김일성종합대학학보　　　　　　　　　　　　　　　　　　주체108(2019)년
수 학　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　제65권　제1호

완비거리공간에서 일반화된 약축소넘기기에 대한 부동점정리

김 명 훈

최근 바나흐의 부동점정리를 일반화하기 위한 연구사업에서 거리변경함수를 리용한 약축소넘기기, 일반화된 약축소넘기기들에 대한 부동점정리들이 많이 고찰되였다.[1－3]

선행연구[3]에서는 완비거리공간에서 한가지 Mg형일반화된 약축소넘기기에 대한 부동점정리를 고찰하였다.

우리는 완비거리공간에서 선행연구[3]에서보다 더 약한 약축소조건을 만족시키는 경우의 부동점정리를 연구하였다.

정의 다음조건을 만족시키는 함수 $\psi:[0,\ \infty)\to[0,\ \infty)$ 를 거리변경함수[1]라고 부른다.

① ψ 는 련속, 비감소함수이다.

② $\psi(t)=0 \Leftrightarrow t=0$

보조정리 1[1] $(X,\ d)$ 는 완비거리공간이고 $\psi,\ \Phi$ 는 거리변경함수라고 하자.

$T: X\to X$ 인 함수로서 다음의 조건을 만족시킨다고 하자.

$$\psi(d(Tx,\ Ty))\le\psi(M_g(Tx,\ Ty))-\Phi(\max\{d(x,\ y),\ d(y,\ Ty)\})\quad(x,\ y\in X)\qquad(1)$$

여기서

$$M_g(Tx,\ Ty)=\max\{d(x,\ y),\ d(x,\ Tx),\ d(y,\ Ty),\ \frac{1}{2}[d(x,\ Ty)+d(y,\ Tx)]\}$$

이다. 이때 T 는 유일한 부동점을 가진다.

보조정리 2[2] $(X,\ d)$ 는 완비거리공간이고 $T: X\to X$ 인 함수로서 다음의 조건을 만족시킨다고 하자.

$$\psi(d(Tx,\ Ty))\le\psi(M_g(Tx,\ Ty))-\Phi(M_g(Tx,\ Ty))\quad(x,\ y\in X)\qquad(2)$$

여기서 ψ 는 거리변경함수이고 $\Phi:[0,\ \infty)\to[0,\ \infty)$ 인 하반련속함수이며 $\Phi(t)=0\Leftrightarrow t=0$ 이다. 이때 T 는 유일한 부동점을 가진다.

보조정리 3[3] $(X,\ d)$ 는 완비거리공간이고 $T: X\to X$ 인 함수로서

$$\frac{1}{2}d(x,\ Tx)\le d(x,\ y)$$

이면 식 (2)를 만족시킨다고 하자. 여기서 $\psi,\ \Phi$ 는 보조정리 2에서와 같다. 이때 T 는 유일한 부동점을 가진다.

론문에서는 보조정리 3의 결과를 일반화하였다.

정리 1 $(X,\ d)$ 는 완비거리공간, $T: X\to X$ 인 함수로서

$$\frac{1}{\sqrt{2}}d(x,\ Tx)\le d(x,\ y)$$

이면 식 (2)를 만족시킨다고 하자. 이때 T는 유일한 부동점을 가진다. 여기서 ψ, Φ는 보조정리 2에서와 같다.

증명 $x_0 \in X$를 취한다.

점렬 $(x_n): x_{n+1} = Tx_n$, $n = 0, 1, 2, \cdots$을 고찰하자.

모든 $n = 0, 1, 2, \cdots$에 대하여

$$\frac{1}{\sqrt{2}} d(x_{n-1}, x_n) \le d(x_{n-1}, x_n)$$

이므로 식 (2)에 의하여

$$\begin{aligned}
&\Psi(d(x_{n+1}, x_n)) = \Psi(d\{Tx_n, Tx_{n-1}\}) \le \\
&\le \Psi(M_g(Tx_n, Tx_{n-1})) - \Phi(M_g(Tx_n, Tx_{n-1})) = \\
&= \Psi(\max\{d(x_n, x_{n-1}), d(x_n, Tx_n), d(x_{n\text{-}1}, Tx_{n-1}), \frac{1}{2}[d(x_n, Tx_{n-1}) + d(x_{n-1}, Tx_n)]\}) - \\
&- \Phi(\max\{d(x_n, x_{n-1}), d(x_n, Tx_n), d(x_{n\text{-}1}, Tx_{n-1}), \frac{1}{2}[d(x_n, Tx_{n-1}) + d(x_{n-1}, Tx_n)]\})
\end{aligned}$$

이 성립하며 웃식은

$$\Psi(\max\{d(x_n, x_{n-1}), d(x_n, x_{n+1})\}) - \Phi(\max\{d(x_n, x_{n-1}), d(x_n, x_{n+1})\}) \tag{3}$$

로 된다.

