김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체106(2017)년 제63권 제4호 Vol. 63 No. 4 JUCHE106(2017).

시간의존결수를 가지는 사전실시선택권의 2분나무 모형에서 선택권가격의 단조성

조정준, 리지성

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《이미 일정한 토대가 있고 전망이 확고한 연구대상들에 힘을 넣어 세계패권을 쥐며 그 성과를 확대하는 방법으로 과학기술을 빨리 발전시켜야 합니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 39페지)

우리는 사전실시선택권의 2분나무모형에 의한 기초자산가격과 선택권가격의 시간변수에 관한 단조성에 대하여 연구하였다.

선행연구[4]에서는 리자률과 배당률, 파동률이 상수인 경우 유럽식선택권의 2분나무모형에 의한 가격공식과 그 수렴성을 연구하였으며 사전실시선택권의 2분나무법에 의한 가격공식과 가격의 기초자산가격, 시간변수에 관한 단조성, 최량실시경계의 존재성과 단조성을 연구하였다. 선행연구들[2, 5－7]에서는 사전실시선택권의 2분나무법에 의한 가격의 수렴성과 수렴속도에 대하여, 선행연구[3]에서는 최량수렴속도에 대하여 연구하였다.

선행연구[1]에서는 시간의존결수를 가지는 유럽식선택권의 2분나무법에 의한 가격공식과 그 수렴성을 연구하였다.

론문에서는 시간의존결수를 가지는 경우 사전실시선택권의 2분나무법에 의한 가격공식을 주고 그 가격의 단조성문제를 연구하였다.

1. 시간의존결수를 가지는 경우 2분나무법의 시간분할방법

$r(t)$는 리자률, $q(t)$는 기초자산의 배당률, $\sigma(t)$는 기초자산가격의 파동률이라고 하자.

선택권의 생존구간 $[0,\ T]$를 N개의 구간 $0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_N=T$로 분할하자.

$$r_n=r(t_n),\ q_n=q(t_n),\ \sigma_n=\sigma(t_n),\ \eta_n=1+q_n\Delta t_n,\ \rho_n=1+r_n\Delta t_n\ \ (\Delta t_n=t_{n+1}-t_n,\ \ n=\overline{0,\ N-1})$$

으로 표시하자.

σ_n이 시간에 의존하므로 시간구간을 등분하면 부분구간 $[t_n,\ t_{n+1}]$들마다 환률 S의 시간에 따르는 변화가 2분나무형태를 가지지 못할수 있다. 이것이 파동률이 시간에 의존할 때의 2분나무법연구의 중요한 난관의 하나이다.[1]

한편 σ_n의 실지 의미로부터 σ_n이 크면 $[t_n,\ t_{n+1}]$에서 S의 변화폭이 크고 σ_n이 작으면 S의 변화폭이 작아지게 된다. 따라서 σ_n의 크기에 따라 $\Delta t_n=t_{n+1}-t_n$을 달리 정하여 부분구간에서의 S의 변화폭을 일정하게 할수 있다.

따라서 $\sigma_n^2\cdot\Delta t_n=\mathrm{const}=(\ln u)^2$과 같이 분할구간의 길이를 정하면 매 $[t_n,\ t_{n+1}]$에서의 S의 변화가 한주기－두상태모형을 만족시킨다고 가정할수 있다.

이때 S_{t_n} 은 하나의 우연량으로서 $[0,\ T]$ 에서 하나의 2분나무를 이룬다. 즉 초기시각의 기초자산가격이 $S=S_0$ 이면 $t=T$ 시각의 기초자산가격 S_T 는 $N+1$ 개의 가능한 값이 $[S_0u^{N-\alpha}d^{\alpha}]$, $\alpha=0,\ \cdots,\ N$ 을 취할수 있다는것을 의미한다.

$ud=1$, $0<\underline{\sigma}\le\sigma(t)\le\overline{\sigma}$ 라고 가정하자.

이 가정밑에서 기초자산의 가격 $S_\alpha^n=S_0u^{n-\alpha}d^{\alpha}\ (0\le\alpha\le n)$ 은 다음과 같이 표시된다.

$$S_j=S_0u^j\ (j=n,\ n-2,\ \cdots,\ -n+2,\ -n)$$

$t_n\ (n=0,\cdots,\ N)$ 들을 구체적으로 정의하기 위하여 u 가 가격오름폭$(u>1)$이라고 하자.

