

Аннотация

В выпускной квалификационной работе реализована математическая модель распространения тепла и области коагуляции биологической ткани в условиях локального разогрева лазерным излучением. Были поставлены эксперименты с неоднородной и однородной коагуляцией белка, и, с помощью математической модели, были определены его теплофизические свойства.

Оглавление

| | |
|--|----|
| Введение | 5 |
| Глава 1. Обзор литературы | 6 |
| 1.1. Распространение излучения в мутных средах | 6 |
| 1.2. Распространение тепла в среде | 18 |
| 1.3. Биологические ткани | 26 |
| Глава 2. Измерение распространения области коагуляции яичного белка в процессе разогрева лазерным излучением | 32 |
| Глава 3. Математическое моделирование | 35 |
| 3.1. Моделирование распространения температуры и области деградации биологической ткани в процессе разогрева ла- зерным излучением | 35 |
| 3.2. Разностная схема распространения тепла в веществе с пе- ременными коэффициентами с внутренними источниками тепла | 37 |
| Глава 4. Измерение теплофизических параметров исследу- емого образца | 40 |
| 4.1. Измерение коэффициента теплопроводности и теплоёмко- сти образца | 41 |
| 4.2. Измерение коэффициента теплоотдачи образца | 41 |
| Глава 5. Сравнение экспериментальных результатов с ре- зультатами моделирования распространения области коа- | |

| | |
|--|----|
| гуляции | 44 |
| Глава 6. Результаты и выводы | 50 |
| Благодарности | 51 |
| Список литературы | 52 |

Введение

В настоящее время лазерные технологии используются во многих сферах: промышленность, наука, военное дело, медицина. С помощью лазерного излучения производятся различные технологические операции, исследования. Важнейшая область, в которой используют лазерное излучение — медицина. Здесь, лазерное излучение используют для воздействия на биологические ткани: проводятся офтальмологические, дерматологические, урологические и другие операции. Часто нужно локально нагреть биоткань, не повреждая окружающие структуры. Для того, чтобы достичь необходимого эффекта, нужно правильно подобрать параметры лазерного излучения: длину волны, мощность, время воздействия. Для оптимизации этих параметров используется физическое и математическое моделирование взаимодействия электромагнитного излучения с биологическими тканями [1].

При воздействии лазерного излучения на биологические среды, может происходить их разогрев. Рост температуры влияет на изменение оптических свойств тканей, а также может вызвать протекание химических реакций в среде и изменение её структуры. Моделирование позволяет учесть эти эффекты и оптимизировать параметры лазерного излучения, для того чтобы достичь необходимого результата.

В данной работе разработана и реализована математическая модель распространения тепла и области коагуляции биологической ткани в условиях неравномерного разогрева лазерным излучением. Также проведена верификация математической модели на основе экспериментальных данных.

Глава 1

Обзор литературы

1.1. Распространение излучения в мутных средах

1.1.1. Взаимодействие электромагнитного излучения со средой

Излучение может взаимодействовать с веществом несколькими способами: отражение, преломление, рассеяние и поглощение.

Отражение света

Закон отражения света, в случае раздела изотропных сред плоской границей: Луч падающий, нормаль к отражающей поверхности и луч отраженный лежат в одной плоскости, причем углы между лучами и нормалью равны между собой [2].

$$\theta_i = \theta_r \quad (1.1)$$

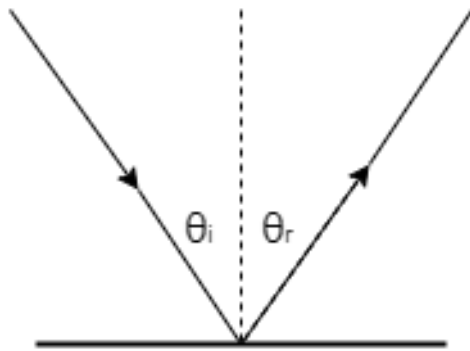


Рис. 1.1. К закону отражения
света

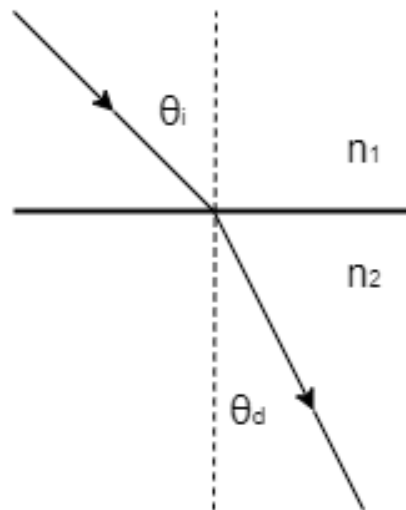


Рис. 1.2. К закону преломления света

Преломление света

Преломление света может быть описано с помощью Закона Снеллиуса:

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_d \quad (1.2)$$

Рассмотрим электромагнитную волну, падающую на границу двух изотропных однородных диэлектриков. Важными, параметрами, описывающими такое взаимодействие, являются коэффициент отражения R и пропускания T отражающей среды по интенсивности

Они зависят от поляризации падающей волны. Будем рассматривать две компоненты поляризации: лежащую в плоскости падения E_{\parallel} и перпендикулярную ей E_{\perp} .

Формулы Френеля — соотношения между амплитудами падающей, отраженной и преломленной волн [2]:

$$r_{\parallel} = \frac{E_{r\parallel}}{E_{i\parallel}} = \frac{\operatorname{tg}(\theta_i - \theta_d)}{\operatorname{tg}(\theta_i + \theta_d)} \quad (1.3)$$

$$t_{\parallel} = \frac{E_{d\parallel}}{E_{i\parallel}} = \frac{2 \sin \theta_d \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_d) \cos(\theta_i \theta_d)} \quad (1.4)$$

$$r_{\perp} = \frac{E_{r\perp}}{E_{i\perp}} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_d)}{\sin(\theta_i + \theta_d)} \quad (1.5)$$

$$t_{\perp} = \frac{E_{d\perp}}{E_{i\perp}} = \frac{2 \sin \theta_d \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_d)} \quad (1.6)$$

Коэффициенты R и T для разных поляризаций равны соответственно:

$$R_{\parallel} = r_{\parallel}^2 = \left[\frac{\operatorname{tg}(\theta_i - \theta_d)}{\operatorname{tg}(\theta_i + \theta_d)} \right]^2, \quad R_{\perp} = r_{\perp}^2 = \left[\frac{\sin(\theta_i - \theta_d)}{\sin(\theta_i + \theta_d)} \right]^2 \quad (1.7)$$

$$T_{\parallel} = t_{\parallel}^2 = \left[\frac{2 \sin \theta_d \cos \theta_i}{\sin (\theta_i + \theta_d) \cos (\theta_i \theta_d)} \right]^2, \quad T_{\perp} = t_{\perp}^2 = \left[\frac{2 \sin \theta_d \cos \theta_i}{\sin (\theta_i + \theta_d)} \right]^2 \quad (1.8)$$

Рассеяние

Рассеяние — это процесс, в котором излучение, взаимодействуя со средой, изменяет направление своего распространения [3]. Рассеяние может быть упругим (без изменения длины волны) и неупругим. В данной работе будет рассматриваться только упругое рассеяние.

Пусть на частицу падает линейно-поляризованная плоская волна с единичной амплитудой:

$$\mathbf{E}_i = \hat{\mathbf{e}}_i \exp(ik\hat{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{r}), \quad (1.9)$$

где $\hat{\mathbf{e}}_i$ — единичный вектор в направлении поляризации электрической волны, k — волновое число, $\hat{\mathbf{i}}$ — единичный вектор в направлении распространения волны, \mathbf{r} — радиус-вектор рассеивающей частицы.

На большом расстоянии R от частицы ($R > D^2/\lambda$, где D — характерный размер частицы, λ — длина волны излучения) рассеянное излучение можно описать расходящейся сферической волной $\mathbf{E}_s(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{i}}) \frac{e^{ikR}}{R}, \quad (1.10)$$

где амплитуда рассеяния $\mathbf{f}(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{i}})$ описывает амплитуду, фазу и поляризацию рассеянной в направлении $\hat{\mathbf{s}}$ волны [4].

Дифференциальное сечение рассеяния определяется следующим образом [5]:

$$\sigma_d(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{i}}) = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{R^2 S_s}{S_i} \right] = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{i}})^2, \quad (1.11)$$

где S_s и S_i — амплитуды векторов плотности потока мощности рассе-

янной и падающей волн:

$$S_i = \frac{E_i^2}{2\eta_0} \hat{\mathbf{i}}, \quad S_s = \frac{E_s^2}{2\eta_0} \hat{\mathbf{s}} \quad (1.12)$$

где $\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$ — характеристический импеданс среды.

Полное сечение рассеяния равняется интегралу дифференциального сечения по телесному углу 4π :

$$\sigma_s = \int_{4\pi} \sigma_d d\omega = \int_{4\pi} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{i}})^2 d\omega \quad (1.13)$$

Выражение для коэффициента рассеяния (N_s — концентрация рассеивающих центров):

$$\mu_s = \sigma_s N_s \quad (1.14)$$

Для описания углового распределения интенсивности рассеянного излучения вводят фазовую функцию рассеяния $p(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}')$, выражающую вероятность того, что фотон рассеется на угол θ_s (угол между единичными векторами направления $\hat{\mathbf{s}}$ и $\hat{\mathbf{s}}'$) при падении на рассеивающий центр. Интеграл от фазовой функции рассеяния по телесному углу 4π должен быть равен единице:

$$\int_{4\pi} p(\cos \theta_s) d\omega = \int_0^{2\pi} p(\varphi) d\varphi \int_{-1}^{+1} p(\cos \theta_s) d(\cos \theta_s) = 1, \quad (1.15)$$

где $d\omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ элементарный телесный угол.

Поглощение

Диэлектрическая проницаемость в общем случае является комплексной величиной:

$$\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon'' \quad (1.16)$$

Действительное слагаемое отвечает за изменение скорости распространения излучения в среде, а мнимое — за его затухание в среде, то

есть за поглощение. Если мнимая часть диэлектрической проницаемости среды равна нулю, то излучение проходит через среду без потерь.

При прохождении света через вещество часть энергии поглощается электронами. После этого энергия может частично вернуться к электромагнитной волне, т.к. электроны могут испустить вторичные волны, а может перейти и в другие типы энергии. Это приводит к уменьшению интенсивности света, что может быть описано законом Бугера-Ламберта-Бера:

$$I(z) = I \exp(-\mu_a z), \quad (1.17)$$

где μ_a — коэффициент поглощения, z — толщина слоя.

Коэффициент поглощения есть

$$\mu_a = \sigma_a N_a, \quad (1.18)$$

где N_a — концентрация поглощающих центров, а σ_a — сечение поглощения.

Выражение для полного сечения поглощения σ_a [5]

$$\sigma_a = \frac{\int_V \frac{1}{2} \omega \varepsilon_p''(\mathbf{r}') |E|^2 dV'}{S_i}, \quad (1.19)$$

где ω — частота излучения, $\varepsilon_p''(\mathbf{r}')$ — комплексная часть диэлектрической проницаемости вещества поглощающей частицы в точке с радиус-вектором \mathbf{r}' , $\mathbf{E} = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s$ — сумма векторов напряжённостей электрических полей падающей и рассеянной волн, S_i — амплитуда вектора плотности потока мощности падающей волны, V — объём поглощающей частицы. Если амплитуду падающей волны принять равной единице, то сечение поглощения равно

$$\sigma_a = \int_V k \frac{\varepsilon_p''(\mathbf{r}')}{\varepsilon_0} |\mathbf{E}(\mathbf{r}')|^2 dV', \quad (1.20)$$

где $\mathbf{E}(\mathbf{r}')$ — полная напряжённость электрического поля внутри частицы.

1.1.2. Оптические свойства мутных сред

Мутные среды — среды, в которых значительна интенсивность рассеяния света на содержащихся или возникающих в них нерегулярных (хаотически расположенных) оптических неоднородностях. Рассеяние в Мутных средах приводит к изменению первоначального направления облучающего их света [2]. Для таких сред вводится понятие полного коэффициента ослабления μ_t и оптическое альбедо a :

$$\mu_t = \mu_a + \mu_s \quad (1.21)$$

$$a = \frac{\mu_s}{\mu_t} = \frac{\mu_s}{\mu_a + \mu_s} \quad (1.22)$$

Для описания анизотропии рассеяния вводится фактор анизотропии g , как средний косинус угла рассеяния θ :

$$g = \frac{\int_{4\pi} p(\theta) \cos \theta d\omega}{\int_{4\pi} p(\theta) d\omega} \quad (1.23)$$

Так, при $g = 1$ — рассеяние строго вперед, $g = -1$ — строго назад, $g = 0$ — анизотропное рассеяние. Для биологических тканей $g = 0.7-0.99$ [1]. Часто, для решения задач по распространению излучения в биологических тканях используется фазовая функция рассеяния Хеньи-Гринштейна [1]:

$$p(\theta) = \frac{1 - g^2}{(1 + g^2 - 2g \cos \theta)^{3/2}} \quad (1.24)$$

1.1.3. Уравнение переноса излучения в мутных средах

Математическое описание характеристик поглощения и рассеяния света может быть проведено двумя способами — с помощью аналитической теории (уравнения Максвелла) и с помощью теории переноса излучения (ТПИ). Эта теория описывает частицы, обладающие энергией $h\nu$ и скоростью c . Эти частицы рассеиваются и поглощаются структурами в мутной среде, такой, как биоткань, и отражаются на границе, подчиняясь закону Френеля [6].

Уравнение переноса излучения описывает изменение энергетической яркости при распространении излучения в мутной среде. Энергетической яркостью (яркостью, лучевой интенсивностью) $L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})$ будем обозначать количество энергии dE_ν , заключённой в единичном интервале частот $d\nu$ вблизи частоты ν в единичном телесном угле $d\omega$, проходящей через единичную площадь $d\sigma$ за единицу времени dt [7]:

$$L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) = \frac{dE_\nu}{\cos \theta d\nu d\sigma d\omega dt}, \quad (1.25)$$

где θ — угол между \mathbf{r} и $\hat{\mathbf{s}}$ эта величина называется лучевой интенсивностью (энергетической яркостью) и она измеряется в единицах $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{ср} \cdot \text{Гц}}$

При распространении в мутной среде, энергетическая яркость изменяется по следующему закону [7]:

$$\hat{\mathbf{s}} \nabla L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) = -\mu_t L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) + \mu_s \int_{4\pi} p(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) d\omega' + S(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) \quad (1.26)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор точки в среде, $p(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}')$ — функция рассеяния, $S(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})$ — функция источников, $d\omega'$ — элемент телесного угла вдоль направления единичного вектора $\hat{\mathbf{s}}'$.

Это уравнение описывает изменение лучевой интенсивности при распространении излучения. Первое слагаемое правой части уравнения со-

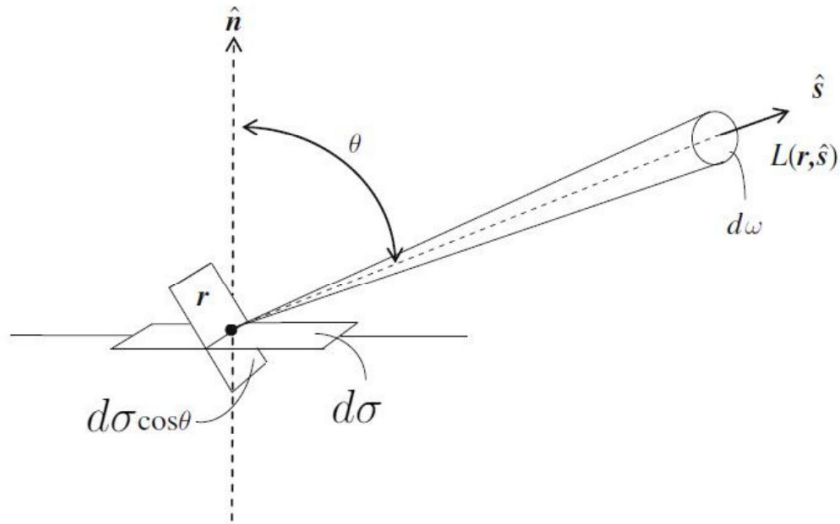


Рис. 1.3. К определению лучевой интенсивности

ответствует уменьшению интенсивности из-за поглощения и рассеяния. Второе слагаемое отвечает за увеличение интенсивности из-за рассеяния других частиц с направлений \hat{s}' в направлении \hat{s} . Третье слагаемое определяет увеличение интенсивности из-за излучения из рассматриваемого элементарного объёма.

1.1.4. Методы математического моделирования распространения излучения в мутных средах

Диффузионное приближение

Интенсивность излучения в мутных средах можно разделить на диффузную $L_d(\mathbf{r}, \hat{s})$ и коллимированную $L_c(\mathbf{r}, \hat{s})$ компоненты:

$$L(\mathbf{r}, \hat{s}) = L_c(\mathbf{r}, \hat{s}) + L_d(\mathbf{r}, \hat{s}) \quad (1.27)$$

Коллимированная компонента отвечает за ни разу не рассеянное излучение, она ослабляется с увеличением глубины проникновения в ткань в соответствии с законом Бугера-Ламберта-Бера. Диффузная компонента отвечает за излучение, появившееся в результате рассеяния. Для определения диффузной компоненты используют различные приближения. В

диффузионном приближении диффузная компонента может быть разложена по сферическим гармоникам полинома Лежандра:

$$L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) = \frac{1}{4\pi}(\varphi_d(\mathbf{r} + 3F_d(\mathbf{r} * \mathbf{s} + \dots)), \quad (1.28)$$

где φ_d — интенсивность диффузной компоненты, $F_d(\mathbf{r})$ — вектор диффузного потока, сонаправленный единичному вектору \mathbf{s} .

Представление диффузной компоненты энергетической яркости как суммы нулевого и первого слагаемого ряда называется в литературе диффузным приближением.

Данное приближение предполагает, что диффузная интенсивность встречает много частиц и рассеивается на них почти равномерно во всех направлениях, поэтому его угловое распределение почти изотропно[5].

Метод Кубелки-Мунка

Этот метод применим, когда среда достаточно замутнена, для того чтобы свет рассеивался диффузно(равномерно во всех направлениях), теория неприменима, когда есть коллимированный пучок света. Внутри ткани рассматриваются два потока L_1 и L_2 , направленные вдоль и против волнового вектора падающего излучения соответственно. Также вводятся безразмерные коэффициенты поглощения и рассеяния A_{KM} и S_{KM} . Для данной модели запишем систему дифференциальных уравнений, описывающих распространение излучения:

$$\frac{dL_1}{dz} = -S_{KM}L_1 - A_{KM}L_1 + S_{KM}L_2, \quad (1.29a)$$

$$\frac{dL_2}{dz} = -S_{KM}L_2 - A_{KM}L_2 + S_{KM}L_1, \quad (1.29b)$$

где z определяет направление падающего излучения.

Из этих уравнений видно, что лучевая интенсивность света, проходящего через среду, уменьшается из-за рассеяния и поглощения, но увеличивается из-за рассеяния в обратном направлении. Коэффициенты A_{KM}

и S_{KM} в величинах μ_a и μ_s записываются следующим образом[6]:

$$A_{KM} = 2\mu_a, \quad S_{KM} = \mu_s \quad (1.30)$$

Очевидным плюсом данной модели является ее простота. Но эта модель может быть применена только в одномерном случае, при условии отсутствия коллимированной компоненты света. Однако, данная модель может быть улучшена, при рассмотрении нескольких потоков излучения.

Метод Монте-Карло

Метод Монте-Карло является численным приближением Уравнения переноса. Основные шаги метода Монте-Карло это: генерация источника фотона, генерация траектории фотона, поглощение фотона, ликвидация фотона, регистрация результата (рис. 1.4).

Рассмотрим эти шаги подробнее:

1. Генерация источника фотона.

Фотон запускается внутрь среды, при этом угловое и пространственное распределение фотонов определяется угловым и пространственным распределением источника падающего излучения.

2. Генерация траектории фотона.

После того, как фотон рассеивается, для него задается новая длина траектории:

$$\Delta s(\xi_1) = -\frac{\ln \xi_1}{\rho \sigma_s}, \quad (1.31)$$

где ξ_1 — случайное число от 0 до 1, ρ — плотность рассеивающих частиц, σ_s — сечение их рассеяния. Таким образом, среднее значение длины траектории фотона равняется длине свободного пробега в среде.

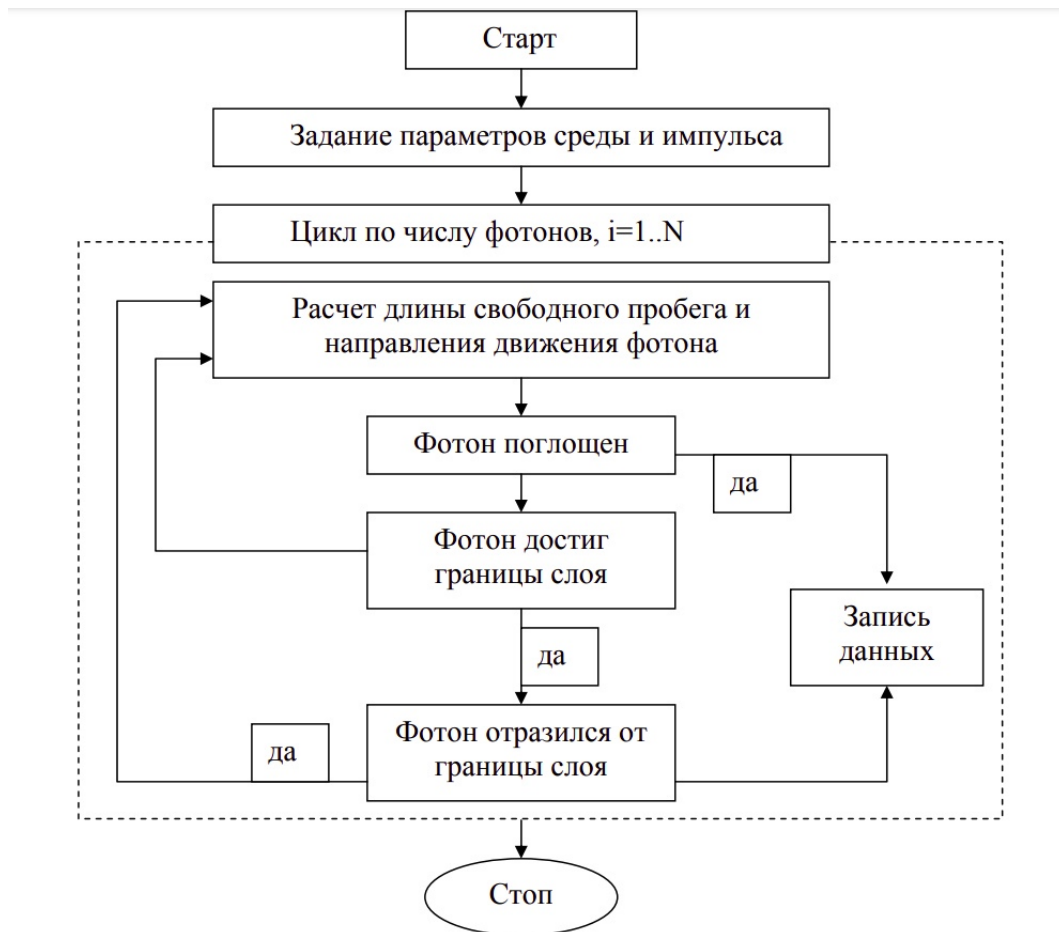


Рис. 1.4. Схема алгоритма Монте-Карло [1]

Кроме длины траектории генерируется также и два случайных числа ξ_2 и ξ_3 , которые определяют угол рассеяния θ_s (определяющийся согласно фазовой функции рассеяния Хеньи-Гринштейна) и полярный угол рассеяния $\Phi = 2\pi\xi_3$.

3. Поглощение фотона

Изначально, каждому фотону присваивается вес ω равный единице. После того, как фотон сталкивается с поглощающей частицей, его вес уменьшается в $(1 - a)$ раз.

4. Ликвидация

Когда вес фотона становится меньше определенного значения, фотон ликвидируется. Т.е. его вес принимается равным нулю и распро-

странение фотона больше не рассматривается. Но, у фотона есть $\frac{1}{m}$ вероятность "выжить", и если это событие происходит, то его вес становится равным $m \cdot \omega$. Благодаря этому подходу не нарушается закон сохранения энергии.

