김일성종합대학학보 JOURNAL OF KIM IL SUNG UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체105(2016)년 제62권 제10호 Vol. 62 No. 10 JUCHE105(2016).

포물형련립편미분비선형적분방정식의 아도미언분해법

조 광 록

경애하는 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《기초과학은 과학기술강국을 떠받드는 주추입니다. 기초과학이 든든해야 나라의 과학기술이 공고한 토대우에서 끊임없이 발전할수 있습니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 40페지)

선행연구[3]에서는 련립편미분비선형방정식의 근사풀이를 아도미언분해법(ADM)으로 구하였고 선행연구[1]에서는 비선형방정식들에 대한 아도미언다항식을 작성하였다.

또한 선행연구[2]에서는 표준ADM과 ADM의 개선된 수법들을 제기하였다.

론문에서는 포물형편미분련립비선형적분방정식을 표준ADM과 ADM의 개선된 수법으로 론의하고 아도미언다항식을 구하는 정리들을 제기하였다.

다음과 같은 방정식들에 대하여 고찰하자.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\alpha\int_0^1 F_1(u,\ v)dx+f_1 \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=c_2^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\beta\int_0^1 F_2(u,\ v)dx+f_2 \tag{2}$$

$$(x,\ t)\in[0,\ 1]\times[0,\ \infty)\ (c,\ \alpha,\ \beta\in \boldsymbol{R}),\ u(0,\ t)=v(0,\ t)=0 \tag{3}$$

연산자

$$L_t=\frac{\partial}{\partial t},\ L_{xx}=\frac{\partial^2}{\partial x^2},$$
$$N_1(u,\ v)=\int_0^1 F_1(u,\ v)dx,\ \ N_2(u,\ v)=\int_0^1 F_2(u,\ v)dx \tag{4}$$

를 받아들이고 거꿀연산자 $L_t^{-1}=\int_0^t(\cdot)d\tau$ 를 방정식들의 량변에 적용하면 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$u=c_1^2L_t^{-1}L_{xx}u+\alpha L_t^{-1}N_1(u,\ v)+L_t^{-1}f_1$$
$$v=c_2^2L_t^{-1}L_{xx}v+\beta L_t^{-1}N_2(u,\ v)+L_t^{-1}f_2$$

ADM은 방정식 (1)−(3)의 풀이를 $u=\sum_{n=0}^{\infty}u_n,\ v=\sum_{n=0}^{\infty}v_n$ 과 같은 무한합렬모양으로 구한다.

비선형항들에 대한 아도미언다항식은 $N_1(u,\ v)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n,\ N_2(u,\ v)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n$ 과 같다. 여기

서 $A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[N_1\left(\sum_{i=0}^{n}\lambda^i u_i\,,\ \sum_{i=0}^{n}\lambda^i v_i\right)\right]_{\lambda=0}$, $B_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[N_2\left(\sum_{i=0}^{n}\lambda^i u_i\,,\ \sum_{i=0}^{n}\lambda^i v_i\right)\right]_{\lambda=0}$ 이다.

그러면 표준ADM의 점화식은 다음과 같이 쓸수 있다.

$$u_0 = L_t^{-1} f_1\,,\ \ v_0 = L_t^{-1} f_2$$

$$u_{n+1} = c_1^2 L_t^{-1} L_{xx} u_n + \alpha L_t^{-1} A_n,\ \ v_{n+1} = c_2^2 L_t^{-1} L_{xx} v_n + \beta L_t^{-1} B_n,\quad n \ge 1 \tag{5}$$

$f_1 = f_{11} + f_{12}$, $f_2 = f_{21} + f_{22}$ 와 같이 구분될 때 ADM의 개선된 수법의 점화식은 다음과 같이 쓸수 있다.

$$u_0 = L_t^{-1} f_{11},\ \ v_0 = L_t^{-1} f_{21}$$

$$u_1 = L_t^{-1} f_{12} + c_1^2 L_t^{-1} L_{xx} u_0 + \alpha L_t^{-1} A_0,\ \ v_1 = L_t^{-1} f_{22} + c_2^2 L_t^{-1} L_{xx} v_0 + \beta L_t^{-1} B_0$$

성분 u_n, v_n, $n \ge 1$ 들은 식 (5)에서와 같이 계산된다.

n 차근사를 $\phi_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $\psi_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ 로 표시하면 ADM풀이는 $u = \lim_{n\to\infty}\phi_n$, $v = \lim_{n\to\infty}\psi_n$ 으로 구해진다.

비선형항 $N_1(u,\ v)$ 에 대한 아도미언다항식을 작성하면 다음과 같다.

$$A_0 = \int_0^1 F_1(u_0,\ v_0)dx,\ \ A_1 = \int_0^1 [F'_{1u}(u_0,\ v_0)u_1 + F'_{1v}(u_0,\ v_0)v_1]dx,\ \cdots$$

일반적으로 아도미언다항식의 작성은 다음의 정리로 정식화된다.

