김일성종합대학학보 수 학 주체108(2019)년 제65권 제4호

비종점소득과 상태제한을 가진 미분경기에서 한가지 값함수계산도식에 대한 연구

장금성, 리국환

우리는 비종점소득과 상태제한을 가진 한가지 미분경기에서 값함수계산도식에 대한 연구를 진행하였다.

선행연구[4, 5]들에서 여러가지 값함수계산도식들이 제기되고 그에 기초하여 최량방략이 구성되였다. 그런데 이 계산도식들에 기초한 최량방략구성에서는 구성된 방략의 최량성평가를 몇가지 수치실험을 통하여 진행하였다.

론문에서는 비종점소득과 상태제한을 가진 미분경기에 대하여 최량방략구성가능한 한가지 값함수계산도식을 제안하고 그 성질들과 수렴성을 밝혔다.

비종점소득과 상태제한을 가진 미분경기[1]

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,\ x,\ u,\ v) \\ x \in \mathbf{R}^n,\ t \in I := [0,\ \theta],\ \ u \in P \subset \mathbf{R}^p,\ v \in Q \subset \mathbf{R}^q \\ \gamma(x(\cdot)) = \max\left\{ \min\limits_{t \in [0,\ \theta]} \sigma(t,\ x(t)),\ \ \max\limits_{t \in [0,\ \theta]} \chi(t,\ x(t)) \right\} \to \min\limits_{u},\ \max\limits_{v} \end{cases} \tag{1}$$

을 론의하자. 여기서 t는 시간변수, θ는 경기의 마감시각, x는 계의 상태벡토르, $u,\ v$는 각각 첫째 및 둘째 경기자의 조종벡토르들, $P,\ Q$는 각각 콤팍트들이다.

첫째 경기자(조종 u)의 목적은 소득을 최소화하는것이고 둘째 경기자(조종 v)의 목적은 최대화하는것이다.

가정 (1) 함수 $f(\cdot): I \times \mathbf{R}^n \times P \times Q \to \mathbf{R}^n$ 에 대한 가정

① 모든 변수들에 관하여 유계평등련속이다.(유계상수를 K로 표시)

② 변수 $t,\ x$에 관한 립쉬츠조건:

$$\| f(t_1,\ x_1,\ u,\ v) - f(t_2,\ x_2,\ u,\ v) \| \le L_f (| t_1 - t_2 | + \| x_1 - x_2 \|)$$

$$\forall (t_i,\ x_i) \in I \times \mathbf{R}^n,\ i = 1,\ 2,\ \forall u \in P,\ \forall v \in Q$$

③ 아이젝쓰조건:

$$\min_{u \in P} \max_{v \in Q} < s,\ f(t,\ x,\ u,\ v) >= \max_{v \in Q} \min_{u \in P} < s,\ f(t,\ x,\ u,\ v) > (=: H(t,\ x,\ s))$$

$$\forall (t,\ x) \in I \times \mathbf{R}^n,\ \forall s \in \mathbf{R}^n$$

(2) 함수 $\sigma(\cdot),\ \chi(\cdot): \mathbf{R}^{1+n} \to \mathbf{R}^1$에 대한 가정

① $\sigma(\cdot)$와 $\chi(\cdot)$는 유계립쉬츠련속함수이다.(립쉬츠상수를 $L_\sigma,\ L_\chi$로 표시)

② $\sigma(\cdot)$와 $\chi(\cdot)$는 모든 $t,\ x$에 대하여 관계 $\sigma(t,\ x) \ge \chi(t,\ x)$가 성립한다.

우의 가정하에서 임의의 초기위치 $(t,\ x) \in I \times \mathbf{R}^n$에 대하여 문제 (1)의 경기값 $w^*(t,\ x)$가 존재하며[1, 2] 이때 값함수 $(t,\ x) \mapsto w^*(t,\ x)$는 유계립쉬츠련속함수이다.[2]

값함수계산을 위한 유한계차연산자를 정의하는데 필요한 다중선형보간공식[3]을 론의하자.

이제

$$\Delta>0,\ \gamma>0,\ \Delta_{\xi_i}:=\gamma\Delta,\ i=\overline{1,\ n} \tag{2}$$

이라고 놓고 상태공간 $\mathbf{R}^n$의 직립방체그물

$$GR=\{x_{GR}=(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n)^{\mathrm{T}}:\ \xi_i=\xi_{0i}+j_i\Delta_{\xi_i},\ i=\overline{1,\ n},\ j_i=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\} \tag{3}$$

을 생각하자. 여기서 $\xi_{0i},\ i=\overline{1,\ n}$은 임의로 고정시킨 상수이다.

