

직4각형분할에 대한 일반화된 보로노이거꿀문제의 한가지 구성

김성철, 림충혁

일반화된 보로노이거꿀문제는 평면직선그래프가 주어졌을 때 그 그래프를 평면의 적당한 점들의 모임에 관한 보로노이도식으로 피복할수 있겠는가, 만일 있다면 그 점모임을 찾는 문제이다.

선행연구[2]에서는 일반화된 보로노이거꿀문제를 제기하였고 선행연구[4]에서는 직4각형분할의 경우에 일반화된 보로노이거꿀문제를 논의하였으며 임의의 평면직선그래프에 대하여 일반화된 보로노이거꿀문제를 해결하는 방법을 제기하였다.

론문에서는 직4각형분할에 대하여 선행연구[4]에서 내놓은것보다 개선된 일반화된 보로노이거꿀의 풀이를 구성하는 한가지 방법을 제기하고 그것이 임의의 직4각형분할에 대하여 개선된 풀이를 준다는것을 증명한다.

S 를 평면우의 점들의 모임이라고 하자.

정의 1 [1] 모임 $Vor(p) = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid S \text{의 모든 지점 } q \text{에 대하여 } \|x-p\| \leq \|x-q\| \text{이다.}\}$ 를 S 의 점 p 의 보로노이구역이라고 부른다. 여기서 $\|p-q\|$ 는 평면에서 점 p 와 q 사이의 유클리드거리를 표시한다.

보로노이리론에서 기초적이면서도 중요한 정리들은 다음과 같다.

정리 1 [1, 3] 보로노이점모임 S 에 대한 보로노이도식을 $Vor(S)$ 라고 할 때 점 v 가 $Vor(S)$ 의 보로노이정점이기 위해서는 중심이 v 이고 셋이상의 보로노이점들을 둘레에 가지면서 내부에 하나의 점도 가지지 않는 원이 존재할것이 필요하고 충분하다.

정리 2 [1, 3] 보로노이점모임 S 에 대한 보로노이도식이 $Vor(S)$ 이고 S 의 두 점 p 와 q 의 수직2등분선의 련결부분모임을 e 라고 할 때 e 가 $Vor(S)$ 의 보로노이링이기 위해서는 e 의 모든 점 x 에 대하여 중심은 x 이고 둘레에 p 와 q 가 놓이면서 둘레와 내부에 다른 점을 가지지 않는 원이 존재할것이 필요하고 충분하다.

정의 2 [1] 모든 구역들이 불록인 평면의 다각형분할 T 가 주어졌다고 하자.

T 의 매 구역 $t_i \in T$ 안에 점 $s_i \in S$ 가 놓이면 $v(s_i) = t_i$ 로 되는 점들의 모임 S 를 찾는 문제를 보로노이거꿀문제라고 부른다. 여기서 $v(s_i)$ 는 $Vor(S)$ 에서의 점 s_i 의 보로노이구역이다.

직4각형분할에 대한 일반화된 보로노이거꿀문제의 풀이법을 실례를 통하여 보자.

우선 주어진 직4각형분할에 대하여 하난분할을 진행한다.

이 하난분할에 대하여 선형직4각형분할에 대한 알고리즘을 리용하여 제일 웃행의 선형직4각형분할에 대하여 일반화된 보로노이점들이 놓일수 있는 허용구역을 확정한다.

마찬가지로 제일 왼쪽 렬의 선형직4각형분할에 대하여 일반화된 보로노이점들이 놓일수 있는 구역범위들을 확정한다.

다음 제일 왼쪽 웃구석직4각형구역에서 가로방향허용구역과 세로방향허용구역의 사립부분에 가상적인 보조점을 배치한다. 이 점을 기준으로 하여 제일 왼쪽 렬과 제일 웃쪽

행의 선형직4각형분할에 대한 가상적인 보조점배치를 진행한다. 얻어진 가상적인 점들에 대하여 왼쪽 렬의 점들에서는 수평선을 긋고 오른쪽 행의 점들에서는 수직선을 그어 살창을 형성한다. 이 살창점들이 보로노이점들이 놓일수 있는 위치 즉 보로노이후보점들로 된다.

그다음 제일 왼쪽 옷구석직4각형구역에서 가로방향허용구역과 세로방향허용구역의 사곁부분에 가상적인 보조점을 배치한다. 이 점을 기준으로 하여 제일 왼쪽 렬과 제일 옷쪽 행의 선형직4각형분할에 대한 가상적인 보조점배치를 진행한다.

