第十四周作业参考答案

习题 6.1

2.

(1) 收敛域 $(0,+\infty)$, 绝对收敛域 $(0,+\infty)$

(2) 收敛域 (e^{-3},e^{3}), 绝对收敛域 (e^{-3},e^{3})

(3) 收敛域 $\varnothing$

(4) 收敛域 $(-2,2)$, 绝对收敛域 $(-2,2)$

(5) 收敛域 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, 绝对收敛域 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

(6) 收敛域 $(-2,2)$, 绝对收敛域 $(-2,2)$

(7) 收敛域 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, 绝对收敛域 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

(8) 收敛域 $\{x\in R|x\neq\pm1\}$, 绝对收敛域 $\{x\in R|x\neq\pm1\}$

(9) 收敛域 R, 条件收敛域 R

(10) 收敛域 $\left(-\dfrac{1}{5},\dfrac{2}{5}\right)\bigcup\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{6}{5}\right)$, 绝对收敛域 $\left(-\dfrac{1}{5},\dfrac{2}{5}\right)\bigcup\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{6}{5}\right)$

3. 各题在收敛域内均为一致收敛

6. 对 $x\in[0,1]$,$x^{n-1}(x-1)^2$ 在 $x=\dfrac{n-1}{n+1}$ 处取得最大值:

$$\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{n-1}\frac{4}{(n+1)^2}\leq\frac{4}{(n+1)^2},$$

由 Weierstrass 判别法, $\sum\limits_{n=2}^{\infty}x^{n-1}(x-1)^2$ 在 $x\in[0,1]$ 一致收敛.

9. e^{-nx} 对任意固定的 $x\in[0,+\infty]$ 单调, 且 $|e^{-nx}|\leq1$, 又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,

由 Abel 判别法, 知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_ne^{-nx}$ 一致收敛.

10. 提示: $|u_n(x)|\leq\max\{|u_n(a)|,|u_n(b)|\}\leq|u_n(a)|+|u_n(b)|$

习题 6.2

2. 因为对 $x\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}],n\geq1$, $\dfrac{1}{2^n}\tan\dfrac{x}{2^n}\leq\dfrac{1}{2^n}\tan\dfrac{\pi}{6}$, 所以由 Weierstrass 判别法,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}\tan\dfrac{x}{2^n}$ 在 $x\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$ 一致收敛, 可以逐项求积分,

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\tan\frac{x}{2^n}dx=\sum_{n=1}^{\infty}-\ln\left|\cos\frac{x}{2^n}\right|\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\ln\frac{2}{\sqrt{3}}$$

3. 见第十三次习题课第 6 题.

4. 提示: 证得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{x^n}$ 在 $x\in[a,b]$,(其中 $b>a>1$) 一致收敛, 所以 $f(x)$

在 $x\in[a,b]$ 连续, 再由 a,b 任意性可得在 $(1,+\infty)$ 连续.

5. 提示: 由根值判敛法证得绝对收敛, 和函数在 $x=0$ 处不连续知非一致收敛.

7. $\left(\dfrac{e^{-nx}}{n^2}\right)'=-\dfrac{e^{-nx}}{n}\in C(0,+\infty)$. 对任意 $b>a>0$, 有

$$\left|\frac{e^{-nx}}{n^2}\right|\le\frac{e^{-na}}{n^2},\left|-\frac{e^{-nx}}{n}\right|\le\frac{e^{-na}}{n},\forall x\in[a,b].$$

于是 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{n^2},\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^{-nx}}{n^2}\right)'$ 均在 $[a,b]$ 上一致收敛 (Weierstrass),
由一致收敛函数项级数的逐项可微性以及和函数的连续性, 有
$f'(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^{-nx}}{n^2}\right)'\in C[a,b]$, 再由 a,b 任意性, $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 连续可微.