시계열자료분석팀

5팀

문병철
손재민
주혜인
한지원
홍현경

INDEX

1

1주차 복습

정상성

정상성의 조건

Time - Invariant

$$i)\ E[|X_t|]^2 < \infty \ ,\forall t \in \mathbb{Z}$$

분산과 관련된 2차 적률이 존재하고 시점 t에 관계없이 일정

$$ii)\ E[X_t] = m \ ,\forall t \in \mathbb{Z}$$

평균이 상수이고 시점 t에 관계없이 일정

$$iii)\ \gamma_X(h) = Cov(X_t, X_{t+h}) = E[(X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu)]$$

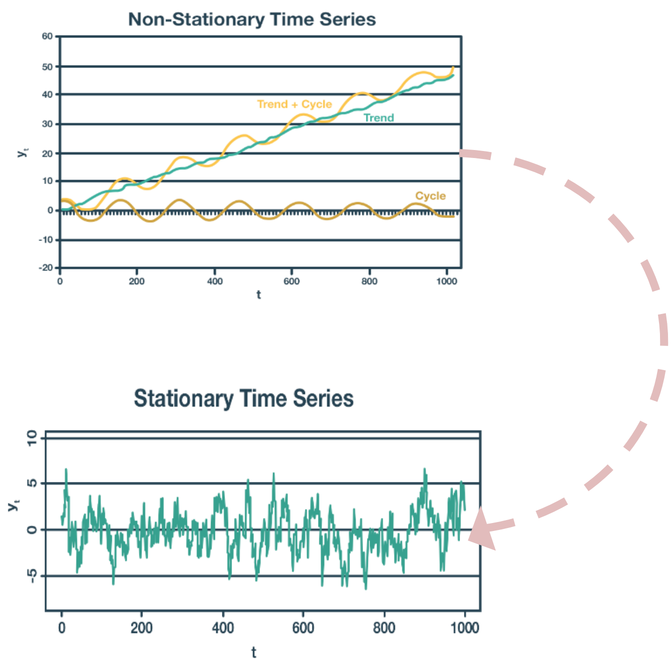
자기공분산은 시차 h에만 의존하고 시점 t와는 무관

시계열의 **확률적 성질**이 시간의 흐름에 따라 변하지 않는 성질

1 1주차 복습

정상성

정상화



회귀	회귀로 비정상성분을 추정
평활	t시점 주변의 관측값의 평균으로 추정
차분	이전 시점과의 차이를 구하여 추정

정상성을 만족하지 않는 시계열을 **정상시계열**로 변환하는 과정

모형의 필요성

분산-공분산 행렬

$$\Gamma = \begin{pmatrix} Cov(Y_1,Y_1) & Cov(Y_1,Y_2) & \cdots & Cov(Y_1,Y_n) \\ Cov(Y_2,Y_1) & Cov(Y_2,Y_2) & \cdots & Cov(Y_2,Y_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Cov(Y_n,Y_1) & Cov(Y_n,Y_2) & \cdots & Cov(Y_n,Y_n) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma(0)} & \gamma(1) & \cdots & \gamma(n-1) \\ \gamma(1) & \boldsymbol{\gamma(0)} & \cdots & \gamma(n-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma(n-1) & \gamma(n-2) & \cdots & \boldsymbol{\gamma(0)} \end{pmatrix}$$

백색잡음인 경우

대각요소인 분산을 제외한 나머지 요소가 모두 0

모형의 필요성

분산-공분산 행렬

$$\Gamma = \begin{pmatrix} Cov(Y_1,Y_1) & Cov(Y_1,Y_2) & \cdots & Cov(Y_1,Y_n) \\ Cov(Y_2,Y_1) & Cov(Y_2,Y_2) & \cdots & Cov(Y_2,Y_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Cov(Y_n,Y_1) & Cov(Y_n,Y_2) & \cdots & Cov(Y_n,Y_n) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \cdots & \gamma(n-1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \cdots & \gamma(n-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma(n-1) & \gamma(n-2) & \cdots & \gamma(0) \end{pmatrix}$$

백색잡음이 아닌 경우

→ 공분산 추가 추정 필요

2

모형의 식별

ACF, PACF

모형의 식별

비정상 시계열

↓

정상 시계열

공분산이 시점"t"에 의존하지 않는다

= 여전히 공분산은 존재할 수 있다!

모형을 통해 추정

공분산의 추정을 위하여 모형 활용

이때, ACF 및 PACF를 활용하여 모형 식별 가능

ACF

ACF의 성질

자기상관함수의 성질

1. $\gamma(0) = var(X_t) \quad \Rightarrow \rho(0) = 1$

자기자신과의 자기상관함수는 항상 1

2. $\rho(-h) = \rho(h)$

3. $|\gamma(h)| \leq \gamma(0) \; for \; all \; h \in \mathbb{Z}$

● ACF

ACF의 성질

자기상관함수의 성질

1. $\gamma(0) = var(X_t) \;\Rightarrow\; \rho(0) = 1$

2. $\rho(-h) = \rho(h)$ 자기상관함수는 우함수!

$$Cov(X_t, X_{t+h}) = Cov(X_{t+h}, X_t)$$

3. $|\gamma(h)| \leq \gamma(0) \; for \; all \; h \in \mathbb{Z}$

ACF

ACF의 성질

1. $\gamma(0) = var(X_t) \Rightarrow \rho(0) = 1$

2. $\rho(-h) = \rho(h)$

자기상관함수의 절댓값은 항상 1보다 작다!

