김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제3호

비대칭추우에서 척도점을 리용한 원시쌍대내점법

리홍일, 김유경

선행연구[1]에서는 척도점을 리용하는 대칭추에서의 방법을 비대칭추에로 일반화할 수 있는 한가지 방법을 연구하였다. 이 방법은 초기점을 구하는 단계를 거치며 일반적으로 양적인 표시식을 구하기 힘든 쌍대장벽을 리용한다.

선행연구[2]에서는 비대칭추우에서 동차모형에 기초한 한가지 내점법으로써 초기점을 엄격한 내점으로 설정하지 않아도 되는 알고리듬을 연구하였다.

론문에서는 동차모형에서 척도화를 리용하면서도 초기점을 설정하거나 쌍대장벽을 리용하지 않는 비대칭추우에서의 내점법에 대하여 연구하였다.

비대칭추문제는 다음과 같이 정의된다.

$$\text{원시문제}\quad \begin{array}{l} \min\limits_{x}\ c^{\mathrm{T}}x \\ Ax=b \\ x\in K \end{array} \qquad \text{쌍대문제}\quad \begin{array}{l} \max\limits_{y,\,s}\ b^{\mathrm{T}}y \\ A^{\mathrm{T}}y+s=c \\ s\in K^*,\ y\in \mathbf{R}^m \end{array} \tag{1}$$

여기서 $x,\ c\in \mathbf{R}^n,\ A\in \mathbf{R}^{m\times n},\ K\subset \mathbf{R}^n$ 이다.

K는 고유추 즉 비지 않은 내점을 가진 닫긴불룩뾰족추, K^*은 K의 쌍대추로서 역시 고유추이다.

K, K^*의 내부를 K°, $(K^*)^\circ$라고 하자. 그리고 $m\le n$과 $\mathrm{rank}(A)=m$이라고 하자.

만일 $Ax=b$를 만족시키는 $x\in K^\circ$와 $A^{\mathrm{T}}y+s=c$를 만족시키는 $s\in (K^*)^\circ$, $y\in \mathbf{R}^m$이 존재한다면 원시쌍대문제 (1)에 대하여 강쌍대성이 만족되며 이때 원시 및 쌍대최량점 x, $(y,\ s)$에 대하여 다음과 같은 관계식이 만족된다.

$$\begin{aligned} &Ax-b=0 \\ &-A^{\mathrm{T}}y-s+c=0 \\ &x^{\mathrm{T}}s=0 \\ &x\in K,\ s\in K^*,\ y\in \mathbf{R}^m \end{aligned}$$

이 문제를 풀기 위하여 묻기문제라고 부르는 다음과 같은 문제를 정식화하자. 2개의 부아닌 스칼라변수 τ와 κ를 받아들이고 다음문제를 푸는 $x,\ \tau,\ y,\ s,\ \kappa$를 찾자.

$$\begin{aligned} &Ax-b\tau=0 \\ &-A^{\mathrm{T}}y+c\tau-s=0 \\ &b^{\mathrm{T}}y-c^{\mathrm{T}}x-\kappa=0 \\ &(x,\ \tau)\in K\times \mathbf{R}_+,(s,\ \kappa)\in K^*\times \mathbf{R}_+,\ y\in \mathbf{R}^m \end{aligned} \tag{2}$$

이 문제를 원시쌍대문제 (1)과 동차자기쌍대문제라고 부른다.[2]

문제 (1)과 (2)의 풀이들사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

보조정리 1[2] (x, τ, y, s, κ)가 문제 (2)의 풀이라고 하자. 이때

① (x, τ, y, s, κ)는 $x^{\mathrm{T}}s+\tau\kappa=0$을 만족한다.

② $\tau>0$이면 $(x, y, s)/\tau$는 원시쌍대문제 (1)의 최량풀이이다.

③ $\kappa>0$이면 $b^{\mathrm{T}}y>0$ 또는 $c^{\mathrm{T}}x<0$중의 하나가 성립한다. 만일 첫식이 성립한다면 문제 (1)의 원시문제의 유효모임이 빈모임이며 둘째 식이 성립한다면 문제 (1)의 쌍대문제의 유효모임이 빈모임이다.

우에서 정의한 문제 (2)를 다음과 같이 간단히 쓸수 있다.

$$G\begin{pmatrix} y \\ \bar{x} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 \\ \bar{s} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \ z=\begin{pmatrix} \bar{x} \\ y \\ \bar{s} \end{pmatrix}\in F, \qquad F:=\overline{K}\times\mathbf{R}^m\times\overline{K}^* \tag{3}$$

여기서 $\bar{x}=\begin{pmatrix} x \\ \tau \end{pmatrix}$, $\bar{s}=\begin{pmatrix} s \\ k \end{pmatrix}$, $\overline{F}(\bar{x})=F(x)-\log\tau$, $\overline{F}^*(\bar{s})=F^*(s)-\log k$, $\overline{K}=K\times\mathbf{R}_+$, $\overline{K}^*=K^*\times\mathbf{R}_+$, $\bar{\nu}=\nu+1$이다.

$z=(\bar{x}, y, \bar{s})\in F$에 대하여 $\mu(z):=(\bar{x}^{\mathrm{T}}\bar{s})/\bar{\nu}$를 점 z의 상보간격이라고 부른다.[2]

문제 (3)의 중심곡선은 다음과 같이 정의한다.[2]

$\bar{x}\in\overline{K}$, $\bar{s}\in\overline{K}^*$과 스칼라량 t에 대하여 다음과 같은 함수를 생각하자.

$$\psi(\bar{x}, \bar{s}, t):=\bar{s}+tg_{\bar{x}}$$

초기점을 $z^0\in F$라고 하고 $\mu^0=\mu(z^0)$으로 놓는다. 문제 (3)에 대하여 $\gamma\in[0, 1]$을 변수로 하는 다음과 같은 점모임을 동차문제 (3)의 중심곡선으로 정의한다.

$$\begin{aligned} &G(y_\gamma; \bar{x}_\gamma)-(0, \bar{s}_\gamma)=\gamma(G(y^0; \bar{x}^0)-(0; \bar{s}^0)) \\ &\psi(\bar{x}_\gamma, \bar{s}_\gamma, \gamma\mu^0)=0 \end{aligned} \tag{4}$$

정의식 (4)로부터 γ가 령에로 다가갈 때 γ에 대응하는 중심곡선의 점은 초기점 z^0 ($\gamma=1$)에서부터 문제 (3)의 최량풀이($\gamma=0$)에로 수렴한다.

고정된 파라메터 $\eta\in[0, 1]$에 대하여 다음과 같은 모임을 생각하자.

$$N(\eta)=\{z=(\bar{x}; y; \bar{s})\in F: \|\psi(\bar{x}, \bar{s}, \mu(z))\|_{\bar{x}}^*\le\eta\mu(z)\} \tag{5}$$

일반적인 예측자-수정자알고리듬과 마찬가지로 론문에서는 예측과정과 중심과정을 거친다. 여기서 중심화과정은 중심곡선의 가까이로 가는것과 함께 척도점을 얻는 과정이다. 점 $z^+=(\bar{x}^+, y^+, \bar{s}^+)\in N(2\eta)$로부터 $\|\psi(\bar{x}, \bar{s}, \mu(z))\|_{\bar{x}}^*\le\eta\mu(z)$이면서 $G(y; \bar{x})-(0; \bar{s})=G(y^+; \bar{x}^+)-(0; \bar{s}^+)$를 만족시키는 점을 구하기 위하여 다음의 방정식에 뉴톤법을 적용한다.

$$\begin{aligned} &G(y; \bar{x})-(0; \bar{s})=G(y^+; \bar{x}^+)-(0; \bar{s}^+) \\ &\psi(\bar{x}, \bar{s}, \mu(z))=0 \end{aligned}$$

의 점 z^+에서의 뉴톤방향 $\delta_z:=(\delta_{\bar{x}}, \delta_y, \delta_{\bar{s}})$는 다음식의 풀이로 된다.

$$\begin{cases} G(\delta_y; \delta_{\bar{x}})-(0; \delta_{\bar{s}})=0 \\ \delta_{\bar{s}}+\mu(z)H_{\bar{x}}\delta_{\bar{x}}=-\psi(\bar{x}, \bar{s}, \mu(z)) \end{cases} \tag{6}$$

$z := z + \overline{\alpha}\delta_z$ 로 놓고 식 (6)의 풀이를 얻어 과정을 계속한다.

