김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제4호

2차원비선형리만－류빌시간분수확산－반응방정식에 대한 예측자－수정자콤팍트수치방법

김려송, 김종철

론문에서는 시간이 지나감에 따라 달라지는 확산과정을 모형화하는 수정된 이상확산방정식에 반응항이 추가된 다음의 2차원비선형분수확산－반응방정식에 대한 계차방법을 연구하였다.

$$\begin{aligned} u_t(x,\ y,\ t) &= (A_1 D_t^{1-\alpha} + A_2 D_t^{1-\beta})[K_1 u_{xx}(x,\ y,\ t) + K_2 u_{yy}(x,\ y,\ t) + f(u,\ x,\ y,\ t)] + \\ &+ g(u,\ x,\ y,\ t)\ \ (0 < x,\ y < L,\ 0 < t \le T) \end{aligned} \tag{1}$$

초기조건과 경계조건은 다음과 같다.

$$u(x,\ y,\ 0) = \phi(x,\ y)\ \ (0 \le x,\ y \le L) \tag{2}$$

$$u(0,\ y,\ t) = \varphi_1(y,\ t),\ u(L,\ y,\ t) = \varphi_2(y,\ t)\ \ (0 \le y \le L,\ 0 \le t \le T) \tag{3}$$

$$u(x,\ 0,\ t) = \psi_1(x,\ t),\ u(x,\ L,\ t) = \psi_2(x,\ t)\ \ (0 \le x \le L,\ 0 \le t \le T) \tag{4}$$

여기서 $0 < \alpha,\ \beta < 1$이고 K_1과 K_2는 정인 상수들이고 A_1과 A_2는 $A_1 + A_2 > 0$인 부아닌 상수들이다. $A_1 = 0$이면 $\alpha \ge \beta$, $A_2 = 0$이면 $\beta \ge \alpha$라고 약속한다.

$\phi(x,\ y),\ \varphi_1(y,\ t),\ \varphi_2(y,\ t),\ \psi_1(x,\ t),\ \psi_2(x,\ t)$는 충분히 미끈한 주어진 함수들이다.

$0 < \gamma < 1\ (\gamma = \alpha,\ \beta)$에 대해 $D_t^{1-\gamma}$는 $(1-\gamma)$계리만－류빌시간분수미분연산자이다. 그리고 비선형원천항 $g(u,\ x,\ y,\ t)$는 련속인 2계편도함수 $g_{tt}(u,\ x,\ y,\ t)$를 가지며 u에 관하여 립쉬츠조건을 만족시킨다고 가정한다. 그리고 $f(u,\ x,\ y,\ t)$는

$$f(u,\ x,\ y,\ t) = -K_3 u + q(x,\ y,\ t)$$

의 형태를 취한다고 가정한다. 여기서 K_3은 부아닌 상수이고 $q(x,\ y,\ t)$는 주어진 함수이다.

선행연구[4]에서는 1차원비선형분수확산방정식에 대해 수렴차수가 $O(\tau + h^4)$인 무조건안정한 콤팍트계차도식을, 선행연구[1]에서는 그것을 확장하여 2차원비선형분수확산방정식에 대해 수렴차수가 $O(\tau + h_1^4 + h_2^4)$인 무조건안정한 선형인 콤팍트계차도식을, 선행연구[5]에서는 문제 (1)－(4)를 시간적분법과 분수제형공식을 리용하여 리산화함으로써 수렴차수가 $O(\tau^2 + h_1^4 + h_2^4)$인 콤팍트계차도식을 제기하였다. 그런데 계차도식은 많은 계산을 필요로 하는 반복법에 의해 풀려져야 하는 비선형음도식이다.

론문에서는 선행연구[5]에서의 방법을 개량하여 방정식 (1)－(4)에 대한 예측자－수정자선형콤팍트음도식을 제기하고 안정성과 수렴성을 해석하였다.

