김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체103(2014)년 제60권 제6호 Vol. 60 No. 6 JUCHE103(2014).

경계조건을 가진 볼테라형확률 미분방정식의 수값풀이

김천을, 기룡수

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 지적하시였다.

《선진과학기술을 받아들이기 위한 사업을 적극적으로 벌려야 하겠습니다.

선진과학기술을 받아들이는것은 나라의 과학기술을 빨리 발전시키기 위한 중요한 방도의 하나로 됩니다.》(《**김정일**선집》 제15권 증보판 499～500페지)

선행연구들에서는 초기조건을 가진 볼테라형확률미분방정식의 풀이의 유일존재성[2], 선형경계조건을 가진 확률미분방정식의 수값풀이[3], 경계값문제의 풀이의 유일존재성[1]에 대하여 고찰되였다.

론문에서는 경계조건을 가진 볼테라형확률적분방정식

$$\begin{cases} X_t = X_0 + \int_0^t f(t,\ r,\ X_r)dr + \int_0^t g(t,\ r)dW_r,\ t \in [0,\ 1] \\ X_0 = \mathrm{E}\psi(X_1) \end{cases} \tag{1}$$

의 근사도식의 구성과 그 수렴성에 대하여 고찰하였다.

1. 초기값문제의 근사풀이와 그 성질

여기서는 임의의 초기조건 x에 관한 볼테라형확률적분방정식

$$\varphi_t(x) = x + \int_0^t f(t,\ r,\ \varphi_r(x))dr + \int_0^t g(t,\ r)dW_r,\ t \in [0,\ 1] \tag{2}$$

의 근사도식을 구성하고 그 수렴성을 평가하였다.

$\varphi_t(x)$는 초기조건 x에 관계되는 풀이이며 함수 f와 g에 대하여 다음의 조건들이 만족된다고 가정한다.

① $\exists K_1 > 0,\ \forall t,\ s \in [0,\ 1],\ \forall x,\ y \in R,\ |f(t_1,\ s_1,\ x) - f(t_2,\ s_2,\ y)| \le K_1(|t_1 - t_2| + |s_1 - s_2| + |x - y|)$

② $M := \sup\limits_{s,\ t \in [0,\ 1]} |f(t,\ s,\ 0)| < \infty$

③ $L := \sup\limits_{s,\ t \in [0,1]} |g(t,\ s)| < \infty$

④ $\exists K_2 > 0,\ \forall t_1,\ t_2,\ s_1,\ s_2 \in [0,\ 1],\ |g(t_1,\ s_1) - g(t_2,\ s_2)| \le K_2(|t_1 - t_2| + |s_1 - s_2|)$

임의의 분할 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$에 대하여

$$n_t := \max\{n : t_n \le t\},\ \delta := \{t_{i+1} - t_i\}$$

로 정의하고 방정식 (2)의 근사도식을 다음과 같이 구성할수 있다.

$$\hat{\varphi}_{t_n}(x)=x+\int_0^{t_n} f(t_n,\ t_{n_r},\ \hat{\varphi}_{t_{n_r}}(x))dr+\int_0^{t_n} g(t_n,\ t_{n_r}))dW_r=x+\sum_{i=0}^{n-1} f(t_n,\ t_i,\ \hat{\varphi}_{t_i}(x))\Delta t_i+\sum_{i=0}^{n-1} g(t_n,\ t_i)\Delta W_{t_i} \tag{3}$$

정리 1 함수 f가 조건 ①, ②를 만족시키는 가측함수이고 함수 g가 조건 ③, ④를 만족시키는 가측함수이면 적당한 $K>0$이 있어서 $\mathrm{E}|x|<\infty$일 때 다음의 식이 성립된다.

$$\sup_{s\in[0,\ t]} \mathrm{E}|\hat{\varphi}_{t_{n_s}}(x)-\varphi_s(x)|^2 \le K\delta,\ \ t\in[0,\ 1]$$

증명 먼저 $\mathrm{E}|\hat{\varphi}_{t_{n_s}}(x)-\varphi_s(x)|^2$을 평가하자.

