김일성종합대학학보 주체107(2018)년
수 학 제64권 제4호

분수브라운운동에 관한 정－역방향확률조종계의 최대값원리

신명국, 김현남

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《기초과학을 끊임없이 심화발전시키지 않고서는 첨단과학기술을 연구도입할수도 없고 새로운 높은 수준의 과학기술을 연구개발할수도 없습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제22권 21페지)

우리는 분수브라운운동에 관한 정－역방향확률조종계의 최대값원리에 대한 연구를 진행하였다.

선행연구[2－4]에서는 위너형 또는 위너－뽜쏭형정－역방향조종계의 확률최대값원리에 대하여 연구하였다.

선행연구[4]에서는 위너형정－역방향확률조종계에 대하여 변분부등식을 얻고 그에 기초하여 최대값원리를, 선행연구[3]에서는 위너－뽜쏭형정－역방향확률조종계에 대하여 그것이 완전련립인 경우에 확률최대값원리를 밝혔다.

선행연구[2]에서는 분수브라운운동에 관한 확률조종계의 최대값원리를 정방향확률조종계에 대하여서만 고찰하였다.

이 론문에서는 분수브라운운동에 관한 한가지 정－역방향확률조종계를 제기하고 변분부등식을 얻은데 기초하여 확률최대값원리를 증명하였다.

다음과 같은 분수브라운운동에 관한 정－역방향확률조종계를 고찰하자.

$$\begin{aligned} &dx_t = f(x_t,\ y_t,\ v_t,\ t)dt + \sigma(t)dB_t^H \\ &-dy_t = g(x_t,\ y_t,\ v_t,\ t)dt - z_t dB_t^H \\ &x(0) = x_0,\ \ y(T) = h(x(T)) \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 함수 $f, \sigma,\ g, h$ 들은 각각

$$\begin{aligned} &f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k \times [0,\ T] \times \Omega \to \mathbf{R}^n \\ &\sigma : [0,\ T] \times \Omega \to \mathbf{R}^{n \times d} \\ &g : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k \times [0,\ T] \times \Omega \to \mathbf{R}^n \\ &h : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n \end{aligned}$$

인 함수들이며 B_t^H 는 d 차원분수브라운운동이라고 하자.

U 는 $\mathbf{R}^k$ 의 비지 않은 부분모임이고 모임

$$U_{ad} = \{v(\cdot) \in L_F{}^2([0,\ T];\ \mathbf{R}^k) : v(t) \in U\}$$

는 허용조종모임이라고 하자. 목적은 U_{ad} 에서 소비범함수

$$J(v(\cdot)) = E\gamma(y(0)) \tag{2}$$

을 최소로 하는것이다.

먼저 필요한 기호약속과 가정을 하자.

$$(F,\ G) := E\int_D \langle F(t),\ G(t)\rangle dt$$

$$(F,\ G)_{L_\phi^{1,2}} := E\left[\sum_i \int_D\int_D F_i(s)\cdot G_i(t)\phi_{H_i}(s,\ t)dsdt + \sum_{i,j}\left(\int_D D_{j,s}^\phi F_i(s)ds\right)\left(\int_D D_{i,t}^\phi G_j(t)dt\right)\right]$$

여기서 $F(t),\ G(t)$는 $D\times\Omega$에서 정의된 다차원우연과정이고 $D_{i,t}^\phi Y$는 말랴빈 ϕ도함수이다. 그리고

$$\|F\|^2 := (F,\ F) < \infty,\ \|F\|_{L_\phi^{1,2}}^2 := (F,\ F)_{L_\phi^{1,2}} < \infty$$

인 함수 F전부의 모임을 각각 $L^2,\ L_\phi^{1,2}$로 표시한다. 또한 해당한 조건을 만족시키는 우연과정들에 대하여 다음의 기호를 약속한다.

$$V := (x,\ y),\ A(t,\ V) := \begin{pmatrix} -g \\ f \end{pmatrix}(t,\ V)$$

$$(A,\ V) := (-g,\ x) + (f,\ y)$$

$$(V,\ V) := \|V\|^2 = (x,\ x) + (y,\ y) := \|x\|^2 + \|y\|^2$$

그리고 다음의 조건들이 성립한다고 하자.

① $A(t,\ V)$는 V에 관하여 약단조성조건을 만족시킨다. 즉

$$\exists\mu > 0;\ \forall V,\ \ V' \in L^2\times L^2,\ (A - A',\ V - V') \le -\mu\|V - V'\|^2$$

이다.

② $f,\ g,\ \sigma,\ h,\ \gamma$는 자기변수에 관하여 련속미분가능하며 다음의 조건을 만족시킨다.

$$|f_x| \le C,\ |f_y| \le C,\ |g_x| \le C,\ |g_y| \le C$$

$$|\gamma_y| \le C(1 + |y|),\ h = Qx + R$$

여기서 $Q,\ R$는 각각 적당한 차원을 가지는 상수행렬과 상수벡토르이며 C는 상수이다.

③ $$f(x_t,\ y_t,\ v_t,\ t) = \mu_1 y_t + l_1 v_t + \alpha(t)$$
$$g(x_t,\ y_t,\ v_t,\ t) = \mu_2 y_t + l_2 v_t + \beta(t)$$

라고 하자. 여기서 $\mu_1, \mu_2,\ l_1,\ l_2$ 들은 상수들이며 $\alpha(t),\ \beta(t)$들은 t에 관한 함수들이다.

조건 ①－②밑에서 방정식 (1)의 풀이 $(x_t,\ y_t,\ z_t) \in L_\phi^{1,2}$가 유일존재한다.[1]

이 론문에서는 분수브라운운동에 관한 정－역방향확률조종문제 (1), (2)에 대하여 확률최대값원리를 증명한다.

1. 변분방정식과 변분부등식

$(u(\cdot),\ x(\cdot),\ y(\cdot),\ z(\cdot))$는 조종문제 (1), (2)의 최량조종과 그에 대응하는 풀이라고 하고

$$u^\varepsilon(t) = \begin{cases} v, & \tau \le t \le \tau + \varepsilon \\ u(t), & \text{다른 경우} \end{cases}$$

와 같이 정의한다. 여기서 $\tau \in [0,\ T)$이고 $\varepsilon > 0$은 충분히 작은 정수이며 v는 $\sup\limits_{\omega\in\Omega}|v(\omega)| < \infty$

를 만족시키고 U 에서 값을 가진다고 한다.

$u^{\varepsilon}(\cdot)$ 에 대응하는 방정식 (1)의 풀이를 $(x^{\varepsilon}(\cdot),\ y^{\varepsilon}(\cdot),\ z^{\varepsilon}(\cdot))$ 으로 표시하고 다음과 같은 변분방정식을 생각하자.

$$\begin{aligned} &dx_1=[f_x x_1+f_y y_1+f(u^{\varepsilon})-f(u)]dt\\ &-dy_1=[g_x x_1+g_y y_1+g(u^{\varepsilon})-g(u)]dt-z_1 dB_t^H\\ &x_1(0)=0,\ y_1(T)=h_x(x(T))x_1(T)\end{aligned} \tag{3}$$

방정식 (3)에서 다음의 표시를 리용하였다.

$$\begin{aligned} &f_x:=f_x(x(t),\ y(t),\ u(t),\ t),\quad g_x:=g_x(x(t),\ y(t),\ u(t),\ t)\\ &f_y:=f_y(x(t),\ y(t),\ u(t),\ t),\ g_y:=g_x(x(t),\ y(t),\ u(t),\ t)\\ &f(u^{\varepsilon}):=f(x(t),\ y(t),\ u^{\varepsilon}(t),\ t),\ f(u):=f(x(t),\ y(t),\ u(t),\ t)\\ &g(u^{\varepsilon}):=g(x(t),\ y(t),\ u^{\varepsilon}(t),\ t),\ g(u):=g(x(t),\ y(t),\ u(t),\ t)\end{aligned}$$

변분부등식을 얻는데 필요한 몇가지 보조정리를 보기로 하자.

