매듭수술의 한가지 문제와 죤즈다항식

리 강 일

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《기초과학은 과학기술강국을 떠받드는 주추입니다. 기초과학이 든든해야 나라의 과학기술이 공고한 토대우에서 끊임없이 발전할수 있습니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 40페지)

우리는 매듭에 따르는 수술에 의하여 얻어지는 3차원다양체들의 위상동형에 관한 문제를 연구하였다. 덴의 수술은 간단히 말하여 고리체를 절단했다가 다시 붙임으로써 3차원다양체를 변화시키는 연산이다. 다양체 Y에서 매듭 K를 따라 경사가 r인 덴의 수술에 의하여 얻어지는 유향다양체를 $Y_r(K)$로 표시하자. 수술리론에서는 임의의 매듭 K에 대하여 $r \neq r'$이면 유향다양체로서의 $Y_r(K)$와 $Y_{r'}(K)$는 위상동형일수 없다는 가설이 제기되였다.(이것을 장식수술가설이라고 부른다.) 그런데 선행연구[1]에서는 표준화된 알렉싼더다항식 $\Delta_K(t)$를 리용하여 이 가설이 성립하기 위한 충분조건이 이미 얻어졌다.

론문에서는 죤즈다항식을 리용하여 이 충분조건을 개선하며 두다리매듭에 대하여 보다 구체적인 조건을 구하였다. 이를 위하여 선행연구[2]에서 도입된 레스코프의 불변량 λ_2를 리용하였다.

한 교점의 근방에서만 그림 1과 같이 되여있고 나머지부분에서는 모두 같은 3개의 얽힘사영도쌍 $(L_+,\ L_-,\ L_0)$을 생각하자. 이때 죤즈다항식은 스케인관계식

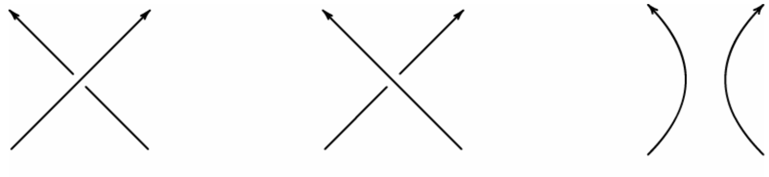
$$t^{-1}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V_{L_0}(t) \tag{1}$$

를 만족시키고 콘웨이다항식 $\nabla_K(z)$는 스케인관계식

$$\nabla_{L_+}(z) - \nabla_{L_-}(z) = z\nabla_{L_0}(z) \tag{2}$$

를 만족시킨다. 그리고 이 콘웨이다항식에 치환 $z = t^{1/2} - t^{-1/2}$을 실시하면 표준화된 알렉싼더다항식 $\Delta_K(t)$가 얻어진다. 또한 콘웨이다항식 $\nabla_K(z)$의 z에 관한 2차항의 결수를 $a_2(K)$로 표시하면 $\Delta''_K(1) = 2a_2(K)$가 성립한다는것을 쉽게 알수 있다.

또한 식 (1)과 (2)의 량변을 두번 미분하고 대응하는 항들을 비교한 다음 간단한 론의를 진



L_+ L_- L_0

그림 1. 교점에서의 상태

행하면 $V''_K(1)=-6a_2(K)$가 얻어진다는것을 알수 있다. 이로부터 $V''_K(1)=-6a_2(K)=-3\Delta''_K(1)$이라는 사실이 나온다.

한편 선행연구[2]에서는 호몰로지구면의 매듭 K에 대하여 그것의 호모토피불변량 ω_3을 정의하고 그것을 리용하여 S^3의 매듭 K에 대한 다음의 교점변화공식을 증명하였다.

$$\omega_3(K_+)-\omega_3(K_-)=\frac{a_2(K')+a_2(K'')}{2}-\frac{a_2(K_+)+a_2(K_-)+lk^2(K',\ K'')}{4} \tag{3}$$

여기서 $(K_+,\ K_-,\ K'\cup K'')$는 2개의 매듭과 두성분얽힘사영도쌍이다.

$\omega_3(K)$의 값은 이 교점변화공식과 자명매듭에서의 값이 0이라는 조건밑에서는 유일하게 결정된다.

이제 결정된 이 값과 죤즈다항식의 도함수들과의 관계를 보기로 하자.

