김일성종합대학학보 주체109(2020)년
수 학 제66권 제3호

코흐곡선우에서 새로운 프락탈보간함수

김진명, 김현진

경애하는 최고령도자 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《우리는 과학기술을 발전시켜도 남들이 걸은 길을 따라만 갈것이 아니라 우리 과학자들의 애국충정과 우리 인민의 슬기와 민족적자존심을 폭발시켜 년대와 년대를 뛰여넘으며 비약해나가야 합니다.》

선행연구에서는 여러가지 방법으로 프락탈보간함수의 리론을 일반화하였다.[1－8]

선행연구[6]에서는 구간우에서 1차다항식을 조화함수로 간주할수 있다는 전제밑에 코흐곡선우에서 1차다항식을 프락탈해석에서의 조화함수로 교체하여 반슬리의 프락탈보간정리와 류사한 결과를 얻었다. 그러나 선행연구[6]에서 밝힌 바나흐부동점정리를 리용한 코흐곡선우에서의 프락탈보간함수의 존재성에 관한 연구에는 몇가지 수학적오유들이 있다.

바나흐원리의 첫 중요한 일반화는 1962년에 라쿄치(Rakotch)에 의하여 얻어졌다.[9]

2017년에 바나흐부동점정리대신에 그것을 일반화한 라쿄치부동점정리[10]를 리용하여 비선형프락탈보간함수를 생성하는 방법이 제시되였다.[1]

론문에서는 선행연구[6]에서 제기된 반복함수계를 구성하는 코흐곡선우의 바나흐축소들에 대한 수학적오유를 지적하고 정확한 수학적서술을 진행하였다. 또한 바나흐축소넘기기대신에 라쿄치축소넘기기를 리용하여 코흐곡선우에서 새로운 프락탈보간함수를 구성하고 명백한 실례를 제시함으로써 선행연구[6]의 결과를 일반화하였다.

먼저 코흐곡선우에서 새로운 프락탈보간함수를 구성하는데 필요한 몇가지 결과들을 지적한다.

$$V_0 := \{p_1 = (p_1^1,\ p_1^2) := (0,\ 0),\ p_2 = (p_2^1,\ p_2^2) := (1,\ 0)\},\quad K_0 := [0,\ 1]\times\{0\} \subset \mathbf{R}^2$$

이라고 하자.[2, 6]

$i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ 에 대하여 넘기기 $u_i : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ 를 고찰하자. 여기서

$$\begin{aligned}
u_1(x,\ y) &= (u_1^1(x,\ y),\ u_1^2(x,\ y)) := \left(\frac{x}{3},\ \frac{y}{3}\right) = \frac{1}{3}((x,\ y)+(0,\ 0))\\
u_2(x,\ y) &= (u_2^1(x,\ y),\ u_2^2(x,\ y)) := \left(-\frac{x}{6} - \frac{\sqrt{3}y}{6} + \frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}x}{6} + \frac{y}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\\
u_3(x,\ y) &= (u_3^1(x,\ y),\ u_3^2(x,\ y)) := \left(\frac{x}{6} + \frac{\sqrt{3}y}{6} + \frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}x}{6} + \frac{y}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\\
u_4(x,\ y) &= (u_4^1(x,\ y),\ u_4^2(x,\ y)) := \left(\frac{x}{3} + \frac{2}{3},\ \frac{y}{3}\right)
\end{aligned} \tag{1}$$

이다. 모든 $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ 에 대하여 넘기기 $u_i : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ 는 바나흐축소이다.

주의 1 식 (1)은 반복함수계를 구성하는 코흐곡선우의 바나흐축소들에 대한 정확한 수학적서술이다. 그러나 선행연구[6]에는 식 (1)에서와는 달리

$$u_2(x,\ y)=(u_2^1(x,\ y),\ u_2^2(x,\ y)):=\left(-\frac{x}{6}-\frac{\sqrt{3}y}{6}+\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}x}{6}-\frac{y}{6}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$
$$u_3(x,\ y)=(u_3^1(x,\ y),\ u_3^2(x,\ y)):=\left(\frac{x}{6}+\frac{\sqrt{3}y}{6}+\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}x}{6}-\frac{y}{6}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right) \tag{2}$$

로 지적된 수학적오유가 있다.

또한 선행연구[6]에서는 $i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ 에 대하여

$$u_i(x)=\frac{1}{3}(x+p_i)$$

로 지적되였다. 그러나 사실상 이것은 수학적오유이며

$$u_i(x,\ y)=\frac{1}{3}((x,\ y)+(p_i^1,\ p_i^2))$$

라고 밝혀야 정확한 의미를 가진다.

$KC\subset\mathbf{R}^2$ 는 반복함수계 $\{\mathbf{R}^2;u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4\}$ 의 흡인체이다.

