김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체106(2017)년 제63권 제8호 Vol. 63 No. 8 JUCHE106(2017).

p-라쁠라스연산자를 가진 비선형분수계미분방정식의 적분경계값문제에 대한 한가지 단조반복법

조윤경, 김광혁

최근에 p−라쁠라스연산자를 가진 비선형분수계미분방정식에 대한 경계값문제의 풀이의 존재성문제가 많이 론의되고있다.

선행연구[1]에서는 적분경계조건을 가진 한가지 4계 p−라쁠라스미분방정식의 정인풀이가 존재하기 위한 필요충분조건을 극대원리와 함께 상하풀이법을 리용하여 얻었으며 선행연구[2]에서는 선행연구[1]에서 고찰한 방정식에 대한 조건보다 약한 적분경계조건을 가진 한가지 4계 p−라쁠라스미분방정식의 정인풀이의 존재성을 론의하였다.

선행연구[3]에서는 p−라쁠라스연산자를 가진 한가지 분수계미분방정식의 적분경계값문제의 풀이의 존재성결과를 얻었으며 선행연구[4]에서는 한가지 비선형분수계미분방정식의 적분경계값문제의 정인풀이의 존재성결과를 얻었다.

론문에서는 p−라쁠라스연산자를 포함하며 적분경계조건을 가진 분수계적분미분방정식

$$\begin{cases} D_0^{\beta}(\varphi_p(D_0^{\alpha}x(t)))+a(t)f(t,\ x(t),\ (Tx)(t),\ (Sx)(t))=0,\ t\in(0,\ +\infty) \\ x(0)=x'(0)=\cdots=x^{(n-2)}(0)=0,\ D_t^{\alpha}x(0)=0 \\ \lim\limits_{t\to\infty}D_t^{\alpha-1}x(t)=\int_0^{\infty}x(s)dA(s) \end{cases},$$

$$n-1<\alpha\le n,\ n\ge 2,\ 0\le\beta\le 1,\ p>1,\ (Tx)(t)=\int_0^t K(t,\ s)x(s)ds,\ (Sx)(t)=\int_0^{\infty}H(t,\ s)x(s)ds$$

에서 조건 $0\le\beta\le 1$을 $1<\beta\le 2$로 바꾼 문제

$$\begin{cases} D_{0+}^{\beta}\varphi_p(D_{0+}^{\alpha}x(t))=f(t,\ x(t))\ \ (t\in(0,\ 1)),\ \ D_{0+}^{\alpha}x(0)=0 \\ x(1)=\int_0^1 g(s)x(s)ds,\ \ x(0)=0,\ \ \varphi_p(D_{0+}^{\alpha}x(1))=\int_0^1 h(s)\varphi_p(D_{0+}^{\alpha}x(s))ds \end{cases} \tag{1}$$

의 풀이를 구하는 한가지 방법에 대하여 론의한다. 여기서

$$\varphi_p(s):=|s|^{p-2}s,\ \ g,\ h\in C[0,\ 1],\ \ 1<\alpha,\ \beta\le 2,\ \ p>1$$

은 부아닌 함수이며 D_{0+}^{α}, D_{0+}^{β}는 리만−류빌분수계도함수이다.

$\sigma_g:=\int_0^1 s^{\alpha-1}g(s)ds,\ \ \sigma_h:=\int_0^1 s^{\beta-1}h(s)ds$ 로 약속하자.

$a,\ b,\ g,\ h\in C[0,\ 1],\ \ 0<\sigma_g,\ \sigma_h<1,\ \ \ f\in C([0,\ 1]\times\boldsymbol{R}^+,\ \ \boldsymbol{R}^+)$ 라고 가정하자.

정의 $D_{0+}^{\beta}\varphi_p(D_{0+}^{\alpha}x)\in C[0,\ 1]$, $D_{0+}^{\alpha}x\in C[0,\ 1]$이고 x가 문제 (1)을 만족시키면 x를 문제 (1)의 풀이이라고 부른다.

