

# 钢管和易拉罐下料

## 原料下料问题

生产中通过切割、剪裁、冲压等手段，将原材料加工成所需大小

按照工艺要求，确定下料方案，使所用材料最省，或利润最大

## 例1 钢管下料

客户需求



原料钢管: 每根19米

4米50根

6米20根

8米15根

问题1. 如何下料最节省? 节省的标准是什么?

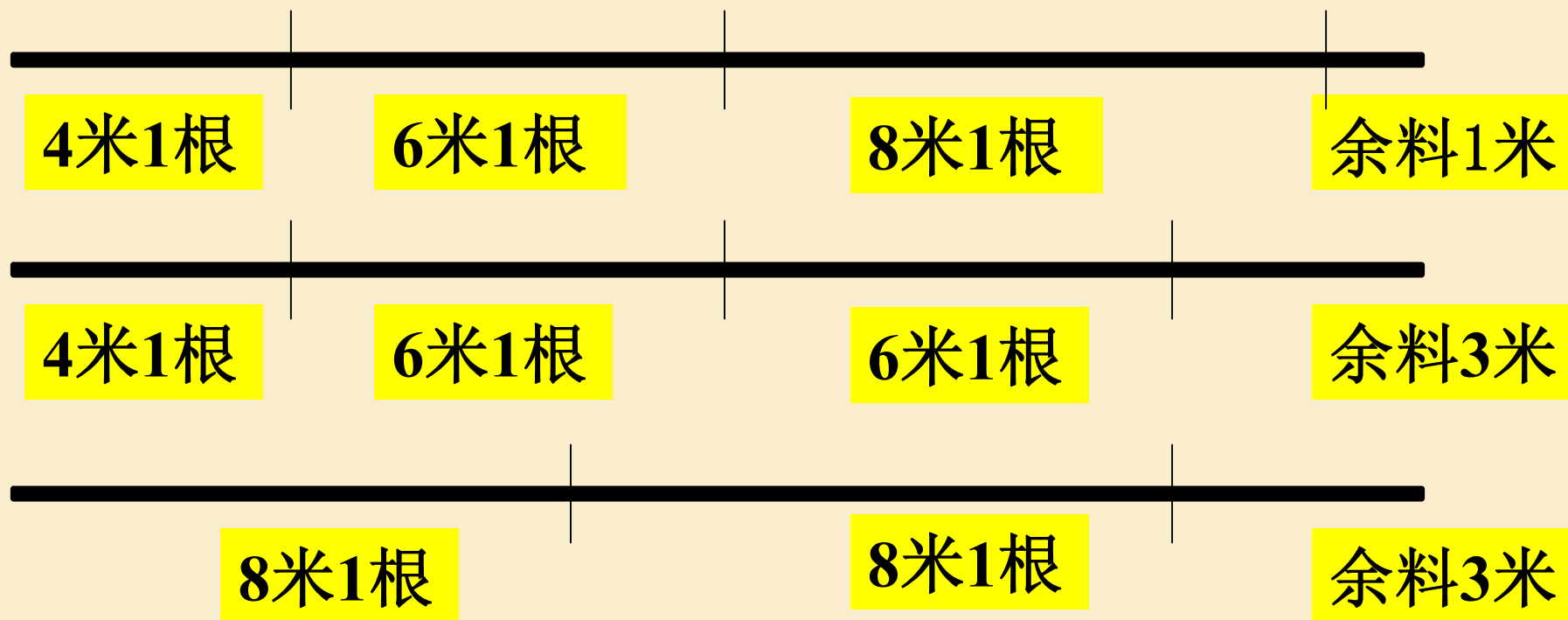
问题2. 客户增加需求: 5米10根

由于采用不同切割模式太多, 会增加生产和管理成本, 规定切割模式不能超过3种。如何下料最节省?

## 钢管下料

## 切割模式

按照客户需要在一根原料钢管上安排切割的一种组合。



合理切割模式的余料应小于客户需要钢管的最小尺寸

## 钢管下料问题1

## 合理切割模式

模式	4米钢管根数	6米钢管根数	8米钢管根数	余料(米)
1	4	0	0	3
2	3	1	0	1
3	2	0	1	3
4	1	2	0	3
5	1	1	1	1
6	0	3	0	1
7	0	0	2	3

为满足客户要求，按照哪些种合理模式，每种模式切割多少根原料钢管，最为节省？

两种  
标准

1. 原料钢管剩余总余量最小
2. 所用原料钢管总根数最少

决策  
变量 $x_i$ ~按第 $i$ 种模式切割的原料钢管根数( $i=1,2,\dots,7$ )目标1 (总余量)  $Min Z_1 = 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 + 3x_7$ 

模式	4米 根数	6米 根数	8米 根数	余料
1	4	0	0	3
2	3	1	0	1
3	2	0	1	3
4	1	2	0	3
5	1	1	1	1
6	0	3	0	1
7	0	0	2	3
需求	50	20	15	

约束

满足需求

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \geq 50$$

$$x_2 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 \geq 20$$

$$x_3 + x_5 + 2x_7 \geq 15$$

整数约束:  $x_i$  为整数最优解:  $x_2=12, x_5=15$ ,  
其余为0;

最优值: 27。

按模式2切割12根, 按模式5切割15根, 余料27米

# 钢管下料问题1

目标2（总根数）  $\text{Min } Z_2 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$

约束条件不变

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \geq 50$$

$$x_2 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 \geq 20$$

$$x_3 + x_5 + 2x_7 \geq 15$$

$x_i$  为整数

最优解：  $x_2=15$ ,  
 $x_5=5$ ,  $x_7=5$ ,  
 其余为0;  
 最优值： 25。

按模式2切割15根，  
 按模式5切割5根，  
 按模式7切割5根，  
 共25根，余料35米

与目标1的结果“共切割27根，  
 余料27米”相比

余料增加8米，但减少了2根

当余料没有用处时，通常以总根数最少为目标

## 钢管下料问题2

增加一种需求：5米10根；切割模式不超过3种。

现有4种需求：4米50根，5米10根，6米20根，8米15根，用枚举法确定合理切割模式，过于复杂。

对大规模问题，用模型的约束条件界定合理模式

### 决策变量

$x_i$  ~ 按第 $i$ 种模式切割的原料钢管根数 ( $i=1,2,3$ )

$r_{1i}, r_{2i}, r_{3i}, r_{4i}$  ~ 第 $i$ 种切割模式下，每根原料钢管生产4米、5米、6米和8米长的钢管的数量

# 钢管下料问题2

目标函数（总根数）  $\text{Min } x_1 + x_2 + x_3$

约束  
条件

满足需求

模式合理：每根  
余料不超过3米

$$r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + r_{13}x_3 \geq 50$$

$$16 \leq 4r_{11} + 5r_{21} + 6r_{31} + 8r_{41} \leq 19$$

$$r_{21}x_1 + r_{22}x_2 + r_{23}x_3 \geq 10$$

$$16 \leq 4r_{12} + 5r_{22} + 6r_{32} + 8r_{42} \leq 19$$

$$r_{31}x_1 + r_{32}x_2 + r_{33}x_3 \geq 20$$

$$16 \leq 4r_{13} + 5r_{23} + 6r_{33} + 8r_{43} \leq 19$$

$$r_{41}x_1 + r_{42}x_2 + r_{43}x_3 \geq 15$$

整数约束：  $x_i, r_{1i}, r_{2i}, r_{3i}, r_{4i}$  ( $i=1,2,3$ ) 为整数

整数非线性规划模型



## 钢管下料问题2

增加约束，缩小可行域，便于求解

需求：4米50根，5米10根，6米20根，8米15根

每根原料钢管长19米

原料钢管总根数下界：

$$\left\lceil \frac{4 \times 50 + 5 \times 10 + 6 \times 20 + 8 \times 15}{19} \right\rceil = 26$$

特殊生产计划：对每根原料钢管

模式1：切割成4根4米钢管，需13根；

模式2：切割成1根5米和2根6米钢管，需10根；

模式3：切割成2根8米钢管，需8根。

原料钢管总根数上界：13+10+8=31

$$26 \leq x_1 + x_2 + x_3 \leq 31$$

模式排列顺序可任定

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3$$



## LINGO求解整数非线性规划模型

Local optimal solution found at  
iteration: 12211

Objective value: 28.00000

Variable	Value	Reduced Cost
X1	10.00000	0.000000
X2	10.00000	2.000000
X3	8.000000	1.000000
R11	3.000000	0.000000
R12	2.000000	0.000000
R13	0.000000	0.000000
R21	0.000000	0.000000
R22	1.000000	0.000000
R23	0.000000	0.000000
R31	1.000000	0.000000
R32	1.000000	0.000000
R33	0.000000	0.000000
R41	0.000000	0.000000
R42	0.000000	0.000000
R43	2.000000	0.000000

模式1：每根原料钢管切割成3根4米和1根6米钢管，共10根；

模式2：每根原料钢管切割成2根4米、1根5米和1根6米钢管，共10根；

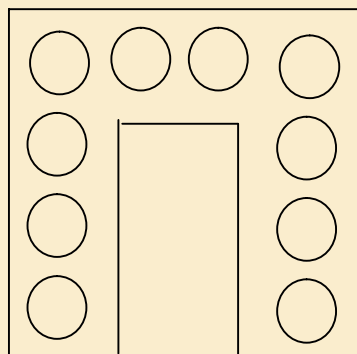
模式3：每根原料钢管切割成2根8米钢管，共8根。

原料钢管总根数为28根。

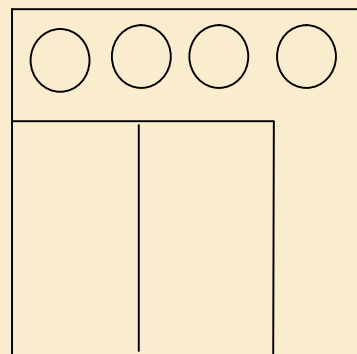
## 例2 易拉罐下料

板材规格1:  
正方形, 边长  
24cm, 5万张。

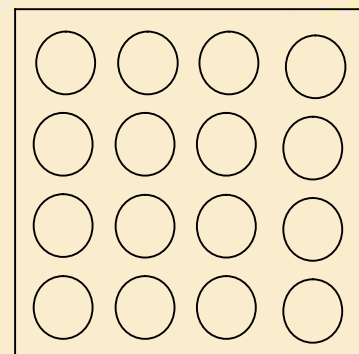
板材规格2:  
长方形,  
32×28cm,  
2万张。



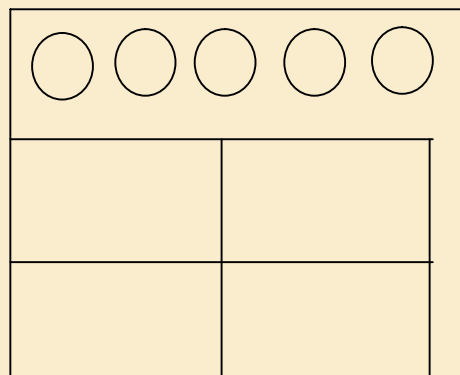
模式1: 1.5秒



模式2: 2秒



模式3: 1秒



模式4: 3秒



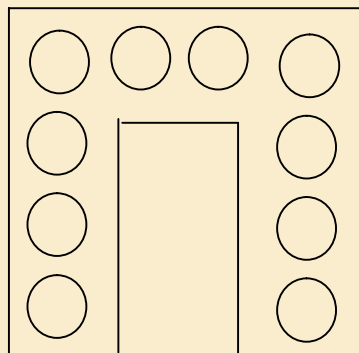
罐身高10cm,  
上盖、下底直  
径均5cm。

每周工作40小时, 每只易拉罐利润0.10元, 原料余料损失0.001元 /  $\text{cm}^2$  (不能装配的罐身、盖、底也是余料) 如何安排每周生产?

## 问题分析

## 计算各种模式下的余料损失

模式1:  
正方形  
边长24cm



上、下底直径 $d=5\text{cm}$ ,  
罐身高 $h=10\text{cm}$ 。

$$\text{模式1 余料损失 } 24^2 - 10 \times \pi d^2 / 4 - \pi d h = 222.6 \text{ cm}^2$$

	罐身个数	底、盖 个数	余料损失 ( $\text{cm}^2$ )	冲压时间 (秒)
模式1	1	10	222.6	1.5
模式2	2	4	183.3	2
模式3	0	16	261.8	1
模式4	4	5	169.5	3

## 问题分析

目标：易拉罐利润扣除原料余料损失后的净利润最大

注意：不能装配的罐身、上下底也是余料

约束：每周工作时间不超过40小时；

原料数量：规格1（模式1~3）5万张，

规格2（模式4）2万张；

罐身和底、盖的配套组装。

## 模型建立

$x_i$  ~ 按照第 $i$ 种模式的生产张数 ( $i=1,2,3,4$ )；

决策变量  $y_1$  ~ 一周生产的易拉罐个数；

$y_2$  ~ 不配套的罐身个数；

$y_3$  ~ 不配套的底、盖个数。

## 模型建立

$y_1 \sim$  易拉罐个数;  $y_2 \sim$  不配套的罐身;  
 $y_3 \sim$  不配套的底、盖。

产量	余料	时间
$x_1$	222.6	1.5
$x_2$	183.3	2
$x_3$	261.8	1
$x_4$	169.5	3

每只易拉罐利润0.10元,

余料损失0.001元 /  $\text{cm}^2$

罐身面积  $\pi dh = 157.1 \text{ cm}^2$

底盖面积  $\pi d^2/4 = 19.6 \text{ cm}^2$

## 目标

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & 0.1y_1 - 0.001(222.6x_1 + 183.3x_2 \\ & + 261.8x_3 + 169.5x_4 + 157.1y_2 + 19.6y_3) \end{aligned}$$

## 约束条件

## 时间约束

$$1.5x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 144000 \quad (40\text{小时})$$

## 原料约束

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 50000, \quad x_4 \leq 20000$$

## 约束条件

$y_1$  ~ 易拉罐个数;  $y_2$  ~ 不配套的罐身;  
 $y_3$  ~ 不配套的底、盖。

产量	罐身	底、盖
$x_1$	1	10
$x_2$	2	4
$x_3$	0	16
$x_4$	4	5

## 配套约束

$$y_2 = x_1 + 2x_2 + 4x_4 - y_1$$

$$y_3 = 10x_1 + 4x_2 + 16x_3 + 5x_4 - 2y_1$$

$$y_1 = \min \{x_1 + 2x_2 + 4x_4, (10x_1 + 4x_2 + 16x_3 + 5x_4) / 2\}$$

$$\Leftrightarrow y_1 \leq x_1 + 2x_2 + 4x_4, \quad y_1 \leq (10x_1 + 4x_2 + 16x_3 + 5x_4) / 2$$

虽然 $x_i$ 和 $y_1, y_2, y_3$ 应是整数, 但是因生产量很大, 可以把它们看成实数, 从而用线性规划模型处理。

# 模型求解

**LINDO**发出警告信息：“数据之间的数量级差别太大，建议进行预处理，缩小数据之间的差别”

将所有决策变量扩大**10000**倍 ( $x_i \sim$ 万张,  $y_i \sim$ 万件)

$$\Rightarrow 1.5x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 14.4, \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 5, \quad x_4 \leq 2$$

## OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 0.4298337

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
Y1	16.025000	0.000000
X1	0.000000	0.000050
X2	4.012500	0.000000
X3	0.375000	0.000000
X4	2.000000	0.000000
Y2	0.000000	0.223331
Y3	0.000000	0.036484

模式2生产40125张，  
模式3生产3750张，  
模式4生产20000张，  
共产易拉罐160250个  
(罐身和底, 盖无剩余)，  
净利润为4298元



# 下料问题的建模

- 确定下料模式
- 构造优化模型

## 一维问题（如钢管下料）

规格不太多，可**枚举**下料模式，建立整数线性规划模型，否则要构造整数非线性规划模型，求解困难，可用**缩小可行域**的方法进行化简，但要保证最优解的存在。

## 二维问题（如易拉罐下料）

具体问题具体分析（比较复杂）

# 实用下料问题

“下料问题(cutting stock problem)”是把相同形状的一些原材料分割加工成若干个不同规格大小的零件的问题，此类问题在工程技术和工业生产中有着重要和广泛的应用。这里的“实用下料问题”则是在某企业的实际条件限制下的单一材料的下料问题。

现考虑单一原材料下料问题。设这种原材料呈长方形，长度为 $L$ ，宽度为 $W$ ，现在需要将一批这种长方形原料分割成 $m$ 种规格的零件，所有零件的厚度均与原材料一致，但长度和宽度分别为 $(l_1, w_1), \dots, (l_m, w_m)$ ，其中 $w_i < l_i < L, w_i < W, i = 1, \dots, m$ 。  $m$ 种零件的需求量分别为 $n_1, \dots, n_m$ 。下料时，零件的边必须分别和原材料的边平行。这类问题在工程上通常简称为二维下料问题。特别当所有零件的宽度均与原材料相等，即 $w_i = W, i = 1, \dots, m$ ，则问题称为一维下料问题。

一个好的下料方案首先应该使原材料的利用率最大，从而减少损失，降低成本，提高经济效益。其次要求所采用的不同的下料方式尽可能少，即希望用最少的下料方式来完成的任务。因为在生产中转换下料方式需要费用和时间，既提高成本，又降低效率。此外，每种零件有各自的交货时间，每天下料的数量受到企业生产能力的限制。因此实用下料问题的目标是在生产能力容许的条件下，以最少数量的原材料，尽可能按时完成需求任务，同时下料方式数也尽量地小。请你们为某企业考虑下面两个问题。