

Review

- 含参定积分的性质

$$I(t) = \int_{\alpha}^{\beta} g(t, x) dx, \quad D = [a, b] \times [\alpha, \beta]$$

(1) $g(t, x) \in C(D)$

$$\Rightarrow \begin{cases} I(t) \in C[a, b], \text{ 即 } \lim_{t \rightarrow t_0} \int_{\alpha}^{\beta} g(t, x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \lim_{t \rightarrow t_0} g(t, x) dx \\ \int_a^b dt \int_{\alpha}^{\beta} g(t, x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} dx \int_a^b g(t, x) dt \end{cases}$$

(2) $g(t, x), g'_t(t, x) \in C(D)$

$$\Rightarrow I'(t) = \frac{d}{dt} \int_{\alpha}^{\beta} g(t, x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} g'_t(t, x) dx.$$



(3) $g(t, x), g'_t(t, x) \in C([a, b] \times [c, d]), \alpha(t), \beta(t)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $c \leq \alpha(t), \beta(t) \leq d, \quad \forall t \in [a, b],$

则
$$f(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} g(t, x) dx$$

在区间 $[a, b]$ 上可导, 且

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{d}{dt} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} g(t, x) dx. \\ &= \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} g'_t(t, x) dx + g(t, \beta(t))\beta'(t) - g(t, \alpha(t))\alpha'(t). \end{aligned}$$



§ 2. 含参广义积分的一致收敛性

Question: 设 $f(t, x)$ 在 $D = [\alpha, \beta] \times [a, +\infty)$ 上连续, $\forall t \in [\alpha, \beta]$, 广义积分 $I(t) = \int_a^{+\infty} f(t, x)dx$ 收敛. 问 $I(t) \in C[\alpha, \beta]$?

分析:

$$\begin{aligned} |I(t) - I(t_0)| &= \left| \int_a^{+\infty} f(t, x)dx - \int_a^{+\infty} f(t_0, x)dx \right| \\ &\leq \int_a^{+\infty} |f(t, x) - f(t_0, x)|dx \end{aligned}$$

由 f 的连续性, $|f(t, x) - f(t_0, x)|$ 可控, 但积分区间为 $[a, +\infty)$. 因此需要更多的条件来确保广义含参积分的连续性.

1. 含参无穷限积分

回顾广义积分的收敛性:

$I(t_0) = \int_a^{+\infty} f(t_0, x)dx$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists M(\varepsilon, t_0) > a, \forall A > M$, 有

$$\left| \int_a^A f(t_0, x)dx - I(t_0) \right| < \varepsilon.$$

Cauchy收敛原理:

$\int_a^{+\infty} f(t_0, x)dx$ 收敛

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M(\varepsilon, t_0), s.t. \left| \int_A^{A'} f(t_0, x)dx \right| < \varepsilon, \quad \forall A, A' > M.$$

Def. $\forall t \in \Omega \subset \mathbb{R}, \int_a^{+\infty} f(t, x) dx$ 收敛. 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists M(\varepsilon), s.t.$

$$\left| \int_a^A f(t, x) dx - \int_a^{+\infty} f(t, x) dx \right| < \varepsilon, \quad \forall A > M, \forall t \in \Omega,$$

则称含参广义积分 $\int_a^{+\infty} f(t, x) dx$ 关于 $t \in \Omega$ 一致收敛.

Thm.(Cauchy收敛原理)

$\int_a^{+\infty} f(t, x) dx$ 关于 $t \in \Omega$ 一致收敛

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M(\varepsilon), s.t.$

$$\left| \int_A^{A'} f(t, x) dx \right| < \varepsilon, \quad \forall A, A' > M, \forall t \in \Omega.$$



Remark. $\int_a^{+\infty} f(t, x)dx$ 关于 $t \in \Omega$ 非一致收敛

$\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0, \forall M, \exists A, A' > M, \exists t_0 \in \Omega, s.t.$

$$\left| \int_A^{A'} f(t_0, x)dx \right| \geq \varepsilon.$$

例. 证明 $\int_a^{+\infty} ye^{-xy}dx$ 关于 $y \in [0, +\infty)$ 不一致收敛.

Pf. $\exists \varepsilon_0 = e^{-1} - e^{-2}, \forall M > 0, \exists A = M + 1, A' = 2A, y_0 = \frac{1}{A}, s.t.$

$$\left| \int_A^{A'} y_0 e^{-xy_0} dx \right| = -e^{-xy_0} \Big|_{x=A}^{A'} = e^{-Ay_0} - e^{-A'y_0} = \varepsilon_0,$$

故广义积分关于 $y \in [0, +\infty)$ 不一致收敛. \square



Thm.(Weirstrass判别法) $\forall t \in \Omega \subset \mathbb{R}, \int_a^{+\infty} f(t, x)dx$ 收敛,

若存在 $[a, +\infty)$ 上的可积函数 $g(x)$, s.t.

$$|f(t, x)| \leq g(x), \quad \forall (t, x) \in \Omega \times [a, +\infty),$$

则 $\int_a^{+\infty} f(t, x)dx$ 在 $t \in \Omega$ 上一致收敛.

Pf. $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛, $\forall \varepsilon > 0, \exists M(\varepsilon) > a > 0, \text{s.t.} \forall A' > A > M(\varepsilon)$

$$\left| \int_A^{A'} g(x)dx \right| < \varepsilon.$$

于是

$$\left| \int_A^{A'} f(t, x)dx \right| \leq \int_A^{A'} |f(t, x)| dx \leq \left| \int_A^{A'} g(x)dx \right| < \varepsilon, \quad \forall t \in \Omega.$$

故 $\int_a^{+\infty} f(t, x)dx$ 在 $t \in \Omega$ 上一致收敛. \square

Remark.(Weirstrass) $\forall t \in \Omega \subset \mathbb{R}$, $f(t, x)$ 在 $x \in [a, +\infty)$ 上连续, 若存在 $b > a$ 及 $[b, +\infty)$ 上的可积函数 $g(x)$, s.t.

$$|f(t, x)| \leq g(x), \quad \forall (t, x) \in \Omega \times [b, +\infty),$$

则 $\int_a^{+\infty} f(t, x) dx$ 在 $t \in \Omega$ 上一致收敛.



例. (1) 设 $c > 0$, $\int_0^{+\infty} e^{-xy} dx$ 在 $y \in [c, +\infty)$ 上是否一致收敛?

(2) $\int_0^{+\infty} e^{-xy} dx$ 在 $y \in (0, +\infty)$ 上是否一致收敛?

解: (1) $c > 0$, 则 $\int_0^{+\infty} e^{-cx} dx = -\frac{1}{c} e^{-cx} \Big|_{x=0}^{+\infty} = \frac{1}{c}$ 收敛, 且

$$e^{-xy} \leq e^{-cx}, \quad \forall (x, y) \in [0, +\infty) \times [c, +\infty).$$

故 $\int_0^{+\infty} e^{-xy} dx$ 在 $y \in [c, +\infty)$ 上一致收敛(Weirstrass).

(2) $\exists \varepsilon_0 = e^{-1} - e^{-2}, \forall M > 0, \exists A = M + 1, A' = 2A, y_0 = \frac{1}{A}, s.t.$

$$\left| \int_A^{A'} e^{-xy_0} dx \right| = -\frac{1}{y_0} e^{-xy_0} \Big|_{x=A}^{A'} = \frac{1}{y_0} (e^{-Ay_0} - e^{-A'y_0}) = A\varepsilon_0 > \varepsilon_0,$$

