김일성종합대학학보 (자연과학) 주체103(2014)년 제60권 제12호
JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE) Vol. 60 No. 12 JUCHE103(2014).

절단부등식에 의한 2차계획법문제의 풀이법

리근배, 홍은정

2차계획법문제를 다음과 같이 정식화하자.

$$\min\{f(x)=x^T Cx+d^T x \mid Ax=b,\ \ x\ge 0\} \tag{1}$$

여기서 A는 $m\times n$형행렬, C는 n차대칭행렬, $b\in \boldsymbol{R}^m$, $d\in \boldsymbol{R}^n$은 기지, $x\in \boldsymbol{R}^n$은 미지이다.

C가 비부값(비정값)행렬일 때 문제 (1)을 불룩(우묵)2차계획법문제라고 부르고 C가 비부값행렬도 아니고 비정값행렬도 아닐 때 문제 (1)을 일반2차계획법문제라고 부른다.

선행연구[1]에서는 쌍대관계를 리용하는 2차계획법문제의 풀이법을, 선행연구[2]에서는 절단부등식을 리용하는 우묵2차계획법문제의 풀이법을, 선행연구[3]에서는 일반적인 불룩계획법문제의 풀이법을 제기하였다.

론문에서는 절단부등식을 리용한 일반2차계획법문제의 풀이법을 제기하였다.

문제 (1)을 풀 때 $\mathrm{rank}A=m<n$이고 허용구역 $S=\{x \mid Ax=b,\ x\ge 0\}$은 비지 않은 유계모임이며 계획의 0이 아닌 성분들의 개수는 $k=n-m$개이상(불퇴화성)이라고 가정한다.

문제를 풀 때 표 1을 리용한다.

표 1. 시초표

h	g	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	x_{k+1}	$\cdots$	x_n	y_1	y_2	$\cdots$
h_1	g_1	1				$x_{1,\ k+1}$	$\cdots$	x_{1n}			
h_2	g_2		1			$x_{2,\ k+1}$	$\cdots$	x_{2n}			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$			
h_k	g_k				1	$x_{k,\ k+1}$	$\cdots$	x_{kn}			
		$x_{k+1,\ 1}$	$x_{k+1,\ 2}$	$\cdots$	$x_{k+1,\ k}$	$x_{k+1,\ k+1}$	$\cdots$	$x_{k+1,\ n}$			

표 1에서 $x^{(i)}=(0,\ \cdots,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ x_{i,\ k+1},\ x_{i,\ k+2},\ \cdots,\ x_{in})^T$ $(i=1,\ \cdots,\ k)$들은 k개의 자유미지수 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k$들이 각각 1을 값으로 취하는 동차련립1차방정식 $Ax=0$의 풀이의 기본계이고 $x^{(k+1)}=(x_{k+1,\ 1},\ x_{k+1,\ 2},\ \cdots,\ x_{k+1,\ n})^T$는 련립1차방정식 $Ax=b$의 풀이이다.

또한 표 1의 첫 렬은 $h_i=x^{(i)^T}Cx^{(i)}$, 둘째 렬은 $g_i=(2Cx^{(k+1)}+d)^T x^{(i)}$들을 기입한 렬이고 $y_1,\ y_2,\ \cdots$들은 풀이과정에 절단부등식을 등식으로 만드는 부아닌 변수들이다.

$x^{(k+1)}\ge 0$이면 문제 (1)에서 자유미지수들에 대응되는 성분들이 모두 0일 때 $x^{(k+1)}$은 기본계획 즉 조건다면체의 정점에 대응되는 계획으로 된다.

보조정리 1 공간 $\boldsymbol{R}^k$에서 $\lambda_i\ne 0$ $(i=1,\cdots,\ k)$일 때 점 $(0,\ \cdots,\ 0,\ \lambda_i,\ 0,\ \cdots,\ 0)^T$들을 지나는 초평면의 방정식은 $\sum_{i=1}^{k}\dfrac{x_i}{\lambda_i}=1$이고 $\lambda_i>0$일 때 이 초평면으로 경계지어주고 원점을

포함하는 반공간은 $\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i}{\lambda_i}\le 1$로, 원점을 포함하지 않는 반공간은 $\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i}{\lambda_i}\ge 1$로 표시된다.

