김일성종합대학학보　　　　　　　　　　　　　　　　　　주체108(2019)년
수 학　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　제65권　제4호

초공간에로 유도된 원둘레넘기기의 $\omega-$극한모임에 대한 연구

리성훈, 주현희

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《새로운 과학기술분야를 개척하기 위한 사업도 전망성있게 밀고나가야 합니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제11권 138페지)

최근 초공간력학계리론에서는 X가 콤팍트거리공간이고 f는 X우에서 정의된 련속넘기기라고 할 때 기초계 $(X,\ f)$와 그것의 모임값연장의 동력학적성질들사이의 관계가 많이 연구되고있다.[1－4]

선행연구[2]에서는 초공간에로 유도된 구간넘기기 $\tilde{f}$의 $\omega-$극한모임이 1개의 불퇴화련결성분을 가진다면 이 모임은 유한개의 불퇴화이고 주기순환하는 구간들로 이루어진다는것을 증명하였으며 $\omega-$극한모임의 구조가 서로 비슷하면서 구간동력학계의 단순한 확장으로 되는 계들(실례로 원둘레, 나무, 빗적넘기기 등)에 대하여서도 류사한 결과들이 얻어질것이라고 예상하였다.

선행연구[4]에서는 위상이행적인 그라프넘기기에 대하여 유도된 모임값연장넘기기의 $\omega-$극한모임의 구조가 구간넘기기의 모임값연장의 $\omega-$극한모임의 구조와 류사하다는것을 밝혔다.

선행연구[3]에서는 일반적인 콤팍트계에 대하여 주어진 계가 위상이행성보다 더 강한 조건인 혼합정규주기분해를 가진다는 가정하에서 그것에 의하여 확장된 모호계의 동력학적성질들을 해석하였으며 두 계의 위상적엔트로피가 같다는것을 증명하였다.

론문에서는 선행연구[2]에서 기대하였던것과는 달리 원둘레넘기기의 모임값연장의 $\omega-$모임의 구조가 구간넘기기의 모임값연장의 $\omega-$극한모임의 구조와 다르다는것을 밝혔다. 이것은 원둘레넘기기의 $\omega-$극한모임의 구조가 구간넘기기의 $\omega-$극한모임의 구조와 비슷하다 하더라도 이 넘기기들에 의하여 유도된 모임값연장들의 $\omega-$극한모임의 구조는 본질적인 차이를 가진다는것을 의미한다.

따라서 론문에서는 일반적인 원둘레넘기기에 대하여서는 초공간에로 유도된 모임값연장넘기기의 $\omega-$극한모임이 불퇴화련결성분을 가져도 유한개로 이루어지지 않는 경우가 있다는것을 밝혔으며 또한 어떤 조건을 만족시킬 때 초공간에로 유도된 모임값연장넘기기의 $\omega-$극한모임이 유한개의 불퇴화순환부분으로 이루어지는가 하는 문제를 해명하였다.

1. 예 비 지 식

리산동력학계는 비지 않은 모임 X와 넘기기 $f: X\to X$의 쌍 $(X,\ f)$로 이루어진다. X가 위상공간(또는 콤팍트)이고 f가 련속일 때(즉 $f\in C(X)$) 쌍 $(X,\ f)$를(간단히 f를) 위상(또는 콤팍트)동력학계라고 부른다.

보조정리 1 [1] H 를 구간 I 의 련결인 부분모임이라고 하고 $E=\bigcup_{k\ge 0} f^k(H)$ 라고 하자. 그러면 E 의 련결성분들은 $f^k(H)(k\ge 0)$ 이거나 어떤 옹근수 $m\ge 0$ 과 $p>0$ 이 있어서 E 의 련결성분들은 $f^k(H)(0\le k<m)$ 와 $E_j:=\bigcup_{k\ge 0} f^{m+j+kp}(H)$ $(0\le j<p)$ 들로 된다.

주의 1 이 정리는 일반적으로 련결인 콤팍트동력학계에 대하여 성립한다.

