김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체103(2014)년 제60권 제9호 Vol. 60 No. 9 JUCHE103(2014).

비약잡음을 가진 프락탈블랙－숄즈모형에서의 효률적인 장벽화

김경희, 정은아

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 지적하시였다.

《인민경제의 규모가 커지고 현대적인 과학기술수단들이 경제관리에 널리 리용되고있는 현실은 사회주의경제를 과학적인 방법론에 기초하여 관리운영할것을 요구하고있습니다.》(《**김정일**선집》 제10권 증보판 485페지)

론문에서는 비약잡음이 있는 프락탈블랙－숄즈모형에서 유럽식선택권에 대한 효률적인 장벽화를 연구하였다.

최근의 연구결과들은 자산수익에 대한 경험적연구를 통하여 금융자산가격의 동태에서 비약성분이 본질적성분이라는것과 련속잡음은 표준블랙－숄즈모형으로서는 더는 모형화할수 없는 비정규성, 비독립성, 비선형성을 띠고있다는것을 명백히 보여주고있다.

프락탈브라운운동이 자기상사성, 장기기억성과 같은 중요한 두가지 성질을 가지고있는것으로 하여 최근에 자산수익과정을 모형화하는데 적극 리용되여왔다.

우연청구를 접수하는 임의의 투자가는 완전장벽화에 의하여 위험을 제거할수도 있지만 그것이 종종 아주 비싸기때문에 적은 자본을 요구하면서도 위험을 줄이는 부분장벽화(정량적인 장벽화 또는 효률적인 장벽화)를 요구한다.

유럽식구매선택권에 대한 효률적인 장벽화는 시간이 변하는 경향과 변덕결수를 가진 표준블랙－숄즈모형 $dX_t = X_t(\sigma(t)dW_t + m(t)dt)$와 상수경향과 변덕결수를 가진 이또형프락탈블랙－숄즈모형 $dX_t = X_t(\sigma B_H(t) + mdt)$에서 고찰되고 비약잡음이 있는 프락탈블랙－숄즈모형에서는 고찰되지 못하였다.

론문에서는 비약잡음까지도 고려한 일반적인 프락탈블랙－숄즈모형에서 유럽식구매선택권에 대한 효률적인 장벽화에 대하여 고찰하였다.

상수경향 m과 변덕 σ를 가진 표준블랙－숄즈모형에서 할인된 가격과정은 초기값 $X_0 = x_0$을 가진 기하학적브라운운동으로 주어지는데[1, 2] 다음과 같이 표시된다.

$$dX_t = X_t(mdt + \sigma dW_t) \tag{1}$$

유럽식구매선택권 $H = (X_T - K)^+$는 만일 어떤 투자가가 초기자본

$$U_0 = \mathrm{E}^*[H] = x_0\Phi(d_+) - K\Phi(d_-)$$

를 제공한다면 완전히 장벽화된다. 여기서 $d_\pm(x_0,\ k) = \dfrac{\ln x_0 - \ln K}{\sigma\sqrt{T}} \pm \dfrac{1}{2}\sigma\sqrt{T}$.

이 경우에 단기하강위험 $\mathrm{E}[l((H - V_T)^+)]$를 최소로 하는 효률적인 장벽화는 본질적으로 수정된 청구 $\tilde{H} = \tilde{\varphi}H$에 대한 완전장벽화와 동등하다.

따라서 효률적인 장벽화는 방정식

$$V_t = \mathrm{E}^*[\tilde{\varphi}H \mid \Im_t] = V_0 + \int_0^t \xi_s dX_s, \quad \forall t \in [0,\ T] \tag{2}$$

를 만족시키면서 제한조건 $V_0 \le \tilde{V}_0 < U_0$ 밑에서 최량화문제

$$\mathrm{E}[l((H - V_T)^+)] = \mathrm{E}\left[l\left(\left(H - V_0 - \int_0^T \xi_s dX_s \right)^+ \right) \right] \Rightarrow \min \tag{3}$$

의 풀이로 되는 $(V_0,\ \xi_s)$를 탐색하는 문제로 된다.[1]

시간에 따라 변하는 결수 $m(t),\ \sigma(t)$를 가지는 블랙－숄즈모형

$$dX_t = X_t(m(t)dt + \sigma(t)dW_t) \tag{4}$$

에서 여러선택권에 대한 가격공식이 유도되였다.

