

인공위성궤도계산에서 정확도개선

최진혁, 김충진

경애하는 최고령도자 김정은동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《대학에서는 사회주의강국건설에서 나서는 리론실천적, 과학기술적문제들을 원만히 해결하며 기초과학부문을 발전시키고 첨단과학기술분야를 개척하는데 중심을 두고 과학 연구사업을 진행하여야 합니다.》

인공위성궤도를 보다 정확히 예측하는 문제는 인공위성이 발사된 때로부터 오늘까지 천체역학 및 항공우주력학에서 기본문제로 제기되고있다. 현재 인공위성들이 지구주위에 있는 우주오물들(직경이 20cm이상)과의 충돌위험을 평가하기 위하여 궤도계산정확도를 수cm, 수mm로 높이고있다.[1]

천체의 궤도계산방법에는 보통 세가지가 있다. 즉 해석적방법, 수값적방법, 반해석반수값적방법이 있다.

본문에서는 수값적방법의 한 형태인 선형다중결음법(LMM: Linear Multistep Method)을 리용하여 인공위성운동방정식을 풀어 위성운동을 예측하기 위한 한가지 새로운 계산알고리즘을 제기하였다.

1. LMM에 의한 위성궤도기본계산알고리즘

위성운동미분방정식과 초기조건식을 다음과 같이 표시할수 있다.

$$\dot{y}_i = f_i(t; y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) \quad (i=\overline{1, 6}) \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} y_1(t_0) &= y_{10} \\ y_2(t_0) &= y_{20} \\ y_3(t_0) &= y_{30} \\ y_4(t_0) &= y_{40} \\ y_5(t_0) &= y_{50} \\ y_6(t_0) &= y_{60} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

여기서

$$y_1(t), y_2(t), \dots, y_6(t) \quad (3)$$

는 미지함수로서 우리가 구하려고 하는 기본량으로 된다. 즉 매 순간 $t_j(j=\overline{1, N})$ 에 대한 $y_i(t_j)$ 를 계산해야 한다. 여기서 N 은 임의의 수, $i=\overline{1, 6}$ 이다.

다시말하여

$$y_i(t_0), y_i(t_1), y_i(t_2), \dots, y_i(t_j) \quad (i=\overline{1, 6}, j=\overline{1, N}) \quad (4)$$

를 결정해야 한다.

식 (1), (2)를 LMM에 의해 풀기 위해서는 룽계-쿠타방법에 의한 가속점계산도식과 예측자-수정자방법에 의한 계산도식을 주어야 한다.

1) 룽계-쿠타방법에 의한 가속점계산도식

간단히 4계 룽계-쿠타도식을 쓰면 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} y_{i,j+1} &= y_{ij} + \frac{1}{6}(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}) \\ k_1^{(i)} &= hf_i(t_j, y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{6j}) \\ k_2^{(i)} &= hf_i\left(t_j + \frac{h}{2}, y_{1j} + \frac{1}{2}k_1^{(1)}, y_{2j} + \frac{1}{2}k_1^{(2)}, \dots, y_{6j} + \frac{1}{2}k_1^{(6)}\right) \\ k_3^{(i)} &= hf_i\left(t_j + \frac{h}{2}, y_{1j} + \frac{1}{2}k_2^{(1)}, y_{2j} + \frac{1}{2}k_2^{(2)}, \dots, y_{6j} + \frac{1}{2}k_2^{(6)}\right) \\ k_4^{(i)} &= hf_i\left(t_j + h, y_{1j} + \frac{1}{2}k_3^{(1)}, y_{2j} + \frac{1}{2}k_3^{(2)}, \dots, y_{6j} + k_3^{(6)}\right) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

여기서 $i = \overline{1, 6}$ 은 방정식에서 변수번호이고 $t_j (j = \overline{1, N})$ 이다. h 는 적분걸음으로서 다음과 같이 선택할 수 있다.

$$h = \frac{t_j - t_0}{N} \quad (6)$$

$$t_j = t_0 + jh \quad (7)$$

룽계-쿠타방법은 초기조건 식 (2)만 주어지면 적분할 수 있는 방법이다.

