김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체105(2016)년 제62권 제4호 Vol. 62 No. 4 JUCHE105(2016).

곱하기변환에 의하여 정의된 해석함수족에서 적분연산자의 미분종속성질에 대하여

조신혁, 김무영

우리는 곱하기변환에 의하여 정의된 해석함수족에서 적분연산자의 미분종속과 공액종속에 대한 성질을 연구하였다.

선행연구[4－6]에서는 곱하기변환 L_c^δ, $N_{p,\ b}^s$와 싸라겐미분연산자 S^n에 의하여 정의된 해석함수족의 적분연산자에 의한 미분종속성질을 연구하였다.

론문에서는 선형연산자 $J_{p,\ s,\ b}(f): A(p) \to A(p)$에 의하여 정의된 해석함수모임에서 적분연산자 $F(z) = \frac{\gamma+2}{z^{\gamma+1}}\int_0^z t^\gamma f(t)dt$의 미분종속과 공액종속성질을 연구하여 선행연구[4－6]의 결과를 일반화하거나 개선하였다.

단위원 $U = \{z \in \boldsymbol{C} : |z| < 1\}$에서 해석함수들의 모임을 $H(U)$로 표시한다.

$$H[a,\ n] := \{h \in H(U) : h(z) = a + h_n z^n + h_{n+1} z^{n+1} + \cdots,\ \ z \in U\}$$

$$A(p) := \left\{ f \in H(U) : f(z) = z^p + \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^k \right\},\ \ A(1) = A$$

그리고 $S^* := \{f \in A : \mathrm{Re}(zf'(z)/f(z)) > 0,\ \ z \in U\}$, $K := \{f \in A : \mathrm{Re}(1 + zf''(z)/f'(z)) > 0,\ \ z \in U\}$를 각각 별형함수족, 불룩함수족이라고 부른다.

정의 1 [3] $f,\ g \in H(U)$에 대하여 조건 $\omega(0) = 0$, $|\omega(z)| < 1,\ z \in U$와 $f(z) = g(\omega(z))$를 만족시키는 해석함수 ω가 존재할 때 f는 g에 종속된다고 하고 $f(z) \prec g(z),\ \ z \in U$로 표시한다. 또한 f가 g에 종속될 때 g는 f에 공액종속된다고 한다.

$f,\ h \in H(U)$이고 $\psi : \boldsymbol{C}^2 \times U \to \boldsymbol{C}$라고 하자.

f와 $\psi(f(z),\ zf'(z)\,;\,z)$가 단엽이고 f가 미분종속

$$\psi(f(z),\ zf'(z);\ z) \prec h(z) \tag{1}$$

를 만족시키면 f를 미분종속 (1)의 풀이라고 부르며 미분종속 (1)의 모든 풀이 f에 대하여 $f \prec g$를 만족시키는 함수 g를 미분종속 (1)의 우월함수라고 부른다. 또한 미분종속 (1)의 모든 우월함수 g에 대하여 $\tilde{g} \prec g$를 만족시키는 우월함수 $\tilde{g}$을 최량인 우월함수라고 부른다.

$f,\ h \in H(U)$이고 $\psi : \boldsymbol{C}^2 \times U \to \boldsymbol{C}$라고 하자.

f와 $\psi(f(z),\ zf'(z)\,;\,z)$가 단엽이고 f가 미분공액종속

$$h(z) \prec \psi(f(z),\ zf'(z)\,;\,z) \tag{2}$$

를 만족시키면 f를 미분공액종속 (2)의 풀이라고 부르며 미분공액종속 (2)를 만족시키는

모든 f 에 대하여 $g \prec f$ 이면 해석함수 g 를 미분공액종속 (2)의 종속함수라고 부른다. 또한 미분공액종속 (2)의 모든 종속함수 g 에 대하여 $g \prec \tilde{g}$ 을 만족시키는 종속함수 $\tilde{g}$ 을 최량인 종속함수라고 부른다.

정의 2 [1] $\overline{U} = \{z \in \boldsymbol{C} : |z| \le 1\}$ 이라고 하자.

