김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제3호

# 가지확산과정을 리용한 다차원역방향확률미분방정식 초기값의 한가지 수치계산법

김문철, 리유정

역방향확률미분방정식은 편미분방정식리론과 확률조종, 금융수학을 비롯한 여러 분야에서 응용되는것으로 하여 효률적인 수치풀이방법에 대한 연구[1, 2]가 널리 진행되고있다.

가지확산과정에 의한 다차원반선형편미분방정식의 풀이표현공식을 제기한 선행연구[3]의 착상에 기초하여 다차원역방향확률미분방정식 초기값의 한가지 수치계산방법을 제기하였다.

$(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ 가 완비확률공간이고 $W_t=(W_t^1,\ \cdots,\ W_t^d)'$ 를 $d$ 차원브라운운동, 상수 $T>0$ 에 대하여 $\{\mathcal{F}_t\}_{0\le t\le T}$ 는 이 브라운운동의 자연 $\sigma-$모임벌증가족을 완비화한 려파기라고 하고 다음의 역방향확률미분방정식과 포물선형편미분방정식들을 고찰하자.

$$\begin{cases} X_t = x_0 + \int_0^t \sigma(t)dW_t \\ Y_t = \varphi(W_T) + \int_t^T f(s,\ X_s,\ Y_s,\ Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s \end{cases} \quad (t\in[0,\ T]) \tag{1}$$

여기서 생성자 $f(t,\ x,\ y,\ z):[0,\ T]\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}$ 는 다음형태의 함수이다.

$$f(t,\ x,\ y,\ z)=\sum_{l\in L} c_l(t,\ x)y^{l_0}\prod_{i=1}^m (z\cdot b_i(t,\ x))^{l_i}$$

여기서 $L$ 은 $\mathbf{Z}_+^{m+1}$ 의 부분모임이다.

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\sum_{i,\ j=1}^d\sum_{k=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\sigma^{ik}\sigma^{jk}+f\left(t,\ x,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\sigma\right)=0 \tag{2}$$

$$u(T,\ x)=\varphi(x) \tag{3}$$

$u(t,\ x)$ 가 편미분방정식 (2)의 풀이일 때 역방향확률미분방정식 (1)의 풀이 $(Y_t,\ Z_t)$ 는 다음과 같다.

$$Y_t=u(t,\ X_t),\ Z_t=\frac{\partial u}{\partial x}(t,\ X_t),\ t\in[0,\ T) \tag{4}$$

선행연구[3]에서 편미분방정식의 확률적표현을 얻을 때 리용한 나이관련확률가지과정을 그대로 리용하며 기호들도 그대로 받아들인다.

$\rho:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+$ 를 확률밀도함수, $(p_l)_{l\in L}$ 을 확률함수라고 하자.

도착시각에 분자는 확률 $p_l$ 로 $|l|$개의 분자로 갈라진다.

$t=0$ 시각에 표식이 0인 1세대의 분자 (1) 이 있다고 하고 $T_{(1)}:=\tau_{(1)}\wedge T$ 를 이 분자의 도착시각이라고 하자.

$k=(k_1,\ \cdots,\ k_{n-1},\ k_n)\in\mathbf{N}^n$ 을 $n$ 세대의 분자라고 하고 $T_k$ 를 이 분자의 도착시각, $T_k<T$

이면 $T_k$ 시각에 분자는 $|I_k|$ 개의 후대 $(k_1, \cdots, k_n, i)$ , $i=1, \cdots, |I_k|$ 들로 갈라진다. $I_k=(l_0, \cdots, l_m)$ 일 때 분자 $k$ 의 후대들가운데서 $l_i$ 개의 후대들의 표식을 $i$ 로 놓는다. $k$ 의 어미를 $k-$ 과 같이 표시하면 $k$ 의 도착시각은 $T_k:=(T_{k-}+\tau_k)\wedge T$ 이다. $k=(1)$ 일 때 $k-:=\phi,\ T_\phi:=0$ 으로 놓는다. 여기에서 $\tau_k$ 들은 밀도가 $\rho$ 인 독립동일분포하는 련속우연량들이고 $I_k$ 들은 확률함수가 $(p_l)_{l\in L}$ 인 독립동일분포하는 리산우연량들이다.

