第四章数学规划模型

数学规划模型

- 实际问题中的优化模型

$$
\begin{aligned}
Min(Max)z = f(x), x = (x_1, \cdots x_n)^T \\
s.t. g_i(x) \le 0, i = 1, 2, \cdots m
\end{aligned}
$$

- x-决策变量,f(x)-目标函数,$g_i(x) \le 0$-约束条件
- 多元函数条件极值
- 决策变量个数n和约束条件个数m较大
- 最优解在可行域的边界上取得
- 数学规划:线性规划，非线性规划，整数规划
- 重点在模型的建立和结果的分析

奶制品的生产与销售

- 工厂级：根据外部需求和内部设备、人力、原料等条件，以最大利润为目标制订产品生产计划；
- 车间级：根据生产计划、工艺流程、资源约束及费用参数等，以最小成本为目标制订生产批量计划。
- 若短时间内外部需求和内部资源等不随时间变化，可制订单阶段生产计划，否则应制订多阶段生产计划。
- 本节课题:单阶段生产计划

例1 加工奶制品的生产计划

- 1桶牛奶,12小时,3公斤A1,获利24元/公斤
- 1桶牛奶,8小时,4公斤A2,获利16元/公斤
- 每天：50桶牛奶,时间480小时,至多加工100公斤A1
- 制订生产计划，使每天获利最大
- 35元可买到1桶牛奶，买吗？若买，每天最多买多少？
- 可聘用临时工人，付出的工资最多是每小时几元?
- A1的获利增加到30元/公斤，应否改变生产计划？

奶制品的生产与销售

- 决策变量:x1桶牛奶生产A1,x2桶牛奶生产A2
- 目标函数:获利24*3x_1,获利16*4x_2
- 每天获利$Max \quad z = 72x_1 + 64x_2$
- 线性规划模型(LP),约束条件:
  - 原料供应:$x_1 + x_2 \leq 50$
  - 劳动时间$12x_1 + 8x_2 \leq 480$
  - 加工能力$3x_1 \leq 100$
  - 非负约束$x_1, x_2 \geq 0$

模型求解图解法

- $x_1 + x_2 \leq 50 \Rightarrow l_1 : x_1 + x_2 = 50$
- $12x_1 + 8x_2 \leq 480 \Rightarrow l_2 : 12x_1 + 8x_2 = 480$
- $3x_1 \leq 100 \Rightarrow l_3 : 3x_1 = 100$
- $x_1, x_2 \geq 0 \Rightarrow l_4 : x_1 = 0, \;\; l_5 : x_2 = 0$
- 目标函数$Max \quad z = 72x_1 + 64x_2$ z=c (常数) 等值线
- 目标函数和约束条件是线性函数可行域为直线段围成的凸多边形目标函数的等值线为直线最优解一定在凸多边形的某个顶点取得。
- 在B(20,30)点得到最优解

模型求解图解法

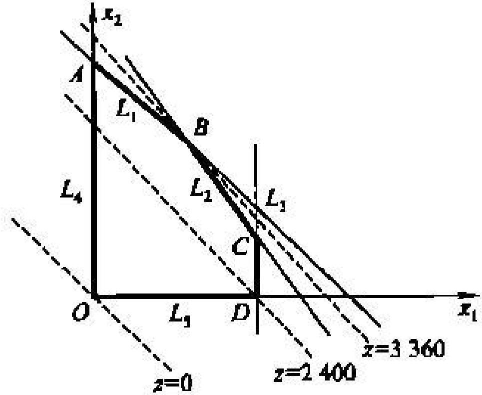


图 1　模型的图解法

模型求解软件实现

- max 72x1+64x2
  st 2） $x1 + x2 < 50$
  3） $12x1 + 8x2 < 480$
  4） $3x1 < 100$ end
- OBJECTIVE FUNCTION VALUE
  1) 3360.000
  VARIABLE, VALUE
  X1 ，20.00000
  X2 ，30.00000
- 20桶牛奶生产A1, 30桶生产A2，利润3360元。

结果解释

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0	48
3)	0	2
4)	40	0
- 原料无剩余
- 时间无剩余
- 加工能力剩余40
- “资源”剩余为零的约束为紧约束（有效约束）

结果解释

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0	48
3)	0	2
4)	40	0
- 最优解下“资源”增加1单位时“效益”的增量
- 原料增加1单位，利润增长48
- 时间增加1单位，利润增长2
- 加工能力增长不影响利润
- 35元可买到1桶牛奶，要买吗？聘用临时工人付出的工资最多每小时几元？
- $35 < 48$，应该买！临时工人付出的工资最多2元！

最优解不变时目标函数系数允许变化范围

VARIABLE	CURRENT	INCREASE	DECREASE
X1	72	24	8
X2	64	8	16
- x1系数范围(64,96), x2系数范围(48,72)
- x1系数由24*3=72增加为30*3=90，在允许范围内
- A1获利增加到30元/千克，应否改变生产计划
- 不变！

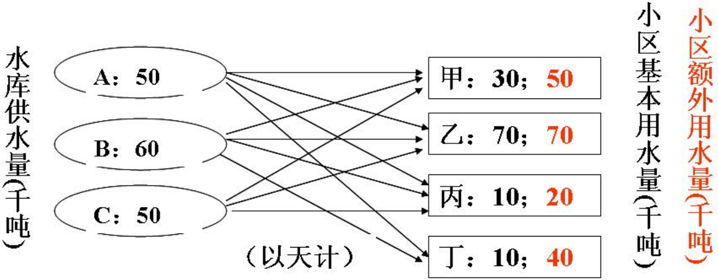
影子价格有意义时约束右端的允许变化范围

ROW	CURRENT	INCREASE	DECREASE
2	50	10	6.67
3	480	53.3	80
4	100	INFINITY	40
- 原料最多增加10 ,时间最多增加53
- 35元可买到1桶牛奶，每天最多买多少？
- 最多买10桶!

运输问题

- 生产、生活物资从若干供应点运送到一些需求点，怎样安排输送方案使运费最小，或利润最大；
- 各种类型的货物装箱，由于受体积、重量等限制，如何搭配装载，使获利最高，或装箱数量最少。

例1 自来水输送


水库供水量(千吨)
A：50
B：60
C：50
(以天计)
甲：30；50
乙：70；70
丙：10；20
丁：10；40
小区基本用水量(千吨)
小区额外用水量(千吨)

例1 自来水输送

元/千吨	甲	乙	丙	丁
A	160	130	220	170
B	140	130	190	150
C	190	200	230	/

例1 自来水输送

- 收入：900元/千吨,支出:引水管理费，其他费用:450元/千吨
- 应如何分配水库供水量，公司才能获利最多？
- 若水库供水量都提高一倍，公司利润可增加到多少？

问题分析

- 总供水量：160 < 总需求量：120+180=300
- 收入：900元/千吨,总收入900*160=144,000(元)
- 支出,引水管理费,其他费用:450元/千吨,其他支出450*160=72,000(元)
- 确定送水方案使利润最大,使引水管理费最小

模型建立

- 确定3个水库向4个小区的供水量
- 决策变量:水库i 向j 区的日供水量为$x_{ij}(x_{34}=0)$
- 目标函数

$$Min \quad Z = 160x_{11} + 130x_{12} + 220x_{13} + 170x_{14}$$
$$+140x_{21} + 130x_{22} + 190x_{23} + 150x_{24} + 190x_{31} + 200x_{32} + 230x_{33}$$

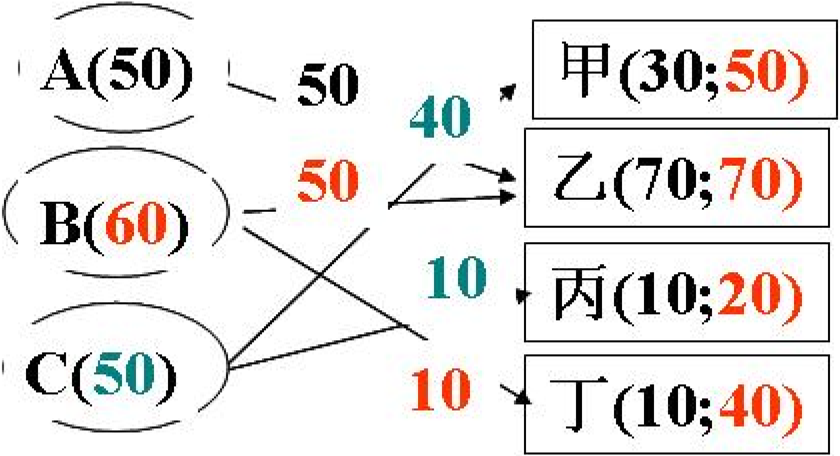
- 供应限制

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 50 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 60 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} &= 50 \end{aligned}$$

- 需求限制

$$\begin{aligned} 30 \le x_{11} + x_{21} + x_{31} \le 80 \\ 70 \le x_{12} + x_{22} + x_{32} \le 140 \\ 10 \le x_{13} + x_{23} + x_{33} \le 30 \\ 10 \le x_{14} + x_{24} \le 50 \end{aligned}$$

模型求解



模型求解

- 引水管理费24400(元)
- 利润＝总收入-其它费用-引水管理费＝144000-72000-24400 ＝ 47600（元）

问题讨论

- 每个水库最大供水量都提高一倍
- 总供水量(320)>总需求量(300),确定送水方案使利润最大
- 利润= 收入(900) 其它费用(450) 引水管理费

费用转成利润

利润(元/千吨)	甲	乙	丙	丁
A	290	320	230	280
B	310	320	260	300
C	260	250	220	/

问题讨论

- 目标函数

$$Max \quad Z = 290x_{11} + 320x_{12} + 230x_{13} + 280x_{14}$$
$$+310x_{21} + 320x_{22} + 260x_{23} + 300x_{24} + 260x_{31} + 250x_{32} + 220x_{33}$$

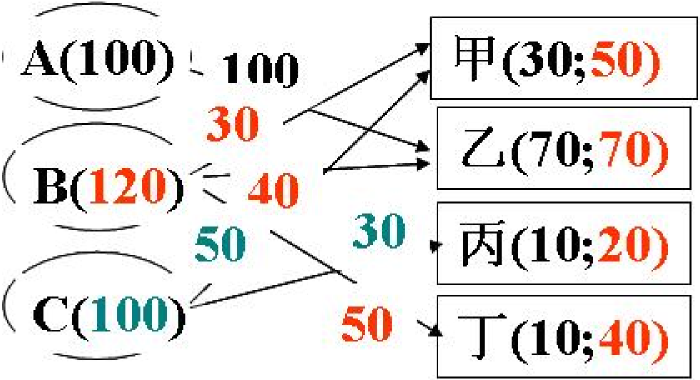
- 供应限制

$$\mathrm{A}: \quad x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 50 \Rightarrow x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 100$$

- B, C 类似处理
- 需求约束可以不变

求解

总利润88700（元）



汽车厂生产详细信息

	小型	中型	大型	现有量
钢材（吨）	1.5	3	5	600
劳动时间（小时）	280	250	400	60000
利润（万元）	2	3	4	

汽车厂生产计划

- 汽车厂生产三种类型的汽车，已知各类型每辆车对钢材、劳动时间的需求，利润及工厂每月的现有量。
- 制订月生产计划，使工厂的利润最大。
- 如果生产某一类型汽车，则至少要生产80辆，那么最优的生产计划应作何改变？

模型建立

- 设每月生产小、中、大型汽车的数量分别为x_1, x_2, x_3
- $$\begin{aligned} & Max \quad z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ & s.\ t. \quad 1.5x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 600 \\ & 280x_1 + 250x_2 + 400x_3 \le 60000 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

模型求解

- 目标函数最优解632.2581
- X1 = 64.516129,X2 = 167.741928
- 结果为小数，怎么办？
- 1）舍去小数：取x1=64，x2=167，算出目标函数值z=629，与LP最优值632.2581相差不大。
- 2）试探：如取x1=65，x2=167；x1=64，x2=168等，计算函数值z，通过比较可能得到更优的解。
- 3）模型中增加条件：x1, x2, x3 均为整数，重新求解。
- 其中方法3一般是最好的。加上整数约束，用lingo可以直接求出结果。

模型求解

- 若生产某类汽车，则至少生产80辆，求生产计划。
- $$\begin{aligned} &Max \quad z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ &s.\ t. \quad 1.5x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 600 \\ &280x_1 + 250x_2 + 400x_3 \leq 60000 \end{aligned}$$
- $x_1, x_2, , x_3 = 0$ 或≥ 80
- 方法1：分解为8个LP子模型其中3个子模型应去掉，然后逐一求解，比较目标函数值，再加上整数约束，得最优解：
- $x_1 = 80 x_2 = 150 x_3 = 0$，最优值z=610

方法2：引入0-1变量，化为整数规划

- $x_1 = 0$ 或$\geq 80 \Rightarrow x_1 \leq My_1$，$x_1 \geq 80y_1$，$y_1 \in \{0, 1\}$
- M为大的正数，可取1000
- x_2, x_3 类似
- 加上这些条件再求解，最优解同前

