微积分 A2 第 12 次习题课参考答案　级数

1.　设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，判断如下哪些级数必收敛.(　　)

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{u_n}{n}$。（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n{}^2$。（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n - u_{2n})$。（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$。

解：仅级数（D）必收敛。因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{n+1}$ 也收敛，从而它们的和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$ 收敛。而其他级数均可能发散。事实上，令 $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$，则级数(A)和(B)均发散；令 $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$，则级数(C)发散。

2.　设 $0 < a_n < \dfrac{1}{n}$，判断下列哪些级数必收敛.(　　)

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$；　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$；　(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$；　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n{}^2 \ln n$。

解：仅级数 D 必收敛。因为 $0 \le a_n^2 \ln n < \dfrac{\ln n}{n^2}$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n^2}$ 收敛，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n{}^2 \ln n$ 收敛。

3.　设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则以下哪些结论正确。(　　)

(A) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 小于 1；　(B) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 小于等于 1；

(C) 若极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在，其值小于 1；(D) 若极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在，其值小于等于 1；

解：仅结论 D 正确。应该注意的是，正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的假设，并不意味着极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在。

4.　设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = 2$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{2n-1} = 5$，求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和.

解：注意到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} u_n = 2\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_{2n-1}$。由此得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = 2\cdot 5 - 2 = 8$。

5. 讨论$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$的收敛性：

（1）$a_n=\sin\sqrt{n^2+a^2}\ (a\neq 0);$　　（2）$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\cos\dfrac{n\pi}{3};$

（3）$a_n=\dfrac{1}{n^p}\int_0^{\pi/4}\tan^n x\,\mathrm{d}x\,(p>0);$　　（4）$a_n=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\dfrac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x(p>0).$

解：（1）$a_n=(-1)^n\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2}-\pi n)=(-1)^n\sin\dfrac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$。对于$\forall n\ge 1$，

$\sin\dfrac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$关于$n$单调下降并趋向于零。由 Leibniz 判别法，级数收敛。

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|a_n|}{1/n}=\dfrac{\pi a^2}{2}$，而$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，故$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$发散。

综上，$\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})$条件收敛。

（2）记级数的部分和数列为$\{S_n\}$，则

$$S_{6n}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{2\sqrt{3k-2}}+\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{2\sqrt{3k-1}}+\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{3k}}。$$

由于三个级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2\sqrt{3n-2}}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{3n-1}}$和$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{3n}}$都是 Leibniz 级数，均收敛。所以

$\lim\limits_{n\to\infty}S_{6n}$存在且有限。由于一般项趋向于零，因此

$$\lim_{n\to\infty}S_{6n+1}=\lim_{n\to\infty}S_{6n+2}=\lim_{n\to\infty}S_{6n+3}=\lim_{n\to\infty}S_{6n+4}=\lim_{n\to\infty}S_{6n+5}=\lim_{n\to\infty}S_{6n}。$$

由此可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\cos\dfrac{n\pi}{3}$收敛。

由于$\left|\dfrac{1}{\sqrt{n}}\cos\dfrac{n\pi}{3}\right|\ge\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$发散，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\cos\dfrac{n\pi}{3}$条件收敛。

（3）对积分$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx$作换元$t=\tan x$，则

$$0<a_n=\frac{1}{n^p}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx=\frac{1}{n^p}\int_0^1\frac{t^ndt}{1+t^2}<\frac{1}{n^p}\int_0^1 t^ndt=\frac{1}{n^p(n+1)}<\frac{1}{n^{p+1}}.$$

而 $p>0$，因此级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx$ 收敛.

（4）当 $p>1$时，$\sum_{n=2}^{+\infty}|a_n|=\sum_{n=2}^{+\infty}\left|\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x\right|\le\sum_{n=2}^{+\infty}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\int_{\pi}^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛，因此 $\sum_{n=2}^{+\infty}a_n$ 绝对收敛。

当 $0<p<1$时，一方面，$\sum_{n=2}^{+\infty}a_n=\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛（Dirichlet 判别法）。另一方面，

$$\sum_{n=2}^{+\infty}|a_n|=\sum_{n=2}^{+\infty}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{|\sin x|}{x^p}\mathrm{d}x\ge\sum_{n=2}^{+\infty}\int_{(n-1)\pi+\pi/3}^{n\pi-\pi/3}\frac{|\sin x|}{x^p}\mathrm{d}x\ge\int_{\pi}^{+\infty}\frac{1}{2x^p}\mathrm{d}x,\text{发散。}$$

因此 $\sum_{n=2}^{+\infty}a_n$ 条件收敛。

6. 讨论级数的收敛性：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}$；（2）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4^n\sin^{2n}x}{n}$；

（3）$\sum_{n=1}^{+\infty}x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}\ (x>0)$.

解：（1）当 $x=0$时 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}$ 的一般项都为零，所以级数绝对收敛。

当 $x\ne0$时，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}$ 当 n 充分大（即 $n>\frac{2|x|}{\pi}$）时是交错级数，且 $\left|\sin\frac{x}{n}\right|$ 单调减少趋于零，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}$ 收敛；又由于 $\left|(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}\right|\sim\frac{|x|}{n}\ (n\to\infty)$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|}{n}$ 发散，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}$ 条件收敛。

（2）记级数的一般项为 a_n，则 $|a_n|=\frac{1}{n}|2\sin x|^{2n}$。

当 $|2\sin x|<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛， 即当 $x\in\bigcup_{k=-\infty}^{+\infty}(k\pi-\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{\pi}{6})$ 时，$|2\sin x|<1$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛。

当 $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ 时，$\sin^2 x = \frac{1}{4}$，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$，条件收敛。

当 $x \notin \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} [k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{6}]$ 时，$|2\sin x| > 1$，$|a_n| = \frac{1}{n}|2\sin x|^{2n} \to +\infty$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

（3）记 $a_n = x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$, 则

$$\lim_{n\to+\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = \lim_{n\to+\infty} n(x^{-\frac{1}{n+1}} - 1) = \lim_{n\to+\infty} n(e^{-\frac{1}{n+1}\ln x} - 1) = \lim_{n\to+\infty} \frac{-n}{n+1}\ln x = -\ln x,$$

由 Rabbe 判别法，当 $x \in (0, \frac{1}{e})$ 时，$\sum_{n=2}^{+\infty} a_n$ 收敛；当 $x \in (\frac{1}{e}, +\infty)$ 时，$\sum_{n=2}^{+\infty} a_n$ 发散。

当 $x = \frac{1}{e}$ 时，

$$\frac{a_n}{1/(n\ln n)} = \frac{e^{-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})}}{e^{-(\ln n+\ln\ln n)}} = e^{\ln n+\ln\ln n-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})} = e^{b_n},$$

其中 $b_n = \ln n + \ln\ln n - (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}), n \ge 2.$ 注意到

$$b_{n+1} - b_n = \ln(1+\frac{1}{n}) + \ln\ln(n+1) - \ln\ln n - \frac{1}{n+1} > \ln(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{n+1} > 0,$$

可知 $b_n (n \ge 2)$ 单调递增，$\frac{a_n}{1/(n\ln n)} = e^{b_n}$ 也单调递增，因此 $\forall n \ge 2,$ 有

$$\frac{a_n}{1/(n\ln n)} \ge e^{b_2} > 0, \qquad a_n \ge \frac{e^{b_2}}{n\ln n}.$$

而 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln n}$ 发散，所以 $\sum_{n=2}^{+\infty} a_n$ 发散。

综上，$x \in (0, \frac{1}{e})$ 时，$\sum_{n=2}^{+\infty} a_n$ 收敛；当 $x \in [\frac{1}{e}, +\infty)$ 时，$\sum_{n=2}^{+\infty} a_n$ 发散。

7. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 若 $a_n > 0$, $p > 0$, $\lim_{n\to\infty}\left[n^p (e^{\frac{1}{n}} - 1) a_n\right] = 1$, 求 p 的取值范围.

解：由假设 $\lim_{n\to\infty}\left[n^p (e^{\frac{1}{n}} - 1) a_n\right] = 1$ 可知 $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{1/n}-1}{1/n} \frac{a_n}{(1/n)^{p-1}} = 1$。由于 $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{1/n}-1}{1/n} = 1$，故

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{(1/n)^{p-1}}=1$。由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛性以及比较定理，可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^{p-1}}$ 收敛。故 $p>2$。

8. 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛，且数列 x_n 单调减，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=0$。

证明： $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛，由 Cauchy 收敛原理可知，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，s.t.

$$0<x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_m<\frac{\varepsilon}{2},\quad \forall m>n\geq N.$$

取 $m=2n$，得 $\qquad 0<nx_{2n}<x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{2n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$，

