김일성종합대학학보 주체110(2021)년
수 학 제67권 제3호

시간변환된 혼합분수브라운운동모형에서 혼합헤지방략에 대한 연구

김수향, 김경희

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《기초과학부문들을 발전시켜야 나라의 과학기술수준을 빨리 높일수 있고 인민경제 여러 분야에서 나서는 과학기술적문제들을 원만히 풀수 있으며 과학기술을 주체성있게 발전시켜나갈수 있습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제10권 485폐지)

우리는 최근에 연구되고있는 시간변환된 혼합분수브라운운동모형에서 혼합헤지방략에 대하여 연구하였다. 최근의 연구결과들은 금융시계렬들이 시간척도법칙성과 장기기억성을 나타내기때문에 선택권가격결정과 투자조합에 의한 헤지에서 시간척도와 거래빈도수를 고려해야 한다는것을 보여주었다.[5] 블랙크와 숄즈[1], 머튼[4]의 결과가 발표된 때로부터 선택권가격문제에 대한 관심이 더욱 높아졌지만 그 가격들은 모두 거래가 련속적으로 진행된다고 가정하고 유도되였으므로 시간척도와 위험의 선택에는 관계되지 않는다.

그러나 실지 실천에서 련속거래는 사실상 불가능하기때문에 투자가들은 적당한 시간간격으로 띠염거래를 진행하게 되며 선택권위험도 블랙－숄즈－머튼공식에 따라 때때로 변경시킨다. 이에 기초하여 브라운운동모형에서 띠염시간인 경우 혼합헤지의 개념이 도입되고 마감실시구매선택권의 가격공식이 유도되였으며 혼합헤지방략이 어떤 경우에는 델타헤지방략보다 더 우월하다는것을 론증하였다.[6]

또한 거래비용까지 고려한 브라운운동모형에서 혼합헤지방략과 마감실시구매선택권의 가격공식을 유도함으로써 선행연구[6]의 결과를 일반화하였다.[7]

그러나 많은 경험적연구들은 브라운운동모형이 금융시계렬에서 나타나는 일부 중요한 특성들을 반영하지 못한다는것을 명백히 보여주고있다. 그리하여 브라운운동모형을 일반화한 새로운 모형들이 연구되고있다.

브라운운동모형의 일반화로서 시간변환된 브라운운동모형이 제기되였다. 이 모형은 일정한 기간 상수값을 취하는 기초자산과정을 반영한 모형으로서 차익거래기회를 허용하지 않는다는것이 증명되였고 이런 조건밑에서 마감실시구매선택권의 가격공식이 유도되였다.[3] 최근에 이 모형은 더 일반적인 시간변환된 혼합분수브라운운동모형으로 확장되고 띠염시간인 경우에 마감실시구매선택권의 가격공식들이 일반화되였다.[2] 그러나 델타헤지방략을 리용하여 선택권의 가격을 유도하였으므로 띠염시간인 경우 중요한 역할을 하는 시간척도를 헤지방략에 반영하지 못한 결함을 가지고있다.

이로부터 론문에서는 시간척도와 위험선택파라메터를 동시에 반영하는 브라운운동모형에 대한 선행연구[6]의 새로운 혼합헤지방략을 최근에 연구되고있는 선행연구[2]의 시간변환된 혼합분수브라운운동모형에 적용하여 일반모형에서의 혼합헤지방략을 구하고 이에 기초하여 마감실시구매선택권의 가격공식을 유도하였다.

시간변환된 혼합분수브라운운동에 기초한 금융시장모형은 다음과 같다.

Q_t, S_t를 각각 t시각의 무위험자산과 위험자산의 가격이라고 하자. 이때 그 가격은 다음의 식

$$S_t = S_0 e^{\mu T_\alpha(t) + \sigma M_{\alpha,H}(t)} \tag{1}$$

$$Q_t = Q_0 e^{rt} \tag{2}$$

을 만족시킨다고 가정한다. 여기서 $S_0 > 0$ 이고 $\mu,\ \sigma \neq 0$ 는 각각 위험선택파라메터와 변동파라메터이며 $T_\alpha(t)$ 는 파라메터가 $\alpha \in (0,\ 1)$ 인 시간변환과정이다. 그리고 $M_{\alpha,H}(t) := aB(T_\alpha(t)) + bB_H(T_\alpha(t))$ 이다. 여기서 $B(t)$ 는 표준브라운운동이고 $B_H(t)$ 는 허스트지수 H 가 $H \in (1/2,\ 1)$ 인 분수브라운운동으로서 $T_\alpha(t)$ 와 독립이라고 가정한다. $Q_0 > 0$ 이고 상수 r 는 무위험리자률이다.

