

- 1 传染病模型
- 2 药物在体内的分布与排除
- 3 香烟过滤嘴的作用
- 4 烟雾的扩散与消失
- 5 2005年A 长江水评价和预测

## 第五章微分方程模型

- 1 传染病模型
- 2 药物在体内的分布与排除
- 3 香烟过滤嘴的作用
- 4 烟雾的扩散与消失
- 5 2005年A 长江水评价和预测

## 微分方程模型概述

- 这个世界唯一不变的是变化。而导数正好是这样的数学工具
- 描述对象特征随时间(空间)的演变过程
- 分析对象特征的变化规律
- 预报对象特征的未来性态
- 研究控制对象特征的手段

## 微分方程模型概述

- 根据函数及其变化率之间的关系确定函数
- 根据建模目的和问题分析作出简化假设
- 按照内在规律或用类比法建立微分方程

# 传染病模型

- 描述传染病的传播过程
- 分析受感染人数的变化规律
- 预报传染病高潮到来的时刻
- 预防传染病蔓延的手段
- 按照传播过程的一般规律，用机理分析方法建立模型

# 模型1

- 已感染人数(病人)  $i(t)$
- 假设: 每个病人每天有效接触(足以使人致病)人数为  $\lambda$
- 建模:

$$i(t + \Delta t) - i(t) = \lambda i(t) \Delta t$$

●

$$\frac{di}{dt} = \lambda i$$

$$i(0) = i_0$$

●

$$i(t) = i_0 e^{\lambda t}$$

●

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow i \rightarrow \infty ?$$

- 若有效接触的是病人, 则不能使病人数增加: 必须区分已感染者(病人)和未感染者(健康人)

## 模型2

- 区分已感染者(病人)和未感染者(健康人)
- 1) 总人数 $N$ 不变, 病人和健康人的比例分别为 $i(t), s(t)$
- 2) 每个病人每天有效接触人数为 $\lambda$ , 且使接触的健康人致病. $\lambda \sim$  日接触率

●

$$N[i(t + \Delta t) - i(t)] = [\lambda s(t)]Ni(t)\Delta t$$

●

$$\frac{di}{dt} = \lambda si$$

$$s(t) + i(t) = 1$$

●

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda i(1 - i) \\ i(0) = i_0 \end{cases}$$

## 模型2 SI模型

- 和1.5节的Logistic模型本质一样
- 方程的解析解

$$i(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{i_0} - 1\right) e^{-\lambda t}}$$

- 当 $i=0.5$ 时,  $\frac{di}{dt}$  最大, 从上面的解中可以得到

- 

$$t_m = \lambda^{-1} \ln\left(\frac{1}{i_0} - 1\right)$$

- $t_m \sim$  传染病高峰到来时刻

- 

$\lambda$  (日接触率)  $\downarrow$ ,  $t_m \uparrow$

- 

$t \rightarrow \infty \Rightarrow i \rightarrow 1$  ?

-



# SI模型

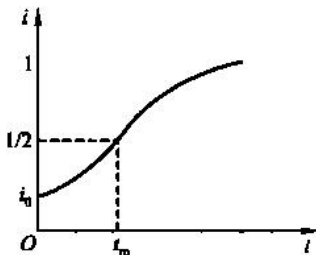


图1 SI模型的  $i \sim t$  曲线

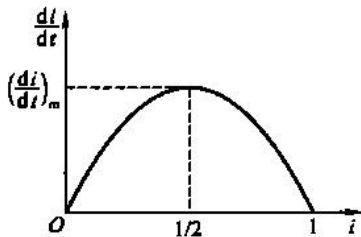


图2 SI模型的  $\frac{di}{dt} \sim i$  曲线

## 模型3 SIS

传染病无免疫性 病人治愈成为健康人，健康人可再次被感染

- 增加假设3) 病人每天治愈的比例为 $\mu$ ,  $\mu$ 为日治愈率
- 建模

$$N[i(t + \Delta t) - i(t)] = \lambda Ns(t)i(t)\Delta t - \mu Ni(t)\Delta t$$

●

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda i(1 - i) - \mu i \\ i(0) = i_0 \end{cases}$$

- $\lambda \sim$  日接触率,  $\frac{1}{\mu} \sim$  感染期
- $\sigma = \frac{\lambda}{\mu} \sim$  一个感染期内每个病人的有效接触人数，称为接触数

# 模型3 SIS

- 可以得到SIS模型解析解，但是我们也从图形上分析 $i(t)$ 变化的规律



$$\frac{di}{dt} = \lambda i(1 - i) - \mu i = -\lambda i \left[ i - \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right) \right]$$

- 解析解:  $i(t) = \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right) \left(1 + \frac{e^{-\lambda((1-\frac{1}{\sigma})t)((1-\frac{1}{\sigma}-i_0))}}{i_0}\right)^{-1}$

- 故有:  $i(\infty) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\sigma}, & \sigma > 1 \\ 0, & \sigma \leq 1 \end{cases}$

- 分别分析 $\sigma > 1, < 1$ 时,  $i(t)$ 的变化规律

# 模型3 SIS

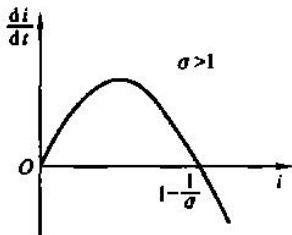


图3 SIS模型的  $\frac{di}{dt} \sim i$  曲线 ( $\sigma > 1$ )

