多边形 解题报告

西北工业大学附属中学 李佳衡

题目来源

https://www.codechef.com/problems/CHEFSPAG

题目简述

给定一个多边形，求多边形内所有整点的权值和，其中点 (x, y) 的权值为给定常系数线性递推 F 的第 $(x + y)$ 项。

算法 1

设 m 为所有顶点 x、y 坐标的最大值。

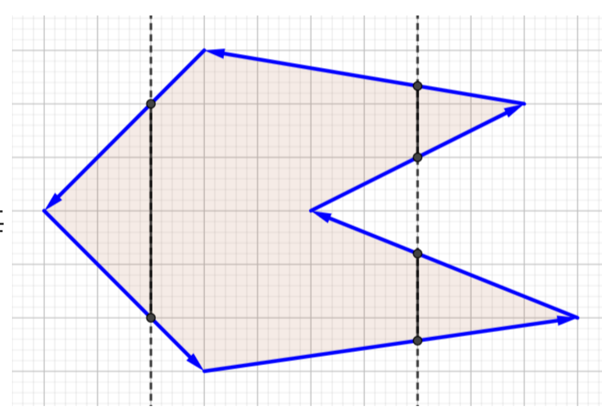
枚举所有整点 (x, y) $(0 \le x, y \le m)$，如果该点在多边形内则将权值累加入答案。

单组数据时间复杂度 $O(Nm^2)$，预计得分 15 分。

算法 2

为了便于计算，可以将点 (x, y) 变换为 $(x, x + y)$（相当于将 x 轴旋转并缩放，不会改变多边形内的整点），这样只用考虑新多变形内部每个整点的 y 坐标。

多边形的每个点一定是在一条向左的边和一条向右的边之间，因此多边形内的所有点即为为每条向左的边下方的点减去每条向右的边下方的点（边界上的点可以单独考虑）。



因此，可以先处理出 F 的前缀和 $S_{i+1} = S_i + F_i$，对于每条边，枚举边上的 x 坐标，将对应的 S_{y+1} 累加入答案，注意平行于 y 轴的边和相邻两条边顶点处的多种情况需要特殊处理。

单组数据时间复杂度 $O(Nm)$，预计得分 40 分。

算法 3

对于一条 (a,b) 到 (c,d) 的边，实际求的就是：

$$\sum_{i=a}^{c-1} S_{\left\lfloor b+\frac{(i-a)(d-b)}{c-a}\right\rfloor+1}$$

其中 S 是一个常系数线性递推，可以用多项式（或矩阵）来表示。

将式子简化后，实际要求的式子形如：

$$\sum_{i=0}^{a-1} x^{\left\lfloor \frac{ib}{a}\right\rfloor}$$

由于从左到右次数不减，可以使用矩阵来计算，用 P 表示累加答案，Q 表示升高一次，即：

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}, Q=\begin{bmatrix}x & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

所求的式子可以用矩阵表示为：

$$g(a,b,P,Q)=\prod_{i=1}^{a} PQ^{\left\lfloor \frac{ib}{a}\right\rfloor-\left\lfloor \frac{(i-1)b}{a}\right\rfloor}$$

上式展开后一定以 P 开头、以 Q 结尾，恰好有 a 个 P 和 b 个 Q，第 i 个（从 1 开始标号）P 前面恰好有 $\left\lfloor \frac{(i-1)b}{a}\right\rfloor$ 个 Q，第 i 个 P 在第 j 个 Q 前当且仅当 $j>\left\lfloor \frac{(i-1)b}{a}\right\rfloor$，即 $ja-1\geq(i-1)b$，因此第 j 个 Q 前恰好有 $\left\lceil \frac{ja}{b}\right\rceil$ 个 P，所以上式还可以表示为：

$$g(a,b,P,Q)=\prod_{i=1}^{b} P^{\left\lceil \frac{ia}{b}\right\rceil-\left\lceil \frac{(i-1)a}{b}\right\rceil}Q$$

当 $a\leq b$ 时，设 $k=\left\lfloor \frac{b}{a}\right\rfloor$，$r=b \bmod a$，则 $b=ka+r$，有：

$$g(a,b,P,Q)=\prod_{i=1}^{a} PQ^{\left\lfloor \frac{i(ka+r)}{a}\right\rfloor-\left\lfloor \frac{(i-1)(ka+r)}{a}\right\rfloor}=\prod_{i=1}^{a} PQ^kQ^{\left\lfloor \frac{ir}{a}\right\rfloor-\left\lfloor \frac{(i-1)r}{a}\right\rfloor}=g(a,r,PQ^k,Q)$$

当 $a>b$ 时，同理有 $g(a,b,P,Q)=g(a \bmod b,b,P,P^{\left\lfloor \frac{a}{b}\right\rfloor}Q)$。

使用以上方法，每次可以将 (a,b) 变为 $(a,b \bmod a)$ 或 $(a \bmod b,b)$，相当于辗转相除，会递归 $O(\log m)$ 层。

由于上述方法用到的矩阵的下半部分总为 $\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$，实现时可以只计算上半部分。

对于边界上的整点，可以用矩阵或其他方法简单计算。

单组数据时间复杂度 $O(Nk^2 \log^2 m)$，其中 k 表示递推阶数（实际为 5），常数较小，可以轻松通过，预计得分 100 分。