김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제4호

분수브라운운동에 관한 평균마당역방향확률미분방정식의 풀이의 유일존재성

리경일, 오훈

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《수학교육을 강화하는것은 자라나는 새 세대들의 과학적인 사고능력을 키워주는데서 중요한 의의를 가집니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제10권 478페지)

선행연구[1]에서는 분수브라운운동에 관한 평균마당확률미분방정식의 풀이의 유일존재성과 그것과 관련된 확률조종문제에 대하여, 선행연구[2]에서는 허스트지수가 $H>1/2$인 경우에 대하여 분수브라운운동에 관한 역방향확률미분방정식의 풀이의 유일존재성에 대하여 연구하였다. 선행연구[3]에서는 분수브라운운동에 관한 역방향확률미분방정식의 풀이의 유일존재성에 대한 보다 일반적인 결과와 변분부등식을 얻었다.

론문에서는 분수브라운운동에 관한 평균마당역방향확률미분방정식의 풀이의 유일존재성을 증명하였다.

다음과 같은 분수브라운운동에 관한 평균마당역방향확률미분방정식을 생각하자.

$$\begin{cases} -dY_t = g(t,\ \eta_t,\ Y_t,\ Z_t,\ EY_t,\ EZ_t)dt - Z_t dB_t^{(H)},\ (t\in[0,\ T]) \\ Y_T = h(\eta_T) \end{cases} \tag{1}$$

여기서 $\eta_t = \eta_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s^{(H)}$ 이다.

방정식의 풀이에 대하여 론의하기 위하여 다음의 모임들을 생각하자.

$$L^2(F_r;\mathbf{R}) = \{\xi:\Omega\to\mathbf{R} \mid \xi:\ F_r-\text{가측},\ E[|\xi|^2]<\infty\}$$

$$C_{\text{pol}}^{1,\ 3}([0,\ T]\times\mathbf{R}) = \{\varphi \mid C^{1,\ 3}([0,\ T]\times\mathbf{R}),\ \varphi\text{의 모든 도함수들이 다항식증가}\}$$

$$M_{[0,\ T]} = \left\{Y=\varphi(\cdot,\ \eta(\cdot)) \mid \varphi\in C_{\text{pol}}^{1,\ 3}([0,\ T]\times\mathbf{R}),\ \frac{\partial\varphi}{\partial t}\in C_{\text{pol}}^{0,\ 1}([0,\ T]\times\mathbf{R}),\ t\in[0,\ T]\right\}$$

그리고 모임 $\tilde{M}_{[0,\ T]}$와 $\tilde{M}_{[0,\ T]}^H$는 각각 모임 $M_{[0,\ T]}$를 노름

$$\|Y\| = \left(E\int_0^T e^{\beta t}|Y(t)|^2\,dt\right)^{1/2},\quad \|Z\| = \left(E\int_0^T t^{2H-1}e^{\beta t}|Z(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$$

에 관하여 완비화한 모임이다.

가정 1 h는 미분가능하며 다항식증가한다.

가정 2 $g:[0,\ T]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$는 다음의 조건을 만족시킨다.

$$\forall t\in[0,\ T],\ \forall x,\ y,\ \bar{y},\ z,\ \bar{z},\ u,\ \bar{u},\ v,\ \bar{v}\in\mathbf{R};$$

$$|g(t,\ x,\ y,\ z,\ u,\ v)-g(t,\ x,\ \bar{y},\ \bar{z},\ \bar{u},\ \bar{v})| \le C(|y-\bar{y}|+|z-\bar{z}|+|u-\bar{u}|+|v-\bar{v}|)$$

보조정리 g가 다항식증가하는 미분가능한 함수이고 f는 $C_{\text{pol}}^{0,1}$에 속하는 함수라고 하면 $\begin{cases} -dY_t = f(t, \eta_t)dt - Z_t dB_t^{(H)} \ (t\in[0, T]) \\ Y_T = g(\eta_T) \end{cases}$는 유일풀이 $(Y, Z)\in \tilde{M}_{[0, T]}\times \tilde{M}_{[0, T]}^H$를 가진다.

