김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제2호

비가환반환우의 반모듈의 씨스펙트르

배원석, 한성철

환과 분배속을 둘 다 일반화한 대수계인 반환은 분배법칙에 의해 련결되는 더하기와 곱하기라는 두 2원산법을 가지고있지만 환이 아닌 반환에서는 덜기산법이 허용되지 않으므로 환론의 많은 결과들이 반환에로 그대로 확장되지 않는다.

선행연구[1, 3]에서는 가환환우의 모듈들에 대하여, 선행연구[4, 5]에서는 비가환환우의 모듈들에 대하여 씨부분모듈들전부의 모임우의 자리스끼위상이 연구되였다.

선행연구[2]에서는 가환반환우의 아주 강한 곱하기반모듈에 대하여 덜기씨부분반모듈들전부의 모임우의 자리스끼위상이 연구되였다.

론문에서는 비가환반환인 경우도 포괄하여 일반적인 반환우의 반모듈에 대하여 씨부분반모듈들전부의 모임에 자리스끼위상을 도입하고 분리성, 기약성, 콤팍트성과 같은 그것의 위상적성질들과 반모듈의 대수적성질들사이의 호상련관을 밝힌다.

R는 령원소 0과 단위원소 1을 가지는 $0\neq 1$인 임의의 반환이고 M은 $R-$반모듈이며 Λ는 임의의 비지 않은 첨수모임이라고 하자.

R의 어떤 참이데알 I가 있어서 임의의 $a, b\in I$에 대하여 $aRb\subseteq I$이면 $a\in I$ 또는 $b\in I$일 때 I를 R의 씨이데알이라고 부른다.

N이 M의 부분반모듈일 때 $N\leq M$으로 표시하고 $(N:M):=\{r\in R\,|\,rM\subseteq N\}$으로 놓으면 $(N:M)$은 R의 이데알이다. N이 M의 참부분반모듈일 때 $N<M$으로 표시한다.

M의 어떤 참부분반모듈 P가 있어서 임의의 $r\in R$, $m\in M$에 대하여 $rRm\subseteq P$이면 $m\in P$ 또는 $r\in(P:M)$일 때 P를 M의 씨부분반모듈이라고 부른다. 또한 M의 씨부분반모듈들전부의 모임을 $\mathrm{Spec}(M)$으로 표시하고 M의 씨스펙트르라고 부른다.

성질 1 $P\in\mathrm{Spec}(M)$이면 $(P:M)$은 R의 씨이데알이다.

M의 씨부분반모듈들의 사귐으로 표시되는 M의 부분반모듈을 M의 반씨부분반모듈이라고 부르며 $N\leq M$일 때 N을 포함하는 M의 씨부분반모듈들전부의 사귐을 N의 씨근기라고 부르고 $\sqrt{N}$으로 표시한다. N을 포함하는 M의 씨부분반모듈이 없는 경우에는 $\sqrt{N}:=M$으로 약속한다.

M의 씨부분반모듈 K가 있어서 만일 N과 L이 M의 반씨부분반모듈들이고 $N\cap L\subseteq K$이면 $N\subseteq K$이거나 $L\subseteq K$일 때 K를 M의 비상부분반모듈이라고 부른다.

론문에서는 $\mathrm{Spec}(M)\neq\varnothing$이라고 가정한다.

$\varnothing\neq S\subseteq M$일 때 $V(S):=\{P\in\mathrm{Spec}(M)\,|\,S\subseteq P\}$로 놓자.

보조정리 1 M이 반모듈일 때 다음의 사실들이 성립된다.

① $\varnothing\neq S\subseteq T\subseteq M$이면 $V(T)\subseteq V(S)$이다.

② 임의의 $\lambda\in\Lambda$에 대하여 $\varnothing\neq S_\lambda\subseteq M$이면 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}V(S_\lambda)=\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}S_\lambda\right)$이다.

③ $\varnothing \ne S \subseteq M$ 이면 $V(S)=V(\langle S\rangle)=V(\sqrt{\langle S\rangle})$ 이다.

④ S 와 T 가 M 의 비지 않은 부분모임들이면 $V(S)\bigcup V(T)\subseteq V(S\bigcap T)$ 이다.

