김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체105(2016)년 제62권 제7호 Vol. 62 No. 7 JUCHE105(2016).

한가지 분수계상미분방정식의 두점경계값문제에 대한 분해－연산행렬법

최희철, 리해연

최근 분수계상미분방정식의 경계값문제에 대한 수값적연구가 많이 진행되고있다.

여러가지 형태의 경계조건들 실례로 두점경계조건, 여러점경계조건, 적분경계조건을 가진 문제들에 대한 풀이의 존재성, 풀이법에 관한 연구가 심도있게 진행되였다.

캐푸터도함수가 들어있는 분수계상미분방정식의 경계값문제의 풀이법은 크게 두가지인데 그중 하나는 상하근사풀이법이다.

선행연구[1]에서는 비선형분수계미분방정식의 두점경계값문제

$$D^{\delta}u(t)+g(t,\ u)=0\ \ (t\in(0,\ 1),\ 1<\delta\le 2),\ \ u(0)=a,\ \ u(1)=b,$$

선행연구[2]에서는 $D_{0_+}^{\alpha}u(t)+f(t,\ u(t))=0$, $u(0)=u'(1)=u''(0)=0$, $0<t<1$, $2<\alpha<3$, 선행연구[3]에서는 $\begin{cases} {}^{c}D^{q}x(t)=f(t,\ x(t),\ x'(t)),\ \ t\in(0,\ 1) \\ g_0(x(0),\ \ x'(0))=0,\ \ g_1(x(1),\ \ x'(1))=0 \\ x''(0)=x'''(0)=\cdots=x^{(n-1)}(0)=0 \end{cases}$, 선행연구[4]에서는

$${}^{c}D^{1+q}u(t)=f(t,\ u(t),\ {}^{c}D^{q}u(t)),\ \alpha_a u(a)-\beta_a {}^{c}D^{q}u(a)=\gamma_a,\ \alpha_b u(b)+\beta_b {}^{c}D^{q}u(b)=\gamma_b,\ \ 0<q<1,$$

선행연구[5]에서는 $D_{0_+}^{\delta}y(x)+f(x,\ y)=0$ ($0<x<1,\ \ 3<\delta\le 4$), $y(0)=y'(0)=y''(0)=y''(1)=0$ 에 대한 상하근사풀이법들을 론의하였다.

선행연구[1－5]에서와 달리 선행연구[6]에서는 다음의 비선형분수계적분미분방정식의 두점경계값문제에 대한 상하근사풀이법과 그것의 수값적실현문제를 론의하였다.

$$D^{\delta}u(t)+g(t,\ u)=0\ \ (t\in(0,\ 1),\ 1<\delta\le 2),\ u(0)=a,\ \ u(1)=b$$

선행연구[7]에서도 경계값문제 $D^{\mu}u(t)+F(t,\ u)=0\ (t\in(0,\ 1)),\ u(0)=\alpha,\ u(1)=\beta$ 에 대한 상하근사풀이법과 그것의 수값적실현문제를 론의하였다.

분수계미분방정식의 풀이법에서 제기되는 기본문제는 계산량을 줄이며 콤퓨터에서 실현하기 쉬운 알고리듬을 개발하는것이다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 최근 함수계의 분수적분과 분수도함수에 대한 연산행렬을 리용하는 연산행렬법이 많이 연구되고있다.

선행연구[8]에서는 선형분수계미분방정식인 바글레이－토르비크방정식의 경계값문제

$$A_0D^2y(t)+A_1D^{3/2}y(t)+A_2y(t)=f(t)\ \ (t\in[0,\ T]),\ \ \ y(0)=\alpha_0,\ \ y(T)=\alpha_1$$

에 대한 르장드르웨블레트연산행렬법을 제기하고 수값실례를 주었다.

선행연구[9]에서는 비선형다항분수계미분방정식의 경계값문제

$$D^{\nu}u(x)=F(x,\ u(x),\ D^{\beta_1}u(x),\cdots,\ D^{\beta_k}u(x)),\ \ u^{(i)}(0)=a_i,\ \ u^{(i)}(L)=b_i,\ i=0,1,\cdots,\ m/2-1,$$
$$m-1<\nu\le m,\ \ 0<\beta_1<\beta_2<\cdots<\beta_k<\nu$$

에 대한 체비쉐브연산행렬법을 취급하였다. 그러나 문제의 비선형성으로 하여 생기는 비선형련립방정식을 뉴톤법으로 푼다고 지적하고 수값실례만 주었을뿐 수값방법의 수렴성을 증명하지 않았다.

