

# 数字逻辑设计

高翠芸

School of Computer Science

gaocuiyun@hit.edu.cn

## 第二章讲得速度如何?

- ☐ A 速度太快
- ☐ B 速度略快
- ☐ C 刚好
- ☐ D 略慢
- ☐ E 太慢

提交

# 目 录

---

- 布尔代数的应用
- 最大项、最小项表达式
- 不完全给定函数

# 组合逻辑电路的设计方法

|    |    |      |
|----|----|------|
| 已知 | —— | 设计要求 |
| 待求 | —— | 逻辑图  |

- 步骤:

1. 根据设计要求确定 —— 真值表
2. 根据真值表 —— 卡诺图(表达式)
3. 化简
4. 按设计要求, 变换逻辑表达式
5. 画出逻辑图



# 组合逻辑电路的设计方法——续

---

- 逻辑设计目标

- 实现逻辑功能
- 满足性能指标
- 综合考虑各项因素：
  - 规模、功耗、价格、可靠性、
  - 速度、易实现、易维修、美观等

设计不唯一，最佳设计方案随新技术的不断推出而变化

# 怎样设计组合逻辑电路？

---

## ■方法1：直接转换（简单情况下）

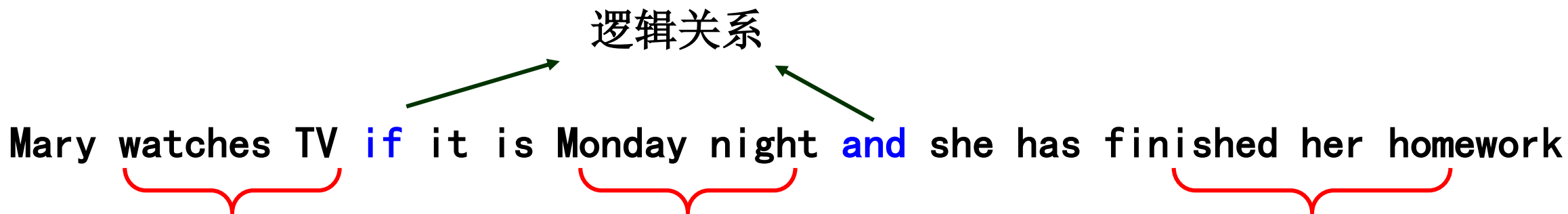
- 将文字描述的功能直接转换为真值表或表达式

## ■方法2：真值表转换

- 由真值表可直接写出标准形式的逻辑表达式
  - 标准与或式（最小项表达式：and-or）
  - 标准或与式（最大项表达式：or-and）

# 布尔代数的应用

## 方法1. 将文字描述的功能直接转换为表达式



Define:

$F = 1$ : 看电视

$F = 0$ : 没看电视

$A = 1$ : 周一晚上

$A = 0$ : 不是周一晚上

$B = 1$ : 完成作业

$B = 0$ : 没完成作业

$$F = A \cdot B$$

# 布尔代数的应用

---

## 方法1. 将文字描述的功能直接转换为表达式


The alarm will ring if the alarm switch is turned on and the door is not closed, or it is after 6 P.M. and the window is not closed.




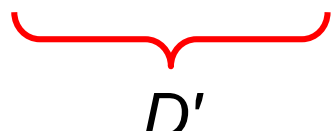
# 布尔代数的应用

---

$$Z = AB' + CD'$$

The alarm will ring **if** the alarm switch is on **and**  
  
 $Z$   $A$

the door is not closed, **or** it is after 6 P.M. **and**  
  
 $B'$   $C$

the window is not closed  
  
 $D'$

# 怎样设计组合逻辑电路？

---

## ■方法1：直接转换(简单情况下)

- 将文字描述的功能直接转换为真值表或表达式

## ■方法2：真值表转换

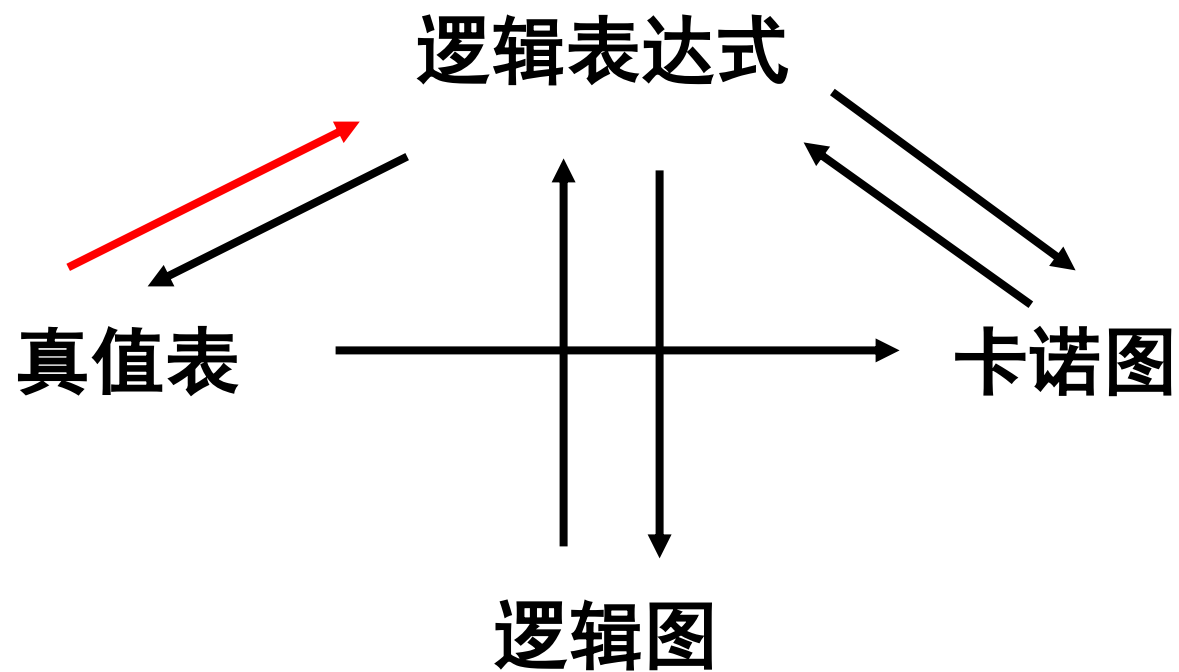
- 由真值表可以直接写出两种标准形式的逻辑表达式

- 标准与或式（最小项表达式：and-or）

- 标准或与式（最大项表达式：or-and）

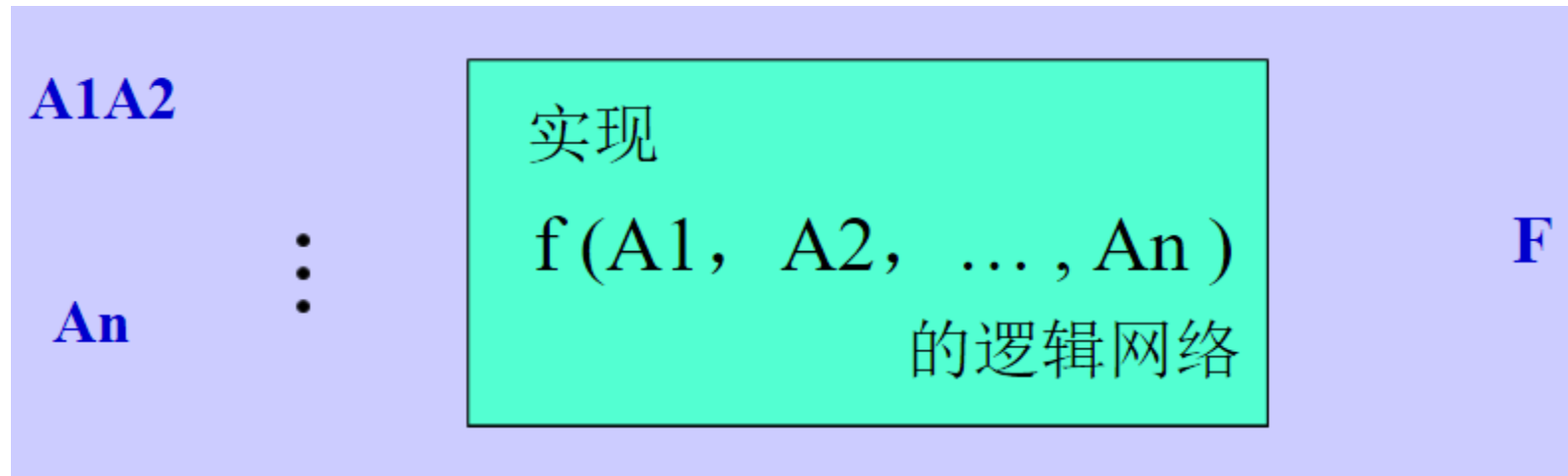
# 逻辑函数的表示方法

---



# 逻辑函数

输入逻辑变量 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ ；输出逻辑变量 $F$ ；记为  
 $F = f(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n)$ ，关系如下图所示：



输入变量（自变量）取值：0、1；

输出变量（逻辑函数值）取值：0、1。

# 使用真值表设计组合逻辑电路

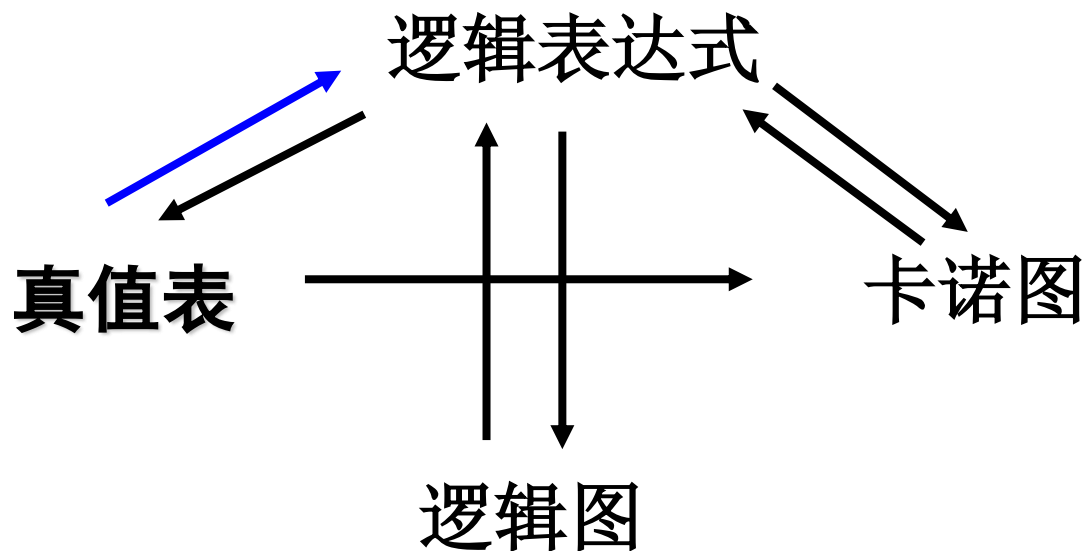
Truth table

| AB C  | F |
|-------|---|
| 0 0 0 | 0 |
| 0 0 1 | 0 |
| 0 1 0 | 0 |
| 0 1 1 | 1 |
| 1 0 0 | 0 |
| 1 0 1 | 1 |
| 1 1 0 | 1 |
| 1 1 1 | 1 |

真值表  $\longrightarrow$  表达式

① 写出标准与或式（乘积之和）

关注表中输出值为1的所有输入取值组合



# 使用真值表设计组合逻辑电路

Truth table

| AB C  | F   |
|-------|-----|
| 0 0 0 | 0   |
| 0 0 1 | 0   |
| 0 1 0 | 0   |
| 0 1 1 | 1 ✓ |
| 1 0 0 | 0   |
| 1 0 1 | 1 ✓ |
| 1 1 0 | 1 ✓ |
| 1 1 1 | 1 ✓ |

真值表  $\longrightarrow$  表达式

① 写出标准与或式（乘积之和）

关注表中输出值为1的所有输入取值组合

$$F = \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC$$

输入取值组合中

1——原变量

0——反变量

# 使用真值表设计组合逻辑电路

真值表  $\longrightarrow$  表达式

②写出标准**或与式**（**和之积**）

关注表中**输出值为0**的所有输入取值组合

输入取值组合中

0——原变量

1——反变量

Truth table

| AB C  | F   |
|-------|-----|
| 0 0 0 | 0 ✓ |
| 0 0 1 | 0 ✓ |
| 0 1 0 | 0 ✓ |
| 0 1 1 | 1   |
| 1 0 0 | 0 ✓ |
| 1 0 1 | 1   |
| 1 1 0 | 1   |
| 1 1 1 | 1   |

$$F = (A+B+C) \cdot (A+B+\bar{C}) \cdot (A+\bar{B}+C) \cdot (\bar{A}+B+C)$$

# 布尔代数的应用

---

*Example.* 某电路有三个输入端  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , 当  $ABC \geq 011$  时, 输出  $f = 1$ , 否则  $f = 0$ .

• 步骤:

1. 根据设计要求确定 —— 真值表
2. 根据真值表 —— 卡诺图(表达式)
3. 化简
4. 按设计要求, 变换逻辑表达式
5. 画出逻辑图



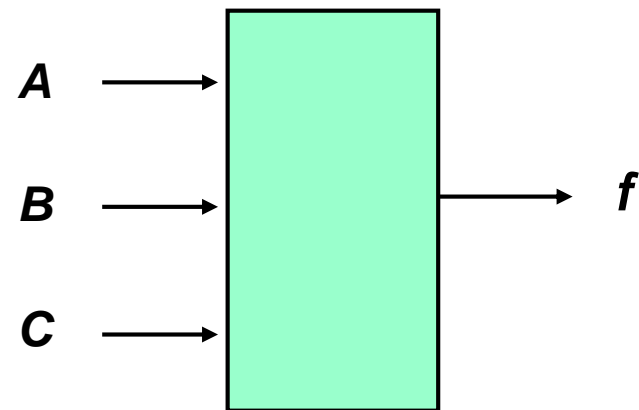
# 布尔代数的应用

*Example.* 某电路有三个输入端  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , 当  $ABC \geq 011$  时, 输出  $f = 1$ , 否则  $f = 0$ .

穷举法

## ① True Table

| $A$ | $B$ | $C$ | $f$ |
|-----|-----|-----|-----|
| 0   | 0   | 0   | 0   |
| 0   | 0   | 1   | 0   |
| 0   | 1   | 0   | 0   |
| 0   | 1   | 1   | 1   |
| 1   | 0   | 0   | 1   |
| 1   | 0   | 1   | 1   |
| 1   | 1   | 0   | 1   |
| 1   | 1   | 1   | 1   |



# 布尔代数的应用

## ② Algebraic Expression

$$f = A'BC + AB'C' + AB'C + ABC' + ABC$$

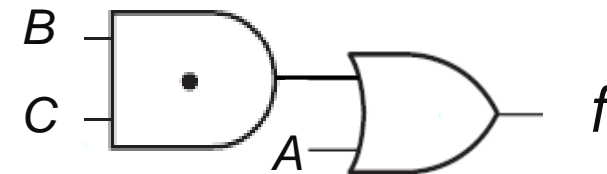
## ③ Simplification

$$f = A'BC + AB'C' + AB'C + ABC' + ABC$$

$$= A'BC + AB' + AB$$

$$= A'BC + A = BC + A$$

## ④ Logic Circuit



| A | B | C | f |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

# 目 录

---

- 布尔代数的应用
- 最大项、最小项表达式
- 不完全给定函数

# 最大项Maxterm、最小项Minterm的定义

| Row No. | A B C | Minterms       | Maxterms             |
|---------|-------|----------------|----------------------|
| 0       | 0 0 0 | $A'B'C' = m_0$ | $A + B + C = M_0$    |
| 1       | 0 0 1 | $A'B'C = m_1$  | $A + B + C' = M_1$   |
| 2       | 0 1 0 | $A'BC' = m_2$  | $A + B' + C = M_2$   |
| 3       | 0 1 1 | $A'BC = m_3$   | $A + B' + C' = M_3$  |
| 4       | 1 0 0 | $AB'C' = m_4$  | $A' + B + C = M_4$   |
| 5       | 1 0 1 | $AB'C = m_5$   | $A' + B + C' = M_5$  |
| 6       | 1 1 0 | $ABC' = m_6$   | $A' + B' + C = M_6$  |
| 7       | 1 1 1 | $ABC = m_7$    | $A' + B' + C' = M_7$ |

- n个变量组成的最小项：是一个与项（包含n个变量）
- n个变量组成的最大项：是一个或项（包含n个变量）
- 每个变量或者以原变量的形式、或者以反变量的形式出现，并且只出现一次。**因子：原变量或反变量**
- n个变量能组成的最小（大）项的个数是 $2^n$

# 最小项和最大项的性质

1. 最小项的反是最大项，最大项的反是最小项；

$$\overline{\overline{A}\overline{B}\overline{C}} = \overline{m_0} = A + B + C = M_0$$

$$\overline{A + \overline{B} + \overline{C}} = \overline{M_3} = \overline{A}BC = m_3$$

2. 全部最小项之和恒等于“1”；

$$m_0 + m_1 + m_2 + m_3 = 1$$

3. 全部最大项之积恒等于“0”；

$$M_0 M_1 M_2 M_3 = 0$$

4. 一部分最小项之和的反等于其余所有最小项之和

$$\overline{m_1 + m_2} = m_0 + m_3 \quad \overline{m_0} = m_1 + m_2 + m_3$$

# 最小项和最大项的性质——续

---

5. 两个不同的最小项之积恒等于“0”；

例如：  $ABC \cdot ABC\bar{C} = 0$

6. 两个不同的最大项之和恒等于“1”；

例如：  $(A + B + C) + (A + B + \bar{C}) = 1$

7. 与或标准型

$$Y = \sum m_i = \sum m(0,1,4,6,7) = m_0 + m_1 + m_4 + m_6 + m_7$$

8. 或与标准型

$$Y = \prod M_i = \prod M(0,1,4,6,7) = M_0 M_1 M_4 M_6 M_7$$

# 最大项和最小项表达式的性质

|   |   |
|---|---|
| ① $\sum_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1$  | $\prod_{i=0}^{2^n-1} M_i = 0$   |
| ② $m_i \cdot m_j = 0$   | $M_i + M_j = 1$   |
| ③<br>For any input combinations, there is only one minterm will be 1 ( $m_i = 1$ ); | For any input combinations, there is only one maxterm will be 0 ( $M_i = 0$ ) |

# 最小项表达式

①  $\sum_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1$

②  $m_i \cdot m_j = 0$

③ For any input combinations, there is only one minterm will be 1 ( $m_i = 1$ );

|     | $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ | $\overline{A}\overline{B}C$ | $\overline{A}B\overline{C}$ | $\overline{A}BC$ | $A\overline{B}\overline{C}$ | $A\overline{B}C$ | $AB\overline{C}$ | $ABC$ |
|-----|--|-----------------------------|-----------------------------|------------------|-----------------------------|------------------|------------------|-------|
| 000 | 1                                      | 0                           | 0                           | 0                | 0                           | 0                | 0                | 0     |
| 001 | 0                                      | 1                           | 0                           | 0                | 0                           | 0                | 0                | 0     |
| 010 | 0                                      | 0                           | 1                           | 0                | 0                           | 0                | 0                | 0     |
| 011 | 0                                      | 0                           | 0                           | 1                | 0                           | 0                | 0                | 0     |
| 100 | 0                                      | 0                           | 0                           | 0                | 1                           | 0                | 0                | 0     |
| 101 | 0                                      | 0                           | 0                           | 0                | 0                           | 1                | 0                | 0     |
| 110 | 0                                      | 0                           | 0                           | 0                | 0                           | 0                | 1                | 0     |
| 111 | 0                                      | 0                           | 0                           | 0                | 0                           | 0                | 0                | 1     |



# 最大项表达式

|     | $\overline{\overline{A}}\overline{\overline{B}}\overline{\overline{C}}$<br>A+B+C | $\overline{\overline{A}}\overline{\overline{B}}\overline{\overline{C}}$<br>A+B+C | $\overline{\overline{A}}\overline{\overline{B}}\overline{\overline{C}}$<br>A+B+C | $\overline{\overline{A}}\overline{\overline{B}}\overline{\overline{C}}$<br>A+B+C | $\overline{\overline{A}}\overline{\overline{B}}\overline{\overline{C}}$<br>A+B+C | $\overline{\overline{A}}\overline{\overline{B}}\overline{\overline{C}}$<br>A+B+C | $\overline{\overline{A}}\overline{\overline{B}}\overline{\overline{C}}$<br>A+B+C | $\overline{\overline{A}}\overline{\overline{B}}\overline{\overline{C}}$<br>A+B+C | $\prod_{i=0}^{2^n-1} M_i = 0$   |
|-----|--|--|--|--|--|--|--|--|---|
| 000 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 0  |   |
| 001 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 0  | 1  | $M_i + M_j = 1$   |
| 010 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 0  | 1  | 1  |   |
| 011 | 1  | 1  | 1  | 1  | 0  | 1  | 1  | 1  | For any input combinations, there is only one maxterm will be 0 ( $M_i = 0$ ) |
| 100 | 1  | 1  | 1  | 0  | 1  | 1  | 1  | 1  |   |
| 101 | 1  | 1  | 0  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |   |
| 110 | 1  | 0  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |   |
| 111 | 0  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |   |

