김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체106(2017)년 제63권 제8호 Vol. 63 No. 8 JUCHE106(2017).

초공간에서 유도계가 유한형의 부분밀기에 위상반공액이기 위한 조건

주현희, 최윤미

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《이미 일정한 토대가 있고 전망이 확고한 연구대상들에 힘을 넣어 세계패권을 쥐며 그 성과를 확대하는 방법으로 과학기술을 빨리 발전시켜야 합니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 39페지)

기호력학계가 직관성이 좋고 풍부한 력학적성질들을 가지고있는것으로 하여 기호력학계와 다른 력학계들사이의 위상공액성과 위상반공액성에 대한 연구가 심화되고있다.

초공간에 대한 연구에서 기본은 주어진 계와 그것에 의하여 유도된 초공간력학계사이의 련관을 연구하는것이다.

선행연구[6]에서는 $(X,\ f)$를 콤팍트력학계라고 할 때 $(X,\ f)$가 기호력학계 $(\Sigma_k,\ \sigma)$와 위상공액인 위상부분력학계를 가지기 위해서는 X의 둘씩 사귀지 않는 닫긴부분모임 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_k$가 있어서 다음의 조건들을 만족시킬것이 필요하고 충분하다는것을 밝혔다. 특히 조건 ②가 만족되지 않으면 $(X,\ f)$는 기호력학계 $(\Sigma_k,\ \sigma)$에 위상반공액인 위상부분력학계를 가진다는것을 증명하였다.

① $\bigcup_{j=1}^{k} A_j \subset f(A_i),\ i=1,\ 2,\cdots,\ k$

② 임의의 $(i_0, i_1, \cdots)\in\Sigma_k$에 대하여 $\mathrm{card}\bigcap_{s=0}^{\infty} f^{-s}(A_{i_s})\le 1$이 성립된다.

선행연구[5]에서는 우의 조건 ①을 만족시키는 X의 둘씩 사귀지 않는 닫긴부분모임 $A_1,\cdots,A_k$가 존재하면

$$\Lambda=\left\{\bigcap_{s=0}^{\infty} f^{-s}(A_{i_s}) : (i_0, i_1, \cdots)\in\Sigma_k\right\}$$

는 초공간넘기기 2^f의 불변부분모임이며 $(\Lambda,\ 2^f|_\Lambda)$은 기호력학계 $(\Sigma_k,\ \sigma)$에 위상반공액이라는것을 증명하였다.

하우스도르프공간에 대하여 력학계가 유한형의 부분밀기 $(\Sigma_A,\ \sigma_A)$에 위상공액 및 위상반공액이기 위한 필요충분조건으로부터 선행연구[5]결과의 충분조건을 일반화하고 부분계 $(\Lambda,\ 2^f|_\Lambda)$을 확장하는 문제들이 제기된다.

론문에서는 선행연구[5]결과의 충분조건을 일반화하였다.

$\boldsymbol{N}$을 정의옹근수모임이고 $\boldsymbol{N}_0=\boldsymbol{N}\cup\{0\}$이라고 하자.

$(X,\ d)$를 거리공간, $f: X\to X$를 련속넘기기라고 하자.

쌍 $(X,\ f)$ 를 력학계라고 부르며 X 가 콤팍트모임이면 콤팍트력학계라고 부른다.

비지 않은 부분모임 $Y\subset X$ 에 대하여 $f(Y)(=)\subset Y$ 이면 Y 를 f 에 관하여 (엄격한) 불변모임(간단히 $f-$불변모임)이라고 부른다.

$f-$불변모임 Y 가 닫긴모임이면 $(Y,\ f|_Y)$ 를 $(X,\ f)$ 의 부분계라고 부르며 $x\in X$ 에 대하여 모임 $\{f^n(x): n\in \boldsymbol{N}_0\}$ 을 f 에 대한 x 의 궤도라고 부르고 $\mathrm{Orb}_f(x)$ 로 표시한다.

