김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체105(2016)년 제62권 제8호 Vol. 62 No. 8 JUCHE105(2016).

리만－류빌복소수계분수도함수에 대한 리만－류빌 복소수계분수적분의 합성연산공식

김광일, 김명하, 곽성남

리만－류빌복소수계도함수에 대한 복소수계적분의 합성연산공식은 일반적으로 리만－류빌복소수계미분방정식의 초기값문제를 제2종볼테라형적분방정식으로 유도하는데서 기초로 되는 잘 알려진 공식이다.

그러나 선행한 일련의 연구들에서 내놓은 리만－류빌복소수계분수도함수에 대한 리만－류빌복소수계분수적분의 합성연산공식은 일정한 오유를 가지고있다.

론문에서는 이 오유를 극복하고 새로운 한가지 합성연산공식을 내놓았다.

$[a,\ b]\ (-\infty < a < b < \infty)$ 를 실축 $\boldsymbol{R} = (-\infty,\ \infty)$ 의 유한구간이라고 하자.

$\alpha(\in \boldsymbol{C})$ 계리만－류빌분수적분 $I_{a+}^{\alpha} f$ 를

$$(I_{a+}^{\alpha} f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (x > a,\ \mathrm{Re}\,\alpha > 0)$$

로 정의한다. 여기서 $\mathrm{Re}\,\alpha$ 는 복소수 α 의 실수부이며 $(x-t)^{1-\alpha} = e^{(1-\alpha)\ln(x-t)}$ 이다.

이 적분을 왼쪽 분수적분, I_{a+}^{α} 를 분수적분연산자라고 부른다.

$\alpha(\in \boldsymbol{C})$ 계리만－류빌분수계도함수 $D_{a+}^{\alpha} f$ 는

$$(D_{a+}^{\alpha} f)(x) := \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{a+}^{n-\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \quad (n = [\mathrm{Re}\,\alpha] + 1,\ x > a,\ \mathrm{Re}\,\alpha \geq 0)$$

로 정의한다. 여기서 $[\mathrm{Re}\,\alpha]$ 는 $\mathrm{Re}\,\alpha$ 의 옹근수부이다.

이 도함수를 왼쪽 분수계도함수, D_{a+}^{α} 를 분수미분연산자라고 부른다.

$\mathrm{Re}\,\alpha \geq 0,\ \beta \in \boldsymbol{C}\ (\mathrm{Re}\,\beta > 0)$ 이면 다음의 오일레르공식들이 성립된다.

$$(I_{a+}^{\alpha} (t-a)^{\beta-1})(x) = \Gamma(\beta) / \Gamma(\beta+\alpha) \cdot (x-a)^{\beta+\alpha-1} \tag{1}$$

$$(D_{a+}^{\alpha} (t-a)^{\beta-1})(x) = \Gamma(\beta) / \Gamma(\beta-\alpha) \cdot (x-a)^{\beta-\alpha-1} \tag{2}$$

$[a,\ b]$ 에서 르베그적분가능한 복소수값가측함수들의 공간을 $L(a,\ b)$ 로 표시한다.

$n \in \boldsymbol{N}$ 에 대하여 $n-1$ 계까지의 모든 도함수들이 $[a,\ b]$ 에서 련속이고 $f^{(n-1)}(x)$ 가 절대련속인 복소수값가측함수들의 공간을 $AC^n[a,\ b]$ 로 표시한다.

$\alpha \in \boldsymbol{C}$ 를 $\alpha = m + i\theta,\ m \in \boldsymbol{N},\ \theta \in \boldsymbol{R},\ \theta \neq 0$ 으로 하고 다음의 제곱함수모임을 론의하자.

$$y_j(x) := \frac{(x-a)^{m-j+i\theta}}{\Gamma(m-j+i\theta+1)},\ j = 1,\ 2, \cdots,\ m+1 \tag{3}$$

보조정리 1 모임 (3)에 대하여 다음의 식들이 성립된다.

$$y_j(x) \in L(a,\ b)\ \ (j = 1,\ \cdots,\ m),\ \ y_{m+1}(x) \notin L(a,\ b) \tag{4}$$

보조정리 2 모임 (3)에서 첫 m개함수 $y_j(x),\ j=1,\cdots,\ m$에 대하여

$$(D_{a+}^{m+i\theta}y_j)(x)=0\,,\ \ D_{a+}^{m+i\theta-k}y_j(a+)=\begin{cases}1,\ k=j\\0,\ k\neq j\end{cases},\ \ k,\ j=1,\cdots,\ m\,.$$

보조정리 3 모임 (3)으로 정의된 함수 $y_j(x),\ j=1,\cdots,\ m+1$들은 $(a,\ b)$에서 1차독립이다.

