frac{T-u}{T}\right)^2du,\qquad d_4=\int_t^T\left[r(u)-q(u)-\frac{\sigma^2(u)}{2}\right]du \tag{13}$$

$$d_5=\int_t^T\left[r(u)-q(u)-\frac{\sigma^2(u)}{2}\right]\frac{T-u}{T}du,\quad d_6=\int_t^T r(u)du$$

이다. $g(\xi,\ \eta)=e^{-(d_1\xi^2+2d_2\xi\eta+d_3\eta^2)+i(d_4\xi+d_5\eta)-d_6}$의 푸리에거꿀변환을 $G(x,y)$로 표시하자.

$$G(x,y)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(d_1\xi^2+2d_2\xi\eta+d_3\eta^2)+i(d_4\xi+d_5\eta)-d_6}e^{i(x\xi+y\eta)}d\xi d\eta \tag{14}$$

식 (12)에 푸리에거꿀변환을 실시하면 합성적의 푸리에변환공식으로부터 다음식을 얻는다.

$$U(x,y,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}U_0(\alpha,\ \beta)G(x-\alpha,\ y-\beta)d\alpha d\beta \tag{15}$$

여기서 U_0은 $\hat{U}_0$의 푸리에거꿀변환 즉 식 (9)이다.

식 (14)의 적분을 계산하기 위하여 적분변수를 다음과 같이 바꾸자.

$$\xi=\frac{1}{\sqrt{2d_1}}(\hat{\xi}+\hat{\eta}),\ \eta=\frac{1}{\sqrt{2d_3}}(\hat{\xi}-\hat{\eta})$$

그러면 $d_1\xi^2+2d_2\xi\eta+d_3\eta^2=(1+d_2/\sqrt{d_1d_3})\hat{\xi}^2+(1-d_2/\sqrt{d_1d_3})\hat{\eta}^2$이 성립하고 보조정리로부터 $d_2<\sqrt{d_1d_3}$이 나온다.

식 (14)의 2중적분은 1차원으로 쓸수 있고 $d_2<\sqrt{d_1d_3}$을 고려하면서 적분을 계산하고 그것을 식 (15)에 대입하면

$$U(x,y,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}U_0(\alpha,\ \beta)G(x-\alpha,\ y-\beta)d\alpha d\beta=\frac{e^{-d_6}}{4\pi\sqrt{d_1d_3-d_2^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(e^\alpha-e^\beta)^+\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{\left(\frac{d_4+x-\alpha}{\sqrt{d_1}}+\frac{d_5+y-\beta}{\sqrt{d_3}}\right)^2}{8\left(1+\frac{d_2}{\sqrt{d_1d_3}}\right)}-\frac{\left(\frac{d_4+x-\alpha}{\sqrt{d_1}}-\frac{d_5+y-\beta}{\sqrt{d_3}}\right)^2}{8\left(1-\frac{d_2}{\sqrt{d_1d_3}}\right)}\right]d\alpha d\beta$$

가 된다. 다음과 같은 표시를 리용하자.

$$\frac{d_4+x}{\sqrt{d_1}}+\frac{d_5+y}{\sqrt{d_3}}=a_1,\ \frac{d_4+x}{\sqrt{d_1}}-\frac{d_5+y}{\sqrt{d_3}}=a_2,\ \frac{1}{8\left(1+\frac{d_2}{\sqrt{d_1d_3}}\right)}=c_1>0,\ \frac{1}{8\left(1-\frac{d_2}{\sqrt{d_1d_3}}\right)}=c_2>0$$

그러면 $D=\{(\alpha,\ \beta)\,|\,\beta<\alpha,\ \alpha\in(-\infty,\ +\infty)\}$ 로 표시하면

$$U(x,\ y,\ t)=\frac{e^{-d_6}}{4\pi\sqrt{d_1d_3-d_2^2}}\iint_D(e^\alpha-e^\beta)\times$$
$$\times\exp\left[-c_1\left(a_1-\frac{\alpha}{\sqrt{d_1}}-\frac{\beta}{\sqrt{d_3}}\right)^2-c_2\left(a_2-\frac{\alpha}{\sqrt{d_1}}+\frac{\beta}{\sqrt{d_3}}\right)^2\right]d\alpha d\beta$$

이다. 치환 $\begin{cases}\alpha+\beta=\xi\\ \alpha-\beta=\eta\end{cases},\ \begin{cases}\alpha=(\xi+\eta)/2\\ \beta=(\xi-\eta)/2\end{cases}$ 를 실시하자.

