

第4次习题课：切线、切平面、Taylor 公式

1. 通过曲面 $S: e^{xyz} + x - y + z = 3$ 上点 $(1, 0, 1)$ 的切平面 (B)
(A) 通过 y 轴; (B) 平行于 y 轴;
(C) 垂直于 y 轴; (D) A, B, C 都不对.
2. 在椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 上求一点, 使椭球面在此点的法线与三个坐标轴的正向成等角.
3. 求螺线 $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = ct \end{cases}; (a > 0, c > 0)$, 在点 $M(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{\pi c}{4})$ 处的切线与法平面.
4. 设曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$, 求曲线上一点, 使曲线在该点的切线平行于平面 $x + 2y + z = 4$.
5. 在曲面 $3x^2 + y^2 - z^2 = 27$ 的某点处作切平面, 使得该切平面过直线 $L: \begin{cases} 10x + 2y - 2z = 27 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$. 求这个点的坐标, 以及该点处的切平面方程.
6. 在曲面 $S: 2x^2 - 2y^2 + 2z = 1$ 上的某些点作切平面, 使得该切平面与直线 $\begin{cases} 3x - 2y - z = 5 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 平行. 求这些点的轨迹.
7. 求 $(1 - x^2 - y^2)^{-1/2}$ 在 $(0, 0)$ 的带 Peano 余项的 Taylor 公式.
8. 求 $\frac{\cos x}{\cos y}$ 在 $(0, 0)$ 的带 Peano 余项的 4 阶 Taylor 公式.
9. (1) 证明: 存在隐函数 $z = z(x, y)$, 满足 $\sin(x + y) + ze^z - ye^x = 0, z(0, 0) = 0$.
(2) 求 (1) 中隐函数在点 $(0, 0)$ 处带 Peano 余项的 2 阶 Taylor 公式.
10. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 二阶连续可微, f 的 Hesse 矩阵处处正定. 证明 f 至多有一个驻点.