김일성종합대학학보 주체110(2021)년
수 학 제67권 제1호

2차원변계수분수계확산방정식에 대한 교대방향음도식의 연구

리추명, 강정수

경애하는 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《과학연구부문에서는 나라의 경제발전과 인민생활향상에서 전망적으로 풀어야 할 문제들과 현실에서 제기되는 과학기술적문제들을 풀고 첨단을 돌파하여 지식경제건설의 지름길을 열어놓아야 합니다.》

론문에서는 시간변수에 관하여 변계수도함수를 가지는 2차원시간－공간분수계블로흐－토레이방정식의 수치풀이법에 대하여 연구하였다.

선행연구[2]에서는 시간분수계블로흐방정식의 계차도식에 대하여 수렴성과 안정성을 해석하였다. 선행연구[3]에서는 다항시간분수계블로흐방정식을 풀기 위한 반복도식을 구성하고 도식의 안정성과 수렴성을 해석하였으며 파라메터결정방법에 대하여 연구하였다. 선행연구[4]에서는 2차원시간－공간분수계블로흐방정식을 풀기 위한 $O(\tau^{\alpha}+h_1^2+h_2^2)$ 의 수렴차수를 가지는 교대방향음도식을 구성하고 도식의 안정성과 수렴성을 해석하였다.

선행연구[5]에서는 변계수상미분방정식에 대하여 2차의 수렴차수를 가진 계차도식을 구성하고 도식의 안정성과 수렴성을 해석하였으며 선행연구[6]에서는 1차원변계수확산방정식에 대하여 2차의 수렴차수를 가진 계차도식을 구성하고 안정성과 수렴성을 해석하였다.

론문에서는 시간변수에 관한 변계수이동그론월드계차연산자와 공간변수에 관한 콤팍트계차연산자를 리용하여 식 (1)－(3)에 대한 교대방향음계차도식을 구성하고 도식이 무조건안정하며 $O(\tau^{\gamma_{\min}}+h_1^4+h_2^4)$ 의 수렴차수를 가진다는것을 증명하였다.

$$ {}_0^cD_t^{\gamma(t)}u(x,\ y,\ t)=\left(\frac{\partial^{\alpha}}{\partial|x|^{\alpha}}+\frac{\partial^{\beta}}{\partial|y|^{\beta}}\right)u(x,\ y,\ t)+f(x,\ y,\ t),\ (x,\ y)\in\Omega,\ t\in(0,\ T] \quad (1)$$

$$u(x,\ y,\ 0)=u_0(x,\ y) \quad (2)$$

$$u(x,\ y,\ t)=0,\ (x,\ y)\in\partial\Omega \quad (3)$$

여기서 $\Omega=[a,\ b]\times[c,\ d]$ 이고 $0<\gamma_{\min}\le\gamma(t)\le\gamma_{\max}\le1$ 이며 ${}_0^cD_t^{\gamma(t)}f(t)$ 는 다음과 같이 정의되는 변계수캐푸토도함수이다.

$$ {}_0^cD_t^{\gamma(t)}f(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\gamma(t))}\int_0^t(t-s)^{-\gamma(t)}f'(s)ds$$

여기서 $\Gamma(\cdot)$ 은 감마함수이다. 오른변의 리스분수계도함수는 다음과 같이 정의된다.

$$\frac{\partial^{\alpha}u(x,\ y,\ t)}{\partial|x|^{\alpha}}=-d_{\alpha}({}_0D_x^{\alpha}u(x,\ y,\ t)+{}_xD_1^{\alpha}u(x,\ y,\ t))$$

$$\frac{\partial^{\beta}u(x,\ y,\ t)}{\partial|y|^{\beta}}=-d_{\beta}({}_0D_y^{\beta}u(x,\ y,\ t)+{}_yD_1^{\beta}u(x,\ y,\ t))$$

여기서 $d_\sigma=\dfrac{1}{2\cos(\sigma\pi/2)}$ $(\sigma=\alpha,\ \beta)$이다.

주의 일반성을 잃지 않고 초기조건은 $u_0(x,\ y)=0$이라고 가정할수 있다. 만일 령이 아니라면 변환 $v(x,\ y,\ t)=u(x,\ y,\ t)-u_0(x,\ y)$를 실시하여 초기조건이 령인 방정식으로 변환할수 있다.

먼저 변계수리만－류빌도함수의 정의를 보자.

