김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체103(2014)년 제60권 제9호 Vol. 60 No. 9 JUCHE103(2014).

선형비동차정규분수계편－의미분방정식에 대한 초기값문제

박순애, 김명하

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 지적하시였다.

《기초과학부문들을 발전시켜야 나라의 과학기술수준을 빨리 높일수 있고 인민경제 여러 분야에서 나서는 과학기술적문제들을 원만히 풀수 있으며 과학기술을 주체성있게 발전시켜나갈수 있습니다.》(《**김정일**선집》 제10권 증보판 485페지)

론문에서는 프락탈매질을 비롯한 복잡한 기하구조를 가진 매질에서 일어나는 확산, 파동 및 레비－펠러확산현상들을 기술하는 정규분수계편－의미분방정식에 대한 초기값문제를 설정하고 듀아멜의 원리에 의한 선형비동차정규분수계편－의미분방정식에 대한 초기값문제의 풀이법을 고찰하였다.

선행연구[1]에서는 일반적으로 선형비동차리만－류빌분수계편－의미분방정식에 대해서는 고전듀아멜원리에 의하여 초기값문제의 풀이를 구하였다. 그러나 선형비동차정규분수계편－의미분방정식에 대해서는 고전듀아멜의 원리가 성립되지 않는다고 지적하고 이로부터 선형비동차정규분수계편－의미분방정식에 대한 초기값문제의 풀이에 리용되는 일반화된 듀아멜의 원리를 내놓았다.

정규분수계도함수마디를 1개 포함하는 방정식을 고찰한것으로 하여 이러한 결론을 얻어낸 선행연구의 제한성을 극복하고 여기서는 도함수계수분포에 따르는 듀아멜의 원리를 고찰하였다.

다음과 같은 일반형태의 변결수선형비동차정규분수계편－의미분방정식을 고찰하자.

$$L({}^cD_{0+},\ D)u(t,\ x)\equiv {}^cD_{0+}^{\alpha_0}u(t,\ x)+\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D)\,{}^cD_{0+}^{\alpha_i}u(t,\ x)=f(t,\ x),\quad t>0,\ \ x\in R^n \qquad (1)$$

여기서 $\alpha_i\in R_+,\ \ i=0,\ 1,\ \cdots,\ m$ 은 $\alpha_0>0,\ \ \alpha_0>\alpha_1>\cdots>\alpha_m\geq 0$, $n_i-1<\alpha_i\leq n_i,\ \ n_i\in N$ 을 만족시키는 실수들이며 $a_i(t),\ i=1,\ \cdots,\ m$ 은 $[0,\ \infty)$ 에서 정의되고 $f(t,\ x)$ 는 $[0,\ \infty)\times G$ 에서 정의된 함수들이다. $A_i(D)$ 는 $A_i(\xi)\in A(G),\ \ G\subset R^n$ 을 표상으로 가지는 의미분연산자이다.

방정식 (1)과 함께 초기조건

$$\left.\frac{\partial^k}{\partial t^k}u(t,\ x)\right|_{t=+0}=0,\ \ k=0,\ 1,\ \cdots,\ n_0-1 \qquad (2)$$

을 만족시키는 함수 $u(t,\ x)$ 를 구하는 초기값문제를 고찰하자.

이때 리만－류빌분수계편－의미분연산자 ${}^RL(D_{\tau+},\ D)=D_{\tau+}^{\alpha_0}+\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D)D_{\tau+}^{\alpha_i}$ 와 정규분수계편－의미분연산자 ${}^cL({}^cD_{\tau+},\ D)={}^cD_{0+}^{\alpha_0}+\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D)\,{}^cD_{0+}^{\alpha_i}$ 를 생각하자.

정리 1 $\alpha_0 = n_0$, $n_0 > n_1$ 이고 $a_i(t) \in C[0,\ T]$, $i = 1, \cdots, m$ 이며 $0 \le \gamma < 1$, $\gamma \le \alpha_0$ 인 γ 에 대하여 $f(t,\ x) \in C_\gamma^1([0,\ \infty),\ \Psi_{G,\ 2}(R^n))$ 일 때 동차초기조건을 만족시키는 비동차방정식의 초기값문제 (1), (2)의 풀이 $u(t,\ x) \in C^{\alpha_0,\ n_0-1}([0,\ \infty),\ \Psi_{G,\ 2}(R^n))$ 은 유일존재하며

$$u(t,\ x) = \int_0^t G_c(t,\ x;\ \tau)d\tau = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k I_{0+}^{n_0}\left[\sum_{i=1}^m a_i(t)A_i(D)I_{0+}^{n_0-\alpha_i}\right]^k f(t,\ x) \tag{3}$$

로 표시된다. 여기서 $G_c(t,\ x\ ;\ \tau) \in C^{\alpha_0,\ n_0-1}([\tau,\ \infty),\ \Psi_{G,\ 2}(R^n))$ 은 $n_0 > n_1$ 일 때

$${}^cL({}^cD_{\tau+},\ D)G(t,\ x;\ \tau) = 0,\ \ t > \tau > 0\,, \tag{4}$$

$$D^k G(t,\ x\ ;\ \tau)\big|_{t=\tau+} = \begin{cases} f(\tau,\ x), & k = n_0 - 1 \\ 0, & k = 0, 1, \cdots,\ n_0 - 2 \end{cases} \tag{5}$$

의 풀이이다. 즉

$$G_c(t,\ x\ ;\ \tau) =$$

$$= \left[\Phi_{n_0}(t-\tau)I(D) + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}I_{\tau+}^{\alpha_0}\left[\ \sum_{i=1}^m a_i(t)A_i(D)I_{\tau+}^{\alpha_0-\alpha_i}\right]^k \sum_{i=1}^m a_i(t)A_i(D)\Phi_{n_0-\alpha_i}(t-\tau)\right] f(\tau,\ x).$$

증명 동차초기값문제 (4), (5)의 풀이 $G_c(t,\ x\ ;\ \tau) \in C^{\alpha_0,\ n_0-1}([\tau,\ \infty),\ \Psi_{G,\ 2}(R^n))$ 은 유일존재하며 $n_0 > n_1$ 일 때 다음과 같이 표시된다.

$$G_c(t,\ x;\ \tau) = \left[\Phi_{n_0}(t-\tau)I(D) + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}I_{\tau+}^{\alpha_0}\left[\ \sum_{i=1}^m a_i(t)A_i(D)I_{\tau+}^{\alpha_0-\alpha_i}\right]^k \sum_{i=1}^m a_i(t)A_i(D)\Phi_{n_0-\alpha_i}(t-\tau)\right] f(\tau,\ x)$$

먼저 $u(t,\ x) = \int_0^t G_c(t,\ x\ ;\ \tau)d\tau$ 를 계산하자.

$$u(t,\ x) = \int_0^t G_c(t,\ x\ ;\ \tau)d\tau =$$

$$= \int_0^t \left\{\left[\Phi_{n_0}(t-\tau)I(D) + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}I_{\tau+}^{\alpha_0}\left[\ \sum_{i=1}^m a_i(t)A_i(D)I_{\tau+}^{\alpha_0-\alpha_i}\right]^k \cdot \sum_{i=1}^m a_i(t)A_i(D)\Phi_{n_0-\alpha_i}(t-\tau)\right] f(\tau,\ x)\right\} d\tau$$

분수계적분정의로부터 $\int_0^t \Phi_{n_0}(t-\tau)f(\tau,\ x)d\tau = I_{0+}^{n_0}f(t,\ \ x)$ 이므로

$$u(t,\ x) = I_{0+}^{n_0}f(t,\ \ x) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\int_0^t \left[\frac{1}{\Gamma(n_0)}\int_\tau^t (t-\xi)^{n_0-1}\left[\sum_{i=1}^m a_i(\xi)A_i(D)I_{\tau+}^{n_0-\alpha_i}\right]^k \sum_{i=1}^m a_i(\xi)A_i(D)\Phi_{n_0-\alpha_i}(\xi-\tau)f(\tau,\ x)d\xi\right] d\tau =$$

$$= I_{0+}^{n_0}f(t,\ \ x) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{\Gamma(n_0)}\int_0^t \left[\int_0^\xi (t-\xi)^{n_0-1}\left[\sum_{i=1}^m a_i(\xi)A_i(D)I_{\tau+}^{n_0-\alpha_i}\right]^k \sum_{i=1}^m a_i(\xi)A_i(D)\Phi_{n_0-\alpha_i}(\xi-\tau)f(\tau,\ x)d\tau\right] d\xi =$$

$$= I_{0+}^{n_0} f(t,\ x) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{\Gamma(n_0)} \int_0^t (t-\xi)^{n_0-1} \left[\int_0^{\xi} \left[\sum_{i=1}^m a_i(\xi) A_i(D) I_{\tau+}^{n_0-\alpha_i} \right]^k \sum_{i=1}^m a_i(\xi) A_i(D) \Phi_{n_0-\alpha_i}(\xi-\tau) f(\tau,\ x) d\tau \right] d\xi =$$

