김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제4호

융합프레임에 관하여 성긴표현을 가지는 신호의 회복을 위한 원시－쌍대알고리듬

조유성, 최철국, 리추명

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《수학은 모든 자연과학의 기초로 될뿐아니라 사회현상을 연구하는데서도 중요한 수단으로 됩니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제10권 478페지)

론문에서는 원시－쌍대알고리듬을 리용하여 최근시기 신호압축수감분야에서 활발히 연구되고있는 융합프레임에 관하여 성긴표현을 가지는 신호의 회복을 위한 원시－쌍대알고리듬에 대하여 연구하였다.

1. 선행연구결과

관측잡음이 있는 경우 융합프레임에 관하여 성긴표현을 가지는 신호의 회복을 위한 토대추적문제는 다음과 같이 정식화할수 있다.

$$\hat{\boldsymbol{c}} = \underset{\boldsymbol{c}\in\mathbf{R}^{\sum m_j}}{\arg\min} \|\boldsymbol{c}\|_{2,1} \quad \text{제한조건} \quad \|\boldsymbol{A_I U c} - \boldsymbol{y}\|_{2,\,2} \le \eta \tag{1}$$

여기서 $\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{U}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \boldsymbol{U}_N \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{MN\times\sum m_j}$ 이고 $\boldsymbol{A_I} = (a_{ij}\boldsymbol{I}_M)_{1\le i\le m,\,1\le j\le N}$ 이며 $\boldsymbol{I}_M$ 은 M 차단위행렬을 표시한다. $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{1\le i\le m,\,1\le j\le N}$ 은 수감행렬이며 $\boldsymbol{U}_i$ $(i=1,\ \cdots,\ N)$ 들은 융합프레임을 구성하는 부분공간들의 표준직교토대를 렬벡토르로 가지는 $M\times m_i$ 형행렬이다.

관측은

$$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{y}_i)_{i=1}^m = \left(\sum_{j=1}^N a_{ij}\boldsymbol{x}_j^0\right)_{i=1}^m \in \boldsymbol{K} \tag{2}$$

와 같이 주어지는데 여기서 $\boldsymbol{K} = \{(\boldsymbol{y}_i)_{i=1}^m \mid \boldsymbol{y}_i \in \mathbf{R}^M,\ \forall i\in[m]\}$ 이고 $[m]=\{1,\ 2,\ \cdots,\ m\}$ 이다.

선행연구[4]에서는 원시－쌍대알고리듬에 의하여 단일관측모형인 경우 성긴신호의 회복에 대하여 론의하였다. 다중관측모형인 경우에도 블로크자리표하강알고리듬, 교대방향법, 분할브레그만방법[5]에 의한 동시적성긴신호의 회복에 대하여 고찰하고 수치실험을 통하여 분할브레그만방법에 의한 회복결과가 블로크자리표하강알고리듬이나 교대방향법들을 리용한 결과보다 정확도가 더 높다는것을 밝혔다.

동시적성김성은 융합프레임에 관한 성김성의 특수경우라는 사실로부터 융합프레임에 관한 성긴신호를 분할브레그만방법을 리용하여 회복할수도 있다. 선행연구[1－3]에서는 원시－쌍대알고리듬을 리용하여 전변동최소화를 통한 화상회복을 진행하였는데 실험결과를

보면 원시－쌍대알고리듬이 브레그만형알고리듬보다 우월한 성능을 나타낸다는것을 보여주었다.

이로부터 론문에서는 융합프레임에 관하여 성긴표현을 가지는 신호의 회복을 위한 원시－쌍대알고리듬을 제기하고 그 수렴성을 증명하였다.

2. 기 본 결 과

1) 원시－쌍대알고리듬

여기서는 관측잡음이 있는 경우 융합프레임에 관한 성긴표현을 가지는 신호의 회복을 위한 원시－쌍대알고리듬을 제기한다.

최량화문제 (1)은

$$\hat{\boldsymbol{c}} = \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{c}\in\mathbf{R}^{\sum m_j}} G(\boldsymbol{c}) + F(\boldsymbol{A_I U c}) \tag{3}$$

와 동등하다. 여기서

$$G(\boldsymbol{c}) = \|\boldsymbol{c}\|_{2,1},\ F(\boldsymbol{z}) = \chi_{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{y},\eta)} = \begin{cases} 0, & \|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\|_{2,2} \le \eta \\ \infty, & \text{기타} \end{cases}$$

이다.

