Solution of 矩形

题意

给定 a,b,c 及数列 f_i 的值，根据以下递推关系定义函数 F：

$$F(i,j)=\begin{cases}0, & \text{if } i=0;\\ f_i, & \text{if } i>0 \text{ and } j=0;\\ aF(i-1,j)+bF(i,j-1)+c, & \text{if } i>0 \text{ and } j>0.\end{cases}$$

给出 n,m,h,p 的值，计算

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}F(i,j)h^{(i-1)m+(j-1)}\right) \bmod p$$

的值。

其中：
$1\le n\le 10^6$
$1\le m\le 10^9$
$10^8\le p\le 10^9$，且 p 是质数
$0\le h,a,b,c,f_i<p$

算法 1

对于子任务 1，按照题意直接模拟，计算出所有 $1\le i\le n, 1\le j\le m$ 的 $F(i,j)$ 的值从而得到答案。

时间复杂度 $O(nm)$。
可以通过子任务 1，获得 5 分。

算法 2

对于子任务 3，容易发现，当 $b=0$ 时矩阵中不同列不会进行转移，因此每列是独立的，并且从第 1 列到第 m 列每列都完全相同。
我们可以求出第一列的每个数的值，记 $g_i=F(i,1)$，根据题意得，第 i $(1\le i\le m)$ 列的贡献

$$ans_i=\sum_{k=1}^{n}g_kh^{(k-1)m+(i-1)}$$

易得：

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} ans_i &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} g_k h^{(k-1)m+(i-1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} g_k h^{(k-1)m} \sum_{i=0}^{m-1} h^i
\end{aligned}
$$

当 $h = 1$ 时:

$$
\sum_{i=1}^{m} ans_i = \frac{h^m - 1}{h - 1} \sum_{k=1}^{n} g_k h^{(k-1)m}
$$

当 $h = 1$ 时:

$$
\sum_{i=1}^{m} ans_i = m \sum_{k=1}^{n} g_k h^{(k-1)m}
$$

根据上述结果计算即可。
时间复杂度 $O(n)$，可以通过子任务 3，获得 10 分，结合算法 1 可获得 15 分。

算法 3

考虑一个函数 $G(x, y)$，设 $G(x, y)$ 在 $x \geq 0, y \geq 1$ 时满足题目中的递推式，即函数 G 为将每一个 f_i 替换为任意 g_i 后的任意函数。
考虑改变一个 g_k 时 G 的答案的改变量，我们设将 g_k 改变为 $g_k + \Delta g_k$,改变后根据递推式定义的函数称为 G'。
我们可以给出:

$$
G'(x, y) = G(x, y) + [x \geq k]\binom{x-k+y-1}{x-k} a^{x-k} b^y \Delta g_k (x, y \geq 1)
$$

以上公式可以轻易地使用数学归纳法证明。
定义 $\Delta G(x, y) = G'(x, y) - G(x, y)$, 因此

$$
\Delta G(x, y) = [x \geq k]\binom{x-k+y-1}{x-k} a^{x-k} b^y \Delta g_k (x, y \geq 1)
$$

可以发现 $\Delta G(x, y)$ 仅与 Δg_k 有关而与 $G(x, y)$ 无关。
再考虑答案式子的变化量$\Delta ans = ans' - ans$,

$$
\Delta ans = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \Delta G(i, j) h^{(i-1)m+(j-1)}
$$

现在我们将所有 g_i 置为 0 ，设当前 $ans = st$,若 $c = 0$,那么此时 $G(x, y)$ 均为 0 , $st = 0$;
接下来我们依次对每一个 $i \in [1, n]$ 将 g_i 增加 f_i 的值，并改变所有 $x \geq 0, y \geq 1$ 的 $G(x, y)$ 使其符合递推式，最终将G函数变为与F函数完全相同。根据上面的结论我们容易得出最终答案$ans = st + \sum_{k=1}^{n} ans_k$,其中:

$$
ans_k = f_k \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} [i \geq k]\binom{i-k+j-1}{i-k} a^{i-k} b^j h^{(i-1)m+(j-1)}
$$

上面我们形式化地说明了每一个 f_i 对答案的贡献是独立的，接下来我们考虑如何计算这些贡献。

$$
\begin{aligned}
ans_k &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[i \ge k]\binom{i-k+j-1}{i-k}a^{i-k}b^{j}h^{(i-1)m+(j-1)} \\
&= bh^{(k-1)m}\sum_{i=0}^{n-k}(ah^m)^i\sum_{j=0}^{m-1}\binom{i+j}{i}(bh)^j
\end{aligned}
$$

设

$$
S(k,a)=\sum_{0\le i<m}\binom{k+i}{k}a^i
$$

我们只需对于所有 $k \in [0,n)$ 快速求出 $S(k,bh)$ 即可解决 $c=0$ 时的问题。
当 $n,m \le 10^5$，$p=998244353$ 时，可以看到：

$$
S(k,a)=\frac{1}{k!}\sum_{0\le i<m}\frac{a^i}{i!}(k+i)!
$$

稍做变形即可发现这是一个卷积的形式，可以使用快速数论变换（NTT）快速完成计算，时间复杂度 $O((n+m)\log(n+m))$，虽然不能获得任何分数，但能部分解决子任务 2。
我们需要追求更优秀的做法。

