김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제2호

한가지 형태의 역방향확률미분방정식의 풀이에 대한 유일성, 비교정리 및 안정성

오훈, 김문철

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《우리는 과학기술을 발전시키는데서 남들이 걸은 길을 따라만 갈것이 아니라 단계를 뛰여넘어 비약적인 발전을 이룩하여야 합니다.》

우리는 $E[|\xi|\exp(\mu\sqrt{\log(1+|\xi|)})]<\infty$ 인 종점조건 ξ 를 가지는 역방향확률미분방정식을 연구하였다.

선행연구[1, 3]에서는 이러한 방정식의 풀이의 유일존재성을 론의하였다.

론문에서는 우선 이 방정식의 풀이의 유일성을 선행연구들에서보다 약한 조건밑에서 증명하고 새로운 결과들로서 이 방정식에 대한 비교정리 및 안정성을 연구하였다.

$(\Omega,\ \mathscr{F},\ P)$ 를 완비확률공간, $W_t=(W_t^1,\ \cdots,\ W_t^d)^{\mathrm{T}}$ 를 $d-$차원브라운운동이라고 하자.

$\{\mathscr{F}_t\}_{0\le t\le T}$ 를 W 에 의하여 생성된 자연 $\sigma-$모임벌증가족을 완비화한것으로 놓는다.

우리는 다음과 같은 역방향확률미분방정식을 론의한다.

$$y_t=\xi+\int_t^T f(s,\ y_s,\ z_s)ds-\int_t^T z_s dW_s,\ t\in[0,\ T] \tag{1}$$

여기서 $f:\Omega\times[0,\ T]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{1\times d}\to\mathbf{R}$ 는 예측가능한 함수, 종점조건 ξ 는 $\mathscr{F}_T-$가측우연량이다.

이제 몇가지 개념들과 기호들을 소개한다.

$A\in\mathscr{F}$ 와 $\mathscr{F}-$가측우연량 η 에 대하여 다음과 같이 정의한다.

$$E^Q[\eta\,;A]:=\int_A \eta dQ,\ \ E^Q[\eta]:=E^Q[\eta\,;\Omega],\ \ E[\cdot]:=E^P[\cdot]$$

$\boldsymbol{T}(0,\ T)$ 는 $0\le\tau\le T$ 인 정지시각 τ 들의 모임이다.

우연과정 $Y=\{Y_t\}_{0\le t\le T}$ 에 대하여 우연량들의 족 $\{Y_\tau,\ \tau\in\boldsymbol{T}(0,\ T)\}$ 가 평등적분가능할 때 클라스 (D)에 속한다고 말한다.

임의의 예측가능한 우연과정 ϕ 에 대하여 $[\varepsilon(\phi\bullet W)]_t:=\exp\left(\int_0^t\phi_r dW_r-\frac{1}{2}\int_0^t\phi_r^2 dr\right)$ 가 성립되고 $M^P([0,\ T],\ \mathbf{R}^{1\times d}\,;Q)$ 는 $\mathbf{R}^{1\times d}$ 에서 값을 취하며 $\|Z\|_{M^p}:=E^Q\left[\left(\int_0^T|Z_s|ds\right)^{p/2}\right]^{1\wedge 1/p}<\infty$ 인 예측가능한 과정 Z 들의 공간이며 $Q=P$ 이면 $M^p([0,\ T]\,;\mathbf{R}^{1\times d})$ 로 표시한다.

$\mathscr{H}_T^1(Q)$ 는 $E^Q\left[\sup_{t\in[0,\ T]}|Y_t|\right]<\infty$ 인 실값, 적합과정 Y 들의 공간이며 $Q=P$ 이면 $\mathscr{H}_T^1$ 로 표시한다.

실값함수 ψ 를 $\psi(x,\ \mu):=x\exp(\mu\sqrt{2\log(1+x)}),\ (x,\ \mu)\in[0,\ +\infty)\times(0,\ +\infty)$ 로 정의한다.

가정 1 f 는 y 에 관해 일반화된 단조성조건을 만족시킨다. 즉 $\rho(0)=0,\ \ \rho(t)>0,$ $t>0$ 이고 $\int_{\mathbf{R}^+}\frac{dt}{\rho(t)}=+\infty$ 인 비감소우묵함수 $\rho:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ 가 있어서 임의의 $y,\ y'\in\mathbf{R}$ 와 $z\in\mathbf{R}^{1\times d}$ 에 대하여 $\frac{y-y'}{|y-y'|}I_{|y-y'|\neq 0}(f(t,\ y,\ z)-f(t,\ y',\ z))\le\rho(|y-y'|)$ 이 성립된다.

