

第 6 次习题课 含参积分 (教材第二章习题)

含参积分常用公式:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx dx &= \frac{b}{a^2 + b^2}, \quad (a > 0) & \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= \frac{\pi}{2}, \\ \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx dx &= \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad (a > 0) & \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx &= \sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

习题 2.1

1. 证明: $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ 在 \mathbb{R}^2 上 **非**一致收敛.

证明: 取 $(x_n, y_n) = (\sqrt{2n\pi}, 0), (a_n, b_n) = (\sqrt{(2n + \frac{1}{2})\pi}, 0)$. 则

$$\sqrt{(x_n - a_n)^2 + (y_n - b_n)^2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty \text{ 时};$$

$$\sin(x_n^2 + y_n^2) = 0, \sin(a_n^2 + b_n^2) = 1.$$

由 Cauchy 准则, $\sin(x^2 + y^2)$ 在 \mathbb{R}^2 上非一致收敛.

4. (1) $\int_1^{+\infty} x^s e^{-x} dx$ ($a \leq s \leq b$) 一致收敛, 这是因为:

$$x^s e^{-x} \leq x^b e^{-x}, \quad \forall x \geq 1, \forall s \in [a, b]; \text{ 且 } \int_1^{+\infty} x^b e^{-x} dx \text{ 收敛; Weirstrass 判别法.}$$

(2) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos yx}{1+x^2} dx$ ($-\infty < y < +\infty$) 一致收敛, 这是因为:

$$\left| \frac{\cos yx}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2}, \quad \forall x \geq 1, \forall y \in \mathbb{R}; \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \text{ 收敛; Weirstrass 判别法.}$$

(3) $n > -\frac{1}{2}$ 时, $\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-tx^2} dx$ ($0 < t_0 \leq t < +\infty$) 一致收敛, 这是因为:

$$(n \leq -\frac{1}{2} \text{ 时, } \forall t \geq t_0 > 0, \int_0^1 x^{2n} e^{-tx^2} dx \text{ 发散.})$$

$$n > -\frac{1}{2} \text{ 时, } x^{2n} e^{-tx^2} \leq x^{2n} e^{-t_0 x^2}, \quad \forall x > 0, \forall t \geq t_0 > 0; \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-t_0 x^2} dx \text{ 收敛;}$$

Weirstrass 判别法.

(4) $\int_1^{+\infty} e^{-tx} \sin x dx$ ($0 < t_0 \leq t < +\infty$) 一致收敛, 这是因为:

$$|e^{-tx} \sin x| \leq e^{-t_0 x}, \forall x \geq 1, \forall t \geq t_0 > 0; \int_1^{+\infty} e^{-t_0 x} dx \text{ 收敛; Weirstrass 判别法.}$$

(也可以用 Dirichlet 判别法)

(5) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \cos tx}{1+x^4} dx$ ($-\infty < t < +\infty$) 一致收敛, 这是因为:

$$\left| \frac{x^2 \cos tx}{1+x^4} \right| \leq \frac{x^2}{1+x^4}, \forall x, \forall t; \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx \text{ 收敛. Weirstrass 判别法.}$$

(6) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+(x+t)^2}$ ($0 \leq t < +\infty$) 一致收敛

$$\frac{1}{1+(x+t)^2} \leq \frac{1}{1+x^2}, \forall x \geq \forall t \geq 0; \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \text{ 收敛. Weirstrass 判别法.}$$

(7) $\int_1^{+\infty} e^{-tx} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$ ($0 \leq t < +\infty$) 一致收敛, 这是因为:

$$\forall t \geq 0, \frac{e^{-tx}}{\sqrt{x}} \text{ 关于 } x \text{ 单调; } x \rightarrow +\infty \text{ 时, } \frac{e^{-tx}}{\sqrt{x}} (\leq \frac{1}{\sqrt{x}}) \text{ 对 } t \geq 0 \text{ 一致趋于 } 0;$$

$$\left| \int_1^a \cos x dx \right| \leq 2, \forall a > 1. \text{ Dirichlet 判别法.}$$

(8) $\int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{-tx^2} dx$ ($0 \leq t < +\infty$) 非一致收敛, 这是因为:

$$\forall M > 0, \exists A = M + 1, B = 2A, t = \frac{1}{A^2}, s.t.$$

$$\int_A^B \sqrt{t} e^{-tx^2} dx = \int_{A\sqrt{t}}^{B\sqrt{t}} e^{-y^2} dy \geq (B-A) \sqrt{t} e^{-tB^2} \geq e^{-4}.$$

由 Cauchy 准则, 非一致收敛

(9) $\int_1^{+\infty} x^{1-y} dx$ ($2 < y < +\infty$) 非一致收敛, 这是因为:

法一: Cauchy 准则。 $\exists \varepsilon = \frac{3}{4}, \forall M > 0$, 取定 $A = M + 2, B = A^2$, 因 $\lim_{y \rightarrow 2^+} A^{2-y} = 1$,

$\exists y_0 \in (1, 2), s.t. A^{2-y_0} = \frac{3}{2}$, 于是

$$\int_A^B x^{1-y_0} dx = \frac{B^{2-y_0} - A^{2-y_0}}{2-y_0} > B^{2-y_0} - A^{2-y_0} = \frac{3}{4}.$$

法二：利用第 6 题结论。 $y = 2$ 时, $\int_1^{+\infty} x^{1-y} dx$ 不收敛。

(10) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x^p} dx$ ($0 \leq p < 3$) 非一致收敛 $\left(p \geq 3 \text{ 时}, \int_0^1 \frac{\sin x^2}{x^p} dx \text{ 发散} \right)$, 这是因为:

$\forall p \geq 0, \frac{1}{x^{p+1}}$ 关于 x 单调; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{1}{x^{p+1}} (\leq \frac{1}{x})$ 关于 $p \geq 0$ 一致收敛到 0;

$\left| \int_1^A x \sin x^2 dx \right| \leq 2$; 由 Dirichlet 判别法, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x^p} dx$ 对 $0 \leq p < 3$ 一致收敛. 因此, 要证

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x^p} dx$ ($0 \leq p < 3$) 非一致收敛, 只要证 $\int_0^1 \frac{\sin x^2}{x^p} dx$ 关于 $0 \leq p < 3$ 非一致收敛。

法一：一致收敛的定义 (或 Cauchy 准则)。

$\exists \varepsilon = \frac{1}{\pi}, \forall 0 < \delta < \frac{1}{2}, \exists p \in (2, 3), s.t. \delta^{3-p} = \frac{1}{2}$. 于是

$$\int_0^\delta \frac{\sin x^2}{x^p} dx = \int_0^\delta \frac{\sin x^2}{x^2} x^{2-p} dx \geq \frac{2}{\pi} \int_0^\delta x^{2-p} dx = \frac{2}{\pi(3-p)} \delta^{3-p} > \frac{1}{\pi}.$$

法二：利用第 6 题结论。

$p = 3$ 时, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin x^2}{\frac{1}{x}} = 1, \int_0^1 \frac{1}{x} dx$ 发散, 则 $\int_0^1 \frac{\sin x^2}{x^3} dx$ 发散.

5. 证明 $\int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin 3x}{x+t} dx$ ($0 \leq t < +\infty$) 一致收敛。

证明: $\forall t \geq 0, \frac{e^{-tx}}{x+t}$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上单调;

$x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{e^{-tx}}{x+t} \left(\leq \frac{1}{x} \right)$ 关于 $t \in [0, +\infty)$ 一致收敛到 0;

$$\left| \int_0^A \sin 3x \, dx \right| \leq \frac{2}{3}, \forall A > 0.$$

由 Dirichelt 判别法, $\int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin 3x}{x+t} \, dx \quad (0 \leq t < +\infty)$ 一致收敛。

6. 设 $f(x, t)$ 在 $[a, +\infty) \times [\alpha, \beta]$ 中连续, $\forall t \in [\alpha, \beta), \int_a^{+\infty} f(x, t) \, dt$ 收敛, 但 $\int_a^{+\infty} f(x, \beta) \, dt$ 发散。证明:
 $\int_a^{+\infty} f(x, t) \, dt$ 在 $[\alpha, \beta)$ 上非一致收敛。

证明: 反证法。若 $\int_a^{+\infty} f(x, t) \, dt$ 在 $[\alpha, \beta)$ 上一致收敛, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists M(\varepsilon) > a, s.t.$

$$\left| \int_A^B f(x, t) \, dt \right| < \varepsilon, \quad \forall B > A > M, t \in [\alpha, \beta).$$

