김일성종합대학학보 주체107(2018)년
수 학 제64권 제2호

거절과 리탈을 가진 M/M/m/N형대중봉사체계

최금, 명찬길

론문에서는 현실에 보다 가까운 한가지 형태의 대중봉사체계를 연구하였다.

선행연구[1]에서는 서로 다른 봉사기구를 가진 M/M/2/N형대중봉사계의 에르고드성이 성립하기 위한 조건과 정상상태확률을 론의하였으며 선행연구[2]에서는 평균기다림시간이 짧으면 도착한 요청이 계에 들어가고 평균기다림시간이 길면 도착한 요청이 거절하는 거절봉사계를 연구하였다.

선행연구[3, 4]에서는 M/M/1/N형대중봉사계와 M/M/c/N형대중봉사계에서 평균줄의 길이와 평균기다림시간을 통계적방법으로 추정하였으며 선행연구[5]에서는 직렬로 련결된 2개의 기다림자리가 있는 유한원천을 가진 대중봉사계에서 상태확률방정식을 작성하고 상태확률의 라쁠라스변환을 구하였으며 평균줄의 길이와 평균기다림시간을 통계적방법으로 추정하였다.

1. 모 형 설 정

m 개의 봉사기구를 가진 대중봉사계를 취급하자.

원천에는 N 개의 요청들이 있다. 요청들은 세기가 λ 인 뽜쏭분포에 따라 봉사계에 도착한다. m 개의 봉사기구들의 봉사시간들은 세기가 μ 인 지수분포에 따른다.

봉사규칙은 FCFS봉사규칙(도착순봉사규칙)이다.

요청은 봉사계에 도착하여 확률 $b_i (i \ge m)$ 를 가지고 봉사계에 들어가거나 확률 $1-b_i$ $(i \ge m)$ 를 가지고 거절된다.

b_i 는 계안에 i 개의 요청이 있을 때 새로 도착한 요청이 봉사계에로 들어갈 확률이다. 이때 $b_i = 1 \ (i = 0, \cdots, \ m-1, \ 0 < b_{i+1} \le b_i < 1, \ i \ge m)$ 이 성립한다고 하자.

줄에서 요청들은 리탈하기 전까지 다음과 같은 밀도함수를 가지는 우연시간 T 만큼 기다리게 된다.

$$f(t) = \alpha e^{-\alpha t} \quad (\alpha > 0, \ t \ge 0)$$

$r(n) = \alpha(n-m)$ 이라고 하자.

$k = 0, \ 1, \ \cdots, \ m-1$ 에 대하여 $r(0) = r(1) = \cdots = r(m-1) = 0$ 이고 $n > m-1$ 개의 요청이 있을 때 $r(n)$ 을 거절효과라고 한다.

t 인 순간에 계안에 n 개의 요청이 있을 확률을 $P_n(t)$ 라고 하자.

2. 정상상태확률방정식과 정상상태확률

정리 1 정상상태확률방정식을 작성하면 다음과 같다.

$$\begin{cases} -N\lambda P_0 + \mu P_1 = 0 \\ (N-k+1)\lambda P_{k-1} - [(N-k)\lambda + k\mu]P_k + (k+1)\mu P_{k+1} = 0 \ \ (0<k<m) \\ (N-m+1)\lambda P_{m-1} - [(N-m)b_m\lambda + m\mu]P_m + (m\mu+\alpha)P_{m+1} = 0 \ \ (k=m) \\ (N-m-s+1)b_{m=s-1}\lambda P_{m=s-1} - [(N-m-s)b_{m+s}\lambda + m\mu + s\alpha]P_{m+s} + (m\mu + \alpha(s+1))P_{m+s+1} = 0 \\ \qquad (1 \le s < N-m) \\ b_{N-1}\lambda P_{N-1} - [m\mu + (N-m)\alpha]P_N = 0 \end{cases} \tag{1}$$

증명 먼저 상태확률방정식을 작성하자.

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)(1-N\lambda\Delta t) + \mu\Delta t P_1(t) + o(\Delta t)$$

$$P_k(t+\Delta t) = P_{k-1}(t)[N-(k-1)]\lambda\Delta t + P_k(t)[1-(N-k)\lambda\Delta t - k\mu\Delta t] + P_{k+1}(t)(k+1)\mu\Delta t + o(\Delta t) \quad (0<k<m)$$

$$P_m(t+\Delta t) = P_{k-1}(t)[N-(m-1)]\lambda\Delta t + P_m(t)[1-(N-m)b_m\lambda\Delta t - m\mu\Delta t] + \\ + P_{m+1}(t)(m\mu\Delta t + \alpha\Delta t) + o(\Delta t) \quad (k=m)$$

$$P_k(t+\Delta t) = P_{k-1}(t)b_{k-1}[N-(k-1)]\lambda\Delta t + P_k(t)[(1-(N-k))b_k\lambda\Delta t - m\mu\Delta t - (k-m)\alpha\Delta t] + \\ + P_{m+1}(t)(m\mu\Delta t + \alpha\Delta t) + o(\Delta t) \ \ (m<k<N)$$

$$P_N(t+\Delta t) = b_{N-1}\lambda\Delta t P_{N-1}(t) + [1-m\mu\Delta t - (N-m)\alpha\Delta t]P_N(t) + o(\Delta t)$$

따라서 다음과 같은 상태확률미분방정식들이 작성된다.

