字符串算法

hz

2022-01-28

符号介绍

字符集：$\Sigma = \{'a', 'b', \ldots, 'z'\}$

字符串：$s = s_1 s_2 \ldots s_n, \;\; |s| = n$

子串：$\mathrm{substring}(s) = \{s[l, r] \mid 1 \le l \le r \le n\}, \;\; s[l, r] = s_l, s_{l+1}, \ldots, s_r$

字典序：$s < t \iff (s_1 = t_1 \vee s[2, |s|] < t[2, |t|])$

前缀：$\mathrm{prefix}(s) = \{s[1, i] \mid 1 \le i \le n\}$

最长公共前缀：$\mathrm{lcp}(s, t) = \max\{i \mid s[1, i] = t[1, i]\}$

后缀：$\mathrm{suffix}(s) = \{s[i, n] \mid 1 \le i \le n\}$

最长公共后缀：$\mathrm{lcs}(s, t) = \max\{i \mid s[|s| - i + 1, |s|] = t[|t| - i + 1, |t|]\}$

字符串哈希

哈希能将一个字符串映射到一个整数上，一般用于判断字符串是否相等

通常使用的哈希方法是：
$(\mathrm{Hash}(s) = s_1 c + s_2 c^2 + s_3 c^3 + \cdots + s_n c^n) \bmod p$

注意：使用自然溢出取模的哈希是可以被攻击的

哈希最常用的例子是二分 $+$ 哈希 $O(\log n)$ 求 lcp

border

定义字符串的 border 集合为前缀等于后缀的位置，next 为 border 中的最大值，形式化地：

$$\mathrm{border}(s) = \{i \mid s[1,i] = s[n-i+1,n], 1 \le i < n\}$$

$$\mathrm{next}(s) = \begin{cases} \max\{\mathrm{border}(s)\} & \mathrm{border}(s) \ne \varnothing \\ -1 & \mathrm{border}(s) = \varnothing \end{cases}, \quad \mathrm{next}_i = \mathrm{next}(s[1,i])$$

例如：$\mathrm{border}(\text{"abaabaab"}) = \{2,5\}$

border 集有很多优秀的性质，这里只讨论其中比较常见的性质：
（比较复杂的例如：弱/强周期定理、等差数列划分等，详见金策《字符串算法选讲》）

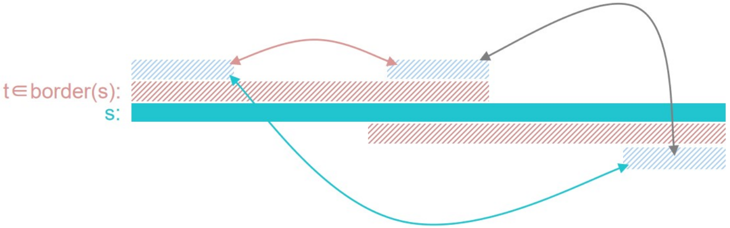
border

包含关系：

$$\forall i < j,\ j \in \text{border}(s):$$

$$i \in \text{border}(s) \iff s[1,i] = s[n-i+1,n]$$

$$\iff s[1,i] = s[j-i+1,j] \iff i \in \text{border}(s[1,j])$$



因此，

$$\text{border}(s) = \text{border}(s[1,\text{next}(s)]) \ \cup \ \text{next}(s)$$

$$\text{border}(s) = \{\text{next}_n, \text{next}_{\text{next}_n}, \dots\}$$

例如：

$\text{border}(\text{"a"}) = \{\}$
$\text{border}(\text{"ab"}) = \{\}$
$\text{border}(\text{"aba"}) = \{1\}$
$\text{border}(\text{"abaa"}) = \{1\}$
$\text{border}(\text{"abaab"}) = \{2\}$
$\text{border}(\text{"abaaba"}) = \{1,3\}$
$\text{border}(\text{"abaabaa"}) = \{1,4\}$
$\text{border}(\text{"abaabaab"}) = \{2,5\}$

