김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제3호

# 숨은변수프락탈보간함수의 분수계적분과 함차원평가

리미경, 윤철희

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《현대과학기술의 빠른 발전은 기초과학의 성과에 토대하고있으며 과학기술분야에서의 자립성은 기초과학분야에서부터 시작됩니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제10권 485페지)

론문에서는 첨단분야의 하나인 프락탈리론에서 함수수직비례인자를 가진 한가지 숨은변수프락탈보간함수를 구성하고 구성한 보간함수의 분수계적분을 평가하였으며 동시에 적분한 보간함수의 함차원의 웃한계를 평가하였다.

## 1. 숨은변수프락탈보간함수의 구성

$\mathbf{R}^2$에서의 자료모임이

$$P_0=\{(x_i,\ y_i)\in\mathbf{R}^2:\ x_i=i/n\ \ (i=0,\ 1,\ \cdots,\ n)\}$$

로 주어졌다고 하자. 이 자료모임에 대한 숨은변수프락탈보간함수를 구성하기 위하여 자료모임을 다음과 같이 확장한다.

$$P=\{(x_i,\ y_i,\ z_i)\in\mathbf{R}^3:\ x_i=i/n\ \ (i=0,\ 1,\ \cdots,\ n)\}$$

여기서 $z_i\ \ (i=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$은 보조변수이다. 그리고 $I=[0,\ 1],\ I_i=\left[\dfrac{i-1}{n},\ \dfrac{i}{n}\right]$로 표시하자.

함수 $L_i: I\to I_i\ \ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$들을 $L_i(x)=x/n+x_{i-1}$로 정의하자.

넘기기 $\boldsymbol{F}_i: I\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2\ \ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$들을

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_i(x,\ y,\ z)&=\begin{pmatrix}F_{i,1}(x,\ y,\ z)\\ F_{i,2}(x,\ y,\ z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s_i(L_i(x))y+s_i'(L_i(x))z+q_i(x)\\ \widetilde{s}_i(L_i(x))y+\widetilde{s}_i'(L_i(x))z+\widetilde{q}_i(x)\end{pmatrix}=\\ &=\begin{pmatrix}s_i(L_i(x)) & s_i'(L_i(x))\\ \widetilde{s}_i(L_i(x)) & \widetilde{s}_i'(L_i(x))\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\ z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}q_i(x)\\ \widetilde{q}_i(x)\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{1}$$

로 정의한다. 여기서 함수 $s_i,\ s_i',\ \widetilde{s}_i,\ \widetilde{s}_i': I_i\to\mathbf{R}$와 $q_i,\ \widetilde{q}_i: I\to\mathbf{R}\ \ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$들은 어떤 상수 $0\le\alpha_i,\ \widetilde{\alpha}_i,\ \beta_i,\ \widetilde{\beta}_i,\ \gamma_i,\ \widetilde{\gamma}_i\le 1\ \ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$들이 있어서 다음의 가정들을 만족시킨다.

① $s_i,\ s_i',\ \widetilde{s}_i,\ \widetilde{s}_i':\ I_i\to\mathbf{R}\ \ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$들은 절대값이 1보다 작으면서

$$s_i\in Lip\alpha_i,\ s_i'\in Lip\beta_i,\ \widetilde{s}_i\in Lip\widetilde{\alpha}_i,\ \widetilde{s}_i'\in Lip\widetilde{\beta}_i$$

이다.

② $q_i,\ \widetilde{q}_i:\ I\to\mathbf{R}\ \ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$들은 $q_i\in Lip\gamma_i,\ \widetilde{q}_i\in Lip\widetilde{\gamma}_i$이면서

$$F_i(x_0,\ y_0,\ z_0)=(y_{i-1},\ z_{i-1})^{\mathrm{T}},\ F_i(x_n,\ y_n,\ z_n)=(y_i,\ z_i)^{\mathrm{T}}\ \ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

이다.

구역 $D\subset\mathbf{R}^2$을 $(y_i,\ z_i)\ \ (i=0,\ 1,\ \cdots)$들을 포함하는 유계구역으로서 어떤 $\bar{y},\ \bar{z}\in\mathbf{R}$가

있어서 $y \le \overline{y},\ z \le \overline{z}\ (y,\ z) \in D$ 라고 하자.

