김일성종합대학학보 JOURNAL OF KIM IL SUNG UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체105(2016)년 제62권 제4호 Vol. 62 No. 4 JUCHE105(2016).

O－U과정에 관계되는 결수를 가진 금융시장에서 최량투자와 소비에 대한 연구

김주경, 김향미

경애하는 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《과학연구부문에서 최첨단돌파전을 힘있게 벌려 경제발전과 국방력강화, 인민생활향상에 이바지하는 가치있는 연구성과들을 많이 내놓아야 합니다.》

선행연구[1－3]에서는 Ornstein–Uhlenbeck과정(O–U과정)에 의하여 묘사되는 금융시장에서 최량투자조합문제, 최량투자와 소비문제를 연구하였고 선행연구[4]에서는 O–U과정을 Vasicek모형으로 일반화하고 이 과정으로 묘사되는 련립확률미분방정식의 풀이에 대하여 론의하였다.

론문에서는 O–U과정을 Vasicek모형으로 일반화하였을 때 이 과정에 관계되는 우연결수들을 가진 금융시장에서 거래하는 투자가들의 최량투자와 소비문제를 연구한다.

$(\Omega,\ \mathscr{F},\ \boldsymbol{P})$는 주어진 확률공간이며 $Y:=(Y(t))_{0\le t\le T}$는 경제인자를 나타내는 O–U과정으로서 다음의 Vasicek형확률미분방정식으로 주어진다.[4]

$$dY(t)=\lambda(\theta-Y(t-))dt+dL(\lambda t),\ Y(0)=y>0 \tag{1}$$

여기서 $\lambda\,(>0)$는 복귀률이고 $\theta\,(>0)$는 리득률, $\{L(t)\}_{0\le t\le T}$는 오른쪽 련속, 왼쪽 극한을 가지는 레비과정이다.

금융시장에 두가지 종류의 금융파생상품이 있다고 하자. 그중 첫 상품은 무위험자산으로서 가격인 $\{B_{(t)}\}_{0\le t\le T}$는 $dB_{(t)}=r(Y(t))B(t)dt,\ B(0)=1$을 만족시키며 둘째 상품은 주식과 같은 위험자산으로서 가격인 $\{S(t)\}_{0\le t\le T}$는 $dS(t)=S(t)[\mu(Y(t))dt+\sigma(Y(t))dw(t)],\ S(0)=S>0$을 만족시킨다. 여기서 $r(\cdot)$은 외적요인 Y에 관계되는 리자률이고 $\mu(\cdot)$과 $\sigma(\cdot)$은 각각 Y에 관계되는 증가함수와 변동함수로서 다음의 가정을 만족시킨다.

가정 1 ① $r(\cdot)$, $\mu(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$은 $(0,\ +\infty)$에서 값을 취하는 가측함수이며 선형증가조건을 만족시킨다. 즉 정인상수 $K_1,\ K_2$가 있어서

$$r(y)\le K_1+K_2y,\ \ \mu(y)\le K_1+K_2y\,,\ \ \sigma^2(y)\le K_1+K_2y\ .$$

② 도함수 $dr(\cdot)/dy,\ \ d\mu/dy,\ \ d\sigma^2(\cdot)/dy$이 존재하고 $\boldsymbol{R}$에서 값을 취하며 선형증가조건을 만족시킨다.

③ $\inf\limits_{y}\sigma(y)>0$

레비과정 $\{L(t)\}$에 대하여 좀 더 자세히 보기로 하자.

임의의 t와 원점을 포함하지 않는 보렐모임 A에 대하여 옹근수우연측도 N을 $N((0,\ t]\times A)=\sum\limits_{0<s\le t}I_A(\Delta L(s))$, $\Delta L(s)=L(s)-L(s-)$로 정의하면 다음과 같다.

$$L(t)=\int_0^t\int_{z>0} zN(ds,\ dz) \tag{2}$$

레비측도 $\nu(dz)$ 는 $N(dt,\ dz)$ 의 보정자로서 $\mathrm{E}[N(dt,\ dz)]=\nu(dz)dt$ 로 정의한다.

