



Review

- 函数项级数的逐点收敛与一致收敛

$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ 在 $x \in I$ 上一致收敛

$\Leftrightarrow \exists S(x), \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), s.t.,$

$$\left| \sum_{k=1}^n f_k(x) - S(x) \right| < \varepsilon, \quad \forall n > N, \forall x \in I.$$

\Leftrightarrow (Cauchy准则) $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), s.t.,$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon, \quad \forall n > N, \forall p \geq 1, \forall x \in I.$$



• 函数项级数一致收敛的判别法

Weierstrass

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} M_n \text{ 收敛,} \\ |f_n(x)| \leq M_n, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \text{ 在 } I \text{ 上一致收敛.}$$



Dirichlet

$\{a_n(x)\}$ 关于 n 单调, 在 I 上一致收敛到 0;

$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(x)$ 的部分和函数列在 I 上一致有界;

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

Abel

$\{a_n(x)\}$ 关于 n 单调, 在 I 上一致有界;

$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(x)$ 在 I 上一致收敛;

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛.



§ 2. 一致收敛函数项级数和函数的性质

令 $g(t, x) = f_n(x), t \in [n-1, n)$, 则

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{n-1}^n g(t, x) dt = \int_0^{+\infty} g(t, x) dt.$$

含参积分的一致收敛性

\leftrightarrow 函数项级数的一致收敛性



1. 和函数的性质

目标：什么条件下，以下极限过程可交换？

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x); \text{ (逐项求极限)}$$

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) dx; \text{ (逐项积分)}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x). \quad \text{(逐项求导)}$$



Thm. $\left. \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \text{ 在区间 } I \text{ 上一致收敛到 } S(x) \\ f_n(x) \in C(I), \forall n \end{array} \right\} \Rightarrow S(x) \in C(I).$

Proof.

$$\begin{aligned} |S(x) - S(x_0)| &= \left| \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0) \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^n f_k(x) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x_0) - \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x_0) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |f_k(x) - f_k(x_0)| + \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| + \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x_0) \right| \quad (*) \end{aligned}$$



$\forall \varepsilon > 0$, 由 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ 在 I 上一致收敛到 $S(x)$, $\exists N(\varepsilon)$, s.t.

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall n \geq N, \forall x \in I.$$

又 $f_k(x) \in C(I)$, $k = 1, 2, \dots, N$, 则 $\exists \delta(x_0) > 0$, s.t.,

$$|f_k(x) - f_k(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3N}, \forall |x - x_0| < \delta, k = 1, 2, \dots, N.$$

在(*)中取 $n = N$, 则

$$|S(x) - S(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3N} \cdot N + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \forall |x - x_0| < \delta. \quad \square$$



Remark.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = S(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$$

逐项求极限！



例. 判断 $\sum_{n=0}^{+\infty} (1-x)x^n$ 在其收敛域上是否一致收敛.

解: $\lim_{n \rightarrow \infty} (1-x)x^n = 0 \Rightarrow x \in (-1, 1]$.

$x = 1$ 时, $(1-x)x^n = 0$, $\sum (1-x)x^n = 0$.

$|x| < 1$ 时, $\sum_{n=0}^{+\infty} (1-x)x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = (1-x) \cdot \frac{1}{1-x} = 1$.

$\sum_{n=0}^{+\infty} (1-x)x^n$ 的和函数 $S(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ 在其收敛域

$(-1, 1]$ 上不连续, 故 $\sum_{n=0}^{+\infty} (1-x)x^n$ 在 $(-1, 1]$ 上不一致收敛. \square



$$\left. \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上一致收敛到 } S(x) \right\} \Rightarrow \int_a^b S(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$
$$f_n(x) \in C[a, b], \forall n$$

Proof. $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛到 $S(x)$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N, s.t.$

$$\forall n > N, \forall x \in [a, b], \text{ 有 } \left| S(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \text{ 于是,}$$

$$\left| \int_a^b S(x) dx - \sum_{k=1}^n \int_a^b f_k(x) dx \right| = \left| \int_a^b \left(S(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right) dx \right|$$
$$\leq \int_a^b \left| S(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| dx < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon. \square$$



Remark. $\int_a^b S(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)dx$

$$\Leftrightarrow \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)dx \quad \text{逐项积分!}$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b S(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_a^b f_k(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b S_n(x)dx$$

Corollary. $\left. \begin{array}{l} g_n(x) \in C[a, b] \\ g_n(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上一致收敛} \end{array} \right\}$

$$\Rightarrow \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n(x)dx.$$



Corollary. $\left. \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上一致收敛到 } S(x) \\ f_n(x) \in C[a, b], \forall n \end{array} \right\}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^x f_n(t) dt$ 在 $x \in [a, b]$ 上一致收敛到 $\int_a^x S(x) dx$.

Proof. 证明方法同定理, 略. \square

Remark. 以上逐项可积的定理和推论中, $f_n(x) \in C[a, b]$ 可以减弱为 $f_n(x) \in R[a, b]$.



例. 求 $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n} \right) dx.$

解: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $[\pi/2, 3\pi/2]$ 上一致收敛(Dirichlet), 故

$$\begin{aligned} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n} \right) dx &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\sin nx}{n} dx \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left. \frac{-\cos nx}{n^2} \right|_{\pi/2}^{3\pi/2} = 0. \square \end{aligned}$$



例. 证明 $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dx}{1 + (1 + x/n)^n} = \ln \frac{2e}{e+1}$.

Proof.
$$\begin{aligned} \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{dx}{1 + (1 + x/n)^n} &= \int_0^1 \frac{dx}{1 + e^x} = \int_0^1 \frac{e^{-x} dx}{e^{-x} + 1} \\ &= -\ln(e^{-x} + 1) \Big|_{x=0}^1 = \ln \frac{2e}{e+1}. \end{aligned}$$

因此, 只要证 $\frac{1}{1 + (1 + x/n)^n}$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛到 $\frac{1}{1 + e^x}$.

而最后一结论可以从下述不等式得出:



$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{1 + (1 + x/n)^n} - \frac{1}{1 + e^x} \right| = \left| \frac{e^x - (1 + x/n)^n}{(1 + (1 + x/n)^n)(1 + e^x)} \right| \\ & \leq |e^x - (1 + x/n)^n| = |e^x - e^{n \ln(1 + x/n)}| \\ & = e^x - e^{n \left(\frac{x}{n} - \frac{x^2}{(1 + \xi)^2 n^2} \right)} \quad \xi \in (0, \frac{x}{n}), x \in [0, 1] \\ & = e^x \left(1 - e^{\frac{-x^2}{(1 + \xi)^2 n}} \right) \leq e \left(1 - e^{-\frac{1}{n}} \right) \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty \text{ 时}. \\ & \text{故 } \frac{1}{1 + (1 + x/n)^n} \text{ 在 } x \in (0, 1) \text{ 上一致收敛到 } \frac{1}{1 + e^x}. \quad \square \end{aligned}$$



例. $\alpha \in (0, 1)$, 则 $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{\alpha+k} + \frac{1}{\alpha-k} \right)$.

Proof. $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx \triangleq I_1 + I_2.$

• $x \in (0, 1)$ 时, $\frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{\alpha+k-1}$, (非一致收敛!)

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k x^{\alpha+k-1} \right| = \frac{x^{\alpha+n}}{1+x} < x^{\alpha+n}.$$

$$\begin{aligned} \left| I_1 - \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{\alpha+k-1} dx \right| &= \left| \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k x^{\alpha+k-1} dx \right| \\ &\leq \int_0^1 x^{\alpha+n} dx = \frac{1}{\alpha+n+1} \rightarrow 0, \text{ 当 } n \rightarrow +\infty \text{ 时.} \end{aligned}$$



$$\text{故 } I_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^k x^{\alpha+k-1} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha+k}.$$

• $x \in (1, \infty)$ 时, 令 $t = 1/x$, 则

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{t^{-\alpha}}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{t^{(1-\alpha)-1}}{1+t} dt$$

$1-\alpha \in (0, 1)$, 由前面的结论,

$$I_2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(1-\alpha)+k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k-\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha-k}.$$

$$\text{综上, } \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{\alpha+k} + \frac{1}{\alpha-k} \right). \quad \square$$



$$\left. \begin{aligned} &f_n(x) \in C^1[a, b], \forall n \\ &\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上一致收敛到 } T(x) \\ &\exists x_0 \in [a, b], \text{ s.t. } \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0) \text{ 收敛} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} &(1) \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上一致收敛, 设其和为 } S(x); \\ &(2) S'(x) = T(x), \text{ 即 } \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x). \end{aligned} \right.$$



