김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제1호

리만다양체에서 슈르의 정리를 만족시키는 한 형태의 반대칭비계량접속에 대하여

허 달 윤

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《기초과학을 끊임없이 심화발전시키지 않고서는 첨단과학기술을 연구도입할수도 없고 새로운 높은 수준의 과학기술을 연구개발할수도 없습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제22권 21페지)

선행연구[1]에서는 슈르의 정리를 만족시키는 한 형태의 반대칭비계량접속을 정의하고 그것의 성질을 연구하였다. 그러나 일반적으로 레비－찌비따접속에 관해서는 슈르의 정리가 성립되지만 비계량접속에서 슈르의 정리가 성립된다는것은 난문제로 제기되고있다.

선행연구[2]에서는 비계량대칭접속의 특수한 경우인 아마리－첸쪼브접속에 대해 슈르의 정리가 만족된다는것을 증명하였고 선행연구[3]에서는 아마리－첸쪼브접속의 공액대칭조건을 연구하였다. 선행연구[4]에서는 리만다양체에서의 여러가지 새로운 접속형태를 연구하였으며 선행연구[5]에서는 비계량접속의 등곡률성조건들이 연구되였다.

론문에서는 슈르의 정리를 만족시키는 한가지 새로운 반대칭비계량접속을 제기하고 그것의 몇가지 성질을 연구한다.

리만다양체 $(M,\ g)$에서 1－형식 π에 대하여

$$\nabla_k g_{ij} = (3\pi_k g_{ij} - \pi_i g_{jk} - \pi_j g_{ik})/3,\ \ T_{ij}^k = \pi_j \delta_i^k - \pi_i \delta_j^k \tag{1}$$

를 만족시키는 반대칭비계량접속 ∇에 대하여 론의하자.

접속 ∇의 접속결수는 $\Gamma_{ij}^k = \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix} + \frac{1}{4}(\delta_i^k \pi_j - 3\pi_i \delta_j^k + g_{ij}\pi^k)$이다. 여기서 $\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}$는 레비－찌비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$의 접속결수이고 π_i는 1－형식 π의 성분이다.

정리 1 련결리만다양체 $(M,\ g)$ $(\dim M > 2)$에서 반대칭비계량접속 ∇에 대하여 임의의 점 p에서의 자름면곡률이 2차원방향 E (T_pM의 임의의 2차원부분공간)의 선택에 무관계하면 리만다양체 $(M,\ g,\ \nabla)$는 일정곡률을 가진다.

증명 $(M,\ g)$에서 ∇에 대한 곡률텐소르의 제2종비앙끼항등식은 다음과 같다.

$$\nabla_n R_{ijk}^l + \nabla_i R_{jhk}^l + \nabla_j R_{hik}^l = 2(\pi_h R_{ijk}^l + \pi_i R_{ihk}^l + \pi_j R_{hik}^l) \tag{2}$$

그리고 접속 ∇에 대한 자름면곡률이 임의의 점 p에서 2차원방향 E의 선택에 무관계하면 곡률텐소르는 $R_{ijk}^l = k(p)(\delta_j^l g_{ik} - \delta_i^l g_{jk})$와 같다. 이것을 식 (2)에 넣고 정돈하면

$$\begin{aligned}&\nabla_h k(\delta_j^l g_{ik} - \delta_i^l g_{jk}) + \nabla_i k(\delta_h^l g_{jk} - \delta_j^l g_{hk}) + \nabla_j k(\delta_i^l g_{hk} - \delta_h^l g_{ik}) + \\ &\quad + k(\delta_j^l \nabla_h g_{ik} - \delta_i^l \nabla_h g_{jk} + \delta_h^l \nabla_i g_{jk} - \delta_j^l \nabla_i g_{hk} + \delta_i^l \nabla_j g_{hk} - \delta_h^l \nabla_j g_{ik}) = \\ &\quad = 2k[\pi_h(\delta_i^l g_{ik} - \delta_i^l g_{jk}) + \pi_i(\delta_h^l g_{jk} - \delta_j^l g_{hk}) + \pi_j(\delta_i^l g_{hk} - \delta_h^l g_{ik})]\end{aligned}$$

이고 식 (1)을 리용하여 정돈하면 다음과 같다.

$$\nabla_h k(\delta_j^l g_{ik} - \delta_i^l g_{jk}) + \nabla_i k(\delta_k^l g_{jk} - \delta_j^l g_{hk}) + \nabla_j k(\delta_i^l g_{hk} - \delta_h^l g_{ik}) = 0$$

이 식을 i, l 에 관해 축약하면 $(n-2)(\nabla_j k \cdot g_{hk} - \nabla_h k \cdot g_{jk}) = 0$ 이고 이 식에 g^{jk} 를 곱하고 축약하면 $(n-1)(n-2)\nabla_h k = 0$ 이며 $\dim M > 2$ 이므로 $k = \text{const}$ 이다.

