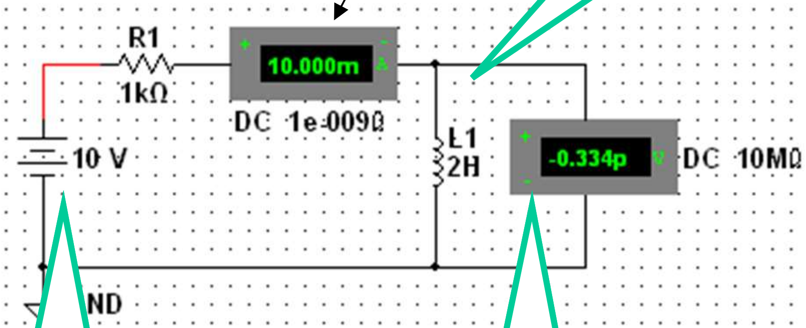
第3章 正弦交流电路

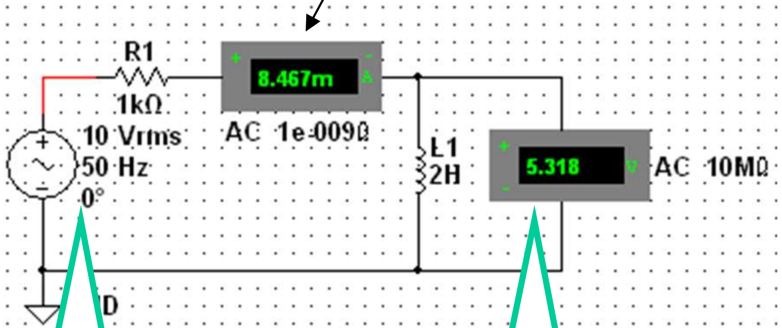
【引例】

电感元件

电流表读数为10mA



电流表读数为8.467mA



外加直流电源

电压表读数0V

外加交流电源

读数为5.318V

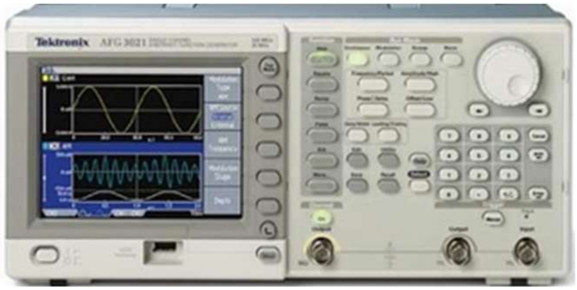
可见，电感元件外加不同电源时，在电路中的工作状态是不同的。它为何有这样的特性？通过对本章的学习便能得到解答。

3.1 正弦量的三要素

正弦交流电路： 电路外加正弦电源，电路中产生的电压与电流都按正弦规律变化。

正弦电源
- 交流发电机　（强电领域）
- 信号发生器　（弱电领域）

交流发电机

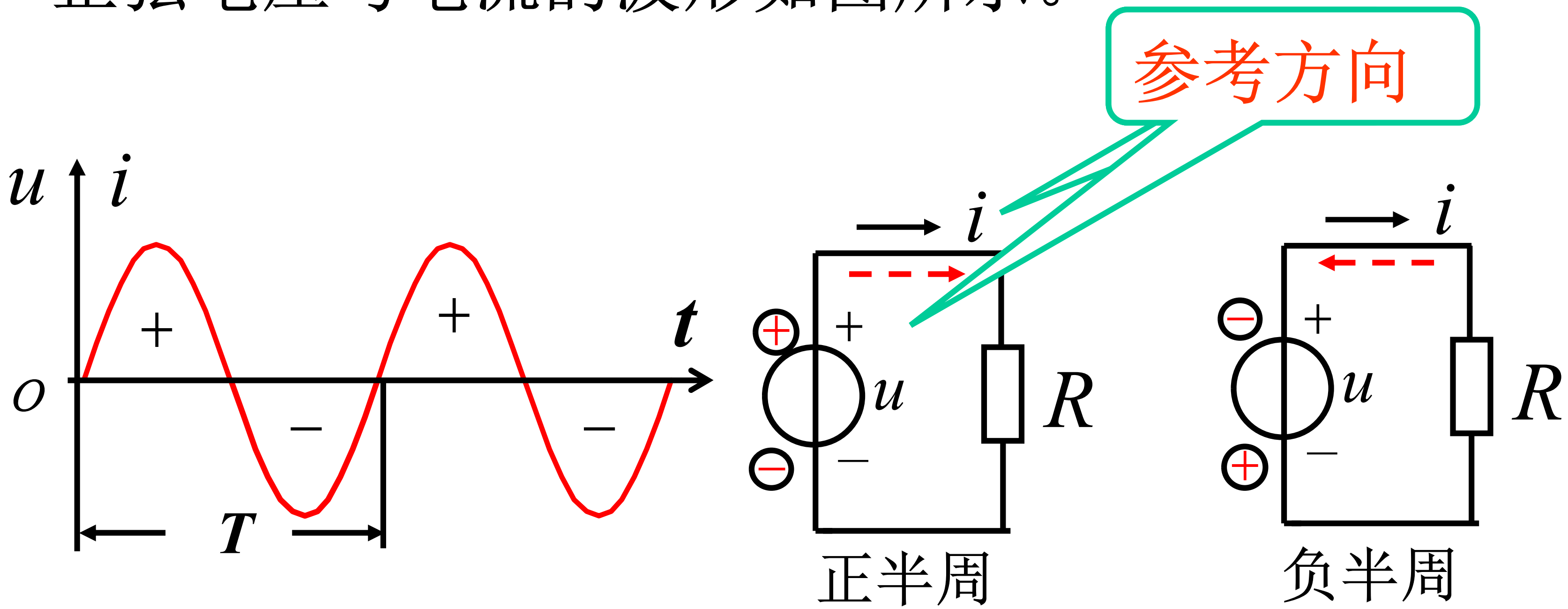


信号发生器

3.1.1 正弦量

正弦量：在时间上，按正弦规律变化的电压或电流。

正弦电压与电流的波形如图所示。

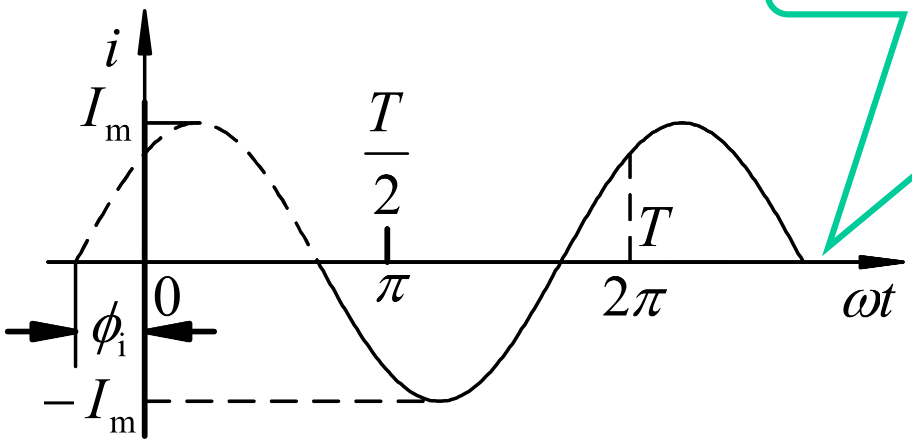


正弦量的数学表达式为

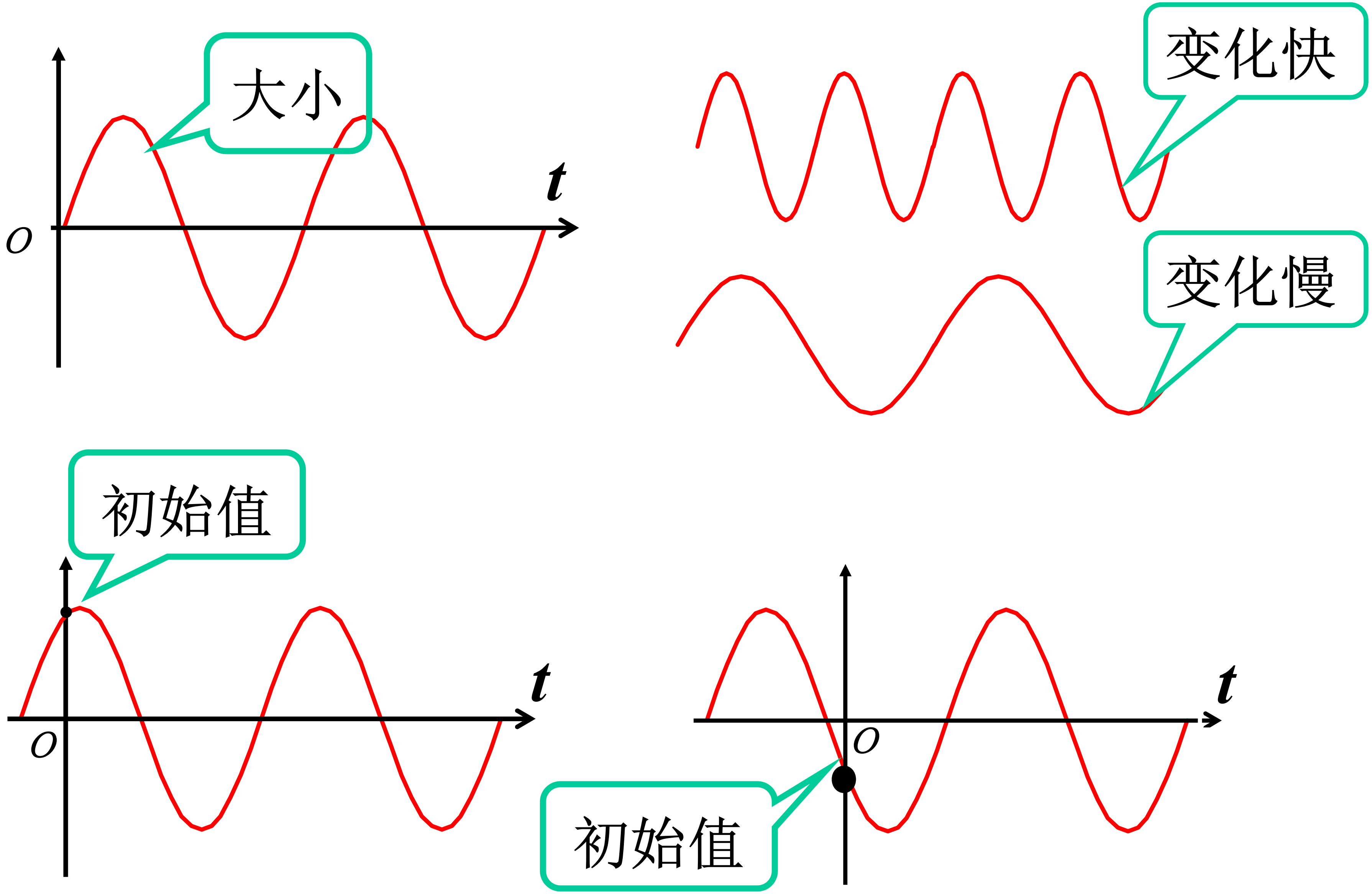
$$u = U_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \phi_{\mathrm{u}})$$

$$i = I_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \phi_{\mathrm{i}})$$

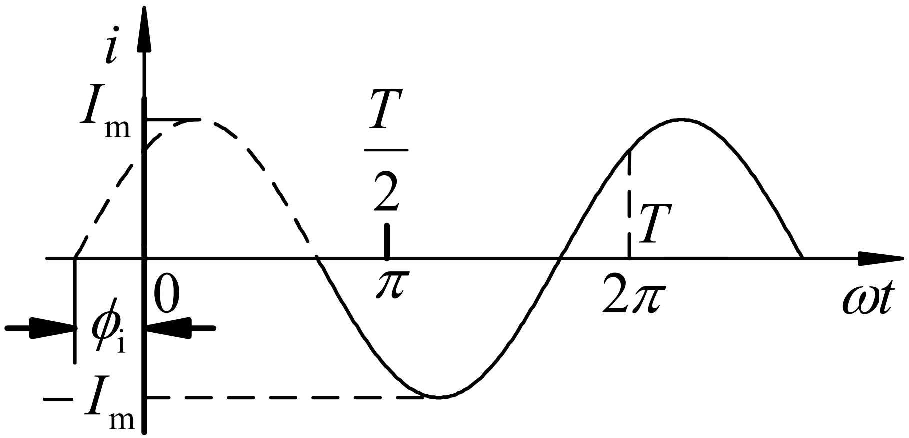
横轴也可用时间***t***表示



正弦量的特征：大小、快慢、初始值



3.1.2 正弦量的三要素



三要素

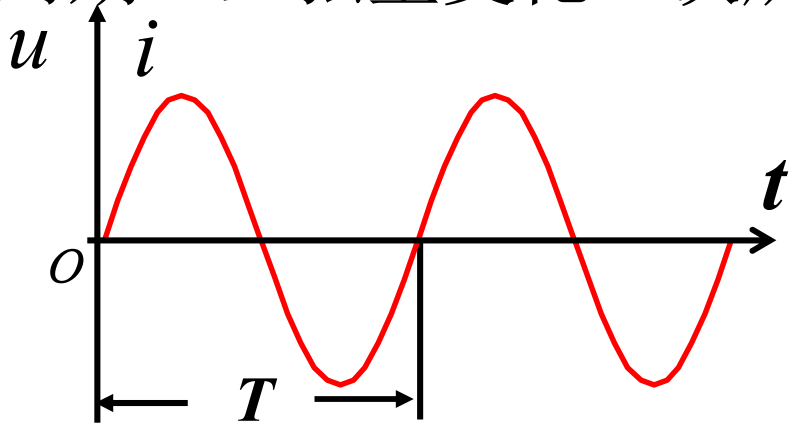
$$i = I_m \sin(\omega t + \phi_i)$$

正弦量的特征：

- 大小 → 幅值（或有效值）
- 快慢 → 频率（或周期或角频率）
- 初始值 → 初相位

1. 频率、周期和角频率

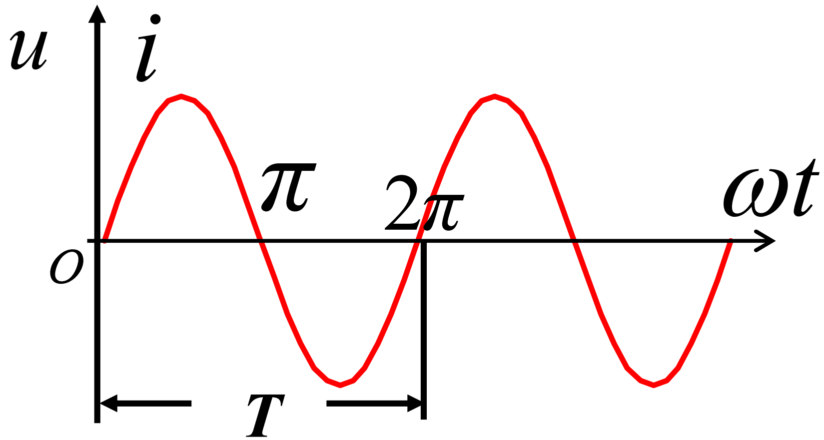
周期：正弦量变化一次所用的时间称为周期***T***。



频率***f***：每秒变化的次数。

$$f = \frac{1}{T}$$ 单位：**Hz**

正弦量一个周期内角度变化**2π rad**。

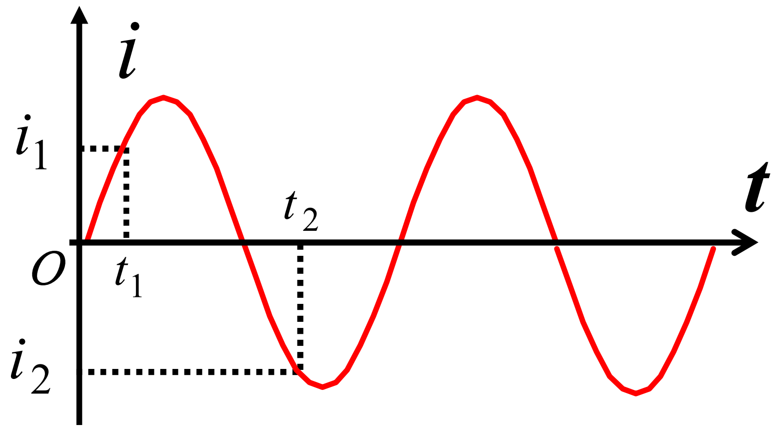


角频率***ω***：每秒变化的弧度。

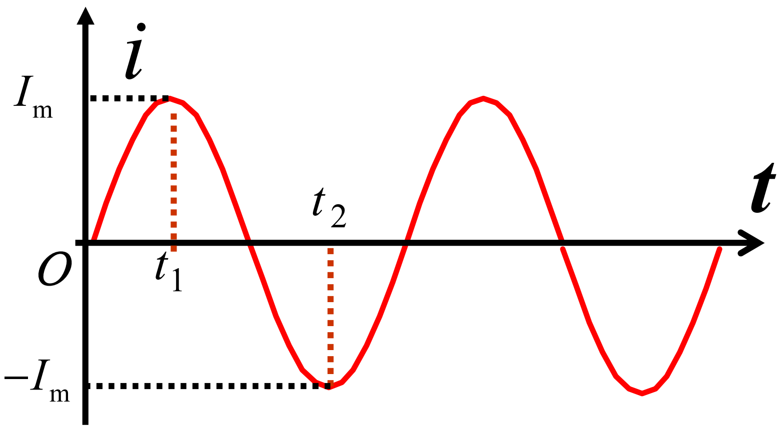
$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f}$$ 单位：**rad/s**

2. 幅值和有效值

瞬时值：任一瞬间的值。用 i、u 表示。



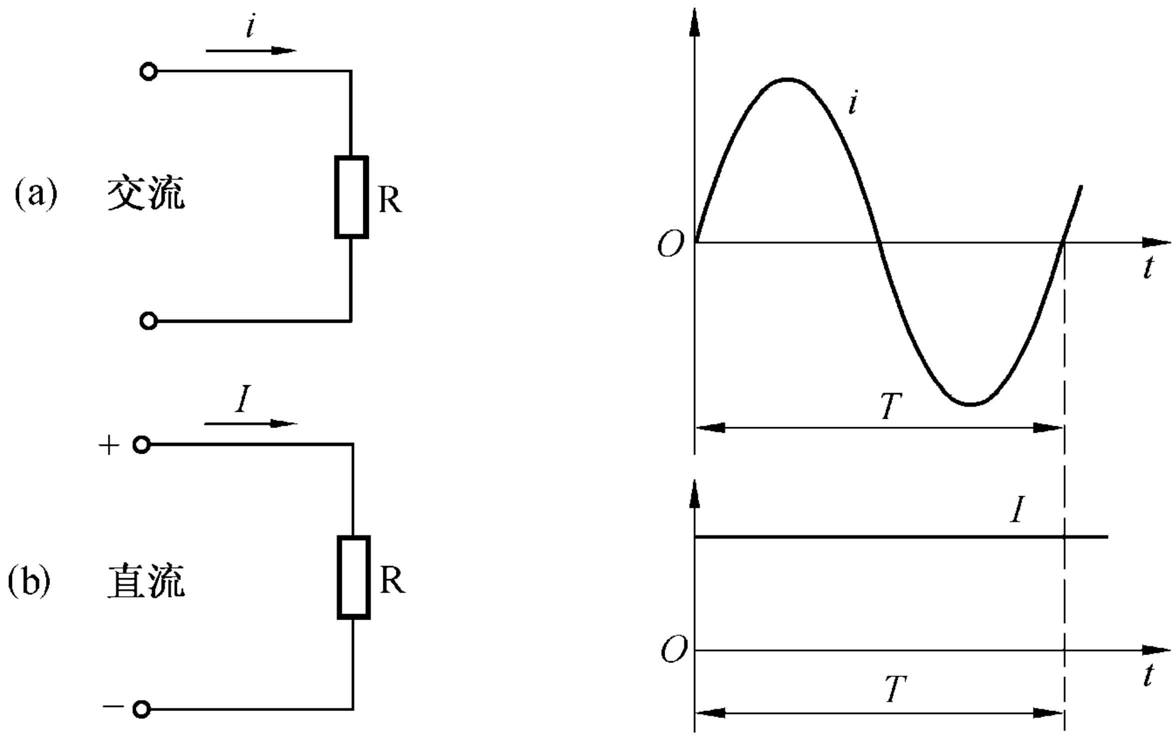
幅值：瞬时值中的最大值。用 I_m、U_m 表示。



数学表达式为

$$i = I_m \sin \omega t$$

有效值概念(用*U*、*I*表示)：



发热量相等 $$\underbrace{\int_0^T i^2 R\,dt}_{\text{交流}} = \underbrace{I^2 RT}_{\text{直流}}$$

$$\int_0^T i^2 R\,dt = I^2 RT$$

交流 直流

则有 $I = \sqrt{\dfrac{1}{T}\int_0^T i^2 dt}$ （方均根值 **RMS,rms**）

当 $i = I_{\mathrm{m}} \sin\left(\omega t + \phi_i\right)$时， 可得

$$\boxed{I = \frac{I_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}}$$

同理，

$$\boxed{U = \frac{U_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}}$$

引入有效值后，正弦电流和电压的表达式可表示为

$$i = I_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \phi_{\mathrm{i}}) = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \phi_{\mathrm{i}})$$

$$u = U_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \phi_{\mathrm{u}}) = \sqrt{2} U \sin(\omega t + \phi_{\mathrm{u}})$$

