김일성종합대학학보 JOURNAL OF KIM IL SUNG UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체104(2015)년 제61권 제10호 Vol. 61 No. 10 JUCHE104(2015).

순서바나흐공간에서의 리프쉬츠함수에 관한 일반화된 그론월형부등식

김명숙, 조연희

그론월부등식[7]은 미분방정식의 정성적리론과 볼테라적분방정식리론을 전개하는데서 매우 중요한 역할을 한다.

선행연구[1]에서는 그론월부등식을 두변수함수인 경우에로, 선행연구[8]에서는 일반 n 변수함수인 경우에로, 선행연구[4]에서는 그론월부등식을 n 차원벡토르값함수인 경우에로 일반화하였다.

선행연구[6]에서는 순서바나흐공간에서 추상화된 선형그론월형부등식을 론의하였다.

그론월부등식의 중요한 비선형일반화의 하나는 잘 알려진 비하리의 부등식[5]이다.

선행연구[3]에서는 비하리의 부등식을 적분항이 여러개인 경우로 일반화하였으며 선행연구[2]에서는 피적분함수가 기지함수와 미지함수의 어떤 제곱인 경우의 적분부등식을 연구하였다.

론문에서는 피적분함수가 공간변수에 관하여 리프쉬츠조건이 만족된다는 가정밑에서 실수값함수를 바나흐공간값함수로 일반화하면서도 선형적분부등식을 비선형적분부등식으로 일반화하는 두가지 측면에서 그론월부등식을 일반화하는 문제를 론의하였다.

$\boldsymbol{E}$ 를 노름 $\|x\|$ $(x\in\boldsymbol{E})$ 와 반순서관계 $\le$ 가 도입된 순서바나흐공간, $t_0,\ t_1\in\boldsymbol{R}$ 를 $t_0<t_1$ 을 만족시키는 실수라고 하자.

넘기기 $f:[t_0,\ t_1]\times\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}$; $(t,\ x)\to f(t,\ x)$ 가 련속이라고 하자.

$y_0\in\boldsymbol{E}$ 라고 하고 다음의 상미분방정식의 초기값문제에 대하여 론의하자.

$$\frac{dy}{dt}=f(t,\ y) \tag{1}$$

$$y(t_0)=y_0 \tag{2}$$

초기값문제 (1), (2)에 대하여 넘기기 $\varphi:[t_0,\ t_1]\to\boldsymbol{E}:t\mapsto\varphi(t)$ 에 관한 적분방정식 $\varphi(t)=y_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\ \varphi(s))ds\ \ (t\in[t_0,\ t_1])$ 를 론의한다.

정리 련속넘기기 $f:[t_0,\ t_1]\times\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}$ 가 둘째 변수에 관하여 리프쉬츠조건을 만족시키고 비감소이면 $y(t),\ t\in[t_0,\ t_1]$ 을 초기값문제 (1), (2)의 풀이라고 하자.

만일 련속넘기기 $u:[t_0,\ t_1]\to\boldsymbol{E}$ 가 임의의 $t\in[t_0,\ t_1]$ 에 대하여

$$u(t)\le y_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\ u(s))ds \tag{3}$$

를 만족시키면 임의의 $t\in[t_0,\ t_1]$ 에 대하여 $u(t)\le y(t)$ 가 성립된다.

증명 이제 $\varphi_0(t)=u(t),\ t\in[t_0,\ t_1]$,

$$\varphi_{k+1}(t)=y_0+\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_k(s))ds,\ \ t\in[t_0,\ t_1],\ \ k\ge 0 \tag{4}$$

으로 놓는다.

정리의 가정으로부터 어떤 $L>0$ 이 있어서 임의의 $(t,\ x_1),\ (t,\ x_2)\in[t_0,\ t_1]\times \boldsymbol{E}$ 에 대하여 다음의 식이 성립된다.

$$\| f(t,\ x_1)-f(t,\ x_2)\|\le L\| x_1-x_2\| \tag{5}$$

$M=\sup\limits_{t_0\le t\le t_1}\| f(s,\ u(s))\|$라고 놓고 $k\ge 0$ 에 대하여 련속넘기기 $\psi_k:[t_0,\ t_1]\to \boldsymbol{E}$ 를

$$\psi_0(t)=y_0\ \ (t\in[t_0,\ t_1]),\ \ \psi_k(t)=\varphi_k(t)-\varphi_{k-1}(t)\ \ (k\ge 1,\ t\in[t_0,\ t_1])$$