$$\mathrm{E}|\hat{\varphi}_{t_{n_s}}(x)-\varphi_s(x)|^2\le$$

$$\le \mathrm{E}\left|\int_0^{t_{n_s}} f(t_{n_s},\ t_{n_r},\ \hat{\varphi}_{t_{n_r}}(x))dr+\int_0^{t_{n_s}} g(t_{n_r},\ t_{n_r}))dW_r-\int_0^s f(t,\ r,\ \varphi_r(x))dr-\int_0^s g(t,\ r)dW_r\right|^2 \le$$

$$\le 4\left\{\mathrm{E}\left|\int_0^{t_{n_s}}[f(t_{n_s},\ t_{n_r},\ \hat{\varphi}_{t_{n_r}}(x))-f(t,\ r,\ \varphi_r(x))]dr\right|^2+\mathrm{E}\left|\int_0^{t_{n_s}}[g(t_{n_s},\ t_{n_r})-g(t,\ r)]dW_r\right|^2+\right. \tag{4}$$

$$\left.+\mathrm{E}\left|\int_{t_{n_s}}^s f(t,\ r,\ \varphi_r(x))dr\right|^2+\mathrm{E}\left|\int_{t_{n_s}}^s g(t,\ r)dW_r\right|^2\right\}=4(I_1+I_2+I_3+I_4)$$

로 되는데 마지막등식의 오른변을 매 항별로 평가하자.

조건 ①－④와 꼬쉬－부냐꼽쓰끼부등식, 확률적분의 성질들을 리용하면

$$I_1=\mathrm{E}\left|\int_0^{t_{n_s}}[f(t_{n_s},\ t_{n_r},\ \hat{\varphi}_{t_{n_r}}(x))-f(t,\ r,\ \varphi_r(x))]dr\right|^2 \le 8\delta^2K_1^2+2K_1^2\int_0^{t_{n_s}}\mathrm{E}|\hat{\varphi}_{t_{n_r}}(x)-\varphi_r(x)|^2\,dr,$$

$$I_2=\mathrm{E}\left|\int_0^{t_{n_s}}[g(t_{n_s},\ t_{n_r})-g(t,\ r)]dW_r\right|^2 \le 4K_2^2\delta^2,\ \ I_3=\mathrm{E}\left|\int_{t_{n_s}}^s f(t,\ r,\ \varphi_r(x))dr\right|^2 \le M^2\delta^2,$$

$$I_4=\mathrm{E}\left|\int_{t_{n_s}}^s g(t,\ r)dW_r\right|^2 \le L^2\delta$$

을 얻게 되는데 이것을 식 (4)에 대입하면 다음과 같다.

$$\mathrm{E}|\hat{\varphi}_{t_{n_s}}(x)-\varphi_s(x)|^2 \le K\delta+K'\int_0^{t_{n_s}}\mathrm{E}|\hat{\varphi}_{t_{n_r}}(x)-\varphi_r(x)|^2\,dr \tag{5}$$

이때 $Z(t)=\sup_{s\in[0,\ t]}\mathrm{E}|\hat{\varphi}_{t_{n_s}}(x)-\varphi_s(x)|^2$으로 놓으면 식 (5)로부터 $Z(t)\le K\delta+K'\int_0^t Z(r)dr$가 얻어지며 여기에 그론왈부등식을 적용하면 정리의 결론이 얻어진다.(증명끝)

근사도식 (3)의 풀이 $\hat{\varphi}_{t_n}(x)$에 대하여 다음의 성질들이 성립된다.

보조정리 1 $f,\ g$가 조건 ①－④를 만족시키는 가측함수들이면 근사방정식

$$\begin{cases} \hat{\varphi}_{t_n}(x) = x + \int_0^{t_n} f(t_n,\ t_{n_r},\ \hat{\varphi}_{t_{n_r}}(x))dr + \int_0^{t_n} g(t_n,\ t_{n_r})dW_r,\ \ t_n \in [0,\ 1],\ \ n = 1, \cdots, m \\ x = \mathrm{E}\,\psi(\hat{\varphi}_1(x)) \end{cases} \tag{6}$$

의 풀이 $\hat{\varphi}_{t_n}(x)$ 는 적당한 $K_1 > 0$ 이 있어서 임의의 $t_n \in [0,\ 1]$ 과 임의의 $x_1,\ x_2 \in R$ 에 대하여

$$|x_1 - x_2|e^{-K_1} \le |\hat{\varphi}_{t_n}(x_1) - \hat{\varphi}_{t_n}(x_2)| \le |x_1 - x_2|e^{K_1} \tag{7}$$

을 만족시킨다.

