김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체105(2016)년 제62권 제11호 Vol. 62 No. 11 JUCHE105(2016).

# 타원형련립편미분비선형적분방정식에 대한 아도미언분해법

조 윤 경

경애하는 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《우리는 가까운 앞날에 전반적인 과학기술분야에서 세계를 디디고 올라설수 있다는 배심을 가지고 첨단돌파의 기적들을 련이어 창조하여야 합니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 40폐지)

선행연구[3]에서는 련립편미분비선형방정식의 근사풀이를 아도미언분해법으로 구하였으며 선행연구[1]에서는 비선형방정식들에 대한 아도미언다항식에 대하여 론의하였다.

선행연구[2]에서는 표준아도미언분해법과 그것의 개선된 수법들을 제기하였다.

우리는 타원형련립편미분비선형적분방정식을 아도미언분해법으로 풀기 위한 문제를 론의하였다.

초기값문제

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\gamma\int_0^b K_1(x,\ y,\ u,\ \upsilon)dx+f_1(x,\ y),\ \ \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^2}=\beta\int_0^d K_2(x,\ y,\ u,\ \upsilon)dy+f_2(x,\ y),$$

$$\gamma,\ \beta\in \boldsymbol{R},\quad (x,\ y)\in[0,\ b]\times[0,\ d],\ \ u(0,\ y)=0,\ \ \upsilon(x,\ 0)=0$$

과 연산자

$$L_{xx}=\frac{\partial^2}{\partial x^2},\ L_{yy}=\frac{\partial^2}{\partial y^2},\ N_1(u,\ \upsilon)=\int_0^b K_1(x,\ y,\ u,\ \upsilon)dx,\ \ N_2(u,\ \upsilon)=\int_0^d K_2(x,\ y,\ u,\ \upsilon)dy$$

를 받아들이면 다음과 같은 연산자방정식이 얻어진다.

$$L_{xx}u+L_{yy}u=\gamma\, N_1(u,\ \upsilon)+f_1 \tag{1}$$

$$L_{xx}\upsilon+L_{yy}\upsilon=\beta\, N_2(u,\ \upsilon)+f_2 \tag{2}$$

초기조건을 만족시키는 $L_{xx}$와 $L_{yy}$의 거꿀연산자는 각각 다음과 같다.

$$L_{xx}^{-1}=\int_0^x dx_1\int_0^{x_1}(\cdot)dx_2\,,\ \ L_{yy}^{-1}=\int_0^y dy_1\int_0^{y_1}(\cdot)dy_2$$

식 (1)의 량변에 $L_{xx}^{-1}$, 식 (2)의 량변에 $L_{yy}^{-1}$을 작용시키면 다음과 같이 된다.

$$u=-L_{xx}^{-1}L_{yy}u+\gamma\, L_{xx}^{-1}N_1(u,\ \upsilon)+L_{xx}^{-1}f_1\,,\ \ \upsilon=-L_{yy}^{-1}L_{xx}\upsilon+\beta\, L_{yy}^{-1}N_2(u,\ \upsilon)+L_{yy}^{-1}f_2$$

아도미언분해법을 리용하여 웃식들의 풀이 $u$, $\upsilon$를 성분들의 무한합렬모양으로 구한다. 즉 $u(x,\ y)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,\ y),\ \ \upsilon(x,\ y)=\sum_{n=0}^{\infty}\upsilon_n(x,\ y)$.

비선형항 $N_1$, $N_2$에 대응되는 아도미언다항식들은 다음과 같이 구한다.

$$N_1(u,\ v)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n,\ N_2(u,\ v)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n$$

$$A_n(u_0,\cdots,\ u_n\ ;v_0,\ v_1,\cdots,\ v_n)=\frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[N_1\left(\sum_{i=0}^{n}\lambda^i u_i,\ \sum_{i=0}^{n}\lambda^i v_i\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$B_n(u_0,\cdots,\ u_n\ ;v_0,\ v_1,\cdots,\ v_n)=\frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[N_2\left(\sum_{i=0}^{n}\lambda^i u_i,\ \sum_{i=0}^{n}\lambda^i v_i\right)\right]_{\lambda=0}$$

표준아도미언분해법의 점화렬은 다음과 같이 쓸수 있다.

$$u_0(x,\ y)=L_{xx}^{-1}f_1,\quad v_0(x,\ y)=L_{yy}^{-1}f_2$$

$$u_{n+1}(x,\ y)=-L_{xx}^{-1}L_{yy}u_n+\gamma\cdot L_{xx}^{-1}A_n,\ \ v_{n+1}(x,\ y)=-L_{yy}^{-1}L_{xx}v_n+\beta\cdot L_{yy}^{-1}B_n\quad(n\ge 0)$$

