김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체105(2016)년 제62권 제2호 Vol. 62 No. 2 JUCHE105(2016).

확률측도변환에 의한 프락탈브라운운동과 비약이 있는 확률미분방정식의 표현정리

김주경, 최영남

브라운운동에 의한 길싸노브정리가 나온 이후 비약측도가 있는 경우의 길싸노브정리가 선행연구[1, 2, 4]에서 론의되였으며 역방향확률미분방정식에 대한 길싸노브정리도 선행연구[3]에서 증명되였다.

프락탈브라운운동에 관한 길싸노브정리는 선행연구[5]에서 론의되였다.

론문에서는 프락탈브라운운동과 비약측도에 대한 길싸노브정리를 증명하고 변환된 확률공간에서 확률미분방정식의 표현형태에 대하여 론의한다.

확률공간 $(\Omega_H, \mathcal{F}_H, \boldsymbol{P}_H)$는 프락탈브라운운동에 의해 구성되고 확률공간 $(\Omega_\upsilon, \mathcal{F}_\upsilon, \boldsymbol{P}_\upsilon)$가 순수 비약레비과정에 의하여 구성된다고 할 때 이 두 공간의 직적공간

$$(\Omega,\ \mathcal{F},\ \boldsymbol{P}) = (\Omega_H \times \Omega_\upsilon,\ \mathcal{F}_H \otimes \mathcal{F}_\upsilon,\ \boldsymbol{P}_H \otimes \boldsymbol{P}_\upsilon)$$

를 론의하자.

이 공간에서 프락탈브라운운동에 관한 스꼬로호드적분과 비약측도에 관한 적분, 말리아빈도함수의 정의와 성질, 확률적분의 변환공식 등은 선행연구[6]를 참고로 하였다.

1. 확률측도변환

우리가 론의하는 확률미분방정식은 다음과 같다.

$$dX(t) = a(t,\ X(t))dt + b(t,\ X(t))dB_H(t) + \int_{|z|>0} C(t,\ X(t),\ z)\tilde{\mu}(dt,\ dz),\quad X(0) = X_0 \tag{1}$$

여기서 $\{B_H(t)\}_{t\in[0,\ T]}$는 파라메터가 $H\ (0 < H < 1)$인 프락탈브라운운동이다. 즉

$$\mathrm{E}(B_H(t)) = 0,\ \ C_H(s,\ t) = \mathrm{E}(B_H(s)B_H(t)) = (|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H})/2.$$

뽜쏭옹근수우연측도 $\{\mu(dt, dz)\}$의 보정자는 $\nu(dt, dz)$이며 $\tilde{\mu}(dt, dz) = \mu(dt, dz) - \nu(dt, dz)$는 중심화된 우연측도이다. 결수들인 $a(t, x),\ b(t, x),\ c(t, x, z)$는 자기변수에 관하여 가측이고 유계이다.

$\sigma-$모임벌흐름족 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\ T]}$는 $\mathcal{F}_t := \sigma\{B_H(s),\ \mu([0,\ s],\ \Gamma),\ 0 \le s \le t,\ \Gamma \in \boldsymbol{B}^1\}$로 정의한다.

또한 핵함수 $\phi_H(s,\ t)$ $(\phi_H(s,\ t) = H(2H-1)|t-s|^{2H-2})$와 레비측도 $\nu(dz)$에 대하여 함수공간 $\boldsymbol{L}^2_H([0,\ T])$와 $\boldsymbol{L}_\nu$를 다음과 같이 정의한다.

$$\boldsymbol{L}^2_H([0,\ T]) = \left\{ f\ ;\ \|f\|^2_\phi = \int_0^T\int_0^T f(s)f(t)\phi_H(s,\ t)dsdt < \infty \right\}$$

$$\langle f,\ g\rangle_\phi = \int_0^T\int_0^T f(s)g(t)\phi_H(s,\ t)dsdt,\quad f,\ g\in \boldsymbol{L}_H^2([0,\ T])$$

$$\| f \|_{\phi,\ t}^2 = \int_0^t\int_0^t f(s_1)f(s_2)\phi_H(s_1,\ s_2)ds_1ds_2,\quad f(s)\in \boldsymbol{L}_H^2([0,\ T])$$

$$\boldsymbol{L}_\nu = \left\{ g:\ \int_0^T\int_{|z|>0}|g(s,\ z)|^2\nu(dz)ds<\infty \right\}$$

우에서 정의한 프락탈브라운운동과 옹근수우연측도에 관한 다음의 선형확률미분방정식(돌란방정식)을 론의하자.

$$M(t)=1+\int_0^t\theta(s)M(s)dB_H(s)+\int_0^t\int_{|z|>0}\lambda(s,\ z)M(s)\tilde{\mu}(ds,\ dz)\tag{2}$$

여기서 $\theta(t)\in \boldsymbol{L}_H^2([0,\ T]),\ \lambda(t,\ z)\in \boldsymbol{L}_\nu$ 이다.

