김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제3호

나무의 라쁠라스고유값분포의 한가지 성질

신창현, 최은성

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《과학기술을 확고히 앞세우고 과학기술과 생산을 밀착시키며 경제건설에서 제기되는 모든 문제들을 과학기술적으로 풀어나가는 기풍을 세워 나라의 경제발전을 과학기술적으로 확고히 담보하여야 합니다.》

정점수가 n인 그라프의 라쁠라스고유값들은 구간 $[0, n]$에 분포되여있다는것이 밝혀져있다. 론문의 전 과정에 그라프의 정점수를 n이라고 하겠다.

나무는 $n-1$개의 릉을 가진 련결그라프이다. 따라서 나무의 평균차수는 $2-2/n$이다.

최근에 나무의 라쁠라스고유값분포에 대한 연구가 많이 진행되고있다.

선행연구[3]에서는 라쁠라스에네르기의 성질을 밝히는 과정에 평균차수보다 작은 라쁠라스고유값의 개수가 $\lceil n/2 \rceil$이상이라는 예상을 제기하고 등식을 만족시키는 실례를 주었다. 선행연구[2]에서는 나무의 직경의 길이가 5이하인 경우에 이 예상을 증명하였다. 또한 선행연구[4]에서는 2보다 작은 라쁠라스고유값의 개수가 $\lceil n/2 \rceil$이상이라는것을 증명하였다. 지금까지 이 예상은 증명되지 않았다.

론문에서는 이 예상이 옳다는것을 증명하였다.

이제부터 나무의 평균차수를 $\bar{d}$로 표시하겠다. 즉 $\bar{d} := 2-2/n$로 놓자.

선행연구[1]에서는 나무 T와 실수 x에 대하여 알고리듬 $\mathrm{LDiagonalize}(T, -x)$를 실행한 후에 매 정점 u에 대응되는 값을 $a_T(u)$로 표시하면 $a_T(u)<0$을 만족시키는 정점들의 개수는 x보다 작은 라쁠라스고유값의 개수와 같으며 $a_T(u)=0$을 만족시키는 정점들의 개수는 x의 라쁠라스고유값으로서의 중복도와 같다는것을 증명하였다.

알고리듬 $\mathrm{LDiagonalize}(T, x)$

입력 나무 T, 실수 x

걸음 1 T의 임의의 정점을 뿌리로 정하고 잎에서 뿌리로 올라오면서 정점들에 1부터 n까지 번호를 붙인다.

걸음 2 매 $k=1, \cdots, n$에 대하여 $a_T(v_k) := d(v_k)+x$로 놓는다. 여기서 $d(v_k)$는 v_k의 차수이다.

걸음 3 매 $k=1, \cdots, n$에 대하여 v_k가 잎이 아니면 다음과 같이 $a_T(v_k)$를 갱신한다.

v_k의 자식들의 첨수모임 S를 찾는다.

모든 $c \in S$에 대하여 $a_T(v_c) \neq 0$이면 $a_T(v_k) := a_T(v_k) - \sum_{c \in S} 1/a_T(v_c)$로 놓는다.

어떤 $c \in S$에 대하여 $a_T(v_c)=0$이면 $a_T(v_k) := 2$, $a_T(v_k) := -1/2$로 놓고 v_k의 부모 v_l이 있다면 v_k와 v_l을 련결하는 릉을 제거한다.

출력 매 $k=1, \cdots, n$에 대하여 $a_T(v_k)$를 출력한다.

나무 T에 대하여 예상이 성립하기 위해서는 알고리듬 $\mathrm{LDiagonalize}(T, -\bar{d})$를 실행

한 후에 출력되는 값들중에 부수가 $\lceil n/2 \rceil$개이상 있을것이 필요충분하다.

명제 1 정점수가 3이상인 임의의 나무 T에 대하여 알고리듬 LDiagonalize$(T,\ -\bar{d})$를 실행하는 도중에 정점들의 값이 0이 되지 않는다.

이제부터 나무 T에 알고리듬을 실행한다는것은 알고리듬 LDiagonalize$(T,\ -\bar{d})$를 실행한다는것을 의미한다. 또한 $n \le 3$일 때 예상은 쉽게 증명되므로 $n \ge 4$라고 하자.

나무에서 차수가 1인 정점을 잎이라고 부른다. 차수가 2인 정점 u의 이웃정점 $v,\ w$에 대하여 v가 잎이면 정점쌍 $(u,\ v)$를 w에 붙은 가지라고 부르자. 또한 차수가 $k+1(\ge 1)$인 점 u에 k개 가지가 붙어있고 다른 한 정점 v와 이웃할 때 u와 그 k개 가지로 이루어진 부분그라프를 u를 중심으로 하는 크기가 k인 가지모임이라고 부르고 이 가지모임이 v와 련결되였다고 말하자. 특히 $k \le (n-2)/4$일 때 이 가지모임을 좋은 가지모임이라고 부르자. 잎은 크기가 0인 가지모임으로 볼수 있다.

