



### § 3. 向量值函数的极限与连续

#### 1. 向量值函数在一点的极限

**Def.**  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x_0 \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^m, f$  在  $x_0$  的某个去心邻域  $B_0(x_0, r)$  中有定义. 若  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \in (0, r), s.t.$

$$\|f(x) - A\| < \varepsilon, \quad \forall x \in B_0(x_0, \delta),$$

则称  $x \rightarrow x_0$  时,  $f(x)$  以  $A$  为极限, 记作  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ .

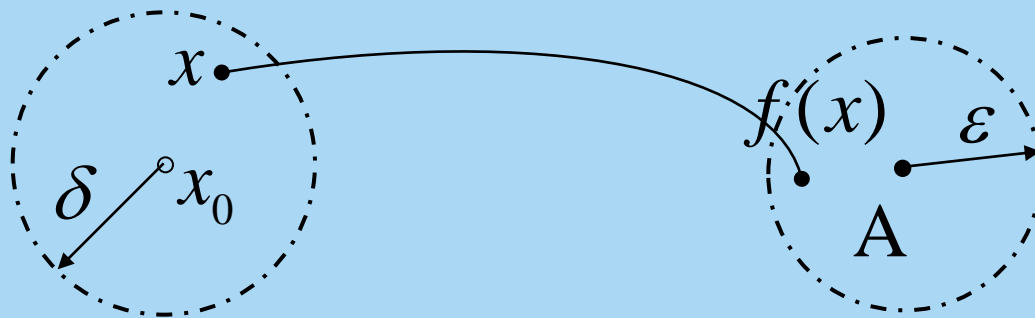
**Remark.** 令  $m = 1$ , 得到  $n$  元函数在一点的极限的定义.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta \in (0, r), s.t. \\ |f(x) - A| < \varepsilon, \forall 0 < \|x - x_0\| < \delta \end{array}}$$



**Remark.** 向量值函数在一点的极限的几何意义.

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x_0 \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^m, \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A :$$



**Remark.** 若向量值函数的极限存在, 则极限必唯一.

**Remark.**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 则:

不论动点  $x$  沿什么路径趋于定点  $x_0$ , 都有  $f(x) \rightarrow A$ .



**Question.** 如何证明  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  不存?

**例.**  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x+y}$  是否存在?

**解:**  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=0}} \frac{xy}{x+y} = 0,$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=x^2-x}} \frac{xy}{x+y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^2}{x^2} = -1.$$

故  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x+y}$  不存在.  $\square$



例.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2 + y^4}$

解:  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon$ , 只要  $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ , 就有

$$\left| \frac{xy^2}{x^2 + y^2 + y^4} - 0 \right| \leq |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \varepsilon.$$

故  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2 + y^4} = 0. \square$



**Question.** 多元函数在一点的极限的和、差、积、商（分母不为0）有何性质？

**Question.** 多元复合函数在一点的极限有何性质？

**Question.** 多元函数的极限是否有保序性、夹挤原理？

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \text{ 即 } f = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T,$$

$$\text{其中 } f_i : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, m.$$

$$\text{Thm. } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A = (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(m)})$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x) = a^{(i)}, i = 1, 2, \dots, m.$$



**Thm.**  $f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x_0 \in \mathbb{R}^n$ , 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

都存在, 则

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$$

$$(2) m=1 \text{ 时, } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$$

$$(3) m=1 \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0 \text{ 时, } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}.$$



Thm.  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l, g : f(\Omega) \subset \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^m$ , 若

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{y \rightarrow A} g(y) = B,$$

且  $\exists B(x_0, \delta) \subset \Omega, s.t. \forall x \in B(x_0, \delta),$  有  $f(x) \neq A$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = B.$$

Thm. (夹挤原理)  $f, g, h : B_0(x_0, \delta) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , 若

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \forall x \in B_0(x_0, \delta),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A,$$

则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A.$$



例.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}$

解:  $\ln (x^2 + y^2)^{x^2 y^2} = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} (x^2 + y^2) \ln (x^2 + y^2),$

当  $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$  时,  $0 < \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{x^2 + y^2} y^2 \leq y^2 \rightarrow 0.$

