

## 대칭직교충복합판의 카오스상태에 대한 연구

김인봉, 서영일

복합재료로 된 판, 각체는 오늘 항공우주비행선, 타빈날개, 핵반응로를 비롯하여 여러 분야에서 널리 쓰이고있으며 그것들의 불안정거동의 정확한 예측은 믿음직하고 경량화된 구조설계에서 결정적인 문제로 나선다.

선행연구[1]에서는 직교이방성탄성판의 경우를 3차원문제로 확장하여 비선형진동문제를 설정하고 그것의 수값풀이법을 제기하였고 선행연구[2]에서는 유리-에폭시다층복합판에 대한 정력학적문제를 논의하고 이론적결과와 실험값과의 비교분석을 진행하였으며 선행연구[3]에서는 단순지지된 대칭직교다층복합판의 비선형동적상태에 대하여 본-카르만의 방정식을 리용하여 기하학적으로 비선형이고 비선형저항을 가지는 운동방정식을 유도하고 갈로르킨방법을 리용하여 미분방정식을 풀었다. 선행연구[4]에서는 비대칭점탄성다층복합판의 동력학적문제인 자유진동문제를 논의하였고 선행연구[6]에서는 비대칭점탄성다층복합판의 강제진동문제를 미분모형으로 주고 해석하였다. 선행연구[5]에서는 기하학적비선형을 고려한 다층각체의 좌굴후 동력학적상태를 해석하였다. 그러나 이러한 문제들에서 카오스상태로까지의 연구는 진행되지 못하였다. 선행연구[7]에서는 한방향면내짐을 받는 단순지지된 직교이방성판의 카오스, 분기거동이 논의되었다.

우리는 두방향세로짐과 가로조화분포짐이 동시에 작용하는 경계가 단순지지된 대칭직교충복합판의 최대라뽀노브지수도를 얻었으며 위상도, 뿌앵까레도, 출력스펙트럼도, 분기도를 리용하여 대칭직교충복합판의 카오스운동을 수값해석하였다.

### 1. 대칭직교충복합판의 운동미분방정식과 갈로르킨방법의 적용

길이  $a$ , 너비  $b$ , 두께  $h$ 인 대칭직교충복합판의 경계는 단순지지되고 판의 윗면에 가로조화분포짐  $q \cos \omega t$ 가, 옆면으로 세로짐  $p_x$ ,  $p_y$ 가 작용하는 경우를 보자.

판에서는 키르히호프-라브가정이 성립된다고 본다.

유한변형인 경우 중간면에서의 변형의 편속방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

판의 중간면에 작용하는 속힘들은  $N_{xx} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \sigma_{xx}^k dz$ ,  $N_{yy} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \sigma_{yy}^k dz$ ,  $N_{xy} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \tau_{xy}^k dz$

와 같다. 여기서  $\sigma_{xx}^k = \frac{E_1^k}{1-\nu_1^k \nu_2^k} \varepsilon_{xx} + \frac{\nu_1 E_2^k}{1-\nu_1^k \nu_2^k} \varepsilon_{yy}$ ,  $\sigma_{yy}^k = \frac{\nu_1 E_1^k}{1-\nu_1^k \nu_2^k} \varepsilon_{xx} + \frac{E_2^k}{1-\nu_1^k \nu_2^k} \varepsilon_{yy}$ ,  $\tau_{xy}^k = G^k \gamma_{xy}$ .

조건  $\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ ,  $\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ ,  $\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$  를 만족시키는 응력함수  $F$  를 생각하자.

판의 편속방정식은 다음과 같다.[2]

$$\nabla_E^4 F = -L(w, w)/2 \quad (1)$$

$$\text{여기서 } \nabla_E^4 = \frac{1}{E_2} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{1}{E_3} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{E_1} \frac{\partial^4}{\partial y^4}, \quad \frac{2}{E_3} = \frac{1}{G} - \frac{2\nu_2}{E_2}, \quad L(w, w) = 2 \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right].$$

구부림모멘트와 중간면에서의 곡률  $K_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ ,  $K_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ ,  $K_{12} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$  사이의 관계는  $M_x = D_{11}K_1 + D_{12}K_2$ ,  $M_y = D_{12}K_1 + D_{22}K_2$ ,  $M_{xy} = D_{66}K_{12}$  와 같다. 여기서

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^2 (\bar{Q}_{ij}^k) dz, \quad i, j = 1, 2, 6.$$

웃식에서  $k$  째 층에 대하여  $\bar{Q}_{ij}^k$  는 다음과 같다.(첨수  $k$  는 략하여 쓴다.)

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \end{aligned}$$

여기서  $\theta$  는 물체자리표와 주재료자리표사이의 각이고

$$Q_{11}^k = E_1^k / (1 - \nu_1^k \nu_2^k), \quad Q_{12}^k = \nu_1 E_2^k / (1 - \nu_1^k \nu_2^k), \quad Q_{22}^k = E_2^k / (1 - \nu_1^k \nu_2^k), \quad Q_{66}^k = G^k.$$

대칭직교충복합판인 경우  $D_{11} = D_{22} = (E_1 + E_2)h^3 / [24(1 - \nu_1 \nu_2)]$ ,  $D_{12} = Gh^3 / 12$  이 성립된다.

이상을 고려하면 구부림운동미분방정식은 다음과 같다.

$$\frac{1}{h} \nabla_D^4 w = L(w, F) - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{q}{h} \cos \omega t - \frac{\delta}{h} \frac{\partial w}{\partial t} \quad (2)$$

여기서  $q$  는 가로분포집의 세기,  $\rho$  는 밀도,  $\delta$  는 속도에 비례하는 선형점성감쇠결수이고

$$\nabla_D^4 = D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2D_{12} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4}, \quad L(w, F) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

$$\text{경계조건은 } w|_{x=0, x=a} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=0, x=a} = 0, \quad w|_{y=0, y=b} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right|_{y=0, y=b} = 0.$$

변위함수  $w$  를 다음과 같이 가정한다.

$$w(x, y, t) = \theta(t) \sin rx \sin sy \quad (3)$$

여기서  $\theta(t)$ : 시간에 따르는 미지함수,  $r = m\pi/a$ ,  $s = n\pi/b$ ,  $m, n$ :  $x, y$  방향의 반파수.

$m = n = 1$  일 때 식 (3)을 식 (1)의 오른쪽에 대입하고 적분하면 다음의 식을 얻는다.

$$F = (s^2 E_2 \theta^2 \cos 2rx / r^2 + r^2 E_1 \theta^2 \cos 2sy / s^2) / 32 + p_x y^2 / 2 + p_y x^2 / 2$$

여기서  $p_x, p_y$  는 각각 판의 경계에서 중간면에 작용하는  $x, y$  방향의 분포집이다.

다음 식 (2)에 갈로르킨방법을 적용하면

$$\int_0^a \int_0^b \Lambda \sin rx \sin sy dx dy = 0, \quad \Lambda = \frac{1}{h} \nabla_D^4 w - L(w, F) - \frac{q}{h} \cos \omega t + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\delta}{h} \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (4)$$

식 (4)를 적분하여 정돈하면 다음의 비선형미분방정식이 얻어진다.

$$\ddot{\theta} + \frac{\delta}{\rho h} \dot{\theta} + \left[ \frac{\pi^4 h^2}{12a^4(1-\nu_1\nu_2)\rho} \left( 1 + \frac{a^2}{b^2} \nu_2 \right) E_1 + \frac{\pi^4 h^2}{12b^4(1-\nu_1\nu_2)\rho} E_2 + \frac{\pi^4 h^2 G}{6a^2 b^2 \rho} - \frac{\pi^4}{16\rho a^2} \left( P_x + \frac{a^2}{b^2} P_y \right) \right] \theta + \frac{\pi^6}{256\rho a^4} \left( E_1 + \frac{a^4}{b^4} E_2 \right) \theta^3 = \frac{16q}{\rho h \pi^2} \cos \omega t$$

이 식을 무차원화하여 무차원미분방정식을 얻는다.

