

数字逻辑设计

高翠芸

School of Computer Science

gaocuiyun@hit.edu.cn

Unit 4 卡诺图 Karnaugh Maps

- 开关函数的最简形式
- 多变量卡诺图
- 填写卡诺图
- 卡诺图化简法

函数的最简形式

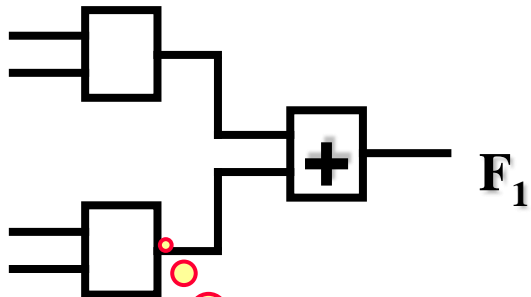
When a function is realized using **AND** and **OR** gates, the cost of realizing the function is directly related to **the number of gates and gate inputs** used.

$$\begin{aligned} F &= AB + \bar{A}C \\ &= AB + \bar{A}C + BC \\ &= ABC + AB\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C \end{aligned}$$

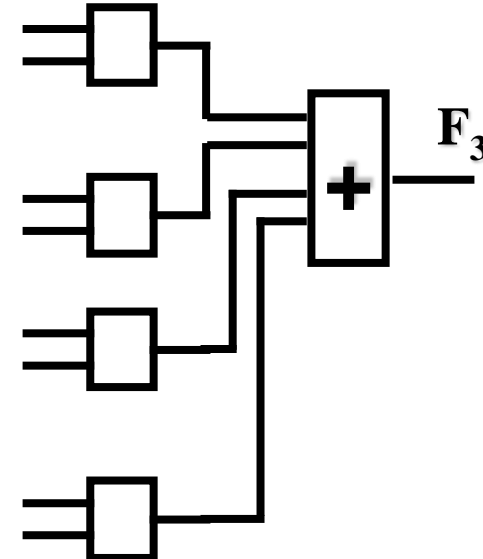
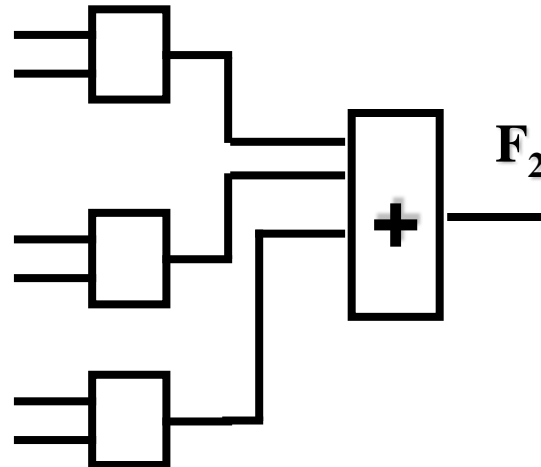
.....① F_1

.....② F_2

.....③ F_3



Minimum
Cost !

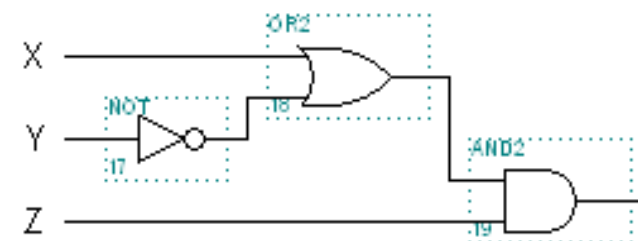
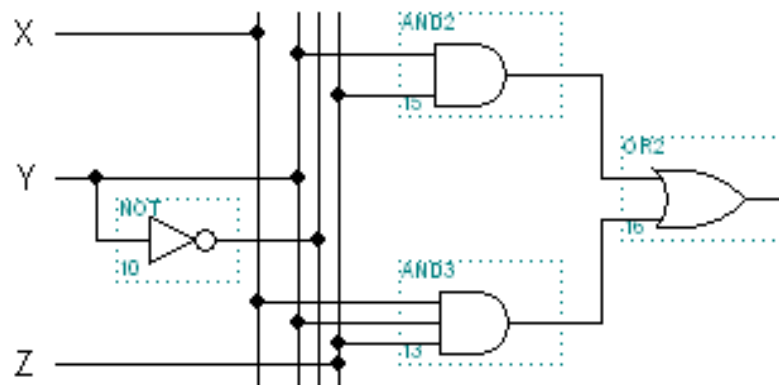
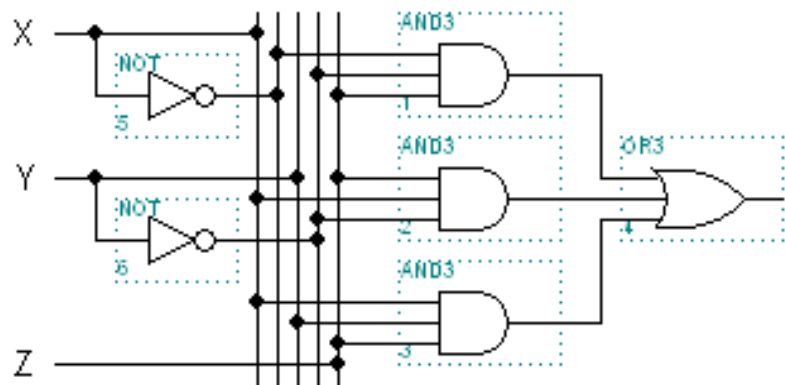


