

# Review

## 第一型曲面积分的计算

$$\bullet S : x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in D,$$

$$(A, B, C) = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$$

$$\iint_S f(x, y, z) dS$$

$$= \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv,$$

$$\bullet S : z = f(x, y), (x, y) \in D,$$

$$\iint_S g(x, y, z) dS = \iint_D g(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} dx dy.$$

## § 5. 第二型曲面积分

### 1. 有向曲面

**Def.** 设 $S$ 为逐片光滑曲面. 任取 $S$ 上一点 $(x_0, y_0, z_0)$ , 任取 $S$ 在该点的两个单位法向量之一, 如 $\vec{n}(x_0, y_0, z_0)$ , 若不论点 $(x, y, z)$ 在曲面 $S$ 上如何运动, 当它回到点 $(x_0, y_0, z_0)$ 时,  $\vec{n}(x, y, z)$ 总与 $\vec{n}(x_0, y_0, z_0)$ 重合, 而不会与 $-\vec{n}(x_0, y_0, z_0)$ 重合, 则称 $S$ 为双侧曲面. 所谓有向曲面 $S$ , 就是在 $S$ 的两个侧面中指定一侧为正, 或在 $S$ 的两个单位法向量中指定一个为正.

**Remark:** 不是双侧曲面的例子: *Möbius*带.



## 2.第二型曲面积分的物理背景及定义

设区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 中分布着流体,其密度均匀(设为1),流速为 $\vec{v}(x, y, z)$ . $S$ 为 $\Omega$ 内一光滑曲面.求单位时间内自 $S$ 的 $A$ 侧穿过 $S$ 流向 $B$ 侧的流量.

将 $S$ 分割成 $n$ 小片 $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ ,在 $\Delta S_i$ 上取点 $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),将 $\Delta S_i$ 近似看成平面,其单位法向量为 $S$ 在点 $P_i$ 指向 $B$ 侧的单位法向量 $\vec{n}(P_i)$ .于是,单位时间内自 $A$ 侧穿过 $S$ 流向 $B$ 侧的流量近似为

$$\sum_{i=1}^n \vec{v}(P_i) \cdot \vec{n}(P_i) \Delta S_i.$$



当各个小片曲面的最大直径趋于0时,这个和式的极限就是单位时间内自 $A$ 侧穿过 $S$ 流向 $B$ 侧的流量.

**Def.** 设 $\vec{v}(x, y, z)$ 为 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 中的连续向量场,  $S$ 为 $\Omega$ 中光滑有向曲面,  $\vec{n}(x, y, z)$ 为 $S$ 的正单位法向量, 则函数 $\vec{v}(x, y, z) \cdot \vec{n}(x, y, z)$ 在 $S$ 上连续, 从而(第一型)曲面积分

$$\iint_S \vec{v}(x, y, z) \cdot \vec{n}(x, y, z) dS = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

存在, 称之为向量场 $\vec{v}(x, y, z)$ 在有向曲面 $S$ 上的第二型曲面积分.  $\square$

记

$$\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma),$$

其中 $\alpha, \beta, \gamma$ 分别为 $\vec{n}$ 与 $x, y, z$ 正半轴的夹角, 称 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为方向余弦.

有向面积微元 $\vec{n}dS$ , 近似为平面在 $oyz, ozx$ 和 $oxy$ 平面的有向投影面积为

$$(1, 0, 0) \cdot \vec{n}dS = \cos \alpha dS \triangleq dy \wedge dz,$$

$$(0, 1, 0) \cdot \vec{n}dS = \cos \beta dS \triangleq dz \wedge dx,$$

$$(0, 0, 1) \cdot \vec{n}dS = \cos \gamma dS \triangleq dx \wedge dy.$$



**Remark:** 有向面积微元  $dx \wedge dy, dy \wedge dz, dz \wedge dx$

当  $S$  的正法向量与  $z$  正半轴的夹角为锐角时,  $dS$  在  $oxy$  平面的投影为正,  $dx \wedge dy = dxdy$ . 反之, 当  $S$  的正法向量与  $z$  正半轴的夹角为钝角时,  $dS$  在  $oxy$  平面的投影为负,  $dx \wedge dy = -dxdy$ . 同样理解有向面积微元  $dy \wedge dz$  和  $dz \wedge dx$ .

设  $\vec{v} = (P, Q, R)$ , 则

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{n} dS &= P \cos \alpha dS + Q \cos \beta dS + R \cos \gamma dS \\ &= P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy\end{aligned}$$



**Remark:**  $\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ , 第二型曲面积分也记为

$$\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iint_S Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy.$$

第二型曲面积分也称为对坐标的曲面积分.

### 3. 第二型曲面积分的性质

(1)(可积的充分条件) 若 $S$ 为有向光滑曲面, 向量场

$\vec{v}(x, y, z)$ 在 $S$ 上连续, 则 $\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$ 存在.



