김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체105(2016)년 제62권 제3호 Vol. 62 No. 3 JUCHE105(2016).

분수계도함수를 포함하는 2계미분방정식의 두점경계값문제의 풀이표시

김명하, 곽성남

위대한 령도자 **김정일**동지께서는 다음과 같이 교시하시였다.

《수학은 모든 자연과학의 기초로 될뿐아니라 사회현상을 연구하는데서도 중요한 수단으로 됩니다.》(《**김정일**선집》 증보판 제10권 478페지)

강하천수역에서 유기오염물의 시공간적인 변화동태를 정량적으로 해명하는데서 기본지표로 되는 DO-BOD계에 대한 해석은 매우 중요한 실천적문제의 하나로 된다.

수역의 유기오염상태를 특징짓는 지표에는 DO-BOD계뿐아니라 COD, TOC, TON 그리고 생물지표(조류, 미생물) 등이 있는데 이와 같은 지표들은 자연계안에서 실제로 존재하는 과정을 그대로 반영하는것이 아니라 간접적인 지표들이다. 그러나 DO-BOD계는 물속에서 유기오염물질의 실제적인 분해과정을 반영하는 기본지시계이며 유기오염물에 의한 물환경상태를 반영하는 기본지표들이다.

지금까지 론의된 하천수역의 DO-BOD계변화동태를 재현하기 위한 수학적모형들은 원천항의 내부물리적구조에 따라 여러가지로 알려져있는데 그중에서 가장 많이 쓰이는 모형의 하나가 S-P모형이다.[2]

$$u\frac{dB}{dx}=D_x\frac{d^2B}{dx^2}-K_1B,\ \ u\frac{dO}{dx}=D_x\frac{d^2O}{dx^2}+K_1B-K_2(O_{\mathrm{s}}-O)$$

여기서 u는 강흐름속도, D_x는 막흐름분산결수, k_1은 산소소비결수, k_2는 산소보충결수, $B(x)$는 BOD, $O(x)$는 DO, O_{s}는 용존산소기준값이다.

오염물질의 물리화학적특성에 의하여 강하천에서의 BOD-DO의 농도변화는 우의 2계미분방정식으로가 아니라 점탄성매질에서의 분수계미분방정식으로 모형화된다.

이로부터 강하천오염변화동태를 정량적으로 정확히 평가하여 강하천들이 오염되지 않도록 물환경조종방법을 완성하기 위하여 론문에서는 분수계도함수를 포함하는 2계미분방정식의 두점경계값문제

$$ay''(x)+by^{(\alpha)}(x)+cy(x)=f(x)\ \ (0<x<l),\tag{1}$$

$$y(0)=y_0,\ \ y(l)=y_l,\tag{2}$$

$$a,\ b,\ c,\ l,\ y_0,\ y_l\in\boldsymbol{R},\ 0<\alpha\le 1,\ f(x)\in L_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}_+)$$

를 설정하고 이 문제의 풀이표시를 연구하였다.

선행연구[3]에서는 분수계미분방정식의 경계값문제

$$D^\alpha u-Mu=x(t),\ t\in[0,\ 1]\ (0<\alpha<1),\ u(0)=\sum_{i=1}^n\beta_iu(\xi_i)$$

의 유일풀이의 존재성과 풀이표시문제를 연구하였다.

선행연구[4]에서는 캐푸토분수계도함수를 포함하는 분수계적분경계조건을 가지는 분수계비선형미분방정식의 경계값문제

$$^{c}D_{0+}^{q}u(t)=f(t,\ u(t),\ ^{c}D_{0+}^{\sigma}u(t)),\ \ 0<t<1,\ \ u(0)=0,\ \ u'(1)=I_{0+}^{\sigma}u(1),$$
$$f:[0,\ 1]\times \boldsymbol{R}\times \boldsymbol{R}\to \boldsymbol{R},\ 1<q<2,\ \ 0<\sigma<1$$

에 대하여 바나흐축소원리를 리용하여 유일풀이가 존재하기 위한 충분조건을 밝혔다.

