김일성종합대학학보 주체107(2018)년
(수 학) 제64권 제1호

공액대칭통계다양체가 공형－사영평탄이기 위한 한가지 충분조건

민철림, 홍충일

선행연구[2]에서는 공형－사영평탄통계다양체가 여차원이 2인 등적중심아핀넣기에 의하여 실현된다는것과 $n(\ge 4)$ 차원통계다양체가 공형－사영평탄이기 위해서는 공형－사영곡률텐소르가 령일것이 필요하고 충분하다는것을 밝혔으며 선행연구[3]에서는 $n(\ge 4)$ 차원통계다양체가 일정곡률다양체이면 공형－사영평탄다양체라는것을 밝혔다.

한편 선행연구[1]에서는 통계다양체의 접다발의 공형－사영평탄성을 연구하였다.

론문에서는 선행연구[3]의 조건을 약화시켜 통계다양체가 공액대칭인 경우 공형－사영평탄이기 위한 충분조건을 구하였다.

보조정리 1 통계다양체 $(M,\ g,\ \nabla,\ \overset{*}{\nabla})$ 이 공액대칭이라고 하자. 이때 $W,\ \overset{*}{W}$ 을 각각 $\nabla,\ \overset{*}{\nabla}$ 에 관한 공형－사영곡률텐소르라고 하면 $W=\overset{*}{W}$ 이 성립한다.

증명 ∇ 에 관한 공형－사영곡률텐소르는 다음과 같다.

$$W(X,\ Y)Z=R(X,\ Y)Z+\frac{1}{n(n-2)}\{Y[(n-1)Ric(X,\ Z)+\overset{*}{Ric}(X,\ Z)]-$$

$$-X[(n-1)Ric(Y,\ Z)+\overset{*}{Ric}(Y,\ Z)]+[(n-1)\overset{*}{Ric}{}^{\#}(Y)+Ric^{\#}(Y)]g(X,\ Z)-$$

$$-[(n-1)\overset{*}{Ric}{}^{\#}(X)+Ric^{\#}(X)]g(Y,\ Z)\}+\frac{\sigma[Xg(Y,\ Z)-Yg(X,\ Z)]}{(n-1)(n-2)}$$

여기서

$$g(Ric^{\#}(Y),\ Z)=Ric(Y,\ Z)\ \ (\forall Y,\ Z\in\Gamma(TM))$$

통계다양체 $(M,\ g,\ \nabla,\ \overset{*}{\nabla})$ 이 공액대칭이면 ∇ 와 $\overset{*}{\nabla}$ 에 관한 곡률텐소르들이 일치하므로 릿찌텐소르, 스칼라곡률들도 일치한다. 즉 다음의 식이 성립한다.

$$R=\overset{*}{R},\ Ric=\overset{*}{Ric},\ Ric^{\#}=\overset{*}{R}{}^{\#},\ \sigma=\overset{*}{\sigma} \tag{1}$$

따라서 ∇ 에 관한 공형－사영곡률텐소르는 다음과 같다.

$$W(X,\ Y)Z=R(X,\ Y)Z+\frac{[Ric(X,\ Z)Y-Ric(Y,\ Z)X+g(X,\ Z)Ric^{\#}(Y)-g(Y,\ Z)Ric^{\#}(X)]}{n-2}+$$

$$+\frac{\sigma[Xg(Y,\ Z)-Yg(X,\ Z)]}{(n-1)(n-2)} \tag{2}$$

마찬가지로 $\overset{*}{\nabla}$ 에 관한 공형－사영곡률텐소르는 다음과 같다.

$$\overset{*}{W}(X, Y)Z = \overset{*}{R}(X, Y)Z + \frac{1}{(n-2)}\{Y \overset{*}{Ric}(X, Z) - X \overset{*}{Ric}(Y, Z) + \overset{*}{Ric}^{\#}(Y)g(X, Z) -$$

$$- \overset{*}{Ric}^{\#}(X)g(Y, Z)\} + \frac{\overset{*}{\sigma}[Xg(Y, Z) - Yg(X, Z)]}{(n-1)(n-2)}$$

이때 식 (1)을 고려하면 $W = \overset{*}{W}$ 이 성립한다는것을 알수 있다.(증명끝)

일정곡률통계다양체는 공액대칭이므로 다음의 따름이 성립한다.

따름 $(M, g, \nabla, \overset{*}{\nabla})$ 이 일정곡률통계다양체라고 하자. 이때 $W, \overset{*}{W}$ 을 각각 $\nabla, \overset{*}{\nabla}$ 의 공형－사영곡률텐소르라고 하면 $W = \overset{*}{W}$ 이 성립한다.

