김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체104(2015)년 제61권 제1호 Vol. 61 No. 1 JUCHE104(2015).

경계조건을 가진 확률적분방정식의 룽게쿠타도식

김천을, 김성금

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《과학과 기술이 매우 빨리 발전하고있는 오늘의 현실은 기초과학을 발전시킬것을 더욱 절실하게 요구하고있습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제11권 138페지)

론문에서는 경계조건을 가진 확률적분방정식의 룽게쿠타도식에 대하여 론의하였다.

선행연구[2, 3]에서는 이또형이 아닌 확률적분방정식의 경계값문제들이, 선행연구[4]에서는 이또형확률적분방정식의 경계값문제의 풀이의 유일존재성이, 선행연구[1]에서는 이또형확률적분방정식의 오일레르도식과 일반고차근사도식이 연구되였다.

여기서는 경계조건을 가진 이또형확률적분방정식

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s,\ X_s)ds + \int_0^t F(s,\ X_s)dw_s,\ \ X_0 = \mathrm{E}\psi(X_1) \tag{1}$$

의 도함수를 포함하지 않은 근사도식(룽게쿠타도식)들을 구성하고 그 수렴성을 해석하였다.

1. 임의의 초기조건에 관한 1.0차룽게쿠타근사도식

다음의 확률적분방정식의 풀이는 초기조건 x에 관계된다.

$$X_t = x + \int_0^t f(s,\ X_s)ds + \int_0^t F(s,\ X_s)dw_s \tag{2}$$

그러므로 방정식 (2)의 풀이는 x의 함수형태로 표시할수 있다.

그것을 $\varphi_t(x)$로 표시하면 $\varphi_t(x)$는 방정식 (2)를 만족시키므로

$$\varphi_t(x) = x + \int_0^t f(s,\ \varphi_s(x))ds + \int_0^t F(s,\ \varphi_s(x))dw_s \tag{3}$$

로 표시할수 있다.

식 (3)에 대한 1.0차룽게쿠타근사도식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_n(x) &= \hat{\varphi}_{n-1}(x) + f(t_{n-1},\ \hat{\varphi}_{n-1}(x))\Delta t + F(t_{n-1},\ \hat{\varphi}_{n-1}(x))\Delta w_{n-1} + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{\Delta t}}[F(t_{n-1},\ \tilde{\varphi}_{n-1}(x)) - F(t_{n-1},\ \hat{\varphi}_{n-1}(x))](\Delta w_{n-1}^2 - \Delta t)\end{aligned} \tag{4}$$

$\Delta t = 1/N,\ t_n = n\Delta t,\ \tilde{\varphi}_{n-1}(x) = \hat{\varphi}_{n-1}(x) + f(t_{n-1},\ \hat{\varphi}_{n-1}(x))\Delta t + F(t_{n-1},\ \hat{\varphi}_{n-1}(x))\sqrt{\Delta t},\ n = 1, 2, \cdots, N$

초기조건과 결수함수들에 대한 가정은 다음과 같다.

① $\mathrm{E}|x| < \infty$

② 적당한 상수 $K_1 > 0$에 대하여

$$|f(t,\ y_1) - f(t,\ y_2)| + |F(t,\ y_1) - F(t,\ y_2)| \le K_1|y_1 - y_2|,\ \ y_1,\ y_2 \in \boldsymbol{R}.$$

③ 적당한 상수 $K_2>0$ 에 대하여 $|f(t, y)|+|F(t, y)|\le K_2(1+|y|)$, $y\in \boldsymbol{R}$.

보조정리 1 조건 ①을 만족시키는 x_1, x_2 에 대하여 이행결수 f 와 확산결수 F 가 조건 ②, ③을 만족시키는 가측함수들일 때 $\mathrm{E}|\hat{\varphi}_n(x_1)-\hat{\varphi}_n(x_2)|^2\le \mathrm{E}|x_1-x_2|^2 e^M$ 이 성립된다. 여기서 $M=2K_1+K_1{}^2+2K_2^2+(1+K_1+K_2)^2K_2^2$ 이다.