(2)(线性性质)若 $\iint_S \vec{u} \cdot d\vec{S}$ 与 $\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$ 都存在,则 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\iint_S (\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) \cdot d\vec{S}$ 也存在,且

$$\iint_S (\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) \cdot d\vec{S} = \alpha \iint_S \vec{u} \cdot d\vec{S} + \beta \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}.$$

(3)(对曲面的可加性)  $S$ 由 $S_1, S_2, \dots, S_n$ 拼接而成,则

$$\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^n \iint_{S_i} \vec{v} \cdot d\vec{S}.$$

(4)用 $S^-$ 表示有向曲面 $S$ 的另一侧,则

$$\iint_{S^-} \vec{v} \cdot d\vec{S} = -\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}.$$





#### 4.第二型曲面积分 $\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS$ 的计算

这里 $S$ 为已知有向曲面,  $\vec{v}$ 为 $S$ 上已知向量场. 因此, 计算第二型曲面积分的关键是求出有向曲面 $S$ 的单位法向量 $\vec{n}$ , 然后再计算第一型曲面积分 $\iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS$ .

对形如 $\iint_S Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$ 的第二型曲面积分, 令 $\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ , 将积分视为 $\iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS$ 来计算.



例:  $I = \iint_S xz dy \wedge dz + yz dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy$ , 其中  $S$  为半球  $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ , 上侧为正.

解:  $\vec{v} = (xz, yz, z^2)$ ,  $\vec{n} = (x, y, z)/R$ .

$$dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy = (R/z) dx dy.$$

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \iint_S \frac{z}{R} (x^2 + y^2 + z^2) dS \\ &= \iint_{x^2 + y^2 \leq R^2} R^2 dx dy = \pi R^4. \quad \square \end{aligned}$$



例:  $I = \iint_S (2x + z)dy \wedge dz + zdx \wedge dy$ , 其中  $S$  为有向曲面  $z = x^2 + y^2$  ( $0 \leq z \leq 1$ ), 其法向量与  $z$  正半轴夹角为锐角.

解:  $\vec{v} = (2x + z, 0, z),$

$$\vec{n} = (-2x, -2y, +1) / \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2},$$

$$dS = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy,$$

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \iint_S \frac{-4x^2 - 2xz + z}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} dS \\ &= \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \left[ -4x^2 - (2x - 1)(x^2 + y^2) \right] dx dy. \end{aligned}$$

由对称性知  $\iint_{x^2 + y^2 \leq 1} x(x^2 + y^2) dx dy = 0$ , 于是

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (y^2 - 3x^2) dx dy \\
 &= \int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} r^2 (\sin^2 t - 3\cos^2 t) dt \\
 &= \int_0^1 r^3 dr \int_0^{2\pi} (1 - 4\cos^2 t) dt \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} [1 - 2(1 + \cos 2t)] dt = -\pi/2. \square
 \end{aligned}$$

计算第二型曲面积分  $\iint_S \vec{v}(x, y, z) \cdot \vec{n}(x, y, z) dS$  时, 分别求单位正法向量  $\vec{n}(x, y, z)$  和面积微元  $dS$ , 计算  $\vec{n}dS$  时能约分. 因此计算过程可以进一步简化.

**Remark:** 设  $\vec{v} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ .

**Case1.**  $S: x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in D$ .

$$(A, B, C) = \vec{r}'_u \times \vec{r}'_v,$$

$$\vec{n}(x, y, z) = \pm \frac{(A, B, C)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$dS = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv,$$

$$\iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \pm \iint_D (PA + QB + RC) du dv.$$

当向量  $(A, B, C)$  与曲面  $S$  的正向单位法向量同向 (反向) 时, 取正号 (负号).

Case2.  $S: z = f(x, y), (x, y) \in D.$

$$A = -f'_x, B = -f'_y, C = 1$$

$$\vec{n}(x, y, z) = \pm \frac{(f'_x, f'_y, -1)}{\sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}},$$

$$dS = \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y} dx dy.$$

于是  $\iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \pm \iint_D (-Pf'_x - Qf'_y + R) dx dy.$

当向量  $(-f'_x, -f'_y, 1)$  与曲面  $S$  的正向单位法向量同向 (反向) 时, 取正号 (负号).



例:  $I = \iint_S xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$ , 其中  $S$  为椭圆面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  的内侧.