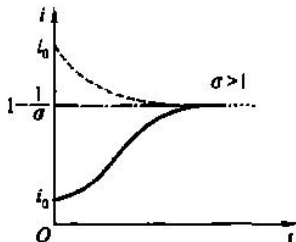


图4 SIS模型的  $i \sim t$  曲线 ( $\sigma > 1$ ),

其中虚线是  $i_0 > 1 - \frac{1}{\sigma}$  的情况

# 模型3 SIS

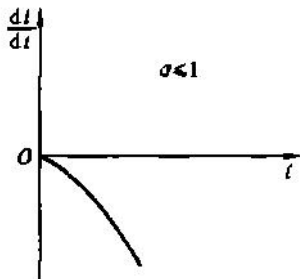


图5 SIS模型的 $\frac{di}{dt} \sim i$ 曲线( $\sigma \leq 1$ )

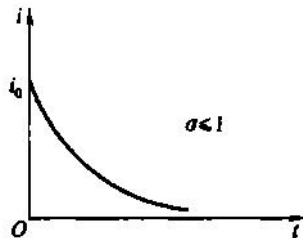


图6 SIS模型的 $i \sim t$ 曲线( $\sigma \leq 1$ )

## 模型4 SIR模型

- 传染病有免疫性 病人治愈后即移出感染系统，称移出者
- 假设1) 总人数 $N$ 不变，病人、健康人和移出者的比例分别为 $i(t), s(t), r(t)$
- 2) 病人的日接触率 $\lambda$ ，日治愈率 $\mu$ ，接触数 $\sigma = \frac{\lambda}{\mu}$

- 建模

$$s(t) + i(t) + r(t) = 1$$

- 

$$N[i(t + \Delta t) - i(t)] = \lambda Ns(t)i(t)\Delta t - \mu Ni(t)\Delta t$$

$$N[s(t + \Delta t) - s(t)] = -\lambda Ns(t)i(t)\Delta t$$

- 

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda si - \mu i \\ \frac{ds}{dt} = -\lambda si \\ i(0) = i_0, s(0) = s_0 \end{cases}$$

## 模型4 SIR模型数值解

- 无法求出 $i(t), s(t)$ 的解析解；可做数值解。  
也可在相平面 $s-i$ 上研究解的性质；  
设 $\lambda = 0, \mu = 0.3, s(0) = 0.98, i(0) = 0.02$ , 下面做数值解



function y=SIR(t,x)

- $y=zeros(2,1);$
- $a=1; b=0.3;$
- $y(1)=a*x(1)*x(2)-b*x(1);$



$y(2)=-a*x(1)*x(2);$

## 模型4 SIR模型数值解

- `ts=0:50;`
- `x0=[0.02,0.98];`
- `[t,x]=ode45('SIR',ts,x0);`
- `plot(t,x),grid`
- `figure(2)`
- `plot(x(:,2),x(:,1)),grid`

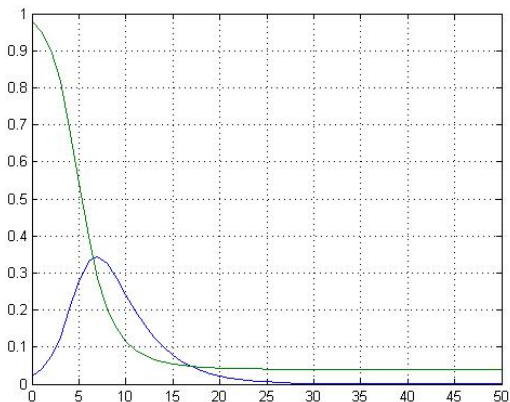


## 模型4 SIR模型数值解结果

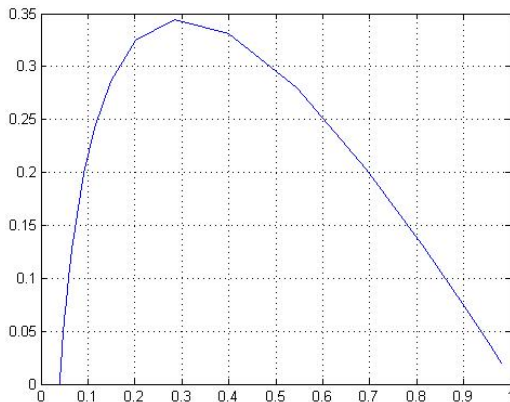
$t$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$i(t)$	0.0200	0.0390	0.0732	0.1285	0.2033	0.2795	0.3312	0.3444	0.3247
$s(t)$	0.9800	0.9525	0.9019	0.8169	0.6927	0.5438	0.3995	0.2839	0.2027
$t$	9	10	15	20	25	30	35	40	45
$i(t)$	0.2863	0.2418	0.0787	0.0223	0.0061	0.0017	0.0005	0.0001	0
$s(t)$	0.1493	0.1145	0.0543	0.0434	0.0408	0.0401	0.0399	0.0399	0.0398

表1  $i(t), s(t)$  的数值计算结果

## $s(t), i(t)$ 结果, p140 图7



# i-s相轨线, p140 图8



# 模型4 SIR模型

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda si - \mu i \\ \frac{ds}{dt} = -\lambda si \\ i(0) = i_0, s(0) = s_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{di}{ds} = \frac{1}{\sigma s} - 1 \\ i|_{s=s_0} = i_0 \end{cases}$$

$$i(s) = (s_0 + i_0) - s + \frac{1}{\sigma} \ln \frac{s}{s_0}$$

$$D = \{(s, i) | s \geq 0, i \geq 0, s + i \leq 1\}$$

- 在D内作相轨线*s*(*i*) 的图形，进行分析

## 模型4 SIR模型分析

不论  $s_0, i_0$  初始条件如何, 病人都将消失, 即  $i(\infty) = 0$

- $\frac{ds}{dt} = -\lambda si \leq 0, s \geq 0 \Rightarrow s(\infty)$  存在
- $\frac{dr}{dt} = \mu i \geq 0, s \leq 1 \Rightarrow r(\infty)$  存在
- $s + r + i = 1 \Rightarrow i(\infty)$  存在
- 假设  $i(\infty) = 2\varepsilon_0 > 0$ , 当  $t$  足够大时,  $i(t) > \varepsilon_0$
- 又  $\frac{dr}{dt} = \mu i \geq \varepsilon_0 > 0$
- 故  $r(\infty)$  不存在, 矛盾!

