微分方程模型

动态模型

- 描述对象特征随时间(空间)的演变过程
- 分析对象特征的变化规律
- 预报对象特征的未来性态
- 研究控制对象特征的手段

微分方程建模

- 根据函数及其变化率之间的关系确定函数
- 根据建模目的和问题分析作出简化假设
- 按照内在规律或用类比法建立微分方程

1 传染病模型

问题

- 描述传染病的传播过程
- 分析受感染人数的变化规律
- 预报传染病高峰到来的时刻
- 预防传染病蔓延的手段
- 按照传播过程的一般规律，用机理分析方法建立模型

模型1　已感染人数 (病人) $i(t)$

假设

• 每个病人每天有效接触(足以使人致病)人数为λ

建模

$$i(t+\Delta t)-i(t)=\lambda i(t)\Delta t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{di}{dt}=\lambda i \\ i(0)=i_0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{i(t)=i_0 e^{\lambda t}}$$

$$\Rightarrow t\to\infty \Rightarrow i\to\infty \ ?$$

若有效接触的是病人，则不能使病人数增加 ⇒ 必须区分已感染者(病人)和未感染者(健康人)

```
dsolve('Di=lambda*i','i(0)=i0')
```

```
i0*exp(lambda*t)
```

模型2 区分已感染者(病人)和未感染者(健康人)

假设

1）总人数N不变，病人和健康人的 比例分别为 $i(t), s(t)$

SI 模型

2）每个病人每天有效接触人数为λ，且使接触的健康人致病

λ~日接触率

建模

$$N[i(t+\Delta t)-i(t)]=[\lambda s(t)]Ni(t)\Delta t$$

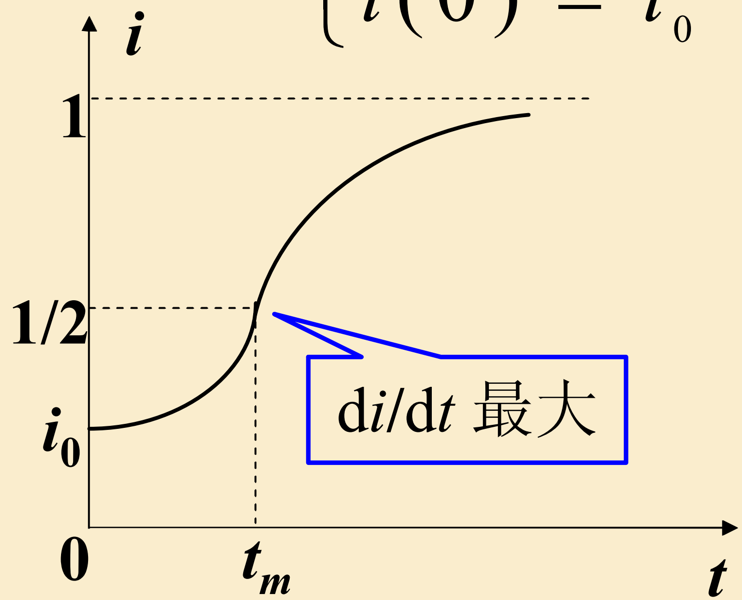
$$\frac{di}{dt}=\lambda si$$

$$s(t)+i(t)=1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{di}{dt}=\lambda i(1-i) \\ i(0)=i_0 \end{cases}$$

模型2

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = \lambda i(1-i) \\ i(0) = i_0 \end{cases} \Rightarrow \text{Logistic 模型}$$



$$i(t) = \frac{1}{1+\left(\dfrac{1}{i_0}-1\right)e^{-\lambda t}}$$

$$t_m = \lambda^{-1}\ln\left(\frac{1}{i_0}-1\right)$$

t_m~传染病高峰到来时刻

λ(日接触率)↓ → t_m↑

$t \to \infty \Rightarrow i \to 1$?

病人可以治愈！

```
dsolve('Di=lambda*i*(1-i)','i(0)=i0')
```

```
-i0/(-i0-exp(-lambda*t)+exp(-lambda*t)*i0)
```

模型3

传染病无免疫性——病人治愈成为健康人，健康人可再次被感染

SIS 模型

增加假设

3）病人每天治愈的比例为μ

μ~日治愈率

建模

$$N[i(t+\Delta t)-i(t)]=\lambda Ns(t)i(t)\Delta t-\mu Ni(t)\Delta t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{di}{dt}=\lambda i(1-i)-\mu i \\ i(0)=i_0 \end{cases}$$