정의[1] $0<\gamma(t)<1$을 만족시키는 $\gamma(t)$에 대하여 변계수리만－류빌도함수는 다음과 같이 정의된다.

$$ {}_0^{RL}D_t^{\gamma(t)}f(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\gamma(t))}\frac{d}{dt}\int_0^t(t-s)^{-\gamma(t)}f(s)ds $$

캐푸터도함수와 리만－류빌도함수사이에 다음의 관계식이 성립한다.

보조정리 1[6] 만일 $f(t)\in C[0,\ \infty)$이면

$$ {}_0^{c}D_t^{\gamma(t)}f(t)={}_0^{RL}D_t^{\gamma(t)}[f(t)-f(0)] $$

이 성립한다.

주어진 방정식이 령초기조건을 가지므로 풀이 $u(x,\ y,\ t)$는

$$ {}_0^{c}D_t^{\gamma(t)}u(x,\ y,\ t)={}_0^{RL}D_t^{\gamma(t)}u(x,\ y,\ t) $$

를 만족시킨다. 초기경계값문제 (1)－(3)에 대한 콤팍트계차도식을 유도하기 위하여 M_1, M_2, N을 정의 옹근수,

$$ \tau=\frac{T}{N},\ h_x=\frac{b-a}{M_1},\ h_y=\frac{d-c}{M_2},\ t_n=n\tau,\ x_i=a+ih_x,\ y_j=c+jh_y $$

$$ 0\le n\le N,\ 0\le i\le M_1,\ 0\le j\le M_2 $$

로 표시하고 대응하는 그물을 각각

$$ \Omega_\tau=\{t_n\,|\,0\le n\le N\},\ \overline{\Omega}_h=\{(x_i,\ y_j)\,|\,1\le i\le M_1,\ 1\le j\le M_j\},\ \Omega_h=\overline{\Omega}_h\cap\Omega $$

로 표시한다.

변계수캐푸토도함수를 리산화하기 위하여 먼저 임의의 옹근수 p에 대하여 다음의 변계수이동그륀월드계차연산자를 정의하자.

$$ G_{\tau,\,p}^{\gamma(t)}f(t):=\frac{1}{\tau^{\gamma(t)}}\sum_{k=0}^{\infty}g_k^{\gamma(t)}f(t-(k-p)\tau) \tag{4} $$

여기서 $g_k^{\gamma(t)}=(-1)^k\begin{pmatrix}\gamma(t)\\ k\end{pmatrix}$, $k\ge0$이다.

무게붙은 변계수이동그륀월드연산자를 다음과 같이 정의한다.

$$ \delta_\tau^{\gamma(t)}f(t)=-\frac{\gamma(t)}{2}G_{\tau,\,-1}^{\gamma(t)}f(t)+\frac{\gamma(t)+2}{2}G_{\tau,\,0}^{\gamma(t)}f(t) \tag{5} $$

함수 $f\in L^1(\mathbf{R})$의 푸리에변환을 $\hat{F}\{f\}$로 표시하자. 이때 다음의 보조정리가 성립한다.

보조정리 2[5] $f(t)\in L^1(\mathbf{R})$, ${}_{-\infty}^{RL}D_t^{\gamma(t)+2}f(t)\in L^1(\mathbf{R})$, $\hat{F}\{{}_{-\infty}^{RL}D_t^{\gamma(t)+2}f(t),\ \omega\}\in L^1(\mathbf{R})$라고 하자. 매 $t\in\mathbf{R}$에 대하여 식 (5)에 의하여 정의되는 무게붙은 변계수이동그륀월드연산자는

$$ \delta_\tau^{\gamma(t)}f(t)={}_{-\infty}^{RL}D_t^{\gamma(t)}f(t)+O(\tau^2) \tag{6} $$

을 만족시킨다. $t=t_k$ 에서 식 (6)은 다음과 같은 형식으로 고쳐쓸수 있다.

$$ {}_0^{RL}D_t^{\gamma(t)} f(t)|_{t=t_k} = \frac{1}{\tau^{\gamma(t_k)}} \sum_{j=0}^{k} \omega_j^{\gamma(t_k)} f(t_{k-j}) + O(\tau^2) \tag{7} $$

여기서 $\omega_0^{\gamma(t_k)} = \frac{2+\gamma(t_k)}{2}$, $\omega_j^{\gamma(t_k)} = \frac{2+\gamma(t_k)}{2} g_j^{\gamma(t_k)} - \frac{\gamma(t_k)}{2} g_{j-1}^{\gamma(t_k)}$, $j \ge 1$ 이다.

