김일성종합대학학보 JOURNAL OF KIM IL SUNG UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체106(2017)년 제63권 제9호 Vol. 63 No. 9 JUCHE106(2017).

프락탈정－역방향확률미분방정식풀이의 리프쉬츠련속성과 약단조성

신명국, 김송련

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《기초과학은 과학기술강국을 떠받드는 주추입니다. 기초과학이 든든해야 나라의 과학기술이 공고한 토대우에서 끊임없이 발전할수 있습니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 40페지)

론문에서는 금융수학을 비롯하여 확률조종리론에서 의의를 가지는 프락탈정－역방향확률미분방정식의 풀이의 성질에 대하여 연구하였다.

선행연구[1, 2]에서는 프락탈정－역방향확률미분방정식의 풀이의 유일존재성과 비교정리를 증명하였으며 선행연구[3]에서는 위너형정－역방향확률미분방정식의 풀이의 리프쉬츠련속성과 약단조성에 대하여 연구하였다.

우리는 비선형프락탈정－역방향확률미분방정식의 풀이의 유일존재성[1]에 기초하여 초기조건의 변화에 따르는 역방향확률미분방정식의 리프쉬츠련속성과 약단조성을 밝혔다.

주어진 $H\in(1/2,\ 1)$에 대하여

$$\Phi(s,\ t)=\Phi_H(s,\ t)=H(2H-1)|s-t|^{2H-2},\quad s,\ t\in\boldsymbol{R}$$

이고 임의의 $s,\ t\ge 0$에 대하여 상관함수가

$$R_H(t,\ s)=\int_0^t\int_0^s\Phi(u,\ v)dudv=\frac{1}{2}(s^{2H}+t^{2H}-|t-s|^{2H})$$

과 같이 표시되는 가우스과정 $B^{(H)}(t)$를 허스트지수가 $H\in(1/2,\ 1)$인 1차원프락탈브라운운동이라고 한다.

가우스과정 $B^{(H)}(t)=(B_1^{(H_1)}(t),\ \cdots,\ B_m^{(H_m)}(t))$는 확률공간 $(\Omega,\ \mathscr{F}^{(H)},\ \boldsymbol{P}^{(H)})$우에서 정의되고 허스트지수가 $H=(H_1,\cdots,\ H_m)\in(1/2,\ 1)^m$인 m차원프락탈브라운운동이라고 하자. 여기서 $\mathscr{F}^{(H)}=\bigvee_{t\ge 0}\mathscr{F}_t^{(H)}$이며 $\mathscr{F}_t^{(H)}$는 $\{B_t^{(H)},\ 0\le s\le t\}$에 의하여 생성된 $\sigma-$모임벌흐름이다.

다음과 같은 프락탈정－역방향확률미분방정식을 고찰하자.

$$dX(t)=b(t,\ X_t,\ Y_t,\ Z_t)dt+\sigma(t,\ X_t,\ Y_t,\ Z_t)dB_t^{(H)},\ \ X(0)=x_0 \tag{1}$$

$$-dY(t)=f(t,\ X_t,\ Y_t,\ Z_t)dt-Z(t)dB_t^{(H)},\ \ Y(T)=X(T) \tag{2}$$

여기서 $x_0\in\boldsymbol{R}^n$, $b,\ \sigma,\ f$ 들은 모두 $\Omega\times[0,\ T]\times\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^{n\times d}$에서 정의되고 각각 $\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{R}^{n\times d}$, $\boldsymbol{R}^n$에서 값을 취하는 함수로서 $(t,\ x,\ y,\ z)$에 관하여 $C^{1,\ 2}$급함수들이며 $T>0$이다.

