김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체103(2014)년 제60권 제10호 Vol. 60 No. 10 JUCHE103(2014).

선형비동차정규분수계편－의미분방정식의 초기값문제에 대한 한가지 풀이법

박 순 애

론문에서는 선형비동차정규분수계편－의미분방정식에 대한 초기값문제를 설정하고 듀아멜의 원리에 의한 한가지 풀이법을 고찰하였다.

선행연구[2]에서는 고전듀아멜원리에 의하여 선형비동차리만－류빌분수계편－의미분방정식에 대한 초기값문제의 풀이를 구하였으며 선행연구[1]에서는 선형비동차정규분수계편－의미분방정식에 대해서는 고전듀아멜원리가 성립되지 않는다고 지적하고 선형비동차정규분수계편－의미분방정식에 대한 초기값문제의 풀이에 리용되는 일반화된 듀아멜의 원리를 내놓았다.

그러나 정규분수계도함수마디를 1개 포함하는 방정식을 고찰한것으로 하여 선행연구[1]에서는 정규분수계편－의미분방정식에 대해서도 고전듀아멜의 원리가 성립되는 경우가 있고 일반화된 듀아멜의 원리도 성립되지 않는 경우가 있다는것을 밝히지 못하였다.

여기서는 모든 경우의 비동차정규분수계편－의미분방정식에 대하여 적용되는 변형된 듀아멜의 원리를 고찰하였다.

다음과 같은 일반형태의 변결수선형비동차정규분수계편－의미분방정식을 고찰하자.

$$L({}^cD_{0+},\ D)u(t,\ x) \equiv {}^cD_{0+}^{\alpha_0}u(t,\ x)+\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D){}^cD_{0+}^{\alpha_i}u(t,\ x)=f(t,\ x)\ ,\quad t>0,\ \ x\in R^n \quad (1)$$

여기서 $\alpha_i \in R_+,\ \ i=0, 1, \cdots, m$ 들은 $\alpha_0>0,\ \alpha_0>\alpha_1>\cdots>\alpha_m\ge 0$, $n_i-1<\alpha_i\le n_i,\ \ n_i\in N$ 인 조건을 만족시키는 실수들이며 결수 $a_i(t),\ \ i=1, \cdots, m$ 들은 $[0,\ \infty)$ 에서 정의되고 $f(t,\ x)$ 는 $[0,\ \infty)\times G$ 에서 정의된 함수들이다. 그리고 $A_i(D)$ 는 $A_i(\xi)\in A(G),\ \ G\subset R^n\ \ (i=1, \cdots,\ m)$ 을 표상으로 가지는 의미분연산자이다.

방정식 (1)과 함께 초기조건

$$\left.\frac{\partial^k}{\partial t^k}u(t,\ x)\right|_{t=+0}=0,\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ n_0-1 \quad (2)$$

을 만족시키는 함수 $u(t,\ x)$ 를 구하는 초기값문제를 고찰하자.

리만－류빌분수계편－의미분연산자 ${}^RL(D_{\tau+},\ D)=D_{\tau+}^{\alpha_0}+\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D)D_{\tau+}^{\alpha_i}$ 와 정규분수계편－의미분연산자 ${}^cL({}^cD_{\tau+},\ D)={}^cD_{0+}^{\alpha_0}+\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D){}^cD_{0+}^{\alpha_i}$ 를 생각하자.

보조정리 $a_i(t)\in C[0,\ T],\ \ i=1, \cdots,\ m$ 이며 $0\le\gamma<1,\ \ \gamma\le\alpha_0$ 인 γ 에 대하여

$$f(t,\ x)\in C_\gamma^1([0,\ \infty),\ \Psi_{G,\ 2}(R^n))$$

일 때 초기값문제 (1), (2)의 풀이 $u(t,\ x)\in C^{\alpha_0,\ n_0-1}([0,\ \infty),\ \ \Psi_{G,\ 2}(R^n))$ 은 유일존재하며 다음과 같이 표시된다.

$$u(t,\ x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k I_{0+}^{\alpha_0}\left[\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D)I_{0+}^{\alpha_0-\alpha_i}\right]^k f(t,\ x) \tag{3}$$

증명 식 (3)으로 표시된 $u(t,\ x)$ 가 초기값문제 (1), (2)를 만족시키는가를 보자.