정리 1 임의의 매듭 $K(\subset S^3)$에 대하여 다음의 등식이 성립한다.

$$\omega_3(K)=\frac{1}{72}V'''_K(1)+\frac{1}{24}V''_K(1)$$

증명 선행연구[4]에서의 방법을 그대로 따르면 $V'''_K(1)/72+V''_K(1)/24$에 대하여 교점변화공식 (3)과 같은 형태의 식이 만족된다는것을 밝히면 된다.

이를 위하여 $t=1$에서 식 (1)의 량변을 세번 미분하자. 이때 $L_+:=K_+$, $L_-:=K_-$, $L_0:=K'\cup K''$에 대한 죤즈다항식들을 간단히 $V_+(t),\ V_-(t),\ V_0(t)$로 표시하면 다음의 결과들이 나온다.

$$(t^{-1}V_+(t))'''|_{t=1}=-6V_+(1)+6V'_+(1)-3V''_+(1)+V'''_+(1)$$
$$(tV_-(t))'''|_{t=1}=3V''_-(1)+V'''_-(1)$$
$$(t^{-1}V_0(t))'''|_{t=-1}=\frac{9}{4}V_0(1)-3V'_0(1)+3V''_0(1)$$

이 식들의 오른변의 항들을 결정하자. 우선

$$V_+(1)=V_-(1)=1,\ V_0(1)=-2$$

이다. 그리고

$$V'_+(1)=V'_-(1)=0,\ V'_0(1)=-3lk(K',\ K'')$$
$$V''_+(1)=-6a_2(K_+),\ V''_-(1)=-6a_2(K_-)$$
$$V''_0(1)=-\frac{1}{2}+3lk(K',\ K'')+12(a_2(K')+a_2(K''))-6lk^2(K',\ K'')$$

이다. 이것들을 대입하고 정돈하면 다음과 같다.

$$V'''_+(1)-V'''_-(1)=-18(a_2(K_+)+a_2(K_-))-18lk^2(K',\ K'')-18lk(K',\ K'')+36(a_2(K')+a_2(K''))$$

한편 다음의 사실이 알려져있다.[2]

$$lk(K',\ K'')=a_2(K_+)-a_2(K_-) \tag{4}$$

이것을 리용하여 $(V'''_+(1)/72+V''_+(1)/24)-(V'''_-(1)/72+V''_-(1)/24)$을 정돈하면 식 (3)의 오른변과 같은 형태의 식이 나온다. (증명끝)

선행연구[1, 3]에서 다음의 사실이 밝혀졌다.

명제 1 K가 S^3의 비자명매듭이고 서로 다른 $r,\ r'(\in Q\cup\{\infty\})$에 대하여 유향다양체의 의미에서 $S^3_r(K)\cong S^3_{r'}(K)$일 때 다음의 사실들이 성립한다.

1) $\Delta''_K(1)=0$

2) $r=-r'$

3) r 의 기약분수표시가 $r=p/q$ 이면 $q^2\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ \ p)$ 이다.

선행연구[2]에서는 호몰로지구면 Y 의 매듭에 대하여 그것으로부터 얻어지는 다양체의 위상불변량 λ_2 를 정의하고 다음의 수술공식을 밝혔다.

명제 2 $L(p,\ q)$ 를 자명매듭에 따르는 경사가 p/q 인 렌즈공간이라고 할 때 임의의 매듭 $K(\subset Y)$ 에 대하여 다음의 등식이 성립한다.

$$\lambda_2(Y_{p/q}(K))-\lambda_2(Y)=\lambda''_2(K)\left(\frac{q}{p}\right)^2+\omega_3(K)\left(\frac{q}{p}\right)+a_2(K)c\left(\frac{q}{p}\right)+\lambda_2(L(p,\ q))$$

여기서 $c(q/p)$ 는 선행연구[2]에서 정의된 식이다.

다음의 보조정리는 불변량 ω_3 이 령이기 위한 조건을 보여준다.

보조정리 1 S^3 의 매듭 K 에 대하여 $a_2(K)=0$ 이고 령아닌 두 옹근수 $p,\ q$ 에 대하여

$$q^2\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ \ p)$$

이 성립한다고 하자. 이때 조건

$$\lambda_2(S^3_{p/q}(K))=\lambda_2(S^3_{-p/q}(K))$$

는 다음의 조건과 동등하다.

$$\omega_3(K)=0$$

증명 p/q 수술과 $-p/q$ 수술에 대하여 명제 2의 결과식의 오른변의 첫째 항과 셋째 항은 같다. 그리고 두 렌즈공간 $L(p,\ q_1)$ 과 $L(p,\ q_2)$ 사이에 방향보존위상동형넘기기가 존재하기 위해서는 $q_1\equiv q_2^{\pm 1}\ (\mathrm{mod}\ \ p)$ 이 성립할것이 필요하고 충분하다. $q^2\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ \ p)$ 일 때 $L(p,\ q)\cong L(p,\ -q)$ 이며 따라서 이 렌즈공간들의 불변량 λ_2 는 같다. 결국

$$\lambda_2(S^3_{p/q}(K))-\lambda_2(S^3_{-p/q}(K))=\omega_3(K)\frac{2q}{p}$$

이며 이로부터 이 보조정리의 결과가 나온다.(증명끝)

정리 2 매듭 K 에 대하여 $V''_K(1)\neq 0$ 이거나 $V'''_K(1)\neq 0$ 이면 $r\neq r'$ 일 때 $S^3_r(K)$ 와 $S^3_{r'}(K)$ 사이에 방향보존위상동형넘기기가 존재하지 않는다.

증명 명제 1에 의하여 $\Delta''_K(1)=0$ 이고 $q^2\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ \ p)$ 인 경우만을 고찰하면 충분하다. 이 경우에 $V''_K(1)=-3\Delta''_K(1)=0$ 이다. 만일 $V'''_K(1)\neq 0$ 이라면 정리 1에 의하여 $\omega_3(K)\neq 0$ 이다. 그러므로 보조정리 1로부터 $\lambda_2(S^3_{p/q}(K))\neq\lambda_2(S^3_{-p/q}(K))$ 이다. 따라서 $S^3_{p/q}(K)$ 와 $S^3_{-p/q}(K)$ 는 방향보존위상동형이 아니다.(증명끝)

주의 선행연구[1]에서는 $V''_K(1)\neq 0$ 이면 $r\neq r'$ 일 때 $S^3_r(K)$ 와 $S^3_{r'}(K)$ 가 방향보존위상동형이 아니라는것을 밝혔다.

이제는 두다리매듭의 불변량 ω_3 에 관한 공식을 유도하자.(그것은 두다리매듭에 따르는 수술에 의하여 얻어진 3차원다양체의 분류문제에 리용된다.)

이를 위하여 임의의 두다리매듭은 어떤 홀수 α 와 짝수 β 에 의하여 $-1<\alpha/\beta<1$ 인 유리수 α/β 로 표시할수 있다는것을 상기하자. 만일 이 유리수의 련분수표시가

$$\frac{\alpha}{\beta}=[2b_1,\ 2c_1,\ \cdots,\ 2b_m,\ 2c_m]$$

이라면(여기서 b_i, c_i 들은 령아닌 옹근수들이다.) 그림 2에서와 같은 두다리매듭의 콘웨이 형식 $C(2b_1,\ 2c_1,\ \cdots,\ 2b_m,\ 2c_m)$이 얻어진다. 이 매듭을 $K_{b_1,\ c_1,\ \cdots,\ b_m,\ c_m}$으로 표시하자. 이 매듭의 종수는 m이며 반대로 종수가 m인 임의의 두다리매듭은 이런 형식으로 표시된다.

두다리매듭 $K_{b_1,\ c_1,\ \cdots,\ b_m,\ c_m}$의 다음의 성질이 알려져있다.

$$a_2(K_{b_1,\ c_1,\ \cdots,\ b_m,\ c_m}) = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=i}^{m} b_i c_k = -\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{k} c_k b_i \tag{5}$$

그림 2의 오른쪽 끝의 교점에 대하여 교점변화공식 (3)을 적용하고 두 매듭 K', K''가 자명하다는것과

$$lk(K',\ K'') = -\sum_{i=1}^{m} b_i$$

라는것을 고려하면 다음의 공식이 얻어진다.

$$\omega_3(K_{b_1,c_1,\cdots,b_m,x}) - \omega_3(K_{b_1,c_1,\cdots,b_m,x-1}) =$$
$$= -\frac{1}{4}\left(a_2(K_{b_1,\ c_1,\ \cdots,\ b_m,\ x}) + a_2(K_{b_1,\ c_1,\ \cdots,\ b_m,\ x-1}) + \left(\sum_{i=1}^{m} b_i\right)^2 \right)$$

