김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제4호

미리찾기가 있는 리자표채권에 대한 분석과 채권설계

김대성, 오형철

론문에서는 경계과학인 금융수학에서 제기되고있는 리산리자표채권가격에 대하여 연구하였다.

계약위반가능한 리산리자표채권의 하나로 마감일전에 원금을 찾을수 있다는 조항(미리찾기조항)을 가진 채권을 들수 있다. 선행연구[2]에서는 리산리자표채권가격의 구조법2인자모형을 연구하였고 선행연구[4－6]에서는 구조약화결합1인자모형과 구조약화결합2인자모형을 연구하였다. 선행연구[2, 4－6]에서는 미리찾기조항이 없는 채권을 연구하였다. 선행연구[1]에서는 구조법을 리용하여 미리찾기조항을 가지는 리산리자표채권가격의 수학적모형화를 진행하고 채권가격의 해석적공식을 주었다.

론문에서는 선행연구[1]에서 세운 모형에 기초하여 채권가격의 최대최소값평가와 도함수평가 등에 대한 일련의 분석을 주고 그것들을 리용하여 미리찾기조항을 가지는 리자표채권의 설계기준을 주었다.

채권조항은 선행연구[1]에서와 같다.

다음과 같은 표시를 사용한다.

$$\bar{c}_N = F + C_N;\ \bar{c}_i = C_i\ \ (i = \overline{1,\ N-1})$$

채권가격 $B_i(V,\ t)$ $(i = \overline{1,\ N-1})$ 의 수학적모형은 다음과 같다.[1]

$$\frac{\partial B_i}{\partial t} + \frac{s_V^2 V^2}{2}\frac{\partial^2 B_i}{\partial V^2} + (r-b)V\frac{\partial B_i}{\partial V} - rB_i = 0\ \ (T_i < t < T_{i+1},\ V > 0) \tag{1}$$

$$B_{N-1}(V,\ T_N) = \bar{c}_N \cdot 1\{V \ge \bar{c}_N\} + \delta V \cdot 1\{V < \bar{c}_N\}\ \ \ (V > 0) \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &B_i(V,\ T_{i+1}) = \\ &= \max\left\{B_{i+1}(V,\ T_{i+1}) + \bar{c}_{i+1},\ F - \sum_{j=1}^{i}\bar{c}_j\right\}\cdot 1\left\{V \ge \max\left\{B_{i+1}(V,\ T_{i+1}) + \bar{c}_{i+1},\ F - \sum_{j=1}^{i}\bar{c}_j\right\}\right\} + \\ &+ \delta V \cdot 1\left\{V < \max\left\{B_{i+1}(V,\ T_{i+1}) + \bar{c}_{i+1},\ F - \sum_{j=1}^{i}\bar{c}_j\right\}\right\}\ \ (V > 0,\ \ i = \overline{0,\ N-2}) \end{aligned} \tag{3}$$

다음과 같은 표기를 사용한다.

$$f_{N-1}(V) = \bar{c}_N \cdot 1\{V \ge \bar{c}_N\} + \delta V \cdot 1\{V < \bar{c}_N\} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &f_i(V) = \\ &= \max\left\{B_{i+1}(V,\ T_{i+1}) + \bar{c}_{i+1},\ F - \sum_{j=1}^{i}\bar{c}_j\right\}\cdot 1\left\{V \ge \max\left\{B_{i+1}(V,\ T_{i+1}) + \bar{c}_{i+1},\ F - \sum_{j=1}^{i}\bar{c}_j\right\}\right\} + \\ &+ \delta V \cdot 1\left\{V < \max\left\{B_{i+1}(V,\ T_{i+1}) + \bar{c}_{i+1},\ F - \sum_{j=1}^{i}\bar{c}_j\right\}\right\}\ \ (V > 0,\ \ i = \overline{0,\ N-2}) \end{aligned} \tag{5}$$

함수 f 에 대하여 $M(f)$, $m(f)$ 는 각각 구간 $[0, +\infty)$ 에서의 f 의 상한과 하한을 표시한다.

