김일성종합대학학보 (자연과학) 주체104(2015)년 제61권 제11호
JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE) Vol. 61 No. 11 JUCHE104(2015).

반순서바나흐공간에서 한가지 임풀스분수계미분방정식의 풀이의 유일존재성

강현심, 리미경, 림창일

임풀스분수계미분방정식은 많은 현상들을 수학적으로 모형화하는데서 매우 힘있는 수단이다. 실례로 열이동이나 신호처리, 경제와 금융분야의 많은 체계들이 임풀스분수계미분방정식에 의하여 잘 모형화된다.

선행연구[1]에서는 $0<q<1$인 경우, 선행연구[2]에서는 $1<q<2$인 경우 다음의 임풀스분수계미분방정식의 풀이의 존재성에 대하여 밝혔다.

$$\begin{cases} {}^cD_t^q u(t)=f(t,\ u(t)), & t\in J':=J\setminus\{t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_m\},\ J=[0,\ T] \\ \Delta u(t_k)=y_k, & k=1,\ 2,\ \cdots,\ m \\ u(0)=u_{0,} & y_k\in \boldsymbol{R} \end{cases}$$

여기서 $f:J\times \boldsymbol{R}\to \boldsymbol{R}$는 점적련속함수이고 $u_0\in \boldsymbol{R},\ 0=t_0<t_1<\cdots<t_m<t_{m+1}=T$이며 ${}^cD_t^q$는 q계캐푸터도함수이다.

론문에서는 반순서관계가 도입된 반순서바나흐공간에서 임풀스분수계미분방정식의 풀이의 유일존재성에 대하여 론의한다.

론문에서 연구하는 임풀스분수계미분방정식은 다음과 같다.

E는 반순서바나흐공간이고 $0<q<1$이라고 하자.

$$\begin{cases} {}^cD_t^q u(t)=f(t,\ u(t)), & t\in J':=J\setminus\{t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_m\},\ J=[0,\ T] \\ u(t_k^+)=u(t_k^-)+y_k, & k=1,\ 2,\ \cdots,\ m \\ u(0)=u_0 & \end{cases} \tag{1}$$

여기서 $u_0,\ y_k\in E,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ m$이고 넘기기 $f:J\times E\to E$는 점적련속이며

$$u(t_k^+)=\lim_{\varepsilon\to 0+}u(t_k+\varepsilon),\ u(t_k^-)=\lim_{\varepsilon\to 0-}u(t_k+\varepsilon)$$

은 각각 $u(t)$의 $t=t_k$에서의 오른쪽, 왼쪽 극한이다.

론문에서는 방정식 (1)의 풀이의 유일존재성을 밝히기 위하여 그것과 동등한 적분방정식을 얻고 부동점정리를 리용하여 그 풀이의 유일존재성을 밝혔다.

공간 E가 바나흐공간일 때 $J=[0,\ T]$에서 련속인 넘기기공간

$$C(J,\ E)=\{u:\ J\to E\ |\ u\text{는 련속}\}$$

은 노름 $\|u\|_C:=\sup_{t\in J}\|u(t)\|,\ u\in C(J,\ E)$에 관하여 바나흐공간이며 단편련속인 넘기기공간

$PC(J,\ E)=\{u:J\to E\,|\,u\in C([t_k,\ t_{k+1}],\ E),\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ m,\ u(t_k^+)$와 $u(t_k^-)$가 존재하며 $u(t_k^-)=u(t_k)\}$

도 노름 $\|u\|_{PC}:=\sup_{t\in J}\|u(t)\|,\ u\in PC(J,\ E)$에 관하여 바나흐공간이다.

정의 1 $\gamma>0$일 때 넘기기 $f:J\to E$의 γ계분수계적분은 다음과 같이 정의한다.

$$I_t^{\gamma}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^t (t-s)^{\gamma-1}f(s)ds,\quad t\in J$$

정의 2 $\gamma>0$일 때 $f:J\to E$의 γ계캐푸터분수계도함수는 다음과 같이 정의한다.

$${}^cD_t^{\gamma}f(t)=I_t^{n-\gamma}D^n f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\gamma)}\int_0^t (t-s)^{n-\gamma-1}f^{(n)}(s)\,ds,\quad t\in J,\ n-1\le\gamma<n$$

특히 $0<\gamma<1$이면 ${}^cD_t^{\gamma}f(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\int_0^t (t-s)^{-\gamma}f'(s)ds$이다.