故 $\int_0^{+\infty} e^{-xy} dx$ 在 $y \in [0, +\infty)$ 上不一致收敛(Cauchy). \square

Remark. (1) $f(x, t)$ 在 $[a, +\infty) \times [\alpha, \beta]$ 中连续, 若 $\int_a^{+\infty} f(x, \beta) dx$ 发散, 而 $\forall t \in [\alpha, \beta), \int_a^{+\infty} f(x, t) dx$ 都收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x, t) dx$ 在 $t \in [\alpha, \beta)$ 上非一致收敛.(证明留作课后练习)

(2) $f(x, t)$ 连续, 若 $\int_a^{+\infty} f(x, t) dx$ 在 $t \in I_1$ 上一致收敛, 在 $t \in I_2$ 上也一致收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x, t) dx$ 在 $t \in I_1 \cup I_2$ 上一致收敛.



Question. $\int_a^{+\infty} f(t, x)g(t, x)dx$ 在 $t \in \Omega$ 上是否一致收敛?

分析: 给定 $t \in \Omega$, 若 $f(t, x)$ 关于 x 单调, 则

$$\begin{aligned} & \int_A^{A'} f(t, x)g(t, x)dx \\ &= f(t, A)\int_A^\xi g(t, x)dx + f(t, A')\int_\xi^{A'} g(t, x)dx. \end{aligned}$$

欲使 $\int_a^{+\infty} f(t, x)g(t, x)dx$ 在 $t \in \Omega$ 上一致收敛, 只要控制

$\left| \int_A^{A'} f(t, x)g(t, x)dx \right|$, 可以考虑分别对 f 和 g 加条件.



Thm.(Dirichlet) $\forall t \in \Omega \subset \mathbb{R}$, $f(t, x), g(t, x)$ 在 $x \in [a, +\infty)$ 上连续, 若

(1) $\forall t \in \Omega$, $f(t, x)$ 关于 x 单调,

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(t, x) = 0$ 关于 $t \in \Omega$ 一致成立, 即 $\forall \varepsilon > 0, \exists L(\varepsilon) > 0$,

s.t. $|f(t, x)| < \varepsilon, \forall x > L(\varepsilon), \forall t \in \Omega;$

(3) $\int_a^A g(t, x) dx$ 关于 $t \in \Omega$ 以及充分大的 A 一致有界, 即

$\exists M > 0$, s.t. 对 $\forall t \in \Omega$ 以及充分大的 A , 都有

$$\left| \int_a^A g(t, x) dx \right| \leq M.$$

则 $\int_a^{+\infty} f(t, x) g(t, x) dx$ 在 $t \in \Omega$ 上一致收敛.



Thm.(Abel) $\forall t \in \Omega \subset \mathbb{R}$, $f(t, x), g(t, x)$ 在 $x \in [a, +\infty)$ 上连续, 若

(1) $\forall t \in \Omega$, $f(t, x)$ 关于 x 单调;

(2) $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(t, x)$ 关于 $t \in \Omega$ 一致有界;

(3) $\int_a^{+\infty} g(t, x) dx$ 关于 $t \in \Omega$ 一致收敛;

则 $\int_a^{+\infty} f(t, x)g(t, x)dx$ 在 $t \in \Omega$ 上一致收敛.



例. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin xy}{x} dx$ 关于 $y \in [1, +\infty)$ 是否一致收敛?

解: 令 $f(x, y) = \frac{1}{x}$, $g(x, y) = \sin xy$, 则 $f(x, y)$ 关于 x 单调;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, y) = 0$ 关于 $y \in [1, +\infty)$ 一致成立;

$$\left| \int_1^A g(x, y) dx \right| = \left| \int_1^A \sin xy dx \right|$$

$$= \left| \frac{1}{y} \cos xy \right|_{x=1}^A \leq \frac{2}{|y|} \leq 2, \quad \forall A > 1, y \in [1, +\infty).$$

由Dirichlet判别法, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin xy}{x} dx$ 关于 $y \in [1, +\infty)$ 一致收敛. \square



例. $\int_0^{+\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx$ 关于 $y \in [0, +\infty)$ 是否一致收敛?

