김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체106(2017)년 제63권 제8호 Vol. 63 No. 8 JUCHE106(2017).

류빌분수브라운운동에 관한 한가지 확률미분방정식의 수값풀이에 대하여

김 천 을

분수브라운운동은 그자체가 독립증분과정도 아니고 마르팅게일도, 마르꼬브과정도 아닌 긴 기억을 가진 과정이라는데로부터 위너과정에 비하여 모형화하기가 어렵거나 복잡하며 분수브라운운동에 관한 확률미분방정식에 대한 수값풀이도 비교적 복잡하다.

허스트지수가 H 인 분수브라운운동

$$B_t^H = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left(Z_t + \int_0^t (t-s)^\alpha dW_s\right) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}(Z_t + B_t), \quad \alpha = H - 1/2$$

은 공분산함수 $R(t,\ s) = \mathrm{E}(B_t^H B_s^H)$ 가

$$R(t,\ s) = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}), \ \ 0 < H < 1$$

인 중심화된 정규과정이다. 여기서 W 는 표준위너과정이고 $Z_t = \int_{-\infty}^0 [(t-s)^\alpha - (-s)^\alpha] dW_s$ 이다.

선행연구[3]에서는 B_t^H 와 B_t 의 차이가 유계변동과정이고 B_t 가 긴 기억을 가지기때문에 분수계확률해석에서 B_t^H 대신 $B_t = \Gamma(\alpha+1)[B_t^H - Z_t]$ 를 리용하여도 일반성을 잃지 않는다는데 대하여 밝혔다. 여기서 $\{B_t\}$ 는 류빌분수브라운운동이다.

선행연구[1]에서는 B_t 의 반마르팅게일근사식을 제기하고 그 수렴성을 평가하고 랑쥬뱅방정식의 풀이와 일련의 금융수학문제들을 론의하였으며 선행연구[2]에서는 표준뽜쏭과정을 리용하여 B_t 의 근사과정

$$X_t^\varepsilon = \int_0^t (t-r+\varepsilon)^{H-1/2} \theta^\varepsilon(r) dr, \quad \theta^\varepsilon(r) = \frac{(-1)^{N(r/\varepsilon)}}{\varepsilon}$$

을 구성하고 X_t^ε 에 관한 확률미분방정식

$$dy_t^\varepsilon = \sigma(y_t^\varepsilon) dX_t^\varepsilon + b(y_t^\varepsilon) dt, \ \ y_0 = a \in \boldsymbol{R}^n$$

의 풀이가 B_t 에 관한 확률미분방정식

$$dy_t = \sigma(y_t) dB_t + b(y_t) dt, \ \ y_0 = a \in \boldsymbol{R}^n$$

의 풀이에로 법칙수렴한다는것을 밝혔다.

선행연구[4]에서는 분수브라운운동에 관한 다중적분의 약근사에 대하여 론의하였다.

론문에서는 류빌분수브라운운동에 관한 확률미분방정식

$$dy_t = \sigma(y_t) dB_t + b(y_t) dt, \ \ y_0 = a \in \boldsymbol{R}^n$$

의 풀이의 근사도식을 제기하고 그 수렴성을 평가한다.

1. B_t에 관한 확률미분방정식의 풀이의 근사도식구성

다음과 같은 B_t에 관한 확률미분방정식이 주어졌다고 하자.

$$dy_t = \sigma(y_t)dB_t + b(y_t)dt, \quad t \in (0,\ 1) \tag{1}$$

방정식 (1)에서 결수함수 $b(x), \sigma(x)$ 들과 초기조건에 대해서는 다음의 조건들이 성립된다고 가정한다.

① 적당한 상수 $K_1 > 0$ 이 있어서 $|b(x) - b(y)|^2 \le K_1 |x - y|^2$ 이 성립된다.

② 적당한 상수 $C_1 > 0$ 이 있어서 $|b(x)|^2 \le C_1(1 + |x|^2)$ 이 성립된다.

③ 적당한 상수 $K_2 > 0$ 이 있어서 $|\sigma(x) - \sigma(y)|^2 \le K_2 |x - y|^2$ 이 성립된다.

④ 적당한 상수 $C_2 > 0$ 이 있어서 $|\sigma(x)|^2 \le C_2(1 + |x|^2)$ 이 성립된다.

⑤ $|\sigma(x)| < M,\ x \in \boldsymbol{R}$ 로 되는 M 이 존재한다.

