김일성종합대학학보 JOURNAL OF KIM IL SUNG UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체106(2017)년 제63권 제8호 Vol. 63 No. 8 JUCHE106(2017).

선형거꿀문제를 풀기 위한 선형화된 브레그만방법의 안정성과 정규화성에 대한 연구

김 종 철

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《기초과학은 과학기술강국을 떠받드는 주추입니다. 기초과학이 든든해야 나라의 과학기술이 공고한 토대우에서 끊임없이 발전할수 있습니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 40페지)

우리는 토대추적문제를 풀기 위한 선형화된 브레그만방법의 안정성과 정규화성을 론의한다.

선행연구[1, 2]에서는 토대추적문제를 풀기 위한 선형화된 브레그만알고리듬을 제기하고 그 수렴성을 증명하였다. 그러나 측정자료에는 오차가 포함되며 따라서 선형화된 브레그만방법이 안정성과 정규화성을 가지는가를 론의해야 한다.

론문에서는 선형화된 브레그만방법이 안정성과 정규화성을 가진다는것을 증명한다.

1. 선행연구결과와 문제설정

$A\in \boldsymbol{R}^{m\times n}$ ($n>m$)과 $f\in \boldsymbol{R}^m$ 이 주어졌다고 하자.

A 의 위수가 m 과 같다면 련립방정식

$$Au=f$$

는 무한개의 풀이를 가진다.

성긴근사에서는 그 풀이들중에서 l_1 －노름을 가지는 풀이를 찾는다. 즉 풀이가 다음의 최소화문제를 만족시켜야 한다.

$$\min_{u\in \boldsymbol{R}^n}\{\|u\|_1 : Au=f\} \tag{1}$$

이때 최소화문제 (1)을 토대추적문제라고 부른다. 여기서 $Au=f$ 의 모든 풀이들의 모임은 불룩이며 $\|\cdot\|_1$ 이 강제적이므로 최소화문제 (1)의 모든 풀이들의 모임은 비지 않은 불룩모임이다.

선행연구[1]에서는 최소화문제 (1)을 풀기 위한 단순하고 고속인 알고리듬인 다음과 같은 선형화된 브레그만반복법에 대하여 론의하였다.

$$\begin{cases} \upsilon^{k+1}=\upsilon^k + A^{\mathrm{T}}(f-Au^k) \\ u^{k+1}=\delta T_\mu(\upsilon^{k+1}) \end{cases} \tag{2}$$

여기서 $u^0=\upsilon^0=0$ 이고 $T_\mu(\omega):=[t_\mu(\omega(1)),\ t_\mu(\omega(2)),\ \cdots,\ t_\mu(\omega(n))]^{\mathrm{T}}$ ($\omega=[\omega(1),\cdots,\ \omega(n)]^{\mathrm{T}}$)는

$$t_\mu(\xi)=\begin{cases}0, & |\xi|\le\mu\\ \mathrm{sgn}(\xi)(|\xi|-\mu), & |\xi|>\mu\end{cases}$$

로 주어진 유연턱값연산자이다.

우리는 유클리드노름을 $\|\cdot\|$으로 표시한다.

토대추적문제를 풀기 위한 선형화된 브레그만방법의 수렴성에 대한 증명결과는 다음과 같다.

정리 1 [2] $0<\delta<\dfrac{1}{\|AA^{\mathrm T}\|}$이라고 가정하자.

이때 반복법 (2)에 의해 생성된 렬 $\{u^k\}_{k\in\boldsymbol N}$은

$$\min_{u\in\boldsymbol R^n}\left\{\mu\|u\|_1+\frac{\|u\|^2}{2\delta}:Au=f\right\}\tag{3}$$

의 유일풀이에로 수렴한다. 즉 $\lim\limits_{k\to\infty}\|u^k-u^*_{\mu,\,0}\|=0$이다. 여기서 $u^*_{\mu,\,0}$은 문제 (3)의 유일풀이이다.

더우기 다음의 식이 성립된다.

$$\lim_{\mu\to\infty}\|u^*_{\mu,\,0}-u_1\|=0$$

여기서 u_1은 최소화문제 (1)의 모든 풀이들중에서 최소l_2－노름을 가지는 풀이이다.

