김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체106(2017)년 제63권 제12호 Vol. 63 No. 12 JUCHE106(2017).

모듈공간에서 비선형4계슈뢰딩거방정식풀이의 유일존재성

문학명, 김진명

론문에서는 모듈공간에서 비선형4계슈뢰딩거방정식의 꼬쉬문제

$$\begin{cases} iu_t + a\Delta u + b\Delta^2 u = f(u), & (t,\ x)\in \boldsymbol{R}^{n+1} \\ u(0,\ x) = u_0(x), & x\in \boldsymbol{R}^n \end{cases} \tag{1}$$

의 유일존재성에 대하여 연구한다. 여기서 $a,\ b\ (b\neq 0)$ 는 상수, Δ 는 라쁠라스연산자, $f(u)$ 는 비선형항이다.

선행연구[1]에서는 $0<\sigma\le 2m/n,\ 0\le s<n/2$ 혹은 $\sigma>2m/n,\quad s_0\le s<n/2,\quad s_0=(n\sigma-2m)/(2\sigma)$ 일 때 쏘볼레브공간 H^s 에서 비선형항 $c|u|^\sigma u$ 에 대하여 비선형4계슈뢰딩거방정식의 유일존재성을 밝혔다. 여기서 s_0 은 표준척도법에 의하여 주어지는 림계지수이다.

선행연구[2]에서는 $4(p^2-1)/[(4-n)p+4+n]\le q\le\infty,\ s_p=n/2-4/(p-1)$ 이고 $s>s_p$ 일 때 동차 및 비동차베쏘브공간 $\dot{B}^{s_p}_{2,\,q}(\boldsymbol{R}^n)$ 과 $B^s_{2,\,q}(\boldsymbol{R}^n)$ 에서 비선형항 $\pm u^p$ 에 대하여 비선형4계슈뢰딩거방정식의 유일존재성을 밝혔다. 여기서 s_p 도 림계지수이다.

선행연구[3, 4]에서는 모듈공간에서 슈뢰딩거방정식과 파동방정식, 비타원형슈뢰딩거방정식의 슈트리카르츠평가를 얻었으며 모듈공간에서 충분히 작은 초기값에 대하여 비선형슈뢰딩거방정식과 비선형클라인－고르돈방정식의 대역적유일존재성을 밝혔다.

론문에서는 모듈공간에서 선형4계슈뢰딩거방정식의 풀이의 무딘감쇠평가와 슈트리카르츠평가를 얻고 그것을 리용하여 비선형항이 $\lambda|u|^\kappa u\ (\kappa\ge 8/n,\ \kappa\in\boldsymbol{N})$ 일 때와 $\lambda(e^{\rho|u|^2}-1)u\ (\lambda\in\boldsymbol{C},\ \rho>0)$ 일 때 $M_{2,\,1}$ 에서 비선형4계슈뢰딩거방정식의 유일존재성을 밝힌다.

F 는 푸리에변환, F^{-1} 은 푸리에거꿀변환을 의미하고 $A\lesssim B$ 는 상수 C 가 있어서 $A\le CB$ 를, $A\vee B$ 는 $\max(A,\ B)$ 를 의미한다.

문제 (1)은 동등한 적분형식 $u(t)=S(t)u_0-i\int_0^t S(t-\tau)f(u(\tau))d\tau$, $S(t)=e^{it(a\Delta+b\Delta^2)}$ 을 가진다.

먼저 선형4계슈뢰딩거방정식의 무딘감쇠평가와 슈트리카르츠평가를 얻는다.

정리 1 $s\in\boldsymbol{R}$, $2\le p<\infty$, $1/p+1/p'=1$, $0<q<\infty$ 라고 하면 다음의 식이 성립된다.

$$\|S(t)f\|_{M^s_{p,\,q}}\lesssim(1+|t|)^{-n/2(1/2-1/p)}\|f\|_{M^s_{p',\,q}}$$

정리 2 $A=\int_0^t S(t-s)ds$ 이고 $2/\gamma(p)=n/2(1/2-1/p)$ 라고 하면 다음의 식이 성립된다.

$$\|S(t)\varphi\|_{l^1_\square(L^\gamma(\boldsymbol{R},\ L^p))}\lesssim\|\varphi\|_{M_{2,\,1}},\quad \|Af\|_{l^1_\square(L^\gamma(\boldsymbol{R},\ L^p))\cap l^1_\square(L^\infty(\boldsymbol{R},\ L^2))}\lesssim\|f\|_{l^1_\square(L^{\gamma'}(\boldsymbol{R},\ L^{p'}))}\ (2\le p<\infty,\ \gamma\ge 2\vee\gamma(p))$$

다음으로 비선형4계슈뢰딩거방정식의 풀이의 유일존재성을 밝히자.

보조정리 $1\le p,\ p_i,\ \gamma,\ \gamma_i\le\infty$ 가 $1/p=1/p_1+\cdots+1/p_N$, $1/\gamma=1/\gamma_1+\cdots+1/\gamma_N$ 을 만족시킬 때 $\|u_1u_2\cdots u_N\|_{l^1_\square(L^\gamma(\boldsymbol{R},\ L^p))}\le C^N\prod_{i=1}^N\|u_i\|_{l^1_\square(L^{\gamma_i}(\boldsymbol{R},\ L^{p_i}))}$ 가 성립된다.

