김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체105(2016)년 제62권 제9호 Vol. 62 No. 9 JUCHE105(2016).

# 워커-거의캘러다양체가 에르미트다양체로 되기 위한 조건

정남일, 안윤호

론문에서는 확장된 고유거의복소구조가 도입된 4차원워커-거의캘러다양체가 에르미트다양체이기 위한 필요충분조건을 연구하였다.

선행연구[2]에서는 고리면에서 계량의 행렬표현이 표준형식을 취하는 직교토대를 구성하고 이 토대에 관하여 2개의 거의복소구조와 거의캘러형식을 구성하였으며 워커계량의 행렬표현에서 $c=0$인 경우에 우의 방법으로 구성한 거의캘러형식이 씸플렉트형식이기 위한 조건과 캘러형식으로 되기 위한 조건을, 선행연구[3]에서는 4차원워커다양체에서 고유거의복소구조로부터 얻어지는 거의캘러형식이 씸플렉트형식, 캘러형식으로 되기 위한 조건을 구하였다. 선행연구[4]에서는 캘러다양체가 에르미트동형넘기기에 의하여 고리면과 미분동형이라는것을 밝혔으며 선행연구[1]에서는 $c\neq 0$인 경우에 확장된 고유거의복소구조가 도입된 4차원워커-거의캘러다양체에서 거의캘러형식이 씸플렉트형식으로 되기 위한 조건과 씸플렉트형식이 캘러형식으로 되기 위한 조건을 구하였다.

우리는 확장된 고유거의복소구조가 도입된 4차원워커-거의캘러다양체에서 확장된 고유거의복소구조와 에르미트구조사이의 관계를 연구하였다.

거의복소구조 $J$에 대하여 $N(X, Y)=2([JX, JY]-J[JX, Y]-J[X, JY]-[X, Y])$와 같이 정의되는 (1, 2)형텐소르마당 $N$을 $J$의 나이젠후이스텐소르라고 부른다.

$J$의 나이젠후이스텐소르가 령이면 거의복소구조 $J$는 적분가능하다고 말한다.

$J$가 $(M, g)$의 거의복소구조일 때 $\forall X, Y\in\Gamma(TM)$, $g(X, Y)=g(JX, JY)$이면 $J$를 거의에르미트구조, $(M, g, J)$를 거의에르미트다양체, $J$가 적분가능하면 에르미트구조, $(M, g, J)$를 에르미트다양체, $2n$차원거의복소다양체 $(M, g, J)$에서 $\omega(X, Y)=g(JX, Y)$로 정의되는 2차형식을 거의캘러형식, $d\omega=0$이면 $(M, g, \omega, J)$를 거의캘러다양체, $J$가 적분가능하면 $\omega$를 캘러형식, $(M, g, \omega, J)$를 캘러다양체라고 부른다.

$2n$차원의리만다양체 $M$이 $k\ (0<k\leq n)$차원평행령분포 $D$를 가지면 $M$을 워커다양체라고 부르고 $(M, g, D)$로 표시한다.

2차원평행령분포를 가지는 4차원워커다양체계량의 표준형식은 적당한 국부자리표계가 있어서 $g=(g_{ij})=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&a&c\\0&1&c&b\end{pmatrix}$로 된다. 여기서 $a, b, c$는 자리표계 $(x^1, x^2, x^3, x^4)$에 관한 함수들이며 이때 평행령분포는 $D=\mathrm{span}\{\partial_1, \partial_2\}$이다.

4차원워커다양체 $(M, g, D)$에서 정의된 거의복소구조 $J$가 다음의 조건들을 만족시킬 때 $J$를 고유거의복소구조라고 부른다.

$$J^2=-id\ ,\ \ \forall X,\ Y\in\Gamma(TM)\quad g(JX,\ JY)=g(X,\ Y)$$

분포 $D=\mathrm{span}\{\partial_1,\ \partial_2\}$ 에서의 $\pi/2$ －회전연산자 $J$ 가 $J\partial_1=K\partial_2$, $J\partial_2=-\partial_1/K$ 로 정의되면 $J$ 를 확장된 고유거의복소구조라고 부른다.

4차원워커다양체 $(M,\ g,\ D)$ 에서 국부자리표계 $(x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4)$ 에 대하여

$$J\partial_1=K\partial_2,\ J\partial_1=-\frac{\partial_2}{K},\ \ J\partial_3=-\frac{c}{K}\partial_1+\frac{1}{2}\left(Ka-\frac{b}{K}\right)\partial_2+\frac{1}{K}\partial_4,\ \ J\partial_4=\frac{1}{2}\left(Ka-\frac{b}{K}\right)\partial_1+Kc\partial_1-K\partial_3$$

으로 표시되는 $J$ 가 존재한다. 여기서 $K=\sqrt[4]{(b^2+4)/(a^2+4)}$ 이다.[1]

이제부터는 $J$ 가 도입된 4차원워커다양체 $(M,\ g,\ D,\ J)$ 에서 론의한다.

정리 1 확장된 고유거의복소구조 $J$ 가 에르미트구조로 되기 위하여서는 다음의 식을 만족시킬것이 필요하고 충분하다.

$$K_1=0,\ K_2=0,\ K^2a_1-b_1-2KK_3=0,\ K^2a_2-b_2-2K_4/K=0,\ c_1=0,\ c_2=0 \qquad (1)$$

증명 확장된 고유거의복소구조의 정의로부터 $g(X,\ Y)=g(JX,\ JY)$ 가 만족되므로 $J$ 가 에르미트구조로 되기 위하여서는 $J$ 가 적분가능하여야 한다. 즉 $J$ 의 나이젠후이스텐소르 $N_{jk}^i=2\sum_{h=1}^{4}(J_j^h\partial_hJ_k^i-J_k^h\partial_hJ_j^i-J_h^i\partial_jJ_k^h+J_h^i\partial_kJ_j^h)$ 가 령일것이 필요하고 충분하다.

$$N(\partial_j,\ \partial_k)=N_{jk}^i\partial_i,\ \ J\partial_i=\sum_{j=1}^{4}J_i^j\partial_j,\ \ (J_i^j)=\begin{pmatrix}0 & K & 0 & 0\\ -1/K & 0 & 0 & 0\\ -c/K & (Ka-b/K)/2 & 0 & 1/K\\ (Ka-b/K)/2 & Kc & -K & 0\end{pmatrix}$$

$j=k$ 이면 $N_{jk}^i=0$, $N_{jk}^i=-N_{kj}^i$ 이므로 $N_{jk}^i=0\ (i=\overline{1,\ 4},\ \ j=\overline{1,\ 3},\ \ k=\overline{j+1,\ 4})$ 이여야 한다.

$N_{12}^3=2K_2/K=0\Rightarrow K_2=0$

$N_{13}^3=K_1/K=0\Rightarrow K_1=0$

$N_{23}^1=(a/K+b/K^2)K_2+(K^2a_2-b_2-2K_4/K)/K^2=0\Rightarrow K^2a_2-b_2-2K_4/K=0$

$N_{14}^1=(aK+b/K)K_2+2c_1+(K^2a_2-b_2-2K_4/K)=2c_1=0\Rightarrow c_1=0$

$N_{23}^2=(Ka+b/K^3+2c)K_1+2c_1-(K^2a_1-b_1-2KK_3)/K^2=0\Rightarrow K^2a_1-b_1-2KK_3=0$

$N_{24}^1=-2aK_1/K+2c_2-(K^2a_1-b_1-2KK_3)/K_2=2c_2=0\Rightarrow c_2=0$

우의 식들을 정돈하면

$$K_1=0,\ K_2=0,\ K^2a_1-b_1-2KK_3=0,\ K^2a_2-b_2-2K_4/K=0,\ c_1=0,\ c_2=0\,.$$

나머지 성분들은 우의 6개 식에 의하여 표시되므로 $J$ 의 나이젠후이스텐소르가 령이기 위하여서는 우의 식들이 성립될것이 필요하고 충분하다.(증명끝)

정리 2 확장된 고유거의복소구조 $J$ 가 에르미트구조이기 위해서는 함수 $a,\ b,\ c$ 가 아래의 세 조건중의 하나를 만족시킬것이 필요하고 충분하다.

