# 矩阵玩小凹　题解

石室中学　杜振宇

2018 年 10 月 21 日

## 1　初步分析

这道题的思路还是很明显的，首先有几个显然的性质：

- $\lfloor \min s_i \rfloor = \min \lfloor s_i \rfloor$。
- $0 \le \lfloor s_i \rfloor \le m$。
- $\lfloor s_i \rfloor$ 互相独立。

观察数据范围，$m \le 5 * 10^5$，所以可以大概猜到做法，先预处理出 $f_i$，表示对于一行，最终 $\lfloor s \rfloor = i$ 的概率。然后再对于所有的行处理出 $g_j$，表示对于全部的行，$\min \lfloor s_i \rfloor = j$ 的概率。如果能处理出这几个值，最后就可以很轻松的算出期望了。

## 2　$m$ 较小，$n$ 较大的解法

这个时候先用比较暴力的方法处理出 $f_i$。对于 $g_i$ 的处理，是个简单的容斥：限制每一行的选择都要大等于 $i$，然后用快速幂计算出整个矩阵的最小值大等于 $i$ 的方案数，然后再减去大等于 $i+1$ 的方案数。下面考虑如何处理出 $f_i$。

### 2.1　$m \le 2$

- $m = 1$，$f_0 = 1$。
- $m = 2$，$f_0 = f_1 = \frac{1}{2}$。

### 2.2 $m \le 16$

不妨 $a_i$ 表示一行的第 $i$ 个数，$y_i = \sum_{j=1}^{i} a_i - \lfloor \sum_{j=1}^{i} a_i \rfloor$，显然，$y_i$ 也是在 $[0,1]$ 区间中等概率随机生成的。

经过这样的转化，可以发现，$\lfloor s \rfloor = \sum_{i=2}^{n} [y_i < y_{i-1}]$。

存在两个 $y_i$ 相同的概率相对于 $y_i$ 互不相同的概率是高阶无穷小，可以忽略这部分对期望的贡献，所以可以看作 $y_i$ 互不相同。

因为 $y_i$ 完全随机且互不相同，所以可以把 $s = i$ 的概率看作是一个随机排列中上升（下降）的位置有 $i$ 个的概率。状压 DP 即可通过这个测试点。

### 2.3 $m \le 5000$

记 $A_{i,j}$ 表示长度为 $i$，上升位置有 $j$ 个的排列个数，考虑插入从长度为 $i-1$ 的排列中插入一个数 $i$，就可以得到一个 $O(m^2)$ 的 DP：

$$A_{i,j} = jA_{i-1,j} + (i-j+1)A_{i-1,j-1}$$

## 3 Eulerian Number

$A_{n,m}$ 是另一种类似组合数的数，叫做 Eulerian Number（为了与欧拉数区分开），对于 $A_{n,m}$，有：

$$A_{n,m} = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{n+1}{i} (m+1-i)^n$$

通过 FFT 即可在 $O(m \log m)$ 的时间内预处理出 $f$ 数组。

## 4 积分法

我们可以通过积分法，来证明这个式子的正确性。

不妨设 $h_n(x)$ 表示 $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n \le x (x_i \ge 0)$ 在空间中围成的超体积，那么：

$$h_1(x) = x$$
$$h_i(x) = \int_0^x h_{i-1}(z)\, dz (i > 1)$$

可以得到：

$$h_n(x) = \frac{x^n}{n!}$$

容斥一下多少 $x_i$ 可以大于 1，可以得到：

$$\sum_{i=0}^{m} A_{n,i} = \sum_{i=0}^{m+1} (-1)^i \binom{n}{i} h_n(m+1-i)$$

后向差分这个式子，就可以得到 Eulerian Number 的卷积公式了。

所以我们可以在 $O(m \log m)$ 的时间内解决本题。

## 5 总结

本题既可以说是一道数学题，又可以说是一道计数题。

从概率函数积分的角度出发，本题更加的简单, 直观，可以快速的得到解法。

从计数的角度出发，则需要深入了解 Eulerian Number 的卷积公式，如果以前了解过，也可以快速得出解法。