임의의 비지 않은 열린모임 $U,\ V\subset X$ 에 대하여 $n\in \boldsymbol{N}$ 이 있어서 $f^n(U)\cap V\neq\varnothing$ 이 성립되면 력학계 $(X,\ f)$ (간단히 f)는 위상이행적(간단히 이행적)이라고 말한다.[1]

$(X,\ f)$ 와 $(Y,\ g)$ 를 력학계라고 하자.

$g\circ\phi=\phi\circ f$ 인 우로의 련속넘기기 $\phi: X\to Y$ 가 존재하면 $(X,\ f)$ (간단히 f)는 ϕ 에 의하여 $(Y,\ g)$ (간단히 g)에 (위상)반공액이라고 말한다.

우의 넘기기 ϕ 가 위상동형이면 $(X,\ f)$ (간단히 f)는 $(Y,\ g)$ (간단히 g)와 ϕ 에 의하여 (위상)공액이라고 말한다.

$m\geq 2$, $A=\{1,\cdots,\ m\}$ 이라고 하자.

모임 $\Sigma_m=\{\alpha=(a_0,\ a_1,\ \cdots): a_i\in A,\ i\in \boldsymbol{N}_0\}$ 은 거리

$$\rho(\alpha,\ \beta)=\begin{cases}0, & \alpha=\beta\\ 2^{-(k+1)}, & \alpha\neq\beta,\ k=\min\{i\mid a_i\neq b_i\}\end{cases}$$

에 의하여 콤팍트거리공간으로 된다. 여기서 $\alpha=(a_0,\ a_1,\ \cdots),\ \beta=(b_0,\ b_1,\cdots)\in\Sigma_m$ 이다.

$\sigma(\alpha)=(a_1,\ a_2,\cdots),\ \alpha=(a_0,\ a_1,\cdots)\in\Sigma_m$ 으로 정의되는 완전밀기넘기기(간단히 밀기넘기기) σ 는 Σ_m 을 Σ_m 으로 보내는 련속넘기기이다.

력학계 $(\Sigma_m,\ \sigma)$ 를 완전밀기넘기기(간단히 완전밀기)에 의한 기호력학계라고 부른다.

m 차이행행렬 $A=(a_{ij})$ 에 대하여 모임

$$\Sigma_A=\{(b_0,\ b_1,\cdots)\in\Sigma_m \mid a_{b_i b_{i+1}}=1,\ i\in \boldsymbol{N}_0\}$$

은 콤팍트 $\sigma-$불변모임이다.

넘기기 $\sigma_A=\sigma|_{\Sigma_A}$ 를 행렬 A 에 대한 유한형의 부분밀기넘기기라고 부르고 부분계 $(\Sigma_A,\ \sigma_A)$ 를 행렬 A 에 대한 유한형의 부분밀기라고 부른다.

정의[4] $(X,\ d)$ 는 거리공간이고 $f: D\subset X\to X$ 라고 하자.

$A=(a_{ij})$ 를 $m\geq 2$ 인 m 차이행행렬이라고 하자.

이때 내부가 서로 사귀지 않는 D 의 m 개의 비지 않은 모임 $\Lambda_i\ (1\leq i\leq m)$ 가 $f(\Lambda_i)\supset\bigcup_{\substack{j\\ a_{ij}=1}}\Lambda_j$ 를 만족시키면 모든 $i\ (1\leq i\leq m)$ 에 대하여 넘기기 f 는 $\Lambda_i\ (1\leq i\leq m)$ 에서 $A-$쌍확장이다고 말한다.

더우기 모든 $i,\ j\ (1\leq i\neq j\leq m)$ 에 대하여 $d(\Lambda_i,\ \Lambda_j)>0$ 이면 넘기기 f 는 $\Lambda_i\ (1\leq i\leq m)$ 에서 엄격한 $A-$쌍확장이다라고 말한다. 여기서 $d(\Lambda_i,\ \Lambda_j)$ 는 모임 Λ_i 와 Λ_j 사이의 거리를 표시한다.

행렬 A 의 원소가 모두 1이면 (엄격한) $A-$쌍확장넘기기 f 를 간단히 (엄격한) 쌍확장넘기기라고 부른다.

다음으로 유도계에 대하여 소개하자.

초공간에 위상은 다음과 같이 정의된다.[2]

X 를 위상공간, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{K}$ 를 각각 X 의 닫긴모임, 열린모임, 콤팍트모임전부라고 하자.(이때 $\varnothing\in\mathcal{F}$, $\varnothing\in\mathcal{G}$, $\varnothing\in\mathcal{K}$ 이다.)

$\mathcal{F}$ 우의 위상 τ_f 는 부분토대 $\mathcal{F}^K$ $(K\in\mathcal{K})$, $\mathcal{F}_G$ $(G\in\mathcal{G})$ 에 의하여 생성된다. 여기서

$$\mathcal{F}^K=\{F\in\mathcal{F}:F\cap K=\varnothing\},\ \mathcal{F}_G=\{F\in\mathcal{F}:F\cap G\neq\varnothing\}.$$

τ_f 의 위상토대는 $\mathcal{F}^K_{G_1,\,G_2,\,\cdots,\,G_n}$, $K\in\mathcal{K}$, $G_i\in\mathcal{G}$ $(1\le i\le n)$ 이다. 여기서

$$\mathcal{F}^K_{G_1,\,G_2,\,\cdots,\,G_n}=\mathcal{F}^K\cap\left(\bigcap_{i=1}^{n}\mathcal{F}_{G_i}\right)$$

이다. $\mathcal{F}^\phi=\mathcal{F}$ 로 표시하며 $\mathcal{F}^K_{G_1,\,G_2,\,\cdots,\,G_n}$ 는 $n=0$ 일 때 $\mathcal{F}^K$ 를 의미한다.

$(X,\ d)$ 를 거리공간이라고 하자.

임의의 점 $x\in X$ 와 비지 않은 유계닫긴모임 $K\subset X$, 주어진 $\varepsilon>0$ 에 대하여 $d(x,\ K):=\inf\{d(x,\ y):y\in K\}$, $N(K,\ \varepsilon):=\{x\in X:d(x,\ K)<\varepsilon\}$ 으로 정의한다.

X 의 비지 않은 유계닫긴모임족우의 하우스도르프거리 DH_X 는

$$DH_X(K,\ L)=\inf\{\varepsilon>0:K\subset N(L,\ \varepsilon),\ L\subset N(K,\ \varepsilon)\}$$

으로 정의된다. 여기서 $K,\ L$ 은 X 의 비지 않은 유계닫긴모임이다.

$\boldsymbol{K}(X)=\{K\subset X:K$ 는 비지 않은 콤팍트모임이다.$\}$ 로 표시하자.

$(X,\ d)$ 가 콤팍트거리공간이면 위상 τ_f 와 하우스도르프거리 DH_X 에 의해 유도되는 위상은 둘 다 콤팍트이고 $\boldsymbol{K}(X)$ 우에서 일치한다.

론문에서는 $(X,\ d)$ 가 콤팍트거리공간일 때 콤팍트거리공간 $(\boldsymbol{K}(X),\ DH_X)$ 를 초공간이라고 부르며 $(\boldsymbol{K}(X),\ DH_X)$ 우의 련속넘기기 $\bar{f}$ 를 $K\in\boldsymbol{K}(X)$ 에 대하여 $\bar{f}(K)=f(K)$ 로 정의하면 $\bar{f}$ 를 f 로부터 유도되는 넘기기라고 부른다.

콤팍트력학계 $(\boldsymbol{K}(X),\ \bar{f})$ 를 $(X,\ f)$ 로부터 유도되는 력학계(또는 유도초공간력학계)라고 부른다.

유도력학계 $(\boldsymbol{K}(X),\ \bar{f})$ 가 유한형의 부분밀기 $(\Sigma_A,\ \sigma_A)$ 에 위상반공액이기 위한 충분조건에 대하여 론의하자.

$(X,\ f)$ 를 콤팍트력학계, P 를 X 의 부분모임이라고 하자.

$e_{\boldsymbol{K}}(P):=\{K\in\boldsymbol{K}(X):K\subset P\}$ 라고 하면 $e_{\boldsymbol{K}}(P)\neq\varnothing$ 이라는것과 $P\neq\varnothing$ 은 동등하다.[3]

보조정리 1 $K\in\boldsymbol{K}(X)$ 이면 $e_{\boldsymbol{K}}(K)$ 는 $(\boldsymbol{K}(X),\ DH_X)$ 에서 콤팍트모임이다.

증명 $(X,\ d)$ 가 콤팍트거리공간인 경우 위상 τ_f 와 DH_X 에 의해 유도되는 위상은 $\boldsymbol{K}(X)$ 우에서 일치한다.

위상의 정의로부터 분명히 모임

$$\boldsymbol{K}(X)\setminus e_{\boldsymbol{K}}(K)=\{L\in\boldsymbol{K}(X):L\cap(X\setminus K)\neq\varnothing\}$$

은 열린모임이고 따라서 $e_{\boldsymbol{K}}(K)$ 는 $(\boldsymbol{K}(X),\ DH_X)$ 에서 콤팍트모임이다. 여기서 $A\setminus B$ 는 A 에서 B 의 상대나머지모임을 표시한다.(증명끝)

보조정리 2 $(X,\ f)$ 를 콤팍트력학계, $K\in\boldsymbol{K}(X)$ 라고 하자.

그러면 임의의 $n\in\boldsymbol{N}$ 에 대하여 $e_{\boldsymbol{K}}(f^{-n}(K))=\bar{f}^{-n}(e_{\boldsymbol{K}}(K))$ 이다.

증명 $n=1$ 이라고 하자.그러면

$$B \in e_{\boldsymbol{K}}(f^{-1}(K)) \Leftrightarrow B \subset f^{-1}(K),\ B \in K \Leftrightarrow f(B) = \bar{f}(B) \in e_{\boldsymbol{K}}(K) \Leftrightarrow B \in \bar{f}^{-1}(e_{\boldsymbol{K}}(K))$$

이다. $n>1$ 인 경우는 분명하다.(증명끝)

보조정리 3 임의의 $n \in \boldsymbol{N}$ 에 대하여 $K_n \in \boldsymbol{K}(X)$ 라고 하자.

이때 $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \varnothing$ 이면 $e_{\boldsymbol{K}}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} e_{\boldsymbol{K}}(K_n)$ 이다.

명제 1 $(X,\ f)$ 를 콤팍트력학계, A 를 m 차이행행렬이라고 하자.

그러면 다음의 조건들은 동등하다.

① m 개의 둘씩 사귀지 않는 비지 않은 콤팍트모임 $V_1,\ V_2,\ \cdots,\ V_m \subset X$ 가 있어서 임의의 $\alpha = (a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots) \in \Sigma_A$ 에 대하여 $V_\alpha = \bigcap_{s=0}^{\infty} f^{-s}(V_{a_s}) \neq \varnothing$ 이 성립된다.

② m 개의 둘씩 사귀지 않는 비지 않은 콤팍트모임 $H_1, H_2, \cdots,\ H_m \subset \boldsymbol{K}(X)$ 가 있어서 m 개의 모임 $Q_i = \bigcup_{K \in H_i} K\ (1 \le i \le m)$ 들은 X 의 둘씩 사귀지 않는 콤팍트모임이며 임의의 $\alpha = (a_0,\ a_1, a_2,\ \cdots) \in \Sigma_A$ 에 대하여 $H_\alpha = \bigcap_{s=0}^{\infty} \bar{f}^{-s}(H_{\alpha_s}) \neq \varnothing$ 이 성립된다.

정리 1 $(X,\ f)$ 를 콤팍트력학계, A 를 m 차이행행렬이라고 하자.

m 개의 서로 사귀지 않는 비지 않은 콤팍트모임 $V_1,\ V_2,\ \cdots,\ V_m \subset X$ 가 있어서 임의의 $\alpha = (a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots) \in \Sigma_A$ 에 대하여 $V_\alpha = \bigcap_{s=0}^{\infty} f^{-s}(V_{a_s}) \neq \varnothing$ 이면 유한형의 부분밀기 $(\Sigma_A,\ \sigma_A)$ 에 위상반공액인 $(\boldsymbol{K}(X),\ \bar{f})$ 의 부분계 $(H,\ \bar{f}|_H)$ 가 존재한다.