在工程应用中，用有效值表示正弦量的大小。常用的交流电表指示的电压、电流值就是有效值。

我国民用电网的供电电压为**220V**，其幅值为 $\sqrt{2} \times 220 \approx 311\mathrm{V}$，其频率为**50Hz,**则角频率为

$$\omega = 2\pi f = 2 \times 3.14 \times 50 = 314 \text{ rad/s}$$

3. 相位和初相位

（1）初相位

正弦量随时间变化的角度称为正弦量的相位，或称为相位角，即

$$i = I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \phi_{\mathrm{i}}) = \sqrt{2}I\sin\boxed{(\omega t + \phi_{\mathrm{i}})}$$

$$u = U_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \phi_{\mathrm{u}}) = \sqrt{2}U\sin\boxed{(\omega t + \phi_{\mathrm{u}})}$$

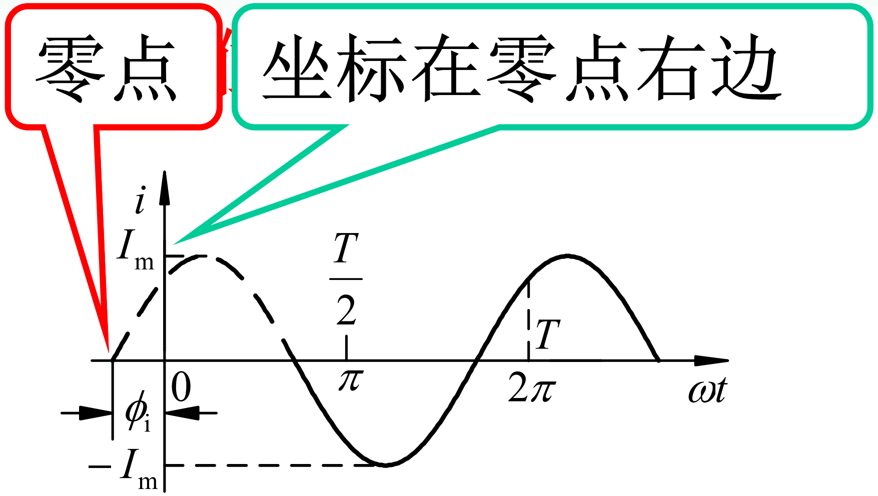
相位

***t* =0**时所对应的相位称为正弦量的初 初相位

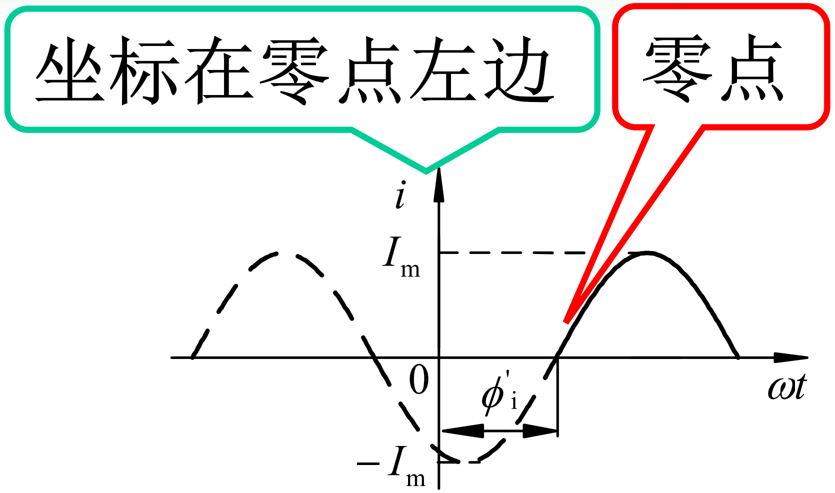
或称**初相位角,即**

$$i = I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \phi_{\mathrm{i}}) = \sqrt{2}I\sin(\omega t \boxed{+ \phi_{\mathrm{i}}})$$

$$u = U_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \phi_{\mathrm{u}}) = \sqrt{2}U\sin(\omega t + \boxed{\phi_{\mathrm{u}}})$$



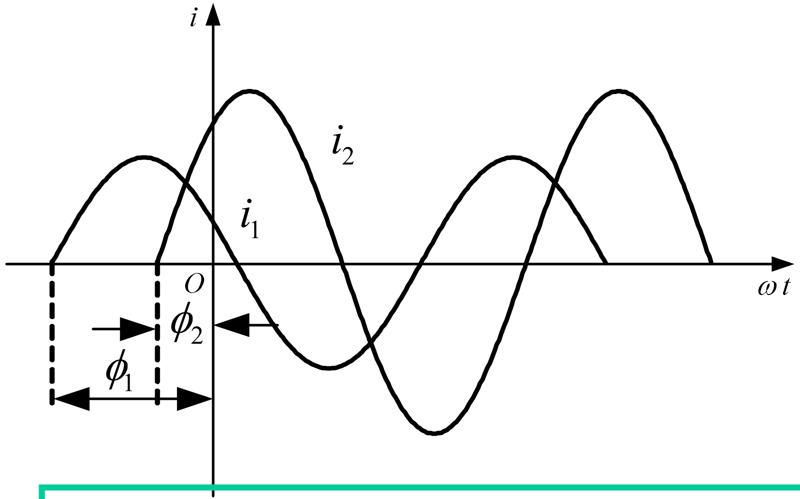
$\boxed{\phi_i > 0}$



$\boxed{\phi_i' < 0}$

可见，初相位角与计时起点的选择有关。对于同一正弦量，如果计时起点不同，其初相位角的大小不同，正角和负角也不同。

（2）相位差



$$i_1 = \sqrt{2} I_1 \sin(\omega t + \phi_1)$$

$$i_2 = \sqrt{2} I_2 \sin(\omega t + \phi_2)$$

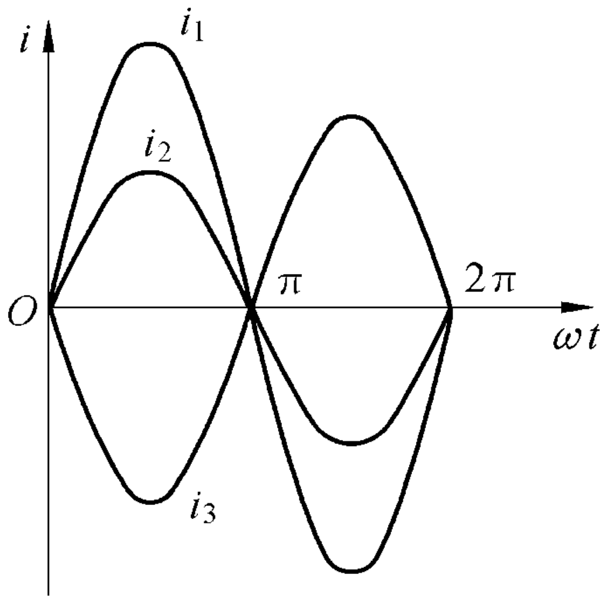
$$\boxed{\Delta\varphi = (\omega t + \phi_1) - (\omega t + \phi_2) = \phi_1 - \phi_2}$$

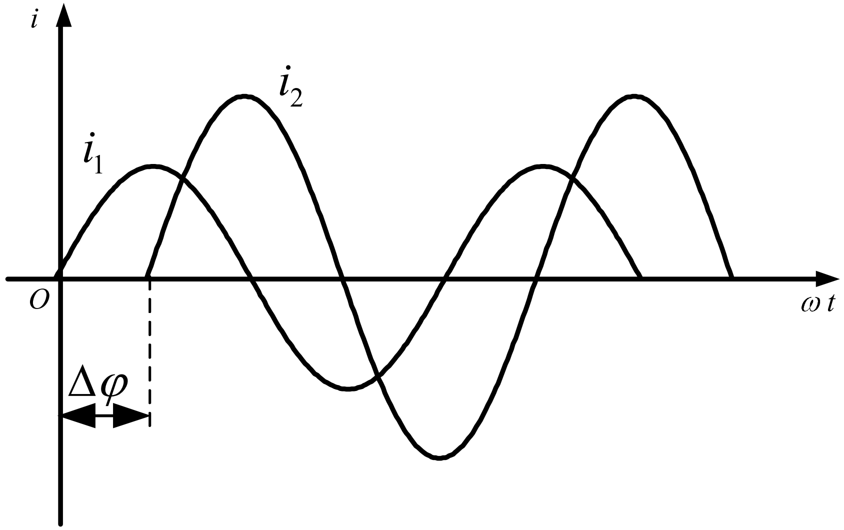
两同频率正弦量的相位差等于它们的初相位之差。

相位差的取值范围为 $\boxed{|\Delta\varphi| \le 180^\circ}$

在相位上，$\Delta\phi = \varphi_1 - \varphi_2 > 0$ $\boldsymbol{i_1}$超前$\boldsymbol{i_2}$，或者说$\boldsymbol{i_2}$滞后$\boldsymbol{i_1}$。

正弦量的同相、反相和正交：





【例 3.1.1】已知正弦量 $u = 220\sqrt{2}\sin(314t + \frac{\pi}{6})\text{V}$

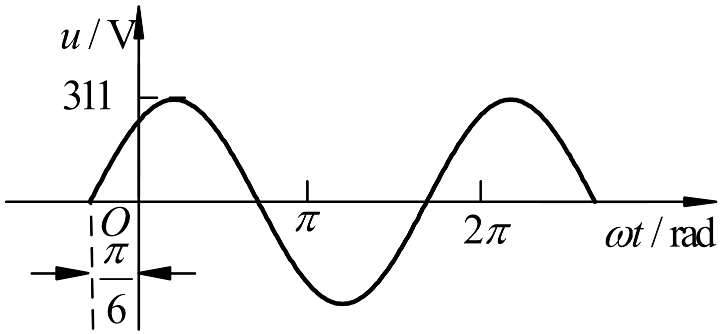
求电压的有效值、幅值、频率、初始值、初相位，画出波形图。

【解】 $U = 220\text{V}$， $U_{\text{m}} = 220\sqrt{2} \approx 311\text{V}$，

$\omega = 314\text{rad/s}$， $f = \frac{314}{2\pi} = 50\text{Hz}$，

$u(0) = 311\sin(\frac{\pi}{6})\text{V} = 311\sin 30^\circ = 155.5\text{V}$

$\phi = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$



【例 3.1.2】已知 $i_1 = 3\sqrt{2}\sin(\omega t + 30^\circ)\text{A}$, $i_2 = 2\sqrt{2}\sin(\omega t - 60^\circ)\text{A}$, $i_3 = \sqrt{2}\sin(\omega t)\text{A}$ ，比较它们的相位关系。

【解】三个电流是同频率的正弦量，其初相位分别为

$$\phi_1 = 30^\circ\text{ , }\phi_2 = -60^\circ\text{， }\varphi_3 = 0^\circ$$

i_1和i_2的相位差为 $\varphi_1 - \varphi_2 = 30^\circ - (-60^\circ) = 90^\circ$ $\boxed{i_1\text{超前}i_2\,90^\circ;}$

i_1和i_3的相位差为 $\varphi_1 - \varphi_3 = 30^\circ - 0^\circ = 30^\circ$ $\boxed{i_1\text{超前}i_3\,30^\circ;}$

i_2和i_3的相位差为 $\varphi_2 - \varphi_3 = -60^\circ - 0^\circ = -60^\circ$ $\boxed{i_2\text{滞后}i_3\,60^\circ\text{。}}$

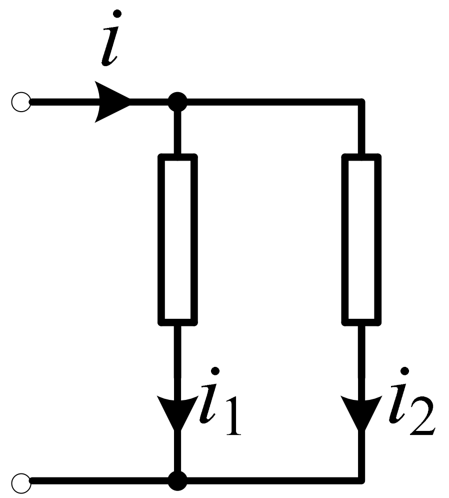
3.2 正弦量的相量表示法

问题：

$$i_1 = 6\sqrt{2}\cos(314t + 30^\circ)$$

$$i_2 = 8\sqrt{2}\cos(314t - 60^\circ)$$

$$i = i_1 + i_2 = ?$$



$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 \\ &= 6\sqrt{2}\cos(314t + 30^\circ) + 8\sqrt{2}\cos(314t - 60^\circ) \\ &= \ldots. \\ &= 10\sqrt{2}\cos(314t - 23.1^\circ) \end{aligned}$$

繁琐计算

3.2 正弦量的相量表示法

特别的是，在含有电感和(或)电容的正弦电路中

$$i = C\frac{du}{dt} \qquad u = L\frac{di}{dt}$$

因此，在时域内对正弦电路进行分析时，需要建立含微积分的电路方程。

正弦电流电路 $\xrightarrow{\text{分析}}$ 建立电路方程(或含微积分方程) $\xrightarrow{\text{求解}}$ 得时域响应表达式

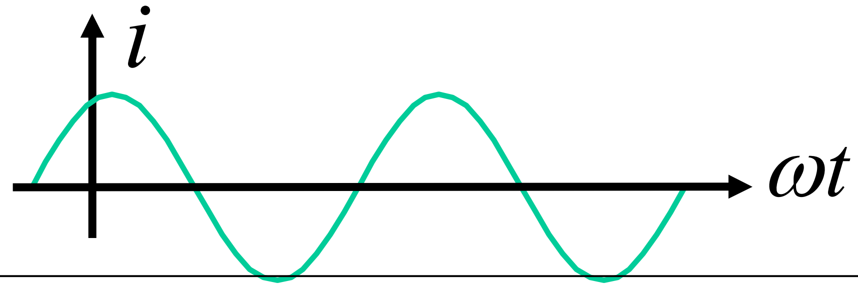
时域分析过程示意图

3.2 正弦量的相量表示法

正弦量的表示方法为

瞬时值表达式：$i=\sqrt{2}I\sin\left(\omega t+30^\circ\right)$

波形图：



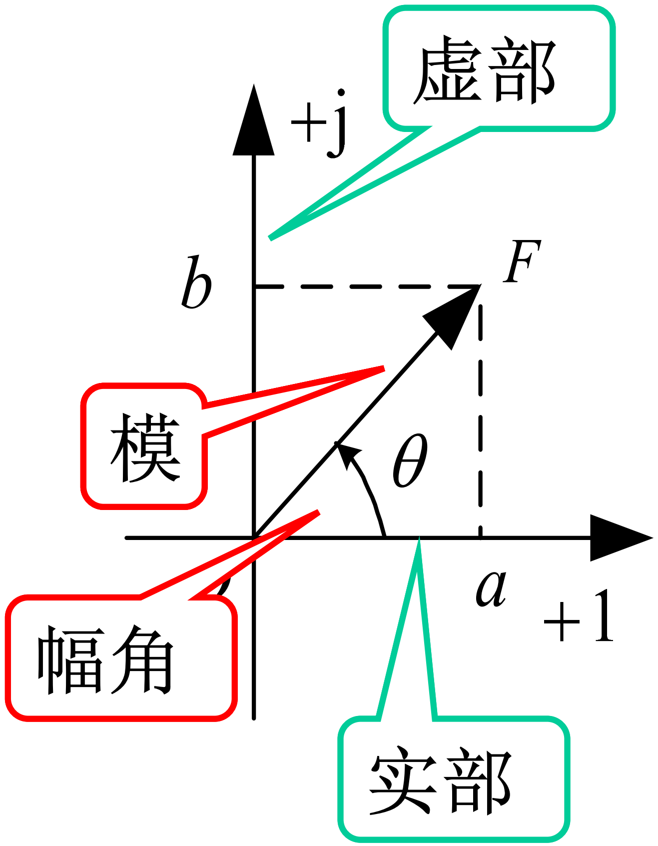
思考：**1.** 正弦量用前两种方法计算麻烦。能否用一种简单的数学变换方法以避免繁琐的三角函数运算？

2.正弦函数微积分或几个同频率正弦函数相加减的结果仍是同频率正弦量。因此，正弦量的三要素中，关键要确定有效值（或最大值）和初相位。

3.2 正弦量的相量表示法

1. 复数的表示法 $j=\sqrt{-1}$ 虚数单位

复数可用复平面上的有向线段 F 表示，即



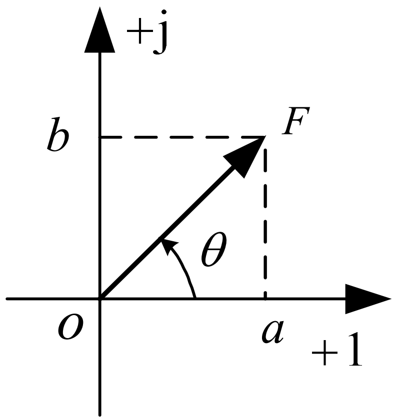
复数的代数式为

$$F = a + jb$$

实部(***Re***) 虚部(***Im***)

$$\begin{cases} a = |F|\cos\theta \\ b = |F|\sin\theta \end{cases}$$

3.2 正弦量的相量表示法



复数的表示形式为

代数式

$$F = a + \mathrm{j}b$$

$$\begin{cases} a = |F|\cos\theta \\ b = |F|\sin\theta \end{cases}$$

$$F = a + \mathrm{j}b = |F|(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta)$$

根据欧拉公式 $e^{\mathrm{j}\theta} = \cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta$，有

$$F = |F|(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta) = |F|e^{\mathrm{j}\theta}$$

指数式

$$F = |F|\angle\theta$$

极坐标式

3.2 正弦量的相量表示法

$$F = a + \mathrm{j}b = |F|(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta) = |F|e^{\mathrm{j}\theta} = |F|\angle\theta$$

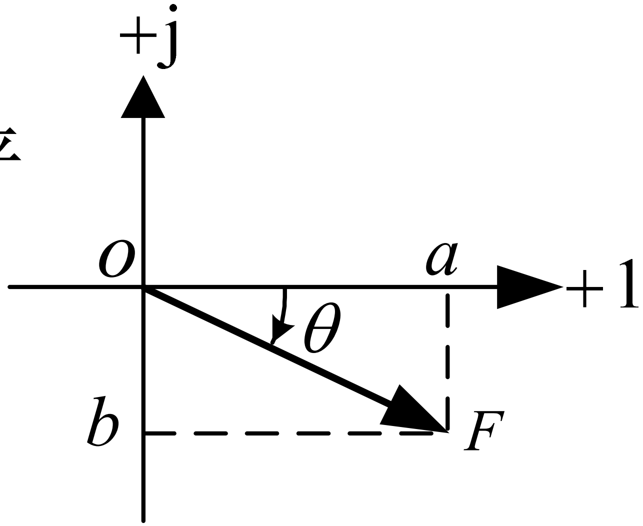
代数式　指数式　极坐标式

两组参数（相互关系）

$$\begin{cases} |F| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta = \arctan\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

取值由复数在复平面上的象限而定 $(-\pi < \theta < \pi)$

$$\begin{cases} a = |F|\cos\theta \\ b = |F|\sin\theta \end{cases}$$



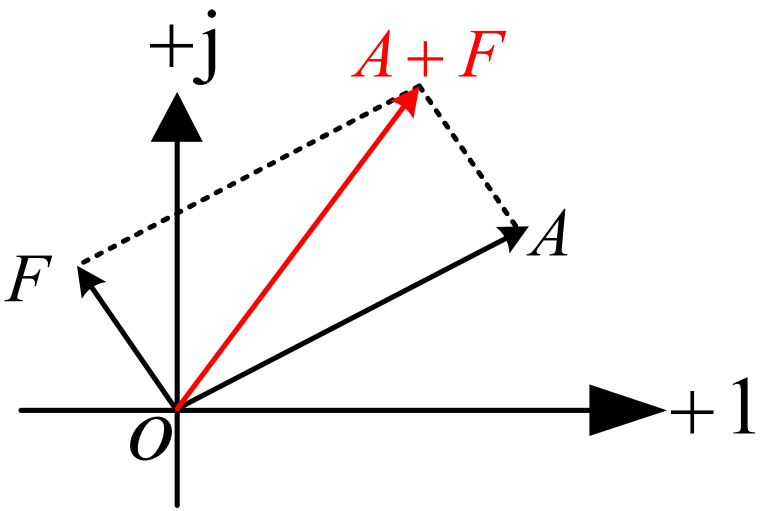
$(-90^\circ, 0^\circ)$

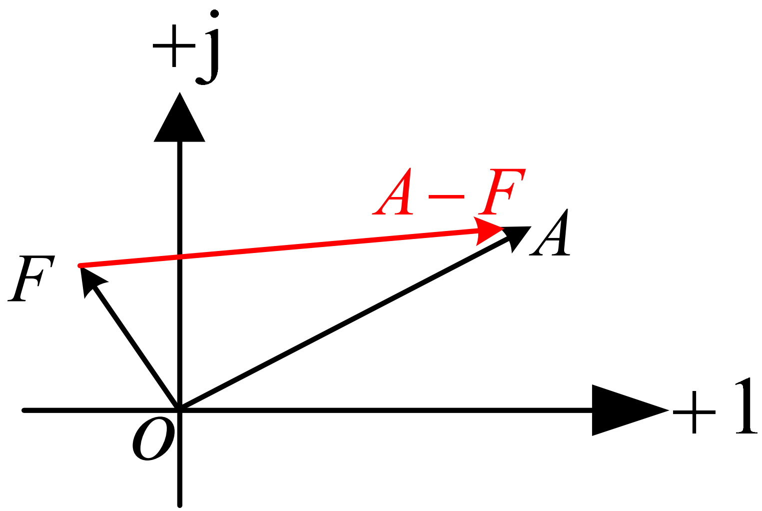
复数的运算规则:

1. 加 、减运算　　　　加减法可用图解法

设 $\begin{cases} A = a + \mathrm{j}b \\ F = c + \mathrm{j}d \end{cases}$

则 $A \pm F = (a + \mathrm{j}b) \pm (c + \mathrm{j}d) = (a \pm c) + \mathrm{j}(b \pm d)$





2. 乘除法运算

$$\text{设}\begin{cases} A = |A|\angle\theta_1 \\ F = |F|\angle\theta_2 \end{cases}$$

则

$$\boxed{\begin{aligned} AF &= |A|\angle\theta_1 \times |F|\angle\theta_2 = |A||F|\angle(\theta_1+\theta_2) \\ \frac{A}{F} &= \frac{|A|\angle\theta_1}{|F|\angle\theta_2} = \frac{|A|}{|F|}\angle(\theta_1-\theta_2) \end{aligned}}$$

乘法：模相乘，幅角相加

除法：模相除，幅角相减

2. 正弦量的相量表示

在线性非时变的正弦稳态电路中，只要电源的频率给定，电路响应（电流或电压）是同频率的正弦量。

正弦量的三要素中，关键要确定有效值（或最大值）和初相位。

$$F = |F| \angle \theta \begin{cases} \text{模} \Longleftrightarrow \text{有效值（或最大值）} \\ \text{幅角} \Longleftrightarrow \text{初相位} \end{cases}$$

2. 正弦量的相量表示

正弦量一般表达式为: $f(t)=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\varphi)$

设一复指数函数$\sqrt{2}Ie^{j(\omega t+\varphi)}$根据欧拉公式得

$$\sqrt{2}Ie^{j(\omega t+\varphi)}=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\varphi)+j\sqrt{2}I\sin(\omega t+\varphi)$$

得

$$f(t)=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\varphi)=\mathrm{Im}[\sqrt{2}Ie^{j(\omega t+\varphi)}]$$

$$=\mathrm{Im}[\sqrt{2}Ie^{j\varphi}e^{j\omega t}]=\mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{I}e^{j\omega t}]$$

其中复常数　$\dot{I}=Ie^{j\varphi}=I\angle\varphi$ ——相量（**phasor**）

正弦量有效值

正弦量初相位

3.2 正弦量的相量表示法

$$f(t)=\mathrm{Im}[\sqrt{2}Ie^{j\varphi}e^{j\omega t}]=\mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{I}e^{j\omega t}]$$

一个正弦$f(t)=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\varphi)$能够唯一地确定其对应的相量 $\dot{I}$

$$f(t)\rightleftharpoons\dot{I}$$

反之，若已知 $\dot{I}$ 和角频率 ω，也能唯一地确定 $\dot{I}$ 所代表的正弦量$f(t)=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\varphi)$

3.2 正弦量的相量表示法

为了和一般的复数相区别，相量在大写字母上加小圆点来区分。

$i = I_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \theta_i)$ $\quad$ $\dot{I}_{\mathrm{m}} = I_{\mathrm{m}} \angle \theta_i$ 最大值相量

$i = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \theta_i)$ $\quad$ $\dot{I} = I \angle \theta_i$ 有效值相量

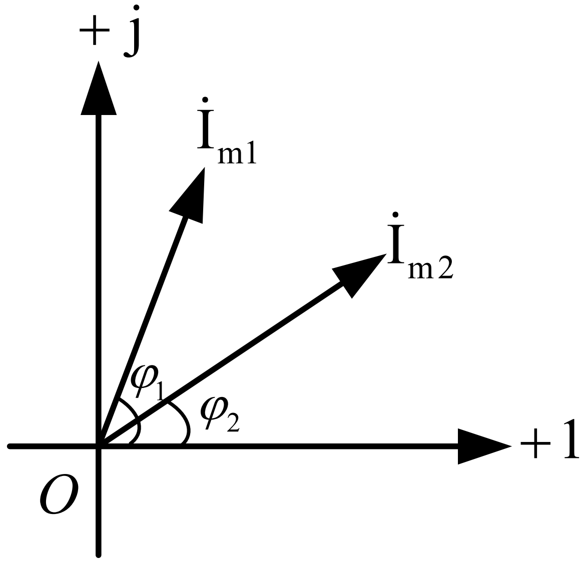
$u = U_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \theta_u)$ $\quad$ $\dot{U}_{\mathrm{m}} = U_{\mathrm{m}} \angle \theta_u$ 最大值相量

$u = \sqrt{2} U \sin(\omega t + \theta_u)$ $\quad$ $\dot{U} = U \angle \theta_u$ 有效值相量

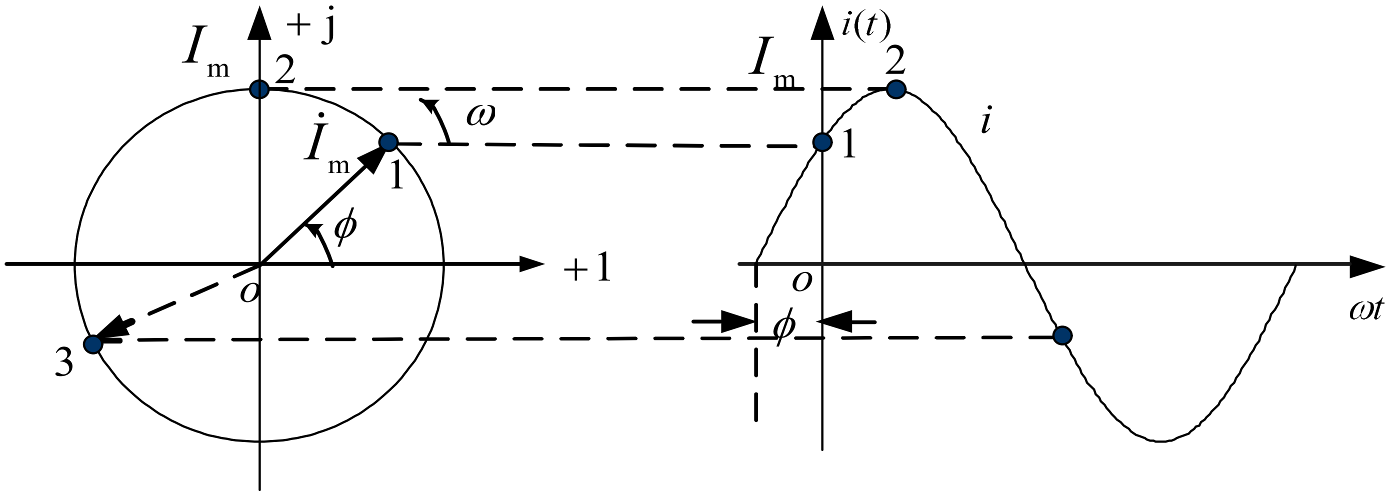
关于相量说明

1. 相量只是代表正弦量，而不等于正弦量。正弦量是时间的余弦函数，而相量是复常数，其模是该正弦量的有效值（最大值），其幅角是该正弦量的初相位。

2. 相量也可以用有向线段表示，按着一定的大小和相位关系画出若干相量的图形 ——相量图。



3. 复指数$\sqrt{2}Ie^{j(\omega t+\varphi)}$的幅角$\omega t+\varphi$是随时间均匀递增的，所以这一有向线段将以原点为圆心逆时针方向旋转，旋转角速度为$\frac{d(\omega t+\varphi)}{dt}=\omega$，称为旋转相量。



旋转相量在虚轴上的投影是正弦量的瞬时值

4. 旋转因子：$e^{\pm j\theta^\circ}$

旋转因子作用：当 $\dot{F}\times e^{\pm j\theta}$ 时，$\dot{F}$ 相量逆时针方向旋转 θ 角或顺时针方向旋转 θ 角，其相量的幅值或有效值不变。

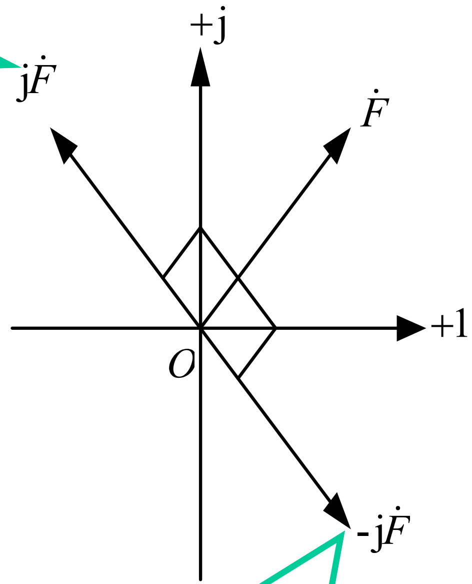
$+\mathrm{j}$乘上$\dot{F}$

$$e^{\pm j\theta^\circ} = e^{\pm j90^\circ}$$

90°旋转因子

$$\begin{cases} e^{j90^\circ} = \cos 90^\circ + j\sin 90^\circ = j \\ e^{-j90^\circ} = \cos(-90^\circ) + j\sin(-90^\circ) = -j \end{cases}$$

$$\boxed{e^{\pm j90^\circ} = \pm j}$$



$-\mathrm{j}$乘上$\dot{F}$

5. 注意大小写符号的意义

瞬时值 ⟶ 小写 u、i

有效值 ⟶ 大写 U、I

最大值 ⟶ 大写带下标 U_{m}

相量（复数）⟶ 大写，头上加 “.” $\dot{U}$

正弦量的加减、微积分运算都可用对应的相量来进行

1. 两同频率正弦电流相加，设 $i_1 = \sqrt{2}I_1\sin(\omega t+\varphi_1)$

$$i_2 = \sqrt{2}I_2\sin(\omega t+\varphi_2)$$

$$i = i_1 + i_2$$

将$\boldsymbol{i_1}$和$\boldsymbol{i_2}$写成

$$i_1 = \mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{I}_1 e^{j\omega t}]$$

$$i_2 = \mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{I}_2 e^{j\omega t}]$$

则

$$i = i_1 + i_2 = \mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{I}_1 e^{j\omega t}] + \mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{I}_2 e^{j\omega t}]$$

$$= \mathrm{Im}[\sqrt{2}\left(\dot{I}_1 + \dot{I}_2\right)e^{j\omega t}]$$

令

$$i = \mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{I} e^{j\omega t}]$$

则

$$\mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{I} e^{j\omega t}] = \mathrm{Im}[\sqrt{2}\left(\dot{I}_1 + \dot{I}_2\right)e^{j\omega t}] \qquad \boxed{\dot{I} = \left(\dot{I}_1 + \dot{I}_2\right)}$$

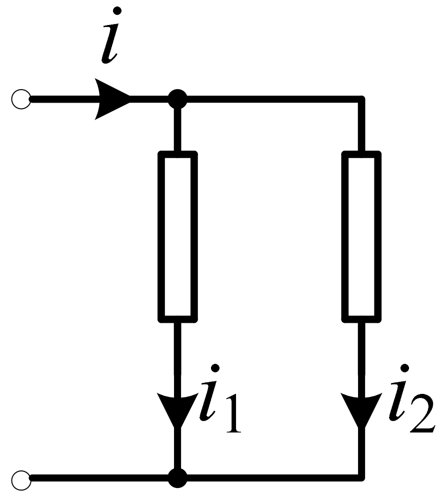
同频率正弦量相加减运算变成对应的相量相加减运算。

问题：

$$i_1 = 6\sqrt{2}\cos(314t + 30^\circ)$$

$$i_2 = 8\sqrt{2}\cos(314t - 60^\circ)$$

$$i = i_1 + i_2 = ?$$



$$\dot{I}_1 = 6\angle 30^\circ$$

$$\dot{I}_2 = 8\angle -60^\circ$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 6\angle 30^\circ + 8\angle -60^\circ$$

$$= (5.2 + j3) + (4 - j6.9)$$

$$= 10\angle -23.1^\circ$$

$$i = 10\sqrt{2}\cos(314t - 23.1^\circ)$$

2. 正弦量的微分

设　$i=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\varphi_i)$

则　$\dfrac{di}{dt}=\dfrac{d}{dt}\left[\sqrt{2}I\sin(\omega t+\varphi_i)\right]$

$$=\frac{d}{dt}\left[\mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{I}e^{j\omega t}]\right]$$

$$=\mathrm{Im}\left[\frac{d}{dt}\left(\sqrt{2}\dot{I}e^{j\omega t}\right)\right]$$

$$=\mathrm{Im}\left[\left(\sqrt{2}(j\omega\dot{I})e^{j\omega t}\right)\right]$$

正弦量的微分，其对应的相量等于原正弦量对应的相量乘以 jω。

证明：$\frac{d}{dt}\left(e^{j\omega t}\right)=j\omega e^{j\omega t}$

$$e^{j\omega t}=\cos(\omega t)+j\sin(\omega t)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(e^{j\omega t}\right)&=\frac{d}{dt}\left[\cos(\omega t)+j\sin(\omega t)\right]\\&=-\omega\sin(\omega t)+j\omega\cos(\omega t)\\&=j^2\omega\sin(\omega t)+j\omega\cos(\omega t)\\&=j\omega\left[j\sin(\omega t)+\cos(\omega t)\right]\\&=j\omega e^{j\omega t}\end{aligned}$$

证明：$\frac{d}{dt}\left[\operatorname{Im}(e^{j\omega t})\right]=\operatorname{Im}\left[\frac{d}{dt}\left(e^{j\omega t}\right)\right]$

$$\frac{d}{dt}\left[\operatorname{Im}(e^{j\omega t})\right]=\frac{d}{dt}[\sin(\omega t)]$$
$$=\omega\cos(\omega t)$$

$$\operatorname{Im}\left[\frac{d}{dt}\left(e^{j\omega t}\right)\right]=\operatorname{Im}\left[j\omega e^{j\omega t}\right]$$
$$=\operatorname{Im}\left[j\omega\left(\cos(\omega t)+j\sin(\omega t)\right)\right]$$
$$=\operatorname{Im}\left[j\omega\cos(\omega t)-\omega\sin(\omega t)\right]$$
$$=\omega\cos(\omega t)$$

3. 正弦量的积分

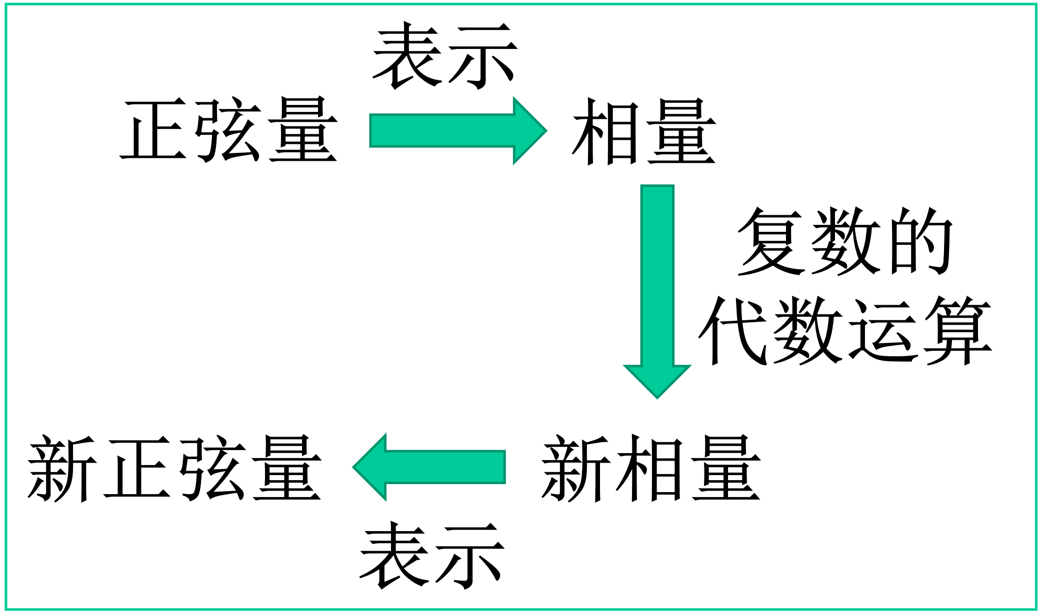
设 $i = \sqrt{2}I\sin(\omega t + \varphi_i)$

则
$$\int i dt = \int \sqrt{2}I\sin(\omega t + \varphi_i)$$
$$= \int \mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{I}e^{j\omega t}]$$
$$= \mathrm{Im}\left[\int\left(\sqrt{2}\dot{I}e^{j\omega t}\right)\right]$$
$$= \mathrm{Im}\left[\left(\sqrt{2}\dot{I}\frac{1}{j\omega}e^{j\omega t}\right)\right]$$

正弦量的积分，其对应的相量等于原正弦量对应的相量除以 jω。

将正弦量用相量表示，用相量形式求解正弦交流电路中的电压和电流——相量法。

相量法的过程



相量法的优点：

（1）将时域问题变为复数问题

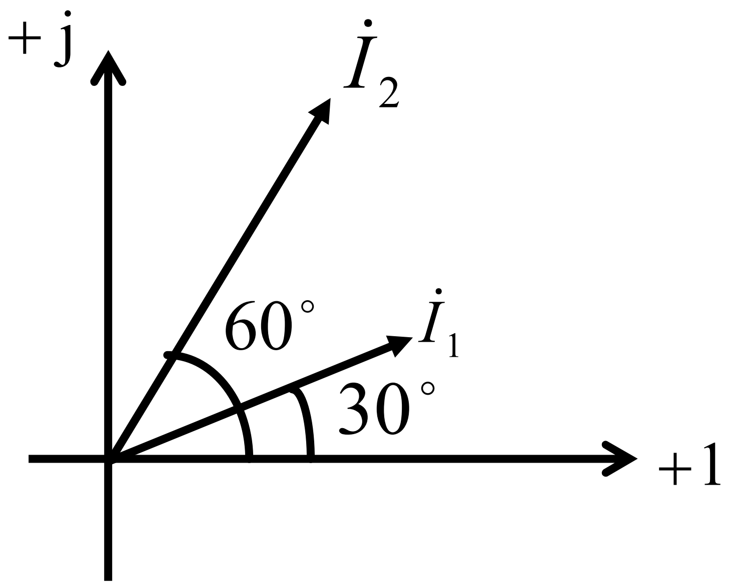
（2）将微积分方程的运算变为复数方程运算

注意：相量法只适用于激励为同频正弦量的线性电路

【例 3.2.1】已知 $i_1 = 2\sqrt{2}\sin(\omega t + 30^\circ)\text{A}$, $i_2 = 5\sqrt{2}\sin(\omega t + 60^\circ)\text{A}$, 画出这两个正弦量的相量图。

【解】正弦量的有效值为 $I_1 = 2\text{A}$，$I_2 = 5\text{A}$ 。

它们的初相位分别是 $+30^\circ$、$+60^\circ$，则相量图为



注意：只有同频率的正弦量才能画在同一相量图上。

【例 3.2.2】已知 $i_1 = 2\sqrt{2}\sin(\omega t + 30^\circ)\text{A}$, $i_2 = 5\sqrt{2}\sin(\omega t - 60^\circ)\text{A}$ ，写出它们的相量代数式、指数式和极坐标式。

【解】首先写出指数式和极坐标式为

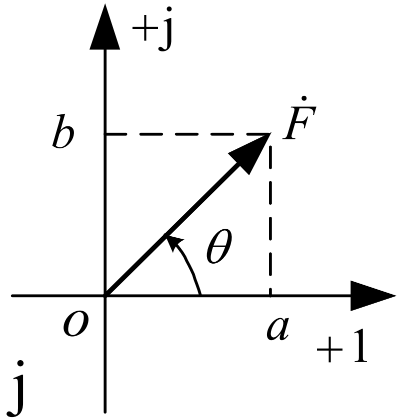
$$\dot{I}_1 = 2e^{\text{j}30^\circ} = 2\angle 30^\circ\ \text{A} \qquad \dot{I}_2 = 5e^{\text{-j}60^\circ} = 5\angle -60^\circ\ \text{A}$$

$$\dot{I}_1 = 2e^{\text{j}30^\circ} = 2(\cos 30^\circ + \text{j}\sin 30^\circ) = 2\times(0.866 + 0.5) = (1.73 + \text{j}1)\text{A}$$

$$\dot{I}_2 = 5e^{\text{-j}60^\circ} = 5(\cos 60^\circ - \text{j}\sin 60^\circ) = 5\times(0.5 + 0.866) = (2.5 - \text{j}4.33)\text{A}$$

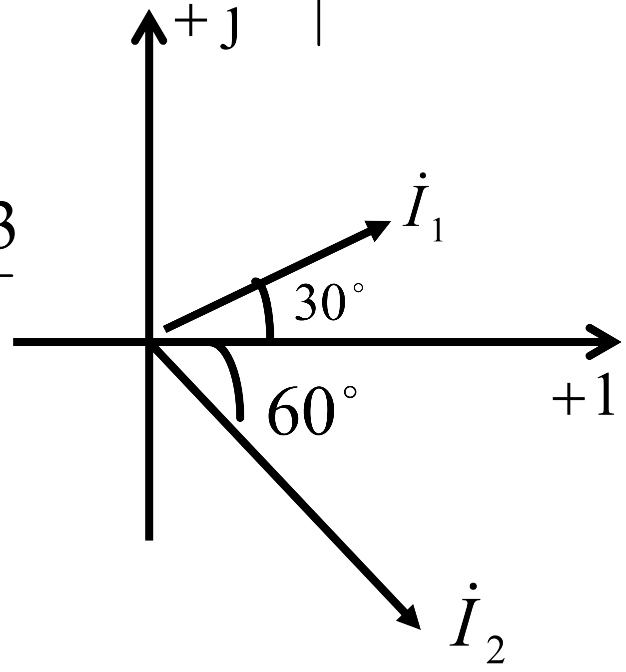
【例 3.2.3】已知 $\dot{I}_1=(1.73+\mathrm{j}1)\mathrm{A}$, $\dot{I}_2=(2.5-\mathrm{j}4.33)\mathrm{A}$。写出它们的指数式和极坐标式，并画出其相量图。

