김일성종합대학학보 주체110(2021)년
수 학 제67권 제1호

준위－절환혼합분수브라운운동모형에서 기하평균선택권의 가격공식

조호범, 김경희

위대한 수령 **김일성**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《새로운 과학분야를 개척하며 최신과학기술의 성과를 인민경제에 널리 받아들이기 위한 연구사업을 전망성있게 하여야 합니다.》(《**김일성**전집》 제72권 292페지)

선행연구[1]에서는 비약을 가진 일반화된 혼합분수브라운운동모형에 대하여 마감실시선택권과 교환선택권의 가격에 대한 공식을 유도하였다. 선행연구[2, 3]에서는 혼합분수브라운운동하에서 기하평균선택권의 가격에 대한 공식을 유도하였다. 선행연구[4]에서는 준위－절환비약브라운운동모형에 대하여 마감실시선택권의 가격에 대한 공식을 유도하였다. 그러므로 론문에서는 기초자산가격의 동태를 더 정확히 묘사하기 위하여 확률변덕과 무거운 꼬리를 가지는 준위절환모형과 장기기억성, 자기상사성과 같은 이상현상을 나타내는 혼합분수브라운운동모형을 결합한 모형을 제기하고 이 모형하에서 기하평균선택권의 가격에 대한 공식을 유도한다.

론문에서 고찰하는 위험기초자산모형은 다음과 같다.

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu_{\varepsilon(t)}dt + a\sigma_{e(t)}dB(t) + b\sigma_{\varepsilon(t)}dB_H(t) \tag{1}$$

여기서 $\varepsilon(t)$ 는 시간균일한 정상마르꼬브과정으로서 t 시각의 상태를 나타낸다. 그리고 $\mu : L\times \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 와 $\sigma : L\times \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 는 $\varepsilon(t)$ 의 상태에 관계되는 수익률과 변동률이며 $B(t)$ 와 $B_H(t)$ 는 각각 브라운운동, 허스트지수가 H 인 분수브라운운동이다. 이때 혼합분수브라운운동에 관한 길싸노브정리에 의하여 어떤 위험중성측도 Q 밑에서 식 (1)은 다음과 같이 표시된다.

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = (r_{\varepsilon(t)} - q_{\varepsilon(t)})dt + a\sigma_{e(t)}dB(t) + b\sigma_{\varepsilon(t)}dB_H(t) \tag{2}$$

여기서 r 는 무위험자산의 리자률이며 q 는 기초자산의 배당률이다. 식에서 알수 있는바와 같이 모형의 파라메터들은 현상태를 반영하는 시간균일한 정상마르꼬브과정 $\varepsilon(t)$ 의 상태에 따라 달라진다. 상태는 크게 좋은 상태와 나쁜 상태로 나눌수 있으므로 론문의 나머지부분에서는 론의를 간단히 하기 위하여 상태를 반영하는 마르꼬브과정 $\varepsilon(t)$ 의 상태모임을 두 상태모임 즉 $\{0,\ 1\}$ 로 가정한다.

1. 예비적결과

분수브라운운동에 관한 확률해석학에서 이미 알려진 함수 $\phi(s,\ t) := H(2H-1)|s-t|^{2H-2}$ 에 대하여

$$\| f(t)\|_\phi^2 = \int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} f(s)f(t)\phi(s,\ t)dsdt < +\infty$$

인 함수 f 들전부의 공간을 $L_\phi^2(\mathbf{R})$ 로 표시하자. 그러면 초등함수

$$f(n,\ \boldsymbol{\sigma},\ \boldsymbol{T},\ t)=f(n,\ \{\sigma_i\}_{i=1}^{n+1},\ \{T_i\}_{i=1}^{n},\ t):=\sum_{i=1}^{n+1}\sigma_i I_t([T_{i-1},\ T_i])$$

에 대하여 다음의 관계식이 성립한다.

$$\| f(n,\ \boldsymbol{\sigma},\ \boldsymbol{T},\ t)\|_\phi^2=\left\|\sum_{i=1}^{n+1}\sigma_i I_t([T_{i-1},\ T_i])\right\|_\phi^2=$$

$$=\sum_{i=1}^{n+1}\sigma_i^2(T_i-T_{i-1})^{2H}+\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{\substack{j=1\\ i<j}}^{n+1}\sigma_i\sigma_j[(T_j-T_{i-1})^{2H}+(T_{j-1}-T_i)^{2H}-(T_j-T_i)^{2H}-(T_{j-1}-T_{i-1})^{2H}]$$

