김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체104(2015)년 제61권 제9호 Vol. 61 No. 9 JUCHE104(2015).

$A-$쌍확장성과 분포적카오스성사이의 관계

주현희, 김철산

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《오늘 과학과 기술은 매우 빠른 속도로 발전하고있으며 사회발전에서 과학기술이 노는 역할은 더욱더 커지고있습니다. 현시대의 요구에 맞게 과학기술을 빨리 발전시켜야 우리의 자립적민족경제의 위력을 강화하고 사회주의건설을 더욱 다그칠수 있으며 사회주의의 우월성을 전면적으로 높이 발양시킬수 있습니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제18권 441페지)

론문에서는 콤팍트거리공간에서 넘기기의 $A-$쌍확장성과 분포적카오스성사이의 관계에 대하여 연구하였다.

선행연구[1, 4]에서는 콤팍트거리공간에서 행렬 A에 대한 평범한 가정밑에 엄격한 $A-$쌍확장넘기기에 의하여 주어지는 력학계가 정위상엔트로피를 가진다는것을 밝히고 엄격한 $A-$쌍확장넘기기의 일련의 카오스성을 론의하였다.

선행연구[2]에서는 유한형의 부분밀기에 대하여 리－요크의 의미에서의 카오스성, 정엔트로피성, 1형태의 분포적카오스성은 동등하다는것을 증명하였다.

선행연구[3]에서는 유한형의 부분밀기가 아닌 밀기력학계에서는 우의 동등성이 일반적으로 성립하지 않는다는 실례를 주었다.

우리는 콤팍트거리공간에서 주어진 엄격한 $A-$쌍확장넘기기와 유한형의 부분밀기사이의 위상반공액성을 리용하여 강한 카오스개념으로 되고있는 분포적카오스성을 론의하였다.

정의 $(X,\ d)$를 콤팍트거리공간이라고 하고 $f: X\to X$를 련속인 넘기기라고 하자.

다음의 함수 $\xi_f: X\times X\times \boldsymbol{R}\times \boldsymbol{N}\to \boldsymbol{N}$을 생각하자.

$$\xi_f(x,\ y,\ t,\ n):=\#\{i: d(f^i(x),\ f^i(y))<t,\ 0\le i\le n\}$$

이 함수를 리용하여 다음과 같은 함수들을 정의하자.

$$F_{xy}(t):=\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\xi_f(x,\ y,\ t,\ n)\ ,\ F_{xy}^*(t):=\varlimsup_{n\to\infty}\xi_f(x,\ y,\ t,\ n)$$

이때 다음의 조건들을 만족시키는 점 $x,\ y\in X$들을 함수 f의 1형태의 분포적카오스쌍(간단히 DC1쌍)이라고 부른다.

i) 적당한 $s>0$이 있어서 $F_{xy}(s)=0$이다.

ii) 임의의 $t>0$에 대하여 $F_{xy}^*(t)=1$이다.

만일 조건 i)을 조건

iii) 적당한 $s>0$이 있어서 $F_{xy}(s)<1$이다.

로 바꾸었을 때 조건 iii)과 조건 ii)를 만족시키는 점들을 2형태의 분포적카오스쌍(간단히 DC2쌍)이라고 부른다.

적어도 두점을 포함하는 $S\subset X$의 임의의 서로 다른 원소들이 언제나 DC1(2, 3)쌍일 때 이 모임 S를 1(2, 3)형태의 분포적스크람블모임이라고 부른다.

만일 X에 셀수 없는 1(2, 3)형태의 분포적스크람블모임이 존재하면 넘기기 f를 1(2, 3)형태의 분포적카오스적이라고 부른다.(간단히 f를 DC1(2, 3)이라고 부른다.)

명제 X와 Y를 각각 콤팍트거리공간이라고 하자.

$f:X\to X$와 $g:Y\to Y$는 각각 련속넘기기로서 위상동형넘기기 $h:X\to Y$에 의하여 위상공액이라고 하자. 즉 $\forall x\in X,\ h\circ f(x)=g\circ h(x)$라고 하자.

이때 f가 어떤 이행행렬 A에 관한 엄격한 쌍확장넘기기이면 g도 행렬 A에 관한 엄격한 쌍확장넘기기로 된다.

증명 f가 X의 어떤 서로 비교차하는 콤팍트부분모임 $U_i\ (1\le i\le m)$우에서의 엄격한 $A-$쌍확장넘기기라고 하자. 즉 $f(U_i)\supset \bigcup_{\substack{j=1\\(A)_{ij}=1}}^{m} U_j$ 라고 하자.

이제 $V_i:=h(U_i)$라고 하면 넘기기 h의 위상동형성에 의하여 V_i들은 서로 비교차하며

$$g(V_i)=h\circ f\circ h^{-1}(V_i)=h\circ f(U_i)\supset h\left(\bigcup_{\substack{j=1\\(A)_{ij}=1}}^{m} U_j\right)=\bigcup_{\substack{j=1\\(A)_{ij}=1}}^{m} h(U_j)=\bigcup_{\substack{j=1\\(A)_{ij}=1}}^{m} V_j\,.$$

이것은 g도 같은 A에 관하여 엄격한 쌍확장넘기기라는것을 보여준다.(증명끝)

정리 1 X를 콤팍트거리공간이라고 하고 A를 정인 m차이행행렬이라고 하자.

