

노이만경계조건을 가진 매듭그린함수법에 의한 다군공액중성자확산방정식의 풀이

김명철, 허일문, 서철

공액중성자뭉침은 주어진 위치와 에너지를 가진 중성자가 전체 로심공간에서 원자로출력(분렬연쇄반응)에 주는 상대적기여몹 즉 중성자의 가치를 표현하는데 이것은 섭동론적방법에 의한 반응도온도결수계산과 지연중성자유효몹, 즉발중성자수명을 비롯한 동력학적파라미터들의 계산에 리용된다.[1-3] 한편 거친그물법의 하나인 매듭그린함수법은 유한제차법과 같은 세밀그물법에서와 같은 정도의 정확도를 보장하면서도 계산시간을 훨씬 단축할수 있는 효과적인 방법으로서 원자로로심물리계산에 널리 리용되고있다.[4-6]

본문에서는 노이만경계조건을 가진 매듭그린함수법에 의한 다군공액중성자확산방정식의 풀이체계를 세우고 기준문제에 대한 계산을 통하여 그 정확성을 검증하였다.

1. 노이만경계조건을 가진 매듭그린함수법에 의한 다군공액중성자확산모형

다군공액중성자확산방정식

$$-\nabla \cdot D_g(\mathbf{r}) \nabla \Phi_g^*(\mathbf{r}) + \Sigma_{Rg}(\mathbf{r}) \Phi_g^*(\mathbf{r}) = \sum_{g'=g+1}^G \Sigma_{g \rightarrow g'}(\mathbf{r}) \Phi_{g'}^*(\mathbf{r}) + \frac{\nu_g \Sigma_{fg}(\mathbf{r})}{k} \sum_{g'=1}^G \chi_{g'} \Phi_{g'}^*(\mathbf{r}) \quad (1)$$

를 매듭 k 에 관하여 체적적분하면 k 번째 매듭에서 공액중성자평형식은 다음과 같다.

$$-\sum_{u=x, y, z} \frac{1}{2a_u^k} [J_{gu}^{*k}(a_u^k) - J_{gu}^{*k}(-a_u^k)] + \Sigma_{Rg}^k \bar{\Phi}_g^{*k} = \bar{Q}_g^k \quad (2)$$

여기서 $\bar{\Phi}_g^{*k}$ 는 k 번째 매듭에서 평균공액중성자뭉침이며

$$\bar{Q}_g^k = \sum_{g'=g+1}^G \Sigma_{g \rightarrow g'}^k \Phi_{g'}^{*k} + \frac{\nu_g \Sigma_{fg}^k}{k} \sum_{g'=1}^G \chi_{g'} \Phi_{g'}^{*k}$$

는 산란 및 분렬에 의한 공액중성자원천항이다. 방정식 (1)에 대한 가로적분을 실시하여 얻어지는 1차원공액확산방정식은 다음과 같다.

$$-D_g^k \frac{d^2 \Phi_{gu}^{*k}(u)}{du^2} + \Sigma_{Rg}^k \Phi_{gu}^{*k}(u) = Q_{gu}^k(u) - L_{gu}^k(u) \quad (g=1, \dots, G; u=x, y, z; u \neq v \neq w) \quad (3)$$

여기서 $\Phi_{gu}^{*k}(u)$ 와 $Q_{gu}^k(u)$ 는 각각 가로적분공액중성자뭉침 및 가로적분원천항으로서

$$\Phi_{gu}^{*k}(u) = \frac{1}{4a_v^k a_w^k} \int_{-a_v^k}^{a_v^k} dv \int_{-a_w^k}^{a_w^k} dw \Phi_g^{*k}(u, v, w) \quad (4)$$

$$Q_{gu}^k(u) = \sum_{g'=g+1}^G \Sigma_{g \rightarrow g'}^k \Phi_{g'u}^{*k}(u) + \frac{(\nu \Sigma_f)_g^k}{k} \sum_{g'=1}^G \chi_{g'} \Phi_{g'u}^{*k}(u) \quad (5)$$

이다. 또한 $L_{gu}^k(u)$ 는 가로루실함으로서 다음식으로 표시된다.

$$\begin{aligned} L_{gu}^k(u) &= -\frac{1}{4a_v^k a_w^k} \int_{-a_v^k}^{a_v^k} dv \int_{-a_w^k}^{a_w^k} \left[D_g^k \frac{\partial^2 \Phi_g^{*k}(u, v, w)}{\partial v^2} + D_g^k \frac{\partial^2 \Phi_g^{*k}(u, v, w)}{\partial w^2} \right] dw = \\ &= -\frac{1}{4a_v^k a_w^k} \left[\int_{-a_w^k}^{a_w^k} D_g^k \frac{\partial \Phi_g^{*k}(u, v, w)}{\partial v} \Big|_{v=-a_v^k}^{v=a_v^k} dw + \int_{-a_v^k}^{a_v^k} D_g^k \frac{\partial \Phi_g^{*k}(u, v, w)}{\partial w} \Big|_{w=-a_w^k}^{w=a_w^k} dv \right] \end{aligned} \quad (6)$$

가로적분방정식 (3)에 대응하는 그린함수방정식은 다음과 같다.

$$-D_g^k \frac{d^2 G_{gu}^k(u, u_0)}{du^2} + \Sigma_{Rg}^k G_{gu}^k(u, u_0) = \delta(u - u_0) \quad (7)$$

식 (3)에 $G_{gu}^k(u, u_0)$ 을 곱하고 식 (7)에 $\Phi_{gu}^{*k}(u)$ 를 곱하고 서로 더한 다음 공식 $b \frac{da}{du} = \frac{d(ab)}{du} - a \frac{db}{du}$ 를 리용하여 구간 $[-a_u^k, a_u^k]$ 에서 적분하고 그린함수에 관하여 노이만 경계조건 $\left. \frac{d}{du} G_{gu}^k(u, u_0) \right|_{u=\pm a_u^k} = 0$ 을 리용하여 정돈하면 다음식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \Phi_{gu}^{*k}(u) &= \int_{-a_u^k}^{a_u^k} [Q_{gu}^k(u_0) - L_{gu}^k(u_0)] G_{gu}^k(u, u_0) du_0 + G_{gu}^k(u, a_u^k) D_g^k \left[\frac{d}{du_0} \Phi_{gu}^{*k}(u_0) \right]_{u_0=a_u^k} - \\ &\quad - G_{gu}^k(u, -a_u^k) D_g^k \left[\frac{d}{du_0} \Phi_{gu}^{*k}(u_0) \right]_{u_0=-a_u^k} \end{aligned} \quad (8)$$

이제

$$R_{gu}^k = G_{gu}^k(a_u^k, a_u^k), \quad T_{gu}^k = G_{gu}^k(a_u^k, -a_u^k) \quad (9)$$

로 정의되는 반사결수와 투과결수를 도입하고

$$J_{gu}^{*k}(\pm a_u^k) = D_g^k \left[\frac{d}{du_0} \Phi_{gu}^{*k}(u_0) \right]_{u_0=\pm a_u^k} \quad (10)$$

을 매듭경계면에서 정미공액중성자흐름이라고 하면 가로적분공액중성자흐름은

$$\begin{aligned} \Phi_{gu}^{*k}(a_u^k) &= [G+]_{gu}^k + R_{gu}^k J_{gu}^{*k}(a_u^k) - T_{gu}^k J_{gu}^{*k}(-a_u^k) \\ \Phi_{gu}^{*k}(-a_u^k) &= [G-]_{gu}^k + T_{gu}^k J_{gu}^{*k}(a_u^k) - R_{gu}^k J_{gu}^{*k}(-a_u^k) \end{aligned}$$

로 된다. 여기서 $[G\pm]_{gu}^k = \int_{-a_u^k}^{a_u^k} [Q_{gu}^k(u_0) - L_{gu}^k(u_0)] G_{gu}^k(\pm a_u^k, u_0) du_0$ 이다.

매듭경계면에서 가로적분공액중성자흐름과 공액중성자흐름의 연속성조건

$$\Phi_{gu}^{*k}(a_u^k) = \Phi_{gu}^{*k+1}(-a_u^{k+1}), \quad J_{gu}^{*k}(a_u^k) = J_{gu}^{*k+1}(-a_u^{k+1}), \quad J_{gu}^{*k}(-a_u^k) = J_{gu}^{*k-1}(a_u^{k-1})$$

을 리용하면 다음과 같은 정미공액중성자흐름결합방정식이 얻어진다.

$$T_{gu}^k J_{gu}^{*k-1}(a_u^{k-1}) - (R_{gu}^k + R_{gu}^{k+1}) J_{gu}^{*k}(a_u^k) + T_{gu}^k J_{gu}^{*k+1}(a_u^{k+1}) = [G+]_{gu}^k - [G-]_{gu}^{k+1} \quad (11)$$

가로적분공액중성자흐름과 원천, 가로루실함

$$\Phi_{gu}^{*k}(u) = \sum_{n=1}^3 \Phi_{gun}^{*k} p_{n-1}(u/a_u^k), \quad Q_{gu}^k(u) = \sum_{n=1}^3 Q_{gun}^k p_{n-1}(u/a_u^k), \quad L_{gu}^k(u) = \sum_{n=1}^3 L_{gun}^k p_{n-1}(u/a_u^k) \quad (12)$$

와 같이 르장드르다항식으로 전개하고 식 (8)에 대입하면 노이만경계조건에서 가로적분공액중성자뭉침의 전개결수에 대한 방정식은 다음과 같다.

$$[A_u]^k \Phi_{gu}^{*k} = [G_{gu}^{uu}]^k (Q_{gu}^k - L_{gu}^k) + [G_{gu}^{u+}]^k J_{gu}^{*k}(a_u^k) - [G_{gu}^{u-}]^k J_{gu}^{*k}(-a_u^k) \quad (13)$$

식 (11), (13)의 결수행렬요소들과 벡토르성분들은 다음과 같이 정의된다.

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{gu}^k &= (\Phi_{gu1}^{*k}, \Phi_{gu2}^{*k}, \Phi_{gu3}^{*k})^T \\ Q_{gu}^k &= (Q_{gu1}^k, Q_{gu2}^k, Q_{gu3}^k)^T \\ L_{gu}^k &= (L_{gu1}^k, L_{gu2}^k, L_{gu3}^k)^T \end{aligned} \right\}, \quad [G_{\pm}]_{gu}^k = \sum_{n=1}^3 (Q_{gun}^k - L_{gun}^k) [G_{gu}^{u\pm}]_n^k,$$

$$[G_{gu}^{u\pm}]_n^k = \int_{-a_u^k}^{a_u^k} p_{n-1}(u/a_u^k) G_{gu}(u, \pm a_u^k) du, \quad [A_u]_{mn}^k = \int_{-a_u^k}^{a_u^k} p_{m-1}(u/a_u^k) p_{n-1}(u/a_u^k) du,$$

$$[G_{gu}^{uu}]_{mn}^k = \int_{-a_u^k}^{a_u^k} p_{m-1}(u/a_u^k) du \int_{-a_u^k}^{a_u^k} p_{n-1}(u_0/a_u^k) G_{gu}(u, u_0) du_0$$

경계조건과 그에 대응하는 정미공액중성자흐름결합방정식은 다음과 같다.

① 진공경계

$$\text{왼쪽 } J_{gu}^{*1}(-a_u^1) = \frac{1}{2} \Phi_{gu}^{*1}(a_u^1) \Rightarrow (2 + R_{gu}^1) J_{gu}^{*1}(-a_u^1) = T_{gu}^1 J_{gu}^{*1}(a_u^1) + [G-]_{gu}^1$$

$$\text{오른쪽 } J_{gu}^{*K}(a_u^K) = -\frac{1}{2} \Phi_{gu}^{*K}(a_u^K) \Rightarrow (2 + R_{gu}^K) J_{gu}^{*K}(a_u^K) = T_{gu}^K J_{gu}^{*K-1}(a_u^{K-1}) - [G+]_{gu}^K$$

② 대칭경계

매듭경계면대칭

$$J_{gu}^{*1}(-a_u^1) = 0 \Rightarrow -(R_{gu}^1 + R_{gu}^2) J_{gu}^{*1}(a_u^1) + T_{gu}^2 J_{gu}^{*2}(a_u^2) = [G+]_{gu}^1 - [G-]_{gu}^2$$

