김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체103(2014)년 제60권 제9호 Vol. 60 No. 9 JUCHE103(2014).

조종력지연이 있는 불확정성대체계의 분산로바스트조종기설계

리 진 성

선행연구들[2, 3]에서는 불확정성과 시간지연에 대해서만 고찰하고 조종력지연에 대해서는 제기하지 못하였다.

론문에서는 조종력지연과 불확정성을 가진 대체계[1]가 로바스트안정이기 위한 충분조건을 주고 그로부터 분산로바스트조종기를 설계하였다.

1. 분산로바스트조종기설계

N개의 부분체계로 이루어진 조종력지연이 있는 불확정성대체계의 상태방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= [A_i + \Delta A_i(r_i(t))]x_i(t) + [B_i + \Delta B_i(s_i(t))]u_i(t) + \\ &+ [B_{di} + \Delta B_{di}(s_{di}(t))]u_i(t-d_i) + [H_i + \Delta H_i(h_i(t))]\sum_{j=1,\ i\neq j}^{N} H_{ij}x_j(t)\end{aligned} \tag{1}$$

여기서 $x_i(t)\in R^{n_i}$, $u_i(t)\in R^{m_i}$는 상태, 조종력벡토르, A_i, B_i, B_{di}, H_i는 상수행렬, H_{ij}는 i째 부분체계와 j째 부분체계사이의 관련행렬,

$$r_i(t)\in\phi_i\subseteq R^{p_i},\ s_i(t)\in\varphi_i\subseteq R^{q_i},\ s_{di}(t)\in\varphi_{di}\subseteq R^{q_{di}},\ h_i(t)\in\varphi_{hi}\subseteq R^{q_{hi}}$$

는 콤팍트모임 ϕ_i, φ_i, φ_{di}, φ_{hi}에 속하는 임의의 벡토르이다.

이때 불확정성은 다음의 조건을 만족시킨다고 가정하자.

$$\begin{aligned}&\Delta A_i(t)=\overline{A}_iF_i(t),\quad \Delta B_i(t)=\overline{B}_iF_{bi}(t),\ \Delta B_{di}(t)=\overline{B}_{di}F_{di}(t),\ \Delta H_i(t)=\overline{H}_iF_{hi}(t),\\ &\|F_i(t)\|\le 1,\ \|F_{di}(t)\|\le 1,\ \|F_{bi}(t)\|\le 1,\ \|F_{hi}(t)\|\le 1\end{aligned} \tag{2}$$

여기서 $\overline{A}_i$, $\overline{B}_i$, $\overline{B}_{di}$, $\overline{H}_i$는 대칭행렬, $F_i(t)$, $F_{di}(t)$, $F_{bi}(t)$, $F_{hi}(t)$는 미지행렬이다.

그러면 다음의 정리가 성립한다.

정리 조종지연 $0\le d_i\le \overline{d}_i$를 가진 불확정성대체계(식 (1))에 대하여 대칭행렬 $X_i>0$과 행렬 Y_i, 정의상수 α_i, β_i, β_{di}, λ_i, η_i, μ_i, ν_i, $k_i(i=1,\cdots,N)$가 있어서 다음의 LMI

$$\left.\begin{aligned}&\begin{bmatrix} s_i & H_{1i} & H_{2i} & \overline{D}_ik_iB_{di} & \overline{D}_ik_i\overline{B}_{di}\\ H_{1i}^T & -G_{1i} & 0 & 0 & 0\\ H_{2i}^T & 0 & -G_{2i} & 0 & 0\\ \overline{D}_ik_iB_{di}^T & 0 & 0 & -\overline{D}_i(k_i-\lambda_i) & 0\\ \overline{D}_ik_i\overline{B}_{di} & 0 & 0 & 0 & -\overline{D}_i\lambda_i\end{bmatrix}<0\\ &I_i-\eta_i\overline{A}_i^{\,2}>0,\ I_i-\nu_i\overline{B}_i^{\,2}>0,\ I_i-\mu_i\overline{B}_{di}^{\,2}>0,\ k_i-\lambda_i>0\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

