김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체106(2017)년 제63권 제3호 Vol. 63 No. 3 JUCHE106(2017).

일정곡률자명통계다양체의 통계초곡면으로서의 일정헤쎄곡률헤쎄다양체의 성질

민철림, 주창일

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《기초과학은 과학기술강국을 떠받드는 주추입니다. 기초과학이 든든해야 나라의 과학기술이 공고한 토대우에서 끊임없이 발전할수 있습니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 40페지)

최근시기 통계다양체들사이의 통계적넣기에 대하여 많이 연구되고있다.[2, 3]

선행연구[2]에서는 통계다양체들사이의 통계적넣기의 개념을 정식화하고 특수한 평탄리만다양체의 일정헤쎄곡률헤쎄다양체에로의 통계적넣기의 특성들을 연구하였다. 여기서 진행한 통계적넣기는 특수한 일정헤쎄곡률헤쎄다양체인 평탄리만다양체의 특수한 일정곡률통계다양체인 일정헤쎄곡률헤쎄다양체에로의 통계적넣기로 볼수 있다.

이로부터 일정헤쎄곡률헤쎄다양체의 일정곡률통계다양체에로의 통계적넣기에 대하여 론의하면 선행연구결과와 같은 결과들이 일반화될수 없겠는가를 생각하게 된다.

론문에서는 일정헤쎄곡률헤쎄다양체의 일정곡률리만통계다양체에로의 여차원이 1인 통계적넣기의 특성을 연구한다.

M을 n차원다양체, ∇를 M우의 대칭접속, g를 M우의 리만계량, TM을 M우의 벡토르마당전부의 모임, $TM^{(r,\,s)}$를 M우의 $(r,\ s)$형텐소르마당전부의 모임, R를 M우의 곡률텐소르마당이라고 하자.

$(M, \nabla,\ g)$가 통계다양체일 때 즉 ∇가 대칭접속이고 $(\nabla_X g)(Y,\ Z) = (\nabla_Y g)(X,\ Z)$, $\forall X,\ Y,\ Z \in \Gamma(TM)$일 때 쌍 $(\nabla,\ g)$를 통계구조라고 부른다.[2]

(M, ∇, g)에서 R에 대하여

$$R(X,\ Y)Z = k\{g(Y,\ Z)X - g(X, Z)Y\},\ \forall X,\ Y,\ Z \in \Gamma(TM)$$

이면 $(M, \nabla,\ g)$를 $k-$일정곡률통계다양체라고 부른다.[1]

$(\widetilde{M},\ \widetilde{\nabla},\ \widetilde{g})$이 통계다양체, $f: M \to \widetilde{M}$이 넣기라고 하고 M에서의 리만계량 g와 아핀접속 ∇를

$$g = f^*\widetilde{g},\quad g(\nabla_X Y,\ Z) = \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_X f_* Y,\ f_* Z),\ \forall X,\ Y,\ Z \in \Gamma(TM)$$

으로 정의하면 $(\nabla,\ g)$는 M우에서의 통계구조로 되는데 이것을 $(\widetilde{\nabla},\ \widetilde{g})$로부터 f에 의하여 유도된 통계구조라고 부른다.[2]

$(M, \nabla,\ g)$와 $(\widetilde{M},\ \widetilde{\nabla},\ \widetilde{g})$이 두 통계다양체라고 하면 $(\nabla,\ g)$가 $(\widetilde{\nabla},\ \widetilde{g})$로부터 넣기 f에 의하여 유도된 통계구조일 때 넣기 $f: M \to \widetilde{M}$을 통계적넣기라고 부른다.[2]

통계다양체들사이의 통계적넣기에 대하여 성립하는 공식들에 대하여 보자.

$f:(M,\ \nabla,\ g)\to(\widetilde{M},\ \widetilde{\nabla},\ \widetilde{g})$ 이 여차원이 1인 통계적넣기이고 ξ 가 f 의 단위법선벡토르라고 하면 $h,\ h^*\in\Gamma(TM^{(0,\,2)})$ 와 $A,\ A^*\in\Gamma(TM^{(1,\,1)})$ 이 있어서 다음의 가우스공식과 와인가르텐공식이 성립된다.

$$\widetilde{\nabla}_X f_*Y = f_*\nabla_X Y + h(X,\ Y)\xi,\quad \widetilde{\nabla}_X\xi = -f_*A^*X + \tau^*(X)\xi$$

$$\widetilde{\nabla}^*_X f_*Y = f_*\nabla^*{}_X Y + h^*(X,\ Y)\xi,\quad \widetilde{\nabla}^*{}_X\xi = -f_*AX + \tau(X)\xi,\quad \forall X,\ Y\in\Gamma(TM)$$

여기서 $\widetilde{\nabla}^*$ 은 $\widetilde{\nabla}$ 의 $\widetilde{g}$ 에 관한 쌍대접속이다.

