김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체105(2016)년 제62권 제3호 Vol. 62 No. 3 JUCHE105(2016).

하르웨블레트연산행렬에 의한 분수계적분과 분수계도함수의 한가지 고속계산방법

최희철, 서광복

직교토대함수족에 의한 근사는 과학과 기술의 많은 문제들에서 널리 응용되였다.

최근년간에 아주 일반적으로 리용된 직교함수족은 시누스－코시누스함수족, 블로크임풀스함수족, 르쟝드르다항식, 체비쉐브다항식, 라게르다항식과 직교웨블레트들이다.[1－4]

직교토대를 리용하는것은 론의하는 문제를 매우 간소화할뿐아니라 계산작업의 속도를 높일수 있게 한다.

많은 론문들에서 해당 웨블레트들의 연산행렬을 구성하고있으나 블로크임풀스함수의 연산행렬에 의한 하르웨블레트연산행렬의 구성방법이 정확히 밝혀진것이 없고 특히 오차해석이 명백히 해명되여있지 않다.

론문에서는 주어진 함수의 미끈성에 따르는 정확한 오차평가와 함께 토대개수의 선택문제를 론의한다.

함수 $y(t)$의 분수계적분은 $J_0^\alpha y(t)=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^t\frac{y(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau$와 같이 정의된다.

아래끝이 령인 캐푸터도함수 ${}^cD_0^\alpha y(t)$는 ${}^cD_0^\alpha y(t)=\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\displaystyle\int_0^t\frac{y'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau,\ \ \alpha\in(0,\ 1)$과 같이 정의된다. 이때 다음의 사실이 알려져있다.

$${}^cD_0^\alpha t^\mu=\frac{\Gamma(1+\mu)}{\Gamma(1+\mu-\alpha)}t^{\mu-\alpha},\quad 0<\alpha<\mu+1,\quad \mu>-1$$

$${}^cD_0^\alpha\circ J_0^\alpha y(t)=y(t),\quad J_0^\alpha\circ{}^cD_0^\alpha y(t)=y(t)-\sum_{k=0}^{n-1}y^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!},\quad n-1\le\alpha<n$$

이제 $r\in\boldsymbol{N},\ m=2^r$이라고 하자.

정의 1 [1] 다음의 식으로 규정되는 함수계를 블로크임풀스함수계(BPF)라고 부른다.

$$b_i(t)=\begin{cases}1, & i/m\le t<(i+1)/m\\ 0, & \text{기타}\end{cases},\quad i=\overline{0,\ m-1}$$

계 $\{b_i(t)\}$는 $b_i(t)b_j(t)=\begin{cases}b_i(t), & i=j\\ 0, & i\ne j\end{cases}$ (비교차성), $\displaystyle\int_0^1 b_i(t)b_j(t)dt=\begin{cases}1/m, & i=j\\ 0, & i\ne j\end{cases}$ (직교성조건)

가 성립되고 $X:=\displaystyle\bigcup_{r=0}^{\infty}\{b_i(t)\}_{i=0}^{2^r-1}$일 때 $\forall f\in L^2[0,\ 1]$, $\displaystyle\int_0^1 b_i(t)f(t)dt=0,\ \forall b_i\in X$이면 거의도처 $f=0$이며(완비성조건) $\operatorname{supp}b_i(x)=[i/m,\ (i+1)/m]$(국부성)이 성립되는 계이다.

정의 2[1] 구간 [0, 1]우에서 정의된 함수

$$h_0(t)=1/\sqrt{m}\,,\ \ h_i(t)=\frac{1}{\sqrt{m}}\begin{cases}2^{j/2}, & (k-1)/2^j<t\le(k-1/2)/2^j\\ -2^{j/2}, & (k-1/2)/2^j<t\le k/2^j\\ 0, & \text{기타}\end{cases}$$

들을 하르웨블레트족이라고 부른다. 여기서 $j,\ k$는 i의 옹근수분해이다.

정의 3[1] 임의의 $i\ge1,\ i\in Z$에 대하여 부등식 $i=k+2^j-1,\ 0\le j<i,\ 1\le k<2^j+1$을 만족시키는 옹근수쌍 $(j,\ k)$를 i의 옹근수분해라고 부른다.

하르웨블레트는 차수가 1인 다우베치즈웨블레트로서 웨블레트들가운데서 가장 단순한 표준직교웨블레트이다. 즉 $y\in L^2[0,\ 1]$이면 다음의 전개식이 성립된다.

$$y(t)=c_0h_0(t)+c_1h_1(t)+\cdots+c_{m-1}h_{m-1}(t)+\cdots,\quad c_j=m\int_0^1 y(t)h_j(t)dt$$

$H_m(t):=(h_0(t),\ h_1(t),\ \cdots,\ h_{m-1}(t))^{\mathrm{T}}$, $C_m^{\mathrm{T}}:=(c_0,\ c_1,\cdots,\ c_{m-1})$, $\Delta t:=1/m=1/2^r$, $t_k:=(k-0.5)\Delta t$, $k=1,\ \cdots,\ m$이라고 하자.

정의 4 $H_{\text{matrix}}:=\begin{pmatrix}h_0(t_1) & h_0(t_2) & \cdots & h_0(t_m)\\ h_1(t_1) & h_1(t_2) & \cdots & h_1(t_m)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ h_{m-1}(t_1) & h_{m-1}(t_2) & \cdots & h_{m-1}(t_m)\end{pmatrix}$을 점배치모임 (t_k)에 관한 하르웨블레트행렬이라고 부른다.

마찬가지로 블로크임풀스함수행렬 B_{matrix}도 정의할수 있으나 블로크임풀스함수의 정의로부터 $B_{\text{matrix}}=I$임을 알수 있다.

하르웨블레트행렬은 직교행렬이다. 즉 $H_{\text{matrix}}H_{\text{matrix}}^{\mathrm{T}}=H_{\text{matrix}}^{\mathrm{T}}H_{\text{matrix}}=I$이다. 여기서 I는 m차단위행렬이다.

정의 5 벡토르함수 $\Psi(t)=(\Psi_1(t),\ \Psi_2(t),\ \cdots,\ \Psi_m(t))^{\mathrm{T}}$에 대하여

$$(J_0^\alpha\Psi)(t):=(J_0^\alpha\Psi_1(t),\ J_0^\alpha\Psi_2(t),\ \cdots,\ J_0^\alpha\Psi(t)_m)^{\mathrm{T}}$$

로 리해한다. 편리상 $(J_0^\alpha\Psi)(t)$를 $J_0^\alpha\Psi(t)$로도 표시한다.

정의 6 $(J_0^\alpha\Psi)(t)=F_\Psi^\alpha\circ\Psi(t)$인 m차상수행렬 F_Ψ^α를 Ψ의 α계분수적분에 대한 연산행렬이라고 부른다.

보조정리[1] 블로크임풀스함수벡토르 $B(t)=(B_1(t),\ B_2(t),\cdots,\ B_m(t))^{\mathrm{T}}$의 연산행렬 F_B^α는

$$F_B^\alpha=\frac{1}{m^\alpha}\frac{1}{\Gamma(\alpha+2)}\begin{pmatrix}1 & \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_{m-1}\\ 0 & 1 & \xi_1 & \cdots & \xi_{m-2}\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \xi_{m-3}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \xi_k=(k+1)^{\alpha+1}-2k^{\alpha+1}+(k-1)^{\alpha+1}$$ 과 같다.

정리 1 하르웨블레트족 $H(t)=(h_0(t),\ h_1(t),\cdots,\ h_{m-1}(t))^{\mathrm{T}}$의 연산행렬 F_H^α는 다음과 같이 표시된다.

$$F_H^{\alpha} = H_{\text{matrix}} F_B^{\alpha} H_{\text{matrix}}^{\mathrm{T}}$$

먼저 분수계적분의 고속계산방법에 대하여 보자.

함수 $y(t)$ 가 알려졌다고 하고 하르웨블레트연산행렬을 리용하여 분수계적분의 t_k 점들에서의 근사값을 구하는 문제를 론의한다.

$r \in \boldsymbol{N},\ m = 2^r$, $y(t) \approx \sum_{k=0}^{m-1} c_k h_k(t) = C_m^{\mathrm{T}} H(t)$ 이므로 $y(t_k) \approx C_m^{\mathrm{T}} H(t_k),\ k = 1,\ \cdots,\ m$ 이다.

