김일성종합대학학보 주체107(2018)년
수 학 제64권 제4호

모호Bagley-Torvik분수계미분방정식에 대한 초기값문제의 (1, 1)−형풀이의 구성적존재성

최희철, 박순애

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《기초과학부문들을 발전시켜야 나라의 과학기술수준을 빨리 높일수 있고 인민경제 여러 분야에서 나서는 과학기술적문제들을 원만히 풀수 있으며 과학기술을 주체성있게 발전시켜나갈수 있습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제10권 485페지)

론문에서는 최근시기 활발히 연구되고있는 모호분수계미분방정식의 하나인 상결수다항모호분수계미분방정식의 초기값문제에 대한 풀이의 구성적존재성을 론의하고 그 결과를 모호Bagley-Torvik방정식의 풀이의 존재성의 론의에 응용한다.

오늘날 모호미분방정식은 개체군모형, 무기체계의 평가, 토목공학과 전도성류체의 모형화와 같은 여러 분야에서 일반적인 모형으로 되고있다.[1, 2]

선행연구[3]에서는 모호분수계Bagley-Torvik방정식을 호모토피섭동법으로 푸는 방법을 고찰하였는데 존재성의 론의는 하지 않고있다. 또한 선행연구[4]에서는 방정식이 매우 단순한 경우에도 풀이가 존재하지 않는 경우가 있다는것을 실례로 보여주었다.

론문에서는 일반화된 $H-$도함수의 의미에서 모호Bagley-Torvik방정식을 일반화한 모호다항분수계미분방정식에 대한 초기값문제의 (1, 1)−형풀이가 존재하기 위한 한가지 판정조건을 찾고 그것에 기초하여 모호Bagley-Torvik방정식의 (1, 1)−형풀이의 존재성을 론의하였다.

모호실수전부의 모임을 $\mathbf{R}_F$로 표시한다.

다음의 분수계적분방정식을 생각하자.

$$U(t)+b(t)I_{0+}^{\lambda_1}U(t)+c(t)I_{0+}^{\lambda_2}U(t)=V(t),\ t\in I \tag{1}$$

여기서 $V,\ b,\ c\in C(I),\ \lambda_1,\ \lambda_2>0$이다.

정리 1 식 (1)의 풀이는 $C(I)$에서 유일존재하며 그 풀이는 적당한 정수 k_*이 존재하여 다음의 평가식을 만족시킨다.

$$\|U\|_{C(I)}\le\frac{e^{k_*}}{1-q}\|V\|_{C(I)}.$$

적분방정식

$$\begin{gathered}U(t)+bI_{0+}^{\alpha-\beta}U(t)+cI_{0+}^{\alpha}U(t)=h(t),\ t\in[0,\ T]\\ b>0,\ c\ge0,\ 1<\beta<\alpha\le2,\ 0<\alpha-\beta<1\end{gathered} \tag{2}$$

을 고찰하자.

정리 2 $h(t)$가 부아닌 비감소련속함수이고 다음의 조건중 하나를 만족시키면 적분방정식 (2)는 $C(I)$에서 유일한 부아닌 풀이를 가진다.

① $c=0$

② $T^{\beta} \le \dfrac{b\Gamma(\alpha)(1-(\alpha-\beta))}{c\Gamma(\alpha-\beta)(\alpha-1)}$

다음의 모호초기값문제를 고찰하자.

$$({}^{C}D_{1,1}^{\alpha}y)(t) \oplus b \otimes ({}^{C}D_{1,1}^{\beta}y) \oplus c \otimes y(t) = f(t) \ \ (t \in (0,\ 1)) \tag{3}$$

$$y(0) = y_0,\ D_1^{(1)}y(0) = y_0' \tag{4}$$

여기서 $1 < \beta < \alpha \le 2,\ 0 < \alpha - \beta < 1$이며

$$b,\ c \in \mathbf{R}_+,\ y,\ f \in C(I,\ \mathbf{R}_F),\ I = [0,\ 1],\ y_0,\ y_0' \in \mathbf{R}_F$$