수렴성개선의 목적으로 아도미언분해법의 개선된 수법을 쓰면

$$f_1=f_{11}+f_{12},\quad f_2=f_{21}+f_{22}$$

로 구분되며 이때 점화렬은 다음과 같다.

$$u_0(x,\ y)=L_{xx}^{-1}f_{11},\ v_0(x,\ y)=L_{yy}^{-1}f_{21}$$

$$u_1=L_{xx}^{-1}f_{12}-L_{xx}^{-1}L_{yy}u_0+\gamma L_{xx}^{-1}A_0,\ \ v_1=L_{yy}^{-1}f_{22}-L_{yy}^{-1}L_{xx}v_0+\beta L_{yy}^{-1}B_0$$

$$u_{n+1}(x,\ y)=-L_{xx}^{-1}u_n+\gamma L_{xx}^{-1}A_n,\quad v_{n+1}(x,\ y)=-L_{yy}^{-1}v_n+\beta L_{yy}^{-1}B_n\quad(n\ge 1)$$

수값비교를 위하여 $n$차근사를 $\Phi_n(x,\ y)=\sum_{k=0}^{n}u_k(x,\ y),\ \Psi_n(x,\ y)=\sum_{k=0}^{n}v_k(x,\ y)$ 로 표시하면 풀이 $u$, $v$ 는 $n\to\infty$ 일 때의 $n$차근사의 극한으로 다음과 같이 구해진다.

$$u(x,\ y)=\lim_{n\to\infty}\Phi_n(x,\ y),\ v(x,\ y)=\lim_{n\to\infty}\Psi_n(x,\ y)$$

먼저 비선형항 $N_1(u,\ v)$ 에 대한 아도미언다항식을 구성하자.

$$A_0=N_1(u_0,\ v_0)=\int_0^b K_1(x,\ y,\ u_0,\ v_0)dx$$

$$A_1=\frac{d}{d\lambda}\left[\int_0^b K_1(x,\ y,\ u,\ v)dx\right]_{\lambda=0}=\int_0^b[K'_{1u}(x,\ y,\ u_0,\ v_0)\cdot u_1+K'_{1v}(x,\ y,\ u_0,\ v_0)\cdot v_1]dx$$

$$A_2=\frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}\left[\int_0^b K_1(x,\ y,\ u,\ v)dx\right]_{\lambda=0}$$

$$\vdots$$

비선형항 $N_1(u,\ v)$ 에 대한 아도미언다항식을 결정하는 다음의 정리가 성립된다.

정리 1 $A_n=\int_0^b\left(\sum_{i=1}^{n}U_n^k\right)dx,\ \ n\ge 1$

$$U_n^1=u_1\frac{\partial}{\partial u}K_1(x,\ y,\ u_0,\ v_0)+v_1\frac{\partial}{\partial v}K_1(x,\ y,\ u_0,\ v_0)$$

$$U_n^k=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-k}(j+1)\left(u_{j+1}\frac{\partial}{\partial u_0}U_{n-1-j}^{k-1}+v_{j+1}\frac{\partial}{\partial v_0}U_{n-1-j}^{k-1}\right),\quad 2\le k\le n$$

다음으로 $N_2(u,\ v)$ 에 대한 아도미언다항식은 다음과 같다.

$$B_0 = N_2(u_0,\ v_0) = \int_0^d K_2(x,\ y,\ u_0,\ v_0)dy$$

$$B_1 = \frac{d}{d\lambda}\left[\int_0^d K_2(x,\ y,\ u,\ v)dy\right]_{\lambda=0} = \int_0^d [K'_{2u}(x,\ y,\ u_0,\ v_0)\cdot u_1 + K'_{2v}(x,\ y,\ u_0,\ v_0)\cdot v_1]dy$$

$$B_2 = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}\left[\int_0^d K_2(x,\ y,\ u,\ v)dy\right]_{\lambda=0}$$

$$\vdots$$

마찬가지로 $N_2(u,\ v)$ 에 대한 아도미언다항식을 결정하는 다음의 정리를 정식화할수 있다.

