김일성종합대학학보 (자연과학) 주체106(2017)년 제63권 제1호
JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE) Vol. 63 No. 1 JUCHE106(2017).

한가지 강적그라프와 데카르뜨적그라프의 생성나무개수평가

우 승 식

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《기초과학은 과학기술강국을 떠받드는 주추입니다. 기초과학이 든든해야 나라의 과학기술이 공고한 토대우에서 끊임없이 발전할수 있습니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 40페지)

그라프에서의 생성나무개수평가는 효과적인 알고리듬설계, 망설계, 생물학 등 여러 분야에서 리론실천적으로 수많이 제기되는 셈세기조합의 중요한 문제의 하나이다.

그라프 $G_i=(V_i,\ U_i),\ i=1,2$ 에 대하여 다음의 세가지 조건중 어느 하나가 성립될 때 $G_1\otimes G_2$ 의 정점 $vu,\ v'u'\ (v,\ v'\in V_1,\ u,\ u'\in V_2)$ 사이의 릉이 존재한다는 가정밑에서 강적그라프를 정의하고 $G_1\otimes G_2=(V,\ U)$ 로 표시한다.

i) $\{v,\ v'\}\in U_1\ \ (u=u')$

ii) $\{u,\ u'\}\in U_2\ \ (v=v')$

iii) $\{v,\ v'\}\in U_1,\ (u,\ u')\in U_2$

$G_1\otimes G_2$ 의 정점모임은 $G_1=(V_1,\ U_1),\ G_2=(V_2,\ U_2)$ 의 정점모임의 데카르뜨적 $V:=V_1\times V_2$ 이고 릉모임 U 가 조건 i), ii)가운데서 어느 하나만을 만족시킬 때 정점 $vu,\ v'u'$ 사이의 릉들로 이루어진 그라프를 데카르뜨적그라프라고 부르며 $G_1\square G_2=(V,\ U)$ 로 표시한다.

G 의 정점 $u,\ v$ 사이의 릉의 개수를 릉 $(u,\ v)$ 의 다중도라고 부르고 $l_G(u,\ v)$ 로, G 의 정점 v 에 이웃하고있는 릉의 개수를 이 정점의 차수라고 부르고 $d_G(v)$ 로 표시한다.

또한 G 에 대하여 $a_{ij}:=\begin{cases}0, & i=j\\ l_G(v_i,\ v_j), & i\neq j\end{cases}$ 와 같은 $A(G)=(a_{ij})_{n,\ n}$ 을 G 의 이웃행렬, $d_{ij}:=\begin{cases}d_G(v_i), & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$ 와 같은 $D(G)=(d_{ij})_{n,\ n}$ 을 G 의 차수행렬이라고 부른다.

선행연구[1]에서는 임의의 G 에 대하여 n 차행렬 $L(G)=D(G)-A(G)$ 의 임의의 주대각선원소에 대한 여소행렬식은 서로 같으며 그 값은 G 의 생성나무개수와 갈다는것을 밝혔고 선행연구[2]에서는 $m\to\infty$ 일 때 완전두조그라프 $K_{m,\ n}$ 의 생성나무개수가 점근적으로 론의되였으며 선행연구[3, 5]에서는 완전그라프와 완전두조그라프에서의 생성나무개수를 평가하였다. 또한 선행연구[4, 6]에서는 완전3조그라프와 완전다조그라프에서의 생성나무개수를 1：1넘기기에 의한 방법으로 평가하였으며 선행연구[7, 8]에서는 $m-$중그라프 $K_n^m+\alpha G$ 와 순환그라프에서의 생성나무개수를 평가하였다.

론문에서는 키르히호프행렬에 의한 행렬나무정리를 리용하여 표식붙은 강적그라프

$K_n \otimes K_{p,\,q}$와 $K_n \otimes K_{p,\,q,\,r}$의 생성나무개수를 평가하였으며 이 수법을 리용하여 데카르뜨적그라프 $K_n \square K_{p,\,q}$의 생성나무개수를 평가하였다.

앞으로 표식붙은 그라프만을 생각하며 G의 생성나무개수를 $\upsilon(G)$로 표시한다.

