김일성종합대학학보 주체108(2019)년
물리학 제65권 제3호

량자브라운립자의 상관함수에 대한 연구

리훈, 김정철

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《과학과 기술이 매우 빨리 발전하고있는 오늘의 현실은 기초과학을 발전시킬것을 더욱 절실하게 요구하고있습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제11권 138페지)

나노기술과 저온기술의 발전에 의하여 량자력학의 초기발전단계에서 사고실험에 의거하였던 현상들을 물리적으로 실현할수 있게 되였다.[1, 2] 이러한 계들이 외부환경과 호상작용하는것은 피할수 없다. 량자력학적계가 자유도가 무한개인 외부환경과 호상작용하는 경우 계의 동력학적변화는 간섭성소실현상을 동반하면서 산일과정으로 된다.[3, 4] 이 경우 계는 열린계로 론의되며 그것의 동력학적과정은 량자마스터방정식 혹은 하이젠베르그—랑쥬뱅운동방정식에 의하여 표시된다.

량자마스터방정식에 의한 열린계에 대한 론의에서는 보른근사나 마르꼬브근사와 같은 가정들을 한다.[5] 이러한 가정들은 계와 외부환경과의 호상작용이 약하다는것을 전제로 하고있다. 이로부터 량자마스터방정식의 풀이는 정확한 풀이가 아니라 근사적인 풀이이며 이 방법의 적용조건에 대하여서도 론의가 진행되여야 한다.

론문에서는 열평형상태에 있는 외부환경과 호상작용하는 량자브라운립자에 대하여 하이젠베르그—랑쥬뱅운동방정식을 세우고 그 풀이를 구하였으며 드루데스펙트르에 대하여 상관함수들을 구하였다.

1. 환경과 호상작용하는 조화진동자

단위질량을 가지는 조화진동자가 온도 T인 외부환경과 호상작용을 하는 경우 전체계의 하밀토니안은 다음과 같다.

$$H = H_S + H_B + H_{SB} \tag{1}$$

$$H_S = \frac{p^2}{2} + \frac{\Omega^2}{2} q^2 \tag{2}$$

$$H_B = \sum_k \frac{1}{2}[p_k^2 + W_k^2 Q_k^2] \tag{3}$$

계와 외부환경과의 호상작용은 선형결합이라고 하자. 즉

$$H_{SB} = -q \sum_k C_k Q_k \tag{4}$$

이때 계와 환경에 대한 운동방정식은 하이젠베르그방정식에 의하여 주어진다.

$$\ddot{q} + \Omega^2 q = \sum_k C_k Q_k \tag{5}$$

$$\ddot{Q}_k + W_k^2 Q_k = C_k q(t) \tag{6}$$

우의 방정식은 선형결합방정식이며 환경변수에 대하여 풀고 그 풀이를 대입하여 계의 시간진화를 론의할수 있다. 방정식 (6)의 풀이를 구하면 다음과 같다.

$$Q_k(t) = Q_k^{(0)}(t) + C_k \int_0^t \frac{\sin[W_k(t-t')]}{W_k} q(t') \tag{7}$$

이때

$$Q_k^{(0)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2W_k}}[a_k e^{-iW_k t} + a_k^+ e^{iW_k t}] \tag{8}$$

이며 이 풀이는 동차방정식의 풀이로서 소멸연산자와 발생연산자로 구성되여있다. 외부환경이 열평형을 이루고있다면 립자수연산자의 통계적평균은 다음과 같다.

$$\langle\langle a_k^+ a_k \rangle\rangle = \frac{1}{e^{W_k/T} - 1} \tag{9}$$

여기서 평균은 밀도연산자에 의한 통계적평균을 나타낸다.