任意取定 $B > A > M, f(x, t)$ 在 $[A, B] \times [\alpha, \beta]$ 上一致连续, 因而 $\exists t_0 \in [\alpha, \beta), s.t.$

$$|f(x, \beta) - f(x, t_0)| < \frac{\varepsilon}{B - A}, \quad \forall x \in [A, B].$$

于是, $\forall B > A > M$, 有

$$\left| \int_A^B f(x, \beta) \, dt \right| \leq \int_A^B |f(x, \beta) - f(x, t_0)| \, dt + \left| \int_A^B f(x, t_0) \, dt \right| < 2\varepsilon,$$

由 Cauchy 收敛原理, $\int_a^{+\infty} f(x, \beta) \, dt$ 收敛. 与已知矛盾. \square

习题 2.2

1. 求下列极限

$$(1) \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + a^2} \, dx, \quad (2) \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^3 x^2 \cos ax \, dx.$$

解: (1) $\lim_{a \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + a^2} \, dx = \int_{-1}^1 \lim_{a \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + a^2} \, dx = \int_{-1}^1 |x| \, dx = 1.$

$$(2) \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^3 x^2 \cos ax \, dx = \int_0^3 \lim_{a \rightarrow 0} (x^2 \cos ax) \, dx = \int_0^3 x^2 \, dx = 9.$$

2. 求下列函数的导函数。

$$(1) F(x) = \int_x^{x^2} e^{-xy^2} dy, \quad (2) F(y) = \int_{a+y}^{b+y} \frac{\sin yx}{x} dx,$$

$$(3) F(t) = \int_0^t \frac{\ln(1+tx)}{x} dx, \quad (4) F(t) = \int_0^t f(x+t, x-t) dx, f \in C^1.$$

解: (1) $F'(x) = -\int_x^{x^2} y^2 e^{-xy^2} dy + 2xe^{-x^5} - e^{-x^3}.$

$$(2) F'(y) = \int_{a+y}^{b+y} \cos yx dx + \frac{\sin(by+y^2)}{b+y} - \frac{\sin(ay+y^2)}{a+y}$$

$$= \frac{b+2y}{y(b+y)} \sin(by+y^2) - \frac{a+2y}{y(a+y)} \sin(ay+y^2)$$

$$(3) F'(t) = \int_0^t \frac{1}{1+tx} dx + \frac{\ln(1+t^2)}{t} = \frac{2\ln(1+t^2)}{t}.$$

$$(4) F'(t) = \int_0^t (f'_1(x+t, x-t) - f'_2(x+t, x-t)) dx + f(2t, 0).$$

3. 设 $f(x)$ 可微, 且 $F(x) = \int_0^x (x+y)f(y)dy$, 求 $F''(x)$.

解: $F'(x) = \int_0^x f(y)dy + 2xf(x), \quad F''(x) = 3f(x) + 2xf'(x).$

4. 证明: $u(t, x) = \frac{1}{2}(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds$ 是弦振动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 的解, 其中

$$\varphi \in C^2, \psi \in C^1.$$

证明: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a}{2}(\varphi'(x+at) - \varphi'(x-at)) + \frac{1}{2}(\psi(x+at) + \psi(x-at))$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a^2}{2}(\varphi''(x+at) + \varphi''(x-at)) + \frac{a}{2}(\psi'(x+at) - \psi'(x-at))$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}(\varphi'(x+at) + \varphi'(x-at)) + \frac{1}{2a}(\psi(x+at) - \psi(x-at))$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2}(\varphi''(x+at) + \varphi''(x-at)) + \frac{1}{2a}(\psi'(x+at) - \psi'(x-at))$$

因此 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$

5. 计算下列积分 (含参瑕积分, 应放到习题 2.3 中)

$$(1) \int_0^1 \frac{\arctan x}{x\sqrt{1-x^2}} \quad (2) \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \sin(\ln \frac{1}{x}) dx \quad (a, b > 0)$$

解: (1) 令 $I(t) = \int_0^1 \frac{\arctan(tx)}{x\sqrt{1-x^2}} dx$, 则 $I(0) = 0$, 欲求 $I(1)$.