# 最小项表达式

---

- 标准与或式
- list of “1”

011    101    110    111

$$F = \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC$$

$$= m_3 + m_5 + m_6 + m_7$$

$$= \Sigma m(3, 5, 6, 7)$$

# 最大项表达式

---

- 标准或与式
- list of 0

**000**

**001**

**010**

**100**

$$F = (A+B+C) \cdot (A+B+\bar{C}) \cdot (A+\bar{B}+C) \cdot (\bar{A}+B+C)$$

$$= M_0 \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot M_4$$

$$= \prod M(0, 1, 2, 4)$$

# 最大项、最小项表达式

练习：

|                                    | Minterm<br>Expansion<br>of $f$ | Maxterm<br>Expansion<br>of $f$ | Minterm<br>Expansion<br>of $f'$ | Maxterm<br>Expansion<br>of $f'$ |
|------------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| $f =$<br>$\Sigma m(3, 4, 5, 6, 7)$ | _____                          | $\Pi M(0, 1, 2)$               | $\Sigma m(0, 1, 2)$             | $\Pi M(3, 4, 5, 6, 7)$          |
| $f =$<br>$\Pi M(0, 1, 2)$          | $\Sigma m(3, 4, 5, 6, 7)$      | _____                          | $\Sigma m(0, 1, 2)$             | $\Pi M(3, 4, 5, 6, 7)$          |

# 逻辑函数的标准形式

1、积之和  
即最小项之和的形式

- 是哪些最小项之和呢？ 函数输出为1的行对应的最小项

$$F = \sum_{X,Y,Z}(0,3,4,6,7)$$

$$F = \sum_{X,Y,Z}(0,3,4,6,7)$$

$$= X'Y'Z' + X'YZ + XY'Z' + XYZ' + XYZ$$

- 利用互补律 $X+X'=1$ 可以把任何一个逻辑函数化为最小项之和的标准形式

例：给定逻辑函数的积之和形式为

$$F = A + B'C$$

化为积之和的标准形式

# 逻辑函数的标准形式

## 2、和之积的标准形式

即最大项之积的形式

- 函数输出为0的行对应的最大项之积  
符号  $\Pi A, B, C(1, 2, 4, 5)$  是最大项列表.
- 利用互补律  $X \cdot X' = 0$ ，在缺少某一变量的和项中加上该变量，然后利用分配律  
 $A = A + X \cdot X' = (A + X)(A + X')$  展开，就可以把任何一个逻辑函数化为最大项之积的标准形式。

# 最小项和最大项之间的转换关系

| A | B | C | F |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

$$G = \Pi_{A,B,C}(3,5,6) = F'$$

$$F = \Sigma_{A,B,C}(3,5,6)$$

$$F = \Pi_{A,B,C}(0,1,2,4,7)$$

标号互补

$$(A' \cdot B \cdot C)' = A + B' + C'$$

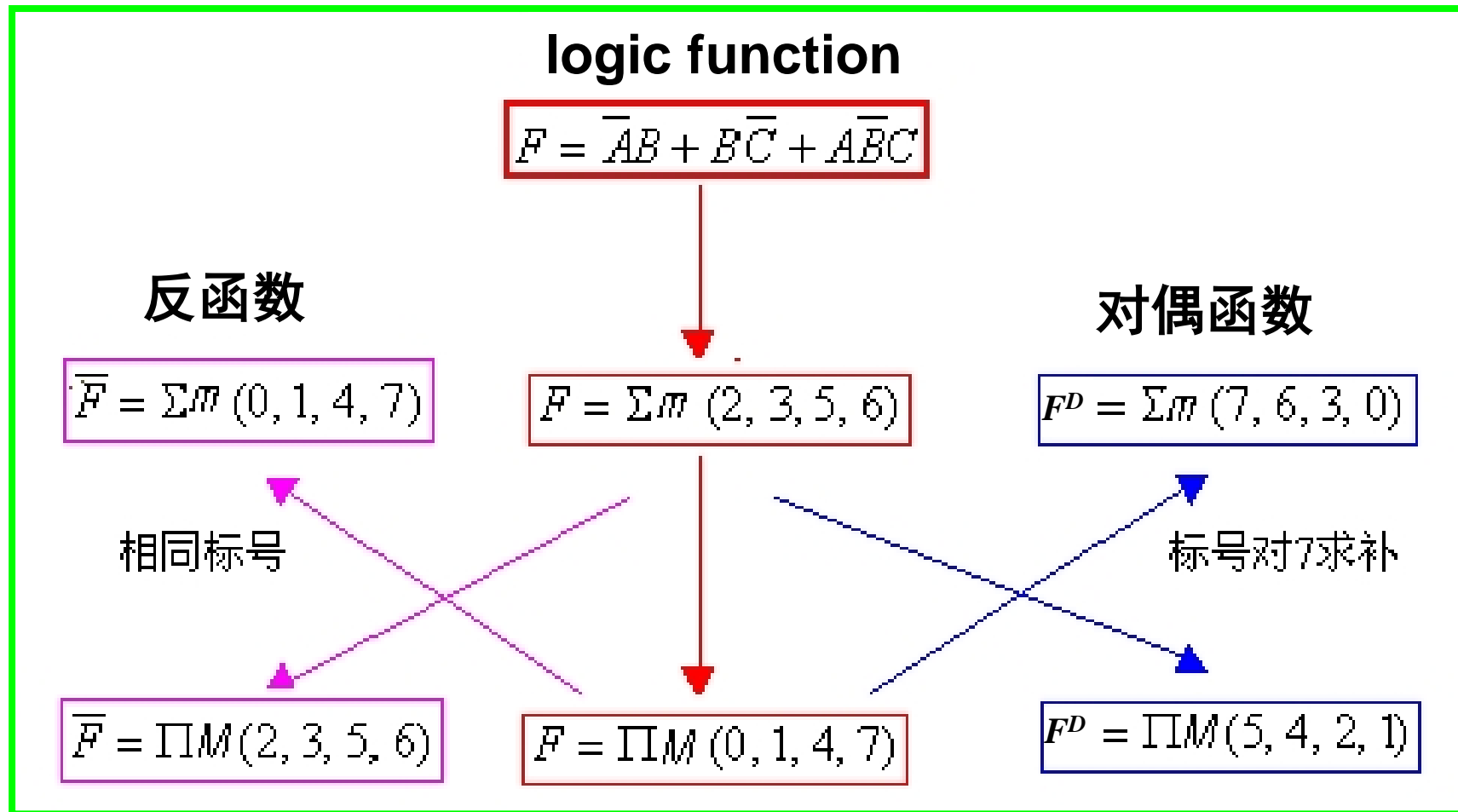
$$M_i = m_i'$$

$$(A \cdot B' \cdot C)' = A' + B + C'$$

$$m_i = M_i'$$

$$(A \cdot B \cdot C')' = A' + B' + C$$

# 最大项、最小项表达式





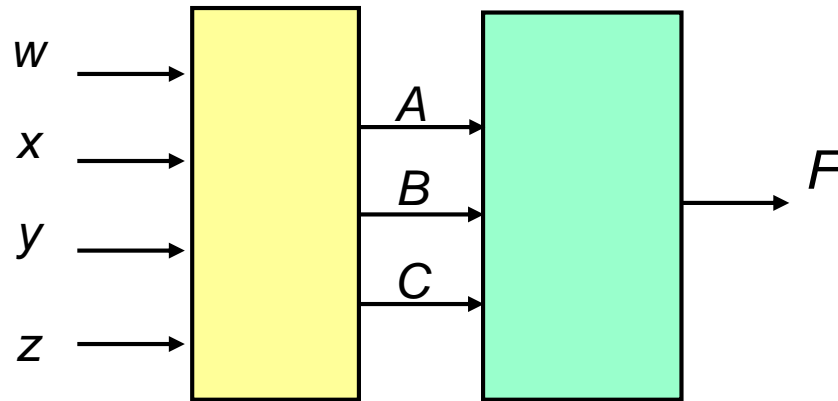
# 目 录

---

- 布尔代数的应用
- 最大项、最小项表达式
- 不完全给定函数

# 无关项 (Don't care terms)

- 1) 不可能存在的输入取值组合
- 2) 所有的输入取值组合都存在，但是对于某些输入取值，我们并不关心它们导致的输出结果是0还是1，因为没有意义。



| $A$ | $B$ | $C$ | $F$ |
|-----|-----|-----|-----|
| 0   | 0   | 0   | 1   |
| 0   | 0   | 1   | X   |
| 0   | 1   | 0   | 0   |
| 0   | 1   | 1   | 1   |
| 1   | 0   | 0   | 0   |
| 1   | 0   | 1   | 0   |
| 1   | 1   | 0   | X   |
| 1   | 1   | 1   | 1   |

# 不完全给定函数

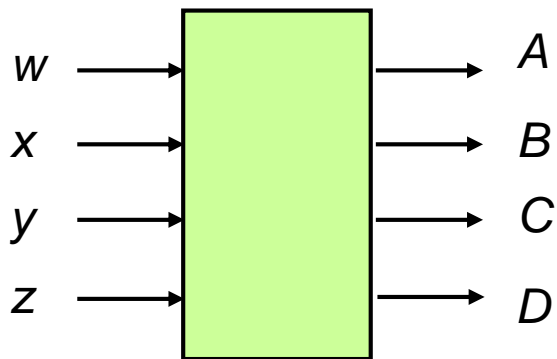
$$F = \sum m(0, 3, 7) + \sum d(1, 6)$$

$$F = \prod M(2, 4, 5) \cdot \prod D(1, 6)$$

| <i>A B C</i> | <i>F</i> |
|--------------|----------|
| 0 0 0        | 1        |
| 0 0 1        | X        |
| 0 1 0        | 0        |
| 0 1 1        | 1        |
| 1 0 0        | 0        |
| 1 0 1        | 0        |
| 1 1 0        | X        |
| 1 1 1        | 1        |

