김일성종합대학학보　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　주체109(2020)년
수 학　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　제66권　제3호

반사역방향확률미분방정식의 L^p −풀이의 한가지 유일존재성조건

박인향, 김문철

우리는 확률해석학에서 중요한 문제의 하나로 제기되는 반사역방향확률미분방정식의 풀이의 유일존재성조건, 비교정리들을 연구하였다.

반사역방향확률미분방정식은 사전실시선택권의 가격을 결정하는 방정식으로서 보통의 역방향확률미분방정식과는 달리 장벽항 L 을 가지는 역방향확률미분방정식으로서 풀이의 유일존재성문제는 1997년에 처음으로 제기되고 이때 생성자에 대한 본질적인 유일존재성조건은 립쉬츠조건이였다. 역방향확률미분방정식의 풀이의 본질적인 성질과 응용은 종점조건이 주어진 조건밑에서 적합성과 비교성인데 이러한 성질들은 립쉬츠조건보다 약한 단조성가정에서도 얻을수 있다는 특성으로부터 단조성조건의 경우 반사역방향확률미분방정식의 풀이에 대한 연구[1－3]가 진행되였다.

단조성조건을 어느 정도 약화시킬수 있는가 하는 문제는 역방향확률미분방정식리론의 풀이존재범위의 문제로서 중요한 문제의 하나로 제기되고있다.[1]

론문에서는 약단조성조건에서 장벽항을 가진 반사역방향확률미분방정식의 풀이의 유일존재성, 비교정리들을 연구하였다.

$(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ 를 완비확률공간이라고 하고 W 를 그우에서 정의된 $d-$차원브라운운동, $F:=\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge 0}$ 를 W 에 의하여 생성된 자연 $\sigma-$모임벌증가족의 완비화라고 하자.

확률토대 $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P,\ F)$ 우에서 정의된 다음의 반사역방향확률미분방정식을 론의한다.

$$\begin{cases} Y_t=\xi+\int_t^T f_s(Y_s,\ Z_s)ds-\int_t^T Z_s dW_s+K_T-K_t,\quad t\in[0,\ T] \\ Y_t\ge L_t,\quad t\in[0,\ T] \\ \int_0^T (Y_t-L_t)dK_t=0 \end{cases} \tag{1}$$

여기서 종점조건 ξ 는 F_T-가측우연량이고 생성자 $f:[0,\ T]\times\Omega\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}$ 는 예측가능한 우연함수이며 장벽 $L=\{L_t,\ t\in[0,\ T]\}$ 는 $L_T\le\xi$ 인 $F-$전진가측인 련속우연과정이다. 반사역방향확률미분방정식 (1)의 풀이는 방정식을 만족시키는 $F-$적합과정들의 쌍 $(Y,\ Z,\ K)$ 으로 정의된다.

다음과 같은 공간들을 정의한다.

S^p 는 다음의 조건을 만족시키는 실값, 적합련속우연과정 X 들의 공간이다.

$$\|X\|_{S^p}:=E\left[\sup_{t\in[0,\,T]}|X_t|^p\right]<\infty$$

H^p 는 다음의 조건을 만족시키는 $\mathbf{R}^d$ 값, 예측가능한 우연과정 Z 들의 공간이다.

$$\|Z\|_{H^p}:=E\left[\left(\int_0^T |Z_t|^2\,dt\right)^{p/2}\right]^{1/p}<\infty$$

가정 1 ① $t\in[0,\ T],\ y\in\mathbf{R},\ z,\ z'\in\mathbf{R}^d$ 에 대하여 $|f(t,\ y,\ z)-f(t,\ y,\ z')|\le\lambda|z-z'|$ 을 만족시키는 $\lambda>0$ 가 있다.

② $\forall y_1,\ y_2\in\mathbf{R}^k$, $z\in\mathbf{R}^{k\times d}$ 에 대하여

$$|y_1-y_2|^{p-1}\left\langle\frac{y_1-y_2}{|y_1-y_2|}1_{|y_1-y_2|\ne0},\ f(t,\ \omega,\ y_1,\ z)-f(t,\ \omega,\ y_2,\ z)\right\rangle\le\rho(|y_1-y_2|^p)$$

을 만족시키는 비감소불룩함수 $\rho(\cdot):\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$, $\rho(0)=0,\ \rho(u)>0,\ \int_{0+}\frac{du}{\rho(u)}=\infty$ 가 있다.

보조정리 1 f 가 우의 가정을 만족시킨다고 가정하자. 그리고 $(Y,\ Z,\ K)$ 가 $Y\in S^p$, $Z\in H^p$, $K\in S^p$ 인 방정식 (1)의 풀이라고 하자. 그러면 임의의 $p>0$ 에 대하여 $p,\ \lambda,\ T$, m 에만 의존하는 상수 C 가 있어서 다음식이 성립된다.

$$E\left[\left(\int_t^T |Z_s|^2\,ds\right)^{p/2}+K_T^p\right]\le CE\left(1+\sup_{s\in[t,T]}|Y_s|^p+[(L_T^{+,*})^p]+\left[\left(\int_t^T|f_s(L_s^{+,*},0)|\,ds\right)^p\right]\right)$$

보조정리 2 생성자 f 가 가정 ①을 만족시킨다고 가정하자. 그리고 $(Y,\ Z,\ K)$ 를 방정식 (1)의 풀이라고 하면 다음식을 만족시키는 적당한 상수 C 가 존재한다.

$$E\left[\sup_{s\in[t,T]}|Y_s|^p\right]\le CE\left(|\xi|^p+(L_T^{+,*})^p+\left(\int_t^T|f_s(L_s^{+,*},\ 0)|\,ds\right)^p\right)$$

정리 1 $(Y,\ Z,\ K)$ 를 가정 1을 만족시키는 방정식 (1)의 풀이라고 하자. $(Y',\ Z',\ K')$ 를 $\xi\le\xi'$, $f_s(Y_s,\ Z_s)\le f_s(Y'_s,\ Z'_s)$, $L_s\le L'_s$ 인 ξ', f', L' 에 대한 방정식 (1)의 풀이라고 하자. 이때 $p>1$ 에 대하여 $Y,\ Y'\in S^p$ 이면 $Y_t\le Y'_t,\ t\in[0,\ T]$ 이다.

증명 $((Y_t-Y'_t)^+)^p$ 에 이또의 확률적분변환공식을 적용하면 다음과 같다.

$$[(Y_t-Y'_t)^+]^p+\frac{p(p-1)}{2}\int_t^T[(Y_s-Y'_s)^+]^{p-2}1_{\{Y_s>Y'_s\}}|Z_s-Z'_s|^2\,ds=$$

$$=[(\xi-\xi')^+]^p+p\int_t^T[(Y_s-Y'_s)^+]^{p-1}1_{\{Y_s>Y'_s\}}(f_s(Y_s,\ Z_s)-f_s(Y'_s,\ Z'_s))ds+$$

$$+p\int_t^T[(Y_s-Y'_s)^+]^{p-1}1_{\{Y_s>Y'_s\}}(dK_s-dK'_s)-p\int_t^T[(Y_s-Y'_s)^+]^{p-1}1_{\{Y_s>Y'_s\}}(Z_s-Z'_s)dW_s$$

그런데 가정 1로부터

$$[(Y_t-Y'_t)^+]^{p-1}(f_s(Y_s,\ Z_s)-f_s(Y'_s,\ Z'_s))\le\rho((Y_s-Y'_s)^+)^p+\lambda[(Y_t-Y'_t)^+]^{p-1}|Z_s-Z'_s|$$

이다. 또한 조건으로부터 $Y_s>Y'_s\ge L'_s>L_s$ 이고 K_s 는 $\{s:Y_s=L_s\}$ 에서만 증가하므로

$$p\int_t^t [(Y_s - Y_s')^+]^{p-1} 1_{\{Y_s > Y_s'\}} (dK_s - dK_s') \le -p\int_t^T [(Y_s - Y_s')^+]^{p-1} 1_{\{Y_s > Y_s'\}} dK_s' \le 0$$

이다. 따라서

$$[(Y_t - Y_t')^+]^p + \frac{p(p-1)}{2}\int_t^T [(Y_s - Y_s')^+]^{p-2} 1_{\{Y_s > Y_s'\}} |Z_s - Z_s'|^2\, ds \le$$

$$\le [(\xi - \xi')^+]^p + p\int_t^T \rho((Y_s - Y_s')^+)^p 1_{\{Y_s > Y_s'\}} ds + p\lambda\int_t^T [(Y_t - Y_t')^+]^{p-1} 1_{\{Y_s > Y_s'\}} |Z_s - Z_s'|\, ds -$$

$$-p\int_t^T [(Y_s - Y_s')^+]^{p-1} 1_{\{Y_s > Y_s'\}} (Z_s - Z_s') dW_s$$

이다. 이제

$$\lambda p[(Y_t - Y_t')^+]^{p-1} |Z_s - Z_s'| = \lambda p\left[((Y_s - Y_s')^+)^{\frac{p}{2}} ((Y_s - Y_s')^+)^{\frac{p-2}{2}} |Z_s - Z_s'|\right] \le$$

$$\le \frac{\lambda^2 p}{2(p-1)}[(Y_t - Y_t')^+]^p + \frac{p(p-1)}{2}((Y_s - Y_s')^+)^{p-2} |Z_s - Z_s'|^2$$

이라는것을 고려하면

$$[(Y_t - Y_t')^+]^p \le [(\xi - \xi')^+]^p + p\int_t^T \bar{\rho}[((Y_s - Y_s')^+)^p 1_{\{Y_s > Y_s'\}}] ds - p\int_t^T [(Y_s - Y_s')^+]^{p-1} 1_{\{Y_s > Y_s'\}} (Z_s - Z_s') dW_s$$

이다. 여기서 $\bar{\rho} := \rho(x) + (\lambda^2 p/(2(p-1)))/x$ 이다.

