김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체104(2015)년 제61권 제1호 Vol. 61 No. 1 JUCHE104(2015).

한 형태의 프락탈정－역방향선형확률미분방정식의 풀이의 성질

신명국, 문철

론문에서는 프락탈정－역방향확률미분방정식의 풀이의 비교정리에 대하여 연구하였다.

선행연구에서는 $H=1/2$인 경우 위너－뽜쏭형역방향확률미분방정식[4]과 위너형정－역방향확률미분방정식[3]의 풀이의 유일존재성과 비교정리가 증명되였다.

상결수선형프락탈정－역방향확률미분방정식($H>1/2$)의 풀이의 유일존재성은 선행연구[1]에서 증명되였다.

론문에서는 상결수선형프락탈정－역방향확률미분방정식($H>1/2$)의 풀이의 비교정리를 증명하였다.

$B^{(H)}(t)=(B_1^{(H_1)}(t), \cdots, B_m^{(H_m)}(t))$는 확률공간 $(\Omega, \mathcal{F}^{(H)}, \boldsymbol{P}^{(H)})$우에서 정의되고 허스트지수가 $H=(H_1, \cdots, H_m)\in\left(\frac{1}{2}, 1\right)^m$인 m차원프락탈브라운운동이라고 하자. 여기서 $\mathcal{F}^{(H)}=\bigcup_{t\ge0}\mathcal{F}_t^{(H)}$이며 $\mathcal{F}_t^{(H)}$는 $B_t^{(H)}$에 의하여 생성된 $\sigma-$모임벌흐름이다.

다음과 같은 프락탈정－역방향확률미분방정식을 보기로 하자.

$$dX(t)=(-\mu Y(t)+\Phi(t))dt+(-\mu Z(t)+\Psi(t))dB^{(H)}(t) \tag{1}$$

$$-dY(t)=(\mu X(t)+\gamma(t))dt-Z(t)dB^{(H)}(t) \tag{2}$$

$$X(0)=x, \quad Y(T)=QX(T)+R$$

여기서 $x\in\boldsymbol{R}^n$, $\mu>0$이며 Φ, Ψ, γ는 $\boldsymbol{R}\times\Omega$에서 정의되고 각각 $\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{R}^{n\times m}$, $\boldsymbol{R}^n$에서 값을 취하는 함수들이다.

선행연구[2]에서 지적된 다음의 기호를 약속하자.

$$\langle f, g\rangle_{L_\phi^{1,2}(m)}:=\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^m\int_{\boldsymbol{R}}\int_{\boldsymbol{R}}f_i(s)\cdot g_i(s)\phi_{H_i}(s, t)dsdt+\sum_{i, j=1}^m\left(\int_{\boldsymbol{R}}D_{j, t}^\phi f_i(t)dt\right)\left(\int_{\boldsymbol{R}}D_{i, t}^\phi g_j(t)dt\right)\right]$$

여기서 $D_{k, t}^\phi Y$는 Y의 ω_k에 관한 말랴빈ϕ도함수

$$D_{k, s}^\phi Y:=\int_{\boldsymbol{R}}\phi_{H_k}(s, t)D_{k, t}Ydt=\int_{\boldsymbol{R}}\phi_{H_k}(s, t)\frac{\partial Y}{\partial\omega_k}(t, \omega)dt$$

이며 $\|f\|_{L_\phi^{1,2}}:=\langle f, f\rangle_{L_\phi^{1,2}}<\infty$인 함수 f전부의 모임을 $L_\phi^{1,2}(m)$으로 정의한다.

그리고 $\sigma_i, \theta_i\in L_\phi^{1,2}(m)$ $(i=\overline{1, n})$ 인 $\sigma=(\sigma_1, \cdots, \sigma_m)^T$, $\theta=(\theta_1, \cdots, \theta_m)^T$ 에 대하여 $\langle\sigma, \theta\rangle_{L_\phi^{1,2}(n\times m)}:=\sum_{i=1}^n\langle\sigma_i, \theta_i\rangle_{L_\phi^{1,2}}$와 같이 정의한다.

가정 ① $\Phi(t),\ \Psi(t),\ \gamma(t)$ 는 $\mathcal{F}_t^{(H)}$ －적합과정들이고 $L_\phi^{1,\,2}(m)$ 에 속한다.

② $\Phi(t),\ \Psi(t),\ \gamma(t) \in L^1([0,\ T])$ (거의)

③ $\mu > 0,\ Q \in \boldsymbol{R}^{n\times m}$ 인 정값행렬, $\boldsymbol{R}$ 는 상수벡토르이다.

가정밑에서 프락탈정－역방향확률미분방정식 (1), (2)의 풀이 $(X_t,\ Y_t,\ Z_t) \in L_\phi^{1,\,2}$ 의 유일존재성은 선행연구[1]에서 증명되였다.

