微观经济学笔记

ElegantLaTeX 版本

作者：滑翔闪

组织：ElegantLaTeX Program

时间：December 18, 2025

ElegantLaTeX Program

世界趋于均衡

目录

前言

人们总是在试图进行最优化

——Daron Acemoglu

经济学家依赖模型洞察世界，招致批评的地方是使用复杂的模型描述简单的事实。事实上，简单的事实从来缺乏可信、统一的语言。清晰简明的模型是为了统一范式而不是单纯的炫技。清晰地表达实际上非常困难。呼吸是非常自然的事情，但是呼吸背后的生命科学是百年科学的探索之旅，如果没有在足够抽象的高度概括呼吸这一行为，也就没有了后续更高深的生命科学发现。

模型是思维的工具，我们在符合现实的直觉中去建立模型，最终摆脱对于直觉的直观上的依赖发现不同寻常的地方。博弈论可以只是石头剪刀布那样简单的策略游戏，但在博弈论发展中，顺序、信息的重要性在后续发展中被一一揭示。可能 100 年以前人们会说战争最重要的是武力；50 年前的人们会说是策略；现在的人们则会说是信息情报。

现有的经济学基于最优化的思维进行数学建模，但行为经济学发现了人的“理性有限”，因此比起经济学就是资源最优化配置的学科，当代经济学家更认同 Daron Acemoglu 在他的《微观经济学》中前言提到的——人们总是在试图最优化。这意味着人们最优化总受到当前分析工具、认知、环境的限制。

请牢记，微观经济学要建立的是数学表达和经济现象的配对而非炫技，从最优化出发进行建模其实蕴含了种种人性假设。倘若没有数学表达，这些假设势必被当做理所因当进而约束了学科的想象力。

第一章 数理基础

1.1 线性代数

1.1.1 二次型函数与矩阵

一个 n 变量的函数 q 被称为二次型函数, 若这个函数有如下表达式:

$$
\begin{aligned}
q(x_1,x_2,\cdots,x_n) = {} & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
& \cdots \\
& + a_{nn}x_n^2.
\end{aligned}
$$

$a_{ij} = a_{ji}$，则可以写为:

$$
\begin{aligned}
q(x_1,x_2,\cdots,x_n) = {} & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n \\
& + a_{12}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n \\
& \cdots \\
& + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\
& = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \\
& = \mathrm{x}'A\mathrm{x}.
\end{aligned}
$$

也就得到了二次型矩阵

$$
A = \begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{bmatrix}
$$

A 是一个 n 阶对称方阵。
二次型转化必须满足 $a_{ij} = a_{ji}$，不满足时也可以变形

$$
a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i = (a_{ij} + a_{ji})x_ix_j
$$

定义 1.1 (二次型矩阵)

对于 n 阶对称方阵 A:

- 若对任意 n 维向量 x, 都有 $x'Ax \geqq 0$, 称函数 $q(x_1,x_2,\cdots,x_n) = x'Ax$ 或 A 为半正定的;
- $\mathrm{x} \neq 0, x'A\mathrm{x} > 0$, 正定;
- $x'Ax \leq 0$, 半负定;
- $\mathrm{x} \neq 0, \mathrm{x}'A\mathrm{x} < 0$, 负定。

♣

判定矩阵可以通过特征值和行列式进行判定：

命题 1.1 (特征值与矩阵正定)

对于矩阵 A

- 正定，当且仅当特征值 $\lambda_i > 0, \forall i = 1, 2, \cdots, n$
- 负定，当且仅当特征值 $\lambda_i < 0, \forall i = 1, 2, \cdots, n$
- 半正定，当且仅当特征值 $\lambda_i \geqq 0, \forall i = 1, 2, \cdots, n$
- 半负定，当且仅当特征值 $\lambda_i \leqq 0, \forall i = 1, 2, \cdots, n$
- 是非定，若至少有一个特征值是正的，至少有一个特征值是负的。

命题 1.2 (正定矩阵和行列式)

正定和行列式关系

一个 **n** 阶对称矩阵为正定矩阵，充要条件是主子式全部为正。

例如要求 N 阶对称矩阵为正定，必须其元素组成的 1 阶到 n 阶行列式全部大于 0 才行。

$$|A_1| = A_{11} > 0;$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0;$$

$$\cdots$$

$$|A_n| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

矩阵为负定的充分必要条件是主子式交叉正负。

$$|A_1| < 0, |A_2| > 0, |A_3| < 0, \cdots, (-1)^n|A_n| > 0$$

1.2 单值函数和性质

1.2.1 微积分

连续（上半、下半）、可导、可微

中值定理、泰勒展开

齐次函数和欧拉定理

隐函数存在定理

1.2.2 函数的凹凸性

定义 1.2 (凹函数（严格和非严格）)

设 X 为凸集,

对于函数 $f: X \to \mathbb{R}$, 若对任意 $x, x' \in X$ 和任意的 $t \in [0,1]$, 我们有

$$f(tx + (1-t)x') \geq tf(x) + (1-t)f(x'),$$

则称 f 在 X 上是凹的 (Concave)。

若对所有的 $x \neq x' \in X$ 和 $0 < t < 1$, 有

$$f(tx + (1-t)x') > tf(x) + (1-t)f(x'),$$

则称函数 f 在 X 上是严格凹的 (Strictly Concave)。♣

命题 1.3 (凹凸函数)

一点性质

- 线性函数同时是凹和凸（大于等于和小于等于最后变成等于）
- 凸函数之和为凸函数，凹函数之和为凹函数
- 凸（凹）加严格凸（凹）为严格凸（凹）

把凹凸和的性质推广，如果 $f: X \to \mathbb{R}$ 凹，等价于对于任意 $x_i \in x$ 和 $t_i \in [0,1]$, 有

$$f(t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_mx_m) \geqq t_1f(x_1) + \cdots + t_mf(x_m)$$

♠

对于可微函数来说，往往使用二阶偏导矩阵正定性判断凹凸性。使用海森矩阵来判断。

例题 1.1 海森矩阵判断 一个简单例子考试要考

对于

$$f(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$$

一阶

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{1}{x_1}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{1}{x_2}$$

二阶

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{x_1}\right) = -\frac{1}{x_1^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{x_2}\right) = -\frac{1}{x_2^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{x_1}\right) = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{x_2}\right) = 0$$

最后得到海森矩阵

$$H(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{x_1^2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{x_2^2}\end{pmatrix}$$

科夫道格拉斯函数就是严格凹的。

1.3 静态最优化

1.3.1 无约束优化

定义 1.3 (局部最优)

定义

若对 x^* 的某些邻域内所有的 x, 都有 $f(x^*) \geqq f(x)$, 则称函数在点 x^* 处有局部极大值。

若在 $\tilde{x}$ 的一些邻域内，对所有的 $x \neq \hat{x}$, 总有 $f(\tilde{x}) \leqq f(x)(f(\tilde{x}) < f(x))$, 则称函数在 $\tilde{x}$ 处有局部极小值 (唯一局部极小值)。

同理可以定义全局最优

定义 1.4 (全局最优)

定义

函数定义域内的一切 x, 都有 $f(x^*) \geqq f(x)$ $(f(x^*) > f(x))$, 则称函数在 x^* 有全局 (唯一) 最大值；

函数定义域内的一切 x, 都有 $f(x^*) \leqq f(x)$ $(f(x^*) < f(x))$, 则称函数在 x^* 有全局 (唯一) 最小值。

一个特殊的对于全局最优的定理

命题 1.4 (威尔斯特拉斯定理)

任意上半 (下半) 连续函数在紧集上都有最大值 (最小值), 并且其极值的集合是紧集。

实际上在证明竞争市场均衡存在性和博弈均衡解存在性时，往往不但需要证明最优结果存在，还需要证明最优结果的集合是紧的。

定理 1.1 (内点极值点的一阶必要条件)

设 $X \subseteq \mathbb{R}^n$。

若可微函数 $f(x)$ 是在内点 $x^* \in X$ 处达到了一个局部极大值或极小值，则 x^* 为如下联立方程组的解：

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_1}=0$$
$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_2}=0$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_n}=0$$

定理 1.2 (内点极值点的二阶必要条件)

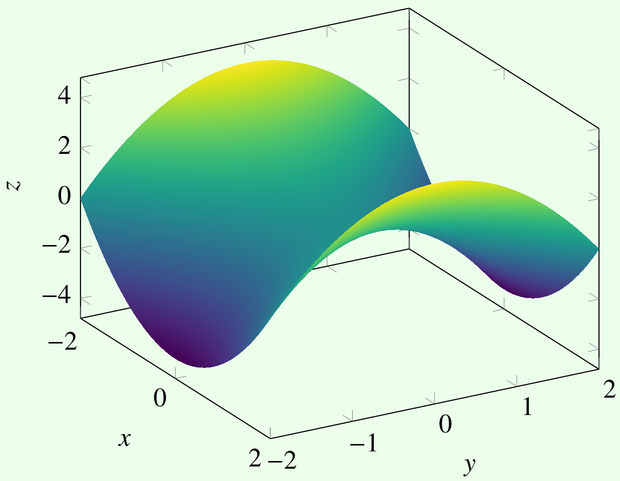
设 $f(\mathrm{x})$ 在 $X \subseteq \mathcal{R}^n$ 上是连续二次可微的。

1. 若在内点 x^* 处 $f(x)$ 达到了一个局部极大值，则 $\mathrm{H}(x^*)$ 是负半定的。
2. 若达到了一个局部极小值，则 (x^*) 是正半定的。

♡

满足一阶条件的点为驻点。驻点可能是局部最小、局部最大、鞍点[1]。

$z = x^2 - y^2$ （鞍点）



1.3.2 等式约束

定义 1.5 (等式约束)

等式约束优化问题具有如下形式：

设有定义在 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 上的 n 元函数 f，并且有 m 个约束条件。这里的 $m < n$，其优化问题是：

$$
\begin{aligned}
\max_{x_1,\cdots,x_n} \quad & f(x_1,\cdots,x_n) \\
\text{s.t.} g^1(x_1,\cdots,x_n) &= 0, \\
g^2(x_1,\cdots,x_n) &= 0, \\
&\vdots \\
g^n(x_1,\cdots,x_n) &= 0.
\end{aligned}
$$

♣

等式优化的重要结果为拉格朗日定理，给出了最优化问题的必要条件。

把等式约束写成拉格朗日函数：

$$\mathcal{L}(x,\lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g^j(x)$$

定理 1.3 (等式约束内点极值一阶必要条件)

条件：

设 $f(x)$ 与 $g^j(x), j = 1,\cdots,m,$ 是定义域 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 上的连续可微实值函数。

设 x^* 是 X 的一个内点，且 x^* 是 f 的一个极值点 (最大值或最小值)——在这里 f 受到 $g^j(x^*) = 0$ 的

[1]例如马鞍、两个驼峰的中间凹陷，从一些剖面看驻点是局部最大，从一些剖面看是局部最小

约束，其中 $j=1,\cdots,m$。

若梯度向量 $Dg^j(x^*)=0, j=1,\cdots,m$ 是线性独立的，那么总会存在唯一一个数 $\lambda_j^*, j=1,\cdots,m$, 使得：

$$\frac{\partial\mathcal{L}(x^*,\Lambda^*)}{\partial x_i}=\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_j^{\star}\frac{\partial g^j(x^*)}{\partial x_i}=0,\quad i=1,\cdots,n.$$

命题 1.5 (等式约束内点极值的二阶充分条件)

条件：

设 f 和 $g^1,\cdots,g^m$ 是二阶连续可微函数，$x*$ 满足定理1.3.2中的必要条件。令加边海森行列式

$$|\bar{H}_r|=det\begin{pmatrix}0&\cdots&0&\frac{\partial g^1}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial g^1}{\partial x_r}\\ \vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&0&\frac{\partial g^m}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial g^m}{\partial x_r}\\ \frac{\partial g^1}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial g^m}{\partial x_1}&\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x_1\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x_1\partial x_r}\\ \vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \frac{\partial g^1}{\partial x_r}&\cdots&\frac{\partial g^m}{\partial x_r}&\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x_r\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x_r\partial x_r}\end{pmatrix},\quad r=m+1,2,\cdots,n$$

- 若 $(-1)^r-m+1|\bar{H}_r(x^*)|>0, r=m+1,\cdots,n$, 则 x* 是优化问题的局部极大值
- 若 $|\bar{H}_r(x^*)|<0, r=m+1,\cdots,n$, 则 x^* 是优化问题的局部极小值。

例题 1.2 如果只有一个等式约束 如果只有一个等式约束，也就是 m=1 时，此时海森行列式为

$$|\bar{H}|=\begin{vmatrix}0&g_1&g_2&\cdots&g_n\\ g_1&\mathcal{L}_{11}&\mathcal{L}_{12}&\cdots&\mathcal{L}_{1n}\\ g_2&\mathcal{L}_{21}&\mathcal{L}_{22}&\cdots&\mathcal{L}_{2n}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ g_n&\mathcal{L}_{n1}&\mathcal{L}_{n2}&\cdots&\mathcal{L}_{nn}\end{vmatrix}.$$

一阶条件意味着

$$\lambda=\frac{f_1}{g_1}=\frac{f_2}{g_2}=\cdots=\frac{f_n}{g_n}.$$

此时，在满足一阶条件之后，极小值约束条件为

$$|\bar{H}_2|>0,|\bar{H}_3|<0,|\bar{H}_4|>0,\cdots,(-1)^n|\bar{H}_n|>0.$$

极大值约束条件为：

$$|\bar{H}_2|<0,|\bar{H}_3|<0,|\bar{H}_4|<0,\cdots,|\bar{H}_n|<0.$$

1.3.3 不等式约束

定义 1.6 (不等式约束最优化)

形式

$$\max f(x)$$
$$\text{s.t.} g_i(x) \leqq d_i, \quad i = 1, 2, \cdots, k.$$

若对所有使得约束按等式成立的 x, 梯度向量 $Dg_1(x), Dg_2(x), \cdots, Dg_k(x)$ 是线性无关的，则称 x 满足约束规格性 (constrained qualification) 条件，这里，符号“D”表示偏微分算子。♣

定理 1.4 (库恩塔克定理)

设 x 为不等式约束最优化问题的解，且它满足约束规格性条件，则存在由库恩 - 塔克 (K-T) 乘子 $(\lambda_i \geq 0, i = 1, \cdots, k)$ 组成的集合，使得

$$Df(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i Dg_i(x).$$

进一步，下面的互补松弛条件成立：

$\lambda_i \geq 0, \quad$ 对所有的$i = 1, 2, \cdots, k$.

$\lambda_i = 0, \quad$ 若$g_i(x) < d_i$.

♡

笔记 [库恩塔克定理的理解] 注意，这里是库恩塔克定理而不是计算时使用的库恩塔克充分条件。这里主要是帮助理解：

库恩塔克条件乘子 λ 限制了非负，拉格朗日则不确定。

互补松弛条件就是充分讨论哪些约束可能是非必要的（或者看作执行的严格程度），如果这个约束其实非常严格，例如要求大于等于，但实际上只用到了大于的约束，那么乘子为 0。

库恩塔克充分条件使用时总是求 $f(x)$ 最大值约束，如果求 $f(x)$ 最小值就使用 $-f(x)$ 转化求最大值。

定理 1.5 (库恩塔克充分条件)

设 f 是凹函数，$g_i, i = 1, \cdots, k$ 是凸函数。若 x 满足上述定理给出的库恩塔克一阶条件，则 x 是该约束最优化问题的全局解。♡

当约束集合（令 $C = \{x \in \mathcal{R}^n : g(x) \leqq d\}$）具有凸性时，我们可将上述定理所需的条件减弱。

定理 1.6 (减弱限制的库恩塔克充分条件)

设 f 为拟凹函数，C 为凸集 (若 g 是拟凸的，则该结果成立)。若 x 满足库恩塔克一阶条件，则 x 是约束优化问题的全局解。♡

例题 1.3 库恩塔克条件使用 考虑如下问题

$$\max f(x)$$
$$\text{s.t.} g_i(x) \leqq d_i, \quad i = 1, 2, \cdots, k,$$
$$x \geqq 0.$$

对应拉格朗日函数为：

$$L(x,\lambda)=f(x)+\sum_{l=1}^{k}\lambda_l[d_l-g_l(x)]+\sum_{i=1}^{n}\mu_i x_i,$$

其中 μ_j 为约束 x_j 非负的拉格朗日乘子。
此时有一阶条件

$$\begin{aligned}
\frac{L(x,\lambda)}{\partial x_i}=\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}-\sum_{l=1}^{k}\lambda_l\frac{\partial g_l(x)}{\partial x_i}+\mu_i=0,\quad i=1,2,\cdots,n.\\
\lambda_L\geqq 0,\quad l=1,2,\cdots,k.\\
\lambda_L=0,\quad 若 g_l(x)<d_l.\\
\mu_i\geqq 0,\quad i=1,2,\cdots,n.\\
\mu_i=0,\quad 若 x_i>0.
\end{aligned}$$

如果最优结果要求 $x_j>0,\quad i=1,2,\cdots,n,$
式子可以进一步简化，把 $x_i=0$ 的情况通过乘积形式讨论：

$$\frac{L(x,\lambda)}{\partial x_i}=\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}-\sum_{l=1}^{k}\lambda_l\frac{\partial g_l(x)}{\partial x_i}\leqq 0$$

写为矩阵形式

$$\begin{aligned}
Df-\lambda Dg\leqq 0\\
x[Df-\lambda Dg]=0
\end{aligned}$$

1.3.4 包络定理

定理 1.7 (包络定理)
考虑以下最大化问题

$$M(a)=\max_x f(x,a).$$

最大值函数 $M(a)$ 是参数 a 的函数。如果解为 $x(a)$, 此时有 $M(a)=f(x(a),a)$。
这时候需要关注的是 $M(a)$ 如何随着参数 a 的变化而变化，因此对此分析，得到：

$$\frac{dM(a)}{da}=\frac{\partial f(x,a)}{\partial a}|_{\mathrm{x=x(a)}}.$$

也就是说如果 x 为最优选择且保持不变，则 M 关于 a 的导数就是对 f 求关于 a 的偏导数。
最关键的是，分析问题时，我们不用再考虑 $x^*(a)$ 的变化。

证明 [包络定理的证明] 证明如下
考虑一般形式的最优化问题

$$\begin{aligned}
M(a)=\max_{x_1,x_2} g(x_1,x_2,a)\\
\mathrm{s.t.}h(x_1,x_2,a)=0.
\end{aligned}$$

得到拉格朗日函数

$$\mathcal{L} = g(x_1, x_2, a) - \lambda h(x_1, x_2, a)$$

此时有一阶条件

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial h}{\partial x_1} &= 0, \\
\frac{\partial g}{\partial x_2} - \lambda \frac{\partial h}{\partial x_2} &= 0, \\
h(x_1, x_2, a) &= 0.
\end{aligned}$$

一阶条件即确定了最优选择函数 $(x_1(a), x_2(a), a)$, 它进一步确定了最大值函数：

$$M(a) \equiv g(x_1(a), x_2(a))$$

$$\begin{aligned}
\frac{dM(a)}{da} &= \left.\frac{\partial \mathcal{L}(x, a)}{\partial a}\right|_{x=x(a)} \\
&= \left.\frac{\partial g(x_1, x_2, a)}{\partial a}\right|_{x_i = x_i(a)} - \lambda \left.\frac{\partial h(x_1, x_2, a)}{\partial a}\right|_{x_i = x_i(a)}
\end{aligned}$$

注[对包络定理参数求导的说明] 对偏导数进行解释要格外小心：它们是给定最优解 x_1 和 x_2 处，g 和 h 关于 a 的偏导数。关键是最优解 x^* 不变的情况。

正因如此，这部分内容属于静态最优化而不是动态最优化。

1.3.5 不动点定理

布劳威尔不动点

角谷不动点

1.4 动态最优化

1.5 微分方程

第二章 个体决策

2.1 偏好与选择

定义 2.1 (集合与偏好)

集合，可能选择的被选物集合。集合元素满足互斥性，只能选择其中之一。这意味着这些选择只能选择一样，且包含了所有可能。

$$\{a, b, a\&b\}$$

集合的关系使用偏好关系 (preference relation) 描述：

- 弱偏好关系：$\precsim\succsim$
- 强偏好关系：$\succ\prec$
- 无差异关系：$\sim$

强偏好能推出来弱偏好。其中弱偏好指的是 y 至少和 x 一样好。

$$x \prec y \Rightarrow x \precsim y$$

强偏好意味着

$$x \succ y \Leftrightarrow x \succsim y \& y \not\precsim x$$

无差异关系意味着

$$x \sim y \Longleftrightarrow x \precsim y \& x \succsim y$$

笔记 [偏好的理解] 不能把偏好当成数学的比大小，因为偏好和个体效用相关。

定义 2.2 (偏好)

偏好具备一些性质。

- 完备性：$\forall x, y \in x$, 都有 $x \precsim y$ 或者 $y \precsim x$ 或者二者都成立。
- 传递性：$\forall x, y, z \in x$, 若有 $x \precsim y$ 和 $y \precsim z$ 则能得到 $x \precsim z$。

注意，定义使用的是弱偏好符号而不是强偏好，是因为基于弱偏好才能定义无差异关系；弱偏好定义才具有完备性。简而言之，**弱偏好是基本关系，强偏好和无差异关系是其派生**。

- 完备性：说明个体评估了所有的备选物——选择经过了深思熟虑。
- 传递性：比较链条不可能形成环状。

完备性和传递性加起来意味着个体比较了所有可能的关系。因此 $\precsim\succsim$ 包含了完备性和传递性的假设，也说明个体是在进行**理性选择**。

偏好不理性的原因可能来自投票带来的康多塞悖论 (Condorcet paradox)、习惯的改变。

笔记 [偏好与理性] 理性认识的补充

经济学通过偏好、效用强调理性假设，早期行为经济学使用主观期望来刻画非理性行为。例如简单的资产定价——$P = E[M \cdot \tilde{X}]$, 其中 M 为随机的概率。$P = E[M \cdot \tilde{X}|s]$, 其中 s 可能是信息传递，通过信息传递改变偏好和信念。

命题 2.1 (偏好的性质)

如果偏好是理性的，则有：

- 强偏好则 <> 非反身 (不能自己和自己比较)，强偏好具有传递性。
- 相关关系 $\sim$ 具有反身性并具有传递性和对称性。
- $x \succ y \succsim z \Rightarrow x \succ z$

证明 [偏好性质证明]-期末不考

第一条：

先证明非反身，使用反证法：

如果强偏好具有反身性，则此时同时有 $x \precsim x, x \not\precsim x$，矛盾。前者是强偏好推弱偏好，后者是强偏好通过弱偏好表示。

接下来证明传递性：$x \prec y, y \prec z \Rightarrow x \prec z$

$x \prec y \Rightarrow x \precsim y, y \not\precsim x$

$y \prec z \Rightarrow y \precsim z, z \not\precsim y$

弱偏好的传递性可以得到 $x \lesssim z$

再利用反证法，如果满足 $z \lesssim x$，通过传递性可以得到 $z \lesssim y$，与 $y \prec z$ 定义矛盾。

第二条：

因为自己和自己等价，互相换位再加性质即可证明。

第三条：

先利用强偏好推出弱偏好，得到 $x \succsim z$。再使用反证法假设 $z \succsim x$ 成立，可以推出 $x \lesssim y$, 与 $x \succ y$ 条件矛盾。

2.1.1 效用

定义 2.3 (效用)

一个效用函数 u 是将一个具体的数赋予给 X 中的一个元素。按照这些数来对应到选择集合 X 中的元素进行排序。

u:$X \longrightarrow R$。这时候用 u 表示一个偏好关系。此时如果有 $\forall x, y \in X$ 且 $x \succsim y$，

则有

$$x \succsim y \Rightarrow u(x) \geqslant u(y)$$

笔记 [效用函数的理解]

偏好到效用，就是序数到基数大映射过程。

代表偏好函数关系的效用函数并不唯一，任何严格递增的函数 $f(u(x))$ 都是个新的效用函数, 和 $u(x)$ 代表的偏好关系相同。真正重要的是对备选物的排序, 至于绝对数值并不重要。效用函数中不随任何严格递增转换而改变的性质, 称为序数序序数数序数 (ordinal) 性质。转换中不能保留的则是基数性质。

某个偏好关系能否用效用函数表示, 与理性假设密切相关。

命题 2.2 (理性偏好关系)

只有理性的偏好关系才能使用效用函数表示，换而言之，$\succsim$ 表示必然是完备和传递的。

证明 [偏好理性的完备性和传递性] 证明如下

完备性：$x, y \in X$，则要么 $u(x) \geq u(y)$，要么 $u(y) \geq u(x)$。u 是表示偏好关系的效用函数，意味着要么 $x \precsim y$ 要么 $y \precsim x$。

传递性证明也类似，关键是 u 到偏好关系之间的转换。

笔记 [任何理性偏好都能用效用函数描述吗？]

如果偏好空间有限，则存在效用函数能表达偏好关系。

但是并非任何情况都成立，并非。举例子，可能存在完备且传递，但是不连续因此难以表达的效用函数。

2.1.2 选择规则

定义 2.4 (选择结构)

选择结构由 $(\mathscr{B}, C(\cdot))$ 由两个部分组成。前者是集族，包含了各种可能的被选物。后者是可接受的备选物。其实就是 $(B, C(B))$ 的集合。C(B) 已经是一个互斥性质的选择结果集合。

例题 2.1 选择规则 一个选择规则的例子

$X = \{x, y, z\}, \mathscr{B} = \{(x, y\}, \{x, y, z\}\}$。此时一种可能的选择结构为 $(\mathscr{B}, C_1(\cdot))$。此时对应的选择规则 C_1 为 $C_1(\{x, y\}) = \{x\}$且$C_1(\{x, y, z\}) = \{x, y\}$。也就是预算为 x，y 时消费者会选择 x；预算为 x,y,z 时，消费者会选择 x 或者 y。

这种函数形式可以表达显示偏好弱公理（Weak Axiom of Revealed Preference, WARP）[1]。

定义 2.5 (显示偏好弱定理 WARP)

显示偏好弱定理的公理表述。

若对于满足 $x, y \in B$ 的 $B \in \mathscr{B}$ 我们有 $x \in C(B)$，则对于满足 $x, y \in B'$ 和 $y \in C(B')$ 的任何 $B' \in \mathscr{B}$ 我们也必有 $x \in C(B')$。

给定选择结构 $(\mathscr{B}, C(\cdot))$，定义显示偏好关系 $\succsim^*$

$x \succsim^* y$ 读作“x 被显示至少与 y 一样好”。

显示偏好不必是完备或者传递的。其可比较性需要曾同时出现在选择集合中过。

面对选择集 $B_1 = \{a, b\}$，他选择了 a。

面对选择集 $B_2 = \{b, c\}$，他选择了 b。

于是我们得到[2]原因还在于中间使用货币支出表示了效用：

$$a \succeq^* b, \quad b \succeq^* c,$$

但由于 a 与 c 从未在同一个选择集中出现，故 a 与 c 是**不可直接使用传递性判断**的。

例题 2.2 判断对比是否满足显示偏好

选择结构判断题目 1：

$$\begin{cases} C_1(\{X, Y\}) = \{X\} \\ C_1(\{X, Y, Z\}) = \{X, Y\} \end{cases}$$

选择结构判断题目 2：

[1] 最早由保罗·萨缪尔森（Paul Samuelson）在其经典著作《经济分析的基础》(Foundations of Economic Analysis）中提出，该书于 1947 年出版。推广到多个商品组合就是GARP（Generalized Axiom of Revealed Preference，广义显示偏好公理）。它考虑多步的间接偏好关系，防止出现循环偏好。

[2] 显示偏好没有无差异关系，等要到 Afriat (1967) 的 GARP 框架中才被正式允许。

$$\begin{cases} C_2(\{X,Y\}) = \{X,Y\} \\ C_2(\{X,Y,Z\}) = \{X\} \end{cases}$$

第一个满足显示偏好，第二个不满足。直觉上，显示偏好本质上是反应的是消选择的一致性。

第一组就像是，xyz 放一起必须舍弃时，舍弃 z 保全了 xy；但是如果要在 xy 间做选择，最后还是选了 x，前后层层递进，逻辑一致。

第二组就像是，明明 xyz 做选择就直接舍弃了 y 和 z，在 xy 间做选择时却又选择同时保留了 xy，前后不一致。

例题 2.3 违背显示偏好的例子 以下例子违背了显示偏好：

首先对于 $C_2(\{x,y,z\}) = \{x,y\}$，我们可以得到以下显示偏好结论：

$$y \succsim^* x, x \succsim^* y, x \succsim^* z, y \succsim^* z$$

此时如果有 $C_2(\{x,y\}) = \{x\}$，x 被显示比 y 更受偏好。此时选择结构违背了弱公理。

更直观的，可以把 x 当做左袜子，y 当做右袜子，z 是围巾。

例题 2.4 显示偏好满足 再额外举一个例子，首先有显示偏好：$C_i(\{x,y\}) = \{x\}$，意味着显示偏好 $x \succsim^* y$。

接下来假设有一个新的选择结构 $C_j(\{x,y,z\})$，在满足显示偏好的情况下, 我们可以预料到结果可能包含 $= x; = z; = x, z$。

2.1.3 偏好关系和选择规则之间的关系

其实就是显示偏好和偏好之间的关系。偏好要求是理性的。

两个问题：

1. 决策者有理性偏好关系，那么其在 $\mathscr{B}$ 中的预算集决策中必然产生满足弱公理的选择结构吗？（**从偏好到显示偏好**）
2. 如果某个人预算集族 $\mathscr{B}$ 上的选择行为满足弱公理的选择结构描述，那么必然存在能与这些选择相符合的理性偏好关系吗？（**显示偏好到偏好**）

命题 2.3 (第一个命题)

假设 $\succsim$ 是个理性偏好，则其生成的选择结构 $(\mathscr{B}, C^*(\cdot,\succsim))$ 满足弱公理。

证明 [理性偏好一定满足弱公理] 证明如下

先任意构造出一个满足显示偏好的选择结构：

在 $B \in \mathscr{B}$ 中，有 $x, y \in B$ 和 $x \in C^*(B,\succsim)$，在这个情况里，体现的偏好为 $x \succsim y$。

接下来需要证明这个显示偏好在任意构造的 $B' \in \mathscr{B}$ 中也成立。

在任意构造的这个集合中，$x, y \in B'$。

若显示偏好满足，则有 $x \in C^*(B',\succsim)$——这是我们想证明的。

此时，在 $y \in C^*(B',\succsim)$ 成立的情况下，说明对于 $\forall z \in B'$, 有此时显示偏好体现出的 $y \succsim z$。

由于 $y \succsim z$ 和 $x \succsim y$ 来自理性偏好, 所以可以使用传递性 $x \succsim z$。

$x \in C^*(B',\succsim)$。

举一个具体的例子就是一开始我们得到了，$C(\{x,y\}) = (\{x\})$

然后出现一个新的选择结构 $C(\{x,y,z_1,...,z_n\}) = (\{?,y\})$。那么? 中一定包含 x。

笔记 [补充] 满足显示偏好弱公理（WARP）的偏好不一定就是理性的。例如孔塞多悖论

$$C(\{X,Y\}) = \{X\} \Longrightarrow \text{显示} X \succ^R Y$$

$$C(\{Y,Z\}) = \{Y\} \Longrightarrow \text{显示} Y \succ^R Z$$

$$C(\{X,Z\}) = \{Z\} \Longrightarrow \text{显示} Z \succ^R X$$

$$C(\{X,Y,Z\}) = \{X,Y,Z\}$$

实际上其违背了传递性。

命题 2.4 (第二个命题)

如果选择结构 $(\mathscr{B}, C(\cdot))$ 满足以下条件：

1、满足弱公理

2、X 所有包含三个元素及其三个元素以下的子集都在 $\mathscr{B}$ 之中。

则存在能理性化 $\mathscr{B}$ 的选择规则的理性偏好关系 $C(B) = C^*(B, \succsim)$ 且这样的理性偏好是唯一的。

证明 [满足弱公理和其他限制，能得到理性偏好] 证明如下

实际上孔塞多悖论就没有满足第二个条件。

先证明显示偏好是理性的，满足完备性和传递性。

由于三个元素及其三个元素以下的子集都在 $\mathscr{B}$ 之中，例如 $\{x,y\} \in \mathscr{B}$。必然存在 $x \succsim^* y$ 或者 $y \succsim^* x$，完备性成立。

接下来证明传递性。

随意挑选两个元素的子集，假设其满足 $x \succsim^* y$,$y \succsim^* z$。此时一定存在 $\{x,y,z\} \in \mathscr{B}$。我们想要通过证明 $x \in C(\{x,y,z\})$ 来证明传递性。

此时如果是 $y \in C(\{x,y,z\})$，使用显示偏好证明 x 属于；如果是 $z \in C(\{x,y,z\})$, 那么显示偏好 y 也属于，再得到 x 属于。

接下来证明用理性偏好构建的集合等于显示偏好的选择结构 $C(B) = C^*(B, \succsim^*)$。

$x \in C(B)$, 对于 $\forall y \in B$ 有 $x \succsim^* y$，也就满足了显示偏好。此时 $x \in C^*(B, \succsim^*)$。x 的任意性说明了 $C(B) \subset C^*(B, \succsim^*)$。

然后假设 x 来自选择结构 $x \in C^*(B, \succsim^*)$，显示偏好说明 $y \in B$ 则 $x \succsim^* y$。此时存在集合 $B_y \in \mathscr{B}$，满足 $x, y \in B_y, x \in C(B_y)$。也就是 $C^*(B, \succsim^*) \subset C(B)$。

唯一性，由于其包含了所有两个元素的子集，因此基本固定了。

再次体会一下，理性的思想含义是个体思考了所有可比的情况，而“X 所有包含三个元素及其三个元素以下的子集”就是在直觉上描述了这一点。

笔记 [显示偏好的理解] 理性的偏好空间具有完备性、传递性；显示偏好并没有要求以上性质，显示偏好体现的是一致性。所以显示偏好的定义才是，对于 $B \in \mathscr{B}$ 显示出的偏好，应当在 $B' \in \mathscr{B}$ 也满足。这体现的就是这个偏好表现的一致性。重点是不要违反以前体现出的选择原则。