보조정리 2 $\overline{\alpha} \le 1/84$, $\eta < 1/6$ 이면 중심화과정은 기껏 두걸음만에 끝난다.[2] 여기서 $\overline{\alpha}$ 는 중심화방향 (6)으로의 걸음의 크기이며 η 는 중심곡선근방의 크기를 나타내는 수이다.

식 (6)의 둘째 식은

$$\delta_{\overline{s}} + \mu(z)H_{\overline{x}}\delta_{\overline{x}} = -(\overline{s} + \mu(z)g_{\overline{x}})$$

로서 자기상사장벽함수의 성질을 리용하면

$$\delta_{\overline{s}} + \mu(z)H_{\overline{x}}\delta_{\overline{x}} = -(\overline{s} - \mu(z)H_{\overline{x}}\overline{x})$$

$$\overline{s} + \delta_{\overline{s}} = \mu(z)H_{\overline{x}}(\overline{x} - \delta_{\overline{x}})$$

이다. $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{\mu(z)}}\overline{x}$ 로 놓고 방향 $\delta_z := (\delta_{\overline{x}},\ \delta_y,\ \delta_{\overline{s}})$ 에 대하여 $x = \overline{x}^+ - \delta_{\overline{x}}$, $s = \overline{s}^+ + \delta_{\overline{s}}$, $y = y + \delta_y$ 라고 하면 새롭게 얻은 점 $(\overline{x},\ y,\ \overline{s})$ 에 대하여 다음의 관계식이 만족된다.

$s = F''(\omega)\overline{x}$ 즉 ω 는 점 $z = (\overline{x},\ y,\ \overline{s})$ 의 척도점으로 된다. 여기서 구한 척도점은 선행연구[1]에서 주공간에서만 론의하여 얻은 척도점과 표시가 류사하다.

방향 δ_z 에 의해 얻어진 점이 F 의 내점으로 된다는것은 분명하다.

이제 척도점을 얻는 과정에 새롭게 얻어진 점이 내점으로 되겠는가에 대하여 보자.

정리 1 $\|\delta_{\overline{x}}\|_{\overline{x}} \le \gamma < 1$ 이면 $\overline{x}^* = \overline{x} - \delta_{\overline{x}}$, $\overline{s}^* = \overline{s} + \delta_{\overline{s}}$, $y = y + \delta_y$ 로 얻은 점 $(\overline{x},\ \overline{s},\ y)$ 는 엄격유효점으로 되며 이 점은 다음과 같은 척도관계를 만족시키는 점으로 된다.

$$\overline{s}^* = \mu(z)H(\overline{x})\overline{x}^*$$

$$F''(\overline{x}^*) \le \frac{1}{\mu(\overline{z}^*)\overline{\nu}} \frac{(\sqrt{\overline{\nu}} + \gamma)^2}{(1-\gamma)^2} F''(\omega)$$

증명 $\|\delta_{\overline{x}}\|_{\overline{x}} \le \gamma < 1$ 이므로 $\overline{x}^* = \overline{x} - \delta_{\overline{x}}$ 는 추 $\overline{K}$ 의 엄격내점으로 된다.

$\overline{s}^*$ 은 $\left\| \dfrac{1}{\mu(z)}(\delta_{\overline{s}} + \overline{s}) + g_{\overline{x}} \right\|_{\overline{x}}^* = \| H_{\overline{x}}\delta_{\overline{x}} \|_{\overline{x}}^* = \| \delta_{\overline{x}} \|_{\overline{x}} \le \gamma < 1$ 이므로 $\overline{s}^* = \overline{s} + \delta_{\overline{s}} \in \operatorname{int} \overline{K}^*$ 이다.