当 $a=1$ 时：

$$
\begin{aligned}
S(k,a) &= \sum_{0\le i<m}\binom{k+i}{k}=\binom{k+m}{k+1} \\
&= \frac{(k+m)^{\underline{k+1}}}{(k+1)!}=\frac{m^{\overline{k+1}}}{(k+1)!}
\end{aligned}
$$

当 $a=1$ 时，根据二项式系数的加法公式，可以得到：

$$
\begin{aligned}
S(k,a)=\sum_{0\le i<m}\binom{k+i}{k}a^i &= \sum_{0\le i<m}\left(\binom{k+i-1}{k-1}+\binom{k+i-1}{k}\right)a^i \\
&= \sum_{0\le i<m}\binom{k-1+i}{k-1}a^i + a\sum_{0\le i<m-1}\binom{k+i}{k}a^i \\
&= S(k-1,a)+a\left(S(k,a)-\binom{m+k-1}{k}a^{m-1}\right)
\end{aligned}
$$

整理得到：

$$
(a-1)S(k,a)=\binom{m+k-1}{k}a^m-S(k-1,a)
$$

因此：

$$
S(k,a)=\frac{\frac{m^{\overline{k}}}{k!}a^m-S(k-1,a)}{a-1}
$$

这是一个递推式的形式，我们还需知道递推初值：

$$
S(0,a)=\sum_{0\le i<m}a^i=\frac{a^m-1}{a-1}
$$

根据上面的结果，我们已经可以在 a 不变时 $O(n)$ 计算每一个 $S(k,a)$ $(k\in[0,n))$ 的值，完全解决子任务 4，获得 28 分，结合算法 1、2 可获得 43 分。

算法 4

当 $f_i=0$ 时，递推式变为：

$$F(i,j)=\begin{cases}0 & \text{if } i=0 \text{ or } j=0;\\ aF(i-1,j)+bF(i,j-1)+c & \text{if } i>0 \text{ and } j>0.\end{cases}$$

为了方便，我们扩展这个递推关系为：

$$G(i,j)=\begin{cases}0 & \text{if } i=0 \text{ or } j=0;\\ aG(i-1,j)+bG(i,j-1)+C_{i,j} & \text{if } i>0 \text{ and } j>0.\end{cases}$$

其中 C 为给定的任意矩阵，当 C 中值均为 c 时 $F=G$。
考虑改变一个 C_{k_1,k_2} 时 G 的答案的改变量，我们设将 C_{k_1,k_2} 改变为 $C_{k_1,k_2}+\Delta C_{k_1,k_2}$,改变后根据递推式定义的函数称为 G' 。
与算法 3 中相似，我们可以给出：

$$G'(x,y)=G(x,y)+[x\ge k_1][y\ge k_2]\binom{x-k_1+y-k_2}{x-k_1}a^{x-k_1}b^{y-k_2}\Delta C_{k_1,k_2}$$

同样容易用归纳法证明其正确性。
那么：

$$\Delta G(x,y)=[x\ge k_1][y\ge k_2]\binom{x-k_1+y-k_2}{x-k_1}a^{x-k_1}b^{y-k_2}\Delta C_{k_1,k_2}$$

$$\Delta ans=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\Delta G(i,j)h^{(i-1)m+(j-1)}$$

现在我们将所有 $C_{x,y}$ 设为 0 ,显然此时所有 $G(x,y)=0$ ，$ans=0$;
接下来对于每一对 $(x,y)(x\in[1,n],y\in[1,m])$,将 $C_{x,y}$ 增加 c ,并改变所有的 $G(x,y)$ 使其符合递推式，最终将G函数变为与F函数完全相同。根据上面的结论我们容易得出最终答案

$$ans=\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{m}ans_{k_1,k_2}$$

其中:

$$\begin{aligned}ans_{k_1,k_2}&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}h^{(i-1)m+(j-1)}[i\ge k_1][j\ge k_2]\binom{i-k_1+j-k_2}{i-k_1}a^{i-k_1}b^{j-k_2}\\&=h^{(k_1-1)m+k_2-1}\sum_{i=0}^{n-k_1}\sum_{j=0}^{m-k_2}h^{im+j}\binom{i+j}{i}a^ib^j\end{aligned}$$

因此：

$$\begin{aligned}ans &= \sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{m} ans_{k_1,k_2}\\ &= \sum_{0\le i<n}\sum_{0\le j<m} h^{im+j}\binom{i+j}{i}a^ib^j\sum_{k1=1}^{n}\sum_{k2=1}^{m}[i+k_1\le n][j+k_2\le m]h^{(k_1-1)m+k_2-1}\\ &= \sum_{0\le i<n}\sum_{0\le j<m} h^{im+j}\binom{i+j}{i}a^ib^j\sum_{0\le k_1<n-i}h^{k_1m}\sum_{0\le k_2<m-j}h^{k_2}\end{aligned}$$

