김일성종합대학학보 주체110(2021)년
수 학 제67권 제1호

3단기둥매듭의 레스코프불변량

리강일, 김청송

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《기초과학을 끊임없이 심화발전시키지 않고서는 첨단과학기술을 연구도입할수도 없고 새로운 높은 수준의 과학기술을 연구개발할수도 없습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제22권 21페지)

선행연구[2]에서는 매듭의 레스코프불변량은 교점변화관계에 의하여 정의되는 불변량으로서 그것을 매듭의 장식수술문제[4]의 연구에 리용할수 있다는것이 밝혀졌다. 그러나 임의의 3단기둥매듭에 대하여 레스코프불변량은 아직 결정되지 않았다.

론문에서는 콘웨이다항식[5]의 2차항의 결수가 0인 3단기둥매듭들의 레스코프불변량을 구한다. 이 결과들은 3단기둥매듭의 장식수술문제를 연구하기 위한 수단으로 된다.

선행연구[1]에서의 표시와 용어들을 그대로 리용하겠다.

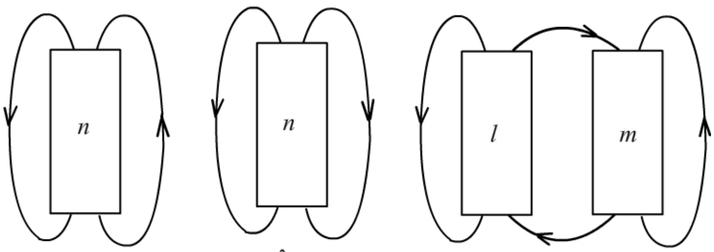
매듭 K의 레스코프불변량 $\omega_3(K)$는 K가 자명매듭일 때 $\omega_3(K)=0$이고 다음의 교점변화관계식을 만족시키는 수값불변량이다.[3]

$$\omega_3(K_+)-\omega_3(K_-)=\frac{a_2(K')+a_2(K'')}{2}-\frac{a_2(K_+)+a_2(K_-)+lk^2(K',\ K'')}{4} \tag{1}$$

여기서 a_2는 콘웨이다항식의 2차항의 결수를 표시하며 K'와 K''는 고찰하는 교점을 제거할 때 얻어지는 얽힘 L_0의 2개의 성분들이고 $lk(K',\ K'')$는 K'와 K''의 얽힘결수이다.

3단기둥매듭 $K(=K_{l,m,n})$에 대하여 단의 교점들의 개수 $l,\ m,\ n$은 옹근수들이며 그것들의 부호는 단의 부호와 같다. 그런데 $a_2(K)=0$이므로 $l,\ m,\ n$들의 부호는 일치할수 없다. 그리고 K에는 끝가지들이 반대방향을 가지는 단이 반드시 존재한다. 그것을 선행연구[1]에서와 같이 c단이라고 하겠다.

이제 매듭 K의 불변량을 계산하기 위하여 다음의 그림에서와 같은 얽힘들을 생각하자.



$\overline{L}_n$ $\hat{L}_n$ $\widetilde{L}_{l,n}$

그림. 얽힘 $\overline{L}_n,\ \hat{L}_n,\ \widetilde{L}_{l,n}$

그러면 매듭의 레스코프불변량의 계산을 간소화할수 있게 하는 다음의 사실이 밝혀진다.

정리 1 3단기둥매듭 K에 대하여 $a_2(K)=0$, $\varepsilon:=\mathrm{sign}(n)$이라고 하자. 이때 n이 홀수이면

$$\omega_3(K_{l,\,m,\,n})=\omega_3(K_{l,\,m,\,\varepsilon})-\frac{(l+m)(n-\varepsilon)(l+m-n+\varepsilon)}{32}$$

이고 n이 짝수이면

$$\omega_3(K_{l,\,m,\,n})=\omega_3(\tilde{K}_{l,\,m,\,\varepsilon})-\frac{(l+m)n(l+m-n)}{32}$$

이다.