그러면 $\overline{U} \setminus E(f)$ 에서 1 : 1인 해석함수 f 들의 모임을 Q 로 표시한다. 여기서

$$E(f) := \left\{ \zeta \in \partial D : \lim_{z \to \zeta} f(z) = \infty \right\} \text{이고 } f'(\zeta) \ne 0, \ \zeta \in \partial D \setminus E(f).$$

정의 3 [4] $b \in \boldsymbol{C} \setminus Z_0^-$, $s \in \boldsymbol{C}$, $p \in \boldsymbol{N}$ 이라고 하자.

이때 선형연산자 $J_{p,\, s,\, b}(f) : A(p) \to A(p)$ 는 $J_{p,\, s,\, b}(f)(z) = z^p + \sum_{k=p+1}^{\infty} \left(\dfrac{p+b}{k+b} \right)^s a_k z^k$ 으로 정의한다. 특히 $J_{1,\, s,\, b} \equiv J_{s,\, b}$ 로 표시한다.

우의 연산자에 대하여 $z(J_{p,\, s,\, b} f(z))' = (p+b) J_{p,\, s-1,\, b} f(z) - b J_{p,\, s,\, b} f(z)$ 가 성립된다.

정리 1 $q \in H[1,\, 1]$ 은 단위원 U 에서 불룩이고 $\gamma \in \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$, $\mathrm{Re}\gamma > -p$ 에 대하여 $h(z) = q(z) + \dfrac{1}{p+\gamma} z q'(z)$, $z \in U$ 라고 하자.

또한 함수 $f \in A(p)$ 에 대하여 $F(z) := I_\gamma[f](z) = \dfrac{p+\gamma}{z^\gamma} \int_0^z t^{\gamma-1} f(t) dt$ 라고 하자.

이때 $J'_{p,\, s,\, b} f(z) / (p z^{p-1}) \prec h(z)$, $z \in U$ 이면 $J'_{p,\, s,\, b} F(z) / (p z^{p-1}) \prec q(z)$, $z \in U$ 가 성립되고 q 는 최량인 우월함수이다.

증명 $F(z) = \dfrac{p+\gamma}{z^\gamma} \int_0^z t^{\gamma-1} f(t) dt$ 로부터 $\gamma F(z) + z F'(z) = (p+\gamma) f(z)$ 를 얻는다. 이 등식에 선형연산자 $J_{p,\, s,\, b}$ 를 적용하면 $\gamma J_{p,\, s,\, b} F(z) + z J'_{p,\, s,\, b} F(z) = (p+\gamma) J_{p,\, s,\, b} f(z)$ 를 얻는다.

이 등식의 두 변을 미분하면

$$(\gamma+1) J'_{p,\, s,\, b} F(z) + z J''_{p,\, s,\, b} F(z) = (p+\gamma) J'_{p,\, s,\, b} f(z). \tag{3}$$

$P(z) := J'_{p,\, s,\, b} F(z) / (p z^{p-1})$, $z \in U$ 로 놓으면 $z J''_{p,\, s,\, b} F(z) = p(p-1) z^{p-1} P(z) + p z^p P'(z)$ 를 얻는다. 이것을 식 (3)에 대입하면 $p(p+\gamma) z^{p-1} P(z) + p z^p P'(z) = (p+\gamma) J'_{p,\, s,\, b} f(z)$.

이로부터 $P(z) + z P'(z) / (p+\gamma) = J'_{p,\, s,\, b} f(z) / (p z^{p-1})$ 이다.

$\upsilon(\omega) = \omega$, $\phi(\omega) = 1/(p+\gamma)$ 로 놓으면 υ, ϕ 는 $\boldsymbol{C}$ 에서 해석적이고 $\phi(\omega) \ne 0$, $\omega \in \boldsymbol{C}$ 이다.

$Q(z) = z q'(z) \phi(q(z)) = z q'(z) / (p+\gamma)$, $h(z) = \upsilon(q(z)) + Q(z) = q(z) + z q'(z) / (p+\gamma)$ 라고 하면 $z h'(z) = \dfrac{p+\gamma+1}{p+\gamma} z q'(z) + \dfrac{1}{p+\gamma} z^2 q''(z)$ 이므로 $\dfrac{z h'(z)}{Q(z)} = (p+\gamma) + 1 + \dfrac{z q''(z)}{q'(z)}$ 를 얻는다. 정리의 조건에 의하여 $Q(z) = z q'(z) / (p+\gamma)$ 는 U 에서 별형이고 $\mathrm{Re}(z h'(z) / Q(z)) > 0$, $z \in U$ 이다.

