南开大学 2022 年研究生入学考试数学分析试题解答

数 学

本试卷共 4 页，22 题．全卷满分 150 分, 考试用时 120 分钟．

注意事项：

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.
2. 回答选择题时, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回.
4. 本试卷由 kmath.cn 自动生成.

得分	
阅卷人	

一、解答题：本题共 6 小题，每小题 5 分，请考生在 22、23 题中选择一题，并在答题纸上涂黑，不涂黑、多涂或多答均按第一题评分.

1. 求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x-5}\,\mathrm{d}x$.

[答案]: 解令 $t=\sin^2 x$, 则 $\mathrm{d}t=2\sin x\cos x\,\mathrm{d}x, \sin^4 x+\cos^4 x=2t^2-2t+1$, 则

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2t^2-2t-4}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{12}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=-\frac{\ln 2}{12}$$

[解析]:

2. 计算二重积分 $\iint_D \sin\left(\max\left\{x^2,y^2\right\}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x,y\leqslant\sqrt{\pi}\}$.

[答案]: 解不妨记 $D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant x\leqslant\sqrt{\pi}\}$, 由对称性可知

$$\text{原式}=2\iint_{D_1}\sin x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\int_0^{\sqrt{\pi}}\sin x^2\,\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y=2\int_0^{\sqrt{\pi}}x\sin x^2\,\mathrm{d}x=2$$

[解析]:

3. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)}$ 的和.

[答案]: 解考虑

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

注意到

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n, x\in(-1,1].$$

设

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}, x\in[-1,1].$$

由幂级数相关性质可知

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=-\frac{x^2}{1+x^2}=\frac{1}{1+x^2}-1, x\in(-1,1).$$

即 $f(x)=\arctan x-x$, 故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)}=\ln 2+2f(1)=\ln 2+2\left(\frac{\pi}{4}-1\right)=\ln 2+\frac{\pi}{2}-2$$

[解析]:

4. 设 $f(x,y)=x^3-3x^2y-y^3+x^2-y$. (1) 证明: 存在 $\delta>0$, 以及定义于 $(-\delta,\delta)$ 上的连续可微函数 $y=y(x)$, 满足 $y(0)=0$, 以及 $f(x,y(x))=0$. (2) 证明: $x=0$ 时 (1) 中的 $y(x)$ 取到极小值.

[答案]: 证明 (1) 注意到 $f(0,0)=1, \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=-3x^2-3y^2-1|_{(0,0)}=-1\neq 0$. (2) 在 $x^3-3x^2y-y^3+x^2-y=0$ 两边同时对 x 求导, 有

$$3x^2-6xy-3x^2y'-3y^2y'+2x-y'=0.$$

代入 $x=0$ 和 $y(0)=0$, 得到 $y'(0)=0$. 重复上述操作, 得到

$$6x-6y-12xy'-3x^2y''-6y\left(y'\right)^2-3y^2y''+2-y''=0.$$

代入 $x=0$ 和 $y(0)=y'(0)=0$, 得到 $y'(0)=2>0$. [解析]:

5. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导且下凸, 证明: 对任意的实数 x, 都有 $f\left(x+f'(x)\right)\geqslant f(x)$.

[答案]: 证明由题意可知对任意实数 x,y, 有

$$f(y)\geqslant f(x)+f'(x)(y-x),$$

故 $f\left(x+f'(x)\right)\geqslant f(x)+f'(x)\left(\left(x+f'(x)\right)-x\right)=f(x)+\left(f'(x)\right)^2\geqslant f(x)$ [解析]:

6. 设 $x_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}, n=1,2,\cdots$, 求极限 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln x_n}{\sqrt[n]{\mathrm{e}}-1}-n\right)$.

[答案]: 解注意到

$$x_n=\mathrm{e}-\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}\stackrel{\text{def}}{=}\mathrm{e}-r_n, \lim_{n\to\infty}r_n=0.$$

又

$$\sqrt[n]{\mathrm{e}}-1=\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

故

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}n\left(\ln x_n-1-\frac{1}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\ln\frac{\mathrm{e}-r_n}{\mathrm{e}}-\frac{1}{2n}\right)=-\frac{1}{2}$$

[解析]: