김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제3호

리－요크예민성과 리－요크의미에서의 카오스성사이관계

김 진 현

카오스[5]에 대하여 공통적으로 가지게 되는 인식은 초기값이 조금만 달라져도 그 궤도의 동태가 매우 복잡해진다는것이다. 이러한 의미를 반영한 개념들이 바로 초기조건에 관한 예민성[3]이며 보다 강한 조건인 리－요크예민성[1]이다.

초기조건에 관한 예민성과 리－요크예민성은 카오스적현상을 나타내는 중요한 개념으로서 많이 연구되고있다.

선행연구[2]에서는 콤팍트거리공간에서 리－요크예민성에 대하여 연구하고 그와 관련된 일련의 문제들을 제기하였다. 이러한 문제들중의 하나가 계가 리－요크예민성을 가지면 리－요크의미에서 카오스적[7]인가 하는것이다.

선행연구[4]에서는 최근시기 위상동력학계의 발전동향을 밝히면서 선행연구[2]에서 제기된 리－요크예민성과 관련한 문제가 아직 미해결로 남아있다고 지적하였다.

이 론문에서는 선행연구[2]에서 제기한 문제에 대하여 일정한 가정하에서 고찰하며 이 결과에 기초하여 약혼합적인 계가 리－요크의미에서 카오스적이라는것을 밝히려고 한다.

1. 기 초 지 식

정의 1[3] 적당한 정수 $\delta>0$ 이 있어서 임의의 $x\in X$ 와 임의의 $\varepsilon>0$ 에 대하여

$$d(x,\ y)<\varepsilon,\ \ d(f^n(x),\ f^n(y))>\delta$$

가 성립되는 $y\in X$ 와 $n\in\mathbf{N}$ 이 존재할 때 넘기기 f 는 초기조건에 관한 예민성(간단히 예민성)을 가진다고 말한다.

정의 2[1] 적당한 정수 $\delta>0$ 이 있어서 임의의 $x\in X$ 와 임의의 $\varepsilon>0$ 에 대하여

$$d(x,\ y)<\varepsilon,\ \ \varlimsup_{n\to\infty} d(f^n(x),\ f^n(y))>\delta,\ \ \varliminf_{n\to\infty} d(f^n(x),\ f^n(y))=0$$

이 성립되는 $y\in X$ 가 존재할 때 넘기기 f 는 리－요크예민성을 가진다고 말한다. 여기서 정수 $\delta>0$ 이 있어서

$$\varlimsup_{n\to\infty} d(f^n(x),\ f^n(y))>\delta,\ \varliminf_{n\to\infty} d(f^n(x),\ f^n(y))=0$$

을 만족시킬 때 쌍 $(x,\ y)$ 를 $\delta-$리－요크쌍이라고 부른다.

$$LY(f):=\{(x,\ y)\in X\times X\mid \varlimsup_{n\to\infty} d(f^n(x),\ f^n(y))>0,\ \varliminf_{n\to\infty} d(f^n(x),\ f^n(y))=0\}$$

을 리－요크쌍들의 모임이라고 부른다.

$\delta-$리－요크쌍들의 모임을

$$LY(f,\ \delta):=\{(x,\ y)\in X\times X\mid \varlimsup_{n\to\infty} d(f^n(x),\ f^n(y))>\delta,\ \varliminf_{n\to\infty} d(f^n(x),\ f^n(y))=0\}$$

으로 표시한다. 분명히 $LY(f,\ \delta)\subset LY(f)$ 이다.

리－요크쌍들의 모임 $LY(f)$ 가 $X\times X$ 의 조밀한 G_δ－모임을 포함하면 f 는 일반적 카오스성을 가진다고 말한다.[6]

정의 3[7] $(X,\ d)$ 를 거리공간, $T:X\to X$ 를 련속넘기기라고 하자. 이때 $\delta>0$ 에 대하여 $S\subset X$ 가 다음의 두 조건을 만족시킨다고 하자.

임의의 $x,\ y\in S\ (x\neq y)$ 에 대하여

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\ d(T^n x,\ T^n y)\geq\delta,\ \ \underline{\lim_{n\to+\infty}}\ d(T^n x,\ T^n y)=0$$

이고 임의의 $x\in S$ 와 임의의 주기점 $z\in X(x\neq z)$ 에 대하여

$$\lim_{n\to+\infty}\sup d(T^n x,\ T^n z)\geq\delta$$

일 때 S 를 δ－스크램블모임(Scrambled set)이라고 부른다.

$x,\ y,\ z$ 에 관계되는 적당한 $\delta>0$ 이 있어서 임의의 점 $x,\ y\in S\ (x\neq y)$ 와 임의의 주기점 $z\in X$ 에 대하여 우의 두 식을 만족시킬 때 S 를 스크램블모임이라고 부른다.

정의 4[7](리－요크의미에서의 카오스) $(X,\ d)$ 를 거리공간, $T:X\to X$ 를 련속넘기기라고 하자. 이때 셀수 없는 스크램블모임이 존재하면 계 $(X,\ T)$ 를 리－요크의 의미에서의 카오스적인 계(Chaotic in the sense of Li-Yorke)라고 부른다.