$$= I_{0+}^{n_0} f(t,\ x) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} I_{0+}^{n_0} \left[\int_0^t \left[\sum_{i=1}^m a_i(t) A_i(D) I_{\tau+}^{n_0-\alpha_i} \right]^k \sum_{i=1}^m a_i(t) A_i(D) \Phi_{n_0-\alpha_i}(t-\tau) f(\tau,\ x) d\tau \right] =$$

$$= I_{0+}^{n_0} f(t,\ x) + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} I_{0+}^{n_0} \left[\left[\sum_{i=1}^m a_i(t) A_i(D) I_{\tau+}^{n_0-\alpha_i} \right]^k \sum_{i=1}^m a_i(t) A_i(D) \right] \int_0^t \Phi_{n_0-\alpha_i}(t-\tau) f(\tau,\ x) d\tau =$$

$$= I_{0+}^{n_0} f(t,\ x) + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} I_{0+}^{n_0} \left[\sum_{i=1}^m a_i(t) A_i(D) I_{0+}^{n_0-\alpha_i} \right]^k \sum_{i=1}^m a_i(t) A_i(D) I_{0+}^{n_0-\alpha_i} f(t,\ x) =$$

$$= I_{0+}^{n_0} f(t) + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} I_{0+}^{n_0} \left[\sum_{i=1}^m a_i(t) A_i(D) I_{0+}^{n_0-\alpha_i} \right]^{k+1} f(t,\ x) =$$

$$= I_{0+}^{n_0} f(t,\ x) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k} I_{0+}^{n_0} \left[\sum_{i=1}^m a_i(t) A_i(D) I_{0+}^{n_0-\alpha_i} \right]^{k} f(t,\ x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k} I_{0+}^{n_0} \left[\sum_{i=1}^m a_i(t) A_i(D) I_{0+}^{n_0-\alpha_i} \right]^{k} f(t,\ x)$$

즉

$$u(t,\ x) = \int_0^t G_c(t,\ \ x\,;\,\tau) d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k} I_{0+}^{n_0} \left[\sum_{i=1}^m a_i(t) A_i(D) I_{0+}^{n_0-\alpha_i} \right]^{k} f(t,\ x)\,. \qquad (6)$$

웃식으로 표시된 $u(t,\ x)$가 초기값문제 (1), (2)를 만족시키는가를 보자.

먼저 식 (6)을 방정식 (1)에 대입하자.

식 (6)의 $u(t,\ x)$에 대하여 다음의 식들이 성립된다.

$${}^cD_{0+}^{n_0} u(t,\ x) = (2\pi)^{-n} \int_G {}^cD_{0+}^{n_0} u(t,\ \ \xi) e^{ix\xi} d\xi =$$

$$= (2\pi)^{-n} \int_G \left[f(t,\ \xi) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[\sum_{i=1}^m a_i(t) A_i(\xi) I_{0+}^{n_0-\alpha_i} \right]^k f(t,\ \xi) \right] e^{ix\xi} d\xi$$

$$\sum_{i=1}^m a_i(t) A_i(D) {}^cD_{0+}^{\alpha_i} u(t,\ \ x) =$$

$$= (2\pi)^{-n} \int_G \sum_{i=1}^m a_i(t) A_i(\xi) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k I_{0+}^{n_0-\alpha_i} \left[\sum_{i=1}^m a_i(t) A_i(\xi) I_{0+}^{n_0-\alpha_i} \right]^k f(t,\ \ \xi) e^{ix\xi} d\xi =$$

$$= (2\pi)^{-n} \int_G \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \left[\sum_{i=1}^m a_i(t) A_i(\xi) I_{0+}^{n_0-\alpha_i} \right]^k f(t,\ \ \xi) e^{ix\xi} d\xi$$

우의 두 식을 변끼리 더하면

$$ {}^{c}D_{0+}^{n_0}u(t,\ x)+\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D)^{c}D_{0+}^{\alpha_i}u(t,\ x)=(2\pi)^{-n}\int_{G}\tilde{f}(t,\ \xi)\,e^{ix\xi}d\xi=f(t,\ x). $$

따라서 식 (6)의 $u(t,\ x)$는 방정식 (1)을 만족시킨다.

$$ \left.\frac{\partial^k}{\partial t^k}u(t,\ x)\right|_{t=+0}=(2\pi)^{-n}\int_{G}\left[\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}I_{0+}^{n_0-k}\left[\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(\xi)I_{0+}^{n_0-\alpha_i}\right]^k\tilde{f}(t,\ \xi)\right]_{t=0}e^{ix\xi}d\xi=0, $$

$$ k=0,1,\ \cdots,\ n_0-1 $$

이므로 식 (6)의 $u(t,\ x)$는 초기조건 (2)를 만족시킨다.