또한 계산과정에 적분걸음 h 를 변화시킬 수 있는데 h 를 작게 하면 차수를 늘이지 않고도 정확도를 높일 수 있다.[3] 이 방법은 본질상 테일러합렬 전개에서 도함수가 포함되지 않도록 그 형태를 바꾼 것이기 때문에 4계계산도식은 $[t_0, t]$ 구간에서 $\varepsilon \approx h^4$ 정확도를 가진다. 그러므로 $h^4 < \varepsilon$ 이 되도록 h 를 설정해야 한다. 근사물이오차가 $O(h^4)$ 이므로 국부 자름오차는 $O(h^5)$ 이다.

2) 예측자-수정자방법에 의한 계산도식

$t_n, t_{n-1}, t_{n-2}, t_{n-3}$ 에서 값이 각각 $f_n, f_{n-1}, f_{n-2}, f_{n-3}$ 이라고 하자. 여기서 $f_n = f(t_n, y_n)$ 을 의미한다. 뉴턴보간다항식으로부터

$$P_3(t) = f_n + r \nabla f_n + \frac{1}{2} r(r+1) \nabla^2 f_n + \frac{1}{6} r(r+1)(r+2) \nabla^3 f_n$$

이다. 여기서 $r = (t - t_n)/h$ 이다.

$P_3(t)$ 를 t 에 관하여 t_n 부터 $t_{n+1} = t_n + h$ 까지 적분하는 것은 r 에 관하여 0부터 1까지 적분하는 것에 대응된다. 결과

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} P_3(t) dt = h \left(f_n + \frac{1}{2} \nabla f_n + \frac{5}{12} \nabla^2 f_n + \frac{3}{8} \nabla^3 f_n \right)$$

이다. 여기서

$$\begin{aligned}\nabla f_n &= f_n - f_{n-1} \\ \nabla^2 f_n &= f_{n-2}f_{n-1} + f_{n-2} \\ \nabla^3 f_n &= f_{n-3}f_{n-1} + 3f_{n-2} - f_{n-3}\end{aligned}$$

이다. 따라서 예측자계산도식은

$$y_{n+1}^* = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}) \quad (8)$$

이다. 비슷한 방법으로 $t_{n+1}, t_n, t_{n-1}, t_{n-2}$ 에서 $f_{n+1}, f_n, f_{n-1}, f_{n-2}$ 의 뉴턴보간다항식 $\tilde{P}_3(t)$ 를 적용하면 t_n 에서 t_{n+1} 까지의 적분은 r 에 관하여 -1 부터 0 까지 적분하는것에 대응된다.

$$\text{결과적으로 } \int_{t_n}^{t_{n+1}} \tilde{P}_3(t)dt = h \left(f_{n+1} - \frac{1}{2}\nabla f_{n+1} - \frac{1}{12}\nabla^2 f_{n+1} - \frac{1}{24}\nabla^3 f_{n+1} \right) \text{ 이다. 그러므로 최종적으로}$$

수정자계산도식은

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}) \quad (9)$$

이다. 여기서 $f_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1}^*)$ 이며 y_{n+1}^* 은 예측자와 수정자를 구별하기 위하여 편의상 쓴것이다.

$t_n, t_{n-1}, t_{n-2}, t_{n-3}$ 에서의 $f_n, f_{n-1}, f_{n-2}, f_{n-3}$ 값들은 룽게-쿠타방법에 의하여 구한다. 이에 기초하여 계산도식을 쓰면 다음과 같다.

예측자계산도식을 보면 다음과 같다.

식 (9)에서 보는바와 같이 $\dot{y}_{n+1}^* = \dot{y}_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$ 에서 \dot{y}_n 은 룽게-쿠타방법에 의해 구하는데 그 회귀방정식은 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_n &= \dot{y}_{n-1} + \frac{1}{6}(k_1^{(\dot{y}_{n-1})} + 2k_2^{(\dot{y}_{n-1})} + 2k_3^{(\dot{y}_{n-1})} + k_4^{(\dot{y}_{n-1})}) \\ \dot{y}_{n-1} &= \dot{y}_{n-2} + \frac{1}{6}(k_1^{(\dot{y}_{n-2})} + 2k_2^{(\dot{y}_{n-2})} + 2k_3^{(\dot{y}_{n-2})} + k_4^{(\dot{y}_{n-2})}) \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dot{y}_2 &= \dot{y}_1 + \frac{1}{6}(k_1^{(\dot{y}_1)} + 2k_2^{(\dot{y}_1)} + 2k_3^{(\dot{y}_1)} + k_4^{(\dot{y}_1)}) \\ \dot{y}_1 &= \dot{y}_0 + \frac{1}{6}(k_1^{(\dot{y}_0)} + 2k_2^{(\dot{y}_0)} + 2k_3^{(\dot{y}_0)} + k_4^{(\dot{y}_0)}) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

