김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체103(2014)년 제60권 제6호 Vol. 60 No. 6 JUCHE103(2014).

싸라겐연산자에 의하여 정의된 해석함수의 부분족의 미분종속과 공액종속

민상주, 김무영

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 지적하시였다.

《과학기술의 토대를 이루는 기초과학지식이 든든하여야 전문과학기술의 탑을 높이 쌓을수 있으며 전반적과학기술을 빨리 발전시킬수 있습니다.》(《**김정일**선집》 제18권 증보판 454페지)

선행연구[1]에서는 함수 $f\in A$에 대하여 $\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\prec q(z),\ \dfrac{z^2f'(z)}{(f(z))^2}\prec q(z),\ z\in U$이기 위한 충분조건을 구하였고 선행연구[2]에서는 이 결과를 선형연산자 $H_l^m(\alpha_1): A\to A$에 의하여 정의된 해석함수의 부분족에로 일반화하여 $\dfrac{H_l^m(\alpha_1+1)f(z)}{H_l^m(\alpha_1)f(z)}\prec q(z),\ \dfrac{z^{\alpha-1}H_l^m(\alpha_1+1)f(z)}{(H_l^m(\alpha_1)f(z))^\alpha}\prec q(z)$이기 위한 충분조건을 구하였으며 선행연구[3]에서는 싸라겐연산자 $D^n: A\to A$에 의하여 정의된 해석함수의 부분족 $S_\alpha^n(\beta)$에 대한 포함정리와 미분종속에 대하여 고찰하였다.

론문에서는 싸라겐연산자 $D^n: A\to A$에 의하여 정의된 해석함수의 부분족에 대하여 미분종속 $\dfrac{D^{n+1}f(z)}{D^nf(z)}\prec q(z)$, $\dfrac{z^2(D^nf(z))'}{(D^nf(z))^2}\prec q(z)$, $z\in U$이기 위한 충분조건과 공액종속 $q(z)\prec\dfrac{D^{n+1}f(z)}{D^nf(z)}$, $z\in U$이기 위한 충분조건을 구하여 선행연구[1]의 결과를 일반화하였다.

단위원 $U=\{z\in\boldsymbol{C}: |z|<1\}$에서 해석적인 함수 $p(z)=a+p_1(z)+\cdots$들의 모임을 $H[a,\ 1]$로 표시하고 U에서 해석적이고 조건 $f(0)=0,\ f'(0)=1$로 표준화된 함수 f들의 모임을 A로 표시한다. 그리고

$$S^*:=\{f\in A: \mathrm{Re}(zf'(z)/f(z))>0,\ z\in U\},\ K:=\{f\in A: \mathrm{Re}(1+zf''(z)/f'(z))>0,\ z\in U\}$$

를 각각 별형함수족, 불룩함수족이라고 부른다.

단위원 U에서 해석적인 두 함수 $f(z)=z+\sum_{n=2}^\infty a_nz^n$, $g(z)=z+\sum_{n=2}^\infty b_nz^n$에 대하여 $(f*g)(z):=z+\sum_{n=2}^\infty a_nb_nz^n$을 함수 f와 g의 합성적 혹은 아다마르적이라고 부른다.

선형연산자 $D^n: A\to A\ (n\in\boldsymbol{N}\cup\{0\})$에 대하여

$$D^0f(z)=f(z),\ D^1f(z)=zf'(z)=Df(z),\ \cdots,\ D^nf(z)=D(D^{n-1}f(z))$$

를 싸라겐연산자라고 부른다.[4]

이 연산자는 합성적에 의하여 $D^n f(z)=(k*k*\cdots*k*f)(z),\ k(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}$ 로 표시된다.

연산자 $H_l^m[\alpha_1]: A\to A$ 에 대한

$$H_l^m[\alpha_1]f(z)=H_l^m(\alpha_1,\cdots,\ \alpha_l;\beta_1,\cdots,\ \beta_m)f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_{n-1}\cdots(\alpha_l)_{n-1}}{(\beta_1)_{n-1}\cdots(\beta_m)_{n-1}}\frac{a_n z^n}{(n-1)!}$$

을 드쵸크－스리바스타와연산자라고 부른다.[5] 여기서

$$(a)_n:=\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}=\begin{cases}1, & n=0\\ a(a+1)\cdots(a+n-1), & n\in\boldsymbol{N}\end{cases},\quad l,\ m\in\boldsymbol{N}\cup\{0\},\ l\le m+1.$$

정의 $\overline{U}=\{z\in\boldsymbol{C}:|z|\le 1\}$ 이라고 하자.

$\overline{U}\setminus E(f)$ 우에서 해석적이고 1：1인 함수 f 들의 모임을 Q 로 표시한다. 여기서

$$E(f):=\left\{\zeta\in\partial U:\lim_{z\to\zeta}f(z)=\infty\right\},\quad f'(\zeta)=0,\ \zeta\in\partial U\setminus E(f).$$

정리 1 q 는 단위원 $U=\{z\in\boldsymbol{C}:|z|<1\}$ 에서 불룩이고 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\in\boldsymbol{C},\ \delta\ne 0$ 에 대하여 $\mathrm{Re}\{\beta/\delta+2\gamma q(z)/\delta+1+zq''(z)/q'(z)\}>0,\ z\in U$ 를 만족시키는 함수라고 하면

$$\alpha+\beta\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}+\gamma\left(\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}\right)^2+\delta\left(\frac{D^{n+2}f(z)}{D^n f(z)}-\left(\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}\right)^2\right)\prec\alpha+\beta q(z)+\gamma(q(z))^2+\delta zq'(z)$$

일 때 $\dfrac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}\prec q(z),\ z\in U$ 이며 q 는 가장 좋은 우월함수이다.

증명 $\theta(w)=\alpha+\beta w+\gamma w^2,\ \phi(w)=\delta$ 라고 놓으면 θ 와 ϕ 는 $\boldsymbol{C}$ 에서 정칙이고 $\phi(w)\ne 0,\ w\in U$ 이며 $Q(z)=zq'(z)\phi(q(z))=\delta zq'(z),\quad h(z)=\theta(q(z))+Q(z)=\alpha+\beta q(z)+\gamma(q(z))^2+\delta zq'(z)$ 이므로 정리의 조건에 의하여 $\mathrm{Re}\{zh'(z)/Q(z)\}=\mathrm{Re}\{\beta/\delta+2\gamma q(z)/\delta+1+zq''(z)/q'(z)\}>0$ 이다.

이제 $p(z):=\dfrac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}$ 라고 하면 $zp'(z)=\dfrac{D^{n+2}f(z)}{D^n f(z)}-\left(\dfrac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}\right)^2$ 이다.

정리의 조건에 의하여

$$\alpha+\beta\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}+\gamma\left(\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}\right)^2+\delta\left(\frac{D^{n+2}f(z)}{D^n f(z)}-\left(\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}\right)^2\right)\prec\alpha+\beta q(z)+\gamma(q(z))^2+\delta zq'(z)$$

이므로 선행연구[6]에 의하여 $\dfrac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}\prec q(z)$ 이며 q 는 가장 좋은 우월함수이다.(증명끝)

정리 1에서 $n=0$ 이면 다음의 결과가 얻어진다.

따름 1 q 가 단위원 U 에서 불룩이고 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\in\boldsymbol{C},\ \delta\ne 0$ 에 대하여

$$\mathrm{Re}\{\beta/\delta+2\gamma q(z)/\delta+1+zq''(z)/q'(z)\}>0,\ z\in U$$

를 만족시킨다고 할 때

$$\alpha+\beta\frac{zf'(z)}{f(z)}+\gamma\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^2+\delta\left(\frac{z(zf'(z))'}{f(z)}-\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^2\right)\prec\alpha+\beta q(z)+\gamma(q(z))^2+\delta zq'(z)$$

이면 $zf'(z)/f(z)\prec q(z),\ z\in U$ 이고 q 는 가장 좋은 우월함수이다.

