微积分 A2 第 1 次习题课题目（欧氏空间、多元函数的极限与连续）

1. 对 $p>0, x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n, y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, 定义

$$d_p(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{n}\left|x_k-y_k\right|^p\right)^{1/p},$$

证明：(1)当 $p\ge 1$时，d_p 是 $\mathbb{R}^n$ 上的距离；

(2) 当$0<p<1$时，d_p 不是 $\mathbb{R}^n$ 上的距离。

2. 下列极限是否存在？若存在，求出极限值；若不存在，说明理由。

（1）$\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}(x+y)^{\frac{x+y+1}{x+y-1}}$；　　（2）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\ln(x^2+y^2)$.

（3）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y}$　　（4）$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$

（5）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$　　（6）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3-y^3}{x+y}$

3. 讨论$(x,y)\to(0,0)$时，以下无穷小的阶：

（1）$x+y+2xy$　　（2）$(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

4. 二元函数 $f(x,y)$ 是 x,y 的 n 次多项式，且 $(x,y)\to(0,0)$ 时, $f(x,y)=o((\sqrt{x^2+y^2})^n)$.

证明： $f(x,y)=0.$

5. 证明：若 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)=\mathrm{A}$, 且 $\lim\limits_{x\to a}f(x,y)=h(y)$ 对任意 $y\ne b$ 成立，则

$\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a}f(x,y)$ 存在，且 $\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a}f(x,y)=\mathrm{A}.$

6. $f=(f_1,f_1,\dots,f_m):\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, 则

$$f\text{在点}x_0\text{连续}\Leftrightarrow f_i\text{在点}x_0\text{连续}, i=1,2,\cdots m.$$

7. 对任意正整数 n 及向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, 记 $\|x\|_n=\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2}$. 矩阵 $\mathrm{A}\in\mathrm{M}_{mn}$, 则存在 $\mathrm{C}\ge 0$, 使得

$$\|\mathrm{A}x\|_m\le \mathrm{C}\|x\|_n, \forall x\in\mathbb{R}^n.$$

(使得此不等式成立的最小的C记为‖A‖.)

8. （1） $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续，且 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y)=+\infty$，则 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上有最小值。

（2） $g(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$，$a>0, c>0, b^2-4ac<0$，则 $g(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有最小值。

9. $f(x,y)$ 为连续函数，$\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y)=-\infty$. 证明：对任意常数 C，$f(x,y)=C$ 的解集合为空集或有界闭集。

10. 已知 $f(x,y)=\dfrac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}, (x,y)\in[0,1]\times(0,1]$. 试问：$f(x,y)$ 是否可以连续延拓到 $(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$？请说明理由。