김일성종합대학학보 JOURNAL OF KIM IL SUNG UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체105(2016)년 제62권 제10호 Vol. 62 No. 10 JUCHE105(2016).

곡선자리표계에 의한 프락탈곡면의 구성에 대한 연구

윤철희, 지형록

경애하는 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《우리는 과학기술강국건설에 박차를 가하여 짧은 기간에 나라의 과학기술발전에서 새로운 비약을 이룩하며 과학으로 흥하는 시대를 열고 사회주의건설에서 혁명적전환을 가져와야 합니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 38페지)

우리는 재귀반복함수계와 원기둥자리표계, 구면자리표계를 리용한 프락탈곡면들의 구성법을 연구하였다.

(재귀)반복함수계의 불변모임인 곡면을 (재귀)프락탈곡면이라고 부른다.

선행연구들[1－7]에서는 반복함수계와 재귀반복함수계를 리용한 프락탈곡면의 구성법들이 연구되였다. 이 구성법들에서 수직비례인자는 상수 또는 함수이고 토대함수들은 리프쉬츠함수들이며 자료모임은 직4각형살창우의 임의의 자료모임에로 일반화되였다.

선행연구[3]에서는 선행연구[2]에서 제기한 재귀프락탈곡면구성법과 구면자리표계를 리용하여 닫긴프락탈곡면을 구성하고 이 곡면의 프락탈차원을 평가하였다.

론문에서는 선행연구[2]의 재귀프락탈곡면구성법을 일반화한 선행연구[7]의 방법과 원기둥자리표계, 구면자리표계를 리용하여 프락탈곡면들을 구성하는 방법을 연구하였다.

1. 직4각형살창구역우에서의 재귀프락탈곡면의 구성

직4각형구역우에서의 자료모임은

$$P=\{(x_i,\ y_j,\ z_{ij})\in \boldsymbol{R}^3,\ i=0,\ 1,\cdots,\ n,\ j=0,\ 1,\ \cdots,\ m\}\ (x_0<x_1<\cdots<x_n,\ y_0<y_1<\cdots<y_m)$$

이고 $N=n\cdot m$, $I_{x_i}=[x_{i-1},\ x_i]$, $I_{y_j}=[y_{j-1},\ y_j]$, $N_{nm}=\{1,\cdots,\ n\}\times\{1,\cdots,\ m\}$, $E=[x_0,\ x_n]\times[y_0,\ y_m]$, $E_{ij}=I_{x_i}\times I_{y_j}$ (E_{ij}를 지역이라고 부른다.)로 표시하자.

$l\,(2\le l\le N)$이 옹근수일 때 몇개의 지역들로 이루어진 l개의 직4각형 $\widetilde{E}_k,\ k=1,\cdots,\ l$ ($\widetilde{E}_k$를 구역이라고 부른다.)들을 E에서 선택하면 $\widetilde{E}_k=\widetilde{I}_{x,\ k}\times\widetilde{I}_{y,\ k}$가 성립된다. 여기서 $\widetilde{I}_{x,\ k},\ \widetilde{I}_{y,\ k}$는 각각 x, y축우의 닫긴구간들이다.

구간 $\widetilde{I}_{x,\ k}$, $k\in\{1,\cdots,\ l\}$의 끝점들은 각각 $I_{x_i},\ i=1,\cdots,\ n$들의 어느 한 끝점들과 일치하므로 $\widetilde{I}_{x,\ k}$의 시작점과 끝점의 번호를 각각 $s_x(k),\ e_x(k)$로 표시하면 넘기기

$$s_x:\{1,\cdots,\ l\}\to\{1,\cdots,\ n\},\ e_x:\{1,\cdots,\ l\}\to\{1,\cdots,\ n\}$$

들이 정의된다.

$\widetilde{I}_{y,\ k}$에 대하여서도 마찬가지 방법으로 넘기기

$$s_y:\{1,\cdots,\ l\}\to\{1,\cdots,\ m\},\ e_y:\{1,\cdots,\ l\}\to\{1,\cdots,\ m\}$$

이 정의되며 $\widetilde{I}_{x,\,k}=[x_{s_x(k)},\ x_{e_x(k)}]$, $\widetilde{I}_{y,\,k}=[y_{s_y(k)},\ y_{e_y(k)}]$로 표시된다.

