第八章离散模型

1 1 层次分析模型

- 层次分析法的基本步骤
- 层次分析法的广泛应用
- 层次分析法的若干问题
- 层次分析法Matlab实验
- 层次分析法在数学建模竞赛中的应用

离散模型

- 离散模型：差分方程（第7章）、整数规划（第4章）、图论、对策论、网络流、……
- 分析社会经济系统的有力工具
- 只用到代数、集合及图论（少许）的知识

背景

- 日常工作、生活中的决策问题
- 涉及经济、社会等方面的因素
- 作比较判断时人的主观选择起相当大的作用，各因素的重要性难以量化
- Saaty于1970年代提出层次分析法AHP (Analytic Hierarchy Process)
- AHP 一种定性与定量相结合的、系统化、层次化的分析方法

一. 层次分析法的基本步骤

例. 选择旅游地，如何在3个目的地中按照景色、费用、居住条件等因素选择

Model

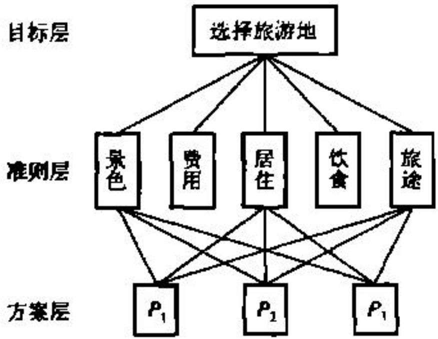


图 1 选择旅游地的层次结构

“选择旅游地”思维过程的归纳

- 将决策问题分为3个层次：目标层O，准则层C，方案层P；每层有若干元素，各层元素间的关系用相连的直线表示。
- 通过相互比较确定各准则对目标的权重，及各方案对每一准则的权重。
- 将上述两组权重进行综合，确定各方案对目标的权重。
- 层次分析法将定性分析与定量分析结合起来完成以上步骤，给出决策问题的定量结果。

层次分析法的基本步骤

成对比较阵和权向量

- 元素之间两两对比，对比采用相对尺度
- 设要比较各准则$C_1, C_2, \ldots, C_n$对目标O的重要性
- $$C_i : C_j \Rightarrow a_{ij}, A = (a_{ij})_{n\times n},\ a_{ij} > 0,\ a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}$$
- 选择旅游地

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 5 \\ 1/4 & 1/7 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/5 & 2 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1/5 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- A 成对比较阵,A是正互反阵
- 要由A确定$C_1, C_2, \ldots, C_n$对O的权向量

成对比较阵和权向量

- 成对比较的不一致情况

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 4 & \cdots \\ 2 & 1 & 7 & \cdots \\ \cdots\cdots & & & \end{bmatrix}$$

-

$$a_{12} = 1/2\ (C_1 : C_2), a_{13} = 4\ (C_1 : C_3) \to a_{23} = 8\ (C_2 : C_3)$$

- 允许不一致，但要确定不一致的允许范围

成对比较阵和权向量

- 考察完全一致的情况:$W \Rightarrow w_1, w_2, \cdots w_n$ 令$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$, 权向量$w = (w_1, w_2, \cdots w_n)^T$
- $$A = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \cdots\cdots & & & \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix}$$

成对比较阵和权向量

- 成对比较完全一致的情况,满足

$$a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik}, \quad i, j, k = 1, 2, \cdots, n$$

  的正互反阵A称一致阵
- 一致阵性质
  - A的秩为1，A的唯一非零特征根为n
  - A的任一列向量是对应于n 的特征向量
  - A的归一化特征向量可作为权向量
- 对于不一致(但在允许范围内)的成对比较阵A，建议用对应于最大特征根λ的特征向量作为权向量w，即$Aw = \lambda w$

成对比较阵和权向量

- Saaty等人提出1 9尺度　　aij 取值1,2,…, 9及其互反数1,1/2, …, 1/9
- 心理学家认为成对比较的因素不宜超过9个

Model

尺度 a_{ij}	1	3	5	7	9
$C_i:C_j$的重要性	相同	稍强	强	明显强	绝对强

一致性检验

对A确定不一致的允许范围

- 已知：n 阶一致阵的唯一非零特征根为n
- 可证：n 阶正互反阵最大特征根$\lambda \geq n$, 且$\lambda = n$时为一致阵
- 定义一致性指标:$CI = \frac{\lambda - n}{n-1}$ CI 越大，不一致越严重
- 为衡量CI 的大小，引入随机一致性指标RI -随机模拟得到aij，形成A，计算CI 即得RI。
- 定义一致性比率CR = CI/RI，当$CR < 0.1$时，通过一致性检验

Saaty的RI结果如下

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
RI	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51