解: 令 $f(x, y) = \frac{\sin x}{x}$, $g(x, y) = e^{-xy}$, 则

$$\int_0^{+\infty} f(x, y) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \left(= \frac{\pi}{2} \right),$$

关于 $y \in [0, +\infty)$ 一致收敛; 给定 $y \in [0, +\infty)$, $g(x, y)$ 关于 x 单调, 且

$$|g(x, y)| = |e^{-xy}| \leq 1, \quad \forall x \geq 0, y \geq 0.$$

由Abel判别法, $\int_0^{+\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx$ 关于 $y \in [0, +\infty)$ 一致收敛. \square

2. 含参瑕积分

$$f(t, x) : D = [\alpha, \beta] \times [a, b) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$I(t) = \int_a^b f(t, x) dx, \quad \forall t \in [\alpha, \beta]. \quad (b \text{ 为瑕点})$$

Def . 设 $\forall t \in \Omega \subset \mathbb{R}, \int_a^b f(t, x) dx$ 收敛, b 为唯一瑕点, 若

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) \in (0, b - a), s.t.$

$$\left| \int_{b-\eta}^b f(t, x) dx \right| = \left| \int_a^{b-\eta} f(t, x) dx - \int_a^b f(t, x) dx \right| < \varepsilon,$$

$$\forall \eta \in (0, \delta), \forall t \in \Omega,$$

则称含参瑕积分 $\int_a^b f(t, x) dx$ 关于 $t \in \Omega$ 一致收敛.



Thm.(Cauchy收敛原理) $\forall t \in \Omega \subset \mathbb{R}$, b 为 $\int_a^b f(t, x)dx$ 的唯一瑕点, 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) \in (0, b-a), s.t.$

$$\left| \int_{b-\eta_2}^{b-\eta_1} f(t, x)dx \right| < \varepsilon, \quad \forall \eta_1, \eta_2 \in (0, \delta), \forall t \in \Omega,$$

则 $\int_a^b f(t, x)dx$ 关于 $t \in \Omega$ 一致收敛.



Thm.(Weistrass) $\forall t \in \Omega \subset \mathbb{R}, \int_a^b f(t, x)dx$ 收敛, b 为唯一瑕点, 且存在 $[a, b)$ 上可积函数 $g(x)$, s.t.

$$|f(t, x)| \leq g(x), \quad \forall (t, x) \in \Omega \times [a, b),$$

则 $\int_a^b f(t, x)dx$ 在 $t \in \Omega$ 上一致收敛.

Remark.(Weistrass) $\forall t \in \Omega \subset \mathbb{R}, f(t, x)$ 在 $x \in [a, b)$ 上连续, 若存在 $\delta > 0$ 及 $[b - \delta, b)$ 上可积函数 $g(x)$, s.t.

$$|f(t, x)| \leq g(x), \quad \forall (t, x) \in \Omega \times [b - \delta, b),$$

则 $\int_a^b f(t, x)dx$ 在 $t \in \Omega$ 上一致收敛.



Thm.(Dirichlet) $\forall t \in \Omega \subset \mathbb{R}$, $f(t, x), g(t, x)$ 在 $x \in [a, b)$ 上连续, 若

(1) $\forall t \in \Omega$, $f(t, x)$ 关于 x 单调;

(2) $\lim_{x \rightarrow b^-} f(t, x) = 0$ 关于 $t \in \Omega$ 一致成立;

(3) $\int_a^A g(t, x) dx$ 关于 $t \in \Omega$ 以及 $A \in [a, b)$ 一致有界;

则 $\int_a^b f(t, x)g(t, x)dx$ 在 $t \in \Omega$ 上一致收敛.



