김일성종합대학학보 (자연과학) 주체104(2015)년 제61권 제4호
JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE) Vol. 61 No. 4 JUCHE104(2015).

파동형방정식의 점적시간-공간정칙평가

리은영, 김진명

클라인-고르돈방정식의 꼬쉬문제 $\begin{cases}\partial_{tt}u(t,\ x)-\Delta u(t,\ x)+u(t,\ x)=0,\ (t,\ x)\in \boldsymbol{R}_+\times \boldsymbol{R}^n\\ u(0,\ x)=u_0(x),\ \ \partial_t u(0,\ x)=u_1(x),\ \ x\in \boldsymbol{R}^n\end{cases}$ 의 풀이는

$$u(t,\ x)=F^{-1}\cos(1+|\xi|^2)^{1/2}tFu_0+F^{-1}\frac{\sin(1+|\xi|^2)^{1/2}t}{(1+|\xi|^2)^{1/2}}Fu_1 \tag{1}$$

로 표시된다. 여기서 F (F^{-1})는 푸리에변환(거꿀푸리에변환)을 표시한다.

$$u(t,\ x)=F^{-1}\cos(1+|\xi|^4)^{1/2}tFu_0+F^{-1}\frac{\sin(1+|\xi|^4)^{1/2}t}{(1+|\xi|^4)^{1/2}}Fu_1 \tag{2}$$

은 빔방정식 $\begin{cases}\partial_{tt}u(t,\ x)+\Delta^2 u(t,\ x)+u(t,\ x)=0,\ (t,\ x)\in \boldsymbol{R}_+\times \boldsymbol{R}^n\\ u(0,\ x)=u_0(x),\ \ \partial_t u(0,\ x)=u_1(x),\ \ x\in \boldsymbol{R}^n\end{cases}$ 의 풀이이다.

$P(\xi)=1+|\xi|^2$ 과 $P(\xi)=1+|\xi|^4$ 을 리용하면 식 (1), (2)는 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned}u(t,\ x)&=F^{-1}\cos P^{1/2}(\xi)tFu_0+F^{-1}\frac{\sin P^{1/2}(\xi)t}{P^{1/2}(\xi)}Fu_1=\\ &=\left(F^{-1}\frac{e^{iP^{1/2}(\xi)t}+e^{-iP^{1/2}(\xi)t}}{2}\right)*u_0+\left(F^{-1}\frac{e^{iP^{1/2}(\xi)t}-e^{-iP^{1/2}(\xi)t}}{2P^{1/2}(\xi)}\right)*u_1\end{aligned} \tag{3}$$

론문의 기본초점은 보다 일반적인 $P(\xi)$에 대하여 식 (3)에서 나타나는 진동적분

$$I(t,\ x)=I_\alpha(t,\ x)=\int_{\boldsymbol{R}^n}e^{i<x,\ \xi>\pm itP^{1/2}(\xi)}P^{-\alpha/2}(\xi)d\xi \tag{4}$$

의 t와 x에 대한 점적평가를 얻는것이다.

론문에서는 다음의 파동형방정식에 대하여 론의한다.

$$\begin{cases}\partial_{tt}u(t,\ x)+P(-i\nabla)u(t,\ x)=0,\ (t,\ x)\in \boldsymbol{R}_+\times \boldsymbol{R}^n\\ u(0,\ x)=u_0(x),\ \ \partial_t u(0,\ x)=u_1(x),\ \ x\in \boldsymbol{R}^n\end{cases} \tag{5}$$

$P(\xi)$에 대한 가정은 다음과 같다.

① $P:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ 는 차수 $m\geq 4$ 인 실타원형비동차다항식이고 모든 $\xi\in\boldsymbol{R}^n$ 에 대하여 $P(\xi)>0,\ \ n\geq 2$ 이다.

② $P:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ 는 불퇴화 즉 헤시안의 행렬식 $\det\left(\frac{\partial^2 P_m(\xi)}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\right)_{n\times n}\neq 0,\ \ \xi\in\boldsymbol{R}^n\setminus\{0\}$ 이 성립된다. 여기서 P_m은 P의 주요부이다.

진동적분 (4)는 초함수로서 의미를 가지며 P가 타원형이라는 가정으로부터는 매 $t\neq 0$을 고정할 때 x에 관하여 무한번 미분가능하다.[1]

론문에서는 선행연구[2, 3]에서의 수법으로 진동적분 (4)의 t와 x에 대한 동시적인 점적평가를 진행하였다.

정리 어떤 상수 $C>0$ 이 있어서 $|I_\alpha(t,\ x)|\leq \begin{cases} Ct^{(n-\alpha m_1)/m_1}(1+t^{-1/m_1}|x|)^{-\mu}, & 0<t\leq 1 \\ Ct^{-1/m}(1+t^{-1}|x|)^{-\mu}, & t\geq 1 \end{cases}$ 이 성립된다. 여기서 $m_1=m/2,\ \mu=(mn-4n+2\alpha m)/[2(m-2)],\quad (4n-mn)/(2m)\leq\alpha\leq n/m$ 이다.

