

南华大学2018-2019第一学期《概率论与数理统计》

(考试时间: 90 分钟; 考试形式: 闭卷)

(注意: 请将答案填写在答题专用纸上, 并注明题号。答案填写在试卷和草稿纸上无效)

一、单项选择题(本大题共 20 小题, 每小题 2 分, 共 40 分)

1、A, B 为二事件, 则 $\overline{A \cup B} = (\quad)$

A、 AB B、 \overline{AB} C、 $A\overline{B}$ D、 $\overline{A} \cup \overline{B}$

2、设 A, B, C 表示三个事件, 则 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ 表示()

A、A, B, C 中有一个发生
B、A, B, C 中恰有两个发生
C、A, B, C 中不多于一个发生 D、A, B, C 都不发生

3、A, B 为两事件, 若 $P(A \cup B) = 0.8$, $P(A) = 0.2$, $P(\overline{B}) = 0.4$,

则()成立

A、 $P(A\overline{B}) = 0.32$ B、 $P(\overline{A}\overline{B}) = 0.2$
C、 $P(B - A) = 0.4$ D、 $P(\overline{B}A) = 0.48$

4、设 A, B 为任二事件, 则()

A、 $P(A - B) = P(A) - P(B)$ B、 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
C、 $P(AB) = P(A)P(B)$ D、 $P(A) = P(AB) + P(A\overline{B})$

5、设事件 A 与 B 相互独立, 则下列说法错误的是()

A、A 与 \overline{B} 独立 B、 \overline{A} 与 \overline{B} 独立
C、 $P(\overline{A}B) = P(\overline{A})P(B)$ D、A 与 B 一定互斥

6、设离散型随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2
P	0.3	0.5	0.2

其分布函数为 $F(x)$, 则 $F(3) = (\quad)$

A、0 B、0.3 C、0.8 D、1

7、设离散型随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} cx^4, & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 则常数 $c = (\quad)$

A、 $\frac{1}{5}$ B、 $\frac{1}{4}$ C、4 D、5

8、设 $X \sim N(0,1)$ ，密度函数 $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ ，则 $\varphi(x)$ 的最大值是()

- A、0 B、1 C、 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ D、 $-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

9、设随机变量 X 可取无穷多个值 $0, 1, 2, \dots$ ，其概率分布为 $p(k;3) = \frac{3^k}{k!} e^{-3}, k = 0, 1, 2, \dots$ ，则下式成立的是

()

- A、 $EX = DX = 3$ B、 $EX = DX = \frac{1}{3}$
C、 $EX = 3, DX = \frac{1}{3}$ D、 $EX = \frac{1}{3}, DX = 9$

10、设 X 服从二项分布 $B(n, p)$ ，则有()

- A、 $E(2X-1) = 2np$ B、 $D(2X+1) = 4np(1-p)+1$
C、 $E(2X+1) = 4np+1$ D、 $D(2X-1) = 4np(1-p)$

11、独立随机变量 X, Y ，若 $X \sim N(1, 4)$ ， $Y \sim N(3, 16)$ ，下式中不成立的是()

- A、 $E(X+Y) = 4$ B、 $E(XY) = 3$ C、 $D(X-Y) = 12$ D、 $E(Y+2) = 16$

12、设随机变量 X 的分布列为：

则常数 $c = ()$

X	1	2	3
p	1/2	c	1/4

- A、0 B、1 C、 $\frac{1}{4}$ D、 $-\frac{1}{4}$

13、设 $X \sim N(0,1)$ ，又常数 c 满足 $P\{X \geq c\} = P\{X < c\}$ ，则 c 等于()

- A、1 B、0 C、 $\frac{1}{2}$ D、-1

14、已知 $EX = -1$ ， $DX = 3$ ，则 $E[3(X^2 - 2)] = ()$

- A、9 B、6 C、30 D、36

15、当 X 服从()分布时， $EX = DX$ 。

- A、指数 B、泊松 C、正态 D、均匀

16、下列结论中，()不是随机变量 X 与 Y 不相关的充要条件。

- A、 $E(XY) = E(X)E(Y)$ B、 $D(X+Y) = DX + DY$
C、 $Cov(X, Y) = 0$ D、 X 与 Y 相互独立

17、设 $X \sim b(n, p)$ 且 $EX = 6$ ， $DX = 3.6$ ，则有()