“选择旅游地” 中准则层对目标的权向量及一致性检验

- 准则层对目标的成对比较阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 5 \\ 1/4 & 1/7 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/5 & 2 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1/5 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- 最大特征根$\lambda = 5.073$ 权向量(特征向量)w =(0.263,0.475,0.055,0.090,0.110)T
- 一致性指标$CI = \frac{5.073-5}{5-1} = 0.018$
- 随机一致性指标RI=1.12 (查表)
- 一致性比率CR=0.018/1.12=0.016¡0.1 通过一致性检验

组合权向量

- 记第2层（准则）对第1层（目标）的权向量为

$$w^{(2)} = (w_1^{(2)}, \cdots, w_n^{(2)})^T$$

- 同样求第3层(方案)对第2层每一元素(准则)的权向量
- 方案层对$C_1, C_2, \ldots, C_n$的成对比较阵分别为$B_1, B_2, \ldots, B_n$，最大特征根分别为$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$，权向量分别为$w_1^3, w_2^3, \ldots, w_n^3$

第3层对第2层的计算结果

第3层对第2层的计算结果

k	1	2	3	4	5
$w_k^{(3)}$	0.595	0.082	0.429	0.633	0.166
	0.277	0.236	0.429	0.193	0.166
	0.129	0.682	0.142	0.175	0.668
λ_k	3.005	3.002	3	3.009	3
CI_k	0.003	0.001	0	0.005	0

$w^{(2)}$
0.263
0.475
0.055
0.090
0.110

组合权向量

- RI=0.58 (n=3), CI_k 均可通过一致性检验
- 方案P1对目标的组合权重为0.595?0.263+ …=0.300
- 方案层对目标的组合权向量为(0.300, 0.246, 0.456)T

组合权向量

- 第2层对第1层的权向量

$$w^{(2)} = (w_1^{(2)}, \cdots, w_n^{(2)})^T$$

- 第3层对第2层各元素的权向量

$$w_k^{(3)} = (w_{k1}^{(3)}, \cdots, w_{km}^{(3)})^T, \ k = 1, 2, \cdots, n$$

- 构造矩阵

$$W^{(3)} = [w_1^{(3)}, \cdots, w_n^{(3)}]$$

- 则第3层对第1层的组合权向量

$$w^{(3)} = W^{(3)} w^{(2)}$$

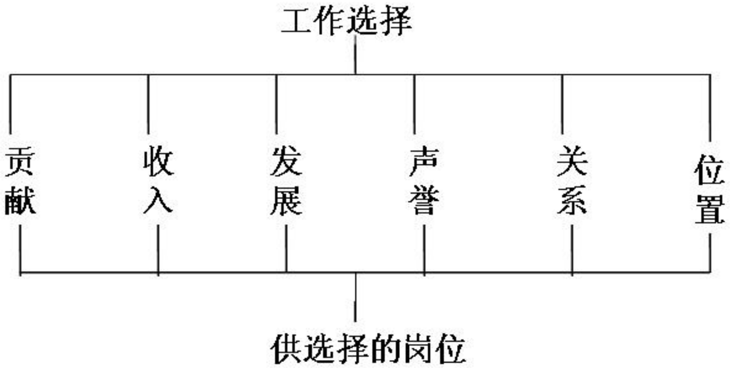
- 第s层对第1层的组合权向量其中W(p)是由第p层对第p-1层权向量组成的矩阵

$$w^{(s)} = W^{(s)} W^{(s-1)} \dots W^{(3)} w^{(2)}$$

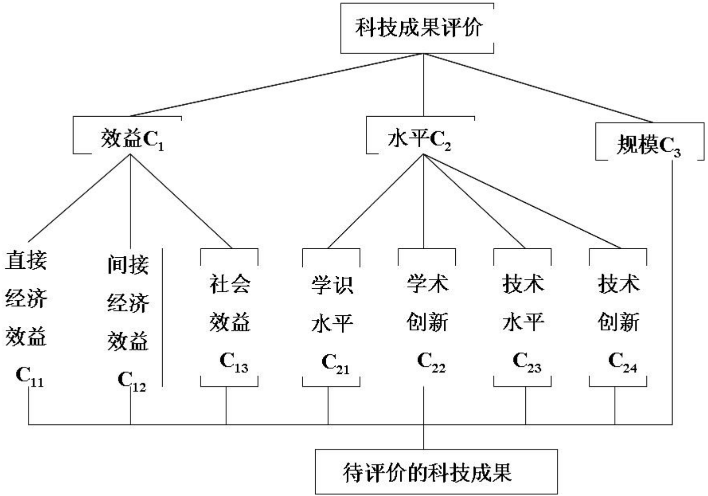
层次分析法的基本步骤

- 1）建立层次分析结构模型深入分析实际问题，将有关因素自上而下分层（目标 准则或指标 方案或对象），上层受下层影响，而层内各因素基本上相对独立。
- 2）构造成对比较阵用成对比较法和1-9尺度，构造各层对上一层每一因素的成对比较阵。
- 3）计算权向量并作一致性检验对每一成对比较阵计算最大特征根和特征向量，作一致性检验，若通过，则特征向量为权向量。
- 4）计算组合权向量（作组合一致性检验*）组合权向量可作为决策的定量依据。

例子：工作选择



例子：科技成果评价


科技成果评价
效益C1
水平C2
规模C3
直接经济效益C11
间接经济效益C12
社会效益C13
学识水平C21
学术创新C22
技术水平C23
技术创新C24
待评价的科技成果

三. 层次分析法的若干问题

- 正互反阵的最大特征根是否为正数？特征向量是否为正向量？一致性指标能否反映正互反阵接近一致阵的程度？
- 怎样简化计算正互反阵的最大特征根和特征向量？

1. 正互反阵的最大特征根和特征向量的性质

- 定理1 正矩阵A 的最大特征根?是正单根，对应正特征向量w，且

$$\lim_{k\to\infty}\frac{A^k e}{e^T A^k e}=w,\quad e=(1,1,\cdots,1)^T$$

正互反阵的最大特征根是正数，特征向量是正向量。

- 定理2 n阶正互反阵A的最大特征根? ? n , ?= n是A为一致阵的充要条件。一致性指标

$$CI=\frac{\lambda-n}{n-1}$$

定义合理

2. 正互反阵最大特征根和特征向量的简化计算

- 精确计算的复杂和不必要
- 简化计算的思路　　一致阵的任一列向量都是特征向量，一致性尚好的正互反阵的列向量都应近似特征向量，可取其某种意义下的平均。
- 和法　　取列向量的算术平均
- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1/2 & 1 & 4 \\ 1/6 & 1/4 & 1 \end{bmatrix}$
- 列向量归一化 $\begin{bmatrix} 0.6 & 0.615 & 0.545 \\ 0.3 & 0.308 & 0.364 \\ 0.1 & 0.077 & 0.091 \end{bmatrix}$
- 算术平均 $\begin{bmatrix} 0.587 \\ 0.324 \\ 0.089 \end{bmatrix} = w$

正互反阵最大特征根和特征向量的简化计算

- $Aw = \begin{bmatrix} 1.769 \\ 0.974 \\ 0.286 \end{bmatrix}, Aw = \lambda w$

  $\lambda = \frac{1}{3}(\frac{1.769}{0.587} + \frac{0.974}{0.324} + \frac{0.268}{0.089}) = 3.009$
- 精确结果:w=(0.588,0.322,0.090)T, $\lambda = 3.010$

层次分析法的优点

- 实用性-定性与定量相结合，能处理传统的优化方法不能解决的问题;
- 简洁性-计算简便，结果明确，便于决策者直接了解和掌握。
- 系统性-将对象视作系统，按照分解、比较、判断、综合的思维方式进行决策-系统分析（与机理分析、测试分析并列）；

层次分析法的局限

- 囿旧-只能从原方案中选优，不能产生新方案;
- 粗略-定性化为定量，结果粗糙;
- 主观-主观因素作用大，结果可能难以服人。

层次分析法Matlab实验

- 层次分析法相对比较简单，自己可以写程序，我找到了别人写的。分目标层，准则层，方案层。
- C=myAHP(m,n,A,B1,...,Bm)
- m -准则层准则个数，n-方案层方案个数。
- A是m*m矩阵，准则对目标的成对比较矩阵。
- B1,...,Bm是n*n矩阵，方案层对每个准则层形成的比较矩阵。
- C -返回方案层对目标的组合权向量。

层次分析法Matlab实验

- A=[1 1/2 4 3 3; 2 1 7 5 5; 1/4 1/7 1 1/2 1/3; 1/3 1/5 2 1 1; 1/3 1/5 3 1 1];
- B1=[1 2 5; 1/2 1 2; 1/5 1/2 1]; B2=[1 1/3 1/8; 3 1 1/3; 8 3 1];
- B3=[1 1 3; 1 1 3; 1/3 1/3 1]; B4=[1 3 4; 1/3 1 1; 1/4 1 1];
- B5=[1 1 1/4; 1 1 1/4; 4 4 1];
- c=myAHP(5,3,A,B1,B2,B3,B4,B5)
- 结果：c=[0.2993,0.2453,0.4554]

层次分析法在数学建模竞赛中的应用

- 作业:完成2005A题第一小题，用层次分析法评价。
- 大家交上作业后，我们再一起分析。