김일성종합대학학보 주체107(2018)년
수 학 제64권 제4호

# 일반공액분해라쏘문제를 리용한 압축수감방법

최철국, 김성열

최근 적은 개수의 관측자료를 가지고 성긴신호를 효과적으로 표현하기 위한 신호압축수감에 대한 연구가 활발히 진행되고있다. 론문에서는 프레임에 의하여 성긴표현을 가지는 신호를 회복하기 위한 일반공액분해라쏘문제를 정식화하고 그것의 근사성질을 밝혔다.

압축수감은 적은 개수의 선형관측

$$y = Af + z \tag{1}$$

로부터 차원수가 대단히 큰 성긴신호를 회복하는 문제이다.[1－5] 여기서 $A$는 $m\times n$형수감행렬 $(m << n)$이고 $z\in \mathbf{R}^m$은 관측오차를 모형화한 잡음항이다. 즉 $m$차원벡토르 $y$를 알고 $n$차원벡토르 $f$를 구하자면 $A$가 어떤 조건을 만족시켜야 하며 실제로 어떤 방법으로 $f$를 구할수 있겠는가 하는것이 압축수감의 기본연구방향이다.

식 (1)에서 $f$는 보통 표준직교토대에 의하여 성글다고 가정한다. 그러나 많은 경우 $f$는 표준직교토대보다 과완비프레임에 의하여 성글게 표현된다. 실례로 수중음향탐지기에서 해석하는 신호, 곡선을 포함한 화상 등을 들수 있다. 이로부터 프레임에 의하여 성긴표현을 가지는 신호를 압축수감하는 문제는 대단히 중요하다.

이때 신호 $f$는 $f = Dx$로 표시된다. 여기서 $D\in \mathbf{R}^{n\times d}$ $(n < d)$는 프레임벡토르들을 렬벡토르로 가지는 행렬이다. 즉 프레임리론의 견지에서 보면 $D$는 프레임의 합성연산자이다. 론문에서는 프레임의 합성연산자를 보통 프레임이라고 표현하기로 한다.

이 경우에 $f$의 선형관측은

$$y = ADx + z \tag{2}$$

로 된다.

선행연구[4]에서는 일반공액프레임에 기초한 $l_1-$분해토대추적방법을 다음과 같이 정식화하고 그것의 근사성질을 밝혔다.

$$\hat{f} = \underset{\tilde{f}\in\mathbf{R}^n}{\arg\min} \| \tilde{D}^*\tilde{f} \|_1 \ \ (\| y - A\tilde{f} \|_2 \le \varepsilon) \tag{3}$$

여기서 $\tilde{D}$은 $D$의 임의의 공액프레임이다.

성긴신호를 회복하기 위한 방법으로서 라쏘방법이 많이 리용되고있는데 선행연구[5]에서는 다음과 같은 분해라쏘방법을 정식화하고 근사성질을 밝혔다.

$$\hat{f}^{AL} = \underset{\tilde{f}\in\mathbf{R}^n}{\arg\min} \frac{1}{2} \| (A\tilde{f} - y) \|_2^2 + \mu \| D^*\tilde{f} \|_1 \tag{4}$$

여기서 $D$는 엄격한 프레임이며 따라서 그것의 표준공액프레임 역시 $D$이다. 이로부터 우의 문제는 신호가 표준공액프레임에 대하여 성글게 표현되는 경우 효과적이라고 말할수 있다. 과완비프레임인 경우에는 공액프레임이 무수히 많이 존재하고 이로부터 일반공액프레임에 의하여 더 성글게 표현되는 경우가 보통이다.

이러한 론의에 기초하여 론문에서는 일반공액프레임에 기초한 분해라쏘문제를 다음과 같이 정식화하고 그것의 근사성질을 밝혔다.

$$\hat{f}^{AL} = \arg\min_{\tilde{f}\in\mathbf{R}^n} \frac{1}{2}\|(A\tilde{f}-y)\|_2^2 + \mu\|\tilde{D}^*\tilde{f}\|_1 \tag{5}$$

$D$는 $n\times d$ 형행렬로서 웃한계가 $B$인 $\mathbf{R}^n$의 프레임이고 $\tilde{D}$은 그것의 임의의 공액프레임이라고 하자.

일반성을 잃지 않고 $\tilde{D}^* f$ 는 첫 $s$개의 성분들이 절대값이 큰 순서로 배렬되여있다고 가정한다. 그리고 $h = f - \hat{f}$ 로 놓고

$$|(\tilde{D}^* h)(\mathrm{s}+1)| \ge |(\tilde{D}^* h)(\mathrm{s}+2)| \ge \cdots$$

라고 가정한다. 여기서 $(\tilde{D}^* h)(k)$는 $\tilde{D}^* h$의 $k$째 성분을 표시한다.

정의[3] $\Sigma_s$가 $D$의 매 $s$개 렬에 의하여 생성되는 부분공간들의 합모임이라고 하자. 적당한 상수 $\delta_s > 0$이 있어서 모든 $v\in\Sigma_s$에 대하여

$$(1-\delta_s)\|v\|_2^2 \le \|Av\|_2^2 \le (1+\delta_s)\|v\|_2^2$$

이 성립하면 행렬 $A$는 $\delta_s$를 가지고 $D-RIP$를 만족시킨다고 말한다. 그리고 이때 $\delta_s$는 행렬 $A$의 $D-RIP$ 상수라고 부른다.

보조정리[4] $q$, $r$ 가 $q\le 3r$ 를 만족시키는 정의 옹근수라고 하자. 그러면 비증가렬 $a_1 \ge \cdots \ge a_r \ge b_1 \ge \cdots \ge b_q \ge c_1 \ge \cdots \ge c_r \ge 0$ 은

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{q} b_i^2 + \sum_{i=1}^{r} c_i^2} \le \frac{\sum_{i=1}^{r} a_i + \sum_{i=1}^{q} b_i}{\sqrt{q+r}} \tag{6}$$

를 만족시킨다.

