김일성종합대학학보 주체107(2018)년
물리학 제64권 제3호

여러성분보즈립자계에서 나타나는 돌연대칭성

정금혁, 리철원, 최지원

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《수학, 물리학, 화학, 생물학과 같은 기초과학부문에서 과학기술발전의 원리적, 방법론적기초를 다져나가면서 세계적인 연구성과들을 내놓아야 합니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 40페지)

보즈－아인슈타인응축의 견지에서 여러성분보즈립자계는 현재 실험적으로나 리론적으로 많이 연구되고있다.[1, 2] 특히 세계적인 초점연구대상으로 되고있는 고온초전도체물림새에 대한 연구에 여러성분보즈립자계에서 나타나는 특이한 성질들이 리용될수 있는 전망이 내다보이는것으로 하여 이 분야에 대한 연구는 더욱 흥미를 끌고있다.

우리는 여러성분보즈립자계에서 나타나는 특이한 현상의 하나인 돌연대칭성과 그 특성에 대한 연구를 진행하였다.

절대령도에서 여러성분보즈립자계의 라그랑쥬안밀도는 다음과 같이 주어진다.

$$\boldsymbol{\mathcal{L}} = \frac{i}{2}\sum_i [\overline{\varphi}_i \partial_t \varphi_i - \varphi_i \partial_t \overline{\varphi}_i - \frac{1}{2m}(\nabla_r \varphi_i)^2 - \mu_i \rho_i] - \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,\ j \\ i \neq j}} g_{ij} \rho_i \rho_j \tag{1}$$

여기서 φ_i는 i번째 성분 보즈립자를 표시하는 마당이며 $\rho_i = |\varphi_i|^2$은 i번째 성분 보즈립자의 립자수밀도이다. 또한 μ_i는 i번째 성분 보즈립자의 화학포텐샬, g_{ij}는 i번째 성분 보즈립자와 j번째 성분 보즈립자사이의 유효호상작용결수이다. 문제고찰을 간단히 하기 위하여 여러성분보즈립자계를 질량 m은 같고 그 내부스핀상태만 다른 보즈립자계라고 가정하겠다. 또한 매 성분의 밀도가 같다고 가정하겠다.

이러한 여러성분보즈립자계의 저에네르기특성을 리해하기 위하여서는 저에네르기려기와만 관련되는 량들을 포함하고있는 저에네르기유효라그랑쥬안을 유도해야 한다.

저에네르기유효라그랑쥬안을 유도하는 방법에는 수력학적라그랑쥬안방법[3], 안장점방법[4] 등 여러가지가 있다. 저온에서 보즈응축상부분이 주되는 몫을 차지한다는 사실로부터 출발하여 식 (1)에 주어진 라그랑쥬안의 변분을 취하면 N성분보즈립자계에 대하여 다음과 같은 $2N$차원련립Gross-Pitaevskii방정식을 얻게 된다.

$$\left.\begin{aligned} & i\partial_t \phi_j(\mathbf{r},\, t) - \frac{\nabla^2}{2m}\phi_j - \sum_{j' \neq j} g_{jj'}(|\varphi_0|^2 \phi_j + |\varphi_0|^2 \phi_{j'} + \varphi_0^2 \overline{\phi}_{j'}) = 0 \\ & -i\partial_t \overline{\phi}_j(\mathbf{r},\, t) - \frac{\nabla^2}{2m}\overline{\phi}_j - \sum_{j' \neq j} g_{jj'}(|\varphi_0|^2 \overline{\phi}_j + |\varphi_0|^2 \overline{\phi}_{j'} + \varphi_0^2 \phi_{j'}) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

여기서 ϕ_j는 $\phi_j = \varphi_j - \varphi_0$으로 표시되는 량으로서 보즈응축상에서의 미소려기를 나타내는 량이다. 우의 방정식에 적당한 푸리에변환을 실시하면 $2N \times 2N$차원결수행렬을 얻게 되며 이로부터 여러성분보즈립자계의 려기스펙트르를 얻어낼수 있다. 구체적으로 보면 두성분

보즈립자계의 경우에는 다음과 같은 4×4 행렬을 얻게 된다.

