김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제3호

역방향확률미분방정식에서 우연립쉬츠결수인 경우와 우연끝시각인 경우의 한가지 호상관계

김문철, 오 훈

우연립쉬츠결수를 가지는 역방향확률미분방정식과 우연끝시각을 가지는 역방향확률미분방정식은 호상 련관이 없이 독립적으로 연구되여왔다.[2]

론문에서는 우연립쉬츠결수를 가지는 역방향확률미분방정식에 대한 론의는 우연끝시각을 가지는 역방향확률미분방정식의 론의에 포함된다는것을 증명한다.

$(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ 를 보통조건을 만족시키는 σ −모임벌증가족 $F:=\{\mathcal{F}_t\},\ t\geq 0$ 이 정의된 완비확률공간이라고 하고 $\mathcal{F}_\infty=\mathcal{F}$ 라고 하자. $\mathcal{B}(0,\ \infty)$ 는 $(0,\ \infty)$ 우의 보렐 σ −모임벌, $L^2(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ 는 두제곱적분가능한 우연량들의 공간, $\mathcal{L}$, $\mathcal{H}^2$, $\mathcal{H}^2_{\mathrm{loc}}$ 은 각각 국부마르팅게일, 두제곱적분가능한 마르팅게일, 국부두제곱적분가능한 마르팅게일들의 공간들을 의미한다.

$L^2(M):=\left\{Z \mid E\left[\int_0^\infty \| Z_t\|^2 d\langle M\rangle_t\right]<\infty\right\}$, $M\in\mathcal{H}^2$ 이며 $L^2_{\mathrm{loc}}(M)$ 은 어떤 국부렬 (τ^n) 이 있어서 $E\left[\int_0^\infty \| Z\|^2 d\langle M^{\tau_n}\rangle\right]=E\left[\int_0^{\tau_n} \| Z\|^2 d\langle M\rangle<\infty\right]$ 인 예측가능한 과정 Z 들의 공간이다.

A_{loc} 는 국부적으로 적분가능한 우연과정들의 공간이며 A^+_{loc} 는 A_{loc} 에 속하는 비감소우연과정들의 공간이다.

비감소유계변동과정 ν 에 대하여 $(\Omega\times(0,\ \infty),\ \mathcal{F}\times\mathcal{B}(0,\ \infty))$ 우에 주어진 측도를 $\mu_\nu(A):=E\left[\int_0^\infty I_A(\omega,\ t)d\nu\right],\ A\in\overline{\mathcal{F}}$ 와 같이 정의하자. 여기서 적분은 스틸쩨스적분이다.

이 측도 μ_ν 를 ν 에 의하여 생성된 귀납측도라고 부른다.

$L^2(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ 가 내적 $X\cdot Y=E[XY]$ 를 가진 가분힐베르트공간이면 $\mathcal{H}^2$ −마르팅게일들의 렬 $M=(M^1,\ M^2,\ \cdots)$ 이 있어서 $\langle M^i,\ M^j\rangle=0\ (i\neq j)$ 이고 임의의 두제곱적분가능한 마르팅게일 $N\in\mathcal{H}^2$ 은 $Z\in L^2(M)$ 을 만족시키는 예측가능한 과정들의 렬 $Z=(Z_1,\ Z_2,\ \cdots)$ 이 있어서 $N_t=N_0+\int_0^t Z_u dM_u=N_0+\sum_{i=1}^\infty\int_0^t Z_u^i dM_u^i$ 와 같이 표시된다.

역방향확률미분방정식의 일반적인 형태는 다음과 같다.[1]

$$Y_t=\xi+\int_t^\tau g(\omega,\ s,\ Y_{s-},\ Z_s)d\nu_s-\sum_{i=1}^\infty\int_t^\tau Z_s^i dM_s^i,\ \ 0\leq t\leq\tau \tag{1}$$

여기서 τ 는 F −정지시각, ξ 는 $\mathcal{F}_\tau$ −가측인 우연량, $g:\Omega\times(0,\ \infty)\times\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^{k\times\infty}\to\mathbf{R}^k$ 는 예측가능한 우연과정, ν 는 유계변동과정이다.

역방향확률미분방정식 (1)의 풀이는 $\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^{k\times\infty}$ 에서 값을 취하며 Y 는 전진가측이고 Z 는 예측가능한 우연과정들의 쌍 $(Y,\ Z)$ 이다.

ν 가 련속증가과정이라고 가정하고 귀납측도 $\mu_{\langle M^i\rangle}$ 가 $\mu_{\langle M^i\rangle}=\overline{m}^{i,1}+\overline{m}^{i,2},\ \ i\in\mathbf{N}$ 과 같은 르베그분해를 가진다고 하자. 여기서 $\overline{m}^{i,1}$ 은 μ_ν 에 관해 절대련속이며 $\overline{m}^{i,2}$ 는 μ_ν 와 직교한다.

일반화된 라돈—니코딤정리로부터 우연과정 $m_t^{i,1},\ m_t^{i,2}\in A_{\text{loc}}^+$ 가 있어서 $\mu_{m^{i,1}}=\hat{m}^{i,1}$, $\mu_{m^{i,2}}=\hat{m}^{i,2}$ 가 성립된다.

보다 정확히는 $m_t^{i,j}=d\pi_t^j/dP,\ j=1,2,\ \pi_t^j(B):=\hat{m}^{i,j}((0,\ t]\times B),\ B\in\mathcal{F}$ 이므로

$$\langle M^i\rangle_t=m_t^{i,1}+m_t^{i,2} \tag{2}$$

이로부터 식 (2)를 일정한 의미에서 $\langle M^i\rangle$ 의 르베그분해라고 볼수 있다.

확률반노름 $\|\cdot\|_{M_t}$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\|z_t\|_{M_t}^2:=\sum_i\left[\|z_t^i\|^2\frac{d\hat{m}^{i,1}}{d\mu_\nu}(\omega,\ t)\right]=\sum_i\left[\|z_t^i\|^2\frac{d\mu_{m^{i,1}}}{d\mu_\nu}(\omega,\ t)\right],\ z_t=(z_t^1,\ z_t^2,\ \cdots)\in\mathbf{R}^{k\times\infty}$$

시간변환 C 가 주어졌을 때 우연과정 X 가 매 구간 $[C_{t-},\ C_t]$ 에서 상수이면 그것은 C — 련속이라고 부른다. 이로부터 정지된 $\overline{\mathcal{F}}_t:=\mathcal{F}_{C(t)}$ 를 구성할수 있으며 새로운 $(\Omega,\mathcal{F},\ P,\ \overline{F})$ 를 얻게 된다. 여기서 $\overline{F}=\{\overline{\mathcal{F}}_t\}_{t\ge0}$ 이다.

만일 X 가 F — 전진가측과정이면 $\overline{X}_t:=X_{C_t}$ 를 X 의 시간변환과정이라고 부른다. 특별한 지적이 없으면 임의의 전진가측가정 X_t 에 대하여 $\overline{X}_t$ 는 X_t 의 시간변환과정을 의미한다. 또한 F 에 관한 공간 V 에 대하여 $\overline{V}$ 는 $\overline{F}$ 에 관한 대응되는 공간을 의미한다.

이제 국부두제곱적분가능한 마르팅게일에 대한 시간변환의 성질들을 보기로 하자.

보조정리 C 를 $(\Omega,\mathcal{F},\ P,\ F)$ 우의 시간변환이라고 하고 $M\in\mathcal{H}_{\text{loc}}^2$ 이 C — 련속성을 만족시킨다고 하면 $\overline{M}\in\overline{H}_{\text{loc}}^2$, $\langle\overline{M}\rangle=\overline{\langle M\rangle}$ 들이 성립된다.

만일 $h\in L_{t,\text{loc}}^2(M)$ 이면 $\overline{h}\in\overline{L}_{t,\text{loc}}^2(\overline{M})$ 이고 임의의 $t>0$ 에 대하여 $\int_0^t\overline{h_u}d\overline{M}_u=\int_0^{C_t}h_udM_u$ 이며

특히 ξ 를 $(\Omega,\mathcal{F},\ P,\ F)$ 우의 비부값우연량이라고 하면 $\int_0^\xi\overline{h}_sd\overline{M}_s=\int_0^{C_\xi}h_sdM_s$ 이다.

$\mathcal{H}^2$ — 마르팅게일 $M^i\,(i=1,2,\cdots)$ 들이 C —련속이라고 하면 $\overline{\mathcal{H}^2}$ — 마르팅게일들의 렬 $(\overline{M^i})$ 는 임의의 C^{-1} — 련속인 $\overline{\mathcal{H}^2}$ — 마르팅게일에 대하여 마르팅게일표현성을 가진다.

다음으로 우연립쉬츠결수를 가지는 역방향확률미분방정식과 우연끝시각을 가지는 역방향확률미분방정식사이의 관계에 대하여 론의하자.

편리상 역방향확률미분방정식 (1)을 첨수를 략하고 다음과 같이 표시한다.

$$Y_t=\xi+\int_t^\tau g(\omega,\ s,\ Y_{s-},\ Z_s)d\nu_s-\int_t^\tau Z_sdM_s,\ \ 0\le t\le\tau \tag{3}$$

g 가 예측가능한 과정 $r_t,\ u_t$ 가 있어서 임의의 $y_t,\ y_t'\in\mathbf{R}^k,\ z_t,\ z_t'\in\mathbf{R}^{k\times\infty}$ 에 대하여 $\|g(\omega,\ t,\ y_t,\ z_t)-g(\omega,\ t,\ y_t',\ z_t')\|\le r_t\|y_t-y_t'\|+u_t\|z_t-z_t'\|_{M_t}$ 를 만족시킨다고 하자.

