

第二章初等模型

1 公平的席位分配

- 具体问题
- 衡量公平分配的数量指标
- Q值法
- Q值法重新分配21个席位

2 本章其他部分的说明

公平的席位分配

- 三个系学生共200名（甲系100，乙系60，丙系40），代表会议共20席，按比例分配，三个系分别为10，6，4席。
- 现因学生转系，三系人数为103, 63, 34, 问20席如何分配。
- 若增加为21席，又如何分配。

系别	学生	比例	结果1	结果2	结果3	结果4
甲	103	51.5	10.3	10	10.8	11
乙	63	31.5	6.3	6	6.6	7
丙	34	17.0	3.4	4	3.6	3
总和	200	100.0	20.0	20	21	21

- 对丙系公平吗?

衡量公平分配的数量指标

- | | 人数 | 席位 |
|----|-------|-------|
| A方 | p_1 | n_1 |
| B方 | p_2 | n_2 |
- 当 $p_1/n_1 = p_2/n_2$ 时, 分配公平; 若 $p_1/n_1 > p_2/n_2$, 对A不公平
- $p_1/n_1 - p_2/n_2$ 对A的绝对不公平度
- $p_1=150, n_1=10, p_1/n_1=15$ $p_2=100, n_2=10, p_2/n_2=10$
- $p_1=1050, n_1=10, p_1/n_1=105$ $p_2=1000, n_2=10, p_2/n_2=100$
- 虽二者的绝对不公平度相同; 但后者对A的不公平程度已大大降低!

“公平”分配方法

- 将绝对度量改为相对度量
- 若 $p_1/n_1 > p_2/n_2$, 定义对A的相对不公平度

$$\frac{p_1/n_1 - p_2/n_2}{p_2/n_2} = r_A(n_1, n_2)$$

- 类似地定义 $r_B(n_1, n_2)$
- 公平分配方案应使 r_A, r_B 尽量小
- 将一次性的席位分配转化为动态的席位分配, 即
- 设A, B已分别有 n_1, n_2 席, 若增加1席, 问应分给A, 还是B

“公平”分配方法

- 不妨设分配开始时 $p_1/n_1 > p_2/n_2$, 即对A不公平.应讨论以下几种情况
 - 1)若 $p_1/(n_1+1) > p_2/n_2$, 则这席应给A
 - 2)若 $p_1/(n_1+1) < p_2/n_2$,应计算 $r_B(n_1+1, n_2)$
 - 3)若 $p_1/n_1 > p_2/(n_2+1)$, 应计算 $r_A(n_1, n_2+1)$
- 若 $r_B(n_1+1, n_2) < r_A(n_1, n_2+1)$, 则这席应给
- 若 $r_B(n_1+1, n_2) > r_A(n_1, n_2+1)$, 则这席应给 B
- 根据 r_A, r_B 的定义, 我们有: 若

$$\frac{p_2^2}{n_2(n_2+1)} < \frac{p_1^2}{n_1(n_1+1)}$$

这席给A, 否则给B

Q值法

- 定义 $Q_i = \frac{p_i^2}{n_i(n_i+1)}$, $i = 1, 2$, 该席给Q值较大的一方
- 推广到m方分配席位, 计算:

$$Q_i = \frac{p_i^2}{n_i(n_i + 1)}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

- 该席给Q值最大的一方。这种方法我们称为Q值法。

三系用Q值方法重新分配21个席位

- 按人数比例的整数部分已将19席分配完毕
- 用Q值方法分配第20席和第21席
- 第20席

$$Q_1 = \frac{103^2}{10 \times 11} = 96.4, \quad Q_2 = \frac{63^2}{6 \times 7} = 94.5, \quad Q_3 = \frac{34^2}{3 \times 4} = 96.3$$

分配给甲

- $Q_1 = \frac{103^2}{11 \times 12} = 80.4$, Q_2 , Q_3 同上, 分配给丙
- 分配结果: 甲系11席, 乙系6席, 丙系4席。公平吗?
- 课本上有进一步的讨论, 有兴趣的同学看看。数学模型中在原有的模型基础进一步很关键, 这也是创新能力的体现

本章其他部分的说明

- 2.4 汽车刹车距离； 2.9 量纲分析与无量纲化。有兴趣的同学可以看看。其他都可以不看。