复变函数

目录

- 级数
- 留数

级数

定理/定义/性质

1. 复级数收敛 == 实虚部级数收敛
2. 复级数收敛 => 一般项趋于 0
3. 复级数收敛 == 部分和收敛
4. 复级数绝对收敛 => 复级数收敛

> 用于将级数收敛转化为正项级数的收敛性。

5. Abel 定理：复函数级数在 $z = z_0$ 收敛 => 在 $|z| < |z_0|$ 绝对收敛；反之在 $|z| > |z_0|$ 发散。

> 表现为在以原点（要求幂级数替换成 $\Sigma a_i * z^i$ 的形式）为圆心的圆盘（和圆盘外）上根据边界的收敛性判断区域的收敛性。
>
> 通常用于求出幂级数的收敛范围。
>
> 注意，复函数级数通常表现为在一个收敛圆内绝对收敛（可以只有一个圆心或者是整个复平面），在圆外发散，但是在圆周上的收敛性可能是复杂的。

6. 收敛半径的比值表达和根值表达：
   1. 若 $lim_{n\to\infty}|\frac{C_{n+1}}{C_n}| = \lambda$，$R = \frac{1}{\lambda}$。
   2. 若 $lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_n|} = \lambda$，$R = \frac{1}{\lambda}$。
7. 幂级数运算：对于 $|z| < min(r_1, r_2)$，$f(z) \pm g(z) = \Sigma(a_n \pm b_n)z^n$，$f(z) * g(z) = \Sigma a_n z^n * \Sigma b_n z^n$ 。

> 对于圆心相同，在收敛半径更小的那个圆内，两个幂级数可以进行运算。注意定理 7 中圆心为原点。
>
> 运算结果的收敛半径为 $min(r_1, r_2)$。

8. 幂级数的代换运算：对于收敛半径为 r 的幂级数 $f(z)$，若在 $|z| < R$ 内，$g(z)$ 解析且 $|g(z)| < r$，则幂级数 $f(g(z))$ 的收敛半径为 R。

> 常用于幂级数展开。

9. 幂级数的两个重要性质：
   1. 幂级数的和函数在收敛圆内部解析。
   2. 幂级数的和函数在收敛圆内部可以逐项求导和逐项积分。

10. Taylor 定理：当复函数在圆内解析，它可以展开为幂级数。幂级数的形式满足 Taylor 展开：$f(z) = \Sigma Cn(z - z_0)^n$，其中 $C_n = \frac{f^{(n)}z_0}{n!}$。

> Taylor 展开的收敛半径为展开中心 z_0 到各奇点距离的最小值。
>
> 复函数幂级数展开的形式是唯一的，即 Taylor 展开。

11. 用级数刻画复函数的性质：复函数在一点解析 == 复函数在一点可以幂级数展开。
12. Laurent 级数：Taylor 展开的**圆环**形式。若复函数在圆环内解析，则可以如下展开：$f(z) = \Sigma_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z - z_0)^n$，其中 $C_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$，$c$ 为圆环内绕 z_0 的闭曲线。

> 注意高阶导公式使得 Laurent 级数和 Taylor 级数的常数项相互对应，可以认为 Laurent 级数是 Taylor 级数更一般的形式。
>
> 和 Taylor 相似，圆环上的 Laurent 展开也是唯一的。
>
> 一般来说，很少直接做 Laurent 展开，而是转化为圆盘内解析部分的幂级数和圆周外解析部分的负次幂级数，从而转化为 Taylor 展开问题。

解题

讨论敛散性

1. 讨论实虚部一般项是否趋于 0。
2. 讨论实虚部级数是否收敛。

讨论函数级数敛散性

1. 尝试取模后讨论正项级数收敛性

讨论幂级数敛散性

1. 用比值法或者根值法求收敛半径，然后讨论圆周上的敛散性。

讨论幂级数展开的收敛半径

1. 找出函数奇点，求各奇点到展开中心距离，这些距离的最小值即为收敛半径。

讨论函数的 Taylor 展开

1. 确定展开中心和展开半径。
2. 检查奇点。
3. 尝试直接 Taylor 展开。
4. （Main）利用已知的展开式，尝试间接 Taylor 展开。例如 e^z，$\sin z$，$\cos z$，$\frac{1}{1 \pm z}$。

> 几何级数：
>
> $\frac{1}{1-x} = \Sigma x^n, \forall x : |x| < 1$
>
> 指数和自然对数：
>
> $e^x = \Sigma \frac{x^n}{n!}, \forall x$
>
> $\ln(1 + x) = \Sigma \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \forall x : -1 < x \leq 1$