선행연구[5]에서는 적분경계조건을 가지는 분수계특이미분방정식의 경계값문제

$$^{c}D_{0+}^{\alpha}u(t)=f(t,\ u(t))=0\ \ (0<t<1),$$
$$u(0)=\cdots=u^{(n-1)}(0)=0,$$
$$u(1)=\int_0^1 u(s)d\mu(s),\ n\geq 2,\ \alpha\in(n-1,\ n)$$

에 대한 동등한 적분방정식을 유도하고 샤우데르부동점원리를 리용하여 풀이의 유일존재성을 연구하였다. 여기서 $\mu(s)$는 $t=1$에서 특이성을 가지는 $\int_0^1 d\mu(s)<1$인 유계변동함수이다.

선행연구[6]에서는 비선형분수계미분방정식의 경계값문제

$$D_{0+}^{\alpha}u(t)+f(t,\ u(t))=0,\ 0<t<1,\ u(0)=u(1)=0,\ 1<\alpha\leq 2,\ f:[0,\ 1]\times[0,\ \infty)\to[0,\ \infty)$$

와 동등한 제2종프레드호름적분방정식을 유도한데 기초하여 부동점정리를 리용하여 정인풀이의 유일존재성을 연구하였으며 선행연구[7]에서는 캐푸토분수계도함수를 포함하는 분수계미분방정식의 경계값문제

$$^{c}D^{\alpha}y(t)=f(t,\ y),\ t\in J=[0,\ T],\ 2<\alpha\leq 3,$$
$$y(0)=y_0,\ y'(0)=y_0^{*},\ y''(T)=y_T,\ y_0,\ y_0^{*},\ y_T\in \boldsymbol{R}$$

의 풀이가 존재하기 위한 충분조건을 밝혔다. 여기서 $f:J\times\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$는 련속인 함수이다.

우리는 현실에서 제기되는 분수계도함수항을 포함하는 2계미분방정식의 경계값문제를 설정하고 이 문제의 해석적풀이표시에 대하여 연구하였다.

론문에서는 경계값문제 (1), (2)의 풀이표시에 대하여 론의한다.

$y^{(\alpha)}(x)$는 α계캐푸토분수계도함수로서 다음과 같이 표시된다.

$$y^{(\alpha)}(x)=I^{1-\alpha}f'(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x\frac{y'(x)}{(x-\tau)^{\alpha}}d\tau,\ x>0,\ 0<\alpha\leq 1$$

$I^{\alpha}y(x)$는 α계리만－류빌의 분수적분으로서 $I^{\alpha}y(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-\tau)^{\alpha-1}y(\tau)\,d\tau,\ x>0$이다.

먼저 $f(x)=0$인 경우 동차방정식의 풀이의 표준기본계를 구한다.

방정식 (1)은 $Ly=y''+by^{(\alpha)}/a+cy/a=f/a$와 같이 다시 쓸수 있다.

보조정리[1] 동차방정식 $Ly=0$의 풀이 $y(x)\in C^1(0,\ l)\cap C[0,\ l]$의 표준기본계는 유일존재하며 $\Phi_{\alpha}(x)=x_+^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$이라고 할 때 다음과 같이 표시된다.

$$Y_1(x)=\Phi_1(x)+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\sum_{|\beta|=k}\frac{k!}{\beta_1!\beta_2!}\left(\frac{b}{a}\right)^{\beta_1}\left(\frac{c}{a}\right)^{\beta_2}\frac{x_+^{(2-\alpha)\beta_1+2(\beta_2+1)}}{\Gamma[(2-\alpha)\beta_1+2(\beta_2+1)+1]}$$

$$Y_2(x)=\Phi_2(x)+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\sum_{|\beta|=k}\frac{k!}{\beta_1!\beta_2!}\left(\frac{b}{a}\right)^{\beta_1+1}\left(\frac{c}{a}\right)^{\beta_2}\frac{x_+^{(2-\alpha)(\beta_1+1)+2\beta_2+1}}{\Gamma[(2-\alpha)(\beta_1+1)+2\beta_2+2]}+$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\sum_{|\beta|=k}\frac{k!}{\beta_1!\beta_2!}\left(\frac{b}{a}\right)^{\beta_1}\left(\frac{c}{a}\right)^{\beta_2+1}\frac{x_+^{(2-\alpha)\beta_1+2(\beta_2+1)+1}}{\Gamma[(2-\alpha)\beta_1+2(\beta_2+1)+2]}$$

