김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체106(2017)년 제63권 제4호 Vol. 63 No. 4 JUCHE106(2017).

거꿀라쁠라스변환에 의한 충격힘추정의 한가지 방법

김성진, 조원남

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《기초과학은 과학기술강국을 떠받드는 주추입니다. 기초과학이 든든해야 나라의 과학기술이 공고한 토대우에서 끊임없이 발전할수 있습니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 40페지)

최근 충격힘의 거꿀문제 즉 충격이 가해지는 물체의 응답을 측정하여 충격힘을 수값적으로 예측하는 문제가 많이 연구되고있다.[1－3]

선행연구[1]에서는 충격힘의 정확한 예측값을 얻기 위해 수값라쁠라스거꿀변환에 찌호노브정규화와 한쎈의 L－곡선방법을 적용하였으나 표준입력신호를 리용하여 시험물체에 대한 실험실적연구만을 진행하였으며 실제 대상에 적용하기 위한 방도는 제기하지 못하였다.

론문에서는 시험구에 대한 고속촬영기의 촬영자료에 근거하여 입력신호를 결정하고 저항선변형수감요소로 응답을 측정하는 방법으로 타격력측정기재에 작용하는 충격힘을 추정하기 위한 방법을 제기하였다.

1. 저항선변형수감요소에 의한 충격힘의 거꿀해석방법

시간 $t \geq 0$ 에서 자유물체의 특정한 점에 고정된 방향으로 충격힘 $f(t)$ 가 작용하고 이것으로 인한 고정된 방향으로의 응답 $e(t)$ 가 충격힘에 선형으로 비례한다면

$$e(t) = \int_0^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau \tag{1}$$

가 성립된다. 여기서 $f(t)$ 는 체계의 임풀스응답함수이다.

식 (1)을 라쁠라스변환하면 다음과 같다.

$$E(p) = H(p)F(p) \tag{2}$$

$$\begin{Bmatrix} E(p) \\ F(p) \\ H(p) \end{Bmatrix} = \int_0^\infty \begin{Bmatrix} e(t) \\ f(t) \\ h(t) \end{Bmatrix} e^{-pt} dt \tag{3}$$

충격힘은 다음의 절차에 의해 예측할수 있다.[1, 2]

① 물체의 응답 $e(t)$ 를 측정한다.

② 응답 $e(t)$ 의 라쁠라스변환 $E(p)$ 를 계산한다.

③ 미리 동정된 전달함수 $H(p)$ 를 리용하여 방정식 (2)에 의한 충격힘의 라쁠라스변환 $F(p)$ 를 계산한다.

④ $F(p)$ 의 거꿀라쁠라스변환을 계산하여 충격힘 $f(t)$ 를 결정한다.

실천에서 전달함수 $H(p)$ 의 동정은 어려우며 많은 원가가 요구된다.

우리는 다음과 같은 방법으로 전달함수를 실험적으로 동정하였다.

① 고속촬영기를 리용하여 일정한 높이에서 락하하여 타격판에 충돌하는 시험구의 질량중심자리길을 결정한다.

② 결정된 자리길을 리용하여 시험구의 가속도변화곡선과 시험구에 작용하는 힘변화곡선을 구한다.

③ 작용과 반작용의 법칙에 의하여 시험구가 타격판에 주는 힘변화곡선 $f(t)$를 결정한다. 정적교정을 진행한 저항선변형수감요소에 의하여 응답 $e(t)$를 동시에 측정한다.

④ 방정식 (2)를 리용하여 얻어진 결과들로부터 전달함수를 동정한다.

방정식 (2)에 의한 충격힘을 예측하기 위하여서는 응답자료 $e(t)$의 라쁠라스변환과 $F(p)$의 거꿀라쁠라스변환이 둘 다 계산되여야 한다.

방정식 (3)에서 p를 $p=\gamma+j\omega$ 형식으로 바꾸면 다음과 같이 쓸수 있다.

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\gamma t}e^{-i\omega t}dt \tag{4}$$

여기서 $t\le 0$일 때 $f(t)=0$이므로 적분의 아래한계가 $-\infty$로 확장되였다.

류사하게 $E(\omega)$와 $H(\omega)$를 얻는다.

방정식 (4)를 $e^{-\gamma t}$를 창문함수로 가지는 $f(t)$의 푸리에변환으로 볼수 있으므로 FFT를 리용하여 효과적으로 계산할수 있다.

수값변환과 거꿀변환은 각각 다음과 같다.

$$F(n\Delta\omega)=\Delta t\sum_{k=0}^{N-1} f(k\Delta t)e^{-\gamma k\Delta t}e^{-2\pi ikn/N} \tag{5}$$

$$f(k\Delta t)=\frac{e^{\gamma k\Delta t}}{2\pi}\Delta\omega\sum_{n=0}^{N-1} F(n\Delta\omega)e^{2\pi ikn/N},\ k,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,N-1 \tag{6}$$

여기서 Δt와 $\Delta\omega$는 각각 시간과 주파수령역에서의 표본화간격이고 표본화정리에 따라 $\Delta t\Delta\omega=2\pi/N$라는 관계가 성립된다.

경험적인 규칙으로부터 γ는 대략 $\gamma=\dfrac{2\pi}{N\Delta t}$로 되기때문에 방정식 (5), (6)은 각각 라쁠라스변환과 거꿀변환의 근사식으로 된다.

간단한 행렬표기를 유도하면 방정식 (5)는 다음과 같다.

$$F=Af \tag{7}$$

여기서 F와 f는 행벡토르로서 $F=\{F_n\}$, $F_n\equiv F(n\Delta\omega)/\Delta t$, $f\equiv\{f_k\}$, $f_k\equiv f(k\Delta t)$이다.