따라서 $P(z) + \dfrac{1}{p+\gamma} z P'(z) = \dfrac{J'_{p,\, s,\, b} f(z)}{p z^{p-1}} \prec h(z) = q(z) + \dfrac{1}{p+\gamma} z q'(z)$ 이면 선행연구[1]에 의하여 $J'_{p,\, s,\, b} F(z) / (p z^p) \prec q(z)$, $z \in U$ 이고 q 는 최량인 우월함수이다.(증명끝)

주의 1 i) 정리 1에서 $p=1$, $b=c-1$, $c>0$, $s=\delta$, $\delta\ge 0$으로 놓으면 선행연구[5]의 정리 5를 얻는다.

ii) 정리 1에서 $p=1$, $b=0$, $s=-n$, $n\in \boldsymbol{N}$으로 놓으면 선행연구[6]의 정리 1을 얻는다.

실례 $p=2,\ b=s=1,\ \gamma=1$에 대하여 $f(z)=z^2+z^3$으로 놓으면 $F(z)=z^2+3z^3/4$이고

$$J_{p,\,s,\,b}f(z)=z^2+3z^3/4\,,\ \ J_{p,\,s,\,b}F(z)=z^2+9z^3/16\,.$$

$q(z)=(1+z)/(1-z)$로 놓으면 $h(z)=(3+2z-3z^2)/[3(1-z)^2]$이다.

이때 $\dfrac{J'_{p,\,s,\,b}f(z)}{pz^{p-1}}=1+\dfrac{9}{8}z\prec h(z)=\dfrac{3+2z-3z^2}{3(1-z)^2}$이면 $\dfrac{J'_{p,\,s,\,b}F(z)}{pz^{p-1}}=1+\dfrac{27}{32}z\prec q(z)=\dfrac{1+z}{1-z}$가 성립된다.

정리 2 $q\in H[1,\,1]$은 단위원 U에서 불룩이고 $\gamma\in \boldsymbol{C}\setminus\{0\}$, $\mathrm{Re}\gamma>-p$에 대하여 $h(z)=q(z)+zq'(z)/(p+\gamma)$, $z\in U$라고 하자.

함수 $f\in A(p)$에 대하여 $F(z):=I_\gamma[f](z)=\dfrac{p+\gamma}{z^\gamma}\displaystyle\int_0^z t^{\gamma-1}f(t)dt$라고 하자.

그리고 $J'_{p,\,s,\,b}f(z)/(pz^{p-1})$는 U에서 단엽이고 $J'_{p,\,s,\,b}F(z)/(pz^{p-1})\in H[1,\,1]\cap Q$라고 하자.

이때 $h(z)\prec J'_{p,\,s,\,b}f(z)/(pz^{p-1})$, $z\in U$이면 $q(z)\prec J'_{p,\,s,\,b}F(z)/(pz^{p-1})$, $z\in U$가 성립되고 q는 최량인 종속함수이다.

증명 $P(z)=J'_{p,\,s,\,b}f(z)/(pz^{p-1})$, $z\in U$로 놓고 정리 1의 증명과 같은 방법으로 하면

$$P(z)+zP'(z)/(p+\gamma)=J'_{p,\,s,\,b}f(z)/(pz^{p-1})\,.$$

$\upsilon(\omega)=\omega,\ \phi(\omega)=1/(p+\gamma)$로 놓으면 υ, ϕ는 $\boldsymbol{C}$에서 해석적이고 $\phi(\omega)\ne 0,\ \omega\in\boldsymbol{C}$이다.

$Q(z)=zq'(z)\phi(q(z))=\dfrac{1}{p+\gamma}zq'(z)$, $h(z)=\upsilon(q(z))+Q(z)=q(z)+\dfrac{1}{p+\gamma}zq'(z)$로 놓으면 정리의 조건에 의하여 $Q(z)$는 단위원 U에서 별형함수이고 $\mathrm{Re}\dfrac{\upsilon'(q(z))}{\phi(q(z))}=\mathrm{Re}(p+\gamma)>0,\ z\in U$이다. 따라서 $h(z)\prec J'_{p,\,s,\,b}f(z)/(pz^{p-1})=P(z)+zP'(z)/(p+\gamma),\ \ z\in U$이면 선행연구[2]에 의하여 $q(z)\prec J'_{p,\,s,\,b}F(z)/(pz^{p-1})$, $z\in U$이고 q는 최량인 종속함수이다.(증명끝)

주의 2 정리 2에서 $p=1$로 놓고 s를 $-s$로 바꾸면 선행연구[4]의 정리 1에서 $p=1$인 경우의 일반화로 된다.