> 三角函数：
>
> $\sin x = \Sigma \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$
>
> $\cos x = \Sigma \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$
>
> 注意三角函数可以和指数形式互化来简化运算，一般用于三角函数和指数函数同时存在时。

5. 当展开系数越求越复杂时，若能写出各阶导数的微分方程，则可以直接带入参数化简运算。

> 例如 $e^{\frac{1}{1-z}}$ 展开为幂级数，第一步求导可以得到 $(1-z)^2 f^{(1)}(z) - f(z) = 0$ ，反复对两端求导并带入参数，可得到 所有 $f^{(n)}(z_0)$ 。

6. 当直接带入已知展开式，表达式仍十分复杂（例如存在已知展开式相乘），可以利用逐项积分和逐项求导，先积分/微分为一个简单形式，利用前面几步来完成展开，最后还原原函数展开式。

> 例如 $f(z) = (\sin z)^2$ ，直接利用第 4 步展开会得到展开式平方的形式，更简单的方法是求导得到 $f^{(1)}(z) = \sin 2z$ ，利用第 4 步展开后，利用解析函数积分路径无关的性质，由 $f(z) = \int_0^z f^{(1)}(z) dx$ 还原展开式。
>
> 类似的， $f(z) = \frac{1}{(1-z)^2} = (\frac{1}{1-z})^{(1)}$ ，通过先积分再展开最后求导得到展开式。

7. 类似于第 6 步，有些式子要先经过改写才能应用到第 4 步。

> 例如 $f(z) = e^z$ 在 $z_0 = 1$ 展开，观察到幂次项含有 $(z-1)^n$ ，可先改写成 $f(z) = e * e^{z-1}$ ，再套用第 4 步展开。
>
> 同样的， $f(z) = \sin z$ 在 $z = \pi$ 展开，将其改写为 $f(z) = -\sin(z-\pi)$ 。

讨论函数的 Laurent 展开

1. 确定展开中心，根据奇点划分圆环域。
2. 应用 Taylor 展开的策略。

> 注意，与 Taylor 展开不同的是，由于圆环域的划分，Laurent 展开在改写式子时需要更多地考虑满足简单展开式的变量限制（例如几何级数的 $|x| < 1$ ），同样的目标形式可能在不同圆环域内使用不同的改写方式。

留数

定理/定义/性质

1. 孤立奇点：在某一邻域解析的奇点。

> 在孤立奇点的邻域内，可以 Laurent 展开。
>
> 这种情形下的 Laurent 展开，非负次幂级数部分实际上表示该邻域内的解析函数，复函数在孤立奇点的性质完全体现在负次幂级数部分，故称前者为解析部分，后者为主要部分。
>
> 孤立奇点划分的意义可类比间断点。

2. 可去奇点：主要部分为 0 的孤立奇点。

> 可以得出 $\lim_{z \to z_0} f(z) = C_0$ ，因此，为该点补充定义后，就可以当作解析点看待。

> 同样的，可以通过在一点处求极限来判断孤立奇点是不是可去奇点，二者是等价的。

3. 极点：主要部分含有有限个负幂项的孤立奇点。极点的阶数为负幂项的最高次数。

> 1 阶极点也叫做简单极点。
>
> m 阶极点处的 Laurent 展开可以写成 $f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}g(z)$ 的形式，其中 $g(z)=C_{-m}+C_{-m+1}(z-z_0)+\ldots$ 在展开域内解析。反之，能写成上述形式的函数在 z_0 处有 m 阶奇点。
>
> **非常重要：** $g(z_0)=C_{-m}\neq 0$ 。
>
> 显然， $\lim_{z\to z_0}f(z)=\infty$ ， $\lim_{z\to z_0}|f(z)|=\infty$ 。
>
> 这里实际上给出了判断极点的三种方法：Laurent 展开、改写形式和求极限。

4. 本性奇点：主要部分含有无穷多个负幂项的孤立奇点。

> 本性奇点处的极限不存在。

5. 零点：若 $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$ ， $\varphi(z)$ 在 z_0 处解析且非零，则称 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级零点。

> 定理 1：若 z_0 是 $f(z)$ 的 m 级零点， $m>1$ ，则 z_0 是 $f^{(1)}(z)$ 的 $m-1$ 级零点。
>
> 定理 2： z_0 是 $f(z)$ 的 m 级零点 == $f^{(n)}(z_0)=0,(n=0,1,\ldots,m-1),f^{(m)}(z_0)\neq 0$ 。
>
> > 这个定理主要用来判断零点的阶数。
>
> 定理 3（零点和极点的关系）：如果 z_0 是 $f(z)$ 的 m 级极点，则 z_0 是 $\frac{1}{f(z)}$ 的 m 级零点，反之亦然。
>
> > 这个定理给出了将极点级别转换为零点级别求解的方法。

