김일성종합대학학보 JOURNAL OF KIM IL SUNG UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체104(2015)년 제61권 제5호 Vol. 61 No. 5 JUCHE104(2015).

대칭인 려파기묶음으로부터의 유한파쎄발프레임구성법

김종철, 리광훈

최근에 프레임을 리용한 신호 또는 화상의 회복 및 전송문제가 많이 론의되고있다.[1－5] 파쎄발프레임은 그것의 재구성을 쉽게 할수 있기때문에 관심을 모으고있다.

H는 스칼라적이 $<\cdot, \cdot>$인 가분힐베르트공간, I는 기껏 셀수 있는 첨수모임이라고 하자. $\{f_k\}_{k\in I} \subset H$에 대하여 $\exists 0 < A \le B < \infty$; $\forall f \in H$, $A\|f\|^2 \le \sum_{k\in I} |<f, f_k>|^2 \le B\|f\|^2$이면 $\{f_k\}_{k\in I}$를 H의 프레임이라고 부르고 그러한 상수 A, B를 각각 프레임 $\{f_k\}_{k\in I}$의 아래한계, 웃한계라고 부른다. 또한 $\exists 0 < A < \infty$; $\forall f \in H$, $\sum_{k\in I} |<f, f_k>|^2 = A\|f\|^2$이면 $\{f_k\}_{k\in I}$를 H의 엄격한 프레임이라고 부른다. 특히 $A=1$이면 엄격한 프레임 $\{f_k\}_{k\in I}$를 파쎄발프레임이라고 부르며 $\|f_k\|=1$, $k\in I$이면 $\{f_k\}_{k\in I}$를 표준화된 엄격한 프레임이라고 부른다.

I가 유한모임일 때는 프레임을 유한프레임이라고 부른다.

$\{f_k\}_{k\in I}$가 파쎄발프레임이라면

$$\forall f \in H, \quad f = \sum_{k\in I} <f, f_k> f_k \, . \tag{1}$$

계산실천에서는 유한프레임이 요구된다.

선행연구[4, 5]에서는 원점에 관하여 대칭 또는 반대칭인 려파기들의 묶음으로부터 파쎄발프레임을 얻을수 있다는것을 주장하였다.

엄격한 유한프레임을 직접 얻기 위한 단순한 알고리듬들도 연구되였다.[1－3]

그런데 이 유한프레임은 려파기묶음으로부터 얻어진 프레임에서와 같이 고속실현방법으로 프레임분해 및 합성을 실현할수 없다는 결함이 있다.

론문에서는 내리표본화가 없을 때의 완전재구성조건을 만족시키며 모두 옹근수점에 관하여 대칭 또는 반대칭인 려파기묶음이 주어지든가 또는 모두 반옹근수점에 관하여 대칭 또는 반대칭인 려파기묶음이 주어지면 그로부터 유클리드공간의 파쎄발프레임들을 구성할수 있다는것을 구성적방법으로 밝히였다.

1. 유한파쎄발프레임의 구성

먼저 $\boldsymbol{R}^d$의 파쎄발프레임의 잡음억제능력에 대하여 보자.

$\{\eta_k\}_{k=1}^m$이 유한프레임 $\{f_k\}_{k=1}^m$에 의한 분해결수에 추가된 잡음들이라고 하자.

이때 식 (1)에서의 f대신에

$$\tilde{f} = \sum_{k=1}^{m} (<f, f_k> + \eta_k) S^{-1} f_k \tag{2}$$

가 얻어진다. 여기서 S는 프레임 $\{f_k\}_{k=1}^m$과 관련된 프레임연산자이다.

매 잡음성분 η_k 를 우연변수로 간주하자.

매 η_k 는 기대값이 0, 분산이 σ^2 이며 η_k, η_l 은 $k \neq l$ 에 대해 무상관이라고 가정한다. 이 가정은 $\mathrm{E}[\eta_k] = 0$, $\mathrm{E}[\eta_k \eta_l] = \sigma^2 \delta_{k,\,l}$, $k, l = 1, \cdots, m$ 으로 쓸수 있다.

재구성된 신호 $\tilde{f}$ 과 원신호 f 사이의 차와 관련된 평균두제곱오차를 $\mathrm{MSE} = \mathrm{E} \| \tilde{f} - f \|^2 / d$ 로 정의하자.

