

QR법의 구조수직방향변위함수를 직교삼각함수로 가정하는 한가지 방법

김 명 성

선행연구[2]에서는 계를 이루고있는 점들의 변위를 계의 자유도보다 개수가 작은 가상적인 미지변위량들의 합렬형태로 보간하고 이 가상미지변위량들에 관한 역세기방정식 $[K]_{QR}\{\delta\} = \{F\}_{QR}$ 를 구성하여 푸는 QR법의 기본원리를 내놓았으나 구조의 높이방향변위함수를 합리적으로 가정하지 못하였으며 이 함수를 가정하기 위한 방법론을 내놓지 못하였다.

평면구조에서 임의의 점 $A(x, y)$ 에서의 변위함수를 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{cases} u(x, y) = \sum_{m=1}^r \{\phi\} X_m(y) \{u\}_m \\ v(x, y) = \sum_{m=1}^r \{\phi\} Y_m(y) \{v\}_m \\ \theta(x, y) = \sum_{m=1}^r \{\phi\} Z_m(y) \{\theta\}_m \end{cases} \quad (1)$$

이 식에서 $\{\phi\} = \{\phi_0 \ \phi_1 \ \dots \ \phi_N\}$ 은 스플라인토대함수벡토르이다.[2]

식 (1)은 라멘구조에 대한 변위보간식으로서 벽체구조에서는 θ 에 대한 변위보간식이 생략된다.

QR법을 실지계산에 응용할 때에는 식 (1)의 y 자리표에 따르는 함수 $X_m(y)$, $Y_m(y)$, $Z_m(y)$ 를 옳바로 가정해야 한다.

선행연구[2]에서는 벽체구조에 적용할수 있는 함수 $X_m(y)$, $Y_m(y)$ 를 가정하였으나 θ 에 대한 변위보간함수 $Z_m(y)$ 를 가정하지 못하고있는것으로 하여 라멘구조와 라멘-벽구조분석을 할수 없다. 이로부터 라멘구조에 해당한 함수 $X_m(y)$, $Y_m(y)$, $Z_m(y)$ 를 새롭게 가정하여야 하는데 이 함수들을 가정하기 위한 방법론은 아직 미해명문제로 되어있다.

론문에서는 함수 $X_m(y)$, $Y_m(y)$, $Z_m(y)$ 를 가정하기 위한 방법론을 논의하고 이에 따라 함수 $X_m(y)$, $Y_m(y)$, $Z_m(y)$ 를 직교삼각함수로 결정하였다.

1. 함수 $X_m(y)$, $Y_m(y)$, $Z_m(y)$ 를 직교삼각함수로 가정하는 근거

함수 $X_m(y)$, $Y_m(y)$, $Z_m(y)$ 를 가정하기 위한 방법론은 QR법의 전체 역세기방정식 $[K]_{QR}\{\delta\} = \{F\}_{QR}$ 에서 전체 역세기행렬 $[K]_{QR}$ 가 불퇴화행렬이며 스플라인마디점에 환산한 집중점벡토르 $\{F\}_{QR}$ 에 미지수가 없어야 한다는 이론적근거로부터 출발하였다. 여기서 $\{\delta\} = \{\delta_1 \ \delta_2 \ \dots \ \delta_r\}^T$, $\delta_m = \{u_m \ v_m \ \theta_m\}^T$ 는 미지변위벡토르이다.[2]

QR법에서는 기본 구하여야 할 미지량이 바로 미지변위벡토르 $\{\delta\}$ 로서 $\{F\}_{QR}$ 에 미지

량이 없어야 전체 역세기방정식 $[K]_{QR}\{\delta\} = \{F\}_{QR}$ 의 1차독립성이 보장되어 방정식을 풀수 있게 된다.

