

활동들의 납기에 기초한 다중방식프로젝트망압축의 한가지 방법

문경호, 전충실

규모가 큰 프로젝트일정작성문제들을 짧은 시간안에 풀기 위한 여러가지 수법들이 있는데 프로젝트망을 압축하여 규모가 보다 작은 문제들로 논의하는 수법들도 있다. 총소요시간의 최소화를 목적으로 하는 일정작성문제에 대하여 일감들의 완성시간을 기준으로 부분품들에 대한 작업을 압축하는 방법[2], 제품구성정보들을 리용하여 매 부분품에 대한 작업들을 단일한 작업으로 변화시키고 서로 다른 부분품들사이에는 합성을 허용하지 않는 압축방법[3]들이 있는데 이러한 방법들이 적용되는 망들은 모두 단일방식을 가지는 활동들로 이루어지는 망들이다.

논문에서는 납기자연최소화를 목적으로 하는 일정작성문제에 대하여 활동들의 납기를 기준으로 하여 다중방식을 가지는 활동들로 이루어진 프로젝트망을 압축할수 있는 한가지 방법에 대하여 논의한다.

1. 다중방식프로젝트망에서 활동들의 통합

프로젝트망의 압축은 본질에 있어서 서로 다른 두 활동을 통합시켜 새로운 하나의 활동을 만드는것이다.

활동들을 통합할 때 두가지 중요한 문제가 나서는데 하나는 활동들의 통합가능성문제이고 다른 하나는 활동과 망의 특성을 보존하는 문제이다.[1]

활동들의 통합가능성문제는 두 활동이 통합될수 있는 기준을 설정하는 문제로서 목적함수의 형태에 관계된다.

활동과 망의 특성으로서는 활동의 실행방식, 방식별수행기간과 자원형 및 자원리용량, 시작가능한 시기와 납기, 그리고 망안에서 다른 활동들과 맺고있는 선후관계와 최소시작시간지연값들을 들수 있다. 통합은 일정한 가능성을 가지는 활동쌍에 대하여 진행된다.

통합방법에 대한 설명에서 리용되는 파라메터들로는 rd_i (활동 i 의 시작가능한 시기), dd_i (활동 i 의 납기), d_{im} (방식 m 에서 실행되는 활동 i 의 수행기간), Δ_{ijmn} (활동 i 의 방식 m 에서의 시작시간과 활동 j 의 방식 n 에서의 시작시간사이의 최소시간지연)들이 있다.

새로운 활동 z 는 두 활동 i 와 j 가 다음의 조건들을 만족시킬 때 활동 i 다음에 활동 j 가 연속적으로 수행되는것으로 이루어진다.

$$\left. \begin{aligned} dd_i &< dd_j \\ dd_i &< dd_j, rd_i < rd_j \\ dd_i &< dd_j, rd_i = rd_j, i < j \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

우의 조건들은 목적함수의 형태에 따라 달라진다. 여기에서는 납기 지연최소화를 목적함수로 한다.

이때 새 활동 z 의 시작가능한 시기와 납기는 다음과 같이 결정된다.

$$\begin{aligned} dd_z &= \max(dd_i, dd_j) = dd_j \\ rd_z &= \min(rd_i, rd_j) = rd_i \end{aligned} \quad (2)$$

한편 활동 i 와 활동 j 가 통합되어 새로운 활동 z 가 형성될 때 원래 망의 특성을 최대한 보존하는것이 중요하다. 이러한 특성보존은 기본상 활동들사이의 방식에 따르는 무계 변화로써 실현된다.

새로운 활동 z 와 선행 및 후행요소들사이의 방식에 따르는 무계들은 다음과 같이 계산할수 있다.

우선 활동 b 가 새로운 활동 z 에 후행할 때 즉 $(z, b) \in E'$ 일 때 다음과 같이 계산한다.

① 호 $(i, b) \in E$ 만 있는 경우

$$\begin{aligned} k &= M_j(m-1) + n, \\ \Delta_{zbkl} &= \Delta_{ibml}, \\ m &= 1, \dots, M_i, \quad n = 1, \dots, M_j, \quad l = 1, \dots, M_b \end{aligned} \quad (3)$$

② 호 $(j, b) \in E$ 만 있는 경우

$$\begin{aligned} k &= M_j(m-1) + n, \\ \Delta_{zbkl} &= d_{jm} + \Delta_{jbml}, \\ m &= 1, \dots, M_i, \quad n = 1, \dots, M_j, \quad l = 1, \dots, M_b \end{aligned} \quad (4)$$

③ 호 $(i, b) \in E$ 와 호 $(j, b) \in E$ 가 함께 있는 경우

$$\begin{aligned} k &= M_j(m-1) + n, \\ \Delta_{zbkl} &= \max(\Delta_{ibml}, d_{jm} + \Delta_{jbml}), \\ m &= 1, \dots, M_i, \quad n = 1, \dots, M_j, \quad l = 1, \dots, M_b \end{aligned} \quad (5)$$

다음 활동 a 가 새로운 활동 z 에 선행할 때 즉 $(a, z) \in E$ 일 때 다음과 같이 계산한다.

