김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체106(2017)년 제63권 제3호 Vol. 63 No. 3 JUCHE106(2017).

유효작용의 고리전개에 대한 연구

리성진, 고영해

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《첨단돌파전을 힘있게 벌려야 나라의 과학기술전반을 빨리 발전시키고 지식경제의 토대를 구축해나갈수 있습니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 39페지)

량자마당론에서 유효작용은 매우 중요한 역할을 한다. 그것은 물리적계의 모든 량자정보가 유효작용속에 다 함축되여있기때문이다. 또한 유효작용은 높은 온도에서 대칭파괴와 대칭보존과 관련되는 문제들을 해결하는데서 중요한 역할을 한다.

안장점방법을 리용하여 얻어지는 유효작용은 한고리근사이다.[1] 그러나 물리적현상들가운데는 한고리근사에서 설명할수 없는 현상들도 있으므로 유효작용을 한고리이상에서 계산할 필요가 제기된다. 고리전개에 의하여 유효작용을 계산하는 몇가지 방법들이 제안[2, 3]되였으나 계산량이 너무 방대한것으로 하여 실천적으로 유용하지 못하다.

론문에서는 스칼라마당의 유효작용에 대한 고리전개를 진행하는 간단한 방법을 론의한다.

1. 유효작용과 고전작용의 호상관계

스칼라마당의 라그랑쥬안은 다음과 같다.

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}_0[\Phi]+\mathcal{L}_{\mathrm{I}}[\Phi],\ \Phi=\{\Phi_1,\ \cdots,\ \Phi_N\}$$

여기서 $\mathcal{L}_0$은 자유마당의 라그랑쥬안이고 $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}$는 호상작용라그랑쥬안이다.

이때 생성범함수는 다음과 같이 얻어진다.

$$e^{iW[J]}=N\int D\Phi\exp\left\{i\int dx[\mathcal{L}+J_k\Phi_k]\right\} \tag{1}$$

여기서 N은 규격화상수이다.

외부원천 $J_i(x)$가 존재할 때 Φ_i의 진공기대값은 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J_i(x)}=\langle\Phi_i(x)\rangle_J=\varphi_i(x) \tag{2}$$

유효작용은 $W[J]$를 $\varphi(x)$의 범함수로 넘기는 르쟝드르변환에 의하여 정의된다.

$$\Gamma[\varphi]=W[J]-\int dxJ_i(x)\varphi_i(x) \tag{3}$$

식 (2)로부터 $\varphi(x)$에 대한 운동방정식을 얻을수 있다.

$$\frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi_i(x)}=-J_i(x) \tag{4}$$

다음으로 외부원천항 $J(x)$가 존재할 때 고전작용 $S_J[x]$에 대하여 보자.

$$S_J[\Phi] = \int dx\{\mathcal{L}[\Phi] + J_i(x)\Phi_i(x)\} = S[\Phi] + \int dx J_i(x)\Phi_i(x)$$

여기서 $S[\Phi]$는 고전작용으로서 다음과 같이 표시된다.

$$S[\Phi] = \int dx \mathcal{L}[\Phi]$$

$S_J[\Phi]$를 $\Phi_i(x)$에 관하여 변분하면

$$\frac{\delta S_J[\Phi]}{\delta \Phi_i(x)} = -J_i(x)\,. \tag{5}$$

이 방정식은 연산자방정식이다.

식 (4)와 (5)로부터

$$\frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi_i(x)} = \left\langle \frac{\delta S_J[\Phi]}{\delta \Phi_i(x)} \right\rangle. \tag{6}$$

식 (6)은 고전작용과 유효작용을 련결시켜주는 공식[1]이다.

연산자의 진공기대값에 대한 공식을 리용하면 식 (6)을 다음과 같이 변화시킬수 있다.

$$\frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi_i(x)} =: \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-i\hbar)^n}{n!} TrG_{(x_1 \cdots x_n)}^{i_1 \cdots i_n} \frac{\delta^n}{\delta \varphi_{i_1} \cdots \delta \varphi_{i_n}} \right\} : \frac{\delta S[\phi]}{\delta \varphi_i(x)} \tag{7}$$

여기서 Tr는 반복되는 첨자들에 관한 합이나 적분을 나타낸다.

