AGC MATEMATİK CEVAPLAR

Detaylı Bilgi için

onurtr@yildizskylab.com

Soru 1

$$A = \begin{matrix} 4 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 7 \end{matrix}$$

matrisinin özdeğerlerini bulunuz ve bulunan özdeğerlerin en küçüğüne karşı gelen özvektörleri bulunuz.

Çözüm:

küçüğüne karşı gelen özvektörü bulunuz.

$$|A-\lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & -1 \\ 5 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & -3 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\overset{S_{13}(1)}{\underset{S_{12}(1)}{\Rightarrow}} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & -1 \\ 4-\lambda & 2-\lambda & -3 \\ 4-\lambda & -3 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (4-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -3 \\ 1 & -3 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\overset{S_{21}(-1)}{\underset{S_{31}(-1)}{\Rightarrow}} (4-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -4 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (4-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -4 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (4-\lambda)\left[(1-\lambda)(8-\lambda) - 8\right] = 0 \Rightarrow (4-\lambda)\lambda(\lambda-9) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 4, \quad \lambda_3 = 9$$

$$\lambda_1 = 0 \Rightarrow$$

$$(A-\lambda I)X = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 7 \end{bmatrix} \overset{H_1(-1)}{\sim} \begin{bmatrix} -4 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 7 \end{bmatrix} \overset{H_{12}(1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\overset{(-5)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & -3 & 7 \end{bmatrix} \overset{H_{32}(-1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{H_2(-1/3)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -7/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{(-1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & -7/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

rang $= 2$

$n = 3$

$3-2=1$ keyfi değişkene bağlı sonsuz çözüm.

$$\left.\begin{matrix} x_1 = \dfrac{-x_3}{3} \\ x_2 = \dfrac{7x_3}{3} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_3 = 3 \\ x_1 = -1 \\ x_2 = 7 \end{matrix}\right\} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

bulunur.

Soru 2

Ortalama değer teoremini kullanarak aşağıdaki eşitsizliğin sağlandığını gösteriniz.

$$\frac{1}{4} < 2 - \sqrt{3} < \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Çözüm:

$f(x)=\sqrt{x}$, aralık: $[3,4]$ olsun.

i) $f(x)$ fonksiyonu $[3,4]$ aralığında sürekli,

ii) $f(x)$ fonksiyonu $(3,4)$ aralığında ise türevlenebilirdir. Çünkü bu aralıkta $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ tanımlıdır.

O halde, $f(x)$ fonksiyonuna $[3,4]$ aralığında ODT uygulanabilir:

$f'(c)=\frac{f(4)-f(3)}{4-3}$ olacak şekilde en az bir $c\in(3,4)$ vardır. Buradan,

$\frac{1}{2\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{4-3}=2-\sqrt{3}$ elde edilir. Bu sonuç kullanılarak,

$$c\in(3,4)\Rightarrow 3<c<4$$

$$\sqrt{3}<\sqrt{c}<\sqrt{4}$$

$$\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{c}}<\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{\frac{1}{4}<\frac{1}{2\sqrt{c}}=2-\sqrt{3}<\frac{1}{2\sqrt{3}}}$$

elde edilir.

Soru 3

Cemal Amca salonda elindeki zarı teker teker atarak zarın 6 gelme olasılığını hesaplamaya çalışmaktadır. Gün boyu zar atan Cemal Amca, zar atmayı bırakır ve dinlenmeye başlar. Cemal Amcanın bir süre sonra kapısı çalar ve gelen Ali Amcadır. Ali Amca, Cemal Amcanın yaptığı olasılık hesabına merak salar ve zarı eline alıp 6 kez atar. Ali Amcanın attığı 6 zardan 5'i şeş (6) gelir. Cemal Amca, bunun üstüne Ali Amcaya şöyle der: "Ohooo, şeşlerin ortalamasını yüzde 18.2'den yüzde 21.0'e çıkardın."
Cemal Amcanın söylediklerine göre; Cemal Amcanın Ali Amcadan önce kaç zar attığını ve bu zarların kaçının şeş (6) olduğunu bulunuz.

<u>Soruyla ile ilgili Not #1:</u> Cemal Amca, yüzde hesabı yaparken işi kolaylaştırmak için hatasız **yuvarlama** işlem(leri) yapmıştır.
<u>Soruyla ile ilgili Not #2:</u> Sorunun 2 adet doğru cevabı vardır. Bu 2 cevaptan en az birisine ulaşıldığı takdirde sorudan tam puan alınır.