$L(t)$ 의 모멘트생성함수는 임의의 t 를 고정할 때

$$\psi(u)=\mathrm{E}[e^{uL(t)}]=e^{t\varphi(u)}=\exp\left\{t\int_{z>0}(e^{uz}-1)\nu(dz)\right\}.$$

방정식 (1)의 풀이는 임의의 $t<s$ 에 대하여 다음과 같다.

$$Y(s)=\theta+(y-\theta)e^{-\lambda(s-t)}+\int_t^s e^{-\lambda(s-u)}dL(\lambda u),\ \ Y(t)=y>0$$

이 풀이를 간단히 $(Y^{t,\ y}(s))_{t\le s\le T}$ 로 표시하면 임의의 $0\le t\le s\le T$ 와 $y>0$ 에 대하여 다음의 관계식이 성립된다.

$$Y^{t,\ y}(s)\le y+L(\lambda s)-L(\lambda t)$$

$$\lambda\int_t^s Y^{t,\ y}(u)du=y+L(\lambda s)-L(\lambda t)-Y^{t,\ y}(s)\le y+L(\lambda s)-L(\lambda t)=y+L(\lambda(s-t))$$

유용함수를 $x^r\ (r\in(0,1))$ 형태의 제곱함수로 정의할 때 최량투자조합인 최량투자와 최량소비를 구하는 문제를 론의하자.

t 시각에 위험자산에 투자하는 재산의 투자비률을 $\pi(t)$ 라고 하고 소비률을 $c(t)$ 로 표시하면 재산의 변화는 다음의 확률미분방정식을 만족시킨다.

$$dX^{c,\ \pi}(t)=\pi(t)X^{c,\ \pi}(t)(\mu(Y(t))dt+\sigma(Y(t))dw(t))+(1-\pi(t))X^{c,\ \pi}(t)r(Y(t))dt-c(t)dt \tag{3}$$

이 방정식의 풀이 $X^{c,\ \pi}(t)$ 는 t 시각에 투자조합 $(c,\ \pi)$ 에 의한 재산량을 의미한다.

이때 최량화문제를 다음과 같이 정의한다.

$$\sup_{(c,\ \pi)}\mathrm{E}\left[\int_0^T(c(s))^\gamma ds+(X^{c,\ \pi}(T))^\gamma\,\Big|\,X(0)=x,\ Y(0)=y\right] \tag{4}$$

이 문제를 풀기 위하여 목적식 (4)에 대응되는 값함수를 다음과 같이 정의한다.

$$V(t,\ x,\ y)=\sup_{(c,\ \pi)\in\mathcal{A}}\mathrm{E}\left[\int_0^T(c(s))^\gamma ds+(X^{c,\pi}(T))^\gamma\,\Big|\,X(t)=x,\ Y(t)=y\right]$$

여기서 $\mathcal{A}$ 는 다음의 가정을 만족시키는 허용방략들의 모임이다.

가정 2 ① $(c,\ \pi):[0,\ T]\times\Omega\to[0,+\infty)\times[0,\ 1]$ 은 자기변수에 관하여 가측이다.

② $\int_0^T c(s)ds<\infty$

③ 방정식 (3)은 정인 유일한 풀이를 가진다.

확률미분방정식 (3)을 만족시키는 재산변화과정 $X^{c,\ \pi}(t)$ 는 모든 $(c,\ \pi)\in\mathcal{A}$ 에 대하여 반마르팅게일이고 표본련속이라는것은 잘 알려져있다.

최량화문제는 다음의 편미분－적분방정식으로 주어지는 하밀톤－벨만－야꼬비방정식을 푸는 문제로 귀착된다.

$$\sup_{(c,\ \pi)\in\mathcal{A}}\left\{c^{\gamma}+\frac{\partial\upsilon}{\partial t}+\frac{\partial\upsilon}{\partial x}[\pi x(\mu(y))-r(y)+xr(y)-c]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x^2}[\pi^2x^2\partial^2(y)]+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial\upsilon}{\partial y}\cdot\lambda(\theta-y)+\lambda\int_{|z|>0}(\upsilon(t,\ x,\ y+z)-\upsilon(t,\ x,\ y))\nu(dz)\right\}=0,\quad \upsilon(T,\ x,\ y)=x^{\gamma} \tag{5}$$

목적함수가 제곱함수로 되여있기때문에 값함수는 $\upsilon(t,\ x,\ y)=x^{\gamma}f(t,\ y)$ 형태로 표시된다고 보고 최량풀이를 구할수 있다. 이때 최량방략 $(\hat{c},\ \hat{\pi})$ 은 다음의 형태로 구할수 있다.

$$\hat{c}=xf^{-1/(1-\gamma)}(t,\ y)x\ ,\quad \hat{\pi}=\arg\max\{\pi(\mu(y)-r(y))-\pi^2(1-\gamma)\sigma^2(y)/2\}$$

투자방략에 대하여 보다 자세히 론의하기 위하여 다음의 세가지 구역을 정의한다.

$$D_1=\{y>0,\ \ \mu(y)-r(y)<0)\}$$
$$D_2=\{y>0,\ \ \mu(y)-r(y)>0,\ \ (1-\gamma)\sigma^2(y)>\mu(y)-r(y)\}$$
$$D_3=\{y>0,\ \mu(y)-r(y)>0,\ \ (1-\gamma)\sigma^2(y)<\mu(y)-r(y)\}$$

이때 방략 $\hat{\pi}$ 은 $\hat{\pi}=\begin{cases}0, & y\in D_1\\ [\mu(y)-r(y)]/[(1-\gamma)\sigma^2(y)], & y\in D_2\\ 1, & y\in D_3\end{cases}$ 으로 표시된다.

함수 $Q(y)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$Q(y)=\max_{\pi}\{\pi(\mu(y)-r(y))-\pi^2(1-\gamma)\sigma^2(y)/2\}+r(y)=\begin{cases}r(y), & y\in D_1\\ (\mu(y)-r(y))^2/[2(1-\gamma)\sigma^2(y)]+r(y), & y\in D_2\\ \mu(y)-(1-\gamma)\sigma^2(y)/2, & y\in D_3\end{cases}$$

보조정리 1 [1] 웃식으로 정의된 $Q(y)$ 는 부가 아니고 련속이며 선형증가조건을 만족시킨다. 즉 $0\le r(y)\le Q(y)\le A+By$ 가 성립된다.

또한 Q 의 도함수도 련속이고 선형증가조건을 만족시킨다.

식 (5)의 풀이의 유일존재성을 증명하기 위하여 식 (5)에 $\upsilon=x^{\gamma}f(t,\ y)$ 를 대입하면

$$\sup\left\{c^{\gamma}+x^{\gamma}\frac{\partial f}{\partial t}+\gamma[\pi(\mu(y)-r(y))+r(y)]x^{\gamma}f-\gamma cx^{\gamma-1}f+\frac{1}{2}\gamma(\gamma-1)\pi^2x^{\gamma}\sigma^2(y)f+\right.$$
$$\left.+\lambda(\theta-y)x^{\gamma}\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda x^{\gamma}\int_{z>0}[f(t,\ \ y+z)-f(t,\ y)]\nu(dz)\right\}=0,$$
$$x^{\gamma}f(t,\ y)=x^{\gamma}\Rightarrow f(T,\ x)=1$$

이 성립되고 $\hat{c}=xf^{-1/(1-\gamma)}$ 를 대입하면 다음과 같다.

$$\sup\left\{x^{\gamma}\left[\frac{\partial f}{\partial t}+(1-\gamma)f^{-\gamma/(1-\gamma)}+\gamma Q(y)f+\lambda(\theta-y)\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\int_{z>0}[f(t,\ \ y+z)-f(t,\ y)]\nu(dz)\right]\right\}=0,\quad f(T,\ y)=1$$

여기서 $Q(y)=\max\{\pi(\mu(y)-r(y))+r(y)+(\gamma-1)\pi^2\sigma^2(y)/2\}$ 이다.