정리 1 방정식 (2)의 풀이는 다음과 같다.

$M(t)=$

$$=\exp\left\{\int_0^t\theta(s)dB_H(s)-\frac{1}{2}\|\theta\|_{\phi,\ t}^2+\int_0^t\int_{|z|>0}\ln(1+\lambda(s,\ z))\tilde{\mu}(ds,\ dz)-\int_0^t\int_{|z|>0}[\lambda(s,\ z)-\ln(1+\lambda(s,\ z))]\nu(dz)ds\right\}$$

증명 $Y(t)$ 를

$$Y(t)=\int_0^t\theta(s)dB_H(s)-\frac{1}{2}\|\theta\|_{\phi,t}^2+\int_0^t\int_{|z|>0}\ln(1+\lambda(s,\ z))\tilde{\mu}(ds,\ dz)-\int_0^t\int_{|z|>0}[\lambda(s,\ z)-\ln(1+\lambda(s,\ z))]\nu(dz)ds$$

로 놓고 함수 $F(y)=e^y$ 에 확률적분의 변환공식을 적용하자.

$$\begin{aligned}M(t)=F(Y(t))&=F(Y(0))+\int_0^tF(Y(s))\theta(s)dB_H(s)-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^tF(Y(s_1))\theta(s_1)\theta(s_2)\phi_H(s_1,\ s_2)ds_1ds_2+\\&+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^tF(Y(s_1))\theta(s_1)\theta(s_2)\phi_H(s_1,\ s_2)ds_1ds_2+\\&+\int_0^t\int_{|z|>0}[F(Y(s)+\ln(1+\lambda(s,\ z)))-F(Y(s))-\ln(1+\lambda(s,\ z))F(Y(s))]\nu(dz)ds+\\&+\int_0^t\int_{|z|>0}[F(Y(s)+\ln(1+\lambda(s,\ z)))-F(Y(s))]\tilde{\mu}(ds,\ dz)-\\&-\int_0^t\int_{|z|>0}F(Y(s))[\lambda(s,\ z)-\ln(1+\lambda(s,\ z))]\nu(dz)ds=\\&=1+\int_0^t\theta(s)M(s)dB_H(s)+\int_0^t\int_{|z|>0}\lambda(s,\ z)M(s)\tilde{\mu}(ds,\ dz)\end{aligned}$$

(증명끝)

프락탈브라운운동에 관한 스꼬로호드적분은 피적분함수가 적합과정인 경우에는 이또적분과 일치하며 우연과정 $\{F(t,\ \omega)\}$ 가 $(\mathcal{F}_t)$ -적합과정이기 위해서는 그것의 카오스분해식

$F(t,\ \omega)=\sum_{n=0}^{\infty}I_n(f_n(\cdot,\ t))$ 가 $F(t,\ \omega)=\sum_{n=0}^{\infty}I_n(f_n(\cdot,\ t))\chi_{[0,\ t]^{\otimes n}}(\cdot)$ 으로 표시될것이 필요하고 충분하다. 여기서 $\chi_{[0,\ t]^{\otimes n}}(\cdot)$ 은 지시함수이고

$$I_n(f_n(\cdot,\ t))=\int_0^{\infty}\int_0^{t_n}\cdots\int_0^{t_2}f_n(t_1,\cdots,\ t_n,\ t)dB_H(t_1)\cdots dB_H(t_n)$$

이다. 또한 준조건부기대값은 우연량 $G(\omega)=\sum_{n=0}^{\infty}I_n(f_n(\cdot))\in \boldsymbol{L}^2(\boldsymbol{P})$ 에 대하여

$$\tilde{\mathrm{E}}[G(\omega)\,|\,\mathcal{F}_s]=\sum_{n=0}^{\infty}I_n(f_n(\cdot))\chi_{[0,\ s]^{\otimes n}}(\cdot)$$

으로 정의한다.[6]

보조정리 1 방정식 (2)의 풀이 $\{M(t)\}_{t\in[0,\ T]}$ 는 $\mathcal{F}_t$ －준마르팅게일이다.

준수학적기대값 $\tilde{\mathrm{E}}$ 의 정의는 선행연구[5]를 참고한다.