Çözüm:

Cemal Amca'nın dediklerini matematikçeye çevirelim. Cemal Amca'nın dediğine göre, ben zar atmadan önce şeşlerin yüzdesi 18,2'ymiş. Demek ki Gene Cemal Amca'nın dediğine göre, ben zar attıktan sonra şeşlerin yüzdesi 21,0'a yükselmiş. Altı zar attığımdan ve bunların beşi şeş geldiğinden, Cemal Amca'nın verdiği bu bilgiden,

(1) ve (2) eşitliklerini biliyoruz ve x ve y'yi bulmaya çalışıyoruz.

(1) Denkleminden $y = 0,182\ x$

(2)'de y yerine 0,182* koyarsak, elde ettiğimiz yeni denklemde y kalmaz ve basit bir hesapla x ,i buluruz: x = 133,5714286...

Demek ki Cemal Amca'nın bize verdiği sayılar aşağı yukarı sayılar. Cemal Amca'nın bize verdiği bilgi aslında şöyle:
ve

$$0{,}1815 \leq \frac{y}{x} \leq 0{,}1825 \qquad (3)$$

Bu eşitsizliklerden x ve y'yi bulmalıyız.

$$0{,}2095 \leq \frac{y+5}{x+6} \leq 0{,}2195 \qquad (4)$$

Hesaplara başlayalım. (3) eşitsizliğindeki sayıların terslerini alırsak,

$$\frac{1}{0{,}1825} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{1}{0{,}1815}$$

buluruz. Bundan da,

$$\frac{y}{0{,}1825} \leq x \leq \frac{y}{0{,}1815}$$

yani ,

$$\frac{y}{0{,}1825} \leq x \qquad (4.1)$$

ve

yani ,

$$\frac{y}{0{,}1825} \leq x \qquad (4.1)$$

ve

$$x \leq \frac{y}{0{,}1815} \qquad (4.2)$$

eşitsizlikleri çıkar.

Öte yandan (4)'teki paydaları temizleyip gereken basit aritmetiği yapacak olursak

$$0{,}2095x - 3{,}743 \leq y \leq 0{,}2105x - 3{,}737$$

eşitsizliklerini buluruz. Soldaki x yerine (4.1)'i, sağdaki x yerine (4.2)'yi koyalım:

$$\frac{0{,}2095}{0{,}1825}y - 3{,}743 \leq y \leq \frac{0{,}2195}{0{,}1815}y - 3{,}737 \qquad (5)$$

eşitsizliklerini, yani

$$\frac{0{,}2095}{0{,}1825}y - 3{,}743 \leq y \text{ ve } y \leq \frac{0{,}2195}{0{,}1815}y - 3{,}737$$

eşitsizliklerini elde ederiz. Bunlar da sırasıyla

$$23{,}38 \leq y \text{ ve } y \leq 25{,}30$$

eşitsizliklerini verir. Demek ki, y, 23,38'le 25,30 arasında bir tamsayı. Dolayısıyla y ya 24'tür ya 25.

Önce y'nin 24 olduğunu varsayalım. Eğer (5)'te $y = 24$ alırsak,

$$131{,}5 \leq x \leq 132{,}23$$

buluruz, ki x bir tamsayı olduğundan, x'in 132 olduğu anlaşılır. Demek ki $y = 24$ olduğunda $x = 132$ olmalı.

Şimdi de y'nin 25 olduğunu varsayalım. Eğer (5)'te $y = 25$ alırsak,

$$136{,}98 \leq x \leq 137{,}74$$

buluruz. Ama x bir tamsayı, dolayısıyla $x = 137$ olmalı.

Bulduğumuz sonuçların verilerle ne derece uyuştuğuna bakalım:

x	y	y/x	$(y + 5)/(x + 6)$
132	24	0,1818181...	0,210144927...
137	25	0,1824817...	0,209790209...

Bu sayıları en yakın bindeliğe yuvarlayacak olursak, 0,182 ve 0,210 buluruz ki, bu sayılar da Cemal Amca'nın bize verdiği sayılardı.

