김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제2호

비선형 4 계슈뢰딩게르방정식의 꼬쉬문제의 대역적풀이의 비존재성

김진명, 김경주

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《나라의 과학기술을 세계적수준에 올려세우자면 발전된 과학기술을 받아들이는것과 함께 새로운 과학기술분야를 개척하고 그 성과를 인민경제에 적극 받아들여야 합니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제11권 138～139페지)

론문에서는 수학과 물리학의 여러 분야에서 많이 제기되고있는 비선형4계슈뢰딩게르방정식에 대한 연구를 진행하였다.

론문에서는 준립자의 질량이 무한대일 때 자성물질에서 솔리톤을 연구하는 방정식인 비선형4계슈뢰딩게르방정식의 꼬쉬문제

$$\begin{cases} iu_t + a\Delta u + b\Delta^2 u + f(u) = 0, & (t,\ x) \in \mathbf{R}^{n+1} \\ u(0,\ x) = \lambda u_0(x), & x \in \mathbf{R}^n \end{cases} \tag{1}$$

를 고찰한다. 여기서 $a,\ b\,(b \neq 0)$는 실수, Δ는 라쁠라스연산자, $\lambda \geq 0$이고 $f(u) = \mu |u|^p$ ($\mu \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$)은 비선형항이다. 식 (1)은 적분방정식

$$u(t) = S(t)u_0 + i\int_0^t S(t-\tau) f(u(\tau))d\tau \tag{2}$$

와 동등하다. 여기서 $S(t)\varphi(x) := F^{-1} e^{it(-a|\xi|^2 + b|\xi|^4)} F\varphi(x)$이다.

비선형4계슈뢰딩게르방정식의 꼬쉬문제의 풀이의 타당성에 대하여 여러 론문들에서 연구되였다.

선행연구[1]에서는 $|f^{(k)}(u)| < C|u|^{p-k},\ k = 0,\ 1,\ \cdots,\ [s]+1,\ [s] \leq p-1$이고 $\|u_0\|_{H^s(\mathbf{R}^n)} = 1$인 가정하에서 $p \leq p_s := 8/(n-2s)+1$일 때 임의의 λ에 대하여 방정식 (1)의 국부적풀이의 유일존재성을, $p = p_s$일 때 충분히 작은 정수 λ에 대하여 방정식 (1)의 대역적풀이의 유일존재성을 밝혔다.

선행연구[2]에서는 $f(u) = \mu |u|^{p-1} u$, $\mu \in \mathbf{R}$이고 $\|u_0\|_{H^s(\mathbf{R}^n)} = 1$인 가정하에서 보존법칙들을 리용하여 임의의 $\lambda > 0$에 대하여 방정식 (1)의 대역적풀이의 유일존재성을 밝혔다. 비선형항이 $f(u) = \mu |u|^p$이면 보존법칙들이 성립하지 않으므로 선행연구[2]에서 적용한 방법으로서는 임의의 $\lambda > 0$에 대한 방정식 (1)의 대역적풀이의 존재성을 얻을수 없다.

론문에서는 선행연구[3]에서 비선형슈뢰딩게르방정식에 적용한 방법을 리용하여 $f(u) = \mu |u|^p$ ($\mu \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, $p \leq p_s$)일 때 어떤 $u_0 \in H^s(\mathbf{R}^n)$이 존재하여 충분히 큰 $\lambda > 0$에 대하여 방정식 (1)의 대역적풀이가 존재하지 않는다는것을 증명함으로써 선행연구[1]에서 가정한 $\lambda > 0$이 충분히 작다는 조건이 대역적풀이의 유일존재성에 대한 증명에서 본질적이라는것을 밝혔다. 또한 선행연구[1]에서 취급되지 않은 $p > p_s$, $u_0(\neq 0) \in H^s(\mathbf{R}^n)$인

경우에 방정식 (1)의 대역적풀이의 비존재성을 밝혔다.

론문에서 F 는 푸리에변환을, F^{-1} 은 거꿀푸리에변환을, $\phi_\tau(x) := \phi(x/\sqrt{\tau})$, $p' = p/(p-1)$ 를 의미한다. 또한 임의의 $8 \le q < \infty$, $2 \le r < \infty$ 에 대하여 $4/q = n(1/2 - 1/r)$ 을 만족시키면 $(q,\ r)$ 를 허용쌍이라고 부른다.