먼저 식 (3)을 식 (1)에 대입하자.

식 (3)의 $u(t,\ x)$ 에 대하여 다음의 식이 성립된다.

$${}^cD_{0+}^{n_0}u(t,\ x)=(2\pi)^{-n}\int_G\left[f(t,\ \ \xi)+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(\xi)I_{0+}^{n_0-\alpha_i}\right]^k f(t,\ \ \xi)\right]e^{ix\xi}d\xi$$

$$\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D){}^cD_{0+}^{\alpha_i}u(t,\ \ \ x)=(2\pi)^{-n}\int_G\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(\xi)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k I_{0+}^{n_0-\alpha_i}\left[\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(\xi)I_{0+}^{n_0-\alpha_i}\right]^k f(t,\ \xi)\,e^{ix\xi}d\xi=$$

$$=(2\pi)^{-n}\int_G\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left[\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(\xi)I_{0+}^{n_0-\alpha_i}\right]^k f(t,\ \ \xi)\,e^{ix\xi}d\xi$$

우의 두 식을 변끼리 더하면

$${}^cD_{0+}^{n_0}u(t,\ x)+\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D){}^cD_{0+}^{\alpha_i}u(t,\ \ x)=(2\pi)^{-n}\int_G\tilde{f}(t,\ \ \xi)\,e^{ix\xi}d\xi=f(t,\ x)$$

가 성립된다. 즉 식 (3)의 $u(t,\ x)$ 는 방정식 (1)을 만족시킨다.

$$\left.\frac{\partial^k}{\partial t^k}u(t,\ x)\right|_{t=+0}=(2\pi)^{-n}\int_G\left[\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}I_{0+}^{n_0-k}\left[\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(\xi)I_{0+}^{n_0-\alpha_i}\right]^k\tilde{f}(t,\ \xi)\right]_{t=0}e^{ix\xi}d\xi=0,$$

$k=0,1,\cdots,n_0-1$ 이므로 식 (3)의 $u(t,\ x)$ 는 초기조건 (2)를 만족시킨다. 즉 식 (3)의 $u(t,\ x)\in C^{\alpha_0,\ n_0-1}([0,\ \infty),\ \ \Psi_{G,\ 2}(R^n))$ 은 초기값문제 (1), (2)의 유일한 풀이이다.(증명끝)

정리 $a_i(t)\in C[0,\ T],\ \ \ i=1,\cdots,\ m$ 이며 $0\le\gamma<1,\ \ \ \gamma\le\alpha_0$ 인 γ 에 대하여

$$f(t,\ \ x)\in C_\gamma^1([0,\ \ \infty),\ \Psi_{G,\ 2}(R^n))$$

일 때 동차초기조건을 만족시키는 비동차방정식의 초기값문제 (1), (2)의 풀이

$$u(t,\ x)\in C^{\alpha_0,\ n_0-1}([0,\ \infty),\ \ \Psi_{G,\ 2}(R^n))$$

은 유일존재하며 다음과 같이 표시된다.

$$u(t,\ x)=\int_0^t G_R(t,\ x;\ \tau)d\tau=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k I_{0+}^{\alpha_0}\left[\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D)I_{0+}^{\alpha_0-\alpha_i}\right]^k f(t,\ x) \tag{4}$$

여기서 $G_R(t,\ x;\ \tau)$ 는 ${}^RL(D_{\tau_+})G(t,\ x;\ \tau)=0,\ \ t>\tau>0$, $D_{\tau+}^{\alpha_0-j}G(t,\ x;\ \tau)|_{t=\tau_+}=\begin{cases}f(\tau,\ x), & j=1\\ 0, & j=2,\ \cdots,\ n_0\end{cases}$,