보조정리 1 조건 ①－②가 성립하면 다음의 부등식이 성립한다.

$$E|x_1(T)|^2\le k\varepsilon,\ E\int_0^T|x_1(s)|^2\,ds\le k\varepsilon,\ E\int_0^T|y_1(s)|^2\,ds\le k\varepsilon,\ \ E|y_1(0)|^2\le k\varepsilon,\ \|z_1\|^2_{L_\phi^{1,2}}\le k\varepsilon \tag{4}$$

보조정리 2 조건 ①－③이 성립한다고 하자. 이때

$$\begin{aligned} &E|x^{\varepsilon}(T)-x(T)-x_1(T)|^2=0,\ E|y^{\varepsilon}(0)-y(0)-y_1(0)|^2=0\\ &E\int_0^T|y_s^{\varepsilon}-y'-y_1|^2\ \ ds=0,\ \ E\int_0^T|x_s^{\varepsilon}-x-x_1|^2\ \ ds=0,\ \|z_s^{\varepsilon}-z-z_1\|^2_{L_\phi^{1,2}}=0\end{aligned} \tag{5}$$

이 성립한다.

정리 1조건 ①－③밑에서 다음의 변분부등식이 성립한다.

$$E\gamma_y(y(0))y_1(0)\ge 0 \tag{6}$$

증명 보조정리 2와 γ 함수의 성질을 리용하면 $u(t)$ 가 최량조종이라는데로부터

$$\begin{aligned} &0\le E[\gamma(y^{\varepsilon}(0))-\gamma(y(0))]=\\ &=E[\gamma(y^{\varepsilon}(0))-\gamma(y(0)+y_1(0))]+E[\gamma(y(0)+y_1(0))-\gamma(y(0))]\le\\ &\le CE\big|y(0)+y_1(0)-y(0)\big|+E\gamma_y(y(0))y_1(0)+o(\varepsilon)\le E\gamma_y(y(0))y_1(0)+o(\varepsilon)\end{aligned}$$

이 성립하며 따라서 $E\gamma_y(y(0))y_1(0)\ge 0$ 이 나온다.(증명끝)

2. 확률최대값원리

공액방정식을

$$\begin{cases} -dp=[f_x^* p+g_x^* q]dt-kdB_t^H\\ p(T)=-h_x^*(x(T))q(T)\\ -dq=[f_y^* p+g_y^* q]dt\\ q(0)=-\gamma_y(y(0))\end{cases} \tag{7}$$

으로 놓고 해밀턴함수를

$$H(x,\ y,\ z,\ v,\ p,\ q,\ k,\ t) \overset{\Delta}{=} \langle p,\ f(x,\ y,\ v,\ t)\rangle + \langle q,\ g(x,\ y,\ v,\ t)\rangle + \langle k,\ \sigma(t)\rangle$$

라고 하자.

정리 2 조건 ①－③이 성립한다고 하자. $u(\cdot)$가 최량조종이고 $(x(\cdot),\ y(\cdot),\ z(\cdot))$는 그것에 대응하는 방정식 (1)의 풀이이며 $(p(\cdot),\ q(\cdot),\ k(\cdot))$를 식 (7)의 풀이라고 하자. 그때 확률최대값원리

$$\begin{aligned} &H(x(t),\ y(t),\ z(t),\ v,\ p(t),\ q(t),\ k(t),\ t) \ge \\ &\quad \ge H(x(t),\ y(t),\ z(t),\ u(t),\ p(t),\ q(t),\ k(t),\ t)\ \ (\forall v \in U) \end{aligned} \tag{8}$$

가 성립한다.

참 고 문 헌

[1] 신명국 등; 수학 4, 25, 주체103(2014).

[2] B. Oksendal et al.; SIAM J. Control Optim., 48, 5, 2945, 2009.

[3] Qingmeng Wei; Article ID 216053, 12, 2014.

[4] Wensheng Xu; J. Austral. Math. Soc. Ser., 37, 172, 1995.

주체107(2018)년 6월 5일 원고접수

A Maximum Principle for Forward-Backward Stochastic Control System Driven by Fractional Brownian Motion

Sin Myong Guk, Kim Hyon Nam

In this paper, we discuss the maximum principle for forward-backward stochastic control system driven by fractional Brownian motion. We define a forward-backward stochastic control system driven by fractional Brownian motion and prove a maximum principle with variational inequality.

Key words: fractional Brownian motion, fractal forward-backward stochastic differential equations, stochastic maximum principle