김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체103(2014)년 제60권 제6호 Vol. 60 No. 6 JUCHE103(2014).

$\alpha-$접속이 도입된 통계다양체의 일정곡률성

민철림, 로광원

론문에서는 최근시기 정보기하학에서 중요하게 연구되고있는 통계다양체의 일정곡률성에 대하여 고찰한다.

선행연구[2]에서는 통계다양체에 $\alpha-$접속을 도입하고 통계다양체가 $\alpha-$평탄이기 위한 조건을 밝혔으며 선행연구[3]에서는 $\alpha-$접속이 도입된 통계다양체가 공액대칭이기 위한 조건을, 선행연구[1]에서는 $\alpha-$접속이 도입된 통계다양체가 공액리찌대칭이기 위한 조건들을 고찰하였다.

최근시기 통계다양체의 등적아핀구조가 통계다양체의 일정곡률성과 관련되여있다는 사실이 밝혀졌으며 특수한 일정곡률통계다양체인 일정헤쎄곡률헤쎄다양체의 성질들이 고찰되고있다.[3, 4]

선행연구[4]의 연구결과를 분석해보면 $\alpha-$접속이 도입된 통계다양체의 일정곡률성을 고찰해야 할 필요성을 인식하게 된다. 이러한 연구는 또한 선행연구[1−3]의 계승으로도 된다.

이로부터 여기서는 $\alpha-$접속이 도입된 통계다양체가 일정곡률성을 가지기 위한 필요충분조건을 고찰하였다.

통계다양체 $(M,\ g,\ \nabla)$에서는 관계식 $\nabla^{(\alpha)}=\frac{1+\alpha}{2}\nabla+\frac{1-\alpha}{2}\nabla^*$에 의하여 임의의 $\alpha\in\boldsymbol{R}$에 대하여 $\alpha-$접속이 정의되며 $(M,\ g,\ \nabla^{(\alpha)})$는 다시 통계다양체로 된다.

임의의 $\alpha\in\boldsymbol{R}$에 대하여 통계다양체 $(M,\ g,\ \nabla^{(\alpha)})$가 일정곡률통계다양체로 되기 위한 한가지 조건에 대하여 보자.

정리 1 어떤 $\alpha_1,\ \alpha_2\in\boldsymbol{R}$ $(|\alpha_1|\neq|\alpha_2|)$에 대하여 $(M,\ g,\ \nabla^{(\alpha_1)})$과 $(M,\ g,\ \nabla^{(\alpha_2)})$가 일정곡률통계다양체이면 임의의 $\alpha\in\boldsymbol{R}$에 대하여 $(M,\ g,\ \nabla^{(\alpha)})$는 일정곡률통계다양체로 된다.

증명 일반성을 잃지 않고 $\alpha_1\neq 0$이라고 하자.

이때 임의의 $\alpha\in\boldsymbol{R}$에 대하여 성립되는 관계식 $\nabla^{(\alpha)}=\frac{\alpha_1+\alpha}{2\alpha_1}\nabla^{(\alpha_1)}+\frac{\alpha_1-\alpha}{2\alpha_1}\nabla^{(-\alpha_1)}$로부터 통계다양체 (M,∇,g)의 변형텐소르 $K(X,\ Y):=\nabla_XY-\nabla_X^gY$에 대하여

$$R^{(\alpha)}(X,\ Y)Z=\frac{\alpha_1+\alpha}{2\alpha_1}R^{(\alpha_1)}(X,\ Y)Z+\frac{\alpha_1-\alpha}{2\alpha_1}R^{(-\alpha_1)}(X,\ Y)Z+$$
$$+(\alpha_1^2-\alpha^2)[K(Y,\ K(Z,\ X))-K(X,\ K(Y,\ Z))]$$

이며

$$R^{(\alpha_1)}(X,\ Y)Z=k_1\{g(Y,\ Z)X-g(X,\ Z)Y\},\tag{1}$$
$$R^{(\alpha_2)}(X,\ Y)Z=k_2\{g(Y,\ Z)X-g(X,\ Z)Y\}\tag{2}$$

라고 할 때 $R^{(\alpha)}(X,\ Y)Z=[k_2\alpha_1^2-k_1\alpha_2^2+(k_1-k_2)\alpha^2]/(\alpha_1^2-\alpha_2^2)\cdot\{g(Y,\ Z)X-g(X,\ Z)Y\}$ 이다.