련속넘기기 $f:X\to X$가 다음의 조건들을 만족시킨다고 하자.

① f는 엄격한 $A-$쌍확장넘기기이다.

② 임의의 $\alpha=(a_0a_1\cdots)\in\Sigma_m^+(A)$에 대하여 모임 $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U_{a_n})$은 한점모임이다.

이때 f는 제1형태의 분포적카오스이다.

증명 조건 ①, ②에 의하여 f는 어떤 콤팍트불변모임 $V\subset X$우에서 유한형의 부분밀기 $(\Sigma_m^+(A),\ \sigma_A)$와 위상공액이다.

이때 선행연구[1]의 결과에 의하여 이 부분밀기는 정위상엔트로피를 가진다.

선행연구[2]의 결과에 의하여 이 부분밀기는 제1형태의 분포적카오스이다.

이때 제1형태의 분포적카오스는 위상공액성에 의하여 보존되므로 f도 X우에서 제1형태의 분포적카오스이다.(증명끝)

보조정리 1 X를 콤팍트거리공간이라고 하고 A를 정인 m차이행행렬이라고 하자.

련속넘기기 $f:X\to X$가 서로 비교차하는 m개의 콤팍트부분모임 $U_i\ (1\le i\le m)\subset X$우에서 엄격한 $A-$쌍확장이라고 하자.

이때 적당한 $K\in\boldsymbol{N}$이 있어서 f^K은 우의 m개의 콤팍트부분모임 $U_i\ (1\le i\le m)\subset X$우에서 엄격한 쌍확장이다.

증명 이행행렬 A가 본질적으로 정이므로 적당한 $K\in\boldsymbol{N}$이 있어서 A^K의 모든 원소는 1보다 작지 않다.

이로부터 임의의 $i,\ j\ (1\le i,\ j\le m)$에 대하여 길이가 $K-1$인 적당한 허용렬 $s_1s_2\cdots s_{K-1}$이 있어서 $is_1s_2\cdots s_{K-1}j$가 허용렬로 된다.

f가 엄격한 $A-$쌍확장넘기기이므로 $f^K(U_j)\supset U_j$가 성립된다.

이것은 f^K가 $U_i\ (1\le i\le m)\subset X$들우에서 엄격한 쌍확장이라는것을 보여준다.(증명끝)

선행연구[2]에서는 유한형의 부분밀기에 관하여 정위상엔트로피성과 제1형태의 분포적카오스성은 동등하다는것을 밝혔으며 따라서 $(\Sigma_m^+,\ \sigma)$는 제1형태의 분포적카오스이다.

그러나 우리는 $A-$쌍확장넘기기의 분포적카오스성을 론의하기 위하여 $(\Sigma_m^+,\ \sigma)$의 분포적카오스쌍들의 스크람블모임을 다시 구성하기로 한다.

보조정리 2 모임 $\Gamma:=\{x_0 1 x_0 x_1 1 x_0 x_1 x_2 1\cdots : x=(x_0x_1x_2\cdots)\in\Sigma_m^+\}$에 의하여 정의된 모임 $D:=\{x^{(\alpha)}=\alpha_0\underbrace{\alpha_1\cdots\alpha_1}_{s_1}\underbrace{\alpha_2\cdots\alpha_2}_{s_2}\cdots : \alpha=(\alpha_0\alpha_1\alpha_2\cdots)\in\Gamma\}$는 $(\Sigma_m^+,\ \sigma)$의 셀수 없는 제1형태의 분포적스크람블모임이다.

증명 다음과 같은 수렬을 생각하자.

$$s_0=1,\ m_n=s_0+\cdots+s_n,\ s_{n+1}=2^{n+1}m_n=2^{n+1}(s_0+\cdots+s_n)$$

분명히 임의의 $\alpha=(\alpha_0\alpha_1\alpha_2\cdots),\quad \beta=(\beta_0\beta_1\cdots)\in\Gamma$에 대하여

$$\alpha\ne\beta\Rightarrow\exists\{\nu_j\},\ \exists\{\mu_j\},\ \alpha_{\nu_j}=\beta_{\nu_j}=1,\ \alpha_{\mu_j}\ne\beta_{\mu_j}.$$

이때 임의의 $k\in\boldsymbol{N}$에 대하여 다음의 식이 성립된다.

$$\frac{1}{m_{\nu_j}}\xi_\sigma\left(x^{(\alpha)},\ x^{(\beta)},\ \frac{1}{2^k},\ m_{\nu_j}\right)=\frac{1}{m_{\nu_j}}\#\{i: x_ix_{i+1}\cdots x_{i+k-1}=y_iy_{i+1}\cdots y_{i+k-1},\ 0\le i<m_{\nu_j}\}\ge$$

$$\ge\frac{1}{m_{\nu_j}}(s_{\nu_j}-k)=\frac{2^{\nu_j}m_{\nu_j-1}-k}{(2^{\nu_j}+1)m_{\nu_j-1}}\to 1\quad (j\to\infty)$$