정의 1 $u \in L^p_{loc}([0,\ T) \times \mathbf{R}^n)$ 이 다음의 조건을 만족시키면 그것을 비선형4계슈뢰딩게르방정식 (1)의 $[0,\ T)$ 우에서의 약풀이라고 부른다. 임의의 $\psi \in C_0^\infty([0,\ T) \times \mathbf{R}^n)$ 에 대하여

$$\begin{aligned}&\int_{[0,T)\times\mathbf{R}^n} u(t,\ x)(-i\partial_t\psi(t,\ x) + a\Delta\psi(t,\ x) + b\Delta^2\psi(t,\ x))dxdt = \\ &= i\lambda\int_{\mathbf{R}^n} u_0(x)\psi(0,\ x)dx - \int_{[0,T)\times\mathbf{R}^n} \mu |u(t,\ x)|^p\, \psi(t,\ x)\,dxdt\end{aligned} \tag{3}$$

가 성립한다. 또한 약풀이가 존재하게 되는 $T \in (0,\ \infty]$ 들의 모임의 상한을 $T_\omega(\lambda)$ 로 표시하고 약풀이의 수명이라고 부른다.

보조정리 1 $l \in \mathbf{N}$, $p > 1$, $l \ge 4p' + 1$, $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n)$ 이고 u 가 방정식 (1)의 $[0,\ T)$ 우에서의 약풀이라고 하자. 또한 $\phi(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 가

$$0 \le \phi(x) \le 1,\ \ \phi(x) := \begin{cases} 1, & 0 \le |x| < 1/2 \\ 0, & |x| \ge 1 \end{cases} \tag{4}$$

을 만족시킨다고 하자. 이때 임의의 $\tau \in (0,\ T)$ 에 대하여 $|a|,\ |b|,\ n,\ p,\ l$ 에만 의존하는 상수 $C > 0$ 이 존재하여

$$\begin{cases} -\lambda\,\mathrm{Im}\displaystyle\int_{B(\sqrt{\tau})} u_0(x)\phi_\tau^l(x)dx \le C|\mathrm{Re}\,\mu|^{-1/(p-1)}\ \tau^{(d+2)/2-2q}(1+\tau^q), & \mathrm{Re}\,\mu < 0 \\ \lambda\,\mathrm{Im}\displaystyle\int_{B(\sqrt{\tau})} u_0(x)\phi_\tau^l(x)dx \le C|\mathrm{Re}\,\mu|^{-1/(p-1)}\ \tau^{(d+2)/2-2q}(1+\tau^q), & \mathrm{Re}\,\mu > 0 \\ -\lambda\,\mathrm{Re}\displaystyle\int_{B(\sqrt{\tau})} u_0(x)\phi_\tau^l(x)dx \le C|\mathrm{Im}\,\mu|^{-1/(p-1)}\ \tau^{(d+2)/2-2q}(1+\tau^q), & \mathrm{Im}\,\mu < 0 \\ \lambda\,\mathrm{Re}\displaystyle\int_{B(\sqrt{\tau})} u_0(x)\phi_\tau^l(x)dx \le C|\mathrm{Im}\,\mu|^{-1/(p-1)}\ \tau^{(d+2)/2-2q}(1+\tau^q), & \mathrm{Im}\,\mu > 0 \end{cases} \tag{5}$$

이 성립한다.

보조정리 2 보조정리 1의 가정밑에서 u_0 이 실수 k 에 대하여

$$-(\mathrm{Im}\,\mu)\mathrm{Re}\,u_0(x) \ge \begin{cases} |x|^{-k}, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \tag{6}$$

이거나

$$(\mathrm{Re}\,\mu)\mathrm{Im}\,u_0(x) \ge \begin{cases} |x|^{-k}, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \tag{7}$$

을 만족시킨다고 하자. 이때 보조정리 1과 같은 상수 $C > 0$ 이 존재하여 임의의 $\tau \in (0,\ T)$ 에 대하여

$$\lambda \le C\tau^{(k+2)/2-2p'}(1+\tau^{p'})\left(\int_{B(1/\sqrt{\tau})}|x|^{-k}\phi^l(x)dx\right)^{-1}(\max\{|\mathrm{Re}\,\mu|,\ |\mathrm{Im}\,\mu|\})^{(p-2)/(p-1)} \tag{8}$$

이 성립한다. 또한 식 (6)과 (7)대신

$$-(\mathrm{Re}\,\mu)\,\mathrm{Im}\,u_0(x) \ge \begin{cases}|x|^{-k}, & |x|\le 1\\ 0, & |x|>1\end{cases} \tag{9}$$

이거나

$$(\mathrm{Im}\,\mu)\,\mathrm{Re}\,u_0(x) \ge \begin{cases}|x|^{-k}, & |x|\le 1\\ 0, & |x|>1\end{cases} \tag{10}$$

을 만족시켜도 식 (8)이 그대로 성립한다.

증명 먼저 $\mathrm{Re}\,\mu<0$ 인 경우에 정리의 결과를 증명하자. 식 (7)로부터

$$-\mathrm{Im}\,u_0(x) \ge \begin{cases}-(\mathrm{Re}\mu)^{-1}|x|^{-k}, & |x|\le 1\\ 0, & |x|>1\end{cases} \tag{11}$$

이 성립한다. 식 (5), (11)로부터 임의의 $\tau\in(0,\ T)$ 에 대하여

$$-\mathrm{Im}\,J(x)=\tau^{n/2}\int_{\mathbf{R}^d}-\mathrm{Im}\,u_0(\sqrt{\tau}x)\phi^l(x)dx \ge (-\mathrm{Re}\,\mu)^{-1}\tau^{(n-k)/2}\int_{B(1/\sqrt{\tau})}|x|^{-k}\phi^l(x)dx$$

가 성립한다. 보조정리 1로부터 정리의 결과가 얻어진다. $\mathrm{Re}\,\mu>0$, $\mathrm{Im}\,\mu<0$, $\mathrm{Im}\,\mu>0$ 인 경우들은 우의 경우와 같은 방법을 리용할 때 정리의 결과를 쉽게 얻을수 있다.(증명끝)

보조정리 3 $p>1$, $u_0\in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n)$ 이고 u 가 방정식 (1)의 $[0,\ T_\omega(\lambda))$ 우에서의 약풀이라고 하자. u_0 이 실수 $k<\min\{n,\ 2/(p-1)\}$ 에 대하여 식 (6) 또는 식 (7)을 만족시키거나 식 (9) 또는 식 (10)을 만족시킨다고 하자. 이때 $|a|,\ |b|,\ n,\ p,\ k,\ l$ 에만 관계되는 상수 $\lambda_0>0$, $C>0$ 이 존재하여 임의의 $\lambda>\lambda_0$ 에 대하여

$$T_\omega(\lambda)\le C\max\{\lambda^{-1/k_1},\ \lambda^{-1/k_2}\}$$

이 성립한다. 여기서 $-k_1:=(k+2)/2-2p'$, $-k_2:=(k+2)/2-p'$ 이다.

정의 2 $u:[0,\ T)\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{C}$ 가 방정식 (1)과 다음의 조건

$$u\in X_T^s:=C([0,\ T);H^s(\mathbf{R}^n))\cap Y^s_{\gamma,\rho}(T)$$

를 만족시키면 그것을 비선형4계슈뢰딩게르방정식 (1)의 $[0,\ T)$ 우에서의 H^s-풀이라고 부른다. 여기서

$$Y^s_{\gamma,\rho}(T):=L^\gamma(0,\ T;B^s_{\rho,2}(\mathbf{R}^n)) \tag{12}$$

이고 $s<n/2$ 이며 $(\gamma,\ \rho)$ 는 허용쌍이다. 또한 $[0,\ T)$ 우에서의 H^s-풀이가 존재하는 $T\in(0,\ \infty]$ 들로 이루어진 모임의 상한을 H^s-풀이의 수명이라고 부르고 $T(\lambda)$ 로 표시한다.

선행연구[4]의 명제 3.1과 류사한 방법을 리용하면 쉽게 다음의 보조정리가 얻어진다.

보조정리 4 $s<n/2$, $p_s\ge p>1$ 일 때 u 가 H^s-풀이이면 u 는 약풀이이다.

정리 1 보조정리 4의 조건을 만족시킨다고 하자. $u_0\in H^s(\mathbf{R}^n)$ 이고 u_0 이 실수

$k < n/4 - s/2$ 에 대하여 식 (6) 또는 식 (7)을 만족시키거나 식 (9) 또는 식 (10)을 만족시킨다고 하자. 이때 $|a|, |b|, n, p, k, |\mu|$ 에만 관계되는 상수 $\lambda_0 > 0$, $C > 0$ 이 존재하여 임의의 $\lambda > \lambda_0$ 에 대하여

$$T(\lambda) \le C \max\{\lambda^{-1/k_1}, \lambda^{-1/k_2}\} \tag{13}$$

이 성립한다. 여기서 $-k_1 := (k+2)/2 - 2p'$, $-k_2 := (k+2)/2 - p'$ 이다.

증명 $\tau \in (0, T(\lambda))$ 이고 u 가 $[0, \tau)$ 우에서의 방정식 (1)의 H^s －풀이라고 하자. 보조정리 4로부터 u 는 방정식 (1)의 약풀이이다. 또한 $p_s \ge p$, $k < n/4 - s/2$ 이므로 $k < \min\{n, 2/(p-1)\}$ 이 성립하며 보조정리 3으로부터 식 (13)이 얻어진다.(증명끝)

보조정리 5 $n > 2,\ p > 1 + 4/(n-2),\ u_0 \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n)$ 이고 u_0 이 실수 $2(p+1)/(p-1) < k < n$ 에 대하여 식 (6) 또는 식 (7)을 만족시키거나 식 (9) 또는 식 (10)을 만족시킨다고 하자. 이때 어떤 $T > 0$ 가 존재하여 u 가 방정식 (1)의 $[0, T)$ 우에서의 약풀이이면 $\lambda = 0$ 이다.

정리 2 $n > 2$, $(4-n)/2 < s < n/2$, $p > p_s$, $u_0 \in H^s(\mathbf{R}^n)$ 이고 u_0 이 실수

$$k \in (2(p+1)/(p-1),\ \min\{n/2 - s + 2,\ n\})$$

에 대하여 식 (6) 또는 식 (7)을 만족시키거나 식 (9) 또는 식 (10)을 만족시킨다고 하자. 이때 어떤 $T > 0$ 이 존재하여 u 가 방정식 (1)의 $[0, T)$ 우에서의 약풀이이면 $\lambda = 0$ 이다.

증명 $p > p_s \ge 1 + 4/(n-2)$ 이므로 $2(p+1)/(p-1) < n/2 - s + 2$ 가 성립한다. 따라서 보조정리 5로부터 증명된다.(증명끝)

주의 식 (6) 또는 식 (7)을 만족시키거나 식 (9) 또는 식 (10)을 만족시키는 함수의 실례는 선행연구[3]의 실례 5.1에서 주었다.

참 고 문 헌

[1] 문학명, 김진명; 수학, 2, 4, 주체107(2018).

[2] S. Cui, C. Guo; Nonlinear Anal., 67, 687, 2007.

[3] M. Ikeda, T. Inui; J. Math. Anal. Appl., 425, 758, 2015.

[4] M. Ikeda, Y. Wakasugi; Differential Integral Equations, 26, 1275, 2013.

주체108(2019)년 12월 15일 원고접수

Non-Existence of the Global Solution of the Cauchy Problem for a Nonlinear Fourth-Order Schrödinger Equation

Kim Jin Myong, Kim Kyong Ju

This paper shows that there exists $u_0 \in H^s(\mathbf{R}^n)$ and λ_0 such that for any $\lambda \ge \lambda_0$ the global solution of a nonlinear fourth-order Schrödinger equation $iu_t + a\Delta u + b\Delta^2 u + \mu |u|^p = 0$, where $u(0,\ x) = \lambda u_0(x)$, $\mu \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, a , $b \ne 0$ and $\lambda \ge 0$ are real numbers, doesn't exist.

Keywords: Sobolev space, non-existence, Cauchy problem