김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제4호

시간변수에 관한 특이성을 가진 p－라쁠라스다항분수계 미분방정식의 여러점경계값문제에 대한 정인 풀이의 유일존재성과 근사풀이법

장경준, 공련숙

위대한 수령 **김일성**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《새로운 과학분야를 개척하며 최신과학기술의 성과를 인민경제에 널리 받아들이기 위한 연구사업을 전망성있게 하여야 합니다.》(《**김일성**전집》 제72권 292페지)

선행연구[2]에서는 반순서공간에서의 부동점정리를 리용하여 한가지 특이분수계미분방정식의 두점경계값문제에 대한 정인 풀이의 유일존재성을 연구하였고 선행연구[3]에서는 반순서공간에서의 부동점정리를 리용하여 한가지 특이비선형분수계미분방정식의 세점경계값문제에 대한 정인 풀이의 유일존재성을 연구하였으며 선행연구[4]에서는 상하풀이법과 샤우데르의 부동점정리를 리용하여 특이분수계미분방정식의 두점경계값문제에 대한 정인 풀이의 존재성을 연구하였다. 선행연구[1]에서는 시간변수에 관한 특이성을 가진 한가지 m－점경계값문제의 정인풀이의 존재성을 밝혔다.

론문에서는 우의 결과들에 기초하여 한가지 형태의 p－라쁠라스연산자를 가진 특이비선형다항분수계미분방정식의 m－점경계값문제

$$\begin{cases} D_{0+}^{\beta}(\varphi_p(D_{0+}^{\alpha}x(t))) = f(t,\ x(t),\ D_{0+}^{\gamma}x(t)),\ 0<t<1 \\ D_{0+}^{\gamma}x(0)=0,\ D_{0+}^{\delta}x(1)=\sum_{i=1}^{m-2}\xi_i D_{0+}^{\delta}x(\eta_i) \\ D_{0+}^{\alpha}x(0)=0,\ \varphi_p(D_{0+}^{\alpha}x(1))=\sum_{i=1}^{m-2}\zeta_i\varphi_p(D_{0+}^{\alpha}x(\eta_i)) \end{cases} \tag{1}$$

의 정인 풀이의 유일존재성과 근사풀이를 구하기 위한 상하풀이법을 유도한다. 비선형원천항 $f(t,\ x,\ y)$는 시간변수 t에 관하여 $t=0$과 $t=1$에서 특이성을 가진다. 다시말하여 함수 f는 $f\in C((0,\ 1)\times[0,\ +\infty)\times[0,\ +\infty),\ [0,\ +\infty))$와

$$\lim_{t\to 0+} f(t,\ \cdot,\ \cdot)=+\infty,\quad \lim_{t\to 1-} f(t,\ \cdot,\ \cdot)=+\infty$$

를 만족시키는 함수이다.

보조정리 1 $z\in C(0,\ 1)$이 조건

$$\exists\sigma_0,\ \sigma_1\in(0,\ 1);\ \lim_{t\to 0+} t^{\sigma_0}z(t)=z_0>0,\ \lim_{t\to 1-}(1-t)^{\sigma_1}z(t)=z_1>0$$

을 만족시키는 임의의 함수라고 하자. 그러면 분수계미분방정식의 m－점경계값문제

$$\begin{cases} D_{0+}^{\beta}v(t)+z(t)=0 \\ v(0)=0,\ v(1)=\sum_{i=1}^{m-2}\zeta_i v(\eta_i) \end{cases} \tag{2}$$

의 풀이는 $v(t)=\int_0^1 H(t,\ s)z(s)ds$ 로 유일하게 표시된다. 여기서 $H(t,\ s)$ 는 다음과 같이 정의된다.[6]

$$B=1-\sum_{i=1}^{m-2}\zeta_i\eta_i^{\beta-1}$$

$$H_1(t,\ s)=\begin{cases}\dfrac{t^{\beta-1}(1-s)^{\beta-1}-(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, & 0\le s\le t\le 1\\ \dfrac{t^{\beta-1}(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, & 0\le t\le s\le 1\end{cases}$$

$$H_2(t,\ s)=\frac{t^{\beta-1}}{B\Gamma(\beta)}\left[\sum_{s<\eta_i}\zeta_i[\eta_i^{\beta-1}(1-s)^{\beta-1}-(\eta_i-s)^{\beta-1}]+\sum_{s\ge\eta_i}\zeta_i\eta_i^{\beta-1}(1-s)^{\beta-1}\right]\ (t,\ s\in[0,\ 1])$$

$$H(t,\ s)=H_1(t,\ s)+H_2(t,\ s)$$

주의 1 보조정리 1에서 v 가 경계값문제 (2)의 풀이라는것은 $v\in C[0,\ 1]$, $D_{0+}^{\beta}v\in C(0,\ 1)$ 이면서 v 에 대하여 경계값문제 (2)의 미분방정식과 경계조건들이 만족된다는것을 말한다.

정의 1 $x\in\{u\,|\,u\in C[0,\ 1],\ D_{0+}^{\alpha}u\in C[0,\ 1],\ D_{0+}^{\beta}(\varphi_p(D_{0+}^{\alpha}u))\in C(0,\ 1)\}$ 에 대하여 경계값문제 (1)의 미분방정식과 경계조건들이 만족될 때 함수 $x(t)$ 를 경계값문제 (1)의 풀이라고 부른다.

보조정리 2 문제

$$\begin{cases}D_{0+}^{\beta}(\varphi_p(D_{0+}^{\alpha-\gamma}u(t)))=f(t,\ I_{0+}^{\gamma}u(t),\ u(t)),\ 0<t<1\\ u(0)=0,\ D_{0+}^{\delta-\gamma}u(1)=\sum_{i=1}^{m-2}\xi_i D_{0+}^{\delta-\gamma}u(\eta_i)\\ D_{0+}^{\alpha-\gamma}u(0)=0,\ \varphi_p(D_{0+}^{\alpha-\gamma}u(1))=\sum_{i=1}^{m-2}\zeta_i\varphi_p(D_{0+}^{\alpha-\gamma}u(\eta_i))\end{cases}\tag{3}$$

의 풀이 u 에 대하여 경계값문제 (1)의 풀이 x 는 $x(t)=I_{0+}^{\gamma}u(t),\ t\in[0,\ 1]$ 로 표시될것이 필요하고 충분하다.

E 를 노름 $\|u\|=\max_{0\le t\le 1}|u(t)|$ 이 도입된 바나흐공간 $C[0,\ 1]$ 이라고 하고 $P=\{u\in E\,|\,u(t)\ge 0,\ t\in[0,\ 1]\}$ 이라고 놓자.

가정 1 $\exists\sigma_0,\ \sigma_1\in(0,\ 1);\ \forall(x,\ y)\in[0,\ +\infty)\times[0,\ +\infty),$

$$\lim_{t\to 0+}t^{\sigma_0}f(t,\ x,\ y)=f_0(x,\ y)>0,\ \lim_{t\to 1-}(1-t)^{\sigma_1}f(t,\ x,\ y)=f_1(x,\ y)>0$$

다음의 적분방정식을 생각하자.

$$u(t)=\int_0^1 G(t,\ s)\varphi_q\left(\int_0^1 H(s,\ \tau)f(\tau,\ I_{0+}^{\gamma}u(\tau),\ u(\tau))d\tau\right)ds\tag{4}$$

여기서 $G(t,\ s)$는 다음과 같이 정의되는 함수이다.[5]

$$A=1-\sum_{i=1}^{m-2}\xi_i\eta_i^{\alpha-\delta-1}$$

$$G_1(t,\ s)=\begin{cases}\dfrac{t^{\alpha-\gamma-1}(1-s)^{\alpha-\delta-1}-(t-s)^{\alpha-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha-\gamma)}, & 0\le s\le t\le 1\\[2mm] \dfrac{t^{\alpha-\gamma-1}(1-s)^{\alpha-\delta-1}}{\Gamma(\alpha-\gamma)}, & 0\le t\le s\le 1\end{cases}$$

$$G_2(t,\ s)=\frac{t^{\alpha-\gamma-1}}{A\Gamma(\alpha-\gamma)}\left[\sum_{s<\eta_i}\xi_i[\eta_i^{\alpha-\delta-1}(1-s)^{\alpha-\delta-1}-(\eta_i-s)^{\alpha-\delta-1}]+\right.$$

$$\left.+\sum_{s\ge\eta_i}\xi_i\eta_i^{\alpha-\delta-1}(1-s)^{\alpha-\delta-1}\right],\ t,\ s\in[0,\ 1]$$

$$G(t,\ s)=G_1(t,\ s)+G_2(t,\ s)$$

보조정리 3 가정 1하에서 $u\in P$가 문제 (3)의 풀이이기 위하여서는 $u\in P$가 적분방정식 (4)의 풀이일것이 필요하고 충분하다.

P에서 연산자 T를 다음과 같이 정의한다.

$$Tu(t):=\int_0^1 G(t,\ s)\varphi_q\left(\int_0^1 H(s,\ \tau)f(\tau,\ I_{0+}^{\gamma}u(\tau),\ u(\tau))d\tau\right)ds$$

그러면 함수 $u\in P$가 적분방정식 (4)의 풀이라는것은 u가 P에서의 연산자 T의 부동점이라는 사실과 동등하다.

보조정리 4 가정 1이 성립되면 연산자 T에 대하여 $T(P)\subset P$가 성립된다.

보조정리 5 가정 1이 성립되면 $T:P\to P$는 완전련속연산자이다.

$\overline{M}:=[(\alpha-\delta)A\Gamma(\alpha-\gamma)]^{p-1}B\Gamma(\beta)$로 놓자.

가정 2 모든 변수에 관하여 비감소인 $g\in C([0,\ +\infty)\times[0,\ +\infty);\ [0,\ +\infty))$가 있어서

$$\forall(t,\ x,\ y)\in(0,\ 1)\times[0,\ +\infty)\times[0,\ +\infty),\ t^{\sigma_0}(1-t)^{\sigma_1}f(t,\ x,\ y)\le g(x,\ y)$$

가 성립한다.

가정 3 $\exists R>0;\ \dfrac{R^{p-1}}{g\left(\dfrac{R}{\Gamma(\gamma+1)},\ R\right)}\ge\dfrac{B(1-\sigma_0,\ \beta-\sigma_1)}{\overline{M}}$

정리 1 가정 1－3이 성립되면 문제 (3)은 $B_R=\{u\,|\,u\in P\wedge\|u\|\le R\}$에서 적어도 1개의 풀이를 가진다.

$(0,\ 1)\times\left[0,\ \dfrac{R}{\Gamma(\gamma+1)}\right]\times[0,\ R]$에서 정의된 함수 $K(t,\ x,\ y),\ k(t,\ x,\ y)$를 다음과 같이 정의하기로 한다.

$$K(t,\ x,\ y):=\max_{\substack{0\le\xi\le x\\0\le\eta\le y}}f(t,\ \xi,\ \eta)$$

$$k(t,\ x,\ y):=\min_{\substack{x\le\xi\le\frac{R}{\Gamma(\gamma+1)}\\ y\le\eta\le R}} f(t,\ \xi,\ \eta)$$

정의 2 적분방정식 (4)의 상풀이 $\bar{u}(t)\in B_R$ 와 하풀이 $\underline{u}(t)\in B_R$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\bar{u}(t)\ge\int_0^1 G(t,\ s)\varphi_q\left(\int_0^1 H(s,\ \tau)K(\tau,\ I_{0+}^{\gamma}\bar{u}(\tau),\ \bar{u}(\tau))d\tau\right)ds$$

$$\underline{u}(t)\le\int_0^1 G(t,\ s)\varphi_q\left(\int_0^1 H(s,\ \tau)k(\tau,\ I_{0+}^{\gamma}\underline{u}(\tau),\ \underline{u}(\tau))d\tau\right)ds$$

보조정리 6 가정 1－3하에서 적분방정식 (4)의 상풀이 $\bar{u}(t)\in B_R$ 와 하풀이 $\underline{u}(t)\in B_R$ 가 존재한다고 하자. 그러면 문제 (3)은 $S:=\{u\,|\,u\in B_R\wedge\forall t\in[0,\ 1],\ \underline{u}(t)\le u(t)\le\bar{u}(t)\}$ 에서 적어도 1개의 풀이를 가진다.

