김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제2호

프레임에 관하여 성긴 표현을 가지는 신호회복을 위한 분해토대추적문제의 근사성

최철국, 조유성

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《기초과학을 끊임없이 심화발전시키지 않고서는 첨단과학기술을 연구도입할수도 없고 새로운 높은 수준의 과학기술을 연구개발할수도 없습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제22권 21페지)

론문에서는 프레임에 관하여 성긴 표현을 가지는 신호의 회복을 위한 분해토대추적문제의 근사성질에 대하여 론의하였다. 주어진 관측자료로부터 엄격한 프레임에 관하여 성긴 표현을 가지는 신호를 평등적으로 회복하는데서 중요한 조건은 프레임 D에 관한 제한된 등거리넘기기성(D-RIP)이다. 우리는 이 조건을 프레임 D에 관한 수준에서 제한된 등거리넘기기성(D-RIPL)으로 일반화하고 그에 기초하여 성김성변환이 엄격한 프레임이고 그것에 의한 전개결수들이 $(\boldsymbol{s},\ \boldsymbol{M})-$성김성을 나타내는 신호의 평등회복을 위한 분해토대추적문제의 근사성질에 대하여 연구하였다.

압축수감은 적은 개수의 선형관측

$$y = Ax + e \tag{1}$$

로부터 차원수가 대단히 큰 성긴 신호를 회복하는 문제[1]이다. 여기서 A는 $m \times n$형수감행렬 $(m << n)$이고 $e \in \mathbf{R}^m$은 관측오차를 모형화한 잡음항이다. 식 (1)에서 x가 표준직교토대에 의하여 성긴 표현을 가지는 경우에 수감행렬 A가 제한된 등거리넘기기성(RIP)을 만족시키면 $y = Ax + e$로부터 임의의 $s-$성긴 벡토르를 안정하게 회복할수 있다. 그러나 많은 경우 x는 표준직교토대보다 과완비프레임에 의하여 성글게 표현된다. 실례로 수중음향탐지기에서 해석하는 신호, 곡선경계가 있는 화상 등을 들수 있다. 이로부터 프레임에 의하여 성긴 표현을 가지는 신호를 압축수감하는 문제는 대단히 중요하다. 이때 신호 x는 $x = Dz$로 표시된다. 여기서 $D \in \mathbf{R}^{n \times d}$ $(n < d)$는 프레임벡토르들을 렬벡토르로 가지는 행렬이고 $z \in \mathbf{R}^d$는 성긴 벡토르이다.

이 경우에 x의 선형관측은

$$y = ADz + e \tag{2}$$

로 된다.

z가 성글다고 가정하였기때문에 식 (2)로부터 f를 얻어내는 직접적인 방법은 l_1-합성법이다.

먼저 l_1-최소화문제

$$\hat{z} = \underset{\tilde{z} \in \mathbf{R}^d}{\arg\min} \| \tilde{z} \|_1 \quad 제한조건 \quad \| y - AD\tilde{z} \| \le \varepsilon \tag{3}$$

을 풀어서 $\hat{z}$을 구하고 그 다음 x의 근사풀이 $\hat{x} = D\hat{z}$을 구한다. 실험적연구는 l_1-합성이 때때로 좋은 결과를 달성한다는것을 보여주고있지만 프레임 D가 과완비프레임인 경우에는 A가 RIP를 만족시킨다고 하더라도 AD는 RIP를 만족시키지 않으므로 리론적해

석이 어렵다.

l_1 – 분해법은 다음과 같은 문제

$$\hat{x} = \arg\min_{\tilde{x}\in\mathbf{R}^n} \| D^*\tilde{x} \|_1 \ \text{ 제한조건 } \ \| y - A\tilde{x} \| \le \varepsilon \tag{4}$$

으로 정식화된다.[2] 여기서 D^*은 프레임의 분해연산자이다. D가 토대인 경우에 l_1 – 분해법과 l_1 – 합성법은 동등하다. 그러나 D가 과완비프레임인 경우에 l_1 – 분해법과 l_1 – 합성법사이에는 일정한 차이가 존재한다. 어느 방법이 더 좋은 방법인가 하는것은 주어진 문제마다 다른것으로 하여 일반적으로는 판정하기 어렵다.

D가 파르세발프레임인 경우에 l_1 – 분해법의 성능평가가 선행연구[2]에서 처음으로 연구되였다. 여기서는 엄격한 프레임에 관한 제한된 등거리넘기기성(D-RIP)을 새롭게 정의하고 그에 기초하여 l_1 – 분해법의 성능평가를 진행하였다.