다음의 기호를 약속하자.

$$\langle f,\ g\rangle := \mathrm{E}\int_D \langle f(t),\ g(t)\rangle dt$$

$$\langle f,\ g\rangle_{L_\Phi^{1,2}(m)} := \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^m \int_D\int_D f_i(s)\cdot g_i(t)\Phi_{H_i}(s,\ t)dsdt + \sum_{i,j=1}^m \left(\int_D D_{j,s}^\Phi f_i(s)ds\right)\left(\int_D D_{i,t}^\Phi g_j(t)dt\right)\right]$$

여기서 $D_{j,t}^\Phi Y$ 는 ω_k 에 관한 말랴빈 Φ 도함수로서

$$D_{k,s}^\Phi Y := \int_D \Phi_{H_k}(s,\ t)D_{k,t}Ydt = \int_D \Phi_{H_k}(s,\ t)\frac{\partial Y}{\partial \omega_k}(t,\ \omega)dt$$

이며 $\|f\|^2 := \langle f,\ f\rangle < \infty$, $\|f\|_{L_\Phi^{1,2}}^2 := \langle f,\ f\rangle_{L_\Phi^{1,2}} < \infty$ 인 함수 f 전부의 모임을 각각 $L^2(m)$, $L_\Phi^{1,2}(m)$ 으로 표시한다. $\sigma_i,\ \theta_i \in L_\Phi^{1,2}(m)\ (i=\overline{1,\ n})$ 인 $\sigma = (\sigma_1,\ \cdots,\ \sigma_m)^{\mathrm{T}}$, $\theta = (\theta_1,\ \cdots,\ \theta_m)^{\mathrm{T}}$ 에 대하여 $\langle \sigma,\ \theta\rangle_{L_\Phi^{1,2}(n\times m)} := \sum_{i=1}^n \langle \sigma_i,\ \theta_i\rangle_{L_\Phi^{1,2}}$ 와 같이 정의하고 $V := (X,\ Y,\ Z)$, $A(t,\ V) := \begin{pmatrix} -f \\ b \\ \sigma \end{pmatrix}(t,\ V)$, $\langle A,\ V\rangle := \langle -f,\ X\rangle + \langle b,\ Y\rangle + \langle \sigma,\ Z\rangle_{L_\Phi^{1,2}}$, $\langle V,\ V\rangle := |V|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2 + \|Z\|_{L_\Phi^{1,2}}^2$ 으로 표시한다.

가정 1 $A(t,\ V)$ 는 V 에 관하여 약단조성조건을 만족시킨다. 즉

$$\exists \mu > 0 : \forall\ V,\ V' \in L^2 \times L^2 \times L_\Phi^{1,2},\ \ \langle A - A',\ V - V'\rangle \le -\mu |V - V'|^2 . \tag{3}$$

가정 2 $A(t,\ V)\ (\forall V \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^{n\times d})$ 를 $[0,\ T]$ 에서 정의된 $\mathscr{F}_t^{(H)}$ —적합과정이라고 하면 $A(t,\ 0) \in L^2(0,\ T : \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^{n\times d})$ 이다.

가정 3 $A(t,\ V)$ 는 V 에 관하여 리프쉬츠조건을 만족시킨다. 즉

$$\exists l > 0 : \forall V,\ V' \in L^2 \times L^2 \times L_\Phi^{1,2},\ \ |A - A'| \le l|V - V'|. \tag{4}$$

선행연구[1, 2]에서는 우의 가정들이 성립될 때 프락탈정—역방향확률미분방정식 (1), (2)의 풀이 $(X_t,\ Y_t,\ Z_t) \in L_\Phi^{1,2}$ 의 유일존재성과 비교정리를 증명하였다.

론문에서는 우의 가정밑에서 방정식 (1), (2)의 풀이 $(X_t,\ Y_t,\ Z_t) \in L_\Phi^{1,2}$ 의 초기값에 관한 리프쉬츠련속성과 약단조성을 증명한다.

다음과 같은 프락탈정—역방향확률미분방정식을 고찰하자.

$$dX(t) = b(t,\ X_t,\ Y_t,\ Z_t)dt + \sigma(t,\ X_t,\ Y_t,\ Z_t)dB_t^{(H)},\ \ X(\tau) = x \tag{5}$$

$$-dY(t) = f(t,\ X_t,\ Y_t,\ Z_t)dt - Z(t)dB_t^{(H)},\ \ Y(T) = X(T) \tag{6}$$

여기서 τ 는 $0 \le \tau \le T$ 이고 $x \in \boldsymbol{R}^n$ 이다.

