김일성종합대학학보 (자연과학) 주체104(2015)년 제61권 제12호
JOURNAL OF KIM IL SUNG UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE) Vol. 61 No. 12 JUCHE104(2015).

리만다양체에서 반대칭사영접속의 공액대칭조건

허달윤, 김방철

경애하는 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《과학연구부문에서 최첨단돌파전을 힘있게 벌려 경제발전과 국방력강화, 인민생활향상에 이바지하는 가치있는 연구성과들을 많이 내놓아야 합니다.》

론문에서는 반대칭사영접속의 공액대칭조건에 대하여 연구한다.

선행연구[1]에서는 반대칭비계량접속의 한 형태인 π －반대칭비계량접속의 공액대칭조건이 연구되였으며 선행연구[2]에서는 대칭접속들사이의 등곡률성조건이 곡률텐소르의 성질과 관련된다는 사실을 밝혔다. 선행연구[3]에서는 비계량대칭접속의 특수한 형태인 아마리－첸쪼브접속에 대하여 접속과 쌍대접속사이의 등곡률성조건이 공액대칭조건으로 새롭게 정식화되고 연구되였으며 선행연구[4]에서는 반대칭접속의 호상접속에 대한 물리적모형이 새롭게 제시되였다.

선행연구들의 결과에 기초하여 론문에서는 반대칭비계량접속의 한가지 새로운 형태인 반대칭사영접속의 공액대칭조건들을 밝힌다.

공액대칭조건은 곡선자리표망구성과 질점의 운동자리길결정에서 중요한 역할을 한다.

리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 반대칭사영접속 ∇ 의 접속결수는

$$\Gamma_{ij}^{k}=\{_{ij}^{k}\}+\psi_i\delta_j^k+(\psi_j+\varphi_j)\delta_i^k-g_{ij}\varphi^k \tag{1}$$

이고 곡률텐소르는

$$R_{ijk}{}^{l}=K_{ijk}{}^{l}+\delta_j^l\alpha_{ik}-\delta_i^l\alpha_{jk}+g_{ik}\beta_j^l-g_{jk}\beta_i^l+\delta_k^l\psi_{ij} \tag{2}$$

이다. 여기서 $\{_{ij}^{k}\}$ 는 레비－찌비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$ 의 접속결수이고 $\psi_j,\ \varphi_j$ 는 1－형식 ψ 와 π 의 성분이며 $K_{ijk}{}^{l}$ 는 레비－찌비따접속 $\overset{\circ}{\nabla}$ 에 관한 곡률텐소르이다. 그리고

$$\alpha_{ik}=\overset{\circ}{\nabla}_i(\psi_k+\varphi_k)-(\psi_i+\varphi_i)(\psi_k+\varphi_k)-g_{ik}(\psi_p+\varphi_p)\varphi^p,\ \ \beta_{ik}=\overset{\circ}{\nabla}_i\varphi_k-\varphi_i\varphi_k,\ \ \psi_{ij}=\overset{\circ}{\nabla}_i\psi_j-\overset{\circ}{\nabla}_j\psi_i. \tag{3}$$

반대칭사영접속 ∇ 의 쌍대접속 $\overset{*}{\nabla}$ 의 접속결수는 $\overset{*}{\Gamma}{}_{ij}^{k}=\{_{ij}^{k}\}-\psi_i\delta_j^k+\varphi_j\delta_i^k-g_{ij}(\psi^k+\varphi^k)$ 이고 곡률텐소르는 다음과 같다.

$$\overset{*}{R}{}_{ijk}{}^{l}=K_{ijk}{}^{l}+\delta_j^l\beta_{ik}-\delta_i^l\beta_{jk}+g_{ik}\alpha_j^l-g_{jk}\alpha_i^l-\delta_k^l\psi_{ij} \tag{4}$$

리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 접속 ∇ 의 쌍대접속 $\overset{*}{\nabla}$ 에 대하여 $\overset{*}{R}{}_{ijk}{}^{l}=R_{ijk}{}^{l}$ 이면 그것을 공

액대칭, $\overset{*}{R}_{jk} = R_{jk}$ 이면 공액릿찌대칭, $\overset{*}{P}_{ij} = P_{ij}$ 이면 공액체적대칭이라고 한다. 여기서 R_{jk} 는 릿찌텐소르, P_{ij} 는 체적곡률텐소르이다.

