김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제4호

정-역방향확률미분방정식의 역방향확률미분방정식에로의 한가지 변환과 그에 의한 3차수치도식

황호진, 김유정

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《나라의 과학기술을 세계적수준에 올려세우자면 발전된 과학기술을 받아들이는것과 함께 새로운 과학기술분야를 개척하고 그 성과를 인민경제에 적극 받아들여야 합니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제11권 138～139페지)

선행연구[1]에서는 역방향확률미분방정식을 풀기 위한 한가지 3차수치도식을 제기하였다. 이 수치도식의 우점은 조건부기대값의 근사에서 보간을 전혀 진행하지 않음으로써 계산량을 훨씬 줄이면서도 3차의 수렴속도를 보장한다는데 있다. 론문에서는 확률미분방정식에 대한 램퍼티(Lamperti)변환[2]을 리용하여 선행연구[1]에서 제기된 역방향확률미분방정식에 대한 3차수치도식을 정-역방향확률미분방정식에로 일반화하였다.

W 를 완비확률공간 $(\Omega,\ \mathscr{F},\ P)$ 우에서 정의된 브라운운동이라고 하고 $\boldsymbol{F}:=\{\mathscr{F}_t\}_{t\ge 0}$ 을 W 에 의하여 생성된 자연 $\sigma-$ 모임벌증가족의 완비화라고 하자. 그리고 $\{\mathscr{F}_s^{t,\ \boldsymbol{x}}\}_{t\le s\le T}$ 를 $(t,\ \boldsymbol{x})$ 에서 시작하는 브라운운동 $\{W_r \mid t\le r\le s,\ W_t=\boldsymbol{x}\}$ 에 의하여 생성된 $\sigma-$ 모임벌이라고 하고 $E_t^{\boldsymbol{x}}[\cdot]:=E[\cdot \mid \mathscr{F}_t^{t,\ \boldsymbol{x}}]$ 로 놓자. 또한 시간구간 $[0,\ T]$ 에 대하여 간격이 $h:=T/N$ 인 분할 $0=t_0<\cdots<t_N=T$ 를 생각하고 그우에서 공간변수에 대한 간격이 $\Delta\boldsymbol{x}$ 인 증가형살창을 $D^n:=\{l\Delta\boldsymbol{x} \mid l=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots,\ \pm n\}$ 으로 놓자. 이때 확률토대 $(\Omega,\ \mathscr{F},\ P,\ \boldsymbol{F})$ 우에서 정의된 역방향확률미분방정식

$$y_t=\phi(W_T)+\int_t^T g(s,\ y_s,\ z_s)ds-\int_t^T z_s dW_s \quad (0\le t\le T)$$

의 수치풀이를 위한 3차수치도식은 다음과 같다.[1]

3차수치도식 매 $i(=0,\ 1,\ \cdots,\ 8)$ 에 대하여 공간살창 D^{N-i} 우에서 초기근사 $y^{N-i},\ z^{N-i}$ 이 주어졌을 때 임의의 $n(=N-9,\ \cdots,\ 0)$ 과 $\boldsymbol{x}(\in D^n)$ 에 대하여 시공간점 $(t_n,\ \boldsymbol{x})$ 에서 근사풀이 $y^n(\boldsymbol{x}),\ z^n(\boldsymbol{x})$ 는 다음의 련립방정식으로부터 얻어진다.

$$\begin{cases} -\beta_0 y^n=\displaystyle\sum_{j=1}^{3}\beta_j\hat{E}_{t_n}^{\boldsymbol{x}}\left[y^{n+j^2}\right]+h\cdot g(t_n,\ y^n,\ z^n) \\ z^n=\dfrac{\displaystyle\sum_{j=1}^{3}\beta_j\hat{E}_{t_n}^{\boldsymbol{x}}\left[y^{n+j^2}\Delta W_{t_n,\ t_{n+j^2}}^T\right]}{h} \end{cases}$$

