김일성종합대학학보 주체110(2021)년
수 학 제67권 제1호

$\mathscr{F}$-예민성의 두가지 정의에 대하여

김진현, 주현희

경애하는 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《과학기술의 종합적발전추세와 사회경제발전의 요구에 맞게 새로운 경계과학을 개척하고 발전시키는데 큰 힘을 넣어야 합니다.》

론문에서는 위상동력학계리론에서 카오스현상을 특징짓는 초기조건에 관한 예민한 의존성을 유전족과 련관시켜 연구하였다. 위상동력학계는 보통 콤팍트거리공간과 그우에서 정의된 련속넘기기의 쌍을 의미한다.

계 (X, f)가 초기조건에 관한 예민성(간단히 예민성)을 가진다는것은 적당한 정수 $\delta>0$이 있어서 임의의 $x\in X$와 임의의 $\varepsilon>0$에 대하여 $d(x, y)<\varepsilon$, $d(f^n(x), f^n(y))>\delta$가 성립되는 $y\in X$와 $n\in\mathbf{N}$이 존재할 때를 말한다.

선행연구[1]에서는 초기조건에 관한 예민성을 유전족을 리용하여 론의하면서 두가지 방식으로 $\mathscr{F}$-예민성을 정의하였는데 이 두가지 정의들사이의 동등성에 대한 문제가 해결되여야 한다. 그러나 선행연구[2]에 의하면 이 두가지 정의가 동등하지 않다는것을 알 수 있다.

선행연구들에서 나오는 $\mathscr{F}$-예민성과 관련한 명제들을 서술해보면 다음과 같다.

명제 1[1] 적당한 $\delta>0$이 있어서 임의의 $x\in X$와 x의 임의의 근방 U_x에 대하여 $y\in U_x$가 있어서 $\{n\in\mathbf{Z}_+ : d(f^n(x), f^n(y))>\delta\}\in\mathscr{F}$가 성립된다.

명제 2[4] 적당한 $\delta>0$이 있어서 임의의 $x\in X$와 x의 임의의 근방 U_x에 대하여

$$\{n\in\mathbf{Z}_+ : \exists y\in U_x :\ d(f^n(x), f^n(y))>\delta\}\in\mathscr{F}$$

명제 3[2−4] 적당한 $\delta>0$이 있어서 X의 임의의 비지 않은 열린모임 $U\subset X$에 대하여 $\{n\in\mathbf{Z}_+ : \operatorname{diam} f^n(U)>\delta\}\in\mathscr{F}$가 성립된다.

명제 4[1, 2] 적당한 $\delta>0$이 있어서 X의 임의의 비지 않은 열린모임 $U\subset X$에 대하여 $\{n\in\mathbf{Z}_+ : d(f^n(x), f^n(y))>\delta\}\in\mathscr{F}$가 성립되는 $x, y\in U$가 존재한다.

선행연구[1]에서는 유전족 $\mathscr{F}$가 램지의 성질을 가질 때 명제 1과 명제 4가 동등하다는것을 밝혔으며 선행연구[2, 3]에서는 유전족 $\mathscr{F}$와 넘기기 f에 대하여 일정한 가정을 주고 예민성과 명제 3과 명제 4가 동등하다는것을 밝혔다.

우리는 유전족 $\mathscr{F}$에 대하여 먼저 명제 2와 명제 3의 동등성을 증명하며 $k\mathscr{F}$가 셈가능생성된다는 가정밑에서 명제 3이 성립되기 위한 필요충분조건을 제기하고 그것에 기초하여 명제 1−4의 동등성을 증명한다.

$\mathscr{P}$를 $\mathbf{Z}_+$의 모든 부분모임들의 족이라고 하면 부분족 $\mathscr{F}\subset\mathscr{P}$가 유전족이라는것은 $F_1\subset F_2$이고 $F_1\in\mathscr{F}$를 만족시킬 때 $F_2\in\mathscr{F}$가 성립되는 경우를 말한다.

유전족 $\mathscr{F}$에 대하여 그것의 공액족 $k\mathscr{F}$는 다음과 같이 정의된다.

$$k\mathscr{F}=\{F\in\mathscr{P} : \mathbf{Z}_+\setminus F\notin\mathscr{F}\}=\{F\in\mathscr{P} :\ \text{모든 } F\in\mathscr{F}\text{에 대하여 } F\cap F'\neq\varnothing\}$$

$\mathscr{P}$ 의 부분모임 $\mathcal{A}$ 는 유전족 $[\mathcal{A}]=\{F\in\mathscr{P}:$ 적당한 $A\in\mathcal{A}$ 가 있어서 $F\supset A\}$ 를 생성한다.

$\mathscr{P}$ 의 셀수 있는 부분모임 $\mathcal{A}$ 가 있어서 $[\mathcal{A}]=\mathscr{F}$ 가 성립될 때 $\mathscr{F}$ 가 셀가능생성된다고 한다.

$(X,\ d)$ 는 콤팍트거리공간이고 $f:X\to X$ 는 련속넘기기라고 하자.

이때 $x\in X$ 와 $G\subset X$ 에 대하여 $N_f(x,\ G)=\{n\in\mathbf{Z}_+ : f^n(x)\in G\}$ 로 약속한다.

$\mathscr{F}$ 에 대하여 $N_f(x,\ G)\in\mathscr{F}$ 이면 $x\in X$ 를 G 의 $\mathscr{F}$ －부착점이라고 부르며 G 의 모든 $\mathscr{F}$ －부착점전부의 모임을 $\mathscr{F}_f(G)$ 로 표시한다.

이때 $\mathscr{F}_f(G)=\bigcup_{F\in\mathscr{F}}\bigcap_{n\in F}f^{-n}(G)=\bigcap_{F\in\mathscr{F}}\bigcup_{n\in F}f^{-n}(G)$ 이며 $\mathscr{F}=[\mathcal{A}]$ 이라면 다음의 식이 성립된다.

$$\mathscr{F}_f(G)=\bigcup_{F\in\mathcal{A}}\bigcap_{n\in F}f^{-n}(G)=\bigcap_{F\in\mathcal{A}}\bigcup_{n\in F}f^{-n}(G)\tag{1}$$

그러므로 G 가 닫긴모임이고 $\mathscr{F}$ 가 셀가능생성된다면 $\mathscr{F}_f(G)$ 는 F_σ －모임이다.

다음으로 몇가지 중요한 유전족들에 대하여 보기로 하자.

$\mathscr{F}_{inf}$ 를 $\mathbf{Z}_+$ 의 모든 무한모임들의 족이라고 하고 $\mathscr{F}_{cf}$ 를 나머지가 유한모임인 $\mathbf{Z}_+$ 의 부분모임들의 족이라고 하면 분명히 $\mathscr{F}_{cf}=k\mathscr{F}_{inf}$ 이다.

모임 $J\subset\mathbf{Z}_+$ 의 상바나흐밀도는 $BD^*(J)=\limsup_{\#(I)\to\infty}\dfrac{\#(J\cap I)}{\#(I)}$ 와 같이 정의된다. 여기서 I 는 $\mathbf{Z}_+$ 의 련이은 옹근수렬이다.

류사하게 하바나흐밀도도 정의할수 있다. 하밀도에서와 마찬가지로 $a\in[0,\ 1)$ 에 대하여 $\overline{\mathcal{M}}_{BD}(a+)=\{F\in\mathscr{F}_{inf} : BD^*(F)>a\}$ 로 놓으면 $\overline{\mathcal{M}}_{BD}(a+)$ 도 역시 유전족으로 된다.

다음으로 $\mathscr{F}$ －예민성에 대하여 보기로 하자.

이제 $V_\varepsilon=\{(x,\ y)\in X\times X : d(x,\ y)<\varepsilon\}$, $\overline{V}_\varepsilon=\{(x,\ y)\in X\times X :\ d(x,\ y)\le\varepsilon\}$ 으로 하고 $R\subset X\times X$ 에 대하여 $R(x)=\{y\in X :\ (x,\ y)\in R\}$ 로 표시한다.

$(x,\ y)\in X\times X$ 와 유전족 $\mathscr{F}$ 에 대하여 $N_{f\times f}((x,\ y),\ \overline{V}_\varepsilon)\in k\mathscr{F}$ 이면 $(x,\ y)$ 를 $\mathscr{F}-\varepsilon-$ 접근쌍이라고 부른다.

$\mathscr{F}-\varepsilon-$ 접근쌍들의 모임을 $\mathrm{Asym}_\varepsilon(\mathscr{F})$ 로 표시한다.