척도관계를 만족시킨다는데 대해서는 이미 앞에서 보았다.

$$\frac{1}{\mu}\left\langle \overline{x}^*,\ \overline{s}^* \right\rangle = \| \overline{x}^* \|_{\overline{x}}^* \le (\| \overline{x} \|_{\overline{x}} + \delta_{\overline{x}})^2 \le (\sqrt{\overline{\nu}} + \gamma)^2$$

선행연구[1]에서와 마찬가지로

$$F''(\overline{x}^*) \le \frac{1}{(1-\gamma)^2} F''(\overline{x}) \le \frac{1}{\mu(\overline{z})(1-\gamma)^2} F''(\omega) \le$$

$$\le \left\langle \overline{x}^*,\ \overline{s}^* \right\rangle^{-1} \frac{(\sqrt{\overline{\nu}} + \gamma)^2}{(1-\gamma)^2} F''(\omega) \le \frac{1}{\mu(\overline{z}^*)\overline{\nu}} \frac{(\sqrt{\overline{\nu}} + \gamma)^2}{(1-\gamma)^2} F''(\omega)$$

가 성립한다.(증명끝)

아핀척도방향은 다음의 방정식풀이로 얻어진다.

$$\begin{cases} G(\Delta y;\ \Delta\overline{x}) - (0;\ \Delta\overline{s}) = -(G(y;\ \overline{x}) - (0;\ \overline{s})) \\ \Delta\overline{s} + H(\omega)\Delta\overline{x} = -\overline{s} \end{cases} \tag{7}$$

정리 2 ① 아핀척도방향 $(\Delta\overline{x};\ \Delta y;\ \Delta\overline{s})$ 에 대하여 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$\langle \Delta\bar{x},\ \Delta\bar{s}\rangle = 0$$
$$\langle \bar{x}+\Delta\bar{x},\ \bar{s}+\Delta\bar{s}\rangle = 0$$
$$\|\Delta\bar{x}\|_\omega^2 + (\|\Delta\bar{s}\|_\omega^*)^2 = \langle \bar{s},\ \bar{x}\rangle$$

② 또한 아핀척도방향 $(\Delta\bar{x};\Delta y;\Delta\bar{s})$에 대하여 μ와 선형상보항은 같은 비률로 감소한다.

증명 ① 식 (7)로부터 $G(y+\Delta y; x+\Delta\bar{x}) - (0;\bar{s}+\Delta\bar{s}) = 0$이다.

이 식의 량변에 $(y+\Delta y; x+\Delta\bar{x})^{\mathrm{T}}$를 곱하면 G의 빗대칭성에 의하여

$$(y+\Delta y; x+\Delta\bar{x})^{\mathrm{T}}(0;\bar{s}+\Delta\bar{s}) = 0$$

이 성립한다. 즉 $\langle \bar{x}+\Delta\bar{x}, \bar{s}+\Delta\bar{s}\rangle = 0$이다.

$$\begin{aligned}\langle \bar{x}+\Delta\bar{x},\ \bar{s}+\Delta\bar{s}\rangle &= \langle \bar{x},\ \bar{s}\rangle + \langle \bar{x},\ \Delta\bar{s}\rangle + \langle \Delta\bar{x},\ \bar{s}\rangle + \langle \Delta\bar{x},\ \Delta\bar{s}\rangle = \\ &= \langle \bar{x},\ \bar{s}\rangle + \langle \bar{x},\ -\bar{s}-H(\omega)\Delta\bar{x}\rangle + \langle \Delta\bar{x},\ \bar{s}\rangle + \langle \Delta\bar{x},\ \Delta\bar{s}\rangle = \\ &= \langle \bar{x},\ -H(\omega)\Delta\bar{x}\rangle + \langle \Delta\bar{x},\ \bar{s}\rangle + \langle \Delta\bar{x},\ \Delta\bar{s}\rangle = \\ &= \langle -H(\omega)\bar{x},\ \Delta\bar{x}\rangle + \langle \Delta\bar{x},\ \bar{s}\rangle + \langle \Delta\bar{x},\ \Delta\bar{s}\rangle = \\ &= \langle \Delta\bar{x},\ \Delta\bar{s}\rangle = 0\end{aligned}$$

