

H_{∞} 출력반결합조종에 의한 널뛰기식거꿀 흔들이의 안정화조종기설계

리준일, 강정수

경애하는 김정은동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《과학기술의 힘으로 모든 부문을 빨리 발전시키고 인민의 락원을 일떠세우자는것이 우리 당의 결심이고 의지입니다.》

지난 시기 기껏 3마디에 불과했던 거꿀흔들이는 마디수가 4마디, 5마디거꿀흔들이까지 개발되였다.

한편 관성바퀴흔들이, 구형거꿀흔들이, 차륜형거꿀흔들이, 단축운반체와 같이 그 기구학적구조와 물림새가 종전과 구별되는 새로운 거꿀흔들이들도 많이 개발되었으며[1] 이 과정에 각이한 조종수법들의 개발검증에 현대조종리론의 성과들과 착상들이 적용되였다.[2]

대표적으로 가변구조체계, 구동부족체계, 분수차원체계조종, 모호조종 등을 들수 있다. 또한 각이한 혼성조종방법에 의한 비선형조종기설계를 위한 거꿀흔들이자립화조종방법들도 적지 않게 제안되였다.[3, 4]

기구학적구조들과 조종방법들을 종합적으로 취급할수 있는 새로운 거꿀흔들이실험기구로서 논문에서는 널뛰기식거꿀흔들이의 일종인 동적가변경사면두마디거꿀흔들이(DIP: Double Inverted Pendulum)를 제안하고 H_{∞} 출력반결합안정화조종기를 설계하였으며 제안된 기구의 유용성과 H_{∞} 조종의 유효성을 안정화조종실험을 통하여 검증하였다.

1. 동적가변경사면DIP의 H_{∞} 출력반결합조종

동적가변경사면DIP의 기구학적구조를 그림 1에 보여주었다.

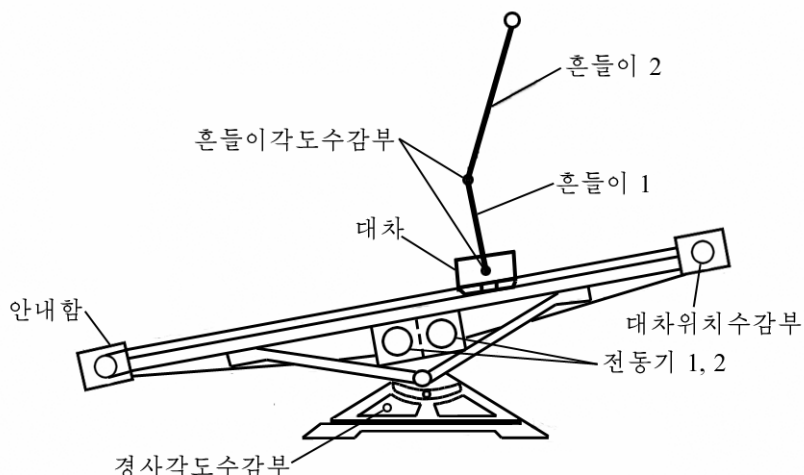


그림 1. 동적가변경사면DIP의 기구학적구조

동적가변경사면DIP의 안정화는 임의로 흔들리는 널뛰기관우에서의 두마디거꿀흔들의 안정화로 볼수 있으며 이때 그것의 상태공간모형은 다음과 같다.

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + Bu + M_1v_1 + M_2v_2 \\ Y = CX + v_3 \end{cases} \quad (1)$$

여기서 A, B, C 는 체계의 파라미터행렬, X, Y, u 는 각각 체계의 상태와 출력, 조종입력이며 v_1 은 경사각에 의한 외란, v_2 는 마른썰림이 체계에 주는 외란, v_3 은 측정잡음이다.

식 (1)에서 매 행렬들은 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \\ -k_1^{-1}k_3 & -k_1^{-1}k_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ -k_1^{-1}k_4 \end{bmatrix}, \quad C = [I_{3 \times 3} \quad 0_{3 \times 3}], \quad M_1 = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ -k_1^{-1}k_5 \end{bmatrix}, \\ k_1 &= \begin{bmatrix} m_1 + m_3 + m_4 & -(m_3l_1 + m_4L) - m_4l_2 & -m_4l_2 \\ -(m_3l_1 + m_4L)_1 & I_3 + m_3l_1^2 + m_4L^2 + m_4l_2L & m_4l_2L \\ -m_4l_2 & m_4Ll_2 + I_4 + m_4l_2^2 & I_4 + m_4l_2^2 \end{bmatrix}, \\ M_2 &= \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ k_1^{-1} \text{diag}(b_1, b_2, b_3) \end{bmatrix}, \\ k_2 &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & -c_4 \\ 0 & 0 & c_4 \end{bmatrix}, \quad k_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(m_3l_1 + m_4L)g \cos \theta & 0 \\ 0 & -m_4l_2g \cos \theta & -m_4l_2g \cos \theta \end{bmatrix}, \\ k_4 &= \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k_5 = \begin{bmatrix} (m_1 + m_3 + m_4)g \\ -(m_3l_1 + m_4L)g \\ -m_4l_2g \end{bmatrix}, \quad v_1 = \sin \theta, \quad v_2 = \begin{bmatrix} \text{sign} \dot{\theta}_1 \\ \text{sign} \dot{\theta}_1 \\ \text{sign} \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

여기서 θ 는 실시간에서 변하는 경사각으로서 시간의 함수이다. 그리고 m_1, m_3, m_4 는 밀차와 흔들이 1, 흔들이 2의 질량, c_1, c_3, c_4 는 점성썰림결수, b_1, b_2, b_3 은 마른썰림결수이고 l_1, l_2, I_3, I_4 는 각각 흔들이 1과 흔들이 2의 질량중심까지의 길이, 관성모멘트이다.

식 (1)로부터 체계의 불확정모형을 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\dot{X} = (A_0 + \Delta A)X + (B_0 + \Delta B)u + M_1v_1 + M_2v_2 \quad (2)$$

여기서

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_1^{-1}\Delta k_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta B = \begin{bmatrix} 0 \\ k_1^{-1}\Delta k_4 \end{bmatrix} \quad (3)$$

로서 k_3 과 k_4 를 공칭부분과 θ 와 a 의 변동에 의한 변동부분으로 가를수 있다.

$$k_3 = k_{30} + \Delta k_3, \quad k_4 = k_{40} + \Delta k_4$$

여기서

$$k_{30} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (m_3l_1 + m_4L)g & 0 \\ 0 & m_4l_2g & m_4l_2g \end{bmatrix}, \quad k_{40} = [a_0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (4)$$

$$\Delta k_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (m_3 l_1 + m_4 L)g & 0 \\ 0 & m_4 l_2 g & m_4 l_2 g \end{bmatrix} \mu_\theta, \quad \Delta k_4 = [\Delta a \quad 0 \quad 0]^T \quad (5)$$

식 (5)에서 $d_1 = (m_3 l_1 + m_4 L)g$, $d_2 = m_4 l_2 g$, $\mu_\theta = \cos \theta - 1$ 이며 따라서

$$|\mu_\theta| \leq 1 \quad (6)$$

로 된다. 식 (3)과 (5)로부터 ΔA , ΔB 는 다음과 같이 된다.

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_1^{-1} \Delta k_3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \begin{bmatrix} 0 & (h_2 d_1 + h_3 d_2) \mu_\theta & h_3 d_2 \mu_\theta \\ 0 & (h_5 d_1 + h_6 d_2) \mu_\theta & h_6 d_2 \mu_\theta \\ 0 & (h_8 d_1 + h_9 d_2) \mu_\theta & h_9 d_2 \mu_\theta \end{bmatrix} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\Delta B = \begin{bmatrix} 0 \\ k_1^{-1} \Delta k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{1 \times 3} \\ k_1^{-1} \begin{bmatrix} \Delta a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{1 \times 3} \\ \begin{bmatrix} h_1 \mu_a d_3 \\ h_4 \mu_a d_3 \\ h_7 \mu_a d_3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (8)$$

여기서

$$k_1^{-1} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ h_4 & h_5 & h_6 \\ h_7 & h_8 & h_9 \end{bmatrix}$$

이고 d_3 은 구동증폭결수변화의 최대값이다.

식 (7)과 (9)로부터 ΔA 와 ΔB 를 다음과 같이 구조분해할수 있다.

$$\Delta A = D_A \Phi_A E_A, \quad \Delta B = D_B \Phi_B E_B \quad (9)$$

여기서 D_A, D_B, E_A, E_B 는 상수행렬, Φ_A, Φ_B 는 변동부분으로서

$$D_A = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 2} & \\ h_5 d_1 + h_6 d_2 & h_6 d_2 \\ h_8 d_1 + h_9 d_2 & h_9 d_2 \end{bmatrix}, \quad \Phi_A = \begin{bmatrix} \mu_\theta & 0 \\ 0 & \mu_\theta \end{bmatrix}, \quad E_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0_{1 \times 3} \\ 0 & 0 & 1 & 0_{1 \times 3} \end{bmatrix}$$

$$D_B = [0_{1 \times 3} \quad h_1 d_3 \quad h_4 d_3 \quad h_7 d_3]^T, \quad \Phi_B = \mu_a, \quad E_B = 1$$

로 표시된다.

식 (6)으로부터

$$|\Phi_A| < 1, \quad |\Phi_B| < 1 \quad (10)$$

로 된다.

한편 동적가변경사면두마디거꾸흔들의 안정화조종체계설계목적은 다음과 같다.

- ① 흔들이를 연직선우에서 안정화시키면서 밀차의 위치를 조종하는것이다.
- ② 시간에 따르는 경사각 및 파라미터변동의 영향을 제거 또는 억제하는것이다.
- ③ 측정잡음 및 마른슬립의 영향을 극복하는것이다.

이러한 목적을 달성하기 위하여 일반화대상 P 의 상태공간모형을 다음과 같이 표시하자.

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + B_1W + B_2u \\ Z = C_1X + D_{11}W + D_{12}u \\ Y = C_2X + D_{21}W + D_{22}u \end{cases} \quad (11)$$

식 (11)을 행렬형식으로 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & 0 & M_1W_\theta & M_2W_\mu & D_A & D_B & B_0 \\ W_qC & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_r \\ E_A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_B \\ C & W_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ u \end{bmatrix} \quad (12)$$

여기서 $w_4 = \Phi_A E_A X$, $w_5 = \Phi_B E_B U$, $A = A_0$, $B_2 = B_0$, $D_{11} = 0_{4 \times 5}$, $C_2 = C$, $D_{22} = 0$ 이고

$$B_1 = [0 \quad M_1W_\theta \quad M_2W_\mu \quad D_A \quad D_B], \quad C_1 = [W_qC \quad 0 \quad E_A \quad 0]^T,$$

$$D_{12} = [0 \quad W_r \quad 0 \quad E_B]^T, \quad D_{21} = [W_n \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

이다. 그리고 w_1 , w_2 , w_3 은 잡음, 경사각변동, 마른쓸림이 체계에 주는 외란, w_4 , w_5 는 A 와 B 의 변동에 의한 외란, z_1 과 z_2 는 체계출력과 입력에 대한 평가출력, z_3 과 z_4 는 A 와 B 의 변동에 대한 평가출력이다.

식 (11)과 같은 조종체계의 H_∞ 표준구성도는 그림 2와 같다.

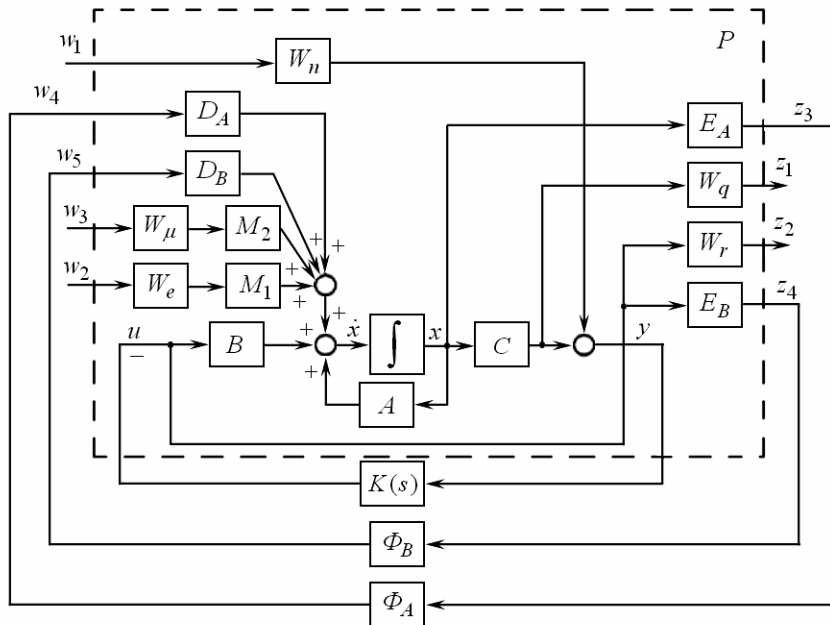


그림 2. 조종체계의 H_∞ 표준구성도

그림 2에서 $K(s)$ 는 표준 H_∞ 조종문제의 풀이존재조건이 성립할 때 설계지표를 만족시

키는 보상기클라스의 자유파라미터 $U(s)$ 를 리용하여 다음과 같이 표시할수 있다.

$$K(s) = \hat{K}_{11}(s) + \hat{K}_{12}(s)U(s)(I - \hat{K}_{22}(s)U(s))^{-1}\hat{K}_{21}(s)$$

여기서

$$U(s) \in RH_\infty^{m_2 \times p_2}, \|U(s)\|_\infty < \gamma$$

$$\hat{K}(s) = \begin{bmatrix} \hat{K}_{11}(s) & \hat{K}_{12}(s) \\ \hat{K}_{21}(s) & \hat{K}_{22}(s) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} \hat{A} & \hat{B}_1 & \hat{B}_2 \\ \hline \hat{C}_1 & 0 & I_{m_2} \\ \hline \hat{C}_2 & I_{p_2} & 0 \end{array} \right]$$

이고

$$\begin{aligned} \hat{B}_1 &= B_1 D_{21}^T + Y C_2^T, \quad \hat{B}_2 = B_2 + Y C_1^T D_{12} / \gamma^2 \\ \hat{C}_1 &= -(D_{12}^T C_1 + B_2^T X)(I - YX / \gamma^2)^{-1} \\ \hat{C}_2 &= -(C_2 + D_{21} B_1^T X / \gamma^2)(I - YX / \gamma^2)^{-1} \\ \hat{A} &= (A - B_1 D_{21}^T C_2) + Y(C_1^T C_1 / \gamma^2 - C_2^T C_2) + \hat{B}_2 \hat{C}_1 \end{aligned}$$

이다. 이때 안정화조종기는

$$K(s) = \hat{K}_{11}(s) = \hat{C}_1(sI - \hat{A})^{-1}\hat{B}_1 + \hat{D}_{11}$$

로 되며 여기로부터 H_∞ 출력반결합조종기의 상태공간표시는 다음과 같다.

$$\begin{cases} \dot{z} = Ac \cdot z + Bc \cdot y \\ u = Cc \cdot z + Dc \cdot y \end{cases} \quad (13)$$

2. 실험 및 결과분석

우선 모의에서는 Matlab Robust Control Toolbox의 hinf함수를 리용하여 H_∞ 출력반결합조종기설계프로그램을 작성하였다. 설계된 조종기에 대하여 령차유지기(zoh)를 결합하고 Matlab의 c2dm함수로 띠염화를 dt=5ms에서 진행하였다.

한편 일반화조종대상을 구성할 때 무게행렬은 실지 제작된 실험기구의 특성을 고려하여 다음과 같이 설정하였다.

$$W_n = \text{diag}([2 \ 1 \ 1]) / 20, \quad W_\theta = 0.02, \quad W_q = \text{diag}([1 \ 5 \ 10]), \quad W_r = 0.01, \quad W_\mu = \text{diag}([1 \ 3 \ 5])$$

그리고 밀차와 널뛰기판경사각의 희망자리길은 다음과 같이 설정하였다.

$$r(t) = 0.5 \sin(0.4t), \quad \theta = 0.1 \sin(t)$$

동적가변경사면DIP의 모의결과를 그림 3에 보여주었다.

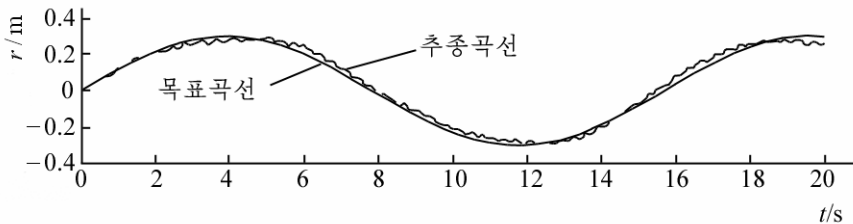


그림 3. 동적가변경사면DIP의 모의결과

모의과정에 실지장치에 존재하는 마른슬립과 잡음 및 구동증폭결수변동을 프로그램에 보충하여 그것에 따르는 응답특성변화와 개선대책을 고찰하였다.

다음 장치특성을 고려하여 반복실험을 거쳐 무게행렬을 다음과 같이 선택하고 같은 방법으로 실시간조종을 진행하였다.

$$W_n = \text{diag}([1.5 \ 1 \ 1])/10, \quad W_\theta = 0.02, \quad W_q = \text{diag}([1 \ 5 \ 10]), \quad W_r = 0.01, \quad W_\mu = \text{diag}([1 \ 5 \ 5])$$

널뛰기판의 각도변화를 적당한 조화신호로 설정하고 파라미터불확정성을 고려한 동적가변경사면DIP의 H_∞ 출력반결합조종실험을 진행한 결과 밀차와 아래흔들이, 윗흔들의 자진동폭이 각각 $\pm 0.03\text{m}$, $\pm 3^\circ$, $\pm 0.5^\circ$ 이고 아래흔들과 윗흔들의 초기안정화각은 각각 14° , 5° 였다.

체계파라미터의 불확정성을 고려한 H_∞ 출력반결합조종기를 리용한 모의결과 경사각변동과 파라미터변동, 잡음의 영향하에서도 조종목적을 원만히 달성하였다.

동적가변경사면DIP의 실시간조종결과를 그림 4에 보여주었다. 밀차의 목표자리길을 주지 않았을 때 실시간조종결과 밀차와 아래흔들이, 윗흔들의 자진동폭이 각각 $\pm 0.04\text{m}$, $\pm 8^\circ$, $\pm 3^\circ$ 로 되었다.

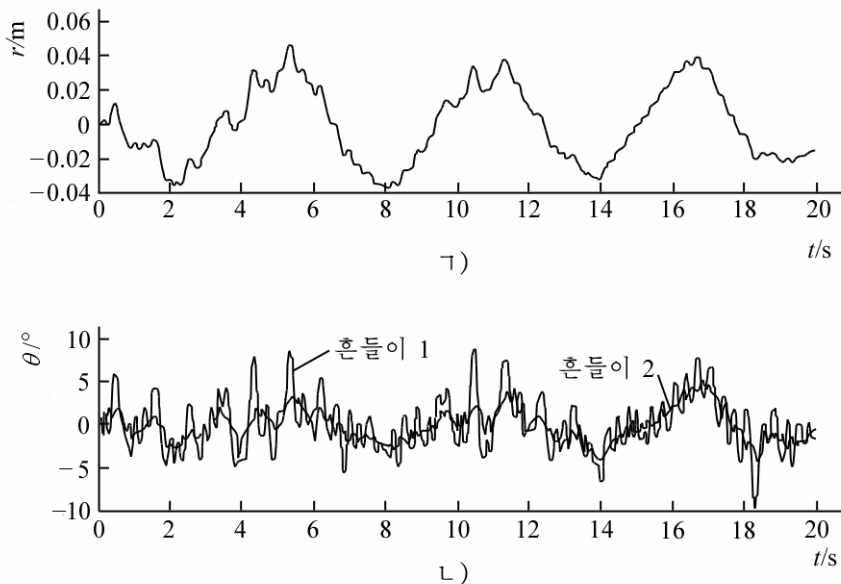


그림 4. 동적가변경사면DIP의 실시간조종결과

1) 밀차의 위치변화, 2) 흔들이 1, 2의 변화각도

맺는 말

종전의 병진형거꿀흔들이들을 포괄할뿐아니라 현재 알려지지 않은 거꿀흔들이들도 포함할수 있는 새로운 거꿀흔들의 기구학적구성을 제안하고 그 안정화조종기설계의 한 가지 방법을 제안하였다. 그리고 현장리용이 편리한 H_∞ 출력반결합조종기를 동적가변경사면두마디거꿀흔들의 안정화조종실험에 적용하여 그 유효성을 확인하였다. 이 기구는 본질상 블록우묵표면우에서 두마디거꿀흔들의 안정화조종에 해당한다고 볼수 있다.

참 고 문 헌

- [1] I. Soto et al.; International Journal of Advanced Robotic Systems, 12, 7, 993, 2015.
- [2] O. Boubaker; International Conference on Education and e-Learning Innovations, 7, 1, 2012.
- [3] Chian-Song Chiu; IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 22, 5, 679, 2014.
- [4] S. K. Mishra et al.; Journal of Engineering, <http://dx.doi.org/10.1155/2014/752918>.

주체110(2021)년 5월 5일 원고접수

A Study of Varieties of Seesaw Inverted Pendulum and its Implementation of H_∞ Output Feedback Stabilizing Controller

Ri Jun Il, Kang Jong Su

In the paper we introduced the varieties of seesaw inverted pendulum and considered its implementation of H_∞ output feedback stabilizing controller. Through computer simulation and real-time control experiments for maked equipment we verified the effectiveness of the proposed controllers.

Keywords: seesaw inverted pendulum, H_∞ control, output feedback