Review

$$\prod_{1\le k<+\infty} p_n = p_1 p_2 \cdots p_n \cdots, \quad P_n = \prod_{1\le k\le n} p_k.$$

- $\prod\limits_{1\le k<+\infty} p_n$收敛$\Leftrightarrow \{P_n\}$收敛
- $\prod\limits_{1\le k<+\infty} p_n = P \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} p_n = 1$
- $p_n > 0$,则$\prod\limits_{1\le k<+\infty} p_n = P > 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln p_n$ 收敛.
- $p_n > 0$,则$\prod\limits_{1\le k<+\infty} p_n = e^{\sum\limits_{1\le k<+\infty} \ln p_k}$.

Chap6. 函数项级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots,$$

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x),$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \triangleq \lim_{n\to+\infty} S_n(x).$$

§1. 函数项级数的收敛性

1. 函数项级数的逐点收敛性

Def.若$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0)$ 收敛,则称$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$在$x_0$收敛,称$x_0$为函数项级数的收敛点;所有收敛点构成的集合称为函数项级数的收敛域.

Def.若$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |f_n(x_0)|$ 收敛,则称$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$在$x_0$绝对收敛.

例. $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, x \in (-1,1).$

例. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, x \in \mathbb{R}.$

Proof. 任意取定$x \in \mathbb{R}$, 存在ξ介于0与x之间, $s.t.$

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| = \left| \frac{e^{\xi} x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \le \frac{e^{|x|} |x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$\to 0$, 当$n \to +\infty$时.□

2. 函数项级数的一致收敛性

令$g(t,x)=f_n(x), t\in[n-1,n)$,则

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{n-1}^{n} g(t,x)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} g(t,x)\mathrm{d}t.$$

含参积分的一致收敛性

$\leftrightarrow$ 函数项级数的一致收敛性

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0) = S(x_0) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = S(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x_0) = S(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon, x_0), s.t,$$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x_0) - S(x_0) \right| < \varepsilon, \ \forall n > N.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0) \text{ 收敛}$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon, x_0), s.t,$$

$$\left|S_{n+p}(x_0) - S_n(x_0)\right| < \varepsilon, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}.$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon, x_0), s.t,$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x_0)\right| < \varepsilon, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}.$$

Remark. 若以上分析中$N = N(\varepsilon)$,与x_0无关, 则得到函数列的一致收敛性和函数项级数的一致收敛性.

Def. 称函数列$\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$在$x\in I$上一致收敛, 若$\exists f$,

$\forall \varepsilon>0, \exists N(\varepsilon), s.t.,$

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon, \forall n>N, \forall x\in I.$$

此时, 也称$\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$在$x\in I$上一致收敛到$f(x)$.

Thm (Cauchy准则) $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$在$x\in I$上一致收敛

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N(\varepsilon), s.t.,$

$$\left|f_{n+p}(x)-f_n(x)\right|<\varepsilon, \forall n>N, \forall p\in\mathbb{N}, \forall x\in I.$$

Remark. $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ 在$x\in I$上一致收敛到$f(x)$

$$\Rightarrow \{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}\text{ 在}x\in I\text{上逐点收敛到}f(x).$$

Remark.

$$\left.\begin{array}{l}\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}\text{ 在}x\in I\text{上逐点收敛到}f(x)\\ \{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}\text{ 在}x\in I\text{上一致收敛}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}\text{ 在}x\in I\text{上一致收敛到}f(x).$$

Def. $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, 若 $\{S_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ 在 $x\in I$ 上一致收敛

(到 $S(x)$), 则称 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ 在 $x\in I$ 上一致收敛(到 $S(x)$).

Thm. $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ 在 $x\in I$ 上一致收敛

$\Leftrightarrow \exists S(x), \forall \varepsilon>0, \exists N(\varepsilon), s.t.,$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)-S(x)\right|<\varepsilon, \quad \forall n>N, \forall x\in I.$$

$\Leftrightarrow$ (Cauchy准则) $\forall \varepsilon>0, \exists N(\varepsilon), s.t.,$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right|<\varepsilon, \quad \forall n>N, \forall p\geq 1, \forall x\in I.$$

例. $f_n(x)=x^n$,证明$\{f_n(x)\}$在$(0,1)$上不一致收敛.

Proof. 取$\varepsilon_0=\dfrac{1}{4}$, $\forall N\in\mathbb{N}$, $\exists n=N+1$, $\exists p=N+1$,

$$\exists x_0=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{N+1}}\in(0,1),\ s.t.,$$

$$\left|f_{n+p}(x_0)-f_n(x_0)\right|=\left|x_0^{n+p}-x_0^n\right|$$

$$=x_0^n(1-x_0^p)=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})=\varepsilon_0.\square$$

Remark. $f_n(x)=x^n$在$[0,1]$上收敛到$f(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,1);\\ 1, & x=1.\end{cases}$

例. $f_n(x) = nx^n(1-x)$.证明$\{f_n(x)\}$在[0,1]上不一致收敛.

