김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체106(2017)년 제63권 제5호 Vol. 63 No. 5 JUCHE106(2017).

다항분수계상미분방정식의 한가지 일반화된 여러점경계값문제의 풀이의 유일존재성

최희철, 정금성

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《기초과학은 과학기술강국을 떠받드는 주추입니다. 기초과학이 든든해야 나라의 과학기술이 공고한 토대우에서 끊임없이 발전할수 있습니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 40페지)

론문에서는 최근시기 활발히 연구되고있는 분수계미분방정식의 여러점경계값문제에 대한 한가지 존재성문제에 대하여 론의한다.

선행연구들[1－6]에서는 여러가지 의미에서의 도함수들을 가진 분수계미분방정식의 경계값문제들에 대한 풀이의 존재성과 유일성에 대하여 연구하였다.

선행연구들[7, 8]에서는 몇가지 분수계상미분방정식의 m점경계값문제의 풀이, 비령풀이의 존재성을 연구하였다.

선행연구[9]에서는 다항분수계상미분방정식의 m점경계값문제

$$^cD_0^q u(t) = f(t,\ u(t),\ ^cD_0^\sigma u(t)),\ \ 2<q<3,\ \ 0<\sigma<1$$

$$u(0)=0,\ ^cD_0^p u(1) = \sum_{i=1}^{m-2} \xi_i\ ^cD_0^p u(\eta_i),\ u''(1)=0,\ 0<p<1,\ \ 0<\xi_i,\ \eta_i<1$$

의 풀이의 존재성과 유일성을 연구하였다.

론문에서는 선행연구[9]의 문제에서 강한 제한인 $0<\sigma<1$을 $0<\sigma<q$로 약화시키면서 경계조건을 일반화한 다음의 문제에 대한 풀이의 존재성을 론의한다.

$$^cD_0^q u(t) = f(t,\ u(t),\ ^cD_0^\sigma u(t)),\ \ t\in(0,\ 1) \tag{1}$$

$$^cD_0^p u(1) = \sum_{i=1}^{m-2} \xi_i\ ^cD_0^p u(\eta_i) \tag{2}$$

$$\alpha_1 u(0) + \beta_1 u''(1) = \lambda_1 \int_0^1 K_1(s,\ u(s))ds,\ \ \alpha_2 u(0) + \beta_2 u''(1) = \lambda_2 \int_0^1 K_2(s,\ u(s))ds \tag{3}$$

여기서 $0<\xi_i, \eta_i<1,\ \ 2<q<3,\ \ 0<p<1,\ \ 0<\sigma<q$ 이다.

보조정리 1 $p,\ q\ge 0,\ f\in L_1[0,\ 1]$이라고 하면 다음의 평가식들이 성립된다.

$$I_0^p I_0^q f(t) = I_0^{p+q} f(t) = I_0^q I_0^p f(t),\ \ ^cD_0^q I_0^q f(t) = f(t),\ \ t\in[0,\ 1]$$

$$p\ge q,\ ^cD_0^p I_0^q f(t) = I_0^{q-p} f(t),\ \ t\in[0,\ 1],\ \ f\in L_1[0,\ 1]$$

보조정리 2 $\alpha>0,\ g\in C[0,\ 1]$이라고 하면 동차방정식 $^cD_0^\alpha g(t)=0$은 풀이

$$g(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_{n-1} t^{n-1}$$

을 가진다. 여기서 $c_i\in \boldsymbol{R},\ i=0,\ 2,\ \cdots,\ n-1,\ \ n=\lceil \alpha \rceil$이다.

보조정리 3 $\alpha>0,\ \lambda>\lceil\alpha\rceil-1$ 일 때 ${}^{c}D_{0}^{\alpha}t^{\lambda}=\Gamma(\lambda+1)/\Gamma(\lambda-\alpha+1)\cdot t^{\lambda},\ {}^{c}D_{0}^{\alpha}t^{i}=0,$ $i=0,\ 1,\ \cdots,\ \lceil\alpha\rceil-1$이 성립된다.

