김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체104(2015)년 제61권 제6호 Vol. 61 No. 6 JUCHE104(2015).

에네르기최소화에 의한 한가지 화상분해방법

허명송, 리예성

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《오늘 과학과 기술은 매우 빠른 속도로 발전하고있으며 사회발전에서 과학기술이 노는 역할은 더욱더 커지고있습니다. 현시대의 요구에 맞게 과학기술을 빨리 발전시켜야 우리의 자립적민족경제의 위력을 강화하고 사회주의건설을 더욱 다그칠수 있으며 사회주의의 우월성을 전면적으로 높이 발양시킬수 있습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제18권 441페지)

론문에서는 정화상복원을 실현하는데서 본질적인 역할을 노는 정화상분해의 한가지 방법에 대하여 론의하였다.

화상복원은 주어진 화상에서 부분적으로 잃어진 정보를 복원하거나 주어진 화상에 들어있는 불필요한 대상을 제거하는데 목적을 두고있으며 화상복원의 결과로 얻어지는 화상은 인위적인 부분이 없는 화상으로 되여야 한다.

화상복원방법에는 크게 세가지 즉 화상의 구조정보를 리용하는 방법[6], 화상의 문양정보를 리용하는 방법[2, 4, 5], 화상의 구조정보와 문양정보를 동시에 리용하는 방법[3]이 있다.

론문에서는 선행연구[4]에서 리용한 화상분해모형들과 다른 한가지 화상분해의 수학적모형을 제기하였다. 다시말하여 잡음제거에 자주 리용되는 수학적모형인 점성풀이에 의한 화상평활모형[1]을 화상분해에 적합하게 개조하여 리용하도록 하였다.

우리의 이러한 론의의 효과성은 화상분해알고리듬에서 반복적으로 구조화상과 문양화상을 구하여야 하는 선행연구들의 알고리듬보다 단순하며 화상분해의 수학적모형을 그대로 구조화상의 복원에도 리용할수 있다는데 있다.

화상평활과 관련한 여러가지 모형들가운데서 대표적인 수학적모형은 ALM모형이다.[1]

$$u_t = g(|\nabla G \times u|) \cdot k\,|\nabla u|$$

우리는 화상농도함수의 그라디엔트대신에 라쁠라시안을 리용하는 한가지 모형을 제기한다.

유계열린구역 $\Omega \subset \boldsymbol{R}^2$를 주어진 화상 $u_0 : \overline{\Omega} \to \boldsymbol{R}^+$의 (전체)구역, $D \subset \Omega$를 복원하여야 할 (부분)구역이라고 하자.

다음과 같은 함수족 $B_u(\Omega)$를 생각하자.

$$B_{\overline{u}}(\Omega) := \{\, u \in C^4(\overline{\Omega},\ R^+) \mid u = N(\overline{u}) + \eta,\ \ \eta = G_\sigma(x,\ y),\ \ N \in L(C^4(\overline{\Omega},\ R^+),\ C^4(\overline{\Omega},\ R^+)) \}$$

여기서 $L(C^4(\overline{\Omega},\ R^+),\ C^4(\overline{\Omega},\ R^+))$는 유계선형연산자전부의 모임이고 $G_\sigma(x,\ y)$는 가우스잡음을, $\overline{u}(\cdot)$은 주어진 화상의 구조정보를 반영하고있는 구조화상을 표현한다. 즉 함수족 $B_{\overline{u}}(\Omega)$는 주어진 화상의 구조정보만을 반영한 구조화상에 가능한 잡음이 섞인 화상들의 모임으로 볼수 있다. 여기서 잡음에는 화상의 문양정보까지도 포함되여있다.

함수족 $B_{\overline{u}}(\Omega)$에서 목적범함수 $E(u)$를 다음과 같이 정의한다.

$$E(u)=\int_{\Omega} g(|\nabla^2 u|)\,d\Omega+\int_{\Omega}\lambda(x,\ y)(u-u_0)^2\,d\Omega$$

여기서 함수 $g:\boldsymbol{R}^+\to\boldsymbol{R}^+$ 는 $|\nabla^2 u|$ 에 관하여 부아닌 증가함수 즉 $g(\cdot)\ge 0$, $g'(\cdot)>0$ 이다. 그리고 ∇^2 는 라쁠라스연산자이다.

$E(u)$ 와 같은 범함수들을 흔히 화상 u 의 에네르기범함수(에네르기)라고 부른다.

