

第三章简单的优化模型

1 静态优化模型介绍

2 森林救火问题

3 本章其他部分说明

静态优化模型介绍

- 现实世界中普遍存在着优化问题
- 静态优化问题指最优解是数(不是函数)
- 建立静态优化模型的关键之一是根据建模目的确定恰当的目标函数
- 求解静态优化模型一般用微分法

森林救火问题

- 森林失火后，要确定派出消防队员的数量。队员多，森林损失小，救援费用大；队员少，森林损失大，救援费用小。综合考虑损失费和救援费，确定队员数量。
- 记队员人数 x ，失火时刻 $t=0$ ，开始救火时刻 t_1 ，灭火时刻 t_2 ，时刻 t 森林烧毁面积 $B(t)$ 。
- 损失费 $f_1(x)$ 是 x 的减函数，由烧毁面积 $B(t_2)$ 决定。
- 救援费 $f_2(x)$ 是 x 的增函数，由队员人数和救火时间决定
- 存在恰当的 x ，使 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 之和最小

问题关键分析

- 关键是对 $B(t)$ 作出合理的简化假设.
- 失火时刻 $t=0$, 开始救火时刻 t_1 , 灭火时刻 t_2 , 画出时刻 t 森林烧毁面积 $B(t)$ 的大致图形
- 分析 $B(t)$ 比较困难, 转而讨论森林烧毁速度 dB/dt .

模型假设

- 1) $0 \leq t \leq t_1$, dB/dt 与 t 成正比, 系数 β (火势蔓延速度)
- 2) $t_1 \leq t \leq t_2$, β 降为 $\beta - \lambda x$ (λ 为队员的平均灭火速度)
- 3) $f_1(x)$ 与 $B(t_2)$ 成正比, 系数 c_1 (烧毁单位面积损失费)
- 4) 每个队员的单位时间灭火费用 c_2 , 一次性费用 c_3

模型假设1的解释

- 火势以失火点为中心，均匀向四周呈圆形蔓延，半径 r 与 t 成正比；
- 面积 B 与 t^2 成正比， dB/dt 与 t 成正比

模型的建立

- 假设1), 假设2) $b = \beta t_1, t_2 - t_1 = \frac{b}{\lambda x - \beta}$

-

$$B(t_2) = \int_0^{t_2} \dot{B}(t) dt = \frac{bt_2}{2} = \frac{\beta t_1^2}{2} + \frac{\beta^2 t_1^2}{2(\lambda x - \beta)}$$

- 假设3) 4)

$$f_1(x) = c_1 B(t_2), \quad f_2(x) = c_2 x(t_2 - t_1) + c_3 x$$

- 目标函数 总费用

$$C(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

-

$$C(x) = \frac{c_1 \beta t_1^2}{2} + \frac{c_1 \beta^2 t_1^2}{2(\lambda x - \beta)} + \frac{c_2 \beta t_1 x}{\lambda x - \beta} + c_3 x$$

模型求解与结果

- 求 x 使 $C(x)$ 最小

$$\frac{dC}{dx} = 0, x = \frac{\beta}{\lambda} + \beta \sqrt{\frac{c_1 \lambda t_1^2 + 2c_2 t_1}{2c_3 \lambda^2}}$$

- $\frac{\beta}{\lambda}$ 是火势不继续蔓延的最少队员数
- c_1 烧毁单位面积损失费, c_2 每个队员单位时间灭火费, c_3 每个队员一次性费用, t_1 开始救火时刻, ? 火势蔓延速度, ? 每个队员平均灭火速度
- $c_1, t_1, \beta \uparrow, x \uparrow;$
 $c_3, \lambda \uparrow, x \downarrow;$
 $c_2 \uparrow x \downarrow$

本章其他部分说明

- 有兴趣的同学可以看看3.1,3.5;