마감소득미분경기에서 한가지 개선된 웃방향계차도식에 기초한 최량방략구성

정명랑, 리국환

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《기초과학을 끊임없이 심화발전시키지 않고서는 첨단과학기술을 연구도입할수도 없고 새로운 높은 수준의 과학기술을 연구개발할수도 없습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제22권 21페지)

경기는 반결합조종의 걸음실현에 기초하고있는 크라쏩스끼－쑤보찐의 틀거리에서 정식화된다.

동적계획수법에 기초한 최량방략구성은 값함수계산과 밀접히 련관되여있다.

선행연구[1－3]에서는 각이한 형태의 값함수계산도식들과 그것에 기초한 최량반결합조종(최량방략)의 구성법을 제안하였으며 선행연구[2]에서는 웃방향계차도식의 유용성에 대하여 설명하였다. 이 도식을 리용하면 $\Delta_i \ge \sqrt{n} K_{\tilde{f}} \Delta,\ i=\overline{1,\ n}$ 또는 CFL조건밑에서 값함수의 근사가 얻어진다. 그런데 이 조건들은 구성된 방략의 최량성을 담보하는 일반조건들에 상반되며 따라서 선행연구[2]에서는 계산된 값함수에 기초하여 극값표준형태의 조종을 적용하거나 매우 강한 조건밑에서 최량성을 론의하였다.

론문에서는 한가지 변형된 웃방향계차도식을 제안하고 그에 기초하여 값함수와 방략을 동시에 계산하고 계산된 값함수의 수렴성과 방략의 최량성을 평가하였다.

시간구간 $I=[t_{00},\ \theta]$ 에서의 동태가 다음의 미분방정식으로 표시되는 미분경기를 론의하자.

$$\dot{x}(t)=f(t,\ x(t),\ u(t),\ v(t)),\ t\in I,\ x(t)\in \mathbf{R}^n,\ u(t)\in U\subset \mathbf{R}^p,\ v(t)\in V\subset \mathbf{R}^q \tag{1}$$

여기서 t 는 시간, $x(t)$ 는 계의 상태벡토르, $u(t),\ v(t)$ 는 각각 첫째 및 둘째 경기자의 t 시각에서의 조종벡토르들, $U,\ V$ 는 각각 콤팍트모임들이다.

경기에서 첫째 경기자의 목적은 종점비용

$$J(x(\cdot))=\sigma(x(\theta)) \tag{2}$$

를 최소화하는것이며 둘째 경기자의 목적은 그 반대이다.

가정 ① $f(\cdot)$ 은 모임 $I\times \mathbf{R}^n \times U\times V$ 에서 모든 변수 $t,\ x,\ u,\ v$ 들에 관하여 유계평등련속이다. 유계상수를 K_f 로 표시한다.

② $f(\cdot)$ 은 $t,\ x$ 에 관하여 립쉬츠련속이다. 립쉬츠상수를 L_f 로 표시한다.

③ 다음의 아이젝쓰조건이 만족된다.

$$\min_{u\in P}\max_{v\in Q}\langle s,\ f(t,\ x,\ u,\ v)\rangle =$$
$$=\max_{v\in Q}\min_{u\in P}\langle s,\ f(t,\ x,\ u,\ v)\rangle\ (=:H(t,\ x,\ s)),\ \ \forall (t,\ x)\in I\times \boldsymbol{R}^n,\ \forall s\in \boldsymbol{R}^n$$

④ $\sigma(\cdot)$ 은 유계립쉬츠련속이다. 유계상수와 립쉬츠상수를 각각 $K_\sigma,\ L_\sigma$ 로 표시한다.

우의 가정밑에서 임의의 초기위치 $(t,\ x)\in I\times\mathbf{R}^n$ 에 대하여 문제 (1), (2)의 경기값 $w^*(t,\ x)$ 는 존재하며 값함수 $(t,\ x)\mapsto w^*(t,\ x)$ 는 유계립쉬츠련속이다.

또한 값함수 $w^*(\cdot)$ 은 해밀턴—야꼬비—벨만—아이젝쓰방정식에 대한 다음의 경계값문제의 유일한 점성풀이(또는 최소최대풀이)이다.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial t}(t,\ x)+H\left(t,\ x,\ \dfrac{\partial w}{\partial x}(t,\ x)\right)=0,\ (t,\ x)\in[t_{00},\ \theta)\times\mathbf{R}^n\\ w(\theta,\ x)=\sigma(x),\ x\in\mathbf{R}^n\end{cases}\tag{3}$$

따라서 이 경계값문제에 대한 추상근사계산도식의 수렴성조건을 값함수 $w^*(\cdot)$ 의 계산도식의 수렴성판정조건으로 리용할수 있다.

