MINES ParisTech

INSTITUT Mines-Télécom

TELECOM ParisTech

Nuages de points et modélisation 3D

Normales, courbures et descripteurs

François GOULETTE

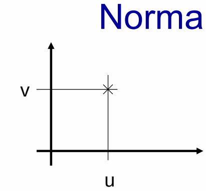
MINES ParisTech

Contact : francois.goulette@mines-paristech.fr

Sommaire

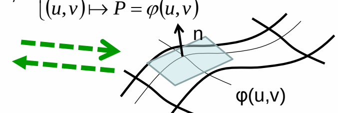
1/ Normales et courbures

Normale d'une surface



$$\varphi : \begin{cases} V \subset \Re^2 \rightarrow S \subset \Re^3 \\ (u,v) \mapsto P = \varphi(u,v) \end{cases}$$

φ de classe C^2



Système de coordonnées locales : $\varphi_u = \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} \quad \varphi_v = \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}$

Paramétrisation **régulière** si (φ_u, φ_v) linéairement indépendants

→On définit le **plan tangent** au point P parallèle à (φ_u, φ_v)

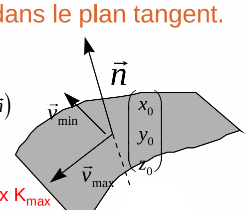
→et la **normale** par : $n = \dfrac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$

Courbure de la surface

- Pour toute courbe passant au point P
  - Définie / paramét. unité de longueur s $X = \varphi(s)$
  - On peut définir sa courbure : $\kappa = \varphi''(s)$
  - Le vecteur peut se décomposer en partie normale et tangentielle à la surface en P
- La composante de la courbure normale à la surface :
  - Varie entre une valeur K_{min} et K_{max}
  - Les directions correspondantes sont perpendiculaires

Courbures principales d'une surface

- Les courbures K_{min} et K_{max} sont appelées courbures principales de la surface
- Leurs directions sont dans le plan tangent.
  - Avec la normale, elles définissent le repère de Darboux $(\vec{v}_{min}, \vec{v}_{max}, \vec{n})$



Définitions :

Courbure gaussienne : K = K_{min} x K_{max}

Courbure moyenne : K = (K_{min} + K_{max})/2

2/ Normales et courbures

2.1 Normales, repères, courbures

2.2 Calcul de normales par ACP

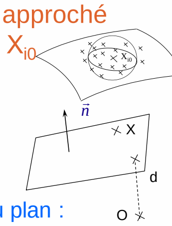
2.3 Calcul de courbures

2.2 Calcul de normales par ACP

- On cherche le meilleur plan approché dans le voisinage d'un point X_{i0}
  - Les m points du voisinage sont notés X_i
- Equation d'un plan :

$$n^t X = d \qquad \|n\| = 1$$

  - Distance signée d'un point au plan :



$$d(X_i, P) = n^t X_i - d$$

Résolution par la méthode des moindres carrés

- Fonction à minimiser :

$$\mathrm{f}(\mathrm{n},\mathrm{d}) = \sum_{i=1}^{m} \left(n^t X_i - d\right)^2$$

4 Paramètres : n, d

1 contrainte $\|n\| = 1$

Résolution de l'équation de minimisation pour le plan

- On pose

G : barycentre des points :

$$G = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} X_i$$

M_{cov} : matrice de covariance des points :

$$M_{\mathrm{cov}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (X_i - G)(X_i - G)^t$$

Solution - ACP

- Le meilleur plan approché est défini par :
- Normale n_{min} :
  - vecteur propre normé associé à la plus petite valeur propre de M_{cov}
  - NB : indéterminé à un changement de sens près
- Distance d_{min} :

$$d_{\min} = n^t G$$

La solution fait appel à l'analyse des directions principales de la matrice de covariance : « Analyse en Composantes Principales » (ACP)

Démonstration de la solution ACP

1/ S'il existe une solution,
condition nécessaire au minimum :

$$grad f = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial d} = 0$$

- Or :

$$\frac{\partial f}{\partial d} = -2\sum_{i=1}^{m}\left(n^t X_i - d\right)$$

- D'où :

$$d = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} n^t X_i = n^t\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i\right)$$

