김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체106(2017)년 제63권 제5호 Vol. 63 No. 5 JUCHE106(2017).

한가지 형태의 비선형임풀스분수계미분방정식의 초기값문제에 대한 수값풀이법

박순애, 최희철

분수계미분방정식은 최근 공학, 물리학, 화학, 경제학 등 여러 연구분야에서 폭넓게 리용되고있다. 특히 지진학에서의 비선형진동문제, 다공성매질과 류체력학적교통모형에서의 침투흐름문제 등 많은 물리적현상들에서 커다란 흥미를 끌고있다.

선행연구[1]에서는 $0<\alpha<1$일 때의 캐푸터임풀스분수계미분방정식의 풀이의 존재성과 유일성에 대하여, 선행연구[2]에서는 적분경계조건을 가진 임풀스분수계미분방정식의 풀이의 존재성에 대하여 론의하였다.

선행연구[4]에서는 샤페르의 부동점정리를 리용하여 비선형임풀스분수계미분방정식의 주기경계값문제에 대한 풀이의 존재성을 증명하였다. 이와 같은 임풀스분수계미분방정식의 풀이의 유일존재성에 대한 론의는 선행연구[3]에서도 진행되였다. 그러나 현재까지의 임풀스분수계미분방정식에 대한 론의는 존재성에만 국한되고있으며 그것에 대한 수값풀이법은 많이 제기되지 못하고있다. 선행연구[7]에서는 시공간분수계포커－플랑크방정식에 대한 효과적인 수값풀이법을 제기하고 풀이의 안정성과 수렴성을 증명하였으며 선행연구[6]에서는 하르웨블레트연산행렬을 리용한 캐푸터의미의 분수계도함수를 가지는 분수계편미분방정식의 풀이법을 제기하고 실례계산을 주었다.

론문에서는 한가지 형태의 비선형임풀스분수계미분방정식(1형임풀스분수계미분방정식)에 대한 분해－웨블레트연산행렬법을 제기하고 그 수렴성을 해석하였다.

1. 1형임풀스분수계미분방정식과 그것의 분해－연산행렬법

정의 1 다음의 비선형분수계미분방정식을 1형임풀스분수계미분방정식이라고 부른다.

$$^cD_0^\alpha x(t)=f(t,\ x(t))\ \ (t\in(0,\ 1],\ t\neq t_k\in(0,\ 1)),\ \Delta x(t)|_{t=t_k}=I_k(x(t_k^-))\ \ (k=1,\cdots,\ l),\ x(0)=x_0$$

여기서 $f\in C(I\times X,\ X)$, $I_k:X\to X$, $0=t_0<t_1<\cdots<t_l<t_{l+1}=1$이고

$$\Delta x(t)|_{t=t_k}=x(t_k^+)-x(t_k^-),\ \ x(t_k^+)=\lim_{h\to+0}x(t_k+h),\ \ x(t_k^-)=\lim_{h\to+0}x(t_k-h).$$

보조정리 1 $g\in C(0,1)\cap L(0,1)$에 대하여 그것의 n계도함수가 $C(0,1)\cap L(0,1)$에 속한다고 하면 $I_{0+}^{\alpha}\,{}^cD_{a+}^\alpha g(t)=g(t)+c_1+c_2t+c_3t^2+\cdots+c_nt^{n-1}$이 성립된다. 여기서 $c_i\in \boldsymbol{R},\ i=1,\cdots,n$이고 $n=[\alpha]+1$이다.

론의를 간단히 하기 위하여 $l=1$이라고 하자. 즉 다음과 같다고 하자.

$$^cD_0^\alpha x(t)=f(t,\ x(t)),\ \ t\in(0,\ 1],\ \ t\neq t_k\in(0,\ 1) \tag{1}$$

$$\Delta x(t)|_{t_*}=I_*(x(t_*^-)) \tag{2}$$

$$x(0)=x_0 \tag{3}$$

여기서 f는 $f:(0,\ 1]\times \boldsymbol{R}\to \boldsymbol{R}$인 련속함수이다.

문제 (1)－(3)과 동등한 다음과 같은 적분방정식을 얻는다.

$$x(t)=x_0+I_*(x(t_*^-))\chi(t-t_*)+I_0^\alpha\circ f(t,\ x(t)) \tag{4}$$

여기서 $\chi(t):=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t\le 0\end{cases}$ 이다.

결국 적분방정식 (4)를 풀면 문제 (1)－(3)의 풀이를 얻게 된다.