정리 1 $A_n = \int_0^1\left(\sum_{k=1}^{n} U_n^k\right)dx,\ \ n \ge 1$

$$U_n^1 = u_1 \frac{\partial}{\partial u} F_1(u_0,\ v_0) + v_1 \frac{\partial}{\partial v} F_1(u_0,\ v_0)$$

$$U_n^k = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-k}(j+1)\left(u_{j+1}\frac{\partial}{\partial u_0}U_{n-1-j}^{k-1} + v_{j+1}\frac{\partial}{\partial v_0}U_{n-1-j}^{k-1}\right),\quad 2 \le k \le n$$

$N_2(u,\ v)$ 에 대한 아도미언다항식도 마찬가지로 작성한다.

$$B_0 = \int_0^1 F_2(u_0,\ v_0)dx,\ B_1 = \int_0^1 [F'_{2u}(u_0,\ v_0)u_1]dx + \int_0^1 [F'_{2v}(u_0,\ v_0)v_1]dx,\ \cdots$$

정리 2 $B_n = \int_0^1\left(\sum_{k=1}^{n} V_n^k\right)dx\,,\ \ n \ge 1$

$$V_n^1 = u_1 \frac{\partial}{\partial u} F_2(u_0,\ v_0) + v_1 \frac{\partial}{\partial v} F_2(u_0,\ v_0)$$

$$V_n^k = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-k}(j+1)\left(u_{j+1}\frac{\partial}{\partial u_0}V_{n-1-j}^{k-1} + v_{j+1}\frac{\partial}{\partial v_0}V_{n-1-j}^{k-1}\right),\quad 2 \le k \le n$$

경계값문제에 대하여 보자.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha\int_0^1 F_1(u,\ v)dx + f_1\,,\ \ \frac{\partial v}{\partial t} = c_2^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta\int_0^1 F_2(u,\ v)dx + f_2$$

$$u(0,\ t)=u(1,\ t)=0,\ \ v(0,\ t)=v(1,\ t)=0$$

식 (4)와 같은 연산자를 받아들이고 L_{xx}의 거꿀연산자를 구하면 다음과 같다.

$$L_{xx}^{-1}=\int_0^x dx_1\int_0^{x_1}(\cdot)dx_2-x\int_0^1 dx_1\int_0^{x_1}(\cdot)dx_2$$

L_{xx}^{-1}을 주어진 방정식들에 적용하면 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$u=\frac{1}{c_1^2}L_{xx}^{-1}L_tu-\frac{\alpha}{c_1^2}L_{xx}^{-1}N_1(u,\ v)-\frac{1}{c_1^2}L_{xx}^{-1}f_1,\ \ v=\frac{1}{c_2^2}L_{xx}^{-1}L_tv-\frac{\beta}{c_2^2}L_{xx}^{-1}N_2(u,\ v)-\frac{1}{c_2^2}L_{xx}^{-1}f_2$$

ADM의 개선된 수법의 점화식은 다음과 같이 된다.

$$u_0=-\frac{1}{c_1^2}L_{xx}^{-1}f_{11},\quad v_0=-\frac{1}{c_2^2}L_{xx}^{-1}f_{21} \tag{6}$$

$$u_1=-\frac{1}{c_1^2}L_{xx}^{-1}f_{12}+\frac{1}{c_1^2}L_{xx}^{-1}L_tu_0-\frac{\alpha}{c_1^2}L_{xx}^{-1}A_0,\ v_1=-\frac{1}{c_2^2}L_{xx}^{-1}f_{22}+\frac{1}{c_2^2}L_{xx}^{-1}L_tv_0-\frac{\beta}{c_2^2}L_{xx}^{-1}B_0 \tag{7}$$

$$u_{n+1}=\frac{1}{c_1^2}L_{xx}^{-1}L_tu_n-\frac{\alpha}{c_1^2}L_{xx}^{-1}A_n,\ v_{n+1}=\frac{1}{c_2^2}L_{xx}^{-1}L_tv_n-\frac{\beta}{c_2^2}L_{xx}^{-1}B_n,\quad n\ge 1 \tag{8}$$

실례 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+3\displaystyle\int_0^1\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2dx-2t+t^4+x^2-x$, $\dfrac{\partial v}{\partial t}=\dfrac{\partial^2v}{\partial x^2}+3\displaystyle\int_0^1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx-2t^2+t^3+2t(x^2-x)$,

$$u(0,\ t)=u(1,\ t)=0,\quad v(0,\ t)=v(1,\ t)=0,$$

$$f_{11}=-2t,\ \ f_{12}=t^4+x^2-x,\ \ f_{21}=-2t^2,\ \ f_{22}=t^3+2t(x^2-x)$$

로 놓고 ADM의 점화식 (6)-(8)을 적용하면 정확한 풀이 $u=(x^2-x)t,\ v=(x^2-x)t^2$이 얻어진다.

참 고 문 헌

[1] Jun-Sheng Duan; J. Appl. Math. and Comp., 217, 6337, 2011.

[2] Abdul-Majid Wazwaz; J. Appl. Math. and Comp., 102, 77, 1999.

[3] Al-Humedi Hameeda Oda; Int. J. Contemp. Math. Sciences, 51, 5, 2505, 2010.

주체105(2016)년 6월 5일 원고접수

Adomian's Decomposition Method for Solving Nonlinear Systems of Parabolic Partial Integra-Differential Equations

Jo Kwang Rok

We considered an Adomian's decomposition method for solving initial value problem and boundary value problem of the nonlinear systems of parabolic partial integro-differential equation.

Key word: Adomian's decomposition method