보조정리[2] $\delta A^{\mathrm T}A<I$라고 하면 다음의 사실들이 성립된다.

① $\|Au^{k+1}-f\|^2+(1/\delta-\|A^{\mathrm T}A\|)\|u^{k+1}-u^k\|^2\le\|Au^k-f\|^2$

② 렬 $\{u^k\}_{k\in\boldsymbol N}$과 $\{\upsilon^k\}_{k\in\boldsymbol N}$은 유계이다.

③ $\lim\limits_{k\to\infty}\|A^{\mathrm T}(Au^k-f)\|=0$이다. 특히 A가 4각형행렬일 때 Au^k는 f에로 수렴한다. 즉 $\lim\limits_{k\to\infty}\|Au^k-f\|=0$이다.

선행연구[1]에서는 선형화된 브레그만반복법 (2)가 매우 성긴 풀이를 가지는 문제를 풀 때 효과적이며 잡음에 로바스트적이라는것을 수값실험에 의하여 밝혔다.

선행연구[3]에서는 $\|\cdot\|$대신에 강볼룩범함수를 택한 경우 거꿀문제를 풀기 위한 방법을 제기하고 수렴성과 함께 안정성과 정규화성을 론의하였다. 그러나 선형화된 브레그만방법의 안정성과 정규화성을 론의하지는 못하였다.

론문에서는 선행결과들에 기초하여 토대추적문제를 풀기 위한 선형화된 브레그만방법이 안정성과 정규화성을 가진다는것을 증명한다.

2. 선형화된 브레그만반복법의 안정성과 정규화성

$\|f^\varepsilon-f\|\le\varepsilon$이라고 하자.

$u^0_\varepsilon=\upsilon^0_\varepsilon=0$이라고 하고 다음의 도식을 반복한다.

$$\begin{cases}\upsilon^{k+1}_\varepsilon=\upsilon^k_\varepsilon+A^{\mathrm T}(f^\varepsilon-Au^k_\varepsilon)\\ u^{k+1}_\varepsilon=\delta T_\mu(\upsilon^{k+1}_\varepsilon)\end{cases}\tag{4}$$

반복도식 (4)에서 중지조건

$$\| Au_{\varepsilon}^{k_{\varepsilon}} - f^{\varepsilon} \| \le \varepsilon \le \| Au_{\varepsilon}^{k} - f^{\varepsilon} \|,\ 0 \le k \le k_{\varepsilon} \tag{5}$$

을 도입하여 부등식 (5)를 만족시키는 k_{ε}에서 반복을 중지한다고 하자.

이 중지조건밑에서 선형화된 브레그만반복법 (2)의 안정성과 정규화성을 론의한다.

정리 2(안정성) 선형화된 브레그만반복법 (2)에 의해 얻어지는 렬을 $\{u^k,\ \upsilon^k\}$로 표시하고 반복도식 (4)에 의해 얻어지는 렬을 $\{u_{\varepsilon}^k,\ \upsilon_{\varepsilon}^k\}$로 표시하자.

이때 매 고정된 $k \ge 1$에 대해 다음의 사실들이 성립된다.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| u_{\varepsilon}^k - u^k \| = 0,\ \ \lim_{\varepsilon \to 0} \| \upsilon_{\varepsilon}^k - \upsilon^k \| = 0$$

증명 반복법 (2)와 반복도식 (4)로부터 다음의 식들이 나온다.

$$\upsilon_{\varepsilon}^{k+1} - \upsilon^{k+1} = \upsilon_{\varepsilon}^{k} - \upsilon^{k} + A^{\mathrm{T}}[(f^{\varepsilon} - f) - A(u_{\varepsilon}^k - u^k)] \tag{6}$$

$$u_{\varepsilon}^{k+1} - u^{k+1} = \delta(T_{\mu}(\upsilon_{\varepsilon}^{k+1}) - T_{\mu}(\upsilon^{k+1})) \tag{7}$$

k에 관한 귀납법으로 정리를 증명하자.

