김일성종합대학학보 수 학　　　　주체107(2018)년 제64권 제3호

한가지 재귀프락탈보간함수의 횔데르련속성

윤철희, 리미경

프락탈보간함수(FIF)는 그라프가 프락탈모임인 보간함수이다. 선행연구[1]에서는 반복함수계(IFS)리론에 기초하여 프락탈보간함수의 개념을 도입하였다. 프락탈보간함수는 자연계에서 일종의 자기상사성을 가지고있는 현상이나 함수들을 묘사하는데서 다항식과 스플라인과 같은 고전적인 보간함수보다 많은 우점을 가지고있다. 따라서 프락탈보간함수는 많은 론문들에서 연구되고있으며 함수의 근사, 신호처리, 화상처리 등에서 광범히 응용되고있다.

일반적으로 프락탈보간법에서는 주어진 자료모임에 대하여 반복함수계(또는 재귀반복함수계(RIFS))를 만든 다음 그 반복함수계(또는 재귀반복함수계)를 리용하여 적당한 련속함수공간우에서 정의된 어떤 연산자의 부동점이 바로 구하려고 하는 프락탈보간함수(또는 재귀프락탈보간함수)이다. 이러한 프락탈보간함수들의 구성법과 그 함수들의 미분과 적분, 차원, 미끈성, 안정성 등과 같은 중요한 성질들이 널리 연구되고있다.[1－12]

한편 반복함수계의 축소변환들이 가지고있는 수직비례인자는 프락탈보간함수의 형태와 특성을 결정하는 매우 중요한 인자이다. 그러므로 신축성이 높고 다양한 프락탈보간함수들을 얻기 위하여 수직비례인자들이 함수인 프락탈보간함수의 구성법과 횔데르련속성[5, 6, 8, 10, 11, 12]에 대하여 연구되고있다. 재귀반복함수계는 반복함수계의 일반화이며 자기상사성보다 더 복잡한 구조를 가진 모임을 생성한다.[2, 3] 선행연구 [12]에서는 함수수직비례인자를 가진 재귀반복함수계를 리용하여 재귀프락탈보간함수를 구성하고 구성한 보간함수그라프의 프락탈차원을 평가였으며 그에 기초하여 프락탈보간곡면을 구성하는 방법을 제기하였다.

론문에서는 선행연구[12]에서 구성한 재귀프락탈보간함수의 횔데르련속성을 연구하였다. 론문의 결과는 근사리론, 콤퓨터도형학, 화상처리와 같은 실천응용의 리론적기초로 된다.

1. 재귀프락탈보간함수

여기서는 선행연구[12]에서 제기한 재귀프락탈보간함수의 구성법을 간단히 소개하기로 하자. 직4각형구역우에서의 자료모임을

$$P:=\{(x_i,\ y_i)\in \mathbf{R}^2\quad i=0,\ 1,\ \cdots,\ n\}\ (-\infty<x_0<x_1<\ \cdots\ <x_0<+\infty)$$
$$N_n:=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\},\ I_i:=[x_{i-1},\ x_i],\ I:=[x_0,\ x_n]$$

으로 표시하자. 여기서 I_i를 지역이라고 부른다.

l 이 $2\le l\le n$ 인 옹근수일 때 다음과 같은 몇개의 지역들로 이루어진 l 개의 구간 $\widetilde{I}_k\ (k=1,\ \cdots,\ l)$ 들을 I 에서 선택하고 매 $\widetilde{I}_k$ 을 구역이라고 부른다.

구간 $\widetilde{I}_k\ (k=1,\ \cdots,\ l)$ 의 끝점들은 각각 $I_i\ (i=1,\ \cdots,\ n)$ 들의 어느 한 끝점들과 일치하므로 $\widetilde{I}_k$ 의 시작점과 끝점의 번호를 각각 $s(k),\ e(k)$ 로 표시하면 넘기기들이 정의된다.

$$s:\{1,\ \cdots,\ l\}\to\{1,\ \cdots,\ n\},\ e:\{1,\ \cdots,\ l\}\to\{1,\ \cdots,\ n\}$$

그러면 $\widetilde{I}_k=[x_{s(k)},\ x_{e(k)}]$로 표시할수 있다. 이때 다음과 같이 가정한다.

$$e(k)-s(k)\ge 2\ \ (k=1,\ \cdots,\ l)$$

이것은 구간 $\widetilde{I}_k$ 들이 각각 2개 또는 그 이상의 I_i 들을 포함하는 구간이라는것을 의미한다.

