김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제3호

# 리만다양체에서 $\alpha$ – 반대칭재귀계량접속족에 대하여

전철용, 허달윤

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《과학기술부문에서 첨단돌파전을 힘있게 벌려야 하겠습니다.》

선행연구[5]에서는 리만다양체에서 반대칭계량접속을 처음으로 제시하고 반대칭계량접속의 곡률텐소르가 령이면 레비－찌비따접속이 정의된 리만다양체가 공형평탄이라는것을 밝히고 반대칭계량접속이 정의된 리만다양체가 일정곡률다양체로 되기 위한 조건을 밝혔다. 선행연구[5]에 기초하여 선행연구[1]에서는 리만다양체에서 $\pi$ – 반대칭비계량접속을 정의하고 그것의 기하학적성질을 연구하였으며 선행연구[2]에서는 이 접속이 중력의 스칼라텐소르리론에 대한 기하학적모형으로 된다는것을 연구하였다. 선행연구[3]에서는 반대칭비계량접속에 대한 슈르의 정리를 연구하였으며 선행연구[4]에서는 리만다양체에서 슈르의 정리를 만족시키는 사영공형반대칭접속을 연구하였다.

론문에서는 리만다양체에서 반대칭계량접속과 $\pi$ – 반대칭비계량접속을 일반화하여 새롭게 $\alpha$ – 반대칭재귀계량접속족을 정의하고 그것의 기하학적성질들인 체적평탄성, 레비－찌비따접속과의 관계, 공액대칭조건, 일정곡률조건을 연구하였다.

정의 리만다양체 $(M,\ g)$에서 $\forall X,\ Y,\ Z\in T(M),\ \pi\in \overset{*}{T}(M),\ \alpha\in\mathbf{R}$에 대하여

$$\nabla_Z g(X,\ Y)=2\alpha\pi(Z)g(X,\ Y),\ T(X,\ Y)=\pi(Y)X-\pi(X)Y \tag{1}$$

를 만족시키는 접속 $\nabla$를 $\alpha$ – 반대칭재귀계량접속족이라고 부른다. 여기서 $\alpha$는 접속족을 표시하는 보조변수이다.

식 (1)의 국부표시는

$$\nabla_k g_{ij}=2\alpha\pi_k g_{ij},\ T_{ij}^k=\pi_j\delta_i^k-\pi_i\delta_j^k \tag{2}$$

이며 이 접속의 접속결수는

$$\Gamma_{ij}^k=\{{}_{ij}^{k}\}-\alpha\pi_i\delta_j^k-(\alpha-1)\pi_j\delta_i^k+(\alpha-1)g_{ij}\pi^k \tag{3}$$

이다.

식 (1)에서 보는것처럼 $\alpha=0$이면 접속 $\nabla$는 선행연구[5]에서 연구된 반대칭계량접속이며 $\alpha=1$이면 접속 $\nabla$는 선행연구[1]에서 연구된 $\pi$ – 반대칭비계량접속이다.

식 (3)을 리용하면 $\alpha$ – 반대칭재귀계량접속족 $\nabla$의 곡률텐소르는

$$R_{ijk}^l=K_{ijk}^l+\delta_i^l a_{ik}-\delta_j^l a_{ik}+g_{jk}a_i^l-g_{ik}a_j^l-\alpha\delta_k^l\pi_{ij} \tag{4}$$

이다. 여기서 $K_{ijk}^l$은 레비－찌비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$의 곡률텐소르이고

$$\begin{aligned} a_{ik}&=(\alpha-1)\left[\overset{\circ}{\nabla}_i\pi_k+(\alpha-1)\pi_i\pi_k+\frac{1}{2}(\alpha-1)g_{ik}\pi_p\pi^p\right]\\ \pi_{ij}&=\overset{\circ}{\nabla}_i\pi_j-\overset{\circ}{\nabla}_j\pi_i \end{aligned} \tag{5}$$

이다.

리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 $R^l_{ijk}=0$ 이면 리만다양체 $(M,\ g,\ \nabla)$ 를 평탄, $R_{jk}=0$ 이면 $(M,\ g,\ \nabla)$ 를 리찌평탄, $P_{ij}=0$ 이면 $(M,\ g,\ \nabla)$ 를 체적평탄이라고 부른다.

정리 1 리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 $\alpha-$반대칭재귀계량접속족 $\nabla$ 에 대하여 1－형식 $\pi$ 가 닫긴형식이면 리만다양체 $(M,\ g,\ \nabla)$ 는 체적평탄이다.

주의 1 $\alpha=0$ 이면 리만다양체 $(M,\ g,\ \nabla)$ 는 체적평탄이다.

정리 2 리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 $\alpha-$반대칭재귀계량접속족 $\nabla$ 에 관한 곡률텐소르가 령이면 리만다양체 $(M,\ g,\ \overset{\circ}{\nabla})$ 은 공형평탄이다.

주의 2 정리 2의 결과는 $\alpha$ 에 무관계하게 성립한다.

식 (2)와 (3)으로부터 $\alpha$ －반대칭재귀계량접속 $\nabla$ 의 쌍대접속 $\overset{*}{\nabla}$ 에 관한 접속결수는

$$\overset{*}{\Gamma}{}^k_{ij}=\{{}^k_{ij}\}+\alpha\pi_i\delta^k_j-(\alpha-1)\pi_j\delta^k_i+(\alpha-1)g_{ij}\pi^k \tag{6}$$

이고 곡률텐소르는 우의 식으로부터

$$\overset{*}{R}{}^k_{ijk}=K^l_{ijk}+\delta^l_i a_{jk}-\delta^l_j a_{ik}+g_{jk}a^l_i-g_{ik}a^l_j+\alpha\delta^l_k\pi_{ij} \tag{7}$$

이다. 따라서 식 (4)와 (7)로부터

$$\overset{*}{R}{}^k_{ijk}=R^l_{ijk}+2\alpha\delta^l_k\pi_{ij} \tag{8}$$

가 성립한다.

정리 3 리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 $\alpha-$반대칭재귀계량접속족 $\nabla$ 에 대하여 다음의 식은 접속변환 $\overset{\circ}{\nabla}\to\nabla,\ \overset{\circ}{\nabla}\to\overset{*}{\nabla}$ 에 관하여 불변이다.

$$C^l_{ijk}+\overset{*}{C}{}^l_{ijk}=2\overset{\circ}{C}{}^l_{ijk} \tag{9}$$

여기서 $C^l_{ijk},\ \overset{*}{C}{}^l_{ijk}$ 및 $\overset{\circ}{C}{}^l_{ijk}$ 은 각각 접속 $\nabla,\ \overset{*}{\nabla}$ 및 $\overset{\circ}{\nabla}$ 에 관한 와일공형곡률텐소르이다.

주의 3 정리 3의 결과는 $\alpha$ 에 무관계하다. 그리고 정리 3의 식 (9)로부터 $C^l_{(ijk)}+\overset{*}{C}{}^l_{(ijk)}=0$ 이 성립한다. 여기서 $(\cdot)$는 첨수의 원순환을 표시한다.

리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 비계량접속 $\nabla$ 와 그것의 쌍대접속 $\overset{*}{\nabla}$ 에 대하여 $R^l_{ijk}=\overset{*}{R}{}^l_{ijk}$ 이면 $\nabla$ 를 공액대칭, $R_{jk}=\overset{*}{R}_{jk}$ 이면 공액리찌대칭, $P_{jk}=\overset{*}{P}_{jk}$ 이면 $\nabla$ 를 공액체적대칭이라고 부른다.

정리 4 리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 반대칭재귀계량접속족 $\nabla$ 에 대하여 1－형식 $\pi$ 가 닫긴형식이면 $\alpha-$반대칭재귀계량접속족 $\nabla$ 는 공액대칭이다.

증명 1－형식 $\pi$ 가 닫긴형식이면 $\pi_{ij}=0$ 이다. 따라서 식 (8)로부터 $\overset{*}{R}{}^l_{ijk}=R^l_{ijk}$ 이다.(증명끝)

정리 5 리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 $\pi-$반대칭재귀비계량접속족 $\nabla$가 공액대칭이기 위해서는 그것이 공액리찌대칭일것이 필요하고 충분하다.

정리 6 리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 $\pi-$반대칭재귀계량접속족 $\nabla$가 공액대칭이기 위해서는 그것이 공액체적대칭일것이 필요하고 충분하다.

주의 4 $\alpha-$반대칭비계량접속족 $\nabla$에 대하여 지금까지 고찰한 성질들은 $\alpha$의 값에 무관계한 성질들이다.

리만다양체 $(M,\ g)$ 의 임의의 점 $P$에서 접속 $\nabla$ 에 관한 단면곡률이 2차원방향 $E(T_P(M)$ 의 임의의 2차원부분공간)선택에 무관계하면 곡률텐소르는

$$R_{ijk}^l = k(P)(\delta_i^l g_{jk} - \delta_j^l g_{ik}) \tag{10}$$

이다. 만일 $k(P) = \mathrm{const}$ 이면 리만다양체 $(M,\ g,\ \nabla)$ 는 일정곡률다양체이다.

정리 7 련결인 리만다양체 $(M,\ g)$ ( $\dim M > 2$ )에서 반대칭재귀계량접속족 $\nabla$에 관한 임의의 점에서의 단면곡률이 2차원방향 $E$의 선택에 무관계하고

$$\alpha = 1 \tag{11}$$

일 때에만 리만다양체 $(M,\ g,\ \nabla)$ 는 일정곡률다양체이다.

증명 리만다양체 $(M,\ g,\ \nabla)$ 에서 반대칭재귀계량접속족 $\nabla$의 곡률텐소르에 대한 제2종비앙끼항등식

$$\nabla_h R_{ijk}^l + \nabla_i R_{jhk}^l + \nabla_j R_{hik}^l = T_{hi}^p R_{jpk}^l + T_{ij}^p R_{hpk}^l + T_{jh}^p R_{ipk}^l$$

에 식 (10)을 대입하고 식 (2)를 리용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
&\nabla_h k(\delta_i^l g_{jk} - \delta_j^l g_{ik}) + \nabla_i k(\delta_j^l g_{hk} - \delta_h^l h_{jk}) + \nabla_j k(\delta_h^l g_{ik} - \delta_i^l g_{hk}) + \\
&\quad + 2\alpha[\pi_h(\delta_i^l g_{jk} - \delta_j^l g_{ik}) + \pi_i(\delta_j^l g_{hk} - \delta_h^l g_{jk}) + \pi_j(\delta_h^l g_{ik} - \delta_i^l g_{hk})] = \\
&\quad = 2k[\pi_h(\delta_i^l g_{jk} - \delta_j^l g_{ik}) + \pi_i(\delta_j^l g_{hk} - \delta_h^l g_{jk}) + \pi_j(\delta_h^l g_{ik} - \delta_i^l g_{hk})]
\end{aligned}$$

이 식을 $i,\ l$ 에 관하여 축약하면

$$(n-2)(g_{jk}\nabla_h k - g_{hk}\nabla_j k) - 2(n-2)\alpha k(g_{jk}\pi_h - g_{hk}\pi_j) = 2k(\pi_h g_{jk} - \pi_j g_{hk})$$

이다. 이 식의 량변에 $g^{jk}$를 곱하고 축합을 실시하면

$$(n-1)(n-2)\nabla_h k - 2(n-1)(n-2)k\alpha\pi_h = 2(n-1)(n-2)k\pi_h$$

이다. $\dim M > 2$ 이므로

$$\nabla_h k - 2(\alpha - 1)k\pi_h = 0$$

이다. 식 (11)을 리용하면 $k = \mathrm{const}$ 이다. 결국 리만다양체 $(M,\ g,\ \nabla)$ 는 일정곡률다양체이다.(증명끝)

주의 5 정리 7로부터 $\alpha-$반대칭재귀계량접속족 $\nabla$ 가 일정곡률성을 허용하는것은 $\alpha = 1$ 인 경우뿐이다. $\alpha = 1$ 이면 반대칭재귀계량접속은

$$\nabla_k g_{ij} = 2\pi_k g_{ij},\ T_{ij}^k = \pi_j \delta_i^k - \pi_i \delta_j^k$$

를 만족시키는 접속으로서 접속결수는

$$\Gamma_{ij}^k = \{{}_{ij}^{k}\} - \pi_i \delta_j^k$$

이다. 이 접속은 선행연구[1]에서 연구되였으며 선행연구[2]에서는 중력의 스칼라텐소르리론에 대한 기하학적모형으로 제시되였다.

## 참 고 문 헌

[1] 김일성종합대학학보(자연과학), 49, 3, 3, 주체92(2003).
[2] K. A. Dunn; Tensor, NS, 29, 214, 1975.
[3] Han Yanling et al.; IJG, 5, 1, 47, 2016.
[4] T. Y. Ho et al.; J. of Yanbian University(Natural Sciece), 40, 4, 290, 2014.
[5] K. Yano; Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 15, 1579, 1976.

주체109(2020)년 3월 15일 원고접수

## On $\alpha-$Semi-Symmetric Metric Recurrent Connection Family in a Riemannian Manifold

*Jon Chol Yong, Ho Tal Yun*

In this paper we newly defined $\alpha$-semi-symmetric metric recurrent connection family in a Riemannian manifold and we studied the volume flatness, the relation with the Levi-Civita connection, the conjugate symmetry condition and the constant curvature condition of this connection family.

Keywords: metric recurrent connection family, volume flatness, conjugate symmetry condition