김일성종합대학학보 주체110(2021)년
수 학 제67권 제2호

반대칭빗사귐점탄성다층복합판의 변위해석에 대한 연구

송성관, 김혁남

선행연구[2]에서는 섬유강화점탄성직교다층복합판에 면내 및 면외힘이 작용할 때의 정력학적변위해석을 취급하고 선행연구[1]에서는 대칭, 반대칭직교다층복합판의 동력학적 변위해석을 취급하였다. 그러나 반대칭빗사귐점탄성다층복합판이 탄성지반우에서 면내 및 면외힘을 받을 때의 변위해석은 취급하지 못하였다.

론문에서는 탄성지반우에 있는 반대칭빗사귐점탄성다층복합판에 면내 및 면외힘이 작용할 때의 정력학적변위해석에 대하여 고찰하였다.

1. 기본관계식

탄성지반우에 있는 반대칭빗사귐점탄성다층복합판에 면내 및 면외힘이 동시에 작용할 때 기본관계식을 고찰하자. 여기서 판재료는 유전형점탄성재료이다.

반대칭빗사귐점탄성다층복합판에서 당김억세기, 결합억세기, 구부림억세기들가운데서 다음의 억세기들은 령이 된다.[1]

$$A_{16},\ A_{26},\ B_{11},\ B_{22},\ B_{12},\ B_{66},\ D_{16},\ D_{26}$$

이 경우에 변위방정식은 다음과 같이 얻어진다.

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{A}_{11}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\overline{A}_{66}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+(\overline{A}_{12}+\overline{A}_{66})\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}-3\overline{B}_{16}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}-\overline{B}_{26}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}=0\\
&(\overline{A}_{12}+\overline{A}_{66})\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}+\overline{A}_{66}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+\overline{A}_{22}\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}-\overline{B}_{16}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}-3\overline{B}_{26}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}=0\\
&\overline{D}_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\overline{D}_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+2(\overline{D}_{12}+2\overline{D}_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}-\overline{B}_{16}\left(3\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3}\right)-\\
&\qquad-\overline{B}_{26}\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3}+3\frac{\partial^3 v_0}{\partial x\partial y^2}\right)+N\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+q-cw=0
\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

여기서 $A_{ij}^*,\ B_{ij}^*,\ D_{ij}^*$은 다음과 같다.

$$\left.\begin{aligned}
&(A_{ij}^*,\ B_{ij}^*,\ D_{ij}^*)=\sum_{k=1}^{r}\left[(z_k-z_{k-1}),\ \frac{(z_k^2-z_{k-1}^2)}{2},\ \frac{(z_k^3-z_{k-1}^3)}{3}\right]\tilde{Q}_{ij}^{*(k)}\\
&\tilde{Q}_{ij}^{*(k)}=\overline{Q}_{ij}^{(k)}(1-\Gamma_{ij}^{*(k)})
\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

2. 풀 이 방 법

변위방정식 (1)의 변위성분을 다음과 같이 구하자.

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} U_{mn}(t)\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b} \\ \upsilon_0 &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} V_{mn}(t)\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \\ w &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \psi_{mn}(t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

식 (3)을 식 (1)에 대입하고 정돈한 다음 라쁠라스변환하면 다음의 식이 얻어진다.

$$\left.\begin{aligned} T_{11}^*U_{mn}^* + T_{12}^*V_{mn}^* + T_{13}^*\psi_{mn}^* &= 0 \\ T_{12}^*U_{mn}^* + T_{22}^*V_{mn}^* + T_{23}^*\psi_{mn}^* &= 0 \\ T_{13}^*U_{mn}^* + T_{23}^*V_{mn}^* + T_{33}^*\psi_{mn}^* &= q_{mn}^* \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

