

第一章 数学建模导言

数码时代是人类发展的一个主要趋势,而数学科学正是人类迈向数码时代的重要学科.数学建模是数学科学联接其他科学及实际问题的最重要的一个环节.建立起来的数学模型则是一座座桥梁,它对实际问题用数学思想进行理论分析和科学研究,是一门内容丰富、广泛的新兴学科.

本章介绍数学建模、数学模型基本概念及大学生数学建模竞赛的情况.

一、数学模型

1. 数学模型的概念

模型是相对于原型而言的.所谓原型(prototype)就是人们在社会实践中所关心和研究的现实世界中的事物(或对象).在科技领域常常把所考察的原型用“系统”或“事物系统”等术语代之,如经济系统、管理系统、机械系统、电力系统、通信系统、生态系统以及生命系统等.系统的观点能让人们更好地认识和把握事物.人们所关心和研究的事物或系统总是存在着矛盾,矛盾就是问题,研究事物或系统就是去解决问题.事物或系统总是处于运动变化的过程之中,如何把握它们在运动变化过程中的规律性,是研究事物或系统的根本问题.因此,进一步引申,把“现实对象”、“实际问题”、“研究对象”、“事物过程”以及“事物系统”等术语都称为事物的原型.

所谓模型(model)是指为了某个特定目的将原型所具有本质属性的某一部分信息经过简化、提炼而构造的原型替代物.一个原型,为了不同的目的可以有多种不同的模型.例如,为了制定大型

企业的生产管理计划,模型就不必反映各生产装置的动态特性,但必须反映产品的产量、销售量和库存量等变化情况.也就是说,各装置的动态特性对这种模型来说是非本质的.相反,为了实现各生产装置的最佳运行,模型就必须详细地描述各装置内部状态变化的生产过程的动态特性.这时,各装置的动态特性就变成了本质的.可见,模型所反映的内容将因其使用的目的不同而不同.实物模型、照片、图表、地图、公式及程序等统统称做“模型”.实物模型、照片、玩具等把现实物体的尺寸加以改变,看起来逼真,称形象模型;地图、电路图等在一定假设下用形象鲜明、便于处理的一系列符号代表现实物体的特征,称模拟模型;而图表、公式、程序等则用字母、数字或其他数学符号,以及由它们组成的数学式子、图形等来描述客观事物的特征及其内在联系,这就是数学模型.

数学模型(mathematical model)是今天科学技术工作者常常谈论的名词.其实,我们对于数学模型也并不陌生,例如在力学中描述力、质量和加速度之间关系的牛顿第二定律($F = ma$)就是一个典型的数学模型.还有很多很多,如计算机自动控制的炼钢过程的数学模型,根据气压、雨量、风速等建立的预测天气的数学模型,根据人口、交通、能源、污染等建立的城市规划的数学模型等.

数学模型的具体定义是什么,尽管目前并没有统一的认识,但都认为都是用数学描述实际问题.通俗地讲,所谓数学模型,是指对于现实世界的某一特定对象,为了某个特定目的,进行一些必要的抽象、简化和假设,借助数学语言,运用数学工具建立起来的一个数学结构.数学模型不是原型的复制品,而是为一定的目的对原型所作的一种抽象模拟,它用数学式子、数学符号、程序及图表等刻画客观事物的本质属性与内在联系,是对现实世界的抽象、简化而又本质的描述.它源于现实,又高于现实.它或者能解释特定事物现象的现实性态;或者能预测特定对象的将来的性态;或者能提供处理特定对象的最优决策或控制等等,最终达到解决具体的实际

问题的目的.

2. 数学模型的分类及作用

(1) 数学模型的分类

数学模型按照不同的分类标准有着多种分类. 因为分类问题不是本课程的重点, 故只列举出几种常见的分类方法, 以方便叙述和阅读.

按照建立模型的数学方法分, 有几何模型、代数模型、图论模型、规划论模型、微分方程模型、最优控制模型、信息模型、随机模型、决策与对策模型及模拟模型等.

按照模型的特征分, 有静态模型和动态模型、确定性模型和随机模型、离散模型和连续性模型、线性模型和非线性模型等.

按照被研究对象的实际领域来分, 有人口模型、环境模型、生态模型、水资源模型、再生资源利用模型、交通模型、电气系统模型、通信系统模型、机电系统模型、传染病模型、污染模型、经济模型和社会模型等.

按照人们对原形的认识过程来分, 数学模型可以分为描述性的数学模型和解释性的数学模型. 描述性的模型是从特殊到一般, 它是从分析具体客观事物及其状态开始, 最终得到一个数学模型. 客观事物之间量的关系通过数学模型被概括在一个具体的抽象的数学结构之中. 解释性的模型是由一般到特殊, 它是从一般的公理系统出发, 借助于数学客体, 对公理系统给出正确解释的一种数学模型.

按照人们对事物发展过程的了解程度分, 有所谓的白箱模型、灰箱模型和黑箱模型. 白箱模型主要指那些内部规律比较清楚的模型, 如力学、热学、电学以及相关的工程技术问题, 这些问题大多早已经化为比较成熟的数学问题, 解决这些问题大多注重数学方法的改进、优化设计和控制等. 灰箱模型主要指那些内部规律尚不十分清楚的模型, 在建立和改善模型方面都还不同程度地有许多

工作要做的问题,如生态学、气象学、经济学等领域中的模型.黑箱模型指一些其内部规律还很少为人们所知的模型,如生命科学、社会科学等领域的问题,这类问题多利用统计方法研究.

(2) 数学模型的作用

数学模型的根本作用在于它将客观原型化繁为简、化难为易,便于人们采用定量的方法,分析和解决实际问题.正因为如此,数学模型在科学发展、科学预见、科学预测、科学管理、科学决策、调控市场经济乃至个人高效工作和生活等众多方面发挥着特殊的重要作用.

回顾科学发展史,数学模型对很多科学概念的表达、科学规律的揭示以及科学体系的形成都起到了重要作用.例如物理学中的很多重要概念,诸如瞬时速度、瞬时电流、物体受力沿曲线做功等很难用语言说清楚,而用导数、积分就清楚而准确地表达了这些概念的意义.又如历史上关于物体运动原因的探讨,开始研究时,科学家们单从质的方面寻找物体运动的原因,由亚里士多德提出的“力是产生运动的原因”,一直步入到将物体运动的原因“归结为上帝”的错误结论.以后,伽利略不纠缠于物体运动的质的分析,他从量的方面着手,即从揭示物体运动是按照什么样的数量关系处于运动状态的,才发现了物体运动定律.在石油开发中我国数学界进行了长期大量的工作,取得了很大的成绩.科学家通过分析大量的人工地震的数据,以推断地质的构造,为寻找石油、天然气的储藏位置提供依据;运用数理统计、Fourier 分析和时间序列分析等数学方法,成功地开发了具有先进水平的地震数据处理系统.

当代计算机科学的发展和广泛应用,使得数学模型的方法如虎添翼,加速了数学向各个学科的渗透,产生了众多的边缘学科.例如生物数学,它是在生物科学研究中,由其各分支运用数学模型和数学方法产生的生态数学、遗传数学、生理数学、仿生数学等内容构成的.数学在制造业中的应用也越来越广泛,不可缺少.波音 767 飞机的成功设计,与应用数学家 Garabedian 对跨音速流和激

波进行的计算密切相关,由此设计出了防激波的飞机翼型.工程设计和制造工艺主要靠计算机辅助设计(CAD)和计算机辅助制造(CAM)两大工具,而这两者又都以数学为理论基础.又以飞机设计为例,设计师必须考虑结构强度与稳定性,这是用有限元来分析的,而机翼的振动情况则需解特征值问题;为了使飞机省油与提高速度必须找到一种最佳机翼和整个机体的形状;如何为飞行员选择最优控制参数,也是必须考虑的问题.飞机设计在极大程度上以计算为基础,人们研究描绘机翼和整个机体附近气流的方程.自动导航与自动着陆系统是根据卡尔曼滤波的方法设计的,而后者主要又是数学.数学模型已代替了许多的实验,既便宜、省时,又适用、安全.以前利用风洞设计飞机某一部件,若要改变某一部位,必须在机械车间建一模型;而今天只要设计一数学模型,通过键盘打进新的参数即可.实际上,从家用电器到天气预报,从通信到广播电视,从核电站到卫星,从新材料到生物工程,高科技的高精度、高速度、高安全、高质量、高效率等特点无一不是通过数学模型和数学方法并借助计算机的计算、控制来实现的.就连计算机本身的产生和进步、计算机软件技术说到底实际上也是数学技术.

军事与国防方面较著名的战例是 1990 年伊拉克点燃了科威特的数百口油井,称之为沙漠风暴与数学战.美国及其盟军在沙漠风暴以前,曾严肃地考虑点燃所有油井的后果.据美国《超级计算评论》杂志披露,五角大楼要求太平洋-赛拉公司研究此问题.该公司利用 Navier-Stokes 方程和有热损失能量方程作为计算模型,在进行一系列模拟计算后得出结论:大火的烟雾可能招致一场重大的污染事件,它将波及到波斯湾、伊朗南部、巴基斯坦和印度北部,但不会失去控制,不会造成全球性的气候变化,不会对地球的生态和经济系统造成不可挽回的损失,这样才促成美国下定决心.所以,人们说第一次世界大战是化学战(火药),第二次是物理战(原子弹),而海湾战争则是数学战.

总之,数学模型是运用数学的语言和工具、对部分现实世界的

信息(现象、数据等)加以翻译、归纳的产物.数学模型经过演绎、推断,给出数学上的分析、预报、决策或控制,再经过解释,回到现实世界.最后,这些分析、预报、决策或控制必须经受实际的检验,完成实践—理论—实践这一循环(如图 1-1 所示).如果检验的结果是正确或基本正确的,就可以用来指导实际,否则,要重新考虑翻译、归纳的过程,修改数学模型.

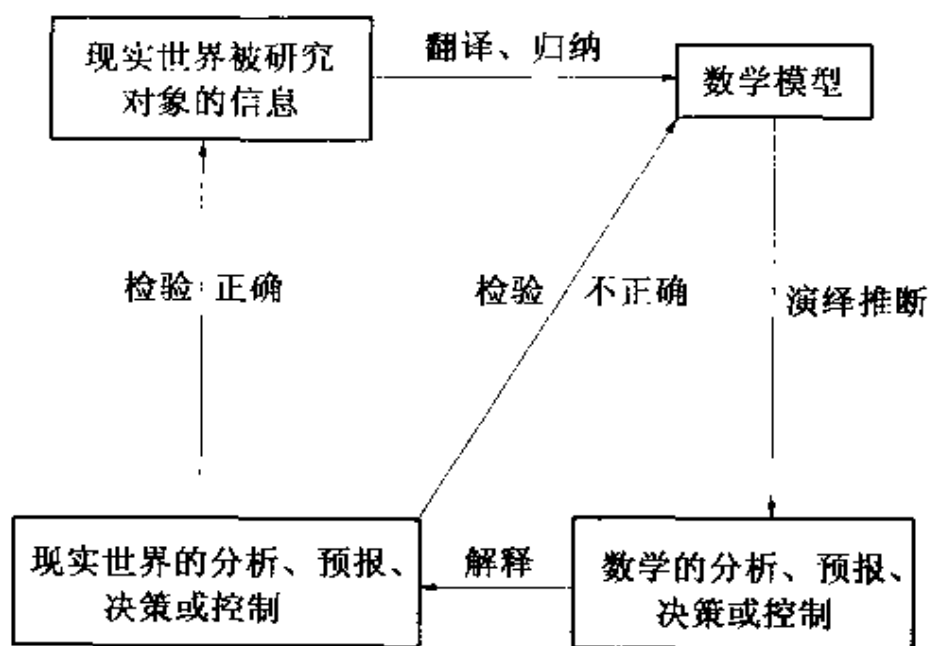


图 1-1 现实世界与数学模型的关系

二、数学建模

1. 数学建模的概念

数学建模(mathematical modeling)是指对特定的客观对象建立数学模型的过程,是现实的现象通过心智活动构造出能抓住其重要且有用的特征的表示,常常是形象化的或符号的表示,是构造刻画客观事物原型的数学模型并用以分析、研究和解决实际问题的一种科学方法.运用这种科学方法,建模者必须从实际问题出发,遵循“实践—认识—实践”的辩证唯物主义认识规律,紧紧围绕

着建模的目的,运用观察力、想像力和逻辑思维,对实际问题进行抽象、简化,反复探索,逐步完善,直到构造出一个能够用于分析、研究和解决实际问题的数学模型。顾名思义,Modeling 一词在英文中有“塑造艺术”的意思,从而可以理解从不同的侧面、角度去考察问题就会有不尽相同的数学模型,从而数学建模的创造又带有一定的艺术特点。数学建模不仅是一种定量解决实际问题的科学方法,而且还是一种从无到有的创新活动过程。数学建模的成败与人的因素密切相关。人是数学建模的主体,事物原型是数学建模的客体。在数学建模的过程中,既要发挥人的聪明才智“改造”客体、解决实际问题,又要“改造”建模者自己,从中丰富智慧、增长才干。一个成功的数学模型总是主体的能动性与客体的规律性达到高度统一的境界时的产物,因此人们常说,数学建模具有强烈的技艺性,建模者要像艺术家那样苦练功夫,才能达到高境界。

2. 数学建模的步骤

数学建模没有固定的模式。按照建模过程,一般采用的建模基本步骤如图 1-2 所示,具体如下:

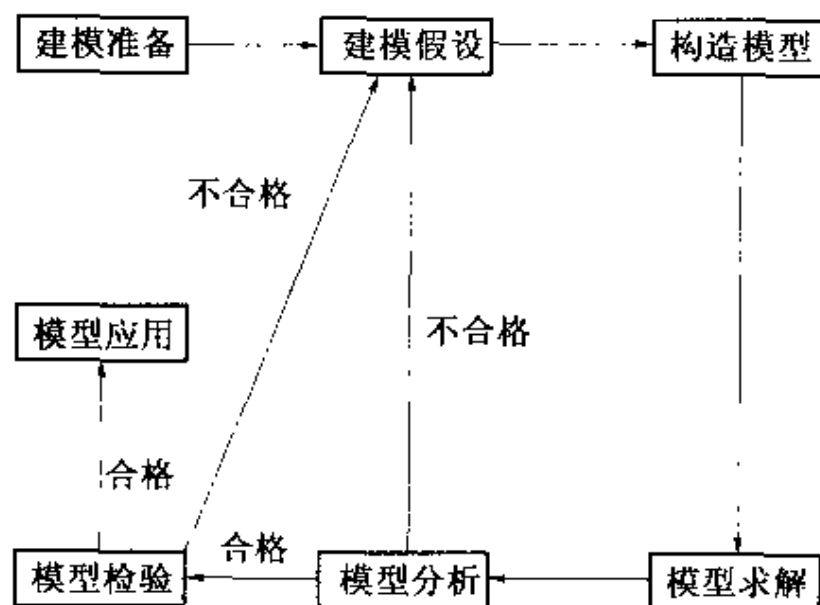


图 1-2 数学建模基本步骤示意图

(1)建模准备

数学建模是一项创新活动,它所面临的课题是人们在生产和科研中为了使认识和实践进一步发展必须解决的问题。“什么是问题?问题就是事物的矛盾,哪里有没有解决的矛盾,哪里就有问题”。因此发现课题的过程就是分析矛盾的过程.贯穿生产和科技中的根本矛盾是认识和实践的矛盾,我们分析这些矛盾,从中发现尚未解决的矛盾,就是找到了需要解决的实际问题.如果这些实际问题需要给出定量的分析和解答,那么就可以把这些实际问题确立为数学建模的课题.建模准备就是要了解问题的实际背景,明确建模的目的,掌握对象的各种信息,弄清实际对象的特征.

(2)建模假设

作为课题的原型都是复杂的、具体的,是质和量、现象和本质、偶然和必然的统一体.这样的原型,如果不经过抽象和简化,人们对其认识是困难的,也无法准确把握它的本质属性.而建模假设就是根据实际对象的特征和建模的目的,在掌握必要资料的基础上,对原型进行抽象、简化.把那些反映问题本质属性的形态、量及其关系抽象出来,简化掉那些非本质的因素,使之摆脱原型的具体复杂形态,形成对建模有用的信息资源和前提条件,并且用精确的语言作出假设,是建模过程关键的一步.

对原型的抽象、简化不是无条件的,一定要善于辨别问题的主要方面和次要方面,果断地抓住主要因素,抛弃次要因素,尽量将问题均匀化、线性化,并且要按照假设的合理性原则进行.假设合理性原则有以下几点:

①目的性原则:从原型中抽象出与建模目的有关的因素,简化掉那些与建模目的无关的或关系不大的因素.

②简明性原则:所给出的假设条件要简单、准确,有利于构造模型.

③真实性原则:假设条款要符合情理,简化带来的误差应满足

实际问题所能允许的误差范围.

④全面性原则:在对事物原型本身作出假设的同时,还要给出原型所处的环境条件.

(3)模型建立

在建模假设的基础上,进一步分析建模假设的各条款.首先区分哪些是常量,哪些是变量,哪些是已知量,哪些是未知量;然后查明各种量所处的地位、作用和它们之间的关系,建立各个量之间的等式或不等式关系,列出表格、画出图形或确定其他数学结构,选择恰当的数学工具和构造模型的方法对其进行表征,构造出刻画实际问题的数学模型.

在构造模型时究竟采用什么数学工具,要根据问题的特征、建模的目的要求及建模人的数学特长而定.可以这样讲,数学的任一分支在构造模型时都可能用到,而同一实际问题也可以构造出不同的数学模型.一般地讲,在能够达到预期目的的前提下,所用的数学工具越简单越好.

在构造模型时究竟采用什么方法构造模型,要根据实际问题的性质和建模假设所给出的建模信息而定.就以系统论中提出的机理分析法和系统辨识法来说,它们是构造数学模型的两种基本方法.机理分析法是在对事物内在机理分析的基础上,利用建模假设所给出的建模信息或前提条件来构造模型;系统辨识法是对系统内在机理一无所知的情况下利用建模假设或实际对系统的测试数据所给出的事物系统的输入、输出信息来构造模型.随着计算机科学的发展,计算机模拟有力地促进了数学建模的发展,也成为一种构造模型的基本方法.这些构模方法各有其优点和缺点,在构造模型时,可以同时采用,以取长补短,达到建模的目的.

(4)模型求解

构造数学模型之后,再根据已知条件和数据分析模型的特征和结构特点,设计或选择求解模型的数学方法和算法,这里边包括

解方程、画图形、证明定理、逻辑运算以及稳定性讨论,特别是编写计算机程序或运用与算法相适应的软件包,并借助计算机完成对模型的求解.

(5)模型分析

根据建模的目的要求,对模型求解的数字结果,或进行变量之间的依赖关系分析,或进行稳定性分析,或进行系统参数的灵敏度分析,或进行误差分析等.通过分析,如果不符合要求,就修改或增减建模假设条款,重新建模,直到符合要求.通过分析如果符合要求,还可以对模型进行评价、预测、优化等.

(6)模型检验

模型分析符合要求之后,还必须回到客观实际中去对模型进行检验,用实际现象、数据等检验模型的合理性和适用性,看它是否符合客观实际.若不符合,就修改或增减假设条款,重新建模,循环往复,不断完善,直到获得满意结果.目前计算机技术已为我们进行模型分析、模型检验提供了先进的手段,充分利用这一手段,可以节约大量的时间、人力和经费.

(7)模型应用

模型应用是数学建模的宗旨,也是对模型的最客观、最公正的检验.因此,一个成功的数学模型,必须根据建模的目的,将其用于分析、研究和解决实际问题,充分发挥数学模型在生产和科研中的特殊作用.

以上介绍的数学建模基本步骤应该根据具体问题灵活掌握,或交叉进行,或平行进行,不拘一格地进行数学建模则有利于建模者发挥自己的才能.

三、数学建模与数学模型的关系

“模型”(model)是“建模”(modeling)的结果,而“建模”是建立模型的过程.model是名词,是指建立起来的模型,强调的是“结

果”。而 modeling 是 model 的动名词,是指建立模型的过程,强调的是建立数学模型这个过程,过程比结果更重要.对于未能最后完成的建模过程、未能最后实现的想法,虽然模型还没能最后建立起来,但只要想法有价值,已经开始了的建模过程有合理性,就仍然是有可取之处的.

第二章 数学建模常用方法

数学建模的方法按大类分,大体上可分为:机理分析法、测试分析法、综合分析法.机理分析法就是根据人们对现实对象的了解和已有的知识、经验等,分析研究对象中各变量(因素)之间的因果关系,找出反映其内部机理的规律的一类方法;测试分析法是指对研究对象(系统)进行输入输出的试验,根据实测数据进行统计分析建立模型的一类方法;综合分析法则上述两种方法的综合应用.

本章通过应用数学知识解决一些简单的问题,初步尝试怎样把数学应用于解决问题的过程中,通过这些问题展示数学的奇妙作用,体会将数学用来解决各类实际问题时如何培养和发挥创造性思维能力,经常性地联想和积累,开拓思路,更好和更灵活地应用数学解决问题,从而达到了了解和掌握一些常用的具体的数学建模的方法.

本章介绍代数法建模、几何模拟法建模、概率法建模、量纲分析法建模.

第一节 代数法建模

高功率计算机的出现,大大推动了数学的改革,导致数学的离散化趋势.所谓离散化,主要指两方面的工作,一方面是把连续模型离散化,以便作数值处理;另一方面是把实际问题直接抽象成离散的数据、符号和图形,然后以离散数学为主要工具来解决.代数方法是求解离散问题的主要方法.

一、生小兔问题

13 世纪初,意大利比萨的一位叫伦纳德,绰号为斐波那契 (Fibonacci, 1170 ~ 1250) 的数学家,在一本《算盘书》的数学著作中,提出下面一个有趣的问题:兔子出生以后两个月就能生小兔,且每月生一次,若每次不多不少恰好生 1 对(一雌一雄),假如养了初生的小兔 1 对,试问一年后共有多少对兔子?(假如生下的小兔都不死)。

第一个月:只有 1 对小兔。

第二个月:小兔子未成熟不会生殖,仍只有 1 对。

第三个月:这对兔子生了 1 对小兔,这里共有 2 对。

第四个月:老兔子又生了 1 对小兔,而上月出生的小兔还未成熟,这时共有 3 对,如此下去,我们不难得出下面的结果(见表 2-1):

表 2-1

月份数 n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
兔子对数	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

从表 2-1 中可知,一年后(第十三个月时)共有 233 对兔子,用这种办法推算,似乎有些“笨”,而且越往后越使人觉得复杂,有无简便方法?

我们将表 2-1 中兔子的对数用 F_n 表示,下标 n 表示月份数(这样兔子数可视为月份数的函数),则 F_n 称为斐波那契数列,记

$$F_n: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

观察 F_n , 不难发现,第 $n+1$ 个月时的兔子可分为两类:一类是第 n 个月时的兔子;另一类是当月新出生的小兔,而这些小兔数恰好是第 $n-1$ 个月时兔子数(它们到第 $n+1$ 个月时均可生

殖). 所以有如下递推关系:

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases} \quad (n = 3, 4, \dots)$$

这一结果(本问题的数学模型)是 1634 年数学家奇拉特发现的(那已是裴氏死后近 400 年的事了). 由于这一发现, 生小兔问题引起了人们的极大兴趣. 首先, 计算这列数方便多了, 人们可以轻而易举地算出两年、三年……以后的兔子数(现在有了计算机, 编一个简单的程序可计算出任意月份兔子的对数). 而且由于人们继续对这个数列探讨, 又发现了它的许多奇特的性质, 越来越多的应用被人们找到, 因而引起了敏感的数学家们的极大关注, 一本专门研究它的杂志《斐波那契季刊》(Fibonacci Quarterly)于 1963 年开始发行, 在美国还专门设立了 Fibonacci 数学委员会. 20 世纪 80 年代出现的“优选法”中, 也找到了斐波那契数列的巧妙应用, 从而使得这个智力游戏的古老的“生小兔问题”所引出的数列, 绽开了新花.

观察思考 1:

(1)事实上, 斐波那契数列不只是在生小兔问题中才会碰到, 它也出现在自然界、生活中……你观察过植物的叶序、菠萝的鳞片、树枝的生长、蜜蜂进蜂房的路线、钢琴键盘……另外, 在几何、代数、概率……中发现过吗? 这种递推关系怎样求解? 你能总结规律吗?

(2)第一次摆设: 从围棋子中任意拿来黑白两种颜色的棋子共 8 个, 排成一个圆圈, 不妨称为第 1 圈; 第二次摆设: 在第一圈两颗颜色相同的棋子中间放一颗黑色棋子, 在两颗颜色不同的棋子中间放一颗白色棋子, 放完后撤掉原来第一次摆设所放的棋子, 新排成的圆圈称为第 2 圈; ……重复上述过程, 问第 8 圈的棋子是什么颜色? 第 100 圈呢?

二、椅子问题

在我们周围的日常生活中,到处都会遇到数学问题,就看我们是否留心观察和善于联想,比如有这样一个问题(你或许认为这个问题与数学毫不相干):

生活中的椅子为什么大多数是4条腿的?如果根据3点确定一平面原理,3条腿的椅子既稳定又节约材料,为什么不用3条腿的椅子?如果从美观的角度考虑,为什么不用5条腿、6条腿的椅子?4条腿长度相等的椅子放在起伏不平的地面上,4条腿能否一定同时着地?

我们要建立一个简单而又巧妙的模型来解答这个问题.在下面合理的假设下,问题的答案是肯定的.

假设:

- ①椅子的四条腿一样长,4脚的连线是正方形.
- ②地面是数学上的光滑曲面,即沿任意方向,切面能连续移动,不会出现阶梯状.
- ③对于椅脚的间距和长度而言,地面是相对平坦的,使椅子在任何位置至少有3只脚同时落地.

建模的关键在于恰当地寻找表示椅子位置的变量,并把要证明的“着地”这个结论归结为某个简单的数学关系.假定椅子中心不动,4条腿着地点视为几何学上的点,用 A 、 B 、 C 、 D 表示,将 AC 、 BD 连线看做 x 轴、 y 轴,建立如图2-1所示的坐标系.引入坐标系后,将几何问题代数化,即用代数方法去研究这个几何问题.

人们习惯于,当一次放不平稳椅子时,总是转动一下椅子(这里假定椅子中心不动),因而将转动椅子联想到坐标轴的旋转.

设 θ 为对角线 AC 转动后与初始位置 x 轴的夹角,如果定义距离为椅脚到地面的竖直长度,则“着地”就是椅脚与地面的距离等于零,由于椅子位于不同位置,椅脚与地面的距离不同,因而这

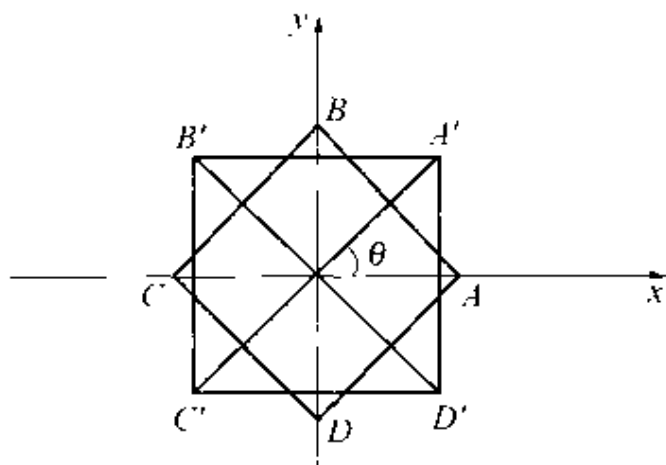


图 2-1

个距离为 θ 的函数. 而椅子有 4 只脚, 因而有 4 个距离, 但又因正方形的中心对称性, 所以只要设两个距离函数就行了. 记 A, C 两脚与地面距离之和为 $g(\theta)$; B, D 两脚与地面距离之和为 $f(\theta)$, 显然有 $g(\theta) \geq 0, f(\theta) \geq 0$.

因地面光滑, 显然 $g(\theta)$ 与 $f(\theta)$ 连续, 而椅子在任何位置总有 3 只脚可同时“着地”, 即对任意的 $\theta, g(\theta)$ 和 $f(\theta)$ 总有一个为零, 有 $g(\theta)f(\theta) = 0$. 不失一般性, 设 $g(0) = 0$, 于是椅子问题抽象成如下数学问题:

已知 $g(\theta), f(\theta)$ 是 θ 的连续函数, 且对任意 $\theta, g(\theta)f(\theta) = 0, g(0) = 0, f(0) > 0$.

求证: 存在 θ_0 , 使得 $g(\theta_0) = f(\theta_0) = 0$.

证明: 令 $h(\theta) = f(\theta) - g(\theta)$, 由函数 $g(\theta)$ 和 $f(\theta)$ 的连续性知 $h(\theta)$ 也是 θ 的连续函数, 且有

$$h(0) = f(0) - g(0) = f(0) > 0$$

将椅子绕中心(即坐标原点)转动 90° , 则对角线 AC 与 BD 互换, 由 $g(0) = 0, f(0) > 0$, 可知 $g\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. 从而

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -g\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$$

而 $h(\theta)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上连续, 根据连续函数的基本性质(介值定理), 必存在 $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 使得 $f(\theta_0) = 0$, 即

$$h(\theta_0) = f(\theta_0) - g(\theta_0) = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

又因对任意的 θ , $g(\theta)$ 和 $f(\theta)$ 总有一个为零, 所以有

$$g(\theta_0)f(\theta_0) = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

由式①和②可知:

$$f(\theta_0) - g(\theta_0) = 0$$

即只要把椅子绕中心(坐标原点)逆时针转动 θ_0 角, 椅子的 4 条腿就同时落地了, 即椅子 4 条腿能同时“着地”. 理论上保证了稳定性, 又美观大方, 所以生活中常见的便是 4 条腿的椅子.

椅子问题的解决是学习运用类比法的一个很好的实例, 读者从中可受到一定启发, 学习到一些建模技巧: 转动椅子与坐标轴旋转联系起来; 用一元变量表示转动位置; 巧妙地将距离用 θ 的函数表示, 而且只设两个函数 $g(\theta)$ 、 $f(\theta)$ (注意椅子有 4 只脚!); 由 3 点定一平面得到 $g(\theta)f(\theta) = 0$; 利用转动并采用了介值定理使得问题解决得非常巧妙而简单.

观察思考 2:

(1) 生活中, 除了 4 脚连线呈正方形的椅子, 还有 4 脚连线呈长方形的椅子. 假若将 4 脚呈正方形改为长方形, 上述模型如何改进?

(2) 在任何一个 5min 时间内均不跑 500m, 问 10min 能否恰好跑完 1000m?

第二节 几何模拟法建模

把一个复杂的问题抽象成各种意义下的几何问题加以解决,

这种方法就叫几何模拟法.这种方法的特点是常常在发现问题解答的同时也就论证了解答的正确性.它是数学中的一种重要思维方法.

一、雨中行走问题

人在雨中沿直线从一处向另一处行走时,当雨的速度已知时,问人行走的速度多大才能使淋雨量最少?

这个问题看起来很简单,只要跑得越快越好,然而把雨的方向的变化考虑进去,情况不见得如此.

1. 分析问题

淋雨量完全依赖于降雨速度、风向、奔跑的路程与速度.我们需要给出一个依赖于这些因素确定淋雨量的公式.假设与此问题有关因素如下:淋雨时间 t ,雨速 r ,雨的角度 θ ,人的行走速度 v ,人的跑步速度 u ,人的高度 h ,人的宽度 w ,人的厚度 g ,淋雨量 C ,雨的强度 I ,行走的距离 s .为了叙述和了解的方便,我们不妨给出一组比较典型的调查数据:雨速 $r = 4\text{m/s}$,人的行走速度 $v = 2\text{m/s}$,人的跑步速度 $u = 6\text{m/s}$,降雨量 $= 2\text{cm/h}$,行走的距离 $s = 1000\text{m}$,人的高度 $h = 1.5\text{m}$,人的宽度 $w = 0.5\text{m}$,人的厚度 $g = 0.2\text{m}$.

2. 建立模型

先从最简单的考虑,设雨速为常数,不考虑雨向,并且假设人所走的路线是直线,在整个 1000m 的路程中都以 6m/s 的速度跑步前进,此时可计算淋雨时间 $t = \frac{1000}{6} \approx 167\text{s}$,在这个时间内的降雨量为 $\frac{2}{100} \times \frac{167}{3600}\text{m}$.若将人体视为长方体,可计算出其前后、侧、顶的表面积分别为 1.5 、 0.6 、 0.1m^2 ,这样总面积为 2.2m^2 .设这些表面积都淋雨,则淋雨量为 $\left(\frac{2}{100} \times \frac{167}{3600}\right) \times 2.2\text{m}^3 \approx 2.04\text{L}$,这样

约有相当 2L 的雨淋在身上.

同理,假设在整个 1000m 的路程中都以 2m/s 的速度行走前进,这个时候可计算淋雨时间 $t = \frac{1000}{2} = 500\text{s}$,在这个时间内的降雨量为 $\frac{2}{100} \times \frac{500}{3600}\text{m}$. 此时仍将人体视为长方体,其前后、侧、顶的表面积仍然分别为 1.5, 0.6, 0.1 m^2 ,总面积为 2.2 m^2 . 设这些表面积都淋雨,则淋雨量为 $\left(\frac{2}{100} \times \frac{500}{3600}\right) \times 2.2\text{m}^3 \approx 6.12\text{L}$,这时约有相当 6L 的雨淋在身上.

从以上简单模型的结果可知,走得越快淋雨越少.

通常,在前面所列的因素中,并不都是变量,事实上, r 、 θ 、 v 、 u 、 t 和 C 是变量而其他量在这个特殊情形不是变量. 另外雨速和降雨量是有区别的. 如果雨是像河流一样的连续水流,则雨速就能确定我们在地域上的降雨量. 显然,这是不现实的,因为雨是离散雨点的流. 以上为描述雨量的大小而引入了雨的强度的概念.

从上面给出的数据知道雨速为 4m/s,而降雨量为 2cm/h = $\frac{2}{100} \times \frac{1}{3600}\text{m/s}$. 降雨量与雨速的比称为雨的强度,此时雨的强度 $I = \frac{1}{7.2 \times 10^5} = 1.389 \times 10^{-6}$. 雨的强度反映了雨的大小,如果 $I = 0$,就说明没有雨;如若 $I = 1$,就说明是暴雨,雨水就像倒水一样的连续流.

当速度取作常数,则淋雨时间 $t = \frac{S}{v}$. 为了考虑被淋湿的程度,必须考虑关于行走方向与雨的方向的关系,建立如图 2-2 所示的坐标系.

由于雨是呈一个角度下来的,能看出在任何情形下受雨面仅为入顶部和前(后)部,所以淋在人身上的雨量可分以下两种情况来计算:

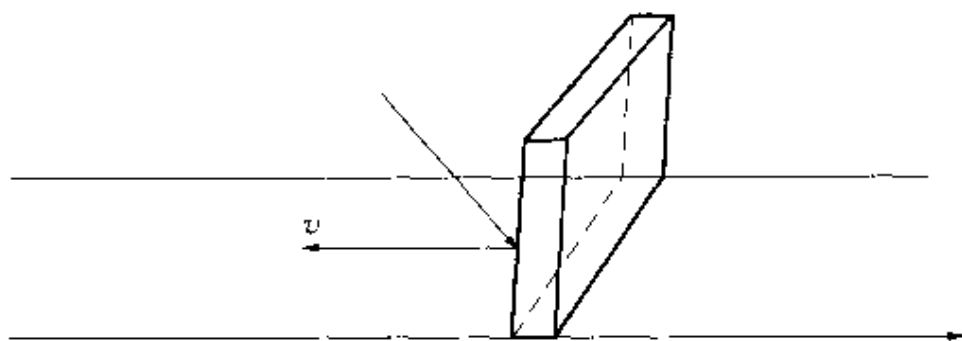


图 2-2

(1) 考虑人的顶部

顶部的面积为 wg , 雨速的分量为 $r \cos \theta$. 因为淋雨率 = 强度 \times 面积 \times 雨速 = $Iwg r \cos \theta$ (单位时间内的淋雨量), 这样在时间 s/v 中的

$$\text{淋雨量} = (sIwg r \cos \theta) / v \quad (2-2-1)$$

(2) 考虑人的前部

前部的面积 = wh , 雨速的分量为 $r \sin \theta + v$. 因此淋雨率 = $Iwh(r \sin \theta + v)$ (单位时间内的淋雨量), 这样在时间 s/v 中的

$$\text{淋雨量} = sIwh(r \sin \theta + v) / v \quad (2-2-2)$$

从式(2-2-1)和式(2-2-2)知总淋雨量为

$$C = \frac{Iws}{v} (rg \cos \theta + h(r \sin \theta + v)) \quad (\text{m}^3) \quad (2-2-3)$$

从上式可以知道, 当给定一些已知量(如前面给出的数据 $h = 1.5\text{m}$, $w = 0.5\text{m}$, $g = 0.2\text{m}$, $r = 4\text{m/s}$, $s = 1000\text{m}$, $I = \frac{1}{7.2 \times 10^5} = 1.389 \times 10^{-6}$)时, 上式转化为如下数学模型

$$C = \frac{0.8 \cos \theta + 6 \sin \theta + 1.5v}{1.44 \times 10^3 v} \quad (\text{m}^3) \quad (2-2-4)$$

也就是说问题抽象成如下数学问题: 在已知雨的角度 θ 的条件下, 求人的行走速度 v 使得淋雨量 C 为最小值.

3. 模型求解

由于这个模型的特殊性,如果说 $I=0$,则有 $C=0$,也就是没有下雨;当下雨时,根据人是朝着雨还是背着雨走的情形,分下列几种情况讨论.

(1)当 $\theta=0^\circ$ 时,这时雨是垂直下的,从式(2-2-4)得

$$C = \frac{0.8\cos\theta + 6\sin\theta + 1.5v}{1.44 \times 10^3 v} = \frac{0.8}{1.44 \times 10^3 v} + \frac{1.5}{1.44 \times 10^3} \quad (\text{m}^3)$$

从而可知,当 v 越大时,分母越大, C 越小.也就是说,走得越快淋的雨越少.

(2)当 $\theta \neq 0^\circ$ 时,首先讨论朝着雨走的情形($0^\circ < \theta \leq 90^\circ$),从式(2-2-4)得

$$C = \frac{0.8\cos\theta + 6\sin\theta + 1.5v}{1.44 \times 10^3 v} = \frac{0.8\cos\theta + 6\sin\theta}{1.44 \times 10^3 v} + \frac{1.5}{1.44 \times 10^3} \quad (\text{m}^3)$$

因为 $0^\circ < \theta \leq 90^\circ$,所以总有 $\sin\theta > 0$, $\cos\theta \geq 0$,从而可知,当 θ 固定,分子($0.8\cos\theta + 6\sin\theta$)也固定为某一正常数,此时 v 越大,分母越大, C 越小.也就是说,走得越快淋的雨越少.

(3)当 $\theta \neq 0^\circ$ 时,再讨论背着雨走的情形($-90^\circ \leq \theta < 0^\circ$),取 $\theta = -\alpha$ ($0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$)代入式(2-2-4)得

$$\begin{aligned} C &= \frac{0.8\cos(-\alpha) + 6\sin(-\alpha) + 1.5v}{1.44 \times 10^3 v} \\ &= \frac{0.8\cos\alpha - 6\sin\alpha}{1.44 \times 10^3 v} + \frac{1.5}{1.44 \times 10^3} \quad (\text{m}^3) \end{aligned}$$

从上式可以看出,理论上 C 可能出现负值,而事实上这是不可能的,所以需回到式(2-2-2)去分析这种情形.下面分两种情况加以讨论:

①若 $v \leq r\sin\alpha$,则背后的淋雨量为 $I_{\text{wsh}}(r\sin\alpha - v)/v$,总淋雨量为

$$C = \frac{I_{\text{ws}}}{v}(rg\cos\alpha + h(r\sin\alpha - v)) \quad (\text{m}^3)$$

把上述数据代入,得

$$C = \frac{0.8\cos\alpha + 1.5(4\sin\alpha - v)}{1.44 \times 10^3 v} \quad (\text{m}^3)$$

从上式可以知道,分子为正数,分母越大, C 越小,但分母中的 v 受条件 $v \leq r\sin\alpha$ 限制,最大只能取 $v_{\max} = r\sin\alpha = 4\sin\alpha$,此时 C 最小为 $C_{\min} = \frac{Iwsrg\cos\alpha}{v} = \frac{0.8\cos\alpha}{1.44 \times 10^3} \text{ m}^3$,即为淋在头顶的雨

雨量。
②若 $v \geq r\sin\alpha$,则背后的淋雨量为 $Iws h(v - r\sin\alpha)/v$.总淋雨量为

$$C = \frac{Iws}{v}(rg\cos\alpha + h(v - r\sin\alpha)) \quad (\text{m}^3)$$

把上述数据代入,得

$$C = \frac{0.8\cos\alpha - 6\sin\alpha + 1.5v}{1.44 \times 10^3 v} = \frac{0.8\cos\alpha - 6\sin\alpha}{1.4 \times 10^3 v} + \frac{1.5}{1.44 \times 10^3} \quad (\text{m}^3)$$

从上式可以知道,当 $0.8\cos\alpha - 6\sin\alpha < 0$,即 $\tan\alpha > \frac{2}{15}$ 时,分子为负数,分母越小, C 越小,但分母中的 v 受条件 $v \geq r\sin\alpha$ 限制,最小只能取 $v_{\min} = r\sin\alpha = 4\sin\alpha$,此时 C 最小为 $C_{\min} = \frac{Iwsrg\cos\alpha}{v} = \frac{0.8\cos\alpha}{1.44 \times 10^3} (\text{m}^3)$;当 $0.8\cos\alpha - 6\sin\alpha \geq 0$,即 $0 < \tan\alpha \leq \frac{2}{15}$ 时,分子为非负数,分母越大 C 越小,故 v 越大则 C 越小,也就是说,走得越快淋的雨越少。

4. 模型解释

上述结论告诉我们:如果逆风行走,则行走越快淋的雨越少;如果是顺风,则当雨的倾角大于约 8° 时,行走的速度应该保持与水平雨速一致的速度淋的雨最小;而当雨的倾角小于约 8° 时(基本上垂直而下),还是行走越快淋的雨越少。

观察思考 3:

(1)上述模型并没有考虑雨从侧面降落的情况.如果考虑进

去,结果又会是怎样?这个问题能否从微积分的角度出发考虑建立模型?

(2)某工厂在生产过程中,要从一个工序是 $1\text{m} \times 1\text{m}$ 钢板上截取圆盘.目前从这样一块钢板上能冲割出直径为 0.25m 的圆盘 16 个.你是否有可能重新安排切割方案使得更节约原料?如果要从同样的板中截出直径为 0.1m 的圆盘,问怎么样安排切割最节省材料?对给定尺寸的钢板、圆盘的半径,是否可以给出一个计算最大个数的公式?

二、易拉罐问题

夏天喝饮料凉爽凉爽,冬天饮啤酒暖和暖和.你是否留意到装饮料、啤酒的瓶子?它们的形状、大小如何?不同工厂的产品规格统一?我观察过,不管是饮料还是啤酒,倘若瓶子是易拉罐,它们的规格都是统一的圆柱:高约 12cm ,圆周长约 21cm .

为什么不同工厂的易拉罐采用统一的规格?你能从数学的角度给予合理解释?

将问题简单化,就回到中学常接触的题目:用铁皮制造体积一样的瓶子,该瓶子应做成圆柱、圆锥,还是球体,或者其他形状,才能最节约材料(铁皮)?

假设体积 V 一定,不妨令 $V=1000$ 立方单位,下面推算各种常见形状体的表面积 S :

(1)正方体(棱长为 $a>0$)

由 $V_{\text{正方体}}=a^3=1000$ 可得, $S_{\text{正方体}}=6a^2=600$ (平方单位).

(2)长方体(长、宽、高分别为 $a>0, b>0, c>0$)

已知 $V_{\text{长方体}}=abc=1000$,求最小的 $S_{\text{长方体}}=2(ab+bc+ca)$
 $=?$

$$\text{解 } S_{\text{长方体}}=2\left(\frac{abc}{c}+\frac{abc}{a}+\frac{abc}{b}\right)\geqslant 2abc3\sqrt[3]{\frac{1}{c}\frac{1}{a}\frac{1}{b}}$$

$$= 600 (\text{平方单位})$$

(3) 正六棱柱(底边长 $a > 0$, 高 $h > 0$, 底面积 $S_{\text{底}} = 6 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} a^2$)

已知 $V_{\text{正六棱柱}} = S_{\text{底}} h = \frac{3}{2} \sqrt{3} a^2 h = 1000$, 求最小的 $S_{\text{正六棱柱}} = 2S_{\text{底}} + 6ah = ?$

$$\text{解 } S_{\text{正六棱柱}} = 3\sqrt{3}a^2 + 6a \times \frac{2000}{3\sqrt{3}a^2} (\text{平方单位})$$

$$\text{求导 } S'_{\text{正六棱柱}} = 6\sqrt{3}a - 2\sqrt{3} \times \frac{2000}{3a^2}$$

令 $S'_{\text{正六棱柱}} = 0$, 得 $a = \sqrt[3]{\frac{2000}{9}} \approx 6.057$, 从而得 $h = 10.491$, 所以

最小的 $S_{\text{正六棱柱}} = 571.912 (\text{平方单位})$

(4) 圆柱(底半径 $r > 0$, 高 $h > 0$)

已知 $V_{\text{圆柱}} = S_{\text{底}} h = \pi r^2 h = 1000$, 求最小的 $S_{\text{圆柱}} = 2S_{\text{底}} + 2\pi rh = ?$

$$\text{解: } S_{\text{圆柱}} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1000}{\pi r^2} (\text{平方单位})$$

$$\text{求导 } S'_{\text{圆柱}} = 4\pi r - 2 \frac{1000}{r^2}$$

令 $S'_{\text{圆柱}} = 0$, 得 $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5.419$, 从而得 $h = 10.840$, 所以

最小的 $S_{\text{圆柱}} = 553.580 (\text{平方单位})$

从上面的结果可以看出, 当底面的边数越多(圆柱的底为圆, 相当于无数条边), 表面积就越小. 所以, 对各类锥体, 只需计算圆锥的表面积即可.

(5) 直圆锥(底半径 $r > 0$, 高 $h > 0$, 母线 $l > 0$, h 与 l 的夹角为 θ , 底面积 $S_{\text{底}} = \pi r^2$)

已知 $V_{\text{直圆锥}} = \frac{1}{3} S_{\text{底}} h = \frac{1}{3} \pi r^2 h = 1000$, 求最小的 $S_{\text{直圆锥}} =$

$$S_{\text{底}} + \frac{1}{2} l 2\pi r = \pi r(r+l) = ?$$

解 因为 $r = l \sin \theta, h = l \cos \theta, \tan \theta = \frac{r}{h}$.

已知 $V_{\text{直圆锥}} = \frac{1}{3} S_{\text{底}} h = \frac{1}{3} \pi r^2 h = 1000$, 可以推导出 $S_{\text{直圆锥}} = 9 \times 10^6 \times \frac{(1 + \sin \theta)}{\cos^2 \theta \sin \theta} \pi$.

$$(S_{\text{直圆锥}})' = 9 \times 10^6 \times \pi \times \frac{[(1 + \sin \theta)^3]' \cos^2 \theta \sin \theta - (1 + \sin \theta)^3 (\cos^2 \theta \sin \theta)'}{\cos^4 \theta \sin^2 \theta}$$

令 $(S_{\text{直圆锥}})' = 0$, 得 $\sin \theta = \frac{1}{3}$, 从而得最小 $S_{\text{直圆锥}} = 7.2 \times 10^7 \times \pi$.
所以

$$\text{最小的 } S_{\text{直圆锥}} = \sqrt[3]{7.2 \times 10^7 \times \pi} \approx 609.19 (\text{平方单位})$$

同样的道理, 对于各类台体, 只需计算圆台即可 (读者自己计算). 显然圆台的表面积比圆柱的大. 实际上, 在体积相等的情况下, 球的表面积 (读者自己计算) 最小, 但球体的稳定性极差, 所以不可能用作易拉罐.

综上所述, 应将易拉罐制作成圆柱, 实际的情况也是如此. 问题转变为: 圆柱底面圆的直径与圆柱的高的比应该设定为多少? 表面体才最小?

根据前面的计算结果知道, 它们的比最好为 1:1. 但是, 现实生活中的易拉罐, 它们的规格却是统一的圆柱: 高约 12cm, 圆周长约 21cm, 即底直径与高的比为 1:1.8.

这两个结果的比较, 确实出乎意料, 令人吃一惊: 理论与实际差别怎么那么大?

再进一步调研, 发现现实生活中的易拉罐两个底所用的材料的价钱与侧面所用的相同面积材料的价钱的比恰好为 1.8:1. 这

个结果与理论的计算完全吻合.

那么,为什么要用不同的材料呢?

有人说了如下的理由:

①上下底面跟侧面所受的压力不同(因易拉罐内装的液体加了压).

②上面的材料要易于拉开,但又要保证不易于损坏,所以要加厚.

同学们,你能够说出更多更好的理由吗?

观察思考 4:

(1)上面的模型并没有计算出椭球面、抛物面、双曲面的表面积,你能够用微积分的知识进行计算吗?

(2)你认真观察过四足动物(比如猪、牛、马等)吗?能否从它的躯干(不包括头、尾)长度估计出它的体重?

第三节 量纲分析法建模

量纲分析是物理学中常用的一种定性分析法,是建立数学模型(尤其是物理领域中)的一个有力工具.除了可以用它来检验物理关系式的正确性以及用来推导一些公式的形式以外,它还是设计实验时做相似模拟的基础.用这种方法可从单一的前提条件对某一现象推论出信息,而这现象能由某些变量中的一个有量纲的恰当的方程来描述.

许多物理量都是有量纲的,人们对一个物理对象进行定量时离不开它的特性,例如量度物体的长度、质量、密度、速度、硬度等等.这种表示不同物理特性的量,称之为“量纲”.例如质量的量纲是 $[m]$,速度的量纲是 $[l/t]$ 或 $[lt^{-1}]$,热量的量纲是 $[j]$ 等等.这里涉及的是它们的物理特性.任何物理量的量度还必须用单位来表示,例如质量量纲的单位可以是克或千克,速度量纲的单位可以

是厘米/秒或公里/时等等.用数学公式描述一个物理规律时,等式两端必须保持量纲一致,量纲的单位也要保持一致,称为量纲齐次性.所谓量纲分析,就是在基于量纲一致的原则上,分析物理量之间关系的一种方法.

在物理学的每一个领域中,都有一些物理量的量纲是基本的,而其他物理量的量纲可通过这些基本量纲推导出来.比如力学中,常把质量 m 、长度 l 、时间 t 的量纲作为基本量纲,分别记为 $[m]$

M , $[l] = L$ 和 $[t] = T$. 速度 v 的量纲则可表示为 $[v] = LT^{-1}$, 加速度的量纲表示为 $[a] = LT^{-2}$, 力 f 的量纲可由牛顿第二定律 $f = ma$ 推得 $[f] = MLT^{-2}$. 某些物理常数也有量纲,如万有引力定律中的引力常数 k 的量纲为 $[k] = L^3M^{-1}T^{-2}$, 但有些常数是无量纲的,如 $\pi = 3.141592\cdots$ 等.

先看一个简单的例子,然后再给出量纲分析的一般方法.

例 1 单摆运动. 质量为 m 的小球系在长度为 l 的线的一端, 线的另一端固定, 小球稍偏离平衡位置后, 在重力 mg 作用下做往复摆动, 忽略阻力, 求摆动周期 t 的表达式.

解 该问题中 t 与 m 、 l 、 g 有关, 设

$$t = \lambda m^{\alpha_1} l^{\alpha_2} g^{\alpha_3} \quad (2-3-1)$$

式中, α_1 、 α_2 、 α_3 是待定常数; λ 是无量纲的比例系数. 取式(2-3-1)的量纲表达式得

$$[t] = [m]^{\alpha_1} [l]^{\alpha_2} [g]^{\alpha_3}$$

将它们用基本量纲代入并整理得

$$T = M^{\alpha_1} L^{\alpha_2 + \alpha_3} T^{-2\alpha_3} \quad (2-3-2)$$

按照量纲齐次原则应有

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_3 = 1 \end{cases} \quad (2-3-3)$$

解得 $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \frac{1}{2}, \alpha_3 = -\frac{1}{2}$, 代入式(2-3-1)得

$$t = \lambda \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (2-3-4)$$

与用力学规律得到的结果是一致的。

如果考虑得更精细些, 周期 t 应与小球偏离平衡位置的初始角度 θ 有关, 但因 θ 是无量纲量(弧度), 所以它的影响反映在 λ 上, 即为 $\lambda(\theta)$. 事实上 $\lambda(\theta)$ 是以 θ 为参量的第一类椭圆积分, 当 θ 很小时近似于 2π .

为了方便理解用于量纲分析建模的 Buckingham Pi 定理, 将这个例子的求解用一般的形式给出. 这个例子中各变量之间的关系写作

$$t^{y_1} m^{y_2} l^{y_3} g^{y_4} = \pi \quad (2-3-5)$$

一般可写成

$$f(t, m, l, g) = 0 \quad (2-3-6)$$

式(2-3-5)中, $y_1 \sim y_4$ 为待定常数; π 是无量纲常数. 将 t, m, l, g 的量纲用基本量纲 L、M、T 表示为

$$\begin{aligned} [t] &= L^0 M^0 T^1, & [m] &= L^0 M^1 T^0 \\ [l] &= L^1 M^0 T^0, & [g] &= L^1 M^0 T^{-2} \end{aligned}$$

则式(2-3-6)的量纲表达式可写作($[\pi] = L^0 M^0 T^0$):

$$(L^0 M^0 T^1)^{y_1} (L^0 M^1 T^0)^{y_2} (L^1 M^0 T^0)^{y_3} (L^1 M^0 T^{-2})^{y_4} = (L^0 M^0 T^0)$$

$$\text{即} \quad L^{y_3+y_4} M^{y_2} T^{y_1-2y_4} = L^0 M^0 T^0$$

由量纲齐次原则给出

$$\begin{cases} y_2 = 0 \\ y_3 + y_4 = 0 \\ y_1 - 2y_4 = 0 \end{cases} \quad (2-3-7)$$

此方程组有一个基本解

$$y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T = (2, 0, -1, 1)^T \quad (2-3-8)$$

代入式(2-3-6)得

$$l^2 l^{-1} g = \pi \quad (2-3-9)$$

式(2-3-6)等价于

$$F(\pi) = 0 \quad (2-3-10)$$

式(2-3-4)是式(2-3-10)的特殊表达形式.

将式(2-3-5) ~ (2-3-10)的推导过程一般化,就是 Buckingham Pi 定理.

定理 设有 m 个有量纲的物理量 q_1, q_2, \dots, q_m ,

$$f(q_1, q_2, \dots, q_m) = 0 \quad (2-3-11)$$

是与量纲单位的选取无关的物理定律. X_1, X_2, \dots, X_n 是基本量纲, $n \leq m$, 且有

$$[q_j] = \prod_{i=1}^n X_i^{a_{ij}} \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (2-3-12)$$

矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times m}$ 称为量纲矩阵, 若 A 的秩为 r , 设 $A_y = 0$ 的 $m - r$ 个基本解为

$$y_s = (y_{s1}, y_{s2}, \dots, y_{sm})^T \quad (s = 1, 2, \dots, m - r) \quad (2-3-13)$$

则
$$\pi_s = \prod_{j=1}^m q_j^{y_{sj}} \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (2-3-14)$$

为 $m - r$ 个相互独立的无量纲量, 且

$$F(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{m-r}) = 0 \quad (2-3-15)$$

与式(2-3-11)等价, 这里 F 表示一个未定的函数关系.

仅证明 π_s 是 $m - r$ 个相互独立的无量纲量.

取式(2-3-14)的量纲表达式并将式(2-3-12)代入得

$$[\pi_s] = \prod_{j=1}^m \left(\prod_{i=1}^n X_i^{a_{ij}} \right)^{y_{sj}} = \prod_{i=1}^n X_i^{\sum_{j=1}^m a_{ij} y_{sj}} \quad (s = 1, 2, \dots, m - r) \quad (2-3-16)$$

由 y_i 为 $A_{ij} = 0$ 的解知

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} y_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n; s = 1, 2, \dots, m - r)$$

代入式(2-3-16)得

$$[\pi_s] = \prod_{i=1}^n X_i^0 = 1 \quad (s = 1, 2, \dots, m - r)$$

即 π_s 是无量纲量, 由线性代数知识知 y_1, y_2, \dots, y_{m-r} 相互独立, 故 π_s 是相互独立的无量纲量.