정리 3 $n\ge1$, $f(u)=\lambda|u|^\kappa u$, $\kappa\in\boldsymbol{N}$, $\lambda\in\boldsymbol{R}$, $\kappa\ge8/n$, $u_0\in M_{2,\,1}$ 이고 충분히 작은 $\delta>0$ 이 있어서 $\|u_0\|_{M_{2,\,1}}\le\delta$ 가 성립되면 문제 (1)은 유일풀이 $u\in C(\boldsymbol{R},\ M_{2,\,1})\cap l^1_\square(L^p_{x,\ t\in\boldsymbol{R}})$ 을 가진다. 여기서 $p\in[2+8/n,\ 2+\kappa]\cap\boldsymbol{N}$ 이다.

증명 $p\ge2+8/n$ 이므로 $2/p\le n(1/2-1/p)=n(p-2)/(4p)$ 이다.

정리 2를 적용하면 다음의 식들이 성립된다.

$$\|S(t)u_0\|_X\lesssim\|u_0\|_{M_{2,\,1}},\ \|\mathcal{A}f\|_X\lesssim\|f(u)\|_{l^1_\square(L^{p'}_{x,\ t\in\boldsymbol{R}})},\ X=l^1_\square(L^\infty(\boldsymbol{R},\ L^2))\cap l^1_\square(L^p(\boldsymbol{R},\ L^p))\quad(2)$$

넘기기 $F:u(t)\to S(t)u_0-i\mathcal{A}f(u)$ 를 고찰하자.

식 (2)로부터 $\|Fu\|_X\lesssim\|u_0\|_{M_{2,\,1}}+\|f(u)\|_{l^1_\square(L^{p'}_{x,\ t\in\boldsymbol{R}})}$ 이 성립된다.

$p\in[2+8/n,\ 2+\kappa]$ 이므로 $1/p'=(p-1)/p+(\kappa+2-p)/\infty$ 이다. 따라서 보조정리로부터 $\|f(u)\|_{l^1_\square(L^{p'}_{x,\ t\in\boldsymbol{R}})}\lesssim\|u\|^{p-1}_{l^1_\square(L^p_{x,\ t\in\boldsymbol{R}})}\|u\|^{2+\kappa-p}_{l^1_\square(L^\infty_{x,\ t\in\boldsymbol{R}})}$ 이고 베른슈타인평가로부터 $\|\square_iu\|_\infty\lesssim\|\square_iu\|_2$, $i\in\boldsymbol{Z}^n$ 이므로 $\|f(u)\|_{l^1_\square(L^{p'}_{x,\ t\in\boldsymbol{R}})}\lesssim\|u\|_X^{1+\kappa}$ 이 성립된다. 이로부터 $\|Fu\|_X\lesssim\|u_0\|_{M_{2,\,1}}+\|u\|_X^{1+\kappa}$ 이다.

이제 공간 $D=\{u:\|u\|_X\le M\}$, $d(u,\ v)=\|u-v\|_X$ 로 놓자.

$M>0$ 을 $2CM^\kappa<1$ 이 되게 잡고 $\|u_0\|_{M_{2,1}}\le M/2C$ 가 되게 u_0 을 취하면 $F:(D,\ d)\to(D,\ d)$ 가 축소넘기기가 된다. 따라서 축소원리로부터 문제 (1)은 유일풀이 $u\in X$ 를 가진다.(증명끝)

정리 4 $n\ge4$, $f(u)=\lambda(e^{\rho|u|^2}-1)u$, $\lambda\in\boldsymbol{C}$, $\rho>0$ 일 때 $u_0\in M_{2,\,1}$ 이고 충분히 작은 $\delta>0$ 이 있어서 $\|u_0\|_{M_{2,\,1}}\le\delta$ 이면 문제 (1)은 유일풀이 $u\in C(\boldsymbol{R},\ M_{2,\,1})\cap l^1_\square(L^4_{x,\ t\in\boldsymbol{R}})$ 를 가진다.

참 고 문 헌

[1] S. Cui et al.; Nonlinear Anal., 67, 687, 2007.

[2] A. Guo et al.; Nonlinear Anal., 66, 2911, 2007.

[3] B. X. Wang et al.; J. Differential Equations, 232, 36, 2007.

[4] C. Zhang; Nonlinear Anal., 78, 156, 2013.

주체106(2017)년 8월 5일 원고접수

Existence and Uniqueness of Solutions of the Fourth-Order Nonlinear Schrödinger Equations in Modulation Spaces

Mun Hak Myong, Kim Jin Myong

This paper investigates the global existence and uniqueness of solutions of the fourth-order nonlinear Schrödinger equation $iu_t+a\Delta u+b\Delta^2u=f(u)$ in modulation space $M_{2,\,1}$ with small initial value using characteristics of the frequency-uniform decomposition.

Key words: modulation space, Cauchy problem, frequency-uniform decomposition