정리 1(도함수평가와 계약위반경계의 유일존재성) $i=\overline{1, N-1}$ 에 대하여

$$\sqrt{s_V{}^2} \ge \frac{(1-\delta)e^{-b(T_{i+1}-T_i)}}{\sqrt{2\pi\cdot(T_{i+1}-T_i)}(1-\delta e^{-b(T_{i+1}-T_i)})}$$

가 성립한다고 가정하자. 그러면 $i=\overline{1, N-1}$ 에 대하여 $0<\partial_V B_i(V, T_i)<1$ 이 성립하며 방정식

$$V = \max\left\{F - \sum_{j=1}^{i-1}\bar{c}_j,\ B_i(V, T_i)+\bar{c}_i\right\}$$

는 유일뿌리 D_i 를 가진다. 그리고

$$V \ge \max\left\{B_i(V, T_i)+\bar{c}_i,\ F-\sum_{j=1}^{i-1}\bar{c}_j\right\} \Leftrightarrow V \ge D_i$$

가 성립한다.

보조정리 1(최소값평가) 정리 1의 가정하에서 식 (1)－(3)의 풀이 $B_i(V, t)$ $(i=\overline{1, N-1})$ 에 대하여

$$\min_V B_i(V, T_i) = B_i(0, T_i) = 0$$

이다.

다음의 보조정리는 리자표채권에 대하여 도중의 어느 한 리자표지불일에 자산가치에 관계없이 항상 미리 찾는것이 유리하면 그앞의 모든 리자표지불일에도 늘 미리 찾는것이 유리하다는것을 보여준다.

보조정리 2 정리 1의 가정하에서 적당한 $i=2, \cdots, N-1$ 에 대하여

$$\sup_V[B_i(V, T_i)+\bar{c}_i] \le F-\sum_{j=1}^{i-1}\bar{c}_j \tag{6}$$

가 성립하면

$$\sup_V[B_{i-1}(V, T_{i-1})+\bar{c}_{i-1}] \le F-\sum_{j=1}^{i-2}\bar{c}_j$$

가 성립한다.

따름 1 정리 1의 가정하에서

$$\sup_V[B_1(V, T_1)+\bar{c}_1] > F \tag{7}$$

가 성립하면

$$\sup_V[B_i(V, T_i)+\bar{c}_i] > F-\sum_{j=1}^{i-1}\bar{c}_j \quad (i=\overline{1, N-1})$$

가 성립한다.

보조정리 2로부터 적당한 $i=2,\cdots,N-1$ 에 대하여 식 (6)이 성립한다고 하면 $i=1$ 에 대해서도 식 (6)이 성립한다. 즉 $B_1(V, T_1)+C_1<F$ 가 성립한다. 이 식의 금융적의미는 채권소유자가 첫 리자표지불일(T_1 시각)에 원금을 찾는것이 항상 유리하다는것이다. 채권

발행측의 견지에서 보면 이 경우 채권발행의 의의가 적어진다. 그러므로 식 (7)이 성립한다는것을 가정하는것이 타당하다.

보조정리 3(최대값평가) 정리 1의 가정과 식 (7)하에서 식 (1)－(3)의 풀이 $B_i(V,\ t)$ $(i=\overline{1,\ N-1})$에 대하여

$$\sup_V B_i(V,\ T_i)=B_i(+\infty,\ T_i)=\sum_{j=i+1}^{N}\bar{c}_j e^{-r(T_j-T_i)}$$

가 성립한다.

이제 보조정리 3을 리용하여 식 (7)이 채권보조변수들사이의 어떤 관계를 요구하는가를 분석한다. 보조정리 3으로부터 식 (7)은 $\bar{c}_1+\sum_{j=2}^{N}\bar{c}_j e^{-r(T_j-T_1)}>F$ 로 된다. 식의 량변에 $e^{r(T_N-T_1)}$을 곱하고 정돈하면

$$\sum_{j=1}^{N}C_j e^{r(T_N-T_j)}>F\cdot e^{r(T_N-T_1)}-F \tag{8}$$

가 나온다. 그러므로 채권보조변수들사이의 관계에서 식 (8)이 성립한다고 가정하는것이 타당하다. 이 조건은 채권리자표의 아래한계를 준다.