정리 1에서 함수 $q(z)=(1+Az)/(1+Bz),\ -1\le B<A\le 1$ 을 취하면 다음의 결과를 얻는다.

따름 2 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\in\boldsymbol{C},\ \delta\ne 0$ 에 대하여 $\mathrm{Re}\left\{\frac{\beta}{\delta}+\frac{2\gamma}{\delta}\frac{1+Az}{1+Bz}+\frac{1-Bz}{1+Bz}\right\}>0$ 이라고 하자.

이때 함수 $f\in A$가 조건

$$\alpha+\beta\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}+\gamma\left(\frac{1+Az}{1+Bz}\right)^2+\delta\left(\frac{D^{n+2}f(z)}{D^n f(z)}-\left(\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}\right)^2\right)\prec\alpha+\beta\frac{1+Az}{1+Bz}+\gamma\left(\frac{1+Az}{1+Bz}\right)^2+\delta\frac{(A-B)z}{(1+Bz)^2}$$

를 만족시키면 $\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}\prec\frac{1+Az}{1+Bz},\ z\in U$ 이고 $q(z)=\frac{1+Az}{1+Bz}$ 는 가장 좋은 우월함수이다.

정리 2 q가 단위원 U에서 해석적이고 $q(0)=1$이며 $zq'(z)/q(z)$가 U에서 별형인 함수라고 하자.

이때 함수 $f\in A$가 $\alpha,\ \gamma\in\boldsymbol{C}$ 에 대하여 $\alpha+\gamma\left(1+\frac{(D^{n+1}f(z))'}{(D^n f(z))'}-2\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}\right)\prec\alpha+\gamma\frac{zq'(z)}{q(z)}$

를 만족시키면 $\frac{z^2(D^n f(z))'}{(D^n f(z))^2}\prec q(z),\ z\in U$ 가 성립되고 q는 가장 좋은 우월함수이다.

증명 $\theta(w)=\alpha,\ \phi=\gamma/w$ 로 놓으면 θ는 $\boldsymbol{C}$에서 해석적이고 ϕ는 $\boldsymbol{C}\setminus\{0\}$에서 해석적이며 $\phi(w)\ne 0,\ \ w\in\boldsymbol{C}\setminus\{0\}$ 이다.

그리고 $Q(z)=zq'(z)\phi(q(z))=\gamma zq'(z)/q(z),\ \ h(z)=\theta(q(z))+Q(z)=\alpha+\gamma zq'(z)/q(z)$ 이므로 정리의 조건에 의하여 $\mathrm{Re}\frac{zh'(z)}{Q(z)}=\mathrm{Re}\left\{1+\frac{zq''(z)}{q'(z)}-\frac{zq'(z)}{q(z)}\right\}>0,\ \ z\in U$ 이다.

이제 $p(z):=\frac{z^2(D^n f(z))'}{(D^n f(z))^2}$ 라고 하면 $\frac{zp'(z)}{p(z)}=1+\frac{(D^{n+1}f(z))'}{(D^n f(z))'}-2\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}$ 이다.

정리의 조건으로부터 $\alpha+\gamma\left[1+\frac{(D^{n+1}f(z))'}{(D^n f(z))'}-2\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}\right]\prec\alpha+\gamma\frac{zq'(z)}{q(z)}$ 이므로 선행연구[6]에 의하여 $\frac{z^2(D^n f(z))'}{(D^n f(z))^2}\prec q(z),\ z\in U$ 가 성립되고 q는 가장 좋은 우월함수이다.(증명끝)

정리 2에서 $n=0$ 이면 다음의 결과를 얻는다.

따름 3 q는 U에서 해석적이고 $q(0)=1$이며 $\frac{zq'(z)}{q(z)}$는 U에서 별형함수라고 하자.

