数字逻辑设计

高翠芸
School of Computer Science
gaocuiyun@hit.edu.cn

Unit 2　Boolean Algebra

- 逻辑运算
- 布尔表达式和真值表
- 逻辑代数定理及规则
- 代数化简法

George Boole

各种逻辑运算

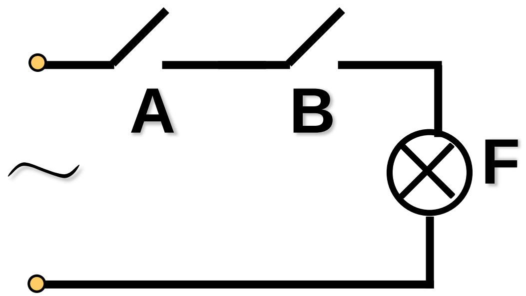
- **基本逻辑运算（Basic Operations）**
  - **与（AND）**
  - **或（OR）**
  - **非（NOT）**
- **复合逻辑运算（Other Operations）**

基本运算——AND

1. AND（逻辑“与” ）

$$F = A \bullet B$$

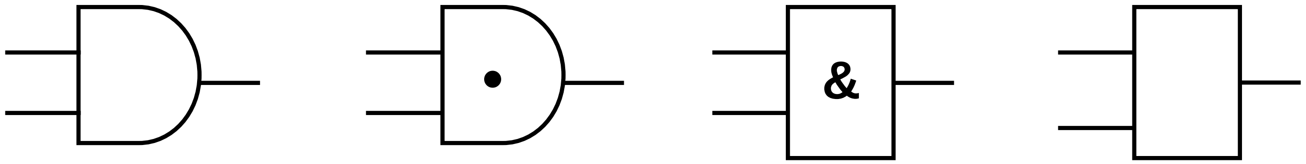
① 也称为：　逻辑“乘”



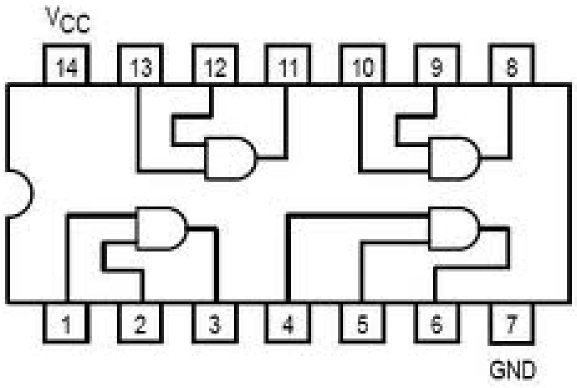
Truth Table

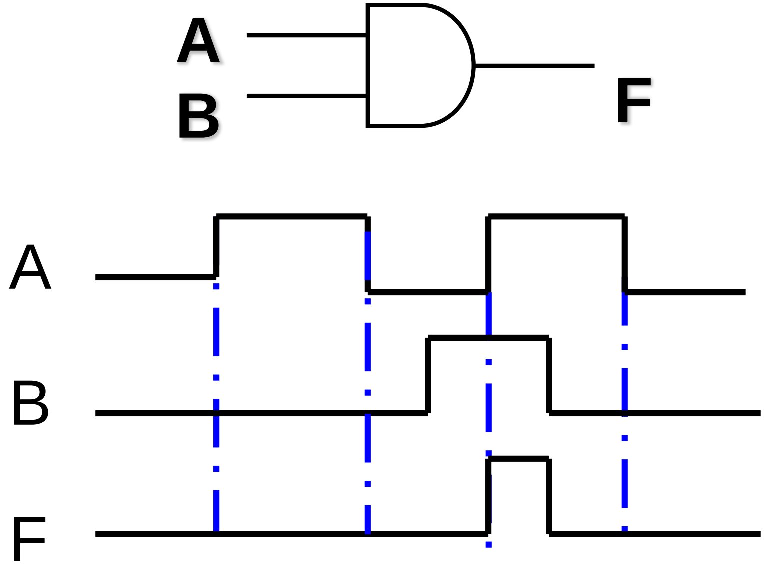
AB	F
0 0	0
0 1	0
1 0	0
1 1	1

② AND gate（与门）逻辑符号



③ Typical Chip: 74LS08



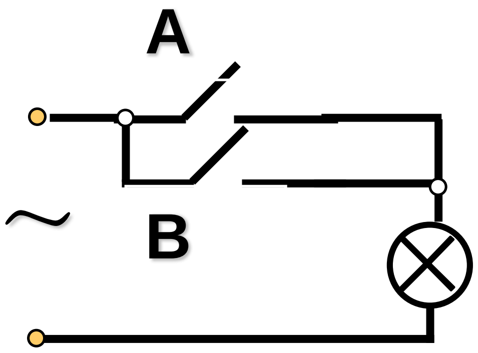


基本运算——OR

2. OR（逻辑“或”）

$$F=A+B$$

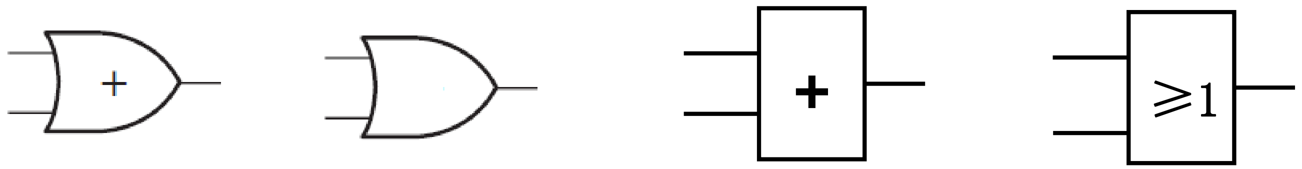
①也称为：逻辑“加”



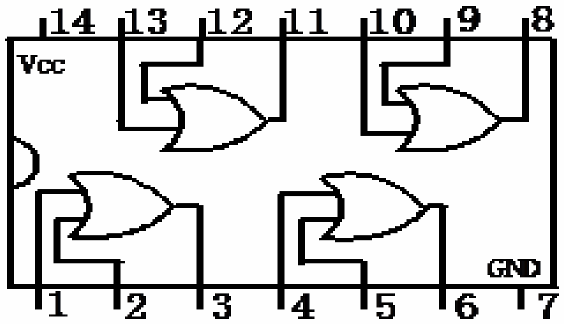
Truth Table

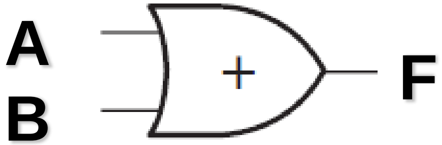
AB	F
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	1

