김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체104(2015)년 제61권 제4호 Vol. 61 No. 4 JUCHE104(2015).

다차원레비과정의 분포와 다자산선택권의 가격

조광일, 김주경

론문에서는 다차원레비과정의 해석적인 분포에 대하여 론의하고 그것에 기초하여 금융수학에서 다자산선택권의 가격을 계산하였다.

지금까지 다차원우연과정의 분포는 다차원위너과정의 분포만이 해석적으로 주어져 있고 다차원우연량들의 분포는 다항분포, 디리흘레분포 등이 론의되였을뿐이다.

현실에서 다차원레비과정에 대한 응용은 많이 진행되고있지만 그 구체적인 분포를 모르기때문에 리론을 응용하는 측면에서 난점들이 제기되고있다.[2]

선행연구[1]에서는 다차원레비과정의 분포에 대하여 론의하고 파레터분포를 측도적인 견지에서 서술하고 해석하고있을뿐이다.

그러므로 론문에서는 복합뽜쏭과정으로 이루어지는 다차원레비과정의 분포를 이행확률밀도함수로 해석적으로 구하고 그것에 기초하여 여러 선택권의 가격을 계산하였다.

1. 다차원복합뽜쏭과정의 이행확률밀도함수

복합뽜쏭과정을 성분으로 가지는 다차원우연과정에 대하여 보자.

복합뽜쏭과정 $\left\{\xi_i(t)=\sum_{j=1}^{N_i(t)}\xi_{ij}\right\}_{t\in[0,\ \infty)}$, $i=1, 2, \cdots, n$ 들을 성분으로 하는 n차원우연과정 $\xi(t)=(\xi_1(t), \cdots, \xi_n(t))$가 주어졌다고 하자. 여기서 $\{N_i(t)\}_{t\in[0,\ \infty)}$, $i=1, 2, \cdots, n$ 은 파라메터가 $\lambda_i t$, $i=1, 2, \cdots, n$ 인 독립인 뽜쏭과정들이고 $\{\xi_{ij}\}$, $i=1, 2, \cdots, n$, $j=1, 2, \cdots$ 들은 매 i 에 대하여 밀도함수 $p_i(x)$ 를 가지는 독립동일분포하는 우연량들이다.

정리 1 복합뽜쏭과정 $\{\xi(t)\}_{t\in[0,\ \infty)}$ 의 이행확률밀도함수는

$$f(s,\ x; t,\ y)=\sum_{l\in N_0^n}^{\infty}\frac{\lambda^l(t-s)^{|l|}}{l!}e^{-|\lambda|(t-s)}p^{*l}(y-x) \tag{1}$$

이다. 여기서 $N_0^n=\{0,\ 1, \cdots\}$ 이고 $l=(l_1, \cdots,\ l_n)$, $|l|=\sum_{j=1}^n l_j$, $l!=l_1!\cdots l_n!$, $\lambda^l=\lambda^{l_1}\cdots\lambda^{l_n}$, $p^{*l}=p_1^{*l_1}\cdots p_n^{*l_n}$, $p_i^{*l_i}(\cdot)=p_i^{*l_i-1}*p_i\ (\cdot)$ (*은 합성적)이다.

증명 임의의 $s,\ t\ (0<s<t)$ 와 $x,\ y\in R^r$ 에 대하여 $\{\xi(t)\}$ 의 이행확률분포함수는 $F(s, x; t,\ y)=P\{\xi(t)\le y\,|\,\xi(s)=x\}$ 이므로 정의함수를 $I_{(-\infty,\ y]}(z)=\begin{cases}1, & z\in(-\infty,\ y]\\ 0, & z\notin(-\infty,\ y]\end{cases}$ 라고 할 때 $\{\xi(t)\}$ 는 독립증분과정이다. 따라서

$$F(s,\ x;t,\ y)=\mathrm{E}[I_{(-\infty,\ y]}(\xi(t))\,|\,\xi(s)=x]=\mathrm{E}[I_{(-\infty,\ y-x]}(\xi(t)-\xi(s))]=$$

$$=\sum_{l(r)=0}^{\infty}\frac{\lambda^{l(r)}(t-s)^{|l(r)|}}{l(r)!}e^{-|\lambda|(t-s)}\mathrm{E}[I_{(-\infty,\ y-x]}(\xi(t)-\xi(s))\,|\,N(t)-N(s)=l(r)].$$

$$\mathrm{E}[I_{(-\infty,\ y-x]}(\xi(t)-\xi(s))\,|\,N(t)-N(s)=l(r)]=F_1^{*l_1}(y_1-x_1)\cdots F_r^{*l_{1r}}(y_r-x_r)=F^{*l(r)}(y-x)$$