例2 长 l 、吃水深度 h 的船以速度 v 航行, 不考虑风的影响, 则航船阻力 f 与 l, h, v 、水的密度 ρ 、水的粘性系数 μ 及重力加速度 g 有关, 试确定 f 与这些物理量之间的关系.

解 利用 Pi 定理

(1) 设关系式为

$$\varphi(f, l, h, v, \rho, \mu, g) = 0 \quad (2-3-17)$$

(2) 这是力学问题, 基本量纲为 L、M、T, $[f] = \text{LMT}^{-2}$, $[l] = \text{L}$, $[h] = \text{L}$, $[v] = \text{LT}^{-1}$, $[\rho] = \text{L}^{-3}\text{M}$, $[g] = \text{LT}^{-2}$ 由 $p = \mu \frac{\partial v}{\partial x}$, 这里 p 是压强(单位面积受的力), v 为流速, x 为位移, 故

$$\begin{aligned} [\mu] &= [\rho][x][v]^{-1} \\ &= [\text{LMT}^{-2}\text{L}^{-2}][\text{L}][\text{LT}^{-1}]^{-1} \\ &= \text{L}^{-1}\text{MT}^{-1} \end{aligned}$$

$$n = 3 < m = 7$$

(3) 量纲矩阵

$$A_{3 \times 7} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} (L) \\ (M) \\ (T) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} f & l & h & v & \rho & \mu & g \end{matrix}$$

$$\text{Rank} A = 3$$

(4) 齐次方程 $A_v = 0$ 有 $7-3=4$ 个基本解, 可取为

$$y_1 = (0 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T$$

$$y_2 = (0 \quad 1 \quad 0 \quad -2 \quad 0 \quad 0 \quad 1)^T$$

$$y_3 = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad 0)^T$$

$$y_4 = (1 \quad -2 \quad -0 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 0)^T$$

(5) 由上式给出 4 个相互独立的无量纲量 $\pi_1 = lh^{-1}$, $\pi_2 = lv^{-2}g$, $\pi_3 = lv\rho\mu^{-1}$, $\pi_4 = fl^{-2}v^{-2}\rho^{-1}$, 而式(2-3-17)与

$$\Phi(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = 0 \quad (2-3-18)$$

等价.

在流体力学中无量纲量 $(\pi_2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{v}{\sqrt{lg}}$ 称为 Froude 数, π_3 称为 Reynold 数, 分别记作 $Fr = \frac{v}{\sqrt{lg}}$, $Re = \frac{\rho vg}{\mu}$, 式(2-3-17)又表示为

$$f = l^2 v^2 \rho \psi\left(\frac{1}{\mu}, Fr, Re\right) \quad (2-3-19)$$

此式用通常的分析是难以得到的.

下面给出一个量纲分析应用的实例: 利用模型航行阻力来确定原型的阻力.

原型的某些性质在实验室是通过对缩小尺寸的模型的研究而得到的. 确定模型与原型的关键, 利用式(2-3-19)可以知道如何确定航船模型以确定原型航船在海洋中受的阻力. 因为在一定条件下 Re 的影响很小, 式(2-3-19)近似为

$$f = l^2 v^2 \rho \psi\left(\frac{1}{h}, \frac{v}{\sqrt{lg}}\right) \quad (2-3-20)$$

分别以 f, l, h, v, ρ, g 和 $f', l', h', v', \rho', g'$ 作为模型和原型中的各物理量, 设实验模拟用水与海水有相同的密度 $\rho = \rho'$, 又因 $g = g'$, 模型中各参数满足式(2-3-20), 原型各参数满足

$$f' = l'^2 v'^2 \rho \psi \left(\frac{l'}{h'}, \frac{v'}{\sqrt{l'g}} \right) \quad (2-3-21)$$

当无量纲量

$$\frac{l}{h} = \frac{l'}{h'}, \quad \frac{v}{\sqrt{lg}} = \frac{v'}{\sqrt{l'g}} \quad (2-3-22)$$

成立时,由式(2-3-20)、(2-3-21)得

$$\frac{f'}{f} = \left(\frac{l'v'}{lv} \right)^2$$

由式(2-3-22)得

$$\frac{v'}{v} = \sqrt{\frac{l'}{l}}$$

因此

$$\frac{f'}{f} = \left(\frac{l'}{l} \right)^3 \quad (2-3-23)$$

知道了模型的阻力就很容易确定原型航船的阻力 f' 了。

第四节 概率法建模

现代社会中有许多由各学科相互交叉形成的巨大系统,如环境工程、生态工程、经济工程、教育工程及军事工程等,不仅系统结构复杂,而且各种因素的随机性对各系统还有影响.工程实践中经常也会遇到各种随机性问题,如系统元部件的噪声、周围环境的随机干扰以及输入信号的不确定性等.因此,对这类问题需要建立随机模型,并对之进行定量、评价、决策和寻求达到最优化的途径,就必须应用概率论和统计分析知识及其思想方法.

随机变量及其分布是一种描述随机现象的数学模型.这类随机模型包含两个问题:随机变量取值情况以及取这些值的概率(随机变量的概率分布).建立实际问题的随机变量的概率分布的途径:一是将实际问题中的随机变量所遵守的条件理想化、模型化,

比较这些条件与某种已知的随机变量类型的条件,若基本相同,就可以从理论上推出该随机变量的概率分布;二是在大量试验的基础上,通过频率分布得概率分布.后者在应用上是重要的方法,因为有许多实际问题的概率分布是很难用理论方法推出的.

本节介绍如何应用概率法建模.本节所介绍的一些概率模型,是基本随机现象的自然结果,读者应很好地掌握这些概率模型.

1. 古典概型

古典概型是一种非常重要的简单而古老的概率模型,在概率论发展的初期曾经是主要的研究对象.

设 E 是随机试验, Ω 是 E 的样本空间,若

(1) Ω 只含有有限个基本事件(有限性).

(2) 每个基本事件发生的可能性相等(等可能性).

这类随机现象的数学模型称为古典概型,即称 E 为古典概型.

若 E 是古典概型,且 $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, 事件 $A = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_r}\}$, 其中 i_1, i_2, \dots, i_r 是 $1, 2, \dots, n$ 中任意 r 个不同的数,则事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{A \text{ 所包含的基本事件数}}{\Omega \text{ 所包含的基本事件总数}} = \frac{r}{n} \quad (2-4-1)$$

2. 几何概型

将古典概型中的有限性推广到无限性,而保留等可能性,就得到几何概型.一般讲,具有下列特点的概率问题称之为几何概型:

(1) 有一个可度量的几何图形 Ω , 试验 E 看成在 Ω 中随机地投掷一点,即为样本空间,而事件 A 就是所投掷的点落在 Ω 中的可度量图形 A 中.

(2) 事件 A 的概率与 A 的度量 $L(A)$ 成正比.

几何概型的概率定义为

$$P(A) = \frac{L(A)}{L(\Omega)} \quad (2-4-2)$$

其中 L 表示测度,即度量,可以是长度、面积和体积.

例 1 蒲丰(Buffon)投针问题.

1777 年法国科学家蒲丰提出了下列著名问题,这是几何概率的一个早期例子.

平面上画有等距离为 $a(a > 0)$ 的一些平行线,向此平面任投一长为 $l(l > a)$ 的针,试求此针与任一平行线相交的概率.

由于有两种可能:针与这些平行线中的某一根相交,或与任一平行线平行(都不相交).没有理由认为这两种可能性是一样大,故用古典概型无法求解.如果只要此概率的近似值,可以通过做实验,用统计定义来估计,但将针的每一位置看做是一个基本事件,假定每一位置都“同等可能”(这实际上是对投掷方法的一种要求),可以用几何概型去解决.

以 M 表示针落下后的中点, x 表示中点 M 到最近一条平行线的距离, φ 表示针与平行线的交角(如图 2-3 所示),那么基本事件区域

$$\Omega: \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{a}{2} \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \end{cases}$$

它为平面上的一个矩形,其面积为 $L(\Omega) = \frac{a\pi}{2}$.

为使针与平行线(这线必定是与 M 最近的一条平行线)相交,其充要条件是

$$A = \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \sin \varphi \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \end{cases}$$

显然 A 是 Ω 中的一个区域(如图 2-4 所示).而 A 的面积为

$$L(A) = \int_0^\pi \frac{1}{2} l \sin \varphi d\varphi = l$$

从而所求概率为

$$p = \frac{L(A)}{L(\Omega)} = \frac{l}{\frac{1}{2}a\pi} = \frac{2l}{a\pi} \quad (2-4-3)$$

有趣的是,当比值 $\frac{l}{a}$ 不变的话, p 值始终不变,更有趣的是由于结果含有 π ,因此不少人想到可利用它来计算 π 的近似值.其方法是投针 N 次,再计算出针与线相交的次数 n ,再以频率值 $\frac{n}{N}$ 作为概率 p 之值,代入(2-4-3),求得

$$\pi = \frac{2lN}{an}$$

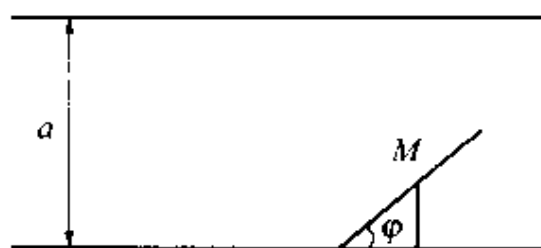


图 2-3

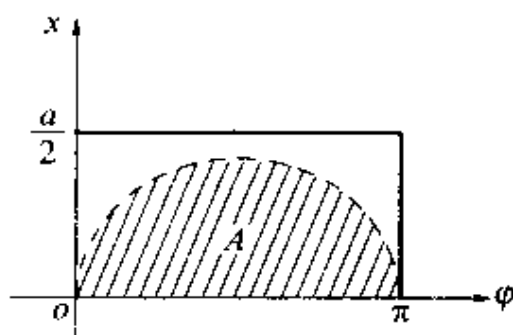


图 2-4

表 2-2 是这些试验的有关资料(此处把 a 折算为 1).

表 2-2

实验者	年份	针长	投掷次数	相交次数	π 的实验值
Wolf	1850	0.8	5000	2532	3.1596
Smith	1855	0.6	3204	1218.5	3.1554
De Morgan C	1860	1.0	600	382.5	3.137
Fox	1884	0.75	1030	489	3.1595
Lazzerini	1901	0.83	3408	1808	3.1415926
Reina	1925	0.5419	2520	859	3.1795

值得注意的是这里采用的方法:建立一个概率模型,它与某些我们感兴趣的量(这里是常数 π)有关,然后设计适当的随机试验,并通过这个试验的结果来确定这些量,著名的蒙特卡洛(Monte Carlo)方法就是按照上述思路建立起来的.

“投针问题”还是找矿中的一个重要模型.设在给定区域内的某处有一矿脉(相当于针),长为 l ,用间隔为 a 的一组平行线进行探测,假定 $l < a$,要求“找到这个矿脉”(相当于针与平行线相交)的概率有多大就可用投针问题的结果.

3. 伯努利模型

伯努利模型是一种描述在相同的条件下重复进行同一试验的数学模型,应用很广泛,它是描述这样的随机现象的:考虑一系列的重复试验,要求

- ①每次试验的结果只有两种可能:事件 A 或事件 \bar{A} ;
- ②每次试验中, A 出现概率 $P(A)$ (因而 $P(\bar{A})$) 相等;
- ③各项试验相互独立,即每次试验结果与其他次的试验结果无关.

称满足上述条件的系列试验为伯努利试验,重复试验的次数 n 为伯努利试验的重数.

比如下列现实世界中的现象:生产过程中,产品或者合格或者不合格;掷硬币时,或者出现正面或者出现反面;进行打赌时,结果或赢或输等等.

这种类型的随机现象的两种结果,可看做是一次试验中的“成功”(事件 A 发生)与“失败”(事件 \bar{A} 发生).为了建立模型的需要,分别用数值 1 和 0 来记这两种结果,并假设 p ($0 < p < 1$) 为以 1 代表的结果出现的概率,因而以 0 代表的结果出现的概率为 $1 - p$. 因此,我们定义变量 ξ (随机变量)如下:

$$\xi = \begin{cases} 1 & \text{事件 } A \text{ 发生} \\ 0 & \text{事件 } \bar{A} \text{ 发生} \end{cases} \quad (2-4-4)$$

相应地,可以定义一个概率质量函数 p_k (ξ 取值 k 的概率)如下:

$$p_1 = P\{\xi = 1\} = p, \quad p_0 = P\{\xi = 0\} = 1 - p \quad (2-4-5)$$

概率模型 p_k 称为伯努利分布.

4. 二项分布概型

假设在同等条件下,对伯努利概型所描述的试验,重复 n 次. 设 ξ 为在 n 次试验中事件 A 出现的次数,显然 ξ 的取值范围为 $0, 1, \dots, n$. 根据简单的组合理论可证明, ξ 取这些值的概率为

$$p_k = P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (2-4-6)$$

其中, p 为事件 A 在一次试验中出现的概率; $q = 1 - p$ 为事件 \bar{A} 出现的概率. 由于 p_k 可分别表示成 $(p + q)^n$ 的二项展开式的各项, 因此概率质量函数 p_k 称为二项分布, 简记为 $b(k; n, p)$.

需指出的是, 当 n 较小时, 一般可以直接计算 $b(k; n, p)$; 但当 n 较大, 根据 p 的大小可用另外的一些概率模型 (如普阿松概型或正态分布概型) 来逼近 $b(k; n, p)$.

例 2 下赌注问题.

17 世纪末, 法国的 Chevalier De Mere 注意到在赌博中一对骰子抛 25 次, 把赌注押到“至少出现一次双 6”比把赌注押到“完全不出现双 6”有利; 但他本人找不出原因. 后来请当时著名的法国数学家 Pascal 才解决了这一问题, 这问题应如何解决呢?

这里的骰子是一个骨制均匀小正方体, 其 6 个面上分别刻有 1、2、3、4、5、6 的字样. 一对骰子抛 25 次, 相当两颗同样的骰子同时抛掷, 共抛 25 次.

如果记 $B = \{\text{至少出现一次双 6}\}$, 则 $\bar{B} = \{\text{完全不出现双 6}\}$. 此处出现双 6 指出现数对 $(6, 6)$. 因此, 把赌注押到“至少出现一次双 6”比押到“完全不出现双 6”有利, 意即 $P(B) > P(\bar{B})$, 又 $P(B) + P(\bar{B}) = 1$, 于是问题归结为要证明 $P(B) > \frac{1}{2}$.

一对骰子抛 1 次有 36 种不同情况,这 36 种当中,出现一对 6 点即(6,6)的仅一种,按古典概型的概率计算得知一对骰子抛一次出现一对 6 点的概率为 $\frac{1}{36}$.

设 A_i = {第 i 次抛掷时这对骰子出现一对 6 点},由于各次抛掷是独立的,则有

$$P(A_i) = \frac{1}{36}, \quad P(\bar{A}_i) = \frac{35}{36} \quad (i = 1, 2, \dots, 25)$$

一对骰子抛一次,可视为 1 次随机试验;一对骰子抛 25 次可视为 25 次独立随机试验.于是对所提的问题,可视为 25 重的伯努利概型,从而要证明的不等式变为

$$P(B) = P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{25}) > \frac{1}{2}$$

但

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{25}) &= 1 - P(\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \dots \cup \bar{A}_{25}) \\ &= 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_{25}) \\ &= 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) \dots P(\bar{A}_{25}) \\ &= 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{25} \\ &= 1 - 0.4955 = 0.5045 > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

不过,值得思考的是为什么正好抛 25 次? 抛的次数少了或多了会怎样? 这个问题留给读者去解答.

例 3 火柴盒问题.

波兰数学家巴拿赫(Banach)随身带着两盒火柴,分别放在左、右两个衣袋里,每盒有 n 根火柴,每次用时,便随机地从其中一盒中取出一根.试求他发现其中一盒已空,而另一盒中剩下的火柴根数的分布律.

设 A = {取左衣袋中的一盒}, \bar{A} = {取右衣袋中的一盒}. 取一

次火柴看做一次试验,而每次试验的结果有两个: A 发生或不发生.显然

$$P(A) = P(\bar{A}) = \frac{1}{2}$$

下面约定取到左衣袋中的一盒叫“成功”,于是可以用伯努利概型来描述这个问题了.

此人首次发现左衣袋中的一盒是空的,这时他不是在做第 n 次成功的试验,而是作第 $n+1$ 次成功的试验了;而此时右边一盒恰剩 k 根相当于在第 $n+1$ 次成功以前恰有 $n-k$ 次失败,于是共做了 $(n+1) + (n-k) = 2n-k+1$ 次伯努利试验,即 A 发生了 $n+1$ 次, \bar{A} 发生了 $n-k$ 次.但第 $2n-k+1$ 次(即发现左衣袋中的一盒是空的那一次)是成功的,而前 $2n-k$ 次中有 n 次成功.因此,发现左衣袋盒中空时,右衣袋盒中恰有 k 根火柴的概率为

$$P(A)C_{2n-k}^n [P(A)]^n [P(\bar{A})]^{n-k} = \frac{1}{2} C_{2n-k}^n \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

由对称性,发现右边一盒已空而左边一盒剩 k 根的概率也是

$$\frac{1}{2} C_{2n-k}^n \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

设 ξ 为发现其中一盒已空而另一盒剩下的火柴根数,则 ξ 是一个离散型随机变量, ξ 取值范围是 $0, 1, 2, \dots, n$, 且 ξ 的分布律为

$$P\{\xi = k\} = 2 \times \frac{1}{2} C_{2n-k}^n \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = C_{2n-k}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k} \\ (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

读者也可利用古典概型来求 $P\{\xi = k\}$ (因此时只有“成功”与“失败”两个结果,且等可能的,其概率 $p = \frac{1}{2}$).

5. 几何分布概型

在上述二项分布概型中,我们考虑同一事件重复出现所需的

试验次数.例如,在产品制造的例子中,它就是在出现一个不合格产品前所得的产品个数;在打赌的例子中,它就是某打赌者每赢一次所打赌的次数;而在顾客来到的例子中,就是两次到达之间的时间间隔(时间作为离散变量计算),一般地,这类时间间隔通常称为等待时间.考查一系列伯努利试验,设 ξ 表示首次发生事件 A 的试验次数,即 $\xi = k$ 表示在第 k 次试验时,事件 A 才第一次发生,则 ξ 的取值范围为 $1, 2, \dots, k, \dots$ 由于要使首次发生事件 A 在第 k 次试验,必须而且只须在前 $k-1$ 次试验中都出现 \bar{A} ,而第 k 次试验出现 A ,所以根据 ξ 的定义及各次试验的独立性,有

$$p_k = P\{\xi = k\} = q^{k-1}p \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2-4-7)$$

其中 $P(A) = p, P(\bar{A}) = 1 - p = q$. 概率 p_k 可由首项取 p 的几何级数的第 k 项给出,因此上述给出的概率质量函数称为几何分布,简记为 $g(k, p)$.

例4 生男生女问题.

已知人口中男/女的比例为 49.5/50.5. 假定这个比例一般是适用的,要求确定有 5 个孩子的家庭中:①至少有一个男孩;②至少有一个男孩和一个女孩;③只有最小的孩子是男孩的概率.

若将一个孩子为男性的概率取作 p ,则由上面假定,有 $p = 0.495$. 利用这个 p 值由二项分布概型可求得 p_k 的全部分布如下:

k	0	1	2	3	4	5
p_k	0.0328	0.1610	0.3156	0.3093	0.1516	0.0297

因此,可得

$$\begin{aligned} P\{\text{至少有一个男孩}\} &= 1 - P\{\text{无男孩}\} = 1 - 0.0328 = 0.9672 \\ P\{\text{至少有一个男孩和一个女孩}\} &= 1 - P\{\text{无男孩}\} - P\{\text{无女孩}\} \\ &= 1 - 0.0328 - 0.0297 = 0.9375 \end{aligned}$$

由这些数据可求得有 5 个孩子的家庭中只有最小的孩子是男孩的概率.

假定应用几何分布概型的条件是成立的,我们要求的是 $p =$

0.495 时等待时间为 5(次试验)的概率.直接相乘可得此概率为

$$p_5 = (0.505)^{5-1} \times 0.495 = 0.3219$$

6. 巴斯卡分布概型

在一系列的伯努利试验中,设 ξ 表示第 r 次发生事件 A 的试验次数. $\xi = k$ 表示在第 k 次试验时正好第 r 次发生事件 A ,那么 ξ 的取值范围为 $r, r+1, \dots$ 由于在前 $k-1$ 次试验中, $r-1$ 次发生事件 A , 而 $k-r$ 次发生事件 \bar{A} , 所以有

$$p_k = P\{\xi = k\} = C_{k-1}^{r-1} p^{r-1} q^{k-r} p = C_{k-1}^{r-1} p^r q^{k-r} \quad (k = r, r+1, \dots) \quad (2-4-8)$$

称为巴斯卡分布,记为 $f(k; r, p)$. 显然当 $r=1$ 时,即为几何分布.

另一方面,若以 ξ_i 记等待第 i 次事件 A 发生的试验次数(从第 $i-1$ 次事件 A 发生之后第一次试验算起至从第 $i-1$ 次事件 A 发生止),则 ξ_i 服从几何分布(3-4-7). 而且

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_r \quad (2-4-9)$$

读者应体会这种思想,这里将过程分成 r 步,即将复杂的随机变量分解为简单的随机变量之和.

7. 超几何分布概型

对某批 N 件产品进行不放回抽样检查,若这批产品中有 M 件次品,现从中随机抽出 n 件产品.设 ξ 表示这产品中出现的次品数,那么 ξ 取值范围为 $0, 1, 2, \dots, n$. 其概率分布称为超几何分布:

$$p_k = P\{\xi = k\} = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \quad (0 \leq k \leq n \leq N, k \leq M) \quad (2-4-10)$$

当 N 很大而 n 较小时,它可用二项分布概型来近似. 在产品的检验、质量控制方面广泛地使用超几何分布.

8. 普阿松概型

这是一种应用很广泛的随机模型,因为有许多随机现象服从普阿松分布.这种情况特别集中在两个领域中:一是社会生活,对服务的各种要求,诸如总机接到的呼叫数,某服务处的顾客的到达,城市中的交通事故,公共汽车站来到的乘客数等等,都近似服从普阿松分布,因此在运筹学及管理科学中这种分布占有很突出的地位;另一领域是物理学,放射性分裂落到某区域的质点数,热电子的发射,显微镜下落在某区域中的血球或微生物的数目等都服从普阿松分布.

如果事件相互之间没有影响,而且在比较小的时间间隔或在一个小的区域内,这种事件的数目也是小的,那么我们就可将它们说成为随机事件,而且能为在给定区间或给定区域内事件出现的次数建立起一个概率模型.另一方面,还可认为这种随机事件的结果是适宜用二项分布来刻画的随机现象的一种极限过程的结果.

现在把一个单位长度的区间分成 n 个长度都为 Δ 的子区间,即 $\Delta = \frac{1}{n}$. 取 $p = \lambda\Delta$, 其中 $\lambda > 0$. 将随机事件出现在某一个子区间内看做为一次成功. 应用二项分布概型,记 ξ 为成功次数,有

$$p_k = P\{\xi = k\} = C_n^k (\lambda\Delta)^k (1 - \lambda\Delta)^{n-k} = C_n^k \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

令 $\Delta \rightarrow 0$, 因而有 $n \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$. 对 p_k 的表达式取极限,可得

$$\begin{aligned} p_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \end{aligned}$$

$$\text{而} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$$

因此,可得

$$p_k = P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots) \quad (2-4-11)$$

以上述形式给出的概率质量函数 p_k 称为普阿松分布, 记为 $p(k; \lambda)$, 其参数 λ 表示单位时间(或空间)内事件发生的次数.

普阿松概型是从基本的二项分布概型发展而来的, 当 n (试验次数)较大, 而 p (“成功”概率)较小(一般当 $p \leq 0.1$)时, 它是二项分布概型的一种良好的近似. 在应用中, 有下面的近似公式

$$b(k; n, p) \approx \frac{(np)^k}{k!} e^{-np} \quad (2-4-12)$$

9. 指数分布概型

在上述普阿松概率模型中, 考虑某段时间内事件随机发生的情况, 例如某段时间内顾客到达的情况. 设 ξ_1, ξ_2, \dots 为相继发生的事件之间的时间间隔(即如果顾客到达时刻依次为 t_0, t_1, t_2, \dots 则 $\xi_n = t_n - t_{n-1}$), ξ_n 为连续型随机变量. 可以证明, 上述一组变量中 $\xi_n \leq x$ 的概率为

$$F(x) = P\{\xi_n \leq x\} = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (2-4-13)$$

其中 $\lambda > 0$, 它的意义与 $P(k, \lambda)$ 中 λ 的意义相同. 上式给出的是一种累计分布形式. 当变量为连续时, 应用这种形式对概率进行解释更为方便. 上式所给出的 $F(x)$ 表示指数分布.

指数分布概型有重要的应用, 常用它来作为各种“寿命”分布的近似, 如受随机因素影响的产品寿命(像无线电元件的寿命)、动物的寿命、电话问题中的通话时间、随机服务时间等都常假定服从指数分布.

10. 均匀分布概型

考虑驶进交通信号灯的一辆汽车, 它与前面任一辆汽车都不是同步的. 交通灯循环周期由绿灯期、黄灯期和红灯期组成且假定循环从绿灯期开始时刻算起. 设 ξ 是汽车到达路口时, 在一个交通灯循环周期内已经过去的时间, 设 T 是循环周期的长度. 显然还可假定在整个区间 T 内, 在所有长度为 Δ 的小区间内车辆到

达的概率都是相同的. 因此, ξ 取不超过 x 的概率可表示为

$$F(x) = P\{\xi \leq x\} = \frac{x}{T} \quad (0 \leq x \leq T) \quad (2-4-14)$$

这是均匀分布的分布函数.

当 ξ 是一个离散变量时, 如掷一颗均匀的骰子问题, 且若 ξ 有 n 种可能的结果 $(1, 2, \dots, n)$, 那么概率质量函数应为

$$P_k = \frac{1}{n} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (2-4-15)$$

11. 正态分布概型

考察性别相同、年龄相同的一群人. 有关他们身高的分析表明, 虽然他们的高度各不相同, 但这些高度以近似对称的方式聚集在他们的平均值周围. 在描述这种随机现象时, 可以假定, 对于这群人实际上有一个理想的身高, 而现在的每个观察值都是由于某种未加说明的随机性波动造成的. 对于某地区内家庭收入的分布情况, 或某机床加工的产品, 例如圆盘的直径分布情况, 都可作出类似的解释. 设 ξ 表示受到随机性波动影响的随机变量, 可知 ξ 具有下列概率模型:

$$F(x) = P\{\xi \leq x\} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \quad (-\infty < x < +\infty) \quad (2-4-16)$$

其中 μ 和 σ 是模型参数. 如果初始观测数据集合很大, 这些数据的平均值和标准差就可用来分别代替 μ 和 σ . 式(2-4-16)给出的累计分布函数 $F(x)$ 便是正态分布, 记为 $N(\mu, \sigma^2)$.

特别, 当 $\mu=0, \sigma=1$, 称 $N(0, 1)$ 为标准正态分布 $N(0, 1)$, 其分布函数为

$$\Phi(x) = P\{\xi \leq x\} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (-\infty < x < +\infty) \quad (2-4-17)$$

实际计算中常常是利用标准正态分布(可查表),对于一般正态分布概型,先通过变量代换: $\eta = \frac{\xi - \mu}{\sigma}$, 化为标准正态分布概型 $\Phi(x)$, 再由 $\Phi(x)$ 计算 $F(x)$

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= P\left\{\xi \leq x\right\} = P\left\{\frac{\xi - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right\} = P\left\{\eta \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{x - \mu}{\sigma}} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \quad (-\infty < x < +\infty)\end{aligned}$$

(2-4-18)

正态分布概型是一种很重要的、应用非常广泛的分布。一方面,正态分布是自然界最常见的一种分布,例如测量值的偶然误差,炮弹弹落点的分布,人的生理特征的尺寸,身高、体重,农作物的收获量,某班学生的考试成绩,工厂产品的尺寸:直径、长度、宽度、高度等等都近似服从正态分布。利用概率论的中心极限定理可以证明,如果描述随机现象的随机变量是由大量的相互独立的随机因素所引起的,而每个因素所起的作用又不太大,则这个随机变量服从正态分布。另一方面它还可用来较好地逼近其他一些概型,二项分布概型就是其中之一。前面已提到,对于较大的 n 值,较小的 p 值,可用普阿松概型来逼近。但当 n 较大而 p 并不太大时,就可用正态分布概型来逼近。应当注意,二项分布概型适用于离散变量,而正态分布概型适用于连续变量。因此,当用正态分布概型作为二项分布概型的近似时,还应采取下列步骤:

(1) 将离散值 k 看做是区间 $[k_1, k_2]$ 内的连续量。

(2) n 次重复试验中,成功概率为 p , 成功的平均值为 np , 相应的标准差为 \sqrt{npq} , 其中 $q = 1 - p$, 那么由中心极限定理,计算 ξ 的值落在 $[k_1, k_2]$ 的概率为

$$P\{k_1 \leq \xi \leq k_2\} = P\left\{\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{\xi - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right\}$$

$$\approx \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) \quad (2-4-19)$$

另外,有一些分布还可以通过正态分布来导出,因此在理论研究中正态分布十分重要.

例 5 供电问题.

设某车间有 200 台车床互相独立地工作,由于经常需要检修、测量、调换刀具、变换位置等种种原因,因此,即使在生产期间,各台车床开动时亦需要停车.若每台车床有 60% 的时间在开动,而每台车床在开动时需要耗电 1kW,问应供给这个车间多少电力才能保证在 8h 生产中大约有半分钟因电力不足而影响生产?

显然,供给这个车间 200kW 电,浪费了不合算;但只供 120kW(平均起来在工作的车床有 120 台)会影响生产,因有时工作的车床数会超过 120 台.解决这个问题的关键在于要计算出某时刻同时工作着的车床数.

我们先把这个问题重新叙述如下:

某车间有 200 台车床,它们独立地工作着,开工率各为 0.6,开工时耗电各为 1kW,问供电所至少要供给这个车间多少电力才能以 99.9% 的概率保证这个车间不会因供电不足而影响生产.

这里的叙述已把问题数学模型化,这是用数学解决生产实际问题时必须经过的一步.

将它看做为试验次数 $n = 200$ 的伯努利试验.若把某台车床在工作看做成功,则出现成功的概率为 $p = 0.6$.记 ξ 为某时刻在工作的车床数,则 ξ 是离散随机变量,且 ξ 服从 $b(k; 200, 0.6)$.于是问题为要求 m ,使

$$P\{\xi \leq m\} = \sum_{k=0}^m C_{200}^k (0.6)^k (0.4)^{200-k} \geq 0.999$$

查表得

$$\frac{m - 120}{\sqrt{48}} = 3.1$$

所以

$$m = 141$$

这个结果表明 $P\{\xi \leq 141\} \geq 0.9999$, 即至少要供电 141kW.

上面介绍的所有概率模型所确定的各个变量都表示随机现象的结果, 因此它们又称为随机变量. 随机变量是一个实值函数, 取值是在 $(-\infty, +\infty)$ 之内, 函数 $F(x)$ 给出了随机变量 ξ 取值不大于 x 时的概率, 也就是所知的 ξ 的分布函数 (或累计分布函数). 当 $F(x)$ 绝对连续时, 可定义函数 $f(x)$ 为

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

或者写成

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

其中

$$f(x) \geq 0 \text{ 且 } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

函数 $f(x)$ 称为概率密度函数. 在建立概率模型时, 在取极限的意义下, 对任意小的 dx , 可以记

$$f(x) dx = P\{x < \xi \leq x + dx\}$$

当 ξ 为离散变量时, $F(x)$ 是一个阶梯函数, 可写成

$$F(x) = \sum_{k \leq x} p_k$$

函数 p_k 称为概率质量函数.

概率模型鉴定一般包含 3 个主要步骤: ①选择初始概型; ②确定概型参数; ③对概型进行检验.

第三章 微分方程与差分方程模型

在自然科学以及工程、经济、医学、体育、生物、社会等学科中的许多系统,有时很难找到该系统有关变量之间的直接关系——函数式,但却容易找到这些变量和它们的微小增量或变化率之间的关系式,往往采用微分关系式来描述该系统.为了找出这种微分关系式,常常在所研究的现象或过程中取一局部或一瞬间,然后从中找出有关变量和未知变量的微分(或差分)之间的关系式——系统的数学模型.

建立微分方程模型,其方法可归纳为:

(1)根据规律列方程.利用数学、力学、物理、化学等学科中的定理或许多经过实践或实验检验的规律和定理,如牛顿运动定律、牛顿冷却定律、物质放射性的规律、曲线的切线性质等建立问题的微分方程模型.

(2)微元分析法.寻求一些微元之间的关系式,在建立这些关系式时也要用到已知的规律与定理,与第一种方法不同之处是对某些微元而不是直接对函数及其导数应用规律.

(3)模拟近似法.在生物、经济等学科的实际问题中,许多现象的规律性不很清楚,即使有所了解也是极复杂的,常常用模拟近似的方法来建立微分方程模型,建模时在不同的假设下去模拟某些实际现象,这个过程是近似的,用模拟近似法所建立的微分方程从数学上去求解或分析解的性质,再去同实际情况对比,看这个微分方程模型能否刻画、模拟、近似某些实际现象.

本章介绍确定性动态系统的微分方程建模.首先讲述微分方程概念,再回顾物理领域的微分方程模型,然后结合例子讨论几个

不同领域中微分方程模型的建模方法,介绍几个非物理领域的微分方程模型.

第一节 微分方程简介

一、微分方程的基本概念

1. 导数

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处及其左右近旁有定义,如果函数的改变量 Δy 与自变量的改变量 Δx 的比的极限(当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时)存在,则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导,这个极限值叫做函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数,记为 $f'(x_0)$,即

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

简单地说,便是函数的变化率,或者说即时变化率(瞬时变化率).

注:若函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内的每一点处可导,则称函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内可导.

2. 微分

设函数 $y = f(x)$ 在点 x 处有导数 $\frac{dy}{dx}$,则称 dy 为函数 $y = f(x)$ 在点 x 处的微分,记作 dy .

3. 微分方程

含有自变量、自变量的未知函数及未知函数的导数(或微分)的方程称为微分方程.如果微分方程中的未知函数仅含有一个自变量,这样的微分方程称为常微分方程.

要注意的是,微分方程中必须含有未知函数的导数(或微分).

微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数,称为微分方程的阶.

能够满足微分方程的函数称为微分方程的解. 如果微分方程的解中所含任意常数相互独立, 且个数与方程的阶数相同, 这样的解称为微分方程的通解. 不含任意常数的解称为特解.

我们用未知函数及其各阶导数在某个特定点的值作为确定通解中任意常数的条件, 称为微分方程的初始条件. 求微分方程满足初始条件的特解的问题, 称为初值问题.

二. 微分方程的建立及求解

在一些应用问题中, 往往不能直接找出所需要的函数关系. 但是, 可以根据问题所提供的线索, 列出含有待定函数及其导数的关系式, 称这样的关系式为微分方程模型. 给出微分方程模型之后, 对 t 进行研究, 找出未知函数这一过程称为解微分方程.

本节给出的几个问题都是与时间 t 有关. 对于一个依赖于时间 t 的量 y 的情况, 建立一个关于 y' 、 y 与 t 的关系式, 它在任何时刻均成立. 对这个方程积分, 便得到一个只含有 y 和 t 而不含 y' 的新方程. 新方程中含有积分常数, 并且对于任何特定的 t 仍然成立. 然后, 利用问题中的一些特定信息, 确定这些积分常数, 于是, 得到函数 $y(t)$. 对于任何确定的 t_0 , 都可以算出 $y(t_0)$.

在“高等数学”课程中, 已经学过一些微分方程的求解. 一般来说, 求解一个应用问题时, 可以按照如下步骤:

- ①把用语言叙述的情况化为文字方程;
- ②给出问题所涉及的原理或物理定律;
- ③列出微分方程;
- ④列出该微分方程的初始条件或其他条件;
- ⑤求解微分方程;
- ⑥确定微分方程中的参数;
- ⑦求出问题的答案.

下面, 通过几个具体的例子来说明.

例 1 高为 1m 的半球形容器,其底部有横截面积为 1 cm^2 的小孔,水从小孔流出(见图 3-1),开始时容器内盛满了水,求水面高度变化规律及水流完所需时间(由力学知识,若水从孔口流出的流量为 Q ,则 $Q = \frac{dV}{dt} = 0.62S\sqrt{2gh}$,其中 V 为通过小孔水的体积, S 为小孔的面积).

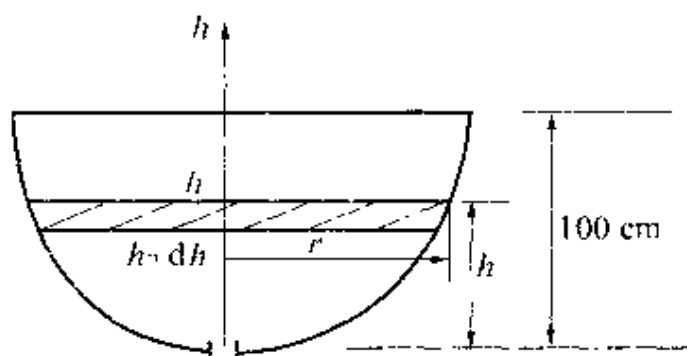


图 3-1

解 因为 $S = 1\text{ cm}^2$,故

$$dV = 0.62\sqrt{2gh}dt \quad (3-1-1)$$

另一方面,设在时间间隔 $[t, t + dt]$ 内,水面高度由 h 降至 $h + dh$ ($dh < 0$),则有

$$dV = -\pi r^2 dh$$

其中 r 为时刻 t 的水面半径. 又因

$$r = \sqrt{100^2 - (100 - h)^2} = \sqrt{200h - h^2}$$

故

$$dV = -\pi(200h - h^2)dh \quad (3-1-2)$$

比较式(3-1-1)与(3-1-2),有

$$0.62\sqrt{2gh}dt = -\pi(200h - h^2)dh \quad (3-1-3)$$

此为未知函数 $h(t)$ 应满足的微分方程. 又由于开始时容器内水是满的,故得初始条件

$$h \Big|_{t=0} = 100 \quad (3-1-4)$$

式(3-1-3)是变量可分离方程,变形得

$$dt = - \frac{\pi}{0.62 \sqrt{2g}} (200h^{\frac{1}{2}} - h^{\frac{3}{2}}) dh$$

两边积分,得

$$t = - \frac{\pi}{0.62 \sqrt{2g}} \left(\frac{400}{3} h^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} h^{\frac{5}{2}} \right) + C$$

代入初始条件式(3-1-4),可算出 $C = \frac{\pi}{0.62 \sqrt{2g}} \times \frac{14}{15} \times 10^5$, 则小孔在流水的过程中,水面高度与时间的关系为

$$t = - \frac{\pi}{4.65 \sqrt{2g}} (7 \times 10^5 - 10^3 h^{\frac{3}{2}} + 3h^{\frac{5}{2}})$$

将 $h=0, g=980$ 代入上式,得 $t=10677.2$ s,即经过 10677.2 s 之后水流完.

例 2 一个离地面很高的物体,受地球引力的作用由静止开始落向地面,求它落到地面时的速度和所需的时间(空气阻力忽略不计).

解 取连接地球中心与该物体的直线为 y 轴,其方向铅直向上,地球中心为原点,如图 3-2 所示.

设物体质量为 m ,物体与地球中心距离为 l ,地球半径为 R , $y(t)$ 为 t 时刻物体所在的位置.于是,根据万有引力定律

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = - \frac{kmM}{y^2} \quad (3-1-5)$$

其中, M 为地球的质量, k 为引力常

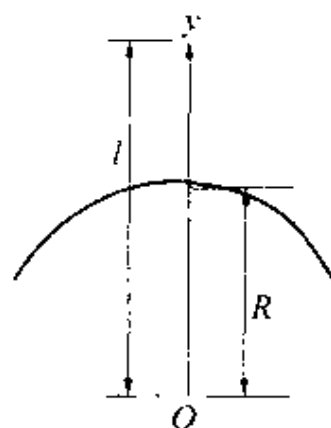


图 3-2 地球引力示意图

数. 若设 $v(t)$ 为速度, 则 $\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$, 且当 $y = R$ 时, $\frac{dv}{dt} = -g$ (负号是由于物体的加速度方向与 y 轴正向相反), 故 $k = \frac{gR^2}{M}$, 于是式 (3-1-5) 可化为

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{gR^2}{y^2} \quad (3-1-6)$$

将

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \frac{dy}{dt} = v \frac{dv}{dy}$$

代入式 (3-1-6), 得可分离变量的方程

$$v \frac{dv}{dy} = -\frac{gR^2}{y^2}$$

解之, 并利用初始条件 $y|_{t=0} = l, y'|_{t=0} = v|_{t=0} = 0$, 得

$$v^2 = 2gR^2 \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{l} \right) \quad (3-1-7)$$

令 $y = R$, 即可求出物体到达地面时的速度

$$v = -\sqrt{\frac{1}{l} 2gR(l - R)}$$

再由式 (3-1-7), 有

$$\frac{dy}{dt} = -R\sqrt{2g\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{l}\right)}$$

即

$$dt = -\frac{1}{R}\sqrt{\frac{l}{2g}}\sqrt{\frac{y}{l-y}}dy$$

解之, 并由初始条件 $y|_{t=0} = l$, 得

$$t = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{l}{2g}}\left\{\sqrt{ly - y^2} + l\arccos\sqrt{\frac{y}{l}}\right\}$$

令 $y=R$, 使得物体到地面所需时间为

$$\frac{1}{R} \sqrt{\frac{1}{2g}} \left(\sqrt{7R} - R^2 - \arccos \sqrt{\frac{R}{l}} \right)$$

第二节 微分方程模型

一、几何问题微分方程模型

建立几何问题的数学模型,一般是先找出反映该问题的几何关系,然后将有关几何量的分析表达式(如斜率、曲率及弧微分),代入该关系式,得到的微分方程就是该几何问题的数学模型.

例 1 速降线问题.

历史背景:1696年,瑞士著名数学家约翰·伯努利(Johann Bernoulli, 1667-1748)在《教师报》上发表了一封公开信,请全世界的数学家来解决当时的一个难题——“速降线问题”,并向全世界最精明的数学家挑战.此信的发表轰动了欧洲,引起了数学家的极大兴趣.后来此问题被牛顿、莱布尼兹和伯努利兄弟俩人所解决,从而产生了一门应用极为广泛的新学科——变分法.

问题:确定一个连接二定点 A, B 的曲线,使质点在这曲线上用最短的时间由 A 滑至 B (介质的摩擦力和阻力忽略不计).

也许有读者会认为速降线应是连接 A 和 B 的直线段,其实不然.1630年,牛顿做过这样的实验:在铅垂平面内,取同样的两个球,其中一个沿圆弧从 A 滑到 B ,另一个沿直线从 A 滑到 B .结果发现沿圆弧的球先到 B .伽利略也曾研究过这个问题,他认为速降线是圆弧线.

如图 3-3 选取坐标系,并设想质点(也像光线那样)能选择它从 A 滑行到 B 的路径,使所需时间尽可能短,按照光学原理(史奈尔折射定律)得出

$$\frac{\sin \alpha}{v} = c \text{ (常数)} \quad (3-2-1)$$

据能量守恒原理,质点在一定高度处的速度,完全由其达到该高度处所损失的势能确定,而与所经路线无关.设质点质量为 m ,重力加速度为 g ,质点从 A 下滑至 $P(x, y)$ 点时速度为 v ,则

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy \quad \text{或} \quad v = \sqrt{2gy} \quad (3-2-2)$$

从这里的几何关系,又有:

$$\sin \alpha = \cos \beta = \frac{1}{\sec \beta} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}} \quad (3-2-3)$$

将(3-2-1)、(3-2-2)、(3-2-3)这些方程式(分别得自光学、力学和微积分)结合起来,得到

$$\begin{cases} y[1 + (y')^2] = c \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (3-2-4)$$

这就是速降线的微分方程数学模型.

只要解出(3-2-4)就会发现速降线究竟是什么样的曲线.变形(3-2-4)为

$$dx = \left(\frac{y}{c - y} \right)^{\frac{1}{2}} dy$$

令

$$\left(\frac{y}{c - y} \right)^{\frac{1}{2}} = \tan t \quad (3-2-5)$$

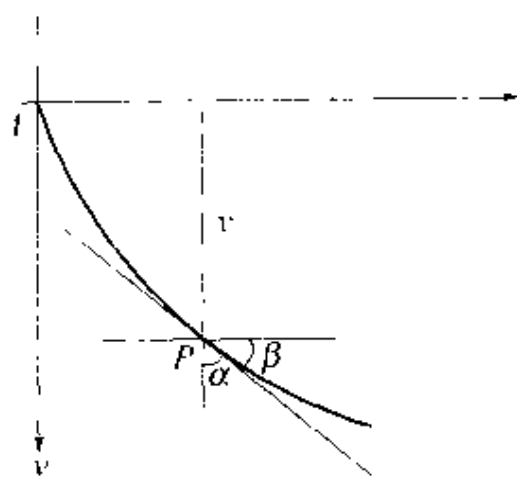


图 3-3

从而 $y = c \sin^2 t$, $dy = 2c \sin t \cos t dt$, 故

$$dx = \tan t dy = 2c \sin^2 t dt = c(1 - \cos 2t) dt$$

积分后得到

$$x = \frac{c}{2}(2t - \sin 2t) + c_1$$

这曲线过原点, 故由式(3-2-5)得: $t = 0$ 时, $x = y = 0$, 于是 $c_1 = 0$, 这样

$$x = \frac{c}{2}(2t - \sin 2t) \quad (3-2-6)$$

而

$$y = c \sin^2 t = \frac{c}{2}(1 - \cos 2t) \quad (3-2-7)$$

若令 $a = \frac{c}{2}$, $\theta = 2t$, 则式(3-2-6)与(3-2-7)变为

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta) \\ y = a(1 - \cos \theta) \end{cases} \quad (3-2-8)$$

这是在高等数学中所遇到的圆滚线(或摆线)的标准参数方程, 这种曲线(图 3-4)是由半径为 a 的圆周上一点当圆沿 x 轴滚动时产生的, 需指出, 使图 3-3 中摆线第一拱通过 B 点的 a 值只有一个; 因若让 a 从 0 增到 ∞ , 这一拱弧就逐渐膨大, 扫过整个第一象限, 故只要适当选取 a , 就能使它通过 B .

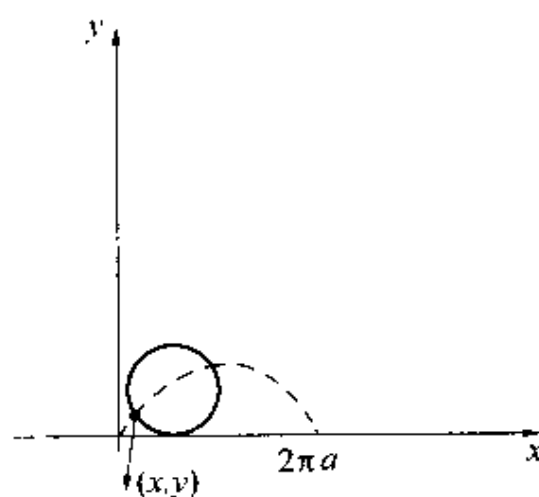


图 3-4

伯努利对速降线问题的解法非常奇妙, 表现出了惊人的想象

能力,可以说这是一项水平极高的艺术工作.速降线问题除了有其内在价值之外还具有更大的意义:它是产生变分法的历史根源,而变分法是近代分析上的一个极有用的分支,它深刻揭示出物理世界核心里隐藏的简单性.

讨论 如何利用变分法得到速降线的数学模型(3-2-4)?

以 s 表示曲线从 A 点算起到 $P(x, y)$ 的弧长,有

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$$

又由弧微分 $ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx$

所以
$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{\sqrt{1 + (y')^2} dx}{\sqrt{2gy}}$$

从而整个下降时间是 $dt = \frac{ds}{v}$ 的积分,故需取极小值的积分是

$$t[y(x)] = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}} dx \quad (3-2-9)$$

此乃求泛函的极值问题.令 $f(y, y') = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}}$, 由变分法理论知(3-2-9)的解所满足的欧拉方程为

$$\frac{\partial f}{\partial y'} y' - f = c_1$$

即

$$\frac{(y')^2}{\sqrt{y} \sqrt{1 + (y')^2}} - \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}} = c_1$$

这可化简为

$$y[1 + (y')^2] = c$$

正好是(3-2-4)方程式.

例2 追线问题.

我缉私舰雷达发现,距 c 处有一艘走私船正以匀速度 v_a 沿直

线行驶, 缉私舰立即以最大的速度 v_b 追赶, 若用雷达进行跟踪, 保持船的瞬时速度方向始终指向走私船, 试求缉私舰追逐路线和追上上的时间.

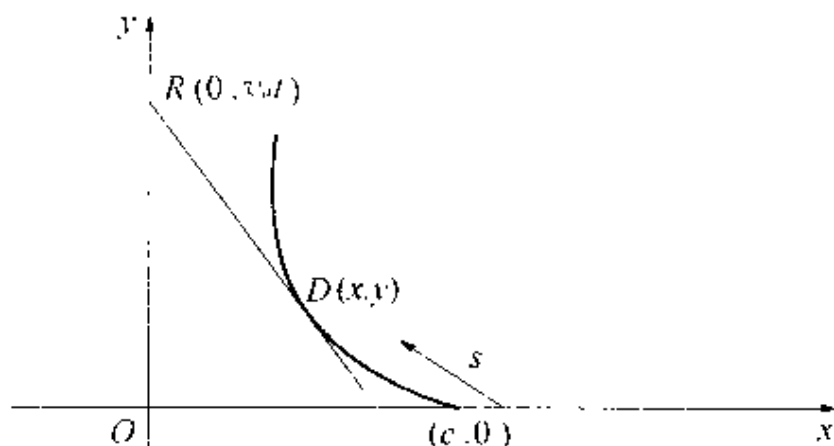


图 3-5

选取走私船逃跑方向为 y 轴方向, 缉私舰在 $(c, 0)$ 位置时发现走私船在 $(0, 0)$ 处, 显然缉私舰、走私船的大小比它们运动的范围小得多, 可视为两个质点. 设在缉私舰发现走私船时算起的时间 t , 走私船到达 $R = (0, v_0 t)$ 点, 缉私舰到 $D = (x, y)$ (图 3-5), 因直线 DR 与路线相切, 由几何关系, 有

$$\frac{dy}{dx} = \tan \alpha = \frac{y - v_0 t}{x} \quad \text{或} \quad x \frac{dy}{dx} - y = -v_0 t \quad (3-2-10)$$

为消去 t , 先把式(3-2-10)对 x 微分, 得到

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} = -v_0 \frac{dt}{dx} \quad (3-2-11)$$

代入 $\frac{ds}{dt} = v_b$, 得到

$$\frac{dt}{dx} = \frac{dt}{ds} \frac{ds}{dx} = -\frac{1}{v_b} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \quad (3-2-12)$$

这里有负号是因为 s 随 x 的减小而增大, 结合式(3-2-11)与(3-2-12), 得到追线的微分方程——数学模型如下:

$$\begin{cases} x \frac{d^2 y}{dx^2} = k \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \\ y(c) = 0, y'(c) = 0 \end{cases} \quad (3-2-13)$$

其中 $k = \frac{v_a}{v_b}$. 上式不显含 y , 令 $\frac{dy}{dx} = p$ 及 $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$, 则上式化为

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = k \frac{dx}{x}$$

两端积分并利用初始条件: $x=c$ 时 $p=0$, 得到

$$\ln(p + \sqrt{1+p^2}) = \ln\left(\frac{x}{c}\right)^k$$

从而

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x}{c} \right)^k - \left(\frac{c}{x} \right)^k \right], \quad y(c) = 0 \quad (3-2-14)$$

要继续求 y 是 x 的怎样一个函数, 必须进一步确定 k .

(1) 若 $v_a < v_b$ 从而 $k < 1$, 积分式(3-2-14)得

$$y = \frac{c}{2} \left[\frac{1}{1+k} \left(\frac{x}{c} \right)^{1+k} - \frac{1}{1-k} \left(\frac{x}{c} \right)^{1-k} \right] + \frac{ck}{1-k^2}$$

当 $x=0$ 时, $y = \frac{ck}{1-k^2} = \frac{v_a v_b c}{v_b^2 - v_a^2}$, 即走私船被缉私舰捕捉前所跑

过的距离为 $\frac{v_a v_b c}{v_b^2 - v_a^2}$, 所用时间是

$$t = \frac{u}{v_a} = \frac{v_b c}{v_b^2 - v_a^2}$$

(2) 若 $v_a = v_b$, 即 $k=1$, 由式(3-2-14)可得

$$y = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2 - c^2}{2c} - c \ln \frac{x}{c} \right]$$

显然不能取零值, 即缉私舰不可能赶上走私船.

(3)若 $v_a > v_b$, 即 $k > 1$, 显然缉私舰也不可能赶上走私船.

二、力学问题微分方程模型

牛顿是一个伟大的科学家. 他在研究力学的基础上发明了微积分, 并以之为工具, 利用开普勒三定律推出了万有引力定律. 牛顿定律描述了物体机械运动的普遍规律以及各种等价的定律, 如动量定律、动量矩定律等, 是建立力学问题数学模型的基础, 不仅如此, 多数工程学科迄今还建立在牛顿力学的基础之上.

例 3 万有引力定律.

问题提出: 15 世纪下半叶, 欧洲商品经济的繁荣与航海业的发展, 推动了天文观测的精确程度的提高, 动摇了“地心说”. 哥白尼在天文观测的基础上, 提出了“日心说”, 伽利略利用观察方法证实了哥白尼的学说, 开普勒经过长期分析前人对行星运动的观测数据, 归纳出行星运动三定律, 即:

①行星的轨道是一个椭圆, 太阳位于其中一个焦点上;

②在每颗行星的运行过程中, 行星与太阳的连线在单位时间内扫过的面积是常数;

③各行星运行周期的平方与其椭圆轨道长半轴的 3 次方成正比.

上述定律只是说明行星的运动情况, 并没有说明行星为什么会如此运动. 那么, 是什么力量使得行星按上述规律运动?

模型分析: 开普勒三定律与牛顿第二定律是导出万有引力定律的基础, 将它们作为模型求解的假设条件.

模型假设: 如图 3-6, 建立极坐标系, 以太阳为坐标原点, 椭圆长半轴方向为 $\theta = 0^\circ$, 用向径 r 表示行星的位置.

(1) 轨道方程为

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (3-2-15)$$

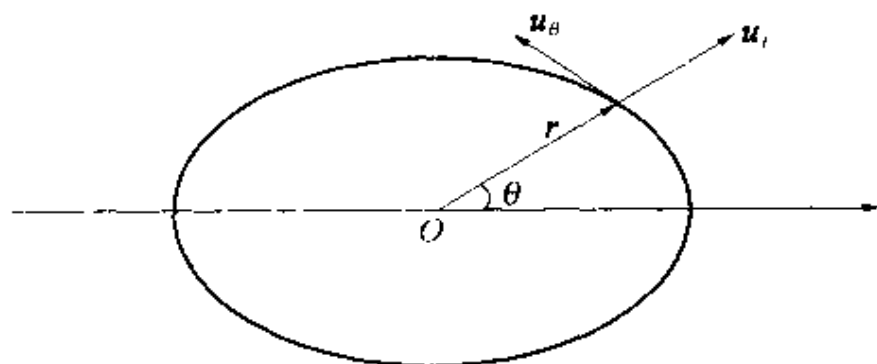


图 3-6 太阳与行星的引力

其中, $p = \frac{b^2}{a}$, $b^2 = a^2(1 - e^2)$; a 、 b 分别表示长、短半轴; e 为离心率.

