김일성종합대학학보 주체110(2021)년
수 학 제67권 제2호

시간분수계 4 계반응－확산방정식에 대한 완전리산국부 불련속갈료르낀방법

박선향, 김종철

우리는 4계도함수항을 가진 $\alpha\,(0<\alpha<1)$ 계시간분수계반응－확산방정식에 대한 완전리산국부불련속갈료르낀방법을 연구하였다. 즉 론문의 도식이 무조건안정하며 시간걸음크기 τ 와 공간걸음크기 h, 국부불련속유한요소공간의 차수 r 에 대해 수렴차수 $O(\tau^2+h^{r+1})$ 를 가진다는것을 증명하였다.

4계공간도함수항은 빛묶음속에서의 파전파, 평판에서 홈형성과 같은 특수한 현상들을 묘사하는데 필요하다.[1]

론문에서는 α 계의 캐푸토도함수를 가진 주기경계조건하에서의 다음의 시간분수계4계반응－확산방정식에 대한 수치방법을 연구하였다.

$$\begin{cases} D_{0,\,t}^{\alpha}u(x,\ t)-\lambda_1 u_{xx}+\lambda_2 u_{xxxx}=f(x,\ t) \\ (x,\ t)\in\Omega\times(0,\ T]\ \ (\Omega=(a,\ b),\ T>0) \\ u(x,\ 0)=u_0(x),\ \ x\in\overline{\Omega} \end{cases} \tag{1}$$

여기서 $0<\alpha<1$이고 λ_1과 λ_2는 $4\lambda_1-\lambda_2^2>0$인 정인 상수들이며 $f(x,\ t)$와 $u_0(x)$는 주어진 함수들이다. $D_{0,\,t}^{\alpha}$는 α계캐푸토분수계도함수연산자이다.

선행연구[2]에서는 캐푸토도함수를 근사시키기 위해 근사도가 $O(\tau^{3-\alpha})$인 $L2-1_\sigma$라고 부르는 공식을 제안하고 2계시간분수계확산방정식에 대해 수렴차수 $O(\tau^2+h^2)$을 가지는 계차방법을 확립하였다. 선행연구[3]에서는 1차원시간분수계4계방정식에 대하여 수렴차수

$$O(\tau^{2-\alpha}+\tau^{-\alpha}h^{r+1}+\tau^{-\alpha/2}h^{r+1/2}+h^{r+1})$$

을 가지는 국부불련속갈료르낀(LDG)방법을 제안하였다. 선행연구[4, 5]에서는 캐푸토분수계도함수를 가진 몇가지 1차원2계 또는 4계편미분방정식에 대하여 시간수렴차수 $O(\tau^{2-\alpha})$를 가지는 LDG방법들을 제기하였다.

론문에서는 $L2-1_\sigma$ 공식[2]에 기초하여 식 (1)에 대한 LDG방법을 제기하고 도식이 무조건안정하고 수렴차수 $O(\tau^2+h^{r+1})$를 가진다는것을 증명하였다.

먼저 몇가지 표시들을 도입한다. M이 정의 옹근수이고 $\{x_{j+1/2}\}_{j=0}^{M}$이 $a=x_{1/2}<x_{3/2}<\cdots<x_{M+1/2}=b$인 $\overline{\Omega}=[a,\ b]$의 그물이라고 하자. $j=1,\ \cdots,\ M$에 대하여

$$I_j=(x_{j-1/2},\ x_{j+1/2}),\ \ x_j=\frac{1}{2}(x_{j+1/2}+x_{j-1/2}),\ \ h_j=x_{j+1/2}-x_{j-1/2},\ \ h=\max_{1\le j\le M}h_j,\ \ T_h=\{I_j\}_{j=1}^{M}$$

으로 정의하자.

불련속점 $x_{j+1/2}$에서 함수 u의 왼쪽극한과 오른쪽극한값을 각각 $u_{j+1/2}^-,\ u_{j+1/2}^+$로 표

시한다.

고정된 $r \in \mathbf{Z}_+$에 대하여 LDG유한요소공간 $V_h \subset L^2(\Omega)$를

$$V_h := \{v \in L^2(\Omega):\ v|_I \in P^r(I),\ \forall I \in T_h\}$$

로 정의한다. 여기서 $P^r(I)$는 요소 I에서 정의된 r차이하의 모든 다항식들의 모임을 표시한다. 전체 계산구역 Ω에서의 L^2−스칼라적과 노름을 각각 $(\cdot,\ \cdot)$, $\|\cdot\|$로 표시한다.

방정식 (1)을 공간변수에 관해 1계인 다음의 련립방정식형태로 쓸수 있다.

$$\begin{aligned} &D_{0,t}^{\alpha}u(x,\ t) + \lambda_1 u(x,\ t) - \lambda_2 q(x,\ t) + s_x(x,\ t) = f(x,\ t) \\ &p = u_x,\ q = p_x,\ s = q_x \end{aligned} \tag{2}$$

식 (2)에 대한 반리산LDG근사문제를 다음과 같이 정의한다. 즉 모든 시험함수 v_h, w_h, ρ_h, $\xi_h \in V_h$에 대하여

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{M}\int_{I_j}(D_{0,t}^{\alpha}u_h)v_h dx + \lambda_1\sum_{j=1}^{M}\int_{I_j}u_h v_h dx - \lambda_2\sum_{j=1}^{M}\int_{I_j}q_h v_h dx - \sum_{j=1}^{M}\int_{I_j}s_h(v_h)_x dx + \\ &\quad + \sum_{j=1}^{M}[(\hat{s}_h v_h)_{j+1/2}^{-} - (\hat{s}_h v_h)_{j-1/2}^{+}] = \sum_{j=1}^{M}\int_{I_j} f v_h dx \\ &\sum_{j=1}^{M}\int_{I_j}p_h\xi_h dx + \sum_{j=1}^{M}\int_{I_j}u_h(\xi_h)_x dx - \sum_{j=1}^{M}[(\hat{u}_h\xi_h)_{j+1/2}^{-} - (\hat{u}_h\xi_h)_{j-1/2}^{+}] = 0 \\ &\sum_{j=1}^{M}\int_{I_j}q_h\rho_h dx + \sum_{j=1}^{M}\int_{I_j}p_h(\rho_h)_x dx - \sum_{j=1}^{M}[(\hat{p}_h\rho_h)_{j+1/2}^{-} - (\hat{p}_h\rho_h)_{j-1/2}^{+}] = 0 \\ &\sum_{j=1}^{M}\int_{I_j}s_h w_h dx + \sum_{j=1}^{M}\int_{I_j}q_h(w_h)_x dx - \sum_{j=1}^{M}[(\hat{q}_h w_h)_{j+1/2}^{-} - (\hat{q}_h w_h)_{j-1/2}^{+}] = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

인 u_h, p_h, q_h, $s_h : [0,\ T] \to V_h$를 구하는 문제이다.

식 (3)에서 〈모자〉항들은 부분적분으로부터 생기는 경계항들이다. 이것들은 도식이 일정한 안정성을 가지도록 선택될수 있다. 론문에서는 다음과 같이 선택한다.

$$\hat{u}_h = u_h^{-},\ \hat{s}_h = s_h^{+},\ \hat{q}_h = q_h^{+},\ \hat{p}_h = p_h^{-} \tag{4}$$

완전리산도식을 구성하기 위하여 어떤 정의 옹근수 N에 대하여 시간그물크기를 $\tau = T/N$로, 시간그물점들을 $t_k = k\tau\ (k = 0,\ 1,\ \cdots,\ N)$로 정의하자. 그리고 t_k에서 u의 값을 u^k로 표시한다. 분수계도수 $D_{0,t}^{\alpha}u_h(x,\ t_{k+\sigma})$를 근사시키는데 선행연구[2]에서 정의된 다음의 수렬 $\{c_n^{(k+1)}\}$을 리용한다.

$$0 < \alpha < 1,\ \sigma = 1 - \frac{\alpha}{2},\ t_{k+\sigma} = (k+\sigma)\tau$$

$$a_0 = \sigma^{1-\alpha},\ a_l = (l+\sigma)^{1-\alpha} - (l-1+\sigma)^{1-\alpha}$$

$$b_l = \frac{1}{2-\alpha}[(l+\sigma)^{2-\alpha} - (l-1+\sigma)^{2-\alpha}] - \frac{1}{2}[(l+\sigma)^{1-\alpha} + (l-1+\sigma)^{1-\alpha}],\ l \ge 1$$

로 표시하자. $k = 0$에 대해서는 $c_0^{(k+1)} = a_0$으로, $k \ge 1$에 대해서는

$$c_n^{(k+1)}=\begin{cases}a_0+b_1, & n=0\\ a_n+b_{n+1}-b_n, & 1\le n\le k-1\\ a_k-b_k, & n=k\end{cases}$$

로 정의하고 다음식을 리용하자.