$n\in\mathbf{N}$ 을 고정하고 임의의 렬 $w=(w_1,\ w_2,\ \cdots,\ w_n)\in\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}^n$ 에 대한 반복넘기기 $u_w=u_{w_1}u_{w_2}\cdots u_{w_n}:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 를 고찰하자. $V_n\subset\mathbf{R}^2$ 를 이러한 반복넘기기에 의한 $V_0\subset\mathbf{R}^2$ 의 상들의 합이라고 하자. $n\ge1$ 에 대하여 $\upsilon:\mathbf{R}^2\supset V_n\to\mathbf{R}$ 를 임의로 주어진 함수라고 하자.

υ 가 반드시 $V_n\subset\mathbf{R}^2$ 우의 조화함수인것은 아니다. $w\in\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}^n$ 에 대하여 $h_w:\mathbf{R}^2\supset KC\to\mathbf{R}$ 를 코흐곡선우의 조화함수라고 하자.

이제 넘기기들이 특수한 구조의 비선형변환

$$w_i\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_i^1(x,\ y)\\u_i^2(x,\ y)\\F_i(x,\ y,\ z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_i^1(x,\ y)\\u_i^2(x,\ y)\\s_i(z)+h_i(x,\ y)\end{pmatrix}$$

들인 $\{\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}\supset KC\times\mathbf{R};w_i,\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 형의 반복함수계를 고찰하자. 여기서 $(x,\ y)\in\mathbf{R}^2$, $z\in\mathbf{R}$ 이고 $s_i:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 들은 라코치축소(같은 함수 φ 를 가지는)이다.

변환들은 $i=1,\ 2,\ 3,\ 4$ 에 대하여

$$w_i\begin{pmatrix}p_1^1\\p_1^2\\\upsilon(p_1^1,\ p_1^2)\end{pmatrix}=w_i\begin{pmatrix}0\\0\\\upsilon(0,\ 0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_i^1(0,\ 0)\\u_i^2(0,\ 0)\\\upsilon(u_i^1(0,\ 0),\ u_i^2(0,\ 0))\end{pmatrix}$$
$$w_i\begin{pmatrix}p_2^1\\p_2^2\\\upsilon(p_2^1,\ p_2^2)\end{pmatrix}=w_i\begin{pmatrix}1\\0\\\upsilon(1,\ 0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_i^1(1,\ 0)\\u_i^2(1,\ 0)\\\upsilon(u_i^1(1,\ 0),\ u_i^2(1,\ 0))\end{pmatrix}$$

에 따르는 자료에 의하여 제한된다고 가정하자.

련속함수 $f:KC\to\mathbf{R}$ 들의 모임을 $C(KC)$ 로 표시하자. $C^*(KC)\subset C(KC)$ 는 $f(p_1)=\upsilon(p_1)$, $f(p_2)=\upsilon(p_2)$ 가 성립하는 련속함수 $f:KC\to\mathbf{R}$ 들의 모임 즉

$$C^*(KC):=\{f\in C(KC):f(p)=\upsilon(p),\ p\in V_0\}$$

이라고 하자. 그리고 $C^{**}(KC) \subset C^{*}(KC) \subset C(KC)$ 는 점들 $(p,\ v(p))\ (p \in V_n)$ 를 지나는 련속함수들의 모임 즉

$$C^{**}(KC) := \{f \in C^{*}(KC) : f(p) = v(p),\ p \in V_n\}$$

이라고 하자. $C(KC)$ 우의 거리 $d_{C(KC)}$ 를 모든 $g,\ h \in C(KC)$ 에 대하여

$$d_{C(KC)}(g,\ h) := \max_{(x,\ y)\in KC} |g(x,\ y) - h(x,\ y)|$$

로 정의하자. 그러면 $(C(KC),\ d_{C(KC)})$, $(C^{*}(KC),\ d_{C(KC)})$, $(C^{**}(KC),\ d_{C(KC)})$ 는 완비거리공간이다.

모든 $f \in C^{*}(KC)$ 에 대하여 넘기기 $T : C^{*}(KC) \to C(KC)$ 를 임의의 $(x,\ y) \in KC$, $w \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}^n$ 에 대하여

$$Tf(u_w(x,\ y)) := s_w(f(x,\ y)) + h_w(x,\ y)$$

로 정의하자. 여기서 h_w 는 코흐곡선우의 조화함수이다.

보조정리 모든 $f \in C^{*}(KC)$ 에 대하여 $Tf \in C^{**}(KC)$ 이다. 즉 $T : C^{*}(KC) \to C^{**}(KC)$ 이고 $n \geq 2$ 에 대하여 $T^n : C^{**}(KC) \to C^{**}(KC)$ 이다.

