# Review

- *Green's formula*

$$\oint_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(Q'_x - P'_y\right) dxdy.$$

$$\oint_{\partial D} \vec{v} \cdot \vec{\tau} dl = \iint_D \nabla \times \vec{v} dxdy.$$

$$\int_{\partial D} \vec{v} \cdot \vec{n} dl = \iint_D (P'_x + Q'_y) dxdy.$$

$$\int_{\partial D} \vec{v} \cdot \vec{n} dl = \iint_D \nabla \cdot \vec{v} dxdy.$$

- *Green*公式的条件

• *Green*公式的应用

1）第二型曲线积分 $\rightarrow$ 二重积分

2）二重积分 $\rightarrow$ 第二型曲线积分

3）第二型曲线积分 $\rightarrow$ 第二型曲线积分+二重积分

4）微分形式是否存在原函数

5）恰当方程的求解

# §6. Gauss公式和Stokes公式

## 1.*Gauss*公式

Thm. (*Gauss*公式)设$\Omega\subset\mathbb{R}^3$为有界区域,向量场$\vec{v}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$在$\Omega$内连续可微,在闭区域$\bar{\Omega}=\Omega\bigcup\partial\Omega$上连续,则

$$\iint_{\partial\Omega}Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy$$

$$=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz.$$

在证明*Gauss*公式前先对其作一点解释:

Remark: *Gauss*公式将空间有界区域$\Omega$的边界曲面$\partial\Omega$上的第二型曲面积分转化为$\Omega$上的三重积分.其中$\partial\Omega$外侧为正.

Remark: 定义散度算子$\nabla\cdot$为$\nabla\cdot\vec{v}=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$,

则*Gauss*公式为$\iint_{\partial\Omega}\vec{v}\cdot d\vec{S}=\iiint_{\Omega}\nabla\cdot\vec{v}dxdydz$,

或 $$\iint_{\partial\Omega}\vec{v}\cdot\vec{n}dS=\iiint_{\Omega}\nabla\cdot\vec{v}dxdydz.$$

Remark: *Green*公式的第二种形式为

$\int_{\partial D}\vec{v}\cdot\vec{n}dl=\iint_D(P'_x+Q'_y)dxdy$,即$\int_{\partial D}\vec{v}\cdot\vec{n}dl=\iint_D\nabla\cdot\vec{v}dxdy.$

因而*Gauss*公式是*Green*公式在三维空间的推广.

Remark:与$Green$公式一样,应注意$Gauss$公式成立的条件.

Proof of Gauss Formula: 为证明$Gauss$公式, 只要证

$$\iint_{\partial\Omega} R dx \wedge dy = \iiint_{\Omega} R'_z dxdydz$$

$$\iint_{\partial\Omega} Q dz \wedge dx = \iiint_{\Omega} Q'_y dxdydz,$$

$$\iint_{\partial\Omega} P dy \wedge dz = \iiint_{\Omega} P'_x dxdydz.$$

下面只证第一式, 同理可证其它两式.

Case1. 设$\Omega$可表示为$\begin{cases}(x,y)\in D_{xy}, \\ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y),\end{cases}$ 即$\Omega$是母线平行于$oz$轴的曲顶柱体, $\Omega$的下底和上顶分别为

$S_1: z = z_1(x, y), (x, y) \in D_{xy}$和$S_2: z = z_2(x, y), (x, y) \in D_{xy}$.

记$\Omega$的侧面为柱面$S_3$.则$\partial\Omega = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, 外侧为正.

•在柱面$S_3$上,法向量与$oz$轴垂直,故$\iint_{S_3} R dx \wedge dy = 0$.