정리 분수계도함수를 포함하는 2계미분방정식의 두점경계값문제 (1), (2)의 풀이는 유일존재하며 다음과 같이 표시된다.

$$y(x)=y_0Y_1(x)+\frac{[y_l-y_0Y_1(l)]Y_2(x)}{Y_2(l)}+\int_0^x\frac{Y_2(x-\xi)Y_2(l)-Y_2(l-\xi)Y_2(x)}{Y_2(l)}\frac{f(\xi)}{a}d\xi+\int_x^l\frac{Y_2(l-\xi)}{Y_2(l)}\frac{Y_2(x)}{a}f(\xi)d\xi \tag{3}$$

증명 식 (3)으로 표시된 경계값문제 (1), (2)의 풀이의 유일존재성은 풀이의 표준기본계의 유일존재성으로부터 분명하다.

경계값문제 (1), (2)의 풀이표시에 대하여 론의하자.

동차방정식의 풀이의 표준기본계를 구한데 기초하여 경계값문제 (1)의 일반풀이를

$$y(x)=c_1Y_1(x)+c_2Y_2(x)+\frac{1}{a}\int_0^x Y_2(x-\xi)f(\xi)d\xi$$

로 놓을수 있다.

이제 경계조건 (2)를 리용하여 상수 c_1, c_2를 결정하자.

$$y(0)=c_1Y_1(0)+c_2Y_2(0)+0=c_1=y_0,\ \ y(l)=y_0Y_1(l)+c_2Y_2(l)+\int_0^l Y_2(l-\xi)\frac{1}{a}f(\xi)d\xi=y_l$$

그러면 $c_2=\frac{1}{Y_2(l)}\left[y_l-y_0Y_1(l)-\int_0^l Y_2(l-\xi)\frac{1}{a}f(\xi)d\xi\right]$이므로 경계값문제 (1), (2)의 풀이는

$$y(x)=y_0Y_1(x)+\frac{1}{Y_2(l)}\left[y_l-y_0Y_1(l)-\int_0^l Y_2(l-\xi)\frac{1}{a}f(\xi)d\xi\right]Y_2(x)+\int_0^x Y_2(x-\xi)\frac{1}{a}f(\xi)d\xi=$$
$$=y_0Y_1(x)+\frac{1}{Y_2(l)}[y_l-y_0Y_1(l)]Y_2(x)-\frac{1}{Y_2(l)}\int_0^l Y_2(l-\xi)Y_2(x)\frac{1}{a}f(\xi)d\xi+\int_0^x Y_2(x-\xi)\frac{1}{a}f(\xi)d\xi=$$
$$=y_0Y_1(x)+\frac{1}{Y_2(l)}[y_l-y_0Y_1(l)]Y_2(x)-\frac{1}{Y_2(l)}\int_0^x Y_2(l-\xi)Y_2(x)\frac{1}{a}f(\xi)d\xi-$$
$$-\frac{1}{Y_2(l)}\int_l^x Y_2(l-\xi)Y_2(x)\frac{1}{a}f(\xi)d\xi+\int_0^x Y_2(x-\xi)\frac{1}{a}f(\xi)d\xi=$$
$$=y_0Y_1(x)+\frac{1}{Y_2(l)}[y_l-y_0Y_1(l)]Y_2(x)+\int_0^x\left[Y_2(x-\xi)-\frac{Y_2(l-\xi)Y_2(x)}{Y_2(l)}\right]\frac{1}{a}f(\xi)d\xi-\int_l^x\frac{Y_2(l-\xi)}{Y_2(l)}Y_2(x)\frac{1}{a}f(\xi)d\xi.$$

$$y_h(x)=y_0Y_1(x)+[y_l-y_0Y_1(l)]/Y_2(l)\cdot Y_2(x) \tag{4}$$

식 (4)는 비동차경계조건을 가진 동차방정식의 풀이이다.