⑥ 초기조건 y_0 에 대하여 $\mathrm{E}|y_0|^2 < \infty$ 가 성립된다.

주어진 조건밑에서 방정식 (1)의 풀이가 유일존재하므로 그 수값풀이를 위한 근사도식의 구성에 대하여 론의하자.

먼저 확률미분방정식 (1)을 적분형태로 표시하자.

$B_t = \int_0^t (t-s)^\alpha dW_s,\ \alpha = H - \dfrac{1}{2}$ 에 확률미분변환공식을 적용하면 $dB_t = \int_0^t \alpha(t-r)^{\alpha-1} dW_r dt$ 가 얻어지는데 이 식을 방정식 (1)에 대입하면 다음과 같다.

$$dy_t = \sigma(y_t)\int_0^t \alpha(t-r)^{\alpha-1} dW_r dt + b(y_t)dt = \left[\sigma(y_t)\int_0^t \alpha(t-r)^{\alpha-1} dW_r + b(y_t)\right]dt = Z_t dt,\quad y_0 = a \in \boldsymbol{R} \tag{2}$$

$$Z_t = b(y_t) + \sigma(y_t)\int_0^t \alpha(t-r)^{\alpha-1} dW_r,\quad t \in (0,\ 1) \tag{3}$$

식 (2)를 적분형태로 고쳐 쓰면

$$y_t = y_0 + \int_0^t \left[b(y_s) + \sigma(y_s)\int_0^s \alpha(s-r)^{\alpha-1} dW_r\right]ds = y_0 + \int_0^t Z_s ds,\quad t \in (0, 1) \tag{4}$$

과 같고 이 식의 풀이에 대하여 다음의 평가식이 성립된다.

보조정리 1 조건 ①, ②, ⑤, ⑥밑에서 $\mathrm{E}|y_t|^2 < \infty,\ t \in (0,\ 1)$ 이 성립된다.

증명 식 (4)의 량변을 두제곱하고 기대값을 취하면

$$\mathrm{E}|y_t|^2 \le 2\mathrm{E}|y_0|^2 + 2\mathrm{E}\left(\int_0^t Z_s ds\right)^2 \le 2\mathrm{E}|y_0|^2 + 2\mathrm{E}\left(\int_0^t 1^2 ds \int_0^t Z_s^2 ds\right) \le 2\mathrm{E}|y_0|^2 + 2\int_0^t \mathrm{E}(Z_s)^2 ds \tag{5}$$

로 되는데 여기서 $\mathrm{E}(Z_s)^2$ 을 평가하면 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(Z_s)^2 = 2\mathrm{E}(b(y_s))^2 + 2\mathrm{E}\left(\sigma(y_s)\int_0^s \alpha(s-r)^{\alpha-1} dW_r\right)^2 \le 2\mathrm{E}(b(y_s))^2 + 2M^2\mathrm{E}\left(\int_0^s \alpha(s-r)^{\alpha-1} dW_r\right)^2$$

이제 조건 ②, ⑤와 확률적분의 성질을 리용하면

$$\mathrm{E}(Z_s)^2 \le 2C\mathrm{E}(1+|y_s|^2) + 2M^2\int_0^s \alpha^2(s-r)^{2(\alpha-1)}dr \le$$

$$\le 2C + 2C\mathrm{E}|y_s|^2 + 2M^2\left(H-\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2H} = L + 2C\mathrm{E}|y_s|^2$$

을 얻게 된다. 여기서 L은 $L = 2C + \dfrac{2M^2(H-1/2)^2}{2H}$과 같다.

이 식을 식 (5)에 대입하면 다음과 같다.

$$\mathrm{E}|y_t|^2 \le 2\mathrm{E}|y_0|^2 + 2\int_0^t (L + 2C\mathrm{E}|y_s|^2)ds \le (2\mathrm{E}|y_0|^2 + 2L) + 4C\int_0^t \mathrm{E}|y_s|^2\, ds$$

여기에 그론월부등식을 적용하면 보조정리의 주장이 나온다.(증명끝)

적분방정식 (4)의 근사도식을 구성하기 위하여 구간 (0, 1)을 등분할하자.

그러면 $\Delta t = \dfrac{1}{N}$, $t_k = k\Delta t,\ k = 0, 1, \cdots, N$으로 되며 이때 t를 넘지 않는 t에 가장 가까운 분할점번호 n_t를 $n_t := \max\{n : t_n < t\}$라고 하자.

