김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체106(2017)년 제63권 제12호 Vol. 63 No. 12 JUCHE106(2017).

특성곡선고속전진법의 한가지 개선방법

리주혁, 허명송

아이코날형하밀톤－야코비방정식은 최량조종문제와 화상처리, 측지학 등 많은 분야에 적용되고있으며 이 방정식의 수값풀이를 얻기 위한 효과적인 방법들이 많이 제기되고있다.

고속전진법은 등방성아이코날방정식의 근사풀이를 계산하는 효과적인 방법이며 순서화된 상승법, 고속쓸기법, 고속반복법은 비등방성아이코날방정식을 풀기 위한 효과적인 방법들이다.

최근에 비등방성아이코날방정식에 대한 4각형그물에서의 특성곡선고속전진법이 제기되였으며 이 방법이 리론적으로 안정하고 정확하다는것이 증명되였다.[1]

또한 그것의 3각형그물에로의 확장도 나왔다.[2] 그러나 특성곡선고속전진법에서는 고속전진법에서 복소뿌리를 피하기 위하여 제기된 CFL－형조건과 같은 조건이 얻어지지 못하였다.[1] 또한 매 점에서 복잡한 형태로 표시되는 결수를 가지는 2차방정식의 풀이를 얻어야 하므로 루적오차에 의하여 실지 계산정확도가 충분히 보장되지 못하게 된다.[2]

론문에서는 선행연구[1]에서 제기한 비등방성아이코날방정식의 수값풀이법에서의 문제점[1, 2]을 극복하기 위한 한가지 방법을 제기하였다.

다음과 같이 주어지는 $T=T(x)$에 관한 비등방성아이코날방정식을 생각하자.

$$\|\nabla T\|^2 -(1-\upsilon(\boldsymbol{x})\cdot\nabla T)^2/(F(\boldsymbol{x}))^2=0,\ \ \boldsymbol{x}=(x,\ y)\in\Omega\subset\boldsymbol{R}^2 \tag{1}$$

$$T(\boldsymbol{x})=q(\boldsymbol{x}),\ \ \boldsymbol{x}=(x,\ y)\in\partial\overline{\Omega}\subset\partial\Omega \tag{2}$$

여기서 Ω는 열린련결모임이고 $\upsilon=(\upsilon_1(\boldsymbol{x}),\ \upsilon_2(\boldsymbol{x})):\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$, $q:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$, $F:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$이다.

론문전반에 걸쳐 $F(\boldsymbol{x})>0,\ \boldsymbol{x}\in\Omega$라고 가정한다.

이제 경계값문제 (1), (2)를 풀기 위하여 제기된 방법[2]에서 나타난 난점을 해소하기 위한 연구를 진행한다.

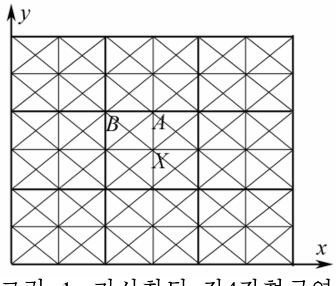

그림 1. 리산화된 직4각형구역

$\Omega\subset\boldsymbol{R}^2$를 3각형그물로 리산화된 직4각형구역이라고 하자.

아래에서 론의되는 수값풀이법은 임의의 3각형그물에서도 그대로 적용할수 있다.

여기서는 그림 1과 같은 가장 간단한 경우를 고찰한다.

먼저 선행연구[2]방법을 요약하여 개괄한다.

그림 1의 3각형 XAB를 고찰하자.

우리는 3각형의 정점 $A=(a_1,\ a_2)$, $B=(b_1,\ b_2)$에서의 값을 알 때 점 $X=(x,\ y)$에서의 값을 계산하여야 한다.

d_{AX}와 d_{BX}를 각각 3각형의 두 변 AX와 BX방향에로의 T의 방향도함수라고 하자.