이또형프락탈블랙－숄즈모형에서 기초적인 할인된 가격과정은

$$dX_t = X_t(mdt + \sigma B_H(t)) \tag{5}$$

를 만족시킨다. 여기서 $B_H(t)$는 $1/2 < H < 1$의 Hurst파라메터를 가진 프락탈브라운운동이다.

프락탈블랙－숄즈모형 (5)에서의 여러선택권의 가격화는 선행연구[4－6]에서, 비약잡음을 가진 프락탈블랙－숄즈모형

$$dX(t) = X(t)(mdt + \sigma\, dB_H(t) + (e^{\xi} - 1)dN(t)) \tag{6}$$

에서의 화폐선택권가격화는 선행연구[3]에서 고찰되였다. 여기서 $B_H(t),\ N(t)$는 각각 프락탈브라운운동, 파라메터 λ를 가진 뽜쏭과정이며 ξ는 t시각의 비약크기로서 독립이고 동일분포하는데 분포는 $(e^{\xi} - 1) \sim N(\mu_{\xi},\ \delta_{\xi}^2)$이다. 세가지 우연성원천들인 프락탈브라운운동 $B_H(t)$, 뽜쏭과정 $N(t)$, 비약크기 $e^{\xi} - 1$들은 서로 독립이라고 가정한다.

론문에서는 비약잡음을 가진 프락탈블랙－숄즈모형 (6)에서 유럽식구매선택권에 대한 효률적인 장벽화를 고찰하여 모형 (5)에 대한 결과를 모형 (6)에로 확장하였다.

먼저 비약잡음을 가진 프락탈블랙－숄즈모형에서의 선택권의 가격공식에 대하여 고찰하자.

기초자산의 할인된 가격과정이 방정식 (6)에 의하여 서술된다고 하자.

$\theta = \dfrac{m}{\sigma},\ Z_t = \exp\left\{ -\theta B_H(t) - \dfrac{\theta^{2H}}{2} \right\},\ \dfrac{d\hat{P}_H}{dP_H} = \rho^* = Z_T$로 정의하면 $\hat{B}_H(t) = B_H(t) + \theta t^{2H}$은 프락탈브라운운동이고 X_t는 위험중성측도 $\hat{p}$ 밑에서의 준－마르팅게일이다.

모형 (6)의 풀이는 다음과 같다.

$$X_T = X_t \exp\left\{ -\frac{1}{2}\sigma^2(T^{2H} - t^{2H}) + \sigma(\hat{B}_H(T) - \hat{B}_H(t)) + \sum_{j=1}^{N(T-t)} \xi_j - \lambda\mu_{\xi}(T - t) \right\} \tag{7}$$

보조정리 1　f가 $\mathrm{E}[f(B_H(T))] < \infty$인 함수라고 하면 임의의 $t < T$에 대하여

$$\tilde{\mathrm{E}}_t[f(B_H(T))] = \int_R \frac{1}{\sqrt{2\pi(T^{2H} - t^{2H})}} \exp\left(-\frac{(x - B_H(t))^2}{2(T^{2H} - t^{2H})} \right) f(x)dx$$

가 성립된다.

이제 $\theta \in \boldsymbol{R}$ 라고 하자.

과정 $B_H^*(t) = B_H(t) + \theta t^{2H} = B_H(t) + \int_0^t 2H\theta\tau^{2H-1}d\tau$, $0 \le t \le T$ 는 프락탈길싸노브정리에 의하여 새로운 측도 μ^* 밑에서 프락탈브라운운동으로 된다. 여기서 측도 μ^* 은 $\dfrac{d\mu^*}{d\mu} = Z^*(t) = \exp\left(-\theta B_H(t) - \dfrac{\theta^2}{2}t^{2H}\right)$ 으로 정의된다.

측도 μ^* 에 관한 준－조건부기대값을 $\tilde{\mathrm{E}}_t^*[\cdot]$ 이라고 하면 다음의 결과가 성립된다.

보조정리 2 f 가 $\mathrm{E}[f(B_H(T))] < \infty$ 인 함수라고 하자.

이때 매 $t < T$ 에 대하여 $\tilde{\mathrm{E}}_t^*[f(B_H(T))] = \dfrac{1}{Z^*(t)}\tilde{\mathrm{E}}_t[f(B_H(T))Z^*(T)]$ 이다.

$\hat{P}_H$ 에 관한 준－조건부기대값을 $\tilde{\mathrm{E}}_t[\cdot]$ 으로 표시하자.

보조정리 3 모형 (6)에서 유계인 F_T^H －가측인 청구 $H \in L^2(\mu)$ 의 매 시각 $t \in [0,\ T]$ 에서의 가격은 $V_t = \tilde{\mathrm{E}}_t[H]$ 로 주어진다.

보조정리 4[3] 모형 (6)에서 유럽식구매선택권의 매 시각 $t \in [0,\ T]$ 에서의 가격은

$$F(t,\ X_t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n (T-t)^n}{n!} e^{-\lambda(T-t)} \left\{ X_t \exp\left(-\lambda\mu_\xi(T-t) + \sum_{j=1}^{n} \xi_j \right) \Phi(d_+) - K\Phi(d_-) \right\}$$

로 주어진다. 여기서 $d_\pm = \dfrac{\ln(X_t/K) + \sum_{j=1}^{n}\xi_j - \lambda\mu_\xi(T-t)}{\sigma\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}} \pm \dfrac{1}{2}\sigma\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}$ 이다.

손실함수 $l(x) = x^p / p$ 을 고찰하자.

정리 1 모형 (6)에서 유럽식구매선택권에 대한 효률적인 장벽전략 $(V,\ \xi)$ 는 다음과 같다.

$V_t = F_p(t,\ X_t)$

$$F_p(t,\ x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n (T-t)^n}{n!} e^{-\lambda(T-t)} \left\{ x \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j - \lambda\mu_\xi(T-t) \right) \Phi(d_+(x,\ \ L)) - K\Phi(d_-(x,\ \ L)) \right\} -$$

$$-(L-K)\left(\frac{L}{x}\right)^{\frac{\theta}{\sigma(p-1)}} \cdot \exp\left\{ \frac{1}{2}\frac{\sigma\theta}{(p-1)}(T^{2H} - t^{2H}) - \frac{\theta}{\sigma(p-1)}\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_j - \lambda\mu_\xi(T-t) \right) \right\} \cdot$$

$$\cdot \Phi(d_-(x,\ \ L) - \theta\sqrt{T^{2H} - t^{2H}} / (p-1))$$

$$\xi_p(t,\ x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n (T-t)^n}{n!} e^{-\lambda(T-t)} \left\{ \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j - \lambda\mu_\xi(T-t) \right) \Phi(d_+(x,\ \ L)) \right\} +$$

$$+\frac{\theta}{\sigma(p-1)} \frac{L^{\frac{\theta}{\sigma(p-1)}}(L-K)}{x^{\frac{\theta}{\sigma(p-1)}+1}} \cdot \exp\left\{ \frac{1}{2}\frac{\sigma\theta}{(p-1)}(T^{2H} - t^{2H}) - \frac{\theta}{\sigma(p-1)}\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_j - \lambda\mu_\xi(T-t) \right) \right\} \cdot$$

$$\cdot \Phi(d_-(x,\ \ L) - \theta\sqrt{T^{2H} - t^{2H}} / (p-1))$$

여기서 $d_{\pm}(x,\ L)=\left(\ln(x/L)+\sum_{j=1}^{n}\xi_j-\lambda\mu_\xi(T-t)\right)\Big/(\sigma\sqrt{T^{2H}-t^{2H}})\pm\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T^{2H}-t^{2H}}$ 이다.