보조정리 4 $\mathrm{Re}\alpha>0,\ n=[\mathrm{Re}\alpha]+1$이고 $f_{n-\alpha}(x):=(I_{a+}^{n-\alpha}f)(x)$라고 하자.

이때 $f(x)\in L(a,\ b)$이고 $f_{n-\alpha}(x)\in AC^n[a,\ b]$이면

$$(I_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha}f)(x)=f(x)-\sum_{j=1}^{n}\frac{f_{n-\alpha}^{(n-j)}(a)}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j} \tag{5}$$

은 $[a,\ b]$의 거의 도처에서 성립된다.

정리 1 $\mathrm{Re}\alpha>0$이고 $f(x)\in L(a,\ b)$가 적분가능한 분수계도함수 $D_{a+}^{\alpha}f$를 가진다면 즉 $f_{n-\alpha}(x)\in AC^n[a,\ b]$이면 다음의 식이 성립된다.

$$(I_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha}f)(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)}f_{n-\alpha}^{(n-k-1)}(a) \tag{6}$$

식 (5), (6)은 다음과 같은 하나의 식으로 표시된다.

$$(I_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha}f)(x)=f(x)-\sum_{j=1}^{n}\frac{f_{n-\alpha}^{(n-j)}(a)}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j} \tag{7}$$

$n-1<\alpha\leq n,\ n\in\boldsymbol{N}$인 실수 $\alpha>0$에 대하여 식 (7)이 성립된다는것은 선행연구[2]에서 증명되였으며 이 결과를 리용하여 선행연구[1, 3]에서는 일반화된 리만－류빌분수계도함수에 대한 적분연산의 합성공식을 유도하였다.

$\mathrm{Re}\alpha\geq 0$일 때 $j=1,\ 2,\cdots,\ [\mathrm{Re}\alpha]+1$에 대하여

$$(D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\alpha-j})(x)=0 \tag{8}$$

이 성립되며 $\mathrm{Re}\alpha>0,\ n=[\mathrm{Re}\alpha]+1$이라고 할 때 $(D_{a+}^{\alpha}y)(x)=0$이기 위해서는 임의의 상수 $c_j\in\boldsymbol{R}\ (j=1,\cdots,\ n)$에 대하여 $y(x)=\sum_{j=1}^{n}c_j(x-a)^{\alpha-j}$일것이 필요하고 충분하다.

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x)=0\,,\ \ y(x)=\sum_{j=1}^{n}c_j(x-a)^{\alpha-j} \tag{9}$$

으로 표시하면 식 (7)－(9)들은 $n-1<\alpha\leq n,\ n\in\boldsymbol{N}$인 모든 정의실수 $\alpha>0$과 $n-1<\mathrm{Re}\alpha<n,\ n=[\mathrm{Re}\alpha]+1$인 모든 복소수 $\alpha\in\boldsymbol{C}$에 대해서는 성립하지만 $n-1=\mathrm{Re}\alpha,\ n=[\mathrm{Re}\alpha]+1$인 복소수 $\alpha\in\boldsymbol{C}$에 대해서는 일반적으로 성립하지 않는다.

우와 같은 론의에 의하여 식 (5), (6)은 $\mathrm{Re}\alpha>0$인 복소수 α에 대하여 $f(x)$에 대한 가정이 담보된다고 하더라도 일반적으로 성립되는것은 아니다. 류사한 방법으로 식 (8)도 $\mathrm{Re}\alpha>0$인 복소수 α에 대하여 일반적으로 성립되지 않는다는것을 말할수 있다.

우리가 얻은 리만－류빌복소수계분수도함수에 대한 리만－류빌복소수계분수적분의 합성연산공식을 제기하자.

정리 2

$$\alpha\in\boldsymbol{C},\ \ \mathrm{Re}\alpha>0,\ \ n=[\mathrm{Re}\alpha]+1, \tag{10}$$

$$f(x)\in L(a,\ b),\ \ f_{n-\alpha}(x):=(I_{a+}^{n-\alpha}f)(x)\in AC^n[a,\ b] \tag{11}$$

라고 할 때 $n-1<\mathrm{Re}\alpha<n$ 이면

$$(I_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha}f)(x)=f(x)-\sum_{j=1}^{n}f_{n-\alpha}^{(n-j)}(a)\frac{(x-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}, \tag{12}$$

$n-1=\mathrm{Re}\alpha<n$ 이면

$$f_{n-\alpha}(a)=0,\ (I_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha}f)(x)=f(x)-\sum_{j=1}^{n-1}f_{n-\alpha}^{(n-j)}(a)\frac{(x-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)} \tag{13}$$

이 $[a,\ b]$의 거의 도처에서 성립된다.

