김일성종합대학학보 주체110(2021)년
물리학 제67권 제3호

평균내리표본화에서 표본화봉우리의 출현

김철준, 황정욱

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《우주세계에서 일어나는 천체의 운동과 그 법칙을 연구하려면 천문학을 발전시켜야 합니다. 지구가 우주공간에 있는 무수한 천체들중의 하나인것만큼 지구를 둘러싼 우주세계에 대한 연구는 사람들의 생활과 밀접히 련관되여있습니다.》(《**김정일**전집》 제3권 380페지)

태양활동시계렬에는 많은 우연성분이 들어있는것으로 하여 단순한 스펙트르분석으로 주기들을 선별하기 어렵다. 선행연구에서는 표본화도표방법을 받아들여 표본화간격을 증가시킬 때 출력스펙트르의 봉우리가 유지되는 주기를 안정한 주기로 설정하였다.[1] 론문에서는 내리표본화에서 표본화간격을 증가시킬 때 나이퀴스트표본화에서 생기는 봉우리에 대하여 고찰한다.

다음과 같은 다주기신호를 보자.

$$u(t)=\sum_j U_j \cos\left(\frac{2\pi t}{T_j}+\phi_j\right) \tag{1}$$

여기서 U_j, T_j, ϕ_j는 각각 j번째 주기의 진폭, 주기 및 위상이다. 이 신호를 Δt 간격으로 표본화한 시계렬은 다음과 같이 표시된다.

$$u(r)=\frac{1}{2}\sum_j U_j\left[\exp(i\phi_j)\exp\left(\frac{2\pi i r\Delta t}{T_j}\right)+\exp(-i\phi_j)\exp\left(-\frac{2\pi i r\Delta t}{T_j}\right)\right] \tag{2}$$

여기서 $r=1\sim N$은 시계렬원소의 번호, N은 시계렬의 길이를 나타낸다.

이제 시계렬에 평균내리표본화를 적용하자. 즉 시계렬의 m개 원소씩 묶어서 평균화하여 이것을 새로운 내리표본화된 렬의 원소로 취한다. 이것은 건너뛰기내리표본화에 비해 정보의 손실을 가져오지 않는다. 평균내리표본화된 렬은 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned}u_{\overline{m}}(r)=\frac{1}{2m}\sum_j U_j\Bigg[&\exp(i\phi_j)\exp\left(\frac{2\pi i(r-1)m\Delta t}{T_j}\right)\exp\left(\frac{2\pi i\Delta t}{T_j}\right)\frac{1-\exp\left(\frac{2\pi i m\Delta t}{T_j}\right)}{1-\exp\left(\frac{2\pi i\Delta t}{T_j}\right)}+\\&+\exp(-i\phi_j)\exp\left(-\frac{2\pi i(r-1)m\Delta t}{T_j}\right)\exp\left(-\frac{2\pi i\Delta t}{T_j}\right)\frac{1-\exp\left(-\frac{2\pi i m\Delta t}{T_j}\right)}{1-\exp\left(-\frac{2\pi i\Delta t}{T_j}\right)}\Bigg]\end{aligned} \tag{3}$$

평균내리표본화된 시계렬의 출력은 다음과 같이 계산된다.

$$P_{\overline{m}}(q)\approx\frac{1}{2\sqrt{n}\sum_k U_k^2 A_k}\sum_j U_j^2 A_j\cdot$$

$$\cdot\left[\exp\left(\frac{2\pi i q_{0j}}{n}\right)\frac{1-\exp(2\pi i(q+q_{0j}))}{1-\exp\left(\frac{2\pi i(q+q_{0j})}{n}\right)}+\exp\left(-\frac{2\pi i q_{0j}}{n}\right)\frac{1-\exp(2\pi i(q-q_{0j}))}{1-\exp\left(\frac{2\pi i(q-q_{0j})}{n}\right)}\right] \quad (4)$$

여기서 n은 N/m의 옹근수부, $q=0\sim N-1$은 표본화주파수 $f_s=1/\Delta t$를 간격으로 하는 주파수대역에서의 번호, $q_{0j}=N\Delta t/T_j$는 주기 T_j에 해당한 주파수번호이다. 또한

$$A_j=\frac{1-\exp\left(\frac{2\pi\, j\, q_{0j}}{n}\right)}{1-\exp\left(\frac{2\pi\, j\, q_{0j}}{mn}\right)}\frac{1-\exp\left(-\frac{2\pi\, j\, q_{0j}}{n}\right)}{1-\exp\left(-\frac{2\pi\, j\, q_{0j}}{mn}\right)} \quad (5)$$

이다.

