김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체106(2017)년 제63권 제3호 Vol. 63 No. 3 JUCHE106(2017).

리산리자표채권발행회사의 자기자산가치 구조-약화결합2인자모형

오형철, 박철혁

회사채권가격연구에서는 구조법과 약화법이 기본방법으로 되고있으며 최근에는 구조약화결합법을 쓰는것이 추세로 되고있다.

선행연구[3]에서는 우발계약위반도가 리자률의 선형함수인 경우 구조-약화결합모형으로 계약위반가능한 무리자회사채권가격공식을 연구하였으며 선행연구[2]에서는 우발계약위반도가 우연과정일 때 구조-약화결합3인자모형으로 무리자회사채권의 가격을 모형화하고 가격공식을 주었다.

선행연구[4]에서는 회사가치와 계약위반경계가 리산적으로 주어지고 우발계약위반도가 회사가치의 함수로 주어지는 경우 무리자회사채권가격모형을 연구하였으며 선행연구[5]에서는 우발계약위반도와 계약위반경계가 리산적으로 주어지는 경우 무리자채권가격의 구조-약화결합1인자 및 2인자모형을 고계두값선택권을 리용하여 연구하였다.

선행연구[1]에서는 리산리자표를 가지는 채권을 발행하는 회사의 자기자산가치를 계산하는 구조법2인자모형을 제기하고 합성선택권방법으로 연구하였다.

론문에서는 리산리자표를 가지는 채권을 발행하는 회사의 자기자산가치를 계산하는 구조-약화2인자모형을 제기하고 고계두값선택권을 리용하여 연구한다.

가정 1 위험중성마르팅게일측도와 표준위너과정 W_1 밑에서 단기리자률은 다음의 법칙에 따른다.

$$dr_t = a_r(r,\ t)dt + s_r(t)dW_1(t),\ \ a_r(r,\ t) = a_1(t) - a_2(t)r \tag{1}$$

이 가정밑에서 무리자국채의 가격 $Z(r,\ t\,;T)$ 는 다음과 같은 모형의 풀이로 된다.

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{1}{2}s_r^2(t)\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + a_r(r,\ t)\frac{\partial Z}{\partial r} - rZ = 0,\ \ Z(r,\ t\,;T) = 1 \tag{2}$$

풀이는 $Z(r,\ t\,;T) = e^{A(t,\ T) - B(t,\ T)r}$ 으로 주어진다. 여기서 $A(t,\ T)$ 와 $B(t,\ T)$ 는 단기리자률에 의존하여 주어진것이다.

실례로 단기리자률이 Vasicek모형에 따른다면 즉 모형 (1)에서 결수 $a_1(t)$, $a_2(t)$, $s_r(t)$ 들이 다 상수 즉 $a_1(t) \equiv a_1$, $a_2(t) \equiv a_2$, $s_r(t) \equiv s_r$ 라고 하면 $A(t,\ T)$ 와 $B(t,\ T)$ 들은 각각 아래와 같이 주어진다.

$$B(t,\ T) = \frac{1 - e^{-a_2(T-t)}}{a_2},\ \ A(t,\ T) = -\int_t^T \left[a_2 B(u,\ T) - \frac{1}{2}s_r^2 B^2(u,\ T) \right] du \tag{3}$$

가정 2 회사가격 $V(t)$ 는 위험중성마르팅게일측도와 표준위너과정 W_2, $\mathrm{E}(dW_1 \cdot dW_2) = \rho dt$ 의 가정밑에서 기하브라운운동에 따른다.

$$dV(t) = (r_t - b)V(t)dt + s_V(t)V(t)dW_2(t)$$

회사는 련속적으로 회사가격단위에 대하여 배당률 $b\geq 0$(상수)으로 지불한다.

가정 3 T를 액면가격 F(화폐단위)를 가지는 회사채무의 마감일이라고 할 때 $0=T_0<T_1<\cdots<T_{N-1}<T_N=T$ 라고 하자.

시간 T_i $(i=1,\ \cdots,\ N-1)$ 에서 채권소유자는 회사로부터 $C_i\cdot Z(r,\ T_i;T)$ (화폐단위)만 한 리자표를 받으며 시간 $T_N=T$ 에서 F 와 마지막리자표 C_N (화폐단위)을 받는다.

이것은 채권의 액면가격과 리자표합의 T 시각가격이 $F+\sum_{k=1}^{N}C_k$ 라는것을 의미한다.

가정 4 예상계약위반은 시간 T_i 에서 회사의 자기자산가격이 채무와 리자를 물어줄만큼 충분하지 않게 될 때에만 일어난다.

