김일성종합대학학보 수 학
주체107(2018)년 제64권 제2호

다중선택봉사, 중단과 수리를 고려한 묶음도착반복봉사계의 특성

손정경, 공련숙

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《기초과학을 끊임없이 심화발전시키지 않고서는 첨단과학기술을 연구도입할수도 없고 새로운 높은 수준의 과학기술을 연구개발할수도 없습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제22권 21페지)

론문에서는 고장과 수리를 고려하면서 2단계에서의 다중선택봉사와 묶음도착요청을 가지는 $M^X/G/1$ 2상반복봉사계의 특성을 론의하였다.

1. 선행연구와의 비교

선행연구[1]에서는 1단계에서의 봉사시간이 일반분포에 따르지만 2단계에서의 선택봉사는 지수분포에 따르는 $M/G/1$ 봉사계에 대하여 론의하였다.

선행연구[2]에서는 선행연구[1]의 결과들을 2단계에서의 선택봉사도 일반분포에 따르는 경우에로 일반화하였다.

선행연구[3]에서는 봉사중단과 2단계에서의 선택봉사, 묶음요청의 도착, 반복요청들을 다같이 고려한 봉사계를 연구하였다.

선행연구[4]에서는 요청의 입구차단, 2단계에서 선택봉사, 휴가를 가지는 봉사모형에 대하여 론의하였다.

2. 문제설정과 기호도입

요청들은 복합빠쏭과정에 따라 도착률 λ를 가지고 묶음으로 봉사계에 도착한다. 도착하는 요청묶음의 크기는 독립, 동일분포하는 우연량이다. 묶음요청에 대한 봉사는 2단계로 나누어 진행한다. 1단계의 봉사는 모든 요청들에 대하여 주어지는데 봉사를 받은 요청들은 확률 $q=(1-p)$로 계를 떠나거나 확률 p로 2단계의 다중선택봉사를 받을수 있다. 봉사기구는 1개이며 1단계와 2단계의 봉사를 다같이 진행하는데 그 봉사시간은 각각 일반분포에 따른다. 봉사기구는 봉사도중의 고장으로 인하여 봉사를 중단할수 있으며 수리를 받게 된다. 수리시간은 일반분포에 따른다.

수리를 받은 봉사기구는 다시 봉사를 진행할 때 봉사받던 요청에 대하여 나머지봉사를 계속 진행하게 된다. 봉사기구의 수명시간들은 1단계와 2단계에 대하여 각각 비률 α_1, α_2를 가진 지수분포에 따른다고 하자. 요청이 도착하였을 때 봉사기구가 비여있다면 그 요청은 즉시 1단계의 봉사를 받을수 있고 봉사중이거나 고장상태이면 확률 ϖ $(0\le\varpi\le1)$로 반복요청묶음에 포함되거나 $1-\varpi$ $(0\le\varpi\le1)$의 확률로 계를 리탈하게 된다. 반복그룹의 요청들은

일정한 시간이후 다시 봉사를 받기 위하여 계에 들어오게 되는데 도착시간간격은 반복그룹에 있는 요청들의 수가 $n \in Z^+$일 때 비률 $n\theta$를 가지는 지수분포에 따른다고 하자. 수리시간은 일반분포에 따른다.

도착하는 요청묶음의 크기는 우연량들로서 이 우연량의 크기를 $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$으로 표시하자. 이 우연량들의 확률질량함수(p. m. f), 확률모함수(PGF), 유한차모멘트를 각각 $a_n = P_r\{X=n\}\ (n \ge 1)$, $a(z)=E[z^X]$, $a_{[k]}=E[X(X-1)\cdots(X-k+1)]$로 표시하자. b_n은 도착한 묶음요청들이 1단계의 봉사를 받게 될 확률이다. 그때 모든 $n \ge 0$에 대하여 계에 도착한 요청들이 1단계의 봉사를 받게 될 확률은 다음과 같이 표시할수 있다.

$$b_0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (1-\overline{\omega})^k$$

$$b_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \binom{k}{n} \overline{\omega}^n (1-\overline{\omega})^{k-n} \quad (n \ge 1)$$

렬 $\{a_n\ (n \ge 1)\}$과 $\{b_n\ (n \ge 0)\}$사이의 PGF관계식은 다음과 같이 구할수 있다.

$$b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n b_n = a((1-\overline{\omega})+\overline{\omega}z)$$

$\overline{\omega}=1$이라면 $a(z)=b(z)$가 성립한다.