정리 1 가정 1—3이 성립될 때 방정식 (5), (6)의 풀이를 $(X^{\tau,x}(\cdot),\ Y^{\tau,x}(\cdot),\ Z^{\tau,x}(\cdot))$ 이라고 하면 다음의 성질들이 성립된다.

① $Y^{\tau,0}(\tau) = 0$

② $Y^{\tau,x}(\tau)$ 는 x 에 관하여 리프쉬츠조건을 만족시킨다. 즉

$$\exists \beta > 0\ (\tau \text{ 에 무관계한 상수}),\ \forall x_1,\ x_2 \in \boldsymbol{R}^n,\ \|Y^{\tau,x_1}(\tau) - Y^{\tau,x_2}(\tau)\| \le \beta\|x_1 - x_2\|.$$

증명 ① 방정식 (5), (6)에 대하여 $X(\tau) = 0$ 인 경우를 고찰하자.

이때 $(X(\cdot) \equiv 0,\ Y(\cdot) \equiv 0,\ Z(\cdot) \equiv 0)$ 은 명백히 $x = 0$ 인 경우 즉 $X(\tau) = 0$ 인 경우 방정식 (5), (6)의 자명한 풀이이다. 따라서 $Y^{\tau,0}(\tau) = 0$ 이 나온다.

② 방정식 (5), (6)의 두 풀이를(첨수를 략하고) $(X_i(t),\ Y_i(t),\ Z_i(t)),\ i=1, 2$ 라고 하자.

$$(\hat{X}(t),\ \hat{Y}(t),\ \hat{Z}(t)) := (X_1(t)-X_2(t),\ \ Y_1(t)-Y_2(t),\ \ Z_1(t)-Z_2(t)),$$

$$\hat{b} := b(t,\ V_1)-b(t,\ V_2),\ \ \hat{\sigma} := \sigma(t,\ V_1)-\sigma(t,\ V_2),\ \ \hat{f} := f(t,\ V_1)-f(t,\ V_2)$$

라고 놓으면 $d\hat{X}_t = \hat{b}dt + \hat{\sigma}\, dB_t^{(H)},\ \ d\hat{Y}_t = -\hat{f}dt + \hat{Z}dB_t^{(H)},\ \ \hat{X}_0 = \hat{x},\ \ \hat{Y}_T = \hat{X}_T$ 를 만족시킨다.

이제 $\langle \hat{Y}(t),\ \hat{Y}(t)\rangle$ 에 프락탈확률적분변환공식을 적용하고 수학적기대값을 구하면

$$0 \le \mathrm{E}[\langle \hat{Y}(T),\ \hat{Y}(T)\rangle] = \mathrm{E}\,|\,\hat{Y}(\tau)\,|^2 + 2\mathrm{E}\int_\tau^T [\langle -\hat{f},\ \hat{Y}(s)\rangle]ds + \langle \hat{Z},\ \hat{Z}\rangle_{L_\Phi^{1,2}}$$

가 성립되며 따라서 다음의 식이 성립된다.

$$\mathrm{E}\,|\,\hat{Y}(\tau)\,|^2 = \mathrm{E}[\langle \hat{Y}(T),\ \hat{Y}(T)\rangle] + 2\mathrm{E}\int_\tau^T [\langle \hat{f},\ \ \hat{Y}(s)\rangle]ds - \langle \hat{Z},\ \hat{Z}\rangle_{L_\Phi^{1,2}} \le$$

$$\le \mathrm{E}[\langle \hat{Y}(T),\ \hat{Y}(T)\rangle] + 2\mathrm{E}\int_\tau^T [\langle \hat{f},\ \ \hat{Y}(s)\rangle]ds = \mathrm{E}[\langle \hat{Y}(T),\ \hat{Y}(T)\rangle] + 2\langle \hat{f},\ \hat{Y}\rangle$$

식 (4)로부터 $\langle \hat{Y},\ \hat{f}\rangle \le \|\hat{Y}\|\cdot\|\hat{f}\| \le l\,\|\hat{Y}\|\cdot(\|X\|^2 + \|Y\|^2 + \|Z\|^2_{L_\Phi^{1,2}})$ 이 나오고 $\hat{Y}(T) = \hat{X}(T)$ 이므로 다음과 같다.