그러면 $\mathrm{Asym}_\varepsilon(\mathscr{F})=\{(x,\ y)\in X\times X : N((x,\ y),\ \overline{V}_\varepsilon)\in k\mathscr{F}\}=k\mathscr{F}_{f\times f}(\overline{V}_\varepsilon)$ 이 성립된다.

정의 1　$(X,\ f)$ 는 위상동력학계이고 $\mathscr{F}$ 는 유전족이라고 하자.

이때 쌍 $(x,\ y)\in X\times X$ 가 $(\mathscr{F},\ \delta)-$ 예민쌍이라는것은 $N_{f\times f}((x,\ y),\ X\times X\setminus\overline{V}_\varepsilon)\in\mathscr{F}$ 가 성립될 때를 말한다. $(\mathscr{F},\ \delta)-$ 예민쌍들의 모임을 $\mathrm{Pair}(\mathscr{F},\ \delta)$ 로 표시한다.

또한 $(X,\ f)$ 가 거의 도처에서 $\mathscr{F}-$ 예민쌍을 가진다는것은 적당한 $\delta>0$ 이 있어서 X 의 임의의 비지 않은 열린모임 U 에 대하여 쌍 $(x,\ y)$ 가 $(\mathscr{F},\ \delta)-$ 예민쌍으로 되는 $x,\ y$ 가 U 에 존재한다는것이다.

$\mathscr{F}$ －예민성에 대하여서는 두가지 정의가 있다.

정의 2 [1] 적당한 정수 $\varepsilon>0$ 이 있어서 임의의 $x\in X$ 와 x 의 임의의 열린근방 U 에 대하여 적당한 $y\in U$ 가 있어서 $(x,\ y)$ 가 $(\mathscr{F},\ \varepsilon)-$ 예민쌍일 때 위상동력학계 $(X,\ f)$ 는 $\mathscr{F}$ －예민하다고 말한다.

정의 3[2－4] 적당한 정수 $\varepsilon>0$ 이 있어서 X 의 임의의 비지 않은 열린모임 U 에 대하여 $S_f(U,\ \varepsilon)=\{n\in\mathbf{Z}_+:\operatorname{diam} f^n(U)>\varepsilon\}\in\mathcal{F}$ 가 성립되면 $(X,\ f)$ 는 $\mathcal{F}$ －예민하다고 말한다.

이 두가지 $\mathcal{F}$ －예민성을 구분하기 위하여 편리상 정의 2의 $\mathcal{F}$ －예민성을 1형태의 $\mathcal{F}$ －예민성으로, 정의 3의 $\mathcal{F}$ －예민성을 2형태의 $\mathcal{F}$ －예민성으로 부른다.

$k\mathcal{F}$ 가 셈가능생성된다는 조건밑에서 $\mathcal{F}$ －예민성과 관련한 명제 1－4의 동등성을 증명하자.

명제 5 2형태의 $\mathcal{F}$ －예민성을 가지지만 임의의 $\delta>0$ 에 대하여 $(\mathcal{F},\ \delta)-$ 예민쌍이 존재하지 않는 계가 존재한다.

증명 선행연구[2]의 결과에 의하여 부분밀기 $(X,\ \sigma)$ 는 2형태의 $\mathcal{F}_{cf}-$ 예민성을 가지지만 임의의 $\delta>0$ 에 대하여 $(\overline{\mathcal{M}}_{BD}(0+),\ \delta)-$ 예민쌍이 존재하지 않는다는것을 알수 있다.

한편 $\mathcal{F}_{cf}\subset\overline{\mathcal{M}}_{BD}(0+)$ 이므로 부분밀기 $(X,\ \sigma)$ 는 2형태의 $\overline{\mathcal{M}}_{BD}(0+)-$ 예민성을 가지지만 임의의 $\delta>0$ 에 대하여 $(\overline{\mathcal{M}}_{BD}(0+),\ \delta)-$ 예민쌍이 존재하지 않는다.(증명끝)

명제 2로부터 $\mathcal{F}$ －예민성과 관련한 명제 1과 명제 3이 일반적으로 동등하지 않는다는것을 알수 있다.

다음으로 $\mathcal{F}$ 가 유전족일 때 명제 2와 명제 3이 동등하다는것을 보자.