2.2 消费者选择

2.2.1 商品

假设商品种类有限，为 L 种，使用商品向量和商品束表示

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_L \end{bmatrix}$$

这时候 x 被看作商品空间 R^L 中的一点。

商品集可能受到约束，例如不可能超过 24 小时的闲暇；限制为正整数；为了生存至少需要 n 个商品。

2.2.2 价格

对应的有价格货币约束。在**市场完备性货普遍性原则**下，价格可以使用向量表示：

$$p = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_L \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^L$$

价格没有理由一定要为正，例如污染企业让消费者消费时也伴随着对污染的支付成本。

此时再假设商品价格不受单个消费者的影响，为**价格接受假设**。单个消费者的需求对价格总需求的影响很小。

消费者的财富水平为 w, 可以得到：

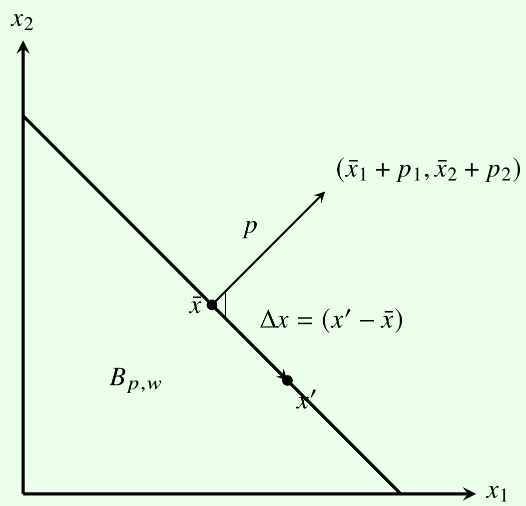
$$p \cdot x = p_1 x_1 + \cdots + p_L x_L \le w$$

定义 2.6 (瓦尔拉斯预算集或者叫竞争性预算集)

瓦尔拉斯预算集或说竞争性预算集 $B_{p,w} = \{x \in \mathbb{R}_+^L : p \cdot x \le w\}$, 是由消费者在面对市场价格 p 和财富 1v 时的所有可行消费束组成的集合。
给定价格 p 和财富 w，消费者的问题就是从 $B_{p,w}$ 中选择一个消费束 x。
。

$\{x \in \mathbb{R}_+^L : p \cdot x = w\}$ 是预算超平面，其确定了预算集的上边界，斜率描述了商品的交换比例

以商品数为 2 的情况来看，同一点对应的价格向量和数量向量其实为垂直状态。



命题 2.5 (瓦尔拉斯集是凸集)

瓦尔拉斯预算集 $B_{p,w}$ 是个凸集：

$$x \in B_{p,w}, x' \in B_{p,w} \longrightarrow \alpha x + (1-\alpha)x' \in B_{p,w}$$

证明 [瓦尔拉斯集为凸集] 证明如下

首先注意到 x 和 x' 都是非负的，因此 $x' \in \mathbb{R}_+^L$; 其次，因 $p \cdot x \le w$ 和 $p \cdot x' \le w$，我们有 $p \cdot x' = \alpha(p \cdot x) + (1-\alpha)(p \cdot x') \le w$。

2.3 经典需求理论

2.3.1 偏好与效用

2.3.1.1 偏好的约束

例题 2.5 字典序

有一个字典空间 $R * R$,

$(x1, x2)(y1, y2) \in R * R$ 属于字典集合。

如果 $(x1, x2) \succsim (y1, y2)$

意味着，要么 $x1 > y1$; 要么 $x1 = y1, x2 > y2$。

简而言之，字典序就是 x 决定了偏好程度，x 相同，再比较 y。

这个偏好是理性的吗？

完备性。

对于任意 $A = (x_1, x_2)$ 和 $B = (y_1, y_2)$，我们比较它们的第一个维度 x_1 和 y_1：

1. 若 $x_1 > y_1$：根据定义，$A \succsim B$ 成立。
2. 若 $y_1 > x_1$：根据定义，$B \succsim A$ 成立。
3. 若 $x_1 = y_1$：我们比较第二个维度 x_2 和 y_2：

传递性。

设 $A \succsim B$ 且 $B \succsim C$，其中 $C = (z_1, z_2)$。我们需证 $A \succsim C$。

第一步：第一维度

- $A \succsim B \implies x_1 \geq y_1$。
- $B \succsim C \implies y_1 \geq z_1$。

因此，必然有 $x_1 \geq z_1$。

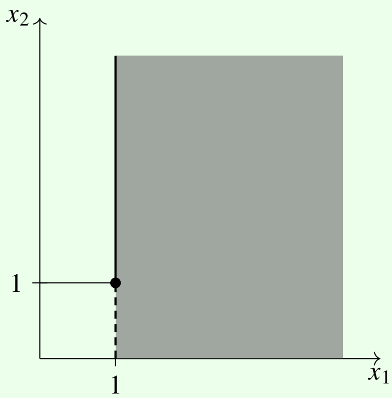
第二步： $x_1 = z_1$ **的情况**若 $x_1 = z_1$ 成立，则结合第一步的结论，必有 $x_1 = y_1 = z_1$。

- $A \succsim B$ 且 $x_1 = y_1 \implies x_2 \geq y_2$。
- $B \succsim C$ 且 $y_1 = z_1 \implies y_2 \geq z_2$。

由实数的传递性，可得 $x_2 \geq z_2$。

最终结果由于 $x_1 > z_1$（第一步）或 $(x_1 = z_1$ 且$x_2 \geq z_2)$（第二步），根据字典序定义，有 $A \succsim C$。因此，偏好关系 $\succsim$ 满足传递性。

但是字典序的上优集不是闭集。例如在二维情况下，$U_w(1,1) = \{x \in X : x \succcurlyeq (1,1)\}$（比（1，1）更好的元素组合图像）。虚线部分并不封闭。



因此，偏好往往被施加单调性和凸性限制保证消费者需求函数具有良好的性质。

偏好**合意性**假设就是多多益善，也意味着商品都是消费者喜欢的而不是厌恶的。如果消费者厌恶，也可以把其转化为“缺乏厌恶品”这种商品。其往往使用单调性描述。

2.3.1.2 单调性

定义 2.7 (单调性)

各类偏好序 $\succsim$ 的单调性。

1. 强单调性 (strong monotonicity): 若对任意的 $x \geqslant y$ 且 $x \neq y$, 有 $x \succ y$, 则称偏好序 $\succcurlyeq$ 是强单调的。
2. 弱单调性 (weak monotonicity): 若对任意的 $x \gg y$, 有 $x \succcurlyeq y$, 则称偏好序 $\succcurlyeq$ 是弱单调的。或者简称单调的。
3. 局部非饱和性 (local non-satiation): 对于 X 上的偏好关系 $\succsim$ 来说，如果对于任何 $x \in X$ 和任何 $\varepsilon > 0$, 都存在 $y \in X$ 使得 $\|y - x\| \leq \varepsilon$ 且 $y \succ x$, 则称该偏好关系是局部非饱和的 (locally nonsatiated)。

♣

偏好的强单调性是为了反映个体对商品欲望的强烈程度，意味着个体对商品的欲望无穷。

强单调只要有商品数量增加，其他商品数量不减少，则商品组合优于原组合。这意味着意味着每个商品都不是坏的。

弱单调只要每个商品数量都增加，那么商品组合至少不会弱于原先的组合（因此增加商品数量可能是和之前的程度持平，但并不能一定体现无穷无尽的欲望）$\gg$ 符号表示商品集里面每个商品数量都增加。

局部非饱和并不要求商品好坏，但要求无差异形状并非带状或者点状（餍足点）。例如冰淇淋，少了不够吃，多了拉肚子，有一个最佳的数量。也就是要求无差异区域非常的薄

- 上优集就是至少比这个集合好的集合组合 $\{y \in X | y \succsim x\}$
- 同理，下优集为 $\{y \in X | x \succsim y\}$
- 无差异集为 $\{y \in X | x \sim y\}$

命题 2.6 (如果单调，则一定局部非饱和)

强单调、单调、局部非饱和关系。

如果强单调，则一定单调。

如果单调，则一定局部非饱和。单调同时要求了商品是好的和局部非饱和。

♠

笔记 [直觉上的理解] 一些理解。

单调性放松好商品约束（越多越好，或者越多越不好）其实就局部非饱和度的距离，相当于额外多了一个方向性。

局部非饱和性意味着两件事:1 无差异曲线是线而不是带状、点状 2、从单调性无穷无尽对商品的欲望特点来看，这意味着消费者总是会花光约束。

2.3.1.3 凸性

定义 2.8 (凸性)

凸性。

X 上的偏好关系 $\succsim$ 是凸的，若对于任何 $x \in X$, 上轮廓集 $\{y \in X : y \succsim x\}$ 是 凸的：也就是说，若 $y \succsim x$ 和 $z \succsim x$, 则对于任何 $\alpha \in [0, 1]$ 都有 $\alpha y + (1 - \alpha)z \succsim x$。

♣

直觉上就是凸集的任意两点连线，线依旧在集合范围内（例如上优和下优集两点连线）。

定义 2.9 (严格凸)

凸性。

X 上的偏好关系 $\succsim$ 是凸的，若对于任何 $x \in X$，上轮廓集 $\{y \in X : y \succsim x\}$ 是 凸的：也就是说，若 $y \succsim x$ 和 $z \succsim x$，则对于任何 $\alpha \in (0,1)$ 都有 $\alpha y + (1-\alpha)z > x$。

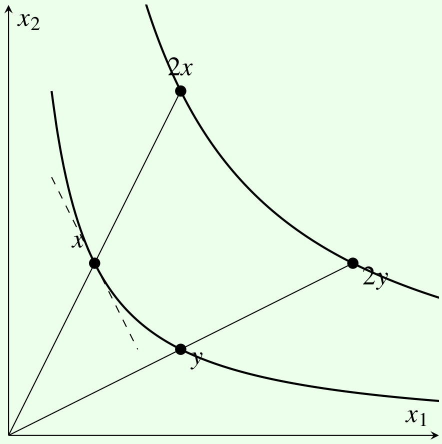
严格凸符号限制为 $>$，范围也变成了 $(0,1)$。非严格凸就是边缘可能是直线。

定义 2.10 (位似)

位似。

$X = \mathbb{R}^L_+$ 上的偏好关系 $\succsim$ 是位似的 (homothetic), 若所有无差异集都可以通过沿着任何射线等比例地扩展而联系在一起；也就是说，若 $x \sim y$ 则 $\alpha x \sim \alpha y$，其中 $\alpha \geq 0$ 是任意的。

例如常见的教材无差异图像，其实就是通过原点射线向外近似等放缩。



拟线性偏好比较特殊，可以直接横向平移得到。

2.3.1.4 概念补充

接下来引入集合的数学概念

定义 2.11 (连续)

对于一个理性偏好 $x^m \in R^N, m \in N$。

连续意味着 $\forall \varepsilon > 0 \exists M, m > M$ 使得

$$||x^m - x|| < \varepsilon$$

命题 2.7 (连续与极限)

如果 X 连续。且有极限，$\forall \{x^m, y^m\}_1^\infty$，此时 $x^m \succsim y^m \forall n$

同时有极限

$$\lim_{x\to} x^n = x, \lim_{x\to} x^n = x$$

则有推论 $x \succsim y$

例题 2.6 不满足连续性的数列

不连续的字典序 (具体图像情况可参考例子2.5) 就是例子。

对于字典序 x_i, y_i。两两比较，优先取决于 x，当 x 想等时，再比较 y。

此时若

$$x^n = (\frac{1}{n}, 0), y^n = (0, 1)$$

虽然基于定义是 $x^n \succsim y^n$，但是趋于极限时，x 为 (0,0), 实际上是 $y \succsim x$。

定义 2.12 (开集)

开集使用数学语言描述：

$X \in R^n, A \in X$。此时如果 A 为开集，则 $\forall x \in A, \exists \varepsilon > 0$ 使得，$||x - x' < \varepsilon||$, 且 $x' \in A, x' \in x$

注[定义的转换] 闭集可以通过开集的转换得到。开集的补集为闭集。

命题 2.8 (闭集的性质)

重要，经常使用

如果 A 是闭集，则有以下性质。

对于 $x \in X$，当 $x^m \longrightarrow x \in X$。如果有 $\forall m x^m \in A$。可以得到 $x \in A$ 。

定义 2.13 (有界)

如果集合 A 有界，对应着 $\exists r \in R, \forall x \in A, ||X|| < r$

命题 2.9 (偏好连续的性质)

三个等价的命题

- 偏好连续
- 上优集和下优集为闭集
- 任意收敛序列 $x^n \succsim y^n$, 极限仍满足 $x \succsim y$

命题 2.10 (连续偏好与连续效用函数)

考试要考

若 X 上的偏好关系 $\succsim$ 是连续的，则存在能代表 $\succsim$ 的连续的效用函数 $u(x)$。

证明 [连续偏好和连续效用的转换] 证明如下

根据连续性可知，x 的上轮廓集和下轮廓集都是闭集。

因此得到 $A^+ = \{\alpha \in \mathbb{R}_+ : \overline{\alpha}e \succsim x\}$ 和 $A^- = \{\alpha \in \mathbb{R}_+ : x \succsim \bar{\alpha}e\}$ 是非空且闭的。（符号表达就是位似性2.3.1.3）

根据的完备性可知，$\mathbb{R}_+ \subset (A^+ \cup A^-)$。

因为 A^+ 和 A^- 都是非空且闭的，加之 $\mathbb{R}_+$ 是联通的，所以 $A^+ \cap A^- \neq \varnothing$。因此，存在一个实数 α 使得 $\alpha e \sim x$。

根据单调性可知，$\alpha_1 e > \alpha_2 e$ 意味着 $\alpha_1 > a_2$。因此，最多只有一个实数能满足 $\alpha e \sim x$。这个实数是 $\alpha(x)$。

现在证明 $\alpha(x)$ 在所有 x 上是一个连续函数；也就是想证明，对于任何序列 $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ 且 $x = \lim_{n\to\infty} x^n$，有 $\lim_n \to \infty\alpha(x^n) = \alpha(x)$。

此时分析 $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得 $x = \lim_{n\to\infty} x^n$。此时 $\{\alpha(x^n)\}_{n=1}^{\infty}$ 一定为收敛序列。因为序列在一个紧集（闭集+有界）之中，x 有界，对应的于 $\alpha(x)$ 也会有界，同时单调，则收敛。

接下来就需要证明 $\{\alpha(x^n)\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 $\alpha(x)$

使用反证法，如果不是收敛于此，则存在一个严格递增的函数 $m(*)$, 使得

$$\{\alpha(x^{m(n)})\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \aleph' \neq \alpha(x)$$

。

通过单调性可以得到 $\alpha' e > \alpha(x)e$，取两个点的中点 $\hat{\alpha} = \frac{1}{2}[\alpha' + \alpha(x)]$。由于单调性可以得到 $\widehat{\alpha} e > \alpha(x)e$。

此时存在 $n > \bar{N}$ 满足 $\alpha(x^{m(n)}) > \widehat{\alpha}$。于是得到了

$$x^{m(n)} \sim_\alpha (x^{m(n)})e > \hat{\alpha} e$$

偏好的连续性意味着 $x \geq \widehat{\alpha} e$，但是条件有 $x \sim \alpha(x)e$，矛盾。

同理构造证明 $\alpha' < \alpha(x)$ 矛盾就完成了全部证明。

2.3.2 效用最大化问题

通过定义商品价格、效用函数，商品购买就变成了一个最大化命题。

$$\begin{cases} \max_{x \geqslant 0} u(x) \\ \text{s.t. } p \cdot x \leqslant w \end{cases}$$

接下来就开始分析最大化问题是否有解。

命题 2.11 (消费者最大化求解)

若 $p \gg 0$ 且 $u(*)$ 是连续的，则效用最大化问题有解。

证明 [问题有解的证明思路] 思路

满足条件时，预算集 $B_{p,w} = \{x \in \mathbb{R}_+^l : p * x \leqslant w\}$ 为紧集[3]

类似微积分中，连续可导闭区间函数一定有最大值。

2.3.2.1 瓦尔拉斯需求对应函数

对于效用最大化问题，

$$\begin{cases} \max_{x \geqslant 0} u(x) \\ \text{s.t. } p \cdot x \leqslant w \end{cases}$$

在有解的情况下，相当于给定一组价格和预算约束就有一批商品购买解集，因此可以表示为**瓦尔拉斯 (或普通或市场) 需求函数**[4]：

$$x(p, w) \in \mathbb{R}_+^L$$

命题 2.12 (瓦尔拉斯需求对应函数的性质)

如果瓦尔拉斯需求函数定义在消费集 $X = \mathbb{R}_+^L$ 的局部非饱和偏好关系上 $\succsim$，且可以用连续效用函数 u 表示，则对应的瓦尔拉斯需求 $x(p, w) \in \mathbb{R}_+^L$ 有以下性质：

- 关于 (p, w) 是零次齐次的：$x(ap, aw) = x(p, w)$ 对于任何 p, w 和实数 $\alpha > 0$ 都成立。
- 瓦尔拉斯法则：$px = w$ 对于所有 $x \in x(p, w)$ 都成立。
- 凸性/唯一性：若偏好是凸的，从而 $u(*)$ 是拟凹的，则 $x(p, w)$ 是个凸集。而且，若之为严格

[3]有界：每个商品购买数量小于等于全部财富除以价格；闭集

[4]也就是经典的马歇尔需求函数

凸的，从而 $u(*)$ 是严格拟凹的，则 $x(p,w)$ 只有唯一一个元素。
简单来说就是 1、等比增加工资和价格，消费者购买组合不变；2、消费者会花光预算；3、解是唯一的。

证明 [瓦尔拉斯函数性质] 证明如下

1、齐次性

$\langle x \in \mathbb{R}_+^L : \alpha px \leqslant \alpha w\rangle = \langle x \in \mathbb{R}_+^L : px \leqslant w\rangle$

由于集合范围没有变化，因此求解不变，且这个性质不依赖效用函数的假设。

2、瓦尔拉斯法则

见前文非饱和性的说明笔记2.3.1.2，非饱和性使得消费者会花光预算。

3、凸性和唯一性

假设效用函数 u 拟凹且存在两个消费束 x 和 $x',x \neq x'$，且消费束都是 $x(p,w)$ 的元素。

先证明 $\alpha x + (1-\alpha)x' = x'' \in x(p,w), \forall\alpha \in [0,1]$

对于两个消费束，有 $u(x) = u(x') = u^*$。由于效用函数 u 拟凹，因此有 $u(x'') \geqslant u^*$。

由于 $px \leqslant wpx' \leqslant w$，可以证明

$$px'' = p\left[ax + (1-\alpha)x'\right] \leqslant w$$

这意味着 x'' 选择可行且效用比两个消费束更高。

在严格拟凹的情况下，$u(x'') > u^*$ 对于所有 $\alpha \in (0,1)$ 成立，如果一开始存在任意两个不同的消费束，会产生矛盾，因此此时解是唯一的。

例题 2.7 重点 考试要考

使用库恩塔克条件求解效用最大化问题

形式如下：

$$\max u = x^\alpha y^{1-\alpha}$$

$$st.p_x x + p_y y \leqslant w$$

$$x, y \geqslant 0$$

此时先转化一下

$$\max\ u = x^\alpha y^{1-\alpha} \Longleftrightarrow \max\ \alpha lnx + (1-\alpha)lny$$

拉格朗日式子为

$$\mathcal{L} = \alpha lnx + (1-\alpha)lny - \lambda_1(w - p_x x - p_y y) - \lambda_2 x - \lambda_3 y$$

约束如下

$$\begin{cases} \text{一阶条件:} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\alpha}{x} + \lambda_1 p_x - \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{1-\alpha}{y} + \lambda_1 p_y - \lambda_3 = 0 \\ \text{原始条件（或者看作对 } \lambda \text{ 参数求导的一阶条件）:} \\ p_x x + p_y y \leqslant w, x \geqslant 0, y \geqslant 0 \\ \lambda_1 \geqslant 0, \lambda_2 \geqslant 0, \lambda_3 \geqslant 0 \\ \text{互补松弛定理:} \\ \lambda_1(w - p_x x - p_y y) = 0, \lambda_2 x = 0, \lambda_3 y = 0 \end{cases}$$

先考虑 $x = 0, y = 0$ 的情况, 这时候一阶条件不满足。
因此 $x \neq 0, y \neq 0$，此时得到 $\lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$
再考虑吧 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$ 的情况，一阶条件也不满足。
因此 $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$
一阶条件简化，得到

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\alpha}{x} + \lambda_1 p_x = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{1-\alpha}{y} + \lambda_1 p_y = 0$$
$$\lambda_1(w - p_x x - p_y y) = 0$$

本质上就是退回两个商品组合的马歇尔需求求解 $\frac{mu_x}{mu_y} = \frac{p_y}{p_x}$
解得

$$\begin{cases} x = \alpha \frac{w}{p_x} \\ y = (1-\alpha)\frac{w}{p_y} \\ \lambda_1 = -\frac{1}{w} \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

笔记 [kkt 条件的另外一种写法] KKT 条件还有另外一种简化写法:
实际上也可以写成 $\alpha ln x + (1-\alpha) ln y - \lambda_1(w - p_x x - p_y y)$
这时候对应的 $\lambda_2 \geqslant 0$ 约束就要变成 $x\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$。
同理 $\lambda_1(w - p_x x - p_y y) = 0$ 本质就是 $\lambda_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = 0$

$$\begin{cases}\text{一阶条件:}\\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}=\frac{\alpha}{x}+\lambda_1 p_x=0\\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}=\frac{1-\alpha}{y}+\lambda_1 p_y=0\\ \text{原始条件（或者看作对}\lambda\text{参数求导的一阶条件）:}\\ p_x x+p_y y\leqslant w, x\geqslant 0, y\geqslant 0\\ \lambda_1\geqslant 0\\ \text{互补松弛定理:}\\ \lambda_1\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1}=0, x\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}=0, y\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}=0\end{cases}$$

2.3.2.2 0 齐次性和财富价格效应

对于一个最优商品消费空间，在其连续可微的情况下

对财富求导就是**财富效应** $\frac{\partial x(p,w)}{\partial w}\begin{cases}\geqslant 0 \text{ 正常品}\\ <0 \text{ 劣质品}\end{cases}$

$$D_u x(p,w)=\begin{bmatrix}\frac{\partial x_1(p,w)}{\partial w}\\ \frac{\partial x_2(p,w)}{\partial w}\\ \vdots\\ \frac{\partial x_L(p,w)}{\partial w}\end{bmatrix}$$

对价格求导就是**价格效应** $\frac{\partial x(p,w)}{\partial p}\begin{cases}>0 \text{ 吉芬品}\\ \leqslant 0 \text{ 正常品}\end{cases}$

$$D_p x(p,w)=\begin{bmatrix}\frac{\partial x_1(p,w)}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial x_1(p,w)}{\partial p_L}\\ & \ddots & \\ \frac{\partial x_L(p,w)}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial x_L(p,w)}{\partial p_L}\end{bmatrix}.$$

L 外商品价格保持不变，财富保持不变的情况下，需求曲线随商品 L 变动而变动，此时就是**提供曲线**（offer curve）。

命题 2.13 (齐次性与价格财富效应)

若瓦尔拉斯需求函数 $x(p,w)$ 为零齐次的（$x(p,w)=x(ep,ew)$），那么有

$$\sum_{k=1}^{L}\frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k}p_k+\frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w}w=0 \text{ 对于} l=1,\cdots,L$$

证明 [齐次性与价格财富效应] 在满足 0 齐次性的情况下，有 $x(p,w)=x(ep,ew)$（里面都是向量形式）

$x(ep,ew)$ 对倍数 e 求导，可以得到：

$$\frac{\partial x(ep,ew)}{\partial e}=\frac{\partial x(ep,ew)}{\partial ep}\frac{\partial ep}{\partial e}+\frac{\partial x(ep,ew)}{\partial ew}\frac{\partial ew}{\partial e}=0$$

此时让 e=1，化简

$$\frac{\partial x(ep,ew)}{\partial e}=\frac{\partial x(p,w)}{\partial p}p+\frac{\partial x(p,w)}{\partial w}w=0$$

p 为向量，有很多商品，此时如果有 L 种商品：

$$D_p x(p, w) p + D_w x(p, w) w = 0$$

具体展开为：

$$\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial x_l(p, w)}{\partial p_k} p_k + \frac{\partial x_l(p, w)}{\partial w} w = 0 \text{ 对于 } l = 1, \cdots, L$$

此时再定义弹性：

$$\varepsilon_{lk}(p, w) = \frac{\partial x_l(p, w)}{\partial p_k} \frac{p_k}{x_l(p, w)}$$

$$\varepsilon_{lw}(p, w) = \frac{\partial x_l(p, w)}{\partial w} \frac{w}{x_l(p, w)}$$

式子就可以进一步简化为：

$$\sum_{k=1}^{L} \varepsilon_{lk}(p, w) + \varepsilon_{kw}(p, w) = 0 \text{ 对于 } l = 1, \cdots, L$$

零次齐次对比较静态的寓意: 所有商品价格和消费者财富的同比例变化不会引起需求变化。

命题 2.14 (古诺加总)

若瓦尔拉斯需求函数 $x(p, w)$ 满足瓦尔拉斯法则（用完财富 px=w），则可以把式子变形为：

$$\sum_{l=1}^{L} p_l \frac{\partial x_l(p, w)}{\partial p_k} + x_k(p, w) = 0 \text{对于 } l = 1, \cdots, L$$

证明 [古诺加总] 证明如下：

直接 px=w 对 p_k 求导。

笔记 [想一想] 可以思考在为什么选择对 p_k 求导，因为价格是外生的，商品选择 x 是内生的，对价格求导能消掉大部分尾巴（$\sum_{i=1}^{L} \frac{\partial p_i}{\partial p_k} = 1$）。但 $\sum x_i$ 对 x_k 求导并不能消掉，因为每个商品的决策受到其他商品价格、消费数量的影响。x 内生不能求导，p 已经求导了，剩下的还有 w 可以求导。

命题2.14得到的就是**古诺加总**。

命题 2.15 (恩格尔加总)

若瓦尔拉斯需求函数 $x(p, w)$ 满足瓦尔拉斯法则（用完财富 px=w），则可以把式子变形为：

$$\sum_{l=1}^{L} p_l \frac{\partial x_l(p, w)}{\partial w} = 1$$

证明 [恩格尔加总] 证明如下：

直接 px=w 对 w 求导。

命题2.15得到的就是**恩格尔加总**。

2.3.2.3 间接效用函数

效用最大化问题下，可以得到瓦尔拉斯函数 $x(p,w)$，将其代入效用函数，就可以得到**间接效用函数** $v(p,w)$。

命题 2.16 (间接效用函数)

假设定义在消费集 $X=\mathbb{R}_+^L$ 上的偏好关系之是局部非饱和的，该偏好关系能用连续的效用函数 $u(\bullet)$ 表示。间接效用函数 $v(p,w)$：

1. 是零次齐次的。
2. 关于 ω 严格递增和关于任何商品 l 的价格 p_l 非递增。
3. 拟凸的；也就是说，集合 $\{(p,w):v(p,w)\leqslant\bar{v}\}$ 对于任何 $\bar{v}$ 都是凸的。
4. 关于 p 和 w 连续。

证明 [间接效用函数] 证明如下

证明略

2.3.3 支出最小化问题

2.3.3.1 对偶性

效用最大化问题简称 UMP(utility max mization problem); 支出最小化问题简称 EMP(expenditure mini mization problem)

$$\begin{cases}\underset{x\geqslant 0}{\mathrm{Min}} p\cdot x\\ \mathrm{s.t.} u(x)\geqslant u\end{cases}$$

命题 2.17 (最大化和最小化问题的关系)

假设定义在消费集 $X=\mathbb{R}_+^L$ 上的局部非饱和偏好关系之，可用连续效用函数 $u(*)$ 表示；而且价格向量 $p\gg 0$。那么我们有

1. 若财富 $w>0$ 时 x^* 是 UMP 中最优的，则对于既定的目标效用水平 $u(x^*)$ 来说，x^* 在 UMP 中是最优的。而且，这个 EMP 的最小支出水平恰为 w。
2. 若目标效用水平为 $u>u(0)$ 时 x^* 是 EMP 中最优的，则当财富为 $p*x^*$ 时，x^* 在 UMP 中是最优的。而且，这个 UMP 的最大效用水平恰为 u。

证明 [最大化和最小化问题的关系] 证明如下

反证法，如果不是存在另外一个消费束 x' 最优，代回另外一个问题，违背另外一个问题的最优假设。

2.3.3.2 支出函数

$$\begin{cases}\underset{x\geqslant 0}{\mathrm{Min}} p\cdot x\\ \mathrm{s.t.} u(x)\geqslant \bar{u}\end{cases}$$

同时在价格都大于 0，效用水平大于 0 情况下，问题求解可以表示为**支出函数** $e(p,u)$。支出函数值等于 px^*。

命题 2.18 (支出函数的性质)

假设定义在消费集 $X=\mathbb{R}_+^L$ 上的局部非饱和偏好关系 $>$, 可用连续效用函数 $u(*)$ 表示，那么支出函数 $e(p,u)$

1. 关于 p 是一次齐次的。
2. 关于 u 是严格递增的，关于任何商品 l 的价格 p_l 是非递减的。
3. 关于 p 是凹的。
4. 关于 p 和 u 是连续的。

证明 [支出函数] 证明如下

证明的关键，如果满足最优消费，这意味着 $e(p,x)=p*x\geqslant\bar{u}$。反证发就是构造两组一开始有大小比较，违反了性质会推出这种比较的矛盾。

第一点：价格变化时约束不变，则 x 组合不变。

第二点：违背 u 严格递增时有这样的组合 $u''>u', p\cdot x'\geqslant p\cdot x''>0$

第三点：略，图片。效用是 u 的递增函数。px 为支出的线性表达。线性表达线一定在最低支出水平线之上。利用局部非饱和寻找矛盾点。支出函数是 px 线性组合，所以非递减。

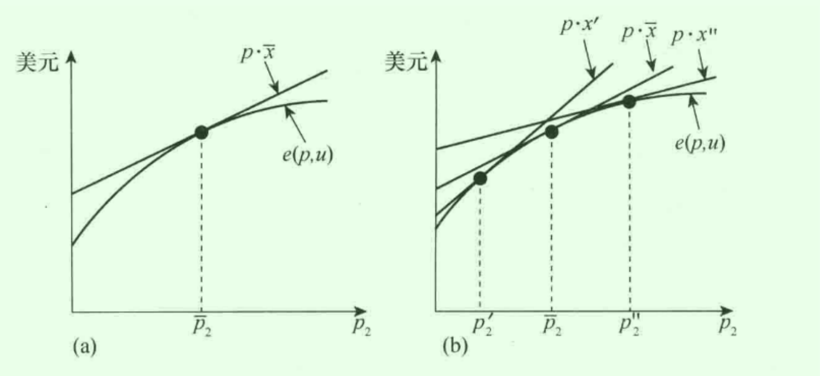


图 2.1: 支出函数为凸

2.3.3.3 希克斯（补偿性）需求函数

最小化问题得到的是支出函数 $e(p,u)$, 代入 x^* 就得到了希克斯需求（补偿性）$h(p,u)$。

命题 2.19 (希克斯需求函数性质)

假设定义在消费集 $X=\mathbb{R}_+^L$ 上的局部非饱和偏好关系之，可用连续效用函数 $u(*)$ 表示。那么对于任何 $p\gg 0$, 希克斯需求对应 $h(p,u)$ 具有下列性质：

1. 关于 p 是零次齐次的：$h(\alpha p,u)=h(p,u)$ 对于任何 p,u 和 $\alpha>0$ 都成立。
2. 无超额效用 (no excess utility): 对于任何 $x\in h(p,u)$, 都有 $u(x)=u$。
3. 凸性/单调性：若之是凸的，则 $h(p,u)$ 是个凸集；若之是严格凸的，从而 $u(*)$ 为严格拟凹的，则 $h(p,u)$ 只有唯一一个元素。

证明 [希克斯需求函数性质] 证明如下

第一点，约束由最低效用决定，与价格无关。

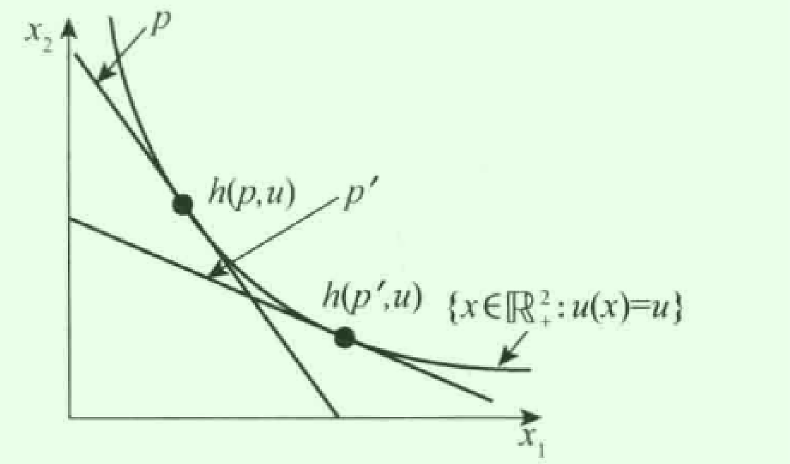


图 2.2: 希克斯需求函数

第二点，连续性非饱和性带来的

命题 2.20 (重要关系)

考试要考

对于 $p \gg 0, w > 0, u > u(0)$

1. $e(p, v(p, w)) = w$
2. $v(p, e(p, u)) = u$
3. $h(p, u) = x(p, e(p, u))$
4. $x(p, w) = h(p, v(p, w))$