$$\mathrm{E}\,|\,\hat{Y}(\tau)\,|^2 \le \mathrm{E}(|\,\hat{X}(T)\,|^2) + 2l\,|\,\hat{Y}\,|\cdot(\|X\|^2 + \|Y\|^2 + \|Z\|^2_{L_\Phi^{1,2}}) \le$$

$$\le \mathrm{E}(|\,\hat{X}(T)\,|^2) + l\,\|\hat{X}\|^2 + l\,\|\hat{Y}\|^2 + 2l\,\|\hat{Y}\|^2 + l\,\|\hat{Y}\|^2 + l\,\|\hat{Z}\|^2_{L_\Phi^{1,2}} \le$$

$$\le \mathrm{E}(|\,\hat{X}(T)\,|^2) + 4l(\|X\|^2 + \|Y\|^2 + \|Z\|^2_{L_\Phi^{1,2}})$$

$\langle \hat{X}(T),\ \hat{Y}(T)\rangle$ 에 프락탈확률적분변환공식을 적용하고 수학적기대값을 구하면

$$0 \le \mathrm{E}[\langle \hat{X}(T),\ \hat{Y}(T)\rangle] = \mathrm{E}[\langle \hat{X}(\tau),\ \hat{Y}(\tau)\rangle] + \mathrm{E}\int_\tau^T \hat{X}(s)d\hat{Y}(s) + \mathrm{E}\int_\tau^T \hat{Y}(s)d\hat{X}(s) + \langle \hat{\sigma},\ \hat{Z}\rangle_{L_\Phi^{1,2}}$$

이므로 다음의 식이 성립된다.

$$0 \le \mathrm{E}[\langle \hat{X}(T),\ \hat{Y}(T)\rangle] = \mathrm{E}[\langle \hat{X}(\tau),\ \hat{Y}(\tau)\rangle] + \mathrm{E}\int_\tau^T [\langle -\hat{f},\ \hat{X}(s)\rangle]ds + \mathrm{E}\int_\tau^T [\langle \hat{b},\ \hat{Y}(s)\rangle]ds + \langle \hat{\sigma},\ \hat{Z}\rangle_{L_\Phi^{1,2}} =$$

$$= \mathrm{E}[\langle \hat{X}(\tau),\ \hat{Y}(\tau)\rangle] + \langle -\hat{f},\ \hat{X}\rangle + \langle \hat{b},\ \hat{Y}\rangle + \langle \hat{\sigma},\ \hat{Z}\rangle_{L_\Phi^{1,2}} \le$$

$$\le \mathrm{E}[\langle \hat{X}(\tau),\ \hat{Y}(\tau)\rangle] - \mu(\|\hat{X}\|^2 + \|\hat{Y}\|^2 + \|\hat{Z}\|^2_{L_\Phi^{1,2}})$$

따라서 다음의 식이 성립되므로 $L = 4l/\mu$ 에 대하여 $\|\hat{Y}(\tau)\| \le L\,\|\hat{X}(\tau)\|$ 이다.

$$\mathrm{E}\,|\,\hat{Y}(\tau)\,|^2 \le \mathrm{E}(|\,\hat{X}(T)\,|^2) + 4l(\|\hat{X}\|^2 + \|\hat{Y}\|^2 + \|\hat{Z}\|^2_{L_\Phi^{1,2}}) \le$$

$$\le \mathrm{E}(|\,\hat{X}(T)\,|^2) + 4l/\mu\cdot\mu(\|\hat{X}\|^2 + \|\hat{Y}\|^2 + \|\hat{Z}\|^2_{L_\Phi^{1,2}}) \le$$

$$\le\ 4l/\mu\cdot\mathrm{E}[\langle \hat{X}(\tau),\ \hat{Y}(\tau)\rangle] \le\ 4l/\mu\cdot(\mathrm{E}\,|\,\hat{X}(\tau)\,|^2)^{1/2}\,\mathrm{E}(|\,\hat{Y}(\tau)\,|^2)^{1/2}$$

결국 $Y^{\tau,\,x}(\cdot)$ 이 x 에 관하여 리프쉬츠련속임을 알수 있다.

