第一节课

- 集合 X 被称为**拓扑空间**，如果存在集族 $\tau \subset 2^X$ 满足：
  - $X, \emptyset \in \tau$.
  - τ 中任意个集合之并属于 τ.
  - τ 中有限个集合之交属于 τ.

  这样的集族 τ 称为 X 上的一个**拓扑**，τ 中的集合称为**开集**。
- 设 τ 是 X 上的拓扑，$Y \subset X$，则 $\tau|_Y = \{U \cap Y | U \in \tau\}$ 是 Y 上的拓扑。
- 定义在拓扑空间上的函数 $f : X \to Y$ 称为是**连续**的，如果开集在 f 作用下的原象总是开集。

第二节课

- 设 $A \subset X$，点 $p \in X$ 称为 A 的**极限点**，如果 p 的任意邻域与 $A - \{p\}$ 交集非空。

> $X = \mathbb{C}$ 上的 Zariski 拓扑：$A \subset X$ 是开集当且仅当 A 的补集是有限集或 X。
> 在 Zariski 拓扑下，A 是闭集 $\iff$ A 是有限集或 X $\iff$ A 是某个多项式的零点集合。
> 在 Zariski 拓扑下，$|A|$ 有限 $\implies A$ 没有极限点，A 无限 $\implies X$ 中的点都是 A 的极限点。

- 称集合 A 是**闭集**，如果其补集 $X \backslash A$ 是开集。A 是闭集 $\iff$ A 包含 A 的所有极限点。
- 集合 A 与其极限点集合之并 $\overline{A}$ 称为 A 的**闭包**。$\overline{A}$ 是包含 A 的最小闭集。
  - 推论：A 是闭集 $\iff$ $A = \overline{A}$.
- 集合 $A \subset X$ 称为是**稠密**的，如果 $\overline{A} = X$。
- $x \in A$ 称为集合 A 的**内点**，如果存在 x 的邻域 $U \subset A$。
- $x \in X$ 称为集合 A 的**边界点**，如果 x 既不是 A 的内点也不是 $X \backslash A$ 的内点。
- 设集族 β 包含 X 的一些开子集。若 X 中的每个开集都是 β 中集合之并，则称 β 是 X 的**拓扑基**。
- 设 $\beta \subset 2^X$ 非空，若有以下条件成立：
  - $\bigcup_{A \in \beta} A = X$.
  - 任意$B_1, B_2 \in \beta$ 和 $x \in B_1 \cap B_2$，存在 $B_3 \in \beta$ 使得 $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

  则 β 中任意数量集合之并全体构成 X 上的一个拓扑。
- 设 $f : X \to Y$ 和 $g : Y \to Z$ 都是连续映射，则 $g \circ f : X \to Z$ 也是连续的。
- 设 $f : X \to Y$ 连续，$A \subset X$ 具备子空间拓扑 $\tau|_A$，则 $f|_A : A \to Y$ 也是连续的。
- 关于拓扑空间上的连续映射，以下几条等价：
  1. $f : X \to Y$ 是连续的.
  2. 若 β 是 Y 的一个拓扑基，则 β 中集合的原象是开集.
  3. 对任意 $A \subset X$，有 $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
  4. 对任意 $B \subset Y$，有 $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.

5. 对任意闭集 $B \subset Y$，$f^{-1}(B)$ 是 X 中的闭集.

> $1 \Longrightarrow 2$：显然，因为拓扑基中只有开集。
> $2 \Longrightarrow 3$：$f(A) \subset \overline{f(A)}$ 显然。设 $x \in \overline{A} \backslash A$ 但 $f(x) \notin f(A)$，任取 $f(x)$ 的邻域 U，存在拓扑基中的集合 B 满足 $f(x) \in B \subset U$。而根据 2，$f^{-1}(B)$ 是 X 中的开集，从而是 x 的邻域。注意 x 是 A 的极限点，因此 $f^{-1}(B)$ 与 A 交集非空，也即 B 和 $f(A)$ 交集非空。进一步地，U 与 $f(A)$ 交集非空，从而 $f(x)$ 是 $f(A)$ 的极限点，满足 $f(x) \in \overline{f(A)}$。
> $3 \Longrightarrow 4$：在 3 中令 $A = f^{-1}(B)$ 即有 $f[\overline{f^{-1}(B)}] \subset \overline{B}$，从而 $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$。
> $4 \Longrightarrow 5$：根据 4，$\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B}) = f^{-1}(B)$，因此 $f^{-1}(B)$ 也是闭集。
> $5 \Longrightarrow 1$：根据开闭集的关系显然。

- 连续映射 $f: X \to Y$ 称为**同胚**，如果存在连续的 $g: Y \to X$ 满足 $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ 和 $g \circ f = \mathrm{id}_X$。

  > 一般情况下，连续双射 $f: X \to Y$ 不一定是同胚。

第三节课

- **连续的局部性**
  - $f: X \to Y$ 是连续的，如果 X 可以被一族开集 $\{U_\alpha\}$ 覆盖，且 f 限制在每个 U_α 上都连续.
  - $f: X \to Y$ 是连续的，如果 X 可以被有限个闭集 $\{F_i\}$ 覆盖，且 f 限制在每个 F_i 上都连续.
- 设 $\beta \subset 2^X$ 非空，若满足以下两条，则称 β 是 X 的一组**基**:
  1. β 中任意集合非空.
  2. 任取 $B_1, B_2 \in \beta$，存在 $B_3 \in \beta$，使得 $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.
- 设映射 $f: X \to Y$，其中集合 X 有一组基 β，集合 Y 是拓扑空间。点 $p \in Y$ 称为 f 在 β 上的**极限**，如果对 p 的任意邻域 V，都存在 $A \in \beta$ 使得 $f(A) \subset V$。符号表示为 $\lim_\beta f(x) = p$。
- 设 d 是集合 X 上的一个度量，子集 $A \subset X$。对任意 $x \in X$，定义 $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$。

  > 固定集合 A，映射 $x \to d(x, A)$ 是连续的。

- 设闭集 $A, B \subset X$ 不交，则存在连续映射 $f: X \to \mathbb{R}$ 满足 $f|_A = 1$，$f|_B = -1$，且在 $A \cup B$ 以外的其他点上 $f(x) \in (-1, 1)$。

  > 构造 $f(x) = \dfrac{d(x,B) - d(x,A)}{d(x,B) + d(x,A)}$ 即可。注意对于闭集 A，有 $x \in A \iff d(x, A) = 0$。

- **Tietze 扩张定理**：设 X 是度量空间，闭集 $C \subset X$。如果映射 $f: C \to \mathbb{R}$ 连续，则 f 可以连续地扩张成 X 上的连续映射。

- 称序列 $\{x_n\}$ 为**柯西列**，若任给 $\epsilon > 0$，都存在 N 使得 $d(x_m, x_n) < \epsilon$ 对所有 $m, n > N$ 成立。
- 称序列 $\{x_n\}$ **收敛**到 $a \in X$，如果 $\lim_{n\to\infty} d(x_n, a) = 0$。 点 a 称为 $\{x_n\}$ 的**极限**。
- 度量空间 (X, d) 称为是**完备**的，如果 X 中每个柯西列都收敛到 X 中某点。

  > 在通常的欧氏度量下，$\mathbb{R}$ 是完备的，而 $\mathbb{Q}$ 不是完备的。
  > $C[a, b]$ 在度量 $d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x$ 下不是完备的。
  > $C[a, b]$ 在度量 $d(f, g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$ 下是完备的。