증명 임의의 $s,\ t\ (0\le s<t\le T)$ 에 대하여 방정식 (2)로부터 다음의 식이 성립된다.

$$\tilde{\mathrm{E}}[M(t)\,|\,\mathcal{F}_s]=$$

$$=1+\tilde{\mathrm{E}}\left[\int_0^t\theta(s_1)M(s_1)dB_H(s_1)\middle|\ \mathcal{F}_s\right]+\tilde{\mathrm{E}}\left[\int_0^t\int_{|z|>0}\lambda(s_1,\ z)M(s_1)\tilde{\mu}(ds_1,\ dz)\middle|\ \mathcal{F}_s\right]=$$

$$=1+\int_0^s\theta(s_1)M(s_1)dB_H(s_1)+\int_0^s\int_{|z|>0}\lambda(s_1,\ z)M(s_1)\tilde{\mu}(ds_1,\ dz)=M(s)$$

(증명끝)

임의의 $f(t)\in \boldsymbol{L}^2{}_H([0,\ T]),\quad g(t,\ z)\in \boldsymbol{L}_\nu^2$ 에 대하여

$\varepsilon_0(t;\ f,\ g):=$

$$:=\exp\left\{\int_0^t f(s)dB_H(s)-\frac{\|f\|_{\phi,\ t}^2}{2}+\int_0^t\int_{|z|>0}\ln(1+g(s,\ z))\tilde{\mu}(ds,\ dz)-\int_0^t\int_{|z|>0}[g(s,\ z)-\ln(1+g(s,\ z))]\nu(dz)ds\right\}$$

$$\varepsilon_1(t;\ f):=\exp\left\{\int_0^t f(s)dB_H(s)-\frac{1}{2}\|f\|_{\phi,\ t}^2\right\}$$

$$\varepsilon_2(t;\ g):=\exp\left\{\int_0^t\int_{|z|>0}\ln(1+g(s,\ z))\tilde{\mu}(ds,\ dz)-\int_0^t\int_{|z|>0}[g(s,\ z)-\ln(1+g(s,\ z))]\nu(dz)ds\right\}$$

쉽게 알수 있는바와 같이 $\varepsilon_0(t;\ \theta,\ \lambda)=\varepsilon_1(t;\ \theta)\,\varepsilon_2(t;\ \lambda)=M(t)$ 이다.

보조정리 2 $\{\varepsilon_i(t;\ \cdot)\}_{t\in[0,\ T],\ i=0,\ 1,\ 2}$ 는 $\mathcal{F}_t$ －지수마르팅게일이고

$$\mathrm{E}[\varepsilon_i(t;\ \cdot)]=1,\quad i=0,1,2.$$

새로운 확률측도 $\boldsymbol{P}^*$ 을 라돈－니코딤의 도함수가 $\left.\dfrac{d\boldsymbol{P}^*}{d\boldsymbol{P}}\right|_{\mathcal{F}_t}=M(t),\ t\in[0,\ T]$ 가 되도록 정의한다.

2. 표 현 정 리

정리 2 임의의 $f(t)\in \boldsymbol{L}^2{}_H([0,\ T])$ 에 대하여 $\int_0^T f(s)dB_H^*(s)=\int_0^T f(s)dB_H(s)-\frac{1}{2}\langle f,\ \theta\rangle_\phi$ 를 만족시키는 $\{B_H^*(t)\}_{t\in[0,\ T]}$ 는 새로운 확률측도 $\boldsymbol{P}^*$ 에 관하여 파라메터가 H 인 프락탈브라운운동이다.

증명 정리의 증명은 $\int_0^T f(s)dB_H^*(s)$ 의 특성함수가 확률측도 $\boldsymbol{P}^*$ 에 관한 준수학적기대값으로서 $\tilde{\mathrm{E}}^*\exp\left\{iu\int_0^T f(s)dB_H^*(s)\right\}=\exp\left\{-\frac{u^2}{2}\|f\|_\phi^2\right\}$ 이 성립된다는것을 말하면 된다.

$$\tilde{\mathrm{E}}^*\exp\left\{iu\int_0^T f(s)dB_H^*(s)\right\}=\tilde{\mathrm{E}}\left[\exp\left\{iu\int_0^T f(s)dB_H(s)-iu\frac{1}{2}\langle f,\ \theta\rangle_\phi\right\}\varepsilon_0(T;\ \theta,\ \lambda)\right]=$$

$$=\tilde{\mathrm{E}}\left[\exp\left\{\int_0^T(iuf(s)+\theta(s))dB_H(s)-iu\langle f,\ \theta\rangle_\phi-\frac{1}{2}\|\theta\|_\phi^2\right\}\varepsilon_2(T;\ \lambda)\right]=$$

$$=\tilde{\mathrm{E}}[\varepsilon_1(T;(iuf(s)+\theta(s)))\varepsilon_2(T;\ \lambda)]\exp\left\{-\frac{u^2}{2}\|f\|_\phi^2\right\}=\exp\left\{-\frac{u^2}{2}\|f\|_\phi^2\right\}$$

(증명끝)

정리 3 $\nu^*(dt,\ dz)=(1+\lambda(s,\ z))\nu(dt,\ dz)$ 를 보정자로 가지며

$$\tilde{\mu}^*(dt,\ dz)=\mu(dt,\ dz)-\nu^*(dt,\ dz)$$

로 정의되는 우연측도 $\tilde{\mu}^*(dt,\ dz)$ 는 확률측도 $\boldsymbol{P}^*$ 에 관하여 $\mathcal{F}_t$ －마르팅게일이고 중심화된 뽜쏭옹근수우연측도이다.

