알고리즘, H/W #4 (HW#3의 마감일이 끝나기 전에 시작할 것)

2015. 11. 2

Due: 12/1 (화), 5:00pm

제출장소: 302동 313-2, 최적화/금융공학연구실

1. BoyerMooreHorspool 알고리즘으로 스트링 매칭을 하려한다. 총 10,000개의 문자로 이루어진 텍스트에서 "camouflage"라는 패턴을 검색하려 할 때 다음의 질문에 답하라. (asymptotic number가 아니고, 정확한 숫자를 요구함.)

   1.1 가장 운이 좋으면 텍스트에서 몇 개의 문자를 살펴보고 끝날 수 있는가?
   1.2 가장 운이 나쁘면 텍스트에서 몇 개의 문자를 살펴보고 끝날 수 있는가?

2. 2SAT은 다음과 같이 정의된다. 2SAT ∈ P 임을 증명하라.

   2SAT = { Φ | Φ is a satisfiable formula in CNF with at most 2 literals per clause }

   Hint: A clause $x \vee y$ can be written as $\neg x \Rightarrow y$ or as $\neg y \Rightarrow x$. Consider a graph whose vertices are variables and their complements, and where there is a directed edge from $\neg x$ to y if x and y are in the same clause.

3. HAM-PATH 문제는 아래와 같이 정의된다.

   Input: a graph $G=(V, E)$, two vertices u and v
   Question: Is there a Hamiltonian path from u and v ?

   Definition: Hamiltonian path- a simple path that visits every vertex exactly once

   HAM-CYCLE이 NP-Complete임을 이용하여 HAM-PATH 문제가 NP-Hard임을 증명하여라.

4. CLIQUE이 NP-Complete임을 이용하여 아래의 SUBGRAPH-ISOMORPHISM 문제가 NP-Complete임을 증명하라.

   SUBGRAPH-·ISOMORPHISM
   Input: Two graphs, $G=(V_1,E_1)$ and $H=(V_2, E_2)$.
   Question: Does G contain a subgraph isomorphic to H, that is, a subset $V \subseteq V_1$ and a subset $E \subseteq E_1$ s.t. $|V|=|V_2|$, $|E|=|E_2|$, and there exists a 1-to-1 function $f: V_2 \rightarrow V$ satisfying $\{u,v\} \in E_2$ iff $\{f(u),f(v)\} \in E$?

   Hint: 이것은 아주 쉬운 문제로 여러분이 NP-Complete의 증명 process를 가장 단순하게 연습할 수 있도록 하는 것이 목적임.

5. 문제 PARTITION은 다음과 같이 정의된다.

Input: a finite set A and a ***size*** $s(a) \in Z^{+}$ for each $a \in A$.
Question: Is there a subset $A' \subseteq A$ such that

$$\sum_{a \in A'} s(a) = \sum_{a \in A - A'} s(a)$$

PARTITION이 NP-complete란 사실을 이용하여 아래의 SCHEDULING 문제가 NP-Complete임을 증명하라.

SCHEDULING
Input: A finite set T of ***tasks*** and, for each $t \in T$, an interger ***release time*** $r(t) \geq 0$, a ***deadline*** $d(t) \in Z^{+}$, and a ***length*** $l(t) \in Z^{+}$.
Question: Is there a ***feasible schedule*** for T, that is, a function σ: $T \rightarrow Z^{+}$ such that, for each $t \in T$, $\sigma(t) \geq r(t)$, $\sigma(t)+l(t) \leq d(t)$, and, for a, $b \in T$ $(a \neq b)$, either $\sigma(a)+l(a) \leq \sigma(b)$ or $\sigma(b)+l(b) \leq \sigma(a)$?

Hint on transformation: PARTITION의 element 하나당 SCHEDULING의 task 하나를 대응시키되 추가로 하나의 task를 추가하여 그것이 맨 가운데 실행되도록 강요하여, partition이 제대로 안되면 스케쥴링도 제대로 안되도록 만든다.

6. Triangle inequality를 만족하지 않는 TSP의 경우에는 P=NP가 아닌 한 어떠한 상수 ρ에 대해서도 최적해의 ρ배를 넘지 않는 해를 보장할 수 있는 polynomial-time 알고리즘이 존재하지 않는다는 사실을 배웠다. 이제 다음의 경우를 생각해 보자.

도시들간의 거리가 ‘1부터 100까지의 정수’ 값 중에 임의로 정해진 TSP가 있다. 즉, 삼각부등식을 만족하지 않는다. 삼각부등식을 만족하지 않지만 도시간의 거리가 일정한 상수 범위 안에 있다. 이러한 성질을 만족하는 TSP에 대해서, 여러분이 배운 TSP를 위한 근사 알고리즘을 이용하여 어느 정도까지 품질을 보장할 수 있는 방법이 있다. 이 방법을 밝히고 보장할 수 있는 품질은 어느 정도인지 이야기하라.