김일성종합대학학보 주체107(2018)년
수 학 제64권 제4호

제한된 봉사시간을 가진 대중봉사계에서의 파라메터조종

김천을, 김룡록

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《인민경제 모든 부문의 생산기술공정과 생산방법, 경영활동을 새로운 과학적토대우에 올려세우기 위한 연구사업도 강화하여야 합니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제11권 138페지)

선행연구[1]에서는 종속된 $M/M/1/\mathrm{K}$형봉사계에서 계의 상태에 따르는 요청들의 입장을 조종할 때의 작업주기에 대하여 해석하였으며 선행연구[2]에서는 2개의 봉사기구가 직렬로 련결된 거절체계에서 장기실행평균비용을 최소로 하는 최량방략을 연구하였다. 또한 선행연구[3]에서는 두선봉사계에서 입장조종을 위한 평형방략에 대하여 론의하였다.

우리는 제한을 가진 조건부분포의 모형화와 제한을 가진 봉사시간분포를 가진 거절봉사계의 파라메터조종에 대하여 론의하였다.

일반적으로 대중봉사계에서 리용되는 도착시간간격이나 봉사시간길이는 부값이 아니며 무한히 길수도 없지만 분포형태는 지수분포나 정규분포와 같을수 있다. 따라서 대중봉사계를 연구할 때 제한을 가진 조건부우연량들을 론의할 필요가 제기된다.

상수제한을 가진 분포함수

$$F(x\,|\,C)=P\{\xi\le x,\ |\xi|\le C\}=\begin{cases}[F_\xi(x)-F_\xi(-C)]/[F_\xi(C)-F_\xi(-C)], & x\le C\\ 1, & x>C\end{cases}$$

를 가지는 몇가지 조건부우연량들에 대하여 보기로 하자.

조건부기하분포의 확률함수는 $P\{\xi=m\,|\,\xi\le n\}=\dfrac{P\{\xi=m,\ \xi\le n\}}{P\{\xi\le n\}}=\dfrac{pq^{m-1}}{1-q^{n-1}}$이고 조건부뽜쏭분포의 확률함수는 $P\{\xi=m\,|\,\xi\le n\}=\dfrac{P\{\xi=m,\ \xi\le n\}}{P\{\xi\le n\}}=\dfrac{\lambda^m/m!\cdot e^{-\lambda}}{\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}}=\dfrac{\lambda^m/m!}{\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}},\ m\le n$ 이며

조건부지수분포의 밀도함수는 $p(x\,|\,C)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}/(1-e^{-\lambda C}), & x\in[0,\ C]\\ 0, & x\notin[0,\ C]\end{cases}$ 이다.

또한 조건부정규분포의 밀도함수와 수학적기대값, 분산은 각각 다음과 같이 계산된다.

$$p(x\,|\,C)=e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}\Big/\int_{a-C}^{a+C}e^{-(t-a)^2/(2\sigma^2)}dt\ \ (a-C\le x\le a+C),\ \mathrm{E}(\xi\,|\,C)=a,\ \mathrm{Var}(\xi\,|\,C)=\sigma^2$$

조건부지수분포, 조건부기하분포, 조건부정규분포의 모형화를 보기로 하자.

보조정리 1 u가 구간 $(0,\ 1)$에서 평등분포하는 우연량이면 $\eta=-\ln(1-u(1-e^{-\lambda C}))/\lambda$의 분포는 조건부지수분포이고 $\eta=[\ln(u/(1-q^n))/\ln q]$의 분포는 조건부기하분포이다. 여기서 $[a]$는 a를 넘지 않는 옹근수를 의미한다.

조건부정규분포의 모형화는 채택기각법으로 할수 있다.

보조정리 2 $G=\{(x,\ y)\,|\,a-C\le x\le a+C,\ \ 0\le y\le e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}\}$ 이고 $\overline{G}=\int_{a-C}^{a+C}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx$ 라고 하고 우연량 ξ 와 η 의 동시적밀도함수가 $p_{\xi,\ \eta}(x,\ y)=1/\overline{G},\ (x,\ y)\in G$ 라고 하면 우연량 ξ 는 조건부정규분포에 따른다.

이로부터 채택기각법에 의하여 구간 $(a-C,\ a+C)\times(0,\ 1)$ 에서 평등분포하는 우연점 $(\xi,\ \eta)$ 를 발생시킨다고 할 때 $\eta>e^{-(\xi-a)^2/(2\sigma^2)}$ 이면 ξ 를 버리고 $\eta\le e^{-(\xi-a)^2/(2\sigma^2)}$ 이면 ξ 를 조건부정규분포의 표본값으로 리용할수 있다.

