김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체106(2017)년 제63권 제6호 Vol. 63 No. 6 JUCHE106(2017).

시간의존결수를 가지는 사전실시하강기대선택권의 변분부등식의 양적계차도식의 성질

오형철, 장성건

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《기초과학은 과학기술강국을 떠받드는 주추입니다. 기초과학이 든든해야 나라의 과학기술이 공고한 토대우에서 끊임없이 발전할수 있습니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 40페지)

유럽식선택권과는 달리 사전실시선택권의 가격모형은 그자체가 비선형모형이고 풀이표시식을 가지지 않으며 따라서 리산적인 근사계산방법이 중요한 풀이법으로 되고있다.

기초자산가격이 기하브라운운동에 따를 때 유럽식선택권의 2분나무법에 의한 가격은 대응되는 블랙－숄즈모형에 의한 가격에로 수렴한다.

선행연구[5]에서는 유럽식선택권의 2분나무법이 블랙－숄즈방정식의 특수한 양적계차도식과 동등하다는것과 그것의 수렴성을 밝혔다.

선행연구[3]에서는 사전실시선택권의 2분나무법에 의한 가격의 련속모형의 풀이에로의 수렴성을 확률적방법으로 론의하였다.

선행연구[6]에서는 사전실시상승기대선택권에 대한 2분나무법에 의한 가격의 수렴성을 편미분방정식의 점성풀이리론을 리용하여 증명하였다.

선행연구[4]에서는 사전실시바구니선택권과 리차선택권을 2분나무법으로 연구하였다.

또한 선행연구[5]에서는 시간의존결수를 가지는 경우 유럽식선택권가격의 련속모형을 제기하고 그 풀이공식인 일반화된 블랙－숄즈방정식을 주었다.

선행연구[8]에서는 시간의존결수를 가질 때 고계두값선택권의 가격공식을 리용하여 리산적인 계약위반정보를 가지는 채권가격을 연구하였다.

선행연구[7]에서는 시간의존결수를 가지며 자료들이 불련속인 블랙－숄즈방정식의 풀이의 성질을 연구하였다.

선행연구[2]에서는 리자률이 시간에 의존할 때의 유럽식선택권가격의 2분나무법을 연구하였고 선행연구[1]에서는 시간의존결수를 가지는 사전실시선택권2분나무모형에 의한 가격의 단조성을 연구하였다.

이 론문의 목적은 시간의존결수를 가지는 경우 사전실시하강기대선택권가격을 위한 변분부등식모형의 양적계차도식의 단조성과 근사최량실시경계의 성질을 구하는것이다.

론문에서는 적당한 시간분할방법을 찾고 그것에 기초한 양적계차도식에서 선택권가격이 시간변수에 관한 단조성을 만족시키기 위한 조건을 구하였다.

1. 사전실시선택권의 변분부등식모형의 양적계차도식

$r(t)$가 리자률, $q(t)$가 기초자산의 배당률, $\sigma(t)$가 기초자산가격의 파동률이라고 하자.

선택권의 생존구간 $[0,\ T]$를 N개의 구간 $0=t_0<t_1<t_2\cdots<t_N=T$로 분할하고

$$r_n=r(t_n),\ q_n=q(t_n),\ \sigma_n=\sigma(t_n),$$

$$\eta_n=1+q_n\Delta t_n,\ \ \rho_n=1+r_n\Delta t_n\ (\Delta t_n=t_{n+1}-t_n,\ \ n=0,\ 1,\ \cdots,\ N-1),$$

$$\theta_n=\frac{\rho_n/\eta_n-d}{u-d}$$

로 표시하자.

시간의존결수를 가지는 사전실시선택권의 변분부등식모형은 다음과 같다.

$$\left.\begin{array}{l}\min\left\{-\dfrac{\partial V}{\partial t}-\dfrac{\sigma^2(t)}{2}S^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2}-(r(t)-q(t))S\dfrac{\partial V}{\partial S}+rV,\ V-\psi\right\}=0,\ t\in(0,\ T),\ S\in(0,\ \infty)\\ V(T,\ S)=\psi(S),\ S\in(0,\ \infty)\end{array}\right\}\quad(1)$$

여기서 $\psi(S)=(S-E)^+$ (상승기대) 혹은 $\psi(S)=(E-S)^+$(하강기대)이다.

모형 (1)에 변환 $u(x,\ t)=V(S,\ t),\ S=e^x$을 실시하면 다음의 문제로 귀착된다.

$$\left.\begin{array}{l}\min\left\{-\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\sigma^2}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\left(r(t)-q(t)-\dfrac{\sigma^2(t)}{2}\right)\dfrac{\partial u}{\partial x}+r(t)u,\ u-\varphi\right\}=0,\ \ t>0,\ \ x\in(-\infty,\ \infty)\\ u(T,\ x)=\varphi(x),\ \ x\in(-\infty,\ \infty)\end{array}\right\}\quad(2)$$

여기서 $\varphi(x)=(e^x-E)^+$(상승기대) 혹은 $\varphi(x)=(E-e^x)^+$(하강기대)이다.

$\Sigma=\{-\infty<x<\infty,\ 0\le t\le T\}$ 우에서 그물격자를 구성한 다음 $c\in\boldsymbol{R},\ \Delta x>0$ 을 고정하고 $x_j=j\Delta x+c$, $0<\alpha\le 1$과 같이 놓고 시간분할점들을 다음과 같이 정의한다.

$$t_0=0,\ \Delta t_0=\frac{\alpha\Delta x^2}{\sigma^2(t_0)},\ \ t_1=t_0+\Delta t_0,\ \Delta t_1=\frac{\alpha\Delta x^2}{\sigma^2(t_1)},\ \cdots,\ t_n=t_{n-1}+\Delta t_{n-1},\ \Delta t_n=\frac{\alpha\Delta x^2}{\sigma^2(t_n)},\ \ n=0,1,2,\cdots$$

마지막 시간분할점은 $t_N=t_{N-1}+\Delta t_{N-1}\le T<t_{N+1}=t_N+\Delta t_N$과 같이 정한다.

그러면 $[0,\ T]$안에 속하는 시간분할점은 $t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_N$이다.

그물격자를 $Q_c=\{(t_n,\ x_j):x_j=j\Delta x+c,\ 0\le n\le N,\ \ j\in Z\}$와 같이 놓자.

$0<\underline{\sigma}\le\sigma(t)\le\overline{\sigma}$와 같이 가정한다.

이때 $\Delta x\to 0$이면 $N\to\infty$이고 $0\le T-t_N\le\Delta t_N\le\alpha\Delta x^2/\underline{\sigma}^2\to 0$이다.

$u_j^n=u(t_n,\ j\Delta x+c)$는 마디점 $(t_n,\ j\Delta x+c)$에서의 근사값이고 $\varphi_j=\varphi(j\Delta x+c)$라고 하자.

문제 (2)에서 시간변수에 관해서는 전진계차비를, 공간변수에서는 중심계차비를 리용하면 다음의 식이 성립된다.

$$\min\left\{-\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}-\frac{\sigma^2(t_n)}{2}\cdot\frac{u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2}-\right.$$
$$\left.-\left[r(t_n)-q(t_n)-\frac{\sigma^2(t_n)}{2}\right]\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x}+r(t_n)u_j^n,\ u_j^n-\varphi_j\right\}=0$$

이 식은 다음식과 동등하다.

$$u_j^n = \max\left\{\frac{1}{1+r_n\Delta t_n}\left\{\left(1-\frac{\sigma_n^2\Delta t_n}{\Delta x^2}\right)u_j^{n+1}+\frac{\sigma_n^2\Delta t_n}{\Delta x^2}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{\Delta x}{2\sigma_n^2}\left(r_n-q_n-\frac{\sigma_n^2}{2}\right)\right)u_{j+1}^{n+1}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\left(\frac{1}{2}-\frac{\Delta x}{2\sigma_n^2}\left(r_n-q_n-\frac{\sigma_n^2}{2}\right)\right)u_{j-1}^{n+1}\right]\right\},\ \varphi_j\right\}$$

여기서 $S_0=e^c$ 이라고 놓으면 φ_j 는 다음과 같다.

$$\varphi_j=(S_0e^{j\Delta x}-E)^+\ (\text{상승기대}),\ \varphi_j=(E-S_0e^{j\Delta x})^+\ (\text{하강기대})$$

Δt_n 의 정의로부터 $\alpha=\dfrac{\sigma_n^2\Delta t_n}{\Delta x^2}$, $a_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\Delta x}{2\sigma_n^2}\left(r_n-q_n-\dfrac{\sigma_n^2}{2}\right)$ 으로 놓으면

$$u_j^n=\max\{(1+r_n\Delta t_n)^{-1}\{(1-\alpha)u_j^{n+1}+\alpha[a_nu_{j+1}^{n+1}+(1-a_n)u_{j-1}^{n+1}]\},\ \varphi_j\}. \tag{3}$$

t_N 시각 가격은 다음과 같이 주어진다.

$$u_j^N=\varphi_j,\ j\in Z \tag{4}$$

특히 $\alpha=1$ 이라고 놓으면 즉 $\dfrac{\sigma_n^2\Delta t_n}{\Delta x^2}=1$ 이면 $\sigma_n^2\Delta t_n=\Delta x^2$, $\Delta x=\sigma_n\sqrt{\Delta t_n}$ 이고

$$u_j^n=\max\{(1+r_n\Delta t_n)^{-1}[a_nu_{j+1}^{n+1}+(1-a_n)u_{j-1}^{n+1}],\ \varphi_j\}. \tag{5}$$

이때 식 (3), (4) 또는 식 (5), (4)로부터 u_j^n, $n=N-1,\ \cdots,\ 1,\ 0$ 들이 구해진다.

2. 선택권가격의 단조성과 최량실시경계의 존재성

정리 1 (자산가격에 관한 단조성) $0<\alpha\le 1$, $\left|\dfrac{(r_n-q_n-\sigma_n^2/2)\Delta x}{\sigma_n^2}\right|<1$ 이라고 할 때 U_j^n 이 식 (3)으로 주어지는 양적계차도식이면 다음의 결과가 성립된다.

① $\varphi_j=(S_0e^{j\Delta x}-E)^+$ 이면 $U_j^n\le U_{j+1}^n$ (상승기대)이 성립된다.

② $\varphi_j=(E-S_0e^{j\Delta x})^+$ 이면 $U_j^n\ge U_{j+1}^n$ (하강기대)이 성립된다.

증명 정리의 가정으로부터 $a_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\Delta x(r_n-q_n-\sigma_n^2/2)}{2\sigma_n^2}\Rightarrow 0<a_n<1$ 이 성립된다.

① $U_j^N=\varphi_j=(S_0e^{j\Delta x}-E)^+\le(S_0e^{(j+1)\Delta x}-E)^+=\varphi_{j+1}=U_{j+1}^N$

$U_j^{k+1}\le U_{j+1}^{k+1}$ 이라고 가정하면 다음과 같다.

$$U_j^k=\max\left\{\frac{(1-\alpha)U_j^{k+1}+\alpha(a_kU_{j+1}^{k+1}+(1-a_k)U_{j-1}^{k+1})}{\rho_k},\ \varphi_j\right\}\le$$

$$\le\max\left\{\frac{(1-\alpha)U_{j+1}^{k+1}+\alpha(a_kU_{j+2}^{k+1}+(1-a_k)U_j^{k+1})}{\rho_k},\ \varphi_{j+1}\right\}=U_{j+1}^k$$

②도 마찬가지로 증명된다.(증명끝)

따름(유계성) $0 \le U_j^n \le e^{j\Delta x+c}$ (상승기대), $0 \le U_j^n \le E$ (하강기대)

보조정리 1 $r(t)/\sigma^2(t)$ 가 t －증가이면 $\rho_n \le \rho_{n+1}$ 이, $q(t)/\sigma^2(t)$ 가 t －감소이면 $\eta_n \ge \eta_{n+1}$ 이, $r(t)/\sigma^2(t)$ 가 t －증가, $q(t)/\sigma^2(t)$ 가 t －감소이고 Δt_n 이 충분히 작으면 $\rho_n/\eta_n \le \rho_{n+1}/\eta_{n+1}$, $\theta_n \le \theta_{n+1}$ 이 성립된다.

보조정리 2(불룩1차결합의 성질) $A \le B$, $0 \le \alpha \le \beta \le 1 \Rightarrow \alpha A+(1-\alpha)B \ge \beta A+(1-\beta)B$

정리 2 $\varphi_j=(E-S_0e^{j\Delta x})^+$ 일 때 정리 1의 가정이 성립되고 $r(t)/\sigma^2(t)$ 가 t －증가, $q(t)/\sigma^2(t)$ 가 t －감소하면 $U_j^n \ge U_j^{n+1}$, $j \in Z$, $n=0, \cdots, N-1$ 이 성립된다.

증명 $n=N-1$ 일 때 사전실시선택권가격의 성질로부터 $U_j^{N-1} \ge \varphi_j = U_j^N$, $j \in Z$ 이다.

귀납적으로 $U_j^{k+1} \ge U_j^{k+2}$, $j \in Z$ 가 성립된다고 가정하자.