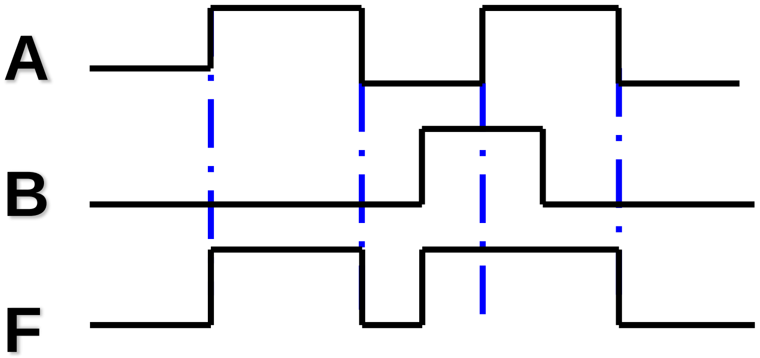
② OR gate（或门）逻辑符号



③ Typical Chip: 74LS32







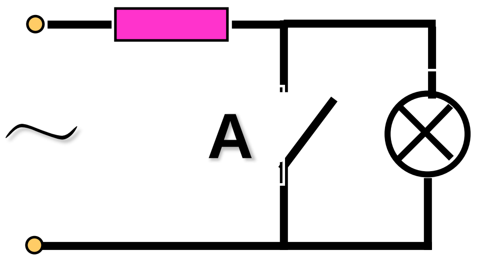
基本运算——NOT

3. NOT（逻辑“非”）

$$F=\overline{A}$$

$$(\text{ or } F=A')$$

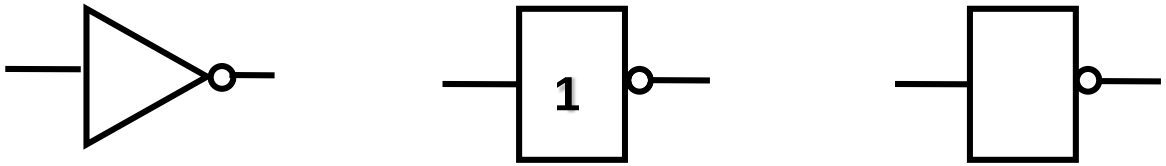
①也称为：反相器



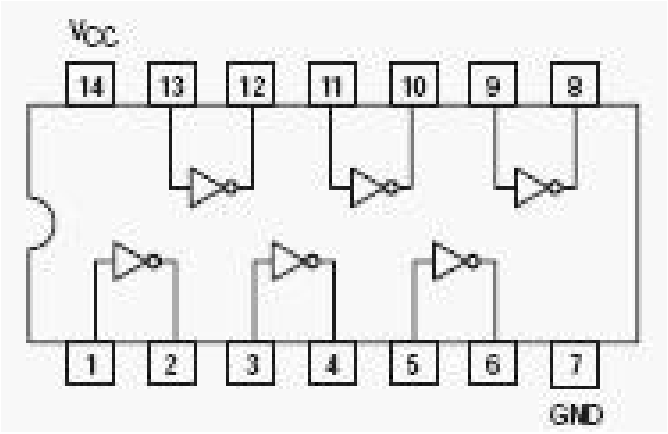
True table

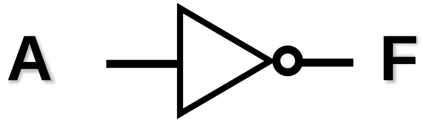
A	F
0	1
1	0

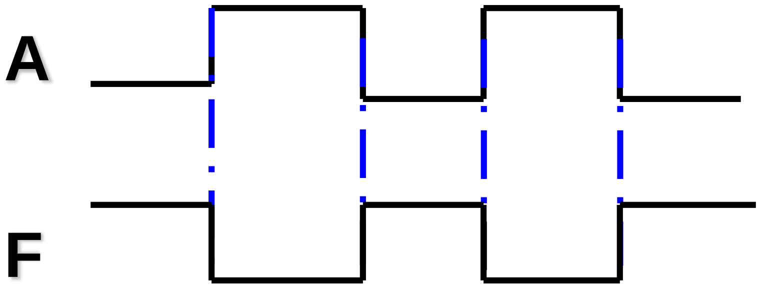
② NOT gate（非门）逻辑符号



③ Typical Chip: 74LS04







复合逻辑运算（Other Operations）

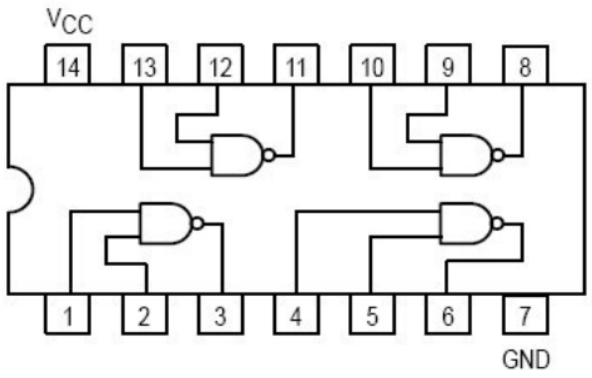
- **基本逻辑运算（Basic Operations）**
  - **与（AND）**
  - **或（OR）**
  - **非（NOT）**
- **复合逻辑运算（Other Operations）**

