김일성종합대학학보 주체110(2021)년
수 학 제67권 제3호

2개의 시간지연이 있는 분수계주혈흡충증전파모형의 평형점의 안정성과 호프분지

한지성, 김상문

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《과학과 기술이 매우 빨리 발전하고있는 오늘의 현실은 기초과학을 발전시킬것을 더욱 절실하게 요구하고있습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제11권 138폐지)

우리는 주혈흡충증의 전파에서 시간지연의 영향을 연구하기 위하여 2개의 시간지연들을 포함하는 6차원캐푸토분수계주혈흡충증모형을 작성하고 그것의 평형점들의 점근안정성과 호프분지에 대하여 연구하였다.

분수계도함수가 비국부연산자라는것이 알려져있는데 그것은 임의의 시간에 체계응답이 모든 이전 응답들에 의하여 영향을 받을것이라는것을 의미한다.[2] 고전모형은 과거에 의존하지 않지만 류행병의 상태는 그 현재상태뿐아니라 과거의 상태에도 의존하며 따라서 전염병의 전파에서 옹근수계도함수를 리용하는것보다 분수계도함수를 리용하는것이 더 좋다.[3]

론문에서는 선행연구[1]의 모형에 기초하여 분수계주혈흡충증전파모형을 작성하고 그것의 안정성과 분지현상을 고찰하였다.

주혈흡충이 자라는 과정은 여러 단계를 포함하는데 그것은 알, 자유롭게 헤염칠수 있는 미라씨디움, 스포로찌스트와 써캐리움, 주혈흡충유충, 엄지주혈흡충단계들이다.[4] 사람몸안에서 주혈흡충유충이 엄지주혈흡충으로 성장하는 시간을 τ_1로, 알에서 미라씨디움으로 되는 기간을 τ_2로 표시한다.

선행연구[1]의 모형에 기초하여 2개의 시간지연이 있는 캐푸토분수계주혈흡충증전파모형을 작성하면 다음과 같다.

$$\begin{cases} D^q H_s(t) = \Lambda_h - \beta_{ch}\gamma_{ch}C(t)H_s(t-\tau_1) + \theta_{is}H_i(t) - d_h H_s(t) \\ D^q H_i(t) = \beta_{ch}\gamma_{ch}C(t)\left(\dfrac{\Lambda_h}{d_h} - H_i(t-\tau_1)\right) - (\theta_{is} + d_h)H_i(t) \\ D^q S_s(t) = \Lambda_s - \beta_{ms}\gamma_{ms}M(t)S_s(t-\tau_1) - d_s S_i(t) \\ D^q S_i(t) = \beta_{ms}\gamma_{ms}M(t)\left(\dfrac{\Lambda_s}{d_s} - S_i(t)\right) - d_s S_i(t) \\ D^q C(t) = \dfrac{\sigma}{b}S_i(t) - \beta_{ch}\gamma_{ch}C(t) - d_c C(t) \\ D^q M(t) = \dfrac{\alpha h_h g_h}{b}H_i(t-\tau_2) - \beta_{ms}\gamma_{ms}M(t) - d_m M(t) \end{cases} \tag{1}$$

여기서 $q \in (0,\ 1]$이며 D^q는 캐푸토미분연산자이고 $N_h(t)$는 전체 사람수, $H_s(t)$는 감염될수 있는 사람수, $H_i(t)$는 감염된 사람수, $N_s(t)$는 전체 골뱅이수, $S_s(t)$는 감염될수 있는 골뱅이수, $S_i(t)$는 감염된 골뱅이마리수, $C(t)$는 써캐리움의 공간밀도, $M(t)$는 미라씨

디움의 공간밀도를 나타낸다.

주혈흡충증전파모형에서 시간지연의 영향을 연구하기 위하여 식 (1)의 평형점을 구하고 그것의 안정성거동을 고찰한다. 분수계지연미분방정식의 점근안정성과 불안정성, 호프분지의 존재성을 판정하는 방법은 선행연구[1]에 따른다. 식 (1)은 항상 평형상태 $E_0 = (\Lambda_h / d_h,\ 0,\ \Lambda_s / d_s,\ 0,\ 0,\ 0)$ 을 가지는데 그것은 질병이 없을 때의 평형점이므로 질병이 없는 평형점이라고 부른다. 선행연구[5]에서의 방법을 리용하면 E_0 에서의 기초생식수 R_0 은 직접 계산할수 있는데 그것은 다음과 같다.