3. $|\gamma(h)| \leq \gamma(0)\ for\ all\ h \in \mathbb{Z}$

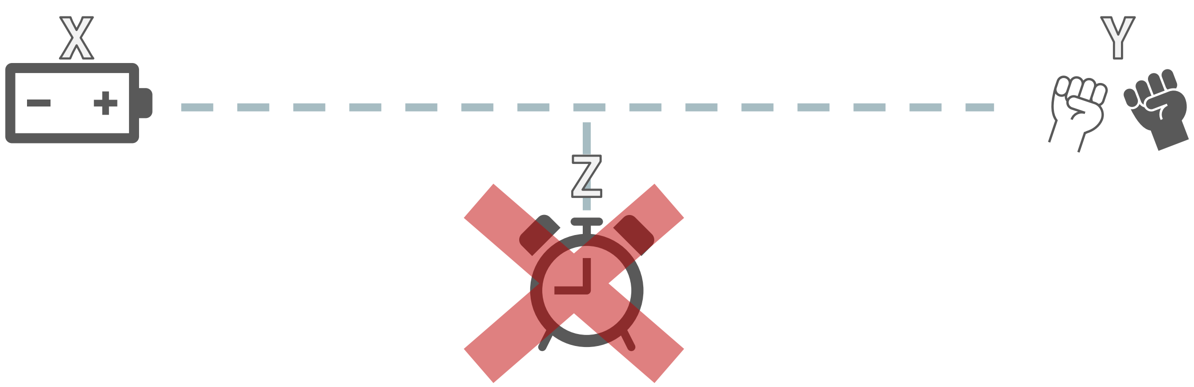
$$\Rightarrow \frac{|\gamma(h)|}{\gamma(0)} = |\rho(h)| \leq 1$$

PACF(Partial Autocorrelation Function)

Partial Correlation Coefficient

부분상관계수

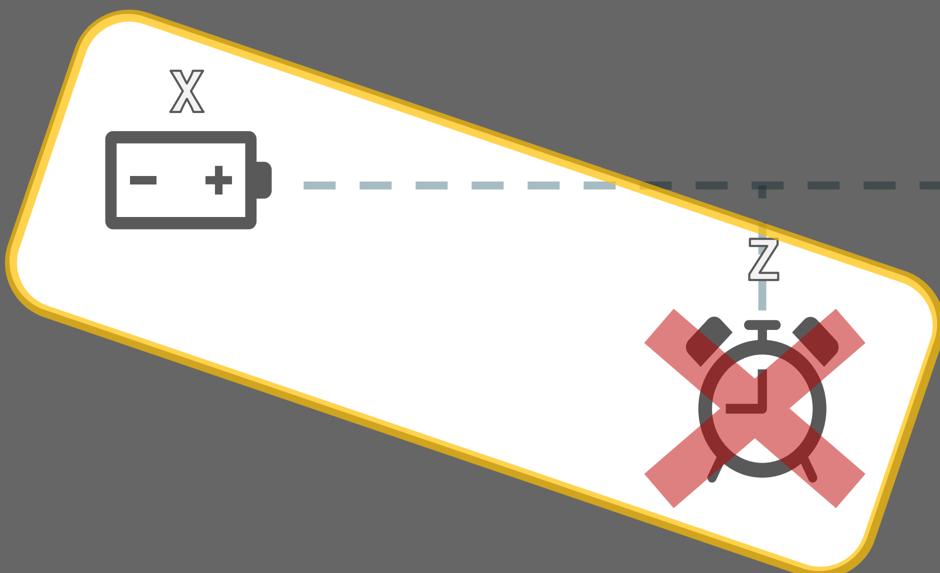
시계마을에는 매년 새로운 시계들이 탄생한다고 해봅시다. 이 시계마을에서 시계들이 힘을 얻고 싶을 때 건전지를 산다고 합시다. 이때, X를 건전지의 판매량, Y를 시계들의 범죄발생건수라고 해봅시다. X와 Y의 상관계수를 구해보면 매우 상관이 높은 것으로 나타날 것입니다. 왜 그럴까요? 시간이 지남에 따라 새로운 시계들은 계속 태어나고 이에 따라 당연히 건전지의 판매량과 시계들의 범죄발생건수도 증가했기 때문입니다. 따라서 X와 Y의 순수한 상관관계를 구하기 위해서는 "시간"의 효과를 제거한 후 상관계수를 구해줘야 합니다. 이때, 이를 부분상관계수(partial correlation coefficient)라고 합니다.



- PACF(Partial Autocorrelation Function)

Partial Correlation Coefficient

부분상관계수



조건부 기댓값 $E(X|Z)$

= X를 Z에 회귀시킨 최적선형 예측값

⇨ X가 Z에 의해 설명되는 부분

$$X^* = X - E(X|Z)$$

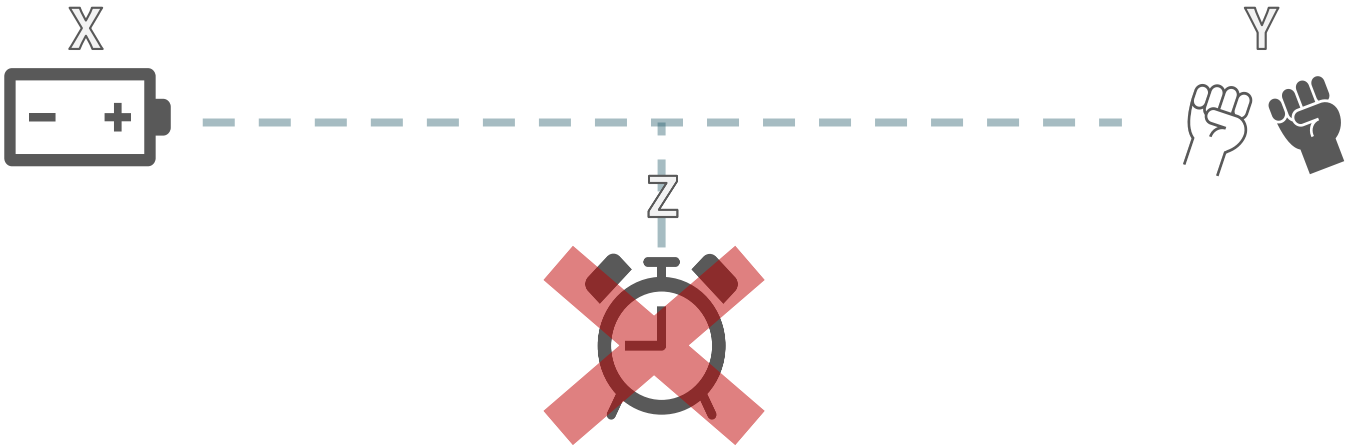
X를 Z에 회귀시킨 후의 잔차

⇨ Z의 영향력을 제거

PACF(Partial Autocorrelation Function)

