김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체103(2014)년 제60권 제6호 Vol. 60 No. 6 JUCHE103(2014).

리만다양체에서 사영공형반대칭접속의 몇가지 성질

허달윤, 박봄이

선행연구[1]에서는 리만다양체에서 레비－찌비따접속과 공형동등인 공형반대칭접속을 정의하고 그 성질을 밝혔으며 그것에 기초하여 레비－찌비따접속과 사영동등이고 공형동등인 사영공형반대칭접속이 존재한다는것을 증명하였다. 또한 선행연구[5]에서는 사영공형대칭접속은 레비－찌비따접속 그자체뿐임을 밝혔다.

선행연구[2]에서는 통계다양체에서의 사영공형변환과 그것에 관한 불변량을 고찰하였다.

또한 선행연구[3, 4]에서는 사영반대칭접속이 정의되고 사영반대칭접속변환에 관한 불변량이 고찰되였다. 선행연구[6]에서는 리만다양체에서 대칭접속들사이의 등곡률성문제가 연구되였으며 선행연구[7]에서는 리만다양체에서 임의의 비계량접속에 대한 측지선은 최소길이를 가진다는것이 밝혀지지 않았다고 지적되였다.

론문에서는 선행연구에 기초하여 리만다양체에서 비계량접속의 한 형태인 사영공형반대칭접속의 성질을 고찰하고 그것에 관하여 측지선이 최소길이를 가지는 곡선임을 증명하였다.

리만다양체 $(M,\ g)$에서 리만계량 g_{ij}와 어떤 $\sigma(x)\in C^{\infty}(M)$에 관한 계량의 공형변환

$$g_{ij}\to \bar{g}_{ij}=e^{-2\sigma}g_{ij} \tag{1}$$

와 어떤 1－형식 π가 있어서

$$\bar{\nabla}_k \bar{g}_{ij}=0,\ \ \bar{T}_{ij}{}^{k}=\varphi_j\delta_i{}^{k}-\varphi_i\delta_j{}^{k} \tag{2}$$

를 만족시키는 접속 $\bar{\nabla}$를 공형반대칭접속이라고 한다.[1] 여기서 $\bar{T}_{ij}^{k}$는 공형반대칭접속 $\bar{\nabla}$의 꼬임률텐소르성분이고 φ_i는 1－형식 π의 성분이다.

공형반대칭접속 $\bar{\nabla}$의 접속결수 $\bar{\Gamma}_{ij}^{k}$는

$$\bar{\Gamma}_{ij}^{k}=\begin{Bmatrix}k\\ ij\end{Bmatrix}-(\sigma_i\delta_j^k+\sigma_j\delta_i^k-g_{ij}\delta^k)+\varphi_j\delta_i^k-g_{ij}\varphi^k \tag{3}$$

이다. 여기서 $\begin{Bmatrix}k\\ ij\end{Bmatrix}$는 크리스토펠기호이고 $\sigma_i=\partial_i\sigma$이다.

리만다양체 $(M,\ g)$에서 레비－찌비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$과 사영동등한 사영반대칭접속 $\overset{p}{\nabla}$는 어떤 1－형식 ψ와 π에 대하여 접속결수가

$$\overset{p}{\Gamma}{}_{ij}^{k}=\begin{Bmatrix}k\\ ij\end{Bmatrix}+\frac{1}{2}(\psi_i\delta_j^k+\psi_j\delta_i^k+\varphi_j\delta_i^k-\varphi_i\delta_j^k) \tag{4}$$

로 표시된다. 여기서 ψ_i는 1－형식 ψ의 성분이다.[1, 4]

리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 레비-찌비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$ 과 사영동등이고 공형동등인 반대칭접속으로 되는 사영공형반대칭접속 ∇ 는 $\overline{\nabla}=\overset{p}{\nabla}$ 인 접속으로서 접속결수가

$$\Gamma_{ij}^{k}=\begin{Bmatrix}k\\ ij\end{Bmatrix}-\sigma_i\delta_j^k \tag{5}$$

로 된다.

