제 목 : [답변] 텐서(1) [316] 등록자 : 김영욱(CARTAN) 조 회 수 : 3 등록일 : 2001-01-07 02:54:14 관련자료 : 없음 본문크기 : 5931 Byte

예전에 텐서에 대해서 말도 안되는 글을 하나 써 놓은 것이 있습니다. 과학동호회에 있던 글인데 우선 여기 옮겨 봅니다. 다시 쓸 성의는 없는 것이고, 이 말에 들어있는 오의를 터득하면 다 아는 것이기도 하니깐요. 단지 좀 선문답 같은 부분이 있어서 리... 다시 한두마디 더 올리지요.

CARTAN 씀

제 목 : Tensor 란? [162] 등록자 : 김영욱(CARTAN) 조 회 수 : 259 등록일 : 1991-10-02 00:47:00 관련자료 : 없음 본문크기 : 5288 Byte

같이 풀어 봅시다 란에 텐서에 대한 이야기가 나왔다.
텐서?

텐서가 무엇이길래 (나를 포함해서) 이토록 많은 사람들에게 고통을 주는 것인가?......???

여러분이 말하는 텐서는 내가 보는 바로는 허깨비일 뿐이다.

라고 한다면 무슨 헛소리인가 하겠지만, 글쎄, 그럴듯 하다고 할수도 있겠다. 텐서를 한마디에 또는 한번 이야기에 설명하는 것은 불가능하다. 무엇보다도 그 많은 복잡한 공식과 계산들은 당연히 책을 보고 배워서 외워야 할것이다. 문제는 텐서를 보면서 무슨 생각을 하여야 하는가 이다. 이를 잘 이해하려면 정말 쉬운 경우를 예로 들지 않으면 안된다.
그러나 설명을 해 보기 전에, 여러분은 물론 선형대수를 공부했기에 텐서를 알려고 하고 있을 것이다. 그러나 여러분은 선형대수가 '뭐하는' 것인지를 알고 있는가? 글쎄요라는 대답이 나온다면 텐서를 이해할수 없는 것은 당연하다.

세상에서 가장 쉬운 예:

한 직선의 점들에다 또 다른 한 직선의 점들을 대응시키는 함수를 생각하자. 이것은 여러분이 국민학교에서 부터 지금까지 수학에서 거의 매일 다루고 있는 대상이며 사실 이것 밖에는 배운것이 없을 것이다. 이것을 보면 여러분은 우선 $y = f(x)$ 하고 쓸것이다. 이것은 틀린것이 아니다. 그러나 여러분은 분명히 x 나 y 가 수(number 즉 실수)라고 생각할 것이다. 여기는 문제가 있다. 직선 위의 점들은 수가 아니다. 여러분이 수라고 생각한다면 그것은 직선위의 점들을 항상 수와 대응시켜서(수를 이름으로 써서) 불렀기 때문일 것이다.

직선위의 점들은 항상 정해진 이름(= 대응되는 수)이 있는가? 이런 생각을 해보면 금방 알수가 있다. 직선에 우리가 단위길이를 주고 눈금을 끊어나가기 전에는 '아니올시다' 이다. 이것도 직선 위에서 길이를 잴수 있을때라야 된다. 따라서 x, y 에 숫자를 넣어 생각하는 것은 우리 직선들에 수를 찍어서 소위 '수직선'을 만든 후의 이야기이다. 수직선을 만드는 방법은 여러가지가 있으니까 한가지 함수 $y = f(x)$ 라도 수직선을 다르게 만들면 $f(x)$ 의 공식은 달라지게 마련이다. 진짜 예를 들자.

$y = x$ 라는 함수가 있었다. (이미 수직선이다) 그런데 어떤 사람이 x-축에서 단위길이를 원래길이의 두배로 잡았다. 즉 이전의 2 자리가 이제는 1 이 되고 말았다. 그랬더니 함수는 $y = 2x$ 가 된다. 함수가 변했는가? (이 물음은 두 직선 사이의 대응 관계가 변했느냐는 뜻이다.) 물론 변하지 않았고 단지 x-축 위의 점들의 이름만이 바뀌었을 뿐이다.