이제 $k$ 에 대하여 $K_t^n$ 을 $t$ 시각에 계안에 살아있는 분자들전부의 모임이라고 하고 $\overline{K}_t^n=\bigcap\limits_{s\le t}K_s^n,\ K_t=\bigcap\limits_{n\ge 1}K_t^n,\ \overline{K}_t=\bigcap\limits_{n\ge 1}\overline{K}_t^n$ 이라고 하자.

이제 $W_t^{(1)}$ 을 정의역이 $[0, T_{(1)}]$ 인 0에서 시작하는 $d$ 차원브라운운동이라고 하고 $k\in\overline{K}_T\setminus\{(1)\}$ 에 대하여 $W_t^k$ 를 정의역이 $[T_{k-}, T_k]$ 인 $W_{T_{k-}}^{k-}$ 에서 시작하는 $d$차원브라운운동이라고 하면 $W_t^k:=W_{T_{k-}}^{k-}+\Delta W_{t-T_{k-}}^k$ 이다. 여기서 $\Delta W^k$ 들은 독립인 표준브라운운동들이다.

$k\in\overline{K}_T$ 에 대하여 $X_t^k:=X_{T_{k-}}^{k-}+\int\limits_{T_{k-}}^{t}\sigma(s)dW_s^k$ 라고 하면 $(W^k)_{k\in\overline{K}_T}$ 는 0시각에 0에서 시작하는 가지브라운운동이며 $(X^k)_{k\in\overline{K}_T}$ 는 0시각에 $x_0$ 에서 시작하는 가지확산과정이다.

가정 1 확산결수 $\sigma(t)$ 와 생성자 $f$ 의 결수 $c_l(t, x)$ , $b_{l,i}(t, x)$ 들은 유계련속함수들이며 종점조건 $\varphi$ 는 유계립쉬츠함수이다.

가정 2 $C=2\|\varphi\|_\infty$ 에 대하여 식 (1)의 $l(y)=\sum\limits_i c_i|y_C|^i$ 는 유계, $L$ 을 $l(y)$ 의 립쉬츠결수라고 할 때 $T\le\min\left\{\dfrac{C}{2\|l(y)\|_\infty},\ \dfrac{1}{L}\right\}$ 이 성립한다.

가정 3 확률함수 $(p_l)_{l\in L}$ 는 $\sum\limits_{l\in L}|l|p_l<\infty$ 를 만족시키고 밀도함수 $\rho:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+$ 는 련속이며 구간 $[0, T]$ 에서 엄격히 증가한다. 그리고 $\overline{F}(T):=\int\limits_T^\infty\rho(t)dt>0$ 이 성립한다.

정리 1 가정 1, 2가 성립할 때 역방향확률미분방정식 (1)은 풀이 $(Y, Z)$ 를 가진다.

이제 $(X^{t,x}, Y^{t,x}, Z^{t,x})$ 를 다음의 역방향확률미분방정식의 풀이라고 하자.

$$\begin{cases} X_s^{t,x}=x+\int\limits_t^s\sigma(s)dW_s \\ Y_s^{t,x}=g(X_T^{t,x})+\int\limits_s^T f(s,\ X_s^{t,x},\ Y_s^{t,x},\ Z_s^{t,x})ds-\int\limits_s^T Z_s^{t,x}dW_s \end{cases}\quad (s\in[t,\ T]) \qquad (5)$$

정리 2 가정 1, 2가 성립할 때 $u(t, x):=Y_t^{t,x}$ 는 편미분방정식 (2), (3)의 점성풀이로 된다.

