1 Énoncés

1.1 Valeurs propres - Limite de suite - Fibonacci ‡

La suite de Fibonacci est définie ainsi : $F(0) = 0, F(1) = 1, F(n) = F(n-1) + F(n-2)$. En notant $\vec{x}_n = \begin{pmatrix} F(n) \\ F(n-1) \end{pmatrix}$ l'état de la suite sous forme vectorielle, on va simplifier le calcul du terme $F(n)$.

1. Écrire $\vec{x}_1$.
2. Trouver la matrice T telle que $\vec{x}_{n+1} = T \cdot \vec{x}_n$. (Pour commencer, quelle est la dimension de T? Puis, chercher la première ligne, qui permet de calculer la première composante de $\vec{x}_{n+1}$. Puis, la deuxième ligne.)
3. Vérifiez que votre T marche sur quelques itérations, en calculant $F(2), F(3)$ à l'aide de cette matrice.
4. On rentre cette matrice dans un ordinateur (on peut aussi le faire à la main), et on trouve qu'elle est diagonalisable, avec comme système propre:

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Expliciter la valeur de la matrice de passage P et de la matrice diagonale des valeurs propres D (aussi parfois notée Λ). Il n'est pas nécéssaire de calculer P^{-1}. Donner l'expression de T en fonction de D, P, P^{-1} (c'est du cours).

5. Écrire maintenant directement $\vec{x}_n$ en fonction de la matrice diagonale des valeurs propre D, de la matrice de passage P et de $\vec{x}_1$.
6. (Question Bonus) On rappelle que $\sqrt{5} \approx 2.2$. Dans la limite de $n \to \infty$, quel sera le comportement asymptotique de $F(n)$? (indice: chercher plutôt le comportement asymptotique de $\vec{x}_n$). Pour aider un calcul explicite, on donne le résultat de la multiplication: $P^{-1}\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

1.2 Gémoétrie, projections ‡

Soit un plan P (ou $\mathcal{P}$) d'équation $\vec{p} \cdot \vec{x} + c = 0$. On pourra noter $|\vec{p}|$ la norme de p, c.a.d $|\vec{p}| = \sqrt{\vec{p} \cdot \vec{p}}$.

1. En commencant par le cas simple $c = 0$, et le sous-cas simple $\vec{p} = (0, 0, 2)$ (en 3 dimensions, pour se fixer les idées), donner une formule pour calculer le projeté $\vec{a}'$ d'un point $\vec{a}$ sur le plan P. Indice: commencer par voir quel est ce plan P, puis voir comment "hacker" les coordonnées de a pour les projeter sur ce plan.
2. Généraliser pour p quelconque (toujours avec $c = 0$, c.a.d. un plan qui passe par l'origine du repère). Indice: il n'y a pas tellement de raisonnement à faire, juste se convaincre intuitivement (les dessins sont autorisés).
3. Généraliser pour c quelconque. On rappelle que c s'interprète comme la distance entre le plan et l'origine du repère, c.a.d. la longueur du vecteur OO', si O est l'origine du repère et O' son projeté sur le plan.

Remarque: cette équation est valide en toute dimension $d \in \mathbb{N}$! Sympa, non ?

1.3 Valeurs propres et vecteurs propres - Mise en équation et étude de stabilité

Cet exercice est plus intéressant à faire avec un ordinateur, en choisissant des valeurs pour les coefficients (ou directement pour les valeurs propres).

On suppose que la production de biens et services se divise en 3 secteurs seulement: la production de biens (manufacturés), la production de services, et l'exploitation de ressources naturelles. La production annuelle de l'année n, notée $\vec{x}_n$, est un vecteur $(p_1, p_2, p_3)^T$. On s'intéresse à la variation de production (croissance où décroissance) d'une année sur l'autre. On suppose que :

- La production de biens (de l'année suivante) dépend de celle de l'année précédente, et de l'extraction de matières premières: $p_1' = c_1 p_1 + c_{1,3} p_3$
- La production de services varie ainsi: $p_2' = c_2 p_2 + c_{2,1} p_1$

- L'extraction de ressources varie ainsi: $p_3' = c_{3,1}p_1 - c_3p_3$

1. Quel est la matrice A qui vérifie: $\vec{x}_{n+1} = A\vec{x}_n$?
2. Calculer la production annuelle après 2 ans, en calculant le carré de A.
3. Comment calculer efficacement la production sur les années suivantes ? (indice: penser au système de valeurs propres/vecteurs propres). Exprimez le (sans tout calculer, ici on ne connait pas les coefficients de toute façon).
4. On suppose que les coefficients $c_1, c_2, c_3, c_{1,3}, c_{2,1}, c3, 1$ sont tels que A est diagonalisable. On suppose que les trois paires $\lambda_k, \vec{v}_k$ sont connues. De plus, on choisit de trier les valeurs propres de telle sorte que $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3$ (pour simplifier, on se place dans le cas où $\lambda_1 > \lambda_2$, strictement). Quel sera le comportement de $\vec{x}_n$ à grand n, selon la valeur de λ ? En particulier, discuter les cas $0 < \lambda_1 < 1$ et $1 < \lambda_1$.
5. Question Bonus. Que se passe-t il dans le cas $\lambda_1 = 1$?

2 Corrections

2.1 Exo 1.1 - Valeurs propres - Limite de suite - Fibonacci ‡

La suite de Fibonacci est définie ainsi : $F(0) = 0, F(1) = 1, F(n) = F(n-1) + F(n-2)$. En notant $\vec{x}_n = \begin{pmatrix} F(n) \\ F(n-1) \end{pmatrix}$ l'état de la suite sous forme vectorielle, on va simplifier le calcul du terme $F(n)$.

