HW #2 (CSE 4190.313)

Tuesday, April 21, 2020

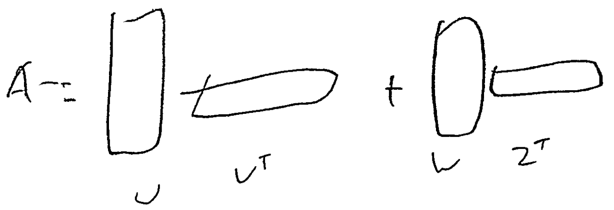
Name: 정현진 ID No: 2013 - 11431

1. Suppose A is the sum of two matrices of rank one: $A = \mathbf{u}\mathbf{v}^T + \mathbf{w}\mathbf{z}^T$.

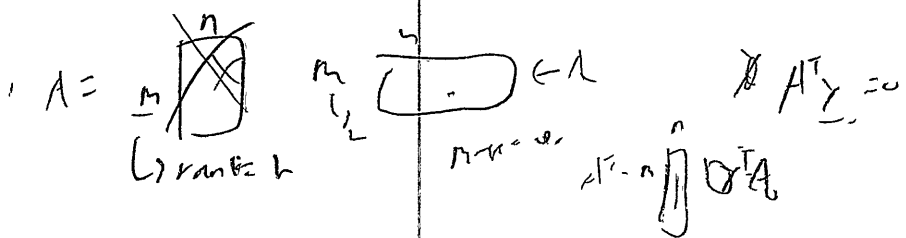
   (a) Which vectors u, w span the column space of A?

   Which vectors v, z span the row space of A?

   (b) The rank is less than 2 if u와 w가 서로 linearly dependent. or if v와 z가 서로 linearly dependent.



2. If the rows of an $m \times n$ matrix A are linearly independent, then the rank is m, the column space is R^m, and the left nullspace is $\{0\}$.



3. A is an $m \times n$ matrix of rank r. Suppose there are right-hand sides $\mathbf{b}$ for which $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ has no solution.

   (a) What inequalityes ($<$ or $\leq$) must be true between m, n, r? Explain why.

   (b) How do you know that $A^T\mathbf{y} = 0$ has a nonzero solution?

(a) 1. m개의 식과 n개의 미지수에서, $m \geq n$ 이어야 해답이 없고,

2. 해답이 없으므로 elimination 도중 좌변은 0으로 이루어진 row가 존재하고 우변은 0이 아닌 경우가 존재한다. 이 경우는 $r < m$ 이어야 발생한다.

$\therefore$ $r < m$, $m \geq n$

(b) $A^T y = 0$ 은 A의 left nullspace를 뜻하며, $N(A^T)$은 $m-r$ 차원을 형성하는데,

(a)에서 $m > r$ 이었으므로 $m-r > 0$ 이다.

따라서 nonzero solution이 존재한다.

4. Reduce the following matrix A to a reduced echelon form R:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Find a special solution for each free variable and describe every soluition to $A\mathbf{x} = 0$.

1. $A \to U$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = U$$

2. $U \to R$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = R$$

$x = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \\ z \end{bmatrix}$ 라고 하면, free variable은 v와 z이다.

v에 대한 특별해는 $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, z에 대한 특별해는 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 이다.

Ax=0의 모든 해는 nullspace 이고, v에 대한 특별해와 z에 대한 특별해의 모든 가능한 linear combination 이다.

즉, $x = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \\ z \end{bmatrix} = v \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 이다.

5. Under what condition on b_1, b_2, b_3 is the following system solvable? Find all solutions when that condition holds.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

문제 식을 $Ax=b$라 하고, 우선 reduce를 진행해보면

1. $Ax=b \Rightarrow Ux=c$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2-2b_1 \\ b_3 \end{bmatrix} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2-2b_1 \\ b_3-b_2+2b_1 \end{bmatrix}}_{C}$$

U에서, $b_3-b_2+2b_1=0$ 인 경우 위의 시스템이 solvable 하다.

2. 모든 해 $x = x_p + x_n$을 구하기 위해 우선 special solution x_n을 구하면,

free variable은 y와 t이므로

· y: $y=1, t=0$을 넣고 back-substitution을 통해 $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

· t: $y=0, t=1$, // $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. x_p를 구하기 위해, b를 보면 $0 = b_3-b_2+2b_1$ 이어야 하므로, $Ux=c$ 형태에서

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2-2b_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$ 이고, back substitution을 하면,

$$2z = b_2 - 2b_1 \Rightarrow z = \frac{-2b_1+b_2}{2}$$
$$x+z = b_1 \rightarrow x = b_1 - z = \frac{4b_1-b_2}{2}$$

2와 4에 의해, 모든 해는

$$\therefore x = x_p + x_n = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4b_1-b_2 \\ 0 \\ -2b_1+b_2 \\ 0 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6. Using the fact that the total number of 5×5 permutation matrices is 5!, answer the following yes/no questions.

