김일성종합대학학보 주체110(2021)년
수 학 제67권 제1호

다항시간공간분수계확산방정식에 대한 스펙트르방법

강영숙, 원광성

우리는 시간변수에 관하여 다항분수계도함수를 포함하고 공간변수에 관하여 리스분수계도함수를 포함하는 분수계확산방정식의 수치풀이를 구하기 위하여 시간변수와 공간변수에 관하여 스펙트르법을 적용하는 계산도식을 제기하고 근사풀이의 유일존재성, 안정성과 수렴성해석을 진행하였다.

선행연구[2]에서는 시간에 관하여 옹근수계도함수를 포함하고 공간변수에 관하여 리스분수계도함수를 포함하는 다음과 같은 분수계편미분방정식을 풀기 위하여 시간변수에 관하여 계차근사를 적용하고 공간변수에 관하여 유한요소법을 적용한 풀이법을 제기하였다. 여기서는 토대함수로 토막상수함수를 리용하였다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K_x \frac{\partial^{2\alpha} u}{\partial |x|^{2\alpha}} + K_y \frac{\partial^{2\beta} u}{\partial |y|^{2\beta}} + f(x,\ y,\ t),\ 0 < t \le T,\ (x,\ y) \in \Omega$$

$$u(x,\ y,\ 0) = \psi(x,\ y)$$

$$u(x,\ y,\ t) = 0,\ \partial\Omega \times (0,\ T]$$

다항분수계도함수항들은 분포계수의 도함수를 리산화할 때 생기며 여러가지 현상들의 모형화에서 중요하다는것이 알려져있다. 선행연구[3]에서는 시간변수에 관하여 다항분수계도함수를 포함하고 공간변수에 관해서는 옹근수계도함수를 포함하는 다음과 같은 방정식에 대한 공간－시간스펙트르법을 연구하였다.

$$P_{\alpha_1,\, \alpha_2,\, \cdots,\, \alpha_{l-1},\, \alpha}(D_t)u(t,\ x) = K_\alpha \partial_{xx} u(t,\ x) + f(t,\ x),\ t \times x \in (0,\ T] \times (a,\ b)$$

$$u(0,\ x) = u_0(x),\ x \in (a,\ b)$$

$$u(t,\ a) = u_a(t),\ u(t,\ b) = u_b(t),\ t \times x \in (0,\ T]$$

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{l-1} < \alpha < 1,\ d_i > 0\ \ (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ l-1),\ K_\alpha > 0$$

여기서 $P_{\alpha_1,\, \alpha_2,\, \cdots,\, \alpha_n,\, \alpha}(D_t)u(x,\ t) = \left({}_0^c D_t^\alpha + \sum_{i=1}^{n} d_i\, {}_0^c D_t^{\alpha_i} \right) u(x,\ t)$ 이다.

선행연구[1]에서는 다음과 같은 분수계편미분방정식을 계차법으로 풀기 위한 연구를 진행하였다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K_x \frac{\partial^{\alpha_1} u}{\partial |x|^{\alpha_1}} + K_y \frac{\partial^{\alpha_2} u}{\partial |y|^{\alpha_2}} + f(u,\ x,\ y,\ t),\ \Omega \times (0,\ T)$$

$$u(x,\ y,\ 0) = \psi(x,\ y),\ (x,\ y) \in \Omega$$

$$u(x,\ y,\ t) = 0,\ \partial\Omega \times (0,\ T)$$

선행연구[4]에서는 시간변수에 관하여 옹근수계도함수를 포함하고 공간변수에 관하여 리스도함수를 포함하는 분수계편미분방정식을 풀기 위한 시간계차공간스펙트르법에 대한 연구를 진행하였다.

