

# Simple Tree solution

---

## Subtask 1

- 模拟。
- 时间复杂度  $O(nm)$ 。

## Subtask 2

- 问题变成了序列上的区间  $\pm 1$ ，区间询问有多少个数  $> 0$ 。
- 对序列进行分块，对每个块维护有多少个数  $> 0$ ，块内的加法标记。
- 需要支持整块  $\pm 1$  后快速维护有多少个数  $> 0$ ，可以用哈希表，但常数太大，更优秀的做法是维护整块排序好的数组，以及在当前加法标记下第一个  $> 0$  的位置。当块部分被加时，用归并排序来线性排序。
- 设块长为  $len$ ，则时间复杂度  $O(m(len + \frac{n}{len}))$ ，
- $len$  取  $\sqrt{n}$  时，时间复杂度取到最优值  $O(m\sqrt{n})$ 。

## Subtask 3

- 同 *codeforces* 966 E。
- 对操作进行分块，依次处理每块的操作，对操作的点建出虚树，虚树上每条边对应的原树的点(即边的两个端点在原树上的路径)分成一个块，像 *Subtask 2* 那样维护。每次询问和链修改就在虚树上暴力就好了。
- 一个小问题是每次初始化时如何将点权排序，由于块的长度限制了点权值域，即当点权的绝对值超过块的长度时贡献是确定的，所以可以用计数排序来线性排序。
- 设块长为  $len$ ，则时间复杂度  $O(\frac{m}{len} \times n + m \times len)$ ，
- $len$  取  $\sqrt{n}$  时，时间复杂度取到最优值  $O(m\sqrt{n})$ 。

## Subtask 4

- 在 *Subtask3* 的基础上多了一个子树询问。
- 对于在虚树的边上的点只用暴力遍历虚树上的子树即可，
- 对于不在虚树的边上的点点权是不会变的，预处理贡献即可。

## Subtask 5

- 对原树进行轻重链剖分，链修改/询问转化为序列上的  $\log n$  次区间修改/询问，子树询问转化为序列上的 1 次区间询问。
- 套用 *Subtask2* 的做法即可达到时间复杂度  $O(m\sqrt{n} \log n)$ 。
- 注意到一个性质，一次链修改/询问转化为  $\log n$  次区间修改/询问后，长度和是不超过  $n$  的。所以设块长为  $len$ ，则时间复杂度为  $O(m(\log n \times len + \frac{n}{len}))$ ，当  $len$  取  $\sqrt{\frac{n}{\log n}}$  时，时间复杂度取到最优值  $O(m\sqrt{n \log n})$ 。出题人试图卡这个算法(也因此正解可能需要卡常)，但不排除通过的可能。

## Subtask 6

- 分析轻重链剖分的性质，每个轻边爸爸的 *size* 都至少是儿子的 2 倍，所以考虑对每条重链单独分块，块长为根号(链长)。
- 分析链修改的复杂度(询问是一样的)，一次链修改可以拆成两次从下到上竖直的链修改，考虑一次从下到上竖直的链修改，每修改一条重链的时候，复杂度为根号(链长)，不超过重链的 *top* (指顶端结点)的 *size*，将从下到上修改的重链的 *top* 的 *size* 依次记作  $a_{1..m}$ ，由于  $2a_i < a_{i+1}$ ，所以  $a_i \leq \frac{n}{2^{m-i}}$ ，所以复杂度 
$$\leq \sum_{i=0}^{m-1} \sqrt{\frac{n}{2^i}} = \sqrt{n} \sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^i = O(\sqrt{n})。$$
- 现在考虑子树询问操作。重链的 *dfs* 序的定义为，将所有重链按 *top* 的 *dfs* 序排序后，第  $i$  条重链的 *dfs* 序为  $i$ 。一个子树的点等于子树的根所在的重链的一段加上其他在子树内部的重链的全部。前者可以暴力  $O(\sqrt{n})$  查询；后者在 *dfs* 序上是连续的一段区间，链修改时只会修改  $\log n$  条重链，所以可以用树状数组维护。
- 还有一个方法，就是将重链分块后那些块称为块链，然后类似的，每次只用查询一个块链的一部分和 *dfs* 序上一个区间的块链，链修改时只会修改  $\sqrt{n}$  条块链，所以可以用值域分块维护。
- 时间复杂度  $O(m\sqrt{n})$ 。
- 还有一种方法(感谢李欣隆同学提供这种方法)。
- 首先在树上选出  $\sqrt{n}$  个关键点，使得任意一点往上走至多  $\sqrt{n}$  步就会遇到一个关键点。这只用从下往上枚举每个点贪心，如果子树里存在距离为  $\sqrt{n}$  且它们之间不存在关键点的点则选择，否则不选。
- 然后类似 *Subtask 3*，建出这些关键点的虚树，虚树上的每条边分成一个块。
- 对于一次链修改/询问，不在虚树的边上的点只有  $O(\sqrt{n})$  个，直接暴力，在虚树上的部分就在虚树上  $O(\sqrt{n})$  暴力。子树询问同样用值域分块。时间复杂度同样为  $O(m\sqrt{n})$ 。

## 总结

本题作为一道数据结构题思维难度一般，但解法中对树进行链剖分的两种方法比较少见。实际上通过这两种树链剖分可以将很多序列分块题放到树上，挺有(me)意义的。