론문에서는 그물점이 $(x_n,\ y_m,\ t_k)$인 등간격그물을 리용한다. 여기서

$$u(0,\ y,\ t) = \varphi_1(y,\ t),\ u(L,\ y,\ t) = \varphi_2(y,\ t)\ \ (0 \le y \le L,\ 0 \le t \le T)$$

$$y_m = mh_2\ \ (m = 0,\ 1,\ \cdots,\ M_2),\ t_k = k\tau\ \ (k = 0,\ 1,\ \cdots,\ N)$$

이다. $M_1,\ M_2,\ N$은 정의 옹근수이고 $h_1 = L/M_1,\ h_2 = L/M_2$과 $\tau = T/N$는 공간그물간격과 시간그물간격이다. 그물점 $(x_n,\ y_m,\ t_k)$에서 정확한 풀이 u를 $u_{n,m}^k$로 표시하고 수치

방법으로 얻은 풀이를 $U_{n,m}^k$ 로 표시한다. 론문에서 C 는 위치에 따라 다른 값을 취할수 있으며 $\tau,\ h_1,\ h_2$ 에 무관계한 일반적인 정의 상수이다. $\Omega=\{(x,\ y)\,|\,0<x,\ y<L\}$ 이라고 하자. 문제 (1)－(4)의 풀이가 $u(x,\ y,\ t)\in U(\overline{\Omega}\times[0,\ T])$ 라고 가정한다. 여기서

$$U(\overline{\Omega}\times[0,\ T])=\left\{u(x,\ y,\ t)\left|\frac{\partial^6 u}{\partial x^6},\ \frac{\partial^6 u}{\partial y^6},\ \frac{\partial^5 u}{\partial x^2\partial t^3},\ \frac{\partial^5 u}{\partial y^2\partial t^3},\ \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\in C(\overline{\Omega}\times[0,\ T])\right.\right\}$$

단순하게 하기 위해 다음의 표시들을 도입한다.

$$\delta_x^2 U_{n,m}^k=\frac{U_{n-1,m}^k-2U_{n,m}^k+U_{n+1,m}^k}{h_1^2},\ L_x U_{n,m}^k=\left(1+\frac{h_1^2}{12}\delta_x^2\right)U_{n,m}^k$$

$$\delta_y^2 U_{n,m}^k=\frac{U_{n,m-1}^k-2U_{n,m}^k+U_{n,m+1}^k}{h_2^2},\ L_y U_{n,m}^k=\left(1+\frac{h_2^2}{12}\delta_y^2\right)U_{n,m}^k$$

$$q_{n,m}^k=q(x_n,\ y_m,\ t_k),\ f_{n,m}^k=f(u_{n,m}^k,\ x_n,\ y_m,\ t_k),\ F_{n,m}^k=f(U_{n,m}^k,\ x_n,\ y_m,\ t_k)$$

$$g_{n,m}^k=g(u_{n,m}^k,\ x_n,\ y_m,\ t_k),\ G_{n,m}^k=g(U_{n,m}^k,\ x_n,\ y_m,\ t_k)$$

$$a_j^{(\gamma)}=(j+1)^\gamma-\frac{1}{\gamma+1}[(j+1)^{\gamma+1}-j^{\gamma+1}],\ c_j^{(\gamma)}=\frac{1}{\gamma+1}[(j+1)^{\gamma+1}-j^{\gamma+1}]-j^\gamma$$

$$d_j^{(\gamma)}=a_{j-1}^{(\gamma)}+c_j^{(\gamma)}=\frac{1}{\gamma+1}[(j+1)^{\gamma+1}-2j^{\gamma+1}+(j-1)^{\gamma+1}],\ b_j^{(\gamma)}=(j+1)^\gamma-j^\gamma\quad(j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

여기서 $a_{-1}^{(\gamma)}=0$ 으로 약속한다. 이때 $d_0^{(\gamma)}=c_0^{(\gamma)}$ 이다. 또한

$$r_5=\frac{A_1\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)},\ r_1=K_1r_5,\ r_3=K_2r_5,\ r_7=K_3r_5$$

$$r_6=\frac{A_2\tau^\beta}{\Gamma(\beta+1)},\ r_2=K_1r_6,\ r_4=K_2r_6,\ r_8=K_3r_6$$