정리 1 n 차대칭행렬 $A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 을 $n-1$ 번의 기본변환을 실시하여

3각형행렬 $B_n = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$ 을 만들수 있는 경우는

$$\begin{cases} b_{11} = a_{11} = |A_1| \\ b_{ii} = \frac{|A_i|}{|A_{i-1}|}, |A_i| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix}, i = \overline{2, n} \text{ (조건 1)} \\ |A_i| \neq 0, i = \overline{1, n} \end{cases}$$

일 때이며 조건 1은 곧 행렬 $[A]_n$ 이 불퇴화행렬이라는 의미를 포함하고있다.[1]

정리 2 $\{F\}_{QR}$ 에 미지수가 없기 위해서는 $X_m(0) = Y_m(0) = Z_m(0) = 0$, $m = \overline{1, r}$ (조건 2)이어야 하며 $|[K]_{QR}| \neq 0$ 이기 위해서는 $[K]_{QR}$ 가 조건 1을 만족시켜야 한다.

여기서 조건 2에 대하여 구체적으로 보면 다음과 같다.

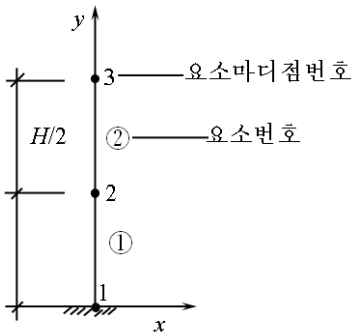


그림 1. 돌출탑구조

유한요소법과 QR법해석에서는 짐조건으로서 속박되지 않은 유한요소마디점들에 작용하는 집중짐들이 주어지며 속박된 마디점들에서의 반력은 구조해석에서 구하여야 할 미지량이다. 그런데 QR법의 전체 역세기방정식에서 외력벡터 $\{F\}_{QR}$ 를 구하는 식에는 모든 유한요소마디점에 작용하는 외력(속박된 마디점들에서의 반력도 포함됨)이 다같이 환산된다. 또한 고층건축구조의 지지조건은 y 자리표값이 0인 점들이 고정지지된 도식이므로 합수 $X_m(y)$, $Y_m(y)$, $Z_m(y)$ 가 조건 2를 만족시키면 속박된 유한요소마디점들에서의 미지반력성분이 $\{F\}_{QR}$ 를 구하는데

영향을 주지 않으며 따라서 $\{F\}_{QR}$ 에는 미지량이 없게 된다.

고층라멘구조의 일반성을 잃지 않고 3개의 마디점과 2개의 요소로 이루어진 그림 1의 돌출탑구조를 놓고 정리 2를 논의하자.

식 (1)에서 합렬첨수 $r=2$, $X_m(y) = Y_m(y) = Z_m(y) = 0$, $m = \overline{1, r}$ 라고 가정하자.

유한요소법의 전체 역세기행렬이 $[K] = \begin{bmatrix} [K]_{11} & [K]_{12} & [K]_{13} \\ [K]_{21} & [K]_{22} & [K]_{23} \\ [K]_{31} & [K]_{32} & [K]_{33} \end{bmatrix}$ 이라면 QR법의 전체 역

세기행렬은 다음과 같다.

$$[K]_{QR} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (2)$$

식 (2)에서

$$\begin{cases} A = X_1(y_2)[K]_{22}X_1(y_2) + X_1(y_2)[K]_{23}X_1(y_3) + X_1(y_3)[K]_{32}X_1(y_2) + X_1(y_3)[K]_{33}X_1(y_3) \\ B = X_1(y_2)[K]_{22}X_2(y_2) + X_1(y_2)[K]_{23}X_2(y_3) + X_1(y_3)[K]_{32}X_2(y_2) + X_1(y_3)[K]_{33}X_2(y_3) \\ C = X_2(y_2)[K]_{22}X_1(y_2) + X_2(y_2)[K]_{23}X_1(y_3) + X_2(y_3)[K]_{32}X_1(y_2) + X_2(y_3)[K]_{33}X_1(y_3) \\ D = X_2(y_2)[K]_{22}X_2(y_2) + X_2(y_2)[K]_{23}X_2(y_3) + X_2(y_3)[K]_{32}X_2(y_2) + X_2(y_3)[K]_{33}X_2(y_3) \end{cases} \quad (3)$$