이때 다음의 사실들이 성립된다.

i) 임의의 상수 K에 대하여 ${}^cD_t^{\gamma}K=0$이다.

ii) ${}^cD_t^{\gamma}I_t^{\gamma}f(t)=f(t),\ f\in C(J,\ E),\ 0<\gamma<1$

iii) $I_t^{\gamma}\,{}^cD_t^{\gamma}f(t)=f(t)-f(0),\ f\in C(J,\ E),\ 0<\gamma<1$

정리 1 [3] 완비거리공간 $(E,\ d)$에 반순서관계 $\le$가 정의되여 임의의 $x,\ y\in E$에 대하여 x와 y의 상계나 하계가 존재한다고 하자.

넘기기 $F:E\to E$가 비감소넘기기이고 다음의 가정들이 성립된다고 하자.

i) 어떤 상수 $k\in(0,\ 1)$이 있어서 $\forall x,\ y\in E\ (x\ge y)$, $d(Fx,\ Fy)\le k\cdot d(x,\ y)$.

ii) $\exists x_0\in E,\ x_0\le Fx_0$

iii) E의 임의의 증가렬 $\{x_n\}$이 x로 수렴하면 $x_n\le x,\ \forall n\in\boldsymbol{N}$이다.

그러면 넘기기 F는 E에서 유일한 부동점 x^*을 가지며 임의의 $x\in E$에 대하여 반복렬 $\{f^n(x)\}$는 부동점 x^*로 수렴한다.

정의 3 넘기기 $u\in PC(J,\ E)$가 방정식 (1)을 만족시키면 u를 방정식 (1)의 풀이라고 부른다.

임풀스분수계미분방정식 (1)을 풀기 위하여 다음의 사실을 강조한다.

보조정리 $q\in(0,\ 1)$이고 $h:J\to E$가 련속넘기기이면 $u\in C(J,\ E)$가 분수계미분방정식 $\begin{cases}{}^cD_t^q u(t)=h(t), & t\in J\\ u(a)=u_0\end{cases}$ 의 풀이이기 위하여서는 분수계적분방정식

$$u(t)=u_0-\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^a (a-s)^{q-1}h(s)\,ds+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}h(s)\,ds,\quad t\in J$$

의 풀이일것이 필요하고 충분하다. 여기서 $a>0$이다.

이 보조정리에 의하여 론문에서 중요하게 쓰이는 다음의 정리가 얻어진다.

정리 2 $q\in(0,\ 1)$이고 $h\in C(J,\ E)$일 때 $u\in PC(J,\ E)$가 임풀스분수계미분방정식

$$\begin{cases}{}^cD_t^q u(t)=h(t), & t\in J'\\ \Delta u(t_k)=y_k, & k=1,\ 2,\ \cdots,\ m\\ u(0)=u_0\end{cases}\tag{2}$$

의 풀이이기 위하여서는 u가 다음의 분수계적분방정식의 풀이일것이 필요하고 충분하다.

$$u(t)=u_0+\sum_{i=1}^{k} y_i+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}h(s)\,ds,\ \ t\in(t_k,\ t_{k+1}] \tag{3}$$

증명 먼저 넘기기 $u\in PC(J,\ E)$가 방정식 (2)의 풀이라고 하자.

그러면 $t\in[0,\ t_1]$일 때 $u(t)$는 분수계미분방정식 $\begin{cases} {}^cD_t^q u(t)=h(t), & t\in[0,\ t_1] \\ u(0)=u_0 \end{cases}$의 풀이이므로 보조정리에 의하여 $u(t)=u_0+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}h(s)\,ds,\ t\in[0,\ t_1]$이다.

또한 $t\in(t_1,\ t_2]$일 때 $u(t)$는 분수계미분방정식

$${}^cD_t^q u(t)=h(t)\ \ (t\in[0,\ t_2)\setminus\{t_1\}),\ \ u(t_1^+)=u(t_1^-)+y_1=u_0+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}h(s)\,ds+y_1$$

의 풀이이므로 $u(t)=u_0+y_1+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}h(s)\,ds,\ t\in(t_1,\ t_2]$이다.

