

LMI에 의한 관성바퀴흔들이의 PID조종기 설계의 한가지 방법

백수영, 허일건

선행연구[1-3]에서는 출력반결합(SOF)구조에 기초한 PID조종기설계방법을 제기하였다. 논문에서는 LMI수법을 리용하여 SOF구조에 기초한 PID조종기설계를 위한 한가지 반복LMI알고리즘을 제안하고 관성바퀴흔들이조종에 적용하여 효과성을 검증하였다.

1. PID조종기로부터 SOF조종기로의 변환

선형시불변체계

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (1)$$

에 대하여 다음과 같은 PID조종기를 생각하자.

$$u(t) = F_1 y(t) + F_2 \int_0^t y(\tau) d\tau + F_3 \frac{dy(t)}{dt} \quad (2)$$

여기서 $x(t) \in R^n$ 은 상태변수, $u(t) \in R^l$ 은 조종입력 혹은 외부섭동, $y(t) \in R^m$ 은 측정출력, A, B, C 는 해당하는 차수의 행렬 그리고 $F_1, F_2, F_3 \in R^{l \times m}$ 은 PID결수행렬이다.

이제 체계 (1)이 어떤 전달행렬의 최소실현이라고 가정하고 다음과 같은 변수변환을 취하자.

$$z_1 = x, \quad z_2 = \int_0^t y d\tau, \quad z = [z_1^T, z_2^T]^T$$

그러면 체계 (1)은 다음과 같이 변환된다.

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \dot{x} = Az_1 + Bu \\ \dot{z}_2 &= y = Cx = Cz_1 \end{aligned}$$

이것은 다시 다음식으로 쓸수 있다.

$$\dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}u, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

한편 체계 (1)과 z 의 정의를 결합하면 다음의 식을 얻을수 있다.

$$y = Cz_1 = [C \quad 0]z, \quad \int_0^t y d\tau = z_2 = [0 \quad I]z, \quad \frac{dy}{dt} = C\dot{x} = CAx + CBu = [CA \quad 0]z + CBu$$

그리고 $\bar{C}_1 = [C \quad 0]$, $\bar{C}_2 = [0 \quad I]$, $\bar{C}_3 = [CA \quad 0]$, $\bar{y}_i = \bar{C}_i z$, $i=1, 2, 3$ 으로 표시하면

$$u = F_1 \bar{y}_1 + F_2 \bar{y}_2 + F_3 \bar{y}_3 + F_3 CBu \quad (4)$$

로 된다.

이제 행렬 $I - F_3CB$ 의 거꿀행렬이 존재한다고 가정하고 다음과 같은 기호약속을 한다.

$$\bar{y} = [\bar{y}_1^T \quad \bar{y}_2^T \quad \bar{y}_3^T]^T, \quad \bar{C} = [\bar{C}_1^T \quad \bar{C}_2^T \quad \bar{C}_3^T]^T$$

$$\bar{F} = [\bar{F}_1 \quad \bar{F}_2 \quad \bar{F}_3] = [(I - F_3CB)^{-1}F_1 \quad (I - F_3CB)^{-1}F_2 \quad (I - F_3CB)^{-1}F_3]$$

그러면 PID조종기설계문제는 다음과 같은 식으로 표현되는 SOF조종기설계문제로 변환된다.

$$\dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}u, \quad \bar{y} = \bar{C}z, \quad u = \bar{F}\bar{y} \quad (5)$$

따라서 행렬 $\bar{F} = [\bar{F}_1 \quad \bar{F}_2 \quad \bar{F}_3]$ 을 결정하면 본래의 PID조종기결수를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$F_3 = \bar{F}_3(I + CB\bar{F}_3)^{-1}, \quad F_2 = (I - F_3CB)\bar{F}_2, \quad F_1 = (I - F_3CB)\bar{F}_1 \quad (6)$$

이때 문제로 되는것은 $I + CB\bar{F}_3$ 의 거꿀행렬의 존재성인데 그것은 행렬 $I - F_3CB$ 의 거꿀행렬의 존재성과 동가이다.[1]

2. LMI수법을 리용한 PID조종기의 설계

체제 (1)에 대하여 닫힌체계를 안정화하는 정적출력반결합조종기 $u = Fy$ 가 존재하기 위한 필요충분조건은

$$A^T P + PA - PBB^T P + (B^T P + FC)^T (B^T P + FC) < 0 \quad (7)$$

을 만족시키는 $P > 0$ 과 F 가 존재하는것이다.[2]

$$\Psi \leq PB^T BP \quad (8)$$

를 만족시키는 행렬 Ψ 를 구할수 있으면 슈르의 정리에 의하여 필요충분조건 (7)은 다음과 같이 LMI로 표시할수 있다.

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA - \Psi & (B^T P + FC)^T \\ B^T P + FC & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (9)$$

SOF구조의 PID조종기에 대하여 이 결과를 적용하면 다음과 같은 안정화PID설계알고리즘을 구성할수 있다.

① $Q_0 > 0$ 을 선택하고 리카찌대수방정식

$$A^T P + PA - PBB^T P + Q_0 = 0, \quad P > 0 \quad (10)$$

의 풀이 P 를 구하고 $i=1$, $X_1 = P$ 로 놓는다.

② P_i, \bar{F}, α_i 에 대하여 LMI제한조건

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{1i} & (B^T P_i + \bar{F}C)^T \\ B^T P_i + \bar{F}C & -I \end{bmatrix} < 0, \quad P_i > 0 \quad (11)$$

$$I + (CB\bar{F}_3)^T + CB\bar{F}_3 > 0$$

에 관해서 α_i 를 최소화하고 최소값을 α_i^* 로 표시한다. 여기서

$$\Sigma_{1i} = A^T P_i + P_i A - X_i B B^T P_i - P_i B B^T X_i + X_i B B^T X_i - \alpha_i P_i$$

이다.

③ $\alpha_i^* \leq 0$ 이면 P_i 와 \bar{F} 로 최량풀이를 구성하고 알고리즘을 정지한다. 그렇지 않으면

④로 이행한다.

④ $\alpha_i = \alpha_i^*$ 로 놓고 LMI제한조건 (11)에 대하여 $\text{tr}(P_i)$ 를 최소화한다. 최량화결과로 얻어진 P_i 를 P_i^* 로 표시한다. 여기서 $\text{tr}(\cdot)$ 은 정방행렬의 대각선합을 표시한다.

⑤ 주어진 허용범위 ε 에 대하여

$$\|X_i B - P_i^* B\| < \varepsilon$$

이면 ⑥으로 이행하고 그렇지 않으면 $i=i+1$, $X_i = P_i^*$ 로 놓고 ②로 이행한다.

⑥ 알고리즘을 정지시킨다.

3. 관성바퀴흔들이조종모의실험 및 결과분석

실험을 위한 관성바퀴흔들이체계의 상태공간모형은 다음과 같다.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 87.742 & 3 & -0.360 \\ -87.742 & 3 & 0.360 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ -8.865 \\ 121.421 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

여기서 상태 $x=(x_1 \ x_2 \ x_3)$ 은 각각 관성바퀴흔들의 회전각도(rad), 회전각속도(rad/s), 관성바퀴의 각속도(rad/s)이며 조종입력은 관성바퀴를 구동하기 위한 무술전동기에 가해주는 전류(A)이다. 또한 출력은 관성바퀴흔들의 회전각도 및 회전각속도이다.

한편 제안한 알고리즘을 리용하여 계산된 PID조종기파라미터들은 다음과 같다.

$$K_p = 25.432 \ 5, \ K_i = 54.535 \ 6, \ K_d = 43.353 \ 2$$

얻어진 조종기를 리용하여 진행한 모의결과곡선은 그림과 같다.

그림으로부터 SOF형구조를 리용하여 계산된 PID조종기가 보통의 PID조종방법에 비하여 과대량이 좀 크지만 속응성과 감쇠성측면에서는 보다 더 우월하다는것을 알수 있다. 모의에서 제안한 방법은 0.5s이내에 정상상태에 들어갔지만 보통의 PID조종방법에 의하여서는 1s이내에 정상상태에 들어갔다.

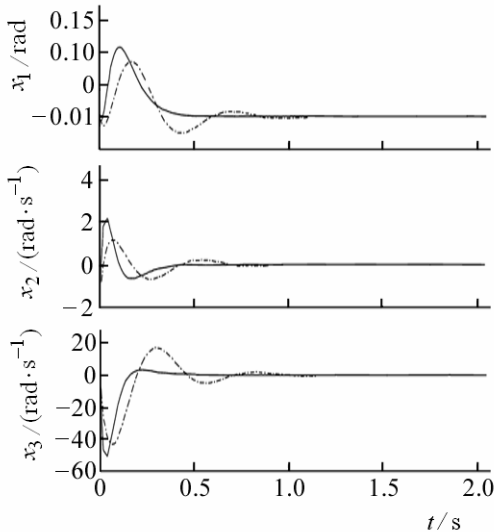


그림. 모의결과곡선

참 고 문 헌

- [1] Feng Zheng et al.; Automatica, **38**, ,517, 2002.
- [2] M. Johannes et al.; Mechatronics, **15**, 345, 2015.
- [3] V. Ramon et al.; PID Control in the Third Millennium, Springer, 219~254, 2012.

주체107(2018)년 8월 5일 원고접수

An Approach of PID Controller Design of Inertia Wheel Pendulum Using LMI

Paek Su Yong, Ho Il Gon

We presented an approach of design of PID controllers. The structure of the PID controller is transformed into static output feedback(SOF). We introduced an algorithm for solving this problem by using iterative LMI technique.

Key words: PID, LMI, inertia wheel