# SIR相轨线

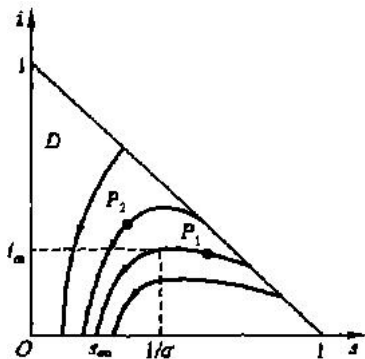


图 9 SIR 模型的相轨线

## 模型4 SIR模型分析

- 最终未被感染者比例是 $s(\infty)$ ,是下面方程 $(0, \frac{1}{\sigma})$ 的根



$$s_0 + i_0 - s_\infty + \frac{1}{\sigma} \ln \frac{s_\infty}{s_0} = 0$$

- $s_0 > \frac{1}{\sigma}$ ,  $i(t)$ 先升后降至0,传染病蔓延
- $s_0 < \frac{1}{\sigma}$ , 单调降至0,传染病不蔓延

# 预防传染病蔓延的手段

- $s_0 < \frac{1}{\sigma}$
- 提高阈值  $\frac{1}{\sigma}$
- $\lambda$  (日接触率)  $\downarrow$ , 卫生水平  $\uparrow$
- $\mu$  (日治愈率)  $\uparrow$ , 医疗水平  $\uparrow$
- 降低  $s_0$ , 提高  $r_0$ , 群体免疫



# 传染病模型的评注

**评注** 本节介绍的传染病模型从几个方面很好地体现了模型的改进、建模的目的性,以及方法的配合.

第一,最初建立的模型 1 基本上不能用,修改假设后得到的模型 2 虽有所改进,但仍不符合实际.进一步修改假设,并针对不同情况建立的模型 3,4 才是比较成功的.

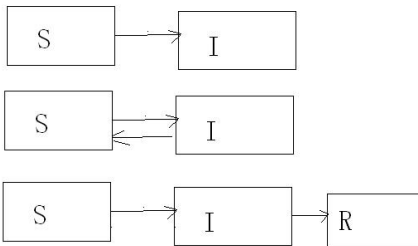
第二,模型 3,4 的可取之处在于它们比较全面地达到了建模的目的,即描述传播过程,分析感染人数的变化规律,预测传染病高潮到来时刻,度量传染病蔓延的程度并探索制止蔓延的手段.

第三,对于比较复杂的模型 4,采用了数值计算,图形观察与理论分析相结合的方法,先有感性认识(表 1,图 7,图 8),再用相轨线作理论分析,最后进行数值验证和估算.可以看作计算机技术与建模方法的巧妙配合.

# 传染病模型的解析解Matlab

- $i1 = \text{dsolve}('Dx = k * x', 'x(0) = x0', 't')$
- $i2 = \text{dsolve}('Dx = k * x * (1 - x)', 'x(0) = x0', 't')$
- $i3 = \text{dsolve}('Dx = k * x * (m - x)', 'x(0) = x0', 't')$
- $[i3, s3] = \text{dsolve}('Dx = k * x * y - \mu * x', 'Dy = -k * x * y', 't')$
- 最后一个没有办法求出，Matlab会提示出错

# 传染病模型与分箱模型



## 药物在体内的分布与排除

- 药物进入机体形成血药浓度(单位体积血液的药物量)
- 血药浓度需保持在一定范围内      给药方案设计
- 药物在体内吸收、分布和排除过程      药物动力学
- 建立房室模型      药物动力学的基本步骤
- 房室      机体的一部分, 药物在一个房室内均匀分布(血药浓度为常数), 在房室间按一定规律转移
- 本节讨论二室模型      中心室(心、肺、肾等)和周边室(四肢、肌肉等)

## 二室模型

- 模型假设:(1)  $s$  中心室(1)和周边室(2),容积不变  
(2) 药物从体外进入中心室, 在二室间相互转移,从中心室排出体外  
(3) 药物在房室间转移速率及向体外排除速率, 与该室血药浓度成正比
- $x_i(t) \sim$  药量,  $c_i(t) \sim$  浓度,  $V_i \sim$  容量,  $i=1,2$

