김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체106(2017)년 제63권 제7호 Vol. 63 No. 7 JUCHE106(2017).

한가지 특성을 가진 프락탈보간함수의 구성

강영숙, 김향

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《기초과학은 과학기술강국을 떠받드는 주추입니다. 기초과학이 든든해야 나라의 과학기술이 공고한 토대우에서 끊임없이 발전할수 있습니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 40페지)

프락탈보간함수와 전통적인 보간함수의 차이를 보면 프락탈보간함수는 보간조건외에 자기상사조건과 관련된 어떤 함수관계를 만족시켜야 한다는것과 프락탈보간함수의 양적표시공식이 없고 어떤 반복넘기기의 극한으로 얻어진다는것, 보충적으로 프락탈보간함수의 차원을 결정하는 척도파라메터가 리용된다는것이다.[1]

선행연구[2]에서는 프락탈보간함수의 구성법에 대하여 론의하였으며 선행연구[3]에서는 프락탈보간함수의 적분과 모멘트계산에 대하여 론의하였다.

론문에서는 마디점들에서의 함수값과 프락탈함수의 적분값이 주어지는 경우 그것을 보간하는 한가지 프락탈함수의 존재성과 구성법에 대하여 론의하였다.

전통적인 보간리론에서 적분값을 보간하는 보간함수의 존재성과 구성은 추상보간리론의 틀거리에서 해석할수 있다.[4]

한편 함수값만 보간자료로 주어지는 경우 프락탈보간함수의 존재성과 구성은 그 자료로부터의 반복함수계구성리론에 기초하므로 그대로 리용할수는 없다.

우리는 추상보간리론을 프락탈함수공간우에서 적용하여 한가지 문제의 풀이의 존재조건을 밝혔으며 주어진 조건을 만족시키도록 마디점에서의 함수값을 결정하고 선행연구[4]의 리론을 적용하여 반복함수계를 구성한 다음 그 반복함수계와 련관된 축소연산자의 부동점을 찾는 방법으로 제기한 문제를 풀었다.

$a=x_0<x_1<\cdots<x_N=b$ 를 구간 $[a,\ b]$의 분할이라고 하자.

주어진 자료로는 마디점들에서의 함수값 $y_0,\ y_1,\ \cdots,\ y_{N-1}$, 함수의 적분값 $\overline{y}$, 척도파라메터들인 $0\le s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_N<1$들이다.

론문에서는 다음의 조건들을 만족시키는 함수 $y=f(x)$ 를 구성한다.

$$f(x)=s_i\cdot f(u_i^{-1}(x))+p_i(u_i^{-1}(x)),\ \ x\in I_i,\ \ i=1,\ 2,\ \cdots,\ N \tag{1}$$

$$f(x_i)=y_i,\ \ i=0,\ 1,\ \cdots,\ N-1 \tag{2}$$

$$\int_a^b f(x)dx=\overline{y} \tag{3}$$

여기서 $u_i:I=[a,\ b]\to I_i=[x_{i-1},\ x_i]$, $u_i(x)=a_ix+b_i$, $p_i(x)=c_ix+d_i$ 이다.

$S=(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_N)$ 으로 표시한다.

1. 보간함수의 존재성

구간 I 에서 정의된 련속함수들의 공간 $C(I)$ 에서의 노름을 표준노름이라고 하자.

I 에서 정의되고 조건 (1)을 만족시키는 모든 련속함수들의 모임을 $\mathcal{F}_S(I)$ 로 표시하면 $\mathcal{F}_S(I)$ 는 $C(I)$ 의 부분공간으로 되며 이 공간을 프락탈함수공간이라고 부른다.

조건 (1)−(3)을 $\mathcal{F}_S(I)$ 우에서 정의된 유계선형범함수들에 대한 조건으로 바꾸자.

유계선형범함수 $L_i(g)=g(x_i)$ $(i=0, 1, \cdots, N-1)$, $L_N(f)=\int_a^b f(x)dx$ 들을 생각하자.

이때 보간조건 (1)−(3)은 프락탈함수공간 $\mathcal{F}_S(I)$ 우에서 정의된 유계선형범함수들에 대한 조건 $L_i(g)=y_i$ $(i=0, 1, \cdots, N-1)$, $L_N(f)=\overline{y}$ 로 바꿀수 있다.