λ~日接触率

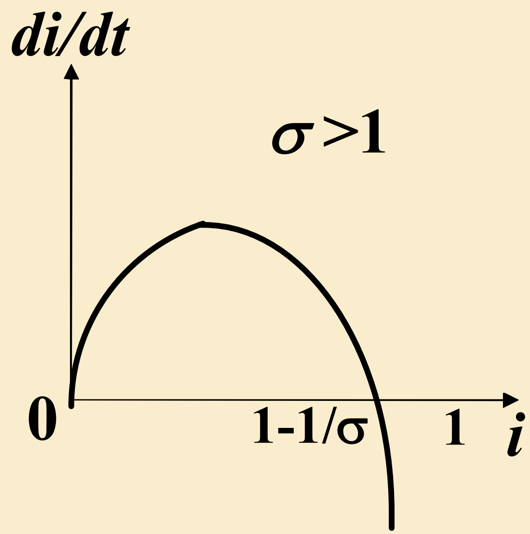
$1/\mu$~感染期

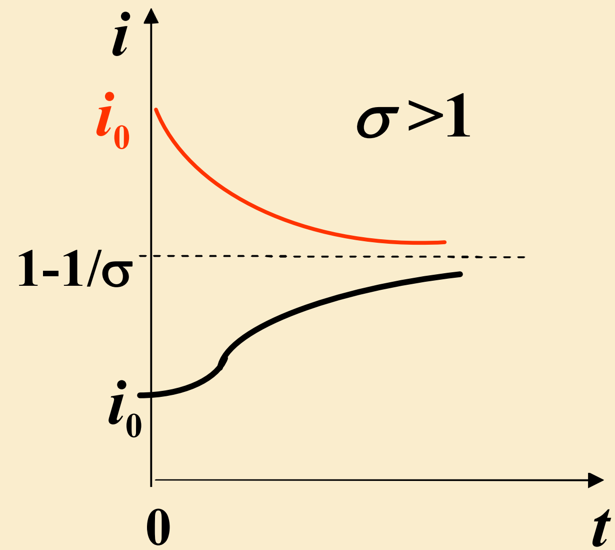
$\sigma=\lambda/\mu$

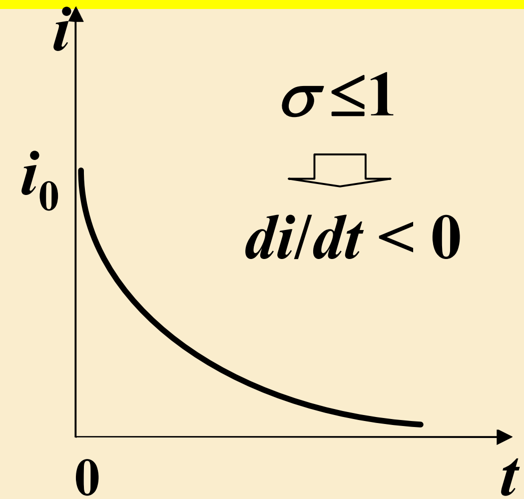
σ~一个感染期内每个病人的有效接触人数，称为接触数。

模型3 $\frac{di}{dt}=\lambda i(1-i)-\mu i \qquad \sigma=\lambda/\mu$

$$\frac{di}{dt}=-\lambda i\left[i-\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)\right]$$







$$i(\infty)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{\sigma}, & \sigma>1\\ 0, & \sigma\le 1\end{cases}$$

接触数$\sigma=1$ ~ 阈值

$\sigma\le 1\Rightarrow i(t)\downarrow$

$\sigma>1$, i_0小 $\Rightarrow i(t)$按S形曲线增长

感染期内有效接触感染的健康者人数不超过病人数

模型2(SI模型)如何看作模型3(SIS模型)的特例

模型4

传染病有免疫性——病人治愈后即移出感染系统，称移出者

SIR模型

假设

1）总人数N不变，病人、健康人和移出者的比例分别为 $i(t), s(t), r(t)$

2）病人的日接触率λ, 日治愈率μ,
接触数 $\sigma=\lambda/\mu$

建模

$$s(t)+i(t)+r(t)=1$$

需建立 $i(t), s(t), r(t)$ 的两个方程

模型4

SIR模型

$$N[i(t+\Delta t)-i(t)]=\lambda Ns(t)i(t)\Delta t-\mu Ni(t)\Delta t$$

$$N[s(t+\Delta t)-s(t)]=-\lambda Ns(t)i(t)\Delta t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{di}{dt}=\lambda si-\mu i \\ \dfrac{ds}{dt}=-\lambda si \\ i(0)=i_0,\ s(0)=s_0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 无法求出 $i(t), s(t)$ 的解析解

$\Downarrow$

在相平面 $s \sim i$ 上研究解的性质

$i_0+s_0\approx 1$（通常 $r(0)=r_0$ 很小）

模型4

SIR模型

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = \lambda si - \mu i \\ \dfrac{ds}{dt} = -\lambda si \\ i(0) = i_0,\ s(0) = s_0 \end{cases}$$

消去dt

$\sigma = \lambda / \mu$

$$\begin{cases} \dfrac{di}{ds} = \dfrac{1}{\sigma s} - 1 \\ i\Big|_{s=s_0} = i_0 \end{cases}$$

相轨线

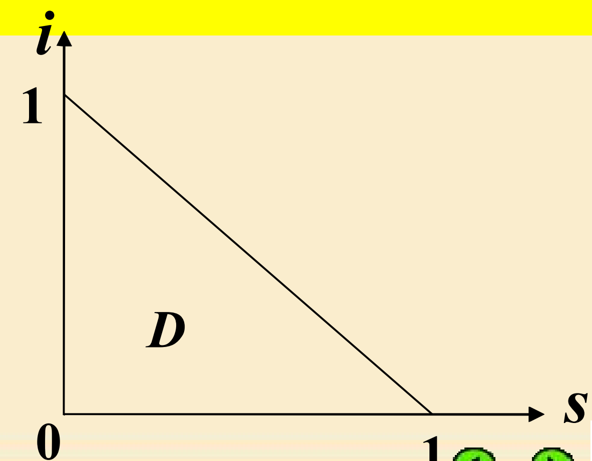
$$i(s) = (s_0 + i_0) - s + \frac{1}{\sigma} \ln \frac{s}{s_0}$$

相轨线 $i(s)$ 的定义域

$$D = \{(s, i) \mid s \ge 0, i \ge 0, s + i \le 1\}$$

在D内作相轨线$i(s)$

的图形，进行分析



模型4

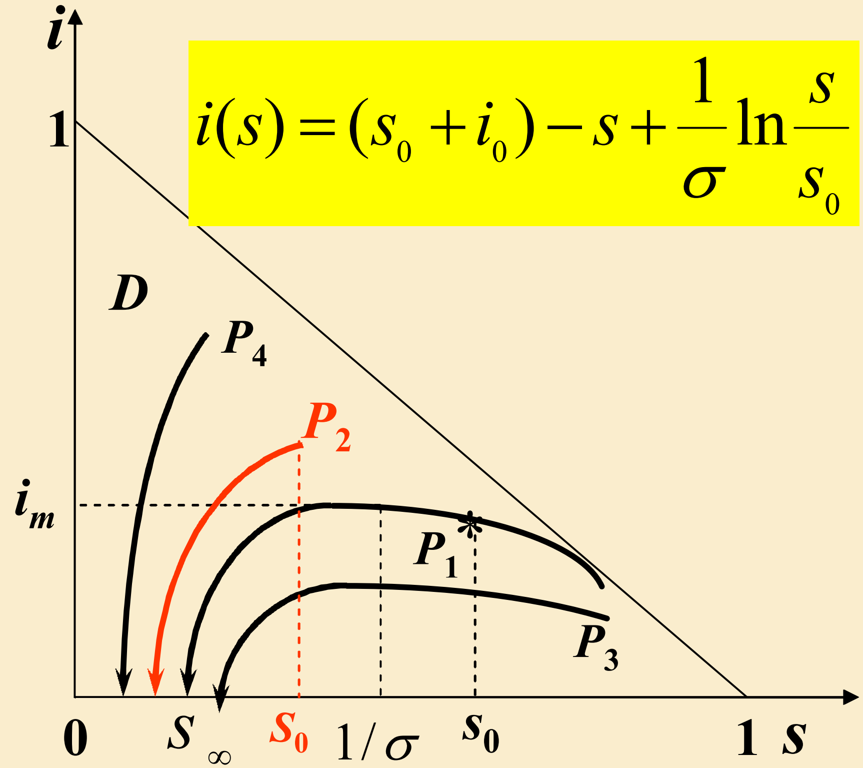
相轨线 $i(s)$ 及其分析

SIR模型

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = \lambda si - \mu i \\ \dfrac{ds}{dt} = -\lambda si \\ i(0) = i_0,\ s(0) = s_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{di}{ds} = \dfrac{1}{\sigma s} - 1 \\ i\Big|_{s=s_0} = i_0 \end{cases}$$

