김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제2호

일반적인 조종모임과 목표모임을 가진 단순추종미분경기에서 추종시간

리일진, 주광휘

선행연구[1]에서는 조종모임과 목표모임의 불룩성가정을 가진 단순추종미분경기에서 스칼라해결함수값의 기하학적성질을 밝히고 그것을 구하는 방법을 제기하였다. 선행연구[2, 3]에서는 스칼라해결함수보다 개선된 행렬해결함수를 도입하고 목표모임에 대한 $H-$불룩성가정하에서 준선형추종미분경기에서 추종가능하기 위한 충분조건을 밝혔다.

론문에서는 조종모임과 목표모임에 대한 불룩성가정이 성립되지 않는 단순추종미분경기에서 추종시간을 구하는 한가지 방법을 제기하였다.

단순추종미분경기

$$\begin{aligned}&\dot{z}=u-\upsilon \quad (u\in U,\ \upsilon\in V)\\&M-\text{목표모임}\end{aligned} \tag{*}$$

을 보기로 하겠다. 여기서 $z\in\mathbf{R}^n$이고 U, V, M은 $\mathbf{R}^n$의 콤팍트부분모임들이다.

가정 1 $0\in \mathrm{co}U-\upsilon,\ \forall\upsilon\in V$

U가 불룩인 경우에는 가정 1이 잘 알려진 뽄뜨랴긴조건으로 된다.

$X,\ Y$를 각각 $\mathbf{R}^n$공간의 비지 않은 콤팍트들이라고 하자.

가정 2 $0\notin X,\ 0\in Y$

앞으로 모임 X와 Y에 대하여 가정 2가 성립된다고 하겠다.

몇가지 표식들을 약속해두겠다.

$$\overline{X}=\{x\in X:\|x\|=\min\|x'\|,\ x'\in\mathrm{con}\{x\}\cap X\}$$

$$\overline{Y}=\{y\in Y:\|y\|=\max\|y'\|,\ y'\in\mathrm{con}\{y\}\cap Y\}$$

정의 1 [1] 주어진 $X,\ Y$에 대하여 조건

$$y\in\mathrm{con}\{x\}$$

를 만족시키는 $(x,\ y)\in\overline{X}\times\overline{Y}$를 $X,\ Y$에 관하여 추직선대응하는 쌍이라고 부르고 그 전부의 모임을 $C(X,\ Y)$로 표시하겠다.

모임

$$\hat{X}=\overline{X}\cup\left(\bigcup_{x'\in\overline{X}}(\mathrm{con}\{x'\}\setminus\mathrm{co}\{x',\ 0\})\right),\ \hat{Y}=\mathrm{con}\,\overline{X}\cap\left(\bigcup_{y'\in\overline{Y}}\mathrm{co}\{y',\ 0\}\right)$$

과 모든 $x\in\overline{X}$, $y\in\overline{Y}$에 대하여 자리표원점 O에서 모임 $\hat{X}-x$와 $\hat{Y}-y$에 대한 법추를 각각 $\Gamma(x)$, $\Gamma(y)$로 표시하고

$$\Gamma'(x)=\begin{cases}\Gamma(x), & \Gamma(x)\neq\{0\}\\-\mathrm{con}\{x\}, & \Gamma(x)=\{0\}\end{cases},\ \Gamma'(y)=\begin{cases}\Gamma(y), & \Gamma(y)\neq\{0\}\\-\mathrm{con}\{y\}, & \Gamma(y)=\{0\}\end{cases}$$

이라고 놓겠다.

정의 2 주어진 $X,\ Y$에 대하여

$$\Gamma'(x)\bigcap(-\Gamma'(y))\neq\varnothing$$

을 만족시키는 $(x,\ y)\in\overline{X}\times\overline{Y}$ 를 모임 X 와 Y 에 관하여 법추대응하는 쌍이라고 부르고 그 전부의 모임을 $N(X,\ Y)$ 로 표시하겠다.

이제

$$C^N(X,\ Y)=C(X,\ Y)\bigcap N(X,\ Y)$$

라고 놓으면 $C^N(X,\ Y)$ 는 X 와 Y 에 관하여 추직선－법추대응하는 쌍전부의 모임으로 된다. 이제 가정 2를 만족시키는 콤팍트들의 쌍 $(X,\ Y)$ 전부의 모임우에서 정의되는 함수

$$\beta(X,\ Y)=\max\left\{\frac{\|y\|}{\|x\|}:(x,\ y)\in C(X,\ Y)\right\}$$

를 생각하고

$$C^{\beta}(X,\ Y)=\left\{(x,\ y)\in C(X,\ Y):\frac{\|y\|}{\|x\|}=\beta(X,\ Y)\right\}$$

라고 놓겠다.

보조정리 1 [1] 주어진 $X,\ Y$ 에 대하여

$$C^{\beta}(X,\ Y)\subset C^N(X,\ Y)$$

가 성립한다.

따름 $\beta(X,\ Y)=\max\{\|y\|/\|x\|,\ (x,\ y)\in C^N(X,\ Y)\}$

보조정리 2 주어진 $X,\ Y$ 에 대하여 모임 $\hat{X},\ \hat{Y}$ 이 불룩이면

$$C^{\beta}(X,\ Y)=C^N(X,\ Y)$$

가 성립된다.