구조화된 성김성모형가운데서 $(\boldsymbol{s},\ \boldsymbol{M})$ – 성김성모형은 최근에 여러 분야에서 유리하다는것이 증명되였다. $(\boldsymbol{s},\ \boldsymbol{M})$ – 성김성은 신호를 수준별로 웨블레트분해하였을 때 나타나는 국부적인 성김성을 추상화하여 정의한 개념이다. $(\boldsymbol{s},\ \boldsymbol{M})$ – 성김성의 실례는 성김성변환으로서 웨블레트를 리용하는 푸리에표본화의 경우이다. 이것은 압축수감의 응용에서 많이 제기되는 MRI[3], 라지오간섭측정[5]에서 나타난다. 이 론문들에서 대역적인 성김성대신 국부적인 수준에서의 성김성이 그와 같은 문제들에서 정확한 모형이라는것을 론의하였다.

선행연구[7]에서는 점근적불일치성, 점근적성김성, 여러수준표본화방법을 제기하고 그에 기초하여 수준에서 국부적인 성김성을 가지는 신호에 대한 비평등회복결과를 연구하였다.

선행연구[4, 8]에서는 RIP가 여러 수준에서 국부적인 성김성을 나타내는 신호를 회복하는데 적합한 조건이 아니라는것을 응용실천에서 제기되는 문제들을 통하여 론증하고 그것을 일반화하여 수준에서 제한된 등거리넘기기성(RIPL)을 도입하였다.

선행연구[6]에서는 선행연구[7]에서의 결과를 성김성계가 엄격한 프레임인 경우로 일반화하였는데 비평등회복조건을 이끌어내였다.

수감행렬의 설계에 대하여 자유도[9]를 주자면 수학적으로는 관측으로부터 수준에서 성김성을 가지는 모든 신호를 회복할수 있는 평등회복조건이 연구되여야 한다.

론문에서는 D-RIP조건을 프레임 D에 관한 수준에서 제한된 등거리넘기기성(D-RIPL)으로 일반화하고 그에 기초하여 성김성변환이 엄격한 프레임이고 그것에 의한 전개결수들이 수준별로 국부적성김성을 나타내는 신호의 평등회복에 대하여 연구하였다.

정의 1 (프레임 D에 관한 수준에서 제한된 등거리넘기기성: D-RIPL) 성김성수준 $\boldsymbol{M} = (M_0,\ M_1,\ \cdots,\ M_r)$와 국부적성김성파라메터 $\boldsymbol{s} = (s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_r)$가 주어졌다고 하자.

행렬 $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$과 엄격한 프레임 $D \in \mathbf{C}^{n\times d}$에 대하여 적당한 상수 $1 > \delta > 0$이 있어서 임의의 $z \in \Sigma_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{M}}$에 대하여

$$(1-\delta)\| Dz \|_2^2 \le \| ADz \|_2^2 \le (1+\delta)\| Dz \|_2^2$$

이 성립하면 행렬 A는 δ를 가지고 차수 $(\boldsymbol{s},\ \boldsymbol{M})$인 D-RIPL를 만족시킨다고 말한다. 그리고 이때 가장 작은 δ를 $\delta_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{M}}$으로 표시하고 행렬 A의 차수 $(\boldsymbol{s},\ \boldsymbol{M})$인 D-RIPL상수라고 부른다.

자연수 N 에 대하여 $S \subset [N] = \{1, 2, \cdots, N\}$ 일 때 $D_S^* x$ 는

$$(D_S^* x)_j = \begin{cases} (D^* x)_j, & j \in S \\ 0, & j \notin S \end{cases}, \ j \in [N]$$

을 나타내고 $\overline{S}$ 는 S 의 나머지모임을 의미한다.

정의 2 (프레임 D 에 관한 수준에서 l^2 – 로바스트령공간성: l^2 – DNSPL) 행렬 $A \in \mathbf{C}^{m \times n}$ 과 엄격한 프레임 $D \in \mathbf{C}^{n \times d}$ 에 대하여 어떤 상수 $0 < \rho < 1$ 과 $\tau > 0$ 이 있어서 모든 $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{M})$ – 성긴 모임 S 에 대하여

$$\| D_S^* h \|_2 \le \frac{\rho}{\sqrt{\tilde{s}}} \| D_{\overline{S}}^* h \|_1 + \tau \| Ah \|_2, \ \forall h \in \mathbf{C}^n$$

이면 행렬 A 는 상수 ρ 와 τ 를 가지고 차수 $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{M})$ 인 프레임 D 에 관한 수준에서의 l^2 – 로바스트령공간성을 만족시킨다고 말한다. 여기서 $\tilde{s} = s_1 + s_2 + \cdots + s_r$ 이다.