•在下底$S_1$的下侧,法向量与$oz$轴成钝角,故

$$\iint_{S_1} R dx \wedge dy = -\iint_{D_{xy}} R(x, y, z_1(x, y)) dxdy.$$

•在上顶$S_2$的上侧,法向量与$oz$轴成锐角,故

$$\iint_{S_2} R dx \wedge dy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_2(x, y)) dxdy.$$

三式相加得:

$$\iint_{\partial\Omega} R dx \wedge dy$$

$$= \iint_{D_{xy}} \left[R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y))\right] dxdy$$

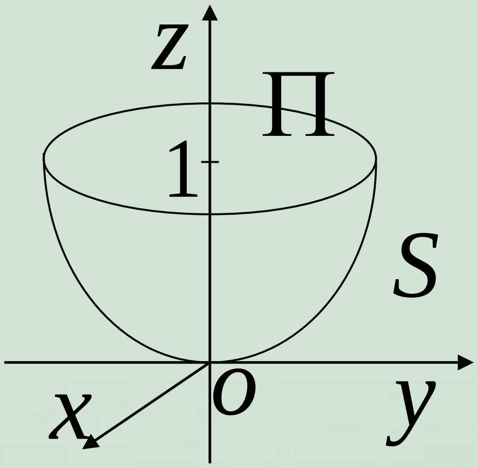
$$= \iint_{D_{xy}} \left( \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) dxdy = \iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz.$$

Case2.Ω可表示为形如Case1中区域的并.(证明略)□

例: $I = \iint_S x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$, 其中$S$为长方体$\Omega: |x| \le a, |y| \le b, |z| \le c$的外表面.

解: 由Guass公式, $I = \iiint_{\Omega} 3 dxdydz = 24abc$.□

例: $I=\iint_S (2x+z)dy\wedge dz+zdx\wedge dy$, 其中$S$为曲面$z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$, 其法向量与$z$轴正向夹角为锐角.




解: 设$S$与平面$\Pi: z=1, x^2+y^2\le 1$所围空间区域为$\Omega$, 则$\partial\Omega=S^-\bigcup\Pi$, 其中$\Pi$的正向向上.

记$\vec{v}=(2x+z,0,z)$, 则$I=\iint_S \vec{v}\cdot d\vec{S}$, 由Gauss公式可得

$$\iint_{S^-}\vec{v}\cdot d\vec{S}+\iint_{\Pi}\vec{v}\cdot d\vec{S}=\oiint_{\partial\Omega}\vec{v}\cdot d\vec{S}=\iiint_{\Omega}\nabla\cdot\vec{v}dxdydz$$

$$=3\iiint_{\Omega}dxdydz=3\int_0^1 dz\iint_{0\le x^2+y^2\le z}dxdy=3\pi/2.$$

$$\iint_S\vec{v}\cdot d\vec{S}=-\frac{3\pi}{2}+\iint_{\Pi}\vec{v}\cdot d\vec{S}=-\frac{3\pi}{2}+\iint_{\Pi}zdS=-\frac{3\pi}{2}+\pi=-\frac{\pi}{2}.\square$$

例:求$I=\oiint_S \frac{\cos<\vec{r},\vec{n}>}{r^2}dS$, $S$为简单光滑闭曲面,$\vec{n}$为$S$的单位外法向量,$M_0$为$S$内部一个确定点,$\vec{r}$是$M_0$到$S$上的点的矢向量,$r$表示$\vec{r}$的长度.

解:取$S$内部以$M_0$为球心半径为$\delta$的球面为$S_1$,外侧为正.记$S$与$S_1$所围成的区域为$\Omega$,则$\partial\Omega=S\cup S_1^-$.

$$\frac{\cos<\vec{r},\vec{n}>}{r^2}=\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\vec{n},\qquad \nabla\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)=0.$$

由Gauss公式得$\oiint_{S\cup S_1^-}\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\vec{n}dS=\iiint_\Omega \nabla\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)dxdydz=0$,

于是$I=\oiint_S \frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\vec{n}dS=\oiint_{S_1}\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\vec{n}dS=\oiint_{S_1}\frac{1}{r^2}dS=4\pi$.□

例*: 设$f(u)$二阶连续可微, $f(0)=0$, 求

$$I=\oiint_{\Sigma} x^3 dy\wedge dz+\left[\frac{1}{z}f(\frac{y}{z})+y^3\right]dz\wedge dx+\left[\frac{1}{y}f(\frac{y}{z})+z^3\right]dx\wedge dy,$$

其中, $\Sigma$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与两球面$x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2+z^2=4$所围空间区域$\Omega$的外表面.