정리 1 $\mathcal{F}$ 가 유전족일 때 $(X,\ f)$ 가 2형태의 예민성을 가지기 위해서는 적당한 $\delta>0$ 이 있어서 임의의 $x\in X$ 와 x 의 임의의 근방 U_x 에 대하여

$$\{n\in\mathbf{Z}_+:\exists y\in U_x:d(f^n(x),\ f^n(y))>\delta\}\in\mathcal{F}$$

가 성립될것이 필요하고 충분하다.

증명 충분성은 분명하다.

필요성을 증명하자.

임의의 $x\in X$ 와 x 의 임의의 근방 U_x 에 대하여 적당한 $\delta>0$ 이 있어서 $S_f(U_x,\ \delta)=\{n\in\boldsymbol{Z}_+:\operatorname{diam} f^n(U_x)>\delta\}\in\mathcal{F}$ 가 성립된다.

그러면 $n\in S_f(U_x,\ \delta)$ 일 때 $y,\ z\in U_x$ 가 있어서 $d(f^n(y),\ f^n(z))>\delta$ 이며

$$\delta<d(f^n(y),\ f^n(z))\le d(f^n(x),\ f^n(y))+d(f^n(x),\ f^n(z))$$

이므로 $d(f^n(x),\ f^n(z))>\delta/2$ 혹은 $d(f^n(x),\ f^n(y))>\delta/2$ 가 성립된다.

따라서 $\{n\in\mathbf{Z}_+:\exists y\in U_x:d(f^n(x),\ f^n(y))>\delta/2\}\supset S_f(U_x,\ \delta)$ 이고 $\mathcal{F}$ 가 유전족이므로 $\{n\in\mathbf{Z}_+:\exists y\in U_x:d(f^n(x),\ f^n(y))>\delta/2\}\in\mathcal{F}$ 가 성립된다.(증명끝)

다음으로 $k\mathcal{F}$ 가 셈가능생성된다는 조건밑에서 $\mathcal{F}$ －예민성과 관련한 4개의 명제들의 동등성을 증명하자.

보조정리 $(X,\ f)$ 는 위상동력학계이고 $\mathcal{F}$ 는 유전족일 때 임의의 $G\subset X$ 에 대하여 $k\mathcal{F}(G)=X\setminus\mathcal{F}(X\setminus G)$ 가 성립된다.

정리 2 $(X,\ f)$ 는 위상동력학계이고 $\mathcal{F}$ 는 유전족으로서 그것의 공액족 $k\mathcal{F}$ 가 셈가능생성된다고 하면 다음의 사실들은 서로 동등하다.

① $(X,\ f)$ 는 2형태의 $\mathcal{F}$ －예민성을 가진다.

② 적당한 $\varepsilon>0$ 이 있어서 임의의 $x\in X$ 에 대하여 $\operatorname{Asym}_\varepsilon(\mathcal{F})(x)$ 는 1류모임이다.

③ 적당한 $\varepsilon > 0$ 이 있어서 $\mathrm{Asym}_\varepsilon(\mathscr{F})$ 는 1류모임이다.

④ 적당한 $\varepsilon > 0$ 이 있어서 임의의 $x \in X$ 에 대하여 $x \in \overline{X \setminus \mathrm{Asym}_\varepsilon(\mathscr{F})(x)}$ 이다.

⑤ 적당한 $\varepsilon > 0$ 이 있어서 $\mathscr{F}_{f \times f}(X \times X \setminus \overline{V}_\varepsilon)$ 는 $X \times X$ 의 조밀한 G_δ －모임이다.

증명 $k\mathscr{F}$ 가 셈가능생성되므로 어떤 셀수 있는 모임족 $\mathcal{A}$ 가 있어서 $[\mathcal{A}] = k\mathscr{F}$ 라고 하고 $F \in \mathcal{A}$ 에 대하여 $C_{F,\,\varepsilon} = \bigcap_{n \in F} (f \times f)^{-n}(\overline{V}_\varepsilon)$ 으로 놓으면 식 (1)로부터

$$\mathrm{Asym}_\varepsilon(\mathscr{F}) = k\mathscr{F}_{f \times f}(\overline{V}_\varepsilon) = \bigcup_{F \in \mathcal{A}} \bigcap_{n \in F} (f \times f)^{-n}(\overline{V}_\varepsilon) = \bigcup_{F \in \mathcal{A}} C_{F,\,\varepsilon} \tag{2}$$

①⇒②를 증명하기 위하여 ②가 성립되지 않는다고 하자. 즉 임의의 $\varepsilon > 0$ 에 대하여 적당한 $x \in X$ 가 있어서 $\mathrm{Asym}_\varepsilon(\mathscr{F})(x)$ 가 1류모임이 아니라고 하자.