$D_T$는 첨수모임 $T$에 대응하는 렬의 원소들을 모두 령으로 놓은 행렬, $D_T^*$은 $(D_T)^*$을 표시한다. $h = f - \hat{f}$ 이라고 하자.

정리 1 $D$가 프레임한계가 $0 < A \le B < \infty$ 인 $\mathbf{R}^n$의 $n\times d$ 형일반프레임이고 $\tilde{D}$은 프레임한계가 $0 < \tilde{A} \le \tilde{B} < \infty$ 인 $D$의 일반공액프레임이라고 하자. $c_0 > 0$ 이고 $0 < b - a \le 3a$ 를 만족시키는 어떤 정의 옹근수 $a$와 $b$에 대하여

$$\left(\sqrt{1-\delta_{s+a}} - \sqrt{\rho(1+\delta_b)B\tilde{B}} - \sqrt{(1-\delta_{s+a})\rho B\tilde{B}} - \frac{c_0}{2}\right) > 0$$

이 성립한다고 하자. 그리고 $\|D^* A^* z\|_\infty \le \mu/10$ 라고 하자.

그러면 식 (5)의 풀이 $\hat{f}$ 은 다음의 조건을 만족시킨다.

$$\|f-\hat{f}\|_2 \le C_1\mu + C_2\frac{\|\tilde{D}^* f - (\tilde{D}^* f)_{[s]}\|_1}{\sqrt{s}}$$

여기서 $C_1$, $C_2$는 어떤 상수이고 $(\tilde{D}^* f)_{[s]}$는 $(\tilde{D}^* f)$에서 절대값이 제일 큰 $s$개의 성분만 취하고 나머지는 령으로 놓아서 얻은 벡토르를 의미한다.

주의 1 $D$를 파르세발프레임이라고 하고 $\tilde{D} = D$로 놓자. 그러면 $A = B = 1$이고 $c_0 = 0.001$, $a = 4s$, $b = 16s$로 놓으면 $\rho = 121s/81b = 121/1\ 296$이다.

$\left(\sqrt{1-\delta_{s+a}} - \sqrt{\rho(1+\delta_b)B\widetilde{B}} - \sqrt{(1-\delta_{s+a})\rho B\widetilde{B}} - 0.000\ 5\right) > 0$ 이 되자면 $\delta_{2s} < 0.099\ 5$ 이면 충분하다.

정리 2 $D$ 가 프레임한계가 $0 < A \le B < \infty$ 인 $\mathbf{R}^n$ 의 일반프레임이고 $\overline{D}$ 는 $D$ 의 표준공액프레임이라고 하자. $k = B/A,\ \rho = 121s/81b,\ \rho < 1/k$ 이라고 놓고 $c_0,\ c_1,\ c_2 > 0$ 이고 $0 < b-a \le 3a$ 를 만족시키는 어떤 정의 옹근수 $a$ 와 $b$ 에 대하여

$$\sqrt{\frac{2c_1}{k}(1-\delta_{s+a})(1-\frac{c_1 k}{2} - \rho k - c_2\rho\sqrt{kB})} - \sqrt{\rho k(1+\delta_b)} - \frac{c_0}{2} > 0$$

이 성립한다고 하자. 그리고 $\|\overline{D}^* A^* z\|_\infty \le \mu/10$ 라고 하자.

그러면 식 (5)의 풀이 $\hat{f}$ 은 다음의 조건을 만족시킨다.

$$\| f - \hat{f} \| \le C_1\mu + C_2 \frac{\|\overline{D}^* f - (\overline{D}^* f)_{[s]}\|_1}{\sqrt{s}}$$

여기서 $C_1,\ C_2$ 는 정인 상수이다.

주의 2 $D$ 가 파르세발프레임인 경우에 $a = 2s,\ b = 8s,\ c_0 = 1/10,\ c_1 = 0.95,\ c_2 = 0.01$ 로 놓으면 $\delta_{2s} < 0.102\ 6$ 인 경우에 정리 2의 가정이 만족된다는것을 간단한 계산을 통하여 알수 있다.

이때 $c_0$ 과 $c_2$ 를 임의로 작게 취하면 $\delta_{2s} < 0.132\ 6$ 을 만족시킬 때 정리 2의 가정이 만족된다는것을 알수 있다. 이것은 선행연구[5]의 조건 $\delta_{3s} < 0.25$ 보다 더 약한 조건이다.

## 참 고 문 헌


[1] E. J. Cand`es; Proc. Int. Cong. Mathematicians, 3, 1433, 2006.

[2] E. Candes et al.; Applied and Computational Harmonic Analysis, 31, 1, 59, 2010.

[3] T. Blumensath, M. Davies; Appl. Comput. Harmon. Anal., 27, 3, 265, 2009.

[4] Y. Liu et al.; http://arxiv.org/abs/1111.4345v3, 2012.

[5] Junhong Lin, Song Li; arXive:1301.3248v1, 2013.


주체107(2018)년 6월 5일 원고접수

## Compressed Sensing via General-Dual-Based Analysis Lasso

*Choe Chol Guk, Kim Song Yol*

This article considers compressed sensing of signals which are sparse or approximately sparse in terms of a highly overcomplete frame from undersampled data corrupted with additive noise. We show that the properly constrained $l_1$-analysis, called general-dual-based analysis Lasso, stably recovers a signal which is nearly sparse in terms of the frame.

Key words: sparse signal recovery, frame, compressed sensing