平安夜送温暖专场　总结&解题报告

单场总结

本场考试涉及了动态规划、Min-Max容斥、多项式乘法、生成函数、单位根反演、计算几何以及平衡树、线段树，较为全面地考察了选手的思维及代码能力。

《喂鸽子》作为一道期望 + 动态规划，非常巧妙地融合了Min-Max容斥与快速数论变换。选手需要在一步步的推导中，优化解题方法，寻找不同的解题策略。再结合自身一定的知识水平，方能完整地解决这道题。题目难度思维难度与代码难度适中，能较为全面地考察选手对于概率与期望的计算的综合素质。

《复读机》的做法基于生成函数。对于$d=2$的点，需要选手通过一些特殊的生成函数来转化题目所求，并通过数学推导进行化简，从而解决问题。同时，$d=2$的测试点也是对最后一个subtask的提示。将倒数第二个子任务的做法一般化，就是最后一个子任务的做法了。选手可以在一步步的探索中获得启发，从而解决这道题。本题的代码量固然小，对于选手的思维水平却是一个不错的锻炼。

《蓝宝石》是一道结合了计算几何与数据结构的题目。本题需要选手运用智慧转化题目限制，使得快速维护答案成为可能。对于离线的测试点，选手需要细致地推导出答案的式子，并想办法通过线段树维护一些关键信息，从而快速回答询问。对于最后一个子任务，则需要用到平衡树。由于存在三点共线等情况，如果没有细致地对所有可能进行分析，是解决不了这道题的。反之，如果选手认真细致地考虑好了所有的情况，这道题也就迎刃而解了。本题的代码难度较大，思维难度也不小。对于选手的综合水平是一个很好的考验。

这场考试，无疑是善良的出题组的无私馈赠。难度适中的题目，覆盖了算法竞赛中非常多的知识点。你可以利用这场考试，对自己的能力做一个小测验。出题组相信，这套美妙的题目，可以给拼搏于捧杯路上的你，提供一个有力的援助！

最后，祝大家身体健康，平安夜快乐！

《喂鸽子》解题报告

出题人：罗宇琦

subtask 1

输出k就可以了。

subtask 2

设$f(i)$表示已经有i只鸽子饱了，期望还要多少秒，转移十分简单。

subtask 3

设$f(i,j)$表示有i只鸽子已经吃了一粒玉米，j只鸽子已经饱了，期望还要多少秒，转移十分简单。

subtask 4

首先通过Min-Max容斥转化问题，现问题表述为：在n个盒子里随机放球，若前m个盒子中有一个盒子的球数达到k则结束，问期望多少次结束。

假设一个方案在这m个盒子中总共放了x_i个球，那么它对答案的贡献为：

$$(\frac{1}{m})^{x_i} \cdot E_m(x_i)$$

其中$E_m(x_i)$表示在这m个盒子中放入x_i个球的期望步数，其值为$\frac{x_i}{\frac{m}{n}}$。证明在后面。

因此只需统计在m个盒子中放入x_i个球的方案数即可。由于最后一步肯定是在一个盒子里放一个球使得该盒子中球数达到k，因此我们把这个球拿出来特殊考虑。

假设放完之后第i个盒子里有a_i个球，那么其对应的方案数有：

$$\frac{(\sum_{i=1}^{m} a_i)!}{\prod_{i=1}^{m} a_i!}$$

自然地想到对$\prod_{i=1}^{m} \frac{1}{a_i!}$进行dp。

设$f(m,c)$表示m个盒子，没有盒子的球数达到k，$(\sum_{i=1}^{m} a_i) = c$，所有可能的$\prod_{i=1}^{m} \frac{1}{a_i!}$之和。

设$g(m,c)$表示m个盒子，有个盒子的球数达到k，$(\sum_{i=1}^{m} a_i) = c$，所有可能的$\prod_{i=1}^{m} \frac{1}{a_i!}$之和。

转移时枚举下一个盒子里放几个球，$O(n^2k^2)$，用ntt优化一下，就能做到$O(n^2klog(nk))$。

那么m个盒子的答案就是：

$$\sum_{i=0}^{n*(k-1)} g(m,i) \cdot i! \cdot (\frac{1}{m})^{i+1} \cdot E_m(i+1)$$

最后用Min-Max容斥合并答案就可以了。

补充证明

最后来证明上面的那个结论。可以看出，实际上要证的就是这个式子。

$$\sum_i \binom{k+i-1}{i}(1-p)^i p^k (k+i) = \frac{k}{p}$$

首先：

$$\begin{aligned}&\sum_i \binom{k+i-1}{i}(1-p)^i p^k (k+i)\\ =& kp^k \sum_i \binom{k+i}{i}(1-p)^i\end{aligned}$$

根据二项式定理有：

$$(1-x)^{-r} = \sum_i \binom{r+i-1}{i} x^i$$

令$x = 1-p, r = k+1$，得到：

$$p^{-k-1} = \sum_i \binom{k+i}{i}(1-p)^i$$

因此：

$$\begin{aligned}&kp^k \sum_i \binom{k+i}{i}(1-p)^i\\ =& kp^k p^{-k-1}\\ =& \frac{k}{p}\end{aligned}$$