일반2차계획법문제의 기본계획 $x^{(k+1)}$에 대하여 $g_i\ge 0$ 또는 $g_i>0,\ h_i<0$이 되는 $i\ (1\le i\le k)$가 있으면 모든 i에 대하여 $\bar{\lambda}_i\le\tilde{\lambda}_i$일 때 $x^{(k+1)}$을 매달린 정점이라고 부른다. 여기서

$$\tilde{\lambda}_i=\min_{x_{k+1,\ j}>0,\ x_{ij}<0}\left\{\left|\frac{x_{k+1,\ j}}{x_{ij}}\right|\right\},\ \tilde{\lambda}_j=\frac{g_i}{-h_j}$$

보조정리 2 $x^{(k+1)}$이 일반2차계획법문제의 매달린 정점일 때 $x^{(k+1)}$이 $\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i}{\lambda_i}\le 1$을 만족시키는 최량계획이기 위해서는 임의의 $i,\ j\ (i\ne j,\ 1\le i,\ j\le k)$와 $\mu_i+\mu_j=1$로 되는 임의의 $\mu_i\ge 0,\ \mu_j\ge 0$에 대하여

$$\mu_i\lambda_i g_i+\mu_j\lambda_j g_j+\mu_i^2\lambda_i^2 h_i+\mu_j^2\lambda_j^2 h_j+2\mu_i\mu_j\lambda_i\lambda_j x^{(i)^T}Cx^{(i)}\ge 0 \qquad (2)$$

일것이 필요하고 충분하다. 여기서 $x_i\ (i=\overline{1,\ k})$들은 자유미지수들이며 λ_i는 $g_i>0,\ h_i<0,\ \bar{\lambda}_i\ge\tilde{\lambda}_i$로 되는 i에 대해서는 $\lambda_i=\tilde{\lambda}_i$이고 그밖의 i에 대해서는 $\lambda_i=\bar{\lambda}_i$이다.

일반2차계획법문제의 기본계획 $x^{(k+1)}$에 대하여 $g_i<0$이 되는 $i\ (1\le i\le k)$가 적어도 하나 있으며 $g_i<0,\ h_i>0$이면 $\bar{\lambda}_i\ge\tilde{\lambda}_i$이고 $g_i>0,\ h_i<0$이면 $\bar{\lambda}_i\le\tilde{\lambda}_i$일 때 $x^{(k+1)}$을 우물정점이라고 부른다.

$x^{(k+1)}$이 우물정점일 때 절단부등식 $\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i}{\lambda_i}\le 1$을 만족시키는 계획모임에서의 최량계획을 우물계획이라고 부른다. 여기서 $x_i\ (i=\overline{1,\ k})$들은 자유미지수들이며 λ_i는 $g_i<0,\ h_i>0,\ \bar{\lambda}_i\ge\tilde{\lambda}_i$로 되는 i와 $g_i>0,\ h_i<0,\ \bar{\lambda}_i\le\tilde{\lambda}_i$로 되는 i에 대해서는 $\lambda_i=\tilde{\lambda}_i$이고 그밖의 i에 대해서는 $\lambda_i=\bar{\lambda}_i$이다.

보조정리 3 일반2차계획법문제의 기본계획 $x^{(k+1)}$이 매달린 정점이거나 우물정점이 아니면 목적함수값이 $f(x^{(k+1)})$보다 작은 새로운 기본계획을 구할수 있다.

일반2차계획법문제에 대한 계산방식은 다음과 같다.

① 기본계획이 표 1로 주어졌다고 하자.

② 기본계획 $x^{(k+1)}$이 매달린 정점인가, 우물정점인가를 판정한다.

$x^{(k+1)}$이 매달린 정점도 아니고 우물정점도 아니면 ③으로 넘어가고 매달린 정점이거나 우물정점이면 ④로 넘어간다.

