

## 탄성지반우에 있는 섬유강화점탄성다층복합판의 동력학적변위해석

송성관, 장남호

위대한 령도자 김정일동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《강성대국을 건설하자면 나라의 과학기술을 빨리 발전시키고 인민경제를 높은 수준에서 현대화하여야 합니다. 과학기술은 강성대국건설의 추동력이며 강성대국은 과학기술에 의하여 안받침되어야 성과적으로 건설될수 있습니다.》(《김정일선집》 증보판 제21권 44페이지)

선행연구[1, 2]에서는 섬유강화점탄성복합판에 분포힘이 작용할 때 준정력학적 및 동력학적변위해석을 진행하였다.

선행연구[3]에서는 섬유강화비대칭직교다층복합판의 동력학적변위해석을 진행하였으나 탄성지반우에 있는 다층복합판의 변위해석은 진행하지 못하였다.

본문에서는 섬유강화복합재료로 된 점탄성다층복합판이 탄성지반우에서 동력학적분포힘 및 집중집을 받을 때의 변위에 대하여 연구하였다.

### 1. 기본관계식

탄성지반우에 놓여있는 섬유강화다층복합판에 동력학적집이 작용할 때 기본관계식을 취급하자.

판재료는 탄성 및 유전형점탄성재료이다.

속힘으로 된 운동방정식은 다음과 같다.[1]

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q - cw &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

여기서  $N_x$ ,  $N_y$  는 각각  $x$ ,  $y$  축에 수직인 면에 작용하는 법선방향의 단위길이당 당김(누름)힘이고  $N_{xy}$  는  $x$  축에 수직인 면에 작용하는  $y$  방향의 단위길이당 자름힘이다. 또한  $Q_x$ ,  $Q_y$  는 각각  $x$ ,  $y$  축에 수직인 면에 작용하는  $z$  방향의 단위길이당 자름힘이다. 그리고  $q$  는 판의 윗면  $z = -h/2$  에 작용하는 단위면적당  $z$  방향의 동력학적구부림힘이고  $c$  는  $z = +h/2$  에 있는 지반결수이며  $w$  는  $z$  방향의 변위,  $\rho$  는 단위면적당 판의 밀도,  $t$  는 시간이다.

식 (1)의 셋째 식에 모멘트평형방정식을 대입하면 다음의 방정식이 얻어진다.

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q - cw = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2)$$

여기서  $M_x, M_y$ 는 각각  $x, y$  축에 수직인 면에 작용하는 단위길이당 구부림모멘트,  $M_{xy}$ 는  $xy$  면에서 생기는 단위길이당 틀음모멘트이다.

탄성변형하는 경우에 속힘과 중간면의 변형, 곡률사이의 관계식[2]을 식 (1)의 첫 두

식과 식 (2)에 대입하면 방정식 
$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{16} \\ L_{12} & L_{22} & L_{26} \\ L_{16} & L_{26} & L_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - cw \end{bmatrix}$$
 가 얻어진다. 여기

서  $L_{ij}$  ( $i, j=1, 2, 6$ )는 미분연산자들이다.[1]

대칭직교다층복합판의 경우에 대하여 논의하자.

이 경우에 다음의 방정식이 얻어진다.

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - q + cw = -\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3)$$

자유진동의 경우에는  $q=0$ 이므로 식 (3)으로부터

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + cw + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

이고 점탄성변형하는 경우에는

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(\tilde{D}_{12} + 2\tilde{D}_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \tilde{D}_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - q + cw = -\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (5)$$

여기서  $\tilde{D}_{ij}$ 는 다음과 같은 시간에 관한 연산자이다.

$$\tilde{D}_{ij} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{3} (Z_k^3 - Z_{k-1}^3) \tilde{E}_{ij}^{(k)}, \quad \tilde{E}_{ij}^{(k)} f = \tilde{Q}_{ij}^{(k)} \left[ f - \int_0^t \Gamma_{ij}^{(k)}(t-\tau) f(\tau) d\tau \right]$$

## 2. 풀 기 방 법

### 1) 탄성변형하는 경우

우선 자유진동할 때에 대하여 논의하자.

식 (4)를 풀기 위하여 판의 네 경계면  $x=0, a; y=0, b$ 에서 자유지지되었다고 하자.

이때 방정식 (4)를 만족시키는 변위  $w$ 를  $w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} e^{-p_{mn} it} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$ 로 하자.

