김일성종합대학학보 JOURNAL OF KIM IL SUNG UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체104(2015)년 제61권 제3호 Vol. 61 No. 3 JUCHE104(2015).

# 압축성점성류체흐름계산을 위한 FDV방법에서 원천항과 관련한 파라메터에 대한 연구

박명진, 한의철

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《기초과학부문들을 발전시켜야 나라의 과학기술수준을 빨리 높일수 있고 인민경제 여러 분야에서 나서는 과학기술적문제들을 원만히 풀수 있으며 과학기술을 주체성있게 발전시켜나갈수 있습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제10권 485페지)

선행연구에서는 원천항을 고려하지 않은 FDV-FVS결합도식들을 리용하여 1차원 및 2차원충격파포획에 대한 문제를 론의하였다.[1－4]

우리는 원천항까지 존재하는 가장 일반적인 경우의 FDV방법(flow field-dependent variation method)에 대한 리론적연구를 하고 2개의 FDV파라메터를 새롭게 추가하였다.

보존형식의 나비에－스톡스방정식[3]을 표시하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{F}_i}{\partial x_i}+\frac{\partial \boldsymbol{G}_i}{\partial x_i}=\boldsymbol{J} \tag{1}$$

여기서 $\boldsymbol{U}$ 는 보존변수(벡토르), $\boldsymbol{F}_i$ 와 $\boldsymbol{G}_i$ 는 각각 흐름변수(벡토르), $\boldsymbol{J}$ 는 원천항들로서 다음과 같이 표시된다.

$$\boldsymbol{U}=\begin{Bmatrix}\rho \\ \rho v_j \\ \rho E \\ \rho \boldsymbol{Y}_k\end{Bmatrix},\quad \boldsymbol{F}_i=\begin{Bmatrix}\rho v_i \\ \rho v_i v_j + p\delta_{ij} \\ \rho E v_i + p v_i \\ \rho \boldsymbol{Y}_k v_i\end{Bmatrix},\quad \boldsymbol{G}_i=\begin{Bmatrix}0 \\ -\tau_{ij} \\ -\tau_{ij}v_j - kT_{,\ i} - \sum \rho c_{pk} T D_{km} \boldsymbol{Y}_{k,\ i} \\ -\rho D_{km}\boldsymbol{Y}_{k,\ i}\end{Bmatrix},$$

$$\boldsymbol{J}=\begin{Bmatrix}0 \\ \rho f_j \\ -\sum H_k^0 \omega_k + \rho f_j v_j \\ \omega_k\end{Bmatrix}$$

우의 식들에서 $f_j=\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{Y}_k f_{kj}$ 는 질량력이고 $\boldsymbol{Y}_k$ 는 화학종, $f_{kj}$ 는 개별적종들의 질량력이다. $H_k^0$ 은 령점엔탈피이고 $\omega_k$ 는 반응비, $D_{km}$ 은 2종확산결수이다. 극초음속인 경우에는 진동과 전기적에네르기에 관한 보충적인 방정식들이 더 포함될것이다.

우와 같이 기본방정식이 주어진 경우에 FDV방법의 기본원리를 적용하여 필요한 관계식들을 유도하자.

보존변수 $\boldsymbol{U}^n$ 에 대한 테일러전개의 특수형태로서 시간에 관한 $\boldsymbol{U}$ 의 1계 및 2계도함수에 대하여 파라메터 $s_a$ 와 $s_b$ 를 도입한다. 그러면

$$\boldsymbol{U}^{n+1}=\boldsymbol{U}^{n}+\Delta t\frac{\partial \boldsymbol{U}^{n+s_a}}{\partial t}+\frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{U}^{n+s_b}}{\partial t^2}+O(\Delta t^3) \tag{2}$$

와 같고 여기서

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}^{n+s_a}}{\partial t}=\frac{\partial \boldsymbol{U}^{n}}{\partial t}+s_a\frac{\partial \Delta\boldsymbol{U}^{n+1}}{\partial t} \qquad 0\le s_a\le 1$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{U}^{n+s_b}}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 \boldsymbol{U}^{n}}{\partial t^2}+s_b\frac{\partial^2 \Delta\boldsymbol{U}^{n+1}}{\partial t^2} \qquad 0\le s_b\le 1$$

로 된다. 여기서 $\Delta\boldsymbol{U}^{n+1}=\boldsymbol{U}^{n+1}-\boldsymbol{U}^{n}$이다. 대류, 확산 그리고 확산구배야코비안과 원천항의 야코비안을 도입하면

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{U}}{\partial t^2}=-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\boldsymbol{a}_i\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\boldsymbol{b}_i\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}\right)-\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left(\boldsymbol{c}_{ij}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}\right)+\boldsymbol{d}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} \tag{3}$$

와 같다. 여기서 $\boldsymbol{a}_i=\partial\boldsymbol{F}_i/\partial\boldsymbol{U}$는 대류야코비안, $\boldsymbol{b}_i=\partial\boldsymbol{G}_i/\partial\boldsymbol{U}$는 확산야코비안, $\boldsymbol{c}_{ij}=\partial\boldsymbol{G}_i/\partial\boldsymbol{U}_j$는 확산구배야코비안, $\boldsymbol{d}=\partial\boldsymbol{J}/\partial\boldsymbol{U}$는 원천항야코비안이다.