이제 변환 $W_i : I \times D \to I_i \times \mathbf{R}^2\ (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 들을

$$W_i(x,\ y,\ z) = (L_i(x),\ \boldsymbol{F}_i(x,\ y,\ z))$$

로 정의하자. 그러면 $L_i$ 와 $\boldsymbol{F}_i$ 의 정의로부터 $W_i$ 들은 구간 $I$ 의 끝점에서 주어진 자료점($P$ 의 점)들을 구간 $I_i$ 의 끝점에서 주어진 자료점($P$ 의 점)으로 넘긴다.

함수 $f$ 에 대하여 $\overline{f} = \max_x |f(x)|$ 로 표시하고 $\overline{S} = \max_{i \in \{1,\ \cdots,\ n\}} \{\overline{s}_i + \overline{\widetilde{s}}_i,\ \overline{s}_i' + \overline{\widetilde{s}}_i'\}$ 라고 하자.

정리 1 $\overline{S} < 1$ 이면 유클리드거리와 동등한 어떤 거리 $\rho_\theta$ 가 있어서 $W_i\ (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 들이 $\rho_\theta$ 에 관하여 축소변환으로 된다.

다음의 기호를 도입한다.

$$\alpha = \min_{i=1,\ n} \{\alpha_i,\ \widetilde{\alpha}_i,\ \beta_i,\ \widetilde{\beta}_i,\ \gamma_i,\ \widetilde{\gamma}_i\}$$

그러면 확장된 자료모임 $P$ 에 대응하는 반복함수계 $\{\mathbf{R}^3;\ W_i\ (i = 1,\ \cdots,\ n)\}$ 를 구성할수 있고 이에 대하여 다음의 정리가 성립한다.

정리 2[3] 자료모임 $P$ 를 보간하는 어떤 련속넘기기 $\boldsymbol{f} = (f_1,\ f_2)^{\mathrm{T}}$ 가 있어서 $\boldsymbol{f}$ 의 그라프는 반복함수계의 불변모임으로 된다.

이제 벡토르값함수 $\boldsymbol{f} : E \to \mathbf{R}^2$ 를 $\boldsymbol{f} = (f_1(x,\ y),\ f_2(x,\ y))$ 로 표시하면 함수 $f_1 : I \to \mathbf{R}$ 는 주어진 자료모임 $P_0$ 을 보간하는데 이 함수를 숨은변수프락탈보간함수라고 부른다. 또한 함수 $f_2(x,\ y)$ 는 모임 $\{(x_i,\ z_j) \in \mathbf{R}^2;\ i = 1,\ \cdots,\ n\}$ 을 보간하는 프락탈보간함수이다.

모든 $x \in I$ 에 대하여 숨은변수프락탈보간함수 $f_1$ 은

$$f_1(x) = s_i(x) f_1(L_i^{-1}(x)) + s_i'(x) f_2(L_i^{-1}(x)) + q_i(L_i^{-1}(x)),\ x \in I_i \tag{2}$$

를 만족시키며 프락탈보간함수 $f_2$ 는

$$f_2(x) = \widetilde{s}_i(x) f_1(L_i^{-1}(x)) + \widetilde{s}_i'(x) f_2(L_i^{-1}(x)) + \widetilde{q}_i(L_i^{-1}(x)),\ x \in I_i \tag{3}$$

를 만족시킨다.

실례 1 점모임 $P_0 = \{(0,\ 0.2),\ (0.25,\ 0.3),\ (0.5,\ 0.5),\ (0.75,\ 0.1),\ (1,\ 0.6)\}$ 을

$$P = \{(0,\ 0.2,\ 0),\ (0.25,\ 0.3,\ 0.3),\ (0.5,\ 0.5,\ 0.5),\ (0.75,\ 0.1,\ 0.1),\ (1,\ 0.6,\ 0.5)\}$$

로 확장하자. 그리고 함수축소인자를 다음과 같이 생각하자.

