Count解题报告

山东省青岛第二中学　田宇辰

题目大意

给定01串$s = s_0 ... s_{|s|-1}$，以及正整数$N = \prod_{i=1}^{n} p_i^{a_i}$，求有多少正整数$k$，$1 \leq k \leq N$，满足$gcd(k+i, N) = 1$当且仅当$s_i = 1$。

对$10^9 + 7$取模。保证p_i为质数。

$1 \leq p_i, a_i \leq 10^9$，$1 \leq n \leq 10^5$，$1 \leq |s| \leq 25$。

解法一

对于10%的测试点，$N \leq 10^7$。

对于每个N的因数x，可以$O(|s|)$地标记$(x - |s|, x]$中的数。

解法二

对于另外10%的测试点，$n = 1$。

按照k在p的剩余系中的取值进行讨论。对于每种合法取值显然有p^{a-1}个合法的数。

解法三

对于另外20%的测试点，$|s| \leq 15$，$p_i \leq 50$。

尝试将$n = 1$的情况推广到$n \geq 1$的情况，根据中国剩余定理，依次考虑k在每一个质数剩余系下的取值r_i，需满足：

（1）当$s_x = 1$，$\forall i$，$r_i + x \not\equiv 0 \pmod{p_i}$

（2）当$s_x = 0$，$\exists i$，$r_i + x \equiv 0 \pmod{p_i}$

每一种合法的取值组合都是一个合法答案。

设$dp[i][S]$表示前i个质数满足（1）且（2）中满足S的合法取值个数，转移时枚举r_i即可。

时间复杂度$O(2^{|s|}|s|\Sigma p_i)$。

解法四

对于另外30%的测试点，$|s| \leq 15$。

注意到当$p_i \geq |s|$时，能使状态发生改变的转移只有$(p_i - |s|, p_i]$中的数，并且其中的每一种取值恰好能使（2）中的其中一位变得合法。所以这一部分中的每一位都是等价的，不需要使用状态压缩求解。

设s中为1的位的个数为tot，$dp[i][j]$表示前i个质数中有j位还没有满足（2）。

$$dp[i+1][j] = dp[i][j] * (p_{i+1} - tot - j) + dp[i][j+1] * (j+1)$$

这一部分时间复杂度为$O(n|s|)$。

解法五

这里我们需要优化$p_i \le |s|$的部分。可以发现p_i的取值很少且有效状态不会太多，只需将有效状态记录下来并转移，即可通过本题。