이때 $e_x(k)-s_x(k)\ge 2,\ e_y(k)-s_y(k)\ge 2$, $k=1,\cdots,\ l$로 가정한다. 이것은 구간 $\widetilde{I}_{x,\,k}$, $\widetilde{I}_{y,\,k}$ 들이 각각 2개 또는 그 이상의 I_{x_i}, I_{x_j} 들을 포함하는 구간임을 의미한다.

넘기기 $L_{x_i,\,k}:[x_{s_x(k)},\ x_{e_x(k)}]\to[x_{i-1},\ x_i]$, $L_{y_j,\,k}:[y_{s_y(k)},\ y_{e_y(k)}]\to[y_{j-1},\ y_j]$, $(i,\ j)\in N_{nm}$ 들이 각각 $\widetilde{I}_{x,\,k}$, $\widetilde{I}_{y,\,k}$의 끝점들을 구간 I_{x_i}, I_{x_j}의 끝점들로 넘기는 즉

$$L_{x_i,\,k}(\{x_{s_x(k)},\ x_{e_x(k)}\})=\{x_{i-1},\ x_i\},\ \ L_{y_j,\,k}(\{y_{s_y(k)},\ y_{e_y(k)}\})=\{y_{j-1},\ y_j\}$$

인 축소위상동형넘기기들이라고 하자.

변환 $L_{ij}:\widetilde{E}_k\to E_{ij}$를 $L_{ij}(x,\ y)=(L_{x_i,\,k}(x),\ L_{y_j,\,k}(y))$로 정의하면 L_{ij} 들은 $\widetilde{E}_k$의 정점들을 E_{ij}의 정점들로 넘긴다. 즉 $\alpha\in\{s_x(k),\ e_x(k)\}$, $\beta\in\{s_y(k),\ e_y(k)\}$이면

$$L_{ij}(x_\alpha,\ y_\beta)=(x_a,\ y_b)\ \ (a\in\{i-1,\ i\},\ b\in\{j-1,\ j\}).$$

넘기기 $F_{ij}:\widetilde{E}_k\times\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ i=1,\cdots,\ n,\ j=1,\cdots,\ m$,

$$F_{ij}(x,\ y,\ z)=s_{ij}(L_{ij}(x,\ y))z+b_{ij}(x,\ y) \tag{1}$$

들을 $\alpha\in\{s_x(k),\ e_x(k)\}$, $\beta\in\{s_y(k),\ e_y(k)\}$, $L_{x_i,\,k}(x_\alpha)=x_a$, $L_{y_j,\,k}(y_\beta)=y_b$ ($a\in\{i-1,\ i\}$, $b\in\{j-1,\ j\}$)이면 $F_{ij,\,k}(x_\alpha,\ y_\beta,\ z_{\alpha\beta})=z_{ab}$가 성립되도록 정의한다. 여기서 $s_{ij}:E_{ij}\to\boldsymbol{R}$는 $|s_{ij}(x,\ y)|<1$인 지역우에서의 임의의 리프쉬츠함수인 수직비례인자이고 $b_{ij}:\widetilde{E}_k\to\boldsymbol{R}$는 자료모임 P를 보간하는 어떤 련속함수 $g\in C^0(E)$에 대하여

$$F_{ij}(x_\alpha,\ y,\ g(x_\alpha,\ y))=g(L_{ij}(x_\alpha,\ y)),\ \alpha\in\{s_x(k),\ e_x(k)\}, \tag{2}$$

$$F_{ij}(x,\ y_\beta,\ g(x,\ y_\beta))=g(L_{ij}(x,\ y_\beta)),\ \beta\in\{s_y(k),\ e_y(k)\} \tag{3}$$

를 만족시키도록 정의한다.

이제 변환 $W_{ij}:\widetilde{E}_k\times\boldsymbol{R}\to E_{ij}\times\boldsymbol{R}$, $i=1,\cdots,\ n,\ \ j=1,\cdots,\ m$ 들을

$$W_{ij}(x,\ y,\ z)=(L_{ij}(x,\ y),\ F_{ij}(x,\ y,\ z)),\ i=1,\cdots,\ n,\ j=1,\cdots,\ m$$

으로 정의하면 L_{ij}와 F_{ij}의 정의방식으로부터 W_{ij} 들이 구역 $\widetilde{E}_k$의 정점에서 주어진 자료점들을 지역 E_{ij}의 정점에서 주어진 자료점으로 넘긴다는것을 알수 있다.

그러면 유클리드거리와 동등한 어떤 거리 ρ_θ가 있어서 W_{ij}, $i=1,\cdots,n,\ j=1,\cdots,\ m$ 들은 ρ_θ에 관한 축소변환으로 되며 RIFS $\{\boldsymbol{R}^3;\ M;\ W_{ij},\ i=1,\cdots,\ n,\ j=1,\cdots,\ m\}$은 자료모임 P에 대응되는 재귀반복함수계로 된다.

이 재귀반복함수계의 불변모임을 재귀프락탈모임이라고 부르고 A로 표시한다.

정리 1[7] 자료모임 P를 보간하는 어떤 보간함수 f가 있어서 f의 그라프는 우에서 구성한 RIFS의 불변모임으로 된다.

론문에서는 식 (1)에서 b_{ij}를 다음과 같은 형태로 구성한다.

$$b_{ij}(x,\ y)=-s_{ij}(L_{ij}(x,\ y))l_{ij}(x,\ y)+r_{ij}(L_{ij}(x,\ y)) \tag{4}$$

여기서 $r_{ij}(x,\ y)=g(x,\ y)\ \ ((x,\ y)\in\partial E_{ij}),\ l_{ij}(x,\ y)=g(x,\ y)\ \ ((x,\ y)\in\partial\widetilde{E}_{\gamma(i,\ j)})$이다.

그러면 $F_{ij}(x,\ y,\ z)=s_{ij}(L_{ij}(x,\ y))(z-l_{ij}(x,\ y))+r_{ij}(L_{ij}(x,\ y))$이다.

자료모임이 주어지면 $g(x, y)$는 주어진 자료모임의 보간함수로, $l_{ij}(x, y)$와 $r_{ij}(x, y)$는 각각 $g|_{\partial \widetilde{E}_k}$, $g|_{\partial E_k}$를 경계곡선으로 가지는 두변수함수로 구성되는데 그 한가지 구성방법은 꾼스곡면구성법이다.

U, V는 $\boldsymbol{R}^3$의 구역, $f: U \to V, Q \to B$는 우로의 1 : 1넘기기라고 하자. 그리고 (u, v, w)를 U에서 주어진 직각자리표계에 관한 점 Q의 자리표, (x, y, z)를 V에서 주어진 직각자리표계에 관한 점 B의 자리표라고 하자.

이때 점 Q의 (u, v, w)를 점 B의 곡선자리표, f를 곡선자리표계라고 부른다.

2. 원기둥자리표계에 의한 프락탈보간곡면의 구성법

원기둥자리표계를 리용하여 기둥모양의 프락탈보간곡면을 구성하자.

우에서 구성한 재귀프락탈곡면 $A: E \to \boldsymbol{R}$에 대하여 점변환 $H: \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$을 실시하기 위하여 $f(x, y) > 0$이라고 하자.

직각자리표계가 도입된 공간우의 점 $N(\varphi, z, r)$를 직각자리표계가 도입된 공간우의 점 $M(x, y, z)$에로 넘기는 1 : 1넘기기 $K: N \to M$,

$$K: \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi, \ 0 < r < +\infty, \ 0 \le \varphi < 2\pi, \ -\infty < z < +\infty \\ z = z \end{cases}$$

에 의하여 정의되는 K를 원기둥자리표계, (φ, z, r)를 점 M의 원기둥자리표라고 부른다.

정리 2 자료점이 원기둥자리표로 다음과 같이 주어졌다고 하자.

$$P = \{(\varphi_i, z_j, r_{ij}): i = 0, 1, \cdots, N, \ j = 0, 1, \cdots, M, \ \varphi_0 = 0, \ \varphi_N = 2\pi, \ z_0 = a, \ z_M = b\}$$

이 자료모임을 가지고 정리 1의 방법으로 만든 재귀프락탈곡면을 $A = Gr(r(\varphi, z))$라고 하자. 그리고 $r_{0j} = r_{Nj}, \ j = 0, 1, \cdots, M$이고 식 (2), (3)에서의 $g(\varphi, z)$에 대하여 $g(0, z) = g(2\pi, z)$가 성립된다고 하자.

그러면 $K(A)$는 련속인 프락탈곡면이다.

증명 정리 1로부터 A는 주어진 자료모임을 보간하는 련속인 프락탈곡면이다.