정리 1 리만다양체 $(M,\ g)$ 에서 반대칭사영접속 ∇ 가 공액대칭이기 위해서는 그것이 공액릿찌대칭일것이 필요하고 충분하다.

증명 식 (2), (4)로부터

$$\overset{*}{R}{}_{ijk}{}^{l} = R_{ijk}{}^{l} + \delta_i^l b_{jk} - \delta_j^l b_{ik} + g_{ik} b_j^l - g_{jk} b_i^l - 2\delta_k^l \psi_{ij},\ \ b_{ik} = \alpha_{ik} - \beta_{ik}. \tag{5}$$

식 (3)으로부터 $\psi_{ik} = b_{ik} - b_{ki}$ 이며 이 식을 $i,\ l$ 에 관하여 축약하면

$$\overset{*}{R}_{jk} = R_{jk} + nb_{jk} - g_{jk} b_i^i + 2\psi_{jk}. \tag{6}$$

식 (6)을 $j,\ k$ 에 관하여 빗대칭화하고 ψ_{jk} 를 구하면 다음과 같다.

$$\psi_{jk} = \frac{1}{n+4}\left[\left(\overset{*}{R}_{jk} - \overset{*}{R}_{kj}\right) - (R_{jk} - R_{kj})\right] \tag{7}$$

식 (7)을 식 (6)에 넣고 b_{jk} 를 구하면

$$b_{jk} = \frac{1}{n}\left\{\overset{*}{R}_{jk} - R_{jk} + g_{jk} b_i^i - \frac{2}{n+4}\left[\left(\overset{*}{R}_{jk} - \overset{*}{R}_{kj}\right) - (R_{jk} - R_{kj})\right]\right\}. \tag{8}$$

식 (7)과 (8)을 식 (5)에 넣고 정돈하면서

$$\begin{aligned} V_{ijk}{}^{l} = R_{ijk}{}^{l} - \frac{1}{n}(\delta_i^l R_{jk} - \delta_j^l R_{ik} + g_{ik} R_j^l - g_{jk} R_i^l) + \frac{1}{n(n+4)}[\delta_i^l (R_{jk} - R_{kj}) - \\ - \delta_j^l (R_{ik} - R_{ki}) + g_{ik}(R_j^l - R_{\cdot j}^{l}) - g_{jk}(R_i^l - R_{\cdot i}^{l}) + n\delta_k^l (R_{ij} - R_{ji})], \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \overset{*}{V}{}_{ijk}{}^{l} = \overset{*}{R}{}_{ijk}{}^{l} - \frac{1}{n}\left(\delta_i^l \overset{*}{R}_{jk} - \delta_j^l \overset{*}{R}_{ik} + g_{ik} \overset{*}{R}{}_j^l - g_{jk} \overset{*}{R}{}_i^l\right) + \frac{1}{n(n+4)}\left[\delta_i^l\left(\overset{*}{R}_{jk} - \overset{*}{R}_{kj}\right) - \right. \\ \left. - \delta_j^l\left(\overset{*}{R}_{ik} - \overset{*}{R}_{ki}\right) + g_{ik}\left(\overset{*}{R}{}_j^l - \overset{*}{R}{}_{\cdot j}^{l}\right) - g_{jk}\left(\overset{*}{R}{}_i^l - \overset{*}{R}{}_{\cdot i}^{l}\right) + n\delta_k^l\left(\overset{*}{R}_{ij} - \overset{*}{R}_{ji}\right)\right] \end{aligned} \tag{10}$$

라고 하면

$$\overset{*}{V}{}_{ijk}{}^{l} = V_{ijk}{}^{l}. \tag{11}$$

$\overset{*}{R}{}_{ijk}{}^{l} = R_{ijk}{}^{l}$ 이면 자명하게 $R_{jk} = \overset{*}{R}_{jk}$ 이다. 거꾸로 $R_{jk} = \overset{*}{R}_{jk}$ 이면 식 (9)−(11)로부터 $\overset{*}{R}{}_{ijk}{}^{l} = R_{ijk}{}^{l}$ 이다.(증명끝)

