김일성종합대학학보 수 학
주체107(2018)년 제64권 제2호

리만다양체에서 릿찌4분대칭계량접속의 몇가지 성질

허 달 윤

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《과학기술부문에서 첨단돌파전을 힘있게 벌려야 하겠습니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 39페지)

론문에서는 최근시기 주목되여 연구되고있는 4분대칭계량접속의 한 형태인 릿찌4분대칭계량접속의 몇가지 성질들을 새롭게 밝혔다.

선행연구[2]에서는 4분대칭계량접속의 성질과 사영불변량이 연구되였고 선행연구[3]에서는 4분대칭계량접속의 특수한 형태인 릿찌4분대칭계량접속이 정의되였으며 선행연구[4]에서는 리만다양체에서 여러가지 류형의 비대칭계량접속이 제시되였다. 선행연구[1]에서는 아인슈타인다양체가 연구되였다.

리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 릿찌4분대칭계량접속 ∇ 는 다음과 같이 정의된다.[3]

$$\nabla_X Y := \overset{\circ}{\nabla}_X Y + \pi(Y)QX - S(X,\ Y)\pi \ \ (\forall X,\ Y \in T(M)) \tag{1}$$

여기서 $\overset{\circ}{\nabla}$ 는 레비-찌비따접속이고 π 는 어떤 1-형식이며 Q 는 릿찌연산자이고 S 는 릿찌텐소르이다. 릿찌4분대칭계량접속 ∇ 의 국부표시는 다음과 같다.

$$\Gamma_{ij}^k = \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix} + \pi_j R_i^k - R_{ij}\pi^k \tag{2}$$

여기서 $\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}$ 는 레비-찌비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$ 의 접속결수이고 π_i 는 1-형식 π 의 성분이며 R_i^k 는 릿찌연산자의 행렬성분이고 R_{ij} 는 레비-찌비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$ 에 관한 릿찌텐소르이다. 그리고 릿찌4분대칭계량접속 ∇ 의 곡률텐소르의 국부표시는 다음과 같다.

$$R_{ijk}^l = K_{ijk}^l + R_j^l a_{ik} - R_i^l a_{jk} + R_{jk} a_j^l - R_{ik} a_i^l + R_{ij}^l \pi_k - R_{ijk}\pi^l \tag{3}$$

여기서 K_{ijk}^l 은 레비-찌비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$ 에 관한 곡률텐소르이고

$$\begin{aligned} a_{ik} &= \overset{\circ}{\nabla}_i \pi_k - R_i^p \pi_p \pi_k + \frac{1}{2} R_{ik}\pi_p \pi^p \\ R_{ij}^l &= \overset{\circ}{\nabla}_i R_j^l - \overset{\circ}{\nabla}_j R_i^l \\ R_{ijk} &= \overset{\circ}{\nabla}_i R_{jk} - \overset{\circ}{\nabla}_j R_{ik} \end{aligned} \tag{4}$$

이다.

정리 1 리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 릿찌4분대칭계량접속은 체적평탄이다.

증명 식 (3)으로부터 릿찌4분대칭계량접속 ∇ 에 관한 체적곡률텐소르를 구하면 다음과 같다.

$$P_{ij} = \overset{\circ}{P}_{ij} + R_j^k a_{ik} - R_i^k a_{jk} + R_{ik} a_j^k - R_{jk} a_i^k + R_{ij}^k \pi_k - R_{ijk} \pi^k$$

여기서 $\overset{\circ}{P}_{ij}$ 는 레비－찌비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$ 의 체적곡률텐소르이다. 따라서

$$\overset{\circ}{P}_{ij} = 0$$

이다. 그리고 첨수의 올리기와 내리기에 의하여

$$R_j^k a_{ik} = R_{jk} a_i^k, \ R_i^k a_{jk} = R_{ik} a_j^k$$

이고 식 (4)로부터 $R_{ij}^k \pi_k = R_{ijk} \pi^k$ 이므로 $P_{ij} = 0$ 이다. 따라서 릿찌4분대칭계량접속 ∇ 는 체적평탄이다.

정리 2 $n(>2)$ 차원련결리만다양체 (M, g) 의 임의의 점 P 에서의 단면곡률이 2차원방향 E ($T_P M$ 의 임의의 2차원부분공간)의 선택에 무관계하고

$$T_{hp}^p = 0 \tag{5}$$

이면 리만다양체 (M, g) 는 일정곡률다양체이다.

