김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제2호

파라메터를 포함한 씸플렉트넘기기에 대한 불변고리존재정리성립조건에서 결수의 정량적평가

정우환, 박원혁

해밀턴계에 대한 불변고리의 존재성에 관한 리론(략칭 KAM리론)은 오늘날 립자가속장치에서의 전자운동의 안정성보장문제[8], 핵융합반응에서의 자기마당에 의한 플라즈마의 가두어놓기문제[17], 저에네르기우주비행자리길설계문제[13]를 비롯한 첨단과학기술문제들에 광범히 응용되고있다.

론문에서는 파라메터를 포함하는 해밀턴계에서의 불변고리의 존재성문제를 연구하였다. 선행연구[3, 4, 7, 14, 15]를 비롯하여 지난 시기 제출된 KAM정리들에서는 섭동파라메터가 충분히 작을 때 불변고리의 존재성은 증명하였으나 섭동파라메터의 크기에 대한 정량적평가는 밝히지 않았다.

선행연구[12]에서는 파라메터가 없는 경우와 파라메터가 포함된 경우에 작용－각변수로 표시되지 않은 해석적인 해밀턴계에 대한 불변고리존재정리를 증명하였으며 선행연구[2]에서는 표준형이 아닌 해밀턴방정식에 대하여 마찬가지 문제를 연구하였다. 또한 선행연구[9]에서는 파라메터가 포함된 유한번미분가능한 표준형해밀턴방정식에 대한 불변고리존재정리를 증명하였다. 선행연구[2, 9, 12]에서도 불변고리존재정리가 성립하는 결수의 크기한계에 대한 정량적평가는 주지 않고있다.

한편 선행연구[5]에서는 해밀턴계

$$H(x,\ y,\ t) = y^2/2 + \varepsilon[\cos x + \cos(x-t)] \quad (y\in \mathbf{R},\ (x,\ t)\in(\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z})^2)$$

에서 $\varepsilon < \varepsilon^* = 0.025\ 375$ 이면 각주파수 $\Omega = (\sqrt{5}-1)/2$ 을 가지는 준주기운동을 하는 불변고리가 존재한다는것을 증명하였다. 선행연구[1]에서는 일반적으로는 작용－각변수로 표시되지 않은 해석적인 씸플렉트넘기기의 불변고리존재정리의 성립조건결수의 크기한계를 주었다.

론문에서는 파라메터를 포함한 해석적인 씸플렉트넘기기에 대한 불변고리존재정리의 성립조건결수의 크기한계에 대한 정량적평가를 연구하였다.

위상공간 X 의 부분모임 $S\subset X$ 가 조건 $\overline{\operatorname{int} S}\subset S$ 를 만족시킬 때 S 를 위상공간 X 의 표준모임이라고 부른다. 이 사실을 $S \overset{\bullet}{\subset} X$ 와 같이 표시한다. 또한 U 가 위상공간 X 의 열린모임이라는 사실을 $U \overset{\circ}{\subset} X$ 와 같이 표시한다.

$n\in\mathbf{N}$, $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ 또는 $\mathbf{C}$ 라고 한다. $x\in\mathbf{K}^n$ 에 대해 $|x| = \max_{1\le i\le n}|x_i|$ 로 놓고 $k\in\mathbf{Z}^n$ 에 대해 $\|k\| = |k_1| + \cdots + |k_n|$ 으로 놓는다. 또한 $u,\ v\in\mathbf{K}^n$ 에 대하여 $<u,\ v> = \sum_{i=1}^{n} u_i\bar{v}_i$ 와 같이 놓고 n 차원수공간 $\mathbf{K}^n$ 의 스칼라적을 정의한다. 바나흐공간 $\mathbf{E}$ 를 바나흐공간 $\mathbf{F}$ 로 보내는 련속선형넘기기들의 바나흐공간을 $L(\mathbf{E},\mathbf{F})$ 로, $\mathbf{E}$ 를 $\mathbf{F}$ 로 보내는 위상선형동형넘기기전체의 모임

을 $IL(\mathbf{E},\ \mathbf{F})$와 같이 표시한다. 한편 $\rho>0$에 대하여

$$U_\rho=\{\theta\in \boldsymbol{C}^n : |\mathrm{Im}\theta|<\rho\},\ \overline{U}_\rho=\{\theta\in \boldsymbol{C}^n : |\mathrm{Im}\theta|\le\rho\}$$

로 놓는다.