보조정리 1 x가 문제 (1)의 풀이이기 위해서는 $x\in C[0,\ 1]$이 적분방정식

$$x(t)=\lambda^{q-1}\int_0^1 G(t,\ s,\ \alpha)\varphi_q\left[\frac{s^{\beta-1}}{1-\sigma_h}\int_0^1\int_0^1 h(\gamma)G(\gamma,\ \tau,\ \beta)f(\tau,\ x(\tau))d\tau d\gamma+\right.$$

$$\left.+\int_0^1 G(s,\ \gamma,\ \beta)f(\gamma,\ x(\gamma))d\gamma\right]ds+\lambda^{q-1}\frac{t^{\alpha-1}}{1-\sigma_g}\int_0^1\int_0^1 G(\bar{t},\ s,\ \alpha)g(\bar{t})\cdot \tag{2}$$

$$\cdot\varphi_q\left[\frac{s^{\beta-1}}{1-\sigma_h}\int_0^1\int_0^1 h(\gamma)G(\gamma,\ \tau,\ \beta)f(\tau,\ x(\tau))d\tau d\gamma+\int_0^1 G(s,\ \gamma,\ \beta)f(\gamma,\ x(\gamma))d\gamma\right]dsd\bar{t}$$

의 풀이일것이 필요하고 충분하다. 여기서

$$G(t,\ s,\ \beta):=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\begin{cases}t^{\beta-1}(1-s)^{\beta-1}-(t-s)^{\beta-1}, & t\ge s\\ t^{\beta-1}(1-s)^{\beta-1}, & t<s\end{cases},$$

$$G(t,\ s,\ \alpha):=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\begin{cases}t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}-(t-s)^{\alpha-1}, & s\le t\\ t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}, & s>t\end{cases}.$$

보조정리 2 $1<\alpha<2$라고 할 때 다음의 사실들이 성립된다.

① $G(t,\ s,\ \alpha)$는 $[0,\ 1]\times[0,\ 1]$에서 련속이다.

② $G(t,\ s,\ \alpha)\ge 0,\ t,\ s\in[0,\ 1]$

③ $G(t,\ s,\ \alpha)\le G(s,\ s,\ \alpha),\ t,\ s\in[0,\ 1]$

④ $\min\limits_{t\in[1/4,\ 3/4]} G(t,\ s,\ \alpha)=\delta_\alpha(s)G(s,\ s,\ \alpha),\ s\in[0,\ 1]$

⑤ $$\delta_\alpha(s):=\begin{cases}1/(4s)^{\alpha-1}, & s>3/4\\ (3/4)^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}-(3/4-s)^{\alpha-1}, & s\le 1/4\\ \min\{[(3/4)^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}-(3/4-s)^{\alpha-1}],\ 1/(4s)^{\alpha-1}\}, & 1/4\le s\le 3/4\end{cases}$$

$X:=C[0,\ 1]$, $P:=\{u\in X\mid u(t)\ge 0,\ t\in[0,\ 1]\}$이라고 하자.

P가 정규추이므로 $y\ge x$이면 $\|y\|\ge\|x\|$이다.

한편 $D:=\{u\in P\mid\exists l_u,\ L_u;\ 0<l_u<1<L_u,\ l_ut^{\alpha-1}\le u(t)\le L_ut^{\alpha-1},\ t\in[0,\ 1]\}$이라고 하자.

방정식 (2)의 오른변을 $T(x)(t)$로 표시하면 방정식 (2)는 $x=Tx$, $x\in C[0,\ 1]$로 쓸수 있다.