(2) 设单位时间内向径 r 扫过的面积为常数 A , 且 $A = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$. (3-2-16)

(3) 设 T 为行星运行的周期, λ 为绝对常数, $T^2 = \lambda a^3$. (3-2-17)

(4) 设行星运行时所受的力为 f , 其加速度 $(r)''$, 质量 m , 则有 $f = m(r)''$. (3-2-18)

建模与求解:

如图 3-6 所示, 取单位向量

$$\begin{cases} u_r = \cos\theta \mathbf{i} + \sin\theta \mathbf{j} \\ u_\theta = -\sin\theta \mathbf{i} + \cos\theta \mathbf{j} \end{cases} \quad (3-2-19)$$

于是有

$$r = r u_r \quad (3-2-20)$$

对式(3-2-19)求导, 有

$$\begin{cases} (u_r)' = (-\sin\theta \mathbf{i} + \cos\theta \mathbf{j}) \theta' = \theta' u_\theta \\ (u_\theta)' = (-\cos\theta \mathbf{i} - \sin\theta \mathbf{j}) \theta' = -\theta' u_r \end{cases} \quad (3-2-21)$$

对式(3-2-20)求导, 并把式(3-2-21)代入, 得

$$(\mathbf{r})' = r' \mathbf{u}_r + r\theta' \mathbf{u}_\theta \quad (3-2-22)$$

对式(3-2-22)求导

$$(\mathbf{r})'' = (r'' - r\theta'^2) \mathbf{u}_r + (r\theta'' + 2r'\theta') \mathbf{u}_\theta \quad (3-2-23)$$

由式(3-2-16) $\theta' = \frac{2A}{r^2}$, 求导得

$$(\theta)'' = \frac{-4Ar'}{r^3} \quad (3-2-24)$$

故
$$r\theta'' + 2r'\theta' = -\frac{4Ar'}{r^2} + \frac{4Ar'}{r^2} = 0$$

代入式(3-2-23)得

$$(\mathbf{r})'' = (r'' - r\theta'^2) \mathbf{u}_r \quad (3-2-25)$$

对式(3-2-15)求导, 并利用式(3-2-16)导出的 $r^2\theta' = 2A$, 得

$$r' = \frac{p^2}{(1 + e\cos\theta)^2} \frac{e}{p} \sin\theta\theta' = r^2\theta' \frac{e}{p} \sin\theta = \frac{2Ae}{p} \sin\theta \quad (3-2-26)$$

对上式再求导, 并利用 $\theta' = \frac{2A}{r^2}$, 得

$$r'' = \frac{2Ae}{p} \cos\theta\theta' = \frac{4A^2e}{pr^2} \cos\theta = \frac{4A^2(p - r)}{pr^3} \quad (3-2-27)$$

将 $\theta' = \frac{2A}{r^2}$ 及式(3-2-27)代入式(3-2-25), 整理得

$$(\mathbf{r})'' = -\frac{4A^2}{pr^2} \mathbf{u}_r \quad (3-2-28)$$

把式(3-2-28)、(3-2-10)代入式(3-2-8)得

$$\mathbf{f} = -\frac{4A^2m}{pr^2} \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{r}_0 = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (3-2-29)$$

其中 \mathbf{r}_0 表示单位向径(方向为向径 \mathbf{r} 的方向)。

式(3-2-29)的物理含义: 太阳对行星的作用力 \mathbf{f} 方向与向径 \mathbf{r} 的方向相反, f 的大小与太阳至行星间的距离的平方成反比。

式(3-2-29)中, A 与 p 都不是绝对常数, 它们的数值取决于

所讨论的是哪一颗行星. 下面再进一步说明 $\frac{A^2}{p}$ 是绝对常数.

因为 A 是单位时间扫过的面积, 行星在一个周期 T 内扫过的面积为椭圆的面积, 其长、短半轴分别为 a 、 b , 则

$$TA = \pi ab \quad (3-2-30)$$

利用 $p = \frac{b^2}{a}$, 便得

$$\frac{A^2}{p} = \frac{a}{b^2} \frac{\pi^2 a^2 b^2}{T^2}$$

再将式(3-2-17)代入上式, 得

$$\frac{A^2}{p} = \frac{\pi^2}{\lambda} \quad (3-2-31)$$

代入式(3-2-29), 有

$$f = - \frac{4\pi^2 m}{\lambda r^2} r_0 \quad (3-2-32)$$

将式(3-2-32)与我们熟知的万有引力定律的形式

$$f = - R \frac{Mm}{r^2} r_0 \quad (3-2-33)$$

做比较, 可知 $\frac{4\pi^2}{\lambda} = kM$ (k 为万有引力常数, M 为太阳的质量), 它是一个与太阳质量有关的量, 这一点很好理解, 因为我们选的坐标系是以太阳为焦点.

模型推广: 利用开普勒三定律与牛顿第二定律 $f = mr''$, 得出引力大小的表达式 $f = \frac{4A^2 m}{pr^2}$, 常数 $\frac{4A^2}{p}$ 取决于太阳的性质 (因为推导过程中以太阳为焦点), m 为行星的质量.

牛顿设想的这种引力对地球及月球也适用. 这一设想随之引出的问题是: 物体的什么性质决定了它对其他物体的引力? 若记地球与太阳的引力常数分别为 $\left(\frac{4A^2}{p}\right)_{\text{地}}$ 、 $\left(\frac{4A^2}{p}\right)_{\text{太}}$, 那么有理由假

设物体的引力常数 $\frac{4A^2}{p}$ 取决于该物体的质量,最简单扼要的假设是这一引力常数与物体的质量成正比,即

$$\left(\frac{4A^2}{p}\right)_{\text{地}} = Gm_{\text{地}}, \quad \left(\frac{4A^2}{p}\right)_{\text{太}} = Gm_{\text{太}}$$

这样,便有 $f = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$.

后经实验测出, $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$, G 与产生引力的物体无关,与物体间的距离无关,我们称 G 为万有引力常数.

三、医学问题微分方程模型

医学是研究疾病防治的科学,它涉及疾病的传播与预防、疾病的诊断与预防等各个方面,由于任何疾病的发生、发展和结局,除诱发疾病的外部条件外,主要取决于人体本身的状态和防御功能的强弱,这是十分复杂的生理现象.实际上,用数学模型探讨一种疾病的机理有很大的困难,这里主要是介绍传染病传播的模型,其建模方法和特点将对读者有所启发.

例4 传染病的传播模型.

问题提出:随着人类文明的不断进步,很多疾病,诸如天花、霍乱已经得到有效的控制.然而,即使在今天,在一些贫穷的发展中国家,仍出现传染病流行的现象,医疗、卫生部门的官员与专家所关注的问题是:感染上疾病的人数与哪些因素有关,如何预报传染病高潮的到来.

问题分析:不同类型传染病的传播过程有不同的特点.这里不从医学的角度对各种传染病的传播过程一一进行分析,而是按照一般的传播机理建立模型.

由于传染病在传播的过程中涉及的因素较多,在分析问题的过程中,不可能通过一次假设就建立起完善的数学模型.思路是:先做出最简单的假设,对得出的结果进行分析,针对结果中的不合

理之处,逐步修改假设,最终得出较好的模型.

下面通过 4 个数学模型进行分析.

模型一

(1)模型假设:

①一人得病后,久治不愈,且在传染期内不会死亡.

②单位时间内每个病人传染人数为常数 k .

(2)建模与求解:

用 $I(t)$ 表示 t 时刻病人的数量,则 $I(t + \Delta t) - I(t) = k_0 I(t) \Delta t$. 于是有

$$\begin{cases} \frac{dI(t)}{dt} = k_0 I(t) \\ I(0) = I_0 \end{cases} \quad (3-2-34)$$

对式(3-2-34)求解,得

$$I(t) = I_0 e^{k_0 t} \quad (3-2-35)$$

对式(3-2-35)稍加分析发现,当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $I(t) \rightarrow +\infty$, 即:随着时间的推移,病人的数目将无限增加,这一点与实际情况不符. 因为在不考虑传染病期间的出生、死亡和迁移时,一个地区的总人数可视为常数. 进一步的分析,发现 k_0 应为时间 t 的函数,在传染病流行初期, k_0 较大,随着病人的增多,健康人数减少,被传染的机会也减少,于是点 k_0 将变小,故应对模型进行修改.

模型二

设 t 时刻健康人数为 $S(t)$.

(1)模型假设:

①总人数为 n , $I(t) + S(t) = n$.

②一人得病后,久治不愈,且在传染期内不会死亡.

③一个病人在单位时间内传染的人数与当时健康的人数成正

比,比例系数为 k (称之为传染系数).

(2) 建模与求解:

由假设,可得方程

$$\begin{cases} \frac{dI(t)}{dt} = kS(t)I(t) \\ I(0) = I_0 \end{cases} \quad (3-2-36)$$

将假设条件①代入上式,得

$$\begin{cases} \frac{dI(t)}{dt} = kI(n - I) \\ I(0) = I_0 \end{cases} \quad (3-2-37)$$

式(3-2-37)为可分离变量的微分方程,分离变量得

$$\frac{1}{n} \left(\frac{1}{n - I} + \frac{1}{I} \right) dI = k dt$$

两边积分得

$$\frac{1}{n} \ln \frac{I}{n - I} = kt + C$$

代入初始条件,可确定 $C = \frac{1}{n} \ln \frac{I_0}{n - I_0}$, 整理可得 $\ln \frac{I}{n - I} \left(\frac{n - I_0}{I_0} \right) = nkt$, 解出

$$I(t) = \frac{n}{1 + \left(\frac{n}{I_0} - 1 \right) e^{-knt}} \quad (3-2-38)$$

$I(t)$ 及 $\frac{dI}{dt}$ 的曲线如图 3-7 所示, 它们分别表示传染病人数、传染病人数的变化率与时间 t 的关系.

由式(3-2-28)可得

$$\frac{dI}{dt} = \frac{kn^2 \left(\frac{n}{I_0} - 1 \right) e^{-knt}}{\left[1 + \left(\frac{n}{I_0} - 1 \right) e^{-knt} \right]^2} \quad (3-2-39)$$

对上式再一次求导,并令 $\frac{d^2 I}{dt^2}=0$,得

$$t_0 = \frac{\ln\left(\frac{n}{I_0} - 1\right)}{kn} \quad (3-2-40)$$

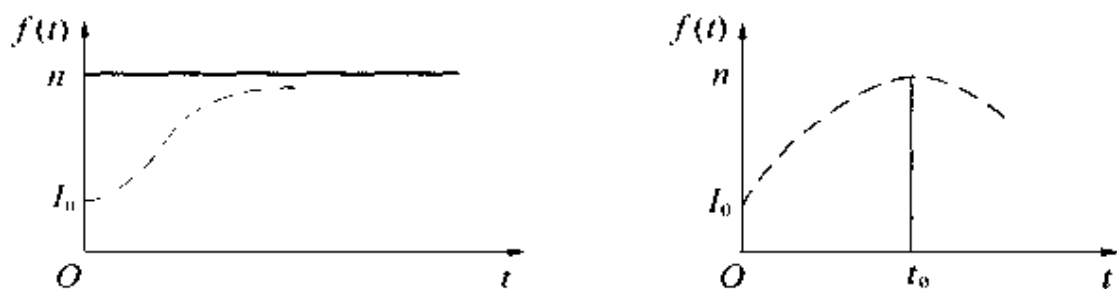


图 3-7 $I(t)$ 与 $\frac{dI}{dt}$ 曲线

对以上结果进行分析,可以看出当 $t=t_0$ 时, $\frac{dI}{dt}$ 达到最大值,此时病人增加得最快,这一时刻称为疾病的传染高峰.由式(3-2-40)知,当传染系数 k 或 n 增大时, t_0 随之减少.这表示传染高峰随着传染系数与总人数的增加而更快的来临,这与实际情况比较符合.由式(3-2-38)知当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $I(t) \rightarrow n$,这表示所有的人最终都将成为病人,这一点与实际情况不符合.经过进一步地分析,发现这是由假设(1)所导致,没有考虑病人可以治愈的情况.

模型三

有些传染病(如痢疾)愈后免疫力很低,还有可能再次被传染而成为病人.

(1)模型假设:

①健康者和病人在总人数中所占的比例分别为 $s(t)$ 、 $i(t)$,则 $s(t) + i(t) = 1$.

②一个病人在单位时间内传染的人数与当时健康人数成正

比,比例系数为 k .

③病人每天治愈的人数与病人总数成正比,比例系数为 μ ,称为日治愈率,病人治愈后成为仍可被感染的健康者,称 $\frac{1}{\mu}$ 为传染病的平均传染期(如病人数保持 10 人,每天治愈 2 人, $\mu = \frac{1}{5}$,则每位病人平均生病时间为 $\frac{1}{\mu} = 5$ 天).

(2)建模与求解:

由假设②、③可得

$$\begin{cases} \frac{di}{dt}N = kNs(t)i(T) - \mu Ni(t) \\ i(0) = i_0 \end{cases} \quad (3-2-41)$$

将假设①代入,得

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = ki(1-i) - \mu i \\ i(0) = i_0 \end{cases} \quad (3-2-42)$$

式(3-2-42)亦为一个可分离变量的微分方程,该方程的求解需要对 k, μ 进行讨论.

当 $k = \mu$ 时,式(3-2-42)可化为 $-\frac{di}{ki^2} = dt$,两边积分后,代人初始条件得

$$i(t) = \left(kt + \frac{1}{i_0} \right)^{-1}$$

当 $k \neq \mu$ 时,式(3-2-42)化为

$$\frac{1}{k - \mu} \left(\frac{1}{i} + \frac{k}{k - \mu - ki} \right) di = dt$$

两边积分,得

$$\frac{1}{k - \mu} \ln \frac{i}{k - \mu - ki} = t + C$$

代人初始条件,得

$$C = \frac{1}{k - \mu} \ln \frac{i_0}{k - \mu - ki_0}$$

故有
$$t = \frac{1}{k - \mu} \ln \left(\frac{i}{k - \mu - ki} \frac{k - \mu - ki_0}{i_0} \right)$$

整理得
$$\frac{i}{k - \mu - ki} \frac{k - \mu - ki_0}{i_0} = e^{(k - \mu)t}$$

$$\frac{k - \mu}{i} - k = e^{(k - \mu)t} \left(\frac{k - \mu - ki_0}{i_0} \right)$$

解出
$$i = \left[e^{-(k - \mu)t} \left(\frac{1}{i_0} - \frac{k}{k - \mu} \right) + \frac{k}{k - \mu} \right]^{-1}$$

綜上得

$$i(t) = \begin{cases} \left[e^{-(k - \mu)t} \left(\frac{1}{i_0} - \frac{k}{k - \mu} \right) + \frac{k}{k - \mu} \right]^{-1} & (k \neq \mu) \\ \left(kt + \frac{1}{i_0} \right)^{-1} & (k = \mu) \end{cases} \quad (3-2-43)$$

上式中,定义 $\sigma = k/\mu$,由 k 与 $\frac{1}{\mu}$ 的含义,可知 σ 表示的含义是:一个病人在平均传染期内传染的人数与当时健康的人数成正比,比例系数为 σ ,由式(3-2-43)有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\sigma} & (\sigma > 1) \\ 0 & (\sigma \leq 1) \end{cases}$$

也可以据式(3-2-43)做出 $i(t)$ 的图像,如图 3-8 所示.当 $\sigma \leq 1$ 时,病人在总人数中所占的比例 $i(t)$ 越来越小,最终趋于零.这一点可从 σ 的含义上得到一个直观的解释,就是传染期内被传染的人数不超过当时健康的人数;当 $\sigma > 1$ 时, $i(t)$ 的变化趋势取决于 i_0 的大小,最终以 $1 - \frac{1}{\sigma}$ 为极限;当 σ 增大时, $i(\infty)$ 也增大,这是因为随着传染期内被传染人数占当时健康人数的比例的增加,当时的病人数所占比例也随之上升.

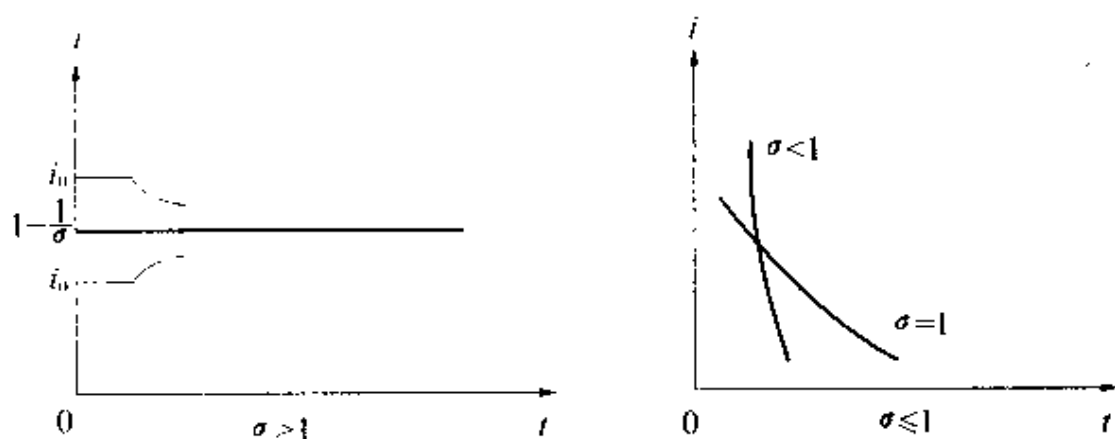


图 3.8

模型四

某些传染病如麻疹等,治愈后均有很强的免疫力,所以病愈的人既非健康人,也非病人.

模型假设:

①人群分为健康者、病人、病愈免疫者三类,这三类人在总人数中所占的比例分别为 $s(t)$ 、 $i(t)$ 、 $r(t)$,则有 $s(t) + i(t) + r(t) = 1$.

②单位时间内,一个病人传染的人数与当时健康者人数成正比,比例系数为 k .

③在单位时间内,病愈免疫的人数与当时病人人数成正比,比例系数为 μ ,则有 $N \frac{dr}{dt} = \mu Ni$,故得

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = ksi - \mu i \\ \frac{ds}{dt} = -ksi \\ i(0) = i_0, \quad s(0) = s_0 \end{cases} \quad (3-2-44)$$

式(3-2-44)难以求得其解,进一步的讨论可以采用相轨线法给出定性分析(从略).

四、人口问题微分方程模型

人口问题是当今世界上人们最关心的问题之一. 人口模型研究开始于 1798 年 Malthus 人口爆炸式方程; 1838 年 P. F. Verhust 对 Malthus 方程进行了修正, 得出 Logistic 方程; 1920 年 A. J. Lotka 和 1926 年 V. Vopltterra 分别独立地提出了两个种族进行竞争的模型; G. V. Yule 于 1924 年引入概率观点对人口问题进行了研究, 各种比较精细的人口模型则是在 20 世纪 40 年代后建立起来的, 按年龄离散型人口模型由 P. H. Leslie 在 1945 年完成; 现代按年龄连续型人口模型在 1959 年由 Van. H. Fpoersler 作出. 近年来, 我国从事自然科学(主要是控制论)的学者, 针对我国人口现状, 作出的中国人口预测模型和人口控制模型, 为我国人口政策提供了科学依据.

影响人口增长的因素很多, 包括人口的基数、人口的自然增长率和各种扰动因素. 其中, 自然增长率取决于自然死亡率和自然出生率, 扰动因素比如人口迁移、自然灾害及战争等; 影响自然死亡率的因素如人口发展史、健康水平、营养条件、医疗设施、文教水准、遗传因素、环境污染以及政策影响等; 影响自然出生率的因素如政治控制、社会保障、经济条件、文教卫生、传统习惯、价值观念、城市规模、结婚年龄、节育措施及婴儿死亡率高低等. 如果一开始把众多因素都考虑进去, 则无从下手. 这里是先把问题简化, 建立比较粗糙的模型, 再逐步修改, 得到较完善的模型.

据考古学家论证, 地球上出现生命距今已有 20 亿年, 而人类的出现距今却不足 200 万年. 综观人类人口总数的增长情况, 我们发现 1000 年前人口总数为 2.75 亿; 经过漫长的过程到 1830 年, 人口总数达 10 亿; 又经过 100 年, 在 1930 年, 人口总数达 20 亿; 30 年之后, 即 1960 年, 人口总数为 30 亿; 又经过 15 年, 1975 年的人口总数是 40 亿; 12 年之后即 1987 年, 人口已达 50 亿.

我们自然会产生这样一个问题: 人类人口增长的规律是什么?

如何在数学上描述这一规律? 下面介绍 3 个模型.

模型一 Malthus 模型

1798 年, 英国神父 Malthus 在分析了 100 多年人口统计资料之后, 提出了 Malthus 模型.

(1) 模型假设:

① 设 $x(t)$ 表示 t 时刻的人口数, 且 $x(t)$ 连续可微;

② 人口的增长率 r 是常数 (增长率 = 出生率 - 死亡率);

③ 人口数量的变化是封闭的, 即人口数量的增加与减少只取决于人口中个体的生育和死亡, 且每一个体都具有同样的生育能力与死亡率.

(2) 建模与求解:

假设 t 时刻到 $t + \Delta t$ 时刻人口的增量为

$$x(t + \Delta t) - x(t) = rx(t)\Delta t$$

于是得

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \right\} \quad (3-2-45)$$

式(3-2-45)是一个很简单的微分方程, 其解为

$$x(t) = x_0 e^{rt} \quad (3-2-46)$$

式(3-2-46)的图形如图 3-9 所示.

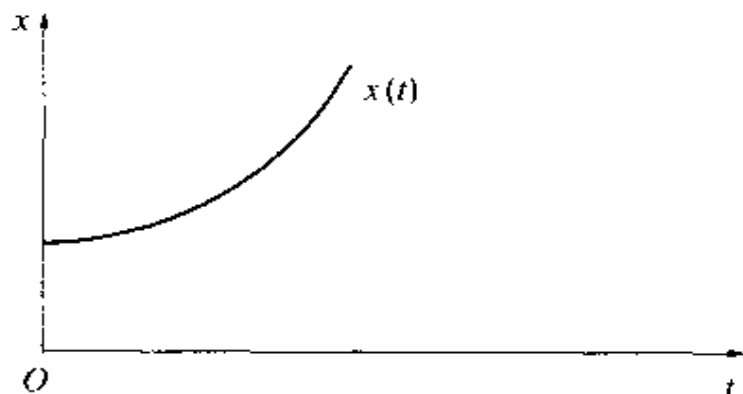


图 3-9 Malthus 模型中 $x(t)$ 的图形

(3)模型评价:

考虑 200 多年来人口增长的实际情况,1961 年世界人口总数为 3.06×10^9 ,在 1961 ~ 1970 年这段时间内,每年平均的人口自然增长率为 2%,则式(3-2-46)可写为

$$x(t) = 3.06 \times 10^9 e^{0.02(t-1961)} \quad (3-2-47)$$

根据 1700 ~ 1961 年间世界人口统计数据,我们发现这些数据与式(3-2-47)的计算结果相当符合.因为在这期间地球上人口大约每 35 年增加 1 倍,而式(3-2-47)算出每 34.6 年增加 1 倍.

事实上,可假设在 $T = t - t_0$ 内地球上的人口增加 1 倍,即当 $t = t_0$ 时, $x_0 = 3.06 \times 10^9$, 当 $T = t - t_0$ 时, $2x_0 = 3.06 \times 10^9 e^{0.02T}$,故有 $e^{0.02T} = 2$,解出 $T = 50 \ln 2 \approx 34.657$.

但是,当人们用式(3-2-46)对 1790 年以来的美国人口进行检验时,发现有很大差异.这里,取 1790 年为 $t = t_0 = 1790$, $x(1780) = 3.9 \times 10^6$, $x(1800) = 5.3 \times 10^6$,由上两式得出 $r = 0.03\%$,故有

$$x(t) = 3.9 \times 10^6 \times e^{0.03\%(t-1790)} \quad (3-2-48)$$

利用式(3-2-48)进行计算并与实际人口进行比较,发现有较大的差异,如表 3-1 所示.

表 3-1 人口模型与实际情形对照表

年份	实际人口 ($\times 10^6$)	Malthus 模型		Logistic 模型	
		($\times 10^6$)	误差(%)	($\times 10^6$)	误差(%)
1790	3.9	3.9	0	3.9	0
1800	5.3	5.3	0	5.3	0.5
1810	7.2	7.3	1.4	7.2	-0.2
1820	9.6	10	4.2	9.7	1.2
1830	12.9	13.7	6.2	13.1	1.9
1840	17.1	18.7	9.4	17.5	2.6

续表 3-1

年份	实际人口 ($\times 10^6$)	Malthus 模型		Logistic 模型	
		($\times 10^6$)	误差(%)	($\times 10^6$)	误差(%)
1850	23.2	25.6	10.3	23.2	0
1860	31.4	35	10.8	30.4	-3.3
1870	38.6	47.8	23.8	39.4	2.1
1880	50.2	65.5	30.5	50.2	0
1890	62.9	89.6	42.4	62.8	-0.3
1900	76	122.5	61.2	76.9	1.2
1910	92	167.6	82.1	92	0
1920	106.5	229.3	115.3	107.6	1.7
1930	123.2			123.1	0.3
1940	131.7			136.7	3.8
1950	150.7			149.1	-1.1
1960	179.3				
1970	204				
1980	226.5				

利用式(3-2-47)对世界人口进行预测,也会得出惊异的结论:当 $t = 2670$ 年时, $x(t) = 4.4 \times 10^{15}$, 即 4400 万亿,这相当于地球上每平方米要容纳至少 20 人。

显然,用这一模型进行预测的结果远高于实际人口增长,误差的原因是对增长率 r 的估计过高.由此,可以对 r 是常数的假设提出疑问.

模型二 Logistic 模型

Malthus 模型为什么只符合人口的过去结果而不能用于预测

未来人口? 这主要是因为地球上的各种资源只能供一定数量的人生活, 随着人口的增加, 自然资源、环境条件等因素对人口增长的限制作用将越来越显著. 如果当人口较少时, 人口的自然增长率可以看做常数的话, 那么当人口增加到一定数量以后, 这个增长率就要随人口的增加而减小. 显然, 应该对 Malthus 模型关于净增长率为常数的假设进行修改, Logistic 模型是修改的模型中著名的一个.

1838 年, 荷兰生物数学家 Verhulst 引入常数 x_{\max} , 用来表示自然环境条件所能容许的最大人口数(一般来说, 一个国家工业化程度越高, 它的生活空间就越多, 食物就越多, 从而 x_{\max} 就越大), 并假定净增长率等于 $r\left(1 - \frac{x(t)}{x_{\max}}\right)$, 即净增长率随着 $x(t)$ 的增加而减小, 当 $x(t) \rightarrow x_{\max}$ 时, 净增长率趋于零.

(1) 模型假设:

① 设 $r(x)$ 为 x 的线性函数, $r(x) = r - sx$.

② 自然资源与环境条件所能容纳的最大人口数为 x_{\max} , 即当 $x = x_{\max}$ 时, 增长率 $r(x_{\max}) = 0$.

(2) 建模与求解:

由假设①、②可得 $r(x) = r\left(1 - \frac{x}{x_{\max}}\right)$, 则有

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r\left(1 - \frac{x}{x_{\max}}\right)x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3-2-49)$$

式(3-2-49)是一个可分离变量的方程, 其解为

$$x(t) = \frac{x_{\max}}{1 + \left(\frac{x_{\max}}{x_0} - 1\right)e^{-r(t-t_0)}} \quad (3-2-50)$$

(3) 模型检验:

由式(3-2-50), 计算可得

$$\frac{d^2x}{dt^2} = r^2 \left(1 - \frac{x}{x_{\max}} \right) \left(1 - \frac{2x}{x_{\max}} \right) x \quad (3-2-51)$$

人口总数 $x(t)$ 有如下规律:

① $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_{\max}$, 即无论人口初值如何, 人口总数以 x_{\max} 为极限.

(2) 当 $0 < x_0 < x_{\max}$ 时, $\frac{dx}{dt} = r \left(1 - \frac{x}{x_{\max}} \right) x > 0$, 这说明 $x(t)$ 是单调增加的. 又由式(3-2-51)知: 当 $x < \frac{x_{\max}}{2}$ 时, $\frac{d^2x}{dt^2} > 0$, $x = x(t)$ 为凹; 当 $x > \frac{x_{\max}}{2}$ 时, $\frac{d^2x}{dt^2} < 0$, $x = x(t)$ 为凸.

③ 人口变化率 $\frac{dx}{dt}$ 在 $x = \frac{x_{\max}}{2}$ 时取最大值, 即人口总数达到极限值一半以前是加速生长时期, 经过这一点之后, 生长速率会逐渐变小, 最终到达零.

以上3点可由 $x(t) \sim t$, $\frac{dx}{dt} \sim x$ 的曲线图形上看出, 如图3-10所示.

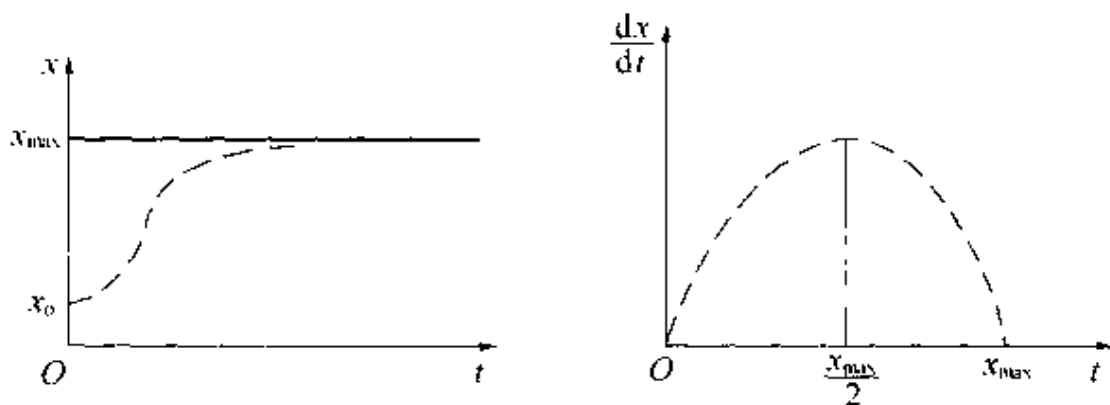


图 3-10 Logistic 模型中 $x(t)$ 的图形

与 Malthus 模型一样, 代入一些实际数据进行验算. 若取 1790 年为 $t = t_0 = 0$, $x_0 = 3.9 \times 10^6$, $x_{\max} = 197 \times 10^6$, $r = 0.3134$, 可以

看出,直到 1930 年,计算结果与实际数据都能较好地吻合,而在 1930 年之后,计算结果与实际偏差较大.原因之一是 20 世纪 60 年代的实际人口已经突破了假设的极限人口 x_{\max} ,由此可知,本模型的缺点之一就是不易确定 x_{\max} .

(4)模型推广:

在 Malthus 模型上增加一项 $-bx^2$ ($b < 0$),它的作用是使纯增长率减少.如果一个国家工业化程度较高,食品供应较充足,能够提供更多的人生存,此时 b 较小;反之 b 较大.故建立方程

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - bx) & (a, b > 0) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3-2-52)$$

其解为

$$x(t) = \frac{ax_0}{bx_0 + (a - bx_0)e^{-a(t-t_0)}} \quad (3-2-53)$$

由式(3-2-51),得

$$\frac{d^2x}{dt^2} = (a - 2bx)x(a - bx) \quad (3-2-54)$$

对以上 3 式进行分析,有

①对任意 $t > t_0$,有 $x(t) > 0$,且 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \frac{a}{b}$.

②当 $0 < x < \frac{a}{b}$ 时, $x'(t) > 0$, $x(t)$ 递增;当 $x = \frac{a}{b}$ 时, $x'(t) = 0$;当 $x(t) > \frac{a}{b}$ 时, $x'(t) < 0$, $x(t)$ 递减.

③当 $0 < x < \frac{a}{2b}$ 时, $x''(t) > 0$, $x(t)$ 为凹;当 $\frac{a}{2b} < x < \frac{a}{b}$ 时, $x''(t) < 0$, $x(t)$ 为凸.

由以上 3 点,可作出 $x(t)$ 的图形,如图 3-11 所示.

令式(3-2-52)右边为 0,得 $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{a}{b}$,称它们是微分方

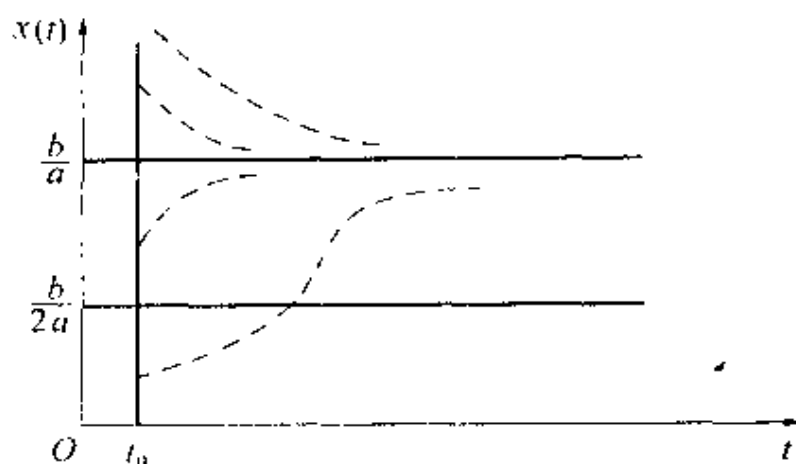


图 3-11

程(3-2-52)的平衡解. 由图 3-11 可看出: $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \frac{a}{b}$, 故又称 $\frac{a}{b}$ 为式(3-2-52)的稳定平衡解. 可以预测, 不论人口开始的数量 x_0 为多少, 经过相当长的时间后, 人口总数将稳定在 $\frac{a}{b}$.

如何确定 a 与 b , 有些学者以美国人口为例进行分析. 考虑美国 1790 年、1850 年及 1910 年的人口分别为 3.9×10^6 , 23.2×10^6 , 92.6×10^6 , 设其为 $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, $x(t_2) = x_2$, 其中 $t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \tau$. 由式(3-2-53), 有

$$x_1 = \frac{ax_0}{bx_0 + (a - b)x_0e^{-a\tau}} \quad (3-2-55)$$

$$x_2 = \frac{ax_1}{bx_1 + (a - b)x_1e^{-a\tau}} \quad (3-2-56)$$

变形得

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{x_1} &= \frac{b}{a} + \left(\frac{1}{x_0} - \frac{b}{a} \right) e^{-a\tau} \\ \frac{1}{x_2} &= \frac{b}{a} + \left(\frac{1}{x_1} - \frac{b}{a} \right) e^{-a\tau} \end{aligned} \right\} \quad (3-2-57)$$

上两式相减得

$$\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1} \right) e^{-at}$$

可求得

$$a = \frac{1}{t} \ln \frac{x_2(x_1 - x_0)}{x_0(x_2 - x_1)} \quad (3-2-58)$$

将式(3-2-58)代入式(3-2-55)有

$$b = \frac{a(x_0 e^{at} - x_1)}{x_0 x_1 (e^{at} - 1)} \quad (3-2-59)$$

令 $x(\bar{t}) = \frac{a}{2b}$, 则由式(3-2-57), 得

$$\frac{2b}{a} = \frac{b}{a} + \left(\frac{1}{x_0} - \frac{b}{a} \right) e^{-a(\bar{t}-t_0)}$$

即

$$e^{-a(\bar{t}-t_0)} = \frac{bx_0}{a - bx_0}$$

故有与式(3-2-53)近似的形式上简单的表达式

$$x(t) = \frac{a/b}{1 + e^{-a(t-\bar{t})}} \quad (3-2-60)$$

由式(3-2-58)及(3-2-59)可算得 $\frac{b}{a} = 1.97 \times 10^9$, $a \approx 0.031$, $\bar{t} = 1914.3$, 即式(3-2-60)可化为

$$x(t) = \frac{1.97 \times 10^9}{1 + e^{-0.031(t-1914.3)}} \quad (3-2-61)$$

将式(3-2-61)的计算结果列入表 3-1 中, 我们会发现, 模型的计算结果与实际人口相当符合。

利用上面模型对世界人口的增长情况进行预测, 据生态学家估计, $a = 0.029$, 人口为 3.06×10^8 时, 平均纯增长率为每年 2%。

由式(3-2-52), 计算得 $b = 2.94 \times 10^{-12}$, 此时, $\frac{a}{b} = 9.86 \times 10^9$ 为世界人口的极值。据报道, 1987 年的世界人口已达 50 亿, 由模型的分析可知, 从此世界人口的增长已进入减速阶段。

模型三 人口发展过程的连续模型

以上讨论的模型只考虑人口的总数和总的增长率,不涉及年龄结构.事实上,在对人口增长的研究中,人口的年龄分布状况是很重要的.比如某两个国家目前的人口总数相当,而其中一个国家年轻人的比例较高,那么,它们今后的人口发展状况将会不同.以下介绍的模型考虑了人口按年龄的分布,时间与年龄均为变量.考虑的因素包括出生、死亡和迁移.

(1)模型假设:

①设 $F(t, r)$ 表示在某地区内、在时间 t 时年龄在 r 岁以下的人口总数,称 $F(t, r)$ 为人口函数.用 $N(t)$ 表示在时刻 t 时该地区人口总数,并认为 $F(t, r)$ 对每个变量都是连续的,且 $\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial t}$ 也为连续函数,称 $p(t, r) = \frac{\partial F}{\partial r}$ 为人口年龄分布密度函数,简称人口密度函数.

②设在时刻 t , 年龄在 r 岁时的死亡人数为 $M(t, r)$, 记 $\mu(t, r) = \frac{M(t, r)}{p(t, r)}$, 为相对死亡率函数.

③记 $f(t, r)$ 为时刻 t , 年龄 r 的人迁入(出)该地区的人口总数.

④记 $\varphi(t)$ 表示时刻 t 时,单位时间内出生的婴儿总数,称为出生率函数,并称 $u(t) = \frac{\varphi(t)}{N(t)}$ 为相对出生率函数.

(2)建模与求解:

① $F(t, r)$ 具有如下性质:

$$F(t, r) \geq 0 \quad (t, r \in \mathbb{R}^+)$$

$$F(t, r_2) \geq F(t, r_1) \quad (r_2 \geq r_1)$$

$$F(t, 0) = 0$$

$$F(t, r_m) = F(t, +\infty) = N(t)$$

② $p(t, r)$ 具有如下性质:

$$p(t, r) \geq 0$$

当 $b \geq r_m$ 时, $p(t, b) = 0$. 由 $F(t, r)$ 及 $p(t, r)$ 的定义, 年龄由 r 至 $r + \Delta r$ 岁的人口总数为

$$F(t, r + \Delta r) - F(t, r) \approx p(t, r) \Delta r$$

$$F(t, r) = \int_0^r p(t, \xi) d\xi$$

$$F(t, r_m) = \int_0^{r_m} p(t, \xi) d\xi = \int_0^r p(t, \xi) d\xi = N(t)$$

$$F(t, r_2) - F(t, r_1) = \int_{r_1}^{r_2} p(t, \xi) d\xi$$

还可推出: 当 $\Delta t, \Delta r$ 充分小时, 在时间间隔 $[t, t + \Delta t]$ 在年龄区间 $[r, r + \Delta r]$ 内, 死亡人数为

$$M(t, r) \Delta t \Delta r = \mu(t, r) p(t, r) \Delta t \Delta r$$

在上述时间, 年龄区间内迁移人口总数为 $f(t, r) \Delta t \Delta r$ (可约定迁人为正, 迁出为负). 由此, 可得该地区人口的守恒方程为

$$p(t + \Delta t, r + \Delta r) \Delta r - p(t, r) \Delta r = -\mu(t, r) p(t, r) \Delta r \Delta t + f(t, r) \Delta t \Delta r$$

即

$$[p(t + \Delta t, r + \Delta r) \Delta r - p(t, r) \Delta r] / (\Delta t \Delta r) = -\mu(t, r) p(t, r) + f(t, r)$$

注意到时间增长 Δt 时, 年龄也增长 Δr , 即 $\Delta t = \Delta r$, 在上式两边取极限, 令 $\Delta t \rightarrow 0, \Delta r \rightarrow 0$ 有

$$\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial t} = -\mu(t, r) p(t, r) + f(t, r) \quad (3-2-62)$$

若不考虑迁移的情况, 有

$$\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial t} = -\mu(t, r) p(t, r) \quad (3-2-63)$$

以下再给出一些初始条件和边界条件. 令 $t = 0$, 则该时刻的

人口密度函数可由人口统计资料给出,即 $p(0, r) = p_0(r)$ 为初始条件是已知的,结合 $p(t, 0) = \varphi(t) = \mu(t)N(t)$, 以及式(3-2-62)和(3-2-63)可得方程.

若考虑迁移,则

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial r} &= -\mu(t, r)p(t, r) + f(t, r) \\ p(0, r) &= p_0(r) \\ p(t, 0) &= \varphi(t) = \mu(t)N(t)\end{aligned}\quad (3-2-64)$$

若不考虑迁移,则

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial r} &= -\mu(t, r)p(t, r) \\ p(0, r) &= p_0(r) \\ p(t, 0) &= \varphi(t) = \mu(t)N(t)\end{aligned}\quad (3-2-65)$$

以上为偏微分方程,其求解过程略去. 求出 $p(t, r)$ 之后, $F(r, t)$ 亦可求出.

若考虑问题的范围扩大到几个地区,则相应的方程为

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial r} &= -M(t, r)p(t, r) + A(t, r)p(t, r) + f(t, r) \\ p(0, r) &= p_0(r) = (p_{01}(r), p_{02}(r), \dots, p_{0n}(r))^T \\ p(t, 0) &= \varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))^T\end{aligned}$$

其中 $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$

$$\begin{aligned}A(t, r) &= \begin{bmatrix} a_{11}(t, r) & \Lambda & a_{1n}(t, r) \\ M & M & M \\ a_{n1}(t, r) & \Lambda & a_{nn}(t, r) \end{bmatrix} \\ M(t, r) &= \begin{bmatrix} \mu_1(t, r) & \Lambda & 0 \\ M & M & M \\ 0 & \Lambda & \mu_n(t, r) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

这里 a_{ij} 表示从第 j 地区向第 i 地区的移民率, f_j 表示第 j 地区的非计划性人口移动.

五、经济问题微分方程模型

数学模型在科学和技术中的巨大成功,使得社会、经济领域的专家也尝试用模型化方法来解释和预测社会、经济领域中的问题. 由于社会、经济领域中的一些现象的规律性如同生物、医学领域一样,还不很清楚,即使有所了解也是极其复杂的,因此也常常用模拟近似法建立问题的微分方程模型,提出一些对规律的分析与假想. 经济模型是利用数学方法描述经济现象演变的过程,或者说是经济现象和经济过程中客观存在的各种变量之间的相互依存关系的数学描述. 其作用是用于分析、研究人们的经济行为,制定合理的经济行为. 它以合理的假设为前提,用数学语言对客观经济的本质联系进行抽象、简化描述. 由于客观经济世界情况的复杂性,用数学模型对它进行描述时要涉及多个主要变量和次要变量. 下面通过两个例子做出一些假设,排除次要因素,建立起数学模型.

模型一 生产函数与劳动生产率的增长

(1)问题提出:

经过分析发现,促进经济的发展有两个主要的因素:一是增加投资,二是雇用更多的工人. 如何把数量确定的资金合理地投入到以上两个方面,在某种意义上是一个矛盾. 恰当地调节投资增长和劳动力增长的关系,使增加的产量不致被劳动力的增长所抵消,劳动生产率才会增长.

(2)建模与分析:

首先利用一些数据给出生产函数(生产模型). 用 $Q(t)$ 、 $L(t)$

和 $K(t)$ 分别表示某一地区在时刻 t 的产量、劳动力和资金, 时间以年为单位. 用 $i_Q(t) = \frac{Q(t)}{Q(0)}$, $i_L(t) = \frac{L(t)}{L(0)}$, $i_K(t) = \frac{K(t)}{K(0)}$ 表示它们各自的增长比, 分别称之为产量指数、劳动力指数和投资指数.

为了分析这些数据, 引入新变量: $\xi(t) = \ln \frac{i_L(t)}{i_K(t)}$, $\phi = \ln \frac{i_Q(t)}{i_K(t)}$, 根据所给的数据, 计算出 $\xi(t)$ 、 $\phi(t)$, 并在 ξ - ϕ 平面上作出图形(图 3-12), 发现大多数点靠近一条过原点的直线 $\phi = \gamma\xi$, 且斜率 γ 通常满足 $0 < \gamma < 1$, 将 $\xi(t)$ 及 $\phi(t)$ 的表示式代入得

$$i_Q(t) = i_L^\gamma(t) i_K^{1-\gamma}(t) \quad (3-2-66)$$

再记 $a = Q(0)L^{-\gamma}(0)K^{\gamma-1}(0)$, 则有

$$Q(t) = aL^\gamma(t)K^{1-\gamma}(t) \quad (0 < \gamma < 1, a > 0) \quad (3-2-67)$$

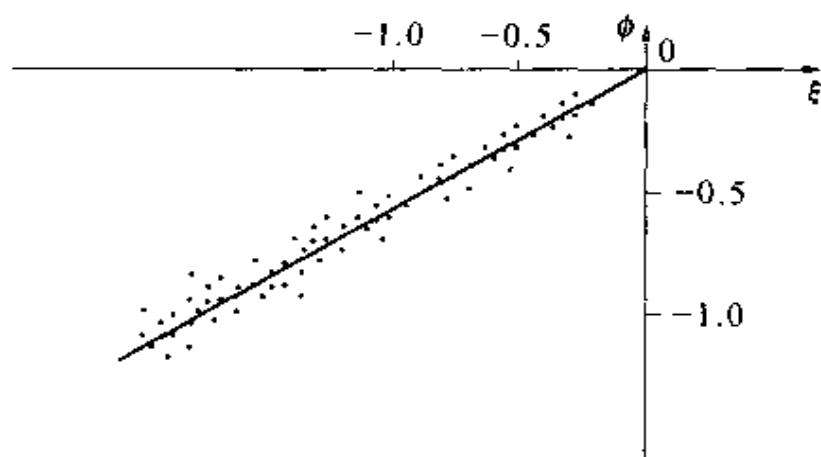


图 3-12 ξ - ϕ 平面上的数据

一般来说, $i_Q(t)$ 、 $i_L(t)$ 、 $i_K(t)$ 均为时间 t 的增函数, $i_Q(t)$ 的增长取决于 $i_L(t)$ 及 $i_K(t)$ 的增长. 借助于一组统计数据, 给出它们的关系. 美国马萨诸塞州 1890~1926 年的数据如表 3-2 所示.

表 3-2 美国马萨诸塞州 1890~1926 年的数据

t	$i_K(t)$	$i_L(t)$	$i_Q(t)$	t	$i_K(t)$	$i_L(t)$	$i_Q(t)$
9	0.95	0.78	0.72	-8	0.96	0.81	0.78
7	0.99	0.85	0.84	-6	0.96	0.77	0.73
-5	0.93	0.72	0.72	-4	0.86	0.84	0.83
-3	0.82	0.81	0.81	-2	0.92	0.89	0.93
-1	0.92	0.91	0.96	0	1.00	1.00	1.00
1	1.04	1.05	1.05	2	1.06	1.08	1.18
3	1.16	1.18	1.29	4	1.22	1.22	1.30
5	1.27	1.17	1.30	6	1.37	1.30	1.42
7	1.44	1.39	1.50	8	1.53	1.47	1.52
9	1.57	1.31	1.46	10	2.05	1.43	1.60
11	2.51	1.58	1.69	12	2.63	1.59	1.81
13	2.74	1.66	1.93	14	2.82	1.68	1.95
15	3.24	1.65	2.01	16	3.24	1.62	2.00
17	3.61	1.86	2.09	18	4.10	1.93	1.96
19	4.36	1.96	2.20	20	4.77	1.95	2.12
21	4.75	1.90	2.16	22	4.54	1.58	2.08
23	4.54	1.67	2.24	24	4.58	1.82	2.56
25	4.58	1.60	2.34	26	4.58	1.61	2.45
27	4.54	1.64	2.58				

称式(3-2-67)称为 Cobb-Douglas 生产函数,它反应了产量与劳动力和投资间的关系。

在式(3-2-67)两边取对数后再对时间求导,得

$$\frac{Q'}{Q} = \gamma \frac{L'}{L} + (1 - \gamma) \frac{K'}{K} \quad (3-2-68)$$

上式表明了年相对增长量 $\frac{Q'}{Q}$ 、 $\frac{L'}{L}$ 和 $\frac{K'}{K}$ 之间的线性关系。

在式(3-2-67)两边取对数后,由 $Q = Q(L, K)$, 两边对 L 求偏导,得

$$\gamma = \frac{\partial Q / \partial L}{Q / L} \quad (3-2-69)$$

它表示了产量增长中取决于劳动力部分的比值,称 γ 为产量对劳动力的弹性系数.其含义是,若 $\gamma \rightarrow 1$,说明产量的增长主要靠劳动力的增长;若 $\gamma \rightarrow 0$,说明产量的增长主要靠投资的增长。

其次,为了进一步讨论 $Q(t)$ 、 $L(t)$ 、 $K(t)$ 三者之间的增长关系,讨论劳动生产率增长的条件(模型),还需做出如下假设:

①劳动力的年相对增长率为常数 ρ ,即

$$L' = \rho L \quad (3-2-70)$$

②投资的增长率与产量成正比,比例系数为 σ ,即

$$K' = \sigma Q \quad (3-2-71)$$

用 L_0 、 K_0 表示 $L(0)$ 、 $K(0)$,式(3-2-70)为一个可分离变量的方程,其解为

$$L(t) = L_0 e^{\rho t} \quad (3-2-72)$$

将式(3-2-67)、(3-2-72)依次代入式(3-2-71),有

$$K' = \sigma a L_0^\gamma e^{\rho \gamma t} K^{1-\gamma} \quad (3-2-73)$$

式(3-2-73)也为一变量可分离的方程,其解 $K(t)$ 为

$$K^\gamma(t) = K_0^\gamma + \frac{\sigma a}{\rho} L_0^\gamma (e^{\rho \gamma t} - 1) \quad (3-2-74)$$

引入记号

$$Z(t) = \frac{Q(t)}{L(t)} \quad (3-2-75)$$

可把 $Z(t)$ 理解为每个劳动力生产的产量,看做是劳动生产率。

在式(3-2-74)两边取对数后再对 t 求导,有

$$\frac{Z'}{Z} = \frac{Q'}{Q} - \frac{L'}{L}$$

再将式(3-2-68)代入上式,有

$$\frac{Z'}{Z} = (1 - \gamma) \left(\frac{K'}{K} - \frac{L'}{L} \right) \quad (3-2-76)$$

下面对式(3-2-76)进行变形与整理:

由式(3-2-70)有 $\frac{L'}{L} = \rho$

由式(3-2-73)有 $\frac{K'}{K} = \sigma \alpha L_0^\gamma e^{\rho n} K^{-\gamma}$

将上面两式代入式(3-2-76)式,有

$$\frac{Z'}{Z} = (1 - \gamma) (\sigma \alpha L_0^\gamma e^{\rho n} K^{-\gamma} - \rho) \quad (3-2-77)$$

又

$$\sigma \alpha L_0^\gamma e^{\rho n} K^{-\gamma} - \rho = \sigma \alpha L_0^\gamma K^{-\gamma} - (\rho - \sigma \alpha L_0^\gamma e^{\rho n} K^{-\gamma} - \sigma \alpha L_0^\gamma K^{-\gamma}) \quad (3-2-78)$$

令 $K'_0 = K'(0)$, 在式(3-2-75)中令 $t=0$, 有

$$K'_0 = \sigma \alpha L_0^\gamma K_0^{1-\gamma}$$

故有 $K'_0 K_0^{\gamma-1} K^{-\gamma} = \sigma \alpha L_0^\gamma K^{-\gamma} \quad (3-2-79)$

由式(3-2-74), 有

$$\rho K^\gamma = \rho K_0^\gamma + \sigma \alpha L_0^\gamma (e^{\rho n} - 1)$$

所以 $\rho = \rho K_0^\gamma K^{-\gamma} + \sigma \alpha L_0^\gamma (e^{\rho n} - 1) K^{-\gamma}$

$$\rho K_0^\gamma K^{-\gamma} = \rho - \sigma \alpha L_0^\gamma (e^{\rho n} - 1) K^{-\gamma} \quad (3-2-80)$$

将式(3-2-80)、(3-2-79)代入式(3-2-78), 得

$$\begin{aligned} \sigma \alpha L_0^\gamma e^{\rho n} K^{-\gamma} - \rho &= K'_0 K_0^{\gamma-1} K^{-\gamma} - \rho K_0^\gamma K^{-\gamma} \\ &= (K'_0 - \rho K_0) K_0^{\gamma-1} K^{-\gamma} \end{aligned} \quad (3-2-81)$$

将式(3-2-80)代入式(3-2-76), 便得劳动生产率增长的模型

$$\frac{Z'}{Z} = (1 - \gamma)(K'_0 - \rho K_0)K_0^{\gamma-1}K^{-\gamma} \quad (3-2-82)$$

根据式(3-2-82),可以看出两点:

①只要 $\frac{K'_0}{K_0} > \rho = \frac{L'}{L}$, 就有 $Z' > 0$, 这就是说, 只要初始投资的相对增长率大于劳动力的相对增长率 ρ , 就能保证劳动生产率不断增加.

②根据对投资 K 的理解, 可以认为 K 是增加的, 且 $\lim_{t \rightarrow +\infty} K(t) = +\infty$, 由式(3-2-82)知 Z' 递减且 $\lim_{t \rightarrow +\infty} Z'(t) = 0$, 即 $Z(t)$ 的增长率不断减少, 且最终趋于零.

模型二 国民经济的增长

(1)问题提出:

国民收入的主要来源是生产, 国民收入主要用于以下三个方面: 消费资金、投入再生产的积累资金及公共设施的开支, 下面将讨论国民收入与三者之间的关系.

(2)模型假设:

①设 $Y(t)$ 是 t 时刻的国民收入水平, 也可用它表示生产水平; $C(t)$ 表示 t 时刻消费水平; G 表示用于公共设施的开支水平, 这里把它看做是常数; $I(t)$ 是 t 时刻用于投入再生产的投资水平.

②设国民消费水平与国家生产水平成正比, 比例系数为 k , 即 $C = Yk, k \in (0, 1)$, 称 k 为消费系数, $S = 1 - k$ 称为积累系数.

③记 $D(t)$ 表示 t 时刻的需求水平, 则

$$D = kY + I + G \quad (3-2-83)$$

设生产水平的改变与需求水平和生产水平的差成比例, 即

$$\frac{dY}{dt} = l(D - Y) \quad (3-2-84)$$

其中 l 为比例系数($l > 0$).

① 设再投资水平的变化率与生产水平的变化率和现有投资水平的差成比例,即

$$\frac{dI}{dt} = m \left(a \frac{dY}{dt} - I \right) \quad (3-2-85)$$

其中 $m > 0, a > 0, m, a$ 为常数.

(3)建模与求解:

由式(3-2-83),得

$$D = (1 - S)Y + I + G$$

即

$$D - Y = -SY + I + G$$

代入式(3-2-84),得

$$\frac{dY}{dt} + lSY = l(I + G) \quad (3-2-86)$$

上式两边对 t 求导,得

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} + lS \frac{dY}{dt} = l \frac{dI}{dt} \quad (3-2-87)$$

将式(3-2-85)代入式(3-2-87),整理得

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} + (lS - lam) \frac{dY}{dt} + cmI = 0 \quad (3-2-88)$$

又由式(3-2-86),得

$$I = \frac{1}{l} \frac{dY}{dt} + SY - G \quad (3-2-89)$$

将式(3-2-89)代入式(3-2-88),有

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} + (lS + m - lam) \frac{dY}{dt} + SlmY = lmG \quad (3-2-90)$$

引入记号: $\alpha = lS + m - lma, \beta = mlS$, 上式化为

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} + \alpha \frac{dY}{dt} + \beta Y = lmG \quad (3-2-91)$$

下面分析式(3-2-91)的可解性,这是一个关于国民收入水平的二阶常系数微分方程.其系数 α 、 β 、 l 、 m 、 G 及 $Y(0)$ 、 $I(0)$ 均可由统计数据得到,初始条件是 $Y(0)$ 及 $Y'(0)$,其中 $Y'(0)$ 可由 $Y(0)$ 及 $I(0)$ 代入式(3-2-86)得到,故该方程可解.

式(3-2-91)的特征根为

$$\lambda_1 = -\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}$$

验算可知, $\frac{G}{S}$ 为式(3-2-91)的一个特解.

下面对式(3-2-91)的通解形式进行讨论.

①当 $\alpha^2 > 4\beta$ 时, λ_1, λ_2 均为实数,式(3-2-91)的通解为

$$Y(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} + \frac{G}{S}$$

若 λ_1, λ_2 中至少有一个为正,则 $\lim_{t \rightarrow +\infty} Y(t) = +\infty$,即生产水平将随着时间的增加而增加;若 λ_1, λ_2 均为负, $\lim_{t \rightarrow +\infty} Y(t) = \frac{G}{S}$,即生产水平将衰减到 $\frac{G}{S}$.