$Y := (y(t_1),\ y(t_2), \cdots,\ y(t_m))$ 이라고 하고 다음의 점배치방정식을 세운다.

$$Y = (y(t_1),\ y(t_2), \cdots,\ y(t_m)) = C_m^{\mathrm{T}} (H(t_1),\ H(t_2), \cdots,\ H(t_m)),\ Y = C_m^{\mathrm{T}} H_{\text{matrix}},\quad C_m^{\mathrm{T}} = Y \circ H_{\text{matrix}}^{\mathrm{T}}$$

한편 $J_0^{\alpha} y(t) \approx J_0^{\alpha} C_m^{\mathrm{T}} H(t) = C_m^{\mathrm{T}} J_0^{\alpha} H(t) = C_m^{\mathrm{T}} F_H^{\alpha} H(t)$ 이므로

$$(J_0^{\alpha} y(t_1),\ J_0^{\alpha} y(t_2),\ \cdots,\ J_0^{\alpha} y(t_m)) \approx C_m^{\mathrm{T}} F_H^{\alpha} H_{\text{matrix}} = Y \circ H_{\text{matrix}}^{\mathrm{T}} H_{\text{matrix}} F_B^{\alpha} H_{\text{matrix}}^{\mathrm{T}} H_{\text{matrix}} = Y \circ F_B^{\alpha}.$$

이 식에 의하여 마디점들에서의 리만－류빌분수계적분값들을 근사계산할수 있다.

알고리듬 1 피적분함수에 대하여 $Y = (y(t_1),\ y(t_2),\ \cdots,\ y(t_m))$ 을 구한다.

$Y \circ F_B^{\alpha}$ 를 계산한다.

다음으로 분수계도함수의 고속계산방법에 대하여 보자.

분수계적분에서와 마찬가지로 $r \in \boldsymbol{N},\ m = 2^r$ 이라고 하고 하르웨블레트연산행렬을 리용하여 분수계도함수의 t_k 점들에서의 근사값을 구하는 문제를 론의한다.

${}^c D_0^{\alpha} y(t) \approx \sum_{k=0}^{m-1} c_k h_k(t) = C_m^{\mathrm{T}} H(t)$ 로 표시하자.

그러면 $J_0^{\alpha} \circ {}^c D_0^{\alpha} y(t) = y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} y^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!} \approx J_0^{\alpha} C_m^{\mathrm{T}} H(t) = C_m^{\mathrm{T}} J_0^{\alpha} H(t) = C_m^{\mathrm{T}} F_H^{\alpha} H(t)$ 이다.

$\hat{y}(t) := y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} y^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!}$ 으로 표시하면 $\hat{y}(t_k) \approx C_m^{\mathrm{T}} F_H^{\alpha} H(t_k),\ k = 1,\ \cdots,\ m$ 이다.

$\hat{Y} := (\hat{y}(t_1),\ \hat{y}(t_2), \cdots,\ \hat{y}(t_m))$ 이라고 하고 다음의 점배치방정식을 세운다.

$$\hat{Y} = C_m^{\mathrm{T}} F_H^{\alpha} (H(t_1),\ H(t_2), \cdots,\ H(t_m)),\ \hat{Y} = C_m^{\mathrm{T}} F_H^{\alpha} H_{\text{matrix}},\ C_m^{\mathrm{T}} = \hat{Y} \circ (F_H^{\alpha} H_{\text{matrix}})^{-1} = \hat{Y} \circ H_{\text{matrix}}^{\mathrm{T}} \circ (F_H^{\alpha})^{-1}$$

이제 $F_H^{-\alpha} := (F_H^{\alpha})^{-1}$ 이라고 표시하자.

$$C_m^{\mathrm{T}} = \hat{Y} \circ H_{\text{matrix}}^{\mathrm{T}} \circ F_H^{-\alpha},\ {}^c D_0^{\alpha} y(t) \approx C_m^{\mathrm{T}} H(t)$$

$$({}^c D_0^{\alpha} y(t_1),\ {}^c D_0^{\alpha} y(t_2),\ \cdots,\ {}^c D_0^{\alpha} y(t_m)) \approx \hat{Y} \circ H_{\text{matrix}}^{\mathrm{T}} \circ F_H^{-\alpha} \circ H_{\text{matrix}}$$

이 식에 의하여 마디점들에서의 캐푸터도함수값들을 근사계산할수 있다.

알고리듬 2 주어진 함수 $y(t)$ 에 대하여 $\hat{y}(t) := y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} y^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!}$ 의 마디점값벡토르 $\hat{Y} := (\hat{y}(t_1),\ \hat{y}(t_2), \cdots,\ \hat{y}(t_m))$ 을 구한다.

$C_m^{\mathrm{T}} = \hat{Y} \circ H_{\text{matrix}}^{\mathrm{T}} \circ F_H^{-\alpha}$ 를 계산하고 $C_m^{\mathrm{T}} \circ H_{\text{matrix}}$ 를 계산한다.

분수계적분고속계산의 오차에 대하여 해석하자.

