第 6 次习题课　　含参积分（教材第二章习题）

含参积分常用公式：

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx dx=\frac{b}{a^2+b^2},\ (a>0) \qquad \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx dx=\frac{a}{a^2+b^2},\ (a>0) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}.$$

习题 2.1

1. 证明：$f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$ 在$\mathbb{R}^2$上非一致收敛.

证明：取 $(x_n,y_n)=(\sqrt{2n\pi},0),(a_n,b_n)=(\sqrt{(2n+\frac{1}{2})\pi},0).$ 则

$$\sqrt{(x_n-a_n)^2+(y_n-b_n)^2}\to 0,\ n\to+\infty \text{ 时};$$

$$\sin(x_n^2+y_n^2)=0,\sin(a_n^2+b_n^2)=1.$$

由 Cauchy 准则，$\sin(x^2+y^2)$ 在$\mathbb{R}^2$上非一致收敛.

4. $(1)\int_1^{+\infty} x^s e^{-x}dx\ \ (a\le s\le b)$ 一致收敛

$$x^s e^{-x}\le x^b e^{-x},\forall x\ge 1,\forall s\in[a,b]; \text{且}\int_1^{+\infty} x^b e^{-x}dx\text{收敛; Weirstrass判别法.}$$

$(2)\int_1^{+\infty}\frac{\cos yx}{1+x^2}dx\ \ (-\infty<y<+\infty)$ 一致收敛

$$\left|\frac{\cos yx}{1+x^2}\right|\le\frac{1}{1+x^2},\forall x\ge 1,\forall y\in\mathbb{R};\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx\text{收敛; Weirstrass判别法.}$$

$(3)n>-\frac{1}{2}$时,$\int_1^{+\infty} x^{2n}e^{-tx^2}dx\ \ (0<t_0\le t<+\infty)$ 一致收敛

($n\le-\frac{1}{2}$时,$\forall t\ge t_0>0,\int_0^1 x^{2n}e^{-tx^2}dx$ 发散.)

$n>-\frac{1}{2}$时,$\forall t\ge t_0>0,x=0$ 不是$\int_0^{+\infty} x^{2n}e^{-tx^2}dx$ 的瑕点.

$$x^{2n}e^{-tx^2} \le x^{2n}e^{-t_0x^2}, \forall x \ge 1, \forall t \ge t_0 > 0; \int_1^{+\infty} x^{2n}e^{-t_0x^2}dx\text{收敛; Weirstrass判别法.}$$

$$(4)\int_1^{+\infty} e^{-tx}\sin xdx \quad (0 < t_0 \le t < +\infty)\text{一致收敛}$$

$$\left|e^{-tx}\sin x\right| \le e^{-t_0x}, \forall x \ge 1, \forall t \ge t_0 > 0; \int_1^{+\infty} e^{-t_0x}dx\text{收敛; Weirstrass判别法.}$$

（也可以用 Dirichlet 判别法）

$$(5)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\cos tx}{1+x^4}dx \quad (-\infty < t < +\infty)\text{一致收敛}$$

$$\left|\frac{x^2\cos tx}{1+x^4}\right| \le \frac{x^2}{1+x^4}, \forall x, \forall t; \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx\text{ 收敛. Weirstrass判别法.}$$

$$(6)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+(x+t)^2} \quad (0 \le t < +\infty)\text{一致收敛}$$

$$\frac{1}{1+(x+t)^2} \le \frac{1}{1+x^{\ 2}}, \forall x \ge \forall t \ge 0; \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{\ 2}}\text{收敛. Weirstrass判别法.}$$

$$(7)\int_1^{+\infty} e^{-tx}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx \quad (0 \le t < +\infty)\text{一致收敛}$$

$$\forall t \ge 0, \frac{e^{-tx}}{\sqrt{x}}\text{关于}x\text{单调}; x \to +\infty\text{时}, \frac{e^{-tx}}{\sqrt{x}}(\le \frac{1}{\sqrt{x}})\text{对}t \ge 0\text{一致趋于}0;$$

$$\left|\int_1^a \cos xdx\right| \le 2, \forall a > 1. \quad \text{Dirichlet判别法.}$$

$$(8)\int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{-tx^2}dx \quad (0 \le t < +\infty)\text{非一致收敛}$$

$$\forall M > 0, \exists A = M+1, B = 2A, t = \frac{1}{A^2}, s.t.$$

$$\int_A^B \sqrt{t}e^{-tx^2}dx = \int_{A\sqrt{t}}^{B\sqrt{t}} e^{-y^2}dy \ge (B-A)\sqrt{t}e^{-tB^2} \ge e^{-4}.$$

由 Cauchy 准则，非一致收敛

$$(9)\int_1^{+\infty} x^{1-y}dx \quad (2 < y < +\infty)\text{非一致收敛}$$

法一：Cauchy 准则。 $\exists\varepsilon=\dfrac{3}{4},\forall M>0,$取定$A=M+2,B=A^2$，因$\lim\limits_{y\to2^+}A^{2-y}=1,$

$\exists y_0\in(1,2),s.t.A^{2-y_0}=\dfrac{3}{2},$于是

$$\int_A^B x^{1-y_0}dx=\frac{B^{2-y_0}-A^{2-y_0}}{2-y_0}>B^{2-y_0}-A^{2-y_0}=\frac{3}{4}\ .$$

法二：利用第 6 题结论。 $y=2$时$,\int_1^{+\infty}x^{1-y}dx$不收敛.

$(10)\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x^2}{x^p}dx\ \ (0\le p<3)$ 非一致收敛$\left(p\ge3\text{时},\int_0^1\dfrac{\sin x^2}{x^p}dx\text{发散}\right)$

$\forall p\ge0,\dfrac{1}{x^{p+1}}$关于$x$单调;当$x\to+\infty$时$,\dfrac{1}{x^{p+1}}(\le\dfrac{1}{x})$关于$p\ge0$一致收敛到$0$;

$\left|\int_1^A x\sin x^2dx\right|\le2;$由Dirichlet判别法$,\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin x^2}{x^p}dx$对$0\le p<3$一致收敛. 因此，要证

$\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x^2}{x^p}dx\quad(0\le p<3)$非一致收敛，只要证$\int_0^1\dfrac{\sin x^2}{x^p}dx$关于$0\le p<3$非一致收敛。

法一：一致收敛的定义（或 Cauchy 准则）。

$\exists\varepsilon=\dfrac{1}{\pi},\forall0<\delta<\dfrac{1}{2},\exists p\in(2,3),s.t.\delta^{3-p}=\dfrac{1}{2}.$于是

$$\int_0^\delta\frac{\sin x^2}{x^p}dx=\int_0^\delta\frac{\sin x^2}{x^2}x^{2-p}dx\ge\frac{2}{\pi}\int_0^\delta x^{2-p}dx=\frac{2}{\pi(3-p)}\delta^{3-p}>\frac{1}{\pi}.$$

法二：利用第 6 题结论。

$$p=3\text{时},\lim_{x\to1}\frac{\frac{\sin x^2}{x^p}}{\frac{1}{x}}=1,\int_0^1\frac{1}{x}dx\text{发散},\text{则}\int_0^1\frac{\sin x^2}{x^3}dx\text{发散}.$$

5. 证明$\int_0^{+\infty}e^{-tx}\dfrac{\sin3x}{x+t}dx\ \ (0\le t<+\infty)$一致收敛。

证明： $\forall t\ge0,\dfrac{e^{-tx}}{x+t}$在$x\in(0,+\infty)$上单调;

$x \to +\infty$ 时，$\dfrac{e^{-tx}}{x+t}\left(\le \dfrac{1}{x}\right)$ 关于 $t\in[0,+\infty)$ 一致收敛到 0；

$$\left|\int_0^{\mathrm{A}} \sin 3x\, dx\right| \le \frac{2}{3}, \forall \mathrm{A} > 0.$$

由 Dirichelt 判别法，$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin 3x}{x+t}\,dx \quad (0\le t<+\infty)$ 一致收敛。

6. 设 $f(x,t)$ 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 中连续, $\forall t\in[\alpha,\beta)$, $\int_a^{+\infty} f(x,t)dt$ 收敛, 但 $\int_a^{+\infty} f(x,\beta)dt$ 发散。证明: $\int_a^{+\infty} f(x,t)dt$ 在 $[\alpha,\beta)$ 上非一致收敛.

