김일성종합대학학보 주체108(2019)년
수 학 제65권 제3호

시간변수에 대한 특이성을 가진 한가지 형태의 *p*-라쁠라스분수계미분방정식의 여러점경계값문제를 풀기 위한 상하풀이법

정 금 성

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《과학기술의 종합적발전추세와 사회경제발전의 요구에 맞게 새로운 경계과학을 개척하고 발전시키는데 큰 힘을 넣어야 합니다.》

론문에서는 시간변수에 대한 특이성을 가진 비선형p-라쁠라스분수계미분방정식의 여러점경계값문제의 풀이를 구하기 위한 한가지 근사풀이법인 상하풀이법을 연구하였다.

1. 문 제 설 정

최근 많은 론문들에서 시간변수에 관한 특이성을 가진 원천항이 들어있는 분수계미분방정식의 풀이의 존재성과 그 풀이법에 대한 론의를 진행하였다.

선행연구[3, 4]에서는 샤우데르의 부동점정리와 상하풀이법을 리용하여 특이비선형분수계미분방정식의 두점경계값문제와 적분경계값문제의 정인 풀이의 존재성을 밝혔다.

또한 선행연구[1]에서는 $1<\alpha,\ \beta\le 2,\ 0<\gamma\le 1$ 인 경우에 샤우데르의 부동점정리를 리용하여 p-라쁠라스연산자를 가진 특이비선형분수계미분방정식의 m점경계값문제

$$\begin{cases} D_{0+}^{\beta}(\varphi_p(D_{0+}^{\alpha}x))(t)=q(t)f(t,\ x(t))\ \ (0<t<1) \\ x(0)=0,\ D_{0+}^{\gamma}x(1)=\sum_{i=1}^{m-2}\xi_i D_{0+}^{\gamma}x(\eta_i) \\ D_{0+}^{\alpha}x(0)=0,\ \varphi_p(D_{0+}^{\alpha}x)(1)=\sum_{i=1}^{m-2}\zeta_i\varphi_p(D_{0+}^{\alpha}x)(\eta_i) \end{cases} \tag{1}$$

의 정인 풀이의 존재성을 밝혔다.

론문에서는 우의 연구결과들에 기초하여 선행연구[1]의 문제 (1)을 놓고 그것의 풀이를 구하기 위한 한가지 근사풀이법으로서 상하풀이법을 유도하였다. 여기서 $D_{0+}^{\alpha},\ D_{0+}^{\beta},\ D_{0+}^{\gamma}$ 들은 모두 리만－류빌분수계도함수들이며 $1<\alpha,\ \beta\le 2,\ 0<\gamma\le 1,\ 0<\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i<1$ 이고 이에 대하여 조건

$$\sum_{i=1}^{m-2}\xi_i\eta_i^{\alpha-\gamma-1}<1,\ \sum_{i=1}^{m-2}\zeta_i\eta_i^{\beta-1}<1\ \ (\alpha-\gamma-1>0)$$

을 가정한다. 또한 함수 f 와 q 는 각각

$$f\in C([0,\ 1]\times[0,\ +\infty),\ [0,\ +\infty)),\ q\in C((0,\ 1),\ [0,\ +\infty))$$

와

$$\lim_{t\to 0+} q(t)=+\infty,\ \lim_{t\to 1-} q(t)=+\infty$$

를 만족시키는 함수들이며 함수 $\varphi_p(s)=|s|^{p-2}s\ (p>1)$ 에 대해서는 $\varphi_p^{-1}=\varphi_{\overline{p}},\ 1/p+1/\overline{p}=1$ 이 성립된다.

2. 예비적결과

보조정리 1[2] 연산자 A가 바나흐공간 X의 유계닫긴불룩모임 D를 자체로 넘기는 완전련속연산자이면 D에는 연산자 A의 부동점이 존재한다.

보조정리 2[5] X가 바나흐공간, $D\subset X$는 닫긴불룩모임, $U\subset D$가 $\theta\in U$인 열린모임이라고 하자. 이때 연산자 $A:\overline{U}\to D$가 완전련속연산자이면 다음의 두 사실중에 적어도 하나가 성립한다.

① A는 $\overline{U}$에서 부동점을 가진다.

② $x\in\partial U,\ \lambda\in(0,\ 1)$이 있어서 $x=\lambda Ax$가 성립한다.