# 例：8421BCD转余三码

将输入的  
8421BCD码转  
换为余3码



| Decimal | 8421 BCD | Excess-3 |
|---------|----------|----------|
| 0       | 0000     | 0011     |
| 1       | 0001     | 0100     |
| 2       | 0010     | 0101     |
| 3       | 0011     | 0110     |
| ...     | ....     | ....     |
| 9       | 1001     | 1100     |
|         | 1010     | XXXX     |
|         | .....    | .....    |
|         | 1110     | XXXX     |
|         | 1111     | XXXX     |

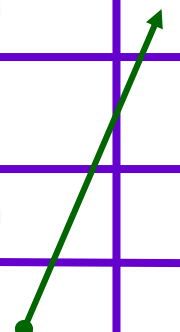
# 例：8421BCD转余三码

将输入的  
8421BCD码转  
换为余3码

$$A = \sum m(5, 6, 7, 8, 9) + \sum d(10, 11, 12, 13, 14, 15)$$

$$D = \sum m(0, 2, 4, 6, 8) + \sum d(10, 11, 12, 13, 14, 15)$$

| Decimal | 8421 BCD | Excess-3 |
|---------|----------|----------|
| 0       | 0000     | 0011     |
| 1       | 0001     | 0100     |
| 2       | 0010     | 0101     |
| 3       | 0011     | 0110     |
| ....    | .....    | .....    |
| 9       | 1001     | 1100     |
|         | 1010     | XXXX     |
|         | .....    | .....    |
|         | 1110     | XXXX     |
|         | 1111     | XXXX     |



# 目 录

---

- 布尔代数的应用
- 最大项、最小项表达式
- 不完全给定函数

以下哪些内容有不明白的，需要再讲解一下：

- ☐ A 最大项
- ☐ B 最小项
- ☐ C 不完全给定函数
- ☐ D 其他

提交





## 第二章知识掌握及作业情况

- ☐ A 2.4不知道怎么做
- ☐ B 2.5不知道怎么做
- ☐ C 2.6不知道怎么做
- ☐ D 第二章的部分内容不懂
- ☐ E 没问题

提交