보조정리[5] $\phi_0(x), \phi_1(x), \cdots, \phi_N(x)\in \mathcal{F}_S(I)$ 를

$$\phi_i(x_j)=\delta_{ij},\ \ j=0, \cdots, N$$

을 만족시키는 프락탈보간함수들이라고 하면 $\phi_0, \phi_1, \cdots, \phi_N$ 은 1차독립이다.

$\mathcal{F}_S(I)$ 는 $N+1$ 차원공간으로 되며 $\phi_0(x), \phi_1(x), \cdots, \phi_N(x)$ 는 이 공간의 토대로 된다.

정리 $\sum_{i=1}^{N} a_i s_i - a_N \neq 0,\ 1-\sum_{i=1}^{N} a_i s_i \neq 0$ 이 만족된다고 하면 선형범함수 $L_0, \cdots, L_N$ 들은 $\mathcal{F}_S(I)$ 에 관하여 1차독립이며 보간조건 (1)−(3)은 유일풀이를 가진다.

증명 보조정리 1과 선행연구[5]로부터 선형범함수 $L_0, \cdots, L_N$ 들이 $\mathcal{F}_S(I)$ 에 관하여 1차독립이기 위해서는

$$\det(L_i\phi_j)=\det\begin{bmatrix} L_0\phi_0 & \cdots & L_0\phi_N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_N\phi_0 & \cdots & L_N\phi_N \end{bmatrix}\neq 0$$

이 만족될것이 필요하고 충분하다.

$$L_0\phi_0=\phi_0(x_0)=1,\ L_0\phi_1=\phi_1(x_0)=0,\ \cdots,\ L_0\phi_N=\phi_N(x_0)=0,$$

$$\vdots$$

$$L_{N-1}\phi_0=\phi_0(x_{N-1})=0,\ \cdots,\ L_{N-1}\phi_{N-1}=\phi_{N-1}(x_{N-1})=1,\ L_{N-1}\phi_N=\phi_N(x_{N-1})=0,$$

$$L_N\phi_0=\int_{x_0}^{x_N}\phi_0(x)dx,\ \cdots,\ L_N\phi_N=\int_{x_0}^{x_N}\phi_N(x)dx$$

이므로 $\det(L_i\phi_j)=\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \int_{x_0}^{x_N}\phi_0(x)dx & \int_{x_0}^{x_N}\phi_1(x)dx & \cdots & \int_{x_0}^{x_N}\phi_{N-1}(x)dx & \int_{x_0}^{x_N}\phi_N(x)dx \end{bmatrix}$ 이다.

따라서 $\int_{x_0}^{x_N}\phi_N(x)dx\neq 0$ 이여야 한다.

$\phi_N(x)$ 는 다음의 관계식을 만족시키는 프락탈함수이다.

$$\phi_N(x)=s_i\cdot\phi_N(u_i^{-1}(x))+p_i(u_i^{-1}(x)),\ \ x\in I_i$$

$$s_i\cdot\phi_N(x_0)+p_i(x_0)=\phi_N(x_{i-1})=0,\ \ s_i\cdot\phi_N(x_N)+p_i(x_N)=\phi_N(x_i)=0,\ \ i=1,2,\cdots,N-1$$

$$s_N\cdot\phi_N(x_0)+p_{Ni}(x_0)=\phi_N(x_{N-1})=0,\ \ s_N\cdot\phi_N(x_N)+p_N(x_N)=\phi_N(x_N)=1$$

이로부터 다음의 식들이 성립된다.

$$c_i=-\frac{s_i}{x_N-x_0},\ \ d_i=\frac{s_ix_0}{x_N-x_0}\ \ (i\neq N)$$

$$c_N=\frac{1-s_N}{x_N-x_0},\ \ d_N=\frac{(s_N-1)x_0}{x_N-x_0}$$

또한

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_N}\phi_N(x)dx&=\sum_{i=1}^{N}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\phi_N(x)dx=\sum_{i=1}^{N}\int_{x_{i-1}}^{x_i}[s_i\,\phi_N(u_i^{-1}(x))+p_i(u_i^{-1}(x))]dx=\\&=\sum_{i=1}^{N}a_i\int_{x_0}^{x_N}[s_i\,\phi_N(z)+p_i(z)]dz=\sum_{i=1}^{N}a_i\,s_i\int_{x_0}^{x_N}\phi_N(z)dz+\sum_{i=1}^{N}a_i\int_{x_0}^{x_N}p_i(z)dz\end{aligned}\tag{4}$$

