

Review

- 变量替换下二重积分的计算

$$u = u(x, y), v = v(x, y)$$

$$(x, y) \in D \leftrightarrow (u, v) \in \Omega$$

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy \\ = \iint_{\Omega} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv \end{aligned}$$

- $\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 1 / \det \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$

§ 4. 三重积分


- 三重积分的几何与物理背景
- 三重积分的定义
- 三重积分的性质
- 三重积分在直角坐标系下的计算
- 三重积分在柱坐标下的计算
- 三重积分的变量替换

1. 三重积分的几何与物理背景

设 Ω 为 \mathbb{R}^3 中有界闭区域. 与二重积分一样, 通过分划, 取点, 求*Riemann*和与取极限的过程, 可以定义三重积分.

• Ω 的质量: $f(x, y, z)$ 为 (x, y, z) 处的点密度.

$$\sum_{i,j,k} f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \rightarrow \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$$

• Ω 的体积 $\iiint_{\Omega} dV = \iiint_{\Omega} dx dy dz$  体积微元

2. 三重积分的定义

Def. f 在 $\Omega = [a, A] \times [b, B] \times [c, C]$ 上有定义, 对 Ω 的任意分划

$$T: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = A,$$

$$b = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_m = B,$$

$$c = z_0 < z_1 < z_2 < \cdots < z_l = C,$$

及任意标志点 $P_{ij}(\xi_{ij}, \eta_{ij}, \varsigma_{ij}) \in \Omega_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k], 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq l$, 若 **Riemann** 和

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l f(\xi_{ij}, \eta_{ij}, \varsigma_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l f(\xi_{ij}, \eta_{ij}, \varsigma_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

存在, 则称 f 在 Ω 上 (*Riemann*) 可积, 记作 $f \in R(\Omega)$, 并称该极限为 f 在 Ω 上的三重积分, 记作

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l f(\xi_{ij}, \eta_{ij}, \varsigma_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k. \end{aligned}$$

其中 \iiint 是三重积分号, Ω 是积分域, f 是被积函数.

Def. $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为有界闭集, f 为 Ω 上有界函数. 若存在 $I = [a, A] \times [b, B] \times [c, C]$, s.t. $\Omega \subset I$, 且

$$f_I(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & (x, y, z) \in \Omega \\ 0 & (x, y, z) \in I \setminus \Omega \end{cases} \in R(I),$$

则称 f 在 Ω 上 Riemann 可积, 且 f 在 Ω 上的积分定义为

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_I f_I(x, y, z) dx dy dz.$$

3. 三重积分的性质

1)(可积的充分条件) 若 \mathbb{R}^3 中有界闭集 Ω 的边界为零体积集, f 为定义在 Ω 上的有界函数, f 在 Ω 上的间断点集合为零体积集, 则 $f \in R(\Omega)$.

2)(线性性质) $f, g \in R(\Omega)$, 则 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha f + \beta g \in R(\Omega)$, 且

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (\alpha f + \beta g) dx dy dz \\ = \alpha \iiint_{\Omega} f dx dy dz + \beta \iiint_{\Omega} g dx dy dz \end{aligned}$$

3)(区域可加性) Ω_1, Ω_2 为 \mathbb{R}^3 中有界闭集, $\Omega_1 \cap \Omega_2$ 为零体积集, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, 则

$$f \in R(\Omega) \Leftrightarrow f \in R(\Omega_i), i = 1, 2,$$

且
$$\iiint_{\Omega} f \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\Omega_1} f \, dx \, dy \, dz + \iiint_{\Omega_2} f \, dx \, dy \, dz.$$

4)(保序性) $f, g \in R(\Omega), f \leq g$, 则

$$\iiint_{\Omega} f \, dx \, dy \, dz \leq \iiint_{\Omega} g \, dx \, dy \, dz.$$

5)(积分中值定理) $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 连通、有界闭, $\partial\Omega$ 为零体积集, $f \in C(\Omega)$, $g \in R(\Omega)$, 则存在 $(\xi, \eta, \varsigma) \in \Omega$, s.t.

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) g(x, y, z) dx dy dz \\ = f(\xi, \eta, \varsigma) \iiint_{\Omega} g(x, y, z) dx dy dz. \end{aligned}$$

6)(轮换不变性) 设 $f \in R(\Omega)$, Ω 关于 xy 轮换不变, 即 $(x, y, z) \in \Omega \Leftrightarrow (y, x, z) \in \Omega$, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} f(y, x, z) dx dy dz.$$

7)(对称性) 设 $f \in R(\Omega)$, Ω 关于 oxy 平面对称,

- 若 $f(x, y, z)$ 关于 z 为奇函数, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = 0;$$

- 若 $f(x, y, z)$ 关于 z 为偶函数, 记 Ω_1 为 Ω 位于 oxy 平面上方的部分, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = 2 \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dx dy dz.$$

4. 三重积分在直角坐标系下的计算

1) 化为“先一后二”型累次积分

若 Ω 为 \mathbb{R}^3 中柱体, 分别以 $z_2(x, y)$ 和 $z_1(x, y)$ 为上顶下底, 在平面 oxy 上的投影为 D_{xy} , 即 Ω 可表示为

$$\Omega: \begin{cases} z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y) \\ (x, y) \in D_{xy} \end{cases}.$$

设密度函数为 $f(x, y, z)$, 为计算 Ω 的质量, 想象把 Ω 压缩成平行于 xy 平面的薄片, 则有

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$$

$$= \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

$$\triangleq \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

若 D_{xy} 又可表示为 $D_{xy} : \begin{cases} a \leq x \leq b, \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x), \end{cases}$ 则

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \end{aligned}$$

其意义是先固定 x 和 y 对 z 积分,再固定 x ,对 y 积分,最后对 x 积分.

2)化为“先二后一”型累次积分

用 Ω_z 表示平行于 oxy 坐标的平面截 Ω 得到的截面, Ω 可以表示为

$$\Omega: \begin{cases} c \leq z \leq d \\ (x, y) \in \Omega_z \end{cases}.$$

设密度函数为 $f(x, y, z)$, 为计算 Ω 的质量, 想象把 Ω 压缩成平行于 z 轴的细线, 则有

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$$

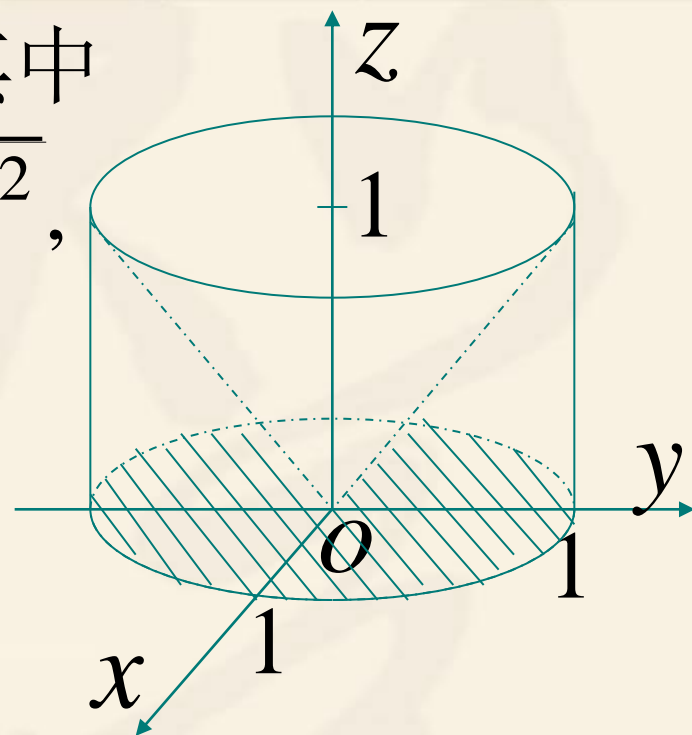
$$= \int_c^d \left[\iint_{\Omega_z} f(x, y, z) dx dy \right] dz$$

$$\triangleq \int_c^d dz \iint_{\Omega_z} f(x, y, z) dx dy.$$

例: $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2)z dx dy dz$, 其中
 Ω 由 $x^2 + y^2 = 1$, 曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$,
和 $z = 0$ 围成.

解法一: (“先一后二”)

$$\Omega: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$



$$\begin{aligned} I &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} (x^2 + y^2)z dz. \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^2 dx dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^5 dr = \frac{\pi}{6}. \quad \square \end{aligned}$$

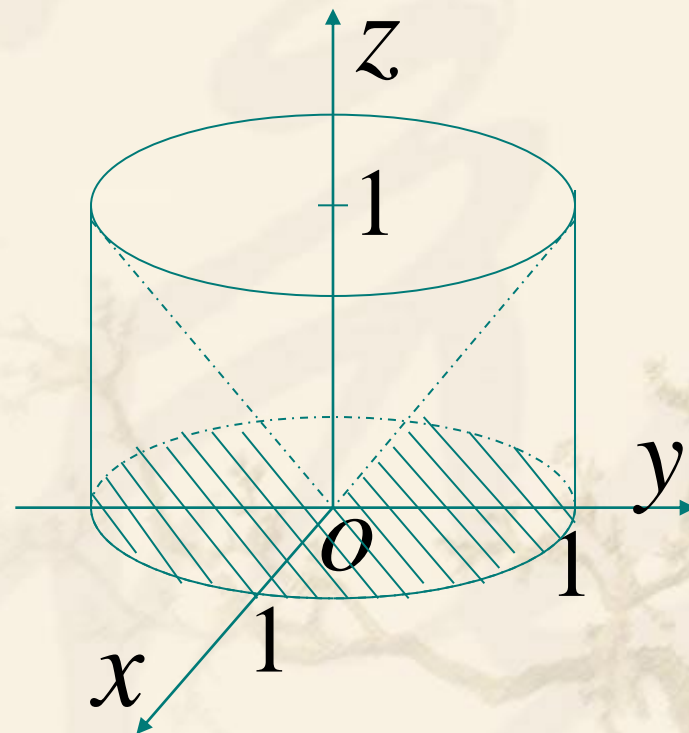
解法二: (“先二后一”) $\Omega: \begin{cases} 0 \leq z \leq 1, \\ z^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1. \end{cases}$

$$I = \int_0^1 z dz \iint_{z^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy$$

$$= \int_0^1 z dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_z^1 r^2 \cdot r dr$$

$$= 2\pi \int_0^1 z \cdot \frac{1}{4} (1 - z^4) dz$$

$$= \pi / 6. \square$$



5. 用柱坐标计算三重积分

$$\begin{aligned}\Omega &\leftrightarrow \Omega^* \\ (x, y, z) &\leftrightarrow (r, \theta, z)\end{aligned}\quad \left\{\begin{array}{l}x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z\end{array}\right.$$

$$\begin{aligned}&\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_{\Omega^*} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz\end{aligned}$$

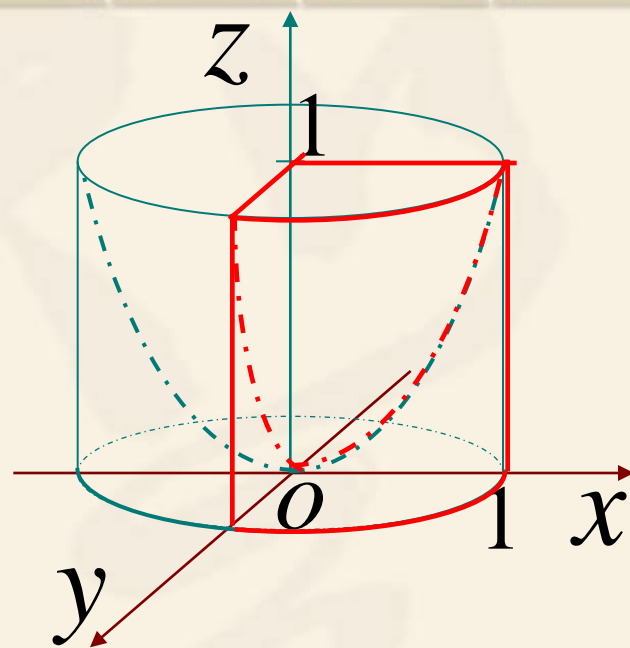
Remark: 当积分区域在坐标平面上的投影为圆域或圆域的一部分,而被积函数具有形如

$$f(x^2 + y^2, z), f(x^2 + z^2, y), f(y^2 + z^2, x)$$

等形式时,宜用柱坐标代换.

例: $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z) dx dy dz,$

其中 Ω 为第一卦限中由曲面
 $z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 1$ 及三坐标
平面围成的区域.



