김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체106(2017)년 제63권 제10호 Vol. 63 No. 10 JUCHE106(2017).

두수준초포화계획에 렬을 첨가한 $E(S^2)$ －최량초포화계획구성

김철호, 전웅

우리는 실험계획법연구에서 실험회수를 줄이기 위한 중요한 연구방향인 최량초포화계획의 한가지 구성방법을 연구하였다.

선행연구[1－3]에서는 두수준초포화계획의 $E(S^2)$ －최량성기준을 만들고 직교계획과 BIB－계획 등을 리용하여 최량초포화계획들을 구성하였다. 특히 선행연구[1]에서는 초포화계획에 행을 더 첨가하여 최량초포화계획을 구성하는 방법을 제기하였다.

선행연구들에서 렬을 첨가하는 방식으로 $E(S^2)$ －최량초포화계획을 구성하는 연구결과는 주어지지 않았다.

론문에서는 사전에 알려진 최량초포화계획에 몇개의 렬을 더 첨가하여 $E(S^2)$ －최량초포화계획을 구성하는 방법을 연구하였다.

1. 두수준초포화계획 $S(n:2^{m+r})$ 의 구성

X 를 $n\times m$ 형($n<m$)두수준초포화계획 $S(n:2^m)$ 이라고 표시하자.

여기에 r 개의 렬을 더 첨가한 $n\times(m+r)$ 형($n<m+r$)행렬인 새로운 두수준초포화계획을 $S(n:2^{m+r})=(X:A)$ 라고 표시한다. 여기서 $n\times r$ 형행렬 A 는 n, r 가 짝수일 때 $AA^{\mathrm{T}}=I_n$ 이며 n 과 r 가 기타인 경우에는 $X^{\mathrm{T}}A=E$ (E 는 +1, －1을 원소로 가지는 $m\times r$ 형행렬)이다.

실례 1 $E(S^2)$ －최량초포화계획 $S(5:2^6)$ 에 행렬 $A(5:2^4)$ 를 렬첨가하면 다음의 초포화계획 $S(5:2^{10})$ 을 구성할수 있다.

$$S(5:2^6)=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 \end{pmatrix},\quad A(5:2^4)=\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 & -1 \\ -1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$S(5:2^{10})=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. 초포화계획 $S(n:2^{m+r})$에 대한 $E(S^2)$ −최량성기준아래한계

보조정리[1] 초포화계획 $X=S(n:2^m)$에 대하여 다음의 식이 성립된다.

$$E(S_X^2)=\frac{1}{m(m-1)}[\mathrm{tr}(X^{\mathrm T}XX^{\mathrm T}X)-mn^2]$$

정리 $r\ge 1$인 r개 렬로 된 행렬 A를 초포화계획 $S(n:2^m)$에 첨가하여 앞에서와 같이 구성한 초포화계획 $S(n:2^{m+r})$에 대하여 다음의 식이 성립된다.

$$LB[E(S_Z^2)]=\begin{cases}\dfrac{m(m-1)LB[E(S_X^2)]+r(r-1)E(S_A^2)+2mn}{(m+r)(m+r-1)}, & (r>n)\quad n,\ r:\text{짝수}\\[2ex] \dfrac{m(m-1)LB[E(S_X^2)]+r(r-1)LB[E(S_A^2)]+2mr}{(m+r)(m+r-1)}, & (n>r)\qquad \text{기타}\end{cases}$$

여기서 $LB[E(S^2)]$은 $E(S^2)$의 아래한계를 표시하는 기호이다.

증명 새로 구성한 초포화계획행렬 Z에 대하여 $Z^{\mathrm T}Z$는 홀수

$$Z^{\mathrm T}Z=\begin{pmatrix}X^{\mathrm T}\\ A^{\mathrm T}\end{pmatrix}(XA)=\begin{pmatrix}X^{\mathrm T}X & X^{\mathrm T}A\\ A^{\mathrm T}X & A^{\mathrm T}A\end{pmatrix}$$

이며 보조정리에 의하여 $E(S_Z^2)=\dfrac{1}{(m+r)(m+r-1)}[\mathrm{tr}(Z^{\mathrm T}ZZ^{\mathrm T}Z)-(m+r)m^2]$이다.

이때 $(Z^{\mathrm T}Z)(Z^{\mathrm T}Z)=\begin{pmatrix}X^{\mathrm T}XX^{\mathrm T}X+X^{\mathrm T}AA^{\mathrm T}X & X^{\mathrm T}XX^{\mathrm T}A+X^{\mathrm T}AA^{\mathrm T}X\\ A^{\mathrm T}XX^{\mathrm T}X+A^{\mathrm T}AA^{\mathrm T}X & A^{\mathrm T}XX^{\mathrm T}A+A^{\mathrm T}AA^{\mathrm T}A\end{pmatrix}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(Z^{\mathrm T}ZZ^{\mathrm T}Z)&=\mathrm{tr}(X^{\mathrm T}XX^{\mathrm T}X+X^{\mathrm T}AA^{\mathrm T}X)+\mathrm{tr}(A^{\mathrm T}XX^{\mathrm T}A+A^{\mathrm T}AA^{\mathrm T}A)=\\ &=\mathrm{tr}(X^{\mathrm T}XX^{\mathrm T}X)+\mathrm{tr}(X^{\mathrm T}AA^{\mathrm T}X)+\mathrm{tr}(A^{\mathrm T}XX^{\mathrm T}A)+\mathrm{tr}(A^{\mathrm T}AA^{\mathrm T}A)=\\ &=\mathrm{tr}(X^{\mathrm T}XX^{\mathrm T}X)+\mathrm{tr}(A^{\mathrm T}AA^{\mathrm T}A)+2\mathrm{tr}(A^{\mathrm T}XX^{\mathrm T}A)\end{aligned}\tag{1}$$

이다. 여기서 $\mathrm{tr}(A^{\mathrm T}XX^{\mathrm T}A)=\mathrm{tr}(X^{\mathrm T}AA^{\mathrm T}X)$이다.

