김일성종합대학학보 JOURNAL OF KIM IL SUNG UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체105(2016)년 제62권 제4호 Vol. 62 No. 4 JUCHE105(2016).

유전형점탄성다층복합판의 동력학적구부림해석

송 성 관

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《현시대는 과학과 기술의 시대이며 과학과 기술이 류례없이 빠른 속도로 발전하는것은 현대과학기술발전의 중요한 특징입니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제15권 485페지)

선행연구[1]에서는 섬유강화점탄성복합판에 정적힘이 작용할 때의 변위해석을, 선행연구[2]에서는 동적힘이 작용할 때의 변위해석을 진행하였다.

선행연구[3]에서는 탄성지반우에 있는 섬유강화점탄성다층복합판의 준정적변위해석을 진행하였으나 동적변위해석은 진행되지 못하였다.

론문에서는 탄성지반우에 있는 점탄성다층복합판에 동적힘이 작용할 때 변위에 대하여 연구하였다.

1. 기본관계식

탄성지반우에 있는 판에 수직으로 동력학적짐이 작용할 때 운동방정식은 다음과 같다.[2]

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=0\\ &\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial N_y}{\partial y}=0\\ &\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+q-cw=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

식 (1)에서 중간면의 모서리에 x, y축을 택하고 그것에 수직으로 z축을 택하였다. 또한 N_x, N_y는 각각 x축, y축에 수직인 면에 작용하는 법선방향의 단위길이당 당김(누름)힘이고 N_{xy}는 x축에 수직인 면에 작용하는 y축방향의 단위길이당 자르는 힘이다. Q_x, Q_y는 각각 x, y축에 수직인 면에 작용하는 z방향의 단위길이당 자르는 힘이다. 그리고 q는 판의 웃면 $z=-h/2$에 작용하는 단위면적당 z방향의 동력학적구부림힘이고 c는 $z=h/2$에 있는 지반결수이며 w는 z방향의 변위, ρ는 단위면적당 판의 밀도, t는 시간이다.

식 (1)의 셋째 식을 다음과 같이 표시할수 있다.

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}+q-cw=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{2}$$

여기서 M_x, M_y는 각각 x, y축에 수직인 면에 작용하는 단위길이당 구부림모멘트, M_{xy}는 xy면에서 생기는 단위길이당 틀음모멘트이다.

판을 유전형점탄성재료로 된 섬유강화다층복합판이라고 하자.

이때 속힘과 중간면의 변형사이의 관계식은 다음과 같다.[1]

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{A}_{11} & \overline{A}_{12} & \overline{A}_{16} & \overline{B}_{11} & \overline{B}_{12} & \overline{B}_{16} \\ \overline{A}_{12} & \overline{A}_{22} & \overline{A}_{26} & \overline{B}_{12} & \overline{B}_{22} & \overline{B}_{26} \\ \overline{A}_{16} & \overline{A}_{26} & \overline{A}_{66} & \overline{B}_{16} & \overline{B}_{26} & \overline{B}_{66} \\ \overline{B}_{11} & \overline{B}_{12} & \overline{B}_{16} & \overline{D}_{11} & \overline{D}_{12} & \overline{D}_{16} \\ \overline{B}_{12} & \overline{B}_{22} & \overline{B}_{26} & \overline{D}_{12} & \overline{D}_{22} & \overline{D}_{26} \\ \overline{B}_{16} & \overline{B}_{26} & \overline{B}_{66} & \overline{D}_{16} & \overline{D}_{26} & \overline{D}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_0}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial x} + \dfrac{\partial u_0}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \tag{3}$$

여기서 u_0, v_0, w는 각각 중간면에서 x축, y축, z축방향의 변위성분이고 $\overline{A}_{ij}$, $\overline{B}_{ij}$, $\overline{D}_{ij}$는 시간에 대한 연산자로서

$$\left.\begin{aligned} &(\overline{A}_{ij},\ \overline{B}_{ij},\ \overline{D}_{ij}) = \sum_{k=1}^{N} [(Z_k - Z_{k-1}),\ (Z_k^2 - Z_{k-1}^2)/2,\ (Z_k^3 - Z_{k-1}^3)/3] \widetilde{E}_{ij}^{(k)} \\ &\widetilde{E}_{ij}^{(k)} f = \widetilde{Q}_{ij}^{(k)} \left[f - \int_0^t \Gamma_{ij}^{(k)}(t-\tau) f(\tau) d\tau \right] \end{aligned}\right\},\ i,\ j = 1, 2, 6 \tag{4}$$

이며 k는 단층판의 번호, N는 단층판의 개수이다. 그리고 $\widetilde{Q}_{ij}^{(k)}$는 k째 단층판의 변환된 환산억세기, $\Gamma_{ij}^{(k)}$는 k째 판의 완화핵으로서 실험적으로 결정된다.