$\Omega_\tau \times \Omega_h$ 에서 정의된 임의의 그물함수 $\{v_{i,j}^n \mid 1 \le i < M_1 - 1,\ 1 \le j < M_2 - 1,\ 0 \le n \le N\}$ 에 대하여 다음의 표시들을 받아들이자.

$$ Av_{i,j}^n = c_\alpha v_{i-1,j}^n + (1-2c_\alpha) v_{i,j}^n + c_\alpha v_{i+1,j}^n,\ c_\alpha = \frac{-\alpha^2+\alpha+4}{24} $$

$$ Bv_{i,j}^n = c_\beta v_{i,j-1}^n + (1-2c_\beta) v_{i,j}^n + c_\beta v_{i,j+1}^n,\ c_\beta = \frac{-\beta^2+\beta+4}{24} $$

$$ \delta_{x,+}^\alpha v_{i,j}^n = \frac{1}{h_x^\alpha} \sum_{k=0}^{i} \mu_k^{(\alpha)} v_{i-k+1,j}^n,\ \delta_{x,-}^\alpha v_{i,j}^n = \frac{1}{h_x^\alpha} \sum_{k=0}^{M_1-i} \mu_k^{(\alpha)} v_{i+k-1,j}^n $$

$$ \delta_{y,+}^\beta v_{i,j}^n = \frac{1}{h_y^\beta} \sum_{k=0}^{j} \mu_k^{(\beta)} v_{i,j-k+1}^n,\ \delta_{y,-}^\alpha v_{i,j}^n = \frac{1}{h_y^\beta} \sum_{k=0}^{M_2-j} \mu_k^{(\beta)} v_{i,j+k-1}^n $$

$$ \delta_x^\alpha v_{i,j}^n = \frac{-1}{2\cos(\alpha\pi/2)} (\delta_{x,+}^\alpha v_{i,j}^n + \delta_{x,-}^\alpha v_{i,j}^n),\ \delta_y^\beta v_{i,j}^n = \frac{-1}{2\cos(\beta\pi/2)} (\delta_{y,+}^\beta v_{i,j}^n + \delta_{y,-}^\beta v_{i,j}^n) $$

이때 $i=1$ 인 경우 $v_{i-1,j}^n = 0$ 으로 놓는다. $i = M_1 - 1$, $j=1$, $j = M_2 - 1$ 인 경우에도 마찬가지이다. 웃식에서 곁수 $\mu_k^{(\gamma)}$, $\gamma = \alpha$, β 들은 다음과 같이 정의된다.

$$ \begin{cases} \mu_0^{(\gamma)} = \lambda_1 g_0^{(\gamma)},\ \mu_1^{(\gamma)} = \lambda_1 g_1^{(\gamma)} + \lambda_0 g_0^{(\gamma)} \\ \mu_k^{(\gamma)} = \lambda_1 g_k^{(\gamma)} + \lambda_0 g_{k-1}^{(\gamma)} + \lambda_{-1} g_{k-2}^{(\gamma)},\ k \ge 2 \end{cases} $$

여기서 $g_k^{(\gamma)} = (-1)^k \binom{\gamma}{k}$, $k \ge 1$ 이고 $\lambda_1 = \frac{\gamma^2+3\gamma+2}{12}$, $\lambda_0 = \frac{4-\gamma^2}{6}$, $\lambda_{-1} = \frac{\lambda^2 - 3\gamma + 2}{12}$ 이다.

$g_0^{(\gamma)} = 1$ 로 약속한다. $g \in L^1(\mathbf{R})$ 에 대하여

$$ \Im^{4+\alpha}(\mathbf{R}) = \left\{ g \in L^1(\mathbf{R}) \,\middle|\, \int_{-\infty}^{+\infty} (1+|\omega|)^{4+\alpha} |\hat{g}(\omega)| d\omega < +\infty \right\} $$

로 정의하자. 다음의 보조정리는 리스분수계도함수를 근사시키는데 리용된다.