론문에서는 프락탈정－역방향확률미분방정식 (1), (2)의 풀이에 대한 비교정리를 증명하였다.

$(X_1(\cdot),\ Y_1(\cdot),\ Z_1(\cdot)),\ \ (X_2(\cdot),\ Y_2(\cdot),\ Z_2(\cdot))$ 을 각각 $X_1(0) = x_1 \in \boldsymbol{R}^n,\ \ X_2(0) = x_2 \in \boldsymbol{R}^n$ 에 대응되는 방정식 (1), (2)의 풀이라고 하자.

그리고 $\widehat{U} = U_1 - U_2 = (X_1 - X_2,\ Y_1 - Y_2,\ Z_1 - Z_2) = (\hat{X},\ \hat{Y},\ \hat{Z}),\ \hat{x} = x_1 - x_2$ 라고 놓자.

그러면 $(\hat{X}(t),\ \hat{Y}(t),\ \hat{Z}(t))$ 는 다음의 방정식을 만족시킨다.

$$d\hat{X}(t) = -\mu\hat{Y}(t)dt + (-\mu\hat{Z}(t))dB_t^{(H)},\quad d\hat{Y}_t = \mu\hat{X}(t)dt - \hat{Z}(t)dB_t^{(H)},\quad \hat{X}(0) = \hat{x},\quad \hat{Y}(T) = Q\hat{X}(T)$$

보조정리 가정이 성립된다고 하자.

이때 임의의 $t \in [0,\ T]$ 에 대하여 $\mathrm{E}(\langle \hat{X}(t),\ \hat{Y}(t)\rangle) \ge 0$ 이 성립된다.

또한 $(\hat{X}(t),\ \hat{Y}(t),\ \hat{Z}(t))I_{[\tau\wedge T,\ T]}(t) \equiv 0$, $\tau = \inf\{t \in \{0,\ T];\ \langle \hat{X}(t),\ \hat{Y}(t)\rangle = 0\}$ 이 성립된다.

증명 $\langle \hat{X}(\cdot),\ \hat{Y}(\cdot)\rangle$ 에 대하여 $[t,\ T]$ 에서 확률적분변환공식을 적용하고 량변에 수학적기대값을 취하면

$$\mathrm{E}[\langle \hat{X}(T),\ \hat{Y}(T)\rangle] - \mathrm{E}[\langle \hat{X}(t),\ \hat{Y}(t)\rangle] =$$

$$= \mathrm{E}\left[\int_t^T \hat{X}(s)(-\mu\hat{X}(s))ds + \int_t^T \hat{X}(s)\hat{Z}(s)dB_s^{(H)}\right] + \mathrm{E}\left[\int_t^T \hat{Y}(s)(-\mu\hat{Y}(s))ds + \int_t^T (-\mu\hat{Z}(s))\widehat{Y}(s)dB_s^{(H)}\right] +$$

$$+ \mathrm{E}\left[\int_t^T\int_t^T \sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^m (-\mu\hat{z}_{ik}(u))\hat{z}_{ik}(s)\phi_k(s,\ t)duds\right] + \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^n\ \sum_{j,\ k=1}^m \left(\int_t^T D_{j,\ u}^\phi(-\mu\hat{z}_{ik}(u))du\right)\cdot\left(\int_t^T D_{k,\ u}^\phi(\hat{z}_{ij}(u))du\right)\right] =$$

$$= -\mu\mathrm{E}\left[\int_t^T |\hat{X}(u)|^2\,du\right] - \mu\mathrm{E}\left[\int_t^T |\hat{Y}(u)|^2\,du\right] - \mu\mathrm{E}[\langle \hat{Z},\ \hat{Z}\rangle_{L_\phi^{1,\,2},\ t}] = -\mu[\|\hat{X}\|_t^2 + \|\hat{Y}\|_t^2 + \|\hat{Z}\|_{L_\phi^{1,\,2},\ t}^2]$$

가 성립되며 따라서

$$\mathrm{E}[\langle \hat{X}(t),\ \hat{Y}(t)\rangle] = \mathrm{E}[\langle \hat{X}(T),\ \hat{Y}(T)\rangle] + \mu[\|\hat{X}\|_t^2 + \|\hat{Y}\|_t^2 + \|\hat{Z}\|_{L_\phi^{1,\,2}}^2] \ge 0,\ \ \forall t \in [0,\ T].$$

결국 $\mathrm{E}[\langle \hat{X}(t),\ \hat{Y}(t)\rangle] \ge 0,\ \ \forall t \in [0,\ T]$ 가 나온다.

한편 τ 의 정의로부터 $\mathrm{E}(\langle \hat{X}(T),\ \hat{Y}(T)\rangle - \langle \hat{X}(\tau\wedge T),\ \hat{Y}(\tau\wedge T)\rangle) \ge 0$ 이 성립된다.