$$\forall t \in [0, 1], \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan(tx)}{x\sqrt{1-x^2}} = t; \quad \forall t \in (0, 1], \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arctan(tx)}{x\sqrt{1-x^2}} = +\infty.$$

因此 0 不是积分的瑕点, 1 是瑕点。

$$0 \leq \frac{\arctan(tx)}{x\sqrt{1-x^2}} \leq \frac{tx}{x\sqrt{1-x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall t \in [0, 1], \forall x \in (0, 1).$$

由 Weierstrass 判别法, $\int_0^1 \frac{\arctan(tx)}{x\sqrt{1-x^2}} dx$ 关于 $t \in [0, 1]$ 一致收敛。又由 Able 判别法可知,

$\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2x^2)\sqrt{1-x^2}} dx$ 关于 $t \in [0, 1]$ 一致收敛。因此

$$\begin{aligned} I'(t) &= \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2x^2)\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1+t^2 \sin^2 \theta} = \int_0^{\pi/2} \frac{\csc^2 \theta d\theta}{\csc^2 \theta + t^2} \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{-d \cot \theta}{1+t^2 + \cot^2 \theta} = \frac{-1}{\sqrt{1+t^2}} \arctan \frac{\cot \theta}{\sqrt{1+t^2}} \Big|_{\theta=0}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+t^2}}. \end{aligned}$$

$$I(1) = \int_0^1 \frac{\pi}{2\sqrt{1+t^2}} dt = \frac{\pi}{2} \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \Big|_{t=0}^1 = \frac{\pi}{2} \ln(1 + \sqrt{2}).$$

(2) 不妨设 $b \geq a > 0$. 令 $I(t) = \int_0^1 \frac{x^t - x^a}{\ln x} \sin(\ln \frac{1}{x}) dx, t \in [a, b]$. $I(a) = 0$, 求 $I(b)$.

$$\left| \frac{x^t - x^a}{\ln x} \sin(\ln \frac{1}{x}) \right| \leq x^t - x^a \leq x^b - x^a, \quad \forall t \in [a, b], x \in (0, 1).$$

由 Weierstrass 判别法, $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \sin(\ln \frac{1}{x}) dx$ 关于 $t \in [a, b]$ 一致收敛。

$\forall t \in [a, b], x^t$ 在 $x \in (0, 1)$ 上单调; $x^t \leq x^b \leq 1$ 关于 $t \in [a, b], x \in (0, 1)$ 一致有界;

$$\int_0^1 \sin(\ln \frac{1}{x}) dx = \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin t dt = \frac{1}{2}.$$

由 Able 判别法, $\int_0^1 x^t \sin(\ln \frac{1}{x}) dx$ 关于 $t \in [a, b]$ 一致收敛。因此

$$I'(t) = \int_0^1 x^t \sin(\ln \frac{1}{x}) dx = \int_0^{+\infty} e^{-(1+t)y} \sin y dy = \frac{1}{1+(1+t)^2}.$$

$$I(b) = I(a) + \int_a^b \frac{dt}{1+(1+t)^2} = \arctan(1+t) \Big|_{t=a}^b = \arctan(1+b) - \arctan(1+a). \square$$

习题 2.3

1. 计算下列积分。

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} dx \quad (a, b > 0)$$

$$(2) \int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} \sin yx dx \quad (a > 0)$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx \quad (a, b > 0)$$

解: (1) 不妨设 $b \geq a > 0$, 令 $I(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-tx^2}}{x} dx, t \in [a, b]$. 则 $I(a) = 0$, 欲求 $I(b)$. 因

$$|x e^{-tx^2}| \leq x e^{-ax^2}, \quad \forall x \geq 0, \forall t \in [a, b],$$

而 $\int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} dx$ 收敛, 所以 $\int_0^{+\infty} x e^{-tx^2} dx$ 关于 $t \in [a, b]$ 一致收敛 (Weistrass). 于是

$$I'(t) = \int_0^{+\infty} x e^{-tx^2} dx = \frac{1}{2t} \int_0^{+\infty} e^{-y} dy = \frac{1}{2t}.$$

$$I(b) = I(a) + \int_a^b \frac{1}{2t} dt = \frac{1}{2} \ln \frac{b}{a}.$$

(2) $a > 0$, 令 $I(t) = \int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} \sin tx dx \quad (t \in \mathbb{R})$. 因为

$$|x e^{-ax^2} \sin tx| \leq x e^{-ax^2}, \quad \forall x \geq 0, \forall t \in \mathbb{R},$$

