第十三次习题课讨论题参考解答　函数项级数

1. 求下列函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$的敛散区域。

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n y^n}{x^n+y^n}$　（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+x^n)}{n^y}$

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^x$　（5）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+a^n}(a\ge 0)$　（6）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{e^{nx}}$

解：（1）$x=0$时，$\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}=1,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$发散。$\forall x\ne 0,$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}}{\frac{1}{n^x}}=\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{x}{n})^n=\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{x}{n})^{\frac{n}{x}\cdot x}=e^x\ne 0.$$

因此$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$收敛$\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$收敛$\Leftrightarrow x>1$。即$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$的收敛域为$(1,+\infty)$.

（2）$\forall n\ge 1,\frac{x^n y^n}{x^n+y^n}$的分母非零，因此$x+y\ne 0.$以下分情况讨论。

Case1. $x+y\ne 0$且$|y|<1$。此时有四种可能：$x=0,\ \left|\frac{y}{x}\right|>1,\ \left|\frac{y}{x}\right|<1$和$\frac{y}{x}=1$。

当$x=0$时，$\frac{x^n y^n}{x^n+y^n}=0,\forall n\ge 1,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n y^n}{x^n+y^n}$收敛；

当$\left|\frac{y}{x}\right|>1$时，有$\left|\frac{x^n y^n}{x^n+y^n}\right|=\left|\frac{y^n}{1+(y/x)^n}\right|\le\frac{|y|^n}{|y/x|^n-1}\le\frac{|y|^n}{|y/x|-1}$，而$\sum\frac{|y|^n}{|y/x|-1}$收敛，

因此$\sum\left|\frac{x^n y^n}{x^n+y^n}\right|$收敛；

当$\left|\frac{y}{x}\right|<1$时，有$\left|\frac{x^n y^n}{x^n+y^n}\right|=\left|\frac{y^n}{1+(y/x)^n}\right|\le\frac{|y|^n}{1-|y/x|^n}\le\frac{|y|^n}{1-|y/x|}$，$\sum\left|\frac{x^n y^n}{x^n+y^n}\right|$收敛；

当$\frac{y}{x}=1$时，$\frac{x^n y^n}{x^n+y^n}=\frac{y^n}{2},\forall n\ge 1,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n y^n}{x^n+y^n}$收敛。

综上，$x+y\neq 0,|y|<1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n y^n}{x^n+y^n}$收敛。

Case2. $x+y\neq 0$ 且$|x|<1$。同上，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n y^n}{x^n+y^n}$收敛。

Case3. $x+y\neq 0$ 且$|x|\geq 1,|y|\geq 1.$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n y^n}{x^n+y^n}$发散。这是因为，$|x|\geq|y|\geq 1$时，

$$\left|\frac{x^n y^n}{x^n+y^n}\right|\geq\frac{|x|^n|y|^n}{|x|^n+|y|^n}\geq\frac{|x|^n|y|^n}{2|x|^n}\leq\frac{|y|^n}{2},$$

因此$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^n y^n}{x^n+y^n}\neq 0,$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n y^n}{x^n+y^n}$发散。同理，$|y|\geq|x|\geq 1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n y^n}{x^n+y^n}$发散。

综上所述，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n y^n}{x^n+y^n}$收敛$\Leftrightarrow$ $x+y\neq 0$ 且$\min\{|x|,|y|\}<1.$

（3）$\dfrac{\ln(1+x^n)}{n^y}$有意义$\Rightarrow x>-1.$

$x=1$时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(1+x^n)}{n^y}(=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln 2}{n^y})$收敛$\Leftrightarrow y>1.$

$x=0$时,$\ln(1+x^n)=0,\forall y\in\mathbb{R},\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(1+x^n)}{n^y}$收敛.

