김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체106(2017)년 제63권 제6호 Vol. 63 No. 6 JUCHE106(2017).

시간에 관계되는 결수를 가진 분수확률미분방정식으로 묘사되는 금융시장에서 아시아식선택권의 가격

김주경, 김주성

론문에서는 최근에 널리 응용되고있는 분수브라운운동으로 묘사되는 금융시장에서 아시아식선택권의 가격화문제에 대하여 론의하였다.

선행연구[1]에서는 시간에 관계되는 결수를 가진 기하브라운운동으로 묘사되는 금융시장에서 기하평균과 산수평균의 아시아식선택권의 최량보호방략을 구하는 문제를 론의하였다.

선행연구[2]에서는 브라운운동으로 묘사되는 금융시장에서 기하평균아시아식선택권의 가격공식을 유도하고 이 선택권의 감도지표들의 표시식을 유도하였다.

선행연구[3]에서는 분수브라운운동으로 묘사되는 금융시장에서 기하평균아시아식선택권의 가격모형을 설정하고 가격방정식을 헤징수법을 써서 편미분방정식적으로 유도하였다.

론문에서는 기초자산이 변결수를 가진 분수브라운운동에 의한 확률미분방정식으로 묘사되는 금융시장에서 기하평균아시아식선택권의 가격공식을 말리아빈의 도함수를 계산하여 유도하였다. 그리고 분수브라운운동의 분포함수를 리용하여 얻어진 가격공식이 우에서 얻은 공식과 일치한다는것을 론증하였다.

$(\Omega,\ \mathscr{F},\ \boldsymbol{P})$ 를 허스트지수가 $H\ (0<H<1)$ 인 분수브라운운동 $\{B_H(t),\ t\ge 0\}$ 이 정의되는 완비확률공간이라고 하자.

분수브라운운동 $\{B_H(t),\ t\ge 0\}$ 의 공분산함수는 다음과 같다.

$$\mathrm{cov}(B_H(t),\ B_H(s))=\frac{|t|^{2H}+|s|^{2H}-|t-s|^{2H}}{2}\ \ (s,\ t>0)$$

기초자산가격 S_t 는 다음의 확률미분방정식을 만족시킨다.

$$dS_t=\mu_t S_t dt+\sigma_t S_t dB_H(t) \tag{1}$$

여기서 μ_t 는 기대수익률, σ 는 변동률로서 t 에 관한 함수이다.

$\pi(t)$ 를 t 시각에 주식에 투자한 투자액이라고 하면 재산과정 X_t 는

$$dX_t=(X_t-\pi_t)r_t+\pi_t dS_t=r_t X_t dt+\pi_t(\mu_t-r_t)dt+\sigma_t\pi_t dB_t^{(H)},\quad X(0)=X \tag{2}$$

로 표시된다. 여기서 r_t 는 무위험리자률이다.

$\widetilde{\boldsymbol{P}}$ 은 위험중성측도로서 $\left.\dfrac{d\widetilde{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}}\right|_{\mathscr{F}_t}=Z_t$ 를 만족시키도록 구한다. 여기서 $\mathscr{F}_t$ 는 t 시각까지 분수브라운운동 $B_s^{(H)}$ 에 의하여 생성된 모임벌이고 Z_t 는 $dZ_t=\theta_t Z_t dB_t^{(H)},\ Z_0=1$ 을 만족시킨다. 또한 θ_t 는 $\gamma_t=\int_0^t\theta_s\phi(s,\ t)ds=\dfrac{\mu_t-r_t}{\sigma_t},\ \phi(s,\ t)=H(2H-1)|t-s|^{2H-2}$ 을 만족시킨다.

그러면 $\widetilde{B}_t^{(H)} = B_t^{(H)} + \int_0^t \gamma_s ds$ 는 확률측도 $\widetilde{\boldsymbol{P}}$ 우에서의 분수브라운운동이다.

또한 이 확률측도밑에서 방정식 (1), (2)는 각각 다음과 같이 표시된다.

$$dS_t = r_t S_t + \sigma_t S_t d\widetilde{B}_t^{(H)} \tag{3}$$

$$dX_t = r_t X_t dt + \sigma_t \pi_t d\widetilde{B}_t^{(H)} \tag{4}$$

$J_t = e^{\frac{1}{t}\int_0^t \ln S_\tau d\tau}$ 을 기초자산 S_t 의 $[0,\ t]$ 구간에서의 기하평균이라고 하자.

실시가격이 K 이고 만기지불기일이 T 일 때 기하평균아시아식선택권의 마감시각에 지불액은 $(J_T - K)^+$ 이다.

$V(t,\ J_t,\ S_t)$ 를 기하평균아시아식선택권의 t 시각의 가격이라고 하자.

정리 1 기초자산가격 S_t 가 방정식 (3)을 만족시킨다고 가정하면 기하평균아시아식선택권의 $t\ (0 \le t \le T)$ 시각의 가격 $V(t,\ J_t,\ S_t)$ 는 다음의 편미분방정식을 만족시킨다.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial V}{\partial t} + \widetilde{\sigma}_t^2 S_t^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} + r_t S_t \dfrac{\partial V}{\partial S_t} + \dfrac{\partial V}{\partial J_t} \dfrac{J_t \ln\left(\dfrac{S_t}{J_t}\right)}{t} - r_t V = 0 \\ V(T,\ J_T,\ S_T) = (J_T - K)^+ \end{array}\right\} \tag{5}$$

증명 $V(t,\ J_t,\ S_t)$ 에 분수위크－이또－스꼬로호드적분변환공식을 적용하면

$$dV(t,\ J_t,\ S_t) = \left[\frac{\partial V}{\partial t} + r_t S_t \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial J}\frac{dJ_t}{dt} + \sigma_t S_t \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} D_t^{\phi}(S_t)\right]dt + \sigma_t S_t \frac{\partial V}{\partial S} d\widetilde{B}_t^{(H)}. \tag{6}$$

J_t 의 t 에 관한 도함수와 말리아빈의 도함수 $D_t^{\phi}(S_t)$ 를 계산하자.

$$\frac{dJ_t}{dt} = e^{\frac{1}{t}\int_0^t \ln S_\tau d\tau}\left(-\frac{1}{t^2}\int_0^t \ln S_\tau d\tau + \frac{1}{t}\ln S_t\right) = J_t \frac{\ln\left(\dfrac{S_t}{J_t}\right)}{t} \tag{7}$$

식 (3)의 풀이는 다음과 같다.

$$S_t = S_0 \exp\left\{\int_0^t \sigma_\tau d\widetilde{B}_\tau^{(H)} + \int_0^t r_\tau d\tau - \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^t \sigma_\tau \sigma_s \phi(\tau,\ s) d\tau ds\right\} =$$

$$= S_0 \exp\left\{\int_0^t \sigma_\tau d\widetilde{B}_\tau^{(H)} + \int_0^t r_\tau d\tau - \int_0^t \widetilde{\sigma}_s^2 ds\right\}$$

$$\|\sigma\|_t^2 = \int_0^t\int_0^t \sigma_u \sigma_v \phi(u,\ v) du dv = 2\int_0^t \sigma_s \int_0^s \sigma_\tau \phi(s,\ \tau) d\tau ds = 2\int_0^t \widetilde{\sigma}_s^2 ds$$

$$\widetilde{\sigma}_s^2 = \sigma_s \int_0^s \sigma_\tau \phi(s,\ \tau) d\tau$$

따라서 말리아빈의 도함수 $D_t^{\phi}(\cdot)$ 의 정의와 성질에 의하여 다음의 식이 성립된다.

$$D_s^{\phi}(S_t) = S_t \int_0^s \sigma_u \phi(s,\ u) du \tag{8}$$

재산과정 X_t 와 가격과정 V 가 같아야 하므로 식 (7), (8)을 고려하여 식 (4)와 (6)을 비교하면 식 (5)가 나온다. 즉 다음의 식이 성립된다.

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\tilde{\sigma}_t^2 S_t^2\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}+r_t S_t\frac{\partial V}{\partial S_t}+\frac{\partial V}{\partial J_t}\frac{J_t\ln\left(\frac{S_t}{J_t}\right)}{t}=r_t V$$

종점조건은 선택권의 정의로부터 나온다.(증명끝)

정리 2 기하평균아시아식선택권의 가격 $V(t,\ J_t,\ S_t)$ 는 다음과 같다.

$$V(t,\ J_t,\ S_t)=J_t^{\frac{t}{T}}S_t^{\frac{T-t}{T}}e^{\frac{\alpha(t)-\beta(t)+\gamma(t)}{2}}N(d_1)-Ke^{-\beta(t)}N(d_2)$$

여기서

$$d_1=(\ln[J_t^{t/T}S_t^{(T-t)/T}/K]+\alpha(t)+\gamma(t))/\sqrt{\gamma(t)}\,,\ \ d_2=d_1-\sqrt{\gamma(t)}\,,$$

$$\alpha(t)=\int_t^T(r_\tau-\tilde{\sigma}_\tau^2)\frac{T-\tau}{T}d\tau\,,\ \ \beta(t)=\int_t^T r_\tau d\tau\,,\ \ \gamma(t)=2\int_t^T\tilde{\sigma}_\tau^2\left(\frac{T-\tau}{T}\right)^2 d\tau\,,$$

$$N(x)=\int_{-\infty}^x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}dy\,.$$

증명 $\xi_t=[t\ln J_t+(T-t)\ln S_t]/T$, $V(t,\ J_t,\ S_t)=U(t,\ \xi_t)$ 라고 하면

$$\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\ln(J_t/S_t)}{T}\frac{\partial U}{\partial\xi_t}+\frac{\partial U}{\partial t}\,,$$

$$\frac{\partial V}{\partial S_t}=\frac{T-t}{TS_t}\frac{\partial U}{\partial\xi_t}\,,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}=\left(\frac{T-t}{TS_t}\right)^2\frac{\partial^2 U}{\partial\xi_t^2}-\frac{T-t}{TS_t^2}\frac{\partial U}{\partial\xi_t}\,,$$

$$\frac{\partial V}{\partial J_t}=\frac{t}{TJ_t}\frac{\partial U}{\partial\xi_t}\,.$$

이것을 방정식 (5)에 대입하면

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial U}{\partial t}+(r_t-\tilde{\sigma}_t^2)\frac{T-t}{T}\frac{\partial U}{\partial\xi_t}+\tilde{\sigma}_t^2\left(\frac{T-t}{T}\right)^2\frac{\partial^2 U}{\partial\xi_t^2}-r_t U=0\\&U(\xi_T,\ T)=(e^{\xi_T}-K)^+\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

이고 다시 변수변환 $\tau=\gamma(t)$, $\eta_\tau=\xi_t+\alpha(t)$, $W(\tau,\ \eta_\tau)=U(t,\ \xi_t)e^{\beta(t)}$ 을 적용하면

$$\frac{\partial U}{\partial t}=e^{-\beta(t)}\left(\frac{\partial W}{\partial\tau}\gamma'(t)-\beta'(t)W+\frac{\partial W}{\partial\eta_\tau}\alpha'(t)\right),\ \ \frac{\partial U}{\partial\xi_t}=e^{-\beta(t)}\frac{\partial W}{\partial\eta_t},\ \ \frac{\partial^2 U}{\partial\xi_t^2}=e^{-\beta(t)}\frac{\partial^2 W}{\partial\eta_t^2}\tag{10}$$

이다. 여기서 $\alpha(t),\ \beta(t),\ \gamma(t)$ 는 조건 $\alpha(T)=\beta(T)=\gamma(T)=0$ 을 만족시키는 함수이다.

식 (10)을 식 (9)에 대입하면 다음의 결과를 얻는다.

$$\gamma'(t)\frac{\partial W}{\partial\tau}+\tilde{\sigma}_t^2\left(\frac{T-t}{T}\right)^2\frac{\partial^2 W}{\partial\eta_\tau^2}+\left[(r_t-\tilde{\sigma}_t^2)\frac{T-t}{T}+\alpha'(t)\right]\frac{\partial W}{\partial\eta_\tau}-(r_t+\beta'(t))W=0\tag{11}$$

$$(r_t-\tilde{\sigma}_t^2)\frac{T-t}{T}+\alpha'(t)=0\,,\ \ r_t+\beta'(t)=0\,,\ \ \gamma'(t)=-2\tilde{\sigma}_t^2\left(\frac{T-t}{T}\right)^2$$

이라고 놓고 경계조건과 결합하면

$$\alpha(t)=\int_t^T (r_\tau-\widetilde{\sigma}_\tau^2)\frac{T-\tau}{T}d\tau,\quad \beta(t)=\int_t^T r_\tau d\tau,\quad \gamma(t)=2\int_t^T \widetilde{\sigma}_\tau^2\left(\frac{T-\tau}{T}\right)^2 d\tau$$

가 성립된다.

그러므로 식 (11)은 표준꼴모고로브방정식 $\frac{\partial W}{\partial \tau}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial \eta_\tau^2}=0,\ W(\eta_0,\ 0)=(e^{\eta_0}-K)^+$ 로 변환되며 이 문제의 풀이는 다음과 같다.

$$W(\eta_\tau,\ \tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty}(e^y-K)^+e^{-(y-\eta_\tau)^2/(2\tau)}dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}\int_{\ln K}^{+\infty}(e^y-K)^+e^{-(y-\eta_\tau)^2/(2\tau)}dy=$$

$$=e^{\eta_\tau+\tau/2}N\left(\frac{\tau+\eta_\tau-\ln K}{\sqrt{\tau}}\right)-KN\left(\frac{\eta_\tau-\ln K}{\sqrt{\tau}}\right)$$

변수들을 약분하면 $W(\eta_\tau,\ \tau)=(J_t^tS_t^{T-t})^{\frac{1}{T}}e^{\alpha(t)+\frac{\gamma(t)}{2}}N(d_1)-KN(d_2)$ 와 같다. 여기서

$$d_1=\frac{\tau+\eta_\tau-\ln K}{\sqrt{\tau}}=\frac{\ln\left[\frac{J_t^{t/T}S_t^{(T-t)/T}}{K}\right]+\alpha(t)+\gamma(t)}{\sqrt{\gamma(t)}},$$

$$d_2=\frac{\eta_\tau-\ln K}{\sqrt{2\tau}}=\frac{\ln[J_t^{t/T}S_t^{(T-t)/T}/K]+\alpha(t)}{\sqrt{\gamma(t)}}=d_1-\sqrt{\gamma(t)}.$$

그러므로 기하평균아시아식선택권의 t 시각의 값은

$$V(t,\ J_t,\ S_t)=U(\xi_t,\ t)=W(\eta_\tau,\ \tau)e^{-\beta(t)}=$$

$$=J_t^{\frac{t}{T}}S_t^{\frac{T-t}{T}}e^{\alpha(t)-\beta(t)+\frac{\gamma(t)}{2}}N(d_1)-Ke^{-\beta(t)}N(d_2)$$

와 같다.

기하평균아시아식선택권의 가격을 분수브라운운동의 밀도함수를 리용하여 구하자.

정리 3 기하평균아시아식선택권의 가격은 다음과 같다.

$$V=S_0e^{\mu+\frac{\sigma^*(T)}{2}-r^*}N(d_1)-Ke^{-r^*}N(d_2)$$

증명 $V_0=e^{-\int_0^T r_s ds}\widetilde{\mathrm{E}}[(J_T-K)^+]$ 를 계산하자.

