Applied Multivariate Statistical Analysis: A Note

2017 年 12 月 28 日

1 Linear Algebra

Theorem 给定正定矩阵 $B_{p\times p}$ 以及标量 $b>0$，我们有

$$\frac{1}{|\Sigma|^b}e^{-\mathrm{tr}(\Sigma^{-1}B)/2} \le \frac{1}{|B|^b}(2b)^{pb}e^{-pb}$$

等号成立当且仅当 $\Sigma = \frac{1}{2b}B$.

Theorem 设 A, B 均为 J 阶方阵，记其特征值从大到小排列为 $\{\lambda_j(A)\}_{j=1}^J, \{\lambda_j(B)\}_{j=1}^J$，则有

$$\sum_{j=1}^{J}[\lambda_j(A)-\lambda_j(B)]^2 \le \mathrm{tr}[(A-B)(A-B)^T]$$

Theorem 设 A 为 J 阶方阵，记其特征值从大到小排列为 $\{\lambda_j(A)\}_{j=1}^J$，U 为 $J\times K$ 阶列正交矩阵，则有

$$\lambda_j(U^TAU) \le \lambda_j(A)$$

等号成立当且仅当 U 的列向量是 A 的前 K 个特征值.

2 Multivariate Normal Distribution

Theorem 设 $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ 服从多元正态分布 $N_P(\mu, \Sigma)$，其中 $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$. 则在给定 $X_2 = x_2$ 的条件下，X_1 服从均值为 $\mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2-\mu_2)$，协方差为 $\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$ 的多元正态分布.

Theorem 设 $X \sim N_{n\times p}(M, I_n \otimes \Sigma), A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{p\times q}$，则 Y 是正态矩阵当且仅当下列条件同时成立:

(i) 存在常数 α 使得 $A1_n = \alpha 1_n$ 或者 $B^T\mu = 0$;

(ii) 存在常数 β 使得 $AA^T = \beta I_n$ 或者 $B^T\Sigma B = 0$.

如果上述条件同时成立，则 $Y \sim N_{m\times q}(\alpha B^T\mu, \beta B^T\Sigma B)$.

Theorem 设 $X \sim N_{n\times p}(M, I_n \otimes \Sigma)$，$C_1, \cdots, C_k$ 是对称矩阵. 如果 $C_r C_s = 0$ 对于一切 $r \neq x$ 均成立，则 $X^T C_1 X, \cdots, X^T C_k X$ 相互独立.

Theorem 设 $X \sim N_{n\times p}(M, I_n \otimes \Sigma)$，$A, B$ 均为 n 阶对称幂等矩阵，则 $X^T AX$ 与 $X^T BX$ 相互独立 $\Leftrightarrow AB = O$.

3 Cochran's Theorem

Theorem 设 x 是一个 n 维向量,且存在一列半正定矩阵 $A_j, j = 1, 2, \cdots, k$ 使得 $x^T x = \sum_{j=1}^k x^T A_j x$. 记 $Q_j = x^T A_j x, r_j = \mathrm{rank}(A_j), S_j = \sum_{i=1}^j r_i, j = 1, 2, \cdots, k$，如果 $\sum_{j=1}^k r_j = n$，则存在正交矩阵 C 和向量 y 使得 $x = Cy$，且有 $Q_j = \sum_{i=S_{j-1}+1}^{S_j} y_i^2$.

Proof 以 $n = 2$ 为例，设 $x^T x = x^T A_1 x + x^T A_2 x$，并设 $A_1 = C\Lambda_1 C^T$，其中 C 是正交矩阵，Λ_1 是对角矩阵. 不妨设 Λ_1 的前 r_1 个对角元不为 0，记 $x = Cy$，则有

$$y^T C^T A_1 Cy + y^T C^T A_2 Cy = y^T \Lambda_1 y + y^T C^T A_2 Cy = \sum_{j=1}^{r_1} \lambda_j y_j^2 + y^T C^T A_2 Cy$$

从而

$$y^T C^T A_2 Cy = x^T x - \sum_{j=1}^{r_1} \lambda_j y_j^2 = y^T y - \sum_{j=1}^{r_1} \lambda_j y_j^2 = \sum_{j=1}^{r_1} (1 - \lambda_j) y_j^2 + \sum_{j=r_1+1}^{n} y_j^2$$

等号左边是秩为 r_2 的二次型，为了使等号两边的秩相等，必须有 $1 - \lambda_j = 0, j = 1, 2, \cdots, r_1$，从而进一步得到 $C^T A_2 C = I$.

Theorem 设 $X \sim N_n(0, \sigma^2 I)$,且存在一列半正定矩阵 $A_j, j = 1, 2, \cdots, k$ 使得 $X^T X = \sum_{j=1}^k X^T A_j X$. 记 $Q_j = X^T A_j X, r_j = \mathrm{rank}(A_j), S_j = \sum_{i=1}^j r_i, j = 1, 2, \cdots, k$，如果 $\sum_{j=1}^k r_j = n$，则

i. $Q_1, Q_2, \cdots, Q_k$ 相互独立，

ii. $Q_j \sim \sigma^2 \chi^2_{r_j}, j = 1, 2, \cdots, k$，

4 Distributions

4.1 Wishart Distribution

Definition 设 $X_{(i)} \sim N_p(0, \Sigma), i = 1, 2, \cdots, n$ 相互独立，则称随机矩阵

$$W = \sum_{i=1}^n X_{(i)} X_{(i)}^T$$

服从 Wishart 分布，记为 $W \sim W_p(n, \Sigma)$.

Theorem 设 $X_{(i)} \sim N_p(0, \Sigma), i = 1, 2, \cdots, n$ 相互独立，则

$$A = \sum_{i=1}^n (X_{(i)} - \bar{X})(X_{(i)} - \bar{X})^T \sim W_p(n-1, p)$$

Theorem 设 $W_i \sim W_p(n_i, \Sigma), i = 1, 2, \cdots, k$ 相互独立，则

$$\sum_{i=1}^{k} W_i \sim W_p(\sum_{i=1}^{k} n_i, \Sigma)$$

Theorem 设 $W \sim W_p(n, \Sigma)$，C 是 $m \times p$ 矩阵，则

$$CWC^T \sim W_m(n, C\Sigma C^T)$$

4.2 Hotelling's T^2 Distribution

Definition 设 $X \sim N_p(0, \Sigma), W \sim W_p(n, \Sigma)$，且 X 与 W 相互独立，则称统计量

$$T^2 = X^T(\frac{W}{n})^{-1}X$$

服从 n 个自由度的 T^2 分布，记为 $T^2 \sim T^2(p, n)$.

Theorem 设 $X_{(i)} \sim N_p(\mu, \Sigma), i = 1, 2, \cdots, n$ 相互独立,记 $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_{(i)}}{n}, S = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_{(i)}-\bar{X})(X_{(i)}-\bar{X})^T}{n-1}$，则

$$T^2 = n(\bar{X} - \mu)S^{-1}(\bar{X} - \mu)^T \sim T^2(p, n-1)$$

Theorem 设 $T^2 \sim T^2(p.n)$，则

$$\frac{n-p+1}{np}T^2 \sim F_{p,n-p+1}$$