- 1 传染病模型
- 2 药物在体内的分布与排除
- 3 香烟过滤嘴的作用
- 4 烟雾的扩散与消失
- 5 2005年A 长江水评价和预测

## 二室模型

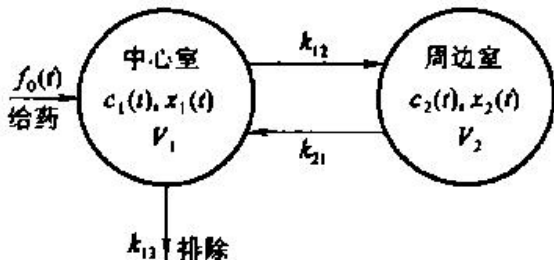


图 15 常用的一种二室模型

## 模型建立

- $$\dot{x}_1(t) = -k_{12}x_1 - k_{13}x_1 + k_{21}x_2 + f_0(t)$$

- $$\dot{x}_2(t) = k_{12}x_1 - k_{21}x_2$$

- $f_0 \sim$  给药的速率

- $$x_i(t) = V_i c_i(t), \quad i = 1, 2$$

- $$\begin{cases} \dot{c}_1(t) = -(k_{12} + k_{13})c_1 + \frac{V_2}{V_1}k_{21}c_2 + \frac{f_0(t)}{V_1} \\ \dot{c}_2(t) = \frac{V_1}{V_2}k_{12}c_1 - k_{21}c_2 \end{cases}$$

# 模型求解

- 对应齐次方程通解



$$\begin{cases} \bar{c}_1(t) = A_1 e^{-\alpha t} + B_1 e^{-\beta t} \\ \bar{c}_2(t) = A_2 e^{-\alpha t} + B_2 e^{-\beta t} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \alpha + \beta = k_{12} + k_{21} + k_{13} \\ \alpha\beta = k_{21}k_{13} \end{cases}$$



## 几种常见的给药方式

- 给药速率 $f_0(t)$  和初始条件
- 1.快速静脉注射
- $t=0$  瞬时注射剂量 $D_0$ 的药物进入中心室,血药浓度立即为 $D_0/V_1$

- $$f_0(t) = 0, c_1(0) = \frac{D_0}{V_1}, c_2(0) = 0$$

- $$c_1(t) = \frac{D_0}{V_1(\beta - \alpha)} [(k_{21} - \alpha)e^{-\alpha t} + (\beta - k_{21})e^{-\beta t}]$$
$$c_2(t) = \frac{D_0 k_{12}}{V_2(\beta - \alpha)} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})$$

## 几种常见的给药方式

- 2. 恒速静脉滴注
- $0 \leq t \leq T$  药物以速率  $k_0$  进入中心室

$$f_0(t) = k_0, \quad c_1(0) = 0, \quad c_2(0) = 0$$

$$\begin{cases} c_1(t) = A_1 e^{-\alpha t} + B_1 e^{-\beta t} + \frac{k_0}{k_{13} V_1}, & 0 \leq t \leq T \\ c_2(t) = A_2 e^{-\alpha t} + B_2 e^{-\beta t} + \frac{k_{12} k_0}{k_{21} k_{13} V_2}, & 0 \leq t \leq T \\ A_2 = \frac{V_1 (k_{12} + k_{13} - \alpha)}{k_{21} V_2} A_1, \quad B_2 = \frac{V_1 (k_{12} + k_{13} - \beta)}{k_{21} V_2} B_1 \end{cases}$$

## 几种常见的给药方式

- 3.口服或肌肉注射
- 相当于药物(剂量 $D_0$ )先进入吸收室，吸收后进入中心室
- 

$$\begin{cases} \dot{x}_0(t) = -k_{01}x_0 \\ x_0(0) = D_0 \end{cases}$$

$$x_0(t) = D_0 e^{-k_{01}t}$$

$$f_0(t) = k_{01}x_0(t) = D_0 k_{01} e^{-k_{01}t}$$

$$c_1(t) = Ae^{-\alpha t} + Be^{-\beta t} + Ee^{-k_{01}t}$$

$$c_1(0) = 0, c_2(0) = 0 \Rightarrow A, B, E$$

## 建议大家试试2005年A题

- 以小组为单位讨论
- 每一个问题的重点是什么？
- 你用什么样是数学工具描述这个问题？
- 找不到合适数学工具的原因是什么？
- 得到结果会遇到什么样的困难？

## 问题

- 过滤嘴的作用与它的材料和长度有什么关系
- 人体吸入的毒物量与哪些因素有关，其中哪些因素影响大，哪些因素影响小。
- 分析吸烟时毒物进入人体的过程，建立吸烟过程的数学模型。
- 设想一个“机器人”在典型环境下吸烟，吸烟方式和外部环境认为是不变的。

## 模型假设

- $l_1 \sim$  烟草长,  $l_2 \sim$  过滤嘴长,  $l = l_1 + l_2$ , 毒物量  $M$  均匀分布, 密度  $w_0 = M/l_1$
- 点燃处毒物随烟雾进入空气和沿香烟穿行的数量比是  $a':a$ ,  $a'+a=1$
- 未点燃的烟草和过滤嘴对随烟雾穿行的毒物的(单位时间)吸收率分别是  $b$  和  $\beta$
- 烟雾沿香烟穿行速度是常数  $v$ , 香烟燃烧速度是常数  $u$ ,  $v \gg u$
- $t=0, x=0$ , 点燃香烟,  $q(x,t) \sim$  毒物流量,  $w(x,t) \sim$  毒物密度  $w(x,0) = w_0$  ]

- 1 传染病模型
- 2 药物在体内的分布与排除
- 3 香烟过滤嘴的作用
- 4 烟雾的扩散与消失
- 5 2005年A 长江水评价和预测

# Model

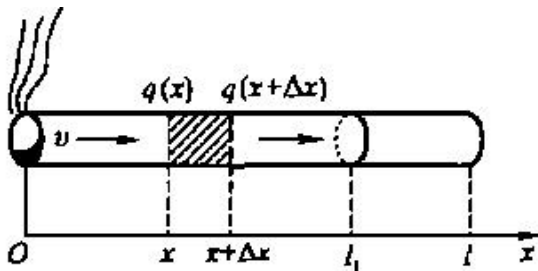


图 17  $x=0$  处点燃的香烟

## 模型建立

$$Q = \int_0^T q(l, t) dt, \quad T = l_1/u$$

- 1) 求  $q(x, 0) = q(x)$

- $$q(x) - q(x + \Delta x) = \begin{cases} bq(x)\Delta\tau, & 0 \leq x \leq l_1, \\ \beta q(x)\Delta\tau, & l_1 \leq x \leq l, \end{cases} \quad \Delta\tau = \frac{\Delta x}{v}$$

- 

$$\frac{dq}{dx} = \begin{cases} -\frac{b}{v}q(x), & 0 \leq x \leq l_1 \\ -\frac{\beta}{v}q(x), & l_1 \leq x \leq l \end{cases}$$

- 

$$q(0) = aH_0$$

$$H_0 = uw_0$$



## 模型建立

$$q(x) = \begin{cases} aH_0 e^{-\frac{bx}{v}}, & 0 \leq x \leq l_1 \\ aH_0 e^{-\frac{bl_1}{v}} e^{-\frac{\beta(x-l_1)}{v}}, & l_1 \leq x \leq l \end{cases}$$

- 2) 求  $q(l, t)$ ,  $H(t) = uw(ut, t)$

$$q(x, t) = \begin{cases} aH(t) e^{-\frac{b(x-ut)}{v}}, & ut \leq x \leq l_1 \\ aH(t) e^{-\frac{b(l_1-ut)}{v}} e^{-\frac{\beta(x-l_1)}{v}}, & l_1 \leq x \leq l \end{cases}$$

S

$$q(l, t) = auw(ut, t) e^{-\frac{b(l_1-ut)}{v}} e^{-\frac{\beta l_2}{v}}$$

## 模型建立

- 3) 求  $w(ut, t)$

$$w(x, t + \Delta t) - w(x, t) = b \frac{q(x, t)}{v} \Delta t$$

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{b}{v} a u w(ut, t) e^{-\frac{b(x-ut)}{v}} \\ w(x, 0) = w_0 \end{cases}$$

$$w(ut, t) = \frac{w_0}{a'} \left( 1 - a e^{-\frac{a' b u t}{v}} \right), \quad a' = 1 - a$$

## 模型建立

### 4) 计算Q

$$w(ut, t) = \frac{w_0}{a'} \left( 1 - ae^{-\frac{a'but}{v}} \right)$$

$$q(l, t) = auw(ut, t)e^{-\frac{b(l_1-ut)}{v}}e^{-\frac{\beta l_2}{v}}$$

$$q(l, t) = \frac{auw_0}{a'}e^{-\frac{bl_1}{v}}e^{-\frac{\beta l_2}{v}} \left( e^{-\frac{but}{v}} - ae^{-\frac{abut}{v}} \right)$$

$$Q = aMe^{-\frac{\beta l_2}{v}} \varphi(r), r = \frac{a'bl_1}{v}, \varphi(r) = \frac{1 - e^{-r}}{r}$$

## 结果分析



$$Q = aMe^{-\frac{\beta l_2}{v}} \varphi(r), r = \frac{a'bl_1}{v}, \varphi(r) = \frac{1 - e^{-r}}{r}$$

- Q与a,M成正比，aM是毒物集中在x=l处的吸入量
- $e^{-\frac{\beta l_2}{v}}$  过滤嘴因素
- $\varphi(r)$  烟草的吸收作用

## 现象和问题

- 炮弹在空中爆炸，烟雾向四周扩散，形成圆形不透光区域。
- 不透光区域不断扩大，然后区域边界逐渐明亮，区域缩小，最后烟雾消失。
- 建立模型描述烟雾扩散和消失过程，分析消失时间与各因素的关系。

## 问题分析

- 无穷空间由瞬时点源导致的扩散过程，用二阶偏微分方程描述烟雾浓度的变化。
- 观察的烟雾消失与烟雾对光线的吸收，以及仪器对明暗的灵敏程度有关。

## 模型假设

- 烟雾在无穷空间扩散，不受大地和风的影响；扩散服从热传导定律。
- 光线穿过烟雾时光强的减少与烟雾浓度成正比；无烟雾的大气不影响光强。
- 穿过烟雾进入仪器的光线只有明暗之分，明暗界限由仪器灵敏度决定。

## 模型建立

- 烟雾浓度  $C(x,y,z,t)$  的变化规律
- 热传导定律：单位时间通过单位法向面积的流量与浓度梯度成正比
- 

$$\vec{q} = -k \cdot \text{grad}C$$

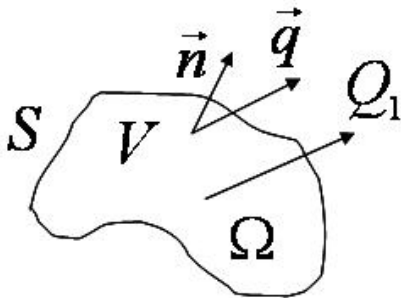


## 数学知识复习

- 函数 $u(x,y,z)$ 的梯度  $\text{grad}U = \frac{\partial U}{\partial x}i + \frac{\partial U}{\partial y}j + \frac{\partial U}{\partial z}k$
- 向量场 $\mathbf{a}(x,y,z)=P(x,y,z)\mathbf{i}+Q(x,y,z)\mathbf{j}+R(x,y,z)\mathbf{k}$  在 $M$ 点的散度  $\text{diva}(M) = \frac{\partial P}{\partial x}(M) + \frac{\partial Q}{\partial y}(M) + \frac{\partial R}{\partial z}(M)$
- 高斯公式  $\iint_S \vec{q} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_V \text{div} \vec{q} dV$
- $\text{div}(\text{grad}C) = \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right)$

- 1 传染病模型
- 2 药物在体内的分布与排除
- 3 香烟过滤嘴的作用
- 4 烟雾的扩散与消失
- 5 2005年A 长江水评价和预测

## 烟雾浓度 $C(x,y,z,t)$ 的变化规律



## 烟雾浓度 $C(x,y,z,t)$ 的变化规律

- $[t, t + \Delta t]$  通过  $\Omega$  流量  $Q_1 = \int_t^{t+\Delta t} \iint_S \vec{q} \cdot \vec{n} d\sigma dt$
- $\Omega$  内烟雾改变量  $Q_2 = \iiint_V [C(x, y, z, t) - C(x, y, z, t + \Delta t)] dV$
- 曲面积分的高斯公式  $\iint_S \vec{q} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{q} dV$
- $Q_1 = Q_2, \vec{q} = -k \cdot \operatorname{grad} C$
- $\Rightarrow \iiint_V [C(x, y, z, t) - C(x, y, z, t + \Delta t)] dV = \int_t^{t+\Delta t} \iiint_V \operatorname{div}(-k \cdot \operatorname{grad} C) dV dt$
- $\Rightarrow \frac{\partial C}{\partial t} = k[\operatorname{div}(\operatorname{grad} C)] = k \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right)$

## 烟雾浓度 $C(x,y,z,t)$ 的变化规律

- $\frac{\partial C}{\partial t} = k \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right), \quad -\infty < x, y, z < \infty, \quad t > 0$
- 初始条件  $C(x, y, z, 0) = Q\delta(x, y, z)$
- $Q$  - 炮弹释放的烟雾总量,  $\delta$  - 单位强度的点源函数
- 方程的解:

$$C(x, y, z, t) = \frac{Q}{(4\pi kt)^{3/2}} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4kt}}$$

- 对任意 $t$ ,  $C$ 的等值面是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ;  $R \uparrow \rightarrow C \downarrow$  仅当 $t \rightarrow \infty$ , 对任意点 $(x,y,z), C \rightarrow 0$

## 穿过烟雾光强的变化规律

- $I(L)$ -沿着 $L$ 方向的光强。  $C(L)$ -沿着 $L$ 方向的烟雾浓度。
- 光强的减少与烟雾的浓度成正比。
- $\frac{dI}{dL} = -\alpha C(L)I(L)$
- $I(L_0) = I_0$  未进入烟雾 ( $L \leq L_0$ ) 的光强为  $I_0$
- $\Rightarrow I(L) = I_0 e^{-\alpha \int_{L_0}^L C(s) ds}$

## 仪器灵敏度与烟雾明暗界限

- $I(L) = I_0 e^{-\alpha \int_{L_0}^L C(s) ds}$
- 烟雾浓度连续变化, 烟雾中光强连续变化  $\Rightarrow$  不透光区域有扩大、缩小、消失的过程
- 穿过烟雾进入仪器的光线只有明暗之分, 明暗界限由仪器灵敏度决定。
- $\mu$  仪器的灵敏度, 当  $I/I_0 < 1 - \mu$  观察结果为暗
- 设光源在  $z = -\infty$ , 仪器在  $z = \infty$ , 则观测到的明暗界限为
- $e^{-\alpha \int_{-\infty}^{\infty} C(x,y,z,t) dz} = 1 - \mu$

## 不透光区域边界的变化规律

- $C(x, y, z, t) = \frac{Q}{(4\pi kt)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4kt}}, \quad e^{-\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} C(x, y, z, t) dz = 1 - \mu$
- $\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} C(x, y, z, t) dz = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{1-\mu} \approx \frac{\mu}{\alpha}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{a}} dx = \sqrt{\pi a} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} C(x, y, z, t) dz = \frac{Q}{4\pi kt} e^{-\frac{x^2+y^2}{4kt}}$
- $\frac{Q}{4\pi kt} e^{-\frac{x^2+y^2}{4kt}} = \frac{\mu}{\alpha}$
- 对任意 $t$ , 不透光区域边界是圆周 $x^2 + y^2 = r^2$
- 不透光区域边界半径 $r(t) = \sqrt{4kt \ln \frac{\alpha Q}{4\pi k \mu t}}$

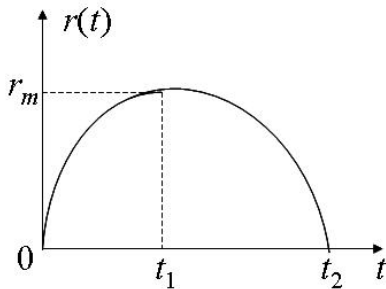
## 结果分析

- $r(t) = \sqrt{4kt \ln \frac{\alpha Q}{4\pi k \mu t}}$
- $t = t_1 = \frac{\alpha Q}{4\pi k \mu e}, r = r_m = \sqrt{\frac{\alpha Q}{\pi \mu e}}$  (最大值)
- $t = t_2 = \frac{\alpha Q}{4\pi k \mu}, r = 0$
- $t_2 = t_1 \cdot e \doteq 2.7t_1$
- 观测到不透光区域边界达到最大的时刻 $t_1$ , 可以预报烟雾消失的时刻 $t_2$
- 

$$\alpha \uparrow, Q \uparrow, \mu \downarrow \Rightarrow t_1 \uparrow, r_m \uparrow$$



## 烟雾变化



## 2005年A 长江水评价和预测

- 长江是我国第一、世界第三大河流，长江水质的污染程度日趋严重，已引起了相关政府部门和专家们的高度重视。
- 专家们提出“若不及时拯救，长江生态10年内将濒临崩溃”（附件1），并发出了“拿什么拯救癌变长江”的呼唤（附件2）。
- 附件3给出了长江沿线17个观测站（地区）近两年多主要水质指标的检测数据，以及干流上7个观测站近一年多的基本数据（站点距离、水流量和水流速）。

## 2005年A 长江水评价和预测

- 通常认为一个观测站（地区）的水质污染主要来自于本地区的排污和上游的污水。
- 一般说来，江河自身对污染物都有一定的自然净化能力，即污染物在水环境中通过物理降解、化学降解和生物降解等使水中污染物的浓度降低。反映江河自然净化能力的指标称为降解系
- 事实上，长江干流的自然净化能力可以认为是近似均匀的，根据检测可知，主要污染物高锰酸盐指数和氨氮的降解系数通常介于0.1-0.5之间，比如可以考虑取0.2(单位:1/天)。

## 2005年A 长江水评价和预测

- 附件4是“1995 2004年长江流域水质报告”给出的主要统计数据。
- 下面的附表是国标(GB3838-2002) 给出的《地表水环境质量标准》中4个主要项目标准限值，其中 I、II、III类为可饮用水。

- 1 传染病模型
- 2 药物在体内的分布与排除
- 3 香烟过滤嘴的作用
- 4 烟雾的扩散与消失
- 5 2005年A长江水评价和预测

## 地表水环境质量标准（GB3838-2002）中4个主要项目标准限值，单位：mg/L

序号	项目	分类 标准值	I类	II类	III类	IV类	V类	劣V类
			I类	II类	III类	IV类	V类	劣V类
1	溶解氧(DO)	≥	7.5 (或饱和率90%)	6	5	3	2	0
2	高锰酸盐指数(CODMn)	≤	2	4	6	10	15	∞
3	氨氮(NH <sub>3</sub> -N)	≤	0.15	0.5	1.0	1.5	2.0	∞
4	PH值(无量纲)		6--9					

## 2005年A 长江水评价和预测

- (1) 对长江近两年多的水质情况做出定量的综合评价, 并分析各地区水质的污染状况。
- (2) 研究、分析长江干流近一年多主要污染物高锰酸盐指数和氨氮的污染源主要在哪些地区?
- (3) 假如不采取更有效的治理措施, 依照过去10年的主要统计数据, 对长江未来水质污染的发展趋势做出预测分析, 比如研究未来10年的情况。
- (4) 根据你的预测分析, 如果未来10年内每年都要求长江干流的IV类和V类水的比例控制在20%以内, 且没有劣V类水, 那么每年需要处理多少污水?
- (5) 你对解决长江水质污染问题有什么切实可行的建议和意见。

## 问题分析

- (1) 对长江近两年多的水质情况做出定量的综合评价，并分析各地区水质的污染状况。
- 可以自己建立初等模型，也可查阅专业资料是怎么评价水质的。
- 常用的评价方法：模糊评价，层次分析法，神经网络评价，自己建立的初等模型评价方法。

## 问题分析

- (3) 假如不采取更有效的治理措施, 依照过去10年的主要统计数据, 对长江未来水质污染的发展趋势做出预测分析, 比如研究未来10年的情况。(4) 根据你的预测分析, 如果未来10年内每年都要求长江干流的IV类和V类水的比例控制在20%以内, 且没有劣V类水, 那么每年需要处理多少污水?
- 预测可用微风方程。但是今年的水和明年的水并不存在一个合理的关系可以用方程表示出来, 所以这个地方并不适合。
- 没有规律可以寻的时候, 我们求助于非传统方法。预测可用神经网络, 拟合, 回归, 时间序列分析, 灰色模型。



## 问题分析

- (2) 研究、分析长江干流近一年多主要污染物高锰酸盐指数和氨氮的污染源主要在哪些地区?
- 考虑到文章提到的因素: 检测点的污染是本地区排放和上游累计的过程; 去掉上游的影响才是本地区的污染排放量。本地区的污染源分布是什么样的?
- 上游往下游流的过程也是不停降解的过程, 与降解系数有关, 与两个检测点之间的距离, 流速, 流量有关。
- 降解的过程满足什么规律?
- 总结: 污染源, 水流量, 水流速, 降解

## 问题分析

- 理想的模型是什么？
- 污染物浓度随着时间和距离在变，所以理想的模型是一个偏微分方程模型。
- 但是只给出了长江干流上 7 个观测站近一年多的基本数据（站点距离、水流量和水流速），数据是过于稀疏。并不适合用偏微分方程模型。
- 所以我们需要做一些简化的假设，用常微分方程模型

## 模型的假设

- 1、数据是每月测的平均数据，我们以月份为时间计算污染量,为简化起见，每一个月的天数为30天。
- 2、如果相邻的两个观测点的月平均水流速相等，则两个观测点之间的月平均水流速是匀速的。如果相邻的两个观测点月平均水流速不相等，则两个观测点之间的月平均水流速是线性变化的。
- 3、设某观测点月份A的江水流到其下游紧接着的观测点的月平均时间是T，则该观测点月份A的污染物影响到下游接着的观测点月份A和月份A+1，具体影响的天数取 $30-T$ 天和T天。
- 4、在两个观测点之间，污染源是均匀分布的。

## 符号说明

- A 是任意一个观测点, B是其下游紧接着的观测点, 下面的变量是X月份的
- S: 一个月的总秒数
- Dis: A到B的距离 (单位: km)
- $v(x)$ : A到B的每一点水流月平均速度函数,  $x$ 是表示该点到A的距离, (单位: m/s)
- T: 表示江水从A流到B的月平均时间(单位: 天)

## 符号说明

- $V_a, V_b$  : A点和B点的水流速 (单位:  $\text{m/s}$ )
- $H_{ga}, H_{gb}$  : A点和B点的高锰酸盐浓度 (单位:  $\text{Kg/m}^3$ )
- $H_{sa}, H_{sb}$  : A点和B点的氨氮浓度 (单位:  $\text{mg/m}^3$ )
- $S_a, S_b$  : A点和B点的水流量 (单位:  $\text{m}^3/\text{s}$ )

## 符号说明

- $k$ : 降解系数(单位: 1/天)
- $M$ : 污染物的含量
- $W_g$ : A 到B一个月内单位长度上的高锰酸盐污染源 (单位: Kg)
- $W_s$ : A 到B一个月内单位长度上的氨氮污染源 (单位: Kg)
- $Cong$ : A到B之间产生的高锰酸盐一个月内平均含量 (单位: Kg)

## 符号说明

- Cons: A到B之间产生的氨氮一个月内平均含量 (单位: Kg)
- 下面的变量是X+1月份的Hgb2, Hsb2, Sb2分别表示B的高锰酸盐浓度,氨氮浓度,水流量

## 模型的建立

- 通过Vb和Va线性拟合A,B两点之间的速度。 $v(x) = \frac{Vb-Va}{dis}x + Va$
- 降解系数为k时, 对于数量为M的污染物经过时间t后, 数量变为M', 满足负指数规律  $M' = Me^{-kt}$
- 通过速度和距离, 求出水流经过A,B两点之间的时间  $\int_0^{dis} \frac{1}{v(x)} dx = T$
- 通过A对B的影响时间的滞后, 计算出A到B之间产生的高锰酸盐一个月內平均含量  $Cong/S = sb \times Hgb \times \frac{30-T}{30} + sb2 \times Hgb2 \times \frac{T}{30} - Sa \times Hga \times e^{-kT}$



## 模型的建立

- 通过A对B的影响时间的滞后，A到B之间产生的氨氮一个月  
内平均含量  $Cons/S =$   
$$Sb \times Hsb \times \left(\frac{30-T}{30}\right) + Sb2 \times Hsb2 \times \frac{T}{30} - Sa \times Hsa \times e^{-kT}$$
- 通过A到B之间的自然净化能力和Cong求出Wg  
$$Wg \times \int_0^T e^{-kt} dt = Cong$$
- 通过A到B之间的自然净化能力和Cons求出Ws  
$$Ws \times \int_0^T e^{-kt} dt = Cons$$

## 模型优缺点分析

- 考虑到降解的规律是负指数规律是合理的。查阅资料得到这样的结果。自己去推导也能得到。类似于指数人口模型。
- 没有用偏微分方程也能考虑到上游对下游的影响。通过时间考虑到了滞后性，通过降解考虑到了净化能力。
- 明显的缺点，表述不够简洁，变量取名比较古怪。高锰酸盐和氨氮其实是类似的，完全可以重点描述其中一个，另外一个列出表达式子就可以了。
- 整个过程完全是自己的推导，没有查阅到别人对这个问题的研究。
- 没有查到的原因是没有找到合适的关键字。大家认为关键字是什么？
- 水质模型

## 建模过程中的教训

- 坚决不能乱编造数据。如果不考虑降解，不考虑滞后效应，直接将下游数据减去上游的，有部分结果是负的。
- 遇到数据不合理的情况，我们可以怀疑数据，也可以怀疑我们的方法。
- 有些问题不能过分的纠缠，“污水”到底是什么意思？含量多少是污水？标准是什么？
- 直接用污染源的结果就可以了。最后这个问题不是重点。
- 处理的数据要统一保存好，供大家共同使用。
- 如果没有必然的联系，几个小题可以同时做。比如(1)(2),(3)(4)可以分工做。
- 写作要早动手，不能老以为时间够用。

## 组委会下发的参考答案1

- 问题(1)没有规定标准方法。只是要求考虑清楚几个问题:
- 数据要标准化。
- 考虑类别差和类内的数量差
- 考虑综合评价
- 如果某一指标到最高, 水质按最高类别算。

## 组委会下发的参考答案2

- 问题(2)参考答案中用到了一维水质模型，可惜当时我们学校的人都没有查到。
- 因为如果不考虑降解，不考虑滞后效应，直接将下游数据减去上游的，有部分结果是负的。
- 参考答案中给出的是一个范围而不是一个数，这是一个好方法。这就是灵活的地方。可以将污染源集中在起点和终点，分别考虑最大排污量和最小排污量。
- 然后根据单位时间单位距离的排污量来衡量，这个也很重要。

## 组委会下发的参考答案3

- 问题(3): 观察数据总流量变化不大, 而排污量变化大, 可以用灰色或拟合得到时间与排污量的关系。
- 总流量可以取过去10年的平均。
- 建立可饮用水比例和流量排污量的回归模型。
- 通过上面两个模型计算可以饮用水比例。问题4在问题3的基础上直接算就可以了。
- 问题5 开放性问题, 没有参考答案。