김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체106(2017)년 제63권 제2호 Vol. 63 No. 2 JUCHE106(2017).

분수재생핵힐베르트공간의 한가지 구성법

최희철, 장경준

지난 시기 분수계미분방정식, 분수계미분－적분방정식을 풀기 위하여 계차법, 아도미언분해법, 변분반복법, 호모토피섭동법 등 여러 방법들이 제기되고 응용되였다.

최근에 재생핵힐베르트공간법을 리용하여 연산자방정식을 푸는 연구가 활발히 진행되고있다. 재생핵힐베르트공간법에서 기본은 론의되는 문제의 풀이가 유일존재하게 되는 힐베르트공간을 구성하되 그 공간이 재생핵공간이 되도록 하는것이다.

다항분수계미분방정식의 풀이의 유일존재성은 다음의 공간에서 담보된다.

$$X = \{ u \,|\, u \in AC^{\lceil \sigma \rceil}[0,\ 1],\ {}^{c}D_0^{\sigma} u \in C[0,\ 1]\}$$

이 론문의 기본목적은 공간 X의 재생핵을 구하는것이다.

정의 1 $\Omega = [0, 1]$, H를 $f:\Omega \to \boldsymbol{R}$들의 힐베르트공간이라고 하자.

이때 $K:\Omega \times \Omega \to \boldsymbol{R}$가 다음의 조건을 만족시키면 K를 H의 재생핵이라고 부른다.

① 임의의 $x \in \Omega$에 대하여 $K(x, \cdot) \in H$이다.

② 임의의 $f \in H$, 임의의 $x \in \Omega$에 대하여 $f(x) = \langle f,\ K(x, \cdot)\rangle$이다.

정의 2 H를 실힐베르트공간이라고 할 때 H에 재생핵이 존재하면 H를 재생핵공간이라고 부른다.

성질 1 H를 힐베르트공간이라고 하면 다음의 사실들은 동등하다.

① 점평가범함수는 련속이다. 즉 임의의 $y \in \Omega$에 대하여 $\delta_y \in H^*$이다.

② H는 재생핵공간을 가진다.

성질 2 H가 재생핵 $K(x, y)$를 가지는 힐베르트공간이면 다음의 사실이 성립된다.

① 임의의 $x,\ y \in \Omega$에 대하여 $K(x,\ y) = (K(\cdot,\ x),\ K(\cdot,\ x))_H = (\delta_x,\ \delta_y)_{H^*}$이다.

② 임의의 $x,\ y \in \Omega$에 대하여 $K(x,\ y) = K(y,\ x)$이다.

③ $f,\ f_n \in H,\ n \in \boldsymbol{N},\ f_n \underset{H}{\Rightarrow} f$이면 임의의 $x \in \Omega$에 대하여 $f_n(x) \to f(x)$이다.

선행연구들[1－4]에서는 다음의 함수공간들에서의 재생핵들을 결정하였다.

$$\{u \,|\, u \in AC[0,\ 1],\ u' \in L^2[0,\ 1]\},\ \{u \,|\, u \in AC^4[0,\ 1],\ u^{(4)} \in L^2[0,\ 1],\ u(1) = u'(0) = u'(1) = 0\}$$

$$\{u \,|\, u \in AC^3[0,\ 1],\ u^{(3)} \in L^2[0,\ 1],\ u(0) = 0\},\ \{u \,|\, u \in AC^m[a,\ b],\ u^{(m)} \in L^2[a,\ b]\}$$

$$\{u \,|\, u \in AC^2[a,\ b],\ u'' \in L^2[a,\ b],\ u(0) = 0\},\ \{u \,|\, u \in AC[0,\ 1],\ u' \in L^2[0,\ 1]\}$$

우리는 다음의 함수공간에 한가지 스칼라적을 도입하고 재생핵을 결정하였다.

$$X := \{u \,|\, u \in AC^{\lceil \sigma \rceil}[0,\ 1],\ {}^{c}D_0^{\sigma} u \in C[0,\ 1]\},\ \ \delta \in \boldsymbol{R}^+,\ \ m := \lceil \sigma \rceil$$

이 함수공간에서의 스칼라적에 분수계도함수가 포함되므로 재생핵에도 분수제곱이 나타나게 된다. 이러한 의미에서 우리는 결정되는 재생핵을 분수재생핵, 함수공간을 분수재생핵힐베르트공간이라고 부른다.

