김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체106(2017)년 제63권 제8호 Vol. 63 No. 8 JUCHE106(2017).

무게붙은 최소두제곱오차파라메터추정에 의한 MGM(1, m)모형의 예측정확도제고의 한가지 방법

최은향, 박영진

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《인민경제 모든 부문의 생산기술공정과 생산방법, 경영활동을 새로운 과학적토대우에 올려세우기 위한 연구사업도 강화하여야 합니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제11권 138페지)

경영활동을 위한 결심채택을 진행하는데서 불확실성을 가진 자료들이 주어졌을 때 그에 기초하여 가장 합리적인 방안을 선택하는 문제가 제기된다. 여기서 리용할수 있는 방법의 하나는 회색정보의 개념을 리용하여 예측을 진행하는것이다.

호상관련을 가지는 자료들을 동시에 모형화하여 모의정확도를 높이기 위한 다변수회색모형 MGM(1, m)을 리용하는 방법들에 대한 연구가 이미 진행되였고 여러 현실대상에 적용되여 그 효과성이 확증되였다.[1－3]

론문에서는 다변수회색모형 MGM(1, m)에서 무게를 고려한 최소두제곱오차최소화방법으로 파라메터들을 추정함으로써 예측정확도를 보다 높일수 있게 하는 방법을 제안한다.

1. MGM(1, m)모형의 기본원리

다변수회색모형은 호상관계를 가진 여러개의 변량들을 모형화하는 방법으로서 다음과 같이 서술된다.

정의 1 초기자료행렬을 $X^{(0)}=[X_1^{(0)},\ X_2^{(0)},\ \cdots,\ X_m^{(0)}]^{\mathrm{T}}$라고 하자. 여기서

$$X_i^{(0)}=\{x_i^{(0)}(1),\ x_i^{(0)}(2),\ \cdots,\ x_i^{(0)}(n)\},\quad i=1,\ 2,\ \cdots,m$$

이다. 그러면 행렬 $X^{(1)}=[X_1^{(1)},\ X_2^{(1)},\ \cdots,\ X_m^{(1)}]^{\mathrm{T}}$는 $X^{(0)}$의 1차루적생성연산(1-AGO)행렬이고 $X_i^{(1)}=\{x_i^{(1)}(1),\ x_i^{(1)}(2),\ \cdots,\ x_i^{(1)}(n)\}$은 $X_i^{(0)}$의 1-AGO렬인데 여기서

$$x_i^{(1)}(j)=\sum_{k=1}^{j}x_i^{(0)}(k),\ \ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m,\ \ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

이다. 그리고 렬 $Z_i^{(1)}=\{z_i^{(1)}(2),\ z_i^{(1)}(3),\ \cdots,\ z_i^{(1)}(n)\}$은 $X_i^{(1)}$의 린접평균값생성렬이다. 여기서 $z_i^{(1)}(k)=\dfrac{1}{2}(x_i^{(1)}(k)+x_i^{(1)}(k-1)),\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m,\ k=2,\ 3,\ \cdots,\ n$이다.

정의 2 행렬 $X^{(0)}$, $X^{(1)}$과 렬 $X_i^{(0)}$, $X_i^{(1)}$, $Z_i^{(1)}$은 정의 1에서처럼 정의하면 방정식

$$x_i^{(0)}(k)+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}z_j^{(1)}(k)=b_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m,\ j=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n \tag{1}$$

을 MGM(1, m)모형의 기본형식이라고 한다.

이때 m변수1차미분체계

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1^{(1)}}{dt}+a_{11}x_1^{(1)}+a_{12}x_2^{(1)}+\cdots+a_{1m}x_m^{(1)}=b_1\\ \dfrac{dx_2^{(1)}}{dt}+a_{21}x_1^{(1)}+a_{22}x_2^{(1)}+\cdots+a_{2m}x_m^{(1)}=b_2\\ \qquad\vdots\\ \dfrac{dx_m^{(1)}}{dt}+a_{m1}x_1^{(1)}+a_{m2}x_2^{(1)}+\cdots+a_{mm}x_m^{(1)}=b_m\end{cases} \tag{2}$$

을 MGM(1, m)모형의 백화방정식이라고 부른다. 한편

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm}\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}$$

과 같이 표시하면 식 (1)은 다음과 같이 쓸수 있다.

$$X^{(0)}(k)+AZ^{(1)}(k)=B \tag{3}$$

$$\frac{dX^{(1)}(t)}{dt}+AX^{(1)}(t)=B \tag{4}$$

여기서 $X^{(1)}(t)=[x_1^{(1)}(t),\ x_2^{(1)}(t),\ \cdots,\ x_m^{(1)}(t)]^{\mathrm{T}}$이다.

A, B를 각각 발전결수행렬, 회색작용결수행렬이라고 부른다.

주어진 자료를 리용하여 파라메터들을 추정하는 방법은 다음의 정리로부터 나온다.

정리 $X_1^{(0)}$, $X_2^{(0)}$, $\cdots$, $X_m^{(0)}$ 은 부아닌 자료렬이고 $X_i^{(1)}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 은 $X_i^{(0)}$ 의 1-AGO이며 $Z_i^{(1)}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$은 $X_i^{(1)}$의 린접평균값생성순렬이라고 하자.

최소두제곱법에 의하여 MGM(1, m)모형 $X^{(0)}(k)+AZ^{(1)}(k)=B$의 파라메터 행렬 A, B는 다음과 같은 식에 의하여 얻을수 있다.

$$\hat{H}=(\hat{A},\ \hat{B})^{\mathrm{T}}=(P^{\mathrm{T}}P)^{-1}P^{\mathrm{T}}X_0 \tag{5}$$

여기서

$$\hat{H}=\begin{bmatrix}\hat{a}_{11} & \hat{a}_{21} & \cdots & \hat{a}_{m1}\\ \hat{a}_{12} & \hat{a}_{22} & \cdots & \hat{a}_{m2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \hat{a}_{1m} & \hat{a}_{2m} & \cdots & \hat{a}_{mm}\\ \hat{b}_1 & \hat{b}_2 & \cdots & \hat{b}_m\end{bmatrix},\ X_0=\begin{bmatrix}x_1^{(0)}(2) & x_2^{(0)}(2) & \cdots & x_m^{(0)}(2)\\ x_1^{(0)}(3) & x_2^{(0)}(3) & \cdots & x_m^{(0)}(3)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_1^{(0)}(n) & x_2^{(0)}(n) & \cdots & x_m^{(0)}(n)\end{bmatrix},\ P=\begin{bmatrix}z_1^{(1)}(2) & z_2^{(1)}(2) & \cdots & z_m^{(1)}(2) & 1\\ z_1^{(1)}(3) & z_2^{(1)}(3) & \cdots & z_m^{(1)}(3) & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ z_1^{(1)}(n) & z_2^{(1)}(n) & \cdots & z_m^{(1)}(n) & 1\end{bmatrix}$$

이다. 이렇게 파라메터들을 결정한 다음 초기조건 $\hat{x}_i^{(1)}(1)=\hat{x}_i^{(0)}(1),\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$을 리용

하면 백화방정식의 풀이는 다음과 같다.

$$X^{(1)}(t)=e^{-At}(X^{(1)}(1)-A^{-1}B)+A^{-1}B \tag{6}$$

이로부터 MGM(1, m)모형 $X^{(0)}(k)+AZ^{(1)}(k)=B$의 시간응답순렬은 다음과 같다.

$$\hat{X}^{(1)}(k)=e^{-\hat{A}(k-1)}(X^{(1)}(1)-\hat{A}^{-1}\hat{B})+\hat{A}^{-1}\hat{B},\ k=2,\ 3,\ \cdots,\ n \tag{7}$$

여기서 $e^{-\hat{A}(k-1)}=I-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\hat{A}^i}{i!}(k-1)^i$ 이고 I는 m차단위행렬이다.

