青春猪头少年不会梦到兔女郎学姐解题报告

1 题目大意

给定n种不同颜色的石子，第i种有a_i个。现在你要将它们排成一个序列，一种方案的权值定义为每个极大相同颜色连续段的长度乘积，首尾相连。问所有方案的权值和模998244353的值。

2 部分分设置

对于所有数据，令m为a_i的和。

保证$2 \le n \le 10^5$，$2 \le m \le 2*10^5$。

子任务	分值	限制
1	10	$n \le 5$，$m \le 10$
2	5	$n \le 2$
3	15	$n \le 50$，$a_i \le 100$
4	10	$a_i \le 100$
5	60	无特殊限制

3 针对较简单子任务的解法

3.1 子任务一

由于n和m很小，因此可以考虑搜索，注意计算权值时需要考虑首尾相连的情况。

时间复杂度上界为$O(n^m)$，但事实上远远达不到。

3.2 子任务二

注意到$n \le 2$，因此连续段一定是1、2交替，枚举1分成了几段，则2分成的段数一定与1相等。

现在问题转变为给定石子个数x和分成的段数y，求出所有情况的贡献和$f(x,y)$。这可以通过一个$O(m^3)$或$O(m^2)$的动态规划来解决，但对本题的数据范围并不适用。

事实上，我们有$f(x,y)=\binom{x+y-1}{2*y-1}$，这可以通过考虑枚举对答案有贡献的集合来得出。

时间复杂度$O(m)$。

4 初步分析

4.1 子任务三

这是一个富有对正解提示性的部分分。

注意到贡献的计算会成环不好考虑，我们可以先考虑首尾不相连，即链的简单情况。

我们不妨设第i种石子分成了$b_i(1 \le b_i \le a_i)$段，则每种方案贡献为$\prod_{i=1}^{n} f(a_i, b_i)$。这样，问题就变为第$i$种石子有$b_i$段，求出相邻两个石子种类均不同的方案数。

考虑容斥，钦定第i种石子捆绑为c_i个大段，则容斥系数为$(-1)^{b_i-c_i}$，直接用多项式系数统计即可，因此答案为

$$\sum_{b}\sum_{c}(\prod_{i=1}^{n} f(a_i, b_i) * \binom{b_i-1}{c_i-1} * (-1)^{b_i-c_i}) * \frac{(\sum_{i=1}^{n} c_i)!}{\prod_{i=1}^{n}(c_i!)}$$

这可以通过一个$O(m^2)$的动态规划来实现。

现在考虑允许首尾相连。

我们不妨考虑统计由n开头，不由n结束的方案数，除去b_n，再乘上m即可。这样即使在方案存在小于m的循环节时也是正确的。这等价于由n开头的方案数减去由n开头，由n结束的方案数。

如果方案由n开头，只需除去b_n，并在后面多项式系数部分将c_n减1。

如果方案由n开头，由n结束，只需除去b_n，并在后面多项式系数部分将c_n减2。

时间复杂度同样为$O(m^2)$。

5 进一步分析

5.1 子任务四

定义指数生成函数

$$F_i(z) = \sum_{j=1}^{a_i}(\sum_{k=j}^{a_i} f(a_i, k) * \binom{k-1}{j-1} * (-1)^{k-j}) * \frac{x^j}{j!}$$

则答案的指数生成函数为$\prod_{i=1}^{n} F_i(z)$，这可以用分治NTT优化。

时间复杂度为$O(\sum_{i=1}^{max(a_i)} i^2 + mlog^2m)$。

5.2 子任务五

现在的瓶颈在于求出$F_i(z)$的系数，发现系数也具有良好的卷积形式（将$\binom{k-1}{j-1}$展开成$\frac{(k-1)!}{(j-1)!*(k-j)!}$），可以同样用NTT优化。

时间复杂度为$O(\sum_{i=1}^{n} a_i loga_i + mlog^2m)$。