가정 $\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}\neq 0,\ 1-\sum_{i=1}^{m-2}\xi_i\eta_i^{1-p}\neq 0$

$0<\xi_i,\ \eta_i<1,\ 2<q<3,\ 0<p<1$이라고 할 때 다음의 보조문제를 생각하자.

$$ {}^{c}D_{0}^{q}u(t)=y(t),\ t\in(0,\ 1) \tag{4}$$

$$ {}^{c}D_{0}^{p}u(1)=\sum_{i=1}^{m-2}\xi_i\ {}^{c}D_{0}^{p}u(\eta_i) \tag{5}$$

$$ \alpha_1u(0)+\beta_1u''(1)=\mu_1,\ \ \alpha_2u(0)+\beta_2u''(1)=\mu_2 \tag{6}$$

일반성을 잃지 않고 $2<\sigma$라고 하자.

그리고 공간 X와 X에서의 노름 $\|\cdot\|_X$를 다음과 같이 정의한다.

$$X:=\{u|\ {}^{c}D^{\sigma}u\in C[0,\ 1],\ u\in AC^{3}[0,\ 1]\},\ \ \|u\|_X:=\|u\|_{\infty}+\|u'\|_{\infty}+\|u''\|_{\infty}+\|{}^{c}D^{\sigma}u\|_{\infty}$$

정리 1 공간 $(X,\ \|\cdot\|_X)$는 바나흐공간이다.

증명 $\{u_n\}\subset X$를 기본렬 즉 $\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\boldsymbol{N};\ n_0\le\forall n,\ m\in\boldsymbol{N},\ \|u_n-u_m\|_X<\varepsilon$이 성립된다고 하면 X에서의 노름의 정의로부터

$$\|u_n-u_m\|_{\infty}+\|u_n'-u_m'\|_{\infty}+\|u_n''-u_m''\|_{\infty}+\|{}^{c}D^{\sigma}u_n-{}^{c}D^{\sigma}u_m\|_{\infty}<\varepsilon$$

이 성립된다.

$$\|u_n-u_m\|_{\infty}<\varepsilon,\ \ \|u_n'-u_m'\|_{\infty}<\varepsilon,\ \ \|u_n''-u_m''\|_{\infty}<\varepsilon,\ \ \|{}^{c}D^{\sigma}u_n-{}^{c}D^{\sigma}u_m\|_{\infty}<\varepsilon,$$

$$\exists(u_*,\ v_*,\ w_*,\ \mu_*)\in C[0,\ 1]^4;\ u_n\to u_*,\ u_n'\to v_*,\ \ u_n''\to w_*,\ {}^{c}D^{\sigma}u_n\to\mu_*$$

이면 $u_n(x)-u_n(0)=\int_0^x u_n'(t)dt\to\int_0^x v_*(t)dt$ 로부터 $\lim_{n\to\infty}(u_n(x)-u_n(0))=u_*(x)-u_*(0)=\int_0^x v_*(t)dt$ 가 성립된다. 즉 $u_*'(x)=v_*(x),\ u_*\in C^1[0,\ 1]$이다.

한편 $\int_0^x u_n''(t)dt\to\int_0^x w_*(t)dt,\ \int_0^x u_n''(t)dt=u_n'(x)-u_n'(0)$이므로 다음의 식이 성립된다.

$$\lim_{n\to\infty}(u_n'(x)-u_n'(0))=v_*(x)-v_*(0)=\int_0^x w_*(t)dt$$

따라서 $u_*''(x)=v_*'(x)=w_*(x),\ u_*\in C^2[0,\ 1]$이다.

