《树》解题报告

绍兴一中 陈齐治

【题目描述】

求一棵树的点权和第 K 小的联通块。

【输入格式】

第一行两个正整数 n,K
接下来 n-1 行，一行两个正整数 x，y，表示树上存在一条 x 到 y 的边；
保证读入形成一棵树。
接下来一行 n 个数表示每个点的权值

【输出格式】

输出一行一个数表示第 K 小的联通块的权值和

【数据范围】

<table>
<tr><th>测试点编号</th><th>N<=</th><th>K<=</th><th>形态</th><th>点权</th></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="2">20</td><td rowspan="2">100000</td><td rowspan="3">无限制</td><td rowspan="4">[0,1e9]</td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td><td rowspan="3">5000</td><td>5000</td></tr>
<tr><td>4</td><td rowspan="5">100000</td><td>二叉树</td></tr>
<tr><td>5</td><td rowspan="2">无限制</td><td rowspan="2">[1,1]</td></tr>
<tr><td>6</td><td rowspan="6">100000</td></tr>
<tr><td>7</td><td>二叉树</td><td rowspan="5">[0,1e9]</td></tr>
<tr><td>8</td><td>链</td></tr>
<tr><td>9</td><td rowspan="2">5000</td><td rowspan="7">无限制</td></tr>
<tr><td>10</td></tr>
<tr><td>11</td><td rowspan="3">100000</td></tr>
<tr><td>12</td><td rowspan="2">5000</td><td rowspan="9">[-1e9,1e9]</td></tr>
<tr><td>13</td></tr>
<tr><td>14</td><td rowspan="7">100000</td><td rowspan="2">1</td></tr>
<tr><td>15</td></tr>
<tr><td>16</td><td rowspan="5">100000</td><td>二叉树</td></tr>
<tr><td>17</td><td rowspan="4">无限制</td></tr>
<tr><td>18</td></tr>
<tr><td>19</td></tr>
<tr><td>20</td></tr>
</table>

【时空限制】

时间：1S
空间：1024MB

【测试点 1-2】

直接暴力枚举选择哪一些点。
找到所有合法解然后排序即可。
时间复杂度 O(2^n)

【测试点 8】

二分答案。
枚举右端点用线段树维护计算有多少个合法的左端点。
时间复杂度 O(nlog^2n)。

【测试点 14-15】

设 f[x]表示强制选择 x 的情况下子树权值的最大值。
直接暴力枚举是否选择这个儿子节点即可。
时间复杂度 O(n)

【测试点 3】

考虑将上面的做法优化。
我们记录 g[x][y]表示强制选择 x 的情况下子树和的本质不同的第 y 大值。
转移直接优先队列或者二分第 k 优值均可。
时间复杂度 O(nklogk)

【测试点 1-11】

考虑点分，问题转化成强制包含根节点的权值 K 小联通块。
将每个节点的儿子插入左偏树。
定义一个点被拓展当且仅当他被选入这个子树。
考虑每一次寻找可以被拓展的权值最小的节点并且判断是否将其拓展。
如果拓展则删掉这个点并且将其所有儿子加入左偏树，否则直接删去这个点。
直接可持久化左偏树维护当前所有可以被拓展节点权值即可。
时间复杂度 O(nlog^2n+klogn)。

【标算】

上面的点分算法无法支持负权值。
考虑按 dfs 序转移的思想。
定义 pos[x]为 x 在这一颗点分树 dfs 序中的位置。
给每个点 x 建边:
pos[x]向 pos[x]+1，边权 a[x]，表示在子树中选择 x;
pos[x]向 ed[x]+1，边权 0，表示不取 x，则 x 的孩子也强制不能被取。
这样子每个树上联通块都可以唯一对应图上的一条路径。
直接套用求 k 短路的经典算法求解即可。
总复杂度 O(nlog^2n+klogn)。

《不可名状》解题报告

东北师范大学附属中学 李天晓

【题目描述】

有一个未知的数 x 满足 $x \in \mathbb{C}, |x| = 1$ 。

通过在一个无法直接查询的复数序列上做一些与 x 有关的~~玄学~~操作得到 x 的值。

【数据范围】

见题面描述。

【子任务 1】

考虑简单构造一下令 QR 在 $\mathrm{x}=1$ 时返回 0 ，$\mathrm{x}=-1$ 时返回 1 。

先调用一次 CR 或 ACR 把 $\mathrm{a_0,a_1}$ 变成 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ，令 $\mathrm{a_1 = xa_1}$ ，再令 $\mathrm{a_0}$ 为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 的两者之和， $\mathrm{a_1}$ 为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 的两者之差。

