김일성종합대학학보 수 학

주체108(2019)년 제65권 제1호

아핀면을 리용한 일반화된 균형적시합배치의 구성과 동형성에 대한 한가지 연구

김 성 철

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《자연과학전문교육에서는 학생들에게 기초과학지식을 깊이있게 가르쳐주며 매개 전공분야에서 기초로 되는 과학기술지식을 폭넓게 체득시키도록 하여야 합니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제18권 454페지)

GBTD$(k,\ m)$은 블로크들을 다음의 두가지 조건을 만족시키도록 $m\times(km-1)$형행렬로 배렬할수 있는 균형적불완전블로크배치, $(km,\ k,\ k-1)-$BIBD이다.

① 점모임의 모든 원소는 매 렬의 꼭 1개 블로크에 포함된다.

② 점모임의 모든 원소는 매 행의 기껏 k개 블로크에 포함된다.

선행연구[3]에서는 $k=2,\ 3$인 경우, 선행연구[6]에서는 $k=4$인 경우, 선행연구[4]에서는 $k=5$인 경우 GBTD$(k,\ m)$의 존재성을 연구하였으며 또한 차분행렬을 리용하여 n이 홀씨수의 제곱일 때 GBTD$(n,\ n)$의 구성법을 론의하였다.

선행연구[5]에서는 GBTD$(k,\ k)$와 동등한 k^2차행렬을 도입하여 p가 홀씨수이고 n이 2이상의 옹근수일 때 GBTD$(p^n,\ p^n)$을 구성하였으며 선행연구[1]에서는 아핀면을 리용하여 $n(n>2)$이 씨수의 제곱일 때 GBTD$(n,\ n)$을 구성할수 있는 방법론을 제기하였다.

론문에서는 n이 2의 제곱인 경우 GBTD$(n,\ n)$의 존재성문제를 해결하기 위하여 아핀면을 리용하여 n이 4인 경우 즉 GBTD$(4,\ 4)$를 구성하고 선행연구들에서 구성한 GBTD$(4,\ 4)$와 동형이 아니라는것을 밝혔다.

정의 1 V를 원소(점이라고 부른다.)가 v개인 모임, B를 V의 어떤 k－부분모임(블로크라고 부른다.)들의 모임이라고 할 때 V의 임의의 서로 다른 두 원소들이 B의 꼭 λ개의 블로크들에 같이 포함되면 순서붙은 쌍 $(V,\ B)$를 $(v,\ k,\ \lambda)-$균형적불완전블로크배치(Balanced Incomplete Block Design) 또는 $(v,\ k,\ \lambda)-$BIBD라고 부른다.

정의 2[2] $(V,\ B)$를 $(v,\ k,\ \lambda)-$BIBD라고 가정하자.

B의 서로 사귀지 않는 블로크들의 모임으로서 합이 V로 되는 모임을 $(V,\ B)$의 병렬클라스라고 부른다. 그리고 B의 병렬클라스들(r개)로의 분할을 분해라고 부른다.

만일 B가 적어도 하나의 분해를 가진다면 $(V,\ B)$를 분해가능BIBD라고 부른다.

정의 3 $(n^2,\ n,\ 1)-$BIBD를 n차아핀면이라고 부른다.

보조정리 1[6] $(v,\ k,\ \lambda)-$BIBD 는 $\lambda v(v-1)/[k(k-1)]$ 개의 블로크를 가진다. 즉 $(km,\ k,\ k-1)-$BIBD는 $m(km-1)$개의 블로크를 가진다.

정의 4 어떤 $(km,\ k,\ k-1)-$BIBD $(V,\ B)$에 대하여 B의 블로크들을 조건 ①, ②를 만족시키는 $m\times(km-1)$ 형행렬로 배렬할수 있다면 $(V,\ B)$를 일반화된 균형적시합배치(Generalized Balanced Tournament Design)라고 부르고 GBTD$(k,\ m)$으로 표시한다.

