김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체106(2017)년 제63권 제12호 Vol. 63 No. 12 JUCHE106(2017).

파라메터를 가지는 한가지 비선형분수계미분방정식의 경계값문제에서 비령풀이의 존재구간결정

석경실, 박순애

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《수학은 모든 자연과학의 기초로 될뿐아니라 사회현상을 연구하는데서도 중요한 수단으로 됩니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제10권 478페지)

최근에 비선형분수계미분방정식의 경계값문제의 정인풀이의 존재성의 충분조건, 비령풀이를 가지게 되는 파라메터구간의 결정에 많은 주의가 돌려졌다.

선행연구[1]에서는 분수계미분방정식의 경계값문제

$$D_{0+}^{\alpha}u(t)=f(t,\ u(t))\ (0<t<1),\ u(0)=u(1)=u'(0)=u'(1)=0,\ 3<\alpha\le 4 \qquad (1)$$

에 대한 정인풀이의 존재성문제를 론의하였다.

선행연구[2]에서는 경계값문제 (1)에 대응되여 파라메터를 가지는 분수계경계값문제

$$D_{0+}^{\alpha}u(t)=\lambda f(t,\ u(t))\ (0<t<1),\ u(0)=u(1)=u'(0)=u'(1)=0,\ 3<\alpha\le 4 \qquad (2)$$

의 정인풀이가 존재하게 되는 파라메터구간의 결정문제를 론의하였다.

론문에서는 경계값문제 (2)의 오른변에 미지함수의 분수계도함수가 포함되여있는 경우 즉 다음의 비선형다항분수계미분방정식의 경계값문제의 비령풀이가 적어도 하나 존재하게 되는 파라메터구간결정문제를 론의하였다.

$$D_{0+}^{\alpha}u(t)=\lambda f(t,\ u(t),\ D_{0+}^{\beta}u(t))\ (0<t<1),\ u(0)=u(1)=u'(0)=u'(1)=0,\ 3<\alpha<4,\ 0<\beta<\alpha \quad (3)$$

여기서 $f\in C[0,\ 1]$이고 $D_{0+}^{\alpha},\ D_{0+}^{\beta}$는 리만-류빌분수계도함수이다.

정리 1 $3<\alpha\le 4,\ 0<\beta<1,\ 3<\alpha-\beta<4$일 때 경계값문제 (3)의 풀이 $u(t)$에 대하여 $x(t):=D_{0+}^{\beta}u(t)$는 $C[0,\ 1]$에서 다음의 적분방정식을 만족시킨다.

$$x(t)=\lambda\int_0^1 G(t,\ s)f(s,\ I_{0+}^{\beta}x(s),\ x(s))ds,\ \ 0<t<1 \qquad (4)$$

여기서 $G(t,\ s)$는 다음과 같이 정의되는 함수이다.

$$G(t,\ s)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\begin{cases}(t-s)^{\alpha-1}+(1-s)^{\alpha-2}t^{\alpha-\beta-2}[(s-t)+(\alpha-\beta-2)(1-t)s], & 0\le s\le t\le 1\\ (1-s)^{\alpha-2}t^{\alpha-\beta-2}[(s-t)+(\alpha-\beta-2)(1-t)s], & 1\ge s>t\ge 0\end{cases}$$

정리 2 $x(t)$가 $C[0,\ 1]$에서 방정식 (4)의 풀이이면 $u(t)=I_{0+}^{\beta}x(t)$는 문제 (3)의 풀이이다.

증명 식 (4)와

$$x(t)=\lambda I_{0+}^{\mu}f(t,\ I_{0+}^{\beta}x(t),\ x(t))+\left(\frac{\lambda\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\mu)}(\alpha-2)\ t^{\mu-1}-\frac{\lambda\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\mu-1)}t^{\mu-2}\right)I_{0+}^{\alpha}f(t,\ I_{0+}^{\beta}x(t),\ x(t))dt\,|_{t=1}+$$

$$+\left(\frac{\lambda\Gamma(\alpha-1)}{\Gamma(\mu-1)}t^{\mu-2}-\frac{\lambda\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\mu)}t^{\mu-1}\right)I_{0+}^{\alpha-1}f(t,\ I_{0+}^{\beta}x(t),\ x(t))dt\,|_{t=1}$$

이 같은 식이므로 $x(t)$는 다음의 방정식을 만족시킨다.