그러면 $y_t = y_0 + \int_0^t Z_s ds$의 근사도식을 $\hat{y}_n = \hat{y}_{n-1} + Z_{t_{n-1}}\Delta t\ \ (n = 1, 2, \cdots, N),\ \hat{y}_0 = y_0$으로 구성할수 있고 $Z_{t_n} = b(y_{t_n}) + \sigma(y_{t_n})\int_0^{t_n}\alpha(t_n - r)^{\alpha-1}dW_r,\ t_n \in (0,\ 1)$의 근사도식은

$$\hat{Z}_n = b(\hat{y}_n) + \sigma(\hat{y}_n)\int_0^{t_n}\alpha(t_n - r)^{\alpha-1}dW_r\ \ (n = 0, 1, \cdots, N-1),\ \hat{Z}_0 = b(y_0)$$

으로 표시되며 결국 방정식 (4)의 근사도식은

$$\hat{y}_n = \hat{y}_{n-1} + \hat{Z}_{t_{n-1}}\Delta t\ \ (n = 1, 2, \cdots, N),\ \ \hat{y}_0 = y_0 \tag{6}$$

$$\hat{Z}_{n-1} = b(\hat{y}_{n-1}) + \sigma(\hat{y}_{n-1})\int_0^{t_{n-1}}\alpha(t_{n-1} - r)^{\alpha-1}dW_r\ \ (n = 1, \cdots, N-1)\ \ \hat{Z}_0 = b(y_0) \tag{7}$$

또는 다음과 같은 적분형태의 식들로 구성할수 있다.

$$\hat{y}_{t_n} = y_0 + \int_0^{t_n}\hat{Z}_{n_s}ds,\ \ n = 1, 2, \cdots, N \tag{8}$$

$$\hat{Z}_{n_s} = b(\hat{y}_{n_s}) + \sigma(\hat{y}_{n_s})\int_0^{t_{n_s}}\alpha(t_{n_s} - r)^{\alpha-1}dW_r,\ \ t_{n_s} \le s < t_{n_s+1} \tag{9}$$

2. 근사도식의 수렴성평가

보조정리 2 조건 ①-⑥밑에서 다음의 식이 성립된다.

$$\mathrm{E}|Z_s - \hat{Z}_{n_s}|^2 \le 2K\mathrm{E}(y_s - \hat{y}_{n_s})^2 + 6M\sqrt{\mathrm{E}(y_s - \hat{y}_{n_s})^2} + O(\Delta t) \tag{10}$$

여기서 $K,\ M$은 Δt에 무관계한 상수이고 $O(\Delta t)$는 $\Delta t \to 0$일 때 령에로 다가가는 량이다.

증명 식 (3), (9)를 리용하여 $\mathrm{E}|Z_s - \hat{Z}_{n_s}|^2$을 평가하자.

$$\mathrm{E}|Z_s-\hat{Z}_{n_s}|^2\le \mathrm{E}\left\{(b(y_s)-b(\hat{y}_{n_s})+\sigma(y_s)\int_0^s\alpha(s-r)^{\alpha-1}dW_r-\sigma(\hat{y}_{n_s})\int_0^{t_{n_s}}\alpha(t_{n_s}-r)^{\alpha-1}dW_r\right\}^2\le$$

$$\le 2\mathrm{E}(b(y_s)-b(\hat{y}_{n_s}))^2+6\mathrm{E}\left\{2(\sigma(y_s)-\sigma(\hat{y}_{n_s}))^2\left(\int_0^{t_{n_s}}\alpha(s-r)^{\alpha-1}dW_s\right)^2+\right. \tag{11}$$

$$\left.+6\left[\sigma(\hat{y}_{n_s})^2\left(\int_0^{t_{n_s}}\alpha(s-r)^{\alpha-1}dW_r-\int_0^{t_{n_s}}\alpha(t_{n_s}-r)^{\alpha-1}dW_r\right)^2\right]\right\}+6(\sigma(y_s))^2\left(\int_{t_{n_s}}^s\alpha(s-r)^{\alpha-1}dW_r\right)^2\le$$

$$\le 2K_1\mathrm{E}(y_s-\hat{y}_{n_s})^2+6\mathrm{E}\left[(\sigma(y_s)-\sigma(\hat{y}_{n_s}))^2\left(\int_0^{t_{n_s}}\alpha(s-r)^{\alpha-1}dW_s\right)^2\right]+$$

$$+6M^2\mathrm{E}\left(\int_0^{t_{n_s}}(\alpha(s-r)^{\alpha-1}-\alpha(t_{n_s}-r)^{\alpha-1})dW_r\right)^2+6M^2\mathrm{E}\left(\int_{t_{n_s}}^s\alpha(s-r)^{\alpha-1}dW_r\right)^2$$

식 (11)의 마지막부등식의 오른변에서 셋째 항과 넷째 항들을 평가하면 다음과 같다.

$$\mathrm{E}\left(\int_0^{t_{n_s}}(\alpha(s-r)^{\alpha-1}-\alpha(t_{n_s}-r)^{\alpha-1})dW_r\right)^2=\int_0^{t_{n_s}}(\alpha(s-r)^{\alpha-1}-\alpha(t_{n_s}-r)^{\alpha-1})^2dr=O(\Delta t) \tag{12}$$

$$\mathrm{E}\left(\int_{t_{n_s}}^s\alpha(s-r)^{\alpha-1}dW_r\right)^2=\int_{t_{n_s}}^s\left(H-\frac{1}{2}\right)^2(s-r)^{2H-1}dr=\left(H-\frac{1}{2}\right)^2\frac{\Delta t^{2H}}{2H}=O(\Delta t) \tag{13}$$

또한 둘째 항에서 $(\sigma(y_s)-\sigma(\hat{y}_{n_s}))^2$ 과 $\left(\int_0^{t_{n_s}}\alpha(s-r)^{\alpha-1}dW_s\right)^2$ 은 독립이 아니므로 꼬쉬—부냐꼽쓰끼부등식과 조건 ⑤에 의하여

$$\mathrm{E}\left[(\sigma(y_s)-\sigma(\hat{y}_{n_s}))^2\left(\int_0^{t_{n_s}}\alpha(s-r)^{\alpha-1}dW_s\right)^2\right]\le\sqrt{\mathrm{E}(\sigma(y_s)-\sigma(\hat{y}_{n_s}))^2A\mathrm{E}\left(\int_0^{t_{n_s}}\alpha(s-r)^{\alpha-1}dW_s\right)^4}\le M\sqrt{\mathrm{E}(y_s-\hat{y}_{n_s})^2} \tag{14}$$

와 같다. 여기서

$$A=(\sigma(y_s)-\sigma(\hat{y}_{n_s}))^2,\quad M^2=K_2A\mathrm{E}\left(\int_0^{t_{n_s}}\alpha(s-r)^{\alpha-1}dW_s\right)^4.$$

식 (12), (13)에서 $O(\Delta t)$ 는 Δt 에 관한 동차의 무한소이다.

식 (12)—(14)를 식 (11)에 대입하면 식 (10)이 얻어진다.(증명끝)

정리 조건 ①—⑥밑에서 임의의 $t\in(0,1)$ 에 대하여

$$\lim_{\Delta t\to 0}\mathrm{E}|y_t-\hat{y}_{n_t}|^2=0$$

이 성립된다.

증명 임의의 $t\in(0,\ 1)$ 에 대하여 식 (4), (8)로부터

$$\mathrm{E}|y_t-\hat{y}_{n_t}|^2\le 2\mathrm{E}(y_t-y_{t_{n_t}})^2+2\mathrm{E}\left(\int_0^{t_{n_t}}(Z_s-\hat{Z}_{n_s})ds\right)^2\le 2\mathrm{E}(y_t-y_{t_{n_t}})^2+2\int_0^{t_{n_t}}\mathrm{E}(Z_s-\hat{Z}_{n_s})^2ds \quad (15)$$

가 성립된다. 여기서 $\hat{y}_{n_t}$ 는 t 를 넘지 않으면서 t 에 가장 가까운 분할점 t_{n_t} 에서의 풀이값 $y_{t_{n_t}}$ 의 근사값을 의미한다.

