김일성종합대학학보 JOURNAL OF KIM IL SUNG UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체106(2017)년 제63권 제4호 Vol. 63 No. 4 JUCHE106(2017).

# 일반화된 거꿀보로노이의 한가지 구성

석봉철, 조현웅

집적회로설계에서 개별적인 모듈들은 단위면적당 높은 전력소모와 낮은 열전도도를 가지는것으로 하여 배치에서 제한을 받는다. 그러므로 설계단계에서 매개 모듈의 열전도 상태를 평가하고 흡열점들의 위치를 확정하는것이 필요하다. 집적회로설계는 평면의 한가지 분할로 볼수 있으며 여기에 배치되는 흡열점들의 수는 최소로 되여야 한다. 따라서 흡열점배치는 일반화된 거꿀보로노이를 구하는 문제에 귀착된다.

임의의 평면직선그라프는 평면들의 일정한 구역들로 분할되며 그중 일부는 비유계구역들이다. 평면의 $n$개 점을 포함하는 모임 $S$에 관한 보로노이도식(혹은 디리클레분할이라고도 부른다.)은 $n$개 구역을 가진 평면직선그라프로서 매개 구역은 $S$의 1개 점에 해당되고 구역안의 모든 점은 $S$의 다른 점들보다 그 점에 더 가깝다.

$G$를 모든 구역들이 유계인 평면직선그라프라고 하자.

거꿀보로노이문제는 $G$가 평면의 어떤 점모임 $S$에 관한 보로노이도식과 일치할 때 $S$를 구하는 문제이다.[2]

거꿀보로노이문제에서 모임 $S$는 1개 구역당 1개 점이라는 제한을 받는것으로 하여 존재성이 담보되지 않는다. 그림 1에서 굵은 릉은 입력으로 되는 평면분할을 의미한다.

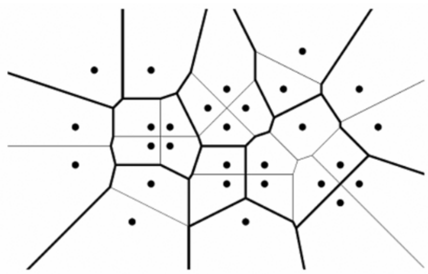

그림 1. 일반화된 거꿀보로노이문제

일반화된 거꿀보로노이에는 1개 구역안에 2개이상의 점이 놓이는것이 허용되므로 새 정점 혹은 릉들이 $G$에 추가될수 있으며 따라서 $S$는 항상 존재한다. 그러므로 $S$의 크기를 최소로 하는것이 합리적이다.[4]

선행연구[3]에서는 평면분할의 한가지 특수한 경우로서 평면의 직4각형분할을 정의하고 그 경우의 일반화된 거꿀보로노이문제에 대하여 론의하였으며 임의의 평면분할에 대한 일반화된 거꿀보로노이문제에 해답을 주는 한가지 알고리듬을 제기하였다.

이때 지점의 개수는 $O(n^{2.5})$개정도이다. 여기서 $n$은 뾰족3각형분할에서 분할구역들의 개수이다.

선행연구[1]에서는 최악의 경우 $O(E)$개의 지점들을 출력하는 알고리듬을 제기하였으며 수값모의를 통하여 지점개수가 평균적으로 $4.48E+159$개임을 보여주었다. 여기서 $E$는 입력분할에 들어있는 릉의 개수이다.

그러나 $4.48E+159$라는 웃한계는 아직도 개선할수 있는 많은 공간을 주고있다.

우리는 이로부터 항상 일반화된 거꿀보로노이문제에 해답을 주는 좋은 피복의 개념을 정의하고 그것의 존재성을 증명하며 좋은 피복을 리용하여 선행결과보다 더 좋은 한계를 가지는 한가지 알고리듬을 제기하고 이 알고리듬에서 얻어지는 지점개수를 평가하였다.

정의 1 평면우의 유한개의 점모임 $S$가 주어졌을 때 점 $p\in S$의 보로노이구역을 $\mathrm{Vor}(p)=\{x\in \boldsymbol{R}^2 \mid \|x-p\|\le\|x-q\|,\ q\in S\}$로 정의한다. 이때 $S$를 지점모임이라고 부른다.