이 식에서 T_{ij}^* 은 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{gathered} T_{11}^* = A_{11}^*\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + A_{66}^*\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \quad T_{12}^* = (A_{12}^* + A_{66}^*)\left(\frac{m\pi}{a}\right)\left(\frac{n\pi}{b}\right) \\ T_{13}^* = -3B_{16}^*\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left(\frac{n\pi}{b}\right) - B_{26}^*\left(\frac{n\pi}{b}\right)^3 \\ T_{22}^* = A_{22}^*\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + A_{66}^*\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2, \quad T_{23}^* = -3B_{26}^*\left(\frac{m\pi}{a}\right)\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - B_{16}^*\left(\frac{m\pi}{a}\right)^3 \\ T_{33}^* = D_{11}^*\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4\right] + 2(D_{12}^* + 2D_{66}^*)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + c + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 N \end{gathered} \tag{5}$$

여기서 억세기행렬의 라쁠라스변환은 반대칭직교다층복합판에서와 같이 구할수 있다.

반대칭직교복합판에서와 같은 방법으로 련립방정식의 풀이를 구하면 U_{mn}^*, V_{mn}^*, ψ_{mn}^*을 구할수 있다. 따라서 ψ_{mn}^*은 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\psi_{mn}^* = \frac{q_{mn}^*(T_{11}^*T_{22}^* - T_{12}^{*2})}{-T_{13}^{*2}T_{22}^* + 2T_{12}^*T_{13}^*T_{23}^* - T_{11}^*T_{23}^{*2} + T_{33}^*(T_{11}^*T_{22}^* - T_{12}^{*2})} \tag{6}$$

이 식을 다시 역변환하여 식 (3)에 넣으면 z축방향의 변위를 완전히 결정할수 있다.

3. 계 산 실 례

점탄성판은 유리/에폭시복합재료이며 기하학적 및 력학적특성자료가 다음과 같이 주어졌다고 하자.

$$a = 1\text{m},\ b = 0.5\text{m},\ h = 0.04\text{m},\ q = 0.5\text{MPa},\ N = 0,\ 40,\ 120,\ 200,\ 280\text{kN/m},\ c = 70\text{kN/m}^3,$$

$$E_1 = 35\text{GPa},\ E_2 = 8\text{GPa},\ \nu_{12} = 0.26,\ G_{12} = 4\text{GPa},\ \Gamma_{11} = 0,\ \Gamma_{22} = 0.04e^{-0.1t},\ \Gamma_{12} = 0.01e^{-0.1t},$$

$$\Gamma_{66} = 0.06e^{-0.5t},\ r = 4,\ h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = 0.01\text{m}$$

복합판의 배치는 $[-45/45/-45/45]$이며 기하학적특성량들은 다음의 표와 같다.

표. 복합판의 기하학적특성량

층번호(k)	층방향(θ)	z_k / m	z_{k-1} / m	$(z_k^2 - z_{k-1}^2)$ / m^2	$(z_k^3 - z_{k-1}^3)$ / m^3
1	-45°	−0.01	−0.02	-3×10^{-4}	7×10^{-6}
2	45°	0	−0.01	-1×10^{-4}	1×10^{-6}
3	-45°	0.01	0	1×10^{-4}	1×10^{-6}
4	45°	0.02	0.01	3×10^{-4}	7×10^{-6}

변환된 환산억세기는 다음과 같다.

$$k=1,\ 3: \overline{Q}_{11}=Q_{11},\ \overline{Q}_{12}=Q_{12},\ \overline{Q}_{22}=Q_{22},\ \overline{Q}_{66}=Q_{66}$$

$$k=2,\ 4: \overline{Q}_{11}=Q_{22},\ \overline{Q}_{12}=Q_{12},\ \overline{Q}_{22}=Q_{11},\ \overline{Q}_{66}=Q_{66}$$

식 (2)에 의하여 A_{ij}^*, B_{ij}^*, D_{ij}^*은 다음과 같이 얻어진다.