第四节课

- 设 (X, d) 是完备度量空间 (Y, d) 的子空间，并且 $\overline{X} = Y$，则称 (Y, d) 是 (X, d) 的**完备化**。
- 称度量空间 (X_1, d_1) 和 (X_2, d_2) **等距同构**，若存在双射 $f : X_1 \to X_2$，使得对任意 $a, b \in X_1$ 都有 $d_1(a, b) = d_2[f(a), f(b)]$。这样的 f 也称为**等距同构映射**。
- 设 (X, d) 是度量空间，则对任意 $a, b, u, v \in X$ 有 $|d(a, b) - d(u, v)| \leq d(a, u) + d(b, v)$。
- **完备化的唯一性**：设 (Y_1, d_1) 和 (Y_2, d_2) 都是 (X, d) 的完备化，则它们等距同构。
- **完备化的存在性**：在等距同构意义下，每个度量空间都存在完备化。

  > 大致证明思路可参考这个知乎专栏。

- 拓扑空间 X 称为是**紧空间**，如果 X 的每个开覆盖都存在有限子覆盖。
- 子集 $A \subset X$ 称为是**紧集**，如果 A 在相应的子空间拓扑下是紧空间。
- 设 $f : X \to Y$ 连续，若 X 是紧空间，则 $f(X)$ 是 Y 的紧子集。
- 子集 $X \subset \mathbb{R}^n$ 是紧集当且仅当 X 是有界闭集。

第五节课

- 拓扑空间 X 称为是 **Hausdorff 空间**，若 X 中任意两个不同的点都存在不交的邻域。

  > 容易发现，所有度量空间都是 Hausdorff 空间。
  > 但赋以 Zariski 拓扑的 $\mathbb{C}$ 不是 Hausdorff 空间。

- 设 $f : X \to Y$，其中 Y 是 Hausdorff 空间，则对 X 的任一组基 β，$\lim_\beta f(x)$ 若存在必唯一。
- **紧集和闭集的关系**：Hausdorff 空间的紧子集是闭集，紧空间的闭子集是紧集。
- 设 $f : X \to Y$ 是连续双射，其中 X 是紧空间，Y 是 Hausdorff 空间，则 f 是同胚。
- 设 X 是紧空间，$A \subset X$ 是无限子集，则 A 一定有极限点。
- 设 $f : X \to \mathbb{R}$ 连续，若 X 是紧空间，则 f 有界且可以取到边界值。
- **勒贝格引理**：设 X 是紧的度量空间，$\{U_\alpha\}$ 是 X 的一个开覆盖，则存在 $\delta > 0$，使得 X 的任意直径小于 δ 的子集都包含在某个 U_α 中。这样的 δ 称为 $\{U_\alpha\}$ 的一个勒贝格数。

  > 对于度量空间 (X, d) 的子集 A，其**直径**定义为 $\sup_{x_1,x_2\in A} d(x_1, x_2)$。

- 设 X, Y 是拓扑空间，我们称在 $X \times Y$ 上定义的、以 $\beta = \{U \times V | U \in \tau_X, V \in \tau_Y\}$ 为拓扑基的拓扑为 X, Y 的**乘积拓扑**，对应的 $X \times Y$ 称为**乘积空间**。
- 对于乘积空间 $X \times Y$，我们称映射 $P_1(x, y) = x$ 和 $P_2(x, y) = y$ 为**投影映射**。
- 乘积拓扑是使得投影映射为连续映射的最小拓扑（满足这一条件的拓扑必包含乘积拓扑）。
- $f : Z \to X \times Y$ 连续 $\iff$ $P_1 \circ f : Z \to X$ 和 $P_2 \circ f : Z \to Y$ 都连续。
- 设 X 和 Y 非空，则 $X \times Y$ 是 Hausdorff 空间 $\iff$ X 和 Y 都是 Hausdorff 空间。

第六节课

- 设 β 是 X 的一组拓扑基，则 X 是紧的 $\iff$ 任意 β 中集合构成的 X 的开覆盖都存在有限子覆盖。
- $X \times Y$ （在乘积拓扑意义下）是紧的 $\iff$ X 和 Y 都是紧的。
- 空间 X 称为是**连通**的，如果非空集合 A, B 满足 $A \cup B = X \Longrightarrow \overline{A} \cap B$ 和 $A \cap \overline{B}$ 不全为空。
- 关于连通性，以下几条等价：
  1. X 是连通的.
  2. X 的既开又闭子集只有 X 和 $\emptyset$.
  3. X 不能表示为两个不交非空开集的并.
- 设 $f : X \to Y$ 连续，则 X 连通 $\Longrightarrow f(X)$ 连通。
- 设 X 是拓扑空间，Z 是 X 的稠密子集，则 Z 连通 $\Longrightarrow X$ 连通。

  > 推论：设 $Z \subset X$ 连通，$Z \subset Y \subset \overline{Z}$，则 Y 连通。特别地，我们有 $\overline{Z}$ 连通。

- X 是 $\mathbb{R}$ 中非平凡的连通集 $\iff$ X 是区间。

第七节课

- 称 $A, B \subset X$ 是**相互分离**的，如果 $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$。
- 设 $X = \bigcup_\alpha A_\alpha$，若每个 A_α 都连通，且不存在相互分离的一对 A_α，则 X 连通。

  > 推论：设 $X = \bigcup_\alpha A_\alpha$，若每个 A_α 都连通，且 $\bigcap_\alpha A_\alpha \neq \emptyset$，则 X 连通。

- 设 X, Y 非空，则 $X \times Y$ 连通 $\iff$ X 和 Y 都连通。
- 在 X 上定义关系：$x \sim y$ $\iff$ 存在连通的 $A \subset X$ 满足 $x, y \in A$。则 $\sim$ 是等价关系，且由 $\sim$ 导出的等价类称为 X 的**连通分支**。
- 连通分支一定是闭集，且不同连通分支之间一定相互分离。

  > 推论：若 X 只有有限个连通分支，则每个连通分支都是既开又闭的。

- 连续映射 $\gamma : [0, 1] \to X$ 称为拓扑空间 X 的一条**道路**，$\gamma(0)$ 和 $\gamma(1)$ 称为这条道路的**起点**和**终点**。

- 拓扑空间 X 称为是**道路连通**的，如果 X 中任意两点都可以用一条道路连接。
- **道路连通的空间是连通的**。$\mathbb{R}^n$ 的连通开子集是道路连通的。
- 在 X 上定义关系：$x \sim y \iff$ 存在一条道路 γ 连接 x 和 y。则 $\sim$ 是等价关系，且由 $\sim$ 导出的等价类称为 X 的**道路连通分支**。

第八节课

- 设 X 是拓扑空间，$X = \bigcup_{i \in I} P_i$ 为其一个分划，其中每个 P_i 都非空。记 $Y = \{P_i \mid i \in I\}$，定义 $\pi : X \to Y$ 为 $\pi(x) = P_j$，如果 $x \in P_j$，并在 Y 上定义拓扑：U 是开集当且仅当 $\pi^{-1}(U)$ 是 X 中的开集。则称该拓扑为 Y 上的**黏合拓扑**，Y 称为对应于分划 $X = \bigcup_{i \in I} P_i$ 的**黏合空间**。
- 设 Y 是 X 的一个黏合空间，Z 是拓扑空间，则 $f : Y \to Z$ 连续 $\iff$ $f \circ \pi : X \to Z$ 连续。
- 设 $f : X \to Y$ 是连续的满射，如果 $U \subset Y$ 是开集 $\iff$ $f^{-1}(U)$ 是开集，则称 f 为**黏合映射**。
- 设 $f : X \to Y$ 是连续的满射，如果 f 将开集（闭集）映射为开集（闭集），则 f 是黏合映射。
- 设 $f : X \to Y$ 是连续的满射，如果 X 是紧空间且 Y 是 Hausdorff 空间，则 f 是黏合映射。
- **连续局部性的推广**：设 $X = \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$，定义不交并 $\widetilde{X} = \coprod_{\alpha \in I} X_\alpha$，并在其上装备拓扑：$U \subset \widetilde{X}$ 是开集 $\iff$ 对每个 α，$U \cap X_\alpha$ 是 X_α 中的开集。又令 $j : \widetilde{X} \to X$ 满足 $j|_{X_\alpha}$ 是 X_α 到 X 的嵌入，则当 j 是黏合映射时，只要 $f : X \to Y$ 限制在每个 X_α 上都连续，就有 f 连续。
- **射影空间** $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ 的三种构造方法：
  1. 取 n 维单位球面 $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$，将 S^n 的对径点黏合，即可得到射影空间 $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$.
  2. 将 $\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ 中位于同一条过原点直线上的所有点黏合，即可得到射影空间 $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$.
  3. 取 n 维单位球 $B^n \subset \mathbb{R}^n$，仅将其边界 S^{n-1} 的对径点黏合，即可得到射影空间 $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$.