解:  $S$  的参数方程  $r = (a \sin \varphi \cos \theta, b \sin \varphi \sin \theta, c \cos \varphi)$ ,  
 $\varphi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi]$ .

$$r'_\varphi = (a \cos \varphi \cos \theta, b \cos \varphi \sin \theta, -c \sin \varphi),$$

$$r'_\theta = (-a \sin \varphi \sin \theta, b \sin \varphi \cos \theta, 0),$$

$$\vec{r}'_\varphi \times \vec{r}'_\theta = (bc \sin^2 \varphi \cos \theta, ac \sin^2 \varphi \sin \theta, ab \sin \varphi \cos \varphi)$$

$$\begin{aligned} I &= -abc \iint_D (\sin^3 \varphi \cos^2 \theta + \sin^3 \varphi \sin^2 \theta + \sin \varphi \cos^2 \varphi) d\varphi d\theta \\ &= -abc \iint_D \sin \varphi d\varphi d\theta = -4\pi abc. \square \end{aligned}$$

**Remark:** 对形如

$$\iint_S Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$$

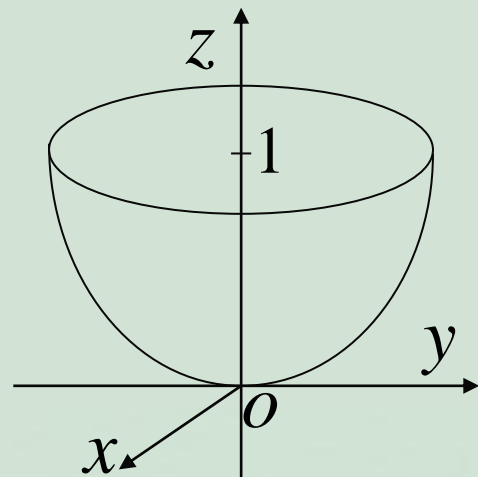
的第二型曲面积分,也可以直接化成 $S$ 在坐标面上的投影区域上的二重积分计算.

对具体的例子,这种方法一般比较麻烦. 但因为对 $dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy$ 有直观的几何解释, 所以该方法在理论分析上很有用. 将来证明 *Gauss* 公式时就要用到这种观点.



例:  $I = \iint_S (2x + z)dy \wedge dz + zdx \wedge dy$ ,  
 $S$ 为曲面  $z = x^2 + y^2$  ( $0 \leq z \leq 1$ )的内侧.

解: 设  $D_{yz}, D_{xy}$  分别为  $S$  在  $oyz, oxy$  平面上的投影区域, 则



$$\begin{aligned} I &= \iint_{S, x \geq 0} (2x + z)dy \wedge dz + \iint_{S, x \leq 0} (2x + z)dy \wedge dz + \iint_S zdx \wedge dy, \\ &= \iint_{D_{yz}} (2\sqrt{z - y^2} + z)(-dydz) + \iint_{D_{yz}} (-2\sqrt{z - y^2} + z)dydz \\ &\quad + \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2)dxdy \\ &= -4 \iint_{D_{yz}} \sqrt{z - y^2} dydz + \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2)dydz, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{其中 } \iint_{D_{yz}} \sqrt{z-y^2} dydz &= \int_{-1}^1 dy \int_{y^2}^1 \sqrt{z-y^2} dz \\ &= \int_{-1}^1 \frac{2}{3} (z-y^2)^{\frac{3}{2}} \bigg|_{z=y^2}^1 dy = \int_{-1}^1 \frac{2}{3} (1-y^2)^{\frac{3}{2}} dy \\ &= \frac{4}{3} \int_0^1 (1-y^2)^{\frac{3}{2}} dy = \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^4 t dt = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

$$\iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 \cdot r dr = \frac{\pi}{2}.$$

于是,  $I = -4 \times \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}.$  □



例:  $I = \iint_S xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$ , 其中  $S$  为长方体  $|x| \leq a, |y| \leq b, |z| \leq c$  的外表面.

解:  $S$  由六块侧面  $S_1, S_2, \dots, S_6$  拼接而成.

在  $S_1: x = a, |y| \leq b, |z| \leq c$  上,  $\vec{n} = (1, 0, 0), x = a$ , 于是

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy \\ = \iint_{S_1} x dS = \iint_{|y| \leq b, |z| \leq c} a dy dz = 4abc. \end{aligned}$$

同理,  $\iint_{S_i} xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy = 4abc,$   
 $i = 2, 3, \dots, 6.$

故  $I = 24abc. \square$

我们将用Guass公式给出更简洁的计算.



# Summary

## 第二型曲面积分的计算

- 方法一：化第二型曲面积分为第一型曲面积分

$$\iint_S Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

其中  $\vec{v} = (P, Q, R)$

- 方法二： $S : x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in D,$

$$\iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \pm \iint_D (PA + QB + RC) du dv.$$

其中  $A = \det \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, B = \det \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, C = \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}.$



- 方法三  $S : z = f(x, y), (x, y) \in D,$

$$\iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \pm \iint_D (-Pf'_x - Qf'_y + R) dx dy.$$

- 方法四: 直接化二重积分  $S$  在坐标面上的投影区域上的二重积分

$$\iint_S P dy \wedge dz = \pm \iint_{D_{yz}} P dy dz$$

$$\iint_S Q dz \wedge dx = \pm \iint_{D_{xz}} Q dx dz$$

$$\iint_S R dx \wedge dy = \pm \iint_{D_{xy}} R dx dy$$



**作业：习题4.5 No. 3, 5, 7.**