이제부터 GBTD를 대응되는 블로크들의 배렬로 생각한다.

보조정리 2 $GBTD(k,\ m)$의 모든 점은 $m-1$개 행들에는 k번 포함되며 나머지 한행에는 $k-1$번 포함된다.

정의들에서 보는바와 같이 GBTD는 분해가능BIBD이며 매 렬이 병렬클라스들이다.

정의 5 배치 $(V,\ B)$와 $(W,\ D)$에 대하여 어떤 완전단일넘기기 $\phi: V \to W$가 있어서 모든 $A \subseteq V$에 대하여 A의 B에서의 중복도(B의 블로크들중에서 A와 같은 블로크개수)가 $\phi(A)=\{\phi(x) \mid x \in A\}$의 D에서의 중복도와 같으면 이 두 배치는 동형이라고 말한다.

모든 정의옹근수 $m \neq 2$에 대하여 $GBTD(2,\ m)$, $GBTD(3,\ m)$이 존재하며[3] 모든 옹근수 $k \geq 2$에 대하여 $GBTD(k,\ 2)$는 존재하지 않는다.[6] 또한 $m \neq 2,\ 3$인 모든 정의옹근수 m에 대하여 $GBTD(4,\ m)$은 존재하며 $GBTD(4,\ 2)$, $GBTD(4,\ 3)$은 존재하지 않는다.[6] 그리고 $m \geq 62$이거나 $m \in \{5 \sim 18,\ 30,\ 42,\ 46,\ 48 \sim 50,\ 54 \sim 57\}$인 경우 $GBTD(5,\ m)$이 존재하며[4] n이 홀씨수의 제곱일 때 $GBTD(n,\ n)$이 존재한다.[4, 5]

GBTD의 구성법들을 보면 아핀면, HGBTD, FGDRP와 같은 보조적인 배치를 리용하는 방법, 차분행렬을 리용한 구성법, k가 홀씨수의 제곱일 때 $GBTD(k,\ k)$와 동등한 k^2차행렬의 구성에 의한 방법 등이 있다.

아핀면을 리용한 $GBTD(4,\ 4)$의 구성에 대하여 보자.

선행연구[2]에서는 동등관계를 하나 도입하여 아핀면의 분해가능성을 론증하였다.

보조정리 3 아핀면은 분해가능하며 서로 다른 병렬클라스에 속하는 임의의 두 블로크는 꼭 하나의 공통점을 포함한다.

이로부터 n차아핀면은 분해가능한 $(n^2,\ n,\ 1)-BIBD$이며 $n(n+1)$개의 블로크를 가진다. GBTD의 두 파라메터가 같은 경우 즉 $GBTD(k,\ k)$는 조건 ①, ②를 만족시키는 분해가능한 $(k^2,\ k,\ k-1)-BIBD$이다.

다음의 보조정리들로부터 $k(k>2)$가 씨수의 제곱일 때 $(k^2,\ k,\ k-1)-BIBD$가 존재한다는것은 쉽게 알수 있다.

보조정리 4 임의의 씨수의 제곱 q에 대하여 q차아핀면($(q^2,\ q,\ 1)-BIBD$)이 존재한다.

보조정리 5 $(v,\ k,\ \lambda_1)-BIBD$와 $(v,\ k,\ \lambda_2)-BIBD$가 존재하면 $(v,\ k,\ \lambda_1+\lambda_2)-BIBD$가 존재한다.

문제는 4차아핀면 즉 $(4^2,\ 4,\ 1)-BIBD$를 리용하여 합구성법으로 조건 ①, ②를 만족시키는 $(4^2, 4,\ 3)-BIBD$를 구성하는것이다.

아핀면의 블로크들을 매 렬에 하나의 병렬클라스를 놓는 방법으로 행렬형태로 배렬하고 매 행에 포함되여있는 점들의 출현회수를 고려하여 이러한 배렬 3개를 나란히 붙이면 GBTD를 얻을수 있다.