이제 매 $i(\in N_n)$에 대하여 한 $k(\in\{1,\ \cdots,\ l\})$를 취하여 고정하고 $\gamma(i)$로 표시하자. 그리고 넘기기 $L_{i,\ k}:[x_{s(k)},\ x_{e(k)}]\to[x_{i-1},\ x_i]\,(i\in N_n)$ 들이 $\widetilde{I}_k$ 의 끝점들을 구간 I_i 의 끝점들로 넘기는 즉 $L_{i,\ k}:(\{x_{s(k)},\ x_{e(k)}\})=\{x_{i-1},\ x_i\}$인 축소위상동형넘기기들이라고 하자. 또한 넘기기 $F_{i,\ k}:\widetilde{I}_k\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}\,(i=1,\ \cdots,\ n)$ 들을 $F_{i,\ k}(x,\ y):=s_i(L_{i,\ k}(x))y+b_{i,\ k}(x)$ 로 정의하자. 이때 넘기기 $s_i:I_i\to\mathbf{R}$ 들은 절대값이 1보다 작은 임의의 립쉬츠함수들이며 $b_{i,\ k}:\widetilde{I}_k\to\mathbf{R}$ 들은 $\alpha\in\{s(k),\ e(k)\}$ 이면 $L_{i,\ k}(x_\alpha)=x_\alpha$, $a\in\{i-1,\ i\}$ 이면 $F_{i,\ k}(x_\alpha,\ y_\alpha)=y_\alpha$가 성립되도록 정의하자. 실례로 $b_{i,\ k}:\widetilde{I}_k\to\mathbf{R}$ 들은 다음과 같이 정의할수 있다.

$$b_i(x):=-s_i(L_i(x))g_i(x)+h_i(L_i(x))$$

여기서 $g_i:\widetilde{I}_k\to\mathbf{R}$ 들과 $h_i:I_k\to\mathbf{R}$ 들은 각각

$$g_i(x_\alpha)=y_\alpha,\ \alpha\in\{x_{s(k)},\ x_{e(k)}\},\ h_i(x_a)=y_a,\ a\in\{x_{i-1},\ x_i\}$$

인 립쉬츠함수들이다. 실례로 다음과 같이 라그랑쥬보간다항식으로 구성할수 있다.

$$\begin{aligned}g_i(x)&=\frac{x-x_{s(k)}}{x_{e(k)}-x_{s(k)}}y_{e(k)}+\frac{x-x_{e(k)}}{x_{s(k)}-x_{e(k)}}y_{s(k)}\\ h_i(x)&=\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}y_i+\frac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i}y_{i-1}\end{aligned}\tag{1}$$

그러면 $\vec{F}_{i,\ k}(x,\ \vec{z})$는 분명 립쉬츠넘기기로 된다. $F_{i,\ k}$, $L_{i,\ k}$, $b_{i,\ k}$ 들을 간단히 F_i, L_i, b_i 로 표시하자. 그리고 $H(\subset\mathbf{R})$를 $y_i\in H\ (i=1,\ \cdots,\ n)$인 충분히 큰 구간이라고 하자. 그리고 변환 $W_i:\widetilde{I}_k\times H\to I_i\times\mathbf{R}\,(i=1,\ \cdots,\ n)$를 다음과 같이 정의하자.

$$W_i(x,\ y):=(L_i(x),\ F_i(x,\ y))\,(i=1,\ \cdots,\ n)$$

정리 1 $\overline{S}<1$이면 유클리드거리와 동등한 어떤 거리 ρ_θ가 있어서 $\overline{W_i}\ (i=1,\ \cdots,\ n)$ 들은 이 거리에 관하여 축소변환으로 된다.