$I_{\tau+}^{n_0-\alpha_0}G(t,\ x;\ \tau)\in C^{\alpha_0,\ n_0-1}([\tau,\ \infty),\ \ \Psi_{G,\ 2}(R^n))$ 의 풀이 즉

$$G_R(t,\ x;\ \tau)=\left[\Phi_{\alpha_0}(t-\tau)I(D)+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}I_{\tau+}^{\alpha_0}\left[\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D)I_{\tau_+}^{\alpha_0-\alpha_i}\right]^k\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D)\Phi_{\alpha_0-\alpha_i}(t-\tau)\right]f(\tau,\ x).$$

증명 식 (4)의 첫번째 부분을 계산하여 두번째 부분과 같다는것을 증명하면 된다.

$$u(t,\ x)=\int_0^t G_R(t,\ x;\ \tau)d\tau=\int_0^t \Phi_{\alpha_0}(t-\tau)f(\tau,\ x)d\tau+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\int_0^t I_{\tau+}^{\alpha_0}\left[\sum_{i=1}^m a_i(t)A_i(D)I_{\tau+}^{\alpha_0-\alpha_i}\right]^k\sum_{i=1}^m a_i(t)A_i(D)\Phi_{\alpha_0-\alpha_i}(t-\tau)f(\tau,\ x)d\tau=$$

$$=I_{0+}^{\alpha_0}f(t,\ x)+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\int_0^t\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha_0)}\int_\tau(t-\xi)^{\alpha_0-1}\left[\sum_{i=1}^m a_i(\xi)A_i(D)I_{\tau+}^{\alpha_0-\alpha_i}\right]^k\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\sum_{i=1}^m a_i(\xi)A_i(D)\Phi_{\alpha_0-\alpha_i}(\xi-\tau)f(\tau,\ x)d\xi\right]d\tau=$$

$$=I_{0+}^{\alpha_0}f(t,\ x)+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{\Gamma(\alpha_0)}\int_0^t\left[\int_0^\xi(t-\xi)^{\alpha_0-1}\left[\sum_{i=1}^m a_i(\xi)A_i(D)I_{\tau+}^{\alpha_0-\alpha_i}\right]^k\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\sum_{i=1}^m a_i(\xi)A_i(D)\Phi_{\alpha_0-\alpha_i}(\xi-\tau)f(\tau,\ x)d\tau\right]d\xi=$$

$$=I_{0+}^{\alpha_0}f(t,\ x)+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{\Gamma(\alpha_0)}\int_0^t(t-\xi)^{\alpha_0-1}\left[\int_0^\xi\left[\sum_{i=1}^m a_i(\xi)A_i(D)I_{\tau+}^{\alpha_0-\alpha_i}\right]^k\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\sum_{i=1}^m a_i(\xi)A_i(D)\Phi_{\alpha_0-\alpha_i}(\xi-\tau)f(\tau,x)d\tau\right]d\xi=$$

$$=I_{0+}^{\alpha_0}f(t,\ x)+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}I_{0+}^{\alpha_0}\left[\int_0^t\left[\sum_{i=1}^m a_i(t)A_i(D)I_{\tau+}^{\alpha_0-\alpha_i}\right]^k\cdot\sum_{i=1}^m a_i(t)A_i(D)\Phi_{\alpha_0-\alpha_i}(t-\tau)f(\tau,\ x)d\tau\right]\tag{5}$$

웃식의 두번째 항에서 $\int_0^t\left[\sum_{i=1}^m a_i(t)A_i(D)I_{\tau+}^{\alpha_0-\alpha_i}\right]^k\sum_{i=1}^m a_i(t)A_i(D)\Phi_{\alpha_0-\alpha_i}(t-\tau)f(\tau,\ x)d\tau$ 를 계산하자.

식 $A=\int_0^t\left[\sum_{i=1}^m a_i(t)A_i(D)I_{\tau+}^{\alpha_0-\alpha_i}\right]^k\sum_{i=1}^m a_i(t)A_i(D)\Phi_{\alpha_0-\alpha_i}(t-\tau)f(\tau,x)d\tau$ 를 $k=0,1,2,\cdots$ 에 대하여 귀납적방법으로 계산하자.

$$A=\int_0^t\sum_{i=1}^m a_i(t)\,A_i(D)\Phi_{\alpha_0-\alpha_i}(t-\tau)f(\tau,\ x)d\tau=\sum_{i=1}^m a_i(t)A_i(D)\int_0^t\Phi_{\alpha_0-\alpha_i}(t-\tau)f(\tau,\ x)d\tau=$$

$$=\left[\sum_{i=1}^m a_i(t)A_i(D)I_{0+}^{\alpha_0-\alpha_i}\right]^0\sum_{i=1}^m a_i(t)A_i(D)\int_0^t\Phi_{\alpha_0-\alpha_i}(t-\tau)f(\tau,\ x)d\tau,\quad k=0$$

$$A=\int_0^t\left[\sum_{i=1}^m a_i(t)A_i(D)I_{\tau+}^{\alpha_0-\alpha_i}\right]^1\sum_{i=1}^m a_i(t)A_i(D)\Phi_{\alpha_0-\alpha_i}(t-\tau)f(\tau,\ x)d\tau=$$

$$=\sum_{i=1}^m a_i(t)A_i(D)\int_0^t\left[I_{\tau+}^{\alpha_0-\alpha_i}\sum_{i=1}^m a_i(t)A_i(D)\Phi_{\alpha_0-\alpha_i}(t-\tau)f(\tau,\ x)\right]d\tau=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D)\int_0^t\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha_0-\alpha_i)}\int_\tau^\xi(\xi-\eta)^{\alpha_0-\alpha_i-1}\sum_{i=1}^{m}a_i(\eta)A_i(D)\Phi_{\alpha_0-\alpha_i}(\eta-\tau)f(\tau,\ x)d\eta\right]d\tau=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D)\frac{1}{\Gamma(\alpha_0-\alpha_i)}\int_0^\xi\left[\int_0^\eta(\xi-\eta)^{\alpha_0-\alpha_i-1}\sum_{i=1}^{m}a_i(\eta)A_i(D)\Phi_{\alpha_0-\alpha_i}(\eta-\tau)f(\tau,\ x)d\tau\right]d\eta=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D)\frac{1}{\Gamma(\alpha_0-\alpha_i)}\int_0^\xi(\xi-\eta)^{\alpha_0-\alpha_i-1}\sum_{i=1}^{m}a_i(\eta)A_i(D)\left[\int_0^\eta\Phi_{\alpha_0-\alpha_i}(\eta-\tau)f(\tau,\ x)d\tau\right]d\eta=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D)I_{0+}^{\alpha_0-\alpha_i}\sum_{i=1}^{m}a_i(\xi)A_i(D)\int_0^\eta\Phi_{\alpha_0-\alpha_i}(\xi-\tau)f(\tau,\ x)d\tau=$$

$$=\left[\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D)I_{0+}^{\alpha_0-\alpha_i}\right]^1\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D)\int_0^t\Phi_{\alpha_0-\alpha_i}(t-\tau)f(\tau,\ x)d\tau,\quad k=1$$

$$A=\int_0^t\left[\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D)I_{\tau+}^{\alpha_0-\alpha_i}\right]^2\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D)\Phi_{\alpha_0-\alpha_i}(t-\tau)f(\tau,\ x)d\tau=$$

$$=\int_0^t\left[\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D)I_{\tau+}^{\alpha_0-\alpha_i}\right]^1\left[\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D)I_{\tau+}^{\alpha_0-\alpha_i}\right]^1\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D)\Phi_{\alpha_0-\alpha_i}(t-\tau)f(\tau,\ x)d\tau=$$

$$=\left[\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D)I_{0+}^{\alpha_0-\alpha_i}\right]^1\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D)\int_0^t I_{\tau+}^{\alpha_0-\alpha_i}\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D)\Phi_{\alpha_0-\alpha_i}(t-\tau)f(\tau,\ x)d\tau=$$