선행연구[5]에서와 같이 식 (1)의 량변을 시간변수 t 에 관하여 t_k 에서 t_{k+1} 까지 적분하고 L_xL_y 를 작용시키면 선행연구[2, 3]로부터

$$\begin{aligned}L_xL_yu_{n,m}^{k+1}-L_xL_yu_{n,m}^k&=c_0^{(\alpha)}(r_1L_y\delta_x^2u_{n,m}^{k+1}+r_3L_x\delta_y^2u_{n,m}^{k+1}+r_5L_xL_yf_{n,m}^{k+1})+\\&+c_0^{(\beta)}(r_2L_y\delta_x^2u_{n,m}^{k+1}+r_4L_x\delta_y^2u_{n,m}^{k+1}+r_6L_xL_yf_{n,m}^{k+1})+\\&+(a_k^{(\alpha)}-a_{k-1}^{(\alpha)})(r_1L_y\delta_x^2u_{n,m}^0+r_3L_x\delta_y^2u_{n,m}^0+r_5L_xL_yf_{n,m}^0)+\\&+(a_k^{(\beta)}-a_{k-1}^{(\beta)})(r_2L_y\delta_x^2u_{n,m}^0+r_4L_x\delta_y^2u_{n,m}^0+r_6L_xL_yf_{n,m}^0)+\\&+\sum_{j=0}^{k-1}(d_{j+1}^{(\alpha)}-d_j^{(\alpha)})(r_1L_y\delta_x^2u_{n,m}^{k-j}+r_3L_x\delta_y^2u_{n,m}^{k-j}+r_5L_xL_yf_{n,m}^{k-j})+\\&+\sum_{j=0}^{k-1}(d_{j+1}^{(\beta)}-d_j^{(\beta)})(r_2L_y\delta_x^2u_{n,m}^{k-j}+r_4L_x\delta_y^2u_{n,m}^{k-j}+r_6L_xL_yf_{n,m}^{k-j})+\\&+L_xL_y\int_{t_k}^{t_{k+1}}g(u(x_n,\ y_m,\ t),\ x_n,\ y_m,\ t)dt+R_{1,n,m}^k+R_{2,n,m}^k\end{aligned}\tag{5}$$

이 얻어진다. 이제는 식 (5)를 리용하여 문제 (1)−(4)를 풀기 위한 예측자−수정자콤팍트음도식을 유도한다. 식 (5)에서 비선형원천항 g의 적분에 직4각형구적공식

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} g(u(x_n,\ y_m,\ t),\ x_n,\ y_m,\ t)dt = \tau\, g(u(x_n,\ y_m,\ t_k),\ x_n,\ y_m,\ t_k) + R_{3,\,n,\,m}^{p,\,k}$$

를 적용하고 자름오차를 생략하면 예측자콤팍트음도식이 얻어진다.