론문에서는 시간변수에 관하여 다항분수계도함수를 포함하고 공간변수에 관하여 리스분수계도함수를 포함하는 다음과 같은 방정식에 대한 시간공간스펙트르법을 연구하였다.

$$P_{\alpha_1,\,\alpha_2,\,\cdots,\,\alpha_{l-1},\,\alpha}(D_t)u(t,\ x)=K_x\frac{\partial^{2\beta}u(t,\ x)}{\partial|x|^{2\beta}}+f(t,\ x)\ \ (0<t\le T,\ x\in(0,\ 1)) \tag{1}$$

$$u(0,\ x)=u_0(x),\ x\in(0,\ 1) \tag{2}$$

$$u(t,\ 0)=v_0(t),\ u(t,\ 1)=v_1(t)\ \ (t\in(0,\ T]) \tag{3}$$

여기서

$$0<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_{l-1}<\alpha<1,\ 1<2\beta\le 2,\ d_i>0\ \ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ l-1),\ K_x>0$$

$$P_{\alpha_1,\,\cdots,\,\alpha_{l-1},\,\alpha}(D_t)u(t,\ x)=\left({}_0^cD_t^{\alpha}+\sum_{i=1}^{l-1}d_i\,{}_0^cD_t^{\alpha_i}\right)u(t,\ x)$$

다음의 기호를 리용한다.

$$I=(0,\ T],\ \Lambda=(0,\ 1),\ \Omega=I\times\Lambda$$

$L^2(D)$에서 스칼라적과 노름을 $(\cdot,\ \cdot)_D$, $\|\cdot\|_{0,\,D}$로 표시한다.

${}_0C^{\infty}(I)$, $C_0^{\infty}(\Lambda)$는 각각 I, Λ에서 콤팍트받침을 가진 미끈한 함수공간이다.

$\Omega=I\times\Lambda$ 우에서 몇가지 함수공간을 도입하자. X를 노름 $\|\cdot\|_X$를 가진 Λ우에서 정의된 함수들의 바나흐공간이라고 하자. 공간 $L^q(I;\ X)$를 다음과 같이 정의한다.

$$L^q(I;\ X):=\left\{v:I\to X\ \middle|\ \int_I\|v(t,\ \cdot)\|_X^q\ dt<\infty\right\}$$

$1\le q<\infty$에 대하여 노름을 다음과 같이 정의한다.

$$\|v\|_{L^q(I;\,X)}:=\left(\int_I\|v(t,\ \cdot)\|_X^q\ dt\right)^{1/q}$$

또한 다음의 공간들과 노름들을 약속한다.

$$H^r(I;\ X):=\{v\in L^2(I;\ X)\,|\ \|v(t,\ \cdot)\|_X\in H^r(I)\}$$

$${}_0H^r(I;\ X):=\{v\in L^2(I;\ X)\,|\ \|v(t,\ \cdot)\|_X\in{}_0H^r(I)\}$$

$$\|v\|_{H^r(I;\ X)}:=\|\,\|v(t,\ \cdot)\|_X\,\|_{r,\,I}$$

$$V_s:={}_0H^{\alpha/2}(I;\ L^2(\Lambda))\cap L^2(I;\ H_0^{\beta}(\Lambda))$$

$u\in V_s$에 대하여

$$\|u\|_E:=\left(\|u\|_{\alpha/2,\,0}^2+\sum_{i=1}^{l-1}\|u\|_{\alpha_i/2,\,0}^2+\|u\|_{0,\,\beta}^2\right)^{1/2}$$

$$\|u\|_{\alpha/2,\,0}:=\|u\|_{H^{\alpha/2}(I;\,L^2(\Lambda))}=\|\,\|u\|_{0,\,\Lambda}\|_{\alpha/2,\,I}$$

$$\|u\|_{0,\,\beta}:=\|u\|_{L^2(I;\,H_0^{\beta})}=\|\,\|u\|_{\beta,\,\Lambda}\|_{0,\,I}$$

로 정의한다. 이때 V_s는 $\|\cdot\|_E$에 관하여 바나흐공간이라는것을 증명할수 있다.