$r_{0j}(0, z) = g|_{\partial E_{0j}}$, $r_{2\pi j}(0, z) = g|_{\partial E_{2\pi j}}$이므로 $g(0, z) = g(2\pi, z)$가 성립되면 $r_{0j}(0, \psi)$, $r_{2\pi j}(0, \psi)$들이 $E = [0, 2\pi] \times [a, b]$의 경계 $\{0\} \times [-\pi/2, \pi/2]$, $\{2\pi\} \times [-\pi/2, \pi/2]$우에서 일치하므로 $A = Gr(r(\varphi, z))$에 점변환 K를 실시하면 $K(Gr(r(0, z)))$, $K(Gr(r(2\pi, z)))$는 같아지게 된다. 그리고 K는 련속함수이므로 $K(A)$는 련속인 프락탈곡면으로 된다.(증명끝)

3. 구면자리표계에 의한 프락탈보간곡면의 구성법

직각자리표계가 도입된 공간우의 점 $N(\varphi, \psi, r)$를 직각자리표계가 도입된 공간우의 점 $M(x, y, z)$에로 넘기는 1 : 1넘기기 $H: N \to M$,

$$H:\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\psi \\ y = r\sin\varphi\sin\psi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi,\ -\dfrac{\pi}{2} \le \psi \le \dfrac{\pi}{2},\ 0 < r < +\infty \\ z = r\cos\psi \end{cases}$$

에 의하여 정의되는 곡선자리표계 H를 구면자리표계라고 부른다.

그리고 (φ, ψ, r)를 점 M의 구면자리표라고 부른다.

정리 3 자료점이 구면자리표로 다음과 같이 주어졌다고 하자.

$$P = \{(\varphi_i,\ \psi_j,\ r_{ij}),\ i = 0, 1, \cdots, N,\ j = 0, 1, \cdots, M,\ \varphi_0 = 0,\ \varphi_N = 2\pi,\ \psi_0 = -\pi/2,\ \psi_M = -\pi/2\}$$

이 자료모임을 가지고 정리 1의 방법으로 만든 재귀프락탈곡면은 $A = Gr(r(\varphi,\ \psi))$이고 $r_{0j} = r_{Nj},\ j = 0, 1, \cdots, M$이며 식 (2), (3)에서의 $g(\varphi,\ \psi)$에 대하여 $g(0,\ \psi) = g(2\pi,\ \psi)$, $g(\varphi,\ -\pi/2) = g(\varphi,\ \pi/2) = \boldsymbol{R}$가 성립되면 $H(A)$는 련속인 프락탈곡면이다.

증명 정리 1로부터 A는 주어진 자료모임을 보간하는 련속인 프락탈곡면이다.

$g(0,\ \psi) = g(2\pi,\ \psi)$이면 $r_{0j}(0,\ \psi)$, $r_{2\pi j}(0,\ \psi)$들이 구역 $E = [0,\ 2\pi] \times [-\pi/2,\ \pi/2]$의 경계 $\{0\} \times [-\pi/2,\ \pi/2]$, $\{2\pi\} \times [-\pi/2,\ \pi/2]$우에서 일치하므로 프락탈곡면 $A = Gr(r(\varphi,\ \psi))$에 점변환 H를 실시한 후 $H(Gr(r(0,\ \psi)))$, $H(Gr(r(2\pi,\ \psi)))$는 같아지게 된다. 그리고 $g(\varphi,\ -\pi/2) = g(\varphi,\ \pi/2) = \boldsymbol{R}$이면 경계 $\{0,\ 2\pi\} \times \{-\pi/2\}$, $\{0,\ 2\pi\} \times \{\pi/2\}$우에서의 곡면 A의 경계는 $\varphi O \psi$평면에 평행인 선분이므로 이 경계들은 각각 서로 다른 두 점에로 넘어간다. 또한 H는 련속함수이므로 $H(A)$는 련속인 프락탈곡면으로 된다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] P. R. Massopust; J. Math. Anal. Appl., 151, 275, 1990.

[2] P. Bouboulis et al.; J. Approx. Theory, 141, 99, 2006.

[3] P. Bouboulis et al.; J. Math. Anal. Appl., 327, 116, 2007.

[4] R. Malysz; Chaos Solitons and Fractals, 27, 1147, 2006.

[5] V. Drakopoulos et al.; International Journal of Bifurcation and Chaos, 22, 9, 2012.

[6] Z. Fenga et al.; Applied Mathematics Letters, 25, 1896, 2012.

[7] C. H. Yun; Fractals, 23, 4, 1, 2015.

주체105(2016)년 6월 5일 원고접수

Construction of Fractal Surfaces using Curve Coordinate System

Yun Chol Hui, Ji Hyong Rok

We study the construction method of fractal surfaces using recurrent iterated function system, cylindrical coordinate system and spherical coordinate system.

Key word: fractal surface