



Review

一致收敛函数项级数和函数的性质

- 逐项求极限

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \text{ 在区间 } I \text{ 上一致收敛} \\ f_n(x) \in C(I), \forall n \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \in C(I), \text{ 即 } \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$$



● 逐项积分

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \text{ 在区间 } [a, b] \text{ 上一致收敛} \\ f_n(x) \in C[a, b], \forall n \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \int_a^x \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^x f_n(x) dx, \forall x \in [a, b].$$



● 逐项求导

$$f_n(x) \in C^1[a, b], \forall n$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上一致收敛}$$

$$\exists x_0 \in [a, b], s.t. \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0) \text{ 收敛}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1) \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上一致收敛;} \\ (2) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x). \end{array} \right.$$



§ 3. 幂级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

内容:

- 幂级数的收敛性、收敛半径
- 幂级数和函数的性质
- C^∞ 函数的幂级数展开



1. 幂级数的收敛性

Thm (Abel第一定理) $x_0 \neq 0, \{a_n x_0^n\}$ 有界, 则 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在

$(-|x_0|, |x_0|)$ 上绝对收敛; 且 $\forall r < |x_0|$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $[-r, r]$ 上一致收敛 (内闭一致收敛).

Proof. $|a_n x_0^n| \leq M$, 则 $|x| \leq r < |x_0|$ 时,

$$|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n \cdot \left(\frac{x}{x_0} \right)^n \right| \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M \left| \frac{r}{x_0} \right|^n.$$

故 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $[-r, r]$ 上绝对收敛且一致收敛 (Weierstrass). \square



Corollary.

(1) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $(-|x_0|, |x_0|)$ 上点点绝对收敛.

(2) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $|x| > |x_0|$ 上点点发散.

(3) $\exists \rho \in [0, +\infty], s.t. \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $(-\rho, \rho)$ 上点点绝对收敛, 在

$|x| > \rho$ 上点点发散. 称此 ρ 为幂级数的收敛半径.

(4) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $\rho \geq |x_0|$.



$$(5) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n \text{ 发散} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ 的收敛半径 } \rho \leq |x_0|.$$

$$(6) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n \text{ 条件收敛} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ 的收敛半径 } \rho = |x_0|.$$

$$(7) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \text{ 的收敛半径分别为 } \rho_1, \rho_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n \text{ 的收敛半径 } \rho \geq \min\{\rho_1, \rho_2\}; \\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n x^n \text{ 的收敛半径 } \rho \geq \rho_1 \rho_2. \end{cases}$$



Proof. $\forall |x| < \rho_1 \rho_2, \exists |x_1| < \rho_1, |x_2| < \rho_2, \text{ s.t. } x = x_1 x_2.$

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 ρ_1 , 则 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_1^n$ 收敛, $\{a_n x_1^n\}$ 有界,

$\exists M > 0, \text{ s.t. } |a_n x_1^n| \leq M, \forall n.$ 继而有

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n b_n x^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n x_1^n b_n x_2^n| \leq M \sum_{n=0}^{+\infty} |b_n x_2^n|.$$

$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ 的收敛半径为 ρ_2 , 则 $\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n x_2^n|$ 收敛, $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n b_n x^n|$ 收敛.

由 $|x| < \rho_1 \rho_2$ 的任意性, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n x^n$ 的收敛半径 $\rho \geq \rho_1 \rho_2.$



Remark.

(1) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛域为区间, 且形如 $(-\rho, \rho)$, $(-\rho, \rho]$, $[-\rho, \rho)$, $[-\rho, \rho]$, $(-\infty, +\infty)$ 或 $\{0\}$.

(2) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在其收敛域上内闭一致收敛.

(Abel 第一、二定理)



Thm. (Abel 第二定理) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在其收敛区间的端点 $x = \rho$

(或 $x = -\rho$) 收敛, 则 $\forall 0 < r < \rho$, 该级数在 $[-r, \rho]$ (或 $[-\rho, r]$) 上一致收敛.

Proof. 设 $\sum a_n \rho^n$ 收敛. $\forall x \in [0, \rho]$, $\sum a_n x^n = \sum a_n \rho^n (x/\rho)^n$, $\{(x/\rho)^n\}$ 关于 n 单调, 且 $|(x/\rho)^n| \leq 1$, 一致有界. 由 Abel 判别法, $\sum a_n x^n$ 在 $[0, \rho]$ 上一致收敛. 又 $\forall r \in (0, \rho)$, $\sum a_n x^n$ 在 $[-r, r]$ 上一致收敛 (Abel 第一定理), 故 $\sum a_n x^n$ 在 $[-r, \rho]$ 上一致收敛. \square



Thm. 记 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 ρ .

(1) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q$, 则 $\rho = 1/q$;

(2) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$, 则 $\rho = 1/q$;

(3) 若 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q$, 则 $\rho = 1/q$;

(4) 若 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$, 则 $\rho = 1/q$;

这里, $\frac{1}{0} = +\infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$.



例. 求 $\sum_{n=0}^{+\infty} (1+1/n)^{n^2} x^n$ 的收敛半径与收敛域.

解: $a_n = (1+1/n)^{n^2}$, $\sqrt[n]{a_n} = (1+1/n)^n \rightarrow e$, 则 $\rho = 1/e$.

$|x| = 1/e$ 时,

$$\begin{aligned} |a_n x^n| &= e^{n^2 \ln(1+1/n) - n} = e^{n^2 (1/n - 1/2n^2 + o(1/n^2)) - n} \\ &= e^{-1/2 + o(1)} \rightarrow e^{-1/2} \neq 0, n \rightarrow +\infty \text{ 时.} \end{aligned}$$

因此 $\sum_{n=0}^{+\infty} (1+1/n)^{n^2} x^n$ 在 $x = \pm 1/e$ 处发散, 其收敛域为

$(-1/e, 1/e)$. \square



例. 求 $\sum_{n=0}^{+\infty} (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}) \frac{1}{2^n} (x+1)^{2n}$ 的收敛半径与收敛域.

解: 令 $a_n = (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}) \frac{1}{2^n}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$, $y = \pm 2$ 时,

$$|a_n y^n| = (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}) \rightarrow +\infty,$$

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n$ 的收敛域为 $(-2, 2)$. 于是 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x+1)^{2n}$ 的收敛域为

$(x+1)^2 < 2$, 即 $x \in (-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})$, 收敛半径为 $\rho = \sqrt{2}$. \square



例. 求 $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$ 的收敛半径与收敛域.

解法一: 记 x^n 的系数为 a_n , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1, \rho = 1$.

又 $\sum_{n=0}^{+\infty} (\pm 1)^{n^2}$ 发散, 故 $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$ 的收敛域为 $(-1, 1)$.

解法二: $\forall |x| < 1, \sum_{n=0}^{+\infty} |x^{n^2}| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |x|^n$ 收敛;

又 $\sum_{n=0}^{+\infty} (\pm 1)^{n^2}$ 发散, 故 $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$ 的收敛域为 $(-1, 1)$. \square



2. 函数和函数的性质

Thm. 幂级数的和函数在其收敛域上连续. 具体来说, 设

$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 ρ , 则 $S(x) \in C(-\rho, \rho)$; 若幂

级数在 $x = \rho$ 收敛, 则 $S(x) \in C(-\rho, \rho]$; 若幂级数在 $x = -\rho$ 收敛, 则 $S(x) \in C[-\rho, \rho)$.



Thm. 设 $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 ρ , 则

$$\int_0^x S(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \quad \forall x \in (-\rho, \rho),$$

且 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 的收敛半径 $\rho_1 \geq \rho$. 事实上, $\rho_1 = \rho$.



Thm. $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 ρ , 则 $S(x) \in C^\infty(-\rho, \rho)$,

$\forall x \in (-\rho, \rho), \forall k = 1, 2, \dots$

$$S^{(k)}(x) = k! a_k + \frac{(k+1)!}{1!} a_{k+1} x + \dots + \frac{(k+n)!}{n!} a_{n+k} x^n + \dots,$$

且 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(k+n)!}{n!} a_{n+k} x^n$ 的收敛半径 $\rho_1 \geq \rho$. 事实上, $\rho_1 = \rho$.



Remark. 逐项积分和逐项求导后得到的新的幂级数的收敛半径与原级数相同.

Remark. 逐项积分后得到的新的幂级数的收敛域可能改变.例如, $\sum \frac{x^n}{n}$ 的收敛域为 $[-1, 1)$, 逐项积分后的级数为

$$\sum \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}, \text{收敛域为} [-1, 1].$$



3. 函数的幂级数展开

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad \forall x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$$

$$\Rightarrow \forall x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho), k = 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= k! a_k + \frac{(k+1)!}{1!} a_{k+1} (x - x_0) \\ &\quad + \dots + \frac{(k+n)!}{n!} a_{n+k} (x - x_0)^n + \dots \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad (\text{令 } x = x_0)$$



Def. 称 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$ 为 $f(x)$ 在 x_0 的 Taylor 级数; 当

$x_0 = 0$ 时, Taylor 级数也称为 Maclaurin 级数.

Question. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$ 在点 x 处是否收敛?

Question. 若 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$ 在点 x 处收敛, 其和函数

是否一定是 $f(x)$?

不一定



例. $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0; \\ 0 & x = 0. \end{cases}$

$$f^{(n)}(0) = 0, n = 1, 2, \dots, n.$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \equiv 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

故 $f(x) \neq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \forall x \neq 0. \square$



Thm. 若 $\exists M > 0, s.t.$

$$|f^{(n)}(x)| \leq M, \forall x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho), n = 1, 2, \dots$$

则 $f(x)$ 在 $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ 内可以展开成 Taylor 级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Proof. $\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right|$

(ξ 介于 x 与 x_0 之间)

$$\leq \frac{M}{(n+1)!} \rho^{n+1}, \quad \forall x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho), \forall n. \square$$



Remark. 幂级数展开的唯一性.

例. e^x 在 $x_0 = 0$ 的幂级数展开. (公式法)

解: $\forall R > 0$, 在 $(-R, R)$ 上, $|(e^x)^{(n)}| = e^x < e^R$ 有界. 故

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad x \in (-R, R).$$

由 R 的任意性,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}. \square$$



例. $|(\sin x)^{(n)}| \leq 1$, 故

(公式法)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}. \square$$

例. 上例中 $\sin x$ 的幂级数展开式逐项求导得:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(逐项求导法)

例. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1).$



例. 求 $\ln(1+x)$ 在 $x_0 = 0$ 的幂级数展开. (逐项积分法)

解: $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1).$

在 $[0, x]$ 上积分得:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots, \quad x \in (-1, 1).$$

上式右端幂级数在 $x = 1$ 处收敛, 其和函数在 $x = 1$ 处左连续. 故

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots, \quad x \in (-1, 1].$$

□



例. 求 $\arctan x$ 在 $x_0 = 0$ 的幂级数展开. (逐项积分法)

解: $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + (-1)^n x^{2n} + \cdots, x \in (-1, 1).$

两边在 $[0, x]$ 上积分得

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots, x \in (-1, 1).$$

注意到右边级数在 $x = \pm 1$ 收敛, 而 $\arctan x$ 在 \mathbb{R} 上连续, 故

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots, x \in [-1, 1].$$

□



例. 求 $(1+x)^\alpha$ ($\alpha \neq 0$) 在 $x_0 = 0$ 的幂级数展开. (公式法)

解: $f(x) = (1+x)^\alpha$, $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, \dots ,

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots,$$

一方面, 由比值判别法得右端级数收敛半径 $\rho = 1$. 另一方面, 可以证明, $\forall x \in (-1, 1)$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$ (要用到带积分余项的Taylor展开式, 证明略). 故上式对 $\forall x \in (-1, 1)$ 成立. 进一步可以证明



$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots \\ + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots,$$

$\alpha \leq -1$ 时, $x \in (-1, 1)$;

$-1 < \alpha < 0$ 时, $x \in (-1, 1]$;

$\alpha > 0$ 时, $x \in [-1, 1]$.





例. 将 $f(x) = \ln \frac{1}{2+2x+x^2}$ 在 $x_0 = -1$ 处展开成幂级数.

解: $f(x) = -\ln(1 + (1+x)^2)$,

$$= -\left((1+x)^2 - \frac{(1+x)^4}{2} + \frac{(1+x)^6}{3} + \cdots \right) \quad ((1+x)^2 \leq 1)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} (1+x)^{2n}}{n} \quad x \in [-2, 0]. \square$$

(变量替换法)



例. $f(x) = \frac{x^2}{1+x^3}$, 求 $f^{(200)}(0)$.

解: $f(x) = \frac{x^2}{1+x^3}$

$$= x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{3n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{3n+2}, x \in (-1, 1).$$

令 $3n+2=200$, 得 $n=66$.

$$\frac{f^{(200)}(0)}{200!} = (-1)^{66}, \quad f^{(200)}(0) = 200! \quad \square$$



例. 求 $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n-1)} x^{2n}$ 的收敛域与和函数.

解: $\rho = 1$, 收敛域为 $[-1, 1]$.

$$S'(x) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} x^{2n-1}, \quad \forall x \in (-1, 1),$$

$$S''(x) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} x^{2n-2} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-x^2)^{n-1} = \frac{2}{1+x^2}, \quad \forall x \in (-1, 1).$$

$$S'(0) = S(0) = 0, \quad S'(x) = 2 \arctan x,$$

$$S(x) = 2x \arctan x - \ln(1+x^2), \quad x \in [-1, 1]. \square$$



例. 求 $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!2^n} x^n$ 的收敛域与和函数.

解: $\frac{(n+1)^2}{(n+1)!2^{n+1}} \bigg/ \frac{n^2}{n!2^n} \rightarrow 0, \rho = +\infty$, 收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{(n-1)!2^n} = x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{(n-1)!2^n} \triangleq xS_1(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} \int_0^x S_1(x) dx &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x \frac{nx^{n-1} dx}{(n-1)!2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!2^n} \\ &= \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x/2)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{xe^{x/2}}{2}, x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(e^x 展开的变量替换)



$$S_1(x) = \left(\frac{x e^{x/2}}{2} \right)' = \frac{1}{4} e^{x/2} (2 + x), x \in \mathbb{R}.$$

$$S(x) = x S_1(x) = \frac{1}{4} e^{x/2} (2x + x^2), \forall x \in \mathbb{R}. \square$$

Remark. 逐项求导和逐项积分在幂级数求和以及 C^∞ 函数的幂级数展开中的应用.

例. 求证: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1.$



解: $e^x - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$

$$\frac{e^x - 1}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}, \quad x \neq 0.$$

两边求导, 得

$$\frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{(n+1)!}, \quad x \neq 0.$$

令 $x=1$, 得

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1. \quad \square$$



作业：习题6.3 No. 1 (单), 2, 3 (单)