김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제4호

일반화된 안장점문제에 대한 비선형우자와알고리듬

황명근, 박영성, 한류경

론문에서는 일반화된 안장점문제를 반복적으로 풀기 위한 비정확한 우자와알고리듬의 수렴성을 개선하기 위하여 슈르분해선행처리기를 리용한 새로운 비선형우자와알고리듬을 제기하고 수렴성을 해석하고 수치실험을 통하여 제기된 방법의 효과성을 검증하였다.

1. 선행연구결과와 문제설정

H_1과 H_2는 $(\cdot, \cdot)$로 표시되는 스칼라적을 가진 유한차원힐베르트공간들이라고 하자. 일반화된 안장점문제[1]

$$\begin{pmatrix} A & B^{\mathrm{T}} \\ B & -C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \tag{1}$$

를 론의하자. 여기서 $A: H_1 \to H_1$은 선형대칭정의정값행렬이며 $B: H_1 \to H_2$는 선형넘기기에 대응하는 행렬, $B^{\mathrm{T}}: H_2 \to H_1$은 B의 공액, $C: H_2 \to H_2$는 선형대칭정의반정값행렬이라고 가정하자. 그리고 $f \in H_1,\ g \in H_2$들은 주어지고 $x \in H_1,\ y \in H_2$들은 미지수들이다.

선행연구[4]에서는 안장점문제($C=0$)에 대한 우자와형알고리듬과 변형들을 제기하고 수렴성해석을 진행하였다. 선행연구[2]에서는 선행처리기들을 리용한 비정확한 우자와알고리듬을 제기하고 선행처리기의 선택방법을 론의하였으며 콜레스키분해에 의한 선행처리공액경사법을 리용한 알고리듬을 구성하고 수렴성해석을 진행하였다. 선행연구[1]에서는 일반화된 안장점문제($C \neq 0$)에 대한 우자와형반복법들을 제기하고 수렴성해석을 진행하였다. 선행연구[3]에서는 일반화된 안장점행렬의 고유값평가에 대하여 론의하였다.

선행연구[1]에서 제기된 알고리듬들과 수렴성정리들은 다음과 같다.

알고리듬 1 $x_0 \in H_1,\ y_0 \in H_2$에 대하여 반복렬 $\{(x_i,\ y_i)\}$는 $i=0,\ 1,\ \cdots$에 대하여

$$\begin{cases} x_{i+1}=x_i+Q_A^{-1}(f-(Ax_i+B^{\mathrm{T}}y_i)) \\ y_{i+1}=y_i+Q_B^{-1}(Bx_{i+1}-Cy_i-g) \end{cases} \tag{2}$$

로 주어진다. 여기서 선행처리기 Q_B는

$$((BA^{-1}B^{\mathrm{T}}+C)v,\ v) \le (Q_B v,\ v) \ \ (\forall v \in H_2) \tag{3}$$

를 만족시킨다.

식 (3)으로부터 $\gamma \in [0,\ 1)$에 대하여

$$(1-\gamma)(Q_B v,\ v) \le ((BA^{-1}B^{\mathrm{T}}+C)v,\ v) \ \ (\forall v \in H_2) \tag{4}$$

이다. 또한 선행처리기 Q_A는

$$(Av,\ v) \le (Q_A v,\ v) \ \ (\forall v \in H_1,\ v \neq 0) \tag{5}$$

를 만족시킨다. 식 (5)로부터

$$(1-\delta)(Q_A v,\ v) \le (Av,\ v) \quad (\forall v \in H_1) \tag{6}$$

를 만족시키는 $\delta \in [0,\ 1)$이 존재한다. $Q_A - A$와 Q_B가 대칭정의정값행렬이므로 $H_1 \times H_2$에서 스칼라적을 다음과 같이 정의한다.[2]

$$\left[\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}\right] = \left(\begin{pmatrix} Q_A - A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}\right) \equiv ((Q_A - A)u,\ r) + (Q_B v,\ s)$$

정리 1 식 (3), (5)가 성립하고 γ와 δ는 각각 식 (4), (6)을 만족시킨다고 하자. $\{x,\ y\}$는 식 (1)에 대한 풀이, $\{(x_i,\ y_i)\}$는 알고리듬 1에 의한 근사풀이라고 하고

$$e_i = \begin{pmatrix} x - x_i \\ y - y_i \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} e_i^x \\ e_i^y \end{pmatrix},\ [|q|]^2 = [q,\ q]$$

로 놓자. 그러면 $i = 0,\ 1,\ \cdots$에 대하여

$$[|e_i|] \le \rho^i [|e_0|],\ \ \rho = (\gamma(1-\delta) + \sqrt{\gamma^2(1-\delta)^2 + 4\delta})/2$$

가 성립한다. A의 비선형근사거꿀을 넘기기 $\Psi : H_1 \to H_1$로 정의한다. $\varphi \in H_1$에 대하여 $\Psi(\varphi)$는 $A\xi = \varphi$의 풀이 ξ에 대한 근사이다. 이 근사가 어떤 $\delta < 1$에 대하여

$$\| \Psi(\varphi) - A^{-1}\varphi \|_A \le \delta \| \varphi \|_{A^{-1}} \quad (\forall \varphi \in H_1) \tag{7}$$

을 만족시킨다고 하자.