解法一: 在柱坐标 $x = r \cos \theta,$

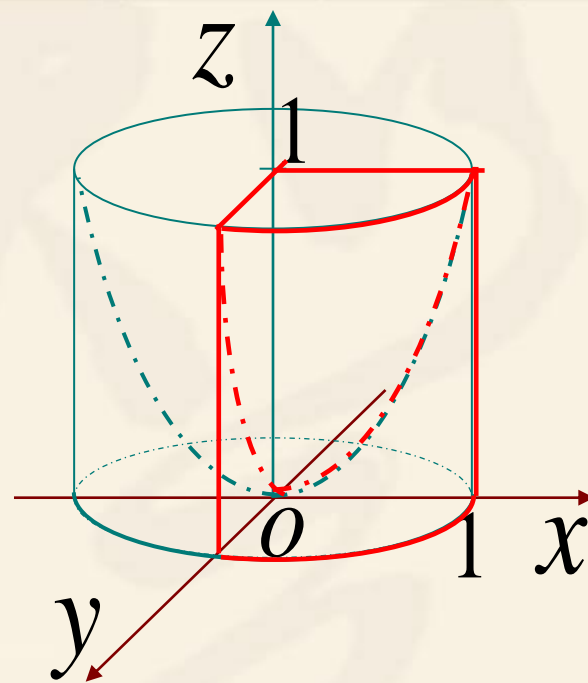
$y = r \sin \theta, z = z$ 下, Ω 在 oxy 平面的投影为

$$E_{r\theta} = \{(r, \theta) | 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/2\},$$

Ω 上下两边界面的方程为 $z = 0$ 和 $z = r^2$. 即

$$\Omega = \{(r, \theta, z) | 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq z \leq r^2\}.$$

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z) dx dy dz \\
 &= \iint_{E_{r\theta}} r dr d\theta \int_0^{r^2} (r^2 + z) dz \\
 &= \int_0^1 r dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{r^2} (r^2 + z) dz \\
 &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 r \left(r^4 + \frac{1}{2} r^4 \right) dr = \pi / 8. \square
 \end{aligned}$$



解法二:"先二后一"

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 dz \iint_{\Omega_z} (r^2 + z) r dr d\theta = \int_0^1 dz \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\sqrt{z}}^1 (r^2 + z) r dr \\
 &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \left[(1 - z^2) / 4 + z(1 - z) / 2 \right] dz = \pi / 8. \square
 \end{aligned}$$

例: $I = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}}, \quad (h > R).$

解: 令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z.$

$$\begin{aligned} I &= \int_{-R}^R dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + (z-h)^2}} \\ &= \pi \int_{-R}^R dz \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} \frac{dr^2}{\sqrt{r^2 + (z-h)^2}} \\ &= 2\pi \int_{-R}^R \left[\sqrt{R^2 + h^2 - 2hz} - (h - z) \right] dz = \frac{4\pi R^3}{3h}. \quad \square \end{aligned}$$

Question: $a^2 + b^2 + c^2 > R^2$ 时,

$$I = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} \frac{dx dy dz}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} = ?$$

$$\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

6. 三重积分的变量替换

与二重积分类似,对三重积分引入一一映射

$$\begin{cases} x = x(u, v, w), \\ y = y(u, v, w), \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \neq 0, \forall (u, v, w) \in \Omega^*. \\ z = z(u, v, w), \end{cases}$$

将 uvw 空间的区域 Ω^* 映成 xyz 空间的区域 Ω . 则

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_{\Omega^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \\ & \quad \cdot \left| \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw. \end{aligned}$$

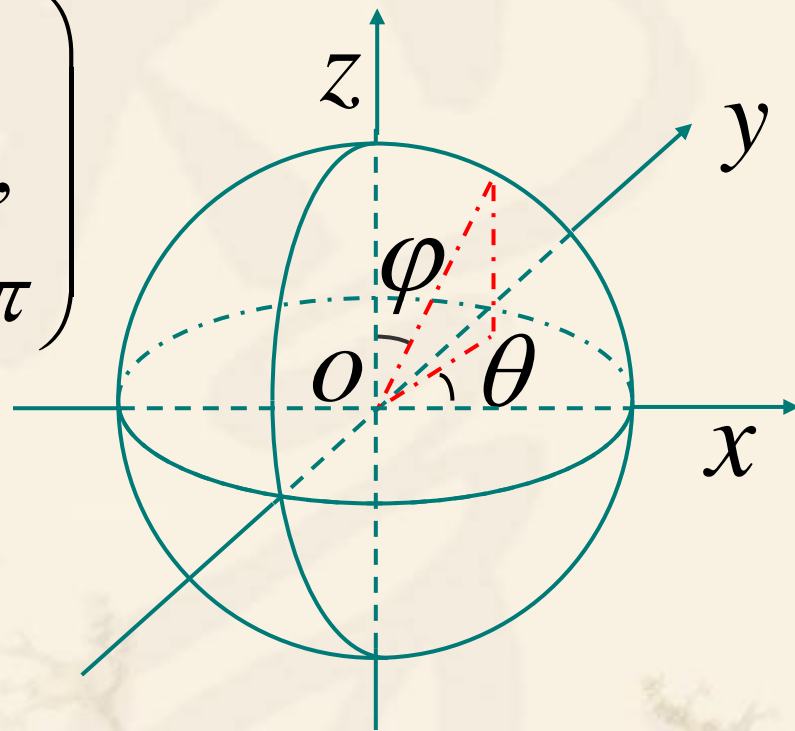
特别地, 在球坐标变换

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta, \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \\ z = \rho \cos \varphi, \end{cases} \begin{pmatrix} \rho \geq 0, \\ 0 \leq \varphi \leq \pi, \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{pmatrix}$$

下, $\det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, \theta)} = \rho^2 \sin \varphi.$

于是 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$

$$= \iiint_{\Omega^*} f(x(\rho, \varphi, \theta), y(\rho, \varphi, \theta), z(\rho, \varphi, \theta)) \\ \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta.$$



例: $I = \iiint_{\Omega} \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 dx dy dz$, 其中

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}.$$

解: Ω 关于 oxy 平面对称, 故 z 的奇函数 $\frac{xz}{ac}, \frac{yz}{bc}$, 在 Ω 上的积分都为0. 同理 $\frac{xy}{ab}$ 在 Ω 上的积分也为0. 于是

$$I = \iiint_{\Omega} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz.$$

作椭球坐标变换
$$\begin{cases} x = a\rho \sin \varphi \cos \theta, \\ y = b\rho \sin \varphi \sin \theta, \\ z = c\rho \cos \varphi, \end{cases} \begin{pmatrix} 0 \leq \rho \leq 1, \\ 0 \leq \varphi \leq \pi, \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{pmatrix}$$

则
$$\det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, \theta)} = abc\rho^2 \sin \varphi.$$

$$I = \iiint_{\Omega} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz.$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^2 \cdot abc\rho^2 \sin \varphi d\rho$$

$$= 2\pi abc \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 \rho^4 d\rho = 4\pi abc/5. \square$$

例: $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + 2y^2) dx dy dz$, 其中 $\Omega: 0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

解: 被积函数 $x^2 + 2y^2$ 是 z 的偶函数, 可将积分扩展到整个球域 $\Omega_1: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.

$$I = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega_1} (x^2 + 2y^2) dx dy dz.$$

由 Ω_1 的轮换对称性

$$\iiint_{\Omega_1} x^2 dx dy dz = \iiint_{\Omega_1} y^2 dx dy dz = \iiint_{\Omega_1} z^2 dx dy dz.$$

$$\text{于是, } I = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega_1} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^R \rho^4 d\rho = 2\pi R^5 / 5. \square$$

例. $I = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} \frac{dx dy dz}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}},$
 $(a^2 + b^2 + c^2 > R^2)$

解. 作正交变换 $Oxyz \leftrightarrow Ouvw$, 使 w 轴过 (a, b, c) .

记 $h = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, 则 $(a, b, c) \leftrightarrow (0, 0, h)$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & a/h \\ * & * & b/h \\ * & * & c/h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

其中 A 为正定阵, 即 $AA^T = I$. 于是

$$\det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \det A = \pm 1;$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\| = \left\| A \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \right\|$$

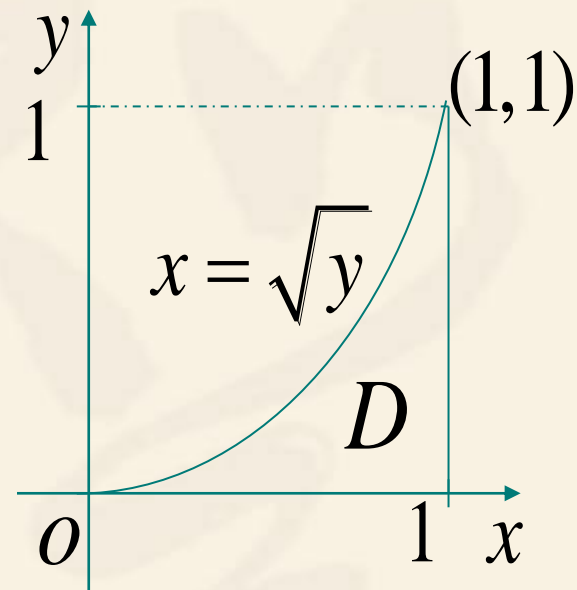
$$= (u, v, w-h) A^T A \begin{pmatrix} u \\ v \\ w-h \end{pmatrix} = u^2 + v^2 + (w-h)^2;$$