만일 $b(z)$의 k차모멘트를 $b_{[k]}$로 표시하면 $b_{[k]}=\overline{\omega}^k a_{[k]}$가 성립한다. 모든 요청에 대하여 진행하게 되는 1단계의 봉사(FPS)를 B_1로 표시하고 2단계의 다중선택봉사(SPS)를 $B_{2m}\ (m=1,\ 2,\ \cdots,\ M)$으로 표시하자. 봉사시간에 대하여 분포함수는 $B_1(x),\ B_{2m}(x)$, 라쁠라스-스틸테스변환 (LST) $B_1^*(\theta)=E[e^{-\theta B_1}]$, (LST) $B_{2m}^*(\theta)=E[e^{-\theta B_{2m}}]\ (m=1,\ 2,\ \cdots,\ M)$로, k차모멘트를 $\beta_1^{(k)},\ \beta_{2m}^{(k)}\ (1 \le m \le M)$로 표시하자. 여기서 첨수기호 $m=1,\ 2,\ \cdots,\ M$은 2단계에서의 선택봉사(SPS)에서의 봉사종류를 표시한다.

봉사기구의 수리시작까지의 시간을 지연시간이라고 부르고 1단계와 2단계에 대하여 각각 D_1, 분포함수 $D_1(y)$, 라쁠라스-스틸테스변환(LST) $\gamma_1^*(\theta)=E[e^{-\theta D_1}]$, k차모멘트 $\gamma_1^{(k)}$, D_{2m}, 분포함수 $D_{2m}(y)$, 라쁠라스-스틸테스변환(LST) $\gamma_{2m}^*(\theta)=E[e^{-\theta D_{2m}}]$, k차모멘트 $\gamma_{2m}^{(k)}$으로 표시하자. 수리시간은 1단계에 대하여 G_1로, 분포함수 $G_1(y)$, LST는 $G_1^*(\theta)=E[e^{-\theta R_1}]$, k차모멘트를 $g_1^{(k)}$, 2단계에 대하여 각각 G_{2m}, 분포함수 $G_{2m}(y)$, LST는 $G_{2m}^*(\theta)=E[e^{-\theta R_{2m}}]$, k차모멘트를 $g_{2m}^{(k)}\ (m=1,\ 2,\ \cdots,\ M)$로 표시하자. 요청의 묶음도착과정, 봉사과정, 수리시간, 지연시간들은 모두 서로 독립이라고 가정한다.

3. 반복요청수의 정상분포와 봉사기구의 몇가지 특성량

① 가동상태

$N(t)$를 t시각 그룹에 있는 반복요청의 크기라고 하고 다음의 보조함수를 도입하자.

$$Y(t)=\begin{cases} 0,\ t\text{시각에 봉사기구가 비여있음} \\ 1,\ t\text{시각에 FPS봉사를 진행함} \\ 2,\ t\text{시각에 SPS봉사를 진행함} \\ 3,\ t\text{시각에 FPS봉사도중 수리를 기다림} \\ 4,\ t\text{시각에 SPS봉사도중 수리를 기다림} \\ 5,\ t\text{시각에 FPS봉사도중 수리함} \\ 6,\ t\text{시각에 SPS봉사도중 수리함} \end{cases}$$

