김일성종합대학학보 수 학

주체109(2020)년 제66권 제3호

대칭모임함수를 짝무방향초그라프의 절단용량으로 표현하는 한가지 방법

인 혁 철

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《첨단돌파전을 힘있게 벌려야 나라의 과학기술전반을 빨리 발전시키고 지식경제의 토대를 구축해나갈수 있습니다.》

론문에서는 주어진 무방향초그라프에 대하여 절단용량이 같으면서도 오직 짝릉만을 가진 무방향초그라프를 구성하는 공식을 제기하였다. 그리고 이 공식에 기초하여 대칭모임함수가 짝릉무방향초그라프의 절단용량으로 표현되기 위한 필요충분조건을 유도하였다.

선행연구[1]에서는 대칭모임함수가 무방향그라프의 절단용량으로 표현되기 위한 필요충분조건과 부아닌 릉무게를 가지는 무방향그라프의 절단용량으로 표현되기 위한 필요충분조건을 증명하였다. 선행연구[2]에서는 모임함수가 무방향초그라프의 절단용량으로 표현되기 위한 필요충분조건, 기껏 k개의 정점을 포함하는 릉만을 가진 무방향초그라프의 절단용량으로 표현되기 위한 필요충분조건을 증명하였으며 부아닌 릉무게를 가진 무방향초그라프의 절단용량으로 표현되기 위한 필요조건을 증명하였다.

정의 유한모임 V와 $M,\ N(\subseteq\{1,\ 2,\ \cdots,\ |V|\})$가 주어졌다고 하자. 이때 모임첨수행렬 $\mathit{\Lambda}=(\alpha_{V_1,V_2})\in\mathbf{R}_{\binom{V}{M}\times\binom{V}{N}}$에 대하여 $i<j$이면 $a_{ij}=0$인 행렬 $A=(a_{ij})_{M\times N}$이 있어서

$$\alpha_{V_1,V_2}=\begin{cases}\dfrac{a_{|V_1|,|V_2|}}{C_{|V_1|}^{|V_2|}}, & V_2\subseteq V_1\\ 0, & V_2\not\subset V_1\end{cases}$$

이 만족되면 $\mathit{\Lambda}$는 첨수축소가능하다고 말한다. 그리고 행렬 A를 모임첨수행렬 $\mathit{\Lambda}$의 첨수축소행렬이라고 부르며 $\Phi(\mathit{\Lambda})$로 표시한다. 또한 모임첨수행렬 $\mathit{\Lambda}$를 행렬 A의 첨수확대행렬이라고 부르고 $\Phi^{-1}(A)$로 표시한다.

정리 1 ① $\mathit{\Lambda}+\Pi=\Gamma\Leftrightarrow\Phi(\mathit{\Lambda})+\Phi(\Pi)=\Phi(\Gamma)$

② $\mathit{\Lambda}\times\Pi=\Gamma\Leftrightarrow\Phi(\mathit{\Lambda})\times\Phi(\Pi)=\Phi(\Gamma)$

③ $\Phi(I)=\mathrm{I},\ \Phi(\mathit{\Lambda}^{-1})=(\Phi(\mathit{\Lambda}))^{-1}$ ($I,\ \mathrm{I}$는 각각 해당한 공간에서의 단위행렬)

보조정리 1[2] $H^*=(V,\ 2^V)$을 완전초그라프라고 하자. 이때 $N=(H^*,\ c)$의 절단용량이 령함수이기 위해서는 그것의 릉무게함수 $c:2^V\to\mathbf{R}$가 다음과 같은 모임함수들의 1차결합으로 표시될것이 필요하고 충분하다.

① $c_0^*(A)=\begin{cases}1, & A=\varnothing\\ 0, & \varnothing\neq A\subseteq V\end{cases}$

② $c_U^*(A)=\begin{cases}\gamma_{k,|A|}, & A\subseteq U,\ k+1\leq|A|\leq 2k+1\\ 0, & \text{기타}\end{cases}$

여기서 U 는 V 의 부분모임으로서 $2k+1\,(k=0,\ 2,\ \cdots,\ \lfloor |V|/2 \rfloor)$ 개의 정점을 포함하며 $\gamma_{k,i}$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$\gamma_{k,i} := (-1)^{i-1}\frac{k!(i-1)!}{(2k)!(i-k-1)!}$$

보조정리 1과 정리 1을 리용하여 다음의 보조정리를 증명하자.