론문에서 론의하는 시간변환과정 $T_\alpha(t)$ 는 $T_\alpha(t) = \inf\{\tau > 0 :\ U_\alpha(\tau) > t\}$ 로 정의되는 거꿀 $\alpha-$안정한 대입과정이라는것을 강조한다. 여기서 $U_\alpha(t)$ 는 라쁠라스변환이 $E(^{-uU_\alpha(\tau)}) = e^{-\tau u^\alpha}$, $\alpha \in (0,\ 1)$ 로 되는 엄격히 증가하는 $\alpha-$안정한 레비과정이다. 특히 $\alpha \to 1$ 일 때 $T_\alpha(t)$ 는 물리적시간 t 에로 수렴한다. 또한 $\nu > 0$ 일 때

$$E[(T_\alpha(t))^\nu] = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu\alpha+1)} t^{\alpha\nu}$$

이다.

함수 $X(x)$ 에 대하여 $\lim_{x\to 0} \frac{E(|X(x)|^n)}{x^{n\beta}} = 0,\ \beta > 0,\ n \in \mathbf{N}$ 이면 $o(x^\beta)$ 로 표시한다.

보조정리[2] 임의의 $0 < \varepsilon << 1$ 에 대하여 $\Delta T_\alpha(t) = o(\Delta t^{\alpha-\varepsilon})$, $\Delta M_{\alpha,H}(t) = o(\Delta t^{\alpha/2-\varepsilon})$ 이다.

이제 X_t 개의 위험자산과 무위험자산 Q_t 로 된 투자조합 Π_t 를 구성하고 그에 대응하는 혼합헤지방략을 유도한다.

정리 1 시간변환된 혼합분수브라운운동모형 (1)에 기초한 혼합헤지방략 X_t 는 다음과 같다.

$$X_t = \frac{\partial V_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu\left(3\gamma_1 + 2\mu\gamma_2 - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Delta t \cdot \gamma_3\right)}{\gamma_3 + \mu^2\gamma_2 + 3\mu\gamma_1 - \mu\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Delta t \cdot \gamma_3} \cdot \frac{\partial^2 V_t}{\partial {S_t}^2} S_t$$

여기서

$$\gamma_1 = a^2 \frac{\alpha(t^{\alpha-1})^2}{\Gamma(2\alpha)}\Delta t + b^2 \frac{\alpha^{2H}(t^{\alpha-1})^{2H+1}\Gamma(2H+1)}{\Gamma((2H+1)\alpha)}\Delta t^{2H}$$

$$\gamma_2 = a^2 \frac{\alpha(t^{\alpha-1})^3}{\Gamma(2\alpha)}(\Delta t)^2 + b^2 \frac{\alpha^{2H+1}(t^{\alpha-1})^{2H+2}\Gamma(2H+2)}{\Gamma((2H+2)\alpha)}\Delta t^{2H+1}$$

$$\gamma_3 = a^2 \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + b^2\left(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)^{2H} (\Delta t)^{2H-1}$$

따름 1 혼합분수브라운운동모형 $S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma M_t^H}$ 에서 혼합헤지방략은 다음과 같다.

$$X_t = \frac{\partial V_t}{\partial S_t} + \frac{\mu \Delta t}{1 + \mu \Delta t} \frac{\partial^2 V_t}{\partial {S_t}^2} S_t$$

따름 2 $a=1,\ b=0$ 인 브라운운동모형에 기초한 혼합헤지방략은 웃식에 $a,\ b$ 를 대입하여 얻는다.

정리 2 시간변환된 혼합분수브라운운동모형 (1)에서 혼합헤지방략에 따르는 마감실시구매선택권의 가격 $V_t=V(t,\ S_t)$ 는 경계조건 $V(T,\ S_T)=\max\{S_T-K,\ 0\}$ 을 가진 다음의 편미분방정식을 만족시킨다.

$$\frac{\partial V_t}{\partial t}+rS_t\frac{\partial V_t}{\partial S_t}+\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2S_t^2\frac{\partial^2V_t}{\partial {S_t}^2}-rV_t=0$$

여기서

$$\hat{\sigma}^2=r\mu C-\mu^2C\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\sigma^2\left(1-\frac{1}{2}\mu C\right)\cdot\left(a^2\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+b^2\left(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)^{2H}(\Delta t)^{2H-1}\right)$$

$$C=\frac{3\gamma_1+2\mu\gamma_2-\dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Delta t\cdot\gamma_3}{\gamma_3+\mu^2\gamma_2+3\mu\gamma_1-\mu\dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Delta t\cdot\gamma_3}$$

$$\gamma_1=a^2\frac{\alpha(t^{\alpha-1})^2}{\Gamma(2\alpha)}\Delta t+b^2\frac{\alpha^{2H}(t^{\alpha-1})^{2H+1}\Gamma(2H+1)}{\Gamma((2H+1)\alpha)}\Delta t^{2H}$$

$$\gamma_2=a^2\frac{\alpha(t^{\alpha-1})^3}{\Gamma(2\alpha)}(\Delta t)^2+b^2\frac{\alpha^{2H+1}(t^{\alpha-1})^{2H+2}\Gamma(2H+2)}{\Gamma((2H+2)\alpha)}\Delta t^{2H+1}$$

$$\gamma_3=a^2\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+b^2\left(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)^{2H}(\Delta t)^{2H-1}$$

이다. 이때 선택권의 가격은

$$V(t,\ S_t)=S_tN(d_1)-Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

이며 여기서 $N(\cdot)$ 은 표준정규분포의 밀도함수이고

$$d_1=\frac{\ln(S_t/K)+(r+\hat{\sigma}^2/2)(T-t)}{\hat{\sigma}\sqrt{T-t}},\quad d_2=d_1-\hat{\sigma}\sqrt{T-t}$$

이다.