- Et donc :

$$d_{\min} = n^t G$$

2/ La fonction f pour la valeur de d au minimum, s'il existe, s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(\mathrm{n}, \mathrm{d}_{\min}) &= \sum_{i=1}^{m}\left(n^t X_i - d_{\min}\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{m}\left(n^t X_i - n^t G\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{m}\left[n^t (X_i - G)\right]^2 \end{aligned}$$

- Ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(\mathrm{n}, \mathrm{d}_{\min}) &= \sum_{i=1}^{m}\left[n^t (X_i - G)\right] \times \left[(X_i - G)^t n\right] \\ &= \sum_{i=1}^{m} n^t (X_i - G) \times (X_i - G)^t n \\ &= n^t M_{\mathrm{cov}} n \end{aligned}$$

- Par construction, la matrice M_{cov} est symétrique, positive, diagonalisable
- Pour tout vecteur n unitaire :

$$\lambda_{\min} \le n^t M_{\mathrm{cov}} n \le \lambda_{\max}$$

- Le minimum de f est donc atteint pour le vecteur propre associé à la valeur propre minimale $\lambda_{\min}$

C.Q.F.D

Le repère local peut être défini
par les trois vecteurs propres de M

Pseudo-code de calcul de normales

- Calcul d'un voisinage en X_0
  - (rayon ou nombre de points) → n points
- Calcul de la normale et du repère local
  - par ACP
- Optionnel :
  - Etude de la valeur du résidu pour validation

17

Démo calcul normales

CloudCompare

- Charger Bunny
- Calcul :
  - Edit -> Normals -> Compute
  - Local Surface Model : Plane (ACP)
  - Radius : auto
- Visualisation :
  - Décocher « normals »
  - Scalar Fields → Dip Direction

18

2/ Normales et courbures

2.1 Normales, repères, courbures

2.2 Calcul de normales par ACP

2.3 Calcul de courbures

a) Géométrie différentielle

(étude locale de la surface)

- Paramétrisation : $\varphi : \begin{cases} V \subset \Re^2 \to S \subset \Re^3 \\ (u,v) \mapsto P = \varphi(u,v) \end{cases}$
- Déplacement infinitésimal (du,dv)
  - sur la surface autour du point P
- Expression de la forme différentielle dφ
  - Dérivées au premier ordre

$$d\varphi = \varphi_u du + \varphi_v dv$$
$$= J\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} \varphi_u & \varphi_v \end{pmatrix}$$

Matrice Jacobienne (3x2)

Première forme fondamentale

- Définition :
  - Forme différentielle définie par :

$$DF_I(u,v) = d\varphi^t d\varphi = (du \quad dv) J^t J \binom{du}{dv}$$
$$I(u,v) = J^t J$$

    - NB : ne fait intervenir que les dérivées premières
- Propriété :
  - Première forme fondamentale et abscisse curviligne s

$$ds^2 = DF_I(u,v)$$

Deuxième forme fondamentale

- Définition :
  - Forme différentielle définie par :

$$DF_{II}(u,v) = -d\varphi^t dn = (du \quad dv) II \binom{du}{dv}$$

    - NB : fait intervenir les dérivées premières et secondes

Courbures principales

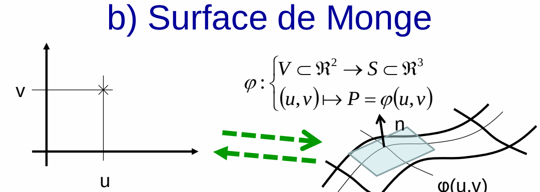
Les courbures principales K_{min} et K_{max} sont les solutions de l'équation de 2ᵉ degré :

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Avec :

$$\begin{cases} S = Tr(-II \times I^{-1}) \\ P = det(-II \times I^{-1}) \end{cases}$$

b) Surface de Monge



Paramétrisation d'une surface par un difféomorphisme du type :

$$\varphi : \begin{cases} V \subset \Re^2 \to S \subset \Re^3 \\ (u,v) \mapsto P = \begin{pmatrix} u & v & f(u,v) \end{pmatrix} \end{cases}$$

Défini dans un repère local à la surface (plan tangent)