이 식을 방정식 (4)에 대입하면 고유진동수  $P_{mn}$ 에 대한 다음의 식이 얻어진다.

$$P_{mn}^2 = [D_{11}(m\pi/a)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})(m\pi/a)^2(n\pi/b)^2 + D_{22}(n\pi/b)^4 + c]/\rho \quad (6)$$

판에 분포집  $q(x, y)$ 가 작용하면 그것을 다음과 같은 삼각함수로 전개하자.

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (7)$$

이제 강제진동방정식 (3)의 풀이를

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (8)$$

로 표시하고 식 (7), (8)을 방정식 (3)에 대입하면 다음의 방정식이 얻어진다.

$$[D_{11}(m\pi/a)^4 + 2(D_{12} + D_{66})(m\pi/a)^2(n\pi/b)^2 + D_{22}(n\pi/b)^4 + c]\psi_{mn} + \rho\ddot{\psi}_{mn} = q_{mn}$$

이 식에 식 (6)을 고려하면 방정식  $\ddot{\psi}_{mn} + P_{mn}^2\psi_{mn} = q_{mn}/\rho$  이 얻어진다.

이 방정식의 풀이는  $\psi_{mn} = c_1 \cos P_{mn}(t) + c_2 \sin P_{mn}(t) + q_{mn}/(\rho P_{mn}^2)$  이다.

$t=0$  일 때  $w=0$ ,  $\dot{w}=0$  임을 고려하면 옷식은  $\psi_{mn} = q_{mn}/(\rho P_{mn}^2) \cdot (1 - \cos P_{mn}t)$  와 같다.

2) 점탄성변형하는 경우

식 (7), (8)을 방정식 (5)에 대입하면 다음의 식이 얻어진다.

$$(m\pi/a)^4 \tilde{D}_{11}\psi_{mn} + 2(m\pi/a)^2(n\pi/b)^2(\tilde{D}_{12} + 2\tilde{D}_{66})\psi_{mn} + (n\pi/b)^4 \tilde{D}_{22}\psi_{mn} - q_{mn} + c\psi_{mn} + \rho\ddot{\psi}_{mn} = 0$$

이 식을 라플라스변환하면

$$\psi_{mn}^* = q_{mn}^* / [(m\pi/a)^4 D_{11}^* + 2(m\pi/a)^2(n\pi/b)^2(D_{12}^* + 2D_{66}^*) + (n\pi/b)^4 D_{22}^* + c + \rho s^2] \quad (9)$$

이 얻어진다. 여기서

$$D_{ij}^* f^* = \sum_{k=1}^N \frac{1}{3} (Z_k^3 - Z_{k-1}^3) \tilde{Q}_{ij}^{(k)} [1 - \Gamma_{ij}^{(k)*}] f^* \quad (10)$$

이며  $\Gamma_{ij}^{(k)*}$  는  $k$  제 판의 완화핵에 대한 라플라스변환이다.

### 3. 계 산 실 례

기하학적 및 력학적특성자료가 다음과 같이 주어졌다고 하자.

$$a=2\text{m}, b=1\text{m}, h=0.04\text{m}, N=3, h_1=h_3=0.01\text{m}, h_2=0.02\text{m}, h=h_1+h_2+h_3, 0^\circ/90^\circ/0^\circ$$

$$\rho=72\text{kg/m}^3, q_0=0.5\text{MPa}, E_1=80\text{GPa}, E_2=10\text{GPa}, G_{12}=5\text{GPa}, \nu_{12}=0.3, c=9617\text{kN/m}^3$$

$$\Gamma_{11}=12 \times 10^{-3} e^{-0.06t}, \Gamma_{22}=4 \times 10^{-3} e^{-0.04t}, \Gamma_{12}=3.6 \times 10^{-3} e^{-0.06t}, \Gamma_{66}=2 \times 10^{-3} e^{-0.02t}$$

먼저 탄성풀이를 구하자.

이때  $Z_0 = -2 \times 10^{-2}\text{m}$ ,  $Z_1 = -1 \times 10^{-2}\text{m}$ ,  $Z_2 = 1 \times 10^{-2}\text{m}$ ,  $Z_3 = 2 \times 10^{-2}\text{m}$  이다.

