김일성종합대학학보 주체107(2018)년
수 학 제64권 제3호

블로크임풀스연산행렬에 의한 두제곱적분가능한 함수의 분수계적분계산의 수값해석

최희철, 박순애

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《기초과학부문들을 발전시켜야 나라의 과학기술수준을 빨리 높일수 있고 인민경제 여러 분야에서 나서는 과학기술적문제들을 원만히 풀수 있으며 과학기술을 주체성있게 발전시켜나갈수 있습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제10권 485페지)

수학, 물리학, 화학, 공학적문제들의 모형화와 해석에 광범히 응용되고있는 분수계미분방정식을 $L_2[0,1]$의 직교토대에 의해 쉽게 처리할수 있고 해석할수 있다는데로부터 블로크임풀스함수계를 리용하여 분수계미분방정식을 풀려는 시도가 많이 제기되였다.[4－6]

직교토대를 리용하는 방법의 우월성은 취급하는 문제를 매우 간소화할뿐아니라 계산작업의 속도를 높일수 있게 한다는데 있다. 이때 문제의 미지풀이를 직교토대함수들로 전개한 다음 유한개마디로 절단하여 여기에 연산행렬을 리용한다.[1, 2, 4－6]

많은 론문들에서는 풀려고 하는 문제에 적합한 함수계에 의한 연산행렬을 임풀스블로크연산행렬에 기초하여 구성하고있다. 그러나 임풀스블로크연산행렬법의 오차해석이 해명되여있지 않고 따라서 많은 론문들에서 수치실례를 주는것에 국한하고있다.

론문에서는 $L_2[0,1]$의 원소의 분수계적분을 연산행렬법으로 계산하는 경우 오차평가문제를 취급하였다.

임의의 $\alpha>0$에 대하여 함수 $y(t)$의 α계적분은 다음과 같이 정의된다.[1]

$$J_0^\alpha y(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{y(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau \tag{1}$$

정의 1 [1] 다음의 식으로 규정되는 함수계를 블로크임풀스함수계라고 부른다.

$$b_i(t)=\begin{cases}1, & \dfrac{i-1}{m}\le t<\dfrac{i}{m} \\ 0, & \text{기타}\end{cases}\quad (i=\overline{1,\ m})$$

여기서 계 $\{b_i(t)\}$는 $L_2[0,\ 1]$의 비교차, 직교, 완비계이다.

계 $\{b_i(t)\}$의 완비성으로부터 $y\in L_2[0,1]$이면

$$\lim_{m\to\infty}\| y(t)-c_1b_1(t)+c_2b_2(t)+\cdots+c_mb_m(t)\|=0 \tag{2}$$

$$c_j=m\int_0^1 y(t)b_j(t)dt\ \ (j=\overline{1,\ m})$$

이라는것을 알수 있다. 식 (2)를

$$y(t)=\sum_{k=1}^m c_kb_k(t)+r_m(t),\ \lim_{m\to\infty}\| r_m\|_{L_2[0,1]}=0$$

으로 표시할수 있으므로 다음의 식이 성립한다.

$$J_0^\alpha y(t)=\sum_{k=1}^{m} c_k J_0^\alpha b_k(t)+J_0^\alpha(r_m(t))$$

이제 $B_m(t)=(b_1(t),\ b_2(t),\ \cdots,\ b_m(t))^{\mathrm{T}}$, $C_m^{\mathrm{T}}=(c_0,\ c_1,\ \cdots,\ c_{m-1})$이라고 하면

$$J_0^\alpha y(t)=C_m^{\mathrm{T}} J_0^\alpha B_m(t)+J_0^\alpha(r_m(t))$$

와 같다. 이제 $J_0^\alpha B_m(t)$의 근사계산에 대하여 보자.

보조정리 $u(t)$를 단위계단함수라고 하면 다음의 식이 성립한다.

$$J_0^\alpha b_i(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{b_i(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left[\left(t-\frac{i-1}{m}\right)^\alpha u\left(t-\frac{i-1}{m}\right)-\left(t-\frac{i}{m}\right)^\alpha u\left(t-\frac{i}{m}\right)\right]$$

이제 보조정리와 $\xi_k:=(k^{(\alpha+1)}-2(k-1)^{(\alpha+1)}+(k-2)^{(\alpha+1)})$을 리용하여

$$F_B^\alpha=\frac{1}{\Gamma(\alpha+2)m^\alpha}\begin{pmatrix} 1 & \xi_2 & \cdots & \xi_m \\ 0 & 1 & \xi_2 & \xi_{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

이라고 하자.

정의 2 F_B^α를 분수계적분 J_0^α의 블로크임풀스연산행렬이라고 부른다.

1. 블로크임풀스연산행렬에 의한 분수계적분계산의 오차평가

$J_0^\alpha y(t)$를 다시 표시하자.

$$J_0^\alpha y(t)=C_m^{\mathrm{T}}(F_B^\alpha B_m(t)+R_m(t))+J_0^\alpha(r_m(t))=C_m^{\mathrm{T}}F_B^\alpha B_m(t)+C_m^{\mathrm{T}}R_m(t)+J_0^\alpha(r_m(t))$$

따라서

$$J_0^\alpha y(t)-C_m^{\mathrm{T}}F_B^\alpha B_m(t)=C_m^{\mathrm{T}}R_m(t)+J_0^\alpha(r_m(t)) \tag{4}$$

이다.

