김일성종합대학학보 (자연과학) 주체103(2014)년 제60권 제10호
JOURNAL OF KIM IL SUNG UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE) Vol. 60 No. 10 JUCHE103(2014).

한가지 반삼각블로크행렬의 Drazin거꿀행렬표현

백원욱, 오진혁

행렬의 Drazin거꿀행렬에 관한 리론은 미분방정식, Markov사슬, 최량조종 등 많은 분야에 광범히 응용되고있다.

$M_n(C)$를 복소수체 C우에서의 n차행렬전부의 모임이라고 하자.

n차행렬 $A\in M_n(C)$에 대하여 $\mathrm{rank}\,(A^{k+1})=\mathrm{rank}\,(A^k)$를 만족시키는 부아닌 최소의 옹근수 k를 A의 지표라고 부르고 $k=\mathrm{ind}(A)$로 표시한다.

이때 조건 $AX=XA,\ XAX=X,\ A^kXA=A^k$를 만족시키는 n차행렬 $X\in M_n(C)$가 있으면 X를 A의 Drazin거꿀행렬이라고 부르고 $X=A^{\mathrm{D}}$로 표시한다.

$A^{\pi}=I-AA^{\mathrm{D}}$ ($I\in M_n(C)$는 단위행렬)로 약속한다. $k=0$이면 Drazin거꿀행렬 A^{D}는 일반거꿀행렬 A^{-1}과 일치한다.

선행연구[1]에서는 임의의 n차행렬 $A\in M_n(C)$에 대하여 그것의 Drazin거꿀행렬이 유일존재한다는것을 증명하였다. 그러나 그것을 구하는 일반적인 방법은 아직까지 미해명문제로 남아있다.

현재까지 일련의 특수한 조건밑에서 2×2형블로크행렬

$$\begin{pmatrix} A & B \\ E & D \end{pmatrix},\quad A\in M_m(C),\ D\in M_n(C),\ B\in M_{m\times n}(C),\ E\in M_{n\times m}(C)$$

의 Drazin거꿀행렬을 구하는 방법들이 연구되였다.

선행연구[2]에서는 삼각블로크행렬 $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & E \end{pmatrix}$의 Drazin거꿀행렬의 표현식을 구하였으며 선행연구[3, 4]에서는 특수한 반삼각블로크행렬들인 $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} A & 0 \\ E & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & B \\ E & 0 \end{pmatrix}$의 Drazin거꿀행렬의 표현식을 구하였다.

론문에서는 보다 일반적인 조건밑에서 반삼각블로크행렬 $\begin{pmatrix} A & B \\ E & 0 \end{pmatrix}$의 Drazin거꿀행렬을 구하였다.

보조정리 1[1] 행렬 $B\in M_{m\times n}(C),\ E\in M_{n\times m}(C)$에 대하여 $(BE)^{\mathrm{D}}=B((EB)^{\mathrm{D}})^2E$이다.

보조정리 2[3] 블로크행렬 $M=\begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & D \end{pmatrix},\ B\in M_{m\times n}(C),\ D\in M_n(C)$에 대하여

$$M^{\mathrm{D}}=\begin{pmatrix} 0 & B(D^{\mathrm{D}})^2 \\ 0 & D^{\mathrm{D}} \end{pmatrix}.$$

보조정리 3[3] 블로크행렬 $M=\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A\in M_m(C)$, $B\in M_{m\times n}(C)$ 에 대하여

$$M^{\mathrm{D}}=\begin{pmatrix} A^{\mathrm{D}} & (A^{\mathrm{D}})^2 B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

보조정리 4 $P,\ Q\in M_n(C)$, $\mathrm{ind}(P)=r$, $\mathrm{ind}(Q)=s$, $k=r+2s$ 라고 하자.