증명 $t\geq 1,\ r:=|x|\geq t$ 인 경우에 대하여 론의하자.

$\psi(s)=\begin{cases} 0, & s\leq a_1 \\ 1, & s>2a_1 \end{cases}$ 과 같은 미끈한 함수 $\psi(s)\in C^\infty(\boldsymbol{R})$ 를 생각하자. 여기서 a_1 은 선행연구[3]에서 주어진것이다.

$I(t,\ x)$를 다음과 같이 쓸수 있다.

$$I(t,\ x)=\int_{\boldsymbol{R}^n} e^{i(<x,\ \xi>\pm tP^{1/2}(\xi))}P^{-\alpha/2}(\xi)\psi(P^{-1/2}(\xi))d\xi+\int_{\boldsymbol{R}^n} e^{i(<x,\ \xi>\pm tP^{1/2}(\xi))}P^{-\alpha/2}(\xi)[1-\psi(P^{-1/2}(\xi))]d\xi=$$

$$=:I_1(t,\ x)+I_2(t,\ x)$$

I_2 를 그라프 $S=\{z=\pm P^{1/2}(\xi)\ ;\ \xi\in\boldsymbol{R}^n\}\subset\boldsymbol{R}^{n+1}$ 우에서 받침을 가지는 측도의 푸리에변환으로 쓰면

$$I_2(t,\ \ x)=\int_{\boldsymbol{R}^{n+1}} e^{i(tz+<x,\ \xi>)}P^{-\alpha/2}(\xi)(1-\psi(P^{1/2}(\xi))\delta(z\mp P^{1/2}(\xi)))d\xi\ \ dz\,. \tag{6}$$

P는 차수가 m이므로 우의 피적분함수의 받침인 다양체는 m이하인 형이다.[3]

그러므로 $\forall t,\ x,\ \ |I_2(t,\ x)|\leq C(1+t+|x|)^{-1/m}$ 이다.

매 $t\neq 0$ 에 대하여 $f(t,\ \ \xi):=e^{\pm itP(\xi)}P^{-\alpha/2}(\xi)(1-\psi(P^{1/2}(\xi)))\in C_c^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ 이므로 I_2 에 대하여 부분적분을 실시하면 $I_2(t,\ x)=i\int_{\boldsymbol{R}^n} e^{i<x,\ \ \xi>}x/|x|^2\cdot\nabla_\xi f(t,\ \xi)d\xi$ 가 성립된다.

이 과정을 반복하면 Paley-Wiener-Schwartz의 정리에 의하여 다음의 식이 성립된다.

$$|I_2(t,\ x)|\leq C_k t^k r^{-k},\quad k\in\boldsymbol{N}_0,\quad x\neq 0,\quad t\geq 1 \tag{7}$$

식 (6)에서와 같이 식 (7)을 평가하면

$$\forall k\geq 0,\ \ |I_2(t,\ \ x)|\leq C_k t^{-1/m}(1+t^{-1}|x|)^{-(k+1/m)},\ \ t\geq 1,\quad x\in\boldsymbol{R}^n\,. \tag{8}$$

I_1의 평가를 위하여 그것의 정칙화

$$J_\varepsilon(t,\ \ x):=-\int_{\boldsymbol{R}^n} e^{-\varepsilon P^{1/2}(\xi)+i(<x,\ \ \xi>\pm tP^{1/2}(\xi))}P^{-\alpha/2}(\xi)\psi(P^{1/2}(\xi))d\xi,\ \ \varepsilon>0 \tag{9}$$

의 ε에 대한 평등평가를 유도하자.

극자리표변환과 변수변환 $(\rho,\ \omega)\mapsto(s,\ \omega)\ \ (\rho=\rho(s,\ \omega),\ \ P(\rho\omega)=s)$를 실시하면

$$J_\varepsilon(t,\ \ x)=2\int_0^\infty e^{-\varepsilon s\pm its}s^{2n/m-\alpha-1}\psi(s)\,\Phi(rs^{2/m},\ \ s^2)ds\,. \tag{10}$$

앞으로 나오는 함수 $\Phi,\ \Phi_\pm,\ \varphi_\pm,\ \Psi_\pm,\ \Psi_0$ 들은 $[0,\ a]$ 에서 미끈하게 연장하여 $s-$적분을 $\boldsymbol{R}_+$ 에서 진행한다.

증명목표는 임의의 $z_0\in S^{n-1}$에 대하여 $|J_\varepsilon(t,\ x)|\le Ct^{-\nu}r^{-\mu}$과 같은 형태의 ε에 대한 평등평가를 얻는것이다. 여기서 $\nu:=(n-\alpha m)/(m-2)\ge 0$이다.