$\Delta>0$ 을 시간구간 I 의 분할크기, $\Delta_i>0,\ i=\overline{1,\ n}$ 을 상태공간 $\mathbf{R}^n$ 의 ξ_i 축분할크기, $\Delta_\Gamma=\max\limits_{i=1,\ n}\Delta_i$ 라고 놓고 I 의 분할 $P=\{t_{00}=\tau_0<\tau_1<\cdots<\tau_N=\theta\}$, $\Delta=\tau_{i+1}-\tau_i,\ i=\overline{0,\ N-1}$ 과 $\mathbf{R}^n$ 의 직립방체살창 $\Gamma=\left\{x^\Gamma\in\mathbf{R}^n : x^\Gamma=o^\Gamma+\sum\limits_{i=1}^{n} j_i\Delta_i e_i,\ j_i=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots,\ i=\overline{1,\ n}\right\}$ 을 도입하자. 여기서 $o^\Gamma=(o_1^\Gamma,\ o_2^\Gamma,\ \cdots,\ o_n^\Gamma)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$ 은 임의로 고정된 점이다.

시공간리산화도식을 구성하고 그것의 수렴성을 밝히기 위하여 먼저 유계립쉬츠련속함수 $\varphi(\cdot):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^1$ 들우에서의 연산자

$$\varphi\mapsto G(t,\ \Delta,\ \varphi):\ G(t,\ \Delta,\ \varphi)(x)=\min_{u\in U}\ \max_{f\in\mathrm{cof}(t,\ x,\ u,\ V)}\varphi(x+\Delta f)\tag{4}$$

를 리용하여 다음의 시간리산화도식을 구성하자.

$$\begin{aligned}&w_P(\theta,\ x)=\sigma(x),\ x\in\mathbf{R}^n\\ &w_P(t,\ x)=G(t,\ \tau_{i+1}-t,\ w_P(\tau_{i+1},\ \cdot))(x),\ t\in[\tau_i,\ \tau_{i+1}),\ x\in\mathbf{R}^n,\ i=\overline{0,\ N-1}\end{aligned}\tag{5}$$

일반적으로 함수 $f(\cdot):A\to\mathbf{R}^1$ 에 대하여 표시 $\|f\|_A=\sup\limits_{x\in A}|f(x)|$ 를 사용하겠다.

$w^*(\cdot)$ 이 경계값문제 (3)의 유일한 점성풀이라는데로부터 다음의 사실이 나온다.

보조정리 1 계산도식 (4), (5)에 의하여 얻어진 함수 $w_P(\cdot)$ 과 미분경기 (1), (2)의 값함수 $w^*(\cdot)$ 사이에 $\|w_P-w^*\|_{I\times\mathbf{R}^n}\le C\sqrt{\Delta}$ 가 성립된다. 여기서 상수 C 는 $L_{\tilde\sigma}$ 과 $H(\cdot)$ 에만 의존한다.

이제 연산자 $\psi\mapsto\Pi(t,\ \Delta,\ \psi)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\Pi(t,\ \Delta,\ \psi)(x)=\min_{u\in U}\ \max_{f\in\mathrm{cof}(t,\ x,\ u,\ V)}L(\psi)(x,\ \Delta f)$$

$$L(\psi)(x,\ f)=\psi(x+[f])+\sum_{i=1}^{n}\{d_i^R\psi(x+[f])\cdot(f_i-[f]_i)^+ + d_i^L\psi(x+[f])\cdot(f_i-[f]_i)^-\}$$

여기서

$$f=(f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_n)^{\mathrm{T}},\ [f]=([f]_1,\ [f]_2,\ \cdots,\ [f]_n)^{\mathrm{T}},\ [f]_i=\Delta_i[f_i\cdot\Delta_i^{-1}+0.5]$$

$$d_i^R\psi(x)=\frac{\psi(x+\Delta_i e_i)-\psi(x)}{\Delta_i},\ d_i^L\psi(x)=\frac{\psi(x)-\psi(x-\Delta_i e_i)}{\Delta_i}$$

$$e_i = (0,\ \cdots,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0)^{\mathrm{T}},\ a^+ = \max\{a,\ 0\},\ a^- = \min\{a,\ 0\}$$

이며 기호 $[f_i \cdot \Delta_i^{-1} + 0.5]$는 $f_i \cdot \Delta_i^{-1} + 0.5$의 옹근수부를 표시한다.