方法3：化为非线性规划

- $x_1 = 0$ 或$\geq 80 \Rightarrow x_1(x_1 - 80) \geq 0$
- x_2, x_3 类似
- 非线性规划（Non- Linear Programming，简记NLP）
- NLP虽然可用现成的数学软件求解(如LINGO, MATLAB)，但是其结果常依赖于初值的选择。

例2 原油采购与加工

- 库存500吨原油A，库存1000吨原油B，汽油甲($A \geq 50\%$)售价4800元/吨,汽油乙($A \geq 60\%$)售价5600元/吨
- 市场上可买到不超过1500吨的原油A：购买量不超过500吨时的单价为10000元/吨；购买量超过500吨但不超过1000吨时，超过500吨的部分8000元/吨；购买量超过1000吨时，超过1000吨的部分6000元/吨。
- 应如何安排原油的采购和加工？

问题分析

- 利润：销售汽油的收入- 购买原油A的支出
- 难点：原油A的购价与购买量的关系较复杂
- 决策变量：原油A的购买量,原油A, B生产汽油甲,乙的数量.购买x,A,B分别用于甲乙的量为$x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$
- 目标函数,利润(千元),c(x)-购买原油A的支出

$$Max \quad z = 4.8(x_{11} + x_{21}) + 5.6(x_{12} + x_{22}) - c(x)$$

- c(x)如何表述?

模型建立

- $c(x)=\begin{cases} 10x(0\le x\le 500) \\ 8x+1000(500\le x\le 1000) \\ 6x+3000(1000\le x\le 1500) \end{cases}$
- 原油供应 $\begin{aligned} & x_{11}+x_{12}\le 500+x \\ & x_{21}+x_{22}\le 1000 \\ & x\le 1500 \end{aligned}$
- 汽油含原油A的比例限制

$$\frac{x_{11}}{x_{11}+x_{21}}\ge 0.5 \Leftrightarrow x_{11}\ge x_{21}$$

$$\frac{x_{12}}{x_{12}+x_{22}}\ge 0.6 \Leftrightarrow 2x_{12}\ge 3x_{22}$$

- 目标函数中c(x)不是线性函数，是非线性规划；
- 对于用分段函数定义的c(x)，一般的非线性规划软件也难以输入和求解；想办法将模型化简，用现成的软件求解。

模型求解方法1

- x_1, x_2, x_3 -以价格10, 8, 6(千元/吨)采购A的吨数$x = x_1 + x_2 + x_3$, $c(x) = 10x_1 + 8x_2 + 6x_3$
- 目标函数

$$Max \quad z = 4.8(x_{11} + x_{21}) + 5.6(x_{12} + x_{22}) - (10x_1 + 8x_2 + 6x_3)$$

- 500吨$\leq x \leq$ 1000吨，超过500吨的8千元/吨
- 只有当以10千元/吨的价格购买x1=500(吨)时，才能以8千元/吨的价格购买x2 $\Rightarrow (x_1 - 500)x_2 = 0$
- 类似的：$(x_2 - 500)x_3 = 0$ 再加上：$0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 500$
- 方法二，方法三大家自己看。

分派问题

- 若干项任务分给一些候选人来完成，每人的专长不同，完成每项任务取得的效益或需要的资源就不同，如何分派任务使获得的总效益最大，或付出的总资源最少。
- 若干种策略供选择，不同的策略得到的收益或付出的成本不同，各个策略之间有相互制约关系，如何在满足一定条件下作出决择，使得收益最大或成本最小。

例1 混合泳接力队的选拔

	甲	乙	丙	丁	戊
蝶泳	1’06”8	57”2	1’18”	1’10”	1’07”4
仰泳	1’15”6	1’06”	1’07”8	1’14”2	1’11”
蛙泳	1’27”	1’06”4	1’24”6	1’09”6	1’23”8
自由泳	58”6	53”	59”4	57”2	1’02”4

例1 混合泳接力队的选拔

- 如何选拔队员组成4*100米混合泳接力队?
- 丁的蛙泳成绩退步到1’15”2；戊的自由泳成绩进步到57”5, 组成接力队的方案是否应该调整?
- 穷举法：组成接力队的方案共有5!=120种。
- 0-1规划模型，c_{ij}(秒)-队员i第j种泳姿的百米成绩

例1 混合泳接力队的选拔

c_{ij}	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5
j=1	66.8	57.2	78	70	67.4
j=2	75.6	66	67.8	74.2	71
j=3	87	66.4	84.6	69.6	83.8
j=4	58.6	53	59.4	57.2	62.4

