김일성종합대학학보 (수학) 주체107(2018)년 제64권 제1호

사전실시하강기대선택권의 한가지 형태의 모형에 대한 2분나무법가격의 시간변수에 관한 단조성

조정준, 홍강평

선행연구[2−7]에서는 주로 리자률, 기초자산의 배당률과 파동률 등 중요결수들이 상수인 경우에 비약확산모형에서 사전실시하강기대선택권의 2분나무법과 양적계차도식사이의 동등성을 밝히고 양적계차도식의 수렴성, 최량실시경계의 존재성과 단조성문제를 연구하였다.

론문에서는 시간의존결수를 가지는 사전실시하강기대선택권가격의 비약확산모형에 대한 2분나무법가격공식을 주고 그 가격의 시간변수에 관한 단조성문제를 연구하였다.

1. 시간의존결수를 가지는 경우 선택권가격의 비약확산모형에서의 2분나무법에 의한 가격공식

$r(t)$가 리자률, $q(t)$가 기초자산의 배당률, $\sigma(t)$가 기초자산가격의 파동률이라고 하자.

선택권의 생존구간 $[0,\ T]$를 N개의 구간 $0=t_0<t_1<t_2\cdots<t_N=T$로 분할하자.

그리고

$$r_n=r(t_n),\ q_n=q(t_n),\ \sigma_n=\sigma(t_n),\ \eta_n=1+q_n\Delta t_n,\ \rho_n=1+r_n\Delta t_n$$
$$(\Delta t_n=t_{n+1}-t_n,\quad n=0,\ 1,\ \cdots,\ N-1)$$

으로 표시한다. 시간분할구간의 길이 Δt_n은 다음과 같이 정의한다.

$u>1$이라고 하자.

먼저 $t_0=0$, $\sigma_0=\sigma(t_0)$, $\Delta t_0=(\ln u)^2/\sigma_0^2$, $t_1=t_0+\Delta t_0=(\ln u)^2/\sigma_0^2$으로 정의한다.

$t_1\le T$이면 $\sigma_1=\sigma(t_1)$, $\Delta t_1=(\ln u)^2/\sigma_1^2$, $t_2=t_1+\Delta t_1=(\ln u)^2\cdot(1/\sigma_0^2+1/\sigma_1^2)$으로 정의한다.

귀납적으로 $t_n\le T$이면 다음과 같이 정의한다.

$$\sigma_n=\sigma(t_n),\ \Delta t_n=(\ln u)^2/\sigma_n^2,\ t_{n+1}=t_n+\Delta t_n=(\ln u)^2\cdot(1/\sigma_0^2+\cdots+1/\sigma_n^2)$$

이 과정을 $t_N\le T<t_{N+1}$일 때까지 계속한다.

$0<\underline{\sigma}\le\sigma(t)\le\overline{\sigma}$와 같이 가정하면 시간분할간격 Δt_n의 크기와 분할점개수의 아래우평가를 다음과 같이 얻는다.

$$(\ln u)^2/\overline{\sigma}^2\le\Delta t_n\le(\ln u)^2/\underline{\sigma}^2,\ T\underline{\sigma}^2/(\ln u)^2-1<N\le T\overline{\sigma}^2/(\ln u)^2$$

주의 $u\downarrow 1$이면 $N\to+\infty$ 및 $0\le T-t_N<\Delta t_N=(\ln u)^2/\sigma_N^2\to 0$이다.

이제 기초자산가격 S의 동태를 고찰하자.

부분구간 $[t_n,\ t_{n+1}]$에서 S의 변화폭이 u, $d=u^{-1}$이고 부분구간 $[t_n,\ t_{n+1}]$에서 S의 동태가 한주기−두상태모형을 만족시킨다고 가정하자. 즉 t_n 시각의 기초자산가격 S_{t_n}은

t_{n+1}시각 $S_{t_n}u$ 또는 $S_{t_n}d$로 변한다고 하자.

기초자산의 초기가격이 S_0이라고 하면 S_{t_n}은 다음의 값들중의 하나를 취한다.

$$S_\alpha^n = S_0 u^{n-\alpha} d^\alpha \ (0 \le \alpha \le n) \ \text{또는} \ S_j = S_0 u^j \ (j = n,\ n-2,\ \cdots,\ -n+2,\ -n)$$

다음 비약확산모형에 대하여 고찰하자.

B_t는 방정식 $dB_t = rB_t$에 따르는 무위험자산이고 S_t는 기초자산가격이라고 하자.