$$R_0 = \sqrt[4]{R_0^{hm} R_0^{ms} R_0^{sc} R_0^{ch}} \tag{2}$$

여기서

$$R_0^{hm} = \frac{\alpha h_h g_h}{b} \frac{1}{(\theta_{is} + d_h)},\ R_0^{ms} = \frac{\beta_{ms}\gamma_{ms}}{(\beta_{ms}\gamma_{ms} + d_m)} \frac{\Lambda_s}{d_s} e^{-d_s \tau_4},\ R_0^{sc} = \frac{\sigma}{b} \frac{1}{d_s},\ R_0^{ch} = \frac{\beta_{ch}\gamma_{ch}}{(\beta_{ch}\gamma_{ch} + d_m)} \frac{\Lambda_h}{d_h}$$

이다. 전염병학에서 R_0 의 생물학적의미는 미라씨디움들과 중간숙주(골뱅이들) 그리고 써캐리움들에 의하여 감염되는 한 감염주기과정에 전염된 한명의 사람이 감염시키는 평균사람수이다.[1]

다음으로 식 (1)의 평형점들을 구하고 그것들의 안정성을 판정하자.

정리 1 련립미분방정식 (1)은

$$E_{00} = (\Lambda_h / d_h,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0),\ E_0 = (\Lambda_h / d_h,\ 0,\ \Lambda_s / d_s,\ 0,\ 0,\ 0)$$

들을 평형점으로 가지며 특히 $R_0 > 1$ 일 때 우의 2개의 평형점과 함께

$$E^* = (H_s^*,\ H_i^*,\ S_s^*,\ S_i^*,\ C^*,\ M^*)$$

을 평형점으로 가진다. 여기서 평형점 E_{00} 은 골뱅이가 없을 때의 평형점이며 E_0 은 질병이 없을 때의 평형점이다. E^* 은 전염병이 전파될 때의 평형점이다. 여기서 $R_0 = 1$ 이면 평형점 E^* 은 E_0 으로 된다.

다음으로 전염병평형점 E^* 의 안정성을 고찰하자.

식 (1)의 첫 4개의 방정식으로부터 첫번째 방정식과 두번째 방정식을 결합하고 세번째 방정식과 네번째 방정식을 결합하면 2개의 방정식

$$D^q N_h(t) = \Lambda_h - d_h N_h(t)$$

$$D^q N_s(t) = \Lambda_s - d_s N_s(t)$$

를 얻을수 있다. 이때 $t \to \infty$ 일 때 $N_h(t) = \Lambda_h / d_h$, $N_s(t) = \Lambda_s / d_s$ 이다.

우의 사실로부터 방정식 (1)은 4개의 방정식으로 되여있는 방정식 (3)으로 고찰될수 있다.

$$\begin{cases} D^q H_i(t) = \beta_{ch}\gamma_{ch} C(t)\left(\dfrac{\Lambda_h}{d_h} - H_i(t-\tau_1)\right) - (\theta_{is} + d_h) H_i(t) \\ D^q S_i(t) = \beta_{ms}\gamma_{ms} M(t)\left(\dfrac{\Lambda_s}{d_s} - S_i(t)\right) - d_s S_i(t) \\ D^q C(t) = \dfrac{\sigma}{b} S_i(t) - \beta_{ch}\gamma_{ch} C(t) - d_c C(t) \\ D^q M(t) = \dfrac{\alpha h_h g_h}{b} H_i(t-\tau_2) - \beta_{ms}\gamma_{ms} M(t) - d_m M(t) \end{cases} \tag{3}$$

평형점 E^*에서의 식 (3)의 선형화된 방정식의 특성방정식은 다음과 같다.

$$\Delta(s)=(s^q+(\theta_{is}+d_h)+\beta_{ch}\gamma_{ch}C^*e^{-s\tau_1})(s^q+d_c+\beta_{ch}\gamma_{ch})(s^q+d_s+\beta_{ms}\gamma_{ms}M^*)(s^q+d_m+\beta_{ms}\gamma_{ms})-$$
$$-\frac{\alpha h_h g_h}{b}e^{-s\tau_2}\beta_{ch}\gamma_{ch}\left(\frac{\Lambda_h}{d_h}-H_i^*\right)\frac{\sigma}{b}\beta_{ms}\gamma_{ms}\left(\frac{\Lambda_s}{d_s}-S_i^*\right)=0 \tag{4}$$

먼저 시간지연이 없는 경우 식 (3)은 다음과 같이 표시된다.

$$\Delta(s)=(s^q+a_{11}+\beta_{ch}\gamma_{ch}C^*)(s^q+a_{22})(s^q+a_{33}+\beta_{ms}\gamma_{ms}M^*)(s^q+a_{44})+a_{66}=0 \tag{5}$$

여기서

$$a_{11}=\theta_{is}+d_h,\ a_{22}=\beta_{ch}\gamma_{ch}+d_c,\ a_{33}=d_s,\ a_{44}=\beta_{ms}\gamma_{ms}+d_m$$
$$a_{55}=-\frac{\alpha h_h g_h}{b}\beta_{ch}\gamma_{ch}\left(\frac{\Lambda_h}{d_h}-H_i^*\right)\frac{\sigma}{b}\beta_{ms}\gamma_{ms}\left(\frac{\Lambda_s}{d_s}-S_i^*\right) \tag{6}$$

이다. 그러면 다음의 정리가 성립한다.

정리 2 $\tau_1=\tau_2=0$일 때 평형점 E^*은 $1<R_0<\sqrt[4]{1/b_{00}}$이 성립할 때 점근안정하며 $R_0>\sqrt[4]{1/b_{00}}$일 때 불안정하다. 여기서

$$b_{00}=\frac{a_{11}}{(\beta_{ch}\gamma_{ch}C^*+a_{11})}\frac{a_{33}}{(\beta_{ms}\gamma_{ms}M^*+a_{33})}\frac{(\Lambda_h/d_h-H_i^*)}{\Lambda_h/d_h}\frac{(\Lambda_s/d_s-S_i^*)}{\Lambda_s/d_s} \tag{7}$$

이다.

다음으로 $\tau_1>0,\ \tau_2=0$인 경우를 보자. 그러면 방정식 (3)은 다음과 같다.

$$G_2(s,\ \tau_1)=(s^q+\beta_{ch}\gamma_{ch}C^*e^{-s\tau_1}+a_{11})(s^q+a_{22})(s^q+\beta_{ms}\gamma_{ms}M^*+a_{33})(s^q+a_{44})+a_{55}=0 \tag{8}$$

이라고 놓자.

보조정리 특성방정식 (8)은

$$1<R_0<\sqrt[4]{1/\widetilde{b}_{00}} \tag{9}$$

일 때 정의 실수뿌리를 가지지 않는다. 여기서

$$\widetilde{b}_{00}=\frac{a_{33}}{(\beta_{ms}\gamma_{ms}M^*+a_{33})}\frac{(\Lambda_h/d_h-H_i^*)}{\Lambda_h/d_h}\frac{(\Lambda_s/d_s-S_i^*)}{\Lambda_s/d_s} \tag{10}$$

이다.

보조정리로부터 식 (7)이 조건 (9)하에서 정의 실수뿌리를 가지지 않는다는것을 알수 있다. $b_{00}<\widetilde{b}_{00}<1$이므로 정리 2는 $1<R_0<\sqrt[4]{1/\widetilde{b}_{00}}$일 때도 성립한다.

정리 3 $\tau_1>0,\ \tau_2=0$에 대하여

$$1<R_0<\sqrt[4]{1/\widetilde{b}_{00}};\ c_{11}>0,\ c_{22}>0,\ c_{33}>0,\ c_{44}>0,\ c_{55}>0,\ c_{66}>0 \tag{11}$$

이라고 가정하자.

$b_{11}-(\beta_{ch}\gamma_{ch}C^*)b_{22}>0$인 경우 평형점 E^*은 $\tau_1>0$에 대하여 점근안정하다.

그리고 $b_{11}-(\beta_{ch}\gamma_{ch}C^*)b_{22}<0$이 성립하면 식 (1)에서 림계점 τ_1^*이 존재하여

$$\frac{P_1Q_1+P_2Q_2}{Q_1^2+Q_2^2}\neq 0 \tag{12}$$

일 때 E^* 근방에서 주기궤도가 존재하며 따라서 호프분지가 일어난다. 여기서 P_1, P_2, Q_1, Q_2 는 τ_1^* 에서의 P, Q 의 실수부와 허수부이다.

$$P = \beta_{ch}\gamma_{ch}C^* e^{-s\tau_1}(s^{3q} + b_{10}s^{2q} + b_{12}s^q + b_{13})s$$

$$Q = 4qs^{4q-1} + 3qb_{66}s^{3q-1} + 2qb_{77}s^{2q-1} + qb_{88}s^{q-1} + \beta_{ch}\gamma_{ch}C^* e^{-s\tau_1}(3qs^{3q-1} + + 2qb_{10}s^{2q-1} + qb_{12}s^{2q-1} - \tau_1(s^{3q} + b_{10}s^{2q} + b_{12}s^q + b_{13})$$

$$b_{11} = a_{11}a_{22}(\beta_{ms}\gamma_{ms}M^* + a_{33})a_{44} + a_{55}$$

$$b_{22} = a_{22}(\beta_{ms}\gamma_{ms}M^* + a_{33})a_{44} > 0$$

$$b_{33} = a_{11} + a_{22} + (\beta_{ms}\gamma_{ms}M^* + a_{33}) + a_{44}$$

$$b_{44} = a_{11}a_{22} + a_{11}(\beta_{ms}\gamma_{ms}M^* + a_{33}) + a_{11}a_{44} + a_{22}(\beta_{ms}\gamma_{ms}M^* + a_{33}) + + a_{22}a_{44} + (\beta_{ms}\gamma_{ms}M^* + a_{33})a_{44} > 0$$

