

MAS480 Homework 3 Report

20180127 김우진

Problem (1). Metropolis-Hasting Markov Chain

a. 다음은 initial point가 (1, 1, 1) 이고 길이가 10인 표본 하나를 출력한 것이다.

```
##### Problem (1) - a #####  
((1, 1, 1), (1, 1, 4), (3, 1, 4), (3, 1, 2), (1, 1, 2), (1, 1, 2), (2, 1, 2), (2, 1, 3), (2, 1, 1), (2, 1, 2))
```

다음은 또 다른 실행결과이다.

```
##### Problem (1) - a #####  
((1, 1, 1), (1, 4, 1), (4, 4, 1), (4, 4, 1), (4, 4, 2), (4, 4, 4), (3, 4, 4), (3, 4, 4), (3, 4, 4), (3, 1, 4))
```

Metropolis-Hasting algorithm에 의해 결정된 transition probability에 따라 다음 state가 랜덤하게 결정되기 때문에 매번 실행결과가 다른 것은 당연하다.

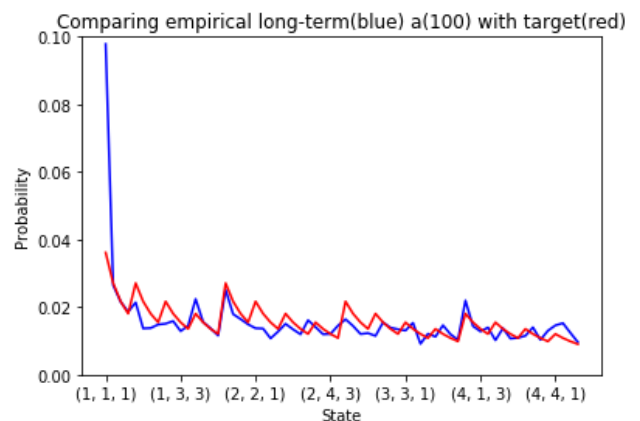
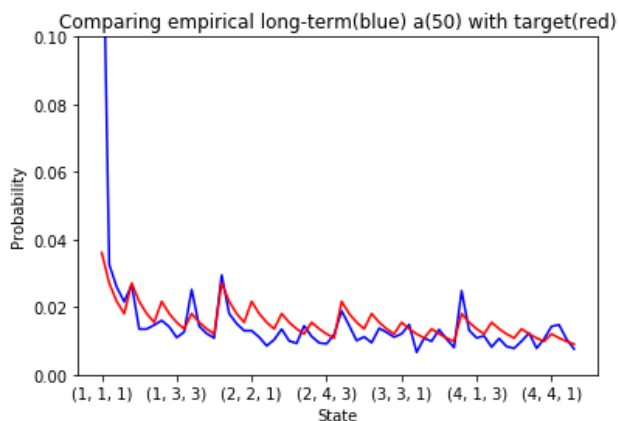
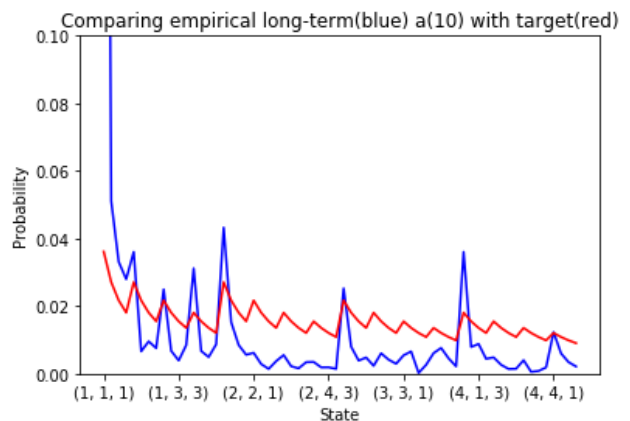
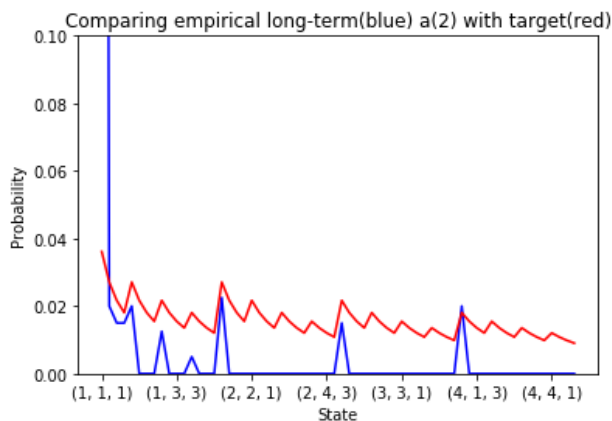
Sampling을 진행하는 함수는 sampling.py내에 다음의 형태로 정의되어 있다.

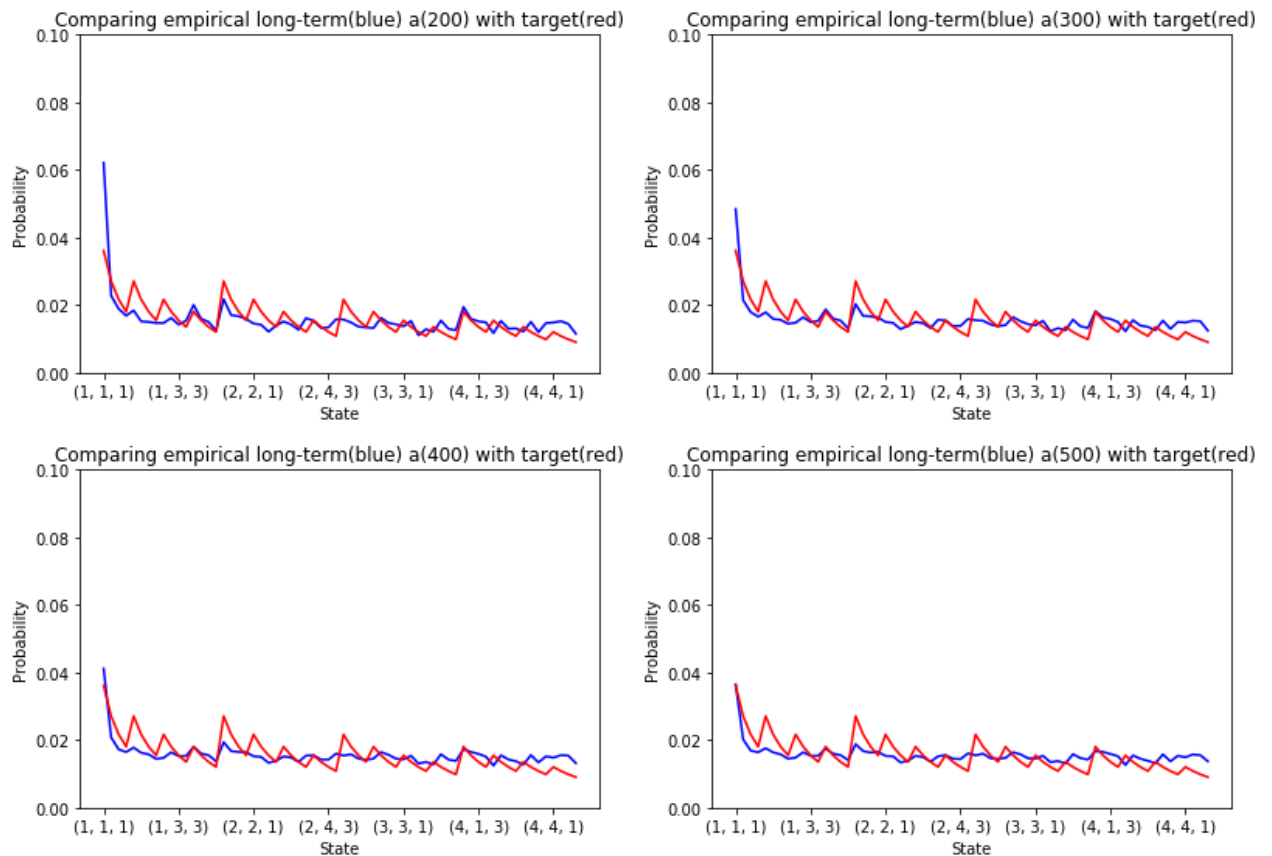
```
sampling(g, initial_point, length, num, printable = True)
```