$0<|x|<1$时,$\left|\dfrac{\ln(1+x^n)}{n^y}\right|\sim\dfrac{|x|^n}{n^y}(n\to+\infty)$,而

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^y}\bigg/\frac{|x|^n}{n^y}=|x|\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(1+1/n)^y}=|x|,$$

由正项级数的比值判别法，$\forall y\in\mathbb{R},\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|x|^n}{n^y}$收敛，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(1+x^n)}{n^y}$绝对收敛。

$x>1$时, $0<\dfrac{\ln(1+x^n)}{n^y}\sim\dfrac{\ln x}{n^{y-1}}(n\to+\infty)$，因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+x^n)}{n^y}\text{收敛}\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln x}{n^{y-1}}\text{收敛}\Leftrightarrow y>2.$$

综上，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+x^n)}{n^y}$ 的收敛域为 $\{-1<x<1, y\in\mathbb{R}\}\bigcup\{x=1, y>1\}\bigcup\{x>1, y>2\}.$

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^x$ 收敛 $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^x=0\Rightarrow x>0.$

任意给定 $x>0,\ (\sqrt[n]{n}-1)^x=(e^{\frac{1}{n}\ln n}-1)^x\sim\left(\frac{1}{n}\ln n\right)^x\ (n\to+\infty).$ 因而

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^x \text{ 收敛}\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\ln n\right)^x \text{ 收敛}\Leftrightarrow x>1.$$

（5）当 $0\le a\le 1$ 时，因为

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n+a^n}}=|x|,$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+a^n}$ 在 $(-1,1)$ 上（绝对）收敛；当 $x\ge 1$ 时，$\frac{x^n}{n+a^n}\ge\frac{x^n}{n+1}\ge\frac{1}{n+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+a^n}$ 发散；当 $x=-1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+a^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+a^n}$ 收敛（Abel 判别法）；当 $x<-1$ 时，$\frac{|x|^n}{n+a^n}\to+\infty,$ $\frac{|x|^n}{n+a^n}$ 发散。

当 $a>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+a^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^n\frac{1}{1+na^{-n}}$, 当 $|x|<a$ 时，$\left|\left(\frac{x}{a}\right)^n\frac{1}{1+na^{-n}}\right|\le\left|\frac{x}{a}\right|^n$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+a^n}$（绝对）收敛；当 $|x|\ge a$ 时，$\lim_{n\to+\infty}\left|\left(\frac{x}{a}\right)^n\frac{1}{1+na^{-n}}\right|\ne 0,$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+a^n}$ 发散。

综上，当 $0\le a\le 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+a^n}$ 的收敛域为 $[-1,1);$ 当 $a>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+a^n}$ 的收敛域为 $(-a,a).$

（6）当 $x>0$ 时，$\left|\frac{\sin nx}{e^{nx}}\right|\le\frac{1}{e^{nx}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{e^{nx}}$ 绝对收敛。

当 $x\le 0$ 时，若 $\frac{x}{\pi}$ 为负整数，则 $\sin nx=0,$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{e^{nx}}$ 绝对收敛；当 $\frac{x}{\pi}$ 为非整数的有

理数，即 $\dfrac{x}{\pi}=-\dfrac{p}{q}$（正整数$p,q$互质）时，

$$\frac{\left|\sin(nq+1)x\right|}{e^{(nq+1)x}}=\frac{\left|\sin\dfrac{p(nq+1)\pi}{q}\right|}{e^{(nq+1)x}}=\frac{\left|\sin\dfrac{p\pi}{q}\right|}{e^{(nq+1)x}}\to+\infty\ (n\to+\infty),$$

因此$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{e^{nx}}$发散；当$\dfrac{x}{\pi}\notin\mathbb{Q}$时， $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin nx\neq 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin nx}{e^{nx}}\neq 0,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{e^{nx}}$发散。

综上，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{e^{nx}}$收敛$\Leftrightarrow$ $x\geq 0$ 或 x 为负整数.

2. 求$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(1-x)x^n$ 的收敛域, 并用两种不同的方法证明该函数项级数在其收敛域上不一致收敛.

解：一方面，$\lim\limits_{n\to\infty}(1-x)x^n=0\Rightarrow x\in(-1,1]$. 另一方面，

$$x=1\text{时},(1-x)x^n=0,\sum(1-x)x^n=0.$$

$$|x|<1\text{时},\sum_{n=0}^{+\infty}(1-x)x^n=(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=(1-x)\cdot\frac{1}{1-x}=1.$$

因此该级数的收敛域为$(-1,1]$.

