哈尔滨工业大学(威海)数学系

Discrete Math.

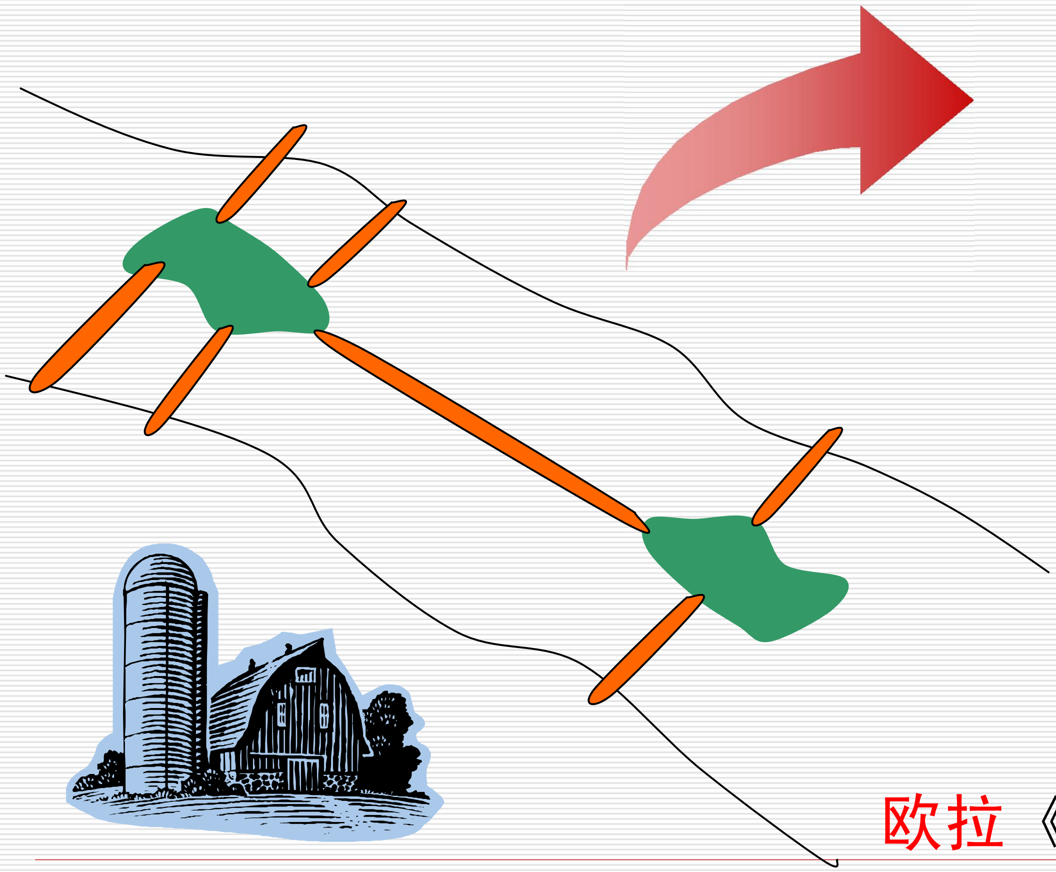
图 论

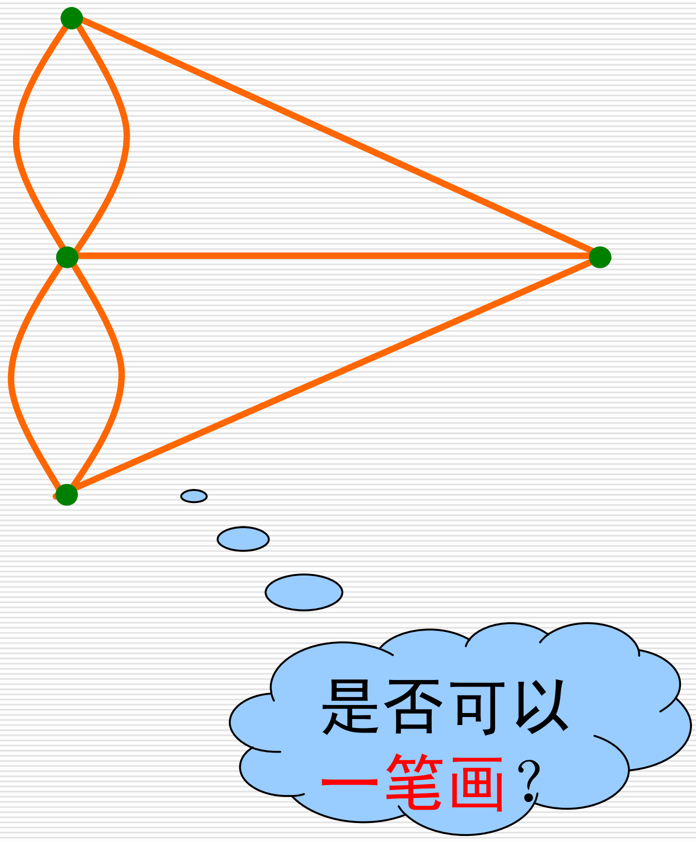
图论起源

- 图论起源于18世纪，追朔到1736年瑞士数学家L.Euler出版第一本图论著作，提出和解决了著名的Konigsberg七桥问题.
- 欧拉(Leonhard Euler, 1707-1783年)

欧拉(Euler)

Konigsberg七桥问题





欧拉《哥尼斯堡七桥问题无解》

引言

- 图论是专门研究图的理论的一门数学分支,属于离散数学范畴,与运筹学有交叉,它有200多年历史,大体可划分为三个阶段:

1

萌芽阶段,多数问题因游戏而产生,最有代表性的是七桥问题,即一笔画问题

18世纪中叶

2

图论问题大量出现,如Hamilton问题,地图染色的四色问题以及可平面性问题等

19世纪中叶

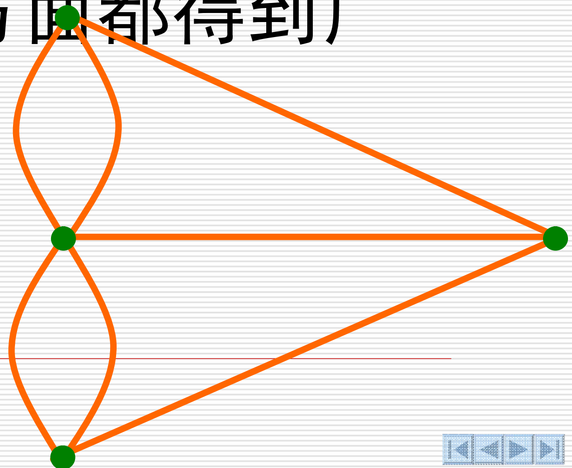
3

网络流理论与线性规划,动态规划等优化理论和方法相互渗透,促进了图论对实际问题的应用

20世纪中叶

引言

- 图论以图为研究对象:图由若干给定的点和连接两点的线构成,借以描述某些事物之间的关系.
  - 点代表事物,
  - 连接两点的线表示两个事物之间具有特定关系.
- 图论在许多领域,如计算机科学,物理学,化学,运筹学,信息论,控制论,网络通讯,社会科学以及经济管理,军事,国防,工农业生产等方面都得到广泛的应用.



Graph Theory 之
图的基本概念

- 无向图及有向图
- 通路、回路、图的连通性
- 图的矩阵表示
- 最短路径及关键路径

无序积

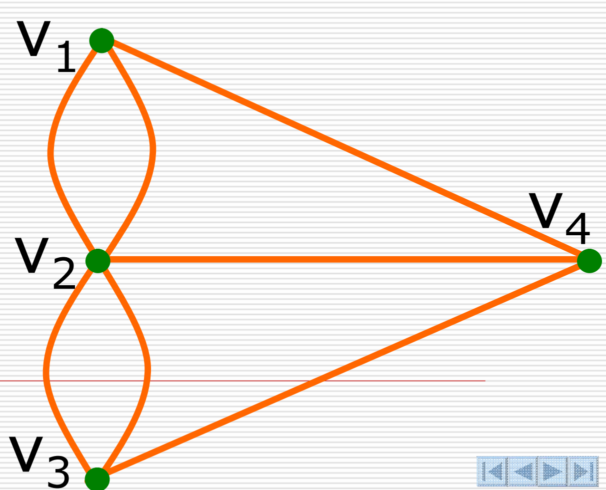
设A,B为两集合，

- <a,b>
  - $A\times B=\{<a,b>|a\in A\wedge b\in B\}$
- {a,b}
  - $A\&B=\{\{a,b\}|a\in A\wedge b\in B\}$:A与B的无序积
  - 将无序对{a,b}记作(a,b)
  - 无论a,b是否相等,均有
    - $(a,b)=(b,a)$
    - $A\&B=B\&A$

无向图

一个无向图G是一个二元组<V,E>,即G=<V,E>

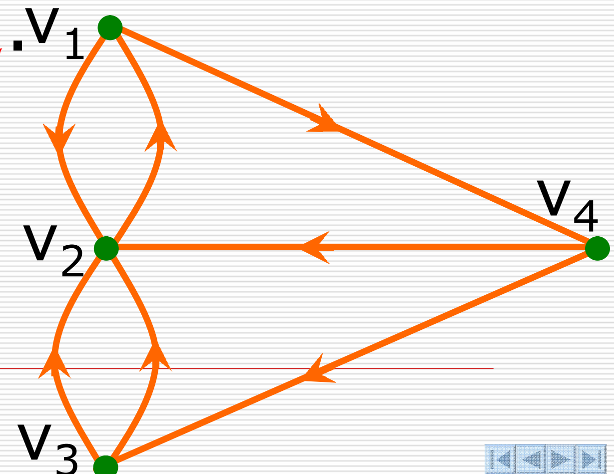
- 1). V是一个非空的集合,称为G的顶点集,V 中元素称为顶点或结点;
- 2). E是无序积V&V的一个多重子集,称E为G的边集,E中元素称为无向边或简称边.
  - 多重集:元素可以重复出现的集合.
- V? E?



有向图

一个**有向图**D是一个二元组<V,E>,即D=<V,E>

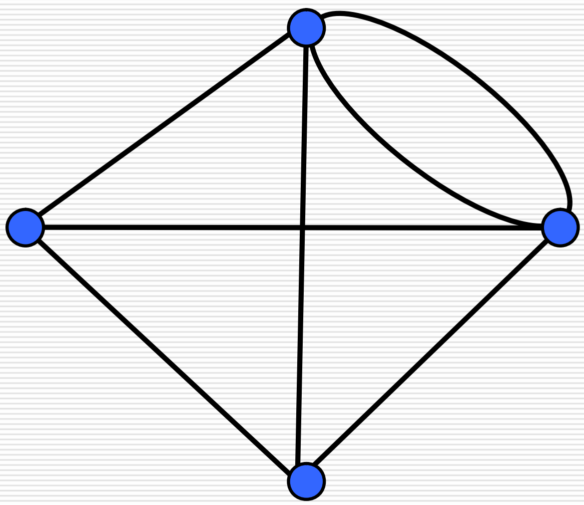
- 1). V是一个非空的集合,称为G的顶点集,V中元素称为<u>顶点</u>或<u>结点</u>;
- 2). E是卡氏积的多重子集,其元素称为<u>有向边</u>,也简称<u>边</u>.
  - 用小圆圈(实心点)表示顶点,顶点间的连线表示无向边,有方向的连线表示有向边.

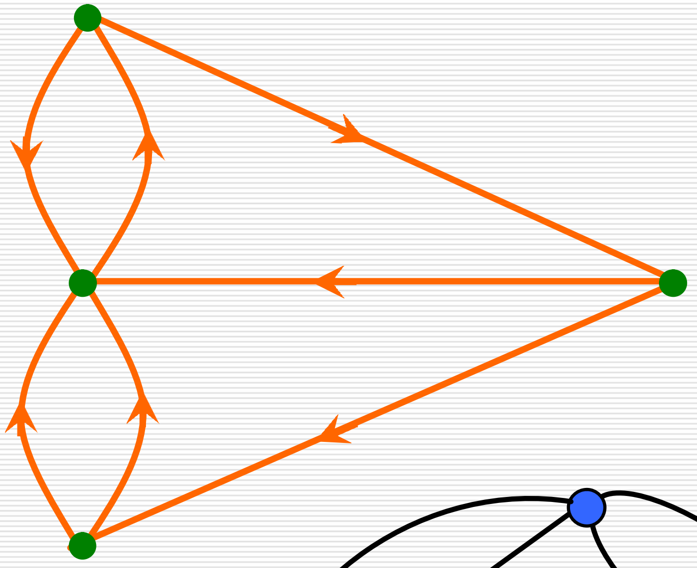


- V? E?

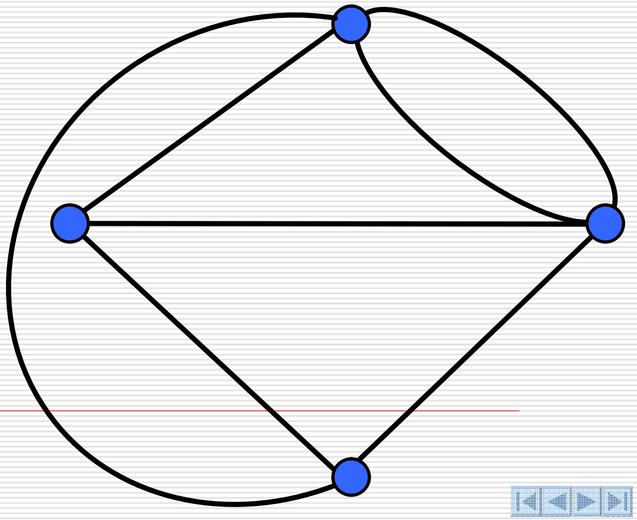
图的图示

- 常用一个图形来表示图，称为<u>图的图示</u>

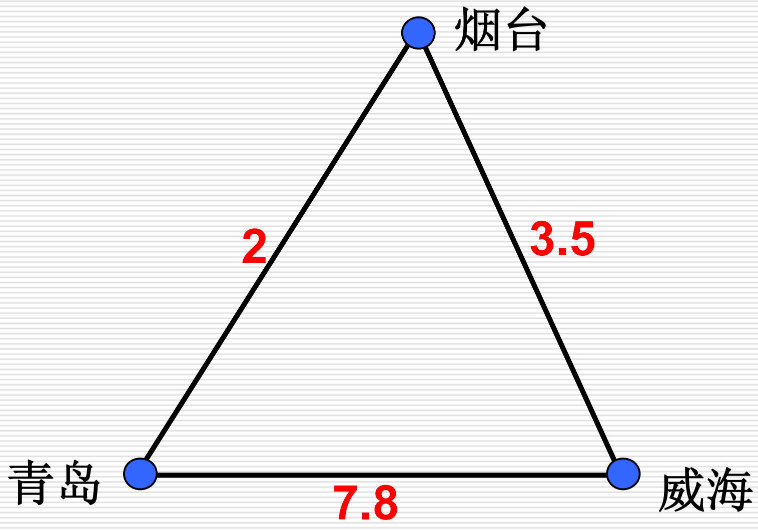




注.不同的图示可以代表同一个图



加权图



- 给每条边赋予权的图G=<V,E>称为加权图,
- 记为G=<V,E,W>,其中W表示各边权的集合.

概念

设G=<V,E>为一无向图或有向图

- 1). 若V,E都是有穷集合,则称G是有限图.
- 2). 若|V|=n,则称G为n阶图.
- 3). 若E=∅,则称G为零图.
  - 特别是,若此时又有|V|=1,则称G为平凡图.
- 4). 在图的运算中可能产生顶点集为空集的运算结果,为此规定顶点集为空集的图为空图,记为∅

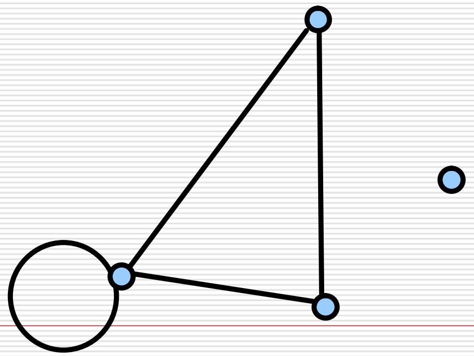


图1

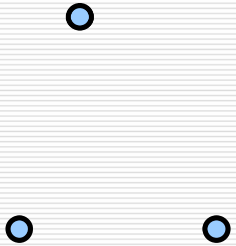


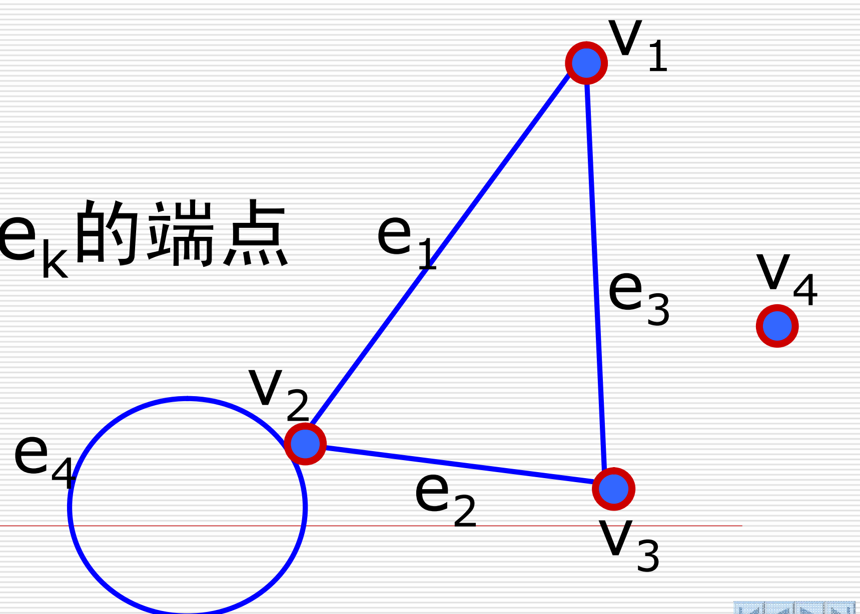
图2

图3

关联

- 设$e_k=(v_i,v_j)$为无向图$G=\langle V,E\rangle$中的一条边,称v_i,v_j为e_k的端点,e_k与v_i(或v_j)是彼此关联的.
  - 无边关联的顶点称为孤立点.
  - 若一条边所关联的两个顶点重合,则称此边为环.

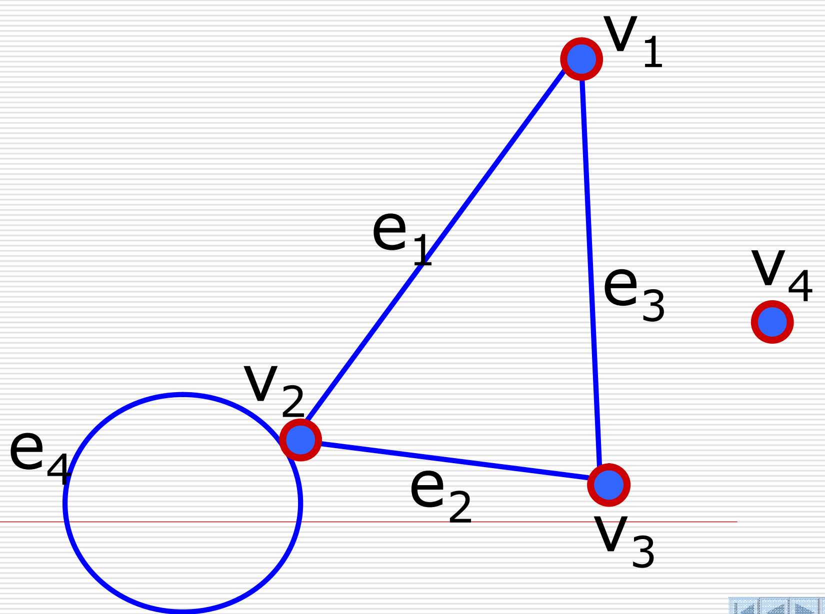
$$e_k\text{与}v_i(\text{或}v_j)\text{的关联次数}\begin{cases}1 & v_i\neq v_j,\\ 2 & v_i=v_j,\\ 0 & v_i(v_j)\text{不是}e_k\text{的端点}\end{cases}$$



相邻

设无向图G=<V,E>,$v_i,v_j \in V$,$e_k,e_l \in E$.