La classe de φ est la même que celle de f (e.g. C^2 si f est C^2)

Formes fondamentales

- surface de Monge -

Jacobien : $J = (\varphi_u \quad \varphi_v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_u & f_v \end{pmatrix}$

Normale : n=$\frac{(-f_u \quad -f_v \quad 1)^T}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}$

Première forme fondamentale : I=$\begin{pmatrix} 1+f_u^2 & f_u f_v \\ f_u f_v & 1+f_v^2 \end{pmatrix}$

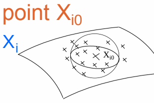
Deuxième forme fondamentale : II=$\frac{1}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}\begin{pmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{uv} & f_{vv} \end{pmatrix}$

25

c) Calcul de courbures par surface bi-quadratique

- cas particulier de surface de Monge -

- On cherche la meilleure surface bi-quadratique approchée dans le voisinage d'un point X_{i0}
  - Les n points du voisinage sont notés X_i



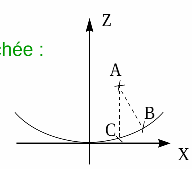
Repère local à la surface,
centré sur le point d'intérêt, (XY) = plan tangent

$$P(u,v) = (u, v, f_a(u,v))$$
$$f_a(u,v) = a_1 + a_2 u + a_3 v + a_4 u^2 + a_5 uv + a_6 v^2$$

Distance approchée d'un point à la surface

On utilise la distance (signée) approchée :

$$d(X_i, S) = z_i - f_a(x_i, y_i)$$



(approximation mais permet une résolution linéaire)

Résolution par la méthode des moindres carrés

- Fonction à minimiser :

$$g(a) = \sum_{i=1}^{n} [z_i - f_a(x_i, y_i)]^2$$

6 paramètres (a) ; pas de contrainte

Résolution de la minimisation pour la surface bi-quadratique

- On réécrit $f_a(x,y)$:

$$f_a(x,y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2$$
$$f_a(x,y) = a^T Q(x,y)$$

- et la fonction g à minimiser :

$$g(a) = \sum_{i=1}^{n} [z_i - a^t Q(x_i, y_i)]^2$$

Solution

- En notant M la matrice 6x6 :

$$M = \sum_{i=1}^{n} Q(x_i, y_i) \times Q(x_i, y_i)^t$$

- et D le vecteur à 6 composantes :

$$D = \sum_{i=1}^{n} z_i \times Q(x_i, y_i)$$

- Si M est inversible, le vecteur solution de la minimisation vaut :

$$\boxed{a = M^{-1} \times D}$$

Démonstration

- Au minimum s'il existe, le gradient de f est nul

$$\nabla_a \mathrm{f} = 0$$

- Le gradient vaut :

$$\nabla_a \mathrm{f} = -\frac{1}{n_{ddl}} \sum_{i=1}^{n} 2\left[z_i - a^t Q(x_i, y_i)\right] \times Q(x_i, y_i)$$

- Par équivalence, on a :

$$\nabla_a \mathrm{Res} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{n_{ddl}} \sum_{i=1}^{n} 2\left[z_i - a^t Q(x_i, y_i)\right] \times Q(x_i, y_i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} z_i \times Q(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{n} \left[a^t Q(x_i, y_i)\right] \times Q(x_i, y_i)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} z_i \times Q(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{n} Q(x_i, y_i) \times \left[Q(x_i, y_i)^t a\right]$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} z_i \times Q(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{n} \left[Q(x_i, y_i) \times Q(x_i, y_i)^t\right] \times a$$

$$\Leftrightarrow M \times a = D$$

- La matrice M est par définition positive.
- Si M est inversible, il existe une solution au problème de minimisation :

$$a = M^{-1} \times D$$

- On montre que le Hessien vaut :

$$H = 2M$$

  - C'est une matrice positive donc la solution trouvée est bien un minimum

C.Q.F.D

… puis les courbures principales

- Expression de la normale en (0,0) d'une surface bi-quadratique :

