김일성종합대학학보　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　주체109(2020)년
정보과학　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　제66권　제3호

0－1옹근수계획법문제를 병렬계산하기 위한 한가지 간접탐색법

전철용, 김유성

선행연구[1, 2]에서는 0－1옹근수계획법문제에 존재하는 2^n개의 벡토르를 $n+1$개 모임으로 분류해놓고 매 모임에서 최량풀이를 구하기 위한 한가지 간접탐색법과 자기저항형DNA계산모형에 기초한 0－1옹근수계획법문제의 풀이법을 제기하였다. 이외에도 0－1옹근수계획법문제의 풀이법들이 많이 제출되였지만 모두 직렬계산법들로서 규모가 큰 문제들에 대하여서는 최량풀이를 계산해내지 못하고있다.

0－1옹근수선형계획법문제는 다음과 같이 정식화된다.

$$\min\{c^{\mathrm{T}}x \mid Ax \le b,\ x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n),\ \xi_i \in \{0, 1\},\ i=1, 2, \cdots, n\}$$

여기서 $A=(a_{ij}) \in \mathrm{Z}^{m\times n}$, Z는 어떤 옹근수모임, b는 m차원, c는 n차원옹근수벡토르이다.

벡토르

$$c=(c_1, c_2, \cdots, c_n)^{\mathrm{T}}$$

에 대하여 일반성을 잃지 않으면서 $0 \le c_1 \le c_2 \le \cdots \le c_n$이라고 하자.

0－1옹근수계획법문제에는 2^n개의 벡토르가 존재하는데 선행연구[1]에서의 0－1벡토르분류방법으로 다음과 같이 나눌수 있다.

2^n개중의 임의의 벡토르는 다음의 $n+1$개 모임중의 하나에 속한다.

$$X^k = \left\{ x \left| \sum_{j=1}^{n} \xi_j = k \right. \right\},\ k=0, 1, \cdots, n$$

선행연구[1]에서는 이 $n+1$개 모임에 대하여 k가 커지는 순서에 따라 직렬계산을 진행하여 최량풀이를 구하였지만 우리는 매개 모임에 대한 계산을 서로 다른 마디콤퓨터가 진행하게 함으로써 계산시간을 단축하였다.

제한조건을 다음과 같이[1] 동등하게 변형할수 있다.

$$\sum_{j=1}^{n} a'_{ij}\,\xi_j \le b'_j,\ \ i=1, 2, \cdots, m \tag{1}$$

여기서

$$a'_{ij}=a_{ij}-a_i^L,\ b'_j=b_i-ka_i^L,\ a_i^L=\min_{1\le j\le n}\{a_{ij}\},\ i=1, 2, \cdots, m\,;\ j=1, 2, \cdots, n$$

이다.

식 (1)로부터 X^k의 제한조건을 구할수 있으며 이로부터 X^k의 최량풀이를 구할수 있다.

정리 1 변수 $\xi_{s_1}, \xi_{s_2}, \cdots, \xi_{s_t}$가 지정변수이고 변수 $\xi_{s_{t+1}}, \xi_{s_{t+2}}, \cdots, \xi_{s_n}$이 자유변수라고 하면 앞으로 생기는 X^k의 모든 벡토르들에 대한 목적함수 f의 값은

$$f \ge \sum_{j=1}^{t} c_{s_j} \xi_{s_j} + \sum_{j=1}^{r} c_{v_j} \tag{2}$$

를 만족시킨다. 여기서 r는 앞으로 1로 지정되여야 할 변수의 개수, c_{v_j} 는 자유변수들의 첨수를 의미한다.

정리 2 변수 $\xi_{s_1}, \xi_{s_2}, \cdots, \xi_{s_t}$ 가 지정변수이고 변수 $\xi_{s_{t+1}}, \xi_{s_{t+2}}, \cdots, \xi_{s_n}$ 이 자유변수라고 할 때 어떤 $i \in \{1, 2, \cdots, m+1\}$ 에 대하여

$$\sum_{j=u_{i2}}^{u_{ir+1}} a'_{ij} > b'_i - \sum_{j=s_1}^{s_t} a'_{ij} \xi_j \tag{3}$$

이면 반드시 $\xi_{u_{i1}} = 1$ 이여야 한다.

정리 3 변수 $\xi_{s_1}, \xi_{s_2}, \cdots, \xi_{s_t}$ 가 지정변수이고 변수 $\xi_{s_{t+1}}, \xi_{s_{t+2}}, \cdots, \xi_{s_n}$ 이 자유변수라고 할 때 어떤 $i \in \{1, 2, \cdots, m+1\}$ 에 대하여

$$a'_{iu_{i,n-t}} > b'_i - \sum_{j=s_1}^{s_t} a'_{ij} \xi_j - \sum_{j=u_{i1}}^{u_{i,r-1}} a'_{ij} \tag{4}$$

이면 $\xi_{u_{i,n-t}} = 0$ 이여야 한다.

이상의 리론에 기초한 0−1옹근수선형계획법문제에서 X^k 에서의 최량풀이탐색과정은 다음과 같다.

걸음 1 $x^* = (0, 0, \cdots, 0) \in R^n$, $f^* = \sum_{j=1}^{k} c_j + 1$, $t = 0$, $O_{num}^t = 0$, $r = k - O_{num}^t$, $nfree(i) = 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$ (지정변수들의 첨수모임), $free(i) = i$, $i = 1, 2, \cdots, n$ (자유변수들의 첨수모임)이라고 하고 다음걸음으로 이행한다.

