第 2 次习题课（多元函数的偏导、方向导数与可微）

1. 设 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$, 则在 $(0,0)$ 点（　　）

（A） 连续, 但偏导数不存在；　　（B） 偏导数存在, 但不可微；

（C） 可微；　　（D） 偏导数存在且连续.

2. 下列条件成立时能够推出 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点可微, 且全微分 $df=0$ 的是（　　）.

（A） 在点 (x_0,y_0) 两个偏导数 $f'_x=0,\ f'_y=0$

（B） $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全增量 $\Delta f=\dfrac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$,

（C） $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全增量 $\Delta f=\dfrac{\sin((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$

（D） $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全增量 $\Delta f=((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)\sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

3. 如 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 不可微，则下列命题中一定不成立的是（　　）

（A） $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 不连续；

（B） $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 沿任何方向 $\vec{v}$ 的方向导数不存在；

（C） $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 两个偏导数都存在且连续；

（D） $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 两个偏导数存在且至少有一个不连续.

4. 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的某个邻域内有定义， $f(0,0)=0$ ，且

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=a$$

a 为常数。证明：

（1） $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续；

（2）若 $a\neq -1$，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续，但不可微；

（3）若 $a=-1$，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微。

5. 设函数 $z=\arctan\dfrac{x+y}{x-y}$ ，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ， $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ， $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

6. 设 $f(x,y)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 可微, $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{u}=-\vec{i}+2\vec{j}$, $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial \vec{v}}=-2$, $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial \vec{u}}=1$. 求 $f(x,y)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 的微分.

7. n 元函数 $f(\mathrm{x})$ 在点 x_0 可微, $\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n$ 是两两相互垂直的 n 维（列）向量。证明:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial \tau_k}(\mathrm{x}_0)\right)^2=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0)\right)^2.$$

8. 构造函数 $f(x,y)$, 使得它在原点可微，但 $f_x'(x,y), f_y'(x,y)$ 在原点不连续。

9. $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上可微, $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}\dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=+\infty$, 则对任意向量 $v=(v_1,v_2)$, 存在点 (x_0,y_0), 使得 $\mathrm{grad}f(x_0,y_0)=v$.

10. $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}, g=(g_1,g_2,\cdots,g_m):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. 已知 g_i 在点 $\mathrm{x}_0\in\mathbb{R}^n$ 处的各偏导数存在, $i=1,2,\cdots,m$ 且 f 在点 $\mathrm{u}_0=g(\mathrm{x}_0)\in\mathbb{R}^m$ 处各偏导数也存在。试问：复合函数 $(f\circ g)(\mathrm{x})=f(g_1(\mathrm{x}),g_2(\mathrm{x}),\cdots,g_m(\mathrm{x}))$ 在点 $\mathrm{x}_0\in\mathbb{R}^n$ 处的各偏导数是否一定存在？如果一定存在，请证明。如果不一定存在，请举反例.