# 第 8 次习题课 三重积分

**1.** （三重积分）设是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 所围成的区域，积分 $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$ ＝?

2. 求 $\iiint\limits_\Omega (1+x^2+y^2)zdxdydz$，其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\mid \sqrt{x^2+y^2}\le z\le H\right\}$.

3. 设 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, $F(t)=\iiint\limits_\Omega \left(z^2+f(x^2+y^2)\right)dxdydz$ ，其中

$\Omega=\left\{(x,y,z)\mid 0\le z\le h, x^2+y^2\le t^2\right\}$ $(t>0)$. 求 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{F(t)}{t^2}$.

4. 求三重积分: $I=\iiint\limits_\Omega (x+y+z)\,dv$ ，其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|\begin{cases}0\le z\le\sqrt{1-y^2-x^2}\\ z\ge\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}\right\}$.

**5.** 求由曲面 $S:(x^2+y^2)^2+z^4=z$ 所围立体 $\Omega$ 的体积。

**6.** 令曲面 $S$ 在球坐标下方程为 $\rho=a(1+\cos\varphi)$ ，$\Omega$ 是 $S$ 围成的有界区域，计算 $\Omega$ 在直角坐标系下的形心坐标。

**7.** 求由六个平面 $3x-y-z=\pm1, -x+3y-z=\pm1, -x-y+3z=\pm1$ 所围立体的体积.

8. 设 $V=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le1\}$，$h=\sqrt{a^2+b^2+c^2}>0$，$f(u)$ 在区间 $[-h,h]$ 上连续，证明：$\iiint\limits_V f(ax+by+cz)dxdydz=\pi\int_{-1}^{1}(1-t^2)f(ht)dt$ 。

9. 设 $f\in C([0,1])$, 证明: $\int_0^1 dx\int_x^1 dy\int_x^y f(x)f(y)f(z)dz=\dfrac{1}{6}\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^3$.

10. 设 $f\in C([a,b])$, 证明: $\int_a^b dx_1\int_a^{x_1}dx_2\cdots\int_a^{x_{n-1}}f(x_n)dx_n=\dfrac{1}{n!}\int_a^b (b-x)^n f(x)dx.$