김일성종합대학학보 수 학

주체108(2019)년 제65권 제4호

결합 및 합차그라프에서의 생성나무개수평가

우 승 식

정점모임이 서로 비교차하는 두 그라프 $G_1=(V_1,\ E_1)$과 $G_2=(V_2,\ E_2)$에 대하여 정점모임은 $V_1 \cup V_2$이고 릉모임은 $E_1 \cup E_2 \cup E(V_1,\ V_2)$인 새로운 그라프를 G_1과 G_2의 결합그라프라고 부르고 $G=G_1 \oplus G_2$로 표시한다. 여기서 $E(V_1,\ V_2)=\{(i,\ j) \mid i \in V_1,\ j \in V_2\}$이다.

그라프 G의 두 정점 $u,\ v$사이 릉의 개수를 정점쌍 $(u,\ v)$의 다중도 또는 릉 $(u,\ v)$의 다중도라고 부르고 $l_G(u,\ v)$로 표시한다.

두 정점 $u,\ v$사이 릉이 있을 때 그 릉의 다중도가 1인 그라프를 단순그라프, 그렇지 않은 그라프를 다중그라프라고 부른다. 두 정점 $u,\ v$사이 릉이 있으면 이 릉들의 다중도가 모두 m인 그라프를 $m-$다중그라프라고 부르고 G^m으로 표시한다. 그리고 G의 정점 v에 이웃하고있는 릉의 개수를 이 정점의 차수라고 부르고 $d_G(v)$로 표시한다.

두 그라프 $G_1=(V_1,\ E_1)$과 $G_2=(V_2,\ E_2)$에 대하여 정점모임은 $V=V_1 \cup V_2$이고 릉모임 E는 $vu \in E \Leftrightarrow vu \in E_1$ 혹은 $vu \in E_2$인 그라프를 G_1과 G_2의 합그라프라고 부르고 $G=G_1+G_2$로 표시하며 G_2가 G_1의 부분그라프일 때 정점모임은 $V=V_1$이고 릉모임 $E=E_1-E_2$인 그라프 G를 G_1과 G_2의 차그라프라고 부르고 $G=G_1-G_2$로 표시한다.

$n-$정점다중그라프 G에 대하여 $a_{ij}:=\begin{cases} 0, & i=j \\ l_G(v_i,\ v_j), & i \neq j \end{cases}$ $\left(d_{ij}:=\begin{cases} d_G(v_i), & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}\right)$와 같은 n차행렬 $A(G)=(a_{ij})_{n,\ n}$ $(D(G)=(d_{ij})_{n,\ n})$을 G의 이웃행렬(차수행렬)이라고 부른다.

선행연구[2]에서는 임의의 $n-$정점다중그라프 G에 대하여 키르히호프행렬인 n차행렬 $L(G)=D(G)-A(G)$의 임의의 주대각선원소에 대한 여소행렬식은 서로 같으며 그 값이 G의 생성나무개수와 같다는것을 밝혔으며 선행연구[1]에서는 다중결합그라프 $K_{p,\ q}^m \oplus G$에서의 생성나무개수를, 선행연구[3]에서는 차그라프 K_n-G에서 G가 완전다조그라프인 경우 생성나무개수를, 선행연구[4]에서는 행렬나무정리를 리용하여 $m-$중그라프 $K_n^m+\alpha G$에서의 생성나무개수를, 선행연구[5]에서는 조합적방법으로 완전그라프와 완전2조그라프의 결합그라프에서의 생성나무개수를 평가하였다.

론문에서는 결합 $m-$ 중그라프 $K_n^m \oplus K_{p,\ g}^m$와 임의의 그라프 G와의 합, 차그라프 $(K_n \oplus K_{p,\ q})^m+\alpha G$에서의 생성나무개수를 평가하였다.

G의 정점들이 K_n^m에 n_1개, $K_{p,\ g}^m$의 정점분할모임들에 각각 $p_1,\ q_1$개 있다고 하자.

그리고 $\alpha=-1$인 경우에는 G의 릉다중도가 기껏 m이라고 가정하자.

G의 생성나무개수를 $\upsilon(G)$로 표시한다.

정리 1 그라프 $(K_n \oplus K_{p,\ q})^m+\alpha G$의 생성나무개수 $\upsilon((K_n \oplus K_{p,\ q})^m+\alpha G)$는

$$\upsilon((K_n \oplus K_{p,\ q})^m+\alpha G)=[m(n+p+q)]^{n-n_1-1}[m(n+q)]^{p-p_1} \cdot [m(n+p)]^{q-q_1} \cdot$$
$$\cdot M \det(\alpha L(G)+D((K_{n_1} \oplus K_{p_1,\ q_1})^m)-mW/M)$$

