김일성종합대학학보　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　주체110(2021)년
수 학　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　제67권　제1호

키르히호프행렬의 고유값에 의한 완전그라프와 완전다조그라프의 결합그라프에서의 생성 나무개수공식에 대한 간단한 증명

우 승 식

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《우리는 현실발전의 요구에 맞게 나라의 과학기술을 빨리 발전시켜야 하겠습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제11권 134페지)

론문에서는 한가지 결합그라프에서의 생성나무개수평가공식을 보다 간단한 방법으로 유도하였다.

그라프에서의 생성나무개수평가문제는 정보망의 안정성평가와 화학공학에서 이소화합물의 개수평가 등 여러 분야에서 리론실천적으로 수많이 제기되는 셈세기조합의 중요한 문제이다.

정점모임이 서로 비교차하는 두 그라프 $G_1=(V_1,\ E_1)$과 $G_2=(V_2,\ E_2)$에 대하여 정점모임은 $V_1\cup V_2$이고 릉모임은 $E_1\cup E_2\cup E(V_1,\ V_2)$인 새로운 그라프를 G_1과 G_2의 결합그라프라고 부르고 $G=G_1\oplus G_2$로 표시한다. 여기서 $E(V_1,\ V_2)=\{(i,\ j)\,|\,i\in V_1,\ j\in V_2\}$이다.

정점개수는 각각 $|V_i|=n_i,\ i=\overline{1,\ t}$인 서로 비교차하는 t개의 빈그라프 $H_i=(V_i,\ E_i),\ i=\overline{1,\ t}$에 대하여 결합그라프 $H_1\oplus H_2\oplus\cdots\oplus H_t$를 완전$t$조그라프 혹은 완전다조그라프라고 부르고 $K_{n_1,\,n_2,\,\cdots,\,n_t}$로 표시한다.

임의의 $n-$정점다중그라프 G에 대하여 그것의 이웃행렬, 차수행렬을 각각 $A(G)$, $D(G)$라고 할 때 n차행렬 $L(G)=D(G)-A(G)$를 G의 키르히호프행렬이라고 부른다.

선행연구[5]에서는 임의의 $n-$정점다중그라프 G에 대하여 키르히호프행렬 $L(G)$의 임의의 주대각선원소에 대한 여소행렬식은 서로 같으며 그 값은 G의 생성나무개수와 같다는것을 밝혔다. 이것을 키르히호프행렬에 의한 행렬나무정리라고 부른다.

선행연구[1]에서는 행렬나무정리를 리용하여 완전그라프 K_n과 완전다조그라프 $K_{n_1,\,n_2,\,\cdots,\,n_t}$의 강적그라프 $K_n\oplus K_{n_1,\,n_2,\,\cdots,\,n_k}$의 생성나무개수를 평가하였으며 선행연구[4]에서는 같은 방법으로 데까르트적그라프 $K_n\square K_{n_1,\,n_2,\,\cdots,\,n_k}$의 생성나무개수를 평가하였다.

선행연구[7]에서는 임의의 단순무방향그라프 G의 키르히호프행렬의 고유값에 의하여 G의 생성나무개수를 평가하는 방법(고유값을 리용한 행렬나무정리)을 제기하고 이 방법으로 완전그라프 K_n의 생성나무개수를 평가하였다.

선행연구[2]에서는 완전2조그라프 $K_{p,\,q}$와 완전다조그라프 $K_{n_1,\,n_2,\,\cdots,\,n_k}$에서의 생성나무개수를 키르히호프행렬의 고유값에 의한 방법으로 평가하였다.

선행연구[6]에서는 조합적방법으로 완전그라프 K_n과 완전2조그라프 $K_{p,\,q}$의 표식붙은 결합그라프 $K_n\oplus K_{p,\,q}$에서의 생성나무개수를 평가하였다.

선행연구[3]에서는 키르히호프행렬에 의한 행렬나무정리를 리용하여 완전그라프 K_n

과 완전다조그라프 $K_{n_1, n_2, \cdots, n_k}$ 의 결합그라프 $K_n \oplus K_{n_1, n_2, \cdots, n_k}$ 에서의 생성나무개수공식을 유도하였다.

그러나 행렬나무정리를 리용하여 그라프의 생성나무개수를 평가하는 방법은 행렬식을 계산하여야 하는 매우 복잡하고 계산량이 많은 결함이 있다.

론문에서는 행렬나무정리를 리용하여 생성나무개수를 평가하는 방법보다 간단한 방법인 키르히호프행렬의 고유값에 의한 방법으로 완전그라프 K_n 과 완전3조그라프 $K_{p,q,r}$ 의 결합그라프 $K_n \oplus K_{p,q,r}$ 에서의 생성나무개수와 완전그라프 K_n 과 완전다조그라프 $K_{n_1, n_2, \cdots, n_k}$ 의 결합그라프 $K_n \oplus K_{n_1, n_2, \cdots, n_k}$ 에서의 생성나무개수를 유도한다. 앞으로 표식붙은 그라프만을 생각하며 그라프 G 의 생성나무개수를 $\upsilon(G)$ 로 표시하겠다.

