

열력학적매질속에서 저항힘을 극복하면서 운동하는 고전 립자의 확률동력학적운동방정식과 동위원소분리효과

김일광, 김광일

진공속에서 운동하는 립자는 진공요동의 영향을 받아 동력학적운동과 함께 요동과 확률적확산운동을 동반하지만 진공으로부터 저항힘은 받지 않는다.[1] 외부힘이 작용하지 않는 한 진공속에서는 진공섭동의 영향으로 립자의 운동량과 동력학적이에너지가 매 순간 부단히 변화되지만 그것의 평균운동량과 평균에너지는 보존된다. 그러나 유한온도의 기체나 액체와 같은 열력학적매질속에서 운동하는 립자는 열운동하는 매질립자로부터 요동뿐아니라 에너지산일도 당하게 되며 점차 매질과의 열평형상태에 이르게 된다. 이 경우에는 반드시 립자의 운동연구에서 매질에 의한 에너지산일을 더 고려하여야 한다. 열력학적매질속에서 운동하는 립자가 매질립자들로부터 받는 우연적인 충격힘을 매 시각 일일이 고려할 수 없으므로 불가피하게 립자의 력학적상태를 확률적인 량이나 평균값들로 표시해야 한다. 아인슈타인(1905년)과 스몰루홉스끼(1906년)는 확률적방법에 기초하여 요동하는 립자가 어떤 일정한 시간후에 이동한 거리를 온도 T 와 아보가드로수 N 의 함수로 표시하는 리론의 기초를 확립하였다.[2, 3] 선행연구들[4-10]에서는 브라운운동을 하는 립자의 확산방정식과 슈뢰딩거방정식의 류사성에 관심을 돌리면서 확률과정으로서의 브라운운동과 량자력학방정식의 련관성에 대하여 고찰하였다. 매질속에서 립자의 산일을 고려하는 항을 슈뢰딩거방정식에 첨부하는 방법으로 진행한 연구결과들이 발표되었으나 아직 심화시켜야 할 문제점들이 남아있다.[11-14]

우리는 열력학적매질속에서 외부힘과 저항힘의 평형상태에서 운동하는 경우에 대한 립자의 확률동력학적운동방정식을 얻고 CuSO_4 용액속에서 Cu^{2+} 의 확률과동을 실험적으로 확증하였다.

1. 열력학적매질속에서 립자의 확률동력학적운동특성

진공매질속에서 진공섭동의 영향을 받으면서 운동하는 고전립자는 확률동력학적인 운동을 하며 그것의 운동법칙은 량자력학에서 이미 잘 알려진 슈뢰딩거방정식과 일치한다.[1] 진공속에 있는 립자(고전적인 립자)는 진공으로부터 부단히 우연적인 섭동을 받지만 립자의 운동에서는 에너지산일이 없으며 립자의 에너지와 운동량은 평균적으로 항상 보존된다. 다시말하여 진공속에서 일어나는 립자의 확률동력학적인 운동을 나타내는 확률동력학적운동방정식은 가역성을 가진다. 이 특징은 전적으로 진공매질속에서 립자의 운동특성과 관련된다.

한편 유한온도의 액체나 기체와 같은 열력학적매질속에서는 문제가 다르다. 산일매질인 열력학적매질속에서는 립자의 력학적이에너지와 운동량이 보존되지 않는다. 이것이 진공매질에서와 다른 본질적인 운동특징이다. 그러나 공통적인 측면도 있다. 그것은 진공매질속에서와 마찬가지로 열력학적매질속에서도 립자는 외부힘에 의한 동력학적운동과 함께 매질립자들의 무질서한 열운동의 영향으로 인한 브라운운동과 확산운동을 동반한

다는것이다. 다만 확산계수가 다를뿐이다. 명백한것은 열력학적매질속에서도 립자의 운동은 확률동력학적으로 다루어야 하며 따라서 확률밀도 $\rho(\mathbf{r}, t)$ 와 확률흐름밀도 $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ 를 받아들이어야 한다. 결국 선행연구[1]에서와 같이 확률밀도 $\rho(\mathbf{r}, t)$ 가 불균일할 때 생기는 보충적인 확산포텐셜을 받아들이게 되고 이것을 고려하면서 확률동력학적운동방정식을 유도할수 있다.