③ $g_i\ge 0\ (i=1,\cdots,\ k)$이고 $g_i>0,\ h_i<0,\ \bar{\lambda}_i>\tilde{\lambda}_i$로 되는 $i\ (1\le i\le k)$가 있거나 $g_i<0,\ h_i>0,\ \bar{\lambda}_i<\tilde{\lambda}_i$로 되는 i 혹은 $g_i>0,\ h_i<0,\ \bar{\lambda}_i>\tilde{\lambda}_i$로 되는 $i\ (1\le i\le k)$가 있다.

그런 i에 대하여 $\bar{\lambda}_i=|x_{k+1,\ j_0}/x_{ij_0}|$이 되는 x_{ij_0}을 중심수로 택하여 기본변환을 실시하고 ②에 돌아간다.

④ 절단부등식 $\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i}{\lambda_i}\le 1,\ \sum_{i=1}^{k}\frac{x_i}{\lambda_i}\ge 1$들을 만족시키는 계획모임에서의 최량계획을 구하는 2개의 문제를 푼다. 이때 절단부등식의 결수 λ_i들은 다음과 같이 만든다.

$x^{(k+1)}$ 이 매달린 정점인 경우에 λ_i 는 $g_i>0,\ h_i<0,\ \overline{\lambda}_i \le \tilde{\lambda}_i$ 로 되는 i 에 대해서는 $\lambda_i=\tilde{\lambda}_i$ 로 놓고 그밖의 i 에 대해서는 $\lambda_i=\overline{\lambda}_i$ 로 놓으며 $x^{(k+1)}$ 이 우물정점인 경우에 λ_i 는 $g_i<0,\ h_i>0,\ \overline{\lambda}_i \ge \tilde{\lambda}_i$ 로 되는 i 와 $g_i>0,\ h_i<0,\ \overline{\lambda}_i \le \tilde{\lambda}_i$ 로 되는 i 에 대해서는 $\lambda_i=\tilde{\lambda}_i$ 로 놓고 그밖의 i 에 대해서는 $\lambda_i=\overline{\lambda}_i$ 로 놓는다. 여기서 $x_i(i=1,\cdots,k)$ 들은 자유미지수들이다.

⑤ 절단부등식을 만족시키는 모든 문제들의 최량계획들가운데서 목적함수값이 제일 작은 계획이 주어진 일반2차계획법문제의 최량계획이다.

정리 우의 계산방식들에 의하여 2차계획법문제의 최량계획을 구할수 있다.

실례 다음과 같은 일반2차계획법문제의 최량계획을 구하자.

$$\min\{f(x)=x_1^2+4x_1x_2+3x_2^2-6x_3^2-2x_1-5x_2+7x_3\},\ x_j\ge 0\ (j=1,\ \cdots,\ 6)$$

$$x_1+4x_2+2x_3+x=6,\ 3x_1+2x_2+5x_3+x_5=8,\ 2x_1+x_2+3x_3+x_6=5$$

이 문제의 기본계획을 구하여 시초표를 만들면 표 2의 (ㄱ)와 같다.

