김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제3호

키르히호프행렬의 고유값을 리용한 완전그라프와 완전다조그라프의 강적그라프에서의 생성나무개수공식에 대한 간단한 증명

우승식

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《기초과학을 끊임없이 심화발전시키지 않고서는 첨단과학기술을 연구도입할수도 없고 새로운 높은 수준의 과학기술을 연구개발할수도 없습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제22권 21페지)

그라프에서의 생성나무개수평가문제는 망의 안전성문제, 콤퓨터과학에서의 효과적인 알고리듬설계, 화학에서 이소화합물의 종류평가 등 여러 분야에서 리론실천적으로 수많이 제기되는 셈세기조합의 중요한 분야이다.

론문에서는 완전그라프와 완전다조그라프의 강적그라프에서의 생성나무개수공식을 키르히호프행렬의 고유값을 리용하여 간단히 증명하였다.

두 그라프 $G_1=(V_1,\ U_1),\ G_2=(V_2,\ U_2)$의 강적그라프(strong product graph)[11]를 다음과 같이 정의하고 $G_1 \otimes G_2=(V,\ U)$로 표시한다. 즉 정점모임은 두 그라프의 정점모임의 데까르트적 $V:=V_1\times V_2$이고 릉모임 U는 다음과 같다.

$G_1 \otimes G_2$의 두 정점 $vu,\ v'u'\ (v,\ v'\in V_1,\ u,\ u'\in V_2)$ 사이의 릉은 다음의 세가지 조건중 어느 하나가 성립할 때 존재한다.

ㄱ) $\{v,\ v'\}\in U_1,\ u=u'$

ㄴ) $\{u,\ u'\}\in U_2,\ v=v'$

ㄷ) $\{v,\ v'\}\in U_1,\ \{u,\ u'\}\in U_2$

그라프 G의 두 정점 $u,\ v$ 사이의 릉의 개수를 정점쌍 $(u,\ v)$의 다중도 또는 릉 $(u,\ v)$의 다중도라고 부르고 $l_G(u,\ v)$로 표시한다. 그라프 G의 정점 v에 이웃하고있는 릉의 개수를 이 정점의 차수라고 부르고 $d_G(v)$로 표시한다.

$n-$정점다중그라프 G에 대하여 $i=j$일 때에는 $a_{ij}:=0$이고 $i\neq j$일 때에는 $a_{ij}:=l_G(v_i,\ v_j)$인 n차행렬 $A(G)=(a_{ij})_{n,n}$을 G의 이웃행렬이라고 부른다.

또한 $n-$정점다중그라프 G에 대하여 $i=j$일 때에는 $d_{ij}:=d_G(v_i)$이고 $i\neq j$일 때에는 $d_{ij}:=0$인 n차행렬 $D(G)=(d_{ij})_{n,n}$을 G의 차수행렬이라고 부른다.

선행연구[4]에서는 임의의 $n-$정점다중그라프 G에 대하여 n차행렬 $L(G)=D(G)-A(G)$의 임의의 주대각선원소에 대한 여소행렬식은 서로 같으며 그 값은 G의 생성나무개수와 같다는것을 밝혔다. 이때 행렬 $L(G)$를 G의 키르히호프행렬, 이 사실을 키르히호프행렬에 의한 행렬나무정리라고 부른다.

또한 선행연구[4]에서는 키르히호프행렬의 고유값에 의하여 그라프 G의 생성나무개수를 구하는 방법(키르히호프행렬의 고유값에 의한 행렬나무정리)을 주었다.

선행연구[5－8]에서는 각각 완전그라프와 완전2조그라프, 완전3조그라프와 완전다조그라프에서의 생성나무개수를 1 : 1넘기기에 의한 방법, 생성함수법 등 여러가지 방법으로

평가하였으며 선행연구[9]에서는 $m-$중그라프 $K_n^m+\alpha G$ 에서의 생성나무개수를 키르히호프행렬에 의한 행렬나무정리를 리용하여 평가하였다.

선행연구[10]에서는 뿌리가 1, 2, $\cdots$, k 인 $[n]$ 우에서 표식붙은 뿌리가진 수림의 개수와 뿌리가 1, 2, $\cdots$, k, $k+1$ 인 $[n]$ 우에서 표식붙은 뿌리가진 수림의 개수사이 선형재귀관계를 설정하고 그로부터 케일리공식과 완전2조그라프, 완전3조그라프에서의 생성나무개수를 평가하였다.

선행연구[12]에서는 완전그라프와 륜체의 강적그라프에서 완전독립생성나무의 존재성과 그 개수에 대하여 평가하였다.

선행연구[1, 2]에서는 각각 키르히호프행렬에 의한 행렬나무정리를 리용하여 표식붙은 강적그라프 $K_n\otimes K_{p,q}$ 와 $K_n\otimes K_{n_1,n_2,\cdots,n_t}$ 의 생성나무개수를 평가하였다.

그러나 키르히호프행렬에 의한 행렬나무정리를 리용하면 주어진 그라프의 정점개수가 n 인 경우 성분들이 파라메터로 되여있는 $n-1$ 차행렬식을 계산하여야 하는 난점이 있다.