정리 $\{KC \times \mathbf{R}; w_i,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 를 주어진 점들 $(p,\ v(p)) \in \mathbf{R}^3\ (p \in V_n \subset \mathbf{R}^2,\ n \geq 1)$ 과 관련한 우에서 정의된 반복함수계라고 하자. 그러면 연산자 T 는 라코치축소이다.(넘기기 $T : C^{*}(KC) \to C^{*}(KC)$ 로 고찰할 때) 그러므로 T 의 부동점인 유일한 련속함수 $f : KC \to \mathbf{R}$ 가 존재한다. 즉 임의의 $(x,\ y) \in KC$, $w \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}^n$ 에 대하여

$$f(u_w(x,\ y)) = s_w(f(x,\ y)) + h_w(x,\ y)$$

를 만족시키는 유일한 련속함수 $f : KC \to \mathbf{R}$ 가 존재한다. 여기서 h_w 는 코흐곡선우의 조화함수이다. 특히 $\forall p \in V_n,\ f(p) = v(p)$ (즉 $f|_{V_n} = v$)이고 더우기 f 의 그라프 G 는 $\{KC \times \mathbf{R}; w_i\ (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)\}$ 에 관하여 불변이다. 즉

$$G = \bigcup_{i=1}^{4} w_i(G)$$

이다.

증명 모든 $g,\ h \in C^{*}(KC)$ 에 대하여

$$\begin{aligned} d_{C(KC)}(Tg,\ Th) &= \max_{(x,\ y)\in KC} |Tg(x,\ y) - Th(x,\ y)| = \\ &= \max_{i=1,\,2,\,3,\,4}\ \max_{(x,\ y)\in u_i(KC)} |Tg(x,\ y) - Th(x,\ y)| = \\ &= \max_{i=1,\,2,\,3,\,4}\ \max_{(x,\ y)\in u_i(KC)} |s_i(g(u_i^{-1}(x,\ y))) - s_i(h(u_i^{-1}(x,\ y)))| = \\ &= \max_{i=1,\,2,\,3,\,4}\ \sup_{(x,\ y)\in u_i(KC)} \varphi(|g(u_i^{-1}(x,\ y)) - h(u_i^{-1}(x,\ y))|) \end{aligned}$$

이다.

함수 $\varphi : (0,\ +\infty) \to (0,\ +\infty)$ 가 비감소련속함수이고 모든 $i = 1,\ \cdots,\ 4$ 에 대하여 $u_i^{-1} : u_i(KC)$

$\to KC$ 이므로 $i_0 \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $(x_0,\ y_0) \in u_{i_0}(KC)$ 에 대하여

$$\varphi(|g(u_{i_0}^{-1}(x_0,\ y_0)) - h(u_{i_0}^{-1}(x_0,\ y_0))|) \le \varphi(\max_{(x,\ y)\in u_{i_0}(KC)} |g(u_{i_0}^{-1}(x,\ y)) - h(u_{i_0}^{-1}(x,\ y))|) \le$$
$$\le \varphi(\max_{(x,\ y)\in KC} |g(x,\ y) - h(x,\ y)|) = \varphi(d_{C(KC)}(g,\ h))$$

이다. $(x_0,\ y_0)$ 이 임의이므로

$$\sup_{(x,\ y)\in u_{i_0}(KC)} \varphi(|g(u_{i_0}^{-1}(x_0,\ y_0)) - h(u_{i_0}^{-1}(x_0,\ y_0))|) \le \varphi(d_{C(KC)}(g,\ h))$$

이고 i_0 이 임의이므로

$$\max_{i=1,\ 2,\ 3,\ 4}\ \sup_{(x,\ y)\in u_i(KC)} \varphi(|g(u_i^{-1}(x_0,\ y_0)) - h(u_i^{-1}(x_0,\ y_0))|) \le \varphi(d_{C(KC)}(g,\ h))$$

이다. 그러므로

$$d_{C(KC)}(Tg,\ Th) \le \max_{i=1,2,3,4}\ \sup_{(x,y)\in u_i(KC)} \varphi(|g(u_i^{-1}(x,\ y)) - h(u_i^{-1}(x,\ y))|) \le$$
$$\le \varphi(d_{C(KC)}(g,\ h))$$

를 얻는다. 따라서 $T : C^*(KC) \to C^{**}(KC) \subset C^*(KC)$ 가 완비거리공간 $(C^*(KC),\ d_{C(KC)})$ 에서 같은 함수 φ에 대하여 라코치축소이라는것을 알수 있다. 그러므로 T 는 $C^*(KC)$ 에서 유일한 부동점을 가진다.