무차원량들을  $\xi = \theta/h$ ,  $\eta_1 = E_2/E_1$ ,  $\eta_2 = G/E_1$ ,  $\lambda = a/b$ ,  $\bar{q} = 16q\beta^4/(\pi^6 E_1)$ ,  $\beta = a/h$ ,  $\bar{t} = t/T$ ,  $\bar{\omega} = \omega T$ ,  $T^2 = a^4 \rho / (E_1 h^2 \pi^4)$ ,  $\bar{\delta} = a^2 \delta / (\pi^2 h^2 \sqrt{\rho E_1})$ ,  $\bar{p}_x = p_x/E_1$ ,  $\bar{p}_y = p_y/E_2$  로 하면 다음과 같은 무차원형태의 운동미분방정식이 얻어진다.

$$\ddot{\xi} + \bar{\delta} \dot{\xi} + \left[ \frac{1+\lambda^2\nu_2}{12(1-\nu_1\nu_2)} + \frac{\lambda^4\eta_1}{12(1-\nu_1\nu_2)} + \frac{\lambda^2\eta_2}{6} - \frac{\beta^2(\bar{P}_x + \lambda^2\bar{P}_y)}{16} \right] \xi + \frac{\pi^2}{256} (1 + \lambda^4\eta_1) \xi^3 = \bar{q} \cos \bar{\omega} \bar{t} \quad (5)$$

랴푸노브지수를 얻기 위하여 방정식 (5)를 평형점근방에서 선형화하면

$$\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{J}(t) \mathbf{A} \quad (6)$$

을 얻는다. 여기서  $\mathbf{J}(t)$  는 평형점우에서 취한 야코비행렬이며 이때  $\mathbf{A} = [A_1 \ A_2]^T$ ,

$$\mathbf{J}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -A - 3B\xi^2 & -\bar{\delta} \end{bmatrix}_{\xi=\xi_0}, \quad A_1, A_2 \text{ 는 미지함수로서 } A_1 = \xi, \ A_2 = \dot{\xi} \text{ 이다. 그리고}$$

$$A = \frac{1+\lambda^2\nu_2}{12(1-\nu_1\nu_2)} + \frac{\lambda^4\eta_1}{12(1-\nu_1\nu_2)} + \frac{\lambda^2\eta_2}{6} - \frac{\beta^2(\bar{P}_x + \lambda^2\bar{P}_y)}{16}, \quad B = \frac{\pi^2}{256} (1 + \lambda^4\eta_1).$$

시간  $\bar{t}$  를 리산화하면 시간의 매 리산점들에서 평형점  $\xi = \xi_0$  은 방정식 (5)에서 취한 비선형방정식의 풀이로써 결정된다.

## 2. 대칭직교충복합판의 카오스상태

식 (5)의 수값풀이를 얻어 계의 동적특성을 특징짓는 시간리력파형, 출력스펙트럼도, 위상도, 뿌앵까레도, 분기도를 얻는다. 최대랴푸노브지수도 식 (6)을 리용하여 얻는다.

이 특성지표들은 계의 동적특성을 원만히 밝혀주며 카오스이행조건을 결정하는데 효과적으로 리용된다.

식 (5)에서 무차원량들인  $\bar{q}$ ,  $\bar{P}_x$ ,  $\bar{P}_y$  의 변화에 따르는 카오스이행조건을 판정한다.

대칭직교충복합판의 기하학적크기는  $a=30\text{cm}$ ,  $b=20\text{cm}$ ,  $h=0.1\text{cm}$ (적층개수 6)이고 매 층은 동일한 텍스트리트재료로서 력학적특성값들은 다음과 같다.

$$E_1 = 1.3 \times 10^9 \text{ Pa}, \quad E_2 = 8.0 \times 10^8 \text{ Pa}, \quad G = 3.7 \times 10^8 \text{ Pa}, \quad \nu_1 = 0.34, \quad \nu_2 = 0.21, \quad \rho = 1.4 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

안정한 구간에서의 해석을 위하여 첫 3 000개의 시계열자료를 무시한다.

