김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제1호

평면띠염동력학계에서 두변수에 관한 편도함수를 리용한 부동점곡선의 고유값동태연구

김상문, 김학성

선행연구[5]에서는 파라메터가 없는 미분방정식에서 고유값변화를 리용하여 안정성교체분지, 호프분지가 일어나기 위한 충분조건을 처음으로 연구하였다. 선행연구[6]에서는 그 연구결과를 확대시켜 련속동력학계의 분지형거동에 대하여 종합적으로 서술하였다. 선행연구[1, 2]에서는 두변수에 관한 1계 및 2계편도함수조건을 리용하여 련속동력학계의 부동점곡선의 고유값변화동태를 연구하였다. 선행연구[4]에서는 한변수에 관한 고계편도함수조건을 리용하여 련속동력학계의 부동점곡선의 고유값변화동태를 연구하였다. 선행연구[3]에서는 한변수에 관한 1계 또는 2계편도함수가 령이 아니라는 조건밑에서 다른 변수에 관한 고계편도함수조건을 리용하여 띠염동력학계의 부동점곡선의 고유값변화동태를 연구하였다. 이 론문에서는 선행연구[3]와는 다른 조건들과 두변수에 관한 고계 및 혼성편도함수를 리용하여 띠염동력학계의 부동점곡선의 고유값변화동태를 연구하였다.

기 본 결 과

중심다양체우로 제한한 띠염동력학계

$$x \mapsto f(x) \tag{1}$$

를 고찰한다. 여기서 $x=(y,\ z)\in \mathbf{R}^2,\ f\in C^2(\mathbf{R}^2,\ \mathbf{R}^2),\ f=(f_0^1,\ f_0^2)$이다. 즉

$$\begin{cases}(y,\ z)\mapsto f_0^1(y,\ z)=f^1(y,\ z)+y\\(y,\ z)\mapsto f_0^2(y,\ z)=f^2(y,\ z)+z\end{cases}$$

이다. 이제 f가 다음과 같이 표시되였다고 하자.

$$\begin{cases}f^1(y,\ z)=F^1(y,\ z)\cdot g(y,\ z)\\f^2(y,\ z)=F^2(y,\ z)\cdot g(y,\ z)\end{cases}$$

보조정리 1 [4] $C^r\ (r\ge 2n,\ \ r\ge 2m)$급함수 $g:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^1$이 있어서 다음의 조건을 만족시킨다고 하자.(여기서 $n, m>1,\ \ n, m\in\mathbf{N}$이다.)

① $g(0,\ 0)=0$ ② $g_y(0,\ \ 0)=g_{y^2}(0,\ \ 0)=\cdots=g_{y^{2n-1}}(0,\ \ 0)=0$

③ $g_z(0,\ \ 0)=g_{z^2}(0,\ \ 0)=\cdots=g_{z^{2m-2}}(0,\ \ 0)=0$ ④ $g_{y^{2n}}(0,\ \ 0)\cdot g_{zy}(0,\ 0)<0$

이때 정수 $\delta>0$, $\varepsilon>0$과 유일한 함수 $p:(-\varepsilon,\ \varepsilon)\to(-\delta,\ \delta)$가 있어서 다음의 사실이 성립한다.

① $g(y,\ \ p(y))=0$, $y\in(-\varepsilon,\ \ \varepsilon)$ ② $p(0)=0$

③ $p'(0)=\cdots=p^{(2n-2)}(0)=0$ ④ $p^{(2n-1)}(0)>0$

정리 1 $g:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^1$ 이 보조정리 1의 조건을 만족시키고 C^r 급함수($r\ge 1$) $F^1,\ F^2:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^1$ 이 다음의 조건을 만족시킨다고 하자.

① $F^1(y,\ 0)=0,\ F^2(y,\ 0)=0$ ② $F_z^2(0,\ 0)=0$ ③ $F_{zy}^2(0,\ 0)\ne 0$ ④ $F_y^1(y,\ 0)=0$

그러면 정수 $\varepsilon>0$ 과 식 (1)의 2개의 부동점곡선 $(y, 0)$ 및 $(y,\ p(y)),\ y\in(-\varepsilon,\ \varepsilon)$ 이 존재하여 한 고유값은 $\sigma=+1$ 일 때 $y\in(-\varepsilon,\ 0)$ 이면 $(y, 0)$ 에서 1보다 작고 $(y,\ p(y))$ 에서 1보다 크며 $y\in(0,\ \varepsilon)$ 이면 $(y, 0)$ 에서 1보다 크고 $(y,\ p(y))$ 에서 1보다 작다. 또한 그것은 $\sigma=-1$ 일 때 $y\in(-\varepsilon,\ 0)$ 이면 $(y, 0)$ 에서 1보다 크고 $(y,\ p(y))$ 에서 1보다 작으며 $y\in(0,\ \varepsilon)$ 이면 $(y, 0)$ 에서 1보다 작고 $(y,\ p(y))$ 에서 1보다 크다. 다른 고유값은 항상 1이다. 여기서 $\sigma:=\operatorname{sign}[F_{zy}^2(0, 0)\cdot g_{y^{2n}}(0, 0)]$ 이다.

보조정리 2 C^r 급함수 $g:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^1$ 이 있어서 다음의 조건을 만족시킨다고 하자.

① $g(0,\ 0)=0$ ② $g_z(0,\ 0)=g_{z^2}(0,\ 0)=\cdots=g_{z^{2n}}(0,\ 0)=0$

③ $g_y(0,\ 0)=g_{y^2}(0,\ 0)=\cdots=g_{y^{2m-2}}(0,\ 0)=0$ ④ $g_{y^{2m-1}}(0,\ 0)\ne 0$

⑤ $g_{z^{2n+1}}(0,\ 0)\cdot g_{yz}(0,\ 00)<0$

여기서 $r\ge 2n$, $r\ge 2m-1$, $m>1$ 이다.

