第 11 次习题课 第二型曲面积分、Gauss 公式、Stokes 公式

1. 设 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\le x\le 1)$ 的下侧，求

$$\iint_{\Sigma} xdy\wedge dz+2ydz\wedge dx+3(z-1)dx\wedge dy.$$

2. 计算 $\iint_S x(y-z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(x-y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，$S: x^2+y^2=1(0\le z\le 2)$，外侧.

3. 求 $I=\oint_{L^+}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$，其中 L^+ 为 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $y=x\tan\alpha\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的交线, 从 0x 轴的正向看去，圆周的正向为逆时针方向.

4. 向量场 $\mathbf{F}=(2x-3)\mathbf{i}-z\mathbf{j}+\cos z\mathbf{k}$ 是否是保守场 ________ （填是或否）.

5. 设 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，从 z 轴正向看去 L 正向为逆时针方向，则 $\int_L(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz=$____________________.

6. 设 $\mathbf{F}(x,y,z)=(yz,zx,xy)$，则 $\mathrm{rot}\mathbf{F}=$____________，$\mathrm{div}\mathbf{F}=$______________.

7. 设 $u=x^2+y^2+z^2$，则 $\mathrm{div}(\mathrm{grad}u)=$______________；$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}u)=$________。

8. 设 L 是平面 $x+y+z=0$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的交线，从 z 轴正向看去为逆时针方向，求第二类曲线积分 $\displaystyle\int_{L^+}\frac{(y+1)\,dx+(z+2)\,dy+(x+3)\,dz}{x^2+y^2+z^2}$。

9. 设$f(u)$二阶连续可微, $f(0)=0$,求

$$I=\oiint_{\Sigma} x^3dy\wedge dz+\left[\frac{1}{z}f(\frac{y}{z})+y^3\right]dz\wedge dx+\left[\frac{1}{y}f(\frac{y}{z})+z^3\right]dx\wedge dy,$$

其中, Σ为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与两球面$x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2+z^2=4$ 所围空间区域 Ω 的外表面。

10. 设 $\overrightarrow{\mathrm{V}}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))^{\mathrm{T}}\in C^1(\mathbb{R}^3)$, 且

$$\begin{cases}\nabla\cdot\overrightarrow{\mathrm{V}}(x,y,z)=0, & \forall(x,y,z)\in\Omega,\\ \overrightarrow{\mathrm{V}}(x,y,z)=(1,1,1)^{\mathrm{T}}, & \forall(x,y,z)\in\partial\Omega.\end{cases}$$

Ω为$\mathbb{R}^3$中以原点为球心的单位球,求证:$\iiint_{\Omega}(P+Q+R)dxdydz=4\pi.$