또한 $\dfrac{1}{m_{\mu_j}}\xi_\sigma\left(x^{(\alpha)},\ x^{(\beta)},\ \dfrac{2}{3},\ m_{\mu_j}\right)=\dfrac{1}{m_{\mu_j}}\#\{i: x_i=y_i,\ 0\le i<m_{\mu_j}\}\le\dfrac{m_{\mu_j-1}}{m_{\mu_j}}\to 0\ \ (j\to\infty)$ 이 성립된다.(증명끝)

정리 2 X를 콤팍트거리공간이라고 하고 A를 정인 m차이행행렬이라고 하자.

련속넘기기 $f: X\to X$가 서로 비교차하는 m개의 콤팍트부분모임 $\Lambda_i\ (1\le i\le m)\subset X$우에서 엄격한 $A-$쌍확장이라고 하자.

이때 적당한 $k\in\boldsymbol{N}$이 있어서 f^K은 제3형태의 분포적카오스이다.

증명 보조정리 1에 의하여 적당한 $k\in\boldsymbol{N}$이 있어서 f^K은 우의 m개의 콤팍트부분모임 $U_i\ (1\le i\le m)\subset X$우에서 엄격한 쌍확장이다.

이제 $g:=f^K$이 제3형태의 분포적카오스라는것을 증명하자.

$\forall\alpha=(a_0a_1\cdots)\in\Sigma_m^+,\ V_\alpha:=\bigcap_{n=0}^{\infty}g^{-n}(\Lambda_{a_n})$이라고 하자.

이때 분명히 $V_\alpha\ne\phi,\ a_0=i\Rightarrow V_\alpha\subset\Lambda_i,\ g^K(V_\alpha)\subset V_{\sigma^K(\alpha)}=V_{a_Ka_{K+1}\cdots}$이라는것이 쉽게 나온다.

$$S := \min\{d(\Lambda_i,\ \Lambda_j),\ i \neq j\} > 0$$

보조정리 2에서 정의한 분포적스크람블모임 $D \subset \Sigma_m^+$ 를 생각하자.

보조정리 2에서와 같이 $\alpha \neq \beta \Rightarrow \exists\{\mu_j\},\ \alpha_{\mu_j} \neq \beta_{\mu_j}$ 이므로 점 $x^{(\alpha)}, x^{(\beta)} \in D$ 에 대하여 $x_i = y_i$ 인 기호개수는 기껏해서 $m_{\mu_j - 1}$ 개이다.

매 $x^{(\alpha)} \in D$ 에 대하여 $V_{x^{(\alpha)}}$ 에서 임의의 한 점을 선택하고 그 점을 $a^{(\alpha)}$ 라고 하자.

이때 $f^j(a^{(\alpha)}),\ f^j(a^{(\beta)})$ 가 같은 Λ_j 에 속하게 되는 i 의 개수는 0부터 m_{μ_j} 개중에서 기껏해서 $m_{\mu_j - 1}$ 이다. 즉 $\#\{i : d(f^i(a^{(\alpha)}),\ f^i(a^{(\beta)})) < S,\ 0 \leq i < m_{\mu_j}\} \leq m_{\mu_j - 1}$ 이다.

이로부터 다음의 식이 성립된다.

$$\frac{1}{m_{\mu_j}}\xi_f(a^{(\alpha)},\ a^{(\beta)},\ S,\ m_{\mu_j}) = \frac{1}{m_{\mu_j}}\#\{i : d(f^i(a^{(\alpha)}),\ f^i(a^{(\beta)})) < S,\ 0 \leq i < m_{\mu_j}\} \leq \frac{m_{\mu_j - 1}}{m_{\mu_j}} \to 0\ \ (j \to \infty)$$

또한 $\#\{a^{(\alpha)}\} = \#\{V_\alpha\} = \#\{\Sigma_m^+\}$ 이므로 f^K 는 제3형태의 분포적카오스이다.(증명끝)

참고문헌

[1] 리철균 등; 수학, 3, 21, 주체99(2010).

[2] Hua Yun Wang et al.; Acta Math., 21, 1407, 2005.

[3] P. Oprocha; Trans. Amer. Math. Soc., 361, 4901, 2009.

[4] Ri Chol Gyun; arXiv:1309.6769v2 [math.DS], 28, Sep, 2013.

주체104(2015)년 5월 5일 원고접수

The Relation Between *A*-Coupled Expanding and Distributional Chaos

Ju Hyon Hui, Kim Chol San

We focus the relations between *A*-coupled expanding and distributional chaos.

We prove two theorems that give sufficient conditions for a strictly *A*-coupled expanding map to be distributional chaotic in the senses of two kinds.

Key words: *A*-coupled expanding, distributional chaos