证明: 反证法。若 $\int_a^{+\infty} f(x,t)dt$ 在 $[\alpha,\beta)$ 上一致收敛, 则 $\forall\varepsilon>0, \exists \mathrm{M}(\varepsilon)>a, s.t.$

$$\left|\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} f(x,t)dt\right| < \varepsilon, \qquad \forall \mathrm{B}>\mathrm{A}>\mathrm{M}, t\in[\alpha,\beta).$$

任意取定 $\mathrm{B}>\mathrm{A}>\mathrm{M}$, $f(x,t)$ 在 $[\mathrm{A},\mathrm{B}]\times[\alpha,\beta]$ 上一致连续,因而 $\exists t_0\in[\alpha,\beta), s.t.$

$$|f(x,\beta)-f(x,t_0)| < \frac{\varepsilon}{\mathrm{B}-\mathrm{A}}, \qquad \forall x\in[\mathrm{A},\mathrm{B}].$$

于是，$\forall \mathrm{B}>\mathrm{A}>\mathrm{M}$，有

$$\left|\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} f(x,\beta)dt\right| \le \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}|f(x,\beta)-f(x,t_0)|dt + \left|\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} f(x,t_0)dt\right| < 2\varepsilon,$$

由 Cauchy 收敛原理，$\int_a^{+\infty} f(x,\beta)dt$ 收敛. 与已知矛盾. □

习题 2.2

1. 求下列极限

$$(1) \lim_{a\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+a^2}\,dx, \qquad (2) \lim_{a\to 0}\int_0^3 x^2\cos ax\, dx.$$

解： $(1)\ \displaystyle\lim_{a\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \int_{-1}^{1}\lim_{a\to 0}\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \int_{-1}^{1}|x|dx = 1.$

$$(2) \lim_{a\to 0}\int_0^3 x^2\cos ax\, dx = \int_0^3 \lim_{a\to 0}\left(x^2\cos ax\right)dx = \int_0^3 x^2 dx = 9.$$

2. 求下列函数的导函数。

(1) $F(x)=\int_x^{x^2} e^{-xy^2}\,dy,$ (2) $F(y)=\int_{a+y}^{b+y}\frac{\sin yx}{x}\,dx,$

(3) $F(t)=\int_0^t \frac{\ln(1+tx)}{x}\,dx,$ (4) $F(t)=\int_0^t f(x+t,x-t)\,dx,\ f\in C^1.$

解：(1) $F'(x)=-\int_x^{x^2} y^2e^{-xy^2}dy+2xe^{-x^5}-e^{-x^3}.$

$$(2)\ F'(y)=\int_{a+y}^{b+y}\cos yx\,dx+\frac{\sin(by+y^2)}{b+y}-\frac{\sin(ay+y^2)}{a+y}$$

$$=\frac{b+2y}{y(b+y)}\sin(by+y^2)-\frac{a+2y}{y(a+y)}\sin(ay+y^2)$$

$$(3)\ F'(t)=\int_0^t\frac{1}{1+tx}\,dx+\frac{\ln(1+t^2)}{t}=\frac{2\ln(1+t^2)}{t}.$$

$$(4)\ F'(t)=\int_0^t\left(f_1'(x+t,x-t)-f_2'(x+t,x-t)\right)dx+f(2t,0).$$

3. 设 $f(x)$ 可微,且$F(x)=\int_0^x(x+y)f(y)dy$,求$F''(x)$.

解：$F'(x)=\int_0^x f(y)dy+2xf(x),\quad F''(x)=3f(x)+2xf'(x).$

4. 证明：$u(t,x)=\frac{1}{2}\left(\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds$ 是弦振动方程 $\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$ 的解，其中 $\varphi\in C^2,\psi\in C^1$.

证明：$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{a}{2}\left(\varphi'(x+at)-\varphi'(x-at)\right)+\frac{1}{2}\left(\psi(x+at)+\psi(x-at)\right)$

$$\frac{\partial^2u}{\partial^2t}=\frac{a^2}{2}\left(\varphi''(x+at)+\varphi''(x-at)\right)+\frac{a}{2}\left(\psi'(x+at)-\psi'(x-at)\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}\left(\varphi'(x+at)+\varphi'(x-at)\right)+\frac{1}{2a}\left(\psi(x+at)-\psi(x-at)\right)$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial^2x}=\frac{1}{2}\left(\varphi''(x+at)+\varphi''(x-at)\right)+\frac{1}{2a}\left(\psi'(x+at)-\psi'(x-at)\right)$$

因此 $\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$.

