김일성종합대학학보 (자연과학) 주체103(2014)년 제60권 제7호
JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE) Vol. 60 No. 7 JUCHE103(2014).

선택접속모형에서 제곱법칙이 성립하기 위한 한가지 필요조건

조현웅, 김철은

바라바씨－알버트모형[1]이 출현한 때로부터 지금까지 제곱법칙에 따르는 실세계망에 대한 모형화는 많은 분야들에서 광범히 연구되고있다. 제곱법칙은 실세계망을 표현한 결정론적그라프에서 차수가 적어도 k인 정점들의 몫이 어떤 상수 γ(제곱지수)가 있어서 $k^{-\gamma}$에 점근적으로 비례하는 경험적법칙이다.(여기서 γ는 망에 관계되는 상수이다.)

론문에서는 선행연구[4]에서 선택접속확률을 $f(k)=[\log(k+h)]^c$ $(c>1,\ h>1)$에 비례하도록 변경시키고 그것에 대한 리론적고찰을 통하여 모형에서 제곱법칙이 성립하기 위한 필요조건을 $f(k)\neq k^{\alpha}$ $(\alpha>1,\ \alpha\neq 0)$로부터 $f(k)\in\Omega((\log k)^c)$ $(c>1)$로 개선하였다.

1. 선택접속모형과 제곱법칙

선택접속모형은 광대역망에서의 제곱법칙을 설명하기 위하여 처음으로 제기된 우연그라프모형으로서 다음과 같은 성장과 선택접속의 두가지 특성을 가지고있다.

① 시간이 지남에 따라 그라프에 정점이 계속 추가된다.(성장)

② 새로운 정점이 추가될 때 그것과 그라프에 이미 존재하고있던 정점사이의 련결은 선택접속규칙에 따라 우연적으로 진행된다.(선택접속)

선행연구[1]에서는 광대역망에서의 제곱법칙을 설명하기 위하여 다음과 같은 선택접속모형의 하나인 바라바씨－알버트모형을 제기하였다.

① 시각 $t=1$에 m개의 릉으로 다중련결된 2개의 정점이 존재한다.

② 시각 $t\geq 2$에 m개의 릉을 가진 새 정점이 이미 존재하고있는 m개의 정점들과 각각 확률 $\pi_i=k_i\Big/\sum_j k_j$로 독립적으로 련결된다.(선택접속) 여기서 π_i는 새로운 정점이 이미 존재하는 정점 i와 련결될 확률, k_i는 정점 i의 차수이다.

선행연구[3]에서 우의 과정에 의하여 얻어진 그라프들에서 차수가 k인 정점들의 몫 p_k가 수렴한다는것을 증명하였다. 즉

$$p_k\to\frac{2m(m+1)}{k(k+1)(k+2)},\ \ n\to\infty.$$

여기서 n은 정점의 개수이다.

우의 식으로부터 $k\to\infty$일 때 $p_k\sim Ck^{-3}$이므로 항상 제곱지수 3을 얻을수 있다.

제곱법칙을 만족시키는 실세계망들에서 제곱지수는 구간 $(1,\ \infty)$에서 변화되므로 바라바씨－알버트모형을 보다 일반화하기 위한 연구(보충적인 릉의 추가 혹은 이미 존재해있

는 정점의 우연적인 삭제, 정점의 존재기간의 고려)들이 진행되였다.[2] 특히 선행연구[4]에서는 선택접속모형에서 새 정점이 이미 존재하고있는 차수 k인 정점들과 련결될 확률을 정점차수의 함수 $f(k)$에 비례되게 함으로써 다음과 같은 사실들을 증명하였다.

① $f(k)=k^{\alpha}$, $\alpha>1$일 때 제곱법칙이 성립하지 않는다.

② $f(k)=k^{\alpha}$, $0<\alpha\le 1$일 때 제곱법칙이 성립한다.

