김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제4호

비종점소득미분경기에서 안정성조건에 의존하지 않는 한가지 개선된 웃방향계차도식에 대한 연구

리국환, 선우국현

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《과학기술부문에서 첨단돌파전을 힘있게 벌려야 하겠습니다.》

론문에서는 값함수계산을 위하여 웃방향계차도식의 한가지 변형된 형태를 제안하고 안정성조건(CFL조건)대신에 조건 $\Delta_\Gamma = O(\Delta^{1+h})$ 하에서 그 수렴성[1, 3, 4]을 보여주었다.

시간구간 $I=[t_{00},\ \theta]$ 에서의 동태가 다음의 미분방정식으로 서술되는 미분경기를 론의하자.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = f(t,\ x(t),\ u(t),\ \upsilon(t)),\ t\in I,\ x(t)\in \mathbf{R}^n\\ u(t)\in U\subset \mathbf{R}^p,\ \upsilon(t)\in V\subset \mathbf{R}^q\end{aligned} \tag{1}$$

여기서 t 는 시간, $x(t)$ 는 계의 상태벡토르, $u(t),\ \upsilon(t)$ 는 각각 첫째 및 둘째 경기자의 t 시각에서의 조종벡토르들, $U,\ V$ 는 각각 콤팍트들이다. 경기는 $t_0\in I$ 에서 시작되고 θ 에서 끝난다. 첫째 경기자의 목적은 범함수

$$J(x(\cdot)) = \min_{t\in[t_0,\ \theta]} \sigma(t,\ x(t)) \tag{2}$$

를 최소화하는것이며 둘째 경기자의 목적은 그 반대이다.

또한 $f(\cdot)$ 의 모든 변수들에 관한 유계평등련속성과 립쉬츠련속성, 아이젝쓰조건을 가정하며 $\sigma(\cdot)$ 에 대하여 유계립쉬츠련속성을 가정한다. 이때 임의의 초기위치 $(t_0,\ x_0)\in I\times\mathbf{R}^n$ 에 대하여 문제 (1), (2)의 경기값 $w^*(t_0,\ x_0)$ 이 존재하며 값함수 $(t_0,\ x_0)\mapsto w^*(t_0,\ x_0)$ 은 유계립쉬츠련속으로서 해밀턴－야꼬비－벨만－아이젝쓰방정식에 대한 다음의 경계값문제의 유일한 점성풀이(또는 최소최대풀이)이다.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial t}(t,\ x)+H\left(t,\ x,\ \dfrac{\partial w}{\partial x}(t,\ x)\right)=0,\ (t,\ x)\in[t_{00},\ \theta)\times\mathbf{R}^n\\ w(t,\ x)\le\sigma(t,\ x),\ (t,\ x)\in[t_{00},\ \theta)\times\mathbf{R}^n\\ w(\theta,\ x)=\sigma(x),\ x\in\mathbf{R}^n\end{cases} \tag{3}$$

따라서 경계값문제 (3)에 대한 근사계산도식의 수렴성조건을 값함수근사도식의 수렴성증명에 리용할수 있다.

미분경기 (1), (2)의 값함수 $w^*(\cdot)$ 의 계산을 위한 시공간리산화도식을 구성하기 위하여 한가지 개선된 웃방향계차연산자를 도입한다.

$\Delta>0$ 은 시간구간 I 의 분할크기, $\Delta_i>0,\ i=\overline{1,\ n}$ 은 상태공간 $\mathbf{R}^n$ 의 ξ_i 축분할크기들, $\Delta_\Gamma = \max\limits_{i=\overline{1,\ n}}\Delta_i$ 라고 하자.

