Interval解题报告

淄博实验中学　唐梓天

题目大意

定义本征区间为：数列的一个区间，其满足，将其内部的数字排序后，刚好构成一个连续整数序列。**（为方便后文描述，这里区间和本征区间的定义与原题面不同）**

给定1~n的排列$A[1..n]$与m个询问区间，对每个询问区间求出最短的包含它的本征区间。

$1 \leq n, m \leq 10^5$。部分测试点强制在线。

解法一

对于子任务1，保证$A[i] = i$。

显然任意一个区间均为本征区间，于是对于询问(xi, yi)，答案为$[xi, yi]$，即可通过该子任务。

解法二

对于子任务2，$n, m <= 300$。

首先，我们求出所有本征区间。只需要枚举区间左端点l，再从l到n枚举右端点r，在端点移动过程中可以简单地维护当前区间是否为本征区间，具体方法此处不再赘述。

在$O(n^2)$处理出每个区间是否为本征区间后，对于每个询问，$O(n^2)$枚举所有包含询问区间的区间，找到最小的一个本征区间即可。

时间复杂度$O(mn^2)$，即可通过该子任务。

解法三

对于子任务3，$n, m <= 1000$。

同解法二，先求出所有本征区间。再将左端点相同的本征区间放到一起，按右端点排序。

对于每个询问，只需枚举左端点l，在所有以l为左端点的本征区间中二分找到最短的包含询问区间的一个即可。

时间复杂度$O(mnlogn)$，即可通过该子任务。

解法四

对于子任务4，保证询问区间的左端点为1。

显然答案区间的左端点一定是1，在解法三中只处理左端点为1的区间即可。

时间复杂度$O(n + mlogn)$，即可通过该子任务。

以上皆为送分部分

本解题报告将给出两种不同的解题思路，基于分治的做法见解法五、六、九，基于线段树的做法见解法七、八、十。

解法五

对于子任务5，保证询问区间的长度为2。

首先来证明本征区间的一个性质。

性质1：若$[a,b],[c,d]$均为本征区间，且$a \le c \le b \le d$，那么$[c,b],[a,d]$也都是本征区间。

证明：

首先用反证法。若$[c,b]$不为本征区间，那么必然存在$Min\{A[c,b]\} \le x \le Max\{A[c,b]\}$使得$pos[x] \notin A[c,b]$。又由$[a,b]$为本征区间，得$pos[x] \in A[a,c)$。同理得$pos[x] \in A(b,d]$。于是$pos[x] \in A[a,c) \cap A(b,d] = \emptyset$，显然不成立。于是$[c,b]$为本征区间。

由于$A[a,b],A[c,d]$均包含连续数字，且交集不为空，容易证明$A[a,b] \cup A[c,d] = A[a,d]$也包含连续数字，即$[a,d]$为本征区间。

考虑一种分治做法，对所有长度为2的区间求出其答案。

对于分治区间$[L,R](L \le R)$，记区间中点$mid = \frac{L+R}{2}$，用所有被$[L,R]$包含且包含$[mid,mid+1]$（为方便描述，下文中将该条件称为**条件A**）的区间去更新$[L,R]$内所有长度为2的区间的答案。具体方法如下：

若要更新$[x,x+1](L \le x \le mid)$，只要对每个答案区间的左端点$l(L \le l \le x)$，求出最短的包含$[mid,mid+1]$的本征区间，记其长度为$Len[l]$（不存在则为$+\infty$），对Len求前缀最小值$PreLen$，对每个$L \le x \le mid$用$PreLen[x]$更新$[x,x+1]$的答案即可。

问题在于如何求解Len。

由**性质1**可得**推论1：若$l_1 \le l_2 \le mid$，$[l_1,r_1]$为所有左端点为l_1中最短的包含$[mid,mid+1]$的本征区间，同理定义$[l_2,r_2]$，只要r_1,r_2均存在，那么$r_1 \ge r_2$**。反证法易证，不再赘述。

于是可以从大到小枚举$l(L \le l \le mid)$，那么对应的r单调不减，只需从$mid+1$开始右移。

记$MinP(a,b)$为$pos[a..b]$中的最小值，$MaxP(a,b)$为最大值：

若$MinP(Min\{A[l,r]\},Max\{A[l,r]\}) \le l$，则$Len[l] = +\infty$；

若$MaxP(Min\{A[l,r]\},Max\{A[l,r]\}) \ge r$，则$r$需要右移；

否则，$Len[l] = r - l + 1$。

其中，区间最值既可以在指针移动的同时维护，也可以用ST表求解。

如此便可对$L \le x \le mid$更新$[x,x+1]$的答案，对于$mid+1 \le x \le R$的部分同理。

时间复杂度$O(nlogn)$，即可通过该子任务。

解法六

对于子任务6，不强制在线。

依然采用解法五中的分治法。

在解法五中，我们用所有满足**条件A**的区间去更新$[L,R]$内所有长度为2的区间的答案。由于可以离线，在这里我们用所有满足**条件A**的区间去更新所有被$[L,R]$包含的询问区间的答案。

