김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제4호

1차원공간에서 준림계산일비선형슈뢰딩게르방정식의 풀이의 점근동태

최광윤, 김진명

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《현시대는 과학과 기술의 시대이며 과학과 기술이 류례없이 빠른 속도로 발전하는것은 현대과학기술발전의 중요한 특징입니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제15권 485폐지)

량자력학의 기본방정식인 비선형슈뢰딩게르방정식의 꼬쉬문제는 다음과 같다.

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx}/2 = \lambda |u|^{2-2\gamma} u & (x \in \mathbf{R},\ t > 0) \\ u(0,\ x) = u_0(x) & (x \in \mathbf{R}) \end{cases} \tag{1}$$

여기서 $\lambda \in \mathbf{C}$ 이다. 비선형슈뢰딩게르방정식의 풀이의 점근동태에 대한 연구가 적지 않게 진행되였다. 우선 선행연구[2]에서는 $\gamma < 0$인 경우 저에네르기산란성 즉 충분히 작은 초기값에 대하여 방정식 (1)의 풀이가 $t \to \infty$일 때 자유슈뢰딩게르방정식의 풀이에로 수렴한다는것을 밝혔다. 그리고 선행연구[1]에서는 $\gamma \ge 0$인 경우 저에네르기산란성을 얻을수 없다는것을 밝혔다. 또한 선행연구[3]에서는 $\gamma = 0$인 경우 개량된 산란성 즉 충분히 작은 초기값에 대하여 방정식 (1)의 풀이가 $t \to \infty$일 때 어떤 $w_0 (\in L^\infty(\mathbf{R}^n))$에로 수렴한다는것을 밝혔다. 계속하여 선행연구[5]에서는 초기값 u_0과 $\gamma = \gamma(u_0)$이 충분히 작은 정수일 때 방정식 (1)의 풀이에 대하여 $\| u(t) \|_{L^\infty} \le C(1+t)^{-1/(2-2\gamma)}$이 성립한다는것을 밝혔다.

론문에서는 초기값 u_0과 $\gamma := \gamma(\| u_0 \|_{H^{0,1} \cap H^1})$이 충분히 작은 정수일 때 방정식 (1)의 풀이에 대하여 선행연구[5]에서와 같은 결과 $\| u(t) \|_{L^\infty} \le C(1+t)^{-1/(2-2\gamma)}$을 얻었다.

F는 푸리에변환, F^{-1}은 거꿀푸리에변환이라고 하고 $< x > := \sqrt{1+|x|^2}$으로 놓자. 또한 무게붙은 쏘볼레브공간을 $H_p^{m,k} := \{ \phi \in L^p \mid \| < x >^k < i\partial_x >^m \phi \|_{L^p} < +\infty \ (m,\ k \in \mathbf{R}^+;\ 1 \le p \le +\infty) \}$로 정의하자. 그리고 간단히 하기 위하여 $H^{m,k} := H_2^{m,k},\ H^m := H^{m,0}$으로 표시하자.

론문에서 리용된 선행연구[4]에서와 류사한 분해방법과 변환들은 다음과 같다.

$$M(t) := e^{ix^2/(2t)},\ D(t)\phi := \frac{1}{\sqrt{it}} \phi\left(\frac{x}{t}\right),\ V(t)\phi := FM_t F^{-1}\phi = \sqrt{\frac{it}{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{-it(\xi - y)^2/2} \phi(y) dy$$

로 놓으면 $U(t) = e^{it\Delta/2} = M(t)D(t)FM(t) = M(t)D(t)V(t)F$로 분해된다. 또한 $E(t) := e^{it\xi^2/2}$으로 놓으면

$$FU(-t) = iV(-t)\overline{E}(t)D(1/t) \tag{2}$$

로 분해된다. 그리고 식 (1)의 왼변과 오른변에 $FU(-t)$를 실시한 결과는 각각 다음과 같다.

$$FU(-t)(iu_t + u_{xx}/2) = i\partial_t (FU(-t)u) \tag{3}$$

$$iV(-t)\overline{E}(t)D(1/t)(\lambda |u|^{2-2\gamma} u) = \lambda t^{-1+\gamma} V(-t)(|\overline{E}(t)D(1/t)u|^{2-2\gamma}\ \overline{E}(t)D(1/t)u) \tag{4}$$

또한 $\varphi := FU(-t)u = V(-t)v$, $v := V(t)FU(-t)u = i\overline{E}(t)D(1/t)u$ 로 놓자.