  > 第二种构造方法实际上取的是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的所有一维线性子空间，因此可以很容易地进行推广。

第九节课

- 设 X 是拓扑空间，$I = [0,1]$，令 $CX = X \times I / X \times \{1\}$，即将 $X \times \{1\}$ 黏合成一个点，所得的黏合空间 CX 称为一个**锥**。
- 设 X 是拓扑空间，$I = [0,1]$，在空间 $X \times I$ 中将 $X \times \{0\}$ 黏合成一个点，$X \times \{1\}$ 黏合成另一个点，所得的黏合空间 SX 称为一个**双角锥**。
- 设 X, Y 是拓扑空间，在 $X \sqcup Y$ 中黏合 $x_0 \in X$ 和 $y_0 \in Y$，所得的 $X \vee Y$ 称为一个**楔和**。
- 设子空间 $A \subset Y$，$f : A \to X$ 连续，在 $X \sqcup Y$ 中黏合所有 $a \in A$ 和 $f(a) \in X$，所得的黏合空间记作 $X \cup_f Y$，这样的 f 称为一个**贴映射**。

- 设 $f: X \to Y$ 连续，在 CX 中利用贴映射 f 将 $X \times \{0\}$ 粘到 Y 上，所得的黏合空间 $Y \cup_f CX$ 称为一个**映射锥**。
- 一个**拓扑群**是指使得乘法运算和求逆运算都连续的 Hausdorff 空间。

> 容易验证，拓扑群的子群在子空间拓扑下也是拓扑群。

- 设 G_1, G_2 是拓扑群，映射 $f: G_1 \to G_2$ 称为是**同构**，如果 f 同时是同胚和群同构。
- 设 G 是拓扑群，$x \in G$，映射 $L_x: g \in G \to xg \in G$ 称为一个**左平移**。可以验证，L_x 同时是同胚和群同构。类似也可以定义**右平移** $R_x: g \in G \to gx \in G$。
- 设 G 是拓扑群，K 是包含 G 中单位元 e 的连通分支，则 K 是 G 的闭正规子群。
- 设 G 是连通的拓扑群，则 G 中单位元 e 的任意邻域都构成了 G 的一个生成元集合。
- 一般线性群 $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ 在 $\mathbb{R}^{n^2}$ 的欧氏拓扑下构成拓扑群。

> $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ 是 $\mathbb{R}^{n^2}$ 的开子集，并且不连通（行列式符号不同的矩阵各自构成一个连通分支）。

- 特殊线性群 $\mathrm{SL}(n;\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ 不是紧的，但是连通的。
- 正交矩阵群 $\mathrm{O}(n)$ 和 特殊正交矩阵群 $\mathrm{SO}(n)$ 都是紧的。
- 设 G 是拓扑群，X 是拓扑空间，称 $f: G \times X \to X$ 为 G 到 X 的**作用**，如果 f 是群作用且连续。

> 可以验证，对每个 $g \in G$，映射 $x \to gx$ 都是同胚。

第十节课

- 设拓扑群 $G \curvearrowright X$，在 X 上定义等价关系：$x \sim y \iff$ 存在 $g \in G$ 满足 $x = gy$，则 $\sim$ 给出了 X 的一个分划，称为 X 的 **G-轨道**，该分划对应的黏合空间 X/G 称为**商空间**或**轨道空间**。
- $\mathbb{RP}^n$ 中的两点 x, y 称为是**齐次**的，如果存在 $\lambda \neq 0$ 满足 $x = \lambda y$。将齐次的点视为等同，定义集合$U_i = \{(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{RP}^n | x_i \neq 0\}$，则 U_i 是 $\mathbb{RP}^n$ 中的开集且同胚于 $\mathbb{R}^n$。

> 容易发现，集族 $\{U_i | i = 1, \cdots, n+1\}$ 给出了 $\mathbb{RP}^n$ 的一个开覆盖。
> 类似的操作也可以对 $\mathbb{CP}^n$ 进行，得到一族同胚于 $\mathbb{C}^n$ 的开集，构成 $\mathbb{CP}^n$ 的开覆盖。

- 设拓扑群 $G \curvearrowright X$，则自然映射 $\pi: X \to X/G$ 是开映射（将开集映射为开集）。
- 设拓扑群 $G \curvearrowright X$，若 G 和 X/G 都连通，则 X 连通。

> 推论：$\mathrm{SO}(n)$ 是连通的，因为 $\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n) \cong S^n$。

第十一节课

- 设 $f, g: X \to Y$ 连续，称 f 与 g **同伦**，如果存在连续的 $F: X \times I \to Y$ 满足 $F(x, 0) = f(x)$ 且 $F(x, 1) = g(x)$。这里 $I = [0, 1]$ 为单位闭区间。

> 形如 $F(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$ 的 F 称为**直线同伦**。

- 设 $f, g: X \to Y$ 连续，称 f 与 g **相对于 $A \subset X$ 同伦**，如果 $f|_A = g|_A$，并且上述定义中的 F 进一步满足 $F(x,t) = f(x) = g(x)$ 对所有 $x \in A$，$t \in I$ 成立。
- 设 $f, g: X \to Y$ 相对于 A 同伦，$h: Y \to Z$ 连续，则 $h \circ f$ 与 $h \circ g$ 相对于 A 同伦。
- 设 $g, h: Y \to Z$ 相对于 B 同伦，$f: X \to Y$ 连续，则 $g \circ f$ 与 $h \circ f$ 相对于 $f^{-1}(B)$ 同伦。
- 道路 $\gamma: I \to X$ 称为是**环路**，如果 $\gamma(0) = \gamma(1)$。固定 $p \in X$，考虑所有满足 $\gamma(0) = \gamma(1) = p$ 的环路，它们在相对于 $\{0,1\} \subset I$ 的同伦下划分成若干等价类，这些等价类称为**同伦类**。
- 上述所有同伦类的集合在适当的乘法运算下构成群，称为 X 的基点为 p 的**基本群**，记作 $\pi_1(X,p)$。

  > 乘法的定义详见 **Armstrong** 书第 5.2 节。
  > 若将环路定义中的 I 换成 S^n，最终得到的基本群就记作 $\pi_n(X,p)$。

第十二节课

- 设 X 是道路连通的，则对任意 $p, q \in X$ 有 $\pi_1(X,p)$ 与 $\pi_1(X,q)$ 同构，该同构类记作 $\pi_1(X)$。
- 设 $f: X \to Y$ 连续，则 f 诱导了一个由 $\pi_1(X)$ 到 $\pi_1(Y)$ 的自然映射 $f_*: \langle \alpha \rangle \mapsto \langle f \circ \alpha \rangle$。

  > 这样定义的 f_* 是群同态，满足 $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ 和 $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X)}$。