A、 $n=10, p=0.6$ B、 $n=20, p=0.3$

C、 $n=15, p=0.4$ D、 $n=12, p=0.5$

18、设 $p(x, y), p_{\xi}(x), p_{\eta}(y)$ 分别是二维随机变量 (ξ, η) 的联合密度函数及边缘密度函数，则()是 ξ 与 η 独立的充要条件。

A、 $E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$ B、 $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$

C、 ξ 与 η 不相关 D、对 $\forall x, y$, 有 $p(x, y) = p_{\xi}(x)p_{\eta}(y)$

19、设是二维离散型随机变量，则 X 与 Y 独立的充要条件是()

A、 $E(XY) = EXEY$ B、 $D(X+Y) = DX + DY$ C、 X 与 Y 不相关

D、对 (X, Y) 的任何可能取值 (x_i, y_j) $P_{ij} = P_i \cdot P_j$

20、设 (X, Y) 的联合密度为 $p(x, y) = \begin{cases} 4xy, & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$,

若 $F(x, y)$ 为分布函数，则 $F(0.5, 2) = (\quad)$

A、0 B、 $\frac{1}{4}$ C、 $\frac{1}{2}$ D、1

二、计算题(本大题共 6 小题，每小题 7 分，共 42 分)

1、若事件 A 与 B 相互独立， $P(A) = 0.8$ $P(B) = 0.6$ 。求： $P(A+B)$ 和 $P\{\bar{A}|(A+B)\}$

2、设随机变量 $X \sim N(2, 4)$ ，且 $\Phi(1.65) = 0.95$ 。求 $P(X \geq 5.3)$

3、已知连续型随机变量 ξ 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x}{4}, & 0 < x \leq 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$ ，求 $E\xi$ 和 $D\xi$ 。

4、设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = A + B \arctan x \quad -\infty < x < +\infty$

求：（1）常数 A 和 B；
（2） X 落入 $(-1, 1)$ 的概率；
（3） X 的密度函数 $f(x)$

5、某射手有 3 发子弹，射一次命中的概率为 $\frac{2}{3}$ ，如果命中了就停止射击，
否则一直独立射到子弹用尽。
求：（1）耗用子弹数 X 的分布列；（2） EX ；（3） DX

6、设 (ξ, η) 的联合密度为 $p(x, y) = \begin{cases} 4xy, & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$,

求：(1) 边际密度函数 $p_\xi(x), p_\eta(y)$ ；(2) $E\xi, E\eta$ ；(3) ξ 与 η 是否独立

三、解答题(本大题共 2 小题，每小题 9 分，共 18 分)

1、设 X_1, X_2 是来自正态总体 $N(\mu, 1)$ 的样本，下列

三个估计量是不是参数 μ 的无偏估计量，若是无偏估计量，试判断哪一个较优？

$$\hat{\mu}_1 = \frac{2}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2, \quad \hat{\mu}_1 = \frac{1}{4}X_1 + \frac{3}{4}X_2, \quad \hat{\mu}_1 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2。$$

2、设 $\xi \sim f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & x > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (\theta > 0)$ x_1, x_2, \dots, x_n 。为 ξ 的一组观察值，求 θ 的极大似然估计。

概率论与数理统计试卷答案及评分标准

一、单项选择题(本大题共 20 小题，每小题 2 分，共 40 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	D	C	D	D	D	D	C	A	D
题号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
答案	C	C	B	B	B	D	C	D	D	B

二、计算题(本大题共 6 小题，每小题 7 分，共 42 分)

1、解：∵A 与 B 相互独立

$$\therefore P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$= P(A) + P(B) - P(A)P(B) \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$= 0.8 + 0.6 - 0.8 \times 0.6$$

$$= 0.92 \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\text{又 } P(\bar{A}|A+B) = \frac{P[\bar{A}(A+B)]}{P(A+B)} \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$= \frac{P(\bar{A}B)}{P(A+B)} = \frac{P(\bar{A})P(B)}{P(A+B)} \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= 0.13 \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$2、\text{解： } P(X \geq 5.3) = 1 - \Phi\left(\frac{5.3-2}{2}\right) \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$$

$$= 1 - \Phi(1.65) = 1 - 0.95 = 0.05 \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$3、\text{解：由已知有 } \xi \sim U(0,4) \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

$$\text{则： } E\xi = \frac{a+b}{2} = 2 \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$D\xi = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{4}{3} \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$4、\text{解：(1)由 } F(-\infty) = 0, \quad F(+\infty) = 1$$

$$\text{有：} \begin{cases} A - \frac{\pi}{2}B = 0 \\ A + \frac{\pi}{2}B = 1 \end{cases}$$

$$\text{解之有： } A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{\pi} \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

$$(2) P(-1 < X < 1) = F(1) - F(-1) = \frac{1}{2} \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$(3) f(x) = F'(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

5、解：(1)

.....