조건부분포함수는 분포함수의 성질을 만족시키므로 도착분포와 봉사시간분포가 조건부분포로 주어지는 경우의 봉사계는 도착분포와 봉사시간분포가 일반분포인 경우의 봉사계로 귀착시켜 해석적인 연구를 진행할수도 있다.

도착간격의 분포는 파라메터가 λ 인 뽜쏭분포에 따르고 n_1 개의 봉사기구들에서의 봉사시간분포는 조건부지수분포로서 $p_{\eta_1}(x\,|\,C)=\begin{cases}\mu_1e^{-\mu_1x}/(1-e^{-\mu_1C_1}), & x\in[0,\ C_1]\\ 0, & x\notin[0,\ C_1]\end{cases}$ 이며 나머지 $n-n_1$ 개의 봉사기구들에서의 봉사시간분포는 $p_{\eta_2}(x\,|\,C)=\begin{cases}\mu_2e^{-\mu_2x}/(1-e^{-\mu_2C_2}), & x\in[0,\ C_2]\\ 0, & x\notin[0,\ C_2]\end{cases}$ 인 거절체계에서 거절확률에 대하여 보기로 하자.

새로 들어온 요청은 첫 n_1 개의 봉사기구에서 봉사받게 되며 n_1 개가 다 막히면 나머지 $n-n_1$ 개의 봉사기구에서 봉사받게 된다고 가정한다.

정리 우와 같은 봉사계에서의 상태확률들은 다음과 같이 표시된다.

$$p_0=\left[\sum_{i=0}^{n_1}\frac{\rho_1^i}{i!}+\sum_{k=n_1+1}^{n}\prod_{i=1}^{k-n_1}\left(\frac{n_1}{\rho_1}+\frac{i}{\rho_2}\right)^{-1}\frac{\rho_1^{n_1}}{n_1!}\right]^{-1}$$

$$p_k=\frac{\rho_1^k}{k!}p_0\quad(1\le k\le n_1),\quad p_k=\prod_{i=1}^{k-n_1}\left(\frac{n_1}{\rho_1}+\frac{i}{\rho_2}\right)^{-1}\frac{\rho_1^{n_1}}{n_1!}p_0\quad(n_1<k\le n)$$

여기서 $\rho_1=\lambda(1-e^{-\mu_1C_1})/\mu_1,\ \ \rho_2=\lambda(1-e^{-\mu_2C_2})/\mu_2$ 이다.

증명 상태확률방정식을 유도하면 다음과 같다.

$$-\lambda p_0+\mu_1/(1-e^{-\mu_1C_1})\cdot p_1=0$$

$$\lambda p_{k-1}+(-\lambda-k\mu_1/(1-e^{-\mu_1C_1}))p_k+(k+1)\mu_1/(1-e^{-\mu_1C_1})\cdot p_{k+1}=0\quad(0<k<n_1)$$

$$\lambda p_{n_1-1}+(-\lambda-n_1\mu_1/(1-e^{-\mu_1C_1}))p_{n_1}+(n_1\mu_1/(1-e^{-\mu_1C_1})+\mu_2/(1-e^{-\mu_2C_2}))p_{n_1+1}=0$$

$$\lambda p_{k-1}-(\lambda+n_1\mu_1/(1-e^{-\mu_1C_1})+(k-n_1)\mu_2/(1-e^{-\mu_2C_2}))p_k+$$
$$+(n_1\mu_1/(1-e^{-\mu_1C_1})+(k-n_1+1)\mu_2/(1-e^{-\mu_2C_2}))p_{k+1}=0\quad(n_1<k<n)$$

$$\lambda p_{n-1}-(n_1\mu_1/(1-e^{-\mu_1C_1})+(n-n_1)\mu_2/(1-e^{-\mu_2C_2}))p_n(t)=0$$

우의 방정식들을 풀면 정리의 결과가 얻어진다.(증명끝)

거절확률이 크면 봉사계의 운영에서 손실을 볼수 있다.

봉사기구수를 늘이면 거절확률을 줄일수 있지만 여기서는 현존봉사계에서 봉사시간을 제한하는 상수 $C_1,\ C_2$ 를 조종하여 거절확률을 줄이는 문제를 고찰한다.

새로 들어오는 요청은 봉사기구들이 모두 봉사중에 있으면 거절되게 된다.