가정 1 $\exists\sigma_0,\ \sigma_1\in(0,\ 1);\ \lim_{t\to 0+} t^{\sigma_0}q(t)=q_0>0,\ \lim_{t\to 1-}(1-t)^{\sigma_1}q(t)=q_1>0$

보조정리 3[1] 가정 1이 성립한다고 하자. 그러면 $x(t)$가 경계값문제 (1)의 정인 풀이이기 위하여서는 $x(t)$가 다음의 적분방정식 (2)의 풀이일것이 필요하고 충분하다.

$$x(t)=\int_0^1 G(t,\ s)\varphi_p^{-1}\left(\int_0^1 H(s,\ \tau)q(\tau)f(\tau,\ x(\tau))d\tau\right)ds \tag{2}$$

여기서

$$A=1-\sum_{i=1}^{m-2}\xi_i\eta_i^{\alpha-\gamma-1},\ B=1-\sum_{i=1}^{m-2}\zeta_i\eta_i^{\beta-1}$$

$$G(t,\ s)=G_1(t,\ s)+G_2(t,\ s),\ H(t,\ s)=H_1(t,\ s)+H_2(t,\ s)$$

$$G_1(t,\ s)=\begin{cases}\dfrac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\gamma-1}-(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & (0\le s\le t\le 1)\\[2ex] \dfrac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha)} & (0\le t\le s\le 1)\end{cases}$$

$$G_2(t,\ s)=\frac{t^{\alpha-1}}{A\Gamma(\alpha)}\sum_{0\le s\le\eta_i}\xi_i[\eta_i^{\alpha-\gamma-1}(1-s)^{\alpha-\gamma-1}-(\eta_i-s)^{\alpha-\gamma-1}]+$$

$$+\frac{t^{\alpha-1}}{A\Gamma(\alpha)}\sum_{\eta_i\le s\le 1}\xi_i\eta_i^{\alpha-\gamma-1}(1-s)^{\alpha-\gamma-1}\ \ (t\in[0,\ 1])$$

$$H_1(t,\ s)=\begin{cases}\dfrac{t^{\beta-1}(1-s)^{\beta-1}-(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} & (0\le s\le t\le 1)\\[2ex] \dfrac{t^{\beta-1}(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} & (0\le t\le s\le 1)\end{cases}$$

$$H_2(t,\ s)=\frac{t^{\beta-1}}{B\Gamma(\beta)}\sum_{0\le s\le\eta_i}\zeta_i[\eta_i^{\beta-1}(1-s)^{\beta-1}-(\eta_i-s)^{\beta-1}]+$$

$$+\frac{t^{\beta-1}}{B\Gamma(\beta)}\sum_{\eta_i\le s\le 1}\zeta_i\eta_i^{\beta-1}(1-s)^{\beta-1}\quad (t\in[0,\ 1])$$

보조정리 4[1] $\sum_{i=1}^{m-2}\xi_i\eta_i^{\alpha-\gamma-1}<1$ 이면 함수 $G(t,\ s)$ 에 대하여 다음의 사실들이 성립된다.

① $s,\ t\in(0,\ 1)$ 에 대하여 $G(t,\ s)>0$ 이다.

② $s,\ t\in[0,\ 1]$ 에 대하여 $G(t,\ s)\le G_*(s,\ s)$ 이다. 여기서

$$G_*(s,\ s)=\frac{1}{A\Gamma(\alpha)}(1-s)^{\alpha-\gamma-1}$$

보조정리 5[2] $\sum_{i=1}^{m-2}\zeta_i\eta_i^{\beta-1}<1$ 이면 보조정리 3에서의 함수 $H(t,\ s)$ 에 대하여 다음의 사실들이 성립된다.

① $s,\ t\in(0,\ 1)$ 에 대하여 $H(t,\ s)>0$ 이다.

② $s,\ t\in[0,\ 1]$ 에 대하여 $H(t,\ s)\le H_*(s,\ s)$ 이다. 여기서

$$H_*(s,\ s)=\frac{1}{B\Gamma(\beta)}(1-s)^{\beta-1}$$

E 를 노름 $\|u\|:=\max_{0\le t\le 1}|u(t)|$ 이 도입된 바나흐공간 $C[0,\ 1]$ 이라고 하고

$$P=\{u\in E\,|\,u(t)\ge 0\ \ (t\in[0,\ 1])\}$$

라고 놓자. $x\in P$ 에 대하여 연산자 T 를 다음과 같이 정의한다.

$$Tx(t):=\int_0^1 G(t,\ s)\varphi_{\bar p}\left(\int_0^1 H(s,\ \tau)q(\tau)f(\tau,\ x(\tau))d\tau\right)ds$$

여기서 $\bar p$ 는 $1/p+1/\bar p=1$ 을 만족시키는 수이며 이때 $\varphi_{\bar p}=\varphi_p^{-1}$ 이라는 사실이 알려져있다. 그러면 함수 $x(t)$ 가 적분방정식 (2)의 풀이라는것은 $x(t)$ 가 연산자 T 의 부동점이라는 사실과 동등하다.