한편 $E(S_X^2)=\dfrac{1}{m(m-1)}[\mathrm{tr}(X^{\mathrm T}XX^{\mathrm T}X)-mn^2]$, $E(S_A^2)=\dfrac{1}{r(r-1)}[\mathrm{tr}(A^{\mathrm T}AA^{\mathrm T}A)-rn^2]$ 이므로 이 식들과 식 (1)에 의하여 다음의 식이 얻어진다.

$$\begin{aligned}E(S_Z^2)&=\frac{1}{(m+r)(m+r-1)}[\mathrm{tr}(Z^{\mathrm T}ZZ^{\mathrm T}Z)-(m+r)n^2]=\\ &=\frac{1}{(m+r)(m+r-1)}[\mathrm{tr}(X^{\mathrm T}XX^{\mathrm T}X)+\mathrm{tr}(A^{\mathrm T}AA^{\mathrm T}A)+2\mathrm{tr}(X^{\mathrm T}AA^{\mathrm T}X)-(m+r)n^2]=\\ &=\frac{m(m-1)E(S_X^2)+mn^2}{(m+r)(m+r-1)}+\frac{r(r-1)E(S_A^2)+rn^2}{(m+r)(m+r-1)}+\frac{2\mathrm{tr}(X^{\mathrm T}AA^{\mathrm T}X)}{(m+r)(m+r-1)}-\frac{(m+r)n^2}{(m+r)(m+r-1)}= \quad (2)\\ &=\frac{m(m-1)E(S_X^2)+r(r-1)E(S_A^2)}{(m+r)(m+r-1)}+\frac{2\mathrm{tr}(X^{\mathrm T}AA^{\mathrm T}X)}{(m+r)(m+r-1)}-\frac{mn^2+rn^2-(m+r)n^2}{(m+r)(m+r-1)}=\\ &=\frac{m(m-1)E(S_X^2)+r(r-1)E(S_A^2)}{(m+r)(m+r-1)}+\frac{2\mathrm{tr}(X^{\mathrm T}AA^{\mathrm T}X)}{(m+r)(m+r-1)}\end{aligned}$$

따라서 식 (2)의 마지막식에 대하여 다음의 결과들이 성립된다.

먼저 n, r가 짝수인 경우 $n \le r$이라고 하면 A의 구성방법에 의하여 $AA^{\mathrm{T}} = I_n$이므로 $\mathrm{tr}(X^{\mathrm{T}}AA^{\mathrm{T}}X) = mn$, $\mathrm{tr}(A^{\mathrm{T}}AA^{\mathrm{T}}A) = rn$이고 따라서 $LB[E(S_Z^2)] = \dfrac{m(m-1)LB[E(S_X^2)] + rn + 2mn}{(m+r)(m+r-1)}$이 성립된다.

다음 n, r $(n > r)$가 기타인 경우 A가 $X^{\mathrm{T}}A = E$이므로 $\mathrm{tr}(X^{\mathrm{T}}AA^{\mathrm{T}}X) = mr$이고 따라서 $LB[E(S_Z^2)] = \dfrac{m(m-1)LB[E(S_X^2)] + r(r-1)LB[E(S_A^2)] + 2mr}{(m+r)(m+r-1)}$이다.(증명끝)

따름 $X = S(n:2^m)$이라고 할 때 새로운 초포화계획 $Z = (Z:a)$ (여기서 a는 n차원벡토르 $a = (\pm1, \pm1, \cdots, \pm1)^{\mathrm{T}}$)에 대하여 $LB[E(S_Z^2)] = \dfrac{(m-1)LB[E(S_X^2)] + 2}{(m+1)(m+r-1)}$가 성립된다.

증명 $r = 1$, $n > 1$이므로 $X^{\mathrm{T}}a = (\pm1, \pm1, \cdots, \pm1)^{\mathrm{T}}$인 a를 선택하여 $\mathrm{tr}(X^{\mathrm{T}}aa^{\mathrm{T}}X) = m$이 성립된다. 따라서 $LB[E(S_Z^2)] = \dfrac{m(m-1)LB[E(S_X^2)] + 2m}{(m+1)m} = \dfrac{(m-1)LB[E(S_X^2)] + 2}{m+1}$이다.(증명끝)

실례 2 실례 1에서 $E(S^2)$ −최량초포화계획 $S(5:2^6)$에 대하여 $LB[E(S_X^2)] = 2.6$이고 행렬 $A(5:2^4)$는 $LB[E(S_A^2)] = 0$인 포화계획이므로 렬행렬 A를 첨가한 $E(S^2)$ −최량초포화계획 $Z = S(5:2^{10})$의 아래한계는 $LB[E(S_Z^2)] = 4.923$이다.

참 고 문 헌

[1] V. K. Gupta et al.; J. Statist. Plann. Inference, 140, 2531, 2010.

[2] Minqian Liua et al.; J. Statist. Plann. Inference, 91, 139, 2000.

[3] V. K. Gupta et al.; J. Statist. Plann. Inference, 142, 2402, 2012.

주체106(2017)년 6월 5일 원고접수

Construction of $E(S^2)$-Optimal Supersaturated Design of adding Column to Two-Level Optimal Supersaturated Design

Kim Chol Ho, Jon Ung

We study a method of construction of $E(S^2)$-optimal supersaturated design with addition of some column to two-level optimal supersaturated designs known before.

Key word: two-level optimal supersaturated design