

SN근사에 의한 중성자수송방정식의 한가지 풀이방법

윤철수, 최명신

물질속으로 수송되는 중성자의 공간분포와 에너지스펙트르를 정확하게 결정하는것은 중성자차폐설계에서 선차적으로 풀어야 할 문제이다. 중성자의 공간분포와 에너지스펙트르는 볼츠만중성자수송방정식의 풀이로부터 얻어진다.

한편 중성자수송방정식은 6차원위상공간의 미적분방정식이므로 해석적인 방법으로 풀기가 힘들기때문에 MC방법, PN근사, SN근사와 같은 근사풀이방법을 적용한다.[1]

본문에서는 SN근사방법의 정확성과 믿음성을 높이기 위한 수값풀이방법에 대하여 고찰하였다.

1. 중성자수송방정식의 SN근사

물질속에서 수송되는 중성자의 운동은 볼츠만수송방정식에 의하여 표현할수 있다.[1]

$$\begin{aligned} \frac{1}{v^g} \frac{\partial F^G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t)}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \nabla F^g(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t) + \Sigma_t^g(\mathbf{r}) F^g(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t) = \\ = \frac{1}{4\pi} \left[\int_{g'=1}^G \Sigma_s^{g' \rightarrow g}(\mathbf{r}) \int_{\boldsymbol{\Omega}'} F^{g'}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}', t) d\boldsymbol{\Omega}' + x^g \int_{g'=1}^G \nu \Sigma_f^{g'}(\bar{\mathbf{r}}) \int_{\boldsymbol{\Omega}'} F^{g'}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}', t) d\boldsymbol{\Omega}' \right] + q^g(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 $g=1, 2, \dots, G$ 이며 F^g 는 점 \mathbf{r} 에서 $\boldsymbol{\Omega}$ 방향의 단위면적을 지나 단위시간에 단위립체각으로 지나가는 g 군중성자수, q^g 는 점 \mathbf{r} 에서 중성자원천으로부터 단위시간동안 단위체적에서 $\boldsymbol{\Omega}$ 방향의 단위립체각으로 방출되는 g 군중성자수, $\Sigma_t^g, \Sigma_f^g, \Sigma_s^{g' \rightarrow g}$ 는 각각 점 \mathbf{r} 에서 g 군중성자의 거시전자름면, 거시분렬자름면, g' 군에서 산란에 의하여 g 군으로 들어오는 거시산란자름면, ν, x^g, ν^g 는 핵분열때에 생기는 즉발중성자수와 그중에서 g 군에 해당하는 중성자비율, g 군중성자의 평균속도, G 는 에너지기군수이다.

1차원의 정상상태에서 매질이 비증식매질이요 원천이 매질속에 있을 때 수송방정식은 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial}{\partial x} \varphi^g(x, \mu) + \Sigma_t^g(x) \varphi^g(x, \mu) = \frac{1}{2} \int_{g'=1}^G \Sigma_t^{g' \rightarrow g}(x) \int_{-1}^1 \varphi^{g'}(x, \mu') d\mu' \\ g=1, 2, \dots, G \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 $\mu = \cos \theta$ 이다.

매질이 두께가 h 인 직 6면체이고 한쪽 면으로 세기가 $Q(\mu, E)$ 인 중성자가 입사한다면 방정식 (2)의 경계조건은

$$\begin{aligned}\varphi^g(0, \mu) &= Q^g(\mu) & (\mu > 0) \\ \varphi^g(h, \mu) &= 0 & (\mu < 0)\end{aligned}\quad (3)$$

과 같다. 여기서 중성자세기는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$Q^g(\mu) = \int_{E_g}^{E_{g-1}} Q(\mu, E) dE$$

수송방정식 (2)의 SN변환은 다음과 같이 할 수 있다. 먼저 μ 의 변화구역 $[-1, 1]$ 을 길이가 $2/n$ 와 같은 n (짝수) 개 구간으로 분할한다.

매 구간 (μ_j, μ_{j-1}) 에서 미분중성자묶음 $\varphi^g(x, \mu)$ 는 선형함수라고 하자. 따라서 SN 변환식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\varphi^g(x, \mu) = \frac{n}{2} [(\mu - \mu_{j-1})\varphi^g(x, \mu_j) + (\mu_j - \mu)\varphi^g(x, \mu_{j-1})] \quad (4)$$

여기서 $j=1, 2, \dots, n$, $\mu_{j-1} \leq \mu \leq \mu_j$, $\mu_0 = -1$, $\mu_j = -1 + \frac{2j}{n}$ 이다.