증명 조건 (10), (11)이 성립된다고 하자.

분수계도함수의 정의와 $f(x)$에 대한 가정에 의하여 $(I_{a+}^{n-\alpha}f)(x)\in AC^{n}[a,\ b]$이므로

$$(D_{a+}^{\alpha}f)(x)=(D^{n}I_{a+}^{n-\alpha}f)(x)\in L(a,\ b),\ D=\frac{d}{dx}. \tag{14}$$

$\varphi\in L(a,\ b)$에 대하여 $(I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x)\in L(a,\ b),\ (I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x)=(D_{a+}^{n-\alpha}I_{a+}^{n-\alpha}I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x)=(D_{a+}^{n-\alpha}I_{a+}^{n}\varphi)$ 임을 고려하면서 $\varphi(x):=(D^{n}I_{a+}^{n-\alpha}f)(x)$로 놓고 식 (14)의 량변에 분수적분 I_{a+}^{α}를 취하면

$$(I_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha}f)(x)=(I_{a+}^{\alpha}D^{n}I_{a+}^{n-\alpha}f)(x)=(D_{a+}^{n-\alpha}I_{a+}^{n-\alpha}I_{a+}^{\alpha}D^{n}I_{a+}^{n-\alpha}f)(x)=(D_{a+}^{n-\alpha}I_{a+}^{n}D^{n}I_{a+}^{n-\alpha}f)(x) \tag{15}$$

가 성립되며 $(I_{a+}^{n-\alpha}f)(x)\in AC^{n}[a,\ b]$이므로

$$(I_{a+}^{n}D^{n}I_{a+}^{n-\alpha}f)(x)=(I_{a+}^{n-\alpha}f)(x)-\sum_{k=0}^{n-1}(D^{k}I_{a+}^{n-\alpha}f)(a)\frac{(x-a)^{k}}{k!}. \tag{16}$$

식 (15), (16)으로부터 다음의 식이 성립된다.

$$(I_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha}f)(x)=D_{a+}^{n-\alpha}\left[I_{a+}^{n-\alpha}f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}f_{n-\alpha}^{(k)}(a)\frac{(x-a)^{k}}{k!}\right]=f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}f_{n-\alpha}^{(k)}(a)\frac{(x-a)^{k-n+\alpha}}{\Gamma(k+1-n+\alpha)}$$

이 식의 오른변의 둘째 항에서 첨수변환 $k=n-j$를 실시하면 다음과 같다.

$$(I_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha}f)(x)=f(x)-\sum_{j=1}^{n}f_{n-\alpha}^{(n-j)}(a)\frac{(x-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)} \tag{17}$$

가정 (10), (11)에 의하여 식 (17)에서 $(I_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha}f)(x)\in L(a,\ b),\ f(x)\in L(a,\ b)$이다.

식 (17)의 오른변에 있는 복소수제곱함수 $(x-a)^{\alpha-j}$을 보자.

$\alpha=\mathrm{Re}\alpha+i\mathrm{Im}\alpha$로 표시하면 복소수제곱함수의 정의에 의하여

$$(x-a)^{\alpha-j}=e^{(\alpha-j)\ln(x-a)}=e^{(\mathrm{Re}\alpha-j)\ln(x-a)+i(\mathrm{Im}\alpha)\ln(x-a)}=(x-a)^{\mathrm{Re}\alpha-j}e^{i(\mathrm{Im}\alpha)\ln(x-a)} \tag{18}$$

과 같이 쓸수 있다. 여기서 $|e^{i(\mathrm{Im}\alpha)\ln(x-a)}|=1$이다.

식 (18)에서 실제곱함수 $(x-a)^{\mathrm{Re}\alpha-j},\ j=1,\cdots,\ n$에 대하여 론의하자.

$n-1<\mathrm{Re}\alpha<n$ 이면 $\mathrm{Re}\alpha-j>\mathrm{Re}\alpha-n+1>0,\ j=1,\cdots,\ n-1$이므로 $(x-a)^{\mathrm{Re}\alpha-j}\in L(a,\ b)$는 분명하고 $j=n$일 때는 $-1<\mathrm{Re}\alpha-n<0$이므로 $(x-a)^{\mathrm{Re}\alpha-n}\in L(a,\ b)$이다.

