김일성종합대학학보 주체107(2018)년
(수학) 제64권 제1호

다중선택봉사, 고장을 고려한 2상반복봉사계의 특성연구

공련숙, 손정경

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《우리는 과학기술강국건설에 박차를 가하여 짧은 기간에 나라의 과학기술발전에서 새로운 비약을 이룩하며 과학으로 흥하는 시대를 열고 사회주의건설에서 혁명적전환을 가져와야 합니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 38페지)

론문에서는 정보통신망, 수송망, 경제관리체계의 모형화에서 많이 제기되는 한가지 형태의 봉사모형에 대한 특성을 해석하였다.

선행연구[1]에서는 봉사기구의 작업정비를 고려한 반복봉사계의 특성을 해석하였다.

선행연구[2]에서는 입구흐름의 우연적인 차단, 반결합, 선택적인 작업정비, 2개의 봉사위상을 가지는 $M^X/G/1$반복봉사계의 특성을 해석하였다.

선행연구[3]에서는 반복요청의 도착분포가 일반분포에 따르고 2개의 봉사위상을 가지는 $M/G/1$반복봉사계에 대하여 론의하였다.

1. 봉사모형에 대한 서술

도착률 λ에 따라 요청이 봉사계에로 뽜쏭과정에 따라 도착한다. 만일 요청이 도착하는 순간에 봉사기구가 비여있다면 그 요청은 즉시로 봉사를 받을수 있다. 그러나 요청이 도착하였을 때 봉사기구가 다른 요청에 대한 봉사를 진행하고있다면 그 요청은 $1-b$의 확률로 계를 리탈하거나 b의 확률로 궤도에서 기다리게 된다. 궤도에서 기다리던 요청들은 분포함수 $R(t)$, 라쁠라스－스틸테스변환(LST) $R^*(\theta)$에 따라 다시 봉사를 받기 위하여 계에로 도착한다.

모든 요청들은 1단계 봉사 FPS(first phase of service)를 받은 후 2단계의 봉사 SPS(second phase of service)는 p의 확률로 받을수도 있고 q의 확률로 계를 리탈할수도 있다. 2단계의 봉사를 받으려는 요청은 봉사류형을 임의로 선택하여 그에 따르는 봉사를 받을수 있다. 매 요청에 대하여 1단계의 봉사시간은 분포함수 $S_1(t)$, 라쁠라스－스틸테스변환(LST) $S_1^*(\theta)$이고 2단계의 봉사시간은 분포함수 $S_{2j}(t),\ 1\le j\le n$, 라쁠라스－스틸테스변환(LRT) $S_{2j}^*(\theta),\ 1\le j\le n$을 가진다고 하자. 처음으로 봉사기구에 도착하는 요청과 반복하여 들어오는 요청을 구별하기 위하여 처음 요청을 시초요청, 다시 들어오는 요청을 반복요청이라고 부르겠다.

봉사기구는 도착하는 시초요청과 궤도에 있는 반복요청이 없는 시각에는 즉시로 정비에 들어가는데 정비시간은 분포함수 $V(t)$, 라쁠라스－스틸테스변환(LRT) $V^*(\theta)$를 가진 우연량이라고 하자. 봉사기구는 요청에 대한 봉사를 진행하는 임의의 순간에 우연적으로 고

장이 발생할수도 있는데 그 분포는 정비시간의 분포와 같다고 하자.

설정한 봉사계에서 t시각 봉사계의 상태는 다음의 마르꼬브과정

$$\{N(t);\ t\ge 0\}=\{(C(t),\ X(t),\ \xi_0(t),\ \xi_1(t),\ \xi_{2j}(t),\ \xi_3(t)),\ t\ge 0,\ 1\le j\le n\}$$

으로 표시할수 있다.

2. 에르고드성조건

요청들에 대한 봉사가 끝나는 순간과 봉사기구에 대한 정비가 끝나는 순간들의 렬을 $\{t_n;\ n\in N\}$으로 표시하자. 그러면 우연벡토르렬 $Z_n=\{C(t_n+),\ X(t_n+)\}$는 주어진 봉사계에 대하여 마르꼬브사슬을 형성한다. 이 마르꼬브사슬의 상태공간은 $S=\{0,\ 1,\ 2_1,\ 2_2,\cdots,\ 2_n,\ 3\}\times N$으로 주어진다.

정리 1 마르꼬브사슬 $\{Z_n;\ n\in N\}$이 에르고드적이기 위한 필요충분조건은

$$\lambda b\left[E(S_1)+p\sum_{j=1}^{n}E(S_{2j})\right]<R^*(\lambda)$$

이다.

