김일성종합대학학보 JOURNAL OF KIM IL SUNG UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체105(2016)년 제62권 제1호 Vol. 62 No. 1 JUCHE105(2016).

적분경계조건을 가진 다항분수계미분방정식의 풀이가 유일존재하기 위한 한가지 충분조건

박순애, 오규남

론문에서는 과학기술적문제해결에서 중요하게 제기되는 분수계미분방정식의 풀이법을 연구하였다.

선행연구[2]에서는 적분경계조건을 가진 분수계미분방정식

$$D_t^\alpha y(t) = f(t,\ y(t),\ D_t^\beta y(t))\ \ (0<t<1),\ \ y(0)=0,\ \ y(1)=\int_0^1 g(s)y(s)ds$$

의 풀이의 존재성을 론의하였다. 여기서 $1<\alpha\le 2,\ 0<\beta<1$, $f:[0,\ 1]\times \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R},\ \ g\in L_1[0,\ 1]$ 이며 D_t^α 는 리만-류빌의 분수도함수이다.

선행연구[3]에서는 선행연구[2]의 적분경계조건을 분수계적분으로 바꾼 문제

$$D_t^\alpha y(t) = f(t,\ y(t),\ D_t^\beta y(t))\ (0<t<1),\ \ y(0)=0,\ \ y(1)=I^r y(s)$$

의 풀이의 유일존재성을 론의하였다.

선행연구[4]에서는 특수한 형태의 적분경계조건을 가진 분수계미분방정식

$$-D_t^\alpha x(t) = f(t,\ x(t),\ \cdots,\ x^{(n-1)}(t)),\ \ x(0)=x'(0)=\cdots=x^{(n-2)}(0)=0,\ \ x^{(n-2)}(1)=\int_0^1 x^{(n-2)}(s)dA(s)$$

의 정인풀이의 존재성을 론의하였다. 여기서 $n-1<\alpha\le n,\ n\in\boldsymbol{N},\ \ n\ge 2$ 이며 $f:(0,\ 1)\times(0,\ +\infty)^{n-1}\to[0,\ +\infty)$ 가 련속이라고 가정하였다.

론문에서는 선행연구[2]의 적분경계조건을 비선형적분경계조건으로, 선행연구[2-4]의 분수계미분방정식을 n 항분수계미분방정식으로 일반화한 적분경계조건을 가진 다항분수계미분방정식의 풀이의 유일존재성을 론의한다. 여기서 도함수의 의미는 리만-류빌의 분수계도함수이다.

1. 기초개념과 예비지식

$\boldsymbol{R}=(-\infty,\ +\infty),\ \boldsymbol{R}_+=(0,\ +\infty),\ \boldsymbol{R}_-=(-\infty,\ 0)$ 으로, 부아닌 옹근수모임을 Z_+ 로 표시한다.

$k\in Z_+$ 계까지의 모든 도함수들이 $[a,\ b]$ 에서 련속인 함수들의 모임을 $C^k[a,\ b]$ 로, G 에서 적분가능한 함수들의 공간을 $L_1(G)$ 로 표시한다.

정의 1 $\alpha>0$ 에 대하여 $I_{0+}^\alpha f(t) := \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau$, $t>0$ 을 리만-류빌의 의미에서 함수 f 의 α 계분수적분이라고 부른다. 특히 $I_{0+}^0 f(t)=f(t)$ 로 표시한다. 여기서 $\Gamma(\alpha)$

는 감마함수로서 $\Gamma(\alpha):=\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}dt$, $\mathrm{Re}(\alpha)>0$ 이며 $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$ 이다.

정의 2 $n-1<\alpha\le n,\quad n\in\boldsymbol{N}$ 이라고 할 때 $D_t^\alpha y(t):=\dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)}D_t^n\int_0^t(t-\tau)^{n-\alpha-1}y(\tau)d\tau$ 를 리만-류빌의 의미에서 함수 y 의 α 계분수도함수라고 부른다.