当 $n,m\le 10^5$，$p=998244353$ 时，

$$ans=\sum_{s\ge 0}s!\sum_{0\le i<n}\sum_{0\le j<m}[i+j=s]\frac{(h^ma)^i}{i!}\frac{(hb)^j}{j!}\sum_{0\le k_1<n-i}h^{k_1m}\sum_{0\le k_2<m-j}h^{k_2}$$

显然上式为一个卷积的形式，同样可以用 NTT 快速计算，时间复杂度 $O((n+m)\log(n+m))$。
我们还需要进一步推导：

$$ans=\sum_{0\le i<n}h^{im}a^i\left(\sum_{0\le k_1<n-i}h^{k_1m}\right)\sum_{0\le j<m}h^j\binom{i+j}{i}b^j\left(\sum_{0\le k_2<m-j}h^{k_2}\right)$$

当 $h=1$ 时

$$\begin{aligned}\sum_{0\le j<m}h^j\binom{i+j}{i}b^j\sum_{0\le k_2<m-j}h^{k_2} &= \sum_{0\le j<m}h^j\binom{i+j}{i}b^j\frac{h^{m-j}-1}{h-1}\\ &= \frac{\sum_{0\le j<m}\binom{i+j}{i}b^j(h^m-h^j)}{h-1}\\ &= \frac{h^mS(i,b)-S(i,hb)}{h-1}\end{aligned}$$

当 $h=1$ 时

$$ans=\sum_{0\le i<n}a^i(n-i)\sum_{0\le j<m}\binom{i+j}{i}b^j(m-j)$$

设

$$T(k,a)=\sum_{0\le i<m}\binom{k+i}{k}a^i(m-i)$$

我们需要对于所有 $k\in[0,n)$ 快速求出 $T(k,a)$。

当 $a=1$ 时

$$
\begin{aligned}
T(k,a) &= \sum_{0\le i<m} \binom{k+i}{k} \sum_{1\le j\le m-i} 1 \\
&= \sum_{1\le j\le m} \sum_{0\le i\le m-j} \binom{k+i}{k} \\
&= \sum_{0\le j<m} \sum_{0\le i\le j} \binom{k+i}{k} \\
&= \sum_{0\le j<m} \binom{k+j+1}{k+1} = \binom{k+m+1}{k+2} \\
&= \frac{m^{\overline{k+2}}}{(k+2)!}
\end{aligned}
$$

可以 $O(n)$ 计算。

当 $a=1$ 时

$$
\begin{aligned}
T(k,a) &= \sum_{0\le i<m} \binom{k+i}{k} a^i (m-i) \\
&= \sum_{0\le i<m} \left(\binom{k+i-1}{k-1} + \binom{k+i-1}{k} \right) a^i (m-i) \\
&= T(k-1,a) + a \sum_{0\le i<m} \binom{k+i}{k} a^i (m-i-1) \\
&= T(k-1,a) + aT(k,a) - aS(k,a)
\end{aligned}
$$

可得：

$$
T(k,a) = \frac{aS(k,a) - T(k-1,a)}{a-1}
$$

递推初值的计算如下：

$$
\begin{aligned}
T(0,a) &= \sum_{0\le i<m} a^i (m-i) \\
&= m + a \sum_{0\le i<m} a^i (m-i-1) \\
&= m + aT(0,a) - aS(0,a)
\end{aligned}
$$

所以

$$
T(0,a) = \frac{aS(0,a) - m}{a-1}
$$

因此 a 固定时所有 $T(k,a)$ $(k \in [0,n))$ 也可以 $O(n)$ 计算。
所以

$$
ans = \sum_{0\le i<n} a^i (n-i) \sum_{0\le j<m} \binom{i+j}{i} b^j (m-j) = \sum_{0\le i<n} a^i (n-i) T(b,j)
$$

时间复杂度 $O(n)$，可以通过子任务 5，期望得分 30 分，结合算法 1、2 可得 45 分。

算法 5

根据算法 3 中提到的

$$ans = st + \sum_{k=1}^{n} ans_k$$

显然 st 即为将所有 f_i 置为 0 并运行算法 4 的答案，$\sum_{k=1}^{n} ans_k$ 即为将 c 置为 0 并运行算法 3 的答案，因此结合算法 3 和算法 4 中用卷积计算的方法可以做到时间复杂度 $O((n+m)\log(n+m))$。
可以通过子任务 2 ,期望得分 24 分，结合算法 1、2 可获得 39 分。

算法 6

根据算法 5 中提到的结果，直接将运行算法 3 和算法 4 的结果代数相加，即可得到最终答案，解决问题。
时间复杂度 $O(n)$，可以通过所有测试数据，获得 100 分。