i) $K=\sqrt[4]{(b^2+4)/(a^2+4)}\ (=C_0)$ 가 상수이고 $a=a(x^3,\ x^4),\ b=b(x^3,\ x^4)$, $c=c(x^3,\ x^4)$ 는 임의의 미끈한 함수이다.

ii) $K=1$, $a(x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4)=b(x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4)$ 이고 $a_1 \neq 0$ 이거나 $a_2 \neq 0$ 이며 $c=c(x^3,\ x^4)$ 는 임의의 미끈한 함수이다.

iii) $K=\sqrt[4]{\dfrac{b^2+4}{a^2+4}}$ 는 상수아닌 함수이고 $\begin{cases} a(x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4)=\psi^{-2}\left(\psi M+\mu-\dfrac{\psi^4-1}{\psi M+\mu}\right) \\ b(x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4)=-\psi M-\mu-\dfrac{\psi^4-1}{\psi M+\mu} \end{cases}$ 이다.

여기서 $M=M(x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4)=\psi_3 x^1+\psi^{-2}\psi_4 x^2$ 이고 $\phi=\phi(x^3,\ x^4)$, $c=c(x^3,\ x^4)$ 는 임의의 미끈한 함수이며 $\psi=\psi(x^3,\ x^4)=K$ 이다.

증명 식 (1)로부터 $K$ 는 $x^1$, $x^2$ 에 관하여 상수이다. 즉 $K=K(x^3,\ x^4)$ 이다.

$$K^2 a_1-b_1-2KK_3=0 \Rightarrow K^2 a_1-b_1=2KK_3$$

$K$ 가 $x^1$ 에 관하여 상수이므로 $(K^2a-b)=2KK_3x^1+p^A(x^2,\ x^3,\ x^4)$ 이고 같은 방법으로

$$(K^2a-b)=2K_4/K\cdot x^2+p^B(x^1,\ x^3,\ x^4).$$

우의 두 식으로부터 $2KK_3x^1+p^A(x^2,\ x^3,\ x^4)=2K_4/K\cdot x^2+p^B(x^1,\ x^3,\ x^4)$ 가 성립되며 이 식의 왼변에는 $x^2$ 에 관한 항이 $2K_4/K\cdot x^2$ 뿐이므로 $p^A=2K_4/K\cdot x^2+p(x^3,\ x^4)$ 이다.

마찬가지로 $p^B=2KK_3x^1+p(x^3,\ x^4)$ 가 성립된다.

$$K^2a+b=2KK_3x^1+2K_4/K\cdot x^2+2f(x^3,\ x^4) \tag{2}$$

$$(b^2+4)/(a^2+4)=K^4,\ (K^4)_1=0 \Rightarrow bb_1/(aa_1)=K$$

$$K^4=bb_1/(aa_1)=bb_2/(aa_2) \tag{3}$$

먼저 $K=C_0$ 인 경우

$$C_0^4(a^2+4)=b^2+4 \Rightarrow C_0^2a-b=C_0^2a\pm\sqrt{C_0^4(a^2+4)-4},$$

$$(C_0^2a-b)_i=(C_0^2a\pm\sqrt{C_0^4(a^2+4)-4})_i=0,\ i=1,\ 2.$$

$i=1$ 이고 $b=\sqrt{C_0^4(a^2+4)-4}$ 인 경우

$$(C_0^2a-b)_1=(C_0^2a-\sqrt{C_0^4(a^2+4)-4})_1=C_0^2a_1-C_0^4aa_1/\sqrt{C_0^4(a^2+4)-4}=-C_0^2a_1(C_0^2a-b)/b=0$$

이 성립된다. 즉 $a_1=0$ 또는 $C_0^2a-b=0$ 이다.

$i$, $b$ 에 관하여 반복하면 $a_1=a_2=b_1=b_2=0$ 또는 $C_0^2a-b=0$ 이다.

$C_0^2a-b=0$ 인 경우 $C_0^2=1 \Rightarrow a=b$ 즉 조건 i)에 귀착된다.

$a_1=a_2=b_1=b_2=0$ 인 경우 $a=a(x^3,\ x^4)$, $b=b(x^3,\ x^4)$ 는 미끈한 함수이다.