여기서

$$\left. \begin{aligned} k_1^{(\dot{y}_0)} &= hf(t_0; y_{10}, y_{20}, y_{30}, y_{40}, y_{50}, y_{60}) \\ k_2^{(\dot{y}_0)} &= hf\left(t_0 + \frac{h}{2}; y_{10} + \frac{1}{2}k_1^{(y_{10})}, y_{20} + \frac{1}{2}k_1^{(y_{20})}, \dots, y_{60} + \frac{1}{2}k_1^{(y_{60})}\right) \\ k_3^{(\dot{y}_0)} &= hf\left(t_0 + \frac{h}{2}; y_{10} + \frac{1}{2}k_2^{(y_{10})}, y_{20} + \frac{1}{2}k_2^{(y_{20})}, \dots, y_{60} + \frac{1}{2}k_2^{(y_{60})}\right) \\ k_4^{(\dot{y}_0)} &= hf(t_0 + h; y_{10} + k_3^{(y_{10})}, y_{20} + k_3^{(y_{20})}, \dots, y_{60} + k_3^{(y_{60})}) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

이다.

그리고 좀더 구체적으로 쓰면

$$\left. \begin{aligned} k_1^{(y_{10})} &= h \cdot y_{40} \\ k_2^{(y_{10})} &= h \cdot \left(y_{40} + \frac{k_1^{(y_{40})}}{2} \right) \\ k_3^{(y_{10})} &= h \cdot \left(y_{40} + \frac{k_2^{(y_{40})}}{2} \right) \\ k_4^{(y_{10})} &= h \cdot (y_{40} + k_3^{(y_{40})}) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

이다.

마찬가지로

$$\left. \begin{aligned} k_1^{(y_{20})} &= h \cdot y_{50} \\ k_2^{(y_{20})} &= h \cdot \left[y_{50} + \frac{k_1^{(y_{50})}}{2} \right] \\ k_3^{(y_{20})} &= h \cdot \left[y_{50} + \frac{k_2^{(y_{50})}}{2} \right] \\ k_4^{(y_{20})} &= h \cdot (y_{50} + k_3^{(y_{50})}) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

이다.

또한

$$\left. \begin{aligned} k_1^{(y_{30})} &= h \cdot y_{60} \\ k_2^{(y_{30})} &= h \cdot \left(y_{60} + \frac{k_1^{(y_{60})}}{2} \right) \\ k_3^{(y_{30})} &= h \cdot \left(y_{60} + \frac{k_2^{(y_{60})}}{2} \right) \\ k_4^{(y_{30})} &= h \cdot (y_{60} + k_3^{(y_{60})}) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

과 같이 쓸수 있다.

그리고

$$\left. \begin{aligned} k_1^{(y_{40})} &= hf_1(t_0; y_{10}, y_{20}, y_{30}, y_{40}, y_{50}, y_{60}) \\ k_2^{(y_{40})} &= hf_1\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_{10} + \frac{1}{2}k_1^{(y_{10})}, \dots, y_{60} + \frac{1}{2}k_1^{(y_{60})}\right) \\ k_3^{(y_{40})} &= hf_1\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_{10} + \frac{1}{2}k_2^{(y_{10})}, \dots, y_{60} + \frac{1}{2}k_2^{(y_{60})}\right) \\ k_4^{(y_{40})} &= hf_1\left(t_0 + h, y_{10} + \frac{1}{2}k_3^{(y_{10})}, \dots, y_{60} + \frac{1}{2}k_3^{(y_{60})}\right) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

이다.

또한

$$\left. \begin{aligned} k_1^{(y_{50})} &= hf_2(t_0; y_{10}, y_{20}, y_{30}, y_{40}, y_{50}, y_{60}) \\ k_2^{(y_{50})} &= hf_2\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_{10} + \frac{1}{2}k_1^{(y_{10})}, \dots, y_{60} + \frac{1}{2}k_1^{(y_{60})}\right) \\ k_3^{(y_{50})} &= hf_2\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_{10} + \frac{1}{2}k_2^{(y_{10})}, \dots, y_{60} + \frac{1}{2}k_2^{(y_{60})}\right) \\ k_4^{(y_{50})} &= hf_2\left(t_0 + h, y_{10} + \frac{1}{2}k_3^{(y_{10})}, \dots, y_{60} + \frac{1}{2}k_3^{(y_{60})}\right) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

이다.