정리 가정 1, 2하에서 방정식 (1)은 유일풀이 $(Y, Z)\in \tilde{M}_{[0, T]}\times \tilde{M}_{[0, T]}^H$를 가진다.

증명 임의의 $(y_t, z_t)\in \tilde{M}_{[0, T]}\times \tilde{M}_{[0, T]}^H$에 대하여 다음의 방정식을 생각하자.

$$\begin{cases} -dY_t = g(t, \eta_t, y_t, z_t, Ey_t, Ez_t)dt - Z_t dB_t^{(H)} \ (t\in[0, T]) \\ Y_T = h(\eta_T) \end{cases} \tag{2}$$

보조정리에 의하여 방정식 (2)는 유일풀이 $(Y_t, Z_t)\in \tilde{M}_{[0, T]}\times \tilde{M}_{[0, T]}^H$를 가진다.

이제 $I(y_t, z_t)=(Y_t, Z_t)$인 넘기기 $I: \tilde{M}_{[0, T]}\times \tilde{M}_{[0, T]}^H \to \tilde{M}_{[0, T]}\times \tilde{M}_{[0, T]}^H$를 생각하자.

$n\in \mathbf{N}$에 대하여 $t_i=(i-1)T/n \ (i=1, \cdots, n+1)$라고 하자.

먼저 $[t_n, T]$에서 넘기기 I가 축소연산자라는것을 증명하자.

임의의 $(y_t, z_t)\in \tilde{M}_{[0, T]}\times \tilde{M}_{[0, T]}^H$와 $(\bar{y}_t, \bar{z}_t)\in \tilde{M}_{[0, T]}\times \tilde{M}_{[0, T]}^H$에 대하여

$$(Y_t, Z_t)=I(y_t, z_t), \ (\bar{Y}_t, \bar{Z}_t)=I(\bar{y}_t, \bar{z}_t)$$

라고 하자. 그리고 $(\hat{y}_t, \hat{z}_t)=(y_t-\bar{y}_t, z_t-\bar{z}_t)$, $(\hat{Y}_t, \hat{Z}_t)=(Y_t-\bar{Y}_t, Z_t-\bar{Z}_t)$로 놓자.

확률적분의 변환공식을 리용하면 $t\in[t_n, T]$에 대하여 다음의 식이 성립된다.

$$\begin{aligned} &e^{\beta t}\hat{Y}_s^2+\beta\int_t^T e^{\beta s}\hat{Y}_s^2 ds+2\int_t^T e^{\beta s}D_s^H\hat{Y}_s\hat{Z}_s ds+\int_t^T e^{\beta s}\hat{Y}_s\hat{Z}_s dB_s^{(H)}= \\ &=2\int_t^T e^{\beta s}\hat{Y}_s[g(s, \eta_s, y_s, z_s, Ey_s, Ez_s)-g(s, \eta_s, \bar{y}_s, \bar{z}_s, E\bar{y}_s, E\bar{z}_s)]ds \end{aligned} \tag{3}$$

여기서 $D_s^H\hat{Y}_s=\dfrac{\hat{\sigma}_s}{\sigma_s}\hat{Z}_s$이며 상수 $K>0$이 있어서 $\dfrac{t^{2H-1}}{K}\le\dfrac{\hat{\sigma}_t}{\sigma_t}\le Kt^{2H-1} \ (t\in[0, T])$이다.

일반성을 잃지 않고 $K>2$를 취하면

$$\begin{aligned} &E\left(e^{\beta t}\hat{Y}_t^2+\beta\int_t^T e^{\beta s}\hat{Y}_s^2 ds+\frac{2}{K}\int_t^T e^{\beta s}s^{2H-1}\hat{Z}_s^2 ds\right)\le \\ &\le 2\int_t^T e^{\beta s}\hat{Y}_s E[g(s, \eta_s, y_s, z_s, Ey_s, Ez_s)-g(s, \eta_s, \bar{y}_s, \bar{z}_s, E\bar{y}_s, E\bar{z}_s)]ds \end{aligned} \tag{4}$$

가정 2에 의하여 식 (4)는 다음과 같이 변형할수 있다.

