김일성종합대학학보 주체110(2021)년
수 학 제67권 제2호

부의 요청과 상태의존봉사속도를 가지는 유한용량반복봉사계의 안정상태해석

전용철, 조은향

경애하는 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《우리는 과학기술을 발전시켜도 남들이 걸은 길을 따라만 갈것이 아니라 우리 과학자들의 애국충정과 우리 인민의 슬기와 민족적자존심을 폭발시켜 년대와 년대를 뛰여넘으며 비약해나가야 합니다.》

우리는 콤퓨터망과 생산공정들에서 제기되는 대중봉사계의 특성해석문제를 연구하였다.

선행연구[4]에서는 로그안정상태로 특징지어지는 상태의존봉사속도를 가지는 봉사계에서 안정상태분포에 대하여 연구하였다.

선행연구[1, 6]에서는 기다림줄길이에 따라 요청들을 거절하는 반복봉사계와 예정된 휴식시간과 시동시간을 가지는 반복봉사계에서 안정상태확률들을 연구하였다. 부의 요청은 콤퓨터망에서 콤퓨터비루스의 작용과 사고, 고장 등을 모형화하기 위하여 여러 봉사모형들에서 론의되고있다.[2, 3, 5]

론문에서는 계의 상태에 따라 변하는 봉사속도를 가지며 부의 요청이 있는 유한용량반복봉사계의 안정상태확률에 대하여 론의한다.

체계의 기다림특성을 해석하기 위하여 증식사멸과정에 기초하여 모형의 기초로 되는 채프만—꼴모고로브방정식을 작성한다.

에르고드성에 기초하여 안정상태확률들의 존재성을 밝히고 안정상태확률방정식을 유도한다. 또한 안정상태에서 몇가지 성능척도들에 대한 파라메터들의 효과를 설명하는 수치적결과들을 서술한다.

다음과 같은 구조를 가지는 한봉사기대중봉사계를 생각한다.

요청들의 도착흐름은 도착속도가 λ인 뽜쏭흐름이며 요청들에 대한 봉사시간은 파라메터가 μ인 지수분포에 따른다.

봉사시간파라메터는 체계에 있는 요청수 n에 따라 μ_n으로 변한다. 요청이 도착할 때 봉사기구가 작업중이면 반복궤도에 들어간다. 반복시도간격은 파라메터가 θ인 지수분포에 따른다.

체계의 용량은 K이다. 용량이 다 차면 체계에 있는 요청수가 F가 될 때까지 요청을 거절하고 μ의 봉사속도로 봉사한다.

이 봉사계에 부의 요청이 들어온다.

부의 요청의 도착간격은 파라메터가 ν인 지수분포에 따른다.

t시각에 반복궤도에 있는 요청수를 $N(t)$로 놓는다. 봉사기구의 상태를 $C(t)$로 표시한다. $C(t)$는 봉사기구가 비여있을 때 0, 봉사기구가 작업중이며 요청이 들어올수 있을 때 1, 봉사기구가 작업중이며 요청이 들어올수 없을 때 2로 놓는다.

t시각에 체계의 상태는 $(C(t),\ N(t))$로 결정되며 상태변화과정은 마르꼬브성을 가진다.

t시각에 체계의 상태확률을 $P_{i,\,n}(t) = P\{C(t) = i,\ N(t) = n\}$과 같이 표시한다.

정리 1 론의되는 대중봉사계의 상태확률들에 대하여 다음의 방정식들이 성립한다.

$$\frac{dP_{0,0}(t)}{dt}=-\lambda P_{0,0}(t)+\mu_1 P_{0,1}(t)+\nu\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=1}^{K-1}P_{i,j}(t) \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}P_{0,n}(t)=-(\lambda+\theta+\nu)P_{0,n}(t)+\mu_n P_{1,n}(t),\ 1\le n\le K-1 \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}P_{1,0}(t)=-(\lambda+\mu_1+\nu)P_{1,0}(t)+\lambda P_{0,0}(t)+\theta P_{0,1}(t) \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}P_{1,n}(t)=-(\lambda+\mu_{n+1}+\nu)P_{1,n}(t)+\lambda P_{1,n-1}(t)+\lambda P_{0,n}(t)+\theta P_{0,n+1}(t),\ 1\le n\le F-2 \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}P_{1,F-1}(t)=-(\lambda+\mu_F+\nu)P_{1,F-1}(t)+\lambda P_{1,F-2}(t)+\lambda P_{0,F-1}(t)+\theta P_{0,F}(t)+\mu P_{2,F}(t) \tag{5}$$