证明 [式子之间的关系] 证明如下，其实就是反复套娃。我们已经有：

- $x = x(p, w)$
- $v = v(p, w)$
- $x = h(p, u)$
- $px = e(p, u)$

连续性意味着消费者总是会花光预算，因此 $px = e(p, u) = e(p, v(p, w)) = w$。

然后把这个式子代入 $v = v(p, w) = v(p, e(p, v(p, w)))$。

由于 x 同时可以表示为最大化和最小化问题，因此 $x = h(p, u) = x(p, w) = x(p, e(p, v(p, w)))$

同时有 $x = h(p, u) = x(p, w) = v(p, w)$

笔记 [重要关系] 就数学来看，几个重要关系就是 p、w、u 决定了 x 然后互相消元。证明推导其实就是化用这几个关系。

定义 2.14 (补偿)

几个关系的经济意义

$h(p, u) = x(p, e(p, u))$ 代表补偿性需求对应：价格变化时，调整财富 w，使得效用维持在 u 的水平，那么需求就是 $h(p, u)$。对应的财富补偿就是希克斯财富补偿。

$$\Delta w_{\text{Hicks}} = e(p', u) - w$$

$x(p,w)=h(p,v(p,w))$ 代表瓦尔拉斯需求和希克斯需求具有相同的性质，可以互相推出。♣

命题 2.21 (需求补偿性法则)

需求和价格负相关。
使用希克斯需求函数证明。

$$(p''-p')\cdot\Big[h(p'',u)-h(p',u)\Big]\leqslant 0$$

♠

证明 [需求补偿性法则] 证明如下：
最优消费时，支出最小：

$$p''\bullet h(p'',u)\leqslant p''\bullet h(p',u)$$

$$p'\cdot h(p'',u)\geqslant p'\cdot h(p',u)$$

不等式相减即可。

2.3.3.4 希克斯需求和支出函数

命题 2.22 (Shephard 引理)

考试要考 证明以下式子，这个式子反映了支出函数与希克斯需求的关系。

$$h(p,u)=\frac{\partial e(p,u)}{\partial p}$$

♠

证明 [支出函数与希克斯需求关系] 证明如下
有关系 $px=e(p,u),x=h(p,u)$
可以得到 $e(p,u)=ph(p,u)$
再对 $ph(p,u)$ 求导（$ph(p,u)$ 为向量形式看作 $\sum p_ih_i$）
得到

$$\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_l}=h_l(p,u)+\sum_{k=1}^{L}\frac{\partial h(p,u)}{\partial p_l}p_k$$

此时只需要证明 $\sum_{k=1}^{L}\frac{\partial h(p,u)}{\partial p_l}p_k=0$
法 1：$\sum_{k=1}^{L}\frac{\partial h(p,u)}{\partial p_l}p_k=0$ 说的其实就是 0 齐次性质（参见命题2.19），x 的结果与 p 变化无关。构造 $h(p,u)=h(ap,u)$ 然后对 a 求导可以得到。
法 2：拉格朗日。
此时构造拉格朗日函数
对于

$$\begin{cases}min\ px\\ s.t.u(x)\geq\bar{u}\end{cases}$$

$$\mathcal{L} = -\sum_{k=1}^{L} p_k x_k + \lambda(u(x) - \bar{u}) + \sum_{k=1}^{L} u_k x_k$$

由于 $x = h(p,u) \gg 0$, 此时约束 $u_k = 0$。

这时候对式子用 x_k 求导。

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k} = -p_k + \lambda \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} = 0$$

表示出 p_k 代入要证明的式子。

$$\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial h(p,u)}{\partial p_l} p_k = \lambda \sum_{k=1}^{L} \frac{\partial h(p,u)}{\partial p_l} \frac{\partial u(x)}{\partial x_k}$$

因为有 $u(x) = u(h(p,u)) = \bar{u}$

此时有

$$\frac{u(x)}{\partial p_l} = \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial p_l} = \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \frac{\partial h(p,u)}{\partial p_l} = 0$$

法 3：包络定理

$$\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i} = \left.\frac{\partial \mathcal{L}(x,\lambda;p,u)}{\partial p_i}\right|_{x=x^*,\lambda=\lambda^*}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i}(p \cdot x) = x_i$$

$$\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i} = x_i^*(p,u) = h_i(p,u)$$

简单理解包络定理：

第一步：$e(p,u)$ 可以写成拉格朗日函数形式（外生变量 p、u、w+ 优化目标 x、λ)。

第二步：就是极值问题求参数的偏导即可得到关系。例如式子中就把优化目标 x 和 λ 当成常数项求外生变量 p 偏导。

2.3.3.5 希克斯需求函数和瓦尔拉斯需求函数

命题 2.23 (斯勒斯基方程)

(Slutsky equation)

假设定义在消费集 $X = \mathbb{R}_+^L$ 上的局部非饱和且严格凸的偏好关系之，可用连续效用函数 $u(\bullet)$ 表示。那么对于所有 (p,w) 和 $u = v(p,w)$, 我们有

$$\frac{\partial h_l(p,u)}{\partial p_k} = \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k} + \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w} x_k(p,w)$$

证明 [斯勒斯基方程]考试要考

对 $h_l(p,u)$ 求导，得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_l(p,u)}{\partial p_k} &= \frac{\partial h_l(p,u)}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial p_k} + \frac{\partial h_l(p,u)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial p_k} \\ &= \frac{\partial h_l(p,u)}{\partial p} + \frac{\partial h_l(p,e(p,u))}{\partial e(p,u)}\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_k} \\ &= \frac{\partial h_l(p,u)}{\partial p} + \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w}x_k(p,w)\end{aligned}$$

斯勒斯基补偿：购买力不变。
希克斯补偿：效用不变。

2.3.3.6 瓦尔拉斯需求和间接效用函数

命题 2.24 (罗伊恒等式)

$$x(p,w) = -\frac{\frac{\partial v(p,w)}{\partial p}}{\frac{\partial v(p,w)}{\partial w}}$$

证明 [罗伊恒等式] 证明如下考试要考

法一

通过瓦尔拉斯需求 $x(p,w)=x$ 和间接效用函数 $e(p,u)=w$，得到：

$$v(p,e(p,u)) = u$$

此时对 p 求导，得到：

$$\begin{aligned}\frac{\partial v(p,e(p,u))}{\partial p} &= \frac{\partial v(p,e(p,u))}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial p} + \frac{\partial v(p,e(p,u))}{\partial e(p,u)}\frac{\partial e(p,u)}{\partial p} \\ &= \frac{\partial v(p,e(p,u))}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial p} + \frac{\partial v(p,e(p,u))}{\partial e(p,u)}h(p,u) \\ &= \frac{\partial v(p,w)}{\partial p} + \frac{\partial v(p,w)}{\partial w}x(p,w) \\ &= 0\end{aligned}$$

法二使用 UMP 的一阶条件结合拉格朗日转化，和证明2.3.3.4一致

法三使用包络定理

2.3.3.7 需求与支出函数

补充，罗伊恒等式和谢泼德引理是有**约束的包络定理**引用；霍特林引理则是**无约束的包络定理**应用。

命题 2.25 (霍特林引理)

Hotelling

$$h_i(p,u) = \frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i}$$

生产者和消费者问题的转换，就是把价格换成要素价格，效用就是生产函数。

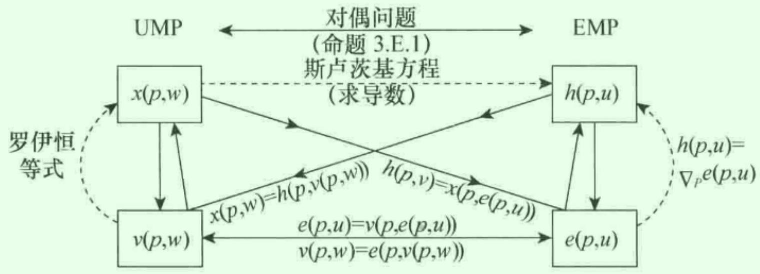


图 3.G.3 UMP 和 EMP 之间的关系

图 2.3: 最大化最小化问题关系

2.3.3.8 关系总结

2.3.4 福利影响

得到

2.4 不确定性情形下的选择

167 页

2.5 生产理论

生产者理论对应着利润最大化的目的：

$$\max \pi = pq - c$$

1. 价格约束 p：市场结构最关键。例如竞争市场、垄断市场。
2. 产量约束 q: 技术约束。
3. 成本约束 c：经济约束。

因此生产者理论就可以分为**市场、技术、经济**三方面约束。

2.5.1 生产技术约束

2.5.1.1 定义

定义 2.15 (生产)

生产和交换概念上是等价的。用要素生产出产品，也可以理解为用要素交换产品。 ♣

注[概念理解] 为什么市场出清时边际转换率 = 边际替代率，其实就就是如果不出清，交换和生产就还会发生。

定义 2.16 (生产计划)

不同产品的一组净产出（向量），记为 $\mathbf{y} = (y, -l, -k)$，其中 y 表示产出，$-l$ 和 $-k$ 表示投入。

$\mathbf{y}^A$ 是一组产品或服务的状态（存量）

$\mathbf{y}^B$ 是另一组产品或服务的状态（存量）

生产计划 $\mathbf{y}$ 就是 $\mathbf{y}^B - \mathbf{y}^A$（流量）

例题 2.8 生产计划 例如一开始是 {50 酒，20 小麦}，之后为 {55 酒，10 小麦}。那生产计划实际上就是 {5 酒，-10 小麦}，也就是利用 10 个小麦生产了 5 份酒。

定义 2.17 (生产可能性集合)

所有技术可行的投入和产出组合的集合，记为 $Y = \{\mathbf{y} \in \mathcal{R}^L, \mathbf{y} are technologically feasible\}$。

如果 $Y^1 = Y^2$, 意味着 $\forall \mathbf{y} \in Y^1 \Rightarrow \mathbf{y} \in Y^2$, 反之亦然。

(1) 短期中，生产活动中某些要素不发生变化，$Y(\overline{x}_2) = \{(y, -\boldsymbol{x}_1, -\overline{x}_2) \in Y{:}\boldsymbol{x}_2 = \overline{x}_2\}$。

(2) 长期中所有要素可变，但要素 x_2 的变化服从某种约束条件 $\mathbf{z}$, 则 $Y(\mathbf{z}) = \{(y, -x_1, -x_2) \in Y{:}\boldsymbol{x}_2 = \mathbf{z}\}$

定义 2.18 (生产函数)

若厂商只生产一种产出，定义生产函数为由一定量的投入可能得到的最大产出，即描述生产集边界的函数，$f(x) = \{y \in \mathcal{R} : \text{y 是投入为 x 的最大产出}\}$

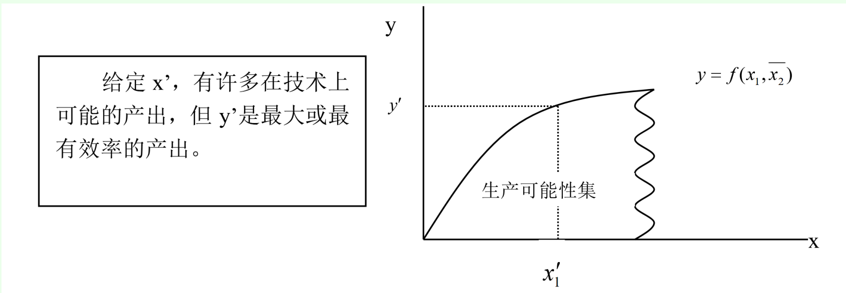


图 2.4: 生产函数

定义 2.19 (有效生产)

若不存在 $\mathbf{y}' \in \mathbf{Y}$, 使得 $\mathbf{y}' \geq \mathbf{y}, \mathbf{y}' \neq \mathbf{y}$, 则称生产计划 $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ 是技术有效的。

注[有效生产的理解] 有效生产就是指生产计划中包含了最优化的生产方式。也就是最大化生产的生产方式 y 已经包含在集合之内。

定义 2.20 (转换函数)

转换函数就是最优产出和实际产出的缺口。

1. $T(y) \leq 0$ for all $y \in Y$
2. $T(y) < 0$ if there is any $y \in Y$ and $y' \in Y$, such that $y' \geq y$
3. $T(y) = 0 \Leftrightarrow$ there is not any $y \in Y$ and $y' \in Y$, such that $y' \geq y$, 即 y 是有效的。

注[转换函数的理解] 理解上的提示

$T(y) \leq 0$ 代表的是生产可行集。$T(y) < 0$ 代表的是无效率的生产可行集。$T(y) = 0$ 代表的是有效率的生产可行集。

只有一种产出时，生产函数是转换函数的特例，对应着有效率的产出，也就是 $T(y) = f(x) - q = 0$ 此时生产函数为 $q = f(x)$

因此生产函数也可以定义为:$R^L \to R_+, (f(x), -x) \in Y$ and $T(f(x), -x) = 0$。

定义 2.21 (边际转换率)

边际转换率：即转换边界的斜率，如果 $T(\cdot)$ 是可微的，且生产计划 $\bar{\mathbf{y}}$ 满足 $T(\bar{\mathbf{y}})=0$, 那么对于任何商品或者两种产出 l 和 k，有：

$$MRT_{lk}(\bar{\mathbf{y}})=\frac{\partial T(\bar{\mathbf{y}})/\partial \mathbf{y}_l}{\partial T(\bar{\mathbf{y}})/\partial \mathbf{y}_k}$$

♣

定义 2.22 (投入要素集)

所有产出至少为 y 的投入要素组合构成的集合。

$$V(y)=\{x\in\mathbb{R}_+^L: y\equiv(y,-x)\in Y\}$$

在只有两种要素投入的情况下，可以用等产量线以上的区域来表示：

$$Q(y)=\{x\in\mathbb{R}_+^L; x\in V(y), x\notin V(y'), y'>y\}$$

♣

注[y 越小,V 是越大还是越小?] 理解

y 越小，v 越大。v 代表生产方式，v 有效，可以选择更多生产 y 的要素组合。也就是大于等于 y 的空间越大。

例题 2.9 描述技术约束 柯布-道格拉斯生产技术

令 α 为 (0,1) 内的参数

生产集：$Y=\left\{(y,-x_1,-x_2)\in\mathbb{R}^3: y\le x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}\right\}$

投入要素集：$V(y)=\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}_+^2: y\le x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}\right\}$

等产量线：$Q(y)=\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}_+^2: y=x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}\right\}$

带约束的长期生产可能性集：$Y(\mathbf{z})=\{(y,-\mathbf{x_1},-\mathbf{x_2})\in\mathbb{R}^3: y\le x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}, x_2=z\}$

转换函数：$T(y,x_1,x_2)=y-x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}$

生产函数：$f(x_1,x_2)=x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}$

2.5.1.2 特征

定义 2.23 (单调性)

单调性 (自由处置)

若 $\mathbf{y}\in Y$ 意味着对任意的 $\mathbf{y}'$,$\forall\mathbf{y}'\le\mathbf{y}$, 有 $\mathbf{y}'\in Y$, 则 Y 称满足自由处置 (free disposal) 或单调性质。———一定的投入总可以生产出较少的产出。

稍弱的假设是“投入量是单调的”, 若 $\mathbf{x}\in V(y), \mathbf{x}'\ge\mathbf{x}$, 则 $\mathbf{x}'\in V(y)$, 即若 $\mathbf{x}$ 是生产 y 单位产出的可行投入，$\mathbf{x}'$ 是投入不少于 $\mathbf{x}$ 的投入向量，则 $\mathbf{x}'$ 也是生产 y 单位产出的可行投入。——一定的产量总可以用较多的投入来生产。

♣

注[理解单调性] 单调性就是允许没有效率的生产，允许可以浪费的生产。

定义 2.24 (凸性)

任何两个生产计划的线性组合也是生产可行的。

$$y\in Y, y'\in Y, \forall t\in[0,1]\longrightarrow ty+(1-t)y'\in Y$$

严格凸性：

$$y \in Y, y' \in Y, \forall t \in (0,1) \longrightarrow ty + (1-t)y' \in intY$$

命题 2.26 (凸性关系 1)

若生产集 Y 是凸集, 则其对应的投入要素集 $V(y)$ 也是凸集。

证明 [凸性关系 1] 证明如下:

此时有 $(y, -x) \in Y, (y, -x') \in Y, \forall t \in [0,1]$

由于 Y 是凸集，此时有:

$$(ty + (1-t)y, -t\mathbf{x} - (1-t)\mathbf{x}') \in Y$$

也就是 $(y, -t\mathbf{x} - (1-t)\mathbf{x}') \in Y$

命题 2.27 (凸性关系 2)

$V(y)$ 是凸集当且仅当生产函数 $f(x)$ 是拟凹函数。

证明 [凸性关系 2] 当且仅当意味着命题是充要条件。

先证明 f 拟凹，则 $V(y)$ 为凸:

此时 $\forall t \in [0,1]$,f 拟凹可以得到:

$$f(tx + (1-t)x') \geq \min\{f(x), f(x')\} = \bar{y}$$

这意味着线性组合的投入依旧在生产可能性集中，因此 $V(y)$ 为凸集。

再证明 $V(y)$ 为凸，f 拟凹。

反着写即可。

技术约束还有一系列特征:

命题 2.28 (技术约束)

技术特征

- 可加性（自由进入）: $\mathbf{y} + \mathbf{y}' \in Y, \forall \mathbf{y}, \mathbf{y}' \in Y$
- 不生产可能性: $0 \in Y$
- 闭集: Y 为闭集。
- 不可逆性: $Y \cap \{-Y\} = \{\mathbf{0}\}$
- 齐次性: $t > 0, f(tx) = t^k f(x)$
- 位似技术: 位似函数是一个一次齐次函数的单调变换: $f(x) = h(g(x)), g(\cdot)$ 是一次齐次的, $h(\cdot)$ 是增函数，比如 C-D 函数。虽然产出与投入不等比例的变化，但较多的投入总是可以生产出较多的产出。因此，生产函数的单调变化并不改变生产函数的性质。

注[部分技术约束特征的理解] 理解

- 可加性并非一定的，例如第一块地能修 2 间房子，第二块地能修 3 间房子，但是很难说拿到两块地就能修五间房子。可加性的核心就是是否具有自由进入的限制。
- 不生产可能性：厂商可以选择不生产。
- 闭集：因为生产一定包含了最有效率的生产可能性集合 $T(y) = 0$ 部分。
- 不可逆性：除非是 0，否则生产不可逆，也就是无法从产品还原为要素。

规模报报酬有不同的表现形式

定义 2.25 (规模报酬)

规模报酬

规模报酬不变，若 $f(tx) = tf(x), \forall t \geq 0$

规模报酬递减，若 $f(tx) < tf(x), \forall t > 1$

规模保持递增：若 $f(tx) > tf(x), \forall t > 1$

规模报酬非递减：若 $y \in Y$，则 $ty \in Y, \forall t \geq 1$（任何的投入产出向量都可以按比例放大）

规模报酬非递增：若 $y \in Y$，则 $ty \in Y, \forall t \in [0,1]$（任何的投入产出向量都可以按比例缩减）

设生产函数 $y = f(x)$ 为齐次函数，则有 $f(tx) = t^k f(x), t > 0$

当 $k = 1$ 时，即一次齐次生产函数，$f(tx) = tf(x)$，规模报酬不变；

当 $k > 1$ 时，即高次齐次生产函数，$f(tx) > tf(x)$，规模报酬递增；

当 $k < 1$ 时，$f(tx) < tf(x)$，规模报酬递减；

特别地，当 $k = 0$，即零次齐次时，$f(tx) = f(x)$，产出数量不变。

♣

规模报酬可以通过加入 t 后计算弹性，然后代入 t=1 进行判断。

定义 2.26 (规模弹性)

规模弹性：所有投入变动百分之一所带来的产出变动百分比，令生产函数为 $y = f(x), t > 0$, 函数 $y(t) = f(tx)$

$$e(x) = \frac{dy(t)/y(t)}{dt/t}$$

当 $t = 1$ 时，计算 x 处的规模弹性：

$$e(x) = \frac{dy(t)}{dt} \cdot \frac{t}{y} |_{t=1} \quad \text{或} \quad e(x) = \frac{df(tx)}{dt} \cdot \frac{t}{f(tx)} |_{t=1}$$

- $e(x) > 1$, 局部规模报酬递增
- $e(x) = 1$, 局部规模报酬不变
- $e(x) < 1$, 局部规模报酬递减

♣

例题 2.10 计算柯布道格拉斯函数规模报酬

对于 $y = x_1^a x_2^b$，有

$$f(tx_1, tx_2) = (tx_1)^a (tx_2)^b = t^{a+b} x_1^a x_2^b = t^{a+b} f(x_1, x_2)$$

对 t 求导可以得到：

$$e(x) = \frac{d(tx_1)^a (tx_2)^b}{dt} \cdot \frac{t}{f(tx)} = (a+b)t^{a+b-1} x_1^a x_2^b \cdot \frac{t}{x_1^a x_2^b}$$

代入 t=1, 得到 $e(x) = a + b$。因此实际上 a+b 决定了柯布道格拉斯函数规模报酬。

命题 2.29 (生产集的性质)

生产集的性质

- 如果 Y 是凸集且是可加的, 则 Y 一定是规模报酬不变的。(Y 是凸集则 Y 一定是规模报酬非递增的)
- Y 是规模报酬不变的等价于生产函数是一次齐次函数 (充分必要条件)。
- 若 Y 是凸集 (规模报酬非递增), 则生产函数是凹函数。

♠

证明 [生产集的性质] 分别证明三点。

1、证明：如果 Y 是凸集且是可加的, 则 Y 一定是规模报酬不变的。思路为证明 Y 规模报酬非递减且非递增即可证明规模报酬不变。

（1）先证明 Y 是凸集则 Y 一定是规模报酬非递增的。

对于 $\forall t \in [0,1]$ 有,$0 \in Y, x \in Y$, 由于 Y 为凸集：

$$0(1-t)+tx \in Y$$

也就是报酬非递增的的性质（见规模报酬定义2.26）

（2）再证明规模报酬非递减。这部分需要可加性。

定义 $\beta = \underbrace{[\beta]}_{=1} + \underbrace{\beta - [\beta]}_{\gamma} > 1$

基于可加性可以得到，$[\beta x] = x \in Y$ 和 $\gamma x \in Y$(利用非递增性)，因此 $\beta x \in Y$

也就是报酬非递减的的性质（见规模报酬定义2.26）

2、证明 Y 是规模报酬不变的等价于生产函数是一次齐次函数 (充分必要条件)。

（1）一齐次函数则规模报酬不变也就是定义部分定义2.26

（2）规模报酬不变则得到一齐次函数

规模报酬不变性质得到 $(tx, tf(x)) \in Y$。

由于生产函数是最优效率的生产函数，可以得到 $tf(x) \leqslant f(tx)$。

接下来代入 $\frac{1}{t}$, 得到 $\left(t^{-1}(tx), t^{-1}f(tx)\right) = (x, t^{-1}f(tx)) \in Y$

此时对于要素投入 x 最有效率的一定为 $f(x)$, 因此得到 $t^{-1}f(tx) \leq f(x)$。

3、证明若 Y 是凸集 (规模报酬非递增), 则生产函数是凹函数。

此时 $\forall t \in [0,1], (x_1, f(x_1)) \in Y, (x_2, f(x_2)) \in Y$

由于 Y 是凸集，有 $(tf(x_1)+(1-t)f(x_2), -tx_1-(1+t)x_2) \in Y$

且此时最优的生产函数为 $(f(-tx_1-(1+t)x_2), -tx_1-(1+t)x_2) \in Y$

得到 $f(-tx_1-(1+t)x_2) \geqslant tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$

定义 2.27 (边际技术替代率)

概念

边际产量递减：短期有些要素不能调整，对于生产函数 $y = f(x_1, \overline{x_2})$, 一般假定 $f_1' > 0, f_1'' < 0$, 即边际产量大于零，但趋于递减。这种假定保证生产处于合理的阶段。边际产量递减对绝大多数产业是适用的。它可以保证有内点解。

边际技术替代率：在保持产出不变的条件下，增加投入 1 的数量而减少投入 2 的数量之间的比例关系，它是等产量线的切线斜率。

$$MRTS = -\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = -\frac{MP_{x_1}}{MP_{x_2}}$$

♣

例题 2.11 对科夫道格拉斯函数求边际技术替代率

$$\frac{\partial x_2(x_1)}{\partial x_1} = -\frac{\partial f/\partial x_1}{\partial f/\partial x_2} = -\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{x_2}{x_1}$$

定义 2.28 (替代弹性)

在既定产出水平下要素比例百分比变动同边际技术替代率百分比变动的比值 (衡量给定产出不变时，边际替代率百分比变化引致的要素百分比变化)

$$\frac{\Delta(x_2/x_1)}{x_2/x_1}\sigma=\frac{\Delta MRTS_{xy}}{MRTS_{xy}}$$

替代弹性是等产量线的曲率：因为 MRTS 是等产量线的斜率，因此替代弹性表示等产量线斜率变动时的要素投入比率变动。♣

注[替代弹性的理解] 替代弹性源于数学曲率的计算。

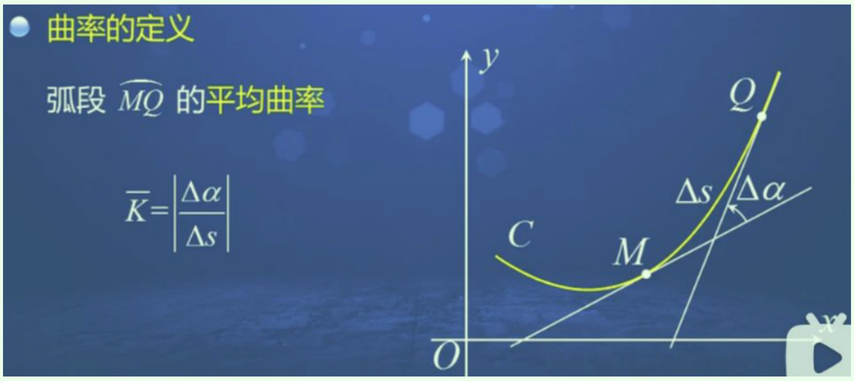


图 2.6: 曲率

图片中的曲率通过两点之间的圆弧长度 s 和切线夹角 α 进行衡量。在长度不变的情况下，夹角越大，曲线越弯曲。

命题 2.30 (替代弹性)

把 σ 转化为导数：

$$\sigma=\frac{d(x_2/x_1)}{dMRTS_{xy}}\cdot\frac{MRTS_{xy}}{(x_2/x_1)}=\frac{dln(x_2/x_1)}{dlnMRTS_{xy}}$$

1. 在等产量曲线形状正常时，$\sigma\geq 0$; σ 越大，即斜率的微小变动导致了要素投入比率的较大变动，等产量线越扁平（曲率越小，从曲线退化为直线），投入要素的替代性越强。
2. $\sigma\to\infty$ 时，投入要素完全替代，此时 MRTS 是常数，其变化量为 0;
3. $\sigma=0$ 时，投入要素完全互补（左右鞋子无法替代对方）。♠

例题 2.12 计算柯布道格拉斯的替代弹性

$$MRTS_{xy}=\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{x_2}{x_1}$$

$$ln\frac{x_2}{x_1}=ln\frac{1-\alpha}{\alpha}+lnMRTS_{xy}$$

$$\sigma=\frac{dln(x_2/x_1)}{dlnMRTS_{xy}}=1$$

例题 2.13 计算 CES 的替代弹性

$$
\begin{aligned}
&y=[\alpha_1 x_1^{\rho}+\alpha_2 x_2^{\rho}]^{\frac{1}{\rho}}\\
&MRTS_{xy}=\frac{MP_{x_1}}{MP_{x_2}}=\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\rho-1}\\
&\frac{x_1}{x_2}=MRTS_{xy}^{1-\rho}\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\\
&ln\frac{x_1}{x_2}=\frac{1}{1-\rho}lnMRTS_{xy}+ln\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\\
&\sigma=\frac{dln(x_2/x_1)}{dlnMRTS_{xy}}=\frac{1}{1-\rho}
\end{aligned}
$$

- $\rho \longrightarrow 1$ 完全替代，退化为线性生产函数
- $\rho \longrightarrow -\infty$ 完全无替代弹性
- $\rho \longrightarrow 0$ 科夫道格拉斯函数

具体而言，退化到完全无替代弹性（也就是完全互补）的情况：

$$
y=m\left(\beta_1\left(\frac{x_1}{m}\right)^{\rho}+\beta_2\left(\frac{x_2}{m}\right)^{\rho}\right)^{1/\rho}
$$

此时如果 $m=x_1\le x_2$，则 $y\longrightarrow m=x_1$

具体而言，退化到柯布道格拉斯的情况：

$$
\ln y=\frac{1}{\rho}\ln\left(\beta_1 e^{\rho\ln x_1}+\beta_2 e^{\rho\ln x_2}\right)
$$

$$
\beta_1 e^{\rho\ln x_1}+\beta_2 e^{\rho\ln x_2}=\rho(\beta_1\ln x_1+\beta_2\ln x_2)+\underbrace{o(\rho)}_{\rho(\beta_1+\beta_2)+\cdot}
$$

$$
\ln y\longrightarrow\beta_1\ln x_1+\beta_2\ln x_2
$$

注[超弹性的应用] ai 时代，超弹性可以被看作冲击下的异质性，高端技术和 ai 互补，完全无弹性，低端则完全互补。

对于偏技术进步，则对应劳资关系的替代率变化。

2.5.2 利润最大化

2.5.2.1 一阶条件

企业利润最大化的公式为

$$
TR(a)-c(a)
$$

这个公式与市场结构无关。TR 为总收益，C 为总机会成本，包含显性和隐性。一阶条件就是边际收益等于边际成本：

$$
\frac{\partial TR(a^*)}{\partial a_i}=\frac{\partial C(a^*)}{\partial a_i}
$$

此时再转化利润函数

$$
\pi(\mathbf{p})=\max_{\mathbf{y}\in\mathbf{Y}}\mathbf{p}\mathbf{y}
$$

短期情况下（带约束）：

$$\pi(\mathbf{p},\mathbf{z}) = \max \mathbf{py}$$

$$s.t. \quad y \in Y(\mathbf{z})$$

只生产一种产品情况下：

$$\pi(p,\mathbf{w}) = \max pf(\mathbf{x}) - \mathbf{wx}$$

其一阶条件为：

$$p\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} = w_i$$

也就是向量形式的 $p\mathbf{D}f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{w}$（每种要素边际产量的价值等于其要素价格）。

斜率变大意味着价格降低，此时均衡点向左侧移动，产出投入下降。商品价格与产出同方向变化 (供给规律符合利润最大化原则)。

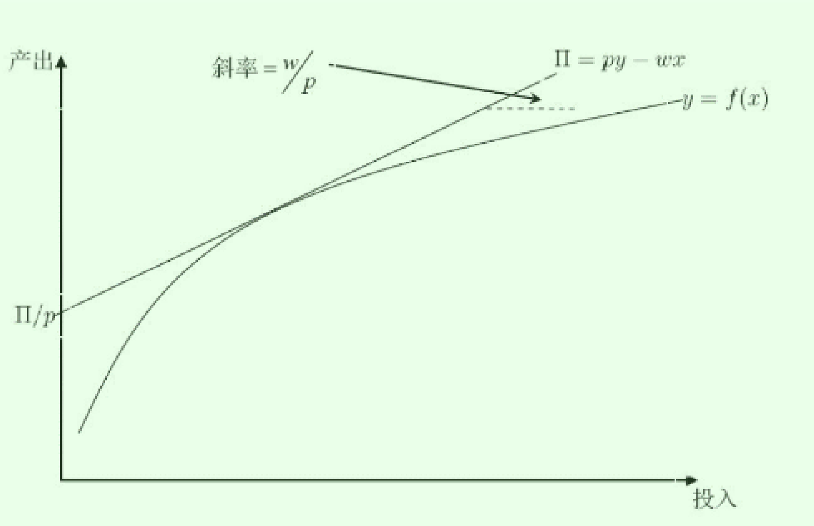


图 2.7: 利润最大化的一阶条件

注[利润函数的理解] 价格一般情况下为外生的给定水平，而利润函数为不同价格水平下的利润。

唯一解时，y 就为供给函数。也就是厂商追求利润最大化，给定产品价格和要素价格时点解 $y(p,w)$。其中 p 为产品价格，w 为要素价格。

利润最大化问题的解一般来说不是唯一的。当解是唯一时, 相对应的**利润最大生产计划**称之为**供给函数**, 所对应的投入称之为生产者的**投入需求函数**, 对应的产出向量称为生产者的**产出供给函数**。生产集的严格凸性保证了最优生产计划的唯一性。

命题 2.31 (利润最大化函数解唯一)

设 Y 是严格凸的，则对任意给定的 $\mathbf{p} \in R_+^L$, 若利润最大化问题的解存在则解是唯一的。

证明 [利润最大化函数解唯一] 证明如下：

假设此时存在两个解 y, y'，且满足 $py = py'$

凸性意味着

$$\forall t \in (0,1), ty + (1-t)y' \in Int(Y)$$

由于命题证明了生产满足凸性和可加则规模报酬不变，此时有

$$Kty + K(1-t)y' \in Int(KY)$$

但是此时对应的最优生产集却：$Kty + K(1-t)y' = kpy > py$
矛盾。

定义 2.29 (利润最大化二阶条件)

利润最大化的二阶条件是生产函数在最优点处的二阶导数矩阵必须是负半定的, 即二阶条件要求海塞矩阵

$$D^2 f(\mathbf{x}^*) = \left(\frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

