김일성종합대학학보 수 학

주체107(2018)년 제64권 제3호

대중봉사계의 도착속도와 봉사속도조종에서 할인소득의 로랑합렬전개

백창성, 전용철

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《현시대는 과학기술의 시대이며 과학기술의 발전수준은 나라의 종합적국력과 지위를 규정하는 징표로 됩니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 38페지)

선행연구[3]에서는 대중봉사계 M/M/1에서 요청들의 입장과 봉사속도의 조종문제를 연구하였다. 조종기는 매 상태에서 봉사속도를 선택하며 도착하는 요청들을 거절할수 있다.

선행연구[4]에서는 대중봉사계 M/M/1/K에서 계의 상태에 따라 요청들의 입장을 조종할 때의 작업주기에 대하여, 선행연구[1]에서는 할인소득을 최대화하는 도착속도와 봉사속도의 동시적조종에서 할인최량방략의 존재성에 대하여 연구하였다.

선행연구[5]에서는 련속시간조종마르꼬브사슬에서의 로랑합렬전개에 대하여 론의하였다.

론문에서는 대중봉사계의 도착속도와 봉사속도조종에서 할인소득의 로랑합렬전개에 대하여 론의하였다.

우리는 선행연구[2]에서와 같은 대중봉사계를 생각한다.

체계도 선행연구[2]에서와 같은 마르꼬브결정과정으로 서술하며 이행속도 $q(j|i,\ a(i))$ 역시 선행연구[2]에서와 같다.

$K=\{(i,\ a(i)): i\in S,\ a(i)\in A(i)\}$라고 할 때 소득함수는 K에서 정의되는 함수로서

$$r(i,\ a(i))=-p_0 i-c(i,\ a(i))$$

이다. $\{S,\ A(i),\ q(j|i,\ a(i)),\ r(i,\ a(i))\}$가 주어졌을 때 시간 t에 따르는 상태 i의 변화를 나타내는 과정 $x(t)$는 마르꼬브결정과정이다.

초기상태가 $i\in S$일 때 방략 $\pi=(\pi_t)\in\Pi$의 기대할인비용은 다음과 같이 정의된다.

$$J_\alpha(i,\ \pi)=\mathrm{E}\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} r(x(t),\ \pi_t)dt\right]$$

할인최량화문제에서 최량값함수는 모든 초기상태 $i\in S$에 대하여 $J_\alpha^*(i)=\inf_{\pi\in\Pi} J_\alpha(i,\ \pi)$이다. 할인소득최량방략의 존재성은 선행연구[1]에서 증명되였다.

확정정상방략들의 모임을 F로 표시한다.

매 $f\in F$에 대하여 마르꼬브과정 $\{x(t)\}$는 유일한 불변확률측도 μ_f를 가진다.

이 측도는 이행확률함수를 $P_f(i,\ t,\ j)$라고 할 때 모든 $j\in S$에 대하여 $i\in S$와 독립적으로 $\mu_f(j)=\lim_{t\to\infty} p_f(i,\ t,\ j)$를 만족시키므로 $\mu_f(w)=\sum_{j\in S} w(j)\mu_f(j)\le \dfrac{\lambda+\mu+a_1^1+a_2^1}{\mu-\lambda}$이다.

S우의 임의의 가측함수 $w\ge 1$에 대하여 S우의 실가측함수 u의 무게붙은 상한노름을 생각한다.

$$\| u \|_w = \sup_{x\in S}\{w(x)^{-1} | u(x)|\}$$

그리고 공간 $B_w(S)=\{u : \| u\|_w < \infty\}$ 를 생각한다.

연산자 $H_f : B_w(S)\to B_w(S)$, $G_t^f : B_w(S)\to B_w(S)$ 들을 다음과 같이 정의한다.

$$(H_f u)(i) = \mathrm{E}\left[\int_0^\infty (u(x(t)-\mu_f(u)))dt\right],\ (G_t^f u)(i) = F_t^f u(i)-\mu_f(u),\ i\in S,\ t>0$$

여기서 $F_t^f u(i)=\mathrm{E}u(x(t))$ 이며 $u(i)=r(i,\ f(i))$ 이다.

보조정리 $0<\alpha<\mu-\lambda$ 이면 $\int_0^\infty \frac{t^k}{k!}(G_t^f u)(i)dt = (H_f^{k+1}u)(i)$, $i\in S$, $k=0, 1, 2, \cdots$ 이 성립된다.

증명 증명하려는 식의 왼변을 $(C_k^f u)(i)$ 로 즉 $u\mapsto C_k^f u = \int_0^\infty \frac{t^k}{k!}(G_t^f u)(i)dt$ 라고 하자.

$C_k^f u = H_f^{k+1}u$, $k=0, 1, 2, \cdots$ 이라는것을 밝히기 위하여 귀납법을 리용한다.

$C_k^f u$ 의 정의와 $H_f u$ 의 정의로부터 $C_0^f u = H_f u$ 이다.

이제 어떤 $k\geq 1$ 에 대하여 $C_{k-1}^f u = H_f^k u$ 라는것을 가정하면

$$C_k^f u = \int_0^\infty\left[\int_0^t \frac{s^{k-1}}{(k-1)!}ds\right](G_t^f u)dt = \int_0^\infty \frac{s^{k-1}}{(k-1)!}\left[\int_s^\infty (G_t^f u)dt\right]ds = \int_0^\infty \frac{s^{k-1}}{(k-1)!}\left[\int_0^\infty (G_s^f G_t^f u)dt\right]ds =$$

$$= \int_0^\infty \frac{s^{k-1}}{(k-1)!}G_s^f(H_f u)ds = C_{k-1}^f(H_f u) = H_k^{k+1}u$$

가 성립된다.(증명끝)

$V_\alpha(i,\ f,\ u) = \mathrm{E}\int_0^\infty e^{-\alpha t}u(x(t))dt$ 라고 표시하자.

정리 $0<\alpha<\mu-\lambda$ 이면 $V_\alpha(i,\ f,\ u) = \frac{1}{\alpha}\mu_f(u) + \sum_{k=0}^\infty (-\alpha)^k(H_f^{k+1}u)(i)$, $i\in S$ 이며 합렬은 w －노름에서 수렴한다.

증명 모든 $u\in B_w(S)$ 와 $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ 에 대하여 $M_k^f u(i) = \int_0^\infty \frac{(-\alpha t)^k}{k!}(G_t^f u)(i)dt$, $i\in S$ 이고 $\delta=\mu-\lambda$ 라고 할 때 $\| M_k^f u\|_w \leq \frac{\alpha^k}{\delta^{k+1}}L_2\| u\|_w$ 가 성립된다.

$0<\alpha<\mu-\lambda$ 이므로 $\sum_{k=0}^n M_k^f u = \sum_{k=0}^n\int_0^\infty \frac{(-\alpha t)^k}{k!}(G_t^f u)(i)dt$ 는 바나흐공간 $B_w(S)$ 에서의 꼬쉬렬로 되며 $L=2\left(1+\frac{\lambda+\mu+a_1^1-a_2^1}{\mu+a_2^0-\lambda-a_1^0}\right)$ 로 놓을 때 $\| G_t^f u\|_w \leq Le^{-\delta t}\| u\|_w$ 이므로 $\int_0^\infty e^{-\alpha t}(G_t^f u)(i)dt$ 로 수렴된다. 즉 다음의 식이 성립된다.

$$\sum_{k=0}^n (-\alpha)^k\int_0^\infty \frac{t^k}{k!}(G_t^f u)(i)dt = \int_0^\infty e^{-\alpha t}(G_t^f u)(i)dt$$

이 식으로부터 보조정리에 의하여 다음의 식이 성립된다.

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t}(G_t^f u)(i)dt = \sum_{k=0}^n (-\alpha)^k (H_f^{k+1}u)(i)$$

따라서 다음식이 성립된다.

$$V_\alpha(i,\ f,\ u) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}\mathrm{E}(u(x(t)))dt = \frac{1}{\alpha}\mu_f(u) + \int_0^\infty e^{-\alpha t}\mathrm{E}(u(x(t) - \mu_f(u)))dt =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\mu_f(u) + \int_0^\infty e^{-\alpha t}(G_t^f u)(i)dt = \frac{1}{\alpha}\mu_f(u) + \sum_{k=0}^n (-\alpha)^k (H_f^{k+1}u)(i)$$

(증명끝)

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보(자연과학), 63, 3, 20, 주체106(2017).

[2] **김일성**종합대학학보(자연과학), 63, 11, 19, 주체106(2017).

[3] K. M. Adusumilli et al.; Queueing Systems, 66, 2, 131, 2010.

[4] A. A. Hanbali et al.; Operations Research Letters, 38, 1, 2010.

[5] T. Prieto-Rumeau et al.; Mathematical Methods of Operations Research, 61, 123, 2005.

주체107(2018)년 3월 10일 원고접수

The Laurent Series Expansion of the Discounted Reward in a Control of Arrival and Service Rates of Queues

Paek Chang Song, Jon Yong Chol

We consider a joint control problem of arrival and service rates of the M/M/1 queue to maximize the discounted reward. When the arrival and service rates take continuous values, we propose the Laurent series expansion of the discounted reward to analyze the limiting behavior.

Key words: queue, control, discounted reward