얻어진 가상적인 점들에 대하여 왼쪽 렬의 점들에서는 수평선을 긋고 옷쪽 행의 점들에서는 수직선을 그어 살창을 형성한다. (그림 7))

이 살창점들이 보로노이점들이 놓일수 있는 위치 즉 보로노이후보점들로 된다.

계속하여 하난분할을 위하여 그어진 점선들을 지운다.

다음 해당 분할에서 T자형정점과 십자형정점들을 찾는다. 여기서 T자형정점은 분할의 내부에서 실선분들이 T자형으로 교차되었을 때 그 교차점을 말한다. 십자형정점도 마찬가지로 분할의 내부에서 실선분들이 십자형으로 교차되었을 때 그 교차점을 의미한다.

이에 기초하여 매 T자형정점, 십자형정점들에 대하여 그것을 포함한 제일 작은 살창4각형을 찾고 그 살창4각형의 네 정점위치에 점들을 배치한다. (그림 8))

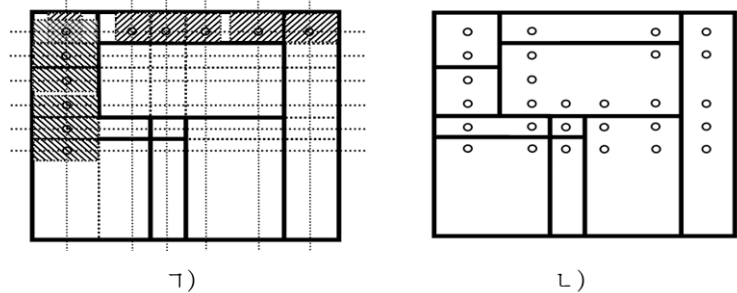


그림. 직4각형분할에 대한 풀이구성방법의 동작과정

다음으로 론의를 편리하게 하기 위해 아래에서 몇가지 개념을 정의하기로 한다.

배치된 매 점들에 대하여 린접한 실선들에 관한 대칭위치에 점이 존재하지 않는 경우 그 대칭위치에 점을 찍어주고 만일 대칭점이 론의하는 점이 놓여있는 구역의 린접구역을 벗어나는 경우에는 대칭점을 찍지 않고 해당 론의점을 검은색점으로 표시한다. 새로 찍어진 대칭점에 대하여 위에서와 같이 대칭점을 찍어주거나 검은색점을 지정해주는 공정을 반복한다. 이 과정은 대칭점을 더 찍지 못하는 경우에 끝나게 된다.

매 검은색점에 대하여 그 점이 검은색점이 되도록 정하는 린접실직선을 판정직선 그리고 그 검은색점이 놓이는 분할구역을 판정구역이라고 부르고 판정구역의 경계에 놓인 판정직선의 부분을 판정선분이라고 부르겠다.

검은색점과 그것에 대응되는 판정직선에 대하여 다음과 같은 성질들을 만족시킨다.

정리 3 한 검은색점에 대하여 그것에 대응되는 판정직선은 유일하다. 다시말하여 그 점이 검은색점이 되도록 정하는 판정직선은 유일하다.

이로부터 1개의 검은색점에는 1개의 판정선분이 대응된다.

그러므로 1개의 검은색점에는 판정직선, 판정선분, 판정구역이 하나씩 대응되게 된다.

판정선분이 보존되자면 다시말하여 판정선분이 보로노이도식의 부분으로 되자면 정리 1의 조건을 만족시켜야 한다.

판정선분이 보존되는가를 판정하는 방법을 보기로 하자.

우선 판정선분에 린접한 점들을 판별한다. 즉 판정구역내에 있는 점들가운데서 판정

선분에 수직선을 그었을 때 수직선의 밑점과 그 점사이에 다른 점이 없으면서 판정선분에 관한 대칭점이 존재하면 이 점을 린접점이라고 부르기로 한다.

다음 판정선분의 한끝점을 기준끝점으로 잡고 이 기준끝점에서 제일 가까운 린접점을 찾은 다음 그 린접점을 첫점으로 하여 기준끝점에서 다른 끝점으로 가면서 린접점들을 차례로 순서를 정한다. 이 순서불은 린접점들에 대하여 다음의 조작을 실시한다.

