김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제1호

약관련오차항을 가지는 비정상변결수모형의 파라메터추정량의 수렴속도

전은경, 김경희

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《기초과학부문들을 발전시켜야 나라의 과학기술수준을 빨리 높일수 있고 인민경제 여러 분야에서 나서는 과학기술적문제들을 원만히 풀수 있으며 과학기술을 주체성있게 발전시켜나갈수 있습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제10권 485페지)

우리는 시간경향항과 비정상 I(1) 과정을 회귀변수로 가지는 변결수시계렬모형을 연구하였다.

보통 상결수회귀모형은 $Y_t=\beta_0+\sum_{j=1}^{d}\beta_{tj}X_{tj}+u_t\equiv \boldsymbol{X}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_t+u_t$ 와 같다. 여기서 $X_{t0}=1$ 이고 $\boldsymbol{X}_t=(X_{t0},\ X_{t1},\ \cdots,\ X_{td})'$, $\boldsymbol{\beta}_t=(\beta_{t0},\ \beta_{t1},\ \cdots,\ \beta_{td})'$ 이다.

선행연구들에서 많이 연구되는 변결수시계렬모형은 다음과 같다.

$$Y_t=\boldsymbol{\beta}(z_t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_t+u_t \tag{1}$$

여기서 $X_{t0}=1$, $\boldsymbol{X}_t=(X_{t0},\ X_{t1},\ \cdots,\ X_{td})'$, $\boldsymbol{\beta}(z_t)=(\beta_0(z_t),\ \beta_1(z_t),\ \cdots,\ \beta_d(z_t))'$ 이며 $(\boldsymbol{X}_t,\ u_t,\ z_t)$ 는 정상렬이다.

선행연구[1]에서는 모형 (1)에 파라메터성분이 포함된 반파라메터모형에서 국부선형추정량의 점근정규성을 론의하였고 선행연구[2]에서는 모형 (1)의 회귀변수가 두가지 형태로 주어진 경우 즉 $\boldsymbol{X}_t=(X_{t1},\ X_{t2})$ 에서 X_{t1} 이 정상과정이고 X_{t2} 가 비정상 I(1) 과정인 경우를 고찰하였다. 또한 선행연구[3, 4]에서는 비정상회귀변수 X_{t2} 를 t 로 바꾼 시간경향항을 가진 다음의 한가지 형태의 비정상변결수모형을 제기하였다.

$$y_t=\boldsymbol{X}_t^{\mathrm{T}}\beta_1(z_t)+t\beta_2(z_t)+u_t \tag{2}$$

선행연구[3]에서는 모형 (2)의 파라메터들을 국부선형방법으로 추정하였고 선행연구[4]에서는 국부다항식추정방법을 적용하였는데 여기서 특히 국부상수추정량이 불일치추정량이 된다는것을 해명하였다. 그리고 일치추정량을 얻자면 반드시 국부 $p(p\ge 1)$ 차다항식추정을 해야 한다는것을 해명하였다.

선행연구[5]에서는 모형 (2)의 정상항 $\boldsymbol{X}_t$ 를 비정상 I(1) 과정 $\boldsymbol{X}_t=\boldsymbol{X}_{t-1}+\upsilon_t$ 로 바꾼 모형을 고찰하였다. 여기서 우연량렬 $\{z_t\},\ \{\upsilon_t\},\ \{u_t\}$ 들이 모두 독립이고 동일분포하는 우연량렬들이고 $\{X_{t1}\}$ 이 비정상 I(1) 과정인 경우 국부상수추정량이 일치추정량이라는 결과를 얻어내였다. 다음 더 일반적인 변결수모형 $y_t=g(X_t^{\mathrm{T}}a(U_t))+u_t$ 가 제기되고 이 모형의 동정방법과 비파라메터추정량의 점근적성질이 연구되였다.[6]

론문에서는 회귀변수 $\boldsymbol{X}_t=(X_t,\ t)$ 로 주어지는 변결수시계렬모형에서 국부상수추정량들의 일치성을 밝히고 그 추정량들의 수렴속도를 평가한다.

모형은 다음과 같다.

$$y_t = \boldsymbol{X}_t^{\mathrm{T}}\delta(z_t) + u_t = X_t\,\beta(z_t) + t\gamma(z_t) + u_t \tag{3}$$

여기서 $\{v_t\}$, $\{u_t\}$ 들은 약정상인 α－혼합렬들이고 $\{z_t\}$ 는 강정상과정이며 $E(u_t \mid X_t,\ z_t)=0$, $\boldsymbol{X}_t = (X_t,\ t)^{\mathrm{T}}$ 이고 $\boldsymbol{X}_t$ 는 I(1) 과정이며 $\delta(z) = (\beta(z),\ \gamma(z))^{\mathrm{T}}$ 이다.