강적그라프 $K_n \otimes K_{p,\,q}$의 생성나무개수평가를 위하여 먼저 완전그라프 K_n과 완전두조그라프 $K_{p,\,q}$의 강적그라프 $K_n \otimes K_{p,\,q}$의 생성나무개수를 평가하자.

정리 1 강적그라프 $K_n \otimes K_{p,\,q}$의 생성나무개수는 다음과 같다.

$$\upsilon(K_n \otimes K_{p,\,q}) = n^{np+nq-2} p^{q-1} q^{p-1} (p+1)^{nq-q} (q+1)^{np-p} \tag{1}$$

증명 K_n의 순서화된 정점모임 $\{x_1,\, x_2, \cdots,\, x_n\}$과 $K_{p,\,q}$의 순서화된 정점모임 $\{y_1,\, y_2,\, \cdots,\, y_p,\, z_1,\, z_2,\, \cdots,\, z_q\}$사이의 직적으로 된 $K_n \otimes K_{p,\,q}$의 $n(p+q)$개의 정점들을 사전식순서로 놓으면 $K_n \otimes K_{p,\,q}$의 키르히호프행렬은 $n(p+q)$차행렬로서

$$L = L(K_n \otimes K_{p,\,q}) =$$

$$= \begin{bmatrix} (nq+n-1)E_p & -1_{p,\,q} & -E_p & -1_{p,\,q} & \cdots & -E_p & -1_{p,\,q} \\ -1_{q,\,p} & (np+n-1)E_q & -1_{q,\,p} & -E_q & \cdots & -1_{q,\,p} & -E_q \\ -E_p & -1_{p,\,q} & (nq+n-1)E_p & -1_{p,\,q} & \cdots & -E_p & -1_{p,\,q} \\ -1_{q,\,p} & -E_q & -1_{q,\,p} & (np+n-1)E_q & \cdots & -1_{q,\,p} & -E_q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -E_p & -1_{p,\,q} & -E_p & -1_{p,\,q} & \cdots & (nq+n-1)E_p & -1_{p,\,q} \\ -1_{q,\,p} & -E_q & -1_{q,\,p} & -E_q & \cdots & -1_{q,\,p} & (np+n-1)\,E_q \end{bmatrix}$$

와 같다. 여기서 E_p는 p차단위행렬이고 $(nq+n-1)E_p$는 주대각선원소들이 모두 $nq+n-1$이고 나머지원소들이 모두 령인 p차행렬이다. E_q와 $(np+n-1)E_q$ 역시 마찬가지이다. 그리고 $-1_{p,\,q}$는 모든 성분들이 -1인 $p \times q$차행렬이다.

이 행렬에서 첫번째 행과 렬을 제거하여 얻어진 $n(p+q)-1$차행렬의 행렬식은 강적그라프 $K_n \otimes K_{p,\,q}$의 생성나무개수 $\upsilon(K_n \otimes K_{p,\,q})$와 같다.

$$\upsilon(K_n \otimes K_{p,\,q}) =$$

$$= \begin{vmatrix} (nq+n-1)E_{p-1} & -1_{p-1,\,q} & -A_2 & -1_{p-1,\,q} & \cdots & -A_2 & -1_{p-1,\,q} \\ -1_{q,\,p-1} & (np+n-1)E_q & -1_{q,\,p} & -E_q & \cdots & -1_{q,\,p} & -E_q \\ -A_1 & -1_{p,\,q} & (nq+n-1)E_p & -1_{p,\,q} & \cdots & -E_p & -1_{p,\,q} \\ -1_{q,\,p-1} & -E_q & -1_{q,\,p} & (np+n-1)E_q & \cdots & -1_{q,\,p} & -E_q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -A_1 & -1_{p,\,q} & -E_p & -1_{p,\,q} & \cdots & (nq+n-1)E_p & -1_{p,\,q} \\ -1_{q,\,p-1} & -E_q & -1_{q,\,p} & -E_q & \cdots & -1_{q,\,p} & (np+n-1)\,E_q \end{vmatrix}$$

이다. 여기서 $-A_1$은 $p \times (p-1)$형행렬, $-A_2$는 $(p-1) \times p$형행렬로서 다음과 같다.

$$-A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}, \quad -A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix}$$

이제 이 행렬식을 계산하자.