S_t는 확률미분방정식

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t + d\left(\sum_{j=1}^{N_t} U_j\right)$$

를 만족시킨다. 여기서 $(W_t)_{t\ge0}$은 표준브라운운동이고 $(N_t)_{t\ge0}$은 세기 $\lambda(t)$를 가지는 뽜쏭과정이며 $(U_j)_{j\ge1}$은 두제곱적분가능하고 독립이며 $(-1,\ \infty)$에서 값을 취하는 동일분포우연량렬이다. $\lambda(t)$와 U_j는 각각 비약들의 상대적크기와 빈도수를 의미한다. $N(y)$는 U_1의 분포함수이며 $k = E(U_1)$이다.

보조정리 1 $\lambda_n = \lambda(t_n)$, $d\eta_n < \rho_n < u\eta_n$, $n = 0, 1, \cdots, N$, $d < k+1 < u$라고 하자. 이때

$$\theta_n = \frac{[\rho_n / \eta_n - \lambda_n \Delta t_n (k+1)]/(1-\lambda_n \Delta t_n) - d}{u-d}$$

로 놓으면 Δt_n이 충분히 작을 때 $0 < \theta_n < 1$이다.

시간의존결수를 가지는 비약확산모형에 대하여 사전실시하강기대선택권에 대한 2분나무법가격의 거꿀귀납과정은 다음과 같다.

$n = N$일 때 $V_\alpha^N = (E - S_\alpha^N)^+ \ (0 \le \alpha \le N)$이다.

$V_\alpha^{N-h}(0 \le \alpha \le N-h)$가 주어지면 다음의 식이 성립된다.

$$V_\alpha^{N-h-1} = \max\left[\frac{1}{\rho_{N-h-1}}\left[(1-\lambda_{N-h-1}\Delta t_{N-h-1})(\theta_{N-h-1}V_{\alpha+1}^{N-h} + (1-\theta_{N-h-1})V_{\alpha-1}^{N-h}) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \lambda_{N-h-1}\Delta t_{N-h-1}\sum_{l\in Z} V_{\alpha+l}^{N-h}\hat{p}_l\right],\ \ (E - S_\alpha^{N-h-1})^+\right]$$

여기서

$$\hat{p}_l = \mathrm{Prob}(\ln(1+U_1)) \in [(l-1/2)\sigma_{N-h-1}\sqrt{\Delta t_{N-h-1}},\quad (l+1/2)\sigma_{N-h-1}\sqrt{\Delta t_{N-h-1}}] =$$
$$= N(e^{(l+1/2)}\sigma_{N-h-1}\sqrt{\Delta t_{N-h-1}} - 1) - N(e^{(l-1/2)}\sigma_{N-h-1}\sqrt{\Delta t_{N-h-1}} - 1)$$

$$S_j = S_0 u^j \ (n = 0, \cdots, N;\ j = n,\ n-2,\ \cdots,\ -n+2, -n),\ \ \varphi_j = (E - S_j)^+$$

로 놓자.

이때 사전실시하강기대선택권의 비약확산모형에 대한 2분나무법가격 $V_j^n = V(S_j,\ t_n)$은 다음과 같이 주어진다.

$$V_j^N = \varphi_j\,,\ \ V_j^n = \max\left\{\frac{1}{\rho_n}\left[(1-\lambda_n\Delta t_n)(\theta_n V_{j+1}^{n+1} + (1-\theta_n)V_{j-1}^{n+1}) + \lambda_n \Delta t_n \sum_{l\in Z} V_{j+l}^{n+1}\hat{p}_l\right],\ \ \varphi_j\right\}$$

2. 시간의존결수를 가지는 사전실시하강기대선택권의 비약확산모형에 대한 2분나무법가격의 시간변수에 관한 단조성

정리 1 보조정리 1의 가정하에서

$$V_j^n \ (n=0,\ 1,\ \cdots,\ N;\ j=n,\ n-2,\ \cdots,\ -n+2,\ -n)$$

이 사전실시선택권의 가격이라고 하자. 이때 하강기대이면

$$V_j^n \ge V_{j+1}^n$$

이 성립된다.

보조정리 2[1]

① $\dfrac{r(t)}{\sigma^2(t)}$ 가 단조증가이면 $\rho_{n+1} \ge \rho_n$

② $\dfrac{q(t)}{\sigma^2(t)}$ 가 단조감소이면 $\eta_{n+1} \le \eta_n$

③ $\dfrac{r(t)}{\sigma^2(t)}$ 가 단조증가, $\dfrac{q(t)}{\sigma^2(t)}$ 가 단조감소이면 $\dfrac{\rho_n}{\eta_n} \le \dfrac{\rho_{n+1}}{\eta_{n+1}}$

이 성립된다.