②当 $\alpha^2 = 4\beta$ 时, $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{\alpha}{2}$,式(3-2-91)的通解为

$$Y(t) = (A + Bt)e^{\lambda t} + \frac{G}{S}$$

当 $\lambda > 0$ 时, $\lim_{t \rightarrow +\infty} Y(t) = +\infty$;当 $\lambda < 0$ 时, $\lim_{t \rightarrow +\infty} Y(t) = \frac{G}{S}$.

③当 $\alpha^2 < 4\beta$,此时, $\lambda_1 = \mu + iv, \lambda_2 = \mu - iv$ 其中 $\mu = -\frac{\alpha}{2}, v = \frac{\sqrt{4\beta - \alpha^2}}{2}$,式(3-2-91)的解为

$$Y(t) = he^{\mu t} \sin(vt + \omega) + \frac{G}{S} \quad (3-2-92)$$

其中 $\frac{G}{S}$ 为常量.由 $Y(t)$ 的图形可知,此时生产水平 $Y(t)$ 将随着

时间的增长而出现振荡. 当 $\alpha > 0$ 时, $\lim_{t \rightarrow +\infty} h e^{t\alpha} = 0$, 即振荡的幅度不断下降; 当 $\alpha < 0$ 时, $\lim_{t \rightarrow +\infty} h e^{t\alpha} = +\infty$, 表明振荡的幅度随着时间的增大而增大.

第三节 差分方程简介

上节对变量连续变化的实际问题建立了相应的连续模型, 但现实世界中常常会遇到一类问题, 其变量只在一定的离散集合中取值. 例如, 在对经济进行动态分析时, 一般总根据一计划周期期末的指标值来判断某经济计划执行得如何. 有些变量虽然可以认为是连续变化或近似连续变化的, 但在研究它时, 事实上并不时时刻刻去统计它, 而只在某些特定时刻才去统计它. 例如, 我们在人口普查时才统计一次人口总量以求出一个时段的人口增加量, 通过各时段人口增量的变化规律来预测今后的人口量. 利用这种方法, 常常可以建立起实际问题的离散模型.

随着科学技术的发展, 人们将愈来愈多地遇到离散动态系统的问题. 差分方程是建立离散动态系统数学模型的有效方法. 在本章第一、二节中, 我们利用微分方程方法研究了一些连续变化的变量. 如果将变量离散化, 即可得到相应的差分方程模型. 为了方便不熟悉差分方程的读者, 本节先对差分方程知识作一简略介绍, 下节对几个确定性离散动态系统的实际问题建立数学模型, 并讨论其稳定性.

一、差分方程的基本概念

以 t 表示时间, 规定 t 只取非负整数, $t=0$ 表示第一周期初, $t=1$ 表示第二周期初等. 记 y_t 为变量 y 在时刻 t 时的取值, 则称 $\Delta y_t = y_{t+1} - y_t$ 为 y_t 的一阶差分; 称 $\Delta^2 y_t \stackrel{\text{def}}{=} \Delta(\Delta y_t) = \Delta y_{t+1} -$

$\Delta y_t = y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t$ 为 y_t 的二阶差分. 类似地, 可以定义 y_t 的 n 阶差分 $\Delta^n y_t$.

由 t 、 y_t 及 y_t 的差分给出的方程称为 y_t 的差分方程, 其中含 y_t 的最高阶差分的阶数称为该差分方程的阶. 差分方程也可以写成不显含差分的形式. 例如, 二阶差分方程 $\Delta^2 y_t + \Delta y_t + y_t = 0$ 也可改写成 $y_{t+2} - y_{t+1} + y_t = 0$.

满足一差分方程的序列 y_t 称为此差分方程的解. 类似于微分方程情况, 若解中含有的独立常数的个数等于差分方程的阶数时, 称此解为该差分方程的通解. 若解中不含任意常数, 则称此解为满足某些初值条件的特解. 例如, 考察两阶差分方程

$$y_{t+2} + y_t = 0$$

易见 $y_t = \sin \frac{\pi t}{2}$, $y_t = \cos \frac{\pi t}{2}$ 均是它的特解, 而 $y_t = c_1 \sin \frac{\pi t}{2} + c_2 \cos \frac{\pi t}{2}$ 则为它的通解, 其中 c_1, c_2 为两个任意常数.

类似于微分方程, 称差分方程

$$a_0(t)y_{t+n} + a_1(t)y_{t+n-1} + \cdots + a_n(t)y_t = b(t) \quad (3-3-1)$$

为 n 阶线性差分方程, 当 $b(t) \neq 0$ 时称其为 n 阶非齐次线性差分方程, 而

$$a_0(t)y_{t+n} + a_1(t)y_{t+n-1} + \cdots + a_n(t)y_t = 0 \quad (3-3-2)$$

则被称为方程(3-3-1)对应的齐次线性差分方程.

若方程(3-3-1)中所有的 $a_i(t)$ 均为与 t 无关的常数, 则称其为常系数差分方程, 即 n 阶常系数线性差分方程可写成

$$a_0 y_{t+n} + a_1 y_{t+n-1} + \cdots + a_n y_t = b(t) \quad (3-3-3)$$

的形式, 其对应的齐次方程为

$$a_0 y_{t+n} + a_1 y_{t+n-1} + \cdots + a_n y_t = 0 \quad (3-3-4)$$

容易证明, 若序列 $y_t^{(1)}$ 与 $y_t^{(2)}$ 均为方程(3-3-4)的解, 则 $y_t =$

$c_1 y_t^{(1)} + c_2 y_t^{(2)}$ 也是方程(3-3-4)的解, 其中 c_1, c_2 为任意常数. 若 $y_t^{(1)}$ 是方程(3-3-4)的解, $y_t^{(2)}$ 是方程(3-3-3)的解, 则 $y_t = y_t^{(1)} + y_t^{(2)}$ 也是方程(3-3-3)的解.

二、差分方程的解法

1. 常系数线性齐次差分方程的解析与解法

方程(3-3-3)可用如下的代数方法求其通解:

(1) 先求解对应的特征方程

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \Lambda + a_n = 0 \quad (3-3-5)$$

(2) 根据特征根的不同情况, 求齐次方程(3-3-4)的通解.

情况 1 若特征方程(3-3-5)有 n 个互不相同的实根 $\lambda_1, \Lambda, \lambda_n$, 则齐次方程(3-3-4)的通解为

$$c_1 \lambda_1^t + c_2 \lambda_2^t + \Lambda + c_n \lambda_n^t \quad (c_1, c_2, \dots, c_n \text{ 为任意常数})$$

情况 2 若 λ 是特征方程(3-3-5)的 k 重根, 通解中对应于 λ 的项为 $(\bar{c}_1 + \Lambda + \bar{c}_k t^{k-1}) \lambda^t$, \bar{c}_i 为任意常数 ($i=1, 2, \dots, k$).

情况 3 若特征方程(3-3-5)有单重复根 $\lambda = \alpha \pm \beta i$, 通解中对应它们的项为 $\bar{c}_1 \rho^t \cos \varphi t + \bar{c}_2 \rho^t \sin \varphi t$, 其中 $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ 为 λ 的模, $\varphi = \arctan \frac{\beta}{\alpha}$ 为 λ 的幅角.

情况 4 若 $\lambda = \alpha \pm \beta i$ 为特征方程(3-3-5)的 k 重复根, 则通解对应于它们的项为 $(\bar{c}_1 + \Lambda + \bar{c}_k t^{k-1}) \rho^t \cos \varphi t + (\bar{c}_{k+1} + \Lambda + \bar{c}_{2k} t^{k-1}) \rho^t \sin \varphi t$, \bar{c}_i 为任意常数 ($i=1, 2, \dots, 2k$).

(3) 求非齐次方程(3-3-3)的一个特解 \bar{y}_t . 若 \bar{y}_t 为方程(3-3-4)的通解, 则非齐次方程(3-3-3)的通解为 $y_t + \bar{y}_t$.

求非齐次方程(3-3-3)的特解一般要用到常数变易法, 计算较繁. 对特殊形式的 $b(t)$ 也可使用待定系数法. 例如, 当 $b(t) = b' p_k(t)$, $p_k(t)$ 为 t 的 k 次多项式时可以证明: 若 b 不是特征根,

则非齐次方程(3-3-3)有形如 $b'q_k(t)$ 的特解, $q_k(t)$ 也是 t 的 k 次多项式;若 b 是 r 重特征根,则方程(3-3-3)有形如 $b't^r g_k(t)$ 的特解,进而可利用待定系数法求出 $q_k(t)$,从而得到方程(3-3-3)的一个特解 \bar{y}_t .

例 1 求解两阶差分方程 $y_{t+2} + y_t = t$.

解 对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2 + 1 = 0$,其特征根为 $\lambda_{1,2} = \pm i$,对应齐次方程的通解为

$$y_t = c_1 \cos \frac{\pi}{2} t + c_2 \sin \frac{\pi}{2} t$$

原方程有形如 $at + b$ 式的特解,代入原方程求得 $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$,故原方程的通解为

$$c_1 \cos \frac{\pi}{2} t + c_2 \sin \frac{\pi}{2} t + \frac{1}{2} t - \frac{1}{2}$$

在应用差分方程研究问题时,我们常常需要讨论解的稳定性.对常系数非齐次线性差分方程(3-3-3),若不论其对应齐次方程的通解中任意常数 c_1, c_2, \dots, c_n 如何取值,在 $t \rightarrow +\infty$ 时总有 $y_t \rightarrow 0$,则称方程(3-3-3)的解是稳定的,否则称其解为不稳定的.根据通解的结构不难看出,非齐次方程(3-3-3)稳定的充要条件为其所有特征根的模均小于 1.

例 2 在信道上传输仅用 3 个字母 a、b、c,且长度为 n 的词,规定有两个 a 连续出现的词不能传输,试确定这个信道容许传输的词个数.

解 令 $h(n)$ 表示允许传输且长度为 n 的词个数($n=1, 2, 3, \dots$),通过简单计算可求得: $h(1)=3, h(2)=8$. 当 $n \geq 3$ 时,若词的第一个字母是 b 或 c,则词可按 $h(n-1)$ 种方式完成;若词的第一个字母是 a,则第二个字母是 b 或 c,该词剩下的部分可按 $h(n-2)$ 种方式完成.于是,得差分方程:

$$h(n) = 2h(n-1) + 2h(n-2) \quad (n = 3, 4, \dots)$$

其特征方程为 $\lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0$

特征根为 $\lambda_1 = 1 + \sqrt{3}, \quad \lambda_2 = 1 - \sqrt{3}$

则一般解为

$$h(n) = c_1(1 + \sqrt{3})^n + c_2(1 - \sqrt{3})^n \quad (n = 3, 4, \dots)$$

利用条件 $h(1) = 3, h(2) = 8$, 求参数 c_1, c_2 . 由

$$\begin{cases} c_1(1 + \sqrt{3}) + c_2(1 - \sqrt{3}) = 3 \\ c_1(1 + \sqrt{3}) + c_2(1 - \sqrt{3})^2 = 8 \end{cases}$$

解得 $c_1 = \frac{2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}, \quad c_2 = \frac{-2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

故

$$h(n) = \frac{2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1 + \sqrt{3})^n + \frac{-2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1 - \sqrt{3})^n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

例 3 设初始值为 $h(0) = 1, h(1) = 0, h(2) = 1, h(3) = 2$, 解差分方程

$$h(n) + h(n-1) - 3h(n-2) - 5h(n-3) - 2h(n-4) = 0 \quad (n = 4, 5, \dots)$$

解 该差分方程的特征方程为

$$\lambda^4 + \lambda^3 - 3\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$$

其根为 $-1, -1, -1, 2$. 故一般解中对应于 -1 这个根的部分为

$$h_1(n) = c_1(-1)^n + c_2n(-1)^n + c_3n^2(-1)^n$$

一般解中对应于 2 这个根的部分为

$$h_2(n) = c_42^n$$

故

$$h(n) = h_1(n) + h_2(n) = c_1(-1)^n + c_2n(-1)^n + c_3n^2(-1)^n + c_42^n$$

代入初始条件, 得

$$\begin{cases} c_1 + c_4 = 1 \\ -c_1 - c_2 - c_3 + 2c_4 = 1 \\ c_1 + 2c_2 + 4c_3 + 4c_4 = 1 \\ c_1 + 3c_2 + 9c_3 + 8c_4 = 2 \end{cases}$$

该方程组的惟一解为

$$c_1 = \frac{42}{52}, c_2 = -\frac{29}{52}, c_3 = \frac{7}{52}, c_4 = \frac{10}{52}$$

故该差分方程的一般解为

$$h(n) = \frac{42}{52}(-1)^n - \frac{29}{52}n(-1)^n + \frac{7}{52}n^2(-1)^n + \frac{10}{52}2^n$$

2. 常系数线性差分方程的 Z 变换解法

常系数线性齐次差分方程采用解析解法比较容易,而且对其解的意义也容易理解,但采用这种解法求解常系数线性非齐次差分方程比较繁琐,通常是采用 Z 变换将差分方程变换为代数方程去求解。

设有离散函数(序列) $x(k)$ ($k=0,1,2,\cdots$),则 $x(k)$ 的 Z 变换定义为

$$X(z) = Z[x(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)Z^{-k} \quad (3-3-6)$$

其中 z 是复变量,显然上式右端的级数收敛域是某个圆的外部。

$X(z)$ 的 Z 反变换记作

$$x(k) = Z^{-1}[X(z)] \quad (3-3-7)$$

(1) 几个常用离散函数的 Z 变换

① 单位冲激函数 $\delta(k)$ 的 Z 变换

$$Z[\delta(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(k)Z^{-k} = [1 \times Z^{-k}]_{k=0} = 1 \quad (3-3-8)$$

即单位函数的 Z 变换为 1。

② 单位阶跃函数 $U(A)$ 的 Z 变换

$$Z[U(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)Z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} [1 \times Z^{-k}]$$

即
$$Z[U(k)] = \frac{Z}{Z-1} \quad (|Z| > 1) \quad (3-3-9)$$

③单边指数函数 $f(k) = a^k$ 的 Z 的变换 (a 为不等于 1 的正常数)

(2) Z 变换的性质

①线性

设 $Z[f_1(k)] = F_1(z)$, $Z[f_2(k)] = F_2(z)$, 则

$$Z[af_1(k) \pm bf_2(k)] = aF_1(z) \pm bF_2(z)$$

其中 a, b 为常数.

收敛域为 $F_1(z), F_2(z)$ 的公共收敛域.

②平移性

设 $Z[f(k)] = F(z)$, 则

$$Z[f(k+1)] = Z[F(z) - f(0)]$$

$$Z[f(k+N)] = Z^N \left[F(z) - \sum_{k=0}^{N-1} f(k)Z^{-k} \right]$$

$$Z[f(k-1)] = Z^{-1}[F(z) + f(-1)Z]$$

$$Z[f(k-N)] = Z^{-N} \left[F(z) + \sum_{k=1}^N f(-k)Z^k \right]$$

例 4 求齐次差分方程

$$\begin{cases} x(k+2) + 3x(k+1) + 2x(k) = 0 \\ x(0) = 0, \quad x(1) = 1 \end{cases}$$

的解.

解 令 $Z[x(k)] = X(z)$, 对差分方程取 Z 变换, 得

$$z^2X(z) - z + 3zX(z) + 2X(z) = 0$$

$$X(z) = \frac{z}{z^2 + 3z + 2} = \frac{z}{z+1} - \frac{z}{z+2}$$

对上式取 Z 反变换, 使得差分方程的解为

$$x(k) = (-1)^k - (-2)^k$$

例 5 已知

$$y(k) - y(k-1) - 2y(k-2) = f(k) + 2f(k-2)$$

$$y(-1) = 2, \quad y(-2) = -\frac{1}{2}, \quad f(k) = U(k)$$

求解此方程.

解 设 $Z[y(k)] = Y(z)$, $Z[f(k)] = F(z) = \frac{z}{z-1}$, 对差分方程两端取 Z 变换, 得

$$\begin{aligned} Y(z) - \frac{1}{z} \{ Y(z) - 2z \} - 2 \frac{1}{z^2} \{ Y(z) + 2z + \left(-\frac{1}{2} z^2 \right) \} \\ = F(z) + \frac{2}{z^2} F(z) \end{aligned}$$

移项整理得

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{(2-1) + \frac{4}{z}}{1 - \frac{1}{z} - \frac{2}{z^2}} + \frac{\left(1 + \frac{2}{z^2} \right) F(z)}{1 - \frac{1}{z} - \frac{2}{z^2}} \\ &= \frac{z^2 + 4z}{z^2 - z - 2} + \frac{z^2 + 2}{z^2 - z - 2} F(z) \end{aligned}$$

上式右端第一项 $Y_r(z)$ 与零输入响应对应, 第二项 $Y_f(z)$ 与零状态响应对应.

将 $F(z) = z/(z-1)$ 代入上式并简化, 得

$$Y(z) = \left(\frac{-z}{z+1} + \frac{2z}{z-2} \right) + \left[\frac{-\frac{3}{2}z}{z-1} + \frac{\frac{3}{2}z}{z+1} + \frac{2z}{z-2} \right]$$

所以

$$\begin{aligned} y(k) &= y_r(k) + y_f(k) \\ &= [2 \times 2^k - (-1)^k] + \left[2 \times 2^k - \frac{3}{2} U(k) + \frac{3}{2} (-1)^k \right] \end{aligned}$$

第四节 差分方程模型

一、经济活动中的差分方程模型

1. 市场经济的蛛网模型

随着我国经济的不断开放搞活,市场经济逐渐引入我国的经济体制.本节将根据自由竞争原则讨论在市场经济中供应与需求之间的关系.在自由竞争的市场经济中,商品的价格是由市场上该商品的供应量决定的,供应量越大,价格就越低.另一方面,生产者提供的商品数量又是由该商品的价格决定的,价格上升将刺激生产者的积极性,导致商品生产量的增加;反之,价格降低会影响生产者的积极性,导致商品生产量的下降.

在市场经济中,对每一商品事实上存在着两个不同的函数:

(1)供应函数 $x = f(P)$,它是价格 P 的单增函数,其曲线称为供应曲线.

(2)需求函数 $x = g(P)$,它是价格 P 的单降函数,其曲线称为需求曲线.供应曲线与需求曲线的形状如图 3-13 所示.

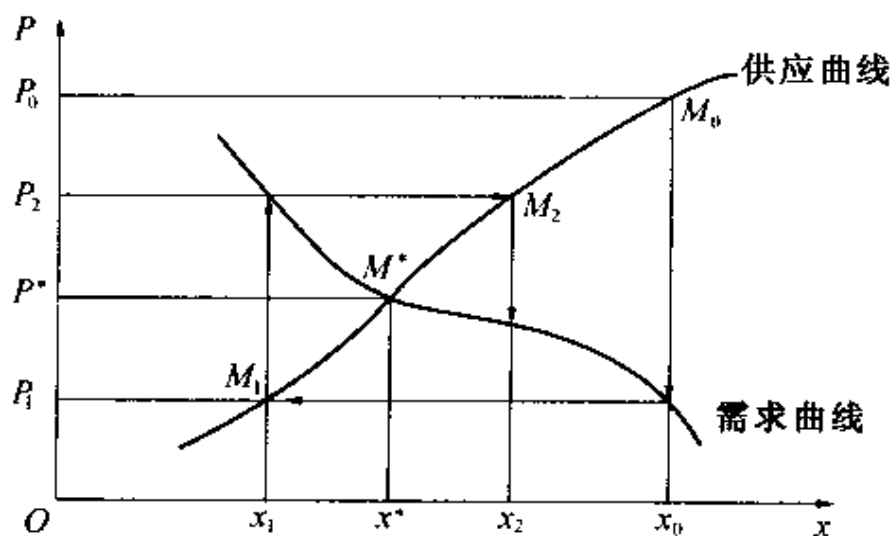


图 3-13

市场经济中供、需曲线的特征决定了生产者提供的商品数量和市场上该商品的价格,一般是波动的.商品生产常常具有一定的周期,例如茶叶总是在春季生产的,水果一般在秋季采摘等等.下一周期生产多少该商品常常要在上一周期(甚至前几个周期)作出决定.对这样的实际问题,用差分方程建立其数学模型来加以研究较为合适.将时间离散化,记 t 时段初市场上的供应量(即上一时段的生产量)为 x_t ,市场上该商品的价格为 P_t ,商品成交的价格由需求曲线决定,即 $P_t = g^{-1}(x_t)$.现在我们来分析随着 t 的增大,市场上 x_t 和 P_t 是怎样变化的.

设 $t=0$ 时生产者根据上一时段的价格 P_0 生产了数量为 x_0 的商品(对应图 3-13 中的 M_0).根据市场经济的规律, x_0 数量的商品只能按价格 P_1 售出.对应价格 P_1 ,生产者只愿生产 x_1 数量的商品(对应图上 M_1 点).数量为 x_1 的商品可按 P_2 价格售出,于是 $t=2$ 时商品生产量为 x_2 (对应图上 M_2 点),……易见,随着 $t \rightarrow +\infty$, M_t 将趋于平衡点 M^* ,即商品量将趋于平衡量 x^* ,价格将趋于平衡价格 P^* .图 3-13 中的箭线反映了在市场经济条件下该商品的供应量与价格的发展趋势.

但是,如果供应曲线和需求曲线呈图 3-14 中的形状,则平衡点 M^* 是不稳定的, M_t 将越来越远离平衡点.即使初始时刻的供应量和价格对应于平衡点,一点微小的波动也会导致市场供求出现越来越大的混乱.

上述用图示法分析市场经济稳定性的讨论在经济学中被称为市场经济的蛛网模型.

图 3-13 和图 3-14 的区别在哪里,如何判定平衡点的稳定性?不难看出,在图 3-13 中平衡点 M^* 处供应曲线的切线斜率大于需求曲线切线斜率的绝对值,而在图 3-14 中情况恰好相反.

现在利用差分方程方法来研究蛛网模型,以验证上述猜测是

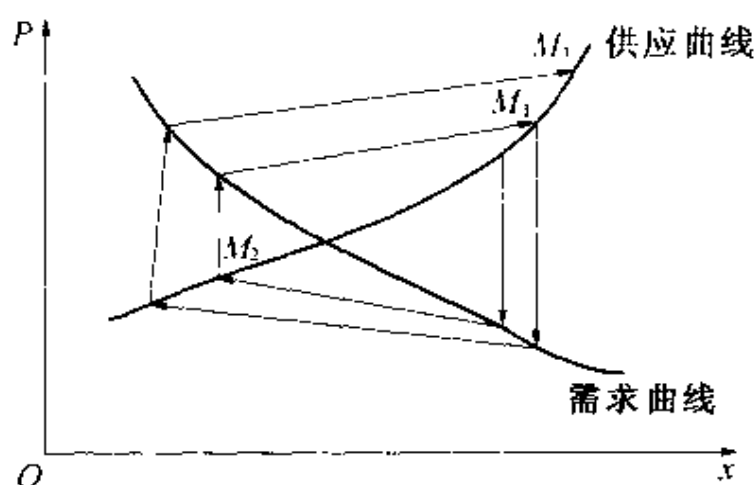


图 3-14

否正确. 我们知道, 平衡点 M^* 是否稳定取决于在 M^* 附近供、需曲线的局部状态. 为此, 用 M^* 处供、需曲线的线性近似来代替它们, 并讨论此线性近似模型中 M^* 的稳定性.

设供应曲线与需求曲线的线性近似分别为

$$P = P^* + a(x - x^*), \quad P = P^* + b(x - x^*)$$

式中 a, b 分别为供应曲线在 M^* 处的切线斜率与需求曲线在 M^* 处切线斜率的绝对值.

根据市场经济的规律, 当供应量为 x_t 时, 现时段的价格 $P_{t+1} = P^* - b(x_t - x^*)$. 对价格 P_{t+1} , 由供应曲线 $P_{t+1} = P^* + a(x_{t+1} - x^*)$ 解得下一时段的商品量

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= x^* + \frac{1}{a}(P_{t+1} - P^*) \\ &= x^* + \frac{1}{a}[P^* - b(x_t - x^*) - P^*] \\ &= x^* - \frac{b}{a}(x_t - x^*) \end{aligned}$$

由此导出一阶差分方程:

$$x_{t+1} + \frac{b}{a}x_t = \left(1 + \frac{b}{a}\right)x^* \quad (3-4-1)$$

此差分方程的解在 $\frac{b}{a} < 1$ 时是稳定的,从而证实了我们的猜测.注意到 a 和 b 的实际含义,上述结果在经济学上可作如下解释:当 $a > b$ 时,顾客需求对价格的敏感度较小(小于生产者的敏感程度),商品供应量和价格会自行调节而逐步趋于稳定;反之,若 $a < b$ (例如对某些生活必需品,商品紧缺易引起顾客抢购),该商品供需市场易造成混乱,政府应采取适当措施避免出现混乱.

如果生产者对市场经济的蛛网模型有所了解,为了减少因价格波动而造成的经济损失,他应当提高自己的管理水平,不应当仅根据上一周期的价格来决定现阶段的生产量.例如可以根据本时段与前一时段价格的平均值来确定生产量.此时,若 t 时段的商品量为 x_t 时,仍有

$$P_{t+1} = P^* - b(x_t - x^*) \quad (3-4-2)$$

但 $t+1$ 时段的商品量则不再为 $x_{t+1} = x^* + \frac{1}{a}(P_{t+1} - P^*)$,而被修正为

$$x_{t+1} = x^* + \frac{1}{a} \left(\frac{P_{t+1} + P_t}{2} - P^* \right) \quad (3-4-3)$$

由式(3-4-2)得

$$P_t = P^* - b(x_{t-1} - x^*) \quad (3-4-4)$$

将式(3-4-2)、(3-4-4)代入式(3-4-3),整理得

$$2x_{t+1} + \frac{b}{a}x_t + \frac{b}{a}x_{t-1} = \left(1 + \frac{b}{a}\right)x^* \quad (3-4-5)$$

式(3-4-5)是一个常系数二阶线性差分方程,特征方程为

$$2\lambda^2 + \frac{b}{a}\lambda + \frac{b}{a} = 0$$

其特征根为

$$\lambda = \frac{-\frac{b}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 8\frac{b}{a}}}{4}$$

记 $r = \frac{b}{a}$. 若 $r^2 - 8r \geq 0$, 则 $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} = |\lambda_2| \geq 2$, 此时差分方程(3-4-5)是不稳定的. 若 $r^2 - 8r < 0$, 此时特征根 λ_1, λ_2 为一对共轭复数, $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{4}(r \pm \sqrt{8r - r^2}i)$, $|\lambda_{1,2}| = \sqrt{\frac{r}{2}}$. 由线性差分方程稳定的条件, 当 $r < 2$ 即 $b < 2a$ 时, (3-4-5)式是稳定的, 从而 M^+ 是稳定的平衡点. 不难发现, 生产者管理方式的这一更动不仅使自己减少了因价格波动而带来的损失, 而且大大消除了市场的不稳定性. 生产者在采取上述方式来确定各时段的生产量后, 如发现市场仍不稳定 ($b \geq 2a$), 可按类似方法试图再改变确定生产量的方式, 此时可得到更高阶的差分方程. 对这些方程稳定性条件的研究很可能会导出进一步稳定市场经济的新措施.

2. 国民经济的稳定性

国民收入的主要来源是生产, 国民收入的开支主要用于消费资金、投入再生产的积累资金及政府用于公共设施的开支. 现在我们用差分方程方法建立一个简略的模型, 粗略地分析一下国民经济的稳定性问题.

记 y_t 为第 t 周期的国民收入, c_t 为第 t 周期的消费资金. c_t 的值决定于前一周期的国民收入, 设 $c_t = ay_{t-1}$ ($0 < a < 1$). 再生产的投资水平 I_t 取决于消费水平的变化量, 设 $I_t = b(c_t - c_{t-1})$ ($b > 0$). 政府用于公共设施的开支在一个不太长的时期内变动不大, 设为常数 G . 故由 $y_t = c_t + I_t + G$ 可得出

$$y_t = ay_{t-1} + b(c_t - c_{t-1}) + G$$

将 $c_t = ay_{t-1}$ 及 $c_{t-1} = ay_{t-2}$ 代入, 得到

$$y_t - a(1+b)y_{t-1} + ab y_{t-2} = G \quad (3-4-6)$$

式(3-4-6)是一个二阶常系数差分方程,其特征方程为

$$\lambda^2 - a(1+b)\lambda + ab = 0$$

相应的特征根为

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}a(1+b) \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2(1+b)^2 - 4ab}$$

讨论 若 $a^2(1+b)^2 - 4ab < 0$, $\lambda_{1,2}$ 为一对共轭复根, 当 $\rho = |\lambda_{1,2}| = \sqrt{ab} < 1$ 时, 差分方程(3-4-6)是稳定的. 若 $a^2(1+b)^2 - 4ab \geq 0$, 易见 $0 < a < 1, ab < 1, a^2(1+b)^2 - 4ab \geq 0$, 不能同时成立. 但当 $ab \geq 1$ 时, 由 $a^2(1+b)^2 \geq 4ab \geq 4$, 可得 $\lambda_1 \geq 1$, 差分方程(3-4-6)是不稳定的.

故差分方程(3-4-6)当且仅当

$$a^2(1+b)^2 < 4ab < 4 \quad (3-4-7)$$

成立时才是稳定的, 式(3-4-7)可用于预报经济发展趋势.

现用待定系数法求方程(3-4-6)的一个特解 \bar{y}_t . 令 $\bar{y}_t = C$, 代入式(3-4-6), 得 $C = \frac{G}{1-a}$. 故当式(3-4-7)成立时, 差分方程(3-4-6)的通解为

$$y_t = \rho^t(c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t) + \frac{G}{1-a}$$

其中 ρ 为 $\lambda_{1,2}$ 的模, ω 为其幅角.

3. 商品销售量预测

在利用差分方程建模研究实际问题时, 常常需要根据统计数据并用最小二乘法来拟合出差分方程的系数. 其系统稳定性讨论要用到代数方程的求根. 对问题的进一步研究又常需考虑到随机因素的影响, 从而用到相应的概率统计知识.

例 1 某商品前 5 年的销售量见表 3-3. 现希望根据前 5 年的统计数据预测第 6 年起该商品在各季度中的销售量.

表 3-3 某商品前 5 年的销售量

年份 销售量 季度	第一年	第二年	第三年	第四年	第五年
1	11	12	13	15	16
2	16	18	20	24	25
3	25	26	27	30	32
4	12	14	15	15	17

从表中可以看出,该商品在前 5 年相同季节里的销售量呈增长趋势,而在同一年中销售量先增后减,第一季度的销售量最小而第三季度的销售量最大.预测该商品以后的销售情况,一种办法是建立经验模型,即根据本例中数据的特征,可以按季度建立 4 个经验公式,分别用来预测以后各年同一季度的销售量.例如,认为第一季度的销售量大体按线性增长,可设销售量 $y_t^{(1)} = at + b$,由

$$a = \frac{\sum_{t=1}^5 ty_t - \frac{1}{5} \left(\sum_{t=1}^5 t \right) \left(\sum_{t=1}^5 y_t \right)}{\sum_{t=1}^5 t^2 - \frac{1}{5} \left(\sum_{t=1}^5 t \right)^2}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{t} \quad \left(\bar{y} = \frac{1}{5} \sum_{t=1}^5 y_t, \bar{t} = \frac{1}{5} \sum_{t=1}^5 t \right)$$

求得

$$a = 1.3, b = 9.5$$

根据 $y_t^{(1)} = 1.3t + 9.5$, 预测第六年起第一季度的销售量为 $y_6^{(1)} = 17.3, y_7^{(1)} = 18.6, \dots$

如认为销售量并非逐年等量增长而是按前一年或前几年同期销售量的一定比例增长的,则可建立相应的差分方程模型.仍以第一季度为例,为简便起见不再引入上标,以 y_t 表示第 t 年第一季

度的销售量,建立形式如下的差分方程:

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} \quad \text{或} \quad y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2}$$

上述差分方程中的系数不一定能使所有统计数据吻合,较为合理的办法是用最小二乘法求一组总体吻合较好的数据.以建立二阶差分方程 $y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2}$ 为例,选取 a_0, a_1, a_2 , 使

$\sum_{t=3}^5 [y_t - (a_0 + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2})]^2$ 最小,解线性方程组:

$$\begin{cases} 3a_0 + \left(\sum_{t=3}^5 y_{t-1}\right)a_1 + \left(\sum_{t=3}^5 y_{t-2}\right)a_2 = \sum_{t=3}^5 y_t \\ \left(\sum_{t=3}^5 y_{t-1}\right)a_0 + \left(\sum_{t=3}^5 y_{t-1}^2\right)a_1 + \left(\sum_{t=3}^5 y_{t-1}y_{t-2}\right)a_2 = \sum_{t=3}^5 y_{t-1}y_t \\ \left(\sum_{t=3}^5 y_{t-2}\right)a_0 + \left(\sum_{t=3}^5 y_{t-1}y_{t-2}\right)a_1 + \left(\sum_{t=3}^5 y_{t-2}^2\right)a_2 = \sum_{t=3}^5 y_{t-2}y_t \end{cases}$$

即求解

$$\begin{cases} 3a_0 + 40a_1 + 36a_2 = 44 \\ 40a_0 + 538a_1 + 483a_2 = 591 \\ 36a_0 + 483a_1 + 434a_2 = 531 \end{cases}$$

得 $a_0 = -8, a_1 = -1, a_2 = 3$, 即所求二阶差分方程为

$$y_t = -8 - y_{t-1} + 3y_{t-2}$$

虽然这一差分方程恰好使所有统计数据吻合,但这只是一个巧合.根据这一方程,可迭代求出以后各年第一季度销售量的预测值 $y_6 = 21, y_7 = 19, \dots$

上述为预测各年第一季度销售量而建立的二阶差分方程,虽然其系数与前5年第一季度的统计数据完全吻合,但用于预测时预测值与事实不符.凭直觉,第6年估计值明显偏高,第7年销售量预测值甚至小于第6年.稍作分析,不难看出,如分别对每一季度建立一差分方程,则根据统计数据拟合出的系数可能会相差甚大,但对同一种商品,这种差异应当是微小的,故应根据统计数据

建立一个共用于各个季度的差分方程. 为此, 将季度编号为 $t = 1, 2, \dots, 20$. 令 $y_t = a_0 + a_1 y_{t-4}$ 或 $y_t = a_0 + a_1 y_{t-4} + a_2 y_{t-8}$ 等, 利用全体数据来拟合, 求拟合得最好的系数. 以二阶差分方程为例, 为求 a_0, a_1, a_2 使得

$$f(a_0, a_1, a_2) = \sum_{t=9}^{20} [y_t - (a_0 + a_1 y_{t-4} + a_2 y_{t-8})]^2$$

最小, 求解线性方程组

$$\begin{cases} 12a_0 + \left(\sum_{t=9}^{20} y_{t-4}\right)a_1 + \left(\sum_{t=9}^{20} y_{t-8}\right)a_2 = \sum_{t=9}^{20} y_t \\ \left(\sum_{t=9}^{20} y_{t-4}\right)a_0 + \left(\sum_{t=9}^{20} y_{t-4}^2\right)a_1 + \left(\sum_{t=9}^{20} y_{t-4}y_{t-8}\right)a_2 = \sum_{t=9}^{20} y_{t-4}y_t \\ \left(\sum_{t=9}^{20} y_{t-8}\right)a_0 + \left(\sum_{t=9}^{20} y_{t-4}y_{t-8}\right)a_1 + \left(\sum_{t=9}^{20} y_{t-8}^2\right)a_2 = \sum_{t=9}^{20} y_{t-8}y_t \end{cases}$$

即求解三元一次方程组

$$\begin{cases} 12a_0 + 229a_1 + 209a_2 = 249 \\ 229a_0 + 479a_1 + 4376a_2 = 5913 \\ 209a_0 + 4376a_1 + 4009a_2 = 4747 \end{cases}$$

解得 $a_0 = 0.6937, a_1 = 0.8737, a_2 = 0.1941$, 故求得二阶差分方程

$$y_t = 0.6937 + 0.8737y_{t-4} + 0.1941y_{t-8} \quad (t \geq 21)$$

根据此式迭代, 可求得第 6 年和第 7 年第一季度销售量的预测值为

$$y_{21} = 17.58, \quad y_{25} = 19.16$$

还是较为可信的.

二、人口问题的差分方程模型

在第二节中, 我们已经讨论了人口问题的常微分方程模型——Malthus 模型和 Verhulst 模型(又称 Logistic 模型). 前者可用于人口增长的短期预测, 后者在作中、长期预测时效果较好.

1. 离散时间的 Logistic 模型

在研究人口或种群数量的实际增长情况时,有时采用离散化的时间变量更为方便.例如,有些种群具有相对较为固定的繁殖期,按时段统计种群数量更接近种群的实际增长方式.人口增长虽无这种特征,但人口普查不可能连续统计,任何方式的普查都只能得到一些离散时刻的人口总量(指较大范围的普查).这样,如何建立人口问题的离散模型的问题就十分自然地提了出来.

建立离散模型的一条直接途径是用差分代替微分.从人口问题的 Logistic 模型

$$\frac{dp}{dt} = ap - \frac{a}{N}p^2 \stackrel{\Delta}{=} ap \left(1 - \frac{p}{N}\right) \quad \left(N = \frac{a}{a}\right)$$

可导出一阶差分方程

$$p_{t+1} - p_t = ap_t \left(1 - \frac{p_t}{N}\right) \quad (3-4-8)$$

式(3-4-8)中右端的因子 $\left(1 - \frac{p_t}{N}\right)$ 常被称为阻尼因子.当 $p_t \ll N$ 时,种群增长接近 Malthus 模型;当 p_t 接近 N 时,这一因子将越来越明显地发挥阻尼作用,若 $p_t < N$,它将使种群增长速度 p_t ,在接近 N 时变得越来越慢;若 $p_t > N$,它将使种群呈负增长.

式(3-4-8)可改写为

$$p_{t+1} = (a+1)p_t \left(1 - \frac{ap_t}{(a+1)N}\right) \quad (3-4-9)$$

记 $b = a+1$, $x_t = \frac{a}{(a+1)N}p_t$, 于是式(3-4-9)又可改写为

$$x_{t+1} = bx_t(1 - x_t) \stackrel{\Delta}{=} f(x_t) \quad (t = 0, 1, 2, \dots) \quad (3-4-10)$$

虽然式(3-4-10)是一个非线性差分方程,但对确定的初值 x_0 , 其后的 x_t 可利用方程确定的递推关系迭代求出.

差分方程(3.4-10)有两个平衡点,即 $x^* = 0$ 和 $x^* = \frac{b-1}{b}$. 类似于微分方程稳定性的讨论,非线性差分方程平衡点的稳定性也可通过对其线性近似方程平衡点稳定性的讨论部分地得到确定 ($|\lambda| = 1$ 时不能确定除外). 例如,对 $x^* = \frac{b-1}{b}$, 讨论 $x_{t+1} = f(x_t)$ 在 x^* 处的线性近似方程

$$x_{t+1} = x^* + f'(x^*)(x_t - x^*)$$

可知,当 $|\lambda| = |f'(x^*)| = |2-b| < 1$ (即 $1 < b < 3$) 时平衡点 $\frac{b-1}{b}$ 是稳定的,此时

$$p_t = \frac{(a+1)N}{a} x_t \rightarrow N \quad \left(x_t \rightarrow x^* = \frac{b-1}{b} = \frac{a}{a+1} \right)$$

若当 $|\lambda| = |2-b| > 1$, 则平衡点 $\frac{b-1}{b}$ 是不稳定的.

2. 考虑年龄结构的 Leslie 模型

对 Logistic 模型的批评意见除了实际统计时常采用离散变化的时间变量外,另一种看法是种群增长不应当只和种群总量有关,也应当和种群的年龄结构有关. 不同年龄的个体具有不同的生育能力和死亡率,这一重要特征没有在 Logistic 模型中反映出来. 基于这一事实,Leslie 在 20 世纪 40 年代建立了一个考虑种群年龄结构的离散模型.

由于男、女性人口(或雌、雄性个体)通常有一定的比例,为了简便起见,建模时可以只考虑女性人数,人口总量可以按比例折算出来. 将女性按年龄划分成 $m+1$ 个组,即 $0, 1, \dots, m$ 组,例如可以 5 岁(或 10 岁)一组划分. 将时间也离散成间隔相同的一个个时段,即 5 年(或 10 年)为一个时段. 记 j 时段年龄在 i 组中的女性人数为 $N(i, j)$, b_i 成为 i 组每一妇女在一个时段中生育女孩的平均数, p_i 为 i 组女性存活一时段到下一时段升入 $i+1$ 组的人数所

占的比例(即死亡率 $d_i = 1 - p_i$), 同时, 设没有人能活到超过 m 组的年龄. 实际上可以这样来理解这一假设, 少量活到超过 m 组的妇女(老寿星)人数可以忽略不计, 她们早已超过了生育期, 对人口总量的影响是微小的而且是暂时性的, 对今后人口的增长和人口的年龄结构不产生任何影响. 假设 b_i 、 p_i 不随时段的变迁而改变, 这一假设在稳定状况下是合理的. 如果研究的时间跨度不太长, 人们的生活水平、整个社会的医疗条件及周围的生活环境没有过多巨大的变化, b_i 、 p_i 事实上差不多是不变的, 其值可通过统计资料估算出来.

根据以上假设可以得出以下 $j+1$ 时段各组人数与 j 时段各组人数之间的转换关系:

$$\begin{cases} N(0, j+1) = b_0 N(0, j) + b_1 N(1, j) + \cdots + b_m N(m, j) \\ N(1, j+1) = p_0 N(0, j) \\ \vdots \\ N(m, j+1) = p_{m-1} N(m-1, j) \end{cases} \quad (3-4-11)$$

显然 $b_i \geq 0, p_i \geq 0$.

简记
$$\mathbf{N}_j = \begin{bmatrix} N(0, j) \\ \vdots \\ N(m, j) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_{j+1} = \begin{bmatrix} N(0, j+1) \\ \vdots \\ N(m, j+1) \end{bmatrix}$$

并引入矩阵

$$\mathbf{N}_j = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{m-1} & b_m \\ p_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_{m-1} & 0 \end{bmatrix}$$

则方程组(3-4-11)可简写成

$$N_{j+1} = AN_j \quad (3-4-12)$$

矩阵 A 被称为 Leslie 矩阵(或射影矩阵). 当矩阵 A 与按年龄组分布的初始种群向量 $N_0 = (N(0,0), N(1,0), \dots, N(m,0))^T$ 一经给定时, 其后任一时段种群按年龄分布的向量即可用式(3-3-12)迭代求得

$$N_{j+1} = AN_j = \dots = A^{j+1}N_0$$

人口(或种群)的增长是否合理不仅仅取决于人口的总量是否过多或过少, 还取决于整个的年龄结构是否合理, 即各年龄段人口数的比例是否恰当. 通过对 Leslie 矩阵 A 的研究, 可以得到许多十分有用的信息.

女性有一定的生育期, 例如 k 组以后的女性不再生育, 则有 $b_k \neq 0, b_{k+1}, \dots, b_m$ 均为零(初始若干个 b_i 也可能为零), 此时 A 可简记为

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{bmatrix}$$

其中 A_1 和 A_3 分别为 $k+1$ 阶和 $m-k$ 阶方阵, 于是

$$A' = \begin{bmatrix} A'_1 & 0 \\ f(A_1, A_2, A_3) & A'_3 \end{bmatrix}$$

因为 A_3 是一个下三角阵且对角元素全为零, 由哈密顿-凯莱定理, 当 $j \geq m-k$ 时, 必有 $A'_3 = 0$, 此时 A' 的最后 $m-k$ 列均为零向量. 其实际意义为: $t=0$ 时已超过育龄的女性, 其目前的存在对若干年后的人口分布已毫无影响, 她对人口发展的贡献将由她在此前所生育的女孩来完成, 这一点当然是十分显然的. $f(A_1, A_2, A_3)$ 为某一用 A_1, A_2, A_3 表达的表示式, A' 的这一子块较为复杂, 并直接反映出 $k+1$ 组以后各组的年龄结构, 对它的讨论可以导出避免社会老龄化的条件.

现在, 我们来研究一下 Leslie 矩阵, 并进而研究时间充分长后

种群的年龄结构及数量上的趋势.

容易看出 A_1 是非奇异的, 因为

$$|A_1| = (-1)^{k-2} p_0 p_1 \cdots p_{k-1} b_k \neq 0$$

事实上, 不难直接验证:

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & p_0^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & p_1^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{b_k} & \frac{-b_0}{p_0 b_k} & \frac{-b_1}{p_1 b_k} & \cdots & \frac{-b_{k-1}}{p_{k-1} b_k} \end{bmatrix}$$

由 A' 的分块结构可知, 对 A_1 及 N_{j+1} 的前 $k+1$ 个分量 $N_j^{(k+1)}, N_{j+1}^{(k+1)} = A_1 N_j^{(k+1)}$ 也成立. 为叙述方便, 不妨仍记 $N_j^{(k+1)}$ 为 N , 并记 A_1 为 A , 简略讨论一下前 $k+1$ 组人口数量的变化情况.

由于人口生育率和死亡率与年龄之间存在着固定的关系, 可以预料, 经过足够多年后, 人口年龄分布应趋于稳定的比率, 即下时段初与本时段初同组人数应当近似地对应成比率, 且各组人数在总人口数中所占的比例应逐渐趋于稳定. 下面介绍 Leslie 矩阵的一些性质, 并证明这些预料是正确的.

定理 1 Leslie 矩阵具有惟一的正特征根 λ_1 , 与之相应的特征向量为

$$\bar{N} = [\lambda_1^k / (p_0 p_1 \cdots p_{k-1}), \lambda_1^{k-1} / (p_1 \cdots p_{k-1}), \cdots, \lambda_1 / p_{k-1}, 1]^T$$

证 直接计算可得 A 的特征多项式为

$$f(\lambda) = \lambda^{k+1} - b_0 \lambda^k - p_0 b_1 \lambda^{k-1} - \cdots - (p_0 p_1 \cdots p_{k-1}) b_k$$

$f(\lambda) = 0$ 等价于

$$f_1(\lambda) = \frac{b_0}{\lambda} + \frac{b_0 b_1}{\lambda^2} + \cdots + \frac{p_0 p_1 \cdots p_{k-1} b_k}{\lambda^{k-1}} = 1 \quad (3-4-13)$$

当 λ 由 $0^+ \rightarrow +\infty$ 时, $f_1(\lambda)$ 由 $+\infty$ 单调下降地趋于零, 由此立即可以看出 A 具有惟一的正特征根 λ_1 (λ_1 被称为种群的固有

增长率,其算法有许多文献介绍).

现求 A 的对应于 λ_1 的特征向量,记 $N = \begin{bmatrix} \bar{n}_0 \\ \vdots \\ \bar{n}_k \end{bmatrix}$, 解线性方程组 $A\bar{N} = \lambda_1 \bar{N}$, 即

$$\begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{k-1} & b_k \\ p_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_{k-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{n}_0 \\ \bar{n}_1 \\ \bar{n}_2 \\ \vdots \\ \bar{n}_k \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} \bar{n}_0 \\ \bar{n}_1 \\ \bar{n}_2 \\ \vdots \\ \bar{n}_k \end{bmatrix} \quad (3-4-14)$$

式(3-4-14)中只有 k 个独立方程,但有 $k+1$ 个未知量,取 $\bar{n}_k = 1$, 可求得

$$\bar{N} = \begin{bmatrix} \lambda_1^k / (p_0 p_1 \cdots p_{k-1}) \\ \lambda_1^{k-1} / (p_1 \cdots p_{k-1}) \\ \vdots \\ \lambda_1 / p_{k-1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3-4-15)$$

不难看出,当且仅当 $\lambda_1 = 1$ 时, $\lim_{j \rightarrow \infty} N_j = \bar{N}$, 人口总量将趋于稳定且各年龄人数在总人口数中所占的比例也将趋于一个定值.

在 λ_1 固定的情况下, \bar{N} 只和 p_i 有关 ($i = 0, 1, \cdots, k-1$). p_i 为 i 组人的存活率,人们总希望它们越大越好,但由于医疗条件和医学水平的限制,在一定时期内,它们基本上是一些常数,这样,事实上人们只能通过控制 b_j 的值(即实行计划生育)来保证 $\lambda_1 = 1$, 从而使人口数趋于稳定.如能实现这一目标,各年龄组人数之比无法更改地趋于一个稳定的比例(除非 p_i 的值改变).

如果将 Leslie 模型用于家禽或家畜预测,情况就有了较大的不同,人们不仅可以控制各年龄段的繁殖率 b_i , 还可以通过宰杀

来控制各年龄段的存活率 p_i . 从而, 人们不仅可以控制该种群的总量, 还能人为地调整各年龄段种群的比例, 使之达到更为理想的状态.

在定理 1 中, 我们证明了 λ_1 是 Leslie 矩阵 A 的惟一正特征根. 实际上, 我们还可以进一步证明 λ_1 必定是 A 的特征方程的单根, 而 A 的基余 $n-1$ 个特征根 $\lambda_i (i=2, 3, \dots, n)$ 均满足

$$|\lambda_i| \leq \lambda_1 \quad (i=2, 3, \dots, n) \quad (3-4-16)$$

定理 2 若 Leslie 矩阵 A 的第一行中至少有两个相邻的 $b_i > 0$, 则式(3-4-16)中严格不等式成立, 即

$$|\lambda_i| < \lambda_1 \quad (i=2, 3, \dots, n)$$

且 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t}{\lambda_1^t} = c\bar{N}$, 其中 c 为某一常数, 由值 b_i, p_i 及 N_0 决定.

定理 2 的条件通常总能满足, 故在 j 充分大时有 $N_j \approx c\lambda_1^j \bar{N}$, 即各年龄组人口的比例总会趋于稳定, 且 $N_{j+1} \approx \lambda_1 N_j$. 若 $\lambda_1 > 1$, 种群量增大; $\lambda_1 < 1$, 种群量减少. 综上所述, 只要先求出 A 的正特征根 λ_1 及其对应的特征向量 \bar{N} , 确定出 c 的值, 依据调查所得的人口初值即可大致了解人口发展的总趋势.

考察式(3-4-13)中的 $f_1(\lambda)$, 记 $R = f_1(1) = b_0 + p_0 b_1 + \dots + (p_0 \cdots p_{k-1}) b_k$, 易见 R 即女性一生所生女孩的平均值. 由于 $f_1(\lambda)$ 的单调性又有

定理 3 $\lambda_1 = 1$ 的充要条件为 $R = 1$.

由于并非每一妇女均能活到足够的年龄并生下 R 个女孩, 为了保障人口平衡, 每一妇女可生子女数可定为某一略大于 2 的数 β (这里假设男女之比为 1:1), β 称为临界生育率. 根据统计资料计算的结果, 中国妇女的临界生育率约为 2.2 左右.

人口迅猛发展使人们日益清醒地意识到, 人类必须控制自身的发展, 正因为如此, 近几十年来人们开始用现代控制理论的观点和方法来研究人口问题, 建立了人口发展的控制模型. 在这方面,

我国一些控制论专家已经做了许多开拓性的工作.

大多数控制论模型都是以偏微分方程形式给出的,由于连续型控制论模型的求解十分困难,也可将其转换成近似的离散型模型,以便较容易利用数值方法来求解.

在控制论中, N_i 称为状态变量.要建立模型,必须找出控制变量.显然,随着人民生活水平的不断提高和医疗卫生条件的不断改善,各年龄组人口的死亡率不断下降、存活率不断提高.要实现对人人口增长的控制只能采取降低人口出生率的办法.

记 j 时段 i 年龄组中女性所占的百分比为 $K_i(j)$, 并设 i_1, \dots, i_m 为育龄女性的年龄组, 则 j 时段新生儿总数为

$$N(0, j+1) = \sum_{i=i_1}^{i_2} b_i(j) K_i(j) N(i, j)$$

$$N(i, j+1) = p_{i-1} N(i-1, j) \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

从长远来看,人口的年龄结构总会趋于逐渐稳定,但这一过程是十分漫长的.由于初始状态的影响,人口年龄结构很可能会长期波动.例如,目前我国人口中青年人所占的比例很大(约占 60%),加上计划生育降低出生率,必然造成若干年后社会人口的严重老化,造成社会负担过重等一系列不得不引起人们注意的社会问题.待这一代人越出 m 组后,又会使人口迅速年轻化而走向另一极端.为了尽可能减小这种年龄结构上的波动,建立人口问题的控制论模型并进而制定人口政策时,人们又引入了一个控制变量 $h(i, j)$, 使得

$$b_i(j) = \beta h(i, j)$$

且
$$\sum_{i=i_1}^{i_2} h(i, j) = 1$$

$h(i, j)$ 称为女性生育模式,用来调整育龄妇女在不同年龄组内生育率的高低.例如,为简单起见,可通过控制结婚年龄和两胎

间的年龄差来接近 $h(i, j)$ 的理想值. 于是, Leslie 模型可作如下形式上的改变

$$N_{j+1} = [A(j) + B(j)]N_j$$

其中

$$A(j) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ p_0(j) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & p_{m-1}(j) & 0 \end{bmatrix}$$

$$B(j) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & b'_{i_1}(j) & \cdots & b'_{i_2}(j) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

在一定时期内, $p_i(j)$ ($i = 0, 1, \dots, m-1$), $\beta(j)$, $h(i, j)$ 和 $K(j)$ 可视为与 j 无关的常数 (例如 $h(i, j)$ 的改变即更改女性生育模式, 意味着人口控制政策的更改), 从而在这一时期内 $A(j)$ 、 $B(j)$ 取常数矩阵 A 、 B .

控制论模型常采取一些评价函数来评判控制模型的效果. 对于人口模型, 可类似连续型模型, 引入以下一些人口指数:

(1) 人口总量 不妨以 $N(j)$ 记 j 时段的人口总量, $N(j) = \sum_{i=1}^m N(i, j)$

(2) 平均年龄 $y(j) = \frac{1}{N(j)} \sum_{i=1}^m iN(i, j)$

(3) 平均寿命 $Q(j) = \frac{1}{N(j)} \sum_{i=0}^m \exp\left[-\sum_{t=0}^t (1-p_t(j))\right]$

其中 $(1-p_i(j))$ 为 j 时段 i 组人的死亡率.

(4) 社会人口老龄化指数 $\omega(j) = y(j)/Q(j)$

(5) 依赖性指数 设 l_1, \dots, l_n 与 l'_1, \dots, l'_n 分别为男性与女性中具有劳动能力的年龄组, 则 j 时段具有劳动能力的人口数 $L(j)$

$$= \sum_{i=l_1}^{l_n} [1 - k_i(j)] N(i, j) + \sum_{i=l'_1}^{l'_n} K_i(j) N(i, j). \text{ 而 } N(j) - L(j)$$

为 j 时段由社会抚养的失去劳动能力的老人或尚未具有劳动能力的未成年人的数量. 定义社会的依赖性指数 $\rho(j) = \frac{N(j) - L(j)}{L(j)}$,

即平均每--劳动者抚养的无劳动能力的人数.

控制论模型要求求出女性个体平均一生应生育的子女数 β , 并设计一个合适的生育模型 $h(i, j)$ 等, 使人口总量及社会的年龄结构尽量合理化及各项人口指数尽可能符合理想. 对于上述离散模型, 可以用数值方法求解, 计算结果可供制定人口政策时参考. 人口指数中有些指数间可能会发生冲突或矛盾. 例如, 要降低人口数 $N(t)$ 就要减少平均生育胎数 β , 从而必导致一段时间内人口老龄化指数 $\omega(j)$ 的增大. 所以, 人口控制是一个相互关联的复杂系统, 调整时需要十分小心. 譬如, 为了调和因降低 $N(j)$ 会导致 $\omega(j)$ 增大的矛盾, 可选取一个适当的联合指标 $J = f(N(j)) + g(\omega(j))$ 作为控制系统的目标函数, 寻找 $\beta(j)$ 与 $h(i, j)$ 的最优解, 联合目标函数 J 根据具体要求可以有多种取法.

三、物理问题的差分方程模型

(1) 问题提出:

在对滤波电路、分压器和长线等装置的物理量变化过程进行分析时, 需要借助它们的等效电路模型——链式电路的数学模型. 图 3-15 表示组成链式电路的第 n 个单元, 它是两端口 T 型网路. 试分析由这些 T 型网络所组成的链式电路, 这里只讨论链式电路上各物理量的稳态变化规律.

