김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체103(2014)년 제60권 제11호 Vol. 60 No. 11 JUCHE103(2014).

부분옹근수선형계획법문제의 한가지 풀이법

리근배, 홍은정

론문에서는 현실에서 많이 제기되는 부분옹근수선형계획법문제의 한가지 풀이법을 연구하였다.

부분옹근수선형계획법문제는 실천적으로 적지 않게 제기되고있지만 미지수가 많은 경우에는 계산시간이 매우 오랠뿐아니라 정확한 풀이가 제대로 구해지지 않는 복잡한 문제로 알려져있으며[2] 따라서 그것에 대한 연구가 지금까지도 중요한 문제로 제기되고있다.[1, 3]

부분옹근수선형계획법문제는 다음과 같이 정식화된다.

$$A_1x+A_2y=b,\ \ x\ge 0,\ \ y\ge 0,\ \ y\equiv 0\,(\text{mod }1),\ \ f(x,\ y)=c_1^Tx+c_2^Ty\Rightarrow \min \qquad (1)$$

여기서 A_1은 $m\times p$ 형행렬, A_2는 $m\times q$ 형행렬이고 $p+q>m,\ b\in \boldsymbol{R}^m,\ c_1\in \boldsymbol{R}^p,\ c_2\in \boldsymbol{R}^q$이며 그 원소의 성분들도 모두 옹근수들이다.

문제 (1)에서 조건 $y\equiv 0\,(\text{mod}1)$을 없애버린 문제를 련속문제라고 부른다.

먼저 련속문제의 풀이가 유일한 경우의 계산방식에 대하여 보자.

① 련속문제의 풀이를 구한다. 그것이 표 1로 얻어졌다고 하자.

표 1. 시초표

$f(x,\ y)$	x_1	x_2	$\cdots$	x_p	y_1	y_2	$\cdots$	y_q	t
f_1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1p}	y_{11}	y_{12}	$\cdots$	y_{1q}	
f_2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2p}	y_{21}	y_{22}	$\cdots$	y_{2q}	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	
f_k	x_{k1}	x_{k2}	$\cdots$	x_{kp}	y_{k1}	y_{k2}	$\cdots$	y_{kq}	
f_{k+1}	$x_{k+1,1}$	$x_{k+1,\,2}$	$\cdots$	$x_{k+1,\ p}$	$y_{k+1,\ 1}$	$y_{k+1,\ 2}$	$\cdots$	$y_{k+1,\ q}$	t_0

표 1에서 $k=p+q-m$이고 미지수 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_p,\ y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_q$들가운데서 k개와 t는 자유미지수들이며 표의 모든 원소들은 옹근수들이고 t_0은 정의옹근수이다.

앞으로 벡토르 $(x_{i1},\ x_{i2},\ \cdots,\ x_{ip}),\ (y_{i1},\ y_{i2},\ \cdots,\ y_{iq})\ (i=1,\ \cdots,\ k+1)$들을 각각 $x_i,\ y_i$들로 표시한다.

련속문제의 유일한 풀이는 $(x_{k+1}/t_0,\ y_{k+1}/t_0)$이다.

만일 y_{k+1}/t_0이 옹근수벡토르이면 $(x_{k+1}/t_0,\ y_{k+1}/t_0)$은 문제 (1)의 풀이이다.

y_{k+1}/t_0이 옹근수벡토르가 아니라고 하자.

② $y^{(1)}=[y_{k+1}/t_0],\ l=1$로 놓는다. 여기서 벡토르 α에 대하여 $[\alpha]$는 α의 매개 성분 α_i들을 그것의 옹근수부 즉 α_i보다 크지 않은 제일 큰 옹근수 $[\alpha_i]$로 바꾼 벡토르를 표시한것이다.

③ 선형계획법문제

$$A_1 x = b - A_2 y^{(l)} \quad (x \ge 0), \quad f_1(x) = c_1^T x \Rightarrow \min \tag{2}$$

의 풀이 $x^{(l)} = \bar{x}^{(l)} / t^{(l)}$ 을 구한다. 여기서 $\bar{x}^{(l)}$ 은 부아닌 옹근수벡토르이고 $t^{(l)}$ 은 정의옹근수이다.

만일 문제 (2)의 풀이가 없으면 문제 (2)의 첫 조건식을 부등식 $A_1 x \le b - A_2 y^{(l)}$ 로 바꾸어놓은 문제의 풀이를 $x^{(l)} = \bar{x}^{(l)} / t^{(l)}$ 로 놓는다.

이때 문제 (2)의 첫 조건식에서 오른변의 어떤 성분이 부수인 경우에는 그것의 량변에 -1 을 곱하여 오른변이 정수로 되게 변형시킨 다음 =를 ≤로 바꾼다.