解: 记$P=x^3, Q=\frac{1}{z}f(\frac{y}{z})+y^3, R=\frac{1}{y}f(\frac{y}{z})+z^3, (y\neq 0)$.

由于 $\lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{y}f(\frac{y}{z})=\lim\limits_{y\to 0}\frac{f(\frac{y}{z})-f(0)}{y}=\frac{f'(0)}{z}$,

定义 $R(x,0,z)\triangleq\lim\limits_{y\to 0}R(x,y,z)=\frac{f'(0)}{z}+z^3$.

可以验证$P, Q, R$在$\Omega$中连续可微, 且

$$\frac{\partial P}{\partial x}=3x^2, \frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{1}{z^2}f'(\frac{y}{z})+3y^2, \frac{\partial R}{\partial z}=-\frac{1}{z^2}f'(\frac{y}{z})+3z^2.$$

由$Gauss$公式, $I=3\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)dxdydz$

令$x=r\sin\varphi\cos\theta, y=r\sin\varphi\sin\theta, z=r\cos\varphi$, 则

$1\le r\le 2$, 由$z=\sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\varphi=\sin\varphi, \varphi=\pi/4.$

又$z>0, 0<\varphi\le\pi/4.$于是,

$$I=3\int_1^2 r^2\cdot r^2 dr\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/4}\sin\varphi d\varphi$$

$$=3\times\frac{31}{5}\times 2\pi\times(1-\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{93}{5}(2-\sqrt{2})\pi.$$

## 2.Stokes公式

Thm.(Stokes公式)设向量场 $\vec{v}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$在空间区域Ω内连续可微, $S$是Ω内逐片光滑的有向曲面, ∂S逐段光滑,则

$$\oint_{\partial S} Pdx+Qdy+Rdz$$

$$=\iint_S (R'_y-Q'_z)dy\wedge dz+(P'_z-R'_x)dz\wedge dx+(Q'_x-P'_y)dx\wedge dy$$

$$=\iint_S \det\begin{pmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix} dS$$

Remark: *Stokes*公式中$\partial S$为有向曲线,其方向由有向曲面$S$诱导:站在$S$的正侧,沿$\partial S$的正向前进时,$S$总在在左手侧.

Remark: $\vec{v}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$,定义旋度算子$\nabla\times$为

$$\nabla\times\vec{v}=\det\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{pmatrix},$$

则*Stokes*公式可记为$\oint_{\partial S}\vec{v}\cdot\vec{\tau}\,dl=\iint_S(\nabla\times\vec{v})\cdot\vec{n}\,dS$.

Remark: 令$\vec{v}=P\vec{i}+Q\vec{j}+0\vec{k}$, 设$D$为$oxy$上区域, 正向向上, 则由$Stokes$公式可得

$$\oint_{\partial D} Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy$$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

这正是$Green$公式. 因此$Stokes$公式是$Green$公式在三维空间的推广.

Remark: $Stokes$公式成立的条件。

例: $I=\oint_L (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$, 其中$L$是$x^2+y^2=R^2$与$x/a+z/b=1(a>0,b>0)$的交线, 其正向从$oz$轴往下看为逆时针方向.

