김일성종합대학학보 주체110(2021)년
수 학 제67권 제3호

동적계획법을 리용한 반사역방향확률미분방정식의 한가지 방법

오훈, 김문철

선행연구[1, 3]에서는 스코로호드형최소성조건을 가지는 반사역방향확률미분방정식에 대하여 론의하였다.

우리는 반사역방향확률미분방정식에 대하여 새로운 형태의 최소성조건으로서 비스코로호드형최소성조건을 도입하고 이에 기초하여 반사역방향확률미분방정식을 연구하는 한가지 새로운 방법을 제기하였다.

$(\Omega,\ \mathcal{F},\ \boldsymbol{P},\ \boldsymbol{F})$를 $d-$차원브라운운동 B에 의하여 생성된 자연려파기 $\boldsymbol{F}:=\{\mathcal{F}_t\}_{0\le t\le T}$를 가지는 완비확률토대라고 하자.

론문에서 리용되는 공간들과 노름들은 다음과 같다.

임의의 $p>1$에 대하여

① $\boldsymbol{L}^p$는 $\|\xi\|_{\boldsymbol{L}^p}^p:=\mathbf{E}[|\xi|^p]<+\infty$를 만족시키는 $\mathcal{F}_T-$가측실값우연량 ξ들의 공간이다.

② $\boldsymbol{S}^p$는 $\|Y\|_{\boldsymbol{S}^p}^p:=\mathbf{E}\left[\sup\limits_{0\le t\le T}|Y_t|^p\right]<+\infty$를 만족시키는 오른쪽련속, $\boldsymbol{F}-$적합, 실값우연과정 Y들의 공간이다.

③ $\boldsymbol{H}^p$ (또는 $\boldsymbol{H}_1^p$)는 $\|Z\|_{\boldsymbol{H}^p}^p:=\mathbf{E}\left[\left(\int_0^T|Z_t|^2\,dt\right)^{p/2}\right]<+\infty$를 만족시키는 $\boldsymbol{F}-$전진가측, $\mathbf{R}^{1\times d}-$값(또는 $\mathbf{R}-$값)우연과정 Z들의 공간이다.

④ $\boldsymbol{I}^p$는 $K_0=0$과 $\|K\|_{\boldsymbol{I}^p}^p:=\mathbf{E}[(K_T)^p]<+\infty$를 만족시키는 실값, $\boldsymbol{F}-$적합, 비감소우연과정 K들의 공간이다.

⑤ 매 $t\in[0,\ T]$에 대하여 $\boldsymbol{T}^{t,T}$는 $[t,\ T]$에서 값을 취하는 $\boldsymbol{F}-$정지시각들의 모임이며 $\widetilde{L}_\tau:=L_\tau\mathbf{1}_{\tau<T}+\xi\mathbf{1}_{\tau=T}$이다.

현재까지 론의된 반사역방향확률미분방정식의 형태는 다음과 같다.

$$Y_t=\xi+\int_t^T g(s,\ Y_s,\ Z_s)ds-\int_t^T Z_s dB_s+K_T-K_t \tag{1}$$

$$Y_t\ge L_t,\ \int_0^T(Y_{t-}-L_{t-})dK_t=0 \tag{2}$$

여기서 ξ는 $\mathcal{F}_T-$가측우연량, $g(s,\ y,\ z)$는 임의의 $(y,\ z)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{1\times d}$에 대하여 $\boldsymbol{F}-$전진가측인 우연함수 그리고 L은 $\boldsymbol{F}-$적합, 오른쪽련속장벽과정이다.

식 (2)를 스코로호드형최소성조건이라고 부른다.

론문에서 제기하는 비스코로호드형최소성조건은 다음과 같다.

$$K_t = \operatorname*{ess\,inf}_{\tau \in \boldsymbol{T}^{t,T}} \mathbf{E}_t[Y_\tau - \widetilde{L}_\tau + K_\tau]o \tag{3}$$

정의 우연과정들의 조 $(Y, Z, K) \in \boldsymbol{S}^2 \times \boldsymbol{H}^2 \times \boldsymbol{I}^2$가 다음의 조건을 만족시킬 때 반사역방향확률미분방정식 (1)의 풀이라고 부른다.