증명 c단의 끝교점에 대하여 교점변화관계식 (1)을 생각하자.

분명히 $\varepsilon=1$이면

$$K_+=K_{l,\,m,\,n},\ K_-=K_{l,\,m,\,n-2}$$

이고 $\varepsilon=-1$이면

$$K_+=K_{l,\,m,\,n+2},\ K_-=K_{l,\,m,\,n-2}$$

이다. 이때 L_0은 n이 홀수이면 $\bar{L}_{l+m}$이고 짝수이면 $\hat{L}_{l+m}$이다. 그리고 어느 경우에도 L_0의 두 성분 K'와 K''는 자명매듭들이며

$$lk(K',\ K'')=\frac{l+m}{2}$$

이다. 그러므로 교점변화관계식 (1)은 $\varepsilon=1$이면

$$\omega_3(K_{l,\,m,\,n})=\omega_3(K_{l,\,m,\,n-2})-\frac{1}{4}(a_2(K_{l,\,m,\,n})+a_2(K_{l,\,m,\,n-2}))-\left(\frac{l+m}{4}\right)^2 \tag{2}$$

이고 $\varepsilon=-1$이면

$$\omega_3(K_{l,\,m,\,n})=\omega_3(K_{l,\,m,\,n+2})+\frac{1}{4}(a_2(K_{l,\,m,\,n})+a_2(K_{l,\,m,\,n+2}))+\left(\frac{l+m}{4}\right)^2 \tag{3}$$

이다.

우선 n이 홀수인 경우를 보기로 하자.

$\varepsilon=1$일 때 c단에서 우의 교점변화관계식 (2)를 $n_*:=(n-1)/2$번 반복적용하면 다음의 식이 성립한다.

$$\omega_3(K_{l,\,m,\,n})=\omega_3(K_{l,\,m,\,1})-\frac{1}{4}\left(2\sum_{i=1}^{n_*}a_2(K_{l,\,m,\,2i-1})-a_2(K_{l,\,m,\,1})\right)-n_*\cdot\left(\frac{l+m}{4}\right)^2 \tag{4}$$

그런데 홀수단들만 있을 때의 콘웨이다항식의 2차항의 공식으로부터

$$a_2(K_{l,\,m,\,2i-1})=\frac{1+lm+(2i-1)(l+m)}{4}$$

이 성립하므로

$$2\sum_{i=1}^{n_*}a_2(K_{l,\,m,\,2i-1})-a_2(K_{l,\,m,\,1})=\frac{n_*}{2}(1+lm)+\frac{l+m}{2}\cdot n_*^2-\frac{1}{4}(1+lm+l+m)=$$

$$=\frac{l+m}{8}(n^2-2n-1)+\frac{1+lm}{4}(n-2)$$

이다. 이때

$$a_2(K_{l,\,m,\,n})=\frac{1+lm+n(l+m)}{4}=0$$

이라는것을 고려하면

$$2\sum_{i=1}^{n_*} a_2(K_{l,\,m,\,2i-1}) - a_2(K_{l,\,m,\,1}) = -\frac{l+m}{8}(n-1)^2$$

이 얻어진다. 이 식을 식 (4)에 대입하면 다음과 같다.

$$\omega_3(K_{l,\,m,\,n}) = \omega_3(K_{l,\,m,\,1}) - \frac{l+m}{32}(n-1)(l+m-n+1)$$

$\varepsilon = -1$ 이면 c 단에서 교점변화관계식 (3)을 $n_* := (|n|-1)/2 = -(n+1)/2$ 번 반복적용하면 다음의 결과가 얻어진다.

$$\omega_3(K_{l,\,m,\,n}) = \omega_3(K_{l,\,m,\,-1}) + \frac{1}{4}\left(2\sum_{i=1}^{n_*} a_2(K_{l,\,m,\,1-2i}) - a_2(K_{l,\,m,\,-1})\right) + n_* \cdot \left(\frac{l+m}{4}\right)^2$$