증명 식 (4)로부터

$$\mathrm{E}|\hat{\varphi}_n(x_1)-\hat{\varphi}_n(x_2)|^2=\mathrm{E}|(\hat{\varphi}_n(x_1)-\hat{\varphi}_n(x_2))+[f(t_{n-1},\ \hat{\varphi}_{n-1}(x_1))-f(t_{n-1},\ \hat{\varphi}_{n-1}(x_2))]\Delta t+$$
$$+[F(t_{n-1},\ \hat{\varphi}_{n-1}(x_1))-F(t_{n-1},\ \hat{\varphi}_{n-1}(x_2))]\Delta w_{n-1}+[(F(t_{n-1},\ \tilde{\varphi}_{n-1}(x_1))-F(t_{n-1},\ \tilde{\varphi}_{n-1}(x_2)))-$$
$$-(F(t_{n-1},\ \hat{\varphi}_{n-1}(x_1))-F(t_{n-1},\ \hat{\varphi}_{n-1}(x_2)))]/(2\sqrt{\Delta t})\times(\Delta w_{n-1}^2-\Delta t)|^2$$

으로 되는데 Δw_n 이 f_{n-1}, F_{n-1}, $\hat{\varphi}_{n-1}$ 들과 독립이고 $\mathrm{E}\Delta w_n=0$ 이며 $\mathrm{E}\Delta w_{n-1}(\Delta w^2{}_{n-1}-\Delta t)=0$ 이기때문에 다음과 같이 평가할수 있다.

$$\mathrm{E}|\hat{\varphi}_n(x_1)-\hat{\varphi}_n(x_2)|^2\le \mathrm{E}|\hat{\varphi}_{n-1}(x_1)-\hat{\varphi}_{n-1}(x_2)|^2+$$
$$+2\mathrm{E}[|\hat{\varphi}_n(x_1)-\hat{\varphi}_n(x_2)||f(t_{n-1},\ \hat{\varphi}_{n-1}(x_1))-f(t_{n-1},\ \hat{\varphi}_{n-1}(x_2))|]\Delta t+$$
$$+\mathrm{E}|f(t_{n-1},\ \hat{\varphi}_{n-1}(x_1))-f(t_{n-1},\ \hat{\varphi}_{n-1}(x_2))|^2\ \Delta t^2+$$
$$+\mathrm{E}|F(t_{n-1},\ \hat{\varphi}_{n-1}(x_1))-F(t_{n-1},\ \hat{\varphi}_{n-1}(x_2))|^2\cdot\mathrm{E}(\Delta w_{n-1})^2+$$
$$+\mathrm{E}[(F(t_{n-1},\ \tilde{\varphi}_{n-1}(x_1))-F(t_{n-1},\ \tilde{\varphi}_{n-1}(x_2)))-$$
$$-F(t_{n-1},\ \hat{\varphi}_{n-1}(x_1))-F(t_{n-1},\ \hat{\varphi}_{n-1}(x_2))]^2/(4\sqrt{\Delta t})\cdot(\Delta w_{n-1}^2-\Delta t)^2$$

이 식에서 f 와 F 에 관한 조건 ②, ③을 고려하면

$$\mathrm{E}|\hat{\varphi}_n(x_1)-\hat{\varphi}_n(x_2)|^2\le \mathrm{E}|\hat{\varphi}_{n-1}(x_1)-\hat{\varphi}_{n-1}(x_2)|^2+2K_1\mathrm{E}|\hat{\varphi}_{n-1}(x_1)-\hat{\varphi}_{n-1}(x_2)|^2\ \Delta t+$$
$$+K_1^2\mathrm{E}|\hat{\varphi}_{n-1}(x_1)-\hat{\varphi}_{n-1}(x_2)|^2\ \Delta t^2+K_2^2\mathrm{E}|\hat{\varphi}_{n-1}(x_1)-\hat{\varphi}_{n-1}(x_2)|^2\ \Delta t+$$
$$+[\mathrm{E}|\tilde{\varphi}_{n-1}(x_1)-\tilde{\varphi}_{n-1}(x_2)|^2\cdot K_2^2+K_2^2\cdot\mathrm{E}|\hat{\varphi}_{n-1}(x_1)-\hat{\varphi}_{n-1}(x_2)|^2]\Delta t$$

