

## 레이리파위상속도분산계산에서 얇은층강성행렬방법의 적용

차신혁, 문성철

층상매질에서 전파되는 레일리파의 위상속도분산특성은 원유탐사와 고속도로로나 비행장활주로지반구조의 비파괴적검사를 비롯하여 많은 지구물리적역해석에서 널리 이용되고있다.[1, 2, 4] 논문에서는 층상매질에서 전파되는 결면파의 위상속도분산특성의 정확성과 믿음성을 높이기 위하여 얇은층강성행렬방법을 적용하였다.

얇은층강성행렬방법에서는 전통적인 전달행렬방법에 비하여 보다 정확한 층상매질에서의 위상속도분산곡선을 얻을수 있다.

논문에서는 얇은층강성행렬방법을 리용한 위상속도분산방정식을 세우고 분산곡선을 얻었으며 층상매질의 밀도, 뽀송비를 비롯한 지층파라미터들의 영향을 평가하였다.

### 1. 얇은층강성행렬방법에 의한 위상속도분산방정식

층상매질에서 결면파가 전파될 때 매질의 임의의 층의 윗면과 아래면에서 변위와 응력사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.[3]

$$K_{sv-p}^e \begin{Bmatrix} U_1^e \\ U_3^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_1^e \\ S_3^e \end{Bmatrix} \quad (1)$$

여기서  $U_l^e = [U_l(i), U_l(i+1)]^T$ ,  $S_l^e = [S_l(i), S_l(i+1)]^T$ ,  $U_l(i)$ ,  $U_l(i+1)$ ,  $S_l(i)$ ,  $S_l(i+1)$  ( $l=1, 2, 3$ )은  $i$  번째 경계면과  $i+1$  번째 경계면 ( $i=1, 2, \dots, n$ )에서의 변위와 응력이다. 그리고  $K_{sh}$ 와  $K_{sv-p}$ 는 라브파와 레일리파에 해당하는 강성행렬이다.

레이리파의 강성행렬  $K_{sv-p}$ 는  $k > 0$ ,  $\omega > 0$ 인 일반적인 경우에 다음과 같이 표시된다.

$$K_{sv-p}^e = \begin{pmatrix} K_{11}^{sv-p} & K_{12}^{sv-p} \\ K_{21}^{sv-p} & K_{22}^{sv-p} \end{pmatrix}$$

이때

$$K_{11}^{sv-p} = 2k\mu \left[ \frac{1-2s^2}{2D} \begin{Bmatrix} \frac{1}{s}(C_p C_s - ps C_s C_p) & 1 - C_p C_s + ps S_p S_s \\ 1 - C_p C_s + ps S_p S_s & \frac{1}{p}(C_s S_p - ps C_p S_s) \end{Bmatrix} + \frac{1+s^2}{2} \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix} \right]$$

이며  $K_{22}^{sv-p}$ 는  $K_{11}^{sv-p}$ 와 비대각선원소들의 부호만 반대이다.

한편

$$K_{12}^{sv-p} = 2k\mu \left[ \frac{1-2s^2}{2D} \begin{Bmatrix} \frac{1}{s}(ps S_p - S_s) & C_p - C_s \\ -(C_p - C_s) & \frac{1}{p}(ps S_s - S_p) \end{Bmatrix} \right]$$

이며  $K_{21}^{sv-p}$  는  $K_{12}^{sv-p}$  의 전위행렬이다. 여기서  $C_p = \text{ch}(k_p h)$ ,  $S_p = \text{sh}(k_p h)$ ,  $C_s = \text{ch}(k_s h)$ ,

$$S_s = \text{sh}(k_s h) \quad , \quad s = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{kV_s}\right)^2} \quad , \quad p = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{kV_p}\right)^2} \quad , \quad D = 2(1 - C_p C_s) + \left(\frac{1}{ps} + ps\right) S_p S_s \quad ,$$

$$k_s = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\omega}{V_s}\right)^2} \quad , \quad k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad \text{이다.}$$