♣

例题 2.14 道格拉斯技术的利润函数 求 CD 函数的利润函数：

$$f(x) = x^a, a > 0$$

此时利润函数为

$$\pi(p,w) = f(x)p - xw = x^a p - wx$$

注意，利润函数需要一阶条件和二阶条件：
一阶条件可以得到：

$$pax^{a-1} = w$$

二阶条件可以得到：

$$pa(a-1)x^{a-2} \leq 0$$

这意味着为了保证竞争利润最大化有意义, 生产函数必然是规模报酬不变或规模报酬递减的。
此时 $a = 1$ 时 p=w, 也就是完全竞争市场，任何时候利润都为最优值 0。
使用一条件可以得到：

$$x(p,w) = \left(\frac{w}{ap}\right)^{\frac{1}{a-1}}$$

也就是说供给函数为

$$y(p,w) = f(x(p,w)) = \left(\frac{w}{ap}\right)^{\frac{a}{a-1}}$$

利润函数为：

$$\pi(p,w) = py(p,w) - wx(p,w) = w\left(\frac{1-a}{a}\right)\left(\frac{w}{ap}\right)^{\frac{1}{a-1}}$$

命题 2.32 (供给函数的性质 1)

供给函数 $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ 是零次齐次的，即对所有的 $t>0$, 有 $\mathbf{y}(t\mathbf{p})=\mathbf{y}(\mathbf{p})$。

简单理解，产品价格、要素价格同时上涨，此时生产计划保持不变。

命题 2.33 (供给函数的性质 2)

(替代矩阵的负定性) 令 $y=f(\mathbf{x})$ 为二阶连续可微、严格凹的单一生产函数，$\mathbf{x}(p,\mathbf{w})$ 为投入需求函数，则替代矩阵 (一种要素价格增加 1 个单位导致另一种要素投入增加多少)

$$D\mathbf{x}(p,\mathbf{w})=\left[\frac{\partial x_i(p,\mathbf{w})}{\partial w_j}\right]$$

为对称负定矩阵。

证明 [矩阵性质] 证明如下

一阶条件可以得到：

$$\mathbf{D}f(\mathbf{x}(\mathbf{w}))-\mathbf{w}\equiv 0.$$

再对 W 求偏导

$$\mathrm{D}^2 f(\mathrm{x}(\mathrm{w}))\mathrm{Dx}(\mathrm{w})-\mathrm{I}\equiv 0.$$

变形得到：

$$\mathrm{Dx}(\mathrm{w})\equiv[\mathrm{D}^2 f(\mathrm{x}(\mathrm{w}))]^{-1}.$$

后者正是海森矩阵。

同时此时其对角线元素小于 0 为 $\partial x_i/\partial w_i<0$，也就是要素价格下降，要素需求上升的经济含义。

其对称性还可以得到 $\partial x_i/\partial w_j=\partial x_j/\partial w_i$。

2.5.2.2 弱公理

和显示偏好弱公理类似，利润最大弱公理也是显示盈利弱公理，厂商选择的往往是最优的生产计划 $(p^t,y(p^t))$。

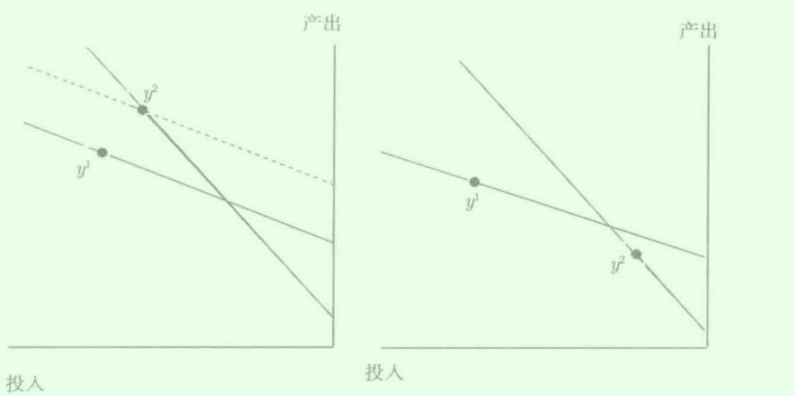


图 2.8: 利润最大化弱公理

$$y^t = \frac{\pi^t}{p^t} - \frac{w^t}{p^t}x^t$$
$$y^s = \frac{\pi^s}{p^s} - \frac{w^s}{p^s}x^s$$

左图违背了弱公理，右图满足弱公理。也就是相同斜率（价格）的情况下，y^2 策略优于 y^1 策略，但厂商选择了 y^1 策略。

基于显示偏好可以得到方程组：

$$\begin{cases} \mathbf{p}^t(\mathbf{y}^t - \mathbf{y}^s) \geqq 0, \\ -\mathbf{p}^s(\mathbf{y}^t - \mathbf{y}^s) \geqq 0. \end{cases}$$

此时也就是

$$(\mathbf{p}^t - \mathbf{p}^s)(\mathbf{y}^t - \mathbf{y}^s) = \Delta\mathrm{p}\Delta\mathrm{y} \geqq 0.$$

当 p 大于 0 时，这里表示对是产出；p 小于 0 时，这里表示的是投入。**而价格的变动方向和需求的变动方向在产出和投入时总是一致的**（产品价格上涨，生产供给增多；要素价格增加（负的更多），要素需求减少（负的更多））。

2.5.2.3 利润函数性质

命题 2.34 (利润函数性质)

利润函数的性质

1. 关于产出价格非递减，关于投入价格非递增。若对所有产出有 $p_i' \geq p_i$，对所有投入有 $p_j' \leq p_j$，则 $\pi(\mathbf{p}') \geq \pi(\mathbf{p})$。
2. 关于 $\mathbf{p}$ 一次齐次。对所有的 $t \geq 0, \pi(t\mathbf{p}) = t\pi(\mathbf{p})$
3. 是 $\mathbf{p}$ 的凸函数。令 $\mathbf{p}'' = t\mathbf{p} + (1-t)\mathbf{p}', 0 \leq t \leq 1$，则 $\pi(\mathbf{p}'') \leq t\pi(\mathbf{p}) + (1-t)\pi(\mathbf{p}')$
4. 关于 p 连续。当 $\pi(\mathbf{p})$ 定义良好且 $p_i > 0, i = 1, \cdots, n$ 时，函数 $\pi(\mathbf{p})$ 是连续的。

证明 [利润函数性质] 证明如下

第一个，利用利润函数是最优的特性：$\pi(p') = p'y' \geqslant p'y \geqslant py = \pi(p)$

第二个，集合角度出发，满足 $\forall y' \in Y, py \geqslant py'$。此时对于 $\forall t \geqslant 0, \forall y' \in Y$ 有 $tpy \geqslant tpy'$，也就是 $\pi(t\mathbf{p}) = t\mathbf{py} = t\pi(\mathbf{p})$。

第三个，利用凸函数的性质。令 $\mathfrak{p}'' = t\mathfrak{p} + (1-t)\mathfrak{p}', 0 \leqq t \leqq 1$，则 $\pi(\mathfrak{p}'') \leqq t\pi(\mathfrak{p}) + (1-t)\pi(\mathfrak{p}')$。

命题 2.35 (霍特林引理)

(霍特林 (Hotelling) 引理) 令 $y_i(\mathbf{p})$ 为厂商在产品 i 上的供给函数。设利润函数的导数存在且 $p_i > 0$，则有

$$y_i(\mathbf{p}) = \frac{\partial\pi(\mathbf{p})}{\partial p_i}, \forall i = 1, \cdots, n.$$

包络定理即可证明，求导后利用一阶条件为 0 代入得到。

2.5.2.4 成本最小化

成本最小化是利润最大化的必要条件。利润最大化是一个**一般均衡**分析，考虑了所有市场（产品和要素）的情况；成本最小化是一个**局部均衡**分析，考察在给定产出的条件下，如何选择最佳要素投入。

此时给定产出水平 y, 考虑如下成本最小化问题：

$$\min_{x} wx$$
$$s.t.\ f(x) \geq y$$

得到拉格朗日式子

$$\mathcal{L}(\lambda, \mathbf{x}) = \mathbf{wx} - \lambda(f(\mathbf{x}) - y)$$

其 x 的**一阶条件**可以得到

$$w_i - \lambda \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} = \mathbf{0}$$

$$f(\mathbf{x}^*) = y$$

此时为一组要素价格的条件，使用两组要素价格相除可以得到：

$$\frac{w_i}{w_j} = \frac{\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i}}{\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i}}$$

经济替代率 = 技术替代率

以上出现的一阶条件为局部最优的条件，但如果生产函数是拟凹的, 则也是全局最优的充分条件。

对每个给定的 $\mathbf{w}$ 和 y，存在某个最小成本选择 $\mathbf{x}^*$。我们称给出这种最优选择的函数为**条件投入需求函数** (conditional input demand function), 并记之为 $\mathbf{x}(\mathbf{w}, y)$。该条件要素需求由产出水平和要素价格决定。成本函数是既定要素价格 w 和产出水平 y 下的最小成本，即 $c(\mathbf{w}, y) = \mathbf{wx}(\mathbf{w}, y)$。注：成本函数已经是一个最优化的结果 (选择的结果)。

例题 2.15 求解 CD 生产函数的成本函数 例子

考虑成本最小化问题:

$$c(\mathbf{w}, y) = \min_{x_1, x_2} w_1 x_1 + w_2 x_2$$
$$\text{s.t.} \quad A x_1^a x_2^b = y$$

从约束中求出 x_2 并将其代入目标函数:

$$\min_{x_1} w_1 x_1 + w_2 A^{\frac{1}{b}} y^{\frac{1}{b}} x_1^{-\frac{a}{b}}$$

其一阶条件为:

$$w_1 - \frac{a}{b} w_2 A^{\frac{1}{b}} y^{\frac{1}{b}} x_1^{-\frac{a+b}{b}} = 0$$

求得条件要素需求函数为:

$$x_1(w_1, w_2, y) = A^{-\frac{1}{a+b}} \left[\frac{a w_2}{b w_1}\right]^{\frac{b}{a+b}} y^{\frac{1}{a+b}}$$

$$x_2(w_1, w_2, y) = A^{-\frac{1}{a+b}} \left[\frac{a w_2}{b w_1}\right]^{\frac{a}{a+b}} \frac{1}{y^{\frac{1}{a+b}}}$$

从而成本函数为:

$$c(w_1, w_2, y) = w_1 x_1 + w_2 x_2 = A^{-\frac{1}{a+b}} \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{a+b}} + \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{a+b}}\right] w_1^{\frac{a}{a+b}} w_2^{\frac{a}{a+b}} y^{\frac{1}{a+b}}$$

当 $A=1, a+b=1$ 时:

$$c(w_1,w_2,y)=\alpha w_1^a w_2^{1-a} y$$

其中, $\alpha=a^{-a}(1-a)^{a-1}$

例题 2.16 求解 ces 函数的成本函数 例子

举例：常替代弹性技术的成本函数。设

$$f(\mathbf{x})=\left(\sum_{l=1}^{L} x_l^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}$$

成本最小化问题为:

$$\min \sum_{l=1}^{L} w_l x_l$$

$$\text{s.t.} \ \sum_{l=1}^{L} x_l^{\rho}=y^{p}$$

其一阶条件为:

$$w_l-\lambda\rho x_l^{\rho-1}=0 \qquad l=1,\cdots,L$$

$$\sum_{l=1}^{L} x_l^{\rho}=y^{\rho}$$

从而有

$$x_l^{\rho}=w_l^{\frac{\rho}{\rho-1}}(\lambda\rho)^{\frac{-\rho}{\rho-1}}$$

将其代入生产函数:

$$(\lambda\rho)^{\frac{-\rho}{\rho-1}}\left(\sum_{l=1}^{L} w_l^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)=y^{\rho}$$

由此可求得 $(\lambda\rho)^{\frac{-\rho}{\rho-1}}=y^{\rho}\left(\sum_{l=1}^{L} w_l^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{-1}$, 将其代回 (4.4.9), 可得条件要素需求函数

$$x_1(\mathbf{w},y)=w_l^{\frac{1}{\rho-1}}\left(\sum_{l=1}^{L} w_l^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{-\frac{1}{\rho}} y$$

将上述函数代入成本函数:

$$c(\mathbf{w},y)=\sum_{l=1}^{L} w_l x_l(\mathbf{w},y)=y\left(\sum_{l=1}^{L} w_l^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\frac{\rho-1}{\rho}}$$

记 $r=\rho/(\rho-1)$，则上式可简化为:

$$c(\mathbf{w},y)=y\left(\sum_{l=1}^{L} w_l^{r}\right)^{\frac{1}{r}}$$

可见，成本函数同原来的 CES 生产函数具有相同的形式。

若生产函数为:

$$f(\mathbf{x})=\left(\sum_{l=1}^{L}(a_1 x_l)^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}$$

则成本函数为:

$$c(\mathbf{w},y)=\left[\sum_{l=1}^{L}\left(\frac{w_1}{a_l}\right)^r\right]^{\frac{1}{r}}y$$

注[理解成本函数和生产函数] 注意，例子结果中，CD 生产函数的生产函数最终也是 CD 函数形式，ces 生产函数的成本函数最终也是 ces 函数形式。一般情况下成本函数的形式和生产函数为一致的。但是并不是所有函数都满足这种一致性。

例题 2.17 其他生产函数的成本函数 例子

例子 1：里昂惕夫生产技术的成本函数

$$f(\mathbf{x})=\boldsymbol{min}\{a_1x_1,a_2x_2,\cdots,a_Lx_L\}$$

其实就相当于只用一种材料。

例子 2：线性生产技术的成本函数

$$f(x_1,x_2)=ax_1+bx_2$$

取决于替代的成本，比较 $\frac{a}{b}?\frac{w_1}{w_2}$

命题 2.36 (成本函数与支出函数)

当将成本函数同支出函数进行比较时，两者的行为是完全相同的。考虑其定义：

(1) 支出函数：$e(\mathbf{p},u)=min_{\mathbf{x}}\in\mathcal{R}_+^n\mathbf{px}$, s.$t.u(\mathbf{x})\geq u$

(2) 成本函数：$c(\mathbf{w},y)=min_{\mathbf{x}}\in\mathcal{R}_+^n\mathbf{Wx},s.t.f(\mathbf{x})\geq y$ 从数学上来说，上述两个最优化问题是完全相同的。因此，有关支出函数的每条定理对成本函数来说也成立。

命题 2.37 (成本函数的性质)

设生产函数 f 连续且严格递增，则成本函数具有如下性质：

1. $c(w,y)$ 关于 w 非递减（单调性：要素价格上升、总成本也上升）
2. $c(w,y)$ 关于 w 一次齐次（所有要素价格等比例上升，总成本也等比例上升）
3. $c(w,y)$ 是 w 的凹函数（当要素价格变化时，组织可以重新进行要素组合，从而使成本的增加慢于要素价格的变化）
4. $c(w,y)$ 在 $w>0$ 上是 w 的连续函数
5. 对所有的 $w>0$，$c(w,y)$ 关于 y 严格递增
6. 谢泼德 (Shephard) 引理：设 $x(w,y)$ 为价格为 w，产出水平为 y 时的成本最小生产计划，若成本函数的导数存在且 $x_i>0$，则 $x_i(w,y)=\frac{\partial c(w,y)}{\partial w_i},i=1,\cdots,n$。（即知道了企业的成本函数，就知道要素的需求）

证明 [成本函数的性质] 证明如下

第一点：利用成本函数是当前最小成本这一性质。

此时有 $w'\geqslant w$。对于其对应的生产计划，有

$$x^*\in(w,y);x'\in(w',y)$$

$$wx^*=c(w,y);w'x'=c(w,y)$$

由于对应的成本是最小的，因此

$$wx^* \leqslant wx'; w'x' \leqslant w'x^*; wx' \leqslant w'x'$$

得到了非递减。

第二点：需要证明 $\forall t > 0, c(tw, y) = tc(w, y)$

这意味着

$$x^* \in x(w, y), c(w, y) = wx^*$$

$$x' \in x(tw, y), c(tw, y) = twx'$$

思路转化为求两个集合相等。

取任意 $x^* \in x(w, y)$。则对任意可行 x (即满足 $f(x) \geq y$), 有

$$w \cdot x^* \leq w \cdot x.$$

两边同乘以正数 $t > 0$, 得到

$$t\, w \cdot x^* \leq t\, w \cdot x.$$

也就得到了 $x^* \in x(tw, y)$.。反过来除以 t 就是另外一个属于关系。

第三点：这个的经济意义是厂商为风险偏好性，因为经济波动交大时，价格上涨幅度越大，利润幅度越大。厂商更偏好价格波动而非价格稳定。波动越大（有时赚得多，有时亏得少），平均利润反而上升。厂商在面对不确定价格时不会希望价格被管制得太稳定；高风险、高波动市场中反而有高利润潜力；解释了为什么在某些市场中企业愿意暴露于价格风险（例如投机性能源企业、航空公司在油价衍生品市场的行为）。

$$E[\pi(p)] \geq \pi(E[p])$$

证明就是利用凸函数的性质。展开对应的 $c(tx_1 + (1-t)w_2, y)$。

第五点。需要证明 $y_1 > y_2$, 则 $c(w, y_1) > c(w, y_2)$

利用投入要素集的性质2.22, 产量越大，生产集越小，因此 $V(y_1) \subset V(y_2)$

此时 $x \in V(y_1)$, 则 $x \in V(y_2)$，于是得到

$$c(w, y_2) \leqslant wx' = c(w, y_1)$$

命题 2.38 (补偿自身价格效应)

（负自身替代 (own-substitution) 项）补偿自身价格效应 (compensated own-price effect) 是非正的，即投入需求曲线向下倾斜：

$$\frac{\partial x_i(w, y)}{\partial w_i} = \frac{\partial^2 c(w, y)}{\partial w_i^2} \leq 0$$

注[补偿自身价格效应的理解] 证明就是利用了谢泼德引理 $\frac{\partial c(w,y)}{\partial w_i} = x_i(w, y)$。经济含义是保持产出不变，要素价格上涨不会影响产出，只会促使厂商调整要素结构以节省成本。这种效应排除了产出变化带来的规模效应，只研究要素间的替代效应，因此是补偿效应。

有了成本函数后，厂商利润最大化问题可以写为：

$$\max_{y\geq 0} py - c(\mathbf{w}, y)$$

其一阶必要条件为:

$$p - \frac{\partial c(\mathbf{w}, y^*)}{\partial y} \leq 0, \text{等式成立当} y^* > 0$$

价格等于边际成本。若成本函数为 y 的凸函数，则一阶条件也是 y^* 为最优产出水平的充分条件。

2.5.3 成本问题

2.5.3.1 成本函数

成本函数总是能够表示为条件投入需求函数的函数:

$$c(w, y) = wx(w, y)$$

在短期生产中，一些生产要素固定在某个事先确定的水平。令 x_f 为固定要素向量，x_v 为可变要素向量。将 w 划分为可变和固定要素价格向量，即 $w = (w_v, w_f)$。短期条件要素需求函数一般来说与 x_f 有关，因此将其写为 $x_v(w, y, x_f)$。则短期成本函数可写为

$$c(w, y, x_f) = w_v x_v(w, y, x_f) + w_f x_f$$

其中，$w_v x_v(w, y, x_f)$ 为短期可变成本，$w_f x_f$ 为固定成本。

注[成本理解] 可变成本函数形式是多样的，固定成本线性。

- 短期成本函数 =STC=$w_v x_v(w, y, x_f) + w_f x_f$
- 短期平均成本函数 =SAC=$\frac{c(w,y,x_f)}{y}$
- 短期平均可变成本函数 =SAVC=$\frac{w_v x_v(w,y,x_f)}{y}$
- 短期平均固定成本函数 =SAFC=$\frac{w_f x_f}{y}$
- 短期边际成本函数 =SMC=$\frac{\partial c(w,y,x_f)}{\partial y}$

当所有的要素都可变时，厂商将选择最优的 $\mathbf{x}_f$。因此，长期成本函数只与要素价格和事前确定的产出水平有关。可以用短期成本函数来表示长期成本函数。方式如下，令 $\mathbf{x}_f(\mathbf{w}, y)$ 为固定要素的最优选择，$\mathbf{x}_v(\mathbf{w}, y) = \mathbf{x}_v(\mathbf{w}, y, \mathbf{x}_f(\mathbf{w}, y))$ 为可变要素长期最优选择。则长期成本函数可写为

$$c(\mathbf{w}, y) = \mathbf{w}_v \mathbf{x}_v(\mathbf{w}, y) + \mathbf{w}_f \mathbf{x}_f(\mathbf{w}, y) = c\left(\mathbf{w}, y, \mathbf{x}_f(\mathbf{w}, y)\right)$$

长期平均成本函数 =LAC=$\frac{c(w,y)}{y}$ 长期边际成本函数 =LMC=$\frac{\partial c(\mathbf{w},\mathbf{y})}{\partial y}$

例题 2.18 短期 CD 函数的成本函数

设柯布-道格拉斯技术的第二种要素固定在某个水平 k。则厂商的成本最小化问题为

$$\min w_1 x_1 + w_2 k$$

s.t.

$$y = x_1^a k^{1-a}$$

从约束中解出

$$x_1 = (yk^{a-1})^{\frac{1}{a}}$$

代入目标函数，得到短期成本函数

$$c(w_1, w_2, y, k) = w_1 (yk^{a-1})^{\frac{1}{a}} + w_2 k$$

- 短期平均成本函数 = $w_1 \left(\frac{y}{k}\right)^{\frac{1-a}{a}} + \frac{w_2 k}{y}$

- 短期平均可变成本函数 = $w_1\left(\frac{y}{k}\right)^{\frac{1-a}{a}}$
- 短期平均固定成本函数 = $\frac{w_2 k}{y}$
- 短期边际成本函数 = $\frac{w_1}{a}\left(\frac{y}{k}\right)^{\frac{1-a}{a}}$

命题 2.39 (平均和边际成本)

若生产是规模报酬不变，则成本函数可写为 $c(\mathbf{w}, y) = yc(\mathbf{w}, 1)$(把产量和要素价格分开了，$c(\mathbf{w}, 1)$ 即平均成本)

证明 [平均和边际成本] 使用反证法证明

此时有 $c(w, 1) = wx^*$, 需要证 $c(w, y) = yc(w, 1) = yw^* = wyx^*$

让 x' 为价格为 w 时生产 y 单位最小成本的方案，其比 x^* 还要优，

$$wx' < wyx^*$$

得到

$$\frac{wx'}{y} < wx^*$$

此时 $\frac{wx'}{y}$ 就是生产一单位的情况。也就是规模报酬不变的情况下，生产一单位和生产 y 单位的方案计划解和 y 无关。

2.5.3.2 成本几何意义

将成本函数简写为 $c(y)$, 它包括固定成本和可变成本。可将短期平均成本写为

$$SAC = \frac{c(\mathbf{w}, y, \mathbf{x}_f)}{y} = \frac{\mathbf{w}_f \mathbf{x}_f}{y} + \frac{\mathbf{w}_v \mathbf{x}_v(\mathbf{w}, y, \mathbf{x}_f)}{y} = SAFC + SAVC$$

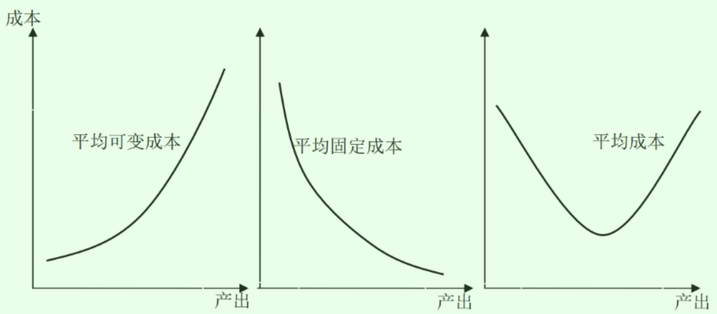


图 2.9: 平均可变、平均固定、平均成本曲线

命题 2.40 (边际成本和平均成本的关系)

边际成本曲线同平均成本曲线的关系是什么呢？由于要素价格是固定的，略去要素价格，将成本函数简单写为 c(y)。既然

$$\frac{d\left(\frac{c(y)}{y}\right)}{dy} = \frac{yc'(y) - c(y)}{y^2} = \frac{1}{y}\left[c'(y) - \frac{c(y)}{y}\right]$$

因此有 $\frac{d\left(\frac{c(y)}{y}\right)}{dy} \leq 0 (\geq 0)$ 当且仅当 $c'(y) - \frac{c(y)}{y} \leq 0 (\geq 0)$。

当边际成本曲线在平均可变成本曲线之下时 $(c'(y) \leq \frac{c(y)}{y})$，平均可变成本曲线是递减的 $(\frac{d\left(\frac{c(y)}{y}\right)}{dy} \leq 0)$，而当边际成本曲线在平均可变成本曲线之上时 $(c'(y) \geq \frac{c(y)}{y})$，平均可变成本曲线是递增的 $(\frac{d\left(\frac{c(y)}{y}\right)}{dy} \geq 0)$。因此，平均成本在 y^* 处达到最小值，在该点处边际成本曲线与平均可变成本曲线相交。

命题 2.41 (长期和短期成本关系)

长期成本函数写为 $c(y) = c(y, z(y))$。令 z(y) 为单一要素的成本最小需求，y^* 为某个给定的产出水平，$z^* = z(y^*)$ 为短期需求。对所有产出水平，短期成本 $c(y, z^*)$ 必然至少同长期成本 $c(y, z(y))$ 一样大。在产出水平 y^* 处，短期成本等于长期成本，从而有 $c(y^*, z^*) = c(y^*, z(y^*))$。因此，长期和短期成本曲线必然在 y^* 点相切。上述结果即为包络定理的几何形式。长期成本曲线在 y^* 的斜率为

$$\frac{dc(y^*, z(y^*))}{dy} = \frac{\partial c(y^*, z^*)}{\partial y} + \frac{\partial c(y^*, z^*)}{\partial z}\frac{\partial z(y^*)}{\partial y}$$

但由于 z^* 是给定要素价格和产出水平 y^* 下的最优选择，因此有

$$\frac{\partial c(y^*, z^*)}{\partial z} = 0$$

因此，长期边际成本在 y^* 处的值等于短期边际成本在 (y^*, z^*) 处的值。若长期和短期成本曲线在某点相切，则长期和短期平均成本曲线也在该点相切。

2.5.3.3 生产者剩余

短期：成本函数为 $c(y) = c_v(y) + F$, 其中 y 是产量，$c_v(y)$ 是可变成本，F 是固定成本，$c'(y)$ 是边际成本。假设产出品的价格为 p, 最优的产出或者供给函数 $p = c'(y)$, 记为 $y(p)$。

生产者剩余指在某个市场价格下，生产者在最优生产选择下带来的净收益。这个概念与利润有差异，**在短期内，生产者剩余是扣除可变成本的净收益，不管产量多少，固定成本都已经发生了；在长期，由于固定成本为零，生产者剩余与利润是一致的。**生产者剩余的数学表达式如下：

$$PS(p) = \int_0^{y(p)} (p - c'(y))dy = py(p) - c_v(y(p)) \ = \ \pi(p) + F$$

当产出品价格从 p^0 变化到 p^1 时，生产者剩余的变化为：

$$PS(p^0, p^1) = \int_{y(p^0)}^{y(p^1)} (p - c'(y))dy = \pi(p^1) - \pi(p^0)$$

2.5.3.4 对偶性

给定生产技术，可以推导成本函数。同理，给定成本函数，可以推导生产技术。本质上，成本函数本质上和生产函数包含了相同的信息，这种一一对应的结果就是对偶原则。

给定成本函数 $x(w, y)$, 使得要素价格 w 随意变动，定义如下集合：

$$V^*(y) = \{\mathbf{x}{:}\mathbf{wx} \geq \mathbf{wx}(\mathbf{w}, y) = \mathbf{c}(\mathbf{w}, \mathbf{y})\forall \mathbf{w} \geq \mathbf{0}\}$$

要证明生产可能性集 $V^*(y)$ 就是成本函数推出的集合 $V(y)$。

命题 2.42 (对偶性)

$(V(y)$ 和 $V^*(y)$ 的对偶性) 设 $V(y)$ 是闭、凸和单调生产技术，则 $V^*(y) = V(y)$。

证明 [生产集和技术集] 证明如下

证明思路就是 x 属于集合 a 则其也属于集合 b，那么 ab 集合相等。

有条件：$V(y)$ 是满足单调性假设的闭凸集，则根据分离超平面定理：

如果两个不相交的凸集，则存在一个超平面 (由非零向量 w* 和常数 b 定义) 能将这凸集分开。此时一个凸集任意点满足 $\mathbf{w}^*\mathbf{x} \le b$, 另一个凸集任意点满足 $\mathbf{w}^*\mathbf{x} \ge b$)。因为两侧都是凸集，此时无法取等号。

接下来使用反证法：利用技术生产集单调性和成本函数集为最优最小制造矛盾。

假设存在某个 i, 使得 $w_i < 0$。令 $\hat{\mathbf{x}} \in V(y)$, 由于技术是单调的，为此 $\hat{\mathbf{x}} + m\mathbf{e}^i \in V(y)$(二维时等产量线的右上方), 其中 $m > 0, \mathbf{e}^i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, 如果 $m > 0$ 足够大, 那么总可以使得 $\mathbf{w}^*\mathbf{x} - \mathbf{w}^*(\hat{\mathbf{x}} + m\mathbf{e}^i) > 0$(因为 $\mathbf{w}^*$ 中如果有一个 $w_i < 0$, 相减后变成相加，而 m 足够大，因此总能大于 0), 即 $\mathbf{w}^*\mathbf{x} - \mathbf{w}^*(\hat{\mathbf{x}} + m\mathbf{e}^i) > 0$ 是可能的。由于 $\mathbf{x} \notin V(y)$, 而 $\hat{\mathbf{x}} + m\mathbf{e}^i \in V(y), \mathbf{w}^*\mathbf{x}$ 应该小于 $\mathbf{w}^*(\hat{\mathbf{x}} + m\mathbf{e}^i)$, 是矛盾的，所以 $\mathbf{w}^* > 0$, 所以 $\mathbf{w}^*\mathbf{x} < \mathbf{w}^*\mathbf{Z}$。

令 $\mathbf{z}^*$ 为 $V(y)$ 中在价格 $\mathbf{w}^*$ 处使成本达到最小的点，则有 $\mathbf{w}^*\mathbf{x} < \mathbf{w}^*\mathbf{z}^* = c(\mathbf{w}^*, y)$。但根据 $V^*(y)$ 的定义，$\mathbf{x} \notin V^*(y)$, 矛盾。

[例题] 举例：

设成本函数为 $c(\mathbf{w}, y) = yw_1^a w_2^{1-a}$。该如何求解其对应的生产技术呢？根据谢泼德引理 $x_i(\mathbf{w}, y) = \frac{\partial c(\mathbf{w}, y)}{au.}$, 有：

$$x_1(\mathbf{w}, y) = ayw_1^{a-1}w_2^{1-a} = ay\left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{1-a}$$

$$x_2(\mathbf{w}, y) = (1-a)yw_1^a w_2^{-a} = (1-a)y\left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{-a}$$

整理:

$$\frac{w_2}{w_1} = \left(\frac{x_1}{ay}\right)^{\frac{1}{1-a}}$$

$$\frac{w_2}{w_1} = \left(\frac{x_2}{(1-a)y}\right)^{-\frac{1}{a}}$$

$$\frac{x_1^{-a}}{a^{-a}y^{-a}} = \frac{x_2^{1-a}}{(1-a)^{1-a}y^{1-a}}$$

$$[a^{-a}(1-a)^{1-a}]y = x_1^a x_2^{1-a}$$

这正是柯布-道格拉斯技术。

价格非递减、齐次、连续和凹的函数是否一定是某个技术的成本函数呢? 回答是肯定的。

命题 2.43 (成本函数的刻画)

令 $\phi(\mathbf{w}, y)$ 为可微函数，且满足：

(1) $\phi(t\mathbf{w}, y) = t\phi(\mathbf{w}, y)\ \forall t \ge 0$ (一次齐次)

(2) $\phi(\mathbf{w}, y) \ge 0,\ \forall \mathbf{w} \ge 0, \forall y \ge 0$ (单调)

(3) $\phi(\mathbf{w}', y) \ge \phi(\mathbf{w}, y),\ \forall \mathbf{w}' \ge \mathbf{w}$ (价格非递减)

(4) $\phi(\mathbf{w}, y)$ 是 $\mathbf{w}$ 的凹函数

则 $\phi(\mathbf{w}, y)$ 是技术 $V^*(y) = \{\mathbf{x} \ge 0 : \mathbf{wx} \ge \phi(\mathbf{w}, y),\ \forall \mathbf{w} \ge 0\}$ 的成本函数。

本质上上是需要通过以上（1）-（4）条件证明出成本集——属于生产计划集，属于生产可能性集，最

小解。

证明 [成本函数的刻画]

思路简述：要证明 $\phi(\mathbf{w},y)$ 是技术 $V^*(y)$ 的成本函数，需要证明三点：

① 条件投入需求函数 $\mathbf{x}$ 是生产可行的，即 $\mathbf{x}(\mathbf{w},y)\geq 0$

② $\mathbf{x}(\mathbf{w},y)\in V^*(y)$

③ $\mathbf{x}(\mathbf{w},y)$ 是 $\mathbf{wx}$ 在 $V^*(y)$ 上的最小解（成本最小化）

证明：① 对任意 $\mathbf{w}\geq 0$，定义

$\mathbf{x}(\mathbf{w},y)=\left(\frac{\partial\phi(\mathbf{w},y)}{\partial w_1},\ldots,\frac{\partial\phi(\mathbf{w},y)}{\partial w_n}\right)$

（条件投入需求函数的定义）

由于 $\phi(\mathbf{w},y)$ 关于 $\mathbf{w}$ 是一次齐次的，根据欧拉定理（分配净尽定理，是指在完全竞争的条件下，假设长期中规模收益不变，则全部产品正好足够分配给各个要素，比如有 $Q=L\cdot MP_L+K\cdot MP_K$，其中 MP_L 和 MP_K 分别代表劳动和资本的边际产品），$\phi(\mathbf{w},y)$ 可写为

$\phi(\mathbf{w},y)=\sum_{i=1}^n w_i\frac{\partial\phi(\mathbf{w},y)}{\partial w_i}=\mathbf{wx}(\mathbf{w},y)$