또한 $II\in\Gamma(TM^{(0,\,2)})$ 와 $S\in\Gamma(TM^{(1,1)})$ 이 있어서 리만와인가르텐공식 $\widetilde{\nabla}^g{}_X\xi = -f_*SX$ 와 리만가우스공식 $\widetilde{\nabla}^g{}_X f_*Y = f_*\nabla^g{}_X Y + II(X,\ Y)\xi$ 가 성립된다.

통계적초곡면에 대한 가우스방정식, 코다찌방정식, 리찌방정식은 선행연구[2]에서와 같다.

정리 1 $(\widetilde{M},\ \widetilde{\nabla},\ \widetilde{g})$ 이 $\widetilde{k}-$일정곡률자명통계다양체, $(M,\ \nabla,\ g)$ 가 $c-$일정헤쎄곡률헤쎄다양체이고 $\dim M = n\ (\ge 3)$ 이라고 하자.

$f: M\to\widetilde{M}$ 이 여차원이 1인 통계적넣기일 때 $\mathrm{rank}B + \mathrm{rank}B^*\ge 1,\ \widetilde{k}\ne 0$ 이면 $\tau^* = 0$ 이 성립된다. 여기서 $B^* = A^* - II$ 이다.

증명 $R^{\nabla}(X,\ Y)Z = R^{\widetilde{\nabla}}(X,\ Y)Z + g(AY,\ Z)A^*X - g(AX,\ Z)A^*Y$

$R^{\nabla^*}(X,\ Y)Z = R^{\widetilde{\nabla}^*}(X,\ Y)Z + g(A^*Y,\ Z)AX - g(A^*X,\ Z)AY$

두 식을 X 에 관하여 축약하면 $-\widetilde{k}I = (\mathrm{Tr}A^*)A - AA^* = (\mathrm{Tr}A)A^* - A^*A$ 가 얻어진다.

이로부터 $A,\ A^*$은 불퇴화가 된다.

어떤 $\lambda_j\in\boldsymbol{R}$ 가 있어서 $AX_j = \lambda_j X_j$ 인 직교토대 $\{X_j\},\ j=1,\cdots,\ n$ 이 있다.

이때 $A^*X_j = \sum a_i^l X_l$ 이라고 하면 다음의 식이 성립된다.

$$(\mathrm{Tr}A^*A - AA^*)X_j = (\mathrm{Tr}A^*\lambda_i - \lambda_i a_i^l)X_i - \sum_{i\ne l}\lambda_l a_i^l X_l = -\widetilde{k}(n-1)X_i$$

$i\ne l$ 이면 $\lambda_l a_i^l = 0,\ \lambda_l\ne 0$ 이므로 $a_i^l = 0$ 이며 따라서 $A^*X_j = \lambda_j^* X_j$ 가 성립된다.

$X,\ Z = X_i,\ Y = X_j\ (i\ne j)$ 로 놓으면

$$\widetilde{k}\{g(X_j,\ X_i)X_i - g(X_i,\ X_i)X_j\} + \lambda_j\lambda_i^* g(X_j,\ X_i)X_i - \lambda_i\lambda_j^* g(X_i,\ X_i)X_j =$$
$$= -[-k + \lambda_i\lambda_j^*]g(X_i,\ X_i)X_j = 0$$

이 성립되며 이로부터 $\widetilde{k} + \lambda_i\lambda_j^* = 0$ 이 나온다.