$k=0$이라고 하면 식 (6)과 $u_{\varepsilon}^0 = u^0 = 0$이라는데로부터

$$\| \upsilon_{\varepsilon}^1 - \upsilon^1 \| \le \| \upsilon_{\varepsilon}^0 - \upsilon^0 + A^{\mathrm{T}}[(f^{\varepsilon} - f) - A(u_{\varepsilon}^0 - u^0)] \| = \| A^{\mathrm{T}}(f^{\varepsilon} - f) \| \le \| A^{\mathrm{T}} \| \varepsilon$$

이며 이 식과 식 (7), 유연턱값연산자 T_{μ}가 비확장연산자 즉

$$\forall \upsilon_1,\ \upsilon_2,\ \ \| T_{\mu}(\upsilon_1) - T_{\mu}(\upsilon_2) \| \le \| \upsilon_1 - \upsilon_2 \|$$

라는데로부터

$$\| u_{\varepsilon}^1 - u^1 \| = \| \delta(T_{\mu}(\upsilon_{\varepsilon}^1) - T_{\mu}(\upsilon^1)) \| \le \delta \| \upsilon_{\varepsilon}^1 - \upsilon^1 \| \le \delta \| A^T \| \varepsilon$$

이며 따라서 다음의 식이 성립된다.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| \upsilon_{\varepsilon}^1 - \upsilon^1 \| = 0,\ \ \lim_{\varepsilon \to 0} \| u_{\varepsilon}^1 - u^1 \| = 0$$

이제 정리의 결과가 임의의 고정된 $k \ge 1$에 대하여 성립된다고 가정하면

$$\| \upsilon_{\varepsilon}^{k+1} - \upsilon^{k+1} \| \le \| \upsilon_{\varepsilon}^{k} - \upsilon^{k} \| + \| A^{\mathrm{T}} \| [\| f^{\varepsilon} - f \| + \| A \| \cdot \| u_{\varepsilon}^k - u^k \|] \to 0\ (\varepsilon \to 0),$$

$$\| u_{\varepsilon}^{k+1} - u^{k+1} \| \le \delta \| T_{\mu}(\upsilon_{\varepsilon}^{k+1}) - T_{\mu}(\upsilon^{k+1}) \| \le \delta \| \upsilon_{\varepsilon}^{k+1} - \upsilon^{k+1} \| \to 0\ (\varepsilon \to 0)$$

이 성립된다.(증명끝)

정리 3(정규화성) $0 < \delta < \dfrac{1}{\| AA^{\mathrm{T}} \|}$이고 $\mu > 0$ 이라고 가정하자.

k_{ε}이 조건 (5)에 의하여 정의된 유한한 옹근수라고 하면

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| u_{\varepsilon}^{k_{\varepsilon}} - u_{\mu,\,0}^{*} \| = 0,\ \ \lim_{\varepsilon \to \infty} \| Au_{\varepsilon}^{k_{\varepsilon}} - f \| = 0 \tag{8}$$

이 성립된다. 여기서 $u_{\mu,\,0}^{*}$은 문제 (3)의 유일풀이이다.

증명 $\{\varepsilon_n\}$을 $\varepsilon_n \to 0\ (n \to \infty)$인 임의의 수렬이라고 할 때 매 n에 대하여

$$\| f^{\varepsilon_n} - f \| \le \varepsilon_n$$

인 f^{ε_n}을 가지고 도식 (4)를 중지조건 (5)를 만족시키는 반복번호 k_{ε_n}에서 중지된다고 가정하자.

이때 식 (8)에서 $\varepsilon \to 0$대신에 임의의 $\varepsilon_n \to 0\ \ (n \to \infty)$일 때를 증명하면 된다.

먼저 렬 $\{f^{\varepsilon_n}\}$에 대하여 조건 (5)에 대응되는 번호렬 $\{k_{\varepsilon_n}\}$이 어떤 유한한 옹근수 $\hat{k}$에 대하여 $k_n := k_{\varepsilon_n} \to \hat{k}$ $(n \to \infty)$이라고 가정하자.

그러면 모든 n에 대하여 $k_n = \hat{k}$이라고 가정할수 있다.

$k_n = \hat{k}$의 정의로부터 $\| Au_{\varepsilon_n}^{\hat{k}} - f^{\varepsilon_n} \| \le \varepsilon_n$이다.