⑤ $V(\{0_M\})=\mathrm{Spec}(M)$, $V(M)=\varnothing$

⑥ 임의의 $\lambda\in\Lambda$ 에 대하여 $N_\lambda \le M$ 이면 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(N_\lambda)=V\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda\right)$ 이다.

정의 1 반모듈 M 의 임의의 부분반모듈 N 과 L 에 대하여 M 의 어떤 부분반모듈 T 가 있어서 $V(N)\bigcup V(L)=V(T)$ 일 때 M 을 top−반모듈 또는 위상반모듈이라고 부른다.

보조정리 2 M 이 반모듈일 때 다음의 조건들은 서로 동등하다.

① M 은 위상반모듈이다.

② M 의 임의의 반씨부분반모듈 N 과 L 에 대하여 $V(N)\bigcup V(L)=V(N\bigcap L)$ 이다.

③ M 의 매 씨부분반모듈은 비상부분반모듈이다.

증명 ①⇒② N 과 L 을 M 의 임의의 반씨부분반모듈들이라고 하자.

그러면 M 의 어떤 부분반모듈 U 가 있어서 $V(N)\bigcup V(L)=V(U)$ 이다.

이제 $N=\bigcap_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$ 이고 매 $\lambda\in\Lambda$ 에 대하여 $N_\lambda\in\mathrm{Spec}(M)$ 이라고 하자.

임의의 $\lambda\in\Lambda$ 에 대하여 $N_\lambda\in V(N)\subseteq V(U)$ 이므로 $U\subseteq N_\lambda$ 이고 따라서 $U\subseteq N$ 이다.

마찬가지로 $U\subseteq L$ 이므로 $U\subseteq N\bigcap L$ 이다.

보조정리 1의 ④로부터 $V(N)\bigcup V(L)\subseteq V(U)$ 이므로 $V(N)\bigcup V(L)=V(N\bigcap L)$ 이다.

②⇒① N 과 L 을 M 의 임의의 부분반모듈들이라고 하자.

그러면 보조정리 1의 ③에 의하여 $V(N)\bigcup V(L)=V(\sqrt{N})\bigcup V(\sqrt{L})$ 이다.

이제 등식 $V(\sqrt{N})\bigcup V(\sqrt{L})=V(\sqrt{N}\bigcap\sqrt{L})$ 이 성립된다는것을 보여주자.

$\sqrt{N}$ 과 $\sqrt{L}$ 이 둘 다 M 의 반씨부분반모듈들인 경우에는 조건으로부터 분명하다.

$\sqrt{N}$ 또는 $\sqrt{L}$ 이 반씨부분반모듈이 아닌 경우에는 $\sqrt{N}=M$ 또는 $\sqrt{L}=M$ 이다. 가령 $\sqrt{N}=M$ 이면 $V(\sqrt{N})=\varnothing$, $\sqrt{N}\bigcap\sqrt{L}=\sqrt{L}$ 이며 $V(\sqrt{N})\bigcup V(\sqrt{L})=V(\sqrt{L})=V(\sqrt{N}\bigcap\sqrt{L})$ 이 성립된다.

②⇔③ 분명하다.(증명끝)

정의 2 M 이 위상반모듈일 때 $\mathrm{Spec}(M)$ 의 부분모임족 $\{V(S)\,|\,\varnothing\ne S\subseteq M\}$ 이 닫긴모임에 관한 위상공리들을 만족시키는데 이렇게 도입된 위상을 $\mathrm{Spec}(M)$ 우의 자리스끼위상이라고 부른다.

$\mathrm{Spec}(M)$ 의 열린모임 $\mathrm{Spec}(M)\setminus V(S)$ 를 $D(S)$ 로 표시하면 $D(S)=\{P\in\mathrm{Spec}(M)\,|\,S\not\subseteq P\}$ 이다.

매 점 $m\in M$ 에 대하여 $V(m):=V(Rm)$, $D(m):=D(Rm)$ 으로 놓자.

$D(m)$ 을 $\mathrm{Spec}(M)$ 의 기초열린모임이라고 부른다.

보조정리 3 M 이 위상반모듈이면 $\{D(m)\,|\,m\in M\}$ 은 $\mathrm{Spec}(M)$ 의 토대로 된다.

증명 $D(S)$ 를 $\mathrm{Spec}(M)$ 의 열린모임이라고 하자.

보조정리 1의 ②에 의하여 $V(S)=V(\{m\,|\,m\in S\})=\bigcap_{m\in S} V(m)$ 이다.