Thm.(Abel) $\forall t \in \Omega \subset \mathbb{R}$, $f(t, x), g(t, x)$ 在 $x \in [a, b)$ 上连续, 若

(1) $\forall t \in \Omega$, $f(t, x)$ 关于 x 单调;

(2) $x \rightarrow b^-$ 时, $f(t, x)$ 关于 $t \in \Omega$ 一致有界;

(3) $\int_a^b g(t, x) dx$ 关于 $t \in \Omega$ 一致收敛;

则 $\int_a^b f(t, x)g(t, x)dx$ 在 $t \in \Omega$ 上一致收敛.



作业：习题2.1 No. 4



Lemma (Riemann-Lebesgue). f 在 $[a, b]$ 上可积或广义绝对可积(即 f 与 $|f|$ 均在 $[a, b]$ 上广义可积), 则

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x dx = 0.$$

Proof. 只证第一式, 第二式同理.

Case1. 设 f 在 $[a, b]$ 上可积, 则 f 在 $[a, b]$ 上有界, 即

$$\exists M > 0, \text{ s.t. } |f(x)| \leq M, \forall x \in [a, b].$$

任意给定 $\lambda > 1$, 令 $n = \lfloor \sqrt{\lambda} \rfloor$. n 等分 $[a, b]$:

$$x_i = a + (b - a)i/n, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

$$\omega_i(f) = \sup \{ f(\xi) - f(\eta) : \xi, \eta \in [x_{i-1}, x_i] \}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

f 在 $[a, b]$ 上可积, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \omega_i(f) \Delta x_i = 0$. 于是

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \cos \lambda x dx \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(x_i)) \cos \lambda x dx \right| + \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_i) \cos \lambda x dx \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \omega_i(f) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n |f(x_i)| \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \cos \lambda x dx \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \omega_i(f) \Delta x_i + \frac{2Mn}{\lambda} = \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{\lambda} \rfloor} \omega_i(f) \Delta x_i + \frac{2M \lfloor \sqrt{\lambda} \rfloor}{\lambda} \\ &\rightarrow 0, \text{ 当 } \lambda \rightarrow +\infty \text{ 时.} \end{aligned}$$

Case2. f 在 $[a, b]$ 上广义绝对可积, 不妨设 a 为唯一的瑕点.
则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{s.t.}, f$ 在 $[a + \delta, b]$ 上可积, 且

$$\int_a^{a+\delta} |f(x)| dx < \varepsilon/2.$$

从而 $\left| \int_a^{a+\delta} f(x) \cos \lambda x dx \right| \leq \int_a^{a+\delta} |f(x)| dx < \varepsilon/2,$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{a+\delta}^b f(x) \cos \lambda x dx = 0.$$

于是 $\exists \Lambda > 0$, 当 $\lambda > \Lambda$ 时, $\left| \int_{a+\delta}^b f(x) \cos \lambda x dx \right| < \varepsilon/2$, 进而有

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx \right| &\leq \left| \int_a^{a+\delta} f(x) \cos \lambda x dx \right| + \left| \int_{a+\delta}^b f(x) \cos \lambda x dx \right| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \quad \forall \lambda > \Lambda. \square \end{aligned}$$

例. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$

解: 由广义积分的Dirichlet判别法, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ 收敛. 于是

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{\lambda\pi} \frac{\sin t}{t} dt \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin \lambda t}{t} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin(n+1/2)t}{t} dt. \end{aligned}$$

恒等式 $\frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt$ 两边在 $[0, \pi]$ 上积分, 得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin\frac{t}{2}} dt = \frac{\pi}{2}.$$



$$\text{令 } g(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}}, \text{ 往证 } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi g(t) \sin(n + 1/2)t dt = 0.$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} g(t) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{t}{2} - t}{2t \sin \frac{t}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t - t}{2t \sin t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3!}t^3 + o(t^3)}{2t \left(t - \frac{1}{3!}t^3 + o(t^3) \right)} = 0. \end{aligned}$$

故 $t = 0$ 是 $g(t)$ 的可去间断点. 由 Riemann-Lebesgue 引理,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi g(t) \sin(n + 1/2)t dt = 0. \square$$