GR의 임의의 그물세포 $gd=\prod_{i=1}^{n}[\underline{\xi}_i,\ \overline{\xi}_i]$를 생각하자. 여기서 $\underline{\xi}_i,\ \overline{\xi}_i=\underline{\xi}_i+\Delta_{\xi_i}$는 그물세포 gd에 대한 ξ_i축의 아래웃값들이다. 선택된 직립방체에서 2^n개의 정점들에 번호를 붙이고 자리표를 $y_k^{gd},\ k=\overline{1,\ 2^n}$으로 표시하자. 그리고 매 번호 $k\in\overline{1,\ 2^n}$에 2진표시 $j^k=(j_1^k,\ \cdots,\ j_n^k)$를 대응시키자. 여기서

$$j_i^k=\begin{cases}0, & y_k^{gd}\text{의 } i\text{째 성분이 } \underline{\xi}_i\text{일 때}\\ 1, & y_k^{gd}\text{의 } i\text{째 성분이 } \overline{\xi}_i\text{일 때}\end{cases}$$

이다. 또한 다음의 함수를 도입한다.

$$\omega_k(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)=\prod_{i=1}^{n}(1-a_i)^{1-j_i^k}a_i^{j_i^k},\ k=\overline{1,\ 2^n}$$

여기서 i째 항은 j_i^k의 값에 따라 $1-a_i$ 또는 a_i이다. 이때 점 $x=(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n)^{\mathrm{T}}\in gd$에 대하여

$$\omega_k^{gd}(x)=\omega_k\left(\frac{\xi_1-\underline{\xi}_1}{\Delta_{\xi_1}},\ \cdots,\ \frac{\xi_n-\underline{\xi}_n}{\Delta_{\xi_n}}\right),\ k=\overline{1,\ 2^n}$$

이라고 놓으면 분명히 $\sum_{k=1}^{2^n}\omega_k^{gd}(x)=1$이다.

함수 $\varphi(\cdot):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^1$의 다중선형보간함수 $ML(\varphi)(\cdot)$을 다음과 같이 구성한다.

$$ML(\varphi)(x)=\sum_{k=1}^{2^n}\varphi(y_k^{gd(x)})\cdot\omega_k^{gd(x)}(x) \tag{4}$$

다음의 사실이 성립한다.

보조정리 1 함수 $\varphi(\cdot):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^1$이 립쉬츠상수 L_φ인 립쉬츠련속함수라고 하자. 이때 임의의 점 $x\in\mathbf{R}^n$에 대하여 다음의 부등식이 성립한다.

$$|ML(\varphi)(x)-\varphi(x)|\le\frac{\sqrt{n}}{2}L_\varphi\gamma\Delta$$

증명 다중선형보간함수 $ML(\varphi)(\cdot)$의 구성으로부터

$$|ML(\varphi)(x)-\varphi(x)|=\left|\sum_{k=1}^{2^n}\varphi(y_k^{gd(x)})\cdot\omega_k^{gd(x)}(x)-\varphi(x)\right|\le$$

$$\le \sum_{k=1}^{2^n} |\varphi(y_k^{gd(x)}) - \varphi(x)| \cdot \omega_k^{gd(x)}(x) \le L_\varphi \sum_{k=1}^{2^n} \| y_k^{gd(x)} - x \| \cdot \omega_k^{gd(x)}(x) \le$$

$$\le L_\varphi \max_{z \in gd(x)} \sum_{k=1}^{2^n} \| y_k^{gd(x)} - z \| \cdot \omega_k^{gd(x)}(z) = \frac{\sqrt{n}}{2} L_\varphi \gamma \Delta$$

이 성립한다. 여기서 최대값은 $gd(x)$ 의 중심점에서 얻어진다.(증명끝)

보통의 노름 $\|\cdot\|$ 과 함께 1－노름 $\|\cdot\|_1$ 을 생각하자. 여기서 $x = (\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$ 일 때 $\| x \|_1 := \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|$ 이다. 분명히 관계식 $\|x\| \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\|x\|$ 가 성립한다. 앞으로 보통의 노름의 경우에는 강조없이 리용하고 1－노름의 경우에는 매번 언급하기로 한다.