또한 무위험자산의 리자률과 기초자산의 배당률 r와 q는 상수라고 가정하자. 그러면 상태변화회수 $N(T)$가 n으로, 상태변화시각이 $\{T_i\}_{i=1}^n$으로 주어졌다는 조건하에서 $t\in(T_{i-1},\ T_i]\,(i=1,\ \cdots,\ n+1)$에서의 확률미분방정식 (2)의 풀이에 대하여 다음의 관계식이 성립한다.

$$X(t)=\ln\frac{S(t)}{S(0)}=(r-q)t-a^2\frac{\overline{\sigma}_i^2}{2}t+a^2\frac{(\overline{\sigma}_i^2-\overline{\sigma}_{i-1}^2)}{2}\tau_i-\frac{b^2}{2}\| f(i-1,\ \overline{\boldsymbol{\sigma}},\ \boldsymbol{T},\ t)\|_\phi^2+ \tag{3}$$
$$+a\overline{\sigma}_iB(t)-a(\overline{\sigma}_i-\overline{\sigma}_{i-1})B(\tau_i)+b\overline{\sigma}_iB_H(t)-b(\overline{\sigma}_i-\overline{\sigma}_{i-1})B_H(\tau_i)$$

여기서 $\overline{\boldsymbol{\sigma}}:=(\overline{\sigma}_1,\ \cdots,\ \overline{\sigma}_{n+1})$ 인데 $u=i+1-2\times[(i+1)/2]$ 라고 할 때 $\overline{\sigma}_i:=\sigma_u$ 이다. 그리고 $\tau_i:=\sum_{k=1}^{i}(-1)^{i-k}T_{k-1}$ 이다.

주의 1 $0<\tau_i\le T_{i-1}<T$ 인 임의의 τ_i에 대하여 $1\le K_i<i$ 인 K_i가 유일존재하여($K_1:=1$로 놓음.) $T_{K_i-1}<\tau_i\le T_{K_i}$가 성립한다.

2. 기하평균선택권의 가격공식

기초자산가격과정 $S(t)$에 대하여 다음과 같이 가정한다.

1) 기초위험자산의 가격과정은 확률미분방정식 (2)를 만족시킨다.
2) 상태는 임의의 시각에 관측가능하며 초기시각의 상태는 0이다.
3) 무위험자산의 리자률 r와 기초자산의 배당률 q는 상수이다.

정리 1 $N(T)=1$이라는 조건밑에서 만기시각이 T이고 고정실행가격이 K인 기하평균선택권의 $\varepsilon(0)=0$이라는 가정밑에서 령시각에서의 가격 $c(0|\varepsilon(0)=0)$은 다음과 같다.

$$c(0|\varepsilon(0)=0)=\frac{1}{T}\int_0^T C(S(0),\ K,\ T,\ r,\ A(t),\ B^2(t))dt$$

여기서

$$C(S(0),\ K,\ T,\ r,\ A,\ B^2):=S(0)e^{-rT}e^{A+B^2/2}\Phi(d_1(A,\ B^2))-Ke^{-rT}\Phi(d_2(A,\ B^2))$$

인데 Φ는 표준정규분포함수이고

$$d_1(A,\ B^2):=\frac{\log(S(0)/K)+A+B^2}{B},\quad d_2(A,\ B^2):=\frac{\log(S(0)/K)+A}{B}=d_1(A,\ B^2)-B$$

이다. 또한

$$A(t):=\frac{T}{2}\left(r-q-a^2\frac{\sigma_1^2}{2}\right)+a^2(\sigma_1^2-\sigma_0^2)\frac{t(2T-t)}{4T}-$$

$$-\frac{b^2}{2T}[F(0,\ \{\sigma_i\}_{i=1}^{1},\ t,\ t)+F(1,\ \overline{\boldsymbol{\sigma}},\ t,\ T)-F(1,\ \overline{\boldsymbol{\sigma}},\ t,\ t)]$$

$$B^2(t):=\frac{a^2\sigma_1^2}{3}T+a^2(\sigma_0^2-\sigma_1^2)t\left(1-\frac{t}{T}+\frac{t^2}{3T^2}\right)+\frac{b^2\sigma_0\sigma_1}{2(H+1)}T^{2H}+\frac{b^2(\sigma_1^2-\sigma_0\sigma_1)}{2(H+1)}\frac{(T-t)^{2H+2}}{T^2}+$$

$$+b^2(\sigma_0^2-\sigma_0\sigma_1)t^{2H}\left(1-\frac{t}{T}+\frac{t^2}{2(H+1)T^2}\right)$$

이다.