X	1	2	3
P	2/3	2/9	1/9

(3 分)

$$(2) EX = \sum_{i=1}^3 x_i p_i = 1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{2}{9} + 3 \times \frac{1}{9} = \frac{13}{9} \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$(3) \because EX^2 = \sum_{i=1}^3 x_i^2 p_i = 1^2 \times \frac{2}{3} + 2^2 \times \frac{2}{9} + 3^2 \times \frac{1}{9} = \frac{23}{9}$$

$$\therefore DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{23}{9} - \left(\frac{13}{9}\right)^2 = \frac{38}{81} \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

6、解：(1) $\because p_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy = \int_0^1 4xy dy = 2x$

$$\therefore p_{\xi}(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

同理： $p_{\eta}(x) = \begin{cases} 2y, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$

$$(2) E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xp_{\xi}(x) dx = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}$$

同理： $E\eta = \frac{2}{3} \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

$$(3) \because p(x, y) = p_{\xi}(x)p_{\eta}(y)$$

$$\therefore \xi \text{ 与 } \eta \text{ 独立} \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

三、应用题(本大题共 2 小题，每小题 9 分，共 18 分)

1、解： $\because E\hat{\mu}_1 = E\left(\frac{2}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2\right) = \mu$

同理： $E\hat{\mu}_2 = E\hat{\mu}_3 = \mu$

$$\therefore \hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3 \text{ 为参数 } \mu \text{ 的无偏估计量} \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

$$\text{又} \because D\hat{\mu}_1 = D\left(\frac{2}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2\right) = \frac{4}{9}DX_1 + \frac{1}{9}DX_2 = \frac{5}{9}\sigma^2$$

$$\text{同理： } D\hat{\mu}_2 = \frac{10}{16}\sigma^2, \quad D\hat{\mu}_3 = \frac{2}{4}\sigma^2$$

$$\text{且 } D\hat{\mu}_3 < D\hat{\mu}_1 < D\hat{\mu}_2$$

$\therefore \hat{\mu}_3$ 较优 (6 分)

2、解： x_1, x_2, \dots, x_n 的似然函数为：

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x_i}{\theta}} = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i} \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

$$\ln(L) = -n \ln \theta - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\frac{d \ln(L)}{d \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

解之有： $\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{X} \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$

一、(共 30 分,每题 5 分)

1、设事件 A 与 B 相互独立, $P(A) = 0.5, P(A \cup B) = 0.8$,
求 $P(A\bar{B})$.

解: 因为事件 A 与 B 相互独立, 所以

$$P(A\bar{B}) = P(A)P(\bar{B})$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) \quad \text{.....2 分}$$

$$\text{由 } P(A) = 0.5, P(A \cup B) = 0.8, \text{ 得 } P(B) = 0.6 \quad \text{.....2 分}$$

$$P(A\bar{B}) = P(A)P(\bar{B}) = 0.2 \quad \text{.....1 分}$$

2、三人独立地去破译一份密码, 他们译出的概率分别为 $\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$.

求能将此密码译出的概率.

$$\text{解: } P = 1 - (1 - \frac{1}{5})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4}) = \frac{3}{5} \quad \text{.....5 分}$$

3、设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1	2
p	0.125	0.25	0.25	0.375

求 $Y = X^2 + 1$ 的分布律, 并计算 $P(1 \leq X < 3)$.