【解】根据 $\dot{F}=a+\mathrm{j}b=Fe^{\mathrm{j}\theta}$ 公式有



$$\dot{I}_1=1.73+\mathrm{j}1=\sqrt{1.73^2+1^2}\angle\arctan\frac{1}{1.73}$$

$$=2\angle30^\circ\,\mathrm{A}$$



$$\dot{I}_2=2.5-\mathrm{j}4.33=\sqrt{2.5^2+4.33^2}\angle\arctan\frac{-4.33}{2.5}$$

$$=5\angle-60^\circ\,\mathrm{A}$$

【例 3.2.4】已知 $i_1 = 3\sqrt{2}\sin(\omega t)\text{A}$， $i_2 = 4\sqrt{2}\sin(\omega t + 90^\circ)\text{A}$，求 $i = i_1 + i_2$。

【解】解法一，用相量式求解

$$\dot{I}_1 = 3\angle 0^\circ = 3\text{A}$$

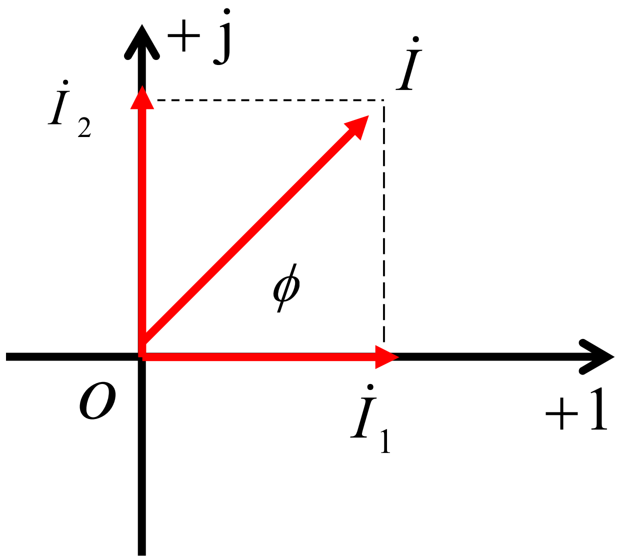
$$\dot{I}_2 = 4\angle 90^\circ = 4(\cos 90^\circ + \text{j}\sin 90^\circ) = \text{j}4\text{A}$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 3 + \text{j}4 = \sqrt{3^2 + 4^2}\angle\arctan\frac{4}{3} = 5\angle 53.1^\circ\text{A}$$

所以 $i = i_1 + i_2 = 5\sqrt{2}\sin(\omega t + 53.1^\circ)\text{A}$

【例 3.2.4】已知 $i_1 = 3\sqrt{2}\sin(\omega t)\text{A}$， $i_2 = 4\sqrt{2}\sin(\omega t + 90^\circ)\text{A}$，求$i = i_1 + i_2$。

【解】解法二，用相量图解



$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\text{A}$$

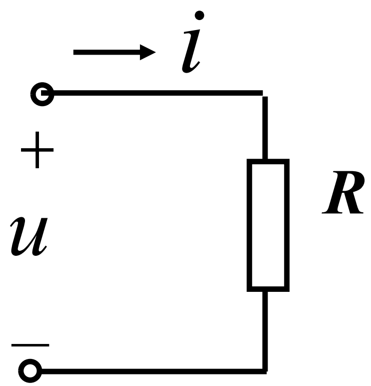
$$\varphi = \arctan\frac{I_2}{I_1} = \arctan\frac{4}{3} = 53.1^\circ$$

$$\dot{I} = 5\angle 53.1^\circ \text{A}$$

总电流为 $i = i_1 + i_2 = 5\sqrt{2}\sin(\omega t + 53.1^\circ)\text{A}$

3.3 电阻元件的正弦交流电路

为了利用相量法分析正弦交流电路，我们先建立电阻、电感和电容的单一元件的电路模型，然后再对正弦交流电路进行分析。



$$i = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \phi_{\mathrm{i}})$$

$$u = Ri = \sqrt{2} RI \sin(\omega t + \phi_{\mathrm{i}}) = \sqrt{2} U \sin(\omega t + \phi_{\mathrm{i}})$$

从两数学表达式可以看出：

频率相同，相位相同。

有效值关系： $U = IR$

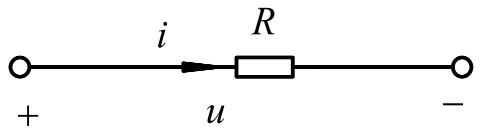
用相量表示其大小和相位关系，即

$$\dot{U} = U e^{\mathrm{j}\phi_i} \qquad \dot{I} = I e^{\mathrm{j}\phi_i}$$

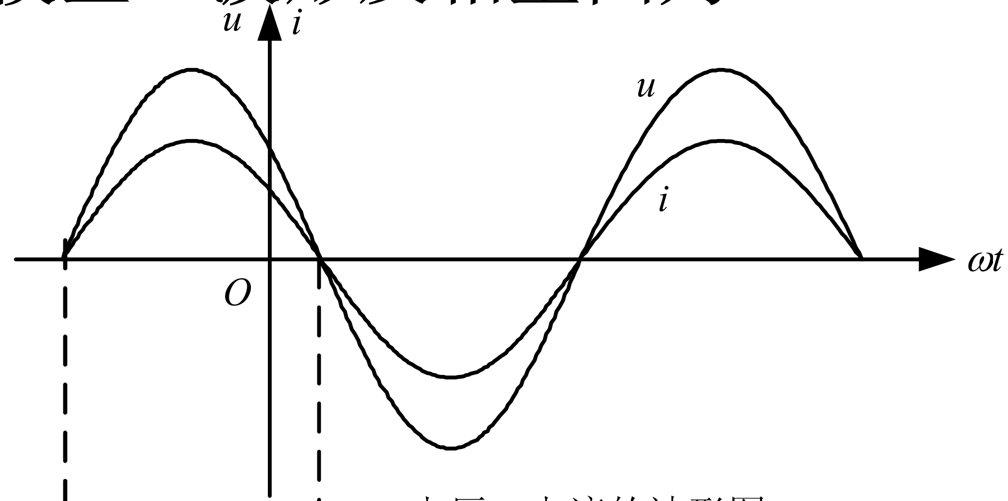
电压和电流同相位

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U e^{\mathrm{j}\phi_{\mathrm{i}}}}{I e^{\mathrm{j}\phi_{\mathrm{i}}}} = R \quad 或 \quad \boxed{\dot{U} = R\dot{I}}$$

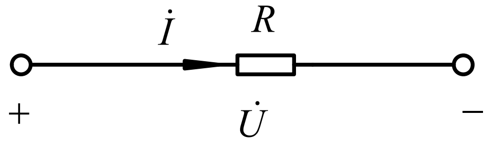
电阻元件的相量模型、波形及相量图为



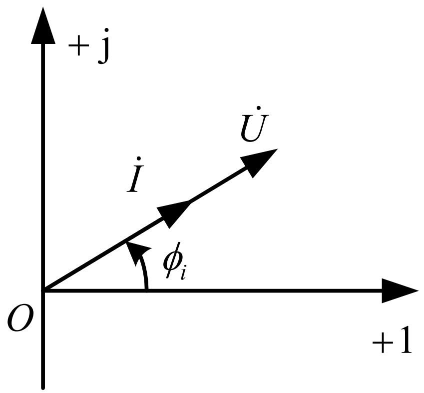
(a)瞬时电压和电流



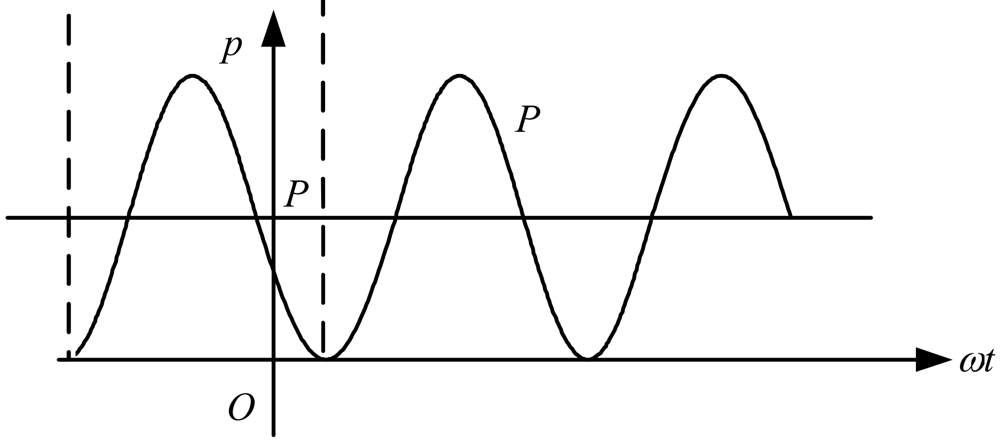
(b)电压、电流的波形图



(c)电阻的相量模型



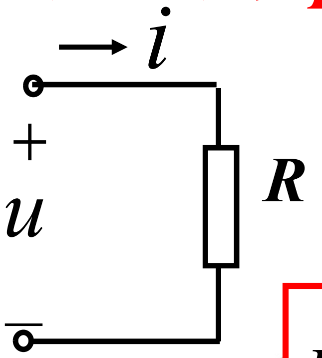
(d)电压、电流的相量



(e)瞬时功率波形

3.3.2 功率和能量

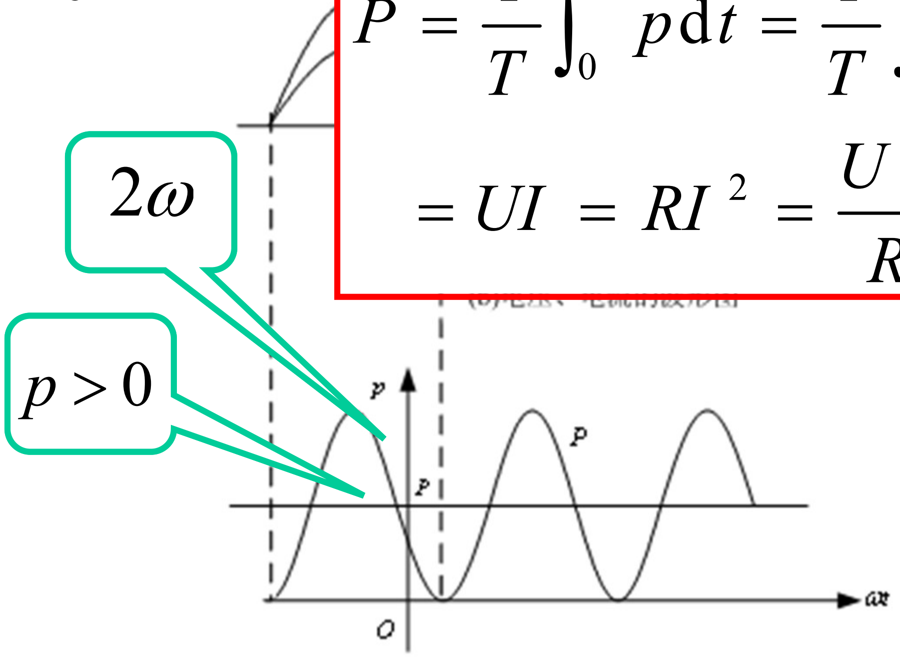
瞬时功率 ***p*****:** 瞬时电压与瞬时电流的乘积



$$p = ui = \sqrt{2}U\sin(\omega t+\phi_{\mathrm{i}})\sqrt{2}I\sin(\omega t+\phi_{\mathrm{i}})$$

$$= UI[1-\cos 2(\omega t+\phi_{\mathrm{i}})]$$

$$\boxed{\begin{aligned} P &= \frac{1}{T}\int_0^T p\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T UI\,[1-\cos\,2(\omega t+\phi_{\mathrm{i}})]\mathrm{d}t \\ &= UI = RI^2 = \frac{U^2}{R} \end{aligned}}$$



(e)瞬时功率波形

实际应用中，电阻消耗多少电能是用平均功率**P**计算。

【例3.3.1 】一个额定功率为3W、阻值为20k的电阻接于频率为50Hz、电压有效值为220V的正弦电源上。求（1）通过电阻的电流；（2）电阻实际消耗的功率；（3）当电源频率变为500Hz时，通过电阻的电流和消耗的功率有何变化？

【解】（1）$I=\frac{U}{R}=\frac{220}{20\times10^{3}}=0.011\text{A}$

（2）$P=I^{2}R=0.011^{2}\times20\times10^{3}=2.42\text{W}$

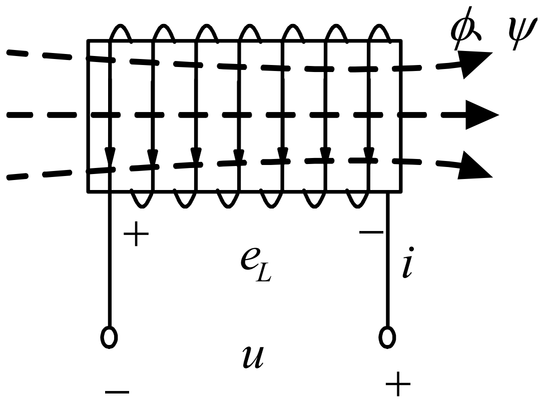
电阻实际消耗功率小于额定功率，电路正常工作。

（3）由于电阻的阻值与电源频率无关，所以电流和功率都不变。

3.4 电感元件的正弦交流电路

3.4.1 电感元件的定义

电流产生的磁链



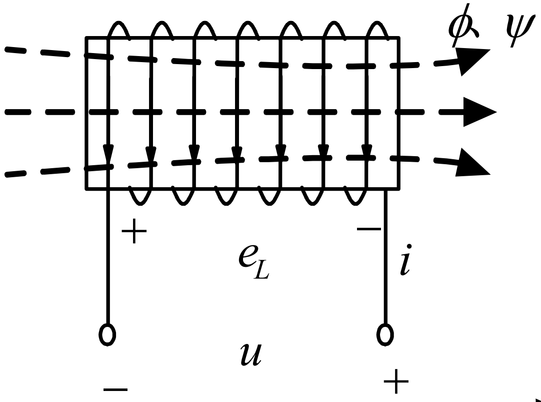
匝数 磁通 磁链

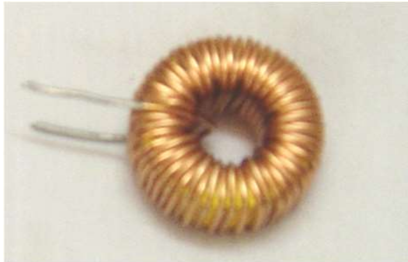
$$Li = N\Phi = \psi$$

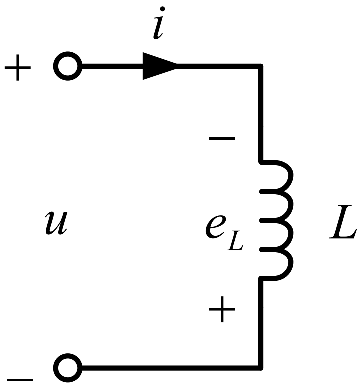
$$L = N\frac{\Phi}{i}$$

电感

（单位：**H, mH, μH**）







由电磁感应定律和楞次定律可知

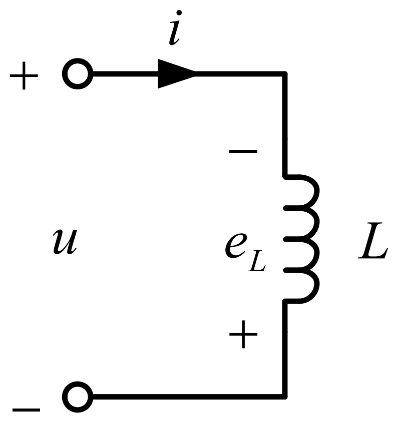
$$e_{\mathrm{L}} = -\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

自感电动势将阻碍电流变化

电压与电流之间的关系为

$$\boxed{u = -e_{\mathrm{L}} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$$

3.4.2 电压、电流的大小和相位关系

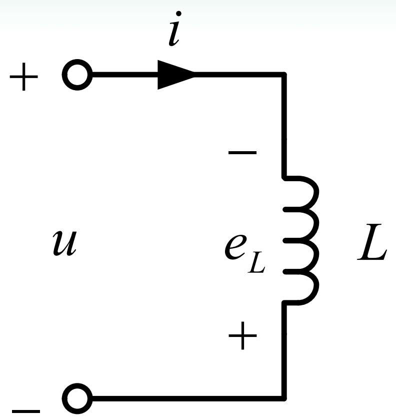


$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

设 $i = \sqrt{2}I\sin\omega t$

$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\sqrt{2}I\sin\omega t] = \sqrt{2}\omega LI\cos\omega t$$

$$= \sqrt{2}\omega LI\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}U\sin(\omega t + 90^\circ)$$



$$i = \sqrt{2} I \sin \omega t$$

$$u = \sqrt{2}\omega L I \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \sqrt{2} U \sin(\omega t + 90^\circ)$$

从两数学表达式可以看出:

频率相同，相位差90°。

有效值关系:

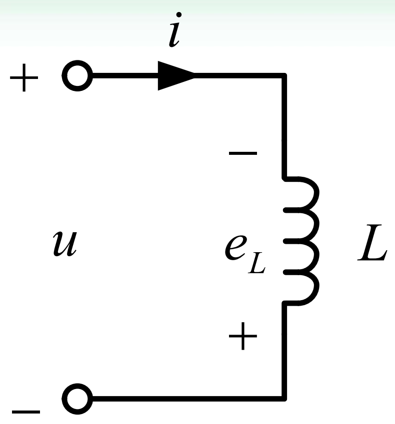
具有电阻的单位

$$U = \omega L I \quad 或 \quad \frac{U}{I} = \omega L$$

感抗

$$X_L = \omega L = 2\pi f L$$

感抗与电源的频率有关



$$i = \sqrt{2} I \sin \omega t$$

$$u = \sqrt{2} \omega L I \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \sqrt{2} U \sin(\omega t + 90^\circ)$$

用相量表示其大小和相位关系，即

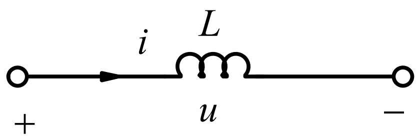
$$\dot{I} = I e^{\mathrm{j}0^\circ} = I \qquad \dot{U} = U e^{\mathrm{j}90^\circ}$$

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U e^{\mathrm{j}90^\circ}}{I} = \frac{U}{I} e^{\mathrm{j}90^\circ} = \mathrm{j} X_{\mathrm{L}}$$

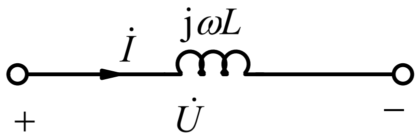
或 $$\boxed{\dot{U} = \mathrm{j} X_{\mathrm{L}} \dot{I} = \mathrm{j} \omega L \dot{I}}$$