$$\begin{aligned}
&[L_xL_y - c_0^{(\alpha)}(r_1L_y\delta_x^2 + r_3L_x\delta_y^2 - r_7L_xL_y) - c_0^{(\beta)}(r_2L_y\delta_x^2 + r_4L_x\delta_y^2 - r_8L_xL_y)]U_{n,\,m}^{p,\,k+1} = \\
&\quad = L_xL_yU_{n,m}^k + c_0^{(\alpha)}r_5L_xL_yq_{n,m}^{k+1} + c_0^{(\beta)}r_6L_xL_yq_{n,m}^{k+1} + \\
&\quad + (a_k^{(\alpha)} - a_{k-1}^{(\alpha)})(r_1L_y\delta_x^2U_{n,\,m}^0 + r_3L_x\delta_y^2U_{n,\,m}^0 - r_7L_xL_yU_{n,\,m}^0 + r_5L_xL_yq_{n,\,m}^0) + \\
&\quad + (a_k^{(\beta)} - a_{k-1}^{(\beta)})(r_2L_y\delta_x^2U_{n,\,m}^0 + r_4L_x\delta_y^2U_{n,\,m}^0 - r_8L_xL_yU_{n,\,m}^0 + r_6L_xL_yq_{n,\,m}^0) + \\
&\quad + \sum_{j=0}^{k-1}(d_{j+1}^{(\alpha)} - d_j^{(\alpha)})(r_1L_y\delta_x^2U_{n,\,m}^{k-j} + r_3L_x\delta_y^2U_{n,\,m}^{k-j} - r_7L_xL_yU_{n,\,m}^{k-j} + r_5L_xL_yq_{n,\,m}^{k-j}) + \\
&\quad + \sum_{j=0}^{k-1}(d_{j+1}^{(\beta)} - d_j^{(\beta)})(r_2L_y\delta_x^2U_{n,\,m}^{k-j} + r_4L_x\delta_y^2U_{n,\,m}^{k-j} - r_8L_xL_yU_{n,\,m}^{k-j} + r_6L_xL_yq_{n,\,m}^{k-j}) + \\
&\quad + \tau L_xL_yG_{n,\,m}^k \quad (n=1,\ \cdots,\ M_1-1;\ m=1,\ \cdots,\ M_2-1;\ k=0,\ \cdots,\ N-1) \\
&U_{n,\,m}^0 = \phi(nh_1,\ mh_2)\ \ (n=0,\ \cdots,\ M_1;\ m=0,\ \cdots,\ M_2) \\
&U_{0,\,m}^{p,\,k+1} = \varphi_1(mh_2,\ (k+1)\tau),\ U_{M_1,m}^{p,k+1} = \varphi_2(mh_2,\ (k+1)\tau)\ \ (m=0,\ \cdots,\ M_2;\ k=0,\ \cdots,\ N-1) \\
&U_{n,\,0}^{p,\,k+1} = \psi_1(nh_1,\ (k+1)\tau),\ U_{n,M_2}^{p,k+1} = \psi_2(nh_1,\ (k+1)\tau)\ \ (n=0,\ \cdots,\ M_1;\ k=0,\ \cdots,\ N-1)
\end{aligned} \tag{6}$$

이때 자름오차는

$$R_{n,\,m}^{1,\,k} = R_{1,\,n,\,m}^k + R_{2,\,n,\,m}^k + R_{3,\,n,\,m}^{p,\,k}$$

이고

$$|\,R_{n,\,m}^{1,\,k}\,| \le C\tau(\tau + \tau^2 + h_1^4 + h_2^4)$$

이 성립한다. 다음으로 식 (5)에서 g의 적분을 근사시키기 위해 제형구적공식

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} g(u(x_n,\ y_m,\ t),\ x_n,\ y_m,\ t)dt =$$

$$= \frac{\tau}{2}[g(u(x_n,\ y_m,\ t_k),\ x_n,\ y_m,\ t_k) + g(u(x_n,\ y_m,\ t_{k+1}),\ x_n,\ y_m,\ t_{k+1})] + R_{3,\,n,\,m}^{c,\,k}$$

를 적용한다. $g_{n,\,m}^{k+1}$ 대신에

$$G_{n,\,m}^{p,\,k+1} = g(U_{n,\,m}^{p,\,k+1},\ x_n,\ y_m,\ t_{k+1})$$

을 리용하고 초기조건 (2)와 경계조건 (3), (4)를 고려하면 수정자콤팍트음도식이 얻어진다.

$$\begin{aligned}
&[L_xL_y - c_0^{(\alpha)}(r_1L_y\delta_x^2 + r_3L_x\delta_y^2 - r_7L_xL_y) - c_0^{(\beta)}(r_2L_y\delta_x^2 + r_4L_x\delta_y^2 - r_8L_xL_y)]U_{n,\,m}^{k+1} = \\
&\quad = L_xL_yU_{n,\,m}^k + c_0^{(\alpha)}r_5L_xL_yq_{n,\,m}^{k+1} + c_0^{(\beta)}r_6L_xL_yq_{n,\,m}^{k+1} + \\
&\quad + (a_k^{(\alpha)} - a_{k-1}^{(\alpha)})(r_1L_y\delta_x^2U_{n,\,m}^0 + r_3L_x\delta_y^2U_{n,\,m}^0 - r_7L_xL_yU_{n,\,m}^0 + r_5L_xL_yq_{n,\,m}^0) +
\end{aligned}$$