마찬가지로

$$\left. \begin{aligned} k_1^{(y_{60})} &= hf_1(t_0; y_{10}, y_{20}, y_{30}, y_{40}, y_{50}, y_{60}) \\ k_2^{(y_{60})} &= hf_1\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_{10} + \frac{1}{2}k_1^{(y_{10})}, \dots, y_{60} + \frac{1}{2}k_1^{(y_{60})}\right) \\ k_3^{(y_{60})} &= hf_1\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_{10} + \frac{1}{2}k_2^{(y_{10})}, \dots, y_{60} + \frac{1}{2}k_2^{(y_{60})}\right) \\ k_4^{(y_{60})} &= hf_1\left(t_0 + h, y_{10} + \frac{1}{2}k_3^{(y_{10})}, \dots, y_{60} + \frac{1}{2}k_3^{(y_{60})}\right) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

이다. 여기서 f_1, f_2, f_3 은 방정식 (1)의 오른쪽함수의 x, y, z 축성분들을 표시한것으로 된다. 이와 같은 방법으로 계속해나가면

$$\left. \begin{aligned} k_1^{(\dot{y}_1)}, k_2^{(\dot{y}_1)}, k_3^{(\dot{y}_1)}, k_4^{(\dot{y}_1)} \\ k_1^{(\dot{y}_2)}, k_2^{(\dot{y}_2)}, k_3^{(\dot{y}_2)}, k_4^{(\dot{y}_2)} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ k_1^{(\dot{y}_{n-2})}, k_2^{(\dot{y}_{n-2})}, k_3^{(\dot{y}_{n-2})}, k_4^{(\dot{y}_{n-2})} \\ k_1^{(\dot{y}_{n-1})}, k_2^{(\dot{y}_{n-1})}, k_3^{(\dot{y}_{n-1})}, k_4^{(\dot{y}_{n-1})} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

을 얻을수 있다.

수정자계산도식

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_{n+1} &= \dot{y}_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

에서

$$f_{n+1} = f(t_{n+1}; y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*, y_5^*, y_6^*)$$

이다. $y_1^*(t_{n+1}), y_2^*(t_{n+1}), \dots, y_6^*(t_{n+1})$ 은 예측자와 수정자를 구별하여 표시한것이다. \dot{y}_n 과 y_n 들을 계산하는 방법은 예측자계산도식의 경우와 같다. 수정자계산도식의 국부자름오차는 $-\frac{19}{720}h^5y^{(5)}$ 이고 예측자계산도식의 국부자름오차는 $\frac{251}{720}h^5y^{(5)}$ 이다.

이 알고리즘을 도식화하면 그림과 같다.

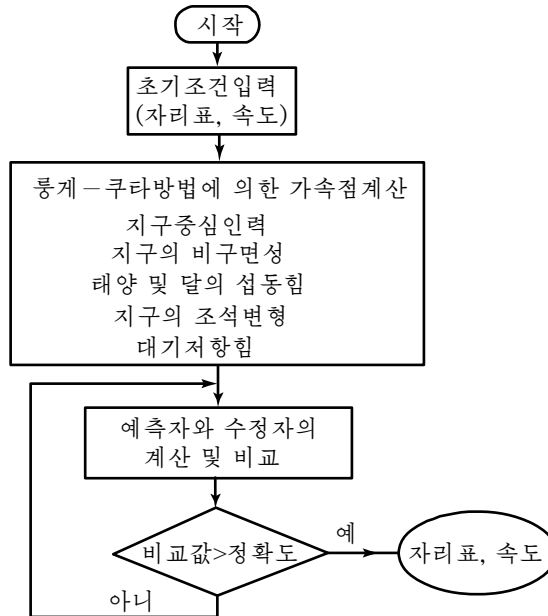


그림. 선형다중결음법에 의한 위성의 예측위치계산알고리즘

2. 결과 분석

이 방법의 계산정확도를 평가하기 위하여 해석적방법, 룽게-쿠타방법, 아담스방법에 의하여 계산된 몇개 위성들의 지심반경과 속도의 예측값과 관측값과의 비교를 진행하여 그 결과를 분석평가하였다. 적분걸음크기는 0.1s로 취하였다. 여기서 국제위성관측자료망으로부터 제공되는 인공위성의 궤도요소자료(TLE)로부터 결정된 값들을 기준값(관측값)으로 하여 비교분석하였다.[2]