다음으로 $[\tau\wedge T,\ T]$ 에서 변환공식을 적용하면

$$\mathrm{E}[\langle \hat{X}(T),\ \hat{Y}(T)\rangle - \langle \hat{X}(\tau\wedge T),\ \hat{Y}(\tau\wedge T)\rangle] = -\mu[\|\hat{X}\|_{\tau\wedge T}^2 + \|\hat{Y}\|_{\tau\wedge T}^2 + \|\hat{Z}\|_{L_\phi^{1,\,2},\ \tau\wedge T}^2].$$

그러므로 $[\|\hat{X}\|_{\tau\wedge T}^2 + \|\hat{Y}\|_{\tau\wedge T}^2 + \|\hat{Z}\|_{L_\phi^{1,\,2}}^2] \le 0$ 이 성립된다.

따라서 $(\hat{X}(t),\ \hat{Y}(t),\ \hat{Z}(t))I_{[\tau\wedge T,\ T]}(t) \equiv 0$ 이 나온다.(증명끝)

$n = 1$ 인 경우에 대하여 다음과 같은 비교정리를 보기로 하자.

정리 가정이 성립된다고 하자.

만일 $\hat{X}(0)>0$ 이라고 하면 이때 $\hat{Y}(0)>0$ 이 성립된다.

그리고 임의의 $t\in(0,\ T]$ 에 대하여 $X_1(t)\ge X_2(t),\quad Y_1(t)\ge Y_2(t)$ 가 성립된다.

증명 먼저 $\hat{X}(0)>0$ 이라고 하면 $\hat{Y}(0)>0$ 이 된다는것을 증명하자.

만일 $\hat{Y}(0)\le 0$ 이라고 하면 $\hat{Y}(0)=0$ 일 때는 $\langle\hat{X}(0),\ \hat{Y}(0)\rangle=0$ 이므로 $\tau=0$ 이고 보조정리로부터 $\hat{X}(0)=0$ 이 되므로 가정에 모순된다.

다음으로 $\hat{Y}(0)<0$ 이라고 하면 $\langle\hat{X}(0),\ \hat{Y}(0)\rangle<0$ 이므로 $\mathrm{E}(\langle\hat{X}(0),\ \hat{Y}(0)\rangle)<0$ 이 나오는데 역시 보조정리의 결과에 모순된다. 따라서 첫째 결과가 증명되였다.

둘째 결과를 증명하기 위하여 다음의 기호를 약속하자.

$$\tau_X=\inf\{t\in(0,\ T];\ \hat{X}(t)=0\},\quad \tau_Y=\inf\{t\in(0,\ T];\ \hat{Y}(t)=0\}$$

그러면 분명히 $\tau\le\tau_X,\ \tau\le\tau_Y$ 이다.

또한 보조정리로부터 $\hat{X}(t)=0\ \ (\forall t\ge\tau_X),\ \ \hat{Y}(t)=0\ \ (\forall t\ge\tau_Y)$ 이다.

사실 $\hat{X}(t),\ \hat{Y}(t)$ 가 확률 1로 표본련속이고 $\hat{X}(0)>0$, $\hat{Y}(0)>0$ 이므로 $[0,\ \tau_X]$ 에서 $\hat{X}(t)\ge 0$ 이고 $[0,\ \tau_Y]$ 에서는 $\hat{Y}(t)\ge 0$ 이다.

따라서 $\hat{X}(t)\ge 0,\ \hat{Y}(t)\ge 0,\ \ \forall t\in[0,\ T]$ 가 성립된다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] 신명국 등; 수학, 1, 34, 주체103(2014).

[2] F. Biagini; Stochastic Processes and Their Applications, 100, 233, 2002.

[3] S. Peng et al.; Stochastic Process Appl., 85, 75, 2000.

[4] J. Yin et al.; J. Math. Anal. Appl., 346, 345, 2008.

주체103(2014)년 9월 5일 원고접수

The Properties of Solution of a Fractal Forward-Backward Linear Stochastic Differential Equations

Sin Myong Guk, Mun Chol

We proved the comparison theorem of solution of the fractal forward-backward linear stochastic differential equations of a form

$$dX(t)=(-\mu Y(t)+\Phi(t))dt+(-\mu Z(t)+\Psi(t))dB^{(H)}(t),$$

$$-dY(t)=(\mu X(t)+\gamma(t))dt-Z(t)dB^{(H)}(t),$$

$$X(0)=x,\quad Y(T)=QX(T)+R$$

where $B^{(H)}(t)$ is $1-$dimensional fractal Brownian motion with Hurst parameter $H\in(1/2,\ 1)$.

Key word: fractal forward-backward linear stochastic differential equation