정의 2 지점모임 $S$가 주어지면 우와 같은 보로노이구역들로 평면을 분할할수 있다. 이렇게 평면을 분할한 도식을 $S$를 지점모임으로 하는 보로노이도식이라고 부르고 $\mathrm{Vor}(S)$로 표시한다.

정의 3 보로노이도식 $\mathrm{Vor}(S)$는 평면직선그라프로 나타나게 된다. 여기서 정점들을 보로노이정점이라고 부르며 릉들을 보로노이릉이라고 부른다.

점모임 $S$가 주어졌을 때 평면의 점 $A$에 대하여 이 점을 중심으로 하고 $S$의 점들을 내점으로 포함하지 않는 가장 큰 원을 $C_S(A)$로 표시한다.

정리 1 평면우의 점 $A$가 보로노이도식 $\mathrm{Vor}(S)$의 보로노이정점이기 위해서는 원 $C_S(A)$의 둘레우에 $S$의 점이 3개이상 놓일것이 필요하고 충분하며 보로노이릉우의 점이기 위해서는 원 $C_S(A)$의 둘레우에 $S$의 점이 꼭 2개 놓일것이 필요하고 충분하다.

정의 4 평면직선그라프 $G$에 대하여 다음의 조건들을 만족시키는 원들의 모임 $M=\{C_i\}_{i\in I}$를 그라프 $G$의 좋은 피복이라고 부른다.

① $M$의 임의의 원의 중심은 그라프 $G$의 릉우의 점이거나 정점이며 하나가 다른것을 포함하는 두 원은 존재하지 않는다.

② $M$의 임의의 원도 중심이 같은 릉(두 끝점도 포함)우에 놓이는 $M$의 원들의 둘레의 사귐점을 내점으로 포함하지 않는다.

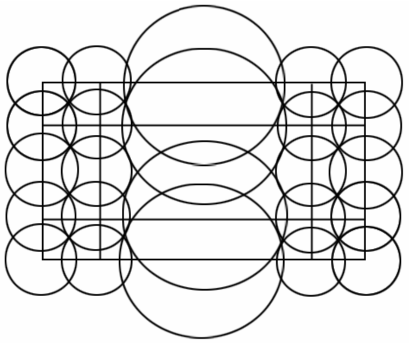

그림 2. 직4각형분할에 대한 한가지 좋은 피복의 실례

③ 그라프 $G$우의 임의의 점에 대하여 $M$에는 이 점과 같은 릉우에 중심이 놓이면서 이 점을 내점으로 포함하는 원이 있다.

④ 그라프 $G$의 임의의 정점에 대하여 이 점을 중심으로 하는 원이 $M$에 존재한다.

평면그라프의 좋은 피복의 한가지 실례로는 그림 2와 같은것을 들수 있다. 선형직4각형분할에 대하여 최량풀이는 그림 2의 좋은 피복에서 원둘레들의 사귐점들의 모임을 지점모임으로 하는 보로노이도식이다.

정의 5 평면직선그라프 $G$우의 점 $A$에 대하여 이 점이 놓이는 릉우에 중심이 놓이고 $A$를 내점으로 포함하는 좋은 피복 $\{C_i\}_{i\in I}$의 원을 $A$의 피복원이라고 부른다.

정리 2(좋은 피복과 거꿀보로노이문제와의 관계) $M=\{C_i\}_{i\in I}$가 그라프 $G$의 좋은 피복이라고 할 때 중심이 $G$의 같은 릉우에 놓이는 원들의 둘레의 사귐점전부의 모임을 $S$라고 하면 $\mathrm{Vor}(S)$는 $G$의 거꿀보로노이도식이다.

증명 점 $A$가 그라프 $G$의 정점이면 사이각이 평각이 아닌 $A$를 끝점으로 하는 릉이 적어도 2개 있는데 이 2개의 릉을 $e_1$, $e_2$라고 하자.

한편 좋은 피복의 정의에서 조건 ④에 의하여 $A$를 중심으로 하는 원 $C_A$가 존재한다. 이 원의 둘레와 릉 $e_1$, $e_2$와의 사귐점을 $B$, $C$라고 하면 좋은 피복이 되기 위한 조건 ③에 의하여 $B$, $C$의 피복원 $C_B$, $C_C$가 존재한다.