보조정리 4에서와 같이 구성한 4차아핀면의 배렬의 매 렬에서 블로크들의 적당한 자리바꾸기, 원소들의 치환, 얻어지는 아핀면들의 합구성으로 $GBTD(4,\ 4)$를 구성할수 있다.

실례 보조정리 4에서 체 $F_4=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ (여기서 $0=0,\ 1=1,\ 2=x,\ 3=x+1$)의 원소들을 리용하여 구성한 4차아핀면 $(16,\ 4,\ 1)-BIBD$의 원소들을 다음과 같이 표시하자.

$$\{00,\ 01,\ 02,\ 03,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 20,\ 21,\ 22,\ 23,\ 30,\ 31,\ 32,\ 33\}$$

보조정리 4에서와 같은 방법으로 구성되는 4차아핀면은 다음과 같다.

00	10	20	30	00	11	22	33	00	12	23	31	00	13	21	32	00	01	02	03
01	11	21	31	01	10	23	32	01	13	22	30	01	12	20	33	10	11	12	13
02	12	22	32	02	13	20	31	02	10	21	33	02	11	23	30	20	21	22	23
03	13	23	33	03	12	21	30	03	11	20	32	03	10	22	31	30	31	32	33

여기에서 3～5렬을 아래로 하나씩 순환밀기한 배렬

00	10	20	30	00	11	22	33	03	11	20	32	03	10	22	31	30	31	32	33
01	11	21	31	01	10	23	32	00	12	23	31	00	13	21	32	00	01	02	03
02	12	22	32	02	13	20	31	01	13	22	30	01	12	20	33	10	11	12	13
03	13	23	33	03	12	21	30	02	10	21	33	02	11	23	30	20	21	22	23

의 매 행들에서 원소들의 출현회수를 보면 다음과 같다.

00	01	02	03	10	11	12	13	20	21	22	23	30	31	32	33
2	0	0	2	2	2	0	0	2	0	2	0	2	2	2	2
3	3	1	1	1	1	1	1	0	2	0	2	0	2	2	0
0	2	2	0	1	1	3	3	2	0	2	0	1	1	1	1
0	0	2	2	1	1	1	1	1	3	1	3	2	0	0	2

정리 1 4차아핀면을 리용하여 GBTD(4, 4)를 구성할수 있다.

증명 실례에서 보는바와 같이 얻어진 4차아핀면의 원소들을 치환하면 원소들의 출현회수배렬의 렬치환이 이루어지며 4차아핀면의 블로크배렬의 행들을 치환하면 출현회수배렬의 행치환이 이루어진다. 보조정리 2로부터 GBTD(4, 4)의 블로크배렬의 매 행에서 매 원소들의 출현회수는 3 혹은 4가 되여야 한다.

합구성법으로 4차아핀면 3개로 GBTD(4, 4)를 구성하는 한가지 방도는 실례에서의 출현회수배렬에서 적당히 3 혹은 4개 렬씩 조를 무어 매 조에서 렬들의 치환을 진행하며 모든 조들이 2번째와 3번째 아핀면에서는 같은 행치환을 진행하여 출현회수배렬의 합의 모든 원소들이 3 혹은 4가 되도록 하는것이다.

이러한 조건들에 부합되는 행 및 렬치환들중 하나는 다음과 같다.

1개 조는 4개의 렬들로 이루어지는데 1, 4, 9, 13렬이다.

나머지 4개의 조들은 3개의 렬들로 이루어지는데 렬번호들은 각각 2, 3, 16; 5, 7, 10; 6, 8, 12; 11, 14, 15이다.

두번째 아핀면과 세번째 아핀면의 블로크배렬은 첫번째 아핀면의 블로크배렬에 $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$과 같은 행치환들을 각각 실시하여 얻는다.

