

최량화문제를 풀기 위한 계발식칼만알고리즘의 개선

허 일 건

블록최량화문제에 대해서는 효과적인 알고리즘들이 제안되었으나 비블록최량화문제를 풀기 위한 알고리즘개발은 아직 난문제로 되고있다. 사실 최량화에서 기본요점은 선형성과 비선형성이 아니라 볼록성과 비볼록성에 있다.[3] 비블록최량화문제를 풀기 위한 여러가지 계발식수법들이 개발되어 이전에는 풀기 힘들거나 불가능한 문제들의 풀이를 얻어내고있다. 이러한 계발식수법들에는 모의소둔법, 유전알고리즘, 개체무리최량화와 계발식칼만알고리즘[1, 2]이 있다. 모의소둔법, 유전알고리즘, 개체무리최량화방법들은 각각 자기의 우점과 결함을 가지고있다. 선행연구[2]에서는 이 우결함들을 분석하고 새로운 최량화방법인 계발식칼만알고리즘을 제안하였다. 그리고 비블록최량화문제들을 통하여 계발식칼만알고리즘의 효과성을 구체적으로 검증하고 다른 계발식수법들과 비교하여 그것이 계산시간과 성공률에서 우월하다는것을 확증하였다.

논문에서는 종래의 계발식칼만알고리즘의 최량풀이의 대역성을 개선하고 계산시간을 단축한 개선된 계발식칼만알고리즘을 제안한다.

1. 계발식칼만알고리즘의 성능개선

논문에서는 계발식칼만알고리즘의 구체적인 내용[1, 2]에 대해서는 생략하고 개선된 부분만을 서술한다.

계발식칼만알고리즘의 목표는

$$x_{\text{opt}} = \arg \min_{x \in D} J(x), \quad D = \{x: g_i(x) \leq 0, \quad i = \overline{1, m}\}$$

을 만족시키는 최량풀이 x_{opt} 를 결정하는것이다. 여기서 $J: R^n \rightarrow R$ 는 목적함수, g_i 는 제한조건들이다.

우리는 우와 같은 최량화문제에서 두가지 지표들의 성능을 개선하였다.

1) 대역최량성개선

최량화방법의 가장 중요한 지표는 최량풀이의 대역성이다.

종래의 계발식칼만알고리즘에서는 가우스우연수발생기의 초기파라미터들인 기대값벡터와 분산-공분산행렬을 다음과 같이 초기화하였다.

$$m_0 = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_{n_x} \end{bmatrix}, \quad \Sigma_0 = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_{n_x}^2 \end{bmatrix}, \quad \left(\mu_i = \frac{\bar{x}_i + x_i}{2}, \quad \sigma_i = \frac{\bar{x}_i - x_i}{6}, \quad i = \overline{1, n_x} \right)$$

여기서 m_0 은 초기기대값벡토르, Σ_0 은 초기 분산-공분산행렬, \bar{x}_i 와 x_i 는 탐색영역에서 i 번째 변수의 웃, 아래한계, n_x 는 벡토르 x 의 요소수이다.

이 규칙을 리용하면 표본의 99%가 구간 $\mu_i \pm 3\sigma_i (i=1, \overline{n_x})$ 에 분포된다.

그러나 이 규칙은 근사최량초기화를 전혀 고려하지 않은 매우 일반적인 규칙으로서 결합은 국부최량풀이가 초기기대값에 가깝고 대역최량풀이가 탐색영역의 경계에 있는 경우 국부최량풀이를 얻을 확률이 높다는것이다 그것은 종래의 계발식칼만알고리즘이 가우스우연수발생기를 리용하기때문이다.

이것을 극복하기 위하여 K-평균무리화방법을 리용하여 가우스우연수발생기를 새롭게 초기화하도록 하였다.

먼저 주어진 탐색공간에서 평등분포하는 N_0 개의 우연표본들을 발생시킨다. 이러한 N_0 의 결정방법은 해석적으로 주어지지 않는것이지만 그것이 크면 무리분석효과가 좋아지는 반면에 계산시간이 길어지므로 최량화문제에 따라 적당히 선택한다.