을 만족시킨다면 이 체계는 분산로바스트안정하며 풀이 X_i, Y_i 는 다음의 부등식을 만족시킨다.

$$k_i I_i - Y_i X_i^{-1} X_i^{-1} Y_i^T \ge 0, \quad i=1, \cdots, N \tag{4}$$

여기서

$$S_i = X_i A_i^T + A_i X_i + \alpha_i \overline{A}_i^2 + \beta_i \overline{B}_i^2 + \beta_{di} \overline{B}_{di}^2 + Y_i^T (B_i + B_{di})^T + (B_i + B_{di}) Y_i + \sum_{j=1,\ i \ne j}^{N} \overline{h}_i^2 h_{ij}^2 I_i,$$

$$H_{1i} = [X_i,\ (N-1)X_i,\ \ \overline{d}_i X_i A_i^T,\ \ \overline{d}_i X_i],$$

$$G_{1i} = \mathrm{diag}(\alpha_i I_i,\ \ (N-1)I_i,\ \ \overline{d}_i (I_i - \eta_i \overline{A}_i^2),\ \ \overline{d}_i \eta_i I_i),$$

$$H_{2i} = [Y_i^T,\ Y_i^T,\ \overline{d}_i Y_i^T,\ \overline{d}_i Y_i^T,\ \overline{d}_i Y_i^T B_i^T,\ \overline{d}_i Y_i^T B_{di}^T],$$

$$G_{2i} = \mathrm{diag}(\beta_i I,\ \beta_{di} I,\ \overline{d}_i \nu_i I,\ \overline{d}_i \mu_i I,\ \overline{d}_i (I_i - \nu_i \overline{B}_i^2),\ \overline{d}_i (I_i - \mu_i \overline{B}_{di}^2)),$$

$$\overline{D}_i = \overline{d}_i \left(3 + \sum_{j=1,\ j \ne i}^{N} \overline{h}_i^2 h_{ij}^2 \right).$$

결국 분산로바스트조종 $u_i(t) = -Y_i X_i^{-1} x_i(t) \quad i=1, \cdots, N$ 으로 된다.

증명 $\int_a^b \dot{f}(t)dt = f(b) - f(a)$ 를 리용하면 닫긴체계는 다음과 같이 변환된다.

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= (A_i + \Delta A_i(r_i(t)))x_i(t) + (B_i + \Delta B_i(s_i(t)) + B_{di} + \Delta B_{di}(s_{di}(t)))u_i(t) - \\ &- \int_{-d_i}^{0} (B_{di} + \Delta B_{di}(s_{di}(t)))K_i \{(A_i + \Delta A_i(r_i(t+\theta)))x_i(t+\theta) + (B_i + \\ &+ \Delta B_i(s_i(t+\theta)))K_i x_i(t+\theta) + (B_{di} + \Delta B_{di}(s_{di}(t+\theta)))K_i x_i(t - d_i + \theta) + \\ &+ (H_i + \Delta H_i(h_i(t+\theta))) \sum_{j=1, i \ne j}^{N} H_{ij} x_j(t+\theta)\} d\theta + (H_i + \Delta H_i(h_i(t))) \sum_{j=1,\ i \ne j}^{N} H_{ij} x_j(t)\end{aligned} \tag{5}$$

이때 랴뿌노브함수는 다음과 같다.