행렬 A는 $A=U\Sigma V^H$와 같이 특이값분해형태로 씌여질수 있다. 여기서 웃첨수 H는 행렬의 공액전위를 표시하고 U와 V는 N차우니따르행렬이며 Σ는 N차대각선행렬로서 다음과 같다.

$$U\equiv\{U_{nm}\},\ U_{nm}\equiv e^{-2\pi inm/N}/\sqrt{N},\ V\equiv I\ (\text{단위행렬}),\ \Sigma\equiv\mathrm{diag}(\sigma_k),\ \sigma_k\equiv\sqrt{N}e^{-\gamma k\Delta t}$$

특이값분해를 리용하면 행렬 A의 거꿀행렬 A^{-1}은 $V\Sigma^{-1}U^H$로 된다.

방정식 (7)로부터 $f=V\Sigma^{-1}U^HF$가 얻어지는데 이 방정식은 방정식 (6)과 일치하며 이것은 수값라쁠라스거꿀변환을 리용하여 방정식 (7)을 풀수 있다는것을 보여준다.

방정식 (7)에서의 결수행렬 A의 조건수를 최대특이값 σ_0과 최소특이값 σ_{N-1}로 표

시하면 $\mathrm{cond}(A) = \sigma_0 / \sigma_{N-1} = e^{\gamma(N-1)\Delta t}$ 과 같다.

우에서 언급된것처럼 실천에서 γ 의 적당한 값은 $\gamma = 2\pi/(N\Delta t)$ 이고 자료 N의 수는 적어도 128이여야 하는데 이것은 행렬 A의 조건수가 500이상이라는것을 보여준다.

조건수가 500보다 커지면 1%의 오유가 확장되여 실지자료의 크기와 비슷하게 된다.

2. 찌호노브방법에 의한 수값계산오차감소

론문에서는 수값라쁠라스거꿀변환의 정규화기술의 하나인 찌호노브방법을 리용하여 오차를 줄이였다.

찌호노브방법은 f_k 에 관한 다음의 목적함수를 최소화하는 문제이다.

$$\| Af_k - F \|^2 + \lambda \Lambda(f_k) \tag{8}$$

여기서 $\|\cdot\|$는 유클리드노름을 표시한다.

함수 (8)의 두번째 항은 풀이 f_k 를 안정시키는 마디이고 λ 는 안정성을 조절하는 파라메터이다.

론문에서는 안정조절기 $\Lambda(f_k)$ 의 형태를 다음과 같이 두가지로 선택하였다.

$$\Lambda_1(f_k) \equiv \| f_k \|^2, \quad \Lambda_2(f_k) \equiv \| f_k \|^2 + \| Df_k \|^2$$

여기서 D 는 다음과 같은 f_k 의 련속성분의 계차형식을 얻기 위한 행렬이다.

$$D \equiv \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

안정조절기 Λ_1 과 Λ_2 를 리용하면 $V = I$ 와 Σ 가 대각선행렬이라는것을 고려할 때 방정식 (8)을 최소화하는 풀이는 각각 다음과 같이 주어진다.

$$f_\lambda = [\Sigma^{-1}\Sigma^{-1} + \lambda I]^{-1}\Sigma^{-1}U^H F, \quad f_\lambda = [\Sigma^{-1}\Sigma^{-1} + \lambda(I + D^{\mathrm{T}}D)]^{-1}\Sigma^{-1}U^H F$$

3. 수값모의결과분석

MATLAB를 리용한 수값모의결과는 그림과 같다.

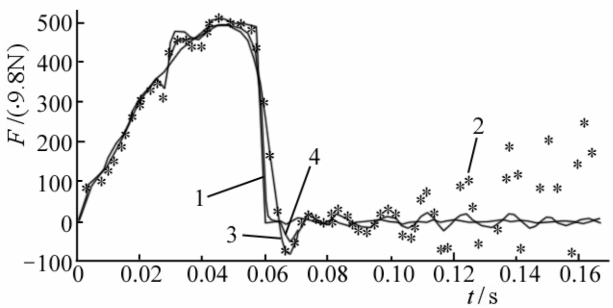

그림. 수값모의결과
1은 검증신호, 2는 정규화를 하지 않은 풀이,
3, 4는 각각 안정조절기 Λ_1, Λ_2 를 적용한 풀이

그림에서 보는바와 같이 찌호노브의 정규화를 진행하지 않은 경우에는 풀이가 심하게 발산하며 충격시간의 2배이상이 경과한 후(우의 경우에는 0.12s이후) 측정값의 50%에 이르게 된다. 반면에 찌호노브의 안정조절기를 적용한 경우에는 풀이가 안정하게 수렴하게 된다.

맺 는 말

론문에서는 저항선변형수감요소를 리용한 동적힘측정방법을 확립하고 측정값의 안정성을 보장하기 위한 한가지 방법을 제기하였다.

참 고 문 헌

[1] G. Pillonetto; Automatica, 42, 2117, 2006.

[2] A. Dahmani; Statistics and Probability Letters, 79, 722, 2009.

[3] 浅見敏彦 等; 日本機械学会論文集(C編), 77, 1674, 2011.

주체105(2016)년 12월 5일 원고접수

An Estimation Method of Impact Force using Inverse Laplace Transformation

Kim Song Jin, Jo Won Nam

We determined the input signal based on film data of test ball using the high-speed camera, and suggested a method for estimating the impact force acting on impact force measuring instrument from the measurement of impact response with the strain gauge.

Key words: impact force, inverse Laplace transformation, Tikhonov regularization