가 얻어지는데

$$\mathrm{E}|\tilde{\varphi}_{n-1}(x_1)-\tilde{\varphi}_{n-1}(x_2)|\le|\hat{\varphi}_{n-1}(x_1)-\hat{\varphi}_{n-1}(x_2)|+|f(t_{n-1},\ \hat{\varphi}_{n-1}(x_1))-f(t_{n-1},\ \hat{\varphi}_{n-1}(x_2))|\Delta t+$$
$$+|F(t_{n-1},\ \hat{\varphi}_{n-1}(x_1))-F(t_{n-1},\ \hat{\varphi}_{n-1}(x_2))|\sqrt{\Delta t}\le$$
$$\le|\hat{\varphi}_{n-1}(x_1)-\hat{\varphi}_{n-1}(x_2)|(1+K_1\Delta t+K_2\sqrt{\Delta t})\le|\hat{\varphi}_{n-1}(x_1)-\hat{\varphi}_{n-1}(x_2)|(1+K_1+K_2)$$

이므로 이것을 고려하면

$$\mathrm{E}|\hat{\varphi}_n(x_1)-\hat{\varphi}_n(x_2)|^2\le \mathrm{E}|\hat{\varphi}_{n-1}(x_1)-\hat{\varphi}_{n-1}(x_2)|^2\ [1+(2K_1+K_1^2+2K_2^2+(1+K_1+K_2)^2K_2^2)\Delta t].$$

이때 $M=2K_1+K_1^2+2K_2^2+(1+K_1+K_2)K_2^2$ 으로 놓으면

$$\mathrm{E}|\hat{\varphi}_n(x_1)-\hat{\varphi}_n(x_2)|^2\le \mathrm{E}|\hat{\varphi}_{n-1}(x_1)-\hat{\varphi}_{n-1}(x_2)|^2\ (1+M\Delta t).$$

이로부터

$$\mathrm{E}|\hat{\varphi}_n(x_1)-\hat{\varphi}_n(x_2)|^2\le \mathrm{E}|x_1-x_2|^2\ (1+M\Delta t)^n\le \mathrm{E}|x_1-x_2|^2\ (1+M/n)^n\le \mathrm{E}|x_1-x_2|^2\ e^M$$

을 얻을수 있다.(증명끝)

보조정리 2 식 (4)에서 초기조건 x 는 조건 ①을 만족시키고 함수 f 와 F 는 조건 ②, ③을 만족시키는 가측함수들이라고 하면 $\mathrm{E}|\hat{\varphi}_n(x)|^2\le e^L[\mathrm{E}|x|^2+(1-1/L)]$ 이 성립된다. 여기서 $L=1+4K_3^2+2K_4^2+K_2^2(K_3+K_4)^2/2$ 이다.

경계조건을 가진 확률적분방정식 (1)의 1.0차룽게쿠타도식은 다음과 같다.

$$\hat{\varphi}_n(x)=\hat{\varphi}_{n-1}(x)+f(t_{n-1},\ \hat{\varphi}_{n-1}(x))\Delta t+F(t_{n-1},\ \hat{\varphi}_{n-1}(x))\Delta w_{n-1}+ \\ +[F(t_{n-1},\ \tilde{\varphi}_{n-1}(x))-F(t_{n-1},\ \hat{\varphi}_{n-1}(x))]/(2\sqrt{\Delta t})\cdot(\Delta w_{n-1}^2-\Delta t) \tag{5}$$

$$x=\mathrm{E}\psi(\hat{\varphi}_N(x)) \tag{6}$$

여기서 $\tilde{\varphi}_{n-1}(x)=\hat{\varphi}_{n-1}(x)+f(t_{n-1},\ \hat{\varphi}_{n-1}(x))\Delta t+F(t_{n-1},\ \hat{\varphi}_{n-1}(x))\sqrt{\Delta t},\ \ n=1, 2, \cdots, N$.

