김일성종합대학학보 주체108(2019)년
물리학 제65권 제1호

진공요동의 영향을 받으면서 운동하는 고전립자의 상대론적, 확률적 및 동력학적운동방정식

김일광, 김광일, 안영준

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《기초과학을 끊임없이 심화발전시키지 않고서는 첨단과학기술을 연구도입할수도 없고 새로운 높은 수준의 과학기술을 연구개발할수도 없습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제22권 21페지)

선행연구들[2－4, 6, 8, 9]에서는 브라운운동과 함께 브라운운동과 량자력학의 련관성에 대하여 고찰하였다. 페니에스(Fenyes)와 넬슨(Nelson)은 비상대론적브라운운동을 구체적으로 분석하여 슈뢰딩거방정식과 류사한 립자의 확률적 및 동력학적운동방정식[3]을 세웠다. 그러나 그들은 시공간속에서 미시립자가 브라운운동을 하는 요인에 대하여서는 관심을 돌리지 않았으며 확률동력학적방정식유도의 물리적의미를 명백하게 밝히지 않았다. 모라토(Morato)와 비올라(Viola), 노털(Nottale) 등은 최근에 상대론적인 브라운립자의 운동에 대한 확률동력학적방정식을 연구하였다. 이 방정식은 량자력학의 클라인－고르돈(Klein-Gordon)방정식과 거의 류사하다.[5, 7]

우리는 진공매질이 미시립자의 브라운운동을 발생시키는 기본담당자라고 가정하고 그것에 기초하여 상대론적립자의 확률적 및 동력학적운동을 표현하는 방정식을 유도하고 그것이 바로 클라인－고르돈방정식이라는것을 확인하였다. 또한 상대론적인 브라운립자의 운동에서는 립자의 공간적인 확산뿐아니라 시간적인 확산도 생긴다는것도 강조하였다.

1. 진공요동의 영향을 받는 고전립자의 상대론적라그랑쥬안

량자력학과 고전력학을 정확하게 구별하기 위하여 뉴톤력학과 상대론적력학을 통털어 고전력학이라고 하겠다. 다시말하여 립자의 비상대론적인 운동과 상대론적인 운동을 통털어 립자의 고전력학적운동이라고 하겠다.

고전립자는 명백한 자리길을 따라 운동한다는것이 일반적인 표상이지만 립자가 어떤 주위매질로부터 부단히 무질서한 우연섭동을 받으면 운동에서 어느 정도 무질서성이 나타나며 립자의 운동법칙도 확률적성격을 띠게 된다. 그러므로 립자가 주위환경으로부터(우리의 경우에는 진공으로부터) 무질서한 섭동을 받으면서 운동한다고 하면 립자의 시공간적위치를 정확하게 측정하거나 규정하는것이 실천적으로 불가능하다. 때문에 립자가 고찰하는 시공간점 $\boldsymbol{r},\ t$ 근방에 나타날 확률밀도 $\rho(\boldsymbol{r},\ t)$ 를 불가피하게 받아들이게 되며 이 량의 변화법칙을 찾지 않으면 안된다. 1개 립자의 운동을 연구하는 경우 어떤 시공간점에서 립자의 존재확률밀도 $\rho(\boldsymbol{r},\ t)$ 는 응당 조건 $\rho(\boldsymbol{r},\ t)\ge 0$ 과

$$\int \rho(\boldsymbol{r},\ t)\,d\Omega = 1$$

을 만족시켜야 한다. 여기서 적분구간은 전공간 Ω이다.

또한 만일 공간에서 위치에 따라 립자가 나타날 확률밀도가 불균일하면 립자의 확률적인 배치불균일성에 의하여 생기는 일종의 새로운 포텐샬 즉 확산포텐샬[1]

$$U_d(\boldsymbol{r}) = \frac{m_0 D^2}{2}\left(\frac{\nabla\rho}{\rho}\right)^2 \tag{1}$$

이 나타난다. 이것은 비상대론적브라운립자에 해당한 확산포텐샬이다. 상대론적립자의 라그랑쥬안을 작성할 때에는 비상대론적인 확산포텐샬 식 (1)을 상대론적요구가 만족되도록 다시 작성해야 한다. 식 (1)에서 D는 진공속에서 립자의 확산결수, m_0은 립자의 정지질량을 표시하며 ∇는 구배연산자를 의미한다.

한편 립자의 확률적배치와 동력학적상태는 $\rho(\boldsymbol{r},\ t)$와 S를 알면 완전히 결정할수 있다. 왜냐하면 $\rho(\boldsymbol{r},\ t)$는 립자의 시공간적배치상태를 반영하며 S로부터 립자의 평균운동량을 구할수 있기때문이다. 그러므로 립자의 상태를 표시하는 량들인 $\rho,\ S$를 서로 짝진 정준변수로 선택하고 그것을 리용하여 립자의 운동을 반영하는 라그랑쥬안을 작성할수 있다. 비상대론적인 경우에 해당한 확산포텐샬 식 (1)을 고려하여 작성한 라그랑쥬안은 다음과 같다.

$$L = -\rho\frac{\partial S}{\partial t} - H = -\rho\frac{\partial S}{\partial t} - \rho\left(\frac{(\nabla S)^2}{2m_0} + U(\boldsymbol{r},\ t) + \frac{\hbar^2}{8m_0}\left(\frac{\nabla\rho}{\rho}\right)^2\right) \tag{2}$$

여기서 H는 해밀터니안, $\hbar = 2m_0 D$ [1]이다.

라그랑쥬안 식 (2)를 자리표표시 $x_\mu = \{t,\ x_1,\ x_2,\ x_3\}$에서 적은 정준방정식

$$\frac{\partial L}{\partial\rho} - \sum_{\mu=0}^{3}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial\rho/\partial x_\mu)}\right) = 0,\quad \frac{\partial L}{\partial S} - \sum_{\mu=0}^{3}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial S/\partial x_\mu)}\right) = 0$$

에 넣고 계산하면 다음과 같은 방정식들을 얻는다.

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{(\nabla S)^2}{2m_0} + U(\boldsymbol{r},\ t) + \frac{\hbar^2}{8m_0}\left(\left(\frac{\nabla\rho}{\rho}\right)^2 - \frac{2\Delta\rho}{\rho}\right),\quad -\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{1}{m_0}\nabla(\rho\nabla S)$$

여기서 Δ는 라쁠라스연산자이다.

이제 비상대론적인 라그랑쥬안 식 (2)를 상대론적인 라그랑쥬안으로 넘기자.

상대론적인 라그랑쥬안은 다음과 같은 요구를 만족시켜야 한다.

첫째, 라그랑쥬안 L은 로렌쯔변환에 대하여 로렌쯔공변성을 만족시켜야 한다.

둘째, 라그랑쥬안 L은 에네르기밀도의 본을 가져야 한다.

셋째, 라그랑쥬안 L은 극한조작($c \to \infty$)을 하면 비상대론적인 라그랑쥬안 식 (2)로 넘어가야 한다. 여기서 c는 빛속도상수이다.

이러한 조건들을 만족하는 라그랑쥬안을 작성하기 위하여 다음과 같이 로렌쯔변환에 대하여 불변인 량들을 찾고 그것으로 상대론적인 라그랑쥬안을 꾸미였다.

$$\rho \to \eta = \frac{m_0 c^2}{\varepsilon}\rho \tag{3}$$

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m_0}\right) \to \frac{1}{2m_0}\left(\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - (\nabla S)^2 - m_0 c^2\right) = \frac{1}{m_0}\left(\frac{\partial S}{\partial x_\mu}\frac{\partial S}{\partial x^\mu} - m_0^2 c^2\right) \tag{4}$$

$$\frac{m_0 D^2}{2}\left(\frac{\nabla\rho}{\rho}\right)^2 \to -\frac{m_0 D^2}{2}\left(\frac{1}{\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial x_\mu}\frac{\partial\eta}{\partial x^\mu}\right) \tag{5}$$

여기서 $x_0 = ct$, $x_\mu = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$, $x^\mu = \{x_0, x^1, x^2, x^3\}$이다. 그리고 ρ와 ε은 립자의 존재확률밀도와 에네르기로서 로렌쯔변환할 때 다음과 같이 변환되는 량이다.

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

여기서 ρ_0은 정지한 기준계에서 립자의 확률밀도이고 $\varepsilon_0 = m_0 c^2$은 립자의 정지에네르기, $\beta^2 = \upsilon^2/c^2$이다. 웃식을 고려하면 식 (3)의 η는 명백히 로렌쯔불변량이고 조작 $c\to\infty$일 때 $\eta\to\rho$이라는것을 알수 있다. 식 (4)의 오른변도 로렌쯔불변이라는것을 인차 알수 있다. 즉 $c\to\infty$일 때 식 (4)의 오른변의 극한식은 다음과 같이 얻을수 있다.

상대론에서 작용량 S와 립자의 에네르기 ε사이의 관계가 $\varepsilon = -\frac{\partial S}{\partial t}$로 표시된다는 사실과 비상대론적력학에서 립자의 에네르기에는 항 $m_0 c^2$이 들어있지 않다는 사실을 고려하면서 새 작용량 S'를 $S = S' - m_0 c^2 t$와 같이 받아들인다. 그리고 이것을 식 (4)의 오른변에 대입한 다음 극한조작($c\to\infty$)을 하면 식 (4)의 왼변과 같아진다는것을 인차 알수 있다.

로렌쯔불변인 식 (5)의 오른변도 역시 비상대론적극한인 왼변으로 넘어간다. 식 (5)의 오른변은 3차원자리표공간에서 정의한 확산포텐샬을 시간축까지 포함하는 4차원민꼽스끼시공간으로 확장한 식이며 로렌쯔변환에 대하여 공변인 량이다. 이 식의 중요한 의미는 립자의 확산이 공간에서뿐아니라 시간축우에서도 일어난다는것이다.

이와 같이 외부마당이 없을 때 진공요동의 영향을 받으면서 운동하는 정지질량이 m_0인 립자에 대한 상대론적인 라그랑쥬안은 다음과 같이 표시된다.

$$L = \eta\left(\frac{1}{2m_0}\left(\frac{\partial S}{\partial x_\mu}\frac{\partial S}{\partial x^\mu} - m_0^2 c^2\right) + \frac{m_0 D^2}{2}\left(\frac{1}{\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial x_\mu}\frac{\partial\eta}{\partial x^\mu}\right)\right) \tag{6}$$

상대론적인 라그랑쥬안 식 (6)은 비상대론적극한조작($c\to\infty$)을 할 때 비상대론적인 라그랑쥬안 식 (2)로 넘어간다.

2. 상대론적인 확률적 및 동력학적운동방정식

정준방정식에서 ρ를 로렌쯔불변인 상태량 η로 바꾸고 거기에 상대론적인 라그랑쥬안 식 (6)을 대입하면 다음과 같은 운동방정식을 얻는다.

$$\frac{1}{2m_0}\left(\frac{\partial S}{\partial x_\mu}\frac{\partial S}{\partial x^\mu} - m_0^2 c^2\right) + \frac{m_0 D^2}{2}\left(\frac{1}{\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial x_\mu}\frac{\partial\eta}{\partial x^\mu} - \frac{2}{\eta}\frac{\partial^2\eta}{\partial x_\mu \partial x^\mu}\right) = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\eta\frac{\partial S}{\partial x^\mu}\right) = 0 \tag{8}$$

이제 관계식 $\hbar = 2m_0 D$를 고려하면 식 (7)은 다음과 같이 표시된다.

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_\mu}\frac{\partial S}{\partial x^\mu}-m_0^2c^2\right)+\frac{\hbar^2}{4}\left(\frac{1}{\eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x_\mu}\frac{\partial \eta}{\partial x^\mu}-\frac{2}{\eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_\mu \partial x^\mu}\right)=0 \tag{9}$$

량 η와 다음과 같은 관계를 가지는 새로운 무본량 Q를 받아들인다.

$$\eta=\eta_0 e^{-2Q} \tag{10}$$

여기서 η_0은 η와 물리적본이 같은 임의의 상수이다.