$$\begin{aligned}B(u,\ v):=&({}_tD_L^{\alpha/2}u,\ {}_tD_R^{\alpha/2}v)_{\Omega}+\sum_{i=1}^{l-1}d_i\,({}_tD_L^{\alpha_i/2}u,\ {}_tD_R^{\alpha_i/2}v)_{\Omega}+\\&+C_x(({}_xD_L^{\beta}u,\ {}_xD_R^{\beta}v)_{\Omega}+({}_xD_R^{\beta}u,\ {}_xD_L^{\beta}v))_{\Omega}\end{aligned} \tag{4}$$

$$F(v) := (\tilde{f},\ v)_\Omega$$

로 표시하면 주어진 문제에 대응하는 변분형식

$$u \in V_s,\ B(u,\ v) = F(v),\ \forall v \in V_s \tag{5}$$

를 얻는다.

정리 1 식 (4)로 정의되는 $B(u,\ v)$는 쌍선형이고 강제성, 유계성을 만족시킨다.

정리 2 $u_0 \in L^2(\Lambda),\ f \in L^2(\Omega)$일 때 문제 (5)는 타당한 문제이며 식

$$\| u \|_E \le C(\| f \|_{0,\ \Omega} + \| u_0 \|_{0,\ \Lambda})$$

이 성립한다.

다음으로 근사계산도식을 구성하자.

$P_M(I),\ P_N(\Lambda)$를 각각 $t,\ x$에 관한 $M,\ N$차까지의 다항식들의 공간이라고 하자. 그리고

$$\overset{\circ}{P}_M(I) := \{p(t) \mid p \in P_M(I),\ p(0) = 0\}$$

$$\overset{\circ}{P}_N(\Lambda) := \{p(x) \mid p \in P_N(\Lambda),\ p(0) = 0,\ p(1) = 0\}$$

$$L := (M,\ N),\ W_L := \overset{\circ}{P}_M(I) \otimes \overset{\circ}{P}_N(\Lambda)$$

로 정의하자. 그리고 다음과 같은 유한차원변분문제를 생각한다.

$$u_L \in W_L,\ \ B(u_L,\ v_L) = F(v_L),\ \forall v_L \in W_L \tag{6}$$

시간리산화를 위하여 토대함수를 다음과 같이 구성한다.

$$t \in (0,\ T),\ \hat{t} = \frac{2}{T}t - 1$$

$$\phi_j(t) = L_j(\hat{t}) + L_{j+1}(\hat{t})\ \ (j = 0,\ 1,\ \cdots,\ M-1)$$

여기서 $L_j(\hat{t})$는 $[-1,\ 1]$에서 정의된 르쟝드르직교다항식이며

$$\phi_j(0) = L_j(-1) + L_{j+1}(-1) = 0\ \ (j = 0,\ 1,\ \cdots,\ M-1)$$

을 만족시킨다. 그러므로 다음의 식이 성립한다.

$$\overset{\circ}{P}_M(I) = \mathrm{span}\{\phi_0,\ \phi_1,\ \cdots,\ \phi_{M-1}\}$$

공간리산화를 위하여 르쟝드르직교계를 리용하여 다음과 같이 구성한다.

$$\varphi_k(x) := L_k(\hat{x}) - L_{k+2}(\hat{x}),\ \hat{x} \in [-1,\ 1],\ \hat{x} = 2x - 1,\ x \in [0,\ 1]$$

그러면 $\varphi_k(0) = \varphi_k(1) = 0\ \ (k = 0,\ 1,\ \cdots,\ N-2)$이 성립한다. 따라서 다음의 식이 성립한다.

$$\overset{\circ}{P}_N(\Lambda) = \mathrm{span}\{\varphi_0,\ \varphi_1,\ \cdots,\ \varphi_{N-2}\}$$

$$W_L = \mathrm{span}\{\phi_i(t)\varphi_k(x),\ 0 \le i \le M-1,\ 0 \le k \le N-2\}$$

즉 변분문제 (5)의 근사풀이를 이 공간에서 구한다. 근사풀이의 형태는 다음과 같다.