정의 1 $\upsilon=(\upsilon_1,\ \cdots,\ \upsilon_n)\in\mathbf{R}^n$이라고 하자. 어떤 $\gamma>0$과 $\sigma\ge n$에 대하여 조건

$$|l\cdot\upsilon-m|\ge\frac{\gamma}{\|l\|^\sigma}\ \ (l\in\mathbf{Z}^n\setminus\{0\},\ m\in\mathbf{Z}) \tag{1}$$

가 만족될 때 벡토르 υ는 리산형디오판투스조건을 만족시킨다고 말한다. 조건 (1)을 만족시키는 벡토르 $\upsilon\in\mathbf{R}^n$들의 모임을 $\mathcal{D}^n(\gamma,\ \sigma)$로 표시한다.

보조정리[11] $\upsilon\in\mathcal{D}^n(\gamma,\ \sigma)$라고 하고 넘기기 $h:\mathbf{T}^n\to\mathbf{R}^{2n}$가 U_ρ에서 실해석적이고 $< h >:=\int_{\mathbf{T}^n}h(\theta)=0$이라고 하자. 이때 임의의 $0<\delta<\rho$에 대하여 계차방정식

$$u(\theta)-u(\theta+\upsilon)=h(\theta)$$

의 평균값 $<u>$가 령인 유일한 풀이 $u:\mathbf{T}^n\to\mathbf{R}^{2n}$으로서 $U_{\rho-\delta}$우에서 실해석적인것이 존재하며 나아가서 $\|u\|_{\rho-\delta}\le c_0\gamma^{-1}\delta^{-\sigma}\|h\|_\rho$ (c_0은 n과 σ에 의존되는 상수)가 성립한다.

정의 2 $\upsilon\in\mathcal{D}^n(\gamma,\ \sigma)$에 대하여 $R_\upsilon:\mathbf{T}^n\to\mathbf{T}^n$을 $R_\upsilon(\theta)=\theta+\upsilon$로 정의한다.

정의 3 $X\dot{\subset}\mathbf{C}^n$을 $\overline{X}$가 콤팍트인 모임이라고 한다. 모임 X에서 련속이고 1－주기적이며 $\mathrm{int}\,X$에서 실해석적인 넘기기 $K:X\to\mathbf{R}^{2n};z\mapsto K(z)$들전체의 모임을 $\mathcal{P}(X,\ \mathbf{R}^{2n})$과 같이 표시한다. $\mathcal{P}(X,\ \mathbf{R}^{2n})$은 노름 $\|K\|=\sup_{z\in X}|K(\theta)|=\sup_{z\in X}\max_{1\le j\le 2n}|K_j(z)|$에 관하여 바나흐공간이 된다. $Y\subset\mathbf{R}^{2n}$일 때 $\mathcal{P}(X,\ Y)=\{K\in\mathcal{P}(X,\mathbf{R}^{2n}):\ K(X)\subset Y\}$로 놓는다. 아래에서는 간략기호 $\mathcal{P}(\rho)=\mathcal{P}(\overline{U}_\rho,\ \mathbf{R}^{2n})$을 사용한다.

$\mathbf{U}^{2n}$을 $\mathbf{R}^n$의 열린모임 U와 $\mathbf{T}^n$의 직적 즉 $\mathbf{U}^{2n}=\mathbf{T}^n\times U$와 같이 표시되는 모임이거나 $\mathbf{R}^{2n}$의 열린모임으로 주어지는 모임이라고 하자.

넘기기 $K:\overline{U}_\rho\to\mathbf{U}^{2n}$으로서 U_ρ에서 실해석적이고 $\overline{U}_\rho$의 경계우에서 련속이며

$$K(\theta+k)=K(\theta)+(k,\ 0)\ \ (k\in\mathbf{Z}^n) \tag{2}$$

를 만족시키는 넘기기전체의 모임을 $\tilde{\mathcal{P}}(\rho)$와 같이 표시한다.

ω를 다양체 $\mathbf{U}^{2n}$우의 실해석적인 완전씸플렉트구조라고 하자. 이때 선형동형넘기기 $J(z):T_z\mathbf{U}^{2n}\to T_z\mathbf{U}^{2n}$이 유일하게 존재하여

$$\omega(u,\ w)=<u,\ J(z)w>\ \ ((u,\ w)\in T_z\mathbf{U}^{2n}\times T_z\mathbf{U}^{2n}) \tag{3}$$

이 성립한다. ω가 $\mathbf{U}^{2n}$우의 완전씸플렉트구조이므로 $\mathbf{U}^{2n}$우의 1차미분형식 α가 있어서 $\omega=d\alpha$가 성립한다. $\mathbf{U}^{2n}$우의 1차미분형식 α에 대하여 어떤 실해석적넘기기 $a:\mathbf{U}^{2n}\to\mathbf{R}^{2n}$이 있어서

$$\alpha_z=a(z)\cdot dz=\sum_{i=1}^{2n}a_i(z)dz_i\ \ (z\in\mathbf{U}^{2n}) \tag{4}$$

가 성립한다.

정의 4 $d\in\mathbf{N}$, $B\overset{\bullet}{\subset}\mathbf{R}^d$ 라고 하고 $0\in B$ 라고 가정한다. 넘기기 $f:\mathbf{U}^{2n}\times B\to\mathbf{U}^{2n}$ 이 주어졌다고 가정하고 매 $x\in\mathbf{U}$ 에 대하여 $f(x,\cdot)$ 가 C^2 급이고 매 $\lambda\in B$ 에 대하여 $f_\lambda := f(\cdot,\lambda):\mathbf{U}^{2n}\to\mathbf{U}^{2n}$ 이 씸플렉트넘기기이며 실해석적이라고 가정하자. 이때 $\{f_\lambda,\ \lambda\in B\}$ 를 씸플렉트넘기기들의 λ －파라메터족이라고 부른다. $\{f_\lambda,\ \lambda\in B\}$ 를 씸플렉트넘기기들의 λ －파라메터족, $v\in\mathbf{R}^n$ 을 주어진 벡토르라고 하자.

이제 $\lambda\in B$ 에 대하여 미지함수 $K:\mathbf{T}^n=\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n\to\mathbf{U}^{2n}$ 에 관한 함수방정식

$$f_\lambda\circ K=K\circ R_v \tag{5}$$

를 고찰하자. 식 (5)를 만족시키는 넘기기 $K:\mathbf{T}^n\to\mathbf{U}^{2n}$ 의 영상모임 $K(\mathbf{T}^n)\subset\mathbf{U}^{2n}$ 은 f_λ －불변모임이 된다. 여기서 만일 $K:\mathbf{T}^n\to\mathbf{U}^{2n}$ 이 단일넣기이면 $\mathcal{T}=K(\mathbf{T}^n)$ 는 f_λ 에 관한 불변고리가 된다. 즉 $K:\mathbf{T}^n\to\mathbf{U}^{2n}$ 은 f_λ 의 불변고리 $\mathcal{T}$ 의 파라메터화가 된다.

정의 5 $\{f_\lambda,\ \lambda\in B\}$ 를 씸플렉트넘기기들의 λ －파라메터족이라고 하고 $\hat{\lambda}\in B$ 및 $v\in\mathcal{D}^n(\gamma,\ \sigma)$ 라고 하자. 그리고 다음의 조건들을 만족시킨다고 가정한다.

① n 차행렬값함수 $N(\theta)$ $(\theta\in\mathbf{T}^n)$ 가 있어서

$$N(\theta)(DK(\theta)^{\mathrm{T}}DK(\theta))=I_n\ (\theta\in\mathbf{T}^n)$$

이 성립한다. 여기서 I_n 은 n 차단위행렬을 나타낸다.

② $P(\theta)=DK(\theta)N(\theta)$ 라고 하고

$$T(\theta)=P(\theta)^{\mathrm{T}}[I_n-J(K(\theta))^{-1}P(\theta)DK(\theta)^{\mathrm{T}}J(K(\theta))]$$

$$\Lambda(\theta)=\begin{pmatrix}T(\theta+v)\\ DK(\theta+v)^{\mathrm{T}}J(K(\theta+v))\end{pmatrix}\left(\left.\frac{\partial f_\lambda}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=\hat{\lambda}}(K(\theta))\right)$$

라고 놓을 때 $2n$ 차행렬값함수 $<\Lambda>_\theta$ 는 $2n$ 차원의 값구역을 가진다.

이때 쌍 $(f_{\hat{\lambda}},\ K)$ 는 불퇴화이다고 말한다.

이제 4변수다항식 $\lambda(y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}\lambda(y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4)&=2^{16}3\mathrm{n}^8(1+|f_\lambda|_{C^1,\mathcal{B}_r})^2(1+\gamma)(1+\delta)(1+\delta^\sigma)(1+\gamma\delta^\sigma)^2\cdot\\ &\cdot(1+\gamma^2\delta^{2\sigma})(1+\gamma\delta^{(1+\sigma)})(1+|J|_{C^1,r})(1+|J^{-1}|_{C^1,r})(1+c_0)^3(1+2ny_1{}^2y_2)\cdot\\ &\cdot(1+y_1)^{10}(1+y_2)^7(1+y_3)^4(1+y_4)^3\end{aligned} \tag{6}$$

정리 $\rho_0>0$, $\delta_0=\min(1,\rho_0/12)$, $v\in\mathcal{D}(\gamma,\ \sigma)$ 이고 $\{f_\lambda,\ \lambda\in B\}$ 는 씸플렉트넘기기들의 $2n$ －파라메터족이라고 하자. 그리고 다음의 가정들이 만족된다고 하자.

① f_0 과 $K_0\in\widetilde{\mathcal{P}}(\rho_0)$ 은 정의 5의 조건 ①과 ②를 만족시킨다.

② $\{f_\lambda,\ \lambda\in\Lambda\}$ 는 어떤 $r>0$ 에 관하여 복소근방

$$\mathrm{B}_r=\left\{z\in\boldsymbol{C}^{2n}:\inf_{\theta\in U_{\rho_0}}|z-K_0(\theta)|<r\right\} \tag{7}$$

까지 정칙으로 연장가능한 실해석적씸플렉트넘기기들의 족이며 $|f_\lambda|_{C^2,\mathcal{B}_r}<\infty$ 를 만족시킨다.

$e_0(\theta)=f_0(K_0(\theta))-K_0(\theta+v)$ $(\theta\in\overline{U}_{\rho_0})$ 라고 놓는다. 또한

$$\beta = \gamma^2 {\delta_0}^{2\sigma-1} 2^{-(4\sigma+1)}(1+2^{4\sigma-1}) \tag{8}$$

$$c = \lambda(d_0+\beta,\ \nu_0+\beta,\ \tau_0+\beta,\ \eta_0+\beta) \tag{9}$$

라고 놓는다. 이때 $\|e_0\|_{\rho_0}$ 이 부등식

③ $c\gamma^{-4}{\delta_0}^{-4\sigma}\|e_0\|_{\rho_0}<1$, ④ $c\gamma^{-2}{\delta_0}^{-2\sigma}\|e_0\|_{\rho_0}<r$