이 행렬의 영년방정식은 다음과 같다.

$$\det\begin{pmatrix} \omega-\xi_1(k) & -g_{11}\varphi_0^2 & -g_{12}|\varphi_0|^2 & -g_{12}\varphi_0^2 \\ -g_{11}\overline{\varphi}_0^2 & -\omega-\xi_1(k) & -g_{12}\overline{\varphi}_0^2 & -g_{12}|\varphi_0|^2 \\ -g_{21}|\varphi_0|^2 & -g_{21}\varphi_0^2 & \omega-\xi_2(k) & -g_{22}\varphi_0^2 \\ -g_{21}\overline{\varphi}_0^2 & -g_{21}|\varphi_0|^2 & -g_{22}\overline{\varphi}_0^2 & -\omega-\xi_2(k) \end{pmatrix}=0 \tag{3}$$

여기서 $\xi_j(\boldsymbol{k})=\boldsymbol{k}^2/2m+g_{jj}|\varphi_0|^2$, $j=1, 2$ 이다. 이로부터 다음과 같은 보골류보브형분산관계를 얻어낼수 있다.

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{k}^2}{2m}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\rho_0\boldsymbol{k}^2}{2m}\left(g_{11}+g_{22}+\sqrt{4g_{12}^2+(g_{11}-g_{22})}\right)\right)} \\ \omega_2 &= \sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{k}^2}{2m}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\rho_0\boldsymbol{k}^2}{2m}\left(g_{11}+g_{22}-\sqrt{4g_{12}^2+(g_{11}-g_{22})}\right)\right)} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

그림 1에 긴파장극한에서 두성분보즈립자계의 려기스펙트르를 보여주었다.

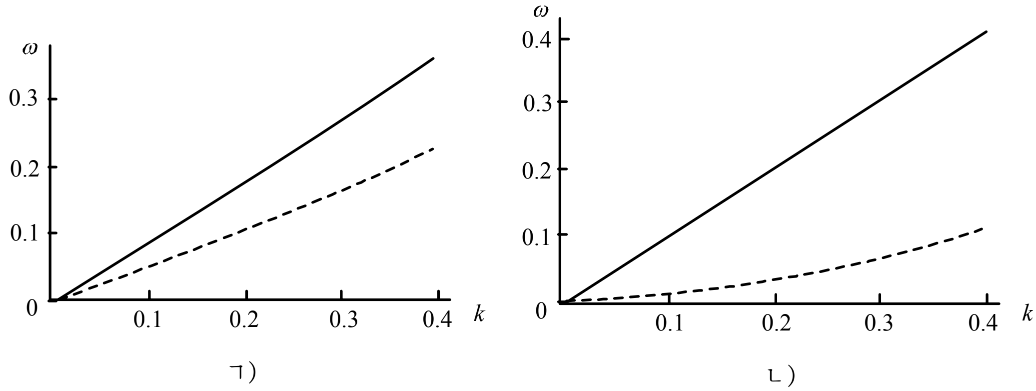


그림 1. 두성분보즈립자계의 려기스펙트르(실선－밀도파, 점선－스핀파[1])
ㄱ) $g=2g'$ 의 경우, ㄴ) $g=g'$ 의 경우
운동량의 단위는 $\sqrt{\rho_0 g_0 m}$, 에네르기의 단위는 $\rho_0 g_0$ 이다.

식 (2)를 리용하여 세성분보즈립자계의 려기스펙트르도 구할수 있다. 세성분보즈립자계의 경우 결수행렬은 6×6 행렬로 주어지며 $g_{ii}=g,\ g_{12}=g',\ g_{13}=g_{23}=0$ 의 경우

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{k}^2}{2m}\right)^2+(g+g')\frac{\rho_0\boldsymbol{k}^2}{2m}} \\ \omega_2 &= \sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{k}^2}{2m}\right)^2+(g-g')\frac{\rho_0\boldsymbol{k}^2}{2m}} \\ \omega_3 &= \sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{k}^2}{2m}\right)^2+g\frac{\rho_0\boldsymbol{k}^2}{2m}} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

의 분산관계를 얻게 된다.(그림 2) $g_{ii}=g,\ g_{12}=g_{13}=g_{23}=g'$ 의 경우에는

$$\left.\begin{aligned}\omega_1&=\sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{k}^2}{2m}\right)^2+(g+2g')\frac{\rho_0\boldsymbol{k}^2}{2m}}\\\omega_2&=\sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{k}^2}{2m}\right)^2+(g-g')\frac{\rho_0\boldsymbol{k}^2}{2m}}\\\omega_3&=\sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{k}^2}{2m}\right)^2+(g-g')\frac{\rho_0\boldsymbol{k}^2}{2m}}\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

의 2중축퇴된 분산관계를 얻게 된다.(그림 3의 ㄱ))

