

## London-Chain

La méthode London-Chain est une extension du modèle Chain-Ladder et repose également sur le développement de triangles de sinistralité cumulée. Le développement n'est plus ici linéaire mais affine, en introduisant des constantes. En reprenant les notations de Chain-Ladder, le modèle suppose qu'il existe des  $\lambda_k$  et des  $a_k$  tels que :

$$\forall k \in \llbracket 1; N-1 \rrbracket, \quad \forall i \in \llbracket 1; N-k \rrbracket \quad \mathbb{E}[S_{i,k+1}] = \lambda_k * \mathbb{E}[S_{i,k}] + a_k$$

Dans ce modèle, on va chercher à estimer les paramètres  $\lambda_k$  et  $a_k$  par la méthode des moindres carrés :

$$(\hat{\lambda}_k, \hat{a}_k) = \min \left( \sum_{i=1}^{N-k} (S_{i,k+1} - \lambda_k S_{i,k} - a_k)^2 \right)$$

Pour  $k = N-1$ , on posera  $\hat{a}_k = 0$ .

Ceci conduit aux égalités suivantes :

$$\begin{cases} \hat{\lambda}_k = \frac{\frac{1}{N-k} * (\sum_{i=1}^{N-k} S_{i,k+1} S_{i,k}) - \bar{S}_k \bar{S}_{k+1}}{\frac{1}{N-k} * (\sum_{i=1}^{N-k} S_{i,k}^2) - \bar{S}_k^2} \\ \hat{a}_k = \bar{S}_{k+1} - \hat{\lambda}_k * \bar{S}_k \end{cases}$$

Où

$$\bar{S}_k = \frac{1}{N-k} * \sum_{i=1}^{N-k} S_{i,k} \quad \text{et} \quad \bar{S}_{k+1} = \frac{1}{N-k} * \sum_{i=1}^{N-k} S_{i,k+1}$$

### Exemple

Prenons l'exemple d'une branche de durée 5ans donné au triangle suivant avec des montants exprimés en millions d'euros :

	0	1	2	3	4
2014	304	380	431	445	450
2015	317	400	453	468	
2016	296	374	424		
2017	323	405			
2018	326				

À titre d'exemple calculons  $\hat{\lambda}_1$  et  $\hat{a}_1$  :

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{\frac{1}{5-1} * (\sum_{i=1}^4 S_{i,1+1} S_{i,1}) - \bar{S}_1 \bar{S}_{1+1}}{\frac{1}{5-1} * (\sum_{i=1}^4 S_{i,1}^2) - \bar{S}_1^2}$$

$$\bar{S}_1 = \frac{1}{5-1} \sum_{i=1}^4 S_{i,1} = \frac{1}{4} * (304 + 317 + 296 + 323) = 310$$

$$\bar{S}_{1+1} = \frac{1}{5-1} \sum_{i=1}^4 S_{i,2} = \frac{1}{4} * (380 + 400 + 374 + 405) = 389,75$$

Par ailleurs,

$$\sum_{i=1}^4 S_{i,1+1} S_{i,1} = 304 * 380 + 317 * 400 + 296 * 374 + 323 * 405 = 120\,959,75$$

Et on obtient donc :


$$\hat{\lambda}_1 = \frac{\frac{1}{4} * (120\,959,75) - 310 * 389,75}{\frac{1}{4} * (304^2 + 317^2 + 296^2 + 323^2) - 310^2} = 1,22$$

Puis

$$\hat{a}_1 = 389,75 - 1,22 * 310 = 11,55$$

On obtient alors le triangle cumulé :

	0	1	2	3	4
2014	304	380	431	445	450
2015	317	400	453	468	473
2016	296	374	424	438	443
2017	323	405	459	474	479
2018	326	409	463	479	484



X 1,22 puis + 11,55

## Bornhuetter-Ferguson

La méthode de Bornhuetter-Ferguson repose elle aussi sur des triangles de développement. Elle se fonde non pas sur le comportement d'une année sur l'autre des sinistres comme dans Chain-Ladder mais plutôt sur une estimation de la charge ultime et de l'évolution du montant des sinistres connus à ce jour vers cette charge ultime.