행확률행렬 $M:=(p_{st})_{n\times n}$이 다음과 같이 정의된 원소들로 구성되였다고 하자.

$$p_{st}:=\begin{cases}\dfrac{1}{a_s}\ \ (I_s\subseteq\widetilde{I}_{\gamma(t)}\text{인 경우})\\ 0\ \ (I_s\not\subset\widetilde{I}_{\gamma(t)}\text{인 경우})\end{cases}$$

여기서 a_s는 매 고정된 $s(=1,\ \cdots,\ n)$에 대하여 지역 I_s를 포함하는 구역 $\widetilde{I}_k\ (k=1,\ \cdots,\ l)$ 들의 개수이다. 대응하는 련결행렬 $C:=(c_{st})_{n\times N}$이 다음과 같이 정의된 원소들로 구성되였다고 하자.

$$c_{st}:=\begin{cases}1\ \ (p_{st}>0\text{인 경우})\\ 0\ \ (p_{st}=0\text{인 경우})\end{cases}$$

이때 $\{\mathbf{R}^3,\ M,\ W_i\mid i=1,\ \cdots,\ n\}$은 자료모임 P에 대응하는 재귀반복함수계로 된다.

이와 같이 구성된 재귀반복함수계에 대하여 다음의 정리가 성립한다.

정리 2 자료모임 P 를 보간하는 어떤 련속함수 f 가 있어서 f 의 그라프는 우에서 구성된 재귀반복함수계의 불변모임으로 된다. 이 보간함수는 다음과 같이 표시된다.

$$f(x)=s_i(x)f(L_i^{-1}(x))+b_i(x)$$

2. 재귀프락탈보간함수의 휠데르련속성

여기서는 앞에서 구성된 재귀프락탈보간함수의 휠데르련속성을 증명하기로 한다. 보간함수의 휠데르지수는 정리 3에서 계산하였다.

$I:=[0,\ 1]$ 이라고 하자. 또한 넘기기 $L_i:I\to I_i$ 들은 상사비가 L_{L_i} 인 상사넘기기라고 하자. 그리고 다음과 같이 표시하자.

$$\overline{g}=\max_x|g(x)|,\ \ \overline{s}=\max_i\{\overline{s}_i\},\ \ L_s=\max_i\{L_{s_i}\},\ \ L_b=\max_i\{L_{b_i}\}$$

$$L_L=\max_i\{L_{L_i}\},\ \ l_L=\min_i\{L_{L_i}\},\ \ l_{\widetilde{I}}=\min_i\{|\widetilde{I}_k|\}$$

보조정리 $0<\alpha$ 이면 $0<x<1$ 인 임의의 x 에 대하여 다음의 부등식이 성립한다.

$$0<-x^{\alpha}\ln x\le\frac{1}{\alpha e}$$

증명 $0<x<1$ 이므로 $0<-x^{\alpha}\ln x$ 이다. $f(x):=x^{\alpha}\ln x+1/\alpha e$ 로 놓으면

$$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}\ln x+x^{\alpha-1}=x^{\alpha-1}(\alpha\ln x+1)$$

이다. 그러므로 $x>e^{-1/\alpha}$ 이면 $f'(x)>0$ 이고 $0<x<e^{-1/\alpha}$ 이면 $f'(x)<0$ 이다. 즉 $x:=e^{-1/\alpha}$ 은 극소점이다. 따라서 $0<x<1$ 인 임의의 x 에 대하여 $f(x)\ge f(e^{-1/\alpha})=0$ 즉 $x^{\alpha}\ln x+1/\alpha e\ge 0$ 이다.(증명끝)

정리 3 $f(x)$ 는 정리 2에서 구성된 재귀프락탈보간함수라고 하자. 그러면 어떤 상수 $L(>0)$ 과 $0<\tau\le 1$ 인 어떤 τ 가 있어서 다음의 관계식이 성립한다.