이때 방정식 (3)의 풀이는 다음과 같다.

$$S_t=S_0\exp\left\{\int_0^t\sigma_\tau d\widetilde{B}_\tau^{(H)}+\int_0^t r_\tau d\tau-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^t\sigma_\tau\sigma_s\phi(\tau,\ s)d\tau ds\right\}=$$

$$=S_0\exp\left\{\int_0^t\sigma_\tau d\widetilde{B}_\tau^{(H)}+\int_0^t r_\tau d\tau-\int_0^t\sigma_s^2 ds\right\}$$

$$\ln S_t=\ln S_0+\int_0^t\sigma_s d\widetilde{B}_s^{(H)}+\int_0^t r_s ds-\int_0^t\widetilde{\sigma}_s^2 ds=\int_0^t\sigma_s d\widetilde{B}_s^{(H)}+a(t)$$

$$a(t)=\ln S_0+\int_0^t r_s ds-\int_0^t\sigma_H(s)ds$$

따라서 $\ln S(t)$는 정규분포 $N(a(t),\ \|\sigma\|_t^2)$에 따른다는것을 알수 있다.

또한 $\frac{1}{T}\int_0^T \ln S_t dt$는 정규분포 $N(\mu_t^*,\ \sigma_t^*)$에 따른다.

왜냐하면

$$\mu_T^* = \mathrm{E}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \ln S_t dt\right) = \frac{1}{T}\int_0^T a(t)dt,$$

$$\sigma_T^* = \mathrm{var}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \ln S_t dt\right) = \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \sigma_s\sigma_\tau\phi(s,\ \tau)dsd\tau dt_1 dt_2$$

이기때문이다.

기하평균아시아식선택권의 가격을 계산하자.

$$V_0 = e^{-\int_0^T r_s ds}\widetilde{\mathrm{E}}[(J_T - K)^+] = e^{-\int_0^T r_s ds}\int_{-\infty}^{+\infty}(e^x - K)^+ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^*(T)}}e^{-(x-\mu_T^*)^2/(2\sigma_T^*)}dx =$$

$$= e^{-\int_0^T r_s ds}\int_{\ln K}^{+\infty}(e^x - K)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^*(T)}}e^{-(x-\mu_T^*)^2/(2\sigma_T^*)}dx =$$

$$= e^{-r^*}\int_{\ln K}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^*(T)}}(e^x - K)e^{-(x-\mu_T^*)^2/(2\sigma_T^*)}e^{\mu^*+\sigma_T^*/2}dx =$$

$$= e^{\mu^*+\frac{\sigma^*}{2}-r^*}N(d_1^*) - Ke^{-r^*}N(d_2^*)$$

여기서 $r^* = \int_0^T r_t dt$, $d_1^* = (\mu^* + \sigma^*(T) - \ln K)/\sqrt{\sigma^*(T)}$, $d_2^* = d_1^* - \sqrt{\sigma^*(T)}$ 이며

$$\mu_T^* = \frac{1}{T}\int_0^T a(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T\left(\ln S_0 + \int_0^T r(s)ds - \int_0^T \widetilde{\sigma}_s^2 ds\right)dt = \ln S_0 + \mu(T),$$

$$d_1^* = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \mu_T + \sigma_T^*}{\sqrt{\sigma_T^*}},\quad d_2^* = d_1 - \sqrt{\sigma_T^*}\ .$$

따라서 선택권의 가격은 $V = S_0 e^{\mu+\frac{\sigma_T^*}{2}-r^*}N(d_1) - Ke^{-r^*}N(d_2)$이다.(증명끝)

이 정리의 결과는 $t=0$인 경우에 정리 2의 결과와 일치한다.

참고문헌

[1] **김일성**종합대학학보(자연과학), 50, 9, 12, 주체93(2004).

[2] P. Boyle; Mathematics and Economics, 42, 189, 2008.

[3] Yan Zhang et al.; Article ID 652954, 8, 2014.

주체106(2017)년 2월 5일 원고접수

Pricing of Asian Options in Financial Market Driven by the Fractional SDE with Coefficient Respecting to Time

Kim Ju Gyong, Kim Ju Song

We have derived the price formula of geometric average Asian option in financial markets driven by SDE of fractional Brownian motion with coefficient respecting to the time underlying asset, by using Malliavin stochastic derivative.

And we have demonstrated that price formula derived by stochastic distribution function of fractional Brownian motion is the same as above formula.

Key words: Asian option, stochastic distribution function