가 성립되므로

$$\int_{x_0}^{x_N}\phi_N(x)dx=\frac{\sum_{i=1}^{N}a_i\int_{x_0}^{x_N}p_i(z)dz}{1-\sum_{i=1}^{N}a_i\,s_i}=\frac{\frac{x_0-x_N}{2}\left(\sum_{i=1}^{N}a_i\,s_i-a_N\right)}{1-\sum_{i=1}^{N}a_i\,s_i}.\tag{5}$$

$[a,b]$ 의 분할간격이 등간격이면 $a_i=\frac{1}{N}$ 이고 $0\le\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}s_i<1$ 이 성립되며 따라서 식 (5)의 분모는 령이 아니다. 그리고 분자가 령이 아니려면 $\sum_{i=1}^{N}s_i\neq1$ 이여야 한다.(증명끝)

2. 보간함수의 구성법

적분값보간특성을 가지는 프락탈보간함수를 구성하기 위하여 우리는 보간조건을 만족시키도록 마디점에서의 함수값을 결정하고 선행연구[4]의 리론을 적용하여 반복함수계를 구성한 다음 그 반복함수계와 련관된 축소연산자의 부동점을 찾는 방법을 제기한다.

만일 $f(x)=\sum_{i=0}^{N}y_i\phi_i(x)$ (y_i, $i=0,1,\cdots,N-1$)로 놓으면 $f(x_k)=y_k$, $i=0,1,\cdots,N-1$ 이므로 마디점에서의 함수값보간조건이 만족된다.

$\int_{x_0}^{x_N}f(x)dx=\sum_{i=0}^{N}y_i\int_{x_0}^{x_N}\phi_i(x)dx$ 로부터

$$y_N=\frac{\overline{y}-\sum_{i=0}^{N-1}y_i\int_{x_0}^{x_N}\phi_i(x)dx}{\int_{x_0}^{x_N}\phi_N(x)dx}\tag{6}$$

로 놓으면 $f(x)=\sum_{i=0}^{N} y_i\phi_i(x)$ 는 모든 보간조건을 만족시키는 $\mathcal{F}_S(I)$ 의 원소 즉 주어진 척도 파라메터들을 가지는 프락탈함수이다.

$\phi_i(x)$ 들의 양적표시공식이 없으므로 $f(x)=\sum_{i=0}^{N} y_i\phi_i(x)$ 를 계산하기 위하여 구체적으로 론의하자.

먼저 $\int_{x_0}^{x_N}\phi_k(x)dx$ 의 계산식을 유도하자.

$\phi_k(x)$ 는 다음의 관계식들을 만족시키는 프락탈함수이다.

$$\phi_k(x)=s_i\cdot\phi_k(u_i^{-1}(x))+p_i(u_i^{-1}(x)),\ \ x\in I_i,\ \ i=1,2,\cdots,N$$

$$s_i\cdot\phi_k(x_0)+p_i(x_0)=\phi_k(x_{i-1})=0,\ \ s_i\cdot\phi_k(x_N)+p_i(x_N)=\phi_k(x_i)=0,\ \ i=1,2,\cdots,N,\ \ i\neq k,\ k+1$$

$$s_k\cdot\phi_k(x_0)+p_k(x_0)=\phi_k(x_{k-1})=0,\ \ s_k\cdot\phi_k(x_N)+p_k(x_N)=\phi_k(x_k)=1$$

$$s_{k+1}\cdot\phi_k(x_0)+p_{k+1}(x_0)=\phi_k(x_k)=1,\ \ s_{k+1}\cdot\phi_k(x_N)+p_{k+1}(x_N)=\phi_k(x_{k+1})=0$$

이 식들로부터 구한 $p_i(x),\ i=1,\cdots,N$ 들을 $p_i^k(x)=c_i^k x+d_i^k,\ \ i=1,\cdots,N$ 으로 표시하면

$$c_i^k=\begin{cases}0, & i\neq k,\ k+1\\ 1/(x_N-x_0), & i=k\\ -1/(x_N-x_0), & i=k+1\end{cases},$$

$$d_i^k=\begin{cases}0, & i\neq k,\ k+1\\ -x_0/(x_N-x_0), & i=k\\ x_N/(x_N-x_0), & i=k+1\end{cases},\ \ k=2,\cdots,N-1$$

이고 식 (4)가 성립되므로 다음의 식이 나온다.

$$\int_{x_0}^{x_N}\phi_k(x)dx=\frac{\sum_{i=1}^{N}a_i\int_{x_0}^{x_N}p_i(z)dz}{1-\sum_{i=1}^{N}a_i s_i}\tag{7}$$

식 (5)와 식 (7)을 식 (6)에 대입하면 y_N 을 구할수 있다.

주어진 자료와 y_N 을 리용하여 $f(x_i)=y_i,\ i=0,1,\cdots,N$ 을 보간자료로 가지는 프락탈보간함수를 $\mathcal{F}_S(I)$ 에서 구성하면 이 함수가 우리가 구하려는 함수이다.

이를 위한 알고리듬은 다음과 같다.

$\boldsymbol{y}=(y_0,\ y_1,\ \cdots,\ y_N)\in\boldsymbol{R}^{N+1}$ 에 대하여 $\mathcal{F}_0$ 을

$$\mathcal{F}_0=\{f\in C[a,\ b]:\ f(x_0)=y_0,\ f(x_N)=y_N\}$$

으로 정의하면 이것은 노름 $\|\cdot\|_\infty$ 에 관하여 완비공간으로 된다.

$f\in\mathcal{F}_0$ 에 대하여 함수 $T_y f:[a,\ b]\to\boldsymbol{R}$ 를

$$(T_y f)(x):=s_i\cdot f(u_i^{-1}(x))+p_i(u_i^{-1}(x)),\ x\in I_i$$

로 정의하자.

$s_i,\ u_i$ 들은 앞에서와 같고 $p_i(x)=c_i x+d_i$ 는 조건 $(T_y f)(x_{i-1})=y_{i-1},\ (T_y f)(x_i)=y_i$ 를 만족시키는 함수이다. 즉 $s_i\cdot y_0+c_i x_0+d_i=y_{i-1},\ \ s_i\cdot y_N+c_i x_N+d_i=y_i$ 이다.

이 방정식들로부터 c_i, d_i 들이

$$c_i = \frac{(y_i - y_{i-1}) - s_i(y_N - y_0)}{x_N - x_0}, \tag{8}$$

$$d_i = \frac{y_{i-1}x_N - y_i x_0 + s_i(x_0 y_N - y_0 x_N)}{x_N - x_0} \tag{9}$$

으로 유일하게 결정되므로 연산자 T_y 가 유일하게 결정된다.

그리고 $T_y f$ 가 련속이므로 $T_y f \in \mathfrak{F}_0$ 이다. 따라서 연산자 $T_y : \mathfrak{F}_0 \to \mathfrak{F}_0$ 은 분명히 축소연산자로 된다. 그러면 완비공간에서의 축소연산자의 부동점정리로부터 $\mathfrak{F}_0$ 에는 T_y 의 부동점이 유일존재한다.

참 고 문 헌

[1] I. P. Bouboulis et al.; J. Comput. Appl. Math., 235, 3425, 2011.
[2] P. Bouboulis et al.; European J. Appl. Math., 18, 449, 2007.
[3] P. Bouboulis; IMA J. Appl. Math., 74, 904, 2009.
[4] Yongsuk Kang; Electron. J. Math. Anal. Appl., 2, 2, 144, 2014.
[5] K. Atkinson et al.; Theoretical Numerical Analysis, Springer, 230～450, 2009.

주체106(2017)년 3월 5일 원고접수

Construction of the Fractal Interpolation Function with a Feature

Kang Yong Suk, Kim Hyang

In the previous paper, the construction of fractal function interpolating data set

$$\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_N, y_N)\}$$

was studied.

We construct the fractal function interpolating data set

$$\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_{N-1}, y_{N-1})\}$$

and integral value of the function. We give the sufficient condition for the existence of the interpolation function and the algorithm for construction.

Key word: fractal function