$C_A$의 둘레와 $C_B$의 둘레의 사귐점은 2개이며 $C_A$의 둘레와 $C_C$의 둘레의 사귐점도

2개이다. 이 두 점들이 일치하면 $C_B$와 $C_C$의 중심은 이 두 점의 수직2등분선우에 놓인다.

좋은 피복의 원들의 중심이 모두 그라프의 릉우에 있다는것을 고려하면 $e_1$과 $e_2$의 각은 평각이 된다. 이것은 $e_1$, $e_2$의 선택에 모순이다.

따라서 $C_A$의 둘레와 $C_B$, $C_C$의 둘레의 사귐점은 적어도 3개 있으며 이 점들이 $S$의 점으로 되므로 정리 1에 의하여 $A$는 보로노이정점으로 된다.

정리 1에 의하여 점 $A$가 그라프 $G$의 정점이 아닌 릉우의 점이라면 $C_S(A)$의 둘레우에 $S$의 점이 적어도 2개 놓인다는것을 증명하면 된다.

$A$가 놓인 릉을 $e$라고 하면 $C_S(A)$의 둘레에는 $S$의 점이 적어도 하나 놓인다. 이 점을 $P$라고 하면 $P$는 점모임 $S$의 정의에 의하여 중심이 릉 $e'$우에 놓이는 좋은 피복에 들어있는 원 $C_1$, $C_2$의 둘레의 사귐점이라고 볼수 있다.

$e'$와 $e$가 서로 같은 경우에는 점 $P$의 릉 $e$에 관한 대칭점도 점모임 $S$의 점이며 $C_S(A)$의 둘레우에 놓이므로 $C_S(A)$의 둘레우에는 $S$의 점이 적어도 2개 놓인다.

남은 경우는 $e'$와 $e$가 서로 다른 릉일 때이다.

그림 3에서와 같이 $A$의 피복원을 $C_A$라고 하고 $A$가 $C_A$의 중심이면 $C_A$와 $C_S(A)$가 같은 원이다.

좋은 피복의 조건 ④에 의하여 $C_A$와 사귀며 중심이 릉 $e$우에 놓이는 좋은 피복의 원이 존재한다. 이 원의 둘레와 $C_A$의 둘레의 사귐점은 2개이며 이 점들은 $S$의 점으로 된다.

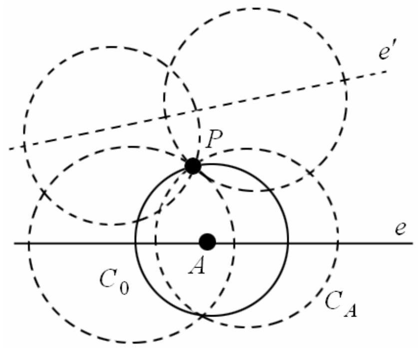

그림 3. $e'$와 $e$가 서로 다른 릉인 경우

$A$의 피복원들중에 $A$를 중심으로 하는 원이 없다면 좋은 피복의 조건 ④에 의하여 중심이 릉 $e$우에 놓이며 점 $A$에 관하여 $C_A$의 중심과 서로 반대쪽에 놓이는 $C_A$와 사귀는 $\{C_i\}_{i\in I}$의 원 $C_0$이 존재한다.

$C_A$와 $C_0$의 둘레의 사귐점을 $Q$, $R$(이 2개의 점은 릉 $e$에 관하여 대칭이다.)라고 하면 $Q$, $R$는 $C_S(A)$의 내부에 놓일수 없다. 따라서 $C_S(A)\subset C_0\cup C_A$(여기서 포함관계와 합은 평면의 점모임으로서의 포함관계와 합이다.)이며 $AP\le AQ$이다.

한편 점 $P$는 $C_A$와 $C_0$의 내부에 놓일수 없다. 즉 $P\notin T=\operatorname{int}(C_0\cup C_A)$이다.