Partial Correlation Coefficient

부분상관계수



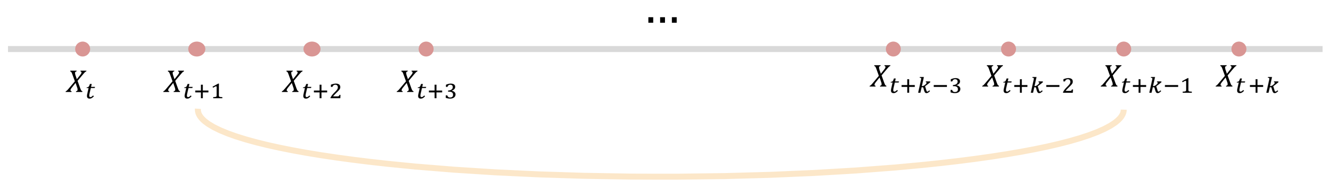
$$\rho_{XY,Z} = \frac{E\{[X - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Z})] \cdot [Y - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{Z})]\}}{\sqrt{E[X - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Z})]^2 \cdot E[Y - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{Z})]^2}}$$

PACF(Partial Autocorrelation Function)

정의

부분자기상관함수

$\boldsymbol{\alpha(k)}$ ➡ X_t와 X_{t+k} 순수한 상관관계



X_t와 X_{t+k}사이에 존재하는 관측값들의

영향력을 제거해준 뒤 구한 순수한 두 시계열간의 상관관계

- PACF(Partial Autocorrelation Function)

정의

부분자기상관함수

HOW?

$$X_{k+1} = \phi_{k1}X_k + \phi_{k2}X_{k-1} + \cdots + \phi_{kk}X_1 + \epsilon_{k+1}$$

$\boldsymbol{\alpha(k)}$ → X_t와 X_{t+k} 순수한 상관관계

회귀식의 계수 ϕ_{kk}

$\{X_2, \ldots X_k\}$가 고정되어 있을 때, X_{k+1}과 X_1간의 선형적인 상관관계

...

X_t X_{t+1} X_{t+2} X_{t+3} X_{t+k-3} X_{t+k-2} X_{t+k-1} X_{t+k}

X_t와 X_{t+k}사이에 존재하는 관측값들의

영향력을 제거해준 뒤 구한 순수한 두 시계열간의 상관관계

- PACF(Partial Autocorrelation Function)

정의

부분자기상관함수

HOW?

$$X_{k+1} = \phi_{k1}X_k + \phi_{k2}X_{k-1} + \cdots + \underline{\phi_{kk}}X_1 + \epsilon_{k+1}$$

$\boldsymbol{\alpha(k)}$ → X_t와 X_{t+k} 순수한 상관관계

회귀식의 계수 ϕ_{kk}

$\{X_2, \ldots X_k\}$가 고정되어 있을 때, X_{k+1}과 X_1간의 선형적인 상관관계

…

X_t X_{t+1} X_{t+2} X_{t+3} X_{t+k-3} X_{t+k-2} X_{t+k-1} X_{t+k}

$$\alpha(k) = \phi_{kk}\ , k \geq 1$$

k 번째 선형회귀 계수가 시차가 k인 부분상관계수

X_t와 X_{t+k}사이에 존재하는 관측값들의

영향력을 제거해준 뒤 구한 순수한 두 시계열간의 상관관계

3

선형과정

선형과정의 정의

선형과정(Linear Process)

$\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$들의 선형결합

백색잡음

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}$$

단, 선형결합의 계수는 $\sum_j |\psi_j| < \infty$ 조건 만족 필요

선형과정의 성질

선형과정(Linear Process)

선형과정의 성질
- 공분산 계산 간단
- 해석과 추정 발달
- 주어진 정상 확률 과정의 선형결합 → 또 다시 정상 확률 과정이 됨

선형확률과정 분석 절차

1차: 정상화 → 2차: 모델 선택 (AR/MA)

AR과 MA도 선형과정의 모형에 해당!

4

AR

AR의 정의

AR(Auto Regressive) 모형

AR(1)

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + Z_t$$

AR(p)

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t$$

→ 이 때, $Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$

현 시점의 관측값을 과거 관측값과 현 시점의 오차의 함수 형태로 나타내는 모형

AR의 정의

AR(Auto Regressive) 모형

여기서 복습! 후향연산자 B

AR(1)

$$BX_t = X_{t-1}$$

AR(p)

한 시점 전으로 돌려주는 작용

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t$$

→ 이 때, $Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$

현 시점의 관측값을 과거 관측값과 현 시점의 오차의 함수 형

후향연산자만 있으면 어디든 갈 수 있어

아.. 지원언니마저..

특성방정식

특성방정식

AR(p)

$$
\begin{aligned}
X_t &= \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t \\
&= \phi_1 \underbrace{BX_t}_{x_{t-1}} + \phi_2 \underbrace{B^2 X_t}_{x_{t-2}} + \cdots + \phi_p \underbrace{B^P X_t}_{x_{t-p}} + Z_t
\end{aligned}
$$

$$Z_t = \left(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p\right) X_t$$

후향연산자(Backshift Operator)를 이용한 AR(p) 모형의 표현

특성방정식

특성방정식

AR(p)

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t$$
$$= \phi_1 \underbrace{BX_t}_{x_{t-1}} + \phi_2 \underbrace{B^2 X_t}_{x_{t-2}} + \cdots + \phi_p \underbrace{B^P X_t}_{x_{t-p}} + Z_t$$

이때, 이 앞의 식을 특성방정식이라고 합니다!

$$Z_t = \left(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p\right) X_t$$

후향연산자(Backshift Operator)를 이용한 AR(p) 모형의 표현

특성방정식 $\phi(B)$

$$\therefore z_t = \phi(B) X_t$$

AR 모형의 조건

AR(Auto Regressive) 모형의 조건

AR 모형 조건

정상성

시계열의 확률적 특성이 시점에 의존하지 않음

인과성

t 시점의 관측값이 과거시점의 오차항으로 설명될 수 있음

$$\psi_j = 0, \forall j < 0, \quad X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}$$

AR 모형의 조건

AR(Auto Regressive) 모형의 조건

AR 모형은 정상성과 인과성을 어떻게 만족하는지, 가장 간단한 AR(1) 모형을 통해 알아보자!