먼저 열력학적매질속에서 립자의 확산계수에 대하여 보자.

열력학적매질속에 있는 립자는 진공매질의 우연섭동과 열력학적매질로부터 받는 우연섭동의 영향을 동시에 받게 된다. 그러므로 열력학적매질속에서 립자의 확산흐름은 진공섭동에 의한 확산흐름 $\mathbf{j}_v = -D_v \nabla \rho(\mathbf{r}, t)$ 와 열적요동에 의한 확산흐름 $\mathbf{j}_v = -D_v \nabla \rho(\mathbf{r}, t)$ 의 합으로 표시된다. 이로부터 립자의 총적인 확산계수는 다음과 같이 표시된다.

$$D = D_v + D_T = \frac{\hbar}{2m} + D_T \quad (1)$$

여기서 D_v 와 D_T 는 각각 진공섭동과 열적섭동에 의한 확산계수이다. 즉 열력학적매질속에서 립자의 이동도 b 와 매질의 온도 T 사이의 아인슈타인관계식 $D_T = b k T$ 와 진공매질에 의한 확산계수를 리용하면 립자의 총적인 확산계수 D 를 다음과 같이 표시할수 있다.

$$D = \frac{\hbar}{2m} + b k T \quad (2)$$

또는 선행연구[1]에서와 같이 확산계수 D 대신 $d = 2mD$ 를 리용할수도 있다.

$$d = \hbar + 2mbkT \quad (3)$$

열력학적매질속에서 립자의 확률동력학적운동을 연구하는데서 반드시 고려하여야 할 다른 한가지 문제점은 립자가 매질속에서 어떤 속도 \mathbf{v} 로 운동할 때 저항힘 $\mathbf{f}_r(\mathbf{v})$ 를 받는다는것이다. 실험으로 전해질용액속에서 전하가 e 인 양이온이 세기가 E 인 균일전기마당속에 있을 때 립자가 받는 평균적인 총힘은 다음과 같이 표시된다.

$$\mathbf{f}_r(\mathbf{r}, t) = eE - \beta \mathbf{v} \quad (4)$$

여기서 β 는 저항계수이다. 그런데 전해질용액속에서 양이온은 과도상태를 거친 후에 전기마당으로부터 받는 힘 eE 와 저항힘 $-\beta \mathbf{v}$ 의 평형상태에 도달하므로 최종상태에서 립자가 받는 전체적인 힘 $\mathbf{f}_r(\mathbf{r}, t)$ 는 령이고 결국 립자는 평균속도 \mathbf{v} 로 운동하는 자유립자처럼 고찰할수 있다. 물론 열력학적매질속에서 자유립자의 질량은 달라질수도 있다. 그러므로 이제부터 자유립자의 질량 m 을 유효질량 m^* 로 표시하겠다.

이제 진공속에서 상수 $d = \hbar$ 대신 식 (3)과 같이 표시되는 열력학적매질속에서의 상수 d 와 립자가 받는 총힘이 령이라는 점을 고려하면서 선행연구[1]에서와 똑같은 수학적처리과정을 진행하면 열력학적섭동매질속에서 외부힘과 저항힘의 평형상태에서 운동하는 자유립자에 대한 다음과 같은 확률동력학적방정식을 얻을수 있다.

$$i d \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{d^2}{2m} \Delta \psi(\mathbf{r}, t) \quad (5)$$

식 (5)는 매질속에서 립자가 평균적인 속도 \mathbf{v} 로 운동할 때 립자의 확률적인 운동특성을 반영하고있다. 다시말하여 립자의 평균적인 동력학적운동특성을 반영하는 령인 \mathbf{v} 가 주어졌을 때 립자의 확률적운동특성을 반영하고있는 방정식이다. 실험으로 전해질용액속에서 균일전기마당 E 에 의하여 평균속도 \mathbf{v} 로 운동하는 유효전하가 e^* 인 양이온의 운동에 대한 방정식 (5)의 풀이는 다음과 같이 평면파형태로 표시된다.

$$\psi(x, t) = C \cdot \exp\left[-\frac{i}{d}(\varepsilon t - px)\right] \quad (6)$$

여기서 C 는 규격화상수, 양이온의 운동량 p 와 운동에너지 ε 은 다음과 같은 량들이다.