5. 计算下列积分（含参瑕积分，应放到习题 2.3 中）

(1) $\int_0^1 \frac{\arctan x}{x\sqrt{1-x^2}}$ (2) $\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\sin(\ln\frac{1}{x})dx\ (a,b>0)$

解：（1）令$I(t)=\int_0^1 \frac{\arctan(tx)}{x\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$, 则$I(0)=0$, 欲求$I(1)$.

$$\forall t\in[0,1], \lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan(tx)}{x\sqrt{1-x^2}}=t;\quad \forall t\in(0,1], \lim_{x\to 1^-}\frac{\arctan(tx)}{x\sqrt{1-x^2}}=+\infty.$$

因此 0 不是积分的瑕点，1 是瑕点。

$$0\le\frac{\arctan(tx)}{x\sqrt{1-x^2}}\le\frac{tx}{x\sqrt{1-x^2}}\le\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\qquad \forall t\in[0,1],\forall x\in(0,1).$$

由Weirstrass判别法,$\int_0^1 \frac{\arctan(tx)}{x\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ 关于$t\in[0,1]$一致收敛. 又由 Able 判别法可知，

$\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2x^2)\sqrt{1-x^2}}dx$ 关于$t\in[0,1]$一致收敛。因此

$$I'(t)=\int_0^1\frac{1}{(1+t^2x^2)\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{1+t^2\sin^2\theta}=\int_0^{\pi/2}\frac{\csc^2\theta d\theta}{\csc^2\theta+t^2}$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{-d\cot\theta}{1+t^2+\cot^2\theta}=\frac{-1}{\sqrt{1+t^2}}\arctan\frac{\cot\theta}{\sqrt{1+t^2}}\bigg|_{\theta=0}^{\pi/2}=\frac{\pi}{2\sqrt{1+t^2}}.$$

$$I(1)=\int_0^1\frac{\pi}{2\sqrt{1+t^2}}dt=\frac{\pi}{2}\ln(t+\sqrt{1+t^2})\bigg|_{t=0}^{1}=\frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2}).$$

（2）不妨设$b\ge a>0$. 令$I(t)=\int_0^1\frac{x^t-x^a}{\ln x}\sin(\ln\frac{1}{x})dx, t\in[a,b]$. $I(a)=0$, 求$I(b)$.

$$\left|\frac{x^t-x^a}{\ln x}\sin(\ln\frac{1}{x})\right|\le x^t-x^a\le x^b-x^a,\quad \forall t\in[a,b], x\in(0,1).$$

由Weirstrass判别法,$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\sin(\ln\frac{1}{x})dx$ 关于$t\in[a,b]$一致收敛.

$\forall t\in[a,b]$, x^t在$x\in(0,1)$上单调； $x^t\le x^b\le 1$关于$t\in[a,b], x\in(0,1)$一致有界;

$$\int_0^1\sin(\ln\frac{1}{x})dx=\int_0^{+\infty}e^{-t}\sin t dt=\frac{1}{2}.$$

由 Able 判别法，$\int_0^1 x^t \sin(\ln\frac{1}{x})dx$ 关于 $t\in[a,b]$ 一致收敛 。因此

$$I'(t)=\int_0^1 x^t \sin(\ln\frac{1}{x})dx=\int_0^{+\infty} e^{-(1+t)y}\sin ydy=\frac{1}{1+(1+t)^2}.$$

$$I(b)=I(a)+\int_a^b \frac{dt}{1+(1+t)^2}=\arctan(1+t)\Big|_{t=a}^{b}=\arctan(1+b)-\arctan(1+a).\Box$$

习题 2.3

1. 计算下列积分。

$(1)\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x}dx\ \ (a,b>0)$ $\qquad$ $(2)\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2}\sin yxdx\ \ (a>0)$

$(3)\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}dx\ (a,b>0)$

解： (1)不妨设$b\ge a>0$,令$I(t)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax^2}-e^{-tx^2}}{x}dx,\ t\in[a,b]$.则$I(a)=0$,欲求$I(b)$.因

$$\left|2te^{-tx^2}\right|\le 2be^{-ax^2},\quad \forall x\ge 0,\forall t\in[a,b].$$

$\int_0^{+\infty} 2te^{-tx^2}dx$ 关于 $t\in[a,b]$ 一致收敛(Weirstrass). 于是

$$I'(t)=\int_0^{+\infty}2te^{-tx^2}dx=2\sqrt{t}\int_0^{+\infty}e^{-y^2}dy=\sqrt{t\pi}.$$

$$I(b)=I(a)+\sqrt{\pi}\int_a^b\sqrt{t}dt=\frac{2}{3}\sqrt{\pi}(b^{3/2}-a^{3/2}).$$