정의 5[7] 위상력학계 $f:X\to X$ 가 주어졌을 때 임의의 두 비지 않은 열린모임 $U,\ V$ 에 대하여 어떤 $n\in\mathbf{N}$ 이 있어서 $U\cap f^{-n}V\neq\varnothing$ 이면 f 는 위상이행적이다고 말한다.

만일 임의의 두 비지 않은 열린모임 $U,\ V\subset X$ 에 대하여 $N>0$ 이 존재하여 $n>N$ 에 대하여 $f^n(U)\cap V\neq\varnothing$ 이면 f 는 위상혼합적이다고 말한다. 계 $(X,\ f)$ 의 2중직적 $(X\times X,\ f\times f)$ 가 위상이행적이면 주어진 계는 약혼합적이다고 말한다.

정의 6[8] $(X,\ d)$ 를 거리공간, $f:X\to X$ 는 련속넘기기라고 하자. 만일 $\underline{\lim_{n\to\infty}}\ d(f^n(x),\ f^n(y))=0$ 이 성립하면 $x,\ y\in X$ 는 서로 접근적이다고 말한다. $X\times X$ 의 모든 접근쌍들의 모임을 $\mathrm{Prox}(f)$ 로 표시하며 매 $x\in X$ 에 대하여 x 에 접근적인 $y\in X$ 들의 모임을 x 의 접근세포라고 부르고 $\mathrm{Prox}_f(x)$ 로 표시한다.

2. 기 본 내 용

여기서는 비자명한 거리공간 $(X,\ d)$ 에 대하여 고찰한다. 비자명하다는것은 X 가 한 점모임이 아니라는것을 의미한다.

보조정리 $(X,\ d)$ 는 콤팍트거리공간이고 $f:X\to X$ 가 리－요크예민하면 어떤 $\delta>0$ 이 있어서 내부가 비지 않은 X 의 임의의 콤팍트모임 J 에 대하여 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\ diam(f^n(J))\geq\delta$ 가 성립한다.

증명 $f:X\to X$ 가 리－요크예민하므로 임의의 콤팍트모임 $J(\mathrm{int}\,J\neq\varnothing)$ 에 대하여 어떤 $(x,\ y)\in J\times J$ 가 있어서 $(x,\ y)$ 가 리－요크쌍을 이룬다. 그러므로 어떤 $\delta>0$ 이 있어서

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\ d(f^n x,\ f^n y)\geq\delta,\ \underline{\lim_{n\to+\infty}}\ d(f^n x,\ f^n y)=0$$

이 성립하며 따라서 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\ diam(f^n(J))\geq\overline{\lim_{n\to\infty}}\ d(f^n(x),\ f^n(y))\geq\delta$ 가 성립한다.(증명끝)

명제 1[9] $(X,\ d)$가 콤팍트거리공간이고 $f: X \to X$가 련속넘기기라고 할 때 $(X,\ f)$가 위상이행적이고 일반적카오스성을 가지면 $(X,\ f)$는 리－요크의미에서 카오스적이다.

정리 1 f는 콤팍트거리공간 $(X,\ d)$우의 련속넘기기라고 할 때 f가 리－요크예민하고 $\mathrm{Prox}(f)$가 $X \times X$에서 조밀하면 계 $(X,\ f)$는 일반적카오스이다.

증명 보조정리로부터 어떤 $\delta > 0$이 있어서 임의의 콤팍트모임 $J(\mathrm{int} J \neq \varnothing)$에 대하여 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, diam(f^n(J)) \geq 2\delta$가 성립한다. 이제

$$A(\delta) := \left\{(x,\ y) \in X \times X \mid \overline{\lim_{n\to\infty}}\, d(f^n(x),\ f^n(y)) \geq \delta\right\}$$

$$B(\delta) := \left\{(x,\ y) \in X \times X \mid \underline{\lim_{n\to\infty}}\, d(f^n(x),\ f^n(y)) \leq \delta\right\}$$

$$\Delta_\delta = \{(x,\ y) \in X \times X \mid d(x,\ y) < \delta\},\ \ \overline{\Delta}_\delta = \{(x,\ y) \in X \times X \mid d(x,\ y) \leq \delta\}$$

로 놓자. 그러면 Δ_δ는 열린모임이고 $\overline{\Delta}_\delta$는 닫긴모임이다.

$$A_n(\varepsilon) = \{(x,\ y) \in X \times X \mid \exists i \geq n,\ d(T^i(x),\ T^i(y)) > \varepsilon\} = \\ = \bigcup_{i\geq n} (f \times f)^{-i}(X \times X \setminus \overline{\Delta}_\varepsilon)$$

로 정의하자. 그러면 모임 $A_n(\varepsilon)$은 열린모임이고 $A(\delta) = \bigcap\limits_{k\geq 1}\bigcap\limits_{n\geq 0} A_n(\delta - 1/k)$이므로 따라서 $A(\delta)$는 G_δ－모임이다.