증명 식 (2)에 의하여 릿찌4분대칭계량접속 ∇ 는 리만다양체 (M, g) 에서 조건

$$\nabla_k g_{ij} = 0, \ T_{ij}^k = \pi_j R_i^k - \pi_i R_j^k \tag{6}$$

를 만족시킨다. 한편 임의의 점 P 에서의 단면곡률이 2차원방향의 선택에 무관계하면 곡률텐소르는 다음과 같다.

$$R_{ijk}^l = K(P)(\delta_j^l g_{ik} - \delta_i^l g_{jk}) \tag{7}$$

이제 릿찌4분대칭계량접속 ∇ 에 관한 제2종의 비양끼항등식

$$\nabla_h R_{ijk}^l + \nabla_i R_{jhk}^l + \nabla_j R_{hik}^l = T_{hi}^m R_{jmk}^l + T_{ij}^m R_{hmk}^l + T_{jh}^m R_{imk}^l \tag{8}$$

에 식 (7)을 넣고 식 (5)를 리용하면 다음의 식이 얻어진다.

$$\begin{aligned}
&\nabla_h K(\delta_j^l g_{ik} - \delta_i^l g_{jk}) + \nabla_i K(\delta_h^l g_{jk} - \delta_j^l g_{hk}) + \nabla_j K(\delta_i^p g_{hk} - \delta_h^l g_{ik}) = \\
&\quad = \pi_i R_h^l g_{jk} - \pi_h R_i^l g_{jk} - \delta_j^l \pi_i R_{hk} + \delta_j^l \pi_h R_{ik} + \pi_j R_i^l g_{hk} - \pi_i R_j^l g_{hk} - \delta_h^l \pi_j R_{ik} + \\
&\quad + \delta_h^l \pi_i R_{jk} + + \pi_h R_j^l g_{hk} - \pi_j R_h^l g_{ik} - \delta_i^l \pi_h R_{jk} + \delta_i^l \pi_j R_{hk}
\end{aligned}$$

이 식을 i, l 에 관하여 축약하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
&(n-2)(\nabla_j K g_{hk} - \nabla_h K g_{jk}) = \\
&\quad = \pi_i R_h^i g_{jk} - \pi_h R_i^i g_{jk} + \pi_j R_i^i g_{hk} - \pi_i R_j^i g_{hk} + (n-3)\pi_j R_{hk} - (n-3)\pi_h R_{jk}
\end{aligned}$$

이 식의 량변에 g^{jk} 를 곱하면 다음과 같다.

$$-(n-1)(n-2)\nabla_h K = 2(n-2)(R_{hi}\pi^i - \pi_h R_i^i)$$

이다. 그런데 $R_{hi}\pi^i = R_h^i \pi_i$ 이므로

$$\nabla_h K - \frac{2}{n-1}(\pi_h R_i^i - \pi_h^i) = 0$$

이다. 결국 $T_{ih}^i = 0$ 즉 $T_{hp}^p = 0$ 이면 $K = \mathrm{const}$ 이다.(증명끝)

이제 아인슈타인방정식

$$R_{jk} = f g_{jk} \tag{9}$$

(여기서 $f := R/n$ 이다.)를 만족시키는 리만다양체인 아인슈타인다양체에서 릿찌4분대칭계량접속 ∇ 를 고찰하자.

식 (9)를 리용하면 식 (2)를 다음과 같이 고쳐쓸수 있다.

$$\Gamma_{ij}^{k} = \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix} + f\pi_j \delta_i^k - f g_{ij} \pi^k \tag{10}$$

그러므로 접속 ∇ 의 곡률텐소르는

$$R_{ijk}^{l} = K_{ijk}^{l} + \delta_j^l \alpha_{ik} - \delta_i^l \alpha_{jk} + g_{ik}\alpha_j^l - g_{jk}\alpha_i^l \tag{11}$$

또는

$$R_{ijk}^{l} = K_{ijk}^{l} + \delta_j^l a_{ik} - \delta_i^l a_{jk} + g_{ik} b_j^l - g_{jk} b_i^l \tag{12}$$

이다. 여기서

$$\alpha_{ik} = \nabla_i (f\pi_k) - (f\pi_i)(f\pi_k) + \frac{1}{2} g_{ik} (f\pi_p)(f\pi^p)$$

$$a_{ik} = \nabla_i (f\pi_k) - (f\pi_i)(f\pi_k) + g_{ik} (f\pi_p)(f\pi^p)$$

$$b_{ik} = \nabla_i (f\pi_i) - (f\pi_i)(f\pi_k)$$

이다.