$t_0=0$, $\sigma_0=\sigma(t_0)$, $\Delta t_0=(\ln u)^2/\sigma_0^2$, $t_1=t_0+\Delta t_0=(\ln u)^2/\sigma_0^2$ 이라고 놓고 $t_1\le T$ 이면 $\sigma_1=\sigma(t_1)$, $\Delta t_1=(\ln u)^2/\sigma_1^2$, $t_2=t_1+\Delta t_1=(\ln u)^2\cdot(1/\sigma_0^2+1/\sigma_1^2)$ 이라고 놓는다.

귀납적으로 $t_n\le T$ 일 때

$$\sigma_n=\sigma(t_n),\ \Delta t_n=(\ln u)^2/\sigma_n^2,\ t_{n+1}=t_n+\Delta t_n=(\ln u)^2\cdot(1/\sigma_0^2+\cdots+1/\sigma_n^2)$$

로 놓는다. 이 과정을 $t_N\le T<t_{N+1}$ 일 때까지 계속한다. 이때 N 은 u 와 T 에 관계된다.

가정 $0<\underline{\sigma}\le\sigma(t)\le\overline{\sigma}$ 를 리용하면 시간분할간격의 범위, 분할점개수의 아래, 웃평가를 얻을수 있다. Δt_n 의 정의로부터 $(\ln u)^2/\overline{\sigma}^2\le\Delta t_n\le(\ln u)^2/\underline{\sigma}^2$ 이고

$$t_N\le T<t_{N+1}\Leftrightarrow(\ln u)^2\cdot(1/\sigma_0^2+\cdots+1/\sigma_{N-1}^2)\le T<(\ln u)^2\cdot(1/\sigma_0^2+\cdots+1/\sigma_{N-1}^2+1/\sigma_N^2)$$

이므로 $(\ln u)^2/\overline{\sigma}^2N\le T\le(\ln u)^2/\underline{\sigma}^2(N+1)$ 이며 따라서 다음의 식이 성립된다.

$$T\underline{\sigma}^2/[\overline{\sigma}^2(\ln u)^2]<N\le T\overline{\sigma}^2/[\underline{\sigma}^2(\ln u)^2]$$

이로부터 $u\downarrow1$ 이면 $N\to+\infty$ 일 때 $0\le T-t_N<\Delta t_N=(\ln u)^2/\sigma_N^2\to0$ 이 나온다.

2. 2분나무모형에 의한 가격공식

$0<\underline{\sigma}\le\sigma(t)\le\overline{\sigma}$, $0<d<1<u$, $d\eta_n<\rho_n<u\eta_n$ 으로 가정하고 $\theta_n=(\rho_n/\eta_n-d)/(u-d)$ 로 놓으면 $0<\theta_n<1$ 이 성립된다.

시간의존결수를 가지는 사전실시상승기대선택권가격의 거꿀귀납과정은 다음과 같다.

$V_\alpha^N=(S_\alpha^{N-h}-E)^+,\ 0\le\alpha\le N$ $(n=N$ 일 때)

$V_\alpha^{N-1}=\max\{[\theta_{N-1}V_{\alpha+1}^N+(1-\theta_{N-1})V_{\alpha-1}^N]/\rho_{N-1},\ (S_\alpha^{N-1}-E)^+\}$ $(n=N-1$ 일 때)

시간의존결수를 가지는 사전실시하강기대선택권가격의 거꿀귀납과정은 다음과 같다.

$V_\alpha^N=(E-S_\alpha^N)^+,\ 0\le\alpha\le N$ $(n=N$ 일 때)

$V_\alpha^{N-1}=\max\{[\theta_{N-1}V_{\alpha+1}^N+(1-\theta_{N-1})V_{\alpha-1}^N]/\rho_{N-1},\ (E-S_\alpha^{N-1})^+\}$ $(n=N-1$ 일 때)

이로부터 일반적으로 $V_\alpha^{N-h}\ (0\le\alpha\le N-h)$ 이 주어졌다면 다음과 같다.