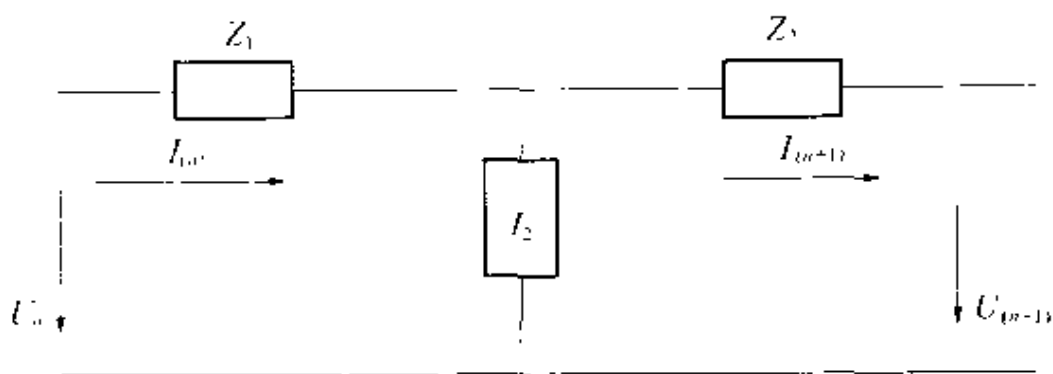


图 3-15

(2) 假设与建模:

假设链式电路的输入为正弦电压(角频率为 ω), 那么电路在稳态工作时, 可以用复数形式(有效值)表示第 n 单元的电电压和电流为

$$U_n = U(n), \quad I_n = I(n)$$

每个单元的阻抗

$$Z_1 = Z_1(j\omega), \quad Z_2 = Z_2(j\omega)$$

考察链式电路第 n 单元的组成, 由电路基本定律便可得到链式电路的数学模型

$$\begin{cases} (z_1 + z_2)I(n) - z_2I(n+1) - U(n) = 0 & (3-4-17) \\ z_2I(n) - (z_1 + z_2)I(n+1) - U(n+1) = 0 & (3-4-18) \end{cases}$$

也就是说, 链式电路在稳态运行下, 它的物理量电压和电流的变化规律可由上面的二元一阶常系数齐次差分方程组描述.

如果从式(3-4-17)和(3-4-18)中消去一个变量, 那么还可以分别得到关于电流和电压的二阶常系数齐次差分方程模型. 将式(3-4-17)改写为它的等价方程式

$$-(z_2 + z_1)I(n+1) + z_2I(n+2) + U(n+1) = 0 \quad (3-4-19)$$

再将式(3-4-18)和式(3-4-19)相加, 便得电流的二阶差分方程模

型

$$I(n+2) - 2\left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right)I(n+1) + I(n) = 0 \quad (3-4-20)$$

同理可得电压的二阶差分方程模型

$$U(n+2) - 2\left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right)U(n+1) + U(n) = 0 \quad (3-4-21)$$

(3)模型求解:

前面得到链式电路的两种形式的数学模型:一阶差分方程组模型和二阶差分方程模型.具体采用哪种模型求解,应根据所给出的边界条件而定.

设 $I(0)$ 及 $U(0)$ 为边界值,即取 $n=0$ 时的 $I(n)$ 及 $U(n)$ 的值,这时应对一阶差分方程组进行求解.现求解如下:

对差分方程组(3-4-17)和(3-4-18)分别取 Z 变换,若令

$$Z[I(n)] = I(z), \quad Z[U(n)] = U(z)$$

则

$$Z[I(n+1)] = zI(z) - zI(0)$$

$$Z[U(n+1)] = zU(z) - zU(0)$$

于是式(3-4-17)和(3-4-18)的 Z 变换式为

$$\begin{cases} (z_1 + z_2)I(z) - z_2 z[I(z) - I(0)] - U(z) = 0 \\ z_2 I(z) - (z_1 + z_2)z[I(z) - I(0)] - z[U(z) - U(0)] = 0 \end{cases}$$

解之,得

$$I(z) = \frac{z(z - \operatorname{ch} x)I(0) - z \frac{U(0)}{z_2}}{z^2 - 2z \operatorname{ch} x + 1} \quad (3-4-22)$$

$$U(z) = \frac{z(z - \operatorname{ch} x)U(0) - z \operatorname{sh}^2 x z_2 I(0)}{z^2 - 2z \operatorname{ch} x + 1} \quad (3-4-23)$$

令

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{z_1}{z_2}, \quad \operatorname{sh} x = \sqrt{\left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right)^2 - 1}$$

这里, x 为常数, $\operatorname{ch} x$ 及 $\operatorname{sh} x$ 为双曲余弦函数及双曲正弦函数.

下面再对式(3-4-22)和(3-4-23)取 Z 反变换. 因为

$$\operatorname{sh} xn = \frac{1}{2}(e^{xn} - e^{-xn})$$

$$Z[\operatorname{sh} xn] = \frac{z \operatorname{sh} x}{z^2 - 2z \operatorname{sh} x + 1}$$

$$\operatorname{ch} xn = \frac{1}{2}(e^{xn} + e^{-xn})$$

$$Z[\operatorname{ch} xn] = \frac{z(z - \operatorname{ch} x)}{z^2 - 2z \operatorname{ch} x + 1}$$

于是, 使得式(3-4-22)和(3-4-23)的 Z 反变换结果为

$$I(n) = I(0) \operatorname{ch} xn - \frac{U(0)}{z_2 \operatorname{sh} x} \operatorname{sh} xn$$

$$= I(0) \operatorname{ch} xn - U(0) Y \operatorname{sh} xn$$

$$U(n) = U(0) \operatorname{ch} xn - I(0) z_2 \operatorname{sh} x \operatorname{sh} xn$$

$$= U(0) \operatorname{ch} xn - I(0) \frac{1}{Y} \operatorname{sh} xn$$

式中
$$Y = \frac{1}{z_2 \operatorname{sh} x} = \frac{1}{z_2 \sqrt{\left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right)^2 - 1}}$$

实际上, 链式电路物理量的变化规律, 不仅与边界条件 $I(0)$ 和 $U(0)$ 有关, 而且与链式电路的终端状态有关. 下面讨论两种特殊情况.

(1) 输出端短路的情况. 设链式电路共分成 N 级 ($n = 1, 2, \dots, N$), 电路输入为正弦电压, 其有效值为 $U(0) = U_0$, 输出端短路, 即 $U(N) = 0$. 因此, 当 $n = N$ 时

$$0 = U_0 \operatorname{ch} xN - I(0) \frac{1}{Y} \operatorname{sh} xN$$

$$I(0) = U_0 Y \frac{\operatorname{ch} x N}{\operatorname{sh} x N} = U_0 Y \cot x N$$

故得第 n 级的电流和电压为

$$I(n) = U_0 Y [\cot x N \operatorname{ch} x n - \operatorname{sh} x n] = U_0 Y \frac{\operatorname{ch} x (N - n)}{\operatorname{sh} x N}$$

$$U(n) = U_0 [\operatorname{ch} x n - \cot x N \operatorname{sh} x n] = U_0 \frac{\operatorname{sh} x (N - n)}{\operatorname{sh} x N}$$

(2) 输出端开路的情况, 即当 $n = N$ 时, $I(N) = 0$. 于是可得

$$I(n) = U_0 Y [\operatorname{th} x N \operatorname{ch} x n - \operatorname{sh} x n] = U_0 Y \frac{\operatorname{sh} x (N - n)}{\operatorname{ch} x N}$$

$$U(n) = U_0 [\operatorname{ch} x n - \operatorname{th} x N \operatorname{sh} x n] = U_0 \frac{\operatorname{ch} x (N - n)}{\operatorname{ch} x N}$$

第四章 运筹学模型

运筹学模型包含十分丰富的内容,其中最基本的是线性规划模型、整数规划模型和动态规划模型.规划模型是一类有着广泛应用的确定的系统优化模型,模型规范,富有美感,建模直接,富于想象,模型求解算法完备,实用面宽广.

第一节 线性规划模型

线性规划主要是研究一组由线性等式或不等式组成的约束条件下的极值问题,可以有效地解决各种规划、生产、运输等科学管理与工程领域方面的问题.它的主要算法是单纯形法.随着电子计算机的发展,数学软件的使用,线性规划模型的应用日益广泛,至今,它已是一个理论完备、方法成熟、解决实际问题非常有效的数学模型.下面从一些具体的实际问题出发讨论研究.

一、线性规划问题及其数学模型

1. 线性规划问题

在生产管理和经营活动中,经常遇到如何合理地利用有限的人力、物力、财力等资源,以便得到最好的经济收益的问题.

问题 1 下料问题.

(1)问题提出:

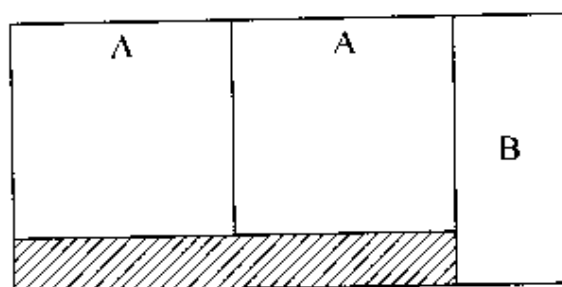
现要用 $100\text{cm} \times 50\text{cm}$ 的板料裁剪出规格分别为 $40\text{cm} \times 40\text{cm}$ 与 $50 \times 20\text{cm}$ 的零件,前者需要 25 件,后者需要 30 件.问如何裁剪,才能最省料?

(2)模型建立:

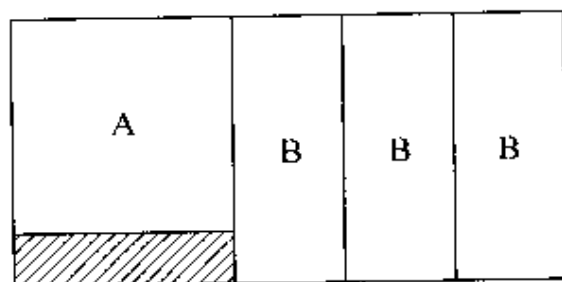
先设计几个裁剪方案.

记 A —— 40×40 ; B —— 50×20

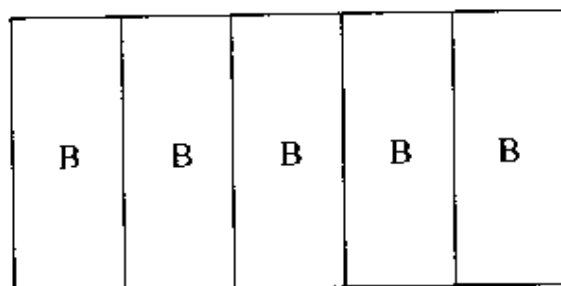
方案 1



方案 2



方案 3



显然,若只用其中一个方案,都不是最省料的方法.最佳方法应是 3 个方案的优化组合.设方案 i 使用原材料 x_i 件($i=1,2,3$),共用原材料 f 件,则根据题意,可用如下数学式子表示:

$$\begin{aligned} \min f &= x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 25 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 30 \\ x_j \geq 0, \text{ 整数 } (j=1,2,3) \end{cases} \end{aligned}$$

这是一个整数线性规划模型.

最优解有 4 个:

x_1	12	11	10	9
x_2	1	3	5	7
x_3	3	2	1	0

$$\min f = 16$$

问题 2 运输问题.

(1)问题提出:

现要从两个仓库(发点)运送库存原棉来满足 3 个纺织厂(收点)的需要,数据如下表,试问在保证各纺织厂的需求都得到满足的条件下应采取哪个运输方案,才能使总运费达到最小?(运价(元/t)如下表)

仓库 i \ 工厂 j	1 号	2 号	3 号	库存量/t
	1 号	2 号	3 号	
1 号	2	1	3	50
2 号	2	2	4	30
需求量/t	40	15	25	

(2)模型建立:

题意即要确定从 i 号仓库运到 j 号工厂的原棉数量,故设 x_{ij} 表示从 i 号仓运到 j 号工厂的原棉数量(t), f 表示总运费,则运输模型为

$$\min f = 2x_{11} + x_{12} + 3x_{13} + 2x_{21} + 2x_{22} + 4x_{23}$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &\leq 50 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &\leq 30 \end{aligned} \right\} \text{运出量受存量约束} \\
 \text{s. t. } & \left\{ \begin{aligned} x_{11} + x_{21} &= 40 \\ x_{12} + x_{22} &= 15 \\ x_{13} + x_{23} &= 25 \end{aligned} \right\} \text{需求量约束} \\
 & x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2; j = 1, 2, 3) \text{ 运输量非负约束}
 \end{aligned}$$

2. 线性规划问题的特点和数学模型

从以上两例可以看出,它们都属于一类优化问题,具有如下共同特点:

①问题都用一组决策变量表示某一方案,这组决策变量的值就代表一个具体的方案,一般这些变量的取值是非负的.

②存在一定的约束条件,这些约束条件可以用一组线性等式或不等式来表示.

③都有一个要求达到的目标,它可以用决策变量的线性函数来表示,这个函数称为目标函数.按问题的不同,要求目标函数实现最大化或最小化.

满足以上 3 个条件的数学模型称为线性规划问题的数学模型,其一般形式为

$$\min(\max) f = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (4-1-1)$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i & (i = 1, 2, \dots, m) \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j & (j = 1, 2, \dots, n) \\ x_{ij} \geq 0 & (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \quad (4-1-2)$$

方程(4-1-1)称为目标函数, $\min f$ 表示求 f 的最小值; 方程(4-1-2)称为约束条件, 通常用英文缩写 s. t. 表示. 倘若表示运输

问题,则其中 a_i 为 i 号发点的存量, b_j 为 j 号收点的需求量, c_{ij} 为从 i 号发点到 j 号收点的单位运价. 特别当 $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$ 时, 存货必须全部运走, 故不等式 $\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i$ 可改为等式 $\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i (i = 1, 2, \dots, m)$.

二、规划问题的图解法与列举法

1. 图解法

该法也称几何解法, 特别适用于两个变量的简单线性规划问题. 这种解法比较简单, 几何直观.

例 1 用图解法求解如下线性规划问题:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \\ & \text{s. t.} \\ & \max f = x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

求 x_1, x_2 .

图解法的求解步骤如下:

(1) 由全部约束条件作图求出可行域

以 x_1 为横轴, x_2 为纵轴建立直角坐标系. 非负条件 $x_1, x_2 \geq 0$ 是指第一象限; 其他约束条件都代表一个半平面, 如约束条件 $x_1 + 3x_2 \leq 3$ 代表以直线 $x_1 + 3x_2 = 3$ 为边界的下半平面.

全部约束条件相应的各半平面的交集, 称为线性规划问题的可行域. 显然, 可行域内各点的坐标都满足全部约束条件, 都可作为这个线性规划问题的解 (这里面包含要求的最优解), 称为可行解. 图 4-1 中阴影区域即为可行域.

(2) 作出一条目标函数的等值线

在这个坐标平面上, 目标函数 $f = x_1 + 2x_2$ 表示以 f 为参数、

$-\frac{1}{2}$ 为斜率的一组平行线:

$$x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + f$$

位于同一直线上的点,具有相同的目标函数值,因而称它为“等值线”.

(3) 平移目标函数的等值线寻找最优点、算出最优解

当 f 值由小变大时,直线

$$x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + f$$

沿其法线方向向右上方平行移动. 当等值线向上移动到图 4-1 中可行域的顶点 $P_2\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 时,使 f 值在可行域的边界上(顶点处)

实现最大化,这就得到了本例的最优解 $\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$, 目标函数最优值

为 $\max f = \frac{5}{2}$.

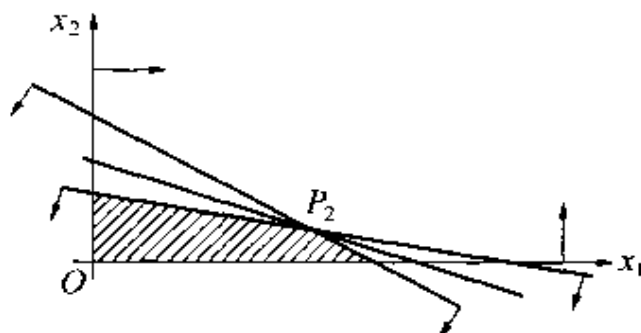


图 4-1

从图解法中可直观地看到,当线性规划问题的可行域非空时,若它是有界的凸多边形(或凸多面体),则线性规划问题存在最优解,而且它一定在可行域的某个顶点得到;若在两个顶点同时得到最优解,则它们连线上的任意一点都是最优解,即有无穷多解.

2. 列举法

由于可行域的顶点个数是有限的(不超过 C_n^m 个),可采用“列举法”找出所有基本可行解,然后一一比较,最终求得最优解.

例 2 用列举法求例 1 的解.

解 可行域的四条边界线为

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 3 & (1) \\ x_1 + x_2 = 2 & (2) \\ x_1 = 0 & (3) \\ x_2 = 0 & (4) \end{cases}$$

两者之间求出交点,共 6 个交点($C_4^2 = 6$),列表 4-1.

表 4-1

方程	交点(x_1, x_2)	是否可行域的顶点	目标函数值 f
(1)、(2)	$\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$	是	$\frac{5}{2}$
(1)、(3)	(0,1)	是	2
(1)、(4)	(3,0)	不是(不满足 $x_1 + x_2 \leq 2$)	—
(2)、(3)	(0,2)	不是(不满足 $x_1 + x_2 \leq 2$)	—
(2)、(4)	(2,0)	是	2
(3)、(4)	(0,0)	是	0

从表 4-1 知,当 $(x_1, x_2) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 时,有最优解,目标函数最优值为 $\max f = \frac{5}{2}$.

三、线性规划问题解的理论

线性规划问题的有效解法是单纯形方法,为了较好地理解单

单纯形方法,我们先来介绍一下线性规划问题的基本理论.

1. 线性规划模型的标准型

实际问题的线性规划模型是多种多样的,在众多的样式中,可规定一种形式为标准型,以便于研究和求解.

(1) 线性规划模型的标准型

在线性规划的标准型中,有 n 个变量、 m 个约束条件,约束条件为等式约束,变量非负,求目标函数的最小值.标准型表达式为

$$\begin{aligned} \min f &= c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{s. t. } &\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \\ &(x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0; \quad b_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, m)) \end{aligned}$$

在标准型中,规定各约束条件的右端项 $b_i \geq 0$,否则等式两端乘以“-1”,其简写形式为

$$\begin{aligned} \min f &= \mathbf{C}^T \mathbf{X} \\ \text{s. t. } &\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B} \\ x_i, b_j \geq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, m) \end{cases} \end{aligned}$$

其中, $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ 称为约束条件的系数矩阵,一般 $n \geq m > 0$; $\mathbf{C} = (c_1, c_2, \cdots, c_n)^T$ 称为价值向量; $\mathbf{B} = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^T$ 称为资源向量; $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 称为决策向量.

(2) 任一模型化为标准型

若原模型要求目标函数实现最大化,即 $\max f = \mathbf{C}^T \mathbf{X}$,只需将目标函数最大化变换为求目标函数的最小化.由于 $\max f = \min(-f)$,所以目标函数可化为 $\max(-f) = -\mathbf{C}^T \mathbf{X}$,这就同标准型的目标函数相一致了.

若原模型中的约束条件为不等式,有两种情况:

①原约束不等式为左端 \leq 右端,则在不等式的左端加上“非负松弛变量”,使不等式化为等式:左端+松弛变量=右端.

②原约束不等式为左端 \geq 右端,则在不等式的左端减去“非负剩余变量”,使不等式化为等式:左端-剩余变量=右端.

松弛变量和剩余变量统称为人工变量.

以上讨论说明,任何形式的数学模型都可化为标准型.举例如下:

例3 将下面的模型

$$\begin{aligned} \max f &= 33x_1 + 24x_2 \\ &\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 32 \\ 6x_1 + 8x_2 \geq 12 \\ 4x_1 - 5x_2 = -8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

化为标准型.

解 先把不等式化为等式:左端加上非负松弛变量 x_3 ,左端减去非负的剩余变量 x_4 ;再用 (-1) 乘等式,把 -8 变为 8 ;最后将目标函数化为求最小化.这时得到标准型为

$$\begin{aligned} \min(-f) &= -33x_1 - 24x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ &\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 32 \\ 6x_1 + 8x_2 - x_4 = 12 \\ -4x_1 + 5x_2 = 8 \\ x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \end{cases} \end{aligned}$$

2. 解的基本概念

考虑线性规划问题的标准形式:

$$\min f = \mathbf{C}^T \mathbf{X} \quad (4-3)$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} \mathbf{AX} = \mathbf{B} \\ x_i, b_j \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m) \end{cases} \quad (4-4)$$

其中 A 的秩为 m ($m \leq n$), 并引入向量 P_j ($j = 1, 2, \dots, n$) 表示约束条件的系数矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 的列向量.

线性规划问题的基本概念如下:

若 X 满足式(4-4), 则 X 称为线性规划问题的可行解. 满足式(4-5)的可行解, 称为最优解. 可行解的全体 $D = \{X | AX = b, X \geq 0\}$ 称为线性规划问题的可行域.

从 A 的 n 列中选出 m 个线性无关的列向量组成一个 m 阶矩阵, 记为 R , R 显然是可逆的, 称 R 为线性规划问题的一个基. 基 R 中的每个列向量 P_j 称为基列(或基向量); 矩阵 A 中除 R 之外的 $n - m$ 列向量, 称为非基列(或非基向量). 与基列 P_j 相对应的变量 x_j , 称为基变量; 与非基列相对应的变量, 称为非基变量.

令非基变量为 0, 由 $AX = B$ 解出的解, 称为关于 R 的基解(或基本解), 基解不一定满足 $X \geq 0$ 的条件. 满足 $X \geq 0$ 条件的基解, 称为基可行解(或基本可行解); 不满足 $X \geq 0$ 条件的基解, 称为非基可行解. 显然, 基解的集合与可行解的集合的交集为基可行解.

3. 基本理论

通过图解法可以看到, 线性规划问题的所有可行解构成的可行域一般是“凸多面体”(“凸多面体”是指多面体内任意两点间的连线全在“多面体”内), 若存在最优解, 则最优解一定在可行域的某顶点得到. 如果将一个线性规划问题的全部基可行解求出后还会发现, 每一个基可行解对应可行域的一个顶点, 即线性规划问题的可行域的每个顶点都与一个基可行解相对应, 反之亦然. 把基可行解与顶点这种对应关系不加证明地延伸, 得出如下结论:

(1) 若线性规划问题有最优解, 则必在某个基可行解上找到. 这就使我们有可能用穷举法来求得线性规划问题的最优解, 即先求所有基可行解, 然后比较目标函数在不同基可行解下的值来确定最优解.

(2)若两个基可行解 x^* 、 x^{**} 都是最优解,则这两个解的凸组合

$$x = \lambda x^* + (1 - \lambda)x^{**} \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

也是最优解,这时最优解有无穷多个.

综上所述,求解线性规划问题的基本思路是:要求最优解,只要在可行域的顶点中寻找即可,而顶点对应的就是基可行解,故只需在有限个基可行解中寻找最优解.

要得到一个基可行解,关键是找一个基,即 m 个线性无关的系数矩阵的列向量.得到一个基可行解后,还要判断它是否是最优解.若是最优解,即停止寻找;否则,必须由这个基可行解换为另一个基可行解(即换基),但要保证新的可行解的目标函数值比原来的更优.这一寻找最优解的迭代方法就是单纯形法.

第二节 整数线性规划模型

一、整数规划问题

一个线性规划问题,如果除要求其可行解满足约束条件外,还要求解的所有分量取整数值,则称之为整数线性规划(integer linear programming,缩写为 ILP);若只限定部分分量取整数值,则称之为混合整数规划(mixed integer linear programming,缩写为 MILP).下面先看实例.

问题 1 货物托运问题.

(1)问题提出:

某厂拟用集装箱托运 A、B 两种货物,每箱的体积、质量、可获利润以及托运所受限制如表 4-2 所示.问两种货物各运多少箱可获得最大利润?

表 4-2 货物托运问题

货物	体积(m ³ /箱)	质量(50kg/箱)	利润(百元/箱)
A	5	2	20
B	4	5	10
托运限制	24	13	

(2)模型建立:

设分别为这两种货物的托运箱数,它们都是非负整数,则该问题的数学模型为

$$\begin{aligned} \max f &= 20x_1 + 10x_2 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 13 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \text{ 取整数} \end{cases} \end{aligned}$$

此模型和线性规划模型的区别仅在于最后的整数条件. 记该整数规划问题为 W, 相应的线性规划问题(即去掉了整数的约束条件)为 M. 则

M 的最优解为 $x_1 = 4.8, x_2 = 0, \max f = 96$

W 的最优解为 $x_1 = 4, x_2 = 1, \max f = 90$

显然, 整数规划问题的最优解不能简单从线性规划问题的最优解取(凑)整得到.

二、整数规划的解法

求解整数规划问题, 在变量较少时, 相应线性规划的可行域内所含的整数点较少, 可以用“穷举法”来求解, 即在可行域中求出所有的整数点, 比较这些点处的函数值, 就可以求出最优解. 但对于变量较多的大型问题, 由于可行的整数解组合数非常大, 穷举法是不可取的. 目前求解整数规划问题的方法主要有分支定界法和割

平面法两种.割平面法似乎在数学上更有内容,然而实际效果并不理想,因此,这里只对其基本思想做一大致介绍.现在有很多程序包是按分支定界法编制的,在使用这些程序包时,要求对所处理的问题本身有较深刻的理解,这直接关系到求解效率甚至求解能否成功,关于这一点,下文中还会说明,此外着重指出的是:整数线性规划的求解比起线性规划问题要困难得多.原因在于整数线性规划实际是“非线性”的.

1. 割平面法

割平面法可用于求解一般的整数规划问题.这一方法的基本思想如下:计算时首先不考虑整数约束,像对待一般线性规划问题一样地用单纯形法进行求解,如果所得到的最优解恰好满足整数条件,那么问题已解决;如果得到的是非整数解,则考虑由所得到的解增加额外的约束,将相应的非整数顶点从可行解区域中除去,使可行解区域缩小,再次利用单纯形法计算一个新的解,这个新解可能仍然不满足整数条件,那么再次增加额外约束,重复以上步骤.如此一步步进行,最后或者得到了所要的最优解,或者表明问题无解.

2. 分支定界法

分支定界法本质上是穷举法,思想极为简单,但该方法实际效果较好,故为很多程序包所使用,它也可用于求解混合整数规划.若与割平面方法相比较,分支定界法更具有实际意义.

记待解的整数规划问题为 W , 相应的线性规划问题(即去掉了整数的约束条件)为 M , 整数规划的最优解为 z^* .

分支定界法的基本思想是:

(1)先不考虑整数条件,即先求解相应的线性规划 M 的最优解.若得到的是整数解,则问题得到解决;否则,这个非整数解必是原整数规划问题 W 的最优解 z^* 的上界,记为 \bar{z} ;而 W 的任一整数解,可以看做 z^* 的一个下界,记为 \underline{z} .

(2)从得到的 M 的最优解中,任选一个非整数的变量 x_k ,在 M 中增加约束条件 $x_k \leq [x_k]$,构成一个新的线性规划问题 M_1 ,它实际上是 M 的一个分支;在 M 中增加另一约束条件 $x_k \geq [x_k]$,又得到一个 M 的分支 M_2 ,分别求出 M_1 和 M_2 的最优解,判断这两个解是否是整数解,若是,问题得到解决;若不是,调整 \bar{z} 和 \underline{z} ,将它们再分支,直到求出最优整数解为止.分支定界法实质是将 B 的可行域分成若干区域(称为分支),逐步减小 \bar{z} 和增大 \underline{z} ,最终求出 z^* .

3. 用分支定界法求解整数规划问题

下面结合一个实例,说明分支定界法的具体步骤.

已知整数规划问题 A:

$$\begin{aligned} \max z &= 40x_1 + 90x_2 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 \leq 56 \\ 7x_1 + 20x_2 \leq 70 \\ x_1, x_2 \geq 0 (x_1, x_2 \text{ 都是整数}) \end{cases} \end{aligned}$$

求解步骤如下:

步骤 1 首先给出与 A 相应的线性规划问题 B:

$$\begin{aligned} \max z &= 40x_1 + 90x_2 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 \leq 56 \\ 7x_1 + 20x_2 \leq 70 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

步骤 2 解线性规划问题 B(可行域见图 4-2),得最优解

$$x_1 = 4.81 \quad x_2 = 1.82 \quad z_0 = 356$$

它不符合解为整数的条件.

步骤 3 确定 z^* 的上界 \bar{z} 和下界 \underline{z} .

由于整数规划问题 A 的最优解 z^* 不会比 B 的解 z_0 更大,故取 z^* 的初始上界 $\bar{z} = z_0$;又 $x_1 = 0, x_2 = 0$ 显然是 A 的整数可行

解,这时 $z=0$, z^* 必不小于它,取 z^* 的初始下界 $\underline{z}=0$,即 $0 \leq z \leq \bar{z} = 356$.

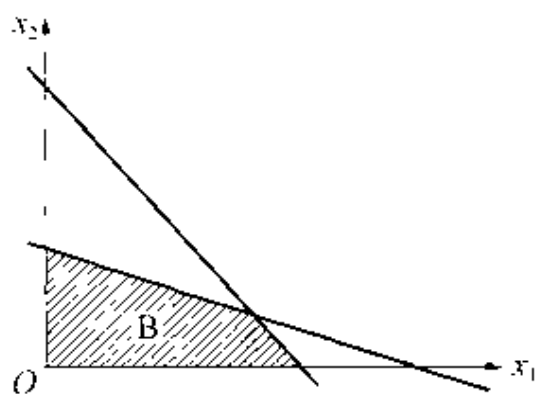


图 4-2 B 的可行域

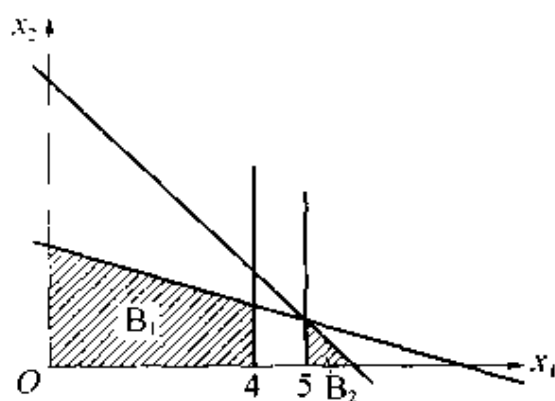


图 4-3 B 分解为 B_1 和 B_2

步骤 4 将线性规划问题 B 分为两支.

在 B 的最优解中,任选一个非整数变量,如 $x_1 = 4.81$.因 x_1 的最优整数解只可能是 $x_1 \leq 4$ 或 $x_1 \geq 5$,故在 B 中分别增加约束条件: B 加上约束条件 $x_1 \leq 4$,记为 B_1 ; B 加上约束条件 $x_1 \geq 5$,记为 B_2 .这样,将 B 分解成了两个子问题 B_1 和 B_2 (即两支),如图 4-3 所示.

步骤 5 分别求解上述一对分支 B_1, B_2 .

解线性规划问题 B_1, B_2 ,得到的最优解为

问题 B_1 : $x_1 = 4, x_2 = 2.1, z_1 = 349$

问题 B_2 : $x_1 = 5, x_2 = 1.57, z_2 = 341$ (取 $\bar{z} = z_1 = 349, \underline{z} = 0$)
可见,仍未得到整数解.一般而言,求解某个线性规划分支 B_i 时,可能出现以下几种情况:

①无可行解,则该分支已经查明,不再由此继续分支.

②得到的最优解是整数解,则该分支已经查明,不再由此继续分支.

③得到的最优解不是整数解,此时,若其目标函数值 $z < \underline{z}$,则该分支不可能含有原问题的最优解,不再由此继续分支;若 $z > \underline{z}$,则仍需由此继续分支.

当一分支都需要继续分支时,对极大化问题而言,一般将目标函数值较小的一支暂且放下,留待以后处理,而沿另一分支继续分解下去,直到搜寻完毕.然后,可将留待处理的那些分支,按照“后进先出”的原则,依次进行搜寻.

步骤6 修改原来的上、下界.

下界 \underline{z} 是迄今为止最好的整数可行解相应的目标函数值.因此,每求出一个新的整数可行解后,都要把新的目标函数值 z 与原来的下界 \underline{z} 比较,若新的 z 值更大些,则以此值作为新的下界 \underline{z} .在整个分支定界法的求解过程中,下界 \underline{z} 的值不断增大.

上界 \bar{z} 是迄今为止所有未被分支的线性规划问题 B_i 中目标函数值最大的一个.每做一次分支,都缩小了可行域(去掉了不含整数解的部分),新的上界 \bar{z} 应该小于或等于原来的上界.在整个分支定界法的求解过程中,不断修改上界,使上界 \bar{z} 的值不断减小.

由于 B_1, B_2 的目标函数值分别为 349 和 341,且都不是整数解,故修改 \bar{z} 为 349, \underline{z} 不变.

步骤7 由于没有求出最优整数解,按步骤5中情况③原则,继续分支.

因 $z_1 > z_2$,故先分解 B_1 为两支.增加条件 $x_2 \leq 2$ 者,记为问题 B_3 ;增加条件 $x_2 \geq 3$ 者,记为问题 B_4 .再进行求解得

问题 B_3 : $x_1 = 4, x_2 = 2, z_3 = 340$

问题 B_4 : $x_1 = 1.42, x_2 = 3, z_4 = 327$ (取 $\bar{z} = z_2 = 341, \underline{z} = z_3 = 340$)

由于 B_3 的解已经是整数,无需再分解;又 $z_3 = 340$,可取 $\underline{z} = z_3 = 340$ (见步骤6);又 $z_4 = 327 < \underline{z}$,故 B_4 中无最优整数解(舍

去);现在未被分支的问题只有 B_2 , 故取 $\bar{z} = z_2 = 341$. 再分解 B_2 , 得 B_5 (加条件 $z_2 \leq 1$) 和 B_6 (加条件 $z_2 \geq 2$); 解得 $z_5 = 308 < \bar{z}$ (舍去), B_6 无可行解; 于是可以断定 $z = z_3 = 340$ 为最优整数解. 综上所述, A 的最优解为 $x_1 = 4, x_2 = 2, z^* = 340$. 整个求解过程见图 4-4.

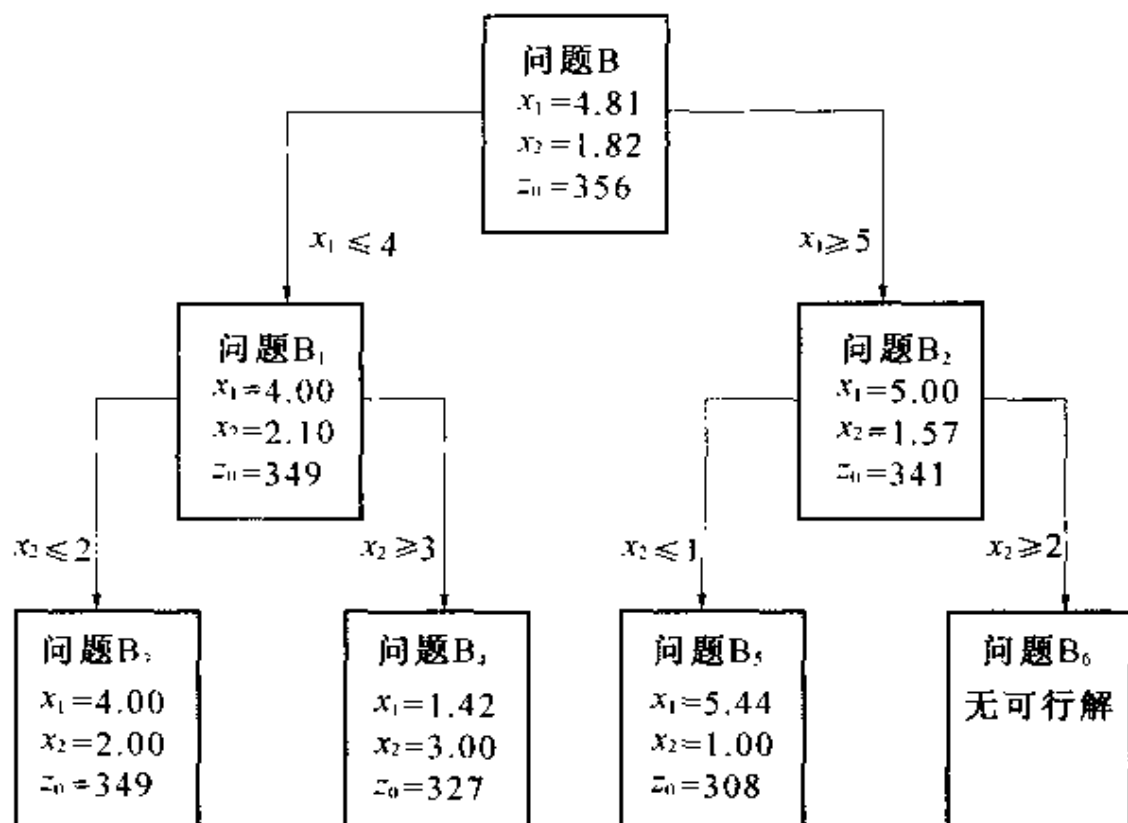


图 4-4 分支定界法的求解过程

由此可将分支定界法步骤归纳为:

(1) 分支准备工作

① 求解问题 B

可能出现以下几种情况:

- I. B 无可行解, 这时没有可行解, 则停止计算.
- II. B 有最优解, 则符合问题 A 的整数条件, B 的最优解即为 A 的最优解, 则停止计算.
- III. B 有最优解, 但不符合问题 A 的整数条件, 记它的目标函

数值 \underline{z} , 并记为初始下界. 以 z 表示问题 A 的整数条件, 记它的目标函数值为 z^* .

②用观察法找问题 A 的一个初始整数可行解.

一般初始整数可行解可取 $x_j = 0 (j = 1, 2, \dots, n)$, 求得其目标函数值, 并记为初始下界 \underline{z} , 以 z^* 表示问题 A 的最优目标函数值. 这时

$$\underline{z} \leq z^* \leq \bar{z}$$

(2) 进行迭代计算:

①分支和定界

I. 分支: 在 B 的最优解中任选一个不符合整数条件的变量 x_j , 其值为 b_j , 以 $[b_j]$ 表示 b_j 取整, 构造两个约束条件 $x_j \leq [b_j]$ 和 $x_j \geq [b_j] + 1$; 将这两个约束条件分别加入 B, 得到两个后继问题 B_1 和 B_2 , 不考虑整数条件求解这两个后继问题.

II. 定界: 以每个后继问题为一分支, 标明求解的结果. 在所有需要继续分支的后继问题的结果中, 找出目标函数值最大者作为新的上界 \bar{z} . 从解已符合整数条件的各分支中, 找出目标函数最大者作为新的下界 \underline{z} , 若无新的整数解, \underline{z} 不变.

②比较与剪枝

各分支的最优目标函数值 z 中, 若有小于 \underline{z} 者, 则剪掉这枝 (用 \times 表示), 即以后不再考虑; 若有大于 \bar{z} 者, 且不符合整数条件, 则重复第一步, 进行分支, 一直到最后得到 $z^* = \bar{z} = \underline{z}$ 为止. 这样就得到了最优整数解 $x_j^* (j = 1, 2, \dots, n)$ 和 z^* .

用分支定界法解整数规划问题有很大的灵活性, 计算能否成功以及计算的效率在很大程度上取决于对问题的处理方式. 特别需要指出的是: 分支变量的选择顺序对工作量的影响极大, 因而, 要根据对问题本身的理解, 优先考虑那些“关键”的变量分支; 在求极大的问题中, 就是要优先考虑那些使目标函数值有显著增长的变量分支, 尽早得到一个好的估计, 也起同样作用. 因而, 在使用分

支定界法时,要求使用者对问题有较深刻的理解与把握.另一方面,分支定界法条理比较清楚,易于编程,实行计算机运算,节省大量的计算工作量.

三、0-1 型整数规划及其解法

1.0-1 型整数规划

0-1 型整数规划是整数规划中的特殊情形,它的变量 x_i 仅取 0 或者 1.这时, x_i 又称为 0-1 变量.现实生活中的很多问题,如果能灵活应用 0-1 变量,问题就会变得简单化,比如常见的指(分)派问题.所谓指派问题,数学上是这样定义的:集合 T 与 S 有相同数量的元素,与 T 中的任一个元素 i 和 S 中的任一个元素 j 相对应,有一个非负实数 c_{ij} (称为费用),要求在 T 与 S 之间建立一个一一对应关系,使与这一对应相应的费用之和达到最小(或最大).利用 0-1 整数规划求解上述指派问题是不难的,只需灵活定义 0-1 变量:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当指定 } T \text{ 的元 } i \text{ 与 } S \text{ 的元 } j \text{ 相对应} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

由此问题可以表述为:求目标函数 $\sum_i c_{ij}x_{ij}$ 在约束条件 $\sum_j x_{ij} = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $\sum_i x_{ij} = 1$ ($j = 1, 2, \dots, n$) 下的极小(或极大).事实上,上述的数学提法包括了范围广泛的实际问题.

问题 1 选址问题.

(1)问题提出:

某地区有 m 座煤矿, $i^{\#}$ 矿每年产量为 a_i t, 现有火力发电厂一个,每年需用煤 b_0 t, 每年运行的固定费用(包括折旧费,但不包括煤的运费)为 h_0 元.现规划新建一个发电厂, m 座煤矿每年开采的原煤将全部供给这两个电厂发电用.现有 n 个备选的厂址.若在 $j^{\#}$ 备选厂址建电厂,每年运行的固定费用为 h_j 元,每吨原煤

从 $i^{\#}$ 矿运送到 $j^{\#}$ 备选厂址的运费为 c_{ij} 元 ($i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$). 每吨原煤从 $i^{\#}$ 矿运送到原有电厂的运费为 c_{i0} ($i = 1, 2, \dots, m$). 试问:

①应把新电厂厂址选在何处

② m 座煤矿开采的原煤应如何分配给两个电厂

才能使每年的总费用(电厂运行的固定费用与原煤运费之和)为最小?

(2)模型的建立:

①变量的设置

为了解决问题①,我们使用 0-1 变量

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{选中 } j^{\#} \text{ 备选厂址} \\ 0 & \text{否则} \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

为了解决问题②,设从 $i^{\#}$ 煤矿运到 $j^{\#}$ 备选的厂址的运量为 x_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m, j = 0, 1, 2, \dots, n$)

②目标函数的表达

总运费

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^n c_{ij} x_{ij} \quad (\text{对不被选中的备选厂址运量 } x_{ij}, \text{ 将由约束条件限制为 } 0)$$

固定费用

$$h_0 + \sum_{j=1}^n h_j y_j$$

每年总费用

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^n h_j y_j + h_0$$

③约束条件的表达

(i) 煤矿产量约束

$$\sum_{j=0}^n x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

(ii) 旧电厂用煤量约束

$$\sum_{i=1}^m x_{i0} = b_0$$

(iii) 新电厂用煤量约束

记 $b = \sum_{i=1}^m a_i - b_0$, 当 $j^{\#}$ 备选厂址被选中时 $\sum_{i=1}^m x_{ij} = b$, 当 $j^{\#}$ 备选厂址没被选中时 $\sum_{i=1}^m x_{ij} = 0$, 综合表达为

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = by_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

(iv) 选址约束

由于只选一个厂址, 所以 $\sum_{j=1}^n y_j = 1$.

(v) 非负及整数约束

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 0, 1, 2, \dots, n)$$

$$y_j = 0 \text{ 或 } 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

综合得数学规划模型:

$$\begin{aligned} \min z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^n h_j y_j + h_0 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} \sum_{j=0}^n x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ \sum_{i=1}^m x_{i0} = b_0 \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = by_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\ \sum_{j=1}^n y_j = 1 \\ x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 0, 1, \dots, n) \\ y_j = 0, 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \end{aligned}$$

问题 2 布点问题.

(1)问题提出:

某市有 6 个区,每个区都可建消防站,为了节省开支,市政府希望设置的消防站最少,但必须保证在该市任何地区发生火警时,消防车能在 15min 内赶到现场.假定各区的消防站要建的话,就建在区的中心,根据实地测量,各区之间消防车行使的最长时间如下表:(单位:min)

	1 区	2 区	3 区	4 区	5 区	6 区
1 区	4	10	16	28	27	20
2 区	10	5	24	32	17	10
3 区	16	24	4	12	27	21
4 区	28	32	12	5	15	25
5 区	27	17	27	15	3	14
6 区	20	10	21	25	14	6

请为该市制定一个设置消防站的最节省的计划,建模并求解.

(2)模型建立:

本题实际上是要确定各个区是否要建立消防站,使其既满足要求,又最节省.这自然可引入 0-1 变量,故设

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{当在第 } j \text{ 区建消防站时} \\ 0, & \text{当不在第 } j \text{ 区建消防站时} \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, 6)$$

目标是 $f = \sum_{j=1}^6 x_j$ 最少. 以下考虑约束条件.

若 1 区发生火警,按照“消防车要在 15min 内赶到现场”的要求,则 1 区和 2 区至少应有一个消防站,即 $x_1 + x_2 \geq 1$,同理得

$$x_1 + x_2 + x_6 \geq 1, x_3 + x_4 \geq 1, x_3 + x_4 + x_5 \geq 1,$$

$$x_4 + x_5 + x_6 \geq 1, x_2 + x_5 + x_6 \geq 1$$

从而得模型为

$$\begin{aligned} \min f &= \sum_{j=1}^6 x_j \\ \text{s. t. } &\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_6 \geq 1 \\ x_3 + x_4 \geq 1 \\ x_3 + x_4 + x_5 \geq 1 \\ x_4 + x_5 + x_6 \geq 1 \\ x_2 + x_5 + x_6 \geq 1 \\ x_j = 0, 1 \quad (j = 1, 2, \dots, 6) \end{cases} \end{aligned}$$

再仔细观察知,若满足第一、三个约束条件,则必然满足第二、四个约束条件,故后者是多余的,可省略,从而化简得

$$\begin{aligned} \min f &= \sum_{j=1}^6 x_j \\ \text{s. t. } &\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_3 + x_4 \geq 1 \\ x_4 + x_5 + x_6 \geq 1 \\ x_2 + x_5 + x_6 \geq 1 \\ x_j = 0, 1 \quad (j = 1, 2, \dots, 6) \end{cases} \end{aligned}$$

此模型当然可用软件求解,但由于比较简单,故可直接试算.若要求只有一个 $x_j = 1$,则显然不可行;若要求只有两个 $x_j = 1$,则有惟一可行解 $x_2 = x_4 = 1, x_1 = x_3 = x_5 = x_6 = 0$,故这就是最优解.即只需在 2 区和 4 区建立消防站.

2.0-1 型整数规划的解法

求解 0-1 型整数规划问题,比较容易想到穷举法,就是检查变量取值为 0 或者 1 的每一种组合,比较目标函数值以求得最优解.这就需要检查变量取值的 2^n 个组合.当变量个数较大时,这几乎

是不可能的. 因此需要设计一种方法, 只检查变量取值组合的一部分, 就能求出问题的最优解. 这种方法称为隐枚举法. 当然有些问题应用隐枚举法并不合适. 下面举例说明用于解 0-1 型整数规划的隐枚举法.

求解 0-1 型整数规划问题:

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \\ \text{s. t. } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2 & (1) \\ x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 4 & (2) \\ x_1 + x_2 \leq 3 & (3) \\ 4x_2 + x_3 \leq 6 & (4) \\ x_i = 0 \text{ 或 } 1 (i = 1, 2, 3) \end{cases} \end{aligned}$$

求解步骤如下:

步骤 1 先通过试探的方法找到一个可行解.

容易看出 $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0)$ 就是适合于条件(1)至(4)的可行解, 其目标函数值 $z = 3$.

步骤 2 在原问题的基础上, 增加过滤条件.

对于求目标函数最大化问题, 我们当然希望 $z \geq 3$, 于是增加一个约束条件:

$$3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \geq 3 \quad (0)$$

该条件称为过滤条件, 并把过滤条件不等式始终记为(0)式.

步骤 3 穷举法求解.

将 5 个约束条件按(0)至(4)的顺序排好, 目的是先检查过滤是否满足. 按穷举法的思想, 依次将各种变量组合代入约束条件中进行检查, 如果某一约束条件不满足, 该式以下的条件就不必再检查, 这样就减少了计算次数.

在计算过程中, 每找到一个可行解, 就用该解的目标函数值 z 去替换式(0)右边的值, 因为小于(0)式右边值的可行解已被滤去,

找到的可行解一定是目前为止的最大解. 这样, (0)式右边的值就是迄今为止目标函数值的最大者.

当各种变量组合检查完毕后, (0)式右边的值所对应的解就是最优解.

具体的计算过程见表 4-3, 最优解为 $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 1)$, $\max z = 8$.

表 4-3 0-1 型整数规划的求解过程

点 (x_1, x_2, x_3)	约束条件					目标函数 f
	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	
	过滤条件(0) $3x_1^2 - 2x_2 + 5x_3 \geq 3$					3
(0,0,0)	×					
(0,0,1)	√	√	√	√	√	5
	过滤条件(0) $3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \geq 5$					
(0,1,0)	×					
(0,1,1)	×					
(1,0,0)	×					
(1,0,1)	√	√	√	√	√	8
	过滤条件(0) $3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \geq 8$					
(1,1,0)	×					
(1,1,1)	×					

注: 表中“×”号表示相应的约束条件不满足, “√”号表示相应的约束条件满足.

问题 3 配套问题.

(1) 问题提出:

设有 n 个车间要生产 m 种产品, 第 j 车间每天生产第 i 种产品至多 a_{ij} 件 (即全天只安排生产产品 i 而不安排生产其他产品时的最大产量), 假设这 m 种产品每种一件配成一套, 问如何安排生产任务才能使生产出的成套产品最多? ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$)

(2) 模型建立:

方法一

设 x_{ij} 为车间 j 安排用于生产产品 i 的时间(占全天的比例); Z 为每天生产的成套产品数目; 则 $a_{ij}x_{ij}$ 为车间 j 每天生产产品 i 的数目(例如, 车间 2 每天至多生产某产品 6 件, 若安排 $1/3$ 天时间去生产, 则可产出 2 件), $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_{ij}$ 为每天全厂产出产品 i 的总量, 则有模型

$$\begin{aligned} & \max Z \\ (*) \quad \text{s. t.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_{ij} \geq Z & (i = 1, 2, \dots, m) \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq 1 & (j = 1, 2, \dots, n) \\ x_{ij} \geq 0 & (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n) \\ Z \geq 0 \quad \text{整数} \end{cases} \end{aligned}$$

其中常数 1 表示 1 天.

注: ①此模型着重考虑安排生产的时间;

②从实际情况考虑, 安排生产的时间必须是每件产品耗用生产时间的整数倍才合适.

例如, 每 3min 生产一件产品, 安排 5min, 也只能生产 1 件, 不能认为生产了 1.67 件. 模型(*)没有考虑到这些因素, 故是不合适的.

方法二——改进(*)

设 $\frac{1}{a_{ij}}$ 为车间 j 生产每件产品 i 的耗用时间(天). 从以上分析

$$x_{ij} = ? \left(\frac{1}{a_{ij}} \right) \quad (? \text{是非负整数})$$

令 $y_{ij} = a_{ij}x_{ij}$, y_{ij} 是非负整数, 表示车间 j 每天生产产品 i 的数目, 代入(*)后得

$$\begin{aligned}
 & \max Z \\
 (\ast \ast) \quad \text{s. t.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n y_{ij} \geq Z & (i = 1, 2, \dots, m) \\ \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{a_{ij}} \right) y_{ij} \leq 1 & (j = 1, 2, \dots, n) \\ y_{ij} \geq 0 \quad \text{整数} & (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n) \\ Z \geq 0 \quad \text{整数} \end{cases}
 \end{aligned}$$

这是一个整数线性规划模型.

注:此模型着重考虑安排生产产品的数目.

例4 a_{ij} 如下:

	车间 1	车间 2	车间 3
产品 A	3	5	6
产品 B	7	4	5
产品 C	4	6	8

解 设 $y_{11}, y_{12}, y_{13}, y_{21}, y_{22}, y_{23}, y_{31}, y_{32}, y_{33}, z$ 分别为 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}$, 则模型变为

$$\begin{aligned}
 & \max f = x_{10} \\
 \text{s. t.} \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_{10} \geq 0 \\ x_4 + x_5 + x_6 - x_{10} \geq 0 \\ x_7 + x_8 + x_9 - x_{10} \geq 0 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{7}x_4 + \frac{1}{4}x_7 \leq 1 \\ \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{4}x_5 + \frac{1}{6}x_8 \leq 1 \\ \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{5}x_6 + \frac{1}{8}x_9 \leq 1 \\ x_j \geq 0 \quad \text{整数} (j = 1, 2, \dots, 10) \end{cases}
 \end{aligned}$$

解出 $x = (0, 5, 1, 6, 0, 0, 0, 0, 6, 6)$

即车间 1 生产 6 件 B, 车间 2 生产 5 件 A, 车间 3 生产 1 件 A 与 6 件 C, 最后给出 6 套产品.

第三节 非线性规划模型

一、非线性规划问题

线性规划和整数规划的目标函数和约束条件都是自变量的线性函数,但在实践中还有大量的问题,其目标函数或约束条件很难用线性函数来表达.如果目标函数或约束条件中有非线性函数,则称这种规划问题为非线性规划问题.

让我们先看两个实例.

问题 1 容器设计问题.

(1)问题提出:

某公司专门生产储藏用容器,订货合同要求该公司制造一种敞口的长方体容器,容积恰好为 12m^3 ,该种容器的底必须为正方形,容器总质量不超过 68kg .已知用作容器四壁的材料为 $10\text{元}/\text{m}^2$,重 3kg ;用作容器底的材料 $20\text{元}/\text{m}^2$,重 2kg .试问制造该容器所需的最小费用是多少?

(2)模型建立:

设该容器的底边长和高分别为 $x_1\text{m}$ 、 $x_2\text{m}$,则问题的数学模型为

$$\min f(X) = 40x_1x_2 + 20x_1^2 (\text{容器的费用})$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} x_1^2x_2 = 12 \\ 12x_1x_2 + 2x_1^2 \leq 68 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

问题2 营业计划的制定.

(1)问题提出:

某公司经营两种设备,第一种设备每件售价 450 元,据统计,售出一件第一种设备所需要的营业时间平均是 0.5h,第二种设备是 $(2 + 0.25x_2)$ h,其中 x_2 是第二种设备的售出数量.已知该公司在这段时间内的总营业时间为 800h,试决定使其营业额最大的营业计划.

(2)模型建立:

该公司计划经营第一种设备件和第二种设备件,其数学模型为

$$\begin{aligned} \max f(X) &= 30x_1 + 450x_2 (\text{营业额}) \\ \text{s. t. } \begin{cases} 0.5x_1 + (2 + 0.25x_2)x_2 \leq 800 (\text{营业时间限制}) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

二、非线性规划问题的数学模型

非线性规划问题的数学模型常表示成以下形式:

$$\begin{aligned} \min(\text{或 } \max) f(X) \\ \text{s. t. } \begin{cases} h_i(X) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ g_j(X) \geq (\text{或 } \leq) 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \end{aligned}$$

其中, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $f(X)$ 为目标函数, $h_i(X) = 0$ 和 $g_j(X) \geq 0$ 为约束条件.

三、非线性规划问题解法

当非线性规划问题只有两个自变量时,也可像线性规划那样用图解法求解.

非线性规划

$$\min f(X) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} h(X) = x_1 + x_2 - 6 = 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

它可用图解法求解,但这种空间图形既不容易画,也不容易看出最优解,因此,可仿照线性规划的图解法把它投影到平面上.

四、非线性规划问题的数学模型举例

1. 机器负荷问题

设某种机器可以在高、低两种不同负荷下进行生产.若机器在高负荷下生产,则产品年产量是投入生产的机器数量的 8 倍,机器的年折损率为 30%;若机器在低负荷下生产,则产品年产量是投入生产的机器数量的 5 倍,机器的年折损率为 10%. 设开始有完好机器 1000 台,要求制定一个 4 年计划,每年初分配完好机器在不同负荷下工作,使 4 年的总产量达到最高.