또한 바라바씨와 알버트는 선행연구[1]에서 평등성장우연그라프모형에서 제곱법칙이 성립하지 않는다는것을 론증하였는데 이것은 선행연구[4]에서 $f(k)=1$일 때의 경우에 해당된다.

이러한 사실들로부터 관계식 $f(k)\ne k^{\alpha}$ $(\alpha>1,\ \alpha\ne 0)$이 선택접속모형에서 제곱법칙이 성립하기 위한 한가지 필요조건임을 알수 있다.

우리는 $f(k)=[\log(k+h)]^{c}$ $(c>1,\ h>1)$로 놓고 선행연구[4]의 모형에 대한 리론적고찰을 통하여 필요조건을 $f(k)\in\Omega((\log k)^{c})$ $(c>1)$로 개선하고 그것에 대한 수값모의를 진행하였다.

보조정리 $k_{\max}$, $k_{\min}$을 $k_{\max}>k_{\min}\ge 1$인 정의 옹근수라고 하자. 그러면 다음의 사실을 만족시키는 적당한 상수 $h>1$, $c>1$, $\lambda>0$, $\beta>0$가 존재한다.

$$\lambda k+\beta\le[\log(k+h)]^{c}\le\lambda k+\beta+O(1),\ k\in[k_{\min},\ k_{\max}] \qquad (*)$$

정리 선행연구[4]의 모형에 따라 생성되는 그라프에서 제곱법칙이 성립하기 위하여서는 선택접속규칙에서 릉의 접속확률이 적어도 $f(k)\in\Omega((\log k)^{c})$ $(c>1)$에 비례할것이 필요하다.

증명 보조정리로부터 일정한 차수구간 $k_{\min}\le k\le k_{\max}$이 주어지면 식 (*)이 성립하는 상수들을 결정하고 $f(k)=[\log(k+h)]^{c}$로 놓음으로써 우의 구간에서 릉의 접속확률이 $\tilde{f}(k)=\lambda k+\beta$에 비례하도록 할수 있다. 그러면 우연생성된 그라프는 차수구간 $k_{\min}\le k\le k_{\max}$에서 $p_k\sim Ck^{-1/(2+\beta)}$를 만족시킨다. 그러나 $f(k)\in O(\log k)$인 경우에는 식 (*)과 같은 관계식을 얻을수 없다.

한편 파라메터 c를 무한히 크게 하면 $f(k)=[\log(k+h)]^{c}$는 $f(k)\in O(k^{\alpha})$ $(\alpha>1)$의 성장과 류사해진다. 따라서 이 경우에는 우연생성된 그라프가 제곱법칙을 만족시키지 않는다. 즉 $f(k)\in\Omega((\log k)^{c})$ $(c>1)$이 우의 선택접속모형에서 제곱법칙이 성립하기 위한 한가지 필요조건임을 알수 있다.(증명끝)

2. 수값모의결과

제곱법칙에 따르는 정점차수분포식은 $p_k\sim Ck^{-\gamma}$, $n\to\infty$이므로 p_k의 로그그라프는 비례결수가 $-\gamma$인 직선으로 나타난다.

선택접속규칙에 쓰이는 함수 $f(k)$의 성장변화는 모형에 따르는 그라프에서 제곱법칙이 성립하는가 하지 않는가 하는 문제에 직접적인 영향을 미친다. 그림의 수값모의결과는 $\Theta(\log k)$가 림계상태라는것을 보여주고있다.