보조정리 3 다음의 두 가정이 성립된다고 하자.

① $d\eta_n < \rho_n < u\eta_n$, $\rho_n < (k+1)\eta_n < u\eta_n$

② $\dfrac{r(t)}{\sigma^2(t)}$ 가 단조증가, $\dfrac{q(t)}{\sigma^2(t)}$ 가 단조감소, $\dfrac{\lambda(t)}{\sigma^2(t)}$ 가 단조감소

이때 Δt_n 이 충분히 작으면 $\theta_n \le \theta_{n+1}$ 이 성립된다.

증명 Δt_n 이

$$\Delta t_n < \min\left\{\frac{\rho_n/\eta_n - d}{\lambda_n((k+1)-d)},\ \frac{u-\rho_n/\eta_n}{\lambda_n(u-(k+1))}\right\}$$

이라고 하자. 이때

$$\theta_{n+1}-\theta_n =$$

$$= \frac{[\rho_{n+1}/\eta_{n+1} - \lambda_{n+1}\Delta t_{n+1}(k+1)]/(1-\lambda_{n+1}\Delta t_{n+1}) - d}{u-d} - \frac{[\rho_n/\eta_n - \lambda_n\Delta t_n(k+1)]/(1-\lambda_n\Delta t_n) - d}{u-d} =$$

$$= \frac{[\rho_{n+1}/\eta_{n+1} - \lambda_{n+1}\Delta t_{n+1}(k+1)]/(1-\lambda_{n+1}\Delta t_{n+1}) - [\rho_n/\eta_n - \lambda_n\Delta t_n(k+1)]/(1-\lambda_n\Delta t_n)}{u-d}$$

이다. 여기서 분자는

$$[\rho_{n+1}/\eta_{n+1} - \lambda_{n+1}\Delta t_{n+1}(k+1) - (\rho_{n+1}/\eta_{n+1})\lambda_n\Delta t_n - \rho_n/\eta_n + \lambda_n\Delta t_n(k+1) +$$
$$+ (\rho_n/\eta_n)\lambda_{n+1}\Delta t_{n+1}]/(1-\lambda_{n+1}\Delta t_{n+1})(1-\lambda_n\Delta t_n) =$$

$$= \frac{(\rho_{n+1}/\eta_{n+1} - \rho_n/\eta_n) + \lambda_n\Delta t_n((k+1) - \rho_{n+1}/\eta_{n+1}) + \lambda_{n+1}\Delta t_{n+1}(\rho_n/\eta_n - (k+1))}{(1-\lambda_{n+1}\Delta t_{n+1})(1-\lambda_n\Delta t_n)} \ge$$

$$\ge \frac{(\rho_{n+1}/\eta_{n+1} - \rho_n/\eta_n) + \lambda_n\Delta t_n((k+1) - \rho_{n+1}/\eta_{n+1}) + \lambda_n\Delta t_n(\rho_n/\eta_n - (k+1))}{(1-\lambda_{n+1}\Delta t_{n+1})(1-\lambda_n\Delta t_n)} =$$

$$=\frac{(\rho_{n+1}/\eta_{n+1}-\rho_n/\eta_n)+\lambda_n\Delta t_n(\rho_n/\eta_n-\rho_{n+1}/\eta_{n+1})}{(1-\lambda_{n+1}\Delta t_{n+1})(1-\lambda_n\Delta t_n)}=$$

$$=\frac{(\rho_{n+1}/\eta_{n+1}-\rho_n/\eta_n)(1-\lambda_n\Delta t_n)}{(1-\lambda_{n+1}\Delta t_{n+1})(1-\lambda_n\Delta t_n)}=$$

$$=\frac{(\rho_{n+1}/\eta_{n+1}-\rho_n/\eta_n)}{(1-\lambda_{n+1}\Delta t_{n+1})}\ge 0 \quad (1-\lambda_{n+1}\Delta t_{n+1}\ge 0)$$

이다.(증명끝)

보조정리 4[1](불룩1차결합의 성질) $A\le B$이고 $0\le\alpha\le\beta$이면

$$\alpha A+(1-\alpha)B\ge\beta A+(1-\beta)B$$

가 성립된다.

끝으로 시간변수에 관한 단조성에 대하여 고찰하자.