상수 $\underline{\rho}$, $\bar{\rho}$ 와 함수 $\overline{\omega}(t),\ \underline{\omega}(t)$, 모임 S^* 을 다음과 같이 정의하자.

$$\underline{\rho}:=\min_{\substack{0\le t\le 1\\ 0\le x\le\frac{R}{\Gamma(\gamma+1)}\\ 0\le y\le R}} t^{\sigma_0}(1-t)^{\sigma_1}f(t,\ x,\ y)$$

$$\bar{\rho}:=g\left(\frac{R}{\Gamma(\gamma+1)},\ R\right)$$

$$\underline{\omega}(t):=\underline{\rho}^{\,q-1}\int_0^1 G(t,\ s)\varphi_q\left(\int_0^1 H(s,\ \tau)\tau^{-\sigma_0}(1-\tau)^{-\sigma_1}d\tau\right)ds$$

$$\overline{\omega}(t):=\bar{\rho}^{\,q-1}\int_0^1 G(t,\ s)\varphi_q\left(\int_0^1 H(s,\ \tau)\tau^{-\sigma_0}(1-\tau)^{-\sigma_1}d\tau\right)ds$$

$$S^*:=\{u\,|\,u\in B_R\wedge\forall t\in[0,\ 1],\ \underline{\omega}(t)\le u(t)\le\overline{\omega}(t)\}$$

정리 2 가정 1－3이 성립되면 문제 (3)은 S^* 에서 적어도 1개의 풀이를 가진다.

정의 3 $\psi\in S^*$이 문제 (3)의 풀이라고 하자. 이때 문제 (3)의 모든 풀이 $u\in S^*$에 대하여 $\forall t\in[0,\ 1],\ \psi(t)\ge u(t)$ 가 성립되면 $\psi(t)$ 를 문제 (3)의 S^* 에서의 최대풀이라고 부른다. 또한 부등식이 반대로 성립될 때 $\psi(t)$ 를 문제 (3)의 S^* 에서의 최소풀이라고 부른다.

정리 3 함수 $f(t,\ x,\ y)$ 가 $x,\ y$ 에 관하여 비감소라고 하자. 그러면 가정 1－3하에서 문제 (3)은 S^* 에서 최대풀이 $u_{\max}(t)$ 와 최소풀이 $u_{\min}(t)$ 를 가지며 이에 대하여

$$\underline{\omega}(t)\le u_{\min}(t)\le u_{\max}(t)\le\overline{\omega}(t)$$

가 성립된다.

주의 2 만일 문제 (3)의 S^* 에서의 최소풀이와 최대풀이가 존재하고 서로 같다면 S^* 에서의 풀이의 유일성이 증명되게 된다.

주의 3 $\underline{\rho}>0$ 이면 문제 (3)이 S^* 에서 정인 풀이를 가진다는것을 알수 있다.

주의 4 보조정리 2로부터 경계값문제 (1)의 풀이의 존재성, 풀이의 유일성, 풀이의 정값성을

증명할수 있다.

문제 (3)의 최소풀이를 구하는 근사풀이도식은 다음과 같다.

도식 1:

걸음 1 초기근사 $\underline{u}_0$ 을 다음과 같이 구한다.

$$\underline{u}_0(t) := \underline{\rho}^{q-1}\int_0^1 G(t,\ s)\varphi_q\left(\int_0^1 H(s,\ \tau)\tau^{-\sigma_0}(1-\tau)^{-\sigma_1}d\tau\right)ds$$

걸음 2 n 째 근사풀이 $\underline{u}_n$ 으로부터 $n+1$ 째 근사풀이 $\underline{u}_{n+1}$ 을 구하는 도식은 다음과 같다.

$$\underline{u}_{n+1}(t) = \int_0^1 G(t,\ s)\varphi_q\left(\int_0^1 H(s,\ \tau)f(\tau,\ I_{0+}^{\gamma}\underline{u}_n(\tau),\ \underline{u}_n(\tau))d\tau\right)ds$$

문제 (3)의 최대풀이를 구하는 근사풀이도식은 다음과 같다.