보조정리 1 임의의 $t(>1)$ 에 대하여 다음의 부등식이 성립한다.

$$\| u \|_{L^\infty} \le Ct^{-1/2} \| FU(-t)u \|_{L^\infty} + Ct^{-3/4} \| U(-t)u \|_{H^{0,1}}$$

보조정리 2 임의의 $\alpha(>1)$ 에 대하여 다음의 부등식이 성립한다.[5]

$$\| |u|^\alpha u \|_{H^1} \le C \| u \|_{L^\infty}^\alpha \| u \|_{H^1}, \quad \| xU(-t)(|u|^\alpha u) \|_{L^2} \le C \| u \|_{L^\infty}^\alpha \| xU(-t)u \|_{L^2}$$

모임 X_T 와 넘기기 A 를 다음과 같이 구성하자.

$$X_T := \left\{ u \;\middle|\; \| u \|_{X_T} := \sup_{t \in [0, T]} \{ (1+t)^{-2\gamma} \| U(-t)u \|_{H^{0,1}} + (1+t)^{1/(2-2\gamma)-1/2} \| FU(-t)u \|_{L^\infty} \} \le 2\varepsilon \right\}$$

여기서 ε 은 충분히 작은 정의 상수이다.

$$A : u \mapsto U(t)u_0 - i\lambda \int_0^t U(t-\tau)(|u(\tau)|^{2-2\gamma} u(\tau))d\tau \tag{5}$$

보조정리 3 $\| Fu_0 \|_{L^\infty} + \| u_0 \|_{H^{0,1}} \le \varepsilon$ 이면 어떤 $T(>1)$ 가 존재하여 방정식 (1)의 국부적풀이 $u(\in X_T)$ 는 유일존재한다.

정리 1 $-1/\gamma^3 \ge \operatorname{Im} \lambda$, $\gamma = C_0 \varepsilon^{1/2}$ (여기서 ε , C_0 은 충분히 작은 정의 상수), $u_0 \in H^1 \cap H^{0,1}$ 이라고 하자. 이때 $\| Fu_0 \|_{L^\infty} + \| u_0 \|_{H^{0,1}} \le \varepsilon$ 이면 방정식 (1)의 유일풀이 $u(\in C([0, +\infty);\ H^1 \cap H^{0,1}))$ 가 존재하여 부등식 $\| u \|_{L^\infty} \le C(1+t)^{-1/(2-2\mu)}$ 이 성립한다.

증명 보조정리 3으로부터 방정식 (1)은 국부적풀이 u 를 가지며 그 풀이에 대하여 다음의 부등식이 성립한다.

$$\| U(-1)u(1) \|_{H^{0,1}} + \| FU(-1)u(1) \|_{L^\infty} \le 2\varepsilon \tag{6}$$

이제 임의의 $T(>1)$ 에 대하여 다음의 부등식이 성립한다는것을 귀유법으로 증명해보자.

$$\sup_{t \in [1, T]} \{ t^{-2\gamma} \| U(-t)u \|_{H^{0,1}} + t^{1/(2-2\gamma)-1/2} \| FU(-t)u \|_{L^\infty} \} < \varepsilon^{1-2\gamma}$$

귀유법가정으로부터 어떤 T 가 있어서

$$\sup_{t \in [1, T]} \{ t^{-2\gamma} \| U(-t)u \|_{H^{0,1}} + t^{1/(2-2\gamma)-1/2} \| FU(-t)u \|_{L^\infty} \} \le \varepsilon^{1-2\gamma}$$

이 성립한다는것이 밝혀진다. 한편 식 (3), (4)로부터 다음의 식이 성립한다.

$$i\varphi_t - \lambda t^{-1+\gamma} |\varphi|^{2-2\gamma} \varphi = \lambda t^{-1+\gamma} (|v|^{2-2\gamma} v - |\varphi|^{2-2\gamma} \varphi) + \lambda t^{-1+\gamma} (V(-t)-1)(|v|^{2-2\gamma} v) = I_1 + I_2$$

그러므로 이 식의 량변에 $\overline{\varphi}$ 를 곱하고 허수부를 비교해보면 다음의 식이 성립한다.

$$\partial_t |\varphi| + |\operatorname{Im} \lambda| t^{-1+\gamma} |\varphi|^{3-2\gamma} \le |I_1| + |I_2| \tag{7}$$

또한 미분방정식 $\partial_t f + \dfrac{t^{-1+\gamma}}{\gamma^3} f^{3-2\gamma} = 0$, $f(1) = |FU(-1)u(1)|$ 의 풀이는 다음과 같다.

$$f(t) = f(1) / [1 + (2-2\gamma) f(1)^{2-2\gamma} (t^\gamma - 1)/\gamma^4]^{1/(2-2\gamma)}$$

