김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제3호

비약과 지연에 관계되는 확률지연미분방정식모형에서 교환선택권의 가격공식

김경희, 윤향금

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《과학기술의 종합적발전추세와 사회경제발전의 요구에 맞게 새로운 경계과학을 개척하고 발전시키는데 큰 힘을 넣어야 합니다.》

우리는 최근에 활발히 연구되고있는 비약과 지연에 관계되는 확률지연미분방정식모형을 고찰하고 이 모형에서 교환선택권의 가격공식을 유도하였다.

1. 선행연구정형과 문제설정

분산이 과거가격과정의 함수로 표시되는 확률지연미분방정식(Stochastic Delayed Differential Equation, 간단히 SDDE로 표시)모형이 제기되고 이 모형밑에서 여러 선택권들의 가격공식들이 유도되였다.[1, 2]

선행연구[2]에서 위험자산가격과정이 SDDE에 따르는 경우 마감실시구매선택권에 대한 블랙－숄즈공식을 유도하였다. 선행연구[1]에서는 지연에 관계되는 분산을 가진 2개의 자산들에 대한 교환선택권의 가격공식을 유도하였다. 한편 금융시장에서 위험자산의 가격과정은 2개의 우연과정 즉 작은 가격변동은 위너과정에 의하여 생성되고 드물게 일어나는 가격에서의 큰 비약들은 뾰쏭과정에 의하여 생성된다는것을 알수 있다. 직관적으로 이 두 우연과정들은 마치 기본정보가 우연적으로 그리고 드물게 도착하는 효률적인 시장을 반영하고있다.[3－6]

위험자산수익에 대한 경험적연구는 불련속성 또는 비약들이 금융자산가격의 본질적인 성분이라는것을 보여준다. 뾰쏭비약을 가진 비약확산과정을 제기하고 이 환경에서 선택권의 가격문제를 고찰하였는데 화페교환률이 비약확산과정으로 생성되는 경우[3]와 레비비약을 가지는 경우[4]에 각각 유럽식화페선택권에 대한 명백한 가격공식을 유도하였다. 그러나 비약과 지연에 관계되는 확률지연미분방정식모형에서 2개의 자산에 대한 교환선택권의 가격공식은 유도하지 못하였다.

2. 비약과 지연에 관계되는 확률지연미분방정식모형

금융시장안에 하나의 무위험자산과 2개의 위험자산이 있다고 가정하자. 모형은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
&dB(t)=rB(t)dt,\ B(0)=1\\
&dS_i(t)=\mu_i S_i(t-a_i)S_i(t)dt+g(S_i(t-b_i))S_i(t)dW_i(t)+(e^{\xi_i(t)}-1)S_i(t)d\overline{N}(t) \qquad (1)\\
&S_i(t)=\varphi_i(t),\ t\in[-L_i,\ 0]\ \ (i=1,\ 2)
\end{aligned}
$$

여기서 $B(t),\ S_i(t)\ (i=1,\ 2)$는 무위험자산과 두 위험자산의 t시각의 가격을 나타내며 r는

무위험리윤률, μ_i 는 경향파라메터, a_i, b_i 들은 지연파라메터들이고 $L_i = \max\{a_i,\ b_i\}$ 이다. $g_i(\cdot): \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ 는 련속함수이고 위험자산의 가격과정 $S_1(t)$, $S_2(t)$ 는 확률공간 $(\Omega,\ \Im,\ \boldsymbol{P})$ 우에서 정의되는데 여기서 $\Im = \{\Im_t^1,\ \Im_t^2\}_{t\ge0}$, $\{\Im_t^i\}_{t\ge0}$ $(i=1,\ 2)$ 는 $\sigma-$모임벌들이다.

또한 $S(t-a_i)$ 와 $S(t-b_i)$ 는 지연된 위험자산가격들을 나타낸다. 우연과정 $W_i(t)$ 들은 $\{\Im_t^i\}_{t\ge0}$ $(i=1,\ 2)$ $-$적합인 표준위너과정들이고 $dW_1(t)W_2(t)=\rho dt$ 이며 여기서 ρ 는 상관결수이다. 또한 $N(t)$ 는 파라메터 λ 를 가진 뽜쏭과정이고 $\overline{N}(t)=N(t)-EN(t)$, $\xi_i(t)$ $(i=1,\ 2)$ 들은 t 시각의 비약크기의 퍼센트들로서 t 에 관하여 독립이고 동일분포하며 분포는 $(e^{\xi_i(t)}-1)\sim \mathrm{N}(\mu_i,\ \delta_i^2)$ 에 따른다. 방정식 (1)을 비약을 가진 확률지연미분방정식(Stochastic Delayed Differential Equation with Jumps, 간단히 SDDEJ로 표시)이라고 부른다. 길싸노브정리로부터 위험중성측도 Q가 있어서 이 측도밑에서 모형 (1)의 위험자산과정은