若要更新$[x,y]$，先找到最大的$l_1 \le x$，使得l_1存在对应的$r_1 \ge mid+1$满足$[l_1,r_1]$为本征区间，并令r_1为其中最小的一个。同样再找到$r_2 \ge y$与对应的最大的l_2。

接下来要证明，所有符合**条件A**的本征区间中，$[l_1,r_1] \cup [l_2,r_2]$是最小的包含$[x,y]$的本征区间：

首先证明$[l_1,r_1] \cup [l_2,r_2]$是一个本征区间。由于二者均包含$[mid,mid+1]$，于是交集不为空。当$[l_1,r_1]$与$[l_2,r_2]$存在包含关系时，$[l_1,r_1] \cup [l_2,r_2]$显然是本征区间。当二者不包含但相交时，由**性质1**可得$[l_1,r_1] \cup [l_2,r_2]$为本征区间。

再证明其长度最小。对于任意一个满足**条件A**且包含$[x,y]$的本征区间$[X,Y]$，根据上文对l_1的定义，必然有$X \le l_1$，又由**推论1**可知，$Y \ge r_1$。同理可得$Y \ge r_2$与$X \le l_2$。于是$X \le Min(l_1,l_2) \le Max(r_1,r_2) \le Y$，即$[X,Y]$的长度不小于$[l_1,r_1] \cup [l_2,r_2]$的长度。

原题得证。

于是像解法五一样，先求出Len，再记$MaxPre[i]$为$L \le x \le i$中最大的$Len[x] \ne +\infty$的x，对右端点做同样的操作，即可按上文方法更新所有被$[L,R]$包含的询问区间。

时间复杂度$O((n+m)logn)$，可通过该子任务。

解法七

对于子任务6，不强制在线。

考虑另外一种不依赖于分治的做法。

由**性质1**得到一个**推论2：若有多个包含$[x,y]$的本征区间，那么其中最短的一个一定是右端点最小的**。反证法易证，不再赘述。

于是有这样一种想法：从左到右枚举右端点r，找到其对应的最小的l使得$[l,r]$为本征区间，那么所有被$[l,r]$包含且还未求得答案的询问区间$[x,y]$，其答案区间右端点一定是r，只要再找到$l' \le x$使得$[l',r]$为本征区间，那么$[x,y]$的答案区间即为$[l',r]$。

现在面临一个问题：如何更便捷地判断一个区间$[l,r]$是否为本征区间。

性质2：$[l,r]$为本征区间当且仅当$Max\{A[l,r]\} - Min\{A[l,r]\} = r-l$。

证明：由于A是一个排列，$A[l,r]$内的数字一定各不相同，令$N=$数值在$[Min,Max]$之间而位置不在$[l,r]$的数字数量，则$Max\{A[l,r]\} - Min\{A[l,r]\} + 1 - N = [l,r]$的长度$= r-l+1$。

当$[l,r]$为本征区间时，$N=0$，原式成立；当原式成立时，$N=0$，易得$[l,r]$为本征区间。**性质2**得证。

于是，当r确定时，$[l,r]$为本征区间当且仅当$l+Max\{A[l,r]\}-Min\{A[l,r]\}=r$。这启发我们在移动右端点$r$时，对每个$l$维护出$l+Max\{A[l,r]\}-Min\{A[l,r]\}$。这是一个利用单调栈和线段树即可维护的经典问题，即用单调栈维护区间最值，当最值变化时用线段树进行区间加减，具体细节不再赘述。

我们还要方便找出满足$l+Max\{A[l,r]\}-Min\{A[l,r]\}=r$的$l$。由**性质2**的证明过程易得$l+Max\{A[l,r]\}-Min\{A[l,r]\}\geq r$，于是只需在线段树上维护区间最小值及其位置，即可在线段树上找出上文中r对应的l以及$[x,y]$对应的l'。

至于找出所有被$[l,r]$包含的未求得答案的询问区间，由于允许离线，可以将询问按右端点排序，再维护一个set，当右端点r移动时，将以r为右端点的询问区间按其左端点放入set，求得l后，从set中取出左端点不小于l的询问即可。

时间复杂度$O((n+m)logn)$，可通过该子任务。

解法八

对于子任务7，保证答案区间的右端点单调不降。

答案右端点单调不降满足解法七中对询问求得答案的顺序，对解法七稍作改动即可在不调整询问顺序的情况下依次回答询问。

时间复杂度$O((n+m)logn)$，可通过该子任务。

解法九

将解法六中每层分治时得到的Len与$MaxPre$记录下来，即可每次$O(logn)$回答询问。

时间复杂度$O((n+m)logn)$，可通过本题。

解法十

根据解法七，对每个r求出最小的$L[r]$使得$[L[r],r]$为本征区间，那么对于询问$[x,y]$，只要找到最小的r满足$r\geq y$且$L[r]\leq x$即可。这一步可以在求出L后对L建立线段树，维护区间最小值及其位置，即可在线段树上对$[x,y]$找到对应的r。

找到r后，只需将解法七中的线段树改为可持久化线段树，在r对应的历史版本中查询l'，即可在线回答询问。

时间复杂度$O((n+m)logn)$，可通过本题。