김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체104(2015)년 제61권 제8호 Vol. 61 No. 8 JUCHE104(2015).

부분인자구성을 위한 새로운 형태의 모형에 대하여

리 응 훈

론문에서는 기초수학과 그것의 응용에서 중요한 자리를 차지하고있는 연산자대수에 대한 문제를 론의하였다.

선행연구[1−3]에서는 임의로 주어진 부분인자평면대수에 대하여 평면대수고유의 도형적론법에 의거하는 부분인자구성법을 제기하였다.

론문에서는 템펄리−리브도형(TL−도형)들로부터 정의되는 트레스를 출발점으로 하여 부분인자를 구성한 선행연구[4]에서의 방법과 류사하게 부분인자를 구성하는 새로운 방법을 제기하고 그것이 선행연구[1−3]에서 주어진 구성법과 동등하다는것을 증명하였다.

선행연구[1−3]에서와 마찬가지로 다음의 기호와 표기법들을 약속하자.

임의의 부분인자평면대수 $P=(P_m)_{m=0,\,1,\,2,\,\cdots}$에 대하여 선형공간들의 직합인

$$H_k(P)=P_k\oplus P_{k+2}\oplus P_{k+4}\oplus P_{k+6}\oplus\cdots=\oplus_{n=0}^{\infty}P_{k+2n},\ \ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

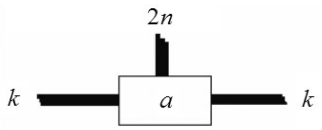


그림 1. $a,\ b\in P_{m,\ k}$의 도식

에 성분별로 P에 주어져있던 $*-$연산을 도입한다. 계속하여 $P_{n,\ k}:=P_{2n+k}$로 놓고 $a\in P_{n,\ k}$를 그림 1과 같이 표시한다. 여기서 량쪽으로 나간 굵은선은 각각 k개의 끈묶음을 나타내는 반면에 우로 향한 굵은선은 $2n$개의 흑색띠묶음을 의미한다.

이제는 $H_k(P)$에 기초적인 대수구조들을 도입한다.

$a,\ b\in P_{m,\ k}$에 대한 적 $a\#b$와 내적 $\langle a,\ b\rangle$는 각각 그림 2의 ㄱ), ㄴ)와 같다.

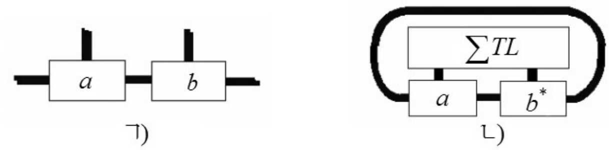


그림 2. 적 $a\#b$(ㄱ)와 내적 $\langle a,\ b\rangle$(ㄴ)

초보적으로 $a\#b\in P_{m+n,\ k}$로서 이것은 선행연구[1−3]에서 도입한 적 $a\circ b$와 현저히 차이난다. 내적의 정의도식인 오른쪽 도형의 중심에 배치되여있는 합은 템펄리−리브얽힘의 류사로서 내부에 통과 닫긴 띠를 가지지 않으며 경계에서 끌점을 가지는 $2(m+n)$개의 띠로 이루어진 가능한 모든 얽힘들의 합을 의미한다. 결국 선형결합을 거쳐 $\oplus_{n=0}^{\infty}P_{n,\ k}$전체에 적산법과 내적이 도입되게 된다. 이것이 단위원소를 가진 결합적인 $*-$대수를 이룬다는것은 어렵지 않게 확인할수 있다. 이것을 선행연구[1−3]에서의 $*-$대수와 구별하여 $G_k(P)$로 표시하기로 하자.

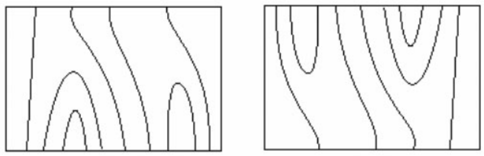
선행연구[4]에서와 마찬가지로 우연행렬모형을 리용하여 $G_k(P)$가 힐베르트대수를 이룬다는것을 확인할수도 있다. 그러나 내적을 가진 준힐베르트공간으로서의 $H_k(P)$와 $G_k(P)$의 동형성이 증명되면 이 사실은 자동적으로 나오게 된다.