특히 리자표지불일들사이의 간격이 같고 리자표들이 모두 같을 때 즉 $\Delta T=T_{i+1}-T_i$ $(i=\overline{0,\ N-1})$이고 $C_i=C_j=C\ (1\le i,\ j\le N)$일 때 식 (8)은

$$C\sum_{j=1}^{N}e^{r(T_N-T_j)}>F\cdot[e^{r(T_N-T_1)}-1]$$

로 된다. 이로부터

$$\frac{C}{F}>(e^{r\Delta T}-1)\cdot\frac{e^{(N-1)r\Delta T}-1}{e^{Nr\Delta T}-1}\approx r\Delta T\cdot\frac{(N-1)r\Delta T}{Nr\Delta T}=\frac{N-1}{N}\cdot(r\Delta T) \tag{9}$$

가 성립한다. 이것은 미리찾기조항을 가지는 채권에서 한번에 받는 리자표와 액면가격사이의 비의 아래한계를 준다.

따름 2 정리 1의 가정하에서 식 (7)이 성립하기 위해서는 식 (8)이 성립할것이 필요하고 충분하다.

이것은 미리찾기조항을 가지는 채권에서는 식 (8)이 성립하도록 채권보조변수들을 설정하는것이 타당하다는것을 보여준다.

주의 1 금융현실에는 식 (8)이 성립되지 않는 채권들이 존재한다. 실례로 령리자표채권을 들수 있다. 그러므로 령리자표채권과 같이 식 (8)이 성립되지 않는 채권(례하면 리자표가 지나치게 작은 채권)들의 경우에는 채권발행측의 립장에서 보면 미리찾기조항을 없애야 한다. 그러면 미리찾기조항이 없는 리산리자표채권으로 된다.[4]

이제부터는 식 (8)을 만족시키는 미리찾기조항을 가지는 채권들을 연구한다.

고계두값선택권을 리용하여 방정식 (5), (7)을 풀수 있는가를 보기 위하여 $B_i(V,\ t)$ $(t=\overline{0,\ N-2})$의 끝값함수인 $f_i(V)$의 구조를 고찰하자. 우선 $B_{i+1}(V,\ T_{i+1})+\bar{c}_{i+1}$의 그라프와 직선 $y=F-\sum_{j=1}^{i}\bar{c}_j$의 그라프사이의 관계를 보자.(그림) 이때

$$\sup_V\{B_{i+1}(V,\ T_{i+1})+\bar{c}_{i+1}\}=\bar{c}_{i+1}+\sum_{j=i+2}^{N}\bar{c}_j e^{-r(T_j-T_{i+1})}\le F-\sum_{j=1}^{i}\bar{c}_j \tag{10}$$

인 경우(그림의 선 ①)와

$$\min_V\{B_{i+1}(V,\ T_{i+1})+\bar{c}_{i+1}\}=\bar{c}_{i+1}>F-\sum_{j=1}^{i}\bar{c}_j \tag{11}$$

인 경우(그림의 선 ②) 그리고 $B_{i+1}(V,\ T_{i+1})+\bar{c}_{i+1}$의 그라프와 직선 $y=F-\sum_{j=1}^{i}\bar{c}_j$ 의 그라프가 늘 한점에서 사귀는 경우(그림의 선 ③)가 존재한다. 여기서 선 ①, ②, ③은 $y=F-\sum_{j=1}^{i}\bar{c}_j$ 의 그라프들이다.

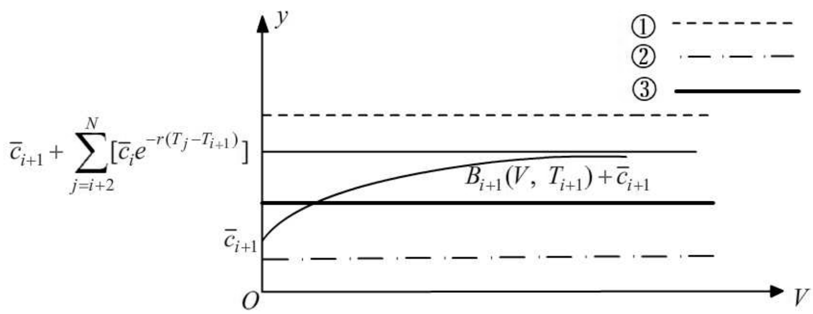

그림. $B_{i+1}(V,\ T_{i+1})+\bar{c}_{i+1}$의 그라프와 직선 $y=F-\sum_{j=1}^{i}\bar{c}_j$ 의 그라프사이의 관계

