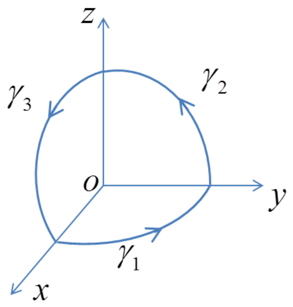
第 10 次习题课 第二型曲线积分、Green 公式

1. L 是球面 $x^2+y^2+z^2=1,(x,y,z\geq 0)$

   与三个坐标平面的交线（从点(1, 1, 1)

   看过去, L 取逆时针方向），计算

   $I=\int_L (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$ 。



2. (1) 设 $P(x,y),Q(x,y)$ 是从A到B的光滑弧段 AB 上的连续函数, AB 的长度为 l, 则

$$\left|\int_{AB} Pdx+Qdy\right|\leq lM,\quad \text{其中} M=\max_{(x,y)\in AB}\sqrt{P^2(x,y)+Q^2(x,y)}.$$

   (2) 设 $L: x^2+y^2=R^2$, 逆时针方向, $I_R=\int_L \dfrac{ydx-xdy}{(x^2+xy+y^2)^2}$, 则 $\lim\limits_{R\to+\infty} I_R=0.$

3. 计算 $\oint_L \dfrac{(x+y)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ ，其中 L 是

   (1) $(x-2)^2+4(y-1)^2=1$，顺时针方向.　　(2) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$，顺时针方向.

4. 计算 $I=\int_L (12xy+e^y)dx-(\cos y-xe^y)dy$, L 是从点 A$(-1,1)$ 沿曲线 $y=x^2$ 到达原点，再沿直线 $y=0$ 到达点 B$(2,0)$ 的有向曲线.

5. 设 $f\in C^1[1,4]$, $f(1)=f(4)$, 闭曲线 L 是曲线 $y=x,\ y=4x,\ xy=1,\ xy=4$ 所围区域 D 的正向边界（逆时针方向），计算 $\int_L \dfrac{f(xy)}{y}dy$ 。

6. 设 $D_t=\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2\leq t^2, t>0\}$， $f(x,y)$ 在 D_t 上连续，在 D_t 内存在连续偏导数．$f(0,0)=1$．若 $f(x,y)$ 在 D_t 上满足方程 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dfrac{1}{2}f(x,y)$．$\vec{n}$ 为有向曲线 ∂D_t 的外单位法向量，求极限 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{1-\cos t}\oint_{\partial D_t}\dfrac{\partial f}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}l$.

7. 设 C 为正向闭曲线： $|x|+|y|=2$, $\oint_C \dfrac{axdy-bydx}{|x|+|y|}=$ [　　　]

   (A) $4(a+b)$；　(B) $8(a+b)$；　(C) $4(a-b)$；　(D) $8(a-b)$.

8. 设在上半平面$D=\{(x,y)|y>0\}$内，函数$f(x,y)$具有连续偏导数,且对任意的$t>0$都有$f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$，证明: 对D内的任意分段光滑的有向简单闭曲线L,都有$\oint_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=0$。

9. D是以$\mathrm{A}(x_1,y_1),\mathrm{B}(x_2,y_2),\mathrm{C}(x_3,y_3)$为顶点的三角形区域,由$\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{BC}},\overrightarrow{\mathrm{CA}}$首尾连接而成的闭曲线为逆时针方向．求$I=\iint_D x^2dxdy.$

10．设$f(x)$是正值连续函数，D为圆心在原点的单位圆，∂D为D的正向边界，**证明：**

（1）$\oint_{\partial D} xf(y)dy-\dfrac{y}{f(x)}dx=\oint_{\partial D} -yf(x)dx+\dfrac{x}{f(y)}dy;$

（2）$\oint_{\partial D} xf(y)dy-\dfrac{y}{f(x)}dx\geq 2\pi.$

11. $f(x,y)\in C^2(\mathbb{R}),\ f''_{xx}(x,y)+f''_{yy}(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$.证明: $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leq 1}(xf'_x+yf'_y)dxdy=\frac{\pi}{2e}.$