만일 $\exists n \in \mathbf{N}$, $d(x_n, x_{n-1}) < d(x_n, x_{n+1})$이면 식 (3)에 의하여

$$\Psi(d(x_{n+1}, x_n)) \le \Psi(d(x_n, x_{n+1})) - \Phi(d(x_n, x_{n+1}))$$

이고 $\Phi(d(x_n, x_{n+1})) = 0$이며 $x_n = x_{n+1} = Tx_n$이다.

따라서 x_n은 T의 부동점이다.

만일 $\forall n \in \mathbf{N}$, $d(x_n, x_{n-1}) \ge d(x_n, x_{n+1})$이면 수렬 $(d(x_n, x_{n+1}))$은 부아닌 단조감소수렬이고 $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = \gamma \ge 0$이다.

Φ의 하반련속성에 의하여 $\Phi(\gamma) \le \liminf\limits_{n\to\infty} \Phi(d(x_n, x_{n+1}))$이다.

그리고 식 (3)에 의하여

$$\Psi(d(x_{n+1}, x_n)) \le \Psi(d(x_n, x_{n-1})) - \Phi(d(x_n, x_{n-1}))$$

이다.

$n \to \infty$일 때 $\Psi(\gamma) \le \Psi(\gamma) - \Phi(\gamma)$이고 따라서 $\Phi(\gamma) = 0$, $\gamma = 0$이다.

따라서

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = \gamma = 0 \tag{4}$$

이다. 다음으로 (x_n)이 꼬쉬렬임을 보자.

만일 (x_n)이 꼬쉬렬이 아니라면

$$\exists \varepsilon > 0, \exists m_k, n_k \ (m_k > n_k > k), \ d(x_{m_k}, x_{n_k}) \ge \varepsilon \tag{5}$$

$$d(x_{m_k - 1}, x_{n_k}) < \varepsilon \tag{6}$$

이 성립한다. 여기서 m_k는 식 (5)가 성립하는 최소의 정의옹근수이다.

식 (5), (6)에 의하여

$$\varepsilon \le d(x_{m_k},\ x_{n_k}) \le d(x_{m_k},\ x_{m_k-1}) + d(x_{m_k-1},\ x_{n_k}) < d(x_{m_k},\ x_{m_k-1}) + \varepsilon \tag{7}$$

이고 삼각부등식을 쓰면

$$d(x_{m_k},\ x_{n_k}) \le d(x_{m_k},\ x_{m_k-1}) + d(x_{m_k-1},\ x_{n_k-1}) + d(x_{n_k-1},\ x_{n_k})$$

$$d(x_{m_k-1},\ x_{n_k-1}) \le d(x_{m_k-1},\ x_{m_k}) + d(x_{m_k},\ x_{n_k}) + d(x_{n_k},\ x_{n_k-1})$$

이 성립하며 $k \to \infty$이면 우의 부등식과 식 (5), (7)에 의하여 $\lim_{k\to\infty} d(x_{m_k-1},\ x_{n_k-1}) = \varepsilon$이 성립한다. 이제 $x = x_{m_k-1},\ y = x_{n_k-1}$로 놓으면 식 (3)에 의하여

$$\Psi(d(x_{m_k},\ x_{n_k})) \le \Psi(M_g(Tx_{m_k-1},\ Tx_{n_k-1})) - \Phi(M_g(Tx_{m_k-1},\ Tx_{n_k-1})) =$$

$$= \Psi(\max\{d(x_{m_k-1},\ x_{n_k-1}),\ d(x_{m_k-1},\ x_{m_k}),\ d(x_{n_k-1},\ x_{n_k}),\ \frac{1}{2}[d(x_{m_k-1},\ x_{n_k}) + d(x_{n_k-1},\ x_{m_k})]\}) -$$

$$- \Phi(\max\{d(x_{m_k-1},\ x_{n_k-1}),\ d(x_{m_k-1},\ x_{m_k}), d(x_{n_k-1},\ x_{n_k}),\ \frac{1}{2}[d(x_{m_k-1},\ x_{n_k}) + d(x_{n_k-1},\ x_{m_k})]\})$$

이 나오며 $k \to \infty$ 이면 $\Psi(\varepsilon) \le \Psi(\varepsilon) - \Phi(\varepsilon)$, $\Phi(\varepsilon) = 0,\ \varepsilon = 0$ 이 성립한다. 이것은 모순이다.$(\varepsilon > 0)$ 따라서 (x_n)은 꼬쉬렬이다. X는 완비이므로 $x_n \to z \in X,\ n \to \infty$이다.

