김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체106(2017)년 제63권 제11호 Vol. 63 No. 11 JUCHE106(2017).

준순서모임에서 모임값넘기기의 한가지 순서류부동점정리와 응용

최현주, 림창일

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《수학은 모든 자연과학의 기초로 될뿐아니라 사회현상을 연구하는데서도 중요한 수단으로 됩니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제10권 478페지)

선행연구[1]에서는 준순서완비모임에서 우로순서증가인 모임값넘기기가 순서류부동점을 가지기 위한 충분조건을, 선행연구[2]에서는 반순서완비모임에서 우로순서증가인 모임값넘기기가 부동점을 가지기 위한 충분조건을 밝혔다.

론문에서는 이 충분조건들을 일반화하는 한가지 충분조건을 밝히고 그것을 일반화된 비협력경기의 확장된 Nash－평형의 존재성문제에로 응용하였다.

정의 1[1] $(P,\ \geq^P)$가 준순서모임이고 $x,\ y\in P$라고 하면 $x\geq y$일 때 x와 y는 순서동등이라고 말하고 $x\sim^P y$로 표시한다. $\sim^P$는 동등관계이다.

임의의 $x\in P$에 대하여 x를 포함하는 순서동등류를 $[x]$로 표시한다.

정의 2[1] $(X,\ \geq^X)$, $(U,\ \geq^U)$가 준순서모임이고 넘기기 $f:X\to U$가

$$x\sim^X y\Rightarrow f(x)\sim^U f(y)\ (\forall x,\ y\in X)$$

를 만족시키면 넘기기 f를 류보존넘기기라고 말한다.

여러값넘기기 $F:X\to 2^U\setminus\{\phi\}$이 $\forall x,y\in X\ (x\leq^X y)$, $\forall u\in F(x),\ \exists w\in F(y)$, $u\leq^U w$를 만족시키면 F를 우로순서증가넘기기라고 말한다.

정의 3 준순서모임 $(P,\ \geq^P)$의 부분모임 $A\subset P$가 임의의 순서모임 $\{x_\alpha\}\subseteq P$에 대하여

$$(\forall x_\beta\in\{x_\alpha\},\ \exists y_\beta\in A,\ x_\beta\leq y_\beta)\Rightarrow(\exists x\in A,\ \forall x_\gamma\in\{x_\alpha\},\ x_\gamma\leq x)$$

를 만족시키면 $A\subset P$를 일반귀납모임이라고 말한다.

모임이 일반귀납모임이면 그것은 귀납모임이며 그 거꿀은 성립되지 않는다.[2]

정의 4[1] $(X,\ \geq^X)$가 준순서모임이고 모임값넘기기 $F:X\to 2^X\setminus\{\phi\}$이 주어졌다고 하면 $x\in F(x)$인 $x\in X$를 F의 부동점이라고 부르며 $\exists w\in[x],\ w\in F(x)$인 $x\in X$를 F의 순서류부동점이라고 부른다.

F의 부동점은 F의 순서류부동점이며 거꿀은 일반적으로 성립하지 않는다. 특히 $(X,\ \geq^X)$가 반순서모임이면 두 개념은 일치한다.

비협력경기들에 대한 일반화된 Nash－평형과 확장된 Nash－평형의 존재성문제에서 반순서모임들에서의 부동점정리는 기본적인 수단으로 되고있다. 일부 비협력경기들에서는 유용함수들의 정의역과 값구역들이 둘 다 반순서모임대신 준순서모임으로도 될수 있다. 즉 정의역과 값구역의 일부 서로 다른 원소들은 순서동등일수 있다.

이것이 기본동기로 되여 준순서모임에서 여러가지 부동점정리들이 연구되고있다.

$(P, \geq^P)$가 준순서완비모임일 때 모임값넘기기 $F:P\to 2^P\setminus\{\phi\}$은 조건

① F는 우로 순서증가이다.

② $\exists y\in P,\ \exists v\in F(y),\ y\leq v$

와 다음의 조건들가운데서 하나를 만족시키면 적어도 1개의 순서류부동점을 가진다.[2]

③ 임의의 $x\in P$에 대하여 $F(x)$는 유한개의 극대원소류를 가지는 귀납모임이다.

④ $\forall x\in P$, $SF(x)$는 P에서 귀납모임이다.

또한 모임값넘기기 $F:P\to 2^P\setminus\{\phi\}$은 조건 ①, ②와 다음의 조건을 만족시킬 때 적어도 1개의 부동점을 가진다.[1]

⑤ 임의의 $x\in P$에 대하여 $F(x)$는 P에서 일반귀납모임이다.