식 (7)로부터 행렬 $X^{(1)}$의 모의값을 얻을수 있다.

마지막으로 1-IAGO $\hat{X}^{(0)}(k)=\hat{X}^{(1)}(k)-\hat{X}^{(1)}(k-1),\ k=2,\ 3,\ \cdots,\ n$을 리용하여 $X^{(0)}$의 모의값을 얻는다.

2. 무게를 고려한 최소두제곱오차파라메터추정량의 계산방법

《새 정보우선원리》는 회색체계리론의 정보관점에서 새 정보에 비교적 큰 무게를 부여하여 회색모형작성, 회색예측, 회색분석, 회색평가, 회색결심채택 등의 효과를 제고할수 있게 한다.

이로부터 무게를 고려하여 최소두제곱오차파라메터추정량을 다음과 같이 계산할수 있다.

우선 식 (1)의 LSM은 아래와 같다.

$$f(a_{ij},b_i)=\sum_{k=1}^{n}(x_i^{(0)}(k)+\sum_{j=1}^{m}a_{ij}z_j^{(1)}(k)-b_i)^2\to\min,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m \tag{8}$$

다음 식 (1)의 무게를 고려한 LSM은

$$f(a_{ij},\ b_i)=\sum_{k=1}^{n}w(k)(x_i^{(0)}(k)+\sum_{j=1}^{m}a_{ij}z_j^{(1)}(k)-b_i)^2\to\min,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m \tag{9}$$

이다.

식 (9)의 최소화는 다음의 편미분방정식을 풀어 실현할수 있다.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial a_{ij}}=0,\ i=1,2,\ \cdots,\ m,\ j=1,\ 2,\cdots,\ n\\ \dfrac{\partial f}{\partial b_i}=0,\ i=1,\ 2,\cdots,m\end{cases}\to\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial a_{ij}}=2\sum_{k=1}^{n}\left[z_j^{(1)}(k)\cdot w(k)\cdot(x_i^{(0)}(k)+\sum_{l=1}^{m}a_{il}z_l^{(1)}(k)-b_i)\right]=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial b_i}=-2\sum_{k=1}^{n}\left[w(k)\cdot(x_i^{(0)}(k)+\sum_{l=1}^{m}a_{il}z_l^{(1)}(k)-b_i)\right]=0\end{cases} \tag{10}$$

우의 련립방정식을 풀고 행렬형식으로 정돈하면 다음과 같다.

$$D\cdot\hat{H}=E$$

여기서

$$D=\begin{bmatrix} \sum_{k=2}^{n} w(k)(z_1^{(1)}(k))^2 & \sum_{k=2}^{n} w(k)z_1^{(1)}(k)z_2^{(1)}(k) & \cdots & \sum_{k=2}^{n} w(k)z_1^{(1)}(k)z_m^{(1)}(k) & \sum_{k=2}^{n} w(k)z_1^{(1)}(k) \\ \sum_{k=2}^{n} w(k)z_2^{(1)}(k)z_1^{(1)}(k) & \sum_{k=2}^{n} w(k)(z_2^{(1)}(k))^2 & \cdots & \sum_{k=2}^{n} w(k)z_2^{(1)}(k)z_m^{(1)}(k) & \sum_{k=2}^{n} w(k)z_2^{(1)}(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sum_{k=2}^{n} w(k)z_m^{(1)}(k)z_1^{(1)}(k) & \sum_{k=2}^{n} w(k)z_m^{(1)}(k)z_2^{(1)}(k) & \cdots & \sum_{k=2}^{n} w(k)(z_m^{(1)}(k))^2 & \sum_{k=2}^{n} w(k)z_m^{(1)}(k) \\ \sum_{k=2}^{n} w(k)z_1^{(1)}(k) & \sum_{k=2}^{n} w(k)z_2^{(1)}(k) & \cdots & \sum_{k=2}^{n} w(k)z_m^{(1)}(k) & \sum_{k=2}^{n} w(k) \end{bmatrix},$$