이제 다음과 같은 우연과정을 도입하자.

$$\phi(t) := \int_0^t \alpha_s^2 d\nu_s \tag{4}$$

앞으로 시간변환을 의미해온 기호 C를 ϕ^{-1}으로 바꾸고 론의한다.

정리 $\phi(t)$를 식 (4)로 정의되는 우연과정이라고 하고 M이 ϕ^{-1}－련속이라고 하자.

만일 $(Y_t,\ Z_t)$가 $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P,\ (\mathcal{F}_t))$우에서 정의된 우연립쉬츠결수를 가지는 역방향확률미분방정식 (3)의 풀이이면 $(y_t,\ z_t) := (Y_{\phi^{-1}(t)},\ Z_{\phi^{-1}(t)})$는 $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P,\ \overline{F})$ 우에서 정의된 다음의 역방향확률미분방정식의 풀이이다.

$$y_t = \xi + \int_t^{\bar\tau} \bar g(\omega,\ s,\ y_{s-},\ z_s)ds - \int_t^{\bar\tau} z_s d\overline{M}_s,\ \ 0 \le t \le \bar\tau \tag{5}$$

여기서 $\bar g(\omega, s,\ y,\ z) := g(\omega,\ \phi^{-1}(s), y,\ z)/\alpha^2(\phi^{-1}(s))$, $\bar\tau = \phi(\tau)$, $\overline{M}_s := M_{\phi^{-1}(s)}$이다.

한편 거꿀도 역시 성립된다. 즉 $(y_t,\ z_t)$가 역방향확률미분방정식 (5)의 풀이이면 $(Y_t,\ Z_t) := (y_{\phi(t)},\ z_{\phi(t)})$는 역방향확률미분방정식 (3)의 풀이이다.

특히 새로운 생성자 $\bar g$는 다음과 같은 평등립쉬츠련속성을 만족시킨다.

$$\| \bar g(\omega,\ t,\ y_t,\ z_t) - \bar g(\omega,\ t,\ y'_t,\ z'_t) \| \le \| y_t - y'_t \| + \| z_t - z'_t \|$$

증명 우선 $\bar\nu(\cdot,\ \omega) := \nu(\phi^{-1}(\cdot,\ \omega),\ \omega)$가 절대련속이라는것을 증명하자.

ν가 증가하고 련속이므로 그것의 거꿀 ν^{-1}은 시간변환이며 ν는 ν^{-1}－련속이다.

보조정리에 의하여 $\phi(t) = \left[\int_0^{\cdot} \alpha^2(\nu^{-1}(s))ds \circ \nu\right](t)$이므로 다음식이 성립한다.

$$\overline{\nu}_t = (\nu \circ \phi^{-1})(t) = \nu \circ \nu^{-1} \circ \left[\int_0^{\cdot} \alpha^2(\nu^{-1}(s))ds\right]^{-1}(t) = \left[\int_0^{\cdot} \alpha^2(\nu^{-1}(s))ds\right]^{-1}(t)$$

$\bar\nu$가 르베그측도에 관하여 절대련속이며 다음식이 성립한다.

$$\frac{d\mu_{\bar\nu}}{dt \times dP} = \frac{d\overline{\nu}_t}{dt} = \frac{1}{(\alpha^2 \circ \nu^{-1} \circ \nu \circ \phi^{-1})(t)} = \alpha^{-2}(\phi_t^{-1})$$

$\langle \overline{M} \rangle$의 르베그분해를 유도하자.

ν가 $[a,\ b]\ (0 \le a < b)$에서 상수라고 하면 임의의 $c \in [a, b]$, $B \in \mathcal{F}$에 대하여 $\hat m([c,\ b] \times B) = E\left[\int_c^b I_B(\omega) \frac{d\hat m^1}{d\mu_\nu} d\nu_t\right] = 0$이 성립되며 따라서 m^1은 $[a,\ b]$에서 상수이다.