보조정리 1 [7] G 를 단순무방향그라프, L 을 n 차행렬로서 G 의 키르히호프행렬이라고 하자. $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n$ (여기서 $\lambda_n = 0$)을 L 의 고유값들이라고 하자. 이때 G 의 생성나무개수는 $\frac{1}{n}\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \cdots \cdot \lambda_{n-1}$ 이다.

보조정리 2 n 차행렬 A 에 대하여 행렬 $A - \lambda_0 E$ 의 위수가 $m\,(m < n)$ 이면 $\lambda = \lambda_0$ 은 행렬 A 의 $n-m$ 중고유값이다.

론문에서는 먼저 키르히호프행렬의 고유값에 의하여 완전그라프 K_n 과 완전3조그라프 $K_{p,q,r}$ 의 결합그라프 $K_n \oplus K_{p,q,r}$ 에서의 생성나무개수를 평가하였다.

결합그라프 $K_n \oplus K_{p,q,r}$ 의 정점들을 다음과 같은 순서로 표식하자. 먼저 K_n 의 정점들을 앞에 놓고 그 다음에 $K_{p,q,r}$ 에서 p 개의 정점들, q 개의 정점들, r 개의 정점들을 차례로 놓는다. 그러면 그라프 $K_n \oplus K_{p,q,r}$ 는 $a := n + p + q + r$ 개의 정점들을 가진다.

정리 1 결합그라프 $K_n \oplus K_{p,q,r}$ 의 생성나무개수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\upsilon(K_n \oplus K_{p,q,r}) &= (n+p+q+r)^{n+1}(n+q+r)^{p-1}(n+p+r)^{q-1}(n+p+q)^{r-1} = \\ &= a^{n+1}(a-p)^{p-1}(a-q)^{q-1}(a-r)^{r-1}\end{aligned} \tag{1}$$

키르히호프행렬의 고유값에 의하여 완전그라프 K_n 과 완전다조그라프 $K_{n_1, n_2, \cdots, n_t}$ 의 결합그라프 $K_n \oplus K_{n_1, n_2, \cdots, n_t}$ 에서의 생성나무개수를 평가하자.

$$m := n + n_1 + n_2 + \cdots + n_t$$

$$m_i := m - n_i,\ i = \overline{1,\ t}$$

로 놓으면 다음의 정리가 성립한다.

정리 2 결합그라프 $K_n \oplus K_{n_1, n_2, \cdots, n_t}$ 의 생성나무개수는 다음과 같다.

$$\upsilon(K_n \oplus K_{n_1, n_2, \cdots, n_t}) = m^{n+t-2} \prod_{i=1}^{t} m_i^{\,n_i - 1} \tag{2}$$

증명 결합그라프 $K_n \oplus K_{n_1, n_2, \cdots, n_t}$ 의 정점들을 다음과 같은 순서로 표식하자. 먼저 K_n 의 정점들을 앞에 놓고 그 다음에 $K_{n_1, n_2, \cdots, n_t}$ 에서 n_1 개의 정점들, n_2 개의 정점들, $\cdots$, n_t 개의 정점들을 차례로 놓는다. 그러면 그라프 $K_n \oplus K_{n_1, n_2, \cdots, n_t}$ 는 m 개의 정점들을 가지며 이 그라프의 키르히호프행렬은 m 차행렬로서 다음과 같다.

$$L = L(K_n \oplus K_{n_1, n_2, \cdots, n_t}) = \begin{bmatrix} A & -J_{n, n_1} & -J_{n, n_2} & \cdots & -J_{n, n_t} \\ -J_{n_1, n} & m_1 E_{n_1} & -J_{n_1, n_2} & \cdots & -J_{n_1, n_t} \\ -J_{n_2, n} & -J_{n_2, n_1} & m_2 E_{n_2} & \cdots & -J_{n_2, n_t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -J_{n_t, n} & -J_{n_t, n_1} & -J_{n_t, n_2} & \cdots & m_t E_{n_t} \end{bmatrix}$$

행렬의 매행, 매렬에서 첫 n 개의 원소들은 K_n 의 정점들에 대응하고 그 다음 n_1, n_2, $\cdots$, n_t 개의 원소들은 $K_{n_1, n_2, \cdots, n_t}$ 의 정점들에 차례로 대응된다.

그리고 A는 n차소행렬로서

$$A = \begin{bmatrix} m-1 & -1 & \cdots & -1 \\ \cdots & m-1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ -1 & -1 & \cdots & m-1 \end{bmatrix}$$

이고 $-J_{k,l}$ 은 $k \times l$ 형소행렬로서 모든 원소들이 -1 이다. E_k 는 k 차단위행렬이고 αE_k 는 E_k 의 주대각선원소들에 α 를 곱한 k 차소행렬이다.

키르히호프행렬 L 은 m 개의 고유값(그중 1개는 0)을 가진다. 이제 이 $m-1$ 개의 고유값들을 구하자.