증명 $$\rho^*=Z_t\exp\{-\theta^2(T^{2H}-t^{2H})/2-\theta(\hat{B}_H(T)-\hat{B}_H(t))\}$$

$$X_T=X_t\exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2(T^{2H}-t^{2H})+\sigma(\hat{B}_H(T)-\hat{B}_H(t))+\sum_{j=1}^{N(T-t)}\xi_j-\lambda\mu_\xi(T-t)\right\}$$

유럽식구매선택권 $H=(X_T-K)^+$ 에 대하여

$$\tilde{\varphi}_p H=(X_T-K)^+-[C^{1/(p-1)}(\rho^*)^{1/(p-1)}\wedge(X_T-K)^+],$$

$$V_t=\tilde{\mathrm{E}}_{\hat{P}_H}[\tilde{\varphi}_p H\,|\,\mathbf{F}_t^H]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n(T-t)^n}{n!}e^{-\lambda(t-s)}\tilde{\mathrm{E}}_{\hat{P}_H}\{[(X_{nT}-K)-C^{1/(p-1)}(\rho^*)^{1/(p-1)}]I\{\hat{B}_H(T)\ge E\}\,|\,\mathbf{F}_t^H\}\tag{8}$$

이다. 여기서 $X_{nT}=X_t\exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2(T^{2H}-t^{2H})+\sigma(\hat{B}_H(T)-\hat{B}_H(t))+\sum_{j=1}^{n}\xi_j-\lambda\mu_\xi(T-t)\right\}$ 이고 E 는 2개의 함수를

$$y_1(x)=C^{\frac{1}{p-1}}Z_t^{\frac{1}{p-1}}\exp\left\{-\frac{\theta^2}{2(p-1)}(T^{2H}-t^{2H})-\frac{\theta}{p-1}(x-\hat{B}_H(t))\right\},$$

$$y_2(x)=X_t\exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2(T^{2H}-t^{2H})+\sigma(x-\hat{B}_H(t))+\sum_{j=1}^{n}\xi_j-\lambda\mu_\xi(T-t)\right\}-K$$

라고 정의할 때 $y_1=y_2$ 를 만족시키는 유일한 풀이이다.

사실 $x\ge E$ 이면

$$(X_{nT}-K)^+-[C^{1/(p-1)}(\rho^*)^{1/(p-1)}\wedge(X_{nT}-K)^+]=(X_{nT}-K)-C^{1/(p-1)}(\rho^*)^{1/(p-1)}$$

이고 $x<E$ 이면 $\tilde{\varphi}_p H=0$ 이므로 다음과 같이 표시된다.

$$(X_{nT}-K)^+-[C^{1/(p-1)}(\rho^*)^{1/(p-1)}\wedge(X_{nT}-K)^+]=[(X_{nT}-K)-C^{1/(p-1)}(\rho^*)^{1/(p-1)}]I\{\hat{B}_H(T)\ge E\}\tag{9}$$

보조정리 1로부터

$$\begin{aligned}\tilde{\mathrm{E}}_{\hat{P}_H}[I\{\hat{B}_H(T)\ge E\}\,|\,\mathbf{F}_t^H]&=\frac{1}{\sqrt{2\pi(T^{2H}-t^{2H})}}\int_E^{\infty}\exp\left(-\frac{(x-\hat{B}_H(t))^2}{2(T^{2H}-t^{2H})}\right)dx=\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{E-\hat{B}_H(t)}{\sqrt{T^{2H}-t^{2H}}}}^{\infty}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy=\Phi\left(\frac{\hat{B}_H(t)-E}{\sqrt{T^{2H}-t^{2H}}}\right)=\Phi(d_-(x,\ \ L))\end{aligned}\tag{10}$$

이다. 여기서 $L=X_t\exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2(T^{2H}-t^{2H})+\sigma(E-\hat{B}_H(t))+\sum_{j=1}^{n}\xi_j-\lambda\mu_\xi(T-t)\right\}$ 이다.

다음 $\tilde{\mathrm{E}}_{\hat{P}_H}[X_{nT}I\{\hat{B}_H(T)>E\}\,|\,\mathbf{F}_t^H]$ 를 평가하자.

$B_H^*(t)=\hat{B}_H(t)-\sigma t^{2H}$ 으로 놓으면 프락탈길싸노브정리에 의하여 $B_H^*(t)$ 는 프락탈브라운

운동으로 되는 확률측도 P_H^* 이 존재한다.

사실 확률측도 P_H^* 은 $\frac{dP_H^*}{d\hat{P}_H}=\exp\left\{\sigma\, d\hat{B}_H(t)-\frac{1}{2}\sigma^2 t^{2H}\right\}=Z^*(t)$ 로 정의된다.

보조정리 2로부터

$$\widetilde{\mathrm{E}}_{\hat{P}_H}[X_{nT}I\{\hat{B}_H(T)>E\}\,|\,\mathbf{F}_t^H]=$$

$$=X_t\exp\left((-\lambda\mu_\xi)(T-t)+\sum_{j=1}^n\xi_j\right)\widetilde{\mathrm{E}}_{\hat{P}_H}[I\{\hat{B}_H^*(T)>E_+\}\,|\,\mathbf{F}_t^H]= \tag{11}$$

$$=X_t\exp\left((-\lambda\mu_\xi)T+\sum_{j=1}^n\xi_j\right)\Phi(d_+(x,\ L))$$

여기서 $E_+=E-\sigma T^{2H}$, $d_+(x,\ L)=\frac{B_H^*(t)-E_+}{\sqrt{T^{2H}-t^{2H}}}=d_-(x,\ L)+\sigma(T^{2H}-t^{2H})$ 이다.

$\rho^*=Z_t\exp\{-\theta^2(T^{2H}-t^{2H})/2-\theta(\hat{B}_H(T)-\hat{B}_H(t))\}$ 이므로 다음과 같다.

$$\widetilde{\mathrm{E}}_{\hat{\hat{P}}_H}[C^{1/(p-1)}(\rho^*)^{1/(p-1)}I\{\hat{B}_H(T)\ge E\}\,|\,\mathbf{F}_t^H]=\frac{1}{\sqrt{2\pi(T^{2H}-t^{2H})}}\int_E^\infty\exp\left(-\frac{(x-\hat{B}_H(t))^2}{2(T^{2H}-t^{2H})}\right)y_1(x)dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{E-\hat{B}_H(t)}{\sqrt{T^{2H}-t^{2H}}}}^\infty\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)y_1(\hat{B}_H(t)+u\sqrt{T^{2H}-t^{2H}})du=$$

$$=C^{1/(p-1)}Z_t^{1/(p-1)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{E-\hat{B}_H(t)}{\sqrt{T^{2H}-t^{2H}}}}^\infty\exp\left(-\frac{u^2}{2}-\frac{\theta^2}{2(p-1)}(T^{2H}-t^{2H})-\frac{\theta}{(p-1)}u\sqrt{T^{2H}-t^{2H}}\right)du=$$

$$=C^{1/(p-1)}Z_t^{1/(p-1)}\exp\left\{-\frac{\theta^2(p-2)}{2(p-1)^2}(T^{2H}-t^{2H})\right\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{E-\hat{B}_H(t)}{\sqrt{T^{2H}-t^{2H}}}}^\infty\exp\left(-\frac{1}{2}\left(u+\frac{\theta\sqrt{T^{2H}-t^{2H}}}{p-1}\right)^2\right)du=$$

$$=C^{1/(p-1)}Z_t^{1/(p-1)}\exp\left\{-\frac{\theta^2(p-2)}{2(p-1)^2}(T^{2H}-t^{2H})\right\}\Phi\left(\frac{E-\hat{B}_H(t)}{\sqrt{T^{2H}-t^{2H}}}-\frac{\theta\sqrt{T^{2H}-t^{2H}}}{p-1}\right)=$$