주의 $D_t^\alpha y(t)=D^nI_{0+}^{n-\alpha}y(t),\quad D^n=\dfrac{d^n}{dt^n}$

보조정리 1 [1] ① $y\in L^1(0,\ 1),\ \nu>\sigma>0$ 이면 다음의 식들이 성립된다.

$$I^\nu I^\sigma y(t)=I^{\nu+\sigma}y(t),\quad D_t^\sigma I^\nu y(t)=I^{\nu-\sigma}y(t),\quad D_t^\nu I^\nu y(t)=y(t)$$

② $\alpha>0,\ \sigma>0$ 이면 $D_t^\alpha t^{\sigma-1}=\dfrac{\Gamma(\sigma)}{\Gamma(\sigma-\alpha)}t^{\sigma-\alpha-1}$ 이 성립된다.

보조정리 2 [1] $1<\alpha\le 2$ 이고 f 가 적분가능할 때 상수 $c_1,\ c_2$ 가 있어서

$$I^\alpha D_t^\alpha f(t)=f(t)+c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2}$$

이 성립된다.

보조정리 3 [1] (바나흐부동점정리) $(U,\ d)$ 가 비지 않은 완비거리공간이라고 하자.

이때 $0<\omega<1$ 인 ω 가 있어서 $T:U\to U$ 가 임의의 $u,\ v\in U$ 에 대하여 $d(Tu,\ Tv)\le\omega\, d(u,\ v)$ 인 넘기기이면 연산자 T 는 유일한 부동점 $u^*\in U$ 를 가진다.

그리고 $T^K\ (K\in\boldsymbol{N})$ 이 $T^1=T,\quad T^K=TT^{K-1}\quad (K\in\boldsymbol{N}\setminus\{1\})$ 에 의하여 정의되는 연산자렬이면 임의의 $u_0\in U$ 에 대하여 렬 $\{T^Ku_0\}$ 은 $K\to\infty$ 일 때 부동점 u^* 로 수렴한다.

보조정리 4 [1] (리만-류빌분수적분연산자의 몇가지 성질)

i) $f\in L_1[a,\ b]\ \Rightarrow\ I_a^\alpha f\in L_1[a,\ b]$, $\alpha>0$

ii) $f\in C[a,\ b]\Rightarrow\{I_a^\alpha f(t)\}_{t=a}=0$, $\alpha>0$

iii) $f\in L_1[a,\ b],\ \alpha,\ \beta\ge 0\ \Rightarrow\ I_a^\alpha I_a^\beta f=I_a^{\alpha+\beta}f=I_a^\beta I_a^\alpha f$

iv) $f(x)=(x-a)^p,\ \ p>-1,\ \ \alpha>0\ \Rightarrow I_a^\alpha f(t)=\Gamma(p+1)/\Gamma(\alpha+p+1)\cdot(t-a)^{\alpha+p}$

v) 다음의 매 경우에 대하여 $I_a^\alpha I_a^\beta f=I_a^{\alpha+\beta}f$ 가 성립된다.

① $\mathrm{Re}(\beta)>0$, $\mathrm{Re}(\alpha+\beta)>0$, $f\in L_1(a,\ b)$

② $\mathrm{Re}(\beta)<0$, $\mathrm{Re}(\alpha)>0$, $f\in I_a^{-\beta}(L_1(a,\ b))$

③ $\mathrm{Re}(\alpha)<0$, $\mathrm{Re}(\alpha+\beta)<0$, $f\in I_a^{-(\alpha+\beta)}(L_1(a,\ b))$

2. 기 본 결 과

다음과 같은 분수계미분방정식의 경계값문제를 론의하자.

$$D_t^\alpha y(t)=f(t,\ y(t),\ D_t^{\beta_1}y(t),\ \cdots,\ D_t^{\beta_n}y(t)),\ \ t\in[0,\ 1] \tag{1}$$

$$y(0)=0 \tag{2}$$

$$y(1)=\int_0^1 g(s,\ y(s))ds \tag{3}$$

여기서 $1<\alpha<2$ 이고 $0<\beta_1<\cdots<\beta_n<1$ 이며 $f:[0,\ 1]\times \boldsymbol{R}^{n+1}\to \boldsymbol{R}$, $g:[0,\ 1]\times \boldsymbol{R}\to \boldsymbol{R}$ 이다.