$I(t) = \int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} \sin tx dx$ 关于 $t \in \mathbb{R}$ 一致收敛 (Weistrass). 于是,

$$\begin{aligned} J(y) &= \int_0^y I(t) dt = \int_0^y dt \int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} \sin tx dx = \int_0^{+\infty} dx \int_0^y x e^{-ax^2} \sin tx dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} (1 - \cos yx) dx = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx - \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos yx dx \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} - \frac{1}{y} e^{-ax^2} \sin yx \Big|_{x=0}^{+\infty} - \frac{1}{y} \int_0^{+\infty} 2ax e^{-ax^2} \sin yx dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} - \frac{2a}{y} I(y) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} - \frac{2a}{y} J'(y), \quad \forall y \neq 0.$$

于是

$$J(y) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} = -\frac{2a}{y} \left(J(y) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \right)', \quad J(y) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} = c e^{\frac{-y^2}{4a}}.$$

由 $J(0) = 0$, 得

$$c = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad J(y) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{-y^2}{4a}}, \quad I(y) = J'(y) = \frac{1}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} y e^{\frac{-y^2}{4a}}.$$

(3) 不妨设 $b \geq a > 0$. 由 Dirichlet 判别法, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{x} dx$ 关于 $t \in [a, b]$ 一致收敛. 因此

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx &= \int_0^{+\infty} dx \int_a^b \frac{\sin tx}{x} dt \\ &= \int_a^b dt \int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{x} dx = \int_a^b \frac{\pi}{2} dt = \frac{\pi}{2} (b-a). \end{aligned}$$

2. 利用对参变量的求导, 求下列积分。

$$(1) \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} x^{2n} dx \quad (t > 0, n \text{ 为非负整数}), \quad (2) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(y+x^2)^{n+1}} \quad (y > 0).$$

解: (1) 任意给定 $b > a > 0$, 有

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx^2} dx = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} t^{-\frac{1}{2}}, \quad \forall t \in [a, b].$$

由 Weierstrass 判别法, 对非负整数 m , $\int_0^{+\infty} e^{-tx^2} x^m dx$ 关于 $t \in [a, b]$ 一致收敛. 因此上式左端对 t 求导可与积分运算交换次序. 左右两端对 t 求 n 次导, 得

$$\int_0^{+\infty} (-x^2)^n e^{-tx^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \cdots \left(-\frac{2n-1}{2}\right) t^{-\frac{2n+1}{2}}, \quad \forall t \in [a, b].$$

即

$$\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-tx^2} dx = \frac{\sqrt{\pi} (2n-1)!!}{2^{n+1}} t^{-\frac{2n+1}{2}}, \quad \forall t \in [a, b].$$

由 $b > a > 0$ 的任意性得 $\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-tx^2} dx = \frac{\sqrt{\pi} (2n-1)!!}{2^{n+1}} t^{-\frac{2n+1}{2}}, \quad \forall t > 0.$

(2) 任意给定 $a > 0$, 有

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{y+x^2} = \frac{1}{\sqrt{y}} \arctan \frac{x}{\sqrt{y}} \Big|_{x=0}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} y^{-\frac{1}{2}}, \quad \forall y \geq a.$$

由Weierstrass判别法, 对正整数 n , $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(y+x^2)^{n+1}}$ 关于 $y \geq a$ 一致收敛. 因此上式左端对 y 求导

可与积分运算交换次序. 左右两端对 y 求 n 次导, 得

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(y+x^2)^{n+1}} = \frac{\pi(2n-1)!!}{(2n)!!} y^{-(n+\frac{1}{2})}, \quad \forall y \geq a.$$

由 $a > 0$ 的任意性得 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(y+x^2)^{n+1}} = \frac{\pi(2n-1)!!}{(2n)!!} y^{-(n+\frac{1}{2})}, \quad \forall y > 0.$

第二章总复习题

1. 证明: $f(x, y) = \sin xy$ 在 \mathbb{R}^2 上非一致连续。

证明: 取 $x_n = \frac{\pi}{n}, y_n = 2n^2, a_n = \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{4n^2}, b_n = 2n^2$. 则

$$\sqrt{(x_n - a_n)^2 + (b_n - y_n)^2} \rightarrow 0, \quad \sin a_n b_n - \sin x_n y_n = 1.$$

由 Cauchy 准则, $f(x, y) = \sin xy$ 在 \mathbb{R}^2 上非一致连续。

2. 设向量值函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 一致连续, 且 $\{x_k\}$ 为 \mathbb{R}^n 中的 Cauchy 列, 证明: $\{f(x_k)\}$ 为 \mathbb{R}^m 中的 Cauchy 列。

证明: $\forall \varepsilon > 0$, 由 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 的一致连续性, $\exists \delta > 0, s.t.$

$$\|f(x) - f(y)\|_m < \varepsilon, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \|x - y\|_n < \delta.$$

$\{x_k\}$ 为 \mathbb{R}^n 中的 Cauchy 列, 因此 $\exists N \in \mathbb{N}, s.t.$

$$\|x_k - x_l\|_n < \delta, \quad \forall k, l > N.$$

于是有

$$\|f(x_k) - f(x_l)\|_m < \varepsilon, \quad \forall k, l > N.$$

即 $\{f(x_k)\}$ 为 \mathbb{R}^m 中的 Cauchy 列。

3. 证明: $f(x, y)$ 为有界闭集 D 上的连续函数, 则 $f(x, y)$ 在 D 上一致连续.

证明: 反证法. 假设 $f(x, y)$ 在 D 上不一致连续, 则 $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall n \in N, \exists (x_n, y_n), (\alpha_n, \beta_n) \in D, s.t.$

$$\|(x_n, y_n), (\alpha_n, \beta_n)\| = \sqrt{(x_n - \alpha_n)^2 + (y_n - \beta_n)^2} < \frac{1}{n}, \quad |f(x_n, y_n) - f(\alpha_n, \beta_n)| \geq \varepsilon_0.$$

D 为有界集, 则 $\{(x_n, y_n)\}$ 有收敛子列, 不妨仍记为 $\{(x_n, y_n)\}$, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0)$. D 为闭集, 则

则 $(x_0, y_0) \in D$. 由距离的三角不等式

$$\|(\alpha_n, \beta_n), (x_0, y_0)\| \leq \|(x_n, y_n), (\alpha_n, \beta_n)\| + \|(x_n, y_n), (x_0, y_0)\|$$

得 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n, \beta_n) = (x_0, y_0)$. 由 $f(x, y)$ 的连续性, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n, \beta_n) = f(x_0, y_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n).$$

这与 $|f(x_n, y_n) - f(\alpha_n, \beta_n)| \geq \varepsilon_0 > 0$ 矛盾.

4. 利用对参数的微分, 求下列积分。

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx \quad (a, b > 0), \quad (2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan(a \tan x)}{\tan x} dx$$

解: (1) 先证如下积分公式

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2a(a+b)}, \quad B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2b(a+b)}.$$

事实上, A, B 可由以下两式解出:

$$a^2 A + b^2 B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2},$$

$$a^2 A - b^2 B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 \sin^2 x - b^2 \cos^2 x}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 \tan^2 x - b^2}{a^2 \tan^2 x + b^2} dx$$

$$= a \int_0^{+\infty} \frac{t^2 - b^2}{(t^2 + b^2)(a^2 + t^2)} dt = \frac{(a-b)\pi}{2(a+b)}.$$

再令 $I(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \sin^2 x + t^2 \cos^2 x) dx$. $I(a) = \pi \ln a$, 欲求 $I(b)$. 因

$$\left| \frac{2t \cos^2 x}{a^2 \sin^2 x + t^2 \cos^2 x} \right| \leq \frac{2 \max\{a, b\}}{\min\{a, b\}}, \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2}), t \in [\min\{a, b\}, \max\{a, b\}],$$

由 Weirstrass 判别法, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2t \cos^2 x}{a^2 \sin^2 x + t^2 \cos^2 x} dx$ 关于 $t \in [\min\{a, b\}, \max\{a, b\}]$ 一致收敛. 于是

$$I'(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2t \cos^2 x}{a^2 \sin^2 x + t^2 \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{a+t},$$

$$I(b) = I(a) + \int_a^b \frac{\pi}{a+t} dx = \pi \ln a + \pi \ln(a+t) \Big|_{t=a}^b = \pi \ln \frac{a+b}{2}.$$

(2) 令 $I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan(a \tan x)}{\tan x} dx$. 因

$$0 < \frac{1}{1+a^2 \tan^2 x} \leq 1, \quad \forall a \geq 0, \forall x \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

由 Weirstrass 判别法, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\arctan(a \tan x)}{\tan x} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a^2 \tan^2 x}$ 关于 $a \geq 0$ 一致收敛. 于是

$$I'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a^2 \tan^2 x} = \int_0^{+\infty} \frac{adt}{(1+t)^2(a^2+t^2)} = \frac{\pi}{2(a+1)}, \quad \forall a > 0.$$

又 $I(0) = 0$, $I(a)$ 为奇函数, 所以

$$I(a) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \ln(a+1), & a \geq 0, \\ -\frac{\pi}{2} \ln(1-a), & a < 0. \end{cases}$$

5. 讨论下列积分在所给区间上的一致收敛性.

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx (-\infty < y < +\infty)$ 一致收敛.

$$\left| \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right| \leq \frac{1}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{x^2}, \text{ Weirstrass.}$$

(2) $\int_0^1 \ln(xy) dx (\frac{1}{2} < y < 2)$ 一致收敛.

$$\ln\left(\frac{x}{2}\right) < \ln(xy) < \ln(2x), \forall 0 < x < 1. \text{ 于是, } |\ln(xy)| < \ln 2 - \ln x, \forall 0 < x < 1.$$

$$(3) \int_1^{+\infty} \frac{n}{x^3} e^{-\frac{n}{2x^2}} dx (n \text{ 为自然数}) \text{ 非一致收敛.}$$

$$\forall M > 1, \exists A = [M] + 1, B = \sqrt{2}A, n = A^2, s.t.$$

$$0 < \int_A^B \frac{n}{x^3} e^{-\frac{n}{2x^2}} dx = e^{-\frac{n}{2B^2}} - e^{-\frac{n}{2A^2}} = e^{-1/4} - e^{-1/2}.$$

$$(4) \int_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}(x-\frac{1}{y})^2} \sin y dx (0 < y < 1) \text{ 一致收敛}$$

$$\text{Proof. } \forall \varepsilon \in (0, 1), \text{ 因为 } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dx = \sqrt{\pi}, \exists M_0 > 1, s.t. \int_A^{+\infty} e^{-t^2} dx < \varepsilon, \forall A \geq M_0.$$

$$\text{令 } \delta = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\pi}}, M = M_0 + \frac{1}{\delta}, \text{ 则}$$

$$\forall A > M, \text{ 当 } y \in [0, \delta] \text{ 时, 有}$$

$$\begin{aligned} 0 < \int_A^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}(x-\frac{1}{y})^2} \sin y dx &\leq \int_A^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}(x-\frac{1}{y})^2} dx \\ &= y \int_{\frac{1}{y}(A-\frac{1}{y})}^{+\infty} e^{-t^2} dt < y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} y < \varepsilon. \end{aligned}$$

$$\forall A > M, \text{ 当 } y \in [\delta, 1] \text{ 时, 有 } \frac{1}{y}(A - \frac{1}{y}) > A - \frac{1}{y} > A - \frac{1}{\delta} \geq M_0,$$

$$\begin{aligned} 0 < \left| \int_A^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}(x-\frac{1}{y})^2} \sin y dx \right| &\leq \int_A^{+\infty} \left| e^{-\frac{1}{y^2}(x-\frac{1}{y})^2} \sin y \right| dx \leq \int_A^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}(x-\frac{1}{y})^2} dx \\ &\leq y \int_{\frac{1}{y}(A-\frac{1}{y})}^{+\infty} e^{-t^2} dt \leq \int_{\frac{1}{y}(A-\frac{1}{y})}^{+\infty} e^{-t^2} dt \leq \int_{M_0}^{+\infty} e^{-t^2} dt < \varepsilon. \end{aligned}$$

$$(5) \int_1^{+\infty} e^{-yx^2} \sin y dx (0 \leq y < +\infty) \text{ 一致收敛}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t e^{-t} = 0, \text{ 因此 } \exists C > 0, s.t. t e^{-t} \leq C, \forall t \geq 0. \text{ 于是}$$

$$\left| e^{-yx^2} \sin y \right| \leq y e^{-yx^2} = \frac{1}{x^2} \cdot y x^2 e^{-yx^2} \leq \frac{C}{x^2}, \forall x \geq 1, \forall y \in \mathbb{R}.$$

(6) $\int_1^{+\infty} e^{-yx^2} \sin y dy (0 < x < +\infty)$ 非一致收敛

$I(0) = \int_1^{+\infty} \sin y dy$ 发散. 利用习题 2.3No.6。

6. 计算下列积分的值.

