김일성종합대학학보 주체107(2018)년
수 학 제64권 제3호

1차원분수계미분방정식의 쇠스랑분지에 관한 연구

김상문, 왕영철

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《수학, 물리학, 화학, 생물학과 같은 기초과학부문에서 과학기술발전의 원리적, 방법론적기초를 다져나가면서 세계적인 연구성과들을 내놓아야 합니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 40페지)

현실적인 문제들을 모형화하는 대부분의 미분방정식들이 외적요인을 나타내는 보조변수항을 포함하게 되는데 미분방정식의 분지에 관한 리론은 그 보조변수의 변화에 따라서 미분방정식의 풀이가 어떻게 변화되는가를 고찰하며 나아가서 카오스현상을 연구하는데서 중요하게 쓰이고있다.[1]

따라서 지난 시기 옹근수계미분방정식의 분지와 1차원미분방정식에서 일어나는 안장마디분지, 쇠스랑분지, 안정성교체분지에 대한 연구[1]가 심화되였다.

보통 옹근수계도함수 및 중적분을 복소수계까지 확장한것을 그 력사적유래와 불러온 습관에 따라 분수계도함수 및 분수계적분이라고 부르며 분수계도함수와 적분이 들어있는 분수계미분방정식과 분수계적분방정식이 활발히 연구[2－13]되고있다.

또한 분수계미분방정식인 경우 평형점의 안정성을 판정하기 위한 여러가지 조건들이 연구되고 특히 편각에 의한 안정성판정조건[4]이 밝혀짐으로써 평형점의 안정성판정에서 전진이 이룩되였다.

현재 구체적인 분수계미분방정식의 분지와 카오스현상은 리론적으로, 수치적으로 연구[5, 12, 13]되고있다.

그러나 일반적인 1차원분수계상미분방정식의 분지에 대한 연구는 심화되지 못하였다.

론문에서는 도함수계수가 $0<\alpha<1$ 인 경우 실함수공간에서 분수계미분방정식의 쇠스랑분지출현조건을 연구하였다.

다음과 같은 분수계미분방정식을 고찰하자.

$$(D^{\alpha}x)(t)=f(x,\ \mu)\ \ (0<\alpha<1) \tag{1}$$

여기서 f 는 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 인 C^3 급넘기기이다.

정리 분수계미분방정식 (1)에서 f 가 다음의 조건을 만족시키면 f 는 $\mu=0$ 에서 쇠스랑분지를 일으킨다.

① $f(0,\ \mu)=0$

② $f_x(0,\ 0)=0$

③ $f_{xx}(0,\ 0)=0$

④ $f_{\mu}(0,\ 0)=0$

⑤ $f_{xxx}(0,\ 0)\times f_{x\mu}(0,\ 0)<0$

증명 함수 $F:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 를

$$F(x,\ \mu)=\begin{cases}\dfrac{f(x,\ \mu)}{x},\ x\neq 0\\ f_x(0,\ \mu),\ x=0\end{cases}$$

과 같이 정의하면 F 는 C^2 급함수이고

$$f(x,\ \mu)=xF(x,\ \mu)\ \ (x\in\mathbf{R},\ \mu\in\mathbf{R}) \tag{2}$$

이다. 따라서

$$f_x(x,\ \mu)=F(x,\ \mu)+xF_x(x,\ \mu)$$
$$f_{xx}(x,\ \mu)=2F_x(x,\ \mu)+xF_{xx}(x,\ \mu)$$
$$f_{xxx}(x,\ \mu)=3F_{xx}(x,\ \mu)+xF_{xxx}(x,\ \mu)$$

이므로

$$f_x(0,\ 0)=F(0,\ 0)$$
$$f_{xx}(0,\ 0)=2F_x(0,\ 0)$$
$$f_{xxx}(0,\ 0)=3F_{xx}(0,\ 0)$$

이다. 한편

$$f_{x\mu}(x,\mu)=F_\mu(x,\mu)+F_{x\mu}(x,\mu)x$$

이므로 조건 ④를 고려하면

$$f_{x\mu}(0,\ 0)=F_\mu(0,\ 0)\neq 0$$
$$F(0,\ 0)=f_x(0,\ 0)=0$$

이 성립한다.

따라서 음함수정리로부터 정수 δ, ε 과 그리고 c^2 급 함수 $\mu:(-\delta,\delta)\to(-\varepsilon,\varepsilon)$ 이 있어서

$$F(x,\ \mu(x))=0 \tag{3}$$

및 $\mu(0)=0$ 이 성립한다. 식 (3)의 량변을 x 에 관하여 미분하면

$$F_x(x,\ \mu(x))+F_x(x,\ \mu(x))\mu(x)=0 \tag{4}$$

이므로

$$\mu'(0)=\frac{F_x(0,0)}{F_\mu(0,0)}=-\frac{1}{2}\frac{f_{xx}(0,0)}{f_{x\mu}(0,0)}=0$$