기준끝점을 중심으로 하고 첫점까지의 거리를 반경으로 하는 원을 그린 다음 첫점과 그 다음순서의 점 그리고 이 두 점의 판정선분에 관한 대칭점 즉 4개 점을 지나는 원을 그린다. 마찬가지로 두번째 점과 그다음 점에 대해서도 이와 같은 방법으로 원을 그린다. 이 과정을 반복하며 마지막으로부터 두번째 점과 마지막점에 대하여 원을 그리고 마지막점에 대해서는 이 점에서 기준끝점이 아닌 판정선분의 다른 끝점을 중심으로 하고 끝점으로부터 마지막점까지의 거리를 반경으로 하는 원을 그린다.

만일 린접점이 1개인 경우에는 판정선분의 양끝점을 중심으로 하고 린접점까지의 거리를 반경으로 하는 2개의 원을 각각 그린다. 이렇게 그린 원들의 모임을 판정선분에 대한 판정원모임이라고 부르기로 한다.

판정원모임에 대하여 다음과 같은 사실이 성립된다.

정리 4 판정선분이 보존되자면 다시말하여 판정선분이 보로노이도식의 부분이 되기 위해서는 판정원모임이 이루는 구역(경계포함)에 린접점을 제외한 점이 놓이지 않을것이 필요하고 충분하다.

이 정리에 기초하여 판정선분들이 보존되는가를 판정한다.

만일 판정선분이 보존되지 않는 경우에는 이 선분이 보존되도록 추가점들을 더 찍어 주어야 한다. 검은색점을 지나며 판정직선에 수직인 살창직선과 린접점들을 지나는 살창직선과의 사귀점과 이 사귀점의 판정직선에 관한 대칭위치에 추가점들을 배치한다. 추가점들에 대하여 린접실직선에 의한 대칭점들을 찍어주고 검은색점을 지적해주는 공정을 반복한다.

위의 방법을 리용한 직4각형분할에 대한 일반화된 보로노이거꿀의 풀이구성알고리즘은 다음과 같다.

① 직4각형분할을 입력한다.

② 주어진 직4각형분할에 대하여 하난분할을 진행한다.

③ 제일 왼쪽 렬의 선형직4각형분할과 제일 웃쪽 행의 선형직4각형분할에 대하여 보조점배치를 진행하고 그것에 기초하여 전체 분할에 대하여 보로노이점들이 놓일 후보위치들을 확정한다.

④ T자형정점과 십자형정점들에 대한 점배치를 진행하고 이 점들의 실선들에 관한 린접구역의 대칭위치들에 점들을 배치하고 찍어진 점들에 대하여 이 공정을 반복한다.

린접구역에 대칭점을 찍을수 없는 점들을 검은색점으로 정한다.

⑤ 판정원모임을 리용하여 매 검은색점들에 대한 필요한 추가점들을 찍어주고 찍어진 모든 점들을 보로노이점으로 한다.

⑥ 주어진 직4각형분할에 대한 일반화된 보로노이점모임을 출력한다.

이 방법이 선행연구[4]에서 논의한 풀이법으로 찾은 점들중에서 필요없는 점들을 최대한 없애는것으로 된다는것을 쉽게 알수 있다.

선행연구[4]에서 제기한 알고리즘으로 같은 실례에 대하여 점배치를 진행하면 점개수는 34개이다.

론문에서 제기한 방법으로 찍은 점개수는 28개이다.

이로부터 새로운 방법이 선행연구[4]에서 제기한 알고리즘보다 개선된 풀이를 준다는 것을 알 수 있다.

임의의 직4각형분할에 대하여서도 이 사실이 성립한다.

정리 5 직4각형분할에 대한 일반화된 보로노이거꿀의 풀이구성알고리즘은 임의의 직4각형분할에 대하여 선행연구[4]에서 내놓은 알고리즘보다 개선된 풀이를 준다.

참 고 문 헌

- [1] S. L. Devadoss et al.; Discrete and Computational Geometry, Princeton University Press, 98~117, 2011.
- [2] D. Trinchet Almaguer et al.; Revista Cubana de Ciencias Informaticas 1, 4, 58, 2007.
- [3] Greg Aloupis et al.; arXiv:1308.5550v1 [cs.CG], 2013.
- [4] S. Banerjee et al.; Procs. 9th Int. IEEE Symp. on Voronoi Diagrams in Science and Engineering, New Brunswick, 132, 2012.

주체107(2018)년 12월 5일 원고접수

On the Construction of a Solution to the Generalized Voronoi Inverse Problem for the Rectangular Tessellation

Kim Song Chol, Rim Chung Hyok

We get an algorithm giving a renewing solution to the generalized Voronoi inverse problem for the rectangular tessellation which is a special kind of planar tessellation.

Key words: rectangular tessellation, generalized Voronoi inverse problem