김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체106(2017)년 제63권 제9호 Vol. 63 No. 9 JUCHE106(2017).

그라프의 련결성에 대한 한가지 연구

리 홍 일

론문에서는 그라프의 련결특성에 대한 한가지 연구를 진행하였다.

선행연구들[1－4]에서는 그라프의 분할수와 릉의 개수와의 관계, 련결그라프의 련결성과 정점수, 릉수, 분할수, 정점최소차수사이관계에 대한 성질들을 연구하였다.

론문에서는 그라프의 련결성과 정점최소차수, 분할수, 끄리끄수사이관계에 대하여 연구하였다.

단순그라프 $G=(V(G),\ E(G))$ 에서 $V(G)$ 는 정점모임이고 $E(G)$ 는 릉모임이다.

이 그라프를 유한인 무방향그라프라고 하자.

$n(G)=|V(G)|,\ m(G)=|E(G)|$ 이고 $\delta(G)$ 는 G 에서 정점차수들의 최소값이라고 하자.

정점모임 $X\subseteq V$ 에 대하여 $G[X]$ 를 X 에 의하여 유도되는 부분그라프라고 하자.

K_n 이 정점수가 n개인 완전그라프라고 할 때 G 에서 유도되는 부분그라프 K_p 를 끄리끄라고 부른다.

$w(G)$ 는 G 의 모든 끄리끄중에서 정점수가 최대인 끄리끄의 정점수를 의미한다.

그라프는 $V(G)=(V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_p)$ 이고 모든 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ p$ 에 대하여 $E(G[V_i])=\phi$ 인 분리정점모임 $V_1,\ V_2,\ \cdots,\ V_n$ 이 존재한다면 $V(G)$ 는 $p-$분할된다고 말한다.

련결그라프 G 의 정점－자름은 그것의 제거가 그라프 G 를 비련결로 되게 하는 정점들의 모임이다.

G 의 련결성 $k(G)$ 는 G 의 모든 정점－자름중에서 정점의 개수가 최소인 정점－자름의 정점개수로서 정의되며 $|S|=k(G)$ 이면 정점－자름을 최소정점－자름이라고 부른다.

정리 1 [1] G 의 정점수는 n 이라고 할 때 $\omega(G)\le p$ 이면 $m(G)\le\dfrac{p-1}{2p}n^2$ 이 성립된다.

또한 G 가 완전련결그라프가 아니면 $k(G)\ge 2p\delta(G)-n(G)+2$ 가 성립된다.

정리 2 [2] p 는 $p\ge 2$ 인 옹근수이고 G 는 $p-$분할그라프라고 하자.

이때 $k(G)<\delta(G)$ 이면 $k(G)\ge 2p\delta(G)-n(G)(2p-3)$ 이 성립된다.

또한 $\delta(G)\ge\dfrac{2p-3}{2p-1}n(G)$ 라고 하면 $k(G)=\delta(G)$ 가 성립된다.

론문에서는 그라프 G 의 끄리끄수와 최소차수, 정점수에 의존하는 $k(G)$ 의 아래한계에 대하여 론의한다.

정리 3 p 는 $p\ge 2$ 인 옹근수라고 하고 G 는 완전그라프가 아닌 련결그라프라고 하자.

이때 $\omega(G)\le p$ 라고 하면 $k(G)\ge\dfrac{2p}{p+1}\delta(G)-\dfrac{p-1}{p+1}n(G)$ 가 성립된다.

증명 S는 최소정점자름모임이라고 하자.

이때 $k(G)=|S|<\dfrac{2p}{p+1}\delta(G)-\dfrac{p-1}{p+1}n(G)$ 가 성립된다고 하자.

$G-S$ 의 가장 작은 차수의 성분의 정점모임을 X, $\overline{X}=V(G)\setminus(X\cup S)$ 로 표시하자.

G 는 완전그라프가 아니므로 $1\le|X|\le|\overline{X}|$ 가 성립된다.

X 에서 정점들은 X 와 S 에서 근방을 가지므로 $\delta(G(X))\ge\delta(G)-|S|$ 이다. 이것은 $2m(G[X])\ge|X|(\delta(G)-|S|)$ 라는것을 의미한다.

$\omega(G)\le p$ 는 $\omega(G[X])\le p$ 를 의미하므로 정리 1을 적용하면 $2m(G[X])\le\dfrac{p-1}{p}|X|^2$ 으로부터 $\delta(G)-|S|\le\dfrac{p-1}{p}|X|\Leftrightarrow|X|\ge\dfrac{p}{p-1}(\delta(G)-|S|)$ 가 성립된다.

$|X|\le|\overline{X}|$ 를 리용하면 다음의 결과를 얻게 된다.

$$n(G)=|X|+|\overline{X}|+|S|\ge 2|X|+|S|\ge\frac{2p}{p-1}(\delta(G)-|S|)+|S|=\frac{2p}{p-1}\delta(G)-\left(\frac{2p}{p-1}-1\right)|S|=$$

$$=\frac{2p}{p-1}\delta(G)-\frac{p+1}{p-1}|S|>\frac{2p}{p-1}\delta(G)-\frac{p+1}{p-1}\left(\frac{2p}{p-1}\delta(G)-\frac{p+1}{p-1}n(G)\right)=n(G)$$

이것은 모순이다. 따라서 정리가 성립된다.(증명끝)

따름 1 G 는 련결로서 $\omega(G)\le p$ 이고 $k(G)<\delta(G)$ 인 비완전그라프라고 하자.

$\delta(G)<\left(1-\dfrac{p+1}{p^2}\right)n(G)$ 이면 $2p\delta(G)-n(G)(2p-3)<\dfrac{2p}{p+1}\delta(G)-\dfrac{p-1}{p+1}n(G)$ 가 성립된다.

증명 $2p\delta(G)-2pn(G)+3n(G)<\dfrac{2p}{p+1}\delta(G)-\dfrac{p-1}{p+1}n(G)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow(p+1)(2p\delta(G)-2pn(G)+3n(G))<2p\delta(G)-(p-1)n(G)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(2p^2+2p)\delta(G)-(2p^2-p-3)n(G)<2p\delta(G)-(p-1)n(G)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2p^2\delta(G)<(2p^2-2p-2)n(G)\Leftrightarrow\delta(G)<(1-(p+1)/p^2)n(G)$$

(증명끝)

$c\ge1$ 은 옹근수, H 는 임의의 그라프 G 에서 차수 C 를 가지는 유도된 완전부분그라프라고 하고 $N_c(H)=V(G)\setminus V(H)$ 라고 하자.

보조정리 G 는 임의의 그라프이고 $v\in V(G)$ 라고 하면 다음의 사실들이 성립된다.

① $c\ge1$ 이 옹근수라고 할 때 차수 c 의 유도된 완전부분그라프가 존재한다고 하면 $|N_c(H)|\ge\delta(G)-(c-1)(n(G)-\delta(G))$ 가 성립된다.

② $c\ge2$ 가 옹근수일 때 $\delta(G)-(c-2)(n(G)-\delta(G))>0$ 이면 매 릉 $uv\in E(G)$ 에 대하여 $uv\in E(H)$ 인 차수 c의 유도된 완전부분그라프가 존재한다.

증명 ① 귀납법으로 증명하자.

$c=1$이라고 하고 H 를 차수 1의 유도된 완전부분그라프라고 하자.

또한 $\{a\}=V(H)$ 라고 하자.

이때 분명히 $|N_1(H)|=|N(a)|\ge\delta(G)-(1-1)(n(G)-\delta(G))$ 이므로 정리의 결론이 성립된다.

$c\ge2$ 라고 하고 H 는 차수 c의 유도된 부분그라프라고 하자.

V 를 $V(H)$ 안에 있는 임의의 정점이라고 하면 V 는 적어도 $\delta(G)$ 근방을 가진다.

이로부터 차수 $c-1$의 정점 v는 $V(H)$안에 있다.

부분그라프 $H'=H-v$는 차수 $c-1$의 유도된 완전부분그라프이다.

귀납법의 가정에 의하여 $|N_{c-1}(H')|\geq\delta(G)-(c-2)(n(G)-\delta(G))$가 성립된다.

한편 $v\in N_{c-1}(H')$이고 $|N(v)\setminus V(H')|\geq\delta(G)-c+1$이다.

또한 $n(G)-c\geq\delta(G)-c+1+|N_{c-1}(H')|-1-|N_c(H)|$이므로 귀납법의 가정에 의하여

$$|N_c(H)|\geq\delta(G)+|N_{c-1}(H')|-n(G)\geq$$
$$\geq\delta(G)+\delta(G)-(c-2)(n(G)-\delta(G))-n(G)=\delta(G)-(c-1)(n(G)-\delta(G))$$

가 성립되므로 따라서 정리의 결론이 나온다.

② uv를 $E(G)$의 임의의 릉이라고 하자.

c에 대한 귀납법으로 증명하기 위하여 $c=2$라고 하자.

$G[\{u,\ v\}]$를 차수 2의 유도된 완전부분그라프라고 하면 $uv\in E(G[\{u,\ v\}])$, $c=2$에 대하여 정리가 성립된다.

$c\geq 3$이면 $uv\in E(H')$인 차수 $c-1$의 유도된 완전부분그라프 H'가 존재한다.

①과 가정에 의하여 $|N_{c-1}(H')|\geq\delta(G)-(c-1)(n(G)-\delta(G))>0$이 성립된다.

따라서 $uv\in E(H)$인 차수 c의 유도된 완전부분그라프가 존재한다.(증명끝)

정리 4 $p\,(\geq 2)$를 옹근수라고 하고 그라프 G를 련결그라프라고 하자.

만일 $\omega(G)\leq p,\ k(G)<\delta(G)$라고 하면 $k(G)\geq 2p\delta(G)-n(G)(2p-3)$이 성립된다.

증명 G는 $k(G)<\delta(G)$인 련결그라프라고 하자.

먼저 $\delta(G)<(1-(p+1)/p^2)(n(G))$인 경우에 대하여 론의하자.

$k(G)<\delta(G)$이므로 G는 완전그라프가 아니다. 따라서 정리 2를 적용할수 있다.

정리 2와 따름 1에 의하여 $k(G)\geq\dfrac{2p}{p+1}\delta(G)-\dfrac{p-1}{p+1}n(G)>2p\delta(G)-(2p-3)n(G)$가 성립되므로 따라서 정리가 성립된다.

다음으로 $\delta(G)\geq(1-(p+1)/p^2)\cdot n(G)=(p^2-p-1)/p^2\cdot n(G)$인 경우에 대하여 론의하자.

S를 최소값정점자름, X를 가장 작은 차수를 가지는 $G-S$의 성분의 정점모임이라고 하자.

$\overline{X}=V(G)\setminus(X\cup S)$로 표시하면 G는 완전그라프가 아니므로 $1\leq|X|\leq|\overline{X}|$이다.

$\delta(G)<(1-(p+1)/p^2)(n(G))$인 경우 $E(G[X])=\phi$이라고 하면 $|X|=1$이므로 $X=\{x\}$이며 $N(x)\subseteq S$이므로 $k(G)=|S|\geq\delta(G)$이다. 이것은 모순이다.

다음으로 $\delta(G)\geq(1-(p+1)/p^2)\cdot n(G)=(p^2-p-1)/p^2\cdot n(G)$인 경우 $E(G[X])\neq\phi$이라고 하면 $ab\in E(G[X])$이다.