$$E\left(e^{\beta t}\hat{Y}_t^2+\beta\int_t^T e^{\beta s}\hat{Y}_s^2 ds+\frac{2}{K}\int_t^T e^{\beta s}s^{2H-1}\hat{Z}_s^2 ds\right)\le 4C\int_t^T e^{\beta s}E(|\hat{Y}_s|(|\hat{y}_s|+|\hat{z}_s|))ds \tag{5}$$

$\beta\ge 1$을 취하고 휠데르의 부등식을 리용하면

$$E\left(e^{\beta t}\hat{Y}_t^2+\beta\int_t^T e^{\beta s}\hat{Y}_s^2 ds+\frac{2}{K}\int_t^T e^{\beta s}s^{2H-1}\hat{Z}_s^2 ds\right)\le 4C\int_t^T (e^{\beta s}E|\hat{Y}_s|^2)^{1/2}(e^{\beta s}E(|\hat{y}_s|+|\hat{z}_s|)^2)^{1/2} ds \tag{6}$$

$u(t)=(e^{\beta t}E|\hat{Y}_t|^2)^{1/2}$ 으로 놓으면 식 (6)으로부터 $u(t)^2\le 4C\int_t^T u(s)(e^{\beta s}E(|\hat{y}_s|+|\hat{z}_s|)^2)^{1/2}ds$ 가 나온다. 따라서 $u(t)\le 2C\int_t^T (e^{\beta s}E(|\hat{y}_s|+|\hat{z}_s|)^2)^{1/2}ds \le 2\sqrt{2}C\int_t^T (e^{\beta s}E(|\hat{y}_s|^2+|\hat{z}_s|^2))^{1/2}ds$ 이므로

$$u(t)^2\le 16C^2\left(\int_t^T (e^{\beta s}E(|\hat{y}_s|^2+|\hat{z}_s|^2))^{1/2}ds\right)^2$$

이다. 이 식의 량변을 구간 $[t_n,\ T]$ 에서 t 에 관하여 적분하면 다음과 같다.

$$\int_{t_n}^T u(s)^2ds\le 16C^2(T-t_n)\left(\int_{t_n}^T (e^{\beta s}E(|\hat{y}_s|^2+|\hat{z}_s|^2))^{1/2}ds\right)^2$$

웃식의 오른변의 크기를 평가하자.

$$\left(\int_{t_n}^T (e^{\beta s}E(|\hat{y}_s|^2+|\hat{z}_s|^2))^{1/2}ds\right)^2\le\left(\int_{t_n}^T [e^{\beta s}E(|\hat{y}_s|^2)]^{1/2}ds+\int_{t_n}^T [e^{\beta s}E(|\hat{z}_s|^2)]^{1/2}ds\right)^2\le$$

$$\le 2\left(\int_{t_n}^T [e^{\beta s}E(|\hat{y}_s|^2)]^{1/2}ds\right)^2+2\left(\int_{t_n}^T\left[\frac{1}{s^{2H-1}}e^{\beta s}s^{2H-1}E(|\hat{z}_s|^2)\right]^{1/2}ds\right)^2\le$$

$$\le 2(T-t_n)\int_{t_n}^T e^{\beta s}E(|\hat{y}_s|^2)ds+\frac{2(T^{2-2H}-t_n^{2-2H})}{2-2H}\int_{t_n}^T e^{\beta s}s^{2H-1}E(|\hat{z}_s|^2)ds\le$$

$$\le 2\left[(T-t_n)+\frac{T^{2-2H}-t_n^{2-2H}}{2-2H}\right]E\int_{t_n}^T e^{\beta s}(|\hat{y}_s|^2+s^{2H-1}|\hat{z}_s|^2)ds$$

그러므로

$$\int_{t_n}^T u(s)^2ds\le G(T-t_n)E\int_{t_n}^T e^{\beta s}(|\hat{y}_s|^2+s^{2H-1}|\hat{z}_s|^2)ds,\quad G=32C^2\left[(T-t_n)+\frac{T^{2-2H}-t_n^{2-2H}}{2-2H}\right] \tag{7}$$

이 성립되며 마찬가지로 다음식이 성립한다.

