김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제2호

한 부류 콤팍트계와 그 초공간계의 위상적엔트로피사이의 관계

김 철 산

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《수학, 물리학, 화학, 생물학과 같은 기초과학부문에서 과학기술발전의 원리적, 방법론적기초를 다져나가면서 세계적인 연구성과들을 내놓아야 합니다.》

현시기 동력학계리론에서는 모호동력학계의 동력학적구조에 대한 연구[1－4]가 활발히 진행되고있다.

론문에서는 동력학계리론연구에서 기본문제로 되고있는 기초계와 그 초공간유도계의 위상적엔트로피사이의 관계에 대하여 연구하였다.

선행연구[3]에서는 위상이행적인 그라프계와 그 초공간유도계의 위상적엔트로피들이 서로 같다는것을 증명하였다.

선행연구[4]에서는 1차원구간계와 그 모호확장계의 위상적엔트로피들이 서로 같다는 것을 증명하였다.

선행연구[1]에서는 기초계와 그 유도계의 위상적엔트로피들이 서로 같지 않은 실례들을 주었다.

론문에서는 초공간의 새로운 분할에 의한 초공간유도계의 동력학적구조를 고찰하고 혼합정규주기분해를 가지는 기초계와 그 초공간유도계의 위상적엔트로피들이 서로 같다는것을 밝혔다.

1. 기 초 개 념

론문의 개념들과 정의들은 기본적으로 선행연구[3]에 따른다.

$(X,\ f)$가 거리 d를 가지는 콤팍트리산동력학계, f가 약열린넘기기라고 하자.[3]

X우의 초공간 즉 X의 콤팍트련결부분모임전부의 족을 $\mathbf{K}_c(X)$로 표시한다. 이때 이 공간우의 거리는 다음과 같이 정의되는 하우스돌프거리이다.[4]

$$DH_X(K,\ L)=\inf\{\varepsilon>0: K\subset N(L,\ \varepsilon),\ L\subset N(K,\ \varepsilon)\}$$

여기서 $K,\ L\in\mathbf{K}_c(X)$이고

$$d(x,\ K)=\inf\{d(x,\ y): y\in K\}$$

$$N(K,\ \varepsilon)=\{x\in K: d(x,\ K)<\varepsilon\}$$

이다.

$\bar{f}(K)=f(K)$로 정의되는 넘기기 $\bar{f}:\mathbf{K}_c(X)\to\mathbf{K}_c(X)$는 $(\mathbf{K}_c(X),\ DH_X)$에서 련속이며 이로부터 콤팍트리산동력학계(기초계) $(X,\ f)$로부터 초공간계(유도계) $(\mathbf{K}_c(X),\ \bar{f})$가 자연스럽게 유도된다.[3]

2. 초공간의 새로운 분할

먼저 초공간 $\mathbf{K}_c(X)$ 를 다음의 2개의 부분모임들로 분할한다.

$$\mathbf{K}_c^1(X)=\{K\in\mathbf{K}_c(X):K \text{ 는 한점모임이다.}\}$$

$$\mathbf{K}_c^2(X)=\{K\in\mathbf{K}_c(X):K \text{ 는 정규닫긴모임이다.}\}$$

분명히

$$\mathbf{K}_c(X)=\mathbf{K}_c^1(X)\bigcup\mathbf{K}_c^2(X)$$

이고

$$\mathbf{K}_c^1(X)\bigcap\mathbf{K}_c^2(X)=\varnothing$$

이다. 또한 기초계 $(X,\ f)$ 와 그 초공간유도계의 부분계 $(\mathbf{K}_c^1(X),\ \bar{f}\,|_{\mathbf{K}_c^1(X)})$ 가 위상공액이라는것은 명백하다.

3. 기초계와 그 초공간유도계의 위상적엔트로피와의 비교

혼합정규주기분해를 가지는 기초계와 그 초공간유도계의 위상적엔트로피들사이의 관계에 대하여 고찰한다.