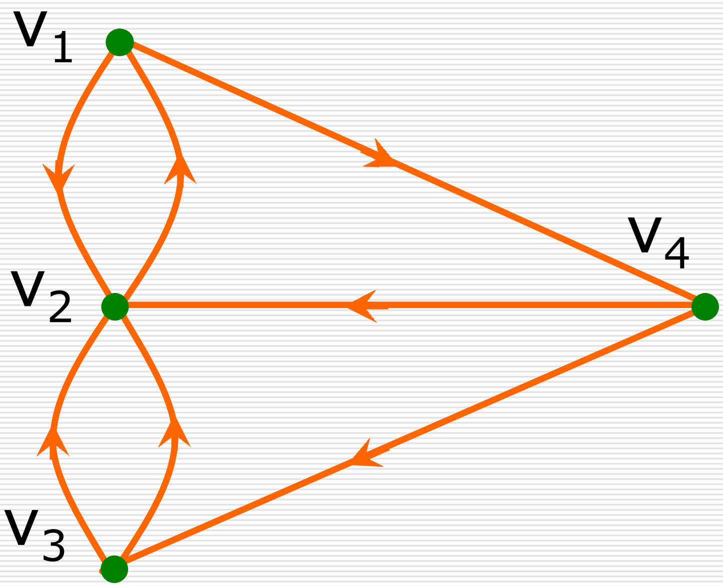
- 1). 若存在一条边e以v_i,v_j为端点,即$e=(v_i,v_j)$,则称v_i,v_j是彼此相邻的,简称相邻的.
- 2). 若e_k,e_l至少有一个公共端点,则称e_k,e_l是彼此相邻的,简称相邻的.
- 相邻:点与点,边与边
- 关联:点与边



始点、终点（有向图）

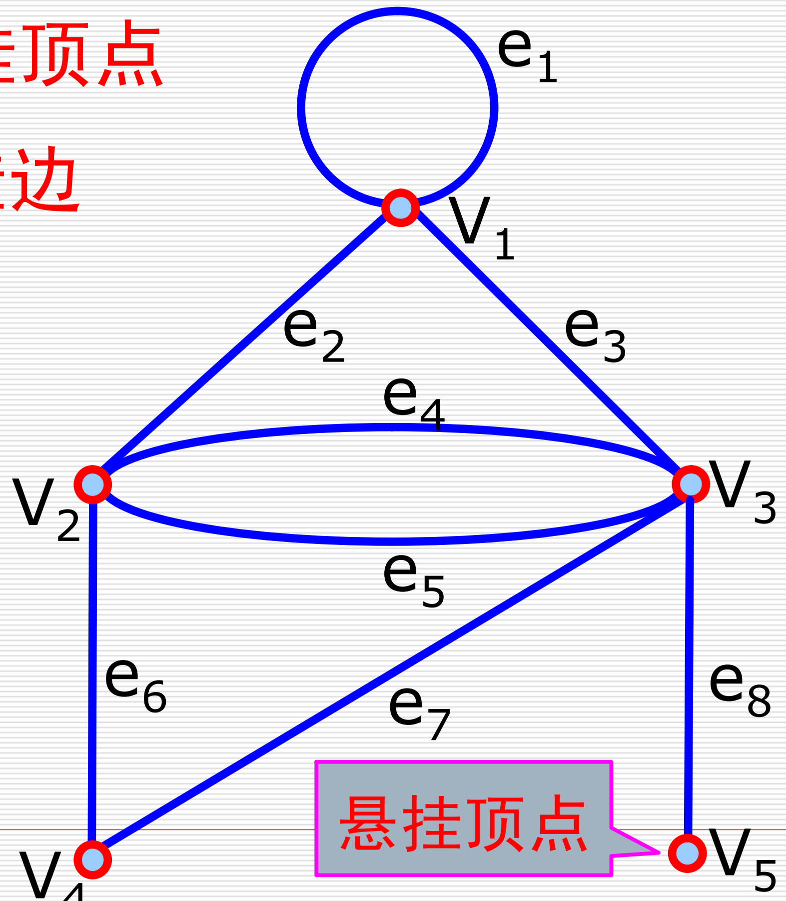
以上两定义(关联、相邻)对有向图也是类似的

- 若e_k=<v_i,v_j>,除称v_i,v_j是e_k的端点外,还称v_i是e_k的始点,v_j是e_k的终点
- 邻接:
  - v_i邻接到v_j
  - v_j邻接于v_i



度

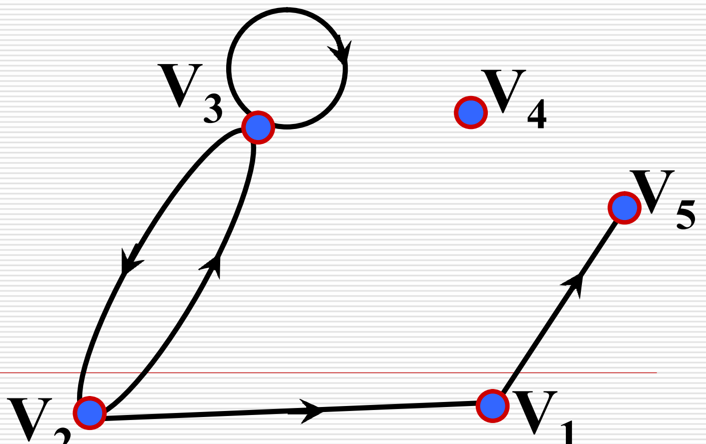
- 设G=<V,E>为无向图,$v_i \in V$,称v_i作为边的端点的次数之和为v_i的度数,简称度,记作$d(v_i)$.
- 称度数为1的顶点为悬挂顶点
  - 它所对应的边为悬挂边
- 度数为0的顶点?
- 度数为2的顶点?



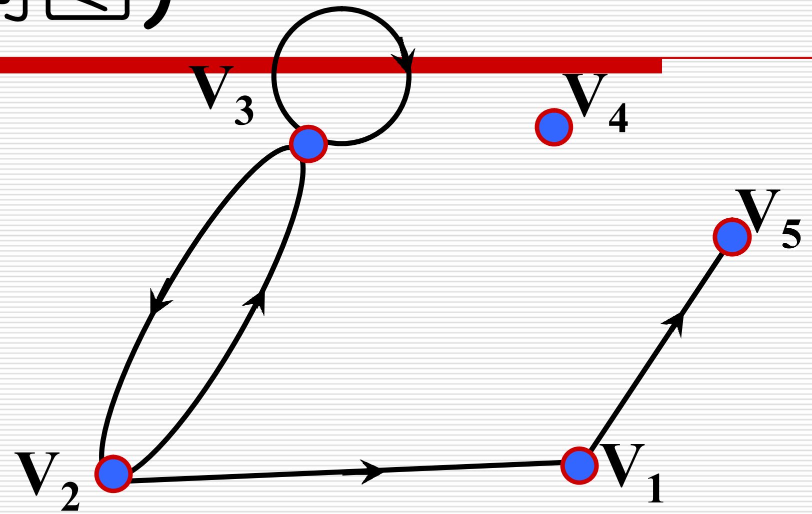
度(有向图)

设D=<V,E>为一有向图,$v_i \in V$,

- v_i的出度:v_i作为边的始点的次数之和,记作$d^+(v_i)$;
- v_i的入度:v_i作为边的终点的次数之和,记作$d^-(v_i)$;
- v_i的度数:v_i作为边的端点的次数之和,简称度,记作$d(v_i)$.
- 显然$d(v_i)=d^+(v_i)+d^-(v_i)$.



度(有向图)

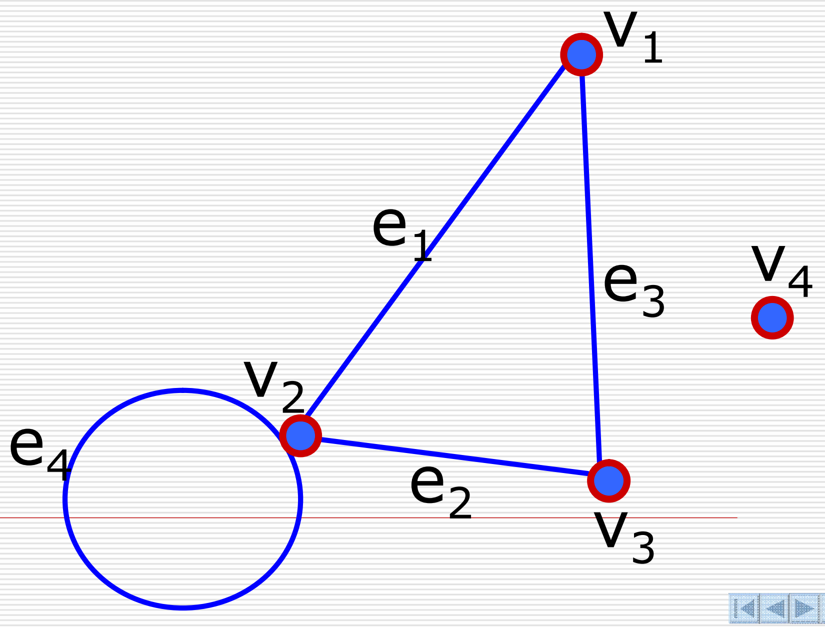


- $d(v_1)=2, d^+(v_1)=1, d^-(v_1)=1;$
- $d(v_2)=3, d^+(v_2)=2, d^-(v_2)=1;$
- $d(v_3)=4, d^+(v_3)=2, d^-(v_3)=2;$
- $d(v_4)=d^+(v_4)=d^-(v_4)=0;$
- $d(v_5)=1, d^+(v_5)=0, d^-(v_5)=1;$
  - v_5是悬挂结点,$\langle v_1,v_5\rangle$为悬挂边.

最大度、最小度

对于图G=<V,E>,记

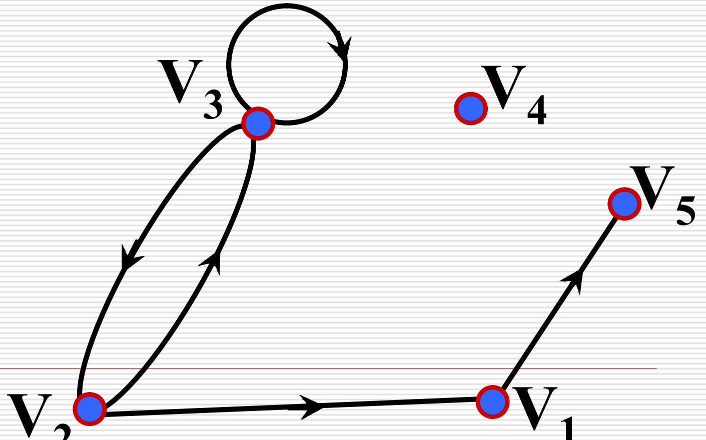
- G的最大度：$\Delta(G)=\max\{d(v)|v\in V\}$
- G的最小度：$\delta(G)=\min\{d(v)|v\in V\}$



最大出度、入度

若D=<V,E>是有向图,除$\Delta(D)$,$\delta(D)$外,还有,

- 最大出度: $\Delta^+(G)=\max\{d^+(v)|v\in V\}$,
- 最大入度: $\Delta^-(G)=\max\{d^-(v)|v\in V\}$,
- 最小出度: $\delta^+(G)=\min\{d^+(v)|v\in V\}$,
- 最小入度: $\delta^-(G)=\min\{d^-(v)|v\in V\}$.

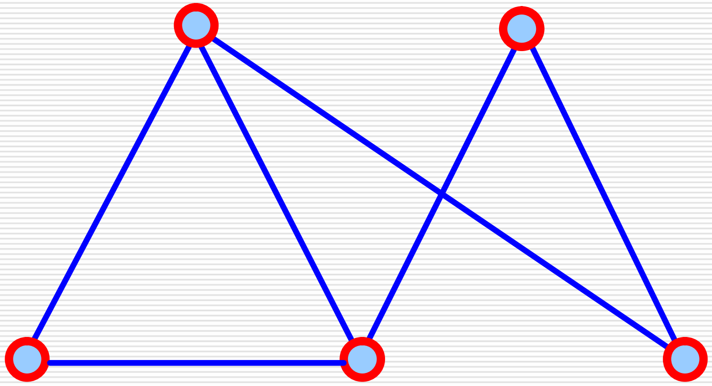


基本定理(握手定理)

- Th.设图G=<V,E>为无向图或有向图, $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $|E|=m$(m为边数),则

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$$

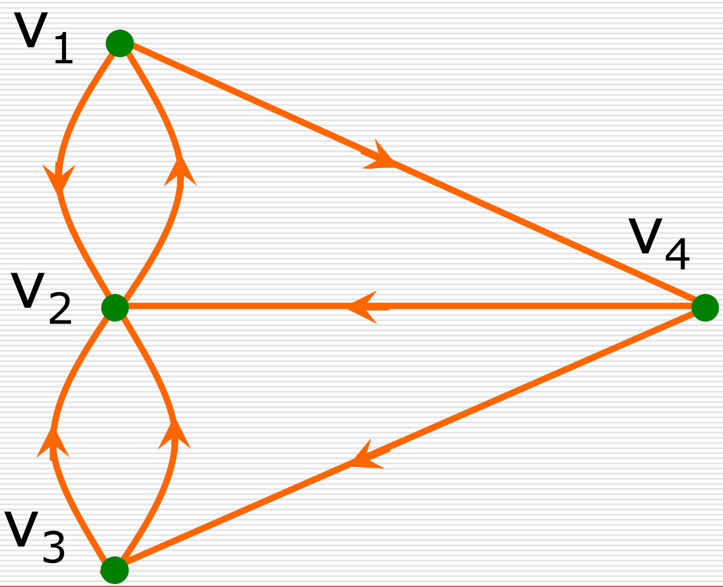
- 推论.任何图(无向的或有向的)中,度为奇数的顶点个数为偶数.



定理

设有向图D=<V,E>,V={v_1,v_2,…,v_n},|E|=m,则:

$$\sum_{i=1}^{n} d^{+}(v_i) = \sum_{i=1}^{n} d^{-}(v_i) = m$$

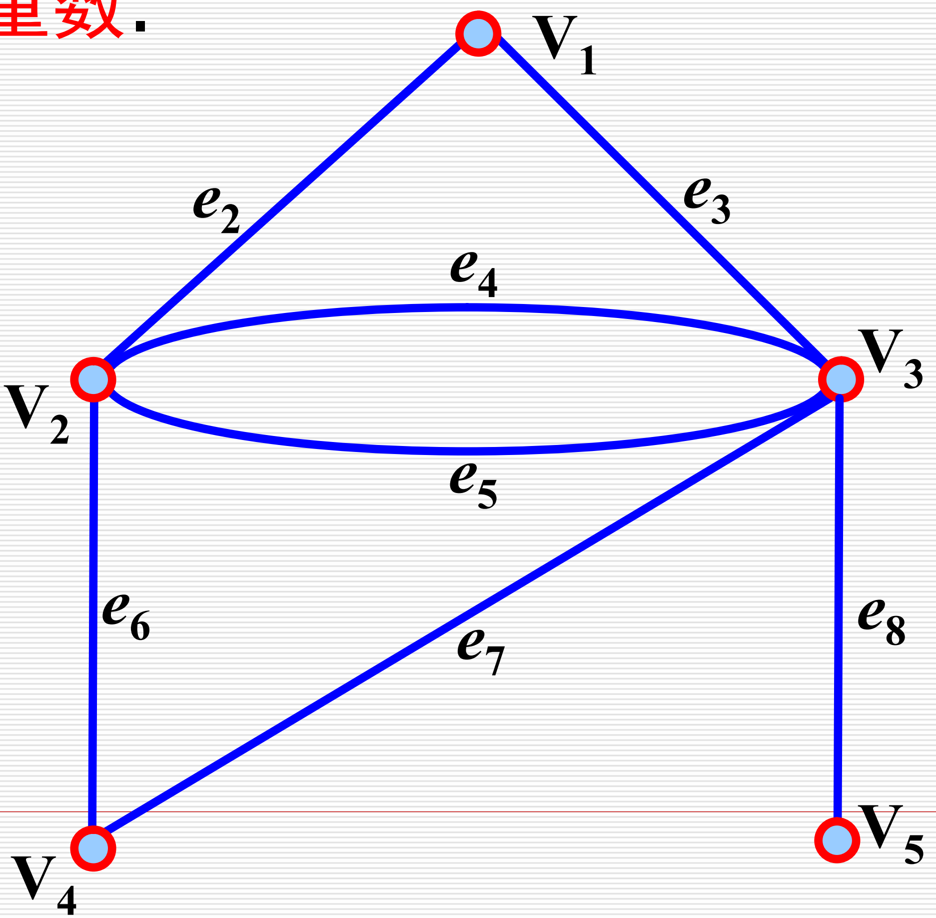


度数序列

- 设$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$为图G的顶点集,称$(d(v_1),d(v_2),\ldots,d(v_n))$为G的<u>度数序列</u>.
- 例.
  - (1) (3,3,2,3),(5,2,3,1,4)能成为图的度数序列吗?为什么?
  - (2) 已知图G中有10条边,4个3度顶点,其余顶点的度数均小于等于2.问G中至少有多少个顶点?为什么?
    - 4+4

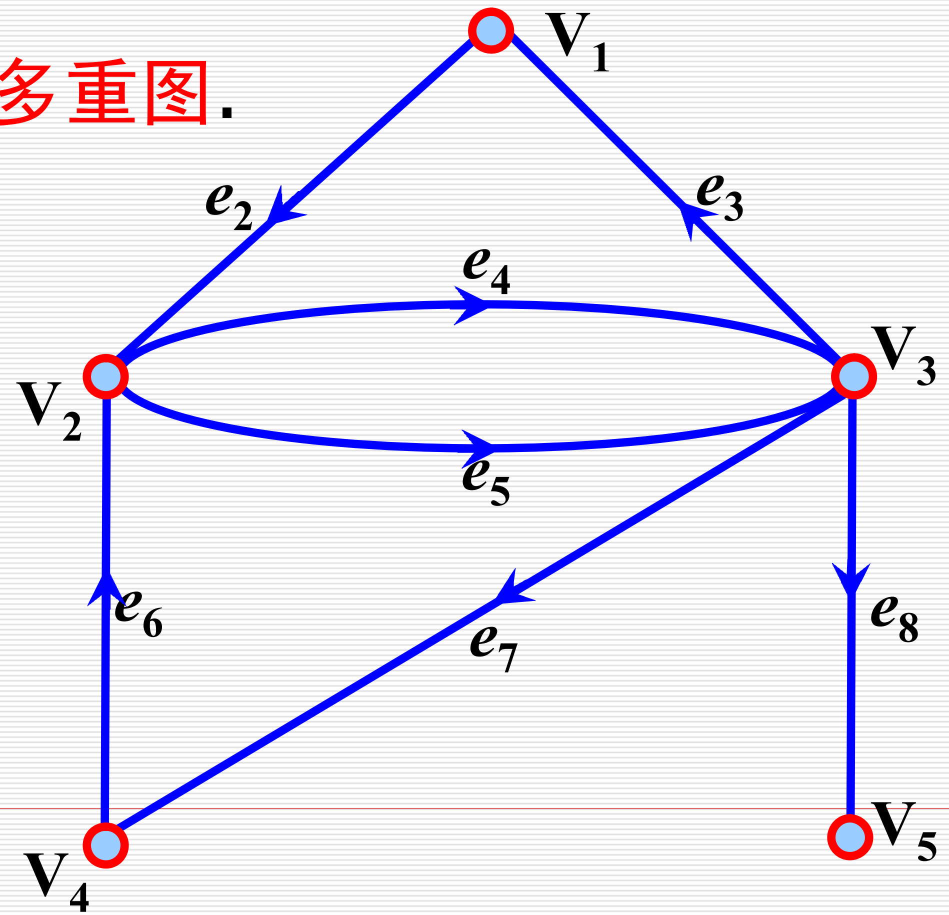
平行边、重数、多重图

- 无向图中,关联一对顶点的无向边如果多于1条,称这些边为平行边.
- 平行边的条数称为重数.



平行边、重数、多重图

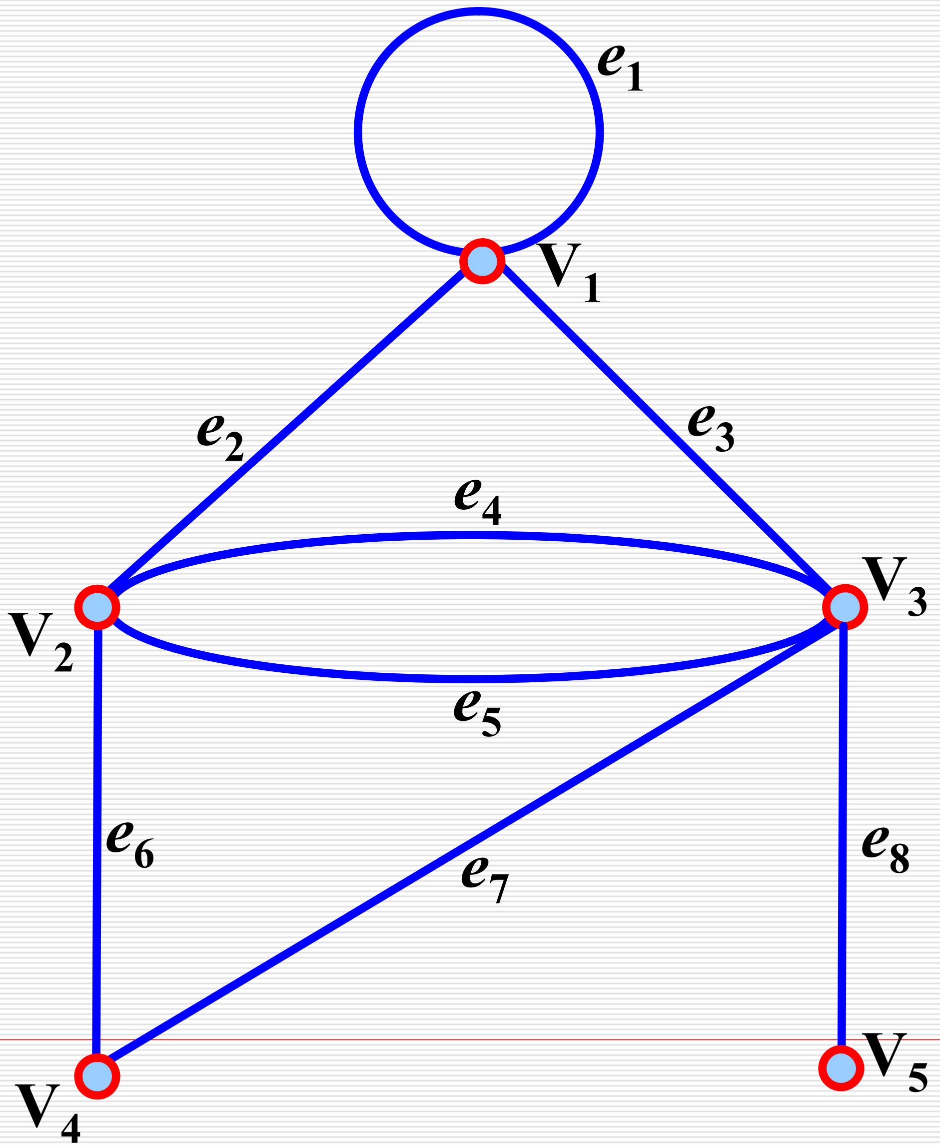
- 有向图中,关联一对顶点的有向边如果多于1条,且它们的始点与终点相同,则称这些边为有向平行边,简称平行边.
- 含平行边的图称为多重图.
- 区别关系图?



简单图

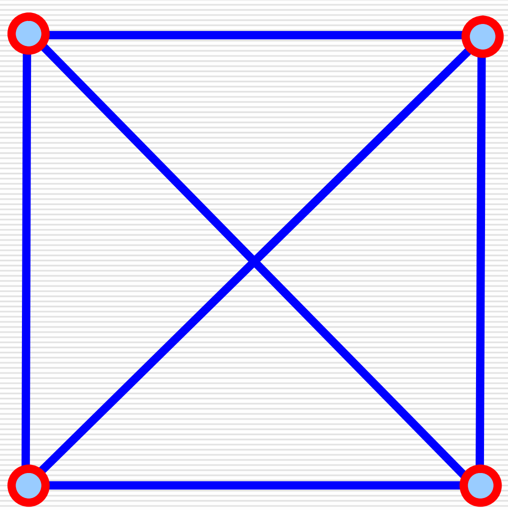
□ 简单图:

- 既不含平行边,
- 也不含环的图.

