

3차B스플라인에 의한 2차원자기이상의 도함수계산방법

전광철, 림유성

해석신호법, 국부파수법 등을 리용한 자성원천의 테두리결정법들은 모두 자기이상의 도함수계산에 기초하고있다.[1-3] 그러나 자기이상의 도함수계산과정에 자료속에 들어있는 고주파의 장애성분들이 증폭되므로 자기이상에 이러저러한 장애들이 포함되는 경우에는 계산된 도함수값이 정확하지 못하다. 그리고 측정자료들이 균일한 살창망우에서 주어지지 못하는 경우에 계산오차는 더욱 커진다.

논문에서는 3차B스플라인을 리용하여 장애가 포함된 불균등한 측정망자료로부터 자기이상의 도함수를 보다 정확히 계산하기 위한 한가지 방법을 제기하였다.

1. 방법의 원리

3차B스플라인함수는 보간계산정확도가 높은것으로 하여 과학기술계산에 널리 리용되고있다.[1]

3차B스플라인을 리용하는 경우 보간함수는 다음과 같다.

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{N_x+1} \sum_{j=0}^{N_y+1} s_{ij} B_i(x) B_j(y) \quad (1)$$

이때 직4각형구역 $\Omega = \{(x, y) | x \in [x_1, x_{N_x}], y \in [y_1, y_{N_y}]\}$ 은 x 방향과 y 방향에서 간격이 각각 $x_{i+1} - x_i = (x_{N_x} - x_1)/(N_x - 1) = d$, $y_{j+1} - y_j = (y_{N_y} - y_1)/(N_y - 1) = h$ 인 균등한 그물구역으로 나누어진다고 가정한다. 여기서 $i=0, N_x+1$, $j=0, N_y+1$ 는 보간매듭점들의 번호, s_{ij} 는 보간매듭 (x_i, y_j) 에서의 보간결수, $B_i(x)$ 는 3차B스플라인함수로서 다음과 같이 표시된다.

$$B_i(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{i-2})^3, & x \in [x_{i-2}, x_{i-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{i-1}) + 3h(x - x_{i-1})^2 - 3(x - x_{i-1})^3, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ h^3 + 3h^2(x_{i+1} - x) + 3h(x_{i+1} - x)^2 - 3(x_{i+1} - x)^3, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ (x_{i+2} - x)^3, & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ 0, & \text{기타} \end{cases} \quad (2)$$

우와 같은 방법으로 $B_j(y)$ 도 표시할수 있다.

그러면 보간함수의 x, y 에 관한 1계도함수는 다음과 같이 구할수 있다.

$$\left. \begin{aligned} f_x(x, y) &= \sum_{i=0}^{N_x+1} \sum_{j=0}^{N_y+1} B'_i(x) s_{ij} B_j(y) \\ f_y(x, y) &= \sum_{i=0}^{N_x+1} \sum_{j=0}^{N_y+1} B_i(x) s_{ij} B'_j(y) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

보간함수의 x, y 에 관한 2계도함수는 다음과 같이 구할수 있다.

$$\left. \begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= \sum_{i=0}^{N_x+1} \sum_{j=0}^{N_y+1} B_i''(x) s_{ij} B_j(y) \\ f_{xy}(x, y) &= \sum_{i=0}^{N_x+1} \sum_{j=0}^{N_y+1} B_i'(x) s_{ij} B_j'(y) \\ f_{yy}(x, y) &= \sum_{i=0}^{N_x+1} \sum_{j=0}^{N_y+1} B_i(x) s_{ij} B_j''(y) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

여기서 $B_i'(x)$, $B_i''(x)$ 는 각각 3차B스플라인함수의 x 에 관한 1계, 2계도함수로서 다음과 같이 표시된다.

$$B_i'(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} 3(x-x_{i-2})^2, & x \in [x_{i-2}, x_{i-1}] \\ 3h^2 + 6h(x-x_{i-1}) - 9(x-x_{i-1})^2, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ -3h^2 - 6h(x_{i+1}-x) + 9(x_{i+1}-x)^2, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ -3(x_{i+2}-x)^2, & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ 0, & \text{기타} \end{cases} \quad (5)$$

$$B_i''(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} 6(x-x_{i-2}), & x \in [x_{i-2}, x_{i-1}] \\ 6h - 18(x-x_{i-1}), & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ 6h - 18(x_{i+1}-x)^2, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 6(x_{i+2}-x), & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ 0, & \text{기타} \end{cases} \quad (6)$$

마찬가지로 3차B스플라인함수의 y 에 관한 1계, 2계도함수 $B_j'(y)$, $B_j''(y)$ 도 얻을수 있다.

원천밖의 공간에서는 $\nabla \cdot f(x, y, z) = 0$ 이므로 다음의 관계식을 리용하여 수직2계도함수를 쉽게 구할수 있다.

$$f_{zz}(x, y) = -[f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y)] \quad (7)$$

이와 같이 자기이상을 3차B스플라인함수를 리용하여 표시하면 그것의 미분변환을 리용하여 자기이상의 도함수들을 쉽게 얻을수 있다. 자기이상의 수직2계도함수의 령값은 자성원천의 테두리를 규정짓는데 효과적으로 리용된다.