이로부터 $(x-a)^{\mathrm{Re}\alpha-j}\in L(a,\ b),\ j=1,\cdots,\ n$이다.

식 (18)로부터 $(x-a)^{\alpha-j}\in L(a,\ b),\ j=1,\cdots,\ n$이 나오며 식 (17)의 둘째 항은 $L(a,\ b)$에 속한다. 따라서 식 (17)은 $[a,\ b]$의 거의 도처에서 성립된다. 즉 식 (12)가 증명된다.

$n-1=\mathrm{Re}\alpha<n$ 이면

$$(x-a)^{\alpha-j}\in L(a,\ b),\ j=1,\cdots,\ n-1 \tag{19}$$

이고 $j=n$ 이면 $(x-a)^{\alpha-n}=(x-a)^{n-1-n}e^{i(\mathrm{Im}\alpha)\ln(x-a)}=(x-a)^{-1}e^{i(\mathrm{Im}\alpha)\ln(x-a)}$ 이므로

$$(x-a)^{\alpha-n}\notin L(a,\ b)\,. \tag{20}$$

식 (19), (20)을 고려하여 식 (17)을

$$(I_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha}f)(x)=f(x)-\sum_{j=1}^{n-1}f_{n-\alpha}^{(n-j)}(a)\frac{(x-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}-f_{n-\alpha}(a)\frac{(x-a)^{\alpha-n}}{\Gamma(\alpha-n+1)} \tag{21}$$

과 같이 쓰면 이 식의 왼변과 오른변의 첫항, 둘째 항은 모두 $L(a,\ b)$ 에 속하고 오른변의 셋째 항은 $L(a,\ b)$ 에 속하지 않는다.

따라서 $L(a,\ b)$ 에서 식 (21)이 성립되자면 $f_{n-\alpha}(a)=0$ 이여야 하며 이때 $L(a,\ b)$ 에서

$$(I_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha}f)(x)=f(x)-\sum_{j=1}^{n-1}f_{n-\alpha}^{(n-j)}(a)\frac{(x-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}$$

이 성립된다. 따라서 식 (13)이 증명된다.(증명끝)

따름 $\alpha\in\boldsymbol{C},\ \mathrm{Re}\alpha>0,\ n=[\mathrm{Re}\alpha]+1$ 이라고 하면 $n-1<\mathrm{Re}\alpha<n$ 일 때 $(D_{a+}^{\alpha}y)(x)=0$ 이 성립되기 위해서는 임의의 상수 $c_j\in\boldsymbol{R},\ j=1,\cdots,\ n$ 에 대하여 $y(x)=\sum_{j=1}^{n}c_j(x-a)^{\alpha-j}$ 으로 표시될것이 필요하고 충분하다.

또한 $n-1=\mathrm{Re}\alpha<n$ 일 때 $(D_{a+}^{\alpha}y)(x)=0,\ y_{n-\alpha}(a)=0$ 이 성립되기 위해서는 임의의 상수 $c_j\in\boldsymbol{R},\ j=1,\ \cdots,\ n-1$ 에 대하여 $y(x)=\sum_{j=1}^{n-1}c_j(x-a)^{\alpha-j}$ 으로 표시될것이 필요하고 충분하다.

참 고 문 헌

[1] H. Hilfer et al.; Fract. Calc. Appl. Anal., 12, 3, 299, 2009.

[2] H. M. Srivastava et al.; Comput. Math. Appl., 29, 73, 1995.

[3] Kim Myong Ha et al.; Fract. Calc. Appl. Anal., 17, 1, 79, 2014.

주체105(2016)년 4월 5일 원고접수

Compositional Relations of the Riemann-Liouville Fractional Integrals of Order of Complex Number for Riemann-Liouville Fractional Derivatives of Order of Complex Number

Kim Kwang Il, Kim Myong Ha and *Kwak Song Nam*

Compositional relations of the fractional integrals for Riemann-Liouville fractional derivatives are well known formulas based on reducing the initial value problem for Riemann-Liouville fractional differential equations to Volterra integral equations of the second kind. But in some previous papers compositional relations of the Riemann-Liouville fractional integrals for Riemann-Liouville fractional derivatives of complex order have limitation. We derived new compositional relations of the Riemann-Liouville fractional integrals for Riemann-Liouville fractional derivatives of complex order.

Key word: compositional relation