

第5次习题课 极值

1. f 连续, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1$. 试问: $(0,0)$ 是否 f 的极值点?

解: 由已知条件, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (f(x,y) - xy) = 0$, $f(0,0) = 0$. 由函数极限的定义, 存在

$\varepsilon > 0$, 当 $x^2 + y^2 < \varepsilon$ 时,

$$\frac{3}{2}(x^2 + y^2)^2 > f(x,y) - xy > \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2.$$

于是, 当 $\frac{2}{n^2} < \varepsilon$ 时, 有

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^4} > 0,$$

$$f\left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right) < -\frac{1}{n^2} + \frac{6}{n^4} = -\frac{1}{n^2}\left(1 - \frac{6}{n^2}\right) < 0.$$

故 $(0,0)$ 不是 f 的极值点。

2. f 连续, $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x \neq \sin y}} \frac{f(x,y) - f(0,0)}{(x - \sin y)^2} = A > 0$. 试问: $(0,0)$ 是否 f 的极值点?

解: 由函数极限的定义, 存在 $\delta > 0, s.t.$

$$\frac{f(x,y) - f(0,0)}{(x - \sin y)^2} > \frac{A}{2}, \quad \forall x^2 + y^2 \leq \delta, x \neq \sin y.$$

由 f 的连续性, 有

$$f(x,y) - f(0,0) \geq A(x - \sin y)^2 / 2 \geq 0, \quad \forall x^2 + y^2 \leq \delta.$$

故 $(0,0)$ 是 f 的极小值点。

3. 求 $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ 的极值。

解: 由 $z'_x = 4x^3 - 4x + 4y$, $z'_y = 4y^3 + 4x - 4y$, 得驻点 $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), (0,0)$.

$$z''_{xx} = 12x^2 - 4, \quad z''_{xy} = 4, \quad z''_{yy} = 12y^2 - 4.$$

在点 $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $z''_{xx} = z''_{yy} = 20, z''_{xy} = 4, z''_{xx}z''_{yy} - (z''_{xy})^2 > 0$, 故 $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ 为极小值点。

同理, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 为极小值点。

在点 $(0,0)$, $z''_{xx} = z''_{yy} = -4, z''_{xy} = 4, z''_{xx}z''_{yy} - (z''_{xy})^2 = 0$, 无法直接判断是否极值点。注意

到

$$z(x, x) = 2x^4 > 0, \quad \text{当 } x \neq 0 \text{ 时};$$

$$z(x, 0) = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2) < 0, \quad \text{当 } 0 < x^2 < 2 \text{ 时}.$$

可知 $(0, 0)$ 不是极值点.

4. f 在 \mathbb{R}^2 上一阶连续可微, 且 $\forall (x, y) \neq (0, 0)$, 有 $xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) > 0$. 证明: 原点是

$$f \text{ 的唯一极小值点, 且 } \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

证明: 首先证明 $\forall (x_0, y_0) \neq (0, 0)$, (x_0, y_0) 不是 f 的驻点. 若不然, 则

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0, \quad x_0 f'_x(x_0, y_0) + y_0 f'_y(x_0, y_0) = 0$$

与已知条件矛盾.

其次证明 $(0, 0)$ 是 f 的驻点. 事实上, 由已知条件可知 $xf'_x(x, 0) > 0, \forall x > 0$, 也即

$$f'_x(x, 0) > 0, \forall x > 0; \quad f'_x(x, 0) < 0, \forall x < 0.$$

令 $x \rightarrow 0$, 由 f 的一阶连续可微得 $f'_x(0, 0) = 0$. 同理, $f'_y(0, 0) = 0$.

再证明 $(0, 0)$ 是 f 的唯一极小值点. $\forall (x_0, y_0) \neq (0, 0)$, 令 $g(t) = f(tx_0, ty_0)$, 则 $\forall t > 0$, 有

$$g'(t) = x_0 f'_x(tx_0, ty_0) + y_0 f'_y(tx_0, ty_0) = \frac{1}{t} (tx_0 f'_x(tx_0, ty_0) + ty_0 f'_y(tx_0, ty_0)) > 0.$$

于是存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得

$$f(x_0, y_0) - f(0, 0) = g(1) - g(0) = g'(\xi) > 0.$$

故 $(0, 0)$ 是 f 的极小值点. 又 f 除原点外没有其它驻点, 故 $(0, 0)$ 是 f 的唯一极小值点.

最后证明极限等式. 由 $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$ 及 f 的可微性, 有

$$f(x, y) - f(0, 0) = o(\sqrt{x^2 + y^2}), \quad (x, y) \rightarrow (0, 0).$$

$$\text{于是 } \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

5. $F(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的邻域中二阶连续可微, 且

$$F(x_0, y_0) = F'_x(x_0, y_0) = 0, \quad F''_{xx}(x_0, y_0) F'_y(x_0, y_0) < 0.$$

证明: 由方程 $F(x, y) = 0$ 在点 (x_0, y_0) 附近所确定的隐函数 $y = y(x)$ 在点 x_0 取到极小值。

证明: 由已知条件可知 $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, 因此方程 $F(x, y) = 0$ 在点 (x_0, y_0) 附近所确定了隐函数 $y = y(x)$, 且

$$y'(x) = - \frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \Big|_{y=y(x)},$$

$$y''(x) = - \frac{(F''_{xx} + F''_{xy} \cdot y'(x)) F'_y - F'_x (F''_{xy} + F''_{yy} \cdot y'(x))}{(F'_y)^2}.$$

而 $F'_x(x_0, y_0) = 0$, $F''_{xx}(x_0, y_0) F'_y(x_0, y_0) < 0$, 因此

$$y'(x_0) = 0, \quad y''(x_0) = - \frac{F''_{xx}(x_0, y_0) F'_y(x_0, y_0)}{(F'_y(x_0, y_0))^2} > 0,$$

$y = y(x)$ 在点 x_0 取到极小值。

6. (隐函数的极值) 设 $z = z(x, y)$ 由 $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$ 确定, 求该函数的极值.

解: 由一阶微积的形式不变性, 有

$$4xdx + 4ydy + 2zdz + 8xdz + 8zdx - dz = 0$$

$$dz = - \frac{4x + 8z}{2z + 8x - 1} dx - \frac{4y}{2z + 8x - 1} dy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{4x + 8z}{2z + 8x - 1} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{4y}{2z + 8x - 1} = 0$$

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$$

三个方程联立, 得驻点 $(-2, 0)$, $\left(\frac{16}{7}, 0\right)$.

在 $(-2, 0)$ 点, $z''_{xx}(-2, 0) z''_{yy}(-2, 0) - [z''_{xy}(-2, 0)]^2 = \frac{16}{15} > 0$, 且 $z''_{xx}(-2, 0) = \frac{4}{15} > 0$,

$(-2, 0)$ 点是极小值点;

在 $\left(\frac{16}{7}, 0\right)$, $z''_{xx}\left(\frac{16}{7}, 0\right) z''_{yy}\left(\frac{16}{7}, 0\right) - [z''_{xy}\left(\frac{16}{7}, 0\right)]^2 = \frac{16}{15} > 0$, $z''_{xx}\left(\frac{16}{7}, 0\right) = -\frac{4}{15} < 0$,

$\left(\frac{16}{7}, 0\right)$ 点是极大值点.