들을 만족시키면 $K_\infty \in \widetilde{\mathcal{P}}(\rho_0-6\delta_0)$ 와 벡토르 $\lambda_\infty \in \mathbf{R}^{2n}$ 이 있어서 다음의 식들이 성립한다.

$$f_{\lambda_\infty}\circ K_\infty = K_\infty \circ R_\upsilon \tag{10}$$

$$\|K_\infty - K_0\|_{\rho_0-6\delta_0} < c\gamma^2{\delta_0}^{-2\sigma}\|e_0\|_{\rho_0},\ |\lambda_\infty| < c\gamma^2{\delta_0}^{-2\sigma}\|e_0\|_{\rho_0} \tag{11}$$

증명 $\rho>0$ 에 대하여 넘기기 $F:\widetilde{\mathcal{P}}(\rho)\to\widetilde{\mathcal{P}}(\rho)$ 를

$$F(K) = f_\lambda \circ K - K\circ R_\upsilon$$

로 정의한다. 이때 방정식 (5)는 아래와 같이 표시된다.

$$F(K)=0 \tag{12}$$

이때 $\widetilde{\mathcal{P}}(\rho)$ 에 속하는 넘기기를 방정식 (5)의 근사풀이라고 부른다. 방정식 (5)의 근사풀이 $K\in\widetilde{\mathcal{P}}(\rho)$ 에 대하여 넘기기 $e:U_\rho\to\mathbf{U}^{2n}$ 을

$$e(\theta) = (f_\lambda\circ K)(\theta) - (K\circ R_\upsilon)(\theta)\ \ (\theta\in U_\rho)$$

로 정의하고 근사풀이 K 의 오차라고 부르며 $\|e\|_\rho$ 를 근사풀이 K 의 오차크기라고 부른다. $m\in\mathbf{N}$ 이라고 하고 방정식 (12)에 뉴톤법을 적용할 때 방정식 (12)의 $m-1$ 번째 근사풀이 $(K_{m-1},\ \lambda_{m-1})$ 로부터 다음단계의 근사풀이

$$K_m = K_{m-1}+\Delta_{m-1},\ \lambda_m = \lambda_{m-1}+\delta_{m-1}$$

을 주는 증분 $\Delta_{m-1},\ \delta_{m-1}$ 에 관한 방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$Df_{\lambda_{m-1}}(K_{m-1}(\theta))\Delta m-1 - \partial_\upsilon\Delta_{m-1} + \frac{\partial}{\partial\lambda}f_\lambda(K_{m-1}(\theta))\bigg|_{\lambda=\lambda_{m-1}}\delta_{m-1} = -e_{m-1}(\theta) \tag{13}$$

이때 식 (13)을 (12)에 대한 선형화방정식이라고 부른다. $(f_{\lambda_{m-1}},\ K_{m-1})$ 가 불퇴화라는 가정과 υ 의 디오판투스성을 고려하면 방정식 (13)은 보조정리로부터 풀이 $\Delta_{m-1},\ \delta_{m-1}$ 을 가진다. 선행연구[12]의 정리 1의 증명절차를 따라 적분형테일러공식[10]과 노이만의 합렬정리[16] 및 위상선형동형넘기기의 거꿀을 취하는 연산

$$\Phi: IL(\mathbf{R}^n,\ \mathbf{R}^n)\to IL(\mathbf{R}^n,\ \mathbf{R}^n);\ \Phi(X)=X^{-1}$$

의 미분공식[6]

$$D\Phi(X)\mathrm{H} = -X^{-1}\mathrm{H}X^{-1}\ \ (\forall\mathrm{H}\in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n))$$

들을 적용하면 14개의 변수 $\sigma, \gamma, n, \rho_0, \delta_0, r, |f_0|_{C^2,\mathcal{B}_r}, |a|_{C^2,\mathcal{B}_r}, |J|_{C^2,\mathcal{B}_r}, |J^{-1}|_{C^2,\mathcal{B}_r}, \|DK_0\|_{\rho_0}$, $\|(\partial f_\lambda/\partial\lambda)|_{\lambda=0}K_0\|_{\rho_0}, \|N_0\|_{\rho_0}, |\bar{S}_0|^{-1}$ (여기서 N_0 과 Λ_0 은 정의 5에서 K 를 K_0 으로 바꾼 경우의 해당 넘기기들을 나타낸다.)들에 관한 함수 E_0 으로서 다음의 조건을 만족시키는것을 얻을수 있다. 즉 $\|e_0\|_{\rho_0}\le E_0$ 일 때 $(f_{\lambda_{m-1}},\ K_{m-1})$ 가 불퇴화이면 $(f_{\lambda_m},\ K_m)$ 도 불퇴화이다.

다항식 (6)은 함수 E_0 으로부터 얻어진다. 이때 선행연구[12]의 론의를 따르면 령차근사풀이의 오차 $\|e_0\|_{\rho_0}$ 이 정리의 조건 ③, ④를 만족시키면 방정식 (5)에 뉴톤반복법을 적용할 때 매번 전단계의 근사풀이로부터 다음단계의 근사풀이를 얻을수 있고 따라서 뉴톤

반복법을 무한히 반복할수 있으며 근사풀이렬 $\{(K_m, \lambda_m)\}$은 어떤 극한값 $(K_\infty, \lambda_\infty)$에로 수렴하고 K_∞, λ_∞는 식 (10), (11)을 만족시킨다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] 신경령 등; 수학, 2, 49, 주체106(2017).

[2] 조연희 등; 조선민주주의인민공화국 과학원통보, 5, 18, 주체104(2015).

[3] V. I. Arnold; Usp. Mat. Nauk, 18, 5, 13, 1963.

[4] G. Benettin et al.; Nuovo Cimento B(11), 79, 2, 201, 1984.

[5] A. Celletti et al.; Nonlinearity, 13, 2, 397, 2000.

[6] J. Dieudonné; Foundations of Modern Analysis, Academic Press, 154～154, 1969.

[7] J. Féjoz; arXiv:1105.5604v1 [math.DS], 2010.

[8] R. H. G. Helleman et al.; Lecture Notes in Physics, 247, 64, 1986.

[9] Wu-hwan Jong et al.; J. Theo. Phys. & Crypto, 4, 11, 17, 2013.

[10] S. Lang; Introduction to Differential Manifolds 2ed, Springer, 1～50, 2002.

[11] R. de la Llave; Proc. Sympos. Pure Math, 69, 175, 2001.

[12] R. de la Llave et al.; Nonlinearity, 18, 855, 2005.

[13] J. E. Marsden et al.; Bulletin of the American Mathematical Society, 43, 1, 43, 2005.

[14] J. K. Moser; Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. II, 1, 1, 1962.

[15] J. Xu et al.; Mathematische Zeitschrift, 226, 375, 1997.

[16] K. Yosida; Functional Analysis. sixth edition, Springer, 1～200, 1980.

[17] 中島徳嘉, 山崎耕造; J. Plasma Fusion Res., 88, 3, 153, 2012.

주체107(2018)년 12월 5일 원고접수

Explicit Estimation of the Realization Condition Coefficients of KAM Theorem for Symplectic Mappings Involving Parameters

Jong U Hwan, Pak Won Hyok

We obtain an explicit estimation of the realization condition coefficients of KAM theorem for real analytic symplectic mappings involving parameters which require symplectic mappings either not to be written in action-angle variables or not to be a perturbation of integrable one.

Key words: parameter, symplectic mapping, KAM theorem