(2) $a>0$,令$I(t)=\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}\sin txdx\ (t\in\mathbb{R})$. 因为

$$\left|xe^{-ax^2}\sin tx\right|\le xe^{-ax^2},\quad \forall x\ge 0,\forall t\in\mathbb{R},$$

$I(t)=\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}\sin txdx$关于$t\in\mathbb{R}$一致收敛(Weirstrass).于是,

$$\begin{aligned}J(y)=\int_0^y I(t)dt&=\int_0^y dt\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}\sin txdx=\int_0^{+\infty}dx\int_0^y xe^{-ax^2}\sin txdt\\&=\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}(1-\cos yx)dx=\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}dx-\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos yxdx\\&=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}-\frac{1}{y}e^{-ax^2}\sin yx\Big|_{x=0}^{+\infty}-\frac{1}{y}\int_0^{+\infty}2axe^{-ax^2}\sin yxdx\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}-\frac{2a}{y}I(y)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}-\frac{2a}{y}J'(y),\qquad \forall y\neq 0.$$

于是

$$J(y)-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}=-\frac{2a}{y}\left(J(y)-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right)',\qquad J(y)-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}=ce^{\frac{-y^2}{4a}}.$$

由 $J(0)=0,$ 得

$$c=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}},\quad J(y)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{\frac{-y^2}{4a}},\qquad I(y)=J'(y)=\frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,ye^{\frac{-y^2}{4a}}.$$

(3) 不妨设 $b\geq a>0.$ 由 Dirichlet 判别法，$\int_0^{+\infty}\frac{\sin tx}{x}dx$ 关于 $t\in[a,b]$ 一致收敛。因此

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}dx=\int_0^{+\infty}dx\int_a^b\frac{\sin tx}{x}dt$$
$$=\int_a^b dt\int_0^{+\infty}\frac{\sin tx}{x}dx=\int_a^b\frac{\pi}{2}dt=\frac{\pi}{2}(b-a).$$

2. 利用对参变量的求导，求下列积分。

(1) $\int_0^{+\infty}e^{-tx^2}x^{2n}dx\ (t>0,n$ 为非负整数$)$, (2) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(y+x^2)^{n+1}}\ (y>0).$

解： (1) 任意给定 $b>a>0,$ 有

$$\int_0^{+\infty}e^{-tx^2}dx=\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}t^{-\frac{1}{2}},\qquad \forall t\in[a,b].$$

由Weirstrass判别法,对非负整数 m, $\int_0^{+\infty}e^{-tx^2}x^m dx$ 关于 $t\in[a,b]$ 一致收敛。因此上式左端对 t 求导可与积分运算交换次序。左右两端对 t 求 n 次导，得

$$\int_0^{+\infty}(-x^2)^n e^{-tx^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{2n-1}{2})t^{-\frac{2n+1}{2}},\qquad \forall t\in[a,b].$$

即

$$\int_0^{+\infty}x^{2n}e^{-tx^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}(2n-1)!!}{2^{n+1}}t^{-\frac{2n+1}{2}},\qquad \forall t\in[a,b].$$

由 $b>a>0$ 的任意性得

$$\int_0^{+\infty}x^{2n}e^{-tx^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}(2n-1)!!}{2^{n+1}}t^{-\frac{2n+1}{2}},\qquad \forall t>0.$$

(2) 任意给定$a>0$,有

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{y+x^2}=\frac{1}{\sqrt{y}}\arctan\frac{x}{\sqrt{y}}\bigg|_{x=0}^{+\infty} x=\frac{\pi}{2}y^{-\frac{1}{2}},\qquad \forall y\ge a.$$

由Weirstrass判别法,对正整数n, $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(y+x^2)^{n+1}}dx$关于$y\ge a$一致收敛. 因此上式左端对$y$求导可与积分运算交换次序。左右两端对$y$求$n$次导，得

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(y+x^2)^{n+1}}dx=\frac{\pi(2n-1)!!}{(2n)!!}y^{-(n+\frac{1}{2})},\qquad \forall y\ge a.$$

由$a>0$的任意性得 $$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(y+x^2)^{n+1}}dx=\frac{\pi(2n-1)!!}{(2n)!!}y^{-(n+\frac{1}{2})},\qquad \forall y>0.$$