Proof. (1) $S_n(x) \triangleq \sum_{k=1}^n f_k(x) = S_n(x_0) + \int_{x_0}^x S'_n(t) dt$

已知 $S_n(x_0)$ 收敛, $S'_n(x) = \sum_{k=1}^n f'_k(x)$ 在 $x \in [a, b]$ 上一致收敛,

则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, s.t., \forall n > N, \forall p \geq 1, \forall x \in [a, b],$

$$|S_{n+p}(x_0) - S_n(x_0)| < \varepsilon, |S'_{n+p}(x) - S'_n(x)| < \varepsilon / (b - a),$$

故 $|S_{n+p}(x) - S_n(x)|$

$$\leq |S_{n+p}(x_0) - S_n(x_0)| + \int_{x_0}^x |S'_{n+p}(t) - S'_n(t)| dt$$

$$< 2\varepsilon, \quad \forall x \in [a, b], \forall n > N.$$

因此 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛.



(2) $S'_n(x) = \sum_{k=1}^n f'_k(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛, $f_k \in C^1[a, b], \forall k$,

则 $\forall x, x_0 \in [a, b], \sum_{k=1}^{+\infty} f'_k(x)$ 在区间 $[x_0, x]$ (或 $[x, x_0]$) 上可

逐项积分, 即

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^x S'_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \int_{x_0}^x f'_k(t) dt = \int_{x_0}^x \lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n(t) dt.$$

由 $S_n(x) = S_n(x_0) + \int_{x_0}^x S'_n(t) dt$, 令 $n \rightarrow +\infty$, 得

$$S(x) = S(x_0) + \int_{x_0}^x \lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n(t) dt = S(x_0) + \int_{x_0}^x T(t) dt,$$

故 $S'(x) = T(x), \forall x \in [a, b]. \square$



例. Riemann ζ 函数 $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ 在 $(1, \infty)$ 上连续可微.

Proof. $\left(\frac{1}{n^x}\right)' = \frac{-\ln n}{n^x} \in C(1, \infty)$. 任给 $b > a > 1$, 有

$$0 \leq \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^a}, \quad 0 \leq \frac{\ln n}{n^x} \leq \frac{\ln n}{n^a}, \quad \forall x \in [a, b].$$

于是 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$, $\sum \left(\frac{1}{n^x}\right)'$ 均在 $[a, b]$ 上一致收敛 (Weierstrass),

故 $\zeta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^x}\right)' \in C[a, b]$. 由 a, b 的任意性, $\zeta(x) \in C^1(1, \infty)$. \square



例. $f_n(x) = \frac{(-1)^n \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续可微?

解: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 在 \mathbb{R} 上一致收敛, 而 $\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$ 关于 n 单调,

关于 $x \in \mathbb{R}$ 一致有界, 由Abel判别法, $\sum f_n(x)$ 一致收敛.

此外, $f'_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x^2}$, $\frac{1}{n+x^2}$ 单调一致趋于0, $\sum (-1)^n$ 的部分和序列一致有界, 故 $\sum f'_n(x)$ 一致收敛, 且 $\sum f'_n(x) \in C(\mathbb{R})$.

综上, $\sum f_n(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续可微. \square



2. 函数项级数的应用

---一阶ODE初值问题解的存在唯一性定理

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad (2)$$

Question. 初值问题(1)容易求解还是积分方程(2)容易求解?

Question. 如何用迭代法求解(2)? 即构造 $y_n(x) \rightarrow y(x)$.

构造Picard序列: $y_0(x) \equiv y_0$,

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$



Question. 对 $f(x, y)$ 加什么样的条件,以确保ODE初值问题(1)或积分方程(2)的解存在、唯一? 或者确保按(3)构造的Picard序列 $y_n(x)$ 收敛到(1),(2)的解 $y(x)$?