   (a) Are they linearly independent? Explain why.

   (b) Do they span the space of all 5×5 matrices? Explain why.

(a) No.

5×5 행렬은 R^{25}의 차원을 가지는데, 이는 치환 행렬의 수인 120보다 작기 때문이다

(b) No, 예시를 들면, $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$ 와 같은 행렬은

치환 행렬들의 linear combination으로 나타낼 수 없다.

따라서 모든 5×5 행렬의 공간을 span 하지 않는다,

7. On the vector space $\mathbf{P}_3$ of cubic polynomials, what matrix represents $\frac{d^2}{dt^2}$? Construct the 4×4 matrix A from the standard basis $1, t, t^2, t^3$. Find its nullspace and column space. What do they mean in terms of polynomials?

1. $P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ 이라고 하면

$A\,P(t) = 2a_2 + 6a_3 t$. 가 된다.

A를 4×4 행렬로 나타내면 $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2. null space $N(A)$는 2차원 공간 P_1을 이루고

column space $C(A)$는 마찬가지로 2차원 공간 P_1을 이룬다.

3. P_1을 polynomial 형태로 보면,

$P(1) = a_0 + a_1 t$

이다.

8. Find all vectors that are perpendicular to $(1, 4, 4, 1)$ and $(2, 9, 8, 2)$.

두 vector를 각각 u, v라 하면

u^T, v^T를 row로 가지는 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 8 & 2 \end{bmatrix}$에 대해

$N(A) \perp C(A^T)$ 이므로, A의 nullspace를 구하면 된다.

1. $Ax=0$을 $Ux=0$으로 reduce 하면,

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 8 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{U}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{x} = 0$$

따라서 free variable은 x_3, x_4이고 각각의 special solution은

$x_3 \rightarrow \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_4 \rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 이 된다.

따라서 A의 nullspace는 $x = x_3 \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 즉 두 special solution의

모든 linear combination 이고, 이는 문제의 답과 같다.

9. Given an $m \times n$ matrix A with rank r, if you know a particular solution $\mathbf{x}_p$ (free variables $= 0$) and all special solutions $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_{n-r}$, for

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

$Ay = b$

(a) Find a solution $\begin{bmatrix} \mathbf{y}_p \\ \mathbf{Y}_p \end{bmatrix}$ and all special solutions $\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{Y}_1 \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{2n-r} \\ \mathbf{Y}_{2n-r} \end{bmatrix}$, for

$$\begin{bmatrix} A & 2A \\ 3A & 6A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 3\mathbf{b} \end{bmatrix}.$$

$\begin{bmatrix} A & 2A \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) Find a solution $\begin{bmatrix} \mathbf{y}_p \\ \mathcal{Y}_p \\ \mathbf{Y}_p \end{bmatrix}$ and all special solutions $\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathcal{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_1 \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{3n-r} \\ \mathcal{Y}_{3n-r} \\ \mathbf{Y}_{3n-r} \end{bmatrix}$, for

$$\begin{bmatrix} A & A & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathcal{Y} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} = \mathbf{b}.$$

$Ay + A\mathcal{Y} + AY = b$

$A(y + \mathcal{Y} + Y) = b$

(a) 해당 식을 elimination 하면 $\begin{bmatrix} A & 2A \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$ 이 되고

이는 $Ay = b$ 와 같다.

따라서 solution $\begin{bmatrix} y_p \\ Y_p \end{bmatrix} = x_p$, special solution $\begin{bmatrix} y_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} y_{2n-r} \\ Y_{2n-r} \end{bmatrix} = x_1 \cdots x_{n-r}$

이다.

(b) $\mathcal{Y} = Y = y$ 라고 가정하면,

$[A \ A \ A] \begin{bmatrix} y \\ y \\ y \end{bmatrix} = b \Rightarrow Ay + Ay + Ay = b \Rightarrow 3 \cdot Ay = b$

$\Rightarrow Ay = \frac{1}{3} \cdot b$ 가 되고,

따라서 solution은 $\frac{1}{3} \cdot x_p$, special solution은 $x_1, \cdots, x_{n-r}$ 이다.

10. (a) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ has a solution under what conditions on $\mathbf{b}$, for the following A and $\mathbf{b}$?

$$P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$Ux = c$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_3 - 2b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

(b) Find a basis for the nullspace of A?

(c) Find the general solution to $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, when a solution exists.

(d) (2 points) What is a basis for the column space of A?

(a) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 을 곱해 변환한 뒤 $Ux = c$ 꼴로 나타내면

$$Ax = b \rightarrow PAx = Pb \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_3 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_3 - 2b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

따라서 $b_2 = 0$ 일 때 해당 시스템의 해가 존재한다.

(b) $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ 에 대해 $Ux = 0$ 의 special solution들을 구하면,

x_2 와 x_3이 free variable 이고.

$x_2 \rightarrow \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 이다.

$N(A)$의 basis는 $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ 이다

(c) solution이 존재하는 조건은 b는 $b_2 = 0$ 이어야 한다. 따라서

back-substitution을 하면

$$-2x_4 = b_3 - 2b_1 \Rightarrow x_4 = \frac{2b_1 - b_3}{2}$$

$$x_1 + 4x_4 = b_1 \rightarrow x_1 = b_1 - 4x_4$$
$$= b_1 - 4 \cdot \left(\frac{2b_1 - b_3}{2}\right)$$
$$= 2b_3 - 3b_1 = \frac{-6b_1 + 4b_3}{2}$$

따라서 $x = x_p + x_n = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -6b_1 + 4b_3 \\ 0 \\ 0 \\ 2b_1 - b_3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(d) column 2는 column 1 × 2 이므로 linearly dependent.

Column 4와 column 1은 서로 linearly Independent 하다.

따라서 $C(A)$의 basis는 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$ 이다.

11. True or false: If we know $T(\mathbf{v}_i)$ for n different nonzero vectors $\mathbf{v}_i$ in $\mathbf{R}^n$, $(i = 1, \cdots, n)$, then we know $T(\mathbf{v})$ for all vectors $\mathbf{v}$ in $\mathbf{R}^n$. Explain the reason why.

Fake.

n개의 벡터 $v_1 \cdots v_n$이 서로 linearly independent 하지 않는 경우,

v_i의 시퀀스는 $\mathbb{R}^n$에 대한 basis라고 할 수 없고, 따라서 $v_1 \cdots v_n$을 span하여

$\mathbb{R}^n$의 모든 벡터 v를 형성할 수 없다.

따라서 모든 벡터 v에 대한 $T(v)$를 알 수 없다.

12. (a) What matrix M transforms $(1, 0)$ and $(0, 1)$ to (r, t) and (s, u)?

(b) What matrix M transforms (a, c) and (b, d) to $(1, 0)$ and $(0, 1)$?

(c) What conditions on a, b, c, d will make part (b) impossible? Explain why.

(a) M은 $M\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}r\\t\end{pmatrix}$, $M\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}s\\u\end{bmatrix}$.

$M = \begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$라 하면

$$\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}r & s\\t & u\end{bmatrix}$$

$I^{-1} = I$ 이므로, $\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}r & s\\t & u\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}r & s\\t & u\end{bmatrix}$

$\therefore M = \begin{bmatrix}r & s\\t & u\end{bmatrix}$

(b) (a)와 마찬가지로, $M = \begin{bmatrix}x & y\\w & z\end{bmatrix}$라 하면

$$\begin{bmatrix}x & y\\w & z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}.$$

즉 M은 $\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}^{-1}$ 이고, 이는

$\therefore M = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\-c & a\end{bmatrix}$

(c) $ad-bc = 0$ 이면 $\frac{1}{ad-bc} = \frac{1}{0}$ 이 되므로 (b)가 불가능하다.

13. Suppose A is a symmetric matrix ($A^T = A$).

(a) Why is its column space perpendicular to its nullspace?

(b) If $A\mathbf{x} = 0$ and $A\mathbf{z} = 5\mathbf{z}$, which subspaces contain these eigenvectors $\mathbf{x}$ and $\mathbf{z}$? Explain why.

(a) $C(A) \perp N(A^T)$ 인데, $A^T = A$ 이므로

$C(A) \perp N(A)$ 이다.

(b) 우선 $Ax=0$ 에 의해 $N(A)$는 x를 포함한다.

$Az = 5z$ 에서, $z^T A^T = 5z^T$ 이고, 이때 $A^T = A$ 이므로

$z^T A = 5z^T$, 이때 $Ax = 0$ 이므로,

$z^T A x = 5 z^T x \Rightarrow 5z^T x = 0 \Rightarrow z^T \cdot x = 0$.

(a)에 의해 $C(A)$는 z^T를 포함하므로, $C(A^T)$가 z를 포함한다.

$\therefore$ 즉, $x \in N(A)$, $x \in N(A^T)$, $z \in C(A)$, $z \in C(A^T)$.

14. What matrix P projects every point in $\mathbf{R}^3$ onto the line of intersection of the planes $x + y + t = 0$ and $x - t = 0$?

우선 두 평면의 교점은 구하면

$x = t \wedge y = -2t$ 을 만족해야 하므로

교점 a는 $(t, -2t, t)^T$로 나타나진다.

$t=1$을 고르면 $a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ← projection은 scale에 상관 없이 같기 때문.

a에 대해 P를 구하면, $P = \dfrac{a \cdot a^T}{a^T \cdot a} \Rightarrow$ $a^T \cdot a = (1\ -2\ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 6$,

$a \cdot a^T = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}(1\ -2\ 1) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore$ 따라서, $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$