그리고 관계식

$$\| Au^{\hat{k}} - f \| \le \| A(u^{\hat{k}} - u_{\varepsilon_n}^{\hat{k}}) \| + \| Au_{\varepsilon_n}^{\hat{k}} - f^{\varepsilon_n} \| + \| f^{\varepsilon_n} - f \|$$

가 성립되며 따라서 $n \to \infty$로 취하고 정리 2를 리용하면 $Au^{\hat{k}} = f$를 얻는다.

선형화된 브레그만반복법 (2)로부터 모든 $k \ge \hat{k}$에 대하여

$$\upsilon^k = \upsilon^{\hat{k}},\ u^k = u^{\hat{k}}$$

이고 정리 1로부터 $u^k \to u_{\mu,0}^*$ $(k \to \infty)$이므로 $u^{\hat{k}} = u_{\mu,0}^*$이여야 한다.

$$\| u_{\varepsilon_{n_k}}^{\hat{k}} - u_{\mu,0}^* \| \le \| u_{\varepsilon_{n_k}}^{\hat{k}} - u^{\hat{k}} \| + \| u^{\hat{k}} - u_{\mu,0}^* \| = \| u_{\varepsilon_{n_k}}^{\hat{k}} - u^{\hat{k}} \|$$

이므로 정리 2에 의하여

$$u_{\varepsilon_{n_k}}^{\hat{k}} \to u_{\mu,0}^*\ (\varepsilon_{n_k} \to 0)$$

이 얻어진다. 그리고

$$\| Au_{\varepsilon_{n_k}}^{\hat{k}} - f \| \le \| A(u_{\varepsilon_{n_k}}^{\hat{k}} - u^{\hat{k}}) \| + \| Au^{\hat{k}} - f \| = \| A(u_{\varepsilon_{n_k}}^{\hat{k}} - u^{\hat{k}}) \|$$

이므로 정리 2를 다시 적용하면 다음과 같다.

$$Au_{\varepsilon_{n_k}}^{\hat{k}} = Au_{\varepsilon_{n_k}}^{k_{n_k}} \to f\ \ (\varepsilon_{n_k} \to 0)$$

다음으로 렬 $\{f^{\varepsilon_n}\}$이 있어서 조건 (5)에 대응되는 번호렬 $\{k_{\varepsilon_n}\}$에 대하여 $k_n := k_{\varepsilon_n} \to \infty$ $(n \to \infty)$라고 가정하자.

k가 고정된 옹근수라고 하면 충분히 큰 n에 대하여 $k_n > k$가 성립된다.

$$\| Au_{\varepsilon_{n_k}}^{k_n} - f \| \le \| A(u_{\varepsilon_{n_k}}^{k_n} - u^{k_n}) \| + \| Au^{k_n} - f \|$$

이므로 정리 2와 보조정리의 ③으로부터 $Au_{\varepsilon_{n_k}}^{k_n} \to f$ $(\varepsilon_{n_k} \to 0)$이 성립된다. 그리고

$$\| u_{\varepsilon_{n_k}}^{k_n} - u_{\mu,0}^* \| \le \| u_{\varepsilon_{n_k}}^{k_n} - u^{k_n} \| + \| u^{k_n} - u_{\mu,0}^* \|$$

이므로 정리 1, 2에 의하여 $u_{\varepsilon_{n_k}}^{k_n} \to u_{\mu,0}^*$ $(\varepsilon_{n_k} \to 0)$이다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] W. Yin et al.; SIAM J. Imaging Sci., 1, 143, 2008.

[2] J. F. Cai et al.; Math. Comput., 78, 2127, 2009.

[3] Qinian Jin et al.; arXiv:1402.6544v1 [math.NA] 26, Feb, 2014.

주체106(2017)년 4월 5일 원고접수

On Stability and Regularization Property of Linearized Bregman Method for Linear Inverse Problems

Kim Jong Chol

We demonstrate the stability and the regularization property of the linearized Bregman method for linear inverse problems.

In previous papers the linearized Bregman methods were presented and its convergence was proved.

Key word: linearized Bregman method