【子任务 2】

在多次询问的情况下沿用子任务 1 的方法，如果 QR 一直返回 0 ，那么 x 大概率为 1 ，一直返回 1 则 x 大概率为 -1 。

除此之外的情况，将 CR 的矩阵改成$\begin{bmatrix} 1 & \omega_{\max}^{-\mathrm{i}} \\ 1 & -\omega_{\max}^{-\mathrm{i}} \end{bmatrix}$（为方便叙述，下文的矩阵省略使其满足 $\mathrm{AA^* = I}$ 的常数系数）便可以区分 $\omega_{\max}^{\mathrm{i}}$ 和 $-\omega_{\max}^{\mathrm{i}}$ ，在 $\max = 8$ 的情况下正确率很高~~,实在不行多交几次也可以~~。

【子任务 3】

令 $\mathrm{x} = \omega_{512}^{x'}$ ，因为询问只能调用一次，考虑构造一下令最终的 $\mathrm{a_{x'}}$ 为 1 ，其余为 0 。发现唯一与 $\mathrm{x'}$ 的值有关的 CU 操作可以对某一位乘上 $\omega_{512}^{x'}$，而 DFT 矩阵的 $\sqrt{\frac{1}{2^{\mathrm{n}}}}$ 倍是满足 $AA^* = \mathrm{I}$ 的，尝试对最终状态 DFT ，得到 $\mathrm{a_i} = \sqrt{\frac{1}{2^n}}\omega_{512}^{ix'}$ 。 $\mathrm{a_i} = \sqrt{\frac{1}{2^{\mathrm{n}}}}$可以简单地由初始状态构造出来，对于每一位做一次 CU(i,2^i) 再 IDFT 回去就可以了。

【子任务 4】

既然能 DFT 就能 FFT ，对于较大的 n ，ACR 无法调用，尝试用 CR 模拟 FFT 。其过程就是对于每一个 i ，对第 i 位为 0 的 j 和$j+2^i$ 做一次$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \omega_{2^i}^j & -\omega_{2^i}^j \end{bmatrix}$ 。因此可以用 CR 的 d_1 限制 j 的某一位， d_2 限制 i ，对第 i 位为 0 的 j 和 $j+2^i$ 做 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega_{2^{i-j}} \end{bmatrix}$ ，这样在枚举所有 j 后，j 位的矩阵即 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega_{2^i}^j \end{bmatrix}$ ，在此之前对第 j 位做 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 即可。其余部分与子任务 3 相同，总操作数在 $\mathrm{n^2}$ 级别。

《二分图》解题报告

绍兴一中 周雨扬

【题目背景】

定义二分图为一种可以将点集 V 划分为 S,T 的图，满足：

1. $S\cup T=T$，$S\cap T=\Phi$
2. 对于所有$(x,y)\in E$，有 $x\in S$，$y\in T$ 或 $x\in T$，$y\in S$

定义二分图的一种 k 划分方案为将二分图中每一条边染一种 1 到 k 之间颜色的方案。

定义在二分图的一种 k 划分方案中 w_{ij} 表示经过第 i 个点的颜色为 j 的边的条数。

定义在二分图的一种 k 划分方案中点 i 的不平均度为 $\max\{w_{ij}\}-\min\{w_{ij}\},j\in[1,k]$。

定义二分图的一种 k 划分方案中的不平均度为所有点的不平均度之和。

【题目描述】

给定一个 S,T 中各有 n 个点的二分图。

初始时候二分图内没有任何一条边。

你需要支持向图中加边，删边。

同时求出任意一个不均匀度最小的 k 划分方案。

【数据范围】

测试点编号	n<=	k<=	Q<=
1	5	2	20
2	10		100
3	20		1000
4			10000
5			100000
6		10	1000
7			10000
8			100000
9			250000
10			500000

【时空限制】

时间：0.618S

空间：512MB

【测试点 1】

注意到任意时刻边数<=20

直接 O(2^边数)爆搜即可

时间复杂度 $O(2^{20}*Q)$。

【测试点 2】

可以对第一个点的爆搜加点优化。
或者来一个随机退火乱搞也可以。
时间复杂度 O(玄学)

【测试点 3】

我们大胆猜想最优方案中的不平均度=度数 mod k!=0 的点的个数。
直接套用上下界最大流或者费用流求解。
时间复杂度 O(Q*network_flow(n,n*n))

【测试点 6】

直接套用 k 次测试点 3 的算法即可。
首先答案肯定不会小于度数 mod k!=0 的点的个数。
现在只需要证明每一次网络流一定可以找到合法的同种颜色集合即可。
证明见 http://codeforces.com/blog/entry/4885?#comment-99798
时间复杂度 O(Q*k*network_flow(n,n*n))