5. Регистрация

Предыдущие шаги повторяются для $N \sim 10^6$ фотонов, после чего на выходе получается карта траекторий фотонов, пространственное и угловое распределение фотонов, вышедших из среды и доля поглощенных фотонов.

Математическим обоснованием для использования метода Монте-Карло при решении задачи о распространении фотонов в среде служит центральная предельная теорема, которая утверждает, что сумма $\sum_{i=1}^N X_i$ большого количества N независимых одинаково распределённых случайных величин с одинаковыми математическими ожиданиями m и дисперсиями σ^2 имеет распределение, близкое к нормальному, с математическим ожиданием $N \cdot m$ и дисперсией $N \cdot \sigma^2$. Случайными величинами в рассмотренной выше реализации метода Монте-Карло являются длина свободного пробега фотонов в среде и угол, на который рассеивается фотон при падении на частицу среды. Метод Монте-Карло сходится к решению как $\frac{1}{N}$ с погрешностью порядка $\frac{1}{\sqrt{N}}$ не зависящей от размерности задачи [1].

1.2. Распространение тепла в среде

1.2.1. Уравнение теплопроводности

Плотность теплового потока q — это количество тепла, приходящее в единицу времени и отнесенное к единице площади изотермической поверхности.

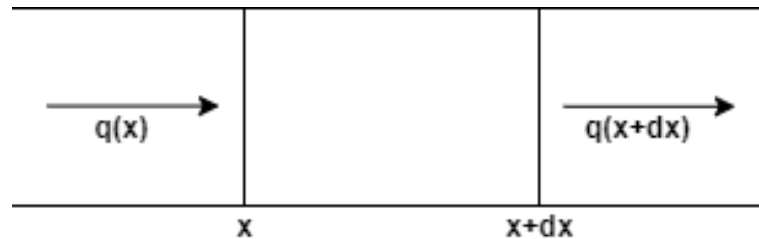
Основной закон теплопроводности (закон Фурье):

Плотность теплового потока прямо пропорциональна градиенту температуры[8].

$$q = \lambda \nabla T, \quad (1.32)$$

где λ — коэффициент теплопроводности $\left[\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}} \right]$

Рассмотрим бесконечно малый участок бесконечно длинного цилиндра в неограниченной среде, в которой, параллельно оси Ox распространяется тепло.



Длина этого участка dx , а площадь поперечного сечения цилиндра равна S . Количество тепла, поступающее в цилиндр слева за время dt равняется $q(x)Sdt$, а уходящего справа, равно $q(x+dx)Sdt$. Тогда полное количество тепла, вступающее в этот участок за время dt равно

$$[q(x) - q(x+dx)]Sdt = -\frac{\partial q}{\partial x}Sdxdt$$

Это тепло также можно представить в виде:

$$dQ = dM \cdot c dT,$$

где $dM = \rho S dx$ — масса цилиндра, c — удельная теплоёмкость, ρ — плотность.

Из этих двух уравнений следует:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}.$$

Это выражение для одномерного случая, аналогично для многомерного случая получим:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla q \quad (1.33)$$

Объединяя уравнения (1.32) и (1.33) получим уравнение теплопроводности:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(\lambda \nabla T) \quad (1.34)$$

До этого мы не учитывали, что в среде могут быть источники тепла. Учитывая это, получим:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(\lambda \nabla T) + Q \quad (1.35)$$

где $T(\mathbf{r}, t)$ функция, которая задает температуру в момент времени t в точке $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$; $Q(\mathbf{r}, t)$ функция, отвечающая за источники тепла.

1.2.2. Граничные условия в задаче теплопроводности

Уравнение теплопроводности 1.35 описывает распространение тепла внутри тела. В дополнение к дифференциальному уравнению вводятся также начальные и граничные условия. Начальные условия определяют поведение в начальный момент времени, граничные условия задают поведение на границе тела.

1. Граничные условия первого рода:

Задают распределение температуры на поверхности тела.

$$T(\mathbf{r}, t) = T_w(\mathbf{r}, t), \quad (1.36)$$

T_w — температура поверхности тела. \mathbf{r} — радиус вектор точки.

2. Граничные условия второго рода:

Задают тепловой поток на поверхности тела.

$$-\lambda \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{n}} = q_w(\mathbf{r}, t), \quad (1.37)$$

где, \mathbf{n} — нормаль к поверхности тела.

3. Граничные условия третьего рода:

Определяют поток тепла в соответствии с законом Ньютона-Рихмана.

$$-\lambda \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{n}} = \alpha(T_w(\mathbf{r}, t) - T^e(\mathbf{r}, t)), \quad (1.38)$$

α — коэффициент теплоотдачи. T^e — температура окружающей среды

4. Граничные условия четвертого рода. Это условия равенства температур и потоков тепла на границе раздела

$$\begin{cases} -\lambda_1 \left(\frac{\partial T_1(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{n}} \right)_{\Gamma} = -\lambda_2 \left(\frac{\partial T_2(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{n}} \right)_{\Gamma} \\ T_1(\mathbf{r}_{\Gamma}, t) = T_2(\mathbf{r}_{\Gamma}, t) \end{cases} \quad (1.39)$$

Эти условия называют условиями непрерывности. В совокупности с уравнением теплопроводности они полностью задают формулировку краевой задачи теплопроводности.

1.2.3. Математическое моделирование распространения тепла в веществе

Уравнение теплопроводности позволяет описать распространение тепла в веществе. Однако, его аналитические решения возможно найти лишь в небольшом количестве частных случаев. Поэтому чаще всего задачу решают численно.

Одним из методов численного решения является метод конечных разностей (МКР), в нем производные заменяют на их конечно-разностные аппроксимации.

Так для частной производной температуры по времени получится следующее выражение:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau} \quad (1.40)$$

Для частной производной второго порядка температуры по координате:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{h^2} \quad (1.41)$$

При использовании МКР для задач теплопроводности твердое тело представляют в виде совокупности узлов. Аппроксимируя частные производные дифференциального уравнения конечными разностями и добавляя разностное представление граничных условий получают систему линейных алгебраических уравнений для определения температуры, как локальной характеристики в каждом узле сетки. В результате получают замкнутую систему линейных алгебраических уравнений, которую решают численными методами с помощью ЭВМ [9].

Выделяют явные и неявные схемы решения дифференциальных уравнений. Для того, чтобы получить результат используя неявную схему нужно решить систему алгебраических уравнений, т.е. результат пред-

ставлен неявно. Явные же схемы вычисляют значение сеточной функции через данные соседних точек. Плюс неявных схем в том, что они обычно являются устойчивыми, в отличие от явных разностных схем.

Так, например, для одномерной задачи теплопроводности:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq L \quad (1.42)$$

Со следующими начальными и граничными условиями

$$\begin{cases} t = 0 : T = T_0 & 0 \leq x \leq L \\ x = 0 : T = T_l & t > 0 \\ x = L : T = T_r & t > 0 \end{cases} \quad (1.43)$$

Для неявной схемы получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \rho c \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau} = \lambda \left(\frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{h^2} \right), & i = 2, \dots, N-2, n \geq 0 \\ T_i^0 = T_0 & i = 2, \dots, N-2 \\ T_1^n = T_l & n > 0 \\ T_N^n = T_r & n > 0 \end{cases} \quad (1.44)$$

Для явной схемы получим:

$$\begin{cases} \rho c \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau} = \lambda \left(\frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{h^2} \right), & i = 2, \dots, N-2, n \geq 0 \\ T_i^0 = T_0 & i = 2, \dots, N-2 \\ T_1^n = T_l & n > 0 \\ T_N^n = T_r & n > 0 \end{cases} \quad (1.45)$$

где τ — шаг сетки по времени, а n — номер шага. При этом по оси x сетка была разбита на N частей, где x_i ($i = 0, \dots, N$) — координаты узлов.

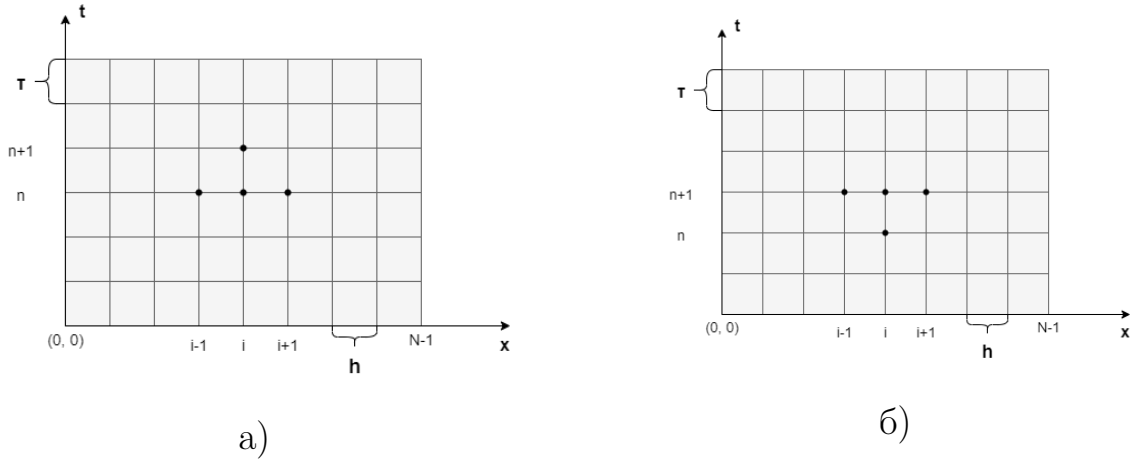


Рис. 1.5. Шаблоны явной (а) и неявной (б) схем

Для решения неявных схем применяют метод прогонки, который состоит из двух этапов: сначала находят прогоночные коэффициенты α_i и β_i (прямая прогонка). Их получают следующим образом: систему уравнений (1.44) можно привести к виду [9]:

$$\begin{cases} A_i \cdot T_{i+1}^{n+1} + B_i \cdot T_i^{n+1} + C_i \cdot T_{i-1}^{n+1} = F_i, & i = 2, \dots, N-2, n \geq 0 \\ T_i^0 = T_0 & i = 2, \dots, N-2 \\ T_1^n = T_l & n > 0 \\ T_N^n = T_r & n > 0 \end{cases} \quad (1.46)$$

где

$$A_i = C_i = \frac{\lambda}{h^2}, \quad B_i = \frac{2 \cdot \lambda}{h^2} + \frac{\rho c}{\tau}, \quad F_i = -\frac{\rho c}{\tau} T_i^n. \quad (1.47)$$

Далее предполагается, что есть такие наборы чисел α_i и β_i ($i = 0, \dots, N-1$), такие что

$$T_i^{n+1} = \alpha_i \cdot T_{i+1}^{n+1} + \beta_i \quad (1.48)$$

Уменьшив в этом уравнении индекс i на единицу и подставив его в уравнение (1.47) получим выражения для α_i и β_i :

$$\alpha_i = \frac{A_i}{B_i - C_i \cdot \alpha_{i-1}}, \quad \beta_i = \frac{C_i \cdot \beta_{i-1} - F_i}{B_i - C_i \cdot \alpha_{i-1}}. \quad (1.49)$$

α_0 и β_0 определяются с помощью левого граничного условия, остальные коэффициенты определяются с помощью уравнения (1.49).

После этого с помощью этих коэффициентов по формулам (1.48) находят неизвестные температуры $T_{N-1}^{n+1}, T_{N-2}^{n+1}, \dots, T_2^{n+1}$, при условии, что T_N^{n+1} найдено из правого граничного условия (обратная прогонка).

Для решения задачи теплопроводности, в которой присутствуют несколько пространственных переменных используют локально-одномерную разностную схему А.А. Самарского [10]. Она является абсолютно устойчивой. Суть данного метода состоит в том, что шаг по времени разбивается на несколько частей (в случае двумерного уравнения на две части) и после этого на промежуточных временных шагах проводится дискретизация многомерного уравнения по-очереди, сначала вдоль только направления x , затем вдоль направления y и т.д. Таким образом, на каждом промежуточном шаге решается одномерная задача.