명제 $\sum_{k=1}^{m} \| f_k \|^2$ 이 일정한 $\boldsymbol{R}^d$ 의 프레임 $\{f_k\}_{k=1}^{m}$ 들을 보기로 하자. 여기서 $d, m \in N$ 은 고정된 수들이다.

그러한 모든 프레임들중들에서 MSE가 최소이기 위해서는 프레임이 엄격할것이 필요하고 충분하다. 도달되는 최소값은 $\mathrm{MSE} = d\sigma^2 \Big/ \sum_{k=1}^{m} \| f_k \|^2$ 이다. 특히 그러한 프레임이 파쎄발이면 $\mathrm{MSE} = \sigma^2$ 이다.(증명생략)

다음으로 프레임한계가 1인 엄격한 유한프레임 즉 파쎄발프레임을 구성하는 방법을 보자.

대칭 즉 $\forall t \in \boldsymbol{Z}$, $p_t = p_{k-t}$ 이거나 반대칭 즉 $\forall t \in \boldsymbol{Z}$, $p_t = -p_{k-t}$ 인 유한임풀스응답려파기 $p = (p_t)$ 들이 주어졌다고 하자. 여기서 k 는 옹근수이고 k 가 짝수인 경우 p 는 옹근수점 $k/2$ 에 관하여 대칭인 려파기이고 k 가 홀수인 경우는 반옹근수점 $(k-1)/2 + 1/2$ 에 관하여 대칭인 려파기이다.

려파기 p 의 z －변환을 $P(z) = \sum_{t \in \boldsymbol{Z}} p_t z^{-k}$ 으로 표시한다.

옹근수점 s 에 관하여 대칭 또는 반대칭인 유한임풀스응답려파기 $p := \{p_j\}_{j=s-J}^{s+J}$ 에 대하여 $d \times d$ 형행렬

$$S_1(p) := \begin{pmatrix} p_{2s} & \cdots & p_{2s-J} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{s+J} & \cdots & \ddots & \cdots & p_{2s-J} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & p_{2s+J} & \cdots & p_{2s} \end{pmatrix}, \quad S_2(p) := \begin{pmatrix} p_{2s+1} & \cdots & p_{2s+J} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{2s+J} & \cdots & \ddots & \cdots & p_{2s-J} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & p_{2s-J} & \cdots & p_{2s-1} \end{pmatrix}$$

들을 도입하고

$$\underline{S}(p) := S_1(\overline{p}) + S_2(\overline{p}) \tag{3}$$

로 놓자. 여기서 $\overline{p} = \{\overline{p}_j := p_{2s-j}\}_{j=-J}^{J}$ 이다.

이때 주어진 유한입력신호 $a^0 = \{a_i^0\}_{i=0}^{d-1}$ 에 대하여 그것을 려파기 $\overline{p}$ 로 려파하는 문제 즉 $a_k^1 = \sum_{i \in \boldsymbol{Z}} a_i^0 \overline{p}_{2s+k-i}$, $k = 0, \cdots, d-1$ 에 의하여 정의되는 벡토르 $(a_0^1, \cdots, a_{d-1}^1)^T$ 를 계산하는 문제는 $a_{-J}^0, a_{-J+1}^0, \cdots, a_{-1}^0$ 들과 $a_d^0, a_{d+1}^0, \cdots, a_{d+J-1}^0$ 들이 조건 $a_i^0 = \begin{cases} a_{-i-1}^0, & i < 0 \\ a_{2d-1-i}^0, & i > d-1 \end{cases}$ 에 의해 보충된다면 행렬 $\underline{S}(p)$ 와 벡토르 $(a_0^0, a_1^0, \cdots, a_{d-1}^0)^T$ 의 적을 계산하는 문제와 같다.

주어진 유한임풀스응답려파기묶음 $\{q^l = \{q_j^l\}_{j \in \boldsymbol{Z}}\}_{l=0}^{r}$ 이 내리표본화가 없을 때의 려파

묶음의 다음과 같은 완전재구성조건을 만족시킨다고 가정하자.

$$\sum_{l=0}^{r} |Q^l(z)|^2 = 1 \tag{4}$$

조건 (4)로부터 다음의 식이 성립된다.

$$\sum_{l=0}^{r}\sum_{k\in \boldsymbol{Z}} q_k^l q_{k-s}^l = \delta_{s,\,0},\ s\in \boldsymbol{Z} \tag{5}$$

여기서 $\delta_{s,\,0}$은 크로네카델타이다.