$$p = m^* v, \quad \varepsilon = \frac{p^2}{2m^*} = \frac{m^*}{2} \left(\frac{e^* E}{\beta} \right)^2 \quad (7)$$

식 (6)에는 용액속에서 운동하는 양이온의 동력학적 및 확률적운동특성이 종합적으로 반영되어있다. 즉 식 (6)으로부터 전해질용액속에서 양이온의 운동량, 에너지뿐만 아니라 확률밀도와 확률파진폭 $\psi(x, t)$ 의 파장 λ 도 구할수 있다. 확률파의 파장 λ 는 다음과 같다.

$$\lambda = \frac{2\pi d}{m^* v} = \frac{h}{m^* b e^* E} + \frac{4\pi k T}{e^* E} \quad (8)$$

여기서 h 는 플랑크상수이다.

식 (8)에서 알수 있는것처럼 전해질용액속에서 전기마당에 의하여 이동하는 양이온의 확률파의 파장은 립자의 질량과 속도에만 관계되는 성분과 매질의 온도와 매질속에 형성된 전기마당의 세기와 같은 외부적요인에만 관계되는 성분으로 갈라진다.

한편 전해질용액속에서 운동하는 양이온의 확률파가 식 (6)과 같이 표시되기때문에 용액속에 잠근 평면양극과 음극사이에 작은 구멍이나 실틈이 있는 부도체가림판을 놓고 직류전압을 걸어주면 음극에 양이온들이 빛파동과 유사한 모양의 프레넬고리 또는 프레넬띠형태로 부착될것이다. 물론 부착물이 형성하게 되는 무늬형태를 정확하게 예측하자면 용액속에서 양이온의 유효질량과 유효전하, 이동도, 전해질용액속에 형성된 전기마당의 정확한 분포 등을 미리 정확하게 알아야 한다.

류산동전해질용액속에 잠근 평판음극과 점형태의 양극사이에 작은 구멍이 있는 부도체가림판을 설치하고 일정한 직류전압을 걸어 전기분해하여 음극전극우에 동원자들이 프레넬고리무늬띠(Fresnel zone plate)모양으로 부착되는 현상이 관측되었다.[15] 음극전극판우에 형성된 프레넬고리띠모양의 부착물들이 구멍을 통과하는 이온들의 파동성으로 인한것이라고 생각하였으나 리론과 실험결과를 일치시키는데 성공하지 못하였다. 아직까지 부착고리분포의 법칙성을 정량적으로 정확하게 설명하는 리론은 없다. 그것의 주요한 리유는 선행연구자들의 리론이 완성되지 않았고 전해질용액속에 형성된 실제적인 전기마당벡터의 복잡한 분포와 용액속에서 변화된 립자의 특성량들을 정확하게 고려하지 못한데 있다고 본다. 또는 음극면우에 형성된 간섭무늬형태의 부착이 파동리론과 전혀 다르게 전극우에서 일어나는 표면현상일수도 있기때문이다.

그러므로 간섭무늬형태의 부착형성물이 형성되는것이 전해질용액속에서 이온의 확률적파동성에 의한 현상인가 즉 확률파동의 파장에 관계되는 현상인가 아니면 전극표면현상인가를 확정하는것이 중요한 문제로 제기된다.

2. 전해질용액속에서 이온의 확률동력학적운동특성을 보여주는 실험

확률파의 파장에 대한 식 (8)의 오른변의 첫항이 양이온의 질량을 포함하기때문에 음극면우에 형성되는 부착간섭무늬의 모습이 이온의 질량 m^* 이 변하면 예민하게 달라질것이라고 보았다. 만일 이 현상이 실험적으로 정확하게 확인되면 매질의 섭동에 의하여 산생되는 립자운동의 확률동력학적파동성에 대한 리론의 확정적인 근거로 될것이다.