우의 풀이를 방정식 (5)에 대입하면 하이젠베르그—랑쥬뱅운동방정식을 얻는다.

$$\ddot{q}(t) + \Omega^2 q(t) + \int_0^t \Sigma(t-t') q(t') dt' = \xi(t) \tag{10}$$

방정식에서 고유에네르기는 다음과 같다.

$$\Sigma(t-t') = -\sum_k \frac{C_k^2}{W_k} \sin[W_k(t-t')] \equiv \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\omega') e^{i\omega'(t-t')} d\omega' \tag{11}$$

외부환경의 스펙트르밀도와 섭동은 다음과 같다.

$$\sigma(\omega') = \sum_k \frac{\pi C_k^2}{2W_k}[\sigma(\omega' - W_k) - \sigma(\omega' + W_k)] \tag{12}$$

$$\xi(t) = \sum_k C_k Q_k^{(0)}(t) \tag{13}$$

하이젠베르그—랑쥬뱅운동방정식의 풀이는 라쁠라스변환을 리용하여 구할수 있다. 라쁠라스변환을 실시한 후 운동방정식은 다음과 같다.

$$\tilde{q}(s) = g(s)[\dot{q}(0) + sq(0) + \tilde{\xi}(s)] \tag{14}$$

이 방정식의 풀이는 쉽게 구할수 있다.

$$g(s) = \frac{1}{[s^2 + \Omega^2 + \tilde{\Sigma}(s)]} \tag{15}$$

라쁠라스거꿀변환을 실시하여 운동방정식의 풀이를 얻을수 있다.

$$q(t) = G(t)\dot{q}(0) + \dot{G}(t) q(0) + \int_0^t G(t-t') \xi(t') dt' \tag{16}$$

$$G(t) = \int_c \frac{ds}{2\pi i} g(s) e^{st} \tag{17}$$

2. 상 관 함 수

하이젠베르그묘사에서 연산자들은 시간에 의존하지만 상태는 시간에 의존하지 않는다. 초기시각에 계에 대하여 밀도연산자는 계와 외부환경의 직적으로 주어진다고 하자.

$$\rho_{SB}(0)=\rho_S(0)\otimes\rho_B(0) \tag{18}$$

따라서 계의 하이젠베르그연산자의 상관함수들은 초기조건에 대한 평균과 섭동항에 의한 평균으로 이루어진다. 실례로 계의 자리표에 대한 상관함수는 다음과 같이 주어진다.

$$\langle q(t)q(t')\rangle = G(t)G(t')\langle p^2(0)\rangle_S+\dot{G}(t)\dot{G}(t')\langle q^2(0)\rangle_S+G(t)\dot{G}(t')\langle p(0)q(0)\rangle_S+$$
$$+G(t')\dot{G}(t)\langle q(0)p(0)\rangle_S+\int_0^t dt_1\int_0^{t'} dt_2 G(t-t_1)G(t'-t_2)\langle\langle\xi(t_1)\xi(t_2)\rangle\rangle \tag{19}$$

외부환경의 스펙트르밀도가 드루데형으로 주어지는 경우 상관함수들을 구할수 있다.

$$\sigma(\omega)=\gamma\,\omega\frac{\Lambda^2}{\Lambda^2+\omega^2},\ \ \gamma>0 \tag{20}$$

여기서 Λ는 외부환경의 대역폭이며 $\Lambda>>\Omega$, γ를 만족시킨다고 본다. 이 경우 고유에네르기는 방정식 (11)에 대입하여 구할수 있다.

$$\Sigma(\tau)=-\gamma\Lambda^2 e^{-\Lambda|\tau|}\mathrm{sign}(\tau) \tag{21}$$

우의 라쁠라스변환을 리용하여 그린함수를 구할수 있다.

$$G(t)=e^{-\gamma t/2}\frac{\sin Wt}{W},\ \ W=\sqrt{\Omega_R^2-\frac{\gamma^2}{4}} \tag{22}$$

여기서 Ω_R^2은 재규격화된 주파수이다. $t, t'>>1/\gamma$일 때 자리표에 대한 상관함수는 쉽게 계산된다.

