



§ 3. 向量值函数的极限与连续

1. 向量值函数在一点的极限

Def. $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x_0 \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^m, f$ 在 x_0 的某个去心邻域 $B_0(x_0, r)$ 中有定义. 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \in (0, r), s.t.$

$$\|f(x) - A\| < \varepsilon, \quad \forall x \in B_0(x_0, \delta),$$

则称 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 以 A 为极限, 记作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

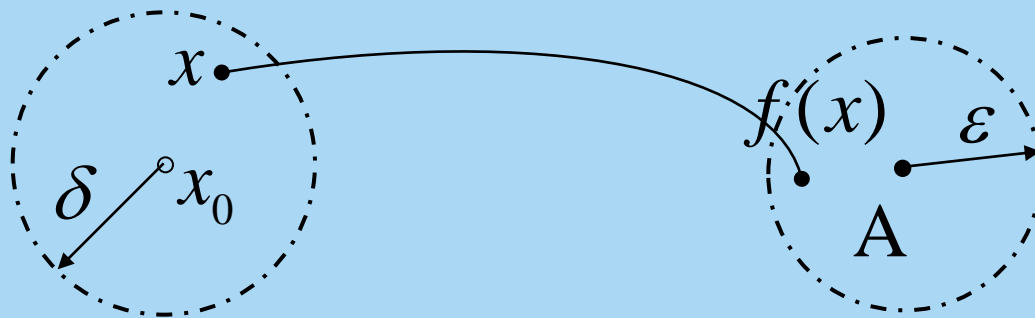
Remark. 令 $m = 1$, 得到 n 元函数在一点的极限的定义.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta \in (0, r), s.t. \\ |f(x) - A| < \varepsilon, \forall 0 < \|x - x_0\| < \delta \end{array}}$$



Remark. 向量值函数在一点的极限的几何意义.

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x_0 \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^m, \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A :$$



Remark. 若向量值函数的极限存在, 则极限必唯一.

Remark. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则:

不论动点 x 沿什么路径趋于定点 x_0 , 都有 $f(x) \rightarrow A$.



Question. 如何证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在?

例. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x+y}$ 是否存在?

解: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=0}} \frac{xy}{x+y} = 0,$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=x^2-x}} \frac{xy}{x+y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^2}{x^2} = -1.$$

故 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x+y}$ 不存在. \square



例. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2 + y^4}$

解: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon$, 只要 $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, 就有

$$\left| \frac{xy^2}{x^2 + y^2 + y^4} - 0 \right| \leq |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \varepsilon.$$

故 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2 + y^4} = 0. \square$



Question. 多元函数在一点的极限的和、差、积、商（分母不为0）有何性质？

Question. 多元复合函数在一点的极限有何性质？

Question. 多元函数的极限是否有保序性、夹挤原理？

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \text{ 即 } f = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T,$$

$$\text{其中 } f_i : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, m.$$

$$\text{Thm. } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A = (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(m)})$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x) = a^{(i)}, i = 1, 2, \dots, m.$$



Thm. $f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x_0 \in \mathbb{R}^n$, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

都存在, 则

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$$

$$(2) m = 1 \text{ 时, } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$$

$$(3) m = 1 \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0 \text{ 时, } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}.$$



Thm. $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l, g : f(\Omega) \subset \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^m$, 若

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{y \rightarrow A} g(y) = B,$$

且 $\exists B(x_0, \delta) \subset \Omega, s.t. \forall x \in B(x_0, \delta)$, 有 $f(x) \neq A$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = B.$$

Thm. (夹挤原理) $f, g, h : B_0(x_0, \delta) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 若

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \forall x \in B_0(x_0, \delta),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A,$$

则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A.$$



例. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}$

解: $\ln (x^2 + y^2)^{x^2 y^2} = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} (x^2 + y^2) \ln (x^2 + y^2),$

当 $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ 时, $0 < \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{x^2 + y^2} y^2 \leq y^2 \rightarrow 0.$

所以 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = 0.$

又 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \ln (x^2 + y^2) = \lim_{t \rightarrow 0} t \ln t = 0.$

故 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \ln (x^2 + y^2)^{x^2 y^2} = 0,$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2} = e^0 = 1. \quad \square$$



Thm.(Cauchy准则) 设 $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 在 $B_0(x_0, r)$ 中有定义, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的充要条件是:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in B_0(x_0, \delta), \text{ 都有 } \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

Thm. 设 $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 在 $B_0(x_0, r)$ 中有定义, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \text{对 } B_0(x_0, r) \text{ 中收敛到 } x_0 \text{ 的任意点列 } \{x_k\}, \\ \text{都有 } \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = A. \end{array} \right)$$



Def. $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x_0 \in \partial\Omega, A \in \mathbb{R}^m, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t.$

$$\|f(x) - A\| < \varepsilon, \quad \forall x \in \Omega \cap B_0(x_0, \delta),$$

则称 x 在 Ω 内趋于 x_0 时 $f(x)$ 以 A 为极限, 记作 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \Omega}} f(x) = A,$

不引起混淆的情况下, 也简记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$

例. $c > 0, \Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}, \Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\},$

$\Omega_3 = \Omega_1 \cup \Omega_2.$ 求 $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (c,0) \\ (x,y) \in \Omega_i}} e^{-\frac{x^2}{y}}, i = 1, 2, 3.$



解: $(x, y) \in \Omega_1, (x, y) \rightarrow (c, 0)$ 时, $-\frac{x^2}{y} \rightarrow -\infty,$

$(x, y) \in \Omega_2, (x, y) \rightarrow (c, 0)$ 时, $-\frac{x^2}{y} \rightarrow +\infty,$

故 $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (c,0) \\ (x,y) \in \Omega_1}} e^{-\frac{x^2}{y}} = 0, \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (c,0) \\ (x,y) \in \Omega_2}} e^{-\frac{x^2}{y}} = +\infty,$

而 $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (c,0) \\ (x,y) \in \Omega_3}} e^{-\frac{x^2}{y}}$ 不存在. \square

Remark. $\lim_{(x,y) \rightarrow (c,0)} e^{-\frac{x^2}{y}}$ 不存在. 默认 $(x, y) \in \Omega_3$.



例. $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2}$

解: 当 $x > 0, y > 0$ 时, $0 < \frac{xy}{x^2 + y^2} < \frac{1}{2}$, 故

$$0 < \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2} \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{x^2},$$

由夹挤原理,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty, y \rightarrow +\infty} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2} = 0. \quad \square$$



2. 累次极限

Def.(累次极限) $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \triangleq \lim_{y \rightarrow y_0} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \right)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \triangleq \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right)$$

Remark. 任意固定 $y \neq y_0$, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ 存在, 记为

$$g(y) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y).$$

若 $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = A$, 则 $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = A$.

Remark. $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$ 称为二重极限.



例. $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ 在原点的二重极限与累次极限.

解: 先考虑累次极限. $\forall y \neq 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{0}{y^2} = 0,$$

于是 $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$. 同理 $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0$.

再看二重极限.

$$\lim_{y=kx, x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{(1+k^2)x^2} = \frac{k}{1+k^2},$$

即 (x, y) 沿不同的曲线 $y = kx$ 趋于 $(0, 0)$ 时, $f(x, y)$ 有不同的极限 $k/(1+k^2)$. 故二重极限不存在. \square



例. 讨论 $f(x, y) = \begin{cases} (x+y) \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{y} & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases}$

在 origin 的二重极限和累次极限.

解: 先看二重极限. 对任意 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|f(x, y)| \leq \left| (x+y) \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{y} \right| \leq |x| + |y|,$$

故 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0.$



再来考虑累次极限.

$$\begin{aligned}\forall x \neq 0, \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) &= \lim_{y \rightarrow 0} (x + y) \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{y}\end{aligned}$$

不存在. 故累次极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ 不存在.

同理累次极限 $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ 不存在. \square



Remark. 累次极限与二重极限的关系.

(1) 累次极限的存在性 ~~≠~~ 二重极限的存在性;

(2) 二重极限的存在性 ~~≠~~ 累次极限的存在性;

(3) 二重极限与累次极限都存在

$$\begin{aligned}\Rightarrow \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \\ &= \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y).\end{aligned}$$

(4) $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y), \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ 均存在且不相等

$$\Rightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) \text{ 不存在.}$$



3. 向量值函数的连续

Def. 设 $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \Omega$, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 也即

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t.$

$$\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon, \quad \forall x \in \Omega \cap B(x_0, \delta),$$

则称 f 在点 x_0 处连续, 称 f 的不连续点为间断点.

Def. 设 $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 若 f 在 Ω 上点点连续, 则称 f 在 Ω 上连续, 记作 $f \in C(\Omega)$.

Remark. $f = (f_1, f_1, \dots, f_m) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, 则

f 在点 x_0 连续 $\Leftrightarrow f_i$ 在点 x_0 连续, $i = 1, 2, \dots, m$.



Thm.(1)多元连续函数的和、差、积、商(分母不为0处)均连续.

(2)连续向量值函数的和、差、数乘与复合都连续.

(3) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $C(\Omega)$ 关于加法、数乘构成实数域上的一个无穷维线性空间.

(4)在开区域中定义的初等函数(幂、指数、对数、三角、反三角及其四则运算与复合)处处连续.



例: 讨论 $f(x, y) = \begin{cases} 1 & y = x^2, x > 0 \\ 0 & \text{其它情形} \end{cases}$ 的连续性.

解: f 在开区域 $\{(x, y) \mid x \neq \sqrt{y}\}$ 中为初等函数, 故处处连续. 而 f 在曲线 $x = \sqrt{y}$ 上每一点都不连续. 事实上, 任取 (x_0, y_0) , $x_0 = \sqrt{y_0}$, 当点列 $\{P_k(x_k, y_k)\}$ 沿曲线 $x = \sqrt{y}$ 趋于 (x_0, y_0) 时, $f(x_k, y_k) \rightarrow 1$; 当点列 $\{P_k\}$ 沿直线 $x = x_0$ 趋于 (x_0, y_0) 时, $f(x_k, y_k) \rightarrow 0$. \square



例. 讨论 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 的连续性.

解: $\forall (x, y) \neq (0, 0)$, 有

$$|f(x, y) - 0| = \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} \leq |x| + |y| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2}.$$

故 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$, $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 连续.

$f(x, y)$ 在开区域中 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ 中为初等函数, 处处连续.

故 $f(x, y)$ 在 \mathbb{R}^2 中处处连续. \square



Thm. 设 $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \Omega$, 则称 f 在点 x_0 处连续的充要条件是: 对 Ω 中任意点列 $\{x_k\}$, 当 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x_0\| = 0$ 时, 有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f(x_k) - f(x_0)\| = 0$.

Question. $f(x) = \frac{1}{1 + (1 + xy)^{1/y}}$, $0 \leq x \leq 1, 0 < y \leq 1$, 是否可以连续延拓到 $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ 上?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{1 + (1 + xy)^{1/y}}, & 0 \leq x \leq 1, 0 < y \leq 1, \\ \frac{1}{1 + e^x}, & 0 \leq x \leq 1, y = 0 \end{cases} \quad \text{在 } D \text{ 上连续.}$$



Thm.(最值定理) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界闭集, $f \in C(\Omega)$, 则 f 在 Ω 上存在最大值 M 和最小值 m , 即 $\exists \xi, \eta \in \Omega, s.t. \forall x \in \Omega$, 都有

$$m = f(\xi) \leq f(x) \leq f(\eta) = M.$$

Thm.(介值定理) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为连通区域, $f \in C(\Omega)$, $x_1, x_2 \in \Omega$, $f(x_1) = \lambda \leq \mu = f(x_2)$, 则 $\forall \sigma \in [\lambda, \mu], \exists x \in \Omega, s.t. f(x) = \sigma$.



例. f 在 \mathbb{R}^2 上连续, 当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时, $f(x, y) > 0$, 且 $\forall c > 0$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, 有 $f(cx, cy) = c^2 f(x, y)$. 求证: $\exists 0 < a \leq b$, s.t.
 $a(x^2 + y^2) \leq f(x, y) \leq b(x^2 + y^2)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

证明: 在有界闭集 $S^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ 上, 连续函数 f 有最大值 b 和最小值 a . 注意到 $f(x, y) > 0$, 有 $0 < a \leq b$.

$$\forall (x, y) \neq (0, 0), \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \in S^1,$$



$$\begin{aligned} f(x, y) &= f\left(\sqrt{x^2 + y^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sqrt{x^2 + y^2} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \\ &= (x^2 + y^2) f\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \end{aligned}$$

故

$$a(x^2 + y^2) \leq f(x, y) \leq b(x^2 + y^2), \quad \forall (x, y) \neq (0, 0).$$

又 f 在 $(0,0)$ 连续, 所以

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= \lim_{x=y, x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x^2 f(1, 1) = 0. \end{aligned}$$

故以上不等式对任意 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ 成立. \square



4. 一致连续

Def. 设 $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t.$

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon, \quad \forall x, x' \in \Omega, \|x - x'\| < \delta,$$

则称 f 在 Ω 上一致连续.

Thm. f 在 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上一致连续的充要条件是:

对 Ω 中任意两个点列 $\{x_n\}, \{y_n\}$, 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$ 时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) - f(y_n)) = 0.$$

Thm. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界闭集, $f \in C(\Omega)$, 则 f 在 Ω 上一致连续.



5. 无穷小函数的阶

Def. 设 n 元函数 f 在 $B_0(x_0, r)$ 中有定义, $x \in \mathbb{R}^n$, 记 $\rho = \|x - x_0\|$.

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 则称 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 为无穷小函数(或无穷小量), 记作

$$f(x) = o(1), \quad x \rightarrow x_0.$$

(2) $k > 0$, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\rho^k} = 0$, 则称 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 是 ρ^k 的高阶无穷小, 记作

$$f(x) = o(\rho^k), \quad x \rightarrow x_0.$$



(3) 若 $\exists c \neq 0, s.t. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\rho^k} = c$, 则称 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 是 k 阶无穷小函数, 记作

$$f(x) \sim c\rho^k, \quad x \rightarrow x_0.$$

(4) 若 $\exists M > 0, \delta > 0, s.t.$

$$|f(x)| < M\rho^k, \quad \forall x \in B_0(x_0, \delta),$$

则称 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 被 ρ^k 所控制, 记作

$$f(x) = O(\rho^k), \quad x \rightarrow x_0.$$



例. $f_1(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n,$

$$f_2(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j, \quad (a_{ij} = a_{ji}),$$

证明: 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f_1(x) = O(\|x\|), f_2(x) = O(\|x\|^2).$

Proof.(1) $|f_1(x)| = |a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n|$

$$\leq (|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|)(|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|)$$
$$\leq \textcolor{red}{n}(|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|)\|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

所以, $f_1(x) = O(\|x\|), x \rightarrow 0.$



$$(2) f_2(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad (a_{ij} = a_{ji}).$$

令 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 则 A 为对称矩阵, \exists 正交矩阵 Q , s.t.

$Q A Q^T = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 为实对称阵. 令 $x = yQ$, 则

$$\frac{f_2(x)}{\|x\|^2} = \frac{x A x^T}{x x^T} = \frac{y Q A Q^T y^T}{y Q Q^T y^T} = \frac{\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2}{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}$$

$$\frac{|f_2(x)|}{\|x\|^2} \leq |\lambda_1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_n|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

所以, $f_2(x) = O(\|x\|^2)$, $x \rightarrow 0$. \square



作业： 习题1.3

No. 1(单),6(单),8,10(单)