위상동력학계 $(X,\ f)$ 와 주어진 점 $x\in X$ 에 대하여 x 의 n 번째 반복상은 다음과 같이 귀납적으로 정의된다.

$$f^0(x)=x,\ \ f^{n+1}=f(f^n(x)),\ n\in\mathbf{N}$$

x 의 모든 반복상들의 렬 $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbf{Z}^+}$ 를 x 의 궤도라고 부르고 x 의 궤도의 모든 집적점들의 모임을 x 의 $\omega-$극한모임이라고 부르며 $\omega(x,f)$ 로 표시한다. 모임 $A\subseteq X$ 는 $f(A)\subseteq A\ (f(A)=A)$ 일 때 $f-$불변(엄격한 $f-$불변)이라고 부른다. X 가 콤팍트일 때 임의의 x 의 $\omega-$극한모임은 엄격히 $f-$불변이며 다음의 사실이 성립한다는것이 알려져있다.[3, 4] 임의의 $n\in\mathbf{N}$ 에 대하여

$$\omega(x,f)=\bigcup_{j=0}^{n-1}\omega(f^j(x),\ f^n) \tag{1}$$

$$f(\omega(x,f^n))=\omega(f(x),\ f^n) \tag{2}$$

이 성립한다.[1, 4]

$(X,\ d)$ 를 거리공간, $f:X\to X$ 를 련속이라고 하자. 다음의 초공간들을 생각하자.

$$K(X)=\{K\subseteq X\,|\,K\text{는 비지 않은 콤팍트모임}\}$$

$$K_c(X)=\{K\subseteq X\,|\,K\text{는 비지 않은 련결콤팍트모임}\}$$

이 공간들에 다음의 식으로 정의되는 하우스돌프거리 D_X [4]를 도입할수 있다.

$$D_X(A,\ B)=\max\{d(A,\ B),\ d(B,\ A)\}$$

여기서

$$d(A,\ B)=\max\{d(a,\ B):a\in A\}$$

$$d(a,\ B)=\min\{d(a,\ b):b\in B\}$$

이다.

론문에서는 f 에 의하여 유도된 다음의 두가지 모임값연장넘기기 $\bar{f}:K(X)\to K(X)$ 와 $\tilde{f}:K_c(X)\to K_c(X)$ 를 연구한다. 즉

$$\bar{f}(K)=f(K)=\{y\in X\,|\,f(x)=y,\ \exists x\in K\},\ \ \forall K\in K(X)$$

$$\tilde{f}:=\bar{f}|_{K_c(X)}$$

를 고찰한다. 따라서 $(X,\ f)$ 로부터 유도된 두 모임값동력학계 $(K(X),\ \bar{f})$ 와 $(K_c(X),\ \tilde{f})$ 를 얻는다.

그라프와 그라프넘기기의 정의를 상기하자. 콤팍트련결거리공간 G 에 대하여 어떤 유한부분모임 $V\subset G$ 가 있어서 $G\setminus V$ 의 임의의 련결성분이 열린구간과 위상동형일 때 G 를 그라프라고 부른다. 비지 않은 모임의 농도가 1보다 클 때 그 모임을 불퇴화모임이라

고 부른다. 그라프 G에 대하여 련속넘기기 $f:G\to G$를 그라프넘기기라고 부른다.

단위원 S는 단위구간의 0과 1을 동일시하여 얻을수 있다. 즉

$$S=[0,\ 1]/\sim$$

이다. 여기서 ~은 0과 1만을 동일시하는 동등관계를 나타낸다. 구간 [0, 1]의 자연거리는 S에서의 거리를 유도한다.[3] 구체적으로

$$d(x,\ y)=\min(|x-y|,\ 1-|x-y|)$$

이다. S의 참인 련결모임을 구간이라고 부른다.

원둘레회전넘기기 $R_\alpha:S\to S$는 다음과 같이 정의한다.

$$R_\alpha x=x+\alpha \bmod 1$$

여기서 $x+\alpha \bmod 1$은 $x+\alpha$의 소수부이다. 만일 α가 유리(무리)수이면 R_α를 유리(무리)수회전넘기기라고 부른다.

2. 초공간우로 유도된 원둘레넘기기의 $\omega-$극한모임

일반적으로 원둘레넘기기에 대하여서는 선행연구[2]의 정리 1에서와 같은 결과가 성립하지 않는다. 여기서는 우선 선행연구[2]에서 기대하였던것이 원둘레넘기기에 대하여서는 성립하지 않는다는것을 보여주며 다음으로 일반적인 원둘레넘기기가 어떤 조건을 만족시켜야 선행연구[2]의 정리 1과 같은 초공간력학계의 $\omega-$극한모임의 구조와 같아지는가를 보기로 한다.

