第 3 次习题课：复合函数求导、隐函数定理

1. 设 $z=f(x^2y,\dfrac{y}{x})$, 其中 $f\in C^2$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

2. 可微二元函数 $f(x,y)$ 满足 $xf_x'(x,y)+yf_y'(x,y)=0$, 证明： $f(x,y)$ 恒为常数.

3. 已知函数 $y=y(x)$ 满足方程 $ax+by=f(x^2+y^2)$，其中 a,b 是常数，求导函数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

4. 设函数 $x=x(z),\ y=y(z)$ 由方程组 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-1=0 \\ x^2+2y^2-z^2-1=0 \end{cases}$ 确定, 求 $\dfrac{dx}{dz},\ \dfrac{dy}{dz}$.

5. 已知函数 $z=z(x,y)$ 由参数方程: $\begin{cases} x=u\cos v \\ y=u\sin v \\ z=uv \end{cases}$, 给定，试求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

6. 隐函数函数 $u=u(x,y)$ 由方程 $\begin{cases} u=f(x,y,z,t) \\ g(y,z,t)=0 \\ h(z,t)=0 \end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}$

7. $z=z(x,y)$ 由 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 决定，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

8. $B^2-AC>0$, 设 $z=z(x,y)$ 二阶连续可微，并且满足方程

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

若令 $\begin{cases} u=x+\alpha y \\ v=x+\beta y \end{cases}$, 试确定 α,β 为何值时能变原方程为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$.

9. 已知 $\begin{cases} w=x+y+z, \\ u=x, \\ v=x+y, \end{cases}$ $z=z(x,y)$ 二阶连续可微，化简方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

以 w 为因变量，以 u,v 为自变量。

10. 设 $u(x,y)\in C^2$, 又 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, $u(x,2x)=x$, $u_x'(x,2x)=x^2$, 求 $u_{xx}''(x,2x)$,

$u''_{xy}(x,2x)$，$u''_{yy}(x,2x)$.

11. 已知 $f(x,y)\in C^2(\mathbb{R}^2)$, $f>0$, $f''_{xy}f = f'_x f'_y$.求证： $f(x,y)$ 必为分离变量型，即 $f(x,y)=u(x)v(y)$, 其中 $u(\cdot),v(\cdot)$ 为一元函数.

12. 已知 $f(x,y)=g(x^2+y^2), g\in C^1, f(x,y)=\varphi(x)\varphi(y)$, $f(0,0)=1$, $f(1,0)=e$. 求 $f(x,y)$.