$$=C^{1/(p-1)}Z_t^{1/(p-1)}\exp\left\{-\frac{\theta^2(p-2)}{2(p-1)^2}(T^{2H}-t^{2H})\right\}\Phi\left(d_-(x,\ L)-\frac{\theta\sqrt{T^{2H}-t^{2H}}}{p-1}\right)=$$

$$=(L-K)\exp\left\{\frac{\theta^2(T^{2H}-t^{2H})}{2(p-1)^2}+\frac{\theta(E-\hat{B}_H(t))}{p-1}\right\}\Phi\left(d_-(x,\ L)-\frac{\theta\sqrt{T^{2H}-t^{2H}}}{p-1}\right)=$$

$$=(L-K)\left(\frac{L}{X_t}\right)^{\theta/[\sigma(p-1)]}\exp\left\{\frac{\sigma\theta}{2(p-1)}(T^{2H}-t^{2H})-\frac{\theta}{\sigma(p-1)}\left(\sum_{j=1}^n\xi_j-\lambda\mu_\xi(T-t)\right)\right\}$$

웃식과 식 (10), (11)을 식 (8), (9)에 대입하면 정리의 결과가 얻어진다.

$\xi_p(t,\ x)=\dfrac{dF_p(t,\ x)}{dx}$ 이므로 장벽전략이 얻어진다.(증명끝)

$l(x)=x$ 의 경우에 $\mathrm{E}[(H-V_T)^+]$ 를 최소화하는 최량방략은 다음과 같이 주어진다.

정리 2 $l(x)=x$ 의 경우에 효률적인 장벽전략 $(V,\ \xi)$ 는 다음과 같다.

$$V_t=F_1(t,\ X_t)\ ,\ \ D=\left(\frac{1}{\sigma_T}\ln\left(\frac{K}{x}\right)+\frac{\sigma_T}{2}\right)\wedge\left(\frac{1}{\theta_T}\ln\tilde{a}+\frac{\theta_T}{2}\right),\ \ F_1(t,\ x)=x\Phi(\sigma_T-D)-K\Phi(-D)$$

여기서 $\sigma_T=\sigma\sqrt{T^{2H}-t^{2H}}$, $\theta_T=\theta\sqrt{T^{2H}-t^{2H}}$ 이며 $\tilde{a}$ 을 $A:=\left\{\dfrac{d\hat{P}_H}{dP_H}>\tilde{a}\right\}$ 이라고 가정할 때 $\tilde{V}_0=\tilde{\mathrm{E}}_{\hat{P}}[(X_T-K)I_A]$ 에 의하여 결정되는 상수이다.

따름 이또형프락탈블랙－숄즈모형 (5)에서의 유럽구매선택권 $H=(X_T-K)^+$ 를 고찰하자. 이때 효률적인 장벽전략 (V,ξ) 는 정리 1에서 비약항 $\sum_{j=1}^{n}\xi_j-\lambda\mu_\xi$ 를 0으로 놓으면 곧 나온다.

그러므로 정리 1, 2가 선행연구[1]에서의 효률적인 장벽화결과를 일반적인 모형 (6)에로 확장한다는것을 알수 있다.

참 고 문 헌

[1] H. Follmer et al.; Finance and Stochastics, 4, 117, 2000.

[2] H. Follmer et al.; Finance and Stochastics, 3, 251, 1999.

[3] Wei-Lin Xiao et al.; Economic Modelling, 27, 935, 2010.

[4] Xiao-Tian Wang; Physica, A 389, 438, 2010.

[5] Xiao-Tian Wang et al.; Physica, A 389, 445, 2010.

[6] Xiao-Tian Wang et al.; Solitons and Fractals, 12, 599, 2001.

주체103(2014)년 5월 5일 원고접수

Efficient Hedging in a Fractal Black-Scholes Model with Jump Noise

Kim Kyong Hui, Jong Un A

We derived the efficient hedging formula in a fractal Black-Scholes model with jump noise, so we generated the efficient hedging formula for European call option in a standard Black-Scholes model with time-varying drift and volatility and in Ito-type fractional Black-Scholes model.

Key words: Black-Scholes model, efficient hedging