이 행렬식의 오른쪽에 $n(p+q)$ 차원렬벡토르 $(0_{p-1},\ 1_q,\ 0_p,\ 1_q, \cdots,\ 0_p,\ 1_q,\ 1)^{\mathrm{T}}$ 를, 아래에 $n(p+q)$ 차원행벡토르 $(0_{p-1},\ 0_q,\ 0_p,\ 0_q, \cdots,\ 0_p,\ 0_q,\ 1)$ 을 첨가하고 마지막렬벡토르를 행렬식에서 $K_{p,\ q}$ 의 두번째 정점모임의 정점들에 의해 생겨난 렬들에 더한다. 다음 다시 얻어진 행렬식의 오른쪽에 $n(p+q)+1$ 차원렬벡토르 $(1_{p-1},\ 0_q,\ 1_p,\ 0_q,\ \cdots,\ 1_p,\ 0_q,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}$ 를, 아래에 $n(p+q)+1$ 차원행벡토르 $(0_{p-1},\ 0_q,\ 0_p,\ 0_q, \cdots,\ 0_p,\ 0_q,\ 0,\ 1)$ 을 첨가하고 마지막렬벡토르를 행렬식에서 $K_{p,\ q}$ 의 첫번째 정점모임의 정점들에 의해 생겨난 렬들에 더하면 행렬식의 성질에 의하여 값은 변하지 않는다.

$\upsilon(K_n \otimes K_{p,\ q})=$

$$=\begin{bmatrix}
(nq+n-1)E_{p-1} & 0_{p-1,\ q} & -A_2 & 0_{p-1,\ q} & \cdots & -A_2 & 0_{p-1,\ q} & 0^{\mathrm{T}}_{p-1} & 1^{\mathrm{T}}_{p-1} \\
0_{q,\ p-1} & (np+n-1)E_q & 0_{q,\ p} & -E_q & \cdots & 0_{q,\ p} & -E_q & 1^{\mathrm{T}}_q & 0^{\mathrm{T}}_q \\
-A_1 & 0_{p,\ q} & (nq+n-1)E_p & 0_{p,\ q} & \cdots & -E_p & 0_{p,\ q} & 0^{\mathrm{T}}_p & 1^{\mathrm{T}}_p \\
0_{q,\ p-1} & -E_q & 0_{q,\ p} & (np+n-1)E_q & \cdots & 0_{q,\ p} & -E_q & 1^{\mathrm{T}}_q & 0^{\mathrm{T}}_q \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
-A_1 & 0_{p,\ q} & -E_q & 0_{p,\ q} & \cdots & (nq+n-1)E_p & 0_{p,\ q} & 0^{\mathrm{T}}_p & 1^{\mathrm{T}}_p \\
0_{q,\ p-1} & -E_q & 0_{q,\ p} & -E_q & \cdots & 0_{q,\ p} & (np+n-1)E_q & 1^{\mathrm{T}}_q & 0^{\mathrm{T}}_q \\
1_{p-1} & 0_q & 1_p & 0_q & \cdots & 1_p & 0_q & 1 & 0 \\
0_{p-1} & 1_q & 0_p & 1_q & \cdots & 0_p & 1_q & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

여기서 1_p (또는 0_p)는 모든 성분이 1(또는 0)인 p 차원행벡토르, 1^{T}_p (0^{T}_p)는 모든 성분이 1(또는 0)인 p 차원렬벡토르이다.

행렬식왼쪽에 $n(p+q)+2$ 차원렬벡토르 $(nq+n-1,\ 0_{p-1},\ 0_q,\ -e_p,\ 0_q, \cdots, -e_p,\ 0_q,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}}$ 를, 우에 $n(p+q)+2$ 차원행벡토르 $(nq+n-1,\ 0_{p-1},\ 0_q,\ 0_p,\ 0_q, \cdots,\ 0_p,\ 0_q, 0,\ 0)$ 을 첨가하고 $nq+n-1$ 로 나누어도 행렬식의 성질에 의하여 값은 변하지 않는다. 여기서 $e_p=(1,\ 0, \cdots,\ 0)$ 은 p 차원단위벡토르이다.