그러면 식 (8)과 (9)를 각각 다음과 같이 적을수 있다.

$$\frac{\partial Q}{\partial x_\mu}\frac{\partial S}{\partial x^\mu}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 S}{\partial x_\mu \partial x^\mu}=0 \tag{11}$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_\mu}\frac{\partial S}{\partial x^\mu}-m_0^2c^2\right)-\hbar^2\left(\frac{1}{\eta^2}\frac{\partial Q}{\partial x_\mu}\frac{\partial Q}{\partial x^\mu}-\frac{2}{\eta}\frac{\partial^2 Q}{\partial x_\mu \partial x^\mu}\right)=0 \tag{12}$$

식 (11)에 $\frac{2i}{\hbar}$를 곱하고 식 (12)에 $\frac{1}{\hbar^2}$을 곱한 다음 서로 합하면 새로운 량

$$P=\frac{S}{\hbar}+iQ \tag{13}$$

에 대한 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\frac{\partial P}{\partial x_\mu}\frac{\partial P}{\partial x^\mu}-i\frac{\partial^2 P}{\partial x_\mu \partial x^\mu}-\frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}=0 \tag{14}$$

또한 새로운 량 ψ에로의 변환 $\psi=\sqrt{\eta_0}\,e^{iP}$를 받아들이면 비선형편미분방정식 (14)는 다음과 같은 선형편미분방정식으로 넘어간다.

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu}\frac{\partial \psi}{\partial x^\mu}+\frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\psi=0 \tag{15}$$

식 (15)가 바로 진공요동에 의한 브라운운동을 동반하는 고전립자의 상대론적운동을 표현하는 방정식이다. 즉 량자력학에서 잘 알려져있는 클라인－고르돈방정식이다.

로렌쯔불변성을 만족하도록 작성된 라그랑쥬안 식 (5)에는 브라운립자의 확산이 공간자리표축 X_1, X_2, X_3에서뿐아니라 시간자리표축 X_0에 따라서도 발생한다는것을 의미하는 확산항이 있다.

이것은 4차원민꼽스끼공간에서 두 세계점사이의 거리의 불변성을 요구하는 특수상대성리론에 의하여 립자의 공간자리표 x_1, x_2, x_3들과 시간자리표 $x_0=ct$가 서로 관련되여 있고 브라운립자의 자리표와 속도가 평균값근방에서 부단히 요동한다는 사실로부터 나오는 응당한 결과[10]라고 보아야 할것이다.

맺 는 말

브라운립자의 운동에 대한 비상대론적인 라그랑쥬안을 로렌쯔변환에 대하여 공변인 상대론적인 라그랑쥬안으로 일반화하고 정준형식론에 기초하여 산일이 없는 섭동매질인 진공속에서 운동하는 고전립자의 상대론적 및 확률동력학적운동법칙으로서 클라인－고르돈방정식을 유도하였다.

참 고 문 헌

[1] 김일성종합대학학보 물리학, 64, 4, 37, 주체107(2018).
[2] L. Nottale; Journal of Chaos, Solitons and Fractals, 4, 3, 361, 1994.
[3] E. Nelson; Phys. Rev., 150, 1079, 1966.
[4] G. N. Ord; Journal of Physics, A 16, 1869, 1983.
[5] L. Morato et al.; J. Math. Phys., 36, 4691, 1995.
[6] K. L. Chung et al.; From Brownian Motion to Schrödinger's Equation, Springer, 234～236, 2001.
[7] L. Nottale; Scale Relativity and Fractal Space-Time(A New Approach to Unifying Relativity and Quantum Mechanics), France, 254～260, 2011.
[8] F. Smarandache et al.; Quantization in Astrophysics, Brownian Motion and Supersymmetry, Mathtiger, 72～88, 2007.
[9] C. Gour et al.; Foundations of Physics, 29, 12, 1999.
[10] N. Dragon; The Geometry of Special Relativity, Springer, 27～39, 2012.

주체107(2018)년 9월 5일 원고접수

Relativistic, Stochastic and Dynamical Equation of Motion of Classical Particle under Vacuum Perturbation

Kim Il Gwang, Kim Kwang Il and *An Yong Jun*

We constructed Lorentz covariance Lagrangian with the relativistic diffusion potential of a classical particle moving in vacuum based on the postulate that vacuum is a peculiar perturbation medium and from it we derived exactly the stochastic dynamical equation of a relativistic particle as same as Klein-Gordon equation of quantum mechanics.

Key words: Klein-Gordon equation, Brownian motion, relativity