식 (4)가 동차방정식을 만족시킨다는것은 보조정리에 의하여 분명하다.

또한 $Y_2(0)=0$이므로 $y(0)=y_0+[y_l-y_0Y_1(l)]/Y_2(l)\cdot Y_2(0)=y_0$이다.

그리고 $y(l)=y_0Y_1(l)+[y_l-y_0Y_1(l)]/Y_2(l)\cdot Y_2(l)=y_0Y_1(l)+y_l-y_0Y_1(l)=y_l$ 이므로 식 (4)는 경계조건을 만족시킨다.

다음으로 식 (3)에서

$$y_p(x)=\int_0^x\left[Y_2(x-\xi)-\frac{Y_2(l-\xi)Y_2(x)}{Y_2(l)}\right]\frac{1}{a}f(\xi)d\xi-\int_l^x\frac{Y_2(l-\xi)}{Y_2(l)}Y_2(x)\frac{1}{a}f(\xi)d\xi=\int_0^l G(x;\xi)\frac{1}{a}f(\xi)d\xi \quad (5)$$

는 동차경계조건을 가진 비동차방정식의 풀이이다. 여기서

$$G(x;\xi)=\begin{cases}Y_2(x-\xi)-\dfrac{Y_2(l-\xi)Y_2(x)}{Y_2(l)}, & 0\le\xi\le x\\ -\dfrac{Y_2(l-\xi)}{Y_2(l)}\cdot Y_2(x), & x\le\xi\le l\end{cases} \quad (6)$$

을 경계값문제 (1), (2)의 그린함수라고 부른다.

식 (5)로 표시된 $y_p(x)$ 는 방정식 (1)을 만족시킨다.

또한 $Y_2(0)=0$ 이므로 $y_p(0)=\int_0^l\frac{-Y(l-\xi)}{Y_2(l)}Y_2(0)\frac{1}{a}f(\xi)d\xi=0$ 이다.

그리고 $y_p(l)=\int_0^l\frac{Y_2(l-\xi)Y_2(l)-Y_2(l-\xi)Y_2(l)}{Y_2(l)}\frac{1}{a}f(\xi)d\xi=0$ 이므로 식 (5)로 표시된 $y_p(x)$ 는 동차경계조건을 만족시킨다.(증명끝)

다음과 같은 Bagley–Torvik방정식의 경계값문제의 풀이표시를 구하자.

$$u''(x)+u^{(1.5)}(x)+u(x)=x^2+x+\frac{4}{\sqrt{\pi}}\sqrt{x}+3,\ u(0)=1,\ u(1)=3,\ u(x)\in C^2(0,\ 1)\cap C[0,\ 1]$$

연산자 $L=D''+D^{1.5}+1$ 의 기본풀이는 도함수계수의 근접관계에 의하여

$$\varepsilon(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\sum_{|\beta|=k}\frac{k!}{\beta_1!\beta_2!}\Phi_{0.5\beta_1+2\beta_2+2}(x).$$

보조정리에 의하여 $Lu=0$ 의 풀이의 표준기본계는 다음과 같다.

$$u_1(x)=\Phi_1(x)+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\sum_{|\beta|=k}\frac{k!}{\beta_1!\beta_2!}\Phi_{0.5\beta_1+2\beta_2+3}(x),\ u_2(x)=\Phi_2(x)+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\sum_{|\beta|=k}\frac{k!}{\beta_1!\beta_2!}\Phi_{0.5\beta_1+2\beta_2+4}(x)$$

감마함수의 성질과 앞에서 정의한 $\Phi(x)$ 의 정의를 리용하여 비동차항을 평가하면

$$\sqrt{\pi}=\Gamma(1/2),\ \frac{4}{\sqrt{\pi}}\sqrt{x}=\frac{4}{\Gamma(1/2)}x^{1/2}=\frac{2}{\Gamma(1/2)/2}x^{1/2}=\frac{2}{\Gamma(3/2)}x^{1/2}=2\Phi_{3/2}(x)$$