가정 2 f 는 z 에 관해 평등립쉬츠이다. 즉 어떤 상수 b 가 있어서 임의의 $y\in\mathbf{R}$ 와 $z,\ z'\in\mathbf{R}^{1\times d}$ 에 대하여 $|f(t,\ y,\ z)-f(t,\ y,\ z')|\le b|z-z'|$ 이 성립된다.

가정 3 넘기기 $y\mapsto f(t,\ y,\ z)$ 는 련속이다.

가정 4 f 는 y 에 관하여 선형증가이다. 즉 어떤 상수 $a\ge 0$ 이 있어서 임의의 $y,\ y'\in\mathbf{R}$ 와 $z\in\mathbf{R}^{1\times d}$ 에 대하여 $|f(t,\ y,\ z)-f(t,\ 0,\ z)|\le a|y|$ 가 성립된다.

정리 1 (유일성정리) 가정 1, 2가 성립된다고 할 때 방정식 (1)이 어떤 $c>0$ 이 있어서 $\psi(Y,\ c)$ 가 클라스 (D)에 속하는 풀이 $(Y,\ Z)$ 를 가진다면 그것은 유일하다.

증명 $i=1,\ 2$ 에 대하여 $(Y^i,\ Z^i)$ 를 어떤 $c^i>0$ 이 있어서 $\psi(Y^i,\ c^i)$ 가 클라스 (D)에 속하는 방정식 (1)의 풀이라고 하면 $\psi(x,\ \mu)$ 가 μ 에 관해 비감소라는데로부터 $c:=c^1\wedge c^2$ 에 대하여 $\psi(Y^1,\ \mu)$, $\psi(Y^2,\ \mu)$ 는 둘 다 클라스 (D)에 속한다.

$(\bar{Y},\ \bar{Z}):=(Y^1-Y^2,\ Z^1-Z^2)$ 으로 놓으면 임의의 $\tau\in\mathbf{T}(0,\ T)$ 에 대하여

$$\psi(|\bar{Y}_\tau|,\ c)\le\psi(|Y_\tau^1|+|Y_\tau^2|,\ c)=$$
$$=\psi(2|Y_\tau^1|,\ c)/2+\psi(2|Y_\tau^2|,\ c)/2\le\psi(2,\ c)[\psi(|Y_\tau^1|,\ c)+\psi(|Y_\tau^2|,\ c)]/2$$

가 성립되므로 $\psi(|\bar{Y}|,\ c)$ 는 클라스 (D)에 속한다.

우선 $T<c^2/b^2$ (즉 $c>b\sqrt{T}$)인 경우에 유일성을 론의한다.

분명히 $(\bar{Y},\ \bar{Z})$ 는 식 $\bar{Y}_t=\int_t^T\bar{f}(s,\ \bar{Y}_s,\ \bar{Z}_s)ds-\int_t^T\bar{Z}_sdW_s,\ t\in[0,\ T]$ 를 만족시킨다. 여기서 $\bar{f}(s,\ y,\ z):=f(s,\ y+Y_s^2,\ z+Z_s^2)-f(s,\ Y_s^2,\ Z_s^2)$ 이다.

$\bar{g}(s,\ y,\ z):=I_{|z|\neq 0}(\bar{f}(s,\ y,\ z)-\bar{f}(s,\ y,\ 0))/|z|^2\ z$ 로 정의하면

$$\bar{g}_s=\bar{g}(s,\ \bar{Y}_s,\ \bar{Z}_s):=I_{|\bar{Z}|\neq 0}[f(s,\ Y_s^1,\ Z_s^1)-f(s,\ Y_s^1,\ Z_s^2)]/|Z_s^1-Z_s^2|^{2s}\ (Z_s^1-Z_s^2)$$

가정 2로부터 $|\bar{g}|\le b$ (거의)이며 $\varepsilon(\bar{g}\bullet W)_t=\exp\left(\int_0^t\bar{g}_sdW_s-\frac{1}{2}\int_0^t\bar{g}_s^2ds\right)$ 는 평등적분가능한 마르팅게일이고 길싸노브변환을 적용하면 $\bar{Y}_t=\int_t^T\bar{f}(s,\ \bar{Y}_s,\ 0)ds-\int_t^T\bar{Z}_sdW_s^Q,\ t\in[0,\ T]$ 를 얻는다. 여기서 $Q:=\varepsilon(\bar{g}\bullet W)_T\cdot P$ 이고 $W_t^Q:=W-\int_0^t\bar{g}_sds$ 이다.