다른 방법들과의 비교결과 지심거리오차가 제일 작다는것을 확인하였다.(표)

표. 예측일에 따르는 3개 위성의 계산값과 관측값의 오차

예측 날자	방법	N39026		N25732		N22803	
		r/km	$V/(\text{km}\cdot\text{s}^{-1})$	r/km	$V/(\text{km}\cdot\text{s}^{-1})$	r/km	$V/(\text{km}\cdot\text{s}^{-1})$
1	해석방법	0.001	0.005	0.004	0.003	0.041	0.007
	룽게-쿠타방법	0.001	0.004	0.015	0.001	0.255	0.006
	아담스방법	0.001	0.005	0.003	0.001	0.162	0.005
	LMM	0.000	0.003	0.002	0.000	0.031	0.003
2	해석방법	0.005	0.004	0.013	0.007	0.074	0.008
	룽게-쿠타방법	0.003	0.003	0.036	0.004	0.267	0.005
	아담스방법	0.003	0.002	0.009	0.003	0.218	0.004
	LMM	0.002	0.001	0.008	0.003	0.056	0.004
3	해석방법	0.011	0.005	0.024	0.004	0.152	0.009
	룽게-쿠타방법	0.005	0.003	0.029	0.003	0.467	0.007
	아담스방법	0.004	0.003	0.019	0.003	0.364	0.006
	LMM	0.003	0.002	0.017	0.002	0.132	0.005

예측 날자	방법	N39026		N25732		N22803	
		r/km	$V/(\text{km}\cdot\text{s}^{-1})$	r/km	$V/(\text{km}\cdot\text{s}^{-1})$	r/km	$V/(\text{km}\cdot\text{s}^{-1})$
4	해석방법	0.056	0.004	0.058	0.007	0.187	0.008
	룽게-쿠타방법	0.146	0.003	0.073	0.005	0.569	0.006
	아담스방법	0.097	0.003	0.065	0.003	0.462	0.006
	LMM	0.088	0.002	0.064	0.002	0.269	0.005
5	해석방법	0.130	0.005	0.167	0.009	0.328	0.007
	룽게-쿠타방법	0.595	0.004	0.289	0.008	0.715	0.005
	아담스방법	0.376	0.004	0.264	0.008	0.645	0.005
	LMM	0.357	0.003	0.235	0.005	0.538	0.004
6	해석방법	0.180	0.005	0.567	0.009	0.518	0.007
	룽게-쿠타방법	0.543	0.005	0.728	0.007	0.864	0.006
	아담스방법	0.407	0.004	0.698	0.004	0.798	0.006
	LMM	0.426	0.003	0.672	0.003	0.659	0.006

맺는 말

위성운동문제에서 수값적분의 한 형태인 선형다중결음법(LMM)에 의한 위성궤도계산 알고리즘을 제기하였다. 새로 제기한 선형다중결음법(LMM)에 의한 위성궤도계산방법에서는 위성에 작용하는 모든 섭동을 정확히 고려하여 수값적분을 진행하였으므로 궤도계산의 예측정확도를 높일수 있게 되었다.

참고 문헌

- [1] L. Lun et al.; Journal of Spacecraft, TT&C Technology, 24, 2, 28, 2005.
- [2] C. Hirt et al.; Journal of Geodesy, 90, 2, 105, 2015.
- [3] D. J. Peng; ACTA Astronomica Sinica, 52, 6, 495, 2011.

주제108(2019)년 3월 5일 원고접수

On the Precision Advancement in Calculating the Satellite Orbit

Choe Jin Hyok, Kim Chung Jin

In the paper we suggested the algorithm for calculating of the satellite orbit by using the LMM (Linear Multistep Method), one of the numerical integral in the satellite motion problem. Using new calculation method of the satellite orbit by LMM we can integrate the equations of satellite motion numerically by taking care of all the perturbation and advance the estimating accuracy of the orbital calculation.

Key words: satellite, LMM