정리 1 조건 (4)를 만족시키는 유한임풀스응답려파기묶음 $\{q^l\}_{l=0}^{r}$에서 매 q^l이 옹근수점 s_l에 관하여 대칭 또는 반대칭이고 첨수범위 $[2s_l - J_l : 2s_l + J_l]$밖의 원소들이 령이라고 가정하자.

이때 $d > 2\max\limits_{l=0,\,\cdots,\,r} J_l - 1$이면 $\underline{S}(q^l),\ l = 0, \cdots, r$들을 가지고 정의되는 $d(r+1)\times d$형행렬 $B = (\underline{S}(q^0)^T,\ \underline{S}(q^1)^T, \cdots, \underline{S}(q^r)^T)^T$의 행들은 유클리드공간 $\boldsymbol{R}^d$의 파쎄발프레임을 이룬다.

이제는 반옹근수점 $s+1/2$에 관하여 대칭 또는 반대칭인 유한임풀스응답려파기 $p := \{p_j\}_{j=2s-J+1}^{2s+J}$에 대하여 $d\times d$형행렬

$$S_1(p) := \begin{pmatrix} p_{2s} & \cdots & p_{2s-J+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{2s+J} & \cdots & \ddots & \cdots & p_{2s-J+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & p_{2s+J} & \cdots & p_{2s} \end{pmatrix},\quad S_3(p) = \begin{pmatrix} p_{2s} & \cdots & p_{2s+J} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{2s+J} & \cdots & \ddots & \cdots & p_{2s-J+1} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & p_{2s-J+1} & \cdots & p_{2s-2} \end{pmatrix}$$

들을 도입하고 다음과 같이 설정하자.

$$\underline{S}(p) = S_1(\overline{p}) + S_3(\overline{p}),\ \ l = 0, \cdots, r\ \ (\overline{p} = \{\overline{p}_j := p_{2s-j}\}_{j=-J}^{J-1}) \tag{6}$$

이때 주어진 신호 $a^0 = \{a_i^0\}_{i=0}^{d-1}$에 대하여 그것을 $\overline{p}$로 려파하는 문제 즉 $a_k^1 = \sum\limits_{i\in \boldsymbol{Z}} a_i^0 \overline{p}_{2s+k-i}$, $k = 0, \cdots, d-1$에 의해 정의되는 $a^1 = (a_0^1, \cdots, a_{d-1}^1)^T$를 계산하는 문제는 $a_{-J}^0,\ a_{-J+1}^0, \cdots, a_{-1}^0$들과 $a_d^0,\ a_{d+1}^0, \cdots, a_{d+J-1}^0$들이 $i<0$일 때는 조건 $a_i^0 = \begin{cases} \overline{p}_{2s-i-1}/\overline{p}_{2s-i}\cdot a_{-i-1}^0, & \overline{p}_{2s-i}\neq 0 \\ \overline{p}_{2s-i-1}a_{-i-1}^0, & \overline{p}_{2s-i} = 0 \end{cases}$에 의해 보충되고 $i > d-1$이면 조건 $a_i^0 = \begin{cases} \overline{p}_{2s+d-i-2}/\overline{p}_{2s+d-i-1}\cdot a_{d-i-1}^0, & \overline{p}_{2s+d-i-2}\neq 0 \\ \overline{p}_{2s+d-i-2}a_{d-i-1}^0, & \overline{p}_{2s+d-i-2} = 0 \end{cases}$에 의해 보충된다면 행렬 $\underline{S}(p)$와 벡토르 $(a_0^0,\ a_1^0, \cdots, a_{d-1}^0)^T$의 적을 계산하는 문제와 같다.

정리 2 조건 (4)를 만족시키는 유한임풀스응답려파기묶음 $\{q^l\}_{l=0}^{r}$에서 매 q^l이 반옹근수점 $s_l + 1/2$에 관하여 대칭 또는 반대칭이고 첨수범위 $[2s_l - J_l + 1 : 2s_l + J_l]$밖의 원소들이 령이라고 가정하자.