정리 2 가정 1－3이 성립될 때 방정식 (3), (4)의 풀이를 $(X^{\tau,\,x}(\cdot),\ Y^{\tau,\,x}(\cdot),\ \ Z^{\tau,\,x}(\cdot))$ 이라고 하면 $Y^{\tau,\,x}(\tau)$ 는 x 에 관하여 약단조성을 만족시킨다. 즉

$\exists\alpha > 0$ (τ 에 무관계한 상수), $\forall x_1,\ x_2 \in \boldsymbol{R}^n,\ \ \mathrm{E}\langle Y^{\tau,\,x_1}(\tau) - Y^{\tau,\,x_2}(\tau),\ x_1 - x_2\rangle \ge \alpha\,|\,x_1 - x_2\,|^2.$

증명 $F(s,\ \hat{X}(s)) = |X_1(t) - X_2(t)|^2 = \langle \hat{X}(t),\ \hat{X}(t) \rangle$ 에 프락탈확률적분변환공식을 적용하고 수학적기대값을 취하면 다음과 같다.

$$0 \le \mathrm{E}[\langle \hat{X}(T),\ \hat{Y}(T) \rangle] = \mathrm{E}[\langle \hat{X}(\tau),\ \hat{Y}(\tau) \rangle] + 2\mathrm{E}\int_\tau^T \hat{X}(s) d\hat{X}(s) + \langle \hat{\sigma},\ \hat{\sigma} \rangle_{L_\Phi^{1,2}} =$$

$$= \mathrm{E}[\langle \hat{X}(\tau),\ \hat{Y}(\tau) \rangle] + 2\mathrm{E}\int_\tau^T [\langle \hat{b},\ \hat{X}(s) \rangle] ds + \langle \hat{\sigma},\ \hat{\sigma} \rangle_{L_\Phi^{1,2}}$$

$$\mathrm{E}|\hat{X}(\tau)|^2 = \mathrm{E}|\hat{X}(T)|^2 - 2\mathrm{E}\int_\tau^T [\langle \hat{b},\ \hat{X}(s) \rangle] ds - \langle \hat{\sigma},\ \hat{\sigma} \rangle_{L_\Phi^{1,2}} \le$$

$$\le \mathrm{E}|\hat{X}(T)|^2 + 2\mathrm{E}\int_\tau^T [\langle \hat{b},\ \hat{X}(s) \rangle] ds$$

또한 $\langle \hat{X},\ \hat{b} \rangle \le |\hat{X}| \cdot |\hat{b}| \le l|\hat{X}| \cdot (\|\hat{X}\|^2 + \|\hat{Y}\|^2 + \|\hat{Z}\|^2_{L_\Phi^{1,2}})$ 이므로 다음의 식이 성립된다.

$$\mathrm{E}|\hat{X}(\tau)|^2 \le \mathrm{E}(|\hat{X}(T)|^2) + 2l|\hat{X}| \cdot (\|\hat{X}\|^2 + \|\hat{Y}\|^2 + \|\hat{Z}\|^2_{L_\Phi^{1,2}}) \le$$

$$\le \mathrm{E}(|\hat{X}(T)|^2) + 4l\|\hat{X}\|^2 + l\|\hat{Y}\|^2 + l\|\hat{Z}\|^2_{L_\Phi^{1,2}} \le$$

$$\le \mathrm{E}(|\hat{X}(T)|^2) + 4l(\|\hat{X}\|^2 + \|\hat{Y}\|^2 + \|\hat{Z}\|^2_{L_\Phi^{1,2}})$$

이제 $\langle \hat{X}(T),\ \hat{Y}(T) \rangle$ 에 프락탈확률적분변환공식을 적용하고 수학적기대값을 구하면

$$0 \le \mathrm{E}[\langle \hat{X}(T),\ \hat{Y}(T) \rangle] = \mathrm{E}[\langle \hat{X}(\tau),\ \hat{Y}(\tau) \rangle] + \mathrm{E}\int_\tau^T \hat{X}(s) d\hat{Y}(s) + \mathrm{E}\int_\tau^T \hat{Y}(s) d\hat{X}(s) + \langle \hat{\sigma},\ \hat{Z} \rangle_{L_\Phi^{1,2}}$$