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -N\lambda P_0'(t) + \mu P_1(t) \\ \dfrac{dP_k(t)}{dt} = (N-k+1)\lambda P_{k-1}(t) - [(N-k)\lambda + k\mu] + (k+1)\mu P_{k+1}(t) \ \ (0<k<m) \\ \dfrac{dP_m(t)}{dt} = (N-m+1)\lambda P_{m-1}(t) - [(N-m)b_m\lambda + m\mu]P_m(t) + (m\mu+\alpha)P_{m+1}(t) \ \ (k=m) \\ \dfrac{dP_{m+s}(t)}{dt} = (N-m-s+1)b_{m+s-1}\lambda P_{m+s-1}(t) - [(N-m-s)b_{m+s}\lambda + m\mu + s\alpha]P_{m+s}(t) + \\ \qquad + [m\mu + \alpha(s+1)]P_{m+s+1}(t) \ \ (1 \le s < N-m) \\ \dfrac{dP_N(t)}{dt} = b_{N-1}\lambda P_{N-1}(t) - [m\mu + (N-m)\alpha]P_N(t) \end{cases}$$

표준조건은 다음과 같다.

$$\sum_{k=0}^{N} P_k(t) = 1$$

$\forall k$ 에 대하여 $\lim\limits_{t\to\infty} P_k(t) = P_k$ 가 성립한다.

여기로부터 $\lim\limits_{t\to\infty} P_k'(t) = 0$ 이다.

$$\begin{cases} -N\lambda P_0 + \mu P_1 = 0 \\ (N-k+1)\lambda P_{k-1} - [(N-k)\lambda + k\mu]P_k + (k+1)\mu P_{k+1} = 0 \ \ (0<k<m) \\ (N-m+1)\lambda P_{m-1} - [(N-m)b_m\lambda + m\mu]P_m + (m\mu+\alpha)P_{m+1} = 0 \ \ (k=m) \\ (N-m-s+1)b_{m=s-1}\lambda P_{m=s-1} - [(N-m-s)b_{m+s}\lambda + m\mu + s\alpha]P_{m+s} + (m\mu + \alpha(s+1))P_{m+s+1} = 0 \\ \qquad (1 \le s < N-m) \\ b_{N-1}\lambda P_{N-1} - [m\mu + (N-m)\alpha]P_N = 0 \end{cases}$$

정리 2 정상상태확률들은 다음과 같다.

$$\begin{cases} P_k = \dfrac{N!\rho^k}{(N-k)!k!}P_0 \ \ (1 \le k \le m) \\ P_{m+s} = \dfrac{\prod\limits_{i=0}^{s-1} b_{m+i}\rho^{m+s}N!}{[N-(m+s)]!m!\prod\limits_{i=0}^{s}(m+i\beta)}P_0 \ \ (1 \le s \le N-m) \end{cases} \tag{2}$$

여기서

$$P_0 = \left[N!\sum_{k=0}^{m}\frac{\rho^k}{(N-k)!k!} + N!\sum_{s=1}^{N-m}\frac{\prod\limits_{i=0}^{s-1} b_{m+i}\rho^{m+s}}{[N-(m+s)]!m!\prod\limits_{i=1}^{s}(m+i\beta)} \right]^{-1} \tag{3}$$

증명 정상상태확률방정식 (1)을 풀자.

$$P_1 = \frac{N\lambda}{\mu}P_0 = \frac{N!}{(N-1)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)P_0 = \frac{N!\rho}{(N-1)!}P_0$$

$$P_2 = \frac{1}{2\mu}[P_1(N-1)\lambda + \mu - N\lambda P_0] = \frac{N!}{(N-2)!2!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 = \frac{N!\rho^2 P_0}{(N-2)!2!}$$

$$P_{m-1} = \frac{N!}{(N-m+1)!(m-1)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{m-1} P_0 = \frac{N!\rho^{m-1}P_0}{(N-m+1)!(m-1)!}$$

$$P_m = \frac{N!}{(N-m)!m!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m P_0 = \frac{N!\rho^m}{(N-m)!m!}P_0$$

$$P_{m+1} = \frac{b_m N!\rho^{m+1}}{[N-(m+1)]!m!(m+\beta)}P_0, \ \ \beta = \frac{\alpha}{\mu}$$

$$P_{m+2} = \frac{b_m b_{m+1} N!\rho^{m+2}}{[N-(m+2)]!m!(m+\beta)(m+2\beta)}P_0$$

…

$$P_{m+s} = \frac{\prod\limits_{i=0}^{s-1} b_{m+i}\rho^{m+s}N!}{[N-(m+s)]!m!\prod\limits_{i=1}^{s}(m+i\beta)}P_0 \ \ (1 \le s < N-m)$$

$$P_N = \frac{\prod\limits_{i=0}^{N-m-1} b_{m+i}\rho^N N!}{(N-N)!m!\prod\limits_{i=1}^{N-m}(m+i\beta)}P_0$$

P_0은 $\sum_{k=0}^{N} P_k = 1$로부터 구할수 있다.