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + a_2^{\ 2} + a_3^{\ 2}}} \begin{bmatrix} -a_2 \\ -a_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Courbures principales :
  - somme S et produit P :

$$\begin{cases} S = 2\dfrac{(1+a_2^{\ 2}) \times a_6 + (1+a_3^{\ 2}) \times a_4 - a_2 a_3 a_5}{\left(1 + a_2^{\ 2} + a_3^{\ 2}\right)^{3/2}} \\ P = \dfrac{4a_4 a_6 - a_5^{\ 2}}{\left(1 + a_2^{\ 2} + a_3^{\ 2}\right)^{3/2}} \end{cases}$$

  - K_{max} et K_{min} :

$$\begin{cases} K_{\max} = \dfrac{S + \sqrt{S^2 - 4P}}{2} \\ K_{\min} = \dfrac{S - \sqrt{S^2 - 4P}}{2} \end{cases}$$

Pseudo-code de calcul de courbures

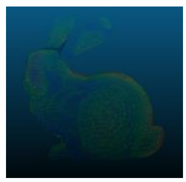
- Calcul d'un voisinage en X_0
  - (rayon ou nombre de points) → n points
- Calcul de la normale et du repère local
  - par ACP
- Calcul des points du voisinage dans le repère local
  - Transformation affine (rotation – translation)
- Calcul du vecteur paramètres a
  - Expression des courbures principales

37

Centre de Robotique
ECOLE DES MINES DE PARIS

Démo calcul courbures
CloudCompare

- Charger Bunny
- Calcul :
  - Tools -> Other -> Geometric Features
  - Curvature : Mean, Gaussian
  - Radius : 0.05
- Visualisation :
  - Décocher « normals »
  - Scalar Fields
    → Mean, Gaussian,



Sommaire

1/ Normales et courbures

2/ Descripteurs et points d'intérêt

2.1 Points d'intérêt

- Point d'intérêt / point caractéristique
  - Point de la **scène** ou de l'**objet** facile et robuste à identifier entre plusieurs conditions d'observation
- Notions équivalentes :
  - Cibles (topographie)
  - Amers (navigation ; robotique)

Points Harris 3D sur des modèles synthétiques [Sipiran, et al., 2010]

Usages des points d'intérêt

- Stéréovision (2D)
  - Appariements entre images
- Recalage (2D, 3D)
  - Rigide, non rigide
- Navigation (2D, 3D)
  - Points de repères
- Détection, reconnaissance, classification (2D, 3D)
  - Comparaison avec des bases d'objets

Détecteurs et descripteurs

- Détecteur :
  - **Identifie et localise** un point d'intérêt
- Descripteur // *features*
  - Associe au point identifié une **signature**
    - Représentation descriptive locale
  - Cette signature facilitera les **comparaisons** entre images
- Certaines méthodes associent les deux
  - Détecteur / descripteur

Détecteurs / descripteurs sur nuages de points

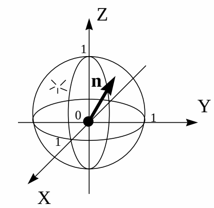
- Besoin de description locale des courbes et surfaces
  - Basés sur **normales, courbures, etc.**
- Quelques détecteurs :
  - Local Surface Patches (LSP) (Chen, et al.,2007), Classification selon SI (Hozatlı, 2009), KeyPoint Quality (KPQ) (Mian, et al., 2009), Harris 3D (Sipiran, et al., 2010), SC et HK multi- échelle (Akagunduz, et al., 2009), SURF 3D (Knopp, et al., 2010), Courbure multi- échelle (Ho, et al., 2009), THRIFT (Flint, et al., 2007).
- Quelques descripteurs :
  - LSP, THRIFT, SURF 3D, Spin (Johnson, et al., 1999), SHOT (Tombari, et al., 2010) et CSHOT (Tombari, et al., 2011).

[Shaiek 2013]

2.2 Descripteurs basés sur les normales

- Sphère Gaussienne
- Spin Image

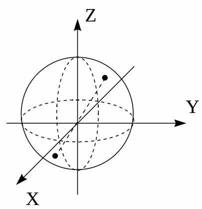
Normales et Sphère Gaussienne



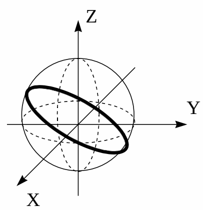
Les normales sont normées. On les représente par leurs extrémités sur la sphère de rayon unité.

