김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제3호

평균마당역방향확률미분방정식에 대한 일반화된 $\theta-$도식의 안정성해석과 오차평가

리경일, 홍영민

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《수학은 모든 자연과학의 기초로 될뿐아니라 사회현상을 연구하는데서도 중요한 수단으로 됩니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제10권 478페지)

선행연구[3]에서는 역방향확률미분방정식의 수치풀이를 위한 $\theta-$도식을 처음으로 제기하였으며 선행연구[1]에서는 보다 높은 수렴률을 가지는 일반화된 $\theta-$도식을 제기하고 오차평가를 진행하였다.

선행연구[2]에서는 $\theta-$도식을 리용하여 처음으로 평균마당역방향확률미분방정식의 수치풀이방법을 제기하고 안정성해석과 오차평가를 진행하였다.

론문에서는 일반화된 $\theta-$도식을 리용한 평균마당역방향확률미분방정식의 수치풀이도식의 안정성해석과 오차평가를 진행한다.

$W=\{W_t\}_{0\le t\le T}$를 완비확률공간 $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$우에서 정의된 m차원브라운운동이라고 하고 $\{\mathcal{F}_t\}_{0\le t\le T}$는 브라운운동 $W=\{W_t\}_{0\le t\le T}$에 의하여 생성된 $\sigma-$모임벌이라고 하자.

우리는 확률토대 $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P,\ \{\mathcal{F}_t\}_{0\le t\le T})$우에서 정의된 다음과 같은 평균마당역방향확률미분방정식의 수치풀이도식을 연구한다.

$$Y_t^{0,\ X_0}=\varphi(X_t^{0,\ X_0})+\int_t^T E[f(s,\ Y_s^{0,\ x_0},\ y)]\Big|_{y=Y_s^{0,\ X_0}}ds-\int_t^T Z_s^{0,\ X_0}dW_s\quad (0\le t\le T)\tag{1}$$

여기서 $\varphi:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^d$, $f:[0,\ T]\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}^d$들은 확정적인 함수들이며 X_0, $X_T^{0,\ X_0}\in\mathbf{R}^m$은 각각 $X_t^{0,X_0}=X_0+W_t,\ 0\le t\le T$와 같은 우연과정의 초기값(기지), 종점값(미지)이다.

방정식 (1)의 생성함수 $E[f(s,\ Y_s^{0,\ x_0},\ y)]$안에 있는 $Y_s^{0,\ x_0}$은 $X_0=x_0$인 경우 방정식 (1)의 풀이로서 $Y_s^{0,\ X_0}$과 구별된다. 일반적으로 X_0과 x_0은 서로 다른 값들이다.

정의 1 $(Y_t^{0,\ X_0},\ Z_t^{0,\ X_0})$이 방정식 (1)을 만족시키면서 $\mathcal{F}_t$ −적합, 2제곱적분가능할 때 $(Y_t^{0,\ X_0},\ Z_t^{0,\ X_0})$을 방정식 (1)의 L^2 −풀이라고 말한다.

방정식 (1)에 일반화된 $\theta-$도식을 적용하면 다음의 참조방정식을 얻는다.

$$\begin{cases} Y_{t_n}^{0,\ X_0}=E_{t_n}^x[Y_{t_{n+1}}^{0,\ X_0}]+\tilde{\theta}_n^y hf_{t_n}^{0,x_0,\ X_0}+(1-\tilde{\theta}_n^y)hE_{t_n}^x[f_{t_{n+1}}^{0,\ x_0,\ X_0}]+R_y^{n,\ X_0} \\ Z_{t_n}^{0,\ X_0}=E_{t_n}^x[Z_{t_{n+1}}^{0,\ X_0}]+\tilde{\theta}_n^z h\left(\dfrac{\partial}{\partial y}f_{t_n}^{0,\ x_0,\ X_0}Z_{t_n}^{0,\ X_0}\right)+(1-\tilde{\theta}_n^z)hE_{t_n}^x\left[\left(\dfrac{\partial}{\partial y}f_{t_{n+1}}^{0,\ x_0,\ X_0}\right)Z_{t_{n+1}}^{0,\ X_0}\right]+R_z^{n,\ X_0} \end{cases}$$

여기서 $f_s^{0,\ x_0,\ X_0}=E[f(s,\ Y_s^{0,\ x_0},\ y)]|_{y=Y_s^{0,\ X_0}}$이다.

방정식 (1)의 수치풀이를 얻기 위하여 다음의 도식을 리용한다.

$$\begin{cases} Y^{n,\,X_0}=E^x_{t_n}[Y^{n+1,\,X_0}]+\widetilde{\theta}^y_n hf^{n,\,x_0,\,X_0}+(1-\widetilde{\theta}^y_n)hE^x_{t_n}[f^{n+1,\,x_0,\,X_0}] \\ Z^{n,\,X_0}=E^x_{t_n}[Z^{n+1,\,X_0}]+\widetilde{\theta}^z_n h\left(\dfrac{\partial}{\partial y}f^{n,\,x_0,\,X_0}Z^{n,\,X_0}\right)+(1-\widetilde{\theta}^z_n)hE^x_{t_n}\left[\left(\dfrac{\partial}{\partial y}f^{n+1,\,x_0,\,X_0}\right)Z^{n+1,\,X_0}\right] \end{cases} \tag{2}$$

여기서 $f^{n,\,x_0,\,X_0}=E[f(t_n,\,Y^{n,\,x_0},\,y)]|_{y=Y^{n,\,X_0}}$이다.