따라서 $D(S)=\mathrm{Spec}(M)\setminus V(S)=\bigcup_{m\in S}(\mathrm{Spec}(M)\setminus V(m))=\bigcup_{m\in S} D(m)$ 이다.(증명끝)

R – 반모듈 M 은 $N \le M$ 이면 R 의 어떤 이데알 I 가 있어서 $N = IM$ 일 때 곱하기반모듈이라고 부른다. 그러면 $N = (N : M)M$ 이다.

사실 $N = IM \subseteq (IM : M)M = (N : M)M \subseteq N$ 이다.

성질 2 곱하기반모듈은 위상반모듈이다.

정리 1 M 이 위상반모듈이면 $\mathrm{Spec}(M)$ 은 T_0 – 공간이다.

증명 P_1, $P_2 \in \mathrm{Spec}(M)$ 이고 $P_1 \ne P_2$ 라고 하자.

일반성을 잃지 않고 $P_2 \setminus P_1 \ne \varnothing$ 이라고 하면 어떤 $m \in M$ 이 있어서 $m \in P_2$ 이고 $m \notin P_1$ 이다. 따라서 $P_1 \in D(m)$ 이고 $P_2 \notin D(m)$ 이다.(증명끝)

$\varnothing \ne Y \subseteq \mathrm{Spec}(M)$ 일 때 Y 에 속하는 씨부분반모듈들전부의 사귐을 $\tau(Y)$ 로 표시하자.

보조정리 4 M 이 위상반모듈이고 $\varnothing \ne Y \subseteq \mathrm{Spec}(M)$ 이면 다음의 사실들이 성립된다.

① $Y \subseteq V(\tau(Y))$

② $\overline{Y} = V(\tau(Y))$

정리 2 M 이 위상반모듈일 때 $\mathrm{Spec}(M)$ 이 T_1 – 공간이기 위해서는 M 에서 매 씨부분반모듈이 다른 씨부분반모듈에 포함되지 않을것이 필요하고 충분하다.

증명(필요성) $\mathrm{Spec}(M)$ 이 T_1 – 공간이면 임의의 $P \in \mathrm{Spec}(M)$ 에 대하여 $\{P\} = \overline{\{P\}}$ 이다. 보조정리 4의 ②에 의하여 $\overline{\{P\}} = V(\tau(\{P\})) = V(P)$ 이므로 $\{P\} = V(P)$ 이고 따라서 M 에서 P 를 포함하는 씨부분반모듈은 P 뿐이다.

(충분성) 임의의 $P \in \mathrm{Spec}(M)$ 에 대하여 P 를 포함하는 씨부분반모듈이 P 뿐이면 보조정리 4의 ②로부터 $\overline{\{P\}} = V(\tau(\{P\})) = V(P) = \{P\}$ 이므로 $\{P\}$ 는 닫긴모임이다.

따라서 $\mathrm{Spec}(M)$ 은 T_1 – 공간이다.(증명끝)

비지 않은 위상공간 X 에서 임의의 두 비지 않은 열린모임들의 사귐이 늘 비지 않을 때 X 를 기약공간이라고 부른다.

X 의 부분모임 Y 가 부분공간으로서 기약공간일 때 Y 를 기약모임이라고 부른다.

X 의 부분모임 Y 가 기약모임이기 위해서는 X 의 임의의 닫긴모임 Y_1 과 Y_2 에 대하여 $Y \subseteq Y_1 \cup Y_2$ 이면 $Y \subseteq Y_1$ 또는 $Y \subseteq Y_2$ 일것이 필요하고 충분하다.

정리 3 M 이 위상반모듈이고 $\varnothing \ne Y \subseteq \mathrm{Spec}(M)$ 일 때 Y 가 기약모임이기 위해서는 $\tau(Y)$ 가 M 의 씨부분반모듈일것이 필요하고 충분하다.

증명 (필요성) 분명히 $\tau(Y)$ 는 M 의 참부분반모듈이다.

이제 $r \in R$, $m \in M$, $rRm \subseteq \tau(Y)$ 라고 하자.