До этого, мы считали, что коэффициент теплопроводности не зависит от температуры, но чаще всего это не так. Если учесть это, то одномерное уравнение теплопроводности (1.42) примет вид:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda(T) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq L \quad (1.50)$$

А для неявной схемы 1.44 выражение изменится следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho c \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau} = \frac{1}{h} \left(\frac{\lambda_i^{n+1} + \lambda_{i+1}^{n+1}}{2} \frac{T_{i+1}^{n+1} - T_i^{n+1}}{h} - \right. \\ \left. - \frac{\lambda_{i-1}^{n+1} + \lambda_i^{n+1}}{2} \frac{T_i^{n+1} - T_{i-1}^{n+1}}{h} \right), \quad i = 2, \dots, N-2, \quad n \geq 0 \\ T_i^0 = T_0 \quad i = 2, \dots, N-2 \\ T_1^n = T_l \quad n > 0 \\ T_N^n = T_r \quad n > 0 \end{array} \right. \quad (1.51)$$

1.3. Биологические ткани

1.3.1. Состав биологических тканей

Вещества делятся на органические и неорганические. В состав большинства органических веществ входят такие химические элементы как углерод, водород, кислород, азот, фосфор и сера. Эти атомы являются составными частями макромолекул — молекул, состоящих из большого числа структурных единиц. Основными макромолекулами биологических веществ являются нуклеиновые кислоты (ДНК и РНК), белки, углеводы, липиды. Из этих макромолекул состоят клетки — структурные единицы всего живого.

Также биологические ткани могут не иметь клеточную структуру. Так например, рассмотрим из чего состоит белок куриного яйца.

Яичный белок содержит в среднем: 85,7 % воды, 12,7 % белков, 0,3 % жиров, 0,7 % углеводов, 0,6 % минеральных веществ [11]. В состав яичного белка входят следующие белки: овальбумин (около 54 %), кональбумин (12—13 %), лизоцим (3,4—3,5 %) и другие.

1.3.2. Оптические свойства биологических тканей

Хромофоры — соединения или группы атомов, которые определяют цвет химического соединения. В разных диапазонах длин волн разные хромофоры определяют спектр поглощения.

Хлорофилл — важнейший хромофор у растений. Есть два типа хлорофилла: а и б. Хлорофилл типа а поглощает свет в пределах фиолетовой, синей и красной длин волн, т.е. хорошо поглощает излучение в видимом спектре, кроме области вблизи зеленого цвета ($\lambda = 500\text{нм}$), поэтому он кажется зеленым (рис. 12). Добавление хлорофилла типа b рядом

с хлорофиллом типа а расширяет спектр поглощения[12]:

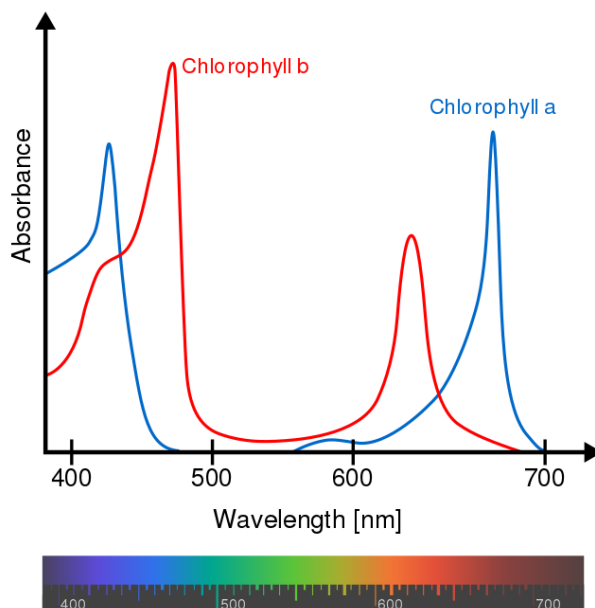


Рис. 1.6. Спектр поглощения хлорофилла[12]

Важными хромофорами в животных тканях являются также гемоглобин и меланин. Гемоглобин — белок, содержащий железо, основная функция которого переносить кислород в крови. Меланин — пигмент, который содержится в коже и волосах человека и животных(рис. 1.7).

Также, существенную роль в поглощении в биотканях играет вода. Вода поглощает электромагнитное излучение в широком диапазоне (рис. 1.8), при этом возбуждаются вращательные степени свободы (микроволновый диапазон излучения), колебательные степени свободы (инфракрасный диапазон) и электронные переходы (ультрафиолетовый).

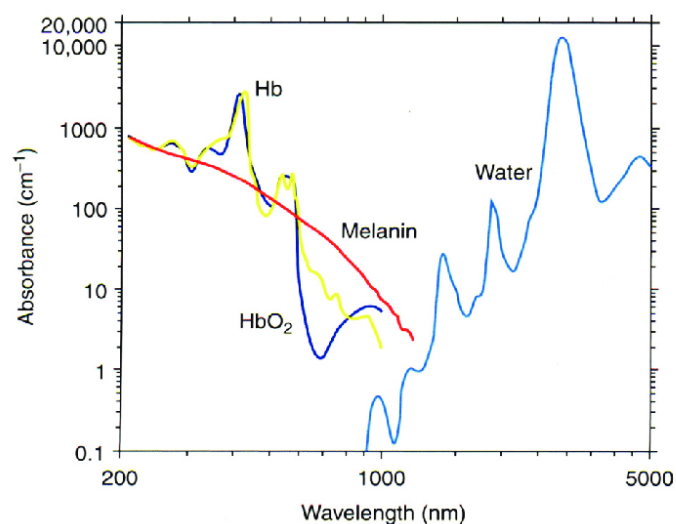


Рис. 1.7. Спектр поглощения крови, меланина и воды[13]

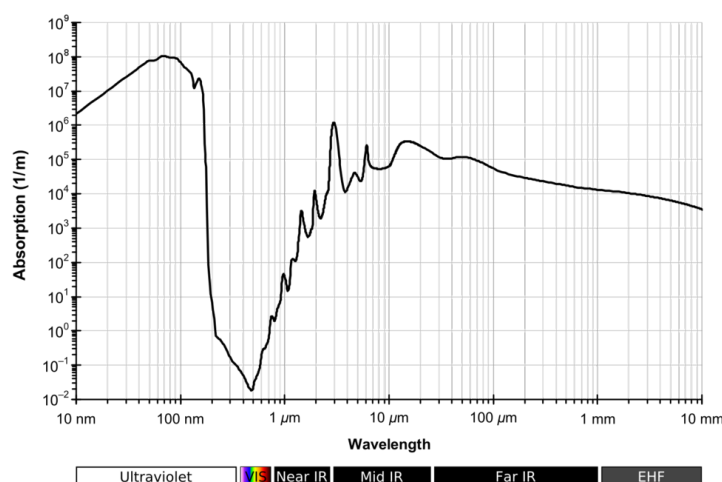


Рис. 1.8. Спектр поглощения воды[14]

1.3.3. Тепловые процессы в биологических тканях

В процессе взаимодействия излучения с биотканями происходит нагрев последних. Генерация тепла зависит от таких параметров, как энергия излучения, время воздействия, от коэффициентов поглощения и рассеяния ткани. Перенос тепла характеризуется свойствами ткани, такими как теплопроводность, теплоемкость и плотность[6]. При различных временах воздействия и температурах, до которой нагрели ткань, могут проявляться различные термические эффекты: гипертермия, коагуляция,

испарение, карбонизация и плавление.

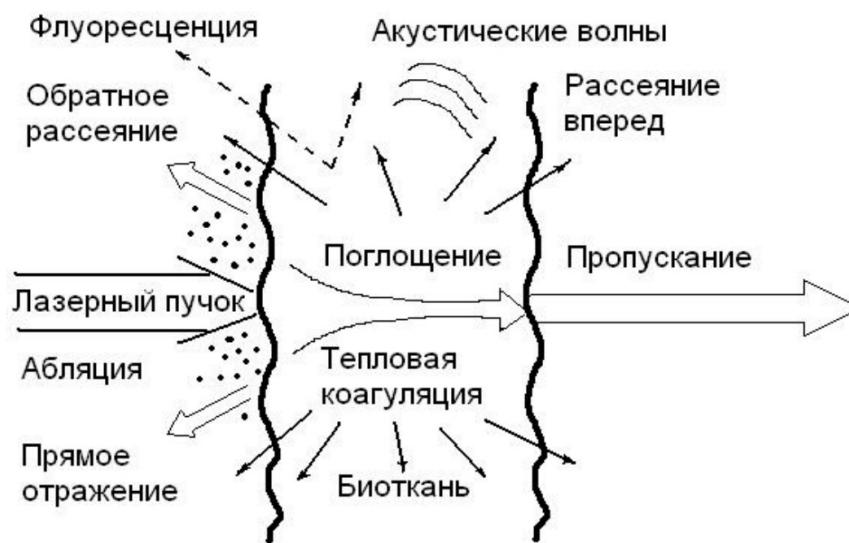


Рис. 1.9. Виды взаимодействия лазерного излучения с биотканью [15]

- Гипертермия — возникает при длительном воздействии небольших температур. При этом увеличивается скорость протекания метаболических процессов, нарушается обмен веществ и кровообращение
- Денатурация. Для начала рассмотрим подробнее строение белка:

Выделяют несколько структур:

- Первичная структура. Белки состоят из аминокислот, которые соединены между собой пептидными связями. Последовательность аминокислот определяет первичную структуру белка.
- Вторичная структура — это пространственное расположение первичных структур в виде спирали или слоя. Во вторичной структуре существенную роль играют водородные связи.
- Третичная группа или глобула образуется за счет дальнейшей укладки вторичных структур, образуются дисульфидные мостики (ковалентная связь между двумя атомами серы).

- Четвертичная структура образуется при объединении нескольких глобул

Денатурация — это разрушение характерной для данного белка четвертичной, третичной и вторичной структуры. Она возникает при воздействии более высоких температур. При этом изменяется структура белковой молекулы.

- Коагуляция — процесс скопления молекул денатурировавших белков в конгломераты.
- Испарение — переход вещества из жидкого состояния в газообразное.
- Карбонизация или обугливание — процесс замещения различных атомов в молекулах ткани атомами углерода.
- Плавление — при температурах больших 300 °C может произойти оплавление, зависящее от материала (плавление может возникнуть в костной ткани, например в тканях зубов).

Также, стоит отметить, что свойства биотканей зависят от температуры. Так, например коэффициент теплопроводности яичного белка зависит от температуры следующим образом[16]:

$$\lambda(T) = 0,5125 + 0,0013 \cdot T \text{ [Вт/(м*К)]}$$

Процесс денатурации белка в ткани зависит от температуры и длительности воздействия. Он может быть описан с помощью уравнения Аррениуса:

$$-\ln \frac{C(t)}{C_0} = \int_0^t A \cdot \exp \left(-\frac{E_a}{RT(\tau)} \right) d\tau, \quad (1.52)$$

Таблица 1.1. Термические эффекты в биологических тканях.

| Температура, °C | Термический эффект |
|-----------------|---|
| 40-50 | Гипертермия |
| 60 | Коагуляция внутриклеточных белков, клеточный некроз |
| 80 | Коагуляция внеклеточного коллагена, разрушение клеточной мембраны |
| > 100 | Вاپоризация жидкости из клеток |
| > 150 | Карбонизация ткани |
| > 300 | Плавнение, вাপоризация всей ткани |

где C_0 — начальная концентрация неповрежденных белковых молекул, $C(t)$ — их концентрация в момент времени t , A — константа скорости химической реакции $\left[\frac{1}{c}\right]$, E_a — энергия активации $\left[\frac{\text{Дж}}{\text{моль}}\right]$, $R = 8,31 \left[\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{K}}\right]$ — универсальная газовая постоянная.

Также вводится такой термин как степень термического повреждения ткани:

$$G = \frac{C(t)}{C_0} = \exp \left(- \int_0^t A \cdot \exp \left(- \frac{E_a}{RT(\tau)} \right) d\tau \right) \quad (1.53)$$

Глава 2

Измерение распространения области коагуляции яичного белка в процессе разогрева лазерным излучением

Были проведены эксперименты по разогреву образца с помощью лазерного излучения. Схема установки представлена на рис. 2.1. В центр цилиндра попадает поляризованное лазерное излучение (гауссов профиль с радиусом пучка 0,5 мм) с длиной волны 1064 нм. В данной установке используется иттербиевый лазер "YLM-1070-50-LP" и камера телефона с частотой съемки 30 кадров в секунду и разрешением 4 мегапикселя.