이제 (x_n)의 극한 z가 T의 부동점이라는것을 보자.

식 (4)에 의하여 $\lim_{n\to\infty} d(x_n,\ x_{n+1}) = 0$이므로

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \exists n_k,\ d(x_n,\ z) \ge d(x_{n_k},\ x_{n_k+1}) > \frac{1}{\sqrt{2}} d(x_{n_k},\ x_{n_k+1})$$

이 성립한다. 다시 부분렬을 취하면(기호는 그대로 리용한다.)

$$\frac{1}{\sqrt{2}} d(x_{n_k},\ x_{n_k+1}) \le d(x_{n_k},\ z)$$

가 성립하며 따라서 식 (2)가 성립한다. 즉

$$\Psi(d(Tx_{n_k},\ Tz)) \le \Psi(M_g(Tx_{n_k},\ Tz)) - \Phi(M_g(Tx_{n_k},\ Tz)) =$$

$$= \Psi(\max\{d(x_{n_k},\ z),\ d(x_{n_k},\ x_{n_k+1}),\ d(z,\ Tz),\ \frac{1}{2}[d(x_{n_k},\ Tz) + d(z,\ x_{n_k+1})]\}) -$$

$$- \Phi(\max\{d(x_{n_k},\ z), d(x_{n_k},\ x_{n_k+1}),\ d(z,\ Tz),\ \frac{1}{2}[d(x_{n_k},\ Tz) + d(z,\ x_{n_k+1})]\})$$

이 성립한다. $k \to \infty$이면

$$\Psi(d(z,\ Tz)) \le \Psi(d(z,\ Tz)) - \Phi(d(z,\ Tz))$$

이고

$$\Phi(d(z,\ Tz)) = 0,\ d(z,\ Tz) = 0,\ \ z = Tz$$

즉 z는 T의 부동점이다.

다음으로 부동점의 유일성을 말하자.

만일 z와 다른 T의 부동점 y가 있다고 하자.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} d(z,\ Tz) = 0 \le d(z,\ y)$$

이므로 식 (2)에 의하여

$$
\begin{aligned}
\Psi(d(Ty,\ Tz)) &\le \Psi(M_g(Ty,\ Tz)) - \Phi(M_g(Ty,\ Tz)) = \\
&= \Psi(\max\{d(y,\ z),\ d(y,\ Ty),\ d(z,\ Tz),\ [d(y,\ Tz)+d(z,\ Ty)]/2\}) - \\
&- \Phi(\max\{d(y,\ z),\ d(y,\ Ty),\ d(z,\ Tz),\ [d(y,\ Tz)+d(z,\ Ty)]/2\}) = \\
&= \Psi(d(y,\ z)) - \Phi(d(y,\ z))
\end{aligned}
$$

이고

$$\Psi(d(Ty,\ Tz)) \le \Psi(d(Ty,\ Tz)) - \Phi(d(y,\ z))$$

가 성립하며 $\Phi(d(y,\ z))=0$ 이다. 즉 $y=z$ 이다. 이것은 모순이다.$(y \ne z)$ (증명끝)

주의 1 정리 1은 보조정리 3의 일반화이다. 사실 보조정리 3의 가정으로부터 정리 1의 가정이 나오지만 거꾸로는 성립하지 않는다.

정리 2 $(X,\ d)$: 완비거리공간, $T: X \to X$ 인 함수로서

$$\frac{d(x,\ Tx)}{k} \le d(x,\ y)$$

이면 식 (2)를 만족시킨다고 하자.

이때 T 는 유일한 부동점을 가진다. 여기서 $1<k\le 2$ 이고 ψ 와 Φ 는 보조정리 2에서와 같다.

증명 정리 1의 증명과 류사하므로 생략한다.(증명끝)

주의 2 정리 2는 정리 1의 일반화이다. 사실 정리 2에서 $k=\sqrt{2}$ 로 놓으면 정리 1이 나온다.

참 고 문 헌

[1] B. S. Choudhury et al.; Nonlinear Anal, 74, 2116, 2011.

[2] D. Doric; Appl. Math. Letters, 22, 1896, 2009.

[3] S. L. Singgh et al.; Filomat, 29, 7, 1481, 2015.

주체107(2018)년 9월 8일 원고접수

Fixed Point Theorems for Generalized Weakly Contractive Mappings in Complete Metric Spaces

Kim Myong Hun

In this paper, we obtain fixed point theorems for generalized weakly contractive mappings in complete metric spaces. Our results are generalizations of main results in [3].

Key words: generalized weakly contractive mapping, fixed point