이때 만일 $PQ^iP=0$ ($i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$) 이면 다음의 식이 성립된다.

$$(P+Q)^{\mathrm{D}}=(I+U)P^{\mathrm{D}}+Q^{\mathrm{D}}(I+U)+P^{\mathrm{D}}VQ+VQQ^{\mathrm{D}}+U\left(P^{\mathrm{D}}V+P^{\pi}\sum_{i=0}^{r-1}P^i(Q^{\mathrm{D}})^{i+2}\right)Q+Q^{\mathrm{D}}WQ+WQQ^{\mathrm{D}}$$

여기서

$$U=\sum_{i=0}^{r-1}(Q^{\mathrm{D}})^{i+1}P^{i+1}P^{\pi}+Q^{\pi}\sum_{i=0}^{s-1}Q^{i+1}(P^{\mathrm{D}})^{i+1}-QQ^{\mathrm{D}}PP^{\mathrm{D}},$$

$$V=\sum_{i=0}^{s-1}(P^{\mathrm{D}})^{i+1}Q^iQ^{\pi}+P^{\pi}\sum_{i=0}^{r-1}P^{i+1}(Q^{\mathrm{D}})^{i+2}-PP^{\mathrm{D}}Q^{\mathrm{D}},$$

$$W=UV+\sum_{i+l+j=k-2}((Q^{\mathrm{D}})^{k-i}P^{l+1}Q^jQ^{\pi}+Q^{\pi}Q^{i+1}P^{l+1}(Q^{\mathrm{D}})^{k-j+1})-$$

$$-\sum_{i=0}^{k-1}((Q^{\mathrm{D}})^{i+1}P^{i+1}(V+Q^{\mathrm{D}})+(U+QQ^{\mathrm{D}})P^{i+1}(Q^{\mathrm{D}})^{i+2}).$$

정리 1 $N=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix}$, $\alpha,\ \beta,\ \gamma\in M_n(C)$, $\mathrm{ind}(\alpha)=r$ 라고 할 때 $\gamma^2=0$ 이고 $\gamma\alpha^i\beta\gamma=0$, $i=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$ 이면 $N^{\mathrm{D}}=\begin{pmatrix} (\alpha^{\mathrm{D}})^3\beta\gamma+\delta\alpha & (\alpha^{\mathrm{D}})^3\beta\gamma+\delta\beta \\ \gamma(\alpha^{\mathrm{D}})^2 & \gamma(\alpha^{\mathrm{D}})^3\beta \end{pmatrix}$ 가 성립된다. 여기서

$$\delta=\alpha^{\mathrm{D}}(\mathrm{I}-(\alpha^{\mathrm{D}})^2\beta\gamma-\alpha^{\mathrm{D}}\beta\gamma\alpha^{\mathrm{D}}-\beta\gamma(\alpha^{\mathrm{D}})^2)\alpha^{\mathrm{D}}+\sum_{i=0}^{r}((\alpha^{\mathrm{D}})^{i+4}\beta\gamma\alpha^i\alpha^{\pi}+\alpha^{\pi}\alpha^i\beta\gamma(\alpha^{\mathrm{D}})^{i+4}).$$

증명 $P=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 이라고 하면 $N=P+Q$ 이고 $\gamma^2=0$ 이므로 $P^2=0$ 이다.

따라서 $P^2=0$ 이고 $P^{\pi}=I$ 이다.

또한 임의의 정의옹근수 i 에 대하여 $Q^i=\begin{pmatrix} \alpha^i & \alpha^{i-1}\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 이고 보조정리 3으로부터

$$Q^{\mathrm{D}}=\begin{pmatrix} \alpha^{\mathrm{D}} & (\alpha^{\mathrm{D}})^2\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ Q^{\pi}=\begin{pmatrix} \alpha^{\pi} & -\alpha^{\mathrm{D}}\beta \\ 0 & I \end{pmatrix},\ (Q^{\mathrm{D}})^i=\begin{pmatrix} (\alpha^{\mathrm{D}})^i & (\alpha^{\mathrm{D}})^{i+1}\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

이제 PQ^iP 를 계산하면 $PQ^iP=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma\alpha^{i-1}\beta\gamma & \gamma\alpha^{i-1}\beta\gamma \end{pmatrix}$ 이므로 조건으로부터 $PQ^iP=0$.