그러면 봉사계의 상태는 마르꼬브과정 $\{N(t),\ X(t)\}$ 에로 귀착시킬수 있다. 여기서 $Y(t)=0$ 이면 $X(t)=0$, $Y(t)=1$ 이면 $X(t)=B_1^0(t)$, $Y(t)=2$ 이면 $X(t)=B_2^0(t)$, $Y(t)=3$ 이면 $X(t)=D_1^0(t)$, $Y(t)=4$ 이면 $X(t)=D_2^0(t)$ 이며 $Y(t)=5$ 이면 $X(t)=R_1^0(t)$, $Y(t)=6$ 이면 $X(t)=R_{2m}^0(t)$ 이다.

문제설정과 기호도입을 리용하면 미분방정식

$$\mu_1(x)dx=\frac{dB_1(x)}{1-B_1(x)},\ \ \eta_1(y)dy=\frac{dD_1(y)}{1-D_1(y)},\ \ \zeta_1(y)dy=\frac{dG_1(y)}{1-G_1(y)}$$

$$\mu_{2m}(x)dx=\frac{dB_{2m}(x)}{1-B_{2m}(x)},\ \ \eta_{2m}(y)dy=\frac{dD_{2m}(y)}{1-D_{2m}(y)},\ \ \zeta_{2m}(y)dy=\frac{dG_{2m}(y)}{1-G_{2m}(y)}$$

를 생각할수 있다.

정리 1 봉사계가 정상작업하기 위하여서는

$$\rho_1\{1+\alpha_1(\gamma_1^{(1)}+g_1^{(1)})\}+p\rho_2\{1+\alpha_{2m}(\gamma_{2m}^{(1)}+g_{2m}^{(1)})\}<1$$

일것이 필요충분하다. 여기서

$$\rho_1=\lambda\beta_1^{(1)}b_{[1]},\quad \rho_{2m}=\lambda\beta_{2m}^{(1)}b_{[1]}$$

② 지연상태

지연상태에 대한 꼴모고로브전진방정식을 얻을수 있다. 여기서 첨수 1, 2는 각각 FPS, SPS를 표시한다.

$$\frac{d}{dx}P_{1,\,n}(x)+[\lambda+\alpha_1+\mu_1(x)]P_{1,\,n}(x)=\lambda\sum_{k=0}^{n}b_kP_{1,\,n-k}(x)+\int_0^\infty\xi_1(y)R_{1,\,n}(x,\ ydy)\ \ (n\ge 0)$$

$$\frac{d}{dx}P_{2m,\,n}(x)+[\lambda+\alpha_2+\mu_{2m}(x)]P_{2m,\,n}(x)=$$

$$=\lambda\sum_{m=1}^{M}\sum_{k=0}^{n}b_kP_{2m,\,n-k}(x)+\sum_{m=1}^{M}\int_0^\infty\xi_{2m}(y)R_{2m,\,n}(x,\ ydy)\ \ (n\ge 0)$$

$$\frac{d}{dy}Q_{1,\,n}(x,\ y)+[\lambda+\eta_1(y)]Q_{1,\,n}(x,\ y)=\lambda\sum_{k=0}^{n}b_kQ_{1,\,n-k}(x;\ y)\ \ (n\ge 0)$$

$$\frac{d}{dy}Q_{2m,\,n}(x,\ y)+[\lambda+\eta_{2m}(y)]Q_{2m,\,n}(x,\ y)=\lambda\sum_{k=0}^{n}b_kQ_{2m,\,n-k}(x;\ y)\ \ (n\ge 0)$$

$$\frac{d}{dy}R_{1,\,n}(x,\ y)+[\lambda+\xi_1(y)]R_{1,\,n}(x,\ y)=\lambda\sum_{k=0}^{n}b_kR_{2m,\,n-k}(x,\ y)\ \ (n\ge 0)$$

$$\frac{d}{dy}R_{2m,\,n}(x,\ y)+[\lambda+\xi_{2m}(y)]R_{2m,\,n}(x,\ y)=\lambda\sum_{k=0}^{n}b_kR_{2m,n-k}(x,\ y)\ \ (n\ge 0)$$

$$(\lambda_0+n\theta)\psi_n=\int_0^\infty\mu_{2m}(x)P_{2m,\,n}(x)dx+q\int_0^\infty\mu_1(x)P_{1,\,n}(x)dx\ \ (n\ge 0)$$