이다. 방정식 (3)에 대한 절단방정식은

$$[({}^{C}D_{1,1}^{\alpha}y)(t) \oplus b \otimes ({}^{C}D_{1,1}^{\beta}y)(t) \oplus c \otimes y(t)]^r = [f(t)]^r \ \ (r \in [0,\ 1])$$

과 같으며 이 방정식을 절단의 성질을 리용하여 다시 쓰면 다음과 같다.

$$[({}^{C}D_{1,1}^{\alpha}y)(t)]^r + b[({}^{C}D_{1,1}^{\beta}y)(t)]^r + c[y(t)]^r = [f(t)]^r \tag{5}$$

그런데 표시

$$[y(t)]^r := [y_1(t,\ r),\ y_2(t,\ r)],\ [f(t)]^r := [f_1(t,\ r),\ f_2(t,\ r)]$$

를 리용하면 식 (5)는

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0+}^{\alpha}y_1(t,\ r) + b\,{}^{C}D_{0+}^{\beta}y_1(t,\ r) + cy_1(t,\ r) = f_1(t,\ r) \\ {}^{V}D_{0+}^{\alpha}y_2(t,\ r) + b\,{}^{C}D_{0+}^{\beta}y_2(t,\ r) + cy_2(t,\ r) = f_2(t,\ r) \\ y_1(t,\ r) \le y_2(t,\ r) \\ {}^{C}D_{0+}^{\beta}y_1(t,\ r) \le {}^{C}D_{0+}^{\beta}y_2(t,\ r) \\ {}^{C}D_{0+}^{\alpha}y_1(t,\ r) \le {}^{C}D_{0+}^{\alpha}y_2(t,\ r) \end{cases} \tag{6}$$

와 같이 쓸수 있다.

모호초기값의 절단을 $[y_0]^r := [y_{0,1}(r),\ y_{0,2}(r)],\ [y_0']^r := [y_{0,1}'(r),\ y_{0,2}'(r)]$로 표시하면 절단문제의 초기조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} y_1(0,\ r) = y_{0,1}(r),\ y_1'(0,\ r) = y_{0,1}'(r) \\ y_2(0,\ r) = y_{0,2}(r),\ y_2'(0,\ r) = y_{0,2}'(r) \end{aligned} \tag{7}$$

보조정리 1 문제 (6), (7)의 풀이를 $(y_1(t,\ r),\ y_2(t,\ r))$라고 할 때

$$\varphi_1(t,\ r) := {}^{C}D_{0+}^{\alpha}y_1(t,\ r),\ \varphi_2(t,\ r) := {}^{C}D_{0+}^{\alpha}y_2(t,\ r)$$

로 규정되는 $\varphi_1(t,\ r),\ \varphi_2(t,\ r)$는 $C(I)$에서 문제

$$\begin{cases} \varphi_1(t,\ r) + bI_{0+}^{\alpha-\beta}\varphi_1(t,\ r) + cI_{0+}^{\alpha}\varphi_1(t,\ r) = f_1(t,\ r) - c(y_{0,1}(r) + y_{0,1}'(r)t) \\ \varphi_2(t,\ r) + bI_{0+}^{\alpha-\beta}\varphi_2(t,\ r) + cI_{0+}^{\alpha}\varphi_2(t,\ r) = f_2(t,\ r) - c(y_{0,2}(r) + y_{0,2}'(r)t) \\ \varphi_1(t,\ r) \le \varphi_2(t,\ r) \end{cases} \tag{8}$$

를 만족시킨다. 거꾸로 $C(I)$에서 문제 (8)의 풀이 $\varphi_1(t,\ r),\ \varphi_2(t,\ r)$에 대하여

$$\begin{aligned} y_1(t,\ r) = y_{0,1}(r) + y_{0,1}'(r)t + I_{0+}^{\alpha}\varphi_1(t,\ r) \\ y_2(t,\ r) = y_{0,2}(r) + y_{0,2}'(r)t + I_{0+}^{\alpha}\varphi_2(t,\ r) \end{aligned} \tag{9}$$

는 절단문제 (6), (7)의 풀이이다.

이 보조정리로부터 문제 (6), (7)의 풀이의 유일존재성문제는 문제 (8)의 풀이의 유일존재성문제에 귀착된다. 한편 문제 (8)의 셋째 부등식을 제외한 적분방정식의 풀이의 유일존재성은 정리 1에 의해 담보된다.

이제부터 이 유일풀이가 셋째 부등식을 만족시키기 위한 충분조건을 고찰하자.

먼저 다음과 같이 기호를 약속한다.

$$\Delta f(t,\ r) := f_2(t,\ r) - f_1(t,\ r),\ w(t,\ r) := \varphi_2(t,\ r) - \varphi_1(t,\ r)$$

$$\Delta_0(r) := y_{0,\,2}(r) - y_{0,\,1}(r),\ \Delta_0'(r) := y_{0,\,2}'(r) - y_{0,\,1}'(r)$$

$$\Delta\phi := \Delta f(t,\ r) - c(\Delta_0(r) + \Delta_0'(r)t)$$

이때 다음의 사실이 성립한다.

$$\Delta f(t,\ r) \ge 0,\ \Delta_0(r) \ge 0,\ \Delta_0'(r) \ge 0,\ t \in I$$

그리고 정리 2의 가정을 만족시킨다고 하자.

가정 1 $\Delta\phi$는 변수 t에 관하여 부아닌 단조비감소련속함수이다.

보조정리 2 가정 1을 만족시키면 $\varphi_1(t,\ r) \le \varphi_2(t,\ r)$가 성립한다.

한편 보조정리 1, 2로부터 다음의 결과들이 나온다.

$$^C D_{0+}^{\alpha} y_1(t,\ r) \le {}^C D_{0+}^{\alpha} y_2(t,\ r)\ \ (t \in I,\ r \in [0,\ 1]) \tag{10}$$

$$y_1(t,\ r) \le y_2(t,\ r)\ \ (t \in I,\ r \in [0,\ 1]) \tag{11}$$

$$^C D_{0+}^{\beta} y_1(t,\ r) \le {}^C D_{0+}^{\beta} y_2(t,\ r)\ \ (t \in I,\ r \in [0,\ 1]) \tag{12}$$

식 (9), (10)으로부터 다음의 결과도 나온다.

$$y_1'(t,\ r) \le y_2'(t,\ r)\ \ (t \in I,\ r \in [0,\ 1]) \tag{13}$$

따라서 (10)−(13)으로부터 구간족

$$\{U_\alpha(t,\ r) := [^C D_{0+}^{\alpha} y_1(t,\ r),\ ^C D_{0+}^{\alpha}\ y_2(t,\ r)],\ r \in [0,\ 1]\}$$

$$\{U_\beta(t,\ r) := [^C D_{0+}^{\beta} y_1(t,\ r),\ ^C D_{0+}^{\beta} y_2(t,\ r)],\ r \in [0,\ 1]\}$$

$$\{U_1(t,\ r) := [y_1'(t,\ r),\ y_2'(t,\ r)],\ r \in [0,\ 1]\}$$

$$\{U_0(t,\ r) := [y_1(t,\ r),\ y_2(t,\ r)],\ r \in [0,\ 1]\}$$

들을 얻을수 있다. 이제 이 구간족들이 모호수를 생성한다는것을 고찰하자.

몇가지 기호를 약속한다.

$$\Delta f_1(t) := f_1(t,\ r_2) - f_1(t,\ r_1),\ \Delta f_2(t) := f_2(t,\ r_2) - f_2(t,\ r_1)$$

$$w_1(t) := \varphi_1(t,\ r_2) - \varphi_1(t,\ r_1),\ w_2(t) := \varphi_2(t,\ r_2) - \varphi_2(t,\ r_1)$$

$$\Delta_{0,\,1} := y_{0,\,1}(r_2) - y_{0,\,1}(r_1),\ \Delta_{0,\,2} := y_{0,\,2}(r_2) - y_{0,\,2}(r_1)$$

$$\Delta_{0,\,1}' := y_{0,\,1}'(r_2) - y_{0,\,1}'(r_1),\ \Delta_{0,\,2}' := y_{0,\,2}'(r_2) - y_{0,\,2}'(r_1)$$

$$\Delta\phi_1 := \Delta f_1(t) - c(\Delta_{0,\,1} + \Delta_{0,\,1}'t),\ \Delta\phi_2 := \Delta f_2(t) - c(\Delta_{0,\,2} + \Delta_{0,\,2}'t)$$

이때 관계식 $\Delta f_1(t) \ge 0,\ \Delta f_2(t) \le 0\ (\Delta_{0,\,1} \ge 0,\ \Delta_{0,\,2} \le 0,\ \Delta_{0,\,1}' \ge 0,\ \Delta_{0,\,2}' \le 0)$ 이 성립한다. 이제 다음의 사실을 가정한다.

가정 2 $\Delta\phi_1$은 변수 t에 관하여 부아닌 단조비감소련속함수이다.

가정 3 $\Delta\phi_2$는 변수 t에 관하여 정아닌 단조비증가련속함수이다.

정리 3 가정 1, 2, 3을 만족시키면 구간족 $\{U_\alpha(t,\ r),\ r \in [0,\ 1]\}$, $\{U_\beta(t,\ r),\ r \in [0,\ 1]\}$, $\{U_1(t,\ r),\ r \in [0,\ 1]\}$, $\{U_0(t,\ r),\ r \in [0,\ 1]\}$들은 모호수를 생성한다.

절단구간족

$$\{U_\alpha(t,\ r) := [{}^C D^\alpha_{0+} y_1(t,\ r),\ {}^C D^\alpha_{0+}\ y_2(t,\ r)],\ r\in[0,\ 1]\}$$
$$\{U_\beta(t,\ r) := [{}^C D^\beta_{0+} y_1(t,\ r),\ {}^C D^\beta_{0+} y_2(t,\ r)],\ \ r\in[0,\ 1]\}$$
$$\{U_1(t,\ r) := [y_1'(t,\ r),\ y_2'(t,\ r)],\ r\in[0,\ 1]\}$$
$$\{U_0(t,\ r) := [y_1(t,\ r),\ y_2(t,\ r)],\ r\in[0,\ 1]\}$$

들에 의해 생성된 모호수값함수들을 각각

$$\widetilde{y}_\alpha(t),\ \widetilde{y}_\beta(t),\ \widetilde{y}_1(t),\ \widetilde{y}_0(t)$$

로 표시하자. 이때 다음의 사실이 성립한다.

정리 4 모호수값함수 $\widetilde{y}_\alpha(t),\ \widetilde{y}_\beta(t),\ \widetilde{y}_1(t),\ \widetilde{y}_0(t)$ 들은 구간 I 에서 편속이다.

정리 5 다음의 관계식들이 성립한다.

$$\widetilde{y}_0(t) = \widetilde{y}_0(0) \oplus \widetilde{y}_1(0) \otimes t \oplus I^\alpha_{0+} \widetilde{y}_\alpha(t)$$
$$\widetilde{y}_\beta(t) = I^{\alpha-\beta}_{0+} \widetilde{y}_\alpha(t)$$
$${}^c D^\alpha_{1,1} \widetilde{y}_0(t) = \widetilde{y}_\alpha(t)$$

참 고 문 헌

[1] M. Guo, R. Li; Fuzzy Set and Systems, 138, 601, 2003.

[2] R. P. Agarwal et al.; Nonlinear Anal., 72, 2859, 2010.

[3] Snehashish Chakraverty et al.; Fuzzy Arbitrary Order System, Fuzzy Fractional Differential Equations and Applications, John Wiley & Sons, 123～168, 2016.

[4] Yicheng Liu, Jun Wu; Advances in Difference Equations, 379, 23, 2015.

주체107(2018)년 6월 5일 원고접수

Constructive Existence of (1, 1)-Type Solution of Initial Value Problems for Fuzzy Bagley-Torvik Fractional Differential Equations

Choe Hui Chol, *Pak Sun Ae*

In this paper, we first investigate constructive existence of solution of one type of fuzzy linear fractional differential equation and obtain existence results of the solution for fuzzy Bagley-Torvik fractional differential equations using our generalized existence results.

Key word: fuzzy fractional differential equation