분명히 $|\Delta f_i - [\Delta f]_i| \le \Delta_i / 2,\ i = \overline{1,\ n}$이다. t시각에 값함수 $x \mapsto w^*(t,\ x)$의 근사함수로서 함수 $\Pi(t,\ \Delta,\ \psi)(\cdot) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^1$을 택한다.

Π를 리용하여 살창함수 $w_{P\times\Gamma}(\cdot) : P \times \Gamma \to \mathbf{R}^1$을 다음의 계산도식에 따라 구성한다.

$$w_{P\times\Gamma}(\theta,\ x^\Gamma) = \sigma(x^\Gamma),\ w_{P\times\Gamma}(\tau_i,\ x^\Gamma) = \Pi(\tau_i,\ \Delta,\ w_{P\times\Gamma}(\tau_{i+1},\ \cdot))(x^\Gamma),\ x^\Gamma \in \Gamma,\ i = \overline{0,\ N-1}$$

우리는 살창함수 $w_{P\times\Gamma}(\cdot)$을 살창 $P \times \Gamma$에서의 $w^*(\cdot)$의 근사로 리용하려고 한다.

다음의 조건과 보조정리 1을 리용하면 다음의 사실이 나온다.

$$\max_{f \in \mathrm{cof}(I,\ R,\ U,\ V)} \sum_{i=1}^{n} \frac{|\Delta f_i - [\Delta f]_i|}{\Delta_i} \le 1 \tag{6}$$

정리 1 조건 (6)이 성립되고 어떤 상수 $k,\ h > 0$에 대하여 $\Delta_\Gamma \le k\Delta^{1+h}$라고 하자. 이때 평가식 $\| w_{P\times\Gamma} - w^* \|_{P\times\Gamma} \le kC_{\max}\Delta^h + C\sqrt{\Delta}$, $C_{\max} = \sqrt{n+1}(\theta - t_{00})L_{w_p}/2$가 성립된다.

립방체살창 $P \times \Gamma$에서 살창조종함수 $u_{P\times\Gamma}(\cdot) : P_{<N} \times \Gamma \to U$를 다음과 같이 정의하자.

$$u_{P\times\Gamma}(x^\Gamma) = \arg\min_{u \in U} \max_{f \in \mathrm{cof}(\tau_i,\ x^\Gamma,\ u,\ V)} L(w_{P\times\Gamma}(\tau_{i+1},\ \cdot))(x^\Gamma,\ \Delta f),\ (\tau_i,\ x^\Gamma) \in P \times \Gamma,\ i < N$$

여기서 $P_{<N} = \{t_{00} = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_{N-1}\}$이다.

이에 기초하여 조종함수들

$$u_i^0(\cdot) : \mathbf{R}^n \to U,\ i = \overline{0,\ N-1}:\ u_i^0(x) = u_{P\times\Gamma}(\tau_i,\ x^\Gamma),\ x^\Gamma = x^\Gamma(x) = \arg\min_{y \in \Gamma} \| y - x \|,\ x \in \mathbf{R}^n$$

과 분할 P에 대응되는 결음조종절차 $U_P^0 = \{u_i^0(\cdot)\}_{i=0}^{N-1}$을 정의한다.

초기위치 $(t_0,\ x_0) \in I \times \mathbf{R}^n\ (t_0 < \theta)$으로부터 결음조종절차 U_P^0에 따르는 계 (1)의 운동 $x_P(\cdot) : [t_0,\ \theta) \to \mathbf{R}^n$은 꼬쉬문제 $\begin{cases} \dot{x}_P(t) = f(t,\ x_P(t),\ u_i^0(x_P(\tau_i)),\ v(t)),\ t \in [\tau_i,\ \tau_{i+1}),\ i = \overline{i_0,\ N-1} \\ x_P(t_0) = x_0 \end{cases}$ 의 절대련속풀이이다. 여기서 $v(\cdot) : [t_0,\ \theta) \to V$는 둘째 경기자의 임의의 르베그가측조종이며 τ_{i_0}은 $\tau_{i_0} \le t_0 < \tau_{i_0+1}$인 시각이다.

결음조종절차 U_P^0의 최량성평가를 목적으로 몇가지 평가식들을 유도하자.

