

《多米诺骨牌》 解题报告

长沙市雅礼中学

魏罗健

Description

小 Z 迷上了多米诺骨牌，整天在一个 $2n \times 2n$ 的网格图中摆放 1×2 大小的骨牌。

他定义一个骨牌摆放的局面是好的，当且仅当对于任意一个 2×2 的部分依然至少能放下一个骨牌。同时他又希望骨牌的数量尽可能多，于是他定义非常好的局面为所有好的局面中满足**骨牌数量等于好的局面集合中骨牌数量的最大值**的局面。

现在他给出了一个初始局面，希望你告诉他从这个初始局面能摆出的非常好的局面数量。两个局面不同当且仅当存在一个位置在一个局面中被骨牌覆盖而在另一个中没有，骨牌不能摆放在已经被覆盖的位置上。

小 Z 觉得即使这样还是过于简单了，于是他打算对初始局面进行 m 次修改，每次修改会向初始局面中加入一个骨牌，然后询问能摆出的非常好的局面的数量对 998244353 取模的结果，每次修改会在询问完成后撤销。

Input Format

输入第一行两个正整数 n, m 。

接下来一个 $2n \times 2n$ 大小的 01 矩阵表示初始局面的覆盖情况。

接下来 m 行，每行四个整数 $x1, y1, x2, y2$ 表示加入骨牌的位置。

Output Format

输出 m 行，每行一个整数表示每次修改后能摆出的非常好局面的数量对 998244353 取模的结果。

Solution

Subtask 1

由于非常好的局面条件十分严格，当 $n \leq 3$ 时，非常好的局面的数量不会超过 500，可以直接搜索预处理出所有非常好的局面，每次修改后暴力匹配所有非常好的局面即可。

Subtask 2

进一步观察发现，好的局面中骨牌数量的最大值为 $n \times n$ ，并且达到这个上界的局面具有一个共同性质：即在 $n \times n$ 个 2×2 的小的矩形内部各放一个骨牌。

定义‘上’，‘下’，‘左’，‘右’四种情况表示在 2×2 的网格内放置一个骨牌的四种方案，例如‘上’表示 $\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}$ ，问题转化成 $n \times n$ 的网格，每个位置是‘上’，‘下’，‘左’，‘右’四种情况中的一种的好的局面方案数。

可以发现一个必要条件：‘上’情况的上面一定还是‘上’情况，‘左’情况的左面一定还是‘左’情况……同时问题规模减小到 $n \times n$ 。考虑 DP，记录每行中最右的‘左’局面所在的位置和最左的‘右’局面所在位置以及中间部分的情况表示的二进制状态即可通过这个部分。

Subtask 3

观察发现子任务二提到的 DP 中，中间部分的情况一定同时为‘上’或‘下’，于是一个非常好的局面可以被两条折线划分成如图 1 所示的四个部分。

考虑对于一个已经确定的初始局面计算这样子的折线的方案数，可以将这样子的折线看作总网格图的一个顶点走到另一个顶点的路径，为保证折线的合法性，每一行上折线能够经过的部分都是一个区间，这样的带限制的路径方案数可以用 DP 在 $O(n^2)$ 时间内处理出一个确定的初始局面的方案数。

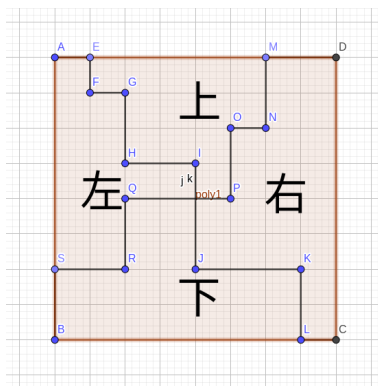


图 1: 一种可能的划分

两条折线的方案是独立的，每次修改操作之后用 DP 分别处理出两部分的答案并相乘即可。

Subtask 4, 5

初始局面为空时，折线的数量是一个经典问题，可以使用组合数快速计算。

对于修改操作相当于将整个网格划分成了若干个小的矩形网格然后求折线的方案数，每次修改后重新暴力计算一次即可通过子任务四，预处理前缀和，对于每次修改直接回答就能通过子任务五。

Subtask 6

结合子任务五和子任务三的思路，先在给定的初始局面上进行 $O(n^2)$ DP 并预处理 DP 值的乘积的前缀和，修改操作相当于在某一行加入了新的限制，对于这一行的上方或者下方的行利用预处理出的信息，在这一行中求一个前缀和，可以在 $O(1)$ 时间复杂度内求出答案。