정리 1 조건 ①－③밑에서 함수 ψ가 련속이고 적당한 $0<\eta<e^{-(2K_1+K_1^2+2K_2^2+(1+K_1+K_2)^2K_2^2)}$이 있어서 $|\psi(y_1)-\psi(y_2)|^2\le\eta|y_1-y_2|^2,\ y_1, y_2\in\boldsymbol{R}$가 성립되는 함수이면 근사도식 (5), (6)을 만족시키는 풀이는 유일존재한다.

정리 2 정리 1의 조건들밑에서 근사도식 (5), (6)의 수렴성차수는 1.0이다. 즉 적당한 $K>0$에 대하여 $\sup\limits_{t\in[0,\ 1]}\mathrm{E}|\hat{\varphi}_{t_n}(\hat{X}_0)-\varphi_t(X_0)|^2\le K\delta^2$이 성립된다.

2. 1.5차룽게쿠타도식

먼저 임의의 초기값 x에 대한 1.5차룽게쿠타도식에 대하여 보자.

방정식 (2)의 1.5차룽게쿠타도식

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_{n+1}(x)&=\hat{\varphi}_n(x)+F_n\Delta W_n+\frac{1}{2\sqrt{\Delta t}}\{f(\gamma_{nt})-f(\gamma_{n-})\}\Delta Z+\frac{1}{4}\{f(\gamma_{n+})+2f_n+f(\gamma_{n-})\}\Delta t+\\&+\frac{1}{4\sqrt{\Delta t}}\{F(\gamma_{n+})-F(\gamma_{n-})\}\{\Delta W_n-\Delta t\}+\frac{1}{2\Delta t}\{F(\gamma_{n+})-2F_n+F(\gamma_{n-})\}\{\Delta W_n\Delta t-\Delta Z\}+\\&+\frac{1}{4\Delta t}\{F(\Phi_{n+})-F(\Phi_{n-})-F(\gamma_{n+})+F(\gamma_{n-})\}\left\{\frac{1}{3}\Delta W_n^2-\Delta t\right\}\Delta W_n\end{aligned} \tag{7}$$

에 대한 몇가지 보조정리를 보기로 한다. 여기서 f_n, F_n은 $f(\hat{\varphi}_n(x))$, $F(\hat{\varphi}_n(x))$를 간략표시한것이고 $\gamma_{n+}=\hat{\varphi}_n(x)+f_n\Delta t\pm F_n\sqrt{\Delta t}$, $\Phi_{n+}=\gamma_+\pm F(\gamma_{n+})\sqrt{\Delta t}$이며 변수 x를 중시할 때에는 $\gamma_{n+}(x),\ \Phi_{n\pm}(x)$로 표시한다. 또한 $\Delta Z=\int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_{t_n}^{s}dW_r dS$는 $\mathrm{E}\Delta Z=0$, $\mathrm{E}(\Delta Z)^2=\Delta t^3/3$, $\mathrm{E}(\Delta Z\cdot\Delta W_n)=\Delta t^2/2$인 정규우연량이다.

편리상 f와 F는 x만의 함수로 한다.

보조정리 3 조건 ①－③밑에서 $\mathrm{E}|\hat{\varphi}_n(x_1)-\hat{\varphi}_n(x_2)|^2\le e^L\mathrm{E}|x_1-x_2|^2$이 성립된다. 여기서 L은 Δt에 무관계한 정의상수이다.

증명 도식 (7)에서 우연량 ΔW_n, ΔZ, $\{\Delta W_n^2-\Delta t\}$, $\{\Delta W_n\Delta t-\Delta Z\}$, $\{\Delta W_n^2/3-\Delta t\}\Delta W$들의 특성을 보자.

수학적기대값은 모두 0이고

$$\mathrm{E}[\Delta W_n^2-\Delta t]^2=2\Delta t^2,\ \ \mathrm{E}[\Delta W_n\Delta t-\Delta Z]^2=\Delta t^3/3,\ \ \mathrm{E}[\Delta W_n^3/3-\Delta t\Delta W_n]^2=2\Delta t^3/3,$$

$$\mathrm{E}\Delta W_n\cdot\Delta Z=\Delta t^2/2,\ \ \mathrm{E}\Delta W_n(\Delta W_n^2-\Delta t)=0,\ \ \mathrm{E}[\Delta W_n(\Delta W_n\Delta t-\Delta Z)]=\Delta t^2/2,$$