그런데

$$a_2(K_{l,\,m,\,1-2i}) = \frac{1+lm-(2i-1)(l+m)}{4}$$

이다. 그러므로 웃식의 왼변의 두번째 항을 계산하면 다음과 같다.

$$2\sum_{i=1}^{n_*} a_2(K_{l,\,m,\,1-2i}) - a_2(K_{l,\,m,\,-1}) = -\frac{l+m}{8}(n^2+2n-1) - \frac{1+lm}{4}(n+2)$$

그런데 $1+lm = -n(l+m)$ 이므로 웃식의 오른변은 $(l+m)(n+1)^2/8$ 과 같다. 그러므로

$$\omega_3(K_{l,\,m,\,n}) = \omega_3(K_{l,\,m,\,-1}) - \frac{l+m}{32}(n+1)(l+m-n-1)$$

이 성립한다.

다음으로 n 이 짝수인 경우를 보기로 하자.

이 경우에는 $K_{l,\,m,\,0} = \tilde{K}_{l,\,m}$ 이다. 그리고 $n_* := \varepsilon n/2$ 으로 놓을 때 c 단에서 교점변화관계식을 반복적용하면 다음의 결과가 얻어진다.

$$\omega_3(K_{l,\,m,\,n}) = \omega_3(\tilde{K}_{l,\,m}) - \frac{\varepsilon}{4}\left(2\sum_{i=0}^{n_*-1} a_2(K_{l,\,m,\,\varepsilon\cdot 2i}) - a_2(\tilde{K}_{l,\,m})\right) - \frac{n}{2}\cdot\left(\frac{l+m}{4}\right)^2$$

그런데 n 이 짝수인 경우에 콘웨이다항식의 2차항은 다음과 같다.[1]

$$a_2(K_{l,\,m,\,\varepsilon\cdot 2i}) = \frac{l^2+m^2-2}{8} + \varepsilon\cdot\frac{l+m}{2}\cdot i$$

그러므로

$$\sum_{i=0}^{n_*-1} a_2(K_{l,\,m,\,\varepsilon\cdot 2i}) = \frac{l^2+m^2-2}{8}\cdot\frac{\varepsilon n}{2} + \frac{\varepsilon(l+m)}{2}\cdot\frac{1}{2}\frac{\varepsilon n}{2}\left(\frac{\varepsilon n}{2}-1\right) = -\frac{\varepsilon(l+m)}{16}n(n+2\varepsilon)$$

이 성립한다. 여기서

$$a_2(K_{l,\,m,\,n}) = \frac{l^2+m^2-2}{8} + \frac{n(l+m)}{4} = 0$$

이 리용되였다. 따라서

$$2\sum_{i=0}^{n_*-1} a_2(K_{l,\,m,\,\varepsilon\cdot 2i}) - a_2(\tilde{K}_{l,\,m}) = -\frac{\varepsilon}{8}(l+m)n^2$$

이므로

$$\omega_3(K_{l,\,m,\,n}) = \omega_3(\tilde{K}_{l,\,m}) - (l+m)n\cdot\frac{l+m-n}{32}$$

이 성립한다.(증명끝)

정리 1과 류사한 방법으로 다음의 사실이 얻어진다.

정리 2 $l,\ m$이 홀수이고 $\varepsilon=-\mathrm{sign}(l)=\mathrm{sign}(m)$이라고 하자. 이때 다음의 관계식이 성립한다.

$$\omega_3(K_{l,\,m,\,\varepsilon})=-\frac{(l+\varepsilon)(m+\varepsilon)(m+l+2\varepsilon)}{32}$$

정리 3 $l,\ m$이 홀수라고 하자. 이때 다음의 관계식이 성립한다.

$$\omega_3(\tilde{K}_{l,\,m})=-\frac{1}{48}(l^3-l+m^3-m)$$

증명 우선 $\omega_3(\hat{K}_l)$을 계산하자. 교점변화관계식 (1)에 의하여 l의 부호가 ε일 때 다음의 식들이 성립한다.

$$\omega_3(\hat{K}_l)=\omega_3(\hat{K}_{l-2\varepsilon})-\frac{\varepsilon}{4}[a_2(\hat{K}_l)+a_2(\hat{K}_{l-2\varepsilon})]-\frac{\varepsilon}{4}\left(\frac{l-\varepsilon}{2}\right)^2$$

$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$

$$\omega_3(\hat{K}_{3\varepsilon})=\omega_3(\hat{K}_{\varepsilon})-\frac{\varepsilon}{4}[a_2(\hat{K}_{3\varepsilon})+a_2(\hat{K}_{\varepsilon})]-\frac{\varepsilon}{4}\cdot 1^2$$

그런데 $\hat{K}_\varepsilon$이 자명매듭이므로 $\omega_3(\hat{K}_\varepsilon)=0$, $a_2(\hat{K}_\varepsilon)=0$이다. 따라서

$$a_2(\hat{K}_i)=\frac{i^2-1}{8}$$

이라는것을 고려하면

$$\omega_3(\hat{K}_l)=-\frac{\varepsilon}{4}a_2(\hat{K}_l)-\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{(|l|-3)/2}a_2(\hat{K}_{\varepsilon(2k+1)})-\frac{\varepsilon}{4}\sum_{k=1}^{(|l|-1)/2}k^2-\frac{\varepsilon}{32}(l^2-1)-$$

$$-\frac{\varepsilon}{16}\sum_{k=1}^{(|l|-3)/2}[(2k+1)^2-1]-\frac{l}{96}(l^2-1)$$

이 성립한다. 그런데 이 식의 오른변의 셋째 항이

$$-\frac{\varepsilon}{4}\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{|l|-3}{2}\cdot\frac{|l|-1}{2}\cdot(|l|-2)+\frac{1}{2}\cdot\frac{|l|-3}{2}\cdot\frac{|l|-1}{2}\right)=-\frac{\varepsilon}{96}(l^2-1)(|l|-3)$$

이다. 그러므로 이 식을 계산하면 다음과 같다.

$$\omega_3(\hat{K}_l)=-\frac{l(l^2-1)}{48}$$

다음으로 $\omega_3(\tilde{K}_{l,\,m})$을 계산하자. $|m|$개의 교점을 가지는 단의 끌교점에서 교점변화관계식 (1)을 적용할 때 얽힘 L_0의 한 성분은 자명한 매듭이고 다른 한 성분은 $\hat{K}_l$이다. 그리고 분명히 $\tilde{K}_{l,1}=\hat{K}_l$이다.

m의 부호가 +1인 경우를 보기로 하자. 이때 교점변화관계식은 다음과 같다.

$$\omega_3(\tilde{K}_{l,\,m})=\omega_3(\tilde{K}_{l,\,m-2})+\frac{1}{2}a_2(\hat{K}_l)-\frac{1}{4}[a_2(\tilde{K}_{l,\,m})+a_2(\tilde{K}_{l,\,m-2})]-\frac{1}{4}\left(\frac{m-1}{1}\right)^2$$

$$\omega_3(\tilde{K}_{l,\,m-2})=\omega_3(\tilde{K}_{l,\,m-4})+\frac{1}{2}a_2(\hat{K}_l)-\frac{1}{4}[a_2(\tilde{K}_{l,\,m-2})+a_2(\tilde{K}_{l,\,m-4})]-\frac{1}{4}\left(\frac{m-3}{1}\right)^2$$

… … … …

$$\omega_3(\tilde{K}_{l,3}) = \omega_3(\hat{K}_l) + \frac{1}{2}a_2(\hat{K}_l) - \frac{1}{4}[a_2(\tilde{K}_{l,3}) + a_2(\hat{K}_l)] - \frac{1}{4}\cdot 1^2$$

그러므로

$$\omega_3(\tilde{K}_{l,m}) = \omega_3(\hat{K}_l) + \frac{1}{2}a_2(\hat{K}_l)\cdot\frac{m-1}{2} - \frac{1}{4}[a_2(\hat{K}_l) + a_2(\tilde{K}_{l,m})] - $$
$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{(m-3)/2} a_2(\tilde{K}_{l,2k+1}) - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{(m-1)/2} k^2$$

이다. 이 식을 계산하면 다음의 결과가 얻어진다.

$$\omega_3(\tilde{K}_{l,m}) = -\frac{l^3 - l + m^3 - m}{48}$$

m의 부호가 -1일 때에도 같은 방법으로 계산되며 같은 결과가 얻어진다.(증명끝)

정리 1, 2, 3으로부터 다음의 사실이 성립한다.

정리 4 $a_2(K)=0$인 3단기둥매듭 K에 대하여 불변량 $\omega_3(K)$는 다음과 같이 결정된다.

1) $l,\ m,\ n$이 홀수이면

$$\omega_3(K_{l,m,n}) = -\frac{lmn + l + m + n}{32}$$

이다.

2) $l,\ m$이 홀수이고 n이 짝수이면

$$\omega_3(K_{l,m,n}) = \frac{(l+m)[2lm + n(l+m) + 3n^2 - 2]}{96}$$

이다.

증명 모든 단의 교점들의 개수가 홀수인 경우는 $l,\ m,\ n$의 부호가 $(-1,\ +1,\ +1)$인 경우와 $(+1,\ -1,\ -1)$인 경우들에 귀착된다.

1)을 증명하자. 정리 1에 의하여

$$\omega_3(K_{l,m,n}) = \omega_3(K_{l,m,1}) - \frac{(l+m)(n-1)(l+m-n+1)}{32}$$

이고 정리 2에 의하여

$$\omega_3(K_{l,m,1}) = -\frac{(l+1)(m+1)(m+l+2)}{32}$$

이다. 결국 $lm + mn + nl + 1 = 0$이라는것을 고려하면

$$\omega_3(K_{l,m,n}) = \frac{(l+m)(n^2-1)}{32}$$

이 얻어진다. 그런데 두 경우에 다 정리 1, 2에 의하여

$$\omega_3(K_{l,m,n}) = -\frac{1}{32}(l-1)(m-1)(m+l-2) - \frac{l+m}{32}(n+1)(l+m-n-1) = \frac{1}{32}(l+m)(n^2-1)$$

이 성립한다. 또한 $lm+1 = -n(l+m)$이므로 우의 식을 대칭적인 형태로 쓰면 다음과 같다.

$$\omega_3(K_{l,m,n}) = -\frac{(lmn + l + m + n)}{32}$$

2)를 증명하자. 이 경우에는 $l^2 + m^2 - 2 = -2n(l+m)$이다. 따라서 정리 1과 정리 3에

의하여

$$\omega_3(K_{l,\,m,\,n}) = -\frac{1}{48}(l^3 + m^3 - l - m) - \frac{(l+m)n}{32} \cdot (l + m - n) =$$

$$= \frac{1}{96}(l+m)[2lm + n(l+m) + 3n^2 - 2]$$

가 성립한다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] 김일성종합대학학보 수학, 66, 1, 84, 주체109(2020).

[2] K. Ichihara, H. Masai; Comm. Anal. Geom., 24, 2, 337, 2016.

[3] C. Lescop; Algebr. Geom. Topol., 9, 2, 979, 2009.

[4] Z. Wu; Geom. Topol., 15, 1157, 2011.

[5] P. R. Cromwell; Knots and links, Cambridge University Press, 157～183, 2004.

주체109(2020)년 9월 5일 원고접수

Lescop Invariants of 3-strand Pretzel Knots

Ri Kang Il, Kim Chong Song

In this paper we acquire Lescop invariants $\omega_3(K)$ for any 3-strand pretzel knot K whose Conway polynomial has zero quadratic term.

Keywords: Lescop invariant, pretzel knot