보조정리 4에 의하여 다음과 같다.

$$N^{\mathrm{D}}=(P+Q)^{\mathrm{D}}=Q^{\mathrm{D}}(I+U)+VQQ^{\mathrm{D}}+U(Q^{\mathrm{D}}+P(Q^{\mathrm{D}})^2)+Q^{\mathrm{D}}WQ+WQQ^{\mathrm{D}}$$

$$U=Q^{\mathrm{D}}P,\ V=P(Q^{\mathrm{D}})^2,\ W=\sum_{i=0}^{k-2}((Q^{\mathrm{D}})^{i+2}PQ^iQ^{\pi}+Q^{\pi}Q^{i+1}P(Q^{\mathrm{D}})^{i+3})-Q^{\mathrm{D}}PQ^{\mathrm{D}}-QQ^{\mathrm{D}}P(Q^{\mathrm{D}})^2$$

이로부터

$$N^{\mathrm{D}}=Q^{\mathrm{D}}+(Q^{\mathrm{D}})^2P+P(Q^{\mathrm{D}})^2+(Q^{\mathrm{D}})^2PQQ^{\mathrm{D}}+QQ^{\mathrm{D}}P(Q^{\mathrm{D}})^2-Q^{\mathrm{D}}PQ^{\mathrm{D}}+$$
$$+\sum_{i=0}^{k-2}((Q^{\mathrm{D}})^{i+3}PQ^{i+1}Q^{\pi}+Q^{\pi}Q^{i+1}P(Q^{\mathrm{D}})^{i+3})=$$
$$=Q^{\mathrm{D}}+(Q^{\mathrm{D}})^2PQ^{\pi}+Q^{\pi}P(Q^{\mathrm{D}})^2-Q^{\mathrm{D}}PQ^{\mathrm{D}}+\sum_{i=0}^{k-2}((Q^{\mathrm{D}})^{i+3}PQ^{i+1}Q^{\pi}+Q^{\pi}Q^{i+1}P(Q^{\mathrm{D}})^{i+3})=$$
$$=\begin{pmatrix}\alpha^{\mathrm{D}} & (\alpha^{\mathrm{D}})^2\beta\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}(\alpha^{\mathrm{D}})^3\beta\gamma\alpha^{\pi} & (\alpha^{\mathrm{D}})^3\beta\gamma(\mathrm{I}-\alpha^{\mathrm{D}}\beta)\\ 0 & 0\end{pmatrix}+$$
$$+\begin{pmatrix}-\alpha^{\mathrm{D}}\beta\gamma(\alpha^{\mathrm{D}})^2 & -\alpha^{\mathrm{D}}\beta\gamma(\alpha^{\mathrm{D}})^3\beta\\ \gamma(\alpha^{\mathrm{D}})^2 & \gamma(\alpha^{\mathrm{D}})^3\beta\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}(\alpha^{\mathrm{D}})^2\beta\gamma\alpha^{\mathrm{D}} & (\alpha^{\mathrm{D}})^2\beta\gamma(\alpha^{\mathrm{D}})^2\\ 0 & 0\end{pmatrix}+$$
$$+\sum_{i=0}^{k-2}\left(\begin{pmatrix}(\alpha^{\mathrm{D}})^{i+4}\beta\gamma\alpha^{i+1}\alpha^{\pi} & (\alpha^{\mathrm{D}})^{i+4}\beta\gamma\alpha^{i}\alpha^{\pi}\beta\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha^{\pi}\alpha^{i}\beta\gamma(\alpha^{\mathrm{D}})^{i+3} & \alpha^{\pi}\alpha^{i}\beta\gamma(\alpha^{\mathrm{D}})^{i+4}\beta\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right).$$

이제 $\delta=\alpha^{\mathrm{D}}(\mathrm{I}-(\alpha^{\mathrm{D}})^2\beta\gamma-\alpha^{\mathrm{D}}\beta\gamma\alpha^{\mathrm{D}}-\beta\gamma(\alpha^{\mathrm{D}})^2)\alpha^{\mathrm{D}}+\sum_{i=0}^{r}((\alpha^{\mathrm{D}})^{i+4}\beta\gamma\alpha^{i}\alpha^{\pi}+\alpha^{\pi}\alpha^{i}\beta\gamma(\alpha^{\mathrm{D}})^{i+4})$

이라고 하면 정리의 결론을 얻는다. 즉 $N^{\mathrm{D}}=\begin{pmatrix}(\alpha^{\mathrm{D}})^3\beta\gamma+\delta\alpha & (\alpha^{\mathrm{D}})^3\beta\gamma+\delta\beta\\ \gamma(\alpha^{\mathrm{D}})^2 & \gamma(\alpha^{\mathrm{D}})^3\beta\end{pmatrix}$.(증명끝)

정리 2 $M=\begin{pmatrix}A & B\\ E & 0\end{pmatrix}$, $A\in M_n(C)$, $B\in M_{n\times m}(C)$, $E\in M_{m\times n}(C)$, $\mathrm{ind}(A)=r$ 라고 하자.