와 같이 정의하고 $k\ge 1$에 대하여 다음의 식이 성립된다는것을 보자.

$$\|\psi_k(t)\|\le \frac{M}{L}\frac{(L(t-t_0))^k}{k!} \tag{6}$$

사실 $k=1$ 인 경우 $\|\psi_1(t)\|=\|\varphi_1(t)-y_0\|=\left\|\int_{t_0}^{t} f(s,\ u(s))ds\right\|\le\int_{t_0}^{t}\| f(s,\ u(s))\| ds\le M(t-t_0)$ 이므로 식 (6)이 성립된다.

다음으로 k인 경우 식 (6)이 성립된다고 가정하고 $k+1$인 경우 식 (6)이 성립된다는것을 말하자.

k인 경우 식 (6)이 성립되므로 식 (5)를 고려하면

$$\|\psi_{k+1}(t)\|=\|\varphi_{k+1}(t)-\varphi_k(t)\|=\left\|\int_{t_0}^{t} f(s,\ \varphi_k(s))-f(s,\ \varphi_{k-1}(s))ds\right\|\le$$

$$\le\int_{t_0}^{t}\| f(s,\ \varphi_k(s))-f(s,\ \varphi_{k-1}(s))\| ds\le L\int_{t_0}^{t}\frac{M}{L}\frac{(L(s-t_0))^k}{k!}ds=\frac{M}{L}\frac{(L(t-t_0))^{k+1}}{(k+1)!}$$

이므로 $k+1$인 경우 식 (6)이 성립된다.

식 (6)으로부터 합렬 $\| y_0\|+\frac{M}{L}\frac{(L(t_1-t_0))^k}{k!}$ 은 합렬 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\psi_j(t)$ 의 우합렬이며 이 합렬이 수렴하므로 함수항합렬 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\psi_j(t)$ 는 $[t_0,\ t_1]$ 에서 평등수렴한다. 따라서 합렬 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\psi_j(t)$ 의 k째 부분합들로 된 함수렬 $y_0,\ \varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ \cdots,\ \varphi_k(t),\cdots$ 은 $[t_0,\ t_1]$에서 평등수렴한다.

이로부터 함수렬 $\varphi_0(t),\ \varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\cdots,\ \varphi_k(t),\cdots$도 $[t_0,\ t_1]$에서 평등수렴한다.

$\varphi(t)=\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k(t)$라고 놓고 식 (4)에서 극한 $k\to\infty$를 취하면 $\varphi(t)=y_0+\int_{t_0}^{t} f(s,\ \varphi(s))ds$ 를 얻으므로 $\varphi(t),\ t\in[t_0,\ t_1]$은 초기값문제 (1), (2)의 풀이이다.

이제 임의의 $k\ge 0$에 대하여

$$\varphi_k(t)\le y_0+\int_{t_0}^{t} f(s,\ \varphi_k(s))ds,\ t\in[t_0,\ t_1] \tag{7}$$

이 성립된다는것을 증명하자.

$k=0$ 인 경우에는 식 (3)에 의하여 식 (7)이 성립된다.

이제 $k \ge 0$ 에 대하여 식 (7)이 성립된다고 가정하고 $k+1$ 인 경우에 식 (7)이 성립된다는것을 증명하자.

$\varphi_k(t) \le y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\ \varphi_k(s))ds = \varphi_{k+1}(t)$ 이므로 $f(t,\ x)$ 의 둘째 변수에 관한 단조비감소성으로부터 $f(t,\ \varphi_k(t)) \le f(t,\ \varphi_{k+1}(t))$ 이고 따라서

$$\varphi_{k+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\ \varphi_k(s))ds \le y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\ \varphi_{k+1}(s))ds$$

를 얻는다. $k+1$ 인 경우에 식 (7)이 성립된다.

이상의 론의를 통하여 다음의 식이 성립된다는것도 증명된다.

$$\varphi_k(t) \le \varphi_{k+1}(t),\ \ t \in [t_0,\ t_1],\ \ k \ge 0 \tag{8}$$

식 (7), (8)로부터 $u(t) \le y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\ \varphi_k(s))ds,\ t \in [t_0,\ t_1],\ \ k \ge 0$ 이 성립된다.