第二章总复习题

1. 证明：$f(x,y)=\sin xy$在$\mathbb{R}^2$上非一致连续。

证明：取$x_n=\frac{\pi}{n},y_n=2n^2,a_n=\frac{\pi}{n}+\frac{\pi}{4n^2},b_n=2n^2.$则

$$\sqrt{(x_n-a_n)^2+(b_n-y_n)^2}\to 0,\qquad \sin a_nb_n-\sin x_ny_n=1.$$

由 Cauchy 准则，$f(x,y)=\sin xy$在$\mathbb{R}^2$上非一致连续。

2. 设向量值函数$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$一致连续，且$\{\mathrm{x}_k\}$为$\mathbb{R}^n$中的 Cauchy 列，证明：$\{f(\mathrm{x}_k)\}$为$\mathbb{R}^m$中的 Cauchy 列。

证明：$\forall\varepsilon>0$,由$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$的一致连续性,$\exists\delta>0, s.t.$

$$\|f(\mathrm{x})-f(\mathrm{y})\|_m<\varepsilon,\qquad \forall \mathrm{x},\mathrm{y}\in\mathbb{R}^n,\|\mathrm{x}-\mathrm{y}\|_n<\delta.$$

$\{\mathrm{x}_k\}$为$\mathbb{R}^n$中的 Cauchy 列，因此$\exists N\in\mathbb{N}, s.t.$

$$\|\mathrm{x}_k-\mathrm{x}_l\|_n<\delta,\qquad \forall k,l>N.$$

于是有

$$\|f(\mathrm{x}_k)-f(\mathrm{x}_l)\|_m<\varepsilon,\qquad \forall k,l>N.$$

即$\{f(\mathrm{x}_k)\}$为$\mathbb{R}^m$中的 Cauchy 列。

3. 证明：$f(x,y)$为有界闭集D上的连续函数,则$f(x,y)$在D上一致连续.

证明：反证法. 假设$f(x,y)$在D上不一致连续,则$\exists\varepsilon_0>0,\forall n\in N,\exists(x_n,y_n),(\alpha_n,\beta_n)\in D,s.t.$

$$\|(x_n,y_n),(\alpha_n,\beta_n)\|=\sqrt{(x_n-\alpha_n)^2+(y_n-\beta_n)^2}<\frac{1}{n},\qquad |f(x_n,y_n)-f(\alpha_n,\beta_n)|\ge\varepsilon_0.$$

D为有界集,则$\{(x_n,y_n)\}$有收敛子列,不妨仍记为$\{(x_n,y_n)\}$, 设$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(x_0,y_0)$. D为闭集,则

则$(x_0,y_0)\in D$. 由距离的三角不等式

$$\|(\alpha_n,\beta_n),(x_0,y_0)\|\le\|(x_n,y_n),(\alpha_n,\beta_n)\|+\|(x_n,y_n),(x_0,y_0)\|$$

得$\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n,\beta_n)=(x_0,y_0)$. 由$f(x,y)$的连续性，有

$$\lim_{n\to\infty}f(\alpha_n,\beta_n)=f(x_0,y_0)=\lim_{n\to\infty}f(x_n,y_n).$$

这与$|f(x_n,y_n)-f(\alpha_n,\beta_n)|\ge\varepsilon_0>0$矛盾.

4．利用对参数的微分，求下列积分。

$$(1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)dx\ (a,b>0),\qquad (2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}dx$$

解：(1) 先证如下积分公式

$$\mathrm{A}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2x}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}dx=\frac{\pi}{2a(a+b)},\quad \mathrm{B}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2x}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}dx=\frac{\pi}{2b(a+b)}.$$

事实上，A,B可由以下两式解出：

$$a^2\mathrm{A}+b^2\mathrm{B}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2},$$

$$a^2\mathrm{A}-b^2\mathrm{B}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2\sin^2x-b^2\cos^2x}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2\tan^2x-b^2}{a^2\tan^2x+b^2}dx$$

$$=a\int_0^{+\infty}\frac{t^2-b^2}{(t^2+b^2)(a^2+t^2)}dt=\frac{(a-b)\pi}{2(a+b)}.$$

再令 $I(t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2 x+t^2\cos^2 x)dx.\ I(a)=\pi\ln a$, 欲求 $I(b)$. 因

$$\left|\frac{2t\cos^2 x}{a^2\sin^2 x+t^2\cos^2 x}\right|\le\frac{2\max\{a,b\}}{\min\{a,b\}},\qquad \forall x\in(0,\frac{\pi}{2}),t\in[\min\{a,b\},\max\{a,b\}],$$