复合逻辑运算——NAND

4. 与非门（NAND gate）

$$F = \overline{AB}$$

- Typical Chip: 74LS00



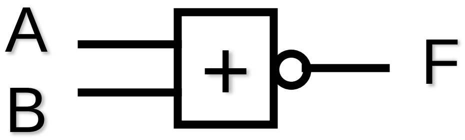
Truth Table

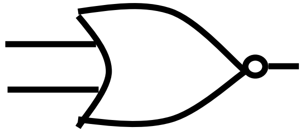
AB	F
0 0	1
0 1	1
1 0	1
1 1	0

复合逻辑运算——NOR

5. 或非门（NOR gate）

$$F = \overline{A+B}$$

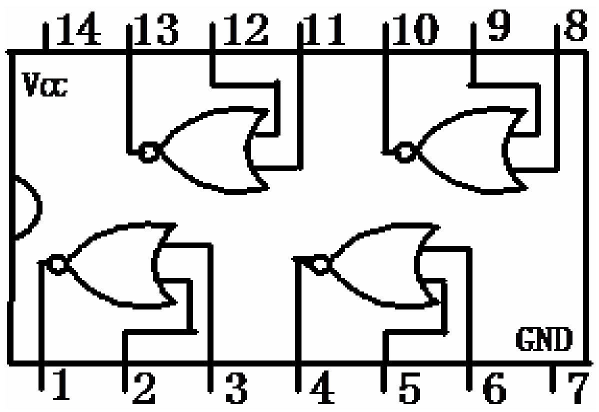




Truth Table

AB	F
0 0	1
0 1	0
1 0	0
1 1	0

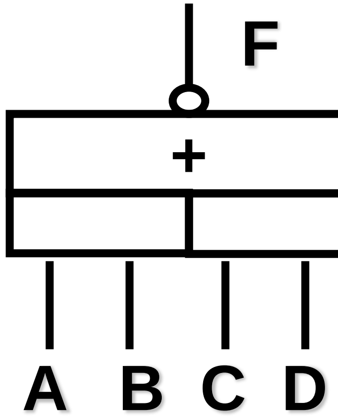
- Typical Chip: 74LS02

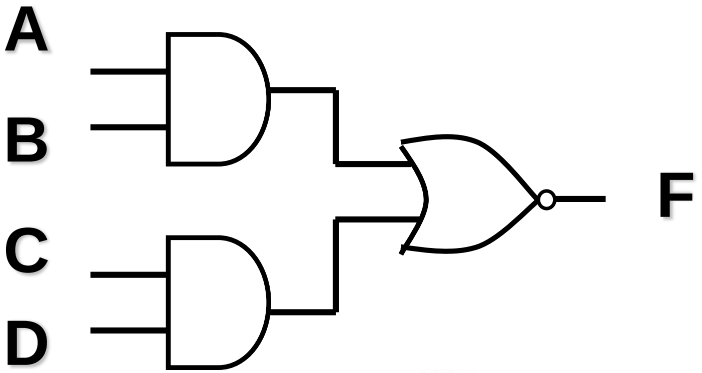


复合逻辑运算——NAND-OR-NOT

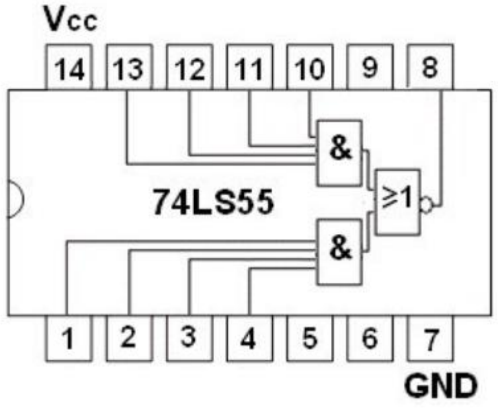
6. 与或非门（AND-OR-NOT gate）

$$F=\overline{AB+CD}$$





- Typical Chip: 74LS51,74LS55



复合逻辑运算——Exclusive-OR

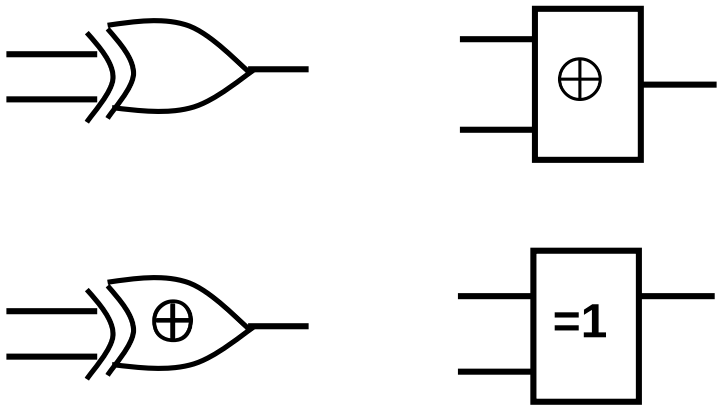
7. 异或门 (Exclusive-OR gate)

① $F = A \oplus B = \bar{A}B + A\bar{B}$

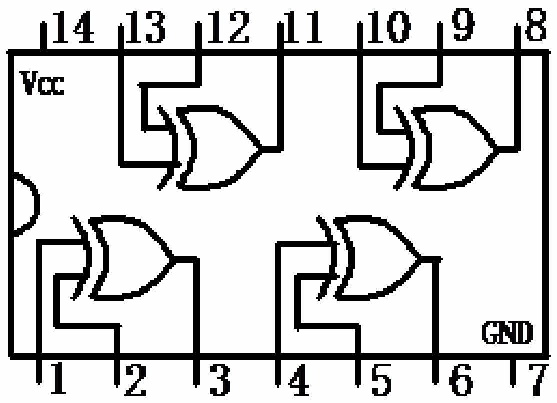
Truth Table

AB	F
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	0

② 逻辑符号



③ Typical Chip: 74LS86

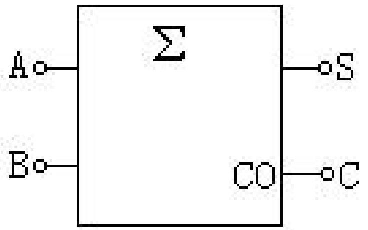


④ 应用

- 全加器（Full adder）
- 半加器（Half-adder）

异或门的应用

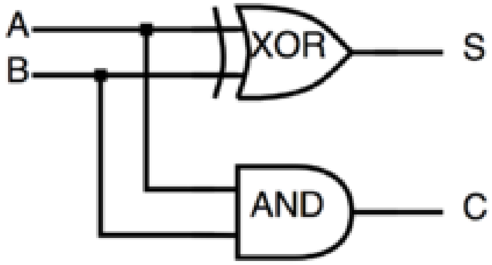
■ 半加器（Half-adder）



半加器逻辑符号

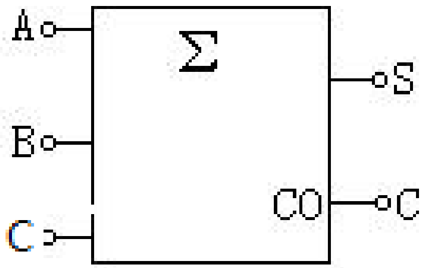
输入		输出	
A	B	C	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

逻辑表达式：$S = A \oplus B$；$C = A \cdot B$。



半加器的逻辑实现

■ 全加器（Full adder）

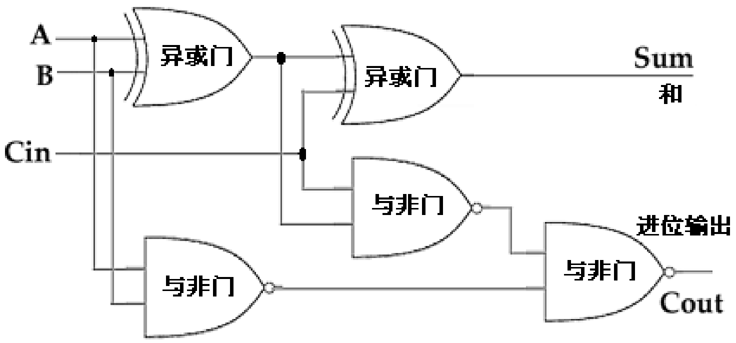


全加器逻辑符号

输入			输出	
Ci-1	Ai	Bi	Si	Ci
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

$$S = A \oplus B \oplus C_{in}$$

$$C_{out} = (A \cdot B) + (C_{in} \cdot (A \oplus B))$$



复合逻辑运算——Exclusive-OR

8. 同或门 (Equivalence operation)