Représentation locale ou globale

[Horn 84, etc.]



(plan)

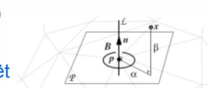


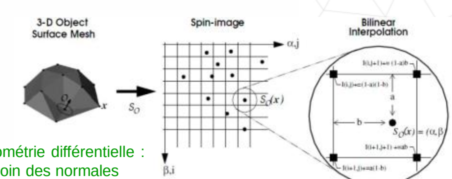
(cylindre)

Représentation d'un plan et d'un cylindre sur la Sphère Gaussienne

Descripteur « Spin Image »

- Description de points d'intérêt [Johnson, et al., 1999]
  - Images d'accumulation 2D
    - coordonnées cylindriques
    - repère local au point d'intérêt

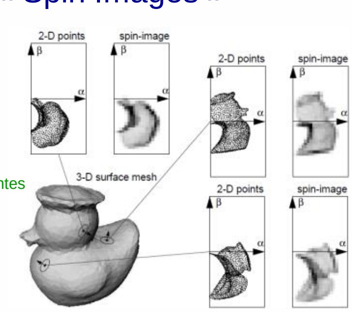




Géométrie différentielle : Besoin des normales (repère local tangent)

Exemple de création de « Spin Images »

Pour 3 points d'intérêt :
- Nuage de points en coordonnées cylindriques locales
- « Spin Images » résultantes



2.3 Descripteurs basés sur les courbures

- Courbures principales
- Labels H-K et variantes
- Graphe Global de Courbures

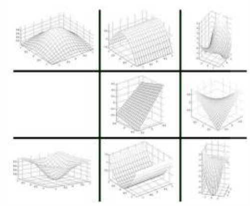
Courbures et cartes de labels H-K

- Les courbures sur une surface sont représentées par des labels,
  - fonction des courbures moyenne et gaussienne H et K :

$$\begin{cases} H = \dfrac{K_{max} + K_{min}}{2} \\ K = K_{max} \times K_{min} \end{cases}$$

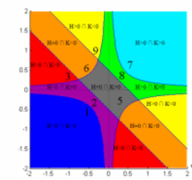
Cartes de labels H-K

[Besl and Jain 88]



	K>0	K=0	K<0
H<0	Convex (1) (*Elliptic or Umbilic*)	Ridge (2) (Convex *Parabolic*)	Saddle Ridge (3) (*Hyperbolic*)
H=0	*(Not possible)* (4)	Planar (5)	Minimal (6)
H>0	Concave (7) (*Elliptic or Umbilic*)	Valley (8) (Concave *Parabolic*)	Saddle Valley (9) (*Hyperbolic*)

Difficulté numérique de valeurs nulles exactes : choix d'un seuil ε



Classification HK dans le plan (k1, k2) [Akagündüz, 2011]

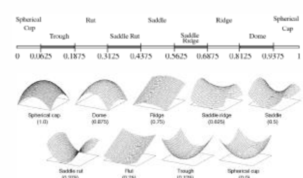
Courbures et indices SC

$$\begin{cases} C = \sqrt{\dfrac{K_{max}^{\,2} + K_{min}^{\,2}}{2}} \\ S = \dfrac{2}{\pi}\arctan\left(\dfrac{K_{max} + K_{min}}{K_{max} - K_{min}}\right) \end{cases}$$

[Koenderink 90, Koenderink and van Doorn 92]

Deux types de paramètres dissociés :
- dimensionnel (C) : Curvedness « Intensité de courbure »
- a-dimensionnel (S) : Shape « Type de forme »

Carte de labels SC



Types de formes selon la valeur de S

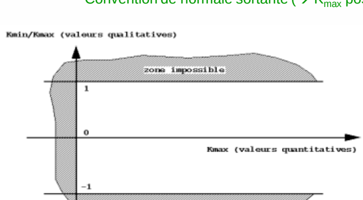
Convex (Elliptic) (1)	$S \in [+5/8, 1] \cap C > C_{zero}$
Convex (Parabolic) (2)	$S \in [+3/8, +5/8] \cap C > C_{zero}$
Saddle Ridge (3)	$S \in [+3/16, +3/8] \cap C > C_{zero}$
Planar (5)	$C < C_{zero}$
Hyperbola (6)	$S \in [-3/16, +3/16] \cap C > C_{zero}$
Concave (Elliptic) (7)	$S \in [-1, -5/8] \cap C > C_{zero}$
Concave (Parabolic) (8)	$S \in [-5/8, -3/8] \cap C > C_{zero}$
Saddle Valley (6)	$S \in [-3/16, +3/16] \cap C > C_{zero}$