증명 조건 ①에 의하여

$$|\hat{\varphi}_{t_n}(x_1) - \hat{\varphi}_{t_n}(x_2)| \le |x_1 - x_2| + K_1\int_0^{t_n} |\hat{\varphi}_{t_{n_r}}(x_1) - \hat{\varphi}_{t_{n_r}}(x_2)|dr$$

로 되고 $Z(t) = \sup\limits_{t_n \in [0,\ t]} \mathrm{E}|\hat{\varphi}_{t_n}(x_1) - \hat{\varphi}_{t_n}(x_2)|$ 로 놓으면

$$Z(0) = |x_1 - x_2|,\ \ Z(t) \le Z(0) + K_1\int_0^t Z(r)dr$$

로 되는데 여기에 그론왈－베르만부등식을 적용하면 식 (7)이 얻어진다.(증명끝)

보조정리 2 f 가 조건 ①, ②를 만족시키는 가측함수이고 g 가 조건 ③, ④를 만족시키는 가측함수이면 근사방정식 (6)의 풀이 $\hat{\varphi}_{t_n}(x)$ 에 대하여 다음의 식들이 성립된다.

i) $\sup\limits_{t_n < t} \mathrm{E}(|\hat{\varphi}_{t_n}(x)|) \le (|x| + M + L)e^{K_1},\ \ t \in [0,\ 1]$

ii) $\sup\limits_{t_n < t} \mathrm{E}(|\hat{\varphi}_{t_n}(x)|^2) \le 3(|x|^2 + 2M^2 + L^2)e^{6K_1^2},\ \ t \in [0,\ 1]$

증명 i) 보조정리 1의 증명에서와 류사하게 절대값의 성질과 조건 ①－④, 확률적분의 성질을 리용하면

$$\mathrm{E}|\hat{\varphi}_{t_n}(x)| \le |x| + \mathrm{E}\left|\int_0^{t_n} f(t_n,\ t_{n_r},\ \hat{\varphi}_{t_{n_r}}(x))dr\right| + \mathrm{E}\left(\left|\int_0^{t_n} g(t_n,\ t_{n_r})dW_r\right|\right) \le$$

$$\le |x| + \int_0^{t_n} \mathrm{E}|\hat{\varphi}_{t_{n_r}}(x)|dr + Mt + \left(\int_0^{t_n} (g(t,\ t_{n_r}))^2 dr\right)^{1/2} \le$$

$$\le (|x| + M + L) + K_1\int_0^{t_n} \mathrm{E}|\hat{\varphi}_{t_{n_r}}(x)|dr$$

를 얻게 되는데 이 식은 $Z(t) = \sup\limits_{t_n \le t} \mathrm{E}|\hat{\varphi}_{t_n}(x)|$ 로 놓으면

$$Z(t) \le (|x| + M + L) + K_1\int_0^t Z(r)dr$$

와 같으며 여기에 그론왈부등식을 적용하면 다음의 식이 얻어진다.

$$Z(t) \le (|x| + M + L)\left(1 + K_1\int_0^t e^{K_1(t-r)}dr\right) = (|x| + M + L)e^{K_1}$$

ii) 여기서도 i)의 증명에서와 류사하게 절대값의 성질과 조건 ①－③, 확률적분의 성질

들을 리용하면

$$\mathrm{E}|\hat{\varphi}_{t_n}(x)|^2 \le \mathrm{E}\left| x + \int_0^{t_n} f(t_n,\ t_{n_r},\ \hat{\varphi}_{t_{n_r}}(x))dr + \int_0^{t_n} g(t_n,\ t_{n_r})dW_r \right|^2 \le$$

$$\le 3\left\{ |x|^2 + \mathrm{E}\left| \int_0^{t_n} [f(t_n,\ t_{n_r},\ \hat{\varphi}_{t_{n_r}}(x)) - f(t_n,\ t_{n_r},\ 0) + f(t_n,\ t_{n_r},\ 0)]dr \right|^2 + \mathrm{E}(\int_0^{t_n} [g(t_n,\ t_{n_r})]^2 dr \right\} \le$$

$$\le 3\left\{ |x|^2 + 2K_1^2 \int_0^{t_n} \mathrm{E}|\hat{\varphi}_{t_{n_r}}(x)|^2 dr + 2M^2 + L^2 \right\} \le 3(|x|^2 + 2M^2 + L^2) + 6K_1^2 \int_0^{t_n} \mathrm{E}|\hat{\varphi}_{t_{n_r}}(x)|^2 dr$$

를 얻을수 있고 $Z(t) = \sup_{t_n \le t} \mathrm{E}|\hat{\varphi}_{t_n}(x)|^2$ 으로 놓으면 $Z(t) \le 3(|x|^2 + 2M^2 + L^2) + 6K_1{}^2 \int_0^t Z(r)dr$ 로 되며 여기에 그론왈부등식을 적용하면 ii)가 얻어진다.(증명끝)

2. 경계값조건을 가진 근사방정식

여기서는 조건 ⑤를 만족시키는 ψ 에 관한 경계값문제풀이의 근사도식을 구성하고 그 수렴성을 밝히게 된다.

방정식 (1)의 근사도식을 근사방정식 (6)과 같이 구성할수 있다.

정리 2 $f,\ g$ 가 조건 ①－④를 만족시키는 가측함수이며 함수 ψ 는 다음의 조건을 만족시키는 련속함수라고 하면 경계조건을 가진 근사방정식 (6)의 풀이는 유일존재한다.

⑤ $0 < \exists\eta < e^{-K_1},\ \forall x,\ y \in R,\ |\psi(x) - \psi(y)| \le \eta|x - y|$

증명 주어진 조건들밑에서 근사방정식

$$\hat{\varphi}_{t_n}(x) = x + \int_0^{t_n} f(t_n,\ t_{n_r},\ \hat{\varphi}_{t_{n_r}}(x))dr + \int_0^{t_n} g(t_n,\ t_{n_r})dW_r,\ t_n \in [0,\ 1],\ n = 1, \cdots, m$$

의 풀이는 유일존재하기때문에 경계조건 $x = \mathrm{E}\psi(\hat{\varphi}_1(x))$ 를 만족시키는 x 가 유일존재하면 그러한 x 는 분명히 근사방정식 (6)도 만족시키게 된다.

$x_n = \mathrm{E}\psi(\hat{\varphi}_1(x_{n-1})),\ n = 1, 2, \cdots$ 으로 정의하면

$$|x_n - x_{n-1}| = |\mathrm{E}(\psi(\hat{\varphi}_1(x_{n-1})) - \psi(\hat{\varphi}_1(x_{n-2})))| \le \eta|\mathrm{E}(\hat{\varphi}_1(x_{n-1}) - \hat{\varphi}_1(x_{n-2}))| \le$$

$$\le \eta e^{K_1}\mathrm{E}|x_{n-1} - x_{n-2}| \le \alpha\mathrm{E}|x_{n-1} - x_{n-2}|$$

가 얻어진다. 따라서 $|x_n - x_{n-1}| \le \alpha\mathrm{E}|x_{n-1} - x_{n-2}| \le \alpha^n\mathrm{E}|x_1 - x_0|$ 으로 된다.

그런데 조건 ⑤에 의하여 $0 \le \alpha = \eta e^{K_1} \le 1$ 이므로 $n \to \infty$ 일 때 $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}|x_n - x_{n-1}| = 0$ 이 성립된다. 즉 $\{x_n\}$ 은 기본렬로 된다.