开关函数的最简形式

$$F = \sum_{XYZ}(1,5,7) = x' y' z + x y' z + x y z$$

$$F = (x' y' z + x y' z) + x y z = y' z + x y z$$

$$F = (y' + x y) z = (y' + x) z$$



开关函数的最简形式

一个最简表达式中

- ① 逻辑门的数量最少
- ② 逻辑门的输入个数最少

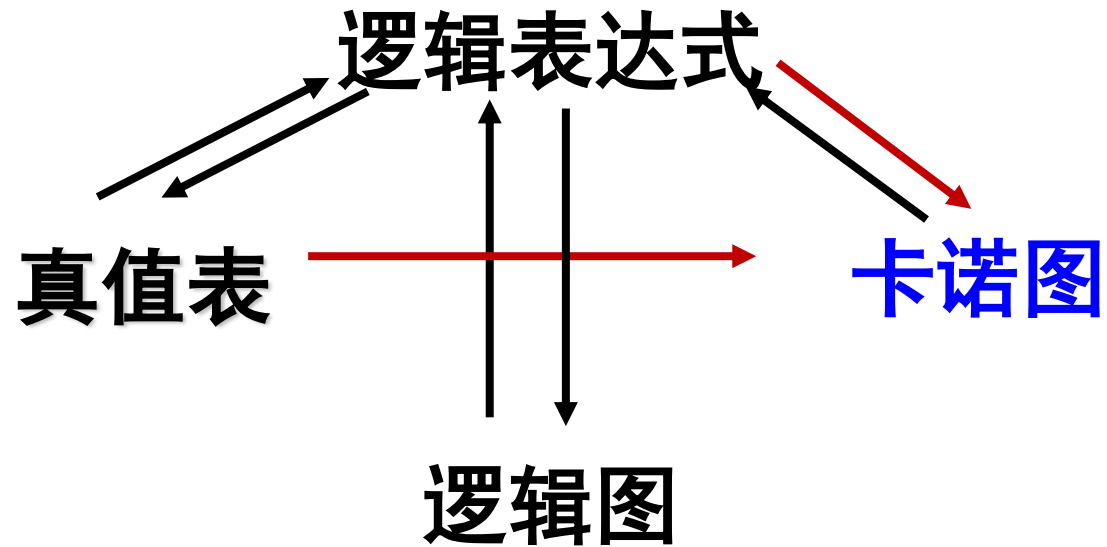
与最小项（最大项）表达式不同

- 最简表达式**不一定是唯一的**.
- 但最简表达式的实现代价是相同的（逻辑门的数量相同、输入变量的个数相同）

卡诺图 Karnaugh Maps

- 开关函数的最简形式
- 多变量卡诺图
- 填写卡诺图
- 卡诺图化简法

逻辑函数的表达方式之一



- 化简三变量或者四变量的逻辑函数时，卡诺图特别有用！

卡诺图的性质

- 卡诺图通常为正方形或矩形均匀分成 2^n 个小格，每个小格代表一个最小项。
- 单元格对应的最小项按格雷码摆放
- 任何两个相邻单元格对应的最小项只有一个变量取值不同

1. 两变量 K. Map

$$F=f(AB)$$

	\bar{B}	B
\bar{A}	$\bar{A}\bar{B}$	$\bar{A}B$
A	$A\bar{B}$	AB

(a)

	B	0	1
A	0	0 0 0	0 1 1
	1	1 0 2	1 1 3

(b)

	B	0	1
A	0	0	1
	1	2	3

三变量卡诺图

$$F=f(ABC)$$

BC		00	01	11	10
A	0	0	1	3	2
	1	4	5	7	6

四变量卡诺图

$F=f(ABCD)$

AB	CD			
	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

五变量卡诺图

$$F=f(ABCDE)$$

		CDE							
		000	001	011	010	110	111	101	100
AB	00	0	1	3	2	6	7	5	4
	01	8	9	11	10	14	15	13	12
	11	24	25	27	26	30	31	29	28
	10	16	17	19	18	22	23	21	20