이때 $f\in A$가 $\alpha,\ \gamma\in\boldsymbol{C}$ 에 대하여 조건 $\alpha+\gamma((zf)''/f'-2zf'(z)/f(z))\prec\alpha+\gamma zq'(z)/q(z)$ 를 만족시키면 $z^2 f'(z)/f^2(z)\prec q(z),\ z\in U$ 가 성립되고 q는 가장 좋은 우월함수이다.

정리 2에서 함수 $q(z)=(1+z)/(1-z)$ 를 취하면 다음의 결과를 얻는다.

따름 4 $f\in A$가 $\alpha,\ \gamma\in\boldsymbol{C}$ 에 대하여 조건 $\alpha+\gamma\left(1+\frac{(D^{n+1}f(z))'}{(D^n f(z))'}-2\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}\right)\prec\alpha+\frac{2\gamma z}{1-z^2}$

를 만족시키면 $\frac{z^2(D^n f(z))'}{(D^n f(z))^2}\prec\frac{1+z}{1-z}$가 성립되고 $q(z)=\frac{1+z}{1-z}$는 가장 좋은 우월함수이다.

정리 3 q는 U에서 해석적이며 $q(z)\neq 0,\ z\in U$인 함수라고 하자. 또한 $zq'(z)/q(z)$는 U에서 별형함수이고 $\beta,\ \gamma,\ \delta\in \boldsymbol{C},\ \delta\neq 0$에 대하여 $\mathrm{Re}\{\beta/\delta+2\gamma\, q(z)/\delta\}>0,\ z\in U$를 만족시킨다고 하자. 그리고 $f\in A$는 $\alpha\in \boldsymbol{C}$에 대하여 $\dfrac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}\in H[q(0),\ 1]\cap Q$이고

$$\alpha+\beta\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}+\gamma\left(\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}\right)^2+\delta\left(\frac{D^{n+2}f(z)}{D^n f(z)}-\left(\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}\right)^2\right)$$

이 단위원 U에서 단엽이라고 하자.

이때 $f\in A$가 미분종속

$$\alpha+\beta q(z)+\gamma(q(z))^2+\delta zq'(z)\prec\alpha+\beta\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}+\gamma\left(\frac{D^{n+2}f(z)}{D^n f(z)}\right)^2+\delta\left(\frac{D^{n+2}f(z)}{D^n f(z)}-\left(\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}\right)^2\right)$$

을 만족시키면 $q(z)\prec\dfrac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)},\ z\in U$가 성립되고 q는 가장 좋은 종속함수이다.

증명 $\theta(w)=\alpha+\beta w+\gamma w^2,\ \phi(w)=\delta$로 놓으면 $\theta,\ \phi$는 $\boldsymbol{C}$에서 정칙이고 $\phi(w)\neq 0,\ z\in U$이다. 그리고 정리의 조건에 의하여 $\mathrm{Re}\dfrac{\theta'(q(z))}{\phi(q(z))}=\mathrm{Re}\left\{\dfrac{\beta}{\delta}+\dfrac{2\gamma}{\delta}q(z)\right\}>0,\ z\in U$가 성립된다.

또한 정리의 조건에 의하여 함수 $f\in A$에 대하여 $\dfrac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}\in H[q(0),\ 1]\cap Q$이고

$$\alpha+\beta\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}+\gamma\left(\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}\right)^2+\delta\left(\frac{D^{n+2}f(z)}{D^n f(z)}-\left(\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}\right)^2\right)$$

은 U에서 단엽이며 미분공액종속

$$\alpha+\beta q(z)+\gamma(q(z))^2+\delta zq'(z)\prec\alpha+\beta\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}+\gamma\left(\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}\right)^2+\delta\left(\frac{D^{n+2}f(z)}{D^n f(z)}-\left(\frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}\right)^2\right)$$

을 만족시킨다. 따라서 선행연구[7]에 의하여 $q(z)\prec\dfrac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)},\ z\in U$이고 q는 가장 좋은 종속함수이다.(증명끝)

정리 3에서 $n=0$이면 다음의 결과를 얻는다.