④ 옹근수선형계획법문제

$$t^{(l)} A_2 y = t^{(l)} b - A_1 \bar{x}^{(l)}, \; y \ge 0, \; y \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 1), \quad f_2(y) = c_2^T y \Rightarrow \min \tag{3}$$

의 풀이 $y^{(l+1)}$ 을 구한다. 풀이가 없으면 $t^{(l)} A_2 y = t^{(l)} b - A_1 \bar{x}^{(l)}$ 의 오른변에 부수인 성분이 있는 경우 거기에 -1 을 곱해준 다음에 그것의 부등호를 바꾸어 $t^{(l)} A_2 y \le t^{(l)} b - A_1 \bar{x}^{(l)}$ 로 교체한 문제의 풀이를 $y^{(l+1)}$ 로 놓는다. 만일 그것의 풀이도 없으면 문제 (3)에 보충제한 $c_2^T y \ge c_0$ 을 첨가한 문제의 풀이를 $y^{(l+1)}$ 로 놓는다. 여기서 c_0 은 적당한 상수이다.

⑤ $y^{(l+1)} = y^{(l)}$ 이면 $(x^{(l)},\ y^{(l)})$ 은 문제 (1)의 풀이이다.

그렇지 않으면 l 을 $l+1$ 로 바꾸고 걸음 ③으로 돌아간다.

주의 문제 (3)의 풀이를 옹근수효과벡토르라고 부른다. 옹근수효과벡토르를 구할 때 등고면절단법을 적용할수 있다.

정리 1 문제 (1)의 풀이가 존재하고 그것의 련속문제의 풀이가 유일하면 우의 계산방식에 의하여 유한번의 걸음만에 문제 (1)의 풀이가 구해진다.

다음으로 련속문제의 풀이가 많은 경우의 계산방식에 대하여 보자.

① 련속문제의 최량기본계획을 구한다. 그것이 표 1로 얻어졌다고 하자.

련속문제의 풀이 $(x_{k+1}/t_0,\ y_{k+1}/t_0)$ 에서 y_{k+1}/t_0 이 옹근수벡토르이면 그 련속문제의 풀이는 문제 (1)의 풀이이다.

y_{k+1}/t_0 이 옹근수벡토르가 아니라고 하자.

② $f_i = 0$ 으로 되는 $i\,(i \le i \le k)$ 들의 모임 I_0 을 생각하고

$$x_{k+1} + \sum_{i \in I_0} x_i u_i \ge 0, \;\; y_{k+1} + \sum_{i \in I_0} y_i u_i \ge 0, \;\; \left(y_{k+1} + \sum_{i \in I_0} y_i u_i \right) \Big/ t_0 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 1) \tag{4}$$

의 부아닌 옹근수풀이 $u_i \; (i \in I_0)$ 들을 구하는 문제를 보기로 하자.

만일 문제 (4)의 부아닌 옹근수풀이 $u_i = \bar{u}_i \; (i \in I_0)$ 가 존재하면

$$\left(\left(x_{k+1} + \sum_{i \in I_0} x_i \bar{u}_i \right) \Big/ t_0 , \quad \left(y_{k+1} + \sum_{i \in I_0} y_i \bar{u}_i \right) \Big/ t_0 \right)$$

는 문제 (1)의 풀이이다.

문제 (4)의 부아닌 옹근수풀이가 존재하지 않는다고 하자.

③ 련속문제의 최량기본계획들이 $(x^{(1)},\ y^{(1)}),\ (x^{(2)},\ y^{(2)}),\ \cdots,\ (x^{(h)},\ y^{(h)})$ 라고 하자.

이것들가운데서 $y^{(i)}$가 옹근수벡토르로 되는 i $(1 \le i \le k)$가 있으면 $(x^{(i)},\ y^{(i)})$는 문제 (1)의 풀이이다. 그런것이 없다면 $y^{(i)},\ y^{(j)}$의 볼룩1차결합이 옹근수벡토르로 되는 $i,\ j$ $(i \ne j,\ 1 \le i,\ j \le h)$가 있는가를 검사한다. 있으면 볼룩1차결합은 문제 (1)의 풀이이다.

그런것이 없다고 하자.

④ 매개 $(x^{(i)},\ y^{(i)})$에 대하여 $y^{(i)} = \bar{y}^{(i)} / t^{(i)}$로 표시하고 련속문제의 풀이가 유일한 경우의 계산방식에서 $y^{(1)}$을 $[\bar{y}^{(i)} / t^{(i)}]$로 놓고 계산할 때와 같이 $y^{(i,\ l_i+1)}$이 $y^{(i,\ l_i+1)} = y^{(i,\ l_i)}$로 되는 $(x^{(i,\ l_i)},\ y^{(i,\ l_i)})$를 구한다.

⑤ $\min\limits_{1 \le i \le h} f(x^{(i,\ l_i)},\ y^{(i,\ l_i)}) = f(x^{(i_0,\ l_{i_0})},\ y^{(i_0,\ l_{i_0})})$이면 $(x^{(i_0,\ l_{i_0})},\ y^{(i_0,\ l_{i_0})})$은 문제 (1)의 풀이이다.