보조정리 6[1] 가정 1이 성립한다고 하자. 그러면 $T:P\to P$ 는 완전련속연산자이다.

가정 2 구간 $[0,\ +\infty)$ 에서 련속이고 비감소인 비부값함수 $g(x)$ 가 있어서

$$\forall(t,\ x)\in(0,\ 1)\times[0,\ +\infty),\ t^{\sigma_0}(1-t)^{\sigma_1}q(t)f(t,\ x)\le g(x)$$

가 성립한다.

주의 1 가정 1로부터

$$\lim_{t\to 0+}t^{\sigma_0}(1-t)^{\sigma_1}q(t)=q_0,\ \lim_{t\to 1-}t^{\sigma_0}(1-t)^{\sigma_1}q(t)=q_1$$

이며 이 사실을 $q\in C((0,\ 1),\ [0,\ +\infty))$ 와 결합하면 함수 $t^{\sigma_0}(1-t)^{\sigma_1}q(t)$ 는 구간 $(0,\ 1)$ 에서 유계이다. 따라서 본질적으로 가정 2는 $f(t,\ x)$ 에 대한 제한조건이다.

$M:=(\alpha-\gamma)^{p-1}A^{p-1}B\Gamma(\alpha)^{p-1}\Gamma(\beta)$ 로 놓자.

가정 3 $\exists r>0;\ \dfrac{r^{p-1}}{g(r)}>\dfrac{B(1-\sigma_0,\ \beta-\sigma_1)}{M}$

가정 3에서 $B(\cdot,\ \cdot)$은 베타함수를 의미한다.

보조정리 7 가정 1−3이 성립한다고 하자. 그러면 경계값문제 (1)은

$$B_r = \{u \mid u \in P \wedge \| u \| \le r\}$$

에서 적어도 1개의 풀이를 가진다.

3. 상하풀이법의 유도

$f \in C([0,\ 1]\times[0,\ +\infty),\ [0,\ +\infty))$로부터 함수 $K(t,\ x),\ k(t,\ x)$를 다음과 같이 정의할수 있다.

$$K(t,\ x) := \sup_{0\le\eta\le x} f(t,\ \eta),\ k(t,\ x) := \inf_{x\le\eta\le r} f(t,\ \eta)$$

정의로부터 분명히 $K(t,\ x)$, $k(t,\ x)$는 $x \in [0,\ r]$에 관하여 비감소이며 다음식이 성립한다.

$$k(t,\ x) \le f(t,\ x) \le K(t,\ x)\ \ (\forall (t,\ x) \in [0,\ 1]\times[0,\ r])$$

정의 1 경계값문제 (1)의 상풀이 $\overline{x}(t) \in B_r$와 하풀이 $\underline{x}(t) \in B_r$를 다음과 같이 정의한다.

$$\overline{x}(t) \ge \int_0^1 G(t,\ s)\varphi_{\overline{p}}\left(\int_0^1 H(s,\ \tau)q(\tau)K(\tau,\ \overline{x}(\tau))d\tau\right)ds$$

$$\underline{x}(t) \le \int_0^1 G(t,\ s)\varphi_{\overline{p}}\left(\int_0^1 H(s,\ \tau)q(\tau)k(\tau,\ \underline{x}(\tau))d\tau\right)ds$$

보조정리 8 보조정리 7의 조건을 만족시킨다고 하자. 그리고 경계값문제 (1)의 상풀이 $\overline{x}(t) \in B_r$와 하풀이 $\underline{x}(t) \in B_r$가 존재한다고 하자. 그러면 경계값문제 (1)은

$$S := \{u \mid u \in B_r \wedge \forall t \in [0,\ 1],\ \underline{x}(t) \le u(t) \le \overline{x}(t)\}$$

에서 적어도 1개의 풀이를 가진다.