다음 이 우연표본들을 K-평균무리화방법을 리용하여 N_1 개의 무리들로 분할한다. (N_1 은 MATLAB Statistics Toolbox에서 kmeans, silhouette함수를 리용하여 확정할수 있다.)

그리고 매 무리에 속한 표본들의 목적함수값을 계산한다. 즉 매 무리에 대하여 거기에 속한 우성표본들로부터 N_1 개의 기대값벡토르와 분산-공분산행렬들을 얻는다.

이것들을 각각 가우스우연수발생기의 초기값으로 설정하고 종래의 계발식칼만알고리즘을 적용한다. 얻어진 N_1 개의 풀이가운데서 가장 최량인것을 대역최량풀이로 한다.

2) 계산시간개선

최량화방법의 또 다른 중요한 지표는 계산시간인데 이것은 표본수 N 을 동적으로 변화시켜 줄이기로 한다.

선행연구[2]에서 언급된것처럼 사실 N 은 최량풀이의 근방으로 기대되는 일정한 영역을 얻기 위해 알고리즘의 첫 몇단계에서만 크게 하면 된다. 그다음에는 이 값을 크게 할 필요가 없으며 오히려 시간을 낭비한다. 그러나 선행연구[2]에서는 이 값을 어떻게 줄이겠는가 하는 방법을 논의하지 못하였다.

문제는 기대되는 영역이 확정되는 걸음수를 어떻게 결정하겠는가 하는것이다. 이를 위해 다음의 표준편차벡토르들을 생각하자.

$$M_k = \text{vec}^d(\Sigma_k)^{\frac{1}{2}}$$

여기서 k 는 걸음수, $\text{vec}^d(\cdot)$ 는 행렬 (\cdot) 의 대각선벡토르, Σ_k 는 k 번째 걸음에서 분산-공분산행렬이다.

이때 k 번째 걸음에서 다음의 조건

$$M_k \leq M_0/10$$

이 만족되면 기대되는 영역이 결정되었다고 보고 N 을 절반으로 줄인다. 물론 이 방법은 해석적인 방법은 아니지만 수값실험을 통해 그 효과성을 확증할수 있다.

2. 수값실험결과 및 분석

비불록최량화문제를 풀기 위한 개선된 계발식칼만알고리즘의 효과성을 확증하기 위해 다음과 같은 2개의 함수 즉 로젠브로크함수와 브래닌함수들을 수값실험함수들로 선택하였다. 우선 로젠브로크함수는 다음과 같다.

$$J(x) = 100(x_1^2 - x_2)^2 + (1 - x_1)^2, \quad x = [x_1, x_2]^T$$

이때 최량화를 위한 탐색영역이 $-2.048 \leq x_i \leq 2.048 (i=1, 2)$ 이라고 하면 국부최량풀이는

$$x_{\text{국부최량}} = (2.048, -2.048), \quad J(x_{\text{국부최량}}) = 3 \ 897.7$$

이고 대역최량풀이는

$$x_{\text{대역최량}} = (-2.048, -2.048), \quad J(x_{\text{대역최량}}) = 3 \ 905.9$$

이다. 다음 브래닌함수는 다음과 같다.

$$J(x) = \left(x_2 - \left(\frac{5.1}{4\pi^2} \right) x_1^2 + \left(\frac{5}{\pi} \right) x_1 - 6 \right)^2 + 10 \left(1 - \left(\frac{1}{8\pi} \right) \right) \cos(x_1) + 10$$

이때에는 탐색영역이 $-5 \leq x_i \leq 10 (i=1, 2)$ 일 때 대역최량풀이는 3개 즉

$$x_{\text{대역최량}} = (-\pi, 12.275), (\pi, 2.275), (9.424 \ 78, 2.475)$$

로 주어지며 대역최량값은 다같이

$$J(x_{\text{대역최량}}) = 0.397 \ 887$$

로 얻어진다.

1) 대역최량성

먼저 로젠브로크함수를 보기로 하자.

평등분포하는 우연표본수를 $N_0 = 500$ 으로 설정하였을 때 MATLAB Statistics Toolbox의 kmeans, silhouette 함수를 리용하여 각이한 분할에 대한 평가를 진행한 결과 $N_1 = 4$ 인 경우의 무리분할이 가장 합리적이라는 결과가 얻어졌다.