따름 5 q는 U에서 해석적이며 $q(z)\neq 0,\ z\in U$인 함수라고 하자. 그리고 $zq'(z)/q(z)$는 단위원 U에서 별형함수이고 $\beta,\ \gamma,\ \delta\in \boldsymbol{C},\ \delta\neq 0$에 대하여 $\mathrm{Re}\{\beta/\delta+2\gamma\, q(z)/\delta\}>0$이라고 하자. 또한 $f\in A$는 $\alpha\in \boldsymbol{C}$에 대하여 $zf'(z)/f(z)\in H[q(0),\ 1]\cap Q$이고

$$\alpha+\beta z'(z)/f(z)+\gamma(zf'(z)/f(z))^2+\delta(z(zf'(z))'/f(z)-(zf'(z)/f(z))^2)$$

는 단위원 U에서 단엽이라고 하자.

이때 함수 $f\in A$가 조건

$$\alpha+\beta q(z)+\gamma(q(z))^2+\delta zq'(z)\prec\alpha+\beta\frac{zf'(z)}{f(z)}+\gamma\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^2+\delta\left(\frac{z(zf'(z))'}{f(z)}-\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^2\right)$$

을 만족시키면 $q(z)\prec\frac{zf'(z)}{f(z)},\ z\in U$ 이고 q 는 가장 좋은 종속함수이다.

정리 3에서 $n=0,\ \alpha=\beta=0,\ \gamma=\delta=1$ 이면 다음의 결과를 얻는다.

따름 6 q 는 단위원 U 에서 해석적이고 $\mathrm{Re}\,q(z)>0,\ z\in U$ 이며 $\frac{zq'(z)}{q(z)}$ 가 U 에서 별형함수라고 하자.

또한 $f\in A$ 는 $\frac{zf'(z)}{f(z)}\in \mathrm{H}[q(0),\ 1]\cap Q$ 이고 $\frac{z(zf'(z))'}{f(z)}$ 가 U 에서 단엽이라고 하자.

이때 $(q(z))^2+zq'(z)\prec\frac{z(zf'(z))'}{f(z)}$ 이면 $q(z)\prec\frac{zf'(z)}{f(z)}$ 이고 q 는 가장 좋은 종속함수이다.

특히 함수 $q(z)=1/(1-z)$ 을 취하면 다음의 결과를 얻는다.

$f\in A$ 는 $\frac{zf'(z)}{f(z)}\in H[q(0),\ 1]\cap Q$ 이고 $\frac{z(zf'(z))'}{f(z)}$ 가 U 에서 단엽인 함수라고 하자.

이때 $\frac{1+z}{(1-z)^2}\prec\frac{z(zf'(z))'}{f(z)},\ z\in U$ 이면 $\frac{1}{1-z}\prec\frac{zf'(z)}{f(z)},\ z\in U$ 이고 함수 $q(z)=\frac{1}{1-z}$ 은 가장 좋은 종속함수이다.

정리 4 q_1 과 q_2 는 단위원 U에서 불룩이고 $q_1(z)\neq 0,\ q_2(z)\neq 0$ 인 함수들이며 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\in \boldsymbol{C},\ \delta\neq 0$ 에 대하여 각각

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{\beta}{\delta}+\frac{2\gamma}{\delta}q_1(z)+1+\frac{zq_1''(z)}{q_1'z)}\right\}>0,\quad \mathrm{Re}\left\{\frac{\beta}{\delta}+\frac{2\gamma}{\delta}q_2(z)\right\}>0,\ z\in U$$

를 만족시킨다고 하자. 그리고 $f\in A$ 는 $\frac{D^{n+1}f(z)}{D^nf(z)}\in H[q(0),\ 1]\cap Q$ 이고

$$\alpha+\beta\frac{D^{n+1}f(z)}{D^nf(z)}+\gamma\left(\frac{D^{n+1}f(z)}{D^nf(z)}\right)^2+\delta\left(\frac{D^{n+2}f(z)}{D^nf(z)}-\left(\frac{D^{n+1}f(z)}{D^nf(z)}\right)^2\right)$$

가 단위원 U에서 단엽이라고 하자.