예상계약위반이 일어난다면 채권소유자는 위반위약금으로서 $\delta\cdot V$ 를 받으며 자기자산소유자는 아무것도 얻지 못한다. 여기서 $0\leq\delta\leq 1$ 은 위반에서 회사가격의 소액위약금률이다.

가정 5 우발계약위반은 아무때나 일어난다. 시간구간 $[t,\ t+\Delta t]\cap[T_i,\ T_{i+1}]$ 에서 우발계약위반이 일어날 확률은 $\lambda_i\Delta t$ ($i=0,\ \cdots,\ N-1$)이다. 여기서 우발계약위반도 λ_i 는 상수이다.

우발계약위반이 시간 $t\in(T_i,\ T_{i+1})$ 에서 일어난다면 채권소유자는 위반위약금으로서 $\min\left\{\delta\cdot V,\ \left(F+\sum_{k=i+1}^{N}C_k\right)\cdot Z(r,\ t;T)\right\}$ 를 받으며 자기자산소유자는 아무것도 얻지 못한다.

가정 6 부분구간 $(T_i\ ,\ T_{i+1}]$ 에서 회사채권의 가격과 회사의 자기자산가격은 각각 충분히 미끈한 함수 $B_i(V,\ r,\ t)$ 와 $E_i(V,\ r,\ t)$ ($i=0,\ \cdots,\ N-1$)에 의하여 주어진다.

자기자산가격 E 의 동태를 리해하기 위하여 Δ — 헤지수법을 리용하여 E 를 만족시키는 편미분방정식을 유도한다.

투자조합 $\Pi=E-\Delta_1 B-\Delta_2 Z$ 를 구성하자. 여기서 Z 는 무리자국채이고 B는 상수우발계약위반도 λ 와 우발계약위약금 R_{ud} 를 가지는 계약위반가능채권이다.

$\Delta_1,\ \Delta_2$ 를 투자조합 Π가 시간구간 $[t,\ t+dt]$ 에서 무위험이 되도록 즉

$$d\Pi_t=r\Pi_t dt \tag{4}$$

가 성립되도록 선택하자.

구간 $[t,\ t+dt]$ 에서 우발계약위반이 없다면 다음의 식이 성립된다.

$$d\Pi_t=dE-\Delta_1 dB-\Delta_2 dZ=\frac{\partial E}{\partial t}dt+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}(dV)^2+2\frac{\partial^2 E}{\partial V\partial r}dVdr+\frac{\partial^2 E}{\partial r^2}(dr)^2\right]-\Delta_2\left\{\frac{\partial Z}{\partial t}dt+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2}(dr)^2\right\}-$$

$$-\Delta_1\left\{\frac{\partial B}{\partial t}dt+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 B}{\partial V^2}(dV)^2+2\frac{\partial^2 B}{\partial V\partial r}dVdr+\frac{\partial^2 B}{\partial r^2}(dr)^2\right]\right\}+\left(\frac{\partial E}{\partial V}-\Delta_1\frac{\partial B}{\partial V}\right)dV+\left(\frac{\partial E}{\partial r}-\Delta_1\frac{\partial B}{\partial r}-\Delta_2\frac{\partial Z}{\partial r}\right)dr$$

$$\Delta_1=\frac{\partial E}{\partial V}\Big/\frac{\partial B}{\partial V},\quad \Delta_2=\left(\frac{\partial E}{\partial r}-\Delta_1\frac{\partial B}{\partial r}\right)\Big/\frac{\partial Z}{\partial r}=\left(\frac{\partial E}{\partial r}-\frac{\partial E}{\partial V}\frac{\partial B}{\partial r}\Big/\frac{\partial B}{\partial V}\right)\Big/\frac{\partial Z}{\partial r} \tag{5}$$

가정 1, 2를 고려하면서 dt 의 고차의 무한소를 무시하면

$$d\Pi_t=\left\{\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(s_V^2V^2\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}+2\rho\, s_V s_r V\frac{\partial^2 E}{\partial V\partial r}+s_r^2\frac{\partial^2 E}{\partial r^2}\right)-\Delta_2\left(\frac{\partial Z}{\partial t}+\frac{1}{2}s_r^2\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2}\right)-\right.$$
$$\left.-\Delta_1\left[\frac{\partial B}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(s_V^2V^2\frac{\partial^2 B}{\partial V^2}+2\rho\, s_V s_r V\frac{\partial^2 B}{\partial V\partial r}+s_r^2\frac{\partial^2 B}{\partial r^2}\right)\right]\right\}dt. \tag{6}$$

구간 $[t,\ t+dt]$에서 우발계약위반이 발생한다면 E_{t+dt}는 0으로 되고 채권소유자는 위약금 R_{ud}를 받으므로 다음의 식이 성립된다.

$$d\Pi_t=-E-\Delta_1(R_{ud}-B)-\Delta_2\left[\left(\frac{\partial Z}{\partial t}+\frac{1}{2}s_r^2\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2}\right)dt+\frac{\partial Z}{\partial r}dr\right] \tag{7}$$

구간 $[t,\ t+dt]$에서 우발계약위반이 발생할 확률은 λdt이다.