$$s_1(x) = \frac{x^{0.8}}{3} \in Lip0.8,\ s_2(x) = \frac{\sin x}{3} \in Lip1,\ s_3(x) = \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) \in Lip1,\ s_4(x) = \frac{x^2}{5} \in Lip1$$

$$s_1'(x) = \frac{x^{0.9}}{7} \in Lip0.9,\ s_2'(x) = \frac{x^2}{2} \in Lip1,\ s_3'(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{10} \in Lip1,\ s_4'(x) = \frac{x - 0.5}{5} \in Lip1$$

$$\widetilde{s}_1(x) = \frac{\sqrt{2x + 0.5}}{5} \in Lip1,\ \widetilde{s}_2(x) = \frac{e^x}{11} \in Lip1,\ \widetilde{s}_3(x) = \frac{\sin 2x}{7} \in Lip1,\ \widetilde{s}_4(x) = \frac{\sqrt{x} + 1}{20} \in Lip1$$

$$\widetilde{s}_1'(x) = \frac{x+1}{8} \in Lip1,\ \widetilde{s}_2'(x) = \frac{x^3 + 1}{8} \in Lip1,\ \widetilde{s}_3'(x) = \frac{x}{10} + \frac{\sin(x/2)}{5} \in Lip1,\ \widetilde{s}_4'(x) = \frac{\cos x}{7} \in Lip1$$

그리고 함수 $q_i,\ \widetilde{q}_i : I \to \mathbf{R}\ (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ 들을 다음과 같이 정의하자.

$$q_1(x) = -s_1(x/4)(0.4x + 0.2) - 0.5x\, s_1'(x/4) + 0.1x + 0.2 \in Lip0.8$$

$$q_2(x) = -s_2\left(\frac{x}{4}+0.25\right)(0.4x+0.2) - 0.5x\, s_2'\left(\frac{x}{4}+0.25\right) + 0.2x + 0.3 \in Lip1$$

$$q_3(x) = -s_3\left(\frac{x}{4}+0.5\right)(0.4x+0.2) - 0.5x\, s_3'\left(\frac{x}{4}+0.5\right) - 0.1x + 1.3 \in Lip1$$

$$q_4(x) = -s_4\left(\frac{x}{4}+0.75\right)(0.4x+0.2) - 0.5x\, s_4'\left(\frac{x}{4}+0.75\right) + 0.2x + 0.4 \in Lip1$$

$$\widetilde{q}_1(x) = -\widetilde{s}_1\left(\frac{x}{4}\right)(0.4x+0.2) - 0.5x\, \widetilde{s}_1'\left(\frac{x}{4}\right) + 0.3x \in Lip0.8$$

$$q_2(x) = -\widetilde{s}_2\left(\frac{x}{4}+0.25\right)(0.4x+0.2) - 0.5x\, \widetilde{s}_2'\left(\frac{x}{4}+0.25\right) + 0.2x + 0.3 \in Lip1$$

$$q_3(x) = -\widetilde{s}_3\left(\frac{x}{4}+0.5\right)(0.4x+0.2) - 0.5x\, \widetilde{s}_3'\left(\frac{x}{4}+0.5\right) - 0.1x + 1.3 \in Lip1$$

$$q_4(x) = -\widetilde{s}_4\left(\frac{x}{4}+0.75\right)(0.4x+0.2) - 0.5x\, \widetilde{s}_4'\left(\frac{x}{4}+0.75\right) + 0.1x + 0.4 \in Lip1$$

이때 식 (2), (3)으로 구성한 숨은변수프락탈보간함수 $f_1$과 프락탈보간함수 $f_2$의 그라프는 각각 그림 1, 2와 같다.