이다. 식 (4)의 량변을 다시 x 에 관해서 미분하면

$$F_{xx}(x,\mu(x))+2F_{x\mu}(x,\mu(x))\mu'(x)+F_{\mu\mu}(x,\mu(x))[\mu''(x)]^2+$$
$$+F_\mu(x,\mu(x))\mu''(x)=0$$

이고 따라서 $x=0$ 으로 놓으면

$$\mu''(0)=-\frac{F_x(0,\ 0)}{F_\mu(0,\ 0)}=-\frac{1}{3}\frac{f_{xxx}(0,\ 0)}{f_{x\mu}(0,\ 0)}>0$$

이다. 한편

$$\left.\frac{d}{dx}[f_x(x,\ \mu(x))]\right|_{x=0}=[f_{xx}(x,\ \mu(x))+f_{x\mu}(x,\ \mu(x))\mu'(x)]_{x=0}$$

이고

$$\left.\frac{d^2}{dx^2}[f_x(x,\ \mu(x))]\right|_{x=0}=[f_{xxx}(x,\ \mu(x))+2f_{x\mu}(x,\ \mu(x))\mu'(x)+$$
$$+f_{x\mu}(x,\ \mu(x))\mu''(x)]_{x=0}=f_{xxx}(0,\ 0)+f_{x\mu}(0,\ 0)\mu''(0)=$$
$$=\frac{2}{3}f_{xxx}(0,\ 0)<0$$

이다. 따라서 $x=0$ 은 $f_x(x,\ \mu(x))$ 의 극대점이고 $f_x(0,0)=0$ 은 극대값이다.

그러므로 정수 δ 를 충분히 작게 취하면 $f_x(x, \mu(x))<0\ (x\in(-\delta, \delta))$ 이고 한편

$$\left.\frac{d}{d\mu}[f_x(0,\ \mu)]\right|_{\mu=0}=f_{x\mu}(0,0)>0$$

이므로 $f_x(0, \mu)$ 는 $\mu=0$ 에서 μ 에 관하여 증가한다.

그런데 $f_x(0,0)=0$ 이므로

$$f_x(0,\ \mu)<0,\ \mu\in(-\varepsilon,\ 0)$$
$$f_x(0,\ \mu)>0,\ \mu\in(0,\ \varepsilon)$$

인 충분히 작은 정수 ε 이 있다. 따라서

$$\arg(f_x(x,\ \mu(x)))=\pi>\frac{\alpha\pi}{2}\quad(x\in(-\varepsilon,\ 0))$$

이므로 편각에 의한 안정성판정조건에 의하여 평형점들은 점근안정하다. 또한

$$\arg(f_x(x,\ \mu(x)))=0<\frac{\alpha\pi}{2}\quad(x\in(0,\ \varepsilon))$$

이므로 이때 평형점들은 불안정하다. 따라서 f 는 $\mu=0$ 점에서 쇠스랑분지를 일으킨다.(증명끝)

주의 우의 방정식 (1)에서 $\alpha=1$ 로 놓고 f 가 다음의 조건을 만족시키면 f 는 $\mu=0$ 에서 쇠스랑분지를 일으킨다.[1]

① $f(0, \mu)=0$

② $f_x(0,0)=0$

③ $f_{xx}(0,0)=0$

④ $f_\mu(0,0)=0$

⑤ $f_{xxx}(0,0)\times f_{x\mu}(0,0)<0$

참 고 문 헌

[1] 정우환 등; 미분방정식, **김일성**종합대학출판사, 253～269, 주체104(2015).
[2] **김일성**종합대학학보(자연과학), 48, 3, 20, 주체91(2002).
[3] **김일성**종합대학학보(자연과학), 56, 6, 12, 주체99(2010).
[4] 김철; 조선민주주의인민공화국 과학원통보, 4, 15, 주체97(2008).
[5] M. S. Abdelouhab et al.; Indian Journal of industrial and applied mathematics, 6, 2, 105, 2015.
[6] P. Arena et al.; International J. Bifur. Chaos., 8, 7, 1527, 1998.
[7] S. Das; Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls, Springer,178～218, 2008.
[8] S. B. Hadid et al.; PanAmer. J. Math., 6, 1, 57, 1996.
[9] R. Hilfer et al.; FCAA, 12, 3, 299, 2009.
[10] A. A. Kilbas et al.; Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, 279～346, 2006.
[11] H. C. O et al.; Fractional Calculus and Applied Analysis, 17, 1, 79, 2014.
[12] J. W. Michael et al.; Physica D., 241, 947, 2012.
[13] M. S. Tavazoei et al.; Physica D., 237, 2628, 2008.

주체107(2018)년 3월 10일 원고접수

Research on Pitch-fork Burcation in One Dimensional Fractional Differential Equation

Kim Sang Mun, Wang Yong Chol

In this paper, we get the sufficient condition for pitch-fork bifurcation in the one dimensional fractional differential equation

$$(D^{\alpha}x)(t) = f(x, \mu) \quad (0 < \alpha < 1)$$

Key words: bifurcation, fractional differential equation, pitch-fork bifurcation