解:

Y	1	2	5
p	0.25	0.375	0.375

.....3 分

4、设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且已知 $E[(X-1)(X-2)] = 1$ 求 λ 。

解： $E(X) = D(X) = \lambda$ ，2 分

$$\begin{aligned} E[(X-1)(X-2)] &= E(X^2 - 3X + 2) \\ &= D(X) + [E(X)]^2 - 3E(X) + 2 = 1 \end{aligned} \quad \text{.....2 分}$$

所以 $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ ，得 $\lambda = 1$ 。1 分

5、为检查某食用动物含某种重金属的水平，假设重金属的水平服从正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ， μ, σ 均未知，现抽取容量为 25 的一个样本，测得样本均值为 186，样本标准差为 10，求 μ 的置信度为 0.95 的置信区间。

解：总体均值 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为

$$\left(\bar{X} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} t_{0.025}(n-1) \right) \quad \text{.....2 分}$$

$$\text{即 } \left(186 \pm \frac{10}{5} \times 2.0639 \right) \quad \text{.....2 分}$$

所求置信区间为 (181.8722, 190.1278)1 分

6、某车间用一台包装机包装葡萄糖.包得的袋装糖重量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，当机器正常时，其均值 $\mu = 0.5$ 公斤，标准差 $\sigma = 0.015$ 公斤.某日开工后为检验包装机是否正常，随机地抽取它所包装的糖 9 袋，称得平均重量为 0.511 公斤，问这天包装机工作是否正常？（取显著水平 $\alpha = 0.05$ ）

解：由题意设 $H_0: \mu = 0.5; H_1: \mu \neq 0.5$ 1 分

$$\text{拒绝域为 } \left| \frac{\bar{X} - 0.5}{\sigma/\sqrt{n}} \right| \geq z_{0.025} \quad \text{.....1 分}$$

$$\text{由于 } \left| \frac{\bar{X} - 0.5}{\sigma/\sqrt{n}} \right| = \left| \frac{0.511 - 0.5}{0.015/\sqrt{9}} \right| = 2.2, \quad z_{0.025} = 1.96, \quad \text{.....2 分}$$

即 $2.2 > 1.96$, 拒绝原假设，认为这天包装机工作不正常。1 分

二、(共 18 分,每题 6 分)

1、设随机变量 X 和 Y 相互独立, 概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 3e^{-3y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

求: (1) $E(2X - 3Y)$; (2) $D(2X - 3Y)$; (3) ρ_{XY} .

解: (1) $E(2X - 3Y) = 2E(X) - 3E(Y) = 2 \times \frac{1}{2} - 3 \times \frac{1}{3} = 0$;2 分

(2) $D(2X - 3Y) = 4D(X) + 9D(Y) = 4 \times \frac{1}{4} + 9 \times \frac{1}{9} = 2$;2 分

(3) 因为量 X 和 Y 相互独立, 所以 $\rho_{XY} = 0$2 分

2、已知随机变量 $X \sim N(1, 25), Y \sim N(2, 36)$, $\rho_{XY} = 0.4$,

求: $U = 3X + 2Y$ 与 $V = X - 3Y$ 的协方差.

解: $Cov(U, V) = Cov(3X + 2Y, X - 3Y)$

$$= 3D(X) - 9Cov(X, Y) + 2Cov(X, Y) - 6D(Y) \dots 3 \text{ 分}$$

$$= 3D(X) - 7\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)} - 6D(Y)$$

$$= 3 \times 25 - 7 \times 0.4 \times 5 \times 6 - 6 \times 36 = -225 \dots 3 \text{ 分}$$

3、设 X_1, X_2, \dots, X_{13} 是来自正态总体 $N(0, 1)$ 的一个样本, 且已知随

机变量 $Y = a\left(\sum_{i=1}^4 X_i\right)^2 + b\left(\sum_{i=5}^{13} X_i\right)^2$ 服从自由度为 2 的 χ^2 分布,

求 a, b 的值.

解: 因为 $X_i \sim N(0, 1)$ 且相互独立, $i = 1, 2, \dots, 13$.

所以, $\sum_{i=1}^4 X_i \sim N(0, 4)$, $\sum_{i=5}^{13} X_i \sim N(0, 9)$,2 分

$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 X_i \sim N(0, 1)$, $\frac{1}{3} \sum_{i=5}^{13} X_i \sim N(0, 1)$, 且相互独立.2 分

三、(共 18 分,每题 6 分)

1、设总体 $X \sim N(52, 6^2)$, 现随机抽取容量为 36 的一个样本, 求样本均值 \bar{X} 落入(50.8, 53.8) 之间的概率.

