김일성종합대학학보 주체108(2019)년
물리학 제65권 제2호

2종경계조건 매듭그린함수법에 의한 3차원중성자동특성계산모형

장영원, 허일문, 서철

원자로로심에서의 빠른 과도과정을 정확히 예측하는것은 원자로의 설계와 과학적인 관리운영에서 중요한 의의를 가지므로 이에 대한 연구[3, 4, 6]가 활발히 진행되고있다.

현대거친그물법인 매듭그린함수법은 세밀그물법과 같은 정도의 정확도를 보장하면서도 계산시간을 훨씬 단축할수 있는 효률적인 방법으로서 원자로로심물리설계에서 널리 리용되고있다.[1, 2, 5, 6] 개발초기에는 3종경계조건 매듭그린함수법을 리용하였으나 현재는 미지수의 개수가 적고 불련속인자를 도입하여 계산속도와 정확도를 보다 높일수 있는 2종경계조건 매듭그린함수법이 주로 쓰이고있다. 그러나 비정상문제에 관하여 2종경계조건 매듭그린함수법에 대한 수치계산모형과 계산프로그람에 대하여서는 소개된것이 없다.

론문에서는 2종경계조건 매듭그린함수법에 의한 3차원중성자동특성방정식의 수치풀이모형을 고찰하였다.

1. 비정상문제에서 2종경계조건 매듭그린함수법의 기본방정식계

3차원직각자리표계에서 균질화된 매듭 k에서의 비정상중성자확산방정식과 지연중성자선행핵의 농도에 관한 방정식은 각각 다음과 같다.[5]

$$\begin{aligned}\frac{1}{v_g}\frac{\partial \Phi_g^k(x,y,z,t)}{\partial t} &= D_g^k(t)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi_g^k(x,y,z,t)-\\ &-\Sigma_{t,g}^k(t)\Phi_g^k(x,y,z,t)+\sum_{g'=1}^{G}[\chi_g(1-\beta)\nu\Sigma_{fg'}(t)+\Sigma_{g'\to g}(t)]\cdot \qquad (1)\\ &\cdot\Phi_{g'}^k(x,y,z,t)+\sum_{i=1}^{I}\chi_{ig}\lambda_i C_i^k(x,y,z,t) \qquad (g=1,\cdots,G,\quad i=1,\cdots,I,\quad k=1,\cdots,K)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial C_i^k(x,y,z,t)}{\partial t}=\beta_i\sum_{g=1}^{G}\nu\Sigma_{fg}^k(t)\Phi_g^k(x,y,z,t)-\lambda_i C_i^k(x,y,z,t)\ \ (i=1,\cdots,I,\ k=1,\cdots,K) \qquad (2)$$

우의 방정식을 매듭체적 V_k에 관해 적분하면 다음의 매듭평형방정식이 얻어진다.

$$\sum_{u=x,y,z}\frac{1}{2a_u^k}[J_{gu}^k(a_u^k,t)-J_{gu}^k(-a_u^k,t)]+\Sigma_{t,g}^k(t)\overline{\Phi}_g^k(t)=-\frac{1}{v_g}\frac{d\overline{\Phi}_g^k(t)}{dt}+\overline{Q}_g^k(t) \qquad (3)$$

$$\frac{d\overline{C}_i^k(t)}{dt}=\beta_i\sum_{g=1}^{G}\nu\Sigma_{fg}^k(t)\overline{\Phi}_g^k(t)-\lambda_i\overline{C}_i^k(t)\quad (i=1,\cdots,I) \qquad (4)$$

여기서

$$\overline{\Phi}_g^k(t)=\frac{1}{V_k}\iiint_{V_k}\Phi_g^k(x,y,z,t)dxdydz\,,\quad \overline{C}_i^k(t)=\frac{1}{V_k}\iiint_{V_k}C_i^k(x,y,z,t)dxdydz\,,$$

$$\overline{Q}_g^k(t)=\sum_{g'=1}^{G}[\chi_g(1-\beta)\nu\Sigma_{fg'}^k(t)+\Sigma_{g'\to g}(t)]\overline{\Phi}_{g'}^k(t)+\sum_{i=1}^{I}\chi_{ig}\lambda_i\overline{C}_i^k(t)$$

는 각각 매듭체적에 관하여 평균한 t 시각의 중성자묶음과 지연중성자선행핵의 농도, 중성자원천이며 $J_{gu}^k(\pm a_u^k,t)$ 는 매듭 V_k 의 량쪽 걸면에서 정미중성자흐름이다.