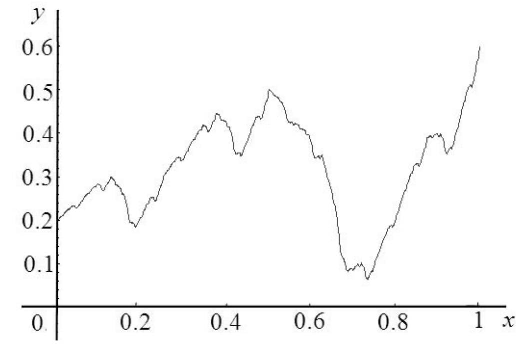


그림 1. 숨은변수프락탈보간함수 $f_1$의 그라프

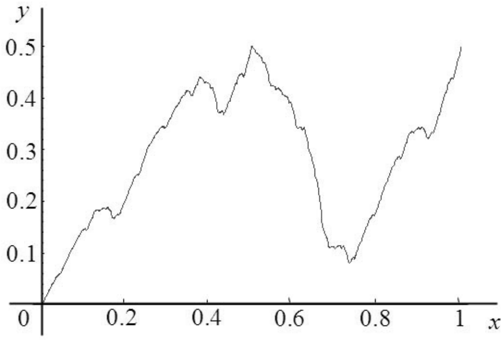


그림 2. 프락탈보간함수 $f_2$의 그라프

## 2. 함차원평가

앞에서 구성한 숨은변수프락탈보간함수가 립쉬츠함수라는것을 밝히고 이를 리용하여 리만－류빌분수계적분을 평가하고 그라프의 함차원을 평가한다.

정리 3 $f_1(x)$, $f_2(x)$가 정리 2에서 구성한 숨은변수프락탈보간함수이면 어떤 상수 $\mu_1,\ \mu_2\ (0<\mu_1,\ \mu_2\le 1)$ 가 있어서 $f_1(x)\in Lip\mu_1,\ f_2(x)\in Lip\mu_2$ 이다. 다시말하여 어떤 상수 $L_{f_1},\ L_{f_2}(>0)$이 있어서

$$|f_1(x)-f_1(\bar{x})|\le L_{f_1}|x-\bar{x}|^{\mu_1},\ |f_2(x)-f_2(\bar{x})|\le L_{f_2}|x-\bar{x}|^{\mu_2} \tag{4}$$

이 성립한다. 이때 지수 $\mu_1,\ \mu_2$는 $\alpha$를 넘지 않는다.

함수수직비례인자 $s_k(x),\ s_k'(x),\ \widetilde{s}_k(x),\ \widetilde{s}_k'(x)$ 들이 구간 $I_k$에서 일정한 부호들을 가지며 프락탈보간함수 $f_1$과 $f_2$에 대하여 $f_1(x)\ge 0,\ f_2(x)\ge 0\ (x\in I)$으로 가정하자.

정리 4 정리 2에서 구성한 숨은변수프락탈보간함수 $f_1$의 $\upsilon$ 계리만—류빌분수계적분 $I^{\upsilon}f_1$은 어떤 점모임

$$P_0^{\upsilon}=\{(i/n,\ y_i^{\upsilon})\,|\,i=0,\ 1,\ \cdots,\ n\}$$

을 보간하는 숨은변수프락탈보간함수이고 프락탈보간함수 $f_2$의 $\upsilon$ 계리만—류빌분수계적분 $I^{\upsilon}f_2$도 어떤 점모임

$$\{(i/n,\ z_i^{\upsilon})\,|\,i=0,\ 1,\ \cdots,\ n\}$$

을 보간하는 프락탈보간함수이다.

이때 새로운 함수축소인자들은 $T_k,\ \widetilde{T}_k\in Lip\theta_1,\ T_k',\ \widetilde{T}_k'\in Lip\theta_2$ 이고 $Q_k,\ \widetilde{Q}_k\in Lip\lambda$ 이다. 여기서 $\theta_1=\min\{\mu_1,\ \upsilon\},\ \theta_2=\min\{\mu_2,\ \upsilon\},\ \lambda=\min\{\theta_1,\ \theta_2\}$ 이다.

$I^{\upsilon}f_1$도 숨은변수프락탈보간함수이므로 정리 3에 의하여 어떤 상수 $0<\upsilon_1\le 1$이 있어서 $I^{\upsilon}f_1\in Lip\upsilon_1$이다. 즉 어떤 상수 $L_{I^{\upsilon}f_1}>0$이 있어서

$$|I^{\upsilon}f_1(x)-I^{\upsilon}f_1(\overline{x})|\le L_{I^{\upsilon}f_1}|x-\overline{x}|^{\upsilon_1}$$

이 성립한다. 이때 $\upsilon_1\le\min\{\mu_1,\ \mu_2,\ \upsilon\}$이다.