식 (5)에서 알수 있는바와 같이 $q=q_{0j}$와 $q+q_{0j}=n$에서 2개의 특이점이 나타나는것처럼 보이지만 이것들은 사실 발산점이 아니다. $q\to q_{0j}$의 극한에서

$$\lim_{q\to q_{0j}}\frac{1-\exp(2\pi\, j(q-q_{0j}))}{1-\exp\left(\frac{2\pi\, j(q-q_{0j})}{n}\right)}=n \quad (6)$$

이다.

이로부터 $q=q_{0j}$와 $q=n-q_{0j}$에서 2개의 봉우리가 생긴다는것을 알수 있다. 첫번째 봉우리는 스펙트르에서 흔히 볼수 있는 진봉우리이다. 두번째 봉우리는 반영구역에서 생기는 반영봉우리이다. 주파수대역에서 나이퀴스트구간이 $0\le f\le f_s/2$라는것을 상기하자.[2] 즉 표본화정리에 의하여 구역 $f_s/2\le f\le f_s$는 앞선 구역 $0\le f\le f_s/2$의 대칭구간일뿐 독립적인 주기를 나타내지 못한다. 즉 반영봉우리는 진봉우리의 대칭일뿐이다.

식 (4)에서 알수 있는바와 같이 진봉우리가 나타나는 주파수 q_{0j}는 표본화간격 $m\Delta t$나 내리표본화된 렬의 길이 n에 무관계하다. 이것은 표본화간격 m이 증가해도 진봉우리는 계속 같은 주파수에서 나타난다는것을 의미한다. 이것이 바로 주기의 내리표본화안정성이다.

만일 $q=n/2$이면(나이퀴스트표본화) $q=q_{0j}$에서의 진봉우리와 $q=n-q_{0j}$에서의 반영봉우리는 중첩되여 새로운 봉우리를 만든다. 이것을 표본화봉우리라고 부른다. 이때

$$P_{\overline{m}_{Nj}}(q_{0j})\approx-\frac{\sqrt{n_{Nj}}}{\sum_k U_k^2A_k}U_j^2A_j \quad (7)$$

이다. 여기서 $P_{\overline{m}_{Nj}}$는 평균내리표본화에서 표본화걸음 $m_{Nj}\Delta t=\frac{T_j}{2}$에서의 출력이며 $n_{Nj}=2q_{0j}$이다.

우와 같은 출력의 변화특성에 기초하여 무수한 잡음봉우리들속에서 정상주기의 봉우리를 찾을수 있다.

맺 는 말

평균내리표본화에서 표본화간격이 변할 때 출력의 변화특성을 반해석적으로 연구하였다. 이때 나타나는 주기봉우리들의 안정성과 나이퀴스트표본화에서 나타나는 표본화봉우리는 우연시계렬에서 안정한 주기를 판정하는데 리용할수 있다.

참 고 문 헌

[1] C. J. Kim et al.; Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 492, 384, 2020.
[2] S. J. Orfanidis; Introduction to Signal Processing, Prentice Hall, 98∼113, 2010.

주체110(2021)년 3월 5일 원고접수

Occurrence of a Sampling Peak in the Average Downsampling

Kim Chol Jun, *Hwang Jong Uk*

We studied on the behavior of power in the average downsampling. The true and aliasing peaks appear as stable ones when the sampling interval increases. At the Nyquist sampling of a mode, two kinds of peaks overlay to form a new sampling peak.

Keywords: spectral analysis, sampling theorem, samplogram