마찬가지방법으로 $t\in(t_k,\ t_{k+1}]$일 때 $u(t)$는

$$u(t)=u_0+y_1+y_2+\cdots+y_k+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}h(s)\,ds,\ \ t\in(t_k,\ t_{k+1}]$$

이므로 결과 $u(t)$는 방정식 (3)의 풀이로 된다. 거꾸로 $u(t)$가 방정식 (3)의 풀이라면 $t\in[0,\ t_1]$에서 $u(0)=u_0$이고 ${}^cD_t^q K=0$, ${}^cD_t^q I_t^q f(t)=f(t)$이므로

$${}^cD_t^q u(t)={}^cD_t^q(u_0+I_t^q h(t))=h(t),\ t\in(0,\ t_1].$$

$t\in(t_k,\ t_{k+1}]$일 때에도 우에서와 마찬가지로 다음과 같다.

$$\begin{cases} {}^cD_t^q u(t)={}^cD_t^q(u_0+y_1+y_2+\cdots+y_k+I_t^q h(t))=h(t), & t\in(t_k,\ t_{k+1}] \\ u(t_k^+)=u_0+y_1+y_2+\cdots+y_k+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^{t_k}(t_k-s)^{q-1}h(s)\,ds=u(t_k^-)+y_k \end{cases}$$

따라서 $u(t)$는 방정식 (2)의 풀이로 된다.(증명끝)

바로 이 정리에 의하여 임풀스분수계미분방정식 (1)의 풀이의 유일존재성이 밝혀진다.

방정식 (1)에 대하여 다음의 가정들을 리용하자.

바나흐공간 E에 반순서관계 $\le$가 정의되고 다음의 성질들을 만족시킨다고 하자.

(E1) 공간 E의 임의의 증가렬 $\{x_n\}$이 x로 수렴하면 $x_n\le x,\ \forall n\in \boldsymbol{N}$이다.

(E2) $\forall x,\ y\in E,\ x$와 y의 상계나 하계가 존재한다.

또한 임풀스분수계미분방정식 (1)에 대하여 다음의 가정들을 리용하자.

(F1) 넘기기 $f: J\times E\to E$는 점적련속이다. 다시말하여 $\forall u\in PC(J,\ E),\ f(\cdot,\ u(\cdot))$은 u에 관하여 련속이다.

(F2) $\exists q_1\in(0,\ q),\ \|f(t,\ u)\|\le m(t)\cdot\|u\|,\ \forall u\in E$인 함수 $m(t)\in L^{1/q_1}(J,\ \boldsymbol{R})$가 존재한다.

(F3) $\exists q_2\in(0,\ q),\ \exists h(t)\in L^{1/q_2}(J,\ \boldsymbol{R}),\ \forall u,\ v\in E\ (u\ge v),\ \ \|f(t,\ u)-f(t,\ v)\|\le h(t)\cdot\|u-v\|$

(F4) 넘기기 $f: J\times E\to E$는 u에 관하여 비감소이다. 즉

$$\forall t\in J,\ \forall u,\ v\in E,\ \ u\ge v\Rightarrow f(t,\ u)\ge f(t,\ v).$$

표기를 간단히 하기 위하여 $\beta=(q-1)/(1-q_1)$, $\alpha=(q-1)/(1-q_2)$ 로 약속한다.

정의 4 넘기기 $u_* \in PC(J,\ E)$ 가 부등식 $\begin{cases} {}^cD_t^q u_*(t) \le f(t,\ u_*(t)), & t\in J' \\ \Delta u_*(t_k) \le y_k, & k=1,\ 2,\ \cdots,\ m \\ u_*(0)\le u_0 \end{cases}$ 을 만족시키면 u_* 을 임풀스분수계미분방정식 (1)의 하풀이라고 부른다.

정리 3 공간 E 가 반순서바나흐공간으로서 성질 (E1), (E2)를 만족시킨다고 하자. 가정 (F1)－(F4)가 성립되고 $\dfrac{\|h\|_{L^{1/q_2}(J)}\cdot T^{(1+\alpha)(1-q_2)}}{\Gamma(q)\,(1+\alpha)^{1-q_2}}<1$ 이며 임풀스분수계미분방정식 (1)의 하풀이 $u_* \in PC(J,\ E)$ 가 존재하면 방정식 (1)은 $PC(J,\ E)$ 에서 유일한 풀이를 가진다.

그리고 $v_0(t)=u_0+\sum_{i=1}^{k} y_i,\ t\in(t_k,\ t_{k+1}]$,

$$v_n(t)=v_0(t)+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1} f(s,\ v_{n-1}(s))ds,\ t\in J,\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

은 풀이에로 수렴한다.