계수를 세 경우로 나눠서 알아보겠습니다!

$|\phi_1| < 1$

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + Z_t$$

$$= \phi_1(\phi_1 X_{t-2} + Z_{t-1}) + Z_t = \phi_1^2 X_{t-2} + \phi_1 Z_{t-1} + Z_t$$

$$= \phi_1^2(\phi_1 X_{t-3} + Z_{t-2}) + \phi_1 Z_{t-1} + Z_t = \phi_1^3 X_{t-3} + \phi_1^2 Z_{t-2} + \phi_1 Z_{t-1} + Z_t$$

$$= \phi_1^{M+1} X_{t-M-1} + \Sigma_{j=0}^{M} \phi_1^j Z_{t-j}$$

정리해서 나타나면 이렇게 됩니다 >>다음페이지

$M \to \infty$ 이면

0으로 수렴

AR 모형의 조건

$$\Sigma_{j=0}^{M} \phi_1^{j} Z_{t-j}$$

정상성 만족 → 정상시계열의 선형결합은 여전히 정상시계열

인과성 만족 → 과거의 값에만 의존

AR 모형의 조건

AR(Auto Regressive) 모형의 조건

AR 모형은 정상성과 인과성을 어떻게 만족하는지, 가장 간단한 AR(1) 모형을 통해 알아보자!

$|\phi_1| = 1$

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t \; or \; X_t = -X_{t-1} + \varepsilon_t$$

대표적인 비정상 확률 과정 중 하나인

확률보행과정(Random Walk Process)이 되어 조건 불만족!

AR 모형의 조건

AR(Auto Regressive) 모형의 조건

AR 모형은 정상성과 인과성을 어떻게 만족하는지, 가장 간단한 AR(1) 모형을 통해 알아보자!

$|\phi_1| > 1$

$$X_{t+1} = \phi_1 X_t + Z_{t+1}$$

$$\phi_1 X_t = X_{t+1} - Z_{t+1}$$

$$X_t = \frac{1}{\phi_1} X_{t+1} - \frac{1}{\phi_1} Z_t = \frac{1}{\phi_1}\left(\frac{1}{\phi_1} X_{t+2} - \frac{1}{\phi_1} Z_{t+2}\right) - \frac{1}{\phi_1} Z_{t+1}$$

$$= \left(\frac{1}{\phi_1}\right)^m X_{t+j} - \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{\phi_1}\right)^j Z_{t+j}$$

$m \to \infty$ 이면 0으로 수렴

미래의 오차항 결합 (인과성 불만족)

ACF(자기상관함수)

AR(1) 모형의 ACF

$E(X_t) = 0$이라고 가정

STEP 1

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + Z_t$$

$$X_t X_{t-h} = \phi_1 X_{t-1} X_{t-h} + Z_t X_{t-h}$$

양변에 X_{t-h}를 곱해 기댓값을 취함

STEP 2

$$\gamma(h) = \phi_1 \gamma(h-1) + Cov(Z_t X_{t-h}) = \phi_1 \gamma(h-1)$$

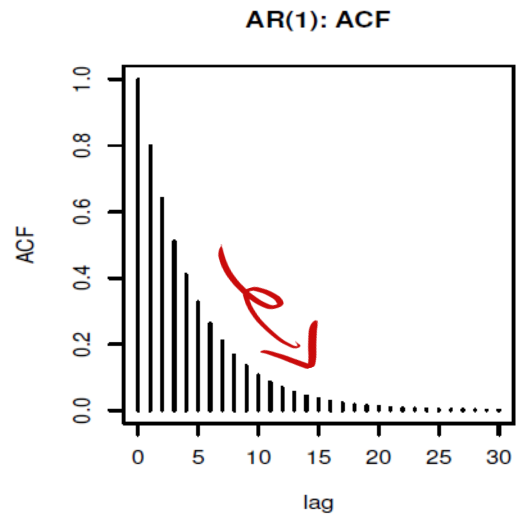
$$\gamma(h) = \phi_1\big(\phi_1 \gamma(h-2)\big) = \cdots = \phi_1^h \gamma(0)$$

$$\frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \phi_1^h = \rho(h)$$

다음과 같은 ACF를 구할 수 있습니다!

4 AR(Auto Regressive Model)

ACF(자기상관함수)



정상정 만족 시 AR 모형의 $|\phi_1| < 1$

∴ h가 증가할수록 ACF는 지수적으로 감소

$$\frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \phi_1^h = \rho(h)$$

PACF(부분자기상관함수)

AR(1) 모형의 PACF

$$X_t = \phi_1 + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t$$

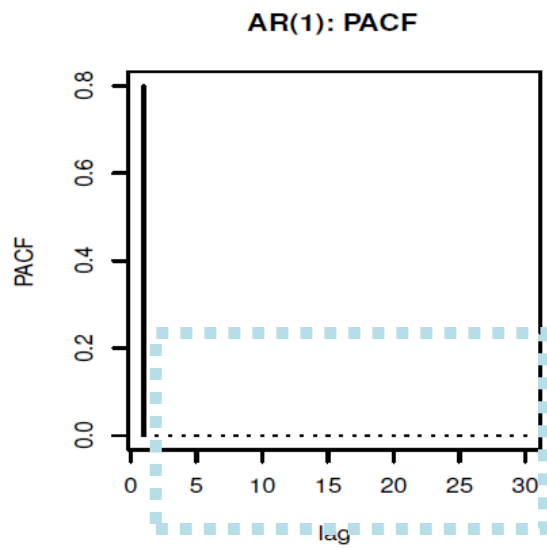
AR(p)는 X_{k+1}을 p 시점 이전의 값인 $X_{k+1-p}, \dots, X_k$으로만 표현

$$\hat{X}_{k+1} = \phi_1 X_k + \phi_2 X_{k-1} + \cdots + \phi_p X_{k+1-p} + 0X_{k-p} + \cdots + 0X_1$$

$\alpha(p) = \phi_p$, p 이후의 PACF는 0

PACF(부분자기상관함수)