$$g_n^{(k+1)}=\frac{1}{\tau^{\alpha}\Gamma(2-\alpha)}c_{k-n}^{(k+1)} \tag{5}$$

보조정리[2] $w\in C^3[0,\ T]$, $\alpha\in(0,\ 1)$이라고 가정하면

$$D_{0,\,t}^{\alpha}w(t_{k+\sigma})=\overline{D}_{0,\,t}^{\alpha}w^k+O(\tau^{3-\alpha}),\ 0\le k\le N-1$$

이 성립한다. 여기서

$$\overline{D}_{0,\,t}^{\alpha}w^k=\sum_{n=0}^{k}g_n^{(k+1)}(w^{n+1}-w^n)$$

이다. $g(t_{k+\sigma})$를 근사시키기 위해 $w\in C^2[0,\ T]$라고 가정하면 테일러공식에 의하여

$$w(t_{k+\sigma})=w^{k+\sigma}+O(\tau^2),\ 0\le k\le N-1 \tag{6}$$

이 성립한다. 여기서

$$w^{k+\sigma}=\sigma w^{k+1}+(1-\sigma)w^k \tag{7}$$

$t=t_{k+\sigma}$에서의 방정식 (4)에서 $u_h(\cdot,\ t_{k+\sigma})$, $p_h(\cdot,\ t_{k+\sigma})$, $q_h(\cdot,\ t_{k+\sigma})$, $s_h(\cdot,\ t_{k+\sigma})$를 각각 $u_h^{k+\sigma}$, $p_h^{k+\sigma}$, $q_h^{k+\sigma}$, $s_h^{k+\sigma}$로 근사시키고 캐푸토도함수를 보조정리에 의해 근사시키면 식 (3)으로부터 (2)에 대한 다음과 같은 완전리산LDG근사문제가 얻어진다. 즉 모든 시험함수 υ_h, w_h, ρ_h, $\xi_h\in V_h$에 대하여

$$\sum_{j=1}^{M}\int_{I_j}(\overline{D}_{0,\,t}^{\alpha}u_h^k)\upsilon_h dx+\lambda_1\sum_{j=1}^{M}\int_{I_j}u_h^{k+\sigma}\upsilon_h dx-\lambda_2\sum_{j=1}^{M}\int_{I_j}q_h^{k+\sigma}\upsilon_h dx-\sum_{j=1}^{M}\int_{I_j}s_h^{k+\sigma}(\upsilon_h)_x dx+$$
$$+\sum_{j=1}^{M}[(\hat{s}_h^{k+\sigma}(\upsilon_h)^-)_{j+1/2}-(\hat{s}_h^{k+\sigma}(\upsilon_h)^+)_{j-1/2}]=\sum_{j=1}^{M}\int_{I_j}f^{k+\sigma}\upsilon_h dx$$
$$\sum_{j=1}^{M}\int_{I_j}p_h^{k+\sigma}\xi_h dx+\sum_{j=1}^{M}\int_{I_j}u_h^{k+\sigma}(\xi_h)_x dx-\sum_{j=1}^{M}[(\hat{u}_h^{k+\sigma}(\xi_h)^-)_{j+1/2}-(\hat{u}_h^{k+\sigma}(\xi_h)^+)_{j-1/2}]=0 \tag{8}$$
$$\sum_{j=1}^{M}\int_{I_j}q_h^{k+\sigma}\rho_h dx+\sum_{j=1}^{M}\int_{I_j}p_h^{k+\sigma}(\rho_h)_x dx-\sum_{j=1}^{M}[(\hat{p}_h^{k+\sigma}(\rho_h)^-)_{j+1/2}-(\hat{p}_h^{k+\sigma}(\rho_h)^+)_{j-1/2}]=0$$
$$\sum_{j=1}^{M}\int_{I_j}s_h^{k+\sigma}w_h dx+\sum_{j=1}^{M}\int_{I_j}q_h^{k+\sigma}(w_h)_x dx-\sum_{j=1}^{M}[(\hat{q}_h^{k+\sigma}(w_h)^-)_{j+1/2}-(\hat{q}_h^{k+\sigma}(w_h)^+)_{j-1/2}]=0$$

인 u_h^{k+1}, w_h^{k+1}, ρ_h^{k+1}, $\xi_h^{k+1}\in V_h$ $(k=0,\ \cdots,\ N-1)$를 초기조건

$$u_h^0=P_h^-u_0,\quad p_h^0=(u_h^0)_x,\quad q_h^0=(p_h^0)_x,\quad s_h^0=(q_h^0)_x \tag{9}$$

하에서 구하는 문제이다. 여기서 P_h^-는 가우스－라다우사영연산자이다.

