

主动静磁屏蔽装置的设计

许思学，王鉴远，袁朴，吴一凡，乔子舜，张茂，戴碧云，石振

在卫星设计验证过程中，为了模拟空间中的弱磁场环境，需要在地面建立类似的实验环境以检验个部件在该环境下的性能。为此，需要建造磁屏蔽装置有效减弱背景地球磁场（~50000nT）和其他环境磁场的影响。除此之外，磁屏蔽在医学、物理和工业上也有广泛的应用。

根据应用要求的不同，需要隔离的磁场频段也不同，磁屏蔽可分为静磁、低频、高频三类，需要分别采用不同的材料和手段进行处理。静磁屏蔽常用高磁导的铁磁材料实现。因为铁磁材料的磁导率比空气的磁导率要大几千倍，所以空腔的磁阻比铁磁材料的磁阻大得多，外磁场的磁感应线的绝大部分将沿着铁磁材料壁内通过，而进入空腔的磁通量极少。这样，被铁磁材料屏蔽的空腔就基本上没有外磁场，从而达到静磁屏蔽的目的。材料的磁导率愈高，筒壁愈厚，屏蔽效果就愈显著。因常用磁导率高的铁磁材料如软铁、硅钢、坡莫合金做屏蔽层。

然而，由于这一类屏蔽方式需要实验区域完全包裹，因而需要大量材料，造价高昂，并且不能透光，也不方便对内部装置进行调节，而由人工控制电流产生反向磁场的主动式磁屏蔽装置可以解决高磁导屏蔽的这些缺陷。

本方案设计了一种主动静磁屏蔽装置。

问题简化和建模

主动磁屏蔽要求设计一组线圈，并以合适的方法布置在空间中，通以一定电流来产生足够强的反向磁场以抵消外部磁场。然而，解决这一问题的有效的一般方法还没有被找到。因此，我们根据实际要求、工程条件局限和空间上的对称性，引入一些约束以简化该问题。

条件一：所有通电导线位于立方体的各个面上，设计磁屏蔽的空间是该立方体中心的一部分。

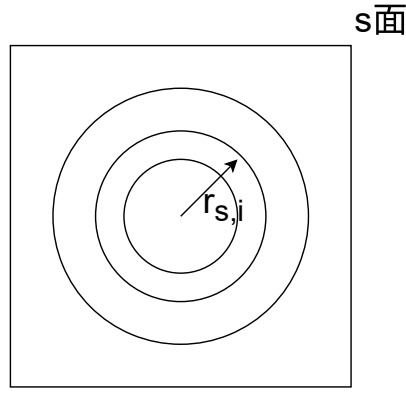
条件二：产生磁场的线圈都是圆形的，每个面上都有数量相等的线圈，并且圆心位于立方体各面面心，必要的供电电路或外裹屏蔽层，或用双绞线方式抵消磁场。

条件三：需要抵消的外部磁场是匀强的 $\vec{B} = \text{const}$ ，不随空间时间变化。

我们可以把外部磁场分解到x,y,z三个轴上，分别由前后、左右、上下的线圈产生的磁场抵消。因而，我们只需要考虑如何设计上下两个面上的线圈和电流来产生一个平行z轴的磁场 $\vec{B} = -B_{z0}\hat{z}$ 即可，剩下两个方向的磁场可由完全相同的线圈布置和按比例扩大/减少的电流补偿。

我们假设立方体边长为a，以体心为原点，建立坐标系，每个面有 n 个线圈，线圈圆心为面心，故第 i 个线圈 $l_{s,i}$ 可由其半径 $r_{s,i}$ ($s = \text{上, 下}, i = 1, 2, \dots, n$) 唯一确定，并假设电流为 $I_{s,i}$ ，以产生磁场方向向上 (\hat{z}) 为电流的正方向。

立方体的一个面(s=上,下,左,右,前,后)



线圈构成同心圆，故磁场分布是轴对称的，我们在纵剖面上均匀选取网格点 A_m ，在给定线圈空间位置的条件下，调整电流分配，使在这些网格点上磁场越接近匀强磁场 $\vec{B} = -B_{z0}\hat{z}$ 越好。我们选择平方误差为优化目标，则优化问题可以描述为：

给定 $r_{s,i}, A_m$ 其中 $s = \text{上, 下}; i = 1, 2, \dots, n; A_m$ 在同一圆柱纵剖面上

$$\min_{I_{s,i}} \sum_m (\vec{B}(l_{s,i}, I_{s,i}, A_m) - B_{z0}\hat{z})^2$$

定义

$$p(s) = \begin{cases} 1, s = \text{上} \\ -1, s = \text{下} \end{cases}$$

则 s 面的线圈 $l_{s,i}$ ，半径为 $r_{s,i}$ ，圆心 $(0, 0, p(s) * a/2)$ ，通以电流 $I_{s,i}$ 在空间中 $A_m = (x_m, y_m, z_m)$ 产生的磁场强度为

$$\begin{aligned} \vec{B}(l_{s,i}, I_{s,i}, A_m) &= I_{s,i} \vec{B}(l_{s,i}, A_m) \\ &= I_{s,i} \frac{4\pi}{\mu_0} \oint_{l_{s,i}} \frac{d\vec{l} \times d\vec{r}}{r^3} \end{aligned}$$

其中 \vec{r} 是线元 $d\vec{l}$ 到点 A_m 的距离矢量

$$\begin{aligned} d\vec{l}(\theta) &= r_{s,i}(-\sin\theta, \cos\theta, 0)d\theta \\ \vec{r}(\theta) &= (x_m - r_{s,i}\cos\theta, y_m - r_{s,i}\sin\theta, z_m - p(s)a/2) \end{aligned}$$

所以

$$\vec{B}(l_{s,i}, A_m) = \frac{4\pi}{\mu_0} \int_0^{2\pi} \frac{d\vec{l}(\theta) \times d\vec{r}(\theta)}{r^3(\theta)}$$

计算时使用了 Gauss-Legendre 积分，取计算300个点就可以达到8000点梯形积分的精度

令

$$\begin{aligned} B_{j,s,i,m} &= \vec{B}(l_{s,i}, A_m) \cdot \hat{x}_j, \\ \text{其中 } j &= 1, 2, 3, \hat{x}_j = \hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \\ s &= \text{上}(1), \text{下}(2) \\ m &= 1, \dots, M \\ i &= 1, \dots, n \end{aligned}$$

$$C_{h,l} = \begin{pmatrix} B_{x,\uparrow,1,1} & \cdots & B_{x,\uparrow,n,1} & B_{x,\downarrow,1,1} & \cdots & B_{x,\downarrow,n,1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{x,\uparrow,1,M} & \cdots & B_{x,\uparrow,n,M} & B_{x,\downarrow,1,M} & \cdots & B_{x,\downarrow,n,M} \\ B_{y,\uparrow,1,1} & \cdots & B_{y,\uparrow,n,1} & B_{y,\downarrow,1,1} & \cdots & B_{y,\downarrow,n,1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{y,\uparrow,1,M} & \cdots & B_{y,\uparrow,n,M} & B_{y,\downarrow,1,M} & \cdots & B_{y,\downarrow,n,M} \\ B_{z,\uparrow,1,1} & \cdots & B_{z,\uparrow,n,1} & B_{z,\downarrow,1,1} & \cdots & B_{z,\downarrow,n,1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{z,\uparrow,1,M} & \cdots & B_{z,\uparrow,n,M} & B_{z,\downarrow,1,M} & \cdots & B_{z,\downarrow,n,M} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3m \times 2n}$$

则 $(\mathbb{R}^{3m \times 2n} \mathbb{R}^{2n \times 1} = \mathbb{R}^{3m \times 1}$, or $B_{j,s,i,m} I_{s,i} = B_{j,m}$)

$$\sum_m (\vec{B}(l_{s,i}, I_{s,i}, A_m) - B_{z0} \hat{z})^2 = \left(C_{h,l} \begin{pmatrix} I_{\uparrow,1} \\ I_{\uparrow,2} \\ \vdots \\ I_{\uparrow,n} \\ I_{\downarrow,1} \\ I_{\downarrow,2} \\ \vdots \\ I_{\downarrow,n} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B_{z0} \\ \vdots \\ B_{z0} \end{pmatrix} \right)^2 = (C_{h,l} I_{sn} - B_{jm}^0)^2$$

