조합적방법에 기초한 완전그라프와 완전두조그라프의 결합그라프에서 생성나무와 생성수림개수 평가

우 승 식

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《현시대는 과학기술의 시대이며 과학기술의 발전수준은 나라의 종합적국력과 지위를 규정하는 징표로 됩니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 38폐지)

선행연구[1]에서는 완전3조그라프에서의 생성수림총개수를, 선행연구[2]에서는 m, n 개의 정점을 가진 표식붙은 완전2조그라프 $K_{m,\ n}$ 에서의 생성수림개수를 조합분해법으로 평가하였으며 선행연구[3]에서는 $m\le n$ 이고 $n=o(m^{6/5})$ 일 때 $m\to\infty$ 인 경우 완전두조그라프 $K_{m,\ n}$ 의 표식붙은 생성수림의 근사식을 평가하였다.

론문에서는 화학, 생물학, 알고리듬설계 등에서 제기되는 그라프적문제들중의 하나인 표식붙은 결합그라프 $K_m+K_{n,\ p}$ 에서의 뿌리가진 생성나무와 생성수림의 개수평가문제를 조합적방법으로 연구하였다.

정점 z 의 바깥반차수를 $d^+(z)$ 로, 아낙반차수를 $d^-(z)$ 로 표시하자.

정점모임이 서로 비교차하는 두 그라프 $G_1=(V_1,\ E_1)$ 과 $G_2=(V_2,\ E_2)$ 가 주어졌을 때 그라프 $(V_1\cup V_2,\ E_1\cup E_2\cup E(V_1,\ V_2))$ 를 G_1 과 G_2 의 결합그라프라고 부르고 G_1+G_2 로 표시한다. 여기서 $E(V_1,\ V_2)=\{(i,\ j)\,|\,i\in V_1,\ j\in V_2\}$ 이고 $(i,\ j)$ 는 정점 $i\in V_1,\ j\in V_2$ 사이 릉을 의미한다.

분명히 완전두조그라프 $K_{m,\,n}$ 은 그라프 H_m, H_n 에 의해 이루어진 결합그라프이다. 여기서 H_n 은 n 개의 정점들로 이루어지고 릉은 하나도 없는 그라프이다.

론문의 목적은 표식붙은 결합그라프 $K_m+K_{n,\ p}$ 의 생성나무와 생성수림의 개수평가식에 대한 조합적증명을 주는것이다.

이 론문의 전반에 걸쳐 표식붙은 그라프만을 생각한다.

먼저 표식붙은 결합그라프 $K_m+K_{n,\ p}$ 의 생성나무와 생성수림의 개수를 평가하자.

그라프 G 의 정점모임을 $V(G)$ 로 표시하고 표식붙은 결합그라프 $K_m+K_{n,\ p}$ (여기서 K_m 은 정점개수가 m 인 완전그라프, $K_{n,\,p}$ 는 두 정점분할모임의 크기가 각각 n, p 인 완전두조그라프이다.)의 생성나무개수를 어떻게 조합적으로 계산하는가를 보자.

분명히 $K_m+K_{n,\ p}=(K_m+H_n)+H_p$ 이다.

K_m 에 l 개의 뿌리가 있고 H_n 에 k 개의 뿌리가 있는 K_m+H_n 의 표식붙은 생성수림들의 모임을 $D(m,\ l;\,n,\ k)$, 그 개수를 $g(m,\ l;\,n,\ k)=|D(m,\,l;\,n,\ k)|$ 라고 하자.

보조정리[2] K_m 에 l 개의 뿌리가 있고 H_n 에 k 개의 뿌리가 있는 K_m+H_n 의 표식붙은 생성수림의 개수 $g(m,\,l;\ n,\ k)$ 는 다음과 같다.

$$g(m,\ l;\,n,\ k)=\binom{m}{l}\binom{n}{k}m^{n-k-1}(m+n)^{m-l-1}(lm+mk+nl-lk) \qquad (1)$$

정리 1 결합그라프 $K_m+K_{n,\,p}$ 의 표식붙은 생성나무개수 $g(m,\ n,\ p)$ 는 다음과 같다.

$$g(m,\ n,\ p)=(m+n)^{p-1}(m+p)^{n-1}(m+n+p)^m \tag{2}$$

증명 먼저 $V(K_m+H_n)=\{x_1,\ x_2,\cdots,\ x_m;\, y_1,\ y_2,\cdots,\ y_n\}$ 과 $V(H_p)=\{z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_p\}$ 를 각각 K_m+H_n 과 H_p 의 정점모임이라고 하자.