데비스의 부등식으로부터 $p\int_t^T [(Y_s - Y_s')^+]^{p-1} 1_{\{Y_s > Y_s'\}} (Z_s - Z_s') dW_s$ 는 평등적분한 마르팅게일이고 $\xi \le \xi'$ 라는것을 고려하면 $(\xi - \xi')^+ = 0$ 이다.

$\rho(\cdot)$ 가 우묵함수이므로 옌센의 부등식을 리용하면 다음의 식이 성립한다.

$$E[((Y_s - Y_s')^+)^p] \le p\int_t^T \bar{\rho}[E((Y_s - Y_s')^+)^p 1_{\{Y_s > Y_s'\}}] ds$$

또한 $0 < x < 1$ 에 대하여 $\rho(x) > \rho(1)x$ 이므로 $\int_{0+} \frac{dx}{\bar{\rho}(x)} = +\infty$ 가 성립되며 $\bar{\rho}(0) = 0,\ \bar{\rho}(x) > 0,$ $x > 0$ 이다. 비할리의 부등식으로부터 $E[((Y_s - Y_s')^+)^p] = 0$ 이다. 따라서 $Y_t \le Y_t',\ \ t \in [0,\ T]$ 이다.
(증명끝)

가정 2 ① $E|\xi|^p < +\infty$ ② $E\left(\int_0^T |f_s(0,\ 0)|\, ds\right)^p < +\infty$

③ $\forall t \in [0,\ T]$ 와 $z \in \mathbf{R}^d$ 에 대하여 $y \mapsto f_s(y,\ z)$ 는 련속이다.

④ $f_s(y,\ 0) \le f_s(0,\ 0) + \varphi|y|$ 이 성립된다. 여기서 φ 는 련속증가함수이다.

⑤ $E[(L_T^{+,*})^p] < +\infty$ ⑥ $E\left[\left(\int_0^T f_s(L_s^{+,*},\ 0)ds\right)^p\right] < +\infty$

보조정리 3 식 (2)의 풀이를 $(Y_s^n,\ Z_s^n,\ K_s^n)$이라고 하면 어떤 $\lambda,\ T,\ p,\ m$에 관계되는 상수 C가 있어서 매 정지시각 $\tau \le T$와 임의의 자연수 $n \in \mathbf{N}$에 대하여 식 (3)이 성립된다.

$$\begin{cases} Y_t^n = \xi + \int_t^T f_s(Y_s^n,\ Z_s^n)ds - \int_t^T Z_s^n dW_s + K_T^n - K_t^n,\ t \in [0,\ T] \\ K_t^n = n\int_t^T (Y_s^n - L_s)^- ds, \quad t \in [0,\ T] \end{cases} \tag{2}$$

$$E\left[\left(\int_0^\tau |Z_s^n|^2\right)^{p/2} + (K_\tau^n)^p\right] \le CE\left[\sup_{t \in [0,\ \tau]} |Y_t|^p + (L_\tau^{+,*})^p + \left(\int_0^\tau |f_s(L_s^{+,*},\ 0)|ds\right)^p + \rho(m)\right] \tag{3}$$

보조정리 4 가정 2가 성립되고 임의의 자연수 $n \in \mathbf{N}$에 대하여 $(Y^n,\ Z^n,\ K^n)$을 방정식 (2)의 풀이라고 하면 $m,\ \lambda,\ p,\ T$에 관계되는 어떤 상수 C가 있어서 $p > 1$에 대하여 다음식이 성립된다.

$$E\left[\sup_{s \in [t, T]} |Y_s^n - L_s^{+,*}|^p + \left(\int_t^T |Z_s^n|^2\, ds\right)^{\frac{p}{2}} + (K_T^n)^p\right] \le CE\left[|\xi|^p + (L_T^{+,*p}) + \left(\int_t^T |f_s(L_s^{+,*},\ 0)|\, ds\right)^p\right]$$

정리 2 가정 2가 성립되고 $(Y^n,\ Z^n,\ K^n)$을 역방향확률미분방정식 (1)의 풀이라고 하면 $\|Y^n - Y\|_{S^p} \to 0,\ \|Z^n - Y\|_{H^p} \to 0,\ \|K^n - Y\|_{S^p} \to 0$이다. 여기서 $(Y,\ Z,\ K)$는 $Y \in S^p$, $Z \in H^p$, $K \in S^p$인 반사를 가지는 역방향확률미분방정식의 풀이이다.

참 고 문 헌

[1] S. Fan; J. Math. Anal. Appl., 432, 156, 2015.
[2] S. Hamadene et al.; Stoch. Dyn., 12, 2, 35, 2012.
[3] A. Rozkosz et al.; Stochastic. Peocess. Appl., 122, 3875, 2012.

주체109(2020)년 3월 15일 원고접수

One Condition of Existence and Uniqueness of L^p-Solutions in Reflected BSDE

Pak In Hyang, Kim Mun Chol

In this paper, we studied the existence and uniqueness of solution in reflected BSDE under the weak monotonicity.

Keywords: reflected backward stochastic differential equation, weak monotonicity