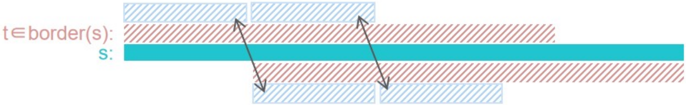
border

定义字符串的周期为某个循环出现的子串：

$$\text{period}(s) = \{t \mid \forall 1 \le i \le n-t, s_i = s_{i+t}\}$$

border 与周期有对应关系：

$$\begin{aligned} t \in \text{period}(s) &\iff \forall 1 \le i \le n-t, s_i = s_{i+t} \\ &\iff s[1, n-t] = s[t+1, n] \iff n-t \in \text{border}(s) \end{aligned}$$



border

相邻关系：

考虑 $\text{border}(s[1, j-1])$ 和 $\text{border}(s[1, j])$ 之间的关系：

$$\begin{aligned} i \in \text{border}(s[1, j]) &\iff s[1, i] = s[j-i+1, j] \\ &\implies s[1, i-1] = s[j-i+1, j-1] \\ &\iff i-1 \in \text{border}(s[1, j-1]) \end{aligned}$$

因此，$\text{next}_j \in (\{-1\} \cup \{i \mid i-1 \in \text{border}(s[1, j-1])\})$

从 next_{j-1} 转移到 next_j 只需要在 $j-1$ 的 border 集中查找比较，找到最大的合法值即可

又因为 $s[1, i-1] = s[j-i+1, j-1]$，比较时只需判断 $[s_i == s_j]$

每次比较过后，有两种情况：

- 1. $\text{next}_j + 1, j + 1$
- 2. next_j 减少

能在均摊 $O(n)$ 复杂度下递推求出 $\text{next}_1 \ldots \text{next}_n$

KMP 算法

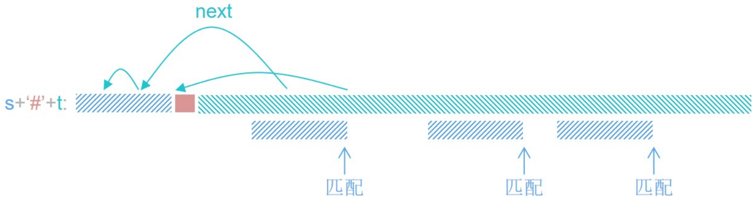
KMP 算法能 $O(|s|)$ 预处理，$O(|t|)$ 找到 s 在 t 中出现的所有位置

利用 border 性质的简单证明：

考虑字符串 $s+'\#'+t$ 的 next 值，其中$'\#'$ 是一个字符集 Σ 以外的字符：

由 border 定义，$\text{next}_{|s|+1+j} = \max\{i \mid s[1,i] = t[j-i+1,j]\}$，

s 在 $t[j-|s|+1,j]$ 中出现 $\iff$ $\text{next}_{|s|+1+j} = |s|$



KMP 算法

尝试从匹配状态的角度证明 KMP 算法：

假设当前已经扫描到了 j

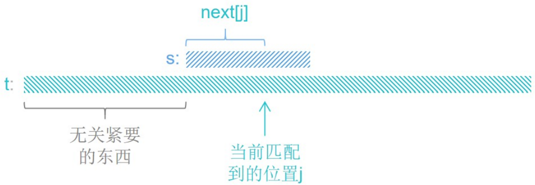
（已经考虑完了所有 $j' < j$, $[s == t[j' - |s| + 1, j']]$ 的匹配）

我们发现字符串 t 最前面的字符对于当前及之后的匹配是没有影响的

形式化地：从小到大考虑每一个位置 i ，如果 $\nexists x \geq 0, t[i, j + x] = s$，那么 t_i 的值对当前及之后的匹配没有影响

由于 j 之后的字符还未扫描，我们将条件放宽到：$t[i, j] \in \text{prefix}(s)$

此时，我们只需要储存 $\max\{i \mid t[j - i + 1, j] = s[1, i]\}$，这个值能唯一描述当前所需的所有信息，可以发现这就是 next_j，递推与动态规划思想相同