Considérons un triangle de développement.

**Définition (Cadence de développement) :** La cadence de développement d'une année de développement  $k$  ( $k$  compris entre 1 et  $N$ ) est définie par :

$$\gamma_k = \frac{\mathbb{E}[S_{i,k+1}]}{\mathbb{E}[S_{i,N}]}$$

Il s'agit du pourcentage de règlement effectué sur les k premières années de développement. On a en particulier  $\gamma_N = 1$ .

On note toujours les facteurs de développement :

$$\lambda_k = \frac{\mathbb{E}[S_{i,k+1}]}{\mathbb{E}[S_{i,k}]}$$

Les cadences de développement ne peuvent être estimées qu'à partir de la première année de survénance car c'est la seule pour laquelle on connaît le déroulement des règlements jusqu'à 100%. On a :

$$\gamma_k = \prod_{i=k}^{N-1} \frac{1}{\lambda_i}$$

### Le modèle

La méthode de Bornhuetter Ferguson consiste à supposer qu'il existe et qu'on dispose de vecteurs  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  et  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_N)$  avec  $\gamma_N = 1$  tels que :

$$\forall i, k \in \llbracket 1; N \rrbracket, \mathbb{E}[S_{i,k}] = \gamma_k * \alpha_i.$$

On a donc en particulier :

$$\alpha_i = \mathbb{E}[S_{i,N}] \text{ et } \gamma_k = \frac{\mathbb{E}[S_{i,k+1}]}{\mathbb{E}[S_{i,N}]}$$

Le premier terme  $\alpha_i$  est la charge ultime de la survénance i tandis que le second terme  $\gamma_k$  est la cadence de développement associée à l'année de développement k.

Ces vecteurs peuvent être obtenus en utilisant d'autres méthodes (comme par exemple, Chain-Ladder), en utilisant les données statistiques du marché ou bien en considérant la méthode des S/P.

Connaissant la prime reçue  $P_i$  l'année i et le loss-ratio S/P attendu, on peut estimer  $\alpha_i$  par :

$$\hat{\alpha}_i = \frac{S}{P} * P_i$$

Les  $\gamma_k$  peuvent aussi être estimés, comme on l'a mentionné, par le déroulement de la première année de survénance. Avec ce modèle, pour tout k compris entre 1 et N, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_{i,k}] &= \mathbb{E}[S_{i,N+1-i}] + \left( \frac{\mathbb{E}[S_{i,k}]}{\mathbb{E}[S_{i,N}]} - \frac{\mathbb{E}[S_{i,N+1-i}]}{\mathbb{E}[S_{i,N}]} \right) * \mathbb{E}[S_{i,N}] \\ &= \mathbb{E}[S_{i,N+1-i}] + (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{N+1-i}) * \hat{\alpha}_i \end{aligned}$$

On obtient ainsi le développement du triangle des sinistres cumulés avec

$$\hat{S}_{i,k} = S_{i,N+1-i} + (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{N+1-i}) * \hat{\alpha}_i$$

Où  $S_{i,N+1-i}$  est connu car il est sur la diagonale.

Au final, la PSAP se calcule par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} PSAP &= \sum_{i=1}^N S_{i,N} - S_{i,N+1-i} \\ &= \sum_{i=1}^N (1 - \hat{\gamma}_{N+1-i}) * \hat{\alpha}_i \end{aligned}$$

### Exemple

Prenons un exemple de branche de durée 6ans avec un S/P cible de 97%, considéré fixe dans le temps tel que présenté :

	0	1	2	3	4	5	Prime	Charge Ultime
2014	989	1788	2207	2890	3311	3389	3500	3395
2015	1002	2090	2667	3411	3682	3769	3900	3783
2016	1165	2398	3135	3987	4529	4630	4500	4365
2017	1468	2854	3870	4828	5418	5528	4900	4753
2018	1699	3252	3876	4892	5519	5635	5200	5044
2019	1859	3231	3951	5124	5847	5981	6000	5820
$\gamma_k$	0,292	0,528	0,651	0,853	0,977	1,000		

Par exemple ici,

$$S_{4,5} = 3870 + (0,977 - 0,651) * 97\% * 4900 = 5418$$

Par ailleurs, la PSAP vaut dans cet exemple 8892.