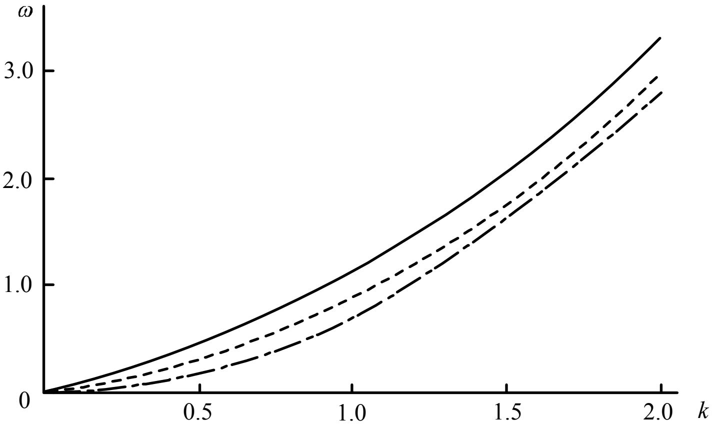
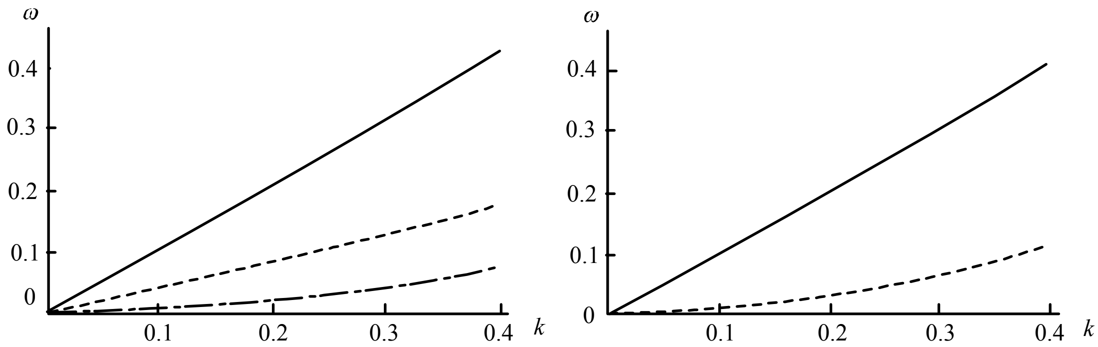


그림 2. 세성분보즈립자계의 려기스펙트르곡선(실선－밀도파, 점선, 파선－스핀파)
운동량의 단위는 $\sqrt{\rho_0 g_0 m}$, 에네르기의 단위는 $\rho_0 g_0$ 이다.

두성분보즈립자계에서 $g=g'$ 의 경우에 $SU(2)$돌연대칭성이 나타난다는데 대하여서는 이미 언급되였으며[1] 그림 1의 ㄴ)에는 두성분보즈립자계에서 나타나는 돌연대칭성을 보여주었다.



ㄱ) $SU(2)\otimes U(1)$ ㄴ) $SU(3)$

그림 3. 세성분보즈립자계에서 나타나는 돌연대칭성

론문에서는 일반적으로 여러성분보즈립자계에서 어떤 돌연대칭성이 나타나며 그 조건은 무엇인가에 대하여 분석해보기로 하겠다.

두성분보즈립자계에서 나타나는 돌연대칭성을 $SU(2)$돌연대칭성이라고 부르는 리유는 $g=g'$의 경우에 계의 하밀토니안이 $\hat{\boldsymbol{S}}=\Psi^T\hat{\boldsymbol{\sigma}}\Psi,\ \Psi^T=(\varphi_1,\ \varphi_2)$로 정의되는 $SU(2)$군의 무한소생성자인 스핀파연산자와 가환이기때문이다.

세성분보즈립자계에서는 명백히 $U(1)\otimes U(1)\otimes U(1)$ 대칭성이 나타나게 된다. 이제 $g_{ii}=g,\ g_{12}=g_{13}=g_{23}=g'$인 경우에 세성분보즈립자계의 하밀토니안과 $SU(3)$군의 무한소생성자들인 겔만행렬 $\lambda_i\,(i=\overline{1,8})$와의 교환관계를 계산해보자.

