

마르코프 체인

정의 마르코프 체인

확률과정이란 어떤 사건이 발생할 확률값이 시간에 따라 변화하는 과정이다.

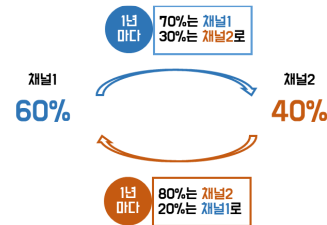
다음 두 가지 조건을 만족하는 확률과정을 **마르코프 체인**이라고 한다.

- (1) 시간은 이산적으로 변한다.
- (2) 시간 $(t+1)$ 에 사건이 발생할 확률이 시간 t 에 발생한 사건에만 영향을 받는다.

예제를 통해 마르코프 체인이 무엇인지, 마르코프 체인을 행렬로 어떻게 분석할 수 있는지 알아보겠다.

예)

TV에 채널이 두 개 채널1과 채널2만 있을 때,
현재 시청자의 비율은 각각 60%, 40%라고 가정하자.
1년마다 채널1의 시청자 중 30%는 채널2로 이동하고,
채널2의 시청자 중 20%는 채널1로 이동한다.



$X(t) = \left(\begin{matrix} t\text{년 후의 시점에서 채널1을 보는 시청자의 비율} \\ t\text{년 후의 시점에서 채널2를 보는 시청자의 비율} \end{matrix} \right)$ 이라 하자.

$$X(0) = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix} \text{이다.}$$

1년 후의 시점에서 채널1을 보는 시청자의 비율은 현재 채널1의 시청자의 70%와 채널2의 시청자의 20%가 더해져서 계산되고,

1년 후의 시점에서 채널2를 보는 시청자의 비율은 현재 채널1의 시청자의 30%와 채널2의 시청자의 80%가 더해져서 계산되므로

$$X(1) = \begin{pmatrix} (0.7)(0.6) + (0.2)(0.4) \\ (0.3)(0.6) + (0.8)(0.4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \text{이다.}$$

마찬가지로

$$X(1) = \begin{pmatrix} (0.7)(0.5) + (0.2)(0.5) \\ (0.3)(0.5) + (0.8)(0.5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.45 \\ 0.55 \end{pmatrix} \text{이다.}$$

따라서

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix} \text{이라 두면,}$$

$X(1) = P \cdot X(0)$, $X(2) = P \cdot X(1)$ 이 성립한다. 또한 $X(2) = P \cdot X(1) = P \cdot P \cdot X(0) = P^2 \cdot X(0)$ 이므로 일반적으로 마르코프 체인 상황에서 시간 t 에 대한 행렬을 다음과 같이 구할 수 있다.

홍쌤의
설리는 수학

정리 마르코프 체인에서 행렬로 확률 계산하기

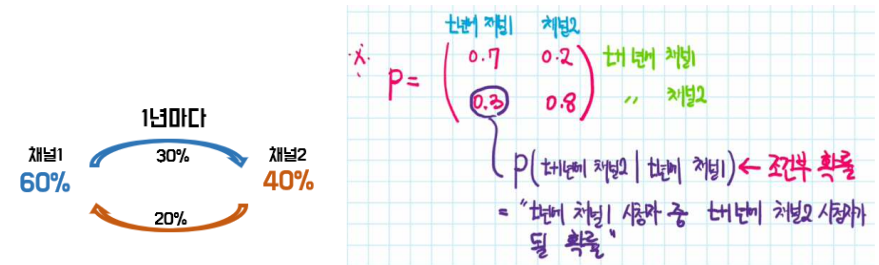
$$(1) X(t+1) = P \cdot X(t)$$

$$(2) X(t) = P^t \cdot X(0)$$

이 때, $X(t)$ 를 **상태행렬**, P 를 **전이행렬(추이행렬)**이라고 한다.

※ 전이행렬 구하는 방법

전이행렬의 각 성분은 다음과 같이 조건부확률로 구할 수 있다.



마르코프 체인의 매우 중요한 성질은 1개 커짐에 따라 확률이 일정한 값으로 수렴한다는 것이다.

즉, 상태행렬 $X(t)$ 는 어떤 행렬 X 로 수렴한다.

이 X 를 **안정상태의 확률행렬**이라고 한다.

정리 안정상태의 확률행렬

상태행렬 $X(t)$ 는 안정상태의 확률행렬 X 로 수렴한다.

안정상태의 확률행렬은 시간이 지나도 변하지 않는다. 따라서 전이행렬 P 에 대하여 $PX = X$ 이다.

안정상태의 확률행렬 구하는 네 가지 방법을 정리하면 다음과 같다.

방법1. $X(0)$, $X(1)$, $X(2)$, 를 계속 구해본다. 즉, 전이행렬 P 를 계속 곱해보면 X 를 추론해낼 수 있다.

방법2. 대각화를 이용하여 P^t 을 구한다. $X(t) = P^t \cdot X(0)$ 로 행렬을 구하여 X 를 구할 수 있다.

방법3. $PX = X$ 이므로 $(P - I)X = 0$ 이다. 따라서 X 는 연립일차방정식 $(P - I)X = 0$ 의 해이다.

방법4. $PX = 1 \cdot X$ 이므로 X 는 P 의 고유값 1에 대한 고유벡터이다. 고유벡터를 계산하면 X 를 구할 수 있다.

※ X 가 확률행렬이라는 점만 잘 고려하자. 즉, **성분들의 합이 1이어야 한다**는 점을 생각하자.

※ 자세한 내용은 **영상 참고!**