따라서 $AP\ge\min\limits_{X\in T}AX=AQ$이다. $AP\le AQ$라는것을 고려하면 $AP=AQ$ 즉 $P$는 $Q$이거나 $R$이며 $C_S(A)$의 둘레에는 $S$의 점이 적어도 2개가 놓인다.(증명끝)

정리 2로부터 다음의 정의가 타당하다.

**정의 6** 좋은 피복 $\{C_i\}_{i\in I}$가 주어졌을 때 $\{P\,|\,P\in\partial C_i\cap\partial C_j,\ i\ne j,\ i\in I,\ j\in I\}$를 좋은 피복 $\{C_i\}_{i\in I}$에 의하여 생성된 보로노이지점모임이라고 부른다. 혹은 간단히 $S$는 $\{C_i\}_{i\in I}$에 의하여 생성된다고 한다.

거꿀보로노이문제에서 평면의 T형사귐점이 없는 직4각형분할에 대하여서는 최량풀이가 존재한다. 그러한 최량풀이를 생성하는 좋은 피복의 실례로서 그림 2를 들수 있다.

최량풀이로 되는 보로노이지점모임을 생성하는 좋은 피복을 구하면 이로부터 최량풀이를 구할수 있다.

거꿀보로노이도식의 퇴화지점은 이 지점의 보로노이구역의 경계가 주어진 평면직선그라프의 릉들을 피복하는데 리용되지 않는 지점이다.

사실 거꿀보로노이도식의 지점모임에서 퇴화지점을 제거하여도 남은 지점들의 보로노이도식은 주어진 그라프를 피복한다. 좋은 피복을 리용하여 거꿀보로노이문제의 최량근사풀이를 구하기 위하여서는 좋은 피복전부의 모임과 퇴화지점이 없는 거꿀보로노이도식전부의 모임사이에 우로의 1：1넘기기가 존재한다는것을 증명하여야 한다.

정리 3 임의의 보로노이도식에 대하여 이 도식의 보로노이지점모임을 생성하는 좋은 피복이 존재한다.(증명생략)

구성알고리듬은 다음과 같다.

평면직선그라프 $G$를 입력하고 $S$, $M$, $I$, $D$를 빈모임이라고 하자.

걸음 1 $G$의 정점들에서 별형그라프의 경우의 최량알고리듬에 따라 보로노이지점들을 선택할 때 그었던 반직선들을 긋는다.

걸음 2 $G$의 매 면에 대하여 이 면의 이웃한 두 정점에서 나가는 반직선들의 사귐점들중에서 면의 내부에 놓이는 점들을 $I$에 추가한다.

걸음 3 $G$의 매 정점 $v$를 중심으로 하고 이 정점에서 $I$의 가장 가까운 점까지의 거리를 반경으로 하는 원 $C_v$를 $M$에 추가한다.

걸음 4 원 $C_v$들의 둘레의 사귐점들을 $S$에 추가한다.

걸음 5 $G$의 매 정점 $v$에서 나가는 반직선들과 $C_v$의 둘레의 사귐점들을 모두 점모임 $S$에 추가한다.

걸음 6 $M$에 의하여 피복되지 않은 선분토막(그라프 $G$의 어떤 릉의 부분) $XY$에 대하여 $X$를 지나는 $M$의 원둘레우의 $S$의 점들중에서 $Y$에 가장 가까운 점들을 $Y_1$, $Y_2$라고 하고 $Y$를 지나는 $M$의 원둘레우의 $S$의 점들중에서 $X$에 가장 가까운 점들을 $X_1$, $X_2$라고 할 때 $(X_1, X_2, Y_1, Y_2)$를 모임 $D$에 추가한다.

걸음 7 $D$의 임의의 원소 $(X_1, X_2, Y_1, Y_2)$에 대하여 점 $X_1, X_2, Y_1, Y_2$들을 지나는 원의 내부에 $S$의 점이 없으면 걸음 9로, 그렇지 않으면 걸음 8로 이행한다.

걸음 8 $D$에서 점 $X_1, X_2, Y_1, Y_2$들을 지나는 원들중에 내부에 $S$의 점을 포함하는 원이 존재한다면 이런 원들중에서 가장 큰 원을 선택한다.