식 (8)에서 극한 $k \to \infty$ 를 취하면 $u(t) \le \varphi(t),\ t \in [t_0,\ t_1]$ 이 성립된다.

그런데 초기값문제 (1), (2)의 풀이는 유일하므로 $y(t) = \varphi(t),\ t \in [t_0,\ t_1]$ 이다.

이로부터 $u(t) \le y(t),\ t \in [t_0,\ t_1]$ 을 얻는다.(증명끝)

따름 1 $u(t),\ b(t)$ 를 $[t_0,\ t_1]$ 에서 정의되고 순서바나흐공간 $\boldsymbol{E}$ 에서 값을 취하는 련속함수라고 하고 $y_0 \in \boldsymbol{E}$ 라고 하자. 또한 매 $t \in [t_0, t_1]$ 에 관하여 $A(t)$ 가 $\boldsymbol{E}$ 에서의 정값련속선형연산자이고 $A(t)$ 가 t 에 관하여 련속이라고 하자.

그리고 임의의 $t,\ s \in [t_0,\ t_1]$ 에 대하여 $A(t)A(s) = A(s)A(t)$ 가 성립된다고 하자.

이때 $\forall t \in [t_0,\ t_1],\ u(t) \le y_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)u(s) + b(s)]ds$ 이면 다음의 식도 성립된다.

$$u(t) \le \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(\sigma)d\sigma\right) y_0 + \int_{t_0}^{t} \exp\left(\int_{s}^{t} A(\sigma)d\sigma\right) b(s)ds$$

따름 2 $T > 0$ 이고 련속함수 $u(t),\ t \in [0,\ T]$ 가 부등식

$$u(t) \le 1 + \int_{0}^{t} \frac{2}{1+e^{-u(s)}} ds\ \ (t \in [0,\ T]) \tag{9}$$

를 만족시키면 초기값문제

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2}{1+e^{-y}}, \tag{10}$$

$$y(0) = 1 \tag{11}$$

의 풀이를 $y(t),\ t \in [0,\ T]$ 라고 할 때 $u(t) \le y(t),\ t \in [0,\ T]$ 가 성립된다.

증명 $g(y) = 2/(1+e^{-y}),\ y \in \boldsymbol{R}$ 라고 놓을 때 이 함수는 미분가능한 증가함수이며

$$g(y) > 0,\ \ y \in \boldsymbol{R}$$

가 만족된다.

$|g'(y)|=\frac{e^{-y}}{(1+e^{-y})^2}\le\frac{e^{-y}}{(1+e^{-y})e^{-y}}\le\frac{1}{1+e^{-y}}\le 1$ 이므로 $g(y)$ 는 리프쉬츠조건을 만족시킨다. 그리고 $g(y)$ 는 유계함수이다. 따라서 임의의 $T>0$ 에 대하여 초기값문제 (10), (11)의 풀이가 구간 $[0, T]$ 에서 존재한다. 따라서 정리로부터 따름의 주장을 얻는다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] A. Abdeldalm et al.; Int. Journal of Math. Analysis, 13, 4, 607, 2010.

[2] E. Babolian et al.; Int. J. Contemp. Math. Sciences, 16, 6, 771, 2011.

[3] Li Xu Dong; J. of Sichuan of Science and Technology, 21, 3, 79, 2002.

[4] Qi Ming Nan et al.; J. of Linyi Teachers College, 18, 3, 6, 1996.

[5] Shi Peilin et al.; J. of Harbin Institute of Technology, 27, 3, 34, 1995.

[6] Yang Zhi Lin et al.; J. of Huaihua Teachers College, 20, 2, 1, 2001.

[7] Zhang Wei Nian; Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Chengduensis, 14, 1, 15, 1995.

[8] M. Zhou et al.; J. of Southwest China Normal University (Natural Science), 30, 4, 760, 2005.

주체104(2015)년 6월 5일 원고접수

Generalized Gronwall Type Inequality with Lipsitz Function in Ordered Banach Space

Kim Myong Suk, Jo Yon Hui

Gronwall inequality plays an important role in developing qualitative theory for the ordinary differential equation and Volterra integral equation theory.

In this paper, we obtained an estimation of the function satisfying generalized nonlinear Gronwall typed inequality with Lipsitz function in ordered Banach space.

Key words: Gronwall inequality, ordinary differential equation