$$|f(x)-f(\overline{x})|\le L|x-\overline{x}|^{\tau} \tag{2}$$

증명 $I_{r_1r_2\ \cdots\ r_m}:=L_{r_m}\circ L_{r_{m-1}}\circ\cdots\circ L_{r_1}(I)$ 로 놓으면 $x\le\overline{x}$ 인 임의의 $x,\ \overline{x}(\in[0,\ 1])$ 에 대하여 어떤 m 이 있어서 $I_{r_1r_2\ \cdots\ r_m}\subset[x,\ \overline{x}]\subset I_{r_k\ \cdots\ r_m}$ 이다. 여기서 $k\le 3$ 이다. 그러면

$$\begin{aligned}|f(x)-f(\overline{x})|&=|f(L_{r_m}(L_{r_m}^{-1}(x)))-f(L_{r_m}(L_{r_m}^{-1}(\overline{x})))|=\\&=|(s_{r_m}(x)f(L_{r_m}^{-1}(x))+b_{r_m}(x))-(s_{r_m}(\overline{x})f(L_{r_m}^{-1}(\overline{x}))+b_{r_m}(\overline{x}))|\le\\&\le|s_{r_m}(x)f(L_{r_m}^{-1}(x))-s_{r_m}(\overline{x})f(L_{r_m}^{-1}(\overline{x}))|+|b_{r_m}(x)-b_{r_m}(\overline{x})|\end{aligned}$$

이다. 한편

$$\begin{aligned}&|s_{r_m}(x)f(L_{r_m}^{-1}(x))-s_{r_m}(\overline{x})f(L_{r_m}^{-1}(\overline{x}))|\le\\&\le|s_{r_m}(x)f(L_{r_m}^{-1}(x))-s_{r_m}(x)f(L_{r_m}^{-1}(\overline{x}))|+|s_{r_m}(x)f(L_{r_m}^{-1}(\overline{x}))-s_{r_m}(\overline{x})f(L_{r_m}^{-1}(\overline{x}))|\le\\&\le|s_{r_m}(x)||f(L_{r_m}^{-1}(x))-f(L_{r_m}^{-1}(\overline{x}))|+|s_{r_m}(x)-s_{r_m}(\overline{x})||f(L_{r_m}^{-1}(\overline{x}))|\le\\&\le\overline{s}_{r_m}|f(L_{r_m}^{-1}(x))-f(L_{r_m}^{-1}(\overline{x}))|+L_{s_{r_m}}|x-\overline{x}|\|f\|_{\infty}\le\end{aligned}$$

$$\leq \bar{s}\,|\,f(L_{r_m}^{-1}(x))-f(L_{r_m}^{-1}(\bar{x}))\,|+L_s\,|\,x-\bar{x}\,|\,\|\,f\,\|_\infty$$

$$|\,b_{r_m}(x)-b_{r_m}(\bar{x})\,|\leq L_b\,|\,x-\bar{x}\,|$$

이다. 따라서

$$|\,f(x)-f(\bar{x})\,|=\bar{s}\,|\,f(L_{r_m}^{-1}(x))-f(L_{r_m}^{-1}(\bar{x}))\,|+L_s\,|\,x-\bar{x}\,|\,\|\,f\,\|_\infty+L_b\,|\,x-\bar{x}\,|=$$

$$=(L_s\,\|\,f\,\|_\infty+L_b)\,|\,x-\bar{x}\,|+\bar{s}\,|\,f(L_{r_m}^{-1}(x))-f(L_{r_m}^{-1}(\bar{x}))\,|$$

이다. 또한 귀납적으로

$$|\,f(L_{r_m}^{-1}(x))-f(L_{r_m}^{-1}(\bar{x}))\,|\leq$$

$$\leq(L_s\,\|\,f\,\|_\infty+L_b)\,|\,L_{r_m}^{-1}(x)-L_{r_m}^{-1}(\bar{x})\,|+\bar{s}(|\,f(L_{r_{m-1}r_m}^{-1}(x))-f(L_{r_{m-1}r_m}^{-1}(\bar{x}))\,|)$$