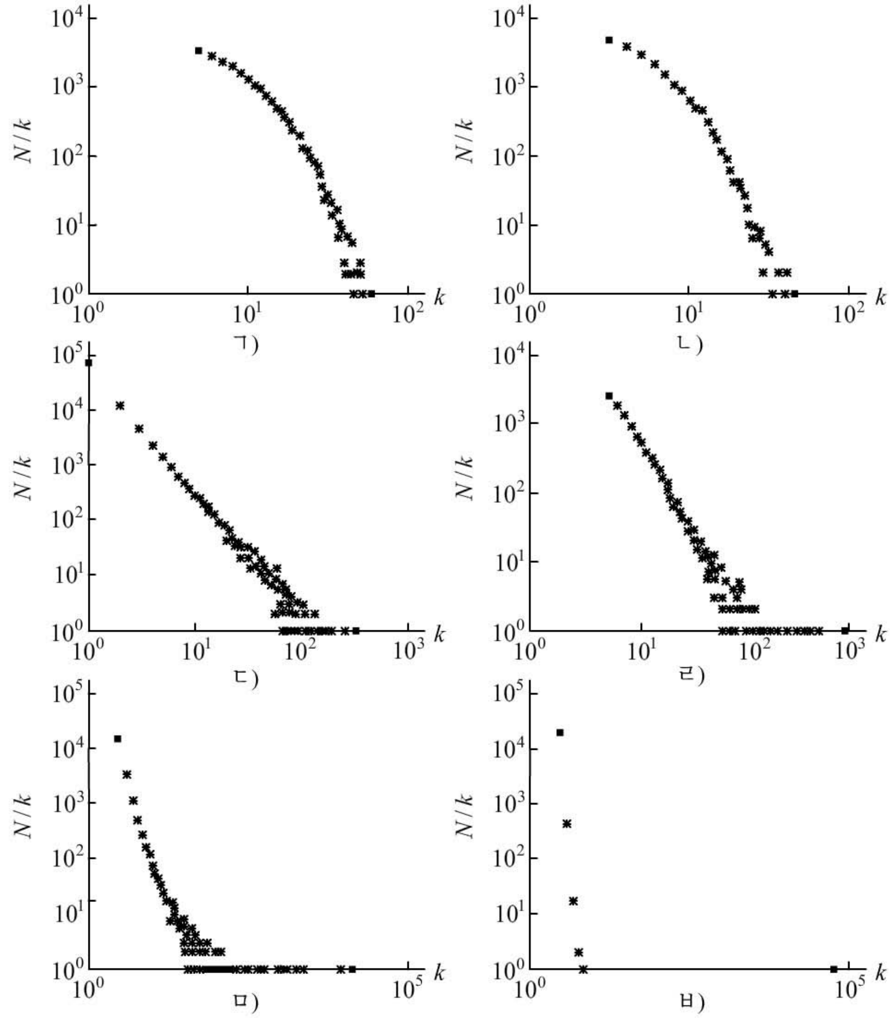

그림. 정리에 대한 직관적고찰

그림에서 ㄱ), ㄴ)는 $f(k) \in O((\log k)^c)$ $(c \le 1)$ 일 때 생성된 그라프에서 제곱법칙이 성립하지 않는다는것을 보여주고있으며 ㄷ), ㄹ), ㅁ), ㅂ)는 $f(k) \in \Omega((\log k)^c)$ $(c \le 1)$ 이 제곱법칙이 성립하기 위한 필요조건으로는 되지만 충분조건으로는 되지 못한다는것을 보여주고있다.

참 고 문 헌

[1] A. Barabasi et al.; Science, 286, 509, 1999.
[2] C. Cooper et al.; Random Structures and Algorithms, 22, 311, 2003.
[3] S. N. Dorogovstev et al.; Phys. Rev. Lett., 85, 4633, 2000.
[4] P. L. Krapivsky et al.; Phys. Rev. Lett., 85, 629. 2000.

주체103(2014)년 3월 5일 원고접수

A Necessary Condition for Power-Law in the Preferential Attachment Model

Jo Hyon Ung, Kim Chol Un

Since Barabasi-Albert model[1] had been proposed, modeling of real-world networks which follows a power-law has been widely studied in many fields.

We study a necessary condition which holds power-law true for a preferential attachment model that is the main kind of modeling and confirm our results more intuitively through the numerical simulation on it.

Key words: power-law, preferential attachment model