Q 가 P 와 동등한 확률측도이며 W^Q 가 $Q-$브라운운동이므로 임의의 $\tau\in\mathbf{T}(0,\ T)$ 와 $A\in\mathcal{F}$ 에 대하여

$$E^Q(|\bar{Y}_\tau|;A)=E(|\bar{Y}_\tau|\cdot\varepsilon(\bar{g}\bullet W)_T;A)\le E\left[|\bar{Y}_\tau|\exp\left(\int_0^T\bar{g}_s dW_s\right);A\right]\le\left(1-\frac{b^2}{c^2}T\right)^{-1/2}+E[e^{2c^2}\psi(|\bar{Y}_\tau, c);A]$$

가 성립되므로 $\bar{Y}$ 는 Q 하에서 클라스 (D)에 속한다.

이제 Q 밑에서 $\bar{Z}$ 에 대한 평가식을 유도해보자.

$1<p<\infty,\ p^{-1}+q^{-1}=1$ 이라고 하고 $k:=\sqrt{p}/[2(\sqrt{p}-1)]$ 로 놓으면 $\forall\tau\in\mathbf{T}(0,T)$ 에 대하여

$$\varepsilon(k\bar{g}\bullet W)_\tau=\exp\left(\int_0^\tau k\bar{g}_s dW_s\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^\tau k^2\bar{g}_s^2 ds\right)\ge\exp\left(\int_0^\tau k\bar{g}_s dW_s\right)\exp\left(-\frac{1}{2}k^2b^2T\right).$$

$E[\varepsilon(k\bar{g}\bullet W)_\tau]=1$ 이므로 $\sup\limits_{\tau\in\mathbf{T}(0,T)} E\left[\exp\left(\int_0^\tau k\bar{g}_s dW_s\right)\right]\le\exp\left(\frac{1}{2}b^2k^2T\right)$ 가 성립된다.

따라서 선행연구[4]에 의하여 $\varepsilon(\bar{g}\bullet W)$ 는 L^q – 유계마르팅게일이다.

휠더부등식에 의하여 $E^Q\left[\left(\int_0^T|\bar{Z}_s|^2 ds\right)^{1/p}\right]\le E\left[\int_0^T|\bar{Z}_s|^2 ds\right]^{1/p}E[\varepsilon(\bar{g}\bullet W)_T^q]^{1/q}<\infty$ 를 얻는다.

$\bar{p}:=2/p$ 로 잡으면 $\bar{Z}\in M^{\bar{p}}([0,T],\mathbf{R}^{1\times d};Q)$ 즉 임의의 $0<\bar{p}<2$ 에 대하여 $\bar{Z}\in M^{\bar{p}}([0,T],\mathbf{R}^{1\times d};Q)$ 이므로 $(\bar{Y},\bar{Z})$ 는 다음의 역방향확률미분방정식의 L^1 – 풀이로서 $\bar{Y}$ 는 클라스 (D)에 속하고 $\bar{Z}\in M^{\bar{p}}([0,T],\mathbf{R}^{1\times d};Q)$ 를 만족시킨다.

$$y_t=\int_t^T\bar{f}(s,y,0)ds-\int_t^T z_s dW_s^Q,\ t\in[0,T] \tag{2}$$

또한 $\bar{f}(s,0,0)=0$ 이라는데로부터 $(0,0)$ 도 역방향확률미분방정식 (2)의 풀이이다.

한편 임의의 $y,y'\in\mathbf{R}$ 에 대하여 $\dfrac{y-y'}{|y-y'|}I_{|y-y'|\ne 0}(\bar{f}(s,y,0)-\bar{f}(s,y',0))\le\rho(|y-y'|)$ 이므로 L^1 – 풀이의 유일성결과[2]로부터 $(\bar{Y},\bar{Z})=(0,0)$ 을 얻게 된다.

일반적인 값을 가지는 T 에 대하여서는 우선 충분히 작은 $\delta>0$ 에 대하여 구간 $[T-\delta,T]$ 에서 $(\bar{Y}_t,\bar{Z}_t)=(0,0),\ T-\delta\le t\le T$ 를 얻은 다음 $\bar{Y}_{T-\delta}=0$ 을 끝값으로 하여 구간 $[T-2\delta,T-\delta]$ 에서 $(\bar{Y}_t,\bar{Z}_t)=(0,0),\ T-2\delta\le t\le T-\delta$ 를 얻는다.