이제 이 정리의 따름으로써 혼합분수브라운운동모형과 브라운운동모형에서 혼합헤지방략에 따르는 마감실시구매선택권의 가격공식을 얻을수 있다.

따름 1 혼합분수브라운운동모형 $S_t=S_0e^{\mu t+\sigma M_t^H}$ 에서 혼합헤지방략에 따르는 마감실시구매선택권의 가격 $V_t=V(t,\ S_t)$ 는 정리 2의 $\hat{\sigma}^2$ 대신에 $\hat{\sigma}_1^2$ 으로 바꾸면 얻어진다. 여기서

$$\hat{\sigma}_1^2=\sigma^2(a^2+b^2(\Delta t)^{2H-1})+\frac{2\left(r-\mu-\dfrac{\sigma^2(a^2+b^2(\Delta t)^{2H-1})}{2}\right)\mu\Delta t}{1+\mu\Delta t}$$

이다.

따름 2 브라운운동모형 $S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma B_t}$ 에서 혼합헤지방략에 따르는 마감실시구매선택권의 가격 $V_t = V(t,\ S_t)$ 는 정리 2의 $\hat{\sigma}^2$ 대신에 $\hat{\sigma}_2^2$ 로 바꾸거나 또는 따름 1의 $\hat{\sigma}_1^2$ 에 $a=1,\ b=0$ 을 대입하여 얻은 $\hat{\sigma}_2^2$ 으로 바꾸면 얻어진다. 여기서

$$\hat{\sigma}_2^2 = \sigma^2 + \frac{2\left(r - \mu - \dfrac{\sigma^2}{2}\right)\mu\Delta t}{1 + \mu\Delta t}$$

이다.

주의 1 따름 1, 2는 선행연구[6]의 결과이다. 그러므로 정리 1, 2가 브라운운동모형에서의 혼합헤지결과를 시간변환된 혼합분수브라운운동모형으로 확장한다는것을 알수 있다.

주의 2 선행연구[2]에서는 시간변환된 혼합분수브라운운동모형에서 띠염시간인 경우 델타헤지방략에 따라 마감실시구매선택권의 가격 $V_t = V(t,\ S_t)$ 가

$$\hat{\sigma}^2 = a^2 \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + b^2 \left(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)^{2H} (\Delta t)^{2H-1}$$

을 가지고 블랙－숄즈방정식을 만족하며 한편 $\Delta t = 0$ 으로 놓으면 련속시간인 경우의 가격공식을 얻을수 있는데 이때 $\hat{\sigma}^2 = a^2 \dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ 로 된다는것을 증명하였다.

정리 2에서

$$\hat{\sigma}^2 = r\mu C - \mu^2 C \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \sigma^2\left(1 - \frac{1}{2}\mu C\right)\cdot\left(a^2 \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + b^2\left(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)^{2H}(\Delta t)^{2H-1}\right)$$

로 결정되는데 $\Delta t = 0$ 이라고 가정하면 $C = 0$ 이 되므로 $\hat{\sigma}^2 = a^2 \dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ 로 된다. 결국 련속인 경우 론문의 결과는 선행연구[2]의 결과와 꼭 같다.

띠염시간인 경우에 서로 다른 헤지방략인 델타헤지방략과 혼합헤지방략에 따르는 마감실시구매선택권의 가격들이 바로 선행연구[2]와 론문의 결과이다.

참 고 문 헌

[1] F. Black et al.; J. Political Economy, 81, 637, 1973.
[2] Z. Guo et al.; Physica, A406, 73, 2014.
[3] M. Magdziarz; J. Stat. Phys., 136, 553, 2009.
[4] R. Merton; Bell J. Econ. Manage. Sci., 4, 141, 1973.
[5] H. E. Stanley et al.; Quant. Finance, 1, 563, 2001.
[6] X. Wang et al.; Physica, A424, 194, 2015.
[7] X. Wang, et al.; Chaos, Solitons and Fractals, 95, 111, 2017.

주체110(2021)년 3월 5일 원고접수

Study on a Mixed Hedging Strategy under the Time-Changed Mixed Fractional Brownian Model

Kim Su Hyang, *Kim Kyong Hui*

In this paper we obtain a mixed hedging strategy under the time-changed mixed fractional Brownian model in a discrete time and derive a pricing formula for European call option. Finally, the mixed hedging strategy and the option pricing formula under the Brownian model are generalized to the time-changed mixed fractional Brownian model.

Keywords: time-changed process, mixed fractional Brownian motion, mixed hedging strategy, option pricing