- 设 $f: X \to Y$ 是同胚，则相应的 f_* 是 $\pi_1(X)$ 与 $\pi_1(Y)$ 之间的群同构。

  > 推论：基本群不相同的拓扑空间一定不同胚。

- 称道路连通空间 X 是**单连通**的，如果 $\pi_1(X) = \{e\}$。

  > 显然欧氏空间的凸子集都是单连通的。

- $\pi_1(S^1)$ 同构于整数集 $\mathbb{Z}$。

  > 证明见 **Armstrong** 书第 5.3 节。

第十三节课

- **Brouwer 不动点定理**：设 B 是任意维度的球，$f: B \to B$ 连续，则存在 $x \in B$ 满足 $f(x) = x$。

  > 一维情况，$B = [-1, 1]$，易证结论成立。
  > 二维情况，反设 $f(x) \neq x$ 恒成立，则对每个 $x \in B$，将 $f(x)$ 连接到 x 并延长至边界，得到一点 $g(x) \in S^1$。这样定义的 $g(x)$ 是连续映射，且限制在 S^1 上是恒等映射。记 i 为 S^1 到 B 的嵌入，则 $g \circ i = \mathrm{id}_{S^1}$，从而 $g_* \circ i_* = \mathrm{id}_{\pi_1(S^1)}$，这表明 g_* 是满射。但 g_* 的定义域 $\pi_1(B)$ 是平凡群，而值域 $\pi_1(S^1)$ 非平凡，显然矛盾。

- 设 U, V 是 X 的开子集且 $X = U \cup V$，若 U, V 单连通且 $U \cap V$ 道路连通，则 X 单连通。

> 推论：$S^n(n\geq 2)$ 是单连通的，从而基本群是平凡群。

- 设 X,Y 道路连通，则 $\pi_1(X\times Y)$ 同构于 $\pi_1(X)\times\pi_1(Y)$。
- 称拓扑空间 X,Y **同伦等价**，如果存在连续的 $f:X\to Y$ 和 $g:Y\to X$ 满足 $g\circ f$ 同伦于 id_X，$f\circ g$ 同伦于 id_Y。这样的 f,g 称为一对**同伦逆**。
  > 同伦等价是等价关系，其条件弱于同胚。
- 设 $A\subset X$，若连续映射 $F:X\times I\to X$ 满足 $F(x,0)=x$，$F(x,1)\in A$，且当 $x\in A$ 时恒有 $F(x,t)=x$，则称 F 为从 X 到 A 的一个**形变收缩**。
  > 若存在这样的 F，则 X 与 A 同伦等价（可取 $f=F|_{t=1}$，g 为 A 到 X 的嵌入）。
- 空间 X 称为是**可缩**的，如果 id_X 与某点 $p\in X$ 处的常数映射同伦。
  > 欧氏空间的凸子集都是可缩的（取直线同伦即可）。

第十四节课

- 设 $f\underset{F}{\simeq} g:X\to Y$，则对 $\alpha\in\pi_1(X,p)$ 有 $g\circ\alpha\simeq\gamma^{-1}\cdot(f\circ\alpha)\cdot\gamma$，其中 $\gamma(t)=F(p,t)$ 。
- 设 X,Y 同伦等价，则 $\pi_1(X)\cong\ \pi_1(Y)$。
  > 推论：如果存在从 X 到 A 的形变收缩，则 $\pi_1(X)\cong\ \pi_1(A)$。
  > 推论：如果 X 是可缩的，则 $\pi_1(X)$ 是平凡的。
- 关于可缩性，以下几条成立：
  1. X 是可缩的 $\iff$ $X\simeq\{p\}$.
  2. 设 $f,g:X\to Y$，若 Y 可缩，则 $f\simeq g$.
  3. 若 X 可缩，则 id_X 同伦于任意 $p\in X$ 处的常数映射.
  > 关于第 3 点注意，即使 X 是可缩的，也可能不存在 X 到 $\{p\}$ 的形变收缩（要求相对同伦）。
- G_1*G_2 上的**自由积**：将元素写成 $g_1g_2\cdots g_n$ 的形式，其中每个 $g_i\in G_1\cup G_2$。对其进行约化操作（去除恒等元，合并相邻的同属于 G_1 或 G_2 的元），则全体约化后的元素在乘法下构成群。
- 无限多个群的自由积：设 I 为指标集，$*_{\alpha\in I}G_\alpha$ 定义为全体长度有限且约化后的元素集合。
  > 若每个 $G_\alpha\cong\ \mathbb{Z}$，则它们的自由积也称为**自由群**。
- 自由积的**泛性质**：对任意 α，定义 i_α 为 G_α 到 $*_{\alpha\in I}G_\alpha$ 的自然嵌入。若存在一族 $\{\phi_\alpha\}$，其中每个 $\phi_\alpha:G_\alpha\to H$ 都是同态，则存在唯一的同态 $\phi:*_{\alpha\in I}G_\alpha\to H$ 满足 $\phi\circ i_\alpha=\phi_\alpha$。
  > 定义 $\phi(g_1\cdots g_n)=\phi_{\alpha_1}(g_1)\cdots\phi_{\alpha_n}(g_n)$ 即可，其中 $g_i\in G_{\alpha_i}$。

- **van Kampen 定理**：设 $X=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$，其中每个 A_α 都是道路连通的开集，$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha$ 非空，且对任意 $\alpha,\beta\in I$，交集 $A_\alpha\cap A_\beta$ 也道路连通。对每个 α，定义 $\phi_\alpha:\pi_1(A_\alpha)\to\pi_1(X)$ 为 A_α 到 X 的嵌入所诱导的群同态，则由泛性质得到的 $\phi:*_{\alpha\in I}\pi_1(A_\alpha)\to\pi_1(X)$ 是满射。
  进一步，设对任意 $\alpha,\beta,\gamma\in I$，$A_\alpha\cap A_\beta\cap A_\gamma$ 仍道路连通。令 $i_{\alpha\beta}:\pi_1(A_\alpha\cap A_\beta)\to\pi_1(A_\alpha)$ 为 $A_\alpha\cap A_\beta$ 到 A_α 的嵌入所诱导的群同态，则上述同态 ϕ 的核 N 是由全体形如 $i_{\alpha\beta}(w)i_{\beta\alpha}(w)^{-1}$ 的元素所生成的正规子群，即有群同构 $\pi_1(X)\cong *_{\alpha\in I}\pi_1(A_\alpha)/N$。

第十五节课

- 设 $X=\bigvee_\alpha X_\alpha$ 是通过黏合点 $x_\alpha\in X_\alpha$ 得到的空间。若对每个 α，都存在 x_α 的邻域 $U_\alpha\subset X_\alpha$，使得存在 U_α 到 x_α 的形变收缩，则 $\pi_1(X)\cong *_\alpha\pi_1(X_\alpha)$。
- 环面的基本群是 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$，克莱因瓶的基本群是 $\langle a,b|aba^{-1}b=e\rangle$，$\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ 的基本群是 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。

