김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제4호

두수준피카드반복법에 기초한 고차원역방향확률미분방정식의 한가지 수치풀이방법

박철규, 김문철

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《과학연구부문에서는 나라의 경제발전과 인민생활향상에서 전망적으로 풀어야 할 문제들과 현실에서 제기되는 과학기술적문제들을 풀고 첨단을 돌파하여 지식경제건설의 지름길을 열어놓아야 합니다.》

역방향확률미분방정식은 최량조종, 금융수학을 비롯한 여러 분야에서 중요하게 리용되는것으로 하여 효률적인 수치풀이방법에 대한 연구가 널리 진행되고있다.

선행연구[2]에서는 우연걸음을 리용한 수치도식을 제기하고 약수렴성을 증명하였으며 선행연구[3]에서는 시공간분할과 θ －도식에 기초하여 분할직경에 관하여 높은 차수로 수렴하는 수치도식을 제기하였다.

선행연구[1]에서는 몽떼－까를로방법과 여러수준피카드반복법에 기초하여 새로운 수치풀이방법을 제기하였는데 이 방법은 계산량이 차원수와 오차의 거꿀에 관하여 다항식정도로 증가하는 도식으로서 100차원이상의 역방향확률미분방정식의 풀이도 충분히 모의할수 있는 방법이다.

론문에서는 선행연구[1]에 기초하여 고차원역방향확률미분방정식의 한가지 수치풀이방법을 제기하였다. 이 방법은 선행연구[1]의 도식과 달리 여러수준피카드반복법이 아니라 두수준피카드반복법을 리용하며 같은 정도의 오차수준에 대하여 계산량이 작은 우점이 있다.

상수 $T>0$ 에 대하여 $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ 가 완비확률공간, $W_t=(W_t^1,\ \cdots,\ W_t^d)^{\mathrm{T}}$ 를 이우에서 정의된 d 차원브라운운동, $\{\mathcal{F}_t\}_{0\le t\le T}$ 는 이 브라운운동의 자연려파에 모든 P－령모임을 포함하도록 확장한 모임벌증가족이라고 하자.

이때 확률토대 $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P,\ \{\mathcal{F}_t\}_{0\le t\le T})$ 우에서 정의된 마르꼬브형역방향확률미분방정식

$$y_t=\varphi(W_T)+\int_t^T f(s,\ y_s)ds-\int_t^T z_s dW_s,\ t\in[0,\ T] \tag{1}$$

를 론의한다.

두수준피카드반복법에 기초한 수치풀이도식은 다음과 같다.

초기단계 ($n<2$)

$$y_0(t,\ x)=0,\ \ z_0(t,\ x)=0 \tag{2}$$

$$\begin{aligned} y_1(t,\ x)&=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\varphi(x+W_{T-t}^{(1,\ i)})+\sum_{j=1}^{Q}w_{1,\ j}f(t_{1,\ j},\ 0)\\ z_1(t,\ x)&=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\varphi(x+W_{T-t}^{(1,\ i)})\frac{W_{T-t}^{(1,\ i)}}{T-t}+\sum_{j=1}^{Q}\frac{w_{1,\ j}}{M}\sum_{i=1}^{M}f(t_{1,\ j},\ 0)\frac{W_{t_{1,\ j}-t}^{(1,\ i)}}{t_{1,\ j}-t}\end{aligned} \tag{3}$$

반복단계 ($n \geq 2$)

$$y_n(t,\ x)=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} y_{n-1}^{i}(t,\ x)+\sum_{j=1}^{Q}\frac{w_{n,\ j}}{M}\sum_{i=1}^{M}[f(t_{n,\ j},\ y_{n-1}(t_{n,\ j},\ x+W_{t_{n,\ j}-t}^{(n,\ i)}))-f(t_{n,\ j},\ y_{n-2}(t_{n,\ j},\ x+W_{t_{n,\ j}-t}^{(n,\ i)}))] \tag{4}$$

$$\begin{aligned} z_n(t,\ x)&=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} z_{n-1}^{i}(t,\ x)+\\ &+\sum_{j=1}^{Q}\frac{w_{n,\ j}}{M}\sum_{i=1}^{M}[f(t_{n,\ j},\ y_{n-1}(t_{n,\ j},\ x+W_{t_{n,\ j}-t}^{(n,\ i)}))-f(t_{n,\ j},\ y_{n-2}(t_{n,\ j},\ x+W_{t_{n,\ j}-t}^{(n,\ i)}))]\frac{W_{t_{n,\ j}-t}^{(n,\ i)}}{t_{n,\ j}-t} \end{aligned} \tag{5}$$

여기서 $W_{s-t}^{(n,\ i)}$는 n번째 반복단계에서 기대값근사를 위하여 리용하는 i번째 d차원정규분포우연량을 나타내는데 반복법의 서로 다른 단계에서 리용하는 우연량들은 서로 독립이며 같은 단계에서도 $W_{s-t}^{(n,\ i)}$들과 $W_{s-t}^{(n,\ j)}$들은 모두 서로 독립이다. $y_{n-1}^{i}(t,\ x),\ z_{n-1}^{i}(t,\ x)$는 각각 $y_{n-1}(t,\ x),\ z_{n-1}(t,\ x)$와 동일분포하는 독립우연량들을 의미한다.

매 단계에서 시간변수에 관한 적분을 Q점가우스－르쟝드르구적법으로 근사시켰고 $(t_{n,1},\ \cdots,\ t_{n,Q})\subset[t,\ T]$는 구적점들이고 $w_{n,\ j}$는 구적점 $t_{n,\ j}$에서의 무게결수를 나타낸다.

명제 1 충분히 미끈한 실함수 $g:[a,\ b]\to\mathbf{R}$가 $\forall n\in\mathbf{N},\ \forall t\in[0,\ T],\ g^{(2n)}(t)\geq 0$을 만족시키면 $\forall q\in \boldsymbol{N},\ \tilde{\int\limits_{[a,\ b]}} g(t)dt=\sum_{j=1}^{q} w_j g(t_j)\leq \int_a^b g(t)dt$가 성립된다. 여기서 $\tilde{\int\limits_{[a,\ b]}} g(t)dt=\sum_{j=1}^{q} w_j g(t_j)$는 $\int_a^b g(t)dt$의 q차르쟝드르근사이다.

명제 2 $\forall n\in\mathbf{N},\ \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n\leq n!\leq\sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n e^{1/12}$

오차평가를 진행하는데 필요한 가정들은 다음과 같다.

가정 1 생성자 $f(s,\ y)$는 y에 관하여 립쉬츠련속이며 $f(s,\ 0)$은 유계이다. 즉

$$\exists C_f>0,\ \forall y_1,\ y_2\in\mathbf{R},\ \forall s\in[0,\ T],\ |f(s,\ y_1)-f(s,\ y_2)|\leq C_f\,|y_1-y_2|$$

$$\exists C_0>0,\ \forall s\in[0,\ T],\ |f(s,\ 0)|\leq C_0$$

가정 2 종점조건함수 $\varphi(x)$는 대역적으로 유계이다. 즉

$$\exists C_\varphi>0,\ \forall x\in\mathbf{R}^d,\ |\varphi(x)|\leq C_\varphi$$

가정 3 방정식 (1)의 실지풀이 $y(t,\ x)$는 대역적으로 유계이다.

$$\exists C_y>0,\ \forall t\in[0,\ T],\ \ x\in\mathbf{R}^d,\ \ |y(t,\ x)|\leq C_y$$

가정 4 임의의 $t\in[0,\ T],\ x\in\boldsymbol{R}^d$에 대하여 $[t,\ T]$에서 정의되는 함수

$$F(s)=E[f(s,\ y(s,\ x+W_{s-t}))],\quad G(s)=E[f(s,\ y(s,\ x+W_{s-t}))W_{s-t}/(s-t)]$$

는 s에 관하여 충분히 미끈하며 그 도함수들도 모두 유계이다. 즉

$$\exists C_d>0,\ \forall t\in[0,\ T],\ x\in\mathbf{R}^d,\quad \sup_{s\in[t,\ T],\ k\in\mathbf{N}} F^{(k)}(s)\leq C_d,\quad \sup_{s\in[t,\ T],\ k\in\mathbf{N}} G^{(k)}(s)\leq C_d$$

다음의 정리는 근사도식 (2)－(5)의 오차에 대한 평가로서 론문의 기본결과이다.

정리 $(y,\ z)$가 역방향확률미분방정식 (1)의 풀이라고 할 때 가정 1－4하에서 도식 (2)－(5)에 의하여 정의되는 근사렬 $(y_n,\ z_n)$에 대하여 다음의 평가가 성립된다.

$$[|(y-E^n[y_n])(t,\ x)|]\le nC_3C_d\,Q^{1/2}\left(\frac{e}{8Q}\right)^{2Q}+C_1\left(\frac{C_2}{\sqrt{M}}\right)^{n-1}e^{C_f\sqrt{M}(T-t)(1+1/C_2)}+\frac{C_y(T-t)^nC_f^n}{n!}$$

$$(E^n[(y_n-E^ny_n)^2(t,\ x)])^{1/2}\le C_1\left(\frac{C_2}{\sqrt{M}}\right)^{n-1}e^{C_f\sqrt{M}(T-t)}$$

여기서 직적공간 $(\Omega_n,\ \mathcal{F}_n,\ P_n)=(\underbrace{\Omega\times\Omega\times\cdots\times\Omega}_{n},\ \underbrace{\mathcal{F}\otimes\mathcal{F}\otimes\cdots\otimes\mathcal{F}}_{n},\ \underbrace{P\times P\times\cdots\times P}_{n})$ 우에서의 기대값과 분산을 각각 $E^n[\cdot]$, $\mathrm{Var}^n[\cdot]$으로, $(\Omega_n,\ \mathcal{F}_n,\ P_n)$에서의 L_p-노름을 $\|\cdot\|_{n,\ p}$로 표시한다. $C_1,\ C_2,\ C_3$은 $T,\ C_f,\ C_y,\ C_0,\ C_d$에만 관계되는 상수이다.

증명 $\mu_n(t):=\sup\limits_{x\in\mathbf{R}^d}[|(y-E^n[y_n])(t,\ x)|]$로 정의하면 가정 3으로부터 $\mu_0(t)\le C_y$이며 다음의 식이 성립된다.

$$\begin{aligned}\mu_n(t)\le&\left(\varepsilon_n(t)+C_f\tilde{\int\limits_{[t,\ T]}}\varepsilon_{n-1}(s_1)ds_1+\cdots+C_f^{n-1}\tilde{\int\limits_{[t,\ T]}}\tilde{\int\limits_{[s_1,\ T]}}\cdots\tilde{\int\limits_{[s_{n-2},\ T]}}\varepsilon_1(s_{n-1})ds_{n-1}\cdots ds_1\right)+\\&+\sum_{k=1}^{n}C_f^k\tilde{\int\limits_{[t,\ T]}}\tilde{\int\limits_{[s_1,\ T]}}\cdots\tilde{\int\limits_{[s_{k-1},\ T]}}\upsilon_{n-k}(s_k)ds_k\cdots ds_1+C_f^n\tilde{\int\limits_{[t,\ T]}}\tilde{\int\limits_{[s_1,\ T]}}\cdots\tilde{\int\limits_{[s_{n-1},\ T]}}\mu_0(s_n)ds_n\cdots ds_1\end{aligned}\tag{6}$$

명제 1, 2로부터 식 (6)의 오른변의 첫 항은 다음의 관계를 만족시킨다.

$$\begin{aligned}&\varepsilon_n(t)+C_f\tilde{\int\limits_{[t,\ T]}}\varepsilon_{n-1}(s_1)ds_1+\cdots+C_f^{n-1}\tilde{\int\limits_{[t,\ T]}}\tilde{\int\limits_{[s_1,\ T]}}\cdots\tilde{\int\limits_{[s_{n-2},\ T]}}\varepsilon_1(s_{n-1})ds_{n-1}\cdots ds_1\le\\&\le(n-1)Q^{1/2}C_3C_d\left(\frac{e}{8Q}\right)^{2Q}\le nC_3C_d\,Q^{1/2}\left(\frac{e}{8Q}\right)^{2Q}\end{aligned}\tag{7}$$

여기서 $C_3=\dfrac{e^{1/3}\pi^{1/2}}{2}\sup\limits_{k\in\mathbf{N}}\dfrac{T^{2Q+k}}{(2Q+1)\cdots(2Q+k)}<\infty$이다.

한편 함수 e^x의 령점에서의 테일러전개로부터 다음의 식이 성립된다.

$$\forall n\in\mathbf{N},\ \exists\xi<x,\ e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)=\frac{e^\xi x^{n+1}}{(n+1)!}\le\frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!}$$

식 (6)의 오른변의 둘째 항을 평가하자.