우선 $p\geq 3$이라고 하자.

$$\delta(G)-(p-3)(n(G)-\delta(G))=\delta(G)(p-2)-(p-3)n(G)\geq\frac{p^2-p-1}{p^2}n(G)-\frac{p^3-3p^2}{p^2}n(G)>0$$

이기때문에 보조정리의 ②에 의하여 유도부분그라프 k_{p-1}과 H'가 존재하여 $ab\in E(H')$가 성립되며 보조정리의 ①에 의하여 다음의 식이 성립된다.

$$|N_{p-1}(H')|\geq\delta(G)-(p-2)(n(G)-\delta(G))\geq\left(\frac{p^3-2p^2+1}{p^2}\right)n(G)=\frac{n(G)}{p^2}>0,\ \ N_{p-1}(H')\subseteq S\cup X$$

만일 $N_{p-1}(H')\cap X=\phi$ 이라고 할 때 $H=H'-a+v$ 라고 하자.

v 는 $N_{p-1}(H')$ 에서 임의의 정점이라고 하자.

$N_{p-1}(H')\cap X=\phi$ 이라고 하면 $H=H'$ 이다.

다음으로 $p=2$ 라고 하면 $H=G[\{a\}]$는 차수 1의 유도된 완전부분그라프로서

$$V(H)\subseteq S\cup X,\ N_{p-1}(H)=N(a)\subseteq S\cup X,\ N_{p-1}(H)\cap X=\phi$$

이므로 $b\in N(a)\cap X$ 이다. 따라서 매 경우에 H 는 차수 $p-1$ 의 유도된 완전부분그라프로서 $V(H)\subseteq S\cup X,\ N_{p-1}(H)\subseteq S\cup X,\ N_{p-1}(H)\cap X\neq\phi$ 이 성립된다.

보조정리의 ①에 의하여 $|N_{p-1}(H)|\geq\delta(G)-(p-2)(n(G)-\delta(G))$ 가 성립된다.

$E(G[N_{p-1}(H)])$ 에 릉이 존재한다면 G 안에 유도된 K^{p+1} 이 존재한다.

이것은 $\omega(G)\leq p$ 에 모순된다. 따라서 $E(G[N_{p-1}(H)])=\phi$ 이 성립된다.

$N_{p-1}(H)\cap X\neq\phi,\ N_{p-1}(H)\subseteq S\cup X$ 이므로 $|S|+|X|\geq\delta(G)+|N_{p-1}(H)|-|S|$ 이다.

따라서

$$n(G)=|X|+|\overline{X}|+k(G)\geq 2|X|+k(G)\geq 2(\delta(G)+|N_{p-1}(H)|-|S|)+|S|\geq$$
$$\geq 2p\delta(G)-(2p-4)n(G)-|S|$$

이며 이것은 $k(G)=|S|\geq 2p\delta(G)-(2p-3)n(G)$ 라는것을 의미한다.(증명끝)

따름 2 $p\ (\geq 2)$ 는 옹근수이고 그라프 G 는 $\omega(G)\leq p$ 인 련결그라프라고 하자.

만일 $\delta(G)\geq\dfrac{2p-3}{2p-1}n(G)$ 이라고 하면 $k(G)=\delta(G)$ 가 성립된다.

참 고 문 헌

[1] J. A. Bondyand et al.; Graph Theory, Springer, 61～63, 2008.

[2] J. Topp et al.; J. Graph Theory, 50, 7, 605, 1993.

[3] M. Kouider et al.; J. Combin. Theory, B 60, 315, 1994.

[4] W. Mader et al.; J. Graph Theory, 69, 3, 324, 2012.

주체106(2017)년 5월 5일 원고접수

On Connectivity in Graphs

Ri Hong Il

In this paper we establish a lower bound for connectivity in Graphs. The connectivity for a connected graph is defined as the minimum cardinality over all vertex-cuts. We establish a lower bound for connectivity that is connected with vertex number and minimum order and clique number.

Key words: graph, clique number