다음의 무조건안정성과 수렴성결과들이 얻어진다.

정리 1 $4\lambda_1>\lambda_2^2$이라고 하면 완전리산LDG근사문제 (8), (9)는 무조건안정하다. 즉

$$\| u_h^{k+1} \|^2 \le \| u_h^0 \|^2 + \frac{4T^\alpha \Gamma(1-\alpha)}{4\lambda_1 - \lambda_2^2} \max_{0 \le l \le N-1} \| g^{l+\sigma} \|^2,\ 0 \le k \le N-1 \tag{10}$$

정리 2 $4\lambda_1 - \lambda_2^2 > 0$ 이고 식 (1)의 정확한 풀이 u 가

$$u(x,\ t) \in H^{r+2}(\Omega\,;\ C^3([0,\ T])) \cap H^3(\Omega,\ C^2[0,\ T])$$

$$u_{ttt}(x,\ t) \in H^{r+1}(\Omega\,; C([0,\ T]))$$

$$D_{0,\,t}^\alpha u(x,\ t) \in H^{r+1}(\Omega\,; C([0,\ T]))$$

이며 $f(x,\ t) \in L^2(\Omega\,; C^2([0,\ T]))$, u_h^k 는 완전리산LDG근사문제 (8), (9)의 풀이라고 하자. 이때 다음의 오차평가식이 성립한다.

$$\| u^k - u_h^k \| \le C(\tau^2 + h^{r+1}),\ 1 \le k \le N \tag{11}$$

여기서 C 는 시간걸음길이 τ 와 공간그물크기 h, 시간수준 k 에 무관계한 어떤 정의 상수이다.

4계분수계반응－확산방정식 (1)을 풀기 위한 론문의 완전리산LDG방법의 정확성과 성능을 다음의 수치실험결과를 통하여 고찰하자.

수치실험을 위해 첫 $r+1$개의 르쟝드르토대함수들을 $P^r(I_i)$의 토대함수들로 리용한다.

실례 주기경계조건하에서의 다음의 시간분수계4계반응－확산방정식

$$D_{0,\,t}^\alpha u(x,\ t) + u(x,\ t) - u_{xx}(x,\ t) + u_{xxxx}(x,\ t) = f(x,\ t),\ (x,\ t) \in (0,\ 1) \times (0,\ T]$$

$$u(x,\ 0) = u_0(x),\ x \in [0,\ 1]$$

을 고찰한다. 여기서

$$f(x,\ t) = \frac{2t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sin(2\pi x) + (16\pi^4 + 4\pi^2 + 1)t^2 \sin(2\pi x),\ 0 < \alpha < 1$$

이다. 정확한 풀이는 $u(x,\ t) = t^2 \sin(2\pi x)$ 이다.

공간걸음길이와 시간걸음크기를 $h = \tau = 1/64$ 로 고정시키고 각이한 α 값들에 대하여 T 에 따르는 L^2－노름오차들을 보여준다.(표) 이로부터 론문의 방법이 긴시간동안 풀이를 비교적 잘 근사한다는것을 알수 있다.

표. $r=1,\ h=\tau=1/64$ 일 때 각이한 α 와 T 에서 완전리산LDG방법의 L^2－오차

α	$T=1$	$T=5$	$T=10$	$T=15$	$T=20$
0.2	2.645 55e-06	6.613 71e-05	2.645 48e-04	5.952 33e-04	1.058 19e-03
0.5	2.645 57e-06	6.613 70e-05	2.645 47e-04	5.952 31e-04	1.058 19e-03
0.8	2.645 55e-06	6.613 69e-05	2.645 47e-04	5.952 30e-04	1.058 19e-03

참 고 문 헌

[1] V. I. Karpman; Phys. Rev., E53, 1336, 1996.

[2] A. A. Alikhanov; J. Comput. Phys., 280, 424, 2015.

[3] L. L. Wei, Y. N. He; Appl. Math. Model., 38, 1511, 2014.

[4] L. Guo et al.; J. Comput. Math., 93, 10, 1665, 2016.

[5] C. P. Li, Z. Wang; Appl. Numer. Math., 140, 1, 2019.

주체109(2020)년 12월 5일 원고접수

A Fully Discrete Local Discontinuous Galerkin Method for Time-fractional Fourth-order Reaction-diffusion Equation

Pak Son Hyang, Kim Jong Chol

In this paper, a fully discrete local discontinuous Galerkin method with convergence order $O(\tau^2 + h^{r+1})$ is proposed for time-fractional fourth-order reaction-diffusion equation.

Keyword: local discontinuous Galerkin method