第 7 次习题课　二重积分

1. 若 $f(x,y)$ 是有界闭区域 D 上的非负连续函数,且在 D 上不恒为零,则 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma > 0$

2. 改变累次积分顺序 $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy + \int_1^3 dx\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)dy$；

3. 对积分 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，$D=\{(x,y)\big|0\le x\le 1,\ 0\le x+y\le 1\}$ 进行极坐标变换并写出变换后不同顺序的累次积分

4. 计算二重积分：$\iint\limits_D |xy|dxdy$,其中 D 为圆域: $x^2+y^2\le a^2$。

5. 求由曲线所围的平面图形面积: $(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})=\sqrt{x^2+y^2}$ 。

6. 试作适当变换,计算下列积分:

(1) $\iint\limits_D (x+y)\sin(x-y)dxdy, D=\{(x,y)\,|\,0\le x+y\le\pi, 0\le x-y\le\pi\};$

(2) $\iint\limits_D e^{\frac{y}{x+y}}dxdy, D=\{(x,y)\,|\,x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}.$

7. 设 $f(x,y)$ 为连续函数,且 $f(x,y)=f(y,x)$. 证明:

$$\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy = \int_0^1 dx\int_0^x f(1-x,1-y)dy.$$

8. 计算 $\mathrm{I}=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx.$

9. 证明: $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx.$

10. $f(x)\in C[0,1], f>0, f\downarrow.$ 求证: $\dfrac{\int_0^1 xf^2(x)dx}{\int_0^1 xf(x)dx}\le\dfrac{\int_0^1 f^2(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx}.$

11. 设 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x,y\le 1\}, z=f(x,y)\in C^2(D). \left|\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}\right|\le 4, \forall(x,y)\in D;$

$f(x,y)\equiv f_x'(x,y)\equiv 0, \forall(x,y)\in\partial D.$ 证明: $\left|\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right|\le 1.$