식 (3), (4)를 방정식 (1)에 대입하면 변위성분 u_0, v_0, w에 관한 방정식

$$\begin{bmatrix} \overline{L}_{11} & \overline{L}_{12} & \overline{L}_{16} \\ \overline{L}_{12} & \overline{L}_{22} & \overline{L}_{26} \\ \overline{L}_{16} & \overline{L}_{26} & \overline{L}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q - \rho \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - cw \end{Bmatrix} \tag{5}$$

가 얻어진다. 여기서 $\overline{L}_{ij}$, i, $j = 1$, 2, 6은 미분연산자들이다.

u_0, v_0, w에 관한 방정식 (5)를 구체적인 경계조건을 고려하여 풀자.

이를 보기 위하여 대칭직교다층복합판의 경우에 대하여 론의하자.

이 경우에

$$B_{ij} = 0\ (i,\ j = 1, 2,\ 6),\ A_{16} = A_{26} = D_{16} = D_{26} = 0 \tag{6}$$

이므로 식 (5), (6)으로부터 다음의 방정식이 얻어진다.

$$\begin{bmatrix} \overline{L}_{11} & \overline{L}_{12} & 0 \\ 0 & \overline{L}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{L}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q - \rho \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - cw \end{Bmatrix} \tag{7}$$

련립방정식 (7)의 셋째 식은 다음과 같다.

$$\overline{D}_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2(\overline{D}_{12}+2\overline{D}_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\overline{D}_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-q+cw=-\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{8}$$

식 (8)에서 지반은 탄성지반이고 밀도 ρ는 일정하다고 보았다.

2. 풀기법

판의 처짐 w에 관한 연산자방정식 (8)을 풀기 위하여 네 경계면 $x=0,\ a$; $y=0,\ b$ 에서 자유지지되였다고 하자.

방정식 (8)의 풀이를 다음과 같은 2중합렬형태로 구하자.

$$w(x,\ y,\ t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\psi_{mn}(t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{9}$$

이제 힘 q가 분포힘이면 그것을 다음과 같은 2중합렬로 전개하자.

$$q=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}q_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{10}$$

이때 q_{mn}은 $q_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b q(x,\ y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy$ 이다.

균등분포힘인 경우에는

$$q_{mn}=16q_0/(\pi^2 mn)\ \ (m,\ n=1,\ 3,\ 5,\ \cdots)\,. \tag{11}$$

만일 판의 겉면우에 있는 점 $(\xi,\ \eta)$에 집중짐 P가 작용하면 다음과 같이 된다.

$$q_{mn}=\frac{4P}{ab}\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b} \tag{12}$$

특수경우로 판의 중심 $(a/2,\ b/2)$에 집중짐 P가 작용하면 $q_{mn}=4P/(ab)$로 된다.

식 (9), (10)을 방정식 (8)에 대입하면 다음과 같다.

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4\widetilde{D}_{11}\psi_{mn}+2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2(\widetilde{D}_{12}+2\widetilde{D}_{66})\psi_{mn}+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^4\widetilde{D}_{22}\psi_{mn}-q_{mn}+c\psi_{mn}+\rho\ddot{\psi}_{mn}=0$$

이 식을 라쁠라스변환하고 $\psi_{mn}=0,\ \dot{\psi}_{mn}=0$이라고 하면

$$\psi^*_{mn}=\frac{q^*_{mn}}{(m\pi/a)^4D^*_{11}+2(m\pi/a)^2(n\pi/b)^2(D^*_{12}+2D^*_{66})+(n\pi/b)^4D^*_{22}+c+\rho s^2} \tag{13}$$

여기서 s는 라쁠라스상이며 D^*_{ij}는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}D^*_{11}&=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{3}(Z_k^3-Z_{k-1}^3)\widetilde{Q}_{11}{}^{(k)}[1-\Gamma_{11}^{(k)*}],\quad D^*_{12}=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{3}(Z_k^3-Z_{k-1}^3)\widetilde{Q}_{12}{}^{(k)}[1-\Gamma_{12}^{(k)*}]\\D^*_{22}&=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{3}(Z_k^3-Z_{k-1}^3)\widetilde{Q}_{22}{}^{(k)}[1-\Gamma_{22}^{(k)*}],\quad D^*_{66}=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{3}(Z_k^3-Z_{k-1}^3)\widetilde{Q}_{66}{}^{(k)}[1-\Gamma_{66}^{(k)*}]\end{aligned} \tag{14}$$

이 식에서 $\Gamma_{ij}^{(k)*}$는 k째 판의 완화핵에 대한 라쁠라스변환이다.

식 (14)를 식 (13)에 대입하면 ψ^*_{mn}이 결정되고 그것을 거꿀변환하면 ψ_{mn}이 구해진다.

구해진 ψ_{mn}을 식 (10)에 대입하면 변위 $w(x,\ y,\ t)$가 완전히 결정된다.

만일 어느 한 점에 집중힘이 작용하면 식 (11)대신에 식 (12)를 취하면 된다.

3. 계산실례

기하학적 및 력학적특성자료가 다음과 같이 주어졌다고 하자.

$a=2\text{m},\ b=1\text{m},\ h=0.04\text{m},\ N=3,\ h_1=h_3=0.01\text{m},\ h_2=0.02\text{m},\ h=h_1+h_2+h_3$

$\rho=72\text{kg/m}^2,\ q_0=0.5\text{MPa},\ E_1=80\text{GPa},\ E_2=10\text{GPa},\ G_{12}=5\text{GPa},\ \nu_{12}=0.3,\ c=9\ 617\text{kN/m}^3$

$\Gamma_{11}=12\times10^{-3}e^{-0.06t},\ \Gamma_{22}=4\times10^{-3}e^{-0.04t},\ \Gamma_{12}=3.6\times10^{-3}e^{-0.06t},\ \Gamma_{66}=2\times10^{-3}e^{-0.02t}$

먼저 단층판의 배치가 $0°/90°/0°$인 경우를 생각하자.

이때 $Z_0=-2\times10^{-2}\text{m},\ Z_1=-1\times10^{-2}\text{m},\ Z_2=1\times10^{-2}\text{m},\ Z_3=2\times10^{-2}\text{m}$이다.

환산억세기는 $Q_{11}=80.91\text{GPa},\ Q_{12}=3.03\text{GPa},\ Q_{22}=10.11\text{GPa},\ Q_{66}=5\text{GPa}$이다.

$m=n=1$인 경우를 생각하자.

식 (14)에 의하여 D_{ij}^*을 계산하면 다음과 같다.

$$D_{11}^*=\left(401.17-\frac{4.53}{s+0.06}-\frac{0.094}{s+0.02}\right)\times10^3,\ D_{12}^*=\left(21.21-\frac{0.08}{s+0.06}\right)\times10^3$$

$$D_{22}^*=\left(235.97-\frac{0.188}{s+0.04}-\frac{2.265}{s+0.06}\right)\times10^3,\ D_{66}^*=\left(35-\frac{0.07}{s+0.02}\right)\times10^3$$

이 식을 식 (14)에 대입하고 $m=n=1$로 놓으면 다음의 식이 얻어진다.

$$\psi_{11}=0.026\,1-0.002\,89e^{-0.019t}-0.000\,485e^{-0.039\,3t}-0.002\,22e^{-0.053\,8t}-$$
$$-0.020\,512\,6e^{-0.003\,517\,7t}\cos740.564t$$

t의 변화에 따르는 ψ_{11}의 변화를 보면 시간에 따라 감쇠진동한다는것을 알수 있다. 즉 점성으로 인하여 변위가 현저히 감소한다.

같은 방법으로 $90°/0°/90°$인 다층복합판의 경우를 구하면

$$\psi_{11}=0.04-0.000\,37e^{-0.019t}-0.003\,4e^{-0.036\,6t}-0.002e^{-0.059t}-0.036\,6e^{-0.001\,96t}\cos784.482t\,.$$

참고문헌

[1] **김일성**종합대학학보(자연과학), 57, 9, 16, 주체100(2011).
[2] **김일성**종합대학학보(자연과학), 56, 5, 26, 주체99(2010).
[3] K. K. Rao; IJERA, 2, 365, 2012.

주체104(2015)년 12월 5일 원고접수

Dynamic Bending Analysis of Genetic Viscoelastic Composite Laminates

Song Song Gwan

We analyze the dynamic bending displacement of fiber reinforced genetic viscoelastic composite laminates. The dynamic equation of laminates is considered and the equation for displacement is derived on it.

Key words: viscoelastic composite laminate, dynamic displacement, genetic laminate