电压超前电流

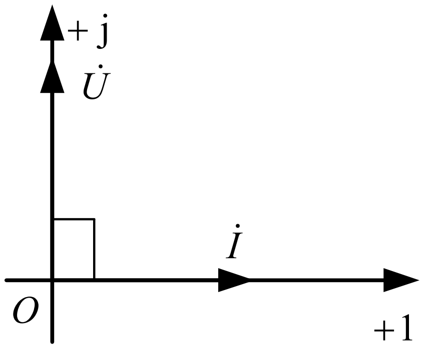
电感元件的相量模型、波形及相量图为



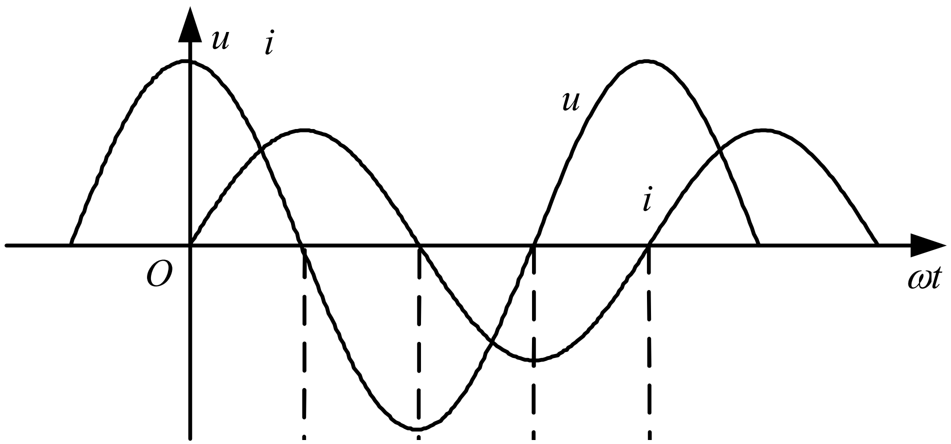
(a) 瞬时电压和电流



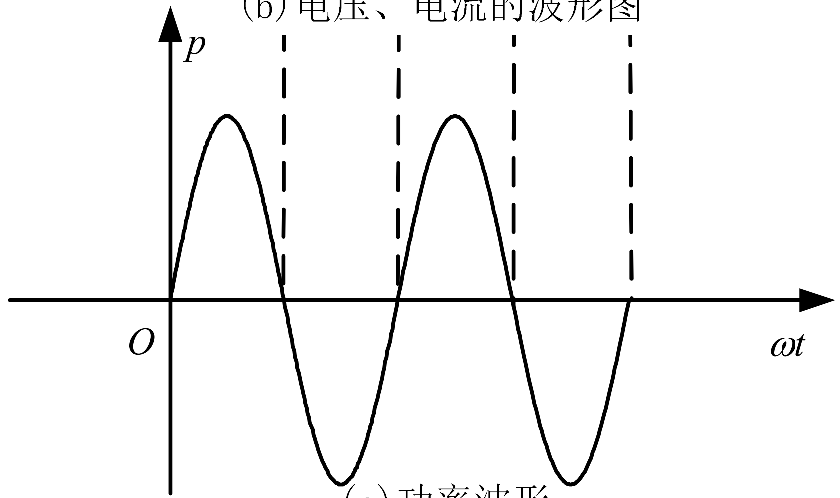
(c) 电感的相量模型



(d) 电压、电流的相量图



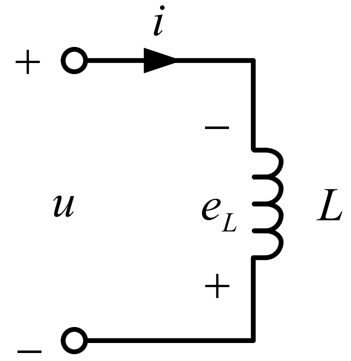
(b) 电压、电流的波形图



(e) 功率波形

3.4.3 功率和能量

瞬时功率 **p**：瞬时电压与瞬时电流的乘积



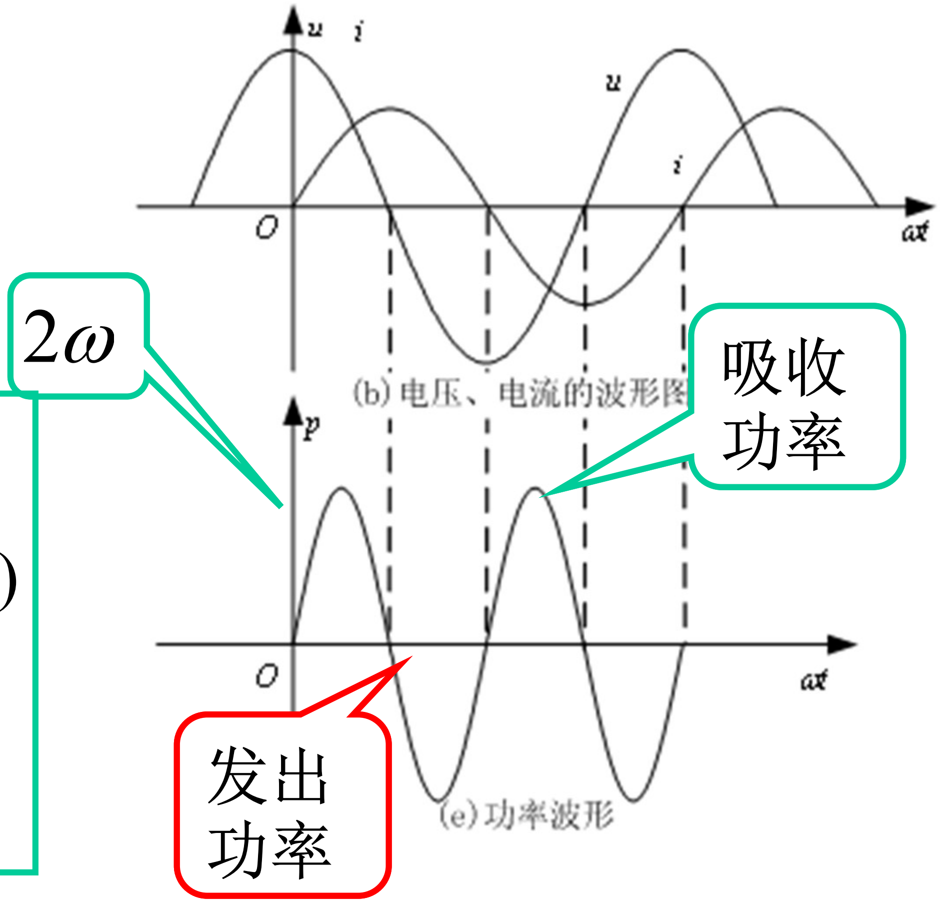
设电感电流为参考正弦量，即

$$i = \sqrt{2}I\sin\omega t$$

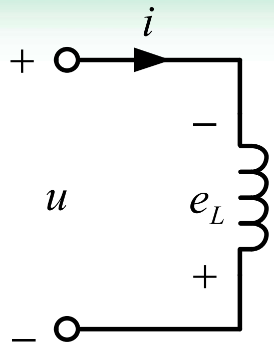
则电感两端电压为

$$u = \sqrt{2}U\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$\begin{aligned} p &= ui \\ &= \sqrt{2}I\sin\omega t\sqrt{2}U\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \\ &= 2UI\cos\omega t\sin\omega t \\ &= UI\sin 2\omega t \end{aligned}$$



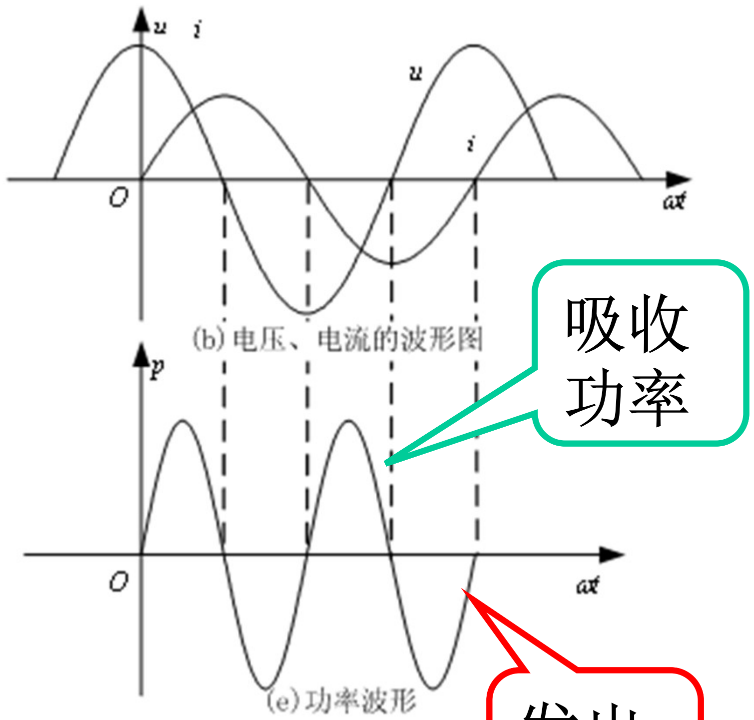
电感是个储能元件



可见，电感并不消耗能量，只和电源进行能量交换。其能量交换的规模用无功功率来衡量。无功功率在数值上等于瞬时功率的幅值，即

$$\boxed{Q_L = UI = \frac{U^2}{X_L} = I^2 X_L}$$

单位：乏(**Var**)



发出功率

注意：无功功率 ≠ 无用功率！

如：一盏**20W**的日光灯，其功率因数约为**0.5**，工作时除需**20**多瓦的有功功率发光外，还需约**35W**的无功功率供整流器的线圈建立交变磁场。

有电磁线圈的电气设备（如电动机、变压器等），正常情况下不但从电源取得有功功率，同时还需从电源取得无功功率。

【例3.4.1】一个0.8**H**的电感元件接到电压有效值为**220V**的正弦交流电源上。当电源的频率分别为50**Hz**和**500Hz**时，求电感元件中的电流。

【解】

$f=50\text{Hz}$时，$X_\text{L}=2\pi fL=2\pi\times50\times0.8=251.2\Omega$

$$I=\frac{U}{X_\text{L}}=\frac{220}{251.2}=0.88\text{A}=880\text{mA}$$

$f=500\text{Hz}$时，$X_\text{L}=2\pi fL=2\pi\times500\times0.8=2512\Omega$

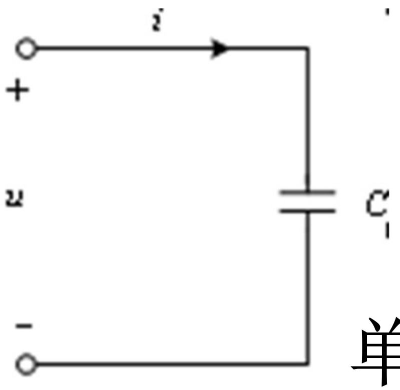
$$I=\frac{U}{X_\text{L}}=\frac{220}{2512}=0.088\text{A}=88\text{mA}$$

当电压一定时，频率越高，感抗越大，电流越小。

3.5 电容元件的正弦交流电路

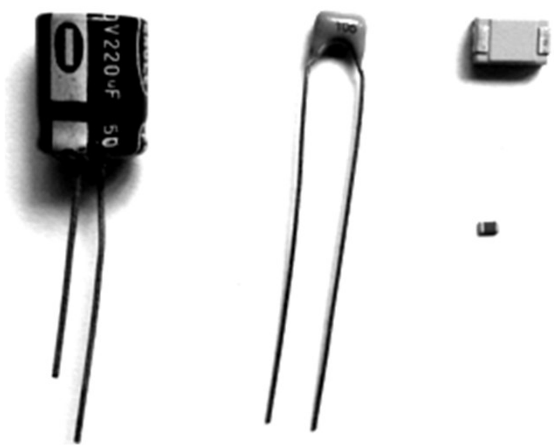
3.5.1 电容元件的定义

当电容元件两端加上电压 u时，其极板上存储的电荷量 q 与其两端的电压成正比，即



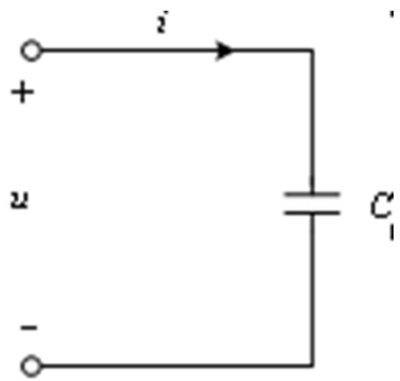
$$\boxed{q = Cu}$$

单位：**F, μF, nF, pF**



$1\,\mu F = 10^{-6}\,F$， $1\,pF = 10^{-12}\,F$

3.5.2 电压、电流的大小和相位关系



$$q = Cu$$

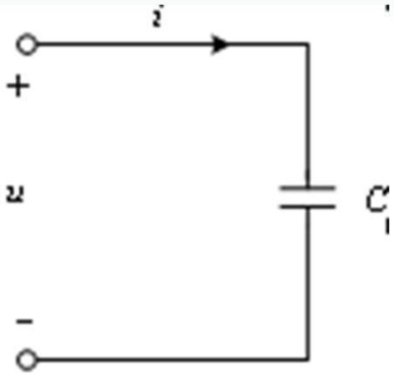
$$\boxed{i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}} \qquad \boxed{i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}$$

当电容极板上的电荷量发生变化时，电容中就会有电流，即

设

$u = \sqrt{2}U\sin\omega t$,

$$\begin{aligned} i &= C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = C\frac{1}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}[\sqrt{2}U\sin\omega t] = \sqrt{2}\omega CU\cos\omega t \\ &= \sqrt{2}\omega CU\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}I\sin(\omega t + 90^\circ) \end{aligned}$$



设 $u=\sqrt{2}U\sin\omega t$

$$i=C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\sqrt{2}\omega CU\sin(\omega t+\frac{\pi}{2})=\sqrt{2}I\sin(\omega t+90^\circ)$$

从两数学表达式可以看出：

频率相同， 相位差 90°。

有效值关系：

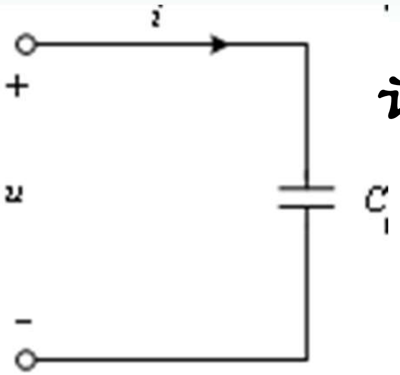
具有电阻的单位

$$U=\frac{1}{\omega C}I \quad 或 \quad \frac{U}{I}=\frac{1}{\omega C}$$

容抗

$$X_C=\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{2\pi fC}$$

容抗与电源的频率有关



设 $u=\sqrt{2}U\sin\omega t$

$$i=\sqrt{2}\omega CU\sin(\omega t+\frac{\pi}{2})=\sqrt{2}I\sin(\omega t+90^\circ)$$

用相量表示其大小和相位关系，即

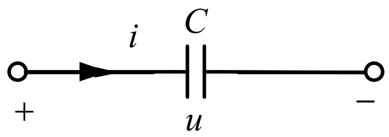
$$\dot{U}=Ue^{\mathrm{j}0^\circ}=U \qquad \dot{I}=Ie^{\mathrm{j}90^\circ}$$

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=\frac{U}{Ie^{\mathrm{j}90^\circ}}=\frac{U}{I}e^{-\mathrm{j}90^\circ}=-\mathrm{j}X_\mathrm{C}$$

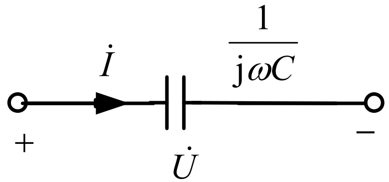
电压滞后电流

或 $$\boxed{\dot{U}=-\mathrm{j}X_\mathrm{C}\dot{I}=-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}\dot{I}}$$

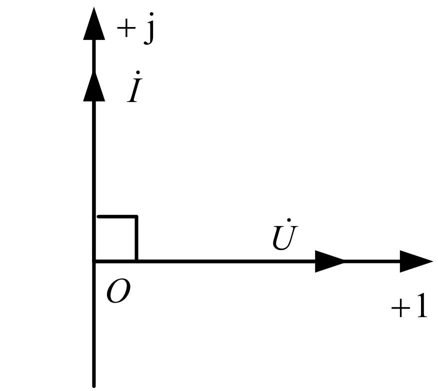
电容元件的相量模型、波形及相量图为



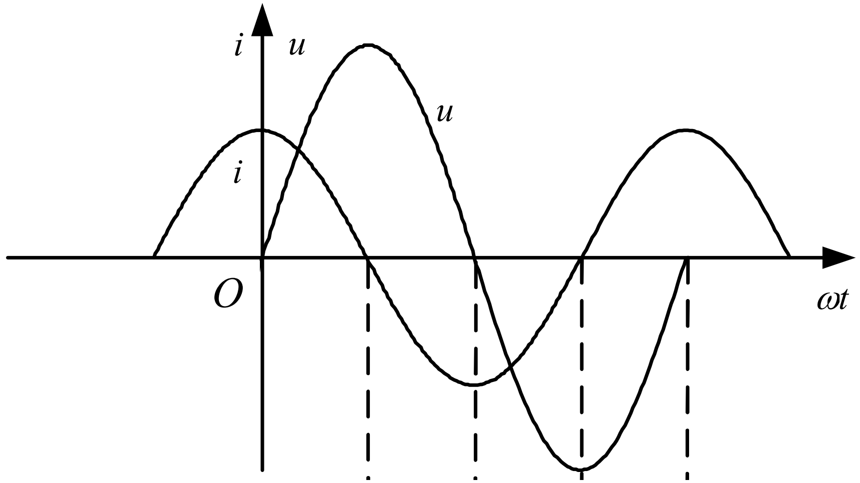
(a)瞬时电压和电流



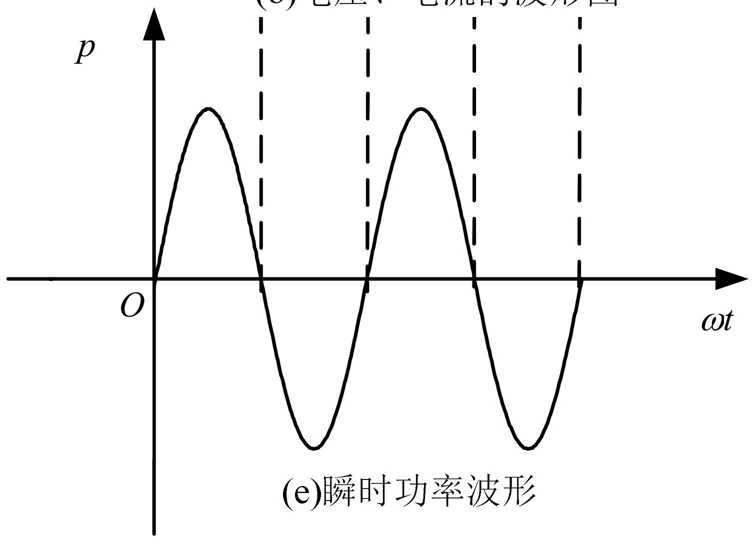
(c)电容的相量模型



(d)电压、电流的相量图



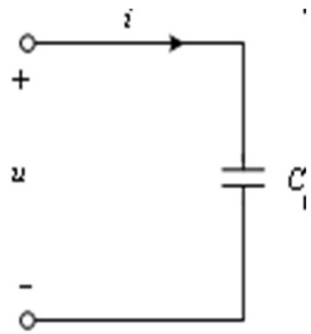
(b)电压、电流的波形图



(e)瞬时功率波形

3.5.3 功率和能量

瞬时功率 ***p***：瞬时电压与瞬时电流的乘积

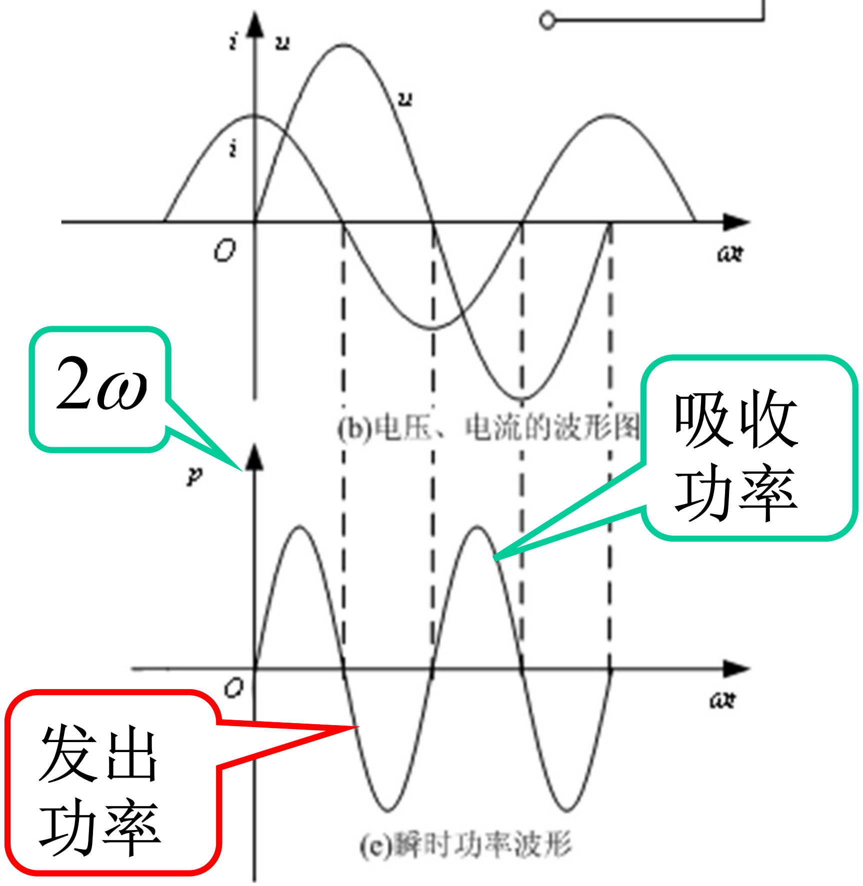


设电容的电压为参考正弦量，即

$$u=\sqrt{2}U\sin\omega t$$

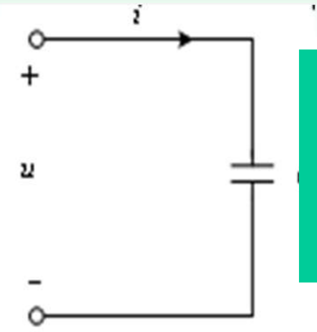
$$i=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\frac{\pi}{2})$$

$$\boxed{\begin{aligned}p&=ui\\&=\sqrt{2}U\sin\omega t\sqrt{2}I\sin(\omega t+\frac{\pi}{2})\\&=UI\sin 2\omega t\end{aligned}}$$



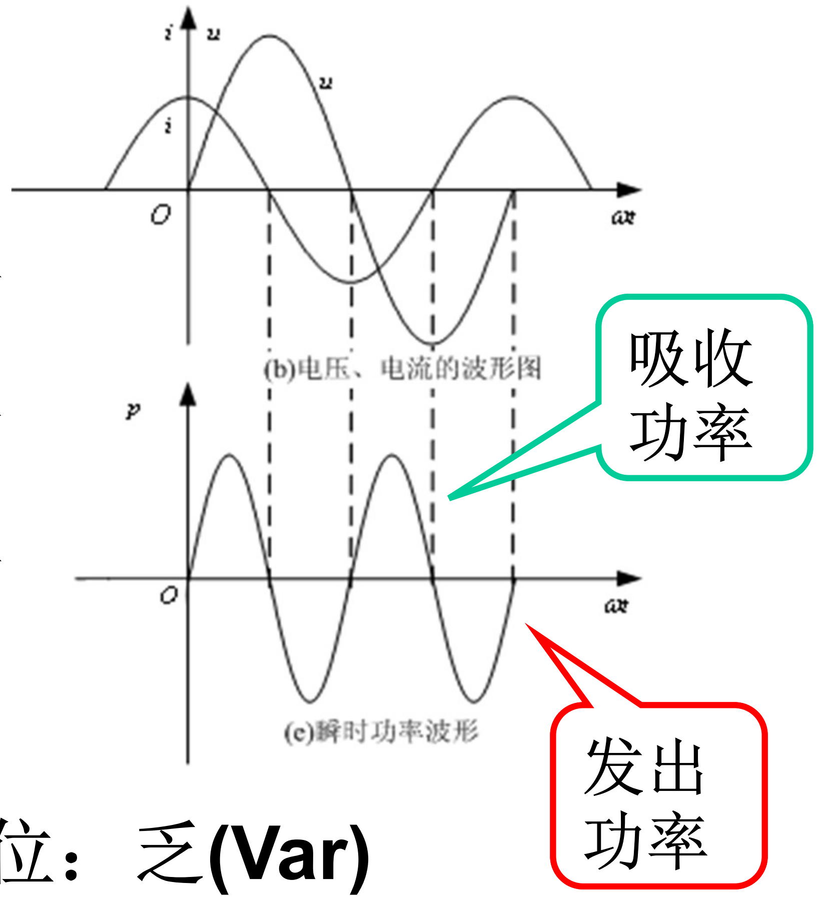
(b)电压、电流的波形图

(c)瞬时功率波形



电容是个储能元件

可见，电容也不消耗能量，只和电源进行能量交换。其能量交换的规模用无功功率来衡量。无功功率在数值上等于瞬时功率的幅值，即



$$\boxed{Q_C = UI = \frac{U^2}{X_C} = I^2 X_C}$$

单位：乏(**Var**)