가정 1 $x_1\le x_2\Rightarrow f(t,\ x_1)\le f(t,\ x_2)$

가정 2 $\exists m\in(0,\ 1],\ \exists r\in(0,\ 1);\ \forall(t,\ x)\in[0,\ 1]\times[0,\ +\infty),\ \forall c\in(0,\ 1),\ \eta(c):=m(c^{-r}-1)$

$$f(t,\ cx)\ge\varphi_p(c[1+\eta(c)])f(t,\ x)$$

보조정리 3 가정 2가 만족되면 $\forall c\ge 1,\ f(t,\ cx)\le\varphi_p(c[1+\eta(c^{-1})]^{-1})f(t,\ x)$가 성립된다.

보조정리 4 $T(D)\subset D$

보조정리 5 $0<c<1\Rightarrow T(cx)(t)\ge c[1+\eta(c)]T(x)(t)$, $c>1\Rightarrow T(cx)(t)\le c[1+\eta(c^{-1})]^{-1}T(x)(t)$

$Fix[T]:=\{x_*\mid x_*=Tx_*\}$라고 하자.

정리 $\forall w_0\in D,\ \exists\delta\in(0,1),\ x_*\in D;\ \lim\limits_{n\to\infty}T^n(\delta w_0)=x_*,\ x_*=Tx_*,\ Fix[T]=\{x_*\}$

증명 $w_0 \in D$ 라고 하면 보조정리 4로부터 $Tw_0 \in D$ 이므로

$$l_{w_0} t^{\alpha-1} \le w_0 \le L_{w_0} t^{\alpha-1},\quad \widetilde{l}_{w_0} t^{\alpha-1} \le Tw_0 \le \widetilde{L}_{w_0} t^{\alpha-1}$$

이다. 따라서 $\widetilde{l}_{w_0} / L_{w_0} \cdot w_0 \le Tw_0 \le \widetilde{L}_{w_0} / l_{w_0}$ 이다.

이제 $1+\eta(\delta) = 1 + m(\delta^{-r} - 1) = \widetilde{L}_{w_0} / l_{w_0}$ 인 δ 를 구하자.

$$\widetilde{L}_{w_0} / l_{w_0} = (\widetilde{L}_{w_0} - l_{w_0} + l_{w_0}) / l_{w_0} = 1 + (\widetilde{L}_{w_0} - l_{w_0}) / l_{w_0} = 1 - m + m + (\widetilde{L}_{w_0} - l_{w_0}) / l_{w_0}$$

이므로 $1 + m(\delta^{-r} - 1) = 1 - m + m\delta^{-r}$ 을 리용하면 $m\delta^{-r} = m + (\widetilde{L}_{w_0} - l_{w_0}) / l_{w_0}$ 이다.

달리 표현하면 $\delta^{-r} = (\widetilde{L}_{w_0} - l_{w_0} + l_{w_0} m) / (m l_{w_0})$ 이다.

$\delta_1 := [m l_{w_0} / (\widetilde{L}_{w_0} - l_{w_0} + l_{w_0} m)]^{1/r}$ 이라고 하자.

$[1+\eta(\delta)]^{-1} = [1 + m(\delta^{-r} - 1)]^{-1} = \widetilde{l}_{w_0} / L_{w_0}$ 인 δ 를 구하자.

$1 + m(\delta^{-r} - 1) = 1 - m + m\delta^{-r}$ 이므로

$$1 - m + m\delta^{-r} = L_{w_0} / \widetilde{l}_{w_0} = (L_{w_0} - \widetilde{l}_{w_0} + \widetilde{l}_{w_0}) / \widetilde{l}_{w_0} = 1 + (L_{w_0} - \widetilde{l}_{w_0}) / \widetilde{l}_{w_0} = 1 - m + m + (L_{w_0} - \widetilde{l}_{w_0}) / \widetilde{l}_{w_0}$$

임을 리용하면 $m\delta^{-r} = m + (L_{w_0} - \widetilde{l}_{w_0}) / \widetilde{l}_{w_0} = (m\widetilde{l}_{w_0} + L_{w_0} - \widetilde{l}_{w_0}) / \widetilde{l}_{w_0}$ 이 성립되여야 한다.