정상문제에서와 마찬가지로 가로적분을 실시하면 다음의 방정식이 얻어진다.

$$-D_g^k(t)\frac{\partial^2\Phi_{gu}^k(u,t)}{\partial u^2}+\Sigma_{t,g}^k(t)\Phi_{gu}^k(u,t)=-\frac{1}{v_g}\frac{\partial\Phi_{gu}^k(u,t)}{\partial t}+Q_{gu}^k(u,t)-L_{gu}^k(u,t) \tag{5}$$

$$(u=x,y,z;\ g=1,\cdots,G)$$

$$\frac{\partial C_{iu}^k(u,t)}{\partial t}=\beta_i\sum_{g=1}^{G}\nu\Sigma_{fg}^k(t)\Phi_{gu}^k(u,t)-\lambda_i C_{iu}^k(u,t)\qquad(i=1,\cdots,I) \tag{6}$$

여기서

$$\Phi_{gu}^k(u,t)=\frac{1}{4a_v^k a_w^k}\int_{-a_v^k}^{a_v^k}\int_{-a_w^k}^{a_w^k}\Phi_g^k(u,v,w,t)dvdw\,,\quad C_{iu}(u,t)=\frac{1}{4a_v^k a_w^k}\int_{-a_v^k}^{a_v^k}\int_{-a_w^k}^{a_w^k}C_i(u,v,w,t)dvdw\,,$$

$$Q_{gu}^k(u,t)=\sum_{g'=1}^{G}[\chi_g(1-\beta)\nu\Sigma_{fg'}^k(t)+\Sigma_{g'\to g}^k(t)]\Phi_{g'u}^k(u,t)+\sum_{i=1}^{I}\chi_{ig}\lambda_i C_{iu}^k(u,t)\,,$$

$$L_{gu}^k(u,t)=\frac{1}{4a_v^k a_w^k}\int_{-a_v^k}^{a_v^k}\int_{-a_w^k}^{a_w^k}D_g^k(t)\left(\frac{\partial^2}{\partial v^2}+\frac{\partial^2}{\partial w^2}\right)\Phi_g^k(u,v,w,t)dvdw$$

는 각각 가로적분중성자묶음과 선행핵농도, 가로적분중성자원천과 가로루실항이다.

정상문제에서와 같이 가로적분중성자묶음과 지연중성자선행핵농도, 원천 및 가로루실항들을 공간변수에 관하여 르쟝드르다항식으로 전개한다.

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_{gu}^k(u,t)&=\sum_{n=0}^{2}\Phi_{gun}^k(t)P_n\left(\frac{u}{a_u^k}\right)\\
C_{iu}^k(u,t)&=\sum_{n=0}^{2}C_{iun}^k(t)P_n\left(\frac{u}{a_u^k}\right)\\
Q_{gu}^k(u,t)&=\sum_{n=0}^{2}Q_{gun}^k(t)P_n\left(\frac{u}{a_u^k}\right)\\
L_{gu}^k(u,t)&=\sum_{n=0}^{2}L_{gun}^k(t)P_n\left(\frac{u}{a_u^k}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

우의 전개결수들을 원소로 하는 렬벡토르를 다음과 같이 도입한다.

$$\boldsymbol{\Phi}_{gu}^k(t)=[\Phi_{gu0}^k(t),\ \Phi_{gu1}^k(t),\ \Phi_{gu2}^k(t)]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{C}_{iu}^k(t)=[C_{iu0}^k(t),\ C_{iu1}^k(t),\ C_{iu2}^k(t)]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{Q}_{gu}^k(t)=[Q_{gu0}^k(t),\ Q_{gu1}^k(t),\ Q_{gu2}^k(t)]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{L}_{gu}^{k}(t) = [L_{gu0}^{k}(t),\ L_{gu1}^{k}(t),\ L_{gu2}^{k}(t)]^{\mathrm{T}}$$