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq R^2} \frac{dudvdw}{\sqrt{u^2+v^2+(w-h)^2}} \\ &= \frac{4\pi R^3}{3h} = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \quad \square \end{aligned}$$

Remark. 画出积分区域 Ω 的立体图是化重积分为累次积分的关键. 但是有时 Ω 的界面复杂, 其立体图难以作出. 这时候就得寻求不画立体图, 而只画投影区域或截面区域的平面图的方法来确定累次积分的积分限.

例: $I = \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 - y} dx dy dz$, 其中 Ω 由 $y = 0, z = 0, x + z = 1, x = \sqrt{y}$ 围成.

解: 被积函数不含 z , 先对 z 积分比较方便. 故先将 Ω 向 oxy 投影, 设投影区域为 D . 则 D 应由 $y = 0, x = \sqrt{y}$,

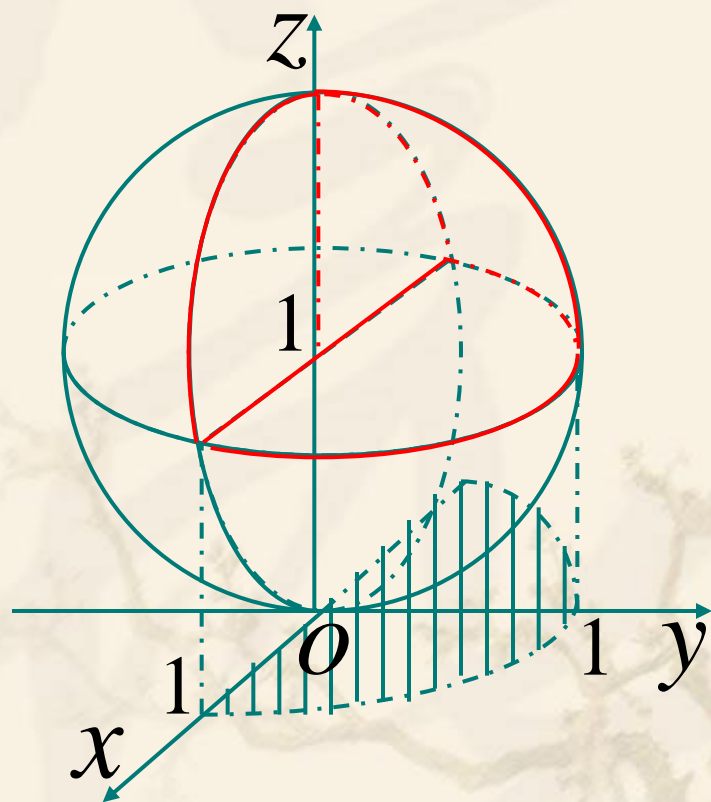


及由 $z = 0, x + z = 1$ 消去 z 后得到的 $x = 1$ 所围成. 于是

$$\begin{aligned} I &= \iint_D dx dy \int_0^{1-x} \sqrt{x^2 - y} dz = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy \int_0^{1-x} \sqrt{x^2 - y} dz \\ &= \int_0^1 (1-x) dx \int_0^{x^2} \sqrt{x^2 - y} dy = \frac{2}{3} \int_0^1 (1-x) x^3 dx = 1/30. \quad \square \end{aligned}$$

例:
$$I = \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_1^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dz.$$

解: 按给定积分次序积分十分困难的情况下, 可以改变积分的顺序. 但本例中积分区域是球域 $x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1$ 在平面 $z=1$ 之上满足 $y \geq 0$ 的部分, 改变积分次序后积分仍很困难. 故考虑球坐标变换.



$$\text{令} \begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta, \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \\ z = \rho \cos \varphi. \end{cases}$$

