김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체105(2016)년 제62권 제6호 Vol. 62 No. 6 JUCHE105(2016).

분산방정식의 풀이의 정칙 $L^p - L^q$ 평가

주일혁, 김진명

경애하는 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《과학자, 기술자들은 당이 마련해준 과학기술룡마의 날개를 활짝 펴고 과학적재능과 열정을 총폭발시켜 누구나 다 높은 과학기술성과들을 내놓음으로써 부강조국건설에 이바지하는 참된 애국자가 되여야 합니다.》

론문에서는 시간에 관한 분산방정식

$$\begin{cases} \partial_t u(t,\ x) = iP(D)u(t,\ x), & (t,\ x) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^n \\ u(0,\ x) = u_0(x), & x \in \boldsymbol{R}^n \end{cases} \tag{1}$$

의 풀이의 대역적인 정칙 $L^p - L^q$ 평가를 진행하였다. 여기서 $D = -i(\partial/\partial x_1, \cdots, \partial/\partial x_n)$, $n \ge 2$ 이고 $P: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ 는 차수가 $m \ge 2$ (m 은 짝수)인 실타원형불퇴화비동차다항식이다.

분산방정식 (1)의 풀이는 기본풀이 $\int_{\boldsymbol{R}^n} e^{itP(\xi)+i\langle x,\ \xi\rangle} d\xi$ 와 초기값의 합성적

$$u(t,\ x) = F^{-1}(e^{itP(\cdot)}) * u_0(x)$$

로 표시된다.

우리는 $a(\xi) \in S^d(\boldsymbol{R}^n)$ 일 때 진동적분

$$I(t,\ x) := F^{-1}(a(\cdot)e^{itP})(x) = \int_{\boldsymbol{R}^n} e^{(itP(\xi)+i\langle x,\ \xi\rangle)} a(\xi) d\xi \tag{2}$$

의 대역적인 점적시공간평가를 얻은데 기초하여 선행연구[2]에서의 수법으로 우의 점적시공간평가로부터 분산방정식의 풀이의 초기조건에 따르는 시간에 관하여 대역적인 정칙 $L^p - L^q$ 평가를 얻었다.

P 가 타원형다항식이면 정지상원리에 의하여 진동적분 $I(t,\ x) = \int_{\boldsymbol{R}^n} e^{(itP(\xi)+i\langle x,\ \xi\rangle)} a(\xi) d\xi$ 는 매 $t \ne 0$ 을 고정할 때 공간변수에 관한 함수로서 무한번 미분가능하다.[2]

선행연구[2]에서는 진동적분 (2)에 대하여 시간에 관한 국부적인 점적정칙시공간평가를 얻고 그것을 리용하여 분산방정식의 풀이의 시간에 관한 국부적인 정칙 $L^p - L^q$ 평가를 진행하였다.

선행연구[3]에서는 시간변수와 공간변수를 동시에 평가하는 수법(일명 $\theta-$방법)에 의하여 방정식 (1)의 기본풀이로 되는 진동적분 $\int_{\boldsymbol{R}^n} e^{itP(\xi)+i\langle x,\ \xi\rangle} d\xi$ 의 대역적인 점적시공간평가를 진행하고 방정식 (1)의 풀이의 대역적인 $L^p - L^q$ 평가를 진행하였다.

선행연구[1]에서는 진동적분 (2)의 시간에 관한 대역적인 점적정칙시공간평가를 진폭이 $-n/2 \le d \le n(m-2)/2$ 인 범위에서 진행하고 $0 \le d \le n(m-2)/2$ 인 경우 풀이의 대역적인

정칙 $L^p - L^q$ 평가를 진행하였다.

정리 1 어떤 상수 $C>0$ 이 있어서

$$|I(t,\ x)| \le \begin{cases} C|t|^{-(n+d)/m}\ (1+|t|^{-1/m}|x|)^{-\mu}, & 0<|t|\le 1 \\ C|t|^{-1/m}\ (1+|t|^{-1}|x|)^{-\mu}, & |t|\ge 1 \end{cases} \tag{3}$$

이 성립된다. 여기서 $\mu = [m(n-2)-2d]/[2(m-1)],\ \ -mn/2 \le d \le n(m-2)/2$ 이다.