Soru 4

Çözüm:

$$\begin{bmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{bmatrix}$$

Determinantını, determinant özelliklerini kullanarak çarpanlara ayırınız. (sârrus yöntemi kullanılmayacak)

5

$$\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a^2+b^2 & 0 & -b-a^2b-b^3 \\ 0 & 1+a^2+b^2 & a^3+a+ab^2 \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a^2+b^2 & 0 & -b(1+a^2+b^2) \\ 0 & 1+a^2+b^2 & a(a^2+1+b^2) \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$$

5

$$(1+a^2+b^2)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} = (1+a^2+b^2)^2 \begin{vmatrix} 1 & a & -b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & -2a & 1-a^2+b^2 \end{vmatrix} \quad (1+a^2+b^2)^2 \begin{vmatrix} 1 & a \\ -2a & 1-a^2+b^2 \end{vmatrix}$$

$$(1+a^2+b^2)^2 \left[\underbrace{1-a^2+b^2}_{1+a^2+b^2}+2a^2\right] = (1+a^2+b^2)^3$$

Soru 5

- “n” herhangi bir pozitif tam sayı olsun.
- “ $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ ” kesirli sayısını ele alalım.

Herhangi bir n tam sayısı için bu kesirli sayının sadeleşmeyeceğini, yani asal sayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

Altıncı Soru. *n herhangi bir tamsayı olsun.*

$$(21n + 4)/(14n + 3)$$

kesirli sayısını ele alalım. n ne olursa olsun, bu kesirli sayının bu gösteriminin sadeleşmeyeceğini kanıtlayın[3].

Altıncı Sorunun Kanıtı: Aslında, $21n + 4$ ve $14n + 3$ sayılarının en büyük ortak böleninin 1 olduğunu, yani bu iki sayının birbirine asal olduğunu kanıtlamamız isteniyor. Kanıtlayalım...

p, bu iki sayıyı bölen bir doğal sayı olsun. p'nin 1'e eşit olduğunu kanıtlamalıyız.

$21n + 4$ sayısı p'ye bölünüyor. Demek ki, bir a tamsayısı için,

$$21n + 4 = ap$$

eşitliği geçerlidir. $14n + 3$ sayısı da p'ye bölünüyor. Demek ki, bir b tamsayısı için,

$$14n + 3 = bp$$

eşitliği geçerlidir. Bu denklemleri altalta yazalım:

$$21n + 4 = ap$$
$$14n + 3 = bp.$$

Şimdi birinci denklemi 2'yle, ikinci denklemi 3'le çarpalım:

$$42n + 8 = 2ap$$
$$42n + 9 = 3bp$$

denklemlerini elde ederiz. Birinci denklemi ikinciden çıkarırsak,

$$1 = 3bp - 2ap$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemin sağındaki sayı $(3b - 2a)p$'ye eşit ve dolayısıyla p'ye bölünür. Demek ki denklemin solundaki sayı da p'ye bölünmeli. Yani 1, p'ye bölünmeli... Yani $p = 1$ olmalı!

Dilediğimizi kanıtladık.

Soru 6

$$\left.\frac{d_y}{d_x}\right|_{x=0} \qquad y = \frac{\sqrt{x^2+1} \times e^{\cos x} \times (\cos x)^e}{(1 + x \sin x)^2 \times 2^{3^x}}$$

Çözüm yolu ile birlikte sonucunu bulunuz.

Çözüm:

X=0

$$\ln y = \ln \frac{\sqrt{x^2+1} . e^{\cos x} . \cos^e x}{(1+x\sin x)^2 . 2^{3^x}} \qquad \boxed{y(0) = \frac{e}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \cos x + e \ln(\cos x) - 2\ln(1+x\sin x) - 3^x \ln$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2} . \frac{2x}{x^2+1} - \sin x + e . \frac{(-\sin x)}{\cos x} - 2 . \frac{(\sin x + x\cos x)}{1 + x \sin x} - 3^x . \ln 3 .$$

$$y'(0) = y(0)\left[\frac{1}{2} . 0 - 0 + e . 0 - \frac{2 . 0}{1+0} - 1 . \ln 3 . \ln 2\right]$$

$$= \frac{1 . e . 1}{2} . (-\ln 3 . \ln 2)$$

$$= -\frac{e . \ln 3 . \ln 2}{2}$$

Soru 7

Ayşe, Bülent, Cevdet ve Derya aralarında satranç turnuvası yaparlar. Turnuva bittikten sonra:

- Ayşe, "Cevdet kazandı, Bülent ikinci geldi," der;
- Bülent, "Cevdet ikinci, Derya üçüncü geldi," der;
- Cevdet, "Derya sonuncuydu, Ayşe İkinciydi," der.

Her üç kişinin öne sürdüğü iki önermeden yalnızca biri doğrudur. Örneğin; Ayşe'nin öne sürdüğü "Cevdet kazandı" ve "Bülent ikinci geldi" önermelerinden yalnızca biri doğrudur, ikisi birden doğru olamaz. Dolayısıyla Ayşe'nin yanıtından, ya Cevdet'in birinci olduğunu ya da Bülent'in ikinci geldiğini biliyoruz. Ayrıca, ya Cevdet'in birinci gelmediğini ya da Bülent'in ikinci olmadığını biliyoruz.

Turnuva sonucunda eşitlik olmadığına göre, turnuvanın sıralaması nasıldır? Cevabı bulup cevabı nasıl bulduğunuzu gösteriniz.

Çözüm:

Ayşe : Cevdet kazandı, Bülent ikinci
Bülent : Cevdet ikinci, Derya üçüncü
Cevdet : Derya sonuncu, Ayşe ikinci

Bülent'in "Cevdet ikinci" iddiası doğru olsaydı Cevdet 2. olduğu için Ayşe'nin "Bülent ikinci" iddiası yanlış ve "Cevdet birinci" iddiası doğru olurdu. Bu durumda Cevdet ikinci olduğu için Cevdet birinci olur. Yani Bülent'in "Cevdet ikinci" iddiası yanlıştır. Bu nedenle "Derya üçüncü" iddiası doğrudur.

Derya 3. olduğuna göre Cevdet'in "Derya sonuncu" iddiası yanlıştır ve "Ayşe ikinci" iddiası doğrudur.

Ayşe ikinci olduğuna göre Ayşe'nin "Bülent ikinci" iddiası yanlıştır ve "Cevdet kazandı" iddiası doğrudur.

Cevdet 1., Ayşe 2., Derya 3. olduğuna göre Bülent sonuncu olmuştur.

Soru 8

Altı çocuktan ikisi bir bahçeden elma aşırmıştır. Aşıran çocukların hangi ikisi olduğunu belirlemek için çocuklar sorguya çekilirler. Çocuklar sorguda aşağıdaki cümleleri kurarlar:

- Hamdi çocuk, “Can ve Göksün çaldı,” der.
- Jale çocuk, “Dilek ve Tamer çaldı,” der.
- Dilek çocuk, “Tamer ve Can çaldı,” der.
- Göksün çocuk, “Hamdi ve Can çaldı,” der.
- Can çocuk, “Dilek ve Jale çaldı,” der.
- Tamer çocuk bulunamamıştır, yoksa bir köşede elmaları mı yiyordur? :)

Sorgulanan **beş** çocuktan **dördü** elma aşıran çocuklardan **birinin** adını **doğru** vermiş, öbürünün adını **yanlış** vermiştir. Beşinci çocuk her iki adı da yanlış vermiştir.

Elma aşıran iki çocuğu bulun ve nasıl bulduğunuzu gösteriniz.

Not : Burada sorguya çekilen beş çocuğun sırası önemli değildir.

Çözüm:

önermeler

a: Can suçlu
b: Göksun suçlu
c: Dilek suçlu
d: Tamer suçlu
e: Hamdi Suçlu
f: Jale Suçlu

bir kişinin 2 yalan söylemesi için $(x \vee y)' \equiv 1$ olması gerekir.

bir kişinin 2 doğru söylemesi için $x \wedge y \equiv 1$ olması gerekir.

Örneğin: Hamdi ve Jale suçlu olsunlar. e ve f önermeleri doğrudur. Kalan önermeler yanlıştır.
Hamdi'nin önermesi "Can ve Göksun suçlu"dur.

$(a \vee b)' \equiv (0 \vee 0)' \equiv 1$
Hamdi 2 yalan söylemiş olur.

$a \wedge b \equiv 0 \wedge 0 \equiv 0$
Hamdi 2 doğru söylememiş olur.