① 호 $(a, i) \in E$ 만 있는 경우

$$\begin{aligned} k &= M_j(m-1) + n, \\ \Delta_{azlk} &= \Delta_{ailm}, \\ m &= 1, \dots, M_i, \quad n = 1, \dots, M_j, \quad l = 1, \dots, M_b \end{aligned} \quad (6)$$

② 호 $(a, j) \in E$ 만 있는 경우

$$\begin{aligned} k &= M_j(m-1) + n, \\ \Delta_{azlk} &= \Delta_{ajln} - d_{im}, \\ m &= 1, \dots, M_i, \quad n = 1, \dots, M_j, \quad l = 1, \dots, M_b \end{aligned} \quad (7)$$

③ 호 $(a, i) \in E$ 와 $(a, j) \in E$ 가 함께 있는 경우

$$\begin{aligned} k &= M_j(m-1) + n, \\ \Delta_{azlk} &= \max(\Delta_{ailm}, \Delta_{ajln} - d_{im}), \\ m &= 1, \dots, M_i, \quad n = 1, \dots, M_j, \quad l = 1, \dots, M_b \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 E 는 통합되기 전 망의 호들의 모임, E' 는 통합된 후 망의 호들의 모임, M_i 는 통합되기 전 활동 i 의 방식수, M_j 는 통합되기 전 활동 j 의 방식수, M_a 는 통합전후 활동 a 의 방식수, M_b 는 통합전후 활동 b 의 방식수, Δ_{ailm} 은 통합되기 전 망에서 호 $(a, i) \in E$ 의 방식조합 (i, m) 에 따르는 무게, Δ_{iblm} 은 통합되기 전 망에서 호 (i, b) 의 방식조합 (m, l) 에 따르는 무게, Δ_{azlk} 는 통합된 후 망에서 호 (a, z) 의 방식조합 (l, k) 에 따르는 무게, Δ_{zblk} 은 통합된 후 망에서 호 (z, b) 의 방식조합 (k, l) 에 따르는 무게이다.

우와 같은 식들로부터 알수 있는바와 같이 통합된 활동 z 와 선행 및 후행요소들사이에는 방식에 의존하는 일반화된 선후관계가 존재하게 된다.

망에서 통합될 두 활동의 선택은 다음과 같은 통합가능한 조건들에 기초하여 진행한다.

- ① 두 활동의 특성값들이 주어진 일정한 시간구간안에 들어가야 한다.
- ② 통합된 활동의 파라미터값들이 통합되는 두 활동의 특성값들에 대한 관계식을 만족시켜야 한다.
- ③ 지나치게 긴 수행기간을 가지는 활동이 발생되지 말아야 한다.
- ④ 두 활동중 어느 하나라도 지나치게 짧은 수행기간을 가지면 통합하여야 한다.

우와 같은 조건들중 ①과 ②는 대상으로 하는 문제의 목적함수형태와 관련되고 ③과 ④는 프로젝트안의 전체 활동들의 평균수행기간과 관련된다.

목적함수가 납기지연최소화이므로 두 활동의 특성값은 납기로 한다.

이때 조건 ①은 통합되는 두 활동의 특성값들이 관계식 $|dd_i - dd_j| \leq \Delta dd$ 를 만족시키는 것으로 표현된다. 여기서 Δdd 는 두 활동사이에 허용되는 납기차의 크기로서 압축하기 전에 정해준다.

그리고 조건 ②는 통합된 후의 활동 z 가 $rd_i + d_i + d_j = rd_i + d_z \leq \max(dd_i, dd_j)$ 를 만족시키는것으로 표현된다.

한편 프로젝트안의 전체 활동들의 평균수행기간을 d_{AVE} 로 한다면 조건 ③은 $d_i + d_j = d_z \leq R_1 \cdot d_{AVE}$ 를 만족시키는것으로 표현되며 조건 ④는 $d_i \leq R_2 \cdot d_{AVE}$ 혹은 $d_j \leq R_2 \cdot d_{AVE}$ 일 때 두 활동을 통합해야 한다는것을 의미한다. 여기서 R_1 은 긴 수행기간을 나타내는 파라미터이고 R_2 는 짧은 수행기간을 나타내는 파라미터이다.

2. 프로젝트망의 압축알고리즘

프로젝트망의 압축알고리즘은 우와 같은 4가지 통합가능성조건에 기초한다.

이때 프로젝트망의 압축알고리즘은 다음과 같다.

- ① Δdd , R_1 , R_2 의 값을 설정한다.
- ② 프로젝트안의 모든 활동들에 대한 평균수행기간을 다음과 같이 계산한다.

$$d_{AVE} = \sum_{i=1}^{I-1} \left(\sum_{m=1}^{M_i} d_{im} / |M_i| \right) / (I-2) \quad (9)$$

- ③ 주어진 망의 최대경로길이행렬 $D^{\hat{M}}$ 을 계산한다.
- ④ 프로젝트망안의 모든 활동들의 최소시작가능한 시간과 납기들을 다음과 같이 계산

한다.

$$rd_i = d_{0i}^{\hat{M}}, \quad i = \overline{0, I}, \quad (10)$$

$$dd_i = DD_j - d_{T_j, i}^{\hat{M}}, \quad \forall i \in P_j, \quad j = \overline{1, J}$$

⑤ 두 활동 $i, j \in \overline{1, I-1}$ 에 대하여

$$|dd_i - dd_j| \leq \Delta dd \quad (11)$$

를 만족시키는 활동쌍들의 모임 E 를 생성한다.

이때 $E = \emptyset$ 이면 알고리즘의 실행을 중지한다.

그리고 $\forall (i, j) \in E$ 에 대하여 $|dd_i - dd_j| \cdot |rd_i - rd_j|$, i 의 값이 커지는 순서로 활동쌍들을 배열한다.

⑥ E 안의 첫 활동쌍 (i, j) 에 대하여 조건 ②와 ③이 만족된다면 활동의 구성조건 (1)에 따라 두 활동에 대한 통합을 진행하여 새로운 활동 z 를 생성한다. 이와 함께 모임 E 로부터 활동 i 및 j 와 쌍을 이루는 모든 활동쌍들을 제거한다.

⑦ $E = E \setminus \{(i, j)\}$.

그리고 $E \neq \emptyset$ 이면 ⑥으로, $E = \emptyset$ 이면 ⑤로 간다.

알고리즘에서 I 는 프로젝트망안의 전체 활동수, J 는 부분프로젝트의 개수, P_j 는 부분프로젝트 $j = \overline{1, J}$ 의 활동들의 모임, DD_j 는 부분프로젝트 j 에 대한 납기, $B_j(T_j)$ 는 부분프로젝트 j 의 가상적인 시작(마감)활동, $B_0(T_0)$ 은 프로젝트망의 가상적인 시작(마감)활동, $D^{\hat{M}}$ 은 프로젝트망의 최대경로길이행렬, $d_{0i}^{\hat{M}}$ 은 $D^{\hat{M}}$ 의 첫 행의 요소로서 프로젝트망의 매 활동 i 의 최속시작가능한 시간, $d_{T_j, i}^{\hat{M}}$ 은 $D^{\hat{M}}$ 의 T_j 행의 요소로서 활동 T_j 로부터 활동 $i \in P_j$ 까지의 최대경로길이이다.

3. 압축방법의 효과성분석

시험문제들의 발생을 위한 파라미터값들은 표 1과 같다.

표 1. 시험문제들의 발생을 위한 파라미터값

| 파라미터 | 값 |
|--------------------------------|-----------|
| 활동의 개수/ n | 100, 200 |
| 최대방식수/ m | 2 |
| 다중방식을 가지는 활동들의 비율(rm)/% | 5, 10, 15 |
| 일반화된 선후관계를 나타내는 호들의 비율(LF) | 0.15 |
| 활동들의 수행기간 | 2~5 |
| 최소/최대선행요소수 | 1/5 |
| 최소/최대후행요소수 | 1/5 |
| 긴 수행기간을 나타내는 결수 (R_1) | 1.5 |
| 짧은 수행기간을 나타내는 결수 (R_2) | 0.4 |

9개의 문제조합에 대하여 각각 20개의 문제들을 발생시켜 총 180개의 시험문제들을 만들었다.

압축방법의 효과성은 Δdd 의 크기, 활동수 및 rm 에 따르는 망의 압축률, 가장 좋은 풀이를 찾는 시간, 최량값으로부터의 편차 등을 평가하는 방법으로 논의한다.

먼저 Δdd 의 크기와 활동수에 따르는 망의 압축률을 논의한다.(표 2)

표 2로부터 망의 압축률은 Δdd 의 크기에 결정적으로 관계되고 활동수의 영향은 상대적으로 매우 적다는것을 알수 있다. 즉 프로젝트를 이루는 활동의 전체 개수보다는 두 활동의 납기차가 작은 활동이 많을수록, 두 활동의 납기차구간이 클수록 망의 압축은 더 세게 일어난다.

표 2. Δdd 의 크기와 활동수에 따르는 압축률(% , $rm = 10\%$)일 때

| Δdd | $n = 100$ | $n = 200$ | $n = 300$ |
|-------------|-----------|-----------|-----------|
| 10 | 29.3 | 30.4 | 32.1 |
| 15 | 42.4 | 45.6 | 46.2 |
| 20 | 56.2 | 58.9 | 59.2 |

다음으로 Δdd 의 크기와 다중방식을 가지는 활동들의 비율(rm)에 따르는 망의 압축률과 문제풀이시간 및 풀이질에 대하여 논의한다.(표 3)

표 3. Δdd 와 rm 에 따르는 망의 압축률과 풀이시간 및 풀이질
(압축전 활동수 $n = 200$, 최대방식수 $m = 2$, 풀이알고리즘[1])

| Δdd | 압축전 $rm / \%$ | 압축후 | | | | 계산시간/s | | | 가장 좋은 목적함수값 으로부터의 편차/% | |
|-------------|------------------|-------|-----|-----------|-------|--------|-------|------|---------------------------|------|
| | | 압축률/% | 활동수 | $rm / \%$ | 최대방식수 | 압축전 | 압축후 | 시간비 | 압축전 | 압축후 |
| 10 | 5 | 29.5 | 141 | 11 | 4 | 1 700 | 900 | 1.89 | 3~5 | 4~9 |
| | 10 | 30.4 | 139 | 16 | 6 | 2 100 | 1 100 | 1.90 | 3~5 | 4~9 |
| | 15 | 29.7 | 141 | 22 | 8 | 3 200 | 1 400 | 2.30 | 3~6 | 4~9 |
| 15 | 5 | 46.3 | 107 | 18 | 6 | 1 700 | 780 | 2.20 | 3~5 | 4~9 |
| | 10 | 45.6 | 108 | 21 | 8 | 2 100 | 970 | 2.20 | 3~5 | 4~11 |
| | 15 | 46.2 | 107 | 26 | 10 | 3 200 | 1 280 | 2.50 | 3~6 | 4~11 |
| 20 | 5 | 58.5 | 83 | 24 | 10 | 1 700 | 720 | 2.40 | 3~5 | 4~11 |
| | 10 | 58.9 | 82 | 38 | 10 | 2 100 | 880 | 2.40 | 3~5 | 4~11 |
| | 15 | 58.2 | 84 | 47 | 14 | 3 200 | 1 040 | 3.10 | 3~6 | 4~11 |

표에서 시간비는 (압축전 계산시간)/(압축후 계산시간)으로 계산된다.

표안의 값들은 모두 평균값들이며 가장 좋은 값은 압축을 하지 않은 경우에 10 000s 시간한계안에서 얻어진 값이다. 표 3으로부터 압축률이 커지면 계산속도는 빨라지지만 최량값으로부터의 편차는 점점 더 커지게 되므로 망을 압축할 때 계산시간과 풀이의 질을 고려하여 Δdd 의 크기를 정하여야 한다는것을 알수 있다.

맺 는 말

활동들사이의 납기차의 크기를 기준으로 하여 다중방식을 가지는 활동들로 이루어진 프로젝트망을 압축하는 한가지 방법에 대하여 논의하였다. 모의실험결과들은 제안한 수법이 망의 특성을 최대한 보존하면서 규모가 큰 실천적인 문제들을 고려할만 한 시간안에 푸는데서 효과적인 방법의 하나로 될수 있다는것을 보여준다.

참 고 문 헌

- [1] 문경호 등; 조선민주주의인민공화국 과학원통보, 6, 24, 주체98(2009).
[2] W. O. Rom et al.; Omega, 30, 275, 2002.
[3] Yuanhui Zhang et al.; IEEE Transactions on Robotics and Automation, 17, 48, 2001.

주체104(2015)년 6월 5일 원고접수

**A Method of Compression for Multi-Mode Project Network based on
Due Date of the Activities**

Mun Kyong Ho, Jon Chung Sil

We discuss a method which can compress the project network, which is composed of activities with multi-mode, based on due date of the activities, for the scheduling problem which minimizes tardiness.

Key words: multi-mode project scheduling, tardiness