식 (2)와 보조정리를 리용하면 다음의 식이 나온다.

$$\langle \overline{M} \rangle_t = \overline{m_t^1} + \overline{m_t^2} \tag{6}$$

보조정리를 리용하면 임의의 $A \in \mathcal{F} \times \mathcal{B}(0,\ \infty)$에 대하여

$$\mu_{\overline{m^1}}(A) = E\left[\int_0^\infty I_A(\omega,\ t) d\overline{m_t^1}\right] = E\left[\int_0^\infty I_A(\omega,\ \phi(\omega,\ t)) \frac{d\hat m^1}{d\mu_\nu} d\nu_t\right] = E\left[\int_0^\infty I_A(\omega,\ \phi(\omega,\ t)) \frac{d\hat m^1}{d\mu_\nu}(\phi_t^{-1}) d\overline{\nu}_t\right]$$

가 성립된다. 여기서 $\frac{d\overline{m^1}}{d\mu_\nu}(\phi_t^{-1}) := \frac{d\overline{m^1}}{d\mu_\nu}(\omega,\ \phi_t^{-1}(\omega,\ t))$이다.

그러므로 $\mu_{\overline{m^1}} \prec dt\times dP$ 이고 $\dfrac{d\mu_{\overline{m^1}}}{d(t\times P)}=\left(\dfrac{d\mu_{m^1}}{d\mu_\nu}\right)(\phi_t^{-1})\cdot\dfrac{d\overline{\nu}_t}{dt}$ 라는것을 알수 있다.

이와 같은 방법으로 $\mu_{\overline{m^2}}\perp dt\times dP$ 도 증명된다.

이것은 식 (6)이 측도 $\langle\overline{M}\rangle$의 $dt\times dP$에 관한 르베그분해라는것을 보여준다.

$(Y_t,\ Z_t)$가 역방향확률미분방정식 (3)의 풀이이므로

$$y_t=Y_{\phi^{-1}(t)}=\xi+\int_{\phi^{-1}(t)}^{\tau}g(s,\ Y_{s-},\ Z_s)d\nu_s-\int_{\phi^{-1}(t)}^{\tau}Z_s dM_s\ \ (0\le t\le\overline{\tau})$$

보조정리에 의하여

$$\int_{\phi^{-1}(t)}^{\tau}g(s,\ Y_{s-},\ Z_s)d\nu_s=\int_t^{\overline{\tau}}g(\phi^{-1}(s),\ Y_{\phi^{-1}(s)-},\ Z_{\phi^{-1}(s)})d\overline{\nu}_s=\int_t^{\overline{\tau}}\overline{g}(\omega,\ s,\ y_{s-},\ z_s)ds$$

이며 M의 ϕ^{-1}의 련속성으로부터 $\displaystyle\int_{\phi^{-1}(t)}^{\tau}Z_s dM_s=\int_t^{\phi(\tau)}Z_{\phi^{-1}(s)}dM^i_{\phi^{-1}(s)}=\int_t^{\overline{\tau}}z_s d\overline{M}_s$ 이다.

그러므로 $y_t=\xi+\displaystyle\int_t^{\overline{\tau}}\overline{g}(\omega,\ s,\ y_{s-},\ z_s)ds-\int_t^{\overline{\tau}}z_s d\overline{M}_s\ \ (0\le t\le\overline{\tau})$ 이다.

따라서 $(y_t,\ z_t)$는 $(\Omega,\ \mathscr{F},\ P,\ \overline{F})$ 우에서 역방향확률미분방정식 (5)의 풀이이다.

$\overline{g}$가 평등립쉬츠련속성을 만족시킨다는것을 보기로 하자.

g에 대한 우연립쉬츠조건으로부터 임의의 $y_t,\ y_t'\in\mathbf{R}^k,\ z_t,\ z_t'\in\mathbf{R}^{k\times\infty}$에 대하여

$$\|\overline{g}(\omega,\ t,\ y_t,\ z_t)-\overline{g}(\omega,\ t,\ y_t',\ z_t')\|=\|g(\phi^{-1}(s),\ y_t,\ z_t)-g(\phi^{-1}(s),\ y_t',\ z_t')\|/\alpha^2(\phi^{-1}(s))\le$$
$$\le[r_{\phi^{-1}(t)}\|y_t-y_t'\|+u_{\phi^{-1}(t)}(\|z_t-z_t'\|_{M_u}|_{u=\phi^{-1}(t)})]/\alpha^2(\phi^{-1}(t))\le\|y_t-y_t'\|+\|z_t-z_t'\|_{\overline{M}_t}$$

가 성립되므로 $\overline{g}$가 평등립쉬츠련속성을 만족시킨다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] S. N. Cohen et al.; The Annals of Probability, 40, 5, 2264, 2012.

[2] J. M. Owo; ESAIM: PS, 21, 168, 2017.

주체108(2019)년 3월 15일 원고접수

A Relationship between BSDEs with Stochastic Lipschtz Coefficients and BSDEs with Random Terminal Time

Kim Mun Chol, O Hun

We proposed a technique for dealing with the backward stochastic differential equations with stochastic Lipschtz coefficients through time change.

Key word: backward stochastic differential equation