원천항에 대한 새로운 FDV파라메터 $s_5$, $s_6$을 다음과 같이 도입하자.

$$s_a\Delta\boldsymbol{J}\Rightarrow=s_5\Delta\boldsymbol{J}$$

$$s_b\Delta\boldsymbol{J}\Rightarrow=s_6\Delta\boldsymbol{J}$$

이제 $s_5$를 1차원천항FDV파라메터, $s_6$을 2차원천항FDV파라메터라고 부르겠다.

식 (1)－(3)으로부터 다음의 식이 얻어진다.

$$\begin{aligned}&\Delta\boldsymbol{U}^{n+1}+\Delta t\left[s_1\left(\frac{\partial\boldsymbol{a}_i\Delta\boldsymbol{U}^{n+1}}{\partial x_i}\right)+s_3\left(\frac{\partial\boldsymbol{b}_i\Delta\boldsymbol{U}^{n+1}}{\partial x_i}+\frac{\partial^2\boldsymbol{c}_{ij}\Delta\boldsymbol{U}^{n+1}}{\partial x_i\partial x_j}\right)-s_5\boldsymbol{d}\Delta\boldsymbol{U}^{n+1}\right]-\\&-\frac{\Delta t^2}{2}\left\{s_2\left[\frac{\partial^2(\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j+\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{a}_j)\Delta\boldsymbol{U}^{n+1}}{\partial x_i\partial x_j}-\boldsymbol{d}\frac{\partial\boldsymbol{a}_i\Delta\boldsymbol{U}^{n+1}}{\partial x_i}\right]+s_4\left[\left(\frac{\partial^2(\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{b}_j+\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{b}_j)\Delta\boldsymbol{U}^{n+1}}{\partial x_i\partial x_j}\right)-\right.\right.\\&\left.\left.-\boldsymbol{d}\left(\frac{\partial\boldsymbol{b}_i\Delta\boldsymbol{U}^{n+1}}{\partial x_i}+\frac{\partial^2\boldsymbol{c}_{ij}\Delta\boldsymbol{U}^{n+1}}{\partial x_i\partial x_j}\right)\right]-s_6\left[\boldsymbol{d}\frac{\partial(\boldsymbol{a}_i+\boldsymbol{b}_i)\Delta\boldsymbol{U}^{n+1}}{\partial x_i}-\boldsymbol{d}^2\Delta\boldsymbol{U}^{n+1}\right]\right\}+\\&+\Delta t\left(\frac{\partial\boldsymbol{F}_i^n}{\partial x_i}+\frac{\partial\boldsymbol{G}_i^n}{\partial x_i}-\boldsymbol{J}^n\right)-\frac{\Delta t^2}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}_i+\boldsymbol{b}_i)\left(\frac{\partial\boldsymbol{F}_i^n}{\partial x_i}+\frac{\partial\boldsymbol{G}_i^n}{\partial x_i}-\boldsymbol{J}^n\right)-\right.\\&\left.-\boldsymbol{d}\left(\frac{\partial\boldsymbol{F}_i^n}{\partial x_i}+\frac{\partial\boldsymbol{G}_i^n}{\partial x_i}-\boldsymbol{J}^n\right)\right]+O(\Delta t^3)=0\end{aligned} \tag{4}$$

식에서 $s_1$부터 $s_4$는 대류 및 확산FDV파라메터들이다.[1, 2]

원천항FDV파라메터도 다른 FDV파라메터들과 류사하게 표시된다. 즉

$$\left.\begin{array}{l}s_5=\begin{cases}\min(r,\ 1), & r>\alpha,\quad \alpha\cong 0.01\\ 0, & r<\alpha,\quad Da_{\min}\ne 0\\ 1, & \qquad\quad\ \ Da_{\min}=0\end{cases}\\ s_6=0.5(1+s_5^{\eta}),\quad 0.05<\eta<0.2\end{array}\right\}. \tag{5}$$

여기서 $r=\sqrt{Da_{\max}^2-Da_{\min}^2}\Big/Da_{\min}$ 이고 $Da$ 는 담퀼러수이다. 담퀼러수는 화학반응을 동반하는 류체흐름에서 반응과 흐름마당현상사이의 관계를 나타내는 수인데 5가지 방법으로 정의할수 있다.

온도변화가 화학반응과 밀접히 련관되는것으로 하여 반응방정식들과 에네르기방정식의 매 항들은 반응과 흐름마당현상사이의 관계에 영향을 준다.