보조정리 1 아인슈타인다양체에서 와일공형곡률텐소르

$$C_{ijk}^{l} := R_{ijk}^{l} - \frac{1}{n-2}(\delta_i^l R_{jk} - \delta_j^l R_{ik} + g_{jk} R_i^l - g_{ik} R_j^l) - \frac{R}{(n-1)(n-2)}(\delta_j^l g_{ik} - \delta_i^l g_{jk}) \tag{13}$$

는 접속변환 $\overset{\circ}{\nabla} \to \nabla$ 에 관한 불변량이다.

증명 식 (11)을 i, l 에 관하여 축약하면 다음과 같다.

$$R_{jk} = K_{jk} - (n-2)\alpha_{jk} - g_{jk}\alpha_i^i \tag{14}$$

따라서 이 식의 량변에 g^{jk} 를 곱하고 α_i^i 를 구하면 다음과 같다.

$$\alpha_i^i = \frac{1}{2(n-1)}(K - R)$$

이 식을 식 (14)에 넣고 α_{jk} 를 구하면 다음과 같다.

$$\alpha_{jk} = \frac{1}{n-2}\left[K_{jk} - R_{jk} - \frac{g_{jk}}{2(n-1)}(K - R) \right]$$

이 식을 식 (11)에 넣고 정돈하고

$$\overset{\circ}{C}{}_{ijk}^{l} = K_{ijk}^{l} - \frac{1}{n-2}(\delta_i^l K_{jk} - \delta_j^l K_{ik} + g_{jk} K_i^l - g_{ik} K_j^l) - \frac{K}{(n-1)(n-2)}(\delta_j^l g_{ik} - \delta_i^l g_{jk}) \tag{15}$$

라는것을 리용하면

$$C_{ijk}^{l} = \overset{\circ}{C}{}_{ijk}^{l} \tag{16}$$

이다.

이 보조정리를 리용하면 다음의 정리가 쉽게 증명된다.

정리 3 아인슈타인다양체에서 릿찌4분대칭계량접속 ∇ 의 곡률텐소르가 령이면 리만계량은 일정곡률을 가진다.

증명 $R_{ijk}^l=0$ 이면 식 (13)으로부터 $C_{ijk}^l=0$ 이다. 그러므로 식 (15)로부터 $\overset{\circ}{C}{}_{ijk}^l=0$ 즉

$$K_{ijk}^l=\frac{1}{n-2}(\delta_i^l K_{jk}-\delta_j^l K_{ik}+g_{jk}K_i^l-g_{ik}K_j^l)-\frac{K}{(n-1)(n-2)}(\delta_j^l g_{ik}-\delta_i^l g_{jk})$$

이다. 그런데 $K_{jk}=(k/n)g_{jk}$ 이므로

$$K_{ijk}^l=\frac{K}{n(n-1)}(\delta_j^l g_{ik}-\delta_i^l g_{jk})$$

이다. 따라서 리만계량은 일정곡률을 가진다.

아인슈타인다양체에서 릿찌4분대칭계량접속 ∇에 대한 호상접속 $\overline{\nabla}$의 접속결수는

$$\overline{\Gamma}_{ij}^k=\begin{Bmatrix}k\\ij\end{Bmatrix}+f\pi_i\delta_j^k-fg_{ij}\pi^k$$

이고 곡률텐소르는

$$\overline{R}_{ijk}^l=K_{ijk}^l+g_{ik}b_j^l-g_{jk}b_i^l+\delta_k^l\pi_{ij} \tag{17}$$

이다. 여기서 $\pi_{ij}:=\overset{\circ}{\nabla}_i(f\pi_j)-\overset{\circ}{\nabla}_j(f\pi_i)$ 이다.

