

圆方树、最小树形图、prufer 序列

hz

2022-02-10

简单介绍

这三个知识点之间没有联系，算是图论冷门知识点杂谈

圆方树是一种处理点双连通分量、仙人掌的数据结构，通常将一般图问题转化为树上问题

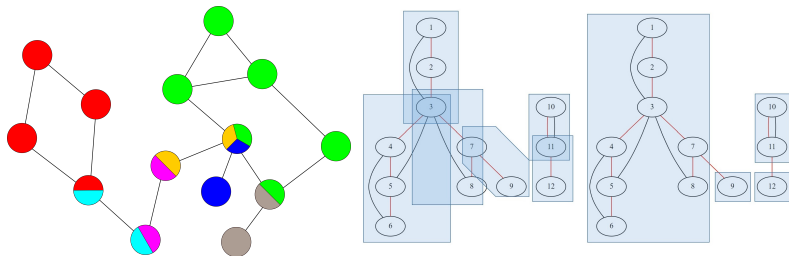
朱刘算法能用于求最小树形图，在 oi / acm 中比较少见

prufer 序列常用于有关树的组合计数

双连通分量

点 双连通分量：任意两点间都存在至少两条 点 不重复路径

边 双连通分量：任意两点间都存在至少两条 边 不重复路径



- ▶ 一个点可以属于多个点双，只能属于恰好一个边双
- ▶ 一条边只能属于恰好一个点双，只能属于不超过一个边双
- ▶ 点双内不存在割点，边双内不存在桥
- ▶ 点双的交是割点，连接不同边双的边是桥

tarjan 算法求点双连通分量 / 割点，边双连通分量 / 桥

原理：无向图 dfs 只有树边和返祖边，low 数组维护子树内最高返祖边

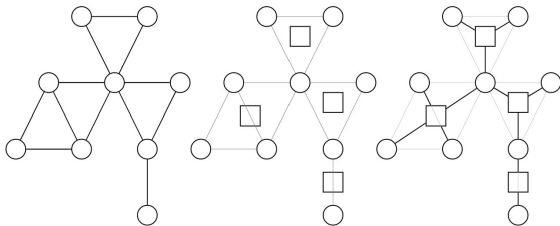
圆方树

用于处理点双连通分量，仙人掌：

为每一个点双新建一个方点，原图每个点对应一个圆点

每个圆点连向该点所在的所有点双对应的方点，构成一颗树

圆点只连向方点、方点只连向圆点



简单维护问题：

- ▶ 点对之间所有简单路径上的最大点值
- ▶ 点对之间在删去一点情况下的可达性

例题: 「HNOI2012」矿场搭建

给出一个简单无向连通图。你需要设置最少的救援出口，使得删掉任意一个点后，其他每个点都能到达至少一个救援出口。

求最少救援出口数量及设置的方案数

$$n, m \leq 1000$$

例题: Codeforces 487E Tourists

给定一张简单无向连通图，要求支持两种操作：

1. 修改一个点的点权。
2. 询问两点之间所有简单路径上点权的最小值。

$$n, m, q \leq 10^5$$

例题: 「SDOI2018」战略游戏

给出一个简单无向连通图。多次询问:

每次给出一个点集 S , 问有多少个点 u 满足 $u \notin S$ 且删掉 u 之后 S 中的点不全在一个连通分量中。

$$n, m, q, (\sum |S|) \leq 2 \times 10^5$$

例题: 「APIO2018」铁人两项

给定一张简单无向图，问有多少对三元组 (s, c, f) (s, c, f 互不相同) 使得存在一条简单路径从 s 出发，经过 c 到达 f 。

$$n, m \leq 2 \times 10^5$$

例题: Codeforces 555E Case of Computer Network

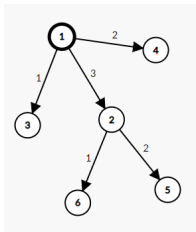
给出一个 n 个点, m 条边的无向图。

你要确定每一条边的方向, 使得所有 q 个要求 (s, t) 都能从 s 出发到达 t 。

$$n, m, q \leq 2 \times 10^5$$

最小树形图

树形图：有向图上的树，有指定的根，边的方向均为父亲指向儿子



由于方向的限制，求无向图最小生成树的方法不能用于求最小树形图

朱刘算法： $O(nm)$ 求出指定根的最小生成树

对于不是指定根的情况，可以通过增加超级源，向所有点连边，价值为 $+\infty$ ，然后求以超级源为根的最小树形图得到

Tarjan 算法有更优秀复杂度 $O(m + n \log n)$

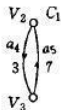
朱刘算法

最小树型图构造流程



(a) D

步骤1: 求最短弧集

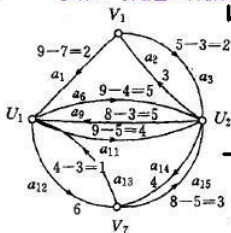


如果无圈又无收缩点， A_0 就是答案
如果有除了 V_1 之外的孤立点，则无解

步骤2: 检查有向圈和收缩点

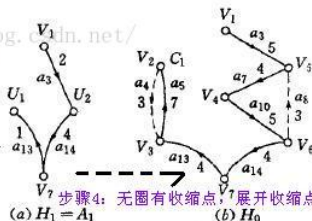
(b) A_0

步骤3: 收缩圈，构新图



有圈继续收缩

重复步骤1, 2



步骤4: 无圈有收缩点，展开收缩点

(a) $H_1 = A_1$

(b) H_0

模板题: luogu P4716 / Codeforces 240E

prufer 序列

Prufer 序列提供了一个“ n 个点的有标号无根树”与“长度为 $n - 2$, 每一位为 $[1, n]$ 之间整数的序列”之间的双射

无根树转化为 prufer 序列:

- ▶ 1. 找到编号最小的度数为 1 的点
- ▶ 2. 删除该节点并在序列中添加与该节点相连的节点的编号
- ▶ 3. 重复 1,2 操作, 直到整棵树只剩下两个节点

prufer 序列转化为无根树:

- ▶ 1. 每次取出 prufer 序列中最前面的元素 u
- ▶ 2. 在点集中找到编号最小的没有在 prufer 序列中出现的元素 v
- ▶ 3. 给 u, v 连边然后分别删除
- ▶ 4. 最后在点集中剩下两个节点, 给它们连边

可以发现, 每个结点在序列中出现的次数是其度数减 1, 没有出现的就是叶结点

模板题: luogu P5454

使用 prufer 序列计数

Cayley 定理: n 个点的有标号无根树数量是 n^{n-2}

如果点 $1, 2, \dots, n$ 的度数分别为 d_1, d_2, \dots, d_n , (显然有 $1 \leq d_i, \sum d_i = 2(n-1)$)

那么满足该度数序列的有编号无根树的数量为:

$$\binom{n-2}{d_1-1, d_2-1, \dots, d_n-1}$$

扩展 Prufer 序列: 当前图有 n 个点, m 个联通块, 大小分别是 a_1, a_2, \dots, a_m , 再添加 $m-1$ 条边使图连通的方案数是 $n^{m-2} \cdot \prod_{i=1}^m a_i$

模板题: Codeforces 156D

例题：luogu P5219

求 n 个点，最大度数 $\leq m$ 的有标号无根树个数

$$n, m \leq 5 \times 10^4$$

例题：2021 牛客多校第四场 D Rebuild Tree

链接：<https://ac.nowcoder.com/acm/contest/11255/D>

给一棵 n 个点的树，求删去其中 k 条边再加入 k 条边后仍然是一颗树的方案数。

$$nk \leq 5 \times 10^6$$