第十六节课

- X 的一个**覆叠空间**是指满足如下条件的空间 $\widetilde{X}$：存在 $p:\widetilde{X}\to X$ 和 X 的一个开覆盖 $\{U_\alpha\}$，使得任意 $p^{-1}(U_\alpha)$ 都是 $\widetilde{X}$ 中一些开集的不交并，且 p 限制在这些开集上都是同胚。p 也称为**覆叠映射**。
- **道路提升引理**：设 $p:\widetilde{X}\to X$ 是覆叠映射，$\gamma:I\to X$ 为一条道路，起点 $\gamma(0)=x$。若 $\widetilde{x}_0\in\widetilde{X}$ 满足 $p(\widetilde{x}_0)=x$，则存在唯一的道路 $\widetilde{\gamma}:I\to\widetilde{X}$ 使得 $\widetilde{\gamma}(0)=\widetilde{x}_0$ 且 $p\circ\widetilde{\gamma}=\gamma$。
- **同伦提升引理**：设 $p:\widetilde{X}\to X$ 是覆叠映射，$F:Y\times I\to X$ 连续。若连续映射 $\tilde{f}:Y\to\widetilde{X}$ 满足 $p\circ\tilde{f}(y)=F(y,0)$，则存在唯一的 $\widetilde{F}:Y\times I\to\widetilde{X}$ 使得 $\widetilde{F}(y,0)=\tilde{f}(y)$ 且 $p\circ\widetilde{F}=F$。
- 设 $p:\widetilde{X}\to X$ 是覆叠映射且 $p(\widetilde{x}_0)=x_0$，则 $p_*:\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)\to\pi_1(X,x_0)$ 总是单射。又设环路 $\langle\alpha\rangle\in\pi_1(X,x_0)$，则 $\langle\alpha\rangle$ 在 p_* 下有原象 $\iff$ $\langle\alpha\rangle$ 的提升是以 $\widetilde{x}_0$ 为起点的环路。
- 设 $p:\widetilde{X}\to X$ 是覆叠映射且 $\widetilde{X}$ 与 X 道路连通，则 p 的层数 $\left|p^{-1}(x)\right|$ 恰为 $H=p_*(\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}_0))$ 作为子群在 $\pi_1(X,x_0)$ 中的指数。

  > 对于连通空间 X，$\left|p^{-1}(x)\right|$ 对任意 $x\in X$ 都是常数，因此层数是良定义的。

第十八节课

- **提升的存在性**：设 $p:(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)\to(X,x_0)$ 是覆叠映射，$f:Y\to X$ 满足 $f(y_0)=x_0$，其中 Y 是道路连通且局部道路连通的，则 f 存在提升 $\tilde{f}\iff f_*\left[\pi_1(Y,y_0)\right]\subset p_*\left[\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)\right]$。

  > **局部道路连通**是指，对任意 x 和邻域 U_x，都存在道路连通的开集 V_x，满足 $x\in V_x\subset U_x$。

- **提升的唯一性**：设 $p:\widetilde{X}\to X$ 是覆叠映射，$f:Y\to X$，其中 Y 连通。若 $\tilde{f}_1,\tilde{f}_2:Y\to\widetilde{X}$ 都是 f 的提升，且存在 $y_0\in Y$ 满足 $\tilde{f}_1(y_0)=\tilde{f}_2(y_0)$，则 $\tilde{f}_1=\tilde{f}_2$。

- 设 $p:\widetilde{X}\to X$ 是覆叠映射，若 $\pi_1(\widetilde{X})=\{e\}$，则称 $\widetilde{X}$ 为**万有覆叠空间**，p 为**万有覆叠映射**。
- X 称为是**半局部单连通**的，如果对任意 $x\in X$，都存在邻域 U_x 满足 $i_*\left[\pi_1(U_x,x)\right]=\{e\}$，其中 i 是 U_x 到 X 的自然嵌入。
- 设 $p:\widetilde{X}\to X$ 是万有覆叠映射，则 X 是半局部单连通的。
- 设 X 道路连通、局部道路连通、半局部单连通，则存在万有覆叠映射 $p:\widetilde{X}\to X$。

第十九节课

- 设 X 道路连通、局部道路连通、半局部单连通，则对任意子群 $H\subset\pi_1(X,x_0)$，都存在覆叠映射 $p:X_H\to X$ 满足 $p_*(\pi_1(X_H,\widetilde{x}_0))=H$，其中 $\widetilde{x}_0\in p^{-1}(x_0)$。
- 称覆叠映射 $p_1:\widetilde{X}_1\to X$ 与 $p_2:\widetilde{X}_2\to X$ **同构**，如果存在同胚 $f:\widetilde{X}_1\to\widetilde{X}_2$ 满足 $p_1=p_2f$。
- 设 X 道路连通且局部道路连通，则两个道路连通的覆叠空间 $p_1:\widetilde{X}_1\to X$ 与 $p_2:\widetilde{X}_2\to X$ 保基点同构（$f(\widetilde{x}_1)=\widetilde{x}_2$） $\iff p_{1*}(\pi_1(\widetilde{X}_1,\widetilde{x}_1))=p_{2*}(\pi_1(\widetilde{X}_2,\widetilde{x}_2))$。
- **覆叠空间分类定理**：设 X 道路连通、局部道路连通、半局部单连通，则以下两条成立：
  1. X 的全体道路连通覆叠空间在保基点同构意义下与 $\pi_1(X,x_0)$ 的子群一一对应。
  2. X 的全体道路连通覆叠空间在同构意义下与 $\pi_1(X,x_0)$ 子群的共轭类一一对应。
- 设 $p:\widetilde{X}\to X$ 是覆叠映射，我们称 $\widetilde{X}$ 的一个自同构为 **deck 变换**。全体 deck 变换构成群 $G(\widetilde{X})$，从而有群作用 $G(\widetilde{X})\curvearrowright\widetilde{X}:f\cdot\widetilde{x}=f(\widetilde{x})$。

  > 由提升的唯一性，若 $\widetilde{X}$ 道路连通，且在某个点处 $f\cdot\widetilde{x}_0=\widetilde{x}_0$，则必有 $f=\mathrm{id}_{\widetilde{X}}$。

- 覆叠空间 $p:\widetilde{X}\to X$ 称为是**正规**的，如果对任意 $x\in X$ 和 x 的提升 $\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2$，都存在某个 deck 变换将 $\widetilde{x}_1$ 映射到 $\widetilde{x}_2$，即 $G(\widetilde{X})$ 在 $p^{-1}(x)$ 上的作用是传递的。

第二十节课

- 设 X 道路连通且局部道路连通，$p:\widetilde{X}\to X$ 是道路连通的覆叠空间。记 $H=p_*(\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}_0))$。
  1. p 是正规的 $\iff$ H 是 $\pi_1(X,x_0)$ 的正规子群.
  2. 设 $N(H)$ 是 H 的正规化子，则 $G(\widetilde{X})\cong N(H)/H$.

  > 若 p 是正规的，则 $G(\widetilde{X})\cong\pi_1(X,x_0)/H$。
  > 若 p 是万有覆叠映射，则 $G(\widetilde{X})\cong\pi_1(X,x_0)$。

- 设 G 是拓扑群，Y 是拓扑空间，考虑群作用 $G\curvearrowright Y$。若对任意 $y\in Y$，都存在邻域 U，使得对任意 $g_1\neq g_2\in G$，都有 $g_1(U)\cap g_2(U)=\emptyset$，则称该群作用满足条件 $(*)$。

  > 由 deck 变换构成的群作用 $G(\widetilde{X})\curvearrowright\widetilde{X}$ 满足条件 $(*)$。

- 设群作用 $G\curvearrowright Y$ 满足条件 $(*)$，则以下几条成立：

1. 商映射 $p: Y \to Y/G$ 是正规的覆叠映射.
2. 若 Y 道路连通，则 G 是映射 p 对应的 deck 变换集合.
3. 若 Y 道路连通且局部道路连通，则 $G \cong \pi_1(Y/G)/p_*(\pi_1(Y))$.