6. 当复函数在无穷远点的邻域 $R<|z|<\infty$ 内解析，称无穷远点为复函数的孤立奇点。

> 研究无穷远点时，通常令 $z=\frac{1}{w}$ ，将其化为有限点 0。此时 $f(z)=\varphi(w),0<|w|<\frac{1}{R}$ 。
>
> 比较两函数在对应邻域的展开式可以得到：
>
> > 1. 不含正幂项 == 可去奇点 == 极限存在。
> > 2. 有限正幂项 == 极点 == 极限无穷。
> > 3. 无限正幂项 == 本性奇点 == 极限不存在。

7. 留数： $Res[f(z),z_0]=C_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_c f(z)dz$ 。

> 改写成 $\oint_c f(z)dz=2\pi iC_{-1}$ 可以由留数快速求绕奇点的简单闭曲线积分。
>
> 可去奇点 => 留数为 0。
>
> 定理 1（**留数定理**）：解析区域内的闭曲线包含若干奇点， $\oint_c f(z)dz=2\pi i\Sigma Res[f(z),z_k]$ 。
>
> > 这个定理用于将求函数积分转化为求各奇点留数之和。
>
> 知道孤立奇点的类型有助于求留数。对于可去奇点，留数为 0；本性奇点只能展开求留数；极点可以求导数和求极限来得到留数。

> 在讨论无穷远点的留数的积分形式时，很自然地可以把 c 写成 c^- ，因为无穷远点的正向表现为顺时针方向。于是有 $Res[f(z), z_0] = -C_{-1}$ 。
>
> 注意，对于无穷远点，即使是可去奇点，留数也不一定为 0。
>
> 由无穷远点的留数形式可知，若复函数在扩充复平面上有有限个奇点，则它们的留数之和为 0。
>
> > 这个定理用于将求无穷远点留数转化为求有限点处的留数之和。

解题

讨论孤立奇点类型

1. Laurent 展开，看负次幂级数是否为 0，若是，则为可去奇点。
2. 改写成 Laurent 展开形式，根据负幂项最高次数判断是否为极点及其阶数。
3. 有时需要以表达式的一部分结合经典 Taylor 展开来改写形式。
4. 通常而言，根据极限判断奇点类型会快于根据展开式判断奇点类型。

> 易错点：展开中心错误；没有在邻域展开；展开式形式不合法。

5. 在讨论极点时，应用定理 5.2 和定理 5.3 可能可以转换为形式更好的式子并且快速求解。

> 例如 $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ ，显然转换成求 $\frac{1}{f(z)} = \sin z$ 的零点级别更加快捷。

6. 讨论无穷远点时，参考定理 6。

讨论留数

1. 直接 Laurent 展开，求 C_{-1} 。
2. 未给定奇点的情况下，应先确定奇点和奇点的类型。

> 1. 若为简单极点， $Res[f(z), z_0] = \lim_{z \to z_0}(z - z_0)f(z)$ 。
>
> > 此法则用于将求 1 阶极点留数转化为求极限。
>
> 2. 设 $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ ， $P(z)$ 和 $Q(z)$ 都在 z_0 解析，若 $P(z_0) \neq 0$ ， z_0 为 $Q(z)$ 的 1 阶零点，则 z_0 为 $f(z)$ 的 1 阶极点，且 $Res[f(z), z_0] = \frac{P(z_0)}{Q^{(1)}(z_0)}$ 。
>
> > 此法则用于将求 1 阶极点留数转化为求导，并且指出可以将极点判断转化为零点判断。
> >
> > 比较法则 1 和法则 2，可以看出两个法则都可以用来化简不定型的求解。法则 1 提供了一个 $(z - z_0)$ 因子，法则 2 提供了一次求导。使用哪种法则视表达式的形式而定。
>
> 3. 法则 1 扩展到 m 阶： $Res[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z - z_0)^m f(z)]$ 。
>
> > 此法则用于处理高阶极点的情形。
> >
> > 注意当式子的形式足够好、极点的阶数比较高时，直接 Laurent 展开复杂度可能远低于法则 3，应具体情况具体分析。

3. 讨论无穷远点的留数时，通常转化为求有限点处的留数之和。