$u_n\in X$로부터 $u_n'\in AC^2[0,\ 1],\ u_n''\in AC[0,\ 1]$이고 $I_0^{\sigma}\,{}^{c}D^{\sigma}u_n(x)\to I_0^{\sigma}\mu_*(x)$를 고려하면

$$I_0^{\sigma}\,{}^{c}D^{\sigma}u_n(x)=u_n(x)-u_n(0)-u_n'(0)x-u_n''(0)x^2/2,$$

$$\lim_{n\to\infty}(u_n(x)-u_n(0)-u_n'(0)x-u_n''(0)x^2/2)=u_*(x)-u_*(0)-v_*(0)x-w_*(0)x^2/2=I_0^{\sigma}\mu_*(x)$$

가 성립된다. 즉 $u_*(x)=u_*(0)+v_*(0)x+w_*(0)x^2/2+I_0^{\sigma}\mu_*(x)$가 성립된다.

$\mu_*\in C[0,\ 1],\ 2<\sigma$이므로 $u_*''(x)=w_*(0)+I_0^{\sigma-2}\mu_*(x)$이다.

그러면 $I_0^{\sigma-2}\mu_*\in AC[0,\ 1]$로부터 $u_*''\in AC[0,\ 1],\ u_*\in AC^3[0,1]$이 나온다.

또한 $u_*(x)=u_*(0)+v_*(0)x+w_*(0)x^2/2+I_0^{\sigma}\mu_*(x)$ 로부터 ${}^{c}D^{\sigma}u_*(x)=\mu_*(x)$ 이다. 즉 ${}^{c}D^{\sigma}u_*\in C[0,1]$로부터 $u_*\in X$임을 알수 있다.(증명끝)

정의 문제 (1)－(3)을 만족시키는 $u \in X$ 를 문제 (1)－(3)의 풀이이라고 한다.

정리 2 $y \in C[0, 1]$ 이고 가정이 성립된다고 할 때 $u(t)$ 가 보조문제 (4)－(6)의 풀이이면 $u(t)$ 는 $y(t)$ 에 관하여 다음과 같다.

$$u(t) = I_0^q y(t) + \left(\frac{A_2 \cdot t}{2 \cdot A_1} - \frac{t^2}{2}\right) I_0^{q-2} y(t)|_{t=1} + \left(\sum_{i=1}^{m-2} \xi_i I_0^{q-p} y(t)|_{t=\eta_i} - I_0^{q-p} y(t)|_{t=1}\right) \frac{t}{A_1} + \varphi(t) \quad (7)$$

$$\varphi(t) = 2(\beta_2\mu_1 - \beta_1\mu_2)/\Delta + (\alpha_2\mu_1 - \alpha_1\mu_2)A_2 t/(\Delta A_1) - (\alpha_2\mu_1 - \alpha_1\mu_2)t^2/\Delta$$

$$A_1 = \frac{1}{\Gamma(2-p)}\left(1 - \sum_{i=1}^{m-2} \xi_i \eta_i^{1-p}\right),\ A_2 = \frac{2}{\Gamma(3-p)}\left(1 - \sum_{i=1}^{m-2} \xi_i \eta_i^{2-p}\right),\ \Delta = 2\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

이 정리로부터 다음의 따름이 쉽게 증명된다.

따름 정리 1의 가정이 성립된다고 할 때 $u(t)$ 가 문제 (1)－(3)의 풀이이기 위해서는 $u(t)$ 가 다음의 방정식의 풀이일것이 필요하고 충분하다.

$$u(t) = I_0^q f(t,\ u(t),\ {}^cD_0^\sigma u(t)) + \frac{A_2 t}{2A_1} I_0^{q-2} f(t,\ u(t),\ {}^cD_0^\sigma u(t))|_{t=1} - \frac{t^2}{2} I_0^{q-2} f(t,\ u(t),\ {}^cD_0^\sigma u(t))|_{t=1} +$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{m-2} \xi_i I_0^{q-p} f(t,\ u(t),\ {}^cD_0^\sigma u(t))|_{t=\eta_i} - I_0^{q-p} f(t,\ u(t),\ {}^cD_0^\sigma u(t))|_{t=1}\right)\frac{t}{A_1} + \overline{\varphi}(t)$$

여기서 $\overline{\varphi}(t) = \frac{\lambda_2}{\Delta}\int_0^1 K_2(s,\ u(s))ds\left[\alpha_1 t^2 - \frac{A_2}{A_1}\alpha_1 t - 2\beta_1\right] - \frac{\lambda_1}{\Delta}\int_0^1 K_1(s,\ u(s))ds\left[\alpha_2 t^2 - \frac{A_2}{A_1}\alpha_2 t - 2\beta_2\right]$.