임의의 $u,\ v\in X$ 에 대하여 다음과 같이 정의한다.

$$\langle u,\ v\rangle=\sum_{j=0}^{m-1}u^{(j)}(0)\cdot v^{(j)}(0)+\int_0^1 {}^cD_0^\sigma u(t){}^cD_0^\sigma v(t)dt\ ,\ \|u\|:=\sqrt{\langle u,\ u\rangle}\ ,\ W^\sigma[0,\ 1]:=(X,\ \|\cdot\|)$$

앞으로 $W^\sigma[0,\ 1]$에서의 노름을 $\|u\|_{W^\sigma[0,\ 1]}$로 표시한다.

정리 1 $W^\sigma[0,\ 1]$은 힐베르트공간이다.

증명 $\langle u,\ v\rangle$는 스칼라적임은 분명하다.

$W^\sigma[0,\ 1]$의 완비성을 증명하기 위하여 $\{u_n\}\subset W^\sigma[0,\ 1]$을 기본렬이라고 하면 적당한 $r_j\in \boldsymbol{R},\ j=0,1,\cdots,m-1$이 있어서 $u_n^{(j)}(a)\to r_j\ \ (n\to\infty)$이고 적당한 $u_*\in L^2[0,\ 1]$이 있어서 ${}^cD_0^\sigma u_n\Rightarrow u_*\ \ (n\to\infty)$이다.

$g(x):=\sum_{j=0}^{m-1}\frac{r_j}{j!}x^j+I^\sigma u_*(x)$라고 놓으면 분명히 $g\in W^\sigma[0,\ 1]$이다.

$$\|u_n-g\|^2_{W^\sigma[0,\ 1]}=\langle u_n-g,\ u_n-g\rangle=\sum_{j=0}^{m-1}[u_n^{(j)}(0)-r_j]^2+\int_0^1[{}^cD_0^\sigma u_n(t)-u_*(t)]^2dt\to 0\ \ (n\to\infty)$$

이다. 즉 $u_n\Rightarrow g$이다. 따라서 $\{u_n\}$이 기본렬이므로 2개의 극한을 가질수 없다.(증명끝)

$u\in W^\sigma[0,\ 1]$이라고 하면 $u\in AC^2[0,\ 1]$이므로 다음의 형식으로 표시할수 있다.

$$u(x)=\sum_{j=0}^{m-1}\frac{u^{(j)}(0)}{j!}x^j+I^\sigma\cdot{}^cD_0^\sigma u(x) \tag{1}$$

$K_x(y)=K(x,\ y)$가 $W^\sigma[0,\ 1]$의 재생핵이기 위해서는 임의의 $u\in W^\sigma[0,\ 1]$에 대하여 $\langle u,\ K_x\rangle=u(x),\ \ x\in[0,\ 1]$일것이 필요하고 충분하다.

한편 $\langle u,\ K_x\rangle=\sum_{j=0}^{m-1}u^{(j)}(0)\cdot K_x^{(j)}(0)+\int_0^1{}^cD_0^\sigma u(t){}^cD_0^\sigma K_x(t)dt$가 성립된다.

이로부터 $K_x(g)$가 $W^\sigma[0,\ 1]$의 재생핵이기 위해서는

$$\sum_{j=0}^{m-1}\frac{u^{(j)}(0)}{j!}x^j+I^\sigma\cdot{}^cD_0^\sigma u(x)=\sum_{j=0}^{m-1}u^{(j)}(0)\cdot K_x^{(j)}(0)+\int_0^1{}^cD_0^\sigma u(t){}^cD_0^\sigma K_x(t)dt$$

가 성립되여야 한다. 따라서 다음의 결정관계식이 나온다.

$$K_x(0)=1,\ \ K_x'(0)=x,\ \ K_x^{(j)}(0)=x^j/j!,\ \ I^\sigma\cdot{}^cD_0^\sigma u(x)=\int_0^1{}^cD_0^\sigma u(t)\cdot{}^cD_0^\sigma K_x(t)dt$$

$K_x\in W^\sigma[0,\ 1]$이므로 $K_x(y)=\sum_{j=0}^{m-1}\frac{K_x^{(j)}(0)}{j!}y^j+I^\sigma\cdot{}^cD_0^\sigma K_x(y)=\sum_{j=0}^{m-1}\frac{x^jy^j}{(j!)^2}+I^\sigma\cdot{}^cD_0^\sigma K_x(y)$이다.

$$\int_0^1{}^cD_0^\sigma u(t)\cdot{}^cD_0^\sigma K_x(t)dt=\int_0^x{}^cD_0^\sigma u(t)\cdot{}^cD_0^\sigma K_x(t)dt+\int_x^1{}^cD_0^\sigma u(t)\cdot{}^cD_0^\sigma K_x(t)dt$$

$$I^\sigma\circ{}^cD_0^\sigma u(x)=\frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^x\frac{{}^cD_0^\sigma u(s)}{(x-s)^{1-\sigma}}ds=\int_0^x{}^cD_0^\sigma u(s)\frac{(x-s)^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)}ds$$

이므로 ${}^cD_0^\sigma K_x(y):=\begin{cases}0, & x<y\\ (x-y)^{\sigma-1}/\Gamma(\sigma), & y<x\end{cases}$ 라고 하면 $y<x$ 일 때

$$I^\sigma\circ{}^cD_0^\sigma K_x(y)=\frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^y\frac{{}^cD_0^\sigma K_x(s)}{(y-s)^{1-\sigma}}ds=\frac{1}{\Gamma(\sigma)^2}\int_0^y(x-s)^{\sigma-1}(y-s)^{\sigma-1}ds\,.$$

$K_x(y)=\sum_{j=0}^{m-1}\frac{x^jy^j}{(j!)^2}+\frac{1}{\Gamma(\sigma)^2}\int_0^y(x-s)^{\sigma-1}(y-s)^{\sigma-1}ds,\ y<x$ 이며 $K_x(y)=K_y(x)$ 임을 고려하면

$$K_x(y)=K_y(x)=\sum_{j=0}^{m-1}\frac{x^jy^j}{(j!)^2}+\frac{1}{\Gamma(\sigma)^2}\int_0^x(x-s)^{\sigma-1}(y-s)^{\sigma-1}ds,\quad x<y\,.$$

따라서 다음의 식이 성립되므로 정리 2가 나온다.

$$K(x,\ y)=\begin{cases}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{x^jy^j}{(j!)^2}+\frac{1}{\Gamma(\sigma)^2}\int_0^x(x-s)^{\sigma-1}(y-s)^{\sigma-1}ds, & x<y\\ \sum_{j=0}^{m-1}\frac{x^jy^j}{(j!)^2}+\frac{1}{\Gamma(\sigma)^2}\int_0^y(x-s)^{\sigma-1}(y-s)^{\sigma-1}ds, & y<x\end{cases}\tag{2}$$

정리 2 $W^\sigma[0,\ 1]$은 재생핵힐베르트공간이며 $W^\sigma[0,\ 1]$의 재생핵은 식 (2)와 같다.

다음으로 $W^\sigma[0,\ 1]$과 $W_A^\sigma[0,\ 1]$에서 재생핵을 구성하자.

많은 실천적문제들은 일부 보충조건을 만족시키는 함수공간에서 론의하게 된다.

보충조건의 실례로는 초기조건이나 경계조건들을 들수 있다.

이런 보충조건들의 모임을 A로 표시하자. 즉 $A:=\{(A_{i,\ y}u(y))(z_i)=0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ l\}$ 이라고 하자. 여기서 $A_{i,\ y}$는 y를 독립변수로 가지는 함수에 작용하는 유계선형연산자이다.

$A_{i,\ y}\circ A_{i,\ x}=A_{i,\ x}\circ A_{i,\ y}$ 임을 가정하자.

실례로 $u(0)=0$을 $A_{1,\ y}u(y)(0)=0$ 으로 표현할수 있다.

$W_A^\sigma[0,\ 1]:=\{u\in W^\sigma[0,\ 1]\,|\,(A_{i,\ y}u(y))(z_i)=0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ l\}$ 로 정의하면 분명히 $W_A^\sigma[0,\ 1]$은 $W^\sigma[0,\ 1]$의 노름에 관하여 힐베르트공간이다.

이제 $W_A^\sigma[0,\ 1]$에서 재생핵공간을 구성하자.

보충조건이 1개 즉 $A:=\{(A_yu(y))(z)=0\}$ 인 경우에 먼저 론의하자.