$$\langle q(t)q(t')\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\frac{\sigma(\omega)n(\omega)}{[(\omega^2-\Omega_R^2)^2+(\omega\gamma)^2]}e^{i\omega(t-t')} \tag{23}$$

자리표와 운동량사이에는 $p(t)=dq(t)/dt$의 관계가 있으므로 운동량연산자에 대한 상관함수는 다음과 같다.

$$\langle p(t)p(t')\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\frac{\omega^2\sigma(\omega)n(\omega)}{[(\omega^2-\Omega_R^2)^2+(\omega\gamma)^2]}e^{i\omega(t-t')} \tag{24}$$

$$\langle(p(t)q(t)+q(t)p(t))\rangle=\left(\frac{d}{dt}+\frac{d}{dt'}\right)\langle q(t)q(t')\rangle\Big|_{t=t'}=0 \tag{25}$$

드루데스펙트르밀도의 경우 자리표연산자의 2제곱평균은 복소적분을 리용하여 구할수 있다.

$$\langle q^2\rangle=\frac{1}{4W}\left[\mathrm{cth}\left(\frac{W+i\gamma/2}{2}\right)+\mathrm{cth}\left(\frac{W-i\gamma/2}{2}\right)\right]+$$
$$+\frac{\gamma}{2\Lambda^2}i\mathrm{cth}\left(\frac{i\Lambda}{2T}\right)+\frac{\gamma}{T^2}F[\Lambda/T,\ \Omega_R/T,\ \gamma/T] \tag{26}$$

우의 방정식에서 괄호안에 있는 첫항은 극한 $\Lambda>>\gamma$의 경우 공진복소극에 의한 기

여이며 두번째 항은 $\omega = i\Lambda$ 일 때의 기여로서 무시할수 있다. 세번째 항은 마쯔바라극들에 의한 기여이다. 이때 함수 F는 모든 온도와 스펙트르대역폭에 관하여 유계인 함수이다. 온도가 높은 경우

$$\left\langle q^2 \right\rangle = \frac{T}{\Omega_R^2} + \cdots \tag{27}$$

이다.

이 결과는 $\Omega_R^2 > 0$ 이기 위한 조건 $\Omega^2 > \gamma\Lambda$ 가 만족될 때 $\Lambda >> \Omega, \gamma$ 인 가정하에서 정확한 풀이이다. 이 조건에 의해 그린함수는 감쇠되여 정상상태로 다가가게 된다.

자리표의 2제곱평균은 재규격화된 주파수에 의존하며 재규격화되지 않은 주파수에는 직접적으로 의존하지 않는다. 이것은 량자마스터방정식에 의한 풀이와 구별되는 중요한 결과이다.

맺 는 말

론문에서는 조화진동자의 시간진화를 하이젠베르그－랑쥬뱅방정식을 적용하여 풀었다. 조화진동자가 호상작용하는 외부환경이 드루데스펙트르밀도를 가지는 경우 일정한 조건하에서 상관함수를 구하고 마스터방정식의 풀이와의 차이점을 밝혔다.

참 고 문 헌

[1] T. V. Tscherbul et al.; Phys. Rev. Lett., 113, 113601, 2014.
[2] A. E. Allahverdyan et al.; Phys. Rev. Lett., 85, 1799, 2000.
[3] H. P. Breuer et al.; The Theory of Open Quantum Systems, Oxford Press, 10～37, 2006.
[4] C. W. Gardiner et al.; Quantum Noise, Springer, 36～63, 2004.
[5] U. Weiss; Quantum Dissipative Systems, World Scientific, 102～160, 2008.

주체108(2019)년 3월 5일 원고접수

On the Correlation Function for a Quantum Brownian Particle

Ri Hun, *Kim Jong Chol*

In this paper we have considered the time evolution of a harmonic oscillator with the Heisenberg-Langevin equation. We have obtained a correlation function for a harmonic oscillator when an environment interacting with the oscillator is endowed with the Drude spectral density, and have discussed what is different from the solution of the Master equation.

Key words: quantum Brownian particle, open system, Master equation