### Utilisation des triangles

La santé d'une compagnie IARD repose avant tout sur le lien entre la distribution, les souscripteurs, les indemnisateurs, les actuaires et les techniciens. Tous doivent être parfaitement alignés sur la vision de la sinistralité et partager une même ambition d'orienter la souscription vers les risques choisis. Si les actuaires ne prennent pas en compte les changements de processus d'indemnisation ou les nouvelles orientations de souscription ou même ne communiquent pas sur la façon dont ils provisionnent les sinistres ultimes, les opérationnels du terrain n'accorderont pas de crédibilité aux chiffres comptables et resteront sans directive sur les orientations à suivre en matière de souscription. Inversement, si les souscripteurs ou les gestionnaires ne préviennent pas les actuaires des changements de méthodes, de processus ou de choix de clients, ils ne pourront pas intégrer ces

éléments dans les provisions et la compagnie risque de se retrouver en situation de sous-provisionnement ou de sur-provisionnement. La prévision de la sinistralité à l'ultime est un exercice complexe et sujet à jugements d'experts, comme on a pu le voir en parcourant les techniques de provisionnement. Il est crucial pour les actuaires de pouvoir concrétiser et documenter leurs choix de sinistralité ultime qui pourront de toute façon être remis en question, en particulier sur les branches longues. Le suivi de la sinistralité au fil du temps est de même très important pour vérifier l'adéquation du niveau des provisions, pour le cas échéant, constituer ou libérer des provisions.

Les triangles de sinistralité sont un moyen classique et efficace de communiquer sur la sinistralité et son évolution. La décomposition du triangle décumulé en 3 éléments (dossier/dossier, stock d'IBNR et boni-mali) va permettre ainsi une visualisation de l'adéquation du provisionnement au fil du temps.

Par définition du boni-mali (ou run-off), on a la relation suivante, traduisant le fait que la variation d'IBNR déflaquée des règlements de l'année de développement étudié provoque un boni ou un mali :

$$BM_{i,k} = -C_{i,k} + R_{i,k-1} - R_{i,k}$$

En partant de cette base, pour chaque année de survenance, on pourra répondre à plusieurs interrogations :

- Le niveau de provisionnement à l'ultime initial était-il suffisant ?
- Existe-t-il une tendance plus ou moins systématique à sur provisionner ou sous provisionner ?
- Au cours des années de développement quels dossiers ont provoqué une insuffisance des provisions ou au contraire lesquels ont pu être libérés suite à analyse du dossier ?

Les triangles fournissent également des éléments pour produire des indicateurs de rentabilité.

## Rentabilité d'une entreprise

Avant de construire des modèles prospectifs pour évaluer sa solvabilité, une compagnie d'assurance doit avant tout évaluer sa performance réelle, observée à posteriori du calcul des ultimes. Il s'agit de mesurer et de piloter les résultats de l'entreprise à partir des indicateurs permettant de repérer très rapidement des déviations dans les charges et produits de l'entreprise.

La plupart des compagnies d'assurance ont parmi leurs associés de nombreux investisseurs demandant une rentabilité à court, moyen ou long terme en contrepartie du fait qu'ils ont misé leurs fonds dans la compagnie. Leurs exigences sont de plus en plus fortes en raison de la mondialisation qui fait qu'un même investisseur, qui auparavant n'avait qu'un choix assez restrictif pour placer son argent (le plus souvent dans son propre pays), peut aujourd'hui le placer dans n'importe quel secteur d'activité avec n'importe quelle taille d'entreprise et surtout n'importe où dans le monde. Une compagnie d'assurance est donc en concurrence aussi bien avec les autres compagnies d'assurance qu'avec la start-up de californie proposant des batteries électriques longue durée ou avec les multinationales de l'industrie automobile, du luxe ou encore de la microentreprise de chaussures en Inde.

Pour permettre aux investisseurs d'avoir une vision claire de la performance actuelle et prévisionnelle de l'entreprise, les contrôleurs de gestion des assureurs établissent des plans ou budgets donnant pour les 3 ou 5 prochaines années les prévisions de rendement. Ils projettent aussi tous les postes d'un compte de résultat (primes, prestations, coûts, dividendes etc) permettant d'en déduire les résultats nets estimés futurs. La qualité d'une entreprise est ainsi estimée par les investisseurs et les analystes en la capacité à respecter le plan construit. Ni plus ni moins : une sous-performance est bien sûr un gage d'échec, mais une surperformance est mal vue car la compagnie aurait dû l'intégrer dans le plan pour pouvoir faire encore mieux. Les indicateurs de performance publiés ont un impact direct sur le cours de l'action de la compagnie, si cette dernière est cotée en bourse.

Parmi les indicateurs principaux, on peut citer :

- 1) Le chiffre d'affaires
- 2) Le ratio combiné
- 3) Le ratio de sinistralité
- 4) Le ratio des coûts
- 5) Le résultat opérationnel
- 6) Le résultat net
- 7) La rentabilité des capitaux propres

### Le chiffre d'affaire

Il s'agit de la somme des primes émises sur la période étudiée. Il se note souvent GWP pour Gross Written Premium et il ne doit pas être confondu avec les primes acquises qui sont après mouvement de PPNA. L'évaluation des primes émises peut inclure des estimations actuarielles pour projeter des primes émises en retard ou au contraire des primes à annuler.

### Le ratio combiné

L'indicateur le plus étudié en assurance IARD s'appelle le ratio combiné (Combined Ratio). Sa définition est la suivante :

$$CoR = \frac{S + F}{P}$$

Où S désigne la charge de sinistres sur la période considérée, F désigne les coûts supportés par l'entreprise sur la même période et P désigne les primes acquises toujours sur cette même période. Pour analyser, le CoR est souvent ventilé en ratio de sinistralité (Loss Ratio) et en ratio des coûts (Expense Ratio)

$$LR = \frac{S}{P} \quad \text{et} \quad ER = \frac{F}{P}$$

Si le produit est parfaitement tarifé (la prime pure vaut le sinistre et les chargements valent les coûts) alors il reste en marge les chargements de sécurité. Le seuil de rentabilité est alors de 100%. Si le CoR est inférieur à 100%, l'entreprise fait un profit technique ; s'il est supérieur à 100% elle fait une perte technique.

### Le résultat opérationnel

Le résultat opérationnel ou operating profit (OP) représente le profit de l'entreprise provenant de son activité traditionnelle d'assurance. Il s'agit de la capacité de l'entreprise à dégager de la marge en régime de croisière. Il est calculé pour les multinationales en normes IFRS, donnant des règles comptables différentes des normes locales (nationales) :

$$OP = P - S - F + \text{Marge financière}$$

Il est souvent mesuré en % du chiffre d'affaire. Un résultat opérationnel d'au moins 8% du chiffre d'affaire est considéré de très bonne qualité.

### Résultat net

Le résultat net ou net income donne le résultat final de l'entreprise soit le résultat opérationnel ajusté des éléments exceptionnels et des impôts. A noter que le résultat net peut soit être versé en dividendes soit être placé en report à nouveau, cad laissé dans l'entreprise en augmentation des fonds propres. Chaque année, les entreprises annoncent la part distribuée et reportée.

### Rentabilité des capitaux propres

La rentabilité des capitaux propres ou Return en Equity est définie comme le rapport entre le résultat net et les capitaux propres attribuables aux actionnaires :

$$RoE = \frac{NI}{\text{Capitaux propres}}$$

Le capital propre représente la différence entre le montant total des actifs et le montant total des passifs. Les analystes et investisseurs estiment que les compagnies d'assurance doivent fournir un RoE de 12% objectif auquel les grandes compagnies essayent de se tenir. Pour un euro investi, un actionnaire s'attend à voir un résultat net de 0,12€ par an.