2. 모형계산에 의한 방법의 특성평가

모형계산에서는 구형자성체가 만드는 자기이상에 장애가 포함되지 않은 경우와 장애가 각이하게 포함된 경우 논문에서 제기한 방법(간단히 3차B스플라인법)과 주파수령역법으로 자기이상의 도함수들을 계산하고 그 결과를 비교하였다. 이때 정확도는 다음과 같은 상대표준편차(%)를 계산하여 비교하였다.

$$E = \frac{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (T_{\mathcal{A}|i} - T_{\mathcal{B}|i})^2}}{(T_{\mathcal{A}|i})_{\max} - (T_{\mathcal{A}|i})_{\min}} \times 100 \quad (8)$$

여기서 $T_{리i}$, $T_{제i}$ 는 각각 i 번째 관측점에서 이론적인 계산공식으로 얻은 자기이상의 도함수와 각이한 방법으로 계산하여 얻은 자기이상의 도함수, $(T_{제i})_{\max}$, $(T_{제i})_{\min}$ 는 각각 이론적인 계산공식으로 얻은 자기이상도함수의 최대값과 최소값, N 은 계산자료점의 수이다.

모형계산을 진행할 때 구형자성체는 계산구역 $\Omega = \{(x, y) | x \in [0, 100], y \in [0, 100]\}$ 의 중심에 놓여있고 수직자화되어있으며 잔류자화는 가지지 않는다고 보았다. 그리고 측정점사이간격과 탐사선사이간격은 비등간격으로 설정하였다.

자기이상속에 장애가 포함되지 않은 경우와 장애가 각이하게 포함된 경우 주파수령역법과 3차B스플라인법으로 자기이상도함수를 계산하고 그 정확도를 비교하였다.(표)

표. 장애에 따르는 주파수령역법과 3차B스플라인법의 상대표준편차(%)

장애/%	주파수령역법			3차B스플라인법		
	ΔT_x	ΔT_y	ΔT_{zz}	ΔT_x	ΔT_y	ΔT_{zz}
0	4.541	4.541	6.244	1.133	1.133	0.259
5	4.953	4.886	10.931	1.104	1.104	0.253
10	6.636	6.399	22.053	1.079	1.079	0.247
15	7.817	7.639	29.118	1.001	1.001	0.229
20	10.128	10.707	39.326	1.081	1.081	0.248

표에서 보는바와 같이 자기이상에 장애가 많이 포함될수록 주파수령역법의 도함수계산오차는 점점 커지지만 3차B스플라인법에 의한 도함수계산오차는 2%이하로서 비교적 작다. 특히 장애가 20% 포함된 경우 수직2계도함수계산오차를 보면 주파수령역법의 경우에는 39.326%로서 매우 크지만 3차B스플라인법의 경우에는 0.248%로서 매우 작다.

일반적으로 수직2계도함수는 자성원천의 테두리를 반영하므로 우리는 자기이상에 장애를 20%정도 포함시키고 각이한 방법으로 수직2계도함수를 계산하고 자성원천의 테두리를 반영하는 정도를 비교하였다.(그림)

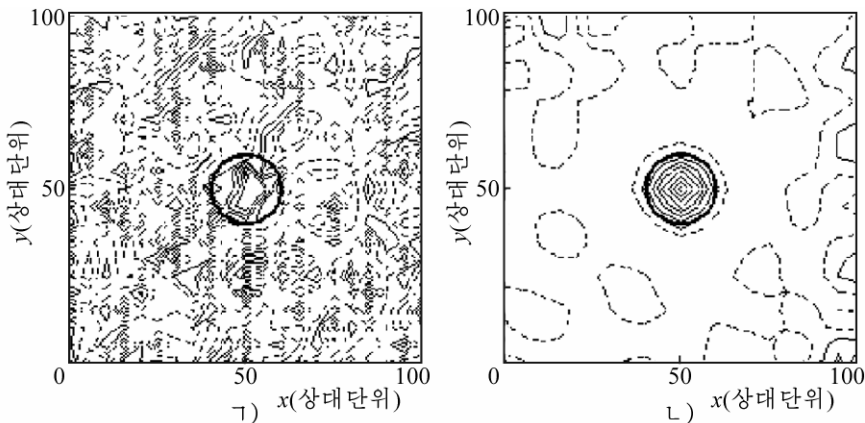


그림. 각이한 방법으로 계산한 자기이상의 수직2계도함수등값선도

ㄱ) 주파수령역법, ㄴ) 3차B스플라인법

그림에서 보는바와 같이 자기이상속에 20%의 장애가 포함된 경우 3차B스플라인법으로 계산하여 얻은 수직2계도함수등값선도에는 구형자성체의 테두리가 명백하게 반영되지만 주파수령역법으로 계산하여 얻은 수직2계도함수등값선도에는 구형자성체의 테두리가 명백하게 반영되지 않는다. 이것은 3차B스플라인법을 리용하면 자기이상속에 장애가 포함되는 경우에도 높은 정확도를 가지고 자기이상의 도함수를 계산할수 있다는것을 보여준다.

맺 는 말

3차B스플라인을 리용한 자기이상도함수계산방법을 리용하면 불균등한 측정망우에서 얻은 장애가 포함된 자기이상인 경우에도 높은 정확도를 가지고 자기이상도함수를 계산할수 있다. 그러므로 이 방법은 자기이상도함수를 리용하는 자성원천의 테두리결정방법들에 효과적으로 응용될수 있다.

참 고 문 헌

- [1] Bingzhu Wang et al.; Geophysics, 73, 5, I35, 2008.
- [2] Bingzhu Wang et al.; Geophysical Prospecting, 60, 1001, 2012.
- [3] 魏永强 等; 物探与化探, 40, 1, 117, 2016.

주체109(2020)년 1월 5일 원고접수

Calculated Method of Derivative of 2D Magnetic Anomaly by Using Cubic B-Splines

Jon Kwang Chol, Rim Yu Song

This paper proposed a method that correctly calculated derivative of the magnetic anomaly using cubic B-splines.

The derivative computations using cubic B-splines can very correctly calculate derivative of the magnetic anomaly in case of the data involving noise from irregular grid as well.

The method can be applied to edge detection of the magnetic sources using derivative of the magnetic anomaly.

Keywords: magnetic anomaly, derivative computation, cubic B-spline