실례 1 무리수회전넘기기 $R_\alpha:S\to S$를 생각하자. $J=[a^*,\ b^*]$를 길이가 $I=[a,\ b]$와 같은 임의의 구간이라고 하자. R_α가 위상이행적이므로

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_\varepsilon\in\mathbf{N},\ d(a^*,\ R_\alpha^{n_\varepsilon}(a))<\varepsilon$$

이 성립한다. R_α가 등거리넘기기이므로 $d(b^*,\ R_\alpha^{n_\varepsilon}(b))<\varepsilon$이 성립한다. 이로부터 $D_S(J,\ R_\alpha^{n_\varepsilon}(I))<\varepsilon$이므로 $J\in\omega(I,\ \tilde{R}_\alpha)$이다.

주의 2 실례 1로부터 어떤 원둘레력학계에 대하여 I의 $\omega-$극한모임이 불퇴화구간을 포함하지만 이것은 순환되는 유한개의 불퇴화구간들로 이루어져있지 않다는것을 알수 있다. 이것은 구간력학계에서 성립하던것이 원둘레넘기기에 대하여서는 다르게 성립된다는것을 의미한다.

아래의 보조정리는 초공간에로 유도된 원둘레넘기기에 대하여 $\omega-$극한모임이 불퇴화련결성분을 가질 때 유한개의 불퇴화련결성분을 가지기 위한 조건들을 보여준다.

보조정리 2 $f:S\to S$를 원둘레넘기기, $\tilde{\omega}$을 닫긴구간 I의 $\tilde{f}$에 관한 $\omega-$극한모임으로서 불퇴화련결성분 w를 원소로 포함한다고 하자. 이때 어떤 $m,n\in\mathbf{N}$이 있어서 다음의 조건

$$f^n(I)\subset f^m(I)\ (n\neq m)$$

또는

$$\bigcup_{k\geq0}f^{m+nk}(I)\neq S$$

를 만족시킬 때 $\tilde{\omega}$는 유한개의 불퇴화순환련결성분들로 이루어진다.

증명 $\exists m,\ n\in\mathbf{N},\ f^n(I)\subset f^m(I),\ n\neq m$ 인 경우

우선 $n<m$ 인 경우를 고찰하자. $g:=f^{m-n}$, $J:=f^n(I)$ 라고 하자. 그러면 임의의 $k\geq 0$ 에 대하여

$$g^k(J)\subset g^{k+1}(J)$$

이고 이것은

$$\omega(J,\ \tilde{g})=\left\{\bigcup_{k\geq 0}g^k(J)\right\}$$

라는것을 의미한다. 식 (1)과 (2)로부터

$$\omega(\tilde{f}^n(I),\ \tilde{f})=\bigcup_{k=0}^{m-n-1}\omega(\tilde{f}^k(J),\ \tilde{f}^{m-n})=\bigcup_{k=0}^{m-n-1}\tilde{f}^k(\omega(J,\ \tilde{g}))$$

이다. 이것은 $\#\omega(I,\ \tilde{f})\leq m-n$ 이라는것을 보여준다.

$n>m$ 인 경우에도 류사하게 증명할수 있다.

다만 여기서 $\omega(J,\ \tilde{g})=\left\{\bigcap_{k=0}^{m-n-1}g^k(J)\right\}$ 이다.

$\exists m,\ n\in\mathbf{N},\ \bigcup_{k\geq 0}f^{m+nk}(I)\neq S$ 인 경우

$g=f^{m-n}$, $J=f^n(I)$ 라고 하고 $A:=\bigcup_{k\geq 0}f^{m+nk}(I)=\bigcup_{k\geq 0}g^k(J)$ 로 놓자.

