第十三次习题课讨论题参考解答　函数项级数

1. 求下列函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$的敛散区域。

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$　　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n y^n}{x^n+y^n}$　　（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+x^n)}{n^y}$

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^x$　　（5）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+a^n}\,(a\ge 0)$　　（6）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{e^{nx}}$

2. 求$\sum_{n=0}^{+\infty}(1-x)x^n$ 的收敛域, 并用两种不同的方法证明该函数项级数在其收敛域上不一致收敛.

3. 求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{dx}{1+(1+x/n)^n}=\ln\frac{2e}{e+1}$.

4. $\alpha\in(0,1)$,求证：$\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx=\frac{1}{\alpha}+\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{\alpha+k}+\frac{1}{\alpha-k}\right)$.

5. 证明：Riemannζ函数$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$在$(1,\infty)$上连续可微.

6. 求证:$\int_0^1 x^{-x}dx=\sum_{n=1}^{+\infty}n^{-n}$.

7. 证明：（1）$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n!)^2 2^{n+1}}{(2n+1)!}=\pi$,　（2）$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2^n}=\sqrt{2}-1$.

（提示：利用$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}x\,\mathrm{d}x$）