《复读机》解题报告

题目大意

将k种不同颜色的球放置在一个长度为n的序列上，每种球的个数都要是d的倍数，问总共有多少种不同的方案。

subtask 1

显然任何一种放置方案都是合法的，直接输出k^n即可。

subtask 2

考虑直接DP求出方案数。设$f[i][j]$表示考虑了前i种颜色的球，共占用了j个位置的方案数，则：

$$f[i][j]=\sum_{p=0}^{j}[d|p]\times f[i-1][j-p]\times\binom{j}{p}$$

时间复杂度$O(n^2k)$，可以通过第二个子任务。

subtask 3

题目等价于求：

$$\sum\frac{n!}{\Pi_{i=1}^{k}(a_i!)}$$

其中a_i是偶数。考虑用生成函数解决问题，答案就是：

$$(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^{2i}}{(2i)!})^k\times n!$$

的n次项系数。注意到：

$$e^x=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!},e^{-x}=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\times\frac{x^i}{i!}$$

所以，答案就是：

$$(\frac{e^x+e^{-x}}{2})^k\times n!\quad(\bigstar)$$

的n次项系数。将上式二项式展开，得到：

$$n!\times\frac{1}{2^k}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\times e^{ix}\times e^{(i-k)x}$$

$$n!\times\frac{1}{2^k}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\times e^{(2i-k)x}$$

而$e^{(2i-k)x}$的n次项系数是$\frac{(2i-k)^n}{n!}$，其中的$\frac{1}{n!}$恰好可以和式子最左边的$n!$抵消。所以，答案就是：

$$\frac{1}{2^k}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\times(2i-k)^n$$

subtask 4

同样考虑生成函数。答案就是：

$$(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^{3i}}{(3i)!})^k\times n!$$

的n次项系数。

有一个(曾经)比较冷门的trick，叫单位根反演。大概是这样：

$$[n|k]=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_n^{ki}$$

可以这样证明：若$n|k$，则$\omega_n^{ki}=1$，等式成立。反之，有：

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_n^{ki}=\frac{\omega_n^0(1-(\omega_n^1)^n)}{1-\omega_n^1}=0$$

注意到$19491001=2\times2\times2\times3\times5\times5\times5\times73\times89+1$，即$mod-1$是3的倍数，故存在三次单位根$r$。由单位根的定义知，$r=R^{\frac{mod-1}{3}}$，其中$R$是$mod$的一个原根。运用单位根反演，有：

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^{3i}}{(3i)!}=\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i\times[3|i]}{i!}=\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i\times(r^0+r^i+r^{2i})}{i!}=\frac{e^x+e^{rx}+e^{r^2x}}{3}$$

所以，答案就是：

$$n!\times(\frac{e^x+e^{rx}+e^{r^2x}}{3})^k$$

的n次项系数。大力展开得：

$$n!\times\frac{1}{3^k}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-i}\binom{k}{i}\times\binom{k-i}{j}\times e^{xi}\times e^{xjr}\times e^{xr^2(k-i-j)}$$

类似subtask 3。将e^x展开之后可以发现，$n!$同样能和n次项系数的分母约去。所以，答案就是：

$$\frac{1}{3^k}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-i}\binom{k}{i}\times\binom{k-i}{j}\times(i+jr+(k-i-j)\times r^2)^n$$

其实，这个子任务中所用到的“单位根反演”的trick可以看成上一个子任务中(★)式的推广。从另一个角度看，-1不就是二次单位根吗？

《蓝宝石》解题报告

subtask1

$n \le 500$，直接暴力枚举两个点，与当前插入的节点判断一下即可。

subtask2

$n \le 5000$，首先，你要发现一个性质，三角形能包围住原点，当且仅当原点到三角形三顶点的向量满足，任意两个都在剩下那一个的两侧，直接算合法的方案不太好算，我们考虑算不合法的，对于一组不合法的向量，我们在极角最小的元素算，对于，对于一个向量i记严格在它左边的向量个数为s，那么以它为极角最小的元素的不合法的组合为C_s^2，总数减去不合法方案即是答案，插入一个元素时暴力修改其他元素的s即可，共线的向量还要加一些特判。

subtask3

$n \le 10^5$，离线，我们可以先把所有点读入，按照极角排好序，现在问题变成了给一段区间的元素的$s+1$，快速对C_s^2求和，我们把C_s^2拆成s^2-s，然后线段树区间加法即可。

subtask4

$n \le 10^5$，在线，考虑动态维护这玩意，用平衡树以极角序维护向量的顺序，插入一个向量v的时候，找出逆时针区间$(rev(v), v)$，然后把这个区间的s都加1，然后这个元素的s是位于区间$(v, rev(v))$的元素的数量，最后把向量v插入合适的位置。