이므로

$$0 \le \mathrm{E}[\langle \hat{X}(T),\ \hat{Y}(T) \rangle] = \mathrm{E}[\langle \hat{X}(\tau),\ \hat{Y}(\tau) \rangle] + \mathrm{E}\int_\tau^T [\langle -\hat{f},\ \hat{X}(s) \rangle] ds + \mathrm{E}\int_\tau^T [\langle \hat{b},\ \hat{Y}(s) \rangle] ds + \langle \hat{\sigma},\ \hat{Z} \rangle_{L_\Phi^{1,2}} \le$$

$$\le \mathrm{E}[\langle \hat{X}(\tau),\ \hat{Y}(\tau) \rangle] - \mu(\|\hat{X}\|^2 + \|\hat{Y}\|^2 + \|\hat{Z}\|^2_{L_\Phi^{1,2}}).$$

충분히 작은 $\alpha > 0$ 에 대하여 다음의 식이 성립된다.

$$\mathrm{E}[\langle \hat{X}(\tau),\ \hat{Y}(\tau) \rangle] - \alpha\mathrm{E}|\hat{X}(\tau)|^2 \ge \mathrm{E}(|\hat{X}(T)|^2) - \alpha\mathrm{E}(|\hat{X}(T)|^2) + \mu(\|\hat{X}\|^2 + \|\hat{Y}\|^2 + \|\hat{Z}\|^2_{L_\Phi^{1,2}}) -$$

$$- 4l\alpha(\|\hat{X}\|^2 + \|\hat{Y}\|^2 + \|\hat{Z}\|^2_{L_\Phi^{1,2}}) = (1-\alpha)\mathrm{E}(|\hat{X}(T)|^2) + (\mu - 4l\alpha)(\|\hat{X}\|^2 + \|\hat{Y}\|^2 + \|\hat{Z}\|^2_{L_\Phi^{1,2}})$$

$0 < \alpha \le \mu/(4l)$ 인 α 를 취하면 $\mathrm{E}[\langle \hat{X}(\tau),\ \hat{Y}(\tau) \rangle] - \alpha\mathrm{E}|\hat{X}(\tau)|^2 \ge 0$ 이 성립된다.

그런데 $\hat{X}(\tau) = X^{\tau,\ x_1}(\tau) - X^{\tau,\ x_2}(\tau) = x_1 - x_2$ 이므로

$$\mathrm{E}\langle Y^{\tau,\ x_1}(\tau) - Y^{\tau,\ x_2}(\tau),\ x_1 - x_2 \rangle \ge \alpha\mathrm{E}|x_1 - x_2|^2$$

이 성립된다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] 신명국 등; 수학, 4, 25, 주체103(2014).

[2] 신명국 등; 조선수학학회지, 1, 76, 주체103(2014).

[3] H. AbdulRahman et al.; arXiv;1301.1948v4[math.OC] 27, Aug, 2013.

주체106(2017)년 5월 5일 원고접수

Lipschits Continuity and Week Monotonicity of the Solution of Fractal Forward-Backward Stochastic Differential Equations

Sin Myong Guk, Kim Song Ryon

We proved the Lipschits continuity and week monotonicity of $Y^{\tau,x}(\tau)$ according to initial value x, for the solution $(X^{\tau,x}(\cdot), Y^{\tau,x}(\cdot), Z^{\tau,x}(\cdot))$ of the fractal forward-backward stochastic differential equations of form

$$dX(t) = b(t, X_t, Y_t, Z_t)dt + \sigma(t, X_t, Y_t, Z_t)dB_t^{(H)}, \ -dY(t) = f(t, X_t, Y_t, Z_t)dt - Z(t)dB_t^{(H)},$$

$$X(\tau) = x, \quad Y(T) = X(T), \quad \tau \le t \le T.$$

Where $B^{(H)}(t)$ is $m-$dimensional fractal Brownian motion with Hurst parameter

$$H = (H_1, \cdots, H_m) \in (1/2, 1)^m.$$

Key word: fractal forward-backward stochastic differential equation