이때 $d > 2\max\limits_{l=0,\,\cdots,\,r} J_l - 2$이면 식 (6)에 의하여 정의되는 $d(r+1)\times d$형행렬

$$B = (\underline{S}(q^0)^T,\ \underline{S}(q^1)^T, \cdots, \underline{S}(q^r)^T)^T$$

의 행들은 유클리드공간 $\boldsymbol{R}^d$의 파쎄발프레임을 이룬다.

2. 다중척도분해를 실현할수 있는 유한파쩨발프레임의 구성

여기서는 잡음제거 등을 위한 신호의 다중척도분해에 리용할수 있는 유한파쩨발프레임을 구성한다.

옹근수 $k \ge 0$ 에 대하여 려파기 p 의 매 원소들사이에 $2^k - 1$ 개의 령을 삽입하여 얻어지는 려파기를 $h[k]$ 로 표시하자.

옹근수점 s 에 관하여 대칭(또는 반대칭)인 유한임풀스응답려파기 $p = \{p_j\}_{j=2s-J}^{2s+J}$ 에 대하여 $p[k]$ 는 옹근수점 $2^k s$ 에 관하여 대칭(또는 반대칭)인 려파기로 되고 $p[k] = \{p_j[k]\}_{j=2^k(2s-J)}^{2^k(2s+J)}$ 로 된다.

$p[k]$ 를 가지고 식 (3)에서와 같이 만든 $d \times d$ 형행렬을 $\underline{S}(p[k]) := S_1(\overline{p}[k]) + S_2(\overline{p}[k])$ 로 표시하자. 여기서 $\overline{p}[k] = \{\overline{p}_j[k] := p_{2^{k+1}s-j}\}_{j=2^k(-J)}^{2^k(J-1)}$ 이다.

그리고 $\underline{S}_l^{(k)} = \underline{S}(q^l[k])$ 로 표시하자.

정리 3 $l = 0, \cdots, r$ 에 대하여 옹근수점 s_l 에 관하여 대칭 또는 반대칭이고 첨수범위 $[2s_l - J_l : 2s_l + J_l]$ 밖의 원소들이 령인 려파기 q^l 들이 내리표본화가 없을 때의 완전재구성조건 (4)를 만족시킨다고 하고 $\underline{S}_l^{(k)} = \underline{S}(q^l[k])$ 로 표시하자.

그러면 K 가 $d > 2^K \max\limits_{l=0,\cdots,r} J_l - 1$ 인 자연수일 때 $K(r+1)d \times d$ 형행렬

$$A_K = \left(\left(\prod_{j=0}^{K-1} \underline{S}_0^{(K-1-j)} \right)^T, \ \left(\underline{S}_1^{(K-1)} \prod_{j=1}^{K-1} \underline{S}_0^{(K-1-j)} \right)^T, \cdots, \ \left(\underline{S}_r^{(K-1)} \prod_{j=1}^{K-1} \underline{S}_0^{(K-1-j)} \right)^T, \ \left(\underline{S}_1^{(K-2)} \prod_{j=1}^{K-2} \underline{S}_0^{(K-2-j)} \right)^T, \cdots, \right.$$

$$\left. \cdots, \left(\underline{S}_r^{(K-2)} \prod_{j=1}^{K-2} \underline{S}_0^{(K-2-j)} \right)^T, \cdots, (\underline{S}_1^{(1)} \underline{S}_0^{(0)})^T, \cdots, (\underline{S}_r^{(1)} \underline{S}_0^{(0)})^T, (\underline{S}_1^{(0)})^T, \cdots, (\underline{S}_r^{(0)})^T \right)^T =$$

$$= (A_{K,0}^T, \ A_{K,1}^T)^T$$

의 행들은 $\boldsymbol{R}^d$ 의 파쩨발프레임을 이룬다. 여기서 $A_{K,0} = \prod_{j=0}^{K-1} \underline{S}_0^{(K-1-j)}$ 이고 $A_{K,1}$ 은 A_K 의 나머지블로크들로 이루어진다.

