김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제1호

잡음이 있는 경우 무한차원압축수감문제풀이의 근사성질

김성열, 김진성

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《현시대는 과학기술의 시대이며 과학기술의 발전수준은 나라의 종합적국력과 지위를 규정하는 징표로 됩니다.》

론문에서는 잡음이 있는 경우 일반화된 표본화에 기초하여 무한차원압축수감문제의 풀이의 근사성질을 밝히려고 한다.

선행연구[1]에서는 신호 f ($f\in H$, H: 무한차원가분힐베르트공간)의 표본렬이

$$\varsigma_1(f),\ \varsigma_2(f),\ \varsigma_3(f),\ \cdots \tag{1}$$

($\zeta_j: H\to C,\ j\in\mathbf{N}$ 들은 련속선형범함수들)로 주어지고 f 가 H 의 어떤 표준직교토대 $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ 에 관하여 성긴 표현을 가진다고 가정할 때 식 (1)의 유한부분표본렬로부터 f 를 회복하는 무한차원압축수감문제를 제기하였다. 그리고 이것을 해결하기 위하여 아래와 같은 최량화문제를 설정하고 일반화된 표본화[2]의 개념을 리용하여 그 풀이의 근사성질을 고찰하였다.

$$\inf_{\eta\in l^1(\mathbf{N})}\|\eta\|_{l^1},\ P_\Omega U\eta=P_\Omega\zeta(f) \tag{2}$$

여기서 $\zeta(f)=\{\zeta_j(f)\}_{j\in\mathbf{N}}$ 이고 U 는 다음과 같은 무한차원행렬

$$U=\begin{pmatrix}\zeta_1(\varphi_1) & \zeta_1(\varphi_2) & \cdots\\ \zeta_2(\varphi_1) & \zeta_2(\varphi_2) & \cdots\\ \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix}$$

이다. 그리고 P_Ω 는 $l^2(\mathbf{N})$ 에서 $\mathrm{span}\{e_j,\ j\in\Omega\}$ ($\{e_j\}_{j\in\mathbf{N}}$: $l^2(\mathbf{N})$ 의 표준토대, Ω: $\mathbf{N}$ 의 유한부분모임)에로의 직교사영연산자이다. 선행연구[1]에서는 잡음이 없는 경우를 론의하였다.

론문에서는 선행연구[1]에서의 결과를 잡음이 있는 경우로 일반화하려고 한다. 즉 최량화문제 (2)를

$$\inf_{\eta\in l^1(\mathbf{N})}\|\eta\|_{l^1},\ \|P_\Omega U\eta-y\|\le\delta,\ y=P_\Omega\varsigma(f)+z$$

로 바꾸고 그 풀이의 근사성질을 고찰한다.

정의 1[1] 신호 f 를 무한차원가분힐베르트공간 H 의 원소라고 하자. 그리고 $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ 을 H 의 표준직교토대, $\alpha=\{\alpha_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ 을 이 토대에 관한 f 의 전개결수벡토르라고 하자. 만일 어떤 $M\in\mathbf{N}$ 이 있어서 $\Delta=\mathrm{supp}(\alpha)\subset\{1,\ \cdots,\ M\}$ 이 성립하면 $f=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\varphi_j$ 는 토대 $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ 에 관하여 성긴 표현을 가진다고 말한다. 그리고 $|\Delta|=r$ 라면 f 는 토대 $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ 에 관하여 $(r,\ M)-$성긴 표현을 가진다고 말한다. 또한 $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ 에 관하여 $(r,\ M)-$성긴

표현을 가지는 신호들의 전개결수벡토르들전부의 모임을 Π 라고 할 때 $\sigma_{r,M}(\alpha)$ 를 다음과 같이 약속한다.

$$\sigma_{r,M}(\alpha)=\min\{\|\alpha-\eta\|_{l^1}:\ \eta\in\Pi\}$$

정의 2[1] $U\in B(H)$ 이 등거리연산자이고 $M,\ r\in\mathbf{N}$ 이라고 하자. 이때 만일

$$\|P_M U^* P_N U P_M - P_M\|\le\left(4\sqrt{\log_2(4N\sqrt{r}/m)}\right)^{-1} \tag{3}$$

$$\max_{|\Gamma|=r,\ \Gamma\subset\{1,\cdots,M\}}\|P_M P_\Gamma^\perp U^* P_N U P_\Gamma\|_{mr}\le\frac{1}{8\sqrt{r}} \tag{4}$$

이 성립하면 N 과 m 은 U, M, r 에 대하여 약균형성을 만족시킨다고 말한다. 만일 식 (3)이 성립하고 식 (4)대신에 다음식

$$\max_{|\Gamma|=r,\ \Gamma\subset\{1,\cdots,M\}}\|P_\Gamma^\perp U^* P_N U P_\Gamma\|_{mr}\le\frac{1}{8\sqrt{r}} \tag{5}$$

이 성립하면 N 과 m 은 U, M, r 에 대하여 강균형성을 만족시킨다고 말한다. 여기서 $\|U\|_{mr}=\sup_{i\in\mathbf{N}}\left(\sum_{j\in\mathbf{N}}|u_{ij}|^2\right)^{1/2}$, $u_{ij}=<Ue_j,\ e_i>$, $\{e_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ 은 $l^2(\mathbf{N})$ 의 표준토대이다.