또한 $\lambda_i\lambda_j^* = -\widetilde{k}\ne 0$ 이므로 $A = \lambda I,\ A^* = (-\widetilde{k})I/\lambda$ 가 나오며 다음의 식이 성립된다.

$$b(Y,\ Z)B^*X - b(X,\ Z)B^*Y + II(Y,\ Z)SX - II(X,\ Z)SY = k\{g(Y,\ Z)X - g(X,\ Z)Y\}$$

$X = e_j,\ Y = Z = e_i$ 로 놓으면 $(\lambda - s_i)(\lambda^* - s_j)g(e_i,\ e_i)e_j + s_i s_j g(e_i,\ e_i)e_j = -\widetilde{k}\cdot(e_i,\ e_i)e_j$ 이고 따라서 $(\lambda - s_i)(\lambda^* - s_j) + s_i s_j = -\widetilde{k} \Rightarrow 2s_i s_j = s_i\lambda^* + s_j\lambda,\ \exists i,\ s_i = 0 \Rightarrow s_1 = s_2 = \cdots = s_n = 0$ 이 성립되며 이때 $A^* = B^* = \lambda^* I,\ A = B = \lambda I$ 이므로 다음의 사실이 성립된다.

$$\forall i,\ s_i\ne 0 \Rightarrow \frac{\lambda}{s_i} + \frac{\lambda}{s_j} = 2 \Rightarrow s_1 = s_2 = \cdots = s_n = s,\ \frac{\lambda + \lambda^*}{s} = 2 \Rightarrow s = \frac{\lambda + \lambda^*}{2}$$

이로부터 $S=\mu I,\ \mu=(1/2)\cdot(\lambda-(1/\lambda)\cdot\widetilde{k})$ 이므로 $B=-B^*=(1/2)\cdot(\lambda+(1/\lambda)\cdot\widetilde{k})I$ 이다.

$(\widetilde{M},\ \widetilde{\nabla},\ \widetilde{g})$ 이 자명통계다양체라는 사실을 쓰면 $\tau^*(X)B^*Y-\tau^*(Y)B^*X=0$ 을 얻는다.

또한 $\tau^*(X)b(Y,\ Z)=\tau^*(Y)b(X,\ Z)\Rightarrow g(\tau^*(X)BY,\ Z)=g(\tau^*(Y)BX,\ Z)\Rightarrow\tau^*(X)BY=\tau^*(Y)BX$ 가 성립되며 $B=(\lambda-s)I,\ B^*=(\lambda^*-s)I$, $\mathrm{rank}B+\mathrm{rank}B^*\geq 1$ 이므로 $\tau^*(X)Y=\tau^*(Y)X$ 이며 이로부터 $\tau^*=0$ 이 나온다.(증명끝)

정리 2 정리 1의 조건들이 성립되고 $f:M\to\widetilde{M}$ 이 여차원이 1인 통계적넣기일 때 $\widetilde{k}\neq 0$ 이면 리만형태연산자는 $S=\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{-(4\widetilde{k}+c)}I$ 로 된다.

증명 일정곡률통계다양체의 정의에 의하여 다음의 식이 성립된다.

$$R^{\widetilde{\nabla}^g}(X,\ Y)Z=R^{\nabla^g}(X,\ Y)Z-(II(Y,\ Z)SX-II(X,\ Z)SY)=$$
$$=-c\{g(Y,\ Z)X-g(X,\ Z)Y\}/4-(II(Y,\ Z)SX-II(X,\ Z)SY)$$

정리 1로부터 $\exists\lambda\neq 0,\ s=(\lambda-\widetilde{k}/\lambda)I/2$ 가 성립된다.

자명통계다양체라는데로부터 넣기의 성질을 쓰면 다음의 식이 성립된다.

$$R^{\widetilde{\nabla}^g}(X,\ \ Y)Z=(c+(\lambda-\widetilde{k}/\lambda)^2)\{g(Y,\ \ Z)X-g(X,\ \ Z)Y\}=$$
$$=R^{\widetilde{\nabla}}(X,\ \ Y)Z=\widetilde{k}\{g(Y,\ \ Z)X-g(X,\ \ Z)Y\}$$

이 식을 정돈하면 $\widetilde{k}=-(c+(\lambda-\widetilde{k}/\lambda)^2)/4\Rightarrow\lambda^2+\widetilde{k}^2/\lambda^2=-2\widetilde{k}-c$ 가 나온다.

$S=(\lambda-\widetilde{k}/\lambda)I/2=\alpha I$ 로 놓으면 $\alpha^2=(\lambda^2+\widetilde{k}^2/\lambda^2-2\widetilde{k})/4=(-4\widetilde{k}-c)/4$ 가 성립되고 따라서 $S=\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{-(4\widetilde{k}+c)}I$ 가 나온다.(증명끝)

실례 $H:=\{y=(y^1,\cdots,\ y^{n+1})\in\boldsymbol{R}^{n+1},\ y^{n+1}>0\},\ \widetilde{g}=(y^{n+1})^{-2}\sum_{i=1}^{n+1}dy^idy^i$ 에 대하여 보자.

H 에서 아핀접속 $\widetilde{\nabla}$ 을 다음과 같이 정의하자.

$$\widetilde{\nabla}_{\partial_i}\partial_{n+1}=\widetilde{\nabla}_{\partial_{n+1}}\partial_i=(-1)/(y^{n+1})\partial_i\ (i=1,\cdots,n),\ \widetilde{\nabla}_{\partial_i}\partial_j=\delta_{ij}/(y^{n+1})\partial_{n+1},\ \widetilde{\nabla}_{\partial_{n+1}}\partial_{n+1}=(-1)/y^{n+1}\partial_{n+1}$$

이때 $(H,\widetilde{\nabla},\ \widetilde{g})$ 은 (-1)−일정곡률자명통계다양체이다.

$f:\boldsymbol{R}^n\mapsto H$ 를 $(y^1,\cdots,\ y^n)\in\boldsymbol{R}^n\mapsto(y^1,\cdots,\ y^n,\ y^0)\in H,\ y^0>0$ 으로 정의하자.

$(\nabla,\ g)$ 를 $\boldsymbol{R}^n$ 에서 f 와 $(\widetilde{\nabla},\ \widetilde{g})$ 에 의해 유도된 통계구조라고 하면 $\forall h\in F(H)$ 에 대하여 $f^*h(y^1,y^2,\cdots,\ y^n)=h(y^1,\ y^2,\cdots,\ y^n,\ y^0)$ 이 성립한다. 그리고 $\partial h/\partial y^i|_{f(p)}=\partial(f^*h)/\partial y^i|_p$ 가 성립한다.

그러므로 $f_*\dfrac{\partial}{\partial y^i}=\dfrac{\partial h}{\partial y^i}$ 가 성립되며 $\widetilde{\nabla}_{\partial_i}\partial_j=\delta_{ij}\dfrac{1}{y^{n+1}}\partial_{n+1}=f_*\nabla_{\partial i}\partial_j+h_{ij}\xi=\Gamma_{ij}^k\partial_k+h_{ij}\xi$ 이다.

따라서 $\Gamma_{ij}^k=0$ 이고 $\nabla,\ \nabla^g$ 는 평탄으로 된다.

이때 $h_{ij}=0\ \ (i\neq j),\ h_{ii}\xi=(1+\alpha)/y^{n+1}$ 가 성립되고 $\xi=y^0\partial_{n+1}$ 이 성립된다.

또한 $h_{ii}=1/(y^0)^2$ 이 성립되므로 $h=g,\ A=I$ 로 된다. 그리고 $\nabla_{\partial_i}\xi=-f_*A^*\partial_i+\tau_i^*(\xi)$ 가 성립된다는데로부터 $y^0\nabla_{\partial_i}\partial_{n+1}|_p=(-1)/y^{n+1}\partial_i$ 이고 $\tau^*=0,\ A^*=I$ 가 성립된다.

또한 $(\nabla_{\partial_i}^g\xi)=2\partial_i/2=-\partial_i=-f_*S\partial_i$ 이므로 $S=I$ 로 된다. 그러므로 형태연산자들은

$$A=I,\ A^*=I,\ B=-B^*=0,\ S=I$$

로 구해진다.

참 고 문 헌

[1] S. Amari et al.; Methods of Information Geometry, AMS & Oxford University Press, 23～78, 2000.

[2] H. Furuhata; Diff. Geom. Appl., 27, 420, 2009.

[3] C. R. Min et al.; Glob. J. Adv. Res. Class. Mod. Geom., 3, 66, 2014.

주체105(2016)년 11월 5일 원고접수

Properties of Hessian Manifolds with Constant Hessian Curvature as Statistical Hypersurfaces of Trivial Statistical Manifolds with Constant Curvature

Min Chol Rim, Ju Chang Il

We studied the properties of Hessian manifolds with constant Hessian curvature as a statistical hypersurfaces of trivial statistical manifolds with constant curvature. Here we showed that τ^* vanishes and obtained Riemannian shape operator.

Key words: trivial statistical manifolds with constant curvature, Hessian manifolds with constant Hessian curvature