$z_1\in V(H_p)$ 를 $K_m+K_{n,\,p}$ 의 주어진 뿌리라고 하고 $Z':=V(H_p)\setminus\{z_1\}$ 이라고 하자.

$D(m,\ 0;\ n,\ 0;p,\ |\{z_1\}|)$ 을 뿌리가 z_1 인 $K_m+K_{n,\ p}$ 의 표식붙은 생성나무들의 모임, $T(m,\ n)$ 을 K_m+H_n 의 표식붙은 생성나무들의 모임이라고 하면 분명히 다음식이 성립한다.

$$g(m,\ n,\ p)=|D(m,0\,;n,\ 0;\ p,\ |\{z_1\}|)| \tag{3}$$

매 그라프 $F\in D(m,\ l;\ n,\ k)$ 로부터의 $D(m,\ 0;n,\ 0;\ p,\ |\{z_1\}|)$ 에 속하는 생성나무들에 대한 구성은 다음과 같다.

매 $z\in Z'$ 와 어떤 $v\in V(F)$ 사이를 릉 $(z,\ v)$ 로 련결하자.

이러한 방법은 $(m+n)^{p-1}$ 가지 있다.

얻어진 그라프 G 는 매 성분은 $V(K_m)\cup V(H_n)$ 에 있는 유일한 정점만이 바깥반차수가 0이고 나머지정점들은 모두 바깥반차수가 1인 $l+k$ 개의 (약)련결성분을 가진다.

이제 $0\le t\le l+k-1$ 인 임의의 고정된 옹근수 t 에 대하여 임의의 정점 $z\in Z'$ 와 이미 얻어진 그라프에서 z 를 포함하지 않는 임의의 성분에서 바깥반차수가 0인 (유일한)정점 $v\in V(K_m)\cup V(H_n)$ 사이를 $(v,\ z)$ 형태의 릉으로 련결하는데 이러한 과정을 t 번 반복한다.

그러면 t 개의 릉이 G 에 첨가된다. 이때 t 개의 릉이 G 에 첨가되는 순서를 무시하면 $\dfrac{[(p-1)(l+k-1)][(p-1)(l+k-2)]\cdots[(p-1)(l+k-t)]}{t!}=\dbinom{l+k-1}{t}(p-1)^t$ 개의 서로 다른 그라프들이 얻어지므로 F 로부터 얻어지는 생성나무의 개수는 $\displaystyle\sum_{t=0}^{l+k-1}\binom{l+k-1}{t}(p-1)^t=p^{l+k-1}$ 과 같다.

식 (1), (3)에 의하여

$$g(m,\ n,\ p)=|D(m,\ 0;n,\ 0\,;\ p;\ |\{z_1\}|)|=\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}|D(m,\ l,\ n,\ k\,)|\,p^{l+k-1}(m+n)^{p-1}=$$
$$=(m+n)^{p-1}(m+p)^{n-1}(m+n+p)^m$$

그러므로 정리가 증명된다.(증명끝)

정리 2 결합그라프 $K_m+K_{n,\ p}$ 의 모든 생성수림의 개수 $S(m,\ n,\ p)$ 는 다음과 같다.

$$S(m,\ n,\ p)=(m+n+p+1)^{m+1}(m+n+1)^{p-1}(m+p+1)^{n-1} \tag{4}$$

증명 r 개의 뿌리들은 $V(H_p)$ 에 있고 나머지뿌리들은 $V(K_m)$ 혹은 $V(H_n)$ 에 있는 결합그라프 $K_m+K_{n,\,p}$ 의 생성수림들의 모임을 $B(p,\ r)$ 라고 하자.