$$\delta^{-r} = (m\widetilde{l}_{w_0} + L_{w_0} - \widetilde{l}_{w_0}) / (m\widetilde{l}_{w_0}),\quad \delta^{r} = m\widetilde{l}_{w_0} / (m\widetilde{l}_{w_0} + L_{w_0} - \widetilde{l}_{w_0}),\quad \delta = [m\widetilde{l}_{w_0} / (m\widetilde{l}_{w_0} + L_{w_0} - \widetilde{l}_{w_0})]^{1/r}$$

따라서 $\delta_2 := [m\widetilde{l}_{w_0} / (m\widetilde{l}_{w_0} + L_{w_0} - \widetilde{l}_{w_0})]^{1/r}$ 이라고 놓자.

이제 $\delta := \min\{\delta_1,\ \delta_2\} = \min\{[m\widetilde{l}_{w_0} / (L_{w_0} - \widetilde{l}_{w_0} + m\widetilde{l}_{w_0})]^{1/r},\ [m l_{w_0} / (\widetilde{L}_{w_0} - l_{w_0} + m l_{w_0})]^{1/r}\}$ 이라고 하면 $\delta \in (0,\ 1)$ 이고 $[1+\eta(\delta)]^{-1} w_0 \le Tw_0 \le [1+\eta(\delta)] w_0$ 이 성립된다.

$x_0 := \delta w_0,\ y_0 := w_0 / \delta$ 이라고 하면 $x_0 \le y_0$ 이다.

반복도식 $x_n = Tx_{n-1},\ y_n = Ty_{n-1},\ n = 1, 2, \cdots$ 을 생각하면 보조정리 5에 의하여 다음의 평가식이 만족된다.

$$x_1 = Tx_0 \ge \delta[1+\eta(\delta)]Tw_0 \ge \delta[1+\eta(\delta)]Tw_0 \ge \delta w_0 = x_0$$

$$y_1 = Ty_0 = Tw_0 / \delta \le [1+\eta(\delta)]^{-1} Tw_0 / \delta \le w_0 / \delta = y_0$$

따라서 귀납적으로 다음의 관계식을 유도할수 있다.

$$x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_n \le \cdots \le y_n \le \cdots \le y_1 \le y_0$$

$Tcx \ge c[1+\eta(c)]Tx = [c(1-m) + mc^{1-r}]Tx \ge (m^{1/(1-r)} c)^{1-r} Tx,\ \ 0 < c < 1$ 이므로 $x_0 = \delta^2 y_0$ 일 때

$$x_1 = Tx_0 = T\delta^2 y_0 \ge (m^{1/(1-r)} \delta^2)^{1-r} Ty_0 = (m^{1/(1-r)} \delta^2)^{1-r} y_1$$

이므로 귀납적으로 $x_n \ge (m^{1/(1-r)} \delta^2)^{(1-r)^n} y_n,\ n = 1, 2, \cdots$ 을 얻을수 있다.

한편 임의의 $k \in \boldsymbol{N}$ 에 대하여

$$x_{n+k} - x_n \le y_n - x_n \le y_n - (m^{1/(1-r)} \delta^2)^{(1-r)^n} y_n \le (1 - (m^{1/(1-r)} \delta^2)^{(1-r)^n}) y_n \le (1 - (m^{1/(1-r)} \delta^2)^{(1-r)^n}) y_0$$

이고 추가 정규추임을 리용하면 평가식 $\| x_{n+k} - x_n \| \le \| y_n - x_n \| \le (1 - (m^{1/(1-r)} \delta^2)^{(1-r)^n}) \| y_0 \|$ 을 얻는다. 따라서 $\| x_{n+k} - x_n \|,\ \| y_n - x_n \| \to 0,\ \ n \to \infty$ 가 성립된다.

따라서 $\{x_n\}$ 은 $C[0,\ 1]$ 의 기본렬이다.

그리하여 $\exists x_* \in D;\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_*$ 이고 T 의 련속성으로부터 x_* 은 T 의 부동점이다.