먼저  $\bar{\delta} = 0.135$ ,  $\bar{P}_x = \bar{P}_y = 7.4 \times 10^{-5}$ ,  $\bar{\omega} = 1$  일 때 가로짐변화가 계에 미치는 영향을 보자.

우의 조건에서  $\bar{q}$  가 변할 때의 분기도는 그림 1과 같다.

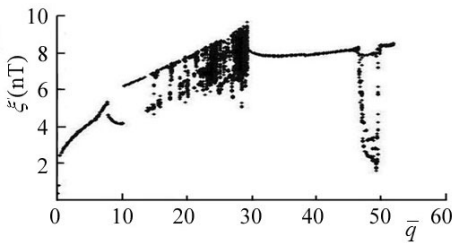


그림 1.  $\bar{\delta}=0.135$ ,  $\bar{P}_x=\bar{P}_y=7.4\times 10^{-5}$ ,  $\bar{\omega}=1$  일 때의 분기도

그림 1에서와 같이 계는  $0 < \bar{q} \leq 7.2$ ,  $29.7 < \bar{q} \leq 47.3$  일 때 안정한 주기운동을 하며  $7.2 < \bar{q} \leq 29.7$  과  $47.3 < \bar{q} \leq 50$  에서 카오스운동을 한다. 분기도에서 카오스상태에 앞서 주기배분기가 일어났다.

계의 여러 동적특성지표들을 얻으면 그 상태를 구체적으로 알수 있다.

$\bar{q}=1.037$ ,  $\bar{q}=29.0349$  일 때 계의 동적특성지표들은 그림 2와 같다.

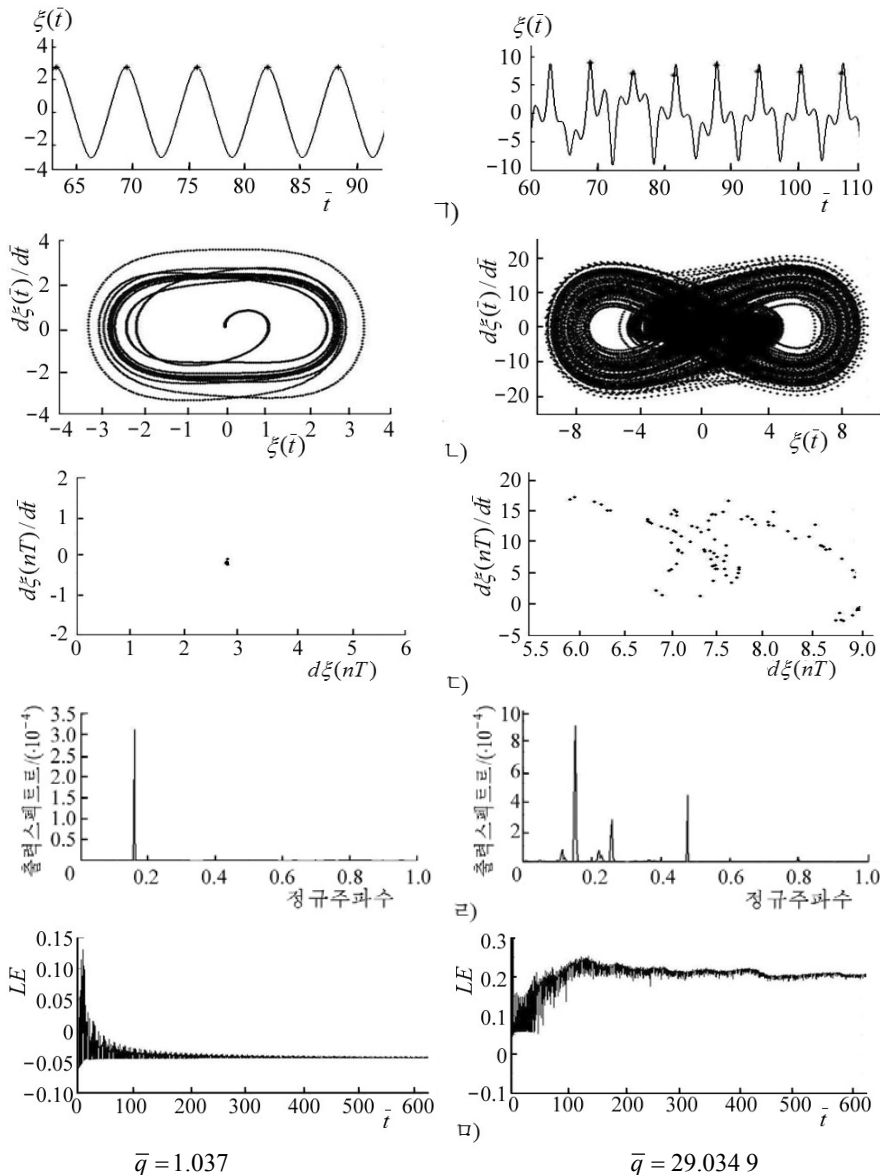


그림 2. 동적특성지표들( $\bar{\delta}=0.135$ ,  $\bar{P}_x=\bar{P}_y=7.4\times 10^{-5}$ ,  $\bar{\omega}=1$ )

ㄱ) 시간-리력곡선, ㄴ) 위상도, ㄷ) 푸앵카레도, ㄹ) 출력스펙트럼도, ㅁ) 최대라부노브지수도

그림 2에서 보는바와 같이 안정한 주기운동을 하는  $\bar{q}=1.037$  일 때의 동적특성지표들은 규칙적이고 최대랴부노브지수는 부수이지만 카오스운동을 하는  $\bar{q}=29.0349$  일 때의 동적특성지표들, 특히는 시간-리력파형, 출력스펙트럼도가 매우 불규칙적이고 최대랴부노브지수는 정이다. 수값결과는 분기도에서  $\bar{q}=7.2$  일 때, 최대랴부노브지수도에서  $\bar{q}=7.02$  일 때 카오스이행이 나타났다. 이 두 결과를 비교하면 최대랴부노브지수도에서  $\bar{q}$ 는 분기도에서의  $\bar{q}$  값보다 2.7% 작았다.

주어진 조건 즉  $\bar{\delta}=0.135$ ,  $\bar{P}_x=\bar{P}_y=7.4 \times 10^{-5}$ ,  $\bar{\omega}=1$  에서  $\bar{q}$  - 최대랴부노브지수관계는 그림 3과 같다. 여기서 최대랴부노브지수는 처음  $\bar{q}=6.999$  까지 안정한 상태인 부의 값을 취하다가  $\bar{q}=7.02$  에서 정의 값을 가지고 증가하였으며 그림 1에서와 같이  $\bar{q}=29.7$  이후 안정카오스-안정구역이 나타났다.

$\bar{\delta}=0.135$ ,  $\bar{q}=5.1848$ ,  $\bar{\omega}=1$  일 때  $\bar{P}_x=\bar{P}_y$  - 랴부노브지수관계는 그림 4와 같다.

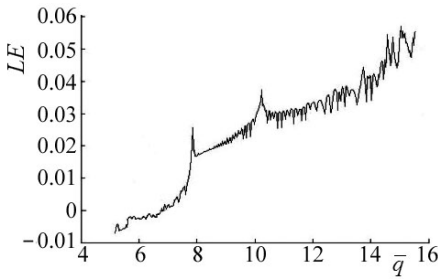


그림 3.  $\bar{q}$  - 랴부노브지수관계

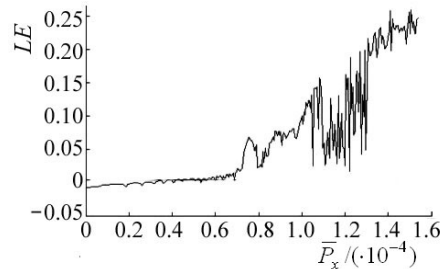


그림 4.  $\bar{P}_x=\bar{P}_y$  - 랴부노브지수관계

그림 1과 그림 3을 비교하면  $\bar{q}$ 가 증가할 때 계의 정상상태로부터 비주기적인 카오스상태로의 이행이 수값적으로 일치한다.