가로적분방정식과 그에 대응하는 그린함수방정식에 관하여 정상문제에서와 류사한 처리를 진행하면 제2종경계조건에서 가로적분중성자묶음의 전개결수에 대한 방정식과 정미중성자흐름결합방정식, 지연중성자선행핵농도방정식은 다음과 같다.

$$\begin{gathered}[A_u]^k \boldsymbol{\Phi}_{gu}^{k}(t) = [G_{gu}^{uu,t}]^k \left[-\frac{1}{v_g} \frac{d\boldsymbol{\Phi}_{gu}^{k}(t)}{dt} + \boldsymbol{Q}_{gu}^{k}(t) - \boldsymbol{L}_{gu}^{k}(t) \right] - \\ -[\boldsymbol{G}_{gu}^{u+,t}]^k J_{gu}^{k}(a_u^k, t) + [\boldsymbol{G}_{gu}^{u-,t}]^k J_{gu}^{k}(-a_u^k, t)\end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}&f_{gu+}^{k,t} T_{gu}^{k,t} J_{gu}^{k-1}(a_u^{k-1}, t) - (f_{gu+}^{k,t} R_{gu}^{k,t} + f_{gu-}^{k+1,t} R_{gu}^{k+1,t}) J_{gu}^{k}(a_u^k, t) + f_{gu-}^{k+1,t} T_{gu}^{k+1,t} J_{gu}^{k+1}(a_u^{k+1}, t) = \\ &= f_{gu-}^{k+1,t} \left[G-\right]_{gu}^{k+1,t} - f_{gu+}^{k} \left[G+\right]_{gu}^{k,t}\end{aligned} \tag{9}$$

$$\frac{d\boldsymbol{C}_{iu}^{k}(t)}{dt} = \beta_i \sum_{g=1}^{G} \nu\Sigma_{fg}^{k}(t) \boldsymbol{\Phi}_{gu}^{k}(t) - \lambda_i \boldsymbol{C}_{iu}^{k}(t) \tag{10}$$

식 (8), (9)의 결수행렬요소들은 다음과 같이 정의된다.

$$[A_u]_{mn}^{k} = \int_{-a_u^k}^{a_u^k} p_m\left(\frac{u}{a_u^k}\right) p_n\left(\frac{u}{a_u^k}\right) du$$

$$[G_{gu}^{uu,t}]_{mn}^{k} = \int_{-a_u^k}^{a_u^k} p_m\left(\frac{u}{a_u^k}\right) du \int_{-a_u^k}^{a_u^k} p_n\left(\frac{u_0}{a_u^k}\right) G_{gu}^{k,t}(u,\ u_0)\, du_0$$

$$[G\pm]_{gu}^{k,t} = \sum_{n=0}^{2} \left(-\frac{1}{v_g} \frac{d\Phi_{gun}^{k}(t)}{dt} + Q_{gun}^{k} - L_{gun}^{k} \right) [G_{gu}^{u\pm}]_{n}^{k,t}$$

$$[G_{gu}^{u\pm}]_{n}^{k,t} = \int_{-a_u^k}^{a_u^k} p_n\left(\frac{u}{a_u^k}\right) G_{gu}^{k,t}(u,\ \pm a_u^k)\, du$$

여기서 $G_{gu}^{k,t}(u,\ u_0)$은 2종경계조건에서의 그린함수로서 시간에 관계된다.

식 (9)에서 반사결수와 투과률은 다음과 같다.

$$R_{gu}^{k,t} = G_{gu}^{k,t}(a_u^k,\ a_u^k)$$

$$T_{gu}^{k,t} = G_{gu}^{k,t}(a_u^k,\ -a_u^k)$$

식 (3), (8), (9), (10)은 비정상중성자확산문제에 관한 2종경계조건 매듭그린함수법의 기본방정식계를 이룬다.

2. 시간변수에 관한 리산화처리

지연중성자선행핵농도에 관한 식 (10)에서 분렬원천 $\nu\Sigma_{fg}^{k}(t)\boldsymbol{\Phi}_{gu}^{k}(t)$가 시간구간 $\Delta t = t_{j+1} - t_j$에서 선형적으로 변한다고 가정하고 이 구간에서 적분하면 다음의 식이 얻어진다.

$$\boldsymbol{C}_{iu}^{k}(t_{j+1})=\frac{\beta_i}{\lambda_i}\left\{\left[1-\frac{1-\exp(-\lambda_i\Delta t)}{\lambda_i\Delta t}\right]\sum_{g=1}^{G}(\nu\Sigma_f)_{fg}^{k}(t_{j+1})\boldsymbol{\Phi}_{gu}^{k}(t_{j+1})+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{1-\exp(-\lambda_i\Delta t)}{\lambda_i\Delta t}-\exp(-\lambda_i\Delta t)\right]\sum_{g=1}^{G}(\nu\Sigma_f)_{fg}^{k}(t_j)\boldsymbol{\Phi}_{gu}^{k}(t_j)\right\}+\boldsymbol{C}_{iu}^{k}(t_j)\exp(-\lambda_i\Delta t) \tag{11}$$

식 (8), (9)에서 시간미분에 관하여 음계차근사를 실시하면 가로적분중성자묶음의 전개결수에 관한 방정식과 정미중성자흐름결합방정식은 각각 다음과 같다.

$$\left\{[A_u]^k+\frac{1}{v_g\Delta t}[G_{gu}^{uu,\,t_{j+1}}]^k\right\}\boldsymbol{\Phi}_{gu}^{k}(t_{j+1})=[G_{gu}^{uu,\,t_{j+1}}]^k[\boldsymbol{Q}_{gu}^{k}(t_{j+1})-\boldsymbol{L}_{gu}^{k}(t_{j+1})]-$$
$$-[\boldsymbol{G}_{gu}^{u+,\,t_{j+1}}]^k J_{gu}^{k}(a_u^k,\,t_{j+1})+[\boldsymbol{G}_{gu}^{u-,\,t_{j+1}}]^k J_{gu}^{k}(-a_u^k,\,t_{j+1})+\frac{1}{v_g\Delta t}[G_{gu}^{uu,\,t_{j+1}}]^k\boldsymbol{\Phi}_{gu}^{k}(t_j) \tag{12}$$

$$f_{gu+}^{k,\,t_{j+1}}T_{gu}^{k,\,t_{j+1}}J_{gu}^{k-1}(a_u^{k-1},t_{j+1})-(f_{gu+}^{k,\,t_{j+1}}R_{gu}^{k,\,t_{j+1}}+f_{gu-}^{k+1,\,t_{j+1}}R_{gu}^{k+1,\,t_{j+1}})J_{gu}^{k}(a_u^k,t_{j+1})+$$
$$+f_{gu-}^{k+1,\,t_{j+1}}T_{gu}^{k+1,\,t_{j+1}}J_{gu}^{k+1}(a_u^{k+1},t_{j+1})=$$
$$=f_{gu-}^{k+1,\,t_{j+1}}\sum_{n=0}^{2}\left[-\frac{1}{v_g\Delta t}\Phi_{gun}^{k}(t_{j+1})+Q_{gun}^{k}(t_{j+1})-L_{gun}^{k}(t_{j+1})\right][G_{gu}^{u-}]_n^{k+1,\,t_{j+1}}+$$
$$+f_{gu-}^{k+1,\,t_{j+1}}\sum_{n=0}^{2}\frac{1}{v_g\Delta t}\Phi_{gun}^{k}(t_j)[G_{gu}^{u-}]_n^{k+1,\,t_{j+1}}-f_{gu+}^{k,\,t_{j+1}}\sum_{n=0}^{2}\frac{1}{v_g\Delta t}\Phi_{gun}^{k}(t_j)[G_{gu}^{u+}]_n^{k,\,t_{j+1}} \tag{13}$$