식 (2)에 의하여 $\mathrm{Asym}_\varepsilon(\mathscr{F})(x) = \bigcup_{F \in \mathcal{A}} C_{F,\,\varepsilon}(x)$ 이다. 그러면 베르의 류정리에 의하여 비지 않은 열린모임 $U \subset X$ 와 $F \in \mathcal{A} \subset k\mathscr{F}$ 가 있어서 $U \subset C_{F,\,\varepsilon}(x)$ 이다. 이것은 임의의 $y \in U$ 와 임의의 $n \in F$ 에 대하여 $d(f^n(x),\ f^n(y)) \le \varepsilon$ 을 의미한다. 그러면 임의의 $y,\ z \in U$ 와 임의의 $n \in F$ 에 대하여 $d(f^n(y),\ f^n(z)) \le d(f^n(y),\ f^n(x)) + d(f^n(x),\ f^n(z)) \le 2\varepsilon$ 이 성립되므로 임의의 $n \in F$ 에 대하여 $\mathrm{diam}\, f^n(U) \le 2\varepsilon$ 이다. 따라서 $F \subset \{n \in \mathbf{Z}_+ : \mathrm{diam}\, f^n(U) \le 2\varepsilon\}$ 이고 $k\mathscr{F}$ 도 역시 유전족이므로 $\{n \in \mathbf{Z}_+ : \mathrm{diam}\, f^n(U) \le 2\varepsilon\} \in k\mathscr{F}$ 가 성립된다.

이로부터 $S_f(U,\ 2\varepsilon) = \mathbf{Z}_+ \setminus \{n \in \mathbf{Z}_+ : \mathrm{diam}\, f^n(U) \le 2\varepsilon\} \notin \mathscr{F}$ 가 나오는데 이것은 식 (1)에 모순이므로 ①⇒②가 성립된다.

②⇒③을 증명하기 위하여 ③이 성립되지 않는다고 하면 식 (2)와 베르의 류정리에 의하여 임의의 $\varepsilon > 0$ 에 대하여 $F \in \mathcal{A}$ 가 있어서 $C_{F,\,\varepsilon}$ 의 내부는 빈모임이 아니다. 즉 비지 않은 열린모임 $U,\ V \subset X$ 가 있어서 $U \times V \subset C_{F,\,\varepsilon}$ 이다.

이로부터 임의의 $x \in U$ 에 대하여 $V \subset C_{F,\,\varepsilon}(x)$ 이다. 이것은 $x \in U$ 일 때 $\mathrm{Asym}_\varepsilon(\mathscr{F})(x)$ 는 1류모임이 아니다.

이것은 식 (2)에 모순이므로 ②⇒③이 증명된다.

③⇒①을 증명하기 위하여 ①이 성립되지 않는다고 하면 임의의 $\varepsilon > 0$ 에 대하여 비지 않은 열린모임 $U \subset X$ 가 있어서 $S_f(U,\ \varepsilon) = \mathbf{Z}_+ \setminus \{n \in \mathbf{Z}_+ : \mathrm{diam}\, f^n(U) \le \varepsilon\} \notin \mathscr{F}$ 즉 $\{n \in \mathbf{Z}_+ : \mathrm{diam}\, f^n(U) \le \varepsilon\} \notin k\mathscr{F}$ 가 성립된다.

그러므로 임의의 $(x,\ y) \in U \times U$ 에 대하여 $N_{f \times f}((x,\ y),\ \overline{V}_\varepsilon) \in k\mathscr{F}$ 이며 따라서 $U \times U \subset \mathrm{Asym}_\varepsilon(\mathscr{F})$ 이다.

이것은 $\mathrm{Asym}_\varepsilon(\mathscr{F})$ 가 1류모임이라는데 모순이므로 ③⇒①이 증명된다.