증명 임의의 $i \in \{1,2,\ \cdots,\ m\}$ 에 대하여 $H_i = e_{\boldsymbol{K}}(V_i)$ 라고 하자.

보조정리 1과 명제 1에 의하여 $H_1, H_2, \cdots,\ H_m$ 은 $\boldsymbol{K}(X)$ 의 둘씩 사귀지 않는 비지 않은 콤팍트모임이며 임의의 $\alpha = (a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots) \in \Sigma_A$ 에 대하여 $H_\alpha = \bigcap_{s=0}^{\infty} \bar{f}^{-s}(H_{\alpha_s}) \neq \varnothing$ 이다.

$H = \bigcup_{\alpha \in \Sigma_A} H_\alpha$ 라고 하면 H 는 콤팍트 $\bar{f}$ −불변모임이고 부분계 $(H,\ \bar{f}|_H)$ 는 유한형의 부분밀기 $(\Sigma_A,\ \sigma_A)$ 에 위상반공액이다.(증명끝)

m 차이행행렬 A 에 대하여 f 가 둘씩 서로 사귀지 않는 X 의 콤팍트부분모임 $V_i\ (1 \le i \le m)$ 에서 엄격한 A −쌍확장넘기기이면 정리 1의 조건이 성립된다.

따름 1 $(X,\ f)$ 를 콤팍트력학계, A 를 m 차이행행렬이라고 하자.

f 가 X 의 둘씩 사귀지 않는 비지 않은 콤팍트모임 $V_i\ (1 \le i \le m)$ 에서 엄격한 A −쌍확장넘기기이면 정리 1의 결과가 성립된다.

주의 1 정리 1과 따름 1은 선행연구[5]의 정리 1의 일반화이다.

주의 2 정리 1의 증명으로부터 $H_\alpha = e_{\boldsymbol{K}}(V_\alpha)$ 이고 $\Lambda \subset \bigcup_{\alpha} H_\alpha = H$ 임을 알수 있다. 더우기 H_α 가 X 의 한점모임이 아니게 되는 $\alpha \in \Sigma_m$ 이 존재하면 $\Lambda \neq H$ 즉 선행연구[6]에서의 부분계 $(\Lambda,\ \bar{f}|_\Lambda)$ 은 정리 1에서 구성한 부분계 $(H,\ \bar{f}|_H)$ 이다.

따름 2 정리 1의 조건들이 성립된다고 하면 임의의 $\alpha\in\Sigma_A$에 대하여 V_α가 한점모임이면 $(H,\ \bar{f}|_H)$는 $(\Sigma_A,\ \sigma_A)$와 위상공액이다.

명제 2 $(X,\ f)$를 콤팍트력학계, $V_1,\ V_2,\ \cdots,\ V_m(m\ge 2)$을 X의 둘씩 서로 사귀지 않는 비지 않은 모임, A를 m차이행행렬이라고 하자.

$\mathrm{cl}(\mathrm{Orb}_{\sigma_A}(\alpha_0))=\Sigma_A$인 $\alpha_0\in\Sigma_A$가 존재한다고 가정하면 임의의 $\beta\in\Sigma_A$에 대하여 $V_\beta\ne\varnothing$이기 위해서는 $V_{\alpha_0}\ne\varnothing$일것이 필요하고 충분하다.

증명 필요성은 분명하므로 충분성만을 증명하자.

$\alpha_0=(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots)$이라고 하면 $V_{\alpha_0}\ne\varnothing$이므로 임의의 $n\in\boldsymbol{N}$에 대하여

$$f^n(V_{\alpha_0})=f^n(V_{a_0})\cap f^{n-1}(V_{a_1})\cap f^{n-2}(V_{a_2})\cap\cdots\cap V_{\sigma_A^n}(\alpha_0)\ne\varnothing$$

이고 따라서 임의의 $n\in\boldsymbol{N}$에 대하여 $V_{\sigma_A^n}(\alpha_0)\ne\varnothing$이다.

