

Review

- 二重积分化累次积分

$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y) dx dy &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \\ &= \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx\end{aligned}$$

- 极坐标下二重积分的计算

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

其中, $E = \{(r, \theta) \mid (r \cos \theta, r \sin \theta) \in D\}$.

§ 3. 二重积分的变量替换

当被积区域 D 的形状不好,或者被积函数 f 的表达式比较复杂时,将二重积分化为直角坐标下的累次积分来计算可能会很复杂,甚至计算不出来.如果在极坐标下计算,积分可能会变得简单.但在极坐标下计算二重积分的方法也不是万能的,很多时候积分也不能被简化.因此,我们需要更一般的方法.这就是变量替换方法.

回到二重积分原始的几何背景,计算以 D 为下底,以曲面 $S:z = f(x, y), (x, y) \in D$ 为上顶的曲顶柱体的 Ω 体积

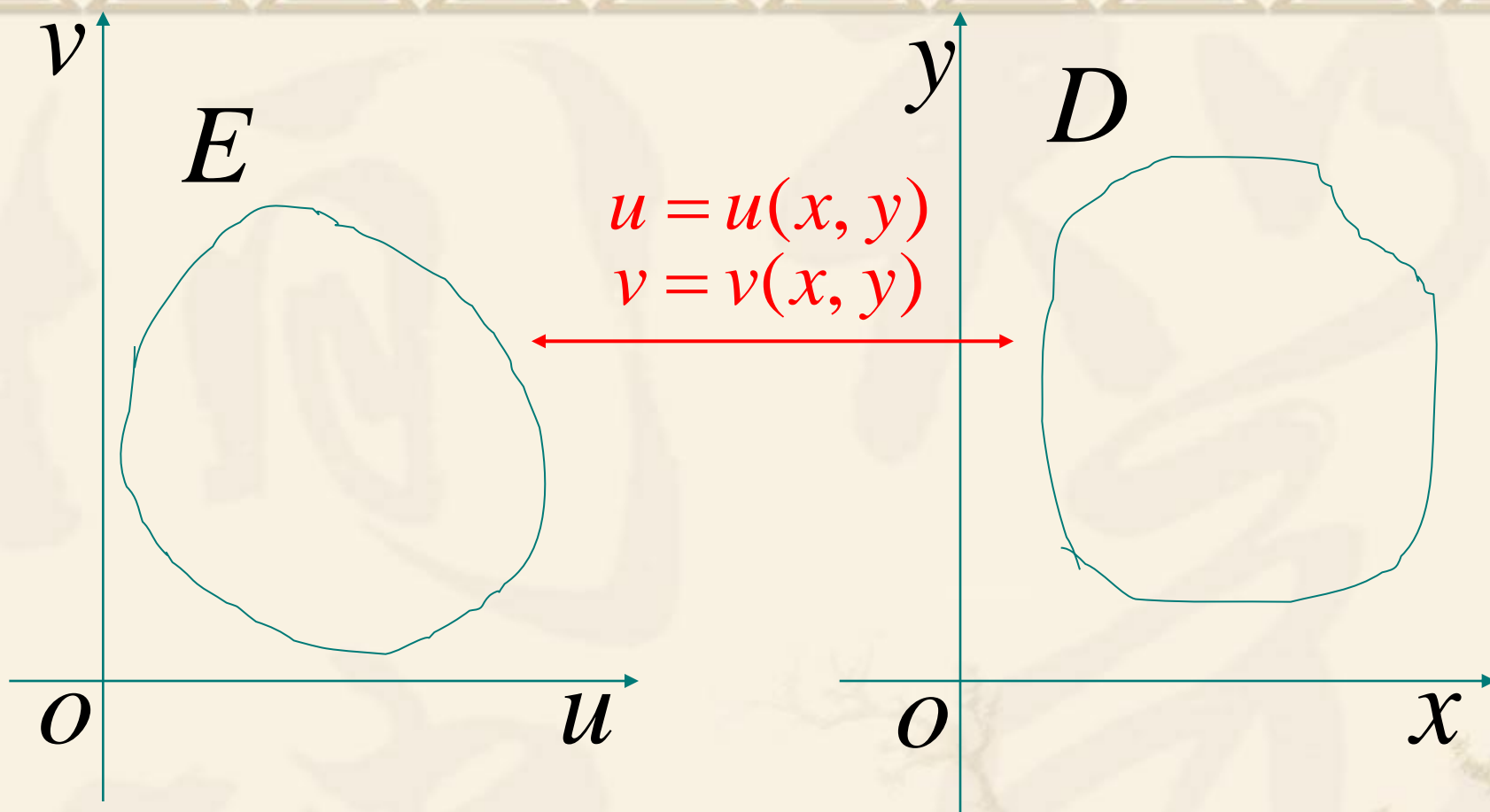
$$V(\Omega) = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

