김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체106(2017)년 제63권 제10호 Vol. 63 No. 10 JUCHE106(2017).

p－라쁠라스연산자를 가진 한가지 비선형분수계 미분방정식의 적분경계값문제에 대한 풀이의 유일성과 연산행렬법

박순애, 박승철

위대한 수령 **김일성**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《우리는 사회주의건설의 실천에서 나서는 긴절한 과학기술적문제들을 제때에 풀어야 하며 선진적인류가 이룩한 선진과학성과들을 끊임없이 받아들여 우리 나라의 과학을 가까운 기간에 전반적으로 세계적수준에 올려세워야 할것입니다.》(《**김일성**전집》 제27권 390페지)

p－라쁠라스연산자를 가진 분수계미분방정식에 대한 적분경계값문제는 열전도문제, 화학공학, 지하수흐름, 열탄성력학, 플라즈마력학과 같은 많은 응용들에서 제기된다.

론문에서는 최근년간 그 연구가 활발히 진행되고있는 p－라쁠라스연산자를 가진 비선형분수계미분방정식에 대한 적분경계값문제를 론의하였다.

p－라쁠라스연산자를 가진 분수계미분방정식의 풀이의 유일존재성에 대한 많은 연구결과가 얻어졌다.

선행연구[1]에서는 p－라쁠라스연산자를 가진 분수계미분방정식의 반주기경계값문제

$$\begin{cases} {}^cD_{0+}^{\beta}\varphi_p({}^cD_{0+}^{\alpha}u(t)) = f(t,\ u(t)),\ t\in(0,1) \\ u(0)=-u(1),\ {}^cD_{0+}^{\alpha}u(0) = -{}^cD_{0+}^{\alpha}u(1) \end{cases}$$

에 대한 풀이의 존재성을 론의하였다. 여기서 $0<\alpha,\ \beta\le 1,\ 1<\alpha+\beta\le 2,\ p>1$이다.

선행연구[2]에서는 선행연구[1]에서 론의한 p－라쁠라스연산자를 가진 분수계미분방정식의 반주기경계값문제에 대한 풀이의 유일성을 론의하였다.

선행연구[3]에서는 p－라쁠라스연산자를 가진 분수계미분방정식의 경계값문제

$$\begin{cases} {}^cD_{0+}^{\beta}\varphi_p({}^cD_{0+}^{\alpha}u(t)) + a(t)f(u(t)) = 0,\ \ t\in(0,\ 1) \\ u(0)=\gamma u(\xi)+\lambda \\ \varphi_p({}^cD_{0+}^{\alpha}u(0)) = (\varphi_p({}^cD_{0+}^{\alpha}u(1)))' = (\varphi_p({}^cD_{0+}^{\alpha}u(0)))'' = 0 \end{cases}$$

에 대한 정인풀이의 유일성을 론의하였다. 여기서 $0<\alpha\le 1,\ 2<\beta\le 3,\ \ p>1$이다.

선행연구[4]에서는 p－라쁠라스연산자를 가진 분수계미분방정식의 두점경계값문제

$$\begin{cases} {}^cD_{0+}^{\beta}\varphi_p({}^cD_{0+}^{\alpha}u(t)) = f_{\sigma(t)}(t,\ u(t)),\ \ t\in(0,1) \\ u(0)=\gamma u(1),\ \ {}^cD_{0+}^{\alpha}u(0) = \eta\,{}^cD_{0+}^{\alpha}u(1) \end{cases}$$

에 대한 풀이의 유일성을 론의하였다. 여기서

$$0<\alpha,\ \beta\le 1,\ 1<\alpha+\beta\le 2,\ \ p>1,\ \ 0<\gamma,\ \ \eta<1,\ \ \sigma(t):[0,\ 1]\to M=\{1,2,\cdots,\ N\}.$$

론문에서는 p－라쁠라스연산자를 가진 다음의 비선형분수계미분방정식의 적분경계값

문제의 풀이의 유일존재성과 함께 그것의 수값풀이법에 대하여 론의하였다.

$$^{c}D_{0+}^{\beta}\varphi_p({}^{c}D_{0+}^{\alpha}x(t))=f(t,\ x(t)),\ \ t\in(0,1) \tag{1}$$

$$x(0)=\int_0^1 g(s)x(s)ds,\ \ x(1)=0 \tag{2}$$

$$\varphi_p({}^{c}D_{0+}^{\alpha}x(0))=\varphi_p({}^{c}D_{0+}^{\alpha}x(1))=\int_0^1 h(s)\varphi_p({}^{c}D_{0+}^{\alpha}x(s))ds \tag{3}$$

여기서 φ_p는 $\varphi_p(s):=|s|^{p-2}s$로 정의되는 p−라쁠라스연산자이며

$$1<\alpha,\beta\le 2,\ \ p>1,\ \ g,\ h\in C[0,\ 1],\ \ h\ge 0,\ \ f\in C([0,\ 1]\times \boldsymbol{R},\ \boldsymbol{R}),$$

$$\sigma_g:=\int_0^1(1-s)g(s)ds,\ \ \sigma_h:=\int_0^1 h(s)ds,\ \ 0<\sigma_g,\sigma_h<1.$$

이 론문에서 설정된 문제는 선행연구들에서 제기한 문제들을 특수경우로 포함한다.