화상농도함수의 라쁠라시안의 크기 $|\nabla^2 u|$ 는 화상의 평활화정도를 나타내며

$$\lambda(x,\ y)=\begin{cases}\lambda,\ (x,\ y)\in\Omega\setminus D\\ 0,\ (x,\ y)\in D\end{cases}.$$

$g(\cdot)$ 이 증가함수이므로 $|\nabla^2 u|$ 가 클수록 범함수값 즉 화상의 에네르기는 커지게 된다.

한편 주어진 화상 $u_0(x,\ y)$ 와 잡음이 제거된 평활화된 화상 $u(x,\ y)$ 가 근사할것이 필요하다.

에네르기가 u 의 라쁠라시안의 크기에만 관계된다면 즉 에네르기범함수의 첫째 항에만 관계된다면 $\|\nabla^2 u\|\equiv 0$ 일 때 에네르기가 최소로 되며 따라서 목적하는 구조화상과는 거리가 먼 화상이 얻어질수 있다.

에네르기범함수의 둘째 항은 주어진 $u_0(x,\ y)$ 와 잡음이 제거된 평활화된 화상 $u(x,\ y)$ 가 근사할것을 요구한다. $\lambda(x,\ y)$ 는 무게결수로서 손상되지 않은 구역에서 본질적으로 주어진 화상 $u_0(x,\ y)$ 와 잡음이 제거된 평활화된 화상 $u(x,\ y)$ 가 근사할것을 요구한다. 여기서 λ 는 무게상수이다.

이로부터 화상분해문제는 $B_{\overline{u}}(\Omega)$ 에서 목적범함수 $E(u)$ 에 최소를 주는 함수 u 를 찾는 극값문제(변분문제)로 귀착된다.

극값문제의 풀이로서 구조화상 $u(x,\ y)$ 를 얻으면 그로부터 문양화상 $v(x,\ y)$ 는 주어진 화상과의 차로서

$$v(x,\ y)=u_0(x,\ y)-u(x,\ y),\ (x,\ y)\in\Omega$$

와 같이 얻을수 있다.

보조정리 함수 $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ 가 불룩이고 엄격한 증가함수이면 범함수 $E(u)$ 는 불룩이다. 즉 $u_1,\ u_2\in B_{\overline{u}}(\Omega),\ \beta\in(0,\ 1)$ 에 대하여 다음의 식이 성립된다.

$$E(\beta u_1+(1-\beta)\,u_2)\le\beta E(u_1)+(1-\beta)E(u_2)\tag{1}$$

증명 $g(\cdot)$ 이 불룩이므로

$$g(\beta|\nabla^2 u_1|+(1-\beta)|\nabla^2 u_2|)\le\beta g(|\nabla^2 u_1|)+(1-\beta)g(|\nabla^2 u_2|).\tag{2}$$

한편 민꼽스끼부등식으로부터

$$|\nabla^2(\beta u_1+(1-\beta)\,u_2)|\le\beta|\nabla^2 u_1|+(1-\beta)|\nabla^2 u_2|\tag{3}$$

이고 $g(\cdot)$ 이 증가함수이므로

$$g(|\nabla^2(\beta u_1+(1-\beta)\,u_2)|)\le g(\beta|\nabla^2 u_1|+(1-\beta)|\nabla^2 u_2|).$$

식 (2), (3)으로부터 $g(|\nabla^2(\beta u_1+(1-\beta)u_2)|)\le\beta g(|\nabla^2 u_1|)+(1-\beta)g(|\nabla^2 u_2|)$ 가 성립된다.

이 식의 량변을 적분하면 $g(\cdot)$ 이 부아닌 함수이므로 다음의 식이 성립된다.

$$\int_{\Omega} g(|\nabla^2(\beta u_1+(1-\beta)\,u_2)|)\,d\Omega\le\beta\int_{\Omega} g(|\nabla^2 u_1|)\,d\Omega+(1-\beta)\int_{\Omega} g(|\nabla^2 u_2|)\,d\Omega\tag{4}$$

한편

$$[\beta u_1 + (1-\beta)\, u_2 - u_0]^2 \le \beta (u_1 - u_0)^2 + (1-\beta)\,(u_2 - u_0)^2 \tag{5}$$