걸음 2 자유변수들에 대하여 제한식 (1)의 곁수들을 커지는 순서로 배렬하고 가령 적어도 1개의 $i \in \{1, 2, \cdots, m+1\}$ 이 존재하여

$$\sum_{j=s_1}^{s_t} a'_{ij} \xi_j + \sum_{j=u_{i1}}^{u_{ir}} a'_{ij} > b'_i$$

또는

$$\sum_{j=1}^{t} c_{s_j} \xi_{s_j} + \sum_{j=1}^{r} c_{u_{m+2,\, j}} > f^*$$

이 성립한다고 하면 걸음 8로 이행한다. 그렇지 않으면 다음걸음으로 이행한다.

걸음 3 어떤 $i \in \{1, 2, \cdots, m+1\}$ 에 대하여

$$\sum_{j=u_{i2}}^{u_{ir+1}} a'_{ij} > b'_i - \sum_{j=s_1}^{s_t} a'_{ij} \xi'_j$$

가 성립하면

$$t = t+1,\ s(t) = u_{p1},\ \xi_{s(t)} = 1,\ O_{num}^t = O_{num}^{t-1} + 1, rule(t) = 1, nfree(t) = s(t),\ free(s(t)) = 0$$

이라고 하고 걸음 5로 이행한다. 그렇지 않으면 다음걸음으로 이행한다.

걸음 4 어떤 $i \in \{1, 2, \cdots, m+1\}$ 에 대하여

$$a'_{iu_{i,n-t}} > b'_i - \sum_{j=s_1}^{s_t} a'_{ij}\xi_j - \sum_{j=u_{i1}}^{u_{i,r-1}} a'_{ij}$$

가 성립하면

$$t = t+1,\ O_{num}^t = O_{num}^{t-1},\ s(t) = u_{q,n-t},\ \xi_{s(t)} = 0,\ rule(t) = 1,\ nfree(t) = s(t),\ free(s(t)) = 0$$

이라고 놓고 다음걸음으로 이행하고 그렇지 않으면

$$t = t+1,\ O_{num}^t = O_{num}^{t-1} + 1,\ s(t) = u_{m+2,1},\ \xi_{s(t)} = 1,\ rule(t) = 0,\ nfree(t) = s(t),\ free(s(t)) = 0$$

이라고 놓고 다음걸음으로 이행한다.

걸음 5 $O_{num}^t = k$ 이면 모든 $j \in free(i)\ (free(i) \ne 0,\ i = 1, 2, \cdots, n)$에 대하여

$$\xi_j = 0,\ \ rule(l) = 1 (l = t+1,\ t+2,\ \cdots,\ k)$$

이라고 놓고 X^k의 어떤 벡토르 x를 얻는다.

만일 이 벡토르가 허용벡토르이고 목적함수값이 $f < f^*$이라면

$$x^* = x,\ \ f^* = f$$

라고 놓고 걸음 8로 이행하고 그렇지 않으면 다음걸음으로 이행한다.

걸음 6 $k - O_{num}^t = n - t$ 이면 모든 $j \in free(i)\ (free(i) \ne 0,\ i = 1, 2, \cdots, n)$ 에 대하여

$$\xi_j = 1,\ rule(l) = 1 (l = t+1,\ t+2,\ \cdots,\ k)$$

이라고 놓고 X^k의 어떤 벡토르 x를 얻으며 만일 이 벡토르가 허용벡토르이고 목적함수값이 $f < f^*$을 만족시킨다면

$$x^* = x,\ \ f^* = f$$

라고 놓고 걸음 9로 이행한다. 그렇지 않으면 다음걸음으로 이행한다.

걸음 7 $\sum_{j=1}^{t} c_{s_j}\xi_{s_j} + \sum_{j=1}^{r} c_{u_{m+2,j}} > f^*$ 이면 다음걸음으로 이행하고 그렇지 않으면 걸음 3으로 이행한다.

걸음 8 만일 $t = 0$ 이면 걸음 11로 이행하고 그렇지 않으면 다음걸음으로 이행한다.

걸음 9 만일 $rule(t) = 0$ 이라면

$$\xi_{s(t)} = 0,\ O_{num}^t = O_{num}^t - 1,\ \ rule(t) = 1$$

이라고 놓고 걸음 3으로 이행한다.

걸음 10 만일 $rule(t) = 1$ 이라면

$$nfree(t) = 0,\ free(s(t)) = s(t),\ t = t-1$$

이라고 놓고 걸음 9로 이행한다.

걸음 11 $f^* = \sum_{j=1}^{n} c_j + 1$ 이면 X^k에 최량벡토르가 없으며 그렇지 않으면 f^*, x^*이 최량값, 최량벡토르이다.

이와 같은 방법으로 매 마디콤퓨터들에서 X^k에서의 최량풀이를 따로따로 구한다면 계산시간은 원래의 직렬계산법을 리용할 때보다 훨씬 줄어들게 된다.

맺 는 말

대규모0－1옹근수계획법문제를 병렬계산방법으로 풀기 위한 한가지 간접탐색알고리듬을 제안하였다.

참 고 문 헌

[1] 김유성 등; 조선민주주의인민공화국 과학원통보, 6, 17, 주체104(2015).

[2] 殷志祥 等; 安徽理工大学学报(自然科学版), 38, 3, 7, 2018.

주체109(2020)년 5월 5일 원고접수

Implicit Enumerative Search for Parallel 0-1 Integer Programming Algorithm

Jon Chol Yong, *Kim Yu Song*

In this paper we studied an implicit enumerative search that got the optimal solution in each set, based on being sorted to the $n+1$ sets about 2^n elements, for processing 0-1 integer programming algorithm with parallel.

Keywords: 0-1 integer programming, parallel algorithm