第 2 次习题课（多元函数的偏导、方向导数与可微）

1. 设 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$，则在 $(0,0)$ 点（ B ）

(A) 连续，但偏导数不存在；　(B) 偏导数存在，但不可微；

(C) 可微；　(D) 偏导数存在且连续.

解题思路：(1) $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$，则 $f(x,0)=f(0,y)=0$，$f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$.

(2)如果 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$，在 $(0,0)$ 可微，则

$$\Delta f(0,0)=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=\sqrt{|\Delta x\Delta y|}=o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}).$$

即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}\dfrac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0.$ 而 $\lim\limits_{\Delta x\to 0,\Delta y=\Delta x}\dfrac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\neq 0,$ 矛盾. 故

$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不可微.

2. 下列条件成立时能够推出 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点可微，且全微分 $df=0$ 的是(D).

(A) 在点 (x_0,y_0) 两个偏导数 $f'_x=0,\ f'_y=0$

(B) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全增量 $\Delta f=\dfrac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$，

(C) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全增量 $\Delta f=\dfrac{\sin((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$

(D) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全增量 $\Delta f=((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)\sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

解题思路：$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点 $df=0$，则有

(1) $f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$，且

(2) $\Delta f\left(x_0,y_0\right)=o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$，当$(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$时.

条件(1)都成立，只有(D)中条件(2)成立，故选 D.

3. 如 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 不可微，则下列命题中一定不成立的是（ C ）

(A) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 不连续；

(B) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 沿任何方向 $\bar{v}$ 的方向导数不存在；

(C) $f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 两个偏导数都存在且连续；

(D) $f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 两个偏导数存在且至少有一个不连续.

4. 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的某个邻域内有定义， $f(0,0)=0$，且

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = a$$

a 为常数。证明：

（1） $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续；

（2）若 $a \neq -1$，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续，但不可微；

（3）若 $a=-1$，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微。

证明:
$$\frac{f(x,y)-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = a+o(1)$$

$$f(x,y)=(a+1)\sqrt{x^2+y^2}+o(\sqrt{x^2+y^2})$$

（1） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0),$ 因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续.

（2） 若 $a \neq -1$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+1)\sqrt{x^2}+o(x)}{x}$ 不存在，即 $f'_x(0,0)$ 不存在, 因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续，但不可微.

（3） 若 $a=-1$, 则 $f(x,y)=o(\sqrt{x^2+y^2})$, 且

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0,\ f'_y(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0,$$

因此 $f(x,y)-f(0,0)=f'_x(0,0)\mathrm{d}x+f'_y(0,0)\mathrm{d}y+o(\sqrt{x^2+y^2}),$ $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微.

5. 设函数 $z=\arctan\dfrac{x+y}{x-y}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}$， $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

（$-\dfrac{y}{x^2+y^2},\dfrac{x}{x^2+y^2},\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$）

6. 设 $f(x,y)$ 在点 $M(x_0, y_0)$ 可微, $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{u}=-\vec{i}+2\vec{j}$, $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial \vec{v}}=-2,$

$\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial \vec{u}}=1$. 求 $f(x,y)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 的微分.

解：$-2=\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial \vec{v}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}f_x'(x_0,y_0)-\dfrac{1}{\sqrt{2}}f_y'(x_0,y_0)$,

$$1=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial \vec{u}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}f_x'(x_0,y_0)+\frac{2}{\sqrt{5}}f_y'(x_0,y_0),$$

两式联立, 得 $f_x'(x_0,y_0)=\sqrt{5}-4\sqrt{2}$, $f_y'(x_0,y_0)=\sqrt{5}-2\sqrt{2}$, 因此

$$\mathrm{d}f(x_0,y_0)=(\sqrt{5}-4\sqrt{2})\mathrm{d}x+(\sqrt{5}-2\sqrt{2})\mathrm{d}y.$$

7. n 元函数 $f(\mathrm{x})$ 在点 x_0 可微， $\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n$ 是两两相互垂直的 n 维（列）向量。证明:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial \tau_k}(\mathrm{x}_0)\right)^2=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0)\right)^2.$$

证明：$\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n$ 是两两相互垂直的 n 维（列）向量, 则 $Q=\left(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n\right)$ 为正交矩阵，

即 $QQ^{\mathrm{T}}=I$，也即

$$\tau_1\tau_1^{\mathrm{T}}+\tau_2\tau_2^{\mathrm{T}}+\cdots+\tau_n\tau_n^{\mathrm{T}}=I.。$$

记 $\alpha=\mathrm{grad}f(\mathrm{x}_0)=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1},\dfrac{\partial f}{\partial x_2},\cdots,\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right)^{\mathrm{T}}\Bigg|_{(\mathrm{x}_0)}$，则

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial \tau_k}(\mathrm{x}_0)\right)^2&=\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha^{\mathrm{T}}\tau_k\right)^2=\sum_{k=1}^{n}\alpha^{\mathrm{T}}\tau_k(\alpha^{\mathrm{T}}\tau_k)^{\mathrm{T}}\\&=\sum_{k=1}^{n}\alpha^{\mathrm{T}}\tau_k\tau_k^{\mathrm{T}}\alpha=\alpha^{\mathrm{T}}\left(\sum_{k=1}^{n}\tau_k\tau_k^{\mathrm{T}}\right)\alpha=\alpha^{\mathrm{T}}\alpha=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}_0)\right)^2.\end{aligned}$$

8. 构造函数 $f(x,y)$, 使得它在原点可微，但 $f_x'(x,y), f_y'(x,y)$ 在原点不连续。

解：令 $f(x,y)=\begin{cases}0, & x=0\text{或}y\neq 0,\\ x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, y=0.\end{cases}$ 由 $f(x,0)=x^2$, $f(0,y)=0$, 得

$$f_x'(0,0)=f_y'(0,0)=0,$$

$$\left|\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\le|x|\to 0,(x,y)\to(0,0)\text{时}.$$

因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微。

任意取定 $x_0\ne 0,$ 考虑 f 在点 $(x_0,0)$ 处的偏导数。由

$$f(x_0,y)=\begin{cases}x_0^2\sin\dfrac{1}{x_0} & y\ne 0\\ 0 & y=0\end{cases}$$

知 $f_y'(x_0,0)$ 不存在，因而 $f_y'(x,y)$ 在原点不连续。由

$$f(x,0)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & x\ne 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

得 $f_x'(x_0,0)=2x_0\sin\dfrac{1}{x_0}-\cos\dfrac{1}{x_0},$ 而极限 $\lim\limits_{x\to 0}f_x'(x,0)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\right)$ 不存在，因此 $f_x'(x,y)$ 在原点不连续。

9. $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上可微，$\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}\dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=+\infty,$ 则对任意向量 $v=(v_1,v_2),$ 存在点 $(x_0,y_0),$ 使得 $\mathrm{grad}f(x_0,y_0)=v.$

证明：令 $g(x,y)=f(x,y)-v_1x-v_2y,$ 由 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}\dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=+\infty$ 可得

$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty}\frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=+\infty,\qquad \lim_{x^2+y^2\to+\infty}g(x,y)=+\infty.$$

于是存在 $R>0,$ 当 $x^2+y^2>R^2$ 时，有 $g(x,y)>g(0,0).$连续函数 $g(x,y)$ 在有界闭集 $x^2+y^2\le R^2$ 上有最小值 $g(x_0,y_0)\le g(0,0).$ 易知 $g(x_0,y_0)$ 也是 $g(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上的最小值。因而 (x_0,y_0) 是 $g(x,y)$ 的驻点，即 $\mathrm{grad}g(x_0,y_0)=(0,0),$ 也即 $\mathrm{grad}f(x_0,y_0)=v.$ □

10. $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R},g=(g_1,g_2,\cdots,g_m):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m.$ 已知 g_i在点$\mathrm{x}_0\in\mathbb{R}^n$ 处的各偏导数存在，$i=1,2,\cdots,m$ 且 f在点$\mathrm{u}_0=g(\mathrm{x}_0)\in\mathbb{R}^m$ 处各偏导数也存在。试问：复合函数

$(f\circ g)(\mathrm{x})=f(g_1(\mathrm{x}),g_2(\mathrm{x}),\cdots,g_m(\mathrm{x}))$ 在点$\mathrm{x}_0\in\mathbb{R}^n$处的各偏导数是否一定存在？如果一定存在，请证明。如果不一定存在，请举反例。

解： $f\circ g$在点$\mathrm{x}_0\in\mathbb{R}^n$处各偏导数不一定存在。反例如下：

$$f(u,v)=\begin{cases}1 & |u|=|v|>0,\\ 0 & \text{其它},\end{cases}\qquad g_1(x,y)=g_2(x,y)=x,\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

则在点$(x_0,y_0)=(0,0)$处，

$$\frac{\partial g_1}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial g_2}{\partial x}(0,0)=1,\quad \frac{\partial g_1}{\partial y}(0,0)=\frac{\partial g_2}{\partial y}(0,0)=0,$$

在点$g(x_0,y_0)=(g_1(0,0),g_2(0,0))=(0,0)$处

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=0.$$

但复合函数

$$(f\circ g)(x,y)=f(g_1(x,y),g_2(x,y))=f(x,x)=\begin{cases}1 & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

在点$(x_0,y_0)=(0,0)$处，$\dfrac{\partial(f\circ g)}{\partial x}(0,0)$不存在。