∇ 의 호상접속 $\overline{\nabla}$ 의 접속결수는 $\overline{\Gamma}{}_{ij}^{l} = \{{}_{ij}^{k}\} + (\psi_i + \varphi_i)\delta_j^k + \psi_j \delta_i^k - g_{ij}\varphi^k$ 이고 곡률텐소르는

$$\overline{R}{}_{ijk}{}^{l} = K_{ijk}{}^{l} + \delta_j^l \overline{\alpha}_{ik} - \delta_i^l \overline{\alpha}_{jk} + g_{ik} \overline{\beta}{}_j^l - g_{jk} \overline{\beta}{}_i^l + \delta_k^l \gamma_{ij} \tag{12}$$

이다. 여기서

$$\overline{\alpha}_{ik} = \overset{\circ}{\nabla}_i \psi_k - \psi_i \psi_k + \frac{1}{2} g_{ik} \psi_p \varphi^p,\ \overline{\beta}_{ik} = \overset{\circ}{\nabla}_i \varphi_k - \varphi_i \varphi_k + \frac{1}{2} g_{ik} \psi_p \varphi^p,\ \gamma_{ij} = \overset{\circ}{\nabla}_i (\psi_j + \varphi_j) - \overset{\circ}{\nabla}_j (\psi_i + \varphi_i).$$

그리고 $\overline{\nabla}$의 쌍대접속 $\overset{*}{\overline{\nabla}}$의 접속결수는 $\overset{*}{\overline{\Gamma}}{}^k_{ij}=\{{}^k_{ij}\}-(\psi_i+\varphi_i)\delta^k_j+\varphi_j\delta^k_i-g_{ij}\psi^k$이고 곡률텐소르는 다음과 같다.

$$\overset{*}{\overline{R}}{}_{ijk}{}^l=K_{ijk}{}^l+\delta^l_j\overline{\beta}_{ik}-\delta^l_i\overline{\beta}_{jk}+g_{ik}\overline{\alpha}^l_j-g_{jk}\overline{\alpha}^l_i-\delta^l_k\gamma_{ij} \tag{13}$$

정리 2 $n\,(n>2)$차원리만다양체 $(M,\ g)$에서 반대칭사영접속 ∇의 호상접속 $\overline{\nabla}$가 공액대칭이기 위해서는 그것이 공액릿찌대칭이고 공액체적대칭일것이 필요하고 충분하다.

증명 식 (12)와 (13)으로부터 다음의 식이 성립된다.

$$\overset{*}{\overline{R}}{}_{ijk}{}^l=\overline{R}_{ijk}{}^l+\delta^l_i\overline{b}_{jk}-\delta^l_j\overline{b}_{ik}+g_{ik}\overline{b}^l_j-g_{jk}\overline{b}^l_i-2\delta^l_k\psi_{ij}\,,\ \ \overline{b}_{ik}=\overline{\alpha}_{ik}-\overline{\beta}_{ik} \tag{14}$$

식 (14)를 $i,\ l$에 관하여 축약하면

$$\overset{*}{\overline{R}}_{jk}=\overline{R}_{jk}+n\overline{b}_{jk}-g_{jk}\overline{b}^i_i+2\gamma_{jk} \tag{15}$$

이고 $k,\ l$에 관하여 축약하면

$$\overset{*}{\overline{P}}_{jk}=\overline{P}_{ij}-2(\overline{b}_{ij}-\overline{b}_{ji})-2n\gamma_{ij}\,. \tag{16}$$

식 (15)를 $j,\ k$에 관하여 빗대칭화하고 식 (16)과 련립시켜 γ_{jk}를 구하면

$$\gamma_{jk}=-\frac{1}{2(n^2-1)}\left\{2\left[\left(\overset{*}{\overline{R}}_{jk}-\overset{*}{\overline{R}}_{kj}\right)-(\overline{R}_{jk}-\overline{R}_{kj})\right]+n\left(\overset{*}{\overline{P}}_{ij}-\overline{P}_{ij}\right)\right\} \tag{17}$$

이다. 식 (17)을 식 (15)에 넣고 $\overline{b}_{jk}$를 구하면

$$\overline{b}_{jk}=\frac{1}{n}\left(\overset{*}{\overline{R}}_{jk}-R_{jk}+g_{jk}b^i_i+\frac{1}{n^2-4}\left\{2\left[\left(\overset{*}{\overline{R}}_{jk}-\overset{*}{\overline{R}}_{kj}\right)-(\overline{R}_{jk}-\overline{R}_{kj})\right]+n\left(\overset{*}{\overline{P}}_{ij}-\overline{P}_{ij}\right)\right\}\right)$$