다음으로 반옹근수점 $s + 1/2$ 에 관하여 대칭(또는 반대칭)인 유한임풀스응답려파기 $p = \{p_j\}_{j=2s-J+1}^{2s+J}$ 에 대하여 $p[k]$ 는 반옹근수점 $2^k s + 1/2$ 에 관하여 대칭(또는 반대칭)인 려파기로 되고 $p[k] = \{p_j[k]\}_{j=2^k(2s-J+1)}^{2^k(2s+J)}$ 로 된다.

$p[k]$ 를 가지고 식 (6)에서와 같이 만든 $N \times N$ 형행렬을 다시 $\underline{S}(p[k]) := S_1(\overline{p}[k]) + S_2(\overline{p}[k])$ 로 표시하자. 여기서 $\overline{p}[k] = \{\overline{p}_j[k] := p_{2^{k+1}s-j+1}\}_{j=2^k(-J)}^{2^k(J-1)}$ 이다.

정리 4 $l = 0, \cdots, r$ 에 대해 반옹근수점 $s_l + 1/2$ 에 관하여 대칭 또는 반대칭이고 첨수범위 $[2s_l - J_l + 1 : 2s_l + J_l]$ 밖의 원소들이 령인 려파기 q^l 들이 내리표본화가 없을 때의 완

전재구성조건 (4)를 만족시킨다고 하고 $\underline{S}_l^{(k)} = \underline{S}(q^l[k])$로 표시하자.

그러면 K가 $d > 2^K \max\limits_{l=0,\cdots,r} J_l - 2$인 자연수일 때 $K(r+1)d \times d$ 형행렬

$$A_K = \left(\left(\prod_{j=0}^{K-1} \underline{S}_0^{(K-1-j)} \right)^T, \left(\underline{S}_1^{(K-1)} \prod_{j=1}^{K-1} \underline{S}_0^{(K-1-j)} \right)^T, \cdots, \left(\underline{S}_r^{(K-1)} \prod_{j=1}^{K-1} \underline{S}_0^{(K-1-j)} \right)^T, \left(\underline{S}_1^{(K-2)} \prod_{j=1}^{K-2} \underline{S}_0^{(K-2-j)} \right)^T, \cdots, \right.$$

$$\left. \cdots, \left(\underline{S}_r^{(K-2)} \prod_{j=1}^{K-2} \underline{S}_0^{(K-2-j)} \right)^T, \cdots, (\underline{S}_1^{(1)} \underline{S}_0^{(0)})^T, \cdots, (\underline{S}_r^{(1)} \underline{S}_0^{(0)})^T, (\underline{S}_1^{(0)})^T, \cdots, (\underline{S}_r^{(0)})^T \right)^T =$$

$$= (A_{K,\,0}^T,\ A_{K,\,1}^T)^T$$

의 행들은 $\boldsymbol{R}^d$의 파쎄발프레임을 이룬다.

맺 는 말

론문에서는 내리표본화가 없을 때의 완전재구성조건을 만족시키며 모든 옹근수점에 관하여 (반)대칭이든가 모든 반옹근수점에 관하여 (반)대칭인 려파기묶음으로부터 유클리드공간 $\boldsymbol{R}^d$의 다중척도분해를 실현할수 있는 파쎄발프레임을 구성할수 있다는것을 밝혔다.

이 결과는 종전의 결과를 보다 일반화한것으로서 이 결과들을 리용하면 보다 넓은 려파기묶음모임이 신호와 화상의 회복에 리용될수 있다.

참 고 문 헌

[1] J. J. Benedetto et al.; Advances in Computational Mathematics, 18, 357, 2003.

[2] P. G. Casazza et al.; J. Concr. Appl. Math., 4, 277, 2006.

[3] P. G. Casazza et al.; Adv. Comput. Math., 27, 65, 2007.

[4] R. H. Chan; Appl. Comput. Harmon. Anal., 23, 153, 2007.

[5] B. Han et al.; Appl. Comput. Harmon. Anal., 18, 67, 2005.

주체104(2015)년 1월 5일 원고접수

Construction Method of Finite Parseval Frames from Symmetric Filter Banks

Kim Jong Chol, Ri Kwang Hun

We construct Parseval frames for Euclidean space from perfect reconstuction undecimated filter banks in which all filters are either whole-point (anti-)symmetric or half- point (anti-)symmetric.

Key words: tight finite frame, filter bank