$K=K(x^3,\ x^4)$ 가 상수가 아닌 경우를 보자.

식 (3)으로부터 $K^2aa_1=bb_1/K^2$ 의 량변에서 $ba_1$ 을 덜면

$$a_1(K^2a-b)=-b(K^2a-b)_1/K^2,$$

$$(KK_3x^1+K_4/K\cdot x^2+f)a_1+KK_3a=K_3(-K^2a+(K^2a-b))/K,$$

$$(KK_3x^1+K_4/K\cdot x^2+f)a_2+K_4a/K=2K_4(KK_3x^1+K_4/K\cdot x^2+f)/K^3.$$

$(\alpha t+\beta)\dfrac{dy(t)}{dt}+\alpha y(t)=\gamma t+\delta$ 의 풀이는 $y(t)=\dfrac{\gamma t^2/2+\delta t+\alpha C_1}{\alpha t+\beta}$ ($C_1$: 상수)이다.

$$a=\frac{K_3^2(x^1)^2+2K_3(K_4/K\cdot x^2+f)x_1/K+KK_3h^A(x^2,\ x^3,\ x^4)}{KK_3x^1+K_4/K\cdot x^2+f}$$

$$a=\frac{K_4^2(x^2)^2/K^4+2K_4(KK_3x^1+f)x^2/K^3+K_4h^B(x^1,\ x^3,\ x^4)/K}{KK_3x^1+K_4/K\cdot x^2+f}$$

여기서 $h^A$, $h^B$ 는 임의의 함수이다.

$$K_4/K\cdot h^B=K_3^2(x^1)^2+2K_3f/K\cdot x^1+h,\ \ KK_3h^A=K_4^2/K^4\cdot(x^2)^2+2K_4f/K^3\cdot x^2+h$$

$$a=[KK_3x^1+K_4/K\cdot x^2+f-(f^2-K^2h)/(KK_3x^1+K_4/K\cdot x^2+f)]/K^2$$

식 (2)를 리용하면 $b=-KK_3x^1-K_4/K\cdot x^2-f-(f^2-K^2h)/(KK_3x^1+K_4/K\cdot x^2+f)$.

이때 $K$ 는 $x^3$, $x^4$ 에만 의존하므로

$$\psi=\psi(x^3,\ x^4),\ \ \mu(x^3,\ x^4)=f(x^3,\ x^4),\ \ M=M(x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4)=\psi_3x^1+\psi^{-2}\psi_4x^2$$

로 표시하면

$$a(x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4)=\psi^{-2}(\psi M+\mu-(\psi^4-1)/(\psi M+\mu)),$$

$$b(x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4)=-\psi M-\mu-(\psi^4-1)/(\psi M+\mu).$$

식 (1)로부터 $c$ 는 $x^3$, $x^4$ 를 변수로 하는 미끈한 함수로 된다.(증명끝)

따름 $a$, $b$, $c$ 가 있어서 $K=\sqrt[4]{(b^2+4)/(a^2+4)}$ 는 상수이고 $a=a(x^3,\ x^4)$, $b=b(x^3,\ x^4)$, $c=c(x^3,\ x^4)$ 가 임의의 미끈한 함수이면 거의캘러형식 $\omega$ 는 캘러형식으로 된다.

## 참고문헌


[1] 박신혁 등; 조선민주주의인민공화국 과학원통보, 1, 8, 주체104(2015).

[2] Y. Matsushita; J. Geom. Phys., 52, 89, 2004.

[3] Y. Matsushita; J. Geom. Phys., 55, 385, 2005.

[4] J. Giovanni; arXiv:1209.3373v1 [math.DG], 2012.


주체105(2016)년 5월 5일 원고접수

## Condition for Walker-Almost Kahler Manifold to be a Hermitian Manifold

*Jong Nam Il, An Yun Ho*

We constructed a 4-dimensional Walker-almost Kahler manifold by applying the proper almost complex structure extended to the general 4-dimensional Walker manifold and the almost Kahler form, and obtained partial differential systems of equations for this manifold to be a Hermitian manifold and solved them.

Key words: Walker-almost Kahler manifold, Hermitian manifold