식 (6)에 $1-\lambda dt$를, 식 (7)에 λdt를 곱하여 더하면서 dt의 고차의 무한소를 무시하면

$$d\Pi_t=\left\{\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(s_V^2V^2\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}+2\rho\, s_V s_r V\frac{\partial^2 E}{\partial V\partial r}+s_r^2\frac{\partial^2 E}{\partial r^2}\right)-\Delta_2\left(\frac{\partial Z}{\partial t}+\frac{1}{2}s_r^2\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2}\right)-\right.$$
$$\left.-\Delta_1\left[\frac{\partial B}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(s_V^2V^2\frac{\partial^2 B}{\partial V^2}+2\rho\, s_V s_r V\frac{\partial^2 B}{\partial V\partial r}+s_r^2\frac{\partial^2 B}{\partial r^2}\right)\right]-\lambda E-\lambda\Delta_1(R_{ud}-B)\right\}dt$$

가 성립된다. 이 식을 식 (4)에 대입하고 dt를 소거하면 다음의 식을 얻는다.

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(s_V^2V^2\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}+2\rho\, s_V s_r V\frac{\partial^2 E}{\partial V\partial r}+s_r^2\frac{\partial^2 E}{\partial r^2}\right)-(r+\lambda)E-\Delta_2\left(\frac{\partial Z}{\partial t}+\frac{1}{2}s_r^2\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2}-rZ\right)-$$
$$-\Delta_1\left[\frac{\partial B}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(s_V^2V^2\frac{\partial^2 B}{\partial V^2}+2\rho\, s_V s_r V\frac{\partial^2 B}{\partial V\partial r}+s_r^2\frac{\partial^2 B}{\partial r^2}\right)-(r+\lambda)B+\lambda R_{ud}\right]=0$$

방정식 (2)와 상수우발계약위반도 λ와 우발계약위약금 R_{ud}를 가지는 계약위반가능한 채권방정식

$$\frac{\partial B}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[s_V^2V^2\frac{\partial^2 B}{\partial V^2}+2\rho\, s_V s_r V\frac{\partial^2 B}{\partial V\partial r}+s_r^2\frac{\partial^2 B}{\partial r^2}\right]+(r-b)V\frac{\partial B}{\partial V}+a_r\frac{\partial B}{\partial r}-(r+\lambda)B+\lambda R_{ud}=0$$

을 고려하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(s_V^2V^2\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}+2\rho\, s_V s_r V\frac{\partial^2 E}{\partial V\partial r}+s_r^2\frac{\partial^2 E}{\partial r^2}\right)-(r+\lambda)E+\Delta_2 a_r\frac{\partial Z}{\partial r}+\Delta_1\left[(r-b)V\frac{\partial B}{\partial V}+a_r\frac{\partial B}{\partial r}\right]=0$$

또한 식 (5)를 고려하면 자기자산가치 E를 만족시키는 다음의 편미분방정식을 얻는다.

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(s_V^2V^2\frac{\partial^2 E}{\partial V^2}+2\rho\, s_V s_r V\frac{\partial^2 E}{\partial V\partial r}+s_r^2\frac{\partial^2 E}{\partial r^2}\right)+(r-b)V\frac{\partial E}{\partial V}+a_r\frac{\partial E}{\partial r}-(r+\lambda)E=0$$

이것은 E가 우발계약위약금이 령인 계약위반가능한 증권가격과 같은 방정식을 만족시킨다는것을 의미한다.

이제 가정 1－6밑에서 자기자산의 수학적모형을 유도하자.

우의 자기자산의 편미분방정식과 가정 5, 6으로부터 매 부분구간 $(T_i,\ T_{i+1})$에서 자기자산가격 E_i는 다음의 편미분방정식을 만족시킨다.

$$\frac{\partial E_i}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(s_V^2V^2\frac{\partial^2 E_i}{\partial V^2}+2\rho\, s_V s_r V\frac{\partial^2 E_i}{\partial V\partial r}+s_r^2\frac{\partial^2 E_i}{\partial r^2}\right)+(r-b)V\frac{\partial E_i}{\partial V}+a_r\frac{\partial E_i}{\partial r}-(r+\lambda_i)E_i=0 \quad (8)$$

가정 3, 4로부터 다음의 식을 얻는다.

$$E_{N-1}(V,\ r,\ T_N)=(V-F-C_N)\cdot 1\{V\ge F+C_N\}$$
$$E_i(V,\ r,\ T_{i+1})=[E_{i+1}(V,\ r,\ T_{i+1})-C_{i+1}Z(r,\ T_{i+1}\ ;T_N)]\cdot 1\{E_{i+1}(V,\ r,\ T_{i+1})\ge \quad (9)$$
$$\ge C_{i+1}Z(r,\ T_{i+1}\ ;T_N)\},\ i=0,\cdots,\ N-2$$

문제 (8), (9)가 바로 자기자산의 수학적모형이다.

