김일성종합대학학보 JOURNAL OF KIM IL SUNG UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체105(2016)년 제62권 제12호 Vol. 62 No. 12 JUCHE105(2016).

서로 다른 봉사기구를 가진 한가지 형태의 우연적인 우선권봉사계의 최량화에 대한 연구

로옥성, 명찬길

현재 대중봉사리론에서 우연적인 우선권봉사계에 대하여 널리 연구되고있다.

선행연구[2, 3]에서는 기다림줄에서 p만 한 확률로 요청들이 거절되는 기다림봉사계에서 기다림렬의 상태들을 표시하고 그것의 특성들을 연구하였다.

선행연구[1]에서는 축적우선권봉사계에서 기다림시간의 분포를 구하였다.

선행연구[4]에서는 우연적인 우선권을 가진 $M|M|1$형봉사계에서 봉사과정에 대한 정상상태확률방정식을 작성하고 정상상태확률을 구하였으며 우선권요청들과 비우선권요청들의 평균요청수들을 비롯한 계의 효과성지표를 구하였다.

론문에서는 서로 다른 봉사기구를 가진 한가지 형태의 우연적인 우선권봉사계에서 유한배치렬봉사과정에 대한 정상상태확률방정식을 작성하고 정상상태확률을 구하였으며 계의 효과성지표를 유도하고 봉사과정의 최량화알고리듬을 취급하였다.

우선권요청들과 비우선권요청들은 각각 파라메터 λ_1, λ_2를 가지고 뽜쏭분포에 따라 봉사계에 도착한다. 계에 도착하는 요청들은 파라메터 $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$를 가진 뽜쏭분포에 따른다.

봉사계에서 봉사기구의 수는 2개이다. 두 봉사기구에서 우선권요청들과 비우선권요청들의 봉사시간은 각각 파라메터 μ_1, μ_2를 가진 지수분포에 따른다. 봉사계에서 우선권요청들은 파라메터 p를 가진 뽜쏭분포에 따라 비우선권요청들을 따라앞선다.

봉사계에서 요청들을 원으로 표시(그림)하고 요청들이 차지한 위치들을 취급하자.

우선권요청들은 검은색원으로, 비우선권요청들은 흰색원으로 표시한다.

요청들의 자리에 상대적배치를 하기 위하여 흰원에 대해서는 $\tau_i = 0$, 검은원에 대해서는 $\tau_i = 1$로 표시한다. 오른쪽으로부터 왼쪽으로 가면서 수자를 쓰면 n개 요청들의 상대적배치는 $\tau = \tau_n \tau_{n-1} \cdots \tau_2 \tau_1$로 표시할수 있다.

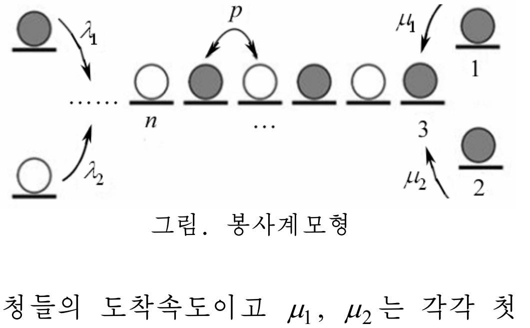

그림. 봉사계모형

그림에서 λ_1, λ_2는 우선권요청과 비우선권요청들의 도착속도이고 μ_1, μ_2는 각각 첫번째와 두번째 봉사기구에서 우선권요청과 비우선권요청들이 봉사받고 봉사계를 떠나는 속도이다.

기다림줄의 한 장소에서 다른 장소에로 립자가 도약하는 경우는 우선권요청이 비우선권요청 앞으로 한걸음 나가는 경우에 대응된다. 우연적인 우선권은 우선권요청들에게 특혜를 주면서 봉사계를 운영하는 봉사규칙이다. p가 커질수록 우선권요청들은 더 많은 특혜를 가지며 $p = 0$이면 기다림봉사계로 된다.

봉사기구에서 봉사세기가 서로 다른 M|M|2 형기다림봉사체계에서 정상상태확률은 $1 \le k < 2$ 에 대하여 $P_k = (\lambda/(\mu_1+\mu_2))^k P_0,\ k \ge 1$이고 표준조건으로부터 $P_0 = 1-\lambda/(\mu_1+\mu_2)$이다.

우선권요청들이 봉사를 받기 시작할 때 우선권요청들로 이루어진 밀집구역은 임의의 비우선권요청의 앞에서 봉사를 받는 우선권요청들로 이루어진 기다림렬이기때문에 봉사가 진행되면 밀집구역의 길이는 감소된다.

계안에 있는 요청수가 n개이고 밀집구역의 길이가 k일 때 표시 $\tau_n \cdots \tau_{k+2} 01^k = \tau 01^k$들을 도입하자. 여기서 0은 $k+1$번째 자리에 비우선권요청이 있다는것이고 1^k은 첫번째 자리로부터 k번째 자리까지 우선권요청들이 있다는것을 의미한다.

밀집구역의 길이가 k일 때 i번째 위치에 우선권요청이 있을 조건부확률을 $P(\tau_i = 1|k)$로 표시하면 $P(\tau_i = 1|k) = \begin{cases} 1, & 1 \le i \le k \\ 0, & i = k+1 \\ \alpha, & i \ge k+2 \end{cases}$ 이다.

$$P_{\text{봉사}}(\tau 01^k) = P(\tau_n \cdots \tau_{k+1} 01) = \alpha^h (1-\alpha)^l P_{\text{밀집}}(k) \tag{1}$$

여기서 $h = \sum_{i=k+2}^{n} \tau_i,\ \ l = n-h-k-1$이고 $P_{\text{밀집}}(k)$는 밀집구역의 길이가 k일 확률로서

$$P_{\text{밀집}}(0) + P_{\text{밀집}}(1) + P_{\text{밀집}}(2) + P_{\text{밀집}}(3) + \cdots = 1.$$

대중봉사체계에서 계의 상태가 유한$(\lambda < \mu_1+\mu_2)$일 때 봉사과정을 취급하자.

이때 줄의 길이와 기다림시간은 유한하며 따라앞서는 세기 p가 변할 때마다 우선권요청들과 비우선권요청들의 줄의 길이와 기다림시간들이 어떻게 변하는가를 비교할수 있다.

정리 1 계의 길이가 n일 때 계의 상태에 대한 정상상태확률방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt}P(\tau 00) &= \lambda_1 \tau_n P(\tau_{n-1} \cdots \tau_{k+2} 00) + \lambda_2 (1-\tau_n) P(\tau_{n-1} \cdots \tau_{k+2} 00) + \\ &+ (\mu_1+\mu_2) P(\tau 000) + (\mu_1+\mu_2) P(\tau 010) - (\lambda+\mu_1+\mu_2) P(\tau 00) + \\ &+ \sum_{i=k+2}^{n} p(1-\tau_i)\tau_{i-1} P(\tau 00|_{(i,\ i-1)}) - \sum_{i=k+2}^{n} p\tau_i (1-\tau_{i-1}) P(\tau 00) \quad (n>1,\ k=0) \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt}P(\tau 01) &= \lambda_1 \tau_n P(\tau_{n-1} \cdots \tau_{k+2} 01) + \lambda_2 (1-\tau_n) P(\tau_{n-1} \cdots \tau_{k+2} 01) + \\ &+ (\mu_1+\mu_2) P(\tau 101) + (\mu_1+\mu_2) P(\tau 001) + (\mu_1+\mu_2) P(\tau 01^2) + \\ &+ (\mu_1+\mu_2) P(\tau 100) - 2(\mu_1+\mu_2) P(\tau 01) - \lambda P(\tau 01) + p/(1-\alpha) P(\tau 100) + \\ &+ \sum_{i=k+2}^{n} p(1-\tau_i)\tau_{i-1} P(\tau 01|_{(i,\ i-1)}) - \sum_{i=k+2}^{n} p\tau_i (1-\tau_{i-1}) P(\tau 01) \quad (n>k+1,\ k=1) \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt}P(\tau 01^k) &= \lambda_1 \tau_n P(\tau_{n-1} \cdots \tau_{k+2} 01^k) + \lambda_2 (1-\tau_n) P(\tau_{n-1} \cdots \tau_{k+2} 01^k) + (\mu_1+\mu_2) P(\tau 01^{k+1}) + \\ &+ (\mu_1+\mu_2) P(\tau 01^k 0) + pP(\tau 101^{k-1}) - (\lambda+\mu_1+\mu_2) P(\tau 01^k) + \\ &+ \sum_{i=k+2}^{m} p(1-\tau_i)\tau_{i-1} P(\tau 01^k|_{(i,\ i-1)}) - \sum_{i=k+2}^{m} p\tau_i (1-\tau_{i-1}) P(\tau 01^k) \quad (n>k+1,\ k \ge 2) \end{aligned} \tag{4}$$

계의 길이가 n, 밀집구역이 k일 확률을 $P(n,\ k) = \sum_{\tau_n \cdots \tau_{k+2}=0,\ 1} P(\tau_n \tau_{n-1} \cdots \tau_2 01^k)$라고 하자.

정리 2 계안에 n개의 요청이 있고 i번째 자리에 우선권요청이 있을 확률은

$$\langle\tau_i\rangle_n = \frac{\alpha + (1-\alpha)(p\alpha/\lambda)^i}{(1-\alpha) + \alpha \cdot p\alpha/\lambda} P_n \ \ (i \ge 1).$$

$\overline{\langle\tau_i\rangle} = \sum_{n=i}^{\infty} \langle\tau_i\rangle_n$, $\overline{\langle\tau_{i+1}(1-\tau_i)\rangle} = \sum_{n=i}^{\infty} \langle\tau_{i+1}(1-\tau_i)\rangle_n$ 이라고 하면 $\langle\tau_i\rangle_n \le P_n$ 이므로

$$\overline{\langle\tau_i\rangle} \le \sum_{n=i}^{\infty} P_n = [\lambda/(\mu_1+\mu_2)]^i.$$

정리 3 정상상태확률방정식을 작성하면 다음과 같다.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\overline{\langle\tau_1\rangle} = \lambda_1 P_0 + p\overline{\langle\tau_3(1-\tau_1)\rangle} + \mu_1\overline{\langle\tau_3\rangle} - \mu_1\overline{\langle\tau_1\rangle} \\ \frac{d}{dt}\overline{\langle\tau_2\rangle} = \lambda_1 P_1 + p\overline{\langle\tau_3(1-\tau_2)\rangle} - (\mu_1+\mu_2)\overline{\langle\tau_2\rangle} + \mu_2\overline{\langle\tau_3\rangle} - \mu_1\overline{\langle\tau_3\rangle}_3 \\ \frac{d}{dt}\overline{\langle\tau_i\rangle} = \lambda_1 P_{i-1} + (\mu_1+\mu_2)\overline{\langle\tau_{i+1}\rangle} + p\overline{\langle\tau_{i+1}(1-\tau_i)\rangle} - p\overline{\langle\tau_i(1-\tau_{i-1})\rangle} - (\mu_1+\mu_2)\overline{\langle\tau_i\rangle} \ \ (i \ge 3) \end{cases}$$

봉사계에서 계안에 있는 평균우선권요청수와 평균비우선권요청수들을 구하기 위하여 앞에서 얻은 $\overline{\langle\tau_i\rangle}$ 들을 리용할수 있다.

$\overline{N}_1 = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=i}^{\infty}\langle\tau_i\rangle_n = \sum_{i=1}^{\infty}\overline{\langle\tau_i\rangle} = \overline{\langle\tau_1\rangle} + \overline{\langle\tau_2\rangle} + \sum_{i=3}^{\infty}\overline{\langle\tau_i\rangle}$ 이므로 계안에 있는 평균우선권요청수는

$$\overline{N_1} = \frac{\lambda\alpha/(\mu_1+\mu_2) + (1-\alpha)p\alpha/(\mu_1+\mu_2) + \alpha[\lambda/(\mu_1+\mu_2)]^2 + (1-\alpha)[p\alpha/(\mu_1+\mu_2)]^2}{(1-\alpha) + \alpha\, p\alpha/\lambda} +$$
$$+ \frac{\lambda\alpha[\lambda^2 - \lambda^2 p\alpha/(\mu_1+\mu_2)^2] + (1-\alpha)[[\lambda p\alpha/(\mu_1+\mu_2)]^3 - \lambda(\lambda p\alpha)^3/(\mu_1+\mu_2)^4]}{(\mu_1+\mu_2-\lambda)[(\mu_1+\mu_2)^2 - \lambda p\alpha]}$$

이고 평균비우선권요청수는 다음과 같다.

$\overline{N}_2 = \langle n\rangle - \overline{N}_1 =$

$$= \frac{\lambda/(\mu_1+\mu_2)}{1-\lambda/(\mu_1+\mu_2)} - \frac{\lambda\alpha/(\mu_1+\mu_2) + (1-\alpha)p\alpha/(\mu_1+\mu_2) + \alpha(\lambda/(\mu_1+\mu_2))^2 + (1-\alpha)[p\alpha/(\mu_1+\mu_2)^2]}{(1-\alpha) + \alpha p\alpha/\lambda} -$$
$$- \frac{\lambda\alpha[\lambda^2 - \lambda^2 p\alpha/(\mu_1+\mu_2)^2] + (1-\alpha)[[\lambda p\alpha/(\mu_1+\mu_2)]^3 - \lambda(\lambda p\alpha)^3/(\mu_1+\mu_2)^4]}{(\mu_1+\mu_2-\lambda)[(\mu_1+\mu_2)^2 - \lambda p\alpha]}$$

리틀의 공식으로부터 우선권요청의 계안에서 평균체류시간과 비우선권요청의 계안에서 평균체류시간을 계산할수 있다.