【例3.5.1】将一个1uF的电容元件接到电压有效值为**220V**的正弦交流电源上。当电源的频率分别为50**Hz**和**500Hz**时，求电容元件中的电流。

【解】

$$f=50\text{Hz时}, X_C=\frac{1}{2\pi fC}=\frac{1}{2\pi\times 50\times 1\times 10^{-6}}=3184.7\Omega$$

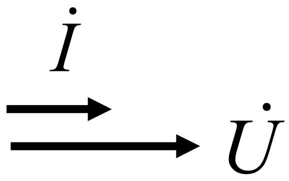
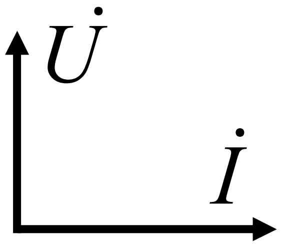
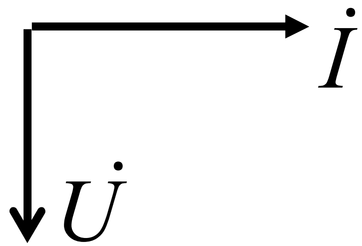
$$I=\frac{U}{X_C}=\frac{220}{3184.7}=69\text{mA}$$

$$f=500\text{Hz时}, X_C=\frac{1}{2\pi fC}=\frac{1}{2\pi\times 500\times 1\times 10^{-6}}=318.5\Omega$$

$$I=\frac{U}{X_C}=\frac{220}{318.5}=0.69\text{A}=690\text{mA}$$

当电压一定时，频率越高，容抗越小，电流越大。

小 结

电路参数 **R**：$u = iR$	$\dot{U} = R\dot{I}$	
电路参数 **L**：$u = L\dfrac{di}{dt}$	$\dot{U} = \mathrm{j}X_{\mathrm{L}}\dot{I}$	
电路参数 **C**：$i = C\dfrac{du}{dt}$	$\dot{U} = -\mathrm{j}X_{\mathrm{C}}\dot{I}$	

3.6 *RLC*串、并联电路的分析

3.6.1基尔霍夫定律的相量形式

由于正弦交流电路通常用相量法分析和计算，当电路中的电流和电压都是同频率的正弦量时，则基尔霍夫定律可写成相量形式，即

$$\sum \dot{I} = 0 \qquad \sum \dot{U} = 0$$

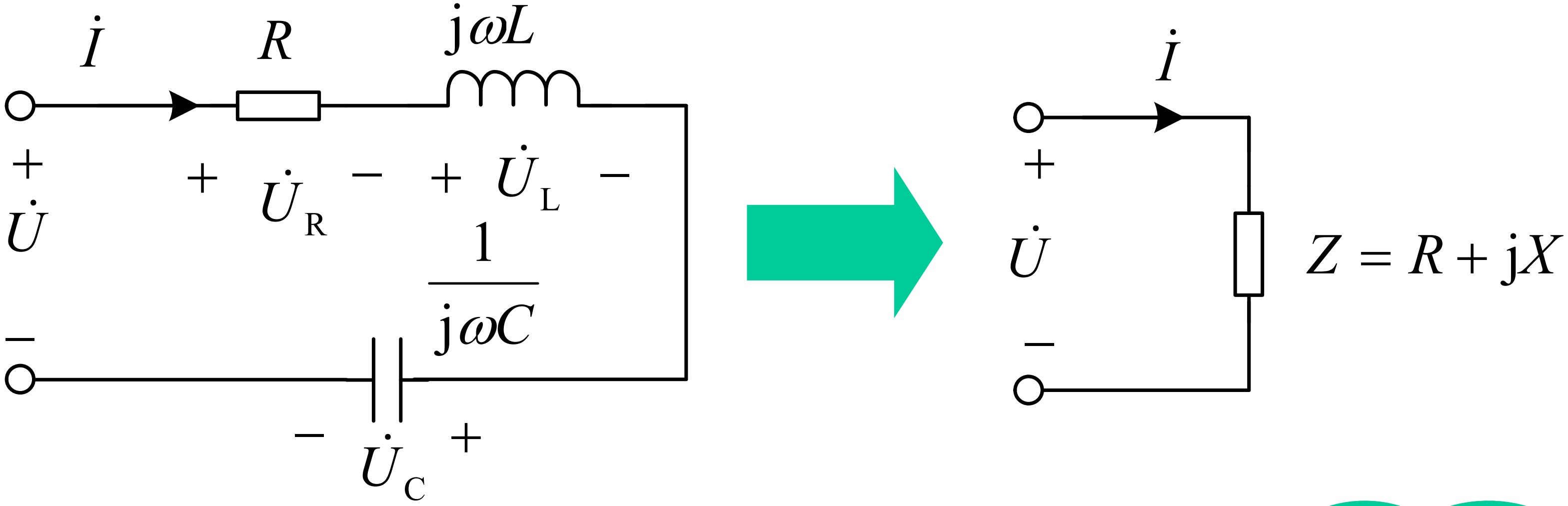
注意： $\sum I \neq 0$ $\sum U \neq 0$

有效值相加不满足**KCL和KVL**

3.6.2 阻抗及其串、并联

实际应用中，正弦交流电路不仅含有电阻，还有电感和电容。由于电阻是耗能元件，电感和电容是储能元件，所以，电路中的总电压和总电流之间的大小和相位关系和单一元件作用在电路中的情况有所不同，功率也不同。

1. 阻抗

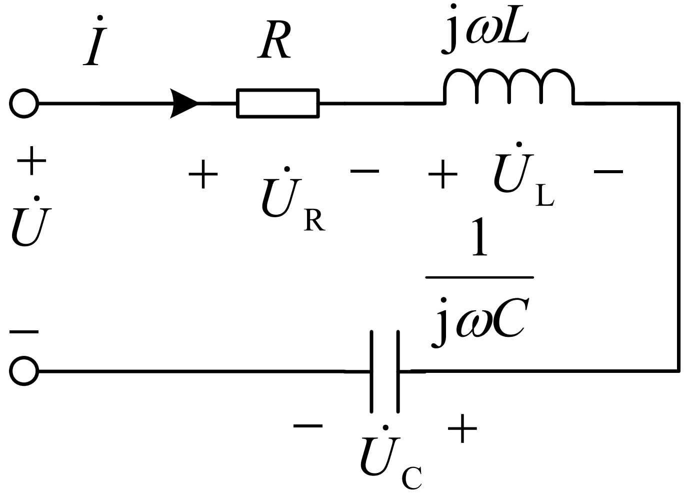


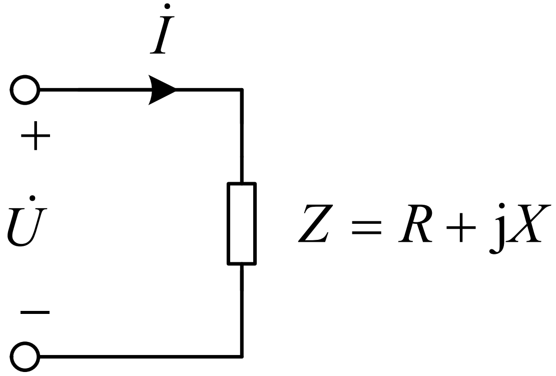
端口电压和电流的相量之比为

$$\boxed{\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = Z}$$

Z与R、L和C
有什么关系
呢？

Z称为复阻抗，简称阻抗。



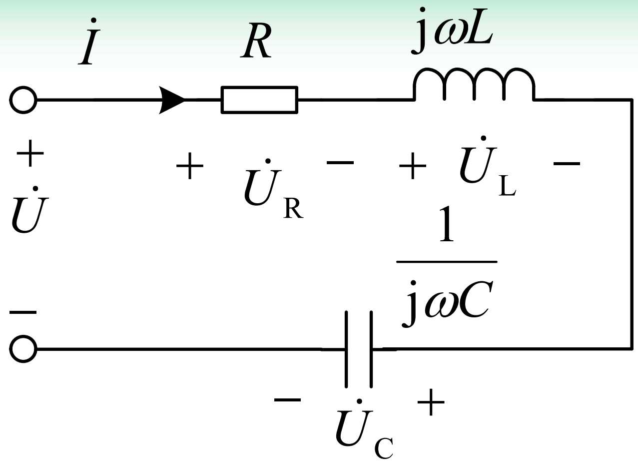


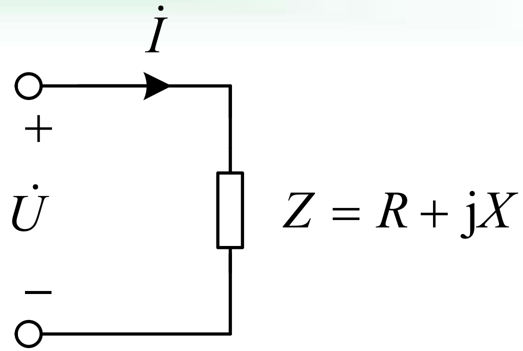
$$\dot{U} = \dot{U}_{\mathrm{R}} + \dot{U}_{\mathrm{L}} + \dot{U}_{C} = R\dot{I} + \mathrm{j}X_{\mathrm{L}}\dot{I} - \mathrm{j}X_{\mathrm{C}}\dot{I}$$

$$= \dot{I}[R + \mathrm{j}(X_{\mathrm{L}} - X_{\mathrm{C}})] = Z\dot{I}$$

其中 $\boxed{Z = R + \mathrm{j}(X_L - X_C) = R + \mathrm{j}X}$

可见，Z是一个复数，实部为电阻，虚部为感抗和容抗之差，称为电抗。





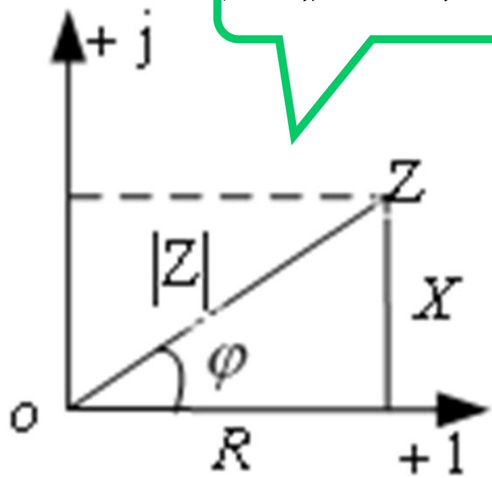
$$Z = R + \mathrm{j}(X_L - X_C) = R + \mathrm{j}X$$

还可以写成指数式或极坐标式，即

$$Z = R + \mathrm{j}X = |Z|e^{\mathrm{j}\varphi} = |Z|\angle\varphi$$

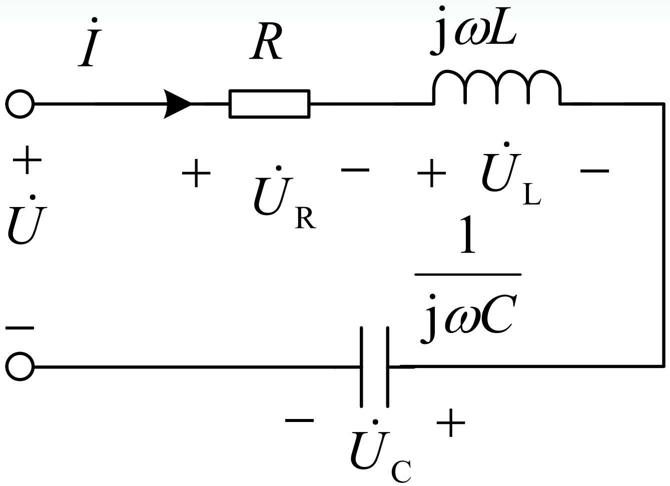
$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}\ , \varphi = \arctan\frac{X}{R}$$

阻抗三角形



阻抗模

阻抗角，是电压与电流的相位差

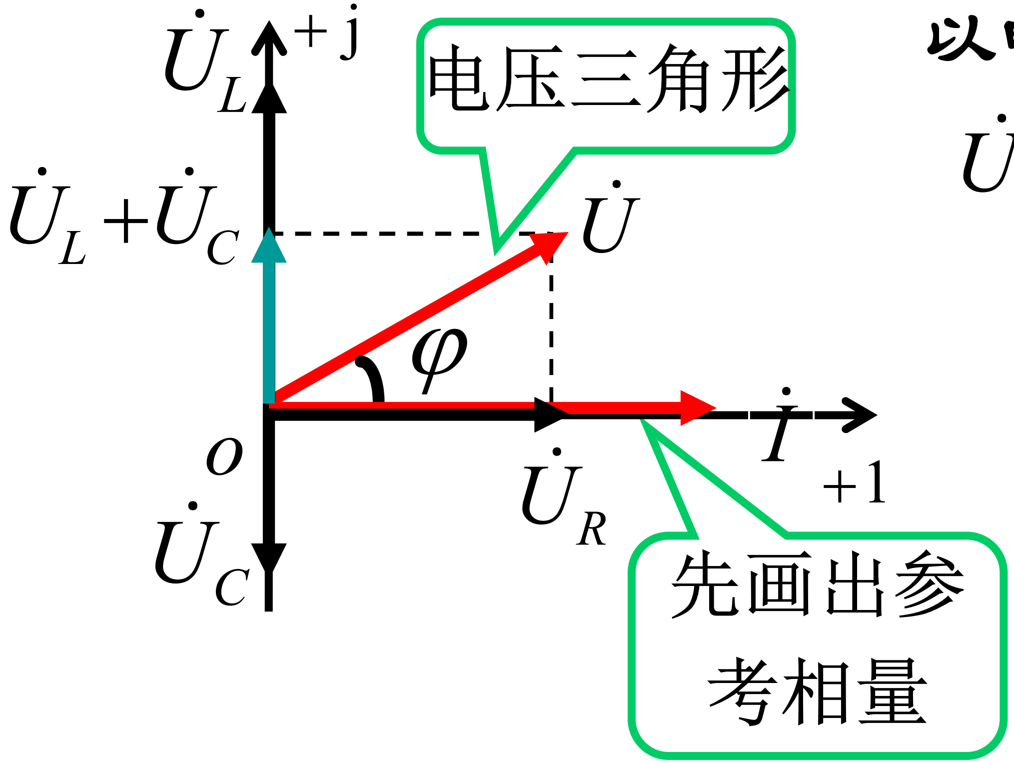


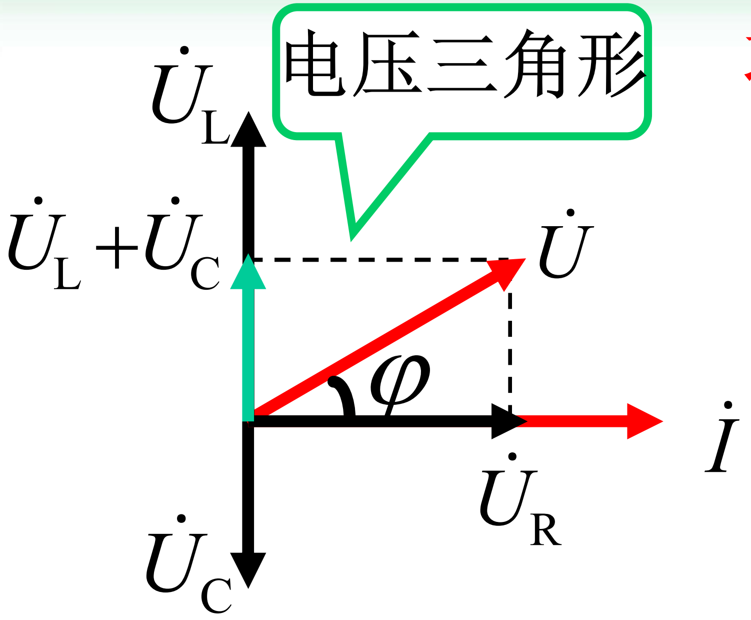
***RLC*串联电路的大小和相位关系也可用相量图求出**

设　$X_{\mathrm{L}} > X_{\mathrm{C}}$

以电流为参考相量

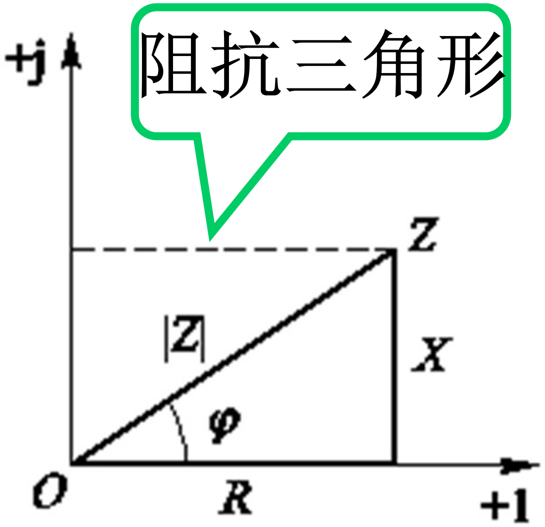
$$\dot{U} = \dot{U}_{\mathrm{R}} + \dot{U}_{\mathrm{L}} + \dot{U}_{C}$$





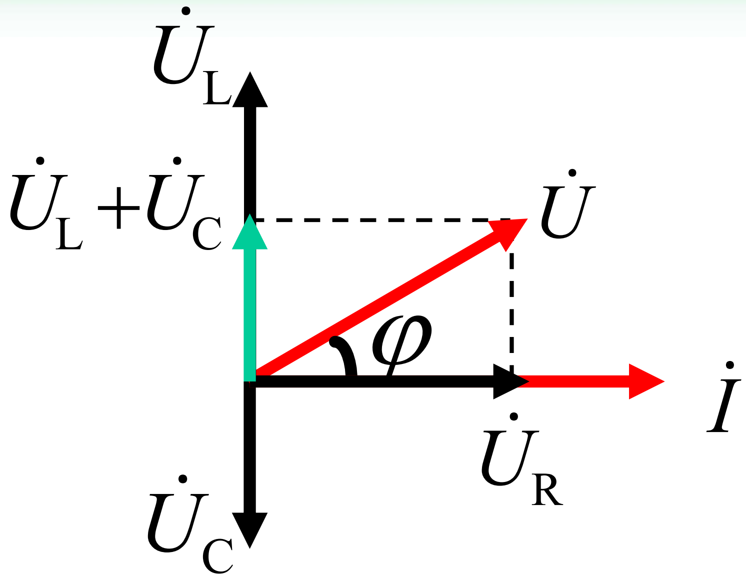
求U和阻抗角:

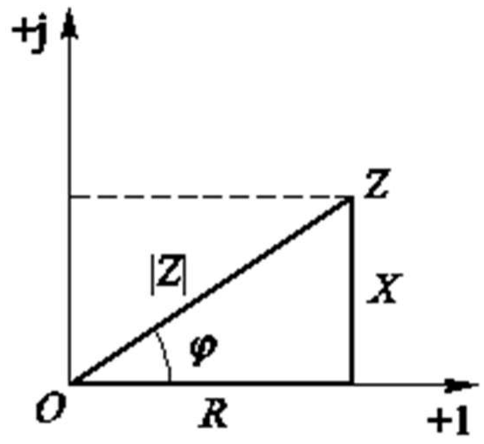
$$U=\sqrt{U_R^2+(U_L-U_C)^2}$$
$$=\sqrt{(RI)^2+(X_LI-X_CI)^2}$$
$$=I\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}$$
$$=I|Z|$$



阻抗角为

$$\varphi=\arctan\frac{U_L-U_C}{U_R}=\arctan\frac{X_L-X_C}{R}$$





当电源的频率不变时，阻抗角决定电路的性质，即

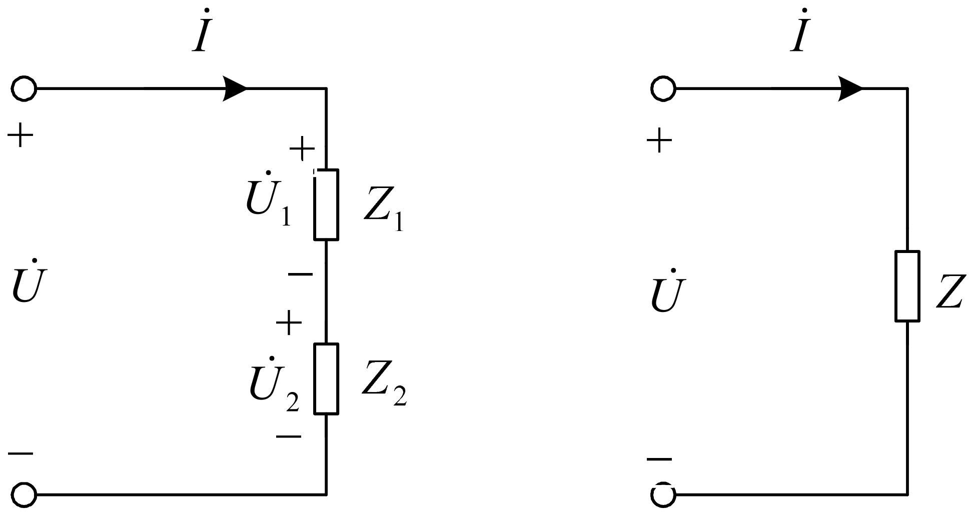
$$\boxed{\varphi=\arctan\frac{X_L-X_C}{R}}$$