도식 2:

걸음 1 초기근사 $\overline{u}_0$ 를 다음과 같이 구한다.

$$\overline{u}_0(t) := \overline{\rho}^{q-1}\int_0^1 G(t,\ s)\varphi_q\left(\int_0^1 H(s,\ \tau)\tau^{-\sigma_0}(1-\tau)^{-\sigma_1}d\tau\right)ds$$

걸음 2 n 째 근사풀이 $\overline{u}_n$ 로부터 $n+1$ 째 근사풀이 $\overline{u}_{n+1}$ 를 구하는 도식은 다음과 같다.

$$\overline{u}_{n+1}(t) = \int_0^1 G(t,\ s)\varphi_q\left(\int_0^1 H(s,\ \tau)f(\tau,\ I_{0+}^{\gamma}\overline{u}_n(\tau),\ \overline{u}_n(\tau))d\tau\right)ds$$

문제 (3)의 n 째 근사풀이 u_n 으로부터 경계값문제 (1)의 n 째 근사풀이 x_n 은 다음과 같이 구한다.

도식 3:

$$x_n(t) = I_{0+}^{\gamma}u_n(t),\ t\in[0,\ 1]$$

가우스초기하함수 ${}_2F_1(a,\ b;\ c;\ s)$ 를 리용하여 다음의 함수

$$\chi(s) := {}_2F_1(1-\sigma_0,\ \sigma_1;\ \beta+(1-\sigma_0);\ s)$$

를 정의하자.

상수 $K_2,\ K_3$ 들을 다음과 같이 놓자.

$$K_2 = \frac{\Gamma(1-\sigma_0)}{B\Gamma(\beta+(1-\sigma_0))}\sum_{i=1}^{m-2}\zeta_i\eta_i^{\beta-1}[\chi(1)-\eta_i^{1-\sigma_0}\chi(\eta_i)]$$

$$K_3 = \frac{\Gamma(1-\sigma_0)}{\Gamma(\beta+(1-\sigma_0))}\left[\chi(1)+\frac{1}{B}\sum_{i=1}^{m-2}\zeta_i\eta_i^{\beta-1}[\chi(1)-\eta_i^{1-\sigma_0}\chi(\eta_i)]\right]$$

가정 4 $\exists L_3,\ L_4>0;$

$$\forall t\in[0,\ 1],\ \forall(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2)\in\left[0,\ \frac{R}{\Gamma(\gamma+1)}\right]\times[0,\ R],$$

$$t^{\sigma_0}(1-t)^{\sigma_1}\,|\,f(t,\ x_1,\ y_1)-f(t,\ x_2,\ y_2)\,|\le L_3\,|\,x_1-x_2\,|+L_4\,|\,y_1-y_2\,|$$

정리 4 가정 1－4가 성립된다고 하자. 이때 다음의 사실들이 성립된다.

① $1<p<2$ 일 때 $\frac{(q-1)\bar{\rho}^{q-2}K_3^{q-1}}{A(\alpha-\delta)\Gamma(\alpha-\gamma)}\left(\frac{L_3}{\Gamma(\gamma+1)}+L_4\right)<1$ 이면 문제 (3)은 S^* 에서 유일풀이를 가진다.

② $p>2$ 일 때 $\frac{(q-1)K_3}{A(\alpha-\delta)\Gamma(\alpha-\gamma)\underline{\rho}^{2-q}K_2^{2-q}}\left(\frac{L_3}{\Gamma(\gamma+1)}+L_4\right)<1$ 이면 문제 (3)은 S^* 에서 유일풀이를 가진다.

주의 5 정리 4로부터 문제 (1)의 풀이의 유일성이 나온다.

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보 수학, 64, 3, 7, 주체107(2018).

[2] J. Caballero et al.; Comput. Math. Appl., 62, 1325, 2011.

[3] I. J. Cabrera et al.; Abstr. Appl. Anal., 2012, 1, 2012.

[4] S. Vong; Math. Comput. Modelling, 57, 1053, 2013.

[5] Z. Lv; Adv. Difference Equ., 69, 1, 2014.

[6] K. Jong; Mediterr. J. Math., 15, 129, 1, 2018.

주체109(2020)년 6월 5일 원고접수

Existence and Uniqueness and Approximate Method of Positive Solution of Multi-point Boundary Value Problems for *p*-Laplacian Multi-term Fractional Differential Equations with Singularity on Time Variable

Jang Kyong Jun, Kong Ryon Suk

In this paper, we investigate the existence and uniqueness and the approximate method of positive solutions of multi-point boundary value problems for p-Laplacian multi-term fractional differential equations with singularity on time variable. And some examples are given to illustrate our results.

Keywords: multi-term fractional differential equation, multi-point boundary value problem