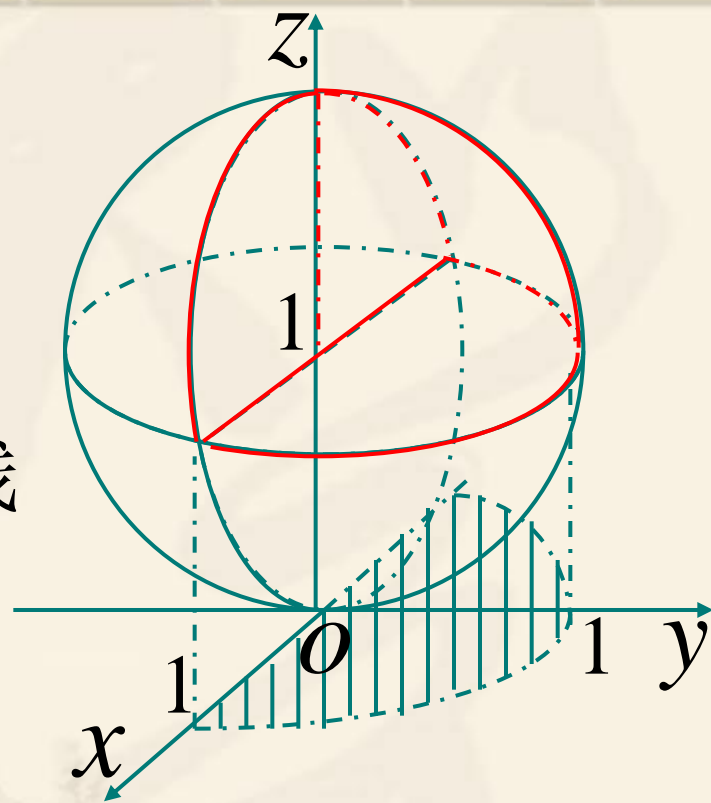
则 $\bullet 0 \leq \theta \leq \pi$. (这是因为 $y \geq 0$.)

$\bullet 0 \leq \varphi \leq \pi/4$. 这是因为交线

$$\begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1 \end{cases} \text{上}$$

$$\begin{cases} z = \rho \cos \varphi = 1 \\ x^2 + y^2 = \rho^2 \sin^2 \varphi = 1, \end{cases} \text{此时 } \varphi = \pi/4.$$

$\bullet 1/\cos \varphi \leq \rho \leq 2 \cos \varphi$. 因为平面 $z = 1$ 上, $\rho = 1/\cos \varphi$,
球面 $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ 上, $\rho = 2 \cos \varphi$.



故变量替换后积分区域为

$$\left\{ (\rho, \theta, \varphi) \left| \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq \pi/4, \\ 1/\cos \varphi \leq \rho \leq 2 \cos \varphi. \end{array} \right. \right\}$$

$$I = \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_1^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dz$$

$$= \int_0^\pi d\theta \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_{1/\cos \varphi}^{2 \cos \varphi} \rho \sin \varphi d\rho$$

$$= \pi \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} \sin \varphi \left[4 \cos^2 \varphi - 1/\cos^2 \varphi \right] d\varphi$$

$$= \frac{2\pi}{3} \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) - \frac{\pi}{2} (\sqrt{2} - 1). \square$$

例: 设 f 可导, 且 $f(0) = 0$, $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2$.

$$\text{求 } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi t^4} \iiint_{\Omega} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dx dy dz.$$

解: $\iiint_{\Omega} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dx dy dz$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^t f(\rho) \rho^2 d\rho = 4\pi \int_0^t f(\rho) \rho^2 d\rho$$

$\rightarrow 0$, ($t \rightarrow 0^+$ 时.) 故可用L'Hospital法则求极限.

$$\text{原式} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{4\pi \int_0^t f(\rho) \rho^2 d\rho}{\pi t^4} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{4\pi f(t) t^2}{4\pi t^3}$$

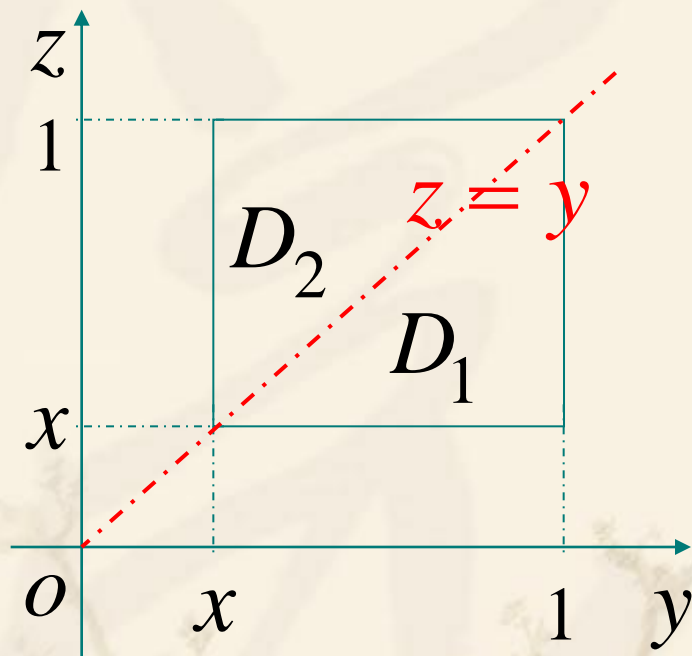
$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = f'_+(0) = f'(0). \square$$

例: 设 $f \in C([0,1])$, 证明:

$$\int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_x^y f(x) f(y) f(z) dz = \frac{1}{6} \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^3.$$

解: $\forall x \in [0,1]$

$$\begin{aligned} & \int_x^1 dy \int_x^y f(y) f(z) dz \\ &= \iint_{D_1} f(y) f(z) dy dz \\ &= \iint_{D_2} f(y) f(z) dy dz \\ &= \frac{1}{2} \iint_{D_1 \cup D_2} f(y) f(z) dy dz \\ &= \frac{1}{2} \int_x^1 dy \int_x^1 f(y) f(z) dz = \frac{1}{2} \left(\int_x^1 f(y) dy \right)^2. \end{aligned}$$



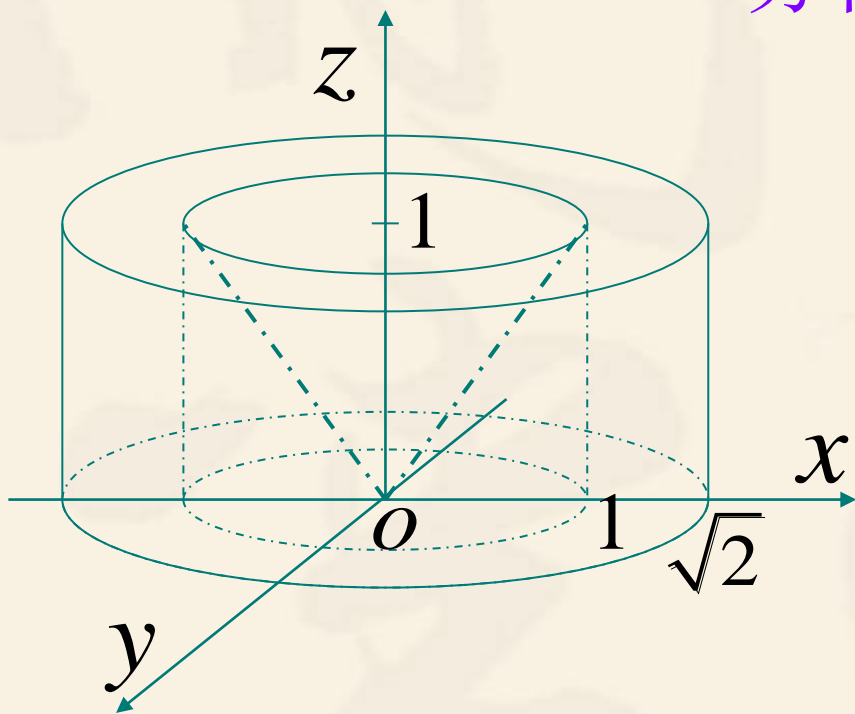
记 $F(x) = \int_x^1 f(y)dy$, 则 $F'(x) = -f(x)$. 于是




$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_x^y f(x)f(y)f(z)dz \\ &= \int_0^1 f(x)dx \int_x^1 dy \int_x^y f(y)f(z)dz \\ &= \int_0^1 f(x) \cdot \frac{1}{2} \left[\int_x^1 f(y)dy \right]^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 -F'(x)F^2(x)dx \\ &= \frac{-1}{6} F^3(x) \Big|_0^1 = \frac{1}{6} F^3(0) = \frac{1}{6} \left(\int_0^1 f(x)dx \right)^3 \quad \square \end{aligned}$$

例: 求 $\iiint_{\Omega} \left| z - \sqrt{x^2 + y^2} \right| dx dy dz$, 其中 Ω 由平面 $z = 0, z = 1$ 及曲面 $x^2 + y^2 = 2$ 围成.

分析: 关键在于去绝对值.

锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 将积分区域 Ω 分成两部分, 应分别积分.
以下留为练习.





作业：习题3.4 No. 5–8