$\sigma(y_s)$ 와 $\int_0^s\alpha(s-r)^{\alpha-1}dW_r$ 가 독립이 아니므로 꼬쉬－부냐꼽쓰끼부등식과 확률적분의 성질, 보조정리 1과 조건 ①－⑥에 의하여

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(y_t-y_{t_{n_t}})^2&=\mathrm{E}\left[\int_{t_{n_t}}^t\left(b(y_s)+\sigma(y_s)\int_0^s\alpha(s-r)^{\alpha-1}dW_r\right)ds\right]^2\le\\ &\le\Delta t\int_{t_{n_t}}^t C_1(1+\mathrm{E}(y_s)^2)ds+M^2\int_{t_{n_t}}^t\mathrm{E}\left(\int_0^s\alpha(s-r)^{\alpha-1}dW_r\right)^2ds\le L\Delta t\end{aligned} \quad (16)$$

가 성립된다. 여기서 L 은 Δt 에 무관계한 적당한 상수이다.

이제 식 (10), (16)을 식 (15)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}|y_t-\hat{y}_{n_t}|^2&\le 2L\Delta t+2\int_0^{t_{n_t}}\left[2K\mathrm{E}(y_s-\hat{y}_{n_s})^2+6M\sqrt{\mathrm{E}(y_s-\hat{y}_{n_s})^2}+O(\Delta t)\right]ds=\\ &=2\sum_{i=0}^{n_t-1}\left[2K\mathrm{E}(y_s-\hat{y}_{n_i})^2+6M\sqrt{\mathrm{E}(y_s-\hat{y}_{n_i})^2}\right]\Delta t+O(\Delta t)\end{aligned}$$

마지막으로 임의의 $t\in(t_n,\ t_{n+1}),\ n=0,\ \cdots,\ N-1$ 에 대하여 $\mathrm{E}|y_t-\hat{y}_n|^2=O(\Delta t)$ 는 수학적귀납법으로 증명할수 있다.

$t\in(0,\ t_1)$ 인 경우에

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(y_t-\hat{y}_0)^2=\mathrm{E}(y_t-y_0)^2&=\mathrm{E}\left[\int_0^t\left(b(y_0)+\sigma(y_0)\int_0^s\alpha(s-r)^{\alpha-1}dW_r\right)ds\right]^2\le\\ &\le\Delta tC_1(1+\mathrm{E}|y_0|^2)+M\Delta t\int_0^t\int_0^s\alpha^2(s-r)^{2\alpha-2}drds\le L'\Delta t=O(\Delta t)\end{aligned}$$

이므로 $\mathrm{E}|y_t-\hat{y}_k|^2=O(\Delta t),\ k=0,1,\cdots,\ m$ 이면 $\mathrm{E}|y_t-\hat{y}_k|^2=O(\Delta t),\ k=0,1,\ \cdots,\ m+1$ 이 성립된다는것을 쉽게 증명할수 있다.(증명끝)

근사도식 (6), (7)은 수값적으로 모의할수 있다. 여기서

$$\int_0^{t_{n-1}}\alpha(t_{n-1}-r)^{\alpha-1}dW_r,\ n=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1$$

들은 수학적기대값이 0이고 분산이 다음의 정규분포에 따르는 우연량이다.

$$\mathrm{E}\left(\int_0^{t_{n-1}}\alpha(t_{n-1}-r)^{\alpha-1}dW_r\right)^2=\int_0^{t_{n-1}}\alpha^2(t_{n-1}-r)^{2(\alpha-1)}dr=\left(H-\frac{1}{2}\right)^2\frac{(t_{n-1})^{2H}}{2H}$$

그러나 $\int_0^{t_{n-1}} \alpha(t_{n-1}-r)^{\alpha-1}dW_r,\ n=1, 2, \cdots,\ N-1$ 들은 독립이 아니므로 공분산을 고려하여 모의하여야 한다. 또는 시간띠염근사도식을 만들어 모의할수 있다.

참 고 문 헌

[1] Tran Hung Thao; Real World Applications, 7, 124, 2006.

[2] X. Bardina et al.; Stoch. Proc. Appl., 120, 39, 2010.

[3] D. Nualart et al.; Stoch. Proc. Appl., 86, 121, 2000.

[4] X. Bardina et al.; Stoch. Proc. Appl., 105, 315, 2003.

주체106(2017)년 4월 5일 원고접수

On the Numerical Solution of a SDEs Driven by Liouville Fractional Brownian Motion

Kim Chon Ul

We construct the discrete time approximate scheme for the numerical solution of a stochastic differential equations driven by Liouville fractional Brownian motion with nonlinear diffusion coefficient and study the convergence of its discrete time approximate scheme.

Key words: Liouville fractional Brownian motion, diffusion coefficient