앞으로 노름 $\|\cdot\|$ 은 의미를 따로 밝히지 않는 한 $l^2(\mathbf{N})$ 에서의 노름으로 생각한다.

보조정리 1 $U\in B(l^2(\mathbf{N}))$ 이고 Δ 와 Ω 는 $\mathbf{N}$ 의 유한부분모임이라고 하자. 그리고 $x_0\in l^1(\mathbf{N})$ 이고 $z\in ran(P_\Omega U)$ 는 $\|z\|\le\delta,\ \delta\ge 0$ 을 만족시킨다고 하자. 또한 $y=P_\Omega U x_0+z$ 이고 $\xi\in l^1(\mathbf{N})$ 이

$$\|P_\Omega U\eta-y\|\le\delta,\ \inf_{\eta\in l^1(\mathbf{N})}\|\eta\|_{l^1}$$

의 풀이라고 하자. 만일 어떤 벡토르 $\rho=U^* P_\Omega w$ 가 있어서 어떤 $L>0$ 과 $0<q\le 1$ 에 대하여 다음의 식들

① $\|P_\Delta U^*(q^{-1}P_\Omega)UP_\Delta-I_\Delta\|\le 1/4$

② $\max_{i\in\Delta^c}\|(q^{-1/2}P_\Omega)Ue_i\|\le\sqrt{5/4}$

③ $\|P_\Delta\rho-\mathrm{sgn}(P_\Delta x_0)\|\le q/8$

④ $\|P_\Delta^\perp\rho\|_{l^\infty}\le 1/2$

⑤ $\|w\|\le L\cdot\sqrt{|\Delta|}$

을 만족시키면 다음식이 성립한다.

$$\|\xi-x_0\|\le C\cdot\left(\delta\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{q}}+L\sqrt{|\Delta|}\right)+\|P_\Delta^\perp x_0\|_{l^1}\right)$$

여기서 C 는 대역적인 상수이다.

보조정리 2 $U\in B(l^2(\mathbf{N}))$ 이고 Δ 와 Ω 는 $\mathbf{N}$ 의 유한부분모임이라고 하자. 그리고 $x_0\in l^1(\mathbf{N}),\ \mathrm{supp}(x_0)=\Delta$ 이고 $z\in ran(P_\Omega U)$ 는 $\|z\|\le\delta,\ \delta\ge 0$ 을 만족시킨다고 하자. 또한 $y_M=P_\Omega UP_M x_0+z\ \ (M\in\mathbf{N})$ 이고 $\xi_M\in l^1(\mathbf{N})$ 이

$$\| P_\Omega U P_M \eta - y_M \| \le \delta, \ \inf_{\eta \in C^M} \| \eta \|_{l^1}$$

의 풀이라고 하자. 만일 어떤 벡토르 $\rho = U^* P_\Omega w$가 있어서 어떤 $L > 0$과 $0 < q \le 1$에 대하여 다음의 식들

① $\| P_\Delta U^* (q^{-1} P_\Omega) U P_\Delta - I_\Delta \| \le 1/4$

② $\max_{i \in \{1, \cdots, M\} \cap \Delta^c} \| (q^{-1/2} P_\Omega) U e_i \| \le \sqrt{5/4}$

③ $\| P_\Delta \rho - \operatorname{sgn}(P_\Delta x_0) \| \le q/8$

④ $\| P_M P_\Delta^\perp \rho \|_{l^\infty} \le 1/2$

⑤ $\| w \| \le L \cdot \sqrt{|\Delta|}$

를 만족시키면 다음식이 성립한다.

$$\| \xi_M - x_0 \| \le C \cdot (\delta \cdot (1/\sqrt{q} + L\sqrt{|\Delta|}) + \| P_M P_\Delta^\perp x_0 \|_{l^1})$$

여기서 C는 대역적인 상수이다.

다음의 정리는 전개결수들이 유한받침을 가지는 신호들에 대한 결과를 보여준다.

정리 1 $U \in B(l^1(\mathbf{N}))$은 등거리연산자이고 $M \in \mathbf{N}, \ \varepsilon > 0$이며 $x_0 \in l^1(\mathbf{N})$이라고 하자. 또한 N과 m이 $U, \ M, \ r$에 관하여 약균형성을 만족시키고 $\Omega \subset \{1, \cdots, N\}$이 평등우연적으로 선택되였으며 $|\Omega| = m$이라고 하자. 그리고 $z \in ran(P_\Omega U)$는 $\| z \| \le \delta, \ \delta \ge 0$을 만족시킨다고 하자. 이때 $y_M = P_\Omega U P_M x_0 + z$이고 $\xi_M \in l^1(\mathbf{N})$이 문제

$$\| P_\Omega U P_M \eta - y_M \| \le \delta, \ \inf_{\eta \in l^1(\mathbf{N})} \| \eta \|_{l^1}$$