그러면 임의의 $P \in Y$ 에 대하여 $rRm \subseteq P$ 이고 $P \in \mathrm{Spec}(M)$ 이므로 $m \in P$ 이거나 $rM \subseteq P$ 이다. 따라서 $Y \subseteq V(m) \cup V(rM)$ 이다. Y 가 기약모임이므로 $Y \subseteq V(m)$ 이거나 $Y \subseteq V(rM)$ 이며 이로부터 $rM \subseteq \tau(Y)$ 이거나 $m \in \tau(Y)$ 이다.

따라서 $\tau(Y) \in \mathrm{Spec}(M)$ 이다.

(충분성) $\tau(Y) < M$ 이므로 $Y \ne \varnothing$ 이다.

Y_1 과 Y_2 는 $\mathrm{Spec}(M)$ 속의 비지 않은 닫긴모임들이고 $Y \subseteq Y_1 \cup Y_2$ 라고 하자.

그러면 $\tau(Y) \supseteq \tau(Y_1) \cap \tau(Y_2)$ 이고 $\tau(Y) \in \mathrm{Spec}(M)$ 이므로 $\tau(Y) \in V(\tau(Y_1) \cap \tau(Y_2))$ 이다. M 이 위상반모듈이고 $\tau(Y_1)$ 과 $\tau(Y_2)$ 가 M 의 반씨부분반모듈들이므로 보조정리 2에 의하여 $V(\tau(Y_1) \cap \tau(Y_2)) = V(\tau(Y_1)) \cup V(\tau(Y_2))$ 이고 따라서 $\tau(Y) \in V(\tau(Y_1))$ 이거나 $\tau(Y) \in V(\tau(Y_2))$ 이다.

$\tau(Y)\in V(\tau(Y_1))$ 인 경우 $\tau(Y)\supseteq\tau(Y_1)$ 이므로 보조정리 4의 ②에 의하여 다음식이 성립된다.

$$Y\subseteq\overline{Y}=V(\tau(Y))\subseteq V(\tau(Y_1))=\overline{Y_1}=Y_1$$

마찬가지로 $\tau(Y)\in V(\tau(Y_2))$ 인 경우 $Y\subseteq Y_2$ 이다. 따라서 Y 는 기약모임이다.(증명끝)

위상공간 X 의 닫긴모임 Y 에 대하여 $Y=\overline{\{y\}}$ 인 y 가 X 에 존재하면 이 y 를 Y 의 일반점이라고 부른다.

정리 4 M 이 위상반모듈이고 $N\le M$ 일 때 다음의 조건들은 서로 동등하다.

① $V(N)$ 은 기약모임이다.

② $\sqrt{N}$ 은 M 의 씨부분반모듈이다.

③ $\sqrt{N}$ 은 $V(N)$ 의 일반점이다.

증명 ①과 ②의 동등성은 정리 3으로부터 곧 나온다.

②⇒③ $\sqrt{N}\in\mathrm{Spec}(M)$ 이므로 보조정리 4의 ②와 보조정리 1의 ③으로부터

$$\overline{\{\sqrt{N}\}}=V(\tau(\{\sqrt{N}\}))=V(\sqrt{N})=V(N)$$

이다.

③⇒② 일반점의 정의로부터 곧 $\sqrt{N}\in\mathrm{Spec}(M)$ 이다.(증명끝)

따름 M 이 위상반모듈이면 $\mathrm{Spec}(M)$ 의 임의의 기약닫긴모임은 일반점을 가진다.

보조정리 5 M 을 령이 아닌 유한생성반모듈이라고 하자.

만일 $N<M$ 이면 N 을 포함하는 M 의 극대부분반모듈이 존재한다. 따라서 M 은 극대부분반모듈을 가진다.

증명 $M=\langle a_1,\cdots,a_n\rangle$ 이라고 하자. N 을 포함하는 M 의 참부분반모듈들전부의 모임을 Ω 라고 하자. 그러면 $N\in\Omega$ 이므로 Ω 는 비지 않으며 포함관계에 관하여 반순서모임으로 된다.

Ω 에서 임의의 사슬 $\{B_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ 를 생각하자.

$C:=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$ 로 놓으면 분명히 $C\le M$ 이다.

이제 $C<M$ 이라는것을 보여주자.

만일 $C=M$ 이면 $\{a_1,\cdots,a_n\}\subseteq C$ 이므로 어떤 $\lambda\in\Lambda$ 가 있어서 $\{a_1,\cdots,a_n\}\subseteq B_\lambda$ 이고 $M\subseteq B_\lambda$ 이다. 이것은 $B_\lambda<M$ 과 모순된다.

따라서 C 는 Ω 에 속하고 사슬 $\{B_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ 의 상계이다.

그러므로 쪼른의 보조정리에 의하여 Ω 는 극대원소 K 를 가지며 K 는 분명히 N 을 포함하는 M 의 극대부분반모듈이다.(증명끝)

성질 3 M 의 극대부분반모듈 K 는 씨부분반모듈이다.

증명 임의의 $r\in R$ 와 임의의 $m\in M$ 에 대하여 $rRm\subseteq K$ 라고 할 때 $m\notin K$ 이면

$$rM=r(K+Rm)=rK+rRm\subseteq K$$

이다. 따라서 $K\in\mathrm{Spec}(M)$ 이다.(증명끝)

보조정리 6 $M=\sum_{\lambda\in\Lambda}Rf_\lambda$ 라고 할 때 M 이 유한생성반모듈이면 어떤 유한개의 $\lambda_1,\cdots,\lambda_t\in\Lambda$ 가 있어서 $M=\sum_{1\le i\le t}Rf_{\lambda_i}$ 가 성립된다.

정리 5 M 이 유한생성 위상반모듈이면 $\mathrm{Spec}(M)$ 은 콤팍트공간이다.

증명 $\mathrm{Spec}(M)\neq\varnothing$ 이므로 $M\neq\{0\}$ 이다.

보조정리 3으로부터 기초열린모임들로 이루어진 $\mathrm{Spec}(M)$의 임의의 피복이 유한부분피복을 가진다는것을 보여주면 충분하다.

$\mathrm{Spec}(M)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}D(f_\lambda)$라고 하면 보조정리 1의 ⑥에 의하여 다음과 같다.

$$\varnothing=\mathrm{Spec}(M)\Big/\bigcup_{\lambda\in\Lambda}D(f_\lambda)=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}V(Rf_\lambda)=V\left(\sum_{\lambda\in\Lambda}Rf_\lambda\right)$$

이제 $M=\sum_{\lambda\in\Lambda}Rf_\lambda$ 라는것을 보여주자.

사실 $\sum_{\lambda\in\Lambda}Rf_\lambda<M$ 이면 보조정리 5에 의하여 그것을 포함하는 M의 극대부분반모듈 K가 존재하고 성질 3에 의하여 $K\in\mathrm{Spec}(M)$이므로 $V\left(\sum_{\lambda\in\Lambda}Rf_\lambda\right)\neq\varnothing$이다.

M이 유한생성반모듈이므로 보조정리 6으로부터 어떤 유한개의 $\lambda_1,\cdots,\lambda_t\in\Lambda$가 있어서 $M=\sum_{1\le i\le t}Rf_{\lambda_i}$ 이다.

그러면 보조정리 1의 ⑥에 의하여 $V\left(\sum_{1\le i\le t}Rf_{\lambda_i}\right)=V(M)=\varnothing$이고 다시 보조정리 1의 ⑤에 의하여 $\bigcup_{1\le i\le t}D(f_{\lambda_i})=\mathrm{Spec}(M)\Big/\bigcap_{1\le i\le t}V(Rf_{\lambda_i})=\mathrm{Spec}(M)\Big/V\left(\sum_{1\le i\le t}Rf_{\lambda_i}\right)=\mathrm{Spec}(M)$ 이다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] R. Ameri; Houston J. Math., 36, 2, 337, 2010.

[2] S. E. Atani et al.; Eur. J. Pure Appl. Math., 4, 3, 251, 2011.

[3] M. E. Moore et al.; Comm. Algebra, 25, 1, 79, 1997.

[4] G. Yesilot; Int. J. Algebra, 5, 11, 523, 2011.

[5] G. Zhang et al.; J. Nanjing Univ. Math. Biquarterly, 17, 1, 15, 2000.

주체107(2018)년 12월 5일 원고접수

Prime Spectrum of a Semimodule over a Non-commutative Semiring

Pae Won Sok, Han Song Chol

We introduce the Zariski topology on the set of all the prime subsemimodules for a semimodule over a non-commutative semiring, and study the interplay between the topological properties such as separation, irreducibility and compactness and the algebraic properties of the semimodule.

Key words: top semimodule, prime subsemimodule, Zariski topology