함수 $t^{\sigma_0}(1-t)^{\sigma_1}q(t)$의 구간 $(0,\ 1)$에서의 유계성과 $f \in C([0,\ 1]\times[0,\ +\infty),\ [0,\ +\infty))$로부터

$$\exists \mu,\ \rho \ge 0;\ \forall (t,\ x) \in (0,\ 1)\times[0,\ r],\ \mu \le t^{\sigma_0}(1-t)^{\sigma_1}q(t)f(t,\ x) \le \rho$$

가 성립된다.

가정 4 $\rho \le \dfrac{M}{B(1-\sigma_0,\ \beta-\sigma_1)} r^{p-1}$

정리 1 보조정리 7의 조건과 가정 4를 만족시키면 경계값문제 (1)은 적어도 1개의 풀이 $x^* \in B_r$를 가지며 다음식이 성립한다.

$$\mu^{\overline{p}-1}\int_0^1 G(t,\ s)\varphi_{\overline{p}}\left(\int_0^1 H(s,\ \tau)\tau^{-\sigma_0}(1-\tau)^{-\sigma_1}d\tau\right)ds \le x^*(t) \le$$

$$\le \rho^{\overline{p}-1}\int_0^1 G(t,\ s)\varphi_{\overline{p}}\left(\int_0^1 H(s,\ \tau)\tau^{-\sigma_0}(1-\tau)^{-\sigma_1}d\tau\right)ds$$

$$S^* := \left\{u \,\middle|\, u \in B_r \wedge \forall t \in [0,\ 1],\ \mu^{\overline{p}-1}\int_0^1 G(t,\ s)\varphi_{\overline{p}}\left(\int_0^1 H(s,\ \tau)\tau^{-\sigma_0}(1-\tau)^{-\sigma_1}d\tau\right)ds \le \right.$$

$$\left. \le u(t) \le \rho^{\overline{p}-1}\int_0^1 G(t,\ s)\varphi_{\overline{p}}\left(\int_0^1 H(s,\ \tau)\tau^{-\sigma_0}(1-\tau)^{-\sigma_1}d\tau\right)ds \right\}$$

로 놓자.

정의 2 $\psi(t)\in S^*$이 경계값문제 (1)의 풀이라고 하자. 이때 경계값문제 (1)의 모든 풀이 $x(t)\in S^*$에 대하여 $\forall t\in[0, 1]$, $\psi(t)\ge x(t)$가 성립하면 $\psi(t)$를 경계값문제 (1)의 S^*에서의 최대풀이라고 부른다. 또한 부등식이 반대로 성립할 때 $\psi(t)$를 경계값문제 (1)의 S^*에서의 최소풀이라고 부른다.

정리 2 정리 1의 조건을 만족시키고 함수 $f(t, x)$가 $x\ge 0$에 관하여 비감소라고 하자. 그러면 경계값문제 (1)은 S^*에서 최대풀이 $x_{\max}(t)$와 최소풀이 $x_{\min}(t)$를 가지며 이에 대하여

$$\mu^{\bar{p}-1}\int_0^1 G(t,\ s)\varphi_{\bar{p}}\left(\int_0^1 H(s,\ \tau)\tau^{-\sigma_0}(1-\tau)^{-\sigma_1}d\tau\right)ds\le x_{\min}(t)\le$$
$$\le x_{\max}(t)\le \rho^{\bar{p}-1}\int_0^1 G(t,\ s)\varphi_{\bar{p}}\left(\int_0^1 H(s,\ \tau)\tau^{-\sigma_0}(1-\tau)^{-\sigma_1}d\tau\right)ds$$

가 성립된다.

주의 2 만일 경계값문제 (1)의 S^*에서의 최소풀이와 최대풀이가 존재하고 서로 같다면 S^*에서의 풀이의 유일성이 증명되게 된다.

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보 수학, 64, 3, 7, 주체107(2018).

[2] 정광호 등; 근사해석, **김일성**종합대학출판사, 223～254, 주체94(2005).

[3] C. Wang et al.; Boundary Value Problems, Article ID 297026, 2011.

[4] S. Vong; Mathematical and Computer Modeling, **57**, 1053, 2013.

[5] C. Su et al.; International Journal of Differential Equations, Article ID 4683581, 2017.

주체108(2019)년 3월 15일 원고접수

Upper and Lower Solution Method for a Class of Multi-Point Boundary Value Problems of *p*-Laplacian Fractional Differential Equations with Singularities on Time Variable

Jong Kum Song

In this paper, we study the upper and lower solutions method for a class of multi-point boundary value problems of singular nonlinear fractional differential equations with p-Laplacian operator.

Key words: multi-point boundary value problem, p-Laplacian operator