微积分 A2 第 12 次习题课参考答案　　级数

1. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，判断如下哪些级数必收敛.（　　）

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{u_n}{n}$。（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} {u_n}^2$。（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n - u_{2n})$。（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n + u_{n+1})$。

2. 设 $0 < a_n < \dfrac{1}{n}$，判断下列哪些级数必收敛.（　　）

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$；　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$；　(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$；　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} {a_n}^2 \ln n$。

3. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则以下哪些结论正确。（　　）

(A) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 小于 1；　(B) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 小于等于 1；

(C) 若极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在，其值小于 1；(D) 若极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在，其值小于等于 1；

4. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n = 2$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{2n-1} = 5$，求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和.

5. 讨论 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 的收敛性：

（1）$a_n = \sin\sqrt{n^2+a^2}\ (a \ne 0)$;　（2）$a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\cos\dfrac{n\pi}{3}$;

（3）$a_n = \dfrac{1}{n^p}\int_0^{\pi/4}\tan^n x\,\mathrm{d}x\ (p>0)$;　（4）$a_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\dfrac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x (p>0)$.

6. 讨论级数的收敛性：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\dfrac{x}{n}$；　（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{4^n\sin^{2n}x}{n}$；

（3）$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}\ (x>0)$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 若 $a_n > 0$，$p > 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left[n^p(e^{\frac{1}{n}} - 1)a_n\right] = 1$, 求 p 的取值范围.

8. 若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$收敛，且数列x_n单调减，证明$\lim_{n\to\infty} nx_n = 0$。

9. 设$f(x)$在$[-1,1]$上二阶连续可微，且$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$。证明级数$\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$绝对收敛。

10. 设正项数列$\{x_n\}$单调减少，且级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x_n$发散。判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+x_n}\right)^n$的收敛性，并说明理由.

11. 讨论级数$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{1}{1^p}-\frac{1}{2^q}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^q}+\frac{1}{5^p}-\frac{1}{6^q}+\cdots (p,q>0)$的收敛性。

12. $a_n > 0, \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lambda>0.$ 证明:$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ 收敛.

13. $a_n = \frac{1}{b_n}, b_1 = b_2 = 1, b_{n+1} = b_n + \frac{a_{n-1}}{n^2}, n \ge 2.$ 求证：$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛。