김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체105(2016)년 제62권 제8호 Vol. 62 No. 8 JUCHE105(2016).

철도역봉사체계의 안정성을 고려한 봉사설비능력계산방법

조 성 덕

경애하는 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《오늘의 시대는 과학기술로 발전하고 과학기술로 살아가는 시대이며 실력전의 시대입니다.》

철도역현대화를 실현하는데서 나서는 중요한 문제는 철도역봉사계의 가동안정성을 보장할수 있도록 시설 및 설비들의 능력을 합리적으로 결정하는것이다. 이 문제를 해결하기 위하여 안정성을 고려한 대중봉사론적인 모형화방법을 적용할수 있다.[1, 2]

선행연구[3]에서는 안정상태에 있는 봉사설비에서 체계파라메터들에 대한 최량값의 감수성을 평가하였으며 선행연구[4]에서는 혼합봉사규칙을 가지는 주기적인 순환모형에서 체계의 대역적안정성의 특성화, 불안정성정도, 안정성의 필요충분조건들에 대하여 연구하였다.

론문에서는 대중봉사모형의 안정성을 고려하여 철도역봉사체계에 대한 봉사모형을 작성하고 봉사설비능력의 계산방법을 제기하였다.

대중봉사모형의 안정성이란 모형에 들어있는 파라메터들의 약간한 변화에 대하여 모형의 출력자료가 크게 변하지 않는 성질을 말하며 안정성을 고려한 려객봉사능력이란 려객들의 도착과 려객들에 대한 봉사과정에 나타날수 있는 우연적지연들과 사고들을 고려하여 결정된 최량의 여유를 가지는 봉사능력을 말한다.

려객흐름과 봉사과정에 나타나는 우연현상들은 그 발생시각과 지속길이들로 모형화된다. 봉사모형작성에서 중요한것은 려객들의 편의와 심리를 고려하여 평균기다림줄길이, 평균기다림시간 등과 같은 특성지표들을 설정하고 짐검사기대수, 매표구개수, 승강기대수 등을 결정하는것이다.

현대철도역에서의 려객봉사과정은 도착－짐검사－매표－개찰－승차과정으로 이루어지며 매 공정에는 여러개의 출입구, 승강기, 짐검사기, 매표구, 통로, 개찰구들이 있게 된다. 매 공정에서의 려객봉사과정은 지수형도착사이시간과 봉사시간들을 가지는 여러선봉사시설과 설비들의 무한용량기다림체계로 모형화할수 있다. 지수형도착사이시간과 봉사시간들을 가지는 여러선봉사계무한용량기다림체계를 $M|M|k$ 형대중봉사계라고 부른다.

$M|M|k$ 형대중봉사계는 요청들의 도착사이의 평균시간과 평균봉사시간에서의 약간한 오차가 평균기다림시간과 평균기다림줄길이와 같은 봉사특성에는 큰 영향을 주지 않는 안정한 대중봉사계이다.

k 개의 봉사기구와 무한기다림줄을 가지는 기다림체계를 생각하자. 여기서 도착사이시간과 봉사시간들은 지수확률밀도를 가진다.

요청들의 도착사이의 평균시간은 $1/\lambda$ 이고 평균봉사시간은 $1/\mu$ 이라고 하자.

론문에서는 다음과 같은 표시들을 리용한다.

$\tau_a = 1/\lambda$: 도착사이의 평균시간(min), $\tau_s = 1/\mu$: 한 요청을 봉사하는 평균시간(min)

k: 봉사기구수(대), $\rho = \tau_s / \tau_a = \lambda / \mu$: 가동률, $n\ (\ge 0)$: 체계에 있는 요청수(명)

$P_n(t)$: t시각 체계에 n개 요청이 있을 확률, P_n: $t \to \infty$일 때 체계에 n개 요청이 있을 확률

체계에서 성립되는 계차방정식과 그에 대응되는 평형방정식, 귀납방정식은 다음과 같다.

계차방정식:
$$P_0(t+h) = (1-\lambda h)P_0(t) + \mu h P_1(t) + o(h), \qquad n=0$$
$$P_n(t+h) = (1-\lambda h - n\mu h)P_n(t) + \lambda h P_{n-1}(t) + (n+1)\mu h P_{n+1}(t) + o(h), \quad 1 \le n \le k-1$$
$$P_n(t+h) = (1-\lambda h - k\mu h)P_n(t) + \lambda h P_{n-1}(t) + k\mu h P_{n+1}(t) + o(h), \qquad n \ge k$$

평형방정식:
$$0 = -\lambda P_0 + \mu P_1, \qquad n=0$$
$$0 = -(\lambda + n\mu)P_n + \lambda P_{n-1} + (n+1)\mu P_{n+1}, \quad 1 \le n \le k-1$$
$$0 = -(\lambda + k\mu)P_n + \lambda P_{n-1} + k\mu P_{n+1}, \qquad n \ge k$$

귀납방정식: $0 = -\lambda P_{n-1} + n\mu P_n \ \ (1 \le n \le k)$, $0 = -\lambda P_{n-1} + k\mu P_n \ \ (n > k)$

다음과 같은 체계의 특성량들에 대하여 보자.