식 (4)를 식 (2)에 대입하고 μ_{j-1} 로부터 μ_j 까지 μ 에 대하여 적분하면 SN계차방정식은

$$\left[a_j \frac{d}{dx} + \Sigma_t^g(x) \right] \varphi^g(x, \mu_j) + \left[\bar{a}_j \frac{d}{dx} + \Sigma_t^g(x) \right] \varphi^g(x, \mu_{j-1}) = 2S^g(x) \quad (5)$$

와 같다. 식 (5)에서 $a_j = (2\mu_j + \mu_{j-1})/3$, $\bar{a}_j = (\mu_j + 2\mu_{j-1})/3$ 이다. 이때 중성자들과 중성자 흐름은 다음의 식으로 표시할 수 있다.

$$N^g(x) = \sum_{j=0}^n \delta_j \varphi^g(x, \mu_j)$$

$$j^g(x) = \sum_{j=0}^n C_j \varphi^g(x, \mu_j)$$

여기서

$$\delta_0 = \delta_n = \frac{1}{2n},$$

$$\delta_j = \frac{1}{n} \quad (j=1, 2, \dots, n-1),$$

$$C_0 = C_n = \frac{a_n}{2n},$$

$$C_j = (\bar{a}_{j+1} + a_j)/2n \quad (j=1, 2, \dots, n-1)$$

이다.

함수 $\varphi^g(x, \mu_j)$ 는 $(n+1)$ 개이므로 n 개의 식 (5)와 함께 1개 방정식이 더 있어야 한다.

이제 식 (2)에서 $\mu = -1$ 일 때 $\varphi(x, \mu = 0)$ 에 대한 방정식이라고 하면 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$\left[-\frac{d}{dx} + \Sigma_i^g(x) \right] \varphi^g(x, 0) = S^g(x) \quad (6)$$

다음 방정식 (5)와 (6)을 x 에 관한 계차방정식으로 변환하자.

수송매질의 두께 x 의 변화구역 $[0, b]$ 를 I 개의 구간으로 나눈다. 이때 다른 매질로 된 구역의 경계점이 분할점 x_i 에 반드시 포함되도록 하며 그 나머지구역은 임의로 분할할 수 있다.

매 분할구간에서 자름면, 중성자묶음, 중성자원천이 일정한 함수형식을 가진다고 하면 다음의 중심계차식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \int d\varphi^g(x, \mu_j) &= \varphi_{i,j}^g - \varphi_{i-1,j}^g \\ \int \varphi^g(x, \mu_j) dx &= (\varphi_{i,j}^g - \varphi_{i-1,j}^g) \Delta_i \\ \Delta_i &= \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1}) \\ \varphi_{i,j}^g &= \varphi^g(x_i, \mu_i) \end{aligned}$$

중심계차식을 리용하여 계차방정식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$(a_j + h_i^g) \varphi_{i,j}^g + (-a_j + h_i^g) \varphi_{i-1,j}^g + (\bar{a}_j + h_i^g) \varphi_{i,j}^g + (-\bar{a}_j + h_i^g) \varphi_{i-1,j-1}^g = 4\Delta_i S_i^g \quad (7)$$

$$i=1, 2, \dots, I, \quad j=1, 2, \dots, n$$

같은 방법으로 $\mu=0$ 에 대한 SN계차방정식을 유도하면 다음과 같다.

$$(-1 + h_i^g) \varphi_{i,0}^g + (1 + h_i^g) \varphi_{i-1,0}^g = 2\Delta_i S_i^g \quad (8)$$

식 (7)과 (8)로부터 종합적인 SN계차방정식은

$$(a_j + h_i^g) \varphi_{i,j}^g + (-a_j + h_i^g) \varphi_{i-1,j}^g + (\bar{a}_j + h_i^g) \varphi_{i,j-1}^g + (-\bar{a}_j + h_i^g) \varphi_{i-1,j-1}^g = 2y_j \Delta_i S_i^g \quad (9)$$

로 쓸 수 있다.

따라서 계차방정식의 풀이는 다음과 같다.

$$\varphi_{i-1,j}^g = \frac{2y_i \Delta_i S_i^g - (a_j + h_i^g) \varphi_{i,j}^g - (\bar{a}_j + h_i^g) \varphi_{i,j-1}^g - (-\bar{a}_j + h_i^g) \varphi_{i-1,j-1}^g}{-a_j + h_i^g} \quad (10)$$

$$\varphi_{i,j}^g = \frac{2y_i \Delta_i S_i^g - (-a_j + h_i^g) \varphi_{i-1,j}^g - (-\bar{a}_j + h_i^g) \varphi_{i,j-1}^g - (-\bar{a}_j + h_i^g) \varphi_{i-1,j-1}^g}{a_j + h_i^g} \quad (11)$$

$$i=1, 2, \dots, I, \quad j=\frac{n}{2}+1, \dots, n$$

2. SN근사풀이방법의 정확도평가

볼츠만수송방정식의 SN근사계산정확도를 높이려면 공간 및 각의 분할수를 늘이고 계산오차의 허용값을 작게 하여야 한다.

한편 정확도를 너무 높이면 계산시간이 길어지는 결함이 있다. 그러므로 계산정확도와 공간 및 각분할수, 허용오차한계를 밝혀 합리적인 계산조건을 선정하여야 한다.

이로부터 논문에서는 두께가 20cm인 철매질에서 에너기가 14MeV인 단색중성자의

중성자수송특성을 고찰하였다. 이때 입사중성자묶음은 다음과 같이 쓸수 있다.

$$Q(\mu, E) = \delta(E - E_0)\delta(\mu - 1)$$

그림 1에 공간 및 각분할수에 따르는 에너지스펙트르변화를 보여주었다.