由于 $\phi(\mathbf{w},y)$ 单调递增，有 $\mathbf{x}(\mathbf{w},y)\geq 0$。② 对任意给定的 $\mathbf{w}'\geq 0,\mathbf{w}'>\mathbf{w}$（$\mathbf{w}'<\mathbf{w}$ 时同理可证），利用拉格朗日中值定理有:

$$\phi(\mathbf{w}',y)=\phi(\mathbf{w},y)+\mathbf{D}\phi(\mathbf{w}'',y)(\mathbf{w}'-\mathbf{w}),\text{其中}\mathbf{w}''\in(\mathbf{w}',\mathbf{w})$$

由于 $\phi(\mathbf{w},y)$ 是 $\mathbf{w}$ 的非递减凹函数，则当 $\mathbf{w}''>\mathbf{w}$ 时，

$$\mathbf{D}\phi(\mathbf{w}'',y)\leq\mathbf{D}\phi(\mathbf{w},y)$$

则 $\phi(\mathbf{w}',y)\leq\phi(\mathbf{w},y)+\mathbf{D}\phi(\mathbf{w},y)(\mathbf{w}'-\mathbf{w})$ 即 $\phi(\mathbf{w}',y)\leq\phi(\mathbf{w},y)+\mathbf{D}\phi(\mathbf{w},y)\mathbf{w}'-\mathbf{D}\phi(\mathbf{w},y)\mathbf{w}$ 而 $\phi(\mathbf{w},y)=\mathbf{D}\phi(\mathbf{w},y)\mathbf{w}$（前面的欧拉定理），则

$$\phi(\mathbf{w}',y)\leq\mathbf{D}\phi(\mathbf{w},y)\mathbf{w}'$$

然后应用谢泼德引理 $\mathbf{x}(\mathbf{w},y)=\mathbf{D}\phi(\mathbf{w},y)$

$$\phi(\mathbf{w}',y)\leq\mathbf{x}(\mathbf{w},y)\mathbf{w}',\quad\forall\mathbf{w}\geq 0$$

这样，根据 $V^*(y)$ 的定义，我们可知 $\mathbf{x}(\mathbf{w}',y)\in V^*(y)$。③ 若 $\mathbf{x}\in V^*(y)$，则根据投入要素集的定义，它必然满足

$$\mathbf{wx}\geq\phi(\mathbf{w},y)$$

根据欧拉定理，有

$$\phi(\mathbf{w},y)=\mathbf{wx}(\mathbf{w},y)$$

结合上述两个式子，有

$$\mathbf{wx}\geq\mathbf{wx}(\mathbf{w},y),\forall\mathbf{x}\in V^*(y)$$

所以 $\phi(\mathbf{w},y)=\mathbf{wx}(\mathbf{w},y)$ 是 wx 在 $V^*(y)$ 上的最小解。

对于成本函数的约束可以进一步简化：

给定一组函数 $(g_i(\mathbf{w},y))$ 的集合，假定这些函数满足前面各节所介绍的要素需求函数的性质，即它们关于价格零次齐次，且 $\left(\frac{\partial g_i(\mathbf{w},y)}{\partial w_i}\right)$ 是对称负半定矩阵。那么，这些函数是否一定是某个生产技术的要素需求函数呢？

构造以下函数

$$\phi(\mathbf{w}, y) = \sum_{i=1}^{n} w_i g_i(\mathbf{w}, y)$$

不难验证，上述函数满足命题 4.5.3 所要求的各种性质。因此，由命题 4.5.3, 存在某个技术 $V^*(y)$, 使得 $g_i(\mathbf{w}, y))$ 为该技术的条件要素需求。这意味着齐次性和负半定性质是成本最小化行为模型对要素需求所施加的所有限制。

2.6 市场理论

市场约束其实就是价格约束，一个企业, 只有当市场竞争不完全时, 才有自由定价的意义。

在一个不完全竞争的市场中, 企业可以 (通过价格、产品差异、广告及其他促销方式) 影响需求, 也就有决定价格-产量的市场能力。这种市场能力称之为定价能力 (也叫市场支配力, 或影响市场的能力), 或叫做竞争优势。定价能力可能来自于独特的资源、知识产权、政府、产品的差异化, 或来自规模经济与范围经济的成本优势。

2.6.1 完全竞争市场

1. 买家和卖家数量相当大, 从而可视为价格接受者。
2. 资源在产业间可自由流动: 进入和退出市场时, 没有任何人为壁垒或障碍。
3. 同质产品 (Homogeneous product): 对消费者来说, 同一产业中所有厂商生产的产品是完全相同的。
4. 所有相关信息都是公共知识, 厂商和消费者具有经济决策所需的所有相关信息。

价格接受者: 反需求函数是与消费轴平行的水平线。

2.6.1.1 短期供给曲线

假定厂商只生产一种产品，其利润最大化问题为：

$$max\ py - c(y)$$

上述最优问题内点解的一阶条件（FOC）为：

$$p = MC(y)$$

在竞争性市场中，收益 $R = py$，边际收益 $MR = \frac{dR}{dy} = p$，因此 $MR = MC$ 就意味着 $p = MC(y)$。

上面最优化问题的二阶条件为：$c''(y) > 0$。

根据一阶条件，有 $p = c'(y(p))$。进一步求导得到 $1 = c''(y)y'(p)$，由二阶条件可知 $y'(p) > 0$。这意味着供给定律（law of supply）成立[5]。

注意 $p = c'(y^*)$ 作为内点解的一阶条件，当且 $y^* > 0$。若价格 p 很低，厂商可能选择不生产。厂商的短期成本函数 $c(y) = c_v(y) + F$，这里 F 表示固定成本。若 $py(p) - c_v(y) \geq 0$（收益大于可变成本），或 $py(p) - c_v(y) - F \geq -F$，此时厂商应选择正的产量。这意味着 $p = c_v(y(p))/y(p) = AVC$。这就是说，短期内厂商进行生产的必要条件，是产品的市场价格不小于其（最小的）平均可变成本。

总结起来，竞争性厂商的供给曲线为：

$$y = \begin{cases} (c')^{-1}p, & \text{若} p \geq \frac{c_v(y(p))}{y(p)} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中，$(c')^{-1}$ 是 c' 的反函数。

[5]价格 p 越高供给 y 越多

只要价格超过平均可变成本, 此时厂商的供给曲线与向右上方倾斜的边际成本曲线重合。若价格低于 (最小的) 平均可变成本, 厂商供应为零。因此供给曲线见下图粗黑线。

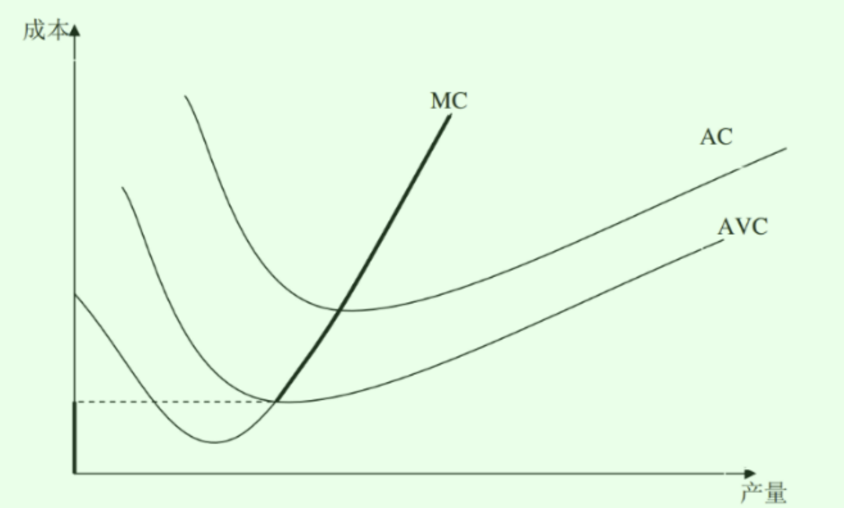


图 2.11: 厂商的供给曲线

完全竞争市场，总需求为各个厂商供给之和，需求也为消费者需求之和。

2.6.1.2 单一产品市场均衡

单一产品的均衡价格 p^* 由总需求等于总供给决定，即它是如下方程的解：

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(p) = \sum_{j=1}^{J} y_j(p)$$

一旦该均衡价格确定下来, 我们就能反过来确定每个厂商的供给决策从而确定厂商的产出水平、回报和利润。下图描述了三个厂商的成本曲线。第一个厂商利润为正, 第二个厂商利润为零, 第三个厂商利润为负。即使第三个厂商利润为负, 然而只要回报大于可变成本, 继续生产对它来说也是有意义的, 否则亏损得更多 (等于固定成本)。

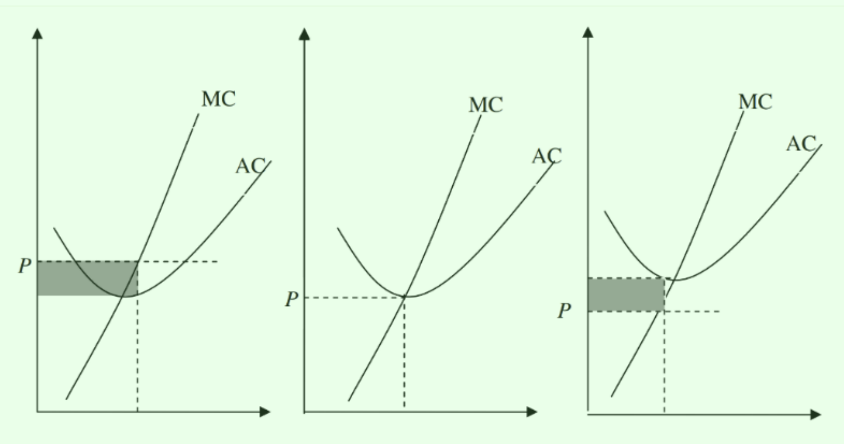


图 9.2: 正利润、零利润和负利润情形

图 2.12: 厂商利润

2.6.1.3 竞争市场与生产技术规模报酬

若平均成本随着产量增加而减少 (增加、不变), 则技术具有规模报酬递增 (递减、不变) 特征。下面成本函数具有典型的规模报酬递增特性：

$$C(q) = \begin{cases} F + cq, 若 q > 0 \\ 0, \quad 若 q = 0 \end{cases}$$

(边际成本是常数)

对应的平均成本函数为 $ATC(q) = \frac{F}{q} + c$, 下图描述了该技术的平均成本和边际成本，

平均成本随产量增加而下降，当产量趋于无穷大时，平均成本趋近于边际成本。

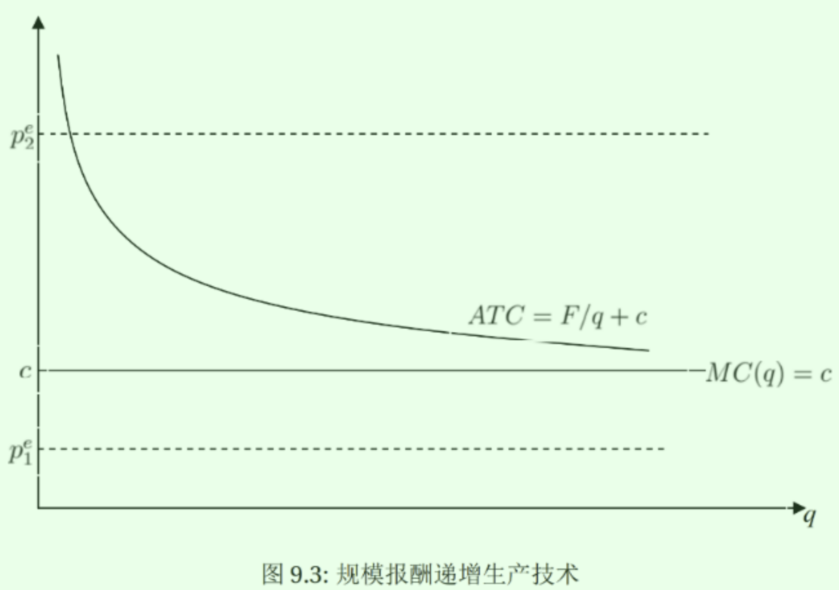


图 2.13: 生产技术规模报酬递增

规模报酬递增的技术与完全竞争市场并不兼容。举一个例子：

设市场需求函数为 $P(Q) = a - bq$，$pb > 0$，$a > c$。设竞争市场的均衡存在，令均衡价格为 p^e。均衡价格只有下面两种可能性，一种是 $p^e \leq c$，另一种是 $p^e > c$。

当 $p^e = p_1^e \leq c$ 时，对任意正的产量 q，$p^e = p_1^e \leq c < \frac{F}{q} + c$，企业利润小于零而且生产者剩余也小于零，产出为 0。

当 $p^e = p_2^e > c$ 时，产量 q 超过某个界限之后，会有 $p_2^e > \frac{F}{q} + c = AC(q)$，并且 $\frac{d(p_2^e - AC(q))}{dq} > 0$。此时产出无穷大，但市场有限。

综上所述，若企业生产技术具有规模报酬递增特征，那么该市场结构不可能是完全竞争的。

2.6.1.4 长期均衡

竞争行业的长期行为由两种影响决定。考虑所有企业都可选择其他企业的生产技术, 或者说**生产技术是公共知识**的情形。

第一种影响为厂商自由进入和退出造成所有厂商利润为零。若某个行业允许自由进入和退出, 那么从长期来说所有厂商的利润水平必将相同。其结果是在长期竞争均衡状态下, 每个厂商的利润都为零。(行业规模调整)

对竞争行业的长期行为的第二种影响为技术调整。在长期里, 厂商将调整固定要素, 以便在均衡水平产出上成本最小。不妨假设有一竞争厂商, 其长期生产技术规模报酬不变, 且在下图所示的位置运营。则在长期运行中, 它将改变固定要素以便在最小平均成本点运营。然而, 若每个厂商都这样做, 则均衡价格必将变化。(企业规模调整)

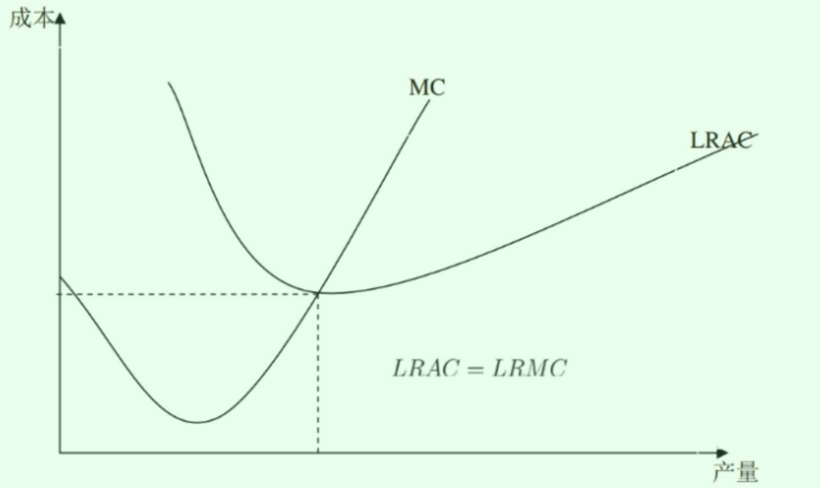


图 9.4: 固定成本下的长期调整

图 2.14: 固定成本下的长期调整

例题 2.19 均衡产出水平 举例：$c(y) = y^2 + 1$，均衡产出水平是下面方程的解：

$$AC(y) = MC(y)$$

$$y + \frac{1}{y} = 2y \Rightarrow y^2 = 1$$

从而有 $y = 1$，成本达到最小，平均成本为 2，当价格高于 2 时，企业会得到正利润；而当价格低于 2，企业利润小于零。企业供给函数满足 $p = MC(y) = 2$，即有 $y = \frac{p}{2}$。假设需求函数是线性的：$D(p) = a - bp$。$(a - bp = \frac{p}{2}J)$，均衡价格是满足下述条件最小的 p^*：$p^* = \frac{a}{b+\frac{J}{2}} \geq 2$，企业的数量为 $J^* = [a - 2b]$，其中 $[.]$ 是数学上的取整函数。因为当 $j > J^*$，企业进入会使得市场价格小于 2，此时利润小于零；若 $j < J^*$，进入的企业会获得一个正的利润。

2.6.1.5 社会福利

市场中有 J 家企业，市场价格为 p，社会福利为 $W(p) = CS(p) + \Sigma_{j=1}^{J} PS(p)$。在长期中，由于**固定成本为零**，生产者剩余等于企业利润，此时 $W(p) = CS(p) + \sum_{j=1}^{J} \pi_j(p)$。

设生产的单位成本 (或者边际成本) 为 c, 市场需求为 $P(Q) = a - bq, b > 0, a > c$。下图刻画了该市场的需求曲线和生产边际成本曲线。

当市场价格 $p = p_0$, 市场交易量为 Q_0 时，消费者剩余为 α, 企业的生产者剩余或企业利润为 β, 社会福利为 $\alpha + \beta$。当价格从 p_0 下降到边际成本 c 的过程中，消费者剩余增加，企业利润下降，但社会福利在增加。当价格刚好等于 c, 消费者剩余为 $\alpha + \beta + \gamma$, 企业利润为零，社会福利为 $\alpha + \beta + \gamma$。当价格进一步下降，企业利润减少的幅度超过消费者剩余增加的幅度，整个社会福利会下降。因此，当价格等于边际成本时，社会福利达到最大。需要注意的是，在完全竞争均衡中，市场价格等于边际成本。

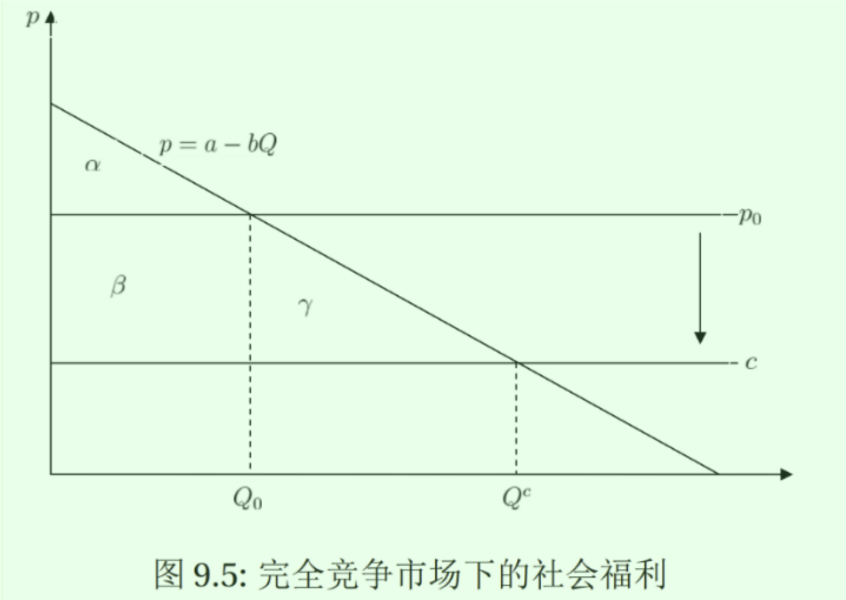


图 2.15: 完全竞争市场下的社会福利

命题 2.44 (市场价格边际成本和福利)

市场价格刻画的是消费者多消费一个商品的支付意愿,而边际成本则是企业多生产一个产品所花费的成本。只要生产额外一个单位的产品所产生的社会效用(以消费者的支付意愿刻画)超过社会成本(若没有外部性,用边际成本来刻画)[a]。

$$\begin{cases} p > mc & \text{多生产提升社会福利} \\ p = mc & \text{最优社会福利} \\ p < mc & \text{多生产降低社会福利} \end{cases}$$

[a]所以破除垄断利于提升社会福利，因为此时 p>mc，且产量低于完全竞争的产量

2.6.2 垄断市场

垄断厂商出现的原因可归纳为三项:

1. 规模经济;
2. 进入市场的障碍;
3. 独家拥有稀有生产要素。

分为垄断产品市场和垄断要素市场。

2.6.2.1 垄断产品市场

垄断产品市场，厂商有一定定价权，但是价格越高消费者购买需求越弱，因此使用 $p(q)$ 表示约束[6]。厂商利润最大化问题可写为:

$$\max_q R(q) - C(q) = \max p(q)q - c(q)$$

利润最大化的一阶条件为**边际收益等于边际成本**:MR=MC

[6]完全竞争市场都用 p 表示，因为价格外生，垄断市场则开始使用 R，因为垄断市场有定价权

$$p(q^*) + p'(q^*)q^* = C'(q^*)$$

等号左边说明了厂商可以通过提高价格获利 $p(q^*)$，但消费者会因为价格提高减少购买 $p'(q^*)$。

边际收益可以表述为：

$$p(q^*)\left[1 + \frac{dp(q^*)}{dq} \cdot \frac{q^*}{p(q^*)}\right] = p(q^*)\left[1 + \frac{1}{\varepsilon(q^*)}\right] = C'(q^*)$$

$$p(q^*) = \frac{C'(q^*)}{1 + \frac{1}{\varepsilon(q^*)}}$$

注[另外一种理解方式] 一种理解视角时，弹性越大，价格越趋于边际成本，也就趋于完全竞争的情况。

需求价格弹性 $\varepsilon(q^*) < 0$，为保证价格非负，企业需要在富有弹性的需求范围内进行生产，即 $\varepsilon(q^*) < -1$。这样有 $1 + \frac{1}{\varepsilon(q^*)} < 1$，这意味着价格必须大于边际成本。

- 边际成本保持不变时，产品的最优价格与需求价格弹性成反比，弹性越小，定价越高，越有定价优势。
- 市场是完全竞争时，需求价格弹性为无穷大，价格等于边际成本。
- 垄断市场中，垄断者价格可以看作边际成本加上一个溢价 (markup)。该溢价为需求价格弹性的函数。弹性绝对值越小，意味着企业的垄断能力越强，溢价会越高。弹性可以理解为产品的可替代性，弹性的绝对值越小，意味着消费者对商品的价格敏感度越低。

利润最大化条件

$$p(q) = a - bq$$

$$R(q) = qp(p)$$

$$R'(q) = a - 2bq$$

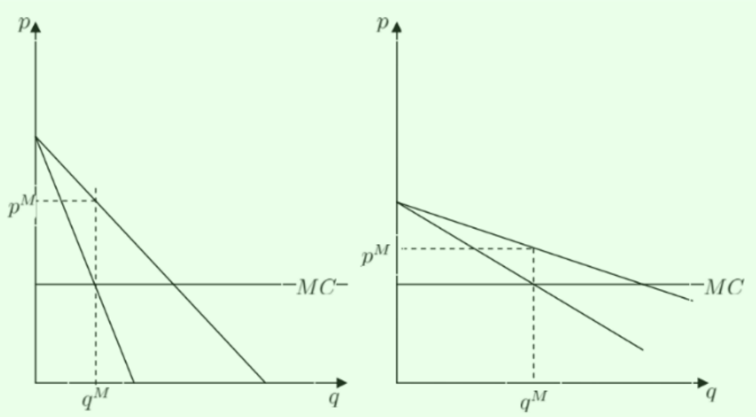


图 9.6: (a)低弹性需求(b)高弹性需求

图 2.16: 需求弹性

2.6.2.2 垄断方式

1. 长期垄断

（1）**技术变动**: 固定要素水平最大化长期利润。边际收益等于长期边际成本。（2）**进入变动**: 定存在某种行业进入壁垒。进入壁垒可能是法律上的, 或者拥有唯一的生产要素。

2. **垄断的弊端**：社会福利损失

垄断降低社会福利，也就是之前的讨论2.44。那么如何解决呢？

垄断价格为 p^m ，其销售量为 q^m。假如垄断者打算多生产数量 Δq。消费者将支付 $p(q^m + \Delta q)$。额外的产出的成本是边际成本 $MC(q)$。

也就是说，允许垄断者持续以大于生产成本的价格 $p > mc$ 并**进行价格歧视**（越后面价格越低），持续到逼近完全竞争水平，社会福利会改善。

垄断者相对竞争市场的福利损失可以通过下图来揭示。在垄断价格 p^m 下，消费者剩余为三角形 DEC 的面积，垄断利润为梯形 $CEFA$ 的面积，总的社会福利为梯形 $DEFA$ 的面积。而在竞争市场上，总的社会福利为三角形 DGA 的面积。因此，垄断带来的社会福利损失为三角形 EGF 的面积。

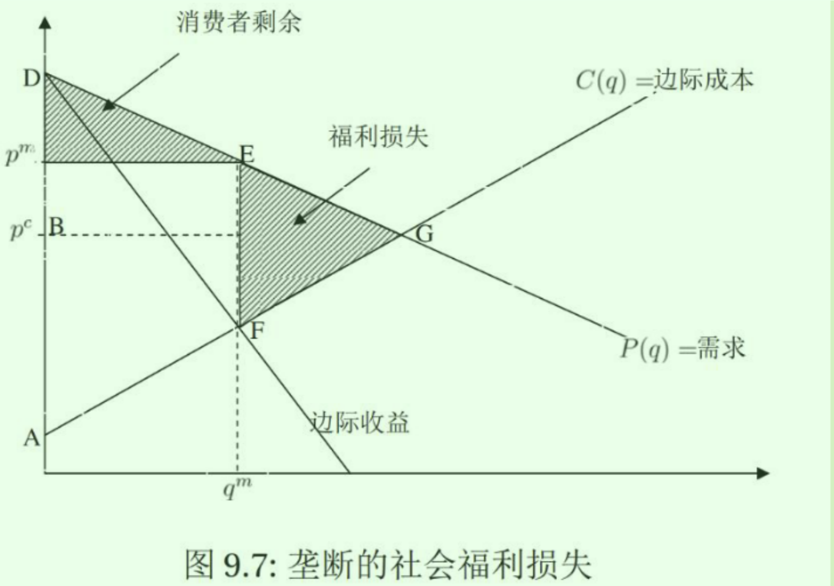


图 2.17: 垄断与社会福利

3. **垄断的好处**: 企业创新“竞争-创新-垄断-竞争”反复循环熊彼特“创新理论”: 有价值的竞争不是价格竞争, 而是新商品、新技术、新市场、新供应来源、新组合形式的竞争。

关于反垄断和数字经济带来的垄断问题可参考:当我们反垄断时，反对的到底是什么？

2.6.3 价格歧视

2.6.3.1 原理

对收益函数 $p(Q)Q$ 的销量求导，其边际收益为 $p(Q) + Q\frac{dp(Q)}{dQ}$。

垄断厂商只需要对最后增加的商品降低价格，那么**只要最后一单位销量的价格超过边际成本，厂商就会继续扩大产量，直至最后一单位的价格等于边际成本，这样垄断厂商就通过差别定价赚取额外利润**。所有差别定价方式都可看作是厂家通过某种营销设计来减少上面提到的销量扩大后的第二种效果对边际收益带来的负面影响。

2.6.3.2 实施条件

- 厂商有定价权，市场势力 $P > MC$。

- 厂商能推断消费者每单位产品的支付意愿。支付意愿必定依消费者或者销量而变化[7]。
- 厂商要有能力阻止或限制转卖的发生。

注[可以防止转卖的例子] 例子

- 服务。绝大多数消费性服务不能转卖。
- 担保。比如售后服务, 厂家可以宣布只对产品初次购买者提供担保或者免费售后服务。电子市场上有一些“水货”产品掺杂。厂家可以在某种产品中掺杂他物使得该产品不能转作他用。比如药用酒精不能转换为用做饮料的酒精;
- 交易费用。转卖中需要承担一笔大的交易费用。比如商场上的赠券 (允许它们以较低的价格购买某种产品), 搜索没有赠券的购买者的费用太高。
- 合约补救。厂家在购买合约中把禁止转售作为销售条件之一。比如购买学生火车票, 需要出示学生证。在一些大学中, 学生和老师以低于市场价格购买计算机, 但规定不能转卖。
- 纵向一体化。上游企业对某些下游企业进行一体化, 以索取比其他下游企业更高的价格。

2.6.3.3 分类

一级价格歧视, 又称完全价格歧视。对**每一件商品索取不同的价格**。生产者可获取全部消费者剩余。这种价格歧视一般需要生产者了解每个消费者的保留价格, 同时能够阻止消费者之间的转卖或套利。

二级价格歧视，按消费者购买的**数量**来进行差别定价。在现实中, 以上两个条件很少能完全满足。此时, 生产者可以设计不同的数量和价格组合, 由消费者自行选择。生产者仍可以攫取消费者剩余 (超过统一定价)。

三级价格歧视，将市场分成两个或多个群体, 分别进行定价。若**生产者能够观察到某些与消费者偏好相关的信号** (例如年龄、职业、所在地、质量偏好等), 并且利用这些信号把消费者分为多个市场而进行价格歧视。

注[区分二阶和三级价格歧视] 二级和三级价格歧视的区别在于三级价格歧视可以利用关于消费类型的信号, 将市场划分成多个独立的市场, 同时在不同市场上实行差别定价; 而二级价格歧视, 由于观察不到消费者类型的信号, 而市场只有一个, 只有通过设定不同的购买合约, 让消费者自我选择来进行价格歧视。

简而言之，二级价格歧视是消费者自选择。厂商提供合约，消费者自行选择。三级价格歧视是厂商了解消费者后进行差异定价。

练习 2.1 思考题 例子

两阶段收费属于哪一类? 厂商先向消费者收取一笔费用 (首段收费), 消费者支付了这笔费用后, 才有权力按某一指定价格购买商品。

- 比如中国移动的畅听包服务, 每个月交纳一笔月租费就可以免费接听, 同时拨打外地电话每分钟 0.2 元。
- 例如一些游乐园, 首先要收取入场费, 然后再在每一个游玩项目上收取附加费。

只有当顾客一并购买另外一种产品时厂商才向他出售想购买的某种产品。比如顾客购买某种耐用机器时, 必须一并购买卖方的所有维修服务或者维修部件, 如销售复印机时, 需要顾客同时要购买油墨、复印纸等。在购买手机时, 只能买同品牌的电池。

解 [思考题例子]

两阶段收费基本都属于二级价格歧视，但是如果二阶段后无限细分，每一个单位精准定价，就会逼近一级价格歧视。

混合销售因为厂商不知道消费者信息是消费者自己做选择此时为二级价格歧视。

注[一级价格歧视的理解] 并非每个非统一价格的行为都是价格歧视。比如厂商向消费者提供数量折扣时, 可能是因为大宗订单带来成本的节省, 而厂商把节省的成本返还给大宗购买者。有时即使是对商品采用同

[7] 重点是厂商知道向谁索取高价这个信息

样的价格, 也可能在进行价格歧视, 比如厂商对不同位置的消费者送货上门, 同时收取同样的商品价格, 此时价格不能完全反映出成本差异, 成本包括生产成本和运输成本。

2.6.3.4 一级 (完全) 价格歧视

市场上有 n 个消费者。市场需求函数为 $D(p)$，每个消费者的需求函数为 $\frac{D(p)}{n}$。

统一价格情况下，垄断厂商获得的最大利润为 $p^m D(p^m) - C(D(p^m))$。

两步定价[8]情况下，即 $T(q) = A + pq$。

若垄断厂商采取竞争性价格，则 $T(q) = p^c q$。此时，所有消费者净剩余为 $S_c = \int_0^{q^c} p(q) - p^c dq$，每个消费者净剩余是 $\frac{S_c}{n}$。若 $A = \frac{S_c}{n}$，$p = p^c$，两步定价会被消费者接受，此时留给消费者净剩余为 0，垄断者利润等于最优时的社会福利。

若不考虑分配和公平问题，只考虑效率，完全差别定价提高了社会福利，消费者剩余的减少被生产者的利润增加所弥补。下图刻画了完全价格歧视下消费者剩余和企业利润的变化。

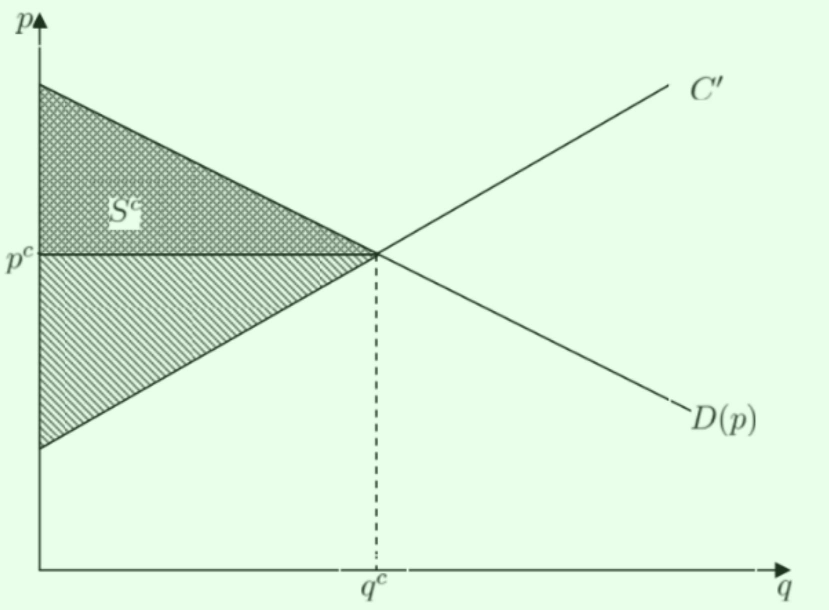


图 9.8: 完全价格歧视

图 2.18: 完全价格歧视

上面分析可以扩展到 n 类消费者的情形。每一类消费者的需求函数为 $Q^i(p)$。这样，可以把每一类消费者划分成一个市场。按照前面类似的分析，对每一类消费采取不同的两步定价，单位价格对应于每个市场的竞争价格，固定费用为竞争性价格时对应的不同类型的消费者剩余。