解 (1)建立 D.P. 模型:

以每年作一个阶段

s_k ——第 k 年初的完好机器数量;

x_k ——第 k 年安排高负荷生产的机器数量,则安排低负荷生产的机器数量为 $s_k - x_k$;

w_k ——第 k 年的产量,由题意, $w_k = 8x_k + 5(s_k - x_k) = 5s_k + 3x_k$;

$f_k(s_k)$ ——在第 k 年年初有 s_k 台完好机器的条件下,第 k 年年初到第 4 年年末的最大产量状态转移方程 $s_{k+1} = 0.7x_k + 0.9(s_k - x_k) = 0.9s_k - 0.2x_k$;

$$\text{递推方程} \begin{cases} f_5(s_5) = 0 \\ f_k(s_k) = \max_{x_k \in D_k(s_k)} \{5s_k + 3x_k + f_{k+1}(0.9s_k - 0.2x_k)\} \end{cases}$$

$$(k = 4, 3, 2, 1)$$

状态集 $s_1 = 1000, 0 \leq s_k \leq 1000 \quad (k=2,3,4)$

决策集 $D_k = \{x_k: 0 \leq x_k \leq s_k, \text{整数}\} \quad (k=1,2,3,4)$

(2)递推:

$$\textcircled{1} k=4 \quad f_4(s_4) = \max_{0 \leq x_4 \leq s_4} \{5s_4 + 3x_4\} = 8s_4 \quad (x_4 = s_4)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} k=3 \quad f_3(s_3) &= \max_{0 \leq x_3 \leq s_3} \{5s_3 + 3x_3 + 8(0.9s_3 - 0.2x_3)\} \\ &= \max_{0 \leq x_3 \leq s_3} \{12.2s_3 + 1.4x_3\} = 13.6s_3 \quad (x_3 = s_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} k=2 \quad f_2(s_2) &= \max_{0 \leq x_2 \leq s_2} \{5s_2 + 3x_2 + 13.6(0.9s_2 - 0.2x_2)\} \\ &= \max_{0 \leq x_2 \leq s_2} \{17.24s_2 + 0.28x_2\} = 17.52s_2 \\ &\quad (x_2 = s_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} k=1 \quad f_1(s_1) &= \max_{0 \leq x_1 \leq s_1} \{5s_1 + 3x_1 + 17.52(0.9s_1 - 0.2x_1)\} \\ &= \max_{0 \leq x_1 \leq s_1} \{20.76s_1 + 0.504x_1\} = 20.76s_1 \\ &\quad (x_1 = 0) \end{aligned}$$

$$f_1(1000) = 20760$$

(3)找最优解:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = s_2, \quad x_3 = s_3, \quad x_4 = s_4$$

即第一年全部机器安排低负荷生产,而后3年全部完好的机器都安排高负荷生产,可得4年的产量最大,最大值为20768.

当然,若进一步想确定各的 x_k 值,则可利用状态转移方程

$$x_2 = s_2 = 0.9s_1 - 0.2x_1 = 0.9 \times 1000 - 0.2 \times 0 = 900$$

$$x_3 = s_3 = 0.9s_2 - 0.2x_2 = 0.7 \times 900 = 630$$

$$x_4 = s_4 = 0.9s_3 - 0.2x_3 = 0.7 \times 630 = 441$$

2. 森林管理

(1)问题:

森林中的树木每年要有一批被砍伐出售,为使这片森林不被耗尽而且每年有所收获,每砍伐一棵树,应该就地补种一棵幼苗,

使森林数目的总数保持不变. 我们希望找到一个方案, 在收获保持稳定的前提下, 获得最大的经济价值.

(2) 假设:

①把森林中树木按高度分为 n 级, 第 k 级的高度在 $[h_{k-1}, h_k)$ 之间 ($h_0 = 0$). 第 1 级是幼苗, 第 k 级树木的单位价值为 p_k , $p_1 = 0, p_k < p_{k+1}$.

②开始时, 第 k 级树木的数量是 x_k 棵, 每年砍伐一次, 第 k 级砍伐 y_k 棵, $y_1 = 0$. 为使每年维持稳定的收获, 故每年砍伐后留下的树木与补种的幼苗的状态与起始时相同 (即各等级树木的数量相同)

③森林中树木总数是 S , 假设每一棵树木都可从幼苗长到收获, 且砍伐一棵补种一棵幼苗, 故总量保持不变, 即 $\sum x_k = S$.

④树木每年至多生长一个高度级, 第 k 级树木进入第 $k+1$ 级的比例为 g_k , 留在原级的比例为 $1 - g_k$.

(3) 建模:

$g_k x_k - g_{k+1} x_{k+1}$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) 表示本年第 $k+1$ 级新增的树木数 $g_n = 0$ (最顶级不会再长), 由假设②

$$y_{k+1} = g_k x_k - g_{k+1} x_{k+1} \geq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \quad (*)$$

x_k 是决策变量, 可控制使其满足此不等式.

$$y_2 + \dots + y_n = g_1 x_1 \quad (**) \quad (\text{幼苗长为 2 级的数量})$$

(砍伐总量 = 补种量 = 幼苗长为 2 级的数量)

$$\begin{aligned} \text{总收益} \quad p &= p_1 y_1 + p_2 y_2 + \dots + y_n p_n \\ &= p_2 (g_1 x_1 - g_2 x_2) + p_3 (g_2 x_2 - g_3 x_3) + p_4 (g_3 x_3 - g_4 x_4) \\ &\quad + \dots + p_n g_{n-1} x_{n-1} \\ &= (p_2 - p_1) g_1 x_1 + (p_3 - p_2) g_2 x_2 + (p_4 - p_3) g_3 x_3 \\ &\quad + \dots + (p_n - p_{n-1}) g_{n-1} x_{n-1} \end{aligned}$$

于是得优化模型

$$\begin{aligned} \max p &= \sum_{k=1}^{n-1} (p_{k+1} - p_k) g_k x_k \\ \text{s. t. } \sum_{k=1}^n x_k &= s \quad \left(\text{等价于 } \sum_{k=1}^{n-1} x_k \leq s, \text{ 即视 } x_n \text{ 为松弛变量} \right) \\ g_k x_k &\geq g_{k+1} x_{k+1} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \\ x_k &\geq 0 \quad \text{整数} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \end{aligned}$$

另一方面,我们可把变量 x_k 转化为 y_k ,从(※※)式得

$$x_1 = \frac{1}{g_1} (y_2 + y_3 + \dots + y_n)$$

代入

$$y_2 = g_1 x_1 - g_2 x_2$$

又得

$$y_2 = y_2 + y_3 + \dots + y_n - g_2 x_2$$

$$x_2 = \frac{1}{g_2} (y_3 + y_4 + \dots + y_n)$$

同理得

$$x_k = \frac{1}{g_k} (y_{k+1} + y_{k+2} + \dots + y_n) \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n-1)$$

此时 $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{g_1} (y_2 + y_3 + \dots + y_n) + \frac{1}{g_2} (y_3 + y_4 + \dots + y_n) + \\ &\quad \frac{1}{g_3} (y_4 + y_5 + \dots + y_n) + \dots + \frac{1}{g_{n-1}} y_n \\ &= \frac{1}{g_1} y_2 + \left(\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} \right) y_3 + \left(\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \frac{1}{g_3} \right) y_4 + \dots + \\ &\quad \left(\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \dots + \frac{1}{g_{n-1}} \right) y_n \end{aligned}$$

这样,模型(4-3-1)等价于

$$\max p = \sum_{k=2}^n p_k y_k$$

$$\text{s. t. } \sum_{k=2}^n \left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{g_j} \right) y_k \leq s \quad (4-3-2)$$

$$y_k \geq 0 \quad \text{整数} (k = 2, 3, \dots, n) \quad (\text{注 } y_1 = 0)$$

(4)特殊解法:

模型(4-3-2)若忽略整数约束,就是除非负要求外只有一个不等式约束的线性规划.这种情况是很容易求解的.一般地有如下结果:

命题 对于如下形式的线性规划模型

$$\begin{aligned} \max f &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s. t. } &\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_j x_j \leq s \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \end{aligned}$$

其中, s, a_j, c_j 都是正数. 若 $\frac{c_k}{a_k} = \max \left\{ \frac{c_j}{a_j} \mid j = 1, 2, \dots, n \right\}$, 则其最优

解 x^0 为 $x_k^0 = \frac{s}{a_k}$, 其他 $x_j^0 = 0 (j \neq k)$, 最优值为 $f(x^0) = \frac{c_k}{a_k} s$.

证明 显然 x^0 是可行解且 $f(x^0) = \frac{c_k}{a_k} s$. 现设 x 为任一可行解, 则

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j = \sum_{j=1}^n \frac{c_j}{a_j} (a_j x_j) \leq \frac{c_k}{a_k} \sum_{j=1}^n a_j x_j \leq \frac{c_k}{a_k} s = f(x^0)$$

故 x^0 是最优解. 证毕.

例 1

$$\begin{aligned} \max f &= 6x_1 + 8x_2 + 3x_3 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3) \end{cases} \end{aligned}$$

解 因为 $\max(6/3=2, 8/2=4, 3/1=3) = 8/2, s=10$

所以最优解为 $x_2^0 = 10/2 = 5, x_1^0 = x_3^0 = 0, f(x^0) = 40$.

例2 设某森林有6年生长期, $S = 10000, g_1 = 0.28, g_2 = 0.31, g_3 = 0.25, g_4 = 0.23, g_5 = 0.37, g_6 = 0; p_1 = 0, p_2 = 50, p_3 = 100, p_4 = 150, p_5 = 200, p_6 = 250$. 问如何砍伐才能使持续经济效益最大?

解 把数代入模型(4-3-2)得

$$\begin{aligned} \max f &= 50y_2 + 100y_3 + 150y_4 + 200y_5 + 250y_6 \\ \text{s. t. } &\begin{cases} 3.57y_2 + 6.79y_3 + 10.79y_4 + 15.14y_5 + 17.84y_6 \leq 10000 \\ y_k \geq 0 \quad (k = 2, 3, \dots, 6) \end{cases} \end{aligned}$$

现忽略整数约束,得

$$\begin{aligned} \max &\left\{ \frac{500}{3.57}, \frac{100}{6.79}, \frac{150}{10.79}, \frac{200}{15.14}, \frac{250}{17.84} \right\} \\ &= \max\{14, 14.72, 13.9, 13.2, 14\} = 14.72 \end{aligned}$$

所以最优解 $y_3^0 = \frac{10000}{6.79} = 1472$, 其余 $y_j^0 = 0$. 即 $x_1^0 = \frac{1}{0.28}y_3^0 = 5257, x_2^0 = \frac{1}{0.31}y_3^0 = 4748$, 其余 $x_j^0 = 0$.

即把长到第3年的树全部砍伐光,可使持续效益最大.

五、Mathematica 软件解线性规划的函数

$\text{ConstrainedMin}[f, \{\text{inequalities}\}, \{x, y, \dots\}]$, 求线性不等式约束下的 f 最小值, 假定变量非负.

$\text{ConstrainedMax}[f, \{\text{inequalities}\}, \{x, y, \dots\}]$, 求线性不等式约束下的 f 最大值, 假定变量非负.

$\text{LinearProgramming}[c, A, b]$, 求解线性规划 $\min\{cx \mid Ax \geq b, x \geq 0\}$.

例3 $\text{ConstrainedMax}[17x - 20y + 18z, \{x - y + z \leq 15, x < 5, x + y < 10\}, \{x, y, z\}]$

第四节 动态规划模型

1. 什么是动态规划?

在很多实际问题中,常常需要在不同时刻、不同地点、不同层次上,按照一定顺序,对一大系统的各个组成部分逐个作出某种决策.这种问题称为顺序决策问题,也称多阶段决策问题.动态规划就是可用于多阶段决策问题的一种数学工具.

更准确地说,一个多阶段决策过程是由一系列单一决策连接起来的,前一阶段的决策结果,前一阶段的输出,是相续下一阶段决策时所要考虑的先决条件,即下一阶段的输入.这些过程按顺序从头连接到尾,但不构成回路.还应指出:标志不同阶段的参数可以取离散值也可取连续值,我们首先考虑由有限个阶段组成的多阶段决策过程.

例如,按照一定储水量,设计一座水塔,要求费用最小.整个水塔由三部分组成:储水罐、支柱、地基.每一部分都可有不同的材料与形状,因而有不同的造价与自重.由于重力作用,下一部分的设计必须考虑上一部分所选择的方案,而不可孤立决策.一个造价低廉的储水罐会有大的自重,因而不可避免地加大支柱和地基的费用.支柱与地基的关系也是类似的,整个水塔设计方案的确定就是一个多阶段决策问题.

又如,一艘货船准备装载 n 种货物,第 i 种货物每件质量为 w_i ,价值为 c_i ($i = 1, 2, \dots, n$).船的最大载质量为 w ,货物必须整件装载.要求在这一限制之下,设计出使装载货物价值最大的方案.这不是一个明显的多阶段的决策问题,然而,我们可以把装货过程视为 n 个连续阶段,每一阶段对应一种货物的装载,每种货物的装载量将影响在它之后装载的其他货物的可能数量,这样问题就纳入了多阶段决策框架.

多阶段决策过程的表示方法：

首先让我们说明几个有关概念，即什么是阶段、状态、决策、效益、策略、子策略。图 4-5 上部所示的是一个单一决策过程，例如水塔设计中储水罐的选择。

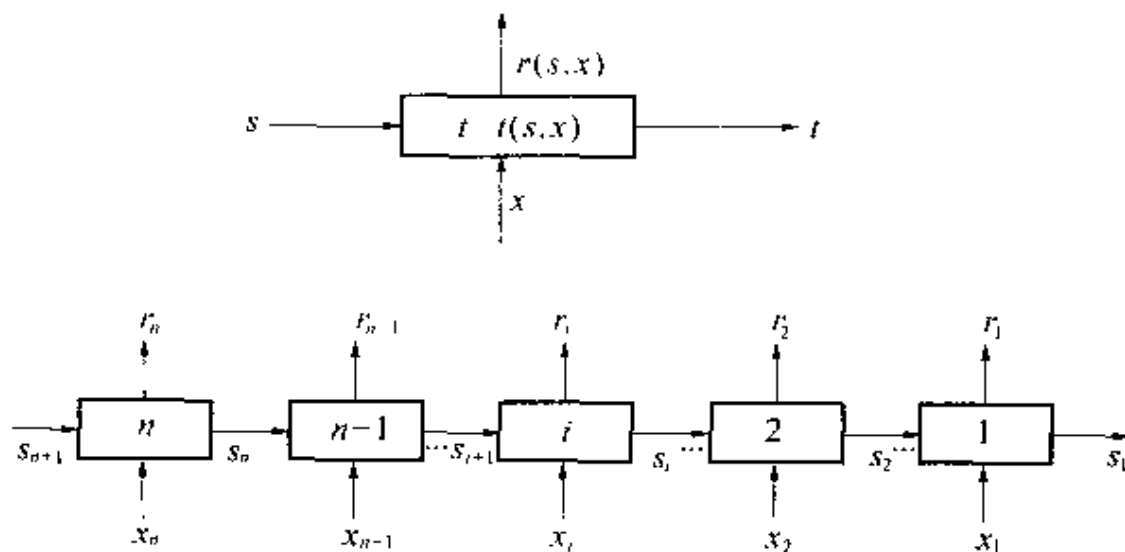


图 4-5

左端箭头上的字母 s 是输入参数，也称输入状态变量，例如在设计储水罐时，它表示对储水量的要求。需要指出的是，随问题不同，输入参数不一定是标量。方框下面的字母 x 称为决策变量，它的不同取值代表不同的决策方案。例如在选择储水罐时， x 的不同取值代表混凝土、不锈钢、玻璃钢等不同材料与方罐、圆罐、六角形罐等不同形状的各种组合。右端箭头上的字母 t 称为输出状态变量，或简称输出变量，它是输入参数 s 及决策变量 x 的函数，一般记为 $t = t(s, x)$ 。在设计储满水时的水罐的问题中，它代表上面的字母 r ，称为效益指标或目标函数，它同样是输入变量及决策变量的函数，即 $r = r(s, x)$ ，这一函数度量了不同决策的不同效果。在我们的例子中它表示相应于储水量 s ，采用决策方案 x 时的水罐所需费用。

至于一个多阶段决策过程,则如图 4-5 下部所示,可视为一系列前后连接的单一决策过程,每个单一过程称为一个阶段;前一阶段的输出变量就是下一阶段的输入参数.由此,在如图所示的情况下, $s_i = t_i(s_{i+1}, x_i)$, $r_i = (s_{i+1}, x_i)$, 式中 s_{i+1}, x_i, t_i, r_i 依次表示第 i 个阶段的输入参数、决策变量、输出变量及目标函数.此时函数关系 $s_i = t_i(s_{i+1}, x_i)$ 称为状态转换方程,又称决策方程.注意图中各阶段序号排列的顺序,对应到水塔设计的例子,水罐决策相当 $n = 3$ 的阶段,支柱决策相当 $n = 2$ 的阶段,而基础的选择对应 $n = 1$.这样安排的理由下文自明,这在表达上可带来一些方便.

求解多阶段决策过程,就是求一组决策变量 x_1, x_2, \dots, x_n , 使某个表示整个系统效益,依赖 r_1, r_2, \dots, r_n 的函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 达到最优值,称为系统目标函数.一组 x_1, x_2, \dots, x_n 的值称做一个策略,而任何一组 $x_1, x_2, \dots, x_k, k < n$ 的值称做一个子策略,使函数 f 达到最优值的策略称最优策略.动态规划的求解过程,本质上是将多阶段决策问题化为一系列单阶段决策.为使此方法可行,函数 f 的形式不能任意,它必须满足一定要求.为简单起见,此处假设系统目标函数为诸阶段效益指标之和,即

$$f = \sum_{i=1}^n r_i(s_{i+1}, x_i)$$

记 $f_k = \sum_{i=1}^k r_i(x_{i+1}, x_i) (k=1, 2, \dots, n-1)$, 对给定的 s_{k+1} , 使 f_k 极小的子策略 x_1, x_2, \dots, x_k 称最优子策略.为给定一个动态规划问题,还需要一定的附加条件,由附加条件的不同,问题的提法可有以下三种类型:

(1)初值问题,即给定整个系统的输入状态变量.在图 4-5 所示情况,即是给定 S_{n+1} .

(2)终值问题,即给定整个系统的输出状态变量.在图 4-5 所

示情况,即是给定 S_1 .

(3)边值问题,即整个系统的输入与输出状态均给定.在图 4-5 所示的情况,即是既给定 S_{n+1} 又给定 S_1 .

应当说明的是,在一定条件下,初值与终值问题可以相互转化.例如,当 s 有反函数时,由此诸阶段间的关系反向,终值问题化成了初值问题.

2. 最优化原理

在多阶段决策问题中,为便于求解,我们希望把问题分成许多较小的、可以独立考虑的部分,逐次优化,用以代替一次优化整个系统.显然这种分解必须满足整体优化的逻辑要求.例如,在水塔设计过程中,无论是储水罐还是支柱,均不能作为独立的子系统加以优化;最节省的水罐或支柱,可能会要求系统的其他部分格外牢固,因而有极为昂贵的费用.反之,基础本身或支柱加上基础作为子系统,则可独立加以考虑.这一点是容易理解的,在一个其组成部分构成序列的系统中,如果一个成分影响位于其下游的组成单元,则不能不计它对下游的影响,而将其作为一个子系统独立优化;然而对最后的组成部分,当假设输入已知时,任何决策所造成的输出不影响其他部分,因而可以独立考虑.事实上,任何数目的尾部组成部分,在假设输入变量已知时,均可作为一个子系统独立进行优化.由此不难理解如下的最优化原理.

最优化原理 一个最优决策策略具有这样的性质:无论初始阶段的状态与决策如何,对于前面决策所形成的状态而言,余下的所有决策必然构成一个最优子策略.

依据最优化原理,数学上可以得到一个极有用的递推关系.假设某个动态规划问题已给定,即要求得到一组策略 x_1, x_2, \dots, x_n 使函数

$$f = r_n(s_{n+1}, x_n) + r_{n-1}(s_n, x_{n-1}) + \dots + r_1(s_2, x_1)$$

达到极小,式中 $s_i = t_i(s_{i+1}, x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 指标 1 表示最后

一个阶段.由前述可知,阶段 1 可作为一个子系统独立考虑优化.也就是说,为了使整个系统优化,对于阶段 1 的任何输入 s_2 ,必须选取 x_1 ,使 $r_1(s_2, x_1)$ 达到极小值(即最优值).将这一最优值记为 $f_1^*(s_2)$,我们有

$$f_1^*(s_2) = \text{opt}_{x_1}[r_1(s_2, x_1)],$$

式中 s_2 视为一个参数,符号 opt 表示对下标所示变量取方括号内函数的最优值.

下一步考虑由最后两个阶段所构成的子系统.以 $f_2^*(s_3)$ 表示相应于 s_3 给定的子系统最优值,由最优化原理,有

$$\begin{aligned} f_2^*(s_3) &= \text{opt}_{x_2, x_1}[r_2(s_3, x_2) + r_1(s_2, x_1)] \\ &= \text{opt}_{x_2}[r_2(s_3, x_2) + f_1^*(s_2)] \\ &= \text{opt}_{x_2}[r_2(s_3, x_2) + f_1^*(t_2(s_3, x_2))] \end{aligned}$$

由此可知,对给定的 s_3 ,子系统的最优值是被 x_2 的适当选取惟一决定的;由于优化只对一个变量考虑,相对说来问题被化简了,类似地不难得到:

$$\begin{aligned} f_i^*(s_{i+1}) &= \text{opt}_{x_i, \dots, x_1}[r_i(s_{i+1}, x_i) + \dots + r_1(s_1, x_1)] \\ &= \text{opt}_{x_i}[r_i(s_{i+1}, x_i) + f_{i-1}^*(s_i)] \\ &= \text{opt}_{x_i}[r_i(s_{i+1}, x_i) + f_{i-1}^*(t_i(s_{i+1}, x_i))] \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

这就是由最优化原理导出的递推关系,它是求解动态规划问题的基础.

3. 实例与解法

在这一小节中,我们叙述两个动态规划问题的实例及其求解,其目的一方面在于进一步说明最优化原理,一方面在于介绍求解动态规划问题的表格法.

例 1 一家具公司签定了一项合同.合同要求在第一个月月底之前,交付 80 把椅子,第二个月月底之前交付 120 把椅子.若每月生产 x 把时,成本为 $50x + 0.2x^2$ (元);如第一个月生产的数量超过定货数,每把椅子库存一个月的费用是 8 元.公司每月最多能

生产 200 把椅子,求完成以上合同的最佳生产安排.

这个例子相对说来是最简单的.家具公司的总成本是生产费用与库存费用之和.以 x_2 记第一个月生产的椅子数, x_1 记第二个月生产的椅子数.请注意这里下标的排列方式,它与上一小节是一致的.这是一个二阶段决策问题,我们的目的是使函数

$f(x_2, x_1) = (50x_2 + 0.2x_2^2) + (50x_1 + 0.2x_1^2) + 8(x_2 - 80)$
在约束

$$x_2 \geq 80, x_1 + x_2 = 200, x_1, x_2 \geq 0$$

下达到极小.实际上,这一问题可化为对一个变量的函数求极小.由题意,应有 $x_1 = 200 - x_2$,由此

$$f(x_2, x_1) = f(x_2, 200 - x_2) = 0.4x_2^2 - 72x_2 + 17360$$

这个二次函数是极小点在 $x_2^* = 90, x_1^* = 110$ 达到,这组解满足约束条件, f 的极小值是 14120 元.

例 2 一架飞机从 A 地经 B, C, D, E 飞往 F, 飞行员只可能在这些点上决定到达下一点时的飞行高度,在这些点上飞行高度均以 km 为单位,任意连续两点间距离均为 200km,按不同高度飞行时油耗不同,在适当的单位下,所需油耗如下表所示.表中第一列各行标出的是飞机在前一点的高度,第一行各列为到达下一点的高度,行列交叉处为相应的油耗,“—”表示从 0m 高度到 0m 高度的飞行是不可能的.

高度	0m	1000m	2000m	3000m	4000m	5000m
0m	—	4000	4800	5520	6160	6720
1000m	800	1600	2600	4000	4720	6080
2000m	320	480	800	2240	3120	4640
3000m	0	160	320	560	1600	3040
4000m	0	0	80	240	480	1600
5000m	0	0	0	0	160	240

请依据以上数据,决定一个飞行方案,使总油耗最低.

这是一个边值问题,因为在 A 及 F 两点高度只能是 0. 将在 A,B,C,D,E 五点上的决策视为五个阶段,每阶段的输入变量是到达该点的高度,输出变量是到达下一点的高度. 为简单,每点的决策变量也以到达下一点的高度表示,相应的目标函数则是两点间的油耗. 下面用表格法求解这一问题,它本质上是穷举法. 根据最优化原理,从最后一个阶段,即在 E 点的决策开始考虑. 在 E 点飞机可以有除 0m 外任何允许高度,但到达 F 时必须降到 0m,考虑所有可能的情况,将它们列于表 4-4.

表 4-4 第一行表示 E 点的所有可能输入及对应的最佳决策(此处只有一种决策可能,即到 F 时降到 0),第二行为相应的油耗. 现在考虑由 D 经 E 到 F 的所有可能. 只要 D 点的输入取定,考虑所有可能的决策,再利用表 4-4,不难得出相应这一输入的最佳决策及到达终点的最小油耗. 例如,如果到达 D 的高度是 0m,即输入为 0 时,若决定到 E 时爬升到 1000m,则这一段飞行的油耗是 4000,从表 4-4 可知,到达终点还要消耗 800,故这一决策的消耗合计是 4800;类似地,对于固定的输入高度 0,可以对在 D 的任何决策进行计算. 在考虑所有可能之后,知道当 D 点输入变量为 0 时,最佳策略为到 E 时升到 1000m,最佳油耗为 4800. 对 D 点所有可能的输入加以考虑,将结果列于表 4-5. 第一行表示输入变量取值及与之相应的从 D 到 E 的最佳决策,第二行表示对应这一决策的到达终点的最佳油耗.

类似地得到表 4-6、表 4-7、表 4-8,它们依次是对从状态 C、B、A 开始的子系统计算的结果. 表 4-6、表 4-7 的第一行诸项表示所有可能的输入参数值及相应的到达下一点的最优决策,下面的一行列出此决策对应的到达终点的油耗. 由于在 A 处必须从地面起飞,所以表 4-8 的输入参数只有一个. 从表 4-8 可知,对于所讨论的问题,最小油耗是 7200,达到这一最小油耗的飞行路径有两条,

它们可反向由表 4-8 到表 4-4 查出. 例如从表 4-8 可知, 其中一条路径由 A 到 B 的飞行高度是 0 到 3000m, 而表 4-7 告诉我们, 输入 3000m 所对应的最佳决策也是 3000, 利用表 4-7 得到的决策 3000m 作为输入, 再查表 4-6 相应的项, 如此继续, 最终得到所有各点上的高度. 其结果是: 0m ~ 3000m ~ 3000m ~ 3000m ~ 3000m ~ 0m. 使用同一方法, 可以得到另一条路径: 0m ~ 5000m ~ 5000m ~ 5000m ~ 3000m ~ 0m.

上述问题的解法显然是有一般性的, 它适用于一切包括有限阶段, 每阶段有有限种可能决策的多阶段问题. 它的局限性也是明显的, 由于实际上是穷举法, 当问题规模较大时, 计算十分困难甚至是不可能的. 事实上, 只有小规模的多阶段决策问题才是实际可解的.

表 4-4 从点 E 到 F

1000 ~ 0	2000 ~ 0	3000 ~ 0	4000 ~ 0	5000 ~ 0
800	320	0	0	0

表 4-5 从点 D 经 E 到 F

0 ~ 1000	1000 ~ 1000	2000 ~ 2000	3000 ~ 3000	4000 ~ 3000	5000 ~ 3000
4800	2400	1120	560	240	0

表 4-6 从点 C 经 D、E 到 F

0 ~ 2000	1000 ~ 2000	2000 ~ 2000	3000 ~ 3000	4000 ~ 4000	5000 ~ 5000
5920	3720	1920	1120	720	240

表 4-7 从点 B 经 C、D、E 到 F

1000 ~ 2000	2000 ~ 2000	3000 ~ 3000	4000 ~ 4000	5000 ~ 5000
4520	2720	1680	1200	480

表 4-8 从点 A 经 B、C、D、E 到 F

最佳决策 1	0 ~ 3000	最佳油耗	7200
最佳决策 2	0 ~ 5000	最佳油耗	7200

4. 动态规划与线性规划的关系

下面我们通过一个简单的例子,说明如何将一整数线性规划问题化为一动态规划问题.

例 3 有 n 种不同类型的科学仪器希望装在登月飞船上,令 $c_j > 0 (j = 1, 2, \dots, n)$ 表示每件第 j 类仪器的科学价值; $a_j > 0 (j = 1, 2, \dots, n)$ 为每件第 j 类仪器的质量. 每类仪器件数不限,但装载件数只能是整数,飞船总载荷不得超过整数 b . 请设计一种方案,使被装载仪器的科学价值之和最大.

上述例子是统称为“背包问题”的一类问题中的代表,它可由整数线性规划求解. 限定解分量取整数值在这类问题中有关键意义,因为若无此限制,则只需全部装载价值最大的物品即可达到最优. 令 $x_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 表示第 j 类仪器的装载数,问题可表示为求目标函数

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (4-4-1)$$

在约束

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b$$

下的极大值,要求 $x_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 是整数. 从上述表述可知,这类问题只有一个约束,利用这一特点,可以设计出相当有效的算法. 令 $f_k(y) (k = 1, 2, \dots, n; y = 1, \dots, b)$ 表示当只考虑前 k 种仪器,而飞船总载荷限定为 y 时,目标函数所能达到的最大值,易知 $f_n(b) = f^*$ 是式(4-4-1)的最优值. 对于固定的 k 和 y ,问题归结为求整数 $x_j \geq 0 (j = 1, 2, \dots, k)$,使函数

$$f_k(y) = \max \sum_{j=1}^k c_j x_j$$

在约束

$$\sum_{j=1}^k a_j x_j \leq y$$

下达到极大.

不难看出如上函数 $f_k(y)$ 可等价地表示为

$$f_k(y) = \max \{c_k x_k + f_{k-1}(y - a_k x_k) : x_k = 0, 1, \dots, [y/a_k]\} \quad (4-4-2)$$

注意到 $f_0(y) = 0 (y = 0, 1, \dots, b)$, 那么

$$f_1(y) = \max \{c_1 x_1 : x_1 = 0, 1, \dots, [y/a_1]\} = c_1 [y/a_1], y = 0, 1, \dots, b$$

这表明, 式(4-4-2)可以对指标 K 与整数变量 y 递推地进行计算, 可推算出递推关系

$$\begin{aligned} f_k(y) &= \max \{f_{k-1}(y); c_k + f_{k-1}(y - a_k), a_k \leq y\} \\ f_0(y) &= 0 (y = 0, 1, \dots, b; k = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

第五节 用 Excel 软件求解规划的方法

Microsoft Excel 是当今十分流行的功能强大、操作方便的软件. 在 Microsoft Excel 软件中, 具有规划求解功能. 如图 4-6, 在工具菜单下, 一般有“规划求解”项, 若没有, 则应先运行“加载宏”将其安装上.

一、一般线性规划的求解

现在以下面的模型为例, 介绍如何利用 Microsoft Excel 求解线性规划模型的操作方法.

C5	*	=	=A5*A7+B5*B7		
	A	B	C	D	E
1	15	40	0	27000	
2	0	56.25	0	27000	
3	18.75	0	0	27000	
4	12	50	0	27000	
5	2.5	7.5	0		
6					
7	0	0			

图 4-7

接下来,打开主菜单的“工具”项,在下拉菜单中选择“规划求解”,则弹出窗口如图 4-8。

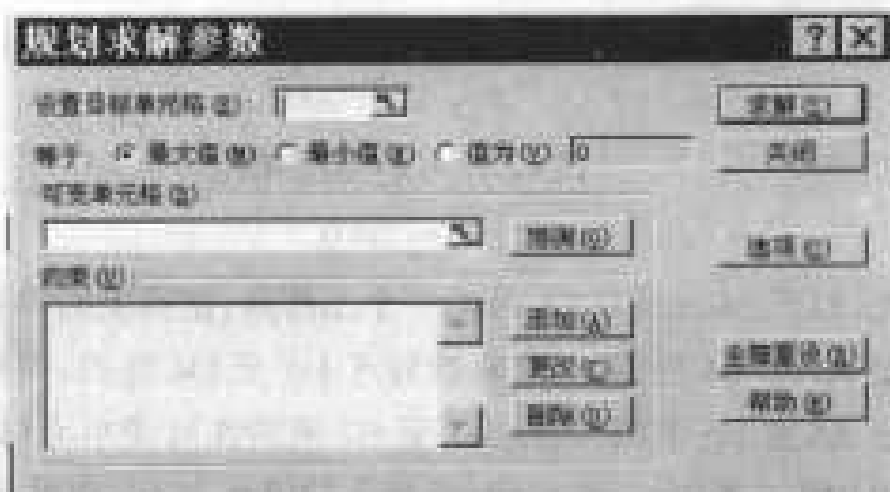


图 4-8

在“设置目标单元格”中输入“C5”,然后选“最大值”,再在“可变单元格”中输入“A7:B7”,在“约束”中按一下“添加”按钮,又弹出如图 4-9 所示的窗口。

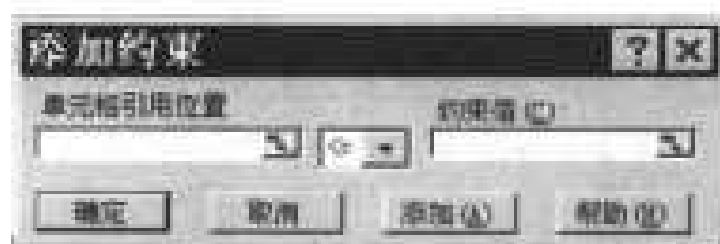


图 4-9

此时,我们要添加 5 个约束:“ $C1 \leq D1$ ”、“ $C2 \leq D2$ ”、“ $C3 \leq D3$ ”、“ $C4 \leq D4$ ”、“ $A7:B7 \leq 0$ ”。对第一个约束,在“单元格引用位置”中输入“C1”,在中间下拉框选择“ \leq ”,再在“约束值”中输入“D1”,然后按“添加”按钮,再类似地添加其他约束。当然,这里前四个约束也可以简化为一个约束:“ $C1:C4 \leq D1:D4$ ”。最后按“确定”按钮,返回到窗口如图 4-10,再在“选项”中选择“采用线性模型”。

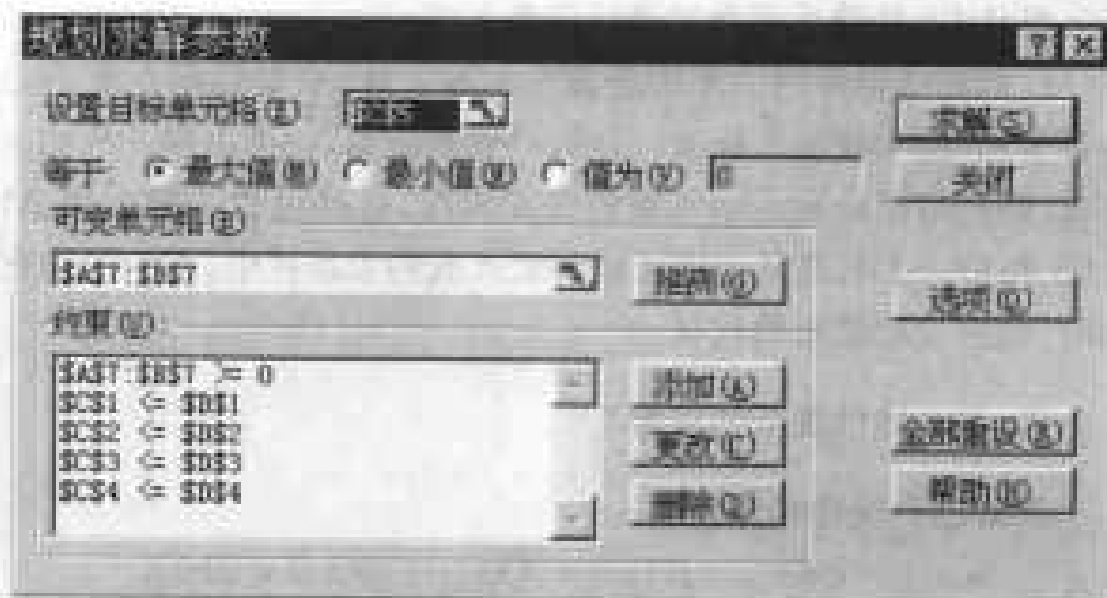


图 4-10

此时按“求解”按钮即可获得结果如图 4-11。

这时从 A7 至 B7 处可读出模型的最优解为: $x_1 = 1000$, $x_2 =$

			=A5*B7+B5*B7		
	A	B	C	D	E
1	15	40	27000	27000	
2	0	56.25	16875	27000	
3	18.75	0	18750	27000	
4	12	50	27000	27000	
5	2.5	7.5	4750		
6					
7	1000	300			
8					
9	线性规划求解器				
10	通过求解器得到一个，可满足所有的约束并最优 情况。				
11	<input checked="" type="checkbox"/> 使用线性规划法求解 <input type="checkbox"/> 指定为线性规划				
12	报告 <input type="checkbox"/> 详细报告 <input type="checkbox"/> 模型摘要 <input type="checkbox"/> 约束报告				
13	<input type="button" value="确定"/> <input type="button" value="取消"/> <input type="button" value="保存方案(S)"/> <input type="button" value="帮助(H)"/>				

图 4-11

300,再从 C5 处读出模型的最优值为 4750。

我们在这里介绍的方法是直观的输入法,全部数据在表格上一目了然,便于观察与修改。当然,只要你愿意,也可以换一种输入方式,即把数据隐藏在单元格的公式内部,这样可省去单元格 A1~B5 与 D1~D4,在其他单元格的公式或约束条件中,若引用到它们时,就用相应的常数代替。

二、混合线性规划的求解

求解混合线性规划模型:

$$\begin{aligned}
 \min f = & 35x_{10} + 23x_{11} + 43x_{12} + 48x_{13} + 32x_{14} \\
 & + 43x_{20} + 40x_{21} + 54x_{22} + 28x_{23} + 37x_{24} \\
 & + 27x_{30} + 25x_{31} + 32x_{32} + 42x_{33} + 52x_{34} \\
 & + 45y_1 + 55y_2 + 35y_3 + 28y_4 + 50
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 25000 \\ x_{20} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 30000 \\ x_{30} + x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 21000 \\ x_{10} + x_{20} + x_{30} = 35000 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} - 41000y_1 = 0 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} - 41000y_2 = 0 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} - 41000y_3 = 0 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} - 41000y_4 = 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 1 \\ x_{ij} \geq 0 \ (i = 1, 2, 3; j = 0, 1, 2, 3, 4) \\ y_j = 0, 1 \ (j = 0, 1, 2, 3, 4) \end{cases} \\
 \text{s. t. } &
 \end{aligned}$$

现在我们按以下步骤来求解模型。

- ① 打开 Microsoft Excel 的一个工作表；
- ② 把模型的目标函数系数矩阵置于 A1 至 E4 区域,约束常数 25000、30000 和 21000 分别置于 G6、G7 和 G8 单元格；
- ③ 选择 A6 至 E9 范围作为可变单元,并输入初值 1. 其中 A6 至 E8 区域对应变量 x_{ij} ($i = 1, 2, 3; j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$), 而 B9 至 E9 则分别对应变量 y_1, y_2, y_3 , 和 y_4 , A9 则恒为 1；
- ④ 在 F6、F7、F8 和 F9 单元格中分别输入“= SUM(A6: E6)”、“= SUM(A7: E7)”、“= SUM(A8: E8)”、“= SUM(B9: E9)”, 再在 A10 至 E10 中分别输入“= A6 + A7 + A8”、“= B6 + B7 + B8 - 41000 * B9”、“= C6 + C7 + C8 - 41000 * C9”、“= D6 + D7 + D8 - 41000 * D9”、“= E6 + E7 + E8 - 41000 * E9”表示约束等式的左边；
- ⑤ 选择单元格 A11, 输入“= A1 * A6”, 再把其引用至单元格 E14, 即用鼠标按着单元格 A11 的右下角, 先拖至 A14, 再拖至 E14；

⑥ 以单元格 F14 作为目标单元格,输入“=SUM(A11:E14)”。

这几步的结果如图 4-12 所示。

F14		=SUM(A11:E14)							
	A	B	C	D	E	F	G		
1	25	25	43	40	39				
2	43	40	54	38	37				
3	37	25	32	42	32				
4	50	45	55	35	28				
5									
6	1	1	1	1	1	5	25000		
7	1	1	1	1	1	5	30000		
8	1	1	1	1	1	5	21000		
9	1	1	1	1	1	4			
10	3	-40297	-61237	-40397	-40237				
11	25	25	43	40	39				
12	43	40	54	38	37				
13	37	25	32	42	32				
14	50	45	55	35	28				
15									

图 4-12

⑦ 进入“规划求解”界面,在“设置目标单元格”中输入“F14”,然后选“最小值”,再在“可变单元格”中输入“A6:E9”,在“约束”处添加 12 个约束:“A8:E8 ≥ 0”、“A9 = 1”、“B9:E9 = 二进制”、“A10 = 35000”、“B10 = 0”、“C10 = 0”、“D10 = 0”、“E10 = 0”、“F6 = G6”、“F7 = G7”、“F8 = G8”、“F9 = 1”。最后,规划求解参数界面如图 4-13,在“选项”中选择“采用线性模型”。

此时按“求解”按钮即可获得结果如图 4-14。

这时从 A6 至 E9 处可读出模型的最优解为: $x_{20} = 14000$ 、 $x_{30} = 21000$ 、 $x_{11} = 25000$ 、 $x_{21} = 16000$ 、 $y_1 = 1$,其余变量均为 0。从 F14 处读出模型的最优值为 2384095。

当然,这个模型也可分 4 种情况分别考虑:

- ① $y_1 = 1, y_2 = y_3 = y_4 = 0$; ② $y_2 = 1, y_1 = y_3 = y_4 = 0$;
③ $y_3 = 1, y_1 = y_2 = y_4 = 0$; ④ $y_4 = 1, y_1 = y_2 = y_3 = 0$ 。



图 4-13

	A	B	C	D	E	F	G
1	35	23	43	43	32		
2	43	40	54	23	37		
3	27	25	12	42	32		
4	50	45	50	35	25		
5							
6	0	25000	0	0	0	25000	25000
7	14000	14000	0	0	0	30000	30000
8	21000	0	0	0	0	21000	21000
9	1	1	0	0	0	1	
10	35000	0	0	0	0		
11	0	175000	0	0	0		
12	502500	440000	0	0	0		
13	147000	0	0	0	0		
14	50	45	0	0	0	2384095	

图 4-14

这样原模型将化作较简单的模型,分别求解后得相应的目标值为:①2384095,②3067948,③2425085,④2561078,再比较之可得到原模型的最优值和最优解与前述一致。

三、非线性规划的求解

设有一三角形 $\triangle ABC$,三顶点的坐标分别为 $A(1,1)$ 、 $B(2,5)$ 和 $C(3,1)$,试在平面上求一点 $M(x,y)$,使其到 $\triangle ABC$ 三顶点的距离之和为最短,此点即为费尔马点.

该问题属于非线性规划问题.显然,此问题的数学模型较简单,易直接得

$$\begin{aligned} \min f &= \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (y-5)^2} + \\ &\quad \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} \\ \text{s. t. } &\begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ 1 \leq y \leq 5 \end{cases} \end{aligned}$$

现在我们按以下步骤来求解模型:

① 打开 Microsoft Excel 的一个工作表;

② 选择 A1 至 B1 范围作为可变单元,并输入初值 1.

③ 选择 C1 作为目标单元,输入:

“=SQRT((A1-1)^2+(B1-1)^2)+SQRT((A1-3)^2+(B1-1)^2)+SQRT((A1-2)^2+(B1-5)^2)”

④ 进入“规划求解”界面.在“设置目标单元格”中输入“C1”,然后选“最小值”,再在“可变单元格”中输入“A1:B1”,在“约束”中添加约束:“A1>=1”、“A1<=3”、“B1>=1”、“B1<=5”,最后,规划求解参数界面如图 4-15.

⑤ 此时按“求解”按钮即可获得结果如图 4-16.

最后得出模型的最优解为 $x=2$, $y=1.57735$, $f=5.7320508$.



图 4-15

C1		=SQRT((A1-1)^2+(B1-1)^2+SQRT((A1-2)^2+(B1-1)^2+SQRT((A1-2)^2+(B1-5)^2))	
	A	B	C
1	2	1.57735	5.732050808
2			

图 4-16

第五章 大专组部分竞赛试题及 参考答案

一、2000 网易杯全国大学生数学建模竞赛题目(大专组)

C 题:飞越北极

2000 年 6 月,《扬子晚报》发布消息:“中美航线下月可飞越北极,北京至底特律可节省 4 小时”,摘要如下:

7 月 1 日起,加拿大和俄罗斯将允许民航班机飞越北极,此改变可大幅度缩短北美与亚洲间的飞行时间,旅客可直接从休斯敦、丹佛及明尼阿波利斯直飞北京等地.据加拿大空中交通管制局估计,如飞越北极,底特律至北京的飞行时间可节省 4 个小时.由于不需中途降落加油,实际节省的时间不止此数.

假设:飞机飞行高度约为 10km,飞行速度约为 980km/h;从北京至底特律原来的航线飞经以下 10 处:

A1(北纬 31° , 东经 122°) A2(北纬 36° , 东经 140°)

A3(北纬 53° , 西经 165°) A4(北纬 62° , 西经 150°)

A5(北纬 59° , 西经 140°) A6(北纬 55° , 西经 135°)

A7(北纬 50° , 西经 130°) A8(北纬 47° , 西经 125°)

A8(北纬 47° , 西经 122°) A10(北纬 42° , 西经 87°)

请对“北京至底特律的飞行时间可节省 4 小时”从数学上作出一个合理的解释,分两种情况讨论:

(1)设地球是半径为 6371km 的球体.

(2)设地球是一旋转椭球体,赤道半径为 6378km,子午线短半轴为 6357km.

解 取直角坐标系如下:球心为原点, z 轴指向北极, x 轴通

过赤道上经度为 0° 和 180° 的两点, 正向指向 0° , y 轴垂直于 x 轴并和 z 轴构成右手坐标系.

方法一: 由于飞机基本保持飞行高度 10km , 忽略起飞和降落, 飞机在以原点为中心、半径为 $6371 + 10 = 6381\text{km}$ 的球面上运动. 球面上两点之间的短程线是过这两点的大圆弧段. 此大圆弧段的长度可以这样计算: 先求出球心指向这两点的矢量的夹角的弧度值, 再乘以球半径.

设某点的地球坐标(纬度, 经度)为 (f, l) , 用以下公式将它们转化为球面坐标(弧度):

$$\phi^\circ = f, \quad \theta^\circ = \begin{cases} l, & l \text{ 为东经} \\ 360 - l, & l \text{ 为西经} \end{cases}$$

$$\phi = \phi^\circ \times \pi \div 180, \quad \theta = \theta^\circ \times \pi \div 180$$

其中 (ϕ, θ) 为球面坐标(为方便起见这里的 ϕ 是教科书中 ϕ 的补角), 即

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \cos \theta \\ y = r \cos \phi \sin \theta \\ z = r \sin \phi \end{cases}$$

$r = 6381$ 为球面的半径.

若球面上两点的球面坐标为 (ϕ_1, θ_1) 和 (ϕ_2, θ_2) , 相应的矢量为

$$(r \cos \phi_i \cos \theta_i, r \cos \phi_i \sin \theta_i, r \sin \phi_i) \quad (i = 1, 2)$$

设它们的夹角为 α , 则有

$$\cos \alpha = \cos \phi_1 \cos \theta_1 \cos \phi_2 \cos \theta_2 + \cos \phi_1 \sin \theta_1 \cos \phi_2 \sin \theta_2 + \sin \phi_1 \sin \phi_2$$

从而求得 α , 进而求得两点间大圆弧的长度.

北京的地球坐标约为 A_0 (北纬 40° , 东经 116.5°), 底特律的地球坐标约为 A_{11} (北纬 42° , 西经 83°). 利用以上方法不难编制程序算出原航线的航程.

连接北京和底特律的大圆弧经过北极附近, 过去是不准航行

的,现俄罗斯、加拿大开放北极航线就可直接沿大圆弧飞行,用上述方法可得航程为 10704km. 与原航线相比节省了 3836km,按航速 980km/h 计算,节省飞行时间 3.91h.

航线	航程(km)
A_0 至 A_1	1118.9
A_1 至 A_2	1758.8
A_2 至 A_3	4624.4
A_3 至 A_4	1339.1
A_4 至 A_5	641.2
A_5 至 A_6	538.6
A_6 至 A_7	651.5
A_7 至 A_8	497.6
A_8 至 A_9	227.8
A_9 至 A_{10}	2811.0
A_{10} 至 A_{11}	331.4
全程	14540.0

方法二:飞机航线位于方程为

$$\begin{cases} x = 6388\cos\phi\cos\theta \\ y = 6388\cos\phi\sin\theta \\ z = 6367\sin\phi \end{cases}$$

的旋转椭球面上($6378 + 10 = 6388$, $6357 + 10 = 6367$). 它通过给定地理坐标的各点,在相邻两点间为上述椭球面的短程线.

在大地测量中,若将地球视作椭球,一点的纬度是这样定义的:用通过该点的子午面与椭球交得一椭圆,过该点作椭圆的法

线,法线与水平线的夹角 f 即为该点的纬度(见图 5-1).

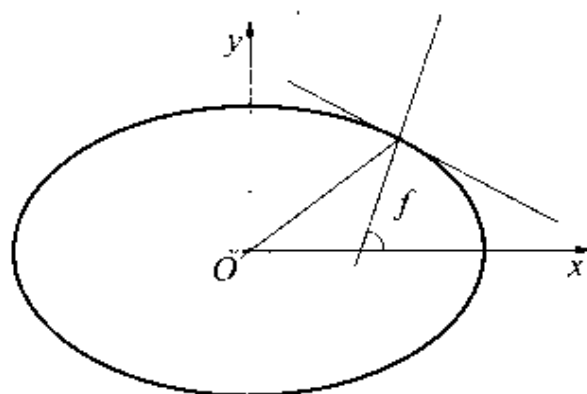


图 5-1

由于椭圆方程可写为

$$\begin{cases} x = 6388 \cos \phi \\ y = 6367 \sin \phi \end{cases}$$

该点的切向量和法向量分别为:

$$\begin{pmatrix} -6388 \sin \phi \\ 6367 \cos \phi \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -6367 \cos \phi \\ -6388 \sin \phi \end{pmatrix}$$

从而

$$\tan \phi = \frac{6367}{6388} \tan f \quad \phi = \arctan \left(\frac{6367}{6388} \tan f \right)$$

将北京到底特律及途经各点的纬度 f 依次作上述变换并化成弧度 ϕ , 可得下表.

A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0.6965	0.5396	0.6268	0.9234	1.0807	1.0283
A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}
0.9584	0.8710	0.8187	0.8187	0.7314	0.7314

相邻两点间的飞行距离可通过用解析方法或直接搜索法找到

椭圆面上过这两点的、长度最短的曲线(短程线),并求得其长度的近似值而得到.用这一方法可得原航线 11 段飞行距离为:

1116.4, 1757.6, 4620.6, 1337.7, 640.7, 538.0, 650.7, 497.0, 227.7, 2809.3, 330.9

总飞行距离为 14527km.

而从北京直接经北极圈飞底特律的飞行距离为 10692km,与原航线相比节省 3835km,节省飞行时间 3.91h.

二、2000 网易杯全国大学生数学建模竞赛题目(大专组)

D 题:空洞探测

山体、隧洞及坝体等的某些内部结构可通过弹性波测量来确定.一个简化问题可描述为,一块均匀介质构成的矩形平板内有一些充满空气的空洞,在平板的两个邻边分别等距地设置若干波源,在它们的对边对等地安放同样多的接收器,记录弹性波由每个波源到达对边上每个接收器的时间,根据弹性波在介质中和在空气中不同的传播速度,来确定板内空洞的位置.现考察如下的具体问题:

一块 $240\text{m} \times 240\text{m}$ 的平板(如图 5-2),在 AB 边等距地设置 7 个波源 $P_i (i=1,2,\dots,7)$, CD 边对等地安放 7 个接收器 $Q_j (j=1,2,\dots,7)$,记录由 P_i 发出的弹性波到达 Q_j 的时间 $t_{ij}(\text{s})$;在 AD 边等距地设置 7 个波源 $R_i (i=1,2,\dots,7)$, BC 边对等地安放 7 个接收器 $S_j (j=1,2,\dots,7)$,记录由 R_i 发出的弹性波到达 S_j 的时间 $\tau_{ij}(\text{s})$.已知弹性波在介质和空气中的传播速度分别为 2880m/s 和 320m/s ,且弹性波沿板边缘的传播速度与在介质中的传播速度相同.

(1)确定该平板内空洞的位置.

(2)只根据由 P_i 发出的弹性波到达 Q_j 的时间 $t_{ij} (i,j=1,2,\dots,7)$,能确定空洞的位置吗?讨论在同样能够确定空洞位置的前

提下,减少波源和接受器的方法.

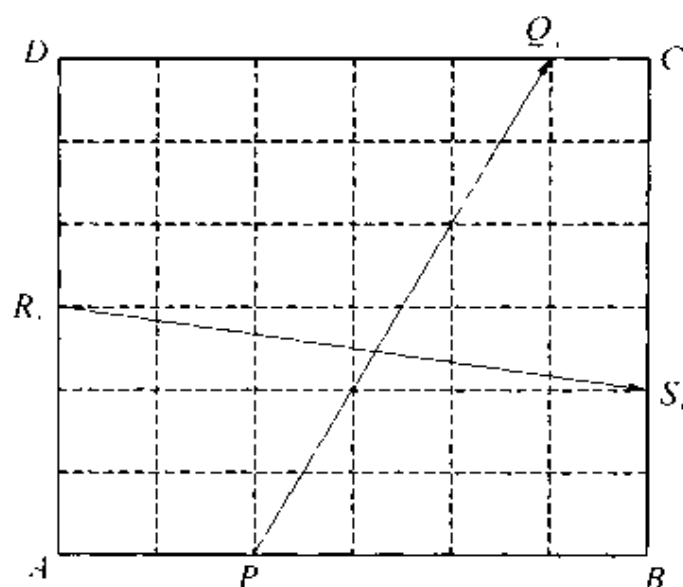


图 5-2

t_{ij}	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7
P_1	0.0611	0.0895	0.1996	0.2032	0.4181	0.4923	0.5646
P_2	0.0989	0.0592	0.4413	0.4318	0.4770	0.5242	0.3805
P_3	0.3052	0.4131	0.0598	0.4153	0.4156	0.3563	0.1919
P_4	0.3221	0.4453	0.4040	0.0738	0.1789	0.0740	0.2122
P_5	0.3490	0.4529	0.2263	0.1917	0.0839	0.1768	0.1810
P_6	0.3807	0.3177	0.2364	0.3064	0.2217	0.0939	0.1031
P_7	0.4311	0.3397	0.3566	0.1954	0.0760	0.0688	0.1042

τ_{ij}	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
R_1	0.0645	0.0602	0.0813	0.3516	0.3867	0.4314	0.5721
R_2	0.0753	0.0700	0.2852	0.4341	0.3491	0.4800	0.4980
R_3	0.3456	0.3205	0.0974	0.4093	0.4240	0.4540	0.3112
R_4	0.3655	0.3289	0.4247	0.1007	0.3249	0.2134	0.1017
R_5	0.3165	0.2409	0.3214	0.3256	0.0904	0.1874	0.2130
R_6	0.2749	0.3891	0.5895	0.3016	0.2058	0.0841	0.0706
R_7	0.4434	0.4919	0.3904	0.0786	0.0709	0.0914	0.0583

解 1. 问题分析

(1)由图 5-2 所给出的波源和接收器的设置,可知空洞的位置只能精确到由波源和接收器所处坐标构成的小方格(见图 5-3),即一个小方格要么全是空气,要么全是介质.

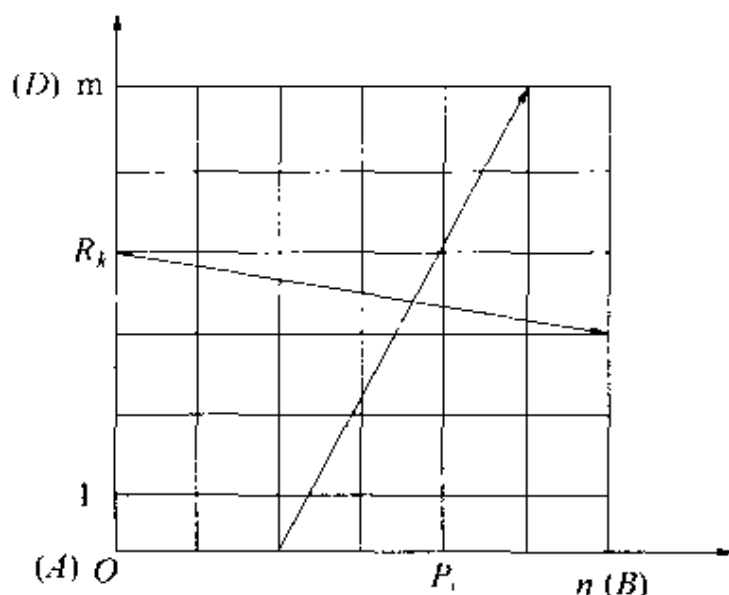


图 5-3

(2)这是一个反问题,不妨先看它的正问题:已知空洞的位置及弹性波在介质和空气中的传播速度,求由波源 P_i 发出的弹性波到达接收器 Q_j 的时间 t_{ij} .