$$=\left[\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D)I_{0+}^{\alpha_0-\alpha_i}\right]^1\int_0^t\left[\sum_{i=1}^{m}a_i(t)\ A_i(D)I_{\tau+}^{\alpha_0-\alpha_i}\right]\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D)\Phi_{\alpha_0-\alpha_i}(t-\tau)f(\tau,\ x)d\tau=$$

$$=\left[\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D)I_{0+}^{\alpha_0-\alpha_i}\right]^1\left[\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D)I_{0+}^{\alpha_0-\alpha_i}\right]^1\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D)\int_0^t\Phi_{\alpha_0-\alpha_i}(t-\tau)f(\tau,\ x)d\tau=$$

$$=\left[\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D)I_{0+}^{\alpha_0-\alpha_i}\right]^2\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D)\int_0^t\Phi_{\alpha_0-\alpha_i}(t-\tau)f(\tau,\ x)d\tau,\quad k=2$$

따라서 귀납적으로

$$A=\int_0^t\left[\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D)I_{0+}^{\alpha_0-\alpha_i}\right]^k\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D)\Phi_{\alpha_0-\alpha_i}(t-\tau)f(\tau,\ x)d\tau=$$

$$=\left[\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D)I_{0+}^{\alpha_0-\alpha_i}\right]^k\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D)\int_0^t\Phi_{\alpha_0-\alpha_i}(t-\tau)f(\tau,\ x)d\tau$$

로 쓸수 있고 분수계적분정의를 리용하여

$$A=\left[\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D)I_{0+}^{\alpha_0-\alpha_i}\right]^k\sum_{i=1}^{m}a_i(t)\ A_i(D)I_{0+}^{\alpha_0-\alpha_i}f(t,\ x)$$

로 쓸수 있다.

따라서 식 (5)는 다음과 같이 쓸수 있다.

$$u(t,\ x)=I_{0+}^{\alpha_0}f(t,\ x)+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}I_{0+}^{\alpha_0}\left[\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D)I_{0+}^{\alpha_0-\alpha_i}\right]^k\cdot\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D)I_{0+}^{\alpha_0-\alpha_i}f(t,\ x)=$$

$$=I_{0+}^{\alpha_0}f(t,\ x)+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}I_{0+}^{\alpha_0}\left[\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D)I_{0+}^{\alpha_0-\alpha_i}\right]^{k+1}f(t,\ x)= \tag{6}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k I_{0+}^{\alpha_0}\left[\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D)I_{0+}^{\alpha_0-\alpha_i}\right]^k f(t,\ x)$$

이와 같이 식 (4)는 식 (6)으로 계산되며 보조정리에 의하여 이것은 초기값문제 (1), (2)의 풀이로 된다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] S. R. Umarov; 1004. 2098v1[math.CA], 2010.

[2] S. R. Umarov; Doklady Mathematics, 75, 1, 94, 2007.

주체103(2014)년 6월 5일 원고접수

A Method of Solving the Initial Value Problem for Linear Inhomogeneous Partial Pseudo-Differential Equation with the Caputo Fractional Derivative

Pak Sun Ae

We considered a method of solving the initial value problem for linear inhomogeneous partial pseudo-differential equation with the Caputo fractional derivative by Duhamel principle.

Here our problem is as follows.

$$L({}^cD_{0+},\ D)u(t,\ x)\equiv {}^cD_{0+}^{\alpha_0}u(t,\ x)+\sum_{i=1}^{m}a_i(t)A_i(D)\,{}^cD_{0+}^{\alpha_i}u(t,\ x)=f(t,\ x),\quad t>0,\quad x\in R^n$$

$$\left.\frac{\partial^k}{\partial t^k}u(t,\ x)\right|_{t=+0}=0,\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ n_0-1$$

where $\alpha_0>\alpha_1>\cdots>\alpha_m=0$, $n_i-1<\alpha_i\le n_i$, $n_i\in N$ and $\alpha_i\in R$, $i=0,\ 1,\cdots,\ m$.

Key word: linear inhomogeneous partial pseudo-differential equation