$$i(s) = (s_0 + i_0) - s + \frac{1}{\sigma}\ln\frac{s}{s_0}$$



$s(t)$单调减→相轨线的方向

$$s = 1/\sigma,\ i = i_m \qquad t \to \infty,\ i \to 0$$

s_∞满足 $s_0 + i_0 - s_\infty + \dfrac{1}{\sigma}\ln\dfrac{s_\infty}{s_0} = 0$

P_1: s_0>1/♦ → $i(t)$先升后降至0 ⇨ **传染病蔓延**

P_2: s_0<1/♦ → $i(t)$单调降至0 ⇨ **传染病不蔓延**

1/♦~阈值

模型4

相轨线 $i(s)$ 及其分析

SIR模型

传染病不蔓延的条件——$s_0<1/\sigma$

- 提高阈值 $1/\sigma$ ⇨ 降低 $\sigma(=\lambda/\mu)$ ⇨ $\lambda\downarrow$, $\mu\uparrow$

λ(日接触率)↓ ⇒ 卫生水平↑

μ(日治愈率)↑ ⇒ 医疗水平↑

- 降低 s_0 ⇨ 提高 r_0 ⇨ 群体免疫

$$s_0+i_0+r_0=1$$

σ 的估计

$$s_0+i_0-s_\infty+\frac{1}{\sigma}\ln\frac{s_\infty}{s_0}=0$$

忽略 i_0

$$\sigma=\frac{\ln s_0-\ln s_\infty}{s_0-s_\infty}$$

模型4

被传染人数的估计

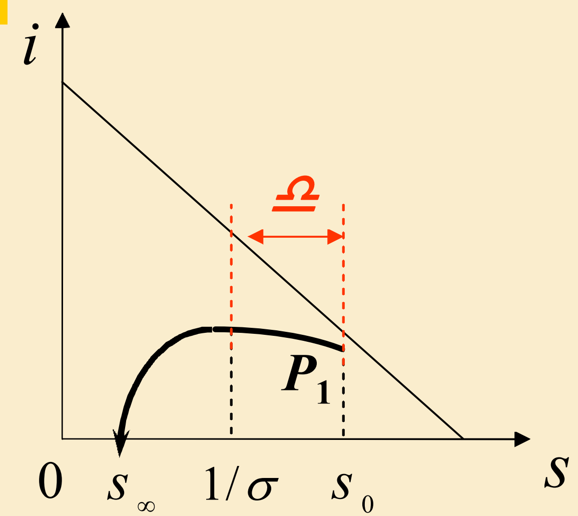
SIR模型

记被传染人数比例 $x=s_0-s_\infty$

$$s_0+i_0-s_\infty+\frac{1}{\sigma}\ln\frac{s_\infty}{s_0}=0$$

$i_0\cong 0,\ s_0\cong 1$

$$x+\frac{1}{\sigma}\ln\left(1-\frac{x}{s_0}\right)\cong 0$$



$x<<s_0$

$$x\left(1-\frac{1}{s_0\sigma}-\frac{x}{2s_0^2\sigma}\right)\cong 0$$

$$x\approx 2s_0\sigma\left(s_0-\frac{1}{\sigma}\right)$$

$s_0-1/\sigma=\delta$

δ小, $s_0\sigma\cong 1$

$$x\cong 2\delta$$

提高阈值1/♦→降低被传染人数比例 x

小结：模型1~4的异同

模型1 $$\frac{di}{dt}=\lambda i$$

模型2 $$\frac{di}{dt}=\lambda i(1-i)$$

模型3 $$\frac{di}{dt}=\lambda i(1-i)-\mu i \quad \sigma=\lambda/\mu \quad \frac{di}{dt}=-\lambda i[i-(1-\frac{1}{\sigma})]$$

模型4 $$\begin{cases} \dfrac{di}{dt}=\lambda si-\mu i \\ \dfrac{ds}{dt}=-\lambda si \end{cases}$$

2 如何预报人口的增长

背景

世界人口增长概况

年	1625	1830	1930	1960	1974	1987	1999
人口(亿)	5	10	20	30	40	50	60

中国人口增长概况

年	1908	1933	1953	1964	1982	1990	1995	2000
人口(亿)	3.0	4.7	6.0	7.2	10.3	11.3	12.0	13.0

研究人口变化规律

控制人口过快增长

常用的计算公式 今年人口 x_0, 年增长率 r

k年后人口 $x_k = x_0(1+r)^k$

指数增长模型——马尔萨斯提出 (Malthus, 1798)

基本假设: 人口(相对)增长率 r 是常数

$x(t)$ ~时刻t的人口 $x(t+\Delta t) - x(t) = r \cdot x(t) \cdot \Delta t$

$$\frac{dx}{dt} = rx,\ x(0) = x_0 \qquad x(t) = x_0 e^{rt}$$

$$x(t) = x_0 (e^r)^t \approx x_0 (1+r)^t$$

随着时间增加，人口按指数规律无限增长

指数增长模型的应用及局限性

- 与19世纪以前欧洲一些地区人口统计数据吻合
- 适用于19世纪后迁往加拿大的欧洲移民后代
- 可用于短期人口增长预测
- 不符合19世纪后多数地区人口增长规律
- 不能预测较长期的人口增长过程

19世纪后人口数据　　人口增长率r不是常数(逐渐下降)

阻滞增长模型 (Logistic模型)

人口增长到一定数量后，增长率下降的原因：

资源、环境等因素对人口增长的阻滞作用

且阻滞作用随人口数量增加而变大 $\Rightarrow$ r是x的减函数

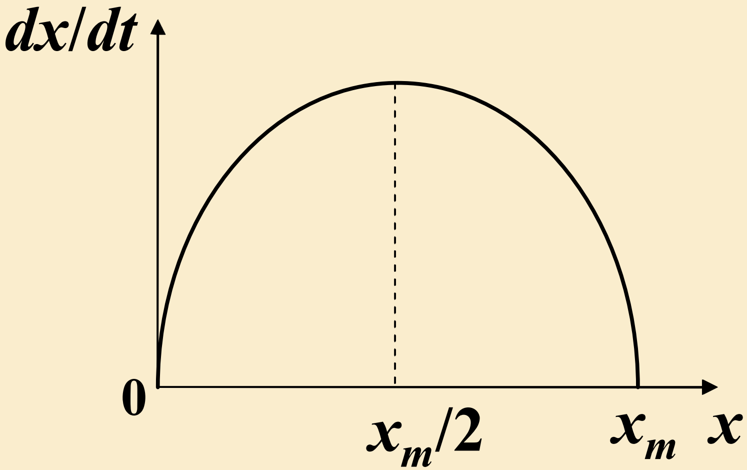
假设 $r(x)=r-sx\ (r,s>0)$ r~固有增长率(x很小时)