이 성립되며 이 식의 량변을 적분하면

$$\int_\Omega [\beta u_1 + (1-\beta)\, u_2 - u_0]^2 \, d\Omega \le \beta \int_\Omega (u_1 - u_0)^2 \, d\Omega + (1-\beta) \int_\Omega (u_2 - u_0)^2 \, d\Omega . \tag{6}$$

이 식의 량변에 λ를 곱하고 식 (5)를 더하면

$$E(\beta u_1 + (1-\beta)\, u_2) \le \beta E(u_1) + (1-\beta) E(u_2)$$

를 얻는다. 따라서 범함수 $E(u)$는 불룩이다.(증명끝)

정리 $u(x,\ y)$에 의한 $E(u)$의 값이 최소로 되면 다음의 방정식을 만족시킨다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla^2 [c(|\nabla^2 u|) \cdot \nabla^2 u] - \lambda_0 (x,\ y)(u - u_0)$$

증명 $E(u)$의 피적분함수를 다음과 같은 $F(u,\ u_{xx},\ u_{yy})$로 놓자.

$$F(u,\ u_{xx},\ u_{yy}) = f(|\nabla^2 u|) + \lambda(x,\ y)(u - u_0)^2$$

여기서 $|\nabla^2 u| = |u_{xx} + u_{yy}|$이고

$$F_u = 2\beta (u - u_0), \tag{7}$$

$$F_{u_{xx}} = f'(|\nabla^2 u|) \cdot \frac{\partial |\nabla^2 u|}{\partial u_{xx}} = f'(|\nabla^2 u|) \cdot \mathrm{sign}(\nabla^2 u), \tag{8}$$

$$F_{u_{yy}} = f'(|\nabla^2 u|) \cdot \mathrm{sign}(\nabla^2 u), \quad \mathrm{sign}(s) = \begin{cases} -1, & s < 0 \\ 0, & s = 0 \\ 1, & s > 0 \end{cases}. \tag{9}$$

$\mathrm{sign}(\nabla^2 u) = \begin{cases} \dfrac{\nabla^2 u}{|\nabla^2 u|}, & \nabla^2 u \ne 0 \\ 0, & \nabla^2 u = 0 \end{cases}$ 을 리용하면 식 (8), (9)는 다음과 같이 쓸수 있다.

$$F_{u_{xx}} = F_{u_{yy}} = f'(|\nabla^2 u|) \cdot \frac{\nabla^2 u}{|\nabla^2 u|} \tag{10}$$

따라서 식 (7), (10)으로부터 다음의 방정식을 얻는다.

$$\nabla^2 \left[f'(|\nabla^2 u|) \cdot \frac{\nabla^2 u}{|\nabla^2 u|} \right] + 2\lambda(x,\ y)(u - u_0) = 0 \tag{11}$$

$2\lambda(x,\ y)$를 $\lambda_0(x,\ y)$로, $c(|\nabla^2 u|) = \dfrac{f'(|\nabla^2 u|)}{|\nabla^2 u|}$로 놓으면 식 (11)은

$$\nabla^2 (c(|\nabla^2 u|) \cdot \nabla^2 u) + \lambda_0 (x,\ y)(u - u_0) = 0 .$$

최속하강법을 적용하면 다음과 같은 오일레르-라그랑쥬방정식을 얻는다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla^2 [c(|\nabla^2 u|) \cdot \nabla^2 u] - \lambda_0 (x,\ y)(u - u_0)$$

이 방정식이 바로 화상분해의 수학적모형이다.(증명끝)

참고문헌

[1] L. Alvarez et al.; SIAM J. Number. Anal., 29, 845, 1992.
[2] A. Criminisi et al.; IEEE Trans. Image Processing, 13, 9, 1200, 2004.
[3] M. Bertalmio et al.; IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 2, 18, 2003.
[4] J. Wang et al.; Neurocomputing, 123, 150, 2014.
[5] T. Shih et al.; IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology, 19, 3, 347, 2009.
[6] A. Telea; J. Graphics Tools, 9, 1, 23, 2004.

주체104(2015)년 2월 5일 원고접수

An Image Decomposition Method by the Energy Minimization

Ho Myong Song, Ri Ye Song

A mathematical model for the simultaneous filling-in of texture and structure information in regions of missing image is presented.

It is the goal of this paper to propose a new mathematical model that will be required to perform both texture synthesis and structure inpainting in all regions to be filled-in.

The original image is decomposed into the sum of two images, one is capturing the basic image structure and the other capturing the texture.

Key word: image decomposition