当$X_L > X_C$时，$\varphi>0$，为感性电路； $Q=UI\sin\phi>0$,为正。

当$X_L < X_C$时，$\varphi<0$，为容性电路； $Q=UI\sin\phi<0$,为负。

当$X_L = X_C$时，$\varphi=0$，为阻性电路； $Q=0$

2. 阻抗串联



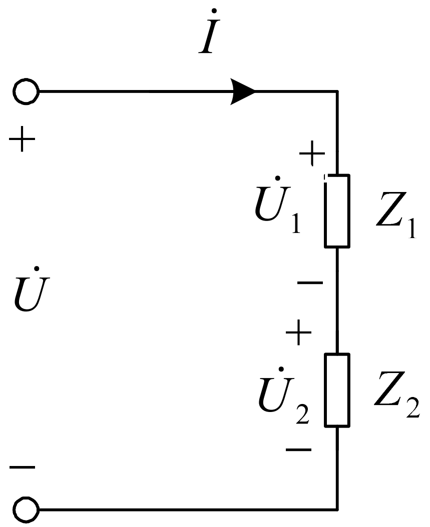
(a) 两个阻抗串联　　(b) 等效阻抗

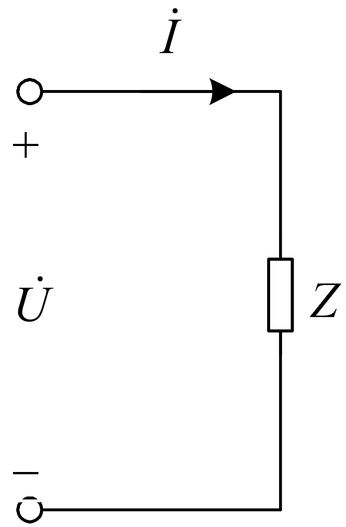
$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = Z_1\dot{I} + Z_2\dot{I} = (Z_1 + Z_2)\dot{I} = Z\dot{I}$$

$$\boxed{Z = Z_1 + Z_2}$$

$$\boxed{Z = \sum_{k=1}^{n} Z_k = \sum_{k=1}^{n} R_k + j\sum_{k=1}^{n} X_k}$$

阻抗串联的分压公式：





$$\dot{U}_k = \frac{Z_k}{Z}\dot{U}$$

要熟记

两个阻抗串联的分压公式为

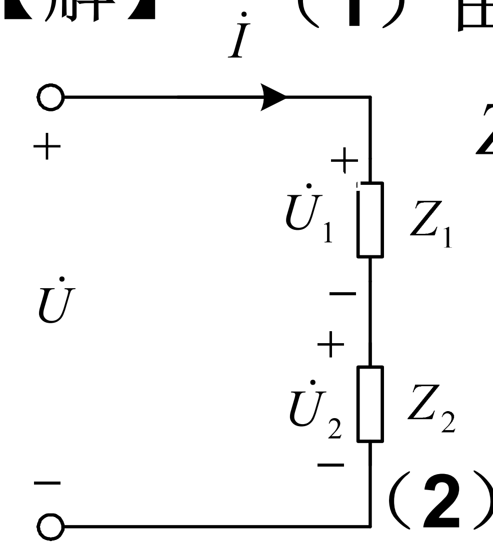
$$\dot{U}_1 = \dot{I}Z_1 = \frac{\dot{U}}{Z}Z_1 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}\dot{U}$$

$$\dot{U}_2 = \dot{I}Z_2 = \frac{\dot{U}}{Z}Z_2 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}\dot{U}$$

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dfrac{Z_1}{Z_1 + Z_2}\dot{U} \\ \dot{U}_2 = \dfrac{Z_2}{Z_1 + Z_2}\dot{U} \end{cases}$$

【例3.6.1】已知 $Z_1=(3+\mathrm{j}4)\Omega$, $Z_2=(8+\mathrm{j}6)\Omega$, $\dot{U}=220\angle 0^\circ\,\mathrm{V}$ 。求：（**1**）等效阻抗**Z**、阻抗模及阻抗角;（2）阻抗**Z₁**两端的电压 $\dot{U}_1$。

【解】 （**1**）由等效阻抗公式得



$$Z=Z_1+Z_2=(3+\mathrm{j}4)+(8+\mathrm{j}6)=11+\mathrm{j}10$$

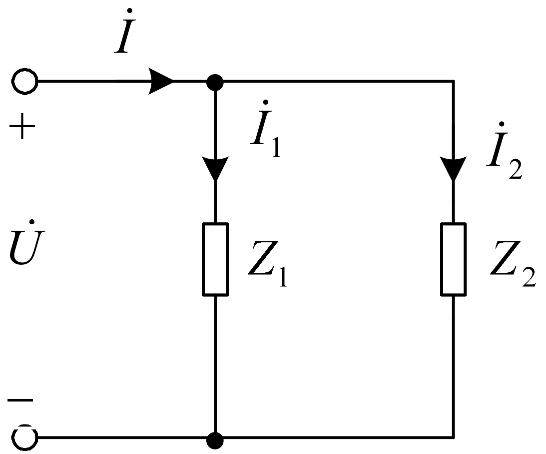
$$=14.87\angle 42.3^\circ\,\Omega$$

$$|Z|=14.87\Omega,\quad \varphi=42.3^\circ$$

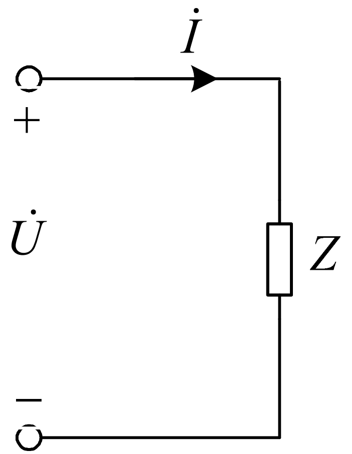
（**2**）由两阻抗分压公式得

$$\dot{U}_1=\frac{Z_1}{Z_1+Z_2}\dot{U}=\frac{3+\mathrm{j}4}{3+\mathrm{j}4+8+\mathrm{j}6}\times 220=\frac{1100\angle 53.1^\circ}{14.87\angle 42.3^\circ}=73.9\angle 10.8^\circ\,\mathrm{V}$$

3. 阻抗并联



(a) 两个阻抗并联



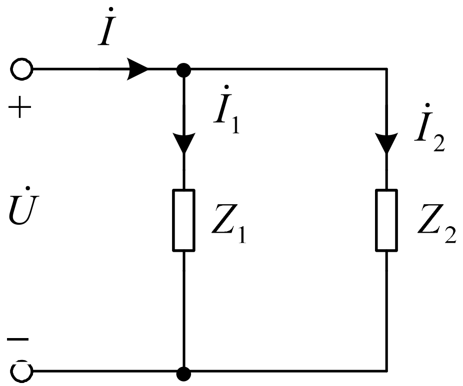
(b) 等效阻抗

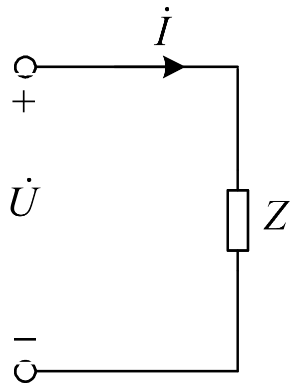
$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{Z_1} + \frac{\dot{U}}{Z_2} = \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right)\dot{U} = \frac{\dot{U}}{Z}$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \Rightarrow \boxed{Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}}$$

$$\boxed{\frac{1}{Z} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{Z_k}}$$

阻抗并联的分流公式：





两个阻抗并联的分流公式为

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{U}}{Z_1}=\frac{Z\dot{I}}{Z_1}=\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}\dot{I}$$

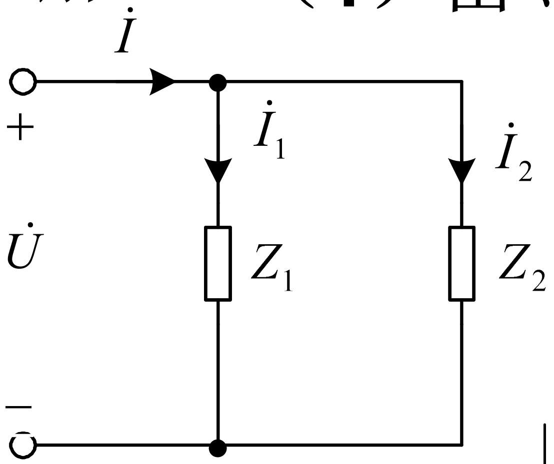
$$\dot{I}_2=\frac{\dot{U}}{Z_2}=\frac{Z\dot{I}}{Z_2}=\frac{Z_1}{Z_1+Z_2}\dot{I}$$

要熟记

$$\boxed{\begin{cases}\dot{I}_1=\dfrac{Z_2}{Z_1+Z_2}\dot{I}\\[2ex]\dot{I}_2=\dfrac{Z_1}{Z_1+Z_2}\dot{I}\end{cases}}$$

【例3.6.2】已知 $Z_1=(10+\mathrm{j}10)\Omega$，$Z_2=(10-\mathrm{j}10)\Omega$，$\dot{I}=2\angle 0^\circ\,\mathrm{A}$。 求：（1）等效阻抗Z、阻抗模及阻抗角；（2）阻抗$\mathbf{Z_1}$流过的电流 $\dot{I}_1$。

【解】 （1）由等效阻抗公式得



$$Z=\frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}=\frac{(10+\mathrm{j}10)(10-\mathrm{j}10)}{10+\mathrm{j}10+10-\mathrm{j}10}$$

$$=\frac{10\sqrt{2}\angle 45^\circ\times 10\sqrt{2}\angle -45^\circ}{20}=\frac{200}{20}=10\Omega$$

$|Z|=10\Omega$， $\varphi=0^\circ$

（2）由两阻抗分流公式得

$$\dot{I}_1=\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}\dot{I}=\frac{(10-\mathrm{j}10)\times 2\angle 0^\circ}{10+\mathrm{j}10+10-\mathrm{j}10}=\frac{20\sqrt{2}\angle -45^\circ}{20}=\sqrt{2}\angle -45^\circ\,\mathrm{A}$$

3.6.3 正弦交流电路分析举例

用相量法分析正弦交流电路的步骤为

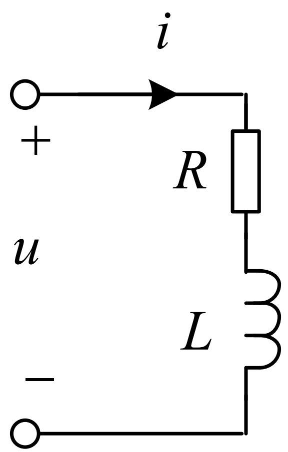
（1）画出电路的相量模型；

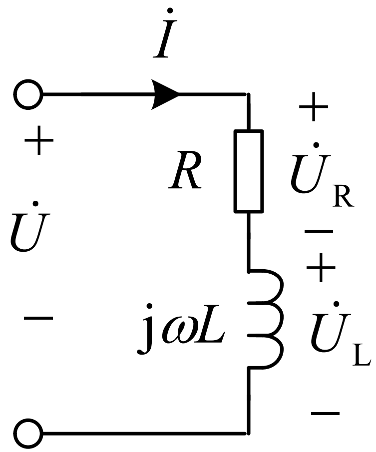
（2）用适当的分析方法，列写相量形式的电路方程；

（3）根据相量形式的电路方程求出未知相量；

（4）由相量形式结果写出电压、电流瞬时值的表达式

【例3.6.3】常用的日光灯主要是由灯管和电子整流器组成，其等效电路如图所示。已知灯管等效为电阻，其电阻 $R=1333.3\Omega$，电子整流器等效为电感，其电感 $L=1.95\text{H}$。外加正弦电压为 $u=220\sqrt{2}\sin\omega t\text{V}$，频率为50Hz。求：（1）感抗及阻抗Z；（2）电流 $\dot{I}$、I、i；（3）$\dot{U}_{\text{R}}$，U_{R} 和 $\dot{U}_{\text{L}}$，U_{L}；（4）画出相量图。



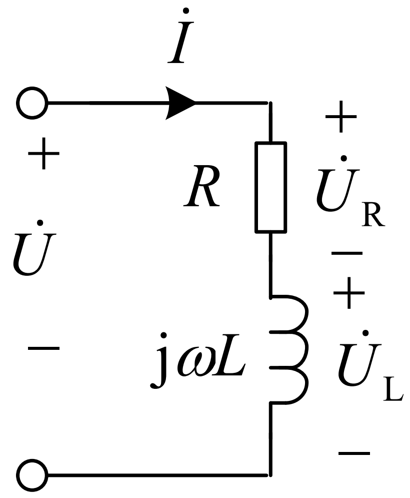


【解】（1）由相量模型

$$X_{\text{L}}=\omega L=2\pi fL$$
$$=2\times3.14\times50\times1.95$$
$$=314\times1.95=612.3\Omega$$

【例3.6.3】 $R = 1333.3\Omega$，$L = 1.95\text{H}$。$u = 220\sqrt{2}\sin\omega t\text{V}$，频率为**50Hz**。求：（**1**）感抗及阻抗**Z**；（**2**）$\dot{I}$、I、i；（**3**）$\dot{U}_\text{R}$，U_R 和 $\dot{U}_\text{L}$，U_L；（**4**）画出相量图。

$$\boxed{X_\text{L} = 612.3\Omega}$$



$$Z = R + \text{j}X_\text{L} = 1333.3 + \text{j}612.3$$

$$= 1467.2\angle 24.7^\circ\Omega$$

（**2**）$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{220\angle 0^\circ}{1467.2\angle 24.7^\circ} = 0.15\angle -24.7^\circ\text{A}$$

$I = 0.15\text{A}$　也可以 $I = \dfrac{U}{|Z|} = \dfrac{220}{1467.2} = 0.15\text{A}$

$$i = 0.15\sqrt{2}\sin(\omega t - 24.7^\circ)\text{A}$$

【例3.6.3】 $R = 1333.3\Omega$， $L = 1.95\text{H}$。$u = 220\sqrt{2}\sin\omega t\text{V}$,

（3）$\dot{U}_{\text{R}}, U_{\text{R}}$ 和 $\dot{U}_{\text{L}}, U_{\text{L}}$； $\boxed{\dot{I} = 0.15\angle -24.7^\circ\text{A}}$

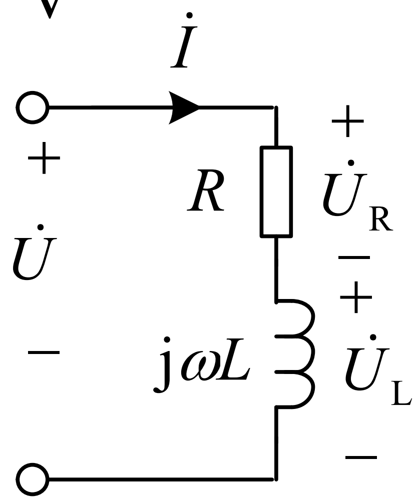
$$\dot{U}_{\text{R}} = R\dot{I} = 1333.3 \times 0.15\angle -24.7^\circ = 200\angle -24.7^\circ\text{V}$$

$$U_{\text{R}} = 200\text{V}$$

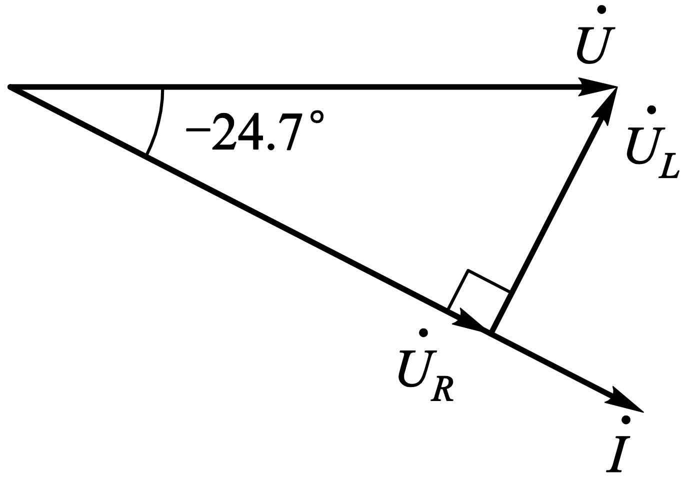
$$\dot{U}_{\text{L}} = \text{j}X_{\text{L}}\dot{I} = \text{j}\times 612.3 \times 0.15\angle -24.7^\circ$$

$$= 91.8\angle 65.3^\circ\text{V}$$

$$U_{\text{L}} = 91.8\text{V}$$



（4）画出相量图

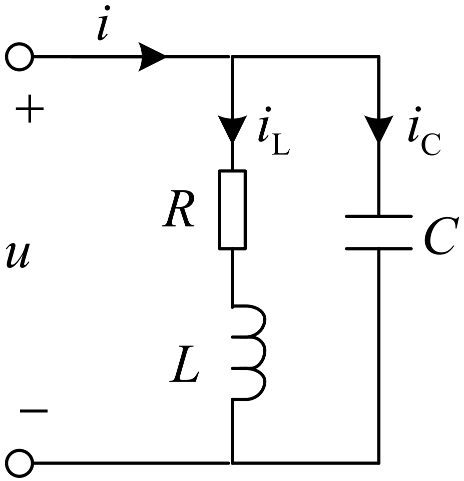


【例3.6.4】在日光灯的等效电路两端并上一个电容，电路如图所示。已知灯管等效为电阻 $R=1333.3\Omega$，电子整流器的等效电感为 $L=1.95\text{H}$。外加正弦电压 $u=220\sqrt{2}\sin\omega t\text{V}$，频率为**50Hz**，$C=0.26\mu\text{F}$。求：

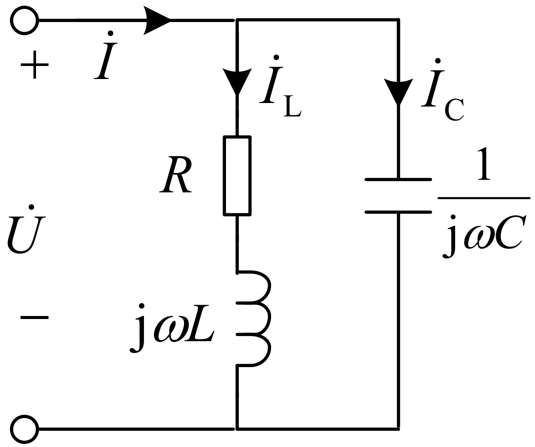
（1）容抗、阻抗Z；

（2）电流 $\dot{I}$、$\dot{I}_{\text{L}}$；

（3）画出相量图。



【解】（1）由相量模型



$$X_{\text{C}}=\frac{1}{\omega C}$$

$$=\frac{1}{314\times0.26\times10^{-6}}$$

$$=12248.9\Omega$$

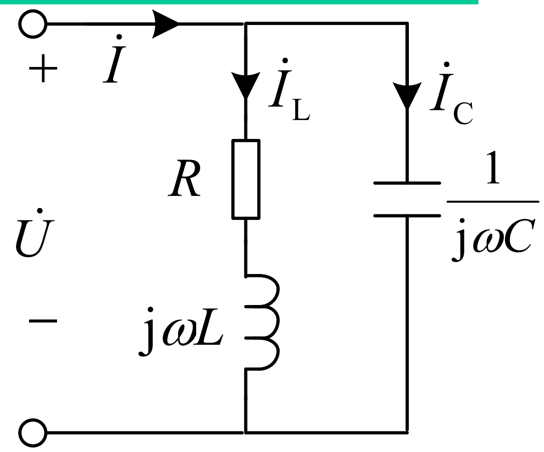
$$\approx12.3\text{k}\Omega$$

$$Z = Z_L // \frac{1}{j\omega C} = \frac{1.47\angle 24.7^\circ \times (\text{-j}12.3)}{1.33 + \text{j}0.612 - \text{j}12.3} = \frac{18.1\angle -65.3^\circ}{1.33 - \text{j}11.7},$$

$$= \frac{18.1\angle -65.3^\circ}{11.8\angle -83.6} = 1.53\angle 18.3^\circ \text{k}\Omega$$

$$X_L = \omega L = 2\pi f L = 2\times 3.14\times 50\times 1.95$$

$$= 314\times 1.95 = 612.3\Omega$$



$$Z_L = R + jX_L = 1333.3 + j612.3$$

$$= 1467.2\angle 24.7^\circ\Omega$$

$$\approx 1.47\angle 24.7^\circ \text{k}\Omega$$

$$X_C \approx 12.3\text{k}\Omega$$

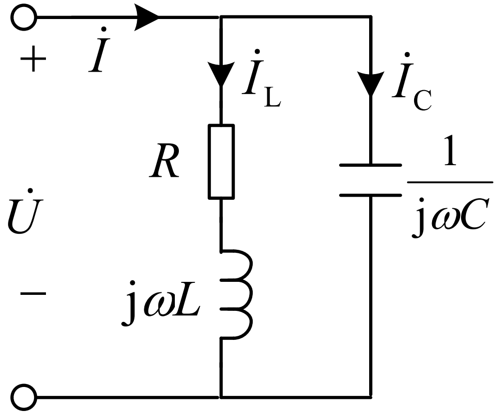
【例3. 6. 4】$R=1333.3\Omega$，$L=1.95\text{H}$。$u=220\sqrt{2}\sin\omega t\text{V}$，$f=50\text{Hz}$，$C=0.26\mu\text{F}$。