이제 $t,\ t+\Delta \in I$ 라고 하고 함수 $\psi(\cdot):\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^1$ 이 주어진다고 하자. 이때 연산자 $\psi \mapsto \Pi(t,\ \Delta,\ \psi)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\Pi(t,\ \Delta,\ \psi)(x) = \min_{u\in U} \max_{f\in \mathrm{co}f(t,\ x,\ u,\ V)} L(\psi)(x,\ \Delta f) \tag{4}$$

$$L(\psi)(x,\ f) = \psi(x+[f]) + c(f)\cdot \sum_{i=1}^{n} \{d_i^R \psi(x+[f])\cdot (f_i - [f]_i)^+ + d_i^L \psi(x+[f])\cdot (f_i-[f]_i)^-\} \tag{5}$$

여기서

$$f=(f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_n)^{\mathrm{T}},\ [f]=([f]_1,\ [f]_2,\ \cdots,\ [f]_n)^{\mathrm{T}}$$

$$[f]_i = \Delta_i [f_i \cdot \Delta_i^{-1} + 0.5]$$

$$d_i^R \psi(x) = \frac{\psi(x+\Delta_i e_i) - \psi(x)}{\Delta_i},\ d_i^L \psi(x) = \frac{\psi(x) - \psi(x-\Delta_i e_i)}{\Delta_i}$$

$$e_i = (0,\ \cdots,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0)^{\mathrm{T}}$$

$$a^+ = \max\{a,\ 0\},\ a^- = \min\{a,\ 0\}$$

기호 $[f_i\cdot\Delta_i^{-1}+0.5]$ 는 $f_i\cdot\Delta_i^{-1}+0.5$ 의 옹근수부를 표시하며 $c(f)\ge 0$ 은

$$c(f)\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{|f_i-[f]_i|}{\Delta_i}\le 1 \tag{6}$$

인 량이다. 분명히 임의의 $f\in\mathbf{R}^n$ 에 대하여

$$|f_i-[f]_i| \le \frac{\Delta_i}{2},\ i=\overline{1,\ n} \tag{7}$$

이다. f 의 함수 $L(\psi)(x,\ f)$ 는 일반적으로 불련속이다. 그것은 실례로 $|f_i-[f]_i| = \Delta_i/2$, $i=\overline{1,\ n}$ 인 f 의 근방점들은 서로 다른 직4면체에 속하기때문이다.

주의 량 $c(f)$ 를 결정하는 몇가지 경우들을 보자.

(1) 다음과 같이 설정할수 있다.

$$c(f)=\begin{cases}1, & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{|f_i-[f]_i|}{\Delta_i}\le 1\\ \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{|f_i-[f]_i|}{\Delta_i}\right)^{-1}, & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{|f_i-[f]_i|}{\Delta_i}>1\end{cases}\quad \text{또는}\quad c(f)=0\quad \text{또는}\quad c(f)=2/n$$

(2) 다음의 경우들에 $c(f)=1$ 로 놓을수 있다. 이때 $[f]+c(f)(f-[f])=f$ 이다.

① $n\le 2$ 일 때

② $\Delta_i \ge \sqrt{n}K_f\Delta,\ i=\overline{1,\ n}$ 일 때

③ $\displaystyle\max_{f\in \mathrm{co}f(I,\ \mathrm{R},U,V)}\sum_{i=1}^{n}\frac{|\Delta f_i|}{\Delta_i}\le 1$ 일 때

④ $\displaystyle\max_{f\in \mathrm{co}f(I,\ \mathrm{R},U,V)}\sum_{i=1}^{n}\frac{|\Delta f_i-[\Delta f]_i|}{\Delta_i}\le 1$ 일 때

사실 ①의 경우에는 식 (7)로부터 식 (6)이 나오고 ②의 경우에는 다음의 부등식이 성립하며

기타 경우에는 자명하다.