$\beta_0=(b_0,\ b_1,\ b_2,\ \cdots)$을 Σ_A의 임의의 점이라고 하자.

임의의 $s\in\boldsymbol{N}_0$에 대하여 $V_\beta^{-s}=V_{b_0}\cap f^{-1}(V_{b_1})\cap f^{-2}(V_{b_2})\cap\cdots\cap f^{-s}(V_{b_s})$라고 하자.

그러면 $V_\beta=\bigcap_{s=0}^{\infty}V_\beta^s$이다.

가정에 의하여 임의의 $s\in\boldsymbol{N}_0$에 대하여 $\sigma_A^k(\alpha_0)=(b_0,\ b_1,\ \cdots,\ b_s,\ a_{k+s+1},\ a_{k+s+2},\ \cdots)$인 $k\in\boldsymbol{N}_0$이 존재한다.

그러므로 $\varnothing\ne V_{\sigma_A^k(\alpha_0)}=V_\beta^s\cap f^{-(s+1)}(V_{a_{k+s+1}})\cap\cdots$이고 임의의 $s\in\boldsymbol{N}_0$에 대하여 $V_\beta^s\ne\varnothing$이다.

임의의 $s\in\boldsymbol{N}_0$에 대하여 V_β^s가 콤팍트모임이므로 $V_\beta\ne\varnothing$이다.(증명끝)

명제 2의 조건은 $(\Sigma_A,\ \sigma_A)$의 위상이행성과 동등하다.[1]

명제 2의 결과를 리용하여 정리 1을 다음과 같이 간단히 할수 있다.

정리 2 $(X,\ f)$를 콤팍트력학계, A를 $(\Sigma_A,\ \sigma_A)$가 위상이행적이 되게 하는 m차이행행렬이라고 하자.

이때 $\mathrm{cl}(\mathrm{Orb}_{\sigma_A}(\alpha_0))=\Sigma_A$인 $\alpha_0\in\Sigma_A$에 대하여 m개의 둘씩 서로 사귀지 않는 비지 않은 콤팍트모임 $V_1,\ V_2,\ \cdots,\ V_m\subset X$가 존재하여 $V_{\alpha_0}\ne\varnothing$이면 유한형의 부분밀기 $(\Sigma_A,\ \sigma_A)$에 위상반공액인 $(\boldsymbol{K}(X),\ \bar{f})$의 부분계 $(H,\ \bar{f}|_H)$가 존재한다.

참 고 문 헌

[1] L. Block et al.; Lecture Notes in Mathematics, Springer, 23～56, 1992.

[2] J. S. Cánovas et al.; Fuzzy Sets Syst., **57**, 132, 2014.

[3] H. Román-Flores; Chaos Solitons Fractals, **17**, 99, 2003.

[4] Y. Shi et al.; Chaos Solitons Fractals, **39**, 2138, 2009.

[5] G. Wei et al.; Chaos Solitons Fractals, **36**, 283, 2008.

[6] Z. S. Zhang; Acta Math. Sinica, **27**, 564, 1984.

주체106(2017)년 4월 5일 원고접수

Conditions for Topologically Semi-Conjugation of the Induced Systems on Hyperspace to the Subshift of Finite Type

Ju Hyon Hui, Choe Yun Mi

In [5], it was shown that if a dynamical system (X, f) has strictly coupled-expanding property, then the hyperspace dynamical system $(\boldsymbol{K}(X), \bar{f})$ induced by (X, f) has a subsystem which is topologically semi-conjugated to a full shift (Σ_k, σ).

We show that, under some conditions more weaker than one of [5], $(\boldsymbol{K}(X), \bar{f})$ has a subsystem which not only is topologically semi-conjugated to the subshift of finite type (Σ_A, σ_A), but also is bigger than the subsystem built in [5].

Key words: topologically semi-conjugation, coupled-expanding map