따라서 유효작용 Γ와 그린함수 G는 식 (2)와 (4)를 리용하여 구할수 있다.

$$\begin{cases} Tr \dfrac{\delta^2 \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi_i(x) \delta \varphi_j(z)} \dfrac{\delta^2 W[J]}{\delta J_j(z) \delta J_k(y)} = -\delta_{ik} \delta(x-y) \\ TrG_{ij}(x,\ z) \dfrac{\delta^2 \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi_j(z) \delta \varphi_k(y)} = -\delta_{ik} \delta(x-y) \end{cases} \tag{8}$$

2. 두고리근사에서 유효작용의 계산

유효작용이 두고리근사에서 다음과 같이 주어진다고 하자.

$$\Gamma[\varphi] = S[\varphi] + \frac{i}{2} Tr \ln D_{ik} + \Gamma^{(2)} \tag{9}$$

여기서 $D_{ik}^{-1} = \left.\dfrac{\delta^2 S[\Phi]}{\delta \Phi_i \delta \Phi_k}\right|_{\Phi=\varphi}$ 와 $\Gamma^{(2)}$는 모든 한립자기약진공그라프들의 합이고 이 그라프에서 내부선들은 전파자 D_{ik}를 나타내며 정점들은 라그랑쥬안 $\mathcal{L}[\Phi+\varphi]$에 의하여 결정된다.

이제 유효작용 Γ와 그린함수 G에 대한 고리전개가 다음과 같이 일반적인 형태로 주어진다고 가정하자.

$$\Gamma = \Gamma_0 + \hbar\Gamma_1 + \hbar^2\Gamma_2 + \cdots \tag{10}$$

$$G = G_0 + \hbar G_1 + \hbar^2 G_2 + \cdots \tag{11}$$

식 (10)과 (11)을 식 (7)과 (8)에 각각 대입하여 유효작용과 그린함수의 0차, 1차 및 2차항들을 계산할수 있다.

$$\frac{\delta\Gamma_0}{\delta\varphi_i}=\frac{\delta S}{\delta\varphi_i} \tag{12}$$

$$\frac{\delta\Gamma_1}{\delta\varphi_i(x)}=-\frac{i}{2}TrG_0^{i_1i_2}(x_1,\ x_2)\frac{\delta}{\delta\varphi_i(x)}\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_{i_1}(x_1)\delta\varphi_{i_2}(x_2)} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta\Gamma_2}{\delta\varphi_i(x)}=:&\left\{-\frac{i}{2}TrG_0^{i_1i_2}(x_1,\ x_2)\frac{\delta^2}{\delta\varphi_{i_1}(x_1)\delta\varphi_{i_2}(x_2)}-\right.\\ &\left.-\frac{1}{3!}TrG_0^{i_1i_2i_3}(x_1,\ x_2,\ x_3)\frac{\delta^3}{\delta\varphi_{i_1}(x_1)\delta\varphi_{i_2}(x_2)\delta\varphi_{i_3}(x_3)}\right\}:\frac{\delta S}{\delta\varphi_i(x)}\end{aligned} \tag{14}$$

$$TrG_0^{ij}(x_i,\ x_j)\frac{\delta^2\Gamma_0}{\delta\varphi_j(x_j)\delta\varphi_k(x_k)}=-\delta_{ik}\delta(x_i-x_k) \tag{15}$$

$$Tr\left\{G_1^{ij}(x_i,\ x_j)\frac{\delta^2\Gamma_0}{\delta\varphi_j(x_j)\delta\varphi_k(x_k)}+G_0^{ij}(x_i,\ x_j)\frac{\delta^2\Gamma_1}{\delta\varphi_j(x_j)\delta\varphi_k(x_k)}\right\}=0 \tag{16}$$