증명 넘기기 $F: PC(J,\ E)\to PC(J,\ E)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$(Fu)(t)=u_0+\sum_{0<t_k<t} y_k+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1} f(s,\ u(s))ds,\ \ t\in J$$

이때 $F: PC(J,\ E)\to PC(J,\ E)$ 임을 증명하자.

우선 $t\in[0,\ t_1]$ 일 때 $\forall u\in PC([0,\ t_1],\ E),\ Fu\in C([0,\ t_1],\ E)$ 임을 증명할수 있다. 그것은 가정 (F2)에 의하여 $\forall\delta>0$,

$$\|(Fu)(t+\delta)-(Fu)(t)\|\le\frac{\|u\|_{PC}}{\Gamma(q)}\left[\int_0^t |(t+\delta-s)^{q-1}-(t-s)^{q-1}|\cdot m(s)ds+\int_t^{t+\delta}(t+\delta-s)^{q-1}\cdot m(s)ds\right]$$

이고 휠더의 부등식과 가정 (F1)에 의하여

$$\|(Fu)(t+\delta)-(Fu)(t)\|\le\frac{3\delta^{(1+\beta)(1-q_1)}\|m\|_{L^{1/q_1}(J)}\cdot\|u\|_{PC}}{\Gamma(q)(1+\beta)^{1-q_1}}$$

이기때문에 $\delta\to 0$ 이면 $\|(Fu)(t+\delta)-(Fu)(t)\|\to 0$ 이므로 $Fu\in C([0,\ t_1],\ E)$ 이다.

또한 $t\in(t_k,\ t_{k+1}],\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ m$ 일 때 $\forall u\in C([t_k,\ t_{k+1}],\ E),\ Fu\in C([t_k,\ t_{k+1}],\ E)$ 임을 증명하자.

우와 마찬가지로 $\forall\delta>0,\ \ \|(Fu)(t+\delta)-(Fu)(t)\|\le\dfrac{3\delta^{(1+\beta)(1-q_1)}\|m\|_{L^{1/q_1}(J)}\cdot\|u\|_{PC}}{\Gamma(q)(1+\beta)^{1-q_1}}$ 이므로 $Fu\in C([t_k,\ t_{k+1}],\ E)$ 이다. 따라서 $Fu\in PC(J,\ E)$ 이다.

다음으로 넘기기 F 가 비감소넘기기임을 증명하자.

가정 (F4)에 의하여 $\forall u,\ v\in E(u\ge v),\ \forall t\in J$,

$$(Fu)(t)=u_0+\sum_{0<t_k<t} y_k+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1} f(s,\ u(s))ds\ge u_0+\sum_{0<t_k<t} y_k+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1} f(s,\ v(s))ds=(Fv)(t)$$

이므로 $Fu \ge Fv$ 이고 따라서 넘기기 F 는 비감소넘기기이다.

다음으로 $\forall u,\ v \in E\ (u \ge v)$, 가정 (F3)에 의하여

$$\| (Fu)(t) - (Fv)(t) \| = \frac{1}{\Gamma(q)} \left\| \int_0^t (t-s)^{q-1} [f(s,\ u(s)) - f(s,\ v(s))] ds \right\| \le \frac{\| h \|_{L^{1/q_2}(J)} \cdot T^{(1+\alpha)(1-q_2)}}{\Gamma(q)(1+\alpha)^{1-q_2}} \| u - v \|_{PC}$$

이므로 넘기기 F 는 정리 1의 가정 i)을 만족시킨다.

끝으로 $u_* \le Fu_*$ 임을 증명하자.

$\forall t \in [0,\ t_1],\ u_* \in C([0,\ t_1],\ E)$ 이므로

$$u_*(t) = I_t^q\ {}^cD_t^q u_*(t) + u_*(0) \le I_t^q f(t,\ u_*(t)) + u_0 = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s,\ u_*(s))\, ds + u_0 = (Fu_*)(t),$$

$\forall t \in (t_1,\ t_2],\ u_* \in C([0,\ t_1],\ E) \bigcap C((t_1,\ t_2],\ E)$ 이므로 $\beta(t) = \begin{cases} u_*(t), & t \in [0,\ t_1] \\ u_*(t) - \Delta u_*(t_1), & t \in (t_1,\ t_2] \end{cases}$ 로 정의하면 $\beta(t) \in C([0,\ t_2],\ E)$ 이다. 따라서

$$u_*(t) = \beta(t) + \Delta u_*(t_1) = I_t^q\ {}^cD_t^q \beta(t) + \beta(0) + \Delta u_*(t_1) = I_t^q\ {}^cD_t^q u_*(t) + u_*(0) + \Delta u_*(t_1) \le$$

$$\le I_t^q f(t,\ u_*(t)) + u_0 + y_1 = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s,\ u_*(s)) ds + u_0 + y_1 = (Fu_*)(t).$$

마찬가지로 $\forall t \in (t_k,\ t_{k+1}],\ u_* \in C([0,\ t_1],\ E) \bigcap C((t_1,\ t_2],\ E) \bigcap \cdots \bigcap C((t_k,\ t_{k+1}],\ E)$ 이므로

$$\beta(t) = \begin{cases} u_*(t), & t \in [0,\ t_1] \\ u_*(t) - \Delta u_*(t_1), & t \in (t_1,\ t_2] \\ u_*(t) - \Delta u_*(t_1) - \Delta u_*(t_2), & t \in (t_2,\ t_3] \\ \vdots & \\ u_*(t) - \Delta u_*(t_1) - \cdots - \Delta u_*(t_k), & t \in (t_k,\ t_{k+1}] \end{cases}$$

로 정의하면 $\beta(t) \in C([0,\ t_{k+1}],\ E)$ 이다.

$$u_*(t) = \beta(t) + \Delta u_*(t_1) + \cdots + \Delta u_*(t_k) = I_t^q\ {}^cD_t^q \beta(t) + \beta(0) + \Delta u_*(t_1) + \cdots + \Delta u_*(t_k) \le$$

$$\le \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s,\ u_*(s)) ds + u_0 + y_1 + \cdots + y_k = (Fu_*)(t)$$

이므로 결국 $u_* \le Fu_*$ 이다.

따라서 정리 1의 가정 ii)를 만족시키며 공간 E가 성질 (E1)을 만족시키므로 정리 1의 가정 iii)도 만족된다.

그러므로 정리 1에 의하여 넘기기 F 는 $PC(J,\ E)$ 에서 유일한 부동점 u^* 을 가지며 $\forall v_0 \in E$, 반복렬 $\{F^n(v_0)\}$ 은 부동점 u^* 로 수렴한다. 따라서 방정식 (1)은 $PC(J,\ E)$ 에서 유일한 풀이 u^* 을 가지며 $v_0(t) = u_0 + \sum_{i=1}^k y_i,\ t \in (t_k,\ t_{k+1}]$,

$$v_n(t) = v_0(t) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s,\ v_{n-1}(s)) ds,\ t \in J,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

은 풀이 u^* 에로 수렴한다.(증명끝)

실례
$$\begin{cases} {}^cD_t^{1/2}x_n(t)=\dfrac{3x_n(t)+x_{n+1}(t)}{(1+3e^t)\,e^{2t}}, & t\in[0,\ 1]/\{1/2\} \\ x_n(0)=0 \\ x_n\left(\dfrac{1^+}{2}\right)=x_n\left(\dfrac{1^-}{2}\right)+\dfrac{1}{2^n}, & n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots \end{cases} \tag{4}$$

공간 $E=l^1=\left\{x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots)\,\middle|\,\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|<\infty\right\}$ 는 노름 $\|x\|=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|,\ x\in E$ 에 관하여 바나흐공간으로 된다. 또한 반순서관계 $\le$를 $u,\ v\in E,\ u\ge v\Leftrightarrow u_n\ge v_n,\ n=1,\ 2,\ \cdots$ 과 같이 정의한다.

그러면 이때 공간 E 는 성질 (E1)과 (E2)를 동시에 만족시킨다.

넘기기 $f:[0,\ 1]\times E\to E$ 를

$$f(t,\ x)=(f_1(t,\ x),\ f_2(t,\ x),\ \cdots,\ f_n(t,\ x),\ \cdots),\quad f_n(t,\ x)=\frac{3x_n+x_{n+1}}{(1+3e^t)e^{2t}},\ t\in[0,\ 1],\ x\in E \tag{5}$$

로 정의하고 $y_1=(1/2,\ 1/2^2,\ 1/2^3,\ \cdots,\ 1/2^n,\ \cdots)\in E$ 로 표시하자.

이때 방정식 (4)는 $\begin{cases} {}^cD_t^{1/2}x(t)=f(t,\ x(t)),\ \ t\in[0,\ 1]/\{1/2\} \\ x_n\left(\dfrac{1^+}{2}\right)=x_n\left(\dfrac{1^-}{2}\right)+y_1 \\ x(0)=0 \end{cases}$ 과 같이 표시된다.

$$\forall u\in E,\ \forall t\in[0,\ 1],\quad \|f(t,\ u)\|_{l^1}=\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(t,\ u)|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|3u_n+u_{n+1}|}{(1+3e^t)e^{2t}}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3|u_n|+|u_{n+1}|}{(1+3e^t)e^{2t}}\le\frac{4\|u\|_{l^1}}{(1+3e^t)e^{2t}}\le\frac{1}{e^{2t}}\|u\|_{l^1}$$

이고 $m(t)=1/e^{2t}\in L^3[0,\ 1]$이다. 또한 $\forall t\in[0,\ 1],\ \forall u,\ v\in E$,

$$u\ge v\Rightarrow u_n\ge v_n,\ n=1,\ 2,\ \cdots\Rightarrow f_n(t,\ u)=\frac{3u_n+u_{n+1}}{(1+3e^t)e^{2t}}\ge\frac{3v_n+v_{n+1}}{(1+3e^t)e^{2t}}=f_n(t,\ v)$$

이고 따라서 넘기기 $f:[0,\ 1]\times E\to E$ 는 u 에 관하여 증가이다.

한편 $\forall t\in[0,\ 1],\ \forall u,\ v\in E$, $u\ge v\Rightarrow\|f(t,\ u)-f(t,\ v)\|_{l^1}\le4\|u-v\|_{l^1}/[(1+3e^t)e^{2t}]\le\|u-v\|_{l^1}/e^{2t}$ 이고 $h(t)=1/e^{2t}\in L^3[0,\ 1]$ 이며 $\|h\|_{L^3([0,\ 1])}\le1/6^{-1/3}$ 이다. 그러면 $q=1/2$, $q_1=q_2=1/3$, $\alpha=\beta=-3/4$, $\|h\|_{L^3([0,\ 1])}\le1/6^{-1/3}$ 이므로 $\dfrac{\|h\|_{L^{1/q_2}(J)}\cdot T^{(1+\alpha)(1-q_2)}}{\Gamma(q)(1+\alpha)^{1-q_2}}\le\dfrac{6^{-1/3}}{\sqrt{\pi}\cdot(1/4)^{2/3}}<1$ 이다.

끝으로 $u_*(t)=(0,\ 0,\ \cdots)\in E$ 는 방정식 (4)의 하풀이로 된다. 따라서 정리 3에 의하여 방정식 (4)는 $PC(J,\ E)$ 에서 유일한 풀이를 가지며 또한 반복렬

$$v^0=\begin{cases}(0,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ \cdots), & 0\le t\le1/2 \\ y_1, & 1/2<t\le1\end{cases},\quad v^m=(v_1^m,\ v_2^m,\ \cdots,\ v_n^m,\ \cdots),$$

$$v_n^m(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^t\frac{3v_n^{m-1}(s)+v_{n+1}^{m-1}(s)}{(1+3e^t)e^{2t}\sqrt{t-s}}ds, & t\in\left[0,\ \dfrac{1}{2}\right] \\ \dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^t\frac{3v_n^{m-1}(s)+v_{n+1}^{m-1}(s)}{(1+3e^t)e^{2t}\sqrt{t-s}}ds, & t\in\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right]\end{cases},\quad m=1,\ 2,\ \cdots$$

은 풀이로 수렴한다.

참 고 문 헌

[1] M. Feckan et al.; Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., 17, 3050, 2012.
[2] Jinrong Wang et al.; Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., 17, 4384, 2012.
[3] E. G. Bajlekova; Fractional Evolution Equations in Banach Spaces, Eindhoven University of Technology, 23～89, 2001.

주체104(2015)년 7월 5일 원고접수

Existence and Uniqueness of the Solutions for an Impulsive Fractional Differential Equation in Banach Space with Partial Order

Kang Hyon Sim, Ri Mi Gyong and *Rim Chang Il*

We considered the existence and uniqueness of the solutions for the following impulsive fractional differential equation:

$$\begin{cases} {}^cD_t^q u(t) = f(t,\ u(t)), & t \in J' := J \setminus \{t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_m\},\ J=[0,\ T] \\ u(t_k^+) = u(t_k^-) + y_k, & k=1,\ 2,\ \cdots,\ m \\ u(0)=u_0 \end{cases}$$

in Banach space with partial order by using the fixed point theorem of the contractive operator in the complete metric space with partial order and an example as its application.

Key words: impulsive equation, fractional differential equation, Banach contraction principle