우리는 부동점정리의 충분조건[1, 2]들을 개선하는것을 문제로 설정하였다.

정리 1 $(P, \geq^P)$가 준순서완비모임일 때 $F:P\to 2^P\setminus\{\phi\}$이 조건 ①, ②, ⑤를 만족시키면 F는 적어도 하나의 순서류부동점을 가진다.

증명 P의 부분모임 A를 $A:=\{x\in P:\exists z\in F(x),\ x\leq z\}$와 같이 정의하자.

조건 ②로부터 $y\in A$이므로 A는 P의 비지 않는 부분모임이다.

A가 준순서완비모임이라는것을 론의하기 위하여 임의의 순서모임 $\{x_\alpha\}\subseteq A$를 취하자.

P가 준순서완비모임이므로 $\sup\{x_\alpha\}\neq\phi$이다.

임의의 $b\in\sup\{x_\alpha\}$를 취하면 $\forall x_\beta\in\{x_\alpha\}\subseteq A,\ \exists u_\beta\in F(x_\beta),\ x_\beta\leq u_\beta$가 성립되므로 $\exists w_\beta\in F(b),\ x_\beta\leq u_\beta\leq w_\beta$이다. 그런데 조건 ⑤로부터 $F(b)$는 일반귀납이므로 $\{x_\alpha\}$는 $F(b)$에서 상계를 가진다. 즉 $\exists w\in F(b),\ \forall x_\beta\in\{x_\alpha\},\ x_\beta\leq w$가 성립된다. 따라서 $b\leq w$가 성립되며 이것은 $b\in A$를 의미한다. 즉 $\sup\{x_\alpha\}\subseteq A$이므로 A는 준순서완비모임이다.

쪼른의 보조정리로부터 A는 극대원소 $x^*\in A$를 가지며 $\exists z_0\in F(x^*),\ x^*\leq z_0$이다.

조건 ①로부터 $\exists z_1\in F(z_0),\ z_0\leq z_1$이 성립되므로 $z_0\in A$이다.

한편 x^*은 A의 극대원소이므로 $z_0\leq x^*$이다.

이로부터 $x^*\sim z_0\in F(x^*)$이 나오며 즉 x^*은 F의 순서류부동점이다.(증명끝)

명제 1 준순서완비모임 P에서 유한개의 극대원소류를 가지는 귀납모임 A는 일반귀납모임이다.

명제 2 $(P, \geq^P)$는 준순서완비모임이고 모임값넘기기 $F:P\to 2^P\setminus\{\phi\}$에 대하여 모임 $SF(x)=\{z\in P:\exists u\in F(x),\ z\leq u\}$가 귀납모임이면 $F(x)$는 일반귀납모임이다.

주의 1 명제 1에 의하여 조건 ③으로부터 조건 ⑤가 성립되며 명제 2에 의하여 조건 ④로부터 조건 ⑤가 성립된다는것을 알수 있다.

정의 5[1] 일반화된 n인비협력경기 $\Gamma=(N,\ S,\ f,\ U)$에서 방략들의 계

$$(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \cdots, \widetilde{x}_n)\in S_1\times S_2\times\cdots\times S_n$$

이 다음의 순서부등식을 만족시키면 확장된 Nash—평형이라고 부른다.

$$f_i(x_i,\ \widetilde{x}_{-i})\not\succ^U f_i(\widetilde{x}_i,\ \widetilde{x}_{-i}),\ \forall x_i\in S_i,\ i=1, 2, \cdots, n$$

보조정리 1[1] $\forall i,\ (S_i, \geq_i)$은 준순서모임이고 S에서의 순서가

$$\forall x,\ y\in S,\ x\geq^S y\leftrightarrow \forall x, y\in S,\ x\geq^S y,\ x_i\geq y_i,\ i=1, 2, \cdots, n$$

과 같이 주어졌다고 하자. 여기서 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$이다.

이때 $\geq^S$는 S에서 준순서로 되며 따라서 $(S, \geq^S)$는 준순서모임이다.

임의의 i에 대하여 $(S_i, \geq_i)$가 준순서완비모임이면 $(S, \geq^S)$도 준순서완비모임이다.

또한 $\widetilde{S}=\widetilde{S}_1\times\widetilde{S}_2\times\cdots\times\widetilde{S}_n$, $[x]=([x_1], [x_2], \cdots, [x_n])$, $\forall x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in S$가 성립된다. 여기서 $[x]$는 S에서의 순서동등류, $[x_i]$는 S_i에서 순서동등류, $\widetilde{S}_i$는 S_i의 순서동등류들의 모임을 표시한다.

