김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체104(2015)년 제61권 제9호 Vol. 61 No. 9 JUCHE104(2015).

아르키메데스생존코퓰러련관인 청구를 가지는 위험모형에 대한 파산확률의 표시

김철호, 박일진

론문에서는 아르키메데스생존코퓰러련관인 청구를 가지는 위험모형에 대한 파산확률의 표시문제에 대하여 론의하였다.

선행연구들에서는 보험기관에 들어오는 청구량들에 대하여 독립성을 가정하고 위험모형에 대한 파산확률을 구하는 문제들이 연구되였다.

선행연구[1]에서는 고전적위험모형을 제기하고 청구량들이 독립, 동일분포하는 경우 파산확률이 만족되는 방정식들을 얻었으며 청구량들이 독립, 동일분포 특히 지수분포하는 경우 위험모형에 대한 파산확률을 표시하였다. 선행연구[3, 4]에서는 청구량들이 독립이고 파레토분포하는 경우 파산확률의 표시를 얻었다. 선행연구[2]에서는 우연벡토르의 동시적분포와 개개 우연량들의 분포와 일정한 련관을 가지는 코퓰러개념을 제기하고 일련의 성질들과 아르키메데스코퓰러의 개념, 그 성질들을 연구하였다.

우리는 보험기관에 들어오는 청구량들이 조건부독립인 지수분포하는 경우 위험모형에 대한 파산확률의 표시를 구하고 그것을 리용하여 청구량들이 아르키메데스생존코퓰러련관을 가지는 경우의 위험모형에 대한 파산확률에 대하여 론의하였다.

1. 조건부독립이고 지수분포하는 청구량렬을 가지는 위험모형에 대한 파산확률의 표시

다음의 위험모형을 생각하자.

$$R(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \tag{1}$$

여기서 u는 보험기관의 초기자금, c는 보험기관에 들어오는 수입률, $N(t)$는 보험기관에 들어오는 청구수, X_i는 i째 청구자의 청구량, $R(t)$는 t시각에 보험기관에 남아있는 자금이다.

이때 $T := \inf\{t \ge 0 \,;\, R(t) < 0\}$을 파산시각이라고 부르며

$$\Psi(u) = P\{T < +\infty \mid R(0) = u\} \tag{2}$$

를 초기자금 u를 가지는 위험모형 (1)에 대한 파산확률이라고 부른다.

이제 위험모형 (1)에 대하여 다음의 가정을 하자.

가정 1 청구량렬 $\{X_k\}_{k\ge1}$과 $N(t)$는 독립이다.

가정 2 $N(t)$는 $\mathrm{E}N(t) = \lambda t$인 뽜쏭과정이다.

가정 3 청구량렬 $\{X_k\}_{k\ge1}$은 조건부독립인 지수분포에 따른다. 즉 분포함수 $F_\Theta(\theta)$를

가지는 우연량 Θ 에 대하여

$$P\{X_1 > x_1, \cdots, X_n > x_n \mid \Theta = \theta\} = \prod_{k=1}^{n} e^{-\theta x_k} \tag{3}$$

이 성립된다. 여기서 $P\{X_i > x_i \mid \Theta = \theta\} = e^{-\theta x_i}$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

우리는 가정 1－3을 만족시키는 위험모형 (1)에 대한 파산확률의 표시문제를 론의한다.

정리 1 가정 1－3을 만족시키는 위험모형에 대한 파산확률은

$$\Psi(u) = F_\Theta(\theta_0) + \int_{\theta_0}^{+\infty} \Psi_\theta(u) dF_\Theta(\theta) \tag{4}$$

로 표시된다. 여기서 $\theta_0 = \lambda / c$ 이다.

증명 $\{X_k\}_{k\ge1}$ 이 독립이고 동일한 지수분포 $\exp(\theta)$ 에 따르는 경우 위험모형 (1)에 대한 파산확률은 선행연구[1]에 의하여 $\Psi_\theta(u) = \min\left\{\frac{\lambda}{\theta c} \exp\left\{-\left(\theta - \frac{\lambda}{c}\right)u\right\},\ 1\right\},\ u > 0$ 이다.