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{|\Delta f_i-[\Delta f]_i|}{\Delta_i}\le\sqrt{n\sum_{i=1}^{n}\frac{(\Delta f_i-[\Delta f]_i)^2}{\Delta_i^2}}\le\frac{1}{\min\limits_i \Delta_i}\sqrt{n}K_f\Delta\le 1$$

시간구간 I의 분할

$$P=\{t_{00}=\tau_0<\tau_1<\cdots<\tau_N=\theta\}$$

(여기서 $\Delta=\tau_{i+1}-\tau_i,\ i=\overline{0,\ N-1}$)와 공간 $\mathbf{R}^n$의 직립방체살창

$$\Gamma=\left\{x^\Gamma\in\mathbf{R}^n:\ x^\Gamma=o^\Gamma+\sum_{i=1}^{n}j_i\Delta_i e_i,\ j_i=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots,\ i=\overline{1,\ n}\right\}$$

을 도입하자. 여기서 $o^\Gamma=(o_1^\Gamma,\ o_2^\Gamma,\ \cdots,\ o_n^\Gamma)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$은 임의로 고정된 점이다.(만일 $x\in\Gamma$이면 Γ와 $x+\Gamma_f$는 일치) 우의 연산자 Π를 리용하여 살창함수 $w_{P\times\Gamma}(\cdot):P\times\Gamma\to\mathbf{R}^1$을 다음의 계산도식에 따라 구성한다.

$$\begin{aligned}&w_{P\times\Gamma}(\theta,\ x^\Gamma)=\sigma(\theta,\ x^\Gamma),\ x^\Gamma\in\Gamma\\&w_{P\times\Gamma}(\tau_i,\ x^\Gamma)=\min\{\Pi(\tau_i,\ \Delta,\ w_{P\times\Gamma}(\tau_{i+1},\ \cdot))(x^\Gamma),\ \sigma(\tau_i,\ x^\Gamma)\},\ x^\Gamma\in\Gamma,\ i=\overline{0,\ N-1}\end{aligned}\tag{8}$$

살창함수 $w_{P\times\Gamma}(\cdot)$은 살창의 모든 점들에서 잘 정의된다. 그것은 연산자 (4), (5)로부터 알수 있는바와 같이 τ_i시각의 함수값 $w_{P\times\Gamma}(\tau_i,\ x^\Gamma)$는 τ_{i+1}시각에 살창 Γ의 정점들에서 계산된 함수값 $w_{P\times\Gamma}(\tau_{i+1},\ x^\Gamma),\ x^\Gamma\in\Gamma$들에만 의존하여 계산되기때문이다.

우리는 살창함수 $w_{P\times\Gamma}(\cdot)$을 살창 $P\times\Gamma$에서의 값함수 $w^*(\cdot)$의 근사로 리용하려고 한다. 그런데 함수 $L(\psi)(x,\ f)$의 불련속성(따라서 연산자 Π의 불련속성)은 계산도식 (8), (4), (5)의 직접적인 수렴성증명을 어렵게 한다.

이제 수렴성증명을 위하여 보조적으로 연산자 $\varphi\mapsto G(t,\ \Delta,\ \varphi)$를 다음과 같이 정의하자.

$$G(t,\ \Delta,\ \varphi)(x)=\min_{u\in U}\ \max_{f\in\mathrm{co}f(t,\,x,\,u,\,V)}\varphi(x+\Delta f)\tag{9}$$

이 연산자에 기초하여 다음의 계산도식을 고려하자.

$$\begin{aligned}&w_P(\theta,\ x)=\sigma(\theta,\ x),\ x\in\mathbf{R}^n\\&w_P(t,\ x)=\min\{G(t,\ \tau_{i+1}-t,\ w_P(\tau_{i+1},\ \cdot))(x),\ \sigma(t,\ x)\},\ t\in[\tau_i,\ \tau_{i+1}),\ x\in\mathbf{R}^n,\ i=\overline{0,\ N-1}\end{aligned}\tag{10}$$

선행연구[2]의 결과에 준하여 그리고 값함수 $w^*(\cdot)$이 경계값문제 (3)의 유일한 점성풀이라는데로부터 다음의 결론이 나온다. 일반적으로 함수 $f(\cdot):A\to\mathbf{R}^1$에 대하여 표시 $\|f\|_A=\sup\limits_{x\in A}|f(x)|$를 리용한다.