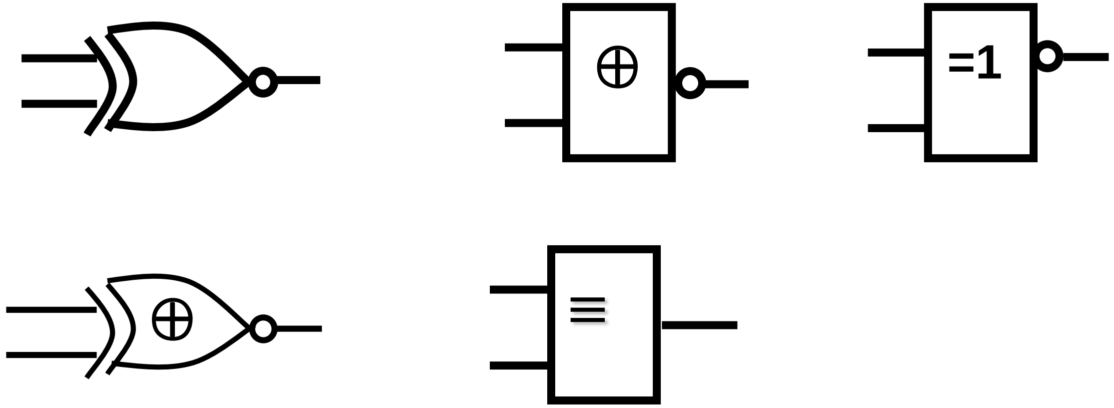
$F = A \equiv B$ or

$$F = A \odot B = \bar{A}\bar{B} + AB$$

Truth Table

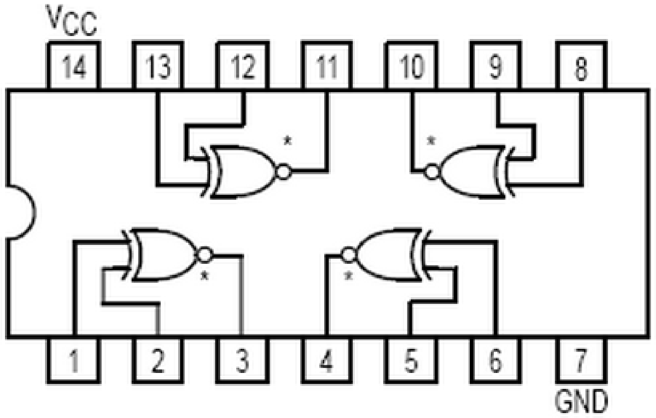
AB	F
0 0	1
0 1	0
1 0	0
1 1	1

① 逻辑符号



复合逻辑运算——Exclusive-OR

② Typical Chip: 74LS266



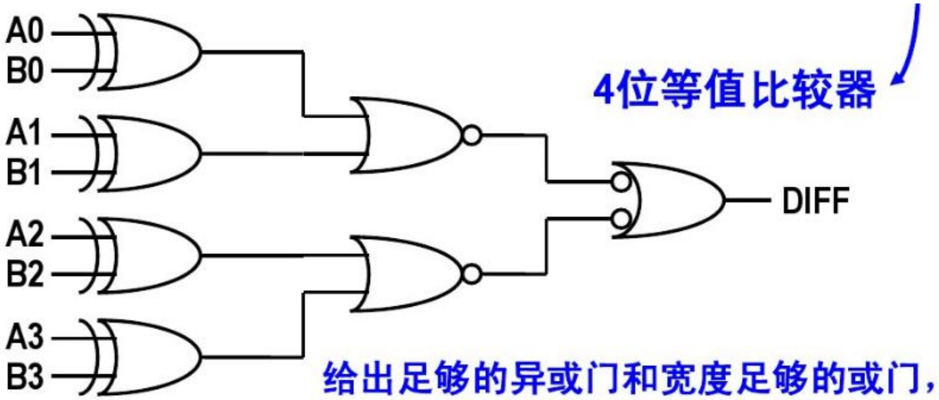
如何构造1位等值比较器？？

—— 利用异或门（同或门）

DIFF : different　　EQ : equal

③ Applications

■ 等值比较器



给出足够的异或门和宽度足够的或门，
可以搭建任意输入位数的等值比较器。

复合逻辑运算——Exclusive-OR

④ 性质

$A \oplus 1 = \overline{A}$ $\quad$ $A \odot 1 = A$

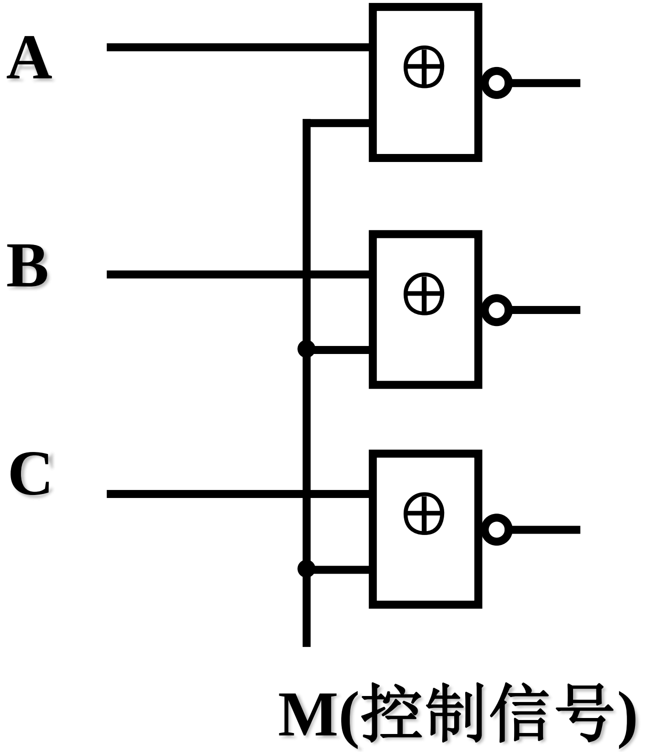
$A \oplus 0 = A$ $\quad$ $A \odot 0 = \overline{A}$

$A \oplus A = 0$ $\quad$ $A \odot A = 1$

$A \oplus \overline{A} = 1$ $\quad$ $A \odot \overline{A} = 0$

复合逻辑运算——Exclusive-OR

应 用



Unit 2　Boolean Algebra

- 逻辑运算
- 布尔表达式和真值表
- **逻辑代数定理及规则**
- **代数化简法**

布尔表达式和真值表

布尔表达式（Boolean Expressions）

$$F = AB + \bar{A}\bar{B}$$

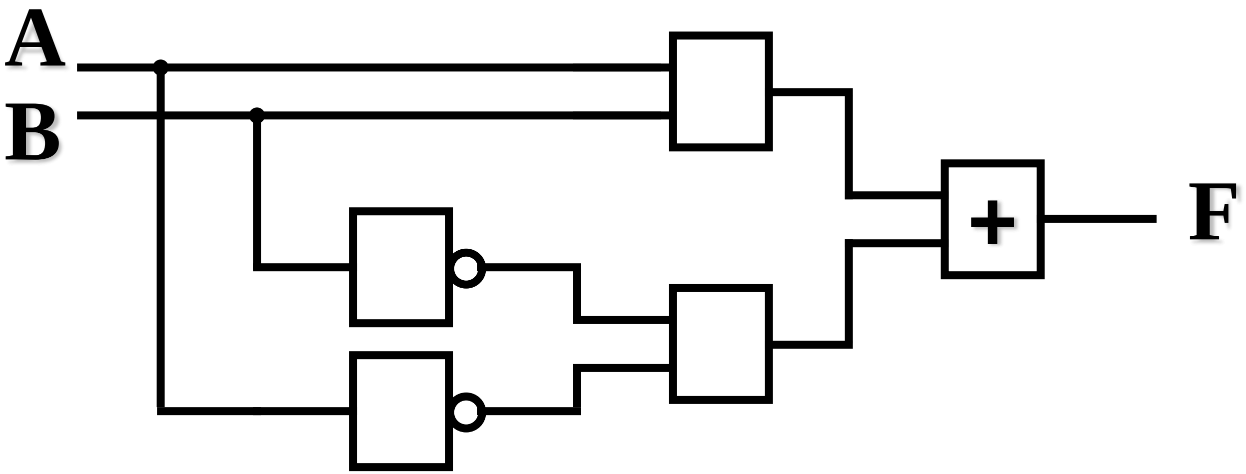
$$F = [A(C+D)]' + BE$$

- *Boolean expressions* are formed by application of the basic operations (and, or, not) to one or more variables or constants.

布尔表达式和真值表

$$F = AB + \bar{A}\bar{B}$$

逻辑图



真值表

AB	F
0 0	1
0 1	0
1 0	0
1 1	1

- n 个输入变量有 2^n 种取值组合

■ 如果两个逻辑表达式的真值表相等，则这两个逻辑表达式相等.

Example. $AB'+C = (A+C)(B'+C)$

A B C	$AB'+C$	$(A+C)(B'+C)$
0 0 0	0	0
0 0 1	1	1
0 1 0	0	0
0 1 1	1	1
1 0 0	1	1
1 0 1	1	1
1 1 0	0	0
1 1 1	1	1

适用情况：逻辑表达式简单，逻辑变量较少

Unit 2 Boolean Algebra

- 逻辑运算
- 布尔表达式和真值表
- 逻辑代数定理及规则
- 代数化简法

设置

预习情况

A 预习了，基本都看懂了

B 预习了，但还有不少不懂的

C 没预习

D 没书

提交

Laws and Theorems

1. 公理（Axiom）

(A1) $0 \cdot 0 = 0$

(A1D) $0+0 = 0$

(A2) $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$

(A2D) $1+0 = 0+1=1$

(A3) $1 \cdot 1 = 1$

(A3D) $1+1 = 1$

(A4) $\overline{0} = 1$

(A4D) $\overline{1} = 0$

(A5) If $A \neq 0$ then $A=1$

(A5D) If $A \neq 1$ then $A=0$

Laws and Theorems

2. 基本定理（Basic Theorems）

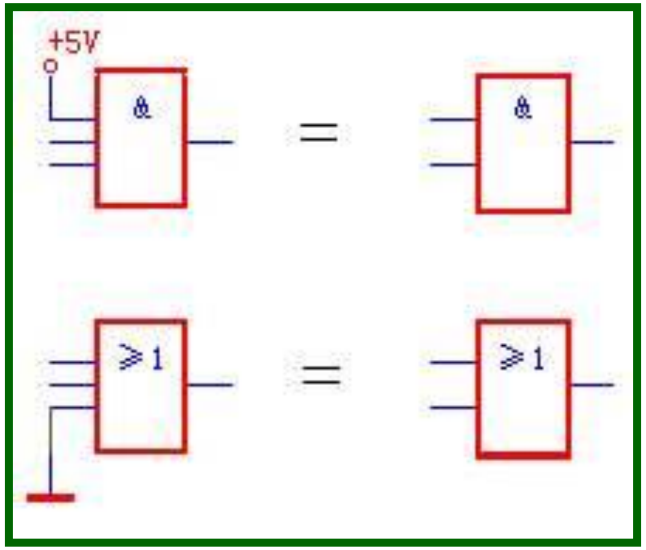
- *single variable is involved*

(T1)	$A+0=A$	(T1D)	$A \cdot 0=0$	0—1律
(T2)	$A+1=1$	(T2D)	$A \cdot 1=A$	
(T3)	$A+\overline{A}=1$	(T3D)	$A \cdot \overline{A}=0$	互补律
(T4)	$A+A=A$	(T4D)	$A \cdot A=A$	重叠律
(T5)	$\overline{\overline{A}}=A$			还原律

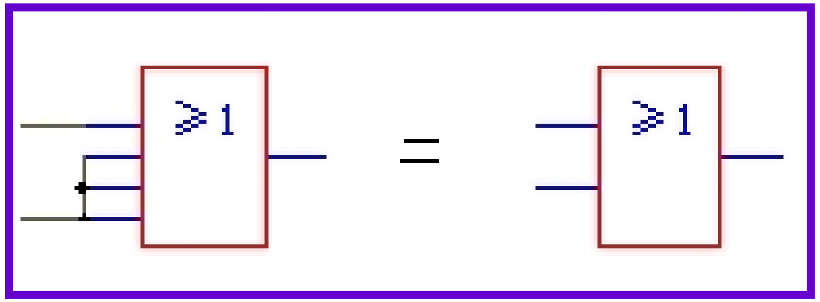
Laws and Theorems

- 应用——

0—1 律



重叠率



Laws and Theorems

- ***Two or three variables is involved***

交换律

(T6) $\mathbf{A+B=B+A}$ (T6D) $\mathbf{A \cdot B = B \cdot A}$

结合律

(T7) $\mathbf{(A+B)+C=A+(B+C)}$ (T7D) $\mathbf{(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)}$

分配律

第二分配律

(T8) $\mathbf{A \cdot (B+C) = AB+AC}$ (T8D) $\mathbf{A+BC=(A+B) \cdot (A+C)}$

普通代数不支持

- *Two or three variables is involved*

(T9) $A + AB = A$ (T9D) $A(A + B) = A$ （吸收律）

(T10) $AB + A\overline{B} = A$ (T10D) $(A+B)(A+\overline{B}) = A$ （合并律）

(T11) $A + \overline{A}B = A + B$ （消除律）

$A+\overline{A}B$ 分配律的对偶式

$=(A+\overline{A})(A+B)$

$=A+B$

$A+\overline{A}B$

$=A+AB+\overline{A}B$

$=A+B$

- *Two or three variables is involved*

(T9) $A + AB = A$ (T9D) $A(A + B) = A$ （吸收律）

(T10) $AB + A\overline{B} = A$ (T10D) $(A+B)(A+\overline{B}) = A$ （合并律）

(T11) $A + \overline{A}B = A + B$ （消除律）

(T12) $AB + \overline{A}C + BC = AB + \overline{A}C$

$= AB + \overline{A}C + (A + \overline{A})BC$

$= AB + \overline{A}C + ABC + \overline{A}BC$

$= AB + \overline{A}C$

- *Two or three variables is involved*

(T9) $A + AB = A$ (T9D) $A(A + B) = A$ （吸收律）

(T10) $AB + A\overline{B} = A$ (T10D) $(A+B)(A+\overline{B}) = A$ （合并律）

(T11) $A + \overline{A}B = A + B$ （消除律）

(T12) $AB + \overline{A}C + BC = AB + \overline{A}C$ （蕴含律）

(T12D) $AB + \overline{A}C + BCD = AB + \overline{A}C$

(T12D)' $(A+B)(B+C)(A' + C) = (A+B)(A' + C)$

(T13) $\overline{A\overline{B} + \overline{A}B} = \overline{A}\,\overline{B} + AB$

- *Two or three variables is involved*

(T9) $A + AB = A$ (T9D) $A(A + B) = A$ （吸收律）

(T10) $AB + A\bar{B} = A$ (T10D) $(A+B)(A+\bar{B}) = A$ （合并律）

(T11) $A + \bar{A}B = A + B$ （消除律）

(T12) $AB + \bar{A}C + BC = AB + \bar{A}C$ 律）

(T12D) $AB + \bar{A}C + BCD = AB + \bar{A}C$

(T12D)' $(A+B)(B+C)(A'+C) = (A+B$

From (T12) :

$AB + \bar{A}C + BCD$

$= AB + \bar{A}C + BC + BCD$

$= AB + \bar{A}C + BC$

$= AB + \bar{A}C$

(T13) $\overline{A\bar{B} + \bar{A}B} = \bar{A}\bar{B} + AB$

Two or three variables is involved

(T9) $A + AB = A$ (T9D) $A(A + B) = A$ （吸收律）

(T10) $AB + A\bar{B} = A$ (T10D) $(A+B)(A+\bar{B}) = A$ （合并律）

(T11) $A + \bar{A}B = A + B$ （消除律）

(T12) $AB + \bar{A}C + BC = AB + \bar{A}C$ 蕴含律）

(T12D) $AB + \bar{A}C + BCD = AB + \bar{A}C$

(T12D)' $(A+B)(B+C)(A'+C) = (A+B$

$$\overline{A\bar{B} + \bar{A}B}$$

$$= \overline{A\bar{B}} \cdot \overline{\bar{A}B}$$

$$= (\bar{A} + B) \cdot (A + \bar{B})$$

$$= \bar{A}\bar{B} + AB$$

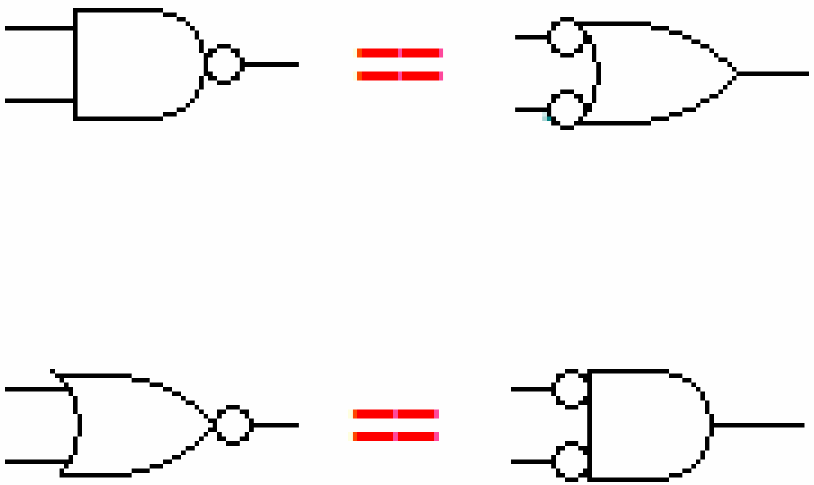
(T13) $\overline{A\bar{B} + \bar{A}B} = \bar{A}\bar{B} + AB$

Laws and Theorems

- ***N variables is involved***

  —德摩根定理（DeMorgan’s Laws）

(13) $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ (13)’ $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$



Laws and Theorems

特殊定理

1、DeMorgan's Laws

- Applications: 表达式化简

（1） $\overline{X_1 X_2 \ \dots \ X_n} = \overline{X}_1 + \overline{X}_2 + \dots + \overline{X}_n$

（2） $\overline{X_1 + X_2 + \dots + X_n} = \overline{X}_1 \overline{X}_2 \ \dots \ \overline{X}_n$

Laws and Theorems

- ***N variables is involved***

(T14) $X + X + \ldots + X = X$ (T14D) $X \cdot X \cdot \ldots \cdot X = X$

(T15) $(X_1 \cdot X_2 \cdot \cdots \cdot X_n)' = X_1' + X_2' + \cdots + X_n'$

(T15D) $(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)' = X_1' \cdot X_2' \cdot \cdots \cdot X_n'$

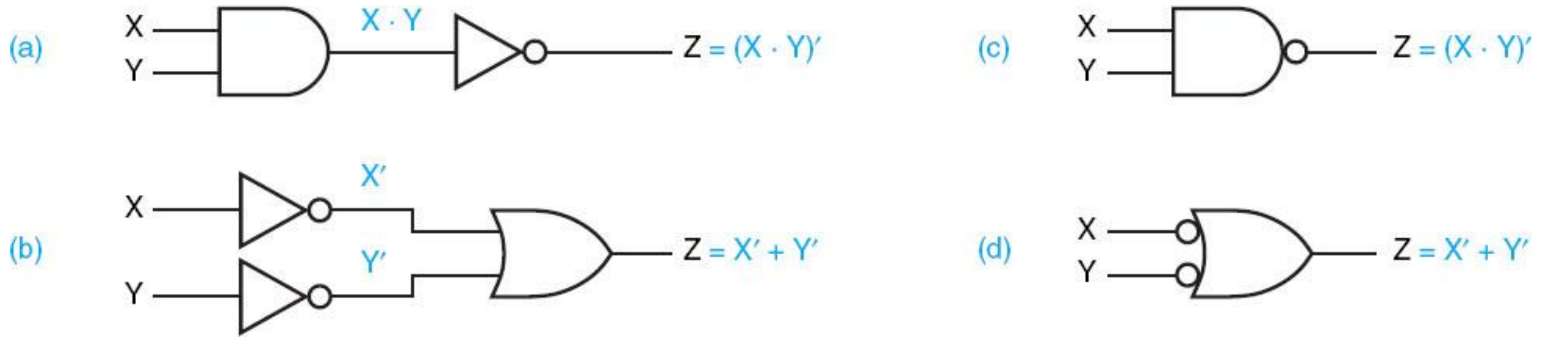
(T16) $[F(X_1, X_2, \ldots, X_n, +, \cdot)]' = F(X_1', X_2', \ldots, X_n', \cdot, +)$

(T17) $F(X_1, X_2, \ldots, X_n) = X_1 \cdot F(1, X_2, \ldots, X_n) + X_1' \cdot F(0, X_2, \ldots, X_n)$

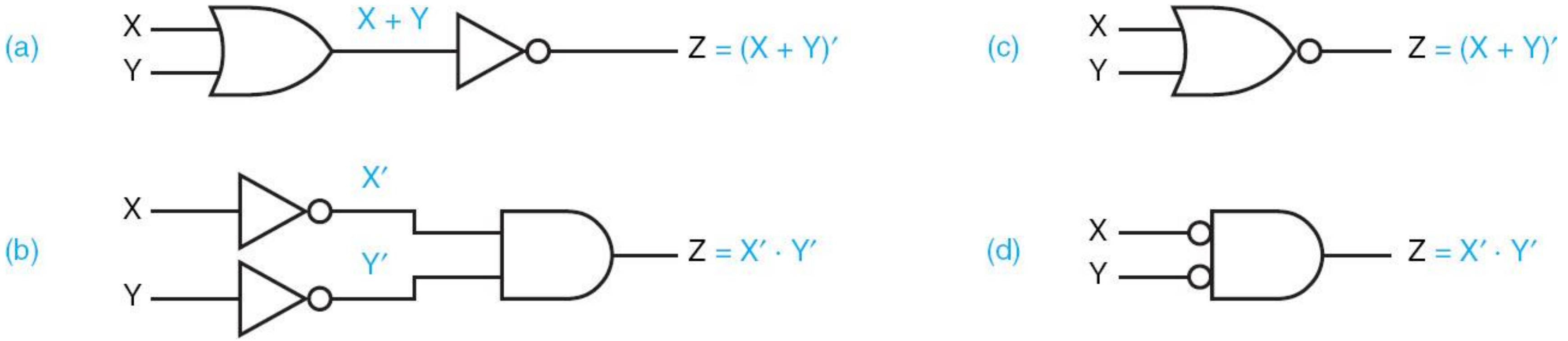
(T17D) $F(X_1, X_2, \ldots, X_n) = [X_1 + F(0, X_2, \ldots, X_n)] \cdot [X_1' + F(1, X_2, \ldots, X_n)]$

根据德 ·摩根定理的等效电路

(T15) $(X_1 \bullet X_2 \bullet \cdots \bullet X_n)' = X_1' + X_2' + \cdots + X_n'$



(T15D) $(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)' = X_1' \cdot X_2' \cdot \cdots \cdot X_n'$



特殊定理

——对偶规则（Inference of Dual Rule）

① F $\xleftrightarrow{\text{Dual Rule}}$ $(F)^D$

② 两个逻辑表达式相等，它们的对偶也相等

$$A+BCD = (A+B)(A+C)(A+D)$$

$\Downarrow$ Dual Rule $\qquad$ $\Downarrow$ Dual Rule

$$A\cdot(B+C+D) = AB+AC+AD$$

Laws and Theorems

2、Inference of Dual Rule

- **Applications:** Algebraic Simplification

变量:　　不变

运算符:

$$\cdot \longrightarrow +$$

$$+ \longrightarrow \cdot$$

$$\oplus \longrightarrow \odot$$

$$\odot \longrightarrow \oplus$$

不能改变原来的优先级

对偶规则（Inference of Dual Rule）

Example

$$F=A\cdot(B+C) \xrightarrow{\text{对偶}} (F)^D = A+B\cdot C$$

$$F=A\cdot\bar{B}+AC \xrightarrow{\text{对偶}} (F)^D = (A+\bar{B})\cdot(A+C)$$

$$F=\overline{\bar{A}\cdot\overline{B\cdot\bar{C}}} \xrightarrow{\text{对偶}} (F)^D = \overline{\bar{A}+\overline{B+\bar{C}}}$$