$$I_{0+}^{\beta}x(t)=\lambda I_{0+}^{\mu+\beta}f(t,\ I_{0+}^{\beta}x(t),\ x(t))-$$
$$-\lambda\Gamma(\alpha)/\Gamma(\mu)(I_{0+}^{\alpha-1}f(t,\ I_{0+}^{\beta}x(t),\ x(t))|_{t=1}-(\alpha-2)I_{0+}^{\alpha}f(t,\ I_{0+}^{\beta}x(t),\ x(t))|_{t=1})\,I_{0+}^{\beta}\,t^{\mu-1}-$$
$$-\lambda\Gamma(\alpha-1)/\Gamma(\mu-1)((\alpha-1)I_{0+}^{\alpha}f(t,\ I_{0+}^{\beta}x(t),\ x(t))|_{t=1}-I_{0+}^{\alpha-1}f(t,\ I_{0+}^{\beta}x(t),\ x(t))|_{t=1})I_{0+}^{\beta}t^{\mu-2}$$

따라서

$$u(t)=\lambda I_{0+}^{\alpha}f(t,\ u(t),\ D_{0+}^{\beta}u(t))-$$
$$-\lambda(I_{0+}^{\alpha-1}f(t,\ u(t),\ D_{0+}^{\beta}u(t))|_{t=1}-(\alpha-2)I_{0+}^{\alpha}f(t,\ u(t),\ D_{0+}^{\beta}u(t))|_{t=1})\,t^{\alpha-1}- \tag{5}$$
$$-\lambda((\alpha-1)I_{0+}^{\alpha}f(t,\ u(t),\ D_{0+}^{\beta}u(t))|_{t=1}-I_{0+}^{\alpha-1}f(t,\ u(t),\ D_{0+}^{\beta}u(t))|_{t=1})t^{\alpha-2}$$

이 성립되며 이 식의 량변에 D_{0+}^{α}를 적용하면 $D_{0+}^{\alpha}u(t)=\lambda f(t,\ u(t),\ D_{0+}^{\beta}u(t))$를 얻는다. 즉 $u(t)=I_{0+}^{\beta}x(t)$는 문제 (3)의 방정식을 만족시킨다.

이제 경계조건이 만족되는가를 보자.

식 (5)로부터 $u(0)=0$은 분명하고

$$u(1)=\lambda I_{0+}^{\alpha}f(t,\ u(t),\ D_{0+}^{\beta}u(t))|_{t=1}-$$
$$-\lambda(I_{0+}^{\alpha-1}f(t,\ u(t),\ D_{0+}^{\beta}u(t))|_{t=1}-(\alpha-2)I_{0+}^{\alpha}f(t,\ u(t),\ D_{0+}^{\beta}u(t))|_{t=1})-$$
$$-\lambda((\alpha-1)I_{0+}^{\alpha}f(t,\ u(t),\ D_{0+}^{\beta}u(t))|_{t=1}-I_{0+}^{\alpha-1}f(t,\ u(t),\ D_{0+}^{\beta}u(t))|_{t=1})=0$$

이 성립되며

$$u'(t)=\lambda I_{0+}^{\alpha-1}f(t,\ u(t),\ D_{0+}^{\beta}u(t))-$$
$$-\lambda(I_{0+}^{\alpha-1}f(t,\ u(t),\ D_{0+}^{\beta}u(t))|_{t=1}-(\alpha-2)I_{0+}^{\alpha}f(t,\ u(t),\ D_{0+}^{\beta}u(t))|_{t=1})(\alpha-1)\,t^{\alpha-2}-$$
$$-\lambda((\alpha-1)I_{0+}^{\alpha}f(t,\ u(t),\ D_{0+}^{\beta}u(t))|_{t=1}-I_{0+}^{\alpha-1}f(t,\ u(t),\ D_{0+}^{\beta}u(t))|_{t=1})(\alpha-2)\,t^{\alpha-3}$$

이므로 $u'(0)=0$은 분명하고

$$u'(1)=\lambda I_{0+}^{\alpha-1}f(t,\ u(t),\ D_{0+}^{\beta}u(t))|_{t=1}-\lambda I_{0+}^{\alpha-1}f(t,\ u(t),\ D_{0+}^{\beta}u(t))|_{t=1}\,(\alpha-1)+$$
$$+\lambda(\alpha-2)(\alpha-1)I_{0+}^{\alpha}f(t,\ u(t),\ D_{0+}^{\beta}u(t))|_{t=1}-\lambda(\alpha-1)(\alpha-2)I_{0+}^{\alpha}f(t,\ u(t),\ D_{0+}^{\beta}u(t))|_{t=1}+$$
$$+\lambda I_{0+}^{\alpha-1}f(t,\ u(t),\ D_{0+}^{\beta}u(t))|_{t=1}\,(\alpha-2)=0$$

이 성립된다. 결국 $u(t)=I_{0+}^{\beta}x(t)$는 경계조건도 만족시킨다.(증명끝)

다음 비령풀이를 가지는 파라메터구간을 결정하기 위하여 $X:=C[0,\ 1]$이라고 하자.

식 (4)의 오른변을 $Tx(t)$로 표시하고 식 (4)를 연산자방정식형태로 쓰면 다음과 같다.

$$x=T\,x,\ \ x\in C[0,\ 1]$$

분명히 f의 자기변수에 관한 련속성으로부터 T는 X에서 련속이다.

보조정리 1 $\Omega\subset X$를 유계모임 즉 $\exists M_0>0:\forall u\in\Omega,\ \|u\|_{C[0,\ 1]}\le M_0$이라고 하면 $T(\Omega)$는 $C[0,\ 1]$의 상대콤팍트모임이다.

이 보조정리로부터 연산자 T의 완전련속성이 나온다.

보조정리 2 f가 유계 즉 $\forall t,\ s,\ \upsilon\in D(f),\ \exists M_f>0\,;\,|f(t,\ s,\ \upsilon)|\le M_f$ 이면 $V=\{u\in E\,|\,u=\rho Tu,\ \ 0<\rho<1\}$은 유계이다.

정리 3 f가 유계이고 $f(s,\ 0,\ 0)\ne 0$이면 $\forall\lambda\in\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$에 대하여 적분방정식 (4)는 비령풀이를 가진다.

정리 4 f 에 대하여 $f(s, 0, 0)\neq 0$ 이고 부아닌 련속함수 $m(t),\ a_1(t),\ a_2(t)$ 들이 존재하여 $|f(t,\ z_1,\ z_2)|\leq m(t)+a_1(t)|z_1|^{\lambda_1}+a_2(t)|z_1|^{\lambda_2},\ 0<\lambda_1,\ \lambda_2<1$ 이 성립된다는 조건을 만족시킨다고 할 때 $\lambda\in\bigcup_W(0)\setminus\{0\}$ 이면 적분방정식 (4)는 비령풀이를 가진다. 여기서

$$W:=\int_0^1\psi(s)\left(m(s)+a_1(s)\left(\frac{s^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\right)^{\lambda_1}+a_2(s)\right)ds,\ \ \psi(s):=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}[(1-s)^{\alpha-1}+(\alpha-\beta-1)(1-s)^{\alpha-2}s].$$

정리 5 f 가 휠데르련속 즉

$$|f(s,\ z_1,\ z_2)-f(s,\ y_1,\ y_2)|\leq l_1(s)|z_1-y_1|^{\lambda_1}+l_2(s)|z_2-y_2|^{\lambda_2},\ \ 0<\lambda_1,\ \lambda_2<1$$

이라고 하자. 그리고 $f(s, 0,\ 0)\neq 0$ 이라고 하자.

만일 $\lambda\in\bigcup_W(0)\setminus\{0\}$ 이면 적분방정식 (4)는 비령풀이를 가진다. 여기서

$$W:=\int_0^1\psi(s)\cdot\left(|f(s,\ 0,\ 0)|+l_1(s)\left(\frac{s^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\right)^{\lambda_1}+l_2(s)\right)ds\ .$$

증명 $\Omega:=\{u\mid \|u\|<R,\ R>1\}$ 이라고 하면 임의의 $u\in\partial\Omega$ 에 대하여

$$|Tu(t)|\leq\lambda|\left(\int_0^1|G(t,s)|\cdot|f(s,\ 0,\ 0)|ds+\int_0^1|G(t,\ s)|\cdot l_1(s)|I_{0+}^\beta u(s)|^{\lambda_1}\ ds+\int_0^1|G(t,\ s)|\cdot l_2(s)|u(s)|^{\lambda_2}\ ds\right)$$

이므로 $|Tu(t)|\leq|\lambda|\int_0^1\psi(s)\cdot\left(|f(s,\ 0,\ 0)|+l_1(s)\left(\frac{s^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\right)^{\lambda_1}\|u\|^{\lambda_1}+l_2(s)\|u\|^{\lambda_2}\right)ds$ 이다.

이때 $|Tu(t)|\leq R|\lambda|\int_0^1\psi(s)\cdot\left(|f(s,\ 0,\ 0)|+l_1(s)\left(\frac{s^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\right)^{\lambda_1}+l_2(s)\right)ds\leq R$ 가 성립되므로 T 는 $\overline{\Omega}$ 에서 부동점을 가진다.

$\lambda\neq 0$ 이므로 이 부동점은 적분방정식 (4)의 비령풀이이다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] X. Xu et al.; Nonlinear Anal., 71, 4676, 2009.

[2] Shurong Sun et al.; Ann. Funct. Anal., 4, 1, 25, 2013.

주체106(2017)년 8월 5일 원고접수

The Determination of Existence Interval of Nonzerosolution in the Boundary Value Problem for a Nonlinear Fractional Differential Equation with Parameter

Sok Kyong Sil, Pak Sun Ae

We consider the determination of existence interval of nonzerosolution in the boundary value problem for a nonlinear multiterm fractional differential equation with parameter and obtain some sufficient conditions. Here derivative is the Riemann–Liouville fractional derivative.

Key word: Riemann–Liouville fractional derivative