와 같다. 여기서 $D((K_{n_1} \oplus K_{p_1,\ q_1})^m)$ 은 $(K_n \oplus K_{p,\ g})^m$ 에서 G 에 있는 정점들만으로 이루어진 부분그라프의 차수행렬이며 행렬 W 는 다음과 같은 $(n_1+p_1+q_1)$ 차행렬이다.

$$W=\begin{vmatrix} PQ-M & \cdots & PQ & P & \cdots & P & Q & \cdots & Q \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ PQ & \cdots & PQ-M & P & \cdots & P & Q & \cdots & Q \\ P & \cdots & P & KP-1 & \cdots & KP-1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P & \cdots & P & KP-1 & \cdots & KP-1 & 1 & \cdots & 1 \\ Q & \cdots & Q & 1 & \cdots & 1 & QK-1 & \cdots & QK-1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q & \cdots & Q & 1 & \cdots & 1 & QK-1 & \cdots & QK-1 \end{vmatrix}$$

$$K:=\frac{2n+p+q-n_1-1}{n+p+q},\ Q:=\frac{n+p+q-p_1}{n+q},\ P:=\frac{n+p+q-q_1}{n+p},\ M:=P+Q-QKP$$

증명 $(K_n \oplus K_{p,\ q})^m+\alpha G$ 의 정점들에 다음과 같이 번호를 붙이자.

K_n 의 정점들가운데서 G 에 들어있지 않는 $n-n_1$ 개의 정점들을 먼저 번호화한 다음 $K_{p,\ q}$ 의 정점들가운데서 G 에 들어있지 않는 $p-p_1$ 개의 정점들, 다음 $q-q_1$ 개의 정점들을 번호화한다. 다음으로 G 에 들어있는 정점들로서 K_n 에 들어있는 n_1 개의 정점들을 먼저 번호화하고 다음 $K_{p,\ q}$ 에 들어있는 $p_1,\ q_1$ 개의 정점들을 차례로 번호화한다.

그러면 $(K_n \oplus K_{p,q})^m+\alpha G$ 의 키르히호프행렬은 $(n+p+q)$ 차행렬로서 다음과 같다.

$$L=L((K_n \oplus K_{p,\ g})^m+\alpha G)=$$

$$=\begin{bmatrix} -m & \cdots & A & -m & \cdots & -m & -m & \cdots & -m & -m & \cdots & -m & -m & \cdots & -m & -m & \cdots & -m \\ -m & \cdots & -m & B & \cdots & 0 & -m & \cdots & -m & -m & \cdots & -m & 0 & \cdots & 0 & -m & \cdots & -m \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -m & \cdots & -m & 0 & \cdots & B & -m & \cdots & -m & -m & \cdots & -m & 0 & \cdots & 0 & -m & \cdots & -m \\ -m & \cdots & -m & -m & \cdots & -m & C & \cdots & 0 & -m & \cdots & -m & -m & \cdots & -m & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -m & \cdots & -m & -m & \cdots & -m & 0 & \cdots & C & -m & \cdots & -m & -m & \cdots & -m & 0 & \cdots & 0 \\ -m & \cdots & -m & -m & \cdots & -m & -m & \cdots & -m & A' & \cdots & m' & m' & \cdots & m' & m' & \cdots & m' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -m & \cdots & -m & -m & \cdots & -m & -m & \cdots & -m & m' & \cdots & A' & m' & \cdots & m' & m' & \cdots & m' \\ -m & \cdots & -m & 0 & \cdots & 0 & -m & \cdots & -m & m' & \cdots & m' & B' & \cdots & 0 & m' & \cdots & m' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -m & \cdots & -m & 0 & \cdots & 0 & -m & \cdots & -m & m' & \cdots & m' & 0 & \cdots & B' & m' & \cdots & m' \\ -m & \cdots & -m & -m & \cdots & -m & 0 & \cdots & 0 & m' & \cdots & m' & m' & \cdots & m' & C' & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -m & \cdots & -m & -m & \cdots & -m & 0 & \cdots & 0 & m' & \cdots & m' & m' & \cdots & m' & 0 & \cdots & C' \end{bmatrix}$$

이 행렬에서 $A:=m(n+p+q-1),\ B:=m(n+q)$, $C:=m(n+p)$ 이고 $A',\ B',\ C'$ 는 각각

$$A' := m(n+p+q-1) + \alpha d_G(v_i), \quad B' := m(n+q) + \alpha d_G(v_i), \quad C' := m(n+p) + \alpha d_G(v_i)$$

이며 행렬의 (i, j) 위치에 있는 m' 는 $-m - \alpha l_G(v_i, v_j)$ 를 나타낸다.

그리고 행렬의 처음의 $n-n_1$ 개의 행과 렬은 K_n 의 $n-n_1$ 개의 정점들에, 그 다음 $p-p_1$, $q-q_1$ 개의 행과 렬은 각각 $K_{p,q}$ 의 $p-p_1$, $q-q_1$ 개의 정점들에, 그다음 n_1, p_1, q_1 개의 행과 렬은 각각 K_n, $K_{p,q}$ 의 n_1, p_1, q_1 개의 정점들에 대응된다.