정의 적분경계값문제 (1)−(3)을 만족시키면서 $x\in W^{\alpha}[0,\ 1]$이고 $\varphi_p{}^{c}D_{a+}^{\alpha}x\in W^{\beta}[0,\ 1]$인 함수 $x(t)$를 적분경계값문제 (1)−(3)의 풀이라고 부른다.

$1<\delta<2$일 때 함수공간 $W^{\sigma}[0,\ 1]$을

$$W^{\sigma}[0,\ 1]:=\{u\,|\,u\in C^1[0,\ 1],\ \ {}^{c}D_{0+}^{\sigma}u\in C[0,\ 1],\ u(x)-u(0)-u'(0)x\in I_{0+}^{\sigma}(C[0,\ 1])\}$$

로, 이 공간에서의 노름을 $\|u\|_{W^{\sigma}[0,\ 1]}=\|u\|_{C[0,\ 1]}+\|u'\|_{C[0,\ 1]}+\|{}^{c}D_{0+}^{\sigma}u\|_{C[0,\ 1]}$로 정의한다.

이때 다음의 사실들이 성립된다.

보조정리 1　$1<\delta<2$일 때 함수공간 $(W^{\sigma}[0,\ 1],\|\cdot\|_{W^{\sigma}[0,\ 1]})$은 바나흐공간이다.

보조정리 2　x가 적분경계값문제 (1)−(3)의 풀이이기 위해서는 $x\in C[0,\ 1]$이 다음의 적분방정식의 풀이일것이 필요하고 충분하다.

$$\begin{aligned}x(t)=&-\int_0^1 G(t,\ s,\ \alpha)\cdot\\&\cdot\varphi_q\left(\frac{-1}{1-\sigma_h}\int_0^1\int_0^1 h(\bar{s})\,G(\bar{s},\ \tau,\ \beta)\ f(\tau,\ x(\tau))d\tau d\bar{s}-\int_0^1 G(s,\ \bar{s},\ \beta)f(\bar{s},\ x(\bar{s}))\ d\bar{s}\right)ds-\\&-\frac{1-t}{1-\sigma_g}\int_0^1\int_0^1 G(\tau,\ s,\ \alpha)g(\tau)\cdot\\&\cdot\varphi_q\left(\frac{-1}{1-\sigma_h}\int_0^1\int_0^1 h(\bar{s})\,G(\bar{s},\ \tau,\ \beta)\ f(\tau,\ x(\tau))d\tau d\bar{s}-\int_0^1 G(s,\ \bar{s},\ \beta)\ f(\bar{s},\ x(\bar{s}))d\bar{s}\right)dsd\tau\end{aligned} \tag{4}$$

다음으로 풀이의 유일성에 대하여 론의하자.

$$w:=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(1+\frac{1}{1-\sigma_g}\int_0^1 g(\tau)d\tau\right)\varphi_q\left(\frac{2}{1-\sigma_h}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1\int_0^1 h(s)\,b(\tau)d\tau ds+\int_0^1 b(\tau)d\tau\right)$$

로 표시하고 다음과 같이 가정한다.

가정 1　$0<w<1$

가정 2　$\forall x\in\boldsymbol{R},\ |f(t,\ x)|\le a(t)+b(t)|x|^{p-1},\ \ t\in[0,\ 1]$

가정 3　$\exists L>0;\forall x_1,\ x_1\in(-\delta_0,\ \delta_0),\ |f(t,\ x_1)-f(t,\ x_2)|\le L|x_1-x_2|$

$$\delta_0 := \frac{1}{\Gamma(\alpha)(1-w)}\left(1+\frac{1}{1-\sigma_g}\int_0^1 g(\tau)d\tau\right)\cdot\varphi_q\left(\frac{1}{1-\sigma_h}\frac{2}{\Gamma(\beta)}\int_0^1\int_0^1 h(s)\, a(\tau)d\tau ds+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 a(s)ds\right),$$

$$M := \frac{1}{\Gamma(\beta)}\left(\frac{1+\delta_0^{p-1}}{1-\sigma_h}\int_0^1\int_0^1 h(s)\, a(\tau)d\tau ds+\int_0^1 a(s)ds+\delta_0^{p-1}\int_0^1 b(\tau)d\tau\right)$$

$$w_* := \frac{L(p-1)M^{q-2}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)(1-\sigma_h)}\left(1+\frac{1}{1-\sigma_g}\int_0^1 g(\tau)d\tau\right)$$

라고 하자.

정리 1 $0<w_*<1$이고 가정 3이 만족되면 문제 (1)−(3)의 풀이는 유일하다.

증명 식 (4)의 오른변을 $Tx(t)$로 표시하자.

$x_1,\ x_2$를 문제 (4)의 두 풀이라고 하면 $x_1(t)=Tx_1(t),\ x_2(t)=Tx_2(t)$이다.

