김일성종합대학학보　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　주체107(2018)년
수 학　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　제64권 제3호

조합적방법에 기초한 한가지 결합그라프에서 생성나무와 생성수림개수평가

우승식, 차성철

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《수학은 모든 자연과학의 기초로 될뿐아니라 사회현상을 연구하는데서도 중요한 수단으로 됩니다. 수학교육을 강화하는것은 자라나는 새 세대들의 과학적인 사고능력을 키워주는데서 중요한 의의를 가집니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제10권 478폐지)

우리는 화학, 생물학, 알고리듬설계 등에서 제기되는 그라프적문제들중의 하나인 표식붙은 결합그라프 K_m+H_n에서의 뿌리가진 생성나무와 생성수림개수를 조합적방법으로 평가하였다. 여기서 H_n은 n개의 정점들로 이루어진 릉이 하나도 없는 그라프이다.

선행연구[1]에서는 행렬나무정리를 리용하여 완전그라프와 완전2조그라프의 강적 및 데까르뜨적그라프에서의 생성나무개수를, 선행연구[2]에서는 조합적방법으로 완전3조그라프에서의 생성나무개수를, 선행연구[4]에서는 1：1대응법으로 각각 완전3조그라프와 완전다조그라프에서의 생성나무개수를 평가하였다.

선행연구[3]에서는 $m,\ n$개의 정점을 가진 표식붙은 완전2조그라프 $K_{m,\ n}$에서의 생성수림개수를 조합분해법으로 평가하였다.

론문에서는 표식붙은 결합그라프 K_m+H_n의 뿌리가진 생성나무와 생성수림개수를 조합적방법으로 평가하였다.

정점 z의 바깥반차수를 $d^+(z)$로, 아낙반차수를 $d^-(z)$로 표시하자.

정점모임이 서로 비교차하는 두 그라프 $G_1=(V_1,\ E_1)$과 $G_2=(V_2,\ E_2)$가 주어졌을 때 그라프 $(V_1\cup V_2,\ E_1\cup E_2\cup E(V_1,\ V_2))$를 G_1과 G_2의 결합그라프라고 부르고 G_1+G_2로 표시한다. 여기서 $E(V_1,\ V_2)=\{(i,\ j)\,|\,i\in V_1,\ j\in V_2\}$이고 $(i,\ j)$는 정점 $i\in V_1,\ j\in V_2$사이의 릉을 의미한다.

분명히 $K_{m,\ n}$은 그라프 $H_m,\ H_n$에 의해 이루어진 결합그라프이다.

론문의 목적은 표식붙은 결합그라프 K_m+H_n (K_m은 정점개수가 m인 완전그라프이다.)의 생성나무와 생성수림의 개수평가식에 대한 조합적증명을 주는것이다.

표식붙은 결합그라프 K_m+H_n의 생성나무와 생성수림개수를 평가하자.

그라프 G의 정점모임을 $V(G)$로 표시한다.

보조정리 l개의 뿌리를 가진 완전그라프 K_m의 생성수림개수 $f(m,\ l)$은 다음과 같다.

$$f(m,\ l)=\binom{m}{l}lm^{m-l-1} \tag{1}$$

l개의 뿌리를 가진 K_m의 표식붙은 뿌리가진 생성수림들의 모임을 $D(m,\ l)$로 표시하자. 즉 다음과 같다고 하자.

$$f(m,\ l)=|D(m,\ l)| \tag{2}$$

정리 1 K_m+H_n 의 표식붙은 생성나무개수 $g(m, n)$ 은 다음과 같이 표시된다.

$$g(m,\ n)=m^{n-1}(m+n)^{m-1}$$

증명 먼저 $V(K_m)=\{x_1,\ x_2,\cdots,\ x_m\}$, $V(H_n)=\{y_1,\ y_2,\cdots,\ y_n\}$ 을 각각 K_m 과 H_n 의 정점모임이라고 하고 $y_1\in V(H_n)$ 을 K_m+H_n 의 주어진 뿌리라고 하자.

$D(m,\ 0;\ n,\ |\{y_1\}|)$ 을 뿌리가 y_1 인 K_m+H_n 의 표식붙은 생성나무모임, $T(m, n)$ 을 K_m+H_n 의 표식붙은 생성나무모임이라고 하면 분명히 $|T(m,\ n)|=|D(m,\ 0;\ n,\ |\{y_1\}|)|$ 이다.

매 그라프 $F\in D(m,\ l)$ 에 대하여 다음과 같이 K_m+H_n 의 뿌리가진 생성나무들을 구성하자.

매 $y\in V(H_n)\setminus\{y_1\}$ 과 어떤 $x\in V(F)$ 를 릉 $(y,\ x)$ 로 련결하자.