가 성립하므로 $M:=L_s\,\|\,f_1\,\|_\infty+L_b$ 로 놓으면

$$|\,f(x)-f(\bar{x})\,|\leq M\,|\,x-\bar{x}\,|+\frac{M}{l_{L_{r_m}}}\bar{s}\,|\,x-\bar{x}\,|+\bar{s}^2(|\,f(L_{r_{m-1}\,r_m}^{-1}(x))-f(L_{r_{m-1}\,r_m}^{-1}(\bar{x}))\,|)\leq$$

$$\leq\left(M+\frac{M}{l_L}\bar{s}\right)|\,x-\bar{x}\,|+\bar{s}^2(|\,f(L_{r_{m-1}\,r_m}^{-1}(x))-f(L_{r_{m-1}\,r_m}^{-1}(\bar{x}))\,|)\leq$$

$$\leq\;\cdots\;\leq\left(M+\frac{\bar{s}}{l_L}M+\left(\frac{\bar{s}}{l_L}\right)^2M+\;\cdots\;+\left(\frac{\bar{s}}{l_L}\right)^{m-k}M\right)|\,x-\bar{x}\,|+$$

$$+\bar{s}^{m-k+1}\,|\,(f(L_{r_k\,\cdots\,r_m}^{-1}(x))-f(L_{r_k\,\cdots\,r_m}^{-1}(\bar{x}))\,\|\,x-\bar{x}\,|\leq$$

$$\leq M\sum_{i=0}^{m-k}\left(\frac{\bar{s}}{l_L}\right)^i|\,x-\bar{x}\,|+2\bar{s}^{m-k+1}\,\|\,f\,\|_\infty$$

이다. 따라서 $l_L^m l_I\leq|\,x-\bar{x}\,|\leq l_L^{m-k+1}$ 이므로 $\delta:=\bar{s}/l_L$ 로 놓으면

$$|\,f(x)-f(\bar{x})\,|\leq M\sum_{i=0}^{m-k}\delta^i\,|\,x-\bar{x}\,|+2\delta^{m-k+1}l_L^{m-k+1}\,\|\,f\,\|_\infty\leq$$

$$\leq M\sum_{i=0}^{m-k}\delta^i\,|\,x-\bar{x}\,|+\frac{2\,\|\,f\,\|_\infty}{l_L^{k-1}l_I}\delta^{m-k+1}\,|\,x-\bar{x}\,|\leq\left(D\sum_{i=0}^{m-k}\delta^i\right)|\,x-\bar{x}\,|$$

이다. 여기서 $D:=\max\{M,\;2\,\|\,f\,\|_\infty/(l_L^{k-1}l_{\tilde{I}})\}$ 이다. 만일 $\delta<1$ 이면 $\sum_{i=0}^{m-k+1}\delta^i<1/(1-\delta)$ 이므로

$$|\,f(x)-f(\bar{x})\,|\leq D\frac{1}{1-\delta}|\,x-\bar{x}\,|$$

이다. 따라서 $L:=D/(1-\delta),\;\tau:=1$ 로 놓으면

$$|\,f(x)-f(\bar{x})\,|\leq L\,|\,x-\bar{x}\,|^\tau$$

이다. 만일 $\delta=1$ 이면 $D\sum_{i=0}^{m-1}\delta^i<D(m-i+2)$ 이고 $|\,x-\bar{x}\,|\leq l_L^{m-k+1}$ 이므로

$$m-k+1\leq\frac{\ln|\,x-\bar{x}\,|}{\ln l_L}$$

이다. 따라서

$$|f_1(x)-f_1(\bar{x})|\le D(m-k+2)|x-\bar{x}|\le D\left(1+\frac{\ln|x-\bar{x}|}{\ln l_L}\right)|x-\bar{x}|=$$

$$=D\left(|x-\bar{x}|+\frac{\ln|x-\bar{x}|}{\ln l_L}|x-\bar{x}|\right)=$$

$$=D\left(|x-\bar{x}|+\frac{|x-\bar{x}|^{\alpha}\ln|x-\bar{x}|}{\ln l_L}|x-\bar{x}|^{1-\alpha}\right)$$