$$V(x,\ t) = V_1(x,\ t) + V_2(x,\ t) \tag{6}$$

여기서 $V_1(x,\ t) = \sum_{i=1}^{N} x_i^T(t) P_i x_i(t)$ 이고 $V_2(x,\ t)$ 는 $V(x,\ t)$ 의 도함수에서 2차지연항이 나타나지 않도록 설정한다. 즉

$$\begin{aligned}V_2(x,\ t) &= \sum_{i=1}^{N} \int_{-d_i}^{0} \int_{t+\theta}^{t} x_i^T(\vartheta)(A_i + \Delta A_i(r_i(\vartheta)))^T (A_i + \Delta A_i(r_i(\vartheta)))x_i(\vartheta) d\vartheta d\theta + \\ &+ \sum_{i=1}^{N} \int_{-d_i}^{0} \int_{t+\theta}^{t} x_i^T(\vartheta) K_i^T (B_i + \Delta B_i(s_i(\vartheta)))^T (B_i + \Delta B_i(s_i(\vartheta)))K_i x_i(\vartheta) d\vartheta d\theta + \\ &+ \sum_{i=1}^{N} \int_{-d_i}^{0} \int_{t-d_i+\theta}^{t} x_i^T(\vartheta) K_i^T (B_{di} + \Delta B_{di}(s_{di}(\vartheta + d_i)))^T (B_{di} + \Delta B_{di}(s_{di}(\vartheta + \\ &+ d_i)))K_i x_i(\vartheta) d\vartheta d\theta + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1,\ j \ne i}^{N} \int_{-d_i}^{0} \int_{t+\theta}^{t} x_j^T(\vartheta) x_j(\vartheta) d\vartheta d\theta\ .\end{aligned}$$

한편 식 (6)에서 $V_1(x,\ t)$ 의 도함수는 다음과 같다.

$$\dot{V}_1(x,\ t)=\sum_{i=1}^{N}(\dot{x}_i^T P_i x_i + x_i^T P_i \dot{x}_i)=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}x_i^T[A_i^T P_i + P_i A_i + \Delta A_i^T P_i + P_i \Delta A_i + K_i^T(B_i+B_{di})^T P_i + P_i(B_i+B_{di})K_i +$$

$$+K_i^T(\Delta B_i + \Delta B_{di})^T P + P_i(\Delta B_i + \Delta B_{di})K_i]x_i + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1, i\neq j}^{N}[2x_i^T P_i(H_i+\Delta H_i)H_{ij}x_j]-$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\int_{-d_i}^{0}2x_i^T P_i(B_{di}+\Delta B_{di})K_i(A_i+\Delta A_i(s_i(t+\theta)))K_i x_i(t+\theta)d\theta-$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\int_{-d_i}^{0}2x_i^T P_i(B_{di}+\Delta B_{di})K_i(B_i+\Delta B_i(s_i(t+\theta)))K_i x_i(t+\theta)d\theta-$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\int_{-d_i}^{0}2x_i^T P_i(B_{di}+\Delta B_{di})K_i(B_{di}+\Delta B_{di}(s_{di}(t+\theta)))K_i x_i(t-d_i+\theta)d\theta$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\int_{-d_i}^{0}\sum_{j=1,\ i\neq j}^{N}2x_i^T P_i(B_{di}+\Delta B_{di})K_i(H_i+\Delta H_i(h_i(t+\theta)))H_{ij}x_j(t+\theta)d\theta.$$

따라서

$$\dot{V}(x,\ t)\le\sum_{i=1}^{N}\left\{x_i^T\left[A_i^T P_i + P_i A_i + \alpha_i P_i \overline{A}_i^2 P_i + \frac{1}{\alpha_i}I_i + \beta_i P_i \overline{B}_i^2 P_i + \frac{1}{\beta_i}K_i^T K_i +\right.\right.$$

$$+\beta_{di}P_i\overline{B}_{di}^2 P_i + \frac{1}{\beta_{di}}K_i^T K_i + K_i^T(B_i+B_{di})^T P_i + P_i(B_i+B_{di})K_i +$$