$$u_L = \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{N-2} u_{ij}\phi_i(t)\varphi_j(x)$$

그러면 식 (6)은 다음의 련립방정식과 동등하다.

$$B(u_L,\ \phi_p\varphi_q) = F(\phi_p\varphi_q)\ \ (p = 0,\ \cdots,\ M-1,\ q = 0,\ \cdots,\ N-2) \tag{7}$$

이 식을 정돈하면 다음의 식을 얻는다.

$$\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{N-2}u_{i,j}\left\{z_{j,q}\left\{A_{i,p}^{\alpha/2}+\sum_{k=1}^{l-1}d_k\cdot A_{i,p}^{\alpha_k/2}\right\}+C_x\zeta_{i,p}[A_{j,q}^{\beta}+A_{q,j}^{\beta}]\right\}=(\tilde{f},\ \phi_p\varphi_q)_\Omega \tag{8}$$

$$p=0,\ \cdots,\ M-1,\ q=0,\ \cdots,\ N-2$$

여기서

$$A_{i,j}^{\alpha/2}=\int_0^T {}_tD_L^{\alpha/2}\phi_i(t)\,{}_tD_R^{\alpha/2}\phi_j(t)dt,\ \ A_{i,j}^{\beta}=\int_0^1 {}_xD_L^{\beta}\varphi_i(x)\,{}_xD_R^{\beta}\varphi_j(x)dx$$

$$\zeta_{i,j}=\int_0^T\phi_i(t)\phi_j(t)dt,\ \ z_{i,j}=\int_0^1\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx$$

이다.

$$U:=(u_{00},\ u_{10},\ \cdots,\ u_{M-1,0},\ u_{01},\ u_{11},\ \ldots,\ u_{M-1,1},\ \ldots,\ u_{0,N-2},\ u_{1,N-2},\ \cdots,\ u_{M-1,N-2})^{\mathrm{T}}$$

로 표시하면 식 (8)은 $M\times(N-1)$ 원련립1차방정식

$$AU=F \tag{9}$$

로 볼수 있다.

정리 3 $u_0\in C(\overline{\Lambda}),\ f\in C(\overline{\Omega})$ 이면 식 (6)은 안정하며 다음의 식이 성립한다. 즉 근사문제는 안정하다.

$$\|u_L\|_E\le C(\|f\|_{0,\overline{\Omega}}+\|u_0\|_{0,\overline{\Lambda}}) \tag{10}$$

정리 4 $u,\ u_L$ 은 각각 정확한 풀이, 근사풀이라고 하자. 만일

$$u\in {}_0H^r(I;\ L^2(\Lambda))\cap L^2(I;\ H_0^s(\Lambda))\ \ (r\ge 1,\ s>1)$$

라고 하면 근사풀이는 정확한 풀이에로 수렴하며 다음의 오차평가식이 성립한다.

$$\|u-u_L\|_E\le C(M^{\alpha/2-r}\|u\|_{r,0}+M^{\alpha/2-r}N^{\beta-s}\|u\|_{r,s}+N^{-s}\|u\|_{\alpha/2,s}+N^{\beta-s}\|u\|_{0,s}+M^{-r}\|u\|_{r,\beta}) \tag{11}$$

참 고 문 헌

[1] S. Chen et al.; Applied Numerical Mathematics, 134, 66, 2018.
[2] W. Bu et al.; Journal of Computational Physics, 276, 26, 2014.
[3] M. Zheng et al.; Applied Mathematical Modelling, 40, 4970, 2016.
[4] H. Zhang et al.; Numer. Algor., 79, 337, 2018.

주체109(2020)년 9월 5일 원고접수

A Spectral Method for the Multi-term Time-space Fractional Diffusion Equation

Kang Yong Suk, Won Kwang Song

In this paper, we consider the multi-term time-space fractional diffusion equation. We propose a high-order scheme based on the space-time spectral method. And we discuss the stability and convergence of the scheme.

Keywords: spectral method, diffusion equation