이러한 방법에는 m^{n-1} 가지가 있다.

얻어진 그라프 G 는 매 련결성분이 바깥반차수가 0 인 $V(K_m)$ 에서의 유일한 정점을 가지는 l 개의 약련결성분을 가진다.

이제 매 고정된 옹근수 t 에 대하여 G 에 t 개의 릉들을 다음과 같이 련속적으로 첨가하여 얻어진 그라프를 G' 로 표시하자.

매 걸음에서 임의의 정점 $y\in V(H_n)\setminus\{y_1\}$ 과 이미 얻어진 그라프에서 y 를 포함하지 않는 임의의 련결성분에 들어있는 바깥반차수가 0 인 유일한 정점 $x\in V(K_m)$ 사이에 $(x,\ y)$ 형태의 릉을 첨가한다. 이러한 릉이 첨가될 때마다 매번 련결성분개수가 1만큼씩 작아진다.

$|V(H_n)\setminus\{y_1\}|=n-1$ 이고 이미 얻어진 그라프에서 y 를 포함하지 않는 련결성분의 개수는 $l-1$ 이므로 첫번째로 이러한 릉을 선택하는 방법은 $(n-1)(l-1)$ 가지이다.

마찬가지로 두번째로 릉을 선택하는데는 $(n-1)(l-2)$ 가지 방법이 있고 같은 방법으로 계속하여 t 번째로 릉을 선택하는데는 $(n-1)(l-t)$ $(0\le t\le l-1)$ 가지 방법이 있다.

왜냐하면 G 의 련결성분의 개수가 l 이기때문이다.

이렇게 얻어진 그라프 G' 는 매개가 $V(K_m)$ 에 속하는 유일한 정점만이 바깥반차수가 0이고 나머지 모든 정점들은 바깥반차수가 1이다.

바깥반차수가 0인 이 정점들로부터 y_1 에로의 릉들을 첨가하면 G 를 포함하고 y_1 의 아낙반차수는 $l-t$ 인 $D(m,\ 0;\ n,\ |\{y_1\}|)$ 에 속하는 생성나무 T' 를 얻는다.

G' 를 형성하기 위해 t 개의 릉이 G 에 첨가되는 순서를 무시하면 고정된 옹근수 t 에 대하여 다음과 같은 개수의 뿌리가진 생성나무 T' 가 얻어진다.

$$\frac{[(n-1)(l-1)][(n-1)(l-2)]\cdots[(n-1)(l-t)]}{t!}=\binom{l-1}{t}(n-1)^t$$

이것은 G 를 포함하는 생성나무 T 가 $D(m,\ 0;\ n,\ |\{y_1\}|)$ 에 $\sum_{t=0}^{l-1}\binom{l-1}{t}(n-1)^t=n^{l-1}$ 개 있다는것을 의미한다.

따라서 등식 (2)와 보조정리에 의하여

$$g(m,\ n)=|D(m,\ 0;\ n,\ |\{y_1\}|)|=\sum_{l=1}^{m}|D(m,\ l)|n^{l-1}m^{n-1}=\sum_{l=1}^{m}\binom{m}{l}lm^{m-l-1}n^{l-1}m^{n-1}=m^{n-1}(m+n)^{m-1}$$

으로 된다.(증명끝)

정리 2 K_m에 l개의 뿌리가 있고 H_n에 k개의 뿌리가 있는 K_m+H_n의 표식붙은 생성수림의 개수 $g(m,\ l;\ n,\ k)$는 다음과 같다.

$$g(m,\ l;\ n,\ k)=\binom{m}{l}\cdot\binom{n}{k}m^{n-k-1}(m+n)^{m-l-1}(lm+mk+nl-lk)$$

증명 $V(H_n)=\{y_1,\ y_2,\cdots,\ y_n\}$이 H_n의 정점모임이고 $\{y_{i_1},\ y_{i_2},\cdots,\ y_{i_k}\}$를 H_n에 속하는 주어진 뿌리라고 하자.

그러면 $V(H_n)$에서 이러한 k개의 뿌리를 선택하는 방법은 $\binom{n}{k}$가지이다.

$V(K_m)=\{x_1,\ x_2,\cdots,\ x_m\}$을 K_m의 정점모임이고 $Y'=V(H_n)\setminus\{y_{i_1},\ y_{i_2},\cdots,\ y_{i_k}\}$를 $V(H_n)$의 부분모임이라고 하자.

매 그라프 $F\in D(m,\ s)$ $(s\ge l)$에 대하여 K_m에 l개의 뿌리가 있고 H_n에 k개의 뿌리가 있는 K_m+H_n의 표식붙은 뿌리가진 생성수림들을 구성한다.