이 변환에 의해 D 는 $\{(\xi,\ \eta)\,|\,\eta>0\}$ 에로 넘어간다. $|\partial(\alpha,\ \beta)/\partial(\xi,\ \eta)|=1/2$ 이므로

$$-\frac{1}{2\sqrt{d_1}}-\frac{1}{2\sqrt{d_3}}=b_1,\ -\frac{1}{2\sqrt{d_1}}+\frac{1}{2\sqrt{d_3}}=b_2$$

로 표시하면

$$U(x,\ y,\ t)=\frac{e^{-d_6}}{8\pi\sqrt{d_1d_3-d_2^2}}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\int_0^{\infty}\left(e^{\frac{\xi+\eta}{2}}-e^{\frac{\xi-\eta}{2}}\right)\times$$
$$\times\exp[-c_1(a_1+b_1\xi+b_2\eta)^2-c_2(a_2+b_2\xi+b_1\eta)^2]d\eta=\frac{e^{-d_6}}{8\pi\sqrt{d_1d_3-d_2^2}}(I_1+I_2) \tag{16}$$

가 된다. 여기서

$$I_1=\int_0^{\infty}d\eta\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{\xi+\eta}{2}-c_1(a_1+b_1\xi+b_2\eta)^2-c_2(a_2+b_2\xi+b_1\eta)^2\right]d\xi$$

$$I_2=-\int_0^{\infty}d\eta\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{\xi-\eta}{2}-c_1(a_1+b_1\xi+b_2\eta)^2-c_2(a_2+b_2\xi+b_1\eta)^2\right]d\xi$$

이다. 따라서 I_1 을 계산하면

$$I_1=8\pi\sqrt{d_1d_3-d_2^2}\,e^{\int_t^T[r(u)-q(u)]du}SN(-k_1\sqrt{2}) \tag{17}$$

$$k_1=\frac{t\ln\frac{J}{S}-\int_t^T\left[r(u)-q(u)+\frac{\sigma^2(u)}{2}\right]udu}{\sqrt{2\int_t^T u^2\sigma^2(u)du}} \tag{18}$$

이고 다음 I_2 를 계산하면

$$I_2=-8\pi\sqrt{d_1d_3-d_2^2}e^{k_4}N(-\sqrt{2}k_3) \tag{19}$$

$$k_3 = \frac{t\ln\frac{J}{S} - \int_t^T \left\{\left[r(u) - q(u) + \frac{\sigma^2(u)}{2}\right]udu - \sigma^2(u)\frac{u^2}{T}\right\}du}{\sqrt{2\int_t^T u^2\sigma^2(u)du}} \tag{20}$$

$$k_4 = \frac{t\ln J + (T-t)\ln S}{T} + d_3 + d_5$$

가 된다. 이리하여 식 (16), (17), (19)로부터

$$U(x,\ y,\ t) = e^{-d_6}\left\{e^{\int_t^T [r(u)-q(u)]du} SN\left(-k_1\sqrt{2}\right) - J^{\frac{t}{T}} S^{\frac{T-t}{T}} e^{d_3+d_5} N\left(-k_3\sqrt{2}\right)\right\}$$

이다. 식 (13)을 여기에 대입하고 식 (18), (20)을 고려하면서 V로 돌아가면 류동실시가격을 가지는 기하평균아시아식구매선택권의 가격공식을 얻는다.

$$V(S,\ J,\ t) = e^{-\int_t^T q(u)du} SN(-g_1) - J^{\frac{t}{T}} S^{\frac{T-t}{T}} e^{g_0} N(-g_2)$$

여기서 g_0, g_1, g_2는 식 (4)에서와 같다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보(자연과학), 63, 3, 3, 주체106(2017).

[2] 오형철 등; 조선민주주의인민공화국 과학원통보, 3, 10, 주체106(2017).

[3] L. S. Jiang; Modeling and Methods of Option pricing, World Scientific, Singapore, 245～279, 2005.

[4] L. S. Jiang et al.; Siam J. Numer. Anal., 42, 1094, 2004.

[5] H. C. O et al.; Jour. Diff. Equat., 260, 4, 3151 2016.

[6] H. C. O et al.; Malaya J. Math., 2, 4, 330, 2014.

주체107(2018)년 3월 10일 원고접수

Pricing Formula for Floated Strike Geometric Average Asian Call Options

O Hyong Chol, Paek Kum Song

We study the pricing model and the pricing formula for floated strike geometric average Asian call options in the case with time dependent coefficients. We derive a solution representation of the time dependent pricing model for floated strike geometric average Asian call options using 2 dimensional Fourier transformation.

Key words: floated strike, geometric average, Asian call option