김일성종합대학학보 주체110(2021)년
물리학 제67권 제3호

동종립자얽힘의 상대성

김 대 혁

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《기초과학을 끊임없이 심화발전시키지 않고서는 첨단과학기술을 연구도입할수도 없고 새로운 높은 수준의 과학기술을 연구개발할수도 없습니다. 나라의 과학기술발전수준은 결국은 기초과학수준에 의하여 결정된다고 말할수 있습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제22권 21～22페지)

론문에서는 최근에 제안된 동종립자의 얽힘에 대한 무표식방법에서도 2차량자화방법과 마찬가지로 얽힘이 상태에만 관계되는 성질이 아니라 관측량의 선택에도 관계된다는 것을 몇가지 실례를 통하여 보여주었다.

1. 동종립자얽힘의 상대성에 대한 개념

얽힘은 량자세계에서만 찾아볼수 있는 특이한 상관현상으로서 오늘날 량자암호와 량자콤퓨터, 량자통신을 비롯한 량자정보처리에 직접적으로 응용되고있을뿐아니라 우주의 가속팽창과 검은구멍의 열력학과 같은 물리학의 기초원리적문제들과 관련하여서도 광범히 연구되고있다. 그가운데서도 구별가능한 립자들 다시말하여 비동종립자들의 얽힘에 대한 형식론은 비교적 완성되여있다.

자리길개념이 적용되지 않는 량자력학에서 동종립자들의 구별불가능성은 고전세계에서는 나타나지 않는 고유한 량자현상이다. 구별불가능성과 관련된 파동함수의 대칭화 혹은 반대칭화에 대한 요구때문에 다립자물리학에서 여러가지 어려운 문제들이 제기되고있으며 특히 동종립자계의 량자얽힘과 관련한 형식론은 아직도 체계화되여있다고 말할수 없다.

최근까지의 동종립자계의 얽힘에 대한 연구는 량자통계력학의 2차량자화방법을 리용하여 계와 부분계를 립자들이 아니라 모드들로 보고 립자는 이 모드들의 서로 다른 점유상태로 보는 관점으로부터 출발하고있다.[1] 이 방법에서는 주어진 순수상태가 분리불가능한가 아닌가 즉 얽힌 상태인가 아닌가를 가르는 기준으로 교환되는 관측량들사이의 상관을 택하고있으며 따라서 얽힘의 유무와 상관정도는 절대적인 개념이 아니라 교환되는 관측량들의 조를 어떻게 선정하는가에 따라 달라지게 된다. 수학적으로 볼 때 교환되는 관측량들의 조는 C^*대수라고 부르는 대수구조를 가지게 되는데 꼭같은 상태라고 하여도 가환인 어떤 2개의 부분대수에 관하여서는 분리되지만 다른 부분대수에 관하여서는 얽혀지게 된다. 그런데 구별가능한 립자들의 경우에는 개개 립자에 대한 관측량을 정의할수 있지만 동종립자들의 경우에는 립자들을 구별할수 없으므로 자연히 가환되는 부분대수와 상관에 대한 복잡한 취급이 요구된다.

그러나 최근에 이러한 2차량자화방법과 별도로 1차량자화방법에 기초하여 여전히 동종립자계의 량자얽힘을 취급할수 있는 새로운 방법[2]이 연구되였다.

이 방법에서는 우선 동종립자들의 상태를 대칭화 혹은 반대칭화함이 없이 비동종립

자들의 상태와 꼭같은 형태로 표시한다. 다음 포크공간의 보다 많은 립자수상태들로부터 보다 적은 립자수상태들에로의 사영연산을 구성하고 이 연산을 리용하여 두 동종립자의 순수상태로부터 수축된 한립자밀도행렬을 유도한 다음 구별가능한 립자들의 경우처럼 얽힘량을 수축된 한립자밀도행렬의 노이만엔트로피로 정의한다.

선행연구[2]에서는 이 방법의 적용실례로서 반대의 스핀을 가진 전자들을 그것들의 파동함수가 겹쳐지도록 가까이 가져온다면 호상 얽혀지게 된다는것을 보여주었으며 이것이 반대부호의 스핀을 가진 2개의 초랭각된 루비디움원자들을 하나의 빛핀세트속으로 모아놓을 때 얽힘이 발생한다는 실험결과에 대한 리론적근거라는데 대하여 언급하였다.

이러한 무표식방법이 2차량자화에 기초하고있지 않기때문에 론문에서는 이 방법에서도 얽힘이 량자상태에만 관계되는것이 아니라 그 관측량들에도 관계된다는 사실이 그대로 성립하는가를 연구하였다.