체계에 n개 요청이 있을 확률 귀납방정식과 표시 $\rho = \lambda/\mu$를 리용하여 체계에 n개 요청이 있을 확률을 계산한다.

$n=0$부터 k까지에 대하여 귀납방정식은 다음과 같다.

$$P_0 = \rho^0 P_0,\ P_1 = \rho P_0 = \rho^1 P_0,\ P_2 = \frac{\rho}{2}P_1 = \frac{\rho^2}{2!}P_0,\ P_2 = \frac{\rho}{3}P_2 = \frac{\rho^3}{3!}P_0,\ \cdots,\ P_n = \frac{\rho}{n}P_{n-1} = \frac{\rho^n}{n!}P_0$$

n이 $k+1$이상일 때 귀납방정식은 다음과 같다.

$$P_{k+1} = \rho / kP_k = \rho^{k+1}/[k!k]P_0,\ P_{k+2} = \rho / kP_{k+1} = \rho^{k+2}/[k!k^2]P_0,\ \cdots,\ P_n = \rho / nP_{n-1} = \rho^n/[k!k^{n-k}]P_0$$

일반적으로 $P_n = \rho^n / n! P_0 \ \ (0 \le n \le k)$, $P_n = \rho^n / [k!k^{n-k}]P_0 \ \ (n > k)$이다.

$n=k$일 때 우의 두 방정식들은 꼭같다. 그리고 $P_0 + P_1 + \cdots + P_n = 1$이므로

$$\sum_{n\ge 0} P_n = P_0 \left\{ \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\rho^n}{n!} + \sum_{n \ge k} \rho^n [k!k^{n-k}] \right\} = P_0 \left\{ \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^k}{k!} \sum_{n\ge k} \rho^{n-k} k^{n-k} \right\}.$$

평형조건으로부터 $\rho / k < 1$이다.

따라서 우의 관계식에 의하여 $\sum_{n\ge 0} P_n = P_0 \left\{ \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^k}{(k-1)!(k-\rho)} \right\}$이 성립된다.

그러므로 $n=0$일 때의 확률은 $P_0 = 1 \Bigg/ \left\{ \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^k}{(k-1)!(k-\rho)} \right\}$이다.

결과적으로 체계에 n개 요청이 있을 확률은 $P_n = \begin{cases} \rho^n / n! P_0, & 0 \le n \le k \\ \rho^n / [k!k^{n-k}]P_0, & n > k \end{cases}$와 같다.

봉사설비에 있는 요청수의 기대값(Ls) 규정된 시간구간 T에서 도착요청수와 리탈요청수들의 기대값 A, D들과 관련된 관계식들은 다음과 같다.

$$\mathrm{E}[T \text{ 에서 } A] = \lambda T[P_0 + P_1 + \cdots] = \lambda T$$
$$\mathrm{E}[T \text{ 에서 } D] = \mu T[P_1 + 2P_2 + \cdots + kP_k + kP_{k+1} + \cdots] = \mu T(1-P_0) = \mu T Ls$$

여기서 E는 우연량의 기대값을 의미한다.

두번째 식은 Ls와 련관된다.

체계가 평형상태에 있고 E[T 에서 A] = E[T 에서 D]이므로 $\lambda = \mu \cdot Ls$ 이고 $Ls = \rho$ 이다.

기다림줄에 있는 요청수의 기대값(Lq) 기다림줄에 있는 요청수의 기대값은 다음과 같다.

$$Lq = \sum_{n>k}(n-k)P_n = \sum_{n>k}(n-k)\frac{\rho^n}{k!k^{n-k}}P_0 = P_0\,\rho^k \Bigg/ \left(k!\sum_{n>k}(n-k)\right)\cdot\frac{\rho^{n-k}}{k^{n-k}}$$

이때 식 $Lq = P_0\rho^{k+1}/[(k-1)!(k-\rho)^2]$이 성립된다.

봉사체계에 있는 요청수의 기대값(L) 봉사체계에 있는 요청수(봉사설비수+기다림줄의 길이)의 기대값은 $L = Ls + Lq$ 와 같다.

봉사설비, 기다림줄, 체계에 있는 시간의 기대값(Ws, Wq, W) 리틀의 법칙[2]을 리용하면 $Ws = Ls/\lambda = 1/\mu$, $Wq = Lq/\lambda$, $W = Ws + Wq$ 들을 얻는다.