여기서 $\beta_0=-49/36,\ \beta_1=3/2,\ \beta_2=-3/20,\ \beta_3=1/90$ 이며 조건부기대값근사 $\hat{E}_{t_n}^{\boldsymbol{x}}[\cdot]$ 은 3개의 표본점에 기초한 가우스-에르미트구적법에 의하여 근사시킨것이다. 즉

$$\hat{E}_{t_n}^{\boldsymbol{x}}[y^{n+j^2}] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{3} \omega_i y^{n+j^2}(\boldsymbol{x} + \sqrt{2h}\, j\boldsymbol{a}_i)$$

$$\hat{E}_{t_n}^{\boldsymbol{x}}\left[y^{n+j^2} \Delta W_{t_n,\ t_{n+j^2}}^{T} \right] = \sqrt{\frac{2j^2 h}{\pi}} \sum_{i=1}^{3} \omega_i y^{n+j^2}(\boldsymbol{x} + \sqrt{2h}\, j\boldsymbol{a}_i)\boldsymbol{a}_i$$

이다. 이때 3차에르미트다항식의 뿌리 $\{\boldsymbol{a}_i\}_{i=1}^{3}$ 들이 선형적으로 분포되므로 분할간격을 $\Delta\boldsymbol{x} = \sqrt{2h}\boldsymbol{a}_3$ 로 정하면 조건부기대값의 근사값을 구하는데서 보간이 전혀 필요없다.

이제 확률토대 $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ 우에서 정의된 정－역방향확률미분방정식

$$\begin{cases} X_t = X_0 + \int_0^t b(s) X_s ds + \int_0^t \sigma X_s dW_s \\ Y_t = \varphi(X_T) + \int_t^T f(s,\ X_s,\ Y_s,\ Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s \end{cases} \tag{1}$$

를 생각하자. 여기서 $b:[0,\ T] \to \mathbf{R}$ 는 유계함수이고 σ 는 상수이며 φ 는 $\mathbf{R}$ 우의 함수이고 생성자 $f: \Omega \times [0,\ T] \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ 는 $\boldsymbol{F}$－전진가측인 우연과정이며 $f,\ \varphi$ 는 도함수들이 모두 유계인 충분히 미끈한 함수이다. 이때 우의 도식을 정－역방향확률미분방정식에 그대로 적용한다고 하면 주어진 정－역방향확률미분방정식의 정방향성분이 간단히 $dX_t = bX_t dt + BX_t dW_t$ 로 주어지는 경우에조차

$$\begin{aligned} E[y^{n+j^2} \mid X^n = \boldsymbol{x}] &= E[y^{n+j^2}(X^{n+j^2}) \mid X^n = \boldsymbol{x}] = \\ &= E[y^{n+j^2}(\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{x}j^2 h + B\boldsymbol{x}\Delta W_{t_n,\ t_{n+j^2}})] \approx \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{3} \omega_i y^{n+j^2}(\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{x}j^2 h + B\boldsymbol{x}j\sqrt{2h}\boldsymbol{a}_i) \end{aligned}$$

로 되며 따라서 분할간격 $\Delta\boldsymbol{x}$ 를 임의로 선택해도

$$\boldsymbol{x} \in D^n,\ \ \boldsymbol{x} + b\boldsymbol{x}j^2 h + B\boldsymbol{x}j\sqrt{2h}\boldsymbol{a}_i \in D^{n+j^2}$$

이 성립하지 않기때문에 조건부기대값의 근사에서 보간이 반드시 필요한데 그렇게 되면 이 도식은 3차수치도식으로서의 기본우점을 잃게 된다. 따라서 정방향확률미분방정식에 대한 램퍼티변환을 리용하여 정－역방향확률미분방정식을 역방향확률미분방정식에로 넘기는 변환을 구하고 그다음 우의 도식을 일반화해보자.