정리 2 문제 (1)과 그 련속문제의 풀이가 존재하면 련속문제의 풀이가 많은 경우의 계산방식에 의하여 문제 (1)의 풀이를 구할수 있다.

실례 다음의 부분옹근수선형계획법문제를 풀자.

$$4x_1 + 3x_2 + x_3 + 5y_1 + 7y_2 = 33,\ 2x_1 + 4x_2 + x_4 - 3y_1 - 5y_2 = 22,\ -3x_1 + 2x_2 + x_5 - 4y_1 + 6y_2 = 13$$

$$x_j \ge 0\ \ (j = 1, \cdots, 5),\ \ y_j \ge 0,\ y_j \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,1)\ \ (j = 1,\ 2),\ \ f(x,\ y) = -5x_1 - 7x_2 - 6y_1 - 3y_2 \Rightarrow \min$$

주어진 문제의 련속문제를 풀면 표 2가 얻어진다.

표 2. 계산표

$f(x,\ y)$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	t
−5	1	0	−4	−2	3	0	0	
−7	0	1	−3	(−4)	−2	0	0	
−6	0	0	−5	3	4	1	0	
−3	0	0	−7	5	−6	0	1	
0	0	0	33	22	13	0	0	1
−6	4	−2	−10	0	16	0	0	
7	0	−1	3	4	2	0	0	
−45	0	3	−29	0	10	4	0	
−47	0	5	−43	0	(−34)	0	4	
−154	0	22	66	0	8	0	0	4
−239	34	3	−257	0	0	0	16	
36	0	−6	4	34	0	0	2	
−500	0	38	(−354)	0	0	34	10	
47	0	−5	43	0	34	0	−4	
−1 403	0	197	475	0	0	0	8	34
1 291	354	−256	0	0	0	−257	91	
316	0	−58	0	354	0	4	22	
500	0	−38	354	0	0	−34	−10	
−143	0	−4	0	0	354	43	(−29)	
−21 593	0	2 582	0	0	0	475	223	354
69	29	−22	0	0	91	−10	0	
17	0	−5	0	29	22	3	0	
45	0	−3	29	0	−10	−4	0	
143	0	4	0	0	−354	−43	29	
−1 859	0	209	0	0	223	66	0	29

표에서 ( )로 표시된 수는 중심수이다.

이리하여 련속문제는 유일한 풀이 $(0,\ 209/29,\ 0,\ 0,\ 223/29,\ 66/29,\ 0)$을 가지는데 그 y부분 $(66/29,\ 0)$은 옹근수벡토르가 아니다. 이때 $y^{(1)}=[(66/29,\ 0)]=(2,\ 0)$이다.

그러므로 문제 (2)는

$$4x_1+3x_2+x_3=23,\ 2x_1+4x_2+x_4=28,\ -3x_1+2x_2+x_5=21,\ x_j\geq 0\ \ (j=1,\cdots,\ 5),$$

$$f_1(x)=-5x_1-7x_2\Rightarrow \min$$

이고 이것을 풀면 표 3이 얻어진다.

표 3. 결과표

$f_1(x)$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t
−5 −7	1 0	0 1	−4 −3	−2 (−4)	3 −2	
0	0	0	23	28	21	1
−3 7	2 0	−1 −1	(−5) 3	0 4	8 2	
−47	0	7	2	0	7	1
3 26	−2 6	1 −8	5 0	0 20	8 34	
−251	4	33	0	0	51	5

이리하여 $x^{(1)}=(4/5,\ 33/5,\ 0,\ 0,\ 51/5)$이다. 이때 문제 (3)은

$$5(5y_1+7y_2)\leq 50,\ 5(-3y_1-5y_2)\leq 30,\ 5(-4y_1+6y_2)\leq 11,\ \ y_j\geq 0,\ y_j\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,1)\,(j=1,\ 2),$$

$$f_2(y)=-6y_1-3y_2\Rightarrow \min$$

이고 이 문제의 풀이는 $y^{(2)}=(2,\ 0)$이다.

$y^{(2)}=y^{(1)}$이므로 $(x^{(1)},\ y^{(1)})=(4/5,\ 33/5,\ 0,\ 0,\ 51/5,\ 2,\ 0)$은 주어진 부분옹근수선형계획법문제의 풀이이다.

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보(자연과학), 52, 3, 3, 주체95(2006).

[2] K. Andersen et al.; Operation Research Letters, 36, 734, 2008.

[3] E. Danna et al.; Operation Research Letters, 37, 255, 2009.

주체103(2014)년 7월 5일 원고접수

A Solving Method of Mixed Integer Linear Programming Problem

Ri Kun Bae, Hong Un Jong

We considered the simple solving method of mixed integer linear programming problem by the integer valid vectors.

Here, we researched algorithm to solve the solution and explained this method in the example.

Key word: mixed integer linear programming