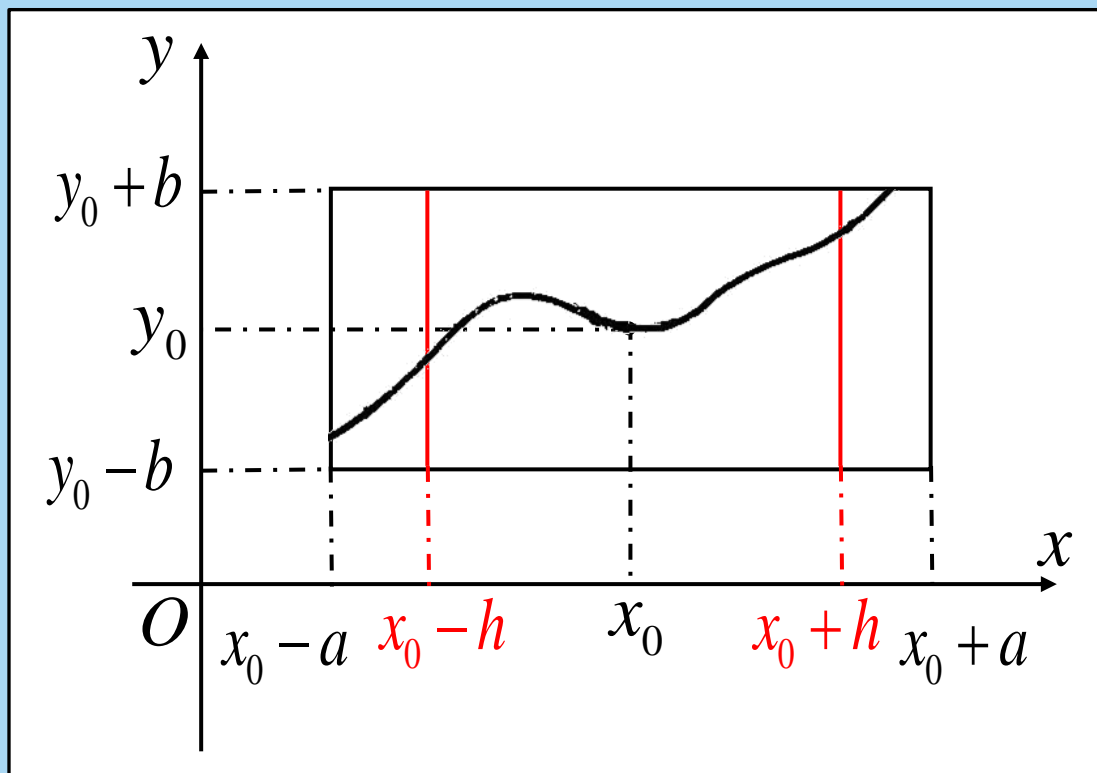
Def. 称 $f(x, y)$ 在 $D = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ 中关于 y 满足 $Lipschitz$ 条件,若存在 $L > 0$, s.t.,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|,$$

$$\forall (x, y_1), (x, y_2) \in D.$$



Thm. $f(x, y)$ 在 $D = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ 中连续,
关于 y 满足 *Lipschitz* 条件, 则 ODE 初值问题 (1) 在区间
 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上存在唯一解, 其中



$$h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\},$$

$$M = \max_{(x, y) \in D} |f(x, y)|.$$



Proof. 先证存在性, 再证唯一性.

Step1.(1) \Leftrightarrow (2)

Step2. 往证Picard序列 $y_0(x) = y_0$,

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

在 $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ 上连续, 且

$$|y_n(x) - y_0| \leq M |x - x_0|, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

事实上, $y_n(x)$ 的连续性由 $f \in C(D)$ 可得, 而

$$|y_1(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt \right| \leq M |x - x_0| \leq Mh \leq b,$$



归纳地, 若 $|y_n(x) - y_0| \leq b, \forall x \in I$, 则

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, y_n(t))| dt \right| \\ &\leq M |x - x_0| \leq Mh \leq b, \quad \forall x \in I. \end{aligned}$$

Step3. 往证Picard序列 $y_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

序列 $y_n(x)$ 的收敛性等价于级数

$$y_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} [y_{n+1}(x) - y_n(x)]$$

的收敛性. 往证后者在 I 上一致收敛.



$$|y_1(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt \right| \leq M |x - x_0|$$

$$\begin{aligned} |y_2(x) - y_1(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, y_1(t)) - f(t, y_0)| dt \right| \\ &\leq L \left| \int_{x_0}^x |y_1(t) - y_0| dt \right| \quad (\text{Lipschitz条件}) \\ &\leq LM \left| \int_{x_0}^x |t - x_0| dt \right| = \frac{LM}{2} |x - x_0|^2 \end{aligned}$$

假设当 $n = k$ 时, $|y_k(x) - y_{k-1}(x)| = \frac{ML^{k-1}}{k!} |x - x_0|^k$, 则



$$\begin{aligned} |y_{k+1}(x) - y_k(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, y_k(t)) - f(t, y_{k-1}(t))| dt \right| \\ &\leq L \left| \int_{x_0}^x |y_k(t) - y_{k-1}(t)| dt \right| \leq L \cdot \frac{ML^{k-1}}{k!} \left| \int_{x_0}^x |x - x_0|^k dt \right| \\ &\leq \frac{ML^k}{(k+1)!} |x - x_0|^{k+1}, \quad \forall x \in I = [x_0 - h, x_0 + h] \end{aligned}$$

由数学归纳法,

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \frac{ML^{n-1}}{(n+1)!} |x - x_0|^n \leq \frac{ML^{n-1}}{(n+1)!} h^n, \quad \forall n \geq 1, \forall x \in I.$$

$\sum \frac{ML^{n-1}}{(n+1)!} h^n$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法, 级数



$$y_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} [y_{n+1}(x) - y_n(x)]$$

在 I 上一致收敛,从而 $y_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

Step4. 设 $\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x), x \in I$. 往证 $\varphi(x)$ 是(1),(2)的解.

$$|f(t, y_n(t)) - f(t, \varphi(t))| \leq L |y_n(t) - \varphi(t)|,$$

$y_n(x)$ 在 I 上一致收敛到 $\varphi(x)$,则 $f(t, y_n(t))$ 在 I 上一致收敛到 $f(t, \varphi(t))$. 在下式中令 $n \rightarrow +\infty$,

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt,$$

则有

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt, \quad \forall x \in I,$$



即 $\varphi(x)$ 是(2)的解. 从而 $\varphi(x)$ 是(1)的解.

至此, 我们已经证明了初值问题(1)的解的存在性.

Step5. 解的唯一性.

设积分方程(2)有解 $u(x)$ 和 $v(x)$, $x \in I = [x_0 - h, x_0 + h]$. 则

$$u(x) - v(x) = \int_{x_0}^x [f(t, u(t)) - f(t, v(t))] dt, \forall x \in J.$$

由 f 的Lipschitz条件得

$$|u(x) - v(x)| \leq L \left| \int_{x_0}^x |u(t) - v(t)| dt \right|. \quad (5)$$



设连续函数 $|u(x) - v(x)|$ 在区间 J 上的上界为 K , 则

$$|u(x) - v(x)| \leq LK |x - x_0|,$$

代入(5)式右端, 归纳可得, $\forall n \in \mathbb{N}$,

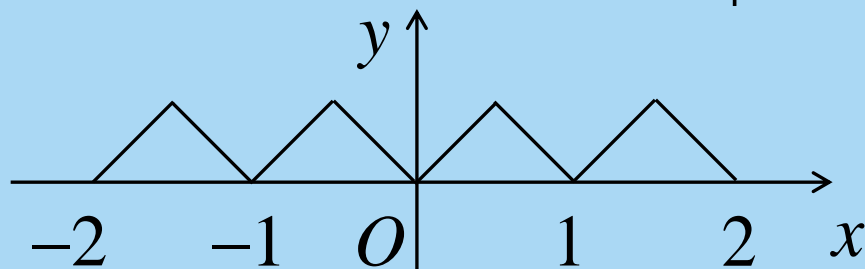
$$|u(x) - v(x)| \leq K \frac{(L|x - x_0|)^n}{n!}, \quad x \in I.$$

令 $n \rightarrow +\infty$ 得 $u(x) \equiv v(x)$, $x \in I$. 解的唯一性得证. \square



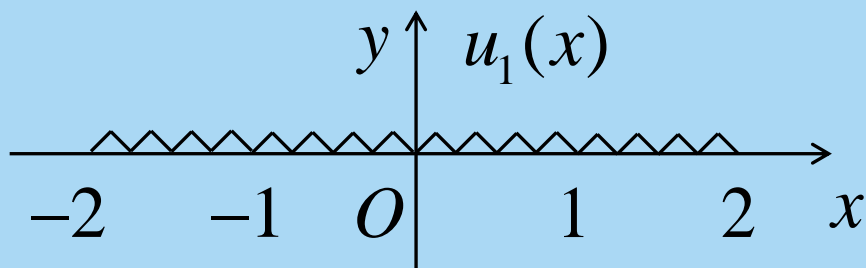
3. 函数项级数的应用 ---处处连续处处不可微的函数

$$u(x) = |x - m|, \quad x \in [m - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}], m \in \mathbb{Z}.$$



$u(x)$: 周期为1

$$u'(x) = (-1)^m, \quad x \in (\frac{m}{2}, \frac{m+1}{2})$$



$$u_k(x) = \frac{u(4^k x)}{4^k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$u_k(x)$: 周期为 $\frac{1}{4^k}$

$$u'_k(x) = u'(4^k x) = (-1)^m, \quad x \in (\frac{m}{2 \cdot 4^k}, \frac{m+1}{2 \cdot 4^k})$$



$$0 \leq u_k(x) \leq 1/(2 \cdot 4^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x)$ 一致收敛(Weierstrass), 故 $S(x)$ 处处连续.

下证 $S(x)$ 处处不可微. 任意取定 $c \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists m_n \in \mathbb{Z}$, s.t.

$$c \in \left[\frac{m_n}{2 \cdot 4^n}, \frac{m_n + 1}{2 \cdot 4^n} \right) \triangleq I_n \supset I_{n+1}. \quad \exists x_n \in I_n, \text{ s.t. } |x_n - c| = \frac{1}{4^{n+1}}.$$

$$\text{于是 } \frac{u_k(x_n) - u_k(c)}{x_n - c} = \begin{cases} 0, & k \geq n+1, & (u_k \text{ 的周期性}) \\ (-1)^{m_k}, & 0 \leq k \leq n. & (x_n, c \in I_n \subset I_k) \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S(x_n) - S(c)}{x_n - c} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u_k(x_n) - u_k(c)}{x_n - c} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^{m_k} \text{ 发散.}$$



4. 函数项级数的应用 --- 填满正方形的连续曲线

目标: $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [0, 1], \varphi, \psi \in C[0, 1],$

$\forall a, b \in [0, 1], \exists t \in [0, 1], s.t. \varphi(t) = a, \psi(t) = b.$

实数的 p 进制表示:

$$a = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n}, \quad b = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{2^n}, \quad a_n, b_n \in \{0, 1\}.$$

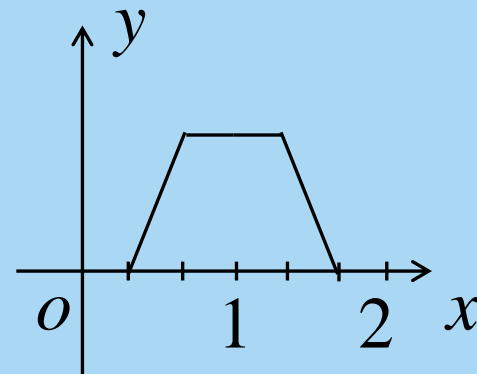
令 $c_{2n-1} = a_n, c_{2n} = b_n$, 则 $c = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{3^n} \in [0, 1].$

如何构造连续函数 φ, ψ , 将 a, b 从 c 中"滤"出来?



构造2-周期连续函数 $\omega(t)$, s.t.

$$\omega(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, 1/3], \\ 3t - 1, & t \in [1/3, 2/3], \\ 1, & t \in [2/3, 4/3], \\ -3t + 5, & t \in [4/3, 5/3], \\ 0 & t \in [5/3, 2]. \end{cases}$$



$$c_{k+1} = 1 \text{ 时, } 2 \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{c_n}{3^{n-k}} \in [2/3, 1]; \quad c_{k+1} = 0 \text{ 时, } 2 \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{c_n}{3^{n-k}} \in [0, 1/3];$$

$$\omega(3^k c) = \omega\left(2 \sum_{n=1}^k 3^{k-n} c_n + \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{2c_n}{3^{n-k}}\right) = \omega\left(2 \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{c_n}{3^{n-k}}\right) = c_{k+1}.$$



$$\text{令 } \varphi(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\omega(3^{2n-2}t)}{2^n}, \quad \psi(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\omega(3^{2n-1}t)}{2^n}, \quad t \in [0, 1].$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ 为以上两函数项级数的优级数, 因此函数项级数

一致收敛, 和函数 $\varphi, \psi \in C[0, 1]$. 而

$$\varphi(c) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{2n-1}}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n} = a, \quad \psi(c) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{2n}}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{2^n} = b,$$

故连续曲线 $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} t \in [0, 1]$ 填满正方形 $[0, 1] \times [0, 1]$.



作业：习题6.2 No. 2, 3, 4, 5, 7.