론문에서는 키르히호프행렬에 의한 행렬나무정리대신에 그보다 더 간단한 방법인 키르히호프행렬의 고유값에 의한 행렬나무정리를 리용하여 표식붙은 강적그라프 $K_n\otimes K_{p,q}$ 에서의 생성나무개수를 평가한 다음 이 수법을 일반화하여 표식붙은 강적그라프 $K_n\otimes K_{n_1,n_2,\cdots,n_t}$ 에서의 생성나무개수를 평가하였다.

보조정리 1[4] G 를 단순무방향그라프, L 을 n 차행렬로서 G 의 키르히호프행렬이라고 하자. λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_n 을 L 의 고유값들이라고 하자. 이때 G 의 생성나무개수는

$$\frac{1}{n}\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\cdots\cdot\lambda_{n-1}$$

이다. 여기서 $\lambda_n=0$ 이다.

보조정리 2[3] n 차행렬 A 에 대하여 모든 고유값들의 합은 주대각선원소들의 합과 같다.

보조정리 3 n 차행렬 A 에 대하여 행렬 $A-\lambda_0 E$ 의 위수가 $m\,(m<n)$ 이면 $\lambda=\lambda_0$ 은 행렬 A 의 $(n-m)$ 중고유값이다.

n 차행렬 A 에 대하여 μ_0 이 행렬 $A-\lambda_0 E$ 의 고유값이면 $\lambda_0+\mu_0$ 은 행렬 A 의 고유값이다.

먼저 완전그라프 K_n 과 완전2조그라프 $K_{p,q}$ 의 강적그라프 $K_n\otimes K_{p,q}$ 의 생성나무개수를 평가하자.

정리 1 강적그라프 $K_n\otimes K_{p,q}$ 의 생성나무개수는 다음과 같다.

$$\nu(K_n\otimes K_{p,q})=n^{np+nq-2}p^{q-1}q^{p-1}(p+1)^{nq-q}(q+1)^{np-p} \tag{1}$$

다음 완전그라프 K_n 과 완전다조그라프 $K_{n_1,n_2,\cdots,n_t}$ 의 강적그라프 $K_n\otimes K_{n_1,n_2,\cdots,n_t}$ 에서의 생성나무개수를 평가하자. $m=n_1+n_2+\cdots+n_t$, $m_i=m-n_i$, $i=\overline{1,\ t}$ 로 놓자.

정리 2 강적그라프 $K_n\otimes K_{n_1,n_2,\cdots,n_t}$ 의 생성나무개수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\nu(K_n\otimes K_{n_1,n_2,\cdots,n_t})&=n^{nm-2}m^{t-2}\prod_{i=1}^{t}(m_i+1)^{(n-1)n_i}\prod_{i=1}^{t}m_i^{n_i-1}=\\&=n^{n(m-1)}\prod_{i=1}^{t}(m_i+1)^{(n-1)n_i}\upsilon(K_n)\upsilon(K_{n_1,n_2,\cdots,n_t})\end{aligned} \tag{2}$$

때름 완전다조그라프 $K_{n_1, n_2, \cdots, n_t}$ 의 생성나무개수는 다음과 같다.

$$\nu(K_{n_1, n_2, \cdots, n_t}) = m^{t-2}\prod_{i=1}^{t} m_i^{n_i-1} \tag{3}$$

증명 정리 2에서 취급한 그라프에서 $n=1$로 놓으면 $K_1 \otimes K_{n_1, n_2, \cdots, n_t}$가 얻어지는데 이 그라프는 $K_{n_1, n_2, \cdots, n_t}$와 동형이다. 동형인 그라프들의 생성나무개수는 같다. 한편 식 (2)에서 $n=1$로 놓으면 식 (3)이 얻어진다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보(자연과학), 63, 1, 6, 주체106(2017).

[2] **김일성**종합대학학보 수학, 64, 2, 102, 주체107(2018).

[3] 리근배, 김률; 대수학, **김일성**종합대학출판사, 47～156, 주체105(2016).

[4] C. Godsil, G. Royyle; Algebraic Graph Theory, Springer, 1～443, 2001.

[5] M. Z. Abu-sbeih; Discrete Mathematics, 84, 205, 1990.

[6] O. Egecioglu, J. B. Remmel; J. of Combinatorial Theory, 42, 15, 1986.

[7] J. Yinglie, L. Chunlin; Auatralasian J. of Combinatorics, 28, 73, 2003.

[8] L. Clark; Bull. Inst. Combin. Appl., 38, 50, 2003.

[9] S. D. Nikolopoulos, C. Papadopoulos; Discrete Mathematics and Theorical Computer Science, 8, 235, 2006.

[10] Song Guo et a1.; Discrete Mathematics, 340, 695, 2017.

[11] M. Hellmuth et a1.; European Journal of Combinatorics, 30, 1119, 2009.

[12] B. Darties et a1.; Discrete Applied Mathematics, 217, 163, 2017.

주체109(2020)년 3월 15일 원고접수

The Simple Proof of the Enumeration for the Number of Spanning Trees of the Strong Product Graph of the Complete Graph and the Complete Multipartite Graph by Using Eigenvalues of the Kirchhoff Matrix

U Sung Sik

In this paper, we have enumerated the number of spanning trees of the labelled strong product graph $K_n \otimes K_{p,q}$ by the method using eigenvalues of the Kirchhoff matrix that is one of the simple methods.

And we have enumerated the number of spanning trees of the strong product graph $K_n \otimes K_{n_1, n_2, \cdots, n_t}$ by using this method.

Keywords: complete graph, complete multipartite graph, strong product graph