행렬 $L^{(0)} := L - mE_m$ 을 생각하면

$$L^{(0)} := L - mE_m = \begin{bmatrix} -J_{n,n} & -J_{n, n_1} & -J_{n, n_2} & \cdots & -J_{n, n_t} \\ -J_{n_1, n} & (m_1 - m)E_{n_1} & -J_{n_1, n_2} & \cdots & -J_{n_1, n_t} \\ -J_{n_2, n} & -J_{n_2, n_1} & (m_2 - m)E_{n_2} & \cdots & -J_{n_2, n_t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -J_{n_t, n} & -J_{n_t, n_1} & -J_{n_t, n_2} & \cdots & (m_t - m)E_{n_t} \end{bmatrix}$$

이다. $L^{(0)}$ 의 첫 n 개의 행(렬)의 원소들은 모두 -1 이다. 따라서 첫행에 -1 배하여 나머지 $n-1$ 개의 행들에 더하면 모든 원소들이 0 인 $n-1$ 개의 행들이 얻어진다.

한편 $m_1 - m = -n_1$ 이므로 주대각선에 $m_1 - m$ 이 놓여있는 n_1 개의 행들을 모두 더하면 모든 원소들이 $-n_1$ 인 행이 얻어지는데 $L^{(0)}$ 의 첫행에 $-n_1$ 배하여 이 행에 더하면 모든 원소들이 0 인 또 하나의 행이 얻어진다.

이러한 방법으로 주대각선에 $m_2 - m = -n_2$ 가 놓여있는 n_2 개의 행에서 령행이 하나, $m_3 - m = -n_3$ 이 놓여있는 n_3 개의 행에서 령행이 하나, $\cdots$, $m_t - m = -n_t$ 가 놓여있는 n_t 개의 행에서 령행이 하나씩 얻어지므로 $L^{(0)}$ 의 위수는 기껏 $m-(n-1)-t = m-(n+t-1)$ 이므로 보조정리 2에 의하여 $\lambda_0 = m$ 은 L 의 $n+t-1$ 중이상 고유값이다.

다음 행렬 $L^{(1)} := L - m_1 E_m$ 을 생각하자. 이 행렬은 L 에서 m_1 이 놓여있던 주대각선에 0 이 놓이면서 n_1 개의 같은 행(혹은 렬)을 가진다. 따라서 이 행들가운데서 첫행에 -1 배하여 나머지 $n_1 - 1$ 개의 행들에 더하면 모든 원소들이 0 인 $n_1 - 1$ 개의 행이 얻어진다.

따라서 보조정리 2에 의하여 $\lambda_1 = m_1$ 은 L 의 $n_1 - 1$ 중이상 고유값이다.

마찬가지로 $L^{(i)} := L - m_i E_m$, $i = \overline{2,\ t}$ 를 생각하면 $\lambda_i = m_i$, $i = \overline{2,\ t}$ 는 L 의 $n_i - 1$ 중이상

고유값이다.

지금까지 얻어진 고유값은 중복도까지 고려하면

$$n+t-1+(n_1-1)+(n_2-1)+\cdots+(n_t-1)=n+n_1+n_2+\cdots+n_t-1=m-1$$

개인데 L 은 m 차행렬이므로 m 개의 고유값을 가지고 그중 1개는 0이므로 L 의 모든 고유값들이 얻어졌다.

따라서 보조정리 1에 의하여

$$\upsilon(K_n \oplus K_{n_1,\,n_2,\cdots,\,n_t})=(m^{n+t-1}m_1^{n_1-1}m_2^{n_2-1}\cdots m_t^{n_t-1})\frac{1}{m}=m^{n+t-2}\prod_{i=1}^{t}m_i^{\,n_i-1}$$

이 성립한다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보 수학, 64, 2, 102, 주체107(2018).

[2] **김일성**종합대학학보 수학, 65, 3, 56, 주체108(2019).

[3] **김일성**종합대학학보 수학, 66, 4, 11, 주체109(2020).

[4] 우승식; 조선민주주의인민공화국 과학원통보, 4, 15, 주체106(2017).

[5] C. Godsil, G. Royyle; Algebraic Graph Theory, Springer, 1～443, 2001.

[6] S. S. U; Electronic Journal of Graph Theory and Applications, 4, 2, 171, 2016.

[7] Miklos Bona; A Walk Through Combinatorics, Worid Scientific, 1～546, 2011.

주체109(2020)년 9월 5일 원고접수

The Simple Proof of the Formula of Calculating the Number of Spanning Trees of the Join of the Complete Graph and Complete Multipartite Graph by the Eigenvalues of the Kirchhoff Matrix

U Sung Sik

In this paper, we have enumerated the number of spanning trees of $K_n \oplus K_{n_1,\,n_2,\cdots,\,n_t}$ which is the join graph of the complete graph K_n and the complete multipartite graph $K_{n_1,\,n_2,\cdots,\,n_t}$ by the eigenvalues of the Kirchhoff matrix.

Keyword: spanning tree