정리 1 계산도식 (10), (9)에 의하여 얻어진 함수 $w_P(\cdot)$과 미분경기 (1), (2)의 값함수 $w^*(\cdot)$사이에 다음의 평가식이 성립한다.

$$\|w_{\mathrm{P}}-w^*\|_{I\times\mathbf{R}^n}\le C\sqrt{\Delta}$$

여기서 상수 C는 L_σ과 $H(\cdot)$에만 의존한다.

보조정리 1 $\varphi(\cdot):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^1$은 립쉬츠상수 L_φ인 립쉬츠련속함수, $\psi(\cdot):\Gamma\to\mathbf{R}^1$은 임의의 살창함수라고 하자. 이때 다음의 부등식이 성립한다.

$$\|\Pi(t,\ \Delta,\ \psi)-\mathrm{G}(t,\ \Delta,\ \varphi)\|_\Gamma\le\frac{\sqrt{n+1}}{2}L_\varphi\cdot\Delta_\Gamma+\|\psi-\varphi\|_\Gamma$$

보조정리 2 다음의 부등식이 성립한다.

$$|\mathrm{G}(t,\ \Delta,\ \varphi)(x_1)-\mathrm{G}(t,\ \Delta,\ \varphi)(x_2)|\le\exp(L_f\Delta)L_\varphi\|x_1-x_2\|,\ \forall x_1,\ x_2\in\mathbf{R}^n$$

함수 $\sigma(\cdot)$의 유계립쉬츠련속성과 보조정리 2로부터 임의의 $t\in I$에 대하여 함수 $w_P(t,\ \cdot):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^1$은 유계립쉬츠련속함수로서 립쉬츠상수 $L_{w_P}=\exp(L_f(\theta-t_{00}))L_\sigma$를 택할 수 있다.

보조정리 3 계산도식 (8), (4), (5)와 (10), (9)에 의하여 각각 얻어진 살창함수 $w_{P\times\Gamma}(\cdot)$과 함수 $w_P(\cdot)$사이에 다음의 평가식이 성립한다.

$$\|w_{P\times\Gamma}-w_P\|_{P\times\Gamma}\le C_{\max}\cdot\frac{\Delta_\Gamma}{\Delta}$$

여기서 $C_{\max}=\dfrac{\sqrt{n+1}}{2}(\theta-t_{00})L_{w_P}$이다.

우의 보조적결과들로부터 다음의 결론을 얻는다.

정리 2 어떤 상수 $k,\ h>0$에 대하여 $\Delta_\Gamma\le k\Delta^{1+h}$라고 하자. 이때 다음의 평가식이 성립한다.

$$\|w_{P\times\Gamma}-w^*\|_{P\times\Gamma}\le kC_{\max}\Delta^h+C\sqrt{\Delta}$$

이 정리는 정리 1과 보조정리 3으로부터 자명하다.

참 고 문 헌

[1] N. Botkin et al.; Annals of the International Society of Dynamic Games, 15, 325, 2017.
[2] P. E. Souganidis; J. Differential Equations, 59, 1, 1985.
[3] B. Sun et al.; IEEE Trans. Automat. Control, 60, 3012, 2015.
[4] V. Turova et al.; Annals of the International Society of Dynamic Games, 15, 345, 2017.

주체109(2020)년 6월 5일 원고접수

A Stability Condition-free Improved Upwind Finite-difference Scheme for the Differential Games with Non-terminal Payoffs

Ri Kuk Hwan, Sonu Kuk Hyon

In this paper, for the differential games with non-terminal payoffs, we present a modification of the upwind finite-difference scheme presented in preceding works [1, 3, 4] and prove its convergence without stability condition(CFL-condition).

Keywords: differential games with non-terminal payoffs, upwind finite-difference scheme