7. 函数 $z(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 在 D 的边界上的值为零, 在 D 内部偏导数存在且

$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = f(z)$, 其中 f 是严格单调函数, 且 $f(0) = 0$ 。证明: $z(x, y) \equiv 0, (x, y) \in D$ 。

证明: 假设 $z(x, y)$ 不恒为 0, 不妨设它在有界闭区域 D 上的最大值 $z(x_0, y_0) > 0$ 。已知 $z(x, y)$ 在 D 的边界上的值为零, 则 $P(x_0, y_0)$ 在 D 内部, 因此 $P(x_0, y_0)$ 是 $z(x, y)$ 的极大值点, 是 $z(x, y)$ 的驻点, 于是

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_P + \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_P = f(z)|_P = 0, \text{ 即 } f(z(x_0, y_0)) = 0。$$

另一方面, f 是严格单调函数, $f(0) = 0$, $z(x_0, y_0) > 0$, 因此 $f(z(x_0, y_0)) > 0$, 矛盾。

8. 假设 D 为有界开区域, $f \in C^2(D)$, $f \in C(\bar{D})$, 且 $\begin{cases} f''_{xx} + f''_{yy} = f & \text{in } D, \\ f > 0 & \text{on } \partial D. \end{cases}$

求证: (1) $f \geq 0$ in D . (2) $f > 0$ in D . 求证: (1) $f \geq 0$ in D . (2) $f > 0$ in D .

证明: (1) 反证法. 若结论不成立, 则 f 在 \bar{D} 上的最小值必在 D 中达到. 于是

$$\exists (x_0, y_0) \in D, \text{ s.t. } 0 > f(x_0, y_0) = \min_{(x, y) \in \bar{D}} f(x, y).$$

x_0 是 $f(x, y)$ 在 $D \cap \{(x, y_0) : x \in \mathbb{R}\}$ 的极小值点, 因此

$$f''_{xx}(x_0, y_0) \geq 0.$$

同理, $f''_{yy}(x_0, y_0) \geq 0$.

但由已知条件可得

$$f''_{xx}(x_0, y_0) + f''_{yy}(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) < 0.$$

矛盾.

(2) 令 $g(x, y) = f(x, y) - \frac{\alpha}{2\beta} e^x$, 其中

$$\alpha = \min_{(x, y) \in \partial D} f(x, y) > 0, \beta = \max_{(x, y) \in \partial D} e^x > 0.$$

于是, $\begin{cases} g''_{xx} + g''_{yy} = g & \text{in } D \\ g > 0 & \text{on } \partial D \end{cases}$.

由(1)中结论知: $g(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in D$.

从而,
$$f(x, y) = g(x, y) + \frac{\alpha}{2\beta} e^x > 0, \quad \forall (x, y) \in D.$$

9. 求原点到曲面 $z^2 = xy + x - y + 4$ 的最短距离.

解: 对条件极值问题

$$\begin{aligned} \min \quad & x^2 + y^2 + z^2 \\ \text{s.t.} \quad & z^2 - xy - x + y - 4 = 0. \end{aligned}$$

构造 Lagrange 函数: $L = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(z^2 - xy - x + y - 4)$

$$L'_x = 2x - \lambda(y + 1) = 0$$

$$L'_y = 2y + \lambda(-x + 1) = 0$$

$$L'_z = 2z + 2\lambda z = 0$$

$$L'_\lambda = z^2 - xy - x + y - 4 = 0$$

解方程组, 得 $x = -1, y = 1, z = \pm 1$. 条件极值问题可能的极值点为

$$P_1(-1, 1, 1), \quad P_2(-1, 1, -1),$$

到原点的距离 $d(P_1) = d(P_2) = \sqrt{3}$. 由实际意义, 原点到曲面 $z^2 = xy + x - y + 4$ 存在最短距离, 故 $\sqrt{3}$ 就是最短距离.

10. 当 x, y, z 都大于 0 时, 求 $f = \ln x + 2\ln y + 3\ln z$ 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 6r^2$ 上的最大值.

并证明对任意正实数 a, b, c , 下述不等式成立: $ab^2c^3 \leq 108 \left(\frac{a+b+c}{6} \right)^6$.

解: 令 $L(x, y, z, \lambda) = \ln x + 2\ln y + 3\ln z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 6r^2)$

由 $\frac{\partial L}{\partial(x \ y \ z)} = 0$, 得 $x^2 = \frac{1}{2\lambda}, y^2 = \frac{2}{2\lambda}, z^2 = \frac{3}{2\lambda},$

代入球面方程得, $\lambda = \frac{1}{2r^2}$, 所以

$$f_{\max} = \ln r + \ln 2r^2 + 3\ln(\sqrt{3}r) = 6\ln r + \frac{3}{2}\ln 3 + \ln 2$$

所以 $\ln xyz^3 = \ln x + \ln y + 3\ln z \leq 6\ln r + \ln \sqrt{108} = \ln[\sqrt{108}(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{6})^3],$

$$xyz^3 \leq \sqrt{108}(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{6})^3,$$

两边平方得

$$x^2 y^2 z^6 \leq 108 \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{6} \right)^6$$

所以对任意正数 a, b, c 有 $abc^3 \leq 108 \left(\frac{a+b+c}{6} \right)^6$.

11. 求函数 $z = xy(4-x-y)$ 在由三条直线 $x=1$, $y=0$ 和 $x+y=6$ 所围有界闭区域上的最大值.

解: 记由三条直线 $x=1$, $y=0$ 和 $x+y=6$ 所围的有界开区域为 D , 有界闭区域为 \overline{D}

(I) 求函数 $z(x, y)$ 在区域 D 内的极值. 令

$$z'_x = 4y - 2xy - y^2 = 0$$

$$z'_y = 4x - x^2 - 2xy = 0$$

驻点 $(0,0), \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right), (0,4), (4,0)$, 在 D 内的驻点为 $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

(II) 求函数 $z(x, y)$ 在边界上的极值. 区域 D 的边界由三个直线段构成. 这对应着三个条件极值问题如下:

$$(1) \quad \begin{cases} \text{Max } xy(4-x-y) \\ \text{s.t. } x=1 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \text{Max } xy(4-x-y) \\ \text{s.t. } y=0 \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \text{Max } xy(4-x-y) \\ \text{s.t. } x+y=6 \end{cases}$$

解问题 (1). 将 $x=1$ 代入 $z = xy(4-x-y)$ 得一元函数 $z = y(3-y)$. 令

$z' = 3-2y = 0$, 即得到驻点 $(1, 3/2)$. 对应函数值为 $z = 9/4$

解问题 (2). 将 $y=0$ 代入 $z = xy(4-x-y)$, 得 $z=0$.

解问题 (3). 作 Lagrange 函数 $L = xy(4-x-y) + \lambda(x+y-6)$. 令

$$L'_x = 4y - 2xy - y^2 + \lambda = 0$$

$$L'_y = 4x - x^2 - 2xy + \lambda = 0$$

$$L'_\lambda = x + y - 6 = 0$$

解这个方程组求得函数在边界 $x+y=6$ 有驻点 $(3,3)$.

于是我们得到函数在闭区域 \overline{D} 上有驻点 $(4/3, 4/3)$, $(1, 3/2)$ 和 $(3, 3)$. 函数也可能在

三个角点 $(1,0), (6,0), (1,5)$ 上取得最值。由于函数 $z = xy(4-x-y)$ 在有界闭区域 \overline{D} 上连续，故函数在 \overline{D} 上的最大值和最小值都在这六个点上取得。

计算函数 $z = xy(4-x-y)$ 在六个点上的值可知，函数 $z(x, y)$ 在点 $(4/3, 4/3)$ 处取得最大值 $z(4/3, 4/3) = 64/27$ 。在点 $(3, 3)$ 处取得最小值 $z(3, 3) = -18$ 。

12. 求 $z(x, y) = 3axy - x^3 - y^3$ 的极值。

解：当 $a = 0$ 时， $z = -x^3 - y^3$ ， $z'_x = -3x^2$ ， $z'_y = -3y^2$ 。令 $z'_x = z'_y = 0$ ，得驻点 $(0, 0)$ 。但 $(0, 0)$ 不是 $z = -x^3 - y^3$ 的极值点。因此 $a = 0$ 时， $z(x, y)$ 无极值。

当 $a \neq 0$ 时， $z'_x = 3ay - 3x^2$ ， $z'_y = 3ax - 3y^2$ 。令 $z'_x = z'_y = 0$ ，得驻点 $(0, 0), (a, a)$ 。

对于驻点 (a, a) ，因为

$$A = z''_{xx}(a, a) = -6a, B = z''_{yy}(a, a) = -6a, C = z''_{xy}(a, a) = 3a, AC - B^2 = 27a^2 > 0.$$

所以，当 $a > 0$ 时， $z(x, y)$ 在 (a, a) 取到极大值 $z(a, a) = a^3$ 。当 $a < 0$ 时， $z(x, y)$ 在 (a, a) 取到极小值 $z(a, a) = a^3$ 。

对于驻点 $(0, 0)$ 。当 $a > 0$ 时，

$$z(x, 0) = 3ax - 3x^3 = x(3a - 2x) = 0 \quad z(0, y) = 3ay - 3y^3 = 0.$$

$$z(x, -x) = -3ax < 0 = z(0, 0) \quad \forall x > 0$$

因此， $(0, 0)$ 不是 $z(x, y)$ 的极值点。当 $a < 0$ 时，

$$z(x, x) = 3ax^2 - 2x^3 = x^2(3a - 2x) < 0 = z(0, 0), \quad \forall x \in (\frac{3a}{2}, 0);$$

$$z(x, -x) = -3ax > 0 = z(0, 0) \quad \forall x < 0$$

因此， $(0, 0)$ 不是 $z(x, y)$ 的极值点。

综上，当 $a = 0$ 时， $z(x, y)$ 没有极值；当 $a > 0$ 时， $z(x, y)$ 在 (a, a) 取到极大值

$z(a, a) = a^3$ ；当 $a < 0$ 时， $z(x, y)$ 在 (a, a) 取到极小值 $z(a, a) = a^3$ 。

13. $f(x, y) = 2x + y - x^2 - e^{x+y}$ 。

(1) 求 $f(x, y)$ 的极值;

(2) $f(x, y)$ 在 \mathbb{R}^2 上是否有最大值、最小值? 若有, 求最值。若无, 说明理由。

解答: (1) 由 $\begin{cases} f'_x(x, y) = 2 - 2x - e^{x+y}, \\ f'_y(x, y) = 1 - e^{x+y}, \end{cases}$ 得驻点 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

$$H_f = \begin{pmatrix} -2 - e^{x+y} & -e^{x+y} \\ -e^{x+y} & -e^{x+y} \end{pmatrix}, \det H_f = 2e^{x+y} > 0,$$

H_f 为负定矩阵, 因此 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ 是极大值点, 此时 $f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4}$.

(2) $\lim_{\substack{y=x^2-2x \\ x \rightarrow +\infty}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -e^{x^2-x} = -\infty$, 因此 $f(x, y)$ 在 \mathbb{R}^2 上没有最小值。

$$\forall c \in \mathbb{R}, f(x, x^2 - 2x + c) = c - e^{x^2-x+c} = c - e^{(x-1/2)^2+c-1/4} \leq c - e^{c-1/4}.$$

令 $g(c) = c - e^{c-1/4}$, 则 $g'(c) = 1 - e^{c-1/4}$,

$c > \frac{1}{4}, g'(c) < 0, g(c)$ 严格单调递减; $c < \frac{1}{4}, g'(c) > 0, g(c)$ 严格单调递增.

因此 $g(c) \leq g(\frac{1}{4}) = -\frac{3}{4}$.

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists c \in \mathbb{R}, s.t. y = x^2 - 2x + c$, 于是

$$f(x, y) = f(x, x^2 - 2x + c) = c - e^{x^2-x+c} = c - e^{(x-1/2)^2+c-1/4} \leq c - e^{c-1/4} \leq -\frac{3}{4}.$$

当 $c = \frac{1}{4}, x = \frac{1}{2}$ 即 $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}$ 时等号成立。故 $f(x, y)$ 在点 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ 取到最大值

$$\max_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y) = f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4}.$$