명제 X_t 를 정방향확률미분방정식

$$\begin{cases} dX_t = b(t,\ X_t)dt + \sigma(t,\ X_t)dW_t \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

의 풀이라고 하고 $\sigma(t,\ x)$ 를 엄격히 정인 C^1 급함수,

$$H(t,\ x) := \int_0^x \frac{1}{\sigma(t,\ y)} dy$$

는 $C^{1,\ 2}$ 급함수로서 x 에 관하여 엄격히 증가한다고 가정하자. 이때 $\bar{X}_t = H(t,\ X_t)$ 는 다음의 확률미분방정식을 만족시킨다.

$$\begin{cases} d\overline{X}_t = \left(\partial_t H(t,\ H^{-1}(t,\ \overline{X}_t)) + \dfrac{b(t,\ H^{-1}(t,\ \overline{X}_t))}{\sigma(t,\ H^{-1}(t,\ \overline{X}_t))} - \dfrac{1}{2}\partial_x \sigma(t,\ H^{-1}(t,\ \overline{X}_t))\right)dt + dW_t \\ \overline{X}_0 = H(0,\ x_0) \end{cases}$$

보조정리 1 X_t를 확률미분방정식

$$\begin{cases} dX_t = b(t)X_t dt + \sigma X_t dW_t \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

의 풀이라고 하자. 그러면 $\overline{X}_t = (\ln X_t)/\sigma$는 다음과 같은 정방향확률미분방정식의 풀이이다.

$$\begin{cases} d\overline{X}_t = \left(\dfrac{b(t)}{\sigma} - \dfrac{1}{2}\sigma\right)dt + dW_t \\ \overline{X}_0 = \dfrac{1}{\sigma}\ln x_0 \end{cases} \tag{2}$$

보조정리 2 $\overline{X}_t$를 정방향확률미분방정식 (2)의 풀이라고 할 때 정－역방향확률미분방정식 (1)은 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{cases} \overline{X}_t = \dfrac{1}{\sigma}\ln x_0 + \displaystyle\int_0^t \left(\dfrac{b(s)}{\sigma} - \dfrac{1}{2}\sigma\right)ds + W_t \\ Y_t = \overline{\varphi}(\overline{X}_T) + \displaystyle\int_t^T \overline{f}(s,\ \overline{X}_s,\ Y_s,\ Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s \end{cases} \tag{3}$$

여기서 생성자 $\overline{f}$와 종점조건 $\overline{\varphi}$는 다음과 같다.

$$\overline{f}(t,\ x,\ y,\ z) := f(t,\ e^{\sigma x},\ y,\ z) \tag{4}$$

$$\overline{\varphi}(x) := \varphi(e^{\sigma x}) \tag{5}$$

정리 정－역확률미분방정식 (1)의 풀이는 다음의 역방향확률미분방정식의 풀이로 된다.

$$Y_t = \tilde{\varphi}(W_T) + \int_t^T \tilde{f}(s,\ W_s,\ Y_s,\ Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s \tag{6}$$

여기서 $\tilde{\varphi}$과 $\tilde{f}$은 각각 다음과 같다.

$$\tilde{\varphi}(x) := \varphi\left(\exp\left(\ln x_0 + \int_0^T \left(b(t) - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma x\right)\right)$$

$$\tilde{f}(t,\ x,\ y,\ z) := f\left(t,\ \exp\left(\ln x_0 + \int_0^t \left(b(t) - \frac{1}{2}\sigma^2\right)ds + \sigma x\right),\ y,\ z\right)$$

증명 생성자 $\tilde{f}$과 종점조건 $\tilde{\varphi}$을 각각 다음과 같이 정의하자.

$$\tilde{f}(t,\ x,\ y,\ z) := \overline{f}\left(t,\ \frac{1}{\sigma}\ln x_0 + \int_0^t \left(\frac{b(s)}{\sigma} - \frac{1}{2}\sigma\right)ds + x,\ y,\ z\right) \tag{7}$$

$$\tilde{\varphi}(x) := \overline{\varphi}\left(\frac{1}{\sigma}\ln x_0 + \int_0^T \left(\frac{b(t)}{\sigma} - \frac{1}{2}\sigma\right)dt + x\right) \tag{8}$$

그러면

$$\bar{f}(t,\ \bar{X}_t,\ y,\ z)=\tilde{f}(t,\ W_t,\ y,\ z)$$

$$\bar{\varphi}(\bar{X}_T)=\tilde{\varphi}(W_T)$$

가 성립한다. 이로부터 정－역방향확률미분방정식 (3)은 다시 식 (6)과 같은 역방향확률미분방정식으로 변환된다. 이때 식 (4), (5), (7), (8)로부터

$$\tilde{\varphi}(x)=\bar{\varphi}\left(\frac{1}{\sigma}\ln x_0+\int_0^T\left(\frac{b(t)}{\sigma}-\frac{1}{2}\sigma\right)dt+x\right)=$$

$$=\varphi\left(\exp\left(\sigma\left(\frac{1}{\sigma}\ln x_0+\int_0^T\left(\frac{b(t)}{\sigma}-\frac{1}{2}\sigma\right)dt+x\right)\right)\right)=$$

$$=\varphi\left(\exp\left(\ln x_0+\int_0^T\left(b(t)-\frac{1}{2}\sigma^2\right)dt+\sigma x\right)\right)$$

$$\tilde{f}(t,\ x,\ y,\ z)=\bar{f}\left(t,\ \frac{1}{\sigma}\ln x_0+\int_0^t\left(\frac{b(s)}{\sigma}-\frac{1}{2}\sigma\right)ds+x,\ y,\ z\right)=$$

$$=f\left(t,\ \exp\left(\sigma\left(\frac{1}{\sigma}\ln x_0+\int_0^t\left(\frac{b(s)}{\sigma}-\frac{1}{2}\sigma\right)ds+x\right)\right),\ y,\ z\right)=$$

$$=f\left(t,\ \exp\left(\ln x_0+\int_0^t\left(b(s)-\frac{1}{2}\sigma^2\right)ds+\sigma x\right),\ y,\ z\right)$$

가 성립한다.(증명끝)

우의 정리로부터 역방향확률미분방정식 (6)의 근사풀이를 구하는 수치도식에 의하여 정－역방향확률미분방정식 (1)에 대한 효률적인 수치도식이 얻어진다. 이때 얻어진 도식은 다음과 같다.

매 $i(=0,\ 1,\ \cdots,\ 8)$ 에 대하여 공간살창 D^{N-i} 우에서 초기근사 $Y^{N-i},\ Z^{N-i}$ 가 주어졌을 때 임의의 $n(=N-9,\ \cdots,\ 0)$ 과 임의의 $\boldsymbol{x}(\in D^n)$ 에 대하여 시공간점 $(t_n,\ \boldsymbol{x})$ 에서 근사풀이 $y^n(\boldsymbol{x}),\ z^n(\boldsymbol{x})$ 는 다음의 련립방정식으로부터 얻어진다.

$$\begin{cases} -\beta_0 Y^n=\sum\limits_{j=1}^{3}\beta_j\hat{E}_{t_n}^{\boldsymbol{x}}\left[Y^{n+j^2}\right]+h\cdot\hat{f}(t_n,\ \boldsymbol{x},\ Y^n,\ Z^n) \\ Z^n=\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{3}\beta_j\hat{E}_{t_n}^{\boldsymbol{x}}\left[Y^{n+j^2}\Delta W_{t_n,\ t_{n+j^2}}^T\right]}{h} \end{cases}$$

여기서 $\hat{f}(t,\ x,\ y,\ z):=f(t,\ \exp(\ln x_0+\tilde{\mu}_t+\sigma x),\ y,\ z)$ 이며 $\hat{E}_{t_n}^{\boldsymbol{x}}$ 는 3개의 표본점우에서의 가우스－에르미트구적법에 의한 조건부수학적기대값의 근사값이다.

참 고 문 헌

[1] 김일성종합대학학보 수학, 64, 4, 10, 주체107(2018).
[2] P. Henry-Labordere et al.; Annals of Applied Probability, 27, 6, 1, 2017.

주체109(2020)년 6월 5일 원고접수

A Transformation of FBSDEs into BSDEs and the Third Order Numerical Scheme Using It

Hwang Ho Jin, Kim Yu Jong

In this paper, we propose a transformation of forward-backward stochastic differential equations into backward stochastic differential equations and using it, we obtain an efficient third order numerical scheme for solving the forward-backward stochastic differential equations.

Keywords: forward-backward stochastic differential equation, third order scheme