결국 정상상태확률은 다음과 같다.

$$\left\{\begin{array}{c} P_k = \dfrac{N!\rho^k}{(N-k)!k!} P_0 \quad (1 \le k \le m) \\ P_{m+s} = \dfrac{\prod_{i=0}^{s-1} b_{m+i} \rho^{m+s} N!}{[N-(m+s)]!m! \prod_{i=0}^{s} (m+i\beta)} P_0 \quad (1 \le s \le N-m) \end{array}\right\}$$

여기서

$$P_0 = \left[N! \sum_{k=0}^{m} \frac{\rho^k}{(N-k)!k!} + N! \sum_{s=1}^{N-m} \frac{\prod_{i=0}^{s-1} b_{m+i} \rho^{m+s}}{[N-(m+s)]!m! \prod_{i=1}^{s} (m+i\beta)} \right]^{-1}$$

이다.

3. 계의 효과성지표

정리 3 봉사계의 효과성지표들은 다음과 같다.

① 계안에 있는 평균요청수

$$L = \sum_{k=1}^{N} kP_k = N! \left[\sum_{k=1}^{m} \frac{\rho^k}{(k-1)!(N-k)!} + \sum_{s=1}^{N-m} \frac{(m+s)\prod_{i=0}^{s-1} b_{m+i} \rho^{m+s}}{m!(N-(m+s))! \prod_{i=1}^{s} (m+i\beta)} \right] P_0$$

② 평균줄의 길이

$$L_q = \sum_{s=1}^{N-m} sP_{m+s} = N! \sum_{s=1}^{N-m} \frac{s\prod_{i=0}^{s-1} b_{m+i} \rho^{m+s}}{m!(N-(m+s))! \prod_{i=1}^{s} (m+i\beta)} P_0$$

③ 비여있는 평균봉사기구수

$$M_0 = \sum_{k=0}^{m-1} (m-k) \frac{N!\rho^k}{(N-k)!k!} P_0$$

④ 거절확률

$$P_{거} = \frac{\beta}{\rho(N-L)} L_q + 1 - \sum_{i=m}^{N} b_i$$

⑤ 봉사받을 확률

$$P_{봉}=1-P_{거}$$

증명 ④ 거절확률을 구하여 보자.

거절확률은 단위시간동안에 봉사를 받지 못하고 봉사계를 떠나는 평균요청수와 단위시간동안에 계에 도착하는 평균요청수의 비를 의미한다.

요청의 도착세기가 λ이고 원천에 있는 요청수가 $N-L$이므로 단위시간동안에 봉사계에 도착하는 평균요청수는 $\lambda(N-L)$이다.

요청의 리탈세기가 α이므로 단위시간동안에 봉사를 받지 못하고 봉사계를 떠나가는 평균요청수는 αL_q이고 계에 도착한 요청들중에서 $\left(1-\sum_{i=m}^{N} b_i\right)$만 한 확률을 가지고 요청이 거절되기때문에 계에 도착한 요청들중에서 봉사계를 떠나가는 평균요청수는 $\lambda(N-L)\left(1-\sum_{i=m}^{N} b_i\right)$이다.

따라서 거절확률 $P_{거}$는 다음과 같이 구할수 있다.

$$P_{거}=\frac{\alpha L_q+\lambda(N-L)\left(1-\sum_{i=m}^{N} b_i\right)}{\lambda(N-L)}=\frac{\frac{\alpha}{\mu}L_q}{\frac{\lambda}{\mu}(N-L)}+\left(1-\sum_{i=m}^{N} b_i\right)=\frac{\beta}{\rho(N-L)}L_q+1-\sum_{i=m}^{N} b_i$$

참 고 문 헌

[1] B. Krishna Kumar et al.; Information and Management Sciences, 18, 63, 2007.

[2] M. S. El-Paoumy et al.; International Journal of Basic & Applied Sciences, 11, 149, 2011.

[3] K. Adendorff et al.; Orion(South Africa), 1, 1, 2004.

[4] R. Natarajan, Pak. J. Statist., 2, 171, 2006.

[5] P. Chakhad, Pak. J. Statist., 2, 185, 2012.

주체106(2017)년 12월 5일 원고접수

M/M/m/N Queues with Balking and Reneging

Choe Kum, Myong Chan Gil

In this paper, we consider the M/M/m/N queue with balking and reneging to obtain steady-state probabilities and measures of effectiveness by making steady-state difference equations.

Key words: exponential distribution, server, steady-state probability, balking function, expected waiting time