김일성종합대학학보 JOURNAL OF **KIM IL SUNG** UNIVERSITY
(자연과학) (NATURAL SCIENCE)
주체105(2016)년 제62권 제12호 Vol. 62 No. 12 JUCHE105(2016).

평면대수와 관련한 부분인자들의 동형류확정에 대하여

정성국, 리응훈

경애하는 **김정은**동지께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《기초과학은 과학기술강국을 떠받드는 주추입니다. 기초과학이 든든해야 나라의 과학기술이 공고한 토대우에서 끊임없이 발전할수 있습니다.》(《조선로동당 제7차대회에서 한 중앙위원회사업총화보고》 단행본 40페지)

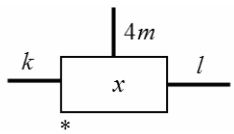
부분인자의 량자대칭성으로서의 표준불변량에 대한 공리가 나온 때로부터 표준불변량의 한가지 표현형태로서의 평면대수로부터 부분인자를 구성하는 문제는 연산자대수분야에서의 주되는 연구과제의 하나로 되였다. 그중에서도 선행연구[3, 5]에서 얻어진 결과들은 도형적인 방법으로 부분인자를 구성하는 획기적인 착상으로 하여 큰 주목을 끌었다.

선행연구[4]에서는 유한깊이를 가지는 경우에 대하여 선행연구[1]에서 구성한 부분인자들에 들어있는 유한형인자들의 동형류를 결정하였으며 선행연구[3]에서는 일정한 기간 미해결로 남아있던 무한깊이의 경우에 대하여 동형류의 결정문제를 해결하였다.

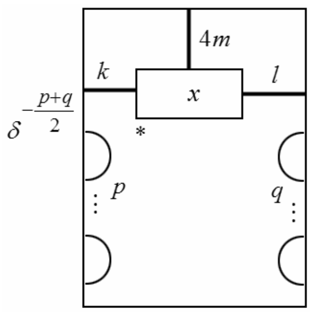
론문에서는 선행연구[5]에서 제기한 구성법에 의해 얻어지는 부분인자들을 이루는 유한형인자들의 동형류를 결정하였다.

부분인자평면대수 $P=\{P_n^{\pm}\}_{n=0,1,2,\cdots}$ 으로부터 다음과 같은 표기를 쓰기로 한다.[2]

아래의 얽힘은 벡토르공간으로서의 $P^{\pm}_{(k+l)/2+2m}$ 의 한 원소를 표시한다.



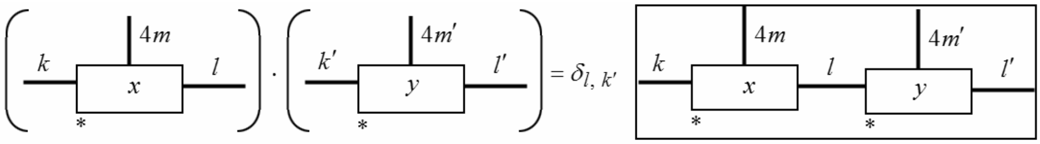
$V_+^{\pm}(m)$ 은 다음의 얽힘에 따르는 포함넘기기 $P^{+}_{(k+l)/2+2m} \to P^{+}_{(k+l)/2+p+q+2m}$ 에 의한 벡토르공간들의 귀납극한을 표시한다.



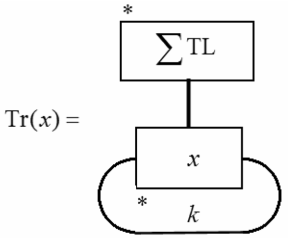
우의 공간 $V_+^{\pm}(m)$ 의 표기에서 웃첨수의 부호 ±는 $\dfrac{k+l}{2}$ 의 짝홀성에 따른다.

$V_+^{\pm}=\bigoplus_{m=0}^{\infty}V_+^{\pm}(m)$, $V_+=V_+^{+}\oplus V_+^{-}=(\bigoplus_{m=0}^{\infty}V_+^{+}(m))\oplus(\bigoplus_{m=0}^{\infty}V_+^{-}(m))$ 으로 놓자.

그러면 V_+ 우에 곱하기산법이 다음의 얽힘에 의하여 성분별로 정의된다.



V_+ 우에 일종의 트레스가 다음의 얽힘으로 정의된다.

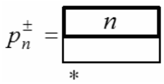


론문에서의 구성과 관련한 기본적인 표기약속[5]밑에서 선행연구[2－4]에서와 류사한 론법에 의해 다음의 결과가 얻어진다.

정리 1 범함수 Tr는 $*$－대수 V_+ 우에서 충실한 정규트레스로 된다. 이 트레스에 의한 GNS표현에서 V_+ 로부터 얻어지는 폰 노이만대수 M_+ 는 II_∞ 형인자이다.

대칭적인 론법으로 V_- 와 II_∞ 인자 M_- 를 구성할수 있다.

정리 2 $p_n^{\pm}$ 로서 아래부분의 령역이 각각 백색 또는 흑색인 다음의 얽힘을 보자.

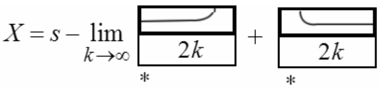


그러면 트레스를 보존하는 다음의 동형관계가 설정된다.

$$p_{2n}M_+p_{2n} \cong M_{2n},\ p_{2n+1}M_-p_{2n+1} \cong M_{2n+1}$$

여기서 $M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots$ 은 론문에서의 구성에 의한 부분인자이다.

다음의 얽힘은 선행연구[2]에서 나온다. 그러나 우로 향한 끈에 대한 해석은 론문의 결과와 차이난다. 여기서 우로 향한 선은 2개의 끈으로 이루어진 쌍을 의미한다.



$V_+^+(0) \oplus V_+^-(0)$ 에 의해 생성된 부분대수를 A_+ 로 표시하자.

그러면 묻기와 조건부기대값얽힘의 결합에 의해 분산 $\eta : A_+ \to A_+$ 가 정의된다.

다음의 사실은 선행연구[2]에서와 거의 류사한 도형적인 론법에 의해 확인된다.

정리 3 강극한 X 는 A_+ －값반원원소이며 관계 $M_+ \cong W^*(A,\ X)$ 를 만족시킨다.

선행연구[1]에서와 마찬가지로 자유빠쏭원소를 주목하면 다음의 결론이 얻어진다.

정리 4 P 가 대역적지수 I, 죤즈지수 δ^2 인 부분인자평면대수로서 유한깊이를 가진다고 하면 동형관계 $M_k \cong L(F(r_k))$ 가 성립된다. 여기서 $r_k = 1 + 2\delta^{-4k}(\delta - 1)I$ 이다.

증명 P 의 주그라프를 Γ 로, 변들의 모임을 $E(\Gamma)$ 로, 출발정점은 $*$ 로 표시하자.

$l^\infty(\Gamma)$ 는 Γ 의 정점들우에서의 유계함수들 전부로 이루어진 폰 노이만대수로서 그우에는 트레스 Tr 가 $\mathrm{Tr}(p_v) = \gamma_v$ 로 주어져있다고 하자. 여기서 p_v 는 정점 v 에서의 델타함수이

고 γ_v 는 $\gamma_* = 1$ 로 규격화된 뻬론－흐로베뉴스고유벡토르의 해당 성분이다.

선행연구[2]에서와 마찬가지로 $(l^\infty(\Gamma),\ \mathrm{Tr})$ 와 $l^\infty(\Gamma)$ －값반원원소들의 족 $\{X_e : e \in E(\Gamma)\}$ 에 의해 생성된 폰 노이만대수를 $\mathcal{M}(\Gamma)$ 로 표시하면 $\mathcal{M}(\Gamma) = FM_+F$ 이며 $M_0 = p_*\mathcal{M}(\Gamma)p_*$ 이 성립된다. 여기서 X_e 는 A_+ 에서의 해당 부분등거리원소에 의한 X 의 축소로서 $l^\infty(\Gamma)$ 우에서 융합을 가지고 자유적이다. 매 X_e 는 e 의 두 끝점을 p_v, p_w 라고 할 때 사영원소 $p_v + p_w$ 안에서 받침을 가지며 $X_e = p_v X p_w + p_w X p_v$ 이다.

$\gamma_v \geq \gamma_w$ 을 가정하면 $(p_v + p_w)\mathcal{M}(\Gamma)(p_v + p_w)$ 에서 $\mathrm{Tr}((p_v + p_w)\cdot(p_v + p_w))$ 에 관한 X_e^2 의 스칼라값분포는 0에서 크기 $(\gamma_v - \gamma_w)/(\gamma_v + \gamma_w)$ 인 원자를 가진 자유뽜쏭분포로 된다.

그러므로 $vN(l^\infty(\Gamma),\ X_e) \cong (L(Z) \otimes M_2(\boldsymbol{C})) \oplus \boldsymbol{C} \oplus l^\infty(\Gamma \setminus \{v,\ w\})$ 이며

$$p_w \mapsto (1 \otimes e_{1,\ 1}) \oplus 0 \oplus 0,\ p_v \mapsto (1 \otimes e_{2,\ 2}) \oplus 1 \oplus 0,\ X_e \mapsto f \otimes (e_{1,\ 2} + e_{2,\ 1}) \oplus 0 \oplus 0$$

이다. 여기서 $\{e_{i,\ j} : 1 \leq i,\ j \leq 2\}$ 는 $M_2(\boldsymbol{C})$ 의 행렬단위계이고 $f = f^* \in L(\boldsymbol{Z})$ 이며 $L(\boldsymbol{Z})$ 에서의 트레스에 관한 f^2 의 분포는 X_e^2 의 분포에서의 절대련속부분과 일치한다.

Γ 가 유한이므로 $\mathcal{M}(\Gamma)$ 는 유한이며 동형관계 $(M(\Gamma),\ \mathrm{Tr}(F)^{-1}\mathrm{Tr}) \cong (L(\boldsymbol{F}(s)),\ r)$ 를 얻는다. 여기서 $\mathrm{Tr}(F) = \sum_{v\in\Gamma}\gamma_v$ 이며 자유차원은 $s = 1 + \dfrac{1}{\mathrm{Tr}(F)^2}\left(-\sum_{v\in\Gamma}\gamma_v^2 + 2\sum_{e\in E(\Gamma)}\gamma_{t(e)}\gamma_{s(e)}\right)$ 로 주어진다.

$M_0 = p_*\mathcal{M}(\Gamma)p_*$ 이고 $M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots$ 이 기초구성렬을 이룬다는것을 주의하면 우의 동형관계로부터 $M_k \cong L(F(r_k))$, $r_k = 1 + 2\delta^{-4k}(\delta - 1)I$ 가 얻어진다.(증명끝)

참 고 문 헌

[1] V. F. R. Jones et al.; Pacific J. Math., **246**, 187, 2010.

[2] A. Guionnet et al.; J. Funct. Anal., **261**, 1345, 2011.

[3] M. Hartglass et al.; J. Funct. Anal., **265**, 3305, 2013.

[4] V. Kodiyalam et al.; J. Funct. Anal., **260**, 2635, 2011.

[5] Ri Wung Hun; arXiv: math.OA/1210.7436.

주체105(2016)년 8월 5일 원고접수

Identification of Isomorphism Classes of Subfactors related to Planar Algebras

Jong Song Guk, Ri Ung Hun

We observe that for the finite depth subfactor planar algebra the subfactors given by the construction in [5] are all isomorphic to the interpolated free group factors.

Key words: subfactor, planar algebra, free probability