보조정리 2 $N=(H^*,\ c)$ 의 절단용량이 령함수이기 위해서는 그것의 릉무게함수 $c:2^V \to \mathbf{R}$ 가 다음과 같은 모임함수들의 1차결합으로 표시될것이 필요하고 충분하다.

① $c_0^*(A)=\begin{cases}1, & A=\varnothing\\ 0, & \varnothing\neq A\subseteq V\end{cases}$

② $c_v^*(A)=\begin{cases}1, & A=\{v\}\\ 0, & A\neq\{v\}\end{cases}\ (v\in V)$

③ $d_U^*(A)=\begin{cases}g(|U\setminus A|), & A\subseteq U,\ |A|:\text{짝수}\\ 1, & A=U\\ 0, & \text{기타}\end{cases}$

여기서 $U\subseteq V$ 이고 $|U|=2k+1\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ \lceil |V|/2\rceil-1)$ 이며 $g(\cdot)$ 은 정의 홀수모임우에서 다음과 같이 정의된 함수이다.

$$g(2n-1):=-\frac{z(n)}{2n},\ \begin{cases}z(i):=-\displaystyle\sum_{j=[i/2]}^{i-1}\binom{i}{2j-i}z(j)\\ z(1):=1\end{cases}$$

증명 $c_0^*(A)$ 와 $c_1^*(A)$ 는 보조정리 1의 함수모임에도 포함되므로 Λ 와 Π 를 다음과 같은 모임결수행렬이라고 하자.

$$\Lambda=(\alpha_{U,E})=c_U^*(E)$$

$$\Pi=(\beta_{U,E})=d_U^*(E)$$

이때 Λ 와 Π 의 행벡토르단들이 동등하다는것을 증명하면 보조정리가 증명된다.

Λ 와 Π 의 렬벡토르들가운데서 첨수농도가 1이 아닌 홀수인것만을 선택한것을 각각 Λ_{odd},Π_{odd} 라고 하면 Λ_{odd} 는 주대각선우에 1만이 놓이는 아래3각형행렬이고 Π_{odd} 는 단위행렬이므로 둘 다 행렬식값이 1로서 가역행렬이다. 결국 다음의 사실을 증명하면 된다.

$$\Lambda_{odd}^{-1}\times\Lambda_{even}=\Pi_{even}$$

그런데 보조정리 2를 리용하면

$$\Lambda_{odd}^{-1}\times\Lambda_{even}=\Pi_{even}\Leftrightarrow(\Phi(\Lambda_{odd}))^{-1}\times\Phi(\Lambda_{even})=\Phi(\Pi_{even})$$

가 성립하며 결국

$$(\Phi(\Lambda_{odd}))\times\Phi(\Pi_{even})=\Phi(\Lambda_{even})$$

을 증명하면 된다. 또한 $\Phi(\Lambda_{odd})=(a_{ij}),\ \Phi(\Lambda_{even})=(b_{ij}),\ \Phi(\Pi_{even})=(x_{ij})$ 라고 하면

$$a_{ij}=(-1)^{2j+1-1}\frac{i!(2j+1-1)!}{(2i)!(2j+1-i-1)}\cdot\frac{(2i+1)!}{(2j+1)!(2i-2j)!}=\frac{2i+1}{2j+1}C_i^{2j-i}$$

$$b_{ij}=(-1)^{2j-1}\frac{i!(2j-1)!}{(2i)!(2j-i-1)!}\cdot\frac{(2i+1)!}{(2j)!(2i-2j+1)!}=-\frac{2i+1}{2j}C_i^{2j-i-1}$$

$$x_{ij}=\binom{2i+1}{2j}\cdot g(2i+1-2j)$$

이므로 결국

$$x_{ij}=\binom{2i+1}{2j}\cdot g(2i+1-2j)$$

가 우의 방정식의 풀이로 된다는것을 증명하면 된다.

우선 $x_{i,1}$ 을 계산하자. $x_{1,1}=b_{1,1}/a_{1,1}=-3/2$ 이고 $i>1$ 이면

$$x_{i,1}=-\sum_{k=1}^{i-1}\left(\frac{a_{ik}}{a_{ii}}x_{k,1}\right)=-\sum_{k=\lceil i/2\rceil}^{i-1}\left(\frac{2i+1}{2k+1}\frac{i!}{(2k-i)!(2i-2k)!}x_{k,1}\right)$$

이 성립한다. $z_i:=-2i\cdot x_{i,1}/C_{2i+1}^2$ 로 놓으면 $z_1=1$ 이고 $x_{i,1}/C_{2i+1}^2=-z(i)/(2i)$ 가 성립한다. 즉 $j=2$ 인 경우에 보조정리의 결과가 성립한다는것이 증명되였다.