정리 오차항 $\| J_0^\alpha y(t)-C_m^{\mathrm{T}}F_B^\alpha B_m(t)\|_{L_2[0,1]}$에 대하여 다음의 식이 성립한다.

$$\| J_0^\alpha y(t)-C_m^{\mathrm{T}}F_B^\alpha B_m(t)\|_{L_2[0,1]}\le\frac{\|y\|_{L_\infty[0,1]}}{\Gamma(\alpha+1)}E_r+\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\|r_m\|_{L_2[0,1]} \tag{5}$$

여기서

$$E_r:=\left(11+2\omega\left(t^\alpha,\ \frac{1}{m}\right)+\frac{1}{m^{2\alpha}(\alpha+1)^2}+\frac{\left(\omega\left(t^\alpha,\ \frac{1}{m}\right)\right)^2}{m^{2\alpha}}+4\omega\left(t^\alpha,\ \frac{1}{m}\right)\right)$$

$$\omega(f,\ \delta):=\sup_{|t'-t''|\le\delta}|f(t')-f(t'')|$$

$$\lim_{m\to\infty}\| r_m \|_{L_2[0,1]}=0$$

이다.

증명 식 (4)에 의하여

$$\| J_0^\alpha y(t) - C_m^{\mathrm{T}} F_B^\alpha B_m(t) \|_{L_2[0,\ 1]} \le \| C_m^{\mathrm{T}} R_m(t) \|_{L_2[0,\ 1]} + \| J_0^\alpha (r_m(t)) \|_{L_2[0,\ 1]}$$

이 성립한다. J_0^α 는 $L_2[0,\ 1] \to L_2[0,\ 1]$ 인 유계선형연산자이며 다음의 평가식이 성립한다.[3]

$$\forall f \in L_2[0,\ 1],\ \| J_0^\alpha f \|_{L_2[0,\ 1]} \le \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \| f \|_{L_2[0,\ 1]}$$

따라서 $\| J_0^\alpha r_m \|_{L_2[0,\ 1]} \le \dfrac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \| r_m \|_{L_2[0,\ 1]}$ 이 성립한다.

다음으로 $\| C_m^{\mathrm{T}} R_m(t) \|_{L_2[0,\ 1]}$ 을 평가하자. 적당한 방법으로

$$\| C_m^{\mathrm{T}} R_m(t) \|_{L_2[0,\ 1]} \le \frac{\| y \|_{L_\infty[0,\ 1]}}{\Gamma(\alpha+1)} E_r$$

가 성립한다는 사실을 증명할수 있다.(증명끝)

2. 오차거동의 수치평가

리론적인 평가에 의하면 이 오차 $\sum_{k=1}^{m} \| R_{m,k} \|_{L_2[0,1]}$ 은 E_r 를 넘지 않는다. α 의 값이 0.3, 0.5, 0.8, 1.0, 1.5, 1.8, 2.0인 경우 분할수 m 을 100부터 1 000까지 100간격으로 움직이면서 오차의 값들을 계산하였다.

계산은 Mathematica 6.0에서 진행하였다. 표에서 보는바와 같이 오차는 $\alpha > 5$ 인 경우 분할수 m 의 증가에 따라 령으로 수렴한다는것을 알수 있다. 또한 α 의 값이 클수록 령에로의 감소속도는 빨라진다는것을 알수 있다.

표. 각이한 α , m 에 따르는 오차 $\sum_{k=1}^{m} \| R_{m,k} \|_{L_2[0,\ 1]}$ 의 계산값들

m \ α	0.3	0.5	0.8	1.0	1.5	1.8	2.0
100	0.550 255	0.266 245	0.071 397	0.028 868	0.005 407	0.004 046	0.003 836
200	0.632 644	0.266 422	0.058 007	0.020 412	0.002 85	0.002 037	0.001 921
300	0.686 289	0.266 482	0.051 368	0.016 667	0.001 955	0.001 362	0.001 282
400	0.727 043	0.266 511	0.047 122	0.014 434	0.001 495	0.001 023	0.000 961
500	0.760 292	0.266 529	0.044 072	0.012 91	0.001 213	0.000 819	0.000 769
600	0.788 575	0.266 541	0.041 727	0.011 785	0.001 023	0.000 683	0.000 641
700	0.813 3	0.266 549	0.039 842	0.010 911	0.000 885	0.000 586	0.000 55
800	0.835 339	0.266 556	0.038 278	0.010 206	0.000 781	0.000 513	0.000 481
900	0.855 272	0.266 56	0.036 949	0.009 623	0.000 699	0.000 456	0.000 428
1 000	0.873 503	0.266 564	0.035 8	0.009 129	0.000 633	0.000 411	0.000 385

참 고 문 헌

[1] C. H. Wang; J. Frankin Inst., 315, 2, 91, 1983.
[2] Adem Kilicman et al.; Applied Mathematics and Computation, 187, 250, 2007.
[3] A. A. Kilbas et al.; North-Holland Mathematical Studies, 204, 69, 2006.
[4] Yuanlu Li et al.; Computers and Mathematics with Applications, 62, 1046, 2011.
[5] Mingxu Yi et al.; Applied Mathematics and Computation 221, 121, 2013.
[6] Zahra Khoshroei et al.; MAGNT Research Report, 3, 2, 1922, 2015.

주체107(2018)년 3월 10일 원고접수

Numerical Analysis of Fractional Integration of a Square Integrable Function by Block Pulse Operational Matrices

Choe Hui Chol, Pak Sun Ae

In this paper, we discuss the error estimation when computing the fractional integral of a function in $L_2[0,1]$ by means of the operational matrix method.

In the previous works, the authors used the block pulse operational matrices, but we gave numerical examples without the error estimation.

Key words: operational matrix, fractional integral, block pulse operational matrix