$$A_{11}^*=\left(114.9-\frac{0.084}{s+0.1}\right)\times10^7,\ A_{66}^*=\left(16-\frac{0.96}{s+0.5}\right)\times10^7$$

$$A_{12}^*=\left(8.4-\frac{0.084}{s+0.1}\right)\times10^7,\ A_{22}^*=\left(60.7-\frac{1.008}{s+0.1}\right)\times10^7$$

$$B_{16}^*=\left(-135.5-\frac{1.68}{s+0.1}\right)\times10^4,\ B_{26}^*=\left(135.5+\frac{1.68}{s+0.1}\right)\times10^4$$

$$B_{12}^*=B_{66}^*=0,\ D_{11}^*=\left(180.3-\frac{0.112}{s+0.1}\right)\times10^3$$

$$D_{22}^*=\left(53.83-\frac{1.68}{s+0.1}\right)\times10^3,\ D_{12}^*=\left(11.2-\frac{0.112}{s+0.1}\right)\times10^3$$

$$D_{66}^*=\left(21.33-\frac{1.28}{s+0.5}\right)\times10^3$$

우의 식들을 식 (5)에 대입하면 T_{ij}^*이 얻어지고 그것을 식 (6)에 대입하고 라쁠라스 역변환하면 ψ_{11}은 다음과 같다.

$$\psi_{11}=0.007\ 67-0.001\ 446e^{0.075\,2t}-0.000\ 243e^{0.086\,9t}-$$
$$-0.000\ 000\ 042e^{-0.098t}-0.000\ 005e^{-0.477\,7t}-0.000\ 15e^{-0.486\,4t}$$

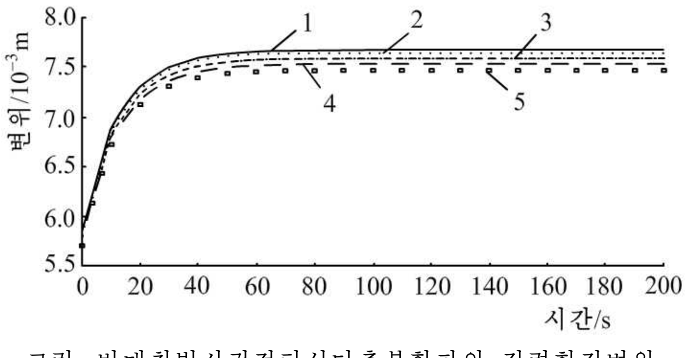

그림. 반대칭빗사귀점탄성다층복합판의 정력학적변위

1—5는 각각 0, 40, 120, 200, 280kN인 경우

이 식에서와 같이 탄성변위가 초기 5.83mm로부터 최종적으로 7.67mm까지 증가하는데 점성으로 인하여 31% 증가한다.

그림에는 면내힘의 크기를 변화시키면서 반대칭빗사귐점탄성다층복합판의 정력학적 변위를 보여주었다.

맺 는 말

반대칭빗사귐점탄성다층복합판에 면내힘과 면외힘이 작용할 때 정력학적변위는 시간에 따라 점차 증가하며 일정한 크기에로 수렴한다는것을 알수 있으며 면내힘과 면외힘의 크기에 관계된다는것을 보여준다.

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보 수학, 65, 1, 132, 주체108(2019).

[2] 리은경 등; 기계공학, 2, 4, 주체107(2018).

[3] G. A. Martynenko; Mechanics and Mechanical Engineering, 21, 2, 389, 2017.

주체109(2020)년 12월 5일 원고접수

Displacement Analysis of Antisymmetric Angly-ply Viscoelastic Laminates

Song Song Gwan, Kim Hyok Nam

This paper represents a method to find displacement of antisymmetric angly-ply viscoelastic laminates subjected to in-plane and out-plane loads.

We derive the displacement equation, find solutions and verify the solution accuracy through an example.

Keyword: antisymmetric angly-ply viscoelastic laminates