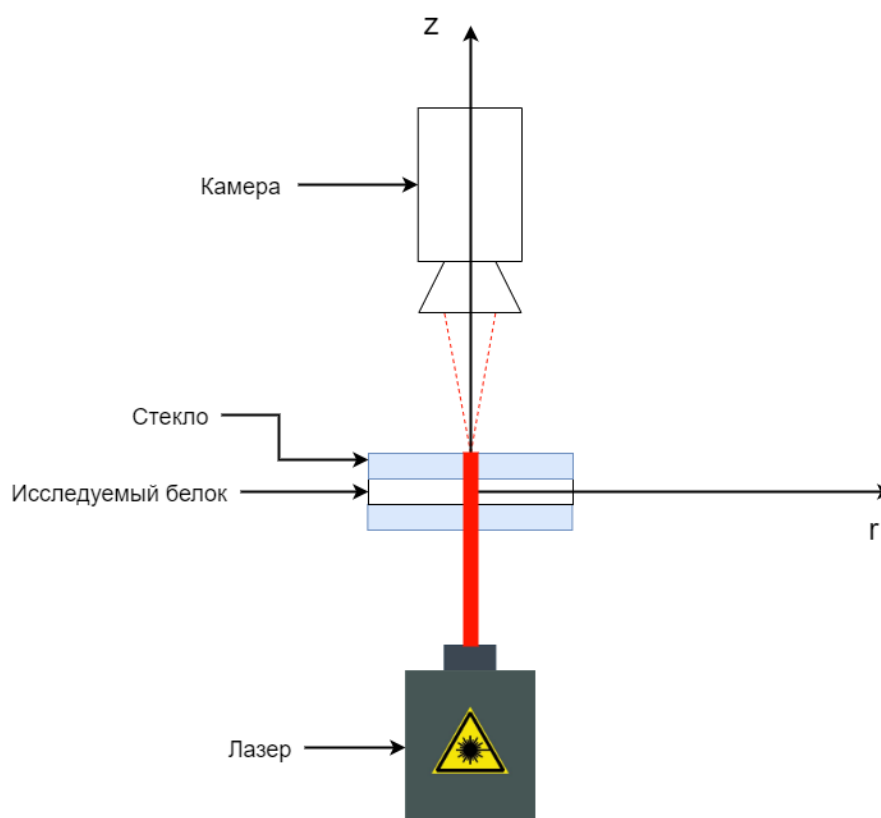


Рис. 2.1. Схема экспериментальной установки

Образец яичного белка расположен между двумя предметными стеклами (рис. 2.2).

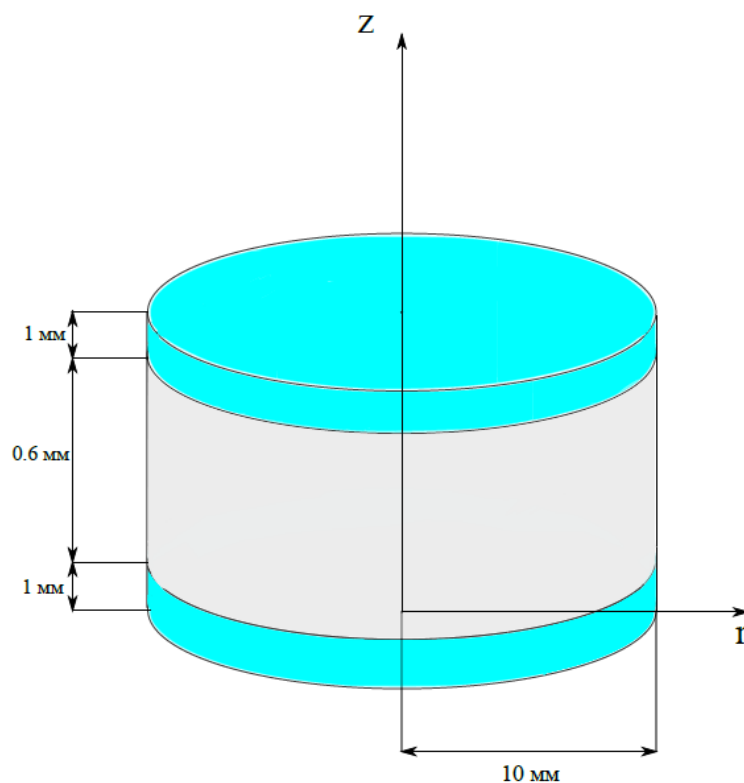


Рис. 2.2. Геометрия задачи

Фотографии образца во время нагрева представлены на рис.2.3 и 2.4.

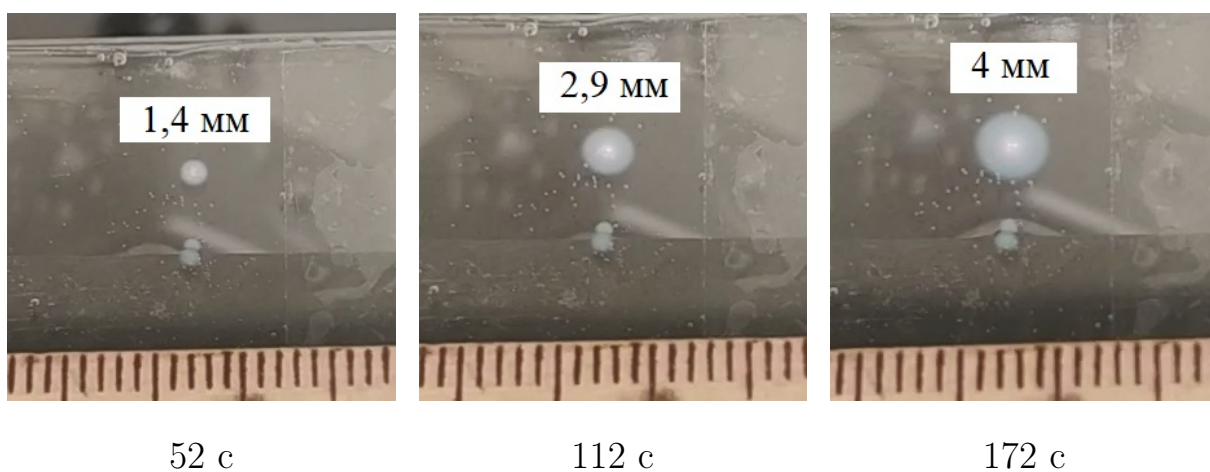


Рис. 2.3. Изменение диаметра повреждённой области яичного белка при неравномерном разогреве лазерным излучением мощностью 2,5 Вт

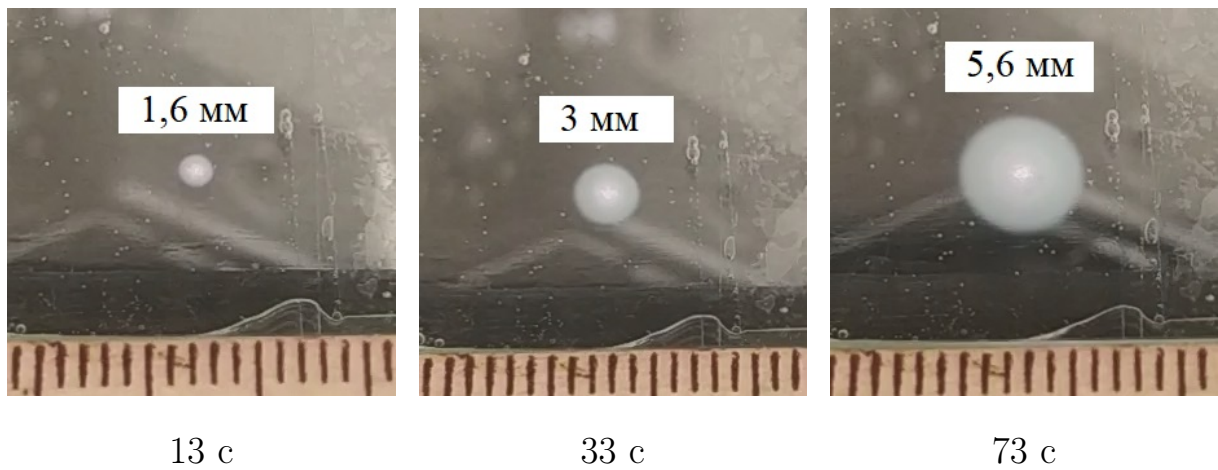


Рис. 2.4. Изменение диаметра повреждённой области яичного белка при неравномерном разогреве лазерным излучением мощностью 3,9 Вт[17]

Полученная зависимость радиуса коагулированной области от времени представлена на рис. 2.5

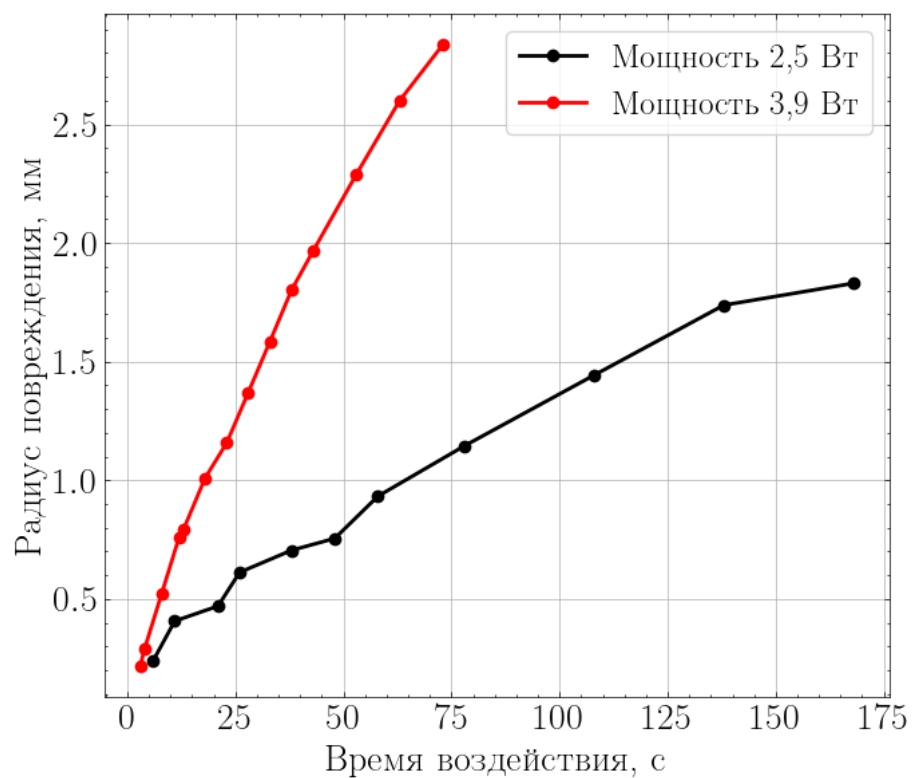


Рис. 2.5. Радиуса повреждённой области яичного белка при разогреве лазерным излучением при разных мощностях[17]

Математическое моделирование

3.1. Моделирование распространения температуры и области деградации биологической ткани в процессе разогрева лазерным излучением

Для моделирования эксперимента, описанного в главе 2 используется алгоритм из двух частей: решение задачи о распространении фотонов в неоднородной мутной среде методом Монте-Карло и решение уравнения теплопроводности.

На рис. 3.1 представлена схема решения задачи о распространении температуры и области коагуляции в биологической ткани при разогреве лазерным излучением. В начале задаётся поле распределения температуры и повреждения ткани в первый момент времени (например, комнатная температура и отсутствие повреждения). Далее, при помощи метода Монте-Карло рассчитывается тепловой источник $[Вт/м^3]$, полученный в результате поглощения лазерного излучения тканью. Этот тепловой источник используется как слагаемое в уравнении теплопроводности, и с учётом зависимости параметров ткани от T и G рассчитываются новые профили температуры и повреждений.