정리 2 정상성조건 $\rho_0<1$이 성립하면 반복요청수의 한계분포는 다음과 같다.

$$P_1(z)=\frac{\chi(z)\psi(z)[1-B_1^*(\lambda_1(z))]}{\lambda_1(z)\left[\left\{q+p\sum_{m=1}^{M}B_2^*(\lambda_{2m}(z))\right\}B_1^*(\lambda_1(z))-z\right]}$$

$$P_2(z)=\frac{p\chi(z)\psi(z)B_1^*(\lambda_1(z))\left[\left\{1-\sum_{m=1}^{M}B_2^*(\lambda_{2m}(z))\right\}\sum_{m=1}^{M}B_{2m}^*(\lambda_2(z))\right]}{\lambda_2(z)\left[\left\{q+p\sum_{m=1}^{M}B_2^*(\lambda_{2m}(z))\right\}B_1^*(\lambda_1(z))-z\right]}$$

$$Q_1(z)=\frac{\alpha_1(1-\gamma_1^*(\chi(z)))\psi(z)[1-B_1^*(\lambda_1(z))]}{\lambda_1(z)\left[\left\{q+p\sum_{m=1}^{M}B_2^*(\lambda_{2m}(z))\right\}B_1^*(\lambda_1(z))-z\right]}$$

$$Q_2(z)=\frac{p\alpha_2\left(1-\sum_{m=1}^{M}\gamma_{2m}^*(\chi(z))\right)\psi(z)B_1^*(\lambda_1(z))\left[1-\sum_{m=1}^{M}B_{2m}^*(\lambda_{2m}(z))\right]}{\lambda_2(z)\left[\left\{q+p\sum_{m=1}^{M}B_2^*(\lambda_{2m}(z))\right\}B_1^*(\lambda_1(z))-z\right]}$$

$$R_1(z)=\frac{\alpha_1\gamma_1^*(\chi(z))(1-G_1^*(\chi(z)))\psi(z)[1-B_1^*(\lambda_1(z))]}{\lambda_1(z)\left[\left\{q+p\sum_{m=1}^{M}B_2^*(\lambda_{2m}(z))\right\}B_1^*(\lambda_1(z))-z\right]}$$

$$R_{2m}(z)=\frac{p\alpha_2\sum_{m=1}^{M}\gamma_{2m}^*(\chi(z))\left(1-\sum_{m=1}^{M}G_{2m}^*(\chi(z))\right)\psi(z)B_1^*(\lambda_1(z))\left[1-\sum_{m=1}^{M}B_{2m}^*(\lambda_{2m}(z))\right]}{\lambda_2(z)\left[\left\{q+p\sum_{m=1}^{M}B_{2m}^*(\lambda_{2m}(z))\right\}B_1^*(\lambda_1(z))-z\right]}$$

정리 3 ① 반복요청수의 정상분포를 P_j라고 하면 대응하는 PGF는 즉

$$P(z)=\sum_{j=0}^{\infty}z^jP_j$$

는 다음과 같이 주어진다.

$$P(z)=\frac{\psi(z)(1-z)}{\left[q+p\sum_{m=1}^{M}B_2^*(\lambda_{2m}(z))\right]B_1^*(\lambda_1(z))-z}$$

② 우연시각에 계에 있는 요청수의 정상분포를 Φ_j 라고 하면 즉

$$\Phi_j=Q_{0,\,1}+(1-\delta_{1,\,0})(P_{1,\,j-1}+Q_{1,\,j-1}+R_{1,\,j-1})+(1-\delta_{1,\,0})\sum_{m=1}^{M}\{P_{2m,\,j-1}+Q_{2m,\,j-1}+R_{2m,\,j-1}\}\ \ (j\geq 0)$$