즉 $(M,\ g,\ \nabla^{(\alpha)})$ 는 $\dfrac{k_2\alpha_1^2-k_1\alpha_2^2+(k_1-k_2)\alpha^2}{\alpha_1^2-\alpha_2^2}-$일정곡률통계다양체이다.(증명끝)

실례 1 정규분포족공간

$$M=\left\{p(x,\ \theta)\ \middle|\ p(x,\ \theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(\theta^2)^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(\theta^2)^2}(x-\theta^1)^2\right\}\right\},\ \ x\in P\ ,\ \ \theta^1\in P\ ,\ \ \theta^2>0$$

에 리만계량이 $g:=2(\theta^2)^{-2}\sum d\theta^i d\theta^i$, $\alpha-$접속이

$$\nabla^{(\alpha)}_{\frac{\partial}{\partial\theta^1}}\frac{\partial}{\partial\theta^1}=(1-\alpha)(\theta^2)^{-1}\frac{\partial}{\partial\theta^2}\ \ ,\ \ \nabla^{(\alpha)}_{\frac{\partial}{\partial\theta^1}}\frac{\partial}{\partial\theta^2}=\nabla^{(\alpha)}_{\frac{\partial}{\partial\theta^2}}\frac{\partial}{\partial\theta^1}=-(1+\alpha)(\theta^2)^{-1}\frac{\partial}{\partial\theta^1},$$

$$\nabla^{(\alpha)}_{\frac{\partial}{\partial\theta^2}}\frac{\partial}{\partial\theta^2}=(-1+2\alpha)(\theta^2)^{-1}\frac{\partial}{\partial\theta^2}$$

로 정의되면 $(M,g,\nabla^{(0)})$ 은 $(-1/2)-$일정곡률통계다양체이고 $(M,g,\nabla^{(1)})$ 은 평탄통계다양체이며 $(M,g,\nabla^{(\alpha)})$, $\alpha\in\boldsymbol{R}$ 는 $((\alpha^2-1)/2)-$일정곡률통계다양체로 된다.

실례 2 우연결음분포족공간

$$M=\left\{p(x;\theta^1,\ \theta^2)\ \middle|\ p(x;\theta^1,\ \theta^2)=\sqrt{\frac{\theta^2}{2\pi x}}\exp\left\{-\frac{\theta^2 x}{2}+\frac{\theta^2}{\theta^1}-\frac{\theta^2}{2(\theta^1)^2x}\right\},\ \ x,\ \mu,\ \lambda>0\right\}$$

에 리만계량이 $g=\dfrac{\theta^2}{(\theta^1)^3}(d\theta^1)^2+\dfrac{1}{2(\theta^2)^2}(d\theta^2)^2$, $\alpha-$접속이

$$\nabla^{(\alpha)}_{\frac{\partial}{\partial\theta^1}}\frac{\partial}{\partial\theta^1}=\frac{-3(1+\alpha)}{2}(\theta^1)^{-1}\frac{\partial}{\partial\theta^1}+(-1+\alpha)(\theta^1)^{-3}(\theta^2)^2\frac{\partial}{\partial\theta^2},$$

$$\nabla^{(\alpha)}_{\frac{\partial}{\partial\theta^1}}\frac{\partial}{\partial\theta^2}=\nabla^{(\alpha)}_{\frac{\partial}{\partial\theta^2}}\frac{\partial}{\partial\theta^1}=-\frac{-1+\alpha}{2}(\theta^2)^{-1}\frac{\partial}{\partial\theta^1},\ \ \nabla^{(\alpha)}_{\frac{\partial}{\partial\theta^2}}\frac{\partial}{\partial\theta^2}=(-1+\alpha)(\theta^2)^{-1}\frac{\partial}{\partial\theta^2}$$

로 정의되면 $(M,\ g,\nabla^{(0)})$ 은 $(-1/2)-$일정곡률통계다양체, $(M,g,\ \ \nabla^{(1)})$ 은 평탄통계다양체이며 임의의 $\alpha\in\boldsymbol{R}$ 에 대하여 $(M,g,\ \nabla^{(\alpha)})$ 는 $((\alpha^2-1)/2)-$일정곡률통계다양체로 된다.

정리 1로부터 다음의 결과들을 얻을수 있다.

따름 1 어떤 $\alpha_1,\ \alpha_2\in\boldsymbol{R}$ $(|\alpha_1|\neq|\alpha_2|)$ 에 대하여 $(M,\ g,\ \nabla^{(\alpha_1)})$ 과 $(M,\ g,\ \ \nabla^{(\alpha_2)})$ 가 $k-$일정곡률통계다양체들이면 임의의 $\alpha\in\boldsymbol{R}$ 에 대하여 $(M,\ g,\ \ \nabla^{(\alpha)})$ 는 $k-$일정곡률통계다양체로 된다. 여기서 $k_1,\ k_2$ 는 식 (1), (2)에서 정의된 값들이다.