$$+\sum_{j=1,i\neq j}^{N}\overline{h}_i^2 h_{ij}^2 P_i P_i + (N-1)(1+\overline{d}_i)I_i + \overline{d}_i k_i\left(3+\sum_{j=1,\ j\neq i}^{N}\overline{h}_i^2 h_{ij}^2\right)P_i\left(\frac{1}{1-\gamma_i}B_{di}B_{di}^T +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\gamma_i}\overline{B}_{di}^2\right)P + \overline{d}_i A_i^T(I_i-\eta_i\overline{A}_i^2)^{-1}A_i + \frac{\overline{d}_i}{\eta_i}I_i + \overline{d}_i K_i^T B_i^T(I_i-\nu_i\overline{B}_i^2)^{-1}B_i K_i +$$

$$\left.\left.+\frac{\overline{d}_i}{\nu_i}K_i^T K_i + \overline{d}_i K_i^T B_{di}^T(I_i-\mu_i\overline{B}_{di}^2)^{-1}B_{di}K_i + \frac{\overline{d}_i}{\mu_i}K_i^T K_i\right]x_i\right\}.$$

그러므로 닫긴체계 (5)는 다음의 부등식을 만족시킬 때 점근안정하다.

$$\begin{aligned}&A_i^T P_i + P_i A_i + \alpha_i P_i \overline{A}_i^2 P_i + \frac{1}{\alpha_i}I_i + \beta_i P_i \overline{B}_i^2 P_i + \frac{1}{\beta_i}K_i^T K_i + \beta_{di}P_i\overline{B}_{di}^2 P_i + \frac{1}{\beta_{di}}K_i^T K_i +\\&+K_i^T(B_i+B_{di})^T P_i + P_i(B_i+B_{di})K_i + \sum_{j=1,\ i\neq j}^{N}\overline{h}_i^2 h_{ij}^2 P_i P_i + (N-1)(1+\overline{d}_i)I_i +\\&+\overline{d}_i k_i\left(3+\sum_{j=1,\ j\neq i}^{N}\overline{h}_i^2 h_{ij}^2\right)P_i\left(\frac{1}{1-\gamma_i}B_{di}B_{di}^T + \frac{1}{\gamma_i}\overline{B}_{di}^2\right)P + \overline{d}_i A_i^T(I_i-\eta_i\overline{A}_i^2)^{-1}A_i + \frac{\overline{d}_i}{\eta_i}I_i +\\&+\overline{d}_i K_i^T B_i^T(I_i-\nu_i\overline{B}_i^2)^{-1}B_i K_i + \frac{\overline{d}_i}{\nu_i}K_i^T K_i + \overline{d}_i K_i^T B_{di}^T(I_i-\mu_i\overline{B}_{di}^2)^{-1}B_{di}K_i + \frac{\overline{d}_i}{\mu_i}K_i^T K_i < 0\end{aligned}\qquad(7)$$

여기서 $X_i = P_i^{-1}$, $Y_i = K_i X_i$, $\lambda_i = k_i \gamma_i$ 로 설정하고 schur의 보조정리를 리용하면 식 (7)은 식 (3)과 같아진다.

따라서 식 (3)의 풀이를 구하면 분산상태반결합증폭도행렬은 $K_i = -Y_i X_i^{-1} = -Y_i P_i$ 로 되며 대체계 (1)은 분산상태반결합에 의하여 로바스트점근안정하다.

2. 수값모의실험

2개의 부분체계로 구성된 조종력지연이 있는 불확정성대체계의 파라메터행렬은 다음과 같다고 하자.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1.97 & -0.13 \\ 0.91 & -0.8 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} -1.32 & 0.34 \\ 0.1 & -0.84 \end{bmatrix},\ B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ B_{d1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ B_{d2} = \begin{bmatrix} -0.2 \\ -0.1 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ H_{12} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix},\ H_{21} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix},\ \Delta A_1 = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ r_1 - r_2 & r_1 + r_2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta A_2 = \begin{bmatrix} 0.1r_3 & r_4 \\ 0.3r_3 + r_4 & 0.1r_4 \end{bmatrix},\ \Delta B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ s_1 \end{bmatrix},\ \Delta B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4s_3 \end{bmatrix},\ \Delta B_{d1} = \begin{bmatrix} -0.1s_2 \\ 0.1s_2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta B_{d2} = \begin{bmatrix} -0.1s_4 - 0.1s_5 + 0.2s_6 \\ 0.1s_4 + 0.1s_5 + 0.1s_6 \end{bmatrix},\ \Delta H_1 = \begin{bmatrix} h_1 & \sqrt{3}h_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \Delta H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ h_3 & h_4 \end{bmatrix}$$

$$|r_i|,\ |s_j| \le 1,\quad i = 1,\ \cdots,\ 4;\ j = 1,\ \cdots,\ 6,\ 0 < d_1 \le 0.2,\ 0 < d_2 \le 0.2$$

$$|h_1|,\ |h_2| \le 0.5,\ |h_3| \le 0.6,\ |h_4| \le 0.8,\quad k_1 = 5,\ k_2 = 1.5$$

초기상태를 $x = [5\ \ 5\ \ 6\ \ 6]$ 으로 놓고 선형행렬부등식 (3)을 풀면 부분체계 1과 2의 상태반결합증폭도는 다음과 같다.

$$K_1 = [-3.833\,4\quad -3.161\,7],\ K_2 = [-1.136\,9\quad -1.064\,0]$$

여기에 기초하여 수값모의실험한 결과는 그림과 같다.

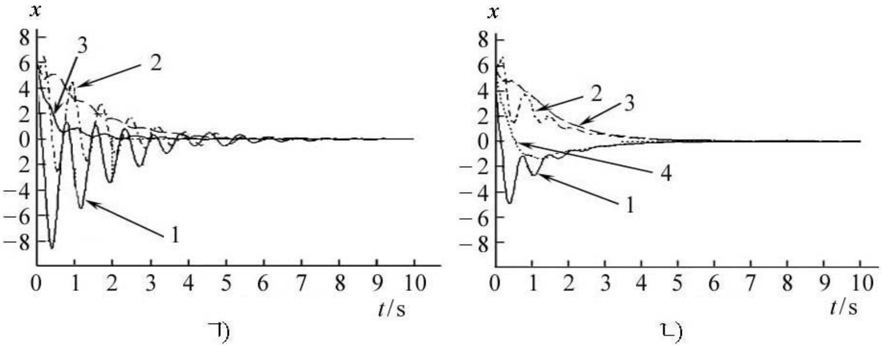

그림. 수값모의실험(상태응답)곡선

ㄱ) 선행한 방법, ㄴ) 론문에서 제기한 방법

1－상태 1, 2－상태 2, 3－상태 3, 4－상태 4

모의곡선으로부터 론문에서 설계한 조종기가 체계의 안정성을 높이는데서 더 효과적이라는것을 알수 있다.

맺 는 말

LMI방법을 리용하여 조종력지연과 불확정성을 가진 대체계가 로바스트안정이기 위한 충분조건을 이끌어내고 그에 기초하여 분산로바스트조종기를 설계하였다.

참 고 문 헌

[1] 김영일; 대체계조종, **김일성**종합대학출판사, 130～141, 주체97(2008).

[2] 桂卫华 等; 自动化学报, 28, 1, 1, 2002.

[3] 谢永芳 等; 武汉理工大学学报, 28, 2, 104 2006.

주체103(2014)년 5월 5일 원고접수

Design of Decentralized Robust Controller of Uncertain Large-Scale System with Control-Delay

Ri Jin Song

We derived a sufficient condition for the robust stability of large-scale systems with control-delay and uncertainty, and then designed the decentralized robust control.

And then we verified the effectiveness through the simulation experiment.

Key words: decentralized robust control, uncertainty