# 第十二周作业参考答案

## 习题 4.7

3.

(1) $I=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le a^2}\left(3x^2+3y^2+3z^2\right)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{a}3\rho^4\sin\theta d\rho=\frac{12}{5}\pi a^5$

(2) $I=\iiint\limits_{\Omega}(y-z)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}-zdxdydz=-\int_0^1 zdz\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}dxdy=-\frac{\pi}{2}$

(3) $I=\iiint\limits_{\Omega}3dxdydz=\frac{1}{2}$

(4) 补上平面 $S_1=\{(x,y,z)|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1,z=0\}$, 方向朝 $z$ 轴正向

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{S^+ +S_1^+}a^2b^2z^2xdy\wedge dz+b^2c^2x^2ydz\wedge dx+c^2a^2y^2zdx\wedge dy\\&=-\iiint\limits_{\Omega}\left(a^2b^2z^2+b^2c^2x^2+c^2a^2y^2\right)dxdydz\\&=-a^2b^2c^2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\rho^2\cdot abc\rho^2\sin\theta d\rho=-\frac{2\pi}{5}a^3b^3c^3\end{aligned}$$

又 $\iint\limits_{S_1^+}a^2b^2z^2xdy\wedge dz+b^2c^2x^2ydz\wedge dx+c^2a^2y^2zdx\wedge dy=0$,

所以 $I=-\frac{2\pi}{5}a^3b^3c^3$

(5) 补上曲面 $S_\varepsilon=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2\}$ (取 $\varepsilon<1$, 使得 $S_\varepsilon$ 在 $S$ 内部), 外侧为正

$$\begin{aligned}&\oiint\limits_{S^+ +S_\varepsilon^-}\frac{1}{r^3}\left(xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy\right)\\&=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right)\right)dxdydz=0\end{aligned}$$

所以 $I=\oiint\limits_{S_\varepsilon^+}\frac{1}{r^3}\left(xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy\right)=\frac{1}{\varepsilon^3}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le\varepsilon^2}3dV=4\pi$

5.

(1) 设 $S^+$ 为平面 $x+y+z=0$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 内部分, 以 $L^+$ 为正向边界.
$S^+$ 的正单位法向量 $\mathbf{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, $rot(y,z,x)=(-1,-1,-1)$, 由 Stokes 公式,
$I=\iint\limits_{S}rot(y,z,x)\cdot\mathbf{n}dS=-\sqrt{3}\pi R^2$

(2) $-2\pi$

(3) 设 $S^+$ 为平面 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ 在第一卦限内部分, 以 $L^+$ 为正向边界, 由 Stokes 公式,

$$
\begin{aligned}
I &= \iint\limits_{S^+} \begin{vmatrix} dy\wedge dz & dz\wedge dx & dx\wedge dy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & z^2 & x^2 \end{vmatrix} \\
&= \iint\limits_{S^+} -2z dy\wedge dz - 2x dz\wedge dx - 2y dx\wedge dy \\
&= -2\iint\limits_{S^+} z dy\wedge d\left(c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\right) + x d\left(c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\right)\wedge dx + y dx\wedge dy \\
&= -2\iint\limits_{S^+} -\frac{c}{a} z dy\wedge dx - \frac{c}{b} x dy\wedge dx + y dx\wedge dy \\
&= -2\iint\limits_{S^+} \left(\frac{c}{a}z+\frac{c}{b}x+y\right) dx\wedge dy = -\frac{1}{3}\left(bc^2+a^2c+ab^2\right)
\end{aligned}
$$

6.

(1) $-\dfrac{yz}{x}+C$, $C$ 为常数

(2) $\arctan\dfrac{x+z}{y}+C$, $C$ 为常数

7.

(1) 5

(2) -2

**习题 5.1**

2. 由 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1}=S$ 存在, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$, 所以对 $\forall\varepsilon>0, \exists N>0$, 当 $n>N$ 时,
$|S_{2n+1}-S|<\dfrac{\varepsilon}{2}, |u_n|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, 所以
$|S_{2n}-S|=|S_{2n+1}-u_{2n+1}-S|\le|S_{2n+1}-S|+|u_{2n+1}|<\varepsilon$, 这表明
对 $\forall\varepsilon>0, \exists\, 2N+1>0$, 当 $n>2N+1$ 时, $|S_n-S|<\varepsilon$, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛

5. 提示: $\sum\limits_{k=1}^{n}(k+1)(u_{k+1}-u_k)=(n+1)u_{n+1}-u_1-\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$

6.

(1) $\dfrac{400}{3}$ (2) 发散 (3) $\dfrac{1}{3}$ (4) $\dfrac{1}{4}$ (5) 发散

(6) $1-\sqrt{2}$ (7) $\dfrac{\pi}{4}$. 提示: $\arctan\dfrac{1}{2n^2}=\arctan\dfrac{1}{2n-1}-\arctan\dfrac{1}{2n+1}$

(8) 3 (9) 发散

7. $\dfrac{1}{m}\sum\limits_{n=1}^{m}\dfrac{1}{n}$

**习题 5.2**

1.

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) 收敛 | (2) 收敛 | (3) 发散 | (4) 收敛 |
| (5) 收敛 | (6) 收敛 | (7) 收敛 | (8) 发散 |

2.

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) 收敛 | (2) 收敛 | (3) 收敛 | (4) 收敛 |
| (5) 收敛 | (6) 发散 | | |

3.

(1) 收敛　　(2) 收敛

(3) $p > 1$ 时收敛; $p = 1$ 时,$q > 1$ 时收敛; $p = 1, q = 1$ 时, 由积分判敛法, 等价于考虑 $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{1}{x \ln x (\ln \ln x)^r} dx = \int_{\ln 3}^{\infty} \frac{1}{x (\ln x)^r} dx$ 收敛性, $r > 1$ 时收敛. 其余情况发散.

(4) 收敛　　(5) 收敛　　(6) 收敛　　(7) 收敛

(8) 由根值判敛法, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \ln n \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{e} = +\infty$. 故原级数发散.

提示: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$

(9) 收敛　　(10) $a > 1$ 时收敛，其余情况发散

5. $nu_n \leq C$, 所以 $\dfrac{u_n}{n} \leq \dfrac{C}{n^2}$, 收敛性由比较判敛法得

8.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n+1}} = +\infty$, 所以收敛.

(2) $\dfrac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \dfrac{p+q}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, 所以 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = p + q$, 由拉阿伯判别法, $p + q > 1$, 收敛; $p + q < 1$, 发散. $p + q = 1$ 情形, 由高斯判别法, 知发散.

9.

(1) $u_n \sim \dfrac{1}{4} \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, 所以收敛.

(2) $u_n \sim \dfrac{\ln n}{n^2}$, 所以收敛.

10. 若 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 由 $\dfrac{u_n}{u_n + 1} < u_n$, 所以 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{u_n + 1}$ 收敛;

若 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{u_n + 1}$ 收敛, 则 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{u_n + 1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_n + 1} = 0$,

所以 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n \Big/ \frac{u_n}{u_n + 1} = 1$, 由比较判敛法, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

所以二者敛散性相同.

11. 提示: 考虑级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{a^n}$ 收敛性即可.