김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체104(2015)년 제61권 제6호 Vol. 61 No. 6 JUCHE104(2015).

회전가능한 3수준2차D, G－최량계획구성의 한가지 방법

림광서, 한예경

실험계획법의 최량실험배치리론에서는 련속계획들에 대한 키퍼계획, 코노계획과 같은 2차D, G－최량계획들이 이미 구성되였다. 그러나 키퍼계획은 인자의 개수가 $k=3,\ 4,\ 5$ 인 경우, 코노계획은 $k=3,\ \cdots,\ 7$ 인 경우의 련속D, G－최량계획을 구성하였을뿐이다.

아직까지도 정확한 2차D, G－최량계획을 구성하는 일반적인 방법이 해결되지 못하였으며 일부 특수한 경우들에 대하여서만 2차최량계획을 구성[3, 4]하였다.

이런 계획들은 모두 직관적표상이나 선행정보를 리용하여 먼저 시초계획을 주고 그 계획점들에 대한 반복을 주며 령점을 첨가하는 방법에 의거하고있다. 이 계획들은 물론 련속계획에 비하여 실험회수가 훨씬 적어졌으나 아직도 실험회수가 많은 결함이 있다.

선행연구[2]에서는 시초계획을 몇개의 삼각계획을 합성하고 매 실험점들에 대하여 반복을 주어 령점들을 첨가하는 방법으로 작성하여 완전2차회귀모형에 대한 D, G－최량계획을 구성하였다.

론문에서는 시초계획을 회전가능한 2차계획으로 주고 반복이 없이 령점을 첨가만 하는 방법으로 2차D, G－최량계획을 구성하였다.

다음의 완전2차회귀모형과 계획구역에 대한 정확한 D, G－최량계획을 구성하자.

$$y=\beta_0+\sum_{i=1}^{k}\beta_i x_i+\varepsilon,\quad \Lambda=\left\{(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_k):\sum x_i^2<k\right\} \tag{1}$$

시초계획으로서는 회전가능한 3수준2차계획을 주기로 한다.

선행연구[1]에서는 새롭게 회전가능한 3수준2차계획을 주었는데 필요한 몇가지 구성법만 보조정리로 간단히 언급하여둔다.

보조정리 1 직교표 $L_8(2^7)$ 에서 첫행은 빼고 수준 1을 ± 1로, 수준 2를 $\tilde{0}$ 로 놓는다.

다음 ± 1 에는 2^3 형H－계획의 렬들을 행에 놓여있는 ± 1 의 순서대로 배렬하고 $\tilde{0}$ 은 $(0,\ 0,\ 0,\ 0)^T$ 로 놓아서 그 계획을 X_1 로 하면 X_1 은 $k=3,\ \cdots,\ 7$ 인 경우의 회전가능한 3수준2차계획으로 된다.

보조정리 2 직교표 $L_{18}(2^1\times 3^7)$ 에서 첫렬을 없애고 수준 1을 ± 1로, 수준 2를 $\tilde{0}$ 로 놓는다. ± 1 에는 2^{3-1} 형 H－계획의 렬들을, $\tilde{0}$ 에는 $(0,\ 0,\ 0,\ 0)^T$ 를 대응시킨 행렬을 X_2 라고 하면 X_2 는 $k=3,\ \cdots,\ 7$ 인 경우의 3수준2차회전계획으로 된다.

보조정리 3 직교표 $L_{27}(3^{13})$ 에서 수준 1을 ± 1 로, 수준 2와 3을 $\tilde{0}$ 로 놓는다.

± 1 에는 2^{7-4} 형(또는 2^{3-1} 형)H－계획의 렬들을 대응시키고 $\tilde{0}$ 에는 8차원(또는 4차원)렬벡토르를 대응시켜 X_3 으로 표시하면 X_3 은 $k=3,\ 4,\ \cdots,\ 13$ 에 대한 3수준2차회전계획으로 된다.

X를 $n\times k$ 형3수준2차회전계획이라고 하고 n_0 을 확률측도가

$$P(0)=2/[(k+1)(k+2)] \quad (2)$$

로 되는 령점의 개수라고 하자.

이제 계획행렬 $\varepsilon(N)=\begin{pmatrix} X \\ X_0 \end{pmatrix}$을 생각하자. 여기서 X_0은 $n_0\times k$형의 령행렬이다.

정리 계획 $\varepsilon(N)$이 조건

$$\lambda_4+(k-1)\lambda_3-k\lambda_2^2>0 \quad (3)$$

을 만족시키면 $\varepsilon(N)$은 식 (1)에 대한 회전가능한 3수준2차D, G－최량계획으로 된다.

증명 계획 X가 3수준2차회전계획이기때문에 n_0개의 령점을 첨가한 계획 $\varepsilon(N)$도 역시 3수준2차회전계획으로 된다는것은 분명하다.

그러므로 $\varepsilon(N)$에 대하여 2차회전성조건

$$\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}x_{i\alpha}=\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}x_{i\alpha}x_{j\alpha}=\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}x_{i\alpha}^2x_{j\alpha}=\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}x_{i\alpha}x_{j\alpha}^2=0,$$

$$\lambda_2=\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}x_{i\alpha}^2,\ \lambda_3=\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}x_{i\alpha}^2x_{j\alpha}^2,\ \lambda_4=\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}x_{i\alpha}^4,\ \lambda_4=3\lambda_3$$

이 성립된다. 여기서 n은 X의 실험회수이고 $N=n+n_0$은 $\varepsilon(N)$에서의 실험회수이다.