우의 행렬원소들에 들어있는 초월함수  $\text{ch}(\chi)$  와  $\text{sh}(\chi)$  는  $\chi=0$  근방에서 다음과 같이 테일러전개된다.

$$\text{ch}(\chi) = 1 + \frac{\chi^2}{2} + \frac{\chi^4}{24} + \dots, \quad 0 < |\chi| < \pi$$

$$\text{sh}(\chi) = \chi + \frac{\chi^3}{6} + \dots, \quad 0 < |\chi| < \pi$$

이제  $\chi_p = k_p h$ ,  $\chi_s = k_s h$  로 놓고 테일러전개의 2차항까지만을 고려하면 레일리파에 해당하는 강성행렬은 근사적으로 다음과 같이 주어지게 된다.

$$K_{11}^{sv-p} \approx \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \rho h V_p^2 k^2 + \frac{\rho V_s^2}{h} - \frac{1}{2} \rho h \omega^2 & -\frac{\rho}{2} (V_p^2 - 3V_s^2) k \\ -\frac{\rho}{2} (V_p^2 - 3V_s^2) k & \frac{1}{2} \rho h V_s^2 k^2 + \frac{\rho V_p^2}{h} - \frac{1}{2} \rho h \omega^2 \end{pmatrix}$$

$$K_{12}^{sv-p} \approx \begin{pmatrix} -\frac{\rho}{h} V_s^2 & \frac{\rho}{2} (V_p^2 - V_s^2) k \\ -\frac{\rho}{2} (V_p^2 - V_s^2) k & -\frac{\rho}{h} V_p^2 \end{pmatrix}$$

이렇게 얻어진 근사적인 강성행렬에서는 행렬원소들이 본래의 초월함수들을 포함한 원소들이 아니라 파수  $k$ 에 관한 대수형식으로 얻어졌다. 이 행렬원소들을 자유도에 따라 정돈하면 임의의  $n$ 번째 층에서 레일리파에 대한 강성행렬은 다음과 같이 표시된다.

$$\mathbf{K}_n = \mathbf{A}_n k^2 + \mathbf{B}_n k + \mathbf{C}_n$$

여기서

$$\mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{xn} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{zn} \end{pmatrix} = \frac{\rho_n h_n}{2} \begin{pmatrix} V_{pn}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_{pn}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_{sn}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_{sn}^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_n = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{B}_{xzn} \\ \mathbf{B}_{xzn}^T & 0 \end{pmatrix} = \frac{\rho_n}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -(V_{pn}^2 - 3V_{sn}^2) & (V_{pn}^2 - V_{sn}^2) \\ 0 & 0 & -(V_{pn}^2 - V_{sn}^2) & (V_{pn}^2 - 3V_{sn}^2) \\ -(V_{pn}^2 - 3V_{sn}^2) & -(V_{pn}^2 - V_{sn}^2) & 0 & 0 \\ (V_{pn}^2 - V_{sn}^2) & (V_{pn}^2 - 3V_{sn}^2) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_n = \begin{pmatrix} C_{xn} & 0 \\ 0 & C_{zn} \end{pmatrix} = \rho_n \begin{pmatrix} \frac{V_{sn}^2}{h_n} - \frac{h_n \omega^2}{2} & -\frac{V_{sn}^2}{h_n} & 0 & 0 \\ -\frac{V_{sn}^2}{h_n} & \frac{V_{sn}^2}{h_n} - \frac{h_n \omega^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{V_{pn}^2}{h_n} - \frac{h_n \omega^2}{2} & -\frac{V_{pn}^2}{h_n} \\ 0 & 0 & -\frac{V_{pn}^2}{h_n} & \frac{V_{pn}^2}{h_n} - \frac{h_n \omega^2}{2} \end{pmatrix}$$

이다. 이때  $h_n$  과  $\rho_n$  은  $n$  번째 층의 두께와 밀도들이다.