AR(1) 모형의 PACF



따라서,
p 시점 이후로 절단되는 양상

$$\hat{X}_{k+1} = \phi_1 X_k + \phi_2 X_{k-1} + \cdots + \phi_p X_{k+1-p} + 0X_{k-p} + \cdots + 0X_1$$

5

MA

정의

MA(Moving Average)모형

: 과거시점의 오차항을 이용하여 관측값을 설명

$Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$을 따른다구

MA(1) 모형 : 1시점 전까지 오차들의 선형결합으로 표현

$$X_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1}$$

MA(q) 모형 : q시점 전까지 오차들의 선형결합으로 표현

$$X_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \cdots - \theta_q Z_{t-q}$$

정의

MA(M

: 과거시점

MA(1)

1주차 클린업 잊은거 아니지 자기야... by 문장희..

$$\boxed{B}X_t = X_{t-1}$$

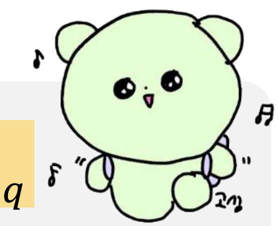
한 시점 전으로 돌려주는 작용

후향 연산자(Backshift Operator)

MA(q) 모형

후향연산자로 나타내볼까?

$$X_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \cdots - \theta_q Z_{t-q}$$



특성방정식

MA(Moving Average)모형

: 과거시점의 오차항을 이용하여 관측값을 설명

MA(q) 모형

$$X_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \cdots - \theta_q Z_{t-q}$$

$$= Z_t - \theta_1 B Z_t - \theta_2 B^2 Z_t - \cdots - \theta_q B^q Z_t$$

$$= \left(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q\right) Z_t$$

특성방정식 $\theta(B)$

$X_t = \theta(B) Z_t$ 으로 표현 가능

모형의 조건

MA 모형

- 과거 시점들 오차들의 선형결합
- t 시점 이전의 오차항들로 표현

정상성

오차항의

선형결합으로 표현

↓

만족

모형의 조건

MA 모형
- 과거 시점들 오차들의 선형결합
- t 시점 이전의 오차항들로 표현

정상성

오차항의
선형결합으로 표현
⬇
만족

인과성

MA의 정의적
특성때문에 만족
⬇
만족

모형의 조건

MA 모형
- 과거 시점들 오차들의 선형결합
- t 시점 이전의 오차항들로 표현

정상성

오차항의 선형결합으로 표현

⬇

만족

인과성

MA의 정의적 특성때문에 만족

⬇

만족

가역성

조건 필요

모형의 조건

MA 모형

- 과거 시점들 오차들의 선형결합
- t 시점 이전의 오차항들로 표현

MA 모형이 가역성을 만족하는 조건?

정상성	*인과성*	*가역성*
오차항의 선형결합으로 표현 ↓ *만족*	*MA의 정의적 특성때문에 만족* ↓ *만족*	*조건 필요*

“$\theta(B) = 0$ 의 근의 절댓값” > 1

모형의 조건

가역성(Invertibility)

: t 시점의 오차항을 과거 시점의 관측값으로 표현할 수 있는 성질

$$Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j} \quad for\ all\ t \quad (\text{단}, \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty)$$

위 식을 만족하면, 확률과정 가역성 만족

모형의 조건

가역성(Invertibility)

MA(1) 모형

다음과 같이 특성방정식으로 양변을 나눠줍니다

$$(1+\theta B)^{-1}X_t = Z_t$$

$$\theta X_t = \theta(B)Z_t \qquad \theta(B)^{-1}X_t = Z_t$$

모형의 조건

가역성(Invertibility)

MA(1) 모형

$$(1+\theta B)^{-1}X_t = Z_t$$

단, $|\theta| < 1$
일때 성립

$$(1+\theta B)^{-1} = \frac{1}{1-(-\theta B)} = 1 - \theta B + (\theta B)^2 - (\theta B)^3 + \cdots$$

MA 모형은 $|\theta| < 1$ 일 때 가역성을 만족

“$\boldsymbol{\theta(B)}$의 근의 절댓값” >1

모형의 조건

MA 모형

과거 시점들 오차들의 선형결합

t 시점 이전의 오차항들로 표현

정상성

오차항으로만 표현되므로 만족

인과성

MA의 정의적 특성 때문에 만족

가역성

조건 필요

가역성 조건은 왜…?

ACF와 모형사이의 일대일 대응관계를

성립해주는 역할

EX)

$$\rho(k) = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} -\dfrac{\theta}{(1+\theta^2)} & , k = 1 \\ 0 & , k \geq 2 \end{cases}$$

MA모형의 계수가 달라져도

$$\theta \leftrightarrow \frac{1}{\theta}$$

→ 결과가 동일

ACF

MA 모형의 ACF

MA(1) ACF

$$X_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1}$$

ACF

MA 모형의 ACF

MA(1) ACF

$$X_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1}$$

X_{t-h}을 곱하고
기댓값을 취하자

$$X_{t-h}X_t = X_{t-h}(Z_t - \theta_1 Z_{t-1}) = X_{t-h}Z_t - \theta_1 X_{t-h}Z_{t-1}$$

$$\gamma(h) = Cov(X_{t-h}, Z_t - \theta_1 Z_{t-1})$$

$$= Cov(Z_{t-h} - \theta_1 Z_{t-h-1}, Z_t - \theta_1 Z_{t-1})$$

ACF

MA 모형의 ACF

MA(1) ACF

$h = 0$ 일때 $\gamma(0) = Cov(Z_t - \theta_1 Z_{t-1}, Z_t - \theta_1 Z_{t-1}) = (1 + \theta_1^2)\sigma^2$

$$X_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1}$$

$h = 1$ 일때 $\gamma(1) = Cov(Z_{t-1} - \theta_1 Z_{t-2}, Z_t - \theta_1 Z_{t-1}) = -\theta_1 \sigma^2$

$h \geq 2$ 일때 $\gamma(h) = Cov(Z_{t-h} - \theta_1 Z_{t-h-1}, Z_t - \theta_1 Z_{t-1}) = 0$

