김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제2호

거절과 리탈 및 성급한 요청의 보존유지를 가진 M/M/s/N형 대중봉사체계의 분석

명찬길, 정진

선행연구[4]에서는 거절을 가진 M/M/2/N형 대중봉사계에서 정상상태확률방정식들과 정상상태확률들, 계안에 있는 평균요청수를 구하고 거절함수들을 여러가지로 주었을 때 파라메터들의 호상관계들을 분석하였으며 선행연구[1]에서는 행렬법을 리용하여 도착에서 방해와 거절을 가지는 M/M/1/N형 대중봉사계에서 이행풀이를 구하였다.

선행연구[2]에서는 생성함수법을 리용하여 거절과 리탈을 가지는 M/M/1형 대중봉사계에 대한 가동시간분석을 진행하였으며 선행연구[5]에서는 도착에서 방해로 인한 거절과 거절한 요청들의 보존유지를 가지는 M/M/c/N형 대중봉사계에서 이행풀이와 정상상태확률을 구하고 모형에 대한 경제적분석을 진행하였다.

선행연구[6]에서는 도착에서 방해와 거절 그리고 거절한 요청의 보존유지를 가지는 M/M/1/N형 대중봉사계의 정상상태확률들의 정확한 표현식을 유도하였으며 선행연구[3]에서는 봉사기구의 고장 및 수리와 성급한 요청의 보존유지를 가진 M/M/1/N형 대중봉사계에서 봉사계의 이행상태를 수치적으로 조사하고 파라메터들이 계의 효과성지표에 미치는 영향을 여러가지 수값실례로 취급하였으며 비용함수가 최대로 되는 최량봉사세기들을 수치적으로 구하였다.

론문에서는 거절과 리탈 및 성급한 요청의 보존유지를 가진 M/M/s/N형 대중봉사체계를 설정하고 연구를 진행하였다.

1. 모형설정

s개의 봉사기구를 가진 대중봉사계에 요청들은 세기가 λ인 뽜쏭분포에 따라 도착하며 봉사기구들의 봉사시간들은 세기가 μ인 지수분포에 따른다. 대중봉사계의 용량은 $N\ (N \ge s)$이며 요청은 FCFS봉사규칙(도착순봉사규칙)에 따라 봉사를 받는다. 요청은 봉사계에 도착하여 확률 $b_i (i \ge s)$를 가지고 봉사계에 들어가거나 확률 $1-b_i\ (i \ge s)$를 가지고 거절된다. b_i는 계안에 i개의 요청이 있을 때 새로 도착한 요청이 봉사계로 들어갈 확률이다. 이때

$$b_i = 1\ (i = 0,\ \cdots,\ s-1),\ 0 < b_{i+1} \le b_i < 1\ (i \ge s)$$

이 성립한다고 하자.

모든 봉사기구들이 가동중에 있을 때 들어온 요청은 기다림줄에서 봉사를 기다린다.

매 요청은 T시간동안 봉사를 받지 못하면 $\pi (0 \le \pi \le 1)$의 확률로 계를 떠나며 확률 $1-\pi$로 봉사계에 남아있는다. 줄에서 요청들은 다음과 같은 밀도함수

$$f(t) = \alpha e^{-\alpha t}\ \ (\alpha > 0,\ t \ge 0)$$

를 가지는 우연량 T에 따라 리탈한다.

t인 순간에 계안에 n개의 요청이 있을 확률을 $P_n(t)$라고 하자.

2. 정상상태확률방정식과 정상상태확률

정리 1 정상상태확률방정식을 작성하면 다음과 같다.

$$\begin{cases} -\lambda P_0 + \mu P_1 = 0 \\ \lambda P_{k-1} - [\lambda + k\mu]P_k + (k+1)\mu P_{k+1} = 0 \ \ (0<k<s) \\ \lambda P_{k-1} - [b_s\lambda + s\mu]P_k + (s\mu + \pi\alpha)P_{k+1} = 0 \ \ (k=s) \\ b_{k-1}\lambda P_{k-1} - [b_k\lambda + s\mu + (k-s)\pi\alpha]P_k + (s\mu + \pi\alpha(k+1-s))P_{k+1} = 0 \ \ (s+1 \le k < N) \\ b_{N-1}\lambda P_{N-1} - [s\mu + (N-s)\pi\alpha]P_N = 0 \end{cases} \tag{1}$$

$$\sum_{k=0}^{N} P_K = 1 \tag{2}$$

증명 먼저 상태확률방정식을 작성하자.

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)(1-\lambda\Delta t) + \mu\Delta t P_1(t) + o(\Delta t)$$

$$P_k(t+\Delta t) = P_{k-1}(t)\lambda\Delta t + P_k(t)[1-\lambda\Delta t - k\mu\Delta t] + P_{k+1}(t)(k+1)\mu\Delta t + o(\Delta) \ \ (0<k<s)$$

$$P_k(t+\Delta t) = P_{k-1}(t)\lambda\Delta t + P_k(t)[1-b_s\lambda\Delta t - s\mu\Delta t] + P_{k+1}(t)[s\mu\Delta t + \pi\alpha\,\Delta t] + o(\Delta t) \ \ (k=s)$$

$$\begin{aligned} P_k(t+\Delta t) = {} & P_{k-1}(t)b_{k-1}\lambda\Delta t + P_k(t)[1-b_k\lambda\Delta t - s\mu\Delta t - (k-s)\pi\alpha\,\Delta t] + \\ & + P_{k+1}(t)[s\mu\Delta t + \pi\alpha(k+1-s)\Delta t] + o(\Delta t) \ \ (s+1 \le k < N) \end{aligned}$$

$$P_N(t+\Delta t) = b_{N-1}\lambda\Delta t P_{N-1}(t) + [1 - s\mu\Delta t - (N-s)\pi\alpha\Delta t]P_N(t) + o(\Delta t)$$

따라서 다음과 같은 상태확률미분방정식들이 작성된다.

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \\ \dfrac{dP_k(t)}{dt} = \lambda P_{k-1}(t) - [\lambda + k\mu]P_k(t) + (k+1)\mu P_{k+1}(t) \ \ (0<k<s) \\ \dfrac{dP_k(t)}{dt} = \lambda P_{k-1}(t) - [b_s\lambda + s\mu]P_k(t) + (s\mu + \pi\alpha)P_{k+1}(t) \ \ (k=s) \\ \dfrac{dP_k(t)}{dt} = b_{k-1}\lambda P_{k-1}(t) - [b_k\lambda + s\mu + (k-s)\pi\alpha]P_k(t) + [s\mu + \pi\alpha(k+1-s)]P_{k+1}(t) \ \ (s<k<N) \\ \dfrac{dP_N(t)}{dt} = b_{N-1}\lambda P_{N-1}(t) - [s\mu + (N-s)\pi\alpha]P_N(t) \end{cases}$$

표준조건은 다음과 같다.

$$\sum_{k=0}^{N} P_k(t) = 1$$

임의의 k에 대하여 $\lim\limits_{t\to\infty} P_k(t) = P_k$가 성립한다. 따라서 $\lim\limits_{t\to\infty} P_k'(t) = 0$이고

$$\begin{cases} -\lambda P_0 + \mu P_1 = 0 \\ \lambda P_{k-1} - [\lambda + k\mu]P_k + (k+1)\mu P_{k+1} = 0 \ \ (0<k<s) \\ \lambda P_{k-1} - [b_s\lambda + s\mu]P_k + (s\mu + \pi\alpha)P_{k+1} = 0 \ \ (k=s) \\ b_{k-1}\lambda P_{k-1} - [b_k\lambda + s\mu + (k-s)\pi\alpha]P_k + (s\mu + \pi\alpha(k+1-s))P_{k+1} = 0 \ \ (s+1 \le k < N) \\ b_{N-1}\lambda P_{N-1} - [s\mu + (N-s)\pi\alpha]P_N = 0 \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{N} P_k = 1$$

이 성립한다.(증명끝)

정리 2 정상상태확률들은 다음과 같다.

