김일성종합대학학보　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　주체107(2018)년
수 학　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　제64권 제3호

가환반환에서 덜기씨이데알모임의 콤팍트성

한성철, 량금희

반환은 환과 분배속을 둘 다 일반화한 대수계이며 최량화와 그라프, 자동체, 형식언어, 알고리듬, 부호, 암호리론 등 각이한 분야들에서 널리 응용되고있다. 반환은 환과 같은 분배법칙에 의해 련결되는 더하기와 곱하기라는 두 2원산법을 가진다. 그러나 환에서와는 달리 반환에서는 덜기산법이 허용되지 않으므로 환이데알리론의 많은 결과들이 반환에로 그대로 확장되지 않는다. 이런 차이를 줄이기 위하여 반환의 덜기이데알개념이 도입되였다.

단위원소를 가진 가환환의 씨이데알모임에 자리스끼위상이 도입된 씨스펙트르는 콤팍트, T_0 – 공간이며 가환대수학과 대수적기하학에서 중요한 역할을 한다.[1]

령원소와 단위원소를 가진 가환반환의 씨이데알모임에 자리스끼위상이 도입된 씨스펙트르도 콤팍트, T_0 – 공간이다.[2]

선행연구[3]에서는 B_1 – 대수의 포화씨이데알모임에 자리스끼위상을 도입하고 그 공간이 콤팍트공간이라는것을 증명하였다. 사실 B_1 – 대수는 령원소와 단위원소를 가지고 더하기제곱같기인 가환반환이며 포화이데알은 다름아닌 덜기이데알이다.[4]

론문에서는 령원소와 단위원소를 가진 가환반환의 씨스펙트르에서 덜기씨이데알모임은 콤팍트부분공간이라는것을 증명한다. 론문의 결과는 선행연구[3]의 결과를 특수경우로 포함한다.

론문에서 R 는 령원소 0과 단위원소 1을 가지면서 $0\neq 1$ 인 가환반환이다. 그리고 $I(R)$ 와 $KI(R)$ 는 각각 R 의 이데알들전부의 모임과 덜기이데알들전부의 모임을 표시하며 $\mathrm{Spec}(R)$ 와 $\mathrm{Spec}_k(R)$ 는 각각 R 의 씨이데알들전부의 모임과 덜기씨이데알들전부의 모임을 표시한다. 또한 R 의 이데알 A 에 대하여 $\overline{A}$ 와 $\sqrt{A}$ 는 각각 A 의 덜기페포와 근기를 표시한다.

아래에서 $X:=\mathrm{Spec}_k(R)$ 이다.

보조정리 1　$A\in KI(R)$ 이면 $\sqrt{A}=\bigcap_{A\subseteq P\in X}P$ 이다.

증명 우선 $\sqrt{A}\subseteq\bigcap_{A\subseteq P\in X}P$ 가 성립한다는것을 증명하자.

만일 $a\in\sqrt{A}$ 이면 어떤 $n(\in\mathbf{N})$ 이 있어서 $a^n\in A$ 이다. 그러므로 $A\subseteq P$ 인 매 덜기씨이데알 P 에 대하여 $a^n\in P$ 이므로 $a\in P$ 이다. 따라서 $a\in\bigcap_{A\subseteq P\in X}P$ 이다.

다음으로 $\bigcap_{A\subseteq P\in X}P\subseteq\sqrt{A}$ 가 성립한다는것을 증명하자.

만일 $a\notin\sqrt{A}$ 이면 모든 $n(\in\mathbf{N})$ 에 대하여 $a^n\notin A$ 이다. 이제 $\sum$ 를 $A\subseteq B$ 이고 모든 $n(\in\mathbf{N})$ 에 대하여 $a^n\notin B$ 인 덜기이데알 $B(\in KI(R))$ 들전부의 모임이라고 하면 $A\in\sum$ 이므로 $\sum\neq\varnothing$ 이다. 모임의 포함관계에 관한 반순서모임 $\sum$ 의 임의의 사슬을 $\{B_\alpha\,|\,\alpha\in\Lambda\}$ 라고 하면 분명히 $\bigcup_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha$ 는 $\sum$ 에서 이 사슬의 상계로 된다. 따라서 쪼른의 보조정리에 의하여

Σ 에는 극대원소 Q가 존재한다.

이제 이 Q가 씨이데알이라는것을 밝히자.