$V_\alpha^{N-h-1}=\max\{[\theta_{N-h-1}V_{\alpha+1}^{N-h}+(1-\theta_{N-h-1})V_{\alpha-1}^{N-h}]/\rho_{N-h-1},\ (E-S_\alpha^{N-h-1})^+\}$ (하강기대)

$V_\alpha^{N-h-1}=\max\{[\theta_{N-h-1}V_{\alpha+1}^{N-h}+(1-\theta_{N-h-1})V_{\alpha-1}^{N-h}]/\rho_{N-h-1},\ (S_\alpha^{N-h-1}-E)^+\}$ (상승기대)

3. 사전실시선택권의 2분나무가격의 단조성

$V_j^n=V(S_j,\ t_n)$ 으로 표시하면 사전실시선택권의 가격공식은 다음과 같이 쓸수 있다.

$$V_j^n = \max\{[\theta_n V_{j+1}^{n+1} + (1-\theta_n)V_{j-1}^{n+1}]/\rho_n,\ \varphi_j\}$$

여기서 $\varphi_j = (E - S_j)^+$ (하강기대) 또는 $\varphi_j = (S_j - E)^+$ (상승기대)이다.

자산가격에 관한 단조성에 대해 연구하자.

정리 1 실시가격이 E 인 사전실시하강기대선택권의 2분나무가격 $V_j^n = P(S_j,\ t_n\,;E)$ $(n=0,\ 1,\ \cdots,\ N,\ \ j=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$ 는 기초자산가격 S_j 의 단조감소함수 즉 $V_j{}^n \ge V_{j+1}^n$ 이며 E 의 단조증가함수이다. 또한 상승기대선택권의 가격 $V_j^n(E) = C(S_j,\ t_n\ ;\ E)$ 는 기초자산가격 S_j 의 단조증가함수 즉 $V_j{}^n \le V_{j+1}^n$ 이며 실시가격 E 의 단조감소함수이다.

증명 상승기대일 때의 증명도 류사하므로 하강기대일 때에만 증명한다.

$n = N$ 일 때 $V_j^N = (E - S_j)^+$ 이므로 이것은 j 의 단조감소함수이다.

$n = k+1$ 일 때 $V_j^{k+1} \ge V_{j+1}^{k+1}$ 이라고 가정하자.

$n = k$ 일 때 귀납법가정으로부터

$$V_j^k = \max\{[\theta_k V_{j+1}^{k+1} + (1-\theta_k)V_{j-1}^{k+1}]/\rho_k,\ \varphi_j\} \ge \max\{[\theta_k V_{j+2}^{k+1} + (1-\theta_k)V_j^{k+1}]/\rho_k,\ \varphi_{j+1}\} = V_{j+1}^k$$

이 성립된다.(증명끝)

보조정리 1 ① $r(t)/\sigma^2(t)$ 가 $t-$단조증가이면 $\rho_n \le \rho_{n+1}$ 이 성립된다.

② $\dfrac{q(t)}{\sigma^2(t)}$ 가 $t-$단조감소이면 $\eta_n \ge \eta_{n+1}$ 이 성립된다.

③ $\dfrac{r(t)}{\sigma^2(t)}$ 가 $t-$단조증가이고 $q(t)/\sigma^2(t)$ 가 $t-$단조감소이며 Δt_n 이 충분히 작으면 $\rho_n/\eta_n \le \rho_{n+1}/\eta_{n+1}$, $\theta_n \le \theta_{n+1}$ 이 성립된다.

보조정리 2(불룩1차결합의 성질) $A \le B,\ 0 \le \alpha \le \beta \Rightarrow \alpha A + (1-\alpha)B \ge \beta A + (1-\beta)B$

시간변수에 관한 단조성에 대하여 연구하자.

정리 2 V_j^n $(n=0,1,\ \cdots,\ N,\ j=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$ 이 사전실시하강기대선택권의 가격이고 $r(t)/\sigma^2(t)$ 가 $t-$단조증가, $\dfrac{q(t)}{\sigma^2(t)}$ 가 $t-$단조감소이며 $d\eta_n \le \rho_n \le u\eta_n$ 이 성립된다고 하면 $V_j^{n-1} \ge V_j^n$ 이 성립된다.

증명 귀납법으로 증명하자.

사전실시하강기대선택권의 특성으로부터 $V_j^{N-1} \ge \varphi_j = V_j^N$ $(j=0,\ \pm 1,\ \cdots)$ 이고 따라서 $n=N$ 일 때 정리의 주장이 선다.