정리 2 $B_n = \int_0^d \left(\sum_{i=1}^n V_n^k\right)dy,\quad n \ge 1$

$$V_n^1 = u_1 \frac{\partial}{\partial u} K_2(x,\ y,\ u_0,\ v_0) + v_1 \frac{\partial}{\partial v} K_2(x,\ y,\ u_0,\ v_0)$$

$$V_n^k = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-k}(j+1)\left(u_{j+1}\frac{\partial}{\partial u_0}V_{n-1-j}^{k-1} + v_{j+1}\frac{\partial}{\partial v_0}V_{n-1-j}^{k-1}\right),\quad 2 \le k \le n$$

다음의 경계값문제에 대하여 론의하자.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \gamma\int_0^1 K_1(x,\ y,\ u,\ v)dx + f_1(x,\ y),\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \beta\int_0^1 K_2(x,\ y, u,\ v)dy + f_2(x,\ y)$$

$$u(0,\ y) = u(1,\ y) = 0,\quad v(x,\ 0) = v(x,\ 1) = 0$$

이때 경계조건을 만족시키는 거꿀연산자들은 다음과 같다.

$$L_{xx}^{-1} = \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} (\cdot)dx_2 - x\int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} (\cdot)dx_2$$

$$L_{yy}^{-1} = \int_0^y dy_1 \int_0^{y_1} (\cdot)dy_2 - y\int_0^1 dy_1 \int_0^{y_1} (\cdot)dy_2$$

나머지식들은 초기값문제의 경우와 류사하다.

실례 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}dx + 2y - y(2y-1),\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 3\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dy + 2x - (2x-1)^2 \tag{3}$$

$$u(0,\ y) = u(1,\ y) = 0,\quad v(x,\ 0) = v(x,\ 1) = 0 \tag{4}$$

$$N_1(u,\ v) = \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}dx,\quad N_2(u,\ v) = \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dy,$$

$$f_{11} = 2y,\quad f_{12} = -y(2y-1),\quad f_{21} = 2x,\quad f_{22} = -(2x-1)^2$$

으로 놓으면 식 (3), (4)는 다음과 같이 쓸수 있다.

$$L_{xx}u + L_{yy}u = 6N_1(u,\ v) + f_{11} + f_{12},\quad L_{xx}v + L_{yy}v = 3N_2(u,\ v) + f_{21} + f_{22}$$

성분들을 계산하기 위한 점화렬(개선된 수법)은 다음과 같다.

$$u_1 = L_{xx}^{-1} f_{12} - L_{xx}^{-1} L_{yy} u_0 + 6L_{xx}^{-1} A_0, \quad \upsilon_1 = L_{yy}^{-1} f_{22} - L_{xx}^{-1} L_{yy} \upsilon_0 + 3L_{xx}^{-1} B_0$$

$$u_{n+1} = -L_{xx}^{-1} L_{yy} u_n + 6L_{xx}^{-1} A_n, \quad \upsilon_{n+1} = -L_{yy}^{-1} L_{xx} v_n + 3L_{yy}^{-1} B_n$$

$$u_0 = L_{xx}^{-1}(2y) = (x^2 - x)y, \quad \upsilon_0 = L_{yy}^{-1}(2x) = x(y^2 - y)$$

$$A_0 = N_1(u_0, \upsilon_0) = y(2y-1)/6, \quad B_0 = N_2(u_0, \upsilon_0) = (2x-1)^2/3$$

$$u_1 = 0, \quad \upsilon_1 = 0$$

$$\vdots$$

$$u_n = 0, \quad \upsilon_n = 0, \quad n \ge 1$$

따라서 주어진 문제의 풀이는 $u(x, y) = (x^2 - x)y, \ \upsilon(x, y) = x(y^2 - y)$ 이다.

## 맺 는 말

론문에서는 타원형련립편미분비선형적분방정식을 표준아도미언분해법과 그것의 개선된 수법으로 론의하였다.

또한 해당 문제에서 아도미언다항식을 구하는 정리들을 연구하였다.

## 참 고 문 헌

[1] Jun Sheng Duan; J. Appl. Math. and Comp., 217, 6337, 2011.

[2] Abdul-Majid Wazwaz; J. Appl. Math. and Comp., 102, 77, 1999.

[3] Al-Humedi Hameeda Oda; Int. J. Contemp. Math. Sciences, 51, 5, 2505, 2010.

주체105(2016)년 7월 5일 원고접수

## Adomian's Decomposition Method for Nonlinear System of Elliptical Partial Integro-Differential Equations and Differential Equations

*Jo Yun Gyong*

We considered an Adomian's decomposition method for solving initial value problem and boundary value problem of the nonlinear system of elliptical partial integro-differential equations and differential equations.

Key word: Adomian's decomposition method