가정 3으로부터 분포함수 $F_\Theta(\theta)$ 에 의하여 파산확률은

$$\Psi(u) = \int_{\theta}^{+\infty} \Psi_\theta(u) dF_\Theta(\theta). \tag{5}$$

한편 $\theta \le \theta_0 = \lambda / c$ 에 대해서는 보험에서의 리익조건($\lambda/(c\theta) < 1$)을 만족시키지 않으므로 $\Psi_\theta(u) = 1,\ \theta \le \theta_0,\ u \ge 0$ 이다. 따라서 식 (5)는 식 (4)로 된다.(증명끝)

2. 아르키메데스생존코퓰러련관인 청구량렬을 가지는 위험모형에 대한 파산확률표시

정의 1[2] $[0, 1]^n$ 을 $[0, 1]$ 에로 보내는 비감소, 왼쪽련속인 함수 C 가 다음의 조건을 만족시킨다고 하자.

$$C(u, \cdots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \cdots, u_n) = 0,\ C(1, \cdots, 1, u_i, 1, \cdots, 1) = 0,\ i = 1, 2, \cdots, n$$

$\forall \alpha,\ \beta \in [0, 1]^n$ $(\alpha_i < \beta_i,\ i = 1, 2, \cdots, n)$ 에 대하여 $\Delta_{\alpha_1\beta_1}\Delta_{\alpha_2\beta_2}\cdots\Delta_{\alpha_n\beta_n}C(u) \ge 0,\ u \in [0, 1]^n$ 이 성립된다. 여기서 $\Delta_{\alpha_i\beta_i}C(u) = C(u_1, \cdots, u_{i-1},\ \beta_i,\ u_{i+1}, \cdots, u_n) - C(u_1, \cdots, u_{i-1},\ \alpha_i,\ u_{i+1}, \cdots, u_n)$.

이때 함수 C 를 n 차원코퓰러라고 말한다.

보조정리[2] 우연벡토르 $X \in R_n(F_1, \cdots, F_n)$ 의 분포함수 F_X 는 적당한 C 에 관하여

$$F_X(x) = C(F_1(x_1), \cdots, F_n(x_n)),\ x = (x_1, \cdots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n \tag{6}$$

으로 표시할수 있다. 여기서 $R_n(F_1, \cdots, F_n)$ 은 분포함수 $F_i(x_i),\ i = 1, 2, \cdots, n$ 을 가지는 n 차원우연벡토르들의 모임이다.

그리고 분포함수 $F_1(x_1), \cdots, F_n(x_n)$ 들이 련속이면 식 (6)의 코퓰러 C 는 유일하며 $C(u) = F_X(F_1^{-1}(u_1), \cdots,\ F_n^{-1}(u_n)),\ u \in [0, 1]^n$ 으로 표시된다.

정의 2[2] 함수 $\phi : [0, 1] \to \boldsymbol{R}^+$ 가 $\phi(1) = 0$ 을 만족시키는 엄격히 단조인 함수라고 하자.

이때 $C_\phi(u_1, u_2, \cdots, u_n) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \phi(u_2) + \cdots + \phi(u_n))$ 을 만족시키는 C_ϕ 를 생성함수 ϕ 를 가지는 아르키메데스코퓰러라고 부른다.

정의 3[2] $C_\alpha(u_1, u_2, \cdots, u_n) = \left(\sum_{i=1}^n u_i^2 - n + 1\right)^{-1/\alpha}$, $(u_1, u_2, \cdots, u_n) \in [0, 1]^n$ 으로 정의된 코퓰러를 클레이톤코퓰러라고 부른다.

정리 2 다음의 두 명제는 동등하다.

① 청구량렬 $\{X_k\}_{k\geq 1}$ 의 임의의 서로 다른 n 개 우연량 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 들은 가정 3을 만족시킨다.

② 청구량렬 $\{X_k\}_{k\geq 1}$ 의 임의의 서로 다른 n 개 우연량 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 들은 생성함수가 $\phi(t) = (\widetilde{F}_\Theta)^{-1}(t)$ 인 아르키메데스생존코퓰러련관을 가진다. 여기서 $\widetilde{F}_\Theta(x) = \int_0^\infty e^{-\theta x} dF_\Theta(\theta)$.

증명 이제 청구량렬 $\{X_k\}_{k\geq 1}$ 의 임의의 서로 다른 n 개 우연량 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 들이 가정 3을 만족시킨다고 하자.

그러면 분포함수 $F_\Theta(\theta)$ 에 대하여 우연량 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 의 동시적분포함수는

$$P\{X_1 > x_1, \cdots, X_n > x_n\} = \int_0^\infty e^{-\theta(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)} dF_\Theta(\theta) = \widetilde{F}_\Theta(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \tag{7}$$

으로 쓸수 있다.

우연량렬 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 이 생존코퓰러 $\overline{C}$ 를 가진다면

$$P\{X_1 > x_1, X_2 > x_2, \cdots, X_n > x_n\} = \overline{C}(\overline{F}_X(x_1), \cdots, \overline{F}_X(x_n)) \tag{8}$$

으로 된다. 여기서 $\overline{F}_X(x) = 1 - F_X(x)$.

그리고 가정 3으로부터

$$\overline{F}_X(x_i) = \int_0^\infty e^{-\theta x_i} dF_\Theta(\theta) = \widetilde{F}_\Theta(x_i). \tag{9}$$

$$\phi(t) = (\widetilde{F}_\Theta)^{-1}(t) \tag{10}$$

라고 놓으면 $\phi(t): [0, 1] \to \boldsymbol{R}^+$, $\phi(0) = \infty$, $\phi(1) = 0$ 은 련속이고 엄격히 단조인 함수이다.