다음으로 $g_{ij}:=x_{ij}/C_{2i+1}^{2j}$ 로 놓으면 $g_{i+1,j+1}=g_{ij}$ 가 성립하므로

$$g_{ij}=-\frac{z(i-j+1)}{2(i-j+1)}$$

이 성립한다. 결국

$$\beta_{U,E}=g_{(|U|-1)/2,|E|/2}=-\frac{z((|U|-1)/2-|E|/2+1)}{2((|U|-1)/2-|E|/2+1)}=-\frac{z((|U\setminus E|+1)/2)}{(|U\setminus E|+1)}=g(|U\setminus E|)$$

가 성립한다. 따라서 보조정리가 증명된다.(증명끝)

보조정리 3 표준대칭모임함수 f 에 대하여 m_f 를 f 의 뫼비우스반전이라고 하면 $N'=(H^*,\ -0.5m_f)$ 의 절단용량함수는 f 로 된다.

증명 $A\subseteq V$ 에 대하여 $w_A:2^V\to\mathbf{R}$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$w_A(X):=\begin{cases}1, & A\cap X\neq\varnothing,\ A\setminus X\neq\varnothing\\ 0, & \text{기타}\end{cases}$$

그리고 w_A 의 뫼비우스반전을 m_A 라고 하자. 그러면

$$\sum_{\substack{B\cap X\neq\varnothing\\ B\setminus X\neq\varnothing}}m_A(B)=\sum_{B\subseteq V}m_A(B)-\sum_{B\cap X=\varnothing}m_A(B)-\sum_{B\setminus X=\varnothing}m_A(B)=$$

$$=w_A(V)-w_A(\overline{X})-w_A(X)=-2w_A(X)$$

가 성립하며 $(H^*,\ -0.5m_A)$ 의 절단용량함수는 w_A 로 된다.(증명끝)

정리 2 표준대칭모임함수 $f:2^V\to\mathbf{R}$ 가 부아닌 무게를 가지는 짝릉무방향초그라프의 절단용량으로 표현되기 위해서는

$$\forall A_0\in 2^V\ (|A_0|=2j),\ \sum_{i\geq j}\ \sum_{A_0\subset A\in\binom{V}{2i+1}}g(2i-2j+1)f^{(2i+1)}(A)\geq f^{(2j)}(A_0)$$

이 성립할것이 필요하고 충분하다.

증명 보조정리 3에 의하여 f 의 뫼비우스반전에 -0.5 를 곱하면 f 를 절단용량으로 가지는 망 N_f 가 얻어진다. 그러므로 보조정리 2의 공식을 리용하면 N_f 와 같은 절단용량을 가지면서 짝릉만을 포함하는 망 N_f^0 이 얻어진다. 따라서 N_f^0 에서 농도가 $2j$ 인 짝릉 A_0 의 무게는 보조정리 2에 의하여

$$c(A_0) = -0.5 \cdot f^{(2j)}(A_0) + 0.5 \cdot \sum_{i \geq j} \sum_{A_0 \subset A \in \binom{V}{2i+1}} (g(2i-2j+1) f^{(2i+1)}(A))$$

로 되며 이 값이 부아닌 값을 가지기 위해서는 N_f^0 의 유일존재성에 의하여 f 가 부아닌 무게를 가지는 짝릉무방향초그라프의 절단용량으로 표현될것이 필요하고 충분하다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] S. Fujishige et al.; Discrete Math., 226, 199, 2001.

[2] Y. Yamaguchi; Discrete Math., 339, 2007, 2016.

주체109(2020)년 3월 15일 원고접수

A Method for Representing Symmetric Set Functions as Cut Capacities of Even Undirected Hypergraphs

In Hyok Chol

We construct an even undirected hypergraph whose cut function is equal to the cut capacity of an given undirected hypergraph. Also, we derived a necessary and sufficient condition that symmetric set functions can be represented as cut capacities of even undirected hypergraphs.

Keywords: symmetric set function, cut capacity