이때 $d_{AX}=\nabla T\cdot AX/|AX|=T_x m_{11}+T_y m_{12}$, $d_{BX}=\nabla T\cdot BX/|BX|=T_x m_{21}+T_y m_{22}$가 성립된다. 여기서 T_x와 T_y는 T의 x, y성분의 편도함수이고

$m_{11}=(x-a_1)/|AX|$, $m_{12}=(y-a_2)/|AX|$, $m_{21}=(x-b_1)/|BX|$, $m_{22}=(y-b_2)/|BX|$ 이며 $|AX|$와 $|BX|$는 유클리드노름이다.

행렬표시로 다시 쓰면 $d=M\nabla T$, $d=(d_{AX},\ d_{BX})^{\mathrm{T}}$, $M=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$로 된다.

AX와 BX가 한 직선에 놓이지 않으므로 $\nabla T=M^{-1}d$이다. 이 식을 리용하여 ∇T의 방향도함수를 근사시키면 $d_{AX}\approx[T(X)-T(A)]/|AX|$, $d_{BX}\approx[T(X)-T(B)]/|BX|$로 된다.

$\nabla T=M^{-1}d$를 간단히 하면 그물점 $X=(x_i,\ y_j)$에서 T의 편도함수의 유한계차근사는

$$T_x(x_i,\ y_j)\approx aT(x_i,\ y_j)+b,\ T_y(x_i,\ y_j)\approx cT(x_i,\ y_j)+d \tag{3}$$

로 된다. 여기서

$$a=m_{22}/[(m_{22}m_{11}-m_{12}m_{21})|AX|]-m_{12}/[(m_{22}m_{11}-m_{12}m_{21})|BX|], \tag{4}$$

$$b=-T(A)m_{22}/[(m_{22}m_{11}-m_{12}m_{21})|AX|]+m_{12}T(B)/[(m_{22}m_{11}-m_{12}m_{21})|BX|], \tag{5}$$

$$c=-m_{21}/[(m_{22}m_{11}-m_{12}m_{21})|AX|]+m_{11}/[(m_{22}m_{11}-m_{12}m_{21})|BX|], \tag{6}$$

$$d=T(A)m_{21}/[(m_{22}m_{11}-m_{12}m_{21})|AX|]-m_{11}T(B)/[(m_{22}m_{11}-m_{12}m_{21})|BX|]. \tag{7}$$

이때 a와 b는 $x-$성분계차결수라고 부르고 c와 d는 $y-$성분계차결수라고 부른다.

식 (3)−(7)을 방정식 (1)에 갈아넣으면 방정식

$$(aT_{i,\ j}+b)^2+(cT_{i,\ j}+d)^2-(1-(\upsilon_1)_{i,\ j}(aT_{i,\ j}+b)-(\upsilon_2)_{i,\ j}(cT_{i,\ j}+d))^2/F_{i,\ j}^2=0$$

을 얻는다. 여기서 $T_{i,\ j}$는 $T(x_i,\ y_j)$의 근사값이다.

우의 방정식을 2차방정식형태로 다시 쓰면

$$P=a^2(F^2-\upsilon_1^2)+c^2(F^2-\upsilon_2^2)-2ac\upsilon_1\upsilon_2,\quad R=b^2(F^2-\upsilon_1^2)+d^2(F^2-\upsilon_2^2)-2bd\upsilon_1\upsilon_2+2b\upsilon_1+2d\upsilon_2-1,$$

$$Q=2ab(F^2-\upsilon_1^2)+2cd(F^2-\upsilon_2^2)-2ad\upsilon_1\upsilon_2-2bc\upsilon_1\upsilon_2+2a\upsilon_1+2c\upsilon_2$$

라고 할 때 $PT_{i,\ j}^2+QT_{i,\ j}+R=0$이 성립되고

$$T_{i,\ j}=\max([-Q/2+(Q^2/4-PR)^{1/2}]/P,\ -Q/2-(Q^2/4-PR)^{1/2}]/P). \tag{8}$$

지금까지 선행연구[2]방법을 요약하여 개괄하였다.