이때 $f\in A$가 조건

$$\alpha+\beta q_2(z)+\gamma(q_2(z))^2+\delta zq_2'(z)\prec$$

$$\prec\alpha+\beta\frac{D^{n+1}f(z)}{D^nf(z)}+\gamma\left(\frac{D^{n+2}f(z)}{D^nf(z)}\right)^2+\delta\left(\frac{D^{n+2}f(z)}{D^nf(z)}-\left(\frac{D^{n+1}f(z)}{D^nf(z)}\right)^2\right)\prec$$

$$\prec\alpha+\beta q_1(z)+\gamma(q_1(z))^2+\delta zq_1'(z),\quad z\in U$$

를 만족시키면 $q_2(z)\prec\frac{D^{n+1}f(z)}{D^nf(z)}\prec q_1(z),\ z\in U$ 이고 q_1 과 q_2 는 각각 가장 좋은 우월함수, 가장 좋은 종속함수이다.

정리 4에서 $n=0$ 이면 다음의 결과를 얻는다.

따름 7 q_1 과 q_2 는 단위원 U에서 불룩이고 $q_1(z)\neq 0,\ q_2(z)\neq 0$ 인 함수이며 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\in \boldsymbol{C},\ \delta\neq 0$ 에 대하여 각각

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{\beta}{\delta}+\frac{2\gamma}{\delta}q_1(z)+1+\frac{zq_1''(z)}{q_1'(z)}\right\}>0,\quad \mathrm{Re}\left\{\frac{\beta}{\delta}+\frac{2\gamma}{\delta}q_2(z)\right\}>0,\quad z\in U$$

를 만족시킨다고 하자. 그리고 $f\in A$는 $\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\in H[q(0),\ 1]\cap Q$ 이고

$$\alpha+\beta\frac{zf'(z)}{f(z)}+\gamma\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^2+\delta\left(\frac{z(zf'(z))'}{f(z)}-\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^2\right)$$

이 단위원 U 에서 단엽이라고 하자.

이때 $f\in A$가 미분종속

$$\alpha+\beta q_2(z)+\gamma(q_2(z))^2+\delta zq_2'(z)\prec$$
$$\prec\alpha+\beta\frac{zf'(z)}{f(z)}+\gamma\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^2+\delta\left(\frac{z(zf'(z))'}{f(z)}-\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^2\right)\prec$$
$$\prec\alpha+\beta q_1(z)+\gamma(q_1(z))^2+\delta zq_1'(z),\quad z\in U$$

를 만족시키면 $q_2(z)\prec\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\prec q_1(z),\ z\in U$ 이고 q_1과 q_2는 각각 가장 좋은 우월함수, 가장 좋은 종속함수이다.

참 고 문 헌

[1] V. Ravichandran; Far East J. Math. Sci., 12, 41, 2004.

[2] V. Ravichandran et al.; Acta Mathematica Vietnamica, 30, 2, 113, 2005.

[3] M. Acu; General Mathematics, 12, 3, 67, 2004.

[4] G. S. Sălăgean; Subclasses of Univalent Functions, Lecture Notes in Math, Springer, 362～372, 1983.

[5] J. Dziok et al.; Integral Transform. Spec. Funct., 14, 7, 2003.

[6] S. S. Miller et al.; Differential Subordinations, Theory and Applications, Marcel Dekker Inc., 4～37, 2000.

[7] T. Bulboaca; Demonstr. Math., 35, 2, 287, 2002.

주체103(2014)년 2월 5일 원고접수

Differential Subordination and Superordination of a Subclass of Analytic Functions Defined by Sălăgean Operator

Min Sang Ju, Kim Mu Yong

We obtained the sufficient conditions for differential subordination and superordination in the subclass of analytic functions defined by Sălăgean operator $D^n: A\to A$.

The obtained results are generalization of [1].

Key words: differential subordination, superordination