由 Weirstrass 判别法，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2t\cos^2 x}{a^2\sin^2 x+t^2\cos^2 x}dx$ 关于 $t\in[\min\{a,b\},\max\{a,b\}]$ 一致收敛。于是

$$I'(t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2t\cos^2 x}{a^2\sin^2 x+t^2\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{a+t},$$

$$I(b)=I(a)+\int_a^b\frac{\pi}{a+t}dx=\pi\ln a+\pi\ln(a+t)\Big|_{t=a}^{b}=\pi\ln\frac{a+b}{2}.$$

(2) 令 $I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}dx$. 因

$$0<\frac{1}{1+a^2\tan^2 x}\le 1,\qquad \forall a\ge 0,\forall x\in(0,\frac{\pi}{2}),$$

由 Weirstrass 判别法, $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+a^2\tan^2 x}$ 关于 $a\ge 0$ 一致收敛.于是

$$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+a^2\tan^2 x}=\int_0^{+\infty}\frac{adt}{(1+t^2)(a^2+t^2)}=\frac{\pi}{2(a+1)},\qquad \forall a>0.$$

又 $I(0)=0$, $I(a)$为奇函数, 所以

$$I(a)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\ln(a+1), & a\ge 0,\\ -\dfrac{\pi}{2}\ln(1-a), & a<0.\end{cases}$$

5. 讨论下列积分在所给区间上的一致收敛性.

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dx(-\infty<y<+\infty)$ 一致收敛.

$$\left|\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right|\le\frac{1}{x^2+y^2}\le\frac{1}{x^2}, \text{Weirstrass.}$$

(2) $\int_0^1\ln(xy)\,dx\ (\frac{1}{2}<y<2)$ 一致收敛.

$$\ln(\frac{x}{2})<\ln(xy)<\ln(2x),\forall 0<x<1.\text{于是},\left|\ln(xy)\right|<\ln 2-\ln x,\forall 0<x<1.$$

(3) $\int_1^{+\infty}\frac{n}{x^3}e^{-\frac{n}{2x^2}}dx(n\text{为自然数})$ 非一致收敛.

$$\forall M>1,\exists A=[M]+1,B=\sqrt{2}A,n=A^2,s.t.$$

$$0<\int_A^B\frac{n}{x^3}e^{-\frac{n}{2x^2}}dx=e^{-\frac{n}{2B^2}}-e^{-\frac{n}{2A^2}}=e^{-1/4}-e^{-1/2}.$$

(4) $\int_1^{+\infty}e^{-\frac{1}{y^2}(x-\frac{1}{y})^2}\sin ydx(0<y<1)$ 一致收敛

Proof. $\forall\varepsilon\in(0,1)$, 因为 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dx=\sqrt{\pi}$, $\exists M_0>1,s.t.\int_A^{+\infty}e^{-t^2}dx<\varepsilon,\forall A\ge M_0.$

令 $\delta=\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\pi}},M=M_0+\frac{1}{\delta}$, 则

$\forall A>M$, 当 $y\in[0,\delta]$ 时, 有

$$0<\int_A^{+\infty}e^{-\frac{1}{y^2}(x-\frac{1}{y})^2}\sin ydx\le\int_A^{+\infty}e^{-\frac{1}{y^2}(x-\frac{1}{y})^2}dx$$

$$=y\int_{\frac{1}{y}(A-\frac{1}{y})}^{+\infty}e^{-t^2}dt<y\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}y<\varepsilon.$$

$\forall A>M$, 当 $y\in[\delta,1]$ 时, 有 $\frac{1}{y}(A-\frac{1}{y})>A-\frac{1}{y}>A-\frac{1}{\delta}\ge M_0$,

$$0<\left|\int_A^{+\infty}e^{-\frac{1}{y^2}(x-\frac{1}{y})^2}\sin ydx\right|\le\int_A^{+\infty}\left|e^{-\frac{1}{y^2}(x-\frac{1}{y})^2}\sin y\right|dx\le\int_A^{+\infty}e^{-\frac{1}{y^2}(x-\frac{1}{y})^2}dx$$

$$\le y\int_{\frac{1}{y}(A-\frac{1}{y})}^{+\infty}e^{-t^2}dt\le\int_{\frac{1}{y}(A-\frac{1}{y})}^{+\infty}e^{-t^2}dt\le\int_{M_0}^{+\infty}e^{-t^2}dt<\varepsilon.$$

(5) $\int_1^{+\infty}e^{-yx^2}\sin ydx(0\le y<+\infty)$ 一致收敛

$\lim\limits_{t\to+\infty}te^{-t}=0$, 因此 $\exists C>0,s.t.\ te^{-t}\le C,\forall t\ge 0.$ 于是

$$\left|e^{-yx^2}\sin y\right|\le ye^{-yx^2}=\frac{1}{x^2}\cdot yx^2e^{-yx^2}\le\frac{C}{x^2},\forall x\ge 1,\forall y\in\mathbb{R}.$$

(6) $\int_1^{+\infty} e^{-yx^2}\sin y dy (0<x<+\infty)$ 非一致收敛

$I(0)=\int_1^{+\infty}\sin y dy$发散. 利用习题 2.3No.6。

6. 计算下列积分的值.