정의 $\{X_t\}$ 에 대하여 $\alpha(\tau) = \sup\limits_{A\in\mathcal{F}_{-\infty}^{0},\ B\in\mathcal{F}_{\tau}^{+\infty}} |\,p(AB) - p(A)p(B)\,| \xrightarrow[\tau\to\infty]{} 0 \ \ (\tau > 0)$ 이면 $\{X_t\}$ 는 강혼합(α－혼합)조건을 만족시킨다고 말하며 함수 α_τ 를 혼합결수라고 부른다.

모형 (3)에서 파라메터 $\delta(z)$ 의 국부상수추정량은 다음과 같다.

$$\hat{\delta}(z) = \begin{pmatrix} \hat{\beta}(z) \\ \hat{\gamma}(z) \end{pmatrix} = \left[\sum_{t=1}^{n} K_{htz}\begin{pmatrix} x_t x_t' & t x_t \\ t x_t' & t^2 \end{pmatrix}\right]^{-1} \sum_{t=1}^{n} K_{htz}\begin{pmatrix} x_t \\ t \end{pmatrix} y_t \tag{4}$$

여기서 $K_{htz} = h^{-1}K((z_t - z)/h)$ 이며 $K(\cdot)$ 은 핵함수, h 는 평활화파라메터이다.

가정 1 v_t 는 $r\in(0,\ 1)$ 일 때 $n^{-1/2}\sum\limits_{t=1}^{[nr]} v_t \Rightarrow W_v(r)$ 인 α－혼합인 약정상과정이다. 여기서 $W_v(r)$ 는 브라운운동과정이다.

또한 α－혼합결수는 어떤 $0 < \delta_0 \le 2$ 가 있어서 $\gamma_0 > 2 + \delta_0$ 일 때

$$E\,|\,v_t\,|^{\gamma_0} < \infty,\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n)^{1/(2+\delta_0) - 1/\gamma_0} < \infty$$

를 만족시킨다.

가정 2 z_t 는 강정상과정이며 z_t 의 확률밀도함수 $f(z)$ 는 $z\in\mathbf{R}$ 에서 3계련속미분가능하다. z_t 와 z_s 의 동시적확률밀도함수 $f(z_t',\ z_s')$ 는 $(z_t',\ z_s')\in\mathbf{R}^2$ 에서 련속이다.

또한 $\delta(z)$ 는 $z\in\mathbf{R}$ 에서 3계련속미분가능하다.

가정 3 u_t 는 α－혼합인 약정상과정으로서 어떤 $\gamma > 0$ 이 있어서 $E|u_i|^{2+\gamma} < \infty$ 를 만족시킨다. 혼합결수는 $\alpha(i) = O(i^{-\tau})$ $\ (\tau = (2+\gamma)(1+\gamma)/\gamma\,)$이다.

가정 4 $\{u_t\}_{t=1}^{n}$, $\{z_t\}_{t=1}^{n}$, $\{x_t\}_{t=1}^{n}$ 들은 서로 독립이며 평활화파라메터는 $n\to\infty$, $nh\to\infty$, $nh^4 \to 0$ 을 만족시킨다.

이제 론문의 결과를 유도하는데서 중요하게 리용하는 보조정리 1을 먼저 정식화한다.

보조정리 1 X_t 가 I(1) 과정, v_t 가 정상강혼합(α－혼합)과정일 때 임의의 보렐가측, 완전르베그적분가능한 함수 $G(\cdot)$ 에 대하여 다음의 식이 성립된다.

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} G(x_{[rn]}/\sqrt{n}) \xrightarrow{d} \int_0^1 G(W_v(r))dr,\ \ n\to\infty\ ,\ \ r = t/n,\ \ 1\le t\le n$$

다음의 보조정리들의 정식화를 위하여 다음의 기호들을 리용한다.

$$\beta_t = \beta(z_t)\ ,\ \ \gamma_t = \gamma(z_t)\ ,\ \ \beta_z = \beta(z)\ ,\ \ \sum_{t=1}^{n} = \sum_t,\ \ \ K_{htz} = h^{-1}K((z_t - z)/h)$$

보조정리 2 $G_{0n} := n^{-2}\sum\limits_t x_t^2 K_{htz}$, $G_{1n} := n^{-2/5}\sum\limits_t t x_t K_{htz}$, $G_{2n} := n^{-3}\sum\limits_t t^2 K_{htz}$ 로 정의하면 $G_{0n} \xrightarrow{d} f(z)\int_0^1 W_v(r)^2\,dr$, $G_{1n} \xrightarrow{d} f(z)\int_0^1 rW_v(r)dr$, $G_{2n} \xrightarrow{d} f(z)/3$ 이다.

보조정리 3 $B_{1n}:=n^{-2}\sum_t x_t^2(\beta_t-\beta_z)K_{htz}$, $B_{2n}:=n^{-2}\sum_t tx_t(\gamma_t-\gamma_z)K_{htz}$, $B_{3n}:=n^{-2}\sum_t x_tu_tK_{htz}$, $B_{4n}:=n^{-2}\sum_t tx_t(\beta_t-\beta_z)K_{htz}$, $B_{5n}:=n^{-2}\sum_t t^2(\gamma_t-\gamma_z)K_{htz}$, $B_{6n}:=n^{-2}\sum_t tu_tK_{htz}$ 로 정의하면

$$B_{1n}=O_p(h^2+(h/n)^{1/2}),\ B_{2n}=B_{4n}=O_p(n^{1/2}h^2+h^{1/2}),\ B_{3n}=O_p((n^2h)^{-1/2}),$$

$$B_{5n}=O_p(nh^2+(nh)^{1/2}),\ B_{6n}=O_p(((nh)^{-1}+1)^{1/2}).$$

정리 가정 1－4밑에서 다음의 결과가 성립된다.

$$\hat{\beta}(z)-\beta(z)=O_p\left(\sqrt{n}h^2+\sqrt{h}+\sqrt{\frac{1}{n^2h}+\frac{1}{n}}\right),\ \hat{\gamma}(z)-\gamma(z)=O_p\left(h^2+\sqrt{\frac{h}{n}}+\sqrt{\frac{1}{n^3h}+\frac{1}{n^2}}\right)$$

증명 모형은 $y_t=x_t\beta_t+t\gamma_t+u_t=(x_t,\ t)(\beta_t,\ \gamma_t)'+u_t$, $\beta_t=\beta(z_t)$, $\gamma_t=\gamma(z_t)$와 같다. $\delta(z)=(\beta(z),\ \gamma(z))'$의 국부상수추정량은 식 (4)와 같다.

식 (4)의 오른변의 첫째 거꿀행렬을 먼저 계산하자.

$$\begin{pmatrix}\sum_t x_t^2K_{htz} & \sum_t tx_tK_{htz}\\ \sum_t tx_tK_{htz} & \sum_t t^2K_{htz}\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{\left[\sum_t x_t^2K_{htz}\right]\left[\sum_t t^2K_{htz}\right]-\left[\sum_t tx_tK_{htz}\right]^2}\begin{pmatrix}\sum_t t^2K_{htz} & -\sum_t tx_tK_{htz}\\ -\sum_t tx_tK_{htz} & \sum_t x_t^2K_{htz}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{[n^2G_{0n}][n^3G_{2n}]-[n^{5/2}G_{1n}]^2}\begin{pmatrix}n^3G_{2n} & -n^{5/2}G_{1n}\\ -n^{5/2}G_{1n} & n^2G_{0n}\end{pmatrix}=\frac{1}{G_{0n}G_{2n}-G_{1n}^2}\begin{pmatrix}G_{2n} & -n^{1/2}G_{1n}\\ -n^{1/2}G_{1n} & n^{-1}G_{0n}\end{pmatrix}\frac{1}{n^2}$$

여기서 $G_{0n}:=n^{-2}\sum_{t=1}^n x_t^2K_{htz}$, $G_{1n}:=n^{-2/5}\sum_{t=1}^n tx_tK_{htz}$, $G_{2n}:=n^{-3}\sum_{t=1}^n t^2K_{htz}$ 로 정의된다.

$\Delta_n\equiv G_{0n}G_{2n}-G_{1n}^2$ 으로 정의하자.

보조정리 2를 적용하면 다음과 같다.

$$\Delta_n\xrightarrow{d}\left[f(z)\int_0^1W_v(r)^2dr\right]\left[\frac{f(z)}{3}\right]-\left[f(z)\int_0^1rW_v(r)dr\right]^2=f^2(z)\left\{\left[\int_0^1W_v(r)^2dr\right]\left[\int_0^1r^2dr\right]-\left[\int_0^1rW_v(r)dr\right]^2\right\}\ge0$$

꼬쉬－슈와르츠부등식에 의하여 $\Delta_n\ge0$ 이고 등식은 $W_v(r)/r$ 가 거의 상수일 때에만 성립된다. 그러므로 Δ_n은 거의 정값행렬이고 따라서 $1/\Delta_n$은 거의 유한이다.

