김일성종합대학학보 JOURNAL OF KIM IL SUNG UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체105(2016)년 제62권 제9호 Vol. 62 No. 9 JUCHE105(2016).

복소수계분수미분방정식의 풀이의 유일존재성

김 광 일

론문에서는 실수부가 자연수인 리만-류빌복소수계분수미분방정식의 초기값문제와 대응되는 제2종볼테라적분방정식의 동등성문제, 풀이의 유일성, 존재성문제를 실축의 유한구간에서 적분가능한 함수공간에서 론의하였다.

실축 $\boldsymbol{R}=(-\infty,\ \infty)$의 유한구간 $[a,\ b]$우에서 정의된 복소수 $\alpha(\in \boldsymbol{C},\ \mathrm{Re}\,\alpha>0)$계리만-류빌분수적분 $I_{a+}^{\alpha}y$와 분수도함수 $D_{a+}^{\alpha}y$를 다음과 같이 표시하자.

$$(I_{a+}^{\alpha}y)(x)\equiv\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$$

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x)\equiv(D^nI_{a+}^{n-\alpha}y)(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\int_a^x\frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\quad\left(n=[\mathrm{Re}\,\alpha]+1,\ x>a,\ D=\frac{d}{dx}\right)$$

여기서 $[\mathrm{Re}\,\alpha]$는 $\mathrm{Re}\,\alpha$의 옹근수부이다.

최근 분수계미분방정식의 리론과 응용에 대한 연구[1-4]가 많이 진행되였다.

실축 $\boldsymbol{R}=(-\infty,\ \infty)$의 유한구간 $[a,\ b]$우에서 α $(\mathrm{Re}\,\alpha>0)$계비선형분수미분방정식은

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x)=f[x,\ y(x)]\quad(\alpha\in\boldsymbol{C},\ \mathrm{Re}\,\alpha>0,\ x>a)\tag{1}$$

와 같은 형태를 가지며 초기조건은 다음과 같다.

$$(D_{a+}^{\alpha-k}y)(a+)=b_k,\ b_k\in\boldsymbol{C}\quad(k=1,\cdots,\ n)\tag{2}$$

표시 $(D_{a+}^{\alpha-k}y)(a+)$는 점 a의 오른쪽 근방 $(a,\ a+\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$의 모든 점에서 취한 극한을 의미한다. 즉

$$(D_{a+}^{\alpha-k}y)(a+)=\lim_{x\to a+}(D_{a+}^{\alpha-k}y)(x)\quad(1\le k\le n-1),$$

$$(D_{a+}^{\alpha-n}y)(a+)=\lim_{x\to a+}(I_{a+}^{n-\alpha}y)(x)\quad(\alpha\ne n),\quad(D_{a+}^{0}y)(a+)=y(a)\quad(\alpha=n).$$

문제 (1), (2)를 복소수계미분방정식의 초기값문제(코쉬형문제)라고 부른다.

론문에서는 문제 (1), (2)를 제2종비선형볼테라적분방정식

$$y(x)=\sum_{j=1}^n\frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{f[t,\ y(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\quad(x>a)\tag{3}$$

로 유도하여 론의한다.

실수부가 자연수인 복소수 $\alpha=m+i\theta$ $(m\in\boldsymbol{N},\ \theta\in\boldsymbol{R},\ \theta\ne0)$인 경우 즉 $n-1=\mathrm{Re}\,\alpha>0$, $\alpha\ne n-1,\ \alpha\in\boldsymbol{C}$인 경우에 초기값문제 (1), (2)는 다음과 같이 정의된다.

$$(D_{a+}^{m+i\theta}y)(x)=f[x,\ y(x)],\quad x>a\tag{4}$$

$$(D_{a+}^{m+i\theta-k}y)(a+)=b_k\in\boldsymbol{C}\quad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ m+1)\tag{5}$$

그리고 볼테라형적분방정식 (3)은 다음과 같이 정의된다.

$$y(x)=\sum_{j=1}^{m+1}\frac{b_j}{\Gamma(m+i\theta-j+1)}(x-a)^{m-j+i\theta}+\frac{1}{\Gamma(m+i\theta)}\int_a^x\frac{f[t,\ y(t)]dt}{(x-t)^{1-m-i\theta}}\ \ (x>a)\tag{6}$$

초기값문제 (4), (5)와 볼테라형적분방정식 (6)의 동등성문제 그리고 초기값문제 (4), (5)의 유일풀이문제는 열린문제이다.[1]

론문에서는 $n-1=\mathrm{Re}\alpha>0,\ \alpha\neq n-1,\ n=[\mathrm{Re}\alpha]+1$ 인 경우 방정식 (1)과 같은 형태의 비선형분수계미분방정식에 대한 초기값문제 (4), (5)의 풀이의 유일존재성문제를 연구한다.

복소수 $m+i\theta,\ m\in\boldsymbol{N},\ \boldsymbol{R}\ni\theta\neq0$ 에 대하여 $D_{a+}^{m+i\theta}y\in L(a,\ b)$ 인 함수 $y(x)\in L(a,\ b)$ 들의 공간을 $L^{m+i\theta}(a,\ b)$ 로 표시한다. 즉

$$L^{m+i\theta}(a,\ b)=\{y\in L(a,\ b):\ D_{a+}^{m+i\theta}y\in L(a,\ b)\}\,.\tag{7}$$

우리는 초기조건 (5)에서 조건 $y_{1-i\theta}(a+)=b_{m+1}$ 을 $y_{1-i\theta}(a+)=0$ 으로 바꾼 다음과 같이 변형된 초기조건을 론의한다.

$$(D_{a+}^{m+i\theta-k}y)(a+)=b_k,\ b_k\in\boldsymbol{C}\ \ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ m)\tag{8}$$

$$y_{1-i\theta}(a+)=0\tag{9}$$

여기서 $y_{1-i\theta}(a+):=(I_{a+}^{1-i\theta}y)(a+)=(D_{a+}^{i\theta-1}y)(a+)$ 이다.

이와 함께 식 (6)에서 $b_{m+1}=0$ 으로 놓을 때 얻어지는 다음의 적분방정식을 론의한다.

$$y(x)=\sum_{j=1}^{m}\frac{b_j}{\Gamma(m+i\theta-j+1)}(x-a)^{m-j+i\theta}+\frac{1}{\Gamma(m+i\theta)}\int_a^x\frac{f[t,\ y(t)]dt}{(x-t)^{1-m-i\theta}},\ \ x>a\tag{10}$$

먼저 초기값문제와 볼테라적분방정식의 동등성에 대하여 고찰하자.

보조정리[1] $\alpha\in\boldsymbol{C}$ $(\mathrm{Re}\alpha>0)$ 일 때 분수적분연산자 I_{a+}^{α} 는 $L(a,\ b)$ 에서 유계이다. 즉 $\|I_{a+}^{\alpha}g\|_{L(a,\ b)}\leq\dfrac{(b-a)^{\mathrm{Re}\,\alpha}}{\mathrm{Re}(\alpha)|\Gamma(\alpha)|}\|g\|_{L(a,\ b)}$ 가 성립된다.

정리 1 $\alpha=m+i\theta\in\boldsymbol{C}$ $(m\in\boldsymbol{N},\ \theta\in\boldsymbol{R},\ \theta\neq0),\ n=[\mathrm{Re}\alpha]+1=m+1$ 이고 G 는 $\boldsymbol{C}$ 에서 열린모임이며 $f:(a,\ b]\times G\to\boldsymbol{C}$ 는 임의의 $y\in G$ 에 대하여 $f[x,\ y]\in L(a,\ b)$ 를 만족시키는 함수라고 하자.

그러면 $y(x)\in L(a,\ b)$ 일 때 $y(x)$ 가 거의 도처에서 초기값문제 (4), (8), (9)를 만족시키기 위해서는 $y(x)$ 가 거의 도처에서 적분방정식 (10)을 만족시킬것이 필요하고 충분하다.

다음으로 초기값문제에 대한 풀이의 유일존재성에 대하여 고찰하자.

정리 1의 조건들과 추가적으로 $f[x,\ y]$ 의 두번째 변수에 관한 리프쉬츠조건 즉 모든 $x\in(a,\ b]$ 와 모든 $y_1,\ y_2\in G\subset\boldsymbol{C}$ 에 대하여

$$|f[x,\ y_1]-f[x,\ y_2]|\leq A|y_1-y_2|\ \ (A>0)\tag{11}$$

가 성립된다는 조건밑에서 식 (7)로 정의된 공간 $L^{m+i\theta}(a,\ b)$ 에서 초기값문제 (4), (8), (9)의 풀이가 유일존재한다는것을 증명하자. 여기서 $A>0$ 은 $x\in[a,\ b]$ 에 무관계하다.

정리 2 $\alpha=m+i\theta\in\boldsymbol{C}$ $(m\in\boldsymbol{N},\ \theta\in\boldsymbol{R},\ \theta\neq0),\ n=[\mathrm{Re}\alpha]+1=m+1$ 이고 G 는 $\boldsymbol{C}$ 에서 열린모임이며 $f:(a,\ b]\times G\to\boldsymbol{C}$ 는 임의의 $y\in G$ 에 대하여 $f[x,\ y]\in L(a,\ b)$ 인 함수로서 조건 (11)을 만족시키는 함수라고 하자.

그러면 공간 $L^{m+i\theta}(a,\ b)$ 에서 초기값문제 (4), (8), (9)의 풀이는 유일존재한다.

증명 먼저 초기값문제 (4), (8), (9)의 풀이 $y(x)\in L(a,\ b)$ 가 유일존재한다는것을 증명하자.

정리 1에 의하여 비선형볼테라적분방정식 (10)의 풀이 $y(x)\in L(a,\ b)$ 가 유일존재한다는것을 증명하면 충분하다.

다음의 부등식이 성립되도록 x_1 을 택하고 구간 $[a,\ x_1]$ 에서 방정식 (10)의 풀이 $y(x)\in L(a,\ x_1)$ 의 유일존재성을 증명하자.

$$\frac{A(x_1-a)^m}{m\,|\Gamma(m+i\theta)|}<1 \tag{12}$$

이를 위하여 거리

$$d(y_1,\ y_2)=\|y_1-y_2\|_{L(a,\ b)}:=\int_a^{x_1}|y_1-y_2|\,dx$$

에 관하여 완비거리공간 $L(a,\ x_1)$ 에서 바나흐의 부동점정리를 적용하자.

적분방정식 (10)을 $y(x)=(Ty)(x)$ 형태로 고쳐쓰자. 여기서

$$(Ty)(x)=y_0(x)+\frac{1}{\Gamma(m+i\theta)}\int_a^x\frac{f[t,\ y(t)]dt}{(x-t)^{1-m-i\theta}}=y_0(x)+(I_{a+}^{m+i\theta}f[t,\ y(t)])(x)\,, \tag{13}$$

$$y_0(x)=\sum_{j=1}^{m}\frac{b_j}{\Gamma(m+i\theta-j+1)}(x-a)^{m+i\theta-j}\,. \tag{14}$$

바나흐부동점정리를 적용하기 위하여서는 $y(x)\in L(a,\ x_1)$ 이라면 $(Ty)(x)\in L(a,\ x_1)$ 이라는것과 임의의 $y_1,\ y_2\in L(a,\ x_1)$ 에 대하여 평가식

$$\|Ty_1-Ty_2\|_{L(a,\ x_1)}\le\omega\|y_1-y_2\|_{L(a,\ x_1)},\quad \omega=\frac{A(x_1-a)^m}{m\,|\Gamma(m+i\theta)|} \tag{15}$$

이 성립된다는 사실을 증명하여야 한다.

식 (14)로부터 $y_0(x)\in L(a,\ x_1)$ 이라는것은 분명하다.

$f[x,\ y]\in L(a,\ b)$ 이므로 $b=x_1$, $g(t)=f[t,\ y(t)]$ 로 놓을 때 보조정리에 의하여 식 (13)의 왼변에서의 적분은 $L(a,\ x_1)$ 에 속하며 이로부터 $(Ty)(x)\in L(a,\ x_1)$ 이 나온다.

이제는 평가식 (15)를 증명하자.