식 (12)를 φ_i에 관하여 적분하면 유효작용의 0차항은

$$\Gamma_0[\varphi]=S[\varphi]. \tag{17}$$

또한 식 (15)로부터 그린함수의 0차항은 다음과 같다.

$$G_0^{ik}=D_{ik} \tag{18}$$

식 (18)을 식 (13)에 대입하면

$$\frac{\delta\Gamma_1}{\delta\varphi_i}=\frac{i}{2}TrD_{jk}^{-i}\frac{\delta D_{jk}}{\delta\varphi_i}$$

가 얻어지며 이로부터 유효작용의 1차항 Γ_1을 다음과 같이 얻을수 있다.

$$\Gamma_1[\varphi]=\frac{i}{2}Tr\ln D_{jk} \tag{19}$$

식 (14)에 의하여 결정되는 Γ_2가 두고리진공그라프들의 합이라는것을 유도하자.

G_1^{ik}와 G_0^{ijk}는 $G_0^{ik}(=D_{ik})$에 의하여 표시된다. 식 (16)으로부터

$$G_1^{ik}=-G_0^{ij}\frac{\delta^2\Gamma_1}{\delta\varphi_j\delta\varphi_m}G_0^{mk}, \tag{20}$$

$$G^{ijk}=\frac{\delta}{\delta J_i}\frac{\delta^2 W}{\delta J_j\delta J_k}\bigg|_{J=0}=\frac{\delta}{\delta J_i}G^{jk}\Big|_{J=0}=G^{il}G^{jm}G^{kn}\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\varphi_l\delta\varphi_m\delta\varphi_n}. \tag{21}$$

식 (10)과 (11)을 식 (21)에 대입하면

$$G_0^{ijk}=G_0^{il}G_0^{jm}G_0^{kn}\frac{\delta^3\Gamma_0}{\delta\varphi_l\delta\varphi_m\delta\varphi_n}. \tag{22}$$

식 (20), (22)를 식 (14)에 대입하면 유효작용의 2차항은 내부선을 나타내는 D_{ik}와 정점을 나타내는 $S[\varphi]$만을 포함하게 된다.

Γ_3과 Γ_4 등에 대하여서도 마찬가지로 얻을수 있다.

3. 유효작용의 간단한 적용실례

유효작용의 두고리근사식 (9)를 선형시그마모형에 적용하자.

선형시그마모형의 라그랑쥬안은 다음과 같다.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[(\partial_\mu \sigma)^2 + (\partial_\mu \boldsymbol{\pi})^2] - \frac{\mu^2}{2}[\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2] - \frac{\lambda^2}{4}[\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2]^2 \tag{23}$$

식 (23)에 대응되는 하밀토니안이 정값을 가지기 위하여서는 $\lambda^2 > 0$ 일것이 요구된다. 그러므로 $\lambda > 0$ 이라고 하자.

그리고 υ 를 σ 의 진공기대값이라고 하자. 즉 $\langle\sigma\rangle = \upsilon \neq 0$, $\langle\boldsymbol{\pi}\rangle = 0$ 이다. 마당 σ 는 $\sigma = s + \upsilon$ 로 밀리며 $\langle s\rangle = 0$ 으로 된다.

식 (23)을 s 에 관하여 다시 적으면 다음과 같다.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_a + \mathcal{L}_b$$

$$\mathcal{L}_a = \frac{1}{2}[(\partial_\mu \boldsymbol{\pi})^2 - \mu_\pi^2 \boldsymbol{\pi}^2] + \frac{1}{2}[(\partial_\mu s)^2 - \mu_\sigma^2 s^2] - \lambda^2 \upsilon s(s^2 + \boldsymbol{\pi}^2) - \frac{\lambda^2}{4}(s^2 + \boldsymbol{\pi}^2)^2 \tag{24}$$

$$\mathcal{L}_b = -\upsilon \mu_\pi^2 s$$

여기서 $\mu_\pi^2 = \mu^2 + \lambda^2 \upsilon^2$, $\mu_\sigma^2 = \mu^2 + 3\lambda^2 \upsilon^2$ 이다.