이러한 론의를 반복하면 유한번만에 $(\bar{Y}_t,\bar{Z}_t)=(0,0),\ t\in[0,T]$ 를 얻는다. 즉 $Y^1=Y^2,\ Z^1=Z^2$ 이 성립된다.(증명끝)

정리 2(비교정리 1) (ξ,f) 와 (ξ',f') 를 각각 방정식 (1)에 대한 종점조건과 생성자의 쌍들이라고 하고 (Y,Z) 와 (Y',Z') 가 대응되는 풀이들로서 어떤 $c,c'>0$ 이 있어서 $\psi(Y,c)$ 와 $\psi(Y',c')$ 가 클라스 (D)에 속한다고 하자.

이때 f 가 가정 1, 2를 만족시킨다고 하면 $\xi\ge\xi'$ 이고 $f(t,Y',Z')\ge f'(t,Y',Z')$ 일 때 $Y_t\ge Y_t',\ t\in[0,T]$ (거의)가 성립된다.

정리 3(비교정리 2) f 가 가정 2를 만족시키며 y 에 관해 평등립쉬츠련속이라고 하면 정리 2에서와 같은 비교정리가 성립된다. 또한 엄격한 비교정리도 성립된다. 즉 어떤

$A \in \mathcal{F}_t$ 에서 $Y_t^1 = Y_t^2$ (거의)이면 $[t, T] \times A$ 에서 $Y_s^1 = Y_s^2$ (거의)가 성립된다.

함수 f 가 y 에 관하여 일반화된 단조성조건을 만족시키고 z 에 관하여 선형성을 만족시키는 경우 안정성을 론의하자.

정리 4(안정성정리) 매 $n \in N_0$ 에 대하여 파라메터 n 에 의존하는 역방향확률미분방정식 $Y_t^n = \xi^n + \int_t^T f^n(s, Y_s^n, Z_s^n)ds - \int_t^T Z_s^n dW_s, \ t \in [0, T]$ 를 생각하자.

이때 다음과 같은 조건들이 성립된다고 하면 $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{t\in[0, T]} E[|Y_t^n - Y_t^0|] = 0$ 이고 임의의 $\beta \in (0, 1)$ 에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty} E\left[\sup\limits_{t\in[0, T]} |Y_t^n - Y_t^0|^\beta + \left(\int_0^T |Z_s^n - Z_s^0|^2 ds\right)^{\beta/2}\right] = 0$ 이 성립된다.

① 임의의 n 에 대하여 ξ^n 과 f^n 은 같은 파라메터로서 가정 1, 3, 4를 만족시키고 상수 $\mu > b\sqrt{T}$ 가 있어서 $\psi\left(|\xi^0| + \int_0^T |f^0(t, 0, 0)|dt, \ \mu\right) \in L^1(\Omega, P)$ 가 성립된다.

② $f^0(s, y, z) = f^0(s, y, 0) + bz$ 즉 f^0 은 z 에 관해 선형이다.

③ 0에로 수렴하는 비부값실수렬 $(l_n)_{n=1, 2, \cdots}$ 이 있어서 임의의 $n \ge 1$ 과 임의의 $(y, z) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{1\times d}$ 에 대하여 $|f^n(s, y, z) - f^0(s, y, z)| \le l_n$ 이 성립된다.

④ $\psi(\eta, \mu) \in L^1(\Omega, P)$ 인 우연량 η 가 있어서 임의의 $n \ge 1$ 에 대하여 $|\xi^n - \xi^0| \le \eta$ 이고 $\lim\limits_{n\to\infty} E[|\xi^n - \xi^0|] \to 0$ 이 성립된다.

참 고 문 헌

[1] R. Buckdahn et al.; Electron. Commun. Probab., 23, 8, 59, 2018.

[2] S. Fan; J. Theor. Probab., 31, 1860, 2018.

[3] Y. Hu et al.; Electron. Commun. Probab., 23, 11, 27, 2018.

[4] N. Kazamaki; Lecture Notes in Mathematics, Springer, 34～89, 1994.

주체108(2019)년 12월 15일 원고접수

Uniqueness, Comparisons and Stability for the Solutions of a Backward Stochastic Differential Equations

O Hun, Kim Mun Chol

We show the uniqueness, comparisons and stability for the solutions of backward stochastic differential equations with terminal conditions ξ such that $E[|\xi| \exp(\mu\sqrt{\log(1+|\xi|)})] < \infty$.

Keyword: backward stochastic differential equation