$$\frac{d}{dt}P_{1,n}(t)=-(\lambda+\mu_{n+1}+\nu)P_{1,n}(t)+\lambda P_{1,n-1}(t)+\lambda P_{0,n}(t)+\theta P_{0,n+1}(t),\ F\le n\le K-2 \tag{6}$$

$$\frac{d}{dt}P_{1,K-1}(t)=-(\lambda+\mu_K+\nu)P_{1,K-1}(t)+\lambda P_{1,K-2}(t)+\lambda P_{0,K-1}(t) \tag{7}$$

$$\frac{d}{dt}P_{2,n}(t)=-\mu P_{2,n}(t)+\mu P_{2,n+1}(t),\ F\le n\le K-2 \tag{8}$$

$$\frac{d}{dt}P_{2,K-1}(t)=-\mu P_{2,K-1}(t)+\lambda P_{1,K-1}(t) \tag{9}$$

증명 방정식 (1)에 대하여 증명하자.

t 시각에 체계가 비여있을 때 구간 $(t,\ t+\Delta t)$ 에서 상태변화를 론의한다.

$(t+\Delta t)$ 시각에 상태가 (0, 0)으로 될 확률은 t 시각에 (0, 0)상태에 있고 그동안에 요청이 하나도 들어오지 않을 확률과 t 시각에 (1, 0)상태에 있고 그동안에 봉사받고있던 요청들에 대한 봉사가 끝날 확률, 부의 요청의 도착으로 체계에 있는 모든 요청들이 제거될 확률 그리고 기타 사건들의 확률의 합과 같다.

t 시각에 (0, 0)상태에 있고 $(t,\ t+\Delta t)$ 동안에 요청이 하나도 들어오지 않을 확률은 $(1-\lambda\Delta t+o(\Delta t))P_{0,0}(t)$, t 시각에 (1, 0)상태에 있고 $(t,\ t+\Delta t)$ 동안에 봉사받고있던 요청들에 대한 봉사가 끝날 확률은 $(\mu_1\Delta t+o(\Delta t))P_{0,1}(t)$ 이다.

부의 요청은 $C(t)$ 가 0 또는 1일 때에만 들어온다. t 시각에 $C(t)$ 가 0 또는 1인 상태에 있고 $(t,\ t+\Delta t)$ 동안에 부의 요청이 들어올 확률은 $(\nu\Delta t+o(\Delta t))\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=1}^{K-1}P_{i,j}(t)$ 이다.

그리고 기타 사건들의 확률의 합은 $o(\Delta t)$ 이므로 다음의 식이 성립된다.

$$P_{0,0}(t+\Delta t)=(1-\lambda\Delta t+o(\Delta t))P_{0,0}(t)+(\mu_1\Delta t+o(\Delta t))P_{0,1}(t)+(\nu\Delta t+o(\Delta t))\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=1}^{K-1}P_{i,j}(t)+o(\Delta t)$$

이 식을 정돈하고 Δt 로 나눈 다음 $\Delta t\to 0$ 일 때 극한을 생각하면

$$\frac{dP_{0,0}(t)}{dt}=-\lambda P_{0,0}(t)+\mu_1 P_{0,1}(t)+\nu\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=1}^{K-1}P_{i,j}(t)$$

가 나온다. 즉 방정식 (1)이 성립된다.

마찬가지방법으로 방정식 (2)－(9)들을 증명할수 있다.(증명끝)

$t \to \infty$일 때의 체계의 안정상태확률을 $P_{i,\,n} = \lim_{t\to\infty} P_{i,\,n}(t)$와 같이 표시한다.

정리 2 론의되는 대중봉사계에 대하여 안정상태확률들이 존재하며 다음의 방정식들이 성립된다.

$$-\lambda P_{0,\,0} + \mu_1 P_{0,\,1} + \nu \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=1}^{K-1} P_{i,\,j} = 0$$

$$-(\lambda+\theta+\nu)P_{0,\,n} + \mu_{n+1}P_{1,\,n} = 0,\ \ 1 \le n \le K-1$$

$$-(\lambda+\mu_1+\nu)P_{1,\,0} + \lambda P_{0,\,0} + \theta P_{0,\,1} = 0$$

$$-(\lambda+\mu_{n+1}+\nu)P_{1,\,n} + \lambda P_{1,\,n-1} + \lambda P_{0,\,n} + \theta P_{0,\,n+1} = 0,\ \ 1 \le n \le F-2$$

$$-(\lambda+\mu_F+\nu)P_{1,\,F-1} + \lambda P_{1,\,F-2} + \lambda P_{0,\,F-1} + \theta P_{0,\,F} + \mu P_{2,\,F} = 0$$

$$-(\lambda+\mu_{n+1}+\nu)P_{1,\,n} + \lambda P_{1,\,n-1} + \lambda P_{0,\,n} + \theta P_{0,\,n+1} = 0,\ \ F \le n \le K-2$$

$$-(\lambda+\mu_K+\nu)P_{1,\,K-1} + \lambda P_{1,\,K-2} + \lambda P_{0,\,K-1} = 0$$

$$\mu P_{2,\,n}(t) = \mu P_{2,\,n+1}(t),\ \ F \le n \le K-2$$

$$\mu P_{2,\,K-1}(t) = \lambda P_{1,\,K-1}(t)$$

증명 론의되는 대중봉사계에서 t시각에 체계의 상태는 $(C(t),\ N(t))$로 결정되며 상태변화과정은 마르꼬브성을 가진다.

