김일성종합대학학보 주체107(2018)년
수 학 제64권 제2호

일정곡률통계다양체의 공형－사영평탄성

민 철 림

선행연구[4]에서는 통계다양체의 공형－사영동등성의 개념을 제기하였으며 선행연구[3]에서는 공형－사영평탄통계다양체가 여차원이 2인 등적중심아핀넣기에 의하여 실현된다는것과 $n(\ge 4)$ 차원통계다양체가 공형－사영평탄이기 위해서는 공형－사영곡률텐소르가 령일것이 필요하고 충분하다는것을 밝혔다. 한편 선행연구[2]에서는 통계다양체의 1－공형동등성과 공형－사영동등성사이의 관계를 밝혔으며 선행연구[1]에서는 $n(\ge 2)$ 차원통계다양체 $(M,\ g,\ \nabla)$ 의 일정곡률성이 완전들기통계구조 $(g^C,\ \nabla^C)$ 를 가지는 M 우의 접다발 TM 의 공형－사영평탄성과 동등하다는것을 밝혔다. 또한 선행연구[5]에서는 일정곡률통계다양체의 등적아핀구조와 관련한 성질들을 연구하였다.

론문에서는 통계다양체의 공형－사영곡률텐소르의 몇가지 성질들과 통계다양체가 공형－사영평탄이기 위한 한가지 충분조건을 구하였다.

통계다양체 $(M,\ g,\ \nabla)$ 의 공형－사영곡률텐소르와 관련한 성질들은 다음과 같다.

보조정리 1 통계다양체 $(M,\ g,\ \nabla)$ 의 공형－사영곡률텐소르 W 는 다음과 같이 표시된다.

$$W(X,\ Y)Z = R(X,\ Y)Z + YL(X,\ Z) - XL(Y,\ Z) + \overset{*}{L}{}^{\#}(Y)g(X,\ Z) - \overset{*}{L}{}^{\#}(X)g(Y,\ Z) \quad (1)$$
$$(\forall X,\ Y,\ Z \in \Gamma(TM))$$

여기서 $L,\ \overset{*}{L}$ 및 $\overset{*}{L}{}^{\#}$ 은 각각 다음과 같이 주어지는 (0, 2) 및 (1, 1)형텐소르마당들이다.

$$L(X,\ Y) = \frac{1}{n-2}\left\{\frac{1}{n}[(n-1)Ric(X,\ Y) + \overset{*}{Ric}(X,\ Y)] - \frac{\sigma}{2(n-1)}g(X,\ Y)\right\}$$

$$\overset{*}{L}(X,\ Y) = \frac{1}{n-2}\left\{\frac{1}{n}[(n-1)\overset{*}{Ric}(X,\ Y) + Ric(X,\ Y)] - \frac{\overset{*}{\sigma}}{2(n-1)}g(X,\ Y)\right\}$$

$$g(\overset{*}{L}{}^{\#}(X),\ Y) = \overset{*}{L}(X,\ Y)$$

증명 통계다양체 $(M,\ g,\ \nabla)$ 의 공형－사영곡률텐소르 W 는 다음과 같이 정의된다.[3]

$$\begin{aligned} W(X,\ Y)Z = R(X,\ Y)Z + \frac{1}{n(n-2)}\{&Y[(n-1)Ric(X,\ Z) + \overset{*}{Ric}(X,\ Z)] - \\ &- X[(n-1)Ric(Y,\ Z) + \overset{*}{Ric}(Y,\ Z)] + \\ &+ [(n-1)\overset{*}{Ric}{}^{\#}(Y) + Ric^{\#}(Y)]g(X,\ Z) - \\ &- [(n-1)\overset{*}{Ric}{}^{\#}(X) + Ric^{\#}(X)]g(Y,\ Z)\} + \\ &+ \frac{\sigma}{(n-1)(n-2)}[Xg(Y,\ Z) - Yg(X,\ Z)] \end{aligned} \quad (2)$$

그리고 통계다양체 $(M,\ g,\ \nabla)$와 쌍대통계다양체 $(M,\ g,\ \overset{*}{\nabla})$의 스칼라곡률들을 각각 σ, $\overset{*}{\sigma}$ 이라고 하면

$$\sigma = \overset{*}{\sigma} \tag{3}$$

이 성립한다.[6] 따라서 식 (3)을 리용하면 식 (2)를 다음과 같이 고쳐쓸수 있다.

$$\begin{aligned} W(X,\ Y)Z &= R(X,\ Y)Z + \frac{1}{n(n-2)}\{Y[(n-1)Ric(X,\ Z) + \overset{*}{Ric}(X,\ Z)] - \\ &- X[(n-1)Ric(Y,\ Z) + \overset{*}{Ric}(Y,\ Z)] + [(n-1)\overset{*}{Ric}{}^{\#}(Y) + Ric^{\#}(Y)]g(X,\ Z) - \\ &- [(n-1)\overset{*}{Ric}{}^{\#}(X) + Ric^{\#}(X)]g(Y,\ Z)\} + \frac{\sigma + \overset{*}{\sigma}}{2(n-1)(n-2)}[Xg(Y,\ Z) - Yg(X,\ Z)] = \\ &= R(X,\ Y)Z + \frac{1}{n-2}Y\left\{\frac{1}{n}[(n-1)Ric(X,\ Z) + \overset{*}{Ric}(X,\ Z)] - \frac{\sigma}{2(n-1)}g(X,\ Z)\right\} - \\ &- \frac{1}{n-2}X\left\{\frac{1}{n}[(n-1)Ric(X,\ Z) + \overset{*}{Ric}(Y,\ Z)] - \frac{\sigma}{2(n-1)}g(Y,\ Z)\right\} + \\ &+ \frac{1}{n-2}\left\{\frac{1}{n}[(n-1)\overset{*}{Ric}{}^{\#}(Y) + Ric^{\#}(Y)] - \frac{\overset{*}{\sigma}}{2(n-1)}Y\right\}g(X,\ Z) - \\ &- \frac{1}{n-2}\left\{\frac{1}{n}[(n-1)\overset{*}{Ric}{}^{\#}(X) + Ric^{\#}(X)] - \frac{\overset{*}{\sigma}}{2(n-1)}X\right\}g(Y,\ Z) \end{aligned}$$

그런데

$$g(\overset{*}{Ric}{}^{\#}(X),\ Y) = \overset{*}{Ric}(X,\ Y),\ g(Ric^{\#}(X),\ Y) = Ric(X,\ Y)\ \ (\forall X,\ Y \in \Gamma(TM))$$

이므로 따라서

$$g\left((n-1)\overset{*}{Ric}{}^{\#}(X) + Ric^{\#}(X) - \frac{\overset{*}{\sigma}}{2(n-1)}X,\ Y\right) = \overset{*}{L}(X,\ Y)\ \ (\forall X,\ Y \in \Gamma(TM))$$

이다. 결국

$$\overset{*}{L}{}^{\#}(X) = (n-1)\overset{*}{Ric}{}^{\#}(X) + Ric^{\#}(X) - \frac{\overset{*}{\sigma}}{2(n-1)}X\ \ (\forall X \in \Gamma(TM))$$

이다. 이로부터 임의의 $X,\ Y,\ Z(\in \Gamma(TM))$에 대하여

$$W(X,\ Y)Z = R(X,\ Y)Z + YL(X,\ Z) - XL(Y,\ Z) + \overset{*}{L}{}^{\#}(Y)g(X,\ Z) - \overset{*}{L}{}^{\#}(X)g(Y,\ Z)$$

가 성립한다.(증명끝)

보조정리 2 통계다양체 $(M,\ g,\ \nabla)$와 쌍대통계다양체 $(M,\ g\ \overset{*}{\nabla})$의 공형－사영곡률텐소르들을 각각 W, $\overset{*}{W}$이라고 하면 다음의 관계식이 성립한다.

$$g(W(X,\ Y)Z,\ U) + g(\overset{*}{W}(X,\ Y)U,\ Z) = 0\ \ (\forall X,\ Y,\ Z,\ U \in \Gamma(TM)) \tag{4}$$

증명 식 (1)로부터 임의의 $X,\ Y,\ Z,\ U(\in\Gamma(TM))$ 에 대하여

$$g(W(X,\ Y)Z,\ U)=g(R(X,\ Y)Z,\ U)+g(Y,\ U)L(X,\ Z)-g(X,\ U)L(Y,\ Z)+$$
$$+\overset{*}{L}(Y,\ U)g(X,\ Z)-\overset{*}{L}(X,\ U)g(Y,\ Z)$$

$$g(\overset{*}{W}(X,\ Y)U,\ Z)=g(\overset{*}{R}(X,\ Y)U,\ Z)+g(Y,\ Z)\overset{*}{L}(X,\ U)-g(X,\ Z)\overset{*}{L}(Y,\ U)+$$
$$+L(Y,\ Z)g(X,\ U)-L(X,\ Z)g(Y,\ U)$$

가 성립한다. 그런데

$$g(R(X,\ Y)Z,\ U)+g(\overset{*}{R}(X,\ Y)U,\ Z)=0\ \ (\forall X,\ Y,\ Z,\ U\in\Gamma(TM))$$

이다. 그러므로 식 (4)가 성립한다.(증명끝)

식 (4)로부터 통계다양체 $(M,\ g,\ \nabla)$ 가 공형－사영평탄이기 위해서는 쌍대통계다양체 $(M,\ g,\ \overset{*}{\nabla})$ 이 공형－사영평탄다양체일것이 필요하고 충분하다는것을 알수 있다.