2. 동종립자의 량자얽힘에 대한 무표식방법

편리상 다립자얽힘에 대한 일반적방법이 아니라 간단히 두립자계의 경우에 대하여 이 방법을 적용하였다. 무표식방법은 엄밀히 말하여 대칭화 혹은 반대칭화된 힐베르트공간의 벡토르들을 리용하는 1차량자화방법도 아니며 모드발생 및 소멸연산자들에 기초한 2차량자화방법도 아니다. 이 방법에서는 1개 립자의 표준힐베르트공간구조로부터 출발하여 두립자상태들과 이 상태들의 스칼라적을 다음과 같이 구성한다.

힐베르트공간 H 의 한립자상태 $|\varphi_{1,2}\rangle$ 가 주어졌을 때 두립자상태들은 가능한 모든 (φ_1, φ_2) 쌍들의 선형결합으로 생성되며 이것들을 $|\varphi_1, \varphi_2\rangle$ 로 표시하면 그것들의 스칼라적은 다음과 같이 정의된다.

$$\langle\varphi_1, \varphi_2 | \varphi_1', \varphi_2'\rangle_\eta \equiv \langle\varphi_1 | \varphi_1'\rangle\langle\varphi_2 | \varphi_2'\rangle + \eta\langle\varphi_1 | \varphi_2'\rangle\langle\varphi_2 | \varphi_1'\rangle \tag{1}$$

여기서 $\langle\varphi|\varphi'\rangle$ 는 보통의 스칼라적이며 η 는 보즈립자에 대하여서는 1로 주어지고 페르미립자에 대하여서는 –1로 주어진다. 이러한 스칼라적은 립자상태를 구분하는 첨자들을 필요로 하지 않으며 따라서 대칭화 혹은 반대칭화과정도 존재하지 않게 된다. 분명히 두 벡토르들을 교환할 때 $|\varphi_1, \varphi_2\rangle = \eta|\varphi_2 |\varphi_1\rangle$ 이다. 이 상태는 보통의 량자력학적표시에서 다음과 같은 규격화되지 않은 상태에 대응된다.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle + \eta|\varphi_2\rangle \otimes |\varphi_1\rangle) \tag{2}$$

분명 이 상태의 노름은

$$N = 1 + \eta|\langle\varphi_1 | \varphi_2\rangle|^2 \tag{3}$$

으로 주어진다. 다음 두립자상태들에 대한 한립자연산자 A 의 작용 $A^{(1)}$ 을 다음과 같이 정의한다.

$$A^{(1)}|\varphi_1, \varphi_2\rangle \equiv |A\varphi_1, \varphi_2\rangle + |\varphi_1, A\varphi_2\rangle \tag{4}$$

그러면 한립자사영연산자 $P_\psi \equiv |\psi\rangle\langle\psi|$ 에 대하여

$$P_\psi^{(1)}|\varphi_1, \varphi_2\rangle = |\psi, \langle\psi | \varphi_1\rangle\varphi_2 + \eta\langle\psi | \varphi_2\rangle\varphi_1\rangle \tag{5}$$

을 얻는다. 이로부터 두립자상태들을 한립자상태에로 사영하는 다음과 같은 수축연산자 $\Pi_\psi^{2\to1}$ 을 정의한다.

$$\Pi_\psi^{2\to1}|\varphi_1,\varphi_2\rangle \equiv \langle\psi|\varphi_1\rangle\varphi_2\rangle + \eta\langle\psi|\varphi_2\rangle\varphi_1\rangle \tag{6}$$

이제 한립자힐베르트공간 $\mathcal{H}$ 의 직교규격화된 토대 $\{|\psi_k\rangle\}_k$ 와 이 벡토르들의 부분모임 K에 의해 생성되는 부분공간 $\mathcal{K}$ 그리고 직교사영연산자 $P_K=\sum_{k\in K}|\psi_k\rangle\langle\psi_k|$ 를 생각하자. 규격화된 두립자벡토르상태

$$|\Phi_{12}\rangle = \frac{|\varphi_1,\varphi_2\rangle}{\sqrt{N}} \tag{7}$$

가 주어졌을 때

$$|\Phi_{12}\rangle\langle\Phi_{12}| \to \sum_{k\in K}\Pi_{\psi_k}^{2\to1}|\Phi_{12}\rangle\langle\Phi_{12}|(\Pi_{\psi_k}^{2\to1})^\dagger \tag{8}$$

과 오른변을 규격화하여 $\mathcal{K}$-수축된 한립자밀도행렬 ρ_Φ^K 를 구성할수 있다.

$$\rho_\Phi^K = \frac{1}{2N_K}\sum_{k\in K}\Pi_{\psi_k}^{2\to1}|\Phi_{12}\rangle\langle\Phi_{12}|(\Pi_{\psi_k}^{2\to1})^\dagger =$$

$$= \frac{1}{2N_K}[\langle\varphi_2|P_K|\varphi_2\rangle|\varphi_1\rangle\langle\varphi_1| + \langle\varphi_1|P_K|\varphi_1\rangle|\varphi_2\rangle\langle\varphi_2| +$$

$$+\eta(\langle\varphi_1|P_K|\varphi_2\rangle|\varphi_1\rangle\langle\varphi_2| + \langle\varphi_2|P_K|\varphi_1\rangle|\varphi_2\rangle\langle\varphi_1|)] \tag{9}$$

여기서 규격화상수는 다음과 같이 주어진다.

$$N_K = \frac{1}{2}\sum_{k\in K}\|\Pi_{\psi_k}^{2\to1}|\varphi_{12}\rangle\|^2 = \frac{1}{2}\langle\varphi_1|P_K|\varphi_1\rangle + \frac{1}{2}\langle\varphi_2|P_K|\varphi_2\rangle +$$

$$+\eta\,\mathrm{Re}(\langle\varphi_1|P_K|\varphi_2\rangle\langle\varphi_2|\varphi_1\rangle) \tag{10}$$

구별불가능한 두부분상태들의 경우와 비슷하게 두부분상태 $|\Phi_{12}\rangle$ 의 얽힘정도는 $\mathcal{K}$-수축된 밀도행렬의 노이만엔트로피

$$E_K(\Phi_{12}) = S(\rho_\Phi^K) = -\mathrm{Tr}(\rho_\Phi^K \ln \rho_\Phi^K) \tag{11}$$

에 의하여 평가된다.

3. 얽힘의 상대성검증

무표식방법에서 교환되는 확장된 한립자관측량 $O_1^{(1)}$ 과 $O_2^{(1)}$ 은 $[O_1, O_2]=0$ 을 만족시키는 한립자힐베르트공간 $\mathcal{H}$ 우의 관측량들로부터 얻어진다. 이때 인수분해조건은 다음과 같다.

$$\langle\varphi_1|O_1O_2|\varphi_1\rangle + \langle\varphi_2|O_1O_2|\varphi_2\rangle + 2\eta\,\mathrm{Re}(\langle\varphi_1|O_1|\varphi_2\rangle\langle\varphi_2|O_2|\varphi_1\rangle) =$$

$$= \langle\varphi_1|O_1|\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|O_2|\varphi_1\rangle + (\langle\varphi_2|O_1|\varphi_2\rangle\langle\varphi_2|O_2|\varphi_2\rangle) \tag{12}$$

이제 세가지 경우를 고찰하자.

① $O_1 = |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|,\ O_2 = |\varphi_2\rangle\langle\varphi_2|$

이 경우에 $O_1O_2=0$ 이며 식 (12)의 량변은 령이다. 2개의 직교연산자들은 단위연산자와 함께 2개의 가환부분대수구조를 이룬다. 그러면 $|\Phi_{12}\rangle$ 에 관한 평균값은 2차량자화방법에서와 같이 인수분해된다.

② $O_1 = |\psi_+\rangle\langle\psi_+|,\ O_2 = |\psi_-\rangle\langle\psi_-|$

여기서 $|\psi_\pm\rangle = \frac{|\varphi_1\rangle \pm |\varphi_2\rangle}{\sqrt{2}}$ 이다. 이 경우에 $O_1O_2 = 0$ 이며 식 (12)의 왼변은 $-\frac{\eta}{2}$ 로 되고 오른변은 1/2로 된다. 앞에서와 달리 사영연산자 O_1, O_2 는 단위연산자와 함께 가환인 2개의 부분대수구조를 구성하며 이 연산자들의 평균값은 보즈립자의 경우에는 인수분해되지 않지만 페르미립자의 경우에는 인수분해된다. 이것은 이미 잘 알고있는것처럼 2차원부분공간에서의 우니타르회전이 1중항구조를 변경시키지 못하기때문에 자연스럽게 나오는 결과이다.

③ $O_1 = |\psi_+\rangle\langle\psi_+|,\ O_2 = |\psi_-\rangle\langle\psi_-|$

여기서 $|\psi_\pm\rangle = \frac{|\varphi_1\rangle \pm |\varphi_j\rangle}{\sqrt{2}}$ 이며 $j \geq 3$ 이다. 역시 $O_1O_2 = 0$ 이므로 식 (12)의 왼변은 령이고 오른변은 1/4로 된다. 따라서 이 경우에는 페르미온분리가능성마저도 없어진다.

맺 는 말

무표식방법에서도 평균값들이 인수분해되는가 안되는가 하는것은 교환되는 관측량의 구체적인 선택에 관계되므로 순수상태가 얽혔는가 얽히지 않았는가 하는것은 상태에만 관계되는것이 아니라 고찰하는 관측량의 부분대수에도 관계된다.

참 고 문 헌

[1] D. Braun et al.; arXiv:1701.05152.

[2] R. L. Franco et al.; Sci. Rep., 6, 20603, 2016.

주체110(2021)년 3월 5일 원고접수

On the Relativity of Entanglement of Identical Particles

Kim Thae Hyok

We have confirmed that the entanglement of identical particles depends on not only their own quantum state but also the choice of observables in unlabelled way like in the second quantization approach.

Keywords: quantum entanglement, identical particles