$$b_{55} = a_{11}a_{22}(\beta_{ms}\gamma_{ms}M^* + a_{33}) + a_{11}a_{22}a_{44} + a_{11}(\beta_{ms}\gamma_{ms}M^* + a_{33})a_{44} + + a_{22}(\beta_{ms}\gamma_{ms}M^* + a_{33})a_{44} > 0$$

$$b_{66} = a_{11}a_{22}(\beta_{ms}\gamma_{ms}M^* + a_{33})a_{44} + a_{55}$$

$$b_{77} = a_{22} + (\beta_{ms}\gamma_{ms}M^* + a_{33}) + a_{44}$$

$$b_{88} = a_{22}(\beta_{ms}\gamma_{ms}M^* + a_{33}) + a_{22}a_{44} + (\beta_{ms}\gamma_{ms}M^* + a_{33})a_{44} > 0$$

$$b_{99} = a_{22}(\beta_{ms}\gamma_{ms}M^* + a_{33})a_{44} > 0$$

$$c_{11} = b_{33}^2 - (\beta_{ch}\gamma_{ch}C^*)^2 + 2b_{33}\cos(q\pi)$$

$$c_{22} = 2b_{33}b_{44}\cos\left(\frac{q\pi}{2}\right) - 2b_{77}(\beta_{ch}\gamma_{ch}C^*)^2\cos\left(\frac{q\pi}{2}\right) + 2b_{55}\cos\left(\frac{3q\pi}{2}\right)$$

$$c_{33} = b_{44}^2 - b_{77}^2(\beta_{ch}\gamma_{ch}C^*)^2 + 2b_{33}b_{55}\cos(q\pi) + 2b_{66}\cos(2q\pi) - 2b_{88}(\beta_{ch}\gamma_{ch}C^*)^2\cos(q\pi) \quad (13)$$

$$c_{44} = 2b_{44}b_{55}\cos\left(\frac{q\pi}{2}\right) - 2b_{77}b_{88}(\beta_{ch}\gamma_{ch}C^*)^2\cos\left(\frac{q\pi}{2}\right) + 2b_{33}b_{66}\cos\left(\frac{3q\pi}{2}\right) - - 2b_{99}(\beta_{ch}\gamma_{ch}C^*)^2\cos\left(\frac{3q\pi}{2}\right)$$

$$c_{55} = b_{55}^2 - b_{88}^2(\beta_{ch}\gamma_{ch}C^*)^2 + b_{44}b_{66}\cos(q\pi) - 2b_{77}b_{99}(\beta_{ch}\gamma_{ch}C^*)^2\cos(q\pi)$$

$$c_{66} = 2b_{55}b_{66}\cos\left(\frac{q\pi}{2}\right) - 2b_{88}b_{99}(\beta_{ch}\gamma_{ch}C^*)^2\cos\left(\frac{q\pi}{2}\right)$$

$\tau_2 > 0,\ \tau_1 = 0$ 인 경우 식 (4)는 다음과 같이 변화된다.

$$\Delta(s) = (s^q + \beta_{ch}\gamma_{ch}C^* + a_{11})(s^q + a_{22})(s^q + \beta_{ms}\gamma_{ms}M^* + a_{33})(s^q + a_{44}) + a_{55}e^{-s\tau_2} = 0 \quad (14)$$

이다. 이때 다음의 정리가 나온다.

정리 4 $\tau_2 > 0,\ \tau_1 = 0$ 에 대하여 $1 < R_0 < \sqrt[4]{1/b_{00}}$ 이면 E^* 은 점근안정하고 $R_0 > \sqrt[4]{1/b_{00}}$ 이면 E^* 은 불안정하다. 여기서 b_{00} 은 식 (9)에서 주어진것과 같다.

참 고 문 헌

[1] Chunxiao Ding et al.; Solitons and Fractals, 118, 18, 2019.
[2] I. Ameen, P. Novati; Applied Mathematical Modelling, 43, 78, 2017.
[3] M. Hassouna et al.; Chaos, Solitons and Fractals, 117, 168, 2018.
[4] Y. Kuang; Delay Differential Equations: with Applications in Population Dynamics, Academic Press, 255～267, 1993.
[5] P. Van den Driessche, J. Watmough; Mathematical Biosciences, 180, 2, 29, 2002.

주체110(2021)년 3월 5일 원고접수

Stability and Hopf Bifurcation of an Equilibrium of a Fractional Schistosomiasis Transmission Model with Two-Time Delays

Han Ji Song, Kim Sang Mun

In this paper, we establish fractional schistosomiasis transmission model with two-time delays and study the stability behavior of equilibrium and Hopf bifurcation.

Keywords: Hopf bifurcation, schistosomiasis