2차방정식 $PT_{i,\ j}^2+QT_{i,\ j}+R=0$의 결수들은 많은 계산들을 동반하게 되며 그 과정에 정확도가 보장되지 못한다. 또한 이러한 계산들을 많은 그물점들에서 반복하여 진행하는 과정에 오차는 더 커지게 된다.

이 오차를 줄이기 위하여 6개의 3각형에서 론의한 선행연구[2]에서와는 달리 론문에서는 8개의 3각형에서 론의를 진행하며 식 (8)을 보다 간단한 식으로 개조한다.

2차방정식 $PT_{i,\ j}^2+QT_{i,\ j}+R=0$의 판별식을 평가하자.

$$D/4=[ab(F^2-\upsilon_1^2)+cd(F^2-\upsilon_2^2)-ad\upsilon_1\upsilon_2-bc\upsilon_1\upsilon_2+a\upsilon_1+c\upsilon_2]^2-[a^2(F^2-\upsilon_1^2)+$$
$$+c^2(F^2-\upsilon_2^2)-2ac\upsilon_1\upsilon_2][b^2(F^2-\upsilon_1^2)+d^2(F^2-\upsilon_2^2)-2bd\upsilon_1\upsilon_2+2b\upsilon_1+2d\upsilon_2-1]$$

$A=F^2-\upsilon_1^2$, $B=F^2-\upsilon_2^2$, $C=\upsilon_1\upsilon_2$라고 하고 웃식을 전개하면 다음과 같다.

$$\frac{D}{4}=\underbrace{a^2b^2A^2}_{1}+\underbrace{c^2d^2B^2}_{2}+a^2d^2C^2+b^2c^2C^2+a^2\upsilon_1^2+c^2\upsilon_2^2+2abcdAB-\underbrace{2a^2bdAC}_{3}-\underbrace{2ab^2cAC}_{4}+$$
$$+\underbrace{2a^2bA\upsilon_1}_{5}+2abcA\upsilon_2-\underbrace{2acd^2BC}_{6}-\underbrace{2bc^2dBC}_{7}+2acdB\upsilon_1+\underbrace{2c^2dB\upsilon_2}_{8}+2abcdC^2-2a^2d\upsilon_1^2\upsilon_2-$$

$$-2acdv_1v_2^2-2abcv_1^2v_2-2bc^2v_1v_2^2+\underbrace{2acC}_{9}-[\underbrace{a^2b^2A^2}_{1}+a^2d^2AB-\underbrace{2a^2bdAC}_{3}+\underbrace{2a^2bAv_1}_{5}+$$

$$+2a^2dv_2-a^2A+b^2c^2AB+\underbrace{c^2d^2B^2}_{2}-\underbrace{2bc^2dBC}_{7}+2bc^2Bv_1+\underbrace{2c^2dBv_2}_{8}-c^2B-\underbrace{2ab^2cAC}_{4}-$$

$$-\underbrace{2acd^2BC}_{6}+4abcdC^2-4abcv_1^2v_2-4acdv_1v_2^2+\underbrace{2acC}_{9}]=$$

$$=F^2[(bc-ad)^2(v_1^2+v_2^2-F^2)+2(bc-ad)(av_2-cv_1)+a^2+c^2] \tag{9}$$

이제 $V=m_{11}m_{22}-m_{12}m_{21}$, $|AX|=l_1$, $|BX|=l_2$ 라고 하면

$$m_{11}=(x-a_1)/l_1,\ m_{12}=(y-a_2)/l_1,\ m_{21}=(x-b_1)/l_2,\ m_{22}=(y-b_2)/l_2$$