- 实射影平面 $\mathbb{RP}^n$ $(n \geq 2)$ 的基本群都是 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。
- 设点 $v_0, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ 满足 $v_1 - v_0, \ldots, v_n - v_0$ 线性无关，即不落在某个 $n-1$ 维超平面上，则称这些点的凸包 $[v_0, \ldots, v_n] = \{\sum_{i=0}^n \lambda_i v_i \mid \sum_i \lambda_i = 1\}$ 为 n **维单形**，顶点序为 $v_0, \ldots, v_n$。
  > 基本单形 $\Delta^n = \{(t_0, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_i t_i = 1,\ t_i \geq 0\}$。
- 对任意 n 维单形 $[v_0, \ldots, v_n]$，有自然同胚 $h: \Delta^n \to [v_0, \ldots, v_n]$，$h(t_0, \ldots, t_n) = \sum_i t_i v_i$。
  > $t_0, \ldots, t_n$ 称为点 $\sum_i t_i v_i \in [v_0, \ldots, v_n]$ 的**质心坐标**。
- n 维单形 $[v_0, \ldots, v_n]$ 的**面**是指 $\{v_0, \ldots, v_n\}$ 的非空子集生成的子单形。
  > 单形的顶点序自然诱导了所有面的顶点序。
- 拓扑空间 X 的**奇异 n 维单形**是指连续映射 $\sigma: \Delta^n \to X$。

第二十一节课

- 群 $C_n(X) = \{\sum_{i=1}^m n_i \sigma_i \mid m \in \mathbb{N},\ n_i \in \mathbb{Z},\ \sigma_i: \Delta^n \to X\}$ 称为**链群**，其中元素称为 n **链**。定义映射 $\partial_n: C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ 为 $\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma|_{[v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n]}$，这里 $\hat{v}_i$ 表示去掉顶点 v_i。将 ∂_n 线性延拓到整个 $C_n(X)$，我们得到一个 $C_n(X)$ 到 $C_{n-1}(X)$ 的群同态，称为**边界同态**。
- $\partial_{n-1} \circ \partial_n: C_n(X) \to C_{n-2}(X)$ 恒等于 0。
  > 由此立即推出 $\mathrm{Im}(\partial_{n+1}) \subset \ker(\partial_n)$。
- 设 X 是拓扑空间，群 $H_n(X) = \ker(\partial_n)/\mathrm{Im}(\partial_{n+1})$ 称为 X 的 n **维同调群**。$\ker(\partial_n)$ 中的元素称为**闭链**。$\mathrm{Im}(\partial_{n+1})$ 中的元素称为**边缘链**。称两个闭链 a, b **同调**，如果 $a-b$ 是边缘链。
  > 一般地，如果有一列阿贝尔群 $\cdots \to C_{n+1} \to C_n \to C_{n-1} \to \cdots$ 和同态 $\partial_n: C_n \to C_{n-1}$，满足 $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$，则称此序列为**链复形**。类似定义的 H_n 称为该链复形的 n 维同调群。
- 设 X 是单点空间，则 $H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ 0 & n > 0 \end{cases}$
- 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是 X 的道路连通分支，则 $H_n(X) = \bigoplus_{\alpha \in I} H_n(X_\alpha)$。
- 设 X 非空且道路连通，则 $H_0(X) = \mathbb{Z}$。
  > 结合上一条可知，对于一般的 X，有 $H_0(X) = \bigoplus_{\alpha \in I} \mathbb{Z}$。

- 考虑链复形 $\cdots \to C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$，其中 ϵ 是满同态，则该链复形的同调群 $\widetilde{H}_n(X)$ 称为 X 的**约化同调群**，满足 $H_n(X) = \begin{cases} \widetilde{H}_n(X) \oplus \mathbb{Z} & n=0 \\ \widetilde{H}_n(X) & n>0 \end{cases}$
- 设 $f: X \to Y$ 连续，则 X 上的奇异 n 维单形 σ 可以自然映射到 Y 上的奇异 n 维单形 $f \circ \sigma$。记这个映射为 $f_\#$，则 $f_\#$ 可以线性延拓为 $C_n(X)$ 到 $C_n(Y)$ 的同态，满足 $f_\# \circ \partial = \partial \circ f_\#$。

> $f_\#$ 保持闭链和边缘链，从而诱导了 $H_n(X)$ 到 $H_n(Y)$ 的同态 f_*，满足 $f_*([\alpha]) = [f_\#(\alpha)]$。
> $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$，$(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{H_n(X)}$。

- 设 $f, g: X \to Y$ 同伦，则 $f_* = g_*$。

第二十二节课

- 设 $f: X \to Y$ 是同伦等价，则 $f_*: H_n(X) \to H_n(Y)$ 是群同构。
- 考虑一列阿贝尔群的同态 $A. = (\cdots \to A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots)$。称该序列在 A_n 处**正合**，如果 $\ker(f_n) = \mathrm{Im}(f_{n+1})$。称该序列**正合**，若该序列在所有$A_n$处均正合。

> 正合序列 $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ 称为**短正合列**，其中 f 必为单射，g 必为满射。

- 序列 $0. \to A. \xrightarrow{f.} B. \xrightarrow{g.} C. \to 0.$ 称为**链复形的短正合列**，如果 $A., B., C.$ 都是链复形，$f., g.$ 是相应的链映射，且满足所有 $0 \to A_n \xrightarrow{f_n} B_n \xrightarrow{g_n} C_n \to 0$ 都是短正合列。
- 给定链复形的短正合列 $0. \to A. \xrightarrow{f.} B. \xrightarrow{g.} C. \to 0.$，定义**边界映射** $\partial: H_n(C.) \to H_{n-1}(A.)$ 如下：设 $c \in C_n$ 是闭链，选取 $b \in B_n$ 满足 $g_n(b) = c$。注意 $g_{n-1} \circ \partial_n(b) = \partial_n \circ g_n(b) = 0$，因此 $\partial_n(b) \in \ker(g_{n-1}) = \mathrm{Im}(f_{n-1})$。设 $a \in A_n$ 满足 $f_{n-1}(a) = \partial_n(b)$，我们令 $\partial([c]) = [a]$。

> 可以证明 ∂ 是良定义的，并且是群同态。

- 记号同上，序列 $\cdots \to H_{n+1}(C.) \xrightarrow{\partial} H_n(A.) \xrightarrow{f_*} H_n(B.) \xrightarrow{g_*} H_n(C.) \to \cdots$ 也是正合的，称为**同调长正合列**。

第二十三节课

- 设 X 是拓扑空间，子集 $A \subset X$。令 $C_n(X, A) = C_n(X)/C_n(A)$，则序列 $\{C_n(X, A)\}$ 在链复形 $\{C_n(X)\}$ 的边界同态 ∂ 诱导下也构成链复形，对应的同调群 $H_n(X, A)$ 称为**相对同调群**。

> $H_n(X, A)$ 中的代表元称为**相对闭链**：$\alpha \in C_n(X)$，满足 $\partial\alpha \in C_{n-1}(A)$。
> $H_n(X, A)$ 中的单位元称为**相对边缘链**：$\alpha = \partial\beta + \gamma$，其中 $\beta \in C_{n+1}(X)$，$\gamma \in C_n(A)$。

- 记 i 为嵌入映射，j 为商映射，我们有短正合列 $0 \to C_n(A) \xrightarrow{i} C_n(X) \xrightarrow{j} C_n(X, A) \to 0$。

  > 由此可以构造相应的同调长正合列（更多讨论见 **Hatcher** 书第 117-118 页）。

- 设 $f:(X, A) \to (Y, B)$，则 f 诱导了 $f_\# : C_n(X, A) \to C_n(Y, B)$ 以及相应的 f_*。
- 设 $f, g:(X, A) \to (Y, B)$ 关于 F 同伦，且 $F|_{A\times I} \subset B$，则它们诱导的 f_* 和 g_* 相等。
- **切除定理**：设 $Z \subset A \subset X$ 满足 $\overline{Z} \subset \mathrm{Int}(A)$，则自然嵌入 $(X - Z, A - Z) \to (X, A)$ 诱导了 $H_n(X - Z, A - Z)$ 到 $H_n(X, A)$ 的同构。

  > 等价地，设 $A, B \subset X$ 满足 $\mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B) = X$，则嵌入 $(B, A \cap B) \to (X, A)$ 诱导了 $H_n(B, A\cap B)$ 到 $H_n(X, A)$ 的同构。