만일 $BCA^iB=0$ ($i=0, 1, \cdots, n-1$) 이면 $M^{\mathrm{D}}=\begin{pmatrix}(A^{\mathrm{D}})^3BE+AXA+BE(A^{\mathrm{D}})^3 & (A^{\mathrm{D}})^2B\\ E((A^{\mathrm{D}})^4BE+XA) & E(A^{\mathrm{D}})^3B\end{pmatrix}$ 가 성립된다. 여기서

$$X=A^{\mathrm{D}}(A^{\mathrm{D}}-(A^{\mathrm{D}})^3BE-(A^{\mathrm{D}})^2BEA^{\mathrm{D}}-A^{\mathrm{D}}BE(A^{\mathrm{D}})^2-BE(A^{\mathrm{D}})^3)A^{\mathrm{D}}+$$
$$+\sum_{i=0}^{k-2}((A^{\mathrm{D}})^{i+5}BEA^{i}A^{\pi}+A^{\pi}A^{i}BE(A^{\mathrm{D}})^{i+5}).$$

증명 행렬 M 이 $M=\begin{pmatrix}0 & A & 0 & I\\ I & 0 & I & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & 0\\ I & 0\\ 0 & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}$ 와 같이 분해되였다고 하자.

그러면 보조정리 1에 의하여 $M^{\mathrm{D}}=\begin{pmatrix}0 & A & 0 & I\\ I & 0 & I & 0\end{pmatrix}(N^{\mathrm{D}})^2\begin{pmatrix}E & 0\\ I & 0\\ 0 & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}$ 가 성립된다. 여기서

$$N=\begin{pmatrix}E & 0\\ I & 0\\ 0 & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & A & 0 & I\\ I & 0 & I & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & EA & 0 & E\\ 0 & A & 0 & I\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ B & 0 & B & 0\end{pmatrix}.$$

결국 M의 Drazin거꿀행렬 M^{D}의 계산은 N의 Drazin거꿀행렬 N^{D}의 계산에로 귀착된다. $\alpha=\begin{pmatrix}0 & EA\\ 0 & A\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}0 & E\\ 0 & I\end{pmatrix}$, $\gamma=\begin{pmatrix}0 & 0\\ B & 0\end{pmatrix}$이라고 하면 $N=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \gamma\end{pmatrix}$이고 $\gamma^2=0$이다.

한편 정리의 조건으로부터 $\gamma\alpha^i\beta\gamma=\begin{pmatrix}0 & 0\\ BEA^iB & 0\end{pmatrix}=0$ $(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$이므로 정리 1에 의하여 $N^{\mathrm{D}}=\begin{pmatrix}(\alpha^{\mathrm{D}})^3\beta\gamma+\delta\alpha & (\alpha^{\mathrm{D}})^3\beta\gamma+\delta\beta\\ \gamma(\alpha^{\mathrm{D}})^2 & \gamma(\alpha^{\mathrm{D}})^3\beta\end{pmatrix}$가 성립된다. 여기서

$$\delta=\alpha^{\mathrm{D}}(\mathrm{I}-(\alpha^{\mathrm{D}})^2\beta\gamma-\alpha^{\mathrm{D}}\beta\gamma\alpha^{\mathrm{D}}-\beta\gamma(\alpha^{\mathrm{D}})^2)\alpha^{\mathrm{D}}+\sum_{i=0}^{r}((\alpha^{\mathrm{D}})^{i+4}\beta\gamma\alpha^i\alpha^{\pi}+\alpha^{\pi}\alpha^i\beta\gamma(\alpha^{\mathrm{D}})^{i+4}).$$