$$\left.\begin{aligned}
&[H,\ \lambda_1]=(g-g')(5\lambda_1+4i\lambda_2\Lambda_1+2i\lambda_2\Lambda_2)\\
&[H,\ \lambda_2]=(g-g')(5\lambda_2-4i\lambda_1\Lambda_1-2i\lambda_1\Lambda_2)\\
&[H,\ \lambda_3]=0\\
&[H,\ \lambda_4]=(g-g')(5\lambda_4+4i\lambda_5\Lambda_1+2i\lambda_5\Lambda_1)\\
&[H,\ \lambda_5]=(g-g')(5\lambda_5+4i\lambda_4\Lambda_2-2i\lambda_4\Lambda_1)\\
&[H,\ \lambda_6]=(g-g')(3\lambda_1+2i\lambda_7\Lambda_1+2i\lambda_7\Lambda_2)\\
&[H,\ \lambda_7]=(g-g')(3\lambda_7-2i\lambda_6\Lambda_1-2i\lambda_6\Lambda_2)\\
&[H,\ \lambda_8]=0
\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

결국 이로부터 두성분보즈립자계의 경우와 류사하게 세성분보즈립자계에서도 $g=g'$의 경우에 $SU(3)$돌연대칭성이 발생할수 있다는것을 알수 있다.

이제 구체적인 여러 경우에 세성분보즈립자계의 려기스펙트르를 놓고 어떤 돌연대칭성들이 발생하는가를 따져보기로 하자.

먼저 $g_{ii}=g_{12}=g,\ g_{13}=g_{23}=g'$인 경우에 분산관계를 보면 2개의 선형골드스톤모드와 1개의 2차모드가 나타난다는것을 알수 있다.

$$\left.\begin{aligned}
&\omega_1=\frac{\boldsymbol{k}^2}{2m}\\
&\omega_2=\sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{k}^2}{2m}\right)^2+\left(3g+\sqrt{g^2+8g'^2}\right)\frac{\rho_0\boldsymbol{k}^2}{2m}}\\
&\omega_3=\sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{k}^2}{2m}\right)^2+\left(3g-\sqrt{g^2+8g'^2}\right)\frac{\rho_0\boldsymbol{k}^2}{2m}}
\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

이것은 다름아닌 $SU(2)\otimes U(1)$ 대칭성이다. 더우기 우의 교환관계에서 본것처럼 $g_{ii}=g$, $g_{ij}=g'$이고 $g=g'$이면 세성분보즈립자계에서는 $SU(3)$ 돌연대칭성이 발생하게 된다.(그림 3의 ㄴ))

결국 세성분보즈립자계에서는 $SU(3)$ 돌연대칭성뿐아니라 그보다 차수가 낮은 $SU(2)$ 대칭성도 나타나게 된다는것을 알수 있다. 이러한 사실을 성분수가 보다 많은 보즈립자계에로 일반화할수 있다. $SU(6)$ 대칭성을 나타내는 모트절연체나 $SU(2)\otimes SU(6)$ 대칭성을 나타내는 극저온원자기체계[5]에서 나타나는 실험적사실들이 이것을 보여주고있다.

한편 우에서 언급한 모든 현상들에서 공통적인것은 $\det\{g_{ij}\}=0$ 일 때 돌연대칭성이 발생한다는것이다.

결국 $\det\{g_{ij}\}=0$ 을 돌연대칭성발생을 위한 일반적인 조건으로 볼수 있다.

맺 는 말

여러성분보즈립자계에서 나타나는 돌연대칭성에 대한 연구를 진행하고 $\det\{g_{ij}\}=0$ 의 조건을 만족시킬 때 N 성분보즈립자계에서 $SU(M)(M<N)$ 돌연대칭성이 발생한다는것을 밝혔다.

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보(자연과학), 63, 10, 52, 주체106(2017).

[2] S. B. Papp et al.; Phys. Rev. Lett., 101, 040402, 2008.

[3] V. N. Popov; Functional Integrals in Quantum Field Theory and Statistical Physics, D. Ridel Publish Company, 17～29, 123～159, 1983.

[4] M. A. Cazalilla; arXiv:1603.2792.

[5] S. Taie et al.; Phys. Rev. Lett., 105, 190401, 2010.

주체107(2018)년 3월 5일 원고접수

Emergent Symmetry in Multi-Component Bose Gas System

Jong Kum Hyok, *Ri Chol Won* and *Choe Ji Won*

We studied on the emergent symmetry in multi-component Bose gas system and showed that $SU(M)(M<N)$ emergent symmetry occurs in N–component Bose gas system under the condition $\det\{g_{ij}\}=0$.

Key words: emergent symmetry, N–component Bose gas system