지연이 있을 때 기다림줄에서 기다림시간의 기대값(Wq') 체계의 특성을 반영하는 한가지 통계량은 기다림줄에서 지연이 있는 도착요청이 기다림줄에서 기다리는 시간의 기대값이다.

지연되지 않는 요청은 기다림줄에서 기다리지 않는다. Wq 는 이 사건들의 평균이다.

그러므로 사건 D 와 D' 를 도입하는것이 편리하다. 여기서 D 는 새로운 도착요청이 지연되는 사건이고 D' 는 지연되지 않는 사건이다. 이 사건들의 확률은 $P(D') = P_{n<k}$, $P(D) = P_{n\geq k}$ 와 같다. $P(D)$ 는 지연이 있을 확률, $P(D')$ 는 지연이 없을 확률이다.

기다림줄에서 대응하는 조건부기다림시간은 $W_{q|D}$ (지연이 있을 때 기다림줄에서 기다림시간), $W_{q|D'}$ (지연이 없을 때 기다림줄에서 기다림시간)이다.

기다림시간(Wq)과 조건부기다림시간($W_{q|D}$, $W_{q|D'}$)사이의 관계는 다음과 같다.

$$Wq = W_{q|D'}P(D') + W_{q|D}P(D)$$

이때 $W_{q|D'} = 0$ 이므로 $Wq' = W_{q|D} = Wq/P(D) = Wq/P_{n\geq k}$ 이다.

봉사수준(SL) 봉사수준은 새로 도착하는 요청이 기다리지 않는 확률이다. 이것은 n이 k 보다 작은 확률 $P_{n<k}$ 이다. 따라서 $SL = P_{n<k}$ 이다.

무한기다림줄용량체계에서 SL 을 달성하는데 필요한 봉사기구들의 최소수 k 는 표와 같다.

표. SL 과 가동률(ρ)에 따르는 봉사기구수(k)

ρ	SL				ρ	SL			
	0.85	0.90	0.95	0.99		0.85	0.90	0.95	0.99
0.1	1	1	2	2	20	26	27	29	32
0.2	2	2	2	3	30	38	39	41	45
0.3	2	2	2	3	40	49	50	52	57
0.4	2	2	3	3	50	60	61	64	66
0.5	2	2	3	4	60	70	72	75	80
0.6	2	3	3	4	70	81	83	86	92
0.7	3	3	3	4	80	92	94	97	103
0.8	3	3	4	4	90	102	105	108	114
0.9	3	3	4	5	100	113	115	119	125
1	3	3	4	5	200	218	221	226	235
2	5	5	6	7	300	322	326	331	343
3	6	6	7	9	400	425	429	436	449
4	7	8	9	10	500	528	533	540	555
5	9	9	10	12	600	631	636	644	660
10	15	16	17	19	700	733	739	747	765

현대철도역설비의 봉사능력타산에서 체계의 특성지표로는 SL을 취한다.

SL은 보통 0.85～0.99로 놓는다. 이것은 봉사체계에 도착하는 손님들의 85～99%가 기다리지 않고 곧장 봉사받는다는것을 의미한다.

실례로 려객들이 3min당 600명이 들어오고 자동매표기가 1min당 50명분의 차표를 판매한다고 가정할 때 자동차표판매기대수결정과정은 다음과 같다.

$\lambda = 600/3 = 200\ (\text{min}^{-1})$: 단위시간당 평균도착요청수

$\mu = 50\ (\text{min}^{-1})$: 자동매표기가 단위시간에 처리하는 평균요청수

$\tau_a = 1/\lambda = 1/200\ (\text{min})$: 도착사이의 평균시간

$\tau_s = 1/\mu = 1/50\ (\text{min})$: 한 요청을 봉사하는 평균시간

$\rho = \tau_s / \tau_a = 4$: 가동률

$\rho = 4$이므로 봉사수준 $SL = 0.85$를 보장하자면 봉사기구가 최소한 7대 있어야 하며 $SL = 0.95$를 보장하자면 9대, $SL = 0.99$를 보장하자면 10대 있어야 한다.

참 고 문 헌

[1] 전용철; 수학적모형화, **김일성**종합대학출판사, 161～168, 주체104(2015).

[2] N. T. Thomopoulos; Fundamentals of Queuing Systems, Springer, 41～48, 2012.

[3] H. Ayhan et al.; European Journal of Operational Research, 193, 120, 2009.

[4] Z. Saffer et al.; European Journal of Operational Research, 197, 188, 2009.

주체105(2016)년 4월 5일 원고접수

A Method for Calculating Service Equipment Ability considering the Stability of Railway Station Service Systems

Jo Song Dok

Sensitiveness of the optimal value for system parameters of stable service equipment was estimated in [3] and the characteristics of the global stability of the systems which had a mixed service order was studied in [4].

We introduced a service model of railway station service system and studied a method for calculating service equipment ability in terms of the safety of queing system.

Key words: railway station service system, stability