$$\int_{t_n}^T \frac{1}{s^{2H-1}}u(s)^2ds\le G\frac{T^{2-2H}-t_n^{2-2H}}{2-2H}E\int_{t_n}^T e^{\beta s}(|\hat{y}_s|^2+s^{2H-1}|\hat{z}_s|^2)ds \tag{8}$$

식 (5)로부터 다음의 식이 성립된다.

$$E\left(\int_{t_n}^T e^{\beta s}|\hat{Y}_s|^2ds+\frac{2}{K}\int_{t_n}^T e^{\beta s}s^{2H-1}|\hat{Z}_s|^2ds\right)\le 4CE\int_{t_n}^T e^{\beta s}\left(\frac{1}{\upsilon}\left(1+\frac{1}{s^{2H-1}}\right)|\hat{Y}_s|^2+\upsilon|\hat{y}_s|^2+\upsilon s^{2H-1}|\hat{z}_s|^2\right)ds\le$$

$$\le\frac{4C}{\upsilon}E\int_{t_n}^T e^{\beta s}\left(1+\frac{1}{s^{2H-1}}\right)|\hat{Y}_s|^2ds+4C\upsilon E\int_{t_n}^T e^{\beta s}(|\hat{y}_s|^2+s^{2H-1}|\hat{z}_s|^2)ds$$

여기서 υ 는 정의상수이다.

식 (7), (8)을 리용하면

$$E\left(\int_{t_n}^{T} e^{\beta s}|\hat{Y}_s|^2\,ds+\int_{t_n}^{T} e^{\beta s}s^{2H-1}|\hat{Z}_s|^2\,ds\right)\le \tilde{G}\cdot E\int_{t_n}^{T} e^{\beta s}(|\hat{y}_s|^2+s^{2H-1}|\hat{z}_s|^2)ds$$

가 성립된다. 여기서 $\tilde{G}=\frac{2CGK}{\upsilon}\left[(T-t_n)+\frac{T^{2-2H}-t_n^{2-2H}}{1-H}\right]+2C\upsilon K$ 이다.

이제 $2C\upsilon K<1/4$ 이 되도록 υ 를 취하고 n 을 충분히 크게 하여

$$\frac{2CGK}{\upsilon}\left[(T-t_n)+\frac{T^{2-2H}-t_n^{2-2H}}{1-H}\right]<\frac{1}{2}$$

이 되도록 한다.

그러면 $E\left(\int_{t_n}^{T} e^{\beta s}|\hat{Y}_s|^2\,ds+\int_{t_n}^{T} e^{\beta s}s^{2H-1}|\hat{Z}_s|^2\,ds\right)\le \frac{3}{4}E\int_{t_n}^{T} e^{\beta s}(|\hat{y}_s|^2+s^{2H-1}|\hat{z}_s|^2)ds$ 가 성립되므로 I 는 $\tilde{M}_{[t_n,\ T]}\times\tilde{M}_{[t_n,\ T]}^H$ 우에서의 축소연산자이다.

따라서 방정식 (1)은 구간 $[t_n,\ T]$ 우에서 유일풀이를 가진다.

마찬가지로 I 는 $\tilde{M}_{[t_{n-1},\ t_n]}\times\tilde{M}_{[t_{n-1},\ t_n]}^H$ 우에서의 축소연산자로 된다.

이런 방법으로 계속하면 식 (1)은 $\tilde{M}_{[0,\ T]}\times\tilde{M}_{[0,\ T]}^H$ 우에서 유일풀이를 가진다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] R. Buckdahn et al.; SIAM J. Control Optimi., 55, 3, 1500, 2017.

[2] Y. Hu et al.; SIAM J. Control Optimi., 48, 1, 1675, 2009.

[3] L. Maticiuc et al.; Journal of Theoret. Probab., 28, 337, 2015.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

Existence and Uniqueness of the Solutions to Mean-Field Backward Stochastic Differential Equation Driven by Fractional Brownian Motion

Ri Kyong Il, O Hun

We prove the existence and uniqueness of the solutions to a mean-field backward stochastic differential equation driven by the fractional Brownian motion with Hurst index $H>1/2$.

Key words: mean-field, fractional Brownian motion