김일성종합대학학보 (자연과학) 주체105(2016)년 제62권 제9호
JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE) Vol. 62 No. 9 JUCHE105(2016).

분수계도함수를 포함하는 연산자방정식에 대한 라쁠라스변환법

강영숙, 김향

경애하는 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《첨단돌파전을 힘있게 벌려야 나라의 과학기술전반을 빨리 발전시키고 지식경제의 토대를 구축해나갈수 있습니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 39페지)

최근에 함수방정식의 풀이를 구하는 방법인 라쁠라스변환법을 확산방정식, 미적분방정식 등에 적용하기 위한 연구[1－4]가 활발히 진행되고있다.

선행연구[1]에서는 ${}_0^cD^\alpha x(t) = Ax(t) + f(t),\ \ x(0) = \eta$ 형태의 방정식에 대한 라쁠라스변환법을 연구하였다. 여기서는 일반적으로 임의의 함수 $f(t)$ 에 대하여 라쁠라스변환법을 적용할수 없으므로 라쁠라스변환법을 적용하기 위한 조건을 밝혔다. 여기서 $0 < \alpha < 1$ 로, 도함수는 캐푸터도함수로, A 는 n 차행렬로 가정하였다.

선행연구[2]에서는

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(t)u(t) = 0,\ u(0) = u_0$$

형태의 방정식에 대한 라쁠라스변환법을 연구하였다.

우리는 일반적으로 시간에 의존하는 결수를 가진 방정식에 라쁠라스변환법을 적용하는것이 효과적이지 못하므로 그것을 반복법을 리용하여 근사계산하였다.

론문에서는 다음과 같은 방정식에 라쁠라스변환법을 적용하기 위한 조건을 연구한다.

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = Au(t) + f(t)\ (0 \le t < +\infty),\ \ u(0) = u_0 \tag{1}$$

여기서 A 는 바나흐공간 H 에서 정의된 유계선형연산자이고 A 의 뜻구역은 H 에서 조밀하며 u_0, $f(t) \in H$ 라고 가정한다. 그리고 분수계도함수는 캐푸터도함수라고 가정한다.

정의 1 추상함수 $f(t)$ 의 라쁠라스변환을 $F(s) := L(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ 로 한다.

정의 2 $E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)},\ z \in \boldsymbol{C}$, $\alpha,\ \beta > 0$ 을 미타그－레플러함수라고 한다.

보조정리 1 [1] $b \ge 0,\ \beta > 0,\ a(t)$, $r(t)$ 는 부가 아니고 $0 \le t < T\ (T \le +\infty)$ 에서 국부적분가능하다고 하자. 또한 부등식 $r(t) \le a(t) + b\int_0^t (t-s)^{\beta-1} r(s)ds$ 가 성립된다고 하자.

이때 다음의 식들이 성립된다.

$$r(t)\le a(t)+\theta\int_0^t E'_\beta(\theta(t-s))a(s)ds\ \ (0\le t<T),\ \ \theta=(b\Gamma(\beta))^{\frac{1}{\beta}},\ E_\beta(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n\beta}}{\Gamma(n\beta+1)}$$

특히 $a(t)\equiv a$ 이면 $r(t)\le E_\beta(\theta t)$ 가 성립된다.

정의 3 f 가 $[0, \infty)$ 우에서 정의된 추상함수라고 하자.

이때 적당한 상수 $M>0,\ c,\ T_0>0$ 이 있어서 임의의 $t\ge T_0$ 에 대하여 $\|f(t)\|_H\le Me^{ct}$ 이 만족되면 f 는 지수제한을 가진다고 말한다.

보조정리 2 C 는 복소평면, $\alpha, \beta>0$, A 는 H 에서 정의된 유계선형연산자이고 $s\in C$ 는 조건 $|s|>\|A\|^{1/\alpha}$ 을 만족시킨다고 하자.

그러면 $L(t^{\beta-1}E_{\alpha,\ \beta}(At^\alpha))=s^{\alpha-\beta}(s^\alpha I-A)^{-1}$ 이 성립된다. 여기서 $E_{\alpha,\ \beta}(At^\alpha)$ 은 연산자 합렬로 리해하며 I 는 항등연산자이다.

증명 $|s|>\|A\|^{1/\alpha}$ 을 리용하면 $\sum_{k=0}^{\infty}A^k s^{-(k+1)\alpha}=s^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}(As^{-\alpha})^k=s^{-\alpha}(I-As^{-\alpha})^{-1}$ 이 성립된다.

추상함수 $t^{\beta-1}E_{\varepsilon,\ \beta}(At^\alpha)$ 을 라쁠라스변환하면

$$L\{t^{\beta-1}E_{\varepsilon,\ \beta}(At^\alpha)\}=$$

$$=L\left(t^{\beta-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(At^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}A^k s^{-\beta-\alpha k}=s^{\alpha-\beta}\sum_{k=0}^{\infty}A^k s^{-(k+1)\alpha}=s^{\alpha-\beta}(s^\alpha-A)^{-1}$$

이므로 보조정리가 증명된다.(증명끝)

정리 방정식 (1)이 련속인 풀이 $u(t)$ 를 가지며 $f(t)$ 는 $[0, +\infty)$ 에서 련속이고 지수제한을 가진다고 하자.