이므로 $F(s,\ x;t,\ y)=\sum_{l(r)=0}^{\infty}\frac{\lambda^{l(r)}(t-s)^{|l(r)|}}{l(r)!}e^{-|\lambda|(t-s)}F^{*l(r)}(y-x)$ 이고 이행밀도함수는

$$f(s,\ x;t,\ y)=\sum_{l(r)=0}^{\infty}\frac{\lambda^{l(r)}(t-s)^{|l(r)|}}{l(r)!}e^{-|\lambda|(t-s)}p^{*l(r)}(y-x)\,. \qquad \text{(증명끝)}$$

ξ_{ij} 의 분포가 단위, 띠염일반, 2항, 기하, 빠쏭, 지수, 정규분포일 때 과정 $\{\xi(t)\}$ 의 이행확률밀도함수를 구한 결과는 표와 같다.

표. 분포들에 따르는 과정 $\{\xi(t)\}$ 의 이행확률밀도함수

	초밀도함수	$\{\xi_t\}$ 의 이행확률밀도함수 $f(s, x; t,\ y)$
단위 $I(a)$	$\delta(x-a)$	$\sum_{l\in N_0^n}\frac{\lambda^l(t-s)^{\lvert l\rvert}}{l!}e^{-\lvert\lambda\rvert(t-s)}\delta(y-x-[la])$
띠염일반 $D(m,\ P,\ a)$	$\sum_{\lvert\alpha(n,\ m)\rvert=1}P^{\alpha}\delta(x-\alpha a)$	$\sum_{l\in N_0^n}\sum_{\lvert\alpha(n,\ m)\rvert=l}\frac{\lambda^l(t-s)^{\lvert l\rvert}}{l!}e^{-\lvert\lambda\rvert(t-s)}P^{\alpha}\delta(x-\alpha a)$
2항 $B(m,\ p)$	$\sum_{\alpha\in M^n}^{m}C_m^{\alpha}p^{\alpha}q^{m-\alpha}\delta(x-\alpha)$	$\sum_{l\in N_0^n}\sum_{\alpha\in M_l^n}\frac{\lambda^l(t-s)^{\lvert l\rvert}}{l!}e^{-\lvert\lambda\rvert(t-s)}C_{l\cdot m}^{\alpha}p^{\alpha}q^{lm-\alpha}P^{\alpha}\delta(y-x-\alpha)$
기하 $G(p)$	$\sum_{\alpha\in N^n}p^1q^{\alpha-1}\delta(x-\alpha)$	$\sum_{l\in N_0^n}\sum_{\alpha(n,l)}\frac{\lambda^l(t-s)^{\lvert l\rvert}}{l!}e^{-\lvert\lambda\rvert(t-s)}P^{\alpha}p^lq^{\lvert\alpha(n,l)\rvert-l}\delta(y-x-\lvert\alpha(n,l)\rvert)$
빠쏭 $P_0(\mu)$	$\sum_{\alpha\in N_0^n}\frac{\mu^{\alpha}}{\alpha!}e^{-\mu}\delta(x-\alpha)$	$\sum_{l\in N_0^n}\sum_{\alpha\in N_0^n}\frac{\lambda^l(t-s)^{\lvert l\rvert}}{l!}e^{-\lvert\lambda\rvert(t-s)}\frac{[l\mu]^{\alpha}}{\alpha!}e^{-[l\mu]}\delta(y-x-\alpha)$
지수 $E(\mu)$	$\mu e^{-(\mu,\ x)}I_{\{x>0\}}$	$\sum_{l\in N^n}\frac{\lambda^l(t-s)^{\lvert l\rvert}}{l!}e^{-\lvert\lambda\rvert(t-s)}\mu\frac{(\mu^{l-1},\ (y-x)^{l-1})}{(l-1)!}e^{-(\mu,\ (y-x))}+e^{-\lvert\lambda\rvert(t-s)}\delta(y-x)$
정규 $N(a,\ \delta_1^2)$	$\prod_i\frac{1}{\sqrt{2\pi\delta_i^2}}e^{-\frac{(x_i-\mu_i)^2}{2\delta_i^2}}$	$\sum_{l\in N^n}\frac{\lambda^l(t-s)^{\lvert l\rvert}}{l!}e^{-\lvert\lambda\rvert(t-s)}\prod_i\frac{1}{\sqrt{2\pi\delta_i^2}}e^{-\frac{(y_i-x_i-l_i\mu_i)^2}{2l_i\delta_i^2}}+\lambda(t-s)e^{-\lvert\lambda\rvert(t-s)}$

여기서 l 은 다중첨수, $\alpha(n,\ m)$ 은 $n\times m$ 형행렬, $M_l^n=(0,\ 1,\cdots,\ lm)$, $[la]=(l_1a_1,\ \cdots,\ l_na_n)'$, $|\alpha(n,\ m)|=l$ 은 $\sum_{j=1}^{m}\alpha(i,\ j)=l_i$, $C_{ml}^{\alpha}=C_{ml_1}^{\alpha_1}\cdots C_{ml_n}^{\alpha_n}$ 으로 리해한다.

