김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체104(2015)년 제61권 제3호 Vol. 61 No. 3 JUCHE104(2015).

웨블레트변환에 의한 한가지 반복함수계거꿀문제

서효선, 최춘화

반복함수계(IFS)거꿀문제는 프락탈리론과 실천연구에서 아주 중요하다. 이로부터 반복함수계거꿀문제에 대한 연구들이 여러 각도에서 진행되고있는데 지금까지 연구된 내용을 보면 콜라쥐정리에 기초한 반복함수계거꿀문제, 모멘트법에 기초한 반복함수계거꿀문제[1], 웨블레트변환에 기초한 반복함수계거꿀문제[2]로 분류하여 볼수 있다.

웨블레트변환에 기초한 IFS거꿀문제에서는 특징점선택문제가 제일 중요하다.

선행연구[2]에서는 함수 $f(x)$의 웨블레트변환의 절대극대값은 $f(x)$를 완전히 표시할수 있다는데 기초하여 절대극대값을 리용하여 비교적 적은 계산량으로 프락탈의 척도불변성을 서술하고 웨블레트극대분기점을 특징점으로, 선행연구[3]에서는 첫 극대분기점과 마지막 극대분기점을 특징점으로 하였다.

웨블레트변환의 절대극대값점은 신호를 완전히 재구성할수 있지만 프락탈의 특징으로부터 모든 극점을 특징점으로 선택하기 어렵다.

만약 미분가능한 웨블레트 ψ의 도함수 ψ'도 여전히 웨블레트라고 하면 다음의 등식이 성립하기때문에 $W_\psi(f)$의 절대극대값점이 $W_{\psi'}(f)$의 령점이라는것을 알수 있다.

$$\frac{\partial W_\psi[f]}{\partial b}(a,\ b) = -\frac{1}{a}W_{\psi'}[f](a,\ b) \tag{1}$$

그러므로 극점이 아니라 웨블레트변환의 령점을 특징점으로 리용하여 웨블레트분석을 진행할수 있다.

우리는 프락탈보간함수가 주어진 경우 그것의 웨블레트변환들은 자기상사성을 가진다는것을 밝히고 유한개의 웨블레트변환령점으로부터 이 함수도형의 반복함수계를 찾는 방법을 제기한다.

1. 프락탈보간함수에서 웨블레트변환의 자기상사관계

$H(X)$가 완비공간 X의 비지 않은 조밀한 콤팍트모임이라고 할 때 $D \in H(X)$를 취하고 축소넘기기 $w_i(i=\overline{1,\ N}) : [0,\ 1] \times D \to [0,\ 1] \times D$를 고려하면 다음의 식이 성립한다.

$$w_i\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_i & 0 \\ \beta_i & \gamma_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_i \\ \theta_i \end{pmatrix} \tag{2}$$

여기서 $\alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i,\ \varepsilon_i,\ \theta_i \in R,\ 0<\alpha_i<1,\ 0<|\gamma_i|<1$이다.

만일 $p_1=(0,\ y_1)$은 w_1의 부동점, $p_{N+1}=(1,\ y_{N+1})$은 w_N의 부동점이라고 하자. 그리고

$$w_i(p_{N+1}) = w_{i+1}(p_1),\ i=1,\ \cdots,\ N-1 \tag{3}$$

이 되게 파라메터를 선택하고 $w_1(p_1),\ w_2(p_1),\ \cdots,\ w_N(p_1)$이 같은 선상에 놓이지 않는다고 하면 $[w_i(p_1),\ w_i(p_{N+1})]$은 하나의 다변형곡선을 이룬다.

이때 반복함수계 $\{w_1,\ w_2,\ \cdots,\ w_N\}$의 흡인자는 미분불가능한 련속함수 f의 도형이며 함수 f는 보간점 $w_1(p_1),\ w_2(p_1),\ \cdots,\ w_N(p_1)$을 통과하는 프락탈보간함수이다.

이제 함수 $f\in[0,\ 1]$에 대하여 그리고 연산자 $H:[0,\ 1]\to[0,\ 1]$에 대하여

$$(Hf)(x)=\beta_i l_i^{-1}(x)+\gamma_i f(l_i^{-1}(x))+\theta_i,\ \ l_i(x)=w_i(x),\ \ \forall x\in[x_{i-1},\ x_i] \tag{4}$$

성립한다고 하자. 그리고 f_0이 보간점 $p_1,\ p_2,\cdots,\ p_{N+1}$을 가지는 리산선형함수라고 하면

$$f_{n+1}(x)=(Hf_n)(x)\to f_0(n\to\infty)$$

의 관계가 성립하며 이때 f_0은 H의 부동점으로 된다.

한편 $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_{N+1}$은 한직선상에 놓이지 않으므로 반복함수계에 의하여 생성된 화상의 프락탈차수는 다음 방정식의 유일한 풀이로 주어진다.[1]

$$\sum_{i=1}^{N}|\gamma_i|\alpha_i^{D-1}=1 \tag{5}$$

이제 웨블레트함수 ψ가 $n+1\ (n\ge 2)$번 미분가능하고 $[-k,\ k]$에서 받침을 가지는 미분가능한 함수 $\varphi(x)$의 n계도함수라고 하자. 그리고 함수 f는 $[0,\ 1]$에서 주어진 프락탈보간함수라고 하자. 그러면 다음의 정리가 성립된다.

정리 1 측도 $\mu(x)$의 웨블레트변환을

$$W_\psi\mu(a,\ b)=\int_R\overline{\psi}\left(\frac{x-b}{a}\right)d\mu(x),\ \ a>0,\ \ b\in R$$

로 정의하면 다음의 식이 성립한다.

$$W_\psi\mu(a,\ b)=\frac{1}{u_k}W_\psi\mu(a',\ b') \tag{6}$$

여기서

$$a'=u_k a$$
$$b'=u_k b+v_k,\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ N$$

이다.

정리 1은 측도에 의한 웨블레트변환에서 자기상사관계를 보여준다. 일반적으로 웨블레트변환에서 자기상사관계가 성립된다는것을 알수 있지만 프락탈인 경우 특이점이 많은것으로 하여 b와 b'의 대응관계를 찾는것이 쉽지 않다.

다음의 정리는 프락탈보간함수가 주어진 경우 웨블레트변환에서의 자기상사관계를 반영한다.

정리 2 ψ가 k차령모멘트$(k\ge 2)$를 가지고 $W=\{w_1,\ w_2,\ \cdots,\ w_N\}$은 식 (4)를 만족시키는 프락탈함수 f의 반복함수계라고 하면 $(-ak+b,\ ak+b)\subset[0,\ 1]$인 $(a,\ b)\in R_+\setminus\{0\}\times R$에 대하여

$$W_\psi f(a,\ b)=\frac{1}{\alpha_i\gamma_i}W_\psi f(\alpha_i a,\ \alpha_i b+\varepsilon_i),\ \ i=1,\ 2,\ \cdots,\ N \tag{7}$$

이 성립한다.

증명 웨블레트 ψ 에 의한 f 의 웨블레트변환은 다음과 같다.

$$W_\psi f(a,\ b)=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)f(x)dx$$

따라서

$$W_\psi f(a,\ b)=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-ak+b}^{ak+b}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)f(x)dx=\frac{1}{\alpha_i\sqrt{a}}\int_{l_i(-ak+b)}^{l_i(ak+b)}\psi\left(\frac{l_i^{-1}(x)-b}{a}\right)f(l_i^{-1}(x))dx=$$

$$=\frac{1}{\alpha_i\sqrt{a}}\int_{l_i(-ak+b)}^{l_i(ak+b)}\psi\left(\frac{l_i^{-1}(x)-b}{a}\right)\frac{1}{\gamma_i}(f(x)-\beta_i l_i^{-1}(x)-\theta_i)dx$$

이고 식 (4)에 의하여

$$W_\psi f(a,\ b)=\frac{1}{\alpha_i\sqrt{a}}\int_{l_i(-ak+b)}^{l_i(ak+b)}\psi\left(\frac{\frac{x-\varepsilon_i}{\alpha_i}-b}{a}\right)\frac{1}{\gamma_i}\left(f(x)-\beta_i\frac{x-\varepsilon_i}{\alpha_i}-\theta_i\right)dx$$

이며 식 (2)에 의하여

$$W_\psi f(a,\ b)=\frac{1}{\alpha_i\gamma_i\sqrt{a}}\int_{l_i(-ak+b)}^{l_i(ak+b)}\psi\left(\frac{\frac{x-\varepsilon_i}{\alpha_i}-b}{a}\right)f(x)dx-\frac{\beta_i}{\alpha_i\gamma_i\sqrt{a}}\int_{l_i(-ak+b)}^{l_i(ak+b)}\psi\left(\frac{\frac{x-\varepsilon_i}{\alpha_i}-b}{a}\right)\frac{x-\varepsilon_i}{\alpha_i}dx-$$

$$-\frac{\theta_i}{\alpha_i\gamma_i\sqrt{a}}\int_{l_i(-ak+b)}^{l_i(ak+b)}\psi\left(\frac{\frac{x-\varepsilon_i}{\alpha_i}-b}{a}\right)dx=\frac{1}{\alpha_i\gamma_i\sqrt{a}}\int_{l_i(-ak+b)}^{l_i(ak+b)}\psi\left(\frac{\frac{x-\varepsilon_i}{\alpha_i}-b}{a}\right)f(x)dx-$$

$$-\frac{\beta_i}{\gamma_i\sqrt{a}}\int_{-ak+b}^{ak+b}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)xdx-\frac{\theta_i}{\gamma_i\sqrt{a}}\int_{-ak+b}^{ak+b}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)dx$$

이다.

그런데 ψ 는 적어도 2차령모멘트를 가지는 웨블레트함수이므로 다음의 식이 성립한다.

$$W_\psi f(a,\ b)=\frac{1}{\alpha_i\gamma_i\sqrt{a}}\int_{l_i(-ak+b)}^{l_i(ak+b)}\psi\left(\frac{x-(\alpha_i b+\varepsilon_i)}{\alpha_i a}\right)f(x)dx=\frac{1}{\alpha_i\gamma_i}W_\psi f(\alpha_i a,\ \alpha_i b+\varepsilon_i)$$

(증명끝)

정리 1, 2로부터 웨블레트변환에서 자기상사관계는 척도인자와 평행이동인자에 관계된다는것을 알수 있다.

그러므로

$$W_\psi f(a,\ b)=0\,,\quad \frac{\partial W_\psi f}{\partial b}(a,\ b)=-\frac{1}{a}W_{\psi'}f(a,\ b)=0$$

과

$$W_\psi f(\alpha_i a,\ \alpha_i b+\varepsilon_i)=0\,,\quad \frac{\partial W_\psi}{\partial b}f(\alpha_i a,\ \alpha_i b+\varepsilon_i)=-\frac{1}{a}W_{\psi'}f(\alpha_i a,\ \alpha_i b+\varepsilon_i)=0$$

이라는 결론을 얻을수 있다.

론문에서는 편리를 위해 ψ에 의한 f의 웨블레트변환의 령점모임들에 대해서만 론의한다. 즉

$$A(\psi,\ f)=\left\{(a,\ b)\in(R_+\setminus\{0\})\times R \mid W_\psi f(a,\ b)=0 \quad \text{또는} \quad \frac{\partial W_\psi f}{\partial b}(a,\ b)=0\right\}.$$

2. 반복함수계거꿀문제풀이알고리듬과 유효성검증

$W=\{w_1,\ w_2,\ \cdots,\ w_N\}$는 파라메터 $\alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i,\ \varepsilon_i,\ \theta_i$를 가지는 반복함수계, f는 대응하는 프락탈보간함수, $(a,\ b)\in A$라고 하면 점 $(a_i,\ b_i)\in A,\quad i=\overline{1,\ N}$가 있어서 정리 2로부터 다음의 식이 성립한다.

$$a_i=\alpha_i a,\ \ b_i=\alpha_i b+\varepsilon_i \tag{8}$$

이러한 관계를 리용하여 프락탈함수 f의 반복함수계 $\{w_1,\ w_2,\ \cdots,\ w_N\}$을 얻어 프락탈함수도형을 부호화할수 있다.

$\{w_1,\ w_2,\ \cdots,\ w_N\}$을 얻는 구체적인 알고리듬은 다음과 같다.

① 먼저 프락탈함수의 프락탈차수 D를 계산하고 초기조건 $N=1$을 준 다음 $a^0=\max\{a \mid (a,\ b)\in A\}$에 대하여 $(a^0,\ b^0)\in A$인 b^0들가운데서 임의의 하나를 택한다.

② a^0보다 작은 척도들에서 $(a_i^1,\ b_i^1)\in A$인 점들을 얻는다.

③ 식 (8)로부터 파라메터 $\alpha_i,\ \varepsilon_i$를 계산하고 식 (3)에 의하여 조건 $\alpha_i+\varepsilon_i=\varepsilon_{i+1}$에 맞는가를 검사하여 맞으면 파라메터를 보관한다.