卡诺图的特征

- 卡诺图上**几何相邻**的最小项**逻辑**上也相邻。

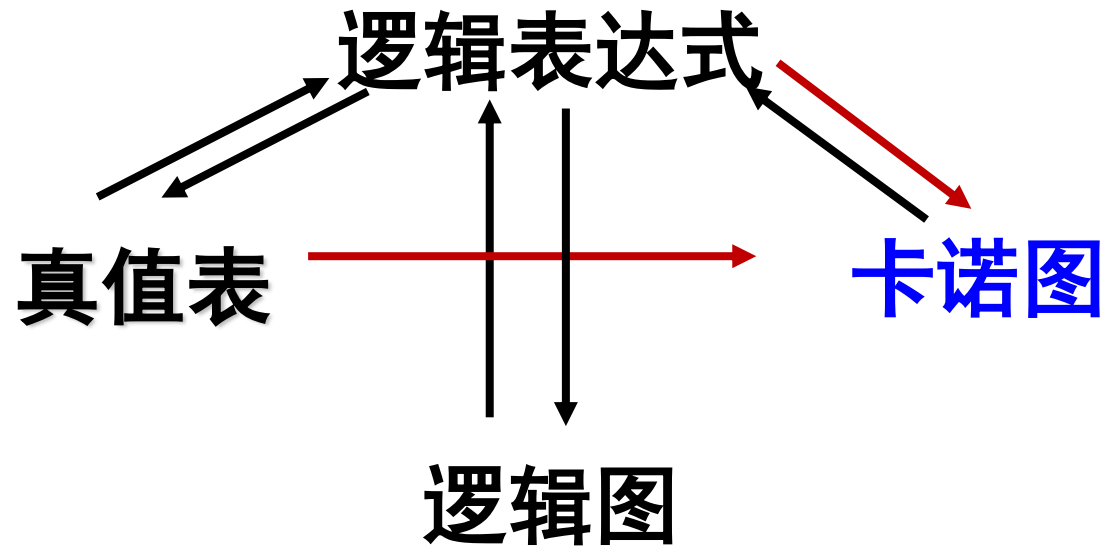
- **几何相邻** {
 - 相接
 - 行或列首尾相接

- **逻辑相邻**—两个最小项中只有一个变量出现的形式不同

卡诺图 Karnaugh Maps

- 开关函数的最简形式
- 多变量卡诺图
- 填写卡诺图
- 卡诺图化简法

逻辑函数的表达方式之一



- 化简三变量或者四变量的逻辑函数时，卡诺图特别有用！

填写卡诺图

① 已知真值表

Truth Table

AB C	F
0 0 0	0 ✓
0 0 1	0 ✓
0 1 0	0 ✓
0 1 1	1 ✓
1 0 0	0 ✓
1 0 1	1 ✓
1 1 0	1 ✓
1 1 1	1 ✓

② 已知标准与或式:与项是最小项时,
按最小项编号的位置直接填入。

③ 已知标准或与式

BC	00	01	11	10
A				
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

$$F = \Sigma m(3, 5, 6, 7)$$

$$F = \Pi M(0, 1, 2, 4)$$

填写卡诺图

Example 1. $F=AB+BC+AC$

$$= AB(C+\bar{C})+BC(A+\bar{A})+AC(B+\bar{B})$$

$$= \underset{7}{ABC}+\underset{6}{AB\bar{C}}+\underset{7}{ABC}+\underset{3}{\bar{A}BC}+\underset{7}{ABC}+\underset{5}{A\bar{B}C}$$

BC		00	01	11	10
A	0	0	0	1	0
	1	0	1	1	1

$$\begin{aligned}
 \text{Example 2. } F &= \overline{(A \oplus B)} (C + D) \\
 &= \overline{A \oplus B} + \overline{(C + D)} \\
 &= \overline{A} \overline{B} + AB + \overline{C} \overline{D}
 \end{aligned}$$

$$\overline{A} \overline{B} = \underline{0000} + \underline{0001} + \underline{0010} + \underline{0011}$$

0 1 2 3

$$AB = \underline{1100} + \underline{1101} + \underline{1110} + \underline{1111}$$

12 13 14 15

$$\overline{C} \overline{D} = \underline{0000} + \underline{0100} + \underline{1000} + \underline{1100}$$

0 4 8 12

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	1	1	1	1
	01	1	0	0	0
	11	1	1	1	1
	10	1	0	0	0

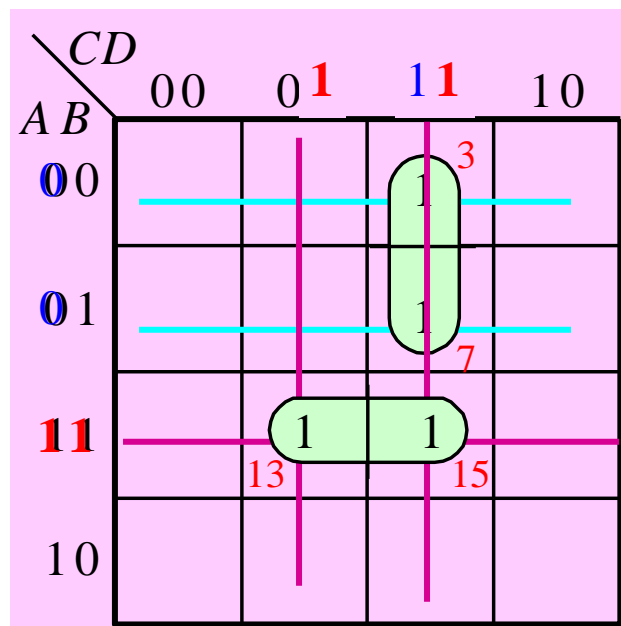
$$\begin{aligned}
\text{Example 3. } F &= \overline{A \oplus C} \cdot \overline{B} (A\bar{C}\bar{D} + \bar{A}C\bar{D}) \\
&= \overline{A \oplus C} + \bar{B} (A\bar{C}\bar{D} + \bar{A}C\bar{D}) \\
&= A \odot C + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} \\
&= AC + \bar{A}\bar{C} + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} \\
&= \underline{1010} + \underline{1011} + \underline{1110} + \underline{1111} + \underline{0000} + \underline{0001} + \underline{0100} + \underline{0101} + \\
&\quad 1000 + 0010
\end{aligned}$$

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	1	1	0	1
	01	1	1	0	0
	11	0	0	1	1
	10	1	0	1	1