따름 2 어떤 $\alpha_1,\ \alpha_2\in\boldsymbol{R}$ $(|\alpha_1|\neq|\alpha_2|)$ 에 대하여 $(M,\ g,\ \nabla^{(\alpha_1)})$ 과 $(M,\ g,\ \ \nabla^{(\alpha_2)})$ 가 일정곡률통계다양체들이고 $k_1\neq k_2$ 이면 $\alpha^2=\dfrac{k_2\alpha_1^2-k_1\alpha_2^2}{k_2-k_1}$ 을 만족시키는 $\alpha\in\boldsymbol{R}$ 에 대하여 $(M,\ g,\ \ \nabla^{(\alpha)})$ 는 평탄통계다양체로 된다.

실례 3 실례 1, 2에서 $k_1=-1/2,\ k_2=0$ 이고 $\alpha_1=0,\ \alpha_2=1$ 이므로 $\alpha^2=1$ 을 만족시키는 $\alpha\in\boldsymbol{R}$ 에 대하여 주어진 통계다양체들은 평탄통계다양체들로 된다.

정리 2 $(M,\ g,\ \nabla)$ 가 일정헤쎄곡률헤쎄다양체이면 임의의 $\alpha\in\boldsymbol{R}$ 에 대하여 $(M,\ g,\ \nabla^{(\alpha)})$ 는 일정곡률통계다양체로 된다.

증명 $(M,\ g,\ \nabla)$ 가 일정헤쎄곡률헤쎄다양체이면 다음의 식이 성립된다.

$$(\nabla K)(Y,\ Z;\ X)=-\frac{c}{2}\{g(X,\ Y)Z+g(X,\ Z)Y\},\ c\in\boldsymbol{R}$$

한편 레비-찌비따접속 ∇^g 의 곡률텐소르 R^{∇^g} 는

$$R^{\nabla^g}(X,\ Y)Z=R^{\nabla}(X,\ Y)Z-(\nabla K)(Y,Z\ ;X)+(\nabla K)(Z\ ,\ X;Y)+K(X,\ K(Y,\ Z))-K(Y,\ K(Z,\ X))$$

로 표시된다. 여기서 R^{∇} 는 접속 ∇ 의 곡률텐소르이고 K 는 변형텐소르

$$K(X,\ Y):=\nabla_X Y-\nabla_X^g Y\ .$$

이때

$$(\nabla K)(Y,\ Z;X)-(\nabla K)(Z,\ X;Y)=2\{K(X,\ K(Y,Z))-K(Y,\ K(X,\ Z))\}+\frac{1}{2}\{R^{\nabla}(X,\ Y)Z-R^{\nabla^*}(X,\ Y)Z\}$$

이 성립되므로 $R^{\nabla^g}(X,\ Y)Z=-\frac{c}{4}\{g(Y,\ Z)X-g(X,\ Z)Y\}$ 이다. 여기서 R^{∇^*} 은 쌍대접속 ∇^* 의 곡률텐소르이다. 즉 $(M,\ g,\ \nabla^{(g)})$ 는 일정곡률다양체이다. 또한 $(M,\ g,\ \nabla)$ 는 평탄통계다양체이다. 따라서 정리 1로부터 주장이 성립된다.(증명끝)

이상에서 우리는 통계다양체의 일정곡률성을 $\alpha-$접속과의 련관속에서 고찰하였다.

참 고 문 헌

[1] 민철림 등; 조선민주주의인민공화국 과학원통보, 2, 11, 주체98(2009).

[2] J. Zhang; AISM, 59, 161, 2007.

[3] H. Matsuzoe et al.; Diff. Geom. Appl., 24, 567, 2006.

[4] H. Furuhata; Diff. Geom. Appl., 27, 420, 2009.

주체103(2014)년 2월 5일 원고접수

A Curvature Constancy of Statistical Manifolds with $\alpha-$Connection

Min Chol Rim, Ro Kwang Won

We consider conditions for a statistical manifold $(M,\ g,\ \nabla^{(\alpha)})$, $\forall\alpha\in\boldsymbol{R}$ to have a constant curvature. We also show that if $(M,\ g,\ \nabla)$ is a Hessian manifolds with a constant Hessian curvature, $(M,\ g,\ \nabla^{(\alpha)})$, $\forall\alpha\in\boldsymbol{R}$ is a statistical manifold with a constant curvature.

Key words: curvature constancy, statistical manifold