먼저 첫번째 경우(식 (10))를 보기로 하자. 앞에서 채권에 대하여 식 (8)이 성립한다고 가정하였으므로 따름 2로부터 식 (7)이 성립하며 따름 1로부터

$$\sup_V[B_i(V,\ T_i)+\bar{c}_i]>F-\sum_{j=1}^{i-1}\bar{c}_j\ \ (i=\overline{1,\ N-1})$$

가 성립한다. 따라서 채권에 대하여 식 (10)은 성립할수 없다. 그러므로 첫번째 경우를 배제한다. 다음으로 두번째 경우(식 (11))를 보기로 하자. 식 (11)은

$$\sum_{j=1}^{i+1}\bar{c}_j>F \tag{12}$$

와 동차이고 적당한 $i=m$에 대하여 식 (11)이 성립한다면 $\bar{c}_j\ge 0$이므로 모든 $m<i\le N-2$에 대하여서도 식 (11)이 성립한다. 즉 모든 $m<i\le N-2$와 임의의 $V\in[0,\ +\infty)$에 대하여

$$B_{i+1}(V,\ T_{i+1})+\bar{c}_{i+1}>F-\sum_{j=1}^{i}\bar{c}_j$$

가 성립하고 따라서 이때는 채권을 미리 찾으면 불리하다. 이제

$$M=\min_{0\le k\le N-1}\left\{\sum_{j=1}^{k+1}\overline{c}_j>F\right\} \tag{13}$$

라고 놓자.

주의 2 T_{M+1} 시각을 포함한 그 이후의 모든 시각들에는 채권소유자가 미리 찾는것이 그에게 불리하며 항상 채권을 유지해야 한다. 따라서 T_{M+1} 시각을 포함한 그 이후의 모든 시각들에는 미리찾기조항이 없는 채권[4]과 같아진다. 그러므로 $T_{M+1}\le t\le T_N$ 에서는 선행연구[4]의 공식을 적용하여 $B_i(V,\ t)\ \ (T_i\le t<T_{i+1},\ M\le i\le N-1)$ 를 계산한다. 결과는

$$\begin{aligned}B_i(V,\ t)=\sum_{k=i}^{N-1}\Big[&\overline{c}_{k+1}B^{+\ \cdots+\ +}_{D_{i+1}\cdots D_kD_{k+1}}(V,\ t;T_{i+1},\cdots,T_{m+1};r,\ b,\ s_V)+\\&+\delta A^{+\ \cdots\ +\ -}_{D_{i+1}\cdots D_kD_{k+1}}(V,\ t;T_{i+1},\ \cdots,\ T_m,\ T_{m+1};r,\ b,\ s_V)\Big](T_i\le t<T_{i+1},\ M\le i\le N-1)\end{aligned} \tag{14}$$

이다. 결국 시간구간 $T_M<t\le T_N$ 에서의 채권가격을 구하였다.

이제는 시간구간 $T_0\le t\le T_M$ 에서의 채권가격만 구하면 된다. 이를 위하여 미리찾기경계의 유일존재성과 관련한 아래의 정리를 증명한다. 즉 세번째 경우를 고찰한다.

정리 2(미리찾기경계의 유일존재성) 식 (8)이 성립한다고 가정하자. 그러면 $i=\overline{1,\ M}$ 에 대하여

$$B_i(V,\ T_i)+\overline{c}_i=F-\sum_{j=1}^{i-1}\overline{c}_j$$

은 유일뿌리 E_i 를 가진다. 그리고 $B_i(V,\ T_i)+\overline{c}_i\ge F-\sum_{j=1}^{i-1}\overline{c}_j\Leftrightarrow V\ge E_i$ 가 성립한다.

이제 편리를 위하여 표시

$$D_N=E_N=\overline{c}_N,\ \ U_i=D_i\ \ (M<i\le N) \tag{15}$$

를 리용하자.

정리 3(채권가격공식) 정리 1과 정리 2의 가정하에서 문제 (1)－(3)의 풀이는 다음과 같이 주어진다. $i=\overline{0,\ N-1}$ 에 대하여

$$\begin{aligned}B_i(V,\ t)=&\sum_{k=i}^{N-1}[\overline{c}_{k+1}B^{+\cdots+\ +}_{U_{i+1}\cdots U_kU_{k+1}}(V,\ t;T_{i+1},\ \cdots,T_{k+1};r,\ b,\ s_V)+\\&+\delta A^{+\ \cdots+\ -}_{U_{i+1}\cdots U_kD_{k+1}}(V,\ t;T_{i+1},\ \cdots,\ T_k,\ T_{k+1};r,\ b,\ s_V)]+\\&+\sum_{k=i+1}^{M}(F-\sum_{j=1}^{k-1}\overline{c}_j)\cdot 1\{D_k<E_k\}\cdot[B^{+\ \cdots\ +\ \ +}_{U_{i+1}\cdots U_{k-1}L_k}(V,\ t;T_{i+1},\ \cdots,\ T_k;r,\ b,\ s_V)-\\&-B^{+\ \cdots\ +\ \ +}_{U_{i+1}\cdots U_{k-1}U_k}(V,\ t;T_{i+1},\ \cdots,\ T_k;r,\ b,\ s_V)]\ \ (T_i<t<T_{i+1})\end{aligned} \tag{16}$$

여기서 $B^{+\cdots+}_{K_1\cdots K_m}(x,\ t;T_1,\ \cdots,\ T_m;r,\ q,\ \sigma)$ 와 $A^{+\cdots+}_{K_1\cdots K_m}(x,\ t;T_1,\ \cdots,\ T_m;r,\ q,\ \sigma)$ 는 무위험리자률 r, 배당률 q, 파동률 σ 일 때 m 계 현금두값선택권 및 자산두값선택권의 가격[3]이다.

주의 3 첫째로, 미리찾기조항을 가지는 채권에 대해서는 리자표를 식 (8)이 성립하도록 적당히 크게 설정해야 하며 식 (8)이 만족되지 않는 경우 즉 리자표가 너무 작은 경우에는 미리찾기조

항을 없애야 한다. 그러므로 식 (8)은 미리찾기조항을 가지는 채권의 리자표의 아래한계를 준다.

특히 리자표들이 다 같을 때 관계식 (9)가 성립하도록 액면가격과 리자표를 설정해야 한다.

둘째로, 리자표를 너무 크게 설정하면 미리 찾는것이 채권소유자에게는 불리하며 또한 채권의 공정한 초기가격이 액면가격보다 높을수 있다. 이 경우 채권발행측이 초기에 액면가격으로 채권을 판매하면 손해를 본다. 그러므로 초기에 액면가격으로 채권을 팔자면 리자표를 너무 높게 설정하지 말아야 한다. 리자표를 너무 크게 설정했다면 반드시 채권의 초기가격을 액면가격보다 높여야 한다.

참 고 문 헌

[1] 오형철, 김대성; 조선민주주의인민공화국 과학원통보, 2, 18, 주체109(2020).

[2] R. Agliardi; Quantitative Finance, 11, 5, 749, 2011.

[3] Hyong Chol O, Mun Chol Kim; Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1, 2, 247, 2013.

[4] Hyong Chol O et al.; Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 43, 3, 575, 2017.

[5] Hyong Chol O et al.; J. Differential Equations, 260, 3151, 2016.

[6] Hyong Chol O et al.; Journal of Mathematical Analysis and Applications, 416, 314, 2014.

주체109(2020)년 6월 5일 원고접수

An Analysis on Coupon Bonds with Pre-call and the Bond Design

Kim Tae Song, O Hyong Chol

Based on a pricing model[1] of discrete coupon bonds with the pre-call item under which the bond holder can call the bond at any coupon dates prior to the maturity, this paper provides some analysis including min-max estimates and gradient estimates of the bond price and does some guide for designing the discrete coupon bonds with the pre-call item using them.

Keywords: coupon bond, structural approach, coupon, pre-call