문제고찰을 간단히 하기 위하여 그림 2의 기하학적조건과 력학적특성값들을 단위값으로 취하면 다음과 같다.

$$[K]_{22} = \begin{bmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, [K]_{23} = \begin{bmatrix} -12 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & 2 \end{bmatrix}, [K]_{32} = \begin{bmatrix} -12 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}, [K]_{33} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (4)$$

식 (4)를 식 (3)에 넣고

$$\begin{cases} |A| \neq 0 \\ |K_{QR}| = |A| \cdot |D| - |B| \cdot |C| \neq 0 \end{cases}$$

을 만족시키기 위한 충분조건을 유도하면 다음과 같다.

$$\begin{cases} a(2a-b) > 0 \\ 2ac-ad-bc+bd = 0 \\ c(2c-d) > 0 \end{cases} \quad (5)$$

식 (5)에서 $a = X_1(y_2)$, $b = X_1(y_3)$, $c = X_2(y_2)$, $d = X_2(y_3)$ 이다.

함수 $X_1(y)$ 는 구간 $[0, H]$ 에서 함수값의 부호가 달라지지 않는 비교적 단순한 단조 함수라고 보면 a 와 b 의 부호는 같으며 식 (1)의 구성특징으로부터 a 와 b 의 부호가 《+》인가, 《-》인가는 의의가 없다.

그러므로 a 와 b 의 부호를 《+》라고 하자. $X_1(y)$ 그러면 $y_2 = H/2$, $y_3 = H$ 이므로 식 (5)의 첫 식으로부터 함수 $X_1(y)$ 의 그래프적특성을 밝히면 그림 2와 같다. 함수 $X_1(y)$ 의 그래프적특성은 $X_1\left(\frac{H}{2}\right) > \frac{1}{2} \cdot X_1(H)$ 이며 이것은 $|A| \neq 0$ 이기 위한 충분조건으로 된다.

또한 함수 $y = \sin x$ 는 구간 $y \in [0, \pi/2]$ 에서 그림 2와 같은 모양을 가지며 이로부터

함수 $X_1(y) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{y}{H}\right)$ 로 가정할 착상을 하게 되었다.

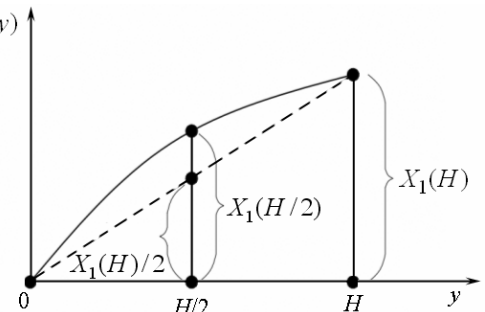


그림 2. 함수 $X_1(y)$ 의 그래프적특성

$$\begin{aligned} \text{함수 } X_1(y) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{y}{H}\right) \text{ 이면} \\ \begin{cases} a = X_1\left(\frac{H}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{(H/2)}{H}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ b = X_1(H) = \sin\left(\frac{H}{2}\right) = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

이다. 식 (6)을 식 (5)의 두번째 식에 넣으면

$$\sqrt{2}c - \frac{d}{\sqrt{2}} - c + d = 0 \quad (7)$$

이다. 식 (7)로부터 $c = -\frac{1}{\sqrt{2}}d$ 즉

$$X_2\left(\frac{H}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}X_2(H) \quad (8)$$

함수 $X_2(y)$ 를 $X_1(y)$ 모양의 함수로 정한다면

$$X_2(y) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} \cdot \frac{y}{H}\right) \quad (9)$$

이며 이때 식 (8)을 만족시킨다. 또한 식 (9)는 식 (5)의 세번째 식도 만족시킨다.

그러므로 함수 $X_1(y)$, $X_2(y)$ 는 정리 2의 조건 2)도 만족하며 결국 정리 2는 만족된다.

그런데 함수 $X_1(y)$ 와 $X_2(y)$ 의 특징은 구간 $[0, H]$ 에서 직교삼각함수로 된다는 것이다. 즉

$$\begin{cases} \int_0^H X_1(y)X_1(y)dy = \lambda_1 > 0 \\ \int_0^H X_2(y)X_2(y)dy = \lambda_2 > 0 \\ \int_0^H X_1(y)X_2(y)dy = 0 \end{cases} \quad (10)$$

직교삼각함수에 대해서는 푸리에합렬리론에서 볼수 있으며 QR법의 변위함수식 (1)이 합렬형태로 되어있으므로 만일 이 변위보간식이 푸리에합렬모양이라면 함수 $X_m(y)$, $Y_m(y)$, $Z_m(y)$ 를 직교삼각함수들로 구성할수 있으며 이 함수를 가정하기 위한 근거로 되었다.[1]

2. 직교삼각함수에 의한 QR법의 변위함수식 결정

함수 $X_m(y)$, $Y_m(y)$, $Z_m(y)$ 를 구간 $[0, H]$ 에서의 직교삼각함수들로 가정하여 QR법의 변위함수식을 결정하면 다음과 같다.

2차원평면고층구조에서

$$\begin{cases} u(x, y) = \sum_{m=1}^r \{\phi\} X_m(y) \{u\}_m \\ v(x, y) = \sum_{m=1}^r \{\phi\} Y_m(y) \{v\}_m \\ \theta(x, y) = \sum_{m=1}^r \{\phi\} Z_m(y) \{\theta\}_m \end{cases} \quad (11)$$

3차원 공간고층구조에서

$$\begin{cases} u(x, z, y) = \sum_{m=1}^r \{\phi\}_x \{\phi\}_z X_m(y) \{u\}_m \\ v(x, z, y) = \sum_{m=1}^r \{\phi\}_x \{\phi\}_z X_m(y) \{v\}_m \\ w(x, z, y) = \sum_{m=1}^r \{\phi\}_x \{\phi\}_z X_m(y) \{w\}_m \\ \theta_x(x, z, y) = \sum_{m=1}^r \{\phi\}_x \{\phi\}_z X_m(y) \{\theta_x\}_m \\ \theta_z(x, z, y) = \sum_{m=1}^r \{\phi\}_x \{\phi\}_z X_m(y) \{\theta_z\}_m \\ \theta_y(x, z, y) = \sum_{m=1}^r \{\phi\}_x \{\phi\}_z X_m(y) \{\theta_y\}_m \end{cases} \quad (12)$$

식 (11)과 (12)에서 함수 $X_m(y)$, $Y_m(y)$, $Z_m(y)$ 를 제외한 다른 부분들은 선행연구[2]에서 논의되었으므로 여기서는 함수 $X_m(y)$, $Y_m(y)$, $Z_m(y)$ 에 대해서만 취급하였다.

$$X_m(y) = Y_m(y) = Z_m(y) = \sin\left(\frac{k_m}{H} y\right), \quad k_m = \frac{2m-1}{2} \pi, \quad m = \overline{1, r} \quad (13)$$

맺 는 말

QR법은 컴퓨터자동해석에서 아직 해결해야 할 문제들이 많지만 해석원리가 우월하고 프로그램을 작성할수 있는 가능성이 있다는것을 보여주었다.

참 고 문 헌

- [1] 최희철 등; 고등수학 2, 김일성종합대학출판사, 42~47, 주체103(2014).
- [2] 秦荣; 超限高层结构分析的新方法-QR法, 科学出版社, 9~187, 2001.

주체109(2020)년 3월 15일 원고접수

A Method to Postulate Orthogonal Triangle Function for the Vertical Direction-Displacement Function of the Structure in the QR-Method

Kim Myong Song

We described a method to postulate orthogonal triangle function for the vertical direction-displacement function of the structure in the QR-method which is promoted from DFEM.

Keywords: orthogonal triangle function, vertical direction displacement function