김일성종합대학학보　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　주체110(2021)년
수 학　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　제67권　제3호

추종자집단과 대피자집단을 가진 미분경기에서 동시적다중포획을 위한 충분조건

리일진, 주광휘

경애하는 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《현시대는 과학기술의 시대이며 과학기술의 발전수준은 나라의 종합적국력과 지위를 규정하는 징표로 됩니다.》

선행연구[2]에서는 단순집단추종경기에서 추종자집단에 의한 하나의 대피자의 다중포획을 위한 충분조건을, 선행연구[3]에서는 엄밀하지 않은 동시적다중포획과 엄밀한 동시적다중포획의 정의를 주고 대피자들이 토막프로그람방략을 리용하는 경우에 동시적다중포획을 위한 충분조건을 제기하였다. 그러나 선행연구들에서는 경기자들의 조종구역을 주어진 공간의 동일한 닫긴단위구로 제한하였다. 그러므로 조종구역이 일반적인 경우에는 그것을 닫긴단위구에로 넘기는 변환과 그것에 의하여 변화되는 경기자들의 운동방정식들과 관련된 론의들이 진행되여야 한다.

론문에서는 해결함수법[1]의 도식을 리용하여 조종구역들이 주어진 공간의 일반적인 콤팍트구역으로 주어지는 선형집단추종미분경기에서 추종자집단에 의한 대피자집단의 동시적다중포획을 위한 충분조건들과 동시적다중포획을 담보할수 있는 추종자들의 토막프로그람방략구성방식을 연구하였다.

유클리드공간 $\mathbf{R}^n$, $n \ge 2$에서 $m' + m''$명의 경기자 즉 운동방정식들과 초기조건들이 각각

$$\begin{aligned} P_i &: \dot{x}_i = Ax_i + u_i,\ u_i \in U, \quad x_i(t_0) = x_i^0 \quad (i \in I(m')) \\ E_j &: \dot{y}_j = Ay_j + v, \quad v \in U, \quad y_j(t_0) = y_j^0 \quad (j \in I(m'')) \end{aligned} \tag{1}$$

로 주어진 m'명의 추종자 $P_1, \cdots, P_{m'}$와 m''명의 대피자 $E_1, \cdots, E_{m''}$를 가진 미분경기 Γ를 생각하자. 여기서 $I(m) = \{1, \cdots, m\}$이고 U는 콤팍트구역이다.

모임 U에서 값을 가지고 $[t_0, +\infty)$에서 르베그가측인 함수들로 주어지는 조종들을 경기자들의 허용조종이라고 부른다.

σ를 집적점이 없는 (분할점들의 개수가 유한이거나 또는 $\theta_q \to +\infty$ $(q \to +\infty)$인) 구간 $[t_0, +\infty)$의 적당한 분할 즉 $t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_q < \cdots$이라고 가정한다.

매 추종자 P_i $(i \in I(m'))$에 대하여 추종자집단을 위한 공동의 적당한 목적 즉 동시적포획을 위한 목적에 기초한 조종 $u_i(t)$가 선택되도록 하는 조종중심 P가 있다고 간주한다.

매개 $q = 1, \cdots, m$에 대하여 모임

$$\Omega(q,\ m) = \{\{i_1,\ i_2, \cdots, i_q\} : i_1 < i_2 < \cdots < i_q,\ i_1,\ i_2, \cdots,\ i_q \in I(m)\}$$

을 정의한다. 이 모임의 농도는 m개에서 q개씩 취한 조합의 수와 같다. 즉

$$|\Omega(q)| = C_n^q = n!/((n-q)!q!)$$

새로운 변수 $z_{ij} = x_i - y_j$, $z_{ij}(t_0) = z_{ij}^0 = x_i^0 - y_j^0$ $(i \in I(m'),\ j \in I(m''))$을 받아들이면 식 (1)은

$$\dot{z}_{ij} = Az_{ij} + u_i - v,\ u_i,\ v \in U,\ z_{ij}(t_0) = z_{ij}^0 \ (i \in I(m'),\ j \in I(m'')) \tag{2}$$

과 같으며 코시공식을 리용하면 식 (2)의 풀이는 다음과 같다.

$$z_{ij}(t)=e^{At}z_{ij}^0+\int_0^t e^{A(t-\tau)}(u_i(\tau)-\upsilon(\tau))d\tau \quad (t\geq 0) \tag{3}$$

목표모임은 자리표원점이 다음과 같이 주어졌다고 가정하자.

$$M=\{0\} \tag{4}$$

이때 $b\in I(m')$에 대하여 임의의 분할 σ와 대피자 E_j ($j\in I(m'')$)들의 토막프로그람방략에 대해서도 추종자 P_i ($i\in I(m')$)들의 적당한 토막프로그람대항방략들이 존재하여 어떤 모임 $K\in\Omega(b,\ m')$와 수 $j_k\in I(m'')$, 시각 $t_K\in[t_0,\ T_0]$이 있어서 $z_{kj_k}(t_K)\in M$, $z_{kj_k}(s)\notin M$ ($\forall s\in[t_0,\ t_K)$, $k\in K$)가 성립되는 유한한 시각 $T_0=T_0(\{z_{ij}^0\}_{i\in I(m'),\ j\in I(m'')})$이 존재한다면 경기 (1)에서 동시적$b$중포획이 가능하다.

다음과 같은 몇가지 표식과 함수, 다가넘기기들을 도입하자.

$$e^{At}-\dot{z}=Az,\ W(t,\ \tau,\ \upsilon)=e^{A(t-\tau)}(U-\upsilon)\quad(\upsilon\in U)$$

$$\Delta=\{(t,\ \tau):0\leq\tau\leq t<+\infty\}$$

$$A_{ij}(t,\ \tau,\ \upsilon)=\{\alpha\geq 0:W(t,\ \tau,\ \upsilon)\cap\alpha[M-e^{At}z_{ij}^0]\neq\varnothing\}\quad(\upsilon\in U,\ i\in I(m'),\ j\in I(m''))$$

$$\alpha_{ij}(t,\ \tau,\ \upsilon)=\sup\{\alpha:\alpha\in A_{ij}(t,\ \tau,\ \upsilon)\}\quad((t,\ \tau)\in\Delta,\ \upsilon\in U)$$

다가넘기기 $W(t,\ \tau,\ \upsilon)$는 주어진 $\upsilon\in U$에 대하여 $(t,\ \tau)\in\Delta$에 관하여 련속인 넘기기로 된다. 따라서 임의의 허용조종 $\upsilon(\cdot)$에 대하여 함수 $\alpha_{ij}(t,\ \tau,\ \upsilon(\tau))$ $(i\in I(m'),\ j\in I(m''))$는 τ $(0\leq\tau\leq t)$에 관하여 르베그가측인 함수로 된다.

주어진 $b\in I(m')$, $K\in\Omega(b,\ m')$에 대하여 $K=\{k_1,\cdots,\ k_b\}$라고 할 때 첨수쌍들의 모임 $\{k_1j_{k_1},\cdots,\ k_bj_{k_b}\}$ $(j_{k_q}\in I(m''),\ q=1,\cdots,b)$전부의 모임을 $C(K)$로 표시한다.

임의의 허용조종 $\upsilon(\cdot)$ 즉 $\upsilon:[0,+\infty)\to U$에 대하여 다음의 식들이 성립된다고 할 때 여기서 부등식이 모든 $t>0$에 대하여 성립되지 않으면 $T_{ij}(\upsilon(\cdot))=+\infty$로 가정한다.