$$\hat{H}=\begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{21} & \cdots & \hat{a}_{m1} \\ \hat{a}_{12} & \hat{a}_{22} & \cdots & \hat{a}_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{a}_{1m} & \hat{a}_{2m} & \cdots & \hat{a}_{mm} \\ \hat{b}_1 & \hat{b}_2 & \cdots & \hat{b}_m \end{bmatrix},$$

$$E=\begin{bmatrix} \sum_{k=2}^{n} w(k)z_1^{(1)}(k)x_1^{(0)}(k) & \sum_{k=2}^{n} w(k)z_1^{(1)}(k)x_2^{(0)}(k) & \cdots & \sum_{k=2}^{n} w(k)z_1^{(1)}(k)x_m^{(0)}(k) \\ \sum_{k=2}^{n} w(k)z_2^{(1)}(k)x_1^{(0)}(k) & \sum_{k=2}^{n} w(k)z_2^{(1)}(k)x_2^{(0)}(k) & \cdots & \sum_{k=2}^{n} w(k)z_2^{(1)}(k)x_m^{(0)}(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=2}^{n} w(k)z_m^{(1)}(k)x_1^{(0)}(k) & \sum_{k=2}^{n} w(k)z_m^{(1)}(k)x_2^{(0)}(k) & \cdots & \sum_{k=2}^{n} w(k)z_m^{(1)}(k)x_m^{(0)}(k) \\ \sum_{k=2}^{n} w(k)x_1^{(0)}(k) & \sum_{k=2}^{n} w(k)x_2^{(0)}(k) & \cdots & \sum_{k=2}^{n} w(k)x_m^{(0)}(k) \end{bmatrix}$$

이다.

D가 m차행렬이므로 여기서 $\hat{H}$을 구하면 $\hat{H}=D^{-1}E$ 이다. 한편

$$X_0=\begin{bmatrix} \sqrt{w(2)}x_1^{(0)}(2) & \sqrt{w(2)}x_2^{(0)}(2) & \cdots & \sqrt{w(2)}x_m^{(0)}(2) \\ \sqrt{w(3)}x_1^{(0)}(3) & \sqrt{w(3)}x_2^{(0)}(3) & \cdots & \sqrt{w(3)}x_m^{(0)}(3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{w(n)}x_1^{(0)}(n) & \sqrt{w(n)}x_2^{(0)}(n) & \cdots & \sqrt{w(n)}x_m^{(0)}(n) \end{bmatrix}$$

$$P=\begin{bmatrix} \sqrt{w(2)}z_1^{(1)}(2) & \sqrt{w(2)}z_2^{(1)}(2) & \cdots & \sqrt{w(2)}z_m^{(1)}(2) & \sqrt{w(2)} \\ \sqrt{w(3)}z_1^{(1)}(3) & \sqrt{w(3)}z_2^{(1)}(3) & \cdots & \sqrt{w(3)}z_m^{(1)}(3) & \sqrt{w(3)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sqrt{w(n)}z_1^{(1)}(n) & \sqrt{w(n)}z_2^{(1)}(n) & \cdots & \sqrt{w(n)}z_m^{(1)}(n) & \sqrt{w(n)} \end{bmatrix}$$

으로 놓으면 $D=P^{\mathrm{T}}P$, $E=P^{\mathrm{T}}X_0$ 으로 된다.

따라서 MGM(1, m)모형 $X^{(0)}(k)+AZ^{(1)}(k)=B$ 의 파라메터행렬 A, B는 다음과 같이 얻어진다.

$$\hat{H}=(\hat{A},\hat{B})^{\mathrm{T}}=(P^{\mathrm{T}}P)^{-1}P^{\mathrm{T}}X_0 \tag{11}$$

3. 모의정확도에 대한 분석결과

두 지점에서 철길로반의 침하상태에 대한 측정자료[1]를 리용하여 모의실험을 진행하였다.

두 지점에서의 철길로반의 침하상태는 호상관련을 가지고있으므로 MGM(1, 2)모형을 다음과 같이 작성할수 있다.

$$\begin{cases} x_1^{(0)}(k) + a_{11}z_1^{(1)}(k) + a_{12}z_2^{(1)}(k) = b_1 \\ x_2^{(0)}(k) + a_{21}z_1^{(1)}(k) + a_{22}z_2^{(1)}(k) = b_2 \end{cases} \tag{12}$$

N개의 측정자료중에서 마지막자료의 무게를 첫 자료의 2배정도로 취하고 앞에서 뒤로 가면서 무게를 커지게 하기 위하여 k째 자료의 무게값을 $w(k) = 1 + (k-2)/(n-2)$로 정하였다.

여기에 기초하여 모의실험을 진행한 결과는 표 1, 2와 같다.

표 1. MGM(1, 2)의 모의예측값 (선행한 방법)

번호	실지 자료 1	모의 예측값 1	실지 자료 2	모의 예측값 2
1	12.03	12.03	9.89	9.89
2	15.06	16	12.2	12.957
3	19.57	18.386	16.27	15.313
4	20.8	20.516	17.66	17.47
5	22.03	22.34	19.07	19.38
6	23.38	23.809	20.85	20.996
7	24.6	24.822	21.91	22.275
8	25.79	25.523	23.4	23.181
9	26.36	25.703	23.77	23.68
10	27.16	25.399	24.12	23.746

표 2. 무게를 고려한 MGM(1, 2)의 모의예측값(제안한 방법)

번호	실지 자료 1	모의 예측값 1	실지 자료 2	모의 예측값 2
1	12.03	12.03	9.89	9.89
2	15.06	16.168	12.2	13.089
3	19.57	18.441	16.27	15.362
4	20.8	20.479	17.66	17.448
5	22.03	22.244	19.07	19.31
6	23.38	23.702	20.85	20.912
7	24.6	24.822	21.91	22.225
8	25.79	25.581	23.4	23.221
9	26.36	25.957	23.77	23.876
10	27.16	25.936	24.12	24.173

표 1, 2로부터 선행한 방법의 상대오차는 4.74%, 제안한 방법의 상대오차는 3.13%로서 제안한 방법이 예측정확도를 개선하였다는것을 알수 있다.

맺 는 말

다변수회색모형 MGM(1, m)에서 무게를 고려한 최소두제곱오차최소화방법으로 파라메터들을 추정함으로써 예측정확도를 보다 높일수 있게 하는 방법을 제안하였다.

무게를 고려한 다변수회색모형 MGM(1, m)을 리용하여 두 지점에서의 철길로반의 침하상태에 대한 측정자료를 가지고 모의실험을 진행하여 예측정확도가 1.5%정도 개선되였다는것을 확인하였다.

참 고 문 헌

[1] Y. Luo et al.; Information Technology Journal, 13, 6, 1186, 2014.
[2] X. Guo et al.; Engineering Applications of Artificial Intelligence, 42, 82, 2015.
[3] P. P. Xiong et al.; Syst. Eng. Electron., 22, 4, 615, 2011.

주체106(2017)년 4월 5일 원고접수

A Method to Improve the Prediction Accuracy of MGM(1, m) by Weighted LSM Parameter Estimating

Choe Un Hyang, Pak Yong Jin

We proposed the method to improve the prediction accuracy of MGM(1, m) by weighted LSM parameter estimating.

The simulation results show that the proposed method improve the prediction accuracy by about 1.5 percents.

Key words: LSM, multi variable grey model, prediction