(3)正问题容易求解:算出波线 P_iQ_j 经历的每个小方格的长度,根据该方格是介质还是空洞,分别除以波在介质和空气中的传播速度,对经历的所有方格求和,即得 t_{ij} .

(4)正问题等价于:算出波线 P_iQ_j 经历的每个小方格的长度,根据该方格是介质还是空洞,分别乘以 0 和 1,对经历的所有方格求和,即可得到波线 P_iQ_j 经历的空洞的总长度.

(5)于是反问题可以这样求解:先由波源 P_i 发出的弹性波到达接收器 Q_j 的时间 t_{ij} 及弹性波在介质和空气中的传播速度,算出

波线 P_iQ_j 经历的每个方格的长度,即可解出每个方格是介质还是空洞(即是 0 还是 1).

2. 建模

(1)建立坐标系如图 5-3, x 、 y 轴上分别等距地放置 $n+1$ 、 $m+1$ 个波源(本题 $n=m=6$),将平板划分为 $m \times n (=36)$ 个方格; x 、 y 方向方格的边长分别记作 d_1 、 d_2 (本题为 $d_1=d_2=d=40\text{m}$);波在介质和空气中的传播速度分别记作 $v_1(2880\text{m/s})$ 和 $v_2(320\text{m/s})$.

(2)已知由波源 P_i 发出的弹性波到达接收器 Q_j 的时间 t_{ij} ,记波线 P_iQ_j 经历的介质的总长度和空洞的总长度分别为 p_{ij} 和 q_{ij} ,则 p_{ij} 和 q_{ij} 可由下式解出

$$\begin{cases} \frac{p_{ij}}{v_1} + \frac{q_{ij}}{v_2} = t_{ij} \\ p_{ij} + q_{ij} = \sqrt{[(i-j)d_1]^2 + [md_2]^2} \end{cases}$$

(3)计算波线 P_iQ_j 经历的每个方格的长度.波线 P_iQ_j 的方程为

$$mx + (i-j)y = mi \quad (i, j = 0, 1, \dots, n)$$

该直线与 $x=k(k=0, 1, \dots, n)$, $y=k(k=0, 1, \dots, m)$ 的交点,算出 P_iQ_j 经历的每个方格的长度.

(4)将 $m \times n (=36)$ 个方格按图 5-3 所示的顺序排列,第 i 个方格的特征量记为

$$x_i = \begin{cases} 0, & \text{第 } i \text{ 个方格为介质} \\ 1, & \text{第 } i \text{ 个方格为空气} \end{cases}$$

全体方格的特征向量记为 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$.

(5)由 AB 至 CD 的波线 P_iQ_j 共 $(n+1)^2$ 条,其中 $n+1$ 条 P_iQ_j 是无用的.去掉无用波线后 $n(n+1)$ 条波线 P_iQ_j 的顺序按 i

$= 0, j = 1, 2, \dots, n; i = 1, j = 0, 2, \dots, n; \dots; i = n, j = 1, 2, \dots, n - 1$ 排列. 每条波线经历的各个方格的长度排成一行向量, 于是得到 $n(n+1)$ 条波线经历 mn 个方格的长度矩阵 $\mathbf{A}_{n(n+1) \times mn}^{(1)}$.

(6) 将(2)中得到的波线 $P_i Q_i$ 经历空洞的总长度 q_{ij} , 按照(5)中波线的排列顺序构成空洞长度(列)向量 $\mathbf{b}_{n(n+1)}^{(1)}$, 则应有

$$\mathbf{A}^{(1)} \mathbf{x} = \mathbf{b}^{(1)}$$

(7) 完全类似地处理波线 $R_k S_l$, 得到 $m(m+1)$ 条波线经历 mm 个方格的长度矩阵 $\mathbf{A}_{m(m+1) \times mm}^{(2)}$ 和空洞长度(列)向量 $\mathbf{b}_{m(m+1)}^{(2)}$, 构造

$$\mathbf{A}_{n(n+1) + m(m+1) \times mn} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{(1)} \\ \mathbf{A}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^{(1)} \\ \mathbf{b}^{(2)} \end{bmatrix}$$

则

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

当 $\text{Rank}(\mathbf{A}) = mn$ 时可求出该方程最小二乘意义下的解

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}$$

(8) 取适当的 $\varepsilon > 0$, 令

$$\tilde{x}_i = \begin{cases} 0, & -\varepsilon < x_i < \varepsilon \\ 1, & 1 - \varepsilon < x_i < 1 + \varepsilon \end{cases}$$

则 $\tilde{x}_i = 0$ 的小方格为介质, $\tilde{x}_i = 1$ 的小方格为空洞, 其余的(如果有的话)无法确定.

3. 计算及结果

(1) 计算 $n(n+1) + m(m+1) = 84$ 条波线经历 $mn = 36$ 个方格的长度矩阵 \mathbf{A} , 根据已知数据 t_j 和 t_{kl} , 得到的波线经历空洞的总长度向量 \mathbf{b} .

(2) 计算 $\text{Rank}(\mathbf{A}) = 36$, 用数学软件可直接得到(5)的解(6)如下:

$$\begin{aligned}
 x = & \begin{pmatrix} -0.0365 & 0.0373 & -0.0730 & -0.0617 & 0.0383 & -0.0016 \\
 & 0.0056 & 0.9847 & 1.0674 & 0.0008 & -0.0013 & -0.0128 \\
 & 0.0580 & 0.9512 & 0.9588 & 0.0707 & 0.9149 & 0.0313 \\
 & 0.1042 & -0.0099 & 1.0209 & 0.9968 & 0.0303 & -0.0586 \\
 & -0.0110 & 1.0184 & 0.0058 & -0.0046 & 0.0625 & -0.0040 \\
 & -0.0762 & 0.0184 & -0.0046 & -0.0577 & 0.0416 & 0.0303 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

三、2001 全国大学生数学建模竞赛题目(大专组)C 题: 基金使用计划

某校基金会有一笔数额为 M 元的基金,打算将其存入银行或购买国库券.当前银行存款及各期国库券的利率见下表.假设国库券每年至少发行一次,发行时间不定.取款政策参考银行的现行政策.

	银行存款税后年利率/%	国库券年利率/%
活期	0.792	
半年期	1.664	
1 年期	1.800	
2 年期	1.944	2.55
3 年期	2.160	2.89
5 年期	2.304	3.14

校基金会计划在 n 年内每年用部分本息奖励优秀教师,要求每年的奖金额大致相同,且在 n 年末仍保留原基金数额.校基金会希望获得最佳的基金使用计划,以提高每年的奖金额.请你帮助校基金会在如下情况下设计基金的使用方案,并对 $M = 5000$ 万元、 $n = 10$ 年给出具体结果:

(1)只存款不购国库券;

(2)可存款也可购国库券.

(3)学校在基金到位后的第3年要举行百年校庆,基金会希望这一年的奖金比其他年度多20%.

解

1. 问题的描述(略)

2. 基本假设

问题的本身尚有一些不确定的因素,比如说基金到位的时间、每年奖金发放的日期、银行利率的变动情况等.为使问题简化,我们给出如下假设:

(1)该笔基金于年底一次性到位,自下年起每年年底一次性发放奖金,每年发放的奖金额为固定的,记为 y_n .

(2)仅考虑购买2年、3年、5年期国库券的情况.假设3种期限的国库券每年至少发行一次,且只要想买,就一定能买到.

(3)银行存款利率和国库券的利率执行现行利率标准,且在 n 年内不发生变化.

(4)国库券提前支取,按同期银行存款利率计息,且收取2‰的手续费.

3. 基本模型

(1)模型一 单纯存款模型.

设将1元钱存入银行 k 年(包括中途转存),到期时本息最多可达 r_k 元,则假如第 k 年有 M_k 元的存款到期,到期时取出,本息和最大可达 $r_k M_k$. 现将 M 元分成 n 份,分别记为 M_1, M_2, \dots, M_n . 将 M_k 存入银行 k 年,到期时取出,将本息和作为第 k 年的奖金(第 n 年本息和除作奖金外,还要留下原始本金 M),则应有

$$r_k M_k = y_n \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$r_n M_n = y_n + M \quad \sum_{i=1}^n M_i = M$$

记 $\frac{1}{r_i} = S_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$

$$\eta_n = \frac{y_n}{M}$$

则 $M_k = S_k(1 - S_n)M / \sum_{i=1}^n S_i \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$

$$M_n = S_n(1 + \sum_{i=1}^{n-1} S_i)M / \sum_{i=1}^n S_i$$

则 $y_n = (1 - S_n)M / \sum_{i=1}^n S_i \quad \eta_n = (1 - S_n) / \sum_{i=1}^n S_i \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$

上式给出了 n 年内每年的奖金额 y_n 与 M 的比值. 该式的关键在于如何求出 $r_k (k = 1, 2, \dots, n)$. 下面我们给出 r_k 的算法.

设将 1 元钱存入银行 k 年, k 年存期中有 x_1 个 1 年期、 x_2 个 2 年期、 x_3 个 3 年期、 x_5 个 5 年期, 记 $A_k(x_1, x_2, x_3, x_5)$ 为其本息和, 则

$$A_k(x_1, x_2, x_3, x_5) = \beta_1^{x_1} \beta_2^{x_2} \beta_3^{x_3} \beta_5^{x_5}$$

其中

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_5 = k \quad \text{且} \quad r_k = \max_{\pi_k} A_k(x_1, x_2, x_3, x_5)$$

$$\pi_k = \{(x_1, x_2, x_3, x_5) | x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_5 = k,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_5 \text{ 均为非负整数}\}$$

容易看出, 任意交换 2 个存期的次序不改变本息和. 例如, 先存 1 年期后存 3 年期与先存 3 年期后存一年期, 到期时本息和是一样的. 不仅如此, 经计算可知以下 5 式成立:

$$\beta_1^2 < \beta_2, \quad \beta_1 \beta_2 < \beta_3, \quad \beta_2^2 < \beta_1 \beta_3, \quad \beta_2 \beta_3 < \beta_5, \quad \beta_3^2 < \beta_1 \beta_5$$

上式表明, 存 2 个 1 年期不如一次存 1 个 2 年期, 存 1 个 1 年

期再转存 1 个 2 年期不如一次存 1 个 3 年期,以此类推,存 2 个 3 年期不如先存 1 个 1 年期再转存 1 个 5 年期.

据此我们得到如下定理:

定理 假如 $A_k(x_1, x_2, x_3, x_5)$ 在 $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_5^*)$ 点取得最大值,则应有

$$(1) x_1^* \leq 1, x_2^* \leq 1, x_3^* \leq 1; x_1^* + x_2^* \leq 1, x_2^* + x_3^* \leq 1; x_1^* + 2x_2^* + 3x_3^* \leq 4$$

$$(2) x_5^* = \left[\frac{k}{5} \right], x_3^* = \left[\frac{k - 5x_5^*}{3} \right], x_2^* = \left[\frac{k - 5x_5^* - 3x_3^*}{2} \right], x_1^* = k - 5x_5^* - 3x_3^* - 2x_2^*$$

$$r_k = \beta_1^* \beta_2^* \beta_3^* \beta_5^* \dots \dots \textcircled{2}$$

(2)模型二 可存款、可购国库券模型.

仍将 M 分成 M_1, M_2, \dots, M_n , 共 n 份, M_k 可作存款或购买国库券用,其本息和用作第 k 年的奖教金,最后一笔除奖金外,还应留下基金本金 M .

因国库券在 1 年内不定期发行,为保证当有国库券发行时能即时买到,可以考虑将这笔钱以半年定期存入银行.若在上半年发行国库券,以活期利息提前支出,购买国库券,当国库券到期时取出,再存 1 个半年定期,剩余的时间以活期计息;若在下半年发行国库券,此时半年定期已到期,立即取出,购买国库券,到期时取出,剩余时间再存活期.购买国库券之前及到期取出之后的两段时间之和为 1 年,因此购买一个 k 年期的国库券实际需要 $k+1$ 年.

通过分析可以得出,要获得最大的资金增值,应选择 1 年定期、2 年定期、3 年定期及 3 年期国库券和 5 年期国库券,而不应选择 2 年期国库券和 5 年定期存款.为了叙述方便,把买 3 年期国库券加半年定期及半年活期存款看成一个 4 年期存款,到期时资金增长系数为 $\bar{\beta}_4 (\bar{\beta}_4 = (1 + 3\bar{\alpha}_3) \beta_0 \beta_h = 1.10008)$;把买 5 年期国库

券加半年定期及半年活期存款看成一个 6 年期存款,到期时资金增长系数为 $\bar{\beta}_6$ ($\bar{\beta}_6 = (1 + 3\bar{\alpha}_5)\beta_0\beta_h = 1.17125$). 设将 M_k 的本息用作第 k 年的奖教金, k 年中有 x_1 个 1 年期、 x_2 个 2 年期、 x_3 个 3 年期、 x_4 个 4 年期、 x_6 个 6 年期,则到期时资金增长系数为

$$B_k(x_1, x_2, x_3, x_4, x_6) = \beta_1^{x_1} \beta_2^{x_2} \beta_3^{x_3} \bar{\beta}_4^{x_4} \bar{\beta}_6^{x_6}$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 6x_6 = k$$

类似于单纯存款模型的分析,要使 $B_k(x_1, x_2, x_3, x_4, x_6)$ 取最大值,只需取

$$x_6 = \left(\frac{k}{6}\right), x_4 = \left(\frac{k - 6x_6}{4}\right), x_3 = \left(\frac{k - 6x_6 - 4x_4}{3}\right),$$

$$x_2 = \left(\frac{k - 6x_6 - 4x_4 - 3x_3}{2}\right)$$

$$x_1 = k - 6x_6 - 4x_4 - 3x_3 - 2x_2$$

$$r_k = \beta_1^{x_1} \beta_2^{x_2} \beta_3^{x_3} \bar{\beta}_4^{x_4} \bar{\beta}_6^{x_6} \cdots \cdots \textcircled{3}$$

(3)模型三 基于百年校庆的最佳投资模型.

用 y'_n 表示第一年发的资金额,其他仍采用模型一的记号及处理方法,则应有

$$T_n = 1 + \gamma \left/ \left(r_3 \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i} \right) \right. = 1 + \gamma \eta_n / [r_3(1 - S_n)]$$

$$y'_n = y_n / T_n, \quad M_k = S_k y'_n \quad (k = 1, 2, \cdots, n-1, k \neq 3),$$

$$M_3 = (1 + \gamma) S_3 y'_n$$

r_k 的推导同模型一及模型二.

4. 基本结果与分析

模型一至模型三就不同情况给出了最佳投资方案,根据本题所给条件,得到具体结果见下表(剩余的为 M_n).

(单位:万元,精确到0.1万元,其中 $\gamma = 20\%$)

$\begin{matrix} k \\ n \end{matrix}$		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
模型一	10	107.9	105.7	103.1	101.3	98.5	96.7	94.8	92.5	90.8		
	12	105.9	103.8	101.2	99.4	96.7	95.0	93.0	90.8	89.2	86.7	85.2
模型二	10	125.3	122.8	119.8	115.9	113.9	108.9	106.9	104.8	102.2		
	12	129.6	127.0	123.9	119.9	117.8	112.6	110.6	108.4	105.8	102.4	100.6
模型三	10A	105.9	103.8	121.5	99.4	96.7	95.0	93.0	90.8	89.2		
	12B	123.0	120.5	141.1	113.8	111.8	106.9	105.0	102.9	100.4		

注:A表示仅考虑存款方式,B表示可存款、可购国库券方式.

分析:对于模型一,根据公式①及②,对不同的 n , η_n 分别定义为 5 个子序列 $\{\eta_{5m}\}$, $\{\eta_{5m+1}\}$, $\{\eta_{5m+2}\}$, $\{\eta_{5m+3}\}$, $\{\eta_{5m+4}\}$. 可以证明,上述 5 个序列(均为 η_n 子序列)均是单调上升的,且以 η^{-1} 为极限($\eta^{-1} = 2.1963\%$).

对于模型二,根据式①及③,可得到类似的 6 个子序列 $\{\eta_{6m}\}$, $\{\eta_{6m+1}\}$, $\{\eta_{6m+2}\}$, $\{\eta_{6m+3}\}$, $\{\eta_{6m+4}\}$, $\{\eta_{6m+5}\}$. 可以证明,上述 6 个子序列均是单调上升的,且以 η^{-1} 为极限($\eta^{-1} = 2.6392\%$).

对于模型三,根据式①得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = 1 + \gamma S_3 \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n$$

四、2001 年全国大学生数学建模竞赛题目(大专组)D 题: 公交车调度

公共交通是城市交通的重要组成部分,做好公交车的调度对于完善城市交通环境、改进市民出行状况、提高公交公司的经济效益,都具有重要意义.下面考虑一条公交线路上公交车的调

度问题,其数据来自我国一座特大城市某条公交线路的客流调查和运营资料。

该条公交线路上行方向共 14 站,下行方向共 13 站,表中给出的是典型的一个工作日两个运行方向各站上下车的乘客数量统计。公交公司配给该线路同一型号的大客车,每辆车标准载客 100 人,据统计客车在该线路上运行的平均速度为 20km/h。运营调度要求,乘客候车时间一般不要超过 10min,早高峰时一般不要超过 5min,车辆满载率不应超过 120%,一般也不要低于 50%。

试根据这些资料和要求,为该线路设计一个便于操作的全天(工作日)的公交车调度方案,包括两个起点站的发车时刻表;一共需要多少辆车;这个方案以怎样的程度照顾到了乘客和公交公司双方的利益;等等。

某路公交汽车各时组每站上下车人数统计表 上行方向:A13 开往 A0

站 名		A13	A12	A11	A10	A9	A8	A7	A6	A5	A4	A3	A2	A1	A0
站间距/km			1.6	0.5	1	0.73	2.04	1.26	2.29	1	1.2	0.4	1	1.03	0.53
5:00—6:00	上	371	60	52	43	76	90	48	83	85	26	45	45	11	0
	下	0	8	9	13	20	48	45	81	32	18	24	25	85	57
6:00—7:00	上	1990	376	333	256	589	594	315	622	510	176	308	307	68	0
	下	0	99	105	164	239	588	542	800	407	208	300	288	921	615
7:00—8:00	上	3626	634	528	447	948	868	523	958	904	259	465	454	99	0
	下	0	205	227	272	461	1058	1097	1793	801	469	560	636	1871	1459
8:00—9:00	上	2064	322	305	235	477	549	271	486	439	157	275	234	60	0
	下	0	106	123	169	300	634	621	971	440	245	339	408	1132	759
9:00—10:00	上	1186	205	166	147	281	304	172	324	267	78	143	162	36	0
	下	0	81	75	120	181	407	411	551	250	136	187	233	774	483

续表

站 名		A13	A12	A11	A10	A9	A8	A7	A6	A5	A4	A3	A2	A1	A0
10:00—11:00	上	923	151	120	108	215	214	119	212	201	75	123	112	26	0
	下	0	52	55	81	136	299	280	442	178	105	153	167	532	385
11:00—12:00	上	957	181	157	133	254	264	135	253	260	74	138	117	30	0
	下	0	54	58	84	131	321	291	420	196	119	159	153	534	340
12:00—13:00	上	873	141	140	108	215	204	129	232	221	65	103	112	26	0
	下	0	46	49	71	111	263	256	389	164	111	134	148	488	333
13:00—14:00	上	779	141	103	84	186	185	103	211	173	66	108	97	23	0
	下	0	39	41	70	103	221	197	297	137	85	113	116	384	263
14:00—15:00	上	625	104	108	82	162	180	90	185	170	49	75	85	20	0
	下	0	36	39	47	78	189	176	339	139	80	97	120	383	239
15:00—16:00	上	635	124	98	82	152	180	80	185	150	49	85	85	20	0
	下	0	36	39	57	88	209	196	339	129	80	107	110	353	229
16:00—17:00	上	1493	299	240	199	396	404	210	428	390	120	208	197	49	0
	下	0	80	85	135	194	450	441	731	335	157	255	251	800	557
17:00—18:00	上	2011	379	311	230	497	479	296	586	508	140	250	259	61	0
	下	0	110	118	171	257	694	573	957	390	253	293	378	1228	793
18:00—19:00	上	691	124	107	89	167	165	108	201	194	53	93	82	22	0
	下	0	45	48	80	108	237	231	390	150	89	131	125	428	336
19:00—20:00	上	350	64	55	46	91	85	50	88	89	27	48	47	11	0
	下	0	22	23	34	63	116	108	196	83	48	64	66	204	139
20:00—21:00	上	304	50	43	36	72	75	40	77	60	22	38	37	9	0
	下	0	16	17	24	38	80	84	143	59	34	46	47	160	117

续表

站名		A13	A12	A11	A10	A9	A8	A7	A6	A5	A4	A3	A2	A1	A0
21:00—22:00	上	209	37	32	26	53	55	29	47	52	16	28	27	6	0
	下	0	14	14	21	33	78	63	125	62	30	40	41	128	92
22:00—23:00	上	19	3	3	2	5	5	3	5	5	1	3	2	1	0
	下	0	3	3	5	8	18	17	27	12	7	9	9	32	21

某路公交汽车各时组每站上下车人数统计表 下行方向:A0开往A13

站名		A0	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13
站间距/km			1.56	1	0.44	1.2	0.97	2.29	1.3	2	0.73	1	0.5	1.62
5:00—6:00	上	22	3	4	2	4	4	3	3	3	1	1	0	0
	下	0	2	1	1	6	7	7	5	3	4	2	3	9
6:00—7:00	上	795	143	167	84	151	188	109	137	130	45	53	16	0
	下	0	70	40	40	184	205	195	147	93	109	75	108	271
7:00—8:00	上	2328	380	427	224	420	455	272	343	331	126	138	45	0
	下	0	294	156	157	710	780	849	545	374	444	265	373	958
8:00—9:00	上	2706	374	492	224	404	532	333	345	354	120	153	46	0
	下	0	266	158	149	756	827	856	529	367	428	237	376	1167
9:00—10:00	上	1556	204	274	125	235	308	162	203	198	76	99	27	0
	下	0	157	100	80	410	511	498	336	199	276	136	219	556
10:00—11:00	上	902	147	183	82	155	206	120	150	143	50	59	18	0
	下	0	103	59	59	246	346	320	191	147	185	96	154	438
11:00—12:00	上	847	130	132	67	127	150	108	104	107	41	48	15	0
	下	0	94	48	48	199	238	256	175	122	143	68	128	346

续表

站 名		A0	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13
12:00—13:00	上	706	90	118	66	105	144	92	95	88	34	40	12	0
	下	0	70	40	40	174	215	205	127	103	119	65	98	261
13:00—14:00	上	770	97	126	59	102	133	97	102	104	36	43	13	0
	下	0	75	43	43	166	210	209	136	90	127	60	115	309
14:00—15:00	上	839	133	156	69	130	165	101	118	120	42	49	15	0
	下	0	84	48	48	219	238	246	155	112	153	78	118	346
15:00—16:00	上	1110	170	189	79	169	194	141	152	166	54	64	19	0
	下	0	110	73	63	253	307	341	215	136	167	102	144	425
16:00—17:00	上	1837	260	330	146	305	404	229	277	253	95	122	34	0
	下	0	175	96	106	459	617	549	401	266	304	162	269	784
17:00—18:00	上	3020	474	587	248	468	649	388	432	452	157	205	56	0
	下	0	330	193	194	737	934	1016	606	416	494	278	448	1249
18:00—19:00	上	1966	350	399	204	328	471	289	335	342	122	132	40	0
	下	0	223	129	150	635	787	690	505	304	423	246	320	1010
19:00—20:00	上	939	130	165	88	138	187	124	143	147	48	56	17	0
	下	0	113	59	59	266	306	290	201	147	155	86	154	398
20:00—21:00	上	640	107	126	69	112	153	87	102	94	36	43	13	0
	下	0	75	43	43	186	230	219	146	90	127	70	95	319
21:00—22:00	上	636	110	128	56	105	144	82	95	98	34	40	12	0
	下	0	73	41	42	190	243	192	132	107	123	67	101	290
22:00—23:00	上	294	43	51	24	46	58	35	41	42	15	17	5	0
	下	0	35	20	20	87	108	92	69	47	60	33	49	136

解 先给出一个描述本问题的数学模型,再通过设定发车时刻、比较目标函数选出较优的方案.

1. 已知数据

(1) 车站标记: $j = 1, 2, \dots, n$.

(2) 乘客到达密度: 在时刻 t 到达 j 站乘客的密度 $u_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, n$).

(3) 乘客下车密度: 在时刻 t 从 j 站下车乘客的密度 $d_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, n$).

(4) 站间行车时间: 从 $j-1$ 站到 j 站站间行车时间(包括在 j 站的停车时间): τ_j ($j = 1, 2, \dots, n$).

(5) 每辆车的载客容量 B ; 载客容量上限 \bar{B} .

(6) 高峰时段等待时间上界 \bar{i} ; 平峰时段等待时间上界 \bar{i} .

2. 决策变量及相关变量

(1) 决策变量: 发车时刻表, 向量 $T = (T_0 \ T_1 \ T_2 \ \dots \ T_k \ \dots \ T_m)$, 其中, m 是上(或下)行方向全天发车辆数; T_0 是第一辆车到达起点站 $j=1$ 的时刻; T_k 是第 k 辆车驶离起点站 $j=1$ 的时刻 ($k = 1, 2, \dots, m$).

(2) 相关变量:

第 k 辆车驶离 j 站的时刻: $T_{k1} = T_k, T_{kj} = T_{k1} + \sum_{i=1}^j \tau_i$ ($j = 2, 3, \dots, n-1$);

第 k 辆车驶离 j 站时该车上的乘客数: $P_k(T_{kj})$ ($k = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n-1$);

第 k 辆车驶到 j 站时, 该站上候车乘客的分布函数:

$W_{kj}(0)$: 从 T_{k-1j} 到 T_{kj} 时段的来客数;

$W_{kj}(h)$: 第 k 辆车驶到 j 站时, 该站上已等候过 h 趟车仍未能上车的乘客数(非负整数);

h_{kj} : 第 k 辆车驶到 j 站时, 该站上等待最久乘客的候车趟数;

$$h_{1j}=0, W_{kj}(h_{kj})>0, W_{kj}(h_{kj}+1)=0 \quad (j=1, \dots, n; k=1, \dots, m)$$

3. 相关变量的计算公式

第 k 辆车驶到 j 站后, 等到该站的乘客下完后, 车上仍留下的乘客数:

$$a_{kj} = \max \left\{ \left(P_k(T_{k(j-1)}) - \int_{T_{(k-1)j}}^{T_{kj}} d_j(t) dt \right), 0 \right\}$$

第 k 辆车驶到 j 站乘客下完后, 可容纳的上车乘客数上界:

$$b_{kj} = \bar{B} - a_{kj}$$

第 $k-1$ 辆车驶离 j 站到第 k 辆车驶到 j 站时段内, 该站的乘客到达量:

$$W_{kj}(0) = \int_{T_{(k-1)j}}^{T_{kj}} u_j(t) dt$$

计算第 k 辆车驶到 j 站后, 在该站实际上车的乘客数 ΔP_{kj} .

第一步: 按先到先上车的排队原则, 在 j 站的乘客要等候车辆数的最大值为 h_{kj}^* , 求解:

$$\begin{cases} \min h \\ 0 \leq h \leq h_{kj}^* \\ \text{s. t. } \sum_{r=h}^{h_{kj}} W_{kj}(r) \leq b_{kj} \end{cases}$$

第二步: 若 $h_{kj}^* = 0$, 说明此时该站上所有候车人都能上车, 于是

$$\Delta P_{kj} = \sum_{r=h}^{h_{kj}} W_{kj}(h) \quad \text{同时令 } h_{(k+1)j} = 0$$

第三步: $h_{kj}^* > 0$, 说明此时该站候车乘客不能全部上车, 于是

$$\Delta P_{kj} = b_{kj}$$

同时令 $h_{(k+1)j} = h_{kj}^* + 1$

且 $W_{(k+1)j}(h+1) = W_{kj}(h) \quad (h = 0, 1, \dots, h_{kj}^* - 2)$

$$W_{(k+1)j}(h_{kj}^*) = \sum_{h=0}^{h_{kj}^*+1} W_{kj}(h) - b_{kj}$$

于是第 k 辆车驶离 j 站时该车上的乘客数为

$$P_k(T_{kj}) = a_{kj} + \Delta P_{kj} = \begin{cases} a_{kj} + \sum_{h=0}^{h_{kj}} W_{kj}(h), & h_{kj}^* = 0 \\ \bar{B}, & h_{kj}^* > 0 \end{cases}$$

$$(k = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n-1)$$

4. 目标函数的选择和计算

第 k 辆车驶到 j 站时,该站上已等候 h 辆车的乘客数是

$$W_{kj}(h) \quad (h = 1, 2, \dots, h_{kj})$$

他已等候的时间是: $WT_{kj}(h) = T_{kj} - T_{(k-h)j} \quad (h = 1, 2, \dots, h_{kj})$

确定交通高峰时段: $[\hat{T}_1, \hat{T}_2]$, 整个时段 $[T_1, T_m]$, 则

Over $W_1(T)$ = 高峰时段候车超时率

$$= \frac{\text{高峰时段候车超过 } \hat{t} \text{ 的总人数}}{\text{高峰时段上车总人数}}$$

即

$$\text{Over } W_1(T) = \frac{\sum_{T_{kj} \in [\hat{T}_1, \hat{T}_2]} \left\{ W_{kj}(h) \mid WT_{kj}(h) \geq \hat{t}, h = 1, 2, \dots, h_{kj} \right\}}{\sum_j \int_{\hat{T}_1}^{\hat{T}_2} u_j(t) dt}$$

Over $W_2(T)$ = 平峰时段候车超时率

$$= \frac{\text{平峰时段候车超过 } \bar{t} \text{ 的总人数}}{\text{平峰时段上车总人数}}$$

即

$$\text{Over } W_2(T) = \frac{\sum_{T_{kj} \in [\hat{T}_1, \hat{T}_2]} \left\{ W_{kj}(h) \mid WT_{kj}(h) \geq \bar{t}, h = 1, 2, \dots, h_{kj} \right\}}{\sum_j \int_{\bar{t} \in [\hat{T}_1, \hat{T}_2]} u_j(t) dt}$$

$$\begin{aligned}\text{Cap-low}(T) &= \text{满载率低于 } 50\% \text{ 的时段数百分比} \\ &= \frac{\text{满载率低于 } 50\% \text{ 的段数}}{\text{发车次数} \times (\text{车站数} - 1)}\end{aligned}$$

即

$$\text{Cap-low}(T) = \frac{\sum_{k_j} \{1 \mid (B - P_k(T_{k_j}))/B \leq 0.5, P_k(T_{k_j}) \leq B\}}{m \times (n - 1)}$$

5. 问题

模型一 $T = (T_0 \ T_1 \ T_2 \ \cdots \ T_k \ \cdots \ T_m)$, 使得

$$\min_T (C(T) = \alpha \text{Over}W_1(T) + \beta \text{Over}W_2(T) + \gamma \text{Cap-low}(T))$$

其中 α, β, γ 为选择给定的权重系数.

决策变量可简化为: 先确定高峰时段及平峰时段, 在每个时段内等间隔发车, 以减少变量.

模型二 求 $T = (T_0 \ T_1 \ T_2 \ \cdots \ T_k \ \cdots \ T_m)$, 使得

$$\begin{aligned}& \min m \\ & \text{s. t. } \begin{cases} \text{Over}W_1(T) \leq \alpha_1 \\ \text{Over}W_2(T) \leq \alpha_2 \\ \text{Cap-low}(T) \leq \alpha_3 \end{cases}\end{aligned}$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是给定的百分比.

6. 计算及结果

用给定发车间隔, 计算目标函数, 通过比较选优的办法, 提供合适的方案.

(1) 用所给数据中每时段(1h)在每一站的上车人数和下车人数, 通过线性插值函数分别计算出 $u_j(t)$ 和 $d_j(t)$.

(2) 用所给数据中站间距和平均车速(忽略上下车时间)得到 $\tau_j; B = 100, \bar{B} = 200$.

(3) 根据所给数据中始发站的上车人数, 确定早、晚高峰时段为: 早高峰 6:40—9:40; 晚高峰 15:50—18:50.

于是全天分为 3 个时段:平峰时段 I_1 , 早高峰时段 I_2 , 晚高峰时段 I_3 . 高峰时段等待时间上界 $\bar{t} = 5\text{min}$; 平峰时段等待时间上界 $\bar{t} = 10\text{min}$.

(4) 给定决策变量为 3 个时段的发车间隔: J_1, J_2, J_3 , 由此可计算出 $T_0, T_1 \cdots T_m$.

(5) 对于上行和下行方向均可按照模型一计算, 得到如下结果:

记 $\text{Over } W_1$ = 早高峰时段候车超时率, $\text{Over } W_2$ = 平峰时段候车超时率, Cap-low = 满载率低于 50% 的时段数百分比, 选择权重系数 α, β, γ 均为 $1/3$, 得目标函数 C .

计算中可记录: Total = 上下行方向全天发车总辆数; 按照全程行车时间(考虑每辆车反复运行)可记录: 上行方向所需车辆数 (Up-Bus), 下行方向所需车辆数 (Down-Bus).

为保证每个始发站每天早发车前与晚收车后的车辆状态都不变, 给定的发车间隔有下列两种:

A. 上行与下行方向发车时间间隔相同

(J_1, J_2, J_3)	$\text{Over } W_2$	$\text{Over } W_1$	Cap-low	C	Total	Up-bus	Down-bus
(3, 1, 2)	0.0006	0.0086	0.7483	0.2525	509	44	44
(3, 2, 2)	0.0006	0.0941	0.6175	0.2374	420	22	22
(4, 2, 3)	0.0488	0.1161	0.4140	0.1930	331	22	22
(4, 3, 3)	0.1016	0.3194	0.4031	0.2747	301	15	15
(5, 2, 3)	0.0517	0.1336	0.3390	0.1748	295	22	22
(5, 3, 3)	0.1204	0.3585	0.3150	0.2646	265	15	15
(5, 2, 4)	0.1565	0.1336	0.3301	0.2067	280	22	22
(5, 3, 4)	0.2234	0.3585	0.3037	0.2952	250	15	15
(6, 2, 2)	0.0346	0.1632	0.3414	0.1803	299	22	22
(6, 3, 3)	0.1344	0.3704	0.2547	0.2532	240	15	15

B. 上行与下行方向早高峰和晚高峰时间间隔对换, 如(4, 3, 2)表示: 上行为(4, 3, 2), 下行为(4, 2, 3).

(J_1, J_2, J_3)	Over W_2	Over W_1	Cap-low	C	Total	Up-bus	Down-bus
(4, 3, 2)	0.0184	0.1733	0.4126	0.2014	330	45	15
(4, 2, 3)	0.0860	0.2547	0.4507	0.2638	331	15	45
(5, 3, 4)	0.0252	0.0842	0.5672	0.2255	385	135	15
(5, 3, 2)	0.0250	0.1912	0.3341	0.1834	295	45	15
(5, 2, 3)	0.1035	0.2933	0.3790	0.2586	295	15	45
(5, 3, 3)	0.1204	0.3585	0.3150	0.2646	265	15	15
(5, 4, 2)	0.0922	0.2912	0.3260	0.2365	280	56	11
(5, 2, 4)	0.2338	0.2519	0.3976	0.2944	280	11	56
(6, 3, 2)	0.0528	0.2203	0.2793	0.1841	269	45	15
(6, 4, 2)	0.1512	0.3191	0.2540	0.2414	254	56	11

从以上目标函数 C 小于 0.3 的各种方案看, 结合所需车辆数, A 中的(5, 2, 3)较优.

注: 参考答案补充意见:

(1) 假设所给数据中每时段(1h)在每一站的上车人数和下车人数就是该时段到达该站和离去的人数, 即通过这些数据计算出 $u_j(t)$ 和 $d_j(t)$.

(2) 本质上是多目标问题, 简化为单目标及权重选择为(1/3, 1/3, 1/3)只是一种处理方法, 其他方法和选择只要合理也是可以的.

(3) 参考答案中早、晚高峰时段的确定只是一种选择方案, 其他方案只要合理也是可以的.

五、2002 高教社杯全国大学生数学建模竞赛题目(大专组)

C 题:车灯线光源的计算

安装在汽车头部的车灯的形状为一旋转抛物面,车灯的对称轴水平地指向正前方,其开口半径为 36mm,深度为 21.6mm. 经过车灯的焦点,在与对称轴相垂直的水平方向,对称地放置长度为 4mm 的线光源,线光源均匀分布. 在焦点 F 正前方 25m 处的 A 点放置一测试屏,屏与 FA 垂直.

请解决下列问题:

(1) 计算直射光总功率与反射光总功率之比.

(2) 计算测试屏上直射光的亮区,在有标尺的坐标系中画出其图形.

(3) 计算测试屏上反射光的亮区,在有标尺的坐标系中画出其图形(只须考虑一次反射).

解 (1) 直射光与反射光总功率之比

将线光源剖分为等长的 N 小段,简化为每小段能量集中在中点的点光源系统,设每个点光源的功率为 E . 车灯开口关于点光源 P_i 所在点所张的立体角为 α_i ,则该点光源照射到测试屏的直射功率为 $E\alpha_i/4\pi$,而 $E(4\pi - \alpha_i)/4\pi$ 为反射功率. 因此该系统直射光与反射光功率之比为

$$\gamma = \frac{\sum E\alpha_i/4\pi}{\sum E(4\pi - \alpha_i)/4\pi} = \frac{\sum \alpha_i}{N \times 4\pi - \sum \alpha_i}$$

开口圆关于一点的立体角可用两种方法计算. 其一是推导立体角的积分公式,用数值积分近似计算. 其二,以光源 P_i 所在点为球心作单位球,将单位球在球坐标系下剖分成小面元,作从光源出发通过面元中心的射线,射线与车灯反光面不交的面元的面积之

和即为所求的立体角.用此法计算时必须注意检验算法的精度.

计算结果 $\gamma \approx 0.69$.

(2) 计算测试屏上直射光亮区

线光源可视作点光源的集合,每个点光源的直射亮区为以光源为顶点,过车灯开口圆的锥面与测试屏平面的交线所包围的区域.

取右手直角坐标系如下:以旋转抛物面的顶点为原点,指向测试屏方向的旋转轴为 z 轴, y 轴平行于线光源.设 z_f, z_0, z_i 分别为焦点、车灯开口平面与测试屏平面的 z 坐标, r_0 为车灯开口圆的半径.设光源位置为 $(0, y_0, z_f)$,则该锥面方程为

$$\begin{cases} x = tx_1 \\ y = y_0 + t(\sqrt{r_0^2 - x_1^2} - y_0) \\ z = z_f + t(z_0 - z_f) \end{cases}$$

其中, $t, x_1 (t \geq 0, |x_1| \leq r_0)$ 为参数.

$$\text{令} \quad t = \frac{z_s - z_f}{z_0 - z_f}$$

锥面与测试屏平面的交线为

$$(y - (1 - t)y_0)^2 + x^2 = t^2 r_0^2$$

即一个半径为 tr_0 、圆心为 $(0, (1 - t)y_0)$ 的圆.于是长 4 mm 的线光源在测试屏上直射光亮区为圆族

$$x^2 + (y - (1 - t)y_0)^2 = t^2 r_0^2 \quad (-2 \leq y_0 \leq 2)$$

的包络围成的区域.显然这是两个半圆

$$x^2 + (y + 7573.76)^2 = 136363.64^2 \quad (y < -7573.76)$$

$$x^2 + (y - 7573.76)^2 = 136363.64^2 \quad (y > 7573.76)$$

和两条直线 $x = -136363.64, x = 136363.64$ 围成的区域(图略).

亦可用数值模拟的方法解决：将线光源和车灯开口圆分别离散为点光源和圆上的离散点集合。对每一个点光源，作由它发出经过所有车灯开口圆离散点集的光线得到它们与测试屏交点的集合。这些点集的和集的外边界包围的区域即为直射光亮区。

(3) 测试屏上反射光亮区

根据所给数据不难得到车灯旋转抛物面的方程为

$$z = \frac{1}{60}(x^2 + y^2)$$

将它用柱面坐标 (r, θ, z) 进行剖分，此时只需将 $0 \leq z \leq z_0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ 进行剖分。将每一个剖分所得的小面元视作一个小的反射面。设某面元的中心坐标为 (x_n, y_n, z_n) ，将点光源位置 $(0, y_0, z_f)$ 与该点的连线视作入射线，可用向量 $\mathbf{a} = (x_n, y_n - y_0, z_n - z_f)$ 表示，此面元在中心处的外法线向量为 $\mathbf{b} = \left(\frac{x_n}{30}, \frac{y_n}{30}, -1\right)$ ，则反射向量为

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} - 2 \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} \mathbf{b} = (c_x, c_y, c_z)$$

$$\text{反射光射线方程为} \quad \begin{cases} x = x_n + tc_x \\ y = y_n + tc_y \\ z = z_n + tc_z \end{cases} \quad (t \geq 0)$$

判断该射线是否与车灯旋转抛物面相交，若相交此反射光线不能到达反射屏，否则求出该射线与测试屏的交点，即为反射光亮点。对每一面元进行同样计算，即可求得点光源反射光在测试屏上的亮区。

将线光源剖分为等长的 N 小段，简化为每小段能量集中在中点的点光源系统，对每一点光源求出反射光亮区，求其和集即为线光源反射光亮区的近似。对长4 mm的线光亮区如图5-4所示(横

坐标为 x 轴, 纵坐标为 y 轴, 单位为 mm).

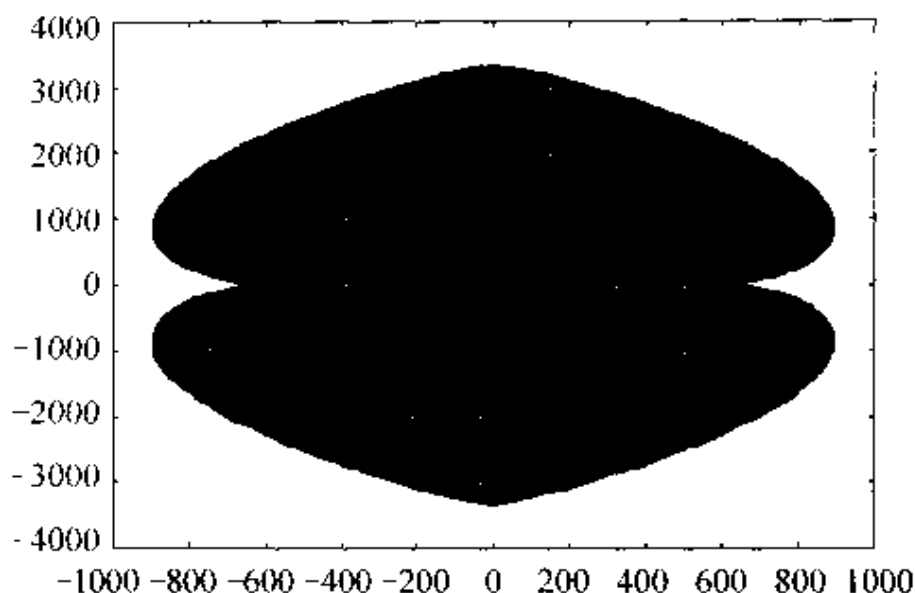


图 5-4

注: 以上参考答案中没有考虑线光源本身对反射光线的遮挡问题, 即假设线光源是透明的. 如果假设线光源是不透明的, 似乎更符合现实. 此时需要考虑线光源本身对反射光线的遮挡, 计算会更复杂些, 计算结果也会有所不同.

六. 2002 高教社杯全国大学生数学建模竞赛题目(大专组)

D 题: 赛程安排

你所在的年级有 5 个班, 每班一支球队在同一块场地上进行单循环赛, 共要进行 10 场比赛. 如何安排赛程使对各队来说都尽量公平? 下面是随便安排的一个赛程: 记 5 支球队为 A、B、C、D、E, 在下表左半部分的右上三角的 10 个空格中, 随手填上 1, 2, ..., 10, 就得到一个赛程, 即第 1 场 A 对 B, 第 2 场 B 对 C, ..., 第 10 场 C 对 E. 为方便起见将这些数字沿对角线对称地填入左下三角.

这个赛程的公平性如何? 不妨看看各队每两场比赛中间得到的休整时间是否均等. 下表的右半部分是各队每两场比赛间相隔

的场次数,显然这个赛程对 A、E 有利,对 D 则不公平.

	A	B	C	D	E	每两场比赛间相隔场次数
A	×	1	9	3	6	1,2,2
B	1	×	2	5	8	0,2,2
C	9	2	×	7	10	4,1,0
D	3	5	7	×	4	0,0,1
E	6	8	10	4	×	1,1,1

从上面的例子出发讨论以下问题:

(1)对于 5 支球队的比赛,给出一个各队每两场比赛中间都至少相隔一场的赛程.

(2)当 n 支球队比赛时,各队每两场比赛中间相隔的场次数的上限是多少.

(3)在达到(2)的上限的条件下,给出 $n=8, n=9$ 的赛程,并说明它们的编制过程.

(4)除了每两场比赛间相隔场次数这一指标外,你还能给出哪些指标来衡量一个赛程的优劣?并说明(3)中给出的赛程达到这些指标的程度.

解 (1)多种方法(甚至凑的方法)都能给出一个达到要求的赛程,如下表.

	A	B	C	D	E	每两场比赛间相隔场次数
A	×	1	6	9	3	1,2,2
B	1	×	4	7	10	2,2,2
C	6	4	×	2	8	1,1,1
D	9	7	2	×	5	2,1,1
E	3	10	8	5	×	1,2,1

(2) 当 n 支球队比赛时, 各队每两场比赛中间相隔的场次数的上限 $r \leq \left[\frac{n-3}{2} \right]$. 证明如下:

① 设 n 为奇数, $n = 2k + 1$, 共比赛 $N = k(2k + 1)$ 场. 考察前 $k + 1$ 场, 有 $2k + 2$ 个队参赛, 于是至少有 1 个队两次参赛, 这个队在这两场比赛间相隔场次数 r 不超过

$$(k + 1) - 1 - 1 = k - 1 = \left[\frac{n-3}{2} \right]$$

② 设 n 为偶数, $n = 2k$, 共比赛 $N = k(2k - 1)$ 场. 同上, 在前 $k + 1$ 场中至少有 1 个队 (记这样的 1 个队为 A) 两次参赛, 记 A 第 j 场比赛在赛程中是第 a_j 场, 于是 $a_1 \geq 1, a_2 \leq k + 1$.

若 $a_2 < k + 1$, 则

$$r = a_2 - a_1 - 1 \leq k - 2 = \left[\frac{n-3}{2} \right]$$

若 $a_2 = k + 1$, 但 $a_1 > 1$, 同样有

$$r = a_2 - a_1 - 1 \leq k - 2 = \left[\frac{n-3}{2} \right]$$

若 $a_1 = 1, a_2 = k + 1$, 在前 $k + 1$ 场中除 A 外有 $2k$ 个队参赛, 于是至少又有 1 个队 (记这样的 1 个队为 B) 两次参赛, 记 B 第 j 场比赛在赛程中是第 b_j 场, 则必有 $b_1 \geq 1, b_2 < k + 1$, 或 $b_1 > 1, b_2 \leq k + 1$ (即不可能 $b_1 = 1, b_2 = k + 1$), 故

$$r = b_2 - b_1 - 1 \leq k - 2 = \left[\frac{n-3}{2} \right]$$

(3) 当 $n = 8$ 时, 相隔场次数的上限为 $r = 2$. 记 8 支球队为 1, 2, \dots , 8, 共 28 场比赛. 一种编制赛程的办法是将赛程分为 7 轮, 每轮 4 场, 各队在每轮中相遇, 具体如下:

① 构造 $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ 为第 1 轮, 即第 1 场 1 对 2, 第 2 场 3 对 4, \dots , 第 4 场 7 对 8.

②构造 $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ 为第 2 轮. 方法是: M_1 的 1 不动, 其余 7 个数字按逆时针转动, 换一个位置.

③依此构造 M_3, M_4, \dots, M_7 , 将 M_1, M_2, \dots, M_7 接起来, 就得到整个赛程 M :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 1 & 5 & 7 & 8 & 1 & 7 & 8 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 3 & 2 & 4 & 6 & 5 & 3 & 2 & 4 & 7 & 5 \\ 6 & 4 & 1 & 6 & 4 & 2 & 1 & 4 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 8 & 7 & 5 & 3 & 6 & 8 & 7 & 5 & 4 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

即第 1 场 1 对 2, 第 2 场 3 对 4, \dots , 第 28 场 5 对 7.

④容易得到赛程 M 各队每两场比赛中间相隔的场次数及其总数, 如下表所示.

队	相隔的场次数	相隔场次总数
1	3, 3, 3, 3, 3, 3	18
2	4, 4, 4, 3, 2, 2	19
3	2, 4, 4, 4, 3, 2	19
4	4, 4, 3, 2, 2, 2	17
5	2, 2, 4, 4, 4, 3	19
6	4, 3, 2, 2, 2, 4	17
7	2, 2, 2, 4, 4, 4	18
8	3, 2, 2, 2, 4, 4	17

以上方法可以推广用于 n 为偶数的情况.

当 $n=9$ 时, 相隔场次数的上限为 $r=3$. 记 9 支球队为 1, 2, $\dots, 9$, 共 36 场比赛. 一种编制赛程的办法是:

①画一 4×9 的表格, 如下表. 第 i 行第 j 列的格子记作 (i, j) , 在每格左侧先按行依次填 1, 3, 5, 7 (第 1 行 1 个 1, 第 2 行 3 个

3, ..., 第4行7个7), 然后按行依次填8、6、4、2, 构成每场比赛的第1支队.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	8	8	8	8	8	8	8	8
2	3	3	3	6	6	6	6	6	6
3	5	5	5	5	5	4	4	4	4
4	7	7	7	7	7	7	7	2	2

②在格的右侧沿各对角线填1、3、5、7, 如下表. 自(2,2)至(4,4), 跳过一列再自(1,6)至(4,9)填1, 使1的总数(包括格子左侧的)为8, 自(3,4)至(4,5), 跳过一列再自(1,7)至(3,9)填3, 使3的总数(包括格子左侧的)为8, ……

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	8	8	8	8	8 1	8 3	8 5	8 7
2	3	3 1	3	6	6	6	6 1	6 3	6 5
3	5	5	5 1	5 3	5	4	4	4 1	4 3
4	7	7	7	7 1	7 3	7 5	7	2	2 1

③在格的右侧沿各对角线填2、4、6, 方法与上类似. 最后在未满的8个格中填9, 得到下表. 按照下表先列后行的顺序排列得到赛程 M^* , 即第1场1对9, 第2场3对2, ……第36场2对1.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1 9	8 9	8 6	8 4	8 2	8 1	8 3	8 5	8 7
2	3 2	3 1	3 9	6 9	6 4	6 2	6 1	6 3	6 5
3	5 4	5 2	5 1	5 3	5 9	4 9	4 2	4 1	4 3
4	7 6	7 4	7 2	7 1	7 3	7 5	7 9	2 9	2 1

①容易得到赛程 M^* 各队每两场比赛中间相隔的场次数及其总数,如下表.

队	相隔的场次数	相隔场次数总数
1	4,4,4,4,4,4,4	28
2	4,4,4,4,4,4,3	27
3	3,3,4,4,4,4,4	26
4	4,4,4,4,3,3,3	25
5	3,3,3,3,4,4,4	24
6	4,4,3,3,3,3,3	23
7	3,3,3,3,3,3,4	22
8	3,3,3,3,3,3,3	21
9	3,4,3,4,3,4,3	24

以上方法可以推广用于 n 为奇数的情况.

(4)除每两场比赛间相隔场次数外,还可给出以下指标:

①平均相隔场次数.

记第 i 队第 j 个间隔场次数为 c_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n-2$), 则平均相隔场次数为:

$$\bar{r} = \frac{1}{n(n-2)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-2} c_{ij}$$

\bar{r} 是赛程整体意义下的指标,它越大越好.

检查 $n=8$ 的赛程 M , 得 $\bar{r}=3$; $n=9$ 的赛程 M^* , 得 $\bar{r}=220/63=3.49$.

实际上,可以得到 \bar{r} 的上限:

$$\bar{r}_{\max} = \begin{cases} k - \frac{2k^2}{4k^2 - 1} & (n = 2k + 1) \\ k - 1 & (n = 2k) \end{cases}$$

上述结果表明,赛程 M 和 M^* 都已达到了这个上限.

②相隔场次的最大偏差.

定义 $f = \max_{i,j} |c_{ij} - \bar{r}|$ 为总体最大偏差, $g = \max_i \left| \sum_{j=1}^{n-2} c_{ij} - (n-2)\bar{r} \right|$ 为球队最大偏差,它们都越小越好.

检查 $n=8$ 的赛程 M , 得 $f=1, g=1$; $n=9$ 的赛程 M^* , 得 $f=0.5, g=5.5$.

实际上,可以得到 f 的下限:

$$f_{\min} = \begin{cases} \frac{2k^2}{4k^2-1} & (n=2k+1) \\ 1 & (n=2k) \end{cases}$$

以及 $n=2k$ 时 g 的下限: $g_{\min}=1$.

结果表明,赛程 M 达到了 f 和 g 的下限, M^* 也达到了 f 的下限.

七、99 创维杯全国大学生数学建模竞赛题目

(一)A 题 自动化车床管理

一道工序用自动化车床连续加工某种零件,由于刀具损坏等原因该工序会出现故障,其中刀具损坏故障占 95%,其他故障仅占 5%. 工序出现故障是完全随机的,假定在生产任一零件时出现故障的机会均相同. 工作人员通过检查零件来确定工序是否出现故障. 现积累有 100 次刀具故障记录,故障出现时该刀具完成的零件数如附表. 现计划在刀具加工一定件数后定期更换新刀具.

已知生产工序的费用参数如下:

故障时产出的零件损失费用 $f=200$ 元/件;

进行检查的费用 $t=10$ 元/次;

发现故障进行调节使工序恢复正常的平均费用 $d=3000$ 元/次(包括刀具费);

未发现故障时更换一把新刀具的费用 $k = 1000$ 元/次.

(1)假定工序故障时产出的零件均为不合格品,正常时产出的零件均为合格品,试对该工序设计效益最好的检查间隔(生产多少零件检查一次)和刀具更换策略.

(2)如果该工序正常时产出的零件不全是合格品,有 2% 为不合格品;而工序故障时产出的零件有 40% 为合格品,60% 为不合格品.工序正常而误认有故障停机产生的损失费用为 1500 元/次.对该工序设计效益最好的检查间隔和刀具更换策略.

(3)在(2)的情况下,可否改进检查方式获得更高的效益.

附:100 次刀具故障记录(完成的零件数).

459	362	624	542	509	584	433	748	815	505
612	452	434	982	640	742	565	706	593	680
926	653	164	487	734	608	428	1153	593	844
527	552	513	781	474	388	824	538	862	659
775	859	755	649	697	515	628	954	771	609
402	960	885	610	292	837	473	677	358	638
699	634	555	570	84	416	606	1062	484	120
447	654	564	339	280	246	687	539	790	581
621	724	531	512	577	496	468	499	544	645
764	558	378	765	666	763	217	715	310	851

(二)B 题 钻井布局

勘探部门在某地区找矿.初步勘探时期已零散地在若干位置上钻井,取得了地质资料.进入系统勘探时期后,要在一个区域内按纵横等距的网格点来布置井位,进行“撒网式”全面钻探.由于钻一口井的费用很高,如果新设计的井位与原有井位重合(或相当接

近),便可利用旧井的地质资料,不必打这口新井.因此,应该尽量利用旧井,少打新井,以节约钻探费用.比如钻一口新井的费用为500万元,利用旧井资料的费用为10万元,则利用一口旧井就节约费用490万元.

设平面上有 n 个点 P_i , 其坐标为 (a_i, b_i) ($i = 1, 2, \dots, n$), 表示已有的 n 个井位. 新布置的井位是一个正方形网格 N 的所有结点(所谓“正方形网格”是指每个格子都是正方形的网格;结点是指纵线和横线的交叉点). 假定每个格子的边长(井位的纵横间距)都是1单位(比如100m), 整个网格是可以在平面上任意移动的. 若一个已知点 P_i 与某个网格结点 X_j 的距离不超过给定误差 ε ($= 0.05$ 单位), 则认为 P_i 处的旧井资料可以利用, 不必在结点 X_j 处打新井.