그림 2의 ㄴ)에서 외력이  $\bar{q}=29.0349$ 에 이를 때 위상자리길은 매우 불규칙적이고 ㄷ)에서 볼수 있는것처럼 계는 주기점이나 준주기적인 닫긴고리를 형성하는것이 아니라 산만하게 분포된 비주기상태를 나타낸다.

이 비주기적운동은 카오스상태에서 기묘아트랙타로 이행한다. 체계의 운동이 카오스적일 때 초기조건에 매우 예민한 이 비주기적운동은 오랜 시간 예측불가능하다.

체계가 카오스에 떨어지면 그것의 거동은 예측, 조종하기가 힘들므로 계의 이와 같은 파라메터대역을 피하여 설계하여야 한다.

외력에 따르는 최대랴부노브지수변화상태를 보여주는 그림 3, 4는 최대랴부노브지수평가가 계의 카오스동태를 비교적 정확히 반영하고있다는것을 보여주었다.

$\bar{q}=5.1848$ ,  $\bar{\delta}=0.135$ ,  $\bar{\omega}=1$  일 때  $\bar{P}_x$ ,  $\bar{P}_y$ 에 대한 분기도는 그림 5와 같다.

그림 5에서 보는바와 같이

$$\bar{P}_x=\bar{P}_y > 6.92 \times 10^{-5}$$

일 때 계는 카오스운동을 일으킨다.

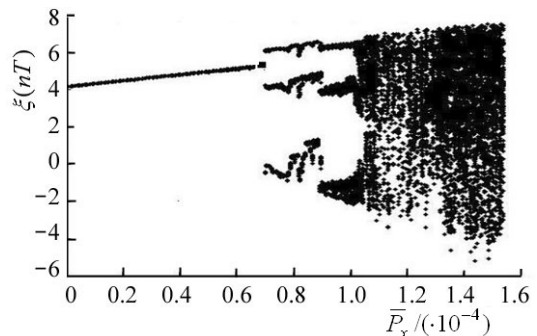


그림 5.  $\bar{\delta}=0.135$ ,  $\bar{q}=5.1848$  일 때의 분기도

## 맺는 말

본문에서는 경계가 단순지지되고 세로집과 가로분포조화집을 받는 대칭직교층복합판의 무차원운동미분방정식의 작성방법을 제기하고 수값풀이를 통하여 판의 카오스운동을 해석하였다. 특히 분기도를 통하여 여러가지 파라메터들의 변화에 따르는 카오스이행조건을 밝혔으며 최대라부노브지수도, 출력스펙트럼도, 뿌앵까레도 등을 리용하여 판의 카오스상태를 규정하였다.

수값실패는 선형화고유값문제에 의한 라부노브지수결정방법이 비교적 정확한 방법이라는것을 보여주었다.

## 참고 문헌

- [1] Y. Nath; Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 11, 340, 2006.
- [2] T. A. Bogetti; Composite Science and Technology, 64, 477, 2004.
- [3] Hsuan The Hu; Composite Part, B 37, 26, 2006.
- [4] R. Banerjee; AIAA, CP-94-1393, 1994.
- [5] S. Sing et al.; International Journal of Structural Stability and Dynamics, 9, 1, 20, 2009.
- [6] P. Hannes et al.; AIAA, CP-93-1569, 1993.
- [7] Yen Liang Yeh; Chaos, Solitons and Fractals, 24, 1243, 2005.

주체104(2015)년 4월 5일 원고접수

## Chaotic State of Symmetric Cross-Ply Composite Laminate

*Kim In Bong, So Yong Il*

The maximum Lyapunov exponent map of a symmetric cross-ply composite laminate that is subjected to two-directional perpendicular load and lateral harmonic load is obtained and the chaotic motion of symmetric cross-ply composite laminate is numerically analyzed by using phase trajectory, Poincare's mapping, power spectrum and bifurcation.

Key words: symmetric cross-ply composite laminate, chaos, maximum Lyapunov exponent