②와 ⑤의 동등성은 다음의 식으로부터 분명하다.

$$\mathscr{F}(X \times X \setminus \overline{V}_\varepsilon) = X \times X \setminus k\mathscr{F}(\overline{V}_\varepsilon) = X \times X \setminus \mathrm{Asym}_\varepsilon(\mathscr{F})$$

③⇒④를 증명하자.

임의의 $x \in X$ 에 대하여 $\mathrm{Asym}_\varepsilon(\mathscr{F})(x)$ 가 1류모임이므로 $\overline{X \setminus \mathrm{Asym}_\varepsilon(\mathscr{F})(x)} = X$ 이다.

따라서 $x \in \overline{X \setminus \mathrm{Asym}_\varepsilon(\mathscr{F})(x)} = X$ 이므로 ③⇒④도 증명된다.

④$\Rightarrow$①을 증명하기 위하여 ①이 성립되지 않는다고 하면 ③$\Rightarrow$①의 증명에서와 마찬가지로 비지 않은 열린모임 $U\subset X$ 가 있어서 $U\times U\subset \mathrm{Asym}_\varepsilon(\mathscr{F})$ 이다.

그러면 $x\in U$ 일 때 $x\in U\subset \mathrm{Asym}_\varepsilon(\mathscr{F})(x)$ 이다.

따라서 $x\notin \overline{X\setminus \mathrm{Asym}_\varepsilon(\mathscr{F})(x)}$ 가 성립되는데 이것은 ④에 모순이므로 ④$\Rightarrow$①이 증명된다.(증명끝)

정리 3 $(X,\ f)$ 는 위상동력학계이고 $\mathscr{F}$ 는 유전족으로서 그것의 공액족 $k\mathscr{F}$ 가 셈가능생성된다고 하면 다음의 사실들은 서로 동등하다.

① $(X,\ f)$ 는 1형태의 $\mathscr{F}$ —예민성을 가진다. 즉 적당한 $\delta>0$ 이 있어서 임의의 $x\in X$ 와 x 의 임의의 근방 U_x 에 대하여 $y\in U_x$ 가 있어서

$$\{n\in \mathbf{Z}_+ : d(f^n(x),\ f^n(y))>\delta\}\in\mathscr{F}$$

② 적당한 $\delta>0$ 이 있어서 임의의 $x\in X$ 와 x 의 임의의 근방 U_x 에 대하여

$$\{n\in \mathbf{Z}_+ : \exists y\in U_x : d(f^n(x),\ f^n(y))>\delta\}\in\mathscr{F}$$

③ $(X,\ f)$ 는 2형태의 $\mathscr{F}$ –예민성을 가진다. 즉 적당한 $\delta>0$ 이 있어서 X 의 임의의 비지 않은 열린모임 $U\subset X$ 에 대하여

$$\{n\in \mathbf{Z}_+ : \mathrm{diam}(f^n(U))>\delta\}\in\mathscr{F}$$

④ $(X,\ f)$ 는 거의 도처에서 $\mathscr{F}$ —예민쌍을 가진다. 즉 적당한 $\delta>0$ 이 있어서 X 의 임의의 비지 않은 열린모임 $U\subset X$ 에 대하여 $x,\ y\in U$ 가 있어서

$$\{n\in \mathbf{Z}_+ : d(f^n(x),\ f^n(y))>\delta\}\in\mathscr{F}$$

참 고 문 헌

[1] H. Wang et al.; Discrete Dyn. Nat. Soc., 35, 54, 2010.
[2] F. Tan et al.; Acta. Math. Sci., 31, 4, 1425, 2011.
[3] X. Wu et al.; J. Math. Anal. Appl., 429, 16, 2015.
[4] W. Huang et al.; J. Differ. Equations, 260, 6800, 2016.
[5] P. Sharma et al.; Topol. Appl., 157, 2052, 2010.

주체109(2020)년 9월 5일 원고접수

About Two Definitions of $\mathscr{F}$ —sensitivity

Kim Jin Hyon, Ju Hyon Hui

In this paper, we first show the equivalence of Proposition 2 and 3, and suggest the necessary and sufficient condition for Proposition 3 under the assumption that $k\mathscr{F}$ is countably generated. And then using these results, we prove the equivalence of Propositions 1-4.

Keywords: Furstenberg family, $\mathscr{F}$ —sensitivity, $\mathscr{F}$ —sensitive pair