정의[1, 2] 모임 $A$에 대하여 극한 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}((\log N_{\varepsilon}(A))/(-\log\varepsilon))$ 가 존재한다면 이 극한을 모임 $A$의 함차원으로 정의하고 $\dim_B A$로 표시한다.

$$\dim_B A=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\log N_{\varepsilon}(A)}{-\log\varepsilon}$$

여기서 $N_{\varepsilon}(A)$는 모임 $A$를 피복하는 반경이 $\varepsilon$인 구들의 최소개수이다.

정리 5 $I^{\upsilon}f_1$의 함차원의 웃한계는 다음과 같다.

$$\dim_B Gr(I^{\upsilon}f_1)\le 1-\upsilon_1$$

실례 2 실례 1에서 구성한 숨은변수프락탈보간함수 $f_1$의 0.7계분수계적분과 0.2계분수계적분은 각각 그림 3, 4와 같다.

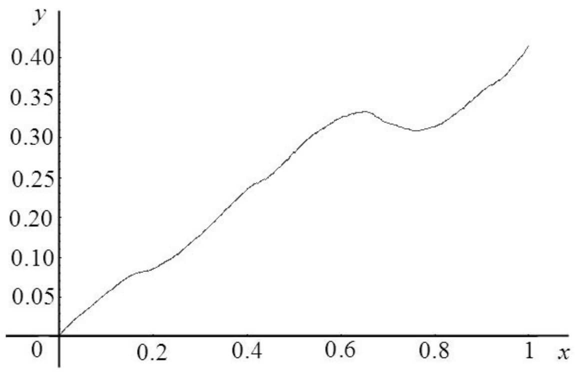


그림 3. 숨은변수프락탈보간함수 $f_1$의 0.7계분수계적분 $I^{0.7}f_1$

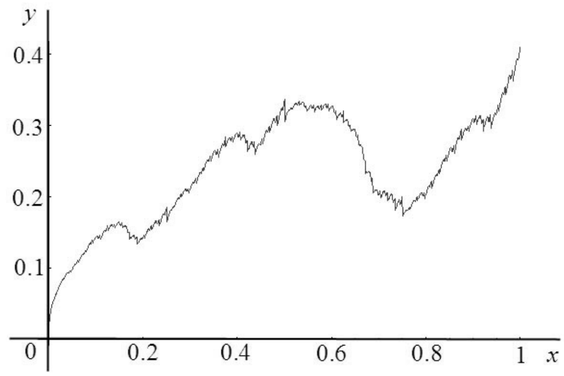


그림 4. 숨은변수프락탈보간함수 $f_1$의 0.2계분수계적분 $I^{0.2}f_1$

이때 얻어진 보간함수의 함차원의 웃한계를 평가해보자.

이 실례에서 $\mu_1=0.8$이므로 $\upsilon=0.7$인 경우 숨은변수프락탈보간함수의 함차원은

$$\dim_B Gr(I^{0.7} f_1) \le 2 - \upsilon = 1.3$$

을 만족시키며 0.2계분수계적분인 경우 함차원은

$$\dim_B Gr(I^{0.2} f_1) \le 2 - \upsilon = 1.8$$

을 만족시킨다.

## 참 고 문 헌

[1] K. Falconer; Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications, John Wiley & Sons, 15～67, 1990.

[2] S. A Prasad, G. P. Kapoor; Fractals, 19, 195, 2011.

[3] C. H. Yun, M. K. Li; Fractals, 27, 2, 1950018, 2019.

주체109(2020)년 3월 15일 원고접수

## Fractional Integral of Hidden Variable Fractal Interpolation Function and Estimation of Its Box-Counting Dimension

*Ri Mi Kyong, Yun Chol Hui*

In this paper, we presented the construction of a hidden variable fractal interpolation function with function contractivity factors and calculated Riemann-Liouville fractional integral of the hidden variable fractal interpolation function. We also estimated its box-counting dimension and gave an example to illustrate our results.

Keywords: hidden variable fractal interpolation function, box-counting dimension