따라서 거절확률은 $p_n = \prod_{i=1}^{n-n_1}\left(\frac{n_1}{\rho_1}+\frac{i}{\rho_2}\right)^{-1}\frac{\rho_1^{n_1}}{n_1!}\left[\sum_{i=0}^{n_1}\frac{\rho_1^i}{i!}+\sum_{k=n_1+1}^{n}\prod_{i=1}^{k-n_1}\left(\frac{n_1}{\rho_1}+\frac{i}{\rho_2}\right)^{-1}\frac{\rho_1^{n_1}}{n_1!}\right]^{-1}$ 과 같다.

거절확률이 π 로 되는 상수 $C_1>0,\ C_2>0$ 을 구하려면 먼저

$$\prod_{i=1}^{n-n_1}\left(\frac{n_1}{\rho_1}+\frac{i}{\rho_2}\right)^{-1}\frac{\rho_1^{n_1}}{n_1!}\left[\sum_{i=0}^{n_1}\frac{\rho_1^i}{i!}+\sum_{k=n_1+1}^{n}\prod_{i=1}^{k-n_1}\left(\frac{n_1}{\rho_1}+\frac{i}{\rho_2}\right)^{-1}\frac{\rho_1^{n_1}}{n_1!}\right]^{-1}=\pi$$

를 만족시키는 ρ_1, ρ_2 를 구하여야 한다. 그러므로 ρ_1, ρ_2 를 구하면 $\rho_1=\lambda(1-e^{-\mu_1 C_1})/\mu_1$, $\rho_2=\lambda(1-e^{-\mu_2 C_2})/\mu_2$ 에 의하여 C_1, C_2 를 구할수 있다.

다음으로 도착간격의 분포가 파라메터 λ 인 뽜쏭분포에, 모든 봉사기구들에서의 봉사시간분포가 조건부지수분포 $p_\eta(x\,|\,C)=\begin{cases}\lambda e^{-\mu x}/(1-e^{-\mu C}), & x\in[0,\ C]\\ 0, & x\notin[0,\ C]\end{cases}$ 에 따르며 봉사기구수가 n 인 거절체계인 경우 상태확률은 $p_k=\frac{\rho^k}{k!}p_0\ \ (1\le k\le n)$, $p_n=\frac{\rho^n}{n!}p_0$, $p_0=1\Big/\sum_{i=0}^{n}\frac{\rho^i}{i!}$ 과 같이 얻어진다. 여기서 $\rho=\lambda(1-e^{-\mu C})/\mu$ 이다.

이때 거절확률이 π 가 되도록 즉 $p_n=\frac{\rho^n}{n!}p_0=\left(\frac{\rho^n}{n!}\right)\Big/\sum_{i=0}^{n}\frac{\rho^i}{i!}=\pi$ 를 만족시키는 ρ 를 구하고 그로부터 C 를 결정하면 $C=-\ln(1-\mu\rho/\lambda)/\mu$ 로 된다.

실례로 $n=2$ 일 때 $C=-\ln[1-\mu(\pi/(1-\pi)\pm\sqrt{\pi(2-\pi)}/(1-\pi))/\lambda]/\mu$ 이다.

$n\ge 3$ 인 경우에는 풀이를 구할수 없으므로 통계적시행법에 의하여 ρ 를 근사적으로 구할수 있다. 이때 평형조건에 의하여 $0<\rho/n=\lambda(1-e^{-\mu C})/(n\mu)<1$ 이 성립되여야 한다.

$\frac{\rho^n}{n!}=\pi\sum_{i=0}^{n}\frac{\rho^i}{i!}$ 을 만족시키는 ρ 를 구하는 문제는 $f(\rho)=\pi\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\rho^i}{i!}-(1-\pi)\frac{\rho^n}{n!}\ \ (0<\rho<n)$ 의 최소점을 구하는 문제로 귀착되기때문에 ρ 를 근사적으로 구할수 있다.

참 고 문 헌

[1] A. A. Hanbali et al.; Oper. Res. Lett., 38, 1, 2010.
[2] B. Zhang et al.; IEEE Trans. Signal Process., 58, 1, 163, 2013.
[3] H. Afimeimounga et al.; Queuing Syst., 66, 2, 169, 2010.

주체107(2018)년 6월 5일 원고접수

Parameter Control in Queuing System with Limited Service Time

Kim Chon Ul, Kim Ryong Nok

We study limited conditional distributions, their modeling, and rejection stochastic control in the queuing system with limited service time.

Key words: queuing system, limited service time, limited conditional distribution