Рис. 3.1. Алгоритм решения задачи о распространении области повреждения в биологической ткани

3.2. Разностная схема распространения тепла в веществе с переменными коэффициентами с внутренними источниками тепла

В цилиндрических координатах уравнение теплопроводности примет вид:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \lambda(T, G) \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\lambda(T, G) \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda(T, G) \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q, \quad (3.1)$$

$$0 \leq z \leq L, \quad 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

где Q — источники тепла, L — толщина образца со стеклами, R — радиус образца. Будем считать, что образец и стекла обладают цилиндрической симметрией, поэтому уравнение примет вид:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \lambda(T, G) \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda(T, G) \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q, \quad 0 \leq z \leq L, \quad 0 \leq r \leq R \quad (3.2)$$

Начальные и граничные условия:

$$\left\{ \begin{array}{ll} t = 0 : T = T_0, & 0 \leq z \leq L, \quad 0 \leq r \leq R \\ r = 0 : -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = 0, & t > 0 \\ r = R : -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = \alpha(T - T^e), & t > 0 \\ z = 0 : -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha(T - T^e), & t > 0 \\ z = L : -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha(T - T^e), & t > 0 \end{array} \right.$$

Введем пространственно-временную сетку:

с разбиением по оси r : $r_i = i \cdot h_r$

по оси z : $z_j = j \cdot h_z$

По временной оси: $t_n = n \cdot \tau$

где h_r, h_z соответственно шаги по координатам r и z , τ шаг по времени.
 $i = \overline{1, N_r}, j = \overline{1, N_z}, n = \overline{0, N}$.

Таким образом шаблон для задачи будет выглядеть следующим образом:

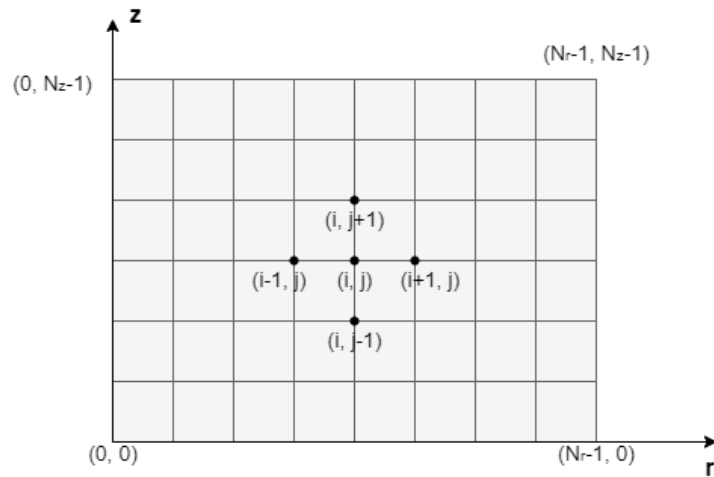


Рис. 3.2. Шаблон для задачи

Аппроксимируя частные производные уравнения теплопроводности (3.2) и начальные и граничные условия конечными разностями, получим:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\rho c \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\tau} = \frac{1}{h_z^2} \left(\frac{\lambda_j^{n+1} + \lambda_{j+1}^{n+1}}{2} (T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j}^{n+1}) - \right. \\
\left. - \frac{\lambda_j^{n+1} + \lambda_{j+1}^{n+1}}{2} (T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j-1}^{n+1}) \right) + Q, \quad 0 \leq z \leq L \\
\rho c \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\tau} = \frac{1}{r_i h_r^2} \left[\frac{\lambda_i^{n+1} + \lambda_{i+1}^{n+1}}{2} \frac{r_{i+1} + r_i}{2} (T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+1}) - \right. \\
\left. - \frac{\lambda_i^{n+1} + \lambda_{i+1}^{n+1}}{2} \frac{r_i + r_{i-1}}{2} (T_{i,j}^{n+1} - T_{i-1,j}^{n+1}) \right] + Q, \quad 0 \leq r \leq R \\
T_i^0 = T_0 \quad i = 2, \dots, N-2 \\
\frac{T_{0,j}^{n+1} - T_{0,j}^n}{\tau} = 0 \quad n > 0 \\
\frac{T_{N_r,j}^{n+1} - T_{N_r,j}^n}{\tau} = \alpha \cdot (T_{N_r,j}^n - T^e) \quad n > 0 \\
\frac{T_{i,0}^{n+1} - T_{i,0}^n}{\tau} = \alpha \cdot (T_{i,0}^n - T^e) \quad n > 0 \\
\frac{T_{i,N_z}^{n+1} - T_{i,N_z}^n}{\tau} = \alpha \cdot (T_{i,N_z}^n - T^e) \quad n > 0
\end{array} \right. \quad (3.3)$$

Здесь была использована локально-одномерная разностная схема. Аппроксимация дифференциальной задачи (3.2) была выполнена с первым порядком точности по τ и со вторым порядком по h_z и h_r . При этом была использована неявная разностная схема, она является абсолютно устойчивой. Поэтому можно проводить интегрирование задачи с любым разностным шагом по времени.

Реализация метода Монте-Карло описана в 1.1.4. На каждом временном шаге задача решалась с новыми оптическими свойствами.

Глава 4

Измерение теплофизических параметров исследуемого образца

Для того, чтобы решать модельную задачу, необходимо знать физические свойства исследуемого объекта.

В данной работе проводилось исследование разогрева яичного белка куриного яйца. Коэффициент теплопроводности, плотность, удельная теплоёмкость, энергия активации, постоянная Аррениуса для некоагулированного яичного белка, которые использовались в моделировании, представлены в таблице 4.1.

Таблица 4.1. Физические свойства яичного белка

| | |
|---|--------------------------------------|
| Коэффициент теплопроводности λ [16] | $0,5125 + 0,0013 \cdot T$ Вт/(м · К) |
| Плотность ρ [18] | 1040 кг/м ³ |
| Удельная теплота коагуляции белка q [19] | $15,5 \cdot 10^3$ Дж/кг |
| Удельная теплоемкость c [18] | 3800 Дж/(кг · К) |
| Константа Аррениуса A [20] | $A = 2,88 \cdot 10^{28}$ 1/с |
| Энергия активации E_a [20] | $E_a = 194,6 \cdot 10^3$ кДж/моль |

Так как в модели учитывается, то, что свойства меняются в зависимости от степени повреждения ткани, то необходимо так же знать физические свойства для коагулированного белка. Для их нахождения были проведены несколько экспериментов.

4.1. Измерение коэффициента теплопроводности и теплоёмкости образца

Коэффициент теплопроводности и теплоёмкости образца определялся с помощью прибора для определения теплофизических параметров материалов "KD2 Pro".

- Диапазоны измерений:
 - для теплопроводности — от 0,02 до 2,00 Вт/(м · К)
 - для теплоёмкости — от 500 до 4000 Дж/(кг · К)
- Погрешность измерений:
 - для теплопроводности — $\pm 10\%$
 - для теплоёмкости — $\pm 10\%$

Образец для измерений готовился следующим образом: яичный белок нагревался на электрической плите, до его полной равномерной коагуляции. После этого, используя KD2 Pro, были получены следующие значения коэффициента теплопроводности и удельной теплоёмкости коагулированного яичного белка:

| | |
|--|------------------------------|
| Коэффициент теплопроводности λ | $0,554 \pm 0,055$ Вт/(м · К) |
| Удельная теплоемкость c | 3300 ± 300 Дж/(кг · К) |

4.2. Измерение коэффициента теплоотдачи образца

Для измерения коэффициента теплоотдачи стекла h и коэффициента теплопроводности λ коагулированного белка был проведен следующий эксперимент.

Яичный белок был помещен в теплоизолятор высотой L , в роли которого выступал пенопласт с коэффициентом теплопроводности равным $\lambda_p = 0,04 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$. Сверху было помещено предметное стекло. Внутри, на различном расстоянии от электрической плиты помещались термопары (рис. 4.1).

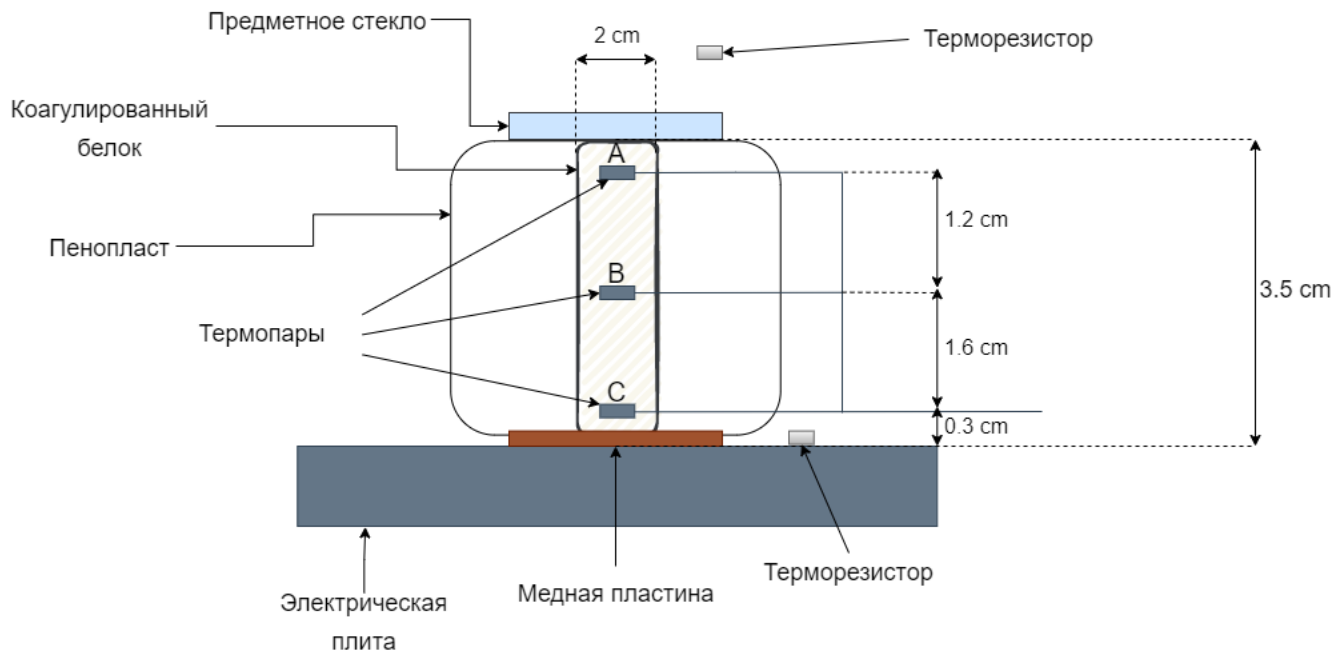


Рис. 4.1. Схема экспериментальной задачи

Данная установка помещалась на электрическую плиту и нагревалась до 90 градусов, для того чтобы провести коагуляцию. Когда белок был полностью равномерно прокоагулирован и температура в установке выровнялась, на электрической плите устанавливали температуру 60°C и снимали зависимость температуры термопар от времени. Также измерялись температуры окружающей среды T^e и плиты T_p в зависимости от времени (рис. 4.2).

После этого решалась обратная одномерная задача теплопроводности

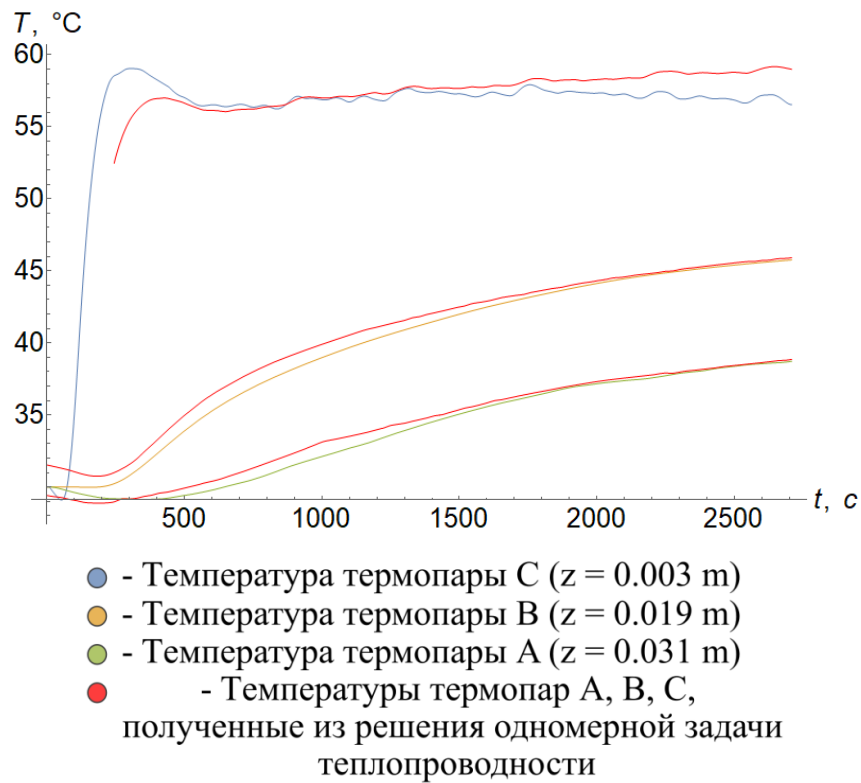


Рис. 4.2. Зависимость температуры термопар от времени

(4.1):

$$\left\{ \begin{array}{l} c\rho \frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2} \\ T(0,t) = T_p(t) \\ \lambda \frac{\partial T(L,t)}{\partial t} = \alpha(T^e - T(L,t)) \\ T(z,0) = T_0 \end{array} \right. \quad (4.1)$$

где T_0 - установившаяся в образце температура.

Таким образом были получены коэффициенты α и λ :

| | |
|--|------------------------------|
| Коэффициент теплопроводности λ | 0,56 Вт/(м · К) |
| Коэффициент теплоотдачи α | 30 Вт/ (м ² · К) |

Глава 5

Сравнение экспериментальных результатов с результатами моделирования распространения области коагуляции

В модельной задаче были использованы физические параметры из таблицы 4.1.

Оптические свойства белка, которые использовались в модельной задаче, были определены с помощью метода подвижных интегрирующих сфер [17] (смотри таблицу 5.1). Зависимость этих свойств от степени деградации ткани G принималась линейной. Также, были учтены потери на излучение по закону Стефана-Больцмана.

Таблица 5.1. Оптические параметры яичного белка[17]

| | Коэффициент рассеяния μ_s | Коэффициент поглощения μ_a | Анизотропия рассеяния g |
|----------------------|----------------------------------|-----------------------------------|------------------------------|
| До термообработки | 1 м^{-1} | 14 м^{-1} | - |
| После термообработки | 2800 м^{-1} | 15 м^{-1} | 0,76 |

Результаты моделирования:

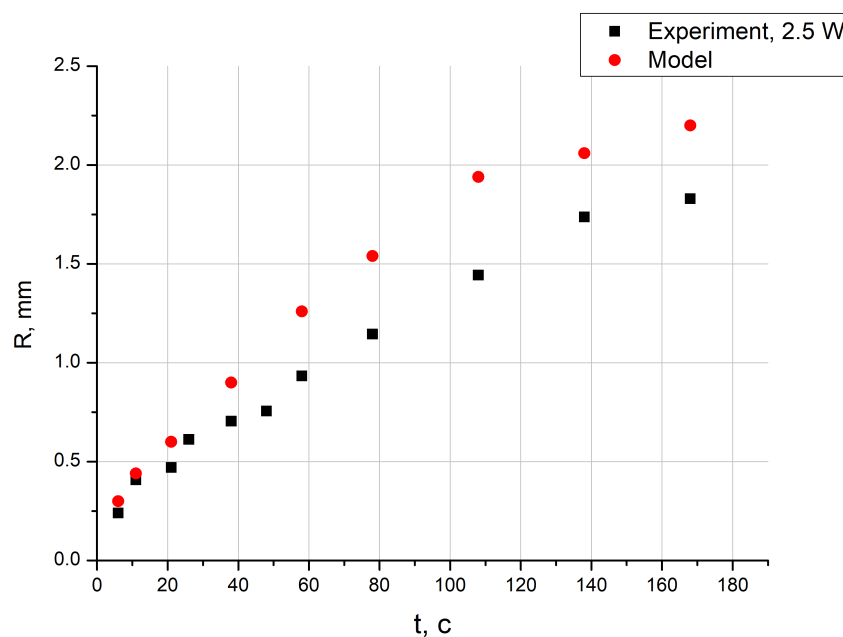


Рис. 5.1. Сравнение кинетик радиуса R коагулированной области, полученных экспериментально и в результате математического моделирования (мощность излучения 2,5 Вт)

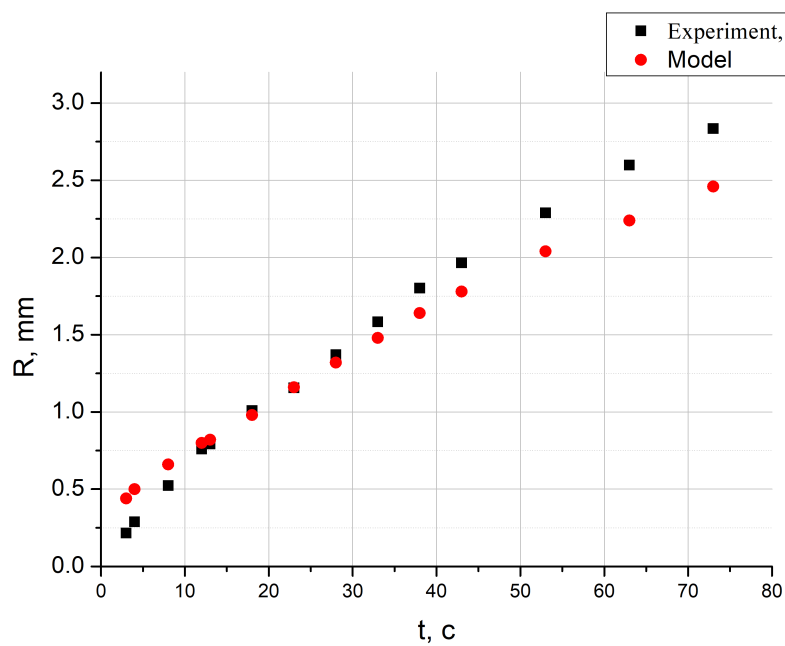


Рис. 5.2. Сравнение кинетик радиуса R коагулированной области, полученных экспериментально и в результате математического моделирования (мощность излучения 3,9 Вт)

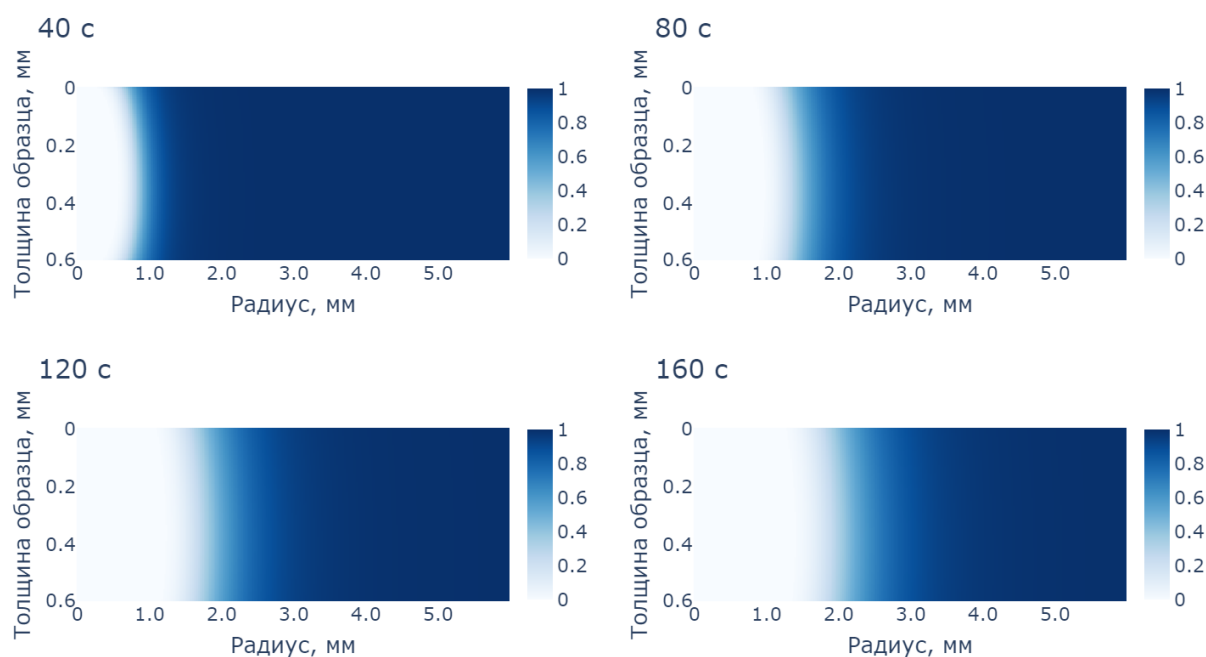


Рис. 5.3. Моделирование распространения области деградации в яичном белке при разогреве лазерным пучком мощностью 2,5 Вт

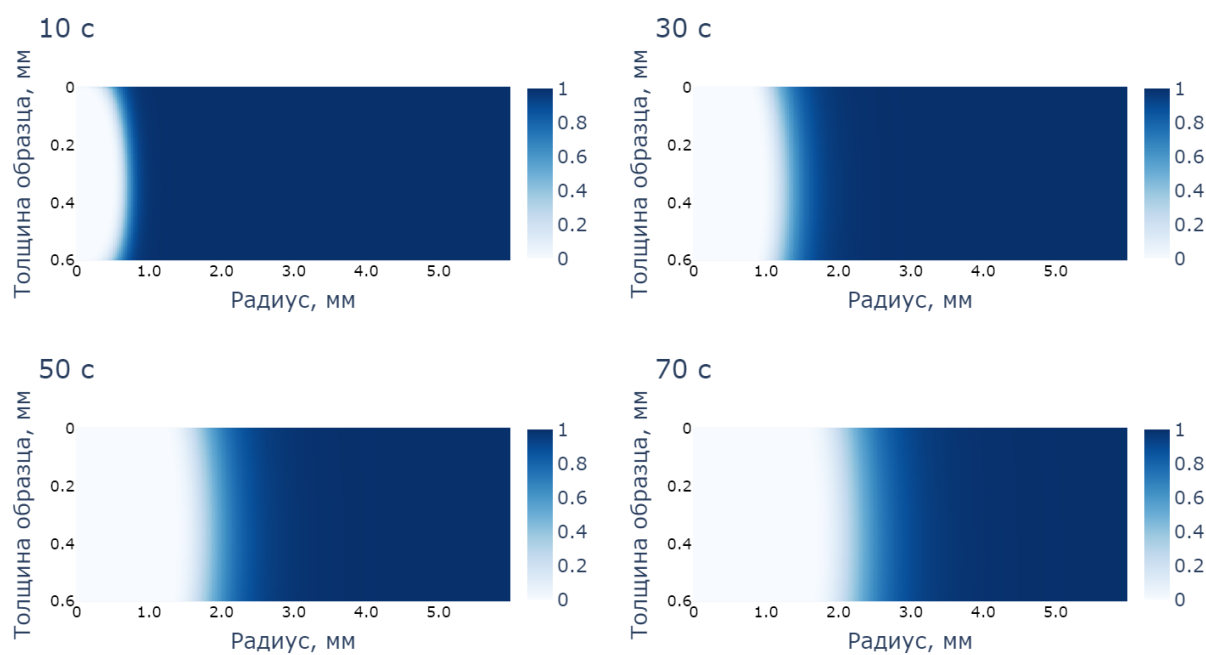


Рис. 5.4. Моделирование распространения области деградации в яичном белке при разогреве лазерным пучком мощностью 3,9 Вт