$\upsilon(K_n \otimes K_{p,\ q})=(nq+n-1)^{-1}\cdot$

$$\cdot\begin{vmatrix}
(nq+n-1)E_p & 0_{p,\ q} & -A_3 & 0_{p,\ q} & \cdots & -A_3 & 0_{p,\ q} & 0^{\mathrm{T}}_p & 01^{\mathrm{T}}_p \\
0_{q,\ p} & (np+n-1)E_q & 0_{q,\ p} & -E_q & \cdots & 0_{q,\ p} & -E_q & 1^{\mathrm{T}}_q & 0^{\mathrm{T}}_q \\
-E_p & 0_{p,\ q} & (np+n-1)E_q & 0_{p,\ q} & \cdots & -E_p & 0_{p,\ q} & 0^{\mathrm{T}}_p & 1^{\mathrm{T}}_p \\
0_{q,\ p} & -E_q & 0_{q,\ p} & (np+n-1)E_q & \cdots & 0_{q,\ p} & -E_q & 1^{\mathrm{T}}_q & 0^{\mathrm{T}}_q \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
-E_p & 0_{p,\ q} & -E_p & 0_{p,\ q} & \cdots & (np+n-1)E_q & 0_{p,\ q} & 0^{\mathrm{T}}_p & 1^{\mathrm{T}}_p \\
0_{q,\ p} & -E_q & 0_{q,\ p} & -E_p & \cdots & 0_{q,\ p} & (np+n-1)E_q & 1^{\mathrm{T}}_q & 0^{\mathrm{T}}_q \\
1_p & 0_q & 1_p & 0_q & \cdots & 1_p & 0_q & 1 & 0 \\
0_p & 1_q & 0_p & 1_q & \cdots & 0_p & 1_q & 0 & 1
\end{vmatrix}$$

여기서 $01^{\mathrm{T}}_p=(0,\ 1,\ 1, \cdots,\ 1)^{\mathrm{T}}$ 는 p 차원렬벡토르이다.

이와 같은 방법으로 행렬식의 성질을 여러번 적용하면 다음과 같다.

$$\upsilon(K_n \otimes K_{p,\,q}) = (nq+n-1)^{-1} \cdot (nq+n-1)(nq+n)^{np-1}(np+n)^{nq} \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & a1'_p & 0_q \\ \alpha_2 & 1 & 0_{q,\,p} & b1_q \\ 0_p^{\mathrm{T}} & a(1'_p)^{\mathrm{T}} & (1+a)E''_p & 0_{p,\,q} \\ b1_q^{\mathrm{T}} & 0_q^{\mathrm{T}} & 0_{q,\,p} & (1+b)\,E_p \end{vmatrix} =$$

$$= n^{p+q-2} p^{q-1} q^{p-1} (nq+n)^{np-p} (np+n)^{nq-q} = n^{np+nq-2} p^{q-1} q^{p-1} (p+1)^{nq-q} (q+1)^{np-p}$$

여기서 $a = -n/(nq+n),\ b = -n/(np+n),\ 1'_p = ((n-1)/n,\ 1, \cdots,\ 1)$,

$$E''_p = \begin{bmatrix} \dfrac{nq+1}{(1+a)(nq+n)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

$$\alpha_1 = -\frac{p-1}{nq+n} - \frac{p}{nq+n} - \cdots - \frac{p}{nq+n} = \frac{1-np}{nq+n},\ \alpha_2 = -\frac{q}{np+n} - \frac{q}{np+n} - \cdots - \frac{q}{np+n} = \frac{nq}{np+n}.$$

(증명끝)

따름 1 강적그라프 $K_n \otimes K_{p,\,q}$ 에서 $p=q=1$ 일 때 생성나무개수는 $(2n)^{2n-2}$ 이다.

동형인 두 그라프의 생성나무개수는 같다.

그런데 강적그라프 $K_n \otimes K_{1,\,1}$ 과 완전그라프 K_{2n} 은 동형이다.

선행연구[3]로부터 완전그라프 K_{2n} 의 생성나무개수는 $(2n)^{2n-2}$ 이다.