알고리듬 2 $x_0 \in H_1,\ y_0 \in H_2$에 대하여 반복렬 $\{(x_i,\ y_i)\}$는 $i = 0,\ 1,\ \cdots$에 대하여

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + \psi(f - (Ax_i + B^{\mathrm{T}} y_i)) \\ y_{i+1} = y_i + Q_B^{-1}(Bx_{i+1} - Cy_i - g) \end{cases} \tag{8}$$

이다.

정리 2 식 (3), (7)이 성립하고 γ는 식 (4)를 만족시킨다고 하자. $\{x,\ y\}$는 식 (1)에 대한 풀이이고 $\{(x_i,\ y_i)\}$는 알고리듬 2에 의한 근사풀이라고 하자. 그러면 x_i와 y_i는 $\delta < (1-\gamma)/(3-\gamma)$일 때 각각 x와 y에로 수렴한다. 이 경우에 다음의 부등식들이 성립한다.

$$\frac{\delta}{1-\delta}(Ae_i^x,\ e_i^y) + (Q_B e_i^x,\ e_i^y) \le \rho^{2i}\left(\frac{\delta}{1-\delta}(Ae_0^x,\ e_0^y) + (Q_B e_0^x,\ e_0^y)\right)$$

$$(Ae_i^x,\ e_i^y) \le (1+\delta)(1+2\delta)\rho^{2i-2}\left(\frac{\delta}{1-\delta}(Ae_0^x,\ e_0^y) + (Q_B e_0^x,\ e_0^y)\right)$$

여기서

$$\rho = (2\delta + \gamma + \sqrt{(2\delta+\gamma)^2 + 4\delta(1-\gamma)})/2$$

수렴성정리와 수치실험결과는 알고리듬 2가 알고리듬 1의 수렴속도를 개선하지 못한다는것을 보여준다.

론문에서는 비정확한 우자와알고리듬의 수렴속도를 개선하기 위하여 슈르분해선행처리기를 리용한 한가지 비선형알고리듬을 제기하고 수렴성을 증명하며 수치실험을 통하여 제기된 방법의 효과성을 검증하였다.

2. 새로운 비선형우자와알고리듬

알고리듬 2는 안장점문제 (1)에 대한 슈르분해련립방정식

$$(BA^{-1}B^{\mathrm{T}}+C)y=(BA^{-1}f-g)$$

를 풀기 위한 리차드손반복이다. 만일 연산자 $S\equiv BA^{-1}B^{\mathrm{T}}+C$ 가 매우 나쁜 조건을 가지지 않았다면 $\tau\approx\tau_{opt}\equiv 2/(\lambda_M+\lambda_m)$ 로 취하여 수렴성을 개선할수 있다. 슈르분해연산자는 비선형선행처리기로 리용하기 편리하다. 수렴성을 가속시키기 위하여 다른 비선형우자와알고리듬 즉 슈르분해의 거꿀 $(BA^{-1}B^{\mathrm{T}}+C)^{-1}$의 비선형근사를 리용한다.

알고리듬 3 $x_0\in H_1,\ y_0\in H_2$에 대하여 반복렬 $\{(x_i,\ y_i)\}$는 $i=0,\ 1,\ \cdots$에 대하여

$$\begin{cases}x_{i+1}=x_i+Q_A^{-1}(f-(Ax_i+B^{\mathrm{T}}y_i))\\ y_{i+1}=y_i+\psi(Bx_{i+1}-Cy_i-q)\end{cases}\tag{9}$$

이다. $\varphi\in H_2$ 에 대하여 $\psi(\varphi)$는 근사슈르분해련립방정식 $(BQ_A^{-1}B^{\mathrm{T}}+C)\xi=\varphi$ 의 풀이 ξ 에 대한 근사이다. 이 근사가 어떤 $\varepsilon<1$에 대하여

$$\|\psi(\varphi)-(BQ_A^{-1}B^{\mathrm{T}}+C)^{-1}\varphi\|_{(BQ_A^{-1}B^{\mathrm{T}}+C)}\le\varepsilon\|\varphi\|_{(BQ_A^{-1}B^{\mathrm{T}}+C)^{-1}}\tag{10}$$

을 만족시킨다고 하자.