$$\begin{cases} P_k = \dfrac{\rho^k}{k!} P_0 & (1 \le k \le s) \\ P_k = \dfrac{\rho^s \lambda^{k-s} \prod_{i=0}^{k-s-1} b_{s+i}}{s! \prod_{i=1}^{k-s} (s\mu + i\pi\alpha)} P_0 & (s+1 \le k \le N) \end{cases} \tag{3}$$

여기서

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{m} \frac{\rho^k}{k!} + N! \sum_{k=s+1}^{N} \frac{\rho^s \lambda^{k-s} \prod_{i=0}^{k-s-1} b_{s+i}}{s! \prod_{i=1}^{k-s} (s\mu + i\pi\alpha)} \right]^{-1} \tag{4}$$

이다.

증명 정상상태확률방정식들을 풀면 정상상태확률은 다음과 같다.

$$\begin{cases} P_k = \dfrac{\rho^k}{k!} P_0 & (1 \le k \le s) \\ P_k = \dfrac{\rho^s \lambda^{k-s} \prod_{i=0}^{k-s-1} b_{s+i}}{s! \prod_{i=1}^{k-s} (s\mu + i\pi\alpha)} P_0 & (s+1 \le k \le N) \end{cases}$$

$\sum_{k=0}^{N} P_k = 1$ 로부터

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{m} \frac{\rho^k}{k!} + N! \sum_{k=s+1}^{N} \frac{\rho^s \lambda^{k-s} \prod_{i=0}^{k-s-1} b_{s+i}}{s! \prod_{i=1}^{k-s} (s\mu + i\pi\alpha)} \right]^{-1}$$

이다.(증명끝)

3. 계의 효과성지표

정리 3 봉사계의 효과성지표들을 구하면 다음과 같다.

① 계안에 있는 평균요청수:

$$L=\sum_{k=1}^{N}kP_k=\left[\rho\sum_{k=0}^{s-1}\frac{\rho^k}{k!}+\frac{\rho^s}{s!}\sum_{k=s+1}^{N}\frac{k\lambda^{k-s}\prod_{i=0}^{k-s-1}b_{s+i}}{\prod_{i=1}^{k-s}(s\mu+i\pi\alpha)}\right]P_0$$

② 대중봉사계에서 요청의 평균체류시간: $W=\dfrac{L}{\lambda[1-P_N]}$

③ 리탈하는 평균요청수: $H=\sum_{k=s+1}^{N}(k-s)\pi\alpha P_k$

④ 비여있는 평균봉사기구수: $M_0=\sum_{k=0}^{s-1}(s-k)\dfrac{\rho^k}{k!}P_0$

⑤ 가동하는 평균봉사기구수: $R=N-M_0$

⑥ 요청의 거절확률: $P_{거}=\dfrac{H}{\lambda}+\left[(1-b_s)P_s+\sum_{k=s+1}^{N-1}(1-b_k)P_k+P_N\right]$

⑦ 봉사받을 확률: $P_{봉}=1-P_{거}$

⑧ 리탈확률:

$$A=\frac{H}{\lambda\left[\sum_{k=0}^{s-1}P_k+\sum_{k=s}^{N-1}b_kP_k\right]}$$

참 고 문 헌

[1] S. I. Ammar, A. A. El-Sherbiny; Int. J. Comput. Math., 89, 482, 2012.
[2] S. I. Ammar et al.; Appl. Math. Modell, 37, 9223, 2013.
[3] Y. Dong-Yuh et al.; Journal of Manufacturing Systems, 44, 207, 2017.
[4] A. A. EL-Sherbiny; Journal of Mathematical Archive, 3, 7, 2745, 2012.
[5] R. Kumar; Opsearch., 50, 383, 2013.
[6] R, Kumar, S. K. Sharma; J. Oper. Res., 24, 119, 2014.

주체108(2019)년 12월 15일 원고접수

Analysis of M/M/s/N Queue with Balking, Reneging and Retention of Impatient Customers

Myong Chan Gil, Jong Jin

In this paper, we consider the M/M/s/N queue with balking, reneging and retention of impatient customers to obtain steady-state probabilities and measures of effectiveness by making steady-state probability equations.

Keywords: balking, reneging, queue