그리고 이 마르꼬브사슬은 유한상태, 기약, 비주기마르꼬브사슬로 된다. 따라서 정상상태확률 $P_{i,\,n}$들이 존재한다.

상태확률방정식 (1)－(9)들에서 왼변을 0으로 놓으면 정리의 안정상태확률방정식들이 얻어진다.(증명끝)

체계의 성능척도들에 대한 파라메터들의 영향을 수치적결과들로 보자.

체계의 성능척도들을 보면 봉사기구휴식확률은 $\mathrm{PI} = \sum_{n=0}^{K-1} P_{0,\,n}$, 봉사기구작업확률은 $\mathrm{PB} = \sum_{n=0}^{K-1} P_{1,\,n} + \sum_{n=F}^{K-1} P_{2,\,n}$, 봉사계의 생산성은 $\mathrm{ETP} = \sum_{n=0}^{K-1} \mu_{n+1} P_{1,\,n} + \mu \sum_{n=F}^{K-1} P_{2,\,n}$, 반복궤도에서 기다리는 평균요청수는 $\mathrm{ENQ} = \sum_{n=0}^{K-1} nP_{1,\,n} + \sum_{n=F}^{K-1} nP_{2,\,n}$, 봉사기구가 비여있을 때 반복궤도에서 기다리는 평균요청수는 $\mathrm{ENR} = \sum_{n=0}^{K-1} nP_{0,\,n}$, 총비용은 다음과 같다.

$$\mathrm{TC} = C_I \cdot \mathrm{PI} + C_B \cdot \mathrm{PB} + C_Q \cdot \mathrm{ENQ} + C_R \cdot \mathrm{ENR} + C_T \cdot \mathrm{ETP} + C_M \cdot \mu$$

파라메터 μ, λ, θ, ν들이 체계특성량들에 주는 영향을 수치적으로 보기로 한다.

$K=6$, $F=3$, $\mu_n = \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)\mu$로 놓는다.

$C_I = 40$, $C_B = 20$, $C_Q = 100$, $C_R = 80$, $C_T = 10$, $C_M = 20$으로 놓는다.

$\lambda = 3$, $\nu = 0.5$로 놓는다.

이때 μ와 θ에 따르는 총비용의 변화는 표와 같다.

표. μ와 θ에 따르는 총비용의 변화

θ	μ									
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1.0	276.65	257.95	252.33	253.98	260.17	269.40	280.82	293.85	308.12	323.34
1.5	272.29	251.30	244.19	245.02	250.86	260.08	271.69	285.04	299.69	315.32
2.0	268.53	245.62	237.39	237.73	243.50	252.91	264.85	278.59	293.66	309.69

표에서 보는바와 같이 총비용을 최소화하는 μ^*이 있다는것을 알수 있다.

참 고 문 헌

[1] 정경호 등; 조선민주주의인민공화국 과학원통보, 1, 16, 주체108(2019).

[2] I. Atencia et al.; Adv. Comput. Math., 45, 4, 1863, 2019.

[3] E. Gelenbe; J. Appl. Prob., 28, 3, 656, 1991.

[4] V. Giorno et al.; J. Math. Anal. Appl., 458, 949, 2018.

[5] M. Yajima et al.; Perform. Eval., 129, 2, 2019.

[6] Y. Zhang et al.; Appl. Math. Model., 49, 514, 2017.

주체109(2020)년 12월 5일 원고접수

Steady-state Analysis of a Finite-capacity Retrial Queue with Negative Customers and State-dependent Service Rates

Jon Yong Chol, Jo Un Hyang

We consider a finite-capacity retrial queue with negative customers and state-dependent service rates. The service rates are dependent on the number of customers present in the system. If the system becomes full, the customers are not acceptable until the system size drops to prefixed level. The negative customers arrive according to Poisson process. To analyze the queuing characteristics of the system, Chapman–Kolmogorov equations underlying the model are developed on the basis of birth–death process. We also provide some numerical results to illustrate the effect of the parameters on several performance characteristics in steady-state.

Keywords: queue, steady-state, negative customer