보조정리 2 $A\subset S$가 일반귀납이기 위해서는 매 $A_i\subset S_i$ $(i\in\{1, \cdots, n\})$가 일반귀납모임일것이 필요하고 충분하다. 여기서 $A_i:=\{x_i\in S_i : x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in A\}$이다.

다음의 정리는 준순서모임에서 일반화된 경기의 확장된 Nash-평형의 존재성을 준다.

정리 2 일반화된 n인비협력경기 $\Gamma=(N, S, f, U)$에서 매 경기자 $i=1, 2, \cdots, n$과 임의의 $x\in S$에 대하여 $f_i : S\to U$를 다음의 조건들을 만족시키는 류보존넘기기라고 하자.

⑥ $f_i(S_i, x_{-i})$는 준순서모임 $(U, \geq^U)$의 귀납부분모임이다.

⑦ 모임 $\{z_i\in S_i : f_i(z_i, x_{-i})$는 $f_i(S_i, x_{-i})$의 극대원소$\}$는 S_i의 일반귀납부분모임이다.

⑧ $\forall x, y\in S$ $(x\leq^S y)$에 대하여 $z_i\in S_i$이고 $f_i(z_i, x_{-i})$가 $f_i(S_i, x_{-i})$의 극대원소로 되는 점이면 $\exists w_i\in S_i$가 존재하여 $z_i\leq_i w_i$이고 $f_i(w_i, y_{-i})$는 $f_i(S_i, y_{-i})$의 극대원소이다.

이때 $\exists p=(p_i, p_{i-1})$, $q=(q_i, q_{i-1})\in S$, $p\leq^S q$이고 $f_i(q_i, p_{i-1})$이 $f_i(S_i, p_{-i})$의 극대원소이면 경기 Γ는 확장된 Nash-평형 $\hat{x}=(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_n)$을 가진다.

또한 $[\hat{x}]$의 매 원소는 Γ의 확장된 Nash-평형이다.

증명 매 $i=1, 2, \cdots, n$에 대하여 $(S_i, \geq_i)$가 준순서완비모임이므로 보조정리 1로부터 $(S, \geq^S)$도 준순서완비모임이다.

매 $i=1, 2, \cdots, n$에 대하여 모임값넘기기 $T_i : S\to 2^{S_i}\setminus\{\phi\}$을 아래와 같이 정의하자.

$\forall x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in S$, $T_i(x):=\{z_i\in S_i : f_i(z_i, x_{-i})$는 $f_i(S_i, x_{-i})$의 극대원소이다.$\}$

조건 ⑥으로부터 임의의 고정된 원소 $x\in S$에 대하여 $f_i(S_i, x_{-i})$는 U의 귀납부분모임이므로 값구역 $f_i(S_i, x_{-i})$는 극대원소를 가지며 따라서 $T_i(x)$는 S_i의 비지 않는 부분모임이다. 따라서 넘기기 $T_i : S\to 2^{S_i}\setminus\{\phi\}$이 정의된다.

다음 $T : S\to 2^S\setminus\{\phi\}$을 $\forall x\in S$, $T(x):=T_1(x)\times T_2(x)\times\cdots\times T_n(x)$와 같이 정의하자.

이제 넘기기 T가 조건 ①, ②, ⑤를 만족시킨다는것을 보기로 하자.

우선 T가 조건 ①을 만족시킨다는것을 보자.

이를 위하여 임의의 $x, y\in S : x\leq^S y$와 임의의 $z=(z_1, z_2, \cdots, z_n)\in T(x)$를 취하면 매 $i=1, 2, \cdots, n$에 대하여 $z_i\in T_i(x)$ 즉 $f_i(z_i, x_{-i})$는 $f_i(S_i, x_{-i})$의 극대원소이다.

따라서 조건 ⑧로부터 어떤 $w_i\in S_i$ $(z_i\leq_i w_i)$가 있어서 $f_i(w_i, y_{-i})$는 $f_i(S_i, y_{-i})$의 극대원소이다. 즉 $w_i\in T_i(y)$이다.

$w:=(w_1, w_2, \cdots, w_n)$이라고 하면 $z\leq^S w$, $w\in T(y)$이므로 T는 우로순서증가이다.

다음으로 T가 조건 ⑤를 만족시킨다는것을 보자.

조건 ⑦로부터 임의의 $i=1, 2, \cdots, n$와 임의의 $x\in S$에 대하여 $T_i(x)$가 S_i의 일반귀납이라는것이 나오며 보조정리 2로부터 $T(x)$가 일반귀납이라는것이 나온다.

또한 정리의 가정에서 주어진 $p,\ q\in S$ 는 $q\in T(p),\ p\le^S q$ 를 의미하므로 T 는 조건 ②를 만족시킨다.

그리하여 넘기기 $T:S\to 2^S\setminus\{\phi\}$ 은 조건 ①, ②, ⑤를 모두 만족시킨다. 따라서 T 는 순서류부동점 $\hat{x}=(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_n)$ 을 가진다. 이것은 모든 $i=1, 2, \cdots, n$ 에 대하여 $\hat{t}_i\in T_i(\hat{x})$ 즉 $f_i(\hat{t}_i,\ \hat{x}_{-i})$ 가 $f_i(S_i,\ \hat{x}_{-i})$ 의 극대원소이라는것을 의미한다. 이것은

$$f_i(t_i,\ \hat{x}_{-i})\not>^U f_i(\hat{t}_i,\ \hat{x}_i),\ \forall t_i\in S_i \tag{*}$$

와 동등하다.

한편 $(S,\ \ge^S)$ 에서 준순서 $\ge^S$ 의 정의로부터 $i=1, 2, \cdots, n$ 에 대하여

$$\hat{t}\sim^S\hat{x}\Rightarrow \hat{t}_i\sim_i\hat{x}_i\Rightarrow(\hat{t}_i,\ \hat{x}_{-i})\sim^S(\hat{x}_i,\ \hat{x}_{-i})=\hat{x}$$

이므로 $\hat{t}\in[\hat{x}]$이면 $i=1, 2, \cdots, n$ 에 대하여 $(\hat{t}_i,\ \hat{x}_{-i})\sim^S(\hat{x}_i,\ \hat{x}_{-i})$ 이 성립된다.

$f_i:S\to U$ 가 류보존넘기기이므로 $(\hat{t}_i,\ \hat{x}_{-i})\sim^S(\hat{x}_i,\ \hat{x}_{-i})$ 로부터 $f_i(\hat{t}_i,\ \hat{x}_{-i})\in[f(\hat{x}_i,\ \hat{x}_{-i})]$ 즉 $f_i(\hat{t}_i,\ \hat{x}_{-i})\sim^U f_i(\hat{x}_i,\ \hat{x}_{-i})$ 이 성립된다.

이 식과 식 (*)을 결합하면 $f_i(t_i,\ \hat{x}_{-i})\not\ge^U f_i(\hat{x}_i,\ \hat{x}_{-i}),\ \forall t_i\in S_i$ 가 나온다.

이것은 $\hat{x}=(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_n)$ 이 이 경기의 확장된 Nash-평형이라는것을 보여준다.

우의 사실을 반복하면 $\hat{z}\in[\hat{x}],\ \ f_i(\hat{z}_i,\ \hat{z}_{-i})\sim^U f_i(\hat{x}_i,\ \hat{x}_{-i})$ 이 성립된다.

이리하여 $\hat{z}$ 이 경기의 확장된 Nash-평형이라는것이 나온다.(증명끝)

따름 조건 ⑦ 대신에 다음의 조건이 성립되여도 정리 2는 성립된다.

⑨ 임의의 $x\in S$ 에 대하여 $\{z_i\in S_i : f_i(z_i,\ x_{-i})$ 는 $f_i(S_i,\ x_{-i})$ 의 극대원소$\}$는 유한개의 극대원소를 가지는 귀납모임이다.

주의 2 $(S_i,\ \ge_i)\ (i=1, 2, \cdots, n)$ 와 $(U,\ \ge^U)$ 가 반순서모임일 때도 따름의 결과는 성립된다.

참 고 문 헌

[1] L. Xie et al.; Fixed Point Theory Appl., 2013, 2013: 192.192.

[2] J. Li et al.; Fixed Point Theory Appl., 2014, 2014: 192.192.

주체106(2017)년 7월 5일 원고접수

Order-Clustered Fixed Point Theorem of Set-Valued Mappings on Preordered sets and their Applications

Choe Hyon Ju, Rim Chang Il

We introduce the concept of universally inductive preordered sets and by applying these properties, we provide extension of fixed point theorem in [1, 2].

By using these generalizations and by applying the order-increasing upwards property of set-valued mapping, we prove several existence theorems of the extended Nash-equilibria of generalized noncooperative games on preordered sets.

Key word: universally inductive preordered set