이 경우에 식 (3), (4)로부터 $\varphi_i=\sigma_i,\ \psi_i=-\sigma_i$ 이다.

1. 사영공형반대칭접속의 성질

정의 1 리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 레비-찌비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$ 과 사영동등하고 공형동등한 접속 ∇ 를 사영공형반대칭접속이라고 부른다.

사영공형반대칭접속 ∇ 의 접속결수 Γ_{ij}^{k} 는 식 (5)에 의하여

$$\Gamma_{ij}^{k}=\begin{Bmatrix}k\\ ij\end{Bmatrix}-\sigma_i\delta_j^k \quad \text{또는} \quad \Gamma_{ij}^{k}=\begin{Bmatrix}k\\ ij\end{Bmatrix}-\varphi_i\delta_j^k .$$

결국 사영공형반대칭접속 ∇ 는 계량의 공형변환 (1)에 관하여

$$\nabla_k g_{ij}=2\sigma_k g_{ij},\ T_{ij}^{k}=\sigma_j\delta_i^k-\sigma_i\delta_j^k \tag{6}$$

를 만족시키는 반대칭비계량접속이다.

정리 1 리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 사영공형반대칭접속 ∇ 는 레비-찌비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$ 과 등곡률성을 가진다.

정의 2 리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 두 접속 $\nabla,\overline{\nabla}$ 에 대하여 그것들의 접속결수 Γ_{ij}^{k} 와 $\overline{\Gamma}_{ij}^{k}$ 가 늘 같으면 즉 $\overline{\Gamma}_{ij}^{k}=\Gamma_{ij}^{k}$ 이면 접속 ∇ 와 $\overline{\nabla}$ 는 서로 동등하다고 말한다.

정리 2 리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 계량의 공형변환 (1)에 의하여 정의되는

$$\overline{\nabla}_k\overline{g}_{ij}=0,\ \overline{T}_{ij}^{k}=\sigma_j\delta_i^k-\sigma_j\delta_i^k \tag{7}$$

를 만족시키는 공형반대칭접속 $\overline{\nabla}$ 는 사영공형반대칭접속 ∇ 와 동등하다.

정리 3 리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 레비-찌비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$ 에 관한 측지선의 접벡토르를 $\overset{\circ}{X}$, 사영공형반대칭접속 ∇ 에 관한 측지선의 접벡토르를 X 라고 하면 $\|X\|=\|\overset{\circ}{X}\|$ 이다. 여기서 $\|X\|^2=\overline{g}(X,\ X)$ 이다.

증명 $\overset{\circ}{\nabla}$ 와 ∇ 에 관한 측지선의 방정식이 각각 다음과 같다고 하자.

$$\frac{d^2x^k}{ds^2}+\begin{Bmatrix}k\\ ij\end{Bmatrix}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}=0 \tag{8}$$

$$\frac{d^2x^k}{dt^2}+\Gamma_{ij}^{k}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}=0 \tag{9}$$

여기서 $s,\ t$ 는 각각 $\overset{\circ}{\nabla},\ \nabla$ 에 따르는 측지선의 표준보조변수이다.

그런데 $\frac{d^2x^k}{dt}=\frac{dx^k}{ds}\frac{ds}{dt}$, $\frac{d^2x^k}{dt^2}=\frac{d^2x^k}{dx^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\frac{dx^k}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}$ 이므로 이것을 식 (9)에 넣으면 $\left(\frac{d^2x^k}{ds^2}+\begin{Bmatrix}k\\ij\end{Bmatrix}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\frac{dx^k}{ds}\left(\frac{d^2s}{dt^2}-\frac{d\sigma}{dt}\frac{ds}{dt}\right)=0$ 이다. 여기서 $\frac{d\sigma}{dt}=\sigma_i\frac{dx^i}{dt}$ 이다.

$\frac{dx^k}{ds}\neq 0$ 과 식 (8)을 리용하면 $\frac{d^2s}{dt^2}-\frac{d\sigma}{dt}\frac{ds}{dt}=0$ 이며 이것을 적분하면 $\ln\frac{ds}{dt}=\sigma+c$ 이다.

$\sigma|_{t=0}$, $\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=0}=1$ 이라고 하면 $c=0$ 이므로 $\frac{ds}{dt}=e^{\sigma}$ 이다. 즉 $s=\int_0^k e^{\sigma(x(t))}dt$ 이다.

그러므로 식 (1), (2)로부터 정리 2에 의하여

$$\| X\|^2=\bar{g}(X,\ X)=\bar{g}_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}=e^{-2\sigma}g_{ij}e^{\sigma}\frac{dx^i}{ds}e^{\sigma}\frac{dx^j}{ds}=g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}=\|\overset{\circ}{X}\|^2 .$$

(증명끝)

2. 사영공형반대칭접속에 따르는 측지선의 변분

$(M,\ g)$ 에서 사영공형반대칭접속 ∇ 에 관한 측지선의 변분을 고찰하자.

이것은 정리 2에 의하여 식 (7)로 정의되는 공형반대칭접속 $\overline{\nabla}$ 에 대한 측지선의 변분문제로 된다.

리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 $C:[\alpha,\ \beta]\to M$ 을 미분가능한 경로, $J=(-1,\ 1)$ 이라고 하고 $\forall t\in[\alpha,\ \beta]$, $\forall\varepsilon\in J$, $V(t,\ 0)=C(t)$ 인 미분가능한 넘기기 $V:[\alpha,\ \beta]\times J\to M$ 을 C 의 변동, $V(\alpha,\ \varepsilon)=C(\alpha)$, $V(\beta,\ \varepsilon)=C(\beta)$ 라고 하면 V 를 C 의 고유변동이라고 한다.

한편 식 (6)으로 정의되는 사영공형반대칭접속 ∇ 는 임의의 $X,\ Y,\ Z\in TM$ 에 대하여

$$\nabla_Z g(X,\ Y)=2\pi(Z)g(X,\ Y),\ T(X,\ Y)=\pi(Y)X-\pi(X)Y$$

를 만족시키는 접속이다. 여기서 $\pi(Z)$ 는 참형식이다.

이 접속과 동등한 공형반대칭접속 $\overline{\nabla}$ 는

$$\overline{\nabla}_Z\bar{g}(X,\ Y)=0,\ \overline{T}(X,\ Y)=\pi(Y)X-\pi(X)Y \tag{10}$$

를 만족시키는 접속이다. 여기서 $\bar{g}(X,\ Y)=e^{-2\sigma}g(X,\ Y)$, $d\sigma=\pi$ 이다.

리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 경로 C 의 변동에 대한 길이는

$$L(\varepsilon)=\int_\alpha^\beta\| X(t,\ \varepsilon)\| dt \tag{11}$$

이다. 여기서 $\| X(t,\ \varepsilon)\|=g(X,\ X)^{1/2}$ 이며 $X(t,\ \varepsilon)$ 은 변동 V 의 접벡토르이다.

정리 3에 의하여 C가 $\overline{\nabla}$ 에 관한 측지선이면 $\| X(t,\ \varepsilon)\|_{\varepsilon=0}=1$ 이고 식 (7)에 의하여

$$Z<X,\ Y>=\overline{\nabla}_Z X+<X,\ \overline{\nabla}_Z Y>$$

이다. 여기서 $<X,\ Y>=\bar{g}(X,\ Y)$ 이다.

정리 4 $C:[\alpha,\ \beta]\to M$ 을 사영공형반대칭접속 ∇ 에 따르는 측지선, $V:[\alpha,\ \beta]\times J\to M$ 을 C 의 고유변동, $X,\ Y\in TV$ 를 $X=V_kD_2$, $Y=V_kD_2$ $\left(D_1=\frac{\partial}{\partial t},\ D_2=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right)$ 라고 하자.

만일 Y가 $<Y, X>|_{\varepsilon=0}=0$, $\nabla_{D_1}Y|_{\varepsilon=0}=0$, $\nabla_{D_2}Y|_{\varepsilon=0}=0$, $\nabla_{D_1}Y|_\alpha=Y_\beta=0$이면

$$L'(0)=0\,,\quad L''(0)=\int_\alpha^\beta \| d\sigma(X)Y+d\sigma(Y)X\|^2\Big|_{t=0}dt\ge 0\,.$$

증명 먼저 $L'(0)$을 고찰하자.

식 (11)에 의하여 $L'(0)=\int_\alpha^\beta D_2\|X\||_{\varepsilon=0}dt=\int_\alpha^\beta D_2<X,\ X>^{1/2}\Big|_{\varepsilon=0}dt=\int_\alpha^\beta \left.\frac{<\overline{\nabla}_{D_2}X,\ X>}{\|X\|}\right|_{\varepsilon=0}dt\,.$

$[D_1,\ D_2]=0$이므로 식 (10)으로부터

$$T(X,\ Y)=\nabla_{D_1}Y-\nabla_{D_2}X=\pi(Y)X-\pi(X)Y=d\sigma(Y)X-d\sigma(X)Y\,.$$

따라서 $\overline{\nabla}_{D_2}X=\overline{\nabla}_{D_1}Y-d\sigma(Y)X+d\sigma(X)Y$이므로

$$L'(0)=\int_\alpha^\beta \left.\frac{<\overline{\nabla}_{D_1}Y,\ X>-d\sigma(Y)<X,\ X>+d\sigma(X)<Y,\ X>}{\|X\|}\right|_{\varepsilon=0}dt\,. \tag{12}$$

정리의 가정에 의하여 $\|X\||_{\varepsilon=0}=1$, $\overline{\nabla}_{D_1}Y|_{\varepsilon=0}=0$이고 $<Y,\ X>|_{\varepsilon=0}=0$이므로

$$L'(0)=-\int_\alpha^\beta d\sigma(Y)|_{\varepsilon=0}\,dt=-\int_\alpha^\beta \left.\frac{d\sigma(Y)}{dt}\right|_{\varepsilon=0}dt=-\sigma(X)\Big|_\alpha^\beta=\sigma(Y|_\alpha)-\sigma(Y|_\beta)=0\,.$$

따라서 $L'(0)=0$이 증명된다.

다음으로 $L''(0)$을 고찰하자.

식 (12)를 리용하면 다음과 같다.

$$L''(0)=\int_\alpha^\beta D_2\left.\left(\frac{<\overline{\nabla}_{D_1}Y,\ X>-\pi(Y)<X,\ X>+\pi(X)<Y,\ X>}{\|X\|}\right)\right|_{\varepsilon=0}dt=$$

$$=\int_\alpha^\beta\left[\frac{D_2(<\overline{\nabla}_{D_1}Y,\ X>-\pi(Y)<X,\ X>+\pi(X)<Y,\ X>)}{\|X\|}-\right. \tag{13}$$

$$\left.\left.-\frac{(<\overline{\nabla}_{D_1}Y,\ X>-\pi(Y)<X,\ X>+\pi(X)<Y,\ X>)^2}{\|X\|^3}\right]\right|_{\varepsilon=0}dt$$

정리 2로부터

$D_2<\overline{\nabla}_{D_1}Y,\ X>=<\overline{\nabla}_{D_2}\overline{\nabla}_{D_1}Y,\ X>+<\overline{\nabla}_{D_1}Y,\ \overline{\nabla}_{D_2}X>$, $\overline{R}(X,\ Y)Y=\overline{\nabla}_{D_1}\overline{\nabla}_{D_2}Y-\overline{\nabla}_{D_2}\overline{\nabla}_{D_1}Y$ 이므로 $<\overline{\nabla}_{D_1}\overline{\nabla}_{D_2}Y,\ X>=D_1<\overline{\nabla}_{D_1}\overline{\nabla}_{D_2}Y,\ X>-<\overline{R}(Y,\ X)X,\ Y>$이고 $\overline{T}(X,\ Y)=\overline{\nabla}_{D_1}Y-\overline{\nabla}_{D_2}Y$ 로부터 $<\overline{\nabla}_{D_1}Y,\ \overline{\nabla}_{D_2}Y>=D_1<\overline{\nabla}_{D_1}Y+T(Y,\ X),\ Y>-<\overline{\nabla}^2_{D_1}Y+\overline{\nabla}_{D_1}\overline{T}(Y,\ X),\ Y>$이므로