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{\arctan xy}{x(1+x^2)} dx \quad (y \geq 0) \quad (2) \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{y^2 + x^2} dx \quad (y > 0)$$

解: (1) $I(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan xy}{x(1+x^2)} dx \quad (y \geq 0)$. 任意给定 $r > 0$,

$$\left| \frac{\arctan xy}{x(1+x^2)} \right| \leq \frac{xy}{x(1+x^2)} \leq \frac{r}{1+x^2}, \quad \forall x > 0, \forall y \in (0, r].$$

由 Weirstrass 判别法, $I(y)$ 关于 $y \in (0, r]$ 一致收敛. 由 $r > 0$ 的任意性, $I(y) \in C(0, +\infty)$. 又

$$0 < \frac{1}{(1+x^2y^2)(1+x^2)} \leq \frac{1}{1+x^2}, \quad \forall x > 0, \forall y \geq 0.$$

$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2y^2)(1+x^2)}$ 关于 $y \in (0, +\infty)$ 一致连续. 于是

$$I'(y) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2y^2)(1+x^2)} = \frac{\pi}{2(1+y)}, \quad \forall y \geq 0.$$

又 $I(0) = 0$, 所以

$$I(y) = \frac{\pi}{2} \ln(1+y), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

(2) 视 $y > 0$ 为常数, 令

$$I(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{y^2 + x^2} dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

由 Weirstrass 判别法, $I(t)$ 关于 $t \in \mathbb{R}$ 一致收敛, 因而 $I(t) \in C(\mathbb{R})$. 欲求 $I(1)$.

任意给定 $a > 0$, $\frac{x}{y^2 + x^2}$ 在 $x \in [y, +\infty)$ 上单调, 关于 $t \geq a$ 一致收敛到 0, $\left| \int_0^A \sin txdx \right| \leq \frac{2}{t} \leq \frac{2}{a}$, 因此

$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin tx}{y^2 + x^2} dx$ 关于 $t \geq a > 0$ 一致收敛 (Dirichlet), 从而

$$I'(t) = - \int_0^{+\infty} \frac{x \sin tx}{y^2 + x^2} dx.$$

(积分号下再对 t 求导所得积分不可积。) 利用积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2},$$

有

$$I'(t) + \frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{y^2 \sin tx}{x(y^2 + x^2)} dx.$$

$$I''(t) = y^2 I(t).$$

于是

$$I(t) = c_1 e^{-yt} + c_2 e^{yt}, \forall t \geq a > 0.$$

而

$$|I(t)| \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{y^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2y} < +\infty, \forall t \geq a > 0.$$

令 $t \rightarrow +\infty$ 得

$$c_2 = 0, \quad I(t) = c_1 e^{-yt}, \forall t \geq a > 0.$$

又 $I(t) \in C(\mathbb{R})$, 于是

$$c_1 = I(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{y^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2y}, \quad I(t) = \frac{\pi}{2y} e^{-yt}, \forall t > 0.$$

故

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{y^2 + x^2} dx = I(1) = \frac{\pi}{2y} e^{-y}.$$

7. 证明: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2 y}{x} dx$ 在 $y \in (0, +\infty)$ 不一致收敛, 但连续.

证明: $\forall y > 0, \int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2 y}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2 y}{2x^2 y} d(x^2 y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{2t} dt = \frac{\pi}{4}$. 因此

$$I(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2 y}{x} dx = \begin{cases} 0 & y = 0, \\ \frac{\pi}{4} & y > 0. \end{cases}$$

$I(y) \in C(0, \infty)$. 但 $I(y) \notin C[0, 1]$, 因此 $I(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2 y}{x} dx$ 在 $y \in [0, 1]$ 不一致收敛, 从而在

$y \in (0, +\infty)$ 不一致收敛。