이 행렬에서 첫번째 행과 렬을 제거하여 얻어진 $(n+p+q-1)$ 차행렬을 L_1 이라고 하면 $(K_n \oplus K_{p,q})^m + \alpha G$ 의 $v((K_n \oplus K_{p,q})^m + \alpha G)$ 는 행렬나무정리에 의하여 $\det L_1$ 과 같다.

이 행렬식의 마지막행에 $(n+p+q)$ 차원벡토르

$$(0, \cdots, 0, 0, \cdots, 0, 0, \cdots, 0, 0, \cdots, 0, 0, \cdots, 0, 0, \cdots, 0, 1)$$

을, 마지막렬에 $(n+p+q)$ 차원벡토르

$$(-m, \cdots, -m, -m, \cdots, -m, -m, \cdots, -m, -m, \cdots, -m, -m, \cdots, -m, -m, \cdots, -m, 1)^{\mathrm{T}}$$

를 보충하여 얻어진 $(n+p+q)$ 차행렬식 $\det(L_2)$ 도 $\det(L_1)$ 과 같으며 이 행렬식의 마지막렬에 -1 을 곱하고 나머지렬들에 더하여 얻어진 행렬식도 $\det(L_2)$ 와 같다.

우와 같은 방법을 반복하면 다음의 행렬식이 얻어진다.

$$v((K_n \oplus K_{p,\ g})^m + \alpha G) = [m(n+p+q)]^{n-n_1-1}[m(n+q)]^{p-p_1} \cdot [m(n+p)]^{q-q_1} \cdot$$

$$\cdot\begin{vmatrix}
A'+m & \cdots & m'' & m'' & \cdots & m'' & m'' & \cdots & m'' & -m & 0 & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
m'' & \cdots & A'+m & m'' & \cdots & m'' & m'' & \cdots & m'' & -m & 0 & 0 \\
m'' & \cdots & m'' & B' & \cdots & 0 & m'' & \cdots & m'' & 0 & -m & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
m'' & \cdots & m'' & 0 & \cdots & B' & m'' & \cdots & m'' & 0 & -m & 0 \\
m'' & \cdots & m'' & m'' & \cdots & m'' & C' & \cdots & 0 & 0 & 0 & -m \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
m'' & \cdots & m'' & m'' & \cdots & m'' & 0 & \cdots & C' & 0 & 0 & -m \\
-1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1-\dfrac{n-n_1-1}{n+p+q} & 1 & 1 \\
0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1+\dfrac{p-p_1}{n+q} & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & -1 & 0 & 1+\dfrac{q-q_1}{n+p}
\end{vmatrix}$$

$K := \dfrac{2n+p+q-n_1-1}{n+p+q}$, $Q := \dfrac{n+p+q-p_1}{n+q}$, $P := \dfrac{n+p+q-q_1}{n+p}$, $M := P+Q-QKP$ 로 놓고 행과 렬의 첨가 및 행렬식전개를 반복하면 $M\det(\alpha L(G) + D((K_{n_1} \oplus K_{p_1,\ q_1})^m) - mW/M)$ 가 성립된다.(증명끝)

정리 2 $m-$중그라프 $K_n^m + \alpha G$ 의 생성나무개수 $v(K_n^m + \alpha G)$ 는 다음과 같다.

$$v(K_n^m + \alpha G) = m \cdot (mn)^{n-n_1-2} \det(\alpha L(G) + mnI_{n_1})$$

여기서 n_1은 그라프 G의 정점개수이고 $L(G)$는 그라프 I_{n_1}의 n_1차단위행렬이다.

따름 결합그라프 $K_n \oplus K_{p,\,q}$의 생성나무개수 $\upsilon(K_n \oplus K_{p,\,q})$는 다음과 같다.

$$\upsilon(K_n \oplus K_{p,\,q}) = (n+p+q)^n (n+q)^{p-1} \cdot (n+p)^{q-1}$$

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보(자연과학), 61, 12, 7, 주체104(2015).

[2] N. Biggs; Algebraic Graph Theory, Cambridge University Press, 34～56, 1993.

[3] K. L. Chung et al.; Inform Precess. Lett., 76, 113, 2000.

[4] S. D. Nikolopoulos et al.; Discrete Math. Theor. Comput. Sci., 8, 235. 2006.

[5] U Sung Sik; Electronic Journal of Graph Theory and Applications, 4, 2, 171, 2016.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

Enumeration for the Number of Spanning Trees of the Joined Addition/Subtraction Graph

U Sung Sik

We have enumerated the number of spanning trees of the joined addition/subtraction graph $(K_n^m \oplus K_{p,\,g}^m) + \alpha G$ by using the matrix tree theorem.

Key words: spanning tree, enumeration