$\sigma(t)=\sigma_0$ 인 경우를 론의한다.

$t$ 시각에 $x$ 에서 시작되는 가지확산과정 $X^{k,t,x}$ 를 생각하자.

$k \in \overline{K}_T$ 에 대하여

$$\zeta_k := \mathbf{1}_{\{\theta_k=0\}} + \mathbf{1}_{\{\theta_k \neq 0\}} \sigma_0 \left( \frac{W_{T_k}^{k,t,x} - W_{T_{k-}}^{k,t,x}}{\tau_k} \right)^{\mathrm{T}} \cdot b_{I_{k-},\ \theta_k}(T_{k-},\ X_{T_{k-}}^{k,t,x})$$

$$\psi^{t,x} := \left[ \prod_{k \in K_T} \frac{\varphi(X_T^{k,t,x}) - \varphi(X_{T_{k-}}^{k,t,x}) \mathbf{1}_{\{\theta_k \neq 0\}}}{\overline{F}(\Delta T_k)} \zeta_k \right] \left[ \prod_{k \in \overline{K}_T \setminus K_T} \frac{c_{I_k}(T_k,\ X_{T_k}^{k,t,x})}{p_{I_k}} \frac{\zeta_k}{\rho(\Delta T_k)} \right] \tag{6}$$

라고 하자.

$L_\varphi$ 를 $\varphi$ 의 립쉬츠결수, $B_0^\infty(L_g) := \{(x_1,\ \cdots,\ x_d) \in \mathbf{R}^d : |x_i| \le L_g\}$,

$$C_{1,q} := \|\varphi\|_\infty^q \vee \sup_{\substack{0 \le t < s \le T,\ x \in \mathbf{R}^d \\ i=1,\cdots,m,\ b_0 \in B_0^\infty(L_\varphi)}} E\left[ \left| (b_0 \cdot (X_s^{t,x} - x)) \left( \left( \frac{W_s - W_t}{s-t} \right)^{\mathrm{T}} \cdot b_i(t,\ x) \right) \right|^q \right]$$

$$C_{2,q} := \sup_{\substack{0 \le t < s \le T,\ x \in \mathbf{R}^d \\ i=1,\cdots,m}} E\left[ \left| \sqrt{s-t} \left( \frac{W_s - W_t}{s-t} \right)^{\mathrm{T}} \cdot b_i(t,\ x) \right|^q \right]$$

$$\hat{C}_{1,q} := \frac{C_{1,q}}{\overline{F}(T)^{q-1}},\ \hat{C}_{2,q} := C_{2,q} \sup_{l \in L,\ t \in (0,T]} \left( \frac{\|c_l\|_\infty}{p_l} \frac{t^{-q/(2(q-1))}}{\rho(t)} \right)^{q-1}$$

라고 표시하자.

가정 4 어떤 $q > 1$에 대하여 다음 두 조건중 하나가 성립한다.

$$C_{1,q} \left( \frac{1}{\overline{F}(T)} \right)^q \le 1,\quad \sup_{l \in L,\ t \in (0,T]} C_{2,q} \left( \frac{\|c_l\|_\infty}{p_l} \frac{1}{\sqrt{t}\rho(t)} \right)^q \le 1$$

$$T < \int_{\hat{C}_{1,q}}^{\infty} (\hat{C}_{2,q} \sum\nolimits_{l \in L} \|c_l\|_\infty x^{|l|})^{-1} dx$$

정리 3 가정 1－4가 성립되고 편미분방정식 (2)－(3)의 점성풀이 $v(t,\ x)$가 존재하면 유일하며 $Y_t = v(t,\ W_t)$ 이다. 여기서 $v(t,\ x) := E[\psi^{t,x}]$ 이다. 이때 $Y = v(t,\ W_t)$ 가 성립한다. 또한 $q \ge 2$ 에 대하여 가정 4가 성립하면 $E[|\psi^{t,x}|^2] < \infty$ 가 성립한다.

정리 2, 3으로부터 $Y_t^{t,x} = v(t,\ x) = E[\psi^{t,x}]$ 이므로 식 (5)의 풀이의 0시각의 값은 우연량 $\psi^{0,x_0}$ 의 수학적기대값과 같다. 즉

$$\widetilde{Y}_{0,M} := \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} \psi_i^{0,x_0} \tag{7}$$

이 성립한다. 여기서 $\psi_i^{0,x_0}$ 들은 식 (6)의 $\psi^{0,x_0}$ 과 독립이며 동일분포하는 우연량들이다.

정리 3에 의하여 $\mathrm{var}[\psi^{0,x_0}] < \infty$ 이므로 $\widetilde{Y}_{0,M}$ 은 $Y_0$ 에로 거의수렴한다.

론문에서 제기한 식 (7)의 수렴성과 효과성을 검증하기 위한 실험을 진행하였다.

$T = 0.1$, $\rho(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$ 로 놓고 수치실험을 진행하였으며 이러한 모의를 10번 진행하여 평균과 표준편차, 실행시간을 평가하였다.

실례 다음의 역방향확률미분방정식을 론의하자.

$$\begin{cases} X_t = \int_0^t \sigma_0 dW_s \\ Y_t = \dfrac{\exp(b\cdot X_T + T)}{\exp(b\cdot X_T + T)+1} + \int_t^T \sigma_0 \left( Y_s - \dfrac{2+\sigma_0^2 d}{2\sigma_0^2 d} \right)(Z_s \cdot b)ds - \int_t^T Z_s dW_s \end{cases} \quad (0 \le t \le T) \quad (8)$$

여기서 $\sigma_0 = 0.25 \cdot \boldsymbol{I}_{d\times d}$, $b = (1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}}$, $d = 100$이다.

확률미분방정식의 해석적풀이는 $Y_t = \dfrac{\exp(X_t \cdot b + t)}{\exp(X_t \cdot b + t)+1}$ 이다.

$T = 0.1$, $(p_l)_{l\in L} = (1/2,\ 1/2)$로 놓는다. $t = 0$에서의 풀이는 $Y_0 = 0.5$이다.

$M$, $\lambda$ 값들에 따르는 수치실험결과들을 얻는다.(표)

표. 수치실험결과

| 반복회수($M$)/회 | 1 000 | | | 10 000 | | | 100 000 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1/\lambda$ | 0.2 | 0.1 | 0.05 | 0.2 | 0.1 | 0.05 | 0.2 | 0.1 | 0.05 |
| 평균 | 0.509 | 0.519 | 0.498 | 0.508 | 0.525 | 0.540 | 0.519 | 0.516 | 0.516 |
| 표준편차 | 0.038 | 0.024 | 0.034 | 0.017 | 0.029 | 0.054 | 0.018 | 0.004 | 0.006 |
| 실행시간/s | 11.0 | 18.0 | 36.3 | 110.8 | 173.0 | 365.8 | 1100.9 | 1726.2 | 3643.5 |

실험결과를 통하여 론문에서 제기한 가지확산과정을 리용한 다차원역방향확률미분방정식의 수치풀이도식이 효과적이라는것을 알수 있다.

## 참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보 수학, 64, 4, 10, 주체107(2018).

[2] D. Ding et al.; Comput. Stat., 32, 1357, 2017.

[3] L. Henry et al.; arXiv:1603.01727. 2016.

주체109(2020)년 3월 15일 원고접수

## A Numerical Calculation Method for Initial Value of Multi-Dimensional Backward Stochastic Differential Equations via Branching Diffusion Process

*Kim Mun Chol, Ri Yu Jong*

In this paper, we propose a numerical method for a class of multi-dimensional backward stochastic differential equations using branching diffusion process and Monte Carlo method.

Keyword: multi-dimensional backward stochastic differential equation