김일성종합대학학보 주체107(2018)년
수 학 제64권 제4호

분수브라운운동과 비약과정으로 묘사되는 금융시장에서 기하평균아시아식선택권의 가격

김 주 경

론문에서는 브라운운동과 비약위험이 있는 금융시장에서 기하평균아시아식선택권의 가격문제를 고찰하였다.

선행연구[3, 4]에서는 시간에 관계되는 결수를 가진 기하브라운운동과 비약측도로 묘사되는 금융시장에서 기하평균과 산수평균의 아시아선택권의 최량보호방략을 구하는 문제와 브라운운동과 복합뽜쏭과정으로 이루어진 기하레비과정으로 묘사되는 금융시장에서 유럽식선택권의 가격화문제를 고찰하였다.

선행연구[5]에서는 분수브라운운동으로 묘사되는 금융시장에서 기하평균을 가진 아시아선택권의 가격모형을 설정하고 선택권의 가격방정식을 편미분방정식적으로 유도하였다.

또한 선행연구[6]에서는 분수브라운운동과 간단한 비약과정이 있는 금융시장을 묘사하고 기하평균아시아식선택권의 가격문제를 론의하였다. 론문에서 비약과정을 포함하지만 고찰과정에 비약위험은 련속위험에 포함시켜 마치 련속위험만이 있는 경우와 같이 취급하였다.

론문에서는 시간에 관계되는 결수를 가지며 분수브라운운동과 뽜쏭비약위험이 있는 확률미분방정식으로 주식가격이 묘사되는 경우에 기하평균아시아식선택권의 가격공식을 유도하였다.

기하평균아시아식선택권의 가격과정을 만족시키는 편미분－적분방정식을 유도하고 이 편미분－적분방정식의 풀이를 구하였다. 편미분－적분방정식을 편미분방정식과 적분방정식으로 분해하고 각각의 풀이를 구한 다음 이 풀이들의 합성적으로 풀이를 구하였다. 마지막으로 몇가지 정량적인 가격공식을 실례로 주었다.

$(\Omega,\ \mathcal{F},\ \boldsymbol{P})$를 허스트지수가 $H\ (0<H<1)$인 분수브라운운동 $\{B_H(t),\ t\ge 0\}$과 복합뽜쏭과정 $\{\xi(t),\ t\ge 0\}$가 정의되는 완비확률공간이라고 하자.

위험이 없는 자산가격 $S_0(t)$와 비약위험이 있는 자산가격 $S(t)$는 다음의 미분방정식을 만족시킨다. 여기서 r는 리자률이다.

$$dS_0(t)=r(t)S_0(t)dt,\ S_0(0)=1 \tag{1}$$

$$\begin{cases} dS(t)=a(t)S(t)dt+\sigma(t)S(t)dB_H(t)+\int\limits_{|z|>0}c(z)S(t)\mu(dt,\ dz) \\ S(0)=S \end{cases} \tag{2}$$

여기서 $a(t)$는 기대수익률, $\sigma(t)$는 변동률, $r(t)$는 무위험리자률이고 $c(z)$는 비약위험의 크기이며 이 함수들은 각각 시간변수 t에 관한 확정적인 함수이다.

중심화한 옹근수우연측도에 의하여 식 (2)를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$dS(t)=\widetilde{a}(t)S(t)dt+\sigma(t)S(t)dB_H(t)+\int\limits_{|z|>0}c(z)S(t)\widetilde{\mu}(dt,\ dz) \tag{3}$$

여기서 $\widetilde{a}(t)=a(t)+\int_{|z|>0} c(z)\nu(dz)$ 이다.

위험중성측도 $\boldsymbol{P}^*$을 라돈－니코딤의 도함수가

$$\frac{d\boldsymbol{P}^*}{d\boldsymbol{P}}=Z(T) \tag{4}$$

$$dZ(t)=\theta(t)Z(t)dB_H(t)+\int_{|z|>0}\rho(t,\ z)Z(t)\widetilde{\mu}(dt,\ dz),\ 0\le t\le T \tag{5}$$

를 만족시키도록 취한다. 여기서 $\theta(t),\ \rho(t,\ z)$는 다음과 같다.

$$\int_0^t \theta(s)\phi(s,\ t)ds=(\widetilde{a}(t)-r(t))/\sigma(t),\ \rho(t,\ z)=0,\ \phi(s,\ t)=H(2H-1)|t-s|^{2H-2}$$