열력학적매질속에서 운동하는 립자의 확률동력학적운동특성을 확증하기 위하여 간단한 류산동전해질용액에서 실험을 통한 전기분해실험을 진행하였다. 사실 실지 전해실험을 통하여 음극판우에 석출된 동원자들로 이루어진 무늬상우의 개별적인 프레넬고리 또는 프레넬띠들을 명백하게 구분하기 어렵기때문에 무늬모양에 대한 정량적해석을 보다 정확하게 하는것보다도 부착원자들의 질량효과 실험으로 자연동을 이루고있는 동위원소들인 ^{63}Cu (69.1%)과 ^{65}Cu (30.9%)의 비율이 무늬우의 위치마다에서 어떻게 변하는가 하는 것을 확증하는것이 더 효과적이다. 이것이 실험적으로 확증되면 CuSO_4 수용액속에서 전기마당에 의하여 음극판으로 운동하는 Cu^{2+} 들의 확률적파동성에 대하여 확인할수 있다. 왜냐하면 부착물의 위치에 따라 동위원소들의 함량비율이 달라지면 그것을 전극표면현상으로 도저히 설명할수 없기때문이다.

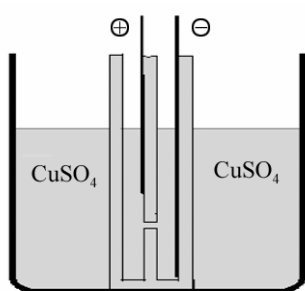


그림. 실험장치의 단면

실험장치의 단면을 그림에 보여주었다. 이러한 단면을 가진 구조물을 부도체인 유전체재료로 만들고 높이가 0.5mm, 길이가 20mm인 틈이 있는 유전체판(두께 1.5mm)을 사이에 두고 직4각형모양의 2개의 전극들을 끼웠다. 가운데에 있는 유전체판과 왼쪽 면과 오른쪽에 있는 유전체판사이의 간격은 4mm정도이다. CuSO_4 수용액의 밀도는 $1.03 \sim 1.09\text{g/cm}^3$ 이고 용액의 온도는 18°C 로 하였다. 고안정직류전압 1.5V를 음극과 양극에 걸어주고 7~8h동안 전해하면 CuSO_4 수용액속에 해리되어있는 동이온들 즉 $^{63}\text{Cu}^{2+}$ 과 $^{65}\text{Cu}^{2+}$ 들이 가운데 격판에 있는 실험을 통과하여 음극면우에 도달하면서 부착되는데 많은 동원자들이 음극면우에 석출되면서 형성된 부착모습은 파동의 에돌이간섭무늬와 류사하다. 그러나 간섭무늬의 구체적인 고리띠들의 경계는 명확하게 구별되지 않는다. 이 부착물을 음극판으로부터 조심히 떼내고 깨끗하게 세척한 다음 실험과 같은 방향(가로)으로 폭이 1mm정도 되도록 절단하여 여러개의 시편들을 얻는다. 그리고 매 시편들에 번호를 매기었다.

매개 시편을 5 000kW 출력의 시험원자로수평통로에서 10min동안 흐름밀도가 $10^{13}\text{n/(cm}^2 \cdot \text{s)}$ 인 중성자뭉음조임을 하고 15min동안 냉각시켰다. 다음에 시편에서 복사되는 에네르기가 510, 1 044keV인 γ 선을 측정계수하여 계산한 광전붕우리들의 면적비를 비교하는 방법으로 매개 시편에서 동위원소의 상대비율 $^{65}\text{Cu}/^{63}\text{Cu}$ 을 열중성자방사화분석방법으로 평가하였다.(표) 측정은 다통로 γ 선스펙트르분석기(《919SPECTRUM, TSM-102》)를 리용하여 진행하였다.

표. 시편번호에 따르는 동위원소상대비율 $^{65}\text{Cu}/^{63}\text{Cu}$ 의 변화에 대한 측정값

시편번호	1	2	3	4	5	천연동	오차
$^{65}\text{Cu}/^{63}\text{Cu}$	0.437	0.381	0.384	0.541	0.512	0.447	0.022

표에서 시편번호의 수자가 커질수록 음극면의 아래부분으로부터 윗부분으로 올라가면서 채취한 시편이며 근사적으로 3번 시편과 4번 시편들이 전해욕조안에서 실험에 제일 가까운 중간위치에 놓여있다. 표에서 보는것처럼 Cu 동위체들의 비율은 시편에 따라 천연동에서 동위원소들의 비율 0.447을 중심으로 크거나 작아진다. 비율변화량의 최대값은 천연동시편에 대하여 $\pm 6.5\%$ 정도이다. 즉 실험을 통한 전해실험에서 음극판우의 위치에 따라 부착되는 동위체들의 비율이 천연동에 비하여 달라지는 동위원소분리효과가 발견되었

다. 이것은 위에서 서술한 열력학적매질속에서 운동하는 립자의 확률적과동성에 대한 실험적근거로 되며 다른 물림새로는 설명되지 않는다는것을 보여준다.