AC 自动机

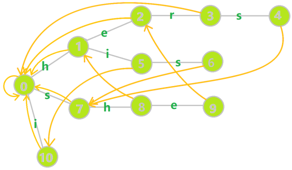
trie 树：用树储存字符串集合 $s_1, s_2, \ldots, s_n$，每个前缀 $p \in \operatorname{prefix}(s_x)$ 唯一对应一个节点 $\operatorname{trans}(p)$

AC 自动机：在 trie 树上的字符串匹配算法：
$O(\sum |s_x|)$ 预处理，$O(|t|)$ 找到 s_x 在 t 中出现的所有位置

与匹配状态的角度的 KMP 证明同理，匹配时只需要储存当前最大匹配前缀的信息 $\operatorname{trans}(t[j-i+1,j])$
其中 $i = \max\{i \mid t[j-i+1,j] \in \operatorname{prefix}(s_x)\}$

AC 自动机中同样存在与 next 相似的 fail 指针，指向 trie 树中的节点，
$\operatorname{fail}_{\operatorname{trans}(p)} = \operatorname{trans}(q)$ 说明 q 为出现在 trie 树中最长的 p 的后缀
（还可以通过储存 $\operatorname{fail}_{p,c}$ 得到非均摊复杂度的查询算法）

唯一与 next 不同的是，AC 自动机中的 fail 递推时，长度短的前缀的 fail 必须比长度长的前缀的 fail 先求出，因此要使用队列

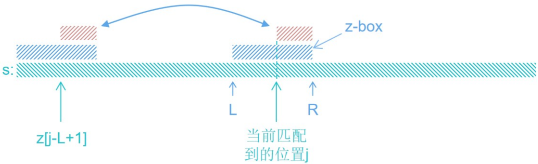


扩展 KMP（Z 函数）

扩展 KMP 算法能 $O(n)$ 求出，$z_1, z_2 \ldots z_n$ 其中 $z_i = \mathrm{lcp}(s, s[i, n])$

假设现在正在计算 z_j，定义当前的 z-box $[L, R] = [i, i + z[i] - 1]$，其中 $i + z[i] - 1$ 最大，（根据 z 函数的定义，显然有 $s[1, z[i]] = s[L, R]$）

可以发现在整个算法中 R 的值递增



因此，$s[j, R] = s[j - L + 1, R - L + 1]$，对 $z[j - L + 1]$ 分两类讨论：

- 1. $z[j - L + 1] < R - j + 1$，$z[j] = z[j - L + 1]$
- 2. $z[j - L + 1] \geq R - j + 1$，$z[j] \geq R - j + 1$，手动比较 lcp，每次比较会让接下来的 $R + 1$，复杂度 $O(n)$

Manacher 算法

回文串：正向读与反向读相同的字符串
$s \in \text{palindrome} \iff \forall 1 \le i \le n,\ \ s_i = s_{n-i+1}$
定义字符串的反转操作：$s_i^R = s_{n-i+1}$，有 $s \in \text{palindrome} \iff s = s^R$

回文串的两边删除一个字符还是回文串：
$n \ge 2,\ \ s \in \text{palindrome} \implies s[2, n-1] \in \text{palindrome}$

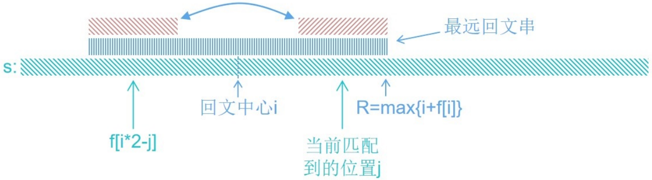
长度为奇数的回文串 s 有回文中心 $s_{\frac{n+1}{2}}$，而长度为偶数的回文串没有

因此，对字符串作变换 $s_1 s_2 \dots s_n \implies s_1 \# s_2 \# \dots \# s_n$，使得原来的每一个回文串都有回文中心