Proof. 首先证$\{f_n(x)\}$在[0,1]上逐点收敛到0. 事实上,

$$f_n(0) = f_n(1) = 0.$$

$$x \in (0,1)\text{时}, \ f_n(x) = \frac{n(1-x)}{(1/x)^n} \to 0, \text{当} n \to +\infty \text{时}.$$

再证$\{f_n(x)\}$在[0,1]上非一致收敛. 若不然, 则$\{f_n(x)\}$在[0,1]上一致收敛到0.

$$f_n(x) = x^n(n-nx) \le \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1},$$

当$x = n - nx$,即$x = \dfrac{n}{n+1}$时等号成立.

令$g(n)=\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, 则

$$g(n)\to\frac{1}{e}, \text{当}\to+\infty\text{时}.$$

取$\varepsilon_0=\dfrac{1}{2e}$, 则$\forall N\in\mathbb{N},\exists n_0>N, s.t., g(n_0)>\varepsilon_0$.

取$x_0=\dfrac{n_0}{n_0+1}$, 则

$$f_{n_0}(x_0)=g(n_0)>\varepsilon_0.$$

与$\{f_n(x)\}$在[0,1]上一致收敛到0矛盾.$\square$

例. $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ 在$(-1,1)$上非一致收敛.

Proof. $\left|\sum_{k=0}^{n} x^k - \frac{1}{1-x}\right| = \left|\frac{1-x^{n+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x}$.

取$\varepsilon_0 = 1, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n_0 = N+1,\ x_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{N+2}} \in (\frac{1}{2}, 1), s.t.,$

$$\left|\sum_{k=1}^{n_0} x_0^k - \frac{1}{1-x_0}\right| = \frac{|x_0|^{n_0+1}}{1-x_0} > \frac{1/2}{1/2} = 1. \square$$

例. $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sin x}$ 在$\mathbb{R}$上一致收敛.

Proof. $\forall x\in\mathbb{R},\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sin x}$为交错级数,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{(-1)^k}{k+\sin x}\right|\le\frac{1}{n+1+\sin x}\le\frac{1}{n}.$$

于是, $\forall\varepsilon>0,\exists N=\lfloor 1/\varepsilon\rfloor+1,\forall n>N,\forall x\in\mathbb{R}$, 有

$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{(-1)^k}{k+\sin x}\right|<\varepsilon$. 故$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sin x}$ 在$\mathbb{R}$上一致收敛.□

例. $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^3}{(1+x^3)^n}$在$(0,+\infty)$上非一致收敛.

分析: 令$f(t)=\frac{t}{(1+t)^n}, n>1$, 则

$$f(0)=0,\ f(+\infty)=0,\ f(t)>0, \forall t\in(0,+\infty),$$

$$f'(t)=\frac{1}{(1+t)^n}-\frac{nt}{(1+t)^{n+1}}=\frac{1+t-nt}{(1+t)^{n+1}},$$

故$f(t)$在$(0,+\infty)$上的最大值点为$1/(n-1)$.

$\frac{x^3}{(1+x^3)^n}$的最大值点x_n满足: $x_n^3\sim\frac{1}{n}, n\to\infty$时.

Proof. 用Cauchy准则.

取$\varepsilon_0=\dfrac{1}{9}$, $\forall N$, 任意取定$n>N$, $x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$, 有

$$\left(\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{x^3}{(1+x^3)^k}\right)\Bigg|_{x^3=1/n}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1/n}{(1+1/n)^k}$$

$$\geq\frac{1}{n}\frac{1}{(1+1/n)^{2n}}\cdot n\geq\left(\frac{1}{(1+1/n)^n}\right)^2\geq\frac{1}{9}.$$

故$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^3}{(1+x^3)^n}$在$(0,+\infty)$上非一致收敛.□

3. 函数项级数一致收敛的判别法

Thm(Weierstrass判别法) 若非负项级数$\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$收敛, 且

$$\left|f_n(x)\right| \le M_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I,$$

则$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$在$I$上一致收敛.

Proof. $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| \le \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} M_k\right|, \ \forall x \in I, \forall n, p.$ □

Thm(Dirichlet判别法) 若

(1) 函数列$\{a_n(x)\}$对任意固定的$x\in I$都单调, 且在$x\in I$上一致收敛到0;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n(x)$ 的部分和函数列在$x\in I$上一致有界, 即

$$\exists M>0, s.t. \ \left|\sum_{k=1}^{n} b_k(x)\right|\le M, \ \forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in I;$$

则$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在$x\in I$上一致收敛.

Thm(Abel判别法) 若

(1) 函数列$\{a_n(x)\}$对任意固定的$x\in I$都单调, 且在

$x\in I$上一致有界, 即存在$M>0, s.t.$

$$|a_n(x)|\le M, \quad \forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in I;$$

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(x)$ 在$x\in I$上一致收敛;

则$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)b_n(x)$在$x\in I$上一致收敛.

例. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n^2}, \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$ 在$\mathbb{R}$上一致收敛.

Proof. $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2},\quad \left|\frac{x}{1+n^4x^2}\right|\le\frac{1}{2n^2},$$

由Weierstrass判别法知, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$与$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$在$\mathbb{R}$上一致收敛.$\square$

清華大學

例. $\alpha>2$, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} x^{\alpha}e^{-nx^2}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

Proof. 令 $f_n(x)=x^{\alpha}e^{-nx^2}$, 则 $f_n(x)>0, \forall x>0$, 且

$$f_n(0)=0,\ \lim_{x\to\infty} f_n(x)=0,\ f_n'(x)=e^{-nx^2}(\alpha x^{\alpha-1}-2nx^{\alpha+1}),$$

可知 $x=\sqrt{\alpha/2n}$ 是 $f_n(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最大值点,

$$0\le f_n(x)\le f_n(\sqrt{\alpha/2n})=\left(\sqrt{\alpha/2}\right)^{\alpha}\frac{1}{n^{\alpha/2}}e^{-\alpha/2}, \forall x\ge 0.$$

$\alpha>2$, 故 $\sum_{n=1}^{+\infty} x^{\alpha}e^{-nx^2}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛(Weierstrass).□

例. $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$在$[\delta,2\pi-\delta](0<\delta<\pi)$上一致收敛.

Proof. $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$与$x$无关, $\downarrow 0$.

$$\left|\sum_{n=1}^{m}\sin nx\right|\le\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\le\frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}},\ \forall x\in[\delta,2\pi-\delta],\forall m\in\mathbb{N}.$$

故$\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$在$[\delta,2\pi-\delta](0<\delta<\pi)$上一致收敛(Dirichlet).□

Question. $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$在$[0,2\pi]$上是否一致收敛?

清華大學

例. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在$[0,2\pi]$上非一致收敛.

Proof. 用Cauchy准则.

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\sin kx}{k}\bigg|_{x=1/2n}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\sin(k/2n)}{k}$$

$$\geq \sin\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\ \geq\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}.$$

故$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}$在$[0,2\pi]$上不一致收敛.□

例. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{\sqrt{n(n+x)}}$在$x\in[0,+\infty)$上一致收敛.

Proof. $\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{\sqrt{n(n+x)}}=\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}\cdot\left(1\Big/\sqrt{1+\frac{x}{n}}\right)\triangleq a_n\cdot b_n(x).$

$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛, a_n与x无关, 于是$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$关于x一致收敛.

$x\in(0,+\infty), |b_n(x)|\le 1, \{b_n(x)\}$一致有界, 关于$n$单调.

由Abel判别法, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{\sqrt{n(n+x)}}$在$x\in[0,+\infty)$上一致收敛.□

例. $\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\frac{1}{2^n x}$在$x\in(0,+\infty)$上绝对收敛性与一致收敛性？

解：$\forall x\in(0,+\infty),\left|\sin\frac{1}{2^n x}\right|\le\frac{1}{2^n x}$，因此$\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\frac{1}{2^n x}$ 在

$x\in(0,+\infty)$上绝对收敛.

取$\varepsilon_0=1,\forall N\in\mathbb{N},\exists n_0=N+1,\ x_0=\frac{1}{2^N\pi},s.t.,$

$$\left|\sin\frac{1}{2^{n_0}x_0}\right|=\left|\sin\frac{\pi}{2}\right|=1=\varepsilon_0.$$

故$\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\frac{1}{2^n x}$在$x\in(0,+\infty)$上非一致收敛（Cauchy）.□

例. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x^2+n}$在$x\in(-\infty,+\infty)$上绝对收敛性与一致收敛性？

解：给定x, $\left|\frac{(-1)^n}{x^2+n}\right|=\frac{1}{x^2+n}\sim\frac{1}{n}$, $n\to+\infty$时. 故$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x^2+n}$在$\mathbb{R}$上点点非绝对收敛.

$\left\{(-1)^n\right\}$的部分和关于$x\in\mathbb{R}$一致有界; $\left\{\frac{1}{x^2+n}\right\}$在$x\in\mathbb{R}$上关于$n$单调, 一致收敛到0; 故$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x^2+n}$在$x\in(-\infty,+\infty)$上一致收敛(Dirichlet).□

Remark. 以上两个例子说明:绝对收敛性与一致收敛性没有必然的联系.

作业:习题6.1 No.2,3,6,9,10.

附录. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\ln 2.$

Proof. Step1. $1/(n+1)<\ln\left(1+1/n\right)<1/n.$

Step2. 令$x_n=1+1/2+1/3+\cdots+1/n-\ln n$, 则$\lim_{n\to\infty}x_n$存在.

事实上, $x_{n+1}-x_n=1/(n+1)-\ln(1+1/n)<0,\ x_n\downarrow,$

$$x_n>\ln(1+1)+\ln(1+1/2)+\cdots+\ln(1+1/n)-\ln n$$

$$=\ln(n+1)-\ln n>0.$$

Step3. $\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=(x_{2n}+\ln 2n)-(x_n+\ln n)=x_{2n}-x_n+\ln 2\to\ln 2.$