위험중성측도 $\boldsymbol{P}^*$하에서

$$B_H^*(t)=B_H(t)+\int_0^t\int_0^\tau \theta(s)\phi(s,\ \tau)dsd\tau \tag{6}$$

로 정의되는 $\{B_H^*(t)\}_{t\in[0,\ T]}$는 분수브라운운동이다. 그러므로 위험중성측도 $\boldsymbol{P}^*$하에서 자산가격방정식은

$$dS(t)=r(t)S(t)dt+\sigma(t)S(t)dB_H^*(t)+\int_{|z|>0}c(z)S(t)\widetilde{\mu}(dt,\ dz) \tag{7}$$

로 표시된다.[1]

시간구간 $[0,\ t]$에서 기초자산 $S(\tau)$에 대한 기하평균은

$$J(t)=\exp\left\{\frac{1}{t}\int_0^t \ln S(\tau)d\tau\right\}$$

로 표시된다. 실시가격이 K이고 만기지불기일이 T일 때 기하평균아시아식상승기대선택권의 마감시각에 지불액은 $(J(T)-K)^+$이다.

$V(t,\ J,\ S)$를 이 선택권의 t시각의 가격이라고 하면 다음의 결과가 나온다.

정리 1 기초자산가격 $S(t)$가 방정식 (7)을 만족시킨다고 하자. 그러면 기하평균을 가진 아시아식상승기대선택권의 $t\ (0\le t\le T)$시각의 가격 $V(t,\ J,\ S)$는 다음의 편미분－적분방정식을 만족시킨다.

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\widetilde{\sigma}^2(t)S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+b(t)S\frac{\partial V}{\partial S}+\frac{\partial V}{\partial J}\frac{J\ln(S/J)}{t}-r(t)V+$$

$$+\int_{|z|>0}[V(t,\ J,\ S(1+c(z)))-V(t,\ J,\ S)]\nu(dz)=0 \tag{8}$$

$$V(T,\ J(T),\ S(T))=(J(T)-K)^+$$

여기서 $b(t)=r(t)-\int_{|z|>0}c(z)\nu(dz)$ 이다.

방정식 (8)을 풀기 위하여 이 방정식을 다음의 두 방정식으로 나누자.[2]

$$\begin{aligned}&\frac{\partial V}{\partial t}+\tilde{\sigma}^2(t)S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+b(t)S\frac{\partial V}{\partial S}+\frac{\partial V}{\partial J}\frac{J\ln(S/J)}{t}-r(t)V=0\\&V(T,\ J(T),\ S(T))=(J(T)-K)^+\end{aligned}\tag{9}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial V}{\partial t}+\int_{|z|>0}[V(t,\ J,\ S(1+c(z)))-V(t,\ J,\ S)]\nu(dz)=0\\&V(T,\ J(T),\ S(T))=\delta(S)\end{aligned}\tag{10}$$

정리 2 종점조건이 $V(T,\ J(T),\ S(T))=(J(T)-K)^+$ 인 방정식 (9)의 풀이 $V(t,\ J,\ S)$ 는 다음과 같다.

$$V(t,\ J,\ S)=J^{t/T}S^{(T-t)/T}e^{\alpha(t)-\beta(t)+\gamma(t)/2}N(d_1)-Ke^{-\beta(t)}N(d_2)\tag{11}$$

여기서

$$d_1=\left(\ln\left[\frac{J^{t/T}S^{(T-t)/T}}{K}\right]+\alpha(t)+\gamma(t)\right)/\sqrt{\gamma(t)},\ d_2=d_1-\sqrt{\gamma(t)}\tag{12}$$

$$\alpha(t)=\int_t^T(b(\tau)-\tilde{\sigma}^2(\tau))\frac{T-\tau}{T}d\tau,\ \beta(t)=\int_t^T r(\tau)d\tau$$

$$\gamma(t)=2\int_t^T\tilde{\sigma}^2(\tau)\left(\frac{T-\tau}{T}\right)^2d\tau,\ N(x)=\int_{-\infty}^x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}dy$$

정리 3 레비측도가 $\nu(dz)=\lambda p(z)dz$ 일 때 방정식 (10)의 풀이는

$$V(t,\ J,\ S)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\lambda(T-t)]^n}{n!}e^{-\lambda(T-t)}f^{*n}(S)\tag{13}$$

이다. 여기서 $f(S)$ 는 우연량 ξ_k 의 어떤 함수의 밀도함수이고 $f^{*n}(S)$ 는 $f(S)$ 의 n중중첩이며 $f^{*0}(S)=\delta(S)$ 이다.