최량화문제 (1)을 풀기 위한 원시－쌍대알고리듬은 다음과 같이 주어진다.

$$\boldsymbol{\xi}^{n+1} = P_{F^*}(\sigma; \boldsymbol{\xi}^n + \sigma \boldsymbol{A_I U}\bar{\boldsymbol{c}}^n) = \\ = \begin{cases} \boldsymbol{0}, & \|\sigma^{-1}\boldsymbol{\xi}^n + \boldsymbol{A_I U}\bar{\boldsymbol{c}}^n - \boldsymbol{y}\|_{2,2} \le \eta \\ \left(1 - \dfrac{\sigma\eta}{\|\boldsymbol{\xi}^n + \sigma(\boldsymbol{A_I U}\bar{\boldsymbol{c}}^n - \boldsymbol{y})\|_{2,2}}\right)(\boldsymbol{\xi}^n + \sigma(\boldsymbol{A_I U}\bar{\boldsymbol{c}}^n - \boldsymbol{y})), & \text{기타} \end{cases} \tag{4}$$

$$(\boldsymbol{c}^{n+1})_j = S_\tau((\boldsymbol{c}^n - \tau(\boldsymbol{A_I U})^* \boldsymbol{\xi}^{n+1})_j) = \\ = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{\tau}{\|(\boldsymbol{c}^n - \tau(\boldsymbol{A_I U})^*\boldsymbol{\xi}^{n+1})_j\|_2}\right)(\boldsymbol{c}^n - \tau(\boldsymbol{A_I U})^*\boldsymbol{\xi}^{n+1})_j, & \|(\boldsymbol{c}^n - \tau(\boldsymbol{A_I U})^*\boldsymbol{\xi}^{n+1})_j\|_{2,2} \ge \tau \\ \boldsymbol{0}, & \text{기타} \end{cases} \tag{5}$$

$$\bar{\boldsymbol{c}}^{n+1} = \boldsymbol{c}^{n+1} + \theta(\boldsymbol{c}^{n+1} - \boldsymbol{c}^n) \tag{6}$$

2) 알고리듬의 수렴성

정리 1 $(\boldsymbol{c}^\#,\ \boldsymbol{\xi}^\#)$이 θ의 선택에 무관계하게 알고리듬 (4)－(6)의 부동점이기 위해서는 $(\boldsymbol{c}^\#,\ \boldsymbol{\xi}^\#)$이 문제 (3)의 원시－쌍대최량점일것이 필요하고 충분하다.

정리 2 문제 (3)이 풀이를 가진다고 가정하자. $\theta = 1,\ \sigma,\ \tau > 0$을 $\sigma\tau\|\boldsymbol{A_I}\|_{2,2}^2 < 1$이 성립하도록 취하자. 그리고 $(\boldsymbol{c}^n,\ \bar{\boldsymbol{c}}^n,\ \boldsymbol{\xi}^n)_{n\ge 0}$을 알고리듬 (4)－(6)에 의해 생성되는 렬이라고 하자. 이때 $(\boldsymbol{c}^n)$은 문제 (3)의 풀이에로 수렴한다.

참 고 문 헌

[1] D. L. Donoho; IEEE Trans. Inform. Theory, 52, 4, 1289, 2006.
[2] P. Boufounos et al.; IEEE Trans. Inform. Theory, 57, 7, 4660, 2011.
[3] U. Ayaz et al.; Appl. Comput. Harmon. Anal., 41, 341, 2016.
[4] S. Foucart et al.; A Mathematical Introduction to Compressive Sensing, Birkhauser, 500∼613, 2013.
[5] Jian Zou; Multidimensional Systems and Signal Processing, 26, 207, 2015.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

Primal-Dual Algorithm for Recovery of Fusion Frame Sparse Signals

Jo Yu Song, Choe Chol Guk and *Ri Chu Myong*

In this paper, we propose a primal-dual algorithm for recovery of fusion frame sparse signals and prove the convergence of the algorithm.

Key words: fusion frame, primal-dual algorithm