$$L_{ij}(a,\ t)=\int_a^t\alpha_{ij}(t,\ \tau,\ \upsilon(\tau))d\tau\quad(0\leq a\leq t)$$

$$L_K(a,\ t)=\max_{K'\in C(K)}\min_{kj_k\in K'}L_{kj_k}(a,\ t)=\min_{kj_k\in K'^*}L_{kj_k}(a,\ t)\quad(K\in\Omega(b,\ m'),\ b\in I(m'))$$

$$T_{ij}(\upsilon(\cdot))=\inf\{t\geq 0:L_{ij}(0,\ t)\geq 1\}$$

보조정리 1 [2] 충돌조종과정 (3), (4)에서 어떤 $i\in I(m')$, $j\in I(m'')$가 있어서 주어진 $\upsilon(\cdot)$에 대하여 $T_{ij}=T_{ij}(\upsilon(\cdot))<+\infty$이면 T_{ij}는 추종자 P_i $(i\in I(m))$의 적당한 토막프로그람대항방략에 의하여 과정 (3)의 자리길을 목표모임에로 이끌어갈수 있는 최소담보시간으로 된다.

이로부터 주어진 z_{ij}^0 $(i\in I(m'),\ j\in I(m''))$에 대하여

$$T_{ij}=T_{ij}(z_{ij}^0)=\sup_{\upsilon(\cdot)}T_{ij}(\upsilon(\cdot))<+\infty$$

라고 하면 추종자 P_i의 적당한 토막프로그람대항방략에 의하여 과정 (3)의 자리길이 시간 T_{ij}내에 목표모임에 도달하게 할수 있다.

주어진 $\upsilon(\cdot)$에 대하여 다음과 같은 몇가지 표식들을 도입하자.

$$\Omega(b,\ m';\ \upsilon(\cdot))=\left\{K\in\Omega(b,\ m'):\ \max_{k\in K}T_{kj_k}(\upsilon(\cdot))<+\infty\ \ (j_k\in I(m''))\right\}$$

$$T_K(\upsilon(\cdot))=\max_{k\in K}T_{kj_k}(\upsilon(\cdot))\ \ (K\in\Omega(b,\ m';\ \upsilon(\cdot)))$$

조건 1 주어진 $\upsilon(\cdot)$ 에 대하여 적당한 $K\in\Omega(b,\ m';\ \upsilon(\cdot))$ 이 있어서 충분히 작은 $\varepsilon>0$ 에 대해서도 구간 $[T_K(\upsilon(\cdot))-\varepsilon,\ T_K(\upsilon(\cdot)))$ 의 거의도처에서 $\alpha_{kj_k}(T_K(\upsilon(\cdot)),\ t,\ \upsilon(t))>0$ ($kj_k\in K'^*$, $\forall k\in K$)이 성립되는 $K'^*\in C(K)$ 가 존재한다.

조건 1이 성립되면 함수 $\int_0^t\alpha_{kj_k}(t,\ \tau,\ \upsilon(\tau))d\tau$ ($kj_k\in K'^*$)가 충분히 작은 $\varepsilon>0$ 에 대하여 구간 $[T_K(\upsilon(\cdot))-\varepsilon,\ T_K(\upsilon(\cdot)))$ 에서 증가한다는것을 알수 있다.

$T_K(\upsilon(\cdot))$ 의 의미로부터 $T_{kj_k}(\upsilon(\cdot))=T_K(\upsilon(\cdot))$ ($kj_k\in K'^*$, $K'^*\in C(K)$)인 $k\in K$ 에 대해서는 조건 1이 자동적으로 만족된다.

정리 1 주어진 허용조종 $\upsilon(\cdot)$ 과 $b\in I(m')$ 에 대하여 조건 1이 성립된다고 하면 경기 (1) 또는 충돌조종과정 (3), (4)에서는 시각 $T_K(\upsilon(\cdot))$ 에 동시적 b 중포획이 가능하다.

증명 주어진 허용조종 $\upsilon(\cdot)$ 에 대하여 (2)의 풀이는 다음과 같다.

$$z_{ij}(t)=e^{At}z_{ij}^0+\int_0^t e^{A(t-\tau)}(u_i(\tau)-\upsilon(\tau))d\tau\ \ (i\in I(m'),\ \ j\in I(m''),\ \ t\in[0,\ +\infty))$$

$b\in I(m')$ 가 주어졌다고 하자.

