##Buses Solution

前置技能

- 二分答案
- 向量的基本操作
- 圆线求交
- 有关实数精度的处理

####Subtask 1

- 注意到当 $M \geq N+1$ ，必然会有编号相邻的两辆公交车在环路的同一条边上，此时它们之间的欧几里得距离为 $\frac{C}{M}$ ，并且其余各对相邻的公交车之间的欧几里得距离不会超过 $\frac{C}{M}$ ，因此有 $R=\frac{C}{M}$ 。
- $subtask1$ 中 $M=10^5$ ，因此 $M \geq 3*10^4+1 \geq N+1$ ， $R=\frac{C}{M}$ 。
- 时间复杂度 $O(N)$ ，期望得分 5 分。

####Subtask 2

- $N=4, M=2$ ，给定的环路形成一个矩形。
- 这意味着两辆公交车关于矩形的几何中心中心对称，显然两辆公交车位于矩形较长边的中点处时，答案取到最优，为矩形较短边的长度。
- 取环路上最短的一条边的长度输出即可。
- 时间复杂度 $O(N)$ ，期望得分 5 分。

####Subtask 3

- $N \leq 4$ ，给定环路的边与坐标轴平行或垂直。
- 这意味着给定的环路或是所有点都在一条直线上，或是形成一个边与坐标轴平行或垂直的矩形。并且由 $subtask1$ 的观察，我们只需要考虑 $M \leq N$ 的情况。
- 设当前时间为 t ，各个公交车的坐标可以方便地用 t 表示出来。
- 因此，各对相邻的公交车之间欧几里得距离的平方能够被表示成关于 t 的二次函数。
- 二分答案，计算可行的 t 的取值范围是否为空即可。
- 时间复杂度 $O(NLogV)$ ，期望得分 19 分。

Subtask 4

- 沿用 $subtask3$ 的思路，我们先二分答案 R 。
- 设当前时间为 t ，各个公交车的坐标仍然可以用关于 t 的一次函数表示出来。
- 但由于环路边与坐标轴不一定平行或垂直，表示公交车的坐标实际上有些困难。
- 这里我们提供另外的一种思路：
- 考虑枚举两辆公交车所在的边 (a,b) ，注意到合法的 (a,b) 实际上只有 $O(N)$ 对。
- 假设两辆公交车所在的边为 (a,b) 的时间中， 1 号公交车从 s_1 走到了 t_1 ， 2 号公交车从 s_2 走到了 t_2 。由于这段时间两辆公交车都没有拐弯，它们的路线应当是两条线段。
- 因此两辆公交车的横纵坐标均关于时间线性变化，他们之间的距离向量应当也关于时间线性变化。即两辆公交车之间的距离向量 (x,y) 由 s_2-s_1 沿直线变动到了 t_2-t_1 。
- 判断答案 R 是否可行实际上就是判断线段 $(s_2-s_1)-(t_2-t_1)$ 是否与以原点为圆心， R 为半径的圆有公共点。
- 时间复杂度 $O(NLogV)$ ，期望得分 $5+21=26$ 分。

Subtask 5

- $N \le 50$，给定环路的边与坐标轴平行或垂直。
- 我们可以直接将 $subtask3$ 的做法推广一下，得到 $subtask5$ 的做法，但这样做编程复杂度较高，而且这样的做法没有借助任何 $OIer$ 能够使用的工具，只是通过初中数学知识在解题，是出题人所不推荐的。
- 注意到精度要求虽然较高，但评分标准是有一定梯度的，因此在 N 较小的时候，我们不妨尝试一些近似算法或是随机化算法。
- 考虑近似算法，在环路的前 $\frac{1}{M}$ 均匀地撒下 $\frac{10^7}{M}$ 个点，以这些点作为第 1 辆公交车的位置，取最优解输出。
- 考虑这个算法的精度，由于 $N \le 50, |x_i|, |y_i| \le 10^3$，因此 $C \le 50 * 2000\sqrt{2} \approx 1.4 * 10^5$，而我们均匀考虑了 10^7 个点，因此第 1 辆公交车的最优位置和我们考虑过的位置相差应当不超过 $\frac{1.4*10^5}{10^7}$，从而我们得到的答案与最优答案的误差应当在 $2 * \frac{1.4*10^5}{10^7}$ 以内。
- 并且，我们可以在上述答案的基础上通过爬山算法等随机化算法进行微调，使得其更加接近最优答案。
- 时间复杂度 $O(TimeLimit)$，期望得分 $10 - 45$ 分。

Subtask 6

- 沿用 $subtask3, 4$ 的思路，我们先二分答案 R。
- 我们考虑相邻的两辆公交车之间的距离关系，不妨设我们考虑的是第 1 辆公交车和第 2 辆公交车。若在 t 时刻它们的距离在 R 以内，则令 $f(t) = 1$，否则令 $f(t) = 0$，我们要做的是判断是否存在某个 t 使得 $\sum_{i=0}^{M-1} f(t + i * \frac{C}{M}) = M$。
- 与 $subtask4$ 相同，我们考虑枚举两辆公交车所在的边 (a, b)，可以类似地得到两辆公交车之间的距离向量的变动轨迹 $s - t$，其中在以原点为圆心，R 为半径的圆内的部分对应的时间 t 有 $f(t) = 1$。
- 不妨设 $g(t) = \sum_{i=0}^{M-1} f(t + i * \frac{C}{M})$，每一段轨迹 $s - t$ 对 g 的影响可以被表示为一次对区间 $[a, b]$ 的区间加操作，我们可以使用差分将这次操作描述为 $(a - \epsilon, +1), (b + \epsilon, -1)$，随后我们只需要判断是否存在一个位置的前缀和为 M 即可，这里需要用到排序。注意这里 ϵ 是一个很小的数，用来防止区间端点相同时的误判。
- 结合 $subtask1$ 的观察有 $M = O(N)$，当然这不是必须的。
- 时间复杂度 $O(NLogNLogV)$ 或 $O((N+M)Log(N+M)LogV)$，期望得分 100 分。