김일성종합대학학보 주체107(2018)년
수 학 제64권 제4호

한가지 형태의 역방향확률미분방정식의 수값풀이를 위한 비등간격수값도식과 오차평가

황호진, 박철규

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《과학기술강국은 사회주의강국건설에서 오늘 우리가 선차적으로 점령하여야 할 중요한 목표입니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 38페지)

우리는 금융수학과 편미분방정식, 확률조종리론에서 의의를 가지는 역방향확률미분방정식의 한가지 수값풀이도식과 그 점근수렴성을 연구하였다.

선행연구[1]에서는 등간격점을 리용한 도함수근사방법에 의한 역방향확률미분방정식의 여러걸음도식을 제기하고 수값실험들을 통하여 6차까지의 수렴성을 증명하였다.

론문에서는 비등간격점우에서의 도함수근사방법에 기초하여 생성자가 조종변수에 무관계한 역방향확률미분방정식을 수값풀이하는 여러걸음도식을 새롭게 제기하고 등간격점을 리용할 때보다 점근수렴차수가 높으며 계산량을 줄일수 있다는것을 보여준다. 오차평가를 통하여 이 도식의 고차점근수렴성을 리론적으로 증명한다.

먼저 비등간격점을 리용한 수값풀이도식에 대하여 론의하자.

$W_t=(W_t^1,\cdots,W_t^d)^{\mathrm{T}}$ 는 완비확률공간 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 우에서의 d 차원위너과정이고 상수 $T>0$ 에 대하여 $\{\mathcal{F}_t\}_{0\le t\le T}$ 를 브라운운동에 의하여 생성된 $\sigma-$모임벌증가족이라고 하자.

$m=d=1$ 이라고 할 때 다음의 확률미분방정식을 생각하고 시간구간 $[0,T]$ 의 등간격분할 $0=t_0<\cdots<t_N=T$ 에 대하여 $t_{n+1}-t_n=h=T/N$ 로 놓자.

$$y_t=\varphi(W_T)+\int_t^T f(s,\ y_s)ds-\int_t^T z_s dW_s,\ t\in[0,\ T] \tag{1}$$

여기서 생성자 $f=f(t,y)$ 는 $\mathbf{R}^m$ 에서 값을 가지는 벡토르함수로서 매 (y,z) 에 대하여 $\mathcal{F}_t-$적합이다.

이제 $\mathcal{F}_s^{t,x}\ (t\le s\le T)$ 를 (t,x) 로부터 출발한 위너과정 $\{x+W_r-W_t,\ t\le r\le s\}$ 에 의하여 생성된 $\sigma-$모임벌이라고 하고 $E_s^{t,x}[X]:=E[X\,|\,\mathcal{F}_s^{t,x}],\ E_t^x[X]:=E[X\,|\,\mathcal{F}_t^{t,x}]$ 로 정의한다.

$u(t)\in C_b^{k+1},\ \ \Delta t_i=t_i-t_0,\ i=0,1,\cdots,k$ 라고 할 때 등간격점 $t_0,\ t_0+h,\ t_0+2h,\cdots,\ t_0+kh$ 우에서의 도함수근사식

$$\frac{du}{dt}(t_0)=\frac{1}{h}\sum_{i=0}^{k}\alpha_{k,i}u(t_0+ih)+O(h^{k+1}) \tag{2}$$

에 기초하여 역방향확률미분방정식의 수값풀이도식은 다음과 같이 유도된다.[1]

$$z_n=\sum_{j=1}^{k}\alpha_{k,j}E_{t_n}^x[y^{n+j}\Delta W_{n,j}],\ \ \alpha_{k,0}y_n=-\sum_{j=1}^{k}\alpha_{k,j}E_{t_n}^x[y^{n+j}]-f(t_n,\ y^n)$$

우리는 비등간격점 $t_0,\ t_0+1^2h,\ t_0+2^2h,\cdots,\ t_0+k^2h$ 우에서의 도함수근사식

$$\frac{du}{dt}(t_0)=\frac{1}{h}\sum_{i=0}^{k}\beta_{k,\,i}u(t_0+i^2h)+O(h^{k+1}) \tag{3}$$

에 기초하여 역방향확률미분방정식의 수값풀이도식을 유도하기 위해 식 (1)의 량변에 조건부기대값을 취하고 도함수를 취한 다음 $t=t_n$ 을 취하고 오른변에 식 (3)을 적용하면

$$\frac{1}{h}\sum_{i=0}^{k}\beta_{k,\,i}E_{t_n}^x[y_{t_{n+i^2}}]=-f(t_n,\ y_{t_n})z_{t_n}-R_{y,\,n}^k,\ \ \frac{1}{h}\sum_{i=0}^{k}\beta_{k,\,i}E_{t_n}^x[y_{t_{n+i^2}}\Delta W_{n,\,i}]=z_{t_n}-R_{z,\,n}^k \tag{4}$$

과 같다. 여기서

$$R_{y,\,n}^k=\left.\frac{dE_{t_n}^x[y_t]}{dt}\right|_{t=t_n}-\frac{1}{h}\sum_{i=0}^{k}\beta_{k,\,i}E_{t_n}^x[y_{t_{n+i^2}}],\ \ R_{z,\,n}^k=\left.\frac{dE_{t_n}^x[y_t\Delta W_{t_n,\,t}]}{dt}\right|_{t=t_n}-\frac{1}{h}\sum_{i=0}^{k}\beta_{k,\,i}E_{t_n}^x[y_{t_{n+i^2}}\Delta W_{n,\,i^2}]$$

$n\geq N-k^2$ 에 대하여 일정한 방법(실례로 C-N도식)으로 일정한 오차한계를 만족시키도록 풀이의 근사 $(y^j,\ z^j)_{N-k^2+1\leq j\leq N}$ 을 구했다고 가정하면.식 (4)로부터 역방향확률미분방정식의 수값풀이를 위한 여러걸음도식은 다음과 같다.

$$hz^n=\sum_{j=1}^{k}\beta_{k,\,j}E_{t_n}^x[y^{n+j^2}\Delta W_{n,\,j^2}] \tag{5}$$

$$\beta_{k,\,0}y^n=-\sum_{j=1}^{k}\beta_{k,\,j}E_{t_n}^x[y^{n+j^2}]-h\cdot f(t_n,\ y^n) \tag{6}$$

한편 변동방정식 $\nabla y_t=\varphi_x(W_T)+\int_t^T f_y(s,\ y_s)\nabla y_s ds-\int_t^T\nabla z_s dW_s$ 의 량변에 t 에 관한 도함수를 취하고 비등간격도함수근사식 (3)을 적용하면 다음의 식이 성립된다.

$$-\beta_{k,\,0}\nabla y_{t_n}=\sum_{i=0}^{k}\beta_{k,\,0}E_{t_n}^x[\nabla y_{t_{n+i^2}}]+hf_y^{/}(t_n,\ y_{t_n})\nabla y_{t_n}+hR_{\nabla y,\,n}^k$$

$$R_{\nabla y,\,n}^k=\left.\frac{dE_{t_n}^x[\nabla y_t]}{dt}\right|_{t=t_n}-\sum_{i=0}^{k}\frac{\beta_{k,\,i}}{h}E_{t_n}^x[\nabla y_{t_{n+i^2}}]$$

한편 식 (6)으로부터 y^n 의 변동 ∇y^n 은 다음의 식을 만족시킨다.

$$-\beta_{k,\,0}\nabla y^n=\sum_{i=0}^{k}\beta_{k,\,i}E_{t_n}^x[\nabla y^{n+i^2}]+hf_y^{/}(t_n,\ y^n)\nabla y^n \tag{7}$$

일정한 조건밑에서 우에서 제기한 역방향확률미분방정식의 수값풀이도식에 대한 오차평가를 진행하여 이 여러걸음도식의 k 차점근수렴성을 리론적으로 증명하자.