이때 조건 1에 의하여 적당한 $K\in\Omega(b,\ m';\ \upsilon(\cdot))$ 과 충분히 작은 $\varepsilon_K>0$ 이 있어서 모든 $k\in K$ 에 대하여 함수 $\int_0^t\alpha_{kj_k}(t,\ \tau,\ \upsilon(\tau))d\tau$ ($kj_k\in K'^*$)가 구간 $[T_K(\upsilon(\cdot))-\varepsilon_K,\ T_K(\upsilon(\cdot)))$ 에서 증가하게 되는 $K'^*\in C(K)$ 가 존재한다.

이제 $h_{ij_i}(t)$ ($i\in I(m')$, $j_i\in I(m'')$, $t\in[\theta_0,\ T_K(\upsilon(\cdot))]$)를

$$h_{ij_i}(t)=\begin{cases}L_{ij_i}^{-1}(\theta_0,\ T_K(\upsilon(\cdot))), & ij_i\in K'^*\\ 0, & ij_i\notin K'^*\end{cases}$$

로 정의하고 추종자 P_i ($i\in I(m')$)의 허용조종

$$u_i(\tau)=\upsilon(\tau)-h_{ij_i}(\tau)\alpha_{ij_i}(t,\ \tau,\ \upsilon(\tau))z_{ij_i}^0\ \ (\tau\in[0,\ t),\ \ t>0)$$

을 생각하자. 여기서 함수 $h_{ij_i}(\tau)\in[0,\ 1]$ 들은 단편상수함수들이다.

이때 모든 $i\in I(m')$ 와 $t\in[t_0,\ +\infty)$ 에 대하여 다음의 식이 성립된다.

$$z_{ij_i}(t)=z_{ij_i}^0(1-H_{ij_i}(t)),\ \ H_{ij_i}(t)=\int_{t_0}^t h_{ij_i}(s)\alpha_{ij_i}(t,\ \tau,\ \upsilon(\tau))ds \tag{5}$$

한편 모든 $k\in K$ 에 대하여 $1=L_K(\theta_0,\ T_K(\upsilon(\cdot)))\le L_{kj_k}(\theta_0,\ T_K(\upsilon(\cdot)))$ ($kj_k\in K'^*$)이 성립되고 조건 1에 의하여 함수 $L_{kj_k}(\theta_0,\ t)$ 가 $[T_K(\upsilon(\cdot))-\varepsilon_K,\ T_K(\upsilon(\cdot)))$ 에서 증가하므로 다음의 식들이 성립된다.

$$H_{kj_k}(T_K(\upsilon(\cdot)))=h_{kj_k}(\theta_0)\int_{\theta_0}^{T_K(\upsilon(\cdot))}\alpha_{kj_k}(T_K(\upsilon(\cdot)),\ \tau,\ \upsilon(\tau))d\tau=L_{kj_k}^{-1}(\theta_0,\ T_K(\upsilon(\cdot)))L_{kj_k}(\theta_0,\ T_K(\upsilon(\cdot)))=1$$

$$H_{kj_k}(t)=h_{kj_k}(\theta_0)\int_{\theta_0}^{t}\alpha_{kj_k}(t,\ \tau,\ \upsilon(\tau))d\tau=L_{kj_k}^{-1}(\theta_0,\ T_K(\upsilon(\cdot)))L_{kj_k}(\theta_0,\ t)<1\quad(t\in[\theta_0,\ T_K(\upsilon(\cdot))))$$

따라서 식 (5)로부터 시각 $T_K(\upsilon(\cdot))$ 내에 동시적 b 중포획이 가능하다.(증명끝)

조건 2 임의의 $\upsilon(\cdot)$ 에 대하여 $\Omega(b,\ m';\ \upsilon(\cdot))\neq\varnothing$ 이다.

이제 조건 1의 성립된다는 전제하에서 $T(b,\ m')=\sup\limits_{\upsilon(\cdot)}\ \min\limits_{K\in\Omega(b,\ m';\ \upsilon(\cdot))}\ \min\limits_{K'^*\in C(K)}\ \max\limits_{kj_k\in K'^*}T_{kj_k}(\upsilon(\cdot))$ 라고 놓으면 조건 2는 $T(b,\ m')<+\infty$ 와 동등하다.