所以  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = 0.$

又  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \ln (x^2 + y^2) = \lim_{t \rightarrow 0} t \ln t = 0.$

故  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \ln (x^2 + y^2)^{x^2 y^2} = 0,$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2} = e^0 = 1. \quad \square$$





**Thm.(Cauchy准则)** 设  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  在  $B_0(x_0, r)$  中有定义, 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在的充要条件是:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in B_0(x_0, \delta), \text{ 都有 } \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

**Thm.** 设  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  在  $B_0(x_0, r)$  中有定义, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \left( \begin{array}{l} \text{对 } B_0(x_0, r) \text{ 中收敛到 } x_0 \text{ 的任意点列 } \{x_k\}, \\ \text{都有 } \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = A. \end{array} \right)$$



**Def.**  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x_0 \in \partial\Omega, A \in \mathbb{R}^m, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t.$

$$\|f(x) - A\| < \varepsilon, \quad \forall x \in \Omega \cap B_0(x_0, \delta),$$

则称 $x$ 在 $\Omega$ 内趋于 $x_0$ 时 $f(x)$ 以 $A$ 为极限, 记作  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \Omega}} f(x) = A,$

不引起混淆的情况下, 也简记为  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$

**例.**  $c > 0, \Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}, \Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\},$

$\Omega_3 = \Omega_1 \cup \Omega_2.$  求  $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (c,0) \\ (x,y) \in \Omega_i}} e^{-\frac{x^2}{y}}, i = 1, 2, 3.$



解:  $(x, y) \in \Omega_1, (x, y) \rightarrow (c, 0)$  时,  $-\frac{x^2}{y} \rightarrow -\infty,$

$(x, y) \in \Omega_2, (x, y) \rightarrow (c, 0)$  时,  $-\frac{x^2}{y} \rightarrow +\infty,$

故  $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (c,0) \\ (x,y) \in \Omega_1}} e^{-\frac{x^2}{y}} = 0, \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (c,0) \\ (x,y) \in \Omega_2}} e^{-\frac{x^2}{y}} = +\infty,$

而  $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (c,0) \\ (x,y) \in \Omega_3}} e^{-\frac{x^2}{y}}$  不存在.  $\square$

**Remark.**  $\lim_{(x,y) \rightarrow (c,0)} e^{-\frac{x^2}{y}}$  不存在. 默认  $(x, y) \in \Omega_3$ .



例.  $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left( \frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2}$

解: 当  $x > 0, y > 0$  时,  $0 < \frac{xy}{x^2 + y^2} < \frac{1}{2}$ , 故

$$0 < \left( \frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2} \leq \left( \frac{1}{2} \right)^{x^2},$$

由夹挤原理,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty, y \rightarrow +\infty} \left( \frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2} = 0. \quad \square$$



## 2. 累次极限

**Def.**(累次极限)  $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \triangleq \lim_{y \rightarrow y_0} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \right)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \triangleq \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right)$$

**Remark.** 任意固定  $y \neq y_0$ , 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$  存在, 记为

$$g(y) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y).$$

若  $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = A$ , 则  $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = A$ .

**Remark.**  $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$  称为二重极限.



例.  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  在原点的二重极限与累次极限.

解: 先考虑累次极限.  $\forall y \neq 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{0}{y^2} = 0,$$

于是  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$ . 同理  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0$ .

再看二重极限.

$$\lim_{y=kx, x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{(1+k^2)x^2} = \frac{k}{1+k^2},$$

即  $(x, y)$  沿不同的曲线  $y = kx$  趋于  $(0, 0)$  时,  $f(x, y)$  有不同的极限  $k/(1+k^2)$ . 故二重极限不存在.  $\square$



例. 讨论  $f(x, y) = \begin{cases} (x+y) \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{y} & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases}$

在 origin 的二重极限和累次极限.

解: 先看二重极限. 对任意  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$|f(x, y)| \leq \left| (x+y) \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{y} \right| \leq |x| + |y|,$$

故  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0.$



再来考虑累次极限.

$$\begin{aligned}\forall x \neq 0, \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) &= \lim_{y \rightarrow 0} (x + y) \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{y}\end{aligned}$$

不存在. 故累次极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$  不存在.

同理累次极限  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$  不存在.  $\square$





**Remark.** 累次极限与二重极限的关系.

(1) 累次极限的存在性 ~~≠~~ 二重极限的存在性;

(2) 二重极限的存在性 ~~≠~~ 累次极限的存在性;

(3) 二重极限与累次极限都存在

$$\begin{aligned}\Rightarrow \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \\ &= \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y).\end{aligned}$$

(4)  $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y), \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$  均存在且不相等

$$\Rightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) \text{ 不存在.}$$



### 3. 向量值函数的连续

**Def.** 设  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $x_0 \in \Omega$ , 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , 也即

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t.$

$$\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon, \quad \forall x \in \Omega \cap B_0(x_0, \delta),$$

则称  $f$  在点  $x_0$  处连续, 称  $f$  的不连续点为间断点.

**Def.** 设  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , 若  $f$  在  $\Omega$  上点点连续, 则称  $f$  在  $\Omega$  上连续, 记作  $f \in C(\Omega)$ .

**Remark.**  $f = (f_1, f_1, \dots, f_m) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , 则

$f$  在点  $x_0$  连续  $\Leftrightarrow f_i$  在点  $x_0$  连续,  $i = 1, 2, \dots, m$ .



**Thm.**(1)多元连续函数的和、差、积、商(分母不为0处)均连续.

(2)连续向量值函数的和、差、数乘与复合都连续.

(3) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $C(\Omega)$ 关于加法、数乘构成实数域上的一个无穷维线性空间.

(4)在开区域中定义的初等函数(幂、指数、对数、三角、反三角及其四则运算与复合)处处连续.



例: 讨论  $f(x, y) = \begin{cases} 1 & y = x^2, x > 0 \\ 0 & \text{其它情形} \end{cases}$  的连续性.

解:  $f$  在开区域  $\{(x, y) \mid x \neq \sqrt{y}\}$  中为初等函数, 故处处连续. 而  $f$  在曲线  $x = \sqrt{y}$  上每一点都不连续. 事实上, 任取  $(x_0, y_0)$ ,  $x_0 = \sqrt{y_0}$ , 当点列  $\{P_k(x_k, y_k)\}$  沿曲线  $x = \sqrt{y}$  趋于  $(x_0, y_0)$  时,  $f(x_k, y_k) \rightarrow 1$ ; 当点列  $\{P_k\}$  沿直线  $x = x_0$  趋于  $(x_0, y_0)$  时,  $f(x_k, y_k) \rightarrow 0$ .  $\square$



例. 讨论  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  的连续性.

解:  $\forall (x, y) \neq (0, 0)$ , 有

$$|f(x, y) - 0| = \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} \leq |x| + |y| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2}.$$

故  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$ ,  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  连续.

$f(x, y)$  在开区域中  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  中为初等函数, 处处连续.

故  $f(x, y)$  在  $\mathbb{R}^2$  中处处连续.  $\square$



**Thm.(最值定理)** 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界闭集,  $f \in C(\Omega)$ , 则 $f$ 在 $\Omega$ 上存在最大值 $M$ 和最小值 $m$ , 即 $\exists \xi, \eta \in \Omega, s.t. \forall x \in \Omega$ , 都有

$$m = f(\xi) \leq f(x) \leq f(\eta) = M.$$

**Thm.(介值定理)** 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为连通区域,  $f \in C(\Omega)$ ,  $x_1, x_2 \in \Omega$ ,  $f(x_1) = \lambda \leq \mu = f(x_2)$ , 则 $\forall \sigma \in [\lambda, \mu], \exists x \in \Omega, s.t. f(x) = \sigma$ .



例.  $f$  在  $\mathbb{R}^2$  上连续, 当  $x^2 + y^2 \neq 0$  时,  $f(x, y) > 0$ , 且  $\forall c > 0$ ,  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , 有  $f(cx, cy) = c^2 f(x, y)$ . 求证:  $\exists 0 < a \leq b$ , s.t.  
 $a(x^2 + y^2) \leq f(x, y) \leq b(x^2 + y^2)$ ,  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

证明: 在有界闭集  $S^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$  上, 连续函数  $f$  有最大值  $b$  和最小值  $a$ . 注意到  $f(x, y) > 0$ , 有  $0 < a \leq b$ .

$$\forall (x, y) \neq (0, 0), \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \in S^1,$$



$$\begin{aligned} f(x, y) &= f\left(\sqrt{x^2 + y^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sqrt{x^2 + y^2} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \\ &= (x^2 + y^2) f\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \end{aligned}$$

故

$$a(x^2 + y^2) \leq f(x, y) \leq b(x^2 + y^2), \quad \forall (x, y) \neq (0, 0).$$

又 $f$ 在 $(0,0)$ 连续, 所以

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= \lim_{x=y, x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x^2 f(1, 1) = 0. \end{aligned}$$

故以上不等式对任意 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ 成立.  $\square$





## 4. 一致连续

**Def.** 设  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , 若  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t.$

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon, \quad \forall x, x' \in \Omega, \|x - x'\| < \delta,$$

则称  $f$  在  $\Omega$  上一致连续.

**Thm.**  $f$  在  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  上一致连续的充要条件是:

对  $\Omega$  中任意两个点列  $\{x_n\}, \{y_n\}$ , 当  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$  时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) - f(y_n)) = 0.$$

**Thm.**  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  为有界闭集,  $f \in C(\Omega)$ , 则  $f$  在  $\Omega$  上一致连续.



## 5. 无穷小函数的阶

**Def.** 设 $n$ 元函数 $f$ 在 $B_0(x_0, r)$ 中有定义,  $x \in \mathbb{R}^n$ , 记 $\rho = \|x - x_0\|$ .

(1) 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ , 则称 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 为无穷小函数(或无穷小量), 记作

$$f(x) = o(1), \quad x \rightarrow x_0.$$

(2)  $k > 0$ , 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\rho^k} = 0$ , 则称 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 是 $\rho^k$ 的高阶无穷小, 记作

$$f(x) = o(\rho^k), \quad x \rightarrow x_0.$$



(3) 若  $\exists c \neq 0, s.t. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\rho^k} = c$ , 则称  $x \rightarrow x_0$  时  $f(x)$  是  $k$  阶无穷小函数, 记作

$$f(x) \sim c\rho^k, \quad x \rightarrow x_0.$$

(4) 若  $\exists M > 0, \delta > 0, s.t.$

$$|f(x)| < M\rho^k, \quad \forall x \in B_0(x_0, \delta),$$

则称  $x \rightarrow x_0$  时  $f(x)$  被  $\rho^k$  所控制, 记作

$$f(x) = O(\rho^k), \quad x \rightarrow x_0.$$



例.  $f_1(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n,$

$$f_2(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j, \quad (a_{ij} = a_{ji}),$$

证明: 当  $x \rightarrow 0$  时,  $f_1(x) = O(\|x\|), f_2(x) = O(\|x\|^2).$

**Proof.(1)**  $|f_1(x)| = |a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n|$

$$\leq (|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|)(|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|)$$
$$\leq \textcolor{red}{n}(|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|)\|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

所以,  $f_1(x) = O(\|x\|), x \rightarrow 0.$



$$(2) f_2(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad (a_{ij} = a_{ji}).$$

令  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ , 则  $A$  为对称矩阵,  $\exists$  正交矩阵  $Q$ , s.t.

$Q A Q^T = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  为实对称阵. 令  $x = yQ$ , 则

$$\frac{f_2(x)}{\|x\|^2} = \frac{x A x^T}{x x^T} = \frac{y Q A Q^T y^T}{y Q Q^T y^T} = \frac{\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2}{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}$$

$$\frac{|f_2(x)|}{\|x\|^2} \leq |\lambda_1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_n|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

所以,  $f_2(x) = O(\|x\|^2)$ ,  $x \rightarrow 0$ .  $\square$



# 作业： 习题1.3

## No. 1(单),6(单),8,10(单)