따라서 그것의 정보행렬은 $$M(\varepsilon(N))=\begin{pmatrix} 1 & \lambda_2 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2 & & \\ \lambda_2 & \lambda_4 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_3 & & \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \cdots & \lambda_3 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_4 & & \\ & & & & & \lambda_2E_k & \\ & & 0 & & & & \lambda_3E_{(k+1)(k+2)/2} \end{pmatrix}$$ 와 같으며 그것의 행렬식은 $|M(\varepsilon(N))|=\lambda_3^{k(k-1)/2}\{\lambda_2^k[\lambda_4+(k-1)\lambda_3-k\lambda_2^2]\}(\lambda_4-\lambda_3)^{k-1}$과 같다.

그런데 식 (3)이 성립되므로 $\varepsilon(N)$은 불퇴화계획이다. 따라서 $\varepsilon(N)$의 분산행렬은 식 (2)를 고려하면 $$M^{-1}(\varepsilon(N))=\begin{pmatrix} a & B & & 0 \\ B^T & C & & \\ & & E_k/\lambda_2 & \\ & 0 & & E_{(k+1)(k+2)/2}/\lambda_3 \end{pmatrix}$$ 과 같이 계산된다. 여기서 $a=(k+1)(k+2)/2$, B는 $b=-(k+1)(k+2)/2$를 원소로 가지는 k차행벡토르, C는 대각선원소 $(k+1)(k+2)^2/(k+3)$, 비대각선원소 $(k+1)(k+2)^2/[2(k+3)]$을 가지는 $k\times k$형행렬이다.

$f(x)=(1,\ x_1^2,\ x_2^2,\ \cdots,\ x_k^2,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k,\ x_1x_2,\ x_1x_3,\ \cdots,\ x_{k-1}x_k)$이므로 예보값함수는

$$d(x,\ \varepsilon(N))=f(x)M^{-1}(\varepsilon(N))f^T(x)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}-\frac{(k+2)}{\lambda_2^2}\left(\sum_i x_i^2-\sum x_i^4\right).$$

그런데 $\varepsilon(N)$은 수준 $-1,\ 0,\ +1$을 가지는 3수준2차회전계획이므로 $\sum_{i=1}^{k}x_i^2=\sum_{i=1}^{k}x_i^4$이 성립된다. 즉 $\max d(x,\ \varepsilon(N))=(k+1)(k+2)/2$로 된다.(증명끝)

우리는 보조정리들에서 제시된 3수준2차회전계획 X_1, X_2, X_3 을 시초계획으로 하고 적당한 개수의 원점들을 첨가하여 D, G－최량계획들을 구성하였다.

시초계획의 실험회수를 n으로, 첨가되는 령점의 개수를 n_0 으로 표시하자.

따름 1 시초계획이 X_2 이고 $n_0 = 8$ 인 계획 $\varepsilon_2(80)$ 은 $k = 3$ 일 때 식 (1)에 대한 회전가능한 3수준2차D, G－최량계획으로 된다. 또한 시초계획을 X_3 으로 하는 n_0 =12인 계획 $\varepsilon_3(120)$ 은 식 (1)에 대한 회전가능한 3수준2차D, G－최량계획이다.

증명 첫번째 경우에 대해서만 따져보자.

사실 X_2 는 $n = 72$ 인 3수준2차회전계획이며 $n_0 = 8$ 이므로 $N = n + n_0 = 80$ 이다.

또한 $\lambda_2 = 1/3$, $\lambda_3 = 1/9$, $\lambda_4 = 1/3$ 이다.

따라서 불퇴화성조건 $\lambda_4 + (k-1)\lambda_3 - k\lambda_2^2 = 2/9 > 0$ 이 만족되며 첨가된 령점의 확률측도 역시 $P(0) = 2/((k+1)(k+2)) = 2/(4\times 5) = 1/10 = 8/80 = n_0 / N$ 을 만족시킨다.

정리의 조건들이 만족되므로 계획 $\varepsilon_2(80)$ 은 $k = 3$ 일 때의 식 (1)에 대한 D, G－최량계획이다.

두번째 경우도 같은 방법으로 따져볼수 있다.(증명끝)

$k = 4, 6, 9$ 인 경우의 최량계획에 대하여서도 보기로 하자.

따름 2 시초계획은 3수준2차계획인 X_1 이고 $n_0 = 2$ 인 계획 $\varepsilon_1(30)$ 은 $k = 4$ 일 때의 식 (1)에 대한 회전가능한 3수준2차D, G－최량계획이다.

따름 3 시초계획은 X_3 이고 $n_0 = 4$ 인 계획 $\varepsilon_3(112)$ 는 $k = 6$ 인 경우에 식 (1)에 대한 회전가능한 3수준2차D, G－최량계획이다.

따름 4 $k = 9$ 인 경우에 시초계획은 X_3 이고 $n_0 = 2$ 인 계획 $\varepsilon_3(120)$ 은 식 (1)에 대한 회전가능한 3수준2차D, G－최량계획이다.

참고문헌

[1] **김일성**종합대학학보(자연과학), 60, 1, 23, 주체103(2014).

[2] 림광서 등; 자연과학론문집 21, **김일성**종합대학출판사, 3, 1991.

[3] C. M. Anderson et al.; Journal of Statistical Panning Inference, 139, 629, 2009.

[4] A. C. Atkinson; Journal of Statistical Panning Inference, 139, 662, 2009.

주체104(2015)년 2월 5일 원고접수

On a Construction Method of the Rotatable 3-Level Second Order D, G-Optimal Design

Rim Kwang So, Han Ye Gyong

We treated a construction method of the rotatable 3-level second order D, G-optimal design on the hypersphere. Here we obtained the rotatable 3-level second order D, G-optimal designs, without repeating in initial design.

Key word: 3-level second order D, G-optimal design