정리 3 $R(x,\ y):=K(x,\ y)-\dfrac{(A_xK(x,\ y))(z)(A_yK(x,\ y))(z)}{(A_x(A_yK(x,\ y))(z))(z)}$ 는 $W_A^\sigma[0,\ 1]$의 재생핵이다.

다음 보충조건이 $A:=\{(A_{i,\ y}u(y))(z_i)=0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ l\}$ 로 주어지는 경우를 론의하자.

따름 $R(x,\ y):=K(x,\ y)-\sum_{i=1}^{l}\dfrac{(A_{i,\ x}K(x,\ y))(z)(A_{i,\ y}K(x,\ y))(z)}{(A_{i,\ x}(A_{i,\ y}K(x,\ y))(z))(z)}$ 는 $W_A^\sigma[0,\ 1]$의 재생핵이다.

재생핵힐베르트공간에 대하여 몇가지 실례를 들자.

$0<\sigma\le 1$인 경우 $W^\sigma[0,\ 1]$의 재생핵 $K^\sigma(x,\ y)$는 다음과 같다.

$$K^{\sigma}(x,\ y)=\begin{cases} 1+\dfrac{1}{\Gamma(\sigma)^2}\int_0^x (x-s)^{\sigma-1}(y-s)^{\sigma-1}ds, & x<y \\ 1+\dfrac{1}{\Gamma(\sigma)^2}\int_0^y (x-s)^{\sigma-1}(y-s)^{\sigma-1}ds, & y<x \end{cases}$$

$1<\sigma\le 2$ 인 경우 $W^{\sigma}[0,\ 1]$ 의 재생핵 $K^{\sigma}(x,\ y)$ 는 다음과 같다.

$$K^{\sigma}(x,\ y)=\begin{cases} 1+xy+\dfrac{1}{\Gamma(\sigma)^2}\int_0^x (x-s)^{\sigma-1}(y-s)^{\sigma-1}ds, & x<y \\ 1+xy+\dfrac{1}{\Gamma(\sigma)^2}\int_0^y (x-s)^{\sigma-1}(y-s)^{\sigma-1}ds, & y<x \end{cases}.$$

다음으로 보충조건을 가지는 경우를 론의하자.

$(A_y u(y))(0):=u(0)$ 인 경우 $A_x K(x,\ y) A_y K(x,\ y)/(A_x A_y K(x,\ y))=1$ 이다.

한편 $(A_y u(y))(0):=u'(0)$ 인 경우 $A_x K(x,\ y) A_y K(x,\ y)/(A_x A_y K(x,\ y))$ 를 계산하자.

$(A_y K(x,\ y))(0)=x$ 이므로 $(A_x(A_y K(x,\ y))(0))(0)=(A_x x)(0)=1$ 이며 $(A_x K(x,\ y))(0)=y$ 이므로 $A_x K(x,\ y) A_y K(x,\ y)/(A_x A_y K(x,\ y))=xy$ 이다.

정리 4 보충조건이 $A=\{u(0)=0,\ u'(0)=0\}$ 인 경우 $W^{\sigma}[0,\ 1]$ 의 재생핵 $R_A^{\sigma}(x,\ y)$ 는

$$R_A^{\sigma}(x,\ y)=\begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\sigma)^2}\int_0^x (x-s)^{\sigma-1}(y-s)^{\sigma-1}ds, & x<y \\ \dfrac{1}{\Gamma(\sigma)^2}\int_0^y (x-s)^{\sigma-1}(y-s)^{\sigma-1}ds, & y<x \end{cases}.$$

참 고 문 헌

[1] Xueqin Lu et al.; Article ID 459754, 19 pages, 2010.

[2] F. Genga et al.; Appl. Math. Lett., 25, 818, 2012.

[3] Y. Wanga et al.; Appl. Math. Comput., 219, 5918, 2013.

[4] S. Bushnaq et al.; J. Optim. Theory Appl., 156, 96, 2013.

주체105(2016)년 10월 5일 원고접수

A Method for Constructing the Fractional Reproducing Kernel Hillbert Space

Choe Hui Chol, Jang Kyong Jun

We introduced a kind of scalar product in function space where we discussed the existence of solution of multi-term fractional differential equation and constructed the fractional reproducing kernel with fractional derivative.

Key word: fractional reproducing kernel Hillbert space