김일성종합대학학보 JOURNAL OF KIM IL SUNG UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체106(2017)년 제63권 제11호 Vol. 63 No. 11 JUCHE106(2017).

주기점을 가지지 않는 원둘레넘기기로부터 유도된 초공간력학계의 $\omega-$극한모임에 대한 연구

김주용, 주현희

우리는 주기점을 가지지 않는 원둘레넘기기 $f:S^1\to S^1$ 로부터 유도된 초공간넘기기 $\bar{f}_c:K_c(S^1)\to K_c(S^1)$ 의 $\omega-$극한모임에 대하여 연구하였다. 여기서 $K_c(S^1)$ 은 S^1 의 비지 않은 닫긴련속체들로 이루어진 초공간이며 $\bar{f}_c$ 는 $\bar{f}_c(X)=f(X)$, $X\in K_c(S^1)$ 로 정의되는 모임값넘기기이다.

선행연구[1]에서는 구간넘기기로부터 유도된 초공간넘기기에 대하여 $\omega-$극한모임이 불퇴화련결성분을 가지면 유한개의 순환구간들로 이루어진다는것을 밝혔다.

선행연구[2]에서는 위상이행적인 그라프넘기기 $f:G\to G$ 에 대하여 어떤 유한모임 $\mathscr{P}\subset K_c(G)$ 가 있어서 $\mathscr{P}$ 의 매 점은 $\bar{f}_c$ 에 관한 주기점이고 임의의 불퇴화모임 $K\in K_c(G)$ 에 대해 그것의 $\omega-$극한모임은 $\mathscr{P}$ 의 어떤 점의 주기궤도와 일치하다는것을 밝혔다.

론문에서는 위상이행적이 아닌 그라프넘기기의 한가지 경우로 되는 주기점을 가지지 않는 원둘레넘기기로부터 유도된 초공간넘기기의 $\omega-$극한모임의 성질을 연구하였다.

$f:S^1\to S^1$ 은 련속이며 주기점을 가지지 않는다고 가정한다.

보조정리 1 $J\in K_c(S^1)$ 에 대하여 $I\in\omega(\bar{f}_c,\ J)$ 라고 하면 $\forall K\in \mathrm{Orb}^+(\bar{f}_c,\ J)$, $I\not\subset \mathrm{int}\,K$ 가 성립된다.

정리 1 $\{S^1\}\in\omega(\bar{f}_c,\ J)$ 이면 $\omega(\bar{f}_c,\ J)=\{S^1\}$ 이 성립된다.

보조정리 2 $I\in K_c(S^1)$ 에 대하여 $\overline{\bigcup_{m\in \boldsymbol{N}} f^m(I)}$ 는 f 에 관한 불변모임이다.

보조정리 3 $I\in K_c(S^1)$, $\exists n>m$, $f^n(I)\cap f^m(I)\neq\phi$ 이면 어떤 부분렬 $\{n_k\}_{k\in \boldsymbol{N}}$ 이 있어서 $\bigcup_{k\in \boldsymbol{N}} f^{n_k}(I)=S^1$ 이 성립된다.

증명 $n-m=k$ 라고 하면 조건으로부터 $f^m(I)$ 와 $f^{m+k}(I)$ 는 련결이다.

또한 $\phi\neq f^k(f^m(I)\cap f^{m+k}(I))\subset f^{m+k}(I)\cap f^{m+2k}(I)$ 이다. 즉 $f^{m+k}(I)$ 와 $f^{m+2k}(I)$ 도 련결임을 알수 있다.

$M=\bigcup_{k\in \boldsymbol{N}\cup\{0\}} f^{m+lk}(I)$ 라고 할 때 M 은 귀납법으로부터 련결모임이다. 따라서 $\overline{M}$ 는 닫긴 련결모임으로서 $K_c(S^1)$의 원소이며 보조정리 2로부터 f^k 에 관한 불변모임으로 된다.

$\overline{M}$ 가 S^1 의 어떤 닫긴구간이라고 하면 $f^k|_{\overline{M}}:\overline{M}\to\overline{M}$ 는 구간넘기기로서 부동점을 가진다. 이것은 초기조건에 모순된다. 따라서 $\overline{M}=S^1$ 이다.

M 이 S^1 의 열린부분구간이라고 하면 $\overline{M}=S^1$ 이므로 M 의 두 끝점은 일치한다.