사실 어떤 $x,\ y(\in R\setminus Q)$ 가 있어서 $xy\in Q$ 라고 하면 Q 의 극대성으로부터 $\overline{Q+Rx}\notin\Sigma$ 이고 $\overline{Q+Ry}\notin\Sigma$ 이며 따라서 어떤 $m,\ n(\in\mathbf{N})$ 이 있어서 $a^m\in\overline{Q+Rx}$, $a^n\in\overline{Q+Ry}$ 이다. 그리고 적당한 $p_1,\ p_1,\ q_1,\ q_2(\in Q)$ 와 $r_1,\ r_1,\ s_1,\ s_2(\in R)$ 가 있어서

$$a^m+p_1+r_1x=p_2+r_2x \tag{1}$$

$$a^n+q_1+s_1y=q_2+s_2y \tag{2}$$

가 성립한다. 식 (1)의 량변에 y 를 곱하면 $a^my+p_1y+r_1xy=p_2y+r_2xy$ 이고 $xy\in Q$ 이므로 $a^my\in Q$ 이며 식 (2)의 량변에 a^m 을 곱하면 $a^{m+n}+q_1a^m+s_1a^my=q_2a^m+s_2a^my$ 이므로 $a^{m+n}\in Q$ 이다. 이것은 $Q\in\Sigma$ 라는 사실에 모순된다. 따라서 $Q\in X$ 이다.

한편 $Q\in\Sigma$ 이므로 $a\notin Q$ 이고 결국 $a\notin\bigcap\limits_{A\subseteq P\in X}P$ 이다.(증명끝)

따름 $A\in KI(R)$ 일 때 $A=\sqrt{A}$ 이기 위해서는 A 가 R 의 적당한 덜기씨이데알들의 사귐일것이 필요하고 충분하다.[4]

다음의 실례는 보조정리 1에서 이데알 A 가 덜기이데알이 아니면 일반적으로 등식이 성립하지 않는다는것을 보여준다.

실례 두 원소로 이루어진 부울속 B_1 에 기초한 한변수다항식환 $R:=B_1[x]$ 에서 다음의 이데알을 생각하자.

$$A:=\left\langle x^2+x,\ x^3+x\right\rangle=\{(x^2+x)f(x)+(x^3+x)g(x)\mid f,\ g\in R\}$$

분명히 모든 $n(\in\mathbf{N})$ 에 대하여 $x^n\notin A$ 이므로 $x\notin\sqrt{A}$ 이다. 그런데 $x+(x^2+x)=x^2+x$ 이므로 $x\in\overline{A}$ 이고 따라서 A 는 덜기이데알이 아니다. 만일 $P\in\mathrm{Spec}_k(R)$ 이고 $A\subseteq P$ 이면 $\overline{A}\subseteq P$ 이므로 $x\in P$ 이고 따라서 $x\in\bigcap\limits_{A\subseteq P\in\mathrm{Spec}_k(R)}P$ 이다. 결국 $\sqrt{A}\neq\bigcap\limits_{A\subseteq P\in\mathrm{Spec}_k(R)}P$ 이다.

S 가 R 의 비지 않은 부분모임일 때 $V(S):=\{P\in X\mid S\subseteq P\}$ 로 놓자.

보조정리 2 다음의 사실들이 성립한다.

① $V(\{0\})=X$, $V(R)=\varnothing$

② $S\subseteq T\Rightarrow V(S)\supseteq V(T)$

③ $R\supseteq S\neq\varnothing\Rightarrow V(S)=V(\langle S\rangle)=V(\overline{\langle S\rangle})$

④ $A\in I(R)\Rightarrow V(A)=V(\sqrt{A})$

⑤ $A,\ B\in I(R)\Rightarrow V(A)\bigcup V(B)=V(AB)=V(A\bigcap B)$

⑥ $\{A_i\ \ i\in\Lambda\}\subseteq I(R)\Rightarrow V\left(\sum\limits_{i\in\Lambda}A_i\right)=\bigcap\limits_{i\in\Lambda}V(A_i)$

⑦ $A\in KI(R)$, $B\in I(R)$, $V(A)\subseteq V(B)\Rightarrow B\subseteq\sqrt{A}$

⑧ $A,\ B\in KI(R)$ 일 때 $V(A)=V(B)$ 이기 위해서는 $\sqrt{A}=\sqrt{B}$ 일것이 필요하고 충분하다.

보조정리 2의 ①, ③, ⑤, ⑥으로부터 $\mathrm{Spec}_k(R)$ 의 부분모임족 $\{V(S)\mid\varnothing\neq S\subseteq R\}$ 는 닫긴모임에 관한 위상공리들을 만족시키는데 이렇게 도입되는 위상을 자리스끼위상이라고 부르고 이 자리스끼위상이 도입된 위상공간 $\mathrm{Spec}_k(R)$ 를 R 의 덜기씨스펙트르라고 부른다.

사실 덜기씨스펙트르 $\mathrm{Spec}_k(R)$ 는 씨스펙트르 $\mathrm{Spec}(R)$ 의 부분공간이다.

$\varnothing \neq S \subseteq R$ 일 때 X 의 열린모임 $X \setminus V(S)$ 를 X_S 로 표시하면 $X_S = \{P \in X \mid S \subsetneq P\}$ 이다.

특히 $a \in R$ 일 때 $X_{\{a\}}$ 를 간단히 X_a 로 표시하고 X 의 기초열린모임이라고 부른다. 그러면 보조정리 2의 ③으로부터 $V(\langle a\rangle) = V(\{a\}) = X \setminus X_a$ 이다. 또한 분명히 $X_S = \bigcup_{a \in S} X_a$ 이고 따라서 다음의 결과가 얻어진다.

보조정리 3 기초열린모임족 $\{X_a \mid a \in R\}$ 는 X 우의 자리스끼위상에 관한 열린모임토대이다.

정리 임의의 $a(\in R)$ 에 대하여 X_a 는 콤팍트모임이다. 특히 X_1 은 콤팍트공간이다.

증명 보조정리 3으로부터 기초열린모임들로 이루어진 X_a 의 임의의 피복이 유한부분피복을 가진다는것을 보여주면 충분하다.

$X_a \subseteq \bigcup_{i \in \Lambda} X_{a_i}$ 라는것은 분명하다. 그리고 $A := \overline{\langle \{a_i \mid i \in \Lambda\} \rangle}$ 로 놓으면 보조정리 2의 ③, ⑥에 의하여

$$V(\langle a\rangle) \supseteq \bigcap_{i \in \Lambda} V(\langle a_i\rangle) = V\left(\sum_{i \in \Lambda} \langle a_i\rangle\right) = V\left(\overline{\sum_{i \in \Lambda} \langle a_i\rangle}\right) = V(A)$$

가 성립한다. 그러므로 보조정리 2의 ⑦에 의하여 $\langle a\rangle \subseteq \sqrt{A}$ 이고 따라서 $a \in \sqrt{A}$ 이다. 그러므로 어떤 $l(\in \mathbf{N})$ 이 있어서 $a^l \in A$ 이고 다시 적당한 $i_1, \cdots, i_m i_{m+1}, \cdots, i_n (\in \Lambda)$ 과 $\{t_i \mid 1 \leq i \leq n\} (\subseteq R)$ 가 있어서

$$a^l + t_1 a_{i_1} + \cdots + t_m a_{i_m} = t_{m+1} a_{i_{m+1}} + \cdots + t_n a_{i_n}$$

이 성립한다. 따라서 $a \in \sqrt{\overline{\langle a_{i_1}, \cdots, a_{i_n}\rangle}}$ 이다. 보조정리 2의 ③, ④, ⑥에 의하여

$$V(\langle a\rangle) \supseteq V\left(\sqrt{\overline{\langle a_{i_1}, \cdots, a_{i_n}\rangle}}\right) = V\left(\overline{\langle a_{i_1}, \cdots, a_{i_n}\rangle}\right) = V(\langle a_{i_1}, \cdots, a_{i_n}\rangle) = \bigcap_{k=1}^{n} V(\langle a_{i_k}\rangle)$$

이고 따라서 $X_a \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} X_{a_{i_k}}$ 이다.(증명끝)

따름 X 의 열린모임이 콤팍트모임이기 위해서는 그것이 기초열린모임들의 유한합으로 표시될것이 필요하고 충분하다.

참 고 문 헌

[1] M. F. Atiyah et al.; Introduction to Commutative Algebra, Addison Wesley, 23～126, 1969.

[2] J. S. Golan; Semirings and their Applications, Kluwer Academic, 45～130, 1999.

[3] P. Lescot; J. Pure Appl. Algebra, 216, 1004, 2012.

[4] P. Lescot; Osaka J. Math., 52, 721, 2015.

주체107(2018)년 3월 10일 원고접수

Compactness of the Set of Subtractive Prime Ideals in a Commutative Semiring

Han Song Chol, Ryang Kum Hui

For a commutative semiring with zero and identity, we prove that the set of all the subtractive prime ideals is a compact subspace in the prime spectrum.

Key words: semiring, subtractive ideal, prime ideal, Zariski topology