2.6.3.5 三级价格歧视

垄断厂商根据消费者的信息, 把总需求分成 m 个市场。垄断者知道这些市场的需求曲线。如果这些市场是独立的，市场之间不存在套利，垄断者就可针对不同市场制定不同价格，然而在每个市场内部只能进行统一定价。此时垄断者参与一个多市场垄断定价。令 $\{p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_m\}$ 为 m 个市场的价格，相对应的 m 个市场的需求为 $\{D_1(p_1), \ldots, D_i(p_i), \ldots, D_m(p_m)\}$，垄断厂商对 m 个市场选择 m 个垄断价格。垄断

[8] 特殊类型的二级差别定价（价格歧视）

者目标函数为：

$$\max \sum_i p_i D_i(p_i) - C\left(\sum_i D_i(p_i)\right)$$

由此可得一阶条件：

$$\frac{p_i - C'(q)}{p_i} = \frac{1}{\varepsilon_i}$$

其中 $\varepsilon_i = -\frac{p_i D_i'(p_i)}{D_i(p_i)}$ 为第 i 个市场的需求弹性。

与统一定价相比，在价格歧视下，高弹性需求的消费者面临的价格更低。因此高弹性消费者（奢侈品产业）更偏好于差别定价。低弹性的消费者则会由于价格歧视而被索取更高的价格，从而福利状况下降。对垄断者来说，差别定价当然会带来更高的利润，否则就没有必要进行差别定价了。由于存在相反方向的影响，**三级差别定价下社会福利变化方向并不确定**。

设有 m 个市场，假设边际成本不变，为常数 c，第 i 个市场的需求为 $q_i = D_i(p_i)$，对应的消费者剩余为 $S_i(p_i)$，企业的利润为 $(p_i - c)q_i$。若不允许差别定价，垄断者对所有市场制定统一价格 $\overline{p}$。那么，第 i 个市场对应的需求为 $\overline{q}_i = D_i(\overline{p})$，消费者剩余为 $S_i(\overline{p})$，利润为 $(\overline{p} - c)\overline{q}_i$。令差别定价之后，第 i 个市场的需求变化为 $\Delta q_i \equiv q_i - \overline{q}_i$。价格歧视后的社会福利变化为：

$$\Delta W = \{\sum_i S_i(p_i) - S_i(\overline{p})\} + \{\sum_i (p_i - c)q_i - \sum_i (\overline{p} - c)\overline{q}_i\} \tag{2.1}$$

由于消费者（净）剩余 $S(p) = \int_p^{\hat{p}} D(\xi)d\xi$，其中 $\hat{p}$ 为阻断价格[9]，即 $D(\hat{p}) = 0$。

$$S'(p) = -D(p) < 0, S''(p) = -D'(p) > 0$$

这样，$S(p)$ 是凸函数[10]。于是有：

$$S_i(p_i) - S_i(\overline{p}) \geq S_i'(\overline{p})(p_i - \overline{p}) \tag{2.2}$$

$$S_i(p_i) - S_i(\overline{p}) \leq S_i'(p_i)(p_i - \overline{p}) \tag{2.3}$$

把 (2.2)，(2.3) 代入 (2.1) 得到：

$$\Delta W \geq \sum_i (p_i - c)\Delta q_i \text{[11]}$$

$$\Delta W \leq (\overline{p} - c)\sum_i \Delta q_i \text{[12]}$$

其中 $\Delta q_i = q_i(p_i) - q_i(\bar{p})$。若 $\Delta q_i \geq 0, \forall i$, 则 $\Delta W \geq 0$。这种情况下，差别定价后，每一类消费者的需求量都增加了，社会福利提升。

若 $\Sigma_i \Delta q_i \leq 0$, 则 $\Delta W \leq 0$, 即，消费者需求量变少，价格歧视降低了社会福利。

例题 2.20 差别定价 举例：假设有两个市场，需求曲线分别为 $q_1 = a_1 - b_1 p$ 及 $q_2 = a_2 - b_2 p$，边际生产成本为 0。此外，假设 $a_1 \geq a_2$ 和 $b_1 \leq b_2$，这意味着市场 1 比市场 2 更大。

差别定价情况下：

在市场 i，垄断者目标为：

$$\max p_i(a_i - b_i p_i)$$

利润最大化一阶条件为：

[9] 使某一产品的需求量恰好降至零的最低价格, 也就是价格高到某个价格消费者需求量为 0。价格固定所以后续使用了变积分上下限的数学转换

[10] 凸函数两点之间割线的斜率大于起始点的斜率，小于终点的斜率

[11] $\Delta W = \{\sum_i S_i(p_i) - S_i(\bar{p})\} + \{\sum_i (p_i - c)q_i - \sum_i (\bar{p} - c)\bar{q}_i\} \geq \sum_i (p_i - c)q_i - \sum_i (\bar{p} - c)\bar{q}_i \geq \sum_i (p_i - c)\Delta q_i$

[12] $\Delta W \leq \sum_i S_i'(p_i)(p_i - \bar{p}) + \{\sum_i (p_i - \bar{p} + \bar{p} - c)q_i - \sum_i (\bar{p} - c)\bar{q}_i\} = \sum_i S_i'(p_i)(p_i - \bar{p}) + \sum_i (p_i - \bar{p})q_i + \sum_i (\bar{p} - c)\Delta q_i = \sum_i (S_i'(p_i) + q_i)(p_i - \bar{p}) + \sum_i (\bar{p} - c)\Delta q_i = \sum_i (\bar{p} - c)\Delta q_i, S_i'(p) = -D(p) = -q_i$

$$p_i = \frac{a_i}{2b_i}$$

$$q_i = \frac{a_i}{2}$$

统一定价情况下：

此时市场的总需求为

$$Q = \bar{q}_1 + \bar{q}_2 = (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)\bar{p}$$

垄断者的目标函数于是为：

$$\max \bar{p}\left[(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)\bar{p}\right]$$

一阶条件为：

$$\bar{p} = \frac{(a_1 + a_2)}{2(b_1 + b_2)}$$

总需求为

$$Q = \bar{q}_1 + \bar{q}_2 = \frac{(a_1 + a_2)}{2} = q_1 + q_2$$

利润为

$$\bar{\pi} = \frac{(a_1 + a_2)^2}{4(b_1 + b_2)^2}$$

由于 $\bar{q}_1 + \bar{q}_2 = q_1 + q_2$，即 $\Delta q_1 + \Delta q_2 = 0$，根据前面的讨论，价格歧视会降低社会福利（需求量没有增加）。

统一定价且只开放市场 1，关闭市场 2 情况下：

垄断者的垄断价格、产量及利润分别为 $\tilde{p} = \frac{a_1}{2b_1}$，$\tilde{q} = \frac{a_1}{2}$，$\tilde{\pi} = \frac{a_1^2}{4b_1}$，从而有 $\tilde{\pi} > \bar{\pi}$，于是有 $\Delta q_1 = 0$，$\Delta q_2 = q_2 > 0$，此时价格歧视会增加社会福利。利用了前面 $\Delta W \le (\overline{p} - c)\sum_i \Delta q_i = 0$ 的结论。

三级价格歧视的福利影响取决于具体的需求和技术特征，福利效果是不确定的。

2.6.3.6 二级价格歧视 (自选择)

假设市场上有两类消费者，它们对商品的效用分别为 $\theta_i V(q), i = 1,2,$ 下图描述了两类消费者的需求和他们的消费者剩余。

θ_i 可以刻画第 i 类消费者对商品某种嗜好的偏好参数。假设在市场中，具有 θ_1 类型的消费者占 λ 比例，其余都是 θ_2 类型的消费者。设 $\theta_2 > \theta_1$，$V(q) = \frac{1-(1-q)^2}{2}$。同时厂商不能辨别消费者类型，厂商边际成本为 c。

我们先来看不同类型消费的需求。首先对第 i 类消费者，面对市场价格 p，他的决策是求解下面最大化问题：

$$Max \theta_i V(q) - pq$$

其一阶条件为

$$\theta_i V'(q) = p$$

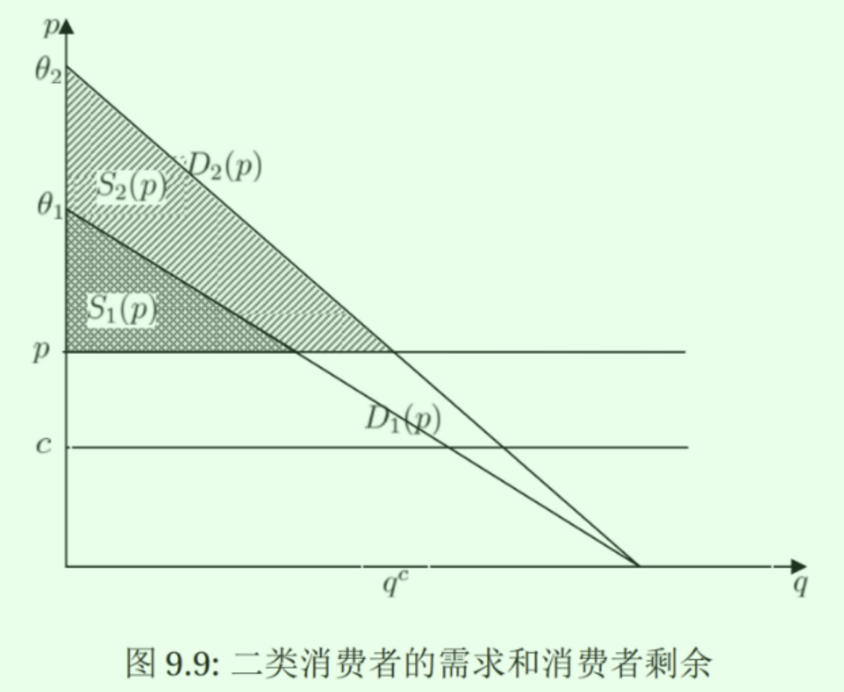


图 2.19: 二类消费者

即

$$\theta_i(1-q)=p$$

从而第 i 类消费者的需求函数为：

$$D_i(p)=1-\frac{p}{\theta_i}$$

第 i 类消费者剩余为

$$S_i(p)=\theta_i\left(\frac{1-(1-D_i(p))^2}{2}\right)-pD_i(p)=\frac{(\theta_i-p)^2}{2\theta_i}$$

市场需求函数

$$D(p)=\lambda D_1(p)+(1-\lambda)D_2(p)=1-\frac{p}{\theta}$$

此时 $\frac{1}{\theta}\equiv\frac{\lambda}{\theta_1}+\frac{1-\lambda}{\theta_2}$

以二步定价方式进行差别定价（一级价格歧视）的情况下：

面对消费者类型 i，垄断者制定的相应二步定价为 $T_i(q)=A_i+cq$，满足 $p^{fd}=c$，$A_i=S_i(c)$。垄断者获得所有消费者剩余，垄断者利润为

$$\pi^{fd}=\lambda\frac{(\theta_1-p)^2}{2\theta_1}+(1-\lambda)\frac{(\theta_2-p)^2}{2\theta_2}$$

统一定价时，此时垄断只能采取线性价格形式，即 $T(q)=pq$。垄断者对价格的最优选择是求解下面最大化问题：

$$\max(p-c)\left(1-\frac{p}{\theta}\right)$$

垄断价格及利润分别为 $p^m=\frac{c+\theta}{2}$ 及 $\pi^m=\frac{(\theta-c)^2}{4\theta}$。

单一的二步定价的方式来进行**二级价格歧视**时，即 $T(q)=A+pq$。

由于企业不能区分消费者，这个定价是针对所有类型的消费者。当单价为 p，能使 θ_1 类型的消费者仍然购买，他愿意支付的最高固定费用为 $A=S_1(p)$，此时 θ_1 类型的消费者剩余被完全剥夺，然而 θ_2 类型的消费者却仍然有正的消费者剩余。由于 $S_2(p)>S_1(p)$，这样给定价格 p，最优的固定费用 $A=S_1(p)$。

接下来的问题是应该选择什么样的单价 p？

对垄断者而言，最有利可图的二步定价其实是求解下面的最优化问题:

$$\max_p S_1(p)+(p-c)D(p)=\frac{(\theta_1-p)^2}{2\theta_1}+(p-c)(1-\frac{p}{\theta})$$

一阶条件为:

$$-\frac{\theta_1-p}{\theta_1}+(1-\frac{p}{\theta})-\frac{p-c}{\theta}=0$$

由此得到二级价格歧视下的最优单价是:

$$p^{sd}=\frac{c}{2-\frac{\theta}{\theta_1}}$$

其利润记为 π^{sd}。

显然，$c<p^{sd}<p^m$，同时有 $\pi^{fd}\geq\pi^{sd}\geq\pi^m$，即**完全价格歧视的利润高于二级价格歧视的利润，而后者又高于统一定价下的垄断利润**。

对**社会福利**来说，完全价格歧视是最高的。而二级差别定价与统一定价相比，由于 $\lambda S_1^g(p)+(1-\lambda)S_2^g(p)-c(\lambda D_1(p)+(1-\lambda)D_2(p))$，当 $p=c$，随着 p 的增加而减少消费，消费减少意味着有利可图的交易不能实现，所以与**垄断的统一定价相比，二级价格歧视提高了社会福利**。

注[三级和二级价格歧视] 多市场时，

相比于统一垄断定价，二级价格市场提升了社会福利，因为增加了交易量，如果是一级的完全价格歧视，则社会福利是最大化的。

三级价格歧视不一定，关键在于最终市场交易数量。因为它同时产生了两种相互抵消的效应：效率效应（Efficiency Effect）和分配扭曲效应（Allocative Distortion Effect）。因为此时厂商会增加高弹性市场的交易量，降低低弹性市场的交易量，最终数量变化未知，和市场弹性结构相关。

二级价格歧视能让不同需求类型的消费者自我选择。

2.6.3.7 更复杂的非线性定价（标准的委托代理问题）

假设厂商针对 θ_i 类型的消费者，设计消费组合 (q_i,T_i)，它表示购买量为 q_i，需要总支付 T_i，并且 $(q_i,T_i)\neq(q_j,T_j),i\neq j$。$\theta_2$（高需求类型）$>\theta_1$（低需求类型）。这种设计需要满足两类条件，首先，$\theta_i$ 类型的消费者选选择 (q_i,T_i) 比 (q_j,T_j) 带来更大的效用，称为激励相容约束；其次，θ_i 类型的消费者选择 (q_i,T_i)，其净剩余不会低于零，称为参与约束[13]。

垄断者的目标为:

$$\max_{q_i,T_i}\lambda(T_1-cq_1)+(1-\lambda)(T_2-cq_2)$$

满足约束：

[13]例如学生食堂教师食堂

$$\theta_1 V(q_1) - T_1 \geq 0 \quad (\text{类型}\theta_1\text{的参与约束}) \tag{2.4}$$

$$\theta_2 V(q_2) - T_2 \geq 0 \quad (\text{类型}\theta_2\text{的参与约束}) \tag{2.5}$$

$$\theta_1 V(q_1) - T_1 \geq \theta_1 V(q_2) - T_2 \quad (\text{类型}\theta_1\text{的激励相容约束}) \tag{2.6}$$

$$\theta_2 V(q_2) - T_2 \geq \theta_2 V(q_1) - T_1 \quad (\text{类型}\theta_2\text{的激励相容约束}) \tag{2.7}$$

达到最优时，不等式 (2.4) 和 (2.6) 至少有一个不等式取等号，否则可以增加 T_1 的取值来增加目标值；同样的道理 (2.5) 和 (2.7) 至少有一个不等式取等号。

接下来思考哪个式子应该取等号。先对不等式 (2.7) 分析，由于 $\theta_2 V(q_2) - T_2 \geq \theta_2 V(q_1) - T_1 > \theta_1 V(q_1) - T_1 \geq 0$。

若不等式 (2.5) 取严格不等号，从而有 $\theta_2 V(q_2) - T_2 > 0$，这意味着 $\theta_2 V(q_2) - T_2 = \theta_2 V(q_1) - T_1$，即不等式 (2.7) 取等号。

若不等式 (2.6) 取等号，与 (2.7) 式相加得到：$V(q_1) = V(q_2)$，即 $q_1 = q_2$，则必然也意味着 $T_1 = T_2$，与之前的假设矛盾。

因此，不等式 (2.6) 取严格不等号，这就意味着不等式 (2.4) 取等号。综合上面讨论，只有 (2.4)(2.7) 满足等式约束。

这意味着，

$$T_1 = \theta_1 V(q_1)$$

$$\theta_2 V(q_2) - T_2 = \theta_2 V(q_1) - T_1 = (\theta_2 - \theta_1) V(q_1)$$

把它们代入目标函数：

$$\max \{\lambda(\theta_1 V(q_1) - c q_1) + (1-\lambda)(\theta_2 V(q_2) - c q_2 - (\theta_2 - \theta_1) V(q_1))\}$$

关于 q_1, q_2 的一阶条件：

$$\theta_1 V'(q_1) = \frac{c}{1 - \frac{1-\lambda}{\lambda}\frac{\theta_2 - \theta_1}{\theta_1}}$$

$$\theta_2 V'(q_2) = c$$

利用 $V(q) = \frac{1-(1-q)^2}{2}$，

$$q_1 = 1 - \frac{c}{\theta_1 - \frac{1-\lambda}{\lambda}(\theta_2 - \theta_1)}$$

$$q_2 = 1 - \frac{c}{\theta_2}$$

即高需求类型的消费者的购买数量是社会最优的（商品的边际效用等于边际成本），低需求类型的消费者购买数量低于社会最优水平；同时高需求者获得正的消费者剩余。

下图描述了上面的最优非线性定价。图中的 B_1 对应于 θ_1 类型的消费者购买组合 (q_1, T_1), 此时消费者剩余为零；而 C_2 对应于 θ_2 类型的消费者购买组合 (q_2, T_2), 其消费者剩余大于零。之前的二步定价的二

级价格歧视，θ_1 类型的消费者所购买的消费组合所对应的点是 B_1, θ_2 类型的消费者购买组合是 B_2。对比上面单一的两步定价，θ_2 类型的消费者在非线性二级价格歧视中购买了更多的商品，而垄断者利润也更高。这样由于二步定价的二级价格歧视是非线性定价的一种形式，垄断者选择了不同于二步定价的歧视，说明其利润一定更高。

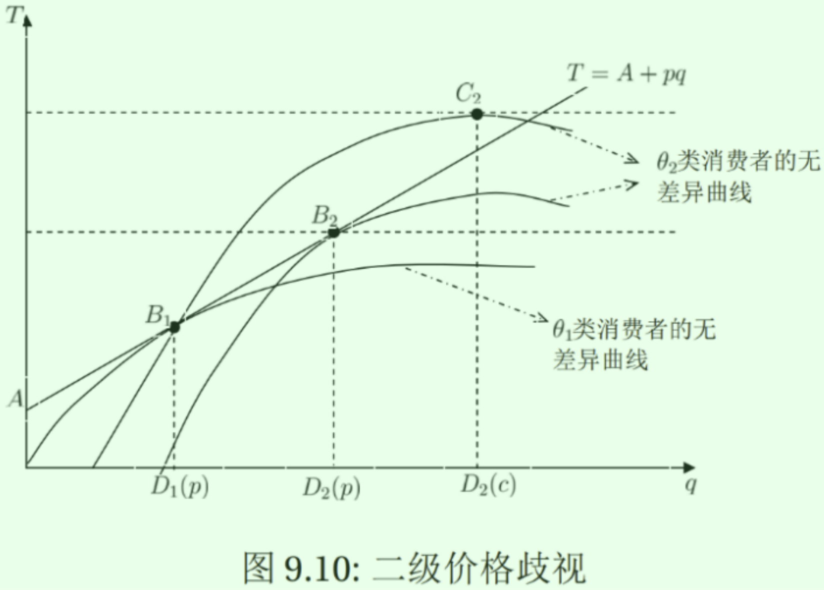


图 2.20: 非线性定价

2.6.3.8 耐用品的垄断者

跨期价格歧视: 耐用商品得到部分消费者购买后, 这些消费者在未来可能就不会购买, 垄断者面临着与之前不同的消费者, 称之为剩余消费者。这些消费者的购买意愿比前面的购买者要低, 只要垄断者的边际成本足够低, 那么为了获得更高的收益, 垄断厂商在未来将有降价的动机。如平板电脑 IPad, 刚推出的时候, 只有支付意愿很高的消费者会购买。人们预期到未来企业为了吸引中低端消费者, 不可避免地会降价, 因此支付意愿稍低的消费者会等待未来降价后购买。因此第一期消费者若预期垄断厂商在第二期降价, 购买意愿稍低的消费者就不会选择在第一期购买, 因此第一期的需求会萎缩。当垄断者价格调整非常频繁时, 垄断利润会趋于零, 这一结论又称科斯猜想。耐用品出租的利润高于销售利润, 出租避免了耐用品的定价承诺问题 (证明需要用到博弈论)。

2.6.3.9 垄断要素者

只有一个厂商购买生产要素就是垄断要素市场，这样的市场结构称之为买方垄断 (monopsony)。考虑一个简单的模型，其中**一个厂商在产品市场上是一个竞争者**，而在**投入品购买上是一个垄断者**。令 $w(x)$ 为该生产要素的 (反) 供给函数。则该厂商的利润最大化问题为:

$$\max_x pf(x) - w(x)x$$

其中 $f(x)$ 是生产函数，p 为竞争性产出品的价格。其一阶条件为:

$$pf'(x^*) - w(x^*) - w'(x^*)x^* = 0.$$

$pf'(x^*)$ 指的是着该厂商多投入一单位的投入品的边际产品价值，或者说边际收益产品 (marginal revenue product), $w(x^*) - w'(x^*)x^*$ 是要素的边际购买成本。可以把上述条件写成 $pf'(x^*) = w(x^*)\left(1 + \frac{1}{\varepsilon(x)}\right)$, 其中 $\varepsilon(x) = \frac{dx}{dw(x)}\frac{w(x)}{x}$ 为供给价格弹性。当该弹性趋于无穷大时，该投入品市场的垄断行为趋于完全竞争者的行为。

注[边际购买成本] 由于厂商是要素市场的唯一购买者，他的需求就是市场的需求，会影响要素价格。

此时供给价格弹性 $\varepsilon(x) = \frac{dx}{dw(x)}\frac{w(x)}{x}$ 为正，厂商需求越大，要素价格越贵。

可以看出此时 $pf'(x) > w(x)$, 边际产出大于边际购买成本时，厂商才会继续购买。

弹性越大，意味着厂商要购买更多的要素，才能影响其价格 $\frac{\Delta x}{\Delta w}$，此时厂商议价能力低，基本为价格接受者，因此趋于完全竞争市场。

表 2.1: 竞争与垄断下的 VMP、MRP 与要素价格的系统比较（含 P 与 MC）

情形	产品市场	要素市场	福利
完全竞争 (双竞)	$P = MC$	$VMP = MRP = w$	有效率。
垄断产品市场 + 竞争要素市场	$P > MC$	$w = MRP < VMP$	产品市场垄断（$P > MR$）
垄断产品市场 + 买方垄断	$P > MC$	$w < MRP < VMP$	双重垄断（$P > MR$ 且 $w < MFC$）
VMP 与 MRP 比较：			
衡量指标		**VMP** ($P \cdot MP$)	**MRP** ($MR \cdot MP$)
含义		边际要素产品价值。	边际要素收益。
在垄断下		垄断时价格内生，不能用 VMP。	厂商在所有市场结构中的决策依据。$MR = P + Q \cdot \frac{dP}{dQ}$ 多生产会带来价格降低。若为要素垄断，也会带来要素价格上升。

垄断要素的厂商的成本函数：设 $x_i(w)$ 是要素 i 的供给函数，则可以定义 $C(y) = min\Sigma w_i x_i(w)$, 满足约束 $f(x(w)) = y$。此时，$C(y)$ 就是在垄断要素市场上产出 y 下的最小成本。

2.6.4 垄断竞争市场

表 2.2: 垄断竞争与完全竞争的长期均衡比较

特征	垄断竞争 (Monopolistic Competition)	完全竞争 (Perfect Competition)
产品性质	有差异化（品牌、质量、位置、款式等）	同质化（完全相同）
市场需求曲线	向下倾斜（具有一定的垄断力）	水平（完美弹性，是价格接受者）
长期均衡点	$P = AC$, 且 $P > MC$	$P = AC$, 且 $P = MC$

假设 n 个垄断者销售类似但并非完全相同的产品。消费者愿意对厂商 i 的产品支付的价格，不仅取决于该厂商的产出水平，也取决于其它厂商的产出水平。我们将其逆需求函数写为 $P_i(q_i, q_{-i})$，其中 $q_{-i} = (q_1, \ldots, q_{i-1}, q_{i+1}, \ldots, q_n)$。每个厂商 i 都选择产出水平 q_i，最大化其利润

$$\max p_i(q_i, q_{-i})q_i - C_i(q_i)$$

然而，厂商 i 的需求与其他厂商的行为有关。厂商 i 将如何预测其它厂商的行为呢？我们将采用非常简单的行为假设，即厂商 i 假设其它厂商的行为不变。因此，每个厂商 i 将选择满足下述条件的产出水平 q_i^*：

$$p_i(q_i^*, q_{-i}) + \frac{\partial p_i(q_i^*, q_{-i})}{\partial q_i} q_i^* - C_i'(q_i^*) \le 0 \quad 当q_i^* > 0时取等号$$

所有厂商的最优产出水平记为 $q = (q_1, \ldots, q_n)$，对厂商 i 来说，存在某个最优产出水平，记为 $Q_i(q_{-i})$。

为了保证市场处于均衡状态，每个厂商对其它厂商行为的预测必须与其它厂商实际的行为相容。因此，若 $q^* = (q_1^*, \ldots, q_n^*)$ 为均衡产出向量，则它必然满足下述系统：

$$q_i^* = Q_i(q_{-i}^*), \quad i \in \{1, 2, \cdots, n\}$$

$$q_i^* = Q_i(q_{-i}^*), \quad i \in \{1, 2, \cdots, n\}$$

也就是说，若假定其它厂商产出数量为 $q_2^*, ..., q_n^*$, 则 q_i^* 为厂商 1 的最优选择。对每个厂商来说，给定其它厂商的行为，其边际收益等于边际成本。在下图给出的垄断竞争均衡处，厂商 i 获得正的利润。在垄断竞争行业中，如果不存在壁垒，企业可以自由进出，就变成了长期均衡。

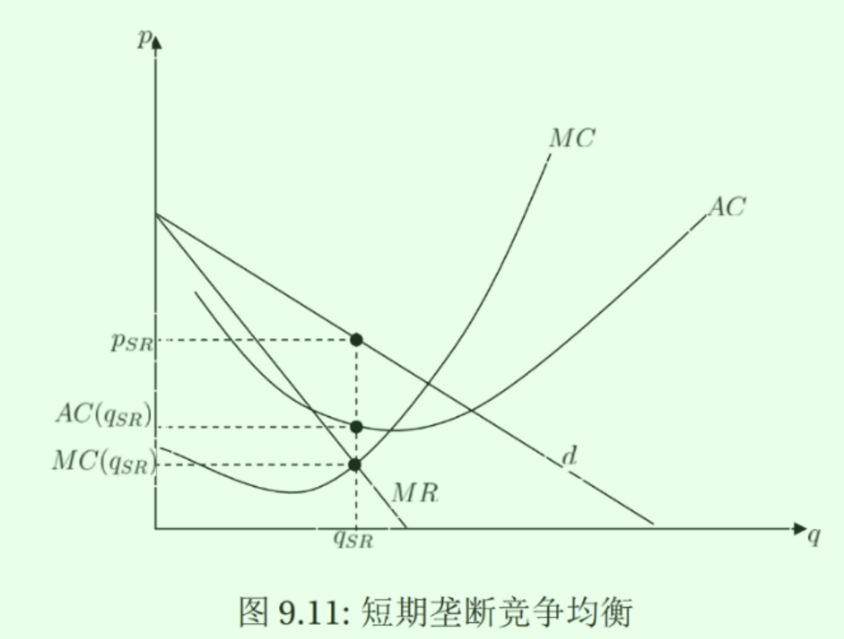


图 2.21: 短期垄断竞争均衡

2.6.4.1 长期垄断竞争均衡

由于企业可以自由进出，在长期垄断竞争行业其利润必然为零。这意味着厂商 i 将制定 p_i^* 的价格并生产 q_i^* 数量的产出，使得：

$$p_i^* q_i^* - C_i(q_i^*) \le 0, \quad 当q_i^* > 0$$

或者

$$p_i \le \frac{C_i(q_i^*)}{q_i^*}, \quad 当q_i^* > 0$$

这样，在长期均衡中企业的平均成本等于价格，但价格高于边际成本。这就意味着，在垄断竞争行业中，存在过多的生产能力积累，企业产量并不是选择在最有效生产规模 (即最低平均成本处) 上。下图描述了垄断竞争行业的长期均衡。

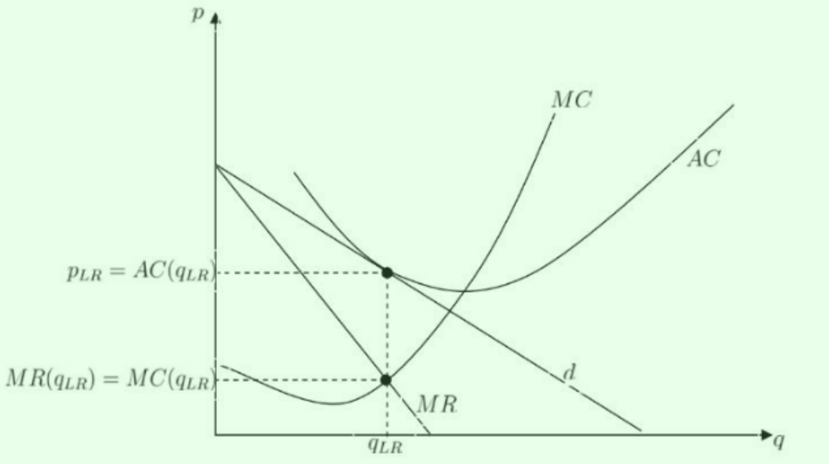


图 9.12: 长期垄断竞争均衡

图 2.22: 长期垄断竞争均衡

2.6.4.2 垄断竞争市场社会福利

由于价格大于边际成本, 与完全竞争市场相比, 垄断竞争市场存在着社会福利损失。另外, 由于每个垄断竞争企业的产品是不同的, 产品种类也可能导致效率问题。由于每个垄断竞争企业并不能获得消费者的全部剩余, 正外部性显示存在进入不足的可能性。还有, 垄断竞争企业的进入会降低其他企业的利润, 负外部性显示存在进入过度的可能性。这样, 垄断竞争行业, 就有可能存在产品种类过多或过少的情形。

2.6.4.3 垄断竞争市场模型

垄断竞争经典模型:Dixit-Stiglitz 模型

假设存在一个代表性消费者, 消费者偏好多样化的产品。设有 L 种差异产品, 其中产品种类 L 是内生决定的。假设每一个企业只能有一种产品, 那么在长期, 会有多少家企业或者说多少个产品呢? 假设消费者偏好是常替代弹性 (CES) 效用函数:

$$U(q_1, \cdots, q_L) = \left(\sum_{l=1}^{L} q_l^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}$$

其中 q_l 表示差异化产品，消费者倾向于产品的多样化，这主要体现在：当 $q_l \to 0$，$\frac{\partial U(q_1, \cdots, q_L)}{\partial q_l} \to \infty$。

消费者的预算约束为：$\sum_{l=1}^{L} p_l q_l \leq I$，其中 p_l 是差异化产品 i 的价格，I 是代表性消费者的收入（外生给定）。企业生产差异化产品有两部分成本，一是固定成本 F，二是边际成本 c。假设这些成本都是劳动力的耗费。生产差异化产品 q_l 时的成本函数为

$$TC_l(q_l) = \begin{cases} F + cq_l & 若 q_l > 0 \\ 0 & 若 q_l = 0 \end{cases}$$

对消费者：

$$\max_{q_0, q_1, \cdots, q_L} \left(\sum_{l=1}^{L} q_l^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}$$

$$s.t. \sum_{l=1}^{L} p_l q_l \leq I$$

上面最优化问题的拉格朗日函数为:

$$L(q_0, q_l, \lambda) = \left(\sum_{l=1}^{L} q_l^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}} - \lambda\left(\sum_{l=1}^{L} p_l q_l - I\right)$$

一阶条件为:

$$\left(\sum_{l=1}^{L} q_l^{\rho}\right)^{\frac{1-\rho}{\rho}} q_l^{\rho-1} = \lambda p_l$$

$$\sum_{l=1}^{L} p_l q_l = I$$

从而得到 $\lambda = \frac{\left(\sum_{l=1}^{L} q_l^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}}{I}$, $q_l = \left(\frac{p_l}{I}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} \left(\sum_{l=1}^{n} q_l^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}$。

从上面需求函数我们可以求解出垄断竞争产品的需求弹性为 $\eta \equiv -\frac{\partial \ln q_l}{\partial \ln p_l} = \frac{1}{1-\rho}$。

其次，对厂商来说，其决策是求解下面的最优化问题:

$$\max_{p_l} D_l(p_l)p_l - cD_l(p_l) - F$$

得到 $p_l = \frac{c}{1-\frac{1}{\eta}} = \frac{c}{\rho}$。利用对称性可得 $q_l = q = \frac{I}{np_l} = \frac{I\rho}{nc}$。

由于在均衡时，每个垄断竞争企业的利润为 0，这样我们得到了均衡的企业数目 $\frac{I}{n}(1-\rho) = F$。于是 $n^* = \frac{I}{(}1-\rho)F$, 从而得到 $q_l^* = \frac{F\rho}{(1-\rho)c}$。

从上面分析我们得到结论：替代弹性 ρ 越大，价格越低，企业数目越少，差异产品产量越大；固定成本越大，企业数目越小，或者产品种类越少，产量越大；收入提高会增加企业的数目，但对产品的价格和数量没有影响。

第三章 博弈论

1. 主体 i
2. 行动 $A_i = \{a_1, a_2 \cdots\}$
3. 信息
4. 战略：$S_i = s_i, \cdots\}$
5. 支付：$u_i = u_i s_1, s_2, \cdots$

定义 3.1 (战略描述)

博弈可以使用战略函数描述。

例如 $\{a_1, a_2, \{s_1, s_2; s_1, s_2\}, u_i\}$

♣

注[概念理解] 几个概念的充分理解：

- 在静态博弈中，战略和行动几乎是一样的概念。在动态博弈中，战略是一种长期应带，代表着所有情况的充分思考。如果对方选择 a 策略，我会选择哪种策略。在长期中，行动只是当前动作的结果。
- 支付为行动的方程，依赖策略组合。也就是不同人采取了不同的策略，最后收益状态也不相同。

博弈类型基于信息和行动顺序可以进行分类。

表 3.1: 博弈类型分类（基于信息和行动顺序）

行动顺序	完全信息 (Perfect Information)	不完全信息 (Imperfect Information)
静态博弈 (Static)	1. 完全信息静态博弈 (纳什均衡)	2. 不完全信息静态博弈 (子博弈精炼纳什均衡)
动态博弈 (Dynamic)	3. 完全信息动态博弈 (贝叶斯纳什均衡)	4. 不完全信息动态博弈 (精炼贝叶斯纳什均衡)

3.1 静态博弈

3.1.1 占优策略

定义 3.2 (严格占优策略)

无论对手选择怎么样的策略 s_{-i}，自己选择 s_1' 策略的收益总是优于其他策略 s_2''。则 s_1' 为严格占优策略。

$$u_i(s_1', s_{-i}) > u_i(s_2'', s_{-i})$$

♣

表 3.2: 拥有严格占优策略的博弈示例

玩家甲 \玩家乙	左 (L)	中 (C)	右 (R)
上 (U)	$(15, 5)$	$(15, 8)$	$(15, 1)$
中 (M)	$(12, 0)$	$(6, 3)$	$(1, 2)$
下 (D)	$(5, 1)$	$(4, 4)$	$(3, 1)$

例如表格显示，玩家甲选择 U 策略时收益相比其他收益总是最大的。U 策略就是玩家甲的占优策略。对乙玩家来说，C 策略则是他的最优策略。

定义 3.3 (严格占优策略均衡)

所有玩家（要求每个玩家都存在占优策略）都存在占优策略时，就形成了占优策略均衡。

$$s^* = s_1^*, s_2^*, \cdots$$

3.1.2 共同知识

共同知识是一种信息的传递。我知道你知道，我知道你知道我知道...