맺 는 말

1) 열력학적매질속에서 산일힘을 받으면서 운동하는 립자의 확률동력학적인 운동방정식을 매질의 우연섭동의 영향에 의한 립자의 요동과 확산, 에네르기산일을 고려하여 새롭게 세웠다.

2) 끈기매질속에서 산일힘을 받는 이온이 균일한 전기마당속에서 운동할 때 그것의 상태를 표현하는 확률적과동함수가 진공속에서 등속운동하는 미시립자의 과동함수와 유사한 평면과동형태를 가진다는것을 밝혔다. 여기서 중요한것은 진공매질에서 량자상수 \hbar 에 대응하는 량이 열력학적매질에서는 식 (3)과 같이 표시되는 량 d 로 바뀐다는것이다.

3) 열력학적매질속에서 립자가 산일힘을 받으면서 운동하는 경우에 해당하는 립자의 확률적과동의 과장이 매질속에서 립자의 확산결수와 평균속도에 관계되는 항과 립자의 질량과 평균속도에 관계되는 항의 합으로 구성된다는것을 밝혔다.

희박한 CuSO_4 용액에서 이 두 항의 비율은 약 14 : 2.3정도이다.

4) CuSO_4 용액속에서 실험을 통하여 전기분해하는 실험을 진행하여 음극에 부착된 석출물을 채취하고 열중성자방사화분석방법으로 석출위치에 따라 Cu동위원소의 비율 $^{65}\text{Cu}/^{63}\text{Cu}$ 이 변화되는 동위원소분리효과가 있다는것을 확인하였다.

참 고 문 헌

- [1] 김일성종합대학학보 물리학, 64, 4, 37, 주체107(2018).
- [2] A. Einstein; Ann. Phys., 17, 549, 1905.
- [3] M. Smoluchowski et al.; Ann. Phys., D 21, 756, 1906.
- [4] I. Fenyés; Zs. Phys., 131, 81, 1952.
- [5] E. Nelson; Phys. Rev., 150, 1079, 1966.
- [6] E. Nelson; Dynamical Theories of Brownian Motion, Princeton University Press, 17~38, 1967.
- [7] L. Nottale; Journal of Chaos, Solitons and Fractals, 4, 3, 361, 1994.
- [8] G. N. Ord; Journal of Physics, A 16, 1869, 1983.
- [9] K. L. Chung et al.; From Brownian Motion to Schrodinger Equations, Springer, 21~60, 2001.
- [10] F. Smarandache et al.; Quantization in Astrophysics, Brownian Motion and Supersymmetry, India, 211~278, 2007.
- [11] M. D. Kostin; J. Chem. Phys., 57, 9, 23, 1972.
- [12] K. K. Kan et al.; Phys. Letter., B 50, 2, 241, 1974.
- [13] P. Auerbach et al.; Phys. Letter., A 27, 9, 3, 1968.
- [14] L. Bess; Progress Theor. Phys., 49, 6, 48, 1978.
- [15] G. E. Cugemenko et al.; Physics(Russia), 5, 350, 1974.

The Stochastic Dynamical Equation of Motion of a Classical Particle Overcoming Resistance in Thermodynamic Medium and the Isotope Separation Effect

Kim Il Gwang, Kim Kwang Il

We have investigated the stochastic dynamical equation of motion of a classical particle overcoming the Stokes resistance in the thermodynamic medium such as gas and liquids and as an illustration have shown a plane wave solution of this stochastic dynamical equation of motion of particle being directed movement in average equilibrium state of external force with medium resistance. And, we have performed the electrolysis experiment whereby electrolytic ions passes by a slit in CuSO_4 water solution for the experimental confirmation on the stochastic wave theory of ion motion in the electrolyte. Then we have found the isotope separation effect that the isotope rate $^{65}\text{Cu}/^{63}\text{Cu}$ changes in accordance with position of electrolysis deposition by thermal neutron activation analysis.

Keywords: classical particle, isotope separation effect