解: 记$\vec{v}=(y-z)\vec{i}+(z-x)\vec{j}+(x-y)\vec{k}$, 则

$$\nabla\times v=\det\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ y-z & z-x & x-y\end{pmatrix}=-2(1,1,1).$$

记$S$为平面$x/a+z/b=1$包含在柱面$x^2+y^2=R^2$以内的部分, 上侧为正, 则其正单位法向量为

$$\vec{n}=\frac{(1/a,0,1/b)}{\sqrt{(1/a)^2+(1/b)^2}}=\frac{(b,0,a)}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

面积微元$dS=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}dxdy.$

由Stokes公式

$$I=\oint_L \vec{v}\cdot\vec{\tau}dl=\iint_S \nabla\times\vec{v}\cdot\vec{n}dS=\frac{-2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}\iint_S dS$$

$$=\frac{-2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}\iint_{x^2+y^2\le R^2}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}dxdy$$

$$=\frac{-2(a+b)}{a}\pi R^2.\square$$

例:$L$为球面$x^2+y^2+z^2=4x(z\geq 0)$与柱面$x^2+y^2=2x$的交线,从$oz$轴正向看去为逆时针方向. 求

$$I=\oint_L (y^2+z^2)dx+(x^2+z^2)dy+(x^2+y^2)dz.$$

解法一: 记$\vec{v}=(y^2+z^2)\vec{i}+(x^2+z^2)\vec{j}+(x^2+y^2)\vec{k}$,则

$$\nabla\times\vec{v}=\det\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ y^2+z^2 & x^2+z^2 & x^2+y^2\end{pmatrix}$$

$$=2(y-z)\vec{i}+2(z-x)\vec{j}+2(x-y)\vec{k}.$$

在$L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4x(z\geq 0) \\ x^2+y^2=2x \end{cases}$上, $z^2=x^2+y^2(z\geq 0)$.

取$S$为锥面$z^2=x^2+y^2(z\geq 0, x^2+y^2\leq 2x)$, 上侧为正,
则$S$的正单位法向量为

$$\vec{n}=(-x,-y,z)\Big/\sqrt{x^2+y^2+z^2}=(-x,-y,z)\Big/(\sqrt{2}z),$$

面积微元为

$$dS=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy=\sqrt{2}\,dxdy.$$

$$\nabla\times\vec{v}\cdot\vec{n}=2\sqrt{2}(x-y).$$

由$Stokes$公式得

$$I=\iint\limits_{S}\nabla\times\vec{v}\cdot\vec{n}dS$$

$$=4\iint\limits_{x^2+y^2\le 2x}(x-y)dxdy$$

（令$x=1+r\cos t, y=r\sin t$）

$$=4\int_0^1 rdr\int_0^{2\pi}(1+r\,\mathrm{cost})dt=2\pi\times 4\int_0^1 rdr=4\pi.$$

解法二：选$S$为球面$x^2+y^2+z^2=4x$上满足$z\geq 0$, $x^2+y^2\leq 2x$的部分，上侧为正.则在$S$上,

$$\vec{n}=(x-2,y,z)/2,\ z=\sqrt{4x-x^2-y^2},$$

$$dS=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy=\frac{2}{z}dxdy.$$

由Stokes公式,

$$I=\iint_S \nabla\times\vec{v}\cdot\vec{n}dS$$

$$=4\iint_{x^2+y^2\leq 2x}dxdy-4\iint_{x^2+y^2\leq 2x}\frac{y}{\sqrt{4x-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=4\iint_{x^2+y^2\leq 2x}dxdy=4\pi.\square$$

Remark:利用$Stokes$公式将沿有向闭曲线$L$的第二型曲线积分化为以$L$为边界的曲面$S$上的第二型曲面积分. 适当选取$S$,可以简化计算过程.

例:$I=\oint_L ydx+zdy+xdz$,其中$L$是$x^2+y^2+z^2=R^2$与$x+y+z=0$的交线,从$x$轴正向看去为逆时针方向.

分析:$v=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}$,$\nabla\times v=-\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$.利用$Stokes$公式计算该积分时,取$S$为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$的一部分, 还是取$S$为平面$x+y+z=0$的一部分,计算的难易程度不同.以下留作习题.

## 3. 空间向量场

Def. $\Omega\subset\mathbb{R}^3$中任一封闭曲面$S$的内部都包含在$\Omega$中,则称$\Omega$是面(二维)连通区域.

（形象地说就是没有“洞”的区域。）

Def. 对$\Omega\subset\mathbb{R}^3$中任一简单闭曲线L,均有$\Omega$中曲面以L为边界,则称$\Omega$是线(一维)连通区域.

例. $x^2+y^2+z^2<1$　面连通、线连通

$0<x^2+y^2+z^2<1$　线连通、非面连通

实心轮胎(救生圈)　面连通、非线连通

空间向量场与平面向量场有相似的结论, 证明方法也完全类似, 因此不加证明地将定理叙述如下:

Thm.设$\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$为区域$\Omega \subset \mathbb{R}^3$上的连续向量场,则以下命题等价:

(1)$\vec{v}$是$\Omega$上的保守场,

(2)对于$\Omega$中任意一条逐段光滑的有向闭曲线$L$,

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0.$$

(3)$\vec{v}$为$\Omega$上有势场, 即存在函数$f$,使$\vec{v} = \nabla f$.

Thm2. 设$\Omega \subset \mathbb{R}^3$为线连通区域,$\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$为$\Omega$上连续可微的向量场,则以下命题等价:

(1)$\vec{v}$为$\Omega$上的保守场.

(2)$\vec{v}$为$\Omega$上的无旋场.

证明无旋场是保守场时要用到Stokes公式

Remark:

•若向量场$\vec{v}$为$\Omega \subset \mathbb{R}^3$中保守场,则第二型曲线积分与路径无关,可以选择适当的积分路径简化计算.

•要验证单连通区域$\Omega \subset \mathbb{R}^3$上连续可微的向量场$\vec{v}$为保守场,只要验证$\vec{v}$为无旋场,即$\nabla \times \vec{v} = 0$.

•微分形式$Pdx+Qdy+Rdz$有原函数$f$

$\Leftrightarrow f$是向量场$\vec{v}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$的势函数

•可以利用第二型曲线积分来求$Pdx+Qdy+Rdz$的原函数

$$f(x,y,z)=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} Pdx+Qdy+Rdz,$$

也可以用不定积分法来求原函数.

例:判断$\vec{v}=(x-x_0)\vec{i}+(y-y_0)\vec{j}+(z-z_0)\vec{k}$是否为$\mathbb{R}^3$上的有势场,若是, 求其势函数.

解:在单连通区域$\mathbb{R}^3$上, $\nabla\times\vec{v}=0$,故$\vec{v}$为$\mathbb{R}^3$上无旋场,从而为保守场, 有势场, 其势函数可取为

$$f(x,y,z)$$

$$=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}(x-x_0)dx+(y-y_0)dy+(z-z_0)dz,$$

积分与路径无关,取为折线段$(x_0,y_0,z_0)\to(x,y_0,z_0)\to(x,y,z_0)\to(x,y,z)$.于是

$$f(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}(t-x_0)dt+\int_{y_0}^{y}(t-y_0)dt+\int_{z_0}^{z}(t-z_0)dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right].$$

故$\vec{v}$的势函数为

$$\frac{1}{2}\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]+C.\square$$

# 作业：习题4.7 No. 3, 5−7.

• 补充题：记$\mathbb{R}^3$中以原点为球心的单位球为$\Omega$，设

$$\vec{\mathrm{V}} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))^{\mathrm{T}} \in C^1(\mathbb{R}^3),\ \text{且}$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{\mathrm{V}}(x,y,z) = 0, & \forall (x,y,z) \in \Omega, \\ \vec{\mathrm{V}}(x,y,z) = (1,1,1)^{\mathrm{T}}, & \forall (x,y,z) \in \partial\Omega. \end{cases}$$

求证：$\iiint_{\Omega} (P+Q+R)\,dxdydz = 4\pi.$

Hint：利用Gauss公式将三重积分化为第二型曲面积分$\iint_{\partial\Omega} (x+y+z)\vec{\mathrm{V}} \cdot d\vec{S}.$