로 표시할수 있으며

$$a=(m_{22}/l_1-m_{12}/l_2)/V=(a_2-b_2)/(Vl_1l_2),\ c=(-m_{21}/l_1+m_{11}/l_2)/V=(b_1-a_1)/(Vl_1l_2),$$

$$b=(-T(A)m_{22}/l_1+m_{12}T(B)/l_2)/V=[(y-a_2)T(B)-(y-b_2)T(A)]/(Vl_1l_2),$$

$$d=(T(A)m_{21}/l_1-m_{11}T(B)/l_2)/V=[(x-b_1)T(A)-(x-a_1)T(B)]/(Vl_1l_2),$$

$$bc-ad=\frac{1}{V^2}\cdot\frac{-T(A)m_{11}m_{22}-T(B)m_{12}m_{21}+T(A)m_{21}m_{12}+T(B)m_{11}m_{22}}{l_1l_2}=\frac{T(B)-T(A)}{Vl_1l_2}.$$

이것을 식 (9)에 갈아넣으면 다음과 같다.

$$D/4=F^2[(bc-ad)^2(v_1^2+v_2^2-F^2)+2(bc-ad)(av_2-cv_1)+a^2+c^2]=$$

$$=F^2[(v_1^2+v_2^2-F^2)\cdot(T(A)-T(B))^2-(T(A)-T(B))\cdot(v_2(a_2-b_2)+$$

$$+v_1(a_1-b_1))+(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2]/(Vl_1l_2)^2$$

dx, dy 를 각각 x, y 축방향으로의 그물점사이의 간격이라고 하자.

정리 1 $a_2=b_2$, $a_1=x$ 이면

$$T(X)=T(A)+\frac{1}{F^2-v_2^2}\cdot\left[\frac{-\Delta y\Delta Tv_1v_2}{\Delta x}+\Delta yv_2+\frac{dy}{dx}\cdot F\sqrt{(v_1^2+v_2^2-F^2)\Delta T^2-2v_1\Delta x\Delta T+\Delta x^2}\right]$$

이 성립된다. 여기서 $\Delta T=T(A)-T(B)$, $\Delta x=a_1-b_1$, $\Delta y=a_2-y$ 이다.

증명 $a=(a_2-b_2)/(Vl_1l_2)=0$ 이므로 $P=c^2(F^2-v_2^2)$, $Q=2cd(F^2-v_2^2)-2bcv_1v_2+2cv_2$, $R=b^2(F^2-v_1^2)+d^2(F^2-v_2^2)-2bdv_1v_2+2bv_1+2dv_2-1$ 로 된다. 따라서

$$V=[(x-a_1)(y-b_2)-(y-a_2)(x-b_1)]/(l_1l_2)=[(y-a_2)(b_1-a_1)]/(l_1l_2)=\Delta x\Delta y/(l_1l_2)$$

이므로 $Vl_1l_2=\Delta x\Delta y$ 이다.

우의 사실과 $x=a_1$ 이라는 사실을 리용하면 다음과 같다.

$$c=\frac{-\Delta x}{Vl_1l_2}=\frac{-\Delta x}{\Delta x\Delta y}=\frac{-1}{\Delta y},\ b=\frac{\Delta y\Delta T}{Vl_1l_2}=\frac{\Delta y\Delta T}{\Delta x\Delta y}=\frac{\Delta T}{\Delta x},\ d=\frac{(x-a_1)\Delta T+\Delta xT(A)}{\Delta x\Delta y}=\frac{T(A)}{\Delta y}$$

이 값들을 식 (9)에 대입하면

$$T(X)=T(A)+\frac{1}{F^2-v_2^2}\cdot\left[\frac{-\Delta y\Delta Tv_1v_2}{\Delta x}+\Delta yv_2+\frac{dy}{dx}\cdot F\sqrt{(v_1^2+v_2^2-F^2)\Delta T^2-2v_1\Delta x\Delta T+\Delta x^2}\right]$$

이 성립되므로 정리는 증명된다.(증명끝)

주의 1 정리 1은 점 A와 B의 y—자리표가 같고 점 A와 X의 x—자리표가 같을 때 점 X에서의 값이 점 A와 점 B의 값으로부터 어떻게 근사되는가 하는것을 보여준다.