가정 f와 φ는 유계이고 충분히 미분가능하며 그 도함수들도 유계이다.

도식의 안정성을 연구하기 위하여 $\varepsilon_f,\,(\varepsilon^{N,\,X_0}_y,\,\varepsilon^{N,\,X_0}_z)$들은 생성함수 f와 종점조건 $(Y^{N,\,X_0},\,Z^{N,\,X_0})$에 대한 섭동이라고 하자.

$$Y^{N,\,X_0}_\varepsilon:=Y^{N,\,X_0}+\varepsilon^{N,\,X_0}_y,\quad Z^{N,\,X_0}_\varepsilon:=Z^{N,\,X_0}+\varepsilon^{N,\,X_0}_z,\quad f_\varepsilon(t,\,y',\,y)=f(t,\,y',\,y)+\varepsilon$$

그리고 $f^{n,\,\varepsilon,\,X_0}$, $\varepsilon^{n,\,X_0}_f$, $f^{n,\,X_0}_\varepsilon$은 다음과 같이 정의한다.

$$f^{n,\,\varepsilon,\,X_0}=E[f(t_n,\,Y^{n,\,X_0}_\varepsilon,\,y)]y=Y^{n,\,X_0}_\varepsilon,\quad \varepsilon^{n,\,X_0}_f=[\varepsilon_f(t_n,\,Y^{n,\,X_0}_\varepsilon,\,y)]y=Y^{n,\,X_0}_\varepsilon,\quad f^{n,\,X_0}_\varepsilon=f^{n,\,\varepsilon,\,X_0}+\varepsilon^{n,\,X_0}_f$$

여기서 $Y^{n,\,X_0}_\varepsilon$, $Z^{n,\,X_0}_\varepsilon$은 다음의 도식으로 얻을수 있다.

$$Y^{n,\,X_0}_\varepsilon=E^x_{t_n}[Y^{n+1,\,X_0}_\varepsilon]+\hat{\theta}^y_n hf^{n,\,X_0}_\varepsilon+(1-\hat{\theta}^y_n)hE^x_{t_n}[f^{n+1,\,X_0}_\varepsilon]$$

$$Z^{n,\,X_0}_\varepsilon=E^x_{t_n}[Z^{n+1,\,X_0}_\varepsilon]+\hat{\theta}^z_n h\frac{\partial}{\partial y}f^{n,\,X_0}_\varepsilon Z^{n,\,X_0}_\varepsilon+(1-\hat{\theta}^z_n)hE^x_{t_n}\left[\frac{\partial}{\partial y}f^{n+1,\,X_0}_\varepsilon Z^{n+1,\,X_0}_\varepsilon\right]$$

정의 2 임의의 $\varepsilon>0$과 $0\le n\le N-1$에 대하여 적당한 정수 δ가 있어서

$$E[|\varepsilon^{n,\,x_0}_f|^2+|\varepsilon^{n,\,X_0}_f|^2]<\delta,\quad E[|\varepsilon^{N,\,x_0}_y|^2+|\varepsilon^{N,\,X_0}_y|^2+|\varepsilon^{N,\,x_0}_z|^2+|\varepsilon^{N,\,X_0}_z|^2]<\delta$$

일 때 $E\left[|\varepsilon^{n,\,X_0}_y|^2+h\sum_n^{N-1}|\varepsilon^{i,\,X_0}_z|^2\right]<\varepsilon$을 만족시키면 도식 (2)는 안정하다고 말한다.

도식 (2)의 안정성을 증명하기 위해 먼저 $X_0=x_0$인 경우에 다음의 결과를 얻는다.

정리 1 $f(t,\,y',\,y)$가 가정을 만족시키면 충분히 작은 h에 대하여

$$E|\varepsilon^{n,\,x_0}_y|\le C\left(E|\varepsilon^{N-q,\,x_0}_y|+h\sum_{j=N-q}^{N}E|\varepsilon^{j,\,x_0}_y|+h\sum_{j=n+1}^{N}E|\varepsilon^{j,\,x_0}_f|+\sum_{j=n}^{N-q-1}E|R^{j,\,x_0}_{\varepsilon y}|\right)$$

이 성립된다. 여기서 C는 T, f, φ와 그 도함수들의 상계에만 의존하는 상수이다.

정리 2 정리 1과 같은 조건밑에서 다음의 식이 성립된다.

$$E|\varepsilon^{n,\,x_0}_z|\le C\left(E|\varepsilon^{N-q,\,x_0}_z|+\sum_{j=n}^{N}h(E|\varepsilon^{j-1,\,x_0}_y|+E|\varepsilon^{j,\,x_0}_f|)+\sum_{j=n}^{N-q-1}E|R^{j,\,x_0}_{\varepsilon z}|\right)$$

정리 1, 2에 기초하여 다음과 같은 일반적인 경우의 안정성결과를 이끌어낼수 있다.

정리 3

$$E|\varepsilon^{n,\,X_0}_y|\le CE[|\varepsilon^{N-q,\,x_0}_y|+|\varepsilon^{N-q,\,X_0}_y|]+$$
$$+Ch\sum_{j=N-q+1}^{N}E[|\varepsilon^{j,\,x_0}_y|+|\varepsilon^{j,\,X_0}_y|]+Ch\sum_{j=n+1}^{N}E[|\varepsilon^{j,\,x_0}_f|+|\varepsilon^{j,\,X_0}_f|]+C\sum_{j=n}^{N-q-1}E[|R^{j,\,x_0}_{\varepsilon y}|+|R^{j,\,X_0}_{\varepsilon y}|]$$

$$E|\varepsilon^{n,\,X_0}_z|\le CE[|\varepsilon^{N-q,\,x_0}_z|+|\varepsilon^{N-q,\,X_0}_z|]+$$
$$+Ch\sum_{j=N-q+1}^{N}E[|\varepsilon^{j-1,\,x_0}_y|+|\varepsilon^{j-1,\,X_0}_y|]+Ch\sum_{j=n}^{N}E[|\varepsilon^{j,\,x_0}_f|+|\varepsilon^{j,\,X_0}_f|]+C\sum_{j=n}^{N-q-1}E[|R^{j,\,x_0}_{\varepsilon z}|+|R^{j,\,X_0}_{\varepsilon z}|]$$

$(Y_t^{0,\, X_0},\ Z_t^{0,\, X_0})$과 $(Y^{n,\, X_0},\ Z^{n,\, X_0})$을 각각 정확한 풀이, 근사풀이라고 하자.

정리 4 가정이 성립되고 초기풀이 Y^n, Z^n $(N-q \le n \le N)$이

$$\max_{N-q\le n\le N} E[|Y_{t_n}-Y^n|]=O(h^{q+1}),\quad \max_{N-q\le n\le N} E[|Z_{t_n}-Z^n|]=O(h^{q+1})$$

을 만족시킨다면 h가 충분히 작을 때 다음의 식들이 성립된다.

$$\max_{0\le n\le N-q-1} E[|Y_{t_n}-Y^n|]\le Ch^{q+1},\quad \max_{0\le n\le N-q-1} E[|Z_{t_n}-Z^n|]\le Ch^{q+1}$$

증명 $e_y^{n,\, X_0}=Y_{t_n}^{0,\, X_0}-Y^{n,\, X_0}$, $e_z^{n,\, X_0}=Z_{t_n}^{0,\, X_0}-Z^{n,\, X_0}$으로 표시하자.

그러면 정리 3으로부터 다음의 식들이 성립된다.

$$E|e_y^{n,\, X_0}|\le CE[|e_y^{N-q,\, x_0}|+|e_y^{N-q,\, X_0}|]+Ch\sum_{j=N-q+1}^{N}E[|e_y^{j,\, x_0}|+|e_y^{j,\, X_0}|]+C\sum_{j=n}^{N-q-1}E[|R_y^{j,\, x_0}|+|R_y^{j,\, X_0}|]$$

$$E|e_z^{n,\, X_0}|\le CE[|e_z^{N-q,\, x_0}|+|e_z^{N-q,\, X_0}|]+Ch\sum_{j=n}^{N}E[|e_y^{j-1,\, x_0}|+|e_y^{j-1,\, X_0}|]+C\sum_{j=n}^{N-q-1}E[|R_z^{j,\, x_0}|+|R_z^{j,\, X_0}|]$$

그런데 일반화된 $\theta-$도식의 국부자름오차는 $|R_y^n|\le Ch^{q+2}$, $|R_z^n|\le Ch^{q+2}$이므로

$$\max_{0\le n\le N-q-1} E|e_y^{n,\, X_0}|\le Ch^{q+1},\quad \max_{0\le n\le N-q-1} E|e_z^{n,\, X_0}|\le Ch^{q+1}$$

이 곧 나온다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] 리은하; 수학, 1, 51, 주체105(2016).

[2] Y. Sun et al.; SIAM J. Numer. Anal., 56, 4, 2672, 2018.

[3] W. Zhao et al.; SIAM J. Sci. Comput. 28, 4, 1563, 2006.

주체108(2019)년 3월 15일 원고접수

Stability Analysis and Error Estimates of the Generalized $\theta-$Scheme for Mean-Field Backward Stochastic Differential Equation

Ri Kyong Il, Hong Yong Min

We study the stability of the generalized $\theta-$scheme for solving the Mean-field backward differential equation and based on our result, obtain error estimates.

Key words: stability analysis, error estimate