이고 $x^2=2\Phi_3(x),\ x=\Phi_2(x),\ \Phi_1(x)=1$ 이므로 다음과 같이 쓸수 있다.

$$f=x^2+x+\frac{4}{\sqrt{\pi}}\sqrt{x}+3=2\Phi_3(x)+\Phi_2(x)+2\Phi_{3/2}(x)+3\Phi_1(x)$$

따라서 동차초기조건을 가지는 $Lu=f,\ u(0)=0,\ u'(0)=0$ 의 풀이는 그린함수법에 의하여

$$u_p(x)=\varepsilon*f=2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\sum_{|\beta|=k}\frac{k!}{\beta_1!\beta_2!}\Phi_{0.5\beta_1+2\beta_2+3}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\sum_{|\beta|=k}\frac{k!}{\beta_1!\beta_2!}\Phi_{0.5\beta_1+2\beta_2+4}(x)+$$

$$+3\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\sum_{|\beta|=k}\frac{k!}{\beta_1!\beta_2!}\Phi_{0.5\beta_1+2\beta_2+3}(x)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\sum_{|\beta|=k}\frac{k!}{\beta_1!\beta_2!}\Phi_{0.5\beta_1+2\beta_2+4}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\sum_{|\beta|=k}\frac{k!}{\beta_1!\beta_2!}\Phi_{0.5\beta_1+2\beta_2+3}(x)+3\Phi_3(x).$$

$Lu=f$ 의 일반풀이는 다음과 같다.

$$u(x)=c_1u_1(x)+c_2u_2(x)+u_p(x)=c_1\left(\Phi_1(x)+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\sum_{|\beta|=k}\frac{k!}{\beta_1!\beta_2!}\Phi_{0.5\beta_1+2\beta_2+3}(x)\right)+$$

$$+c_2\left(\Phi_2(x)+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\sum_{|\beta|=k}\frac{k!}{\beta_1!\beta_2!}\Phi_{0.5\beta_1+2\beta_2+4}(x)\right)+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\sum_{|\beta|=k}\frac{k!}{\beta_1!\beta_2!}\Phi_{0.5\beta_1+2\beta_2+4}(x)+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\sum_{|\beta|=k}\frac{k!}{\beta_1!\beta_2!}\Phi_{0.5\beta_1+2\beta_2+3}(x)+3\Phi_3(x)$$

이제 경계값문제의 풀이를 결정하자.

$u(0)=1$ 이므로 $c_1=1$ 은 분명하다. 따라서 $u(0)=1$ 을 만족시키는 풀이는

$$u(x)=c_1u_1(x)+c_2u_2(x)+u_p(x)=\Phi_1(x)+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\sum_{|\beta|=k}\frac{k!}{\beta_1!\beta_2!}\Phi_{0.5\beta_1+2\beta_2+3}(x)+$$

$$+c_2\left(\Phi_2(x)+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\sum_{|\beta|=k}\frac{k!}{\beta_1!\beta_2!}\Phi_{0.5\beta_1+2\beta_2+4}(x)\right)+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\sum_{|\beta|=k}\frac{k!}{\beta_1!\beta_2!}\Phi_{0.5\beta_1+2\beta_2+4}(x)+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\sum_{|\beta|=k}\frac{k!}{\beta_1!\beta_2!}\Phi_{0.5\beta_1+2\beta_2+3}(x)+3\Phi_3(x)=$$

$$=\Phi_1(x)+2\Phi_3(x)+c_2\left(\Phi_2(x)+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\sum_{|\beta|=k}\frac{k!}{\beta_1!\beta_2!}\Phi_{0.5\beta_1+2\beta_2+4}(x)\right)+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\sum_{|\beta|=k}\frac{k!}{\beta_1!\beta_2!}\Phi_{0.5\beta_1+2\beta_2+4}(x).$$