가동하는 평균봉사기구는 $N_{가} = P_1 + 2\sum_{k=2}^{\infty} P_k = \left(\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\right)\left(\frac{\lambda+\mu_1+\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\right)$ 이고 비여있는 평균봉사기구는 $N_{비} = 2 - N_{가} = [2(\mu_1+\mu_2)^2 - \lambda(\lambda+\mu_1+\mu_2)]/(\mu_1+\mu_2)^2$ 이다.

봉사계가 정상상태에 있다면 $\rho = \lambda/(\mu_1+\mu_2) < 1$ 을 만족시켜야 한다.

이때 비용함수는 $F(2,\ p,\ \mu_1,\ \mu_2) = C_{가}N_{가} + C_{비}N_{비} + C_1\overline{W_1} + C_2\overline{W_2}$ 와 같이 설정된다. 여기서 $C_{가}$ 는 봉사기구가 작업할 때 단위시간당 지출되는 비용, $C_{비}$ 는 봉사기구가 가동하지 않을 때 단위시간당 지출되는 비용, C_1 은 우선권요청이 단위시간당 기다릴 때 지출되는

비용, C_2는 비우선권요청이 단위시간당 기다릴 때 지출되는 비용이다.

$\min\limits_{p,\ \mu_1,\ \mu_2} F(2,\ p,\ \mu_1,\ \mu_2)$가 만족되도록 봉사계를 운영하여야 한다.

Newton법에 따라 알고리듬을 구하면 다음과 같다.

걸음 1 $S=2$에 대한 매개의 값에 대하여 $\mu_n=(p,\ \mu_1,\ \mu_2)^{\mathrm{T}}$로 하자.

걸음 2 μ_n에 대하여 n을 0으로 놓는다.

걸음 3 $F(2,\ p,\ \mu_1,\ \mu_2)$를 계산하기 위하여 다음의 그라디엔트를 구한다.

$$\nabla F(2,\ p,\ \mu_1,\ \mu_2)=\left.\left(\frac{\partial F}{\partial p},\ \frac{\partial F}{\partial \mu_1},\ \frac{\partial F}{\partial \mu_2}\right)^{\mathrm{T}}\right|_{\mu_n},\quad H(2,\ \mu_n)=\left.\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial p\partial \mu_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial p\partial \mu_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial p\partial \mu_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial \mu_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial \mu_1 \mu_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial p\partial \mu_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial \mu_2 \mu_3} & \frac{\partial^2 F}{\partial \mu_2^2} \end{pmatrix}\right|_{\mu_n}$$

걸음 4 $\mu_{n+1}=\mu_n-[H(2,\ \mu_n)]^{-1}\nabla F(2,\ p,\ \mu_1,\ \mu_2)$를 구한다.

걸음 5 $n=n+1$로 놓고 걸음 3, 4를 반복한다.

만일 $\left|\frac{\partial F}{\partial \mu_1}\right|<\varepsilon_1$이거나 $\left|\frac{\partial F}{\partial \mu_B}\right|<\varepsilon_2$이거나 $\|\mu_{n+1}-\mu_n\|<\varepsilon_3$이면 걸음 6으로 이행한다. 여기서 $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3$은 허용오차이다.

걸음 6 최소값 $F(2,\ p,\ \mu_1,\ \mu_2)=F(2,\ p^*,\ \mu_1^*,\ \mu_2^*)$을 구한다.

참 고 문 헌

[1] D. A. Stanford; Queueing Systems, 77, 297, 2014.
[2] D. Yanagisawa et al.; JSIAM Letters, 2, 61, 2010.
[3] C. Arita et al.; arXiv:0911.2528, 2009.
[4] F. Caley; arXiv:1403.5322v2, 22, Jul, 2014.

주체105(2016)년 8월 5일 원고접수

Optimization of Exclusion in a Priority of One Type with Each Other Service Queue

Ro Ok Song, Myong Chan Gil

We obtained normal state probability equations, normal state probability, average waiting times, average visitors of exclusion in a priority of one type with each other service and optimization about service process.

Key word: priority service queue