알고리즘 기말고사

12/7/2004, Open book, 75분

1. (15점) 저장할 2^d-1 개의 원소들의 정해진 상태에서 이들로부터 만들어질 수 있는 complete binary search tree는 총 몇 개나 존재할 수 있는가? 당신의 답에 대한 근거도 간단히 언급하라.

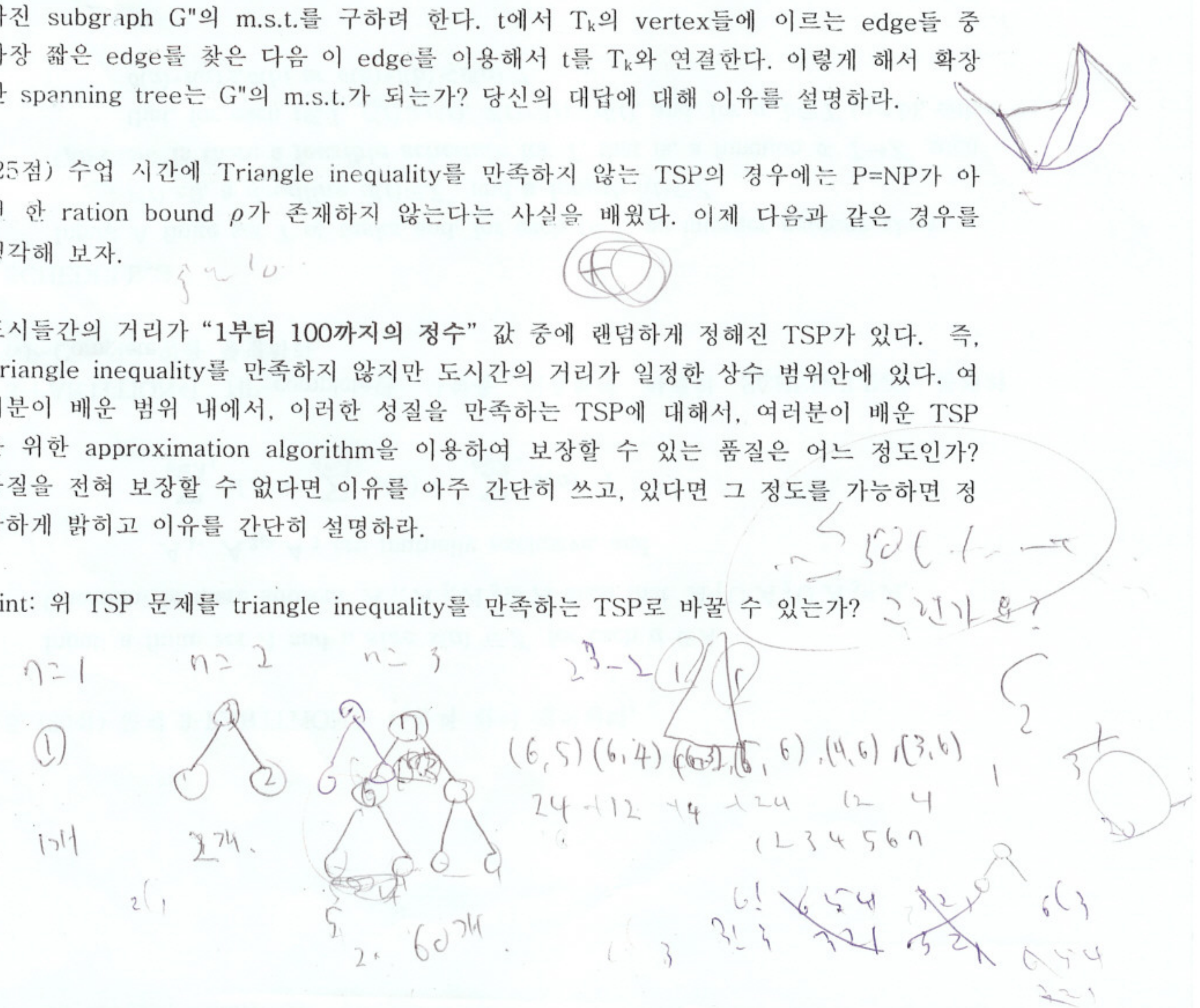
2. (20점) 2^n-1 개의 element로 maxheap을 만들려고 한다. Heap을 array에 저장하는 방법을 택한다. Maxheap을 만족하면서 2^n-1 개의 element를 array $A[1...2^n-1]$에 저장하는 방법은 총 몇 가지인가를 세려고 한다. 2^n-1 개의 element로 만들 수 있는 maxheap의 총 개수를 T_n이라고 할 때, T_n을 recurrence relation 식으로 나타내어 보아라. 단, 모든 element는 다르다고 가정한다.

3. (20점) Graph G = (V, E)의 minimum spanning tree에 대해 생각해본다. Graph G에서 임의로 k 개의 vertex를 뽑아 이 vertex들끼리 연결되는 모든 edge를 포함시킨 graph를 G' = (V', E')이라 하자. 이제 G'에 대응되는 minimum spanning tree T_k를 Prim's algorithm을 사용해서 구한다. 이 상태에서 임의의 vertex t를 하나 더하여 t로부터 G'에 연결되는 모든 edge들을 E'에 더한 graph G" = (V", E"), 즉, k+1 개의 vertex를 가진 subgraph G"의 m.s.t.를 구하려 한다. t에서 T_k의 vertex들에 이르는 edge들 중 가장 짧은 edge를 찾은 다음 이 edge를 이용해서 t를 T_k와 연결한다. 이렇게 해서 확장한 spanning tree는 G"의 m.s.t.가 되는가? 당신의 대답에 대해 이유를 설명하라.

4. (25점) 수업 시간에 Triangle inequality를 만족하지 않는 TSP의 경우에는 P=NP가 아닌 한 ration bound ρ가 존재하지 않는다는 사실을 배웠다. 이제 다음과 같은 경우를 생각해 보자.

도시들간의 거리가 **"1부터 100까지의 정수"** 값 중에 랜덤하게 정해진 TSP가 있다. 즉, Triangle inequality를 만족하지 않지만 도시간의 거리가 일정한 상수 범위안에 있다. 여러분이 배운 범위 내에서, 이러한 성질을 만족하는 TSP에 대해서, 여러분이 배운 TSP를 위한 approximation algorithm을 이용하여 보장할 수 있는 품질은 어느 정도인가? 품질을 전혀 보장할 수 없다면 이유를 아주 간단히 쓰고, 있다면 그 정도를 가능하면 정확하게 밝히고 이유를 간단히 설명하라.

Hint: 위 TSP 문제를 triangle inequality를 만족하는 TSP로 바꿀 수 있는가? 그런가요?



5. (20점) 문제 3-PARTITION은 다음과 같이 정의된다.

Input: a finite set A and a ***size*** $s(a) \in Z^+$ for each $a \in A$.

Question: Is there subsets $A_1, A_2, A_3 \subseteq A$ such that $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A$,

A_1, A_2, A_3 are mutually exclusive, and

$$\sum_{a \in A_1} s(a) = \sum_{a \in A_2} s(a) = \sum_{a \in A_3} s(a) \ ?$$

3-PARTITION이 NP-complete란 사실을 이용하여 아래의 SCHEDULING 문제가 NP-Complete임을 증명하라.

SCHEDULING

Input: A finite set T of ***tasks*** and, for each $t \in T$, an interger ***release time*** $r(t) \geq 0$, a ***deadline*** $d(t) \in Z^+$, and a ***length*** $l(t) \in Z^+$.

Question: Is there a ***feasible schedule*** for T, that is, a function σ: $T \rightarrow Z^+$ such that, for each $t \in T$, $\sigma(t) \geq r(t)$, $\sigma(t)+l(t) \leq d(t)$, and, for a, $b \in T$ $(a \neq b)$, either $\sigma(a)+l(a) \leq \sigma(b)$ or $\sigma(b)+l(b) \leq \sigma(a)$?