선행연구[10]에서는 선형다항분수계미분방정식의 경계값문제에 대한 하르웨블레트연산행렬법을 취급하면서 몇가지 변결수를 가지는 선형계에 대한 수값실례들을 주었다.

론문에서는 두점경계조건을 가진 분수계미분방정식

$$ {}^cD_0^\alpha u(x) = f(x,\ u(x)) + g(x),\ \ x\in(0,\ 1),\ \ 1<\alpha\le 2, \tag{1}$$

$$u(0)=u_0, \tag{2}$$

$$u(1)=u_1 \tag{3}$$

에 대한 하르웨블레트연산행렬법에 대하여 론의한다. 여기서 ${}^cD_0^\alpha$ 는 캐푸터미분연산자이다.

1. 분해－연산행렬알고리듬

먼저 문제 (1)－(3)에 대응되는 적분방정식을 유도하자.

$$ {}^cD_0^\alpha u(x) =: z(x) \tag{4}$$

로 놓으면 $I_0^\alpha \circ {}^cD_0^\alpha u(x) = I_0^\alpha z(x)$, $u(x)+c_0+c_1x = I_0^\alpha z(x)$ 가 성립된다.

이제 경계조건을 고려하여 $c_0,\ c_1$ 을 결정하자.

$u(0)+c_0=0$ 이므로 $c_0=-u_0$ 이고 $u_1+c_0+c_1=I_0^\alpha z(1)$ 이므로 $c_1=I_0^\alpha z(1)-u_1-c_0$ 이다.

따라서 $u(x)=I_0^\alpha z(x)+u_0-(I_0^\alpha z(1)-u_1-c_0)x$ 이므로

$$u(x)=I_0^\alpha z(x)-(I_0^\alpha z(1))x+u_0+u_1x+c_0x = I_0^\alpha z(x)-xI_0^\alpha z(1)+u_0(1-x)+u_1x. \tag{5}$$

식 (4), (5)를 식 (1)에 대입하면 다음의 식이 성립된다.

$$z(x)=f(x,\ I_0^\alpha z(x)-xI_0^\alpha z(1)+u_0(1-x)+u_1(x))+g(x),\ \ x\in[0,\ 1] \tag{6}$$

문제 (1)－(3)을 푸는 문제는 적분방정식 (6)을 풀어 z 를 얻은 다음 식 (5)에 대입하여 u 를 얻는 문제에 귀착되므로 적분방정식 (6)에 대한 분해도식을 구성하자.

표시를 간단히 하기 위하여 표시 $g_1(x):=u_0\cdot(1-x)+u_1\cdot x$ 를 리용한다.

이때 방정식 (6)은 다음과 같이 표시된다.

$$z(x)=f(x,\ \ I_0^\alpha z(x)-xI_0^\alpha z(1)+g_1(x))+g(x) \tag{7}$$

가정 1 식 (7)의 풀이 z 는 평등수렴하는 합렬로 전개된다. 즉

$$z(x)=\sum_{k=0}^\infty z_n(x) = f\left(x,\ \ \sum_{k=0}^\infty I_0^\alpha z_n(x) - x\sum_{k=0}^\infty I_0^\alpha z_n(1)+g_1(x)\right)+g(x).$$

따라서 $n\ge1$ 이라고 할 때 다음의 분해도식을 세울수 있다.

$$z_0(x)=g(x)$$

$$z_1(x)=f(x,\ I_0^\alpha z_0(x)-xI_0^\alpha z_0(1)+g_1(x))$$

$$\vdots$$

$$z_{n+1}(x)=f\left(x,\ \sum_{k=0}^n I_0^\alpha z_k(x)-x\sum_{k=0}^n I_0^\alpha z_k(1)+g_1(x)\right)-f\left(x,\ \sum_{k=0}^{n-1} I_0^\alpha z_k(x)-x\sum_{k=0}^{n-1} I_0^\alpha z_k(1)+g_1(x)\right)$$

다음으로 분해－연산행렬알고리듬을 구성하자.

$z_n(x)=c_n^{\mathrm{T}}H(x)$, $n\ge 1$ 로 표시하고 $S_n:=\sum_{k=0}^{n}c_k^{\mathrm{T}}$, $U_n(x):=S_n\cdot H(x)$ 라고 하자. 여기서 $H(x)=(h_0(x),\cdots, h_{m-1}(x))^{\mathrm{T}}$ 는 하르웨블레트족이다.

$m=2^r$, $r\in\boldsymbol{N}$, $\Delta x=1/m$, 점배치법들을 $x_k=(k-0.5)\Delta x$, $k=1,\cdots,m$ 으로 놓는다.

1단계(령차근사풀이결정) $z_0(x)=c_0^{\mathrm{T}}H(x)=g(x)$ 이므로 $z_0(x_k)=c_0^{\mathrm{T}}H(x_k)=g(x_k)$ 이며 $c_0^{\mathrm{T}}H_{\mathrm{matrix}}=(g(x_1),\cdots, g(x_m))$ 이다. 여기서 H_{matrix} 는 하르웨블레트행렬이다.

따라서 $S_0=c_0^{\mathrm{T}}$ 이므로 $U_0(x)=S_0H(x)=(g(x_1),\cdots, g(x_m))H_{\mathrm{matrix}}^{\mathrm{T}}H(x)$ 가 성립된다.

２단계(1차근사풀이결정)

$$z_1(x)=c_1^{\mathrm{T}}H(x)=f(x,\ I_0^{\alpha}z_0(x)-xI_0^{\alpha}z_0(1)+g_1(x))=f(x,\ S_0F_H^{\alpha}H(x)-xS_0F_H^{\alpha}H(1)+g_1(x))$$

이므로 $z_1(x_k)=c_1^{\mathrm{T}}H(x_k)=f(x_k,\ S_0F_H^{\alpha}H_k-x_kS_0F_H^{\alpha}H_m+g_1(x_k))$ 이다. 따라서

$$c_1^{\mathrm{T}}=(f(x_1,\ S_0F_H^{\alpha}H_1-x_1S_0F_H^{\alpha}H_m+g_1(x_1)),\cdots,\ f(x_m,\ S_0F_H^{\alpha}H_m-x_mS_0F_H^{\alpha}H_m+g_1(x_m)))H_{\mathrm{matrix}}^{\mathrm{T}}.$$

$S_1=c_0^{\mathrm{T}}+c_1^{\mathrm{T}}$ 로 하면 1차근사풀이는 $U_1(x)=S_1H(x)$ 로 결정된다.

３단계($n+1$ 차근사풀이결정)

$$z_{n+1}(x)=c_{n+1}^{\mathrm{T}}H(x)=f(x,\ S_nF_H^{\alpha}H(x)-xS_nF_H^{\alpha}H_m+g_1(x))-f(x,\ S_{n-1}F_H^{\alpha}H(x)-xS_{n-1}F_H^{\alpha}H_m+g_1(x))$$

$$z_{n+1}(x_k)=c_{n+1}^{\mathrm{T}}H(x_k)=f(x_k,\ S_nF_H^{\alpha}H_k-x_kS_nF_H^{\alpha}H_m+g_1(x_k))-$$
$$-f(x_k,\ S_{n-1}F_H^{\alpha}H_k-x_kS_{n-1}F_H^{\alpha}H_m+g_1(x_k))=:F(x_k,\ S_{n-1},\ S_n)$$
$$c_{n+1}^{\mathrm{T}}=(F(x_1,\ S_{n-1},\ S_n),\ \cdots,\ F(x_m,\ S_{n-1},\ S_n))\cdot H_{\mathrm{matrix}}^{\mathrm{T}}$$

한편 $c_{n+1}^{\mathrm{T}}=S_{n+1}-S_n$ 이므로 $S_{n+1}=S_n+(F(x_1,\ S_{n-1},\ S_n),\cdots,\ F(x_m,\cdots,\ S_{n-1},\ S_n))\cdot H_{\mathrm{matrix}}^{\mathrm{T}}$, $n\ge 1$ 이고 따라서 $U_{n+1}=s_{n+1}\cdot H(x)$ 는 $n+1$ 차근사풀이이다.

２. 적분방정식에 대한 근사풀이의 수렴성해석

$z(x)$ 를 식 (7)의 정확한 풀이, $U_N(x)$ 를 연산행렬법에 의한 N 차근사풀이라고 하자. 이때 다음의 평가식이 성립된다.

$$|z(x)-U_N(x)|=|z(x)-z(x_i)+z(x_i)+U_N(x_i)-U_N(x_i)-U_N(x)|\le$$
$$\le|z(x)-z(x_i)|+|z(x_i)-U_N(x_i)|+|U_N(x_i)-U_N(x)|$$

가정 2 $z\in\boldsymbol{C}^2[0,\ 1]$

가정 2로부터 쉽게 평가식 $|z(x)-z(x_i)|\le c\Delta x^2$ 을 얻을수 있다.

한편 $U_{N+1}(x)=S_N\cdot H(t)=\sum_{j=0}^{N+1}c_j^{\mathrm{T}}H(t)$ 이므로

$$U_{N+1}(x_i)=\sum_{j=0}^{N+1}c_j^{\mathrm{T}}H(x_i)=c_0^{\mathrm{T}}H(x_i)+c_1^{\mathrm{T}}H(x_i)+\sum_{j=0}^{N+1}c_j^{\mathrm{T}}H(x_i)=$$
$$=f(x_i,\ s_NF_H^{\alpha}H_i-x_is_NF_H^{\alpha}H_m+g_1(x_i))+g(x_i)=f(x_i,\ I_0^{\alpha}U_N(x_i)-x_iI_0^{\alpha}U_N(1)+g_1(x_i))+g(x_i)$$
$$|z(x_i)-U_N(x_i)|=|f(x_i,\ I_0^{\alpha}z(x_i)-x_iI_0^{\alpha}z(1)+g_1(x_i))+g(x_i)-$$
$$-f(x_i\ ,\ I_0^{\alpha}U_{N-1}(x_i)-x_iI_0^{\alpha}U_{N-1}(1)+g_1(x_i))-g(x_i)|$$

가정 3　$\forall x \in [0,\ 1]$, $\forall y_1,\ y_2 \in \boldsymbol{R}$, $|f(x,\ y_1) - f(x,\ y_2)| \le L|y_1 - y_2|$

$$|z(x_i) - U_N(x_i)| \le L|I_0^\alpha z(x_i) - x_i I_0^\alpha z(1) + g_{1'}(x_i) - I_0^\alpha U_{N-1}(x_i) - x_i I_0^\alpha U_{N-1}(1) + g_{1'}(x_i)| \le$$
$$\le L(\| z(x) - U_{N-1}(x)\| / \Gamma(\alpha+1) + x_i \| z(x) - U_{N-1}(x)\| / \Gamma(\alpha+1)) \le$$
$$\le 2L \| z(x) - U_{N-1}(x)\| / \Gamma(\alpha+1)$$

이므로 $\| z - U_N \| \le c \cdot \Delta x^2 + 2L \| z - U_{N-1}\| / \Gamma(\alpha+1)$이 성립된다.

$g := 2L / \Gamma(\alpha+1)$이라고 하자.

가정 4　$\| z - U_N \| \le c \cdot \Delta x^2 + g \| z - U_{N-1} \| \le c \cdot \Delta x^2 + g(c \cdot \Delta x^2 + g \| z - U_{N-2} \|) =$

$$= c \cdot \Delta x^2 + c \cdot \Delta x^2 g + g^2 \| z - U_{N-2} \| \le \cdots \le c \cdot \Delta x^2 / (1-q) + g^N \| z - U_0 \|, \quad 0 < g < 1$$

이로부터 다음의 수렴성정리가 나온다.

정리 가정 1－4밑에서 평가식 $\| z - U_N \| \le c \cdot \Delta x^2 / (1-q) + g^N \| z - U_0 \|$이 성립된다.

주의 $u_N(x) := I_0^\alpha U_N(x) - x I_0^\alpha U_N(1) + u_0(1-x) + u_1 x$는 문제 (1)－(3)의 근사풀이이다.

참 고 문 헌

[1] Ailing Shi et al.; Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 30, 1, 2009.

[2] Changyou Wang et al.; Article ID 297026, 12, 2011.

[3] Mei Jia et al.; Computers and Mathematics with Applications, 59, 2880, 2010.

[4] J. D. Ram et al.; Dynamic Systems and Applications, 20, 73, 2011.

[5] M. Syam et al.; Journal of Fractional Calculus and Applications, 4, 1, 147, 2013.

[6] M. Al-Refai et al.; Nonlinear Analysis, 74, 3531, 2011.

[7] Chaozhu Hu et al.; Article ID 493164, 8, 2013.

[8] F. Mohammadi et al.; International Journal of the Physical Sciences, 32, 6, 7371, 2011.

[9] E. H. Doha et al.; Computers and Mathematics with Applications, 62, 2364, 2011.

[10] R. A. Khan et al.; Applied Mathematical Modelling, 36, 894, 2012.

주체105(2016)년 3월 5일 원고접수

Decomposition-Operational Matrix Method of Two Point Boundary Value Problem for a Fractional Ordinary Differential Equation

Choe Hui Chol, Ri Hae Yon

We considered decomposition-operational matrix method for fractional differential equation with two point boundary value problem.

And then we discussed numerical algorithm for this equation and proved the convergence of asymptotic solution for integral equation $z(x) = {}^c D_0^\alpha u(x)$.

Key words: Caputo fractional derivative, fractional differential equation