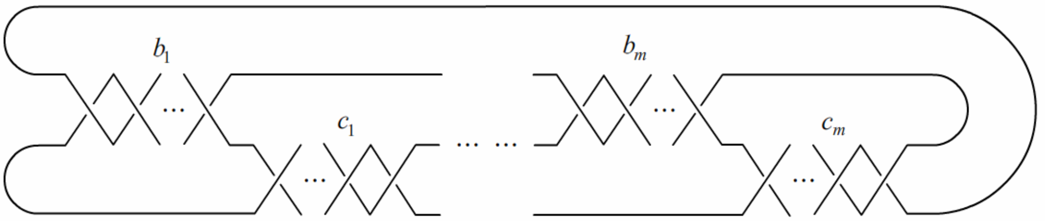


그림 2. 두다리매듭 $K_{b_1,\ c_1,\ \cdots,\ b_m,\ c_m}$

보조정리 2 두다리매듭의 불변량 ω_3에 대하여 다음의 귀납공식이 성립한다.

$$\omega_3(K_{b_1,\ c_1,\ \cdots,\ b_m,\ c_m}) - \omega_3(K_{b_1,\ c_1,\ \cdots,\ b_{m-1},\ c_{m-1}}) =$$
$$= -\frac{1}{4}\left(2c_m \cdot a_2(K_{b_1,\ c_1,\ \cdots,\ b_{m-1},\ c_{m-1}}) - c_m^2 \sum_{i=1}^{m} b_i + c_m \left(\sum_{i=1}^{m} b_i\right)^2 \right)$$

증명 $c_m < 0$인 경우도 증명이 류사하므로 $c_m > 0$인 경우만을 증명하기로 하자.

이를 위하여 보조정리 1의 공식을 x가 0일 때까지 반복적용해보자. 그러면 $K_{b_1,\ c_1,\ \cdots,\ b_m,\ c_0}$은 $K_{b_1,\ c_1,\ \cdots,\ b_{m-1},\ c_{m-1}}$과 이소토프이다. 그러므로

$$\omega_3(K_{b_1,\ c_1,\ \cdots,\ b_m,\ c_m}) - \omega_3(K_{b_1,\ c_1,\ \cdots,\ b_{m-1},\ c_{m-1}}) =$$
$$= -\frac{1}{4}\left(a_2(K_{b_1,\ c_1,\ \cdots,\ b_m,\ c_m}) + 2\sum_{x=1}^{c_m-1} a_2(K_{b_1,\ c_1,\ \cdots,\ b_m,\ x}) + \right.$$
$$\left. + a_2(K_{b_1,\ c_1,\ \cdots,\ b_{m-1},\ c_{m-1}}) + c_m \left(\sum_{i=1}^{m} b_i\right)^2 \right)$$

이다. 따라서 식 (5)로부터

$$a_2(K_{b_1,\ c_1,\ \cdots,\ b_m,\ x}) = a_2(K_{b_1,\ c_1,\ \cdots,\ b_{m-1},\ c_{m-1}}) - x\sum_{i=1}^{m} b_i$$

가 성립한다는것이 곧 나오고 이 식을 앞의 식에 대입하면 결론이 얻어진다.(증명끝)

이제는 보조정리 2와 m에 관한 귀납법을 리용하여 ω_3의 계산공식을 증명할수 있다. 계산이 초등적이므로 결과만을 주기로 하겠다.

정리 3 다음의 등식이 성립한다.

$$\omega_3(K_{b_1,\ c_1,\ \cdots,\ b_m,\ c_m}) = -\frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{m} c_k\left(\sum_{i=1}^{k} b_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{m} b_i\left(\sum_{k=i}^{m} c_k\right)^2\right)$$

참 고 문 헌

[1] S. Boyer et al.; J. Reine Angew. Math., 405, 181, 1990.

[2] C. Lescop; Algebr. Geom. Topol., 9, 2, 979, 2009.

[3] Y. Ni et al.; J. Reine Angew. Math., 706, 1, 2015.

[4] R. Nikkuni; Rev. Mat. Complut., 18, 1, 181, 2005.

주체106(2017)년 12월 5일 원고접수

A Knot Surgery Problem and Jones Polynomials

Ri Kang Il

We show that two Dehn surgeries on a knot K never yield manifolds that are homeomorphic as oriented manifolds if $V_K''(1) \neq 0$ or $V_K'''(1) \neq 0$.

Key words: Dehn surgery, knot, Jones polynomial