$D_2<\overline{\nabla}_{D_1}Y,\ X>=D_1(<\overline{\nabla}_{D_2}Y,\ X>+<\overline{\nabla}_{D_2}Y+\overline{T}(Y,\ X),Y>)-<\overline{\nabla}^2_{D_1}Y+\overline{\nabla}_{D_1}\overline{T}(Y,\ X)+\overline{R}(Y,\ X)X,\ Y>.$

정리의 가정을 리용하면 $\int_\alpha^\beta \left.\frac{D_2<\overline{\nabla}_{D_1}Y,\ X>}{\|X\|}\right|_{\varepsilon=0}dt=0$이다.

한편

$D_2(\pi(Y)<X,\ X>)=\pi(\overline{\nabla}_{D_2}Y)<X,\ X>+2\pi(Y)(<\overline{\nabla}_{D_1}Y,\ X>-\pi(Y)<X,\ X>+\pi(X)<Y,\ X>)$ 이다.

가정을 리용하면 다음과 같다.

$$D_2(\pi(Y)<X,\ X>)|_{\varepsilon=0}=-2\pi^2(Y)<X,\ X> \tag{14}$$

$$D_2(\pi(X)<Y,\ X>)=D_2(\pi(X))<Y,\ X>+\pi(X)D_2<Y,\ X>=$$
$$=\pi(\overline{\nabla}_{D_2}Y)<Y,\ X>+\pi(X)(<\overline{\nabla}_{D_2}Y\ ,\ X>+<Y,\ \overline{\nabla}_{D_2}Y>)=$$
$$=\pi(\overline{\nabla}_{D_2}Y)<Y,\ X>+\pi(X)(<\overline{\nabla}_{D_2}Y,\ X>+<\overline{\nabla}_{D_1}Y,\ Y>+\pi(X)<Y,\ Y>-\pi(X)<X,\ Y>)$$

$$D_2(\pi(X)<Y,\ X>)|_{\varepsilon=0}=\pi^2(X)<Y,\ Y> \tag{15}$$

$$(<\overline{\nabla}_{D_2}Y,\ X>-\pi(Y)<X,\ X>+\pi(X)<Y,\ X>)^2|_{\varepsilon=0}=\pi^2(Y)<X,\ X>|_{\varepsilon=0} \tag{16}$$

식 (14)－(16)을 식 (13)에 넣으면 식 $L''(0)=\int_{\alpha}^{\beta}\| d\sigma(X)Y+d\sigma(Y)X\|^2\Big|_{t=0}dt\geq 0$ 이 얻어진다.(증명끝)

정리 4는 리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 사영공형반대칭접속 ∇ 에 관한 측지선이 내부에 공액점을 가지지 않으면 최소길이를 가지는 곡선임을 보여준다.

참 고 문 헌

[1] Journal of **Kim Il Sung** University(Natural Science), 2, 2, 3, Juche102(2013).
[2] T. Kurose; Interdisciplinary Information Science, 8, 1, 89, 2002.
[3] P. Zhao; International Mathematical Form, 7, 341, 2008.
[4] Zhao Pei Biao et al.; Chinese Quarterly Journal of Mathematics, 17, 4, 49, 2001.
[5] A. P. Norden; Spaces with Affine Connection, Nauka, 2～231, 1976.
[6] S. B. Edgar; Class. Quantum. Grav., 10, 2545, 1993.
[7] F. Critchley et al.; Journal of Statistical Planning and Inference, 102, 229, 2002.

주체103(2014)년 2월 5일 원고접수

Some Properties of Projective-Conformal Semi-Symmetric Connection in a Riemannian Manifold

Ho Tal Yun, Pak Pom I

We newly defined projective conformal semi-symmetric connection that is protectively conformably equivalent to Levi-Civita connection in a Riemannian manifold, and discovered some properties of it.

Key word: projective conformal semi-symmetric connection