이고 이 식과 식 (17)을 식 (14)에 넣고 정돈하면서

$$\begin{aligned}\overset{*}{\overline{V}}{}_{ijk}{}^l=\overset{*}{\overline{R}}{}_{ijk}{}^l&-\frac{1}{n}\left(\delta^l_i\overset{*}{\overline{R}}_{jk}-\delta^l_j\overset{*}{\overline{R}}_{ik}+g_{ik}\overset{*}{\overline{R}}{}^l_j-g_{jk}\overset{*}{\overline{R}}{}^l_i\right)-\frac{1}{n(n^2-4)}\left[\delta^l_i\left(\overset{*}{\overline{R}}_{jk}-\overset{*}{\overline{R}}_{kj}\right)-\right.\\&\left.-\delta^l_j\left(\overset{*}{\overline{R}}_{ik}-\overset{*}{\overline{R}}_{ki}\right)+g_{ik}\left(\overset{*}{\overline{R}}{}^l_j-\overset{*}{R}{}^l_{\cdot j}\right)-g_{jk}\left(\overset{*}{\overline{R}}{}^l_i-\overset{*}{R}{}^l_{\cdot i}\right)+n\delta^l_k\left(\overset{*}{\overline{R}}_{ij}-\overset{*}{\overline{R}}_{ji}\right)\right]-\\&-\frac{1}{n^2-4}\left(\delta^l_i\overset{*}{\overline{P}}_{jk}-\delta^l_j\overset{*}{\overline{P}}_{ik}+g_{ik}\overset{*}{\overline{P}}{}^l_j-g_{jk}\overset{*}{\overline{P}}{}^l_i+n\delta^l_k\overset{*}{\overline{P}}_{ij}\right),\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\overline{V}_{ijk}{}^l=\overline{R}_{ijk}{}^l&-\frac{1}{n}(\delta^l_i\overline{R}_{jk}-\delta^l_j\overline{R}_{ik}+g_{ik}\overline{R}^l_j-g_{jk}\overline{R}^l_i)-\frac{1}{n(n^2-4)}[\delta^l_i(\overline{R}_{jk}-\overline{R}_{kj})-\\&-\delta^l_j(\overline{R}_{ik}-\overline{R}_{ki})+g_{ik}(\overline{R}^l_j-R^l_{\cdot j})-g_{jk}(\overline{R}^l_i-R^l_{\cdot i})+n\delta^l_k(\overline{R}_{ij}-\overline{R}_{ji})]-\\&-\frac{1}{n^2-4}(\delta^l_i\overline{P}_{jk}-\delta^l_j\overline{P}_{ik}+g_{ik}\overline{P}^l_j-g_{jk}\overline{P}^l_i+n\delta^l_k\overline{P}_{ij})\end{aligned} \tag{19}$$

라고 하면

$$\overset{*}{\overline{V}}_{ijk}{}^{l} = \overline{V}_{ijk}{}^{l}. \tag{20}$$

$\overset{*}{\overline{R}}_{ijk}{}^{l} = \overline{R}_{ijk}{}^{l}$이면 자명하게 $\overset{*}{\overline{R}}_{jk} = \overline{R}_{jk}$, $\overset{*}{\overline{P}}_{ij} = \overline{P}_{ij}$이다.

거꾸로 $\overset{*}{\overline{R}}_{jk} = \overline{R}_{jk}$이고 $\overset{*}{\overline{P}}_{ij} = \overline{P}_{ij}$이면 식 (18)－(20)으로부터 $\overset{*}{\overline{R}}_{ijk}{}^{l} = \overline{R}_{ijk}{}^{l}$이다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] **김일성**종합대학학보(자연과학), 59, 11, 3, 주체102(2013).

[2] S. B. Edgar; Quantum. Grav., 10, 2545, 1993.

[3] E. S. Stepanova; Journal of Mathematical Sciences, 147, 1, 1507, 2007.

[4] I. Schendro; Progress in Physics, 4, 47, 2007.

주체104(2015)년 8월 5일 원고접수

Conjugate Symmetry Condition of a Semi-Symmetric Projective Connection on a Riemannian Manifold

Ho Tal Yun, Kim Pang Chol

We newly discovered the conjugate symmetry conditions of a semi-symmetric projective connection and its mutual connection on a Riemannian manifold. And we studied some properties for a semi-symmetric projective connection.

Key words: semi-symmetric projective connection, conjugate symmetry