앞으로 다음과 같은 가정들을 받아들여 론의한다.

$\forall x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2 \in \boldsymbol{R},\ \forall t \in [0, 1],\ |f(t,\ x_1,\ y_1) - f(t,\ x_2,\ y_2)| \le L_1(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|)$

$\forall x_1,\ x_2 \in \boldsymbol{R},\ \forall t \in [0,\ 1],\ |K_1(t,\ x_1) - K_1(t,\ x_2)| \le L_2|x_1 - x_2|$

$\forall x_1,\ x_2 \in \boldsymbol{R},\ \forall t \in [0,\ 1],\ |K_2(t,\ x_1) - K_2(t,\ x_2)| \le L_3|x_1 - x_2|$

풀이의 유일존재성을 증명하기 위하여 연산자

$$(\theta u)(t) := I_0^q f(t,\ u(t),\ {}^cD_0^\sigma u(t)) + [A_2 t/(2A_1) - t^2/2] I_0^{q-2} f(t,\ u(t),\ {}^cD_0^\sigma u(t))|_{t=1} +$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{m-2} \xi_i I_0^{q-p} f(t,\ u(t),\ {}^cD_0^\sigma u(t))|_{t=\eta_i} - I_0^{q-p} f(t,\ u(t),\ {}^cD_0^\sigma u(t))|_{t=1}\right)\frac{t}{A_1} +$$

$$+\frac{\lambda_2}{\Delta}\int_0^1 K_2(s,\ u(s))ds\left[\alpha_1 t^2 - \frac{A_2}{A_1}\alpha_1 t - 2\beta_1\right] - \frac{\lambda_1}{\Delta}\int_0^1 K_1(s,\ u(s))ds\left[\alpha_2 t^2 - \frac{A_2}{A_1}\alpha_2 t - 2\beta_2\right]$$

를 정의하면 이로부터

$$(\theta u)'(t) = I_0^{q-1} f(t,\ u(t),\ {}^cD_0^\sigma u(t)) + (A_2/(2A_1) - t) I_0^{q-2} f(t,\ u(t),\ {}^cD_0^\sigma u(t))|_{t=1} +$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{m-2} \xi_i I_0^{q-p} f(t,\ u(t),\ {}^cD_0^\sigma u(t))|_{t=\eta_i} - I_0^{q-p} f(t,\ u(t),\ {}^cD_0^\sigma u(t))|_{t=1}\right)\frac{1}{A_1} +$$

$$+\frac{\lambda_2}{\Delta}\int_0^1 K_2(s,\ u(s))ds\left(2\alpha_1 t - \frac{A_2}{A_1}\alpha_1\right) - \frac{\lambda_1}{\Delta}\int_0^1 K_1(s,\ u(s))ds\left(2\alpha_2 t - \frac{A_2}{A_1}\alpha_2\right),$$

$$(\theta u)''(t) = I_0^{q-2} f(t,\ u(t),\ {}^cD_0^\sigma u(t)) - I_0^{q-2} f(t,\ u(t),\ {}^cD_0^\sigma u(t))|_{t=1} +$$

$$+\frac{2\alpha_1\lambda_2}{\Delta}\int_0^1 K_2(s,\ u(s))ds - \frac{2\alpha_2\lambda_1}{\Delta}\int_0^1 K_1(s,\ u(s))ds,$$

$$({}^cD^{\sigma}\theta u)(t) = I_0^{q-\sigma} f(t,\ u(t),\ {}^cD_0^{\sigma}u(t)).$$

그러면 $\forall x,\ y \in X$ 에 대하여 다음의 식이 성립된다.

$$\|\theta x - \theta y\|_{C[0,\ 1]} = \left\| I_0^q (f(t,\ x(t),\ {}^cD_0^{\sigma}x(t)) - f(t,\ y(t),\ {}^cD_0^{\sigma}y(t))) + \left(\frac{A_2 t}{2A_1} - \frac{t^2}{2}\right) I_0^{q-2}(f(t,\ x(t),\ {}^cD_0^{\sigma}x(t)) - \right.$$

$$- f(t,\ y(t),\ {}^cD_0^{\sigma}y(t)))|_{t=1} + \frac{t}{A_1}\left(\sum_{i=1}^{m-2}\xi_i I_0^{q-p}(f(t,\ x(t),\ {}^cD_0^{\sigma}x(t)) - f(t,\ y(t),\ {}^cD_0^{\sigma}y(t)))|_{t=\eta_i} - \right.$$

$$\left. - I_0^{q-p}(f(t,\ x(t),\ {}^cD_0^{\sigma}x(t)) - f(t,\ y(t),\ {}^cD_0^{\sigma}y(t)))|_{t=1}\right) +$$

$$+ \frac{\lambda_2}{\Delta}\left[\alpha_1 t^2 - \frac{A_2}{A_1}\alpha_1 t - 2\beta_1\right] \cdot \int_0^1 (K_2(s,\ x(s)) - K_2(s,\ y(s)))ds -$$

$$\left. - \frac{\lambda_1}{\Delta}\left[\alpha_2 t^2 - \frac{A_2}{A_1}\alpha_2 t - 2\beta_2\right] \cdot \int_0^1 (K_1(s,\ x(s)) - K_1(s,\ y(s)))ds \right\|_{C[0,\ 1]}$$

웃식의 오른변의 매 항들을 평가하고 종합하면 다음과 같다.

$$\|\theta x - \theta y\|_{C[0,\ 1]} \le L_1 \left(\frac{1}{\Gamma(q+1)} + \frac{|A_1| + |A_2|}{2|A_1|} \cdot \frac{1}{\Gamma(q-1)} + \left(\sum_{i=1}^{m-2}\xi_i \eta_i^{q-p} + 1\right) \Big/ [|A_1| \cdot \Gamma(q-p+1)] \right) \cdot$$

$$\cdot (\|x(t) - y(t)\|_{C[0,\ 1]} + \|{}^cD_0^{\sigma}x(t) - {}^cD_0^{\sigma}y(t)\|_{C[0,\ 1]}) + (\mu_1 L_2 + \mu_2 L_3)\|x(t) - y(t)\|_{C[0,\ 1]}$$

마찬가지로

$$\|(\theta x)' - (\theta y)'\|_{C[0,\ 1]} \le L_1 \left[\frac{1}{\Gamma(q)} + \left(\frac{|A_2|}{2|A_1|} + 1\right)\frac{1}{\Gamma(q-1)} + \left(\sum_{i=1}^{m-2}\xi_i \eta_i^{q-p}\right) \Big/ [|A_1| \cdot \Gamma(q-p+1)] \right] \cdot$$

$$\cdot (\|x(t) - y(t)\|_{C[0,\ 1]} + \|{}^cD_0^{\sigma}x(t) - {}^cD_0^{\sigma}y(t)\|_{C[0,\ 1]}) +$$

$$+ \left(2 + \frac{|A_2|}{|A_1|}\right) \frac{L_2|\lambda_2| \cdot |\alpha_1| + L_3|\lambda_1| \cdot |\alpha_2|}{|\Delta|} \cdot \|x(t) - y(t)\|_{C[0,\ 1]},$$