매 $y\in Y'$와 어떤 $v\in V(F)$사이에 릉 $(y,\ v)$로 련결한다.

이러한 방법에는 m^{n-k}가지가 있다.

얻어진 그라프 G는 매개가 $V(K_m)$에 속하는 유일한 정점만이 바깥반차수가 0이고 나머지정점들은 모두 바깥반차수가 1인 s개의 (약)련결성분을 가진다.

정리 1의 증명과 같이 정점 $y\in Y'$와 이미 얻어진 그라프에서 y를 포함하지 않는 임의의 련결성분에서 바깥반차수가 0인 (유일한)정점 $v\in V(K_m)$사이에 릉 $(v,\ y)$형태의 릉을 첨가한다. 이러한 과정을 i $(0\le i\le s-1)$번 반복한다. 왜냐하면 얻으려는 수림이 $V(K_m)$에서 l개의 뿌리를 가지기때문이다.

그러면

$$\frac{[(n-k)(s-1)][(n-k)(s-2)]\cdots[(n-k)(s-i)]}{t!}=\binom{s-1}{i}(n-k)^i \tag{3}$$

개의 그라프가 생겨난다.

얻어진 매 그라프 G'는 $s-i$개의 련결성분들을 가지는데 그 매개는 바깥반차수가 0인 $V(K_m)$의 유일한 정점을 가진다.

이제 이 $s-i$개의 련결성분들에서 바깥반차수가 0인 $s-i-l$개의 정점들을 취하고 이 $s-i-l$개의 정점들로부터 k개의 뿌리 $y_{i_1},\ y_{i_2},\cdots,\ y_{i_k}$에로의 릉들을 련결하자.

이러한 방법에는

$$\binom{s-i}{s-i-l}k^{s-i-l}=\binom{s-i}{l}k^{s-i-l} \tag{4}$$

가지가 있다.

그러므로 등식 (3), (4)에 의하여 F로부터 얻어지는 K_m+H_n의 뿌리가진 생성수림의 개수는 다음과 같다.

$$\sum_{i=0}^{s-l}\binom{s-1}{i}\cdot\binom{s-i}{l}(n-k)^i k^{s-i-l}=\binom{s}{l}n^{s-l}-\binom{s}{l}\frac{s-l}{s}n^{s-l-1}(n-k) \tag{5}$$

따라서 등식 (2), (5)와 보조정리에 의하여 K_m에 l개의 뿌리가 있고 H_n에 k개의 뿌리가 있는 K_m+H_n의 표식붙은 생성수림의 개수 $g(m,\ l;\ n,\ k)$는 다음과 같다.

$$g(m,\ l;\ n,\ k)=\binom{n}{k}\cdot\sum_{s=l}^{m}|D(m,s)|m^{n-k}\sum_{i=0}^{s-l}\binom{s-1}{i}\cdot\binom{s-i}{l}(n-k)^{i}k^{s-i-l}=$$

$$=\binom{n}{k}\cdot\sum_{s=l}^{m}\binom{m}{s}sm^{m-s-1}m^{n-k}\left[\binom{s}{l}n^{s-l}-\binom{s}{l}\frac{s-l}{s}n^{s-l-1}(n-k)\right]=$$

$$=\binom{m}{l}\cdot\binom{n}{k}m^{n-k-1}(m+n)^{m-l-1}(lm+mk+nl-lk)$$

따라서 정리가 증명된다.(증명끝)

따름 K_m+H_n의 모든 생성수림들의 개수 $S(m,\ n)$은 다음과 같다.

$$S(m,\ \ n)=(m+n+1)^{m}(m+1)^{n-1}$$

증명 정리 2에 의하여

$$S(m,\ \ n)=\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}g(m,\ l;\ \ n,\ k)=\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\binom{m}{l}\cdot\binom{n}{k}m^{n-k-1}(m+n)^{m-l-1}(lm+mk+nl-lk)=$$

$$=(m+n+1)^{m}(m+1)^{n-1}$$

이므로 따름이 증명된다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보(자연과학), 63, 1, 6, 주체106(2017).

[2] S. S. U; arXiv: [math.CO] 2, 3, 25, 2014.

[3] Y. Jin et al.; Ars Combinatoria, 70, 135, 2004.

[4] O. Egecioglu et al.; Theory, A 42, 15, 1986.

주체107(2018)년 3월 10일 원고접수

Enumeration for Spanning Trees and Forests in a Kind of Join Graph Based on the Combinatorial Method

U Sung Sik, Cha Song Chol

This paper discusses the enumeration for rooted spanning trees and forests of a kind of join graph. The goal of this paper is to give a closed formula of the enumeration for spanning trees and forests of a kind of join graph based on the combinatorial method.

Key words: spanning tree, spanning forest, join graph, enumeration