주의 1 우의 진동적분평가에서

$$I(t,\ x) = \int_{|\xi|>L} e^{i(\langle x,\ \xi\rangle + tP(\xi))} a(\xi)d\xi + \int_{|\xi|\le L} e^{i(\langle x,\ \xi\rangle + tP(\xi))} a(\xi)d\xi =: I_1(t,\ x) + I_2(t,\ x)$$

일 때 $|I_1(t,\ x)| \le C|t|^{-n/2}(1+|t|^{-1}|x|)^{-\mu} \le C|t|^{-(n+d)/m}(1+|t|^{-1/m}|x|)^{-\mu},\ |t|>1$ 이 성립된다.

분산방정식 (1)의 기본풀이의 점적정칙시공간평가를 리용하여 분산방정식 (1)의 풀이 $u(t,\ x) = F^{-1}(e^{itP(\cdot)}) * u_0(x) =: G(t,\ \cdot) * u_0(x) = S(t)u_0$ 의 시간에 관한 대역적인 정칙 $L^p - L^q$ 평가를 진행한다.

첨수 $\alpha \in \boldsymbol{Z}_+^n$ 에 대하여 공간변수의 α 계도함수를 ∂^α 으로 표시한다.

실수 k 에 대하여 I^k, J^k 는 리스, 베쎌포텐샬을 표시한다. 즉 $\varphi \in S'(\boldsymbol{R}^n)$ 에 대하여

$$I^k\varphi = F^{-1}(|\xi|^k\ \hat{\varphi}(\xi)),\ J^k\varphi = F^{-1}((1+|\xi|^2)^{k/2}\ \hat{\varphi}(\xi)).$$

$-\dfrac{mn}{2} < d \le \dfrac{n(m-2)}{2}$ 에 대하여 $p_d = \dfrac{2n(m-1)}{mn+2d},\ q_d = p_d' = \dfrac{2n(m-1)}{mn-2(n+d)}$ 로 표시하고 P_d, Q_d 는 $(1/p,\ 1/q)$ 평면에서 각각 점 $(1/p_d,\ 0)$, $(1,\ 1/q_d)$ 을 의미한다.

$0 \le d \le \dfrac{1}{2}n(m-2)$ 에 대하여 $r_d = \dfrac{2n(m-2)}{mn-2(n-d)}\left(\Rightarrow r_d' = \dfrac{2n(m-2)}{mn-2(n+d)}\right)$ 로 표시하고 R_d 는 점 $(1/r_d,\ 1/r_d')$ 을 의미한다.

$-\dfrac{1}{2}mn \le d \le 0$ 에 대하여 $s_d = \dfrac{2mn}{mn+2d}\left(\Rightarrow s_d' = \dfrac{2mn}{mn-2d}\right)$ 으로 표시하고 E_d, F_d 는 각각 점 $(1/s_d,\ 1/s_d)$, $(1/s_d',\ 1/s_d')$ 을 의미한다.

$0 \le d \le \dfrac{n(m-2)}{2}$ 일 때 Δ_d 는 $\left(\dfrac{1}{p},\ \dfrac{1}{q}\right)$ 평면의 닫긴4각형부분 $R_dP_dBQ_d$ 를 의미한다.

$d = \dfrac{n(m-2)}{2}$ 이면 $\Delta_d = \{B\}$, $0 < c < d < \dfrac{n(m-2)}{2}$ 이면 $\Delta_d \subset \Delta_c \subset \Delta_0$ 의 관계가 성립된다.

정리 2 d 를 $0 \le d \le \dfrac{n(m-2)}{2}$ 인 옹근수라고 하자.

그러면 $|\alpha| = d$ 를 만족시키는 임의의 $\alpha \in \boldsymbol{Z}_+^n$ 에 대하여

$$\|\partial^\alpha u(t,\ \cdot)\|_{L^q} \le \begin{cases} C|t|^{n(1/q-1/p)/m-d/m}\|u_0\|_{L^p}, & 0<|t|\le 1 \\ C|t|^{n|1/q-1/p'|-1/m}\|u_0\|_{L^p}, & |t|\ge 1 \end{cases} \tag{4}$$

이 성립된다. 여기서 $(p,\ q) \in \Delta_d$ 이거나 $(p,\ q) \ne (1,\ q_d),\ (p_d,\ \infty)$ 이다.

$(p,\ q) = (1,\ q_d)$ (또는 $(p_d,\ \infty)$)이면 식 (4)는 L^1 (또는 L^∞)을 H^1 (또는 BMO)로 바꾸면 그대로 성립된다.