	2 yalan söylüyor mu?	2 doğru söylüyor mu?
Hamdi için →	$(a \vee b)'$	$(a \wedge b)$
Jale için →	$(c \vee d)'$	$(c \wedge d)$
Dilek için →	$(a \vee d)'$	$(a \wedge d)$
Göksun için →	$(a \vee e)'$	$(a \wedge e)$
Can için →	$(c \vee f)'$	$(c \wedge f)$

şeklinde hesaplanır → Sonuçta 2 yalan söyleyen kişi sayısı 1 olmalı ve 2 doğru söyleyen kişi sayısı 0 olmalı.

	a	b	c	d	e	f	Hamdi 2Y	Hamdi 2D	Jale 2Y	Jale 2D	Dilek 2Y	Dilek 2D	Göksün 2Y	Göksün 2D	Can 2Y	Can 2D	Sonuç 2Y	Sonuç 2D
1	0	0	0	0	1	1	1		1		1		0		0		3	
2	0	0	0	1	0	1	1		0		0		1		0		1	
3	0	0	1	0	0	1	1		0		1		1		0		3	
4	0	1	0	0	0	1	0		1		1		1		0		3	
5	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	1	1	0	1		0		0		0		1		2	
7	0	0	1	0	1	0	1		0		1		0		0		2	
8	0	1	0	0	1	0	0		1		1		0		1		3	
9	1	0	0	0	1	0	0		1		0		0		1		2	
10	0	0	1	1	0	0	1		0		0		1		0		2	
11	0	1	0	1	0	0	0		0		0		1		1		2	
12	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1
13	0	1	1	0	0	0	0		0		1		1		0		2	
14	1	0	1	0	0	0	0		0		0		0		0		0	
15	1	1	0	0	0	0	0		1		0		0		1		2	

Sonuç tablosunda 2 yalan söyleyen 1 kişi olan 2 satır var. 5 ve 12. satırlar.

5 ve 12. satırda 2 doğru söyleyen var mı diye bakarız.

5. satırda 2 doğru söyleyen yok.
12. satırda Dilek 2 doğru söylemiş.
Doğru senaryo 5.

Yani a ve f önermeleri doğru.

Can ve Jale suçlu.

Soru 8

Soru 9

Aşağıdaki bilgiler size veriliyor:

- Ayşe, Emin ve İhsan ayrı ayrı takımları tutuyorlar.
- Eğer İhsan Beşiktaşlıysa, Emin Fenerbahçeli.
- Eğer İhsan Fenerbahçeliyse, Emin Galatasaraylı.
- Eğer Emin Beşiktaşlı değilse, Ayşe Fenerbahçeli.
- Eğer Ayşe Galatasaraylİlysa, İhsan Fenerbahçeli.

Ayşe'nin, Emin'in ve İhsan'ın tuttukları takımları bulun ve bu sonucu nasıl bulduğunuzu gösteriniz.

Not : Bu önermeye göre hem B hem C suçsuz olabilir. Bundan sonraki önerme için de aynı şey geçerli.
Not : Eğer İhsan Beşiktaşlı değilse, bu önerme bize bir şey öğretmiyor.

Çözüm:

	ayşe			emin			ihsan						
	gs	fb	bjk	gs	fb	bjk	gs	fb	bjk	X	Y	Z	t
1)	0	0	1	0	1	0	1	0	0	–	–	0	–
2)	0	0	1	1	0	0	0	1	0	–	1	0	–
3)	0	1	0	0	0	1	1	0	0	–	–	–	–
4)	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	–	1	–
5)	1	0	0	0	0	1	0	1	0	–	0	–	1
6)	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	–	0	0

X → ihsan bjk → emin fb
Y → ihsan fb → emin gs
Z → emin not bjk → ayşe fb
t → ayşe gs → ihsan fb

tablo ayşe, emin ve ihsanın farklı takımları tutacağı şekilde oluşturulduğunda X, Y, Z ve t önermelerine yukarıdaki gibi cevap veriyorlar.

0 → yanlış
1 → doğru
— → bir şey söylemeyiz

3. satır dışında tüm satırlarda en az bir tane 0 olduğundan senaryolar yanlışlanmıştır. 3. senaryoyu yanlışlayan herhangi bir durum yoktur.

Doğru senaryo üçüncü senaryodur.

Yani ayşe fenerbahçeli, ihsan galatasaraylı, emin beşiktaşlıdır.

Soru 9