其中 $sn = 1, \dots, 2n$, $jm = 1, 3M$, 其最小化可以用最小二乘法解决,

$$I_{sn}^0 = (C^T C)^{-1} C^T B_{jm}^0$$

矩阵求逆计算复杂度较大, 通常转换为求解适定方程

$$(C^T C) I_{sn}^0 = C^T B_{jm}^0$$

解出 I_{sn}^0 即为原优化问题的解

现在, 我们调整线圈空间位置, 使最终误差的平方和最小。由于线圈位置由 $r_{s,i}$ 唯一确定, 完整的优化目标可以写成:

$$\begin{aligned} & \text{给定 } A_m \quad A_m \text{ 在同一圆柱纵剖面上} \\ & \min_{r_{s,i}} \min_{I_{s,i}} \sum_m (\vec{B}(l_{s,i}, I_{s,i}, A_m) - B_{z0} \hat{z})^2 \end{aligned}$$

这是一个非线性优化问题, 我们使用模拟退火算法来计算。

基于工程上的限制和对称性, 我们限定解空间 $\{r_{s,i}\}$ 满足:

1. $0 < r_{\uparrow,i} = r_{\downarrow,i} < a/2$
2. $r_{s,i} \neq r_{s,j}$, when $i \neq j$
3. $r_{s,i} < r_{s,j}$, when $i < j$
4. $r_{s,i} = k\Delta r$

条件3.是由于我们这 n 个线圈原本没有顺序, 比如三个线圈, 半径 (0.1m, 0.2m, 0.3m) 和半径 (0.3m, 0.2m, 0.1m) 实际上是同一种布置。条件4.是解空间的离散化, 这样可以方便的应用模拟退火算法, 并且避免线圈距离太近制作时上难以处理。

迭代过程是模拟退火算法的核心步骤，分为新解的产生和接受新解两部分：

1. 由一个产生函数从当前解产生一个位于解空间的新解；为便于后续的计算和接受，减少算法耗时，这里采用由当前解经过简单地变换即可产生新解的方法，随机选择一个 i ,生成随机整数 k_r ，调整 $r'_{s,i} = r_{s,i} \pm k_r \Delta r$
2. 计算与新解所对应的目标函数 T' 与当前解 T 的差 ΔT 。计算时，对 $B_{j,s,i,m}$ 只需重新计算第1步中改变的部分
3. 判断新解是否被接受，判断的依据是一个接受准则，最常用的接受准则是Metropolis准则：若 $\Delta T < 0$ 则接受 S' 作为新的当前解 S ，否则以概率 $\exp(-\Delta T/T^o)$ 接受 S' 作为新的当前解 S 。为了得到合适的概率，我们选用 $T_n^o = 0.5T_{n-1}^o + T$
4. 当新解被确定接受时，用新解代替当前解。此时，当前解实现了一次迭代。可在此基础上开始下一轮试验。而当新解被判定为舍弃时，则在原当前解的基础上继续下一轮试验。

考虑到供电和节能的因素，线圈中的电流不应太大，为此，我们在优化目标上添加一个电流因子项

$$\text{给定 } A_m \quad A_m \text{ 在同一圆柱纵剖面上}$$

$$\min_{r_{s,i}} \left(\min_{I_{s,i}} \sum_m (\vec{B}(l_{s,i}, I_{s,i}, A_m) - B_{z0} \hat{z})^2 + \alpha \sum_{s,i} |I_{s,i}^0| \right)$$

$I_{s,i}^0$ 是内部优化目标最小时电流的取值， α 是一个参数，用于平衡两部分的权重

设计结果

我们选取边长 1m 的立方体，在 $x = 0, y \in [-0.2, 0.2], z \in [-0.2, 0.2]$ 的区域内，以 0.02m 为间隔选取采样点 A_m ，总共 $21 \times 21 = 441$ 个点。

一个面上的三个线圈的半径为 [0.34, 0.41, 0.5]

在外磁场强度为 50,000 nT 的条件下，须分别通以电流 [-0.895289, 2.22619, -1.65161]A，这可由电阻分压电路实现

最终得到的磁场在Oyz平面内的纵剖面上的相对误差如图，可见误差场关于y,z轴对称，在 ± 0.1 的区域内，相对误差不超过0.002，在 ± 0.15 的区域内，相对误差不超过0.004