假设 Ω 是**世界集合**，例如天气只可能是三种 $\{\{rain\}\{sun\},\{snow\}\}$。

而事件就是世界集合的元素，例如事件 E 为但当前为晴天，有 $E \in \Omega$。其补集（并非晴天）也是事件 $CuE = \{rain, snow\} \in \Omega$。

每个玩家有**知识结构** $\Pi_i = \{\Pi_i(w), w \in \Omega\}$。但是每个玩家的知识结构可能不同。

例如玩家 a 的知识结构为 $\{\{rain\}\{sun\},\{snow\}\}$；玩家 b 的知识结构为 $\{\{rain, snow\},\{sun\}\}$。也就是说，对于玩家 a 来说，情况有下雨、晴天、下雪三种。对于玩家 b 来说，情况却只有晴天，非晴天两种情况。

因此可以进一步定义知识算子。例如，当处于雨天事件 R 时，对于玩家 a 来说 $K_a(R) = \{w \in \Omega, \Pi_i(w) \subseteq R\}$ 。也就是对于玩家 a 来说，能清楚的识别到现在是在下雨，对于玩家 b 来说却只是非晴天 $K_b(R) = \{w \in \Omega, \Pi_i(w) \subseteq \{R, S\}\}$ 。

使用知识算子表达**所有人知情**：所有人都知道下雨了，可以表述为 $K(R) = \cap K_i(R)$(必须是所有玩家知识算子的交集)。

使用知识算子表达**我知道你知道**：$K^1(E) = K(E)$。同理，**我知道你知道我知道**就是 $K^2(E) = K(E)$。$K^n(E) = K(E)$ 可以无限迭代我知道你知道我知道...

定义 3.4 (共同知识)

共同知识的定义非常严格，同时意味着我们都知道这个信息，同时我知道其他人知道这个消息，我们也知道其他人知道我们知道他们知道这个信息...

$$CK(E) = \cap_{m=1}^{\infty} K_i^m(E)$$

注[理解信息] 大家知道大家知道这件事，也就是 $K^2(E) = K(E)$ 意味着彼此了解对方的知识结构。

练习 3.1 理解假设 在所有人已经是理性人的情况下，

占优均衡需要理性成为共同知识吗?

也就是额外还要有进一步的要求，不但大家都是理性人，我还知道大家都是理性人，大家也都知道我知道大家是理性人。

解 [占优均衡与共同知识假设] 不需要。因为无论我们是否知道对方理性，占优策略都是最优的，不需要额外的共同知识。

这也是为什么博弈论从占优均衡开始的原因。共同知识其实是非常严格的假定。模型越严格，预测性往往越弱。占优均衡对于假设的要求非常低。

3.1.3 IESDS 重复剔除占优

占优策略是永远有最好的选择。但是还有一些选择情况，可能没有更好的选择，但是有最差的选择一定不会被选择，因此可以剔除掉。

例如下方例子，直接看是不存在占优策略的。

1. 对于玩家乙来说，无论玩家甲选择什么策略，选择 R 策略总会是最坏的结果。

表 3.3: IESDS 重复剔除占优

玩家甲 \玩家乙	**(L)**	**(C)**	**(R)**
(U)	$(1,1)$	$(1,3)$	$(0,1)$
(D)	$(0,3)$	$(0,1)$	$(2,0)$

2. 理性的玩家甲知道玩家乙不会选择 R 策略，此时 U 就成为了删去 R 列后，他的占优策略。
3. 理性的玩家乙知道玩家会选择 U 策略，因此他的最优策略为 C。

✍ **练习 3.2 假设的理解** 在 IESDS 重复剔除占优均衡中，需要理性成为共同知识吗？发生在哪一步？

解 [假设的理解] 需要，从第二步开始。理性的玩家甲知道玩家乙不会选择 R 策略，此时 U 就成为了删去 R 列后，他的占优策略。这要求他们彼此知道彼此是理性的，所以都不会选择最坏的策略。剔除最坏策略这种行动依赖于理性的共同知识。

✍ **练习 3.3IESDS 重复剔除占优** 剔除的顺序会影响占优均衡的结果没？

解 [IESDS 重复剔除占优] 存在弱劣战略时，剔除的顺序会影响结果。

例子：

表 3.4: 剔除的顺序会影响结果

玩家甲 \玩家乙	**C1**	**C2**	**C3**
R1	$(2,12)$	$(1,10)$	$(1,2)$
R2	$(0,12)$	$(0,10)$	$(0,11)$
R3	$(0,12)$	$(0,10)$	$(0,13)$

1. 顺序 1：剔除 R2-C1-R3-C2
2. 顺序 2：剔除 R3-C3-R2-C2

顺序不一样就是因为对于玩家甲来说,R2 和 R3 策略一样坏，也就是存在弱劣战略。

3.1.4 纳什均衡

定义 3.5 (纳什均衡)

给定对方战略 s_{-i}^* 时，自身最优战略为 s_i^*。同时，给定自身战略 s_i^* 时，对方最优战略为 s_{-i}^*。

$$u_i(s_i^*, s_{-1}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*), \forall s_i \in S_i$$

♣

注[纳什均衡的理解] 几个理解点：

- 互为最佳。纳什均衡的本质是双方此时的策略互为对方的最佳响应。
- 没有偏离动机。更直观来说，其含义是，一旦实现了纳什均衡，没有动机去偏离这个均衡。
- 直接从结果定义。纳什均衡只是展示了可能的结果，而没有关注形成过程。虽然一开始就在这个结果就没有办法便宜，但如果一开始不在这个结果上，不一定会到达该点。
- 假设严格性。纳什均衡对理性共同知识的要求更加严格。

对于几种均衡，有关系式

$$\text{占优均衡} \subset \text{重复剔除均衡} \subset \text{纳什均衡}$$

如果重复剔除均衡最后有唯一解，此时也就成了纳什均衡。

✍ **练习 3.4 思想实验**

是否策略越多福利越好？对于消费者来说，往往选择越多福利越好，但是这可以被看作只有一方个体的情况，在存在多个个体时并不一定。

解 [例子]

例如如下例子，双方各有三个策略：

表 3.5: 纳什均衡求解，多选择

玩家甲 \玩家乙	C1	C2	C3
R1	(4, 3)	(5, 1)	(6, 2)
R2	(2, 1)	(8, 4)	(3, 6)
R3	(3, 0)	(9, 6)	(2, 8)

此时纳什均衡为 (R1,C1)=(4, 3)

如果删除策略 C3。纳什均衡变成了 (R3,C2)=(9, 6)

整体来看，社会福利都提升了。可以不只是把 C3 当成策略，也可以当成某种政策赐予的选择。这些都揭示了并不是选择越多福利就越高。

3.1.5 古诺模型：产量竞争

古诺模型源于 1838 年，运用了纳什均衡的思想，但比纳什均衡定义还早了 100 年。

其求解思路就是由于市场存在两个厂商共同决定市场产量 $P(Q)=P(q_1+q_2)$。

代入求利润最大化偏导：

$$\pi_i(q_1,q_2)=q_iP(q_1+q_2)-C_i(q_i)$$

$$\frac{\partial\pi_1}{\partial q_1}=P(q_1+q_2)+q_1P'(q_1+q_2)-C_1'(q_1)=0$$

$$\frac{\partial\pi_2}{\partial q_2}=P(q_1+q_2)+q_2P'(q_1+q_2)-C_2'(q_2)=0$$

最终得到反应函数 $q_1^*=R_1\left(q_2\right);q_2^*=R_2\left(q_1\right)$

3.1.5.1 古诺模型与反垄断

✍ **练习 3.5 扩展古诺模型到 n 个厂商** 重点 尝试把古诺模型扩展到 n 个厂商。

解 [扩展古诺模型到 n 个厂商] 此时：

$$p=a-Q$$

$$Q=q_i+q_{-i}$$

代入得

$$\pi=q_i*(a-Q-c)=q_i*(a-q_i-q_{-i}-c)$$

求导得到

$q_i=\frac{a-c-q_{-i}}{2}$

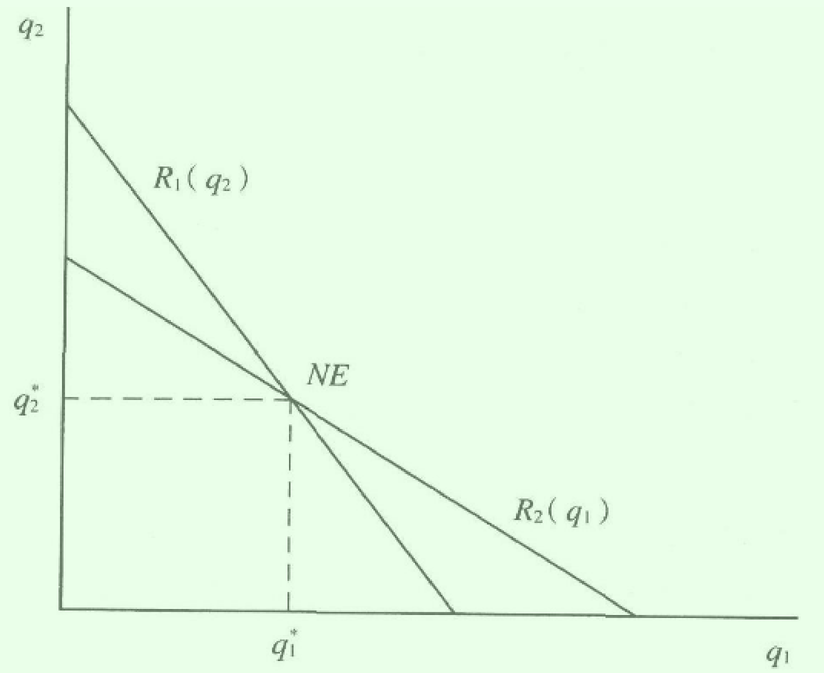


图 3.1: 古诺模型

同质化厂商可以得到 $q_{-i} = (n-1)q_i$

最终得到

$$q_i = \frac{a-c}{n+1}$$

然后就可以得到

$$\pi = \frac{(a-c)^2}{(n+1)^2}$$

$$p = \frac{a+nc}{n+1}$$

注[古诺模型的理解] 实际上古诺模型扩展到 n 个的过程就是趋于完全竞争的过程。例如 $p = \frac{a+nc}{n+1}$ 一阶导可以看出 n 和价格 P 为负相关关系。n=1 时，$q_i = \frac{a-c}{2}$ 就是寡头市场的结果。

在古诺模型扩展到 n 个的情况下，此时有

$$\pi_i = P(Q)q_i - c_i q_i$$

求导为 0，一阶条件可以得到

$$P(Q) - c_i = -\frac{dP(Q)}{dq_i}q_i = -\frac{dP(Q)dQ}{dq_i dQ}q_i$$

因为 $Q = q_1 + \cdots + q_n$，所以 $\frac{dQ}{dq_i} = 1$

式子最终变形

两边同时除以 P，得到

$$\frac{P(Q) - c_i}{P} == -\frac{q_i dP(Q)}{PdQ} - \frac{Qq_i dP(Q)}{QPdQ}$$

上面最后一个等号分子分母同时乘以了一个 Q，这时候有市场份额 $m_i = \frac{q_i}{Q_i}$。价格需求弹性 $\varepsilon = \frac{QdP}{PdQ}$。利润率 $L_i = \frac{P-C}{P}$。

式子简化为 $L_i = \frac{m_i}{\varepsilon}$。

如果要求市场平均利润率，在每个利润率基础上加权平均，可以得到：

$$L = m_i \sum_i^n \frac{m_i}{\varepsilon} == \sum_i^n \frac{(m_i)^2}{\varepsilon} = \frac{HHI}{\varepsilon}$$

HHI 就是赫芬达尔—赫希曼指数（Herfindahl-Hirschman Index，HHI，简称赫芬达尔指数）是衡量产业集中度的综合指标。

注[学派拓展]

HHI 指数的构建依赖市场份额，这也是反垄断经济的结构估计体现的思考。结构主义，也就是哈佛学派认为市场结构与经济激励密切相关，例如这里的市场份额结构。

扩展阅读当我们反垄断时，反对的到底是什么？

3.1.6 伯川德模型：价格竞争

Bertrand 模型（价格竞争）是比古诺模型（产量竞争）设定更极端的模型。因为价格竞争暗含了**赢家通吃**的市场设定。**只要我的价格比你低一点，我就能获得全部都市场**。

3.1.6.1 基本模型

表 3.6: 伯川德模型

玩家甲 \玩家乙	合作	偏离
合作	$(\frac{垄断利润}{2}, \frac{垄断利润}{2})$	$(0, 垄断利润)$
偏离	$(垄断利润, 0)$	$(\varepsilon, \varepsilon)$

此时占优策略是偏离，最终利润会趋于 0，也就是价格等于成本。

注[产量和价格竞争] 对比 n 个厂商的古诺模型 $P(n) = \frac{a+nc}{n+1} > c$，更加说明了价格竞争是比产量竞争更极端的情况。

古诺模型是在厂商数量趋于无穷时价格趋近于成本，而价格模两个厂商就会导致价格趋于成本。

实际上就是因为赢家通吃的市场情况导致偏离策略的诱惑很大。

3.1.6.2 霍特林模型

重点

假定厂商 i 和 j，其异质性（位置不同，但产品同质）分布在 [0,1] 上，边际成本为 C。消费者的间接效用为

$$U = r - t|L_i - x| - p_i$$

r 为保留价格，t 为交通成本，L_i 为厂商位置，x 为消费者位者，p_i 为产品价格。

注[霍特林模型] 厂商除了付出价格外还要付出交通成本，因此异质性来源于厂商的位置。

显然，更靠近 i 侧的消费者会被 i 厂商吸引，因为交通成本会降低。此时消费者位置在 x，即可计算吸引消费者的边界点：

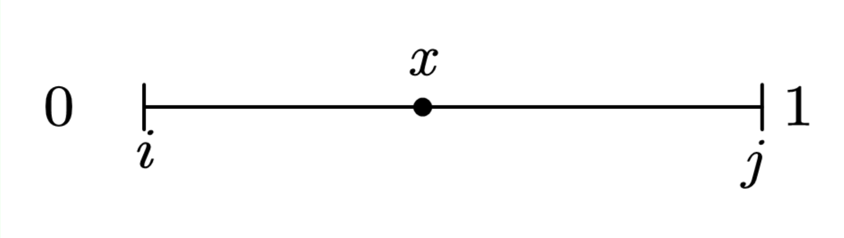


图 3.2: 霍特林模型

$$r - tx - p_i = r - t(1-x) - p_j$$

解得 $x = 0.5 + \frac{p_j - p_i}{2t}$

注[均衡解的意义] 均衡解体现了以下经济意义

- p_i 越大，i 厂商吸引范围越小——边界点向左边靠近。j 厂商价格吸引力同理。
- 在价格相同的情况下 $p_i = p_j$，x=0.5. 也就是厂商平均分配 01 范围内的消费者。

假设消费者均匀分布，次数吸引范围的长度就是需求，可以得到需求函数：

$$D_i = x = 0.5 + \frac{p_j - p_i}{2t}$$

$$D_j = 1 - x = 0.5 - \frac{p_j - p_i}{2t}$$

此时有利润函数 $D_i(p_i - c)$ 和 $D_j(p_j - c)$。求一阶条件，类似古诺模型得到反应函数：

$$\begin{cases} \frac{1}{2t}p_j - \frac{1}{t}p_i = -0.5 - \frac{1}{2t}c & (1) \\ \frac{1}{2t}p_i - \frac{1}{t}p_j = -0.5 - \frac{1}{2t}c & (2) \end{cases}$$

对称性或者同质商品可以发现 $p_i = p_j$，最终解得 $p = c + t$。也就是此处模型异质性是位置带来的 t 部分。

利润为 xt，价格相同时，也就是 $\pi = \frac{t}{2}$

3.1.6.3 霍特林模型, 价格歧视

接下来考察价格歧视的情况，为简化模型，边际成本为 0，但是不同厂商可以为不同消费者进行不同的定价。

直觉上，就类似两端的厂商都在尝试吸引消费者，越靠近吸引边界点人收益越多，例如各种 app 对新用户发放优惠券的行为就是这种情形。

对于一个位于 x 位置的消费者，厂商 1 想要吸引他，那么对消费者来说，就要比厂商 2 划算，得到：

$$p_1(x) + tx \leqslant p_2(x) + (1-x)t$$

如果厂商 2 为了吸引用户，设置价格为 0（$p_2(x) = 0$），那么有 $p_1(x) \leqslant t(1-2x)$。

假设没有补贴，除非有双边市场[1]，此时价格必须为正不能为负。

此时，厂商 1 的利润为：

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t(1-2x)dx = \frac{\pi}{4}$$

[1] 也就是通过补贴吸引用户，但是这种流量本身就有利润可图

- 统一定价时，利润为 $\frac{t}{2}$
- 价格歧视时，利润为 $\frac{t}{4}$
- 价格歧视不一定不利于消费者。

3.1.6.4 Salop 模型

1976 年的一个模型《Monopolistic Competition with Outside Goods》。
霍特林模型为 01 分布的直线，salop 则为圆形且扩大到了 n 个厂商。n 个厂商在圆圈边上展开竞争。

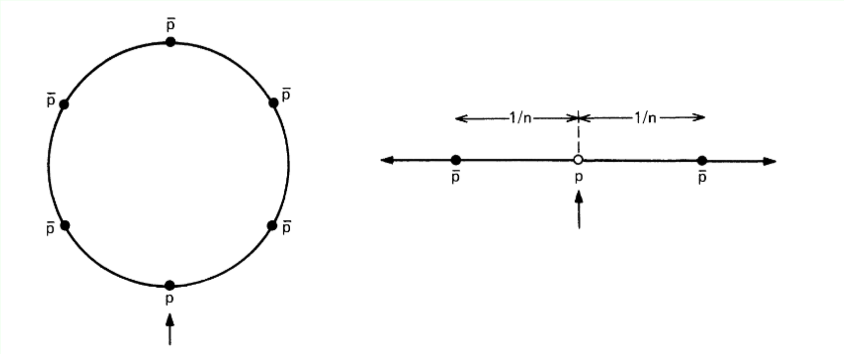


图 3.3: Salop 模型

交通成本为 a，此时有效用函数：

$$r - a|L_i - x| - p_i$$

此时厂商 i 同时在和厂商 i+1、厂商 i-1 展开消费者争夺战。
厂商 i 和厂商 i+1 进行价格竞争时，有边界均衡式子：

$$r - a|x_{i,i+1} - \frac{i}{n}| - p_i = r - a|\frac{i+1}{n} - x_{i,i+1}| - p_{i+1}$$

可以解得 $x_{i,i+1} = \frac{2i+1}{2n} + \frac{p_{i+1}-p_i}{2a}$。
同理有 $x_{i,i-1} = \frac{2i-1}{2n} + \frac{p_i-p_{i-1}}{2a}$。
此时厂商 i 的需求函数为

$$x_i = |x_{i,i+1} - x_{i,i-1}| = \frac{1}{n} + \frac{p - p_i}{a} = Q_i(p_i, p)$$

其中 $p = \frac{p_{i-1}+p_{i+1}}{2}$。
此时厂商利润最大化式子为

$$\max(p_i - c)Q_i(p_i, p)$$

在对称性条件 $p_i = p$ 约束下可以解得 $p = c + \frac{a}{n}$

命题 3.1 (总结下几个模型)

霍特林模型不同模式：

- 统一定价时 $p = c + t$
- 价格歧视时 $p = t(1 - 2x)$
- 圆形网络时 $p = c + \frac{t}{n}$

相比于霍特林模型统一定价，圆形网络时考虑了厂商数量 n，此时厂商数量增多能消除差异化溢价。

3.1.7 公地悲剧

表 3.7: 公地悲剧

玩家甲 \玩家乙	过度	持续
过度	$(3.5,3.5$	$(5,3)$
持续	$(3,5)$	$(4.5,4.5)$

此时过度开发是占优策略。接下来使用代数式进一步表示说明：

假设有 n 个农民，每个农民有 g_i 只羊，草场羊总数为 $G=\sum_i^n g_i$。

羊的价值为 $V=V(G)$: 羊总数越多，每个羊分到的草料越少，质量越低。

且有假设 $V'(G)<0, V''(G)<0$。其实就是假设凸函数，羊总数越多质量越低，且随着数量的的增多，质量下降幅度越来越大。

注[理解此处的假设] 如果没有凸函数的假设，公地悲剧不一定成立。

对于农民来说，其最优化式子为：

$$g_iV(G)-g_ic$$

有 n 个一阶条件：

$$V(G)+g_iV'(G)-c=0$$

由于对称性，可以得到均衡解

$$V(G^*)+\frac{G^*}{n}V'(G^*)-c=0$$

政府作为决策者，最优化式子为：

$$GV(G)-Gc$$

可以解得均衡解

$$V(G^{**})+G^{**}V'(G^{**})-c=0$$

可以发现 $G^{**}<G^*$

证明 [$G^{**}<G^*$] 证明如下

只使用简单粗糙的证明，反证法。

如果 $G^{**}>G^*$

有两个式子都为边际成本，也就是相等：

$$V(G^*)+\frac{G^*}{n}V'(G^*)=c$$

$$V(G^{**})+G^{**}V'(G^{**})=c$$

但是由于凸函数的性质，$V(G^{**}) < V(G^{*})$
同时 $V'(G^{*}*) < V'(G^{*}) < 0$, 可以得到

$$V(G^{**}) + G^{**}V'(G^{**}) < c$$

矛盾。
这也说明了公地悲剧需要满足负定矩阵。

3.1.8 静态卡特尔：了解补充

在古诺模型的基础上区分环境。

n 个厂商，有 k 个厂商组成了卡特尔，那么剩余的 n-k 个厂商相当于和一个集团进行竞争，那么可以看作 n-k+1 个厂商展开竞争。

此时直接使用古诺模型 n 个厂商的博弈结果3.5，可以得到：

没有加入卡特尔的厂商，其利润为 $\pi^{out}(k,n) = \frac{(a-c)^2}{(n-k+2)^2}$

加入了卡特尔的厂商，由于需要进一步进行内部平分，其利润为 $\pi^{in}(k,n) = \frac{(a-c)^2}{k(n-k+2)^2}$。

显然，由于卡特尔需要内部分配，有关系

$$\pi^{in}(k,n) = \frac{(a-c)^2}{k(n-k+2)^2} < \pi^{out}(k,n) = \frac{(a-c)^2}{(n-k+2)^2}$$

也就是局部合并有正外部性，这也说明卡特尔集团有更多人加入卡特尔集团的动机。而这种动机往往依赖于强大的组织。所以卡特尔容易在地方势力较强，进入门槛较高，甚至涉及黑社会势力的行业地方出现。

注[补充，古诺合并] n 个厂商，k 个厂商组成卡特尔，利润究竟上升还是下降？

在以下假设情况满足的条件下：

- 线性需求
- 企业都具有相同且固定的边际成本 MC
- 合并后成本不变（无协同效应）
- 古诺数量竞争

局部合并更可能使得利润下降。除非合并到 n-1 这种近似垄断的水平，利润才会上升，也就是卡特尔集团的扩张动机。

对应的，当合并会导致以下情况时，局部合并利润未必一定下降：

- 合并带来成本协同，边际成本下降
- 需求为非线性、具有高度凸性或差异化
- 竞争不是纯古诺模型
- 合并后可以内部制定数量契约（内部化竞争）

3.1.9 混合战略纳什均衡

政府救助流浪汉，可能能提升就业率，但是也可能滋养懒汉。此时没有占优均衡。但是帮助后，有概率使得流浪汉去工作，于是问题转化为了，当我资助后流浪汉有概率去工作，但是当概率多大时，值得政府去帮助。

表 3.8: 混合战略纳什均衡

政府 \流浪汉	工作	不工作
救助	$(3, 2)$	$(-1, 3)$
不救助	$(-1, 1)$	$(0, 0)$

定义 3.6 (混合战略均衡)

如下

有策略 $S_i = \{s_i 1, \cdots, s_i k\}$。

选择每个策略的概率分布为 $P_i = \{p_i 1, \cdots, p_i k\}$。

且有 $\sum p_{ik} = 1, p_{ik} > 0$

则混合纳什战略均衡为

$$V_i(p_i^*, p_j^*) \geq V_i(p_i, p_j^*)$$

♣

注[混合战略均衡] 和纳什均衡类似，其实就是对其他结果的最优回应，重点在于没有偏离的动机，而不是关注形成的过程。不过不同的是，这里的偏离动机的形成依赖概率，因此集合是概率的集合。

等式构建的理念就是选定该策略后，另外策略的期望收益和目前情况相等。

对于政府救助的例子，假设工作概率为 q，救助概率为 p。

假定政府选定了救助，此时政府期望收益为 $3q + (-1)(1 - q)$。

假定政府选定了不救助，此时政府期望收益为 $-q$

那么无论政府选定了那个，没有偏离动机的条件为 $3q + (-1)(1 - q) = -q$, 解得 $q = 0.2$

✍ **练习 3.6 混合战略** 考试重点 思考 3*2 的混合战略

✍ **练习 3.7 混合战略均衡求解** f 代表罚款，c 代表检查成本，a 代表应缴纳的税收。

表 3.9: 混合战略均衡求解

政府 \企业	逃税	不逃税
检查	$(a - c + f, -a - f)$	$(a - c, -a)$
不检查	$(0, 0)$	$(a, -a)$

解 [混合战略均衡求解] 企业逃税概率为 q，政府检查概率为 p。

政府检查的期望：

$$(a - c + f)q + (1 - q)(a - c) = (1 - q)a$$

解得 $q = \frac{c}{a+f}$

检查成本 c 越大，越容易逃税；罚款越多，越不容易逃税。这些都符合直觉。

为什么应缴纳的税收 a 越大，越不容易逃税？

因为 a 越大，政府检查的动机越大，传递到企业端就是越不容易逃税。

3.1.10 相关均衡

考试重点

不同玩家受收到不同但相关的信号，最终实现更优的均衡。关键点如下：

- 纳什均衡要求玩家选择行动时完全独立

- 相关均衡允许玩家行动之间有“相关性”，由一个“协调装置”发出的信号制造，例如政府发出市场信号[2]。
- 每个玩家都可以选择是否服从信号
- 在均衡中：服从建议比偏离更好

例如下方例子中，此时社会福利最优的均衡为 (D,L), 但是存在的纳什均衡为 (U,L) 和 (D,R)

表 3.10: 相关均衡

企业 1 \企业 2	L	R
U	$(5,1)$	$(0,0)$
D	$(4,4)$	$(1,5)$

假设政府会给出信号且目前以下信号发出的概率相等

$$P(U,L) = P(D,L) = P(D,R) = \frac{1}{3}$$

例如当发出信号企业 1 选择 U 时，厂商 1 收到信号 U，此时会避免 (U,R), 此时厂商 L 会选择 L。

如果厂商 1 顺从信号，此时收益为 (U,L)=5，如果违反信号，此时收益为 (D,L)=4，因此没有偏离的动机。

例如当发出信号企业 1 选择 D 时，厂商 1 收到信号 D，此时厂商 2 各有 50% 概率选择 L 或者 R。

此时如果厂商 1 遵循信号，收益为 $0.5*4+0.5*1=2.5$

此时如果厂商 1 偏离信号，收益为 $0.5*5+0.5*0=2.5$

收益相同，遵从与偏离期望相同（无严格好处），不构成可获利偏离（即弱不可偏离）。

企业 2 检验同理（可以看出收益矩阵是对称的）。

相关均衡的信号使得更好的均衡 (D,L) 成为了可能。

3.2 动态博弈

静态博弈是同时做出行动，动态博弈则有先后顺序，因此使用树状图表示

1. 主体 i
2. 行动 $A_i = \{a_1, a_2 \cdots\}$
3. 信息
4. 先后顺序
5. 支付：$u_i = u_i s_1, s_2, \cdots$

动态时可以区分行动和战略（考虑完备的思维）

3.2.1 基本概念

动态博弈有了先后顺序，在图片中就是 x1 先做决策，然后 x2 再做决策。此时点 (node) 和束构成了树状图。

树状图具有对称性和反身性，例如图中显示了 x1 先做决策，例如有 $x1 > x2, x2 > x3$, 则有 $x1 > x3$，这也意味着不可能出现 $x3 > x1$。也就是**决策顺序**上的对称性。

其中图片3.4展示了两种情况，

- 左边是 x2 知道 x1 做了怎样的决策。
- 右边是 x2 不知道 x1 做了怎样的决策。因此使用一个方框把对应的节点框住。

[2]凯恩斯多重均衡理论

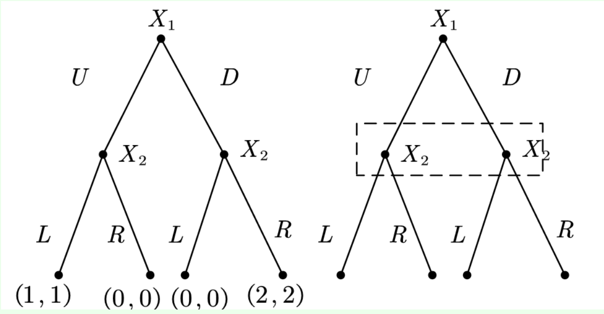


图 3.4: 动态博弈

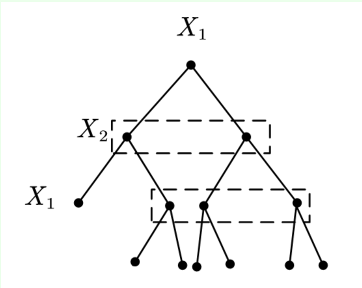


图 3.5: 完美回忆假设

因此有了**单结信息集**的概念。在**完美信息**的情况下，每个人都知道上一步对方做出来怎样的决策，因此每个节点都是单结信息集。在**不完美信息集**的情况下，方框框住的看作同一个单结信息集。图片3.4左侧有 3 个单结信息集，右侧只有一个。

定义 3.7 (子博弈)

树状图每次决策分叉都是个子博弈，例如图片3.4左侧就有 3 个子博弈，也就是每个分叉的节点。♣

定义 3.8 (完美回忆假设)

为了简化模型，一般还会添加一个假设：
参与人不会忘记自己所做的选择。♣

例题 3.1 违反了完美回忆假设的例子

下图违反了完美回忆假设，假设决策者 1 是先决策者，决策者 2 是后决策者。
不完美信息情况下，决策者 2 不知道决策者 1 的行动，因此 x2 处框选在了一起。
但是 x1 自己知道自己做了何种决策，因此 x1 部分不应该被框在一起。

定义 3.9 (行动和战略的区别)

在动态博弈下，行动和战略可以区分开。行动就是每一步都动作，战略则是考虑完备的应对。
以图片3.4左侧完美信息情况为例子，此时，x2 有以下 4 种策略：
1. 策略 1：如果 x1 选择 U,x2 选择 L; 如果 x1 选择 D，x2 选择 L
2. 策略 2：如果 x1 选择 U,x2 选择 R; 如果 x1 选择 D，x2 选择 R
3. 策略 3：如果 x1 选择 U,x2 选择 L; 如果 x1 选择 D，x2 选择 R
4. 策略 4：如果 x1 选择 U,x2 选择 R; 如果 x1 选择 D，x2 选择 L