이때 정수 $\delta>0$, $\varepsilon>0$ 과 함수 $h:(-\delta,\ \delta)\to(-\varepsilon,\ \varepsilon)$ 이 있어서 다음의 사실이 성립한다.

① $g(h(z),\ z)=0$, $z\in(-\delta,\ \delta)$ ② $h(0)=0$

③ $h'(0)=\cdots=h^{(2n-1)}(0)=0$ ④ $h^{(2n)}(0)>0$

정리 2 $g:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^1$ 이 보조정리 2의 조건을 만족시키고 C^r 급넘기기 $F^1,\ F^2:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^1$ 이 다음의 조건을 만족시킨다고 하자.

① $F^1(0,\ 0)=0,\ F^2(0,\ 0)=0$

② $F_z^1(0,\ 0)=\cdots=F_{z^{2n-1}}^1(0,\ 0)=F_{z^{2n}}^1(0,\ 0)=0$

③ $F_z^2(0,\ 0)\ne 0$, $F_y^1(0,\ 0)=0$

이때 정수 $\delta>0$ 과 식 (1)의 부동점곡선 $(h(z),\ z),\ z\in(-\delta,\ \delta)$ 에 대하여 한 고유값은 $\sigma=-1$ 일 때 $(h(z),\ z)$ 에서 $z\in(0,\ \delta)$ 이면 1보다 작고 $z\in(-\delta,\ 0)$ 이면 1보다 크다. 또한 그것은 $\sigma=1$ 일 때 $(h(z),\ z)$ 에서 $z\in(0,\ \delta)$ 이면 1보다 크고 $z\in(-\delta,\ 0)$ 이면 1보다 작다. 다른 고유값은 항상 1이다. 여기서 $\sigma:=\operatorname{sign}[F_z^2(0,\ 0)\cdot g_{z^{2n+1}}(0,\ 0)]$ 이다.

보조정리 3 함수 $g(y,\ z):\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^1,\ g\in C^r(\mathbf{R}^2)$ $(r\ge 2n>2m-1)$ 이 다음의 조건을 만족시킨다고 하자.

① $g(0,\ 0)=0$

② $g_z(0,\ 0)=g_{z^2}(0,\ 0)=\cdots=g_{z^{2n-1}}(0,\ 0)=0$

③ $g_y(0,\ 0)=g_{y^2}(0,\ 0)=\cdots=g_{y^{2m-2}}(0,\ 0)=0$

④ $g_{z^{2n}}(0,\ 0)\cdot g_{y^{2m-1}}(0,\ 0)<0$

이때 $\exists\delta>0$, $\exists\varepsilon>0$, $\exists! h:(-\delta,\ \delta)\to(-\varepsilon,\ \varepsilon)$;

① $g(h(z),\ z)=0$

② $h(0)=0$

③ $h'(0)=h''(0)=\cdots=h^{(2n-1)}(0)=0$

④ $h^{(2n)}(0)>0$

이 성립한다.

정리 3 함수 g가 보조정리 3의 조건을 만족시키고 F^l, $l=1, 2$가 조건

① $F^l(y, 0)=0$, $l=1, 2$

② $F_z^l(0, 0)=F_{z^2}^l(0, 0)=\cdots=F_{z^{2n-1}}^l(0, 0)=0$, $l=1, 2$

③ $F_y^l(0, 0)=F_{y^2}^l(0, 0)=\cdots=F_{y^{2m-2}}^l(0, 0)=0$, $l=1, 2$

④ $F_{z^{2n}}^2(0, 0)\neq 0$ ⑤ $F_z^2(y, 0)\neq 0$ ⑥ $F_y^1(y, 0)=0$

을 만족시키면 정수 $\delta>0$과 평형점곡선 $(y, 0)$, $(y(z), z)$ $z\in(-\delta, \delta)$가 존재하여 한 고유값은 $\sigma:=\mathrm{sign}[F_{z^{2n}}^2(0, 0)\cdot g_{y^{2m-1}}(0, 0)]$이 1일 때 평형점곡선 $z=0$우에서 $y\in(-\varepsilon, 0)$이면 1보다 작고 $y\in(0, \varepsilon)$이면 1보다 크며 평형점곡선 $y=y(z)$우에서는 1보다 작다. 다른 고유값은 항상 1이다. $\sigma=-1$일 때는 각각 반대로 된다.

참 고 문 헌

[1] 김일성종합대학학보(자연과학), 60, 1, 18, 주체103(2014).

[2] 김일성종합대학학보(자연과학), 63, 2, 12, 주체106(2017).

[3] 김상문 등 조선민주주의인민공화국 과학원통보, 1, 6, 주체107(2018).

[4] 김상문 등 조선민주주의인민공화국 과학원통보, 6, 8, 주체103(2014).

[5] B Fiedler et a1.; ICM, 3, 305, 2002.

[6] S. Liebscher; Bifurcation Without Parameters, 27~48, Springer, 2015.

주체107(2018)년 9월 8일 원고접수

Study on Behaviors of the Eigenvalues of the Curves of Fixed Points in Plane-Discrete Dynamical Systems using Partial Derivatives with respect to Two Variables

Kim Sang Mun, Kim Hak Song

We study behaviors of change of the eigenvalues of the curves of fixed points in some discrete dynamical systems in plane using the conditions on partial derivatives with respect to two variables.

Key words: discrete dynamical system, eigenvalue, partial derivative