④ 수평선우에 놓이지 않는 함수 $f(x)$의 3개의 점을 식 (4)에 적용하고 방정식을 풀어서 $\beta_i,\ \gamma_i,\ \theta_i$를 구한다.

⑤ 식 (5)가 만족되지 않으면 $N=N+1$로 놓고 ③으로 이행하여 우의 과정을 반복한다.

이 방법은 선택한 척도하에서 비교적 적은 웨블레트변환의 령점을 리용하여 프락탈보간함수의 반복함수계를 구성할수 있다.

우리는 론문방법의 유효성을 검증하기 위하여 가우스함수의 2계도함수를 웨블레트함수로 하고 프락탈보간함수는 이미 알고있는 프락탈보간곡선(그림 1)을 리용하였다.

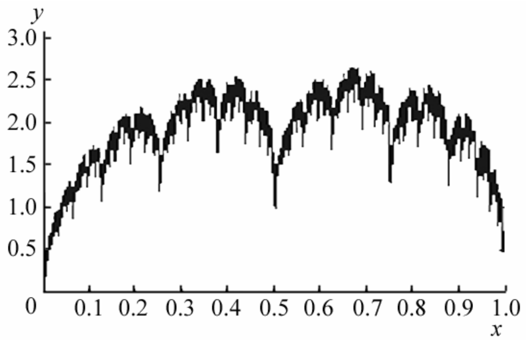

그림 1. 프락탈보간곡선

주어진 프락탈보간곡선의 반복함수계 $W=\{w_1,\ w_2\}$는 다음과 같다.

$$w_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.5&0\\1&0.7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$w_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.5&0\\-1&0.8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.5\\1\end{pmatrix}$$

웨블레트변환령점에 의하여 계산해낸 파라메터는 표와 같다.

표에서 1은 제안된 방법으로 계산한 IFS결수값, 2는 주어진 IFS결수값이다.

표. 웨블레트변환령점에 의하여 계산해낸 파라메터

반복함수계결수	α_i		β_i		γ_i		ε_i		θ_i	
	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
$w_1(x, y)^T$	0.5	0.47	1	1.06	0.7	0.52	0	0.00	0	0.00
$w_2(x, y)^T$	0.5	0.51	−1	−1.12	0.8	0.51	0.5	0.55	1	0.96

웨블레트변환령점에 의하여 구한 반복함수계를 리용하여 얻은 프락탈보간곡선은 그림 2와 같다.

그림 2와 표에서 보는바와 같이 론문의 방법을 리용하여 계산한 반복함수계는 주어진 프락탈보간함수의 반복함수계에 비교적 좋게 접근한다는것을 알수 있다. 이것은 프락탈보간함수가 주어진 경우 몇개의 웨블레트변환령점을 리용하여 프락탈곡선의 반복함수계를 비교적 정확하게 얻을수 있다는것을 보여준다.

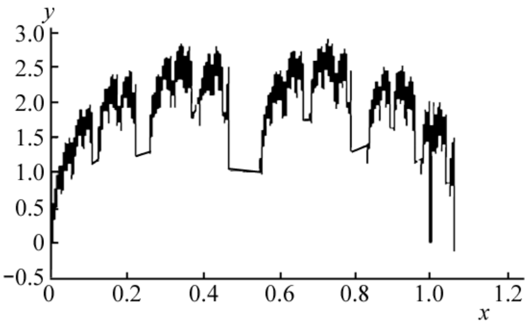

그림 2. 반복함수계에 의한 프락탈보간곡선

참 고 문 헌

[1] C. Handy; Physica D, 43, 17, 2001.
[2] A. Arneodo; Europhysics Letter, 25, 7, 484, 2005.
[3] 侯建荣; 计算机科学, 8, 35, 2006.

주체103(2014)년 11월 5일 원고접수

A Method of the Inverse Iterated Function System Problem using the Wavelet Transformation

So Hyo Son, Choe Chun Hwa

The inverse iterated function system is to search vary invariance of fractal using a mathematical transforms, is one of the most important and difficult task in real study based on fractal theory.

In this paper, we show that the zero-crossing point of wavelet transform keeps the self-similarity and suggest the method to find out the iterated function system of fractal interpolation function.

Key words: fractal, wavelet transform, self-similarity