명제 1로부터 다음의 식들이 성립된다.

$$C_f\tilde{\int\limits_{[t,\ T]}}\upsilon_{n-1}(s_1)ds_1\le C_1C_2^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right)^{n-1}e^{C_f\sqrt{M}(T-t)}\frac{C_f\sqrt{M}(T-t)}{C_2}$$

$$C_f^2\tilde{\int\limits_{[t,\ T]}}\tilde{\int\limits_{[s_1,\ T]}}\upsilon_{n-2}(s_2)ds_2ds_1\le C_1C_2^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right)^{n-1}e^{C_f\sqrt{M}(T-t)}\frac{(C_f\sqrt{M}(T-t))^2}{2C_2^2}$$

일반적으로 다음의 식이 성립된다.

$$C_f^k\tilde{\int\limits_{[t,\ T]}}\tilde{\int\limits_{[s_1,\ T]}}\cdots\tilde{\int\limits_{[s_{k-1},\ T]}}\upsilon_{n-k}ds_k\cdots ds_1\le C_1C_2^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right)^{n-1}e^{C_f\sqrt{M}(T-t)}\frac{(\sqrt{M}C_f(T-t))^k}{k!C_2^k}$$

그러므로

$$\sum_{k=1}^{n} C_f^k \int\limits_{[t,\ T]}^{\sim} \int\limits_{[s_1,\ T]}^{\sim} \cdots \int\limits_{[s_{k-1},\ T]}^{\sim} v_{n-k}(s_k)ds_k \cdots ds_1 \le C_1\left(\frac{C_2}{\sqrt{M}}\right)^{n-1} e^{C_f \sqrt{M}(T-t)(1+1/C_2)} \tag{8}$$

마찬가지로 식 (6)의 오른변의 마지막항은 다음의 식을 만족시킨다.

$$C_f^n \int\limits_{[t,\ T]}^{\sim} \int\limits_{[s_1,\ T]}^{\sim} \cdots \int\limits_{[s_{n-1},\ T]}^{\sim} \mu_0(s_n)ds_n \cdots ds_1 \le \frac{C_y(T-t)^n C_f^n}{n!} \tag{9}$$

식 (7)－(9)를 식 (6)에 넣으면

$$\mu_n(t) \le nC_3C_d\, Q^{1/2}\left(\frac{e}{8Q}\right)^{2Q} + C_1\left(\frac{C_2}{\sqrt{M}}\right)^{n-1} e^{C_f \sqrt{M}(T-t)(1+1/C_2)} + \frac{C_y(T-t)^n C_f^n}{n!}$$

이 성립된다.(증명끝)

이와 같이 도식 (2)－(5)는 선행연구[1]에서 제기한 여러수준피카드반복도식과 매우 류사하며 정리 1로부터 선행연구[1]와 같은 수준의 오차를 달성할수 있다는것을 알수 있다. 특히 식 (4), (5)에서 보는바와 같이 $(t,\ x)$에서 n번째 반복결과를 구하기 위해서는 같은 시공간점에서 $n-1$번째 반복결과를 구해야 한다. 이로부터 식 (4)의 오른변에서 두번째 합의 매 항

$$f(t_{n,\ j},\ y_{n-1}(t_{n,\ j},\ x+W^{(n,\ i)}_{t_{n,\ j}-t})) - f(t_{n,\ j},\ y_{n-2}(t_{n,\ j},\ x+W^{(n,\ i)}_{t_{n,\ j}-t}))$$

를 계산할 때 두번째 항은 앞의 항을 계산할 때의 리용값을 그대로 리용할수 있으며 계산량을 훨씬 줄일수 있게 한다.

이로부터 도식 (2)－(5)의 계산량은 차원수와 오차에 관하여 다같이 다항식정도로 증가하며 여러수준피카드반복도식에 비하여 효률적이라는것을 알수 있다.

참 고 문 헌

[1] M. Hutzenthaler et al.; arXiv, 1708.03223, 2017.

[2] J. Ma et al.; Ann. Appl. Probab., 12, 302, 2002.

[3] W. Zhao et al,: SIAM J. Numer Anal., 4, 1369, 2010.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

A Numerical Scheme for High-Dimensional Backward Stochastic Differential Equations Based on Two-Level Picard Iteration

Pak Chol Gyu, Kim Mun Chol

We propose a new numerical scheme for high-dimensional backward stochastic differential equations based on two-level Picard iteration.

Key words: high-dimension, two-level Picard iteration