정리 2에서 $q(z)=\dfrac{1+z}{1-z}$를 취하면 다음의 결과를 얻는다.

따름 함수 $f\in A(p)$에 대하여 $F(z):=I_\gamma[f](z)=\dfrac{p+\gamma}{z^\gamma}\displaystyle\int_0^z t^{\gamma-1}f(t)dt$라고 하자.

그리고 $\dfrac{J'_{p,\,s,\,b}f(z)}{pz^{p-1}}$는 U에서 단엽이고 $\dfrac{J'_{p,\,s,\,b}F(z)}{pz^{p-1}}\in H[1,\ n]\cap Q$라고 하자.

이때 $\dfrac{1+z}{1-z}+\dfrac{1}{p+\gamma}\dfrac{2z}{(1-z)^2}\prec\dfrac{J'_{p,\,s,\,b}f(z)}{pz^{p-1}}$, $z\in U$이면 $\dfrac{1+z}{1-z}\prec\dfrac{J'_{p,\,s,\,b}F(z)}{pz^{p-1}}$, $z\in U$가 성립되고 $\dfrac{1+z}{1-z}$는 최량인 종속함수이다.

정리 3 $q_j \in H[1,\ 1]$ $(j=1, 2)$ 은 단위원 U 에서 볼록이고 $q_j(z) \neq 0,\ \ z \in U$ 라고 하자.

$\gamma \in \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$, $\operatorname{Re}\gamma > -p$ 에 대하여 $h_j(z) = q_j(z) + \dfrac{1}{p+\gamma} z q_j'(z)$, $j=1, 2$, $z \in U$ 라고 하자.

함수 $f \in A(p)$ 에 대하여 $F(z) := I_\gamma[f](z) = \dfrac{p+\gamma}{z^\gamma} \displaystyle\int_0^z t^{\gamma-1} f(t)dt$ 라고 하자.

그리고 $\dfrac{J'_{p,\,s,\,b} f(z)}{pz^{p-1}}$ 는 U 에서 단엽이고 $\dfrac{J'_{p,\,s,\,b} F(z)}{pz^{p-1}} \in H[1,\ 1] \cap Q$ 라고 하자.

이때 $h_1(z) \prec \dfrac{J'_{p,\,s,\,b} f(z)}{pz^{p-1}} \prec h_2(z)$, $z \in U$ 이면 $q_1(z) \prec \dfrac{J'_{p,\,s,\,b} F(z)}{pz^{p-1}} \prec q_2(z)$, $z \in U$ 가 성립되고 q_1, q_2 는 각각 최량인 종속함수, 최량인 우월함수이다.

참고문헌

[1] S. S. Miller et al.; Differential Subordinations, Marcel Dekker, 34～78, 2000.

[2] S. S. Miller et al.; J. Math. Anal. Appl., 329, 327, 2007.

[3] V. O. Nechita; Stud. Univ. Babes-Bolyai Math., 53, 3, 69, 2008.

[4] R. M. El-Ashwah et al.; J. Fractional Calculus and Applications, 4, 2, 260, 2013.

[5] S. Bulut; Mathematical Analysis, Article ID 606235, 2014.

[6] A. O. Tauti et al.; Banach J. Math. Anal., 3, 1, 61, 2009.

주체104(2015)년 12월 5일 원고접수

On Differential Subordination Properties for Integral Operator in Class of Analytic Function Defined by Multiplier Transformation

Jo Sin Hyok, Kim Mu Yong

We studied the differential subordination and superordination properties related to integral operator $F(z) = \dfrac{\gamma+2}{z^{\gamma+1}} \displaystyle\int_0^z t^\gamma f(t)dt$ of class of analytic functions defined by linear operator $J_{p,\,s,\,b}(f): A(p) \to A(p)$, and generalized or improved the results of [4－6].

Key words: differential subordination, superordination