김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제2호

속심의 구부림억세기를 고려한 겹재료판의 변위해석

김철혁, 송성관

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《이미 일정한 토대가 있고 전망이 확고한 연구대상들에 힘을 넣어 세계패권을 쥐며 그 성과를 확대하는 방법으로 과학기술을 빨리 발전시켜야 합니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 39페지)

우리는 현시기 기계 및 건설부문에서 널리 리용되고있는 겹재료판의 변위해석에 대하여 연구하였다.

선행연구[1]에서는 겹재료판에 면내힘이 작용할 때 림계짐을 구하는 방법에 대하여 취급하였고 선행연구[2, 3]에서는 겹재료판에 면외힘이 작용할 때 구부림해석을 진행하였으나 속심의 구부림억세기를 무시하고 자름억세기만을 고려하였다.

론문에서는 속심의 자름억세기와 함께 구부림억세기를 고려하여 겹재료판의 변위를 구하는 방법에 대하여 연구하였다.

1. 기본관계식

아래우에 두께가 얇은 섬유강화다층복합판이 있고 가운데에 비교적 두꺼운 속심이 들어있는 겹재료판을 고찰하자. 아래판과 웃판을 이루는 매개 단층판은 직교이방성재료이고 속심은 가벼운 거품수지로 된 탄성재료이다.

판의 웃면에는 수직으로 분포힘 P가 작용한다.

판의 중간면에 x, y축을, 두께방향으로 z축을 택하자.

겹재료판에서는 변형전에 중간면에 수직인 직선이 변형후에도 수직이 된다는 가정이 성립되지 않는다.[3]

이때 기하학적관계식은 다음과 같다.

$$u = u_0 - z\chi_{xz},\ \ v = v_0 - z\chi_{yz} \tag{1}$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} = \chi_{xz} + \gamma_{xz} \tag{2}$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial y} = \chi_{yz} + \gamma_{yz} \tag{3}$$

여기서 $u_0,\ v_0,\ w_0$은 각각 중간면우에 있는 점의 x, y, z방향의 변위성분이고 $u,\ v$는 각각 중간면으로부터 z만 한 거리에 있는 점의 $x,\ y$방향의 변위성분이다. 그리고 $\chi_{xz},\ \chi_{yz}$는 법선의 회전각이며 $\gamma_{xz},\ \gamma_{yz}$는 각변형이다.

이때 다음의 관계식이 성립한다.

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x},\ \ \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y},\ \ \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \tag{4}$$

$$k_x = -\frac{\partial \chi_{xz}}{\partial x},\ k_y = -\frac{\partial \chi_{yz}}{\partial y},\ k_{xy} = -\frac{\partial \chi_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \chi_{yz}}{\partial x} \tag{5}$$

상태방정식은 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} = [A] \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = [D] \begin{pmatrix} k_x^0 \\ k_y^0 \\ k_{xy}^0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} \\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} \tag{8}$$

여기서 N_x, N_y 는 각각 x, y 방향의 단위길이당 법선속힘이고 N_{xy} 는 x, y 면에서의 단위길이당 접선속힘이다. 또한 A, D 는 각각 당김억세기, 구부림억세기이고 M_x, M_y 는 각각 x, y 축에 수직인 면에 작용하는 단위길이당 구부림모멘트, M_{xy} 는 x, y 면에서의 단위길이당 틀음모멘트이며 V_x, V_y 는 각각 x, y 축에 수직인 면에 작용하는 단위길이당 자르는 힘, $\bar{S}_{11}$, $\bar{S}_{12}$, $\bar{S}_{22}$ 는 자름억세기이다.

겹재료판의 변형에네르기를 U, 외력이 수행한 일을 K 라고 하면[3]

$$\begin{aligned} U = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b \Bigg[& \left(\frac{\partial \chi_{xz}}{\partial x}\right)^2 D_{11} + \left(\frac{\partial \chi_{yz}}{\partial y}\right)^2 D_{22} + 2\frac{\partial \chi_{xz}}{\partial x}\frac{\partial \chi_{yz}}{\partial y} D_{12} + \\ & + \left(\frac{\partial \chi_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \chi_{yz}}{\partial y}\right)^2 D_{66} + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} - \chi_{xz}\right)^2 \bar{S}_{11} + \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} - \chi_{yz}\right)^2 \bar{S}_{22} \Bigg] dydx \end{aligned} \tag{9}$$

$$K = \int_0^a\int_0^b P w_0 dxdy \tag{10}$$

이다. 여기서 a, b 는 각각 판의 x, y 방향의 변의 길이이고 D_{11}, D_{12}, D_{22}, D_{66} 은 구부림억세기이다.