또한 $(N^{\mathrm{D}})^2=\begin{pmatrix}(\alpha^{\mathrm{D}})^4\beta\gamma+\mu\alpha & (\alpha^{\mathrm{D}})^4\beta\gamma+\mu\beta\\ \gamma(\alpha^{\mathrm{D}})^3 & \gamma(\alpha^{\mathrm{D}})^4\beta\end{pmatrix}$가 성립된다. 여기서

$$\mu=\alpha^{\mathrm{D}}(\alpha^{\mathrm{D}}-(\alpha^{\mathrm{D}})^3\beta\gamma-(\alpha^{\mathrm{D}})^2\beta\gamma\alpha^{\mathrm{D}}-\alpha^{\mathrm{D}}\beta\gamma(\alpha^{\mathrm{D}})^2-\beta\gamma(\alpha^{\mathrm{D}})^3)\alpha^{\mathrm{D}}+$$
$$+\sum_{i=0}^{r}((\alpha^{\mathrm{D}})^{i+5}\beta\gamma\alpha^i\alpha^{\pi}+\alpha^{\pi}\alpha^i\beta\gamma(\alpha^{\mathrm{D}})^{i+5}).$$

따라서 다음의 식이 성립된다.

$$M^{\mathrm{D}}=\begin{pmatrix}0 & A & 0 & I\\ I & 0 & I & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(\alpha^{\mathrm{D}})^4\beta\gamma+\mu\alpha & (\alpha^{\mathrm{D}})^4\beta\gamma+\mu\beta\\ \gamma(\alpha^{\mathrm{D}})^3 & \gamma(\alpha^{\mathrm{D}})^4\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & 0\\ I & 0\\ 0 & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}=$$
$$=\left(\begin{pmatrix}0 & A\\ I & 0\end{pmatrix}((\alpha^{\mathrm{D}})^4\beta\gamma+\mu\alpha)+\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix}\gamma(\alpha^{\mathrm{D}})^3\right)\begin{pmatrix}E & 0\\ I & 0\end{pmatrix}+$$
$$+\left(\begin{pmatrix}0 & A\\ I & 0\end{pmatrix}((\alpha^{\mathrm{D}})^4\beta\gamma+\mu\beta)+\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix}\gamma(\alpha^{\mathrm{D}})^4\beta\right)\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}$$

보조정리 2에 의하여 $\alpha^{\mathrm{D}}=\begin{pmatrix}0 & EA(A^{\mathrm{D}})^2\\ 0 & A^{\mathrm{D}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & EA^{\mathrm{D}}\\ 0 & A^{\mathrm{D}}\end{pmatrix}$, $\alpha^{\pi}=\begin{pmatrix}I & -EA^{\mathrm{D}}A\\ 0 & A^{\pi}\end{pmatrix}$이고 임의의 정의옹근수 i에 대하여 $\alpha^i=\begin{pmatrix}0 & EA^i\\ 0 & A^i\end{pmatrix}$, $(\alpha^{\mathrm{D}})^i=\begin{pmatrix}0 & E(A^{\mathrm{D}})^i\\ 0 & (A^{\mathrm{D}})^i\end{pmatrix}$이다.

$$X=A^{\mathrm{D}}(A^{\mathrm{D}}-(A^{\mathrm{D}})^3BE-(A^{\mathrm{D}})^2BEA^{\mathrm{D}}-A^{\mathrm{D}}BE(A^{\mathrm{D}})^2-BE(A^{\mathrm{D}})^3)A^{\mathrm{D}}+$$
$$+\sum_{i=0}^{k-2}((A^{\mathrm{D}})^{i+5}BEA^iA^{\pi}+A^{\pi}A^iBE(A^{\mathrm{D}})^{i+5})$$

이라고 하면

$$M^{\mathrm{D}}=\left(\begin{pmatrix}0 & A\\ I & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E(A^{\mathrm{D}})^4B & EXA\\ (A^{\mathrm{D}})^4B & XA\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & BE(A^{\mathrm{D}})^3\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}E & 0\\ I & 0\end{pmatrix}+$$
$$+\left(\begin{pmatrix}0 & A\\ I & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E(A^{\mathrm{D}})^4B & EX\\ (A^{\mathrm{D}})^4B & X\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & BE(A^{\mathrm{D}})^4\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}(A^{\mathrm{D}})^3BE+AXA+BE(A^{\mathrm{D}})^3 & AXB\\ E(A^{\mathrm{D}})^4BC+EXA & EXB\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(A^{\mathrm{D}})^3BE+AXA+BE(A^{\mathrm{D}})^3 & (A^{\mathrm{D}})^2B\\ E((A^{\mathrm{D}})^4BE+XA) & E(A^{\mathrm{D}})^3B\end{pmatrix}$$