식 (7), (13), (14)에 의하여 리프쉬츠조건 (11)과

$$b=x_1,\quad g(x)=f[x,\ y_1(x)]-f[x,\ y_2(x)],\quad \alpha=m+i\theta$$

일 때의 관계식

$$\|(I_{a+}^{m+i\theta}(f[t,\ y_1(t)]-f[t,\ y_2(t)]))(x)\|_{L(a,\ x_1)}\le\frac{(x_1-a)^m}{m\,|\Gamma(m+i\theta)|}\|f[t,\ y_1(t)]-f[t,\ y_2(t)]\|_{L(a,\ x_1)}$$

을 리용하면

$$\|Ty_1-Ty_2\|_{L(a,\ x_1)}\le\|(I_{a+}^{m+i\theta}[|f[t,\ y_1(t)]-f[t,\ y_2(t)]|])(x)\|_{L(a,\ x_1)}\le$$

$$\le A\frac{(x_1-a)^m}{|\Gamma(m+i\theta+1)|}\|y_1(x)-y_2(x)\|_{L(a,\ x_1)}=A\frac{(x_1-a)^m}{m\,|\Gamma(m+i\theta)|}\|y_1(x)-y_2(x)\|_{L(a,\ x_1)}$$

을 얻으며 이로부터 평가식 (15)가 성립된다.

식 (12)에 대하여 $0<\omega<1$ 을 고려하면 구간 $[a,\ x_1]$ 에서 방정식 (10)의 유일풀이 $y^*(x)\in L(a,\ x_1)$ 이 존재한다.

바나흐부동점정리에 의하여 풀이 y^*은 수렴렬 $(T^\nu y_0^*)(x)$ 의 극한으로 얻어진다. 즉

$$\lim_{\nu\to\infty}\| T^\nu y_0^* - y^* \|_{L(a,\ x_1)} = 0 \tag{16}$$

이 성립된다. 여기서 $y_0^*(x)$ 는 $L(a,\ b)$ 의 임의의 함수이다.

초기조건 (8)에서 적어도 $b_k\neq 0$ 이면 $y_0(x)$ 에 대하여 $y_0^*(x)=y_0(x)$ 를 택할수 있다.

식 (13)에 의하여 렬 $(T^\nu y_0^*)(x)$ 는 다음과 같은 점화공식으로 정의된다.

$$(T^\nu y_0^*)(x)=y_0(x)+\frac{1}{\Gamma(m+i\theta)}\int_a^x \frac{f[t,\ (T^{\nu-1}y_0^*)(t)]dt}{(x-t)^{1-m-i\theta}}\quad (\nu=1,\ 2,\ \cdots)$$

$y_\nu(x)=(T^\nu y_0^*)(x)$ 로 놓으면 웃식은 $y_\nu(x)=y_0(x)+\dfrac{1}{\Gamma(m+i\theta)}\displaystyle\int_a^x \frac{f[t,\ y_{\nu-1}(t)]dt}{(x-t)^{1-m-i\theta}}$ $(\nu\in \boldsymbol{N})$ 와 같은 모양을 가지며 식 (16)은 $\lim\limits_{\nu\to\infty}\| y_\nu - y^* \|_{L(a,\ x_1)}=0$ 과 같이 쓸수 있다. 이것은 $L(a,\ x_1)$ 에서 적분방정식 (10)의 유일풀이 $y^*(x)$ 를 구하는데 점차근사법이 실질적으로 적용된다는 것을 의미한다.

다음으로 $x_2=x_1+h_1,\ h_1>0,\ x_2<b$ 일 때 구간 $[x_1,\ x_2]$ 에 대하여 고찰하자.

방정식 (10)을 다음과 같은 모양으로 고쳐쓰자.

$$y(x)=\frac{1}{\Gamma(m+i\theta)}\int_{x_1}^x \frac{f[t,\ y(t)]dt}{(x-t)^{1-m-i\theta}}+\sum_{j=1}^m \frac{b_j}{\Gamma(m+i\theta-j+1)}(x-a)^{m+i\theta-j}+\frac{1}{\Gamma(m+i\theta)}\int_a^{x_1} \frac{f[t,\ y(t)]dt}{(x-t)^{1-m-i\theta}}$$

함수 $y(x)$ 는 구간 $[a,\ x_1]$ 에서 유일하게 결정되므로 우의 방정식을

$$y(x)=y_{01}(x)+\frac{1}{\Gamma(m+i\theta)}\int_{x_1}^x \frac{f[t,\ y(t)]dt}{(x-t)^{1-m-i\theta}}$$

와 같이 고쳐쓸수 있다. 여기서 $y_{01}(x)$ 는 다음과 같다.

$$y_{01}(x)=\sum_{j=1}^m \frac{b_j}{\Gamma(m+i\theta-j+1)}(x-a)^{m+i\theta-j}+\frac{1}{\Gamma(m+i\theta)}\int_a^{x_1} \frac{f[t,\ y(t)]dt}{(x-t)^{1-m-i\theta}}$$

우에서와 같은 수법을 써서 $[x_1,\ x_2]$ 에서 방정식 (10)의 유일풀이 $y^*(x)\in L(x_1,\ x_2)$ 가 존재한다는것을 증명하자.

$x_3=x_2+h_2$, $h_2>0$, $x_3<b$ 인 x_3 에 대하여 $[x_2,\ x_3]$ 을 취하고 이 과정을 반복하면 $[a,\ b]$ 에서 방정식 (10)의 유일풀이 $y^*(x)\in L(a,\ b)$ 가 존재한다는것을 결론지을수 있다.

이리하여 볼테라적분방정식 (10)의 유일풀이 $y(x)=y^*(x)\in L(a,\ b)$ 는 존재하며 따라서 초기값문제 (4), (8), (9)의 풀이도 유일존재한다.

정리의 증명을 끝내기 위해서는 이 유일풀이 $y(x)\in L(a,\ b)$ 가 공간 $L^{m+i\theta}(a,\ b)$ 에 속한다는것을 증명하여야 한다.

식 (7)에 의하여 $(D_{a+}^{m+i\theta}y)(x)\in L(a,\ b)$ 라는것을 증명하면 충분하다.

우에서 증명한바와 같이 풀이 $y(x)\in L(a,\ b)$ 는 매 구간 $[a,\ x_1],\cdots,\ [x_{i-1},\ b]$ 에서 일정

하게 선택된 y_ν 에 대하여 렬 $y_\nu(x) \in L(a,\ b)$ 의 극한이다. 즉

$$\lim_{\nu\to\infty} \| y_\nu - y \|_{L(a,\ b)} = 0 . \tag{17}$$

식 (4), (11)에 의하여

$$\| D_{a+}^{m+i\theta} y_\nu - D_{a+}^{m+i\theta} y \|_{L(a,\ b)} = \| f[x,\ y_\nu] - f[x,\ y] \|_{L(a,\ b)} \le A \| y_\nu - y \|_{L(a,\ b)}$$

가 성립되며 이로부터 식 (17)에 의하여 $\lim\limits_{\nu\to\infty} \| D_{a+}^{m+i\theta} y_\nu - D_{a+}^{m+i\theta} y \|_{L(a,\ b)} = 0$ 이 성립된다.

따라서 $(D_{a+}^{m+i\theta} y)(x) \in L(a,\ b)$ 가 성립된다.(증명끝)

따름 $\alpha = m + i\theta \in \boldsymbol{C}$ $(m \in \boldsymbol{N},\ \theta \in \boldsymbol{R},\ \theta \ne 0)$, $n = [\mathrm{Re}\alpha] + 1 = m + 1$ 이고 G 는 $\boldsymbol{C}$ 에서의 열린 모임이며 $f : (a,\ b] \times G \to \boldsymbol{C}$ 는 임의의 $y \in G$ 에 대하여 $f[x,\ y] \in L(a,\ b)$ 인 함수로서 조건 (11)을 만족시킨다고 하자.

이때 초기값문제 (4), (5)의 풀이 $y(x) \in L(a,\ b)$ 가 존재하기 위해서는 초기조건 (5)에서 $b_{m+1} = 0$ 일것이 필요하고 충분하다.

참 고 문 헌

[1] A. A. Kilbas et al.; Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, 34～67, 2006.

[2] J. J. Machado et al.; Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 16, 3, 1140, 2011.

[3] Kim Myong Ha et al.; Fract. Calc. Appl. Anal., 17, 1, 79, 2014.

[4] Kim Myong Ha et al.; Journal of Fractional Calculus and Applications, 5, 1, 26, 2014.

주체105(2016)년 5월 5일 원고접수

Existence and Uniqueness of the Solutions to Fractional Differential Equations with Order of Complex Number

Kim Kwang Il

The equivalence of an initial value problem of fractional differential equations with the Riemann-Liouville fractional derivative with order of complex number of which real part is natural number and the corresponding Volterra integral equation of the second kind is considered. The existence and uniqueness of the solution to such a problem are proved in the space of integrable functions on a finite interval in real axis.

Key word: Volterra integral equation