$$\begin{aligned} &dS_i(t)=S_i(t)\{rdt+g_i(S_i(t-b_i))d\widetilde{W}_i(t)+(e^{\xi_i(t)}-1)d\overline{N}(t)\}\\ &S_i(t)=\varphi_i(t),\ t\in[-L_i,\ 0]\ \ (i=1,\ 2)\end{aligned} \tag{2}$$

로 표시된다. 여기서 $\widetilde{W}_i(t)$ 는 새로운 위험중성측도 Q에 관한 표준위너과정들이다. 측도변환을 실시하는 과정을 통하여 식 (2)에는 오직 분산에만 지연항이 남아있게 된다. 그러나 경향성분안의 지연항은 여전히 우연청구의 가측성에 영향을 주게 된다는것을 강조한다.

$l_i=\min\{a_i,\ b_i\}$ 로 정의하고 $\Im_0-$가측인 초기값과정 $\varphi_i=\varphi_i(u)\in C([-L_i,\ 0],\ (0,\ \infty))$ 가 주어졌다고 가정한다. 그러면 선행연구[2, 5]로부터 방정식 (2)의 풀이는

$$S_i(t)=\varphi_i(0)\exp\left\{(r-\lambda\mu_i)t-\frac{1}{2}\int_0^t g_i^2(S_i(u-b_i))du+\int_0^t g_i(S_i(u-b_i))d\widetilde{W}_i(u)+\sum_{j=1}^{N(t)}\xi_i^j\right\},\ t\in[0,\ l_i]$$

로 표시된다. ξ_i^j 는 시간구간 i째 자산의 $[0,\ t]$에 있게 되는 j번째 비약에 대한 가격 대 비약의 비이다. 구간 $[0,\ l_i]$ 에서의 값이 주어지면 류사하게 $t\in[l_i,\ 2l_i]$ 에 대한 $S_i(t)$ 의 값들이 명백히 계산될수 있으므로 모든 $t\in[0,\ T]$ 에 대하여 한걸음 한걸음씩 유일한 풀이 $S_i(t)$ 를 계산할수 있다. $\varphi=\varphi(0)\ge0$ (거의)이면 분명히 모든 $t\in[0,\ T]$ 에 대하여 $S(t)\ge0$ (거의)이 성립한다.

론문에서는 모형 (2)에서 교환선택권의 가격공식을 유도함으로써 비약과 상수분산을 가진 확률지연미분방정식모형에서의 교환선택권의 가격공식을 일반화한다.

3. 기 본 결 과

보조정리 X, Y가 확률공간$(\Omega,\ \Im,\ \boldsymbol{P})$ 우에서 정의된 우연량들이고 $\mathcal{G}$가 $\Im$의 부분$\sigma-$모임벌이라고 하자. Y가 $\sigma(\mathcal{G},\ \sigma(X))$ 와 독립이고 $f(x,\ y)$ 가 두변수함수, $g(x):=Ef(x,\ Y)$ 라고 가정하자. 그러면 $E[f(X,\ Y)\,|\,\mathcal{G}]=E[g(X)\,|\,\mathcal{G}]$ 이다.

증명 $\mathcal{G}\subset\sigma(\mathcal{G},\ \sigma(X))$ 이므로 조건부기대값의 성질로부터

$$E[f(X,\ Y)\,|\,\mathcal{G}]=E[E[f(X,\ Y)\sigma(\mathcal{G},\ \sigma(X))]\,|\,\mathcal{G}]$$

이다. X 가 $\sigma(\mathcal{G},\ \sigma(X))-$가측이고 Y 가 $\sigma(\mathcal{G},\ \sigma(X))$ 와 독립이므로 선행연구[6]로부터 $g(x):=E[f(x,\ Y)]$ 라고 가정하면

$$E[f(X,\ Y)\,|\,\sigma(\mathcal{G},\ \sigma(X))\,]=g(X)$$

이다. 따라서 $E[f(X,\ Y)\,|\,\mathcal{G}]=E[g(X)\,|\,\mathcal{G}]$ 이다.(증명끝)