의 풀이이면

$$m > C \cdot N \cdot \upsilon^2(U) \cdot r \cdot (\log(\varepsilon^{-1}) + 1) \cdot \log(MN\sqrt{r}/m)$$

인 m에 대하여 $1 - \varepsilon$이상의 확률로 다음식이 성립한다.

$$\| \xi_M - x_0 \| \le C \cdot \left(\frac{\delta}{\sqrt{\theta}} \cdot (1 + L\sqrt{r}) + \sigma_{r, M}(x_0) \right) \tag{6}$$

여기서 C는 대역적인 상수이고

$$L = \frac{c}{\sqrt{r}} \left(\frac{1 + \sqrt{\log(6\varepsilon^{-1}) + \log_2(4\theta^{-1}\sqrt{r})}}{(\log(6\varepsilon^{-1}))^{1/2} (\log_2(4\theta^{-1}\sqrt{r}))^{3/2}} \right), \ \theta = \frac{m}{N}$$

이다. $\upsilon(U)$는 연산자 $U \in B(l^1(\mathbf{N}))$의 일치성($\upsilon(U) = \sup_{i, j \in \mathbf{N}} |u_{ij}|, \ u_{ij} = \langle Ue_j, \ e_i \rangle, \ \{e_j\}_{j \in \mathbf{N}}$은 $l^2(\mathbf{N})$의 표준토대)을 의미한다. 만일 $m = N$이면 식 (6)은 확률 1로 성립한다.

이 정리를 잡음이 없는 경우인 선행연구[1]와 비교해볼 때 근사오차에 잡음과 관련한 항이 더 추가되였다는것을 알수 있다.

정리 2는 전개결수들이 유한받침을 가지지 않는 일반적인 신호들에 대한 결과를 보여준다.

정리 2 $U \in B(l^1(\mathbf{N}))$은 등거리연산자, $M \in \mathbf{N}, \ \varepsilon > 0$이고 $x_0 \in l^1(\mathbf{N})$이며 $z \in ran(P_\Omega U)$는 $\| z \| \le \delta, \ \delta \ge 0$을 만족시킨다고 하자. 또한 N과 m이 $U, \ M, \ r$에 관하여 강균형성을

만족시키고 $\Omega\subset\{1,\ \cdots,\ N\}$ 이 평등우연적으로 선택되였으며 $|\Omega|=m$ 이라고 하자. 이때 $y=P_\Omega Ux_0+z$ 이고 $\xi\in l^1(\mathbf{N})$ 이 문제

$$\|P_\Omega U\eta-y\|\le\delta,\ \inf_{\eta\in l^1(\mathbf{N})}\|\eta\|_{l^1}$$

의 풀이이면

$$m>C\cdot N\cdot\upsilon^2(U)\cdot r\cdot(\log(\varepsilon^{-1})+1)\cdot\log(\omega N\sqrt{r}/m)$$

인 m 에 대하여 $1-\varepsilon$ 이상의 확률로 다음식이 성립한다.

$$\|\xi-x_0\|\le C\cdot\left(\frac{\delta}{\sqrt{\theta}}\cdot(1+L\sqrt{r})+\sigma_{r,\,M}(x_0)\right)\tag{7}$$

여기서

$$L=\frac{c}{\sqrt{r}}\left(\frac{1+\sqrt{\log(6\varepsilon^{-1})+\log_2(4\theta^{-1}\sqrt{r})}}{(\log(6\varepsilon^{-1}))^{1/2}(\log_2(4\theta^{-1}\sqrt{r}))^{3/2}}\right),\ \theta=\frac{m}{N},\ \omega=\widetilde{\omega}_{M,U}(r,\ s,\ N)$$

$$\widetilde{\omega}_{M,U}(r,\ s,\ N)=\left|\left\{i\in\mathbf{N}:\max_{\substack{\Gamma_1\subset\{1,\cdots,M\},\ |\Gamma_1|=r\\ \Gamma_2\subset\{1,\cdots,M\}}}\|P_{\Gamma_1}U^*P_{\Gamma_2}Ue_i\|>s\right\}\right|,\ s=\frac{m}{128\sqrt{r}\log(e^4\varepsilon^{-1})}$$

이며 C 는 대역적인 상수이다. 만일 $m=N$ 이면 식 (7)은 확률 1로 성립한다.

정리 2의 결과는 선행연구[1]를 잡음이 있는 경우로 일반화한것이라고 말할수 있다.

참 고 문 헌

[1] B. Adcock et al.; Found Comput. Math., 16, 1263, 2016.

[2] B. Adcock et al.; J. Fourier Anal. Appl., 18, 4, 685, 2012.

주체108(2019)년 9월 15일 원고접수

The Approximation Properties of Solution of Infinite-Dimensional Compressed Sensing Problem with Noisy Measurements

Kim Song Yol, Kim Jin Song

In this paper, we consider the approximation properties of the solution of the infinite-dimensional compressed sensing problem based on generalized sampling when the measurements have noise.

Keywords: generalized sampling, compressed sensing