귀납적으로 $V_j^k \ge V_j^{k+1}$ 이 성립된다고 가정하면 다음의 식이 성립된다.

$$V_j^{k-1} = \max\{[\theta_{k-1}V_{j+1}^k + (1-\theta_{k-1})V_{j-1}^k]/\rho_{k-1},\ \varphi_j\} \ge \max\{[\theta_{k-1}V_{j+1}^{k+1} + (1-\theta_{k-1})V_{j-1}^{k+1}]/\rho_{k-1},\ \varphi_j\} \ge$$
$$\ge \max\{[\theta_{k-1}V_{j+1}^{k+1} + (1-\theta_{k-1})V_{j-1}^{k+1}]/\rho_k,\ \varphi_j\} \ge \max\{[\theta_k V_{j+1}^{k+1} + (1-\theta_k)V_{j-1}^{k+1}]/\rho_k,\ \varphi_j\} = V_j^k$$

웃식에서 첫 부등식은 귀납법가정으로부터, 두번째 부등식은 보조정리 1의 ①로부터, 세번째 부등식은 보조정리 1의 ③과 보조정리 2, 정리 1로부터 $V_j{}^{k+1} \le V_{j+1}^{k+1}$ 이 성립된다는 데로부터 나온다.(증명끝)

보조정리 3 $\theta_n = \dfrac{\rho_n/\eta_n - d}{u-d}$, $\theta'_n = \dfrac{\eta_n/\rho_n - d}{u-d}$ 이면 $\dfrac{\theta_n u}{\rho_n} = \dfrac{1-\theta'_n}{\eta_n}$, $\dfrac{(1-\theta_n)d}{\rho_n} = \dfrac{\theta'_n}{\eta_n}$ 이다.

보조정리 4(동차성) 정리 1, 2에서와 같이 실시가격이 E 인 사전실시하강기대선택권의 2분나무가격을 $P(S_j, E)$, 상승기대선택권가격을 $C(S_j, E)$ 와 같이 표시하면

$$C(\alpha S_j, \alpha E) = \alpha C(S_j, E), \; P(\alpha S_j, \alpha E) = \alpha P(S_j, E).$$

보조정리 3, 4를 리용하면 다음의 상승기대－하강기대대칭성을 얻는다.

정리 3 t_n 시각의 리자률이 r_n, 배당률이 q_n 인 사전실시선택권의 가격을

$$C(S_j, E, n) = C(S_j, E, \rho_n, \eta_n), \; P(S_j, E, n) = P(S_j, E, \rho_n, \eta_n)$$

과 같이 표시하면 다음의 대칭관계식이 성립된다.

$$C(S_j, E, \rho_n, \eta_n) = P(E, S_j, \eta_n, \rho_n), \; \rho_n = 1 + r_n \Delta t_n, \; \eta_n = 1 + q_n \Delta t_n$$

정리 4 $V_j^n \; (n = 0, 1, \cdots, N, \; j = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 이 사전실시상승기대선택권의 가격이고 $r(t)/\sigma^2(t)$ 가 t－단조감소, $q(t)/\sigma^2(t)$ 가 t－단조증가이며 $d\eta_n \le \rho_n \le u\eta_n$ 이 성립된다고 하면 $V_j^{n-1} \ge V_j^n$ 이 성립된다.

참 고 문 헌

[1] 오형철 등; 조선수학학회지, 2, 94, 주체100(2011).

[2] K. Amin et al.; Math. Finance, 4, 4, 289, 1994.

[3] B. Hu et al.; J. Comput. Appl. Math., 230, 583, 2009.

[4] L. S. Jiang; Modeling and Methods of Option Pricing, World Scientific, 23～56, 2005.

[5] L. S. Jiang et al.; Journal of Comput. Math., 22, 3, 371, 2004.

[6] J. Liang et al.; Numer. Math., 107, 333, 2007.

[7] S. A. Borovkova et al.; The Journal of Derivatives, 2, 29, 2012.

주체105(2016)년 12월 5일 원고접수

Monotonicity of Option Price in Binomial Tree Model for American Options with Time Dependent Coefficients

Jo Jong Jun, Ri Ji Song

We study the monotonicity of the option price with respect to the underlying asset's price in binomial tree model for American options with time dependent coefficients. And we study the monotonicity of the option price with respect to the time variable in binomial tree model for American put options with time dependent coefficients.

Key words: American options, binomial tree model