정리 1 수감행렬 $A \in \mathbf{C}^{m \times n}$ 이 상수 ρ 와 τ 를 가지고 차수 $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{M})$ 인 프레임 D 에 관한 수준에서의 l^2 – 로바스트령공간성을 만족시킨다고 하자.

그리고 $x \in \mathbf{C}^n$ 에 대하여 $y = Ax + e, \ \| e \|_2 \le \varepsilon$ 이라고 하자. 이때 (4)의 풀이 $\hat{x}$ 은

$$\| x - \hat{x} \|_2 \le 2\varepsilon (A_1 + B_1 \sqrt[4]{l \eta_{\boldsymbol{s}, \boldsymbol{M}}}) + \frac{\sigma_{\boldsymbol{s}, \boldsymbol{M}}(D^* x)}{\sqrt{\tilde{s}}} (C_1 + D_1 \sqrt[4]{l \eta_{\boldsymbol{s}, \boldsymbol{M}}})$$

을 만족시킨다. 여기서 A_1, B_1, C_1, D_1 은 상수 ρ 와 τ 에만 의존하는 상수이다.

정리 2 $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{M})$ 을 수준수가 r 인 성김성패턴이라고 하고 $\eta_{\boldsymbol{s}, \boldsymbol{M}} = \max_{k, l = 1, \cdots, r} \{ s_k / s_l \}$ 라고 하자. 수감행렬 $A \in \mathbf{C}^{m \times n}$ 이 $\delta_{2s} \left(< \frac{1}{\sqrt{r(\eta_{\boldsymbol{s}, \boldsymbol{M}} + 1/4)^2 + 1}} \right)$ 을 가지고 D-RIPL을 만족시킨다고 하자. 그리고 $x \in \mathbf{C}^n$ 에 대하여 $y = Ax + e, \ \| e \|_2 \le \varepsilon$ 이라고 하자. 이때 (4)의 풀이 $\hat{x}$ 은

$$\| x - \hat{x} \|_2 \le 2\varepsilon (A_2 + B_2 \sqrt[4]{r \eta_{\boldsymbol{s}, \boldsymbol{M}}}) + \frac{\sigma_{\boldsymbol{s}, \boldsymbol{M}}(D^* x)}{\sqrt{\tilde{s}}} (C_2 + D_2 \sqrt[4]{r \eta_{\boldsymbol{s}, \boldsymbol{M}}})$$

을 만족시킨다. 여기서 A_2, B_2, C_2, D_2 는 D-RIPL상수 $\delta_{2\boldsymbol{s}, \boldsymbol{M}}$ 에만 의존하는 상수이다.

참 고 문 헌

[1] E. J. Candès, Proc. Int. Cong. Math., 3, 1433, 2006.
[2] E. Candès et al.; Appl. and Comput. Harmon. Anal., 31, 1, 59, 2010.
[3] M. Lustig et al.; IEEE Signal Process. Mag., 25, 2, 72, 2008.
[4] C. Li et al.; arXiv preprint arXiv: 1601.01988v3, 2018.
[5] Y. Wiaux et al.; Mon. Not. R. Astron. Soc., 395, 3, 1733, 2009.
[6] C. Poon; Appl. Comput. Harm. Anal., 42, 3, 402, 2017.

[7] B. Adcock et al.; arXiv preprint arXiv: 1302.0561, 2014.
[8] A. Bastounis et al.; arXiv preprint arXiv: 1411.4449, 2014.
[9] B. Adcock et al.; Compressed Sensing and Its Applications. Springer, 34~67, 2015.

주체108(2019)년 12월 15일 원고접수

Approximation Properties of Analysis Basis Pursuits for Signal Recovery with Sparse Representation Adapted to Frame

Choe Chol Guk, Jo Yu Song

In this paper, we extend the RIPL to the restricted isometry property in levels adapted to a frame D in case that the sparsifying system forms a tight frame and demonstrate that stable recovery is possible via an l_1 −analysis optimization problem.

Keywords: compressed sensing, l_1 −analysis