주의 1 방정식 (8)은 동차방정식이다. 식 (9)의 첫 식은 계약위반경계를 양적으로 보여준다. 그러나 둘째 식에서는 계약위반조건이 계약위반경계를 양적으로 보여주지 않는다.

$B(t,\ T)$가 식 (3)으로 주어질 때 다음과 같이 놓자.

$$S_x^2(t)=S_x^2(t\,;T)=s_V^2(t)+2\rho s_V(t)\cdot s_r(t)\cdot B(t,\ T)+(s_r(t)B(t,\ T))^2$$
$$K_N=F+C_N,\ \bar{c}_N=F+C_N,\ \ \bar{c}_i=C_i,\ \Delta T_i=T_{i+1}-T_i,\ \ i=0,\ \cdots,\ N-1$$

주의 2 $S_x(t)$ 는 회사가치의 상대가격 $x=\dfrac{V}{Z}$ 의 파동률이고 $\bar{c}_i$ 는 $T_i,\ i=1,\ \cdots,\ N$ 시각에 채권소유자에게 주어지는 소득의 T_N 시각가격이고 K_N 은 T_N 시각의 계약위반경계이다.

정리(자기자산가치) 문제 (8), (9)의 풀이는 다음과 같이 주어진다.

$$E_i(V,\ r,\ t)=Z(r,\ t\,;T_N)\cdot e_i(V/Z(r,\ t\,;T_N),\ t),\ \ T_i<t\le T_{i+1},\ \ i=0\,,\cdots,\ N-1$$

여기서

$$e_i(x,\ t)=e^{-\lambda_i(T_{i+1}-t)}\left\{e^{-\sum_{k=i+1}^{N-1}\lambda_k\Delta T_k}A^{+\ \cdots\ +}_{K_{i+1}\cdots K_N}(x,\ t;T_{i+1},\cdots,\ T_N;0,\ b,\ S_x(\cdot))-\right.$$
$$\left.-\sum_{m=i}^{N-1}\bar{c}_{m+1}e^{-\sum_{k=i+1}^{m}\lambda_k\Delta T_k}B^{+\ \cdots\ +}_{K_{i+1}\cdots K_{m+1}}(x,\ t;\ T_{i+1},\cdots,\ T_{m+1};0,\ b,\ S_x(\cdot))\right\}$$

이고 $B^{+\cdots+}_{K_1\cdots K_m}(x,\ t;T_1,\cdots,\ T_m\,;0,\ b,\ S_x(\cdot))$ 과 $A^{+\ \cdots\ +\ \ +}_{K_1\cdots K_{m-1}K_m}(x,\ t;T_1,\cdots,\ T_{m-1},\ T_m\,;0,\ b,\ S_x(\cdot))$ 은 각각 리자률이 0, 배당률이 b, 파동률이 $S_x(t)$ 인 m계현금 및 자산두값선택권의 가격이며 $K_i\ (i=1\,,\cdots,\ N-1)$ 는 방정식 $e_i(x,\ T_i)=C_i$ 의 유일뿌리이다.

$e_i(x,\ t)$ 는 x 에 관하여 증가, 아래로 불룩이며 $0<\partial_x e_i<1$ 을 만족시킨다.

참 고 문 헌

[1] R. Agliardi; Quant. Finance, 11, 5, 749, 2011.

[2] Bi Y. et al.; Journal of Tongji University (Natural Science), 35, 7, 989, 2007.

[3] L. Cathcart et al.; Journal of Computational Finance, 6, 3, 91, 2003.

[4] O Hyong Chol et al.; Electron. J. Math. Anal. Appl., 2, 1, 1, 2014.

[5] O Hyong Chol et al.; Malaya Journal of Matematik, 2, 4, 330, 2014.

주체105(2016)년 11월 5일 원고접수

Unified 2 Factor Model of Structural and Reduced Form Approaches for Equity of Firm Issuing Discrete Coupon Bonds

O Hyong Chol, Pak Chol Hyok

We established a structural and reduced form-unified 2 factor model for corporate bond with discrete coupons and provided the pricing formulae of the equity and bond price using higher order binaries option.

Key words: equity price, unified 2 factor model, bond, discrete coupon, default intensity