3. 봉사계의 정상분포

과정 $\{N(t),\ t\ge 0\}$에 대하여 다음의 상태확률을 정의하기로 하자.

$$p_0(t)=P\{C(t)=0,\ X(t)=0\}$$

$$p_n(x,\ t)dx=P\{C(t)=0,\ X(t)=n,\ x\le\xi_0(t)<x+dx\},\ t\ge 0,\ x\ge 0,\ n\ge 1$$

$$Q_{1,\,n}(x,\ t)dx=P\{C(t)=1,\ X(t)=n,\ x\le\xi_1(t)<x+dx\},\ t\ge 0,\ x\ge 0,\ n\ge 1$$

$$Q_{2j,\,n}(x,\ t)dx=P\{C(t)=2j,\ X(t)=n,\ x\le\xi_{2j}(t)<x+dx\},\ t\ge 0,\ x\ge 0,\ n\ge 1,\ 1\le j\le n$$

$$G_n(x,\ t)dx=P\{C(t)=3,\ X(t)=n,\ x\le\xi_3(t)<x+dx\},\ t\ge 0,\ x\ge 0,\ n\ge 0$$

봉사계의 상태방정식

$$\lambda p_0=\int_0^\infty G_0(x)\upsilon(x)dx \tag{1}$$

$$\frac{d}{dx}p_n(x)+[\lambda+Q(x)]p_n(x)=0,\ x>0,\ n\ge 1 \tag{2}$$

$$\frac{d}{dx}Q_{i,\,0}(x)+[\lambda+\mu_i(x)]Q_{i,\,0}(x)=\lambda(1-b)Q_{i,\,0}(x),\ x>0,\ i=1,\ 2 \tag{3}$$

$$\frac{d}{dx}Q_{i,\,n}(x)+[\lambda+\mu_i(x)]Q_{i,\,n}(x)=\lambda bQ_{i,\,n-1}(x)+\lambda(1-b)Q_{i,\,n}(x),\ n\ge 1,\ i=1,\ 2 \tag{4}$$

$$\frac{d}{dx}G_0(x)+[\lambda+\upsilon(x)]G_0(x)=\lambda(1-b)G_0(x),\ x>0 \tag{5}$$

$$\frac{d}{dx}G_n(x)+[\lambda+\upsilon(x)]G_n(x)=\lambda bG_{n-1}(x)+\lambda(1-b)G_n(x),\ \ n\ge 1 \tag{6}$$

표준화조건은 다음과 같다.

$$p_0+\sum_{n=1}^{\infty}p_n(x)dx+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{n}\int_0^{\infty}Q_{ij,\,n}(x)dx+\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}G_n(x)dx=1 \tag{7}$$

정리 2 정상성조건

$$\lambda b\left[E(S_1)+p\sum_{j=1}^{n}E(S_{2_j})\right]<R^*(\lambda)$$

이 성립하면 봉사기구가 비여있을 때 계에 있는 요청수의 정상상태분포를 구할수 있다.

정비중에 있을 확률은 다음과 같다.

$$p(z)=\left\{\frac{[1-V^*(\lambda b(1-z))]+V^*(\lambda b)\left[1-\left(q+p\sum_{j=1}^{n}S_{2_j}^*(\lambda b(1-z))\right)S_1^*(\lambda b(1-z))\right]}{V^*(\lambda b)\left\{[z+(1-z)R^*(\lambda)]\left[q+p\sum_{j=1}^{n}S_{2_j}^*(\lambda b(1-z))\right]S_1^*(\lambda b(1-z))-z\right\}}\right\}\cdot$$

$$\cdot z[1-R^*(\lambda)]P_0$$

$$Q_1(z)=P_0\left\{\frac{[1-V^*(\lambda b(1-z))][z+(1-z)R^*(\lambda)]+(1-z)R^*(\lambda)V^*(\lambda b)}{[z+(1-z)R^*(\lambda)]\left[q+p\sum_{j=1}^{n}S_{2_j}^*(\lambda b(1-z))\right]S_1^*(\lambda b(1-z))-z}\right\}\cdot$$

$$\cdot\frac{[1-S_1^*(\lambda b(1-z))]}{V^*(\lambda b)b(1-z)}$$

$$Q_2(z)=P_0\left\{\frac{[1-V^*(\lambda b(1-z))][z+(1-z)R^*(\lambda)]+(1-z)R^*(\lambda)V^*(\lambda b)}{[z+(1-z)R^*(\lambda)]\left[q+p\sum_{j=1}^{n}S_{2_j}^*(\lambda b(1-z))\right]S_1^*(\lambda b(1-z))-z}\right\}\cdot$$

$$\cdot p\left\{\frac{S_1^*(\lambda b(1-z))\left[1-\sum_{j=1}^{n}S_{2_j}^*(\lambda b(1-z))\right]}{V^*(\lambda b)b(1-z)}\right\}$$

$$G(z)=P_0\left[\frac{[1-V^*(\lambda b(1-z))]}{V^*(\lambda b)b(1-z)}\right]$$

$$P_0 = V^*(\lambda b)\left\{R^*(\lambda) - \lambda b\left[E(S_1) + p\sum_{j=1}^{n} E(S_{2j})\right]\right\}\left\{\lambda b E(V) + R^*(\lambda)V^*(\lambda b) + \right.$$

$$\left. + (1-b)\left\{\lambda E(V)R^*(\lambda) + \lambda\left[E(S_1) + p\sum_{j=1}^{n} E(S_{2j})\right]R^*(\lambda)V^*(\lambda b)\right\}\right\}^{-1}$$

4. 계의 특성값

주어진 반복봉사계의 특성값을 구하자. 미분방정식에서 $z=1$로 놓고 풀면 계에 있는 평균요청수는 다음과 같다.

$$L_s = \frac{Nr1}{Dr1} + \frac{Nr2}{Dr2}$$

$$Nr1 = \lambda^2 b^2\left[E(V^2) + 2E(V)(E(S_1) + p\sum_{j=1}^{n} E(S_{2j}))\right] +$$

$$+ 2\lambda b\left[E(V)(1 - R^*(\lambda)) + (E(S_1) + p\sum_{j=1}^{n} E(S_{2j}))R^*(\lambda)V^*(\lambda b)\right] +$$

$$+ (1-b)\lambda^2 b^2[E(S_1^2) + 2pE(S_1)E(S_2)]R^*(\lambda)V^*(\lambda b) +$$

$$+ 2\lambda b E(V)[R^*(\lambda) - 1] + \lambda^2 b^2 E(V^2)[R^*(\lambda) - 1]$$

$$Nr2 = \left\{\lambda E(V) + R^*(\lambda)V^*(\lambda b) + (1-b)\left\{\lambda\left[E(S_1) + p\sum_{j=1}^{n} E(S_{2j})\right]R^*(\lambda)V^*(\lambda b) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \lambda E(V)[1 - R^*(\lambda)]\right\}\right\}\left\{\lambda^2 b^2\left[E(S_1^2) + 2pE(S_1)\sum_{j=1}^{n} E(S_{2j}) + p\sum_{j=1}^{n} E(S^2{}_{2j})\right] + \right.$$

$$\left. + 2\lambda b\left[E(S_1) + p\sum_{j=1}^{n} E(S_{2j})\right][1 - R^*(\lambda)]\right\}$$

$$Dr1 = 2b\left\{\lambda b E(V) + R^*(\lambda)V^*(\lambda b) + (1-b)\left\{\lambda E(V)R^*(\lambda) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \lambda\left[E(S_1) + p\sum_{j=1}^{n} E(S_{2j})\right]R^*(\lambda)V^*(\lambda b)\right\}\right\}$$

$$Dr2 = 2\left\{R^*(\lambda) - \lambda b\left[E(S_1) + p\sum_{j=1}^{n} E(S_{2j})\right]\right\}\left\{\lambda b E(V) + R^*(\lambda)V^*(\lambda b) + \right.$$

$$\left. + (1-b)\left\{\lambda E(V)R^*(\lambda) + \lambda\left[E(S_1) + p\sum_{j=1}^{n} E(S_{2j})\right]R^*(\lambda)V^*(\lambda b)\right\}\right\}$$

참 고 문 헌

[1] D. Arivudainambi et al.; Opearch, 51, 3, 434, 2014.
[2] D. Arivudainambi et al.; International Journal of Information &Management Science, 23, 199, 2012.
[3] G. Choudhury.; International Journal of Information & Management Science, 20, 1, 2009.

주체106(2017)년 8월 10일 원고접수

Characteristics of Retrial Queueing Systems of Two Phases with Multi-Optional Services and Breakdowns

Kong Ryon Suk, Son Jong Gyong

In this paper we have studied the steady-state behavior of an $M^X/G/1$ retrial queueing system —with an additional second phase of multi-optional services and service interruptions—where breakdown randomly occurs at any instant when the server is serving the customers.

Key words: multi-optional service, retrial queueing system, breakdown