간단히 설명하면, 주어진 그래프 g 에서 $initial_point$ 로부터 Markov chain을 수행하여 $length$ 만큼의 sample을 num 의 개수만큼 얻어내는 함수이다.

b. 앞서 설명한 sampling 함수를 이용하여 500의 길이를 가지는 sample을 100개 뽑아낼 수 있다. 코드에서는 `samples`에 저장하였다. (Problem_1_MH.py:55)

c. b에서 얻어낸 samples을 통해서 다양한 time에 대해서 empirical long-term average probability distribution을 계산하고, target probability distribution p 와 비교하여 plotting하였다. 그리고 L1 loss를 구하여 time이 커질수록 loss가 줄어드는지를 확인하였다.





파란색 그래프는 empirical long-term average probability distribution이고, 빨간색 그래프는 target probability distribution이다. x축은 state를 coordinate-order로 정렬하였다.

짧은 시간동안 averaging을 한 결과보다 더 많은 step을 통해서 average을 한 결과가 낮은 loss를 보여주고 있다. 아래 결과는 Problem_1_MH.py를 실행한 결과 중 일부이다. Sampling에 따라 달라질 수 있다.

```
##### Problem (1) - c #####
The L1 loss of empirical long-term distribution a(2) is:
1.641674742864289
The L1 loss of empirical long-term distribution a(10) is:
1.0135621930486636
The L1 loss of empirical long-term distribution a(50) is:
0.32941995706170435
The L1 loss of empirical long-term distribution a(100) is:
0.21148842092068676
The L1 loss of empirical long-term distribution a(200) is:
0.1879585376901097
The L1 loss of empirical long-term distribution a(300) is:
0.17827937030708954
The L1 loss of empirical long-term distribution a(400) is:
0.17683350047302915
The L1 loss of empirical long-term distribution a(500) is:
0.1752048448333563
```

Problem (2) Gibbs Sampling Markov Chain

a. 다음은 initial point가 (1, 1, 1) 이고 길이가 10인 표본 하나를 출력한 것이다.

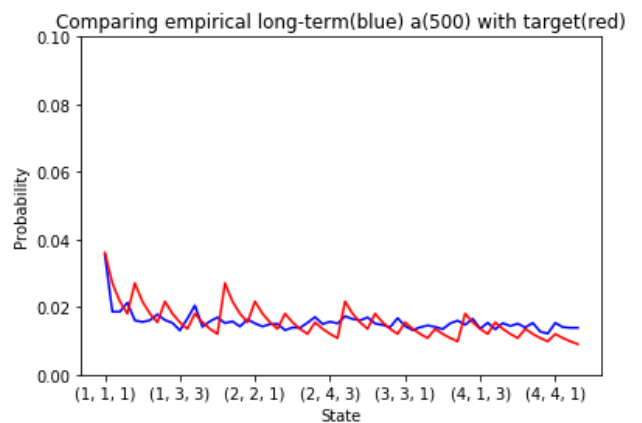
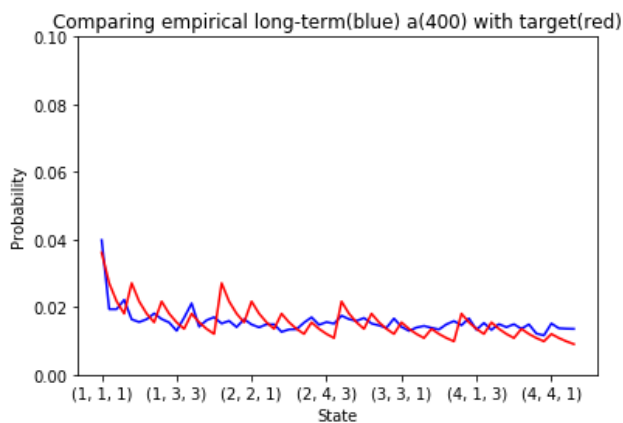
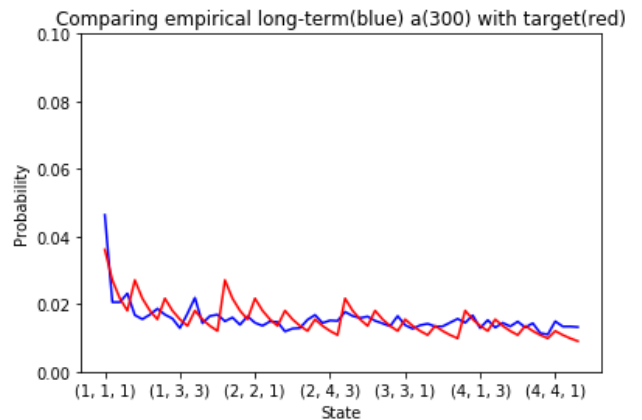
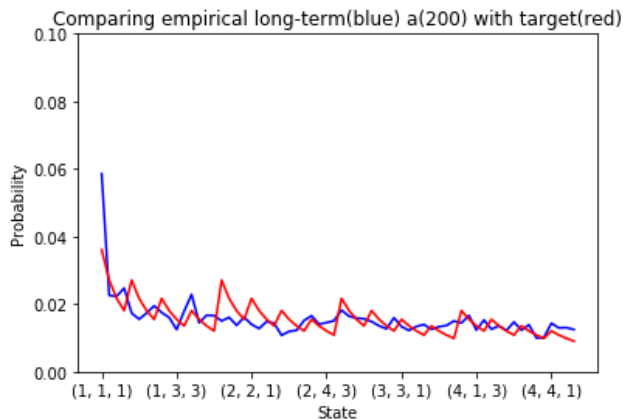
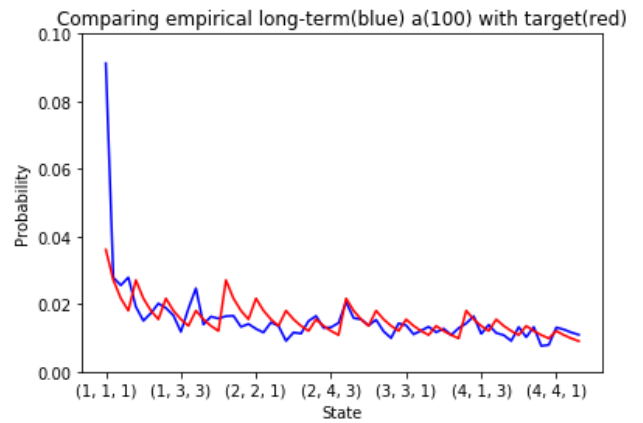
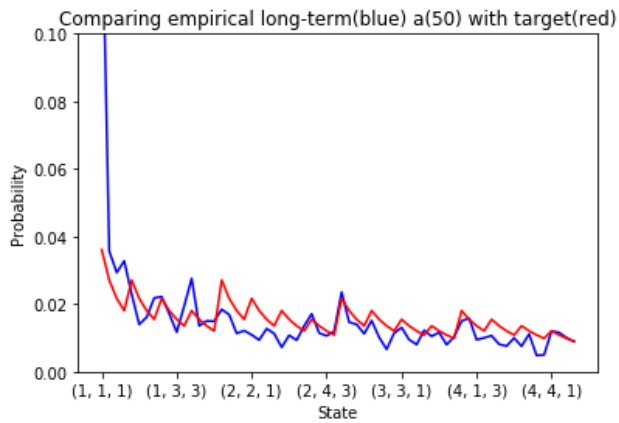
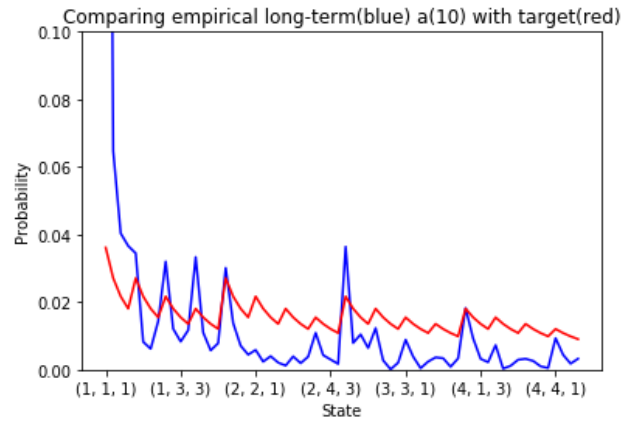
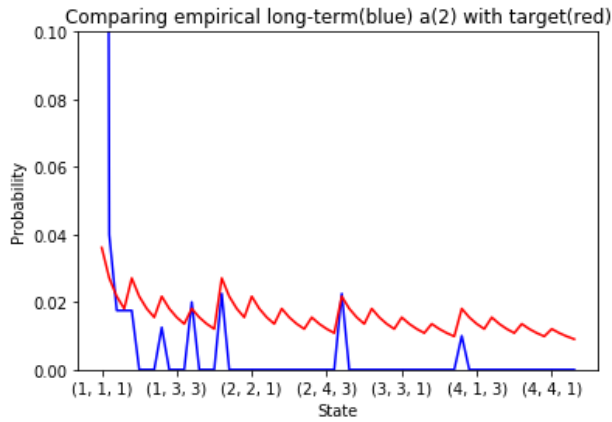
```
##### Problem (2) - a #####
((1, 1, 1), (1, 4, 1), (1, 4, 1), (1, 4, 1), (1, 4, 2), (2, 4, 2), (2, 4, 3), (3, 4, 3), (3, 4, 3), (1, 4, 3))
```

다음은 또 다른 실행 결과이다.

```
##### Problem (2) - a #####
((1, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 2, 2), (1, 2, 3), (2, 2, 3), (2, 2, 3), (2, 2, 4), (2, 4, 4), (2, 4, 4), (2, 2, 4))
```

b. Metropolis-hasting과 마찬가지로 sampling 함수를 이용하여 500의 길이를 가지는 sample를 100개 뽑아내고 samples에 저장하였다. (Problem_2_GS.py:71)

c. b에서 얻어낸 samples을 통해서 다양한 time에 대해서 empirical long-term probability distribution을 계산하고, target probability distribution p 와 비교하여 plotting하였다. 그리고 L1 loss를 구하여 time이 커질수록 loss가 줄어드는지를 확인하였다.



아래 결과는 Problem_2_GS.py를 실행한 결과의 일부이다. Sampling에 따라 달라질 수 있다.

```
##### Problem (2) - c #####  
  
The L1 loss of empirical long-term distribution a(2) is:  
1.5991820114421484  
The L1 loss of empirical long-term distribution a(10) is:  
0.9741709803486637  
The L1 loss of empirical long-term distribution a(50) is:  
0.3493857023707855  
The L1 loss of empirical long-term distribution a(100) is:  
0.2448258881549952  
The L1 loss of empirical long-term distribution a(200) is:  
0.20976621413139668  
The L1 loss of empirical long-term distribution a(300) is:  
0.19950977820538304  
The L1 loss of empirical long-term distribution a(400) is:  
0.19677450286904413  
The L1 loss of empirical long-term distribution a(500) is:  
0.19694403414719466
```

여러 번 실행해본 결과, t가 높다면 전반적으로 Metropolis-hasting algorithm보다는 살짝 큰 L1 loss를 보여주는 것 같았다.

※ References

- <https://www.datacamp.com/community/tutorials/markov-chains-python-tutorial>