정리 2 $a_1 = b_1$, $a_2 = y$ 이면

$$T(X) = T(A) + \frac{1}{F^2 - v_1^2} \cdot \left[\frac{-\Delta x \Delta T v_1 v_2}{\Delta y} + \Delta x v_1 + \frac{dx}{dy} \cdot F\sqrt{(v_1^2 + v_2^2 - F^2)\Delta T^2 - 2v_2 \Delta y \Delta T + \Delta y^2} \right]$$

로 된다. 여기서 $\Delta T = T(A) - T(B)$, $\Delta x = a_1 - x$, $\Delta y = a_2 - b_2$ 이다.

주의 2 정리 2는 점 A와 B의 x−자리표가 같고 점 A와 X의 y−자리표가 같을 때 점 X에서의 값이 점 A와 B의 값으로부터 어떻게 근사되는가 하는것을 보여준다.

다음 정리 1, 2에 기초하여 문제 (1), (2)를 풀기 위한 수값풀이알고리듬을 제기한다.

그림 2에서와 같은 3각형 M_i $(i = 1, 2, \cdots, 8)$ 들에서 론의를 진행한다.

그물점전체의 모임을 $\Omega_{\Delta x,\ \Delta y}$ 라고 하고 이 모임을 3개의 부분모임들로 나눈다.

T값이 이미 확정된 그물점들의 모임을 A 라고 표시한다. 모임 A 의 적어도 하나의 원소와 직접 이웃한 그물점들의 모임을 N 으로 표시한다. 나머지그물점들의 모임 $(A \cup N)^c$ 를 F 로 표시한다.

$\Omega_{\Delta x,\ \Delta y}$ 의 매 그물점 X에 대하여 아래와 같이 T값을 근사시킨다.

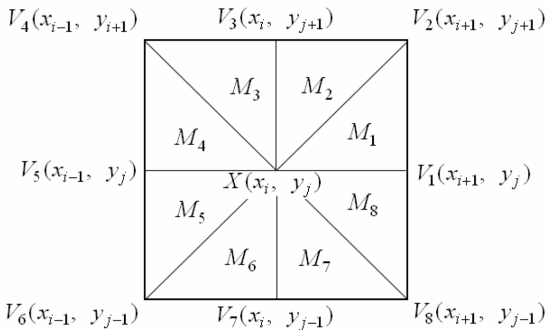

그림 2. X 점에서의 T값근사를 위한 3각형 M_i $(i = 1, 2, \cdots, 8)$ 의 구성

특성곡선고속전진법알고리듬[2]과 본질적으로 차이나는 두가지 측면(2개의 결음)만을 서술한다.

① 매 3각형 M_i $(i = 1, 2, \cdots, 8)$ 에 대하여 3각형 M_i 의 두 정점(X가 아닌)이 모두 모임 $A \cup N$ 에 들어가는가를 검사한다. 만일 그렇다면 해당한 첨수 i 를 모임 I 에 추가한다.

② $k \in I$ 인 매 3각형 M_k 에서 정리 1, 2를 리용하여 $T(X)$ 의 근사값을 계산한다.

결음 ①, ②는 선행연구[2]에서의 알고리듬의 결음 1과 결음 2에 각각 해당된다.

다시말하여 특성곡선고속전진법알고리듬[2]의 결음 1, 2를 각각 결음 ①, ②로 교체하면 새로운 특성곡선고속전진법알고리듬을 얻을수 있다.

참 고 문 헌

[1] D. Dahiya et al.; SIAM J. Sci. Comput., 35, 4, 1880, 2013.

[2] D. Dahiya et al.; Wave Motion, 59, 81, 2015.

주체106(2017)년 8월 5일 원고접수

A Method to Improve the Characteristic Curve Fast Marching Method

Ri Ju Hyok, Ho Myong Song

We have proposed a method to improve the characteristic curve fast marching method.

We have developed a characteristic curve fast marching method for the anisotropic Eikonal Hamilton-Jacobi equations.

Key word: characteristic curve fast marching method