증명 정리 2와 류사한 방법으로 증명할수 있다. 즉 다음과 같이 증명할수 있다.

$$\tilde{\mathrm{E}}^*\exp\left\{iu\int_0^T\int_{|z|>0}g(s,\ z)\tilde{\mu}^*(ds,\ dz)\right\}=$$

$$=\tilde{\mathrm{E}}\left[\exp\left\{iu\int_0^T\int_{|z|>0}g(s,\ z)\tilde{\mu}(ds,\ dz)-iu\int_0^T\int_{|z|>0}g(s,\ z)\lambda(s,\ z)\nu(dz)ds\right\}\varepsilon_0(T;\theta,\ \lambda)\right]=$$

$$=\tilde{\mathrm{E}}\left[\exp\left\{\int_0^T\int_{|z|>0}(iug+\ln(1+\lambda))\tilde{\mu}(ds,\ dz)-\int_0^T\int_{|z|>0}(g\lambda+\lambda-\ln(1+\lambda))\nu(dz)ds\right\}\varepsilon_1(T;\theta)\right]=$$

$$=\tilde{\mathrm{E}}\left[\varepsilon_1(T;\theta)\varepsilon_2(T;(iug+\ln(1+\lambda)))\exp\left\{\int_0^T\int_{|z|>0}(e^{iug+\ln(1+\lambda)}-1-iug(1+\lambda)-\lambda)\nu(dz)ds\right\}\right]=$$

$$=\exp\left\{\int_0^T\int_{|z|>0}(e^{iug}-1-iug)\nu^*(dz)ds\right\}$$

또한 $\boldsymbol{P}^*$에 관하여

$$\widetilde{\mathrm{E}}^*\varepsilon_2^*(t,\ iug)=\widetilde{\mathrm{E}}^*\left[\exp\left\{iu\int_0^t\int_{|z|>0}g(s,\ z)\widetilde{\mu}^*(ds,\ dz)-\int_0^t\int_{|z|>0}(e^{iug}-1-iug)\nu^*(dz)ds\right\}\right]=1$$

이 성립되므로 정리는 증명된다.(증명끝)

정리 4 변환된 확률공간에서 확률미분방정식 (1)은 다음과 같이 표시된다.

$$X(t)=X(0)+\int_0^t a(s,\ X(s))ds+\int_0^t\int_0^t b(s_1,\ X(s_1))\theta(s_2)\phi_H(s_1,\ s_2)ds_1ds_2+$$

$$+\int_0^t\int_{|z|>0}c(s,\ X(s),\ z)\lambda(s,\ z)\nu(ds,\ dz)+\int_0^t b(s,\ X(s))dB_H^*(s)+\int_0^t\int_{|z|>0}c(s,\ X(s),\ z)\widetilde{\mu}^*(ds,\ dz)$$

증명은 정리 2, 3을 리용하면 곧 나오므로 략한다.

참 고 문 헌

[1] 김주경; 자연과학론문집 43, 김일성종합대학출판사, 11, 1997.

[2] D. Applebaum; Levy Processes and Stochastic Calculus, Cambirge University Press, 12～408, 2009.

[3] A. Lionnet et al.; arXiv 10113228V1 [math PR] 14 Nov 2010.

[4] C. Leonard; arXiv 11013958V2 [math PR] 31 Jan 2011.

[5] C. Necula; Academy of Economics Studies Bucharest, Preprint, 23～233, 2002.

[6] F. Biagini et al.; Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications, Springer, 14～78, 2008.

주체104(2015)년 10월 5일 원고접수

On Representation Theorem of the Stochastic Differential Equations with Fractal Brownian Motion and Jump by Probability Measures Transform

Kim Ju Gyong, Choe Yong Nam

Girsanov theorem is the foundation of probability measures transform. After the introduction of Girsanov theorem by Brownian motion, Girsanov theorems with jump measures and fractal Brownian motion are proved.

We prove Girsanov theorem for fractal Brownian motion and jump measures and consider representation form for the stochastic differential equations in transformed probability space.

Key words: Girsanov theorem, probability measures transform, fractal Brownian motion