두번째 아핀면은 첫번째 아핀면에서 점모임의 치환

$$\begin{pmatrix}00 & 01 & 02 & 03 & 10 & 11 & 12 & 13 & 20 & 21 & 22 & 23 & 30 & 31 & 32 & 33\\ 30 & 33 & 01 & 03 & 21 & 23 & 10 & 11 & 00 & 12 & 31 & 13 & 20 & 22 & 32 & 02\end{pmatrix}$$

를 적용하여 얻어지며 세번째 아핀면은 치환

$$\begin{pmatrix}00 & 01 & 02 & 03 & 10 & 11 & 12 & 13 & 20 & 21 & 22 & 23 & 30 & 31 & 32 & 33\\ 20 & 02 & 33 & 03 & 12 & 13 & 21 & 23 & 30 & 10 & 32 & 11 & 00 & 22 & 31 & 01\end{pmatrix}$$

을 적용하여 얻어진다.

결과 얻어지는 3개의 아핀면의 블로크배렬들은 다음과 같다.

00 10 20 30	00 11 22 33	03 11 20 32	03 10 22 31	30 31 32 33
01 11 21 31	01 10 23 32	00 12 23 31	00 13 21 32	00 01 02 03
02 12 22 32	02 13 20 31	01 13 22 30	01 12 20 33	10 11 12 13
03 13 23 33	03 12 21 30	02 10 21 33	02 11 23 30	20 21 22 23

03 11 13 02	03 10 12 20	01 21 12 02	01 23 13 20	00 12 31 13
33 23 12 22	33 21 13 32	30 10 13 22	30 11 12 32	30 33 01 03
30 21 00 20	30 23 31 02	03 23 00 32	03 21 31 22	20 22 32 02
01 10 31 32	01 11 00 22	33 11 31 20	33 10 00 02	21 23 10 11

33 21 32 31	33 23 30 22	02 23 32 00	02 21 30 01	12 13 21 23
02 13 10 22	02 12 11 31	20 21 11 22	20 23 10 31	20 02 33 03
03 23 11 01	03 21 10 00	33 12 10 01	33 13 11 00	30 10 32 11
20 12 30 00	20 13 32 01	03 13 30 31	03 12 32 22	00 22 31 01

이 3개의 아핀면을 나란히 붙여놓으면 GBTD(4, 4)의 블로크배렬이 얻어진다.(증명끝)

정리 1에서 얻은 GBTD(4, 4)는 단순배치(모든 블로크들의 중복도가 1인 배치)이다.

한편 선행연구[6]에서 구성한 GBTD(4, 4)는 중복도가 3인 블로크를 4개 가진다.

이로부터 다음의 사실이 곧 나온다.

정리 2 정리 1에서 구성한 GBTD(4, 4)는 선행연구[6]에서 구성한 GBTD(4, 4)와 동형이 아니다. 더우기 단순GBTD(4, 4)가 존재한다.

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보 수학, 64, 1, 87, 주체107(2018).

[2] D. R. Stinson; Combinatorial Designs, 13～108, Springer, 2004.

[3] E. R. Lamken; Des. Codes Cryptogr., 11, 37, 1997.

[4] J. X. Yin et al.; Des. Codes Cryptogr., 46, 211, 2008.

[5] P. P. Dai et al.; Des. Codes Cryptogr., 74, 15, 2015.

[6] S. C. Kim et al.; arXiv:1208.1920v1 [math.CO], 9, 2012.

[7] Y. M. Chee et al.; Electron. J. Comb., 20, 2, 2013.

주체107(2018)년 9월 8일 원고접수

A Study on the Construction of Generalized Balanced Tournament Designs using Affine Planes and Its Isomorphism

Kim Song Chol

We construct a GBTD(4, 4) using Affine plane and prove that it is not isomorphic to the GBTD(4, 4) constructed in the previous papers.

Key words: generalized balanced tournament design(GBTD), Affine plane