이렇게 함수의 영역에 숫자로 이름을 주는 것을 '좌표'를 준다고 하고 '좌표계'가 주어졌다고 한다. 한 함수라도 x 나 y 의 좌표계가 바뀌면 숫자로 나타내는 식은 달라진다.

이 긴 이야기의 핵심은?

1. 우리는 숫자를 써서 나타내는 것만을 계산할수 있다는 것이다. 그러나 이것은 이름을 어떻게 주느냐에 따라 변한다.

2. 그러나 이렇게 숫자를 써서 말하고자 하는 것은 좌표를 바꿔도 변하지 않는 함수에 대한 이야기이다.

비극이 아닐수 없다. 그러나 딴 방법은 없다.

일차함수만 생각하자. (이것이 '선형대수'이다)
좌표를 정하고 f 라는 함수를 표시하니 f(x) = x 였다. 이 함수는 기울기 1 만 알면 되는 함수이다. 그런데 아까 처럼 좌표를 바꾸니까 기울기가 2 가 되고 말았다. 그럼 기울기가 무슨 소용인가? 좌표만 바꾸면 무슨 기울기도 다 나올텐데...(0 만 빼고)

따라서 우리가 말하고 싶은 '변화율'은 이렇게 이야기 한다. 이런 좌표에서는 기울기가 1 이다. 하지만 x-좌표를 (0 이 아닌) a 배로 늘리면 기울기는 a 배가 되고 y-좌표를 그렇게 하면 기울기는 1/a배가 된다.
여기서 몇배 하는 부분의 설명은 언제나 그렇다는 것을 알수 있을 것이다. "따라서 한번 이야기 하면 다시 할 필요가 없겠으므로 다 안다면 다시 이야기 하지 않는다"는 것이 선형대수의 밑(basis)의 변환에 대한 정리이다.

즉 선형변환(Linear Transformation = 변수도 벡터이고 값도 벡터인 일차함수) 은 좌표를 이러이러하게 잡을때 (즉 basis 를 이렇게 잡을 때)

Y = [A] X

로 표시 된다면 좌표(basis)를 이러이러하게(= [P], [Q]를 써서) 바꾸면 새 좌표에서는

Y = [Q][A][P 의 역행렬] X

꼴로 표시된다는 정리이다.(여기서 X, Y 는 벡터, [A]등은 행렬이다.)

[[중요!!!]]

따라서 행렬을 하나 보면 그 행렬을 곱해서 함수(선형변환)가 나온다는 생각 뿐이 아니라 이때 basis 를 바꾸면 그 행렬이 어떻게 변할지도 항상 생각하고 있어야(최소한 생각해 낼수 있어야) 한다. 그래야 그 함수를 진짜로 (어떤 경우에도 쓸수 있게) 알고 있는 것이다.

[[[끝말]]]

자 이제부터 간단히 '텐서는 뭔가?' 이야기 하자.

수학이나 물리학에서 나오는 많은 양(quantity)들은 위의 함수와 같은 존재이다 X(i) 들이 벡터일때 (f 는 일차인 경우만 생각하자, 아니면 '한 점에서' 미분을 해서 일차도함수인 전미분 (differential = Jacobian)을 생각한다)

Y = f(X(1), ... , X(n))

꼴이다. 이걸 좌표를 써서 나타내면 행렬 같지만 독립변수가 n 개의 벡터이므로 첨수(index)가 n+1 개나 필요하다. (선형대수에서는 독립변수가 한개, 첨수가 2개이다) 즉

```
[A] = A
       i,j,k,...
```

모양이 된다.

좌표도 일차식으로만 바뀌란 법이 없다. 그러나 한 점에서 벡터만을 다루므로 좌표 변환의 그 점에서의 Jacobi 행렬만 쓰면 된다. 그러면 다음과 같다. f 가 좌표(x, y) 에 따라 [A], [B]등으로 나타날때,

$$A_{i,j} = \frac{dy_p}{dx_i} \frac{dy_q}{dx_j} B_{p,q}$$

꼴의 관계가 성립한다. (dy/dx 꼴은 좌표변환의 Jacobi 행렬) 첨자가 두개인 경우만 썼지만 여러개일때도 마찬가지다.