매듭중간면대칭

$$J_{gu}^1(-a_u^1) = -J_{gu}^1(a_u^1) \Rightarrow -[(R_{gu}^1 + T_{gu}^1) + R_{gu}^2] J_{gu}^{*1}(a_u^1) + T_{gu}^2 J_{gu}^{*2}(a_u^2) = [G+]_{gu}^1 - [G-]_{gu}^2$$

③ 린접매듭경계면들에서 린속성조건

$$J_{gu}^{*k}(-a_u^k) = J_{gu}^{*k-1}(a_u^{k-1})$$

이 경계조건을 리용하여 노이만경계조건을 가진 매듭그린함수법의 기본방정식계 (2), (11), (13)을 원천반복법으로 풀어 유효중식결수와 공액중성자뭉침(중성자가치)분포를 구한다.

2. 결과 및 분석

계산대상으로 삼은 3차원PWR로심에 대한 기준문제(Benchmark)의 기하학적구조와 구역별 2군자름면적자료는 그림 1, 표 1과 같다.

이 기준문제에 관한 유효중식결수와 집합체별로 평균한 중성자가치분포에 대한 계산결과는 표 2, 그림 2와 같다. 계산에서 공간분할단위(매듭크기)는 20cm×20cm×20cm이다.

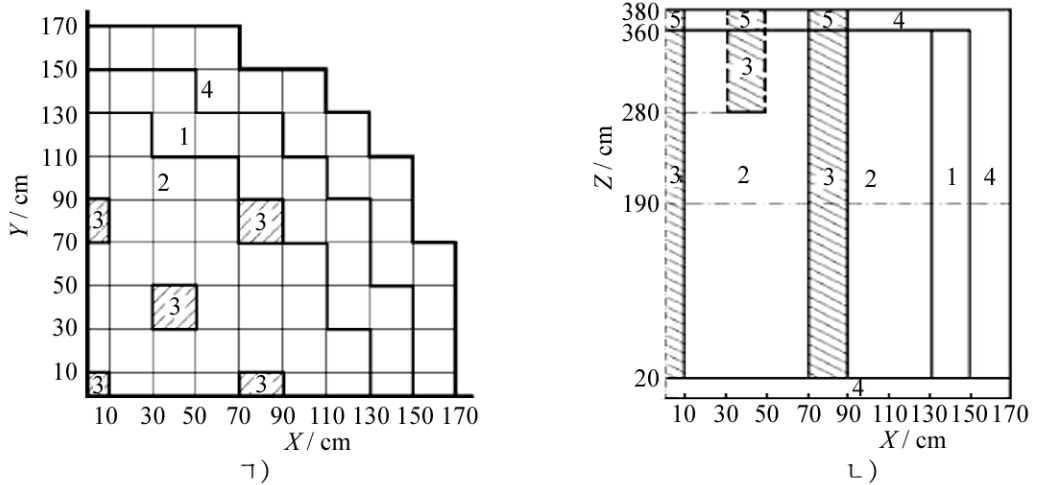


그림 1. 3차원PWR로심에 대한 기준문제의 기하학적구조
1) 가로자름면, 2) 세로자름면

표 1. 3차원PWR로심에 대한 기준문제의 구역별 2군자름면적

구역	D_1/cm	D_2/cm	$\Sigma_{1 \rightarrow 2}/\text{cm}^{-1}$	$\Sigma_{a2}/\text{cm}^{-1}$	$\Sigma_{a2}/\text{cm}^{-1}$	$\nu\Sigma_{f2}/\text{cm}^{-1}$
1(연료)	1.5	0.4	0.02	0.01	0.08	0.135
2(연료)	1.5	0.4	0.02	0.01	0.085	0.135
3(연료+조종봉)	1.5	0.4	0.02	0.01	0.13	0.135
4(반사체)	2.0	0.3	0.04	0.0	0.01	0.0
5(반사체+조종봉)	2.0	0.3	0.04	0.0	0.055	0.0

표 2. 3차원PWR로심에 대한 기준문제의 유효증식결수계산결과

기준값	계산값	상대편차/%	계산시간/s
1.029 03	1.029 08	0.005	0.75

빠른중성자가치	2.083 8	0.698 8 1.113 6				
열중성자가치	3.142 6	0.979 8 1.098 6		1.016 0 1.616 9		0.724 7 1.158 6
		1.766 2 2.715 8		1.476 5 2.244 7		1.382 8 2.136 5
						1.118 0 1.796 6
		2.083 7 3.142 6		1.964 9 3.020 9		1.772 9 2.728 2
						1.629 7 2.515 6
		2.088 1 3.210 1		2.147 6 3.292 8		1.931 9 2.970 2
						1.628 9 2.473 8
		1.499 8 1.673 2		1.941 8 2.948 7		2.129 4 3.276 1
						1.809 4 2.749 4
						1.259 8 1.405 4
						1.453 4 2.205 9
						1.438 3 2.221 6
						1.008 6 1.622 6

그림 2. 3차원PWR로심에 대한 기준문제의 집합체별 2군중성자가치분포계산결과(1/8대칭구역)

현재까지 3차원로심에서 중성자가치분포에 대한 선행연구결과가 소개된것이 없으며 이 기준문제에서도 유효증식결수와 집합체별로 평균화된 출력분포값이 주어져있고 가치분포는 소개되어있지 않다. 따라서 3차원적인 중성자가치분포는 비교할수 없다. 그러나

공액방정식은 본래의 방정식과 같은 고유값(유효증식결수)을 가지므로 그것을 비교하여 풀이체계의 정확성을 확인할 수 있다.

표 2에서 보는바와 같이 유효증식결수 k_{eff} 의 기준값에 비한 계산값의 상대편차가 불과 0.005%로서 매우 작으며 계산시간도 매우 짧다. 계산에 리용한 컴퓨터의 동작주파수는 3.4GHz, 주기억은 2GB이다.

한편 그림 2의 집합체별로 평균한 중성자가치분포계산결과를 보면 열군중성자가치가 빠른군중성자가치에 비하여 전반적으로 더 높다는 것을 알 수 있다. 그것은 표 1의 자름면적 자료가 보여주는바와 같이 PWR에서 3차원기준문제는 열중성자에 의해서만 분열이 일어나는 ($\nu\Sigma_{f1} = 0$) 전형적인 열중성자원자로의 로심에 대한 것이기 때문이다. 2차원연랭각빠른증식계의 경우에는 빠른군중성자가치가 열군중성자가치보다 전반적으로 대략 1.4배 정도 높았다.[3]

또한 그림 2를 통하여 반사체와 면하는 변두리를 제외한 로심내부에서 빠른군중성자가치분포가 열군중성자가치분포에 비하여 상대적으로 평탄하다는 것을 알 수 있다.

맺는 말

노이만경계조건을 가진 매듭그린함수법에 의한 3차원다군공액중성자확산방정식의 풀이체계를 확립하고 기준문제와 비교하여 그 정확성과 효율성을 검증하였다.

참고 문헌

- [1] Ali Jahanbin et al.; Annals of Nuclear Energy, 41, 110, 2012.
- [2] Manuele Aufiero et al.; Annals of Nuclear Energy, 65, 78, 2014.
- [3] Song Han et al.; Science and Technology of Nuclear Installations, doi:10.1155/2009/973605, 2009.
- [4] R. D. Lawrence et al.; Nucl. Sci. Eng., 76, 2, 218, 1980.
- [5] 谢仲生; 核反应堆物理数值计算, 原子能出版社, 128~134, 1997.
- [6] 胡永明; 反应堆物理数值计算方法, 国防科技大学出版社, 195~201, 2000.

주체108(2019)년 3월 5일 원고접수

Solving of Multi-Group Conjugation Neutron Diffusion Equation Using Nodal Green's Function Method under the Neumann Boundary Condition

Kim Myong Chol, Ho Il Mun and So Chol

We established the numerical solving model of three dimensional conjugate neutron diffusion equation by using NGFM(Nodal Green's Function Method) under the Neumann boundary condition, and verified the accuracy and efficiency of the presented calculation method through the comparison on numerical results of benchmark problem.

Key words: Nodal Green's Function Method, neutron importance