정리 2 주어진 $b\in I(m')$ 에 대하여 조건 1, 2가 성립된다고 하자.

이때 경기 (1) 또는 충돌조종과정 (3), (4)에서는 $T(b,\ m')$ 를 넘지 않는 시각에 동시적 b 중포획이 가능하다.

증명 주어진 $b\in I(m')$ 와 임의의 허용조종 $\upsilon(\cdot)$ 에 대하여 조건 1, 2에 의하여

$$\min_{K'^*\in C(K^*)}\ \max_{kj_k\in K'^*}T_{kj_k}(\upsilon(\cdot))=\min_{K\in\Omega(b,\ m';\ \upsilon(\cdot))}\ \min_{K'^*\in C(K)}\ \max_{kj_k\in K'^*}T_{kj_k}(\upsilon(\cdot))$$

인 $K^*\in\Omega(b,\ m';\ \upsilon(\cdot))$ 과 $\min\limits_{K'^*\in C(K^*)}\ \max\limits_{kj_k\in K'^*}T_{kj_k}(\upsilon(\cdot))=\max\limits_{kj_k\in K'^{**}}T_{kj_k}(\upsilon(\cdot))$ 인 $K'^{**}\in C(K^*)$ 의 존재성이 나온다.

추종자 P_i ($i\in I(m')$)의 허용조종 $u_i(\tau)=\upsilon(\tau)-h_{ij_i}(\tau)\alpha_{ij_i}(t,\ \tau,\ \upsilon(\tau))z_{ij_i}^0$ ($\tau\in[0,\ t)$, $t>0$)을 생각하자. 여기서 함수 $h_{ij_i}(\tau)\in[0,\ 1]$ 들은 단편상수함수들이다.

함수 $h_{ij_i}(t)$ ($i\in I(m')$, $j_i\in I(m'')$, $t\in[\theta_0,\ T_{K^*}(\upsilon(\cdot))]$)를 다음과 같이 정의한다.

$$h_{ij_i}(t)=\begin{cases}L_{ij_i}^{-1}(\theta_0,\ T_{K^*}(\upsilon(\cdot))), & ij_i\in K'^{**}\\ 0, & ij_i\notin K'^{**}\end{cases}$$

그러면 정리 1에 의하여 $t\in[\theta_0,\ T_{K^*}(\upsilon(\cdot)))$ 과 $k\in K^*$ 에 대하여

$$H_{kj_k}(T_{K^*}(\upsilon(\cdot)))=h_{kj_k}(\theta_0)\int_{\theta_0}^{T_{K^*}(\upsilon(\cdot))}\alpha_{kj_k}(t_0^*,\ \tau,\ \upsilon(\tau))d\tau=L_{kj_k}^{-1}(\theta_0,\ T_{K^*}(\upsilon(\cdot)))L_{kj_k}(\theta_0,\ T_{K^*}(\upsilon(\cdot)))=1$$

$$H_{kj_k}(t)=h_{kj_k}(\theta_0)\int_{\theta_0}^{t}\alpha_{kj_k}(t,\ \tau,\ \upsilon(\tau))d\tau=L_{kj_k}^{-1}(\theta_0,\ T_{K^*}(\upsilon(\cdot)))L_{kj_k}(\theta_0,\ t)<1$$

이 성립된다.

따라서 식 (5)로부터 시각 $T_{K^*}(\upsilon(\cdot))$ 내에 동시적 b 중포획이 가능하다.(증명끝)

보조정리 2 U 는 불룩모임이고 임의로 주어진 $\upsilon(\cdot)$ 에 대하여 $\Omega(b,\ m';\ \upsilon(\cdot))\neq\varnothing$ 이라고 할 때 임의의 $\upsilon\in\partial U$ 에 대하여 적당한 $K'\in C(K)$ ($K=\{k_1,\ \cdots,\ k_b\}\in\Omega(b,\ m';\ \upsilon(\cdot))$)이 있어서 $|\operatorname{con}(U-\upsilon)\cap\{z_{k_1j_{k_1}}^0,\ \cdots,\ z_{k_bj_{k_b}}^0\}|=b$ ($k_lj_{k_l}\in K'$, $l=1,\ \cdots,\ b$)이면 조건 1이 만족된다.