① $Y_T = \xi$

② 다음의 우연과정 K는 비감소하는 자리길을 가진다.

$$K_t := Y_0 - Y_t + \int_0^t g(s, Y_s, Z_s) ds + \int_0^t Z_s dB_s$$

③ 비스코로호드형최소성조건 (3)이 성립된다.

정리 1 우연과정 Y, L이 오른쪽련속이고 K가 비감소, 오른쪽련속과정이라고 하자. 그러면 비스코로호드형최소성조건 (3)과 스코로호드형최소성조건 (2)는 동등하다.

론문에서는 다음과 같은 가정들을 주고 론의한다.

가정 1 $\xi \in \boldsymbol{L}^2$, $L \in \boldsymbol{S}^2$, $L_T \le \xi$

가정 2 임의의 $(y, z) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{1\times d}$에 대하여 우연과정 $(t, \omega) \mapsto g(t, \omega, y, z)$는 $\boldsymbol{F}-$전진가측이며

$$\mathbf{E}\left[\int_0^T |g(t, 0, 0)|^2 dt\right] < +\infty$$

가 성립한다.

가정 3 어떤 상수 $C > 0$가 있어서 임의의 $(t, \omega, y, z, y', z') \in [0, T] \times \Omega \times (\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{1\times d})^2$에 대하여

$$|g(t, y, z) - g(t, y', z')| \le C(|y - y'| + |z - z'|)$$

가 성립된다.

다음과 같은 비선형최량정지문제를 생각하자.

$$V := \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \boldsymbol{T}^{0,T}} \boldsymbol{\mathcal{E}}^g_{0,\tau}(\widetilde{L}_\tau) = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \boldsymbol{T}^{0,T}} y_0(\tau, \widetilde{L}_\tau) \tag{4}$$

여기서 $\boldsymbol{\mathcal{E}}^g(\cdot)$은 $g-$기대값을 의미한다. 즉 $\boldsymbol{\mathcal{E}}^g_{\cdot,\tau}(\widetilde{L}_\tau) = y_\cdot(\tau, \widetilde{L}_\tau)$은 종점조건이 $(\tau, \widetilde{L}_\tau)$이고 생성자가 g인 역방향확률미분방정식풀이의 첫째 성분이다.

값함수를 다음과 같이 정의한다.

$$V_t = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \boldsymbol{T}^{0,T}} \boldsymbol{\mathcal{E}}^g_{t,\tau}(\widetilde{L}_\tau) = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \boldsymbol{T}^{t,T}} y_t(\tau, \widetilde{L}_\tau), t \in [0, T]$$

정리 2(동적계획법원리) 임의의 $t \in [0, T]$와 임의의 $\widetilde{\tau} \in \boldsymbol{T}^{t,T}$에 대하여

$$V_t = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \boldsymbol{T}^{t,T}} \boldsymbol{\mathcal{E}}^g_{t,\tau\wedge\widetilde{\tau}}(\widetilde{L}_\tau \mathbf{1}_{\tau<\widetilde{\tau}} + Y_{\widetilde{\tau}} \mathbf{1}_{\tau\ge\widetilde{\tau}})$$

가 성립된다.

정리 3(표현공식) 가정 1－3이 성립된다고 하자. 우연과정 $(Y, Z, K) \in \boldsymbol{S}^2 \times \boldsymbol{H}^2 \times \boldsymbol{I}^2$를 반사역방향확률미분방정식 (1)의 풀이라고 하자. 이때 임의의 $t \in [0, T]$에 대하여

$$Y_t = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \boldsymbol{T}^{t,T}} y_t(\tau, \widetilde{L}_\tau)$$

이다. 따라서 반사역방향확률미분방정식 (1)은 $\boldsymbol{S}^2\times\boldsymbol{H}^2\times\boldsymbol{I}^2$ 에서 기껏 1개의 풀이를 가진다.

정리 4 가정 1－3이 성립된다고 하자. 이때 반사역방향확률미분방정식 (1)은 유일한 풀이 $(Y,\ Z,\ K)\in\boldsymbol{S}^2\times\boldsymbol{H}^2\times\boldsymbol{I}^2$ 를 가진다.