마찬가지로 브래닌함수에 대해서도 $N_0 = 500$, $N_1 = 4$ 일 때 가장 합리적이라는 결론을 얻었다. 여기에 기초하여 두 함수들에 대하여 우연표본수 $N = 100$, 우성표본수 $N_\xi = 10$, 속도조절계수 $\alpha = 0.7$ 로 설정한다.[1] 이때 알고리즘의 정지조건은 최대반복수(300)에 도달되거나

$$\max_{2 \leq i \leq N_\xi} \|x_1 - x_i\|_2 \leq 0.000 \ 1$$

을 만족시키는것이다. 50번의 실험을 통하여 얻어진 결과는 표 1과 같다.

표 1. 대역최량성비교

구분	대역최량풀이 얻을 확률	
	선행한 방법	제안한 방법
로젠브로크함수	0.5	1
브래닌함수	1(1개의 풀이만 결정)	0.7(3개의 풀이 동시에 결정)

표 1에서 보는바와 같이 50번의 실험결과 선행한 계발식칼만알고리즘에서는 25번밖에 대역최량풀이를 얻지 못했지만 개선된 계발식칼만알고리즘에서는 50번 모두 대역최량풀이를

얻었다. 그리고 브레인함수의 경우 50번의 실험중 선행한 계발식칼만알고리즘에서는 오직 1개의 대역최량풀이(π , 2.275)가 얻어졌다. 그러나 개선된 계발식칼만알고리즘에서는 35번의 대역최량풀이가 선행한 방법의 대역최량풀이와 같이 얻어졌고 15번은 적어도 나머지 2개의 대역최량풀이중의 하나가 결정되었다. 또한 첫 3번의 실험만에 3개의 대역최량풀이가 모두 결정되었다. 이 결과들은 대역최량성이 명백히 개선되었다는것을 보여준다.

2) 계산시간

10번의 실험에서 계산시간들은 표 2와 같다.

표 2. 대역최량풀이계산시간비교

회수	로젠브록함수일 때/s		브레인함수일 때/s	
	선행한 방법[1]	제안한 방법	선행한 방법[1]	제안한 방법
1	1.125 0	0.593 8	0.140 6	0.093 8
2	1.078 1	0.625 0	0.140 6	0.109 4
3	1.109 4	0.609 4	0.140 6	0.125 0
4	1.109 4	0.625 0	0.140 6	0.093 8
5	1.109 4	0.609 4	0.125 0	0.109 4
6	1.093 8	0.640 6	0.140 6	0.109 4
7	1.078 1	0.625 0	0.140 6	0.125 0
8	1.078 1	0.609 4	0.140 6	0.125 0
9	1.109 4	0.609 4	0.140 6	0.093 8
10	1.109 4	0.609 4	0.140 6	0.093 8

표 2에서 보는바와 같이 제안한 알고리즘이 계산시간을 현저히 단축하였다는것을 알수 있다.

맺 는 말

대역최량성을 개선하기 위하여 K-평균무리화방법을 리용하였다. 또한 N 을 동적으로 변화시켜 계산시간을 단축하였다. 이 방법은 종래의 계발식칼만알고리즘을 개선하기 위한 한가지 방법으로서 앞으로 여러가지 무리화방법들과 동적변화방법을 리용하면 계발식칼만알고리즘의 성능을 보다 더 개선할수 있다.

참 고 문 헌

- [1] 김일성종합대학학보(자연과학), 60, 3, 39, 주체103(2014).
- [2] R. Toscano et al.; IEEE Transaction on Systems, Man, and Cybernetics, 39, 5, 1231, 2012.
- [3] R. T. Rockafellar; Lagrange Multipliers and Optimality, 35, 2, 183, 1993.

주체105(2016)년 4월 5일 원고접수

Improving Heuristic Kalman Algorithm for Solving Optimization Problems

Ho Il Gon

We presented an improved HKA. We used the K-means clustering technique to improve global optimality of the obtained solution. And, we reduced computation time by dynamically variable N .

Key words: heuristic Kalman algorithm(HKA), non-convex optimization, global optimality