반대칭비계량접속 ∇ 의 곡률텐소르는

$$R_{ijk}^l = K_{ijk}^l + \delta_j^l a_{ik} - \delta_i^l a_{jk} + g_{jk} b_i^l - g_{ik} b_j^l - 3\delta_k^l \pi_{ij} \tag{3}$$

이다. 여기서 K_{ijk}^l 은 레비찌비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$ 에 대한 곡률텐소르이고

$$a_{ik} = (\overset{\circ}{\nabla}_i \pi_k - \pi_i \pi_k / 4 - g_{ik} \pi_p \pi^p / 4)/4,\ b_{ik} = (\overset{\circ}{\nabla}_i \pi_k + \pi_i \pi_k / 4)/4,\ \pi_{ij} = (\overset{\circ}{\nabla}_i \pi_j - \overset{\circ}{\nabla}_j \pi_i)/4.$$

∇ 에 대한 쌍대접속 $\overset{*}{\nabla}$ 의 접속결수는 $\overset{*}{\Gamma}{}_{ij}^k = \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix} - \dfrac{1}{4}(\delta_l^k \pi_j - 3\pi_i \delta_j^k + g_{ij} \pi^k)$ 이고 곡률텐소르는

$$\overset{*}{R}{}_{ijk}^l = K_{ijk}^l + \delta_i^l b_{jk} - \delta_j^l b_{ik} + g_{ik} a_j^l - g_{jk} a_i^l + 3\delta_k^l \pi_{ij} \tag{4}$$

이며 호상접속 $\overline{\nabla}$ 의 접속결수는 $\overline{\Gamma}{}_{ij}^k = K_{ijk}^l - (3\delta_i^k \pi_j - \pi_i \delta_j^k - g_{ij} \pi^k)/4$ 이고 곡률텐소르는

$$\overline{R}{}_{ijk}^l = K_{ijk}^l + \delta_i^l \overline{a}_{jk} - \delta_j^l \overline{a}_{ik} + g_{jk} b_i^l - g_{ik} b_j^l + \delta_k^l \pi_{ij} \tag{5}$$

이다. 여기서 $\overline{a}_{ik} = (3\nabla_i \pi_k + 9\pi_i \pi_k - 3g_{ik} \pi_p \pi^p)/4$ 이다.

정리 2 리만다양체 $(M,\ g)\ (\dim M > 2)$ 에서 $C_{ijk}^l + \overset{*}{C}{}_{ijk}^i = 2\overset{\circ}{C}{}_{ijk}^i$ 는 접속변환 $\overset{\circ}{\nabla} \to \nabla$, $\overset{\circ}{\nabla} \to \overset{*}{\nabla}$ 에 관한 불변량이다. 여기서 C_{ijk}^l, $\overset{*}{C}{}_{ijk}^i$, $\overset{\circ}{C}{}_{ijk}^i$ 은 각각 접속 ∇, $\overset{*}{\nabla}$, $\overset{\circ}{\nabla}$ 에 관한 와일공형곡률텐소르로서 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
C_{ijk}^i &= R_{ijk}^l - (\delta_i^l R_{jk} - \delta_j^l R_{ik} + g_{jk} R_i^l - g_{ik} R_j^l)/(n-2) - R(\delta_j^l g_{ik} - \delta_i^l g_{jk})/[(n-1)(n-2)] \\
\overset{*}{C}{}_{ijk}^i &= \overset{*}{R}{}_{ijk}^l - (\delta_i^l \overset{*}{R}_{jk} - \delta_j^l \overset{*}{R}_{ik} + g_{jk} \overset{*}{R}{}_i^l - g_{ik} \overset{*}{R}{}_j^l)/(n-2) - \overset{*}{R}(\delta_j^l g_{ik} - \delta_i^l g_{jk})/[(n-1)(n-2)] \\
\overset{\circ}{C}{}_{ijk}^i &= K_{ijk}^l - (\delta_i^l K_{jk} - \delta_j^l K_{ik} + g_{jk} K_i^l - g_{ik} K_j^l)/(n-2) - K(\delta_j^l g_{ik} - \delta_i^l g_{jk})/[(n-1)(n-2)]
\end{aligned} \tag{6}$$

증명 식 (3)과 (4)를 합하면 다음과 같다.

$$R_{ijk}^l + \overset{*}{R}{}_{ijk}^l = 2K_{ijk}^l + \delta_j^l \alpha_{ik} - \delta_i^l \alpha_{jk} + g_{ik} \alpha_j^l - g_{jk} \alpha_i^l,\ \ \alpha_{ik} = a_{ik} - b_{ik} \tag{7}$$

이 식을 i, l 에 관해 축약하면 $R_{jk} + \overset{*}{R}_{jk} = 2K_{jk} - (n-2)\alpha_{jk} - g_{jk} \alpha_i^i$ 이고 이 식의 량변에 g^{jk} 를 곱하면 $R + \overset{*}{R} = 2K - 2(n-1)\alpha_i^i$ 이다.