④与项不是最小项的形式

与项不是最小项的形式，按邻接关系直接填入卡诺图。

例如： $P(A, B, C, D) = \bar{A}CD + ABD$



先填 $\bar{A}CD$ ，这是 \bar{A} ，这是 CD ；

$$\bar{A}CD = \bar{A}(B + \bar{B})CD$$

$$= \bar{A}BCD + \bar{A}\bar{B}CD$$

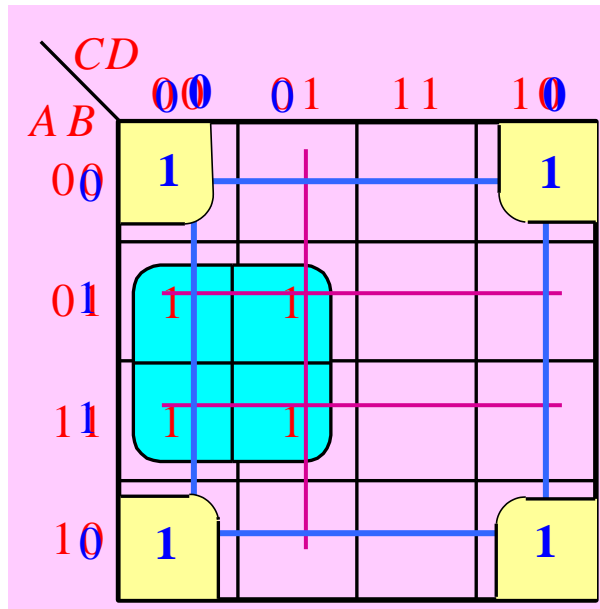
所以 $\bar{A}CD$ 处于第一第二行和第三列的交点上（二行一列）。

再填 ABD ，这是 AB ，这是 D 。

所以 ABD 处于第三行和第二、第三列的交点上（一行二列）。

将逻辑表达式填入卡诺图

例：将逻辑式 $P = B\bar{C} + \bar{B}\bar{D}$ 填入卡诺图



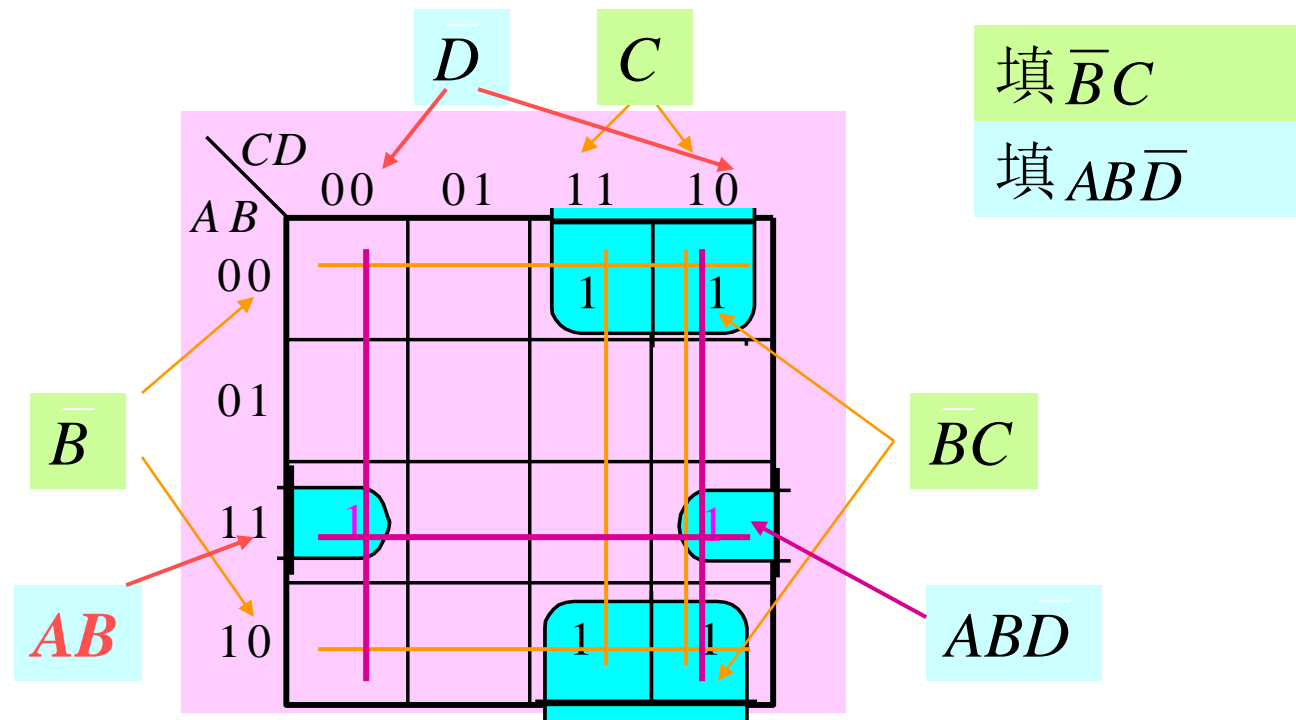
先填 $B\bar{C}$ ，这是 B ，这是 \bar{C} ；

$B\bar{C}$ 这一项处于第二、第三行和第一、第二列的交点处（二行二列）。

再填 $\bar{B}\bar{D}$ ，这是 \bar{B} ，这是 \bar{D} 。

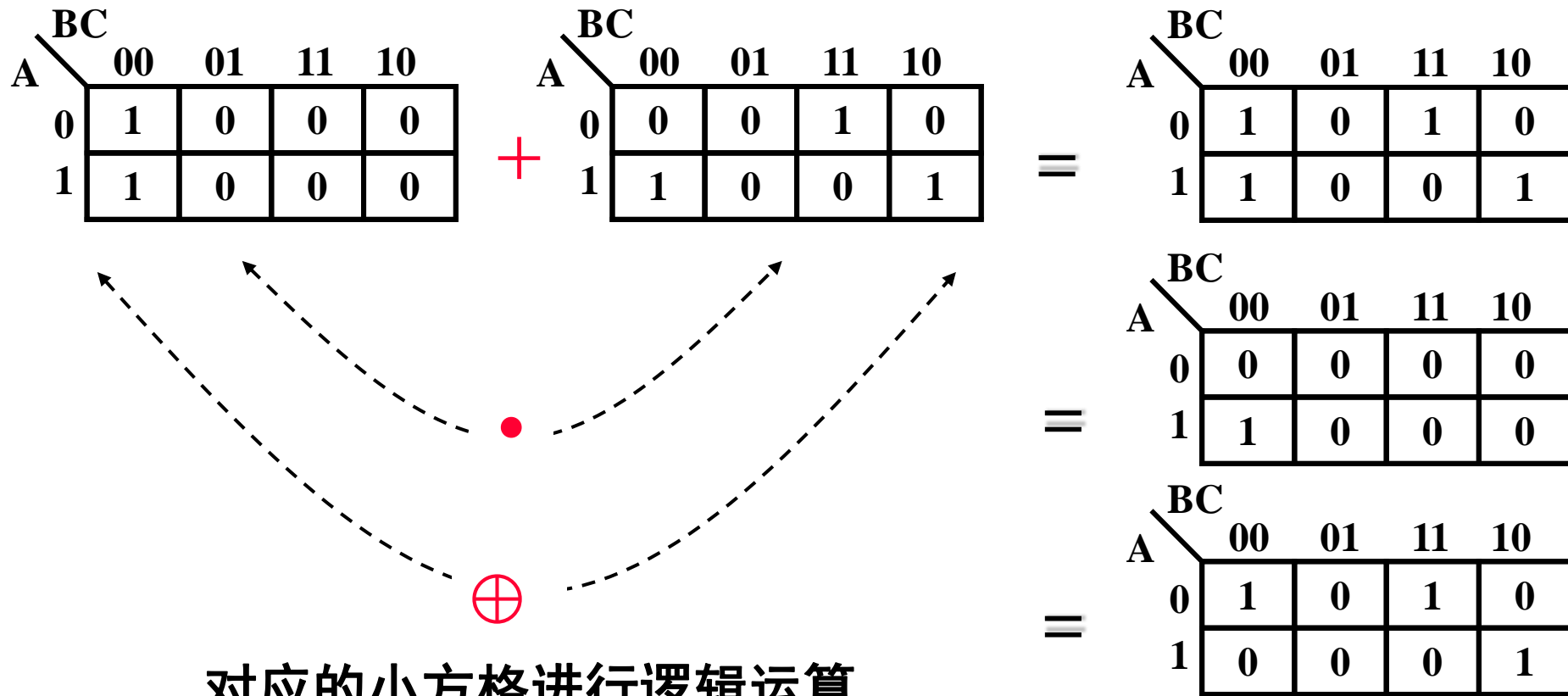
$\bar{B}\bar{D}$ 这一项处于第一、第四行和第一、第四列的交点处（二行二列）。

例：将逻辑式 $P = \overline{B}C + AB\overline{D}$ 填入卡诺图



Properties of K. maps

■ 基于卡诺图的逻辑运算



Properties of K. maps

		F			
		00	01	11	10
C	0		1	1	
	1	1	1		



		$X \cdot F$			
		00	01	11	10
C	0		X	X	
	1	X	X		

		F			
		00	01	11	10
A	0	0	1	1	1
	1	0	1	1	0

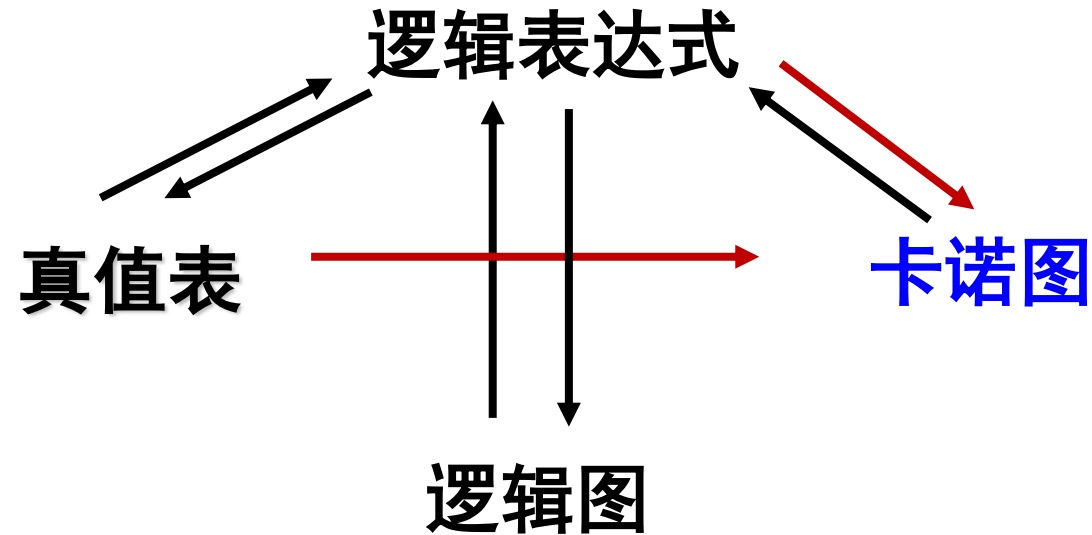


		\bar{F}			
		00	01	11	10
A	0	1	0	0	0
	1	1	0	0	1

F

\bar{F}

Representation methods of logical function



- K. map is an especially useful tool for simplifying and manipulating switching functions of three or four variables.

卡诺图 Karnaugh Maps

- 开关函数的最简形式
- 多变量卡诺图
- 填写卡诺图
- 卡诺图化简法

卡诺图化简法

Methods {
■ 代数法
■ 卡诺图法——
■ 图形法化简逻辑函数

$$F(A,B,C) = \bar{A}BC + ABC = BC(\bar{A} + A) = BC$$

A \ BC	BC			
	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	0	1	0

卡诺图化简法

从一个卡诺图中可以读取：



- 最简与或式 (**AND-OR**)
- 最简或与式 (**OR-AND**)
- 最简与或非式 (**AND-OR-NOT**)

如何从卡诺图读最简与或式

Step ①: 画圈

- a). 将**相邻**为**1**的小方格圈在一起。(小方格的个数必须为 2^m , $m=0,1,2,\dots$)
- b). 圈**越大越好**
- c). 小方格可以**重复**使用



Adjacent: 紧靠在一起的、行列首尾的、对称的
(本质上: 满足格雷码特点)

A \ BC	00	01	11	10
	0	0	1	0
1	0	1	1	1

AB \ CD	00	01	11	10
	1	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

AB \ CD	00	01	11	10
	0	1	1	0
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	0	1	1	0

如何从卡诺图读最简与或式

Step ②：每个圈代表一个与项

观察 $\left. \begin{array}{l} \text{Left} \\ \text{Top} \end{array} \right\}$ 变量取值不同——消去

变量取值相同 $\left\{ \begin{array}{l} 1: \text{原变量} \\ 0: \text{反变量} \end{array} \right.$

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	1	0	0	1
	01	0	0	0	0
	11	0	0	0	0
	10	1	0	0	1

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	0	1	1	0
	01	0	0	0	0
	11	0	0	0	0
	10	0	1	1	0

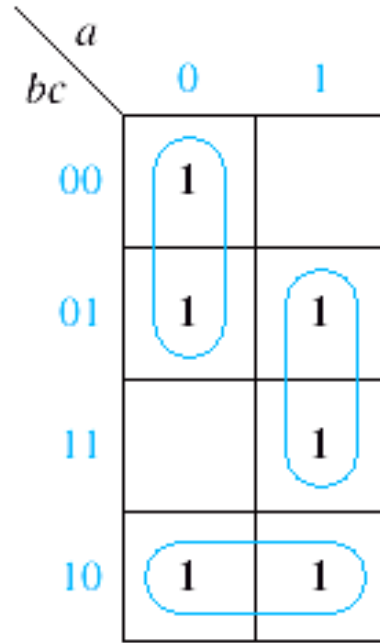
如何从卡诺图读最简与或式

Step ③: 将所有的与项相加

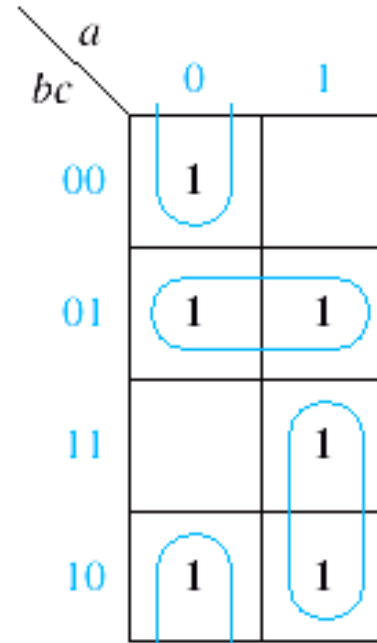
		<i>CD</i>			
		00	01	11	10
<i>AB</i>	00	1	1	0	1
	01	1	1	0	0
	11	0	0	1	1
	10	1	0	1	1

$$F = \bar{A}\bar{C} + AC + \bar{B}\bar{D}$$

如何从卡诺图读最简与或式



$$F = a'b' + bc' + ac$$



$$F = a'c' + b'c + ab$$

The two minimum solutions For F

与最小项（最大项）表达式不同

- 最简表达式**不一定是唯一的**。
- 但最简表达式的**实现代价是相同的**（逻辑门的数量相同、输入变量的个数相同）

如何从卡诺图读最简与或式

从卡诺图中读取：



- 最简与或式（**AND-OR**）
- 最简或与式（**OR-AND**）
- 最简与或非式（**AND-OR-NOT**）

如何从卡诺图读最简或与式

Step ①: 画圈

- a). 将相邻为0的小方格圈在一起。(小方格的个数必须为 2^m , $m=0,1,2,\dots$)
- b). 圈越大越好
- c). 小方格可以重复使用



Adjacent: 紧靠在一起的、行列首尾的、对称的
(本质上: 满足格雷码特点)

A \ BC	00	01	11	10
	0	1	0	1
1	1	0	0	0

AB \ CD	00	01	11	10
	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	1	1	0
11	1	1	1	0
10	0	1	1	0

AB \ CD	00	01	11	10
	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	1	0	0	1

如何从卡诺图读最简或式

Step ②: 每个圈代表一个和项

观察 $\left. \begin{array}{l} \text{Left} \\ \text{Top} \end{array} \right\}$ 变量取值不同——消去

变量取值相同 $\left\{ \begin{array}{l} 0: \text{原变量} \\ 1: \text{反变量} \end{array} \right.$

AB \ CD	CD			
	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	1	1	0
11	1	1	1	0
10	0	1	1	0

AB \ CD	CD			
	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	1	0	0	1

如何从卡诺图读最简或与式

Step ③: 将所有的和项相乘

$AB \backslash CD$		CD			
		00	01	11	10
AB	00	0	0	1	0
	01	0	0	1	1
	11	1	1	0	0
	10	0	1	0	0

$$F = (A + C) \cdot (\bar{A} + \bar{C}) \cdot (B + D)$$

到目前哪里存在问题？

- ☐ A 卡诺图基本概念
- ☐ B 卡诺图化简
- ☐ C 之前的内容
- ☐ D 讲解速度快
- ☐ E 讲解速度慢

提交

卡诺图化简法

从卡诺图中读取

- 最简与或式 (**AND-OR**)
- 最简或与式 (**OR-AND**)
- 最简与或非式 (**AND-OR-NOT**)



如何从卡诺图读最简与或非式

Step ①: 读 \bar{F} 的与或式

方法: 在 F 的卡诺图中圈 0 (或者在 \bar{F} 的卡诺图中圈 1)

Step ②: 对 \bar{F} 求反

		BC			
		00	01	11	10
A	0	0	0	1	0
	1	0	1	1	1

$$F = (A+B)(B+C)(A+C)$$

Minimum OR-AND
Expressions

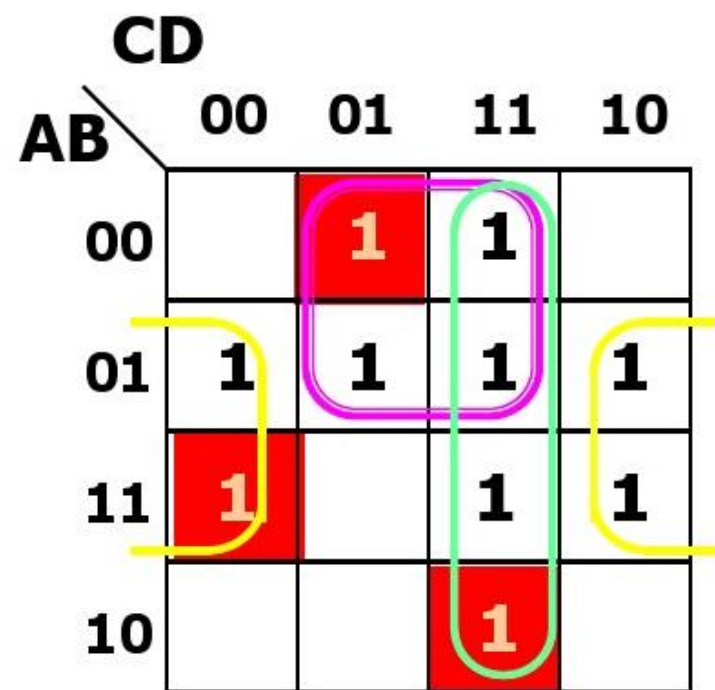
$$\bar{F} = \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{C}$$



$$F = \overline{\bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{C}}$$

卡诺图中的几个概念

- **蕴含项** (implicant) : 只包含1的矩形圈
- **主蕴含项/首要蕴含项** (prime implicant) : 扩展到最大的蕴含项
 - 函数所有的首要蕴含项都可以通过卡诺图求得
 - 完全由无关项组成的首要蕴含项不可能成为最简结果的一部分
 - 最简积之和由某些首要蕴含项组成
 - 若含有非首要蕴含项, 可能不是最简式

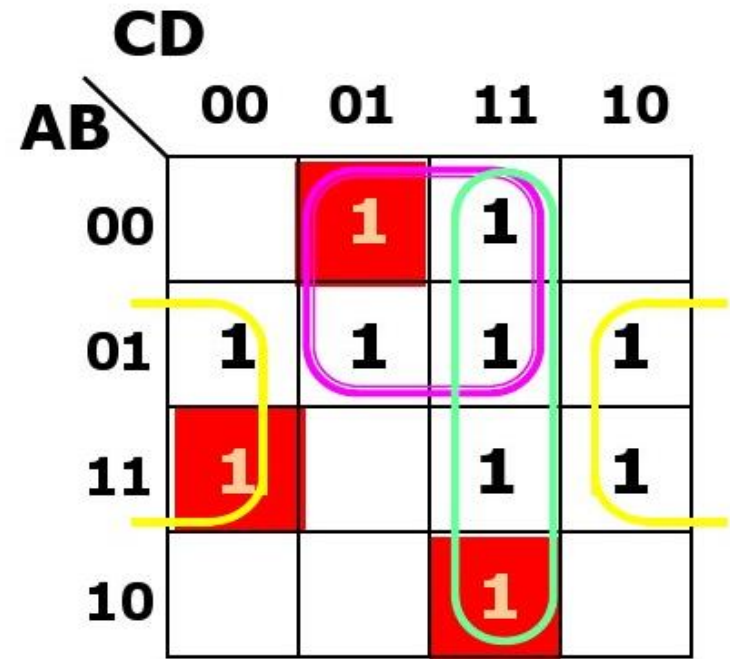


卡诺图中的几个概念——续

- 奇异“1”单元 (Distinguished 1-cell) : 仅被单一首要蕴含项覆盖的输入组合

技巧：圈卡诺图时，从合并奇异1单元开始

- 质主蕴含项 (Essential Prime implicant) / 基本首要蕴含项：
覆盖一个或者多个奇异“1”单元的主蕴含项



没有可能被重复
“圈”过的1单元

进一步讨论——更多变量卡诺图

* 展开定理

一个n变量的逻辑函数可以对变量 x_i 展开为两个n-1变量的逻辑函数

$$1. \quad f(x_1 x_2 \dots x_i \dots x_n)$$

$$= x_i \cdot f(x_1 x_2 \dots 1 \dots x_n) + \bar{x}_i \cdot f(x_1 x_2 \dots 0 \dots x_n)$$

.....对 x_i 展开为与或式

$$2. \quad f(x_1 x_2 \dots x_i \dots x_n)$$

$$= [\bar{x}_i + f(x_1 x_2 \dots 1 \dots x_n)] \cdot [x_i + f(x_1 x_2 \dots 0 \dots x_n)]$$

.....对 x_i 展开为或与式

进一步讨论——更多变量卡诺图

$$F=f(x_1x_2x_3x_4x_5)$$

$X_4X_5 \backslash X_2X_3$					
		00	01	11	10
00	0	1	3	2	
01	4	5	7	6	
11	12	13	15	14	
10	8	9	11	10	

$$x_1 = 0$$

$X_4X_5 \backslash X_2X_3$					
		00	01	11	10
X_2X_3	00	16	17	19	18
	01	20	21	23	22
	11	28	29	31	30
	10	24	25	27	26

$$x_1 = 1$$

$$F = \Sigma m(0, 1, 4, 5, 6, 11, 12, 14, 16, 20, 22, 28, 30, 31)$$

$X_4 X_5 \backslash X_2 X_3$		$X_4 X_5$			
		00	01	11	10
$X_2 X_3$	00	0	1	3	2
	01	4	5	7	6
	11	12	13	15	14
	10	8	9	11	10

$x_1 = 0$

$X_4 X_5 \backslash X_2 X_3$		$X_4 X_5$			
		00	01	11	10
$X_2 X_3$	00	16	17	19	18
	01	20	21	23	22
	11	28	29	31	30
	10	24	25	27	26

$x_1 = 1$

DE \ BC	BC			
	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	1	0	1
11	1	0	0	1
10	0	0	1	0

$A = 0$

DE \ BC	BC			
	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	1	0	0	1
11	1	0	1	1
10	0	0	0	0

$A = 1$

$$F = \bar{A}\bar{B}\bar{D} + \bar{B}\bar{D}\bar{E} + ABCD + \bar{A}B\bar{C}DE + C\bar{E}$$

Example

DEF \ ABC	000	001	011	010	110	111	101	100
000	1			1	1			1
001		1	1					
011				1				1
010	1			1	1			1
110	1			1	1		1	1
111		1	1					
101		1	1					
100	1			1	1			1

$$F = C'F' + B'CD'F + ACD'F + A'BD'EF' + A'BDE'F' + ABC'DE'$$

卡诺图化简法

进一步讨论——



带无关项的卡诺图化简

带无关项的卡诺图化简

Example

某单位三八节包场看电影，规定电影票只发给本单位的女职工，写出满足上述条件的逻辑表达式。

A=1: 本单位

B=1: 女职工

C=1: 有电影票

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	×
0	1	0	0
0	1	1	×
1	0	0	0
1	0	1	×
1	1	0	0
1	1	1	1

无关项——

不存在的或无意义的取值组合

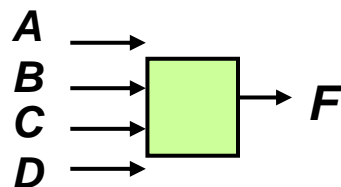
		BC			
		00	01	11	10
A	0	0	×	×	0
	1	0	×	1	0

$F = C$

带无关项的卡诺图化简

Example

输入信号X为 8421BCD码, 设计组合逻辑电路,
当 $X \geq 5$, 输出 $F=1$ 。



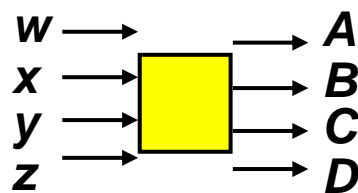
CD \ AB	AB			
	00	01	11	10
00	0	0	×	1
01	0	1	×	1
11	0	1	×	×
10	0	1	×	×

$$F = A + BD + BC$$

A	B	C	D	F	A	B	C	D	F
0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	0	1	0	×
0	0	1	1	0	1	0	1	1	×
0	1	0	0	0	1	1	0	0	×
0	1	0	1	1	1	1	0	1	×
0	1	1	0	1	1	1	1	0	×
0	1	1	1	1	1	1	1	1	×

带无关项的卡诺图化简

Example 设计一个能将4位 二进制数转换为余3码的电路



二进制数				余三码				二进制数				余三码			
W	X	Y	Z	A	B	C	D	W	X	Y	Z	A	B	C	D
0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	×			
0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	×			
0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	×			
0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	×			
0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	×			
0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	×			

带无关项的卡诺图化简

A:

WX \ YZ	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	1
11	×	×	×	×
10	1	1	×	×

$$A = W + XZ + XY$$

B:

WX \ YZ	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	1	0	0	0
11	×	×	×	×
10	0	1	×	×

$$B = \bar{X}Z + \bar{X}Y + X\bar{Y}\bar{Z}$$

带无关项的卡诺图化简

C:

wx \ YZ	YZ			
	00	01	11	10
00	1	0	1	0
01	1	0	1	0
11	×	×	×	×
10	1	0	×	×

$$C = \bar{Y}\bar{Z} + YZ$$

D:

wx \ YZ	YZ			
	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	×	×	×	×
10	1	0	×	×

$$D = \bar{Z}$$

Unit 4 卡诺图 Karnaugh Maps

- 开关函数的最简形式
- 多变量卡诺图
- 填写卡诺图
- 卡诺图化简法

如何使逻辑表达式最简？

- 卡诺图

具体步骤参见P111-112

- 首要蕴含项表（P136）

假设某逻辑函数的表达式如6-2所示。

经过化简后如6-3所示

用表6-2和6-3得到最简积之和表达式