그리고 A 는 바나흐공간 H 에서의 유계선형연산자이고 $(Au)(t)$ 는 $[0, +\infty)$ 에서 련속이라고 하자.

이때 $u(t),\ \dfrac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}$ 는 지수제한을 가진다.

증명 방정식 (1)은 $u(t)=u_0+\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}(Au(\tau)+f(\tau))d\tau,\ 0\le t<\infty$ 와 동등하다.

$f(t)$ 가 지수제한을 가지므로 적당한 정수들인 $M,\ \sigma,\ T$ 가 있어서 임의의 $t\ge T$ 에 대하여 $\|f(t)\|\le Me^{\sigma t}$ 이 성립된다.

그러면 $t\ge T$ 에 대하여 다음의 식이 성립된다.

$$u(t)=u_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T(t-\tau)^{\alpha-1}(Au(\tau)+f(\tau))d\tau+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_T^t(t-\tau)^{\alpha-1}(Au(\tau)+f(\tau))d\tau$$

$Au(t)+f(t)$ 는 가정으로부터 $[0,\ T]$ 에서 련속이다. 따라서 $\|Au(t)+f(t)\|\le K$ 이다.

부등식

$$\|u(t)\|\le\|u_0\|+\frac{K}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T(t-\tau)^{\alpha-1}d\tau+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_T^t(t-\tau)^{\alpha-1}\|A\|\|u(\tau)\|d\tau+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_T^t(t-\tau)^{\alpha-1}\|f(\tau)\|d\tau$$

의 량변에 $e^{-\sigma t}$ 을 곱하자.

$$\|u(t)\|e^{-\sigma t}\le\|u_0\|e^{-\sigma t}+\frac{Ke^{-\sigma t}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T(t-\tau)^{\alpha-1}d\tau+\frac{e^{-\sigma t}}{\Gamma(\alpha)}\int_T^t(t-\tau)^{\alpha-1}\|A\|\|u(\tau)\|d\tau+\frac{e^{-\sigma t}}{\Gamma(\alpha)}\int_T^t(t-\tau)^{\alpha-1}\|f(\tau)\|d\tau\le$$

$$\le\|u_0\|e^{-\sigma T}+\frac{Ke^{-\sigma T}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T(t-\tau)^{\alpha-1}d\tau+\frac{\|A\|}{\Gamma(\alpha)}\int_T^t(t-\tau)^{\alpha-1}\|u(\tau)\|e^{-\sigma\tau}d\tau+\frac{e^{-\sigma t}}{\Gamma(\alpha)}\int_T^t(t-\tau)^{\alpha-1}Me^{\sigma\tau}d\tau=$$

$$=\|u_0\|e^{-\sigma T}+\frac{Ke^{-\sigma T}T^\alpha}{\Gamma(\alpha)}+\frac{\|A\|}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}\|u(\tau)\|e^{-\sigma\tau}d\tau+\frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}e^{\sigma(\tau-t)}d\tau\le$$

$$\le\|u_0\|e^{-\sigma T}+\frac{Ke^{-\sigma T}T^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}+\frac{M}{\sigma^\alpha}+\frac{\|A\|}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}\|u(\tau)\|e^{-\sigma\tau}d\tau,\ t\ge T$$

$a:=\|u_0\|e^{-\sigma T}+Ke^{-\sigma T}T^\alpha/(\alpha\Gamma(\alpha))+M/\sigma^\alpha,\ b:=\|A\|/\Gamma(\alpha)$ 로 표시하면

$$\|u(t)\|e^{-\sigma t}\le a+b\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}\|u(\tau)\|e^{-\sigma\tau}d\tau .$$

$r(t):=\|u(t)\|e^{-\sigma t}$ 으로 놓으면 웃식을 $r(t)\le a+b\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}r(\tau)d\tau$ 로 쓸수 있다.

보조정리 1에 의하여 다음의 식이 성립된다.

$$r(t)\le aE_\alpha(\theta t)=a\sum_{n=0}^\infty\frac{(\theta t)^{n\beta}}{\Gamma(n\alpha+1)},\ \theta=(b\Gamma(\alpha))^{\frac{1}{\alpha}}$$

따라서 $r(t)\le a\sum_{n=0}^\infty\frac{(b\Gamma(\alpha)t^\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha+1)}=a\sum_{n=0}^\infty\frac{(b\Gamma(\alpha))^n t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)},\ t\ge T$ 이다.

$F_\alpha(t)=\sum_{n=0}^\infty\frac{t^n}{\Gamma(n\alpha+1)}$ (미타그-레플러함수의 정의)을 리용하면 $r(t)\le aF_\alpha(b\Gamma(\alpha)t^\alpha),\ t\ge T$ 가 성립되며 $F_\alpha(\omega t^\alpha)\le ce^{\omega^{1/\alpha}t},\ t\ge0,\ \omega\ge0,\ 0<\alpha<2$ (미타그-레플러함수의 성질)를 리용하면 $r(t)\le ace^{((b\Gamma(\alpha))^{1/\alpha}t}$, $t\ge T$ 와 같이 쓸수 있다. 따라서 $\|u(t)\|\le ace^{((b\Gamma(\alpha))^{1/\alpha}+\varsigma)t}$, $t\ge T$ 이다. 즉 $u(t)$ 는 지수제한을 가진다.

또한 다음의 부등식이 성립된다.

$$\left\|\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}\right\|\le\|A\|\|u(t)\|+\|f(t)\|\le a\|A\|ce^{((b\Gamma(\alpha))^{1/\alpha}+\sigma)t}+Me^{\sigma t}\le(a\|A\|c+M)e^{((b\Gamma(\alpha))^{1/\alpha}+\sigma)t},\ t\ge T$$

따라서 정리의 결과가 나온다.(증명끝)

이 정리로부터 방정식 (1)의 량변에 t 에 관하여 라쁠라스변환을 실시할수 있다.

$$\hat{u}(s)=s^{\alpha-1}(s^\alpha-A)^{-1}u_0+(s^\alpha-A)^{-1}\hat{f}(s)\qquad(2)$$

식 (2)와 보조정리 2를 리용하면 방정식 (1)의 풀이를 구하는 다음의 식을 얻을수 있다.

$$u(t)=E_{\alpha,\,1}(At^\alpha)u_0+\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\,\alpha}(A(t-\tau)^\alpha)f(\tau)d\tau\qquad(3)$$

이 식은 해석적인 식이지만 실지 계산에서는 이 식을 리용하여 계산하기 곤난하므로 수값계산을 진행하여야 한다.

Σ를 A의 레졸벤트모임 $\rho(A)$에 포함되는 복소평면의 구역이라고 하자. 여기서

$$\rho(A)=\{\lambda\in C \mid \lambda I-A \text{ 가 가역}\}.$$

구역 Σ에서 적당한 곡선 Γ를 취하고 방정식 (1)의 량변에 시간변수에 관하여 라쁠라스변환을 실시한 결과 식 (2)를 얻을수 있으며 그것을 다음과 같이 쓸수 있다.

$$(s^{\alpha}I-A)\hat{u}(s)=s^{\alpha-1}u_0+\hat{f}(s) \tag{4}$$

문제 (4)를 유한요소법, 유한계차법 혹은 유한체적법과 같은 임의의 공간리산화방법을 리용하여 근사적으로 풀수 있다.

$(s^{\alpha}I-A)$의 공간근사를 $(s^{\alpha}I_h-A_h)$로 표시하고 $u_{h,\,0}$에 의한 u_0의 공간근사풀이 $\hat{u}_h(z)$는 $(s^{\alpha}I_h-A_h)^{-1}u_{0,\,h}$로 표시할수 있다.

시간령역풀이 $u_h(t)=u_h(\cdot,\,t)$는 라쁠라스거꿀공식을 통하여 다음과 같이 얻을수 있다.

$$u_h(\cdot,\,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(zI_h+A_h)^{-1}u_{0,\,h}e^{tz}dz$$

참 고 문 헌

[1] I. P. Gavrilyuk et al.; Math. Comp., 74, 555, 2005.

[2] I. Podlubny; Fractional Differential Equations, Academic Press, 34～89, 1999.

[3] X. J. Wen et al.; IEEE Trans. Circuits Syst. II, 55, 11, 1178, 2008.

[4] M. L'opez-Fern'andez; BIT, 50, 631, 2010.

주체105(2016)년 5월 5일 원고접수

Laplace Transform Method for Operator Equation with Fractional Derivative

Kang Yong Suk, Kim Hyang

In the previous paper Laplace transform method was studied for the following equation.

$${}_0^cD^{\alpha}x(t)=Ax(t)+f(t),\ \ x(0)=\eta$$

They gave a sufficient condition to apply the Laplace transform method in this fractional differential equations. Here, $0<\alpha<1$, derivative was the Caputo fractional derivative, A was $n\times n$ constant matrix.

We present a sufficient condition to apply the Laplace transform method to the following equations.

$$\frac{\partial^{\alpha}u}{\partial t^{\alpha}}=Au(t)+f(t)\ (0\le t<+\infty),\ \ u(0)=u_0$$

Here, A is a bounded linear operator in a Banach space H with its domaindense in H. And $u_0,\ f(t)\in H$. And fractional derivative is the Caputo fractional derivative.

Key words: Laplace transform method, fractional derivative