以下证明该函数项级数在其收敛域上不一致收敛。

法一：若$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(1-x)x^n$ 在$(-1,1]$上一致收敛，则其和函数$S(x)=\begin{cases}1, & -1<x<1\\ 0, & x=1\end{cases}$在收敛域$(-1,1]$上连续, 矛盾。

法二：$\exists\varepsilon_0=\dfrac{1}{2},\forall N\in\mathbb{N},\exists n=N+1,\exists x_0=(\dfrac{1}{2})^{1/n}\in(0,1),s.t.$

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}(1-x_0)x_0^k-S(x_0)\right|=x_0^n=\frac{1}{2}.$$

由 Cauchy 准则，$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(1-x)x^n$ 在$(-1,1]$上不一致收敛。

3. 求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1+(1+x/n)^n}=\ln\frac{2e}{e+1}$.

证明：$\forall x\in[0,1],\exists\xi\in(0,\dfrac{x}{n}), s.t.$

$$\left|\frac{1}{1+(1+x/n)^n}-\frac{1}{1+e^x}\right|=\left|\frac{e^x-(1+x/n)^n}{\left(1+(1+x/n)^n\right)(1+e^x)}\right|$$

$$\le\left|e^x-(1+x/n)^n\right|=\left|e^x-e^{n\ln(1+x/n)}\right|=e^x-e^{n\left(\frac{x}{n}-\frac{x^2}{(1+\xi)^2n^2}\right)}$$

$$=e^x\left(1-e^{\frac{-x^2}{(1+\xi)^2n}}\right)\le e\left(1-e^{-\frac{1}{n}}\right)\to 0, n\to+\infty\text{时}.$$

因此，$\dfrac{1}{1+(1+x/n)^n}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛到 $\dfrac{1}{1+e^x}$. 于是有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{dx}{1+(1+x/n)^n}=\int_0^1\lim_{n\to\infty}\frac{dx}{1+(1+x/n)^n}$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{1+e^x}=\int_0^1\frac{e^{-x}dx}{e^{-x}+1}=-\ln(e^{-x}+1)\Big|_{x=0}^1=\ln\frac{2e}{e+1}.$$

4. $\alpha\in(0,1)$, 求证：$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx=\frac{1}{\alpha}+\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{\alpha+k}+\frac{1}{\alpha-k}\right).$

证明：$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx=\int_0^1\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx+\int_1^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx\triangleq I_1+I_2$. 只要证 $\displaystyle I_1=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\alpha+k}, I_2=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\alpha-k}$.

$x\in(0,1)$时，$\displaystyle\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}=x^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^kx^k=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^kx^{\alpha+k-1}.$

$$\left|I_1-\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-1)^kx^{\alpha+k-1}dx\right|=\left|\int_0^1\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^kx^{\alpha+k-1}dx\right|$$

$$\le\int_0^1\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^kx^{\alpha+k-1}\right|dx=\int_0^1\frac{x^{\alpha+n}}{1+x}dx\le\int_0^1x^{\alpha+n}dx=\frac{1}{\alpha+n+1}\to 0, \text{当}n\to+\infty\text{时}.$$

因此

$$I_1=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-1)^kx^{\alpha+k-1}dx=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{\alpha+k}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\alpha+k}.$$

(注意，$\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^kx^{\alpha+k-1}=\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ 在 $(0,1)$ 上非一致收敛！因此不能直接逐项积分得到

$$I_1=\int_0^1\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^{\alpha+k-1}\,dx=\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1(-1)^k x^{\alpha+k-1}dx=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\alpha+k}.)$$

$x\in(1,+\infty)$时, 令$t=1/x$, 则

$$I_2=\int_1^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx=\int_0^1\frac{t^{-\alpha}}{1+t}\,dt=\int_0^1\frac{t^{(1-\alpha)-1}}{1+t}\,dt.$$

$1-\alpha\in(0,1)$, 由前面的结论,

$$I_2=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(1-\alpha)+k}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k-\alpha}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\alpha-k}.$$

5. 证明：Riemannζ函数$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$在$(1,\infty)$上连续可微.

证明： $\left(\frac{1}{n^x}\right)'=\frac{-\ln n}{n^x}\in C(1,\infty)$. 任给$b>a>1$, 有

$$0\le\frac{1}{n^x}\le\frac{1}{n^a},\quad 0\le\frac{\ln n}{n^x}\le\frac{\ln n}{n^a},\quad \forall x\in[a,b].$$

于是$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x},\sum\left(\frac{1}{n^x}\right)'$ 均在$[a,b]$上一致收敛(Weierstrass). 由一致收敛函数项级数的逐项可

微性以及和函数的连续性，有$\zeta'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^x}\right)'\in C[a,b]$.