따라서 다음의 식이 성립된다.

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}(\theta-y)+\lambda\int_{z>0}(f(t,\ y+z)-f(t,\ y))\nu(dt)+\gamma\ f\cdot Q(y)+(1-\gamma)f^{-\gamma/(1-\gamma)}=0,\quad f(T,\ y)=1 \tag{6}$$

연산자 L을 다음과 같이 정의하자.

$$(Lf)(t,\ y)=\mathrm{E}\left[\exp\left\{\gamma\int_t^T Q(Y^{t,\ y}(s))ds\right\}+(1-\gamma)\int_t^T \exp\left\{\gamma\int_t^s Q(Y^{t,\ y}(u))du\right\}f^{-\frac{\gamma}{1-\gamma}}(s,\ Y^{t,\ y}(s))ds\right] \quad (7)$$

방정식 (6)에 헤네만-카스공식을 적용하면 다음의 부동점방정식이 나온다.

$$(Lf)(t,\ y)=f(t,\ y),\ (t,\ y)\in[0,\ T]\times[0,\ +\infty) \quad (8)$$

방정식 (8)이 유일한 풀이를 가진다는것을 보기로 하자.

그에 앞서 몇가지 론의를 먼저 하자.

최량값함수의 아래한계는

$$V(t,\ x,\ y)\ge x^{\gamma}\mathrm{E}\left[e^{\gamma}\int_t^T \gamma(Y(s))ds\right],\ (t,\ x,\ y)\in[0,\ T]\times(0,\ +\infty)\times(0,\ +\infty)$$

이다. 이것은 마감지불액이 리자률보다 작지 말아야 하기때문이다. 즉 저금하면 리자률로 얻은 수익보다 작지 말아야 한다는것이다.

방정식 (8)의 풀이는 다음의 부등식을 만족시키도록 구한다.

$$f(t,\ y)\ge\mathrm{E}\left[e^{\gamma}\int_t^T \gamma(Y(s))ds\right]\ge 1 \quad (9)$$

식 (9)를 만족시키는 함수 f에 연산자 L을 적용하면 $(Lf)(t,\ y)\ge\left[e^{\gamma}\int_t^T\gamma(Y(s))ds\right]\ge 1$과 같은 연산자 L의 아래한계를 얻게 된다. 이것은 식 (7)의 첫 항에 있는 Q는 제곱함수이고 둘째 항은 정이라는데로부터 나온다.

다음 연산자 L의 웃한계를 평가하여보자.

식 (8)을 만족시킨다는것은 $f(t,\ y)^{-\gamma/(1-\gamma)}\le 1$이라는것을 의미한다.

Q에 대한 선형증가조건과 레비과정의 성질에 의하여 다음의 식이 성립된다.

$$(Lf)(t,\ y)\le\mathrm{E}\left[e^{\gamma A(T-t)+\gamma B\int_t^T Y^{t,\ y}(s)ds}+(1-\gamma)e^{\gamma A(T-t)+\gamma B\int_t^s Y^{t,\ y}(u)du}ds\right]\le\left(1+\frac{1-\gamma}{A'}\right)e^{A'(T-t)+B'y} \quad (10)$$

여기서 상수는 $A'=\gamma A+\lambda\psi(\lambda B/\lambda),\ B'=\lambda B/\lambda$이다.

연산자 L을 보다 엄밀히 평가하기 위하여

$$1\le f(t,\ y)\le(1+(1-\gamma)/A')e^{A'(T-t)+B'y}$$

을 만족시키는 련속함수 f들의 공간을 $C_e([0,\ T]\times(0,\ +\infty))$로 표시하자.