가 성립되므로 정리는 증명된다.(증명끝)

따름 1 블로크행렬 $M=\begin{pmatrix}A & B\\ E & 0\end{pmatrix}$, $A\in M_n(C)$, $B\in M_{n\times m}(C)$, $E\in M_{m\times n}(C)$ 에 대하여 $BE=0$ 이면 $M^{\mathrm{D}}=\begin{pmatrix}A^{\mathrm{D}} & (A^{\mathrm{D}})^2B\\ E(A^{\mathrm{D}})^2 & E(A^{\mathrm{D}})^3B\end{pmatrix}$ 가 성립된다.

증명 $BE=0$ 이면 분명히 $BEA^iB=0$ ($i=0,1,\cdots,n-1$) 이므로 정리 2로부터

$$M^{\mathrm{D}}=\begin{pmatrix}(A^{\mathrm{D}})^3BE+AXA+BE(A^{\mathrm{D}})^3 & (A^{\mathrm{D}})^2B\\ E((A^{\mathrm{D}})^4BE+XA) & E(A^{\mathrm{D}})^3B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}AXA & (A^{\mathrm{D}})^2B\\ EXX & E(A^{\mathrm{D}})^3B\end{pmatrix}.$$

$$X=A^{\mathrm{D}}(A^{\mathrm{D}}-(A^{\mathrm{D}})^3BE-(A^{\mathrm{D}})^2BEA^{\mathrm{D}}-A^{\mathrm{D}}BE(A^{\mathrm{D}})^2-BE(A^{\mathrm{D}})^3)A^{\mathrm{D}}+$$
$$+\sum_{i=0}^{k-2}((A^{\mathrm{D}})^{i+5}BEA^iA^{\pi}+A^{\pi}A^iBE(A^{\mathrm{D}})^{i+5})=(A^{\mathrm{D}})^3$$

이라고 하면 $M^{\mathrm{D}}=\begin{pmatrix}AXA & (A^{\mathrm{D}})^2B\\ EXX & E(A^{\mathrm{D}})^3B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A(A^{\mathrm{D}})^3A & (A^{\mathrm{D}})^2B\\ E(A^{\mathrm{D}})^3A & E(A^{\mathrm{D}})^3B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A^{\mathrm{D}} & (A^{\mathrm{D}})^2B\\ E(A^{\mathrm{D}})^2 & E(A^{\mathrm{D}})^3B\end{pmatrix}$.(증명끝)

따름 2[3] $M=\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $A\in M_n(C)$, $B\in M_{n\times m}(C)$ 에 대하여 $M^{\mathrm{D}}=\begin{pmatrix}A^{\mathrm{D}} & (A^{\mathrm{D}})^2B\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

따름 3[3] $M=\begin{pmatrix}A & 0\\ E & 0\end{pmatrix}$, $A\in M_n(C)$, $E\in M_{m\times n}(C)$ 에 대하여 $M^{\mathrm{D}}=\begin{pmatrix}A^{\mathrm{D}} & 0\\ E(A^{\mathrm{D}})^2 & 0\end{pmatrix}$.

이와 같이 론문에서 얻은 결과는 반삼각블로크행렬의 Drazin거꿀행렬을 구하는데서 선행연구결과의 일반화로 되는 동시에 중요한 리론적기초로 된다.

참 고 문 헌

[1] A. B. Israel et al.; Theory and Application, Springer-Verlag, 45～89, 2003.

[2] C. D. Meyer et al.; SIAM J. App. Math., 33, 1, 1977.

[3] M. Catral et al.; Electronic Journal of Linear Algebra, 17, 219, 2008.

[4] M. Catral et al.; Electronic Journal of Linear Algebra, 18, 98, 2009.

주체103(2014)년 6월 5일 원고접수

The Representations of Drazin Inverses for Anti-Triangular Block Matrices

Paek Won Uk, O Jin Hyok

We give the representation for Drazin inverses of some anti-triangular block matrices $M=\begin{pmatrix}A & B\\ E & 0\end{pmatrix}$ under the condition that $BEA^iB=0$ ($i=0,\cdots,n-1$).

Key word: anti-triangular block matrix