四种策略可以简写为 LL,RR,LR,RL。♣

注[战略概念的理解] x2 的战略充分考虑了 x1 进行的所有选择，体现了一种理性的完备性。

3.2.2 精炼子博弈均衡

3.2.2.1 精炼子博弈均衡例子

接下来求解以下动态博弈图片3.6：

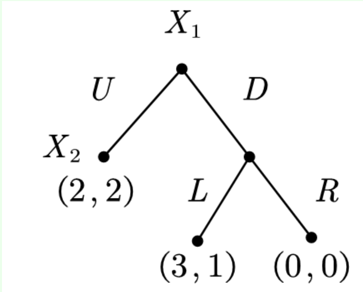


图 3.6: 动态博弈例子，理解静态动态区别

如果写成静态博弈，情况如下表所示3.11：

表 3.11: 动态博弈例子，理解静态动态区别

企业 1\企业 2	L	R
U	$(2,2)$	$(2,2)$
D	$(3,1)$	$(0,0)$

此时**纳什均衡**为 $(D, L) = (3, 1), (U, R) = (2, 2)$。

接下来使用逆向归纳法得到精炼子博弈均衡：

定义 3.10 (精炼子博弈均衡)

此时均衡解为

$$S^* = \{s_1^*, s_2^*, \cdots, s_n^*\}$$

需要满足：

1、这些解为纳什均衡。2、解为每个子博弈（概念见定义3.7）上的纳什均衡。♣

使用逆向归纳法进行求解，也就是倒着来。在题目中，假设 x1 已经选择了 D，那么 x2 就会选择 L。当 x2 选择了 L，x1 选择 D 也是 x1 的最优反应。因此从逆向归纳的角度，也就排除了均衡 $(U, R) = (2, 2)$，因此精炼子博弈均衡结果为 $(D, L) = (3, 1)$。

3.2.2.2 精炼子博弈均衡局限

精炼子博弈均衡主要是数学形式上的求解，在应用中存在许多局限，因为其**假设太多**。

✍ **练习 3.8 求解其精炼子博弈均衡**

求解图片3.4左图的精炼子博弈均衡

解 [精炼子博弈练习 1]

如果使用静态博弈的方式求解，此时结果如下表3.12，也就是使用战略式表达：

此时有纳什均衡 (U,LL)、(D,RR)、(D,LR), 再使用逆向归纳法。可以知道 LR 是 x2 的最优战略，因此子精炼博弈为 (D,LR)

✍ **练习 3.9 求解其精炼子博弈均衡**

表 3.12: 精炼子博弈练习 1

企业 1\企业 2	LL	RR	LR	RL
U	$(1,1)$	$(0,0)$	$(1,1)$	$(0,0)$
D	$(0,0)$	$(2,2)$	$(2,2)$	$(0,0)$

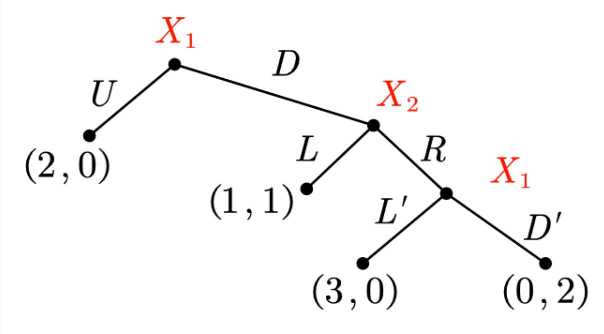


图 3.7: 精炼子博弈练习 2

求解图片3.7精炼子博弈均衡

解 [精炼子博弈练习 2]

直接使用逆向归纳法

如果 x2 选择 R, 那么 x1 会选择 D'。

接着继续倒着推导，x2 知道 x1 在自己选择 R 时选择 D'，此时他会选择 L。

x1 知道 x2 会选择 L，因此 x1 会选择 U。

也就是游戏一开始 x1 就选择结束游戏，逆向归纳法得到的均衡结果为 $(\{U, L'\}, L)$

注[精炼子博弈练习 2] 精炼子博弈练习 2 有几个需要注意的地方

1、L' 在解中被额外提到是因为其是一个威胁。正是因为 X1 会在 x2 选择 R 时选择 L'，所以 x1 才能继续推理选择 U。

2、此处精炼子博弈均衡解存在自相矛盾的问题。

x1 一开始就选择 U，依赖于 x2 选择 R 时，自己选择 L' 的威胁。但是既然一开始就选择了 U, 自己选择 L' 的威胁就不可信了。

造成这种矛盾的主要原因就是逆向归纳法和纳什均衡一样，只验证结果不会偏离的情况，不关心结果形成的情况。

更重要的原因是，精炼子博弈均衡包含了太多的共同知识假设。

练习 3.10 精炼子博弈练习 3

分别求解下面图片3.8的精炼子博弈均衡解

解 [精炼子博弈练习 3]

左侧逆向归纳法求解为 (2,2)。因为给定上一步，下一步选择继续博弈，自己的收益总是变的比早期中止更多。

但要实现这种均衡需要的共同知识为都知道对方会进行选择博弈，如果逻辑链条太长就容易产生怀疑，也就是夜长梦多。

右侧逆向归纳法求解为 (1，1)。因为当博弈到倒数第二层，也就是 x2 做选择时，在给定前一步的情况下，他会选择 (98,101), 于是再前一步就会陷入 (99,98), 不断玄循环最终变成 (1,1)。

这两个博弈都很反直觉，因为左边，需要这么严格的共同知识假设，只是为了结果从 (1,1) 变为 (2,2)。

至于右边，明明有 (100,100) 这样的最终结果，却停留在 (1,1)。

本质依旧是精炼子博弈练习是数学上的表达，但如果逻辑链太长，对共同知识假设太严格，会得出反直觉的结果。

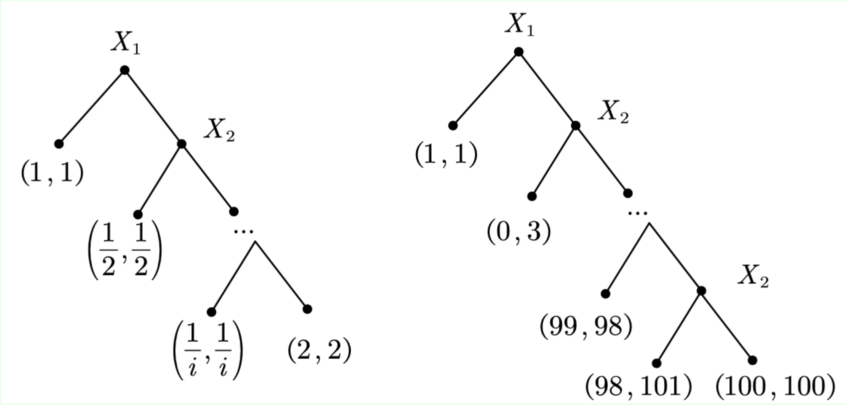


图 3.8: 精炼子博弈练习 3

3.2.2.3 起诉模型：威胁

进一步介绍威胁带来的博弈例子。

此时有一个政客和一个明星，明星可以决定是否起诉政客对自己造成了侵犯，此时有以下博弈路线。

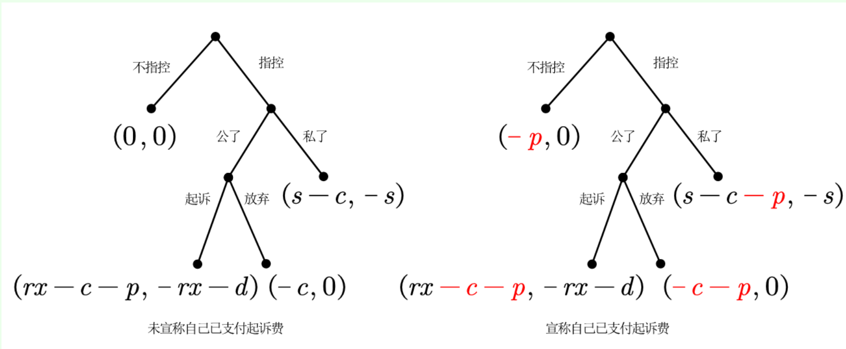


图 3.9: 威胁博弈

其中 r 代表胜诉概率，p 代表起诉费用，x 代表得到的赔偿，c 代表声誉，s 代表私了的赔偿。

左边，也就是自己未宣称自己已经支付起诉费的情况下，如果政客选择了公了，只要 $rx-c-p<-c$，此时明星最优策略是选择放弃，因此威胁是不可信的。

但是当明星宣称自己已经支付起诉费后，$rx-c-p>-c-p$ 一定成立，此时起诉就是这时候的最优反应，在这种情况下就可以继续逆向归纳，威胁是可信的。

这个例子中参与人为承诺行动支付的成本为沉淀成本（sunk cost）。承诺行动可以通过先下手为强的办法达到。

3.2.3 斯坦克尔伯格（stackelberg）纳什均衡

3.2.3.1 斯坦克尔伯格

市场上存在两个企业。同质产品，边际成本固定为 c，其实为产量竞争，但企业 1 先决策，企业 2 后决策。

市场需求函数为 $P(Q)=a-q_1-q_2$。

求解思路和逆向归纳法思想一致，正着来是企业 1 决策，然后企业 2 决策，那么逆向归纳法就是先求得企业 2 的一阶条件，然后代入企业 1 的决策。

此时企业 2 的利润最大化问题为

$$\max \pi_2 = q_2(a - q_1 - q_2 - c)$$

解得一阶条件为 $q_2 = \frac{a-q_1-c}{2}$。
其实企业 1 的利润最大化问题为

$$\max \pi_1 = q_1(a - q_2 - q_1 - c)$$

代入企业 2 得到的关系式子，然后可以求一阶条件：

$$q_1 = \frac{a-c}{2}, q_2 = \frac{a-c}{4}, Q = \frac{3(a-c)}{4}$$

动态和静态的对比
古诺模型为静态模型，在古诺模型下，此时市场结果会是 $q_1 = q_2 = \frac{a-c}{3}, Q = \frac{2(a-c)}{3}$

命题 3.2 (产量竞争下动态与静态)

也就斯坦克尔伯格和古诺模型相比有以下发现

- 先发优势，先决策者市场为 $q_1 = \frac{a-c}{2}$，相比静态古诺模型为同时决策利润提升了。
- 信息优势的作用。在产量竞争的情况下，虽然企业 2 有信息优势，能观察到企业 1 的产量，利润却相比与古诺模型变低了[a]。
  回过头理解先发优势，其实就是一种沉淀成本的付出使得自己的结果变好。先发决策是一种威胁信号，先行生产使得这种威胁变得可信（类似图片3.9)。
- 社会福利变化。动态竞争社会福利更优，因为社会产量提升了。

[a]启发了我们信息优势可能使得参与人处于劣势，但这种结果在单人决策中不可能

练习 3.11 思考题，思考如果是价格竞争呢

思考价格竞争的情况。

社会福利则是更容易趋于完全竞争。下游喊

解 [如果是价格竞争] 两种情况

静态：在价格竞争情况下，也就是回到了3.1.6伯川德模型价格竞争模型。此时只要价格低就能获得全部市场，显然后发优势更加重要。因为后发带来的信息优势作用巨大。例如在招投标低价中标中，出现过很多腐败，想法设法窃取别人的出价策略，其实就是信息优势的作用。

动态：

假设第企业 1 先定价，企业 2 后定价，此时他们生产的是异质性产品

企业 1 需求函数：$q_1 = 1 - p_1 + \theta p_2$

企业 2 需求函数：$q_2 = 1 - p_2 + \theta p_1$

需求函数含义就价格越高需求越低，同时对手的价格越高，自己的需求也就越高。θ 代表了产品间的替代关系。

使用逆向归纳法，企业 2 先决策。为了简化模型，假设边际成本为 0。

$$\max \pi_2 = p_2(1 - p_2 + \theta p_1)$$

对 p_2 求导，解一阶条件可以得到 $p_2 = \frac{1+\theta p_1}{2}$

代入公司 1 的利润函数求一阶条件，可以解得：

$$p_1=\frac{2+\theta}{4-2\theta^2},p_2=\frac{-\theta^2+2\theta+4}{8-4\theta^2}$$

注意到，直接代入一阶条件可以得到 $p_2=q_2=\frac{-\theta^2+2\theta+4}{8-4\theta^2}$
q1 则需要代入计算：$q_1^*=\frac{4+2\theta-2\theta^2-\theta^3}{8-4\theta^2}$
最终

$$\pi_1^*=\frac{(2+\theta)(4+2\theta-2\theta^2-\theta^3)}{(4-2\theta^2)(8-4\theta^2)}$$

$$\pi_2^*=\frac{(4+2\theta-\theta^2)(4+4\theta-2\theta^2)}{(8-4\theta^2)^2}$$

$$\pi_1^*-\pi_2^*=\frac{\theta(2-\theta)(2+\theta)^2}{8(2-\theta^2)^2}>0\quad \text{for } 0<\theta<1$$

注[总结产量竞争和价格竞争] 同样是动态博弈，比较先发优势和后发优势

产量竞争是先发优势，因为先投入代表一种威胁性的承诺，这种承诺带来的先发优势超过了知道对手产量的信息优势。

价格竞争是后发优势，因为竞争包含着低价获得更多市场的假设，因此信息优势更加突出。

3.2.3.2 扩展，双重加价与纵向兼并

产业链就是一个天然的上下游动态博弈，例子如下：

上游市场存在一个寡头厂商，边际成本固定为 c，以 w 价格将原料买个下有厂商。下游厂商售卖价格为 p，市场函数为 $Q=a-P$。此时可以按照 stackelberg 模型进行分析：

下游决策

$$\pi=(a-p)(p-w)$$

一阶条件可以推出 $p=\frac{a+w}{2},q=\frac{a-w}{2}$
同样可以代入上游厂商决策

$$\pi=(w-c)(a-\frac{a+w}{2})$$

最终代入解一阶条件，可以解得 $w=\frac{a+c}{2}$
最终可以得到市场价格

$$q=\frac{a-c}{4},p=\frac{3a+c}{4}$$

但是，如果上下游两家垄断企业合并了，此时市场面临的约束为一个垄断市场，

$$\pi=(p-c)(a-p)$$

可以直接解出均衡情况的解

$$q=\frac{a+c}{2},p=\frac{a-c}{2}$$

笔记 [重要的经济学直觉] 对比纵向合并和非纵向合并，可以发现，产量增多了，价格减少了。这就是双

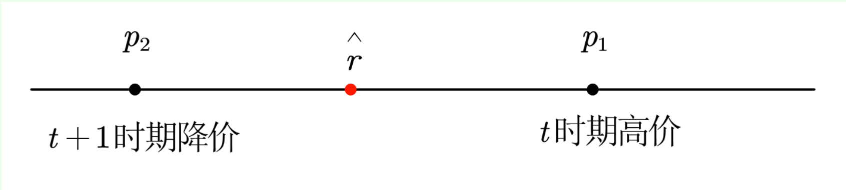


图 3.10: 科斯猜想

重加价的体现，原来的上下游市场上下独立，有两次为了利润最大化而加价的现象，合并后就只有一次，因此社会福利提升了。

推论 3.1 (解决双重加价问题)

解决双重加价问题的三种方式

1. 纵向一体化合并[a]
2. 上下游充分竞争，只要上游市场或者下游市场存在一方是竞争市场，效果等价（生产者章节垄断要素者部分分析）
3. 特许经营费：上游企业对下游企业收加盟费 F，成员以成本价 c 供给上游原料。(外部问题内部化[b])

[a]哈佛学派，结构主义者基于 hhi 反对兼并，而芝加哥学派则发现了兼并的一些好处

[b]芝加哥学派的观点。加盟费是内部协商产生，无论 F 大小为多少，都不影响这种加盟费策略解决双重加价市场的有效性

练习 3.12 如何扩展 思考，如何扩展上下游产业链的兼并与双重加价问题？

其实不同的产业结构兼并作用就不同。例如：

1. 一个上游厂商，n 个下游厂商。
2. n 个上游厂商，1 个下游厂商。
3. 纵向合并影响了横向竞争，例如一个上游厂商，n 个下游厂商。上游厂商联合一个下游厂商排挤其他厂商。
4. 之前的模型都是成本固定，可能合并后带来技术优势减少了成本。
5. 纵向合并和横向合并并存。

3.2.4 耐用品跨期市场

定义 3.11 (科斯猜想)

科斯猜想，企业面对着耐用品的跨期定价，当期数趋于无穷时，结果也会趋于完全竞争。

也可以看作 hotelling 模型3.1.6.2的推广。

由于耐用品会迭代更新，第一批刚出就有消费者，第二批是降价后又有一批消费者。

消费者的保留效用 $r \in [0,1]$ 均匀分布。

第一期：效用 $r + \delta r$ 。此时价格为 p_1。δ 代表贴现折旧因子。

第二期：效用 r 。此时价格为 p_2。

和 hotelling 模型一样，只不过分布在 01 两侧的是过去的厂商和未来的厂商，此时依旧可以计算吸引消费者的边界点位置：

$$(1+\delta\hat{r}) - p_1 = \delta(\hat{r} - p_2)$$

解得 $\hat{r} = p_1 - \delta p_2$

此时就可以看作过去和未来的厂商在进行动态博弈

第二期的厂商决策，其利润最大化决策式子为：

$$\max p_2(\hat{r} - p_2)$$

解得 $p_2 = \frac{\hat{r}}{2}$

第一期的厂商决策，其利润最大化决策式子为：:

$$\max p_1(1 - \hat{r}) + \delta p_2(\hat{r} - p_2)$$

最终可以解出

$$p_1 = \frac{(2+\delta)^2}{2(4+\delta)}$$

不断迭代，就会趋于完全竞争。

3.2.5 讨价还价 bargaining

例题 3.2 三姬分金 三姬分金

动漫天行九歌曾经出现过一个博弈论例子《博弈论》第十一讲 ② 韩非分金

假设甲乙丙瓜分黄金，按照**甲-乙-丙**的顺序进行提案。

甲第一个提方案，如果乙选择接受，则按照甲的方案进行分配。如果乙选择拒绝，接下来是乙提方案。

当乙提自己方案时，如果丙选择接受，则按照乙的方案进行分配。如果丙选择拒绝，则直接使用丙的方案。

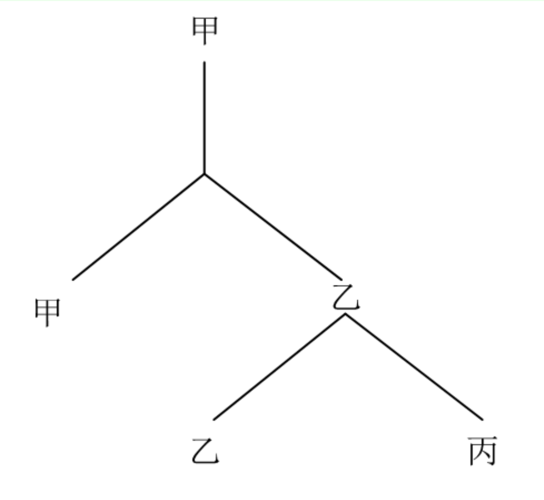


图 3.11: 三姬分金

此时纳什均衡是丙有优势。故事也可以换成**海盗分金**，且之后的所有人都有投票权。

此时为什么后提案者更有优势——因为越后面的提案者，面临的约束越少[3]。而决策的约束越小，其的威胁或者承诺越可信。

注[理解] 更直觉的表达，在最后一人之后没有其他的方案了，因此最后一人的方案将会是当下最优的方案，他掀桌子的威胁可信度最高。

接下来多人按照顺序提出方案变为**两个人轮流提出方案**。在这个基础上再引入**贴现率** δ，情况会发生变化：

[3] 也可以理解为，需要讨好或者贿赂的人越少

也就是说决策者如果在第二期得到了 x 的金币，效用上等价于他在第一期得到了 δx 个金币。

此时考虑两个决策者在有限次商讨中，进行 n 期**讨价还价**。

甲先提方案，如果乙接受，则按照甲方案分配。如果乙拒绝，则轮到乙提方案，甲拒绝就甲再提方案，循环往复**有限次**。

先思考简单的情况，就两期决策，也就是第二期是最终结果。

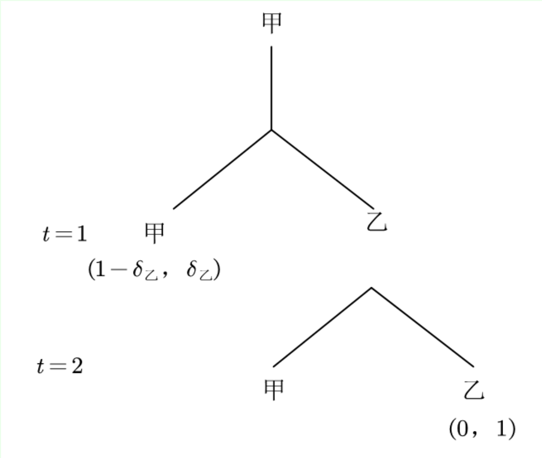


图 **3.12:** 甲乙分金 2 期

如果甲想要实现第一期就游戏结束，自己的提案通过，那么他就需要给出等于第二期乙最优收益一样的结果。

因此甲就得在乙第二期的最优结果基础上贴现，也就是 1δ，因此甲此时的分配方案需要是 $\{1-\delta,\delta\}$。具体到，如果是 100 个金币，那么甲为了贿赂乙在第一期就通过，那么方案应该是 $\{100-\delta,100\delta\}$。

同理，使用逆向归纳法，三期时，是甲为最后的方案提供者，因此从甲开始倒着算贴现:

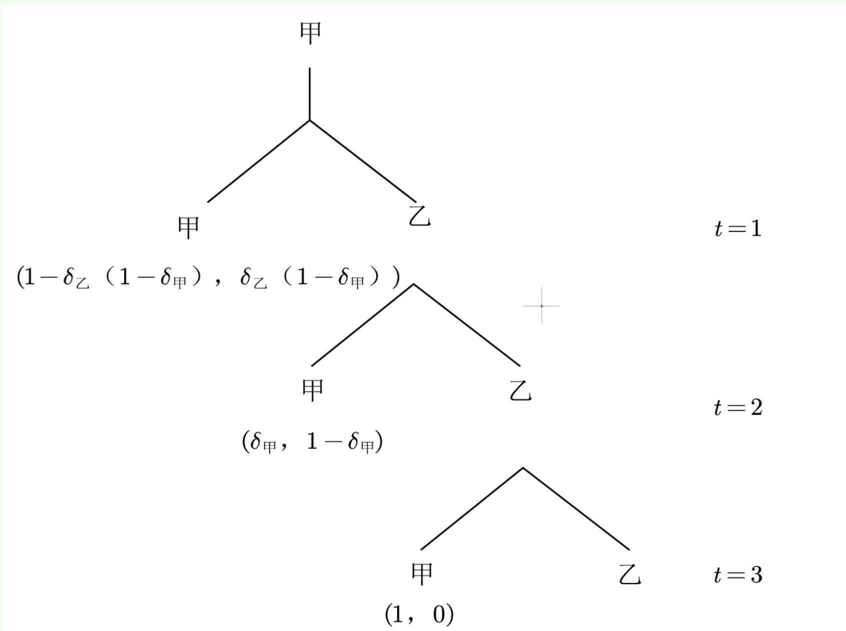


图 **3.13:** 甲乙分金 3 期

推论 3.2 (一些洞见)

如果都是甲先开始，乙第二个，循环往复，那么

将贴现率看作耐心程度

- 都没有耐心 $\delta = \delta = 0$ 的情况下，第一人提案者几乎会获得全部利润（先发优势）
- 甲没有耐心，乙有耐心的情况下，$\delta \neq 0\delta = 0$ 的情况下，此时甲会争取在一期内结束分配，因此结果为 $\{1-\delta, \delta\}$。也就是乙的耐心为自己挽回了一些损失。
- 都有耐心的情况下 $\delta = \delta = 1$，回到了海盗分金问题，此时谁在最后一个决策谁有优势。看谁笑到最后[a]。

[a]此时双数次乙有优势，单数次甲有优势

♡

✍ **练习 3.13 思考题** 重点 如果将讨价还价推广到无穷次，结论会如何？

解 [思考题]

同样回到类似有限次的情况逆向归纳，假设在 T 期最后一位决策者分到了 M, 那么倒推会 T-2 期的情况。此时甲乙的位置就经历了一次循环。

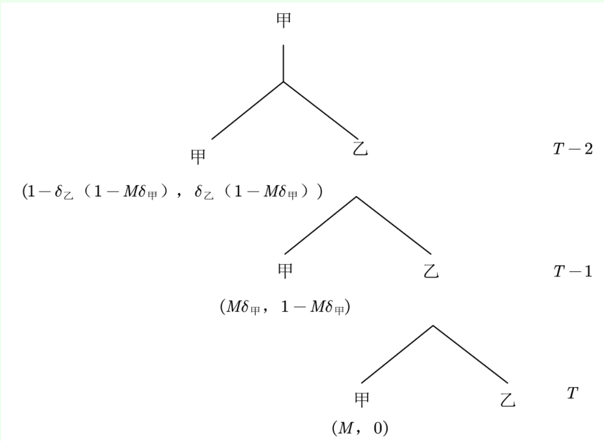


图 3.14: 甲乙分金无限期

无限期就如同 solow 收敛到稳态，此时这个循环收敛意味着

$$M = 1 - \delta(1 - M\delta)$$

此时可以解得

$$M = \frac{1-\delta}{1-\delta\delta}$$

推论 3.3 (一些洞见)

同样对比收益，此时在耐心程度相同的情况下

$\delta = \delta$ 时，$M = \frac{1}{1+\delta}, 1 - M = 1 - \frac{1}{1+\delta} = \frac{\delta}{1+\delta}$

此时循环中的先决策者有先发优势，同样耐心为后续决策者挽回了损失，结论和有限次情况类似。

因为此时两个玩家耐心程度相同。

在耐心程度趋于 1 的情况下，双方的博弈收益也会趋于一致。

♡

3.2.6 重复博弈

定义 3.12 (重复博弈)

每次博弈独立，且博每次博弈的顺序和结果无关，最终收益为所有单次博弈的结果加总

引理 3.1 (重复博弈)

有限次重复博弈的情况下，如果单次博弈有唯一的纳什均衡，那么重复 T 次，结果也会一致。

例如连锁店悖论：

表 3.13: 连锁店悖论

进入 \当前	许可	斗争
进入	$(40, 50)$	$(-10, 0)$
不进入	$(0, 300)$	$(0, 300)$

此时纳什均衡为进入和许可、斗争和不进入。但是后者只是弱占优策略。因此总体上进入和许可为纳什均衡。因此无论要进入市场的店数量有多少，当前门店几乎都不会选择斗争。也就是重复博弈结果一致的例子。

注[补充一些相关概念] 关于市场进入与垄断的判断：

同样是低价市场，不同学派也有着不同的看法。

掠夺性定价 (哈佛学派)：一家企业在短期内以低于成本或明显不可持续的价格销售产品 $p < mc$，目的在于排挤竞争对手、迫使其退出市场或不进入市场，并在竞争减少后通过提高价格回收早期损失的行为。

可竞争市场 (芝加哥学派)：可竞争市场是指一种市场结构，在其中潜在进入者能够无成本或低成本地进入并退出市场，从而使得在位企业即便拥有市场势力，也无法长期定价高于竞争水平。

关键问题是，当囚徒困境无穷次上演时，如何使得合作变为可能？

命题 3.3 (无名氏定理)

重点 在一个无限期动态博弈中，设参与者的效用为准线性，贴现因子为 $\delta \in (0, 1)$。若博弈允许可执行的转移支付，且不存在承诺或信息摩擦，则任何满足个人理性约束的可行收益向量

$$v \in F, \quad v_i \geq \underline{v}_i \ \forall i$$

都可以通过某个子博弈精炼纳什均衡（SPNE）实现，且均衡结果仅取决于可行集合 F 与各参与者的外部机会 $\underline{v}_i$，而与博弈的具体动态结构无关。

注[无名氏定理] 核心含义就是通过长期（足够的耐心）动态博弈和惩罚的实施，我们可以诱导出非纳什均衡解的情况[4]。这样也可以解释为什么现实的囚徒困境存在保持合作的情况。

例如甲乙开展无穷次的囚徒困境博弈，要达成合作，实施的惩罚就是坚持冷酷策略——一旦我观察到对方选择坦白，那么我也永远选择坦白。

此时也加入贴现 d 。那么合作的条件就是

$$0 + d(-8) + \cdot + d^3(-8) < -1 + d(-1) + \cdot + d^3(-1)$$

[4]假设条件越少的模型预测越强，所以占优均衡是预测最佳的模型，类似的模型思考，如果可以通过惩罚推导出所有可能都结果，那么预测的准确性也是存疑的

表 **3.14:** 囚徒困境

玩家 2 \玩家 1	坦白	抵赖
坦白	$(-8,-8)$	$(-1,-8)$
抵赖	$(-8,-1)$	$(-1,-1)$

不等式左侧是背叛一次，然后永远选择惩罚，对方也永远坦白的情况。右侧是保持合作的情况。可以解出保持合作的条件为 $d > \frac{1}{8}$。

练习 3.14 双寡头市场是否选择串谋 问题 1：伯川德模型

考虑双寡头市场是否达成合作，此时合作条件是怎样的？

解 [双寡头市场是否选择串谋] 在价格竞争情况下，

当企业合谋时，瓜分垄断利润。当一个企业背叛时，当期他能拿到全部利润[5]，但之后作为惩罚无法拿到利润，因此变为 0。

$$\pi + 0 + \cdots + 0 < \frac{\pi}{2} + d\frac{\pi}{2} + \cdots + d^n\frac{\pi}{2}$$

可以解得 $d > \frac{1}{2}$

推论 3.4 (实现无名氏定理的关键)

关键要素

- 长期博弈
- 偏离的利润，也就是例子中背叛当期利润与合作得到的利润
- 惩罚手段，当背叛后的惩罚
- 贴现 d

练习 3.15 是否选择串谋 问题 2：伯川德模型

将市场推广到 n 个厂商，继续推导合作条件

解 [是否选择串谋] 将市场推广到 n 个厂商，继续推导合作条件，

$$\pi + 0 + \cdots + 0 \leqslant \frac{\pi}{n} + d\frac{\pi}{n} + \cdots + d^n\frac{\pi}{n}$$

可以解得 $d \geqslant 1 - \frac{1}{n}$

当双寡头市场时，就回到了 d=0.5 的情况。

推论 3.5 (实现无名氏定理的关键)

推广到 n 个厂商后，可以发现 n 越大，d 要求就越高。也就越不同意构成串谋，也就越趋于完全竞争。

练习 3.16 是否选择串谋 问题 3：伯川德模型

需求在某一期短暂上升，然后回归原始状态，此时合作条件是怎样的。

解 [是否选择串谋] 此时假设当期需求上涨幅度为 a:

$$a\pi + 0 + \cdots + 0 \leqslant \frac{\pi}{n} + d\frac{\pi}{n} + \cdots + d^n\frac{\pi}{n}$$

可以解得 $d \geqslant 1 - \frac{1}{an}$

[5]价格竞争低价者得天下

推论 3.6 (短期的需求冲击)

例如双十一、疫情、猪瘟

- d>1 时，条件变得更严格（当期背叛收益更多更容易背叛，也就不容易合作和串谋）
- d<1 时，条件变得更宽松（危难时期抱团取暖）

从微观推广到宏观：

实际上这个解释可以套用到经济周期上去，经济周期就是增长和衰退的循环，那么或许串谋也存在逆周期的情况。问题 3 就是 1991 年 RJE 论文《The Impact of Cyclical Demand Movements on Collusive Behavior》的简化情况。

练习 3.17 是否选择串谋 问题 4：伯川德模型

需求持续上升，此时合作条件是怎样的。

解 [是否选择串谋] 此时假设当期需求上涨幅度为 a, 并且持续叠加表示持续性

$$\pi + 0 + \cdots + 0 \leqslant a\frac{\pi}{n} + da^2\frac{\pi}{n} + \cdots + d^n a^n \frac{\pi}{n}$$

可以解得 $d \geqslant \frac{1}{2a}$

推论 3.7 (持续的需求冲击)

和短期的需求冲击不同

当 a>1 时，持续的繁荣程度越高，也就是 a 越大，合作的要求越低，也就是越容易合作（串谋）

问题 4 就是 1986 年 AER 论文《A Supergame-Theoretic Model of Price Wars during Booms》的简化情况。

3.2.6.1 补充议题

注[一些前沿研究补充] 除了主动合谋，还有算法合谋（用同一套算法）、交叉持股合谋（一阶条件会考虑对手的利润）、信息透明度合谋（能看到对手的价格）

例如**多市场接触理论**（muti-market-contact, 简称 mmc）

存在市场 1 有厂商 A、B 和市场 2 有厂商 A、B、C。

通过问题3.15可以知道，厂商数量越多，合谋难度越大，因此市场 2 更不容易串谋[6]。

但是多市场带来的结果是，由于公司 AB 同时在市场 1 和市场 2，他们通过让利的形式诱惑 C 加入串谋。

假设他们让利 $S\pi$, 此时实现串谋的条件为

$$\pi \leqslant S\pi + dS\pi + \cdots + d^n S\pi$$

也就是 $\pi \leqslant S\pi\frac{1-d^n}{1-d} \longrightarrow S\pi\frac{1}{1-d}$

条件就是 $S \geqslant 1 - d$

也就是此时 AB 瓜分 $d\pi$

此时可以进一步分析 AB 串谋的条件

$$2\pi \leq \left(\frac{\pi}{2} + \frac{d\pi}{2}\right) + d\left(\frac{\pi}{2} + \frac{d\pi}{2}\right) + \cdots + d^n\left(\frac{\pi}{2} + \frac{d\pi}{2}\right)$$

解得 $d > \frac{3}{5}$

[6] 市场 1 条件是 $d \geqslant \frac{1}{2}$, 市场 2 条件是 $d \geqslant \frac{2}{3}$

3.2.7 质量博弈

表 3.15: 质量博弈

买家 \卖家	高质量	低质量
买	$(1,1)$	$(-1,2)$
卖	$(0,0)$	$(0,0)$

此时纳什均衡是低质量和不买。重复博弈成立永远是这个结果。

因此想要实现合作就引入了声誉研究，例如店家承诺连锁店表明自己的决心。

第一部分

结尾