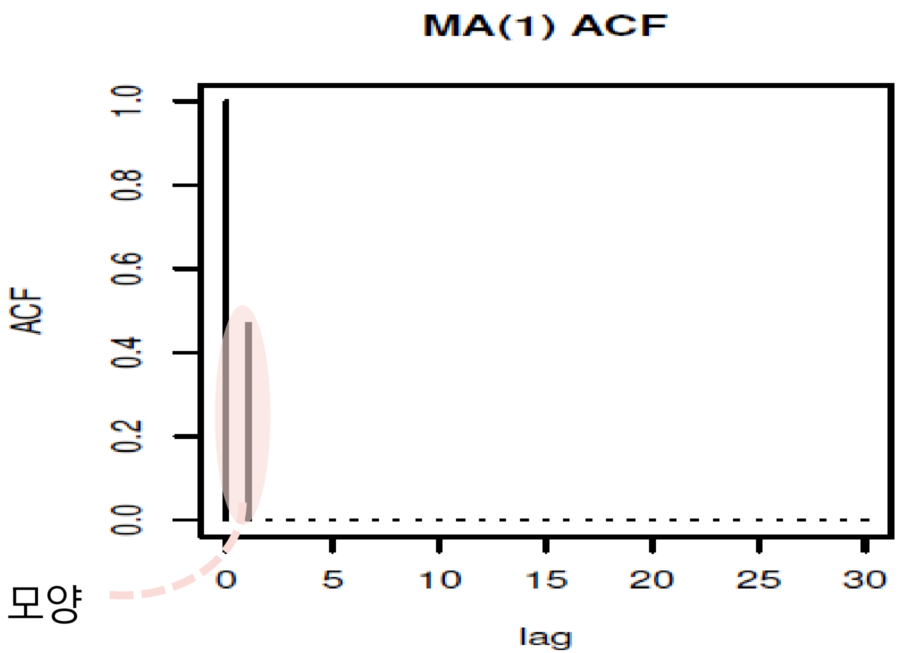
$$X_{t-h}X_t = X_{t-h}(Z_t - \theta_1 Z_{t-1}) = X_{t-h}Z_t - \theta_1 X_{t-h}Z_{t-1}$$

$$\gamma(h) = Cov(X_{t-h}, Z_t - \theta_1 Z_{t-1})$$

$$= Cov(Z_{t-h} - \theta_1 Z_{t-h-1}, Z_t - \theta_1 Z_{t-1})$$

- ACF

MA(1) 모형의 ACF



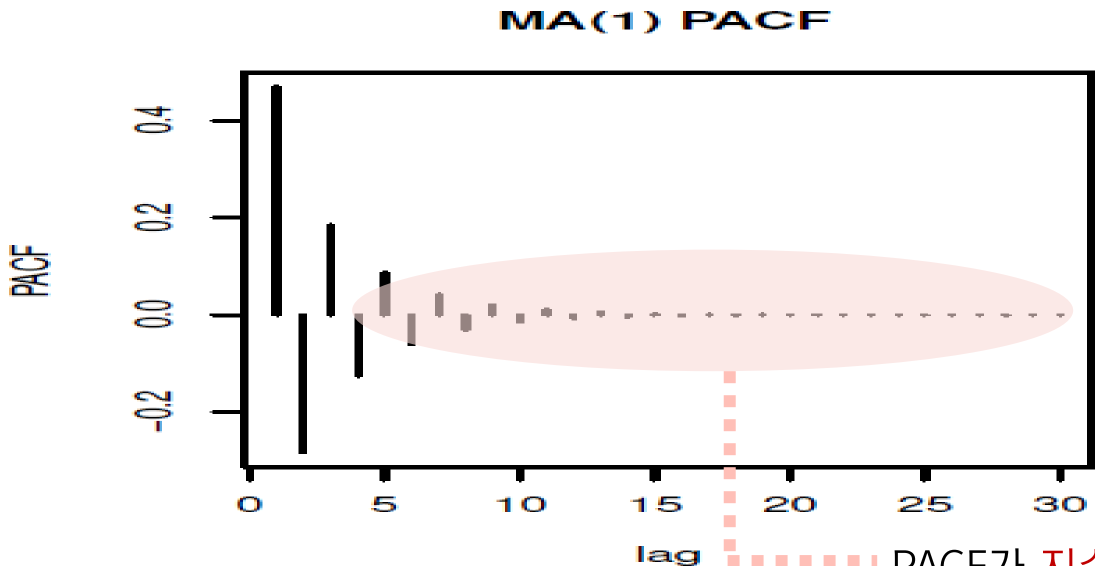
시차 q 이후 절단된 모양

MA(1) 의 ACF

$$\rho(k) = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} -\dfrac{\theta}{(1+\theta^2)} & ,k=1 \\ 0 & ,k \geq 2 \end{cases}$$

PACF

MA(1) 모형의 PACF



PACF가 지수적으로 감소하는 형태

MA(1) 의 PACF

$$\phi_{kk} = \frac{-\theta^k(1-\theta^2)}{1-\theta^{\,2(k+1)}}\ , k \geq 1$$

crammer공식으로 유도된 식이나, 깊게 다루진 않을꺼에요!

의미

쌍대성(Duality)의 의미

AR과 MA의 쌍대성

수학적 구조의 쌍대 → 그 구조를 뒤집어서 구성한 것

쌍대와 쌍대는 자기 자신 → 쌍대는 서로 일종의 '켤레' 를 이룸

6 AR, MA의 쌍대성(Duality)

AR과 MA의 쌍대성

AR과 MA의 쌍대성

유한차수의 AR 과정을 **무한차수의** MA 과정으로

AR(1) → MA(∞)

$$X_t = \phi_1 B X_t + Z_t \quad \rightarrow \quad X_t = 1 + \phi_1 B + \phi_1^2 B^2 + \cdots + Z_t$$

유한차수의 MA 과정을 **무한차수의** AR 과정으로

MA(1) → AR(∞)

$$X_t = -\theta_1 B Z_t + Z_t \quad \rightarrow \quad X_t = -\theta_1 B X_t - \theta_1^2 B^2 X_t - \cdots - Z_t$$

더 자세히 알고싶다면,, →

6 AR, MA의 쌍대성(Duality)

AR과 MA의 ACF/PACF

정리해보자면!

지수적으로 감소하는 모형(tails' s-off)

유한차수 AR 모형의 ACF & 무한차수 MA 모형의 PACF

절단하는 모양(cut-off)

유한차수 AR 모형의 PACF & 유한차수 MA 모형의 ACF

AR과 MA의 모형의 조건

유한차수의 AR 모형
- 정상성 조건이 필요
- $\theta(B) = 0$의 근들의 절댓값이 1보다 커야함

유한차수의 MA 모형
- 가역성 조건이 필요
- $\theta(B) = 0$의 근들의 절댓값이 1보다 커야함

6

ARMA

ARMA 모형

필요성

: 모수의 절약(parsimony)

AR, MA 단일 모형으로 분석

↓

모형의 차수 p, q 값이 너무 커질 가능성 존재

효율성 하락, 해석의 어려움 발생

ARMA(p, q) = 모수의 개수를 절약한 모형

자기회귀 이동평균 모형

정의

: 자기회귀(AR) + 이동평균(MA) 모형

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p}$$
$$-\theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \cdots - \theta_q Z_{t-q} + Z_t$$

ex) ARMA(0,1) = MA(1) , ARMA(1,0) = AR(1)

자기회귀와 이동평균의 혼합 모형

특성방정식

특성방정식

: 후향 연산자 B를 이용해 정리 가능!

$$\left(1-\phi_1 B-\cdots-\phi_p B^p\right) X_t=\left(1-\theta_1 B-\cdots-\theta_q B^q\right) Z_t$$

AR $\phi(B) X_t=\theta(B) Z_t$ MA

모형의 조건

정상성과 인과성, 가역성

정상성과 인과성 만족

AR : $\phi(B) = 0$의 근의 절대값이 1보다 커야 함

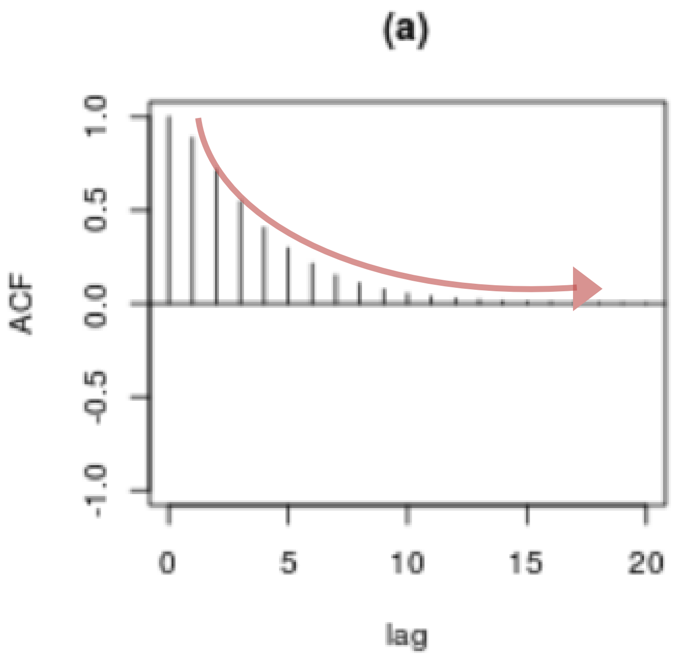
가역성 만족

MA : $\theta(B) = 0$의 근의 절대값이 1보다 커야 함

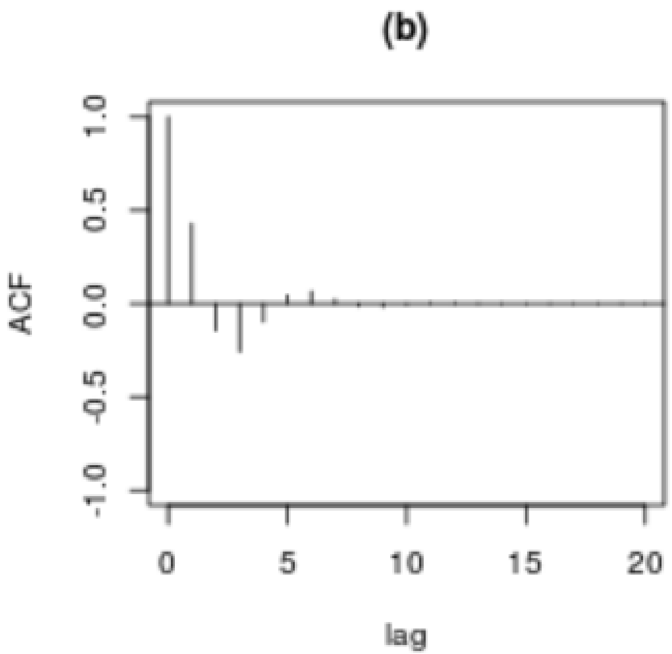
AR 모형과 MA 모형의 조건 동시에 만족

ACF와 PACF

ACF



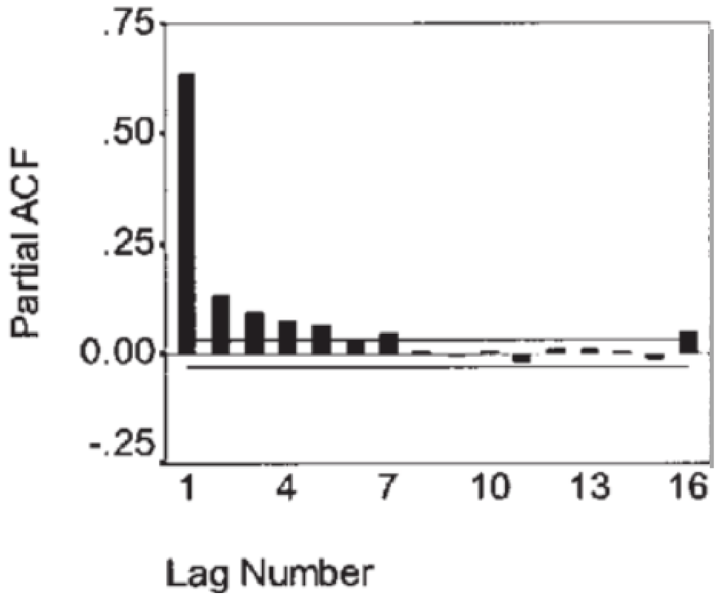
지수적으로 감소



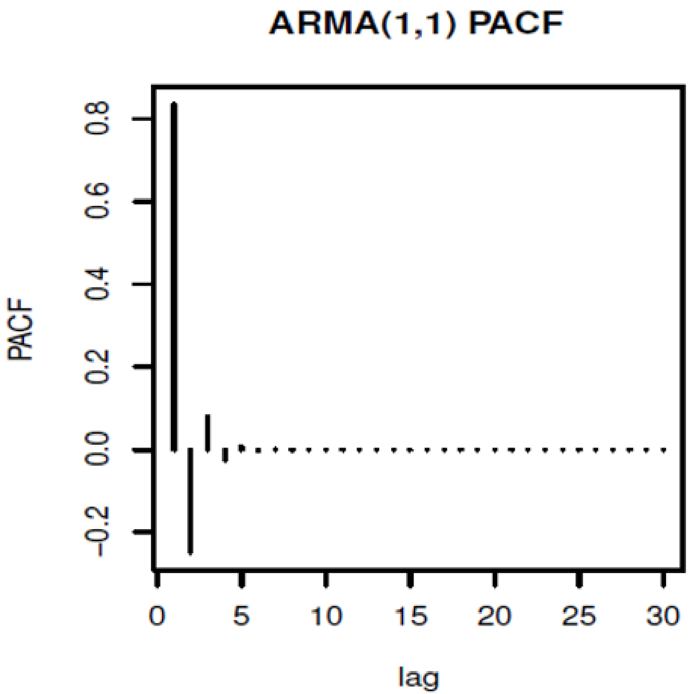
sin함수 형태로 소멸

ACF와 PACF

PACF



지수적으로 감소



sin함수 형태로 소멸

7

모형의 적합절차

예측을 위한 모형 선택

Overview

1. 시계열자료(time series data)
2. 모형의 식별(model identification) ex) 차분차수 d, AR-차수 p와 MA-차수 q의 선택
3. 모형의 추정(model estimation) $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q, \mu, \sigma_\varepsilon^2$의 추정
4. 모형의 진단(model diagnostics) ex) 잔차분석
5. 예측모형(forecast model)으로 선택

예측을 위한 모형 선택

1. 모형의 식별

"principle of parsimony"

간결성의 원칙 ⇨ 간단한 모형 선호

시계열 그림

자기상관함수

부분자기상관함수

차분의 필요 여부와

모형의 차수(p,q) 잠정 결정

or

AIC = $n \ln \hat{\sigma}^2_\varepsilon + 2(p+q)$

SBC = $n \ln \hat{\sigma}^2_\varepsilon + (p+q) \ln n$

작은 값을 가진 모형 선택

차분의 필요 여부와 모형의 차수(p,q)를 잠정적으로 결정하는 단계

예측을 위한 모형 선택

2. 모수 추정

: 모델의 모수를 추정하는 단계

1) 적률추정법

모집단의 적률을 상응하는 표본의 적률로 대체한 후

방정식을 풀어 추정량을 구하는 방법

표본의 1차 적률 : $\bar{x}=\sum_{i=1}^{n} x_i$ 표본의 2차 적률 : $\bar{x}^2=\sum_{i=1}^{n} x_i^2$

2) 최대가능도추정법

모수의 가능도함수를 최대화시켜 모수를 구하는 방법

확률밀도함수의 '모수'를 '변수'로 보는 함수 $L(\theta;x)=p(x;\theta)$

예측을 위한 모형 선택

2. 모수 추정

: 모델의 모수를 추정하는 단계

3) 최소제곱법

오차의 제곱합이 가장 작게 되도록 하는 모수들의 추정량을 구하는 방법

어떠한 조건을 주는가에 따라 조건부/비조건부로 나뉨

$$\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p), \theta = (\theta_1, \dots, \theta_q), \mu, \sigma^2$$

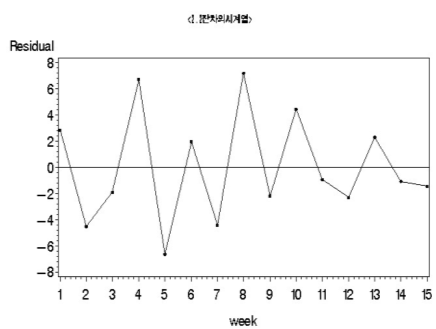
추정해야 할 모수는 'p+q+2' 개

예측을 위한 모형 선택

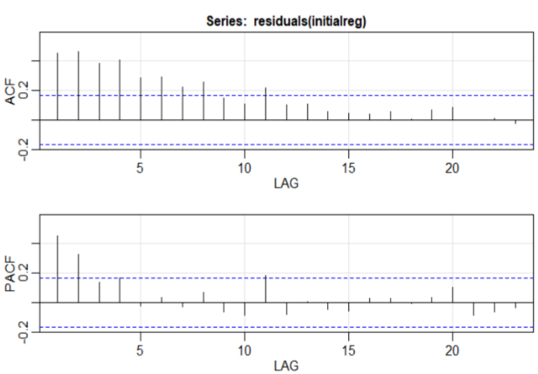
3. 모형의 진단

: 잠정 모형의 적합도를 진단

잔차의 시계열 그림



잔차의 (부분)자기상관



예측을 위한 모형 선택

3. 모형의 진단

: 잠정 모형의 적합도를 진단

포트맨토검정(Portmanteau test)

Portmanteau 통계량을 이용한 잔차 분석과 과대 적합 검정

: 잔차의 부분자기상관계수를 이용해 적합성 검정을 시행

H0: 잔차 간 상관관계가 없다.

$$H_0: \ \rho_1(e) = \rho_2(e) = \cdots = \rho_k(e) = 0$$

예측을 위한 모형 선택

4. 예측

최종 선정된 모델을 이용하여 예측

“안정성 조사” = 새로운 자료 등장 때마다 예측값과 비교

모형이나 모수가 예측 기간에 변했는지 확인

↓

실제값과 차이가 큰 경우?

1. 예측 모형을 새로 구하거나 2. 기존 모형 갱신

or

변화가 있었다면?

새로운 관측값과 이전 관측값을 이용해 미래 예측값 갱신

THANK YOU