웃식에서 볼수 있는것처럼 행렬의 모든 원소들이 해당 층의 밀도와 두께, 가로파속도  $V_s$  와 세로파속도  $V_p$  와 같은 지층파라미터들에만 관계된다.

우에서와 같은 방법을 적용하면 다음과 같이 표시되는 반무한층에서 레일리파에 대한 강성행렬을 얻을수 있다.

$$K_{sv-p}^{sb} = i \frac{\mu \omega}{V_s} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix} + k \mu (2 - \eta) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + k^2 \frac{i \mu V_s}{2 \omega} \begin{pmatrix} 1 - 2\eta & 0 \\ 0 & \eta^2 (\eta - 2) \end{pmatrix}$$

여기서  $K_{sv-p}^{sb}$  는 반무한층에서 레일리파의 강성행렬을 나타내며  $\mu = \rho V_s^2$  이고  $\eta = V_p / V_s$  이다.

전체 층상구조에서 응력벡토르  $S_l = \{S_{l_1}, S_{l_2}, S_{l_3}, \dots, S_{l_n}\}^T$  와 변위벡토르  $U_l = \{U_{l_1}, U_{l_2}, U_{l_3}, \dots, U_{l_n}\}^T$  (여기서  $l=1, 2, 3$ ) 들도 자유도에 따라 정돈하면 식 (1)로부터 변위와 응력 사이에 다음과 같은 관계식이 성립하게 된다.

$$\left\{ k^2 \begin{pmatrix} A_x & 0 \\ 0 & A_z \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 & B_{xz} \\ B_{xz}^T & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_x & 0 \\ 0 & C_z \end{pmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} U_x \\ U_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_x \\ S_z \end{Bmatrix}$$

이로부터 층상매질에서 전파되는 레일리파의 전파모드들을 구하는 문제는 다음과 같은  $k^2$  에 관한 고유값문제를 푸는데 귀착되게 된다.

$$\left\{ k^2 \begin{bmatrix} A_x & 0 \\ B_{xz}^T & A_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_x & B_{xz} \\ 0 & C_z \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} k U_x \\ U_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

지층모형을  $N$ 개의 얇은 층들로 분할하였을 때 식 (2)를 풀면 매 주파수에 대하여  $2N$  개의 실수파수  $k$  를 얻게 되는데 얻어진 값들을 크기가 작아지는 순서로 재배렬하고  $c = \omega / \text{Re}(k)$  의 관계를 리용하면 해당한 모드에 대한 레일리파위상속도들을 모드차수가 높아지는 순서로 얻을수 있다. 여기서  $\text{Re}(k)$  는 파수  $k$  의 실수부이다.

이로부터 식 (2)는 얇은층강성행렬방법에 의한 레일리파위상속도분산방정식으로 된다.

## 2. 레일리파위상속도분산곡선의 계산과 지층파라미터들의 영향평가

얻어진 위상속도분산방정식으로부터 여러가지 지층모형에 대하여 위상속도분산곡선을 계산하고 위상속도분산곡선계산에 미치는 매질파라미터들의 영향을 평가하였다.

이를 위하여 다음과 같은 지층모형들을 리용하였다.(표 1, 2, 3)

표 1. 위상속도분산계산에 리용한 지층모형 1

번호	가로파속도/( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ )	두께/m	밀도/( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ )	뽀송비
1	80	2	1 800(1 700)	0.35(0.45)
2	120	4	1 800(1 800)	0.35(0.40)
3	180	8	1 800(2 000)	0.35(0.35)
4	360	$\infty$	1 800(2 200)	0.35(0.30)

표 2. 위상속도분산계산에 리용한 지층모형 2

번호	가로파속도/( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ )	두께/m	밀도/( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ )	뽀송비
1	180	2	1 800(1 700)	0.35(0.45)
2	120	4	1 800(1 800)	0.35(0.40)
3	180	8	1 800(2 000)	0.35(0.35)
4	360	$\infty$	1 800(2 200)	0.35(0.30)

표 3. 위상속도분산계산에 리용한 지층모형 3

번호	가로파속도/( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ )	두께/m	밀도/( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ )	뽀송비
1	80	2	1 800(1 700)	0.35(0.45)
2	180	4	1 800(1 800)	0.35(0.40)
3	120	8	1 800(2 000)	0.35(0.35)
4	360	$\infty$	1 800(2 200)	0.35(0.30)

밀도와 뽀송비를 변화시키지 않았을 때 세가지 지층모형에 대하여 얻은 위상속도분산곡선은 그림 1과 같다.

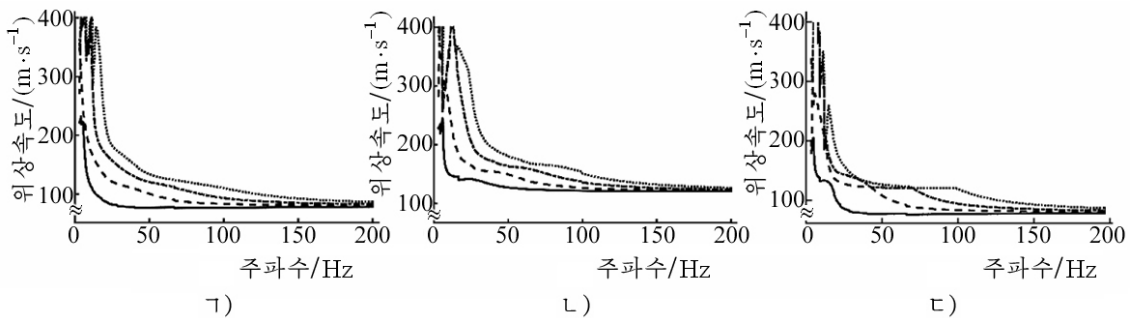


그림 1. 밀도와 뽀송비를 변화시키지 않았을 때 세가지 지층모형에 대하여 얻은 위상속도분산곡선

ㄱ) 지층모형 1, ㄴ) 지층모형 2, ㄷ) 지층모형 3

다음 지층모형의 밀도와 뽀송비를 표의 ( )안의 값들로 변화시키고 위상속도분산곡선을 계산하였다.

밀도와 뽀송비를 변화시켰을 때 얻은 위상속도분산곡선과 변화시키지 않았을 때의 위상속도분산곡선은 그림 2와 같다. 그림 2에서는 두 경우의 차이를 명백히 하기 위하여 주파수축을 로그척도로 취하였다. 왼쪽그림들은 밀도를 변화시켰을 때의 그래프이고 오른쪽그림들은 뽀송비를 변화시켰을 때 얻은 그래프이다.

그림 2에서 볼수 있는것처럼 매질의 밀도는 위상속도분산곡선에 큰 영향을 주지 않는다. 그러나 뽕뽕비를 변화시켰을 때 얻은 위상속도분산곡선들에서는 뽕뽕비의 영향을 무시할수 없다는것을 알수 있다. 특히 10Hz아래대역에서는 뽕뽕비를 변화시켰을 때 얻은 위상속도분산곡선의 기본모드와 변화시키지 않았을 때 얻은 분산곡선의 기본모드가 크게 차이난다. 그리고 그 이상의 주파수대역에서는 뽕뽕비를 변화시키면서 얻은 위상속도분산곡선이 뽕뽕비를 변화시키지 않았을 때 얻은 위상속도분산곡선들과 차수가 하나 낮은 모드의 위상속도분산곡선과 겹치는 현상이 나타난다.

이것은 위상속도분산곡선을 리용한 지층구조의 역해석과정에 반드시 고려하여야 할 중요한 문제의 하나로 된다.

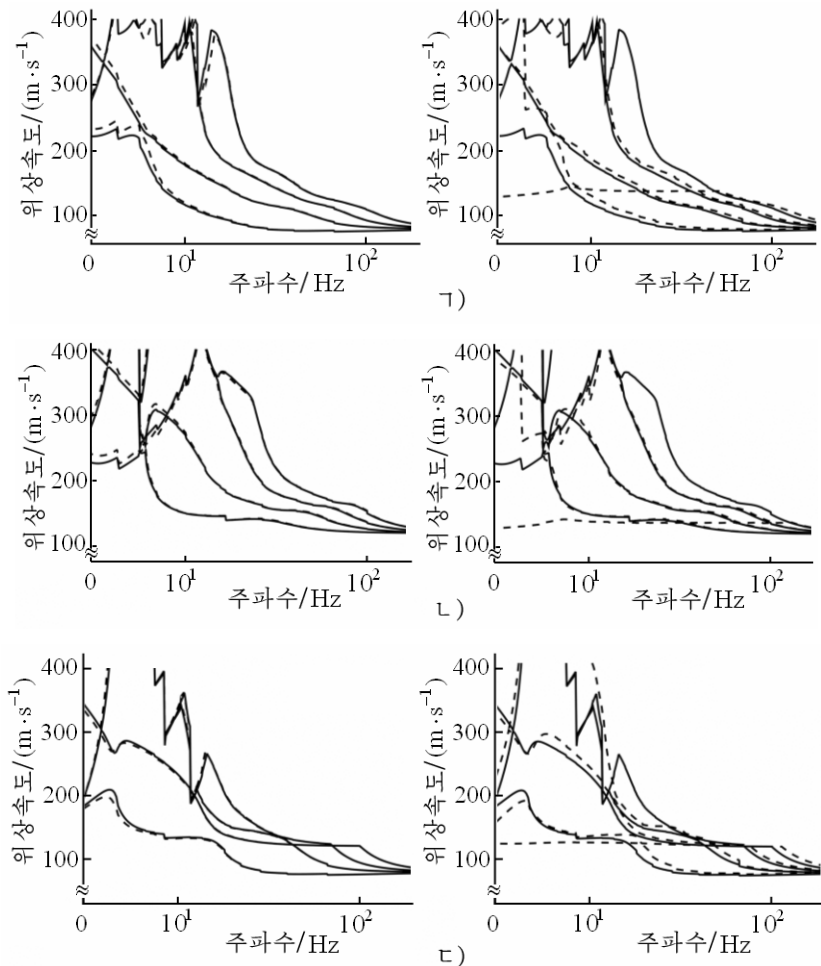


그림 2. 밀도와 뽕뽕비를 변화시켰을 때 얻은 위상속도분산곡선과  
변화시키지 않았을 때의 위상속도분산곡선

가) 지층모형 1, 나) 지층모형 2, 다) 지층모형 3

실선— 파라메터들을 고정하여 계산한 분산곡선,

점선—파라메터들을 변화시켰을 때 계산한 분산곡선

## 맺 는 말

얇은층강성행렬방법을 리용하여 위상속도분산곡선을 계산하기 위한 방법을 확립하고 위상속도분산계산에 미치는 지층매질파라미터들의 영향을 평가함으로써 결론파를 리용한 지층구조역해석의 효과성과 정확성을 보다 높일수 있게 하였다.

## 참 고 문 헌

- [1] C. P. Lin et al.; Journal of Applied Geophysics, 143, 223, 2017.
- [2] C. Li et al.; Construction and Building Materials, 188, 809, 2018.
- [3] L. Sun et al.; Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 257, 65, 2013.
- [4] J. Taipodia et al.; International Journal of Innovative Research in Science, Engineering and Technology, 13, 129, 2014.

주체109(2020)년 3월 5일 원고접수

## **Application of Thin-layer Stiffness Matrix Method in Dispersion Calculation of Rayleigh Wave**

*Cha Sin Hyok, Mun Song Chol*

We presented a method to calculate the phase velocity dispersion of the Rayleigh waves by using the thin-layer stiffness matrix method and estimated the effects of soil parameters in the dispersion calculation.

Keywords: thin-layer method, stiffness matrix, Rayleigh wave