표 2. 계산표

	h	g	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1
	1	−2	1			−1	−3	−2	
(ㄱ)	3	−5		1		(−4)	−2	−1	
	−6	7			1	−2	−5	−3	
						6	8	5	
	0.187	3	1	−0.25			−2.5	−1.75	
(ㄴ)	0.18	−1		−0.25		1	0.5	0.25	
	−5.25	5		−0.5	1		(−4)	−2.5	
				1.5			5	3.5	
	−0.107	1.608	1	0.062	−0.625			−0.189	
(ㄷ)	0.199	−1.546		(−0.312)	0.125	1		−0.062	
	0.421	2.218		0.125	−0.25		1	0.625	
				0.875	1.25			0.375	
	−1.167	5.332	1		−0.601	0.198		−0.199	−0.99
(ㄹ)	2.04	−0.12		1	−0.4	−3.205		0.198	(−17)
	−0.24	2.44			−0.2	0.4	1	0.6	−0.125
					1.6	2.804		0.201	1
	−1.222	5.399	1	−0.057	−0.578	0.186		−0.209	
(ㅁ)	0.007	0.005		−0.058	0.023	0.188		−0.011	1
	−0.235	2.393		−0.007	−0.198	0.023	1	0.999	
				0.058	1.577	2.616		0.212	
			1		−0.601	0.198		−0.199	0.99
(ㅂ)				1	−0.4	(−3.205)		0.198	17
					−0.2	0.4	1	0.6	0.125
					1.6	2.804		0.201	−1
	−1.088	6.532	1	0.061	−0.625			−0.187	2.04
(ㅅ)	0.2	−1.072		−0.312	0.124	1		−0.061	(−5.304)
	−0.326	2.03		0.124	−0.249		1	0.624	2.241
				0.874	1.253			0.372	13.872
	−1.222	5.398	1	−0.057	−0.578	0.383		−0.221	
(ㅈ)	0.007	0.007		0.058	−0.023	−0.186		0.011	1
	0.131	1.781		−0.006	−0.148	0.422	1	0.6	
				0.07	1.572	2.58		0.22	

(ㄱ)에서 $g_2 < 0,\ h_2 > 0,\ \bar{\lambda}_2 = \frac{6}{4} < \tilde{\lambda}_2 = \frac{5}{3}$ 이므로 (－4)를 중심수로 택하여 기본변환을 실시하면 (ㄴ)가 얻어진다.

(ㄴ)와 (ㄷ)에서도 마찬가지로 기본변환을 실시하여 (ㄹ)를 얻었다.

(ㄹ)에서 얻어진 기본계획은 우물정점이다.

그러므로 절단부등식 $\frac{0.199}{0.21}x_1 + \frac{0.199}{0.21}x_2 + \frac{0.199}{0.21}x_5 \le 1$에 $y_1 \ge 0$을 넣어 등식

$$0.99x_1 + 17x_2 + 0.125x_5 + y_1 = 1$$

을 (ㄹ)에 첨가하고 (－17)을 중심수로 하여 변환하면 (ㅁ)가 얻어진다.

(ㅁ)에서 얻어지는 기본계획 $\bar{x}^{(1)} = (0,\ 0.058,\ 1.577,\ 2.616,\ 0,\ 0.212)^T$ 는 매달린 정점이고 식 (2)를 만족시키므로 최량계획이다.

그러므로 $\bar{x}^{(1)}$ 은 (ㄹ)의 절단부등식을 만족시키는 우물계획이다.

(ㄹ)의 절단부등식을 첨가한 표는 (ㅂ)이다.

(ㅂ)의 마지막행에 －1이 있으므로 부수가 없어지도록 변환하여 (ㅈ)를 얻었다.

(ㅈ)에서 얻어진 기본계획 $\bar{x}^{(2)} = (0,\ 0.07,\ 1.572,\ 2.58,\ 0,\ 0.22)^T$ 는 식 (2)를 만족시키므로 그것은 절단부등식을 만족시키는 우물계획이다.

얻어진 우물계획 $\bar{x}^{(1)}$ 과 $\bar{x}^{(2)}$ 가운데서 목적함수값이 작은 $\bar{x}^{(1)}$ 이 주어진 일반2차계획법문제의 최량계획이고 최량값은 －4.162이다.

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보(자연과학), 53, 10, 19, 주체96(2007).

[2] 리종욱; 수학전서 26(수리계획법), **김일성**종합대학출판사, 204～302, 1991.

[3] W. Sun et al.; Optimization Theory and Method(Nonlinear Programming), Springer, 4～680, 2006.

주체103(2014)년 8월 5일 원고접수

A Solving Method of Quadratic Programming Problem by Cutting Inequality

Ri Kun Bae, Hong Un Jong

We considered the solving method of the general quadratic programming problems by cutting inequality. Here, we defined new definitions: suspended vertex, a well vertex and a well plan.

Key word: quadratic programming