$\hat{y}(t) := C_m^{\mathrm{T}} \circ H(t)$ 라고 하면 분명히 $\hat{y}(t_k) = y(t_k) = C_m^{\mathrm{T}} \circ H(t_k),\ k = 1, \cdots, m$ 이고

$$|\, y(t) - \hat{y}(t) \,| = |\, y(t) - y(t_k) + \hat{y}(t_k) - \hat{y}(t) \,| \le |\, y(t) - y(t_k) \,| + |\, \hat{y}(t_k) - \hat{y}(t) \,|.$$

이때 $|\hat{y}(t_k)-\hat{y}(t)|=\left|\sum_{i=0}^{m-1}c_i(h_i(t_k)-h_i(t))\right|\le\sum_{i=0}^{m-1}|c_i|\cdot|h_i(t_k)-h_i(t)|$ 이고 t_k, t 가 같은 구간에 포함되므로 $h_i(t)$ 의 구간에서의 상수인 조건을 리용하면 $|h_i(t_k)-h_i(t)|=0$ 이며 따라서

$$|y(t)-\hat{y}(t)|\le|y(t)-y(t_k)|.$$

$y\in C^1[0,\ 1]$ 이면 $|y(t)-\hat{y}(t)|\le|y(t)-y(t_k)|\le\max_{t\in[0,\ 1]}|y'(t)|\cdot\Delta t$ 이고 $y\in C^2[0,\ 1]$ 이면

$$|y(t)-\hat{y}(t)|\le\max_{t\in[0,\ 1]}|y''(t)|\cdot\Delta t^2.$$

사실 $|y(t)-\hat{y}(t)|\le|y(t)-y(t_k)|$ 이므로 $g(t):=y(t)-y(t_k)$ 이면 $\forall t_k$, $g(t_k)=0$ 이다.

따라서 $\exists\xi_k\in(t_k,\ t_{k+1})$; $g'(\xi_k)=0$.

$$|y(t)-y(t_k)|=|g(t)|=|g(t)-g(t_k)|=|g'(\eta_k)|\cdot\Delta t=|g'(\eta_k)-g'(\xi_k)|\cdot\Delta t=|g''(\lambda_k)|\cdot\Delta t^2=|y''(\lambda_k)|\cdot\Delta t^2$$

$$\eta_k\in(t,\ t_k)\vee(t_k,\ t),\ \ \lambda_k\in(\eta_k,\ \xi_k)\vee(\xi_k,\ \eta_k)$$

$$|y(t)-\hat{y}(t)|\le\max_{t\in[0,\ 1]}|y''(t)|\cdot\Delta t^2$$

정리 2 $y\in C^2[0,\ 1]$ 일 때 $L:=\max_{t\in[0,\ 1]}|y'(t)|$ 라고 하면 $r>\log_2\left(\frac{L}{\varepsilon\cdot\Gamma(\alpha+1)}\right)$ 인 r 에 대하여 $|J_0^\alpha y(t)-J_0^\alpha\hat{y}(t)|=|J_0^\alpha y(t)-C_m^{\mathrm{T}}H(t)|\le\varepsilon$ 이 성립된다.

따름 $y\in C^2[0,\ 1]$ 일 때 $L:=\max_{t\in[0,\ 1]}|y''(t)|$ 라고 하면 $r>\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{L}{\varepsilon\cdot\Gamma(\alpha+1)}\right)$ 인 r 에 대하여 $|J_0^\alpha y(t)-J_0^\alpha\hat{y}(t)|=|J_0^\alpha y(t)-C_m^{\mathrm{T}}H(t)|\le\varepsilon$ 이 성립된다.

참 고 문 헌

[1] A. K. Gupta et al.; Article ID 140453, 11, 2014.

[2] T. M. Taha et al.; Bhrawy and Taha Mathematical Sciences, 6, 41, 2012.

[3] M. H. Heydari et al.; Article ID 161030, 8, 2013.

[4] Yiming Chen et al.; Journal of Computational Information Systems, 14, 9, 5601, 2013.

주체104(2015)년 11월 5일 원고접수

A High Speed Calculation Method of Fractional Integral and Fractional Derivatives by Harr Wavelate Operation Matrix

Choe Hui Chol, So Kwang Bok

This paper presents the high speed calculation method of fractional integral and fractional derivatives by wavelate operation matrix method which is actively studied recently.

We discuss the correct error estimation according to the smoothness of the given function and selection method of foundation numbers.

Key words: Caputo fractional derivative, Riemann-Liouville fractional integral