명제 2 나무 T의 임의의 가지에 대하여 그 가지밖의 정점을 뿌리로 하여 알고리듬을 실행할 때 그 가지에 속한 정점들의 값은 잎에서 $a_1 := 1-\bar{d} = 2/n-1$이고 잎과 이웃한 정점에서

$$a_2 := 2-\bar{d}-\frac{1}{a_1} = \frac{n^2+2n-4}{n(n-2)}$$

이다. 따라서 $a_1 < 0$이고 $a_2 > 1$이다.

보조정리 1 정점수가 n인 나무 T에서 u를 중심으로 하는 가지모임에 대하여 이 가지모임밖의 정점을 뿌리로 하여 알고리듬을 실행한 후에 u의 값은 -1보다 크고 1보다 작으며 u에 붙은 가지들에서는 잎의 값은 부수이고 다른 정점의 값은 정수이다. 특히 이 가지모임이 좋은 가지모임일 때 u의 값은 부수이다.

나무의 정점수가 변하지 않게 적당한 조작을 실시하여 나무의 모양을 변화시킬 때 $\bar{d}$보다 작은 라쁠라스고유값들의 개수가 비증가하면 이 조작을 조작가능한 조작이라고 부르자.

보조정리 2 정점 u가 크기가 각각 $k,\ l$인 좋은 가지모임과 련결되여있을 때 이 두 가지모임을 제거하고 u에 $k+l+1$개 가지를 붙이는 조작은 조작가능하다.

따름 나무에서 한 정점에 2개의 잎이 련결되여있을 때 이 2개 잎을 제거하고 그 정점에 1개 가지를 붙이는 조작은 조작가능한 조작이다.

증명 보조정리 2에서 $k=l=0$인 경우이다.(증명끝)

보조정리 3 정점 u가 정점 v를 중심으로 하는 가지모임과 련결되여있고 u에 어떤 가지가 붙어있을 때 이 가지를 제거하고 v에 새로운 가지를 붙이는 조작은 조작가능한 조작이다.

보조정리 4 차수가 2인 정점 u가 정점 $v,\ w$와 이웃하고있고 w가 좋은 가지모임의 중심이라면 이 가지모임의 한 가지를 제거하고 v에 새로운 한 가지를 붙이는 조작은 조작가능한 조작이다.

보조정리 5 나무의 직경의 길이가 6이하이고 나무의 매 정점에 잎이 기껏 1개 련결되여있으면 평균차수 $\bar{d}$보다 작은 라쁠라스고유값의 개수는 $\lceil n/2 \rceil$이상이다.

보조정리 6 나무 T가 직경의 길이가 7이상이고 매 정점에 기껏 1개의 잎이 련결되여있다고 하자. 그러면 T에 조작가능한 조작들을 실시하여 직경이 작아지게 하거나 직경의 개수가 줄어들게 하면서 여전히 매 정점에 기껏 1개의 잎이 련결되게 할수 있다.

정리 정점수가 n인 임의의 나무 T에 대하여 평균차수 $\bar{d}$보다 작은 라쁠라스고유값의 개수는 $\lceil n/2 \rceil$이상이다.

증명 나무 T에 보조정리 2의 따름의 조작을 유한번 하여 얻어진 나무의 매 정점에 기껏 1개의 잎이 련결되도록 할수 있다. 다음 나무의 직경의 길이가 7이상이라면 보조정리 6을 유한번 적용하여 직경의 길이가 6이하이면서 매 정점에 기껏 1개 잎이 련결되여있는 나무를 얻을수 있다. 이 나무를 T'라고 하자. 보조정리 5로부터 T'에서 정리의 결과가 성립한다. T에 조작가능한 조작들을 실시하여 T'를 얻었으므로 T에서도 정리의 결과가 성립한다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] E. Fritscher et al.; Linear Algebra Appl., 435, 371, 2011.
[2] R. Gera et al.; In Graph Theory–Favorite Conjectures and Open Problems, Springer Verlag, 180～220, 2017.
[3] V. Trevisan et al.; Appl. Math. Lett., 24, 6, 918, 2011.
[4] L. Zhou et al.; Taiwan J. Math., 19, 1, 65, 2015.

주체109(2020)년 3월 15일 원고접수

A Property of the Distribution of Laplacian Eigenvalues of Trees

Sin Chang Hyon, Choe Un Song

In this paper, we prove a conjecture on the number of Laplacian eigenvalues of trees that are less than the average degree.

Keywords: Laplacian eigenvalue, tree, average degree