한편 통계다양체 $(M,\ g,\ \nabla)$ 의 일정곡률성과 공형－사영평탄성사이의 관계를 보여주는 다음의 사실이 성립한다.

정리 $n(\geq 4)$ 차원일정곡률통계다양체 $(M,\ g,\ \nabla)$ 는 공형－사영평탄이다.

증명 통계다양체 $(M,\ g,\ \nabla)$ 가 일정곡률다양체이므로

$$Ric(X,\ Y)=\overset{*}{Ric}(X,\ Y)\ \ (\forall X,\ Y\in\Gamma(TM))$$

가 성립한다. 그러므로 식 (1)로부터 임의의 $X,\ Y(\in\Gamma(TM))$ 에 대하여

$$L(X,\ Y)=\overset{*}{L}(X,\ Y)=\frac{1}{n-2}\left\{Ric(X,\ Y)-\frac{\sigma}{2(n-1)}g(X,\ Y)\right\}$$

가 성립한다. 또한

$$R(X,\ Y)Z=K\{g(Y,\ Z)X-g(X,\ Z)Y\}\ \ (\forall X,\ Y,\ Z\in\Gamma(TM))$$

(여기서 K 는 상수이다.)로부터

$$Ric(Y,\ Z)=tr\{X\mapsto R(X,\ Y)Z\}=(n-1)Kg(Y,\ Z)\ \ (\forall Y,\ Z\in\Gamma(TM))$$

가 성립하고 이로부터

$$\sigma=tr_g\{(Y,\ Z)\mapsto Ric(Y,\ Z)\}=n(n-1)K$$

가 성립한다. 그러므로 임의의 $X,\ Y(\in\Gamma(TM))$ 에 대하여

$$L(X,\ Y)=\overset{*}{L}(X,\ Y)=\frac{K}{2}g(X,\ Y)$$

이며 이로부터

$$L^{\#}(X)=\overset{*}{L}{}^{\#}(X)=\frac{K}{2}X\ \ (\forall X\in\Gamma(TM))$$

가 성립한다. 따라서 임의의 $X,\ Y,\ Z(\in\Gamma(TM))$ 에 대하여

$$W(X,\ Y)Z=R(X,\ Y)Z+YL(X,\ Z)-XL(Y,\ Z)+\overset{*}{L}{}^{\#}(Y)g(X,\ Z)-\overset{*}{L}{}^{\#}(X)g(Y,\ Z)=$$
$$=K\{Xg(Y,\ Z)-Yg(X,\ Z)\}+\frac{K}{2}Yg(X,\ Z)-\frac{K}{2}Xg(Y,\ Z)+$$
$$+\frac{K}{2}Yg(X,\ Z)-\frac{K}{2}Xg(Y,\ Z)=0$$

이다. 결국 결과가 증명된다.(증명끝)

통계다양체가 자기쌍대통계다양체이면 즉 리만다양체이면 통계다양체의 공형－사영평탄성은 리만다양체의 공형평탄성으로 되므로 우의 정리로부터 이미 리만기하학에서 잘 알려진 사실인 리만다양체가 일정곡률다양체이면 공형평탄이라는 사실이 나온다. 결국 우의 정리는 $n(\geq 4)$차원일정곡률리만다양체는 공형평탄이라는 리만다양체에서의 결과를 통계다양체에로 일반화한것으로 된다.

우의 정리와 선행연구[1]에서의 정리로부터 다음의 사실이 얻어진다.

따름 (M, g, ∇)가 $n(\geq 4)$차원통계다양체라고 하자. 이때 완전들기구조를 가지는 접다발 (TM, h^C, ∇^C)가 공형－사영평탄이면 (M, g, ∇)는 공형－사영평탄이다.

참 고 문 헌

[1] I. Hasegawa et al.; Differential Geometry-Dynamical Systems, 10, 148, 2008.

[2] T. Kurose; Tôhoku Math. J., 46, 427, 1994.

[3] T. Kurose; Interdisciplinary Information Sciences, 8, 1, 89, 2002.

[4] H. Matsuzoe; Hokkaido Math. J., 27, 409, 1998.

[5] C. R. Min et al.; Diff. Geom. Appl., 41, 39, 2015.

주체106(2017)년 12월 5일 원고접수

Conformal-projective Flatness of Statistical Manifolds of Constant Curvature

Min Chol Rim

In this paper, we derive an identity of the conformal-projective curvature tensor of a statistical manifold and establish a relation between the constancy of curvature and conformal-projective flatness of the statistical manifold.

Key words: statistical manifold, curvature tensor, constant curvature, conformal-projective flatness