식 (12), (13)에서 원천항은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{Q}_{gu}^{k}(t_{j+1})=\sum_{g'=1}^{G}[\chi_g(1-\beta)\nu\Sigma_{fg'}^{k}(t_{j+1})+\Sigma_{g'\to g}^{k}(t_{j+1})]\boldsymbol{\Phi}_{g'u}^{k}(t_{j+1})+\sum_{i=1}^{I}\chi_{ig}\lambda_i\boldsymbol{C}_{iu}^{k}(t_{j+1}) \tag{14}$$

한편 매듭평형방정식은 다음과 같이 된다.

$$\sum_{u=x,y,z}\frac{1}{2a_u^k}[J_{gu}^{k}(a_u^k,\,t_{j+1})-J_{gu}^{k}(-a_u^k,\,t_{j+1})]+\left[\Sigma_{t,\,g}^{k}(t_{j+1})+\frac{1}{v_g\Delta t}\right]\overline{\Phi}_g^{k}(t_{j+1})=$$
$$=\frac{1}{v_g\Delta t}\overline{\Phi}_g^{k}(t_j)+\overline{Q}_g^{k}(t_{j+1}) \tag{15}$$

경계조건과 해당한 경계에서의 정미중성자흐름결합방정식은 다음과 같다.

① 진공경계

왼쪽: $J_{gu}^{1}(-a_u^1,\,t_{j+1})=-\frac{1}{2}\phi_{gu}^{1}(a_u^1,\,t_{j+1})$ 이므로

$$(2+R_{gu}^{1,t_{j+1}})J_{gu}^{1}(-a_u^1,\,t_{j+1})=T_{gu}^{1,\,t_{j+1}}J_{gu}^{1}(a_u^1,\,t_{j+1})-$$
$$-\sum_{n=0}^{2}\left[-\frac{1}{v_g\Delta t}\Phi_{gun}^{1}(t_{j+1})+Q_{gun}^{1}(t_{j+1})-L_{gun}^{1}(t_{j+1})\right][G_{gu}^{u-}]_n^{1,\,t_{j+1}}-\sum_{n=0}^{2}\frac{1}{v_g\Delta t}\Phi_{gun}^{1}(t_j)[G_{gu}^{u-}]_n^{1,\,t_{j+1}}$$

이다.

오른쪽: $J_{gu}^K(a_u^K, t_{j+1}) = \frac{1}{2}\phi_{gu}^K(a_u^K, t_{j+1})$ 이므로

$$(2 + R_{gu}^{K, t_{j+1}})J_{gu}^K(a_u^K, t_{j+1}) = T_{gu}^{K, t_{j+1}} J_{gu}^{K-1}(a_u^{K-1}, \ t_{j+1}) +$$
$$+\sum_{n=0}^{2}\left[-\frac{1}{v_g \Delta t}\varPhi_{gun}^K(t_{j+1}) + Q_{gun}^K(t_{j+1}) - L_{gun}^K(t_{j+1})\right]\cdot[G_{gu}^{u+}]_n^{K, t_{j+1}} +$$
$$+\sum_{n=0}^{2}\frac{1}{v_g \Delta t}\varPhi_{gun}^K(t_j)[G_{gu}^{u+}]_n^{K, t_{j+1}}$$

이다.

② 대칭경계

—매듭경계면대칭

$J_{gu}^1(-a_u^1, t_{j+1}) = 0$ 이므로

$$(f_{gu+}^{1, t_{j+1}} R_{gu}^{1, t_{j+1}} + f_{gu-}^{2, t_{j+1}} R_{gu}^{2, t_{j+1}})J_{gu}^1(a_u^1, t_{j+1}) + f_{gu-}^{2, t_{j+1}} T_{gu}^{2, t_{j+1}} J_{gu}^2(a_u^2, t_{j+1}) =$$
$$= f_{gu-}^{2, t_{j+1}}\sum_{n=0}^{2}\left[-\frac{1}{v_g \Delta t}\varPhi_{gun}^2(t_{j+1}) + Q_{gun}^2(t_{j+1}) - L_{gun}^2(t_{j+1})\right]\cdot[G_{gu}^{u-}]_n^{2, t_{j+1}} -$$
$$- f_{gu+}^{1, t_{j+1}}\sum_{n=0}^{2}\left[-\frac{1}{v_g \Delta t}\varPhi_{gun}^1(t_{j+1}) + Q_{gun}^1(t_{j+1}) - L_{gun}^1(t_{j+1})\right]\cdot[G_{gu}^{u+}]_n^{1, t_{j+1}} +$$
$$+ f_{gu-}^{2, t_{j+1}}\sum_{n=0}^{2}\frac{1}{v_g \Delta t}\varPhi_{gun}^2(t_j)[G_{gu}^{u-}]_n^{2, t_{j+1}} - f_{gu+}^{1, t_{j+1}}\sum_{n=0}^{2}\frac{1}{v_g \Delta t}\varPhi_{gun}^1(t_j)[G_{gu}^{u+}]_n^{1, t_{j+1}}$$

이다.

—매듭중간면대칭

$J_{gu}^1(-a_u^1) = -J_{gu}^1(a_u^1)$ 이므로

$$[f_{gu+}^{1, t_{j+1}}(R_{gu}^{1, t_{j+1}} + T_{gu}^{1, t_{j+1}}) + f_{gu-}^{2, t_{j+1}} R_{gu}^{2, t_{j+1}}]J_{gu}^1(a_u^1, t_{j+1}) + f_{gu-}^{2, t_{j+1}} T_{gu}^{2, t_{j+1}} J_{gu}^2(a_u^2, t_{j+1}) =$$
$$= f_{gu-}^{2, t_{j+1}}\sum_{n=0}^{2}\left[-\frac{1}{v_g \Delta t}\varPhi_{gun}^2(t_{j+1}) + Q_{gun}^2(t_{j+1}) - L_{gun}^2(t_{j+1})\right]\cdot[G_{gu}^{u-}]_n^{2, t_{j+1}} -$$
$$- f_{gu+}^{1, t_{j+1}}\sum_{n=0}^{2}\left[-\frac{1}{v_g \Delta t}\varPhi_{gun}^1(t_{j+1}) + Q_{gun}^1(t_{j+1}) - L_{gun}^1(t_{j+1})\right]\cdot[G_{gu}^{u+}]_n^{1, t_{j+1}} +$$
$$+ f_{gu-}^{2, t_{j+1}}\sum_{n=0}^{2}\frac{1}{v_g \Delta t}\varPhi_{gun}^2(t_j)[G_{gu}^{u-}]_n^{2, t_{j+1}} - f_{gu+}^{1, t_{j+1}}\sum_{n=0}^{2}\frac{1}{v_g \Delta t}\varPhi_{gun}^1(t_j)[G_{gu}^{u+}]_n^{1, t_{j+1}}$$

이다.

③ 린접매듭경계면들에서 련속성조건

$$J_{gu}^k(-a_u^k, t_{j+1}) = J_{gu}^{k-1}(a_u^{k-1}, t_{j+1})$$

이 경계조건을 리용하여 식 (11), (12), (13), (15)를 반복법으로 풀어 로심에서 중성자공간동특성을 해석할수 있다.

맺 는 말

제2종경계조건 매듭그린함수법에 의한 3차원중성자동특성방정식의 수치풀이모형을 확립하였다.

참 고 문 헌

[1] 허일문 등; 원자력, 1, 22, 과학기술출판사, 주체103(2014).
[2] R. D. Lawrence et al.; Nucl. Sci. Eng., 76, 2, 218, 1980.
[3] Yun Cai et al.; Annals of Nuclear Energy, 84, 150, 2016.
[4] A. A. Nahla; Annals of Nuclear Energy, 89, 28, 2016.
[5] 胡永明; 反应堆物理数值计算方法, 国防科技大学出版社, 195～201, 2000.
[6] 谢仲生; 核反应堆物理数值计算, 原子能出版社, 128～134, 1997.

주체107(2018)년 12월 5일 원고접수

Calculation Model of Three Dimensional Neutron Kinetics Using Nodal Green's Function Method under Neumann Boundary Condition

Jang Yong Won, *Ho Il Mun* and *So Chol*

We established the numerical solution model of three dimensional neutron dynamic characteristic equation using nodal Green's function method under Neumann-boundary condition.

Key words: nodal Green's function method, neutron dynamic characteristic equation