6. 求证: $\int_0^1 x^{-x}dx=\sum_{n=1}^{+\infty}n^{-n}$.

证明： $x^{-x}=e^{-x\ln x}=1-x\ln x+\frac{(x\ln x)^2}{2!}+\cdots+\frac{(-x\ln x)^n}{n!}+\cdots\quad(x>0)$.

注 意 到 $0\le -x\ln x\le\frac{1}{e}, x\in(0,1]$, $\quad 0\le\frac{(-x\ln x)^n}{n!}\le\frac{e^{-n}}{n!},\forall\in(0,1]$. 因 此 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x\ln x)^n}{n!}$ 在

$(0,1]$上一致收敛到x^{-x}. 于是有

$$\int_0^1 x^{-x}dx=\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x\ln x)^n}{n!}\,dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1\frac{(-x\ln x)^n}{n!}\,dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 x^n\ln^n x\,dx.$$

记$a_{m,n}=\int_0^1 x^m\ln^n x\,dx$, 则

$$a_{m,n}=\frac{1}{m+1}\int_0^1\ln^n x\,dx^{m+1}=\frac{1}{m+1}x^{m+1}\ln^n x\Big|_{x=0}^1-\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^m\ln^{n-1}x\,dx=-\frac{n}{m+1}a_{m,n-1}$$

$$=\left(-\frac{n}{m+1}\right)\left(-\frac{n-1}{m+1}\right)\cdots\left(-\frac{1}{m+1}\right)a_{m,0}=(-)^n\frac{n!}{(m+1)^n}\int_0^1 x^m dx=(-)^n\frac{n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

令$m=n$,得 $\int_0^1 x^n\ln^n x\,dx=(-)^n\frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$.从而$\int_0^1 x^{-x}dx=\sum_{n=1}^{+\infty}n^{-n}$.

7. 求证：（1）$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n!)^2 2^{n+1}}{(2n+1)!}=\pi$, （2）$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2^n}=\sqrt{2}-1$.

（提示：利用$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}x\,\mathrm{d}x$）

证明：记$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x$.则$I_0=\frac{\pi}{2}$, $I_1=1$. $n\ge 2$时,

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x d\sin x$$
$$=\cos^{n-1}x\sin x\Big|_{x=0}^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}x\sin^2 xdx=(n-1)(I_{n-2}-I_n).$$

于是

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2},\ I_{2n}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2},\ I_{2n+1}=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

（1）注意到$I_{2n+1}=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}=\frac{\left((2n)!!\right)^2}{(2n+1)!}=\frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n+1)!}$, 于是

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n!)^2 2^{n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}2^{1-n}I_{2n+1}=2\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2n+1}x}{2^n}\mathrm{d}x.$$

函数项级数$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2n+1}x}{2^n}\mathrm{d}x$有优级数$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}$, 关于$x\in\mathbb{R}$一致收敛，在$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$上可以逐项积分。因此

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n!)^2 2^{n+1}}{(2n+1)!}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\cos^2 x}{2}\right)^n\mathrm{d}x$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1-\frac{\cos^2 x}{2}}\mathrm{d}x=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\sin x}{1+\sin^2 x}=4\arctan(\sin x)\Big|_{x=0}^{\pi/2}=\pi.$$

（2）$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{I_{2n}}{2^n}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2n}x}{2^n}\mathrm{d}x.$

函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2n}x}{2^n}\mathrm{d}x$ 有优级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}$, 关于 $x\in\mathbb{R}$ 一致收敛，在 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 上可以逐项积分。因此

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos^{2n}x}{2^n}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos^{2n}x}{2^n}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2}{2-\cos^2 x}-1\right)\mathrm{d}x=-1+\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{2-\cos^2 x}$$

$$=-1+\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x}=-1+\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin^{-2}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$$

$$=-1-\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\cot x}{2+\cot^2 x}=-1-\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\arctan\left(\frac{\cot x}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_{x=0}^{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{2}-1.\square$$