Manacher 算法: $O(n)$ 对变换后的字符串求出
$f_i = \max\{l \mid s[i-l, i+l] \in \text{palindrome}\}$

Manacher 算法

采用与扩展 kmp 中 z-box 相似的思路，假设现在正在计算 f_j，当前找到的最远（$i+f_i$ 最大）的回文子串为 $s[i-f_i, i+f_i]$



因此，$s[2j-R, R] = s[2i-R, 2i-(2j-R)]$，同样对 f_{i*2-j} 分两类讨论：

- 1. $f_{i*2-j} < R-j$，$f_j = f_{i*2-j}$
- 2. $f_{i*2-j} \geq R-j, f_j \geq R-j$，手动比较是否回文，每次比较会让接下来的 $R+1$，复杂度 $O(n)$

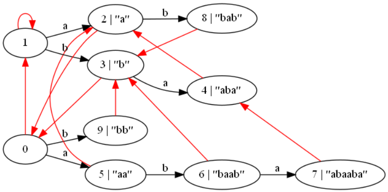
这也说明了字符串 s 中本质不同的回文子串数 $\leq n$

回文自动机（PAM）

注意到回文串还有另一个性质：
$s \in \text{palindrome}, t \in \text{suffix}(s):\ t \in \text{palindrome} \iff t \in \text{prefix}(s)$

定义回文自动机：

- 每个本质不同的回文子串对应一个节点，此外还有两个空节点 0,-1
- $\text{nxt}(s, c) = c + s + c$，特殊地，$\text{nxt}(-1, c) = c$，$\text{nxt}(0, c) = cc$
- $\text{fail}(s) = s[1, \text{next}(s)]$，由刚才的结论，回文串的所有回文后缀就是其所有 border



设以 j 为右端点的最长回文子串为 p，那么以 j 为右端点的所有回文子串就是 $p, \text{fail}_p, \text{fail}_{\text{fail}_p}, \ldots$

回文自动机（PAM）

构造：

设当前扫描到 j，只需要新增以 j 为右端点的所有回文串，而除了以 j 为右端点的最长回文子串外，其他回文子串一定已经出现过了

$s[i,j] \in \mathrm{palindrome} \Longrightarrow s[i+1,j-1] \in \mathrm{palindrome}$，在 $j-1$ 对应节点上跳 fail 查找即可

manacher 将回文子串统计到它们的回文中心，PAM 将回文子串统计到它们的右端点

而回文后缀与 border 之间的联系使得 PAM 能利用 border 的高级性质处理一些问题

后缀数组（SA）

$O(n \log n)$ 对 s 的所有后缀进行排序，算法原理是做 $\log n$ 次双关键字基数排序

有 $O(n)$ 算法但比较复杂

将所有字符串按排序后顺序并列，

定义 $SA[i]$ 为排名为 i 的后缀，$rk[i]$ 为后缀 $s[i,n]$ 的排名

$h[i] = \text{lcp}(s[SA[i],n], s[SA[i-1],n])$

```
S = babba

a         suffix(5), rank=1
abba      suffix(2), rank=2, H=1
ba        suffix(4), rank=3, H=0
babba     suffix(1), rank=4, H=2
bba       suffix(3), rank=5, H=1

rk  = [4,2,5,3,1]
SA = [5,2,4,1,3]
H  =  [1,0,2,1]
```

后缀数组（SA）

可以 $O(n)$ 求 $h_1, h_2, \ldots h_n$

常用性质：

$$\operatorname{lcp}(SA[i], SA[j]) = \min_{k=i+1}^{j} h[k]$$

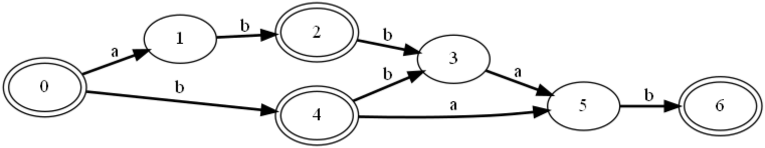
同一字符串出现位置为 SA 中的一段区间

```
S = babba

a         suffix(5), rank=1
abba      suffix(2), rank=2, H=1
ba        suffix(4), rank=3, H=0
babba     suffix(1), rank=4, H=2
bba       suffix(3), rank=5, H=1

rk  = [4,2,5,3,1]
SA = [5,2,4,1,3]
H  =   [1,0,2,1]
```