특히 물리학의 양들을 나타낼때 자연에서 주어지는 좌표란 것이 없으므로 인위적인 좌표(km, sec, gram,...)에 대해서 계산한다. 그러면 위의 f 는 [A]같이 나타나겠지만 그 숫자가 그리 중요하지 않다. (위에서 기울기가 별로 중요하지 않듯이...) 문제는 그 숫자가 여러가지 좌표계에서 어떻게 바뀌어 나타나는가 이다. 그리고 그 바뀌는 숫자들이 어떤 특성의 양(quantity)을 나타내는가 이다.

CARTAN

제 목 : [답변]텐서(2) [317] 등록자 : 김영욱(CARTAN) 조 회 수 : 2 등록일 : 2001-01-07 03:49:35 관련자료 : 없음 본문크기 : 4871 Byte

텐서란 앞에서 말했던 것 처럼 이미 가지고 있는 개념을 수치적으로 표현할 때 꼭 겪는 복잡함을 이해하고 이에 대하여 말하는 방법입니다. 수학에서는 단계적으로 다음과 같이 풀어져 있습니다.
그 이야기 전에 우선 다변수 미적분학(적어도 2변수)과 선형대수(적어도 행렬과 행렬식)의 이야기를 들어보았어야 합니다.(사실 들어보는 정도로는 안됩니다.) 리만기하학을 배우려는 분이면 당연히 아시겠지요.(적어도 안다고 생각하시겠지요.)

우선 대수적인 텐서는 벡터공간 V 하나안에서의 이야기입니다. 이 때 텐서는 V 위에서의 벡터들의 곱의 일종을 말합니다. 이 곱은 보통 알고 있는 곱들을 포함하는, 더 일반화된 개념으로서 우리가 보통 곱셈이 갖고있다고 생각하는 최소한의 조건만을 가지는, 가장 일반화된 곱셈입니다. (이에 대한 정의는 대수학등의 책을 보시기 바랍니다.) 따라서 우리가 생각하는 모든 곱셈들은 이 곱셈의 하나가 됩니다. 우리가 이미 잘 쓰고 있는 예를 하나만 들죠.(잘 아는 것은 사실 이것 하나 밖에 없습니다.)

V = R^2 에 좌표 x, y를 주고 보면 V^*(dual space)는 x, y로 생성되지요. 이 때, V 위에서 정의된 다항식들은 x와 y의 곱들로 나타내어집니다. 이 들은 다음과 같이 나누어 생각할 수 있습니다.

x, y의 0차식, x, y의 1차식, x, y의 2차식, ...

이 각각은 x 와 y를 각각 0번, 1번, 2번, ... 씩 곱해서 얻어지는 것들의 일차결합을 모두 모은 것입니다.

이들이 V^*의 모든 텐서곱을 다 나타내지는 못합니다. 다항식들은 특별한 조건

xy = yx, x y^2 = yxy = y^2 x, ...

을 만족하고 있으므로 가장 일반적인 곱셈이라고 할 수는 없습니다. 다항식은 소위 대칭인 곱셈(symmetric tensor product)을 모두 만드는 것 같군요.(사실인지 한번 생각해봐야겠군요^^)

일반적인 곱셈을 @ 로 나타내기로 하면,

$x @ y \not= y @ x$

일 뿐만 아니라 양변이 서로 아무 관계도 없어야 합니다. 즉

$x @ y = - y @ x$

같은 조건도 없다는 것이지요. 이러한 일반적인 곱셈을 통해서 곱하고 일차 결합을 만들고 하는데, 단 하나, 텐서 곱셈이 되려면 다음 성질 둘(셋?)은 만족해야 하지요 (결국 대수학 책을 쓰는군)

$(x + y) @ z = x @ z + y @ z,$
$x @ (y + z) = x @ y + x @ z,$
$x @ (ty) = t (x @ y) = (tx) @ y$ (t는 스칼라 체의 원소)