매 그라프 $F\in D(m,\ l;\ n,\ k)$ 에 대하여 $V(H_m)$ 에 r 개의 뿌리가 있는 $K_m+K_{n,\ p}$ 의 표식붙은 뿌리가진 생성수림들은 다음과 같이 구성한다.

$z_{i_1},\ z_{i_2},\cdots,\ z_{i_r}\in V(H_p)$ 를 뿌리정점들이라고 하자.

이때 $V(H_p)$ 에서 r 개의 뿌리를 선택하는 방법의 가지수는 $\dbinom{p}{r}$ 이다.

$Z'=V(H_p)\setminus\{z_{i_1},\ z_{i_2},\cdots,\ z_{i_r}\}$ 라고 하면 매 $z\in Z'$ 와 어떤 $v\in V(F)$ 사이를 릉 $(z,\ v)$ 로

련결하는 방법의 가지수는 $(m+n)^{p-r}$ 이다.

얻어진 그라프 G는 매개가 $V(K_m)\cup V(H_n)$에 속하는 유일한 정점만이 바깥반차수가 0이고 나머지정점들은 모두 바깥반차수가 1인 $l+k$개의 (약)련결성분을 가진다.

임의의 고정된 $t(0\le t\le l+k-1)$에 대하여 $z\in Z'$와 이미 얻어진 그라프에서 z를 포함하지 않는 임의의 성분에서 바깥반차수가 0인 (유일한)정점 $v\in V(K_m)\cup V(H_n)$ 사이에 릉 $(v,\ z)$형태의 릉을 첨가한다. 이러한 과정을 t번 반복한다.

그러면 $\dfrac{[(p-r)(l+k-1)][(p-r)(l+k-2)]\cdots[(p-r)(l+k-t)]}{t!}=\binom{l+k-1}{t}(p-r)^{ti}$ 개의 그라프가 생겨난다.

얻어진 매 그라프 G'는 $l+k-t$개의 성분들을 가지는데 그 매개는 $V(K_m)\cup V(H_n)$의 유일한 정점만이 바깥반차수가 0이고 나머지정점들은 모두 바깥반차수가 1이다.

이제 바깥반차수가 0인 이 정점들중 어떤 정점으로부터 k개의 뿌리들 $z_{i_1},\ z_{i_2},\cdots,\ z_{i_r}$에로 릉들을 련결하면 G를 포함하는 $B(p,\ r)$에 속하는 어떤 수림이 얻어진다.

이러한 G를 포함하는 $B(p,\ r)$에 속하는 수림들의 개수는

$$\sum_{t=0}^{l+k-1}\binom{l+k-1}{t}(p-r)^t(r+1)^{l+k-t}=(r+1)(p+1)^{l+k-1}$$

이므로 식 (2), (3)에 의하여

$$S(m,\ n,\ p)=\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}|D(m,\ l;\ n,\ k)|\sum_{r=0}^{p}\binom{p}{r}(m+n)^{p-r}(r+1)(p+1)^{l+k-1}=$$
$$=(m+n+p+1)^{m+1}(m+n+1)^{p-1}(m+p+1)^{n-1}$$

이 성립된다. 따라서 정리가 증명된다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보(자연과학), 63, 5, 6, 주체106(2017).

[2] Y. Jin et al.; Ars Combin., 70, 135, 2004.

[3] D. Stark; Discrete Math., 313, 1256, 2013.

주체107(2018)년 6월 5일 원고접수

Enumeration for Spanning Trees and Forests in Join Graphs of a Complete Graph and a Complete Bipartite Graph Based on the Combinatorial Method

U Sung Sik

This paper discusses the enumeration for rooted spanning trees and forests in join graphs of a complete graph and a complete bipartite graph. The goal of this paper is to give closed formula of the enumeration for spanning trees and forests in join graphs of a complete graph and a complete bipartite graph based on the combinatorial method.

Key words: spanning tree, spanning forest, join graph