원안에 놓이는 $S$의 점들을 $A=\{A_j\}$로 배렬하고 세 점 $X_1$, $X_2$, $A_j$를 지나는 원들중에서 $A$의 점을 내점으로 포함하지 않는 원을 $(X_1, X_2, A_j)$라고 할 때 $A_j$의 릉 $e$에 관한 대칭점 $A'_j$를 $S$에 추가하고 $D$에서 $(X_1, X_2, Y_1, Y_2)$를 제거한 다음 $(X_1, X_2, A_j, A'_j)$, $(A_j, A'_j, Y_1, Y_2)$를 추가한다. 모임 $A$를 초기화하고 걸음 7로 이행한다.

걸음 9 $M$에 $D$의 원소들의 네점원들을 추가하고 $M$에 의하여 생성된 지점모임을 출력한다.

알고리듬에서 걸음 1−6에 의하여 얻어진 모임 $D$의 원소들은 $S$의 4개의 원소로 이루어졌으며 걸음 1−5에서 생성된 $S$의 점들은 $D$의 원소들에 기껏 두번 나타나므로 $D$는 유한모임이다.

한편 걸음 9에서 새로 추가되는 $D$의 원소들에는 걸음 1−6에서 얻어진 $D$의 원소들에 나타나는 $S$의 점들이 적어도 2개씩 있으며 또 이 점들은 새로 추가되는 $D$의 원소들

에 기껏 두번 나타나므로 새로 추가되는 $D$ 의 원소는 유한개이다.

따라서 알고리듬은 유한걸음만에 완료된다.

이와 같은 알고리듬에 의하여 얻어진 원들의 모임 $M$ 이 평면직선그라프 $G$ 의 좋은 피복이라는것을 쉽게 검토할수 있다.

또한 $S$ 가 $M$ 에 의하여 생성되므로 $S$ 는 거꿀보로노이문제의 한 풀이로 된다.

다음으로 우의 알고리듬에 대하여 평가하자.

앞에서와 같은 알고리듬에 의하여 얻어진 점모임을 $S$ 라고 하면 $|S|=O(E)$ 이다. 여기서 $E=|E(G)|$ 이다.

$S_0$ 은 알고리듬의 걸음 4에서 $S$ 에 추가되는 점모임이며 $S_1=S\setminus S_0$ 이라고 하자.

알고리듬에서 걸음 1, 2의 과정에 의하여 얻어진 $M$ 에 의하여 피복되지 않은 $G$ 의 릉개수를 $a$ 라고 하자.

$$S=S_0\cup S_1,\ |S_0|\le \sum_{v\in V(G)}\frac{3}{2}d(v)=\frac{3}{2}\sum_{v\in V(G)}d(v)=3E$$

$G$ 의 릉 $e$ 우에 알고리듬의 걸음 6에서 $M$ 에 추가되는 $k$ 개 원의 중심이 놓였다면 $S$ 에는 $2(k-1)$ 개의 점이 추가된다.

$$|S|=|S_0|+|S_1|\le 3E+|S_1|=3E+2(|M|-|V(G)|-a)=O(E)$$

별형구역에서의 최량풀이를 구하는 알고리듬에서 초기시작점을 잘 선택하면

$$|M|-|V(G)|=a$$

즉 매개 릉우에 걸음 6에서 추가되는 $M$ 의 원이 기껏 1개 놓이게 할수 있다.

이 알고리듬으로부터 $|S|\le 3E+O(E)$ 인 풀이를 얻을수 있다.

## 참 고 문 헌


[1] G. Aloupis et al.; http://arxiv.org/abs/1308.5550, 2013.

[2] P. Ash et al.; Geometriata, 19, 175, 1985.

[3] S. Banerjee et al.; Lecture Notes in Computer Science, 8110, 22, 2013.

[4] D. Trinchet-Almaguer et al.; Revista Cubana de Ciencias Informaticas, 1, 4, 58, 2007.


주체105(2016)년 12월 5일 원고접수

## An Approach to Construct the Generalized Inverse Voronoi

*Sok Pong Chol, Jo Hyon Ung*

Here we define a concept of good covering and suggest an algorithm to construct the GIV by using it. Our algorithm generates $O(E)$ sites, where $E$ is the number of edges of $G$.

Key words: Voronoi diagram, inverse Voronoi problem