为进行辅助决策, 勘探部门要求我们研究如下问题:

(1) 假定网格的横向和纵向是固定的(比如东西向和南北向), 并规定两点间的距离为其横向距离(横坐标之差绝对值)及纵向距离(纵坐标之差绝对值)的最大值. 在平面上平行移动网格 N , 使可利用的旧井数尽可能大. 试提供数值计算方法, 并对下面的数值例子用计算机进行计算.

(2) 在欧氏距离的误差意义下, 考虑网格的横向和纵向不固定(可以旋转)的情形, 给出算法及计算结果.

(3) 如果有 n 口旧井, 给出判定这些井均可利用的条件和算法(你可以任意选定一种距离). 数值例子 $n = 12$ 个点的坐标如下表所示.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_i	0.5	1.41	3.0	3.37	3.4	4.72	4.72	5.43	7.57	8.38	8.98	9.5
b_i	2.0	3.50	1.5	3.51	5.5	2.00	6.24	4.10	2.01	4.50	3.41	0.8

(三)C 题 煤矸石堆积(大专组)

煤矿采煤时,会产出无用废料煤矸石.在平原地区,煤矿不得不征用土地堆放矸石.通常矸石的堆积方法是:

架设一段与地面角度约为 $\beta = 25^\circ$ 的直线形上升轨道(角度过大,运矸车无法装满),用在轨道上行驶的运矸车将矸石运到轨道顶端后向两侧倾倒,待矸石堆高后,再借助矸石堆延长轨道,这样逐渐堆起如图 5-5 所示的一座矸石山来.

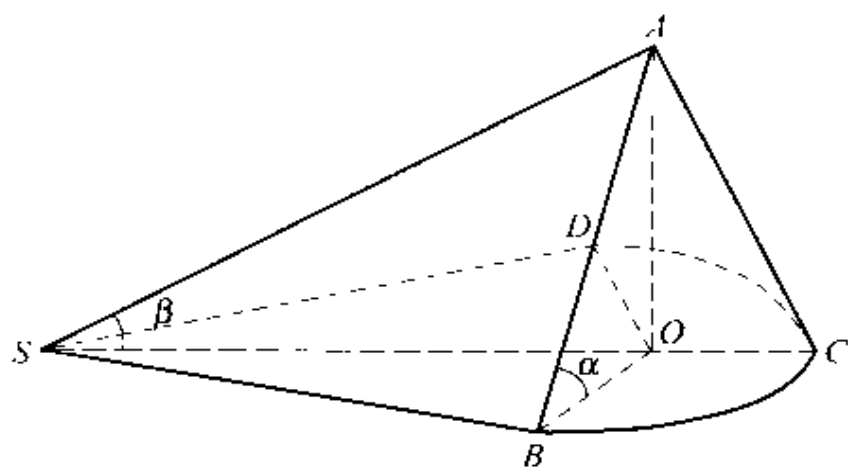


图 5-5

现给出下列数据:

矸石自然堆放安息角(矸石自然堆积稳定后,其坡面与地面形成的夹角) $\alpha \leq 55^\circ$;

矸石容重(碎矸石单位体积的质量)约 $2\text{t}/\text{m}^3$;

运矸车所需电费为 0.50 元/度(不变);

运矸车机械效率(只考虑堆积坡道上的运输)初始值(在地平面上)约 30%,坡道每延长 10m,效率在原有基础上约下降 2%;

土地征用费现值为 120 万元/ha,预计地价年涨幅约 10%;

银行存、贷款利率均为 5%;

煤矿设计原煤产量为 300 万 t/年;

煤矿设计寿命为 20 年;

采矿出矸率(矸石占全部采出的百分比)一般为 7%~10%.

另外,为保护耕地,煤矿堆矸土地应比实际占地多征用 10%.

现在煤矿设计中用于处理矸石的经费(只计征地费及堆积时运矸车用的电费)为 100 万元/年,这笔钱是否够用?试制订合理的年度征地计划,并对不同的出矸率预测处理矸石的最低费用.

(四)D 题 钻井布局(同 B 题)(大专组)

第六章 建模竞赛论文及讲解

第一节 关于调整气象观测站问题模型

一、聚类分析

在很多场合,我们对研究对象的属类是未知的,或者知之甚少,这时需要对研究对象进行分类,它是在没有先验知识的条件下进行分类的,具有相当的任意性.例如,可以依据指标,将它们分成一类;也可以依据对象的另一些指标将它们分成另一类.究竟如何分类,这就是聚类分析研究的问题.和多元分析方法相比,聚类分析方法比较粗糙,理论尚不完善,正处于发展阶段.

设有 n 个样品 $1, 2, \dots, n$, 每个样品有 k 个指标 X_1, X_2, \dots, X_k , 用 X_{it} 表示第 i 个样品的第 t 个指标的值, 则可得到样品数据矩阵:

变量 样品	X_1	X_2	\dots	X_k
1	X_{11}	X_{12}	\dots	X_{1k}
2	X_{21}	X_{22}	\dots	X_{2k}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
n	X_{n1}	X_{n2}	\dots	X_{nk}

聚类既可对样品进行聚类,也可以对变量进行聚类.系统聚类法是目前应用较为广泛的一种聚类方法,有关它的研究极为丰富,

而且有专门的程序.系统聚类法一开始就把每个个体自成一类,然后把最相似的个体首先聚为小类,再将已聚合的小类按其相似性再聚合,随着相似性的减弱,最后把一切子类都聚合到一个大类,从而得到一个按相似性大小(或接近程度的大小)连接起来的谱系图.下面用具体例子说明怎样进行聚类.

例 1 下面给出 5 个样品,每个样品有 8 个指标.这样可得到样本数据矩阵:

变量 样品	X_1	X_2	...	X_8
1	X_{11}	X_{12}	...	X_{18}
2	X_{21}	X_{22}	...	X_{28}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
5	X_{51}	X_{52}	...	X_{58}

一开始就将每一个个体作为一类,然后找出衡量样品间相似程度的准则.最容易想到的是:每个样品有 8 个变量,因此可以将每个样品视为八维空间中的一个点,5 个样品就是八维空间中的 5 个点,然后用欧氏距离度量样品点的相似性:两样品点间距离越大,其相似性越小.下面给出 5 个样品两两之间的欧氏距离阵:

$$D_{(0)} = \begin{matrix} & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 & \pi_5 \\ \begin{matrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \\ \pi_5 \end{matrix} & \left\{ \begin{array}{ccccc} 0 & & & & \\ 4 & 0 & & & \\ 6 & 9 & 0 & & \\ 1 & 7 & 10 & 0 & \\ 6 & 3 & 5 & 8 & 0 \end{array} \right\} \end{matrix}$$

将样品 1 与样品 4 合并成新类 $\pi_6 = \{\pi_1, \pi_4\} = \{1, 4\}$. 下面涉及到怎样定义类与类之间的距离问题. 比如最常用的距离有:

(1)最小距离:用两类中样品之间的距离最短者作为两类的距离.

(2)最大距离:用两类中样品之间的距离最长者作为两类的距离.

(3)重心距离:用两类的重心之间的距离作为两类的距离.

(4)类平均距离:用两类中所有两两样品之间的平均距离作为两类的距离.

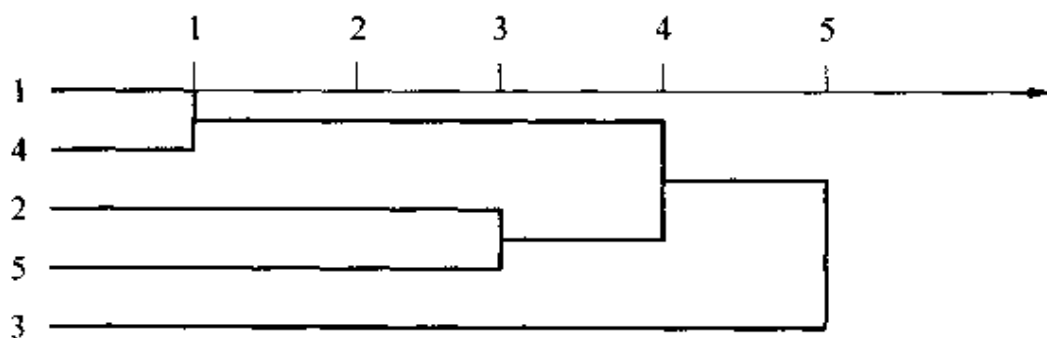
我们计算类间的距离采用最小距离法,则得到类 π_6 、 π_2 、 π_3 、 π_5 之间的距离阵:

$$D_{(1)} = \begin{matrix} & \pi_6 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_5 \\ \begin{matrix} \pi_6 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 4 & 0 & & \\ 6 & 9 & 0 & \\ 6 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

合并类 π_2 与 π_5 成一新类 π_7 . 下面计算类 π_7 、 π_6 、 π_3 之间的距离阵:

$$D_{(2)} = \begin{matrix} & \pi_7 & \pi_6 & \pi_3 \\ \begin{matrix} \pi_7 \\ \pi_6 \\ \pi_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & & \\ 4 & 0 & \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

合并类 π_7 与 π_6 成一新类 $\pi_8 = \{\pi_7, \pi_6\}$, 最后计算 π_8 与 π_3 的距离为 5, 并合并为一大类, 同时画出相应的谱系图:



5 个样品的最小距离的谱系图

对变量也可以进行系统聚类,仍通过例子来说明.

例2 对某地超基性岩的一批样品,测试6个与矿化有关的元素: x_1 = 镍, x_2 = 钴, x_3 = 铜, x_4 = 铬, x_5 = 硫, x_6 = 砷,并假设它们的相关系数*矩阵为

$$R_{(0)} = \begin{matrix} & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 & \pi_5 & \pi_6 \\ \begin{matrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \\ \pi_5 \\ \pi_6 \end{matrix} & \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & & & & & \\ 0.8462 & 1 & & & & \\ 0.7579 & 0.9802 & 1 & & & \\ 0.6431 & 0.2419 & 0.1811 & 1 & & \\ 0.5039 & 0.7370 & 0.7210 & -0.3075 & 1 & \\ 0.5603 & 0.4241 & 0.3920 & 0.1998 & 0.6802 & 1 \end{array} \right\} \end{matrix}$$

其中 $\pi_i = x_i (i=1,2,\dots,6)$.

试用系统聚类的最大距离法对6个变量进行聚类(负相关系数采用绝对值).

由于采用的是相关系数矩阵,所以应找最大元素并类.在 $R_{(0)}$ 中最大元素为0.9802,因此将 π_2 与 π_3 合并为 π_7 . 计算 π_7 与其他剩下的类的相关系数,相应地得到 $R_{(1)}$:

* 相关系数:设有 n 个个体,每个个体测量了 p 个变量,第 i 个变量 x_i 与第 k 个变量 x_k 的相关系数为

$$r_{ik} = \frac{\sum_{j=1}^n [(x_{ij} - \bar{x}_i)(x_{kj} - \bar{x}_k)]}{\sqrt{\sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \sum_{j=1}^n (x_{kj} - \bar{x}_k)^2}}$$

$$R_{(1)} = \begin{matrix} & \pi_7 & \pi_1 & \pi_4 & \pi_5 & \pi_6 \\ \begin{matrix} \pi_7 \\ \pi_1 \\ \pi_4 \\ \pi_5 \\ \pi_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 0.7579 & 1 & & & \\ 0.1811 & 0.6431 & 1 & & \\ 0.7210 & 0.5039 & -0.3075 & 1 & \\ 0.3920 & 0.5603 & 0.1998 & 0.6802 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$R_{(1)}$ 中的最大的元素为 0.7579, 因此将 π_7 与 π_1 合并为 π_8 , 并计算 π_8 与其他剩下的类的相关系数, 相应地得到 $R_{(2)}$:

$$R_{(2)} = \begin{matrix} & \pi_8 & \pi_4 & \pi_5 & \pi_6 \\ \begin{matrix} \pi_8 \\ \pi_4 \\ \pi_5 \\ \pi_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0.1811 & 1 & & \\ 0.5039 & -0.3075 & 1 & \\ 0.3902 & 0.1998 & 0.6802 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

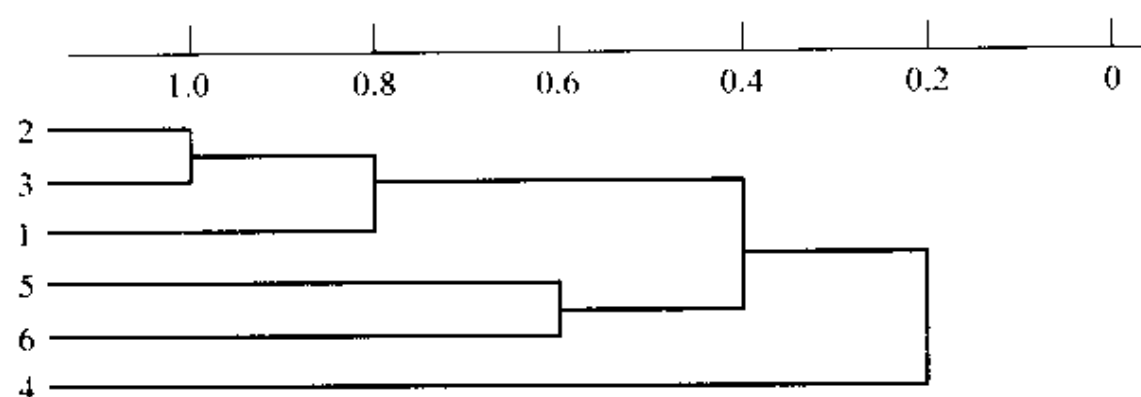
$R_{(2)}$ 中的最大元素为 0.6802, 因此将 π_5 与 π_6 合并为 π_9 , 并计算它与其他剩下的类的相关系数, 相应地得到 $R_{(3)}$:

$$R_{(3)} = \begin{matrix} & \pi_9 & \pi_8 & \pi_4 \\ \begin{matrix} \pi_9 \\ \pi_8 \\ \pi_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0.3920 & 1 & \\ -0.3075 & 0.1811 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$R_{(3)}$ 中的最大元素为 0.3920, 因此将 π_9 与 π_8 合并为 π_{10} .

6 个变量的并类顺序表如下:

合并次序	合并的类	合并后类的元素	合并的水平(相关系数)
1	π_2, π_3	$\pi_7 = \{x_2, x_3\}$	0.9802
2	π_1, π_7	$\pi_8 = \{x_2, x_3, x_1\}$	0.7579
3	π_5, π_6	$\pi_9 = \{x_5, x_6\}$	0.6802
4	π_8, π_9	$\pi_{10} = \{x_2, x_3, x_1, x_5, x_6\}$	0.3930
5	π_{10}, π_4	$\pi_{11} = \{x_2, x_3, x_1, x_5, x_6, x_4\}$	0.1811



横坐标是并类的相关系数.

二、调整气象观测站问题

某地区内有 12 个气象观测站. 10 年来各站测得的年降雨量如下表. 为了节省开支, 想要适当减少气象观测站. 问题: 减少哪些观测站可以使所得到的降雨量的信息仍然足够大?

(mm)

地点 年	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}
1981	276.2	324.5	158.6	412.5	292.8	258.4	334.1	303.2	292.9	243.2	159.7	331.2
1982	251.6	287.3	349.5	297.4	227.8	453.6	321.5	451.0	466.2	307.5	421.1	455.1
1983	192.7	433.2	289.9	366.3	466.2	239.1	357.4	219.7	245.7	411.1	357.0	353.2
1984	246.2	232.4	243.7	372.5	460.4	158.9	298.7	314.5	256.6	327.0	296.5	423.0
1985	291.7	311.0	502.4	254.0	245.6	324.8	401.0	266.5	251.3	289.9	255.4	362.1
1986	466.5	158.9	223.5	425.1	251.4	321.0	315.4	317.4	246.2	277.5	304.2	410.7
1987	258.6	327.4	432.1	403.9	256.6	282.9	389.7	413.2	466.5	199.3	282.1	387.6
1988	453.4	365.5	357.6	258.1	278.8	467.2	355.2	228.5	453.6	315.6	456.3	407.2
1989	158.5	271.0	410.2	344.2	250.0	360.7	376.4	179.4	159.2	342.4	331.2	377.7
1990	324.8	406.5	235.7	288.2	192.6	284.9	290.5	343.7	283.4	281.2	243.7	411.1

1. 模型的假设

①设各地区各观测站的降雨量呈正态分布. 由气象知识与经验得知它是服从正态分布的. 假设用 X_i 表示第 i 个站的降雨量, 即 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ ($i = 1, 2, \dots, 12$).

②假设每个观测站所花的费用都是一样的.

2. 模型的建立

分析一下, 要对变量进行聚类, 但

(1) 究竟聚成多少类?

(2) 在已知聚类个数的情况下, 去掉哪些观测站?

这些在聚类方法中并没有给出明确答案, 要结合专业知识才能解答.

(1) 的解决: 经查资料, 在气象上所关心的一个重要指标是年平均降雨量. 在没去掉观测站以前, 年平均降雨量为

$$g = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} X_i$$

在去掉观测站以后, 年平均降雨量为

$$g' = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_{n_i} \quad (m \text{ 为剩下的观测站的数目})$$

有必要使下式满足:

$$\left| \frac{g - g'}{g} \right| < \epsilon \quad (\epsilon \text{ 取 } 0.05) \quad (*)$$

本着节约费用的原则, 去掉观测站的个数 k 应尽量大. 经过搜索, 在满足条件 (*) 的前提下, 去掉观测站的个数 $k = 4$ 的可能组合有如下 6 种:

编号	1	2	3	4	5	6
站号	3, 4, 9, 10	5, 6, 7, 8	6, 7, 8, 10	7, 8, 10, 11	7, 9, 10, 11	7, 9, 10, 12

而在 $k=5$ 时,找不到符合条件的组合,因此在给定 $\epsilon=0.05$ 的精度下, k 的最大取值为 4.

(2)的解决:

相关系数矩阵:

1												
-0.2413	1											
-0.2206	0.0805	1										
-0.1082	-0.4032	-0.5031	1									
-0.3312	0.0969	-0.2676	0.3158	1								
0.3481	0.0160	0.4077	-0.5567	-0.6136	1							
-0.2622	0.1769	0.8126	-0.1523	-0.0977	0.2236	1						
0.0836	-0.1647	-0.0858	0.1384	-0.3156	0.0417	-0.3241	1					
0.2928	0.2005	0.1915	-0.2029	-0.2524	-0.4918	-0.0531	0.6348	1				
-0.3098	0.2313	-0.0175	-0.2501	0.5817	-0.0106	-0.0674	-0.5946	-0.4225	1			
0.1587	0.0532	0.3278	-0.4201	0.0844	0.6544	0.0635	-0.0762	0.472	0.4969	1		
0.2786	-0.3424	0.0111	-0.2597	-0.2037	0.3631	-0.5152	0.5392	0.4259	0.0026	0.5652	1	

用最大距离法对指标进行聚类,得到下表:

类别	1	2	3	4	5	6	7	8
编号	1	2	3,7	4	5,10	6,11	8,9	12

熵是作为随机试验(随机变量,分布函数)不肯定程度度量的一个合理指标.当随机试验不肯定性越大,其熵也越大.对 $\xi \sim N(\mu, \sigma)$, 则熵为 $\ln \sqrt{2\pi e} \sigma$. 我们看出,当 ξ 服从正态分布时,其熵与方差成正比.因此对两个站的比较,应去掉熵小的站,即方差小的站.

站号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
方差	95.1	76.8	102.7	60.7	89.3	89.4	36.1	80.7	103.8	54.3	82.1	35

应该去掉的站为:4、7、10、12.

3. 模型的检验

(1)去掉3个站, $g - g'$ 与去掉4个站的情况差别不大,但去掉5个站时, $g - g'$ 大幅度提高.

(2)进行正态检验:检验 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ ($i = 1, 2, \dots, 12$).

(3)减少4个站后,降雨量的信息有所损失,在以后各年中,对减少站的降雨量也可以用剩余站的数据去推断.比如,将 x_7 作为因变量,剩余的8个站作为自变量,进行逐步回归.

4. 模型的优缺点

本模型找出一个合理的标准,先估计出应留下几个站,并在取舍哪个观测站也有一个合理的标准,因此建立的模型比较合理,但对该地区的地理因素没有给予考虑,仅从数据本身出发考虑.

第二节 大熊猫食物判别问题模型

判别分析是多元统计方法中较为成熟的一类判别法,它是根据两个或多个母体的观测样本结果,按照一定的判别准则和相应的判别函数,来判别任一待判个体归属哪一类母体.判别分析要解决的问题是在已知历史上把研究对象用某些方法分成若干类的情况下,来确定新的样品应归属的类别.

判别问题用统计的语言来表达,就是已有 q 个母体 $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_q$, 它们的分布函数分别为 $F_1(x), F_2(x), \dots, F_q(x)$, 每个都是 p 维函数.对于一个新给的样品 x , 我们要判别它是来自哪一个母体.当然,我们应该要求判别准则在某种意义下是最优的,例如错判的概率最小或错判的损失最小等.

以下用一实例来说明判别方法.

1973年开始,我国对大熊猫这一珍贵动物进行了调查研究,1980年与世界野生生物基金会合作,建立了大熊猫研究项目.许

多野外科学工作者都曾经多次观察到大熊猫吃竹子时并非挑选竹子中最有营养、最好消化的部位吃。按竹叶、竹笋和竹茎的顺序排列,其可以消化吸收的营养成分一个比一个少,而不能被消化吸收的纤维素和木质素却一个比一个多。在考察地区内,考察人员发现在漫长的冬季中,大熊猫选择对于竹叶来说含有较少营养物质和较多的不易消化吸收纤维素和木质素的一年生的冷箭竹中段为食,这是为什么呢?野外生态学对于这种现象很难解释清楚。为了弄清野生大熊猫这种挑食竹子某些特定部位是否与其中的一些化学成份有关,可采用数理统计判别分析方法来研究。这些定量分析对于防止大熊猫的灭绝和人工喂养将起到良好的作用。

一、问题的提出

竹子中所含的一般化学成份有:粗水分、粗脂肪、粗纤维、粗蛋白、粗灰分、无氮浸出物、总糖、还原糖共 8 种。选择 47 个大熊猫爱吃的样品和 34 个不爱吃的样品,分别测得这些样品中的 8 种化学成份含量,并列于下表。

类别	成份 序号	粗水分	粗脂肪	粗纤维	粗蛋白	粗灰分	无氮浸 出物	总糖	还原糖
爱 吃 类	1	48.13	0.48	45.34	4.10	2.38	47.70	20.02	6.67
	2	48.59	0.47	46.28	4.88	2.80	45.57	19.20	5.56
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	47	63.59	4.44	26.84	17.05	6.77	45.10	22.35	1.08
不 爱 吃 类	1	44.34	0.30	49.41	2.64	2.09	45.56	20.89	5.59
	2	38.18	0.30	49.21	2.78	2.53	45.18	23.66	4.68
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	34	45.10	1.01	50.16	2.35	2.23	44.25	21.64	2.20

问:(1)任选一段竹子,你能否判断此段竹子是大熊猫爱吃的还是不爱吃的?

(2)大熊猫喜欢竹子中的什么化学成份?

二、模型的假设

(1)我们只考虑竹子中的这 8 种化学成分.

(2)假设所选样品都是一年生的冷箭竹,即大熊猫对冷箭竹的年龄是不挑剔的.

三、模型的建立

对于第一类(爱吃类),已经观察了 $N_1 = 47$ 个样品,写成数据矩阵:

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} x_{11}^{(1)} & x_{12}^{(1)} & \cdots & x_{18}^{(1)} \\ x_{21}^{(1)} & x_{22}^{(1)} & \cdots & x_{28}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{N_1 1}^{(1)} & x_{N_1 2}^{(1)} & \cdots & x_{N_1 8}^{(1)} \end{pmatrix}$$

对于第二类(不爱吃类),已经观察了 $N_2 = 34$ 个样品,写成数据矩阵:

$$X^{(2)} = \begin{pmatrix} x_{11}^{(2)} & x_{12}^{(2)} & \cdots & x_{18}^{(2)} \\ x_{21}^{(2)} & x_{22}^{(2)} & \cdots & x_{28}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{N_2 1}^{(2)} & x_{N_2 2}^{(2)} & \cdots & x_{N_2 8}^{(2)} \end{pmatrix}$$

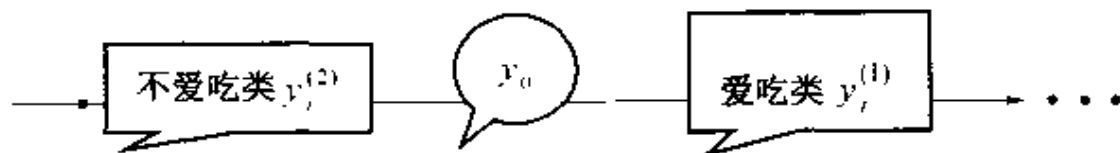
构造一个线性函数:

$$y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_8 x_8 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

将爱吃的样品数据和不爱吃的样品数据代入①式,则有

$$y_i^{(1)} = c_1 x_{i1}^{(1)} + c_2 x_{i2}^{(1)} + \cdots + c_8 x_{i8}^{(1)} \quad (i = 1, 2, \cdots, N_1)$$

$$y_i^{(2)} = c_1 x_{i1}^{(2)} + c_2 x_{i2}^{(2)} + \cdots + c_8 x_{i8}^{(2)} \quad (i = 1, 2, \cdots, N_2)$$



现在确定其中的系数 (c_1, c_2, \cdots, c_8) ,使得样本点 (x_1, x_2, \cdots, x_8) 经过线性变换①后,来自两类的样品的变换值 y_i 能够区分开来.要求不同类的差别尽量大,同类的差别尽量小,并选定一个临界值 y_0 ,当 $y(x_1, \cdots, x_8) > y_0$ 时,判断该样品属于爱吃的一类,否则就属于不爱吃的一类.这样便把多个指标的判别问题化为单指标的判别问题.因此首先选取的标准是使得

$$I = \frac{(\bar{y}^{(1)} - \bar{y}^{(2)})^2}{\sum_{i=1}^{N_1} (y_i^{(1)} - \bar{y}^{(1)})^2 + \sum_{i=1}^{N_2} (y_i^{(2)} - \bar{y}^{(2)})^2}$$

达到最大值,其中:

$$\bar{y}^{(1)} = \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} y_i^{(1)}, \quad \bar{y}^{(2)} = \frac{1}{N_2} \sum_{i=1}^{N_2} y_i^{(2)}$$

以下来找 I 的最大值:

$$\text{令} \quad \frac{\partial I}{\partial c_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, 8) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

若 $(c_1^*, c_2^*, \cdots, c_8^*)$ 为方程②的解,则对于任意非零常数 a 来说, $(ac_1^*, ac_2^*, \cdots, ac_8^*)$ 亦为方程②的解.

不难求出方程②的一组解为

$$c_1 = 0.0046, \quad c_2 = 0.2125, \quad c_3 = 0.2532, \quad c_4 = 0.2709, \\ c_5 = 0.2643, \quad c_6 = 0.2503, \quad c_7 = -0.0064, \quad c_8 = 0.0283$$

这组解使 I 达到最大值,因此对于8种化学成分的判别函数是

$$y = 0.0046x_1 + 0.2125x_2 + 0.2532x_3 + 0.2709x_4 + \\ 0.2643x_5 + 0.2503x_6 - 0.0064x_7 + 0.0283x_8 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

则平均临界值为

$$y_0 = \frac{y_1^{(1)} + \cdots + y_{47}^{(1)} + y_1^{(2)} + \cdots + y_{34}^{(2)}}{N_1 + N_2} = 25.5089$$

$$\bar{y}^{(1)} \geq y_0 \geq \bar{y}^{(2)}$$

这样,我们便得到一个简单的判别公式来判别冷箭竹的任何
一个部位的样品是属于大熊猫爱吃的还是不爱吃的. 只要把被检
测的样品中的 8 个指标 (x_1, x_2, \cdots, x_8) 代入③式,求得判别值
 $y(x_1, x_2, \cdots, x_8)$. 如果 $y(x_1, x_2, \cdots, x_8) > y_0$, 那么这一部分便
是爱吃的, 否则便是不爱吃的.

根据判别公式③,我们进一步来分析大熊猫择食的原因. 在判
别函数中,如果两个指标的数量级相同,那么其系数 c_i 较大的一
项在计算函数值时,该项对属于爱吃类的贡献就大. 这是因为
 $y(x_1, x_2, \cdots, x_8) > y_0$ 时,判别该样品 (x_1, x_2, \cdots, x_8) 为爱吃类.
在系数相同的情况下,如果爱吃类与不爱吃类的指标 x_i 的均值差
值 d_i 较大,那么我们就认为该指标的贡献较大,于是可以将 $c_i \times d_i$
作为判别函数中该项指标的贡献,将贡献按从大到小的次序排好,
根据几个较大和较小的值来寻找大熊猫选择食物和抛弃食物的原
因. 现将算得的 8 种化学成份所对应的两类样品的均值列于下表:

成份 样品分类	成份							
	粗蛋白	粗灰分	粗脂肪	粗水分	总糖	还原糖	无氮浸 出物	粗纤维
爱吃类($N_1=47$)	10.6949	5.0281	2.0421	59.7602	22.9766	3.4981	46.047	36.2425
不爱吃类($N_2=34$)	3.365	2.3803	0.665	44.7709	24.2641	3.9324	47.0926	46.4832
$c_i \times d_i$	1.9855	0.6997	0.2926	0.0690	0.0083	-0.0123	-0.2617	-2.5934

按 $c_i \times d_i$ 的值从大到小的顺序将 8 种化学成份排列成下列
顺序:

粗蛋白—粗灰分—粗脂肪—粗水分—总糖—还原糖—无氮浸

出物—粗纤维

因此可以说,大熊猫喜欢吃竹子的某些部位是与这些部分中含有更多的粗蛋白和粗灰分有密切关系,而粗纤维多的则是不爱吃的部位.

四、模型的检验

为了检验这种判别的正确性,任取 P224 中的表以外的大熊猫爱吃的和不爱吃的冷箭竹样品各两个,代入③式,算得两个爱吃的样品的判别函数值为 25.6602 和 25.6156,均大于 25.51;两个不爱吃的样品的判别函数值为 25.4498 和 25.3478,均小于 25.51.可见判别正确.此外,还把 P224 的表中的 81 个样品代入做检验,计算结果显示,除不爱吃的 4 个样品出问题外,其余样品检查都正确,正确率达 95.2%.而 4 个出问题的样品中有 3 个是收集的 4 月份的数据,而根据野外的调查知道,大熊猫在 4 月份对冷箭竹的年龄和部位是不怎么挑剔的,如果不把 4 月份的样品算进去,那么判别正确率可达 98.5%.

第三节 捕捞问题模型

保护人类赖以生存的自然环境,可再生资源(如渔业、林业资源)的开发必须适度.一种合理、简化的策略是,在实现可持续收获的前提下,追求最大产量或最佳效益.考虑对某种鱼的最优捕捞策略:假设这种鱼分 4 个年龄组,称 1 龄鱼,……,4 龄鱼.各年龄组每条鱼的平均质量分别为 5.07g、11.55g、17.86g、22.99g;各年龄组鱼的自然死亡率均为 0.8(1/年);这种鱼为季节性集中产卵繁殖,平均每条 4 龄鱼的产卵量为 1.109×10^5 个,3 龄鱼的产卵为此数的一半,2 龄鱼和 1 龄鱼不产卵,产卵和孵化期为每年的最后 4 个月;卵孵化并成活为 1 龄鱼,成活率(1 龄鱼条数与产卵总量 n 之比)为 $1.22 \times 10^{11} / (1.22 \times 10^{11} + n)$.渔业管理部门规定,

每年只允许在产卵孵化期的前 8 个月进行捕捞作业. 如果每年投入的捕捞能力(如渔船数、下网次数等)固定不变, 这时单位时间的捕捞量将与年龄组鱼群条数成正比, 比例系数不妨称为捕捞强度系数. 通常使用 13mm 网眼的拉网, 这种网只能捕捞 3 龄鱼和 4 龄鱼, 其捕捞强度系数之比为 0.42:1. 渔业上称这种方式为固定努力量捕捞.

①建立数学模型分析如何实现可持续捕获(即每年开始捕捞时渔场中年龄组鱼群条数不变), 并且在此前提下得到最高的年收获量(捕捞总量).

②某渔业公司承包这种鱼的捕捞业务 5 年, 合同要求 5 年后鱼群的生产能力不能受到太大破坏. 已知承包时各年龄组鱼群的数量分别为 122×10^9 , 29.7×10^9 , 10.1×10^9 , 3.29×10^9 条, 如果仍用固定努力量的捕捞方式, 该公司应采取怎样的策略才能使其收获量最高?

最优捕鱼策略的动态综合分析

一、摘要

本例建立了一个关于对某种鱼的最优捕捞策略的动态综合模型.

首先, 用微积分的方法求出各年龄组鱼群在一年中各时刻的数量分布函数 $x(t)$; 然后, 用差分法确定各年龄组鱼群数量之间的递推关系, 根据动态平衡的原理得出在满足持续捕捞条件下各年龄组鱼群数量与捕捞强度之间的关系; 最后算出捕捞强度的范围, 即得到了所求的最大捕捞强度.

对于第二个问题, 由于采用固定努力量的捕捞方式, 所以转化为求一个适当的捕捞强度, 使得在鱼群生产能力不至于受到太大破坏的情况下获得最大的收获量.

二、问题重述

为了保护自然资源,可再生资源(如渔业)的开发必须适度.考虑在现实可持续收获的前提下,追求最大的最优捕捞策略.

已知某种鱼分为 4 个年龄组,1,2,3,4 龄,平均质量分别为 5.07g,11.55g,17.86 g,22.99g,各组自然死亡率均为 0.8(1/年),4 龄鱼的产卵量为 1.109×10^5 个,3 龄鱼为这个量的一半,卵孵化成活率为 $1.22 \times 10^{11} / (1.22 \times 10^{11} + n)$ (其中 n 为产卵总量).

捕捞在产卵孵化期前的 8 个月内进行,并且只能捕捞 3、4 龄鱼,其捕捞强度之比为 0.42:1.

问题:①建立数学模型分析如何实现可持续捕获,并且在此前提下得到最高的年收获量.

②某渔业公司承包这种鱼的捕捞业务 5 年,合同要求 5 年后鱼群的生产能力不能受到太大破坏.各年龄组鱼的数量为 122×10^9 , 29.7×10^9 , 10.1×10^9 , 3.29×10^9 ,用固定捕捞方式,该公司应采取何种策略才能使总收获量最高.

三、问题分析

如果捕捞过少,显然达不到最佳效益,且由于利用不足造成浪费;若捕捞过度将影响资源的再生,导致资源的枯竭.显然本题的关键在于找出一个合适的捕捞率,在满足可持续捕捞的条件下实现最大产量.

四、模型的假设

①由于各种年龄组的鱼的自然死亡率都相同,所以假设每条鱼在任一时刻的自然死亡几率相同,且鱼的死亡在时间上是连续的.

②每年前 8 个月的任一段时间内的捕鱼量完全与鱼群的条数

成正比。

③为了方便计算,所有 3、4 龄鱼的产卵都集中在 9 月初。

④捕捞只使用网孔为 13mm 的鱼网。

⑤所有 4 龄鱼在一年后均死亡(如果未被捕获)。

⑥所有鱼卵的孵化都集中在 1 月初。

⑦在固定努力量捕捞方式下,单位时间捕捞量将与各年龄组鱼群成正比。

⑧外界条件不变。

⑨渔场封闭,无外界鱼进入。

五、符号定义

年总死亡率(A):在一年中死亡的鱼的数目除以最初的鱼数。

瞬时捕捞死亡率(F):当捕捞和自然死亡同时出现时, F 等于瞬时总死亡率乘以捕捞死亡数对总死亡数的比率,又叫捕捞率。

残存率(S):鱼类生存在一特定时间之后所剩数目除以最初鱼数。

瞬时死亡率(Z):残存率的自然对数(改变正负号)。

瞬时自然死亡率(M):当捕捞和自然死亡率同时存在,它等于瞬时总死亡率乘以自然死亡数对总死亡数的比率。

最大可持续产量(Y_{\max}):在现有环境条件下可以从群体中继续取得的最大平均捕获量或产量。

捕捞强度(f):单位时间内捕获量与各年龄组鱼群条数的比。

六、模型的设计与解法

鱼群数量变动的基本原理如图 6-1(Russell 模型):

$$\bar{B}_1 = \bar{B}_2 + R + G - M - Y$$

其中, \bar{B}_1 、 \bar{B}_2 分别表示某一时期始、末被捕鱼群的生物量, R 、 G 、 M 和 Y 分别表示鱼群的补充量、生长量、自然死亡量和产量。

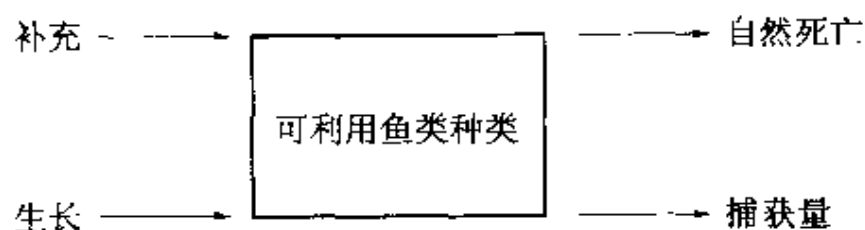


图 6-1

七、动态综合模型

这类模型的出发点是：把鱼类种群作为个体的总和，以一年中各个年龄组所能提供的产量作为同年出生的一个年代级在一生中可提供的产量为前提，探讨一个年代级的可捕群体，在补充率、自然死亡率、外界情况恒定的条件下，每一补充量在不同的捕捞强度或不同的开捕年龄的渔业作用下，能提供多少产量。

具体解法：

我们注意到年自然死亡率(A)和瞬时自然死亡率(M)是截然不同的概念，而题中的 0.8 为年自然死亡率(A)。

将一年分为捕捞期 $2/3$ 年和产卵期 $1/3$ 年两段，年自然死亡率为 $A=0.8$ ，残存率 $S=0.2$ 。

在 $0 \sim 2/3$ 年内， dt 时间内某一年龄段鱼数变化数为 dx ，那么

$$M = -\ln(1 - S) = -\ln 0.2$$

$$dx = -(F + M)x dt$$

$$x = Ce^{-(F + \ln 0.2)t}$$

由初始条件 $x(0) = x_0$ 知 $C = x_0$ ，那么当 $t \in [0, 2/3]$ 时，

$$x = x_0 e^{(\ln 0.2 - F)t}$$

在 $2/3 \sim 1$ 年内，设 dt 时间内某年龄段鱼数变化量为 dx ，那么

$$dx = -Mx dt, \quad x(2/3) = x_0 e^{2/3(\ln 0.2 - F)}$$

$$x = C_1 e^{\ln 0.2 t}, \quad t \in [2/3, 1]$$

$$C_1 = x_0 e^{-2/3F}$$

故 $x = 0.2^t x_0 e^{-2/3F}, \quad t \in [2/3, 1]$

那么一年后进入下一年龄组的鱼数为

$$x(1) = 0.2 x_0 e^{-2/3F}$$

一年捕获的这一年龄组的鱼数为

$$y = \int_0^{2/3} Fx(t) dt = [F/(\ln 0.2 - F)] [e^{2(\ln 0.2 - F)/3} - 1] x_0$$

由上述结论, 并利用差分方程, 得各龄鱼数量之间的递推关系 (A_n, B_n, C_n, D_n 分别为 1、2、3、4 龄鱼的数量, E_n 为产卵总量):

$$A_n = 1.22 \times 10^{11} E_{n-1} / (1.22 \times 10^{11} + E_{n-1})$$

$$B_n = 0.2 A_{n-1}$$

$$C_n = 0.2 B_{n-1}$$

$$D_n = 0.2 C_{n-1} e^{-2/3F_1}$$

$$E_n = 1/2 \times 1.109 \times 10^5 e^{2/3(\ln 0.2 - F_1)} C_{n-1} - e^{2/3(\ln 0.2 - F_2)} D_{n-1}$$

其中 F_1, F_2 分别为 3、4 龄鱼的捕捞率.

假设 A_n, B_n, C_n, D_n 稳定, 它们稳定时的值分别为 a, b, c, d . E_n 稳定值为 g . 令 $u = x$, 那么

$$b = 0.2x, \quad c = 0.04c / (2/3F_1) = 0.008e^{-2/3F_1}x$$

$$g = 1/2 \times 0.2^{2/3} \times 0.04Ne^{-2/3 \times 0.42F_2}x + 0.2^{2/3} \times 0.008Ne^{-2/3 \times 1.42F_2}x \\ = [u(e^{-2/3 \times 0.42F_2})^{(1.42/0.42)} + v(e^{-2/3 \times 0.42F_2})]x$$

其中

$$u = 0.2^{2/3} \times 0.008N, \quad v = 1/2 \times 0.2^{2/3} \times 0.04N \quad (N = 1.109 \times 10^5)$$

再令 $e^{-2/3 \times 0.42F_2} = k$, 则上式变为

$$g = [uk^{(1.42/0.42)} + vk]x$$

由于 $x = a = Rg / (R + g) \quad (R = 1.22 \times 10^{11})$

于是 $R + [uk^{(1.42/0.42)} + vk]x = R[k^{(1.42/0.42)} + vk]$

得 $x = R \{ 1 - 1/[uk^{(1.42/0.42)} + vk] \}$

由于 $x > 0$, $uk^{(1.42/0.42)} + vk > 0$, 所以

$$uk^{1.42/0.42} + vk > 1$$

利用逼近法解方程

$$uk^{(1.42/0.42)} + vk = 1$$

得 $k = 0.0013$

因为函数 $f(k) = uk^{(1.42/0.42)} + vk - 1$ 在 $k > 0$ 时是递增的, 所以不等式 $uk^{(1.42/0.42)} + vk > 1$ 的解集为

$$k > 0.0013$$

此时得 $F_2 < 23.68$

由于当 $F_2 < 23.68$, 且 $k > 0.0013$ 时, 可由方程 $x = m \{ 1 - 1/[uk^{(1.42/0.42)} + vk] \}$ 解出 x , 且求得 $x > 0$, 于是可分别求出 a 、 b 、 c 、 d , 且均大于 0. 于是当 A_i 、 B_i 、 C_i 、 D_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 分别等于 a 、 b 、 c 、 d 时, 所得 A_{i+1} 、 B_{i+1} 、 C_{i+1} 、 D_{i+1} 分别等于 a 、 b 、 c 、 d , 所以此时各年龄鱼的条数稳定.

当 $F_2 < 23.68$, 且 $0.0013 < k < 1$, 捕捞量为

$$Y = 17.86[F_1/(-M - F_1)][e^{2/3(-M - F_1)} - 1]c + \\ 22.99[F_2/(-M - F_2)][e^{2/3(-M - F_2)} - 1]d$$

在区间 $(0.002, 1)$ 中划分等间隔的一系列数, 用计算机算出这些数作为 k 值时对应的捕捞量, 观察捕捞量的数值分布, 得出捕捞量最大时 k 值为 0.0228, 它对应的瞬时捕捞率为 13.5.

第二个问题中, $A[0]$ 、 $B[0]$ 、 $C[0]$ 、 $D[0]$ (即初值) 已给出, 同理, 在 $(0, 1)$ 区间中划分出等间隔的一系列数, 利用前述的差分公式求出每一个数作为 k 值时对应的 5 年后的鱼的分布情况, 并求出 5 年内的总产量. 观察计算机的运行结果, 去掉破坏性较大时的 k 值后, 确定 5 年内最大产量所对应的 k 值为 0.0058, 其对应的瞬时捕捞率 F_2 为 18.38.

八、模型的结果分析

本模型计算出问题①中在持续生产的条件下,获得的最大持续捕捞量(质量)为 $6.48 \times 10^4 \text{t}$,此时瞬时捕捞率为 $F_2 = 13.5$;问题②中 5 年内在不破坏生产能力的基础上获得的最大捕捞量(质量)为 $5.04 \times 10^5 \text{t}$,此时瞬时捕捞率为 $F_2 = 18.38$. 根据对题目的满足条件的验证,上述结果比较正确.

九、模型的评价与改进

1. 模型的评价

本模型直接推算出瞬时捕捞率,准确度高,稳定性较好,只要固定捕捞率不变,产卵数等因素对最大支持产量的影响很小. 但本模型也存在不足之处. 如本题假设产卵和孵化是不连续的,集中在某一时刻进行,而一般情况下两者都在一定时期内连续,以及未考虑其他种群与其的关系等. 因此实际应用时,准确度会有所下降. 建议在实际中应用 Ricker 模型估算.

2. 模型的改进(略)

第四节 最优赛程安排模型

摘要:

本题是一个关于排序的问题. 解决问题的关键在于找到一种合理的编排赛程的方法,并要求寻找一些指标来衡量赛程优劣.

针对问题①,我们找到了符合要求的编排方法,得到了 5 个队参赛的赛程安排表,见表 6-1.

对于问题②,我们首先分别编排出由 4、5、6、7、8、9 个队参赛并满足题目要求的赛程,然后经过分析,找到了一种规律:假设第 1 场 A 出场,最后一场 A 也出场,然后由后向前(或由前向后,或

由两边向中间)每隔一场安排 A 出场,这样, A 的最大比赛间隔场次数就是所求的间隔场数的上界: $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{2}n + 4$. 并用数学归纳法证明了当 $n \geq 6$ 时, $f(n)$ 为上确界,即为模型一的上限.

对于问题③,在达到②的上限的条件下,由模型一求出 $n=8$ 时的上限为 16, $n=9$ 时的上限为 22. 根据“部分轮转法”编排赛程,就得到了符合要求的赛程表,见表 6-8、表 6-9.

对于问题④,除了每两场比赛间相隔场次数这一指标外,我们引入了各队参赛先后次序的均匀性作为指标,发现原来的赛程安排在该指标下显得不合理. 于是利用“完全轮转法”编排出 $n=8$, $n=9$ 时较合理的赛程表,见表 6-12、表 6-13.

一、问题的重述

有 5 个队在同—一个场地上进行单循环赛,共需进行 C_5^2 场比赛,现需要安排这 5 队的比赛赛程. 从上面的例子出发,讨论如下问题:

①给出一个 5 支球队的比赛赛程表,要求各队每两场比赛中间至少相隔一场;

②求出当有 n 支球队比赛时,各队每两场比赛中间相隔的场次数数的上限;

③在达到②的上限的条件下,给出 $n=8$, $n=9$ 的赛程,并说明它们的编制过程;

④除了每两场比赛间相隔场次数这一指标外,你还能给出哪些指标来衡量一个赛程的优劣,并说明③中给出的赛程达到这些指标的程度.

二、问题的假设和概念的说明

假设:

①比赛为单循环比赛,且在同一场地上进行;

②各队在公平的环境下比赛(如裁判、天气、后勤等);

③每一场比赛的间隔时间相等;

④各场比赛的规则相同;

⑤比赛不因外界因素的干扰而中断.

说明:

①轮:若 n 为偶数,则每个队都打一场为轮;若 n 为奇数,则补充一个“0 号队”,再按偶数处理,若某队遇到“0 号队”则轮空;

②完全轮转法;

③部分轮转法.

三、问题的分析

对于问题①,根据题意很容易安排出符合题意的赛程.

对于问题②,要求出各队每两场比赛中间相隔的场次数的上限,可以先用列举的方法,编排出 $n = 4, 5, 6, 7, 8, 9$ 的各自的赛程,总结出编排赛程的规律,最后加以证明.

对于问题③,要求在达到②的上限的条件下要编排出 $n = 8, n = 9$ 的赛程,则要根据问题②中得到的规律和上界来确定.

对于问题④,该问题的关键在于编排赛程时充分地对各队公平,除了考虑每两场比赛间相隔场次数这一指标外,还考虑到比赛战术泄露等问题,可以进一步考虑各队出场的先后次序,用出场先后的均衡性来衡量赛程表的优劣.并可以根据此指标给出 $n = 8, n = 9$ 的赛程达到这一指标的程度.

四、符号说明

g ——一个队每两场比赛的间隔场次数;

$f(n)$ ——一个队每两场比赛间隔场次数的最大值;

m ——一个队在整个赛程中需要出场的次数;

M_n ——有 n 支球队比赛,每支球队出场的次数;

- a_i ——某队参加的所有场次的某一场序列号;
 L_j ——第 j 参赛队的所有的比赛场次占总场次的比例的平方和;
 K ——偶数队时的平均占场次比例和的上限;
 J ——偶数队时的平均占场次比例和的下限;
 P ——奇数队时的平均占场次比例和的上限;
 N ——奇数队时的平均占场次比例和的下限.

五、模型的建立和求解

(1)对于 5 支球队的比赛,用“部分轮转法”编排出各队每两场比赛中间都至少相隔一场的赛程.因为 A、B、C、D、E 位置可以互换,所以当出现每两场比赛间隔场次数相等的赛程时,其实质是相同的.在用“部分轮转法”编排赛程时可抽签排队.

(2)模型一

要求出当 n 支球队比赛时,各队每场比赛中间相隔的场数的上限.下面分 3 种方法推导上限公式,最后用数学归纳法加以证明.

$$f(n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{2}n + 4 \quad (n \geq 6)$$

方法一

在满足①的条件下,要求出各个队每场比赛中间相隔的场次数的上限,即求相隔场次数的最大值.由于是单循环赛,很明显,一个球队要比赛 $n-1$ 场,假设第 1 场 A 出场,最后一场 A 也出场,然后由后向前(或由前向后,或由两边向中间)每隔一场安排 A 出场,这样,A 的最大比赛间隔场数就是所求的间隔次数的上界.

下面用列举法归纳求解:

①当 $n=3$ 时,很明显有一个球队的比赛肯定是连续的,即没有休整时间.

②当 $n=4$ 时,总比赛的场数为: $C_4^2 = 6$.

每个队要比赛的场数： $M_4 = 4 - 1 = 3$.

用穷举法可知无论怎样排，总会有某个队的隔场次数 $g = 0$.

③当 $n = 5$ 时，总的比赛的场数为： $C_5^2 = 10$.

每个队要比赛的场数： $M_5 = 5 - 1 = 4$.

按照方法一可以排出如表 6-1 所示的赛程.

表 6-1

$n = 5$	A	B	C	D	E	每两场比赛间隔场次数
A		1	6	9	3	1, 2, 2
B	1		4	7	10	2, 2, 2
C	6	4		2	8	1, 1, 1
D	9	7	2		5	2, 1, 1
E	3	10	8	5		1, 2, 1

由此可得到：当 $n = 5$ 时， $f(5) = 2$.

④当 $n = 6$ 时，总的比赛的场数为： $C_6^2 = 15$.

每个队要比赛的场数： $M_6 = 6 - 1 = 5$.

按照方法一可以排出如表 6-2 所示的赛程.

表 6-2

$n = 6$	①	②	③	④	⑤	⑥	每两场比赛间隔场次数
①		15	11	13	9	1	7, 1, 1, 1
②	15		2	5	12	7	2, 1, 4, 3
③	11	2		8	6	4	1, 1, 1, 2
④	13	5	8		3	10	1, 2, 1, 2
⑤	9	12	6	3		14	2, 2, 2, 1
⑥	1	7	4	10	14		2, 2, 2, 2

由此可得到：当 $n = 6$ 时， $f(6) = 7$.

⑤当 $n=7$ 时,总的比赛的场数为: $C_7^2=21$.

每个队要比赛的场数: $M_7=7-1=6$.

按照方法一可以排出如表 6-3 所示的赛程.

表 6-3

$n=7$	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	每两场比赛间隔场次数
①		1	13	15	17	19	21	11,1,1,1,1
②	1		16	6	20	10	3	1,2,3,5,3
③	13	16		18	9	2	11	6,1,1,2,1
④	15	6	18		4	12	8	1,1,3,2,2
⑤	17	20	9	4		7	14	2,1,4,2,2
⑥	19	10	2	12	7		5	2,1,2,1,6
⑦	21	3	11	8	14	5		1,2,2,2,6

由此可得到:当 $n=7$ 时, $f(7)=11$.

⑥当 $n=8$ 时,总的比赛的场数为: $C_8^2=28$.

每个队要比赛的场数: $M_8=8-1=7$.

按照方法一可以排出如表 6-4 所示的赛程.

表 6-4

$n=8$	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	每两场比赛间隔场次数
①		1	18	20	22	24	26	28	16,1,1,1,1,1
②	1		10	17	6	15	3	13	1,2,3,2,1,1
③	18	10		7	14	2	12	25	4,2,3,1,5,6
④	20	17	7		4	11	23	9	2,1,1,5,2,2
⑤	22	6	14	4		27	8	19	1,1,5,4,2,4
⑥	24	15	2	11	27		21	5	2,5,3,5,2,2
⑦	26	3	12	23	8	21		16	4,3,3,4,1,2
⑧	28	13	25	9	19	5	16		3,3,2,2,5,2

由此可得到:当 $n=8$ 时, $f(8)=16$.

⑦当 $n=9$ 时,总的比赛的场数为: $C_9^2=36$.

每个队要比赛的场数: $M_9=9-1=8$.

按照方法一可以排出如表 6-5 所示的赛程.

表 6-5

$n=9$	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	每两场比赛间隔场次数
①		1	24	26	28	30	32	34	36	22,1,1,1,1,1,1
②	1		22	9	25	13	35	17	3	1,5,3,3,4,2,9
③	24	22		29	12	33	16	2	20	9,3,3,1,1,4,3
④	26	9	29		31	15	4	19	6	1,2,5,3,6,2,1
⑤	28	25	12	31		5	18	7	23	1,4,5,4,1,2,2
⑥	30	13	33	15	5		8	21	10	2,1,2,1,5,8,2
⑦	32	35	16	4	18	8		11	27	3,2,4,1,8,4,2
⑧	34	17	2	19	7	21	11		14	4,3,2,2,1,1,12
⑨	36	3	20	6	23	10	27	14		2,3,3,5,2,3,8

由此可得到:当 $n=9$ 时, $f(9)=22$.

⋮

至此,我们发现:

$n=6$ 时,隔场次数 $f(6)=7=6+1=C_4^2+1$;

$n=7$ 时,隔场次数 $f(7)=11=10+1=C_5^2+1$;

$n=8$ 时,隔场次数 $f(8)=16=15+1=C_6^2+1$;

$n=9$ 时,隔场次数 $f(9)=22=21+1=C_7^2+1$;

⋮

推测:

当 n 个队时,隔场次数上限

$$\begin{aligned} f(n) &= C_{n-2}^2 + 1 \\ &= \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{2}n + 4 \quad (n \geq 6) \quad \cdots \cdots ① \end{aligned}$$

方法二

根据方法一,假定第1场A出场,最后一场A也出场,然后由后向前(或由前向后,或由两边向中间)每隔一场安排A出场,这样,A的最大比赛间隔场数就是所求的间隔次数的上界.

n 支球队采用单循环赛,需要安排的总比赛场数为: C_n^2 .

A队参赛的场数为: $M_n = n - 1$.

按照上述方法,A队每两场比赛中间相隔的场次数上界为:

$$\begin{aligned} f(n) &= C_n^2 - (n - 2) \times 2 - 1 + 1 \\ &= \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{2}n + 4 \quad (n \geq 6) \quad \cdots \cdots ② \end{aligned}$$

方法三

根据前面的演算和推导可以看出,比赛场次以及间隔数目是队列数的二次函数,因此我们不妨假设:

$$f(n) = an^2 + bn + c \quad \cdots \cdots ③$$

根据前面的方法得: $n=6$ 时, $f(6)=7$

$n=7$ 时, $f(7)=11$

$n=8$ 时, $f(8)=16$

将上面一组数据给式③赋值:

$$\begin{cases} 7 = 36a + 6b + c \\ 11 = 49a + 7b + c \\ 16 = 64a + 8b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{5}{2} \\ c = 4 \end{cases}$$

$$f(n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{2}n + 4 \quad (n \geq 6) \quad \cdots \cdots ④$$

由于用3种不同的方法所推测出的上限公式完全相同,因此

可推测各队每两场比赛中间相隔场次数的模型为

$$f(n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{2}n + 4 \quad (n \geq 6)$$

下面用数学归纳法证明该模型:

①当 $n=6$ 时

$$f(6) = \frac{1}{2} \times 6^2 - \frac{5}{2} \times 6 + 4 = 7 \quad \text{成立}$$

②假设当 $n=k$ 时成立($k \geq 6$), 即有 $f(k) = \frac{1}{2}k^2 - \frac{5}{2}k + 4$ 成立.

③当 $n=k+1$ 时, 原有 k 支球队时, 总共的比赛场数为 C_k^2 场, 假设 Y 队每两场比赛中间相隔的场次数的上限为 $f(k)$, 当增加一支球队 Z 参赛时, