第六章稳定性模型

稳定性模型

- 对象仍是动态过程，而建模目的是研究时间充分长以后过程的变化趋势　　平衡状态是否稳定。
- 不求解微分方程，而是用微分方程稳定性理论研究平衡状态的稳定性。

背景

- 再生资源（渔业、林业等）与非再生资源（矿业等）
- 再生资源应适度开发　　在持续稳产前提下实现最大产量或最佳效益。

问题及分析

- 在捕捞量稳定的条件下，如何控制捕捞使产量最大或效益最佳。
- 如果使捕捞量等于自然增长量，渔场鱼量将保持不变，则捕捞量稳定。
- $x(t)$ 渔场鱼量

模型建立

- 无捕捞时鱼的自然增长服从Logistic规律
- $$\dot{x}(t) = f(x) = rx(1 - \frac{x}{N})$$
- r~固有增长率, N~最大鱼量
- 单位时间捕捞量与渔场鱼量成正比
- h(x)=Ex, E 捕捞强度

模型建立

- $$F(x) = f(x) - h(x)$$
- 捕捞情况下渔场鱼量满足
$$\dot{x}(t) = F(x) = rx(1 - \frac{x}{N}) - Ex$$
- 不需要求解x(t), 只需知道x(t)稳定的条件

一阶微分方程的平衡点及其稳定性

- $\dot{x} = F(x)$ (1) 一阶非线性（自治）方程
- F(x)=0的根x_0 -微分方程的平衡点$\dot{x}\,|_{x=x_0} = 0 \Rightarrow x \equiv x_0$
- 设x(t)是方程的解，若从x0 某邻域的任一初值出发，都有$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0$, 称$x_0$是方程(1)的稳定平衡点
- 不求x(t), 判断x0稳定性的方法　　直接法
- (1)的近似线性方程$\dot{x} = F'(x_0)(x - x_0)$ (2)
- $F'(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ 稳定对（2），（1）$F'(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ 不稳定对（2），（1）

产量模型

- $\dot{x}(t) = F(x) = rx(1 - \frac{x}{N}) - Ex$
- $F(x) = 0, x_0 = N(1 - \frac{E}{r}), x_1 = 0$
- 稳定性判断$F'(x_0) = E - r, \quad F'(x_1) = r - E$
- $E < r \Rightarrow F'(x_0) < 0, F'(x_1) > 0,$ x_0稳定，x_1不稳定
- $E > r \Rightarrow F'(x_0) > 0, F'(x_1) < 0,$$x_0$不稳定，$x_1$稳定
- E-捕捞强度，r-固有增长率

产量模型

- x_0 稳定，可得到稳定产量,x_1 稳定，渔场干枯
- $F(x) = f(x) - h(x)$,
  $f(x) = rx(1 - \frac{x}{N})$,
  $h(x) = Ex$
- $F(x) = 0$ f 与h交点P
- $E < r \Rightarrow x_0$ 稳定
- P的横坐标x_0-平衡点
- 产量最大,$P^*(x_0^* = N/2,\ h_m = rN/4), E^* = h_m/x_0^* = r/2$
- 控制渔场鱼量为最大鱼量的一半

图解法

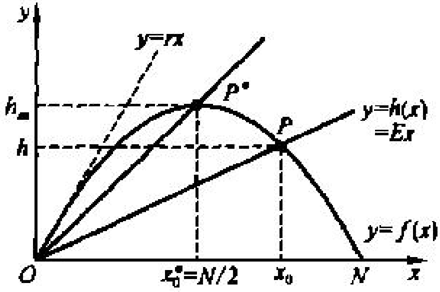


图 1　最大持续产量的图解法

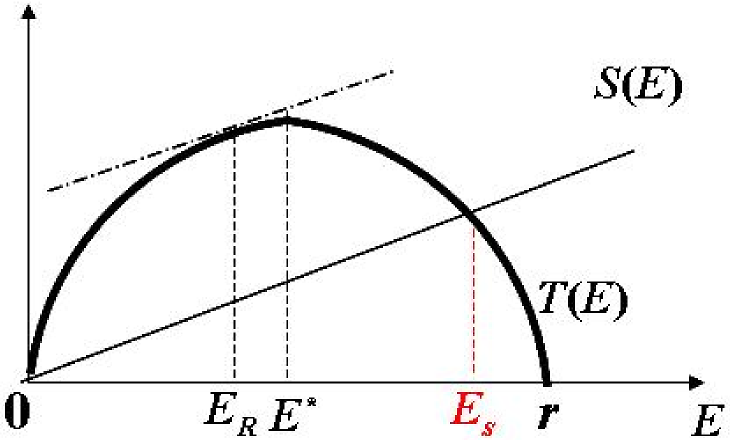
效益模型

- 在捕捞量稳定的条件下，控制捕捞强度使效益最大.
- 假设：鱼销售价格p,单位捕捞强度费用c
- 收入$T = ph(x) = pEx$,支出$S = cE$
- 单位时间利润$R = T - S = pEx - cE$
- 稳定平衡点$x_0 = N(1 - E/r)$
- $R(E) = T(E) - S(E) = pNE(1 - \frac{E}{r}) - cE$
- 求E使R(E)最大$E_R = \frac{r}{2}(1 - \frac{c}{pN}) < E* = \frac{r}{2}$
- 渔场鱼量$x_R = N(1 - \frac{E_R}{r}) = \frac{N}{2} + \frac{c}{2p}, h_R = \frac{rN}{4}(1 - \frac{c^2}{p^2N^2}),$

捕捞过度

- 封闭式捕捞追求利润R(E)最大,$E_R = \frac{r}{2}(1 - \frac{c}{pN})$
- 开放式捕捞只求利润$R(E) > 0$
- $R(E) = T(E) - S(E) = pNE(1 - \frac{E}{r}) - cE$
- 令$R(E) = 0 \Rightarrow E_s = r(1 - \frac{c}{pN})$
- R(E)=0时的捕捞强度(临界强度) $E_s = 2E_R$
- 临界强度下的渔场鱼量$x_s = N(1 - \frac{E_s}{r}) = \frac{c}{p}$
- $p \uparrow, c \downarrow \Rightarrow E_s \uparrow, x_s \downarrow$

捕捞过度



种群的相互竞争

- 一个自然环境中有两个种群生存，它们之间的关系：相互竞争；相互依存；弱肉强食。
- 当两个种群为争夺同一食物来源和生存空间相互竞争时，常见的结局是，竞争力弱的灭绝，竞争力强的达到环境容许的最大容量。
- 建立数学模型描述两个种群相互竞争的过程，分析产生这种结局的条件。

模型假设

- 有甲乙两个种群，它们独自生存时数量变化均服从Logistic规律;
- $\dot{x}_1(t) = r_1 x_1(1 - \frac{x_1}{N_1}), \dot{x}_2(t) = r_2 x_2(1 - \frac{x_2}{N_2})$
- 两种群在一起生存时，乙对甲增长的阻滞作用与乙的数量成正比(?); 甲对乙有同样的作用。
- 模型:$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}\right), \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\right)$
- 对于消耗甲的资源而言，乙(相对于N2)是甲(相对于N1)的σ_1 倍。$\sigma_1 > 1 \Rightarrow$ 对甲增长的阻滞作用，乙大于甲$\Rightarrow$ 乙的竞争力强
- 模型分析: $t \to \infty$时，$x_1(t), x_2(t)$的趋向（平衡点及其稳定性）

(二阶)非线性(自治)方程的平衡点及其稳定性

- $$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f(x_1, x_2)\\ \dot{x}_2(t) &= g(x_1, x_2)\end{aligned}$$
- 平衡点$P_0(x_1^0, x_2^0) \sim$ 代数方程 $\begin{aligned}f(x_1, x_2) = 0\\ g(x_1, x_2) = 0\end{aligned}$ 的根
- 若从P0某邻域的任一初值出发，都有 $\lim\limits_{t\to\infty} x_1(t) = x_1^0$, $\lim\limits_{t\to\infty} x_2(t) = x_2^0$, 称$P_0$是微分方程的稳定平衡点

判断$P_0(x_1^0, x_2^0)$稳定性的方法　　直接法

- (1)的近似线性方程 $\begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = f_{x_1}(x_1^0, x_2^0)(x_1 - x_1^0) + f_{x_2}(x_1^0, x_2^0)(x_2 - x_2^0) \\ \dot{x}_2(t) = g_{x_1}(x_1^0, x_2^0)(x_1 - x_1^0) + g_{x_2}(x_1^0, x_2^0)(x_2 - x_2^0) \end{array}$ (2)
- $A = \begin{bmatrix} f_{x_1} & f_{x_2} \\ g_{x_1} & g_{x_2} \end{bmatrix} \Big|_{P_0}$, $\begin{cases} \lambda^2 + p\lambda + q = 0 \\ p = -(f_{x_1} + g_{x_2})|_{P_0} \\ q = \det A \end{cases}$
- $p > 0 and q > 0$, 平衡点P_0稳定(对2,1)
- $p < 0 or q < 0$, 平衡点P_0稳定(对2,1)

模型分析

- $\dot{x}_1(t) = r_1 x_1\left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1\frac{x_2}{N_2}\right), \dot{x}_2(t) = r_2 x_2\left(1 - \sigma_2\frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\right)$
- $\begin{cases} f(x_1, x_2) \equiv r_1 x_1\left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1\frac{x_2}{N_2}\right) = 0 \\ g(x_1, x_2) \equiv r_2 x_2\left(1 - \sigma_2\frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\right) = 0 \end{cases}$
- 平衡点: $P_1(N_1, 0)$, $P_2(0, N_2)$,
- $P_3\left(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2}, \frac{N_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right), P_4(0, 0)$
- 仅当$\sigma_1, \sigma_2 < 1$或$\sigma_1, \sigma_2 > 1$时, P_3才有意义

平衡点稳定性分析

- $\begin{cases} f(x_1,x_2) \equiv r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}\right) \\ g(x_1,x_2) \equiv r_2 x_2 \left(1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\right) \end{cases}$
- $A = \begin{bmatrix} f_{x1} & f_{x2} \\ g_{x1} & g_{x2} \end{bmatrix} =$
$\begin{bmatrix} r_1 \left(1 - \frac{2x_1}{N_1} - \frac{\sigma_1 x_2}{N_2}\right) & -\frac{r_1 \sigma_1 x_1}{N_2} \\ -\frac{r_2 \sigma_2 x_2}{N_1} & r_2 \left(1 - \frac{\sigma_2 x_1}{N_1} - \frac{2x_2}{N_2}\right) \end{bmatrix}$
- $p = -(f_{x1} + g_{x2})\,|_{p_i}\ ,\quad q = \det A\Big|_{p_i}\ ,\quad i = 1,2,3,4$
- 平衡点P_i 稳定条件: $p > 0 and q > 0$

种群竞争模型的平衡点及稳定性

平衡点	p	q	稳定条件
$p_1(N_1,0)$	$r_1-r_2(1-\sigma_2)$	$-r_1r_2(1-\sigma_2)$	$\sigma_2>1$, $\sigma_1<1$
$p_2(0,N_2)$	$-r_1(1-\sigma_1)+r_2$	$-r_1r_2(1-\sigma_1)$	$\sigma_1>1$, $\sigma_2<1$
$p_3\left(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2},\frac{N_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right)$	$\frac{r_1(1-\sigma_1)+r_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}$	$\frac{r_1r_2(1-\sigma_1)(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}$	$\sigma_1<1$, $\sigma_2<1$
$p_4(0,0)$	$-(r_1+r_2)$	r_1r_2	不稳定

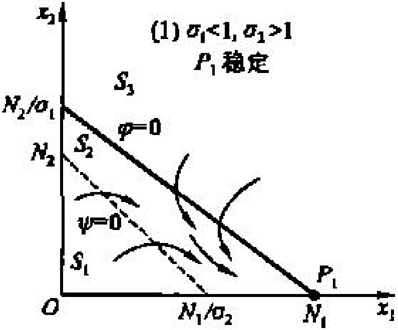
种群竞争模型的平衡点及稳定性

- P_1, P_2 是一个种群存活而另一灭绝的平衡点
- P_3 是两种群共存的平衡点,P_1稳定的条件$\sigma_1 < 1$?

平衡点稳定性的相轨线分析

- $$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= r_1 x_1\left(1-\frac{x_1}{N_1}-\sigma_1\frac{x_2}{N_2}\right), \varphi(x_1,x_2)=1-\frac{x_1}{N_1}-\sigma_1\frac{x_2}{N_2} \\ \dot{x}_2(t) &= r_2 x_2\left(1-\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}\right), \psi(x_1,x_2)=1-\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2} \end{aligned}$$
- $S_1:\varphi>0,\ \psi>0$
- $S_1:\dot{x}_1>0,\ \dot{x}_2>0,\ \Rightarrow t\uparrow\rightarrow x_1,x_2\uparrow$
- $S_2:\dot{x}_1>0,\ \dot{x}_2<0,\ \Rightarrow t\uparrow\rightarrow x_1\uparrow,x_2\downarrow$
- $S_3:\dot{x}_1<0,\ \dot{x}_2<0,\ \Rightarrow t\uparrow\rightarrow x_1,x_2\downarrow$
- 从任意点出发(t=0)的相轨线都趋向$P_1(N_1,0)(t\rightarrow\infty)$,故$P_1(N_1,0)$是稳定平衡点

平衡点稳定性的相轨线分析



平衡点稳定性的相轨线分析

- $(2)\sigma_1 > 1, \sigma_2 < 1$ P_2 稳定
- $(3)\sigma_1 < 1, \sigma_2 < 1$ P_3 稳定
- $(4)\sigma_1 > 1, \sigma_2 > 1$ P_1, P_2 都不(全局)稳定
- P_1稳定的条件：直接法$\sigma_2 > 1$,加上与(4)相区别的$\sigma_1 < 1$ P_1全局稳定

结果解释

- P_1稳定的条件：$\sigma_1 < 1, \sigma_2 > 1$
- 对于消耗甲的资源而言，乙(相对于N_2)是甲(相对于N_1)的σ_1倍。$\sigma_1 < 1 \Rightarrow$对甲增长的阻滞作用，乙小于甲$\Rightarrow$乙的竞争力弱
- $\sigma_2 > 1$甲的竞争力强，甲达到最大容量，乙灭绝

种群的弱肉强食

- 种群甲靠丰富的天然资源生存，种群乙靠捕食甲为生，形成食饵-捕食者系统，如食用鱼和鲨鱼，美洲兔和山猫，害虫和益虫。
- 模型的历史背景　　一次世界大战期间地中海渔业的捕捞量下降(食用鱼和鲨鱼同时捕捞)，但是其中鲨鱼的比例却增加，为什么？

食饵-捕食者模型(Volterra)

- 食饵（甲）数量x(t), 捕食者（乙）数量y(t)
- 甲独立生存的增长率r,$\dot{x} = rx$
- 乙使甲的增长率减小，减小量与y成正比$\dot{x}(t) = (r - ay)x, = rx - axy \quad (1)$
- 乙独立生存的死亡率d $\dot{y} = -dy$
- 甲使乙的死亡率减小，减小量与x成正比$\dot{y}(t) = -(d - bx)y = -dy + bxy \quad (2)$
- a -捕食者掠取食饵能力,b -食饵供养捕食者能力
- 方程(1),(2) 无解析解

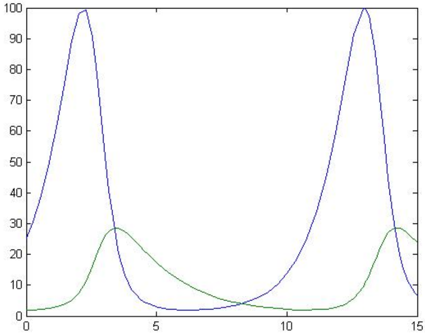
Volterra模型的平衡点及其稳定性

- $$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (r-ay)x = rx - axy \\ \dot{y}(t) &= -(d-bx)y = -dy + bxy\end{aligned}$$
- 平衡点$P(d/b,\ r/a), P'(0,0)$
- $A = \begin{bmatrix} r-ax & -ax \\ by & -d+bx \end{bmatrix}$
- $A|_P = \begin{bmatrix} 0 & -ad/b \\ br/a & 0 \end{bmatrix}$ $p=0, q>0$ P: 临界状态
- $A|_{P'} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}$ $q<0, P'$不稳定
- P点稳定性不能用近似线性方程分析

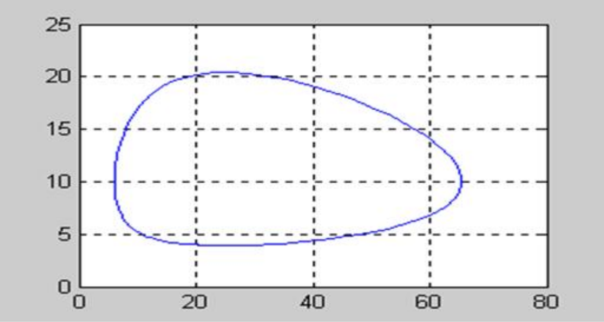
MATLAB求微分方程数值解

- function dydt=Prey3(t,y)
- dydt=zeros(2,1);
- dydt(1)=y(1)-0.1*y(1)*y(2);
- dydt(2)=-0.5*y(2)+0.02*y(1)*y(2);
- [t,y]=ode45(@Prey3,[0 15],[25 2]);
- plot(t,y);
- figure(2); plot(y(:,1),y(:,2));

解的结果



相平面



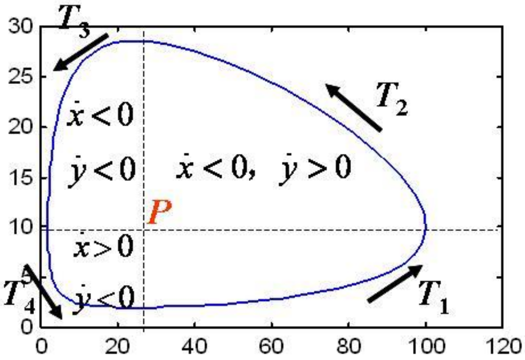
x~y 平面上的相轨线

食饵-捕食者模型(Volterra)

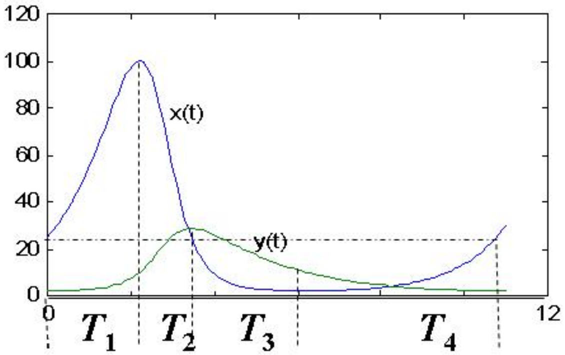
观察，猜测

- x(t), y(t)是周期函数，相图(x,y)是封闭曲线。这个结论可以证明。求x(t), y(t) 在一周期的平均值$\bar{x}$, $\bar{y}$,有了周期函数的性质，就可以得到$\bar{x} = d/b, \bar{y} = r/a$
- 证明比较复杂，我们省略。因为真正建模过程中我们证明的东西非常少。我们跟多的是关注理论的应用，而不是理论的证明。
- 下面我们分析这个周期循环的过程。

Model


T_3
T_2
T_1
T_4
$\dot{x}<0$
$\dot{y}<0$
$\dot{x}<0,\ \dot{y}>0$
P
$\dot{x}>0$
$\dot{y}<0$
0
20
40
60
80
100
120
5
10
15
20
25
30

Model



模型解释

- 捕食者数量$\bar{y} = \frac{r}{a}$
- r-食饵增长率
- a -捕食者掠取食饵能力
- 捕食者数量与r成正比，与a成反比

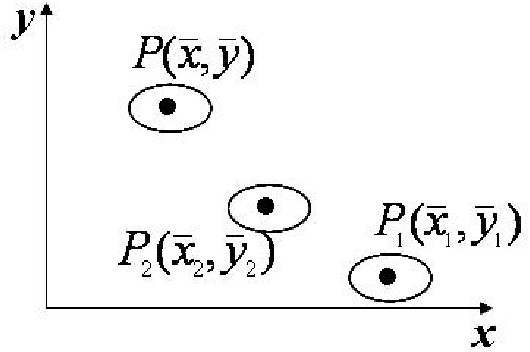
模型解释

- 食饵数量$\bar{x} = \frac{d}{b}$
- d -捕食者死亡率
- b -食饵供养捕食者能力
- 食饵数量与d成正比，与b成反比

模型解释

- 一次大战期间地中海渔业的捕捞量下降，但是其中鲨鱼的比例却在增加，为什么？
- 自然环境$P(\bar{x},\bar{y}),\bar{x}=d/b,\ \bar{y}=r/a$
- 捕捞:$r\rightarrow r-\epsilon_1, d\rightarrow d+\epsilon_1 \Rightarrow \bar{x}_1>\bar{x},\ \bar{y}_1<\bar{y}, P\rightarrow P_1$
- 战时捕捞:$r\rightarrow r-\epsilon_2, d\rightarrow d+\epsilon_2 \Rightarrow \bar{x}_2<\bar{x}_1,\ \bar{y}_2>\bar{y}_1, P_1\rightarrow P_2$
- 食饵(鱼)减少，捕食者(鲨鱼)增加
- $P\rightarrow P_1$ 还表明：对害虫(食饵)　益虫(捕食者)系统，使用灭两种虫的杀虫剂，会使害虫增加，益虫减少。

Model



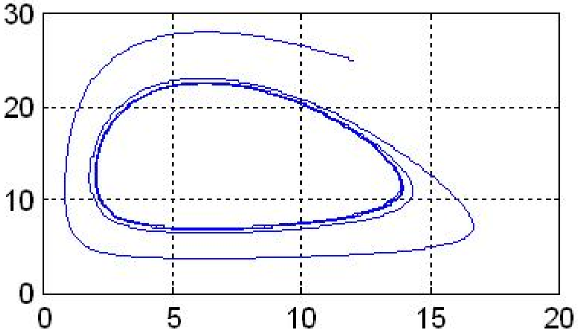
食饵-捕食者模型(Volterra)的缺点与改进

- 多数食饵　捕食者系统观察不到周期震荡,而是趋向某个平衡状态,即存在稳定平衡点
- Volterra模型加Logistic项,变成
- $$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= r_1 x_1\left(1-\frac{x_1}{N_1}-\sigma_1\frac{x_2}{N_2}\right)\\ \dot{x}_2(t) &= r_2 x_2\left(-1+\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}\right)\end{aligned}$$
- 有稳定平衡点

食饵-捕食者模型(Volterra)的缺点与改进

- 相轨线是封闭曲线，结构不稳定　　一旦离开某一条闭轨线，就进入另一条闭轨线，不恢复原状。
- 自然界存在的周期性平衡生态系统是结构稳定的，即偏离周期轨道后，内部制约使系统恢复原状。
- $$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{1+wx_1}\right)$$
  $$\dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(-1 + \sigma_2 \frac{x_1}{1+wx_1}\right)$$
- 相轨线趋向极限环,结构稳定

Model



两种群模型的几种形式

- 相互竞争
  $\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}\right), \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\right)$
- 相互依存
  $\dot{x}_1(t_1) = r_1 x_1 \left(\pm 1 - \frac{x_1}{N_1} + \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}\right), \dot{x}_2(t) =$
  $r_2 x_2 \left(\pm 1 + \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\right)$
- 弱肉强食
  $\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}\right), \dot{x}_2(t) =$
  $r_2 x_2 \left(-1 + \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\right)$