보조정리 2 조건 (6)이 성립된다고 하면 임의의 $(\tau_i,\ x^\Gamma) \in \mathrm{P} \times \Gamma,\ i < N$에 대하여 부등식 $\sup_{v(\cdot)} w_P(\tau_{i+1},\ x^\Gamma + \Delta\bar{f}) \le w_P(\tau_i,\ x^\Gamma) + \sqrt{n+1}L_{w_p}\Delta_\Gamma + 2C_{\max} \cdot \Delta_\Gamma / \Delta$가 성립된다. 여기서

$$\bar{f} = \frac{1}{\Delta} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(\tau_i,\ x^\Gamma,\ u_i^0(x^\Gamma),\ v(\tau)) d\tau$$

$\tau_i,\ \tau_{i+1} \in \Gamma,\ z \in \mathbf{R}^n$이라고 할 때 미분방정식

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t,\ x(t),\ u_i^0(z),\ v(t)),\ t \in [\tau_i,\ \tau_{i+1}) \\ x(\tau_i) = z \end{cases} \tag{7}$$

의 풀이 $x(\cdot) : [\tau_i,\ \tau_{i+1}] \to \mathbf{R}^n$에 대하여 다음의 보조정리들이 성립된다. 여기서 $v(\cdot) : [\tau_i,\ \tau_{i+1}) \to V$

는 임의의 르베그가측함수이다.

보조정리 3 조건 (6)이 성립된다고 할 때 초기조건이 $z = x^\Gamma \in \Gamma$ 인 미분방정식 (7)의 풀이 $x(\cdot)$에 대하여 다음의 평가식이 성립된다.

$$w_P(\tau_{i+1},\ x(\tau_{i+1})) \le w_P(\tau_i,\ x^\Gamma) + L_{w_P} L_{\tilde{f}} (1 + K_{\tilde{f}})\Delta^2 / 2 + \sqrt{n+1} L_{w_P} \Delta_\Gamma + 2C_{\max} \cdot \Delta_\Gamma / \Delta$$

보조정리 4 조건 (6)이 성립된다고 할 때 임의의 초기조건이 $z \in \mathbf{R}^n$ 인 미분방정식 (7)의 풀이 $x(\cdot)$에 대하여 다음의 평가식이 성립된다.

$$\sup_{\upsilon(\cdot)} w_P(\tau_{i+1},\ x(\tau_{i+1})) \le$$

$$\le w_P(\tau_i,\ z) + L_{w_{PP}} L_{\tilde{f}} (1 + K_{\tilde{f}})\Delta^2 / 2 + \sqrt{n}(1 + 2\sqrt{2} + \exp(L_{\tilde{f}}\Delta)) L_{w_P} \Delta_\Gamma / 2 + 2C_{\max} \cdot \Delta_\Gamma / \Delta$$

우의 사실들로부터 다음의 결론이 나온다.

정리 2 어떤 상수 $k,\ h > 0$에 대하여 $\Delta_\Gamma \le k\Delta^{2+h}$ 이고 조건 (6)이 성립된다고 하자.

이때 임의의 초기위치 $(t_0,\ x_0) \in I \times \mathbf{R}^n$ 과 둘째 경기자의 임의의 르베그가측조종 $\upsilon(\cdot) : [t_0,\ \theta) \to V$ 에 대하여 걸음조종절차 U_P^0 에 따르는 계 (1)의 운동 $x_P(\cdot) : [t_0,\ \theta) \to \mathbf{R}^n$ 은 평가식 $\sigma(x_P(\theta)) \le w^*(t_0,\ x_0) + \omega(\Delta)$ 를 만족시킨다. 여기서

$$\omega(\Delta) = (\theta - t_0)\{L_{w_P} L_{\tilde{f}} (1 + K_{\tilde{f}})\Delta + \sqrt{n}(1 + 2\sqrt{2} + \exp(L_f \Delta)) L_{w_P} \Delta^{1+h} + 4C_{\max}\Delta^h\} / 2 +$$

$$+ C\sqrt{\Delta} + L_{w^*}(1 + K_{\tilde{f}})\Delta \to 0 \quad (\Delta \to +0)$$

참 고 문 헌

[1] B. Z. Guo et al.; J. Glob. Optim., 46, 395, 2010.

[2] B. Z. Guo et al.; J. Syst. Sci. Complex, 30, 782, 2017.

[3] G. E. Ivanov; Differ. Equ., 48, 560, 2012.

주체109(2020)년 6월 5일 원고접수

Construction of an Optimal Strategy Based on an Improved Upwind Finite-difference Scheme in the Differential Games with Terminal Payoffs

Jong Myong Rang, Ri Kuk Hwan

In this paper, for the differential games with terminal payoffs, we present a modification of the upwind finite-difference scheme for calculating the value function and construct an optimal strategy from it.

Keywords: differential game with terminal payoff, optimal strategy