이 공간에서 거리를 $d(\varphi,\ \xi)=\sup_{(t,\ y)}|e^{-\alpha(T-t)-B'y}(\varphi(t,\ y)-\xi(t,\ y))|$라고 하면 C_e는 완비거리공간이다. 여기서 $\alpha>A'$는 어떤 상수이다.

보조정리 2 연산자 L은 $C_e([0,\ T]\times(0,\ +\infty))$에서 그자체로 넘기는 넘기기이다.

증명 식 (9), (10)을 고려하면 아래한계와 웃한계가 나오므로 $(t,\ y)\to(Lf)(t,\ y)$의 련속성만을 증명하면 된다.

Y의 시간균일성에 의하여 연산자 L은 다음과 같이 표시할수 있다.

$$(Lf)(t,\ y)=\mathrm{E}\left[e^{\gamma\int_0^T Q(Y^{0,\ y}(u))du}+(1-\gamma)\int_0^{T-t}e^{\gamma\int_0^s Q(Y^{0,\ y}(u))du}f^{-\frac{\gamma}{1-\gamma}}(s+t,\ Y^{0,\ y}(s))ds\right]$$

보조정리의 증명은 웃식이 시간변수에 관하여 련속이라는것을 증명하는것과 같다.

Q의 선형증가조건과 Y의 성질에 의하여 다음의 식이 성립된다.

$$e^{\gamma\int_0^T Q(Y^{0,\ y}(u))du}f^{-\frac{\gamma}{1-\gamma}}(s+t,\ Y^{0,\ y}(s))\le e^{\gamma\int_0^s Q(Y^{0,\ y}(u))du}\le e^{\gamma AT+B'y+B'L(\lambda T)}$$

오른쪽 련속, 왼쪽 극한을 가지는 넘기기 $(y,\ u)\to Y^{0,\ y}(u)$는 콤팍트모임에서 유계이다.

시간변수에 관하여 련속임을 증명하는것은 적분과 극한의 교환에 관한 르베그의 수렴성정리를 적용하면 직접 나온다.

넘기기 $y\to(Lf)(t,\ y)$의 련속성을 증명하기 위하여 y_0을 고정하고 y_0을 포함하는 콤팍트모임 U를 정의하자. 그리고 $y_n\to y_0\,(n\to\infty)$인 점렬 $\{y_n\}$을 U에서 취하자.

그러면 y_n은 U에서 평등유계이며 르베그의 수렴성정리를 적용할수 있다. 따라서 $(t,\ y)\to(Lf)(t,\ y)$의 련속성은 함수 f와 Q의 련속성으로부터 곧 나온다.(증명끝)

보조정리 3 연산자 $L:C_e([0,\ T]\times(0,\ +\infty))\to C_e([0,\ T]\times(0,\ +\infty))$는 거리 $d(\cdot\ ,\ \cdot)$에 관하여 $\alpha\ (>A'+\gamma)$ 축소연산자이다.

바나흐의 부동점정리를 반복적용하면 다음의 정리가 나온다.

정리 방정식 $(Lf)(t,\ y)=f(t,\ y)$는 유일한 풀이 $\hat{f}\in C_e([0,\ T]\times(0,\ +\infty))$를 가진다.

참고문헌

[1] F. E. Benth et al.; Math. Finance, 13, 215, 2003.

[2] L. Delong et al.; The Annals of Applied Probability, 18, 3, 879, 2008.

[3] C. Lindberg; Math. Finance, 16, 549, 2006.

[4] T. Reitan; The Annals of Applied Statistics, 6, 4, 1531, 2012.

주체104(2015)년 12월 5일 원고접수

Study for Optimal Investment and Consumption in a Financial Market with Coefficient Driven by an Ornstein-Uhlenbeck Process

Kim Ju Gyong, Kim Hyang Mi

We investigate an optimal investment and consumption problem for an investor who trades in a financial market with stochastic coefficients driven by an Ornstein-Uhlenbeck process generalized by Vasicek model. Utility function is a power function and solution of Hamilton-Jacobi-Bellman equation is derived via the Feynman-Kac representation.

Key word: Ornstein-Uhlenbeck process