•Step1.对 D 进行分划:

对区域 D 做分划之前,先引进一一映射

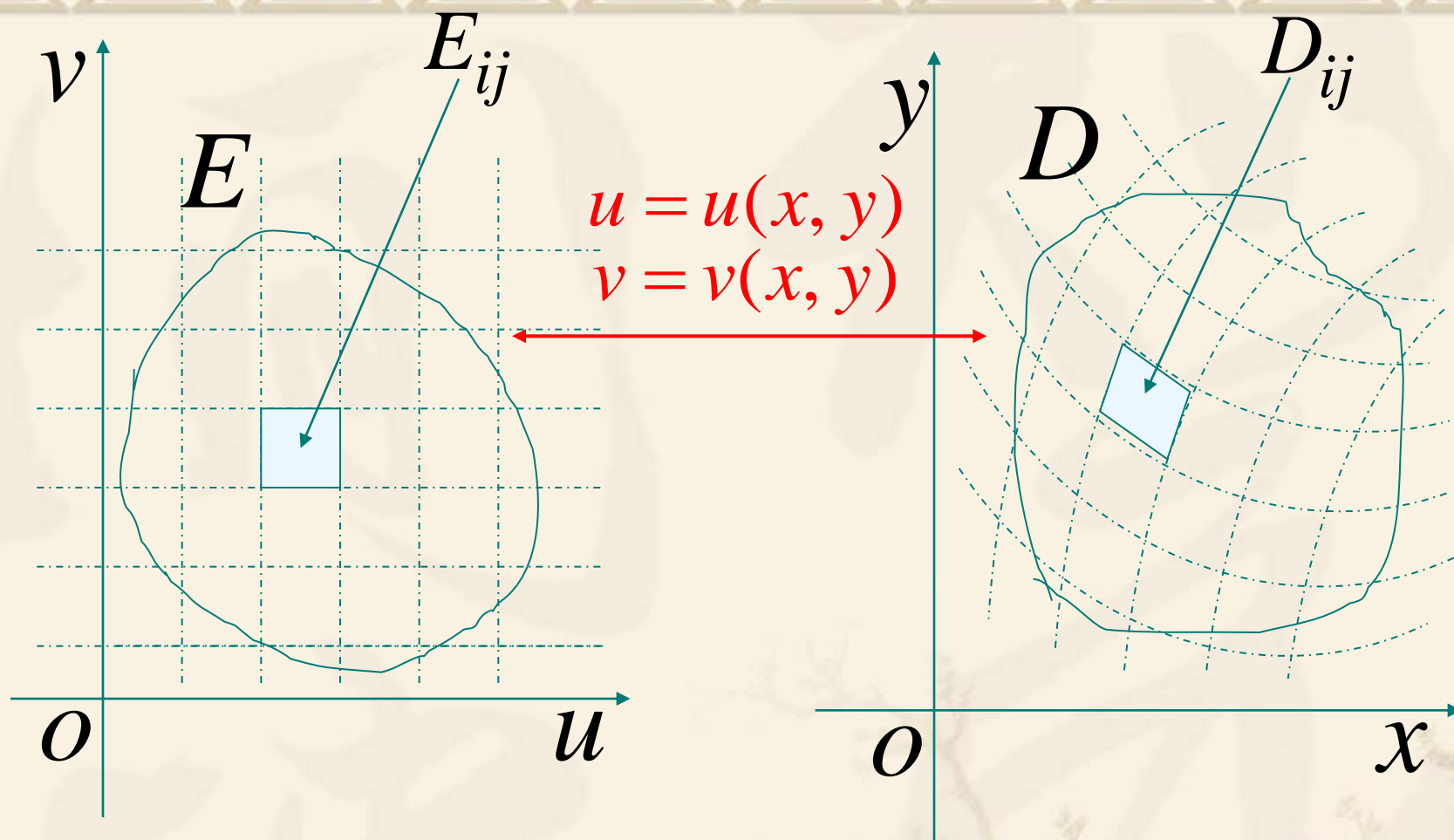
$$u = u(x, y), v = v(x, y),$$

将区域 D 映为区域 E , 使 $(x, y) \in D$ 与 $(u, v) \in E$ 一一对应.



在 ouv 平面上,用平行于坐标轴的直线

$$u = u_i (i = 1, 2, \dots, n), v = v_j (j = 1, 2, \dots, m)$$



将区域 E 分割成若干小矩形 E_{ij} (忽略区域边界上那些不规则的小区域). 在映射 $u = u(x, y), v = v(x, y)$

下,小矩形 E_{ij} 与 oxy 平面上曲边四边形 D_{ij} 对应.
于是区域 D 有分划 $T = \{D_{ij}\}$.

•Step2.取标志点

$$(\xi_{ij}, \eta_{ij}) = (x(u_i, v_j), y(u_i, v_j)) \in D_{ij}$$
$$(i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m).$$

•Step3.近似求和: 以 $\Delta\sigma_{ij}$ 表示 D_{ij} 的面积,则 f 在区域 D 上的Riemann和

$$\sum_{i,j} f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \Delta\sigma_{ij} = \sum_{i,j} f(x(u_i, v_j), y(u_i, v_j)) \Delta\sigma_{ij}.$$

下面的任务是计算 $\Delta\sigma_{ij} = \sigma(D_{ij})$.

矩形 ΔE_{ij} 的四个顶点为

$P_0(u_i, v_j), P_1(u_{i+1}, v_j), P_2(u_i, v_{j+1})$ 和 $P_3(u_{i+1}, v_{j+1})$.

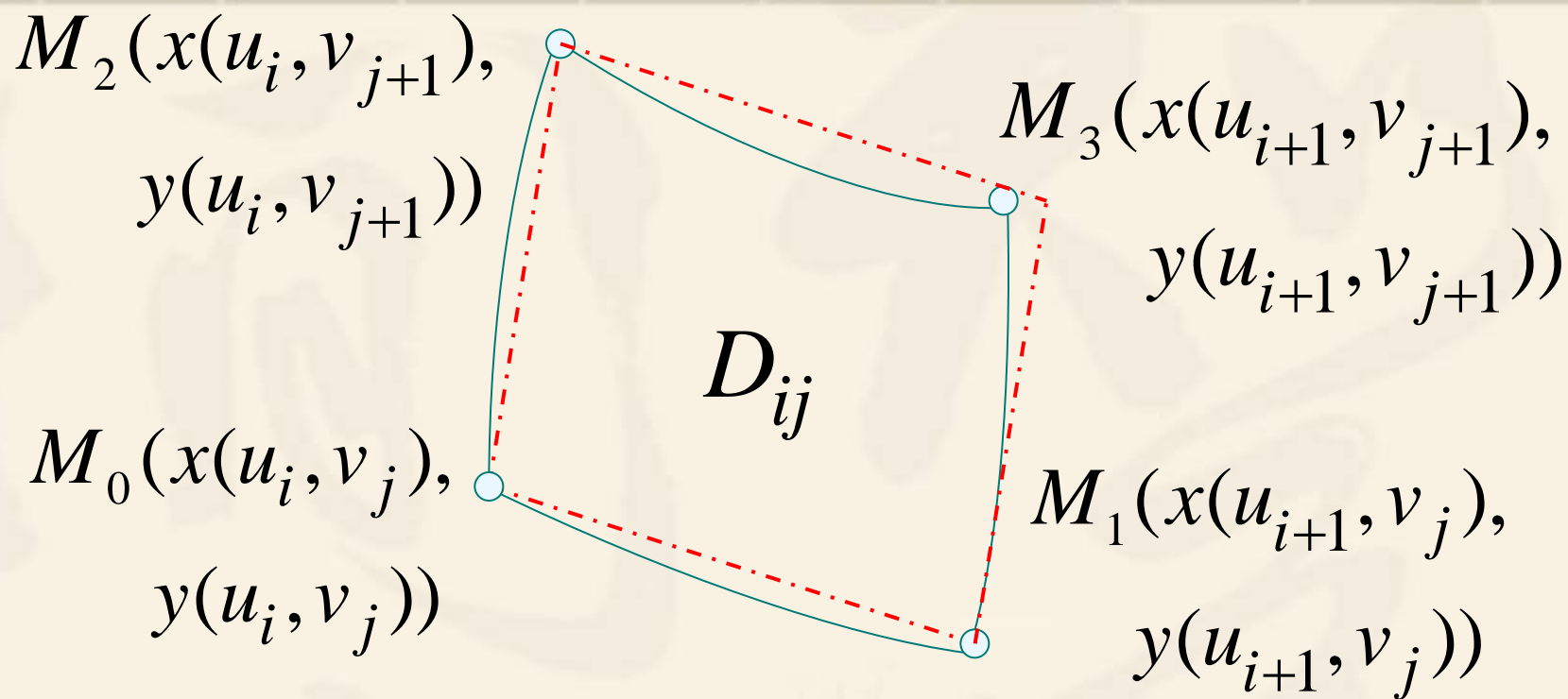
对应地,曲边四边形 ΔD_{ij} 的四个顶点为

$$M_0(x(u_i, v_j), y(u_i, v_j)),$$

$$M_1(x(u_{i+1}, v_j), y(u_{i+1}, v_j)),$$

$$M_2(x(u_i, v_{j+1}), y(u_i, v_{j+1})),$$

$$M_3(x(u_{i+1}, v_{j+1}), y(u_{i+1}, v_{j+1})).$$



当对区域 E 的分割很细时, ΔD_{ij} 可以近似地看成以线段 M_0M_1, M_0M_2 为邻边的平行四边形.

$$\Delta\sigma_{ij} \approx \left\| \overrightarrow{M_0M_1} \times \overrightarrow{M_0M_2} \right\|$$

记 $\Delta u_i = u_{i+1} - u_i$, $\Delta v_j = v_{j+1} - v_j$, 则

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{M_0 M_1} \\ &= \left(x(u_{i+1}, v_j) - x(u_i, v_j), y(u_{i+1}, v_j) - y(u_i, v_j) \right) \\ &\approx \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_i, v_j) \Delta u_i, \frac{\partial y}{\partial u}(u_i, v_j) \Delta u_i \right) \end{aligned}$$

同理

$$\overrightarrow{M_0 M_2} \approx \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_i, v_j) \Delta v_j, \frac{\partial y}{\partial v}(u_i, v_j) \Delta v_j \right).$$

$$\begin{aligned}
 \text{于是 } \Delta\sigma_{ij} &\approx \left\| \overrightarrow{M_0M_1} \times \overrightarrow{M_0M_2} \right\| \\
 &\approx \left\| \begin{pmatrix} x_u(u_i, v_j)\Delta u_i, y_u(u_i, v_j)\Delta u_i \\ x_v(u_i, v_j)\Delta v_j, y_v(u_i, v_j)\Delta v_j \end{pmatrix} \right\| \\
 &= \left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \Big|_{(u_i, v_j)} \right| \Delta u_i \Delta v_j.
 \end{aligned}$$

为了保证 $\Delta\sigma_{ij} \neq 0$, 我们要求所做变量替换满足

$$\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0, \forall (u, v) \in E.$$

于是 $Riemann$ 和

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \Delta\sigma_{ij} &= \sum_{i,j} f(x(u_i, v_j), y(u_i, v_j)) \Delta\sigma_{ij} \\ &\approx \sum_{i,j} \left\{ f(x(u_i, v_j), y(u_i, v_j)) \cdot \left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|_{(u_i, v_j)} \Delta u_i \Delta v_j \right\}. \end{aligned}$$

注意上式左边是 (x, y) 的二元函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上的 $Riemann$ 和,而右端是 (u, v) 的二元函数

$$f(x(u, v), y(u, v)) \left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$$

在区域 E 上的 $Riemann$ 和.

•Step4.取极限

当 $\max\{\Delta u_i, \Delta v_j\} \rightarrow 0$ 时, D 的分划 $T = \{\Delta D_{ij}\}$ 的半径 $\lambda(T) \rightarrow 0$, 于是

$$\begin{aligned} & \iint_D f(x, y) dx dy \\ &= \iint_E f(x(u, v), y(u, v)) \left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv. \end{aligned}$$

这就是变量替换 $u = u(x, y), v = v(x, y)$ 下二重积分的计算公式.

Remark: 形式上,二重积分 $\iint_D f(x, y)dx dy$ 可以理解为由三部分构成:被积函数 $f(x, y)$,积分区域 D 和面积元 $dx dy$.于是,在变量替换 $u = u(x, y), v = v(x, y)$ 下,

- 被积函数 $f(x, y)$ 化为 $f(x(u, v), y(u, v))$,
- 积分区域 D 化为 E ,
- 面积元 $dx dy$ 化为 $\left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$.

Remark: 重新审视极坐标下二重积分的计算.

Remark: 用变量替换方法计算二重积分时,所做的变量替换 $u = u(x, y), v = v(x, y)$ 必须是一一映射,且 (除有限个点外) 满足 $\left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \neq 0$.

Remark: 通常选取适当的变量替换

$$u = u(x, y), v = v(x, y),$$

使得在这一变换下,要么积分区域变得简单,要么被积函数被化简.

Remark. 二重积分的轮换不变性: 若 $D \subset \mathbb{R}^2$ 关于 x, y 是轮换对称的, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(y, x) dx dy.$$

Proof. 令 $u = y, v = x$, 则 $\left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = 1$. D 关于 x, y

对称, 即 $(x, y) \in D \Leftrightarrow (u, v) \in D$. 于是

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(v, u) du dv = \iint_D f(y, x) dx dy.$$

例. 求 $I = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + xy + 2y^2) dx dy$.

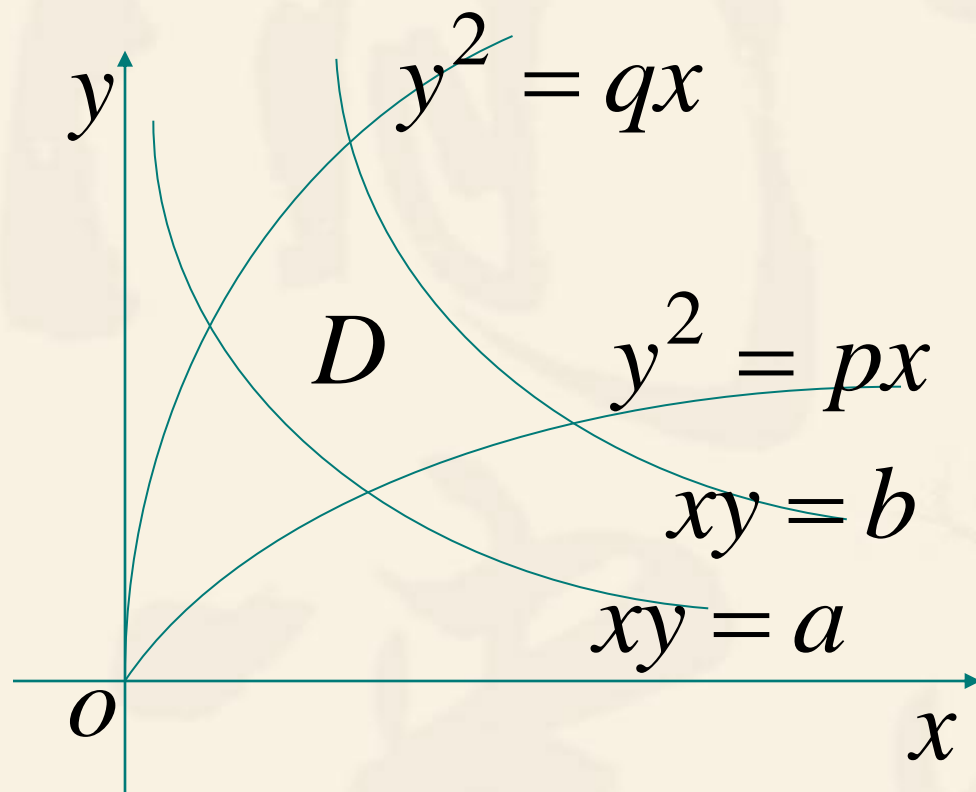
解: $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} xy dx dy = 0$

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} x^2 dx dy = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} y^2 dx dy \text{ (轮换不变性)}$$

$$I = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + 2y^2) dx dy = \frac{3}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{3\pi}{4}. \square$$

例：区域 D 由 $y^2 = px$, $y^2 = qx$ ($0 < p < q$) 和 $xy = a$, $xy = b$ ($0 < a < b$) 围成. 求 D 的面积.



分析：区域 D 的形状不规则, 用直角坐标和极坐标都不容易计算其面积 $\iint_D dx dy$. 考虑做变量替换, 将积分区域变规则.

解：做变量替换, $u = y^2/x$, $v = xy$. 则 $(x, y) \in D$ 与

$(u, v) \in \Omega = \{(u, v) \mid p \leq u \leq q, a \leq v \leq b\}$ 一一对应,

且

$$\det \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \det \begin{bmatrix} -y^2/x^2 & 2y/x \\ y & x \end{bmatrix}$$
$$= -3y^2/x = -3u \neq 0.$$

于是, 区域 D 的面积为

$$S = \iint_D dx dy = \iint_{\Omega} \left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$
$$= \iint_{\Omega} \frac{1}{3u} du dv = \int_a^b dv \int_p^q \frac{1}{3u} du = \frac{1}{3} (b-a) \ln \frac{q}{p}. \quad \square$$

例: $I = \iint_{x^2+4y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy$

解: 令 $x = \rho \cos \theta$, $y = \frac{1}{2} \rho \sin \theta$, 则

$$\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \frac{1}{2} \sin \theta & \frac{1}{2} \rho \cos \theta \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \rho \neq 0,$$

$$\begin{aligned} I &= \iint_{0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi} \rho^2 \left(\cos^2 \theta + \frac{1}{4} \sin^2 \theta \right) \cdot \frac{1}{2} \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} \left(\cos^2 \theta + \frac{1}{4} \sin^2 \theta \right) d\theta = \frac{5\pi}{32}. \square \end{aligned}$$

例: $I = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} |3x+4y| dx dy.$ 坐标旋转和伸缩

解: 令 $u = 3x + 4y, v = 4x - 3y$. 区域 $x^2 + y^2 \leq 1$ 与区域 $u^2 + v^2 \leq 25$ 对应, 且

$$\left| \det \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \right| = 25 \neq 0.$$

$$\text{于是 } I = \iint_{u^2+v^2 \leq 25} |u| \cdot \frac{1}{25} du dv = \iint_{u^2+v^2 \leq 25, u \geq 0} \frac{2u}{25} du dv$$

$$= \frac{2}{25} \int_0^5 r^2 dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = \frac{20}{3}. \square$$

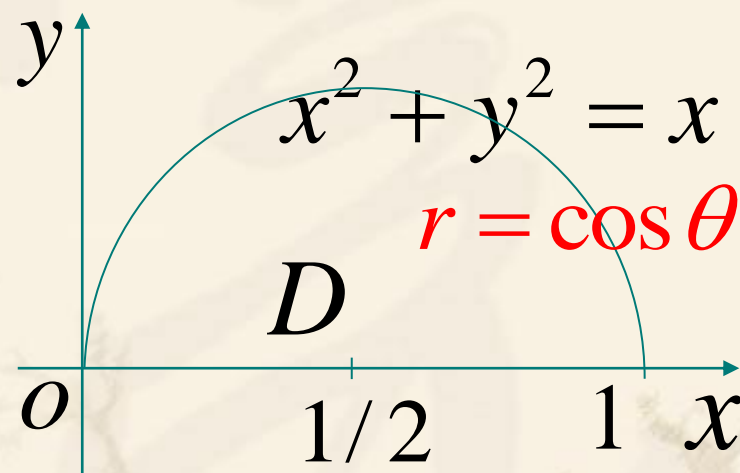
例: $I = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\cos \theta} r \sqrt{r \cos \theta - r^2 \cos^2 \theta} dr.$

分析: 被积函数复杂, 不论是先对 r 还是先对 θ 积分都不容易. 应作变量替换.

解: 令 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$,

则 $I = \iint_D \sqrt{x - x^2} dx dy,$

其中区域 D 如图所示.



于是, $I = \int_0^1 \sqrt{x - x^2} dx \int_0^{\sqrt{x - x^2}} dy = \int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{1}{6}. \square$

例：求由 $(x^2 + y^2)^2 = 8x^3$ 围成的区域的面积.

分析：我们很难画出曲线 $(x^2 + y^2)^2 = 8x^3$ 的图形，因而也难以确定积分区域. 但在极坐标下积分区域并不难把握.

解：令 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, 曲线方程可化为 $r^4 = 8r^3 \cos^3 \theta$, 即 $r = 8 \cos^3 \theta$. 由此, 积分区域为 $\Omega = \{-\pi/2 \leq \theta < \pi/2, 0 \leq r \leq 8 \cos^3 \theta\}$. 所求面积为 $\iint_{\Omega} r dr d\theta$. 以下留作练习. \square