从而 $\qquad 2nx_{2n}<\varepsilon$，$\forall n\geq N$。

取 $m=2n+1$，得 $\qquad 0<(n+1)x_{2n+1}<x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{2n}+x_{2n+1}<\dfrac{\varepsilon}{2}$，

从而 $\qquad (2n+1)x_{2n+1}<2(n+1)x_{2n+1}<\varepsilon$，$\forall n\geq N$。

这表明，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $2N>0$，当 $n\geq 2N$ 时，有 $0<nx_n<\varepsilon$。此即 $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=0$。

9. 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上二阶连续可微，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$。证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 绝对收敛。

证 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$ 可知 $f(0)=0$，$f'(0)=0$，于是 $f\left(\dfrac{1}{n}\right)\sim\dfrac{f''(0)}{2}\cdot\dfrac{1}{n^2}$ （$n\to\infty$），

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|f(1/n)|}{1/n^2}=\dfrac{|f''(0)|}{2}$，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 绝对收敛。

10. 设正项数列 $\{x_n\}$ 单调减少，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n x_n$ 发散。判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{1+x_n}\right)^n$ 的收敛性，并说明理由.

解： 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{1+x_n}\right)^n$ 收敛。理由如下。

正项数列 $\{x_n\}$ 单调减少，必收敛。若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，由 Leibniz 判别法，收敛，与已知矛盾。故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\alpha>0$。当 n 充分大时，

$$x_n > \frac{\alpha}{2}, \quad \left(\frac{1}{1+x_n}\right)^n < \left(\frac{1}{1+\alpha/2}\right)^n,$$

因此$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+x_n}\right)^n$收敛。

11. 讨论级数$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^q} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^q} + \frac{1}{5^p} - \frac{1}{6^q} + \cdots (p, q > 0)$的收敛性。

解： 若$p, q > 1$, 则$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^p}$收敛，$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^q}$收敛，$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$绝对收敛。

若$p \le 1 < q$, 则$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^p}$发散，$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^q}$收敛，因此$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{(2n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^q}\right]$发散，

从而$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$发散(收敛级数具有顺项可括性)。

若$q \le 1 < p$, 同上可证$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$发散。

若$p = q \le 1$, 由交错项级数的 Leibnitz 判别法，$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$条件收敛。

若 $p < q \le 1$, 则 $\frac{1}{(2n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^q} \sim \frac{1}{(2n-1)^p} (n \to +\infty)$, 而$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^p}$ 发散，因此

$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{(2n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^q}\right]$发散，从而$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$发散。

若$q < p \le 1$, 同上可证$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$发散。

综上，当$p, q > 1$时，$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$绝对收敛；当$p = q \le 1$时，$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$条件收敛；其它情况下，

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$发散。

12. $a_n > 0, \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lambda > 0.$ 求证: $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$收敛.

证明：已知 $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lambda>0$，因此 $\exists N\in\mathbb{N}$, 使得 $\forall n\geq N$, 有

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>\frac{\lambda}{2},\qquad \text{即}\quad \frac{a_n}{a_{n+1}}>1+\frac{\lambda}{2n}.$$

因此，当 $n\geq N$ 时，a_n 单调递减，且

$$\frac{a_N}{a_{n+1}}=\frac{a_N}{a_{N+1}}\cdot\frac{a_{N+1}}{a_{N+2}}\cdots\frac{a_n}{a_{n+1}}>\left(1+\frac{\lambda}{2N}\right)\left(1+\frac{\lambda}{2(N-1)}\right)\cdots\left(1+\frac{\lambda}{2n}\right).$$

令 $n\to+\infty$, 注意到

$$\sum_{k=N}^{+\infty}\ln(1+\frac{\lambda}{2k})=+\infty,\quad \prod_{k=N}^{+\infty}(1+\frac{\lambda}{2k})=e^{\sum\limits_{k=N}^{+\infty}\ln(1+\frac{\lambda}{2k})}=+\infty,$$

有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 由 Leibniz 判别法，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ 收敛。

13. $a_n=\dfrac{1}{b_n}, b_1=b_2=1, b_{n+1}=b_n+\dfrac{a_{n-1}}{n^2}, n\geq 2.$ 求证：$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛。

证明：由题意，$\forall n\geq 2$, 有 $b_{n+1}>b_n\geq 1, a_n\leq 1$, 于是

$$n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=n(\frac{b_{n+1}}{b_n}-1)=\frac{a_{n-1}}{nb_n}\leq\frac{1}{n}<1,\qquad \forall n>2.$$

由 Raabe 判别法，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛.