김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제2호

2－케블트레스에 의한 평면대수부분인자해석

리응훈, 한예경

론문에서는 평면대수로부터 2－케블트레스에 의하여 구성된 부분인자의 동형류를 결정하였다.

선행연구[4]에서 자유확률론과 우연행렬, 부분인자와 평면대수사이의 련관성이 처음으로 밝혀진 때로부터 평면대수에 동반되는 급수대수우의 트레스와 그에 의한 부분인자의 구성은 최근년간 연산자대수분야에서 주되는 화제의 하나로 되고있다.[5, 12] 선행연구[4]에서의 구성법(Guionnet-Jones-Shlyakhtenko구성법, 간단히 GJS－구성으로도 불리운다.)으로부터 발단된 문제의 하나는 이 론문에서 도입된 보이꿀레스꾸트레스외에도 부분인자구성을 담보하는 타당한 트레스의 존재성과 그 실례들을 찾는것이다. 선행연구[1]에서는 종래의 보이꿀레스꾸트레스의 2－케블확대 또는 2－케블트레스라고 부르는 새로운 류형의 트레스를 도입하고 그에 의한 부분인자의 구성을 제기하였다. 선행연구[5, 10, 11]에서 GJS－구성에서의 인자들의 동형류가 확정된 조건에서 선행연구[1]에서 제기한 인자들의 류형을 확정하는 문제가 제기된다.

론문에서는 반전과 케블링을 비롯한 평면대수특유의 일련의 연산들을 선행연구[11]에서의 그라프론법과 결합함으로써 유한깊이평면대수의 경우 론문에서 제기한 2－케블트레스로부터 구성된 인자들이 모두 보간자유군인자[3, 14]와 동형이라는것을 밝혔다.

1. 2－케블트레스에 의한 GJS구성의 변형

유한깊이평면대수 즉 유한인 주그라프 $\Gamma=(V,\ E)$를 가지는 부분인자평면대수 $P=(P_n)$이 주어졌다고 하자. 기준정점을 $*$로 놓고 모듈은 $\delta>1$이라고 가정한다. 그러면 δ는 Γ (또는 그것의 련접행렬)의 뻬론－흐로베뉴스고유값으로 된다. 대응하는 고유벡토르 $\mu^2(\cdot)$를 조건

$$\sum_{v\in V}\mu^2(v)=1$$

을 만족시키는것으로 택한다. 다시말하여 Γ의 정점들에 우와 같이 표준화된 무게 $\mu^2(v)$를 배당한다.

선행연구[11]에서는 일반적으로 주어진 유한2부그라프와 그우의 표준화된 무게로부터 트레스적인 비가환확률공간[13] $Gr(\Gamma,\ \tau)$를 구성하고 그에 결부된 폰 노이만대수 $M(\Gamma)$의 구조를 분석하여 부분인자평면대수의 주그라프와 뻬론－흐로베뉴스무게의 경우에는 $M(\Gamma)$가 II_1인자로 된다는것을 밝혔다. 선행연구[11]에서는 더 나아가서 자유확률론의 론법들에 근거하여 $M(\Gamma)$가 어떤 $1<s<\infty$에 대한 보간자유군대수[3, 14] $LF(s)$와 동형이라는것을 증명하였다.

$Gr(\Gamma)$의 구성에 대하여 간단히 보자. Γ가 2부그라프이므로 정점모임은 짝정점과 홀

정점모임의 비교차합 $V=V_0 \cup V_1$로 이루어진다. Γ에서 길이 n인 유향길들을 토대로 하는 선형공간을 $P_n(\Gamma)$라고 하고 직합

$$Gr(\Gamma)=P_0(\Gamma)\oplus P_1(\Gamma)\oplus P_2(\Gamma)\oplus \cdots$$

에 곱하기연산을 $[\xi]\in P_m$, $[\eta]\in P_n$에 대하여

$$[\xi]\cdot[\eta]=\begin{cases}0, & f(\xi)\neq s(\eta)\\ [\xi\circ\eta], & f(\xi)=s(\eta)\end{cases}$$

로 놓고 $[\xi]^*=[\bar{\xi}]$로 정의하면 $Gr(\Gamma)$는 $*$－대수로 된다. 여기서 $[\xi]$는 공간 $P_n(\Gamma)$의 토대원소로서의 길 ξ를 의미하며 $\bar{\xi}$는 ξ과 방향만 반대인 길을 표시한다.

트레스의 정의는 약간 복잡하다. $[\xi]\in P_n(\Gamma)$ $(n\geq 1)$에 대하여

$$\tau([\xi])=\sum_T \tau_T([\xi])$$

로 놓는다. 여기서 합은 모임 $\{1, 2, \cdots, n\}$에서의 모든 템펄리－리브관계 T에 관하여 취한것으로서 매 $\tau_T([\xi])$는 다음과 같이 정의된다.

$$\tau_T([\xi])=\prod_{i\sim j\in T}\delta_{\xi_i,\overline{\xi_j}}\prod_{D\in T}\mu(v_D^{\xi})^{2-|D|}$$

여기서 $i\sim j$는 T에 의한 동등쌍이고 $D\in T$는 템펄리－리브얽힘으로 본 T에서의 령역을 의미하며 수 $|D|$는 이 령역을 경계짓는 끈의 개수이다. 우에서 지적한바와 같이 Γ가 부분인자평면대수의 주그라프인 경우 $Gr(\Gamma)$에 결부되는 $M(\Gamma)$는 적당한 $1<s<\infty$에 대한 $LF(s)$와 동형이다. 특히 $*$을 시점과 끝점으로 하는 닫긴길들에 국한시켜 생각하면 역시 비가환확률공간

$$Gr(\Gamma,\ *)=e_*Gr(\Gamma)e_*=P_0(\Gamma,\ *)\oplus P_2(\Gamma,\ *)\oplus \cdots \oplus P_{2n}(\Gamma,\ *)\oplus \cdots$$

이 얻어지며 이것에 결부된 폰 노이만대수를 $M(\Gamma,*)$로 놓으면 등식

$$M(\Gamma,\ *)=e_*M(\Gamma)e_*$$

이 성립한다. 보간자유군인자의 모서리로서 $M(\Gamma,*)$도 보간자유군인자로 된다.[3]

이보다 앞서 선행연구[4]에서는 평면대수 P로부터 출발하여 P를 표준불변량으로 하는 부분인자를 도형적인 론법으로 구성하였다. 이 구성법의 중간단계인 등급대수들의 족 $Gr_k(P)$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$에서 $Gr_0(P)$는 우에서의 $Gr(\Gamma)$와 많은 면에서 류사하다.

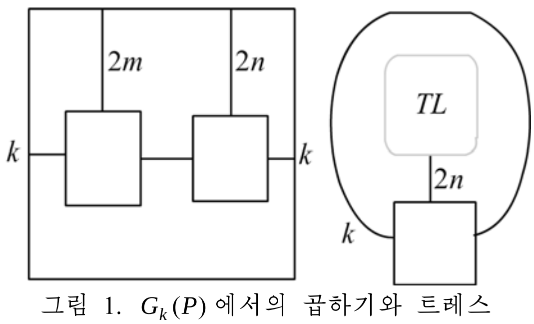

그림 1. $G_k(P)$에서의 곱하기와 트레스

간단히 $Gr_0(P)$의 구성을 보자. 선형공간으로서는

$$Gr_0(P)=P_0\oplus P_1\oplus P_2\oplus\cdots$$

이며 곱하기는 $P_m\otimes P_n\to P_{m+n}$으로 제한하면 그림 1의 왼쪽의 얽힘으로 정의된다.

더 나아가서 선행연구[11]에서는 길대수모형[6]에 기초하여 다음의 동형관계를 증명하였다. 넘기기

$$\theta: Gr(\Gamma,\ *)\to Gr_0(P);\ \theta([\xi])=\frac{\mu(v_0^{\xi})}{\mu(v_n^{\xi})}\xi\ ([\xi]\in P_{2n}(\Gamma,\ *))$$

는 $*$－확률공간사이의 동형넘기기로 된다.

이 동형관계의 따름으로서 $Gr_0(P)$에 의해 생성된 II_1인자 $M_0(P)$는 $M(\Gamma, *)$와 동형이며 따라서 적당한 $1<r<\infty$에 대한 보간자유군인자 $LF(r)$와 동형이라는 사실이 얻어진다. 약간의 추가적인 론의를 거쳐 $Gr_1(P)$에 결부된 인자 $M_1(P)$ 역시 어떤 보간자유군인자와 동형이라는 사실이 밝혀진다. 이와 같이 유한깊이 부분인자평면대수들에 대하여서는 선행연구[4, 10]에서 구성된 부분인자의 동형류가 결정된다. 사실 이 결과는 선행연구[11]보다 약간 앞서 선행연구[5]에서 연산자값반원계를 써서 독립적으로 해명된것이다.

선행연구[1]에서는 선행연구[4]의 론법을 개량하여 부분인자평면대수로부터 부분인자를 구성하는 또 한가지 구성법을 제기하였다. 이 구성에서 주목되는 점은 선행연구[4, 10]에서와는 달리 구성과정에서 평면대수 P의 $*$－구조와 포함관계, 조건부기대값 등이 그대로 적용된다는것이다. 선행연구[1]에서의 구성은 기본적으로 다음과 같다.

매 $k=0, 1, 2, \cdots$에 대하여 선형공간으로서는

$$G_k(P)=P_k \oplus P_{k+2} \oplus P_{k+4} \oplus \cdots \oplus P_{k+2n} \oplus \cdots$$

로 놓고 $*$－연산은 성분별로 유한차원 C^*－대수로서의 P_l들의 $*$－연산으로, 곱하기산법와 트레스는 각각 다음의 얽힘으로 정의한다.

이 정의는 외견상으로는 선행연구[4]의 $Gr_k(P)$에서의 해당 정의와 류사하지만 두가지 측면에서 차이가 있다.

첫째로, 좌우로 나간 선은 k개의 끈묶음을 의미하지만 우로 향하는 선들은 각각 $2m, 2n$개의 끈쌍(령역띠, 또는 선행연구[9]에서의 2－케블짓기)들을 표시한다는것이다. 그러므로 곱하기를 정의하는 왼쪽 얽힘에서는 $2(2m+2n)=4(m+n)$개의 끈이 우로 향하고있으며 특히 오른쪽의 트레스의 정의에서 TL은 2－케블짓기의 의미에서의 템펄리－리브얽힘전부에 관한 합이다.

둘째로, $Gr_k(P)$에서와는 달리 그림 1에는 특정구간표기가 없다는것이다. 여기서는 밑면을 특정구간의 맞은편구간으로 약속한다. 나아가서 포함 $G_k(P)\subset G_{k+1}(P)$도 평면대수에서의 포함 $P_{k+2n}\subset P_{k+1+2n}$에 의한 성분별넘기기로서 정의된다.

이제는 $G_0(P)\subset G_1(P)$에 결부되는 II_1－부분인자 $M_0\subset M_1$에서의 M_0과 M_1의 동형류를 확정하여야 한다. 이를 위해 주어진 부분인자평면대수 P에 대하여 또 한 종류의 등급대수들의 렬 $\overline{G}_k(P)\,(k=0, 1, 2, \cdots)$를 정의한다. 벡토르공간으로서는 $G_k(P)$와 마찬가지로

$$\overline{G}_k(P)=\bigoplus_{n=0}^{\infty} P_{k+2n}=P_k \oplus P_{k+2} \oplus P_{k+4} \oplus \cdots \oplus P_{k+2n} \oplus \cdots$$

으로 놓고 성분별곱하기

$$P_{k+2m} \otimes P_{k+2n} \to P_{k+2(m+n)}$$

과 트레스는 각각 다음의 얽힘들로 정의한다.(그림 2) 선들에 대한 설명은 그림 1에서와 같다. 그러므로 $G_k(P)$와 $\overline{G}_k(P)$의 차이는 그림 1과 그림 2의 차이로서 특정구간들의 배치에서만 구별된다. 여기서도 특정구간은 백색령역에 접한다는것을 강조한다.

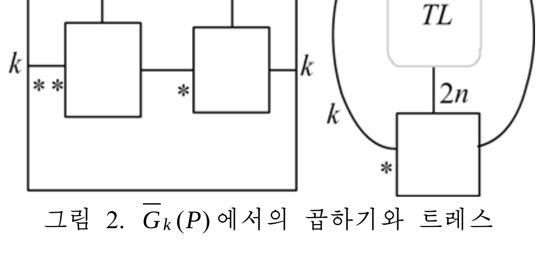

그림 2. $\overline{G}_k(P)$에서의 곱하기와 트레스

2. 평면대수에 대한 연산

선행연구[8]에서는 평면대수의 정의를 초기의 선행연구[7]에서와 본질적으로는 동등하지만 보다 대칭적이며 보편적인 형태로 주었다. 최근 선행연구[2, 12]들에서는 평면대수의 정의를 기본적으로 이 정의에 따르고있다. 이때 평면대수는 평면얽힘이 작용하는 벡토르공간족 $P=\{P_n^{\pm}\}_{n\geq 0}$ 으로서 얽힘들에 대해서는 특정구간이 백색령역에 접한다고는 가정하지 않는다. 특정구간이 흑색령역과 접하는 원판(통)에는 P_n^- 의 원소가 대입된다.

이 의미에서 부분인자평면대수 $P=\{P_n^{\pm}\}_{n\geq 0}$ 가 주어졌다고 하자. 얽힘 T 에 대하여 매통의 특정구간을 맞은편구간으로 교체하여 얻어진 얽힘을 $\hat{T}$ 로 놓으면 대응 $T\mapsto\hat{T}$ 은 얽힘들에 대한 연산[9]으로 된다. 이 연산에는 평면대수들우의 연산 $P\mapsto\hat{P}$ 이 대응된다. 여기서 $\hat{P}$ 은 공간

$$\hat{P}_n^{\pm}=\begin{cases}P_n^{\pm},\ n=2k\\ P_n^{\mp},\ n=2k+1\end{cases}$$

들과 그우에서의 얽힘작용 $Z_T^{\hat{P}}=Z_{\hat{T}}^{P}$ 에 의하여 결정되는 평면대수이다. 더 나아가서 얽힘들에 관한 연산 $T\mapsto\hat{T}$ 에 흑백채색을 뒤집어놓는 연산을 합성하면 또 하나의 연산 $T\mapsto\widetilde{T}$ 이 정의된다. 여기에는 평면대수들에 관한 연산 $P\mapsto\widetilde{P}$ 이

$$\widetilde{P}_n^{\pm}=\begin{cases}P_n^{\mp},\ n=2k\\ P_n^{\pm},\ n=2k+1\end{cases}$$

과 우와 류사한 얽힘작용 $Z_T^{\widetilde{P}}=Z_{\widetilde{T}}^{P}$ 으로서 주어진다. 푸리에변환[8]을 리용하면 우의 두 연산은 종전과 같이 $P_n=P_n^+\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ 들과 특정구간이 백색령역에 접하는 평면얽힘들만을 가지고 론하는 경우에로 국한시켜 표현할수도 있다는것을 지적해둔다.

보조정리 1 임의의 부분인자평면대수 P 에 대하여 다음의 동형관계가 성립한다.

$$\overline{G}_{2k}(P)\cong G_{2k}(\hat{P}),\ \overline{G}_{2k+1}(P)\cong G_{2k+1}(\widetilde{P})\ \ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

이제 k 의 짝홀성에 따라 Q 를 $\hat{P}$ 또는 $\widetilde{P}$ 로 놓으면 각각 $\hat{Q}\cong P$ 또는 $\widetilde{Q}\cong P$ 이며 따라서 우의 보조정리에 의해 모든 $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ 에 대하여 동형관계 $\overline{G}_k(Q)\cong G_k(P)$ 가 성립한다. 앞에서 지적한바와 같이 중요한것은 $G_0(P)$ 와 $G_1(P)$ 즉 $k=0,\ 1$ 인 경우이다. 나머지 M_k 들의 동형류확정도 결국 이 경우들에 귀착된다.

3. 그라프인자와의 련관

부분인자평면대수 P 를 $P_{\pm 0}=P_0^{\pm},\ \ P_n=P_n^+\ (n>0)$ 과 특정구간이 백색령역에 접하는 얽힘들에로 제한하여 표현하면 선행연구[9]에서의 케블짓기(cabling)연산이 의미를 가지게 된다. m －케블짓기, 간단히 m －케블링은 얽힘의 매 끈을 m －개의 끈묶음으로 불구는 연산이다.

P 의 2－케블링을 P'' 로 표시하자. $P_n''=P_{2n}$ 이며 $\delta''=\delta^2$ 임을 어렵지 않게 알수 있다.

여기서 δ는 P의 모듈이다.

앞에서와 마찬가지로 P''의 주그라프 Γ''에 대하여 표준화된 뻬론－흐로베뉴스무게를 $\mu(\cdot)$로 놓고. 선행연구[7]에서의 길대수표현을 P''에 적용하자.

유한차원 C^*－대수로서의 P_n''은 Γ''에서 $*$을 시점으로 하고 공통끝점을 가지며 길이 n인 길의 쌍 $(\xi(+), \xi(-))$ 전부를 토대로 하여 생성된다. 여기서 $(\xi(+), \xi(-))$은 $*$을 기점으로 하는 길이 $2n$인 닫긴길 $\overline{\xi(-)} \circ \xi(+)$과 동일시할수 있으며 P_n''은 길이 $2n$인 닫긴길들에 의하여 생성된다.

끝으로

$$Gr(\Gamma'', *) = e_* Gr(\Gamma'') e_* = P_0(\Gamma'', *) \oplus P_2(\Gamma'', *) \oplus \cdots \oplus P_{2n}(\Gamma'', *) \oplus \cdots$$

임을 상기하고 선행연구[11]의 론의를 모듈 δ^2인 부분인자평면대수 P''와 그것의 주그라프 Γ''에 적용하면 어렵지 않게 다음의 결론이 얻어진다.

보조정리 2 토대원소 $[\xi] \in P_{2n}(\Gamma'', *)$에 대하여 대응

$$\theta([\xi]) = \frac{\mu(v_0^\xi)}{\mu(v_n^\xi)} \xi \in P_n''$$

으로 결정되는 선형넘기기 $\theta: Gr(\Gamma'', *) \to Gr_0(P'')$는 등급 $*$－확률공간사이의 동형대응으로 된다. 매 $0 \le i \le 2n$에 대하여 v_i^ξ는 길 ξ의 i번째 정점을 표시한다.

다음의 정리는 론문의 기본결과의 하나이다.

정리 1 P는 유한깊이의 부분인자평면대수로서 모듈 $\delta > 1$을 가진다고 하자. 그러면 P로부터 선행연구[1]에서의 구성으로 얻어진 부분인자 $M_0 \subset M_1$에서 인자 M_0은 어떤 자유차원 $1 < r < \infty$에 의한 보간자유군인자 $LF(r)$와 동형이다.

증명 일반적으로 주어진 부분인자평면대수 P에 대하여 $Gr_0(P'') \cong \overline{G}_0(P)$임을 어렵지 않게 알수 있으므로 보조정리 2에 의하여 $Gr(\Gamma'', *) \cong \overline{G}_0(P)$가 얻어진다.