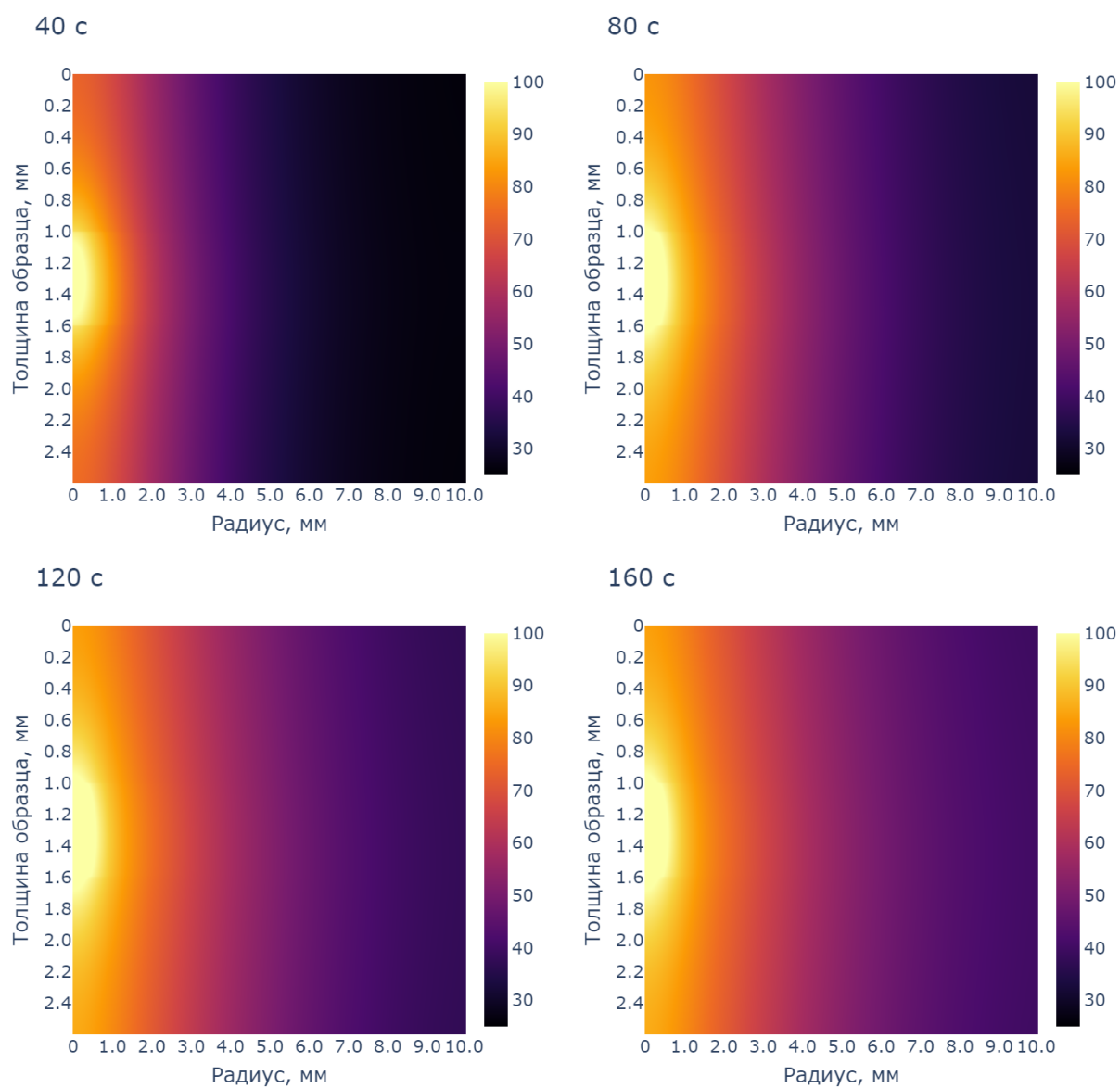


Рис. 5.5. Моделирование распространения тепла в яичном белке при разогреве лазерным пучком мощностью 2,5 Вт

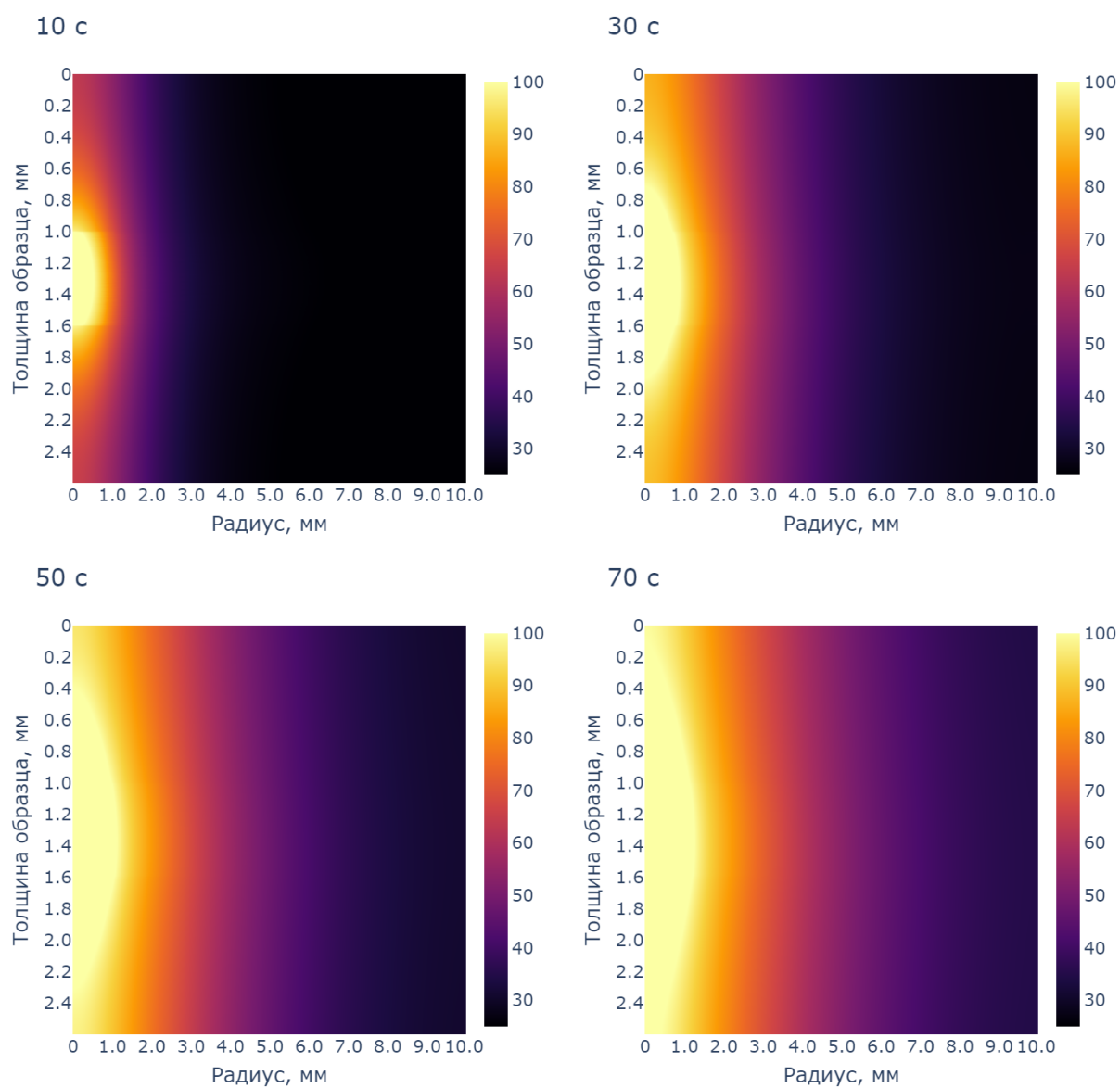


Рис. 5.6. Моделирование распространения тепла в яичном белке при разогреве лазерным пучком мощностью 3,9 Вт

Причины, по которым экспериментальные результаты и результаты моделирования, не идеально совпадают:

1. Во время нагрева белка испаряется жидкость, что могло приводить к образованию микропузырей воздуха. Физические и оптические характеристики воздуха сильно отличаются от яичного белка, поэтому учет пузырьков воздуха в ткани может сильно повлиять как на решение уравнения теплопроводности, так и на моделирования распространения излучения в мутной среде.
2. При определении малых коэффициентов поглощения и рассеяния при помощи подвижных интегрирующих сфер возникали погрешности, вследствие этого могли быть неточно рассчитаны тепловые источники (плотность тепловых источников особенно чувствительна к изменению коэффициента поглощения)[17].

Глава 6

Результаты и выводы

В ходе научно-исследовательской работы были получены следующие результаты:

- Разработана и реализована математическая модель распространения тепла и области коагуляции в биологической ткани.
- Математическая модель была верифицирована на основе экспериментальных данных.
- Были экспериментально получены физические параметры: коэффициент теплопроводности, теплоёмкость и коэффициент теплоотдачи для коагулированного белка.

Основное направление развития данной работы - усовершенствование модели с учётом фазовых переходов, которые происходят в биологических тканях при нагреве, таких как vaporization, ablation и carbonization.

Благодарности

Автор работы выражает благодарность научному руководителю Коваленко Никите Валерьевичу за советы и помощь при проведении научно-исследовательской работы, заместителю заведующего кафедрой фотоники МФТИ Рябушкину Олегу Алексеевичу за ценные указания. Автор благодарит Георгия Алояна и Татьяну Маликову за помощь при реализации математической модели, а также НТО ИРЭ-Полус за предоставленное экспериментальное оборудование.

Список литературы

1. А.Е. Пушкарева Методы математического моделирования в оптике биоткани. Учебное пособие. Спб. : СпбГУ ИТМО, 2008
2. Ландсберг Г. С. Оптика. Учеб. пособие: Для вузов. — 6-е изд., стереот.М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.848 с.ISBN 5-9221-0314-8.
3. Optical-Thermal Response of Laser-Irradiated Tissue / Ed. by Ashley J. Welch, Martin J.C. van Gemert. Springer, 2011.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: учебное пособие в 10 т. 4-е, испр. изд. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. Т. III. Квантовая механика (нерелятивистская теория).
5. Ishimaru A. Wave Propagation and Scattering in Random Media / Academic Press. New York, San Francisco, London, 1978. Vol. 1: Single Scattering and Transport Theory.
6. Niemz M.H. Laser – Tissue Interactions: Fundamentals and Applications. – Berlin, 1996. – 305 p.
7. Chandrasekhar S. Radiative Transfer / Dover Publications, Inc. New York, 1960.
8. Д.В.Сивухин. Общий курс физики. Термодинамика и молекулярная физика. т. II. М.: Наука, 1990, 591 с.
9. Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Разностные методы решения задач теплопроводности: учебное пособие. / Г.В. Кузнецов, М.А. Шеремет. – Томск: Изд-во ТПУ, 2007. – 172 с.
10. Самарский А.А. Теория разностных схем.М.: Наука, 1977.-656 с.

11. Кондрашова Е.А., Коник Н. Е., Пешкова Т. А. Яйца // Товароведение продовольственных товаров: учебное пособие. — М.: Альфа-М, ИНФРА-М, 2007. — С. 393—407. — 416 с.
12. Lange L, Nobel P, Osmond C, Ziegler H (1981). Physiological Plant Ecology I – Responses to the Physical Environment. Vol. 12A. Springer-Verlag. pp. 67, 259.
13. Dong Li, Ya-Ling He, Guo-Xiang Wang. Thermal Modelling for Laser Treatment of Port Wine Stains. 2011.
14. Krzysztof Beć, Christian Huck Breakthrough Potential in Near-Infrared Spectroscopy: Spectra Simulation. A Review of Recent Developments. Frontiers in Chemistry. 2019.
15. Тучин В.В. Лазеры и волоконная оптика в биомедицинских исследованиях. – Саратов: Изд-во Саратов. Ун-та, 1998. – 384 с.
16. Numerical modeling of heat transfer and pasteurizing value during thermal processing of intact egg Behzad Abbasnezhad 1 , Nasser Hamdami 1 , Jean-Yves Monteau 2 Hamed Vatankhah 1, 2015.
17. Маликова Т.К. "Исследование кинетики оптических свойств биологических тканей при разогреве лазерным излучением" // научно-квалификационная работа (магистерская диссертация): Моск. физ.-техн. ин-т, Москва, (2022).
18. Density, heat capacity and thermal conductivity of liquid egg products Jane S.R. Coimbraa,*, Ana L. Gabasb, Luis A. Minima, Edwin E. Garcia Rojas, Vania R.N. Telisc, Javier Telis-Romero ,2005

19. John W. Donovan; Carol J. Mapes; John Gorton Davis; John A. Garibaldi (1975). A differential scanning calorimetric study of the stability of egg white to heat denaturation. , 26(1), 73–83. doi:10.1002/jsfa.2740260109
20. Yvan Llave, Satoshi Fukuda, Mika Fukuoka, Naomi Shibata-Ishiwatari, Noboru Sakai, Analysis of color changes in chicken egg yolks and whites based on degree of thermal protein denaturation during ohmic heating and water bath treatment, Journal of Food Engineering (2017), doi: 10.1016/j.jfoodeng.2017.11.024