보조정리에 의하여 $T : C^*(KC) \to C^{**}(KC)$ 이므로 $f = Tf \in C^{**}(KC)$ 이다. 즉 주어진 점들 $(p,\ v(p)) \in \mathbf{R}^3$ $(p \in V_n \subset \mathbf{R}^2)$ 을 지나는 련속함수 f 가 존재한다. T 의 정의로부터 $(x,y) \in KC$ 와 $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ 에 대하여 $Tf(u_i(x,\ y)) = f(u_i(x,\ y)) = s_i(f(x,\ y)) + h_i(x,\ y)$ 이다. $G = \{(x,\ y,\ f(x,\ y)) : (x,\ y) \in KC\}$ 이다. f 가 연산자 T 의 부동점이고 $(x,\ y) \in u_i(KC)$ 이면 $Tf(x,\ y) = F_i(u_i^{-1}(x,\ y),\ f(u_i^{-1}(x,\ y)))$ 이므로 모든 $(x,\ y) \in KC$ 에 대하여

$$f(u_i(x,\ y)) = Tf(u_i(x,\ y)) =$$
$$= F_i(u_i^{-1}(u_i(x,\ y)),\ f(u_i^{-1}(u_i(x,\ y)))) = F_i(x,\ y,\ f(x,\ y))$$

를 얻는다.

모든 $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ 에 대하여 $w_i(x,\ y,\ z) = (u_i(x,\ y),\ F_i(x,\ y,\ z))$ 이므로

$$w_i(G) = w_i(\{(x,\ y,\ f(x,\ y)) : (x,\ y) \in KC\}) =$$
$$= \{w_i(x,\ y,\ f(x,\ y)) : (x,\ y) \in KC\} =$$
$$= \{(u_i(x,\ y),\ F_i(x,\ y,\ f(x,\ y))) : (x,\ y) \in KC\} =$$
$$= \{(u_i(x,\ y),\ f(u_i(x,\ y))) : (x,\ y) \in KC\} =$$
$$= \{(x,\ y,\ f(x,\ y)) : (x,\ y) \in u_i(KC)\}$$

를 얻는다. 그러므로

$$G = \{(x,\ y,\ f(x,\ y)) : (x,\ y) \in KC\} =$$
$$= \bigcup_{i=1}^{4} \{(x,\ y,\ f(x,\ y)) : (x,\ y) \in u_i(KC)\} = \bigcup_{i=1}^{4} w_i(G)$$

이다.(증명끝)

주의 2 선행연구[6]에서는 $s_i(z)=\alpha_i z\ (|\alpha_i|<1)$ 인 경우 바나흐축소를 리용하여 코흐곡선우에서 프락탈보간함수의 존재성을 밝혔다. 론문에서는 s_i 들이 라코치축소인 경우 코흐곡선우에서 비선형 프락탈보간함수의 존재성을 밝힘으로써 선행연구[6]의 결과를 일반화하였다.

실례 $t\in(0,\ +\infty)$ 에 대하여 $\varphi(t):=\dfrac{t}{1+t}$ 이고 점들 $(p,\ v(p))\in\mathbf{R}^3\ (p\in V_n\subset\mathbf{R}^2)$ 이 주어졌다고 하자. $z\in[0,\ +\infty)$, $i=1,\ 2,\ 3,\ 4$ 에 대하여

$$s_i(z):=\frac{z}{1+iz}$$

라고 하자. 그러면 매 s_i 는 $[0,\ +\infty)$ 에서 바나흐축소가 아닌 라코치축소(같은 함수 φ 를 가지는)이다.[1]

그러므로 정리에 의하여 주어진 점들 $(p,\ v(p))\in\mathbf{R}^3\ (p\in V_n\subset\mathbf{R}^2)$ 을 보간하는 련속함수 $f:KC\to\mathbf{R}$ 가 존재한다.

참 고 문 헌

[1] S. Ri; Fractals, 25, 6, 1750063, 2017.
[2] E. Amo et al.; Math. Comput. Simulation, 92, 28, 2013.
[3] S. Celik et al.; J. Math. Anal. Appl., 337, 243, 2008.
[4] P. R. Massopust; Fractal Functions, Fractal Surfaces and Wavelets, Academic Press, 17～79, 1994.
[5] M. A. Navascues; Appl. Math. Lett., 21, 366, 2008.
[6] P. Paramanathan, R. Uthayakumar; Comput. Math. Appl., 59, 3229, 2010.
[7] S. G. Ri, H. J. Ruan; J. Math. Anal. Appl., 380, 313, 2011.
[8] H. J. Ruan; Fractals, 18, 119, 2010.
[9] J. Jachymski, I. Jozwik; Banach Center Publ., 77, 123, 2007.
[10] R. Rakotch; Proc. Amer. Math. Soc., 13, 459, 1962.

주체109(2020)년 3월 15일 원고접수

New Fractal Interpolation Functions on the Koch Curve

Kim Jin Myong, Kim Hyon Jin

In this paper, we present a method to generate a new nonlinear fractal interpolation function on the Koch curve using Rakotch contraction instead of Banach contraction.

Keywords: iterated function system, Rakotch contraction, Koch curve(KC)