이 성립한다. 여기서 $0<\alpha<1$이다. 그런데 $0<|x-\bar{x}|<1$이므로 보조정리에 의하여

$$|f_1(x)-f_1(\bar{x})|\le D\left(|x-\bar{x}|+\frac{1}{\alpha e|\ln l_L|}|x-\bar{x}|^{1-\alpha}\right)\le D\left(|x-\bar{x}|^{1-\alpha}+\frac{1}{\alpha e|\ln l_L|}|x-\bar{x}|^{1-\alpha}\right)=$$

$$=D\left(1+\frac{1}{\alpha e|\ln l_L|}\right)|x-\bar{x}|^{1-\alpha}$$

이 성립한다. 따라서 $L:=D[1+1/(\alpha e|\ln l_L|)]$, $\tau:=1-\alpha$ 로 놓으면

$$|f_1(x)-f_1(\bar{x})|\le L|x-\bar{x}|^{\tau}$$

이 성립한다. 만일 $\delta>1$이면

$$D\sum_{i=0}^{m-k+1}\delta^i\le D\frac{\delta^{m-k+1}}{1-\frac{1}{\delta}}=D\frac{\delta^{m-k+2}}{\delta-1}$$

이 성립한다.

이제 τ를 $0<\tau<\ln\delta/\ln l_L+1$이 성립하도록 취하자. 그러면

$$\delta^m|x-\bar{x}|\le|x-\bar{x}|^{\tau}$$

이 성립한다. 사실

$$\frac{\ln(\delta^{m-k+2}|x-\bar{x}|)}{\ln|x-\bar{x}|}=\frac{(m-k+2)\ln\delta}{\ln|x-\bar{x}|}+1$$

이고

$$\ln|x-\bar{x}|\le(m-k+2)\ln l_L$$

이므로

$$\frac{(m-k+2)\ln\delta}{\ln|x-\bar{x}|}+1\ge\frac{(m-k+2)\ln\delta}{(m-k+1)\ln l_L}+1\ge\frac{\ln\delta}{\ln l_L}+1$$

이다. 따라서

$$\frac{\ln(\delta^{m-k+2}|x-\bar{x}|)}{\ln|x-\bar{x}|}\ge\frac{\ln\delta}{\ln l_L}+1$$

이다. 그러므로 $L:=D/(\delta-1)$ 로 놓으면

$$|f_1(x)-f_1(\bar{x})|\le L|x-\bar{x}|^{\tau}$$

이 성립한다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] M. F. Barnsley; Constr. Approx., 2 303, 1986.

[2] M. F. Barnsley et al.; Constr. Approx., 5, 3, 1989.

[3] P. Bouboulis et al.; J. Approx. Theory, 141, 99, 2006.

[4] A. K. B. Chand, G. P. Kapoor; Int. J. of Non-Linear Sci., 3, 15, 2007.

[5] Z. Feng et al.; Applied Mathematics Letters, 25, 1896, 2012.

[6] J. Ji, J. Peng; International Journal of Computer Mathematics, 90, 3, 539, 2013.

[7] R. Malysz; The Chaos Solitons Fractals, 27, 1147, 2006.

[8] W. Metzler, C. H. Yun; Int. J. Bifur. Chaos., 20, 4079, 2010.

[9] H. Y. Wang; Fractals, 14, 3, 223, 2006.

[10] H. Y. Wang, Z. L. Fan; Acta Math. Sinica(Chin. Ser.), 54, 1, 147, 2011.

[11] H. Y. Wang, J. S. Yu; Journal of Approximation Theory, 175, 1, 2013.

[12] C. H. Yun et al.; Chaos, Solitons & Fractals, 66, 136, 2014.

주체107(2018)년 3월 10일 원고접수

Hoëlder Continuity of a Recurrent Fractal Interpolation Function

Yun Chol Hui, *Ri Mi Gyong*

In this paper, we consider the Hoëlder continuity of a recurrent fractal interpolation function with function vertical scaling factors. The recurrent fractal interpolation function which has a local self-similarity can model the irregular and complicated images and data better than the fractal interpolation function. We prove that the recurrent fractal interpolation function constructed by the recurrent iterated function system is Hoëlder continuous.

Key words: recurrent iterated function system, recurrent fractal interpolation function, Hoëlder continuity, function vertical scaling factor