명제 $(X,\ f)$ 가 콤팍트리산동력학계, f 가 혼합정규주기분해를 가지는 약열린넘기기라고 하자. 이때 기초계 $(X,\ f)$ 와 그 유도계의 부분계 $(\mathbf{K}_c^1(X),\ \bar{f}\,|_{\mathbf{K}_c^1(X)})$ 의 위상적엔트로피들은 서로 같다. 즉

$$h(f)=h(\bar{f}\,|_{\mathbf{K}_c^1(X)})$$

정리 $(X,\ f)$ 가 콤팍트리산동력학계, f 가 혼합정규주기분해를 가지는 약열린사상이라고 하자. 이때

$$h(f)=h(\bar{f})$$

이다.

증명 우의 명제와 $h(\bar{f}\,|_{\mathbf{K}^1{}_c(X)})\le h(\bar{f})$ 라는 사실로부터

$$h(f)\le h(\bar{f})$$

이라는것을 알수 있다.

Λ 를 $\mathbf{K}_c(X)$ 우의 보렐모임전부의 족우의 모든 에르고드측도들의 모임이라고 하자. 위상적엔트로피와 측도론적엔트로피사이의 관계를 보여주는 변동원리[4]에 의하여

$$h(\bar{f})=\sup_{\mu\in\Lambda}h_\mu(\bar{f})$$

이다. 여기서 $h_\mu(\bar{f})$ 는 $\bar{f}$ 의 에르고드측도 μ 에 관한 엔트로피이다.[4]

임의의 $\bar{f}$ − 불변측도 μ 에 대하여 유일한 $B\in\mathbf{K}_c(X)$ 가 있어서 $\omega(B,\ \bar{f})\ne\varnothing$ 이고 $\operatorname{supp}\mu\subset\omega(B,\ \bar{f})$ 이므로

$$h_\mu(\bar{f})\le h(\bar{f}\,|_{\omega(B,\ \bar{f})})$$

이다. 이제 $\omega(B,\ \bar{f})\neq\varnothing$ 으로 되는 임의의 $B\in\mathbf{K}_c(X)$ 에 대하여

$$h(\bar{f}\,|_{\omega(B,\ \bar{f})})\leq h(f)$$

라는것을 증명한다.

첫번째 경우 $B\in\mathbf{K}_c^1(X)$ 이고 $B=\{b\},\ b\in X$ 라고 하자. 분명히

$$\omega(B,\ \bar{f})=\omega(b,\ f)\subset X$$

이므로

$$h(\bar{f}\,|_{\omega(B,\ \bar{f})})=h(f\,|_{\omega(b,\ f)})\leq h(f)$$

이다.

두번째 경우 $B\in\mathbf{K}_c^2(X)$ 라고 하자. 이때 B 는 정규닫긴모임이다. 선행연구[3]의 결과에 의하여 $\omega(B,\ \bar{f})$ 는 $\mathbf{K}_c^2(X)$ 에서 유한모임이다.

이것은

$$h(\bar{f}\,|_{\omega(B,\ \bar{f})})=0\leq h(f)$$

임을 의미한다. 따라서

$$h(f)=h(\bar{f})$$

이고 이로부터 정리가 증명된다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] G. Acosta et al.; Topology Appl., 159, 1013, 2009.
[2] L. Alsedà et al.; J. Math. Anal. Appl., 232, 359, 1999.
[3] D. Kwietniak, P. Oprocha; Chaos Solitons and Fractals, 33, 76, 2007.
[4] J. S. Cánovas, J. Kupka; Fuzzy Sets Syst., 257, 132, 2014.

주체108(2019)년 12월 15일 원고접수

The Relationship between Topological Entropies of a Compact System and Its Hyperspace System

Kim Chol San

In this paper, using the new decomposition of the hyperspaces of compact metric spaces, we prove that topological entropies of a compact system and its hyperspace system are the same.

Keywords: discrete dynamical system, hyperspace discrete dynamical system, topological entropy