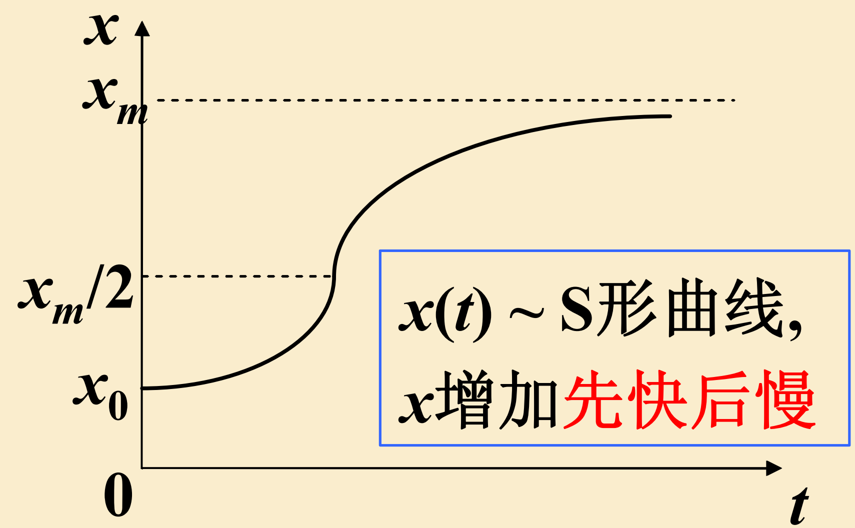
x_m~人口容量（资源、环境能容纳的最大数量）

$$\Rightarrow r(x_m)=0 \Rightarrow s=\frac{r}{x_m} \qquad \boxed{r(x)=r\left(1-\frac{x}{x_m}\right)}$$

阻滞增长模型（Logistic模型）

$$\frac{dx}{dt} = rx \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = r(x)x = rx\left(1 - \frac{x}{x_m}\right)$$





$$x(t) = \frac{x_m}{1 + \left(\frac{x_m}{x_0} - 1\right)e^{-rt}}$$

阻滞增长模型 (Logistic模型)

参数估计　用指数增长模型或阻滞增长模型作人口预报，必须先估计模型参数 r 或 r, x_m

- 利用统计数据用最小二乘法作拟合

例：美国人口数据（单位~百万）

去掉个别异常数据

1860	1870	1880	……	1960	1970	1980	1990
31.4	38.6	50.2	……	179.3	204.0	226.5	251.4

⇨ $r=0.2557,\ x_m=392.1$

专家估计

阻滞增长模型（Logistic模型）

参数估计

非线性回归nlinfit

```
% logistic.m
function yhat=logistic(beta,t)
yhat=1./(beta(1)+beta(2)*(beta(3).^t));
%%%%非线性回归%%%% ilogistic.m
t=[1987:2006]-1987;
y=[109300 111026 112704 114333 115823 117171 118517 119850 12
130756  131484]./10000;
beta0=[1 2 1];
[beta,r ,J]=nlinfit(t',y','logistic',beta0)
[YY,delta]=nlpredci('logistic',t',beta,r ,J);
plot(t,y,'k+',t,YY,'r')
logistic(beta,[2003 2004 2005 2006]-1987)
```

阻滞增长模型（Logistic模型）

模型检验

用模型计算2000年美国人口，与实际数据比较

$$x(2000) = x(1990) + \Delta x = x(1990) + rx(1990)[1 - x(1990)/x_m]$$

⇨ $x(2000) = 274.5$ 实际为281.4 (百万)

模型应用——预报美国2010年的人口

加入2000年人口数据后重新估计模型参数

⇨ r=0.2490, x_m=434.0 ⇨ $x(2010)$=306.0

Logistic 模型在经济领域中的应用（如耐用消费品的售量）

3　人口预测和控制

- 年龄分布对于人口预测的重要性
- 只考虑自然出生与死亡，不计迁移

人口发展方程

$F(r,t) \sim$ 人口分布函数 (年龄 $< r$ 的人口)

$p(r,t) \sim$ 人口密度函数　　$N(t) \sim$ 人口总数

$r_m \ (\to \infty) \sim$ 最高年龄

$$F(0,t) = 0,\ F(r_m,t) = N(t)$$

$$p(r,t) = \frac{\partial F}{\partial r}$$

人口发展方程

$\mu(r,t) \sim$ 死亡率

t, 年龄 $[r, r + dr]$ 人数 $-$ $t+dt$, 年龄 $[r+dr_1, r+dr_1+dr]$ 人数 $\underset{dt=dr_1}{=\!=\!=}$ $(t, t+dt)$ 内死亡人数

$$p(r,t)dr - p(r+dr_1, t+dt)dr = \mu(r,t)p(r,t)drdt$$

$$[p(r+dr_1, t+dt) - p(r, t+dt)] + [p(r, t+dt) - p(r,t)]$$

$$= -\mu(r,t)p(r,t)dt, \qquad dt = dr_1$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial t} = -\mu(r,t)p(r,t)$$

一阶偏微分方程

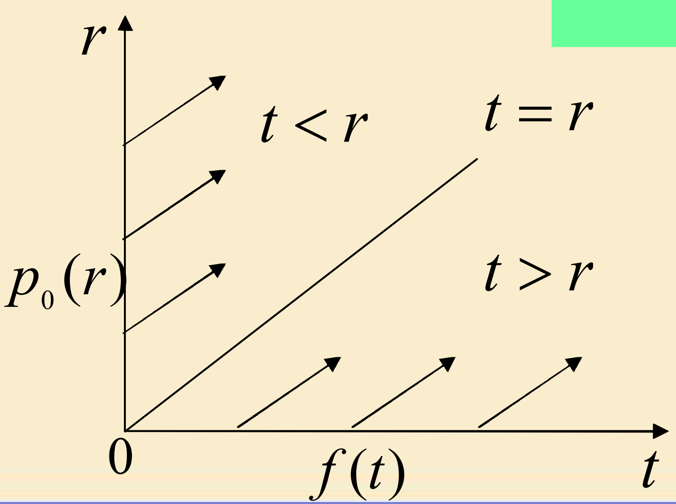
$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial r}+\dfrac{\partial p}{\partial t}=-\mu(r,t)p(r,t) \\ p(r,0)=p_0(r),\ \ r\ge 0 \\ p(0,t)=f(t),\ \ t\ge 0 \end{cases}$$