$\operatorname{int}w$ 는 달아나지 않는 모임[1]이다. 보조정리 1로부터 A 의 련결성분들은 어떤 $m'\geq 0$ 과 $p>0$ 이 존재하여 $J,\ g(J),\ \cdots,\ g^{m'}(J)$ 와 $E_j=\bigcup_{k\geq 0}g^{m'+kp+j}(J)$ $(0\leq j<p)$ 로 된다. 분명히 E_j 는 g^p-불변구간이다. 더우기

$$\omega(J,\ g)=\omega(g^{m'}(J),\ g),\ g^{m'}(J)\subset E_0$$

이다. $g^p:E_0\to E_0$ 이 구간넘기기라는것은 명백하다. 선행연구[4]의 정리 1로부터 $\omega(g^{m'}(J),\ g^p)$ 는 유한개의 불퇴화순환구간들로 이루어진다.

한편 식 (1), (2)를 적용하면

$$\omega(I,\ \tilde{f})=\omega(f^n(I),\ \tilde{f})=\bigcup_{i=0}^{m-1}f^i(\omega(J,\ \tilde{f}^m))=\bigcup_{i=0}^{m-1}\tilde{f}^i(\omega(J,\ \tilde{g}))=$$

$$=\bigcup_{i=0}^{m-1}\tilde{f}^i(\omega(g^{m'}(J),\ \tilde{g}))=\bigcup_{i=0}^{m-1}\tilde{f}^i\left(\bigcup_{j=0}^{p-1}\tilde{g}^j(\omega(g^{m'}(J),\ \tilde{g}^p))\right)$$

이다. 따라서 $\#\omega(I,\ \tilde{f})\leq mp\cdot\#\omega(g^{m'}(J),\ \tilde{g}^p)$ 이다.(증명끝)

보조정리 2의 직접적인 따름으로 다음의 결과가 성립한다.

정리 $f:S\to S$ 를 원둘레넘기기, $I\in K_c(S)$ 가 아래의 조건들중 적어도 하나를 만족시킨다고 하자.

① 서로 다른 자연수 $n,\ m$ 이 있어서 $f^n(I)\subset f^m(I)$ 이다.

② 2개의 자연수 $n,\ m$이 있어서 $\bigcup_{k\geq 0} f^{m+nk}(I)\neq S$이다.

그러면 아래의 결과들중 꼭 하나의 결과가 성립한다.

① 어떤 점 $x\in S$가 있어서 $\omega(I,\ \tilde{f})=\omega(\{x\},\ \tilde{f})$이다.

② $\omega(I,\ \tilde{f})$은 $\tilde{f}$에 의하여 순환되는 유한개의 불퇴화련결성분들로 이루어진다.

실례 2 다음과 같이 정의되는 넘기기 $f:S\to S$를 생각하자.

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leq x<1/2\\ -2x+2 \bmod 1, & 1/2\leq x<1\end{cases}$$

어떤 $n,\ k\in\mathbf{N}$이 있어서 $\dfrac{k}{2^n}\in I$가 성립한다. $f^n\left(\dfrac{k}{2^n}\right)=0$이므로 $f^n(I)$는 0을 포함하는 구간으로 된다. f의 정의로부터 $f^{n+1}(I)=[0,\ c]$라는것을 알수 있다. 그러므로 분명히 $f^{n+1}(I)\subset f^{n+2}(I)$가 성립한다. 이로부터 매 $I\in K_c(S)$는 정리의 조건 ①을 만족시킨다. 사실 f의 정의로부터 I의 $\tilde{f}$에 관한 $\omega-$극한점은 S로서 유일하다.

참 고 문 헌

[1] L. Block et a1.; Dynamics in One Dimension, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin, 69～88, 220～234, 1992.

[2] J. S. Canovas et a1.; Fuzzy Sets Syst., 257, 132, 2014.

[3] Cholsan Kim et a1.; Fuzzy Sets Syst., 319, 93, 2017.

[4] D. Kwietniak et a1.; Chaos Solitons & Fractals, 33, 76, 2007.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

An $\omega-$Limit Set of Induced Circle Map on Hyperspace

Ri Song Hun, Ju Hyon Hui

In this paper, we recognize that an $\omega-$limit set of the set-valued extension of an induced circle map on hyperspace has infinitely many nondegenerate connected components. And also we find some conditions that the $\omega-$limit set of the induced circle map on hyperspace has the finitely many nondegenerate connected components.

Key words : hyperspace, circle map, $\omega-$limit set