$z^+ = (\bar{x}^+,\ y^+,\ \bar{s}^+) = (\bar{x}+\alpha\Delta\bar{x},\ y+\alpha\Delta y,\ \bar{s}+\alpha\Delta\bar{s}) = z+\alpha\Delta z$에 대하여 다음의 식이 성립한다.

$$G(y^+;\bar{x}^+) - (0;\bar{s}^+) = (1-\alpha)(G(y;\bar{x}) - (0;\bar{s}))$$
$$\mu(z^+) = (1-\alpha)\mu(z)$$

한편 식 (7)의 첫식에 $\Delta\bar{x}$를 곱하면 $\|\Delta\bar{x}\|_\omega^2 = \langle \bar{s},\ \Delta\bar{x}\rangle$, 이 식의 량변에 $[F''(\omega)]^{-1}\Delta\bar{s}$를 곱하면 $\|\Delta\bar{x}\|_\omega^2 + (\|\Delta\bar{s}\|_\omega^*)^2 = \langle \bar{s},\ \bar{x}\rangle$가 얻어지며 두 식을 합하면 $\|\Delta\bar{x}\|_\omega^2 + (\|\Delta\bar{s}\|_\omega^*)^2 = \langle \bar{s},\ \bar{x}\rangle$가 얻어진다.

② 선형상보항에 대해서는 식 (7)로부터

$$\begin{aligned}\mu(z^+) &= \langle \bar{x}+\alpha\Delta\bar{x},\ \bar{s}+\alpha\Delta\bar{s}\rangle = \langle \bar{x},\ \bar{s}\rangle + \alpha(\langle \bar{x},\ \Delta\bar{s}\rangle + \langle \Delta\bar{x},\ \bar{s}\rangle) + \alpha^2\langle \Delta\bar{x},\ \Delta\bar{s}\rangle = \\ &= \langle \bar{x},\ \bar{s}\rangle + \alpha(\langle \bar{x},\ -\bar{s}-H(\omega)\Delta\bar{x}\rangle + \langle \Delta\bar{x},\ \bar{s}\rangle) = (1-\alpha)\langle \bar{x},\ \bar{s}\rangle\end{aligned}$$

이다.(증명끝)

정리 3 걸음의 크기를 다음과 같이 정하면 z^+의 유효성이 담보된다.

$$\alpha \le \min\{(1-\beta)/\sqrt{\mu(\eta^2+\bar{\nu})},\ (1-\eta)\mu^{-1}\sqrt{\bar{\nu}+\eta^2}^{\,-1}\}$$

증명 $\|\psi\|_{\bar{x}}^* \le \eta\mu$라고 하자. 정의로부터 $\psi = \bar{s} - \mu H_{\bar{x}}\bar{x}$의 량변에 $H_x^{-1/2}$을 곱하고 노름을 취하면

$$(\|\bar{s}\|_{\bar{x}}^*)^2 = (\|\psi\|_{\bar{x}}^*)^2 + \mu^2(\|\bar{x}\|_{\bar{x}})^2 + 2\mu\bar{x}^{\mathrm{T}}\psi \le \eta^2\mu^2 + \mu^2\bar{\nu}$$
$$\|\bar{s}\|_{\bar{x}}^* \le \mu\sqrt{\bar{\nu}+\eta^2}$$

이다. 여기서 $\bar{x}^{\mathrm{T}}\psi = 0$이다.

이제 식 (7)의 첫식의 량변에 $H_{\bar{x}}^{-1/2}$을 곱하고 노름을 취하여 두제곱하면 다음의 식을 얻는다.

$$(\|\Delta\bar{s}\|_{\bar{x}}^*)^2 + \|H_{\bar{x}}^{-1/2}H(\omega)\Delta\bar{x}\|^2 = (\|\bar{s}\|_{\bar{x}}^*)^2 \le \mu^2(\eta^2+\bar{\nu})$$

$$\|\Delta\bar{s}\|_{\bar{x}}^{*} \le \mu\sqrt{\bar{\nu}+\eta^2}=k_s\,,\quad F''(\bar{x}^*)\le \frac{1}{\mu(\bar{z}^*)\bar{\nu}(1-\gamma)^2}F''(\omega)$$

한편 정리 1에 의하여 $H(\omega)\ge \mu(1-\gamma)^2 H(\bar{x})$ 이므로

$$\|H_{\bar{x}}^{-1/2}H(\omega)\Delta\bar{x}\|^2 \ge \mu(1-\beta)^2\,\|H_{\bar{x}}^{1/2}\Delta\bar{x}\|^2=\mu(1-\beta)^2\,\|\Delta\bar{x}\|_{\bar{x}}^2$$

이고 따라서

$$\|\Delta\bar{x}\|_{\bar{x}}^2 \le \mu(\eta^2+\bar{\nu})/(1-\beta)^2$$

$$\|\Delta\bar{x}\|_{\bar{x}} \le \sqrt{\mu(\eta^2+\bar{\nu})}/(1-\beta)=k_{\bar{x}}$$

$$\|\bar{x}^+-\bar{x}\|_{\bar{x}}=\alpha\,\|\Delta\bar{x}\|_{\bar{x}}\le 1$$

이므로 $\alpha\le k_{\bar{x}}{}^{-1}$ 이면 $\bar{x}^+=\bar{x}+\alpha\Delta\bar{x}\in\overline{K}$ 이다.

$$\mu^{-1}\|\bar{s}^+ +\mu g_{\bar{x}}\|_{-g_{\bar{x}}}^{*}=\mu^{-1}\|\bar{s}+\alpha\Delta\bar{s}+\mu g_{\bar{x}}\|_{-g_{\bar{x}}}^{*}=\mu^{-1}\|\psi+\alpha\Delta\bar{s}\|_{-g_{\bar{x}}}^{*}\le \eta+\alpha k_{\bar{s}}\le 1,\ -g_{\bar{x}}\in\overline{K}^*$$

이므로 $\alpha\le(1-\eta)k_{\bar{s}}^{-1}$ 이면 $\bar{s}^+=\bar{s}+\alpha\Delta\bar{s}\in\overline{K}^*$ 이다.

따라서 $\alpha\le\min\{k_x{}^{-1},\ (1-\eta)\,k_s{}^{-1}\}$ 로 정하면 새롭게 얻은 점의 유효성이 담보된다.(증명끝)

정리 4 예측과정에 새롭게 얻은 점에 대하여 다음과 같은 식을 만족시킨다.

$$\|\psi^+\|_{\bar{x}^+}^{*}\le \mu^+\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)^2$$

여기서 $\rho:=(\eta+\alpha\sqrt{\bar{\nu}}+\alpha\sqrt{\bar{\nu}+\eta^2})$ 이다.

증명 고정된 v_0 에 대하여 함수 $\Phi_t(\bar{x})=\bar{x}^{\mathrm{T}}v_0+tF(\bar{x})$ 를 생각하자. 이 함수의 점 $\bar{x}$ 에서의 뉴톤방향을 $n_t(\bar{x}):=-\nabla^2\Phi_t(\bar{x})^{-1}\nabla\Phi_t(\bar{x})$ 로 표시하고 $q=\|n_{t_2}(\bar{x})\|_{\bar{x}}$ 라고 하자. 자기정합함수의 성질에 의해 $q\le 1$ 이면

$$\|n_{t_2}(\bar{x}_2)\|_{\bar{x}_2}\le\left(\frac{q}{1-q}\right)^2 \tag{8}$$

이 성립한다.[3]

$v_0=\bar{s}^+,\ t_2=\mu^+,\ \bar{x}_2=\bar{x}^+$ 로 놓으면 식 (8)은 $\|\psi^+\|_{\bar{x}^+}^{*}\le\mu^+\left(\frac{q}{1-q}\right)^2$ 이다.