정리 비약과 지연에 관계되는 분산을 가진 위험자산모형 (1)에서 교환선택권의 가격을 $V(S_1,\ S_2,\ t)$ 로 표시하자. 그러면 $t\in[T-l,\ T]$ 일 때 교환선택권의 가격은

$$V(S_1(t),\ S_2(t),\ t)=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n(T-t)^n}{n!}e^{-\lambda(T-t)}\varepsilon_n\left\{S_1(t)\exp\left(-\lambda(\beta+\mu_1-\mu_2)(T-t)+\sum_{j=1}^{n}(\xi_1^j-\xi_2^j)\right)\Phi(d_+)-S_2(t)\Phi(d_-)\right\}$$

로 얻어진다. 여기서 $l=\min\{a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2\}$ 이고 $\Phi(\cdot)$ 는 표준정규분포의 분포함수이며

$$d_\pm=\frac{\ln\frac{S_1(t)}{S_2(t)}+\sum_{j=1}^{n}(\xi_1^j-\xi_2^j)-\lambda(\beta+\mu_1-\mu_2)(T-t)}{\sqrt{\int_t^T\sigma_2^2(S(u-b))du}}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\int_t^T\sigma_2^2(S(u-b))du}$$

이고 $\sigma_z^2=\sigma_1^2-2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2$, $\beta:=E[(\xi_1^j-\xi_2^j)e^{\xi_2^j}]$ 이고 $\xi_i^j\ \ (i=1,\ 2)$ 는 시간구간 $[t,\ T]$ 에 있게 되는 j 번째 비약에 대한 비약 대 가격의 비이다. ε_n 은 $\sum_{j=1}^{n}\xi_i^j$ 의 분포에 관한 수학적기대값을 의미한다.

주의 위험자산과정이 비약이 없는 확률지연미분방정식으로 모형화되는 경우 즉 방정식

$$\begin{aligned}&dB(t)=rB(t)dt,\ B(0)=1\\&dS_i(t)=\mu_iS_i(t-a_i)S_i(t)dt+g(S_i(t-b_i))S_i(t)dW_i(t)\qquad(*)\\&S_i(t)=\varphi_i(t),\ t\in[-L_i,\ 0]\ \ (i=1,\ 2)\end{aligned}$$

으로 표시되는 경우의 교환선택권의 가격은 정리의 결과에서 뽜쏭과정에 대한 합렬항

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda(T-t)^n}{n!}e^{-\lambda(T-t)},\ \ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda l^n}{n!}e^{-\lambda l}$$

을 삭제하고 비약항

$$-\lambda(\beta+\mu_1-\mu_2)(T-t)+\sum_{j=1}^{n}(\xi_1^j-\xi_2^j)=0\ ,\ \ -\lambda(\beta+\mu_1-\mu_2)l+\sum_{j=1}^{n}(\xi_1^j-\xi_2^j)=0$$

으로 놓으면 얻어진다. 이것이 모형 (*)에 대하여 교환선택권의 가격공식을 유도한 선행연구[1]의 결과이다.

참 고 문 헌

[1] L. Lin et al.; http://doi.org/10.1016/j.physica, 12.031, 2017.
[2] M. Arriojas et al.; Stoch. Anal. Appl., 25, 2, 471, 2007.
[3] C. M. Ahn et al.; The Journal of Futures Markets, 27, 7, 669, 2007.

[4] C. H. Ma; Journal of Mathematical Economics, 42, 2, 131, 2006.
[5] W. L. Xiao et al.; Economic Modelling, 27, 935, 2010.
[6] S. Shreve; Stochastic Calculus and Finance, Carnegie Mellon University, 279～348, 1997.

주체109(2020)년 3월 15일 원고접수

Pricing Formula for Exchange Option in Stochastic Delay Differential Equation Model with Jumps and Volatility Depended on Delays

Kim Kyong Hui, Yun Hyang Gum

In previous researches the pricing formula for European call option in Black –Scholes model with jumps and ones for European option and exchange option in stochastic delay differential equation model with volatility depended on delays were derived respectively. In this paper we derive a pricing formula for exchange option in a general stochastic delay differential equation model with jumps and volatility depended on delays of price processes by combining above mentioned two models.

Keywords: exchange option, stochastic delay differential equation