정리 3 식 (5), (6), (10)들이 성립한다고 하자. $\{x,\ y\}$가 식 (1)에 대한 풀이이고 $\{(x_i,\ y_i)\}$를 알고리듬 3에 의한 근사풀이라고 하자. 그러면 $x_i,\ y_i$는

$$\delta<1/2,\ \ \varepsilon<1-2\delta\tag{11}$$

일 때 각각 x와 y에로 수렴한다. 이 경우에 다음의 부등식들이 성립한다.

$$\delta(1+\varepsilon)(Q_Ae_i^x,\ e_i^y)+((BQ_A^{-1}B^{\mathrm{T}}+C)e_i^x,\ e_i^y)\le\rho^{2i}(\delta(1+\varepsilon)(Q_Ae_0^x,\ e_0^y)+((BQ_A^{-1}B^{\mathrm{T}}+C)e_0^x,\ e_0^y))\tag{12}$$

$$(Q_Ae_i^x,\ e_i^y)\le(1+\delta/(1+\varepsilon))\rho^{2i-2}(\delta(1+\varepsilon)(Q_Ae_0^x,\ e_0^y)+((BQ_A^{-1}B^{\mathrm{T}}+C)e_0^x,\ e_0^y))\tag{13}$$

여기서

$$\rho=\left(\delta+\varepsilon+\sqrt{(\delta+\varepsilon)^2+4\delta}\right)/2\tag{14}$$

이다.

3. 수치실험결과

고찰하려는 문제는 다음과 같다.

$$\begin{cases}-\upsilon\Delta u+\operatorname{grad}p=f\in\Omega\\ \operatorname{div}u=0\in\Omega\end{cases}\tag{15}$$

여기서 $\Omega=[0,\ 1]\times[0,\ 1]$이고 경계조건은 $u_x=u_y=0\ \ (x=0,\ \ y=0,\ \ x=1)$이고 $u_x=1,\ u_y=0$ $(y=1)$이다. 식 (15)를 리산화하기 위해 정방형요소들의 $n\times n$ 평등그물에 기초한 유한요소부분분할을 선택한다. 리산련립방정식의 결수행렬 $\boldsymbol{A}$는 다음과 같다.($\upsilon=1,\ h=1/n$)

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}A & B^{\mathrm{T}}\\ B & -C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{A} & \mathbf{0} & B_1^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{0} & \hat{A} & B_2^{\mathrm{T}}\\ B_1 & B_2 & -C\end{pmatrix}$$

여기서

$$\hat{A}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}4&-1&-1&-2\\-1&4&-2&-1\\-1&-2&4&-1\\-2&-1&-1&4\end{pmatrix},\ B_1=\frac{h}{2}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$B_2=\frac{h}{2}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},\ C=h^2\begin{pmatrix}2&-1&-1&0\\-1&2&0&-1\\-1&0&2&-1\\0&-1&-1&2\end{pmatrix}$$

알고리듬 1에서는 선행처리기 Q_A를 A의 불완전콜레스키분해 즉 $Q_A=LL^{\mathrm{T}}$로, $Q_B^{-1}=\tau I$로 놓았다. 여기서 $\tau\approx 2/\lambda_{\max}$이고 $\lambda_{\max}$는 제곱법으로 얻은 $B(LL^{\mathrm{T}})^{-1}B^{\mathrm{T}}+C$의 최대고유값이다.

알고리듬 2에서는 $Q_B=I$이고 ψ는 선행처리기가 $Q_A=LL^{\mathrm{T}}$인 PCG법의 한걸음으로 정의된다. 알고리듬 3에서 ψ는 슈르분해련립방정식

$$(B(LL^{\mathrm{T}})^{-1}B^{\mathrm{T}}+C)y_{i+1}=Bx_{i+1}-Cy_i-g$$

에 적용된 CG법의 한걸음으로 정의되고 $Q_A=LL^{\mathrm{T}}$이다.

표에서는 분할에 따르는 3개의 알고리듬들의 반복회수를 보여준다. 반복중단조건은 $\|r^{(k)}\|_2/\|r^{(0)}\|_2\le 10^{-6}$이다.

표. 분할에 따르는 3개의 알고리듬들의 반복회수

방법\분할	8×8	16×16	32×32	64×64
알고리듬1	153	207	230	736
알고리듬2	259	605	756	1 289
알고리듬3	74	104	120	214

참 고 문 헌

[1] M. Z. Zhu et al.; Applied Mathematics and Computation, 250, 463, 2015.
[2] S. Q. Shen et al.; J. Comput. Appl. Math., 233, 2235, 2010.
[3] Z. Z. Bai; J. Comput. Appl. Math., 237, 295, 2013.
[4] J. H. Bramble et al.; SIAM J. Numer. Anal., 34, 1072, 1997.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

A Nonlinear Uzawa Algorithm for Generalized Saddle Point Problems

Hwang Myong Gun, *Pak Yong Song* and *Han Ryu Gyong*

We propose a nonlinear algorithm for generalized saddle point problems to accelerate the convergence of the inexact Uzawa algorithm, and prove its convergence. Also, we show the effectiveness of the proposed method by a numerical example.

Key words: saddle point problem, Uzawa algorithm