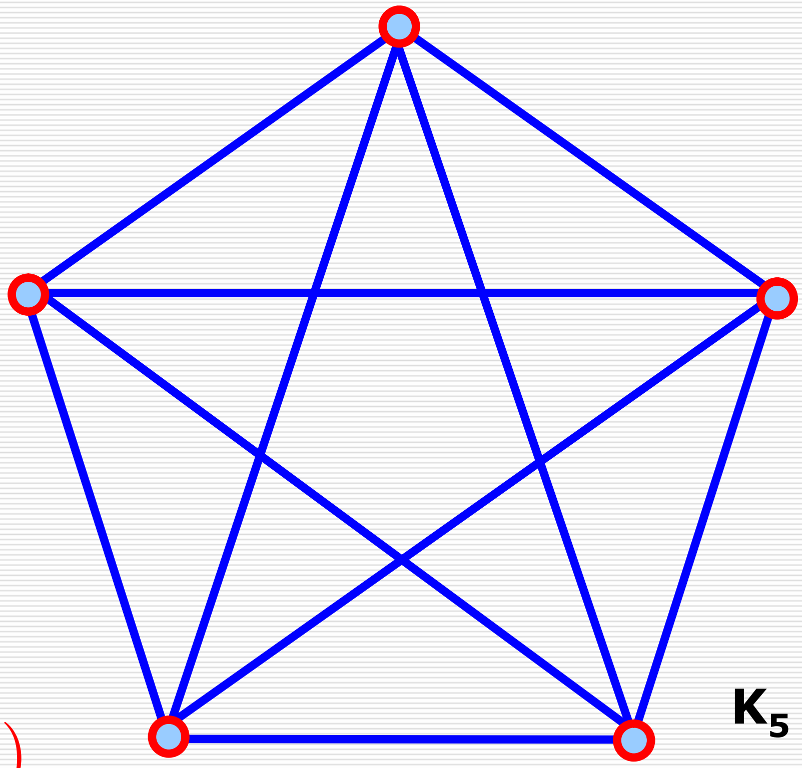


无向完全图

- 设G=<V,E>是n阶无向简单图,若G中任何顶点都与其余的n-1个顶点相邻,则称G为n阶无向完全图,记作K_n.
  - K_n均指无向完全图.



K_4

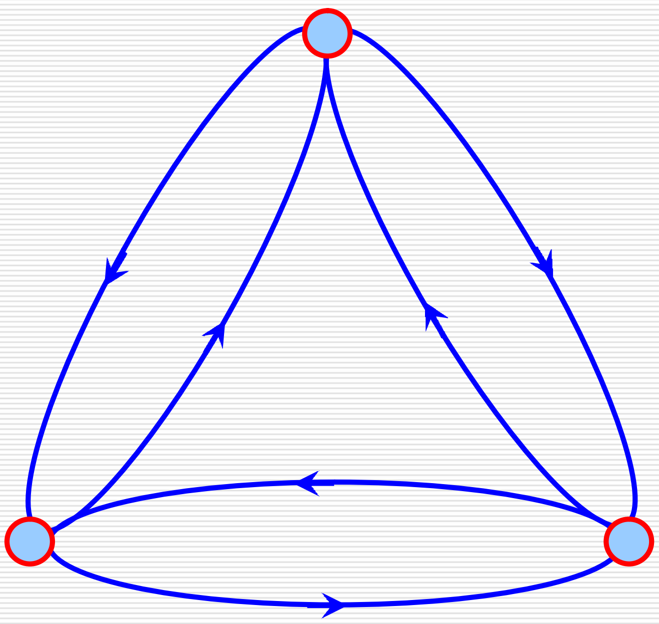


K_5

$$|E| = C_n^2 = \frac{1}{2}n(n-1)$$

有向完全图

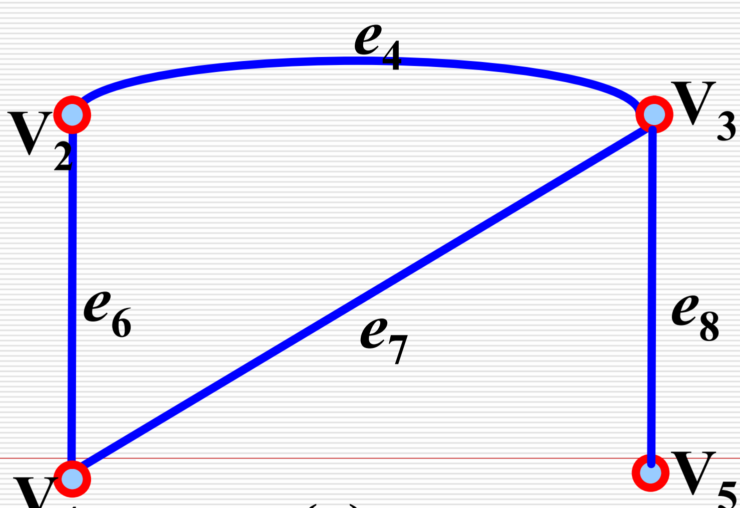
- 设D=<V,E>为n阶有向简单图,若对于任意的顶点u,v∈V(u≠v),既有有向边<u,v>,又有<v,u>,则称D是n阶有向完全图.



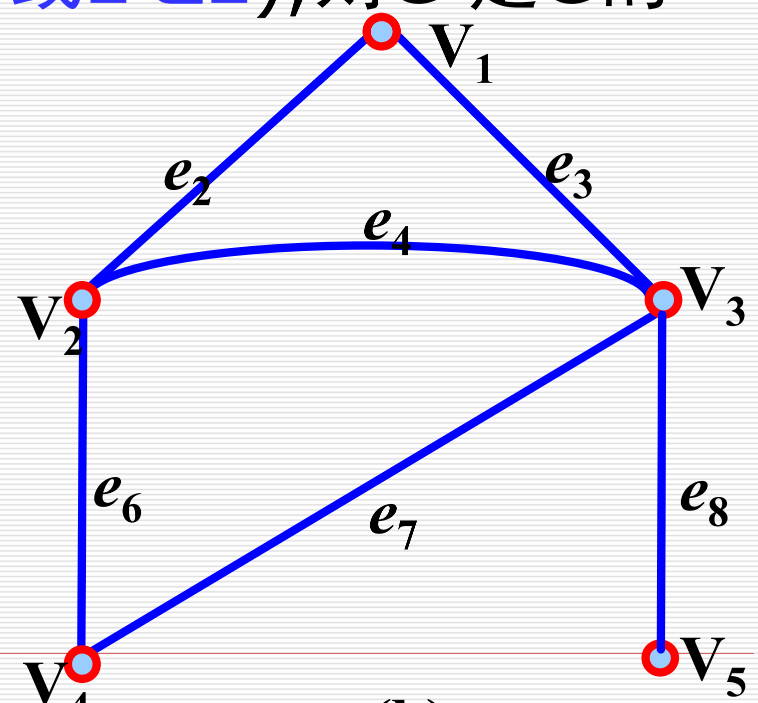
3阶有向完全图

子图、真子图

- 设$G=<V,E>$,$G'=<V',E'>$是两个图.若$V'\subseteq V$,且$E'\subseteq E$,则称G'是G的子图,G是G'的母图,记做$G'\subseteq G$.
- 若$G'\subseteq G$且$G'\neq G$(即$V'\subset V$或$E'\subset E$),则G'是G的真子图.



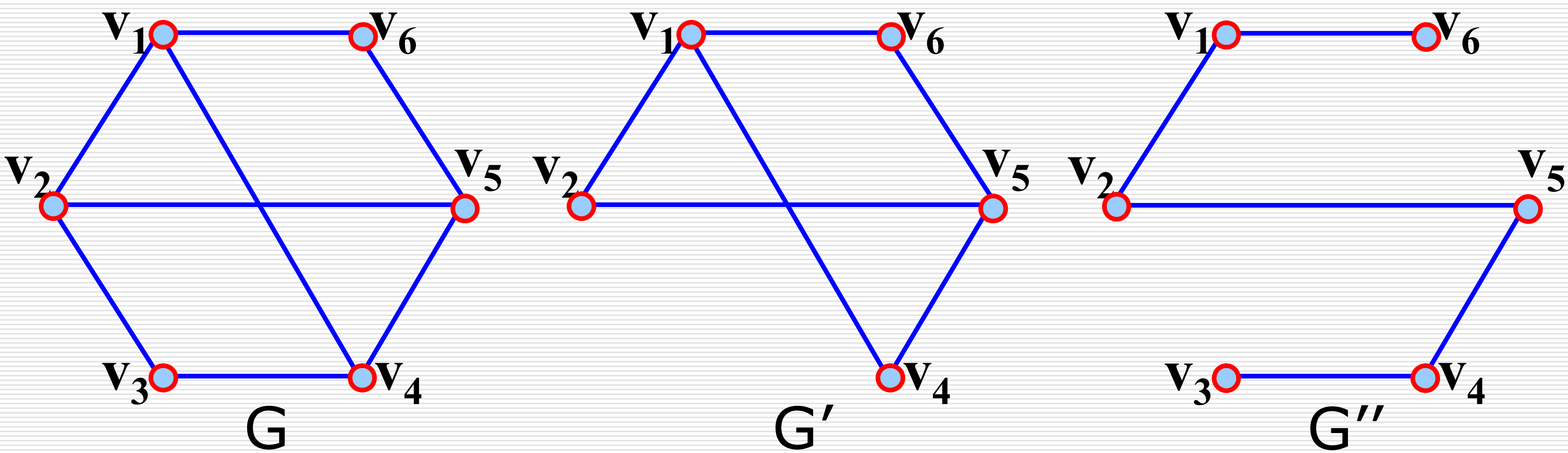
(a)



(b)

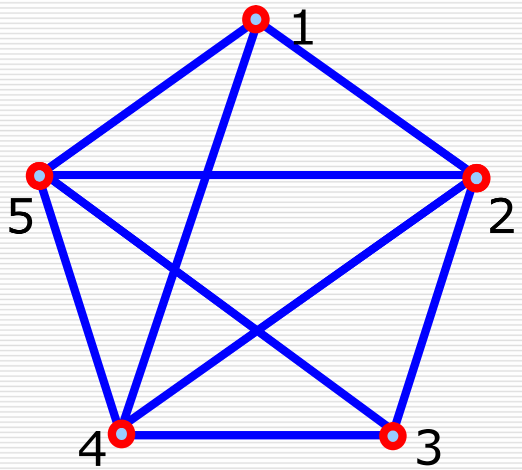
生成子图、导出子图

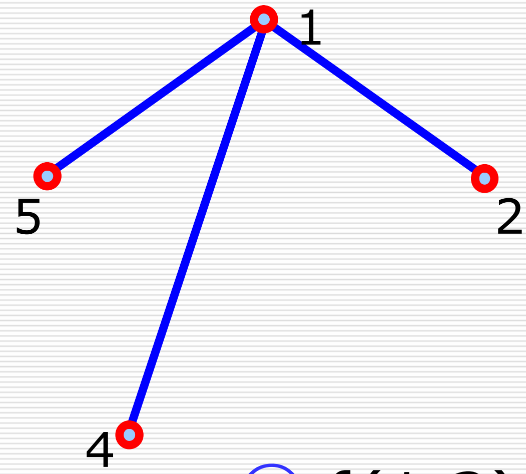
- 若$G'\subseteq G$且$V'=V$,则称G'是G的生成子图
- V_1导出的导出子图:设$V_1\subseteq V$且$V_1\neq\varnothing$,以V_1为顶点,以两端点均在V_1中的全体边为边集的G的子图
- E_1导出的导出子图:设$E_1\subseteq E$且$E_1\neq\varnothing$,以E_1为边集,以E_1中关联的顶点的全体为顶点集的G的子图



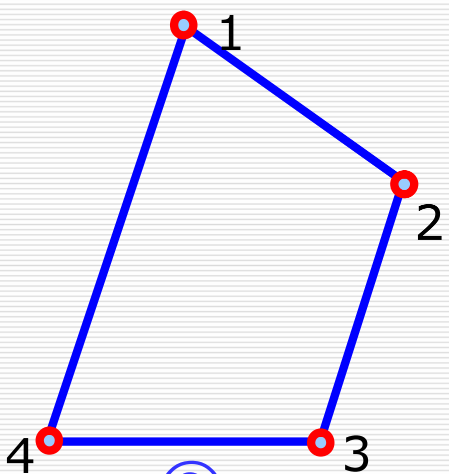
图G的生成子图G″,结点集$\{v_1,v_2,v_4,v_5,v_6\}$的导出子图G'

无向图子图举例

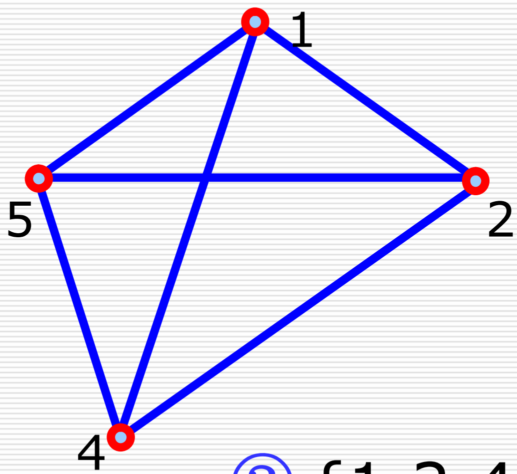




① {(1,2),(1,4),(5,1)}



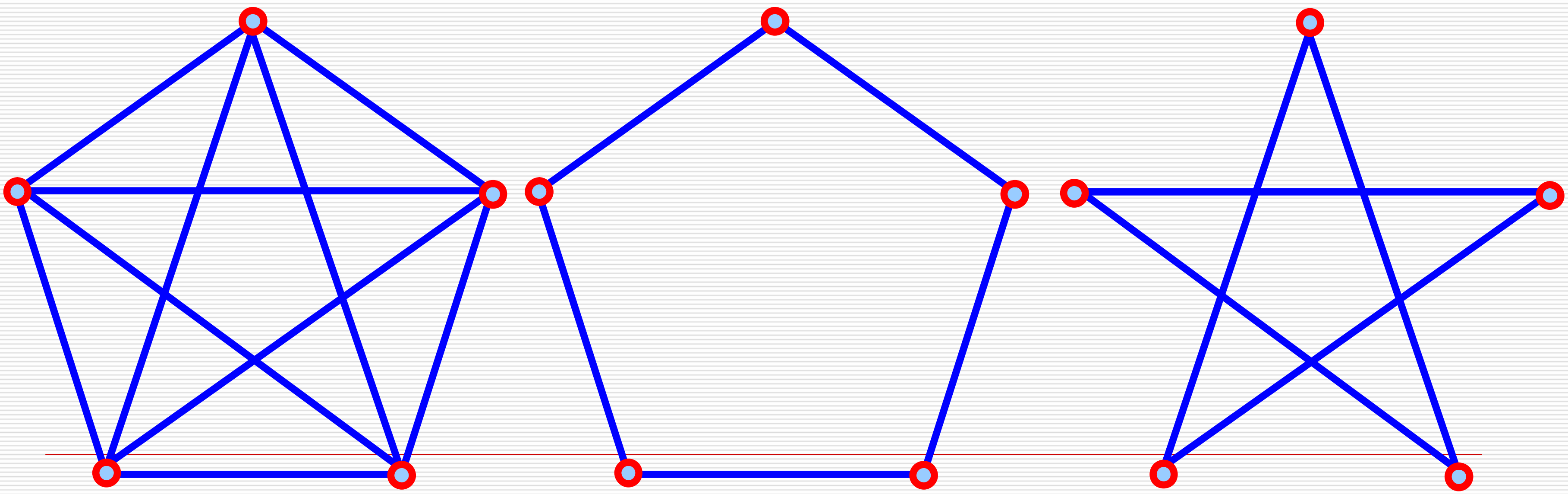
②
{(1,2),(3,2),(3,4),(1,4)}



③ {1,2,4,5}

补图

- 设G=<V,E>是n阶无向简单图.以V为顶点集,以所有能使G成为完全图K_n的添加边组成的集合为边集的图,称为G相对于完全图K_n的补图,简称G的补图,记作$\overline{G}$.
- 有向简单图的补图可类似定义.



图的同构

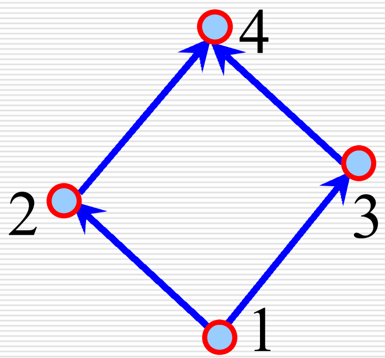
- Def.设两个无向图$G=\langle V,E\rangle$,$G'=\langle V',E'\rangle$,若存在双射$f:V\to V'$,s.t.对$\forall a,b\in V$, $(a,b)\in E \Leftrightarrow (f(a),f(b))\in E'$,且$(a,b)$与$(f(a),f(b))$重数相同,则称$G$与$G'$同构,记为$G\cong G'$.

注① 两图同构是等价关系.

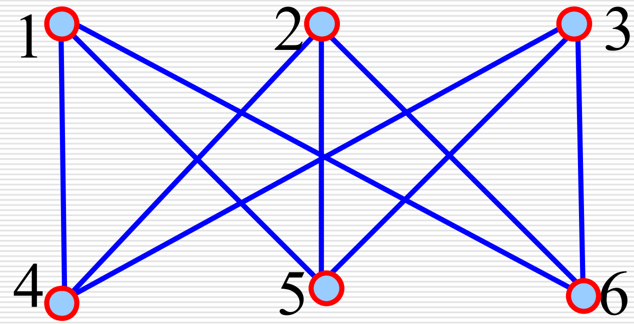
② 两图同构时不仅结点之间要有一一对应关系,而且这种对应关系保持点间的邻接关系.对有向图同构还要求保持边的方向.

③ 寻求判断图同构的简单有效方法仍是图论待解决的重要问题.

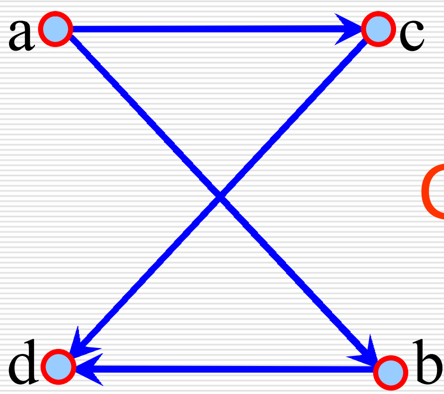
同构图举例



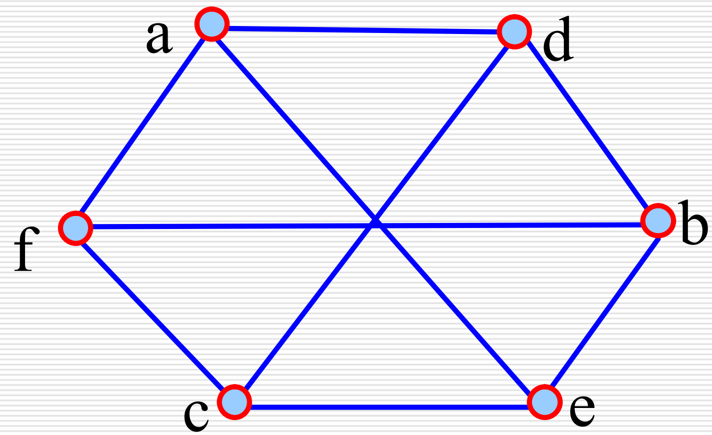
G



H



G'



H′

$G \cong G'$

1→a, 2→b

3→c, 4→d

$H \cong H'$

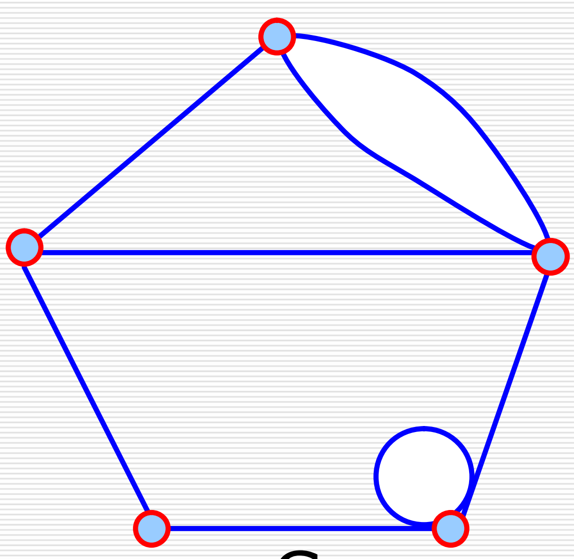
1→a, 2→b, 3→c

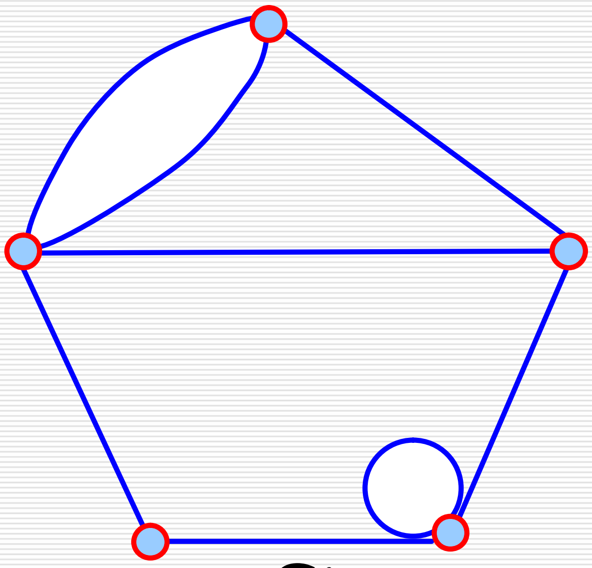
4→d, 5→e, 6→f

非同构图举例

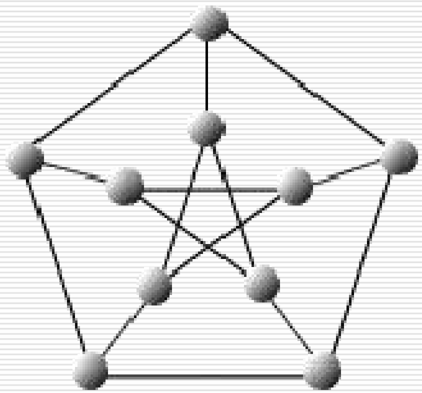
- 存在结点数及每个结点对应度都相等的两个图仍然不同构的情况.