식 (24)에 대응되는 σ 와 π 에 대한 자유마당의 전파자들은 운동량공간에서 각각 다음과 같이 주어진다.

$$D_{ik}(p) = \frac{1}{p^2 - \mu_\pi^2}\delta_{ik}, \quad \Delta(p) = \frac{1}{p^2 - \mu_\sigma^2}$$

$\upsilon =$일정인 경우에 유효작용이 유효포텐샬로 된다는것은 이미 알려져있다.

$$\Gamma[\upsilon] = -V[\upsilon]\int dx \tag{25}$$

식 (25)와 (9)로부터

$$V[\upsilon] = \frac{\mu^2}{2}\upsilon^2 + \frac{\lambda^2}{4}\upsilon^4 + \frac{i}{2}\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}\ln(k^2 - \mu_\pi^2) + \frac{i}{2}\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}\ln(2 - \mu_\sigma^2) + V_2 .$$

여기서 V_2 는 두고리진공그라프들의 합으로 얻어진다.

V_2 에 기여하는 두고리진공그라프는 그림과 같다.

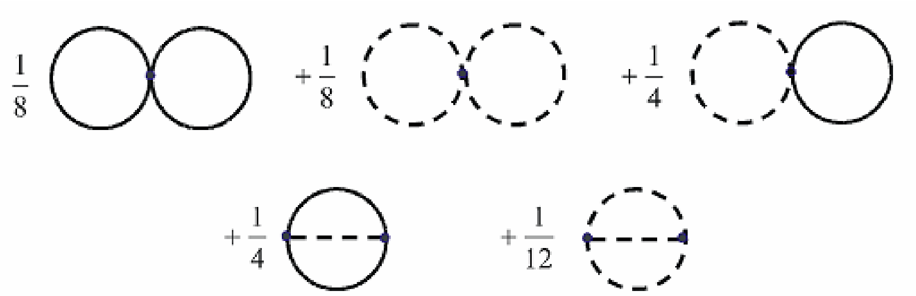

그림. V_2 에 기여하는 두고리진공그라프

실선은 D_{ik} 를 나타내며 점선은 $-\Delta$ 를 나타낸다. 즉

$$V_2=\frac{3}{4}i\lambda^2\left[\int\frac{d^4p}{p^2-\mu_\sigma^2}\right]^2+\frac{27}{4}i\lambda^2\left[\int\frac{d^4p}{p^2-\mu_\pi^2}\right]^2+\frac{9}{2}i\lambda^2\int\frac{d^4p}{p^2-\mu_\pi^2}\int\frac{d^4k}{k^2-\mu_\sigma^2}+$$
$$+3\lambda^4 v^2\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{1}{p^2-\mu_\pi^2}\frac{1}{q^2-\mu_\pi^2}\frac{1}{(p+q)^2-\mu_\sigma^2}+$$
$$+3\lambda^4 v^2\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{1}{p^2-\mu_\sigma^2}\frac{1}{q^2-\mu_\sigma^2}\frac{1}{(p+q)^2-\mu_\sigma^2}.$$

맺 는 말

론문에서는 고리전개에 의하여 유효작용을 계산하는 방법을 확립하였으며 얻어진 공식을 선형시그마모형에 응용하여 두고리근사에서 유효포텐샬을 계산하였다.

참 고 문 헌

[1] R. Jackiew; Phys. Rev., D 9, 3320, 1974.

[2] A. Jakovac et al.; Phys. Rev., D 85, 085006, 2012.

[3] U. Reinosa et al.; Annals Phys., 325, 969, 2010.

주체105(2016)년 11월 5일 원고접수

Study on the Loop Expansion of Effective Action

Ri Song Jin, Ko Yong Hae

We proposed a method of calculation for effective action by loop expansion and calculated the effective potential of linear sigma model up to two loops by using this method.

Key words: effective action, loop expansion