선행연구[3]에 의하여 우와 같은 평가식은 $z=x/|x|\in U_{z_0}$ 우에서 평등적으로 성립된다. 즉 상수 C는 $C=C(z_0)$이다. S^{n-1}의 콤팍트성으로부터 유한개의 점 $z_1,\ \cdots,\ z_N$들에 대하여 $C=\max\limits_{j=1,\ \cdots,\ N}C(z_j)$를 써서 $\{r\ge t\ge 1\}$우에서의 $|J_\varepsilon(t,\ x)|$의 평등평가를 얻는다.

여기서는 $e^{-\varepsilon s+its}$만을 론의한다.($e^{-\varepsilon s-its}$도 평가는 류사하다.)

선행연구[3]에 의하여 J_ε을 다음과 같이 가르자.

$$J_\varepsilon(t,\ x)=2r^{-(n-1)/2}\int_0^\infty e^{-\varepsilon s+i\phi_+(t,\ r,\ s)}s^{(n+1)/m-\alpha-1}\psi(s)\Psi_+(rs^{2/m},\ \ s^2)ds+$$
$$+2r^{-(n-1)/2}\int_0^\infty e^{-\varepsilon s+i\phi_-(t,\ r,\ s)}s^{(n+1)/m-\alpha-1}\psi(s)\Psi_-(rs^{2/m},\ \ s^2)ds+$$
$$+2\int_0^\infty e^{-\varepsilon s+its}s^{2n/m-\alpha-1}\psi(s)\Psi_0(rs^{2/m},\ s^2)ds=:R_\varepsilon^+(t,\ x)+R_\varepsilon^-(t,\ x)+R_\varepsilon^0(t,\ x)$$

여기서 $\phi_\pm$는 선행연구[3]에서 정의된 함수이다.

먼저 적분 $R_\varepsilon^0(t,\ x)$의 평가를 위하여 $\nu_0(s):=s^{2n/m-\alpha-1}\psi(s)\Psi_0(rs^{2/m},\ s^2)$이라고 하자.

이때 선행연구[3]에 의하여 $|\nu_0^{(k)}(s)|\le C(rs^{2/m})^{-l}s^{2n/m-\alpha-1-k}$, $l,\ k\in \boldsymbol{N}_0$, $r\ge 1$, $s\ge a_1$이다.

$l\ge\mu,\ k\ge\nu$가 되도록 $l,\ k$를 선택하면 부분적분에 의하여

$$|R_\varepsilon^0(t,\ x)|\le Ct^{-k}\int_{a_1}^\infty (rs^{2/m})^{-l}s^{2n/m-\alpha-1-k}ds\le Ct^{-k}r^{-l}\le Ct^{-\nu}r^{-\mu}\ .$$

다음으로 $R_\varepsilon^+(t,\ x)$를 평가하기 위하여 주어진 $r\ge 1$에 대하여 다음의 함수들을 생각하자.

$$u_+(s):=-\varepsilon s+i\phi_+(t,\ r,\ s),\ \nu_+(s):=s^{(n+1)/m-\alpha-1}\psi(s)\Psi_+(rs^{2/m},\ s^2),\ \ s\ge 0$$

$u_+'(s)\ne 0\ (s\ge a_1)$이므로 $f\in C^1(0,\ \infty)$에 대하여 $D_*f:=(gf)'\ (g:=-1/u_+')$를 정의하면

$$D_*^j\nu_+=\sum_\alpha c_\alpha g^{(\alpha_1)}\cdots g^{(\alpha_j)}\nu_+^{(\alpha_j+1)},\quad j\in\boldsymbol{N}\ . \tag{11}$$

여기서 $\alpha=(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_{j+1})\in\boldsymbol{N}_0^{j+1}$, $|\alpha|=j$, $0\le\alpha_1\le\cdots\le\alpha_j$이다.

$|g(s)|\le Cr^{-1}s^{1-2/m}$, $|u_+^{(k)}(s)|\le Crs^{2/m-k}\ (k=2,\ 3,\ \cdots)$이므로[3] k에 대한 귀납법에 의하여 $|g^{(k)}(s)|\le Cr^{-1}s^{1-2/m-k}$, $k\in\boldsymbol{N}_0$이 성립되며 이것은 I의 공간감쇠를 나타낸다.

I의 시간감쇠를 유도하기 위하여 부등식 $|g(s)|\le t^{-1}$을 리용하면 $g^{(k)}$에 대하여 부등식 $|g^{(k)}(s)|\le Ct^{-1}s^{-k}$, $k\in\boldsymbol{N}_0$을 얻는다.

우의 두 부등식들을 보간하면 임의의 $\theta\in[0,\ 1]$에 대하여 다음의 식이 성립된다.

$$|g^{(k)}(s)|\le Ct^{\theta-1}r^{-\theta}s^{\theta(1-2/m)-k},\quad k\in\boldsymbol{N}_0 \tag{12}$$

한편 라이프니츠공식과 선행연구[3]의 결과에 의하여

$$|\nu_+^{(k)}(s)|\le Cs^{(n+1)/m-\alpha-1-k},\ \ k\in\boldsymbol{N}_0\ . \tag{13}$$

식 (11)–(13)에 의하여 $D_*^0 v_+ := v_+$로 놓으면 다음의 식이 성립된다.

$$|D_*^j v_+(s)| \le Ct^{j(\theta-1)} r^{-j\theta} s^{j\theta(1-2/m)+(n+1)/m-\alpha-1-j}, \quad j \in \boldsymbol{N}_0$$

특히 $\theta = \mu/n, \ j = n$을 선택하면 $|D_*^n v_+(s)| \le Ct^{\mu-n} r^{-\mu} s^{(-mn-2n+2)/(2m)-1}$이 성립된다.

$\mu - n < -\nu$에 주목하면 부분적분에 의하여 $|R_\varepsilon^+(t, \ x)| \le Ct^{\mu-n} r^{-(n-1)/2-\mu} \le Ct^{-\nu} r^{-\mu}$.

다음으로 적분 $R_\varepsilon^-(t, \ x)$의 평가를 위하여 다음과 같은 함수들을 생각하자.

$$u_-(s) := -\varepsilon s + i\phi_-(t, \ r, \ s), \ \ v_-(s) := s^{(n+1)/m-\alpha-1} \psi(s) \Psi_-(rs^{2/m}, \ s^2)$$

선행연구[3]에서의 c_1, c_2를 써서 $s_0 := (r/t)^{m/(m-2)}$, $c_1' := (c_1/2)^{m/(m-2)}$, $c_2' := (2c_2)^{m/(m-2)}$ 이라고 하면 R_ε^-에 대하여서도 역시 평가된다.

웃수렴정리에 의하여 $J_\varepsilon(t, \ \cdot)$은 $\varepsilon \to 0$일 때 $\{x \in \boldsymbol{R}^n; |x| \ge 1\}$의 콤팍트부분모임들에서 x에 관하여 평등적으로 수렴하며 평가식들을 종합하면 $|I_1(t, \ x)| \le Ct^{-\nu} r^{-\mu}$, $|x| \ge 1$이다.

따라서 $|I_1(t, \ \ x)| \le Ct^{-n/2}(1+t^{-1}|x|)^{-\mu} \le Ct^{-1/m}(1+t^{-1}|x|)^{-\mu}$, $|x| \ge t \ge 1$ 이 성립되고 이것을 식 (8)과 결합하면 $|I(t, \ x)| \le Ct^{-1/m}(1+t^{-1}|x|)^{-\mu}$, $|x| \ge t \ge 1$이 성립된다.

마찬가지로 $t \ge 1, \ |x| \le t$인 경우와 $0 < t < 1$, $x \in \boldsymbol{R}^n$인 경우에 각각

$$|I(t, \ x)| \le Ct^{-1/m}(1+t^{-1}|x|)^{-\mu} \quad (t \ge 1, \quad |x| \le t), \tag{14}$$

$$|I(t, \ \ x)| \le Ct^{-(n-\alpha m_1)/m_1}(1+t^{-1/m_1}|x|)^{-\mu}, \ \ 0 < t \le 1, \ \ x \in \boldsymbol{R}^n \tag{15}$$

이 성립된다.(증명끝)

주의 정리의 증명을 구체적으로 보면 $I\,(t=1, \ x)$의 평가에서 조건 $\alpha \le n/m$을 리용하지 않았다. 그래서 $0 < t < 1$일 때 $I(t, \ x)$의 평가식 (15)는 제한조건 $\alpha \le n/m$이 없이 성립된다.

참 고 문 헌

[1] S. Cui; J. Fourier Anal. Appl., 12, 605, 2006.

[2] A. Arnold et al.; Monatsh. Math., 168, 253, 2012.

[3] A. Arnold et al.; J. Math. Anal. Appl., 394, 139, 2012.

[4] S. Levandosky; J. Differential Equation, 143, 360, 1998.

주체103(2014)년 12월 5일 원고접수

Point-Wise Time-Space Regular Decay Estimates for Wave-Type Equations

Ri Un Yong, Kim Jin Myong

Using harmonic analysis method, we prove point-wise time-space regular decay estimates for a class of oscillatory integrals that appear as the fundamental solutions to the Cauchy problem of wave-type equations $\partial_{tt} u + P(D_x)u = 0$.

Key word: wave-type equation