그러므로 식 (6)과 보조정리 2로부터 다음의 식이 성립한다.

$$C_1 \varepsilon^{1/(1-\gamma)} t^{-\gamma/(2-2\gamma)} \le f(t) \le C_2 \varepsilon^{1/(1-\gamma)} t^{-\gamma/(2-2\gamma)} \tag{8}$$

따라서 식 (7)의 량변에 $f^{-3+2\gamma}$ 을 곱하고 양그부등식을 리용하면 다음의 식이 성립한다.

$$\partial_t(f^{-3+2\gamma}|\varphi|) \le t^{-1+\gamma}(2-2\gamma)/\gamma^3 + f^{-3+2\gamma}(|I_1|+|I_2|)$$

그런데 선행연구[4]에서의 정리 3.1과 보조정리 1, 2로부터

$$|I_1|+|I_2| \le \lambda t^{-5/4+\gamma}\|\partial_x(|v|^{2-2\gamma}v)\|_{L^2} \le \lambda t^{-5/4+\gamma}\|v\|_{L^\infty}^{2-2\gamma}\|\partial_x v\|_{L^2} \le Ct^{-5/4+2\gamma}\varepsilon^{(1-2\gamma)(3-2\gamma)}$$

이 성립하므로 $\partial_t(f^{-3+2\gamma}|\varphi|) \le t^{-1+\gamma}(2-2\gamma)/\gamma^3 + Ct^{-5/4+\gamma+2\gamma^2}\varepsilon^{(1-2\gamma)(3-2\gamma)}f^{-3+2\gamma}$ 이 성립한다.

따라서

$$|\varphi| \le C\varepsilon t^{1/2-1/(2-2\gamma)} \tag{9}$$

이 성립한다. 한편 식 (5)와 보조정리 2 및 그론월의 부등식으로부터

$$\|U(-t)u\|_{H^{0,1}} \le C\varepsilon e^{C\varepsilon^{(2-2\gamma)(1-2\gamma)}\int_1^t \tau^{-1}d\tau} \le C\varepsilon t^{C\varepsilon^{(2-2\gamma)(1-2\gamma)}} \le C\varepsilon t^{2\gamma} \tag{10}$$

이 성립한다. 따라서 식 (9), (10)으로부터

$$\sup_{t\in[1,T]}\{t^{-2\gamma}\|U(-t)u\|_{H^{0,1}} + t^{1/(2-2\gamma)-1/2}\|FU(-t)u\|_{L^\infty}\} \le C\varepsilon < \varepsilon^{1-2\gamma}$$

이 성립한다. 이것은 귀유법가정에 모순된다.(증명끝)

정리 2 $\mathrm{Im}\lambda<0$, $\gamma=C_0\varepsilon^{2-2\gamma}$ (여기서 ε, C_0 은 충분히 작은 정의 상수), $u_0\in H^1\cap H^{0,1}$ 이라고 하자. 그러면 $\|Fu_0\|_{L^\infty}+\|u_0\|_{H^{0,1}} \le \varepsilon$ 일 때 정리 1의 결과가 그대로 성립한다.

주의 선행연구[5]에서는 $K:=K(\gamma)$ 는 어떤 $(t_0,\ \xi_0)(\in[1,\ T]\times\mathbf{R})$ 가 있어서

$$t_0^{1/(2-2\gamma)-1/2}|Fu(t_0,\ \xi_0)|>K$$

를 만족시켜야 하였다. 즉 γ 는 u_0 에 관계된다. 그러나 정리 1과 2에서 γ 가 $\|u_0\|_{H^{0,1}\cap H^1}$ 에만 관계된다.

참 고 문 헌

[1] J. E. Barab; J. Math. Phys., 25, 11, 3270, 1984.

[2] T. Cazenave et al.; Commun. Contemp. Math., 19, 2, 1650038, 2017.

[3] T. Cazenave et al.; J. Funct. Anal., 274, 402, 2018.

[4] N. Hayashi et al.; Nonlinear Anal., 108, 189, 2014.

[5] N. Kita et al.; J. Differential Equations, 292, 192, 2007.

주체108(2019)년 6월 10일 원고접수

Asymptotic Behavior of Solutions for Subcritical Dissipative Nonlinear Schrödinger Equations in One Dimension Space

Choe Kwang Yun, Kim Jin Myong

In this paper, we obtain an asymptotic behavior of the solution of the subcritical dissipative nonlinear Schrödinger equations $iu_t+u_{xx}/2=\lambda|u|^{2-2\gamma}u$ with sufficiently small initial data.

Key words: Sobolev space, asymptotic behavior, Cauchy problem