模型建立

- 若选择队员i参加泳姿j 的比赛，记$x_{ij}=1$，否则记$x_{ij}=0$
- 目标函数

$$Min \quad Z=\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{5}c_{ij}x_{ij}$$

- 约束条件：每人最多入选泳姿之一

$$\sum_{j=1}^{4}x_{ij}\le 1,\quad i=1,\cdots 5$$

- 约束条件：每种泳姿有且只有1人

$$\sum_{i=1}^{5}x_{ij}=1,\quad j=1,\cdots 4$$

例2 选课策略

课号	课名	学分	所属类别	先修课要求
1	微积分	5	数学	
2	线性代数	4	数学	
3	最优化方法	4	数学；运筹学	微积分；线性代数
4	数据结构	3	数学；计算机	计算机编程
5	应用统计	4	数学；运筹学	微积分；线性代数
6	计算机模拟	3	计算机；运筹学	计算机编程
7	计算机编程	2	计算机	
8	预测理论	2	运筹学	应用统计
9	数学实验	3	运筹学；计算机	微积分；线性代数

例2 选课策略

- 要求至少选两门数学课、三门运筹学课和两门计算机课
- 为了选修课程门数最少，应学习哪些课程?
- 选修课程最少，且学分尽量多，应学习哪些课程?

例2 选课策略

课号	课名	先修课要求
1	微积分	
2	线性代数	
3	最优化方法	微积分；线性代数
4	数据结构	计算机编程
5	应用统计	微积分；线性代数
6	计算机模拟	计算机编程
7	计算机编程	
8	预测理论	应用统计
9	数学实验	微积分；线性代数

0-1规划模型

- 决策变量：x_i=1 -选修课号i 的课程（x_i=0 -不选）
- 目标函数:选修课程总数最少$\Rightarrow Min \quad Z=\sum_{i=1}^{9} x_i$
- 约束条件最少2门数学课$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5\geq 2$
- 约束条件3门运筹学课，$x_3+x_5+x_6+x_8+x_9\geq 3$
- 约束条件2门计算机课$x_4+x_6+x_7+x_9\geq 2$

先修课程要求

课号	课名	先修课要求
* 1	微积分	
* 2	线性代数	
* 3	最优化方法	微积分；线性代数
4	数据结构	计算机编程
5	应用统计	微积分；线性代数
* 6	计算机模拟	计算机编程
* 7	计算机编程	
8	预测理论	应用统计
* 9	数学实验	微积分；线性代数

先修课程要求

- x_3=1必有$x_1 = x_2$ =1 $\Rightarrow x_3 \le x_1, x_3 \le x_2 \Rightarrow 2x_3 - x_1 - x_2 \le 0$
- 类似的有:

$$
\begin{aligned}
x_4 - x_7 &\le 0 \\
2x_5 - x_1 - x_2 &\le 0 \\
2x_5 - x_1 - x_2 &\le 0 \\
x_6 - x_7 &\le 0 \\
x_8 - x_5 &\le 0 \\
2x_9 - x_1 - x_2 &\le 0
\end{aligned}
$$

- 最优解：$x_1 = x_2 = x_3 = x_6 = x_7 = x_9 = 1$，其它为0；6门课程，总学分21

选修课程最少，学分尽量多，应学习哪些课程？

- 课程最少 $Min \quad Z = \sum_{i=1}^{9} x_i$
- 学分最多 $Max \quad W = 5x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 3x_6 + 2x_7 + 2x_8 + 3x_9$
- 两目标(多目标)规划 $Min \{Z, -W\}$
- 多目标优化的处理方法：化成单目标优化。
- 以课程最少为目标，不管学分多少。最优解如上，6门课程，总学分21 。
- 以学分最多为目标，不管课程多少。最优解显然是选修所有9门课程。

多目标规划

- 在课程最少的前提下以学分最多为目标。
- 增加约束$\sum_{i=1}^{9} x_i = 6$，以学分最多为目标求解
- 最优解：$x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = x_7 = x_9 = 1$，其它为0；总学分由21增至22。
- 注意：最优解不唯一！可将$x_9 = 1$ 易为$x_6 = 1$

多目标规划

- 对学分数和课程数加权形成一个目标，如三七开。
- $Min \quad Y = \lambda_1 Z - \lambda_2 W = 0.7Z - 0.3W$
- 最优解：$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = x_9 = 1$，其它为0；总学分28。
- λ 值可以调整，前面的几种情况都可以根据调整得到。