$\boxed{Z=1.53\angle 18.3^\circ\text{k}\Omega}$

$\boxed{Z_\text{L}\approx 1.47\angle 24.7^\circ\text{k}\Omega}$

（2）电流 $\dot{I}$、$\dot{I}_\text{L}$；

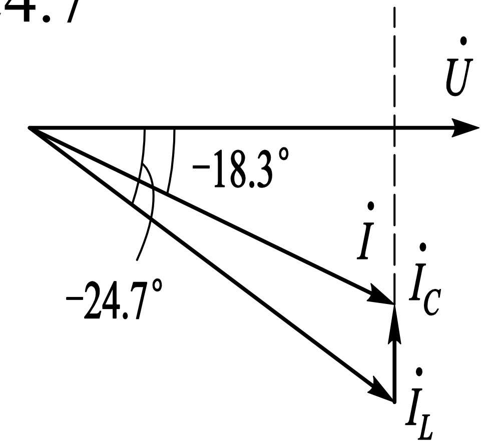
$$\dot{I}=\frac{\dot{U}}{Z}=\frac{220\angle 0^\circ}{1.53\times 10^3\angle 18.3^\circ}=0.144\angle -18.3^\circ\text{A}=144\angle -18.3^\circ\text{mA}$$



$$\dot{I}_\text{L}=\frac{\dot{U}}{Z_\text{L}}=\frac{220\angle 0^\circ}{1.47\times 10^3\angle 24.7^\circ}$$

$$=0.15\angle -24.7^\circ\text{A}$$

$$=150\angle -24.7^\circ\text{mA}$$

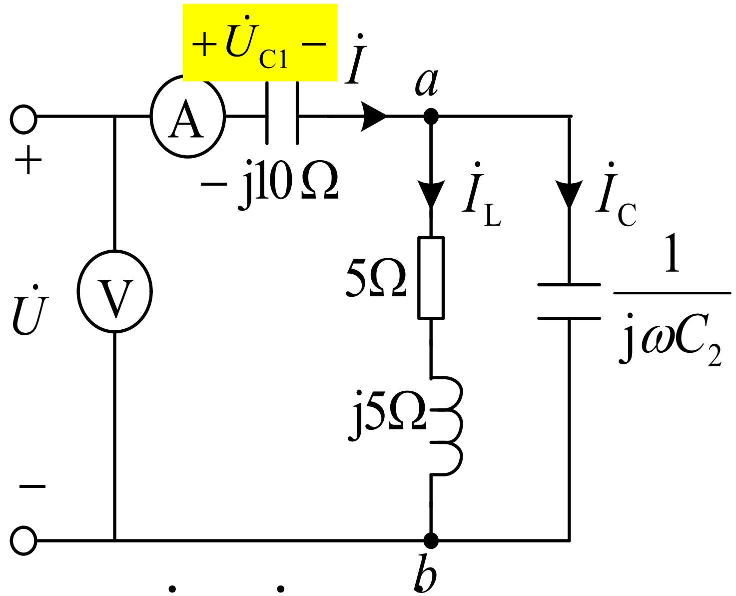


（3）画出相量图

感性负载并联合适的电容，能提高电源的带载能力。

【例3.6.5】在图中，$I_C = 10\text{A}$，$U_{ab} = 100\text{V}$。

求电压表**V**和电流表**A**的读数。



【解】设 $\dot{U}_{ab} = 100\angle 0^\circ \text{V}$

$$\dot{I}_L = \frac{\dot{U}_{ab}}{5+\mathrm{j}5} = \frac{100\angle 0^\circ}{5+\mathrm{j}5} = 10\sqrt{2}\angle -45^\circ \text{A}$$

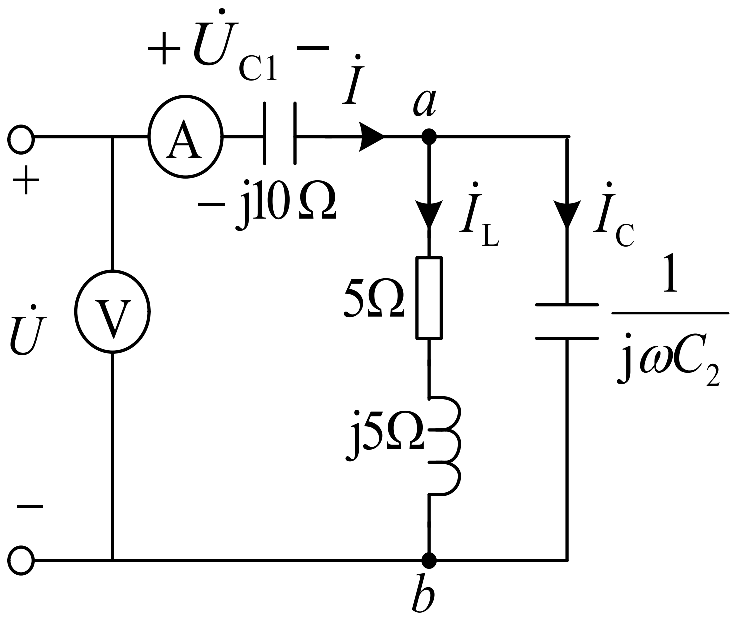
$$\dot{I}_C = 10\angle 90^\circ = \mathrm{j}10\text{A}$$

$$\dot{I} = \dot{I}_C + \dot{I}_L = 10\angle 90^\circ + 10\sqrt{2}\angle -45^\circ = 10\angle 0^\circ \text{A}$$

$$\dot{U}_{C1} = \dot{I}(-\mathrm{j}10) = 10\times(-\mathrm{j}10) = -\mathrm{j}100\text{V}$$

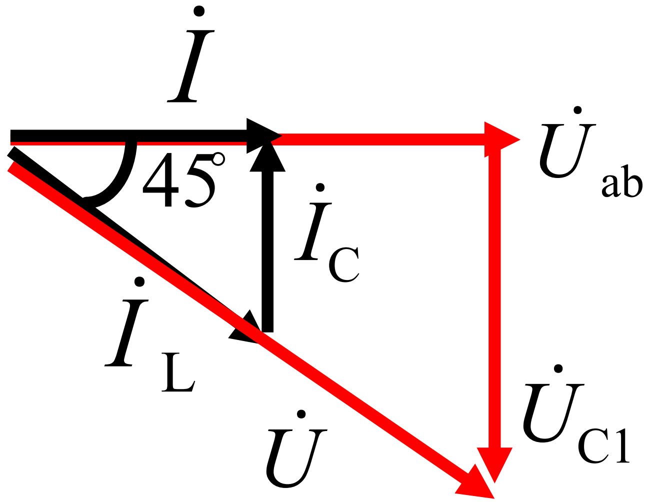
$$\dot{U} = \dot{U}_{C1} + \dot{U}_{ab} = -\mathrm{j}100\text{V} + 100\text{V} = 141.1\angle -45^\circ \text{V}$$

故电压表的读数为**141.1V**，电流表的读数为**10A**。



此题也可用相量图解，设

$$\dot{U}_{ab}=100\angle 0^{\circ}\ \mathrm{V}$$



$$I_L=\frac{U_{ab}}{\sqrt{5^2+5^2}}=10\sqrt{2}\mathrm{A}$$

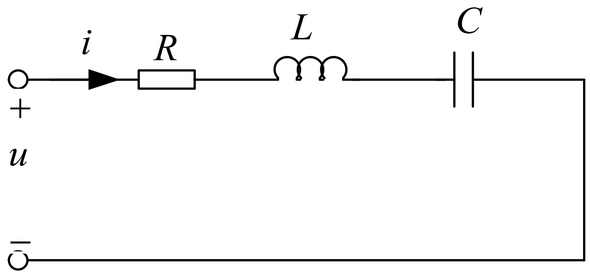
$$\varphi=\arctan\frac{X_L}{R}=\arctan\frac{5}{5}=45^{\circ}$$

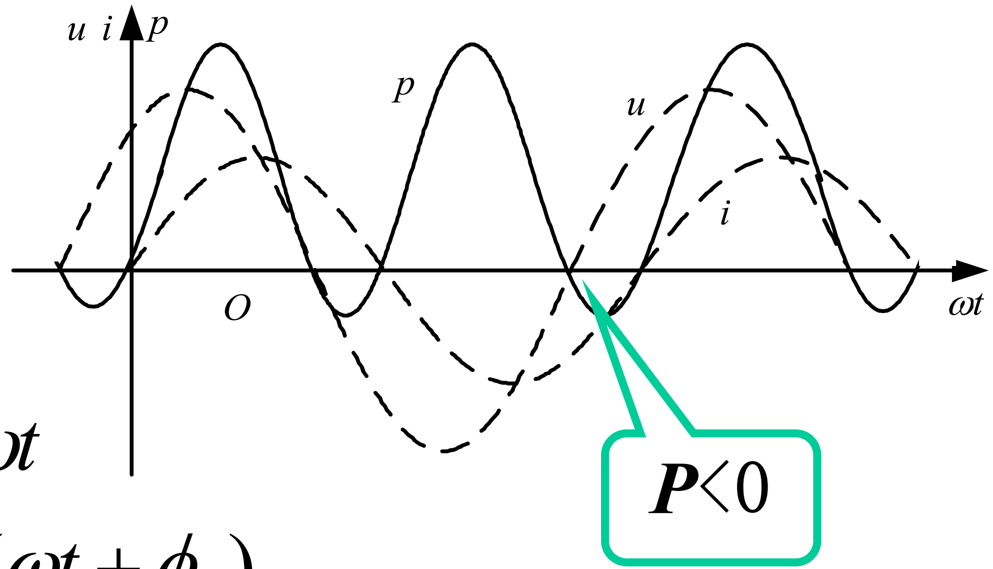
$$U_{C1}=10\times 10=100\mathrm{V}$$

故电压表的读数为**141.1V**，电流表的读数为**10A**。

3.7 正弦交流电路的功率

1. 瞬时功率





设端口电流 $i=\sqrt{2}I\sin\omega t$

端口电压 $u=\sqrt{2}U\sin(\omega t+\phi_{\mathrm{u}})$

$$p=ui=\sqrt{2}U\sin(\omega t+\phi_{\mathrm{u}})\times\sqrt{}$$

$$=2UI\sin(\omega t+\phi_u)\sin\omega t$$

$$=UI\left[\cos\phi_u-\cos(2\omega t+\phi_u)\right]$$

说明储能元件和电源存在能量交换过程。

2. 有功功率（平均功率）

它是指瞬时功率在一个周期内的平均值，用大写字母 P 表示，即

要熟记

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T p\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T\left[UI\cos\phi_u-UI\cos(2\omega t+\phi_u)\right]\mathrm{d}t$$

$$=UI\cos\phi_u=UI\cos(\phi_u-\phi_i)=UI\cos\varphi$$

$$P=UI\cos\varphi$$

$$\boxed{P=UI\cos\varphi=U_R I_R=\frac{U_R^2}{R}=I_R^2 R}$$

总电压 总电流 ***u*** 与 ***i*** 的夹角

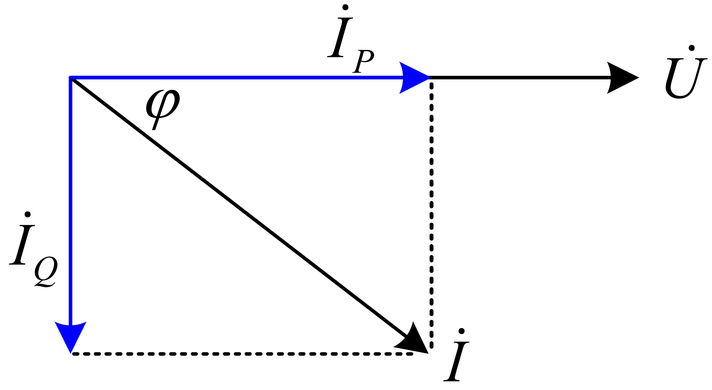
$COS\,\varphi$ —— 功率因数

$$\boxed{-1\leq\cos\phi\leq 1}$$

3. 无功功率

设 $X_{\text{L}} > X_{\text{C}}$

有功功率 $P = UI\cos\phi = UI_P$



$\dot{I}_P$与电压$\dot{U}$同相位，产生平均功率，为电流$\dot{I}$的有功分量

$\dot{I}_Q$与电压$\dot{U}$正交，不产生平均功率，为电流$\dot{I}$的无功分量

工程上为计算无功分量的影响，定义无功功率

$$\boxed{Q = UI\sin\varphi}$$

无功功率 $\boxed{Q = UI\sin\varphi}$

$Q = UI\sin\phi > 0$ 感性无功功率

$Q = UI\sin\phi < 0$ 容性无功功率

纯电感的无功功率为 $Q = UI\sin 90^\circ = UI = I^2\omega L = U^2/(\omega L)$

纯电容的无功功率为 $Q = UI\sin(-90^\circ) = -UI = -U^2\omega C = -I^2/(\omega C)$

4. 视在功率 $\boxed{S = UI}$ 单位：伏安、千伏安

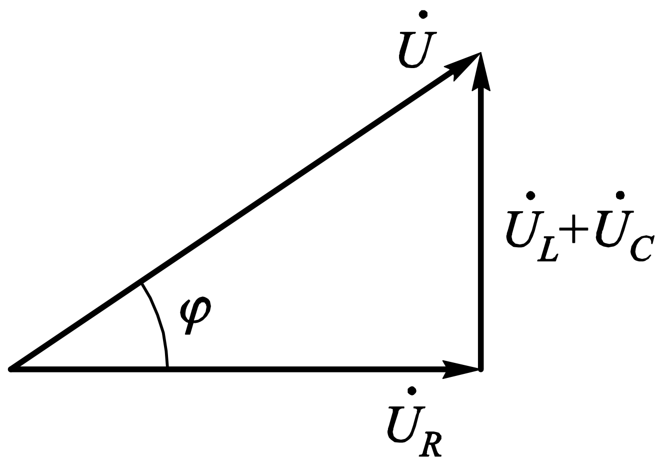
$S = UI$ 是指电源的容量

5. 功率三角形

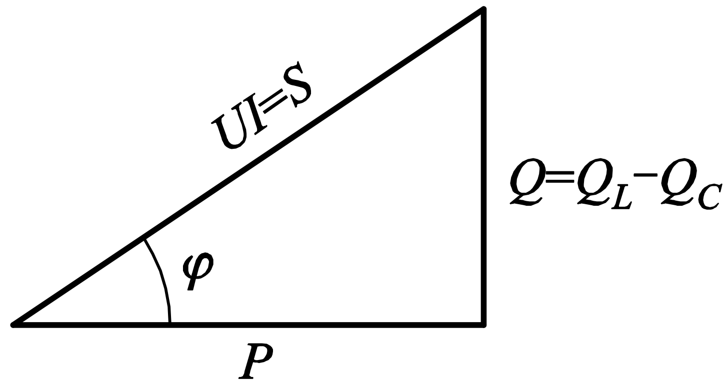
有功功率 $P = UI\cos\varphi$

无功功率 $Q = UI\sin\varphi$

视在功率 $S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}$



(a) 电压三角形



(b) 功率三角形

【例3. 7. 1】在RLC串联电路中，已知电源电压 $\dot{U}=220\angle0^{\circ}\,\text{V}, R=30\Omega, X_{\text{L}}=80\Omega, X_{\text{C}}=40\Omega$。求该电路的功率因数、有功功率、无功功率和视在功率。

【解】 $Z=R+\text{j}(X_{\text{L}}-X_{\text{C}})=30+\text{j}40=50\angle53.1^{\circ}\,\Omega$

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}}{Z}=\frac{220\angle0^{\circ}}{50\angle53.1^{\circ}}=4.4\angle-53.1^{\circ}\,\text{A}$$

$$\cos\varphi=\cos53.1^{\circ}=0.6$$

$$S=UI=220\times4.4=968\ \text{VA}$$

$$P=S\cos\varphi=968\times0.6=580.8\text{W}$$

$$Q=S\sin\varphi=968\times\sin53.1^{\circ}=968\times0.8=774.4\ \text{var}$$

【例3.7.2】已知日光灯等效电路如图所示，其中 $R=1333.3\Omega$，$\omega L=612.3\Omega$，$\dot{U}=220\angle 0^\circ\text{V}$，电路中的电流 $\dot{I}=0.15\angle -24.7^\circ\text{A}$。求（1）功率因数；（2）$P$、$Q$、$S$。

【解】（1）由已知条件可知，功率因数为

$$\cos\varphi=\cos 24.7^\circ=0.9$$

（2）$P=UI\cos\varphi=220\times 0.15\times 0.9\approx 30\text{W}$

或者 $$P=I^2R=0.15^2\times 1333.3\approx 30\text{W}$$

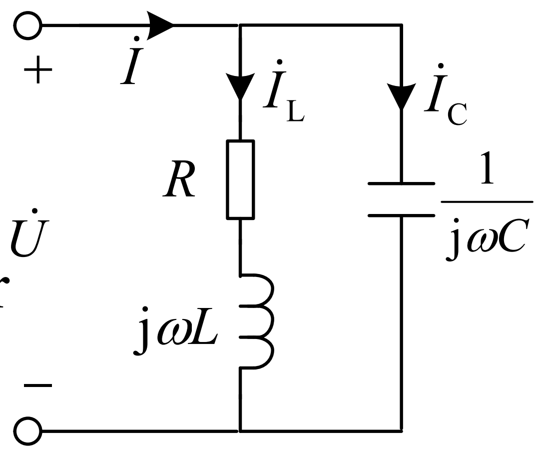
$$Q=I^2X_{\text{L}}=0.15^2\times 612.3=13.78\ \text{var}$$

或者 $$Q=UI\sin\varphi=220\times 0.15\times\sin 24.7^\circ=13.78\ \text{var}$$

$$S=UI=220\times 0.15=33\ \text{VA}$$

或者 $$S=\sqrt{P^2+Q^2}=\sqrt{30^2+13.78^2}=33\ \text{VA}$$

【例3.7.3】在日光灯的等效电路两端并上一个电容，电路如图所示。已知电阻 $R = 1333.3\Omega$，$X_L = 612.3\Omega$，$X_C = 12.3\text{k}\Omega$，外加正弦电压 $u = 220\sqrt{2}\sin\omega t\text{V}$，频率为**50Hz**，负载电流 $\dot{I}_L = 0.15\angle -24.7^\circ \text{A}$，总电流 $\dot{I} = 0.144\angle -18.3^\circ \text{A}$。求电源向负载提供的无功功率。



【解】$Q_L = I_L^2 X_L = 0.15^2 \times 612.3 = 13.78\,\text{var}$

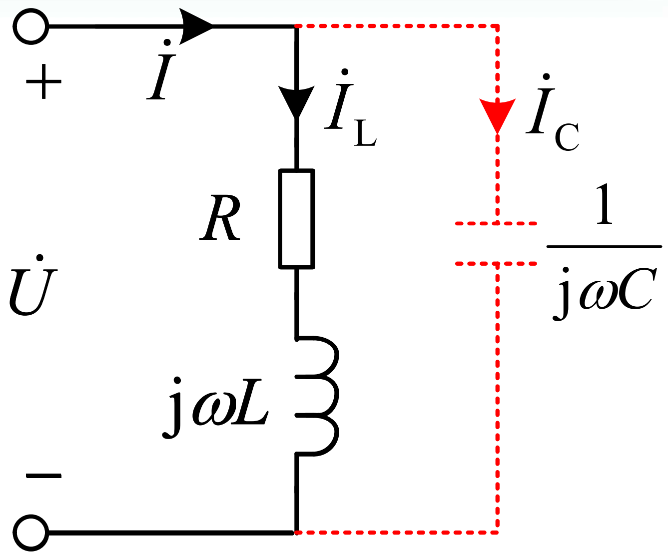
$$I_C = \frac{U}{X_C} = \frac{220}{12.3\times10^3} = 0.018\text{A}$$

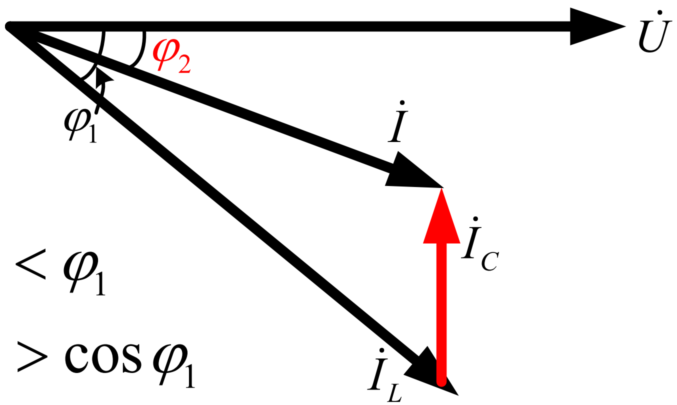
$$Q_C = -I_C^2 X_C = -0.018^2 \times 12.3 \times 10^3 = -3.99\,\text{var}$$

$$Q = Q_L + Q_C = 13.78 - 3.99 = 9.8\,\text{var}$$

或者 $Q = UI\sin\varphi = 220 \times 0.144 \times \sin 18.3^\circ = 9.8\,\text{var}$

感性负载并联电容

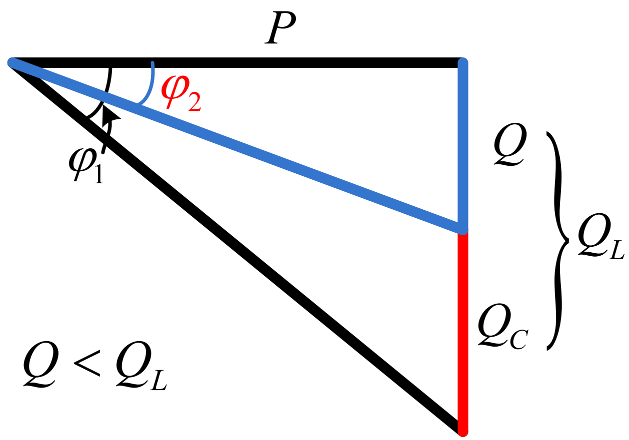




$\varphi_2 < \varphi_1$

$\cos\varphi_2 > \cos\varphi_1$

提高功率因数



$Q < Q_L$

电源提供的无功功率减少，提高电源的带负载能力