Unit 2 Boolean Algebra

- 逻辑运算
- 布尔表达式和真值表
- 逻辑代数定理及规则
- 代数化简法

Algebraic Simplification

一个逻辑函数有多种不同的表达式

$F=AB+A\bar{C}$ .....与-或

$=\overline{\overline{AB+A\bar{C}}}$

$=\overline{\overline{AB}\cdot\overline{A\bar{C}}}$ .....与非-与非

$=\overline{(\bar{A}+\bar{B})\cdot(\bar{A}+C)}$.....或-与非

$=\overline{(\bar{A}+\bar{B})}+\overline{(\bar{A}+C)}$ .....或非-或

$F=(A+B)\cdot(A+\bar{C})$ .....或-与

$=\overline{\overline{(A+B)\cdot(A+\bar{C})}}$

$=\overline{\overline{(A+B)}+\overline{(A+\bar{C})}}$....或非-或非

$=\overline{\bar{A}\cdot\bar{B}+\bar{A}\cdot C}$ .....与-或非

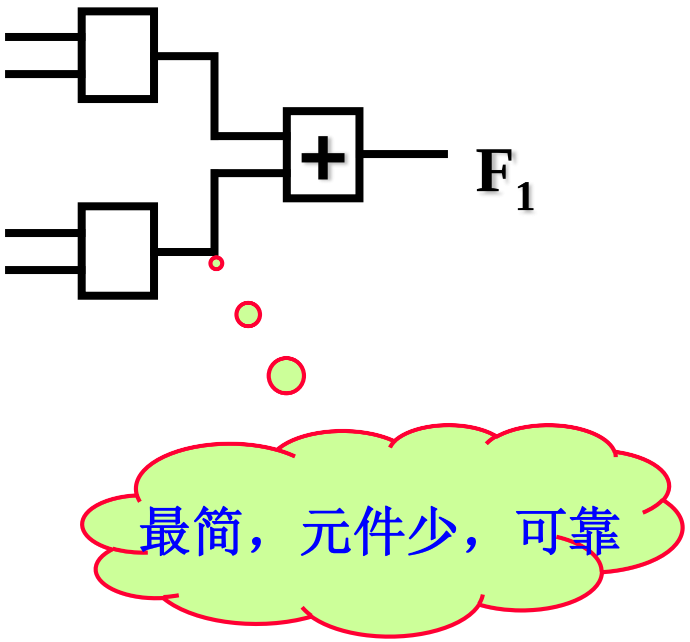
$=\overline{\bar{A}\,\bar{B}}\cdot\overline{\bar{A}C}$ .....与非-与

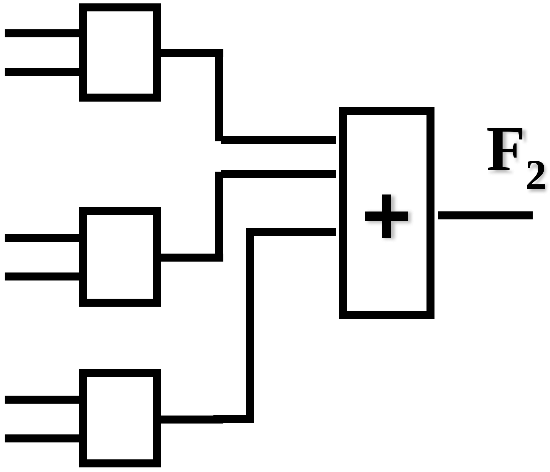
同一类型的表达式也不是唯一的

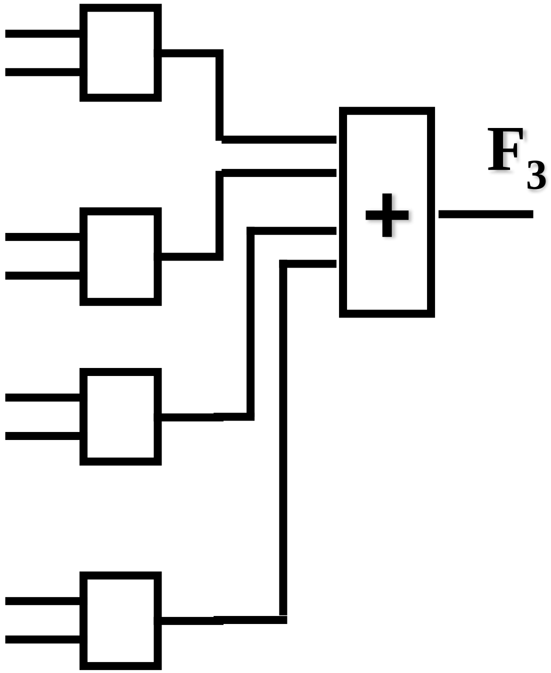
$$F=AB+\bar{A}C \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ① \; F_1$$

$$=AB+\bar{A}C+BC \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ② \; F_2$$

$$=ABC+AB\bar{C}+\bar{A}BC+\bar{A}\bar{B}C \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ③ \; F_3$$







Algebraic Simplification

最简（Minimum Expressions）？

① 与项（和项）的个数最少

② 每个与项（和项）中变量的个数最少

minimum cost

① 逻辑门的数量最少

② 逻辑门的输入个数最少

目的：

- 降低成本
- 提高可靠性

Methods

- 代数法（Algebraic techniques）
- 卡诺图法（K. map method）

Simplification Methods

代数化简法

Example.1

$$F = A + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}CD + \bar{C}E + \bar{D}E$$

$$= A + \bar{A}CD + \bar{C}E + \bar{D}E$$

$$= A + CD + \bar{C}E + \bar{D}E$$

$$= A + CD + E(\bar{C} + \bar{D})$$

$$= A + CD + E\overline{CD}$$

$$= A + CD + E$$

Example.2 $F = AB + A\bar{C} + \bar{B}C + B\bar{C} + \bar{B}D + B\bar{D} + ADE(F+G)$

$$= A(\overline{\bar{B}C}) + \bar{B}C + B\bar{C} + \bar{B}D + B\bar{D} + ADE(F+G)$$

$$= A + \bar{B}C + B\bar{C} + \bar{B}D + B\bar{D} + ADE(F+G)$$

$$= A + \bar{B}C + B\bar{C} + \bar{B}D + B\bar{D} + C\bar{D}$$

$$= A + \bar{B}C + B\bar{C} + \bar{B}D + B\bar{D} + C\bar{D}$$

$$= A + \bar{B}C + B\bar{C} + \bar{B}D + C\bar{D}$$

$$= A + B\bar{C} + \bar{B}D + C\bar{D}$$

Example.3 $F=(\overline{B}+D)(\overline{B}+D+A+G)(C+E)(\overline{C}+G)(A+E+G)$

Dual Rule:

$$J=\overline{B}D+\overline{B}DAG+CE+\overline{C}G+AEG$$

$$=\overline{B}D+CE+\overline{C}G+AEG$$

$$=\overline{B}D+CE+\overline{C}G$$

Dual Rule:

$$F=(\overline{B}+D)(C+E)(\overline{C}+G)$$

Example.4 $F=A+AB+\overline{A}C+BD+ACEF+\overline{B}E+DEF$

$$=A+C+BD+\overline{B}E$$

重要的三个规则

(T8D) $\mathbf{A+BC=(A+B)\cdot(A+C)}$

(T11) $\mathbf{A+\overline{A}B = A+B}$

(T12D) $\mathbf{AB+\overline{A}C+BC = AB+\overline{A}C}$

投票(匿名) 最多可选3项

设置

哪些内容没有听懂，需要再讲一下?

A 德摩根定理

B 对偶规则

C 蕴含率

D 其他

E 无

提交

代数化简法优缺点

- 优点——
  - 不受变量数目的约束
  - 对公理、定理和规则十分熟练时，化简较方便
- 缺点——
  - 技巧性强
  - 在很多情况下难以判断化简结果是否最简

小　结

- 各种逻辑运算
- 布尔表达式和真值表
- 逻辑代数定理及规则
- 代数化简法