(1)$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan xy}{x(1+x^2)}dx\ (y\ge 0)$　　　　(2)$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{y^2+x^2}dx\ (y>0)$

解：(1) $I(y)=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan xy}{x(1+x^2)}dx\ (y\ge 0)$. 任意给定 $r>0$,

$$\left|\frac{\arctan xy}{x(1+x^2)}\right|\le\frac{xy}{x(1+x^2)}\le\frac{r}{1+x^2},\forall x>0,\forall y\in(0,r].$$

由 Weirstrass 判别法，$I(y)$ 关于 $y\in(0,r]$ 一致收敛。由 $r>0$ 的任意性，$I(y)\in C(0,+\infty)$. 又

$$0<\frac{1}{(1+x^2y^2)(1+x^2)}\le\frac{1}{1+x^2},\quad \forall x>0,\forall y\ge 0.$$

$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2y^2)(1+x^2)}$ 关于 $y\in(0,+\infty)$ 一致连续。于是

$$I'(y)=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2y^2)(1+x^2)}=\frac{\pi}{2(1+y)},\quad \forall y\ge 0.$$

又 $I(0)=0$，所以

$$I(y)=\frac{\pi}{2}\ln(1+y),\qquad \forall y\in\mathbb{R}.$$

(2) 视 $y>0$ 为常数，令

$$I(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos tx}{y^2+x^2}dx, t\in\mathbb{R}.$$

由 Weirstrass 判别法, $I(t)$关于$t\in\mathbb{R}$一致收敛, 因而 $I(t)\in C(\mathbb{R})$. 欲求 $I(1)$.

任意给定 $a>0$, $\frac{x}{y^2+x^2}$ 在$x\in[y,+\infty)$上单调, 关于$t\ge a$ 一致收敛到0, $\left|\int_0^{A}\sin txdx\right|\le\frac{2}{t}\le\frac{2}{a}$, 因此

$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin tx}{y^2+x^2}dx$ 关于$t\ge a>0$一致收敛(Dirichlet), 从而

$$I'(t)=-\int_0^{+\infty}\frac{x\sin tx}{y^2+x^2}dx.$$

（积分号下再对t求导所得积分不可积。）利用积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin tx}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2},$$

有
$$I'(t)+\frac{\pi}{2}=\int_0^{+\infty}\frac{y^2\sin tx}{x(y^2+x^2)}dx.$$

$$I''(t)=y^2I(t).$$

于是
$$I(t)=c_1e^{-yt}+c_2e^{yt},\forall t\ge a>0.$$

而
$$|I(t)|\le\int_0^{+\infty}\frac{1}{y^2+x^2}dx=\frac{\pi}{2y}<+\infty,\ \ \forall t\ge a>0.$$

令$t\to+\infty$得
$$c_2=0,\qquad I(t)=c_1e^{-yt},\forall t\ge a>0.$$

又$I(t)\in C(\mathbb{R})$, 于是

$$c_1=I(0)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{y^2+x^2}dx=\frac{\pi}{2y},\qquad I(t)=\frac{\pi}{2y}e^{-yt},\ \forall t>0.$$

故
$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{y^2+x^2}dx=I(1)=\frac{\pi}{2y}e^{-y}.$$

7. 证明：$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2y}{x}dx$ 在 $y\in(0,+\infty)$ 不一致收敛, 但连续.

证明： $\forall y>0,\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2y}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2y}{2x^2y}d\left(x^2y\right)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{2t}dt=\frac{\pi}{4}$.因此

$$I(y)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2y}{x}dx=\begin{cases}0 & y=0,\\ \frac{\pi}{4} & y>0.\end{cases}$$

$I(y)\in C(0,\infty)$. 但 $I(y)\notin C[0,1]$, 因此 $I(y)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2y}{x}dx$ 在 $y\in[0,1]$ 不一致收敛，从而在

$y \in (0,+\infty)$ 不一致收敛。