가정으로부터 $\rho_n \le \rho_{n+1}$ 이 성립되고

$$U_j^k = \max\left\{\frac{(1-\alpha)U_j^{k+1}+\alpha(a_kU_{j+1}^{k+1}+(1-a_k)U_{j-1}^{k+1})}{\rho_k},\ \varphi_j\right\} \ge$$

$$\ge \max\left\{\frac{(1-\alpha)U_j^{k+2}+\alpha(a_kU_{j+1}^{k+2}+(1-a_k)U_{j-1}^{k+2})}{\rho_{k+1}},\ \varphi_j\right\}.$$

$a_n=1/2+\Delta x(r_n/\sigma_n^2-q_n/\sigma_n^2-1/2)/2$ 이므로 $a_n \le a_{n+1}$ 이 성립된다.

하강기대이므로 $U_{j-1}^{k+2} \ge U_{j+1}^{k+2}$, $a_k \le a_{k+1}$ 임을 고려하면 보조정리 2로부터

$$a_{k+1}U_{j+1}^{k+2}+(1-a_{k+1})U_{j-1}^{k+2} \le a_kU_{j+1}^{k+2}+(1-a_k)U_{j-1}^{k+2}$$

이므로 이로부터

$$U_j^k \ge \max\{[(1-\alpha)U_j^{k+2}+\alpha(a_{k+1}U_{j+1}^{k+2}+(1-a_{k+1})U_{j-1}^{k+2})]/\rho_{k+1},\ \varphi_j\} = U_j^{k+1}$$

이 성립된다.(증명끝)

정리 3(근사최량실시경계의 존재성) 정리 2의 가정밑에서 임의의 $0 \le n \le N-1$ 에 대하여 어떤 j_n 이 있어서 $j \le j_n$ 이면 $U_j^n = \varphi_j$, $j=j_n+1$ 이면 $U_j^n > \varphi_j$, $j \ge j_n+2$ 이면 $U_j^n \ge \varphi_j$, $j_0 \le j_1 \le \cdots \le j_{N-1}$ 이 성립된다.(증명생략)

정리 4 마감시각의 근사최량실시경계 j_{N-1} 은 다음의 범위에 있다.

$$\ln\min(E,\ r_{N-1}/q_{N-1}\cdot E)-2\Delta x \le j_{N-1}\Delta x+c \le \ln\min(E,\ r_{N-1}/q_{N-1}\cdot E).$$

증명 정리 3에 의하여 마감시각근방의 최량실시경계 j_{N-1} 의 존재성이 증명된다. 그에 의하면 $k_1=\max\{j: E-e^{j\Delta x+c}>0\}$ 일 때 모든 $j \le k_1-1$ 에 대하여

$$\varphi_j = E-e^{j\Delta x+c} = E-S_0e^{j\Delta x+c}\ (S_0=e^c),\ \varphi_{j-1},\ \varphi_j,\ \varphi_{j+1}>0.$$

$\psi_j=[(1-\alpha)\varphi_j+\alpha(a_{N-1}\varphi_{j+1}+(1-a_{N-1})\varphi_{j-1})]/\rho_{N-1}$ 이라고 놓자.

모든 $j \le k_1-1$ 에 대하여 $\psi_j \le \varphi_j$ 인 경우 $j_{N-1}=k_1-1$ 또는 $j_{N-1}=k_1$ 이다. 따라서 $E-e^{j_{N-1}\Delta x+c}>0$, $E-e^{(j_{N-1}+2)\Delta x+c} \le 0$ 이 성립되고 $j_{N-1}\Delta x+c<\ln E$, $j_{N-1}\Delta x+c+2\Delta x \ge \ln E$ 즉 $\ln E-2\Delta x \le j_{N-1}\Delta x+c<\ln E$ 가 성립된다.

$\exists j\ (j \le k_1-1)$, $\psi_j>\varphi_j$ 일 때 정리 3에 의하여 $j_{N-1}=\max\{j \le k_1-1: \psi_j-\varphi_j \le 0\}$ 이다.

이제 $\psi_j-\varphi_j\ (j \le k_1-1)$ 를 다른 방법으로 계산하자.

a_n의 정의에 따라

$$a_n e^{\Delta x}+(1-a_n)e^{-\Delta x}=\frac{1}{2}e^{\Delta x}+\frac{\Delta x}{2}e^{\Delta x}\left(\frac{r_n}{\sigma_n^2}-\frac{q_n}{\sigma_n^2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}e^{-\Delta x}-\frac{\Delta x}{2}e^{-\Delta x}\left(\frac{r_n}{\sigma_n^2}-\frac{q_n}{\sigma_n^2}-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=1+\frac{r_n-q_n}{\sigma_n^2}\Delta x^2+O(\Delta x^4)$$

이 나온다. 이것을 고려하면 $j\le k_1-1$일 때

$$\psi_j-\varphi_j=$$

$$=\{(1-\alpha)(E-e^{j\Delta x+c})+\alpha[a_{N-1}(E-e^{(j+1)\Delta x+c})+(1-a_{N-1})(E-e^{(j-1)\Delta x+c})]\}/\rho_{N-1}-(E-e^{j\Delta x+c})=$$

$$=\frac{1}{\rho_{N-1}}\frac{\sigma_n^2\Delta t_n}{\Delta x}\left\{(q_{N-1}e^{j\Delta x+c}-r_{N-1}E)\frac{\Delta x}{\sigma_{N-1}^2}+O(\Delta x^4)\right\}$$

이 성립되며 $E>e^{j\Delta x+c}$이므로 $q_{N-1}\le r_{N-1}$이면

$$r_{N-1}E>q_{N-1}e^{j\Delta x+c}\Rightarrow q_{N-1}e^{j\Delta x+c}-r_{N-1}E<0,\quad \forall j\Rightarrow \psi_j<\varphi_j .$$

이로부터 $\psi_j>\varphi_j$인 $j\le k_1-1$이 있다면 $q_{N-1}>r_{N-1}$이 성립된다.

이때 $j_{N-1}=\max\{j\le k_1-1:\psi_j-\varphi_j\le 0\}=\max\{j\le k_1-1:q_{N-1}e^{j\Delta x+c}\le r_{N-1}E\}$가 성립되며 따라서 $j_{N-1}\Delta x+c\le \ln(r_{N-1}/q_{N-1})E$이다.

또한 $j=j_{N-1}+1$이면 $q_{N-1}e^{j\Delta x+c}>r_{N-1}E$이므로 $j_{N-1}\Delta x+c+\Delta x>\ln(r_{N-1}/q_{N-1})E$가 성립된다. 따라서 $\ln(r_{N-1}/q_{N-1})E-\Delta x<j_{N-1}\Delta x+c\le \ln(r_{N-1}/q_{N-1})E$이다.(증명끝)

정의 Δx를 고정할 때 근사최량실시경계 $x=\rho_{\Delta x}(t)$를 다음과 같이 정의한다.

$$\rho_{\Delta x}(t)=\frac{t-t_n}{t_{n+1}-t_n}(j_{n+1}\Delta x+c)+\frac{t_{n+1}-t}{t_{n+1}-t_n}(j_n\Delta x+c),\ t\in[t_n,\ t_{n+1}],\ n=0,\cdots,\ N-2$$

정리 4로부터 다음의 사실이 성립된다.

정리 5 $\rho_{\Delta x}(t_{N-1})\in\left[\ln\min\left(E,\ \frac{r_{N-1}}{q_{N-1}}E\right)-2\Delta x,\ \ln\min\left(E,\ \frac{r_{N-1}}{q_{N-1}}E\right)\right]$이며 $\rho_{\Delta x}(t)$는 단조증가한다.

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보(자연과학), 63, 4, 3, 주체106(2017).

[2] 오형철; 조선수학학회지, 4, 46, 주체97(2008).

[3] K. Amin et al.; Mathematical Finance, 4, 4, 289, 1994.

[4] S. A. Borovkova et al.; The Journal of Derivatives, 2, 29, 2012.

[5] L. S. Jiang; Modeling and Methods of Option Pricing, World Scientific, 24～53, 2005.

[6] L. S. Jiang et al.; Journal of Computational Mathematics, 22, 3, 371, 2004.

[7] O Hyong-chol et al.; Jour. Diff. Equat., 260, 4, 3151, 2016.

[8] O Hyong-chol et al.; Malaya Journal of Matematik, 2, 4, 330, 2014.

주체106(2017)년 2월 5일 원고접수

Properties of Explicit Difference Scheme of Variational Inequalities for American Put Options with Time Dependent Coefficients

O Hyong Chol, Jang Song Gon

This paper studies the monotonicity of numerical solutions, existence and monotonicity of approximated optimal exercise boundary by explicit difference scheme of the variational inequalities for American put options with time dependent coefficients.

Key words: American put option, variational inequality, explicit difference scheme