$D_{ij}$  를 구하면 다음과 같다.

$$D_{11}=401.17 \times 10^3 \text{Nm}, D_{12}=21.21 \times 10^3 \text{Nm}, D_{22}=235.97 \times 10^3 \text{Nm}, D_{66}=35.0 \times 10^3 \text{Nm}$$

판의 중심  $x=a/2$ ,  $y=b/2$  에서 최대변위  $w_{11}$  를 구하면  $m=n=1$  일 때

$$w = w_{11} = \psi_{11} = 0.054 (c=0), w = w_{11} = \psi_{11} = 0.041 (c \neq 0).$$

$m=n=3$  까지 최대처짐은  $w = \psi_{11} + \psi_{33} = 0.041 + 0.074 \times 10^{-3} = 0.041(\text{m})$  이다.

이와 같이 합렬은 급격히 수렴하는데  $m=n=1$  까지 제한하여도 실제값에 거의 근사해진다.

다음으로 점탄성풀이를 구하자.

식 (10)에 의하여  $D_{ij}^*$  을 계산하고 식 (9)에 대입한 후 거꿀변환하면

$$\psi_{11} = 0.0235 - 0.00289e^{-0.019t} - 0.000485e^{-0.0393t} - 0.00222e^{-0.0538t} - 2e^{-0.0035177t}(0.0102563\cos 740.564t + 1.46156 \times 10^{-7}\sin 740.564t).$$

$0^\circ/90^\circ/0^\circ$  인 다층판인 경우  $t$ 의 변화에 따르는  $\psi_{11}$ 의 변화를 보면 그림 1과 같다.

같은 방법으로  $90^\circ/0^\circ/90^\circ$  인 다층복합판의 경우를 보면

$$\psi_{11} = 0.04 - 0.00037e^{-0.019t} - 0.0034e^{-0.0366t} - 0.002e^{-0.059t} - 0.0366e^{-0.00196t}\cos 784.482t.$$

$t$ 의 변화에 따르는  $\psi_{11}$ 의 변화를 보면 그림 2와 같다.

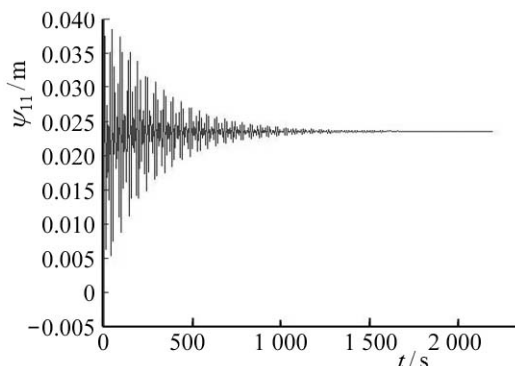


그림 1.  $0^\circ/90^\circ/0^\circ$  인 다층판의 처짐변화

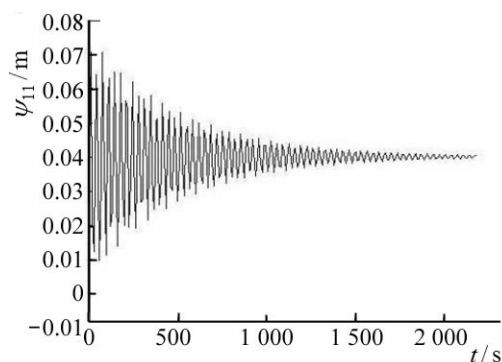


그림 2.  $90^\circ/0^\circ/90^\circ$  인 다층판의 처짐변화

그림 1, 2는 정력학적평형위치근방에서 변위곡선이다.

그림 1, 2에서 보는바와 같이 점성으로 인하여 진동의 감쇠특성이 나타나며 다층복합판의 배열방법에 따라 변위가 달라진다는것을 알수 있다.

## 참 고 문 헌

[1] 김일성종합대학학보(자연과학), 58, 9, 23, 주체101(2012).

[2] 김일성종합대학학보(자연과학), 60, 1, 31, 주체103(2014).

[3] A. Boudiemal; World Academy of Science, Engineering and Technology, 66, 2012.

주체104(2015)년 3월 5일 원고접수

## Dynamic Displacement Analysis of Fiber Reinforced Viscoelastic Composite Laminates on Elastic Foundation

*Song Song Gwan, Jang Nam Ho*

The dynamic equation of composite laminates on elastic foundation is considered and the equation for displacement is derived on it.

The validation is demonstrated by numerical examples.

Key words: elastic foundation, viscoelastic laminate, dynamic displacement