

第5次习题课 极值

1. f 连续, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1$. 试问: $(0,0)$ 是否 f 的极值点?
2. f 连续, $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x \neq \sin y}} \frac{f(x,y) - f(0,0)}{(x - \sin y)^2} = A > 0$. 试问: $(0,0)$ 是否 f 的极值点?
3. 求 $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ 的极值。
4. f 在 \mathbb{R}^2 上一阶连续可微, 且 $\forall (x,y) \neq (0,0)$, 有 $xf'_x(x,y) + yf'_y(x,y) > 0$. 证明: 原点是 f 的唯一极小值点, 且 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$.
5. $F(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 的邻域中二阶连续可微, 且

$$F(x_0, y_0) = F'_x(x_0, y_0) = 0, \quad F''_{xx}(x_0, y_0)F'_y(x_0, y_0) < 0.$$

证明: 由方程 $F(x,y) = 0$ 在点 (x_0, y_0) 附近所确定的隐函数 $y = y(x)$ 在点 x_0 取到极小值。

6. (隐函数的极值) 设 $z = z(x,y)$ 由 $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$ 确定, 求该函数的极值.
7. 函数 $z(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 在 D 的边界上的值为零, 在 D 内部偏导数存在且 $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = f(z)$, 其中 f 是严格单调函数, 且 $f(0) = 0$. 证明: $z(x,y) \equiv 0, (x,y) \in D$.

8. 假设 D 为有界开区域, $f \in C^2(D)$, $f \in C(\bar{D})$, 且 $\begin{cases} f''_{xx} + f''_{yy} = f & \text{in } D, \\ f > 0 & \text{on } \partial D. \end{cases}$

求证: (1) $f \geq 0$ in D . (2) $f > 0$ in D .

9. 求原点到曲面 $z^2 = xy + x - y + 4$ 的最短距离.
10. 当 x, y, z 都大于0时, 求 $f = \ln x + 2 \ln y + 3 \ln z$ 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 6r^2$ 上的最大值.

并证明对任意正实数 a, b, c , 下述不等式成立: $ab^2c^3 \leq 108 \left(\frac{a+b+c}{6} \right)^6$.

11. 求函数 $z = xy(4 - x - y)$ 在由三条直线 $x = 1$, $y = 0$ 和 $x + y = 6$ 所围有界闭区域上的最大值.
12. 求 $z(x,y) = 3axy - x^3 - y^3$ 的极值.

13. $f(x, y) = 2x + y - x^2 - e^{x+y}$.

(1) 求 $f(x, y)$ 的极值;

(2) $f(x, y)$ 在 \mathbb{R}^2 上是否有最大值、最小值? 若有, 求最值。若无, 说明理由。