한편 $\| y_n - x_* \| \le \| y_n - x_n \| + \| x_n - x_* \| \to 0,\ \ n \to \infty$ 이므로 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_*$ 이다.

따라서 $x_0 \le x_* \le y_0$ 즉 $x_* \in [x_0,\ y_0]$ 이다.

다음으로 D 에서 T 의 부동점의 유일성에 대하여 론의하자.

$x_*^1,\ x_*^2 \in D$ 가 T 의 부동점이라고 하면 $x_*^1 \ge x_*^2$ 이든가 $x_*^1 \le x_*^2$ 이다.

$t_1 := \sup\{t > 0 \mid x_*^1 \ge t x_*^2\}$ 이라고 하면 분명히 $t_1 > 0$ 이다.

이제 $t_1 \ge 1$ 임을 보자.

$0 < t_1 < 1$ 이면 $x_*^1 = Tx_*^1 \ge T(t_1 x_*^2) \ge t_1[1+\eta(t_1)]T(x_*^2) = t_1[1+\eta(t_1)]x_*^2$ 이므로 $t_1[1+\eta(t_1)] < t_1$ 이다. 이것은 모순이다. 따라서 $t_1 \ge 1$, $x_*^1 \ge x_*^2$ 이다.

마찬가지 방법으로 $x_*^1 \le x_*^2$ 임을 증명할수 있다. 따라서 $x_*^1 = x_*^2$ 이다.(증명끝)

따름 1 초기근사 x_0 을 $x_0 = \delta t^{\alpha-1}$ 으로 취할수 있다. 여기서 δ 는

$$\delta := \min\{[ml/(1-l+ml)]^{1/r},\ [m/(L-1+m)]^{1/r}\},\ l \le \min\{1,\ B\},\ L \ge \max\{1,\ A\},$$

$$A = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(1 + \frac{\| g \|}{1-\sigma_g}\right)\varphi_q\left[\frac{2\| h \|}{(1-\sigma_2)\Gamma(\beta)}\right]\cdot\varphi_q\left[\int_0^1 f(\tau,\ \tau^{\alpha-1})d\tau\right],$$

$$B := \frac{1}{1-\sigma_g}\int_{1/4}^{3/4}\int_{1/4}^{1} G(s,\ s,\ \alpha)\delta_\alpha(t)g(t)\varphi_q \cdot$$

$$\cdot\left[\frac{0.25^{\beta-1}}{1-\sigma_h}\int_{1/4}^{3/4}\int_0^1 h(\gamma)G(\gamma,\ \gamma,\ \beta)\delta_\beta(\gamma)f(\tau,\ \tau^{\alpha-1})d\tau d\gamma + \int_{1/4}^{3/4} G(\gamma,\ \gamma,\ \beta)\delta_\beta(\gamma)f(\gamma,\ \gamma^{\alpha-1})d\gamma\right]dsdt$$

따름 2 오차평가식 $\| x_* - x_n \| = O(1-K^{(1-r)^n})$, $K := m^{1/(1-r)}\delta^2$, $0 < K < 1$ 이 성립된다.

참 고 문 헌

[1] X. Zhang et al.; J. Comput. Appl. Math., 222, 2, 561, 2008.

[2] Xingqiu Zhang et al.; Article ID 862079, 23, 2010.

[3] Zhenhai Liu et al.; Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 70, 1, 2012.

[4] Min Jiang et al.; Article ID 512426, 18, 2014.

주체106(2017)년 4월 5일 원고접수

One Type of Monotone Iteration Method for a Integral Boundary Value Problem of Nonlinear Fractional Differential Equations with *p*-Laplacian Operator

Jo Yun Gyong, Kim Kwang Hyok

This paper deals with monotone iteration method for a class of *p*-Laplacian Riemanne-Liouville fractional differential equations with integral boundary condition. The aim of this paper is to determine a iteration algorithm that approximate solutions converge to local exact solution of given problem.

Key word: *p*-Laplacian operator