따름 2 강적그라프 $K_n \otimes K_{p,\,q}$ 에서 $n=1$ 일 때 생성나무개수는 $p^{q-1}q^{p-1}$ 이다.

강적그라프 $K_n \otimes K_{p,\,q}$ 와 완전두조그라프 $K_{p,\,q}$ 는 동형이다.

선행연구[3, 5]로부터 완전두조그라프 $K_{p,\,q}$ 의 생성나무개수는 $p^{q-1}q^{p-1}$ 이다.

다음으로 완전그라프 K_n 과 완전3조그라프 $K_{p,\,q,\,r}$ 의 강적그라프 $K_n \otimes K_{p,\,q,\,r}$ 의 생성나무개수를 평가하자.

정리 2 강적그라프 $K_n \otimes K_{p,\,q,\,r}$ 의 생성나무개수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \upsilon(K_n \otimes K_{p,\,q,\,r}) &= n^{np+nq+nr-2}(p+r)^{q-1}(q+r)^{p-1}(p+q)^{r-1} \cdot \\ &\cdot (p+r+1)^{nq-q}(q+r+1)^{np-p}(p+q+1)^{nr-r}(p+q+r) \end{aligned} \qquad (2)$$

따름 3 $K_n \otimes K_{p,\,q,\,r}$ 에서 $p=q=r=1$ 일 때 생성나무개수는 $(3n)^{3n-2}$ 이다.

강적그라프 $K_n \otimes K_{1,\,1,\,1}$ 과 완전그라프 K_{3n} 은 동형이다.

그런데 선행연구[3]로부터 완전그라프 K_{3n} 의 생성나무개수는 $(3n)^{3n-2}$ 이다.

따라서 따름 3으로부터 공식 (2)가 옳다는것을 확증할수 있다.

따름 4 강적그라프 $K_n \otimes K_{p,\,q,\,r}$ 에서 $n=1$ 일 때 이 그라프의 생성나무개수는

$$(q+r)^{p-1}(p+r)^{q-1}(p+q)^{r-1}(p+q+r).$$

강적그라프 $K_n \otimes K_{p,\,q,\,r}$ 와 완전3조그라프 $K_{p,\,q,\,r}$ 는 동형이다.

그런데 선행연구[4]로부터 $K_{p,\,q,\,r}$ 의 생성나무개수는

$$(q+r)^{p-1}(p+r)^{q-1}(p+q)^{r-1}(p+q+r)$$

이다. 따라서 따름 4로부터 공식 (2)가 옳다는것을 확증할수 있다.

정리 3 데카르트적그라프 $K_n \square K_{p,\ q}$의 생성나무개수는 다음과 같다.

$$\upsilon(K_n \square K_{p,\ q}) = n^{n-2} p^{q-1} q^{p-1} (n+p)^{nq-n-q+1} (n+q)^{np-n-p+1} (n+p+q)^{n-1}$$

참 고 문 헌

[1] N. Biggs; Algebraic Graph Theory, Cambridge University Press, 12～56, 1974.

[2] D. Stark; Discrete Math., 313, 1256, 2013.

[3] M. Z. Abu-Sbeih; Discrete Math., 84, 205, 1990.

[4] O. Egecioglu et al.; J. Combin. Theory, A 42, 15, 1986.

[5] J. Yinglie et al.; Australas. J. Combin., 28, 73, 2003.

[6] L. Clark et al.; Bull. Inst. Combin. Appl., 38, 50, 2003.

[7] S. D. Nikolopoulos et al.; Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc., 8, 235, 2006.

[8] T. Atajan et al.; Discrete Math., 310, 1210, 2010.

주체105(2016)년 9월 5일 원고접수

Enumeration for the Number of Spanning Trees of One Strong Product Graph and the Cartesian Product Graph

U Sung Sik

We enumerated the number of spanning trees of the labeled strong product graph $K_n \otimes K_{p,\ q}$ and $K_n \otimes K_{p,\ q,\ r}$ by using the matrix tree theorem based on the Kirchhoff matrix. And, we enumerated the number of spanning trees of the labeled Cartesian product graph $K_n \square K_{p,\ q}$ by using this technique.

Key words: spanning tree, strong product graph, Cartesian product graph