한편 조건 ⑤에 의하여

$$|x_n| = |\mathrm{E}\psi(\hat{\varphi}_1(x_{n-1}))| = |\mathrm{E}(\psi(\hat{\varphi}_1(x_{n-1})) - \psi(0)) + \psi(0)\ \le\ \eta|\hat{\varphi}_1(x_{n-1})| + |\psi(0)|$$

으로 되고 $\mathrm{E}|x_0| < \infty$ 이면 $\mathrm{E}|\hat{\varphi}_t(x_0)| < \infty$ (거의)이고 ψ 는 련속함수이기때문에 $\mathrm{E}|x_n| < \infty$ (거의)이다. 따라서 $\{x_n\}$ 의 극한은 존재하며 그 극한을 $\hat{X}_0$ 이라고 하면 $\hat{X}_0 = \mathrm{E}\psi(\hat{\varphi}_1(\hat{X}_0))$ 이 성

립된다.(증명끝)

보조정리 3 함수 f, g가 조건 ①－④를 만족시키는 가측함수이고 ψ가 조건 ⑤를 만족시키는 련속함수라면 적당한 상수 $C>0$이 있어서 $\mathrm{E}|\hat{X}_0-X_0|\le C\delta^{1/2}$이 성립된다.

증명 조건 ⑤와 정리 1에 의하여

$$\mathrm{E}|\hat{X}_0-X_0|=\mathrm{E}|\mathrm{E}(\psi(\hat{\varphi}_1(\hat{X}_0))-\psi(\varphi_1(X_0)))|\le\eta\mathrm{E}|\mathrm{E}(\hat{\varphi}_1(\hat{X}_0)-\varphi_1(X_0))|\le$$

$$\le\eta\mathrm{E}|\hat{\varphi}_1(\hat{X}_0)-\varphi_1(\hat{X}_0)|+\eta\mathrm{E}|\varphi_1(\hat{X}_0)-\varphi_1(X_0)|\le$$

$$\le\eta\sqrt{K}\delta^{1/2}+\eta e^{K_1}\mathrm{E}|\hat{X}_0-X_0|=\eta\sqrt{K_1}\delta^{1/2}+\alpha\mathrm{E}|\hat{X}_0-X_0|$$

이고 $0<\alpha=\eta e^{K_1}<1$이므로 $\mathrm{E}|\hat{X}_0-X_0|\le\dfrac{\eta K_1}{1-\alpha}\delta^{1/2}=C\delta^{1/2}$으로 된다.(증명끝)

정리 3 보조정리 3의 조건들밑에서 적당한 상수 $K'>0$이 있어서

$$\sup_{t\in[0,\,1]}\mathrm{E}|\hat{\varphi}_{t_{n_t}}(\hat{X}_0)-\varphi_t(X_0)|\le K'\delta^{1/2}$$

이 성립된다.

증명 정리 1과 보조정리 3을 리용하면 다음의 식이 성립된다.

$$\sup_{t\in[0,\,1]}\mathrm{E}|\hat{\varphi}_{t_{n_t}}(\hat{X}_0)-\varphi_t(X_0)|\le\sup_{t\in[0,\,1]}\mathrm{E}|\hat{\varphi}_{t_{n_t}}(\hat{X}_0)-\varphi_t(\hat{X}_0)|+\sup_{t\in[0,\,1]}\mathrm{E}|\varphi_t(\hat{X}_0)-\varphi_t(X_0)|\le$$

$$\le K\delta^{1/2}+e^{K_1}\mathrm{E}|\hat{X}_0-X_0|\le K\delta^{1/2}+Ce^{K_1}\delta^{1/2}=(K+Ce^{K_1})\delta^{1/2}=K'\delta^{1/2}$$

(증명끝)

참 고 문 헌

[1] 김천을 등; 조선수학학회지, 1, 13, 주체102(2013).

[2] M. Berger et al.; J. Integral Equations, 2, 187, 1980.

[3] Wang Yan et al.; Northeast. Math. J., 23, 6, 541, 2007.

주체103(2014)년 2월 5일 원고접수

Numerical Solution of a Voltera Type SDE with Boundary Condition

Kim Chon Ul, Ki Ryong Su

We study the construction of approximation schema for a Voltera-type stochastic differential equation with boundary condition and consider its convergence.

Key word: Voltera-type stochastic differential equation