$n (\geq 4)$ 차원일정곡률통계다양체에서 $W = 0$ 즉 공형－사영평탄이라는것은 알려져있다. 그러나 통계다양체의 일정곡률성을 약화시켜 공액대칭이라고 하면 그 통계다양체는 공형－사영평탄이라고 말할수 없다.

만일 통계다양체가 재귀계량통계다양체인 경우에는 다음의 사실이 성립한다.

보조정리 2 (M, g, Q) 가 재귀계량통계다양체인 경우에 대응하는 리만다양체 $(M, g, \overset{\circ}{\nabla})$ 가 공형평탄이면 $W = 0$ 이다. 여기서 $\overset{\circ}{\nabla}$ 는 레비－찌비따접속이다.

증명 $\nabla, \overset{*}{\nabla}$ 을 각각 재귀계량통계다양체 (M, g, Q) 의 쌍대인 두 접속이라고 하면

$$Q(X, Y, Z) = \omega(X)g(Y, Z) + \omega(Y)g(Z, X) + \omega(Z)h(X, Y) \ \ (\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM))$$

이므로

$$\nabla_X Y = \overset{\circ}{\nabla}_X Y - \frac{(\omega(X)Y + \omega(Y)X + g(X, Y)\omega^{\#})}{2}$$

$$\overset{*}{\nabla}_X Y = \overset{\circ}{\nabla}_X Y + \frac{(\omega(X)Y + \omega(Y)X + g(X, Y)\omega^{\#})}{2}$$

이다. 여기서 $\omega^{\#}$ 은

$$g(\omega^{\#}, X) = \omega(X) \ \ (\forall X \in \Gamma(TM))$$

을 만족시키는 (1, 0)형텐소르마당이다. 이로부터 $\nabla, \overset{*}{\nabla}$ 에 관한 곡률텐소르마당 $R, \overset{*}{R}$ 들은 각각 다음과 같이 표시된다.

$$R(X, Y)Z = K(X, Y)Z + X\Omega(Y, Z) - Y\Omega(X, Z) + g(X, Z)\overline{\Omega}^{\#}(Y) - g(Y, Z)\overline{\Omega}^{\#}(X) -$$
$$- Z\{\Omega(X, Y) - \Omega(Y, X)\}$$

$$\overset{*}{R}(X, Y)Z = K(X, Y)Z + X\overline{\Omega}(Y, Z) - Y\overline{\Omega}(X, Z) + g(X, Z)\Omega^{\#}(Y) - g(Y, Z)\Omega^{\#}(X) -$$
$$- Z\{\overline{\Omega}(X, Y) - \overline{\Omega}(Y, X)\}$$

여기서 K 는 $\overset{\circ}{\nabla}$ 에 관한 곡률텐소르마당이며

$$\Omega(X, Y) = \frac{\overset{\circ}{\nabla}\omega(Y, X)}{2} + \frac{\omega(X)\omega(Y)}{4} + \frac{g(X, Y)\omega(\cdot)\omega^{\#}}{8}$$

$$\overline{\Omega}(X, Y) = \frac{\overset{\circ}{\nabla}\omega(Y, X)}{2} - \frac{\omega(X)\omega(Y)}{4} - \frac{g(X, Y)\omega(\cdot)\omega^{\#}}{8}$$

$$g(\Omega^{\#}(X),\ Y)=\Omega(X,\ Y),\ g(\overline{\Omega}^{\#}(X),\ Y)=\overline{\Omega}(X,\ Y)\ \ (\forall X,\ Y,\ Z\in\Gamma(TM))$$

이다. 이로부터 다음의 식들이 성립한다.

$$R(X,\ Y)Z+\overset{*}{R}(X,\ Y)Z=2K(X,\ Y)Z+2\{X\omega(Y)\omega(Z)-Y\omega(X)\omega(Z)+g(Y,\ Z)\omega(X)\omega^{\#}-$$
$$-g(X,\ Z)\omega(Y)\omega^{\#}\}+2\{Xg(Y,\ Z)-Yg(X,\ Z)\}\omega(\cdot)\omega^{\#} \tag{3}$$

따라서 우의 식 (3)으로부터

$$Ric(Y,\ Z)+\overset{*}{Ric}(Y,\ Z)=tr\{X\mapsto[R(X,\ Y)Z+\overset{*}{R}(X,\ Y)Z]\}=$$
$$=2\overset{\circ}{Ric}(Y,\ Z)+2(n-2)\omega(Y)\omega(Z)+2ng(Y,\ Z)\omega(\cdot)\omega^{\#}$$

$$\sigma+\overset{*}{\sigma}=tr_g\{(Y,\ Z)\mapsto[Ric(Y,\ Z)+\overset{*}{Ric}(Y,\ Z)]\}=2\overset{\circ}{\sigma}+2(n+2)(n-1)\omega(\cdot)\omega^{\#}$$

이 성립한다. 그러므로

$$\omega(\cdot)\omega^{\#}=\frac{\sigma+\overset{*}{\sigma}-2\overset{\circ}{\sigma}}{2(n+2)(n-1)} \tag{4}$$

$$\omega(Y)\omega(Z)=\frac{\{(Ric(Y,\ Z)+\overset{*}{Ric}(Y,\ Z))-2\overset{\circ}{Ric}(Y,\ Z)-\dfrac{n(\sigma+\overset{*}{\sigma}-2\overset{\circ}{\sigma})}{(n+2)(n-1)}g(Y,\ Z)\}}{2(n-2)} \tag{5}$$

이다. 여기서 $\overset{\circ}{Ric},\ Ric,\ \overset{*}{Ric}$ 은 각각 $\overset{\circ}{\nabla},\ \nabla,\ \overset{*}{\nabla}$ 에 관한 릿찌곡률텐소르마당들이며 $\overset{\circ}{\sigma},\ \sigma,\ \overset{*}{\sigma}$ 은 각각 $\overset{\circ}{\nabla},\ \nabla,\ \overset{*}{\nabla}$ 에 관한 스칼라곡률들이다. 이로부터 식 (4), (5)를 식 (3)에 대입하고 와일공형곡률텐소르마당이

$$C(X,\ Y)Z=R(X,\ Y)Z+\frac{\{Ric(X,\ Z)Y-Ric(Y,\ Z)X+g(X,\ Z)Ric^{\#}(Y)-g(Y,\ Z)Ric^{\#}(X)\}}{n-2}+$$
$$+\frac{\sigma(Xg(Y,\ Z)-Yg(X,\ Z))}{(n-1)(n-2)}$$

라는것을 고려하면 $\overset{\circ}{\nabla},\ \nabla,\ \overset{*}{\nabla}$ 에 관한 와일공형곡률텐소르마당들을 각각 $\overset{\circ}{C},\ C,\ \overset{*}{C}$ 이라고 할 때

$$C(X,\ Y)Z+\overset{*}{C}(X,\ Y)Z=2\overset{\circ}{C}(X,\ Y)Z\ \ (\forall X,\ Y,\ Z\in\Gamma(TM)) \tag{6}$$

가 성립한다.

한편 재귀계량통계다양체 $(M,\ g,\ Q)$ 가 공액대칭이므로 식 (2)로부터

$$W=\overset{*}{W}=C=\overset{*}{C} \tag{7}$$

이 성립한다. 즉 $\nabla,\ \overset{*}{\nabla}$ 에 관한 공형－사영곡률텐소르와 와일공형곡률텐소르들이 모두 일치한다.

한편 리만다양체 $(M,\ g,\ \overset{\circ}{\nabla})$ 가 공형평탄이므로

$$\overset{\circ}{C}(X,\ Y)Z=0\ \ (\forall X,\ Y,\ Z\in\Gamma(TM))$$

이다. 따라서 식 (6), (7)로부터

$$W(X,\ Y)Z=0\ \ (\forall X,\ Y,\ Z\in\Gamma(TM))$$

이다.(증명끝)

4이상의 차원을 가진 공액대칭통계다양체의 공형－사영평탄성과 관련한 다음의 충분조건이 성립한다.

정리 $n(\geq 4)$ 차원공액대칭통계다양체 $(M,\ g,\ \nabla)$ 가 재귀계량통계다양체 $(M,\ g,\ \overset{\circ}{\nabla})$ 가 공형평탄이면 $(M,\ g,\ \nabla)$ 는 공형－사영평탄이다.

따름 $n(\geq 4)$ 차원공액대칭통계다양체 $(M,\ g,\ \nabla)$ 가 재귀계량통계다양체이고 리만다양체 $(M,\ g,\ \overset{\circ}{\nabla})$ 가 공형평탄이면 $(M,\ g,\ \overset{*}{\nabla})$ 도 공형－사영평탄이다.

참 고 문 헌

[1] I. Hasegawa et al.; Differential Geometry. Dynamical Systems, 10, 148, 2008.

[2] T. Kurose; Interdisciplinary Information Sciences, 8, 1, 89, 2002.

[3] H. Matsuzoe; Hokkaido Math. J., 27, 409, 1998.

주체106(2017)년 8월 10일 원고접수

A Sufficient Condition for Statistical Manifolds of Conjugate Symmetry to be Conformal-Projectively Flat

Min Chol Rim, Hong Chung Il

We show that $n(\geq 4)$ dimensional statistical manifolds of conjugate symmetry are conformal-projectively flat if they are recurrent metric and the corresponding Riemannian manifolds are conformal flat.

Key words: statistical manifold, conjugate symmetry