아래의 표에 담퀼러수에 대한 5가지 정의식을 주었다.[3]

표. 원천의 종류에 따르는 담퀼러수의 정의

| 구분 | 표시 | 식 | 원천 |
|---|---|---|---|
| 담퀼러수 Ⅰ | $Da_{\mathrm{I}}$ | $\frac{\omega_k L}{\rho u Y_k}$ | 질량원천(대류에 의한 질량전달) |
| 담퀼러수 Ⅱ | $Da_{\mathrm{II}}$ | $\frac{\omega_k L^2}{\rho D_{km} Y_k}$ | 질량원천(확산에 의한 질량전달) |
| 담퀼러수 Ⅲ | $Da_{\mathrm{III}}$ | $\frac{\omega_k L}{\rho u}$ | 열원천(대류에 의한 열전달) |
| 담퀼러수 Ⅳ | $Da_{\mathrm{IV}}$ | $\frac{H_k \omega_k L^2}{kT}$ | 열원천(열전도에 의한 열전달) |
| 담퀼러수 Ⅴ | $Da_{\mathrm{V}}$ | $\frac{H_k^0 \omega_k L^2}{\rho H D_{km} Y_k}$ | 열원천(확산에 의한 열전달) |

실례로 담퀼러수가 첫번째 정의식에 의해 정의되였다고 하자.

$$Da=Da_{\mathrm{I}}=\frac{\omega_k L}{\rho u Y_k}=\frac{\tau_d}{\tau_r}$$

여기서 $L$은 특성길이이고 $\tau_d$ 와 $\tau_r$ 는 각각 특성확산시간, 특성반응시간이다.

만일 반응이 매우 빠르다면 $\tau_r << \tau_d$ 이고 $Da\to\infty$ 이다. 이때를 화학적으로 평형상태라고 한다.

한편 화학적으로 랭동상태라고 할 때에는 $\tau_r >> \tau_d$ 이고 $Da\to 0$ 이다. 그 나머지 경우들에는 $0<Da<\infty$ 일것이다.

3계이상의 공간도함수를 무시하고 야코비안 $\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{b}_i$, $\boldsymbol{c}_{ij}$, $\boldsymbol{d}$ 가 매 시간걸음내에 일정하다고 가정하면 식 (4)를 다음과 같이 단순한 형식으로 표시할수 있다.

$$\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_i^n\frac{\partial}{\partial x_i}+\boldsymbol{E}_{ij}^n\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\right)\Delta\boldsymbol{U}^{n+1}=-\boldsymbol{Q}^n \tag{6}$$

여기서

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}-\Delta t s_5\boldsymbol{d}-\frac{\Delta t^2}{2}s_6\boldsymbol{d}^2,$$

$$\boldsymbol{E}_i^n=\left\{\Delta t(s_1\boldsymbol{a}_i+s_3\boldsymbol{b}_i)+\frac{\Delta t^2}{2}\left[s_6\boldsymbol{d}(\boldsymbol{a}_i+\boldsymbol{b}_i)+s_2\boldsymbol{d}\boldsymbol{a}_i+s_4\boldsymbol{d}\boldsymbol{b}_i\right]\right\}^n,$$

$$\boldsymbol{E}_{ij}^n=\left\{\Delta t s_3\boldsymbol{C}_{ij}-\frac{\Delta t^2}{2}[s_2(\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j+\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{a}_j)+s_4(\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{b}_j+\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{b}_j-\boldsymbol{d}\boldsymbol{c}_{ij})]\right\}^n,$$

$$
\boldsymbol{Q}^n = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2}\boldsymbol{d}\right)(\boldsymbol{F}_i^n + \boldsymbol{G}_i^n) + \frac{\Delta t^2}{2}(\boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{b}_i)\boldsymbol{J}^n\right] - 
$$
$$
- \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left[\frac{\Delta t^2}{2}(\boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{b}_i)(\boldsymbol{F}_i^n + \boldsymbol{G}_i^n)\right] - \left(\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2}\boldsymbol{d}\right)\boldsymbol{J}^n
$$

이고 $\boldsymbol{I}$ 는 단위행렬이다.

이상과 같이 원천항과 관련하여 2개의 새로운 FDV파라메터를 추가함으로써 각종 외력과 화학반응을 동반하는 류체흐름에 대한 수값계산을 FDV원리에 기초하여 진행할수 있는 리론적기초를 확립하였다.

## 참 고 문 헌


[1] **김일성**종합대학학보(자연과학), 58, 12, 18, 주체101(2012).

[2] 박명진, 장대욱; 기계공학, 3, 10, 주체101(2012).

[3] T. J. Chung; Computational Fluid Dynamics, Cambridge University Press, 1012, 2002.

[4] B. Andersson et al.; Computational Fluid Dynamics for Engineers, Cambridge University Press, 33～49, 2012.


주체103(2014)년 11월 5일 원고접수

# On Parameters related Source Term in FDV Method used for Compressional Viscosity Flow Calculation

*Pak Myong Jin, Han Ui Chol*


We studied on FDV method (Flow Field Dependent Variation Method) in the most general case when source terms exist and newly added two FDV parameters.

As a result, the theoretical basis about the high accuracy numerical calculation of compressional fluid flow with various body force and chemical reactions was established.


Key words: FDV method, shock wave, source term