그 점을 x라고 하면 $S^1 \setminus M = \{x\}$가 성립된다. M이 f에 관하여 불변이고 f가 우로의 넘기기이므로 $f(x)=x$이여야 한다. 이것은 초기가정에 모순된다. 따라서 $M=S^1$이다.(증명끝)

주의 1 보조정리 3의 증명과정에서 $M=\bigcup_{k>n} f^{m+lk}(I)$, $n \in \boldsymbol{N}$으로 바꾸어도 $M=S^1$이 성립된다.

정리 2 $I \in K_c(S^1)$이라고 할 때 $\omega(\bar{f}_c,\ I)=\{S^1\}$이기 위해서는 $\exists n,\ m \in \mathbf{N}\ (n>m)$, $f^m(I) \subset f^n(I)$일것이 필요하고 충분하다.

정리 3 $I \in \omega(f_c,\ J)$이고 I가 불퇴화구간이면 어떤 부분렬 $\{n_k\}_{k \in N}$이 있어서 $\bigcup_{k>n} f^{n_k}(J)=S^1$ $(\forall n \in \boldsymbol{N})$이 성립된다.

증명 $K_c(S^1)$에서 $U_{d(I)/2}(I)$를 생각하면 이 모임의 매 원소들은 I의 가운데점에서 교차된다. I는 J의 $\omega-$극한점이므로 어떤 $n_k,\ n_l$이 있어서 $f^{n_k}(J),\ f^{n_l}(J) \in U_{d(I)/2}(I)$이다. 즉 $f^{n_k}(J) \cap f^{n_l}(J) \neq \phi$이므로 보조정리 3과 주의 1로부터 결과가 성립된다.(증명끝)

정리 3의 결과는 J의 극한점 I에 대해서도 성립된다.

이를 증명하기 위해 우선 다음의 보조정리들을 보기로 하자.

보조정리 4 I는 보조정리 3의 조건을 만족시키는 구간이고 초공간 $K_c(S^1)$에서 I의 $\omega-$극한점이 S^1이 아니면 임의의 점 $x \in S^1$에 대하여 f에 의한 I의 어떤 반복상이 있어서 x를 내점으로 포함한다.

보조정리 5 I가 우와 같은 구간이면 f에 의한 I의 반복상들의 합은 유한번만에 S^1을 덮는다.

정리 4 $I \in \omega(f_c,\ J)$이면 $\exists n,\ m \in \boldsymbol{N}$, $f^n(I) \cap f^m(I) \neq \phi$이 성립된다.

증명 $I=S^1$이면 분명히 성립하므로 $I \neq S^1$인 경우만 보면 된다.

결론을 부정하면 I의 반복상들은 서로 비교차하게 된다.

따라서 임의의 $\varepsilon>0$에 대해서도 직경이 ε보다 작은 I의 어떤 반복상이 존재한다.

한편 정리 3과 가정으로부터 J는 보조정리 3－5의 조건들을 만족시킨다.

보조정리 5로부터 $\exists n \in \boldsymbol{N}$, $\bigcup_{k=0}^{n} f^k(J)=S^1$이 나오며 이 $f^k(J)$들은 둘씩 서로 비교차하거나 한점에서 교차하거나 또는 어떤 구간을 공통부분구간으로 가진다. 한점에서 교차하는 경우를 주목하면 이 교차점의 개수는 유한이다. 보조정리 4로부터 매 교차점에 대해 그 점을 내점으로 포함하는 J의 반복상이 적어도 하나 존재한다. 이 반복상들까지 포함한 피복을 $\mathcal{k}=\{f^k(J)\}_{k=0}^m$이라고 하고 $\mathcal{k}$의 교차구간들의 길이들중 0이 아닌 가장 작은 길이를 $d_{\min}$이라고 할 때 $\varepsilon=d_{\min}$으로 취하면 가정으로부터 $\exists l \in \boldsymbol{N}$, $d(f^l(I))<\varepsilon$이 성립된다.