이로부터 $\alpha_{jk} = [2K_{jk} - (R_{jk} + \overset{*}{R}_{jk}) - g_{jk}(2K - R - \overset{*}{R})/(2(n-1))]/(n-2)$ 이 성립되며 이것을 식 (7)에 넣고 정돈하면서 식 (6)을 리용하면 정리의 결과가 얻어진다.(증명끝)

정리 3 $(M,\ g)$ 에서 ∇ 가 령곡률을 가지면 리만계량은 공형평탄이다.

보조정리 1 리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 텐소르

$$\begin{aligned}
V_{ijk}^l = R_{ijk}^l &- (\delta_i^l R_{jk} - \delta_j^l R_{ik} + g_{ik} R_j^l - g_{jk} R_i^l)/n - [\delta_i^l (R_{jk} - R_{kj}) - \\
&- \delta_j^l (R_{ik} - R_{ki}) + g_{ik}(R_j^l - R_{\bullet j}^l) - g_{jk}(R_{i\bullet}^l - R_{\bullet i}^l) + n\delta_k^l (R_{ij} - R_{ji})]/[n(n-6)]
\end{aligned}$$

는 접속변환 $\nabla \to \overset{*}{\nabla}$에 관한 불변량이다.

보조정리 1을 리용하면 다음의 정리가 쉽게 증명된다.

정리 4 리만다양체 $(M,\ g)$에서 반대칭비계량접속 ∇가 공액대칭이기 위해서는 대응하는 릿찌텐소르들이 같을것이 필요하고 충분하다.

보조정리 2 리만다양체 $(M,\ g)$에서 텐소르

$$W_{ijk}^{l} = R_{ijk}^{l} - (\delta_i^l R_{jk} - \delta_j^l R_{ik})/(n-1) - [\delta_i^l (R_{jk} - R_{kj}) - \delta_j^l (R_{ik} - R_{ki}) + (n-1)\delta_k^l (R_{ij} - R_{ji})]/[(n-1)(n-3)] \tag{8}$$

는 접속변환 $\nabla \to \overline{\nabla}$에 관한 불변량이다.

증명 식 (3), (5)로부터 $\gamma_{ik} = \overline{a}_{ik} + a_{ik}$라고 하면

$$\overline{R}_{ijk}^{l} = R_{ijk}^{l} + \delta_i^l \gamma_{jk} - \delta_j^l \gamma_{ik} + 4\delta_k^l \pi_{ij}. \tag{9}$$

이 식을 $i,\ l$에 관해 축약하면 $\overline{R}_{jk} = R_{jk} + (n-1)\gamma_{jk} - 4\pi_{jk}$이며 이 식을 빗대칭화하고 $\gamma_{jk} - \gamma_{kj} = 4\pi_{jk}$임을 리용하면 $\pi_{jk} = [(\overline{R}_{jk} - \overline{R}_{kj}) - (R_{jk} - R_{kj})]/[4(n-3)]$가 성립된다.

이 식을 $\overline{R}_{jk} = R_{jk} + (n-1)\gamma_{jk} - 4\pi_{jk}$에 넣어 γ_{jk}를 구하면 다음과 같다.

$$\gamma_{jk} = \{\overline{R}_{jk} - R_{jk} + [(\overline{R}_{jk} - \overline{R}_{kj}) - (R_{jk} - R_{kj})]/[n-3]\}/(n-1)$$

얻어진 식들을 식 (9)에 넣고 식 (8)을 리용하면서

$$\overline{W}_{ijk}^{l} = \overline{R}_{ijk}^{l} - (\delta_i^l \overline{R}_{jk} - \delta_j^l \overline{R}_{ik})/(n-1) - [\delta_i^l (\overline{R}_{jk} - \overline{R}_{kj}) - \delta_j^l (\overline{R}_{ik} - \overline{R}_{ki}) + (n-1)\delta_k^l (\overline{R}_{ij} - \overline{R}_{ji})]/[(n-1)(n-3)]$$

라고 하면 $W_{ijk}^{l} = \overline{W}_{ijk}^{l}$이다.(증명끝)

보조정리 2를 리용하면 다음의 정리가 쉽게 증명된다.

정리 5 리만다양체 $(M,\ g)$에서 반대칭비계량접속 ∇와 그것의 호상접속 $\overline{\nabla}$가 등곡률이기 위해서는 대응되는 릿찌텐소르들이 같을것이 필요하고 충분하다.

참 고 문 헌

[1] Ho Tal Yun et al.; Internat. J. Geom., 5, 1, 47, 2016.

[2] T. Kurose et al.; Tohoko Math. J., 2, 4, 4273, 2007.

[3] E. S. Stepanova; J. Math. Sci., 147, 1, 6507, 2007.

[4] M. M. Tripathi; Int. Elec. J. Geom., 1, 15, 2008.

[5] S. B. Edgar; Class. Quantum. Grav., 10, 2545, 1993.

주체107(2018)년 9월 8일 원고접수

On a Semi-Symmetric Non-Metric Connection Satisfying Schur's Theorem in the Riemannian Manifold

Ho Tal Yun

We newly presented one type of a semi-symmetric non-metric connection satisfying Schur's Theorem and studied its properties.

Key words: Schur's theorem, semi-symmetry, non-metric connection