정리 2 기초자산가격과정 $S(t)$ 가 확률미분방정식 (2)로 주어진 모형에 따를 때 고정실행가격이 K, 만기시각이 T 인 기하평균선택권의 $\varepsilon(0)=0$ 이라는 가정밑에서 령시각에서의 가격 $c(0\,|\,\varepsilon(0)=0)$ 은 다음과 같다.

$$c(0\,|\,\varepsilon(0)=0)=e^{-\lambda T}\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^n\int_0^T\int_{t_1}^T\cdots\int_{t_{n-1}}^T C(S(0),\ K,\ T,\ r,\ A(n,\ \boldsymbol{t}),\ B^2(n,\ \boldsymbol{t}))d\boldsymbol{t}$$

여기서 $\boldsymbol{t}:=(t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n)$ 이고

$$A(n,\ \boldsymbol{t}):=\frac{T}{2}\left(r-q-\frac{a^2\overline{\sigma}_{n+1}^2}{2}\right)+\frac{a^2}{4T}\sum_{i=1}^{n}(\overline{\sigma}_{i+1}^2-\overline{\sigma}_i^2)t_i^2+\frac{a^2}{2T}\sum_{i=1}^{n+1}(\overline{\sigma}_i^2-\overline{\sigma}_{i-1}^2)\tau_i(t_i-t_{i-1})-$$

$$-\frac{b^2}{2T}\sum_{i=1}^{n+1}[F(i-1,\ \overline{\boldsymbol{\sigma}},\ \boldsymbol{t},\ t_i)-F(i-1,\ \overline{\boldsymbol{\sigma}},\ \boldsymbol{t},\ t_{i-1})]$$

$$B^2(n,\ \boldsymbol{t})=\frac{a^2}{2T^2}\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\overline{\sigma}_{i-1}\overline{\sigma}_j(t_j^2-t_{j-1}^2)(t_i-t_{i-1})-$$

$$-\frac{a^2}{T^2}\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\overline{\sigma}_j(\overline{\sigma}_i-\overline{\sigma}_{i-1})(t_i-t_{i-1})(t_j-t_{j-1})\tau_i-\frac{a^2}{6T^2}\sum_{i=1}^{n+1}\overline{\sigma}_i^2(t_i-t_{i-1})^3-$$

$$-\frac{a^2}{6T^2}\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{\substack{j=1\\ i<j}}^{n+1}\overline{\sigma}_i\overline{\sigma}_j[(t_j-t_{i-1})^3+(t_{j-1}-t_i)^3-(t_j-t_i)^3-(t_{j-1}-t_{i-1})^3]+$$

$$+\frac{a^2}{2T^2}\sum_{i=1}^{n+1}(\overline{\sigma}_i-\overline{\sigma}_{i-1})\overline{\sigma}_{n+1}(t_i-t_{i-1})(T-\tau_i)^2+$$

$$+\frac{a^2}{2T^2}\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=K_i}^{n}(\overline{\sigma}_i-\overline{\sigma}_{i-1})(\overline{\sigma}_j-\overline{\sigma}_{j+1})(t_i-t_{i-1})(t_j-\tau_i)^2+$$

$$+\frac{a^2}{2T^2}\sum_{i=1}^{n+1}(\overline{\sigma}_i-\overline{\sigma}_{i-1})\overline{\sigma}_1(t_i-t_{i-1})\tau_i^2+$$

$$+\frac{a^2}{2T^2}\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{K_i-1}(\overline{\sigma}_i-\overline{\sigma}_{i-1})(\overline{\sigma}_j-\overline{\sigma}_{j+1})(t_i-t_{i-1})(\tau_i-t_j)^2+$$

$$+\frac{a^2}{2T^2}\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}(\overline{\sigma}_i-\overline{\sigma}_{i-1})(\overline{\sigma}_j-\overline{\sigma}_{j+1})(t_i-t_{i-1})(t_j-t_{j-1})(\tau_i+\tau_j-|\tau_i-\tau_j|)+$$

$$+\frac{b^2}{(2H+1)T^2}\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\overline{\sigma}_{i-1}\overline{\sigma}_j(t_j^{2H+1}-t_{j-1}^{2H+1})(t_i-t_{i-1})-$$

$$-\frac{b^2}{T^2}\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\overline{\sigma}_j(\overline{\sigma}_i-\overline{\sigma}_{i-1})(t_i-t_{i-1})(t_j-t_{j-1})\tau_i^{2H}-$$

$$-\frac{b^2}{2(H+1)(2H+1)T^2}\sum_{i=1}^{n+1}\overline{\sigma}_i^2(t_i-t_{i-1})^{2H+2}-$$

$$-\frac{b^2}{2(H+1)(2H+1)T^2}\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{\substack{j=1\\ i<j}}^{n+1}\overline{\sigma}_i\overline{\sigma}_j[(t_j-t_{i-1})^{2H+2}+(t_{j-1}-t_i)^{2H+2}-$$

$$-(t_j-t_i)^{2H+2}-(t_{j-1}-t_{i-1})^{2H+2}]+\sum_{i=1}^{n+1}\frac{b^2(\overline{\sigma}_i-\overline{\sigma}_{i-1})\overline{\sigma}_{n+1}}{(2H+1)T^2}(t_i-t_{i-1})(T-\tau_i)^{2H+1}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=K_i}^{n}\frac{b^2(\overline{\sigma}_i-\overline{\sigma}_{i-1})(\overline{\sigma}_j-\overline{\sigma}_{j+1})}{(2H+1)T^2}(t_i-t_{i-1})(t_j-\tau_i)^{2H+1}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n+1}\frac{b^2(\overline{\sigma}_i-\overline{\sigma}_{i-1})\overline{\sigma}_1}{(2H+1)T^2}(t_i-t_{i-1})\tau_i^{2H+1}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{K_i-1}\frac{b^2(\overline{\sigma}_i-\overline{\sigma}_{i-1})(\overline{\sigma}_{j+1}-\overline{\sigma}_j)}{(2H+1)T^2}(t_i-t_{i-1})(\tau_i-t_j)^{2H+1}+$$

$$+\frac{b^2}{2T^2}\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}(\overline{\sigma}_i-\overline{\sigma}_{i-1})(\overline{\sigma}_j-\overline{\sigma}_{j-1})(t_i-t_{i-1})(t_j-t_{j-1})(\tau_i^{2H}+\tau_j^{2H}-|\tau_i-\tau_j|^{2H})$$

인데 $t_0:=0$, $t_{n+1}:=T$ 이고 K_i 들은 주의 1에서 언급된 수들이다.

주의 2 초기시각의 상태가 $\varepsilon(0)=1$ 인 경우의 기하평균선택권의 가격공식도 같은 방식으로 얻어진다.

3. 수 치 실 험

표 1에서는 기하평균선택권의 가격을 계산하기 위한 파라메터들을 보여주었다. 이 표에서 보는바와 같이 만기시각은 T=1년이다.

표 1. 기하평균선택권의 가격을 계산하기 위한 파라메터들

파라메터	T	r	Q	K	H	σ_0	σ_1
값	1	0.11	0.01	100	0.76	1.4	0.2

표 2에서는 서로 다른 모형에 따르는 기하평균선택권의 가격들을 보여주었다. 이 표의 준위－절환분수브라운운동모형들에서는 상태변화회수 $N(T)$ 를 3으로 고정하였다. 표 2에서 알수 있는바와 같이 혼합분수브라운운동모형의 가격은 브라운운동모형이나 분수브라운운동모형의 가격들보다 훨씬 비싸지만 준위－절환분수브라운운동모형들의 가격은 원래의

모형들의 가격보다 눅다.

표 2. 서로 다른 모형들에서 기하평균선택권의 가격(준위－절환형에서 $N(T)=3$으로 놓음.)

초기가격	브라운운동	분수브라운운동	혼합분수브라운운동	준위－절환 브라운운동	준위－절환분수 브라운운동	준위－절환혼합 분수브라운운동
80	13.231 2	13.326 3	16.741 6	9.854 7	9.019 9	13.265 1
90	17.428 4	17.789 3	20.885 2	13.890 8	13.225 7	17.499 6
100	22.060 9	22.748 0	25.309 0	18.598 7	18.292 6	22.230 1
110	27.075 1	28.139 3	29.977 9	23.901 0	24.114 0	27.396 3
120	32.423 4	33.906 4	34.862 1	29.711 4	30.554 2	32.938 9

참 고 문 헌

[1] K. H. Kim et al.; Physica, A522, 215, 2019.
[2] B. P. Rao; Physica, A446, 92, 2016.
[3] W. G. Zhang et al.; Physica A490, 402. 2018.
[4] M. Costabile et al.; Journal of Computational and Applied Mathematics, 256, 152, 2014.

주체109(2020)년 9월 5일 원고접수

Pricing Formula for Geometric Asian Option under Regime-switching Mixed Fractional Brownian Motion Model

Jo Ho Bom, Kim Kyong Hui

In this paper a formula for pricing the geometric Asian option is derived when the underlying assets price is assumed to follow a regime-switching mixed fractional Brownian motion model. The obtained formula allows itself to compute the price of geometric Asian options of a security market in the case of a two-regime economy. And the results are illustrated through the several numerical experiments.

Keywords: option pricing, regime-switching mixed fractional Brownian motion