*例: f 连续, 则

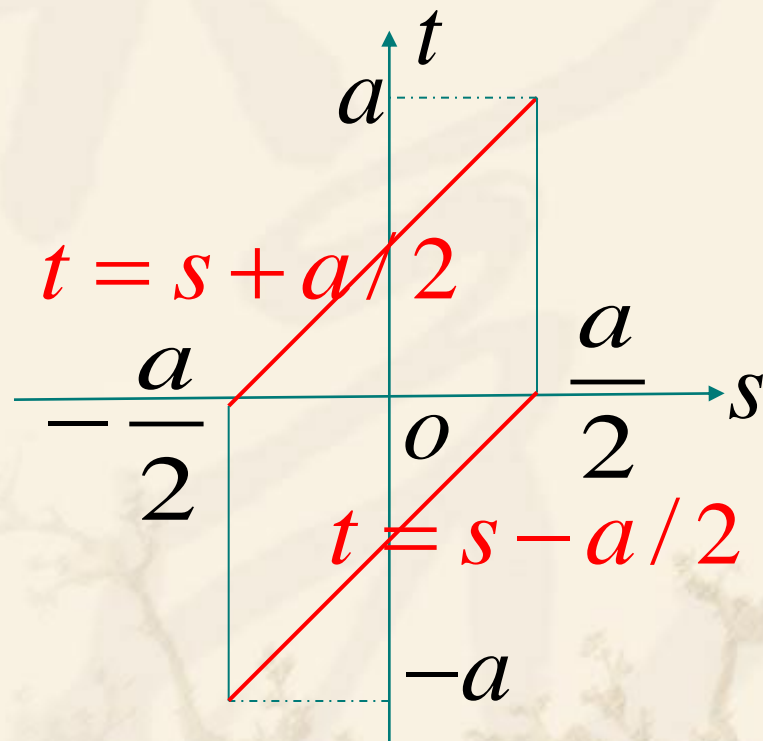
$$\iint_{|x|, |y| \leq a/2} f(x-y) dx dy = \int_{-a}^a f(t)(a-|t|) dt.$$

解: 令 $s = x, t = x - y$, 则

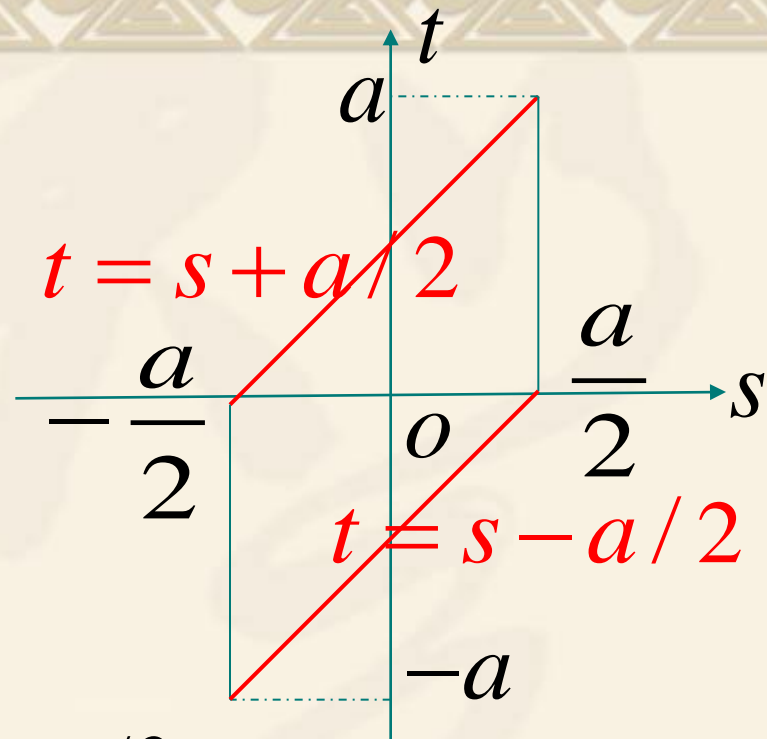
$$s \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right],$$

$$t \in \left[s - \frac{a}{2}, s + \frac{a}{2}\right].$$

$$\det \frac{\partial(s, t)}{\partial(x, y)} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0.$$



$$\begin{aligned}
 & \iint_{|x|, |y| \leq a/2} f(x-y) dx dy \\
 = & \iint_{\substack{-a/2 \leq s \leq a/2 \\ s-a/2 \leq t \leq s+a/2}} f(t) ds dt
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \int_{-a}^0 dt \int_{-a/2}^{t+a/2} f(t) ds + \int_0^a dt \int_{t-a/2}^{a/2} f(t) ds \\
 &= \int_{-a}^0 f(t)(t+a) dt + \int_0^a f(t)(a-t) dt \\
 &= \int_{-a}^a f(t)(a-|t|) dt. \quad \square
 \end{aligned}$$



作业：习题3.3

No. 12-14, 17, 18