보조정리 2 $n(>3)$ 차원아인슈타인다양체 $(M,\ g)$ 에서 일반화된 와일사영곡률텐소르

$$\begin{aligned}W_{ijk}^l:=R_{ijk}^l-\frac{1}{n-1}(\delta_i^l R_{jk}-\delta_j^l R_{ik})-\\-\frac{1}{(n-1)(n-3)}[\delta_i^l(R_{jk}-R_{kj})-\delta_j^l(R_{ik}-R_{ki})+(n-1)\delta_k^l(R_{ij}-R_{ji})]\end{aligned} \tag{18}$$

는 접속변환 $\nabla\to\overline{\nabla}$에 관한 불변량이다.

증명 식 (12)와 (17)로부터

$$\overline{R}_{ijk}^l=R_{ijk}^l+\delta_i^l a_{jk}-\delta_j^l a_{ik}+\delta_k^l\pi_{ij} \tag{19}$$

가 성립한다는것이 나온다. 이 식을 $i,\ l$ 에 관하여 축약하면 다음과 같다.

$$\overline{R}_{jk}=R_{jk}+(n-1)a_{jk}-\pi_{jk} \tag{20}$$

이 식을 빗대칭화하고 $a_{jk}-a_{kj}=\pi_{jk}$ 라는것을 리용하면 이 식으로부터

$$\pi_{jk}=\frac{1}{n-3}[(\overline{R}_{jk}-\overline{R}_{kj})-(R_{jk}-R_{kj})] \tag{21}$$

가 성립한다는것이 나온다. 이 식을 식 (20)에 넣고 a_{jk} 를 구하면 다음과 같다.

$$a_{jk}=\frac{1}{n-1}\left\{\overline{R}_{jk}-R_{jk}+\frac{1}{n-3}[(\overline{R}_{jk}-\overline{R}_{kj})-(R_{jk}-R_{kj})]\right\} \tag{22}$$

따라서 식 (21)과 (22)를 (19)에 넣고

$$\begin{aligned}\overline{W}_{ijk}^l=\overline{R}_{ijk}^l-\frac{1}{n-1}(\delta_i^l\overline{R}_{jk}-\delta_j^l\overline{R}_{ik})-\\-\frac{1}{(n-1)(n-3)}[\delta_i^l(\overline{R}_{jk}-\overline{R}_{kj})-\delta_j^l(\overline{R}_{ik}-\overline{R}_{ki})+(n-1)\delta_k^l(\overline{R}_{ij}-\overline{R}_{ji})]\end{aligned} \tag{23}$$

로 놓으면

$$W_{ijk}^l=\overline{W}_{ijk}^l \tag{24}$$

이다.(증명끝)

이 보조정리를 리용하면 다음의 정리가 쉽게 증명된다.

정리 4　$n(>3)$ 차원아인슈타인다양체 $(M,\ g)$ 에서 릿찌4분대칭계량접속 ∇ 와 그것의 호상접속 $\overline{\nabla}$ 가 등곡률이기 위해서는 대응하는 릿찌텐소르들이 같을것이 필요하고 충분하다.

증명 우선 $R_{ijk}^{l} = \overline{R}_{ijk}^{l}$ 이면 $R_{jk} = \overline{R}_{jk}$ 이다.

거꾸로 $R_{jk} = \overline{R}_{jk}$ 이면 식 (18), (23) 및 (24)로부터 $R_{ijk}^{l} = \overline{R}_{ijk}^{l}$ 이다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] В. В. Трофимов и А. Т. Фоменко; Итоги науки и техники ВИНИТИ. 76, 223, 2002.

[2] Yanling Han et al.; Filomat, 27, 4, 679, 2013.

[3] R. S. Mishra et al.; Tensor, 34, 1, 1980.

[4] M. M. Tripathi; Int. Elec. J. Geom., 1, 15, 2008.

주체106(2017)년 12월 5일 원고접수

Some Properties of the Ricci Quarter-Symmetric Metric Connection on a Riemannian Manifold

Ho Tal Yun

In this paper, we studied some properties of the Ricci quarter-symmetric metric connection on a Riemannian manifold. And we newly discovered the geometrical properties of the Ricci quarter-symmetric metric connection on the Einstein manifold.

Key words: Ricci quarter-symmetry, metric connection, Einstein manifold