【关于二分图最小边染色】

二分图的合法边染色方案满足:每条边均有颜色;每的点连出去的边颜色互不相同。
二分图的最小边染色数是所有合法边染色方案中颜色数的最小值。
二分图的最小边染色是所有合法边染色中颜色数最小的边染色方案。
定理 1：二分图最小边染色数=二分图上所有点度数的最大值。
构造：按照顺序在二分图中加边。
    加入边(x,y)的时候,寻找 x 和 y 分别没有使用过的编号最小的颜色(lx,ly)
    如果 lx==ly 直接将这一条边染色成 lx。
    否则我们尝试将连接在 y 上面的颜色为 lx 的边的颜色改为 ly。
    修改过程可以类似看成一条颜色为 lx,ly 交替的唯一有限增广路。
    将增广路上的边全部反色即可。
时间复杂度 O(边数*点数)

【测试点 4,7】

将二分图拆点。
对于一个边数超过 k 的点，将其拆成多个意义相同的点。
在拆点时保证：
    度数不超过 k。
    对于每个点拆出去的点度数不是 k 的最多只有一个。
直接对新图跑二分图最小边染色就能构造出一组合法方案。
对于新图来说，点数 O(n^2/k+n),边数=n^2
时间复杂度 O(Q*(n^4/k+n^3))

【这是一个被强行叉掉的算法】

发现每一条边在图中出现的时间都是一段连续区间。
直接采用离线线段树分治即可。
时间复杂度 O(QlogQ*(n^2/k+n))。
~~因为实在跑的太快被强制在线卡掉了。~~

【测试点 10】

发现每一次重新跑二分图最小边染色太慢了。
考虑支持维护删边之后的答案。
我们对于每个点维护连出去的边在新图中对应的位置。
在删去一条边后可能会产生超过两个度数不为 k 的点。
于是需要将原来的那个度数不是 k 的点上拆一条边到新产生的度数不为 k 的点上。
这样新的图依然满足拆分条件。
时间复杂度 O(Q*(n^2/k+n))。

然后你发现：

~~**本题时间复杂度瓶颈严格在检验答案正确性上而且根本无法优化到更优。**~~
~~**而且在单次加边时候很难达不到上界导致算法远远跑不到 O(n^2/k)**~~
~~**为了提升出题人的叉非标算愉悦度出题人强行减少了检验次数来卡非标算。**~~
~~**虽然 std 在算上交互库的时候还是开了不到 2 倍。**~~
~~**卡常数，不存在的！**~~

【神仙乱搞】

我不会二分图染色怎么办？
考虑从原来的答案直接修改得到新的答案。
改变一条边的存在性的时候，会最多改变两个点对应颜色的合法性。
我们使用类似 bfs 的思路来解决这个问题，并且保证在解决一个不合法的状态最多新产生一个不合法的状态。
在不针对返回答案卡的情况下，这个算法的最坏时间复杂度近似是 O(Qnk)。
如果有人可以把他卡的更差，欢迎交流。

【全场总结】

本场三题 AC 人数分别是 9,5,1.

本场 T1 是一道~~经典题~~，考察了选手转化问题的能力以及按照 dfs 序转移的技巧。出题人相(jia)信(zhuang)这道题目有 k 更大的做法，但是并没有想出来，也没有更好的思路。如果有大佬能想出来出更优秀的做法，可以私信出题人交流讨论。

本场 T2 是一道 Quantum Fourier Transform 的~~板子题,这也解释了为什么它的题面差不多是照着[量子破碎]的操作说明写的~~。本题考查了选手对于 FFT,DFT 的了解和举一反三能力，这~~大概~~是一道「知道合法矩阵的样子，并且想到 FFT 」就可以切掉的题。

本场 T3 是一道经过二次改编的二分图大假(shui)题,考察了二分图最小边染色以及相关知识点，思维难度较(ji)高。能够有效的区分出~~做过原题的选手和没做过原题的选手~~。出题人希望选手能够学到新的 ~~NOIP 难度~~算法并且熟练掌握

本场比赛难度较高,能够有效区分出 zzq,yjz,______,lca 等神仙选手和其他选手之间的差距，选手可以在本场比赛中学习到新鲜的知识点和算法。

本场比赛三道题目知识点各不相同，覆盖面广，有较好的区分度，题目来自或者改编自现有题目，较为新颖，能够比较全面的考察选手各种知识的掌握情况。

本场比赛**题目新(du)颖(liu)，算法清(bu)新(ke)自(miao)然(shu)，难度适中(jia),考察知识点广(bu)泛(duo)**,相信能给您(_____)的 IOI 阿克之旅打下坚实的基础。

为什么这么说呢，因为:

一只大象在北大集训说过:

下(wang)划(xiu)线(han)天下第一!