第二十四节课

- 设非空闭集 $A \subset X$，使得存在开集 U，满足 $A \subset U \subset X$，且 A 是 U 的形变收缩。考虑黏合映射 $q:(X, A) \to (X/A, A/A)$，则 q_* 是 $H_n(X, A)$ 和 $H_n(X/A, A/A) \cong \widetilde{H}_n(X/A)$ 的同构。
- 设有一族拓扑空间 $\{X_\alpha\}$ 和点 $x_\alpha \in X_\alpha$，使得单点集 $\{x_\alpha\}$ 满足上面 A 的条件，则 X_α 到 $\bigvee_\alpha X_\alpha$ 的嵌入 i_α 诱导了同构 $\bigoplus_\alpha i_{\alpha *} : \bigoplus_\alpha \widetilde{H}_n(X_\alpha) \to \widetilde{H}(\bigvee_\alpha X_\alpha)$。

  > 注：这里 $\bigvee_\alpha X_\alpha$ 的黏合点是 $x_\alpha \in X_\alpha$。

- $H_i(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0, n \\ 0 & i \neq 0, n \end{cases}$

  > 由此可以证明任意维的 Brouwer 不动点定理。

- 设 $U \subset \mathbb{R}^m$ 和 $V \subset \mathbb{R}^n$ 为非空开集，如果 U 和 V 同胚，则 $m = n$。
- 任意 $x \in X$，群 $H_n(X, X - \{x\})$ 称为 x 处的**局部同调群**。若 $\{x\}$ 是闭集，则对任意邻域 U，根据切除定理，都有 $H_n(X, X - \{x\}) = H_n(U, U - \{x\})$。
- 设 $f: S^n \to S^n$，则 $f_* : H_n(S^n) \to H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$。设 $H_n(S^n) = \langle \alpha \rangle$ 且 $f_*(\alpha) = d\alpha$，则称 d 为 f 的**映射度**，记作 $\deg(f)$。

  > $\deg(\mathrm{id}_{S^n}) = 1$。若 f 非满射，则 $\deg(f) = 0$。

第二十五节课

- $f \simeq g \implies f_* = g_* \implies \deg(f) = \deg(g)$。
- $(f \circ g)_* = f_* \circ g_* \implies \deg(f \circ g) = \deg(f)\deg(g)$。
- 若 $f: S^n \to S^n$ 是同伦等价，则 $\deg(f) = \pm 1$。
- 若 $f: S^n \to S^n$ 是沿某一维度的镜面反射，则 $\deg(f) = -1$。
- 若 $f: S^n \to S^n$ 是对径映射，则 $\deg(f) = (-1)^{n+1}$。
- 若 $f: S^n \to S^n$ 没有不动点，则 $\deg(f) = (-1)^{n+1}$。

- 设 n 是偶数，则 $\mathbb{Z}_2$ 是唯一能自由作用在 S^n 上的非平凡群。
- n 是奇数 $\iff$ S^n 有一个处处非零的连续切向量场。
- 称拓扑空间 X 为**胞腔复形**，如果其可以由如下方法构造出来：
  1. X^0 是一些点的不交并，这些点称为 0 **维胞腔**.
  2. 设 $\{D_\alpha^n\}$ 是一族 n 维球，$\phi_\alpha : \partial D_\alpha^n \to X^{n-1}$ 连续，将 ϕ_α 视为贴映射，把所有 D_α^n 黏合到 X^{n-1} 上，所得空间 X^n 称为 n **维骨架**，D_α^n 的内部 e_α^n 称为 n **维胞腔**.
  3. 若上述步骤在第 n 步停止，令 $X = X^n$，称为 n **维胞腔复形**.
  4. 否则令 $X = \bigcup_n X^n$，并在其上装备弱拓扑，称为**无穷维胞腔复形**.
- 每个胞腔有特征映射 $\Phi_\alpha : D_\alpha^n \to X$，满足 $\Phi_\alpha|_{\partial D_\alpha^n} = \phi_\alpha$，其定义为：

$$D_\alpha^n \overset{\text{嵌入}}{\to} \bigsqcup_\beta D_\beta^n \sqcup X^{n-1} \overset{\text{黏合}}{\to} X^n \overset{\text{嵌入}}{\to} X$$

- 闭集 $A \subset X$ 称为**子胞腔复形**，如果 A 是 X 中一些胞腔的并。
- 设 X 是胞腔复形，以下几条成立：
  1. $H_k(X^n, X^{n-1}) = \begin{cases} \text{由 } X \text{ 的 } n \text{ 维胞腔生成的自由阿贝尔群} & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$.
  2. 若 $k > n$，则 $H_k(X^n) = 0$.
  3. 对 $k \leq n-1$，X^n 到 X 的嵌入 i 诱导了 $H_k(X^n)$ 到 $H_k(X)$ 的同构.

第二十六节课

- 设 X 是胞腔复形，根据上一定理，有如下交换图表（其中斜线为正合列）：

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & & 0 & & \\
 & 0 \arrow[dr] & & H_n(X^{n+1}) \approx H_n(X) \arrow[ur] & & & \\
 & & H_n(X^n) \arrow[ur] \arrow[dr, "j_n"] & & & & \\
\cdots \arrow[r] & H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \arrow[ur, "\partial_{n+1}"] \arrow[rr, "d_{n+1}"] & & H_n(X^n, X^{n-1}) \arrow[rr, "d_n"] \arrow[dr, "\partial_n"'] & & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \arrow[r] & \cdots \\
 & & & & H_{n-1}(X^{n-1}) \arrow[ur, "j_{n-1}"'] & & \\
 & & & 0 \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

- $d_n d_{n+1} = 0$，因此图中 $\{H_n(X^n, X^{n-1})\}$ 构成链复形，对应同调群 $H_n^{CW}(X)$ 称为**胞腔同调群**。
- $H_n^{CW}(X) = H_n(X)$，即**胞腔同调群等价于奇异同调群**。
- 对于 $n > 1$，有 $d_n(e_\alpha^n) = \sum_\beta d_{\alpha\beta} e_\beta^{n-1}$，其中 $d_{\alpha\beta}$ 是复合映射 $S_\alpha^{n-1} \overset{\phi_\alpha}{\to} X^{n-1} \overset{\pi}{\to} S_\beta^{n-1}$ 的映射度，ϕ_α 为贴映射，π 为黏合映射（将 $X^{n-1} - e_\beta^{n-1}$ 黏合成一点）。

第二十七节课

- 实射影空间 $\mathbb{RP}^n$ 的胞腔链复形形如 $\cdots \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0$。
- **Mayer-Vietoris 序列**：设 $A, B \subset X$ 且 $X = \operatorname{Int}(A) \cup \operatorname{Int}(B)$，记 $\beta = \{A, B\}$，定义 $C_n^\beta(X)$ 为 $\{\sum n_i\sigma_i \in C_n(X) : \operatorname{Im}(\sigma_i) \subset A \text{ or } \operatorname{Im}(\sigma_i) \subset B\}$，则 $\{C_n^\beta(X)\}$ 是 $\{C_n(X)\}$ 的子复形，且 $C_n^\beta(X)$ 到 $C_n(X)$ 的嵌入是链同伦等价，从而二者给出相同的同调群。

  考虑短正合列 $0 \to C_n(A \cap B) \xrightarrow{\phi} C_n(A) \oplus C_n(B) \xrightarrow{\psi} C_n^\beta(X) \to 0$，其中 $\phi(x) = (x, -x)$，$\psi(x, y) = x + y$，由此诱导的长正合列称为 **Mayer-Vietoris 序列**。

  > 也可以定义约化版本的 MV 序列，将对应同调群换成约化同调群即可。

- 任意有限生成 Abel 群 G 都可以分解成 $\mathbb{Z}^n \oplus T$ 的形式，其中 T 只包含有限阶的元素，n 为群 G 的**秩**。若 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 是有限生成 Abel 群的短正合列，则 B 的秩等于 A, C 的秩之和。
- 设 X 是拓扑空间，且存在 N 使得 $n > N$ 时 $H_n(X) = 0$。进一步设 $0 \le k \le N$ 时，$H_k(X)$ 都是有限生成的。定义**欧拉示性数** $\chi(X) = \sum_{k=0}^N (-1)^k \operatorname{rank}(H_k(X))$，其中求和项 $\operatorname{rank}(H_k(X))$ 也称为第 k 个**贝蒂数**，记作 $\beta_k(X)$。
- **欧拉-庞加莱定理**：设 X 是 n 维胞腔复形，则 $\chi(X) = \sum_{k=0}^N (-1)^k a_k(X)$，其中 $a_k(X)$ 为 X 的 k 维胞腔个数。
- 设 G 是 Abel 群，定义 $C_n(X; G) = \{\sum_{i=1}^m n_i\sigma_i \mid m \in \mathbb{N},\ n_i \in G,\ \sigma_i : \Delta^n \to X\}$，其对应的链复形所给出的同调群 $H_n(X; G)$ 称为**系数在 G 中的同调群**。

  > 也可以类似定义相对同调群 $H_n(X, A; G)$ 和约化同调群 $\widetilde{H}_n(X; G)$ 等。

第二十八节课

- **Borsuk-Ulam** 定理：设 $g : S^n \to \mathbb{R}^n$ 连续，则存在 $x \in S^n$ 使得 $g(x) = g(-x)$。
- 设 $f : S^n \to S^n$ 是奇函数，即 $f(-x) = -f(x)$，则 $\deg(f)$ 为奇数。
- 设 $\{A_1, \ldots, A_{n+1}\}$ 是 S^n 的闭覆盖，则存在 k 和 $y \in S^n$ 满足 $\{y, -y\} \subset A_k$。
- 设集族 $\{A_j\}_{j \in J}$，其中每个 A_j 包含某些单形 $\Delta_i^{n_i}$ 的一些面，且每个 A_j 中的面都有相同的维度。定义 K 为 $\bigsqcup_{i \in I} \Delta_i^{n_i}$ 按如下方式黏合得到的空间：每个 A_j 中的所有面都通过线性同胚黏合到同一个单形上。这样定义的 K 称为 **Δ 复形**。
- 一个 Δ 复形 K 称为是**单纯复形**，如果 K 中的每个单形都由其顶点唯一确定。

  > 单纯复形是 Δ 复形，Δ 复形是胞腔复形。

- 设 X 是拓扑空间，X 的**三角剖分**是指一个 Δ 复形 K 和同胚 $h : K \to X$。

  > 若能找到 K 和 h，空间 X 就称为**可三角剖分的**。

第二十九节课

- 设 X 是 Δ 复形，X 中的 n 维开单形对应了胞腔复形中的 n 维胞腔。对每个开单形 e_α^n，定义**特征映射** $\sigma_\alpha : \Delta^n \to X$ 为 Δ^n 到 $\overline{e_\alpha^n}$ 的自然同胚。

  > 将 σ_α 限制在 Δ^n 的一个面上，可以得到某 $n-1$ 维开单形的特征映射。

- n 维单形 $[v_0, \ldots, v_n]$ 的一个**排序**是指单形 $[v_{s(0)}, \ldots, v_{s(n)}]$，其中 s 是 0 到 n 的一个置换。将全体置换分成奇偶两类，则 $[v_0, \ldots, v_n]$ 的一个**定向**是指其顶点排序所对应的置换等价类的选取。
- 设 X 是 Δ 复形，定义 $\Delta_n(X)$ 为 X 中所有定向 n 维单形生成的自由阿贝尔群，其中同一单形的相同定向视为相等。$\Delta_n(X)$ 中的元素形如 $\sum_{\alpha=1}^m n_\alpha e_\alpha^n$，也称为 n **链**。

  > 设 σ_α 是 e_α^n 的特征映射，有时也把 $\Delta_n(X)$ 中的元素写成 $\sum_{\alpha=1}^m n_\alpha \sigma_\alpha$。

- 按奇异同调群的方法定义 $\partial_n : \Delta_n(X) \to \Delta_{n-1}(X)$，可以验证 $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$。于是 $\{\Delta_n(X)\}$ 构成链复形，对应的同调群 $H_n^\Delta(X)$ 称为**单纯同调群**。
- 设 $f : K \to K$ 连续，其中 K 是 n 维的有限单纯复形（只包含有限多个单形），则 f 诱导了线性映射 $f_*^{(k)} : H_k(K;\mathbb{Q}) \to H_k(K;\mathbb{Q})$。定义 **Lefschetz 数** Λ_f 为 $\sum_{k=0}^n (-1)^k \mathrm{trace}\big(f_*^{(k)}\big)$。

  Lefschetz 不动点定理：若 $\Lambda_f \neq 0$，则 f 一定有不动点。
- 给定有限单纯复形 K，K 的**重心重分** $K^{(1)}$ 由如下方式构造：记 K 中所有单形的重心集合为 $\mathcal{A}$，子集 $\{\hat{A}_1, \ldots, \hat{A}_k\} \subset \mathcal{A}$ 构成 $K^{(1)}$ 中的单形 $\iff$ 存在置换 s 满足 $A_{s(0)} \subsetneq \cdots \subsetneq A_{s(k)}$，其中 $\hat{A}_i$ 是单形 $A_i \subset K$ 的重心。进一步，我们递归地定义 $K^{(m+1)} = [K^{(m)}]^{(1)}$。
- 设 K 和 L 都是有限单纯复形，映射 $s : K \to L$ 称为是**单纯**的，如果以下两条成立：
  1. 若 A 是 K 中单形，则 $s(A)$ 是 L 中单形.
  2. 设 $A = [v_0, \ldots, v_k]$，则 $s\big(\sum_{i=0}^k t_i v_i\big) = \sum_{i=0}^k t_i s(v_i)$，这里 $\sum t_i = 1$，$t_i \geq 0$.

  > 注意 $s(A)$ 的维数可以比 A 低。

- 设 $f : K \to L$ 连续，对任意 $x \in K$，$f(x)$ 总落在 L 中唯一的单形内部，称这个单形为 $f(x)$ 的**承载子**。单纯映射 $s : K \to L$ 称为 f 的**单纯估计**，如果 $s(x)$ 总落在 $f(x)$ 的承载子中。

  > 若 s 是 f 的单纯估计，则 s 同伦于 f。

- 设 $f : K \to L$ 连续，则当 m 足够大时，存在 $f : K^{(m)} \to L$ 的单纯估计 $s : K^{(m)} \to L$。

第三十节课

- **Hopf trace theorem**：设 K 是 n 维有限单纯复形，$f : K \to K$ 满足 $f(K^k) \subset K^k$，这里 K^k 是 K 的 k 维骨架，则有 $\sum_{k=0}^n (-1)^k \mathrm{trace}\big(f_*|_{H_k(K^k, K^{k-1};\mathbb{Q})}\big) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \mathrm{trace}\big(f_*^{(k)}\big) = \Lambda_f$。

  > 特别地，当 $f = \mathrm{id}_K$ 时，定理退化为欧拉-庞加莱定理。

- 设 G 是群，形如 $[g,h] = ghg^{-1}h^{-1}$ 的元素称为**交换子**，其中 $g, h \in G$。令 N 为全体交换子生成的子群，则 N 正规，相应的商群 $G^{ab} = G/N$ 称为 G 的**阿贝尔化**。

- 设 X 是拓扑空间，则 $H_1(X)$ 可视为 $\pi_1(X)$ 的阿贝尔化。