$Q = \hat{P}$에 이 동형을 적용하면 Q''의 주그라프를 $\Gamma(Q'')$로 표시할 때 보조정리 2로부터 $Gr(\Gamma(Q''), *) \cong G_0(P)$이며 나아가서 $M(\Gamma(Q''), *) \cong M_0$이다. 끝으로 선행연구[11]의 결과에 의하여 $M(\Gamma(Q''))$는 어떤 $LF(t)\,(1 < t < \infty)$와 동형이라는 결론이 나온다. 결국 $M(\Gamma(Q''), *) = p_* M(\Gamma(Q'')) p_*$는 $LF(t)$의 제한이며 역시 어떤 보간자유군인자와 동형이다. 따라서 M_0은 어떤 자유차원의 보간자유군인자와 동형이다.(증명끝)

이제는 $Q = \widetilde{P}$로 놓고 우의 론의를 반복해보자. Q의 주그라프 Γ에서 홀정점 v을 하나 택하고 $*$로부터 v에로의 길이 1인 길 ω를 하나 고정하자. 앞에서와 류사하게 v를 기준으로 하여 길이 2인 길들전부의 모임을 변으로 하는 2부그라프를 $\overline{\Gamma}$로 놓고 대응 $\theta: Gr(\overline{\Gamma}, v) \to q(v, 1)(\overline{G}_1(Q))q(v, 1)$을

$$\theta([\xi]) = \frac{\mu(v_0^\xi)}{\mu(v_{2n}^\xi)} \omega \circ \xi \circ \widetilde{\omega} \in P_{2n+1}$$

로 정의하면 앞에서의 론의를 반복하여 어렵지 않게 다음의 결론이 얻어진다. 여기서는 한 모서리 즉 사영연산자에 의한 축소가 보간자유군인자인 유한인자는 역시 보간자유군인자라는 사실[3]을 주의하면 된다.

정리 2 P는 유한깊이의 부분인자평면대수로서 모듈 $\delta > 1$을 가진다고 하자. 그러면

P 로부터 선행연구[1]에서 얻어진 부분인자 $M_0 \subset M_1$ 에 대하여 다음과 같은 동형관계가 성립한다.

$$M_1 \cong LF(s) \ \ (1 < s < \infty)$$

이상에서 유한깊이의 부분인자평면대수로부터 도형적방법으로 구성된 부분인자를 이루는 유한형인자들의 동형류의 결정과 관련한 최근의 연구결과들을 소개하였다. 특히 초기의 평면대수가 유한깊이를 가지는 경우 선행연구[1]에서 새롭게 제기한 구성법에 의하여 얻어지는 부분인자의 동형류가 결정되였다. 그러나 그라프에 의한 론법의 제한성으로 하여 무한깊이의 경우에 대하여서는 아직 연구가 완료되지 못하고있다.

참 고 문 헌

[1] 리응훈; 조선수학학회지, 4, 2, 61, 주체99(2010).

[2] S. Bigelow et al.; Acta Math., 209, 29, 2012.

[3] K. Dykema; Pacific J. Math., 163, 123, 1994.

[4] V. F. R. Jones et al.; Clay Math. Proc., 11, 201, 2010.

[5] A. Guionnet et al.; J. Funct. Anal., 261, 1345, 2011.

[6] V. F. R. Jones; Invent. Math., 72, 1, 1983.

[7] V. F. R. Jones et al.; Introduction to Subfactors, Cambridge Univ. Press, 1～162, 1997.

[8] V. F. R. Jones; Duke Math. J., 161, 2257, 2012.

[9] V. Kodiyalam et al.; J. Knot Theory and Its Ramifications, 13, 219, 2004.

[10] V. Kodiyalam et al.; Internat. J. Math., 20, 1207, 2009.

[11] V. Kodiyalam et al.; J. Funct. Anal., 260, 2635, 2011.

[12] B. Nelson; J. Funct. Anal., 268, 2586, 2015.

[13] A. Nica et al.; Lectures on Combinatorics of Free Probability, Cambridge University Press, 15～417, 2006.

[14] F. Radulescu; Invent. Math., 115, 347, 1994.

주체107(2018)년 12월 5일 원고접수

Analysis of Planar Algebra Subfactor by 2-Cabled Traces

Ri Ung Hun, Han Ye Gyong

In this paper, we investigate the isomorphism class of subfactors which are constructed by 2-cabled trace from any given subfactor planar algebra. In case of finite depth we prove that the subfactors are all isomorphic to the interpolated free group factors.

Key words: subfactor, planar algebra