경계값문제 (1)－(3)에 대응되는 적분방정식은 다음과 같다.

$$x(t)=I^{\alpha-\beta_n}f(t,\ I^{\beta_n}x(t),\ I^{\beta_n-\beta_1}x(t),\cdots,\ x(t))+$$
$$+\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\beta_n)}\left[\int_0^1 g(s,\ I^{\beta_n}x(s))ds-I^{\alpha}f(t,\ I^{\beta_n}x(t),\ I^{\beta_n-\beta_1}x(t),\ \cdots,\ x(t))|_{t=1}\right]t^{\alpha-\beta_n-1} \tag{4}$$

정리 1　$1<\alpha-\beta_n<2$ 이고 f 는 $f:[0,\ 1]\times \boldsymbol{R}^{n+1}\to \boldsymbol{R}$ 인 함수로서 임의의 $y\in \boldsymbol{R}^{n+1}$ 에 대하여 $I^{\alpha-\beta_n}f(t,\ y)\in C[0,\ 1]$이라고 하자.

이때 $y(t)\in C[0,\ 1]$이 경계값문제 (1)－(3)을 만족시키기 위해서는 $x(t)=D_t^{\beta_n}y(t)\in C[0,\ 1]$이 방정식 (4)를 만족시킬것이 필요하고 충분하다.

증명 (필요성) $y(t)\in C[0,\ 1]$이 경계값문제 (1)－(3)을 만족시킨다고 하자.

$x(t)=D_t^{\beta_n}y(t)$ 라고 하면 $x(t)\in C[0,\ 1]$로 된다. 이 식의 량변에 α 계분수적분을 실시하면 $I^{\beta_n}x(t)=I^{\beta_n}D_t^{\beta_n}y(t)$ 로 되며 $I^{\beta_n}D_t^{\beta_n}y(t)=y(t)-\dfrac{(I_{0+}^{1-\alpha}y)(a)}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha-1}$, $(I_{0+}^{1-\alpha}y)(a)=0$ 이므로 $y(t):=I^{\beta_n}x(t)$ 를 얻는다.

보조정리 1에 의하여

$$D_t^{\beta_n}y(t)=D_t^{\beta_n}I^{\beta_n}x(t)=x(t),\ \ D_t^{\beta_{n-1}}y(t)=D_t^{\beta_{n-1}}I^{\beta_n}x(t)=I^{\beta_n-\beta_{n-1}}x(t),\ \cdots,\ \ D_t^{\beta_1}y(t)=I^{\beta_n-\beta_1}x(t)$$

이며 리만－류빌의 도함수의 정의로부터

$$D_t^{\alpha}y(t)=D^2I^{2-\alpha}y(t)=D^2I^{2-\alpha}I^{\beta_n}x(t)=D^2I^{2-\alpha+\beta_n}x(t)=D_t^{\alpha-\beta_n}x(t).$$

따라서 식 (1)은 $D_t^{\alpha-\beta_n}x(t)=f(t,\ I^{\beta_n}x(t),\ I^{\beta_n-\beta_1}x(t),\cdots,\ x(t)),\ t\in[0,\ 1]$과 같다.

$\beta_0=0$, $\mu_i:=\beta_n-\beta_i\ (i=0,1,\cdots,n)$, $\mu:=\alpha-\beta_n$ 으로 놓고 웃식을 다시 쓰면

$$D_t^{\mu}x(t)=f(t,\ I^{\mu_0}x(t),\ I^{\mu_1}x(t),\ \cdots,\ I^{\mu_n}x(t)),\ t\in[0,\ 1]. \tag{5}$$

$y(0)=I^{\beta_n}x(t)|_{t=0}=0$ 이 되도록 $x(t)$ 의 초기조건을 결정하자.

$0\le|I^{\beta_n}x(t)|=\left|\dfrac{1}{\Gamma(\beta_n)}\displaystyle\int_0^t\dfrac{x(s)}{(t-s)^{1-\beta_n}}ds\right|\le\dfrac{1}{\Gamma(\beta_n)}\|x\|_{\max}\left|\displaystyle\int_0^t\dfrac{1}{(t-s)^{1-\beta_n}}ds\right|$ 의 오른변의 적분을 계산하면 $\displaystyle\int_0^t\frac{1}{(t-s)^{1-\beta_n}}ds=\int_0^t\frac{1}{u^{1-\beta_n}}du=\int_0^t u^{\beta_n-1}du=\frac{u^{\beta_n}}{\beta_n}\bigg|_{t=0}=\frac{t^{\beta_n}}{\beta_n}$ 이므로

$$0\le|I^{\beta_n}x(t)|_{t=0}\le\frac{1}{\Gamma(\beta_n)}\|x\|_{\max}|t^{\beta_n}/\beta_n|_{t=0}=0.$$

따라서

$$I^{\beta_n}x(t)|_{t=0}=0. \tag{6}$$

이로부터 $\forall t\in[0,\ 1],\ I^{\beta_n}x(t)|_{t=0}=0$ 이므로 $y(0)=I^{\beta_n}x(t)|_{t=0}=0$ 에 대응되는 $x(t)$ 의 초기조건은 임의로 주어도 된다. 여기서는 $x(0)=0$ 으로 가정한다.

다음으로 식 (3)에 치환을 실시하자.

$y(1)=\displaystyle\int_0^1 g(s,\ y(s))ds$ 에 치환 $y(t):=I^{\beta_n}x(t)$ 를 실시하면

$$y(1)=I^{\beta_n}x(t)|_{t=1}=\int_0^1 g(s,\ I^{\beta_n}x(s))ds\,. \tag{7}$$

한편 식 (5)의 량변에 I^{μ}를 적용하면 다음과 같다.

$$I^{\mu}D_t^{\mu}x(t)=I^{\mu}f(t,\ I^{\mu_0}x(t),\ I^{\mu_1}x(t),\cdots,\ I^{\mu_n}x(t)) \tag{8}$$

가정에서 $1<\alpha-\beta_n<2$이므로 $1<\mu=\alpha-\beta_n<2$이다.

$1<\mu<2$일 때 보조정리 2에 의하여 $I^{\mu}D_t^{\mu}x(t)=x(t)+c_1t^{\mu-1}+c_2t^{\mu-2}$로 된다.

따라서 식 (8)은

$$x(t)=I^{\mu}f(t,\ I^{\mu_0}x(t),\ I^{\mu_1}x(t),\cdots,\ I^{\mu_n}x(t))-c_1t^{\mu-1}-c_2t^{\mu-2} \tag{9}$$

로 되며 $x(0)=0$이므로

$$x(0)=I^{\mu}f(t,\ I^{\mu_0}x(t),\ I^{\mu_1}x(t),\cdots,\ I^{\mu_n}x(t))|_{t=0}-c_1t^{\mu-1}|_{t=0}-c_2t^{\mu-2}|_{t=0}=0\,. \tag{10}$$

그런데 $I^{\mu}f(t,\ I^{\mu_0}x(t),\ I^{\mu_1}x(t),\cdots,\ I^{\mu_n}x(t))|_{t=0}=0$이고 $\mu-1>1$이므로 $c_1t^{\mu-1}|_{t=0}=0$이다.

따라서 식 (10)에서 $c_2=0$이여야 한다. 즉 식 (9)는 다음과 같다.

$$x(t)=I^{\mu}f(t,\ I^{\mu_0}x(t),I^{\mu_1}x(t),\cdots,\ I^{\mu_n}x(t))-c_1t^{\mu-1} \tag{11}$$

c_1을 결정하자.

식 (11)로부터 $I^{\beta_n}x(t)=I^{\beta_n+\mu}f(t,\ I^{\mu_0}x(t),\ I^{\mu_1}x(t),\cdots,\ I^{\mu_n}x(t))-I^{\beta_n}c_1t^{\mu-1}$이고

$$I^{\beta_n}x(t)|_{t=1}=I^{\beta_n+\mu}f(t,\ I^{\mu_0}x(t),\ I^{\mu_1}x(t),\cdots,\ I^{\mu_n}x(t))|_{t=1}-I^{\beta_n}c_1t^{\mu-1}|_{t=1}$$

이며 식 (7)과 보조정리 1로부터

$$\int_0^1 g(s,\ I^{\beta_n}x(s))ds=I^{\beta_n+\mu}f(t,\ I^{\mu_0}x(t),\ I^{\mu_1}x(t),\cdots,\ I^{\mu_n}x(t))|_{t=1}-c_1\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+\beta_n)}t^{\mu+\beta_n+1}|_{t=1}$$

로 된다. 그런데 $\mu+\beta_n-1=\alpha-\beta_n+\beta_n-1=\alpha-1>0$이므로

$$\int_0^1 g(s,\ I^{\beta_n}x(s))ds=I^{\beta_n+\mu}f(t,\ I^{\mu_0}x(t),\ I^{\mu_1}x(t),\cdots,\ I^{\mu_n}x(t))|_{t=1}-c_1\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\alpha)}\,.$$

따라서 $c_1=\dfrac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\mu)}\left[I^{\beta_n+\mu}f(t,\ I^{\mu_0}x(t),\ I^{\mu_1}x(t),\cdots,I^{\mu_n}x(t))|_{t=1}-\int_0^1 g(s,I^{\beta_n}x(s))ds\right].$

c_1을 식 (10)에 대입하면

$$\begin{aligned}x(t)&=I^{\mu}f(t,\ I^{\mu_0}x(t),\ I^{\mu_1}x(t),\cdots,\ I^{\mu_n}x(t))+\\&+\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\mu)}\left[\int_0^1 g(s,\ I^{\beta_n}x(s))ds-I^{\beta_n+\mu}f(t,\ I^{\mu_0}x(t),\ I^{\mu_1}x(t),\cdots,\ I^{\mu_n}x(t))|_{t=1}\right]t^{\mu-1}.\end{aligned} \tag{12}$$

식 (12)의 μ에 $\mu=\alpha-\beta_n$을 갈아넣으면

$$\begin{aligned}x(t)&=I^{\alpha-\beta_n}f(t,\ I^{\beta_n}x(t),\ I^{\beta_n-\beta_1}x(t),\cdots,\ x(t))+\\&+\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\beta_n)}\left[\int_0^1 g(s,\ I^{\beta_n}x(s))ds-I^{\alpha}f(t,\ I^{\beta_n}x(t),\ I^{\beta_n-\beta_1}x(t),\cdots,\ x(t))|_{t=1}\right]t^{\alpha-\beta_n-1}\end{aligned}$$

과 같다. 즉 $x(t)=D_t^{\beta_n}y(t)\in C[0,\ 1]$은 식 (4)를 만족시킨다.

(충분성) $x(t)=D_t^{\beta_n}y(t)\in C[0,\ 1]$이 식 (4)를 만족시킨다고 하자. 즉 식 (12)가 성립된다고 하자.

$y(t):=I^{\beta_n}x(t)$, $D_t^{\beta_n}y(t)=D_t^{\beta_n}I^{\beta_n}x(t)=x(t)$, $D_t^{\beta_{n-1}}y(t)=D_t^{\beta_{n-1}}I^{\beta_n}x(t)=I^{\beta_n-\beta_{n-1}}x(t),\ \cdots,$ $D_t^{\beta_1}y(t)=I^{\beta_n-\beta_1}x(t)$ 이므로

$$I^{\beta_n}x(t)=I^{\beta_n}I^{\alpha-\beta_n}f(t,\ I^{\beta_n}x(t),\ I^{\beta_n-\beta_1}x(t),\ \cdots,\ x(t))+$$
$$+I^{\beta_n}\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\beta_n)}\left[\int_0^1 g(s,\ I^{\beta_n}x(s))ds-I^{\alpha}f(t,\ I^{\beta_n}x(t),\ I^{\beta_n-\beta_1}x(t),\cdots,\ x(t))|_{t=1}\right]t^{\alpha-\beta_n-1},$$

$$I^{\beta_n}x(t)=I^{\alpha}f(t,\ I^{\beta_n}x(t),\ I^{\beta_n-\beta_1}x(t),\cdots,\ x(t))+$$
$$+\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\beta_n)}\left[\int_0^1 g(s,\ I^{\beta_n}x(s))ds-I^{\alpha}f(t,\ I^{\beta_n}x(t),\ I^{\beta_n-\beta_1}x(t),\ \cdots,\ x(t))|_{t=1}\right]I^{\beta_n}t^{\alpha-\beta_n-1},$$

$$D^{\alpha}y(t)=D^{\alpha}I^{\alpha}f(t,\ y(t),\ D_t^{\beta_1}y(t),\ \cdots,\ D^{\beta_n}y(t))+$$
$$+\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\beta_n)}\left[\int_0^1 g(s,I^{\beta_n}x(s))ds-I^{\alpha}f(t,\ \ y(t),\ \ D_t^{\beta_1}y(t),\ \cdots,\ D^{\beta_n}y(t))|_{t=1}\right]D^{\alpha}I^{\beta_n}t^{\alpha-\beta_n-1},$$

$$D^{\alpha}y(t)=f(t,\ y(t),\ D^{\beta_1}y(t),\cdots,\ D^{\beta_n}y(t))+$$
$$+\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\beta_n)}\left[\int_0^1 g(s,\ \ I^{\beta_n}x(s))ds-I^{\alpha}f(t,\ y(t),\ D^{\beta_1}y(t),\cdots,\ D^{\beta_n}y(t))|_{t=1}\right]D^{\alpha-\beta_n}t^{\alpha-\beta_n-1}.$$

그런데 $D^{\alpha-\beta_n}t^{\alpha-\beta_n-1}=0$ 이므로 $D^{\alpha}y(t)=f(t,\ y(t),\ D^{\beta_1}y(t),\cdots,\ D^{\beta_n}y(t))$ 가 성립된다.

이제 식 (4)에서 $x(0)=0$ 이 나오는가를 보자.

$$x(0)=I^{\alpha-\beta_n}f(t,\ I^{\beta_n}x(t),\ I^{\beta_n-\beta_1}x(t),\cdots,\ I^{\beta_n-\beta_n}x(t))|_{t=0}+$$
$$+\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\beta_n)}\left[\int_0^1 g(s,\ I^{\beta_n}x(s))ds-I^{\alpha}f(t,\ I^{\beta_n}x(t),\ I^{\beta_n-\beta_1}x(t),\cdots,\ x(t))|_{t=1}\right]t^{\mu-1}|_{t=0}$$

그런데 $I^{\mu}f(t,\ I^{\mu_0}x(t),\ I^{\mu_1}x(t),\ \cdots,\ I^{\mu_n}x(t))|_{t=0}=0$ 이며 $\mu-1>1$ 이므로 웃식의 두번째 항은 0이다. 따라서 $x(0)=0$ 이다.

한편 $y(t):=I^{\beta_n}x(t)$ 이고 식 (6)에 의하여 $I^{\beta_n}x(t)|_{t=0}=0$ 이므로 $y(0)=0$ 이고

$$y(t)=I^{\alpha}f(t,\ y(t),\ D_t^{\beta_1}y(t),\cdots,\ D^{\beta_n}y(t))+$$
$$+\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\beta_n)}\left[\int_0^1 g(s,\ \ I^{\beta_n}x(s))ds-I^{\alpha}f(t,\ y(t),\ D_t^{\beta_1}y(t),\cdots,\ D^{\beta_n}y(t))|_{t=1}\right]I^{\beta_n}t^{\alpha-\beta_n-1},$$

$$y(1)=I^{\alpha}f(t,\ y(t),\ D_t^{\beta_1}y(t),\cdots,\ D^{\beta_n}y(t))|_{t=1}+$$
$$+\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\beta_n)}\left[\int_0^1 g(s,\ I^{\beta_n}x(s))ds-I^{\alpha}f(t,\ y(t),\ D_t^{\beta_1}y(t),\ \cdots,\ D^{\beta_n}y(t))|_{t=1}\right]I^{\beta_n}t^{\alpha-\beta_n-1}|_{t=1}.$$

그런데 $I^{\beta_n}t^{\alpha-\beta_n-1}=\dfrac{\Gamma(\alpha-\beta_n)}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-\beta_n+\beta_n-1}$ 이므로 $y(1)=\int_0^1 g(s,\ \ y(s))ds$ 가 나온다.(증명끝)

정리 2 $1<\alpha-\beta_n<2$ 라고 하자.

f 는 $f:[0,\ 1]\times \boldsymbol{R}^{n+1}\to \boldsymbol{R}$ 인 함수로서 임의의 $y\in \boldsymbol{R}^{n+1}$ 에 대하여 $I^{\alpha-\beta_n}f(t,\ y)\in C[0,\ 1]$ 이고 두번째 변수에 관하여 리프쉬츠조건을 만족시킨다고 하자. 즉 임의의 $t\in[0,\ 1]$과 임