보조정리 2 함수 $\varphi(\cdot): \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^1$ 이 1－노름의 의미에서 립쉬츠상수 L_φ 인 립쉬츠련속함수라고 하자. 이때 임의의 $x_1,\ x_2 \in \mathbf{R}^n$ 에 대하여 다음의 부등식이 성립한다.

$$|ML(\varphi)(x_1) - ML(\varphi)(x_2)| \le L_\varphi \| x_1 - x_2 \|_1$$

경기값함수의 최량방략구성가능한 계산도식을 구성하기 위하여 한가지 계차연산자를 도입한다.

이제

$$\Delta > 0,\ \gamma > 0,\ \Delta_{\xi_i} := \gamma\Delta,\ i = \overline{1,\ n}$$

이라고 놓고 $t \in I,\ t + \Delta \in I$ 라고 하자. $t + \Delta$ 시각에 값함수 $x \mapsto w^*(t + \Delta,\ x)$ 의 근사함수로서 유계립쉬츠련속함수 $\varphi(\cdot): \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^1$ 이 주어진다고 하자.(립쉬츠상수를 L_φ 로 표시) 이때 연산자 $\varphi \mapsto \Pi_k(t,\ \Delta,\ \varphi)$ $(k = 1,\ 2)$ 를 각각 다음과 같이 정의한다.

$$\Pi_1(t,\ \Delta,\ \varphi)(x) := \begin{cases} \min\limits_{u \in P} \max\limits_{f \in cof(t,\ x,\ u,\ Q)} ML(\varphi)(x + \Delta f), & \Delta > 0 \\ \varphi(x), & \Delta = 0 \end{cases} \tag{5}$$

$$\Pi_2(t,\ \Delta,\ \varphi)(x) := \begin{cases} \max\limits_{v \in Q} \min\limits_{f \in cof(t,\ x,\ v,\ P)} ML(\varphi)(x + \Delta f), & \Delta > 0 \\ \varphi(x), & \Delta = 0 \end{cases} \tag{6}$$

정리 시간구간 I 의 분할 $\pi = \{0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_N = \theta\}$ (여기서 $\Delta = \tau_{i+1} - \tau_i,\ i = \overline{0,\ N-1}$) 에 대하여 연산자 Π_k $(k = 1,\ 2)$ 에 의한 근사도식이 다음의 공식들에 의하여 결정된다고 하자.

$$\overline{w}_\pi^k(\theta,\ x) = \max\{\sigma(\theta,\ x),\ \chi(\theta,\ x)\} = \sigma(\theta,\ x),\ x \in \mathbf{R}^n$$

$$\overline{w}_\pi^k(t,\ x) = \max\{\min\{\sigma(t,\ x),\ \Pi(t,\ \tau_{i+1} - t,\ \overline{w}_\pi(\tau_{i+1},\ \cdot))(x)\},\ \chi(t, x)\} \tag{7}$$

$$t \in [\tau_i,\ \tau_{i+1}),\ x \in \mathbf{R}^n,\ i = \overline{0,\ N-1}$$

이때 다음의 평가식이 성립한다.($k = 1,\ 2$)

$$\| \overline{w}_\pi^k - w^* \| \le C\sqrt{\Delta}$$

여기서

$$\| \overline{w}_\pi^k - w^* \| := \max_{(t,\ x) \in I \times \mathbf{R}^n} | \overline{w}_\pi^k(t,\ x) - w^*(t,\ x) |$$

이다.

참 고 문 헌

[1] N. D. Botkin et al.; Analysis, 31, 355, 2011.

[2] A. I. Subbotin et al.; Optimization of Guaranteed Result in Control Problems, Nauka, Moscow, 1～288, 1981.

[3] G. E. Ivanov; Differential Equations, 48, 4, 560, 2012.

[4] P. E. Souganidis; Journal of Differential Equations, 59, 1, 1985.

[5] Guo Bao-Zhu et al.; J. Syst. Sci. Complex, 3, 30, 782, 2017.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

An Approximation Scheme for Constructing the Value Function in the Differential Games with Nonterminal Payoffs and State Constraints

Jang Kum Song, Ri Kuk Hwan

In this paper, for the differential games with nonterminal payoffs and state constraints, we present an approximation scheme for constructing the value function and estimate its convergence.

Key words: differential game, value function