解: $\bar{X} \sim N(52, 1)$,2 分

$$P\{50.8 < \bar{X} < 53.8\} = \Phi(53.8 - 52) - \Phi(50.8 - 52)$$

$$= \Phi(1.8) - \Phi(-1.2) = 0.9641 - 1 + 0.8849 \dots 3 \text{ 分}$$

$$= 0.849 \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

2、设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} Ae^x, & x \leq 0, \\ B, & 0 < x \leq 1, \\ 1 - Ae^{-(x-1)}, & x > 1. \end{cases}$

求: (1) A, B 的值; (2) $P\{X > \frac{1}{3}\}$.

解: (1) 由连续型随机变量分布函数的连续性, 得

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = F(0), \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = F(1),$$

$$\text{即} \begin{cases} A = B \\ B = 1 - A \end{cases} \quad \text{解得 } A = B = 0.5 \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$(2) P\{X > \frac{1}{3}\} = 1 - F(\frac{1}{3}) = 1 - 0.5 = 0.5 \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

3、箱子中有一号袋 1 个，二号袋 2 个。一号袋中装 1 个红球，2 个黄球，二号袋中装 2 个红球，1 个黄球，今从箱子中任取一袋，从中任取一球，结果为红球，求这个红球是从一号袋中取得的概率。

解：设 $A_i = \{\text{从箱子中取到 } i \text{ 号袋}\}$, $i = 1, 2$

$B = \{\text{抽出的是红球}\}$

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{9} \quad \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^2 P(A_i)P(B|A_i)} = \frac{1}{5} \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

四、(8 分) 设随机变量 X 具有密度函数 $f(x) = \begin{cases} Ax, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$

求 (1) 常数 A ; (2) X 的分布函数。

$$(1) \text{ 因为 } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } A \int_0^1 xdx = 1 \quad \text{得 } A = 2 \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$(2) F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \int_0^x 2xdx, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^2, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases} \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

五、(8分) 某箱装有 100 件产品，其中一、二、三等品分别为 60、30、10 件，现从中随机抽取一件，记

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{若抽到 } i \text{ 等品,} \\ 0, & \text{没有抽到 } i \text{ 等品.} \end{cases} \quad \text{求 } X_1, X_2 \text{ 的联合分布律.}$$

解：设 A_1, A_2, A_3 分别表示抽到一、二、三等品，

$$P(X_1 = 0, X_2 = 0) = P(A_3) = 0.1, \quad P(X_1 = 1, X_2 = 0) = P(A_1) = 0.6$$

$$P(X_1 = 0, X_2 = 1) = P(A_2) = 0.3, \quad P(X_1 = 1, X_2 = 1) = 0$$

X_1, X_2 的联合分布律为

$X_1 \backslash X_2$	0	1
0	0.1	0.3
1	0.6	0.0

.....8 分 (每个 2 分)

六、(10 分) 设随机变量 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 15x^2y, & 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

(1) 求边缘概率密度；(2) 判断随机变量 X 和 Y 是否独立.

$$\text{解：(1) } f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \quad \text{.....1 分}$$

$$= \begin{cases} \frac{15}{2} x^2 (1 - x^2), & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad \text{.....2 分}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx \quad \text{.....1 分}$$

$$= \begin{cases} 5y^4, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad \text{.....2 分}$$

(2) 因为 $f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$ ，所以随机变量 X 和 Y 不独立.

.....4 分

七、(8 分) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是总体 X 的一个样本， x_1, x_2, \dots, x_n 为一相对应的样本观测值，总体 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

求参数 θ 的矩估计和极大似然估计.

解: (1) 矩估计 $E(X) = \int_0^1 x \theta x^{\theta-1} dx = \frac{\theta}{\theta+1}, \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

由 $A_1 = \mu_1$ 得 $\frac{\theta}{\theta+1} = \bar{X} \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{1-\bar{X}} \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

(2) 似然函数 $L(\theta) = \prod_{i=1}^n \theta x_i^{\theta-1} = \theta^n (\prod_{i=1}^n x_i)^{\theta-1}$

对数似然函数 $\ln L(\theta) = n \ln \theta + (\theta-1) \sum_{i=1}^n \ln x_i \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

令 $\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = 0$, 得 $\frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i}$

参数 θ 的极大似然估计量为 $\hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln X_i} \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

附 $\Phi(1.8) = 0.9641, \Phi(1.2) = 0.8849, \Phi(1.5) = 0.9332, \Phi(2.2) = 0.9861,$

$Z_{0.025} = 1.96, Z_{0.05} = 1.645, t_{0.025}(24) = 2.0639, t_{0.025}(25) = 2.0595$