이와 류사하게

$$B_n(\varepsilon) = \{(x,\ y) \in X \times X \mid \exists i \geq n,\ d(T^i(x),\ T^i(y)) < \varepsilon\} = \bigcup_{i\geq n} (f \times f)^{-i}(\Delta_\varepsilon)$$

로 놓으면 모임 $B_n(\varepsilon)$은 열린모임이고 $B(\delta) = \bigcap\limits_{k\geq 1}\bigcap\limits_{n\geq 0} B_n(\delta + 1/k)$는 G_δ－모임이다. 그러므로 $A(\delta)$와 $B(\delta)$는 G_δ－모임이고 $LY(f,\ \delta) = A(\delta) \cap B(0)$이다.

이제 $k \geq 0,\ \eta < \delta$에 대하여 $A_k(\eta)$가 조밀하다는것을 증명하자.

내부가 비지 않은 임의의 콤팍트모임 $J_1,\ J_2$에 대하여 보조정리로부터 어떤 $n \geq k$가 있어서 $diam(f^n(J_1)) \geq 2\delta > 2\eta$이다. 그러므로 어떤 $x,\ x' \in J_1$이 있어서 $d(f^n(x),\ f^n(x')) > 2\eta$이다. 이제 $y \in J_2$라고 할 때

$$d(f^n(x),\ f^n(y)) + d(f^n(x'),\ f^n(y)) \geq d(f^n(x),\ f^n(x')) > 2\eta$$

이므로 $d(f^n(x),\ f^n(y)) > \eta$ 혹은 $d(f^n(x'),\ f^n(y)) > \eta$이다.

따라서 $(x,\ y) \in A_k(\eta)$ 혹은 $(x',\ y) \in A_k(\eta)$이므로 $A_k(\eta)$는 조밀하다. 그러므로 베르정리에 의하여 $A(\delta)$는 조밀한 G_δ－모임이다.

한편 $B(0) = \mathrm{Prox}(f)$이고 $\mathrm{Prox}(f)$가 $X \times X$에서 조밀하므로 $B(0)$은 $X \times X$의 조밀한 G_δ－모임이다. 따라서 $LY(f,\ \delta)$는 $X \times X$의 조밀한 G_δ－모임이므로 $(X,\ f)$는 일반적카오스이다.(증명끝)

명제 1과 정리 1로부터 다음의 정리를 얻는다.

정리 2 f는 콤팍트거리공간 $(X,\ d)$우의 련속넘기기라고 할 때 f가 위상이행적이고 리－요크예민하며 $\mathrm{Prox}(f)$가 $X \times X$에서 조밀하면 계 $(X,\ f)$는 리－요크의미에서 카

오스적이다.

명제 2[6] $(X,\ d)$가 콤팍트거리공간이고 $f:X\to X$가 련속넘기기라고 할 때 $(X,\ f)$가 약혼합적이면 임의의 $x\in X$에 대하여 $\mathrm{Prox}_f(x)$는 X에서 조밀하다.

명제 3[6] $(X,\ d)$가 콤팍트거리공간이고 $f:X\to X$가 련속넘기기라고 할 때 $(X,\ f)$가 약혼합적이면 리－요크예민성을 가진다.

한편 계가 약혼합성을 가지면 위상이행적이므로 정리 2로부터 다음의 정리를 얻게 된다.

정리 3 $(X,\ d)$가 콤팍트거리공간이고 $f:X\to X$가 련속넘기기라고 할 때 $(X,\ f)$가 약혼합적이면 리－요크의미에서 카오스적이다.

참 고 문 헌

[1] B. Du; Bull. Inst. Math. Acad. Sin., 26, 2, 85, 1998.

[2] E. Akin et a1.; Nonlinearity, 16, 4, 1421, 2003.

[3] J. Guckenheimer; Comm. Math. Phys., 70 133, 1979.

[4] J. Li et a1.; Acta. Math. Sin.,(Engl. Ser.) 32, 1, 83, 2016.

[5] R. L. Devaney; An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, Addison-Wesley Publishing Company Advanced Book Program, 60～147, 1989.

[6] S. Kolyada; Topological Dynamics: Minimality, Entropy and Chaos, Zentrum Mathematik Technische Universit¨at M¨unchen John-von-Neumann Lecture, 1～13, 2013.

[7] S. Ruette; Chaos for Continuous Interval Maps a Survey of Relationship between the Various Sorts of Chaos, a http://www.math.u-psud.fr/~ruette/articles/chaos-int.pdf, 100～116, 2003.

[8] W. Huang et a1.; J. Differential Equations, 260, 6800, 2016.

[9] W. Huang et a1.; Topol. Appl., 117, 259, 2002.

주체108(2019)년 3월 15일 원고접수

Relationship between Li-Yorke Sensitivity and Li-Yorke Chaos

Kim Jin Hyon

In this paper, we study the relationship between Li-Yorke sensitivity and Li-Yorke chaos under some assumptions. And using this relationship, we show that weak mixing system is chaotic in the sense of Li-Yorke.

Key words: Li-Yorke sensitivity, Li-Yorke chaos