2. 풀 이 방 법

겹재료판의 네 경계가 단순지지되였다고 하자.

이때 경계조건은 다음과 같다.

$$\left.\begin{aligned} x = 0,\ a: w_0 = 0,\ \ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,\ \ \chi_{yz} = 0 \\ y = 0,\ b: w_0 = 0,\ \ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,\ \ \chi_{xz} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

구하려는 w_0, χ_{xz}, χ_{yz} 를 다음과 같은 형태로 표시한다.

$$\left.\begin{aligned} w_0 &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \\ \chi_{xz} &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} (\chi_{xz})_{mn} \cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \\ \chi_{yz} &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} (\chi_{yz})_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

이제 완전에네르기최소정리

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial(U-K)}{\partial w_{mn}} &= 0 \\ \frac{\partial(U-K)}{\partial(\chi_{xz})_{mn}} &= 0 \\ \frac{\partial(U-K)}{\partial(\chi_{yz})_{mn}} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

을 리용하여 풀이를 구하겠다.

방정식 (13)에 식 (9), (10)을 대입하고 풀면 w_{mn}, $(\chi_{xz})_{mn}$, $(\chi_{yz})_{mn}$이 구해진다.

3. 계 산 실 례

아래판과 웃판은 유리/에폭시재료로 되여있는데 그것의 력학적특성값은 다음과 같다.

$$E_1 = 35\text{GPa},\ E_2 = 8\text{GPa},\ \upsilon_{12} = 0.26,\ G_{12} = 4\text{GPa}$$

다층판의 배렬방법은 $[0,\ 90]_s$이고 $P = 0.1\text{MPa}$이다.

속심은 폴리에스테르수지로 되여있는데 그것의 력학적특성값은

$$E = 3\text{GPa},\ \upsilon = 0.3,\ G = 1.11\text{GPa}$$

이다. 겹재료판의 전체 두께는 0.06m, 속심두께는 0.04m, 매개 단층판의 두께는 0.005m, 판의 변의 길이 $a = 2\text{m},\ b = 1\text{m}$이다.

겹재료판의 환산억세기, 구부림억세기를 구하고 그것을 식 (9), (10)에 대입하여 얻어진 결과를 방정식 (13)에 대입한다. 그러면 w_{mn}, $(\chi_{xz})_{mn}$, $(\chi_{yz})_{mn}$이 결정된다. 즉

$m = n = 1$인 경우에 $w_{11} = 1.214\times10^{-3}$이고 $m = 3,\ n = 3$인 경우에 $w_{33} = 7.350\ 8\times10^{-5}$이 얻어지며 $m,\ n$을 증가시켰을 때 급격히 수렴하는 합렬이라는것을 알수 있다. 그러므로 $m = n = 1$인 경우에로 귀착시켜도 상대적오차는 0.1% 미만이라는것을 알수 있다.

속심의 구부림억세기를 무시하면 $w_{11} = 1.457\times10^{-3}$이 된다.

이와 같이 속심의 구부림억세기를 고려하면 처짐이 약 16.6% 감소한다.

맺 는 말

완전에네르기최소정리에 의하여 겹재료판의 구부림변위를 구하였다.

계산결과가 보여주는바와 같이 속심의 구부림억세기를 고려하면 겹재료판의 변위가 작아진다는것을 알수 있다.

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보(자연과학), 61, 1, 19, 주체104(2015).

[2] **김일성**종합대학학보 수학, 64, 2, 105, 주체107(2018).

[3] A. Boudjemai; Engineering and Technology, 222, 2012.

주체107(2018)년 12월 5일 원고접수

Displacement Analysis of Sandwich Composite Laminates Considering the Bending Stiffness of Core

Kim Chol Hyok, Song Song Gwan

We study the displacement of sandwich composite laminates considering the bending stiffness of core. We obtain the displacement equation of sandwich composite laminates and propose an analysis method on displacement.

Key words: sandwich laminate, displacement, composite material