조건 3 모든 $K\in\Omega(m'-b+1,\ m')$ ($b\in I(m')$)에 대하여 적당한 $K'\in C(K)$ 가 있어서 $0\in\operatorname{int}\operatorname{co}\{z_{kj_k}^0,\ k\in K\}$ ($kj_k\in K'$)가 성립된다.

정리 3 $U=S(\cdot, 1)$ 이고 주어진 $b\in I(m')$ 에 대하여 조건 2, 3이 만족된다고 하자.

이때 경기 (1) 또는 충돌조종과정 (3), (4)에서는 동시적 b 중포획이 가능하다. 여기서 $S(\cdot, 1)$ 은 반경이 1인 $\mathbf{R}^n$ 의 닫긴구이다.

증명 H 를 경계가 자리표원점 O 를 지나는 $\mathbf{R}^n$ 의 반공간이라고 하자.

주어진 $b\in I(m')$ 에 대하여 조건 3이 만족되므로 모든 $K\in\Omega(m'-b+1,\ m')$ $(b\in I(m'))$ 에 대하여 $0\in \operatorname{int}\operatorname{co}\{z^0_{kj_k},\ k\in K\}$ ($kj_k\in K'$)인 $K'\in C(K)$ 가 존재한다.

한편 U 가 닫긴구이므로 임의의 $\upsilon\in\partial U$ 에 대하여 적당한 H 가 있어서 $\operatorname{con}(U-\upsilon)=\operatorname{int}H$ 로 된다.

이로부터 $|\operatorname{con}(U-\upsilon)\bigcap\{z^0_{k_1j_{k_1}},\ \cdots,\ z^0_{k_bj_{k_b}}\}|=b$ ($k_l j_{k_l}\in K'$, $l=1,\ \cdots,\ b$)가 성립된다. 그러므로 보조정리 2에 의하여 조건 1이 성립된다.

따라서 정리 1로부터 동시적 b 중포획이 가능하다.(증명끝)

따름 $A\equiv 0$ 이고 $U=S(\cdot, 1)$ 이며 주어진 $b\in I(m')$ 에 대하여 조건 3이 만족된다고 하면 경기 (1) 또는 충돌조종과정 (3), (4)에서는 동시적 b 중포획이 가능하다.

실례 $\mathbf{R}^n$ 에서 6명의 경기자 즉 추종자 $P_1,\ \cdots,\ P_4$ 와 대피자 $E_1,\ E_2$ 를 가진 경기 (1)을 보기로 하자. 여기서 $A\equiv 0$ 이고 $x_i^0=\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\pi i}{2}\\ \sin\dfrac{\pi i}{2}\end{pmatrix}$ $(i\in I(4))$, $y_1^0=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$, $y_2^0=\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$ 이다.

주어진 경기에서 조건 3이 만족된다. 따라서 $U=S(\cdot, 1)$ 인 경우에는 정리 3에 의하여 주어진 경기에서 동시적1중포획이 가능하다. 그러나 $U=[-1,\ 1]\times[-1,\ 1]$ 인 경우에는 정리 2에 의하여 주어진 경기에서 동시적3중포획이 가능하다.

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보 수학, 66, 2, 90, 주체109(2020).

[2] A. I. Blagodatskikh; J. Appl. Math. Mech., 77, 3, 314, 2013.

[3] A. I. Blagodatskikh; Dyn. Games. Appl., 9, 3, 594, 2019.

주체110(2021)년 3월 5일 원고접수

Sufficient Conditions for Simultaneous Multiple Capture in a Differential Game between the Group of Pursuers and That of Evader

Ri Il Jin, Ju Kwang Hwi

We study sufficient conditions for simultaneous multiple capture in a linear differential pursuit game between the group of pursuers and that of evaders with general control set.

Keywords: multiple capture, simultaneous multiple capture, differential pursuit game