정리 1 [1] 모임 M 과 U 가 불룩인 단순추종미분경기 (*)에서 임의로 고정된 $z\in\mathbf{R}^n\setminus M$, $\upsilon\in V$ 에 대하여 $X=M-z$, $Y=U-\upsilon$ 라고 놓을 때 $C(X,\ Y)\neq\varnothing$ 이면 함수 $\beta(X,\ Y)$ 는 미분경기 (*)의 해결함수로 된다. 즉

$$\alpha(z,\ \upsilon)=\beta(X,\ Y)$$

이제 모임 M 과 U 가 콤팍트로만 가정되는 일반적인 경우를 보기로 하겠다.

임의로 고정된 $z\in\mathbf{R}^n\setminus M$ 와 $\upsilon\in V$ 에 대하여 $X=M-z$, $Y=U-\upsilon$ 로 놓으면 가정 1에 의하여 $C^{\beta}(X,\ \mathrm{co}Y)\neq\varnothing$ 이고 따라서 어떤 $(x^*,\ y^*)\in C^{\beta}(X,\ \mathrm{co}Y)$ 를 고정시킬수 있다.

이때 $y^*\in\mathrm{co}Y$ 이므로 y^* 은 1차독립인 어떤 유한개의 벡토르 $y_1^*,\ y_2^*,\ \cdots,\ y_s^*$, $y_i^*\in\overline{Y}$, $i=\overline{1,\ s}$ 가 있어서 그것들의 불룩1차결합으로 표시된다.

매개 y_i^* , $1\le i\le s$ 에 대하여 벡토르 $y_1^*,\cdots,\ y_{i-1}^*,\ y_{i+1}^*,\ \cdots,\ y_s^*$ 들에 의하여 생성된 $\mathbf{R}^n$ 의 선형부분공간을 $\mathbf{R}^n(y_i^-)$ 로 표시하면

$$\mathrm{con}\{y_i^*\}\bigcap(x^*+\mathbf{R}^n(y_i^-))\neq\varnothing,\ 1\le i\le s$$

이고 그것은 한 원소모임으로 된다. 그 원소를 x_i^* , $1\le i\le s$ 로 표시하겠다.

그리고 매개 i , $1\le i\le s$ 에 대하여 $X_i=\{x_i^*\}$, $Y_i=\{y_i^*\}$ 라고 놓으면

$$C(X_i,\ Y_i)=\{(x_i^*,\ y_i^*)\},\ \beta(X_i,\ Y_i)=\|y_i^*\|/\|x_i^*\|$$

$$C^{\beta}(X_i,\ Y_i)=C^N(X_i,\ Y_i)=C(X_i,\ Y_i)$$

가 성립된다. 따라서 정리 1로부터 매개 i, $1\le i\le s$ 에 대하여

$$\alpha_i(z,\ \upsilon)=\beta(X_i,\ Y_i)$$

이고 임의로 주어진 가측함수 $\upsilon(\cdot)=\{\upsilon(t)\in V,\ 0\le t<+\infty\}$ 에 대하여 추종시간은

$$T_i(z,\ \upsilon(\cdot))=\inf\left\{t\ge 0:\ 1-\int_0^t \alpha_i(z,\ \upsilon(\tau))d\tau\le 0\right\}$$

으로 된다. 결국 주어진 경기 (*)에서의 추종시간은 다음과 같다.

$$T(z)=\inf_{\upsilon(\cdot)}\sum_{i=1}^{s}T_i(z,\ \upsilon(\cdot))$$

이로부터 다음의 정리가 나온다.

정리 2 단순추종미분경기 (*)에서 가정 1이 성립된다고 하자. 그때 경기 (*)은 대피자의 임의의 방략에 대해서도 $t_0=0$ 시간에 초기점 z_0 으로부터 출발하여 $T(z_0)$ 을 넘지 않는 시간동안에 추종가능하다.

실례 $\mathbf{R}^2$ 에서

$$X=\mathrm{co}\{(-4,\ 2),\ (-4,\ -3),\ (-5,\ 2),\ (-5,\ 3)\}$$

$$Y=\mathrm{co}\{(-1,\ 1),\ (-2,\ 2),\ (0,\ 1),\ (0,\ 2)\}\cup$$

$$\cup\,\mathrm{co}\{(-1,\ 1),\ (-2,\ 0),\ (0,\ 1),\ (0,\ 0)\}$$

으로 가지는 단순추종미분경기에 대한 선행연구[1, 2]에서의 추종시간은 3이다.

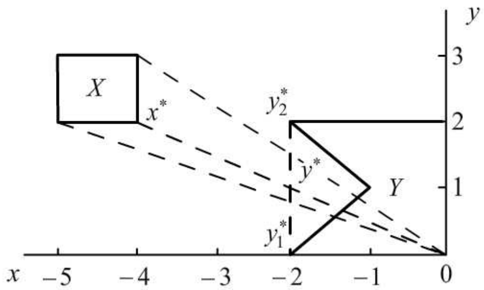

그림. 단순추종미분경기에서의 목표모임과 추종시간

이 경우에 $T_1=1$, $T_2=1$ 이고 따라서 추종시간 $T=T_1+T_2=2$ 로 된다.(그림)

참 고 문 헌

[1] 김일성종합대학학보(자연과학), 53, 3, 13, 주체96(2007).
[2] 김일성종합대학학보 수학, 65, 1, 45, 주체108(2019).
[3] А. А. Чикрий и др.; Тр. ИММ. УрО. РАН., 20, 3, 324, 2014.

주체108(2019)년 12월 15일 원고접수

A Pursuit Time in Simple Differential Pursuit Game with General Control Set and Terminate Set

Ri Il Jin, Ju Kwang Hwi

We study a method of determining the pursuit time value in simple differential pursuit games with general control set and a terminate set.

Keywords: simple differential pursuit game, resolving function, pursuit time