

알고리즘 중간고사

2003. 10. 22

Open book, 70분

1. (15점) Asymptotic bound를 밝히고, 증명하라. Master Theorem을 사용할 수 있으면 사용해도 됨.(Upper bound만 구하면 됨. 단, 최대한 tight하게)

가) $T(n) = T(\frac{n}{4}) + T(\frac{2n}{3}) + \Theta(n)$

나) $T(n) = 2T(n/3) + 1$

2. (10점) Red-Black tree에서 insertion 후에 tree의 Black height가 증가하는 상황을 설명해 보아라. 예를 들어 설명해도 좋고 그냥 말로 설명해도 좋음.

3. (15점) 비현실적이지만 수업시간에 배운 worst-case linear-time selection 알고리즘을 아래와 같이 바꾸어 본다.

1. Divide the input into $10/n$ groups of 10 elements each.
2. Find the 7th smallest element of each group.
Let the 7th smallest element be $m_1, m_2, \dots, m_{10/n}$
3. Find the median M of $m_1, m_2, \dots, m_{10/n}$ by recursion.
4. Use M as the pivot element and partition the whole elements.
5. Select the proper side of the partitions and recursively perform Steps 1 ~ 5.

이 알고리즘의 asymptotic running time은 어떻게 되는가?

4. (15점) 아래는 insertion sort이다. 이를 recursive algorithm으로 바꾸어 보아라.

```
insertionSort(int a[], int n)
// a[1], ..., a[n]: input array
// n: number of elements
{
    for i = 2 to n
    {
        v = a[i]; j = i;
        while
        {
            a[j] = a[j - 1];
            j--;
        }
        a[j] = v;
    }
}
```

5. (15점) 비효율적이기는 하지만 Size가 100인 (table index는 0 ~ 99) hash table에서 아래와 같은 hash 함수를 사용한다.

$$h(x) = x \bmod 100$$

이 hash table에 input이 1, 11, 21, 31, ..., 481, 491의 순으로 들어와서 저장되었다. 이 상태에서

5.1 이 hash table에서 392가 존재하는지 확인(검색)하려고 할 때 필요한 probe 횟수는 총 몇회인가? (5점)

5.2 이 hash table에서 성공적인 검색의 probe 횟수의 기대치는 얼마인가? 모든 key가 검색 될 확률은 동일하다. (10점)

6. (15점) $A[1..n]$ 은 정수로 이루어진 array이다. List $A[i_1], A[i_2], \dots, A[i_m]$ 가 $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$ 을 만족할 때 A의 subsequence라 한다. 여기서 m 은 subsequence의 길이가 된다. $A[i_1] \leq A[i_2] \leq \dots \leq A[i_m]$ 을 만족하면 list $A[i_1], A[i_2], \dots, A[i_m]$ 는 ascending sequence라 한다. Array $A[1..n]$ 의 longest ascending subsequence를 찾는 $O(n^2)$ -time dynamic programming algorithm을 제시하라.

7. (15점) Tree 표현을 사용하고 Path Compression을 사용하는 Union-Find 구조에서 Make-set과 Union을 통해 n 개의 element가 다수 개의 집합으로 나누어져 있다고 하자. 이런 상태에서 n 번의 “find” operation을 연속으로 하는 cost는 얼마일까?(최대한 tight하게. Disjoint set의 linked-list representation의 분석시 사용했던 방법이 착상에 도움이 됨.) Cost가 그렇게 나온 데 대한 간명한 설명을 하라.