$$\|(\theta x)'' - (\theta y)''\|_{C[0,\ 1]} \le \frac{2L_1}{\Gamma(q-1)} (\|x(t) - y(t)\|_{C[0,\ 1]} + \|{}^cD_0^{\sigma}x(t) - {}^cD_0^{\sigma}y(t)\|_{C[0,\ 1]}) +$$

$$+ \frac{2}{|\Delta|}(L_2|\lambda_2| \cdot |\alpha_1| + L_3|\lambda_1| \cdot |\alpha_2|)\|x(t) - y(t)\|_{C[0,\ 1]},$$

$$\|{}^cD^{\sigma}\theta x - {}^cD^{\sigma}\theta y\|_{C[0,\ 1]} \le \frac{L_1}{\Gamma(q-\sigma+1)} (\|x(t) - y(t)\|_{C[0,\ 1]} + \|{}^cD_0^{\sigma}x(t) - {}^cD_0^{\sigma}y(t)\|_{C[0,\ 1]})$$

임을 알수 있다.

이상의 사실을 종합하고

$$\omega_1 := L_1 \left(\frac{1}{\Gamma(q+1)} + \frac{1}{\Gamma(q)} + \frac{7|A_1| + 2|A_2|}{2|A_1| \cdot \Gamma(q-1)} + \left(2\sum_{i=1}^{m-2}\xi_i \eta_i^{q-p} + 1\right) \Big/ [|A_1| \cdot \Gamma(q-p+1)] + \frac{1}{\Gamma(q-\sigma+1)} \right)$$

$$\omega_2 := \frac{1}{|\Delta|}\left[|\lambda_2| L_2 \left[\left(5 + \frac{2|A_2|}{|A_1|}\right) \cdot |\alpha_1| + 2|\beta_1| \right] + |\lambda_1| L_3 \left[\left(5 + \frac{2|A_2|}{|A_1|}\right) \cdot |\alpha_2| + 2|\beta_2| \right] \right]$$

로 놓으면 다음의 식이 성립된다.

$$\|\theta x-\theta y\|_X \le \omega_1(\|x(t)-y(t)\|_{C[0,\ 1]}+\|{}^cD_0^\sigma x(t)-{}^cD_0^\sigma y(t)\|_{C[0,\ 1]})+\omega_2\|x(t)-y(t)\|_{C[0,\ 1]}\le$$
$$\le(\omega_1+\omega_2)\|x(t)-y(t)\|_X$$

우의 과정으로부터 다음의 정리가 성립된다.

정리 3 $\omega_1+\omega_2<1$ 이면 문제 (1)－(3)의 풀이는 X 에서 유일존재한다.

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보(자연과학), 58, 7, 16, 주체101(2012).

[2] B. Ahmad et al.; Comput. Math. Appl., 58, 1838, 2009.

[3] C. S. Goodrich; Comput. Math. Appl., 61, 191, 2011.

[4] R. A. Khan et al.; Fractional Differential Equations, 1, 1, 29, 2011.

[5] R. A. Khan et al.; Dynamic Systems and Applications, 14, 281, 2005.

[6] A. H. Sallo et al.; International Journal of Engineering and Sciences, 2, 18, 2013.

[7] A. H. Salem; J. Comput. Appl. Math., 224, 2, 565, 2009.

[8] J. J. Nieto et al.; Comput. Math. Appl., 59, 11, 3438, 2010.

[9] R. A. Khan et al.; J. Fract. Calc., 5, 2, 121, 2014.

주체106(2017)년 1월 5일 원고접수

Uniqueness and Existence of the Solution for a Generalized Multi-Point Boundary Value Problem of Multi-Term Fractional Ordinary Differential Equation

Choe Hui Chol, Jong Kum Song

We proposed a generalized fractional multi-point boundary value problem which had a weaker limitation than previous works and studied the existence and uniqueness of the solution for this problem. For this we defined new solution space, proved that this space was a Banach space in respect to its norm and gave a sufficient condition that the solution of integral equation equivalent to main problem existed uniquely.

Key word: multi-point boundary value problem