第 11 次习题课 第二型曲面积分、Gauss 公式、Stokes 公式

1. 设 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\le x\le 1)$ 的下侧，求

$$\iint_{\Sigma} xdy\wedge dz+2ydz\wedge dx+3(z-1)dx\wedge dy.$$

解: 补一个曲面 $\sum_1:\begin{cases}x^2+y^2\le 1\\ z=1\end{cases}$ 上侧，记Ω为锥面Σ和平面Σ_1所为区域，由 Gauss 公式，

$$P=x,\quad Q=2y,\quad R=3(z-1),\ \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=1+2+3=6$$

$$\iint_{\Sigma}+\iint_{\Sigma_1}Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy=\iiint_{\Omega}6dxdydz=6\times\frac{\pi}{3}=2\pi$$

而在 $\sum_1$ 上，$\vec{n}=(0,0,1),\vec{v}\cdot\vec{n}=3(z-1)=0,$ 所以

$$\iint_{\Sigma_1}xdy\wedge dz+2ydz\wedge dx+3(z-1)dx\wedge dy=\iint_{\Sigma_1}3(z-1)dS=0,$$

从而 $\displaystyle\iint_{\Sigma}xdy\wedge dz+2ydz\wedge dx+3(z-1)dx\wedge dy=2\pi$.

2. 计算 $\iint_S x(y-z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(x-y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，$S:x^2+y^2=1(0\le z\le 2)$，外侧.

解法 1：$\vec{v}=x(y-z)\vec{i}+(x-y)\vec{k}$，$\vec{n}=x\vec{i}+y\vec{j}$.

$$I=\iint_S x(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_S\vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=\iint_{\substack{x^2+y^2=1\\0\le z\le 2}}x^2(y-z)\mathrm{d}S$$

S 的参数方程为:$x=\cos\theta,y=\sin\theta,z=z,(0\le\theta\le 2\pi,0\le z\le 2)$，$dS=d\theta dz$，于是

$$I=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^2(\sin\theta-z)dz=-2\pi.$$

解法 2：高斯公式. 记 $S_1:x^2+y^2\le 1,z=0$ 下侧，$S_1:x^2+y^2\le 1,z=2$ 上侧，

$\Omega:x^2+y^2\le 1,0\le z\le 2$. 则

$$\iint_{S_1}\vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=0,\iint_{S_2}\vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=0,$$

$$\iint_{\partial\Omega}\vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=\iiint_{\Omega}\nabla\cdot\vec{v}\mathrm{d}V=\iiint_{\Omega}[(y-z)\mathrm{d}V=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^2\mathrm{d}z=-2\pi.$$

因此，$\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S = -2\pi - \iint_{S_1}\vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S - \iint_{S_2}\vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S = -2\pi.$

3. 求 $I=\oint_{L^+}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$ ，其中 L^+ 为 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $y=x\tan\alpha\ \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ 的交线, 从 0x 轴的正向看去，圆周的正向为逆时针方向.

解:记 S^+ 为平面 $y=x\tan\alpha$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 内部分, 以 L^+ 为正向边界，则 S^+ 的正单位法向量为 $\vec{\mathbf{n}}=(\sin\alpha,-\cos\alpha,0)$. $rot(y-z,z-x,x-y)=-2(1,1,1)$, 由 Stokes 公式, 得

$$
\begin{aligned}
I&=\oint_{L^+}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz=\iint_S rot(y-z,z-x,x-y)\cdot\vec{\mathbf{n}}dS\\
&=-2\iint_S(1,1,1)\cdot(\sin\alpha,-\cos\alpha,0)dS\\
&=2(\cos\alpha-\sin\alpha)\iint_S dS=2\pi a^2(\cos\alpha-\sin\alpha)
\end{aligned}
$$

其中 $\iint_S dS=\pi a^2$ 为平面 $y=x\tan\alpha$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 部分内的面积.

4. 向量场 $\mathbf{F}=(2x-3)\mathbf{i}-z\mathbf{j}+\cos z\mathbf{k}$ 是否是保守场 ________ （填是或否）.

【答案】否。$rot\mathbf{F}=(1,0,0)$。

5. 设 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，从 z 轴正向看去 L 正向为逆时针方向，则 $\int_L(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz=$____________________.

【答案】$-2\sqrt{3}\pi a^2$

6. 设 $\mathbf{F}(x,y,z)=(yz,zx,xy)$，则 $\mathrm{rot}\mathbf{F}=$____________，$\mathrm{div}\mathbf{F}=$______________.