1. Écrire $\vec{x}_1$.
   Solution : $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
2. Trouver la matrice T telle que $\vec{x}_{n+1} = T \cdot \vec{x}_n$. (Pour commencer, quelle est la dimension de T? Puis, chercher la première ligne, qui permet de calculer la première composante de $\vec{x}_{n+1}$. Puis, la deuxième ligne.)
   Solution : $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
3. Vérifiez que votre T marche sur quelques itérations, en calculant $F(2), F(3)$ à l'aide de cette matrice.
   Solution : Ok, ça marche. (question purement calculatoire)
4. On rentre cette matrice dans un ordinateur (on peut aussi le faire à la main), et on trouve qu'elle est diagonalisable, avec comme système propre:
   $$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$
   $$\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$
   Expliciter la valeur de la matrice de passage P et de la matrice diagonale des valeurs propres D (aussi parfois notée Λ). Il n'est pas nécéssaire de calculer P^{-1}. Donner l'expression de T en fonction de D, P, P^{-1} (c'est du cours).
   Solution : P est constituée en mettant cote à cote les vecteurs propres (en mode colonne): $P = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D est constituée en mettant les valeurs propres dans la diagonale, **dans le même ordre** que les vecteurs propres mis dans P: $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ La définition de la diagonalisation de T s'écrit alors: $T = PDP^{-1}$ (cours).
5. Écrire maintenant directement $\vec{x}_n$ en fonction de la matrice diagonale des valeurs propres D, de la matrice de passage P et de $\vec{x}_1$.

Solution :

$$\begin{aligned}
\vec{x}_n =& T^n \vec{x}_1 && (1)\\
=& (PDP^{-1})^n \vec{x}_1 && (2)\\
=& PD^nP^{-1}\vec{x}_1 && (3)\\
=& P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n P^{-1}\vec{x}_1 && (4)\\
=& P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} P^{-1}\vec{x}_1 && (5)
\end{aligned}$$

6. (Question Bonus) On rappelle que $\sqrt{5} \approx 2.2$. Dans la limite de $n \to \infty$, quel sera le comportement asymptotique de $F(n)$? (indice: chercher plutôt le comportement asymptotique de $\vec{x}_n$). Pour aider un calcul explicite, on donne le résultat de la multiplication: $P^{-1}\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

   Solution : Lorsqu'on calcule $PD^nP^{-1}\vec{x}_1$, on obtient $\vec{x}_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1^n - \lambda_2^n \\ \lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1} \end{pmatrix}$ On remarque que $\lambda_1 > 1$ et $\lambda_2 \approx -0.6$ et en particulier $|\lambda_2| < 1$. Donc pour n grand, $\vec{x}_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1^n \\ \lambda_1^{n-1} \end{pmatrix}$, c'est-à-dire que $F(n) \sim \frac{1}{\sqrt{5}}\lambda_1^n$. La suite de Fibonacci a donc une croissance exponentielle : $F(n) \sim \frac{1}{\sqrt{5}} e^{n\log(\lambda_1)}$

2.2 Exo 1.2 - Gémoétrie, projections ‡

Soit un plan P (ou $\mathcal{P}$) d'équation $\vec{p} \cdot \vec{x} + c = 0$. On pourra noter $|\vec{p}|$ la norme de p, c.a.d $|\vec{p}| = \sqrt{\vec{p} \cdot \vec{p}}$.

1. En commencant par le cas simple $c = 0$, et le sous-cas simple $\vec{p} = (0, 0, 2)$ (en 3 dimensions, pour se fixer les idées), donner une formule pour calculer le projeté $\vec{a}'$ d'un point $\vec{a}$ sur le plan P. Indice: commencer par voir quel est ce plan P, puis voir comment "hacker" les coordonnées de a pour les projeter sur ce plan.
   Solution: Le plan est le plan $z = 0$. Il faut penser à supprimer la composante z (3ème composante) du vecteur a. Cette composante s'obtient par $\vec{a} \cdot \vec{p}$, au détail près qu'il faut normaliser $\vec{p}$, c.a.d. le diviser par sa norme: $\vec{a} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$. Donc il faut enlever ça de $\vec{a}$. La formule est donc: $\vec{a}' = \vec{a} - \frac{\vec{a}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$

2. Généraliser pour p quelconque (toujours avec $c = 0$, c.a.d. un plan qui passe par l'origine du repère). Indice: il n'y a pas tellement de raisonnement à faire, juste se convaincre intuitivement (les dessins sont autorisés).
   Solution: La formule est la même: $\vec{a}' = \vec{a} - \frac{\vec{a}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$

3. Généraliser pour c quelconque. On rappelle que c s'interprète comme la distance entre le plan et l'origine du repère, c.a.d. la longueur du vecteur OO', si O est l'origine du repère et O' son projeté sur le plan.
   Solution: Pour un point a quelconque, avec la formule précédente, on va projeter sur la plan parallèle à P qui passe par O. Donc il faut décaler la solution d'une quantité $\vec{OO'}$. Avec un dessin, en positionnant $\vec{p}$ sur O, on voit que $OO' = |OO'|\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = c.\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$. La formule générale est donc $\vec{a}' = \vec{a} - \frac{\vec{a}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} + c.\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$. Si on suppose que $\vec{p}$ est normalisé (c.a.d $|\vec{p}| = 1$), c'est plus joli: $\vec{a}' = \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{p})\vec{p} + c\vec{p}$. On voit qu'un point $\vec{a}$ appartenant à P aurait bien lui même pour projeté, car il vérifierait $\vec{p} \cdot \vec{a} + c = 0$, et donc les 2 derniers termes s'annulent, et on a $\vec{a}' = \vec{a}$ (ce qui est logique).

Remarque: cette équation est valide en toute dimension $d \in \mathbb{N}$! Sympa, non ?