人口发展方程

~已知函数（人口调查）

~生育率（控制人口手段）

$$\mu(r,t)=\mu(r) \Rightarrow p(r,t)=\begin{cases} p_0(r-t)e^{-\int_{r-t}^{r}\mu(s)ds}, & 0\le t\le r \\ f(t-r)e^{-\int_0^{r}\mu(s)ds}, & t>r \end{cases}$$



$$F(r,t)=\int_0^r p(s,t)ds$$

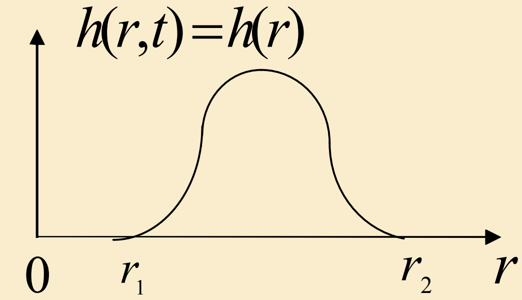
$$N(t)=\int_0^{r_m} p(s,t)ds$$

生育率的分解

$k(r,t) \sim$ (女性)性别比函数

$b(r,t) \sim$ (女性)生育数　　$[r_1, r_2] \sim$ 育龄区间

$$f(t) = \int_{r_1}^{r_2} b(r,t)k(r,t)p(r,t)dr$$



$$b(r,t) = \beta(t)h(r,t)$$

$$\int_{r_1}^{r_2} h(r,t)dr = 1$$

h~生育模式

$$\beta(t) = \int_{r_1}^{r_2} b(r,t)dr$$

β~总和生育率

$$f(t) = \beta(t)\int_{r_1}^{r_2} h(r,t)k(r,t)p(r,t)dr$$

人口发展方程和生育率

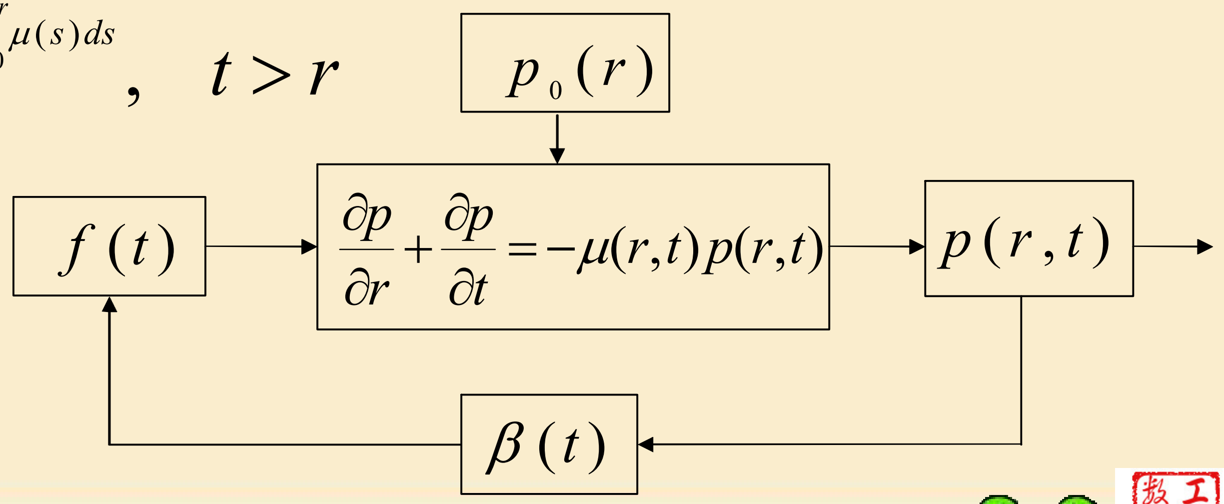
$$f(t)=\beta(t)\int_{r_1}^{r_2} h(r,t)k(r,t)p(r,t)dr$$

$\beta(t)$ ~总和生育率——控制生育的多少

$h(r,t)$ ~生育模式——控制生育的早晚和疏密

$$p(r,t)=\begin{cases} p_0(r-t)e^{-\int_{r-t}^{r}\mu(s)ds}, 0\le t\le r \\ f(t-r)e^{-\int_{0}^{r}\mu(s)ds}, \quad t>r \end{cases}$$

- 正反馈系统
- 滞后作用很大



人口指数

1）人口总数 $N(t)=\int_0^{r_m} p(r,t)dr$

2）平均年龄 $R(t)=\dfrac{1}{N(t)}\int_0^{r_m} rp(r,t)dr$

3）平均寿命 $S(t)=\int_t^{\infty} e^{-\int_0^{\tau-t}\mu(r,t)dr}d\tau$

*t*时刻出生的人，死亡率按 $\mu(r,t)$ 计算的平均存活时间

4）老龄化指数 $\omega(t)=R(t)/S(t)$

控制生育率 ⇒ 控制 $N(t)$不过大

控制 $\omega(t)$不过高

4 种群的相互竞争

- 一个自然环境中有两个种群生存，它们之间的关系：相互竞争；相互依存；弱肉强食。

- 当两个种群为争夺同一食物来源和生存空间相互竞争时，常见的结局是，竞争力弱的灭绝，竞争力强的达到环境容许的最大容量。

- 建立数学模型描述两个种群相互竞争的过程，分析产生这种结局的条件。

模型假设

• 有甲乙两个种群，它们独自生存时数量变化均服从Logistic规律；

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 (1 - \frac{x_1}{N_1}) \qquad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 (1 - \frac{x_2}{N_2})$$

• 两种群在一起生存时，乙对甲增长的阻滞作用与乙的数量成正比；甲对乙有同样的作用。

模型

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2} \right) \qquad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2} \right)$$

对于消耗甲的资源而言，乙(相对于N_2)是甲(相对于N_1) 的 σ_1 倍。

$\sigma_1 > 1$ ⇨ 对甲增长的阻滞作用，乙大于甲

⇨ 乙的竞争力强

模型 $\dot{x}_1(t)=r_1x_1\left(1-\frac{x_1}{N_1}-\sigma_1\frac{x_2}{N_2}\right)$ $\dot{x}_2(t)=r_2x_2\left(1-\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}\right)$

模型分析 $t\to\infty$时$x_1(t), x_2(t)$的趋向 **(平衡点及其稳定性)**

(二阶)非线性(自治)方程 $\dot{x}_1(t)=f(x_1,x_2)$, $\dot{x}_2(t)=g(x_1,x_2)$ 的平衡点及其稳定性

平衡点$\boldsymbol{P_0(x_1^0, x_2^0)}$ ~ 代数方程 $f(x_1,x_2)=0$, $g(x_1,x_2)=0$ 的根

若从$\boldsymbol{P_0}$某邻域的任一初值出发，都有 $\lim_{t\to\infty}x_1(t)=x_1^0$, $\lim_{t\to\infty}x_2(t)=x_2^0$, 称$\boldsymbol{P_0}$是微分方程的稳定平衡点

判断P_0 (x_1^0,x_2^0) 稳定性的方法——直接法

$$\dot{x}_1(t)=f(x_1,x_2)$$
$$\dot{x}_2(t)=g(x_1,x_2) \quad (1)$$

(1)的近似线性方程

$$\dot{x}_1(t)=f_{x_1}(x_1^0,x_2^0)(x_1-x_1^0)+f_{x_2}(x_1^0,x_2^0)(x_2-x_2^0)$$
$$\dot{x}_2(t)=g_{x_1}(x_1^0,x_2^0)(x_1-x_1^0)+g_{x_2}(x_1^0,x_2^0)(x_2-x_2^0) \quad (2)$$

$$A=\begin{bmatrix} f_{x_1} & f_{x_2} \\ g_{x_1} & g_{x_2} \end{bmatrix}\Bigg|_{P_0}$$

$$\begin{cases} \lambda^2+p\lambda+q=0 \\ p=-(f_{x_1}+g_{x_2})\big|_{P_0} \\ q=\det A \end{cases}$$

$p>0$ 且 $q>0$

平衡点 P_0稳定(对2,1)

$p<0$ 或 $q<0$

平衡点 P_0不稳定(对2,1)

模型

$$\dot{x}_1(t)=r_1x_1\left(1-\frac{x_1}{N_1}-\sigma_1\frac{x_2}{N_2}\right)\qquad \dot{x}_2(t)=r_2x_2\left(1-\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}\right)$$

$$\begin{cases} f(x_1,x_2)\equiv r_1x_1\left(1-\dfrac{x_1}{N_1}-\sigma_1\dfrac{x_2}{N_2}\right)=0 \\ g(x_1,x_2)\equiv r_2x_2\left(1-\sigma_2\dfrac{x_1}{N_1}-\dfrac{x_2}{N_2}\right)=0 \end{cases}$$

平衡点： $P_1(N_1,0),\ P_2(0,N_2),$

$$P_3\left(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2},\frac{N_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right),P_4(0,0)$$

仅当$\sigma_1,\ \sigma_2<1$或$\sigma_1,\ \sigma_2>1$时，P_3才有意义

平衡点稳定性分析

$$\begin{cases} f(x_1,x_2) \equiv r_1 x_1\left(1-\dfrac{x_1}{N_1}-\sigma_1\dfrac{x_2}{N_2}\right) \\ g(x_1,x_2) \equiv r_2 x_2\left(1-\sigma_2\dfrac{x_1}{N_1}-\dfrac{x_2}{N_2}\right) \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} f_{x1} & f_{x2} \\ g_{x1} & g_{x2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r_1\left(1-\dfrac{2x_1}{N_1}-\dfrac{\sigma_1 x_2}{N_2}\right) & -\dfrac{r_1\sigma_1 x_1}{N_2} \\ -\dfrac{r_2\sigma_2 x_2}{N_1} & r_2\left(1-\dfrac{\sigma_2 x_1}{N_1}-\dfrac{2x_2}{N_2}\right) \end{bmatrix}$$

$$p=-(f_{x1}+g_{x2})\Big|_{p_i},\quad q=\det A\Big|_{p_i},\quad i=1,2,3,4$$

平衡点 P_i 稳定条件： $p>0$ 且 $q>0$

种群竞争模型的平衡点及稳定性

平衡点	p	q	稳定条件
$p_1(N_1,0)$	$r_1-r_2(1-\sigma_2)$	$-r_1r_2(1-\sigma_2)$	$\sigma_2>1$, $\sigma_1<1$
$p_2(0,N_2)$	$-r_1(1-\sigma_1)+r_2$	$-r_1r_2(1-\sigma_1)$	$\sigma_1>1$, $\sigma_2<1$
$p_3\left(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2},\frac{N_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right)$	$\frac{r_1(1-\sigma_1)+r_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}$	$\frac{r_1r_2(1-\sigma_1)(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}$	$\sigma_1<1$, $\sigma_2<1$
$p_4(0,0)$	$-(r_1+r_2)$	r_1r_2	不稳定

P_1, P_2 是一个种群存活而另一灭绝的平衡点

P_3 是两种群共存的平衡点

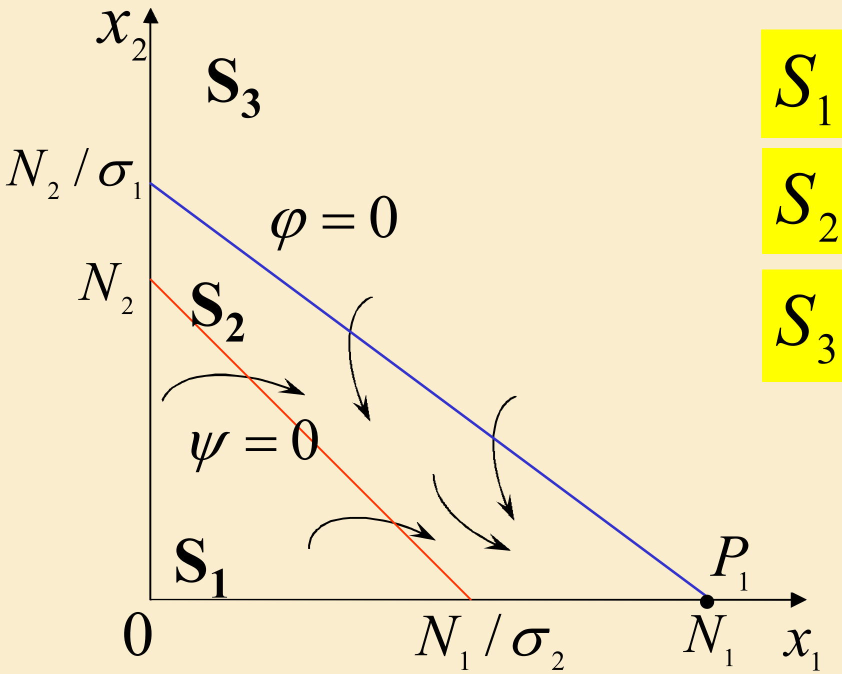
P_1稳定的条件 $\sigma_1<1$?

平衡点稳定性的相轨线分析

$$\dot{x}_1(t)=r_1x_1\left(1-\frac{x_1}{N_1}-\sigma_1\frac{x_2}{N_2}\right) \qquad \varphi(x_1,x_2)=1-\frac{x_1}{N_1}-\sigma_1\frac{x_2}{N_2}$$

$$\dot{x}_2(t)=r_2x_2\left(1-\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}\right) \qquad \psi(x_1,x_2)=1-\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}$$

(1) $\sigma_2>1$, $\sigma_1<1$



$S_1:\varphi>0,\ \psi>0$

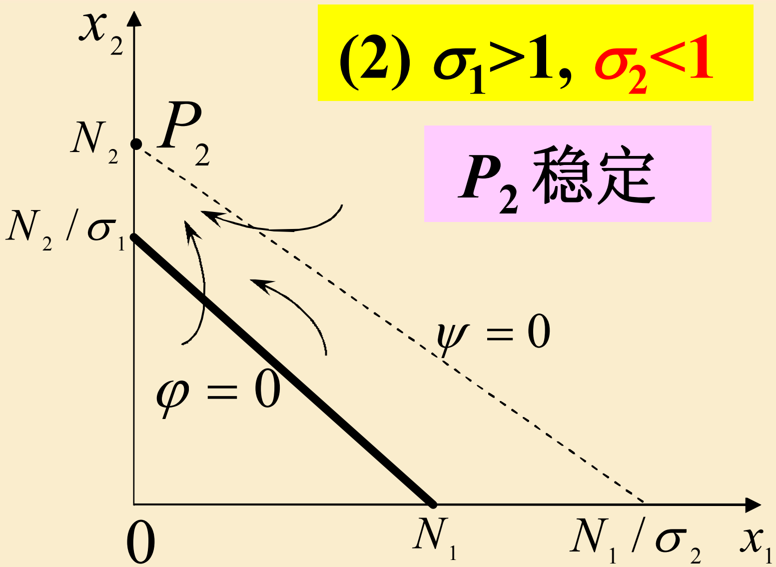
$S_1:\dot{x}_1>0,\ \dot{x}_2>0$ ⇨ $t\uparrow\to x_1,x_2\uparrow$

$S_2:\dot{x}_1>0,\ \dot{x}_2<0$ ⇨ $t\uparrow\to x_1\uparrow,x_2\downarrow$

$S_3:\dot{x}_1<0,\ \dot{x}_2<0$ ⇨ $t\uparrow\to x_1,x_2\downarrow$

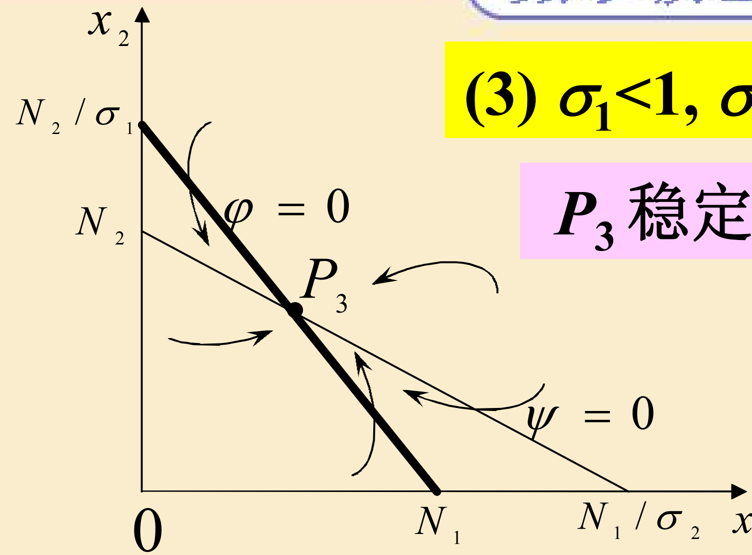
从任意点出发(t=0)的相轨线都趋向$P_1(N_1,0)$ ($t\to\infty$)

$P_1(N_1,0)$是稳定平衡点



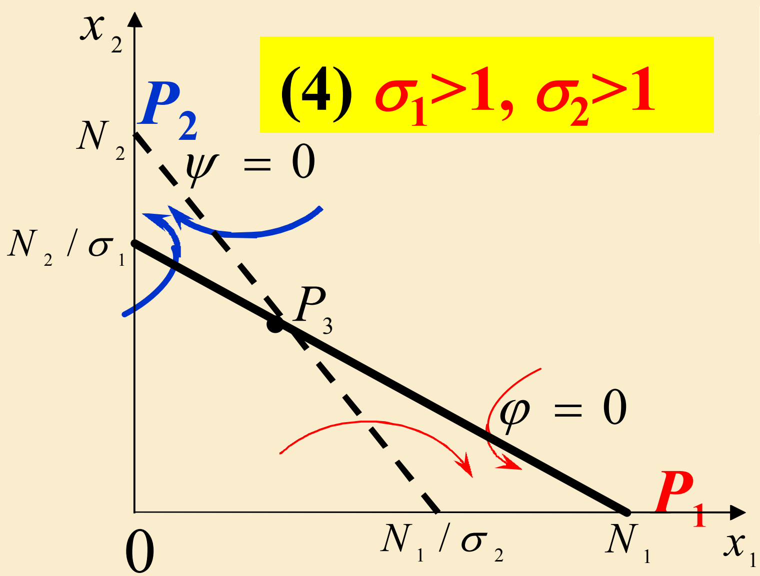
(2) $\sigma_1>1$, $\sigma_2<1$

P_2稳定



(3) $\sigma_1<1$, $\sigma_2<1$

P_3稳定



(4) $\sigma_1>1$, $\sigma_2>1$

有相轨线趋向P_1

有相轨线趋向P_2

⇒ P_1, P_2都不(局部)稳定

P_1稳定的条件：直接法$\sigma_2>1$

加上与(4)相区别的 $\sigma_1<1$

⇒ **P_1全局稳定**

结果解释

• P_1稳定的条件：$\sigma_1<1, \sigma_2>1$

对于消耗甲的资源而言，乙(相对于N_2)是甲(相对于N_1)的σ_1 倍。

$\sigma_1<1$ ⇨ 对甲增长的阻滞作用，乙小于甲 ⇒乙的竞争力弱

$\sigma_2>1$ ⇒甲的竞争力强

甲达到最大容量，乙灭绝

• P_2稳定的条件：$\sigma_1>1, \sigma_2<1$

• P_3稳定的条件：$\sigma_1<1, \sigma_2<1$

通常$\sigma_1 \approx 1/\sigma_2$，$P_3$稳定条件不满足

5 种群的相互依存

甲乙两种群的相互依存有三种形式

1) 甲可以独自生存，乙不能独自生存；甲乙一起生存时相互提供食物、促进增长。

2) 甲乙均可以独自生存；甲乙一起生存 时相互提供食物、促进增长。

3) 甲乙均不能独自生存；甲乙一起生存时相互提供食物、促进增长。

模型假设

• 甲可以独自生存，数量变化服从Logistic规律；甲乙一起生存时乙为甲提供食物、促进增长。

• 乙不能独自生存；甲乙一起生存时甲为乙提供食物、促进增长；乙的增长又受到本身的阻滞作用 (服从Logistic规律)。

模型

$$\dot{x}_1(t_1) = r_1 x_1\left(1 - \frac{x_1}{N_1} + \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}\right)$$

乙为甲提供食物是甲消耗的σ_1倍

$$\dot{x}_2(t) = r_2 x_2\left(-1 + \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\right)$$

甲为乙提供食物是乙消耗的σ_2倍

种群依存模型的平衡点及稳定性

平衡点	p	q	稳定条件
$P_1(N_1,0)$	$r_1-r_2(\sigma_2-1)$	$-r_1r_2(\sigma_2-1)$	$\sigma_2<1,\sigma_1\sigma_2<1$
$P_2\left(\dfrac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2},\dfrac{N_2(\sigma_2-1)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right)$	$\dfrac{r_1(1-\sigma_1)+r_2(\sigma_2-1)}{1-\sigma_1\sigma_2}$	$\dfrac{r_1r_2(1-\sigma_1)(\sigma_2-1)}{1-\sigma_1\sigma_2}$	$\sigma_1<1,\sigma_2>1,$ $\sigma_1\sigma_2<1$
$P_3(0,0)$	$-r_1+r_2$	$-r_1r_2$	不稳定

P_2是甲乙相互依存而共生的平衡点

平衡点P_2稳定性的相轨线

$$P_2\left(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2},\frac{N_2(\sigma_2-1)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right)$$

$$\dot{x}_1(t_1)=r_1x_1\left(1-\frac{x_1}{N_1}+\sigma_1\frac{x_2}{N_2}\right)=r_1x_1\varphi(x_1,x_2)$$

$$\dot{x}_2(t)=r_2x_2\left(-1+\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}\right)=r_2x_2\psi(x_1,x_2)$$

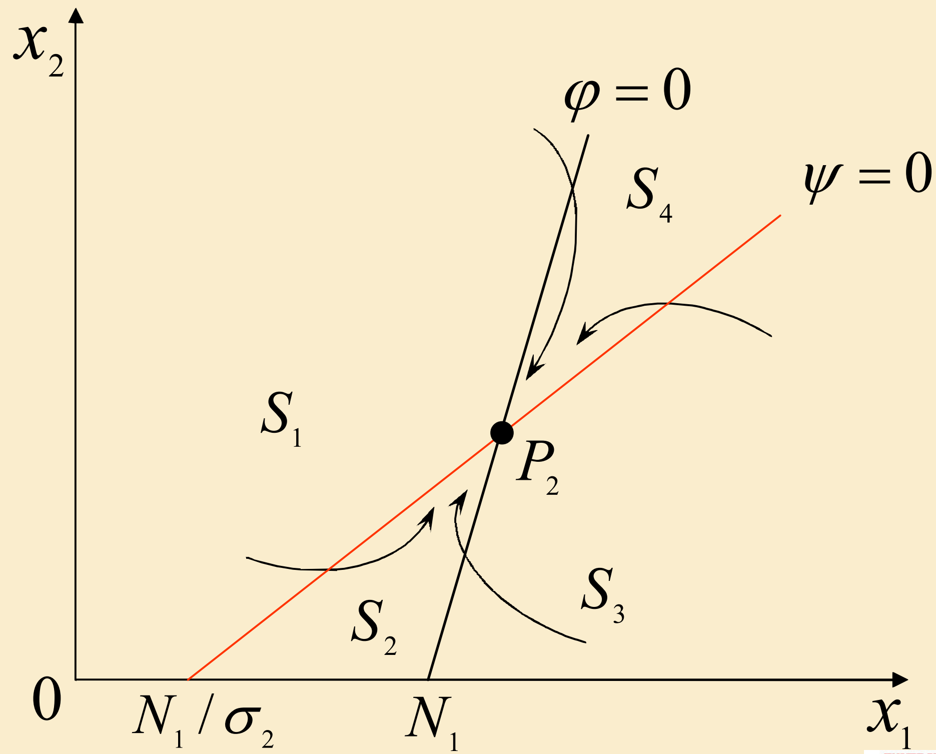
$\sigma_1<1,\ \sigma_2>1,\ \sigma_1\sigma_2<1$

$S_1:\dot{x}_1>0,\ \dot{x}_2<0;$

$S_2:\dot{x}_1>0,\ \dot{x}_2>0;$

$S_3:\dot{x}_1<0,\ \dot{x}_2>0;$

$S_4:\dot{x}_1<0,\ \dot{x}_2<0.$



P_2稳定

结果解释

甲可以独自生存

$$\dot{x}_1(t_1)=r_1x_1\left(1-\frac{x_1}{N_1}+\sigma_1\frac{x_2}{N_2}\right)$$

乙不能独立生存

$$\dot{x}_2(t)=r_2x_2\left(-1+\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}\right)$$

$$P_2\left(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2},\frac{N_2(\sigma_2-1)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right)$$

P_2稳定条件：
$\sigma_1<1,\ \sigma_2>1,\ \sigma_1\sigma_2<1$

$\sigma_2>1$ ~ 甲必须为乙提供足够的食物——甲为乙提供的食物是乙消耗的 σ_2 倍

$\sigma_1\sigma_2<1$ ~ $\sigma_2>1$ 前提下P_2存在的必要条件

$\sigma_1<1$ ~ $\sigma_2>1,\ \sigma_1\sigma_2<1$ 的需要，且σ_1必须足够小，才能在$\sigma_2>1$条件下使$\sigma_1\sigma_2<1$ 成立

两种群模型的几种形式

相互竞争

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1\left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}\right) \quad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2\left(1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\right)$$

相互依存

$$\dot{x}_1(t_1) = r_1 x_1\left(\pm 1 - \frac{x_1}{N_1} + \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}\right) \quad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2\left(\pm 1 + \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\right)$$

弱肉强食

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1\left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}\right) \quad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2\left(-1 + \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\right)$$

其他

- 流言的传播
- 生化武器的研制　等…