증명 진동적분평가 (3)으로부터 다음의 식이 성립된다.

$$|\partial^\alpha F^{-1}(e^{itP(\cdot)})|\le\begin{cases}C|t|^{-(n+d)/m}(1+|t|^{-1/m}|x|)^{-\mu}, & 0<|t|\le 1\\ C|t|^{-1/m}(1+|t|^{-1}|x|)^{-\mu}, & |t|\ge 1\end{cases} \tag{5}$$

$\left(\frac{1}{p},\ \frac{1}{q}\right)$이 변 Q_dB에 놓일 때 $\left(\frac{1}{p},\ \frac{1}{q}\right)\ne Q_d$ (즉 $p=1,\ q_d<q\le\infty$)이면 민꼽스끼부등식[4]과 식 (5)로부터

$$\|\partial^\alpha F^{-1}(e^{itP(\cdot)})*u_0\|_{L^q}\le\|\partial^\alpha F^{-1}(e^{itP(\cdot)})\|_{L^q}\|u_0\|_{L^1}\le\begin{cases}C|t|^{n(1/q-1)/m-d/m}\|u_0\|_{L^1}, & 0<|t|\le 1\\ C|t|^{n(1/q-1)/m}\|u_0\|_{L^1}, & |t|\ge 1\end{cases}. \tag{6}$$

$\left(\frac{1}{p},\ \frac{1}{q}\right)=Q_d$ (즉 $p=1,\ q=q_d$)이면 이 평가는 L^1을 H^1로 교체하였을 때 리스포텐샬 I_{n/p_d}의 유계성으로부터 나온다.

다음으로 $\left(\frac{1}{p},\ \frac{1}{q}\right)=\left(\frac{1}{r_d},\ \frac{1}{r'_d}\right)$일 때 증명하자.

간단히 $d=\frac{n(m-2)}{2}$로 놓자.

그러면 $I^d(F^{-1}(e^{itP(\cdot)})=\int_{\boldsymbol{R}^n}e^{\langle x,\ \xi\rangle+itP(\xi)}|\xi|^d\,d\xi=F^{-1}(e^{itP(\cdot)}a(\xi))d\xi$, $a(\xi)=|\xi|^d$이다.

$a(\xi)\in S^d(\boldsymbol{R}^n)$, $|F^{-1}(e^{itP(\cdot)}a(\xi))|\le\begin{cases}C|t|^{-(n+d)/m}(1+|t|^{-1/m}|x|)^{-\mu}, & 0<|t|\le 1\\ C|t|^{-1/m}(1+|t|^{-1}|x|)^{-\mu}, & |t|\ge 1\end{cases}$이므로

$$\sup_{x\in\boldsymbol{R}^n}I^d(F^{-1}(e^{itP(\cdot)})\le\begin{cases}C|t|^{-(n+d)/m}=Ct^{-n/2}, & 0<|t|\le 1\\ C|t|^{-1/m}, & |t|\ge 1\end{cases}.$$

이 평가와 $F^{-1}(e^{itP(\cdot)})*u_0$이 $L^2(\boldsymbol{R}^n)$에서 우니따르라는 사실과 $\partial^\alpha=I^{|\alpha|}R^\alpha$ (여기서 $R=(R_1,\ R_2,\ \cdots,\ R_n)$은 리스변환)이라는 사실로부터 $(p,\ q)=(r_d,\ r'_d)$에서 식 (4)가 증명된다. 식 (6)으로부터 막씬키위츠보간정리[4]에 의하여 닫긴3각형 R_dQ_dB의 점들에 대해서 식 (4)가 성립됨을 알수 있다.

다음 공액성에 의해 3각형 R_dP_dB에 대해서도 3각형 R_dQ_dB의 결과로부터 정리의 주장이 성립된다.(증명끝)

주의 2 정리 1에서 $d=0$이면 선행연구[3]의 결과가 얻어진다.

주의 3 정리 1에서 $t\in\boldsymbol{R}$라는 사실이 매우 중요하다. 선행연구[2]에서는 $0<|t|\le 1$에서의 정칙평가를 진행하였는데 $|t|\ge 1$에서의 평가는 얻지 못하였다.

그러나 정리 1에서는 기본풀이의 시간에 관한 대역적인 점적정칙-시간공간평가로부터 시간에 관하여 대역적인 정칙평가를 얻었다.

$-n<d<0$일 때 $\Delta_d^*=\bigcup_{\nu\in I_d}\Delta_\nu$, $I_d=\left\{\nu:-\frac{1}{2}d(m-2)<\nu<\frac{1}{2}n(m-2)\right\}$로 표시하면 Δ_d^*은 Δ_{d^*}에서 정점 R_{d^*}와 두 변 $P_{d^*}R_{d^*}$, $Q_{d^*}R_{d^*}$을 뺀것이다. 여기서 $d^*=-\frac{d(m-2)}{2}$이다.