이것을 리용하면 식 (4)로부터

$$(\hat{\beta}_z-\beta_z)=\frac{1}{\Delta_n}\begin{pmatrix}G_{2n} & -n^{1/2}G_{1n}\\ -n^{1/2}G_{1n} & n^{-1}G_{0n}\end{pmatrix}\times\frac{1}{n^2}\begin{pmatrix}\sum_t[x_t^2(\beta_t-\beta_z)+tx_t(\gamma_t-\gamma_z)+x_tu_t]K_{htz}\\ \sum_t[tx_t(\beta_t-\beta_z)+t^2(\gamma_t-\gamma_z)+tu_t]K_{htz}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\Delta_n}\begin{pmatrix}G_{2n} & -n^{1/2}G_{1n}\\ -n^{1/2}G_{1n} & n^{-1}G_{0n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{1n}+B_{2n}+B_{3n}\\ B_{4n}+B_{5n}+B_{6n}\end{pmatrix}= \tag{5}$$

$$=\frac{1}{\Delta_n}\begin{pmatrix}G_{2n}[B_{1n}+B_{2n}+B_{3n}]-n^{-1/2}G_{1n}[B_{4n}+B_{5n}+B_{6n}]\\ -n^{-1/2}G_{1n}[B_{1n}+B_{2n}+B_{3n}]-n^{-1}G_{0n}[B_{4n}+B_{5n}+B_{6n}]\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta_n}\begin{pmatrix}A_{1n}\\ A_{2n}\end{pmatrix}$$

여기서 A_{jn}, $j=1,\ 2$의 정의는 명백하고

$$B_{1n} := n^{-2}\sum_t x_t^2(\beta_t - \beta_z)K_{htz},\ B_{2n} := n^{-2}\sum_t tx_t(\gamma_t - \gamma_z)K_{htz},\ B_{3n} := n^{-2}\sum_t x_t u_t K_{htz}$$

$$B_{4n} := n^{-2}\sum_t tx_t(\beta_t - \beta_z)K_{htz},\ B_{5n} := n^{-2}\sum_t t^2(\gamma_t - \gamma_z)K_{htz},\ B_{6n} := n^{-2}\sum_t tu_t K_{htz}.$$

$$B_{1n} + B_{2n} + B_{3n} = O_p(h^2 + \sqrt{h/n}) + O_p(\sqrt{n}h^2 + \sqrt{h}) + O_p(\sqrt{(n^2h)^{-1}}) = O_p(\sqrt{n}h^2 + \sqrt{h}) \quad (6)$$

$$B_{4n} + B_{5n} + B_{6n} = O_p(\sqrt{n}h^2 + \sqrt{h}) + O_p(nh^2 + \sqrt{nh}) + O_p(\sqrt{(nh)^{-1} + 1}) = O_p(nh^2 + \sqrt{nh} + \sqrt{(nh)^{-1} + 1}) \quad (7)$$

$\Delta_n = O_p(1)$ 이고 보조정리 2를 리용하면 $G_{jn} = O_p(1)$ $(j = 0, 1, 2)$ 이고 식 (5)－(7)을 리용하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$A_{1n} = O_p\left(\sqrt{n}h^2 + \sqrt{h} + \sqrt{\frac{1}{n^2h} + \frac{1}{n}}\right),\ A_{2n} = O_p\left(h^2 + \sqrt{\frac{h}{n}} + \sqrt{\frac{1}{n^3h} + \frac{1}{n^2}}\right) \quad (8)$$

식 (5), (8)들을 리용하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\hat{\beta}(z) - \beta(z) = O_p\left(\sqrt{n}h^2 + \sqrt{h} + \sqrt{\frac{1}{n^2h} + \frac{1}{n}}\right),\ \hat{\gamma}(z) - \gamma(z) = O_p\left(h^2 + \sqrt{\frac{h}{n}} + \sqrt{\frac{1}{n^3h} + \frac{1}{n^2}}\right)$$

그러므로 정리의 결과가 증명된다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] Fan J. et al.; Profile Likelihood Inferences on Semi-Parametric Varying-Coefficient Partial Linear Models, Bernoulli, 1031～1057, 2005.

[2] Cai Z. et al.; Journal of Econometrics, 148, 101, 2009.

[3] Qi Gao et al.; Annals of Economic and Finance, 13, 1, 189, 2012.

[4] Liang Z. et al.; Journal of Econometrics, 170, 15, 2012.

[5] Li K. et al.; Economics Letters, 119, 89, 2013.

[6] Zhang W. et al.; Journal of Econometrics, 187, 238, 2015

주체107(2018)년 9월 8일 원고접수

The Convergence Rate of the Estimators of Parameters in Non-Stationary Varying Coefficient Models with Weak Dependent Error Terms

Jon Un Gyong, Kim Kyong Hui

We derived the convergence rate of the estimators of parameters in non-stationary varying coefficient models with weak dependent error terms. Therefore we generalized results in a semi-parametric varying coefficient model with martingale difference error terms that contains time trend and non-stationary I(1) as covariates .

Key words: varying coefficient model, time trend