小Z的礼物解题报告

北京师范大学附属实验中学 朱子健

1 试题大意

一个n*m的网格，有一些格子有标记。每次随机覆盖相邻的两格，求期望多少次后，所有有标记的格子都被覆盖过。

2 数据范围

对于所有数据，满足$1 \le n \le 6, 2 \le m \le 100$。为方便表示，设$cnt$表示标记格子的数量，$s$表示由标记格子组成的最大连通块的大小。

Subtask1(10分)：$cnt \le 6$

Subtask2(20分)：$cnt \le 20$

Subtask3(20分)：$s \le 1$

Subtask4(20分)：$s \le 16$

Subtask5(30分)：无特殊限制

3 算法介绍

3.1 $cnt \le 6$

设dp_i表示剩余标记集合为i时，期望需要覆盖的次数。直接列出2^{cnt}个方程，使用高斯消元求解。

时间复杂度：$O(2^{3*cnt})$

期望得分：10

3.2 $cnt \le 20$

发现子任务1中dp_i只会从当前集合的子集转移来，所以直接按顺序求解即可。

时间复杂度：$O(2^{cnt} * cnt)$

期望得分：30

3.3 $s \le 1$

这一部分任意两个标记的格子都不相邻，因此状态只与在角上、边上和中间的剩余标记数量有关。记$dp_{i,j,k}$表示剩余i个角上的，j个边上的，k个中间的标记时，期望需要覆盖的次数。仿照子任务2的方式转移即可。（$n = 1$的情况要特殊考虑，但方法与其他情况类似）

时间复杂度：$O((n + m) * n * m)$

期望得分：20

结合子任务2的做法可以获得50分。

3.4 Min-Max容斥

设$t_{i,j}$表示第i行第j列的格子第一次被覆盖的时间，S为所有被标记格子$t_{i,j}$的集合。那么我们要求的就是$max\{S\}$的期望。考虑使用Min-Max容斥，$max\{S\} = \sum_{T\subset S}(-1)^{|T|+1}min\{T\}$。（证明只需考虑每一个元素在等式右边被计算的次数）这个式子在期望意义下也是成立的，因此我们可以把原问题转化为求被标记格子集合的每一个子集第一次被覆盖到的期望时间。

求一个格子集合首次被覆盖到的期望时间，只需知道覆盖到当前格子集合的方案数x，以及总的覆盖方案数all，期望时间即为$\frac{all}{x}$。

3.5 另一种思路

设p_i表示覆盖了i次后，仍有被标记格子未被覆盖的概率。那么答案即为$\sum_{i=0}^{\infty} p_i$。考虑使用容斥的方法计算p_i，设S表示标记格子的集合，x表示覆盖到集合T中格子的方案数，all表示总的覆盖方案数，那么$p_i = \sum_{T\subset S}(-1)^{|T|+1}(\frac{all-x}{all})^i$。然后我们可以发现一个被标记格子集合的子集$T$对答案的贡献为$(-1)^{|T|+1}\frac{all}{x}$。

至此，我们将问题转化为了求出在所有标记格子的子集中，每种被覆盖到的方案数x在奇数大小集合和偶数大小集合中出现的次数。

3.6 $s \le 16$

我们可以发现，任意两个连通块之间，覆盖到的方案数是独立的。因此我们对于这个部分，可以枚举每一个连通块中取的集合，统计覆盖的方案数及集合大小的奇偶性，最后再将所有连通块的信息合并起来，统计答案。

时间复杂度：$O(2^s * cnt + cnt^2)$

期望得分：70

3.7 满分算法

由于每次覆盖相邻的两格，因此我们只需知道与当前格子相邻的格子是否在集合内，便可以计算出新增的覆盖方案数。这样我们只要维护出当前轮廓线上的格子加入集合的状态，即可进行转移。设$dp_{i,j,k}$表示当前轮廓线的状态为i，集合大小的奇偶性为j，集合被覆盖的方案数为k的情况个数（这里忽略了处理完了前多少个格子这一维），这样逐列逐行地进行转移。最终统计每种覆盖方案数在奇数大小集合和偶数大小集合的出现次数，计算答案。

时间复杂度：$O(2^n * n^2 * m^2)$

期望得分：100