$-n<c<d<0$ 이면 $\Delta_c^* \subset \Delta_d^* \subset \Delta_0$ 의 관계가 성립된다.

정리 3 $-n<d<0$ 에 대하여 다음의 식들이 성립된다. 여기서 $(p,\ q) \in \Delta_d^*$ 이다.

$$\| I^d u(t,\ \cdot) \|_{L^q} \le \begin{cases} C|t|^{n(1/q-1/p)/m-d/m} \| u_0 \|_{L^p}, & 0<|t| \le 1 \\ C|t|^{n|1/q-1/p'|-1/m} \| u_0 \|_{L^p}, & |t| \ge 1 \end{cases} \tag{7}$$

$$\| J^d u(t,\ \cdot) \|_{L^q} \le \begin{cases} C|t|^{n(1/q-1/p)/m-d/m} \| u_0 \|_{L^p}, & 0<|t| \le 1 \\ C|t|^{n|1/q-1/p'|-1/m} \| u_0 \|_{L^p}, & |t| \ge 1 \end{cases} \tag{8}$$

증명 $-n<\nu \le n(m-2)/2$ 에 대하여 양그의 부등식[4]과 식 (5)로부터

$$\| I^\nu G(t,\ \cdot)*u_0 \|_{L^\infty} \le \| I^\nu G(t,\ \cdot) \|_{L^\infty} \| u_0 \|_{L^1} \le \begin{cases} C|t|^{(n+d)/m} \| u_0 \|_{L^1}, & 0<|t| \le 1 \\ C|t|^{-1/m} \| u_0 \|_{L^1}, & |t| \ge 1 \end{cases}. \tag{9}$$

한편 선행연구[3]으로부터 $(\tilde{p},\ \tilde{q}) \in \Delta_0$ 에 대하여 다음의 식이 성립된다.

$$\| G(t,\ \cdot)*u_0 \|_{L^{\tilde{q}}} \le \begin{cases} C|t|^{n(1/\tilde{q}-1/\tilde{p})/m} \| u_0 \|_{L^{\tilde{p}}}, & 0<|t| \le 1 \\ C|t|^{n|1/\tilde{q}-1/\tilde{p}'|-1/m} \| u_0 \|_{L^{\tilde{p}}}, & |t| \ge 1 \end{cases} \tag{10}$$

$(\tilde{p},\ \tilde{q})=(1,\ \tilde{q}_0)$ (또는 $(\tilde{p}_0,\ \infty)$)이면 식 (10)은 L^1 (또는 L^∞)을 H^1 (또는 BMO)로 바꾸면 그대로 성립된다.

스테인보간정리를 연산자족 $T_z : u_0 \to T_z u_0 = I^{z\nu} G(t,\ x) * u_0$ $(z \in \boldsymbol{C},\ 0 \le \mathrm{Re}\, z \le 1)$ 에 적용하면 식 (9), (10)으로부터 $-n<\nu \le \dfrac{n(m-2)}{2}$, $0 \le \theta \le 1$ 인 임의의 $\nu,\ \theta$ 와 $(p,\ q) \in \Delta_{\theta n(m-2)/2}$ 에 대하여 다음의 식이 성립된다.

$$\| I^{\theta\nu} G(t,\ \cdot)*u_0 \|_{L^q} \le \begin{cases} C|t|^{n(1/q-1/p)/m-\theta\nu/m} \| u_0 \|_{L^p}, & 0<|t| \le 1 \\ C|t|^{n|1/q-1/p'|-1/m} \| u_0 \|_{L^p}, & |t| \ge 1 \end{cases} \tag{11}$$

$-n<d<0$ 이므로 $-d<\theta n<1$ 인 θ 를 택하여 $(p,\ q) \in \Delta_{\theta n(m-2)/2}$ 가 성립되도록 한다.

$(p,\ q) \in \Delta_d^* = \bigcup_{\nu' \in I_d} \Delta_{\nu'}$, $I_d = \left\{ d' : -\dfrac{1}{2} d(m-2) < d' < \dfrac{1}{2} n(m-2) \right\}$ 이므로 그런 θ 는 존재한다.