注. 两个4度点或邻接或不相邻接

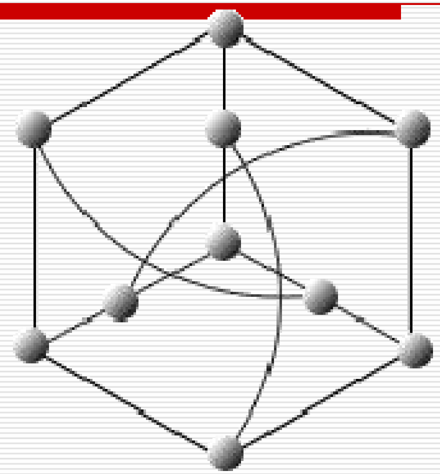




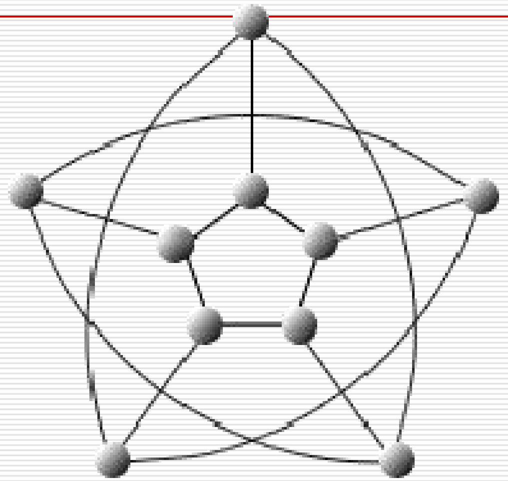
彼德森(Petersen)图



(1)

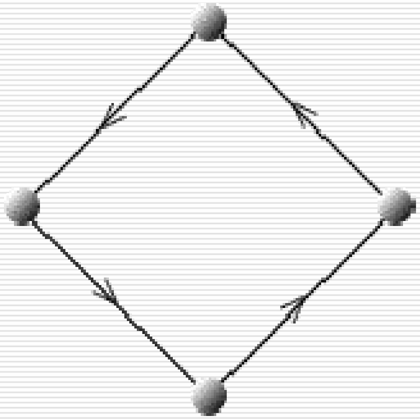


(2)

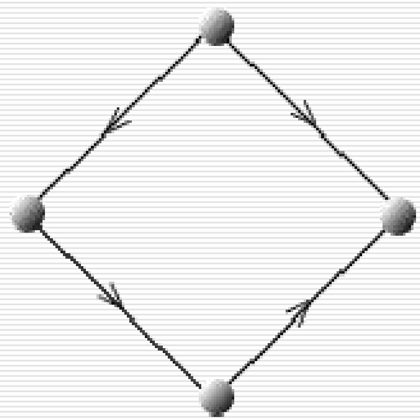


(3)

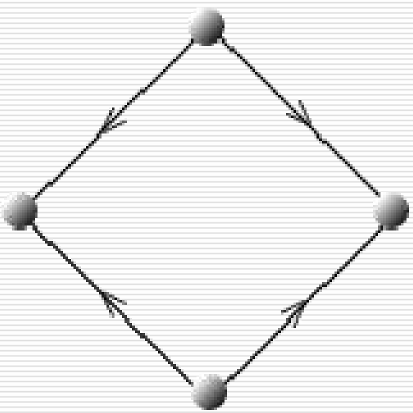
(2),(3)均与(1)同构



(4)



(5)



(6)

(4),(5),(6)彼此间都不同构

Graph Theory 之

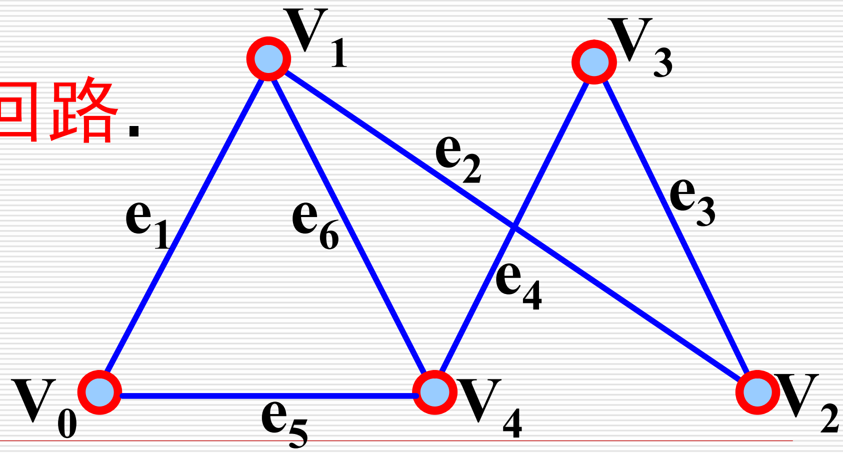
图的基本概念

- 无向图及有向图
- 通路、回路、图的连通性
- 图的矩阵表示
- 最短路径及关键路径

通路与回路

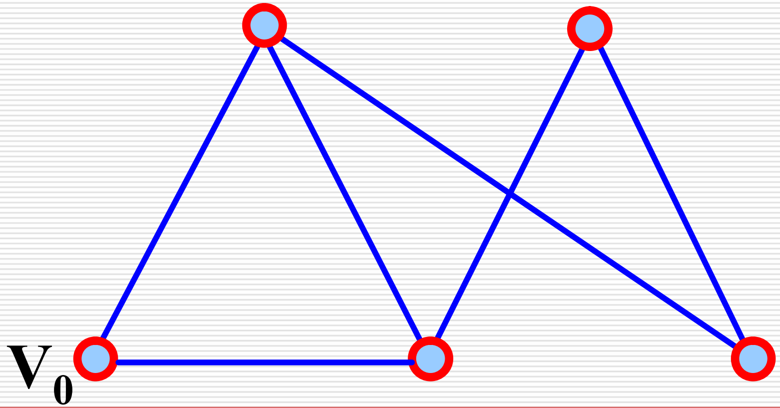
给定图G=<V,E>.设G中顶点和边的交替序列为 $\Gamma=v_0e_1v_1e_2v_2\ldots v_{s-1}e_sv_s$,若Γ满足如下条件:

- 其中$e_i=(v_{i-1},v_i)$(G是有向图时,$e_i=<v_{i-1},v_i>$), 则称Γ为顶点v_0到v_s的通路.
- v_0和v_s分别称为此通路的起点和终点,Γ中边的数目s称为Γ的长度.
- 当$v_0=v_s$时,此通路称为回路.



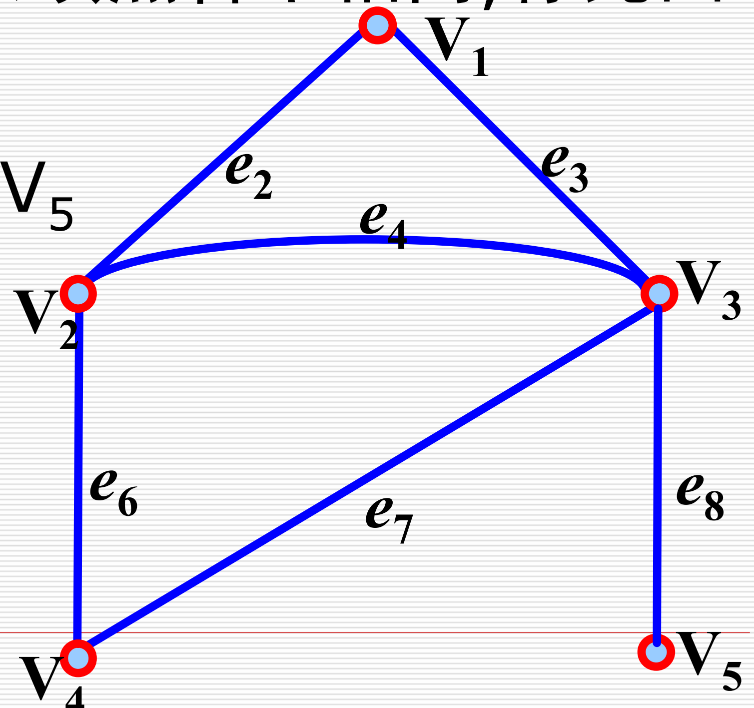
简单通路(回路)

- 若Γ中的所有边$e_1, e_2, \cdots, e_s$互不相同,则称Γ为简单通路.
- 若回路中的所有边互不相同,称此回路为简单回路或一条闭迹.



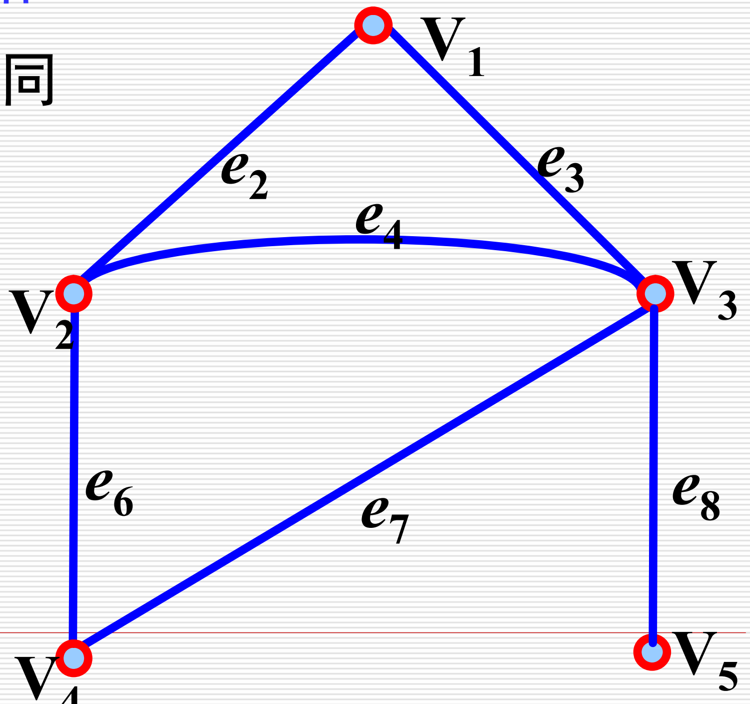
初级通路(回路)

- 若通路的所有顶点$v_0,v_1\cdots,v_s$互不相同,称此通路为初级通路或一条路径
  - 初级通路中所有边互不相同
- 若回路中,除$v_0=v_s$外,其余顶点各不相同,称此回路为初级回路或圈.
- $\Gamma=V_4e_7V_3e_3V_1e_2V_2e_4V_3e_8V_5$
- $\Gamma=V_4e_6V_2e_2V_1e_3V_3e_8V_5$
- $\Gamma=V_4e_7V_3e_8V_5$



复杂通路(复杂回路)

- 有边重复出现的通路称为复杂通路,有边重复出现的回路称为复杂回路.
- 初级通路(回路)是简单通路(回路),但反之不真.
  - 初级通路 → 简单通路
  - 顶点互不相同 → 边互不相同

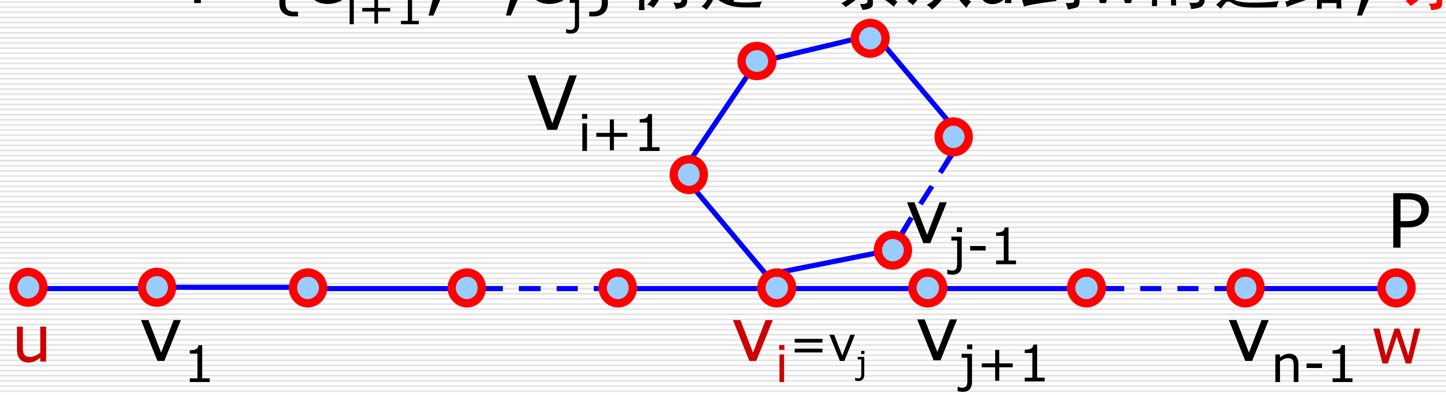


定理

- 任何图G中若有从u到w的通路(回路)必有从u到w的初级通路(回路)

证. P:G的一条长度最小的从u到w的通路;

- 如果P不是初级通路
  - $P=ue_1v_1e_2\cdots v_ie_{i+1}\cdots v_je_{j+1}\cdots e_nw$
  - $P-\{e_{i+1},\cdots,e_j\}$仍是一条从u到w的通路, 矛盾



定理

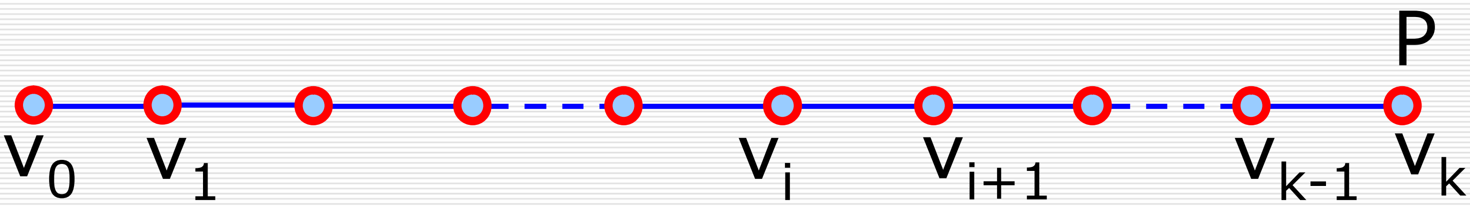
- 在n个顶点的图中任何初级通路的长度都不大于n-1;任何初级回路的长度都不大于n

证.设任一初级通路P的长度为k,则P含k+1个结点

$$P=v_0e_1v_1e_2v_2\cdots e_kv_kv_k.$$

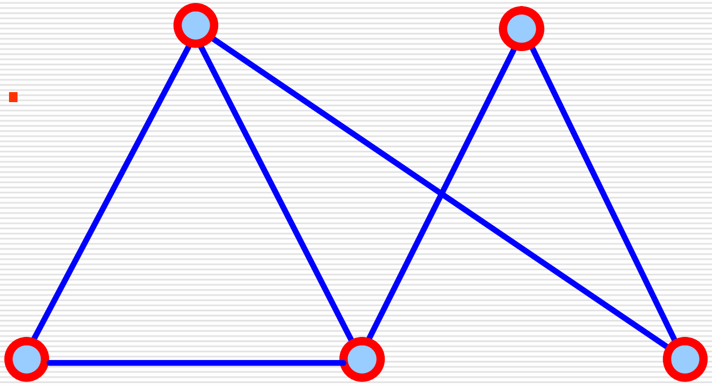
因$v_0,v_1,\cdots,v_k$两两不同,故$k+1\le n$,从而$k\le n-1$.

同理,长度为k的基本回路有k个不同结点，从而$k\le n$.



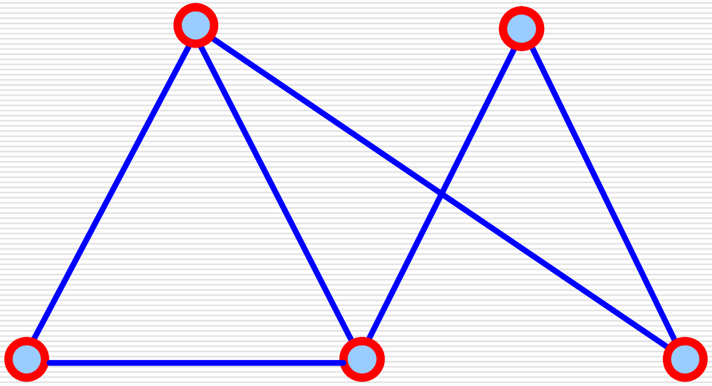
连通

- 在一个无向图G中,若从顶点v_i到v_j存在通路,则称v_i与v_j是连通的.
  - 从v_j到v_i也存在通路
  - 规定v_i到自身总是连通的
- 在一个有向图D中,若从顶点v_i到v_j存在通路,则称v_i可达v_j.
  - 规定v_i到自身总是可达的.



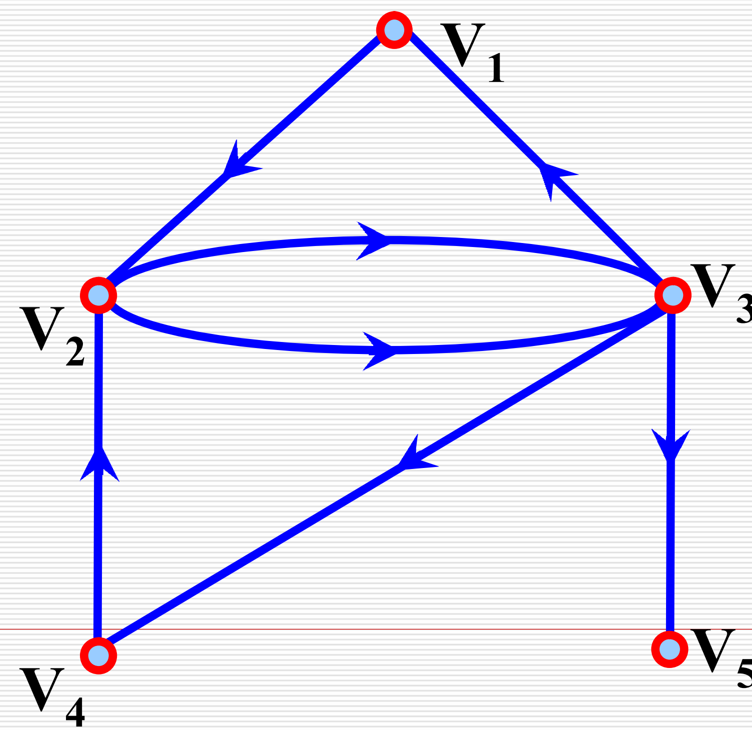
短程线(无向图)

- 设v_i,v_j为无向图G中的任意两点,若v_i与v_j是连通的,则称v_i与v_j之间长度最短的通路为v_i与v_j间的短程线
- 短程线的长度称为v_i与v_j间的距离,记作$d(v_i,v_j)$



短程线(有向图)

- 设v_i,v_j为有向图D中任意两点,若v_i可达v_j,则称从v_i到v_j长度最短的通路为v_i到v_j的短程线
- 短程线的长度称为v_i到v_j的距离,记作$d<v_i,v_j>$



性质

若v_i不可达v_j,规定$d<v_i,v_j>=\infty$. $d<v_i,v_j>$具有下面性质:

- 1). $d<v_i,v_j>\geq 0$;$v_i=v_j$时,等号成立.
- 2). 满足三角不等式,即

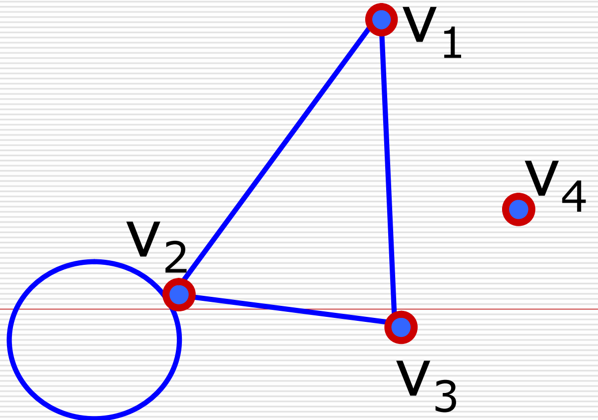
$$d<v_i,v_j>+d<v_j,v_k>\geq d<v_i,v_k>.$$

- 在无向图中,还有对称性,即

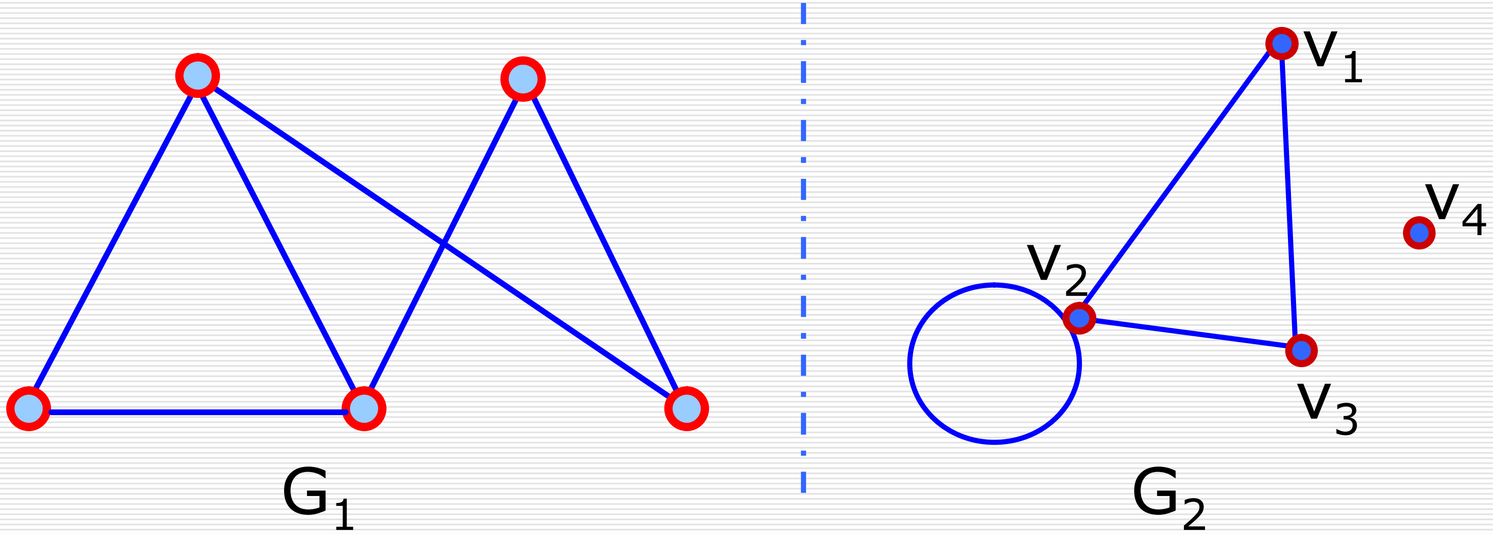
$$d(v_i,v_j)=d(v_j,v_i).$$

连通图(无向图)

- 若无向图G是平凡图,或G中任意两顶点都是连通的,则称G是连通图;否则,称G是非连通图.
- 设G为无向图,R是G中顶点间的连通关系,
  - 连通关系是等价关系
  - 按R可将V(G)划分成k(k≥i≥1)个等价类,记成V_i,
  - 由V_i导出的导出子图G[V_i]称为G的连通分支,其个数记为p(G).

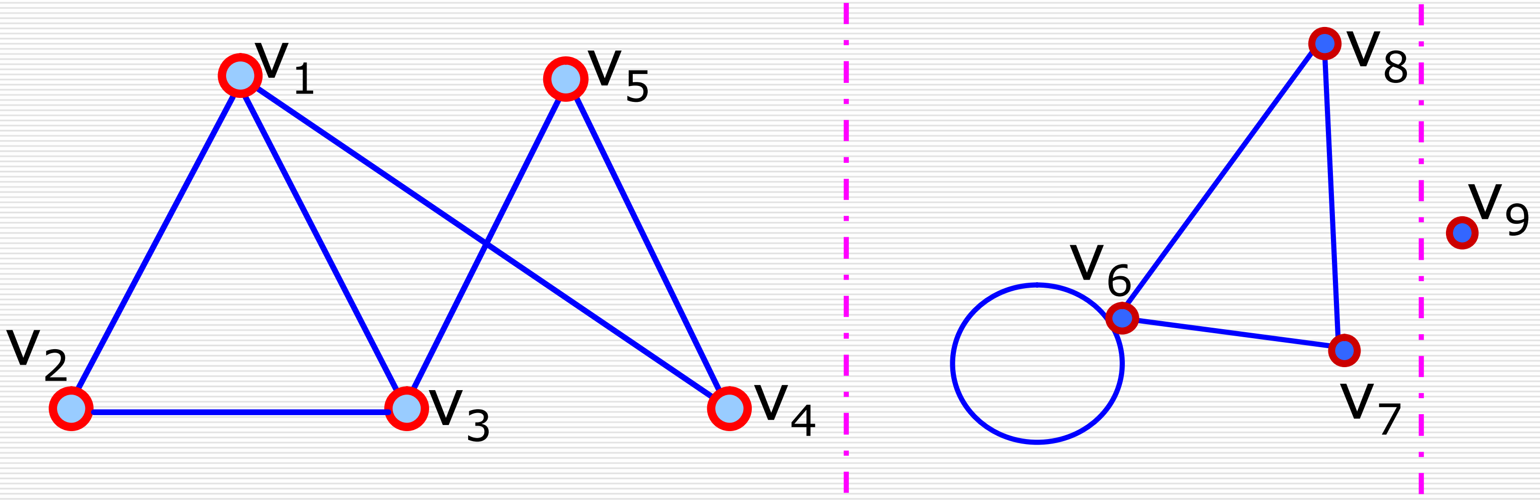


例



- G_1是连通图,$p(G_1)=1$;
- G_2是非连通图,且$p(G_2)=2$。

例

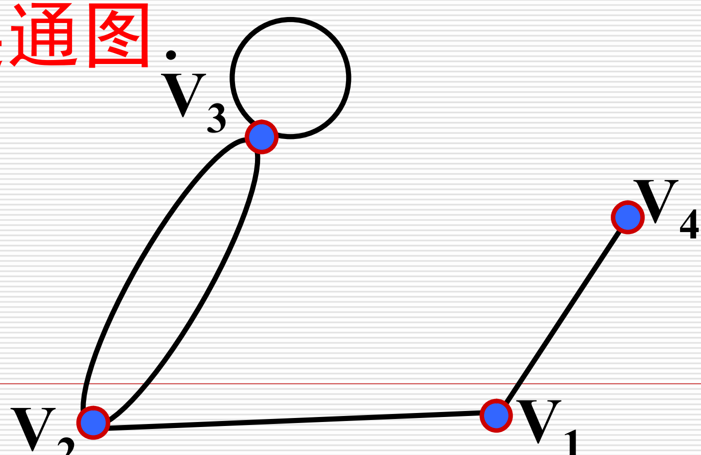


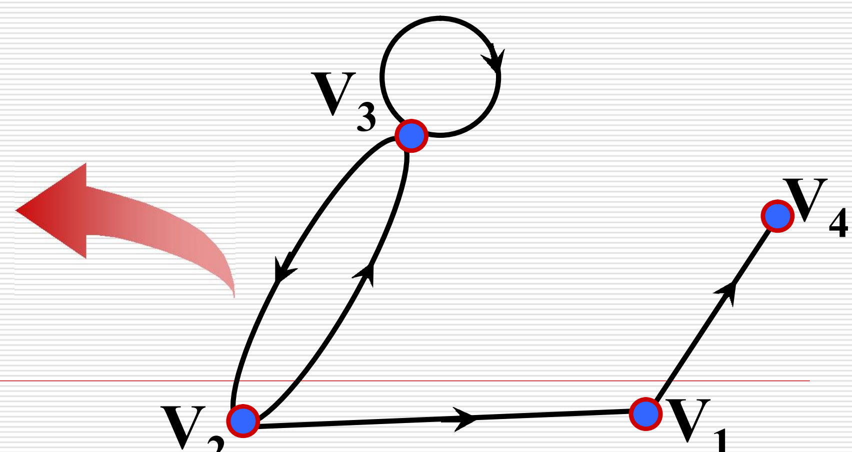
- $G=\langle V,E\rangle$, $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_9\}$;
- $R_{连通}$:等价关系
- 等价类:$V_1=\{v_1,v_2,\ldots,v_5\}$, $V_2=\{v_6,v_7, v_8\}$, $V_3=\{v_9\}$;
- 连通分支:$G[V_1]$, $G[V_2]$, $G[V_3]$, $p(G)=3$

V_i导出的导出子图

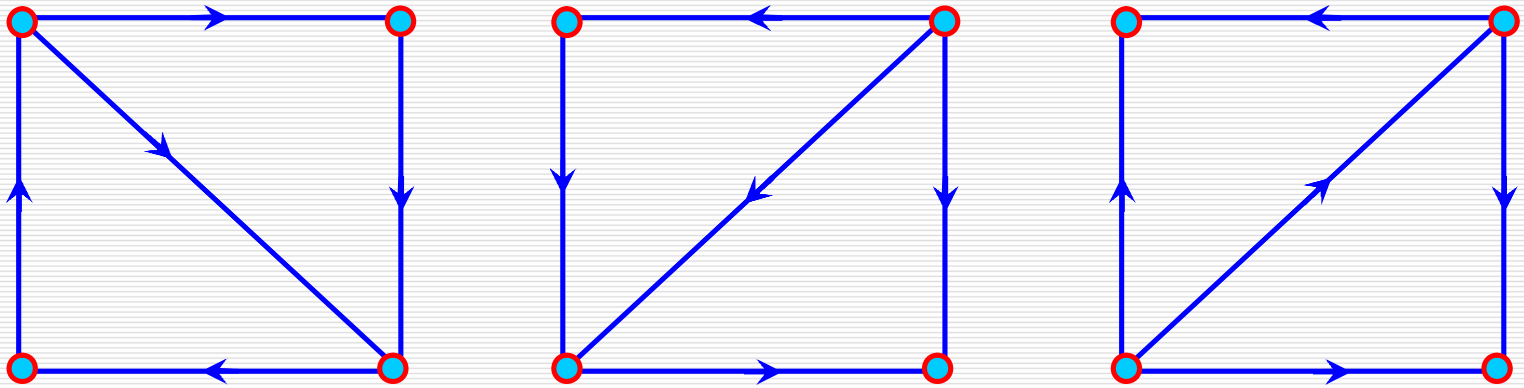
连通图(有向图)

- 设D是一个有向图,如果略去D中各有向边的方向后所得无向图G是连通图,则称D是连通图,或称D是弱连通图.
- 若D中任意两顶点至少一个可达另一个,则称D是单向连通图.
- 若D中任何一对顶点都是相互可达的,则称D是强连通图.





连通图(有向图)

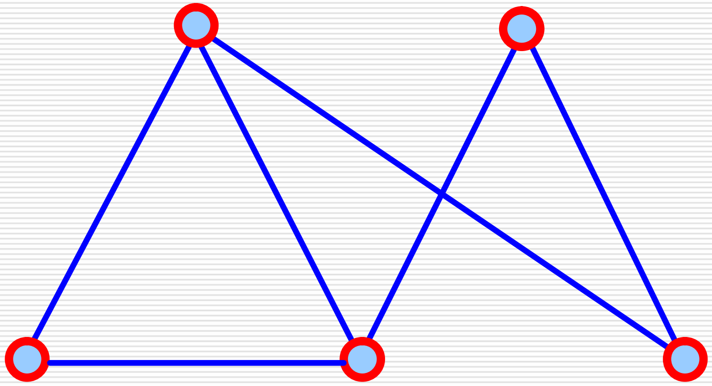


(1) (2) (3)

- 1). 强连通图
- 2). 单向连通图
- 3). 弱连通图

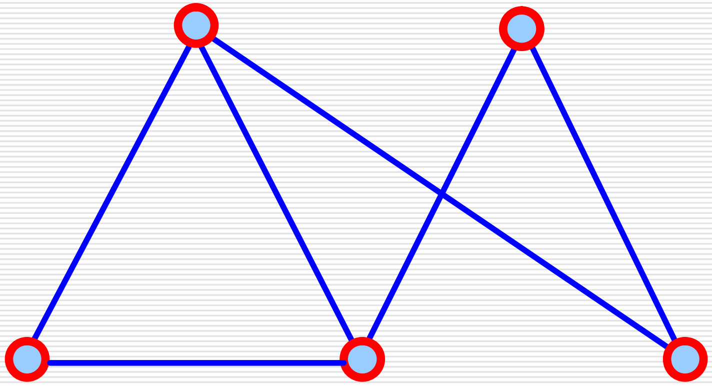
点割集

- 设无向图G=<V,E>,若存在V′⊂V,使G删除V′后,p(G-V')>p(G),而删除V'的任何真子集V''后,p(G-V'')=p(G),则称V'为G的一个点割集.
  - 删除V′:将V'中顶点及其关联的边都删除
- 若点割集中只有一个顶点v,则称v为割点.

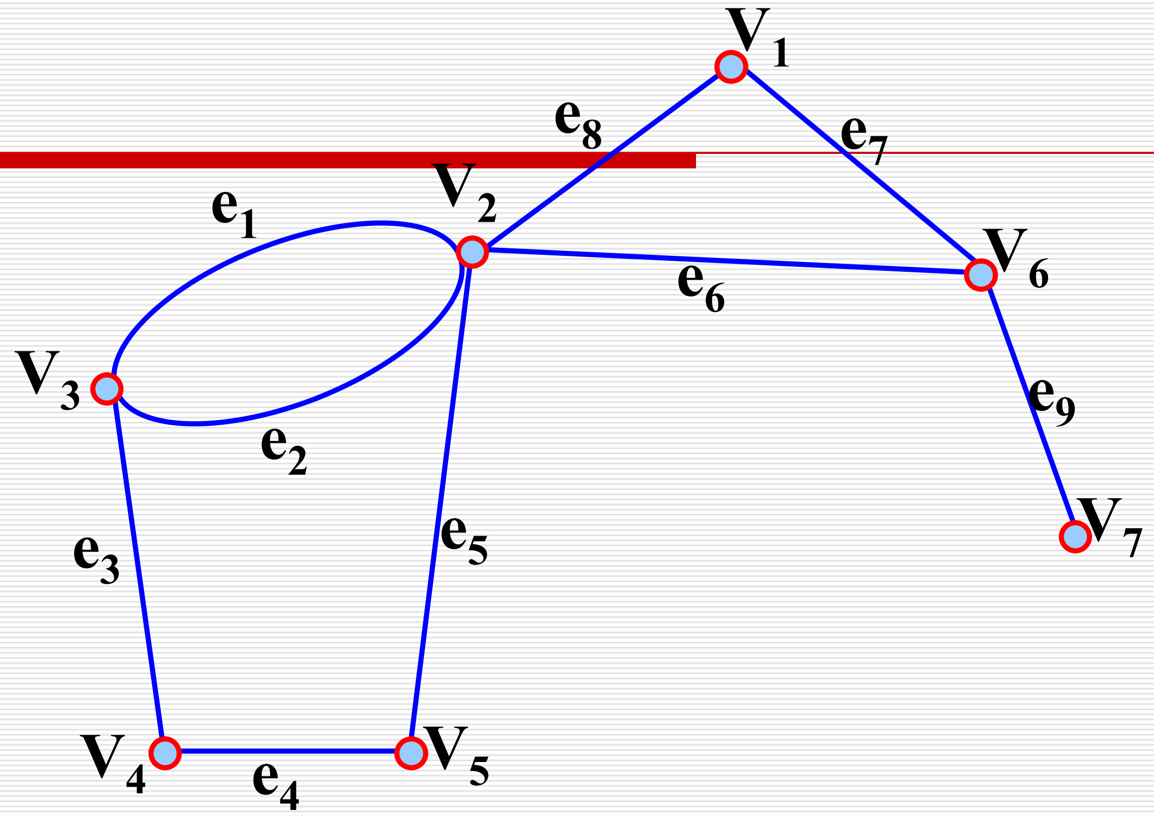


边割集

- 设无向图G=<V,E>,若存在E'⊂E,使G删除E后,p(G-E')>p(G),而删除E'的任何真子集E''后,p(G-E'')=p(G),则称E'是G的一个边割集.
  - 删除E':将E'中的边从G中全删除
- 若边割集中只有一条边e,则称e为割边或桥.



例



- $\{v_3,v_5\}$,$\{v_2\}$,$\{v_6\}$是点割集,
- $\{v_2,v_4\}$不是点割集,
- $\{e_3,e_4\}$,$\{e_4,e_5\}$,$\{e_1,e_2,e_4\}$,$\{e_9\}$等都是边割集,其中e_9是桥,
- $\{e_6,e_7,e_9\}$不是边割集.

Graph Theory 之

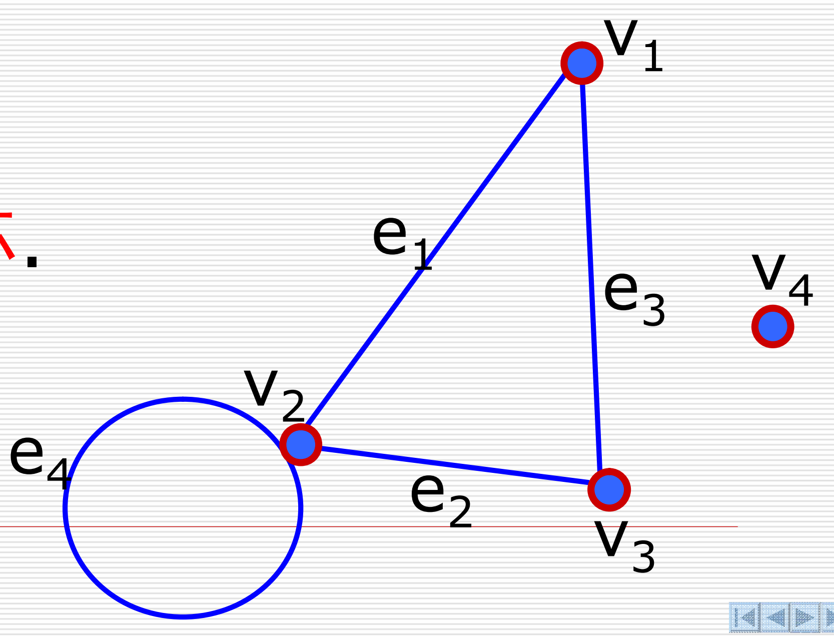
图的基本概念

- 无向图及有向图
- 通路、回路、图的连通性
- 图的矩阵表示
- 最短路径及关键路径

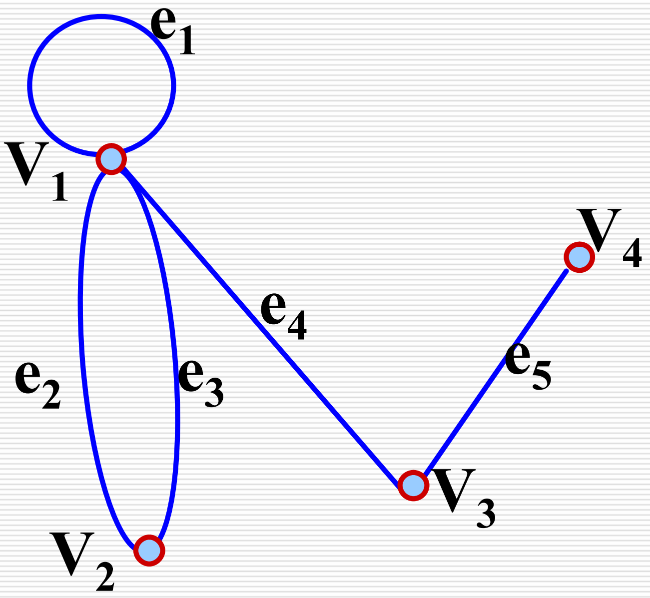
无向图的关联矩阵

- 设无向图G=<V,E>, $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$, $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$,令m_{ij}为顶点v_i与边e_j的关联次数,则称$(m_{ij})_{n\times m}$为G的关联矩阵,记为M(G)

$$m_{ij}=\begin{cases}0 & v_i\text{与}e_j\text{不关联,}\\ 1 & v_i\text{与}e_j\text{关联1次,}\\ 2 & v_i\text{与}e_j\text{关联2次,环.}\end{cases}$$



关联矩阵性质(无向图)



$$M(G)=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\end{array}$$

1. $\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 2\ (j=1,2,\dots,m)$　　每条边关联两个顶点

2. $\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = d(v_i)$　　第i行元素之和为v_i的度数

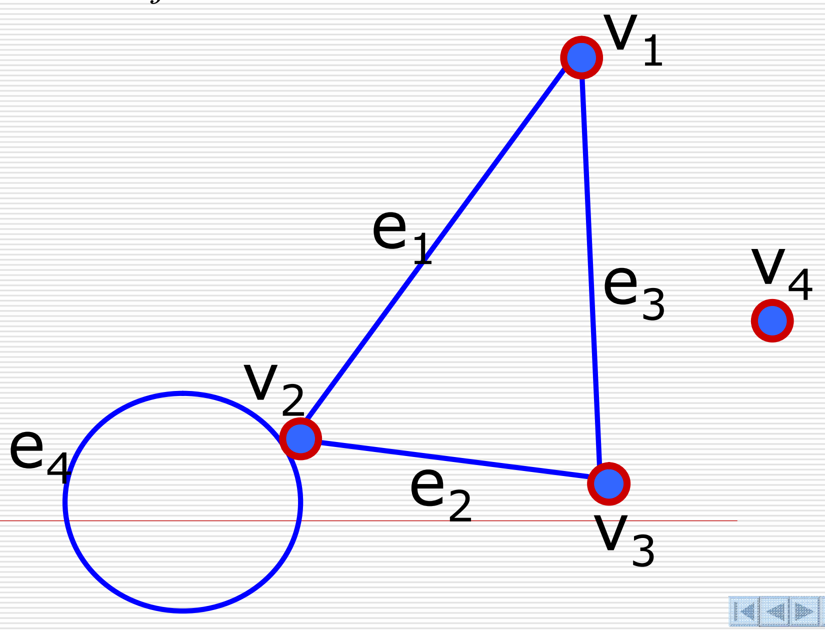
关联矩阵性质(无向图)

3. $2m = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = \sum_{i=1}^{n} d(v_i)$ 握手定理

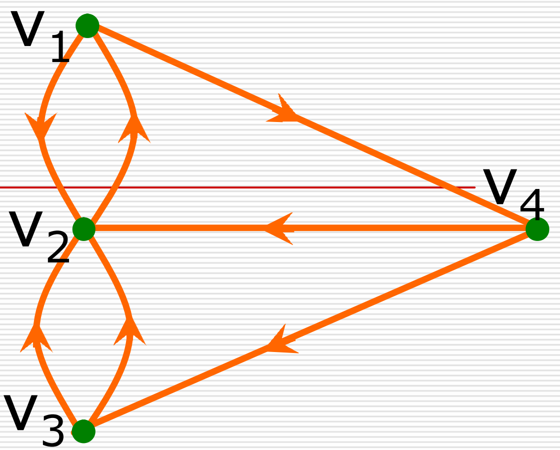
4. $\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = 0$ *iff* v_i为孤立点

5. 若第j列与第k列相同，则说明e_j与e_k为平行边

$$M(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



有向图的关联矩阵

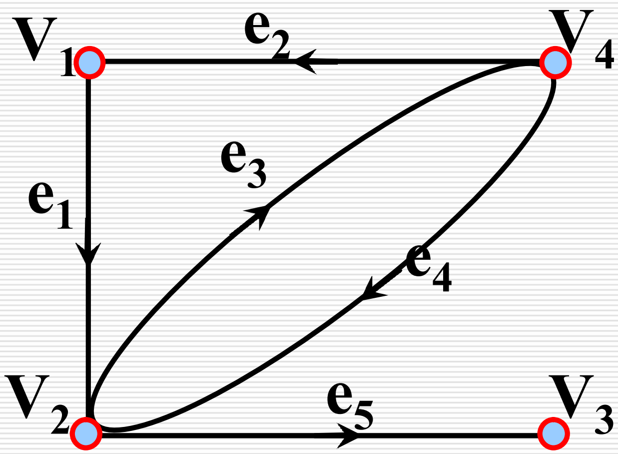


- 要求有向图D中无环存在.
- 设$D=<V,E>$, $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\},E=\{e_1,e_2,\cdots e_m\}$,

$$m_{ij}=\begin{cases} 1 & v_i\text{为}e_j\text{的始点}, \\ 0 & v_i\text{与}e_j\text{不关联}, \\ -1 & v_i\text{为}e_j\text{的终点}. \end{cases}$$

则称$(m_{ij})_{n\times m}$为D的关联矩阵,记作$M(D)$.

关联矩阵性质(有向图)



$$M(D)=\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \end{array}$$

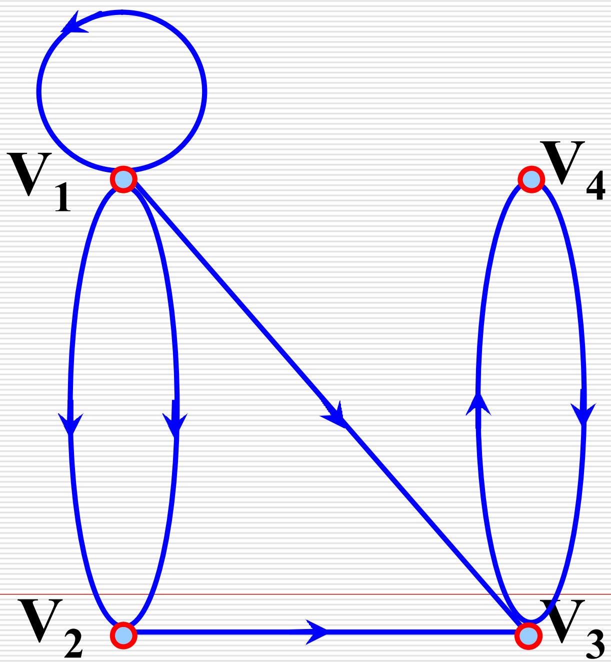
1. $\sum_{i=1}^{n} m_{ij}=0(j=1,2,\ldots,m), \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} m_{ij}=0$

2. $\sum_{j=1}^{m}(m_{ij}=1)=d^{+}(v_i), \sum_{j=1}^{m}(m_{ij}=-1)=-d^{-}(v_i),$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(m_{ij}=1)=\sum_{i=1}^{n} d^{+}(v_i)=m=\sum_{i=1}^{n} d^{-}(v_i)=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(m_{ij}=-1)$$

有向图的邻接矩阵

- 设有向图D=<V,E>.V={v_1,v_2,…,v_n},|E|=m.
- 令$a_{ij}^{(1)}$为v_i邻接到v_j的边的条数,称$(a_{ij}^{(1)})_{m\times n}$为D的邻接矩阵,记作A(D).



$$A(D)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

邻接矩阵性质

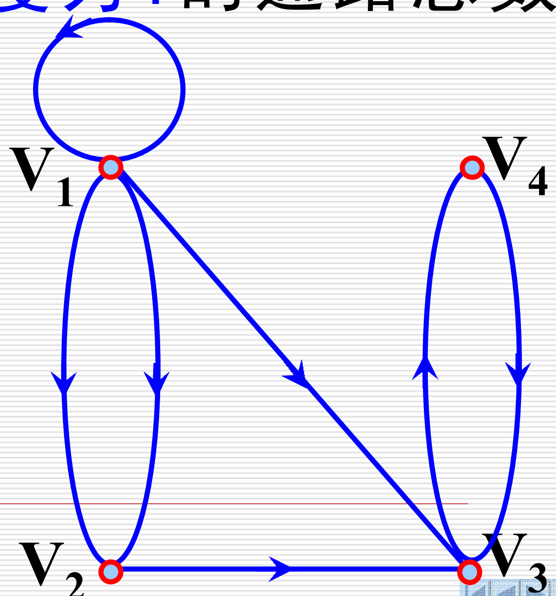
$$A(D)=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

1. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^{+}(v_i),\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} d^{+}(v_i) = m$

2. $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^{-}(v_j),\ \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} d^{-}(v_j) = m$

3. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)}$为$D$中边的总数，即$D$中长度为1的通路总数，

$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(1)}$为$D$中环的总数

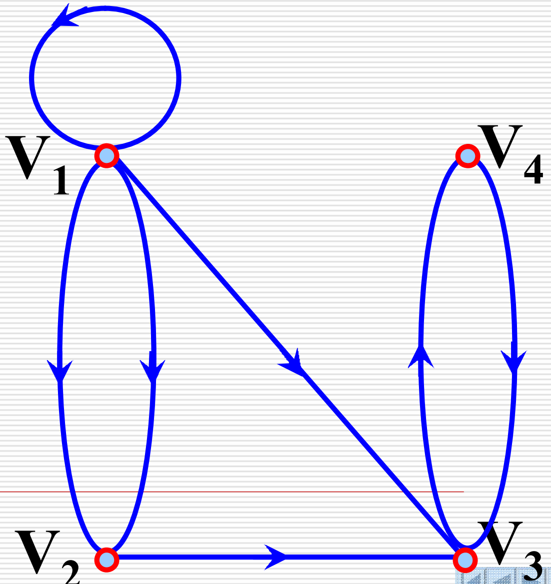


通路(回路)数的计算

$$A(D)=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$A^2(D)=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^l(D)=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}^l$$

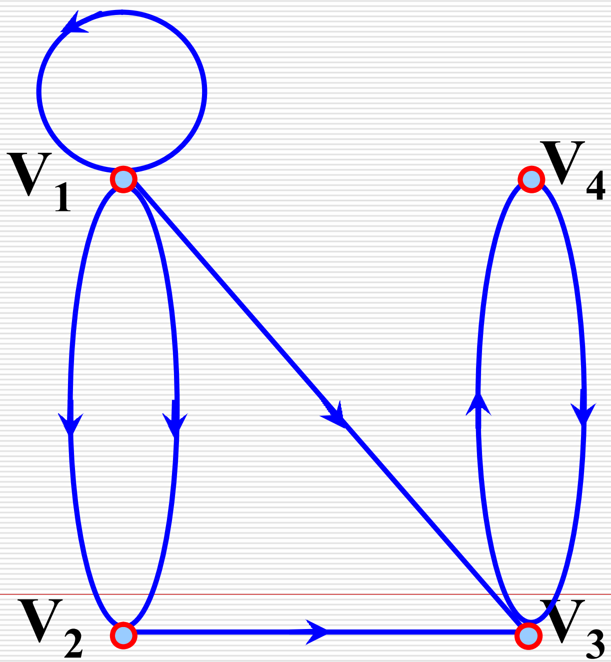


有向图的可达矩阵

- 设D=<V,E>为一有向图,V={v_1,v_2,…,v_n},令

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{可达}v_j, i\neq j \quad \text{规定}p_{ii}=1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

- 称$(p_{ij})_{n\times n}$为D的可达矩阵,记作P(D),简记P.



$$P=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

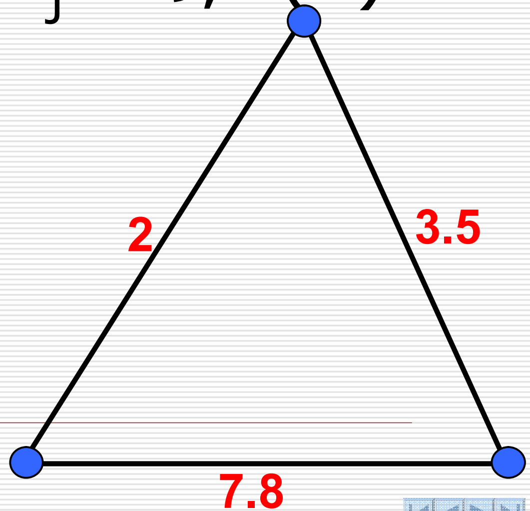
Graph Theory 之

图的基本概念

- 无向图及有向图
- 通路、回路、图的连通性
- 图的矩阵表示
- 最短路径及关键路径

最短路径及关键路径

- 对于有向图或无向图G的每条边附加一个实数$\omega(e)$,则称$\omega(e)$为边e上的权.G连同附加在各边上的实数称为(边)带权图,记为G=<V,E,W>
- 设G_1是带权图G的子图,称$\sum_{e\in E(G_1)}\omega(e)$为$G_1$的权,记为$W(G_1)$
- 当无向边$e=(v_i,v_j)$或有向边$e=\langle v_i,v_j\rangle$时,$\omega(e)$也可记为ω_{ij}



最短路径问题

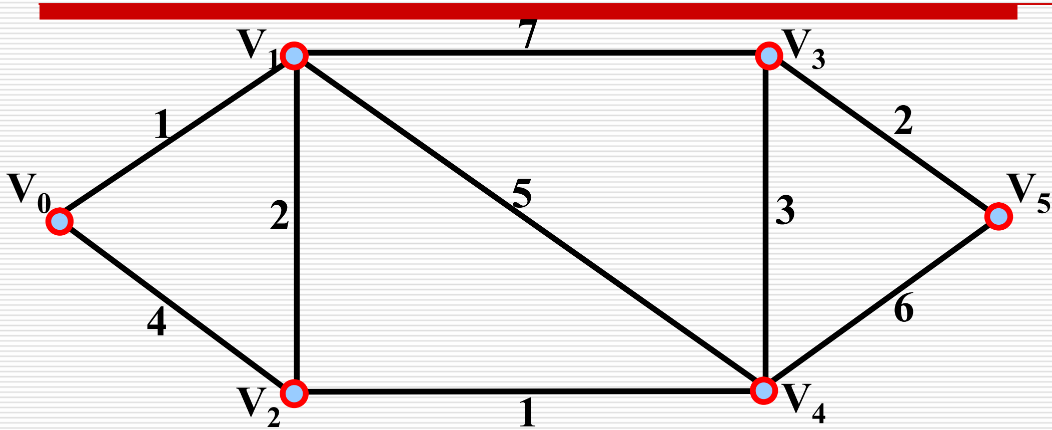
- 设带权图G=<V,E,W>,G中每条边带的权均大于等于0. u,v为G中任意两个顶点,从u到v的所有通路中带权最小的通路称为u到v的最短路径
- 求给定两顶点之间的最短路径问题称为最短路径问题
- 公认的求最短路径问题的较好的算法是由E.W. Dijkstra(狄克斯特拉)于1959年给出的标号法

Edsger W. Dijkstra(1930-2002)

- 我现在年纪大了,搞了这么多年软件,错误不知犯了多少,现在觉悟了.我想,假如我早年在数理逻辑上好好下点功夫的话,我就不会犯这么多的错误.不少东西逻辑学家早就说了,可我不知道.要是我能年轻20岁的话,就要回去学逻辑.
- 1972年Turing Award获得者
  - 图灵奖:国际上计算机领域内最高奖,纪念对计算机理论作出历史性贡献的英国数学家Turing.
  - 从1966年开始,每年授一次奖,一般授予一人...

http://www.cs.utexas.edu/users/EWD/

Dijkstra标号法



设P_r={v|v已获得p标号}为第r步通过集, r≥0.

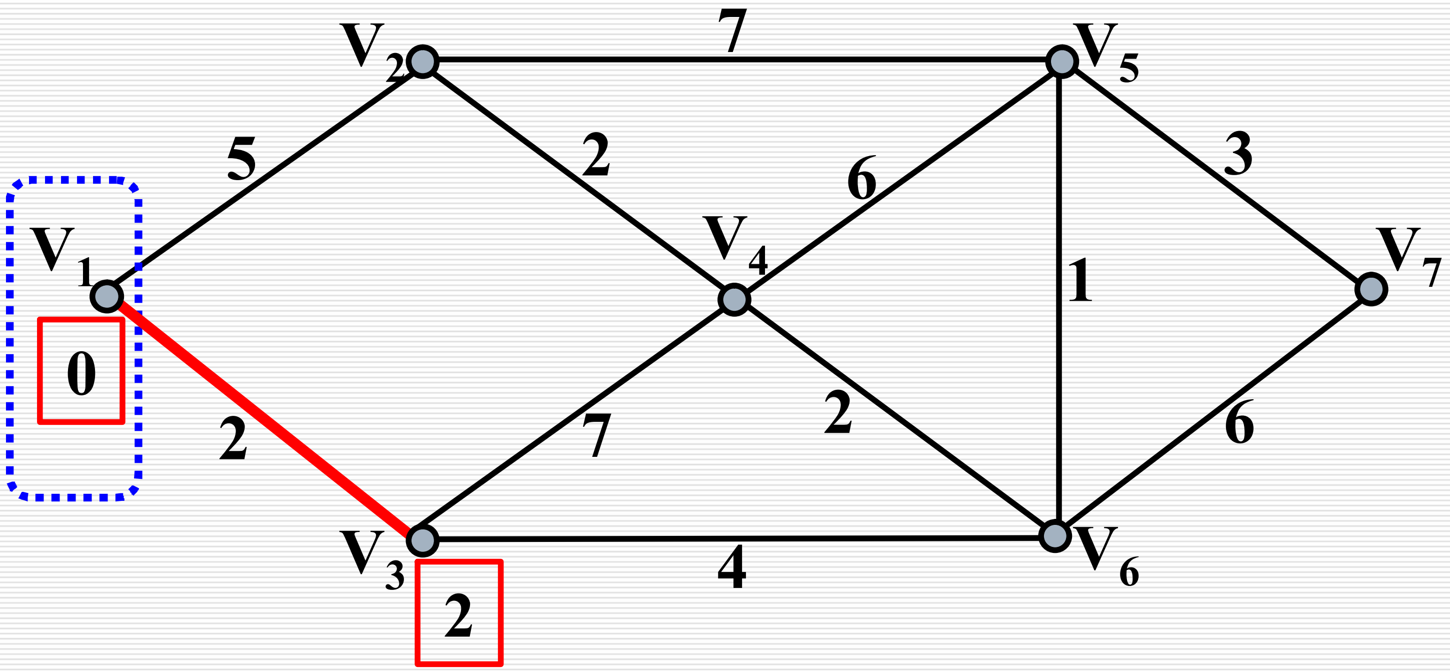
设$T_r=V-P_r$为第r步未通过集, r≥0.

G=<V,E,W>是n阶简单带权图, $\omega_{ij}\geq 0$. 若顶点v_i与v_j不相邻,令$\omega_{ij}=\infty$

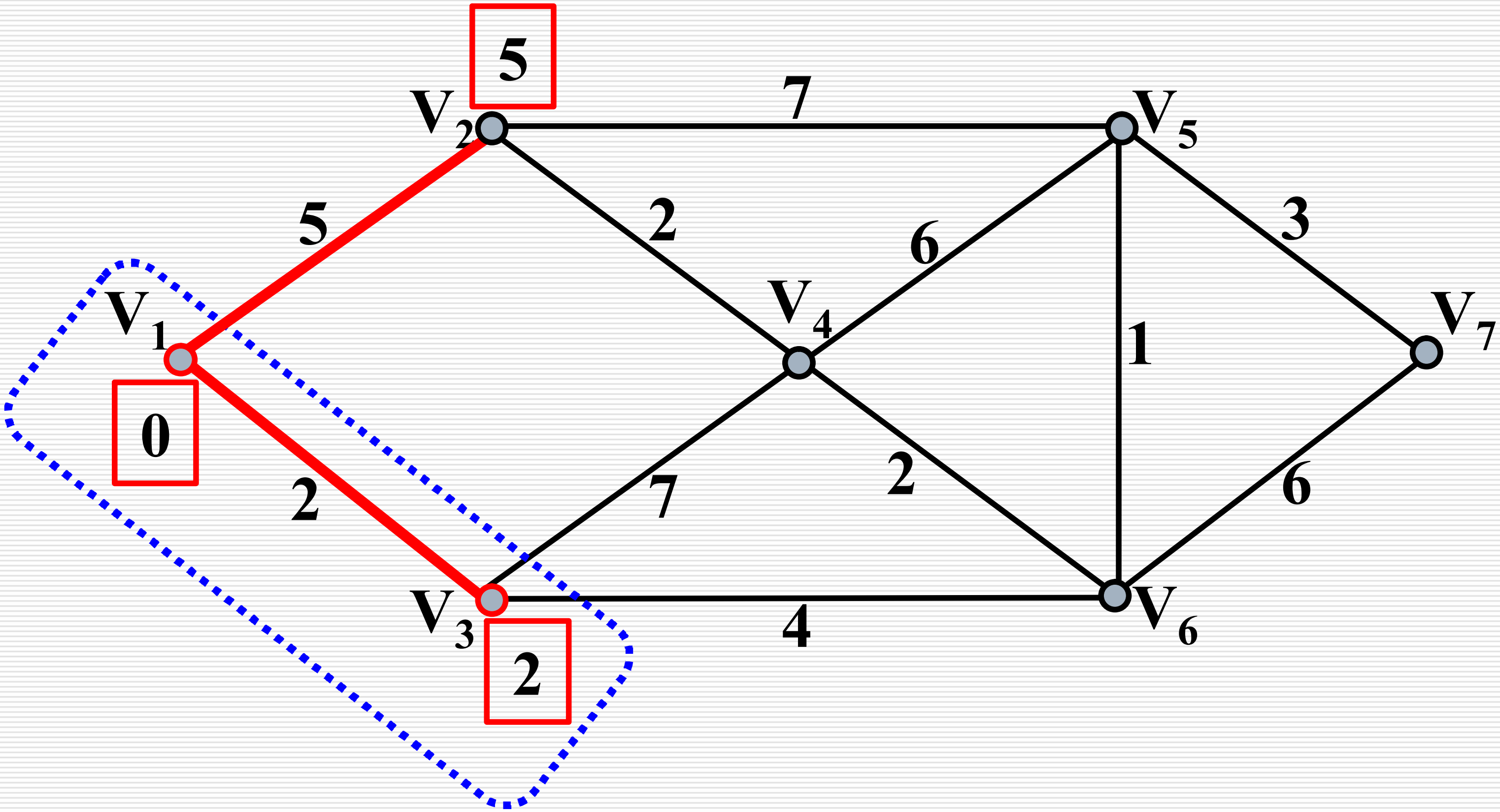
<u>Def.</u> 设$l_i^{(r)*}$为顶点v_1到顶点v_i最短路径的权,若顶点v_i获得了标号$l_i^{(r)*}$,称v_i在第r步获得了p标号$l_i^{(r)*}$(永久性标号),其中,r≥0.

设$l_j^{(r)}$为v_1到v_j的最短路径的上界,若v_j获得$l_j^{(r)*}$,称v_j在第r步获得了t标号$l_j^{(r)}$(临时性标号),r≥0.

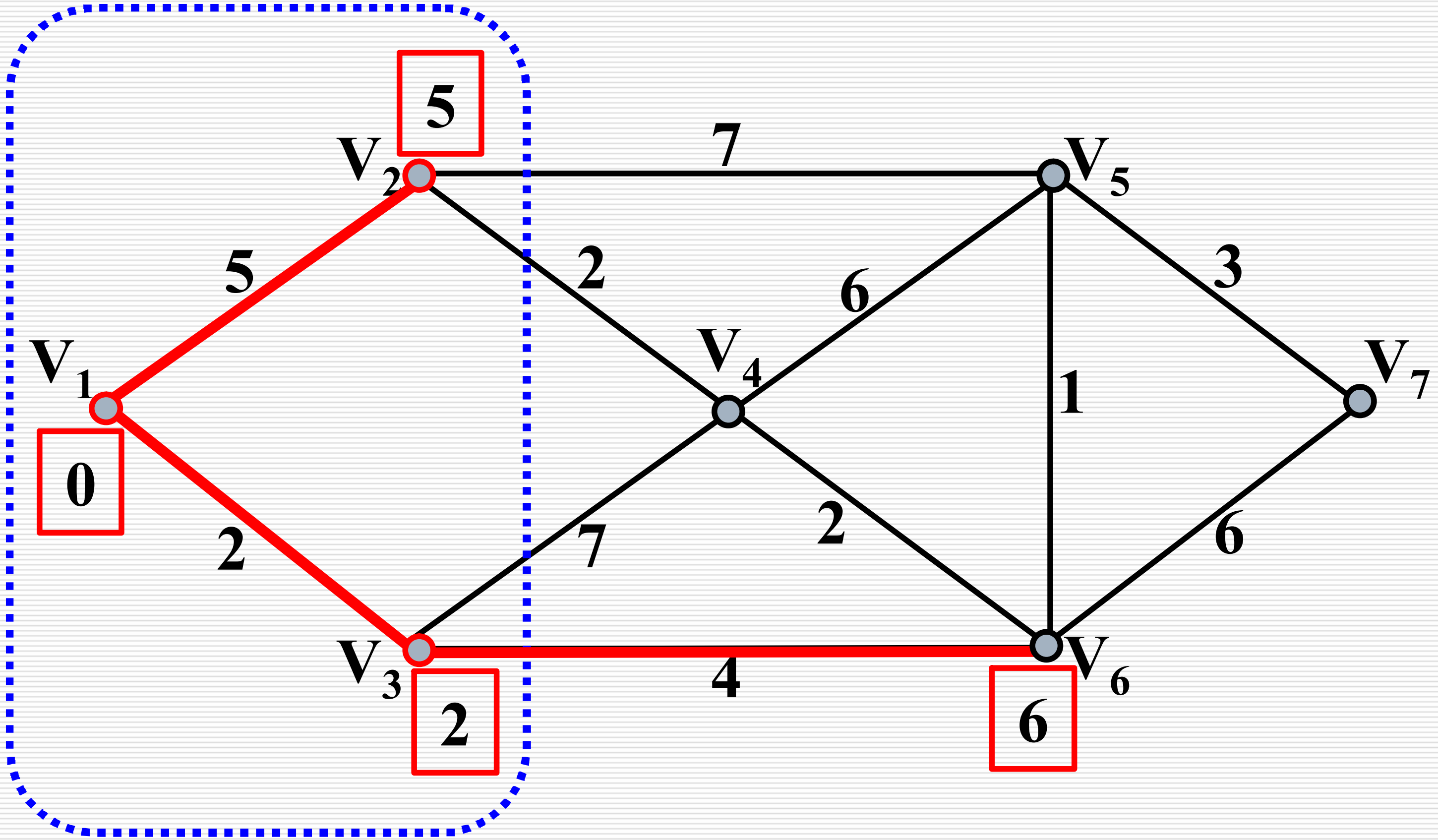
Dijkstra标号法



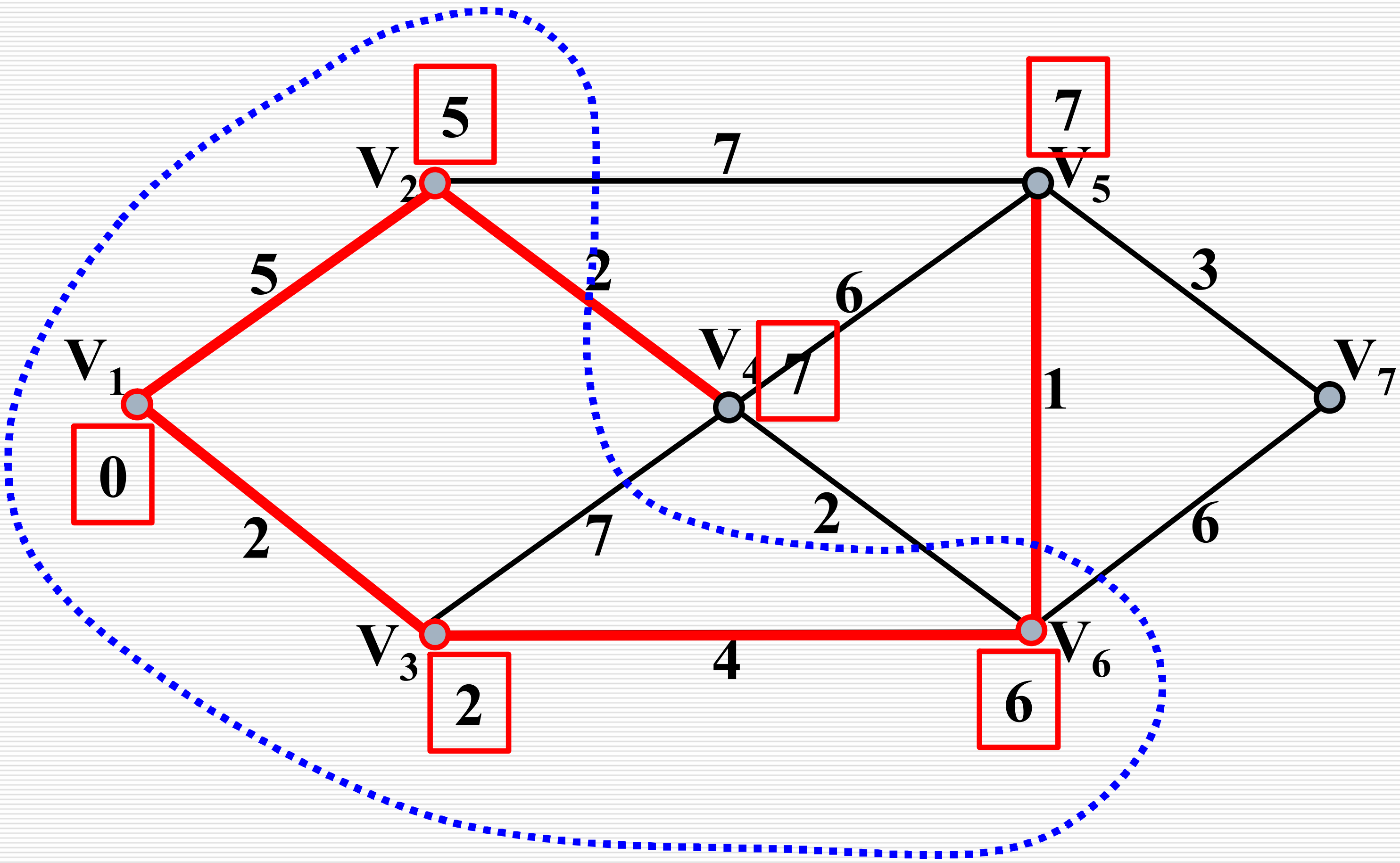
Dijkstra标号法



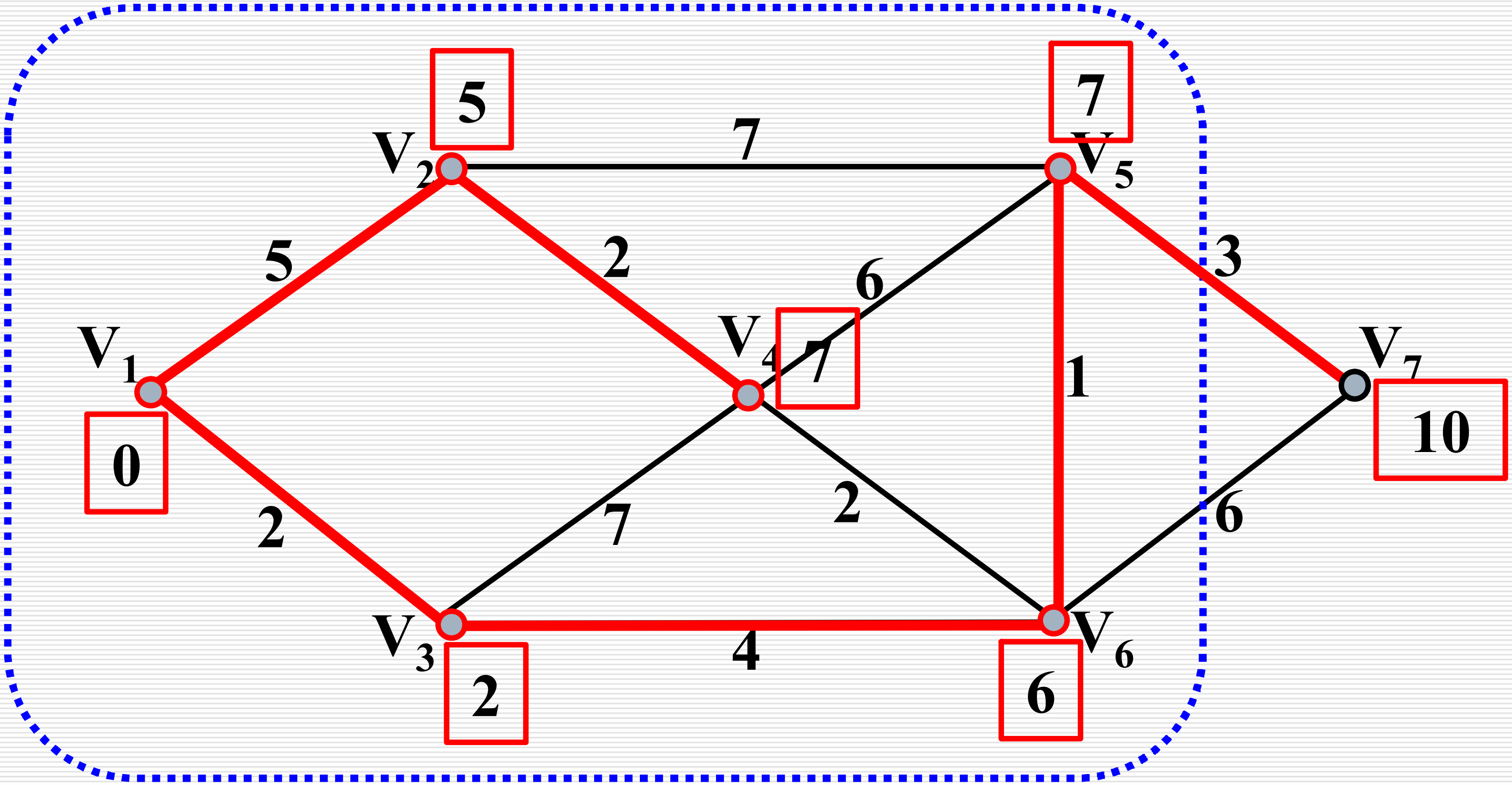
Dijkstra标号法



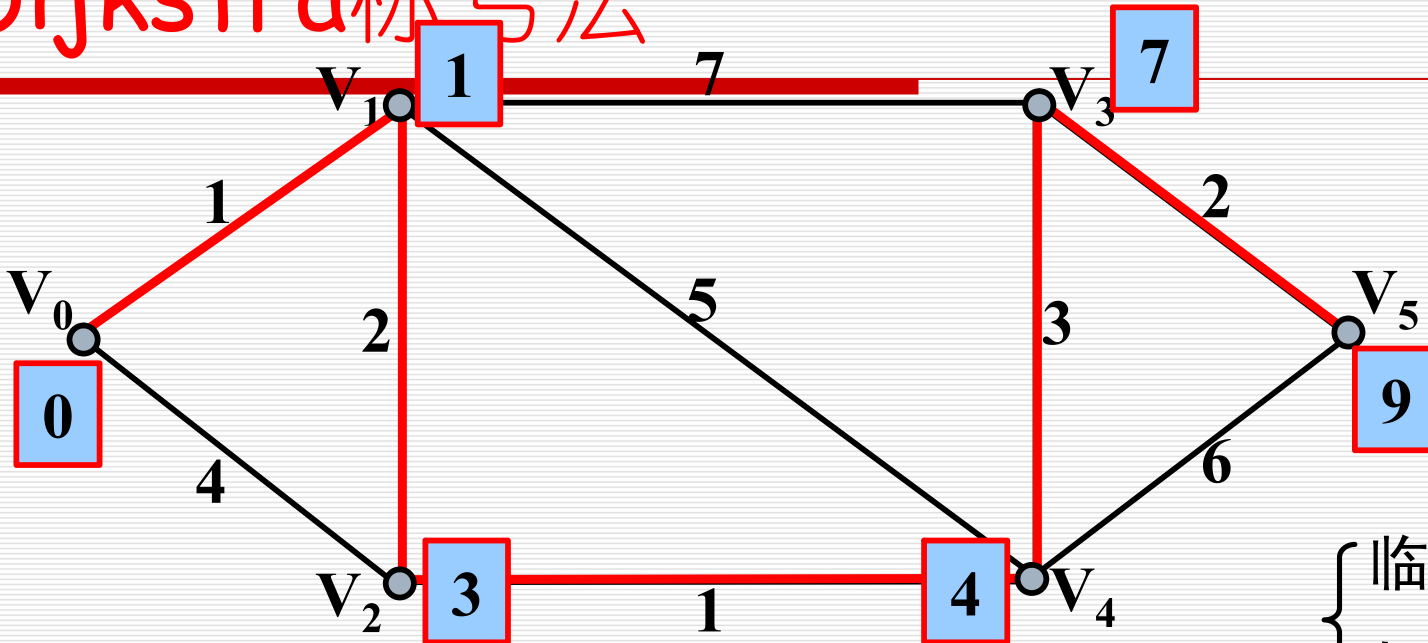
Dijkstra标号法



Dijkstra标号法



Dijkstra标号法

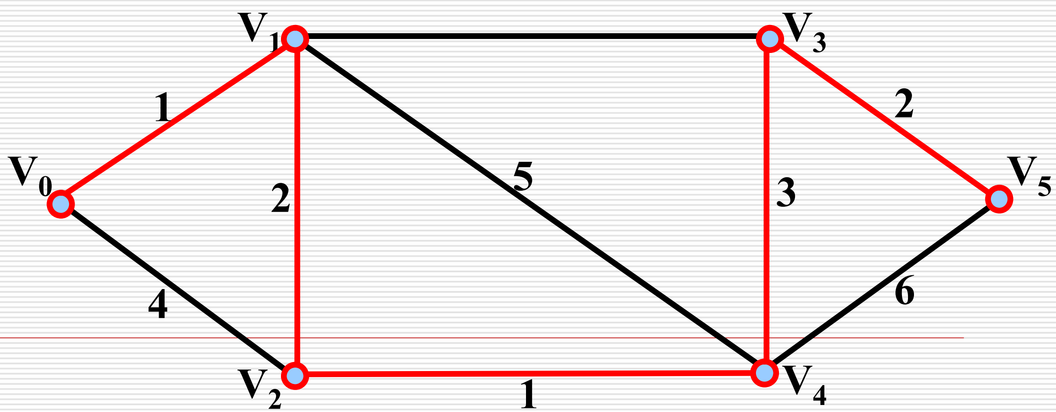


临近的点
加粗,标号

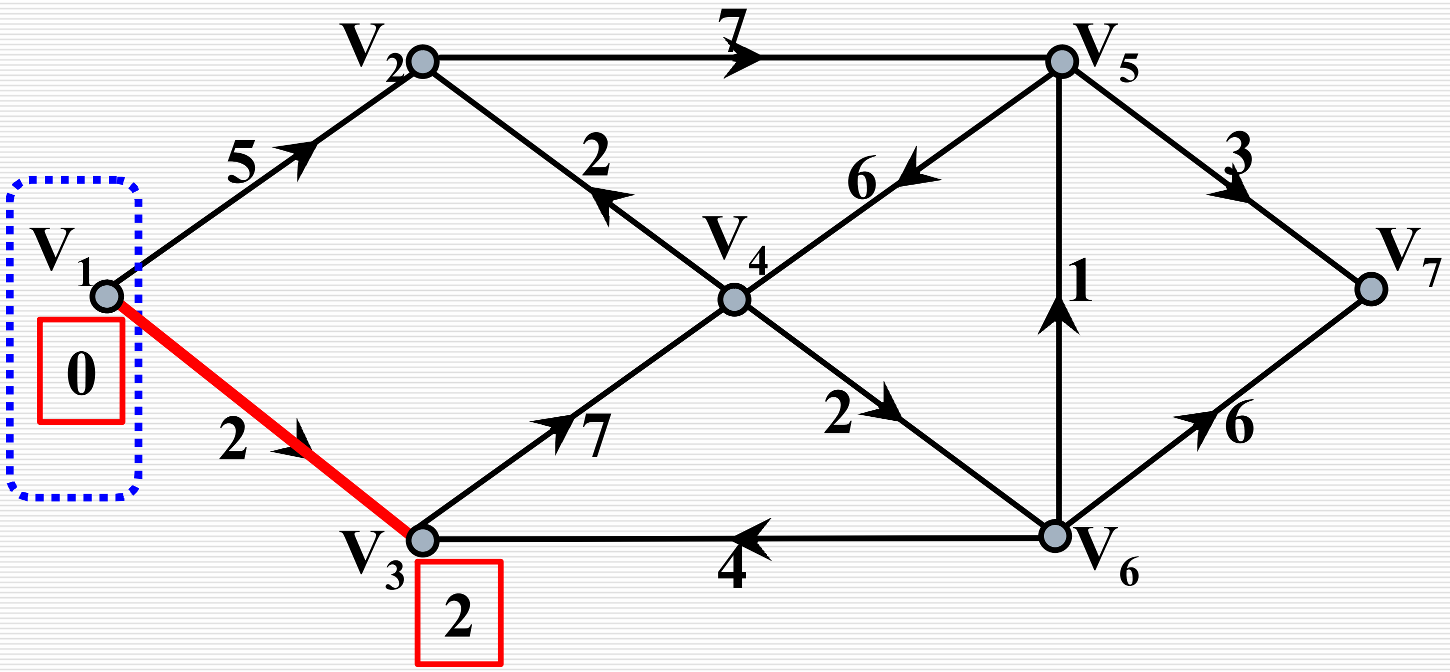
	V_0	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
	0	1	4	∞	∞	∞
		$1/V_0$	3	8	6	∞
			$3/V_1$	8	4	∞
				7	$4/V_2$	10
				$7/V_4$		9
						$9/V_3$

标号法说明

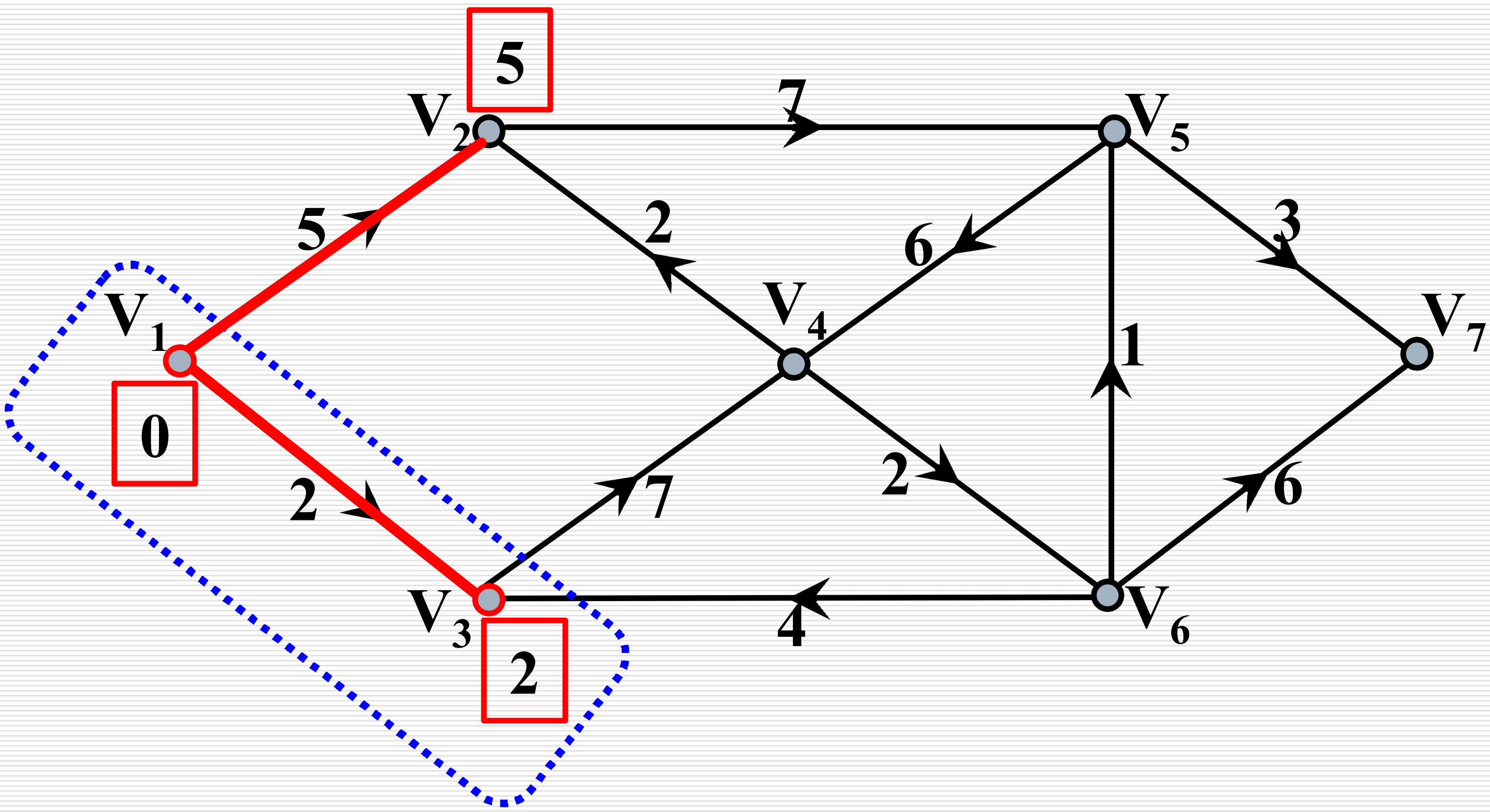
- 可求任何顶点V_s到其他任一顶点间的最短距离
  - 在算法开始时,先给V_s加p标号0
- 若已求出从顶点V_i到顶点V_j的最短路径,则从V_i到此路径上其余各顶点的最短路径也都求出了
  - $\Gamma=v_0v_1v_2v_4v_3v_5$
  - $\Gamma=v_1v_2v_4v_3$



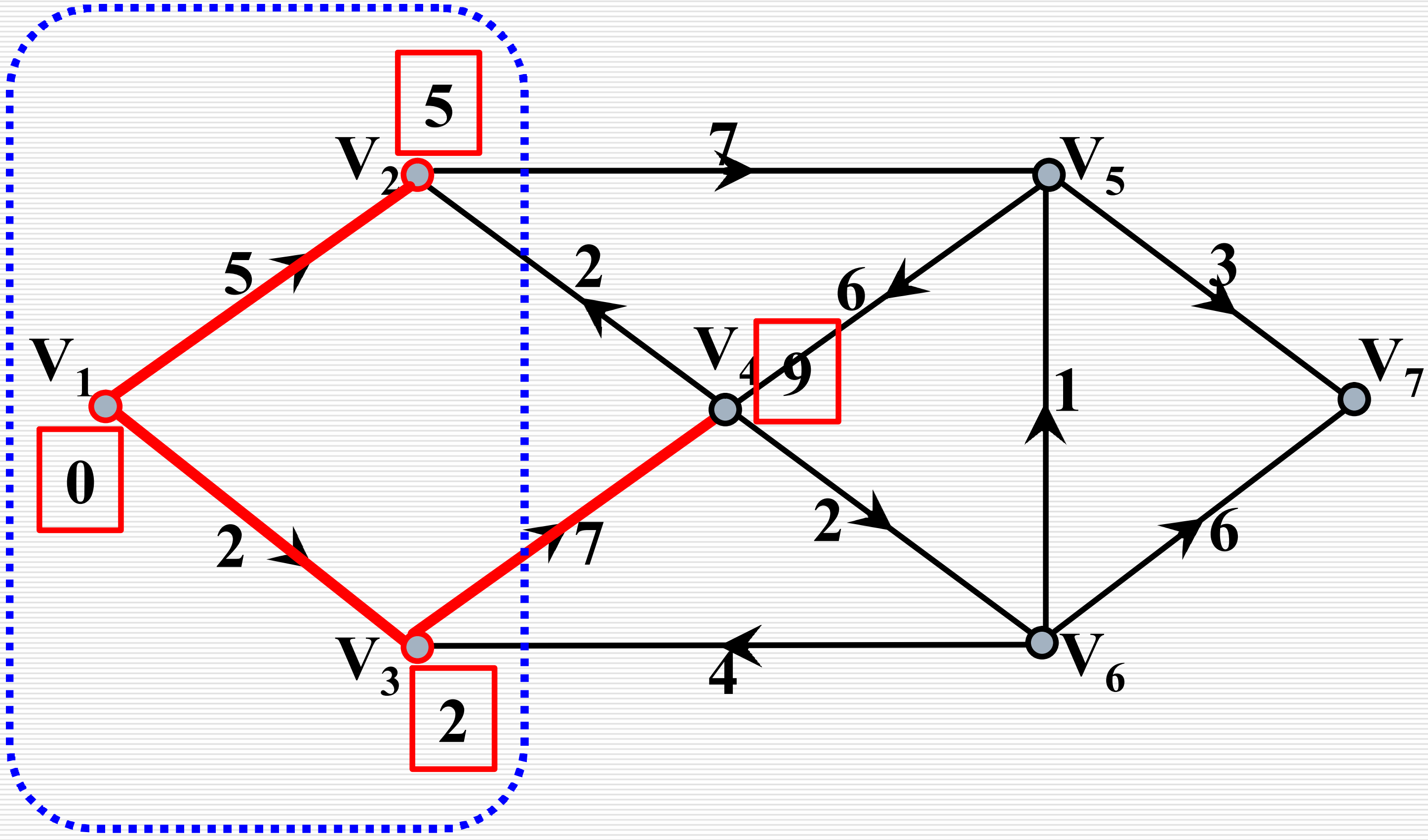
Dijkstra标号法－有向图



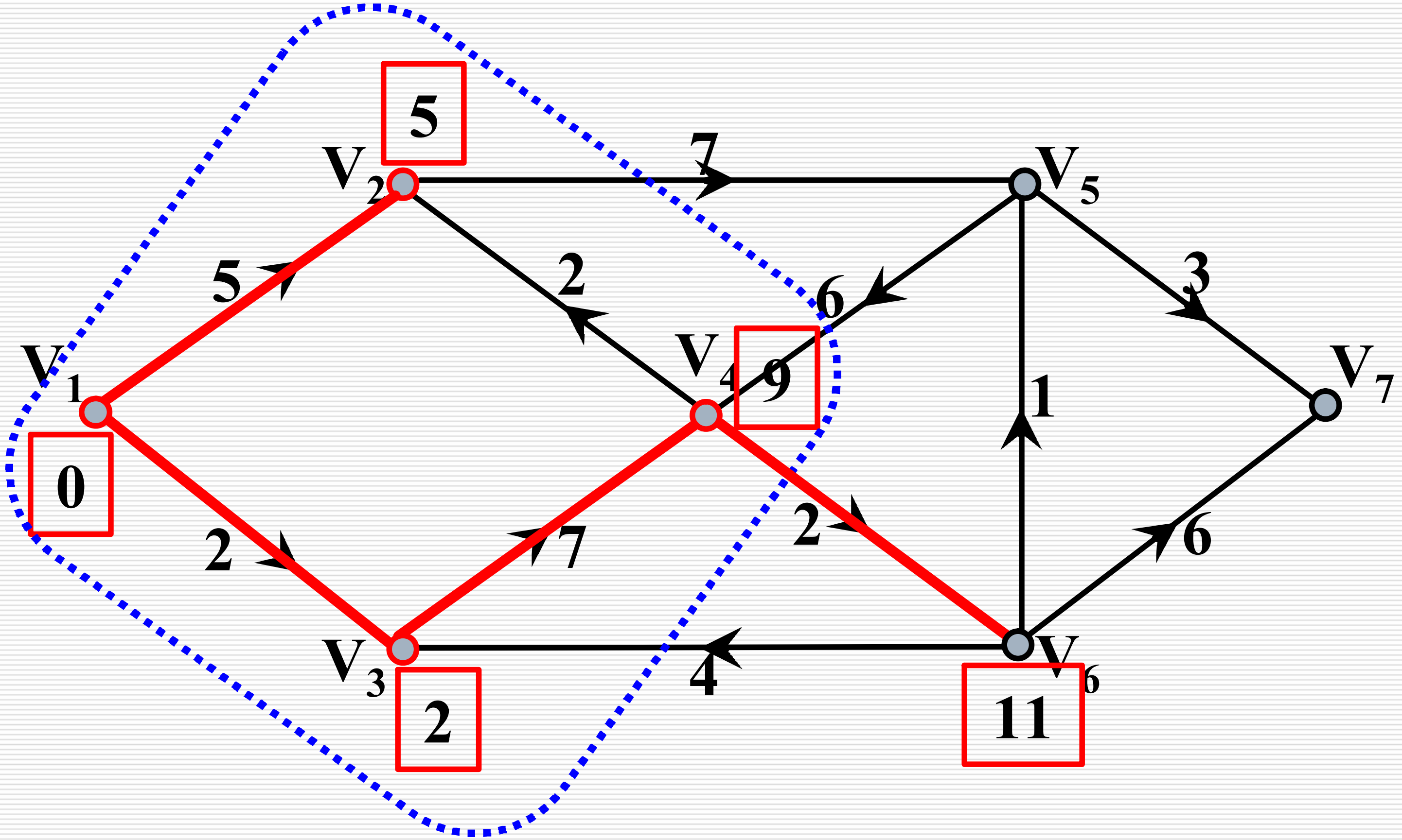
Dijkstra标号法－有向图



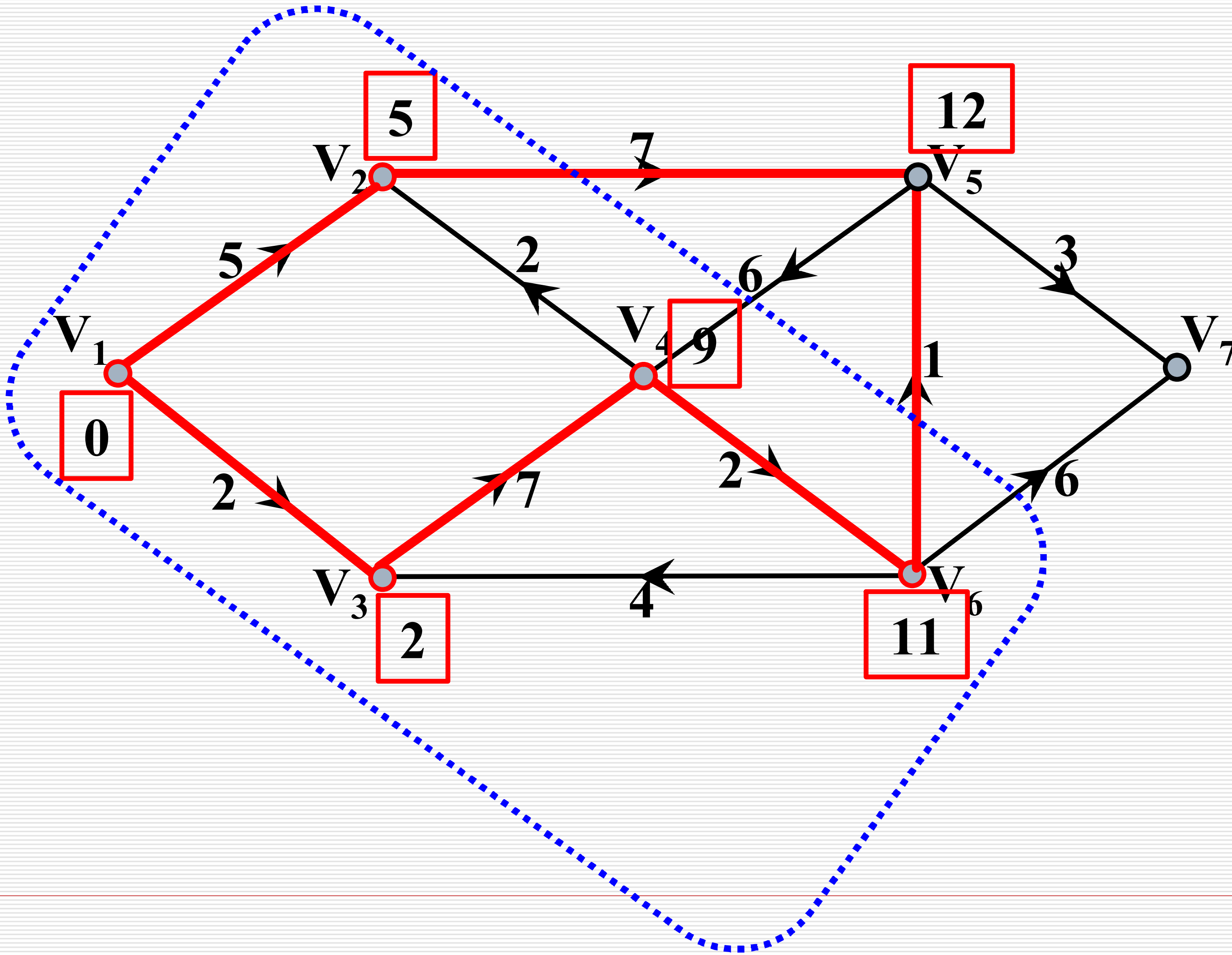
Dijkstra标号法－有向图



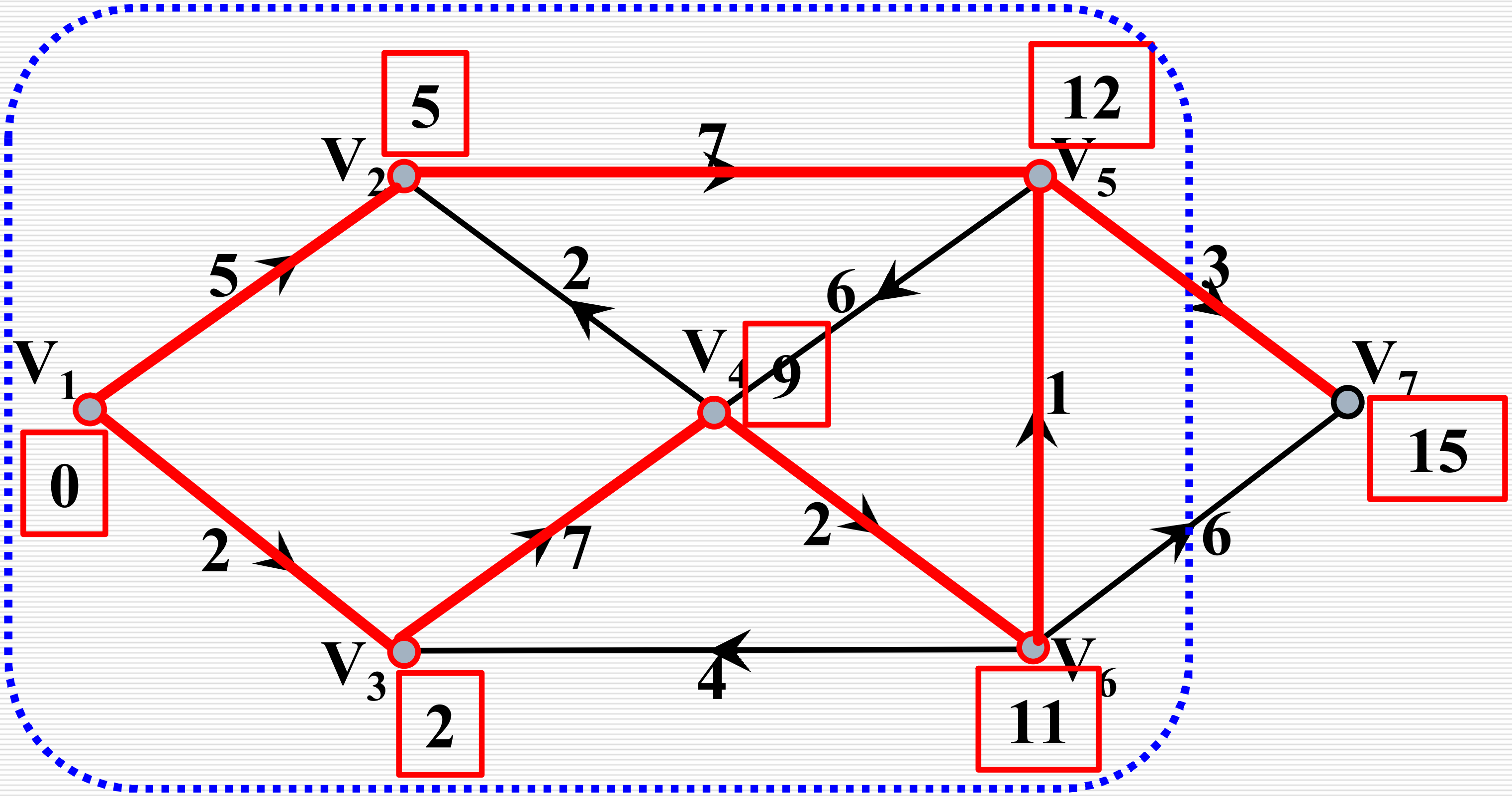
Dijkstra标号法－有向图



Dijkstra标号法－有向图

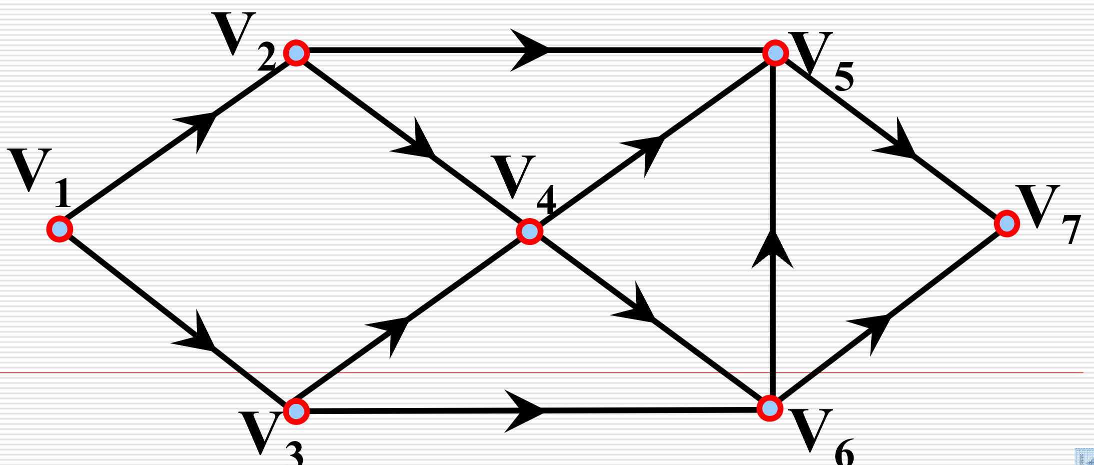


Dijkstra标号法－有向图



关键路径问题

- 工程计划→若干工序→工序间的关系？→工序之间的次序关系可用有向图表示,这种有向图称为PERT图
- 设D=<V,E>为一个有向图,v∈V,称
- v的后继元集:$\Gamma_D^+(v)=\{x|x\in V\wedge <v,x>\in E\}$
- v的先驱元集:$\Gamma_D^-(v)=\{x|x\in V\wedge <x,v>\in E\}$



PERT图(计划评审技术图)

设D=<V,E,W>是n阶有向带权图,满足:

1).D是简单图;

2).D中无回路;

3).有一个顶点入度为0,称此顶点为发点;有一个顶点出度为0,称此顶点为收点;

4).记边$<v_i,v_j>$带的权为ω_{ij},它常表示时间.

则称D为PERT图.

最早完成时间

- 自发点(记为v_1)开始沿最长路径(按权计算)到达v_i所需要的时间,称为v_i的最早完成时间,记为$TE(v_i)$,i=1,2,…,n.
- 显然$TE(v_1)=0$
- $v_i(i\neq 1)$的最早完成时间可按如下公式计算:
- $TE(v_i)=\max\{TE(v_j)+\omega_{ij}\}, v_j\in\Gamma_D^-(v_i)$, $i=2,\ldots,n$.
- 收点v_n的最早完成时间$TE(v_n)$,就是从v_1到v_n的最长路径的权.

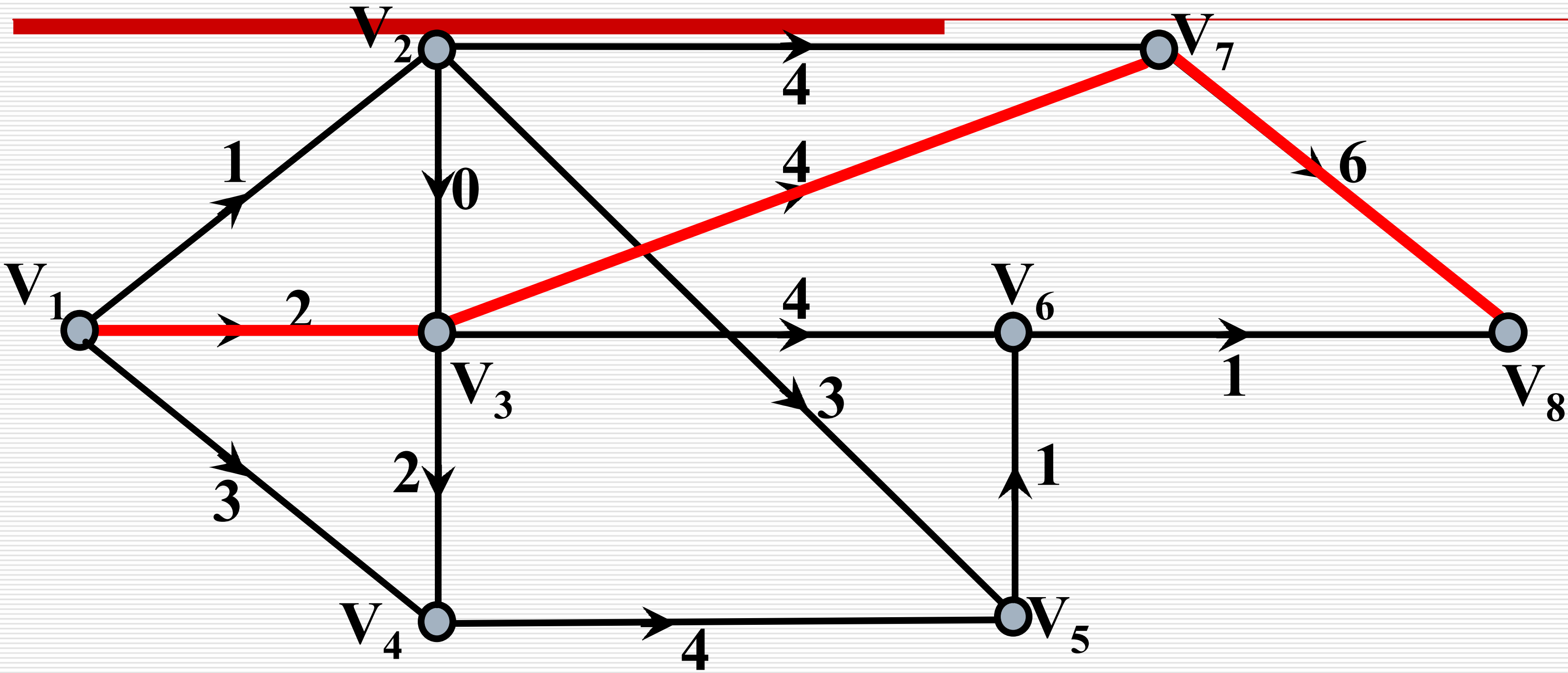
最晚完成时间

- 在保证收点v_n的最早完成时间不增加的条件下，自v_1最迟到达v_i的时间称为v_i的最晚完成时间,记为$TL(v_i), i=1,2,\ldots,n$.
- 显然$TL(v_n)=TE(v_n)$
- $v_i(i \neq n)$的最晚完成时间可按如下公式计算:
- $TL(v_i)=\min\{TL(v_j)-\omega_{ij}\}, v_j \in \Gamma_D^+(v_i)$, $i=1,2,\ldots,n-1$.

缓冲时间

- $TL(v_i)-TE(v_i) \geqslant 0$,称$TL(v_i)-TE(v_i)$为$v_i$的缓冲时间
- $ES(v_i)=TL(v_i)-TE(v_i)$
- 在关键路径上,任何工序如果耽误了时间t,整个工程就耽误了时间t,因而在关键路径上各顶点的缓冲时间均为0

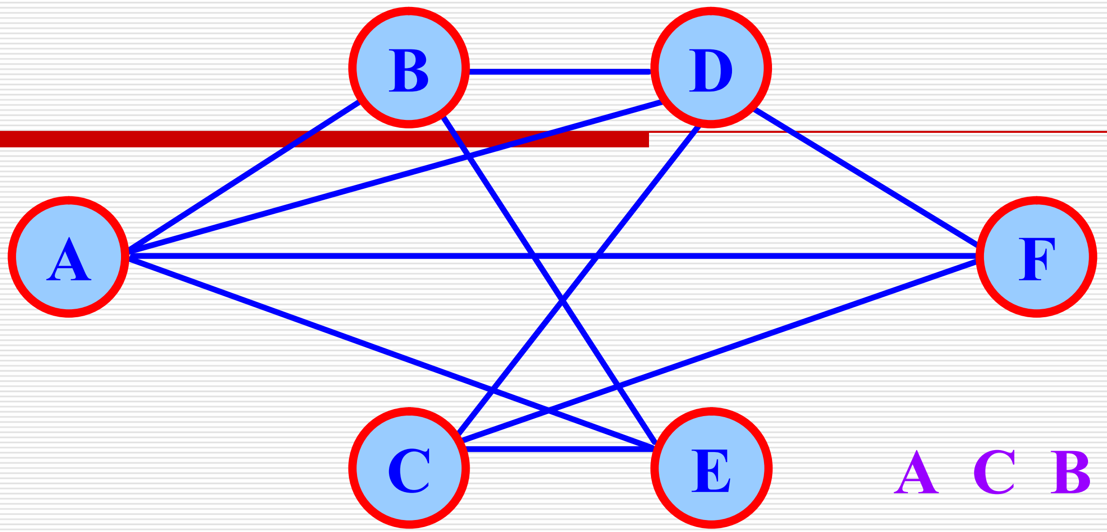
PERT图(计划评审技术图)



	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8
$TE(v_i)$	0	1	2	4	8	9	6	12
$TL(v_i)$	0	2	2	6	10	11	6	12
$ES(v_i)$	0	1	0	2	2	2	0	0

$V_1V_3V_7V_8$

例.



A C B F E D

	A	B	C	D	E	F
甲	√			√		√
乙	√	√		√		
丙			√		√	
丁	√				√	
戊	√	√			√	
己			√	√		√