증명 풀이의 유일성은 정리 3에서 이미 증명되였다. 풀이의 존재성을 증명하자. Y 를 식 (4)에 의하여 정의되는 우연과정이라고 하자. 그러면 정리 2에서의 동적계획법원리로부터 Y 는 $g-$웃마르팅게일로 된다. 따라서 $g-$웃마르팅게일에 대한 비선형두브－메이어분해정리[2]에 의하여 Y 는 어떤 $(Z,\ K)\in\boldsymbol{H}^2\times\boldsymbol{I}^2$ 이 있어서 다음과 같은 반마르팅게일분해를 가진다.

$$Y_t=\xi+\int_t^T g(s,\ Y_s,\ Z_s)ds-\int_t^T Z_s dB_s+K_T-K_t$$

이제 최소성조건 (2)가 성립된다는것을 증명하면 된다. 임의의 $\tau\in\boldsymbol{T}^{t,T}$ 에 대하여

$$\Delta Y:=Y-y(\tau,\ \widetilde{L}_\tau),\ \Delta Z:=Z-z(\tau,\ \widetilde{L}_\tau)$$

로 놓자. 그러면

$$\Delta Y=\mathbf{E}_t\left[\Gamma_\tau^t(Y_\tau-\widetilde{L}_\tau)+\int_t^\tau \Gamma_s^t dK_s\right]\ge\mathbf{E}_t\left[\inf_{t\le s\le T}\Gamma_s^t\cdot(Y_\tau-\widetilde{L}_\tau+K_\tau-K_t)\right]$$

$\mathcal{K}_t:=Y_\tau-\widetilde{L}_\tau+K_\tau-K_t$ 라고 하자. 이때

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_t[\mathcal{K}_t]&=\mathbf{E}_t\left[\left(\inf_{t\le s\le\tau}\Gamma_s^t\right)^{1/3}\cdot\left(\inf_{t\le s\le\tau}\Gamma_s^t\right)^{-1/3}\cdot(\mathcal{K}_t)^{1/3}\cdot(\mathcal{K}_t)^{2/3}\right]\le\\&\le C\cdot\left(\mathbf{E}_t\left[\inf_{t\le s\le\tau}\Gamma_s^t\cdot\mathcal{K}_t\right]\right)^{1/3}\cdot\left(\mathbf{E}_t\left[\sup_{t\le s\le\tau}(\Gamma_s^t)^{-1/2}\mathcal{K}_t\right]\right)^{2/3}\le\\&\le C\cdot\left(\mathbf{E}_t\left[\inf_{t\le s\le\tau}\Gamma_s^t\cdot\mathcal{K}_t\right]\right)^{1/3}\cdot\left(\mathbf{E}_t\left[\sup_{t\le s\le\tau}(\Gamma_s^t)^{-1}\right]\right)^{1/3}\cdot(\mathbf{E}_t[(\mathcal{K}_t)^2])^{1/3}\le\\&\le C\cdot(\Delta Y_t)^{1/3}\cdot(C_t)^{1/3}\end{aligned}$$

이 성립한다. 따라서

$$\operatorname*{ess\,inf}_{\tau\in\boldsymbol{T}^{t,T}}\boldsymbol{E}_t[Y_\tau-\widetilde{L}_\tau+K_\tau-K_t]\le C(C_t)^{1/3}\operatorname*{ess\,inf}_{\tau\in\boldsymbol{T}^{t,T}}(\Delta Y_t)^{1/3}=0$$

을 얻는다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] N. El Karoui, et al.; Quenez, Ann. Probab., 25, 702, 1997.

[2] S. Peng; Probab. Theory Related Fields, 113, 473, 1999.

[3] Z. Zhang; Backward Stochastic Differential Equations: From Linear to fully Non-linear Theory, Springer, 133～160, 2017.

주체110(2021)년 3월 5일 원고접수

Dynamic Programming Approach to Reflected Backward Stochastic Differential Equations

O Hun, Kim Mun Chol

In this paper, we introduced a notion of reflected backward stochastic differential equations with non-Skorohod type minimality condition and proved the existence and uniqueness of solution via dynamic programming approach.

Keyword: reflected backward stochastic differential equation