$$\mathrm{E}[\Delta Z(\Delta W_n^2-\Delta t)]=\mathrm{E}(\Delta Z\Delta W^2)=0,\ \ \mathrm{E}[\Delta Z(\Delta W_n\Delta t-\Delta Z)]=\Delta t^3/2-\Delta t^3/3=\Delta t^3/6,$$

$$\mathrm{E}[\Delta Z(\Delta W_n^3/3-\Delta W_n\cdot\Delta t)]=\mathrm{E}(\Delta Z\cdot\Delta W_n^3)/3-\mathrm{E}(\Delta Z\cdot\Delta W_n)\Delta t=\Delta t^3/3-\Delta t/2^3=-\Delta t^3/6,$$

$$\mathrm{E}[(\Delta W_n^2-\Delta t)(\Delta W_n\Delta t-\Delta Z)]=-\mathrm{E}(\Delta Z\cdot\Delta W_n^2)=0,\ \ \mathrm{E}[(\Delta W_n^2-\Delta t)(\Delta W_n^3/3-\Delta t\cdot\Delta W_n)]=0,$$

$$\mathrm{E}[(\Delta W\cdot\Delta t-\Delta Z)(\Delta W^3/3-\Delta t\Delta W_n)]=\Delta t\,\mathrm{E}\Delta W_n^4/3-\Delta\mathrm{E}\Delta W_n^2+\Delta t\mathrm{E}(\Delta W_n\Delta Z)-$$
$$-\mathrm{E}(\Delta Z\cdot\Delta W_n^3)/3=\Delta t^3-\Delta t^3+\Delta t^3/2-\Delta t^3/3=\Delta t^3/6.$$

그리고

$$|\gamma_{n\pm}(x_1)-\gamma_{n\pm}(x_2)|\le|\hat\varphi_n(x_1)-\hat\varphi_n(x_2)|+K_1|\hat\varphi_n(x_1)-\hat\varphi_n(x_2)|\Delta t+K_2|\hat\varphi_n(x_1)-\hat\varphi_n(x_2)|\sqrt{\Delta t}=$$
$$=L_1|\hat\varphi_n(x_1)-\hat\varphi_n(x_2)|\quad(L=1+K_1+K_2),$$
$$|\Phi_{n\pm}(x_1)-\Phi_{n\pm}(x_2)|\le|\gamma_{n\pm}(x_1)-\gamma_{n\pm}(x_2)|+K_2|\gamma_{n\pm}(x_1)-\gamma_{n\pm}(x_2)|\sqrt{\Delta t}\le$$
$$\le(1+K_2)|\gamma_{n\pm}(x_1)-\gamma_{n\pm}(x_2)|=(1+K_2)L_1|\hat\varphi_n(x_1)-\hat\varphi_n(x_2)|=L_2|\hat\varphi_n(x_1)-\hat\varphi_n(x_2)|$$

임을 고려하면(여기서 $L_2=(1+K_2)L_1$.) 근사도식 (7)로부터 조건 ①, ②에 의하여

$$\mathrm{E}|\hat\varphi_{n+1}(x_1)-\hat\varphi_{n+1}(x_2)|^2\le$$
$$\le\mathrm{E}|\hat\varphi_n(x_1)-\hat\varphi_n(x_2)|^2\,[1+K_2\Delta t+K_1^2L_1^2\Delta t/3+3K_1^2(2L_1^2+4)\Delta t/4+K_2^2L_1^2\Delta t/2+$$
$$+K_1^2(2L_1^2+4)\Delta t+4K_2^2(L_1+L_2)\Delta t/3+K_1(L_1+1)\Delta t+2K_1K_2L_1\Delta t+$$
$$+2K_2^2(L_1+1)\Delta t+2K_1K_2(L_1+1)\Delta t+K_1K_2(L_2L_1+L_1^2)\Delta t+$$
$$+K_2^2(L_1L_2+2L_2+L_1^2)\Delta t]=\mathrm{E}|\hat\varphi_n(x_1)-\hat\varphi_n(x_2)|^2\,(1+L\Delta t)$$

가 얻어진다. 여기서 $L=K_2+K_1^2L_1^2/3+\cdots+K_2^2(L_1L_2+2L_2+L_1^2)>0$ 은 Δt 에 무관계하다.

따라서 점화식에 의하여 $\mathrm{E}|\hat\varphi_{n+1}(x_1)-\hat\varphi_{n+1}(x_2)|^2\le(1+L\Delta t)^n\mathrm{E}|x_1-x_2|^2\le e^L\mathrm{E}|x_1-x_2|^2$ 이 얻어진다.(증명끝)

다음으로 근사도식 (7)의 풀이 $\hat\varphi_n(x)$ 의 2차모멘트를 평가하자.

보조정리 4 가정 ①－③밑에서 $\mathrm{E}|\hat\varphi_n(x)|^2\le e^M(\mathrm{E}|x|^2+(1-1/M))$ 이 성립된다. 여기서

$$M=k_2^2+M_1^2/12+M_3^2/16+2M_4^2/16+M_5^2/3+(M_4^2+M_6^2)/24+$$
$$+M_3+k_2\cdot M_2+1M_5K_2+M_5K_1/6+k_1M_5/24+M_5(M_6+M_4)/12.$$

증명 가정 ①－③을 리용하면

$$|f(\gamma_{n+})-f(\gamma_{n-})|\le K_1|\gamma_{n+}-\gamma_{n-}|\le 2K_1K_2(1+|\hat\varphi_n(x)|)\sqrt{\Delta t}\le M_1(1+|\hat\varphi_n(x)|),$$
$$|f(\gamma_{n+})+f(\gamma_{n-})+2f(\hat\varphi_n(x))|\le K_3|(1+|\gamma_{n+}|)+(1+|\gamma_{n-}|)+2(1+|\hat\varphi_n(x)|)=$$
$$=2K_1(2+K_1\Delta t+K_2\sqrt{\Delta t})(1+|\hat\varphi_n(x)|)\le 2K_1(2+K_1+K_2)(1+|\hat\varphi_n(x)|)=M_2(1+|\hat\varphi_n(x)|),$$
$$|F(\gamma_{n+})-F(\gamma_{n-})|\le K_2|\gamma_{n+}-\gamma_{n-}|\le M_3(1+|\hat\varphi_n(x)|),$$
$$|F(\gamma_{n\pm})-F(\hat\varphi_n(x))|\le K_2|\gamma_{n\pm}-\hat\varphi_n(x)|\le K_1K_2(1+|\hat\varphi_n(x)|)\Delta t+K_2^2(1+|\hat\varphi_n(x)|)\sqrt{\Delta t}\le M_4(1+|\hat\varphi_n(x)|),$$
$$|F(\Phi_{n+})-F(\Phi_{n-})|\le K_2|\Phi_{n+}-\Phi_{n-}|=K_2|2F(\gamma_+)\sqrt{\Delta t}|,\quad 2K_2^2(1+|\gamma_{n+}|)\le M_5(1+|\hat\varphi_n(x)|)$$

가 성립된다.

이 부등식들을 리용하면서 근사도식 (7)의 량변을 두제곱하고 수학적기대값을 취하면 조건 ②, ③에 의하여 다음의 식이 성립된다.

$$\mathrm{E}|\hat\varphi_{n+1}(x)|^2\le\mathrm{E}|\hat\varphi_n(x)|^2+2\mathrm{E}(1+|\hat\varphi_n(x)|^2)[k_2^2\Delta t+M_1^2\Delta t/12+M_3^2\Delta t/16+2M_4^2\Delta t/16+$$
$$+M_5^2\Delta t/3+(M_4^2+M_6^2)\Delta t/24+M_3\Delta t+k_2\cdot M_2\Delta t+M_5K_2\Delta t+M_5K_1\Delta t/6+$$
$$+k_1M_5\Delta t/24+M_5(M_6+M_4)\Delta t/12]+\mathrm{E}|\hat\varphi_n(x)|^2\,\Delta t\le$$
$$\le\mathrm{E}|\hat\varphi_n(x)|^2\,(1+M\Delta t)+(M-1)$$