【答案】（0，0，0），0

7. 设 $u=x^2+y^2+z^2$，则 $\mathrm{div}(\mathrm{grad}u)=$______________；$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}u)=$________。

【答案】$6,(0,0,0)$

8. 设 L 是平面 $x+y+z=0$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的交线，从 z 轴正向看去为逆时针方向，求第二类曲线积分 $\int_{L^+}\frac{(y+1)\,dx+(z+2)\,dy+(x+3)\,dz}{x^2+y^2+z^2}$ 。

【解】$I=\int_{L^+}\frac{(y+1)\,dx+(z+2)\,dy+(x+3)\,dz}{x^2+y^2+z^2}=\int_{L^+}(y+1)\,dx+(z+2)\,dy+(x+3)\,dz$

令 S 是平面 $x+y+z=0$ 上包含于球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 内的部分，规定 S 的正法向量向上，即正法向与 z 轴成锐角，则根据

stokes 公式得
$$I=-\iint_{S^+}dydz+dzdx+dxdy$$

注意到 S 的单位正法向 $\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ ，有

$$I=-\iint_S(1,1,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)dS=-\sqrt{3}\iint_S dS=-\sqrt{3}\pi$$

9. 设$f(u)$二阶连续可微, $f(0)=0$,求

$$I=\oiint_{\Sigma}x^3dy\wedge dz+\left[\frac{1}{z}f(\frac{y}{z})+y^3\right]dz\wedge dx+\left[\frac{1}{y}f(\frac{y}{z})+z^3\right]dx\wedge dy,$$

其中, Σ为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与两球面$x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2+z^2=4$ 所围空间区域 Ω 的外表面。

解：记$P=x^3,Q=\frac{1}{z}f(\frac{y}{z})+y^3,R=\frac{1}{y}f(\frac{y}{z})+z^3,(y\neq 0)$. 由于

$$\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}f(\frac{y}{z})=\lim_{y\to 0}\frac{f(\frac{y}{z})-f(0)}{y}=\frac{f'(0)}{z},$$

定义
$$R(x,0,z)\triangleq\lim_{y\to 0}R(x,y,z)=\frac{f'(0)}{z}+z^3.$$

于是P,Q,R在Ω中连续可微, 且

$$\frac{\partial P}{\partial x}=3x^2,\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{1}{z^2}f'(\frac{y}{z})+3y^2,\frac{\partial R}{\partial z}=-\frac{1}{z^2}f'(\frac{y}{z})+3z^2.$$

由 Gauss 公式，$I=3\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$.

令 $x=r\sin\varphi\cos\theta,\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\ z=r\cos\varphi$, 则 $1\le r\le 2$, 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 得 $\cos\varphi=\sin\varphi, \varphi=\pi/4$. 又 $z>0, 0<\varphi\le\pi/4$. 于是

$$I=3\int_1^2 r^2\cdot r^2dr\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/4}\sin\varphi d\varphi=3\times\frac{31}{5}\times 2\pi\times(1-\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{93}{5}(2-\sqrt{2})\pi.$$

10. 设 $\vec{\mathrm{V}}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))^{\mathrm{T}}\in C^1(\mathbb{R}^3)$, 且

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{\mathrm{V}}(x,y,z)=0, & \forall(x,y,z)\in\Omega,\\ \vec{\mathrm{V}}(x,y,z)=(1,1,1)^{\mathrm{T}}, & \forall(x,y,z)\in\partial\Omega.\end{cases}$$

Ω 为 $\mathbb{R}^3$ 中以原点为球心的单位球，求证：$\iiint_{\Omega}(P+Q+R)dxdydz=4\pi$.

证明: 由 Gauss 公式,得

$$\begin{aligned}&\iint_{\partial\Omega}(x+y+z)\vec{\mathrm{V}}\cdot d\vec{S}\\ &=\iiint_{\Omega}\left[(P+Q+R)+(x+y+z)(P_x'+Q_y'+R_z')\right]dxdydz\\ &=\iiint_{\Omega}(P+Q+R)\ dxdy.\end{aligned}$$

在 $\partial\Omega$ 上，$\vec{\mathrm{V}}(x,y,z)=(1,1,1)^{\mathrm{T}}, \vec{n}=(x,y,z)$, 因此

$$\begin{aligned}&\iiint_{\Omega}(P+Q+R)\ dxdydz\\ &=\iint_{\partial\Omega}(x+y+z)\vec{\mathrm{V}}\cdot\vec{n}dS\\ &=\iint_{\partial\Omega}(x+y+z)^2dS\\ &=\iint_{\partial\Omega}(x^2+y^2+z^2)dS+2\iint_{\partial\Omega}(xy+yz+zx)dS\\ &=\iint_{\partial\Omega}dS+0=4\pi.\end{aligned}$$