이라고 하면 대응하는 PGF는 다음과 같이 주어진다.

$$\Phi(z)=\frac{\psi(z)(1-z)\left[q+p\sum_{m=1}^{M}B_{2m}^*(\lambda_{2m}(z))\right]B_1^*(\lambda_1(z))}{\left[q+p\sum_{m=1}^{M}B_{2m}^*(\lambda_{2m}(z))\right]B_1^*(\lambda_1(z))-z}=\frac{\psi(z)}{\psi(1)}\zeta(z)$$

여기서 $\psi(1)=(1-\rho_0)$ 이며 $\zeta(z)$ 는 다음과 같이 표시할수 있다.

$$\zeta(z)=\frac{(1-\rho_0)(1-z)\left[q+p\sum_{m=1}^{M}B_{2m}^*(\lambda_{2m}(z))\right]B_1^*(\lambda_2(z))}{\left[q+p\sum_{m=1}^{M}B_{2m}^*(\lambda_{2m}(z))\right]\sum_{m=1}^{M}B_1^*(\lambda_{2m}(z))-z}$$

정리 4 계가 지연상태에 있다는 조건밑에서 계가 비여있을 확률은 다음과 같다.

$$P_I=1-\rho_1\{1+(\alpha_1(\gamma_1^{(1)}+g_1^{(1)}))\}-p\rho_2\left\{1+\left(\alpha_2\sum_{m=1}^{M}(\gamma_{2m}^{(1)}+g_{2m}^{(1)})\right)\right\}$$

FPS로 봉사기구가 가동중에 있을 확률

$$P_{B_1}=\lambda b_{[1]}\beta_1^{(1)}$$

SPS로 봉사기구가 가동중에 있을 확률

$$P_{B_{2m}}=p\lambda b_{[1]}\beta_{2m}^{(1)}$$

FPS로 봉사기구가 수리중으로 기다릴 확률

$$P_{W_1}=\lambda b_{[1]}\beta_1^{(1)}\alpha_1\gamma_1^{(1)}$$

SPS로 봉사기구가 수리중으로 기다릴 확률

$$P_{W_{2m}}=p\lambda b_{[1]}\beta_{2m}^{(1)}\alpha_2\gamma_{2m}^{(1)}$$

FPS로 봉사기구가 수리중에 있을 확률

$$P_{R_1}=\lambda b_{[1]}\beta_1^{(1)}\alpha_1 g_1^{(1)}$$

SPS로 봉사기구가 수리중에 있을 확률

$$P_{R_{2m}}=p\lambda b_{[1]}\beta_{2m}^{(1)}\alpha_2 g_{2m}^{(1)}$$

참 고 문 헌

[1] K. C. Madan; Queueing Systems, 34, 37, 2000.
[2] J, Medhi; Queueing Systems, 42, 239, 2002.
[3] G. Choudhury et al.; Performance Evaluation, 65, 714, 2008.
[4] D. Arivudainambi et al.; Ann Oper Res., 229, 67, 2015.

주체106(2017)년 12월 5일 원고접수

Characteristics of Batch Arrival Retrial Queuing Systems with Multi-optional Services, Interruptions and Repairs

Son Jong Gyong, Kong Ryon Suk

This paper deals with the behavior of an $M^X/G/1$ retrial queue with an additional second phase of multi-optional service, service interruption and repairs where interruptions occur accidentally at any instant while the server is serving the customers. Moreover, the notion of delay time is also introduced in the model. This model generalizes both the $M^X/G/1$ retrial queue with service interruption and the $M^X/G/1$ queue with second multi-optional service, service interruption and repairs.

Key words: batch arrival, retrial queuing systems, multi-optional services