정리 2 사전실시하강기대선택권의 가격이

$$V_j^n\ (n=0,\ 1,\ \cdots,\ N;\ j=n,\ n-2,\ \cdots,\ -n+2,-n)$$

이고 보조정리 3의 가정이 성립되며 $(1-\lambda_k\Delta t_k)/\rho_k$가 단조감소한다고 하자. 이때

$$V_j^{n-1}\ge V_j^n$$

이 성립된다.

증명 귀납법으로 증명하자. 사전실시하강기대선택권의 특성으로부터

$$V_j^{N-1}\ge\varphi_j=V_j^N\ (j=N,\ N-2,\ \cdots,\ -N+2,-N)$$

이 성립되고 따라서 $n=N$일 때 정리의 주장이 성립된다. 귀납적으로

$$V_j^k\ge V_j^{k+1}$$

이 성립된다고 가정하자. 이때 보조정리 3과 4를 고려하면

$$V_j^{k-1}=\max\left\{\frac{1}{\rho_{k-1}}\left[(1-\lambda_{k-1}\Delta t_{k-1})(\theta_{k-1}V_{j+1}^k+(1-\theta_{k-1})V_{j-1}^k)+\lambda_{k-1}\Delta t_{k-1}\sum_{l\in\mathbf{Z}}V_{j+l}^k\hat{p}_l\right],\ \varphi_j\right\}\ge$$

$$\ge\max\left\{\frac{1}{\rho_{k-1}}\left[(1-\lambda_{k-1}\Delta t_{k-1})(\theta_{k-1}V_{j+1}^{k+1}+(1-\theta_{k-1})V_{j-1}^{k+1})+\lambda_{k-1}\Delta t_{k-1}\sum_{l\in\mathbf{Z}}V_{j+l}^k\hat{p}_l\right],\ \varphi_j\right\}\ge$$

$$\ge\max\left\{\frac{(1-\lambda_{k-1}\Delta t_{k-1})}{\rho_{k-1}}[(\theta_{k-1}V_{j+1}^{k+1}+(1-\theta_{k-1})V_{j-1}^{k+1})]+\frac{\lambda_{k-1}\Delta t_{k-1}}{\rho_{k-1}}\sum_{l\in\mathbf{Z}}V_{j+l}^k\hat{p}_l,\ \varphi_j\right\}\ge$$

$$\ge\max\left\{\frac{(1-\lambda_{k-1}\Delta t_{k-1})}{\rho_{k-1}}[(\theta_kV_{j+1}^{k+1}+(1-\theta_k)V_{j-1}^{k+1})]+\frac{\lambda_{k-1}\Delta t_{k-1}}{\rho_{k-1}}\sum_{l\in\mathbf{Z}}V_{j+l}^k\hat{p}_l,\ \varphi_j\right\}\ge$$

$$\ge\max\left\{\frac{(1-\lambda_k\Delta t_k)}{\rho_k}[(\theta_kV_{j+1}^{k+1}+(1-\theta_k)V_{j-1}^{k+1})]+\frac{\lambda_k\Delta t_k}{\rho_k}\sum_{l\in\mathbf{Z}}V_{j+l}^k\hat{p}_l,\ \varphi_j\right\}=$$

$$=\max\left\{\frac{1}{\rho_k}\left[(1-\lambda_k\Delta t_k)(\theta_kV_{j+1}^{k+1}+(1-\theta_k)V_{j-1}^{k+1})+\lambda_k\Delta t_k\sum_{l\in\mathbf{Z}}V_{j+l}^{k+1}\hat{p}_l\right],\ \varphi_j\right\}=V_j^k$$

가 성립된다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] 오형철 등; 조선수학학회지, 2, 94, 주체100(2011).

[2] D. Lamberton; Mathematical Finance, 3, 2, 179, April 1993.

[3] B. Hu et al.; Jour. Comput. Appl. Math., 230, 583, 2009.

[4] L. S. Jiang; Modeling and Methods of Option pricing, World Scientific, Singapore, 333, 2005.

[5] L. S. Jiang et al.; Journal of Computational Mathematics, 22, 3, 371, 2004.

[6] L. S. Jiang et al.; Numer. Math., 107, 333, 2007.

[7] J. Liang et al.; SIAM J. Financial Math., 1, 30, 2010.

주체106(2017)년 8월 10일 원고접수

Monotonicity with respect to the Time Variable of the Price by Binomial Tree Method for a Type of Model of American Put Options

Jo Jong Jun, *Hong Kang Phyong*

In this paper we study monotonicity of the price by binomial tree method for a type of model of American put options. We present a formula of the price by binomial tree method for a jump-diffusion model of American put options with time dependent coefficients and prove monotonicity of the price with respect to the time variable.

Key words: American put options, binomial tree method