이 론문의 목적은 힐베르트대수로서 $G_k(P)$와 $H_k(P)$가 동형이라는것, 다시말하여 선행연구[5]에서의 의미에서 부분인자구성을 위한 두 모형이 동등하다는것을 밝히려는것이다.

우선 얽힘을 통으로 표시하고 통안의 모든 선들을 띠로 보는 조건에서 밑면에 $2i$ 개, 웃면에 $2j$ 개의 끈이 닿는 TL－도형을 $P_{i,\ k}$ 로부터 $P_{j,\ k}$ 로의 선형넘기기로 볼수 있다는 점에 주목하자.

웃면에 닿는 띠들이 모두 아래면에서 출발하여 우로 올라온것으로 볼수 있는 경우의 TL－도형들을 M형, 반대로 밑면에서 시작된 모든 띠들이 웃면에서 끝나게 되는 그러한 TL－도형들을 W형도형이라고 부르기로 한다.(그림 3)

모든 TL－도형들을 M형과 W형도형의 적으로 일의적으로 분해할수 있다는것은 어렵지 않게 확인할수 있다.



ㄱ) ㄴ)

그림 3. M형(ㄱ))과 W형도형(ㄴ))

이제는 선형넘기기 $X:\oplus_{n=0}^{\infty}P_{n,\ k}\to\oplus_{n=0}^{\infty}P_{n,\ k}$ 를 모든 M형도형들의 합으로 정의한다.

행렬표시에서 볼 때 X 의 j 째 행, i 째 렬블로크는 밑면에 $2i$ 개, 웃면에 $2j$ 개의 띠가 닿는 M형도형전부의 합으로 이루어진다.

$j=i$ 인 경우에는 단위얽힘으로만 이루어지며 $j>i$ 인 경우에는 분명히 령이다.

M형도형안에서 밑면에 량끝점을 가지는 띠들을 호라고 부르기로 하자.

M형도형들로서 모든 호들이 내부에 다른 호를 포함하지 않을 때 외겹M형도형이라고 말한다.

그러면 $i,\ j$ 블로크에 결수 $(-1)^{i-j}$ 을 가지는 외겹M형도형의 합으로써 선형변환 $Y:\oplus_{n=0}^{\infty}P_{n,\ k}\to\oplus_{n=0}^{\infty}P_{n,\ k}$ 가 정의된다.

정리 1 $XY=Id=YX$ 즉 연산자 X 와 Y 는 서로 거꿀이다.

증명 $X_{jm}Y_{mi}$ 는 $P_{i,\ k}$ 로부터 $P_{m,\ k}$ 로의 외겹M형도형($i-m$ 개의 호를 가진다.)우에 $P_{m,\ k}$ 로부터 $P_{i,\ k}$ 로의 일반M형도형을 얹어놓은것(적)에 부호 $(-1)^{i-m}$ 을 곱한것들전부의 합으로 이루어져있다. 이 합에서 특정한 TL－도형 D의 출현회수는 이 도형의 제일 아낙에 놓인 호들가운데서 $i-m$ 개를 선택하는 방법의 수효와 같다. 합 $\sum_m X_{jm}Y_{mi}$ 에서 D의 총결수는 $\sum_p(-1)^pC_t^p$ 이다. 여기서 $p>0$ 으로 가정하며 t 는 제일 아낙에 놓인 호들의 총개수이다.

그러므로 XY 에서 대각선이외의 블로크들은 령이다. 대각선상의 블로크들은 모두 1이라는것을 확인하는것은 어렵지 않다. $YX=Id$ 의 증명도 제일 아낙에 놓인 호들대신에 제일 바깥에 놓인 호들로 바꾸고 생각하면 류사한 론법으로 얻어진다.(증명끝)

정리 2 X 는 대수적준동형이다. 즉 $\forall a,\ b\in\oplus_{n=0}^{\infty}P_{n,\ k}$, $X(a\#b)=X(a)\circ X(b)$.

증명 $a\in P_{m,\ k}$, $b\in P_{n,\ k}$ 라고 하자.

$X(a\#b)$ 의 정의에서 나타나는 $P_{m+n,\ k}$ 로부터 $P_{j,\ k}$ 로의 매 M형의 도형들은 $T(L|R)$ 형태로 일의적으로 분해된다. 여기서 L 은 $P_{m,\ k}$ 로부터 $P_{m',\ k}$ 로의 M형도형, R 는 $P_{n,\ k}$ 로부터 $P_{n',\ k}$ 로의 M형도형, $L|R$ 는 L 과 R 를 좌우에 붙여 얻어진 도형이다.

한편 T 는 $P_{m'+n',\ k}$ 로부터 $P_{j,\ k}$ 로의 M형도형으로서 여기서의 매 호는 한끝은 m' 쪽

에, 다른끝은 n' 쪽에 두고있다.

L 은 $X(a)$ 의 정의에 쓰이는 도형에 대응되며 R 는 $X(b)$ 의 정의에 쓰이는 도형에 대응된다.

또한 T 는 $X(a)\circ X(b)$ 에서의 적 $\circ$의 정의에 쓰인 도형[1]에 대응된다.(증명끝)

정리 3 X 는 우니타르연산자이다. 즉 $\forall a,\ b\in\oplus_{n=0}^{\infty}P_{n,\ k}$, $\langle a,\ b\rangle=\langle X(a),\ X(b)\rangle$.

증명 $a\in P_{m,\ k}$, $b\in P_{n,\ k}$ 라고 하자.

D는 $\langle a,\ b\rangle$의 정의에서의 합 $\sum$TL 에 출현하는 TL－도형이라고 하자.

D를 밑면의 $2m$ 개의 점으로부터 웃면의 $2n$ 개의 점으로 향하는 TL－도형으로 볼수 있으므로 $P_{m,\ k}$ 에서 출발한 M형도형 E 와 $P_{n,\ k}$ 에서 출발한 W형도형 M에 의한 분해 $D=E\cdot M$ 이 얻어진다. E 는 $X(a)$ 의 정의에서 나타나는 M형도형이며 M^* 은 $X(b)$ 의 정의에서 나타나는 W형도형이다. E 와 M^* 이 서로 접속되는 방식은 선행연구[1－3]에서의 내적의 정의에 대응한다.(증명끝)

따름 $G_k(P)$ 와 $H_k(P)$ 는 힐베르트대수로서 동형이다.

힐베르트대수로서 $G_k(P)$ 의 좌측 폰 노이만대수를 M_k 로 놓으면 선행연구[1－3]에 의하여 평면대수 P 를 자기의 표준불변량으로 가지는 II_1 형부분인자들이 얻어진다.

이상에서 우리는 평면대수로부터 부분인자를 구성하는 또 하나의 구성법을 제시하고 이것이 종전의 모형과 완전히 동등하다는것을 확인하였다.

참 고 문 헌

[1] 리응훈; 위대한 령도자 **김정일**동지께서 **김일성**종합대학에 불멸의 령도자욱을 옮기신 50돐기념 전국과학토론회 론문집(수학, 력학), **김일성**종합대학출판사, 38, 주체100(2011).

[2] 리응훈; **김일성**종합대학창립 65돐기념 국제학술토론회 론문집(수학), 74, 주체100(2011).

[3] Wun Ghun Lee; arXiv:math.OA/1210.7436, 2009.

[4] A. Guionnet et al.; arXiv:math.OA/0712.2904, 2007.

[5] V. Kodiyalam et al.; Internat. J. Math., 20, 1207, 2009.

주체104(2015)년 4월 5일 원고접수

On a New Kind of Model for Construction of Subfactors

Ri Ung Hun

We propose a new model for construction of subfactors. The model is based on the traces given by Temperly-Lieb like diagrams and on the multiplication operation which is much simpler than ever. It is also shown that the model is equivalent to the previous method.

Key words: von Neumann algebra, subfactor, planar algebra