먼저 $|F(x,\ s,\ \beta)|$의 웃한계를 구하면

$$|F(x,\ s,\ \beta)|\le \frac{1}{1-\sigma_h}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1\int_0^1 h(s)\, a(\tau)d\tau ds+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 a(s)ds+$$
$$+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\left(\frac{1}{1-\sigma_h}\int_0^1\int_0^1 h(s)\, b(\tau)d\tau ds+\int_0^1 b(\tau)d\tau\right)\delta_0^{p-1}=M$$

이고 따라서 다음의 식들이 성립된다.

$$|\varphi_q(F(x_1,\ s,\ \beta))-\varphi_q(F(x_2,\ s,\ \beta))|\le (p-1)M^{q-2}\,|F(x_1,\ s,\ \beta)-F(x_2,\ s,\ \beta)|$$

$$|F(x_1,\ s,\ \beta)-F(x_2,\ s,\ \beta)|\le \frac{1}{1-\sigma_h}\int_0^1\int_0^1 h(\bar{s})\,|G(\bar{s},\ \tau,\ \beta)|\cdot|f(\tau,\ x_1(\tau))-f(\tau,\ x_1(\tau))|\,d\tau d\bar{s}+$$
$$+\int_0^1|G(s,\ \bar{s},\ \beta)|\cdot|f(\bar{s},\ x_1(\bar{s}))-f(\bar{s},\ x_2(\bar{s}))|\,d\bar{s}\le$$
$$\le\frac{L}{\Gamma(\beta)}\left(\frac{1}{1-\sigma_h}\int_0^1\int_0^1 h(\bar{s})d\tau d\bar{s}+1\right)\|x_1-x_2\|=\frac{L}{\Gamma(\beta)}\left(\frac{\sigma_h}{1-\sigma_h}+1\right)=\frac{L}{\Gamma(\beta)(1-\sigma_h)}\|x_1-x_2\|$$

$\|x_1\|,\ \|x_2\|\le\delta$임을 고려하면 다음의 평가식이 성립된다.

$$|Tx_1(t)-Tx_2(t)|\le\int_0^1|G(t,\ s,\ \alpha)|\cdot(\varphi_q(F(x_1,\ s,\ \beta))-\varphi_q(F(x_2,\ s,\ \beta)))ds+$$
$$+\frac{1}{1-\sigma_g}\int_0^1\int_0^1|G(\tau,\ s,\ \alpha)|\,g(\tau)\,|\varphi_q(F(x_1,\ s,\ \beta))-\varphi_q(F(x_2,\ s,\ \beta))|dsd\tau\le$$
$$\le\frac{1}{\Gamma(\alpha)}|\varphi_q(F(x_1,\ s,\ \beta))-\varphi_q(F(x_2,\ s,\ \beta))|+$$
$$+\frac{1}{1-\sigma_g}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\int_0^1 g(\tau)\varphi_q\,|(F(x_1,\ s,\ \beta))-\varphi_q(F(x_2,\ s,\ \beta))|dsd\tau\le$$
$$\le\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(1+\frac{1}{1-\sigma_g}\int_0^1 g(\tau)d\tau\right)|\varphi_q(F(x_1,\ s,\ \beta))-\varphi_q(F(x_2,\ s,\ \beta))|\le$$
$$\le\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(1+\frac{1}{1-\sigma_g}\int_0^1 g(\tau)d\tau\right)(p-1)M^{q-2}\,|F(x_1,\ s,\ \beta)-F(x_2,\ s,\ \beta)|\le$$

$$\le \frac{L(p-1)M^{q-2}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)(1-\sigma_h)}\left(1+\frac{1}{1-\sigma_g}\int_0^1 g(\tau)d\tau\right)\| x_1 - x_2 \| = w_* \| x_1 - x_2 \|$$

w_*이 $0 < w_* < 1$을 만족시키므로 $\| x_1 - x_2 \| = 0$이다.(증명끝)

$S := \{x \mid \|x(t)\| \le \delta\}$라고 하면 다음의 사실이 성립된다.

정리 2 x_*이 문제 (1)ー(3)의 풀이이라고 하면 다음의 사실이 성립된다.

$$\forall x_0 \in S, \quad \lim_{n\to\infty} T^n(x_0) = x_*$$

참고문헌

[1] T. Chen et al.; Appl. Math. Letters, 25, 11, 1671, 2012.

[2] Ruihui Huang; Article ID 743538, 6, 2013.

[3] Z. Han et al.; Electronic Journal of Differential Equations, 2012, 1, 2012.

[4] Xiangshan Kong et al.; Journal of Fractional Calculus and Applications, 5, 2, 9, 2014.

주체106(2017)년 6월 5일 원고접수

Uniqueness of Solutions for Integral Boundary Value Problems of a Nonlinear Fractional Differential Equations with *p*-Laplacian Operator and Operational Matrix Method

Pak Sun Ae, Pak Sung Chol

We consider the uniqueness of solutions for integral boundary value problems of nonlinear fractional differential equations with p-Laplacian operator. And then we discuss an operational matrix method as its approximational method for the given problem.

Key word: p-Laplacian operator