Labels selon les valeurs de S et C

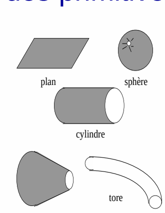
Graphe Global de Courbures

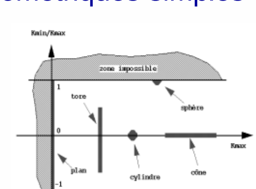
- Représentation globale des courbures
  - Distinction entre grandeurs dimensionnelles (Kmax, axe X) et adimensionnelles (Kmin/Kmax, axe Y)

Convention de normale sortante (→ K_{max} positif)



Intérêt du GGC pour des primitives géométriques simples





Primitive	K_{max}	K_{min}
Plan	0	0
Sphère	1/R	1/R
Cylindre	1/R	0
Cône	[a,b]	0
Tore	1/r	[-1/(R-r),1/(R+r)]

[Goulette 97]

Evolution des détecteurs et descripteurs // apprentissage

- Descripteurs basés sur géométrie
  - Revisités par des descriptions apprises sur des « features » bas niveau
    - Basés sur valeurs propres, vecteurs propres ACP
- Détecteurs
  - Limiter nombre de points d'intérêt
  - Revisité : informations denses
- Utilisés dans méthodes d'apprentissage

56

Centre de Robotique ECOLE DES MINES DE PARIS

Descripteurs basés ACP

Ces descripteurs sont basés sur des éléments calculés par ACP : valeurs propres, normale (vecteur propre)
$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$

$$verticality = \left|1 - \frac{2\mathrm{angle}(\mathbf{n}, \mathbf{e}_z)}{\pi}\right| = \frac{2\arcsin(|\langle \mathbf{n}, \mathbf{e}_z\rangle|)}{\pi}$$

$$linearity = 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

$$planarity = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_1}$$

$$sphericity = \frac{\lambda_3}{\lambda_1}$$

Intègrent des éléments différentiels d'ordre 0 ou 1 (pas les courbures)

57

Centre de Robotique ECOLE DES MINES DE PARIS

FIN
Ce qui a été vu aujourd'hui

1/ Normales et courbures

2/ Descripteurs et points d'intérêt

58

Centre de Robotique ECOLE DES MINES DE PARIS

Références

- [Goulette 97] Thèse F. Goulette, ENSMP
- [Struik 50] Classical Differential Geometry
- Bronstein A., Bronstein M., Kimmel R. (2008). Numerical geometry of non-rigid shapes. Springer. http://www.cs.technion.ac.il/~mbron/
- Andrew Pressley, Elementary differential geometry, Springer
- Barrett O'neill, Elementary Differential geometry
- Manfredo DoCarmo , Differential Geometry of Curves and Surfaces
- Horn 84
- Akagündüz, 2011
- Koenderink 90,
- Koenderink and van Doorn 92
- Moravec 77
- Sipiran, et al., 2010

59

Centre de Robotique ECOLE DES MINES DE PARIS

Références (2)

- Shaiek 2013
- Local Surface Patches (LSP) (Chen, et al.,2007),
- Classification selon SI (Hozatlı, 2009),
- KeyPoint Quality (KPQ) (Mian, et al., 2009),
- SC et HK multi- échelle (Akagunduz, et al., 2009),
- SURF 3D (Knopp, et al., 2010),
- Courbure multi- échelle (Ho, et al., 2009),
- THRIFT (Flint, et al., 2007).
- Spin (Johnson, et al., 1999),
- SHOT (Tombari, et al., 2010)
- CSHOT (Tombari, et al., 2011).
- Chaine et al. 1999
- Medioni et al. xx

60

Centre de Robotique ECOLE DES MINES DE PARIS