后缀自动机（SAM）

确定有限自动机（DFA）可用一个五元组 $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ 表示：

- Q ：状态集合
- Σ : 符号的有限集合，自动机接受的“字母表”
- δ : 转移函数，在某一状态下，接受字母，转移到唯一新状态（$\delta : (Q, \Sigma) \to Q$）（下文记作 $\mathrm{nxt}(q, x)$）
- q_0 : 开始状态（$q_0 \in Q$）
- F : 终止状态集合（$F \subset Q$，对于可识别字符串，自动机一定停止于 F 中的某个状态）



上图是一个恰能识别"abbab", "bbab", "bab", "ab", "b", "" 的 DFA

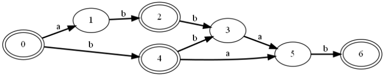
后缀自动机（SAM）

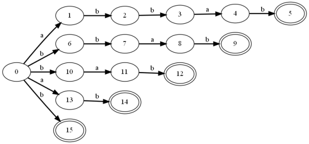
$\mathrm{nxt}(q,x)$ 表示状态 q 接受字符 x 后转移到的节点

$\mathrm{trans}(q,s)$ 表示状态 q 接受字符串 s 后转移到的节点

定义状态 q 可以识别的字符串为 $L(q)=\{s \mid \mathrm{trans}(q,s)\in F\}$，自动机能识别的集合就是 $L(q_0)$

有一些不同形状的 DFA 能识别相同的字符串集合，但能识别指定字符串集合的最简 DFA 唯一





在最简 DFA 中，$L(q)$ 不为空且两两不同，可证明最简 DFA 唯一

形式化地，
$\forall L_0,\ (\exists q,\ L(q)=L_0) \iff (\exists t, L_0=\{s \mid s\in L(q_0),\ t\in \mathrm{prefix}(s)\})$

定义字符串 s 的后缀自动机（SAM）为 $L(q_0)$ 为 s 所有后缀的最简 DFA，可以证明 SAM 的节点数 $\leq 2n$

后缀自动机（SAM）

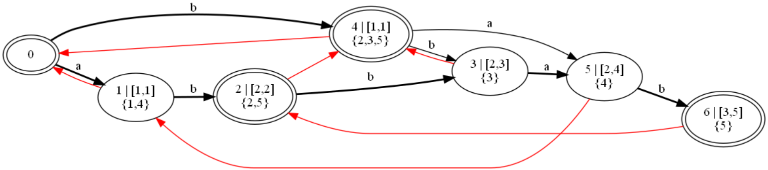
首先，根据最简 DFA 性质可以得到：

$$\text{trans}(q_0, s) \in F \iff s \in \text{suffix}(S)$$

$$\text{trans}(q_0, s) \neq \text{null} \iff s \in \text{substring}(S)$$

$\text{right}(q)$ 是 q 能识别的后缀的左端点集合（假设 q 能识别 $s[r_1+1,n], s[r_2+1,n] \ldots\ldots s[r_m+1,n]$，则 $\text{right}(q) = \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$）

若 $\text{trans}(q_0, s[l,r]) = q$，因为 $\text{trans}(q_0, s[l,n]) \in F$，所以一定有 $\text{trans}(q, s[r+1,n]) \in F, r \in \text{right}(q)$



s = "abbab"

后缀自动机（SAM）

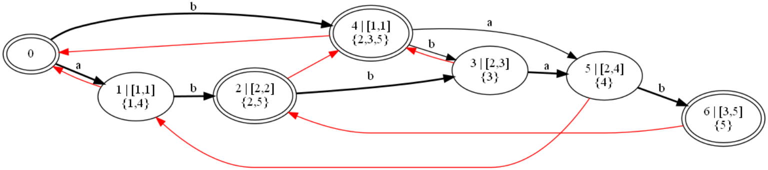
上文已得出 $\mathrm{trans}(q_0, s[l,r]) = q \Longrightarrow r \in \mathrm{right}(q)$，现在考虑对 l 的要求：

注意到 $\mathrm{right}(\mathrm{trans}(q_0, s[l_1,r])) \subseteq \mathrm{right}(\mathrm{trans}(q_0, s[l_2,r]))$，因此满足 $\mathrm{trans}(q_0, s[l,r]) = q$ 的 l 一定在某个区间内

综上，$\mathrm{trans}(q_0, s[l,r]) = q \Longleftrightarrow r \in \mathrm{right}(q) \wedge r - l \in [\min(q), \max(q)]$

这说明了 $\mathrm{trans}(q_0, s) = q$ 的本质不同的字符串有 $\max(q) - \min(q) + 1$ 个，每个出现了 $|\mathrm{right}(q)|$ 次

（一个没什么用但有助于理解的结论：
$\sum_{q \neq q_0} [\max(q) - \min(q) + 1] \times |\mathrm{right}(q)| = \frac{n(n-1)}{2}$）



s = "abbab"

后缀自动机（SAM）

发现任意两个状态的 right 集合不交或包含，这形成了一颗树，称为 parent 树，q 在 parent 树上的父亲记作 $\mathrm{pre}(q)$

parent 树还有这些性质：

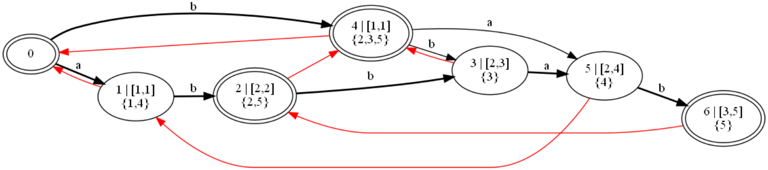
$\mathrm{right}(q) \subset \mathrm{right}(\mathrm{pre}(q))$

$\min(q) = \max(\mathrm{pre(q)}) + 1$

$\mathrm{trans}(q_0, s[l, r])$ 的值在 parent 树的一条链上，随 l 增大，深度连续、递减（例如我们可以通过倍增 $O(\log)$ 计算 $\mathrm{trans}(q_0, s[l, r])$）

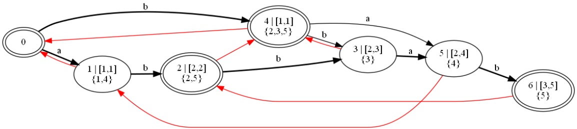
pre 指针具有类似 fail 的作用

$\mathrm{trans}(q_0, s[l, r])$ 最深的节点是 $\mathrm{trans}(q_0, s[1, r])$ 这很容易计算



s = "abbab"

SAM 建后缀树



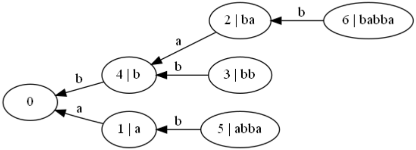
s = "abbab"

$\mathrm{trans}(q_0, s[l_1, r]) = q, \mathrm{trans}(q_0, s[l_2, r]) = \mathrm{pre}(q)$

$s[l_1, r]$ 与 $s[l_2, r]$ 有相同后缀，在 parent 树上是父子关系

因此，对反串 s^R 建 SAM，得到的 parent 树就是 s 的后缀树

（例如可用于求后缀之间的 lcp）



SAM("abbab"), s = "babba"

注意到儿子之间的顺序只由一个位置的字符决定，且两两不同，可以通过这个对儿子排序