따라서 식 (3)의 $u(t,\ x)\in C^{\alpha_0,\ n_0-1}([0,\ \infty),\ \Psi_{G,\ 2}(R^n))$은 초기값문제 (1), (2)의 유일한 풀이이다.(증명끝)

정리 2 $n_0-1<\alpha_0<n_0,\ n_0>n_1$이고 $a_i(t)\in C[0,\ T],\ i=1,\cdots,m$이며 $0\le\gamma<1,\ \ \gamma\le\alpha_0$인 γ에 대하여 $f(t,\ x)\in C_{\gamma}^{1}([0,\ \infty),\ \Psi_{G,\ 2}(R^n))$일 때 동차초기조건을 만족시키는 비동차방정식의 초기값문제 (1), (2)의 풀이

$$ u(t,\ x)\in C^{\alpha_0,\ n_0-1}([0,\ \infty),\ \Psi_{G,\ 2}(R^n)) $$

은 유일존재하며

$$ u(t,\ x)=\int_0^t G_c(t,\ x;\tau)d\tau=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k I_{0+}^{n_0}\left[\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D)I_{0+}^{n_0-\alpha_i}\right]^k f(t,\ x) \qquad (7) $$

로 표시된다. 여기서 $G_c(t,\ x;\tau)\in C^{\alpha_0,\ n_0-1}([\tau,\ \infty),\ \Psi_{G,\ 2}(R^n))$은 $n_0>n_1$일 때

$$ {}^{c}L({}^{c}D_{\tau+},\ D)G(t,\ x;\tau)=0,\ \ t>\tau>0, $$

$$ D^kG(t,\ x;\tau)|_{t=\tau+}=\begin{cases}\Xi_{0+}^{n_0-\alpha_0}f(\tau,\ x), & k=n_0-1\\ 0, & k=0,1,\cdots,\ n_0-2\end{cases} $$

의 풀이이다. 즉

$G_c(t,\ x;\tau)=$

$$ =\left[\Phi_{n_0}(t-\tau)I(D)+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}I_{\tau+}^{\alpha_0}\left[\ \sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D)I_{\tau+}^{\alpha_0-\alpha_i}\right]^k\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D)\Phi_{n_0-\alpha_i}(t-\tau)\right]\Xi_{0+}^{n_0-\alpha_0}f(\tau,\ x). $$

그리고 미분기호 $\Xi_{0+}^{n_0-\alpha_0}$은 리만－류빌의 분수계도함수 $D_{0+}^{n_0-\alpha_0}$ 또는 정규분수계도함수 ${}^{c}D_{0+}^{n_0-\alpha_0}$이다.(증명생략)

참 고 문 헌

[1] S. R. Umarov; Doklady Mathematics, 75, 1, 94, 2007.

주체103(2014)년 5월 5일 원고접수

The Initial Value Problem for Linear Inhomogeneous Partial Pseudo-Differential Equation with the Caputo Fractional Derivative

Pak Sun Ae, Kim Myong Ha

We considered the solution method to the initial value problem for linear inhomogeneous partial pseudo-differential equation with the caputo fractional derivative by Duhamel principle.

Here our problem is as follows.

$$L({}^cD_{0+},\ D)u(t,\ x)\equiv {}^cD_{0+}^{\alpha_0}u(t,\ x)+\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D){}^cD_{0+}^{\alpha_i}u(t,\ x)=f(t,\ x),\quad t>0,\quad x\in R^n$$

$$\left.\frac{\partial^k}{\partial t^k}u(t,\ x)\right|_{t=+0}=0,\ \ k=0,\ 1,\cdots,\ n_0-1$$

where $\alpha_0>\alpha_1>\cdots>\alpha_m=0$, $n_i-1<\alpha_i\le n_i$, $n_i\in N$, $\alpha_i\in R$ and $i=0,\ 1,\cdots,\ m$.

Key word: linear inhomogeneous partial pseudo-differential equation