이제 $e_y^n:=y_{t_n}-y^n,\ \ e_z^n:=z_{t_n}-z^n,\ \ e_{\nabla y}^n:=\nabla y_{t_n}-\nabla y^n$ 으로 놓고

$$c_j=\begin{cases}\beta_{k,\,j}, & j=l^2\\ 0, & j\neq l^2\end{cases}\ (j=0,\ \cdots,\ k^2),\ \ \alpha_i:=\sum_{l=i}^{k^2}c_l\ (i=0,\,1,\ \cdots,\ k^2)$$

라고 하자. 여기서 ∇y^n 은 y^n 의 공간변수 x 에 관한 변동이다.

이때 y_{t_n} 의 오차 $e_y^n=y_{t_n}-y^n$ 에 관한 다음의 정리가 성립된다.

정리 1 $\sum_{i=2}^{k^2}\frac{|\alpha_i|}{|\alpha_1|}<1$ 이고 $\max_{N-k^2+1\le n\le N} E[|e_y^n|]=O(h^k)$ 라고 가정하면 $\max_{0\le n\le N-k^2} E[|e_y^n|]\le Ch^k$ 이 성립된다. 여기서 C는 함수 f의 립쉬츠상수 L과 T에만 의존한다.

증명 식 (4)와 식 (6)으로부터 $-\beta_{k,0}e_y^n=\sum_{j=1}^{k}\beta_{k,j}E_{t_n}^x[e_y^{n+j^2}]+h\Delta f_n+O(h^{k+1})$ 이 성립된다. 여기서 $\Delta f_n=f(t_n,\ y_{t_n})-f(t_n,\ y^n)$ 이다.

$\sum_{i=0}^{k}\beta_{k,i}=0$ 이고 c_j에 대한 가정으로부터 웃식은 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\sum_{j=1}^{k^2}c_j(e_y^n-E_{t_n}^x[e_y^{n+j}])=h\Delta f_n+O(h^{k+1}),\ \sum_{j=1}^{k^2}c_j(e_y^{n+1}-E_{t_n}^x[e_y^{n+1+j}])=h\Delta f_{n+1}+O(h^{k+1})$$

량변에 조건부수학적기대값 $E_{t_n}^x[\cdot]$을 취하면 다음과 같다.

$$\sum_{j=1}^{k^2}c_j(E_{t_n}^x[e_y^{n+1}]-E_{t_n}^x[e_y^{n+1+j}])=hE_{t_n}^x[\Delta f_{n+1}]+O(h^{k+1})$$

$$\vdots$$

$$\sum_{j=1}^{k^2}c_j(E_{t_n}^x[e_y^{N-k^2}]-E_{t_n}^x[e_y^{N-k^2+j}])=hE_{t_n}^x[\Delta f_{N-k^2}]+O(h^{k+1})$$

이 식들을 량변끼리 모두 더하고 $\alpha_i:=\sum_{l=i}^{k^2}c_l$ 임을 리용하면

$$|\alpha_1 e_y^n|\le\sum_{i=2}^{k^2}|\alpha_i|E_{t_n}^x[|e_y^{n+i-1}|]+\sum_{i=1}^{k^2}|\alpha_i|E_{t_n}^x[|e_y^{N+i-k^2}|]+h\cdot|\Delta f_n|+h\cdot\sum_{j=n+1}^{N-k^2}E_{t_n}^x[|\Delta f_j|]+N\cdot O(h^{k+1})$$

이다. 이 식의 량변에 수학적기대값을 취하면 다음과 같다.

$$|\alpha_1|E[|e_y^n|]\le\sum_{i=2}^{k^2}|\alpha_i|E[|e_y^{n+i-1}|]+\sum_{i=1}^{k^2}|\alpha_i|E[|e_y^{N+i-k^2}|]+h\cdot\sum_{j=n}^{N-k^2}E[|\Delta f_j|]+N\cdot O(h^{k+1})$$

$\max_{N-k^2+1\le n\le N}E[|e_y^n|]=O(h^k)$, $|\Delta f_n|\le L|e_y^n|$, $N=T/h$ 이므로

$$\exists c>0,\ E[|e_y^n|]\le\sum_{i=2}^{k^2}\frac{|\alpha_i|}{|\alpha_1|}E[|e_y^{n+i-1}|]+\frac{Lh}{|\alpha_1|}\sum_{j=n}^{N-k^2}E[|e_y^j|]+ch^k$$

이 성립되며 h를 충분히 작게 취할수 있고 $a:=1-Lh/|\alpha_1|\approx 1$ 이므로

$$E[|e_y^n|]\le\sum_{i=2}^{k^2}\frac{|\alpha_i|}{|\alpha_1|}E[|e_y^{n+i-1}|]+\frac{Lh}{|\alpha_1|}\sum_{j=n+1}^{N-k^2}E[|e_y^j|]+ch^k$$

이제 $E[|e_y^p|]:=\max_{0\le n\le N-k^2}E[|e_y^n|]$ 으로 놓으면

$$E[|e_y^p|]\le\sum_{i=2}^{k^2}\frac{|\alpha_i|}{|\alpha_1|}E[|e_y^{p+i-1}|]+\frac{Lh}{|\alpha_1|}\sum_{j=p+1}^{N-k^2}E[|e_y^j|]+ch^k\le\left(\sum_{i=2}^{k^2}\frac{|\alpha_i|}{|\alpha_1|}+\frac{LT}{|\alpha_1|}\right)\cdot E[|e_y^p|]+ch^k$$

이므로 $\left(1-\sum_{i=2}^{k^2}\frac{|\alpha_i|}{|\alpha_1|}-\frac{LT}{|\alpha_1|}\right)\cdot E[|e_y^p|]\le ch^k$ 이다.

따라서 $E[|e_y^p|]=O(h^k)$ 이 성립된다.(증명끝)

다음으로 $z_{t_n}-z^n$ 에 대한 평가를 진행하기 위해 y_t 와 ∇y_t 의 유계성에 대하여 보자.

보조정리 $\sum_{i=2}^{k^2}\frac{|\alpha_i|}{|\alpha_1|}<1$ 이고 초기근사 $(y^j,\ z^j),\ N-k^2+1\le j\le N$ 들이

$$\max_{N-k^2+1\le n\le N} E[|e_z^n|]\approx \max_{N-k^2+1\le n\le N} E[|e_{\nabla y}^n|]=O(h^k)$$

을 만족시킨다고 하면 $\max_{0\le n\le N-k^2} E[|e_{\nabla y}^n|]\le Ch^k$ 이 성립된다.

보조정리를 리용하면 z_{t_n} 의 오차 $e_z^n=z_{t_n}-z^n$ 에 관한 다음의 정리가 성립된다.

정리 2 초기조건들에 대하여

$$\max_{N-k^2+1\le n\le N} E[|e_y^n|]\approx \max_{N-k^2+1\le n\le N} E[|e_z^n|]=O(h^k)$$

이고 $\sum_{i=2}^{k^2}\frac{|\alpha_i|}{|\alpha_1|}<1$ 이면 $\max_{0\le n\le N-k^2} E[|e_z^n|]\le Ch^k$ 이 성립된다.

주의 오차평가정리의 조건 $\sum_{i=2}^{k^2}\frac{|\alpha_i|}{|\alpha_1|}<1$ 은 선행연구에서 제기한 등간격수값도식에 대하여 $k\le 3$ 일 때 성립되지만 론문에서 제기한 비등간격수값도식을 리용하는 경우에는 $k\le 12$ 일 때 성립된다.

이와 같이 우리는 비등간격점에서의 도함수근사식을 리용하여 생성자가 조종변수에 무관계한 역방향확률미분방정식의 여러걸음수값풀이도식을 제기하고 오차평가정리들을 통하여 이 도식이 12차까지의 점근수렴성을 가진다는것을 리론적으로 증명하였다.

참 고 문 헌

[1] W. Zhao et al.; SIAM J. Sci. Comput., 4, 1731, 2014.

주체107(2018)년 6월 5일 원고접수

Non-Equidistant Numerical Scheme and Its Error Estimate for a Kind of Backward Stochastic Differential Equation

Hwang Ho Jin, Pak Chol Gyu

We introduce a high-order multistep scheme for solving backward stochastic differential equations using derivative approximation on irregular points and make error estimates to prove rigorously that this scheme is high-order accurate for solving BSDE.

Key word: backward stochastic differential equation