이 론문의 목적은 일부 리산점들에서의 적분방정식 (4)의 수값풀이를 얻는 고속방법인 분해－연산행렬법을 제안하는것이다.

$f,\ I_*$이 일반적으로 비선형이므로 분해법을 리용하자.

가정 $x(t):=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x_n(t)$

이 가정으로부터 다음의 분해식이 성립된다.

$x_0(t)=x_0,\ t\in(0,\ 1]$

$x_1(t)=I_0^\alpha\circ f(t,\ x_0(t))+I_*(x_0(t_*^-))\chi(t-t_*)$

$$x_{n+1}(t)=I_0^\alpha\circ\left(f\left(t,\ \sum_{j=0}^{n}x_j(t)\right)-f\left(t,\ \sum_{j=0}^{n-1}x_j(t)\right)\right)+\left(I_*\left(\sum_{j=0}^{n}x_j(t_*^-)\right)-I_*\left(\sum_{j=0}^{n-1}x_j(t_*^-)\right)\right)\chi(t-t_*),$$
$$n=1,\ 2,\cdots$$

이제 계산그물 $\Delta t:=1/m=1/2^r\ (r\in \boldsymbol{N}),\ t_k:=(k-0.5)\Delta t\ (k=1,\ \cdots,\ m)$를 만들자.

론의를 간단히 하기 위하여 $t_*=t_{m/2}$이라고 하자.

정의 2[5] 다음의 식으로 규정되는 함수계를 블로크임풀스함수계(BPF)라고 부른다.

$$b_i(t)=\begin{cases}1, & i/m\le t<(i+1)/m\\ 0, & \text{기타}\end{cases},\quad i=\overline{0,\ m-1}$$

정의 3[5] 임의의 $i\ge 1,\ i\in Z$에 대하여 부등식 $i=k+2^j-1\ (0\le j<i),\ 1\le k<2^j+1$을 만족시키는 옹근수쌍 $(j,\ k)$를 i의 옹근수분해라고 부른다.

정의 4[6] 실축 $\boldsymbol{R}$우에서 정의된 함수

$$h_0(t)=1/m^{1/2},\ h_i(t)=\frac{1}{\sqrt{m}}\begin{cases}2^{j/2}, & (k-1)/2^j<t\le(k-1/2)/2^j\\ -2^{j/2}, & (k-1/2)/2^j<t\le k/2^j\\ 0, & \text{기타}\end{cases}$$

를 하르웨블레트라고 부른다. 여기서 $j,\ k$는 i의 옹근수분해이다.

정의 5 $H_{\text{matrix}}:=\begin{pmatrix}h_0(t_1) & h_0(t_2) & \cdots & h_0(t_m)\\ h_1(t_1) & h_1(t_2) & \cdots & h_1(t_m)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ h_{m-1}(t_1) & h_{m-1}(t_2) & \cdots & h_{m-1}(t_m)\end{pmatrix}$를 점배치점모임 (t_k)에 관한 하르웨블레트행렬이라고 부른다. 마찬가지로 블로크임풀스함수행렬 B_{matrix}도 정의할수 있으나 블로크임풀스함수의 정의로부터 $B_{\text{matrix}}=I$임을 알수 있다.

보조정리 2[5] 블로크임풀스함수벡토르 $B(t)=(B_1(t),\, B_2(t),\, \cdots,\, B_m(t))^{\mathrm{T}}$ 의 연산행렬 F_B^α 는

$$F_B^\alpha = \frac{1}{m^\alpha}\frac{1}{\Gamma(\alpha+2)}\begin{pmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_{m-1} \\ 0 & 1 & \xi_1 & \cdots & \xi_{m-2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \xi_{m-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \xi_k=(k+1)^{\alpha+1}-2k^{\alpha+1}+(k-1)^{\alpha+1}$$ 과 같이 표시된다.

정리 1 하르웨블레트족 $H(t)=(h_0(t),\, h_1(t),\, \cdots,\, h_{m-1}(t))^{\mathrm{T}}$ 의 연산행렬 F_H^α 는 다음과 같다.

$$F_H^\alpha = H_{\mathrm{matrix}} F_B^\alpha H_{\mathrm{matrix}}^{\mathrm{T}}$$

증명 $y(t)$ 가 토막상수함수이면 $y(t)=C_m^{\mathrm{T}}B_m(t),\ \ y(t)=D_m^{\mathrm{T}}H_m(t)$ 로 근사시킬수 있다.

이로부터 $C_m^{\mathrm{T}}B_{\mathrm{matrix}}=D_m^{\mathrm{T}}H_{\mathrm{matrix}}$ 임을 쉽게 알수 있다.

$B_{\mathrm{matrix}}=I$ 라는 사실로부터 $C_m^{\mathrm{T}}=D_m^{\mathrm{T}}H_{\mathrm{matrix}}$ 가 성립된다.

한편 $I_0^\alpha y(t)=I_0^\alpha C_m^{\mathrm{T}}B_m(t)=C_m^{\mathrm{T}}I_0^\alpha B_m(t),\ \ I_0^\alpha y(t)=I_0^\alpha D_m^{\mathrm{T}}H_m(t)=D_m^{\mathrm{T}}I_0^\alpha H_m(t)$ 로부터

$$C_m^{\mathrm{T}}F_B^\alpha B_{\mathrm{matrix}}=D_m^{\mathrm{T}}F_H^\alpha H_{\mathrm{matrix}},\ \ D_m^{\mathrm{T}}H_{\mathrm{matrix}}F_B^\alpha=D_m^{\mathrm{T}}F_H^\alpha H_{\mathrm{matrix}}$$

임을 알수 있다. 따라서 $F_H^\alpha = H_{\mathrm{matrix}} F_B^\alpha H_{\mathrm{matrix}}^{\mathrm{T}}$ 가 성립된다.(증명끝)

표시 $H_m(t):=(h_0(t),\ h_1(t),\ \cdots,\ h_{m-1}(t))^{\mathrm{T}},\ \ C_m^{\mathrm{T}}:=(c_0,\ c_1,\ \cdots,\ c_{m-1})$ 을 도입하자.

함수 $y(t)$ 가 토막상수함수이면 유한개의 하르함수에 의해 근사시킬수 있다. 즉

$$y(t)=\sum_{k=0}^{m-1}c_k h_k(t)=C_m^{\mathrm{T}}H_m(t)\ .$$

따라서 점배치방정식은 $y(t_k)=C_m^{\mathrm{T}}H_m(t_k),\ \ k=1,\cdots,\ m$ 과 같이 작성된다.

분해－연산행렬법에 의한 알고리듬은 다음과 같다.

걸음 1 $S_0:=C_0^{\mathrm{T}}=(x_0,\, x_0,\, \cdots,\ x_0)\circ H_{\mathrm{matrix}}^{\mathrm{T}}$ 를 계산한다.

걸음 2 $S_1:=C_0^{\mathrm{T}}+C_1^{\mathrm{T}}=C_0^{\mathrm{T}}+(Y_1H_{\mathrm{matrix}}^{\mathrm{T}}F_H^\alpha+Y_2H_{\mathrm{matrix}}^{\mathrm{T}})$ 를 계산한다. 여기서

$Y_1:=(f(t_1,\ \hat{x}_0(t_1)),\ f(t_2,\ \hat{x}_0(t_2)),\cdots,\ f(t_m,\ \hat{x}_0(t_m))),$

$Y_2:=(I_*(\,\hat{x}_0(t_1))\cdot\chi(t_1-t_*),\ I_*(\,\hat{x}_0(t_2))\cdot\chi(t_2-t_*),\cdots,\ I_*(\,\hat{x}_0(t_m))\cdot\chi(t_m-t_*))\,,\ \ \hat{x}_0(t)=C_0^{\mathrm{T}}\circ H_{\mathrm{matrix}}\,.$

걸음 3 $S_{n+1}=S_n+(\bar{F}(S_n)-\bar{F}(S_{n-1}))\circ H_{\mathrm{matrix}}^{\mathrm{T}}\circ F_H^\alpha+(\bar{I}(S_n)-\bar{I}(S_{n-1}))\circ\bar{\chi}\circ H_{\mathrm{matrix}}^{\mathrm{T}}$ 를 계산한다.

걸음 4 $\overline{U}_N=S_N\circ H_{\mathrm{matrix}}$ 를 계산한다.

2. 근사풀이의 수렴성

보조정리 3 $M:=\sup|f(t,\ x)|,\ \ t_2>t_1$ 이라고 할 때 다음의 평가식이 성립된다.

$$|\,I_0^\alpha f(t,\ x(t))\,|_{t_1}-|\,I_0^\alpha f(t,\ x(t))_{t_2}\,|\le\begin{cases}2M(t_2-t_1)^\alpha/\varGamma(1+\alpha), & \alpha\le 1\\ M((t_2-t_1)^\alpha+t_2^\alpha-t_1^\alpha)/\varGamma(1+\alpha), & \alpha>1\end{cases}$$

$\forall x_1,\ x_2\in\boldsymbol{R},\ \ |\,f(t,\ x_1)-f(t,\ x_2)|\le L_f\,|\,x_1-x_2\,|,\ \ |\,I_*(x_1)-I_*(x_2)|\le L_{I_*}\,|\,x_1-x_2\,|$ 가 성립되고 $\omega:=L_f/\Gamma(1+\alpha)+L_{I_*},\ \ 0<\omega<1$ 이라고 가정하자.

정리 2(수렴성정리) $\|\,x-U_N\,\|_{PC[0,\,1]}\le\dfrac{2M}{\Gamma(1+\alpha)(1-\omega)}\Delta t^\alpha+\omega^N\,\|\,x-U_0\,\|_{PC[0,\,1]}$

증명 $\forall t\in[0,\ 1],\ \exists t_k,\ |x(t)-U_N(t)|=|x(t)-x(t_k)+x(t_k)-U_N(t_k)+U_N(t_k)-U_N(t)|$로 놓으면 $U_N(t)$의 구성으로부터 $|U_N(t_k)-U_N(t)|=|U_N(t_k)-U_N(t_k)|=0$이 나온다.

먼저 $|x(t)-x(t_k)|$를 평가하자.

$x(t)=x_0+I_*(x(t_*^-))\chi(t-t_*)+I_0^\alpha\circ f(t,\ x(t))$이므로

$$x(t_k)=x_0+I_*(x(t_*^-))\chi(t_k-t_*)+I_0^\alpha\circ f(t,\ x(t))|_{t_k}$$

이며 $|x(t)-x(t_k)|=|I_0^\alpha\circ f(t,\ x(t))-I_0^\alpha\circ f(t,\ x(t))|_{t_k}|\le\frac{2M}{\Gamma(1+\alpha)}\Delta t^\alpha$이 성립된다.

이제 $|x(t_k)-U_N(t_k)|$를 평가하자.

$U_N(t_k)=\sum_{j=0}^{N}\hat{x}_j(t_k)=x_0+I_0^\alpha f(t,\ U_{N-1}(t_k))+I_*(U_{N-1}(t_*^-))\chi(t_k-t_*)$이므로

$$|x(t_k)-U_N(t_k)|\le\frac{L_f}{\Gamma(1+\alpha)}\|x-U_{N-1}\|_{PC[0,\ 1]}+L_{I_*}\|x-U_{N-1}\|_{PC[0,\ 1]},$$

$$|x(t)-U_N(t)|\le\frac{2M}{\Gamma(1+\alpha)}\Delta t^\alpha+\omega\|x-U_{N-1}\|_{PC[0,\ 1]}\le\cdots\le\frac{2M}{\Gamma(1+\alpha)(1-\omega)}\Delta t^\alpha+\omega^N\|x-U_0\|_{PC[0,\ 1]}$$

이 성립되며 따라서 $\|x-U_N\|_{PC[0,\ 1]}\le\frac{2M}{\Gamma(1+\alpha)(1-\omega)}\Delta t^\alpha+\omega^N\|x-U_0\|_{PC[0,\ 1]}$이다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] L. Mahto et al.; arXiv:1205.3619v1 [math.CA] 16 May, 2012.
[2] Y. Chang et al.; J. Fract. Calc. Appl., 7, 1, 2012.
[3] J. Wang et al.; Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 17, 4384, 2012.
[4] M. Belmekki et al.; Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., 16, 1, 2014.
[5] A. K. Gupta et al.; Article ID 140453, 11, 2014.
[6] A. Neamaty et al.; J. Math. Comput. Sci., 7, 230, 2013.
[7] Q. Yang et al.; Article ID 464321, 22, 2010.

주체106(2017)년 1월 5일 원고접수

Solution Method of the Numerical Value for Initial Value Problem of One Type of Nonlinear Impulse Fractional Differential Equation

Pak Sun Ae, Choe Hui Chol

We suggest the decomposition-wavelet operation matrix method for one type of nonlinear impulse fractional differential equation (1 type impulse fractional differential equation) and analyze its convergence.

Key word: impulse fractional differential equation