2. 다차원레비과정의 이행확률밀도함수

$(w_1(t), \cdots, w_n(t))$ 는 n차원위너과정, $(\xi_1(t), \cdots, \xi_n(t))$ 는 n차원복합뽜쏭과정이라고 하자. 이때 레비과정 $\eta_i(t) = \gamma_i t + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} w_j(t) + \xi_i(t),\ i = 1, 2, \cdots, n$ 을 성분으로 하는 n차원레비과정 $\eta(t) = (\eta_1(t), \cdots, \eta_n(t))$ 의 이행확률밀도함수에 대하여 론의하자.

정리 2 n차원레비과정 $\{\eta(t)\}$의 이행확률밀도함수는 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
J(s,\ x;\ t,\ y) = &\sum_{l \in N_0^n} \frac{\lambda^l (t-s)^{|l|}}{l!} e^{-|\lambda|(t-s)} p^{*l}(y-x) *_y \\
&*_y (2\pi(t-s))^{-\frac{n}{2}} |A|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(t-s)}(y-x-\gamma(t-s))^T A^{-1}(y-x-\gamma(t-s))\right\}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

여기서 합성적 $*_y$ 는 y 에 관한 합성적이다.

3. 다자산선택권의 가격

여러개의 위험자산을 기초자산으로 하여 거래되는 선택권을 다자산선택권이라고 한다.

다자산선택권들중에는 무지개선택권(rainbow options), 바구니선택권(basket options) 등이 있다.

i 째 위험자산의 가격 $S_i(t),\ i = 1, \cdots, n$ 이 다음의 확률미분방정식을 만족시킨다고 하자.

$$
dS_i(t) = S_i(t)\left[b_i(t)dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} dw_j(t) + \sum_{j=1}^{N_i(t)} \xi_{ij}\right],\ S_i(0) = S_i,\ \ t \in [0,\ T],\ \ i = 1, 2, \cdots, n \tag{3}
$$

표준완비시장에서 방정식 (3)은 마르팅게일표시로 다음과 같이 쓸수 있다.

$$
dS_i(t) = S_i(t)\left[rdt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} d\widetilde{w}_j(t) + \int_{|z|>0} c_i(z)(\widetilde{\mu}_i - \widetilde{\nu}_i)(dt,\ dz)\right]
$$

이 방정식의 풀이는 다음과 같다.

$$
S_i(t) = S_i \exp\left\{\gamma_i t + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} w_j(t) + \sum_{j=1}^{N_i(t)} \ln(c(\xi_{ij}) + 1)\right\},\ \ \gamma_i = r - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 - \widetilde{\lambda}_i \int_{|z|>0} c_i(z)\widetilde{\nu}_i(dz)
$$

1) 무지개선택권

무지개선택권은 여러 제품가운데서 제일 좋은 상품을 고르는 선택권이다. 즉

$$
Y_1 = \max\{\alpha_1 S_1(T),\ \cdots,\ \alpha_n S_n(T)\}.
$$

t 시각에 이 선택권의 가격을 $V_1(S_1, \cdots,\ S_n)$ 으로 표시하면 가격은

$$
V_1(S_1,\ \cdots,\ S_n) = \int \cdots \int \max\{S_1 e^{y_1},\ \cdots,\ S_n e^{y_n}\} J(t,\ 0; T,\ y) dy
$$

로 구할수 있다. 여기서 $J(t,\ x;\ T,\ y)$ 는 식 (2)로 표시되는 함수이다.

2) 바구니선택권

바구니선택권은 마감리득이 $Y_2 = \left(\sum_i \alpha_i S_i(T) - K\right)^+$, $Y_3 = \left(\prod_i S_i^{\alpha_{1i}}(T) - K\right)^+$ 인 선택권이다. 이 가격도 우와 마찬가지로 계산할수 있다.

참 고 문 헌

[1] I. Eder; Mathematics and Economics, 3, 3, 2009.

[2] I. Kallsen et al.; J. Maltiv. Anal., 97, 4, 1551, 2006.

[3] Jiang Li Shang; Mathematical Models and Methods of Option Pricing, Sinqapore World, 23～196, 2005.

주체103(2014)년 12월 5일 원고접수

Distributions of Multidimensional Levy Processes and the Price of Multi-Asset Options

Jo Kwang Il, Kim Ju Gyong

We calculated the distribution of multidimensional Levy processes governed by a compound Poisson process as type of transition probabilistic density function and discussed the pricing problem of the multi-assets option based on it.

Key word: multidimensional Levy process