또한 점화식에 의하여

$$\mathrm{E}\,|\hat{\varphi}_n(x)|^2 \le \mathrm{E}|x|^2(1+M\Delta t)^n + (M-1)[(1+M\Delta t)^{n-1}+\cdots+1]\Delta t =$$

$$= \mathrm{E}|x|^2(1+M\Delta t)^n + (1-1/M)(1+M\Delta t)^n \le \mathrm{E}|x|^2 e^M + (1-1/M)e^M = e^M[\mathrm{E}|x|^2 + (1-1/M)]$$

이 성립된다.(증명끝)

다음으로 1.5차근사방정식의 풀이의 유일존재성과 수렴성에 대하여 보자.

경계조건을 가진 확률적분방정식 (1)의 1.5차룽게쿠타근사방정식은

$$\hat{\varphi}_{n+1}(x) = \hat{\varphi}_n(x) + F_n\Delta W_n + \frac{1}{2\sqrt{\Delta t}}\{f(\gamma_{nt}) - f(\gamma_{n-})\}\Delta Z + \frac{1}{4}\{f(\gamma_{n+}) + 2f_n + f(\gamma_{n-})\}\Delta t +$$
$$+ \frac{1}{4\sqrt{\Delta t}}\{F(\gamma_{n+}) - F(\gamma_{n-})\}\{\Delta W_n - \Delta t\} + \frac{1}{2\Delta t}\{F(\gamma_{n+}) - 2F_n + F(\gamma_{n-})\}\{\Delta W_n\Delta t - \Delta Z\} +$$
$$+ \frac{1}{4\Delta t}\{F(\Phi_{n+}) - F(\Phi_{n-}) - F(\gamma_{n+}) + F(\gamma_{n-})\}\left\{\frac{1}{3}\Delta W_n^2 - \Delta t\right\}\Delta W_n, \tag{8}$$

$$x = \mathrm{E}\,\psi(\hat{\varphi}_N(x)) \tag{9}$$

와 같다. 여기서 $\gamma_{n+} = \hat{\varphi}_n(x) + f_n\Delta t \pm F_n\sqrt{\Delta t}$, $\Phi_{n+} = \gamma_+ \pm F(\gamma_{n+})\sqrt{\Delta t}$ 와 같다.

이 방정식의 풀이의 유일존재성을 론의하자.

정리 3 조건 ①－③밑에서 함수 ψ 가 련속이고 적당한 $0 < \eta < e^{-L}$ 이 있어서 $|\psi(y_1) - \psi(y_2)|^2 \le \eta\,|y_1 - y_2|^2$, $y_1,\ y_2 \in \boldsymbol{R}$ 가 성립되는 함수라면 근사방정식 (8), (9)를 만족시키는 풀이는 유일존재한다. 여기서 $L = K_2 + K_1^2 L_1^2/3 + \cdots + K_2^2(L_1L_2 + 2L_2 + L_1^2) > 0$.

정리 4 정리 2의 조건들밑에서 근사도식 (8), (9)의 수렴성차수는 1.5이다. 즉 적당한 $K > 0$ 에 대하여 $\sup\limits_{t\in[0,\,1]} \mathrm{E}\,|\hat{\varphi}_{t_n}(\hat{X}_0) - \varphi_t(X_0)|^2 \le K\delta^3$ 이 성립된다.

참 고 문 헌

[1] 김천을 등; 조선수학학회지, 2, 98, 주체102(2013).

[2] A. Arciniega et al.; Stochastic Analysis and Appl., 22, 5, 1295, 2004.

[3] M. Ferrante et al.; Stoch. Proc. Appl., 61, 323, 1996.

[4] Wang Yan et al.; Northeast Math. J., 23, 6, 541, 2007.

주체103(2014)년 9월 5일 원고접수

Runge-Kutta Schemes of SIEs with Boundary Condition

Kim Chon Ul, Kim Song Gum

In the present investigations, is developed order 1.0, 1.5 derivative free strong schemes of SIEs with boundary condition. We prove the existence and uniqueness of the solution for approximate equation with boundary condition and its convergence rate.

Key word: Runge-Kutta scheme