이때 식 (9)를 리용하면 $\phi(t)$ 에 관하여

$$\overline{C}(\overline{F}_X(x_1), \cdots, \overline{F}_X(x_n)) = \phi^{-1}(\phi(\overline{F}_X(x_1)) + \phi(\overline{F}_X(x_2)) + \cdots + \phi(\overline{F}_X(x_n))) = \widetilde{F}_\Theta(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \tag{11}$$

으로 쓸수 있다. 이것은 생존코퓰러 $\overline{C}$ 가 생성함수 ϕ 를 가지는 아르키메데스생존코퓰러라는것을 보여준다.

따라서 가정 3을 만족시키는 우연량 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 들은 생성함수가 식 (10)인 아르키메데스생존코퓰러련관을 가진다.

결국 식 (7), (8), (11)과 정의 2로부터 ①과 ②는 동등하다.(증명끝)

정리 2의 결과로부터 청구량들이 아르키메데스생존코퓰러련관을 가지는 경우 위험모형에 대한 파산확률은 조건부독립인 지수분포하는 청구량렬을 가지는 위험모형에 대한 파산확률 (4)와 같다는것을 알수 있다.

정리 3 가정 1, 2를 만족시키고 청구량렬 $\{X_k\}_{k\geq 1}$ 이 클레이톤코퓰러련관을 가지는 파레토분포에 따른다고 하면 위험모형 (1)에 대한 파산확률은 다음과 같이 표시된다.

$$\Psi(u)=1-\frac{\Gamma(\alpha,\ \beta\theta_0)}{\Gamma(\alpha)}+\theta_0 e^{\theta_0 u}\beta\left(1+\frac{u}{\beta}\right)^{-(\alpha-1)}\frac{\Gamma(\alpha-1,\ (\beta+u)\theta_0)}{\Gamma(\alpha)},\ \theta_0=\frac{\lambda}{c},\ \Gamma(\alpha,\ x)=\int_x^{+\infty}\omega^{\alpha-1}e^{-\omega}d\omega$$

증명 이제 Θ 가 감마분포한다고 하면 즉 밀도함수가 $p_\Theta(\theta)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta}$, $\theta>0$ 이면 $\overline{F}_X(x)=\int_0^{+\infty}e^{-\theta x}p_\theta(x)d\theta=\left(1+\frac{x}{\beta}\right)^{-\alpha}$, $x\ge 0$ 이므로 청구량들이 파레토분포에 따른다는것이 나온다. 따라서 정리 1과 클레이톤코퓰러의 성질[2]에 의하여 $\{X_k\}_{k\ge1}$ 은 생성함수가 $\phi(t)=(\widetilde{F}_\Theta)^{-1}(t)=t^{-1/\alpha}-1$ 인 아르키메데스생존코퓰러를 가진다는것을 알수 있다.

결국 정리 1, 2의 결과로부터 위험모형 (1)에 대한 파산확률은

$$\Psi(u)=F_\Theta(\theta_0)+\int_{\theta_0}^{+\infty}\Psi_\theta(u)dF_\Theta(\theta)=\int_0^{\theta_0}\frac{\beta^\alpha\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta}}{\Gamma(\alpha)}d\theta+\int_{\theta_0}^{+\infty}\frac{\theta_0}{\theta}e^{-(\theta-\theta_0)u}\frac{\beta^\alpha\theta^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\beta\theta}d\theta=$$

$$=1-\frac{\Gamma(\alpha,\ \beta\theta_0)}{\Gamma(\alpha)}+\theta_0 e^{\theta_0 u}\beta\left(1+\frac{u}{\beta}\right)^{-(\alpha-1)}\frac{\Gamma(\alpha-1,\ (\beta+u)\theta_0)}{\Gamma(\alpha)}$$

이다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] H. Gerber; An Introduction to Mathematical Risk Theory, Springer, 245～246, 1979.

[2] M. Denuilt et al.; Actuarial Theory for Dependent Risks, Wiley & Sons, 191～225, 2005.

[3] H. Albrecher et al.; Mathematics and Economics, 45, 3, 362, 2009.

[4] Bin Tong et al.; Mathematics and Economics, 50, 1, 139, 2012.

주체104(2015)년 5월 5일 원고접수

Representation of the Ruin Probability for Risk Model with Claims according to Archimedean Survival Copula Relation

Kim Chol Ho, Pak Il Jin

We obtain the expression of ruin probability for risk model when in an insurance company the claim amount has conditional independent exponential distribution and using it and study the ruin probability for risk model in case that the claim amount has according to claims Archimedean survival copula relation.

Key word: Archimedean survival copula relation