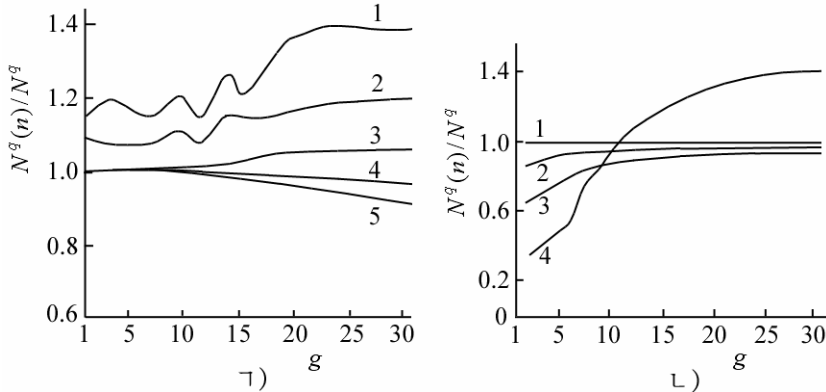


그림 1. 공간(가) 및 각분할수(나)에 따르는 에너지스펙트르변화
가)에서 1-5는 공간분할수가 30, 50, 100, 150, 200일 때, 나)에서 1-4는 각분할수가 10, 8, 4, 2일 때

ε 값이 10^{-2} , 10^{-3} 일 때 에너지스펙트르의 상대변화를 L 값이 50, 100인 경우에 대하여 계산하였다.(그림 2)

그림 2에서 보는바와 같이 중성자에너지스펙트르는 에너지가 작을수록 상대변화가 크고 $L=100$ 이상일 때 상대변화가 작다는것을 알수 있다. 또한 각분할수가 작아지는데 따라 에너지가 클 때 상대변화가 심하며 $n=8$ 에서 상대변화가 작다는것을 알수 있다.

또한 ε 을 크게 하면 에너지가 작은 중성자묶음의 계산오차가 커진다는것을 알수 있다. 이것은 에너지군수를 많이 할수록 오차가 더 커지기때문이다.

공간 및 각분할수에 따르는 계산시간의 변화를 그림 3에 보여주었다.

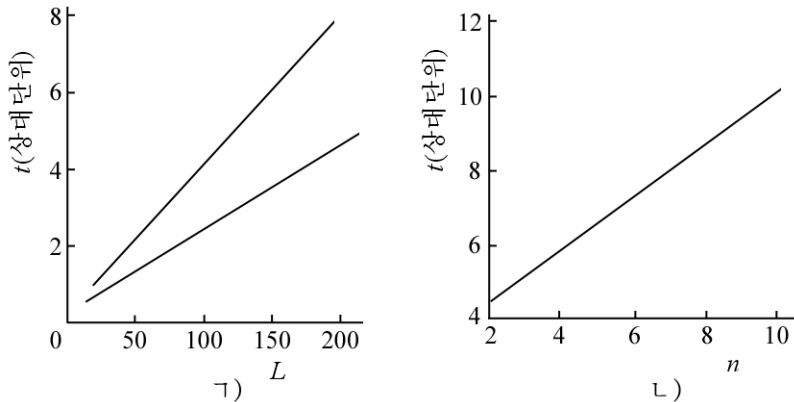


그림 3. 공간(가) 및 각분할수(나)에 따르는 계산시간의 변화

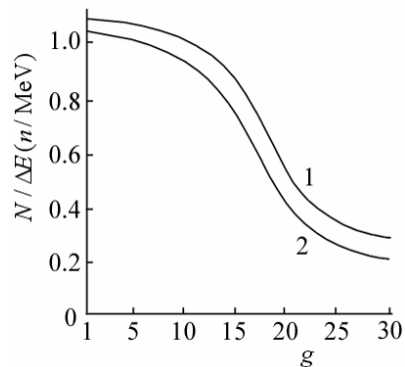


그림 2. ε 값이 10^{-2} , 10^{-3} 일 때 중성자스펙트르변화

1, 2는 L 값이 50, 100인 경우

매질: 철, 두께: 20cm, $n: 8$

이로부터 $n \geq 8$, $L \geq 100$ 으로 하면 중성자뭉침분포를 비교적 정확히 계산할수 있다.

맺 는 말

중성자수송방정식과 SN근사풀이방법에서 공간 및 각분할수, 수렴허용오차가 계산정확성과 계산시간에 주는 영향을 밝히고 각분할수는 8이상, 공간분할수는 100이상일 때 중성자뭉침분포의 계산정확도를 높일수 있다는것을 밝혔다.

참 고 문 헌

[1] R. W. Hockney; New York: John Wiley, 9, 170, 2013.

주체106(2017)년 9월 5일 원고접수

A Solution Method of Neutron Transport Equation by SN Approximation

Yun Chol Su, Choe Myong Sin

In this paper we considered about a method of SN approximation for improving the solution correctness and reliability of neutron transport equation in the medium, indicated that we could improve the solution correctness of neutron beam distribution when angle partitions were more than 8, space partitions were more than 100.

Key words: SN approximation, neutron transport