보조정리 3[7] $g \in \Im^{4+\gamma}(\mathbf{R})$, $1 < \gamma \le 2$ 라고 하자. 이때 $h \to 0$, $h > 0$ 에 대하여 다음식이 성립한다.

$$ c_{\alpha\,a} D_x^\alpha g(x-h) + (1-2c_\alpha)_a D_x^\alpha g(x) + c_{\alpha\,a} D_x^\alpha g(x+h) = \delta_{x,+}^\alpha g(x) + O(h^4) $$

$$ c_{\alpha\,x} D_b^\alpha g(x-h) + (1-2c_\alpha)_x D_b^\alpha g(x) + c_{\alpha\,x} D_b^\alpha g(x+h) = \delta_{x,-}^\alpha g(x) + O(h^4) $$

여기서 $\delta_{x,+}^\alpha g(x) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\left[\frac{x-a}{h}\right]} \mu_k^{(\alpha)} g(x-(k-1)h)$, $\delta_{x,-}^\alpha g(x) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\left[\frac{b-x}{h}\right]} \mu_k^{(\alpha)} g(x+(k-1)k)$ 이다.

문제 (1)—(3)에 대한 교대방향음도식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
&(A-\mu_n\delta_x^{\alpha})u_{i,\,j}^{*}=-\frac{1}{\omega_0^{\gamma_n}}\sum_{k=1}^{n}\omega_k^{\gamma_n}ABu_{i,\,j}^{n-k}+\mu_nABf_{i,\,j}^{n},\ 1\le i\le M_1-1\\
&(B-\mu_n\delta_y^{\beta})u_{i,\,j}^{n}=u_{i,\,j}^{*}\ \ (1\le j\le M_2-1,\ 1\le n\le N)\\
&u_{i,j}^{*}=0,\ (x_i,\ y_j)\in\partial\Omega_h\\
&u_{i,\,j}^{0}=u_0(x_i,\ y_j)\ \ (1\le i\le M_1,\ 1\le j\le M_2)\\
&u_{i,\,j}^{n}=0,\ (x_i,\ y_j)\in\partial\Omega_h
\end{aligned}\tag{8}$$

정리 1 계차도식 (8)의 풀이는 유일존재한다.

정리 2 계차도식 (8)은 초기조건과 원천항에 관하여 무조건안정하다.

정리 3 $u(x,\ y,\ t)\in C_{x,\,y,\,t}^{6,\,6,\,2}(\overline{\Omega}\times[0,\ T])$를 문제 (1)의 정확한 풀이, $U_{i,\,j}^{n}=u(x_i,\ y_j,\ t_n)$이고 $\{u_{i,\,j}^{n}\,|\,1\le i\le M_1,\ 1\le j\le M_2,\ 1\le n\le N\}$은 계차도식 (8)의 풀이라고 하자. $e_{i,\,j}^{n}=U_{i,\,j}^{n}-u_{i,\,j}^{n}$으로 놓고 $e^n=(e_{i,\,j}^{n})\ (1\le i\le M_1,\ 1\le j\le M_2)$은 오차벡토르라고 하자. 이때 다음의 오차평가식이 성립한다.

$$\|e^n\|\le C(\tau^{2\gamma_{\min}}+h_x^4+h_y^4)$$

여기서 C는 $\tau,\ h_x,\ h_y$에 무관계한 정의상수이다.

참 고 문 헌

[1] 김명하; 분수계미적분과 그 응용, 김일성종합대학출판사, 1∼217, 주체95(2006).
[2] S. Qin et al.; Magnet. Reson. Med., 77, 1485, 2017.
[3] S. Qin et al.; J. Comput. Appl. Math., 319, 308, 2017.
[4] S. Qin et al.; Comput. Math. Appl., 75, 7, 2018.
[5] J. Cao, Y. Qiu; Applied Mathematics Letters, 61, 88, 2016.
[6] J. Cao et al.; Commun. Nonlinear, Sci. Numer. Simulat., 48, 140, 2017.
[7] X. Cheng et al.; Appl. Math. Comput., 346, 452, 2019.

주체109(2020)년 9월 5일 원고접수

The Research of the ADI Scheme for the Two-dimensional Variable Order Subdiffusion Equation

Ri Chu Myong, Kang Jong Su

In this paper, we construct a compact ADI scheme for the two-dimensional variable order Bloach-Torrey equation by using the shifted variable order Grünwald operator and the fourth order compact finite difference approximation for the Riesz derivative. And we proved the existence and the uniqueness of the solution and analyze the stability and the convergence of the proposed scheme.

Keywords: fractional derivative, variable order, compact difference scheme