$$+(a_k^{(\beta)}-a_{k-1}^{(\beta)})(r_2L_y\delta_x^2U_{n,m}^0+r_4L_x\delta_y^2U_{n,m}^0-r_8L_xL_yU_{n,m}^0+r_6L_xL_yq_{n,m}^0)+$$

$$+\sum_{j=0}^{k-1}(d_{j+1}^{(\alpha)}-d_j^{(\alpha)})(r_1L_y\delta_x^2U_{n,m}^{k-j}+r_3L_x\delta_y^2U_{n,m}^{k-j}-r_7L_xL_yU_{n,m}^{k-j}+r_5L_xL_yq_{n,m}^{k-j})+$$

$$+\sum_{j=0}^{k-1}(d_{j+1}^{(\beta)}-d_j^{(\beta)})(r_2L_y\delta_x^2U_{n,m}^{k-j}+r_4L_x\delta_y^2U_{n,m}^{k-j}-r_8L_xL_yU_{n,m}^{k-j}+r_6L_xL_yq_{n,m}^{k-j})+$$

$$+\frac{\tau}{2}L_xL_y(G_{n,m}^k+G_{n,m}^{p,k+1})$$

$$(n=1,\ \cdots,\ M_1-1;\ m=1,\ \cdots,\ M_2-1;\ k=0,\ \cdots,\ N-1)$$

$$U_{n,m}^0=\phi(x_n,\ y_m),\ U_{0,m}^{k+1}=\varphi_1(y_m,\ (k+1)\tau),\ U_{M_1,m}^{k+1}=\varphi_2(y_m,\ (k+1)\tau)$$

$$U_{n,0}^{k+1}=\psi_1(x_n,\ (k+1)\tau),\ U_{n,M_2}^{k+1}=\psi_2(x_n,\ (k+1)\tau)$$

$$(n=0,\ \cdots,\ M_1;\ m=0,\ \cdots,\ M_2;\ k=0,\ \cdots,\ N-1) \tag{7}$$

이때 자름오차는 $R_{n,m}^{2,k}=R_{1,n,m}^k+R_{2,n,m}^k+R_{3,n,m}^{c,k}$ 이고 $|R_{n,m}^{2,k}|\le C\tau(\tau^2+h_1^4+h_2^4)$ 이다.

정리 1 예측자－수정자콤팍트읍도식 (6), (7)은 유일한 풀이를 가진다.

정리 2 $0<\alpha,\ \beta\le\log_2 3-1$ 일 때 예측자－수정자콤팍트읍도식 (6), (7)은 초기자료에 대하여 무조건안정하다.

정리 3 $0<\alpha,\ \beta\le\log_2 3-1$ 이라고 할 때 예측자－수정자콤팍트읍도식 (6), (7)은 수렴하며 수렴차수는 $O(\tau^2+h_x^4+h_y^4)$ 이다.

참 고 문 헌

[1] M. Abbaszadeh et al.; Appl. Math., 66, 1345, 2013.

[2] M. R. Cui; J. Comput. Phys., 228, 20, 7792, 2009.

[3] M. R. Cui; Numer. Algorithms, 62, 3, 38, 2013.

[4] A. Mohebbi et al.; J. Comput. Phys., 240, 36, 2013.

[5] B. Yu et al.; Numer. Algorithms, 68, 923, 2015.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

Predictor-Corrector Compact Numerical Method for Two Dimensional Nonlinear Riemann-Liouville Time Fractional Diffusion-Reaction Equation

Kim Ryo Song, Kim Jong Chol

In this paper, we propose a predictor-corrector linear compact implicit scheme for two dimensional Riemann-Liouville time fractional diffusion-reaction equation with a nonlinear source term, and prove the unconditional stability and convergence of this scheme by the Fourier method.

Key words: Fourier method, modified anomalous diffusion equation