万圣节的积木 题解

from LazyJazz，题解 by LazyJazz

前言

这本来是一道NOIP题的，后来不再是了……

去年大概也是这个时间左右，我给校内同学出了一套NOIP模拟赛，取名“万圣节欢乐赛”，也是为什么题目名叫做《万圣节的积木》的原因。比赛链接（Powered by UOJ）

原本的题目部分分划分是这样的：

子任务1:30分
子任务2:30分
子任务3:35分
子任务4:5分

但是既然各位都是集训队爷，放一道NOIP题显然不够意思，我就微调了一下子任务分值。

因为这个题解原本是给校内赛做的，写得很(bi)不(jiao)严(pi)肃，各位请见谅。

（我的做法比较毒瘤，如果比赛的时候被简单方法切了，先在这里提前跪膜 orz...）

算法一

我们先来看子任务1，$n \leq 20$ 的数据范围，暴力枚举每个关节是否需要分割，然后判断稳定性就好了，需要卡卡常数

时间复杂度:$O(2^n \cdot n^2)$

期望得分：10分

算法二

选手：我会算出所有子段是否稳定然后DP！

善良的LazyJazz：恭喜你，你有20分了！

时间复杂度:$O(n^3)$

期望得分：20分

算法三

选手：我会算出所有子段是否稳定然后DP！

善良的LazyJazz：恭喜你，你有20分了！

选手：我可以从上到下递推着算出所有子段是否稳定！

友善的LazyJazz：恭喜你，你有30分了！

时间复杂度:$O(n^2)$

期望得分：30分

算法三点一

选手：我会算出所有子段是否稳定然后DP！

善良的LazyJazz：恭喜你，你有20分了！

选手：我可以从上到下递推着算出所有子段是否稳定！

友善的LazyJazz：恭喜你，你有30分了！

选手：我可以算出，对于所有的 $i \in [1, n]$，取靠近底端的前 i 层是否稳定！然后找出最长的不稳定跨度的长度！

邪恶的LazyJazz：万圣节快乐，30分！

我们来考虑这样一件事：如果靠近底端的前 i 层稳定，且靠近底端的前 $j(j > i)$ 层也稳定，那么从第 $i + 1$ 到第 j 层这个子结构一定稳定，否则前提不成立。

所以不需要DP了，找出最大的 L，表示存在$i(i+L\le n)$，保证靠近底端的前 i 层稳定，且靠近底端的前 $i+L$ 层也稳定即可

> 本题最开始的时候到这里就结束了，后来`LazyJazz`辛苦工作一下午，写出了一份`10kB`的标程后，世界就变了样……

时间复杂度：$O(n^2)$

期望得分：30分

算法四

根据算法三点一，我们发现只要我们求出所有的前若干层的稳定性即可得解！

所以我们考虑先算出从上往下（注意：这次是从顶部往下考虑）前 i 层的重心在第 $i+1$ 层上的落点，得到一个允许的重心落点活动范围（即去掉顶端若干层后，重心位置变化值的范围）

然后我们发现，如果从上到下数第 i 块的覆盖范围的中点是 $M_i=\frac{L_i+R_i}{2}$，质量为 $W_i=R_i-L_i$，偏移量（我们称积木中心位置乘质量为偏移）为 $D_i=M_i\cdot W_i$，分别求出各个位置的质量前缀和和偏移量前缀和

$preW_i=\sum_{j=1}^{i}W_j,preD_i=\sum_{j=1}^{i}D_j$

那么从上往下前 i 块积木的重心应该是 $F_i=\frac{preD_i}{preW_i}$，对于所有 F_i 存在关系 $L_{i+1}\le F_i\le R_{i+1}$（重心落在下一层范围内）

于是我们得到重心活动范围限制 $limL_i$ 和 $limR_i$：$limL_i=L_{i+1}-F_i$，$limR_i=R_{i+1}-F_i$

对于任一关节（我们称两层积木接触位置为关节），其上方积木偏移量和为 $devi$ (deviation)，质量和为 $mass$，重心活动范围限制为 $[limL,limR]$，上方积木 偏移量和缩减量 y 与 质量和缩减量 x，存在限制：

$limL\le\frac{devi-y}{mass-x}-\frac{devi}{mass}\le limR$

若带入 x,y 后不满足上述不等式约束条件，则在该关节处存在不稳定状态，进而整体结构不稳定

进一步推式子，得到

$limL\le\frac{mass(devi-y)-devi(mass-x)}{mass(mass-x)}\le limR$

$limL\cdot mass(mass-x)\le mass(devi-y)-devi(mass-x)\le limR\cdot mass(mass-x)$

$limL\cdot mass(mass-x)\le devi\cdot x-mass\cdot y\le limR\cdot mass(mass-x)$

$limL \cdot mass^2 - limL \cdot mass \cdot x \leq devi \cdot x - mass \cdot y \leq limR \cdot mass^2 - limR \cdot mass \cdot x$

进而，当 $limL \cdot mass^2 - limL \cdot mass \cdot x > devi \cdot x - mass \cdot y$ 时，或 $limR \cdot mass^2 - limR \cdot mass \cdot x < devi \cdot x - mass \cdot y$ 时，结构不稳定

于是我们在每个关节处得到两个判断式

$limL \cdot mass^2 > (devi + limL \cdot mass)x - mass \cdot y$

$limR \cdot mass^2 < (devi + limR \cdot mass)x - mass \cdot y$

其中 $mass, devi, limL, limR$ 都是常数，可以发现这两个式子化简为 $C > Ax + By$ 或 $C < Ax + By$ 的形式后，其本质为要求对于一组 (x, y)，要求点 (x, y) 处于直线 $C = Ax + By$ 的一侧。可以用平衡树动态维护半平面交，并判断点是否在半平面交区域内求解。

实现动态维护半平面交和判断点是否满足条件后，把每个关节的数据带入求解即可。

动态维护半平面交具体实现方法

修改：用平衡树按横坐标排序维护上下凸壳上的顶点，每次插入一条直线后，三分法找出原凸壳出现在新直线限制范围外的顶点，删除原有超限顶点并插入新直线与原凸壳的交点。

查询：对于一组查询 (x, y) 找到以横坐标为标准，上下凸壳上 x 左边的顶点和 x 右边的顶点连成的直线，判断 (x, y) 相对于该直线所处位置即可（若出现在下凸壳下方或上凸壳上方即为不合法，否则合法）。

时间复杂度:$O(nlog^2n)$

期望得分：100分