$\mu^+q=\|H_{\bar{x}}^{-1}(\bar{s}^+ +\mu^+g_{\bar{x}})\|_{\bar{x}}=\|\bar{s}^+ +\mu^+g_{\bar{x}}\|_{\bar{x}}^{*},\ \ \mu^+=(1-\alpha)\mu$ 이므로

$$\mu^+q=\|H_{\bar{x}}^{-1}(\bar{s}^+ +\mu^+g_{\bar{x}})\|_{\bar{x}}=\|\bar{s}^+ +\mu^+g_{\bar{x}}\|_{\bar{x}}^{*}=\|\psi-(\mu-\mu^+)g_{\bar{x}}+\alpha d\bar{s}\|_{\bar{x}}^{*}\le$$

$$\le\|\psi\|_{\bar{x}}^{*}+\mu\alpha\,\|g_{\bar{x}}\|_{\bar{x}}+\alpha\,\|d\bar{s}\|_{\bar{x}}^{*}\le\|\psi\|_{\bar{x}}^{*}+\mu\alpha\sqrt{\bar{\nu}}+\alpha\mu\sqrt{\bar{\nu}+\eta^2}\le$$

$$\le\mu(\eta+\alpha\sqrt{\bar{\nu}}+\alpha\sqrt{\bar{\nu}+\eta^2})$$

$$q\le\frac{1}{1-\alpha}(\eta+\alpha\sqrt{\bar{\nu}}+\alpha\sqrt{\bar{\nu}+\eta^2}):=\rho$$

$$\|\psi^+\|_{\bar{x}^+}^{*}\le\mu^+\left(\frac{q}{1-q}\right)^2\le\mu^+\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)^2$$

이 성립한다.(증명끝)

다음으로 초기점은 $z^0 \in F \cap N(\eta)$ 를 만족시켜야 한다. 초기점을 $\bar{x}^0 \in \bar{K}^\circ$ 로 정하고 $\bar{s}^0 = -g_{\bar{x}^0}$ 으로 정하면 $\mu(z^0) = 1$ 로 된다. 또한 $z^0 \in N(0) \subset N(\eta)$ 가 만족되게 된다.

이상의 결과를 종합하면 알고리듬은 다음과 같다.

$\eta \le 1/6$, $\bar{\alpha} = 1/84$ 로 놓고 풀이의 정확도 ε 을 정한다.

걸음 1 $\mu(z) < \varepsilon$ 이면 반복을 중지한다.

걸음 2 문제 (3)을 풀어 아핀척도방향 $(\Delta\bar{x}; \Delta y; \Delta\bar{s})$ 를 구한다.

$z + \alpha\Delta z \in F \cap N(2\eta)$ 가 성립하는 최대의 α 를 구한다.

$z := z + \alpha\Delta z$ 로 갱신한다.

걸음 3 문제 (2)를 풀어 중심화방향 $\delta_z := (\delta_{\bar{x}},\ \delta_y,\ \delta_{\bar{s}})$ 를 얻는다.

$z := z + \bar{\alpha}\delta_z$ 로 놓고 걸음 1로 간다.

참 고 문 헌

[1] Andres Skajaa et al.; Mathematical Programming, 150, 2, 391, 2015.
[2] Yurii Nesterov; Optimization Methods and Software, 27, 4, 893, 2012.
[3] Y. E. Nesterov et al.; Math. Program., 84, 227, 1999.

주체109(2020)년 3월 15일 원고접수

A Primal-Dual Interior-Point Method for Nonsymmetric Cones Using Scaling Points

Ri Hong Il, Kim Yu Gyong

In this paper, we propose a primal-dual interior-point method using a homogeneous model and a scaling point. Using this method, we can get an efficient algorithm without using a phase I algorithm and conjugate barriers.

Keywords: nonsymmetric cone, primal-dual interior method