또한 $f^l(I)$는 반드시 $\mathcal{k}$의 어떤 원소의 내부에 포함된다. 사실 $\mathcal{k}$가 S^1의 피복이므로 $f^l(I)$와 사귀는 $\mathcal{k}$의 원소 $f^t(J)$가 있다. $f^l(I) \not\subset \operatorname{int} f^t(J)$라고 하면 $\mathcal{k}$의 구성으로부터 $f^t(J)$와 구간에서 교차하면서 $f^l(I) \setminus \operatorname{int} f^t(J)$와 사귀는 $\mathcal{k}$의 원소 $f^u(J)$가 존재한다. 이때 $d(f^l(I))<\varepsilon \le d(f^t(J) \cap f^u(J))$가 성립되므로 $f^l(I) \subset \operatorname{int} f^u(J)$이다. 이것은 보조정리 1에 모순된다.(증명끝)

주의 2 정리 4로부터 J 의 극한점 I 에 대해서도 보조정리 3－5의 결과가 그대로 성립된다.

이상의 론의로부터 다음과 같은 론문의 기본결과가 성립된다.

정리 5 $f: S^1 \to S^1$ 은 주기점을 가지지 않는 련속넘기기이고 I 는 $K_c(S^1)$ 의 임의의 원소(즉 닫긴구간이거나 S^1 그자체)로서 비자명한 $\omega-$극한모임 $\tilde{\omega}$ 을 가진다고 하면 다음의 결과들이 성립된다.

① $\tilde{\omega}$ 은 무한모임이다.

② $\tilde{\omega}$ 의 서로 다른 원소사이에는 그 어떤 포함관계도 성립하지 않는다.

③ $\tilde{\omega}$ 에는 S^1 의 유한피복이 존재한다.

④ S^1 의 임의의 점에 대하여 그 점을 내점으로 포함하는 $\tilde{\omega}$ 의 원소가 있다.

증명 ① $\tilde{\omega}$ 이 유한모임이면 $\bar{f}_c$ 에 의해 순환되는 유한개의 주기구간들로 이루어지게 된다. 즉 $\exists n \in \boldsymbol{N}$, $\exists J \in \omega(\bar{f}_c,\ I)$, $\bar{f}_c^{\,n}(J) = f^n(J) = J$ 이다.

이때 $f^n|_J : J \to J$ 는 닫긴구간우에서의 넘기기이므로 J 에서 부동점을 가진다. 이 점은 f 에 관한 주기점으로 된다. 이것은 초기가정에 모순된다.

② $\forall n > m$ 에 대하여 f 는 주기점을 가지지 않으므로 $f^m(I) \supset f^n(I)$ 일수 없다.

$f^m(I) \subset f^n(I)$ 인 경우에는 정리 2로부터 $\tilde{\omega} = \{S^1\}$ 이 성립된다.

따라서 I 의 반복상들사이에는 그 어떤 포함관계도 서지 않으므로 $\tilde{\omega}$ 의 서로 다른 원소사이에 그 어떤 포함관계도 서지 않는다.

③, ④는 정리 4와 보조정리 4, 5로부터 성립된다.(증명끝)

선행연구[1]에 의하면 구간넘기기로부터 유도된 초공간넘기기의 $\omega-$극한모임은 $\bar{f}_c$ 에 의해 순환되는 유한개의 주기구간들로 이루어진다. 선행연구[2]에서도 위상이행적인 그라프넘기기에 대하여 류사한 결과를 얻었다.

그러나 우리는 주기점을 가지지 않는 원둘레넘기기에 대해서는 비자명한 $\omega-$극한모임들이 무한모임으로 되며 S^1 의 유한피복이 존재한다는 새로운 결과를 얻었다.

참 고 문 헌

[1] J. S. Canovas et al.; Fuzzy Sets and Systems, 257, 132, 2014.

[2] D. Kwietniak et al.; Chaos, Solitons and Fractals, 33, 76, 2007.

주체106(2017)년 7월 5일 원고접수

$\omega-$Limit Set on the Hyperspace Mechanical System of Induced by Continuous Circle Maps without Periodic Points

Kim Ju Yong, Ju Hyon Hui

We studied the properties of $\omega-$limit set over the hyperspace $K_c(S^1)$ of continuous circle maps not having periodic points. For a nondegenertae interval, no inclusion exists between its iterations and their union covers the circle, unless its $\omega-$limit set consists exclusively of S^1 or it does not have an $\omega-$limit point on $K_c(S^1)$.

Key words: circle map, induced map, hyperspace, $\omega-$limit set