$u(1)=3$ 이므로

$$u(1)=1+1+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\sum_{|\beta|=k}\frac{k!}{\beta_1!\beta_2!}\Phi_{0.5\beta_1+2\beta_2+4}(1)+c_2\left(\Phi_2(1)+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\sum_{|\beta|=k}\frac{k!}{\beta_1!\beta_2!}\Phi_{0.5\beta_1+2\beta_2+4}(1)\right)=3$$

이고 따라서

$$c_2=\frac{1-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\sum_{|\beta|=k}\frac{k!}{\beta_1!\beta_2!}\Phi_{0.5\beta_1+2\beta_2+4}(1)}{1+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\sum_{|\beta|=k}\frac{k!}{\beta_1!\beta_2!}\Phi_{0.5\beta_1+2\beta_2+4}(1)}=\frac{1-(-1)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\sum_{|\beta|=k}\frac{k!}{\beta_1!\beta_2!}\Phi_{0.5\beta_1+2\beta_2+4}(1)}{1+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\sum_{|\beta|=k}\frac{k!}{\beta_1!\beta_2!}\Phi_{0.5\beta_1+2\beta_2+4}(1)}=1.$$

따라서 경계값문제의 풀이는 다음과 같다.

$$u(x)=\Phi_1(x)+2\Phi_3(x)+c_2\left(\Phi_2(x)+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\sum_{|\beta|=k}\frac{k!}{\beta_1!\beta_2!}\Phi_{0.5\beta_1+2\beta_2+4}(x)\right)+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\sum_{|\beta|=k}\frac{k!}{\beta_1!\beta_2!}\Phi_{0.5\beta_1+2\beta_2+4}(x)=$$

$$= \Phi_1(x) + 2\Phi_3(x) + 1\cdot\left(\Phi_2(x) + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\sum_{|\beta|=k}\frac{k!}{\beta_1!\beta_2!}\Phi_{0.5\beta_1+2\beta_2+4}(x)\right) +$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\sum_{|\beta|=k}\frac{k!}{\beta_1!\beta_2!}\Phi_{0.5\beta_1+2\beta_2+4}(x) = \Phi_1(x) + 2\Phi_3(x) + \Phi_2(x) = 1 + x + x^2$$

이 풀이가 방정식과 경계조건을 만족시키는가는 직접 대입하는 방법으로 쉽게 확인할 수 있다.

론문에서 얻은 결과는 분수계도함수항을 포함하는 2계미분방정식의 두점경계값문제의 해석적풀이를 그린함수법에 의하여 구하였다는데 의의가 있으며 더 나아가서 이 풀이표시에 의하여 현실에서 제기되는 물리력학적문제의 미지결수들을 구하는 거꿀문제해결에 큰 도움을 줄수 있다.

참 고 문 헌

[1] 곽성남 등; 수학, 2, 7, 주체99(2010).

[2] S. K. Goyal; Environmental Impact Assessment Review, 21, 553, 2003.

[3] Weihua Jiang; Applied Mathematics and Computation, 219, 4570, 2013.

[4] R. Khaldi et al.; Nonlinear Analysis, 75, 2692, 2012.

[5] Seak Weng Vong; Mathematical and Computer Modelling, 57, 1053, 2013.

[6] Zhanbing Bai; J. Math. Anal. Appl., 311, 495, 2005.

[7] R. P. Agarwal; Georgian Mathematical Journal, 16, 3, 401, 2009.

주체104(2015)년 11월 5일 원고접수

On the Representation of the Solution of Two-Point Boundary Value Problems for the Second Order Differential Equations with a Fractional Derivative

Kim Myong Ha, Kwak Song Nam

We established two-point boundary value problems for second order differential equations with a fractional derivative

$$ay''(x) + by^{(\alpha)}(x) + cy(x) = f(x)\ \ (0 < x < l),$$
$$y(0) = y_0,\ \ y(l) = y_l,$$
$$a,\ b,\ c,\ l,\ y_0,\ y_l \in \boldsymbol{R},\ 0 < \alpha \le 1,\ \ f(x) \in L_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}_+)$$

and studied the representation of analytical solution of this problem, where $y^{(\alpha)}(x)$ is α order Caputo fractional derivative.

Key words: two point boundary value problem, Caputo fractional derivative