그러한 곱셈을 만들어 쓰는데 익숙해지면, 해석(기하)학으로 들어가게 되는데요, 앞의 글 `텐서(1)'에서 이야기한 것입니다. 즉

(1) 한 점 p에서의 방향벡터 전부를 V_p라 할 때 V_p의 텐서곱들을 p를 변화시키면서 함수로 보는 것,

(2) 이 것들이 p에 대하여 연속함수, 미분가능한 함수라는 개념들을 정의하고,

(3) 이 개념들이 서로 smooth한 관계인 두 좌표(예를 들면, 원점 밖에서 직교좌표와 극좌표)에서 볼 때 마찬가지 개념이라는 것: 직교좌표로 써서 미분가능한 텐서는 극좌표로 써도 미분가능하고, vice versa.

(4) 이러한 두 좌표계 사이에서 같은 텐서를 표현하는 방법은 항상 두 좌표계를 변환하는 변환식의 Jacobian matrix로 변환된다는 것.

등을 확인하고 스스로 항상 계산해낼 수 있게 되면 1차적으로 텐서 개념에대한 대부분의 이해가 되었다고 할 수 있죠.

이 것을 써서 리만기하학을 하게 되면, 기하학에서 어떤 텐서가 중요한 것인가 하는 문제의 답을 구하고, 이들 사이에 어떤 관계가 있으며 - 어떤 것을 미분하여 어떤 것을 얻고, 어떤 것을 적분하여 어떤 것을 얻는가, 어떤 놈을 어떤 놈과 내적하면 어떤 놈이 얻어지는가 등등... 소위 텐서들의 공식 - 이 각 텐서들의 기하학적 의미는 무엇인가 하는 문제에 답을 찾는 것이 리만기하학을 공부하는 목표라고 할 수 있습니다. 기하학에서는 대부분의 중요한 텐서적 개념을 곡률이라고 부르려는 경향이 있습니다.(물리학도 마찬가지인데, 텐서 가운데 질량, 스트레스 텐서, 운동량, 등등 모든 개념이 있습니다) 그 과정에서 Gauss-Bonnet의 정리와 같은 위상수학에 걸친 이야기를 할 수도 있지요. (즉 오일러지표라고 하는 숫자는 어떠한 텐서의 적분으로 나타낼 수 있다는 등등...)

지금 드린 이야기는 단지 뜬구름 잡는 이야기일 뿐이지만 이를 가이드 삼아서 초보 텐서론부터 차근차근 공부하시면 쉽게 이해할 수 있을 것입니다.(믿거나 말거나?) 하지만 혼자서 끙끙대기보다는 잘하는 분들께 물어보기 바랍니다. 누구나 열심히 가르쳐 주겠지만, 그리고 모든 설명이 다 정말 도움이 되지만, 진짜 잘하는 분들의 설명이 필수적입니다.

책을 한 두개 소개하면,

M. Spivak의 Calculus on Manifolds : 이 책을 통해서 텐서를 이해하면 쉬울 것입니다. 하지만 문제를 거의 다 풀어봐야만 합니다.

Sokolnikoff(스펠링?) 의 Tensor Analysis(제목도 가물가물) : 혹시 위의 현대적 표기법이 마음에 안든다면 이러한 고전적 표기법과 물리학적 이야기도 괜찮을 겁니다. 위의 책보다 훨 길어요. 고전적 물리학 책(20세기 초반의 어려운 물리학책들: 예를 들어 Eddington의 Relativity Theory(?) 같은 책) 모두 다 텐서를 열심히 설명하고 있어요.

김강태의 미분기하학 : 기하학란과 책 소개란에 소개했지만, 미분기하학(리만기하학)의 입문서로 아주 좋은 책입니다. 단지 이 책만 읽고 리만기하학 다 안다고 하면 (라마뉴잔 같이 쬐끔만 보고도 모든 것을 다 꿰뚫을 사람이 없지는 않겠지만) 아마 안되겠지요. (저자가 그러면 안된다고 했으므로)

P. Petersen, Riemannian Geometry : 최근에 나온 기하학 책인데 쉽게 어려운 이야기 까지 잘 설명한 또하나의 책입니다. 방대한 이야기를 다 한 책. 분량은 400쪽 남짓.

CARTAN 덛붙임