정리 4 방정식 (9), (10)의 풀이인 (11), (13)을 각각 $V_1,\ V_2$ 라고 놓으면 기하평균을 가진 아시아식선택권의 가격 V 는

$$V=V_1*_s V_2(\cdot,\ S)$$

이다. 여기서 $*_s$ 는 변수 S 에 관한 합성적이다.

따라서 기하평균을 가진 아시아식선택권의 가격 V 는 식 (11), (13)에 의하여

$$\begin{aligned}V(t,\ J,\ S)=J^{t/T}S^{(T-t)/T}e^{\alpha(t)-\beta(t)+\gamma(t)/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\lambda(T-t)]^n}{n!}e^{-\lambda(T-s)}N*\tilde{p}^{*n}(S)(d_1)=\\-Ke^{-\beta(t)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\lambda(T-t)]^n}{n!}e^{-\lambda(T-t)}N*\tilde{p}^{*n}(d_2)\end{aligned}\tag{14}$$

이다.

실례 식 (14)에서 레비측도 $\nu(dz)=\lambda p(z)dz$ 에서 초밀도함수 $p(z)$ 만 주어지면 가격공식을 정량적으로 계산할수 있으므로 2항분포인 경우에 실례를 들어보자. 레비측도가

$$\nu(dz)=\lambda p(z)dz=\lambda\sum_{i=1}^m p_i\delta(z-a_i)dz\ \ (a_i\in\mathbf{R}^1,\ \lambda>0)$$

일 때 기하평균아시아식구매선택권의 가격은

$$V(t,\ J,\ S)=J^{t/T}S^{(T-t)/T}e^{\alpha(t)-\beta(t)+\gamma(t)/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\lambda(T-t)]^n}{n!}e^{-\lambda\sum P_i(1+c(a_i))(T-t)}\sum_{|l(m)|=n}[P(1+c(a))]^{l(m)}N(d_1)-$$

$$-Ke^{-\beta(t)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\lambda(T-t)]^n}{n!}e^{-\lambda(T-t)}\sum_{|l(m)|=n}p^{l(m)}N(d_2)$$

여기서 $l(m)$은 m차원다중첨수인 $l(m)=(l_1,\ \cdots,\ l_m)$이고 다음식이 성립한다.

$$p^{l(m)}=p_1^{l_1}\cdots p_m^{l_m},\ |l(m)|=\sum_{j=1}^{m}l_j$$

$$d_1=\left(\ln\left[\frac{J^{t/T}S^{(T-t)/T}}{K}\right]+\alpha(t)+\gamma(t)-\lambda\sum_{i=1}^{m}P_ic(a_i)+\sum_{i=1}^{m}\ln(c(a_i)+1)\right)/\sqrt{\gamma(t)}$$

$$d_2=d_1-\sqrt{\gamma(t)},\ \alpha(t)=\int_t^T(r(\tau)-\tilde{\sigma}^2(\tau))\frac{T-\tau}{T}d\tau,\ \beta(t)=\int_t^T r(\tau)d\tau$$

$$\gamma(t)=2\int_t^T\tilde{\sigma}^2(\tau)\left(\frac{T-\tau}{T}\right)^2d\tau,\ [P(1+c(a))]=(p_1(1+c(a_1)),\ \cdots,\ p_m(1+c(a_m)))$$

$$N(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}dy$$

참 고 문 헌

[1] 김일성종합대학학보(자연과학), 62, 2, 8, 주체105(2016).

[2] 김일성종합대학학보(자연과학), 58, 1, 8, 주체101(2012).

[3] 김일성종합대학학보(자연과학), 50, 9, 12, 주체93(2004).

[4] Phelim Boyle, Alexander Potapchik; Insurance: Mathematics and Economics, 42, 189, 2008.

[5] Zhijuan Mao, Zhian Liang; Journal of Mathemeticcal Finance, 4, 1, 2014.

[6] Bin Peng, Fei Peng; J. Econ. Finance Adm. Sci., 17, 33, 2, 2012.

주체107(2018)년 6월 5일 원고접수

Geometric Average Asian Option Pricing in Financial Market Driven by Fractional Brownian Motion and Jump Processes

Kim Ju Gyong

In this paper, we study pricing problem of geometric average Asian option in financial market driven by stochastic differential equation(SDE) under fractional Brownian motion and jump risk, where their coefficients are depending on time variable.

Key words: fractional Brownian motion, stochastic differential equation