$\nu = d/\theta$ 로 놓으면 $-n<\nu<d,\ 0<\theta<1$ 이므로 식 (11)로부터 식 (7)을 얻는다.

$$\| J^d u(t,\ \cdot) \|_{L^q} \le \| I^d G(t,\ \cdot)(I^{|d|} J^d u_0) \|_{L^q} \le \begin{cases} C|t|^{n(1/q-1/p)/m-d/m} \| u_0 \|_{L^p}, & 0<|t| \le 1 \\ C|t|^{n|1/q-1/p'|-1/m} \| u_0 \|_{L^p}, & |t| \ge 1 \end{cases}$$

이 성립되므로 식 (8)이 나온다.(증명끝)

주의 4 주의 1에서 얻은 점적시공간평가

$$|I_1(t,\ x)| \le C|t|^{-n/2} (1+|t|^{-1}|x|)^{-\mu} \le C|t|^{-(n+d)/m} (1+|t|^{-1/m}|x|)^{-\mu},\ \ |t|>0$$

을 리용하면 조건 $\mathrm{supp} Fu_0 \subset \Omega,\ \Omega := \{ \xi \in \boldsymbol{R}^n : |\xi| > A \}$ 의 가정밑에서 정리 1, 2의 증명수법으로 $-n<d \le n(m-2)/2$ 에 대하여

$$\| I^d u(t,\ \cdot) \|_{L^q} \le C|t|^{n(1/q-1/p)/m-d/m} \| u_0 \|_{L^p},\ \ \| J^d u(t,\ \cdot) \|_{L^q} \le C|t|^{n(1/q-1/p)/m-d/m} \| u_0 \|_{L^p},\ \ |t|>0$$

이 성립됨을 알수 있다. 여기서 $d \ge 0$ 이면 $(p,\ q) \in \Delta_d$, $d<0$ 이면 $(p,\ q) \in \Delta_d^*$ 이다.

$-mn/2 < d < 0$ 에 대하여 Π_d 는 $(1/p,\ 1/q)$ 평면의 정점 E_d, P_d, B, Q_d, F_d 로 둘러막힌 5각형구역으로서 정점 B 와 변 P_dB, BQ_d, P_dE_d, E_dF_d 와 F_dQ_d 는 포함하지만 정점 E_d, F_d 는 포함하지 않는다.

$-mn/2 < \nu < \mu < 0$ 이면 $\Delta_0 \subset \Pi_\mu \subset \Pi_\nu$ 이며 $d \to -mn/2$ 이면 Π_d 는 두 정점 O, C 를 제외한 3각형 OBC 에로 다가간다.

정리 4 조건 $\operatorname{supp} Fu_0 \subset \Omega,\ \Omega := \{\xi \in \boldsymbol{R}^n : |\xi| > A\}$ 가 성립된다고 하자.

그러면 $-mn/2 < d < 0$ 에 대하여 $\| J^d u(t,\ \cdot)\|_{L^q} \le C|t|^{n(1/q-1/q)/m} \| u_0 \|_{L^p}$, $|t| > 0$ 이 성립된다. 여기서 $(p,\ q) \in \Pi_d$ 이다.

증명 $$I_1(t, x) \le \begin{cases} C|t|^{-(n+d)/m}(1+|t|^{-1/m}|x|)^{-\mu}, & 0<|t|\le 1 \\ C|t|^{-n/2}(1+|t|^{-1}|x|)^{-\mu}, & |t|\ge 1 \end{cases} \le C|t|^{-n/m}(1+|t|^{-1/m}|x|)^{-\mu},\ |t|>0$$

이 성립되므로 정리 1과 류사한 방법으로 증명할수 있다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] 김류성 등; 수학, 4, 7, 주체103(2014).

[2] S. Cui; J. Fourier Anal. and Appl., 12, 605, 2006.

[3] A. Arnold et al.; Monatsh. Math., 168, 253, 2012.

[4] L. Grafakos; Classical and Modern Fourier Analysis, Springer, 34～78, 2008.

주체105(2016)년 2월 5일 원고접수

Regular Decay $L^p - L^q$ Estimation for Solutions of Dispersive Equations

Ju Il Hyok, Kim Jin Myong

This paper investigates dispersive equations of the form $\partial_t u(t,\ x) = iP(D)u(t,\ x)$ using harmonic analysis methods, we prove point-wise time-space regular decay $L^p - L^q$ estimates for a class of oscillatory integrals that appear as the fundamental solutions of dispersive equations. These estimates are then used to establish $L^p - L^q$ estimates on the dispersive solutions in terms of the initial conditions.

Key words: dispersive equation, cauchy problem