의의 $y=(y_1, \cdots, y_{n+1}),\ Y=(Y_1, \cdots, Y_{n+1})\in \boldsymbol{R}^{n+1}$ 에 대하여

$$|f(t,\ y_0,\ y_1, \cdots,\ y_n)-f(t, Y_0, Y_1, \cdots,\ Y_n)|\le \sum_{i=0}^{n} l_i\,|y_i-Y_i|$$

인 정수 $l_i>0,\ i=0, 1, \cdots,\ n$ 이 존재한다고 하자.

또한 $\forall x,\ y\in \boldsymbol{R},\ \|g(t,\ x)-g(t,\ y)\|\le \lambda|x-y|$ 인 정수 $\lambda>0$ 이 존재한다고 하자. 그리고 $\omega:=\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\mu)}\cdot\frac{\lambda}{\Gamma(\beta_n+1)}+\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{l_i}{\Gamma(\mu+\mu_i+1)}+\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\mu)}\cdot\frac{l_i}{\Gamma(\beta_n+\mu+\mu_i+1)}\right)$일 때 $0<\omega<1$이라고 하자.

이때 경계값문제 (1)－(3)의 풀이 $y(t)\in C[0,\ 1]$은 유일존재한다.(증명생략)

실례 $\alpha=1.8,\ \beta_1=0.5,\ \beta_2=0.7$ 일 때

$$D^{\alpha}y(t)=0.1\cdot\sin(D^{\beta_1}y(t)+D^{\beta_2}y(t)+y(t))+g(t),\ y(0)=0,\ y(1)=0.5\cdot\int_0^1 y(s)ds$$

를 론의하자. 여기서

$$g(t)=-\frac{20}{21}\cdot\frac{\Gamma(4)}{\Gamma(2.2)}t^{1.2}+\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(1.2)}t^{0.2}+0.1\cdot\sin\left(\frac{20}{21}\cdot\frac{\Gamma(4)}{\Gamma(3.5)}t^{2.5}-\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2.5)}t^{1.5}+\frac{20}{21}\cdot\frac{\Gamma(4)}{\Gamma(3.3)}t^{2.3}-\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2.3)}t^{1.3}+\frac{20}{21}t^3-t^2\right).$$

$$\omega=\frac{\Gamma(1.8)}{\Gamma(1.1)}\cdot\frac{0.5}{\Gamma(1.7)}+\frac{0.1}{\Gamma(2.8)}+\frac{\Gamma(1.8)}{\Gamma(1.1)}\cdot\frac{0.1}{\Gamma(3.5)}+\frac{0.1}{\Gamma(2.1)}+\frac{\Gamma(1.8)}{\Gamma(1.1)}\cdot\frac{0.1}{\Gamma(2.8)}+\frac{0.1}{\Gamma(2.3)}+\frac{\Gamma(1.8)}{\Gamma(1.1)}\cdot\frac{0.1}{\Gamma(3)}=$$
$$=0.538\,725+0.240\,920+0.136\,700=0.916\,345<1$$

이므로 주어진 경계값문제의 풀이는 유일존재한다.

참 고 문 헌

[1] A. A. Kilbas et al.; Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, 1～54, 2006.

[2] Meng Hu et al.; International Journal of Mathematical and Computer Science, 7, 1, 2011.

[3] S. A. Murad et al.; Journal of Fractional Calculus and Applications, 3, 6, 1, 2012.

[4] Min Jia et al.; Article ID 294694, 21, 2012.

주체104(2015)년 9월 5일 원고접수

A Sufficient Condition for the Unique Existence of Solutions to the Multi-Term Fractional Differential Equation with Integral Boundary Condition

Pak Sun Ae, O Kyu Nam

In previous researches was investigated the unique existence of solutions for the case of linear integral boundary condition to the multi-term nonlinear fractional differential equation.

In this paper, we investigated the unique existence of solutions to multi-term nonlinear fractional differential equation with nonlinear integral boundary condition.

Key word: Riemann-Liouville fractional derivative