

알고리즘 중간고사, Oct. 31, 2012

Open book, 70분

서로 다른 숫자들이 주어진다

1. (15점) Quicksort에서 그냥 partition( ) 대신 linear-time selection 알고리즘을 사용하여 median을 구한 다음, 이것을 pivot으로 삼아 partition을 하는 버전으로 바꾸었다. 이 quicksort 알고리즘의 worst-case running time을  $O()$  notation으로 밝히라.

2. (25점) Recurrence가 다음과 같이 주어질 때 Asymptotic Complexity를 구하라. Master Thm을 쓸 수 없는 경우에는 upper bound만 구하되 최대한 tight하게 구해야 한다.

1.1 (7점)  $T(n) = 4T(n/5) + b$   $b$ : a constant

1.2 (8점)  $T(n) = 4T(n/5 + 9) + n$

- 1.3 (10점) 아래 알고리즘 test(n)의 수행 시간의 upper bound를 asymptotic notation으로 나타내어라.  $n$ 은 양의 정수다. 문제를 풀면서 절대  $\frac{n}{10} + 5$ 와  $\frac{9n}{10} + 7$ 을  $\frac{n}{10}$ 으로

근사 취급해서는 안된다.

```
int test(n)
{
    if (n ≤ 100) then return n ;
    else return (test( $\frac{n}{10} + 5$ ) + test( $\frac{9n}{10} + 7$ )) ;
}
```

3. (15점) Red-black tree에서 leaf node에 새 key를 삽입하고 red를 칠하니 property 3이 깨졌다. 이를 수선하는 과정에서 최악의 경우에는 root까지 영향을 미칠 수도 있다. Root까지 영향을 미치는 상황을 설명해 보아라. 삽입이 일어난 노드를  $p$ 라 할 때 적어도  $p^6$ 까지는 어떤 일이 일어나는지 보여야 한다. 여기서  $p^6$ 는  $p$ 에서 root로 가는 path 상에서 다섯 번째 만나는 ancestor. 즉,  $p$ 의 고고조할아버지.

4. (15점) Height가  $k$ 인 full binary tree에 자연수의 집합  $\{1, 2, 3, \dots, 2^k - 1\}$ 을 key 값으로 넣어 heap을 만들려고 한다. (편의상 singleton tree의 height가 1이라 하자.) 위 집합의 모든 원소를 한번씩 사용해서 만들 수 있는 서로 다른 heap의 총 수를  $T(k)$ 라고 할 때,  $T(k)$ 의 recurrence(점화식)를 표현해 보아라.

5. (15점)  $n$ 명의 고객에게 택배를 전하는 문제를 생각하자. 각 고객은 서로 다른 위치에 거주하고 있고, 모든 고객에게 택배를 전하려면  $n$ 개의 거주지를 한 번씩은 방문해야 한다. 예를 들어, 1번 고객의 거주지에서 출발해서 3명의 고객에게 택배를 전하러 한다고 하자. 이때 가능한 방법은  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ 과  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$ 가 있다. 가능하면 적은 거리를 이동하는 것이 문제의 목표이다. 거주지 사이의 직선거리가  $n \times n$  행렬  $D$ 로 주어져있다. 행렬  $D$ 의 원소  $d_{i,j}$

는 거주지  $i$ 와 거주지  $j$ 의 직선거리를 나타낸다. 이 행렬을 이용해서 거주지 1에서 시작해서 모든 거주지를 방문하는 가장 짧은 경로의 길이를 dynamic programming으로 찾는 방법을 제시하시오. 거주지 간의 이동은 직선거리로만 이동하며 한 거주지를 두 번 방문하면 안된다.

- (12점) 먼저 optimal substructure를 찾으라. 단순하지는 않은 문제이므로 시간이 비효율적이라도 방법을 찾기만 하면 상당한 부분 점수가 있음. 작은 문제들의 해를 저장하는 테이블의 크기와 수행시간이  $n$ 에 지수함수적이어도 됨.
- (3점) 이를 구현하면 수행시간이 어떻게 되겠는가?  $O()$  notation으로 밝히라. 알고리즘을 작성할 필요는 없고 시간이 어떻게 들건지만 설명하면 된다.

- (15점) Decision tree 모형에 의하면 비교에 기반한 sorting은 최악의 경우 수행시간이  $\Omega(n \log n)$ 이라는 것을 배웠다. 수업 시간에 mergesort나 quicksort 등을 decision tree model로 어떻게 생각할 수 있는지에 대해 이야기하다가 그냥 받아들이는 것으로 하고 넘어갔다. 이제 mergesort가 수행되는 과정을 decision tree로 설명해보고 mergesort의 수행시간이 최악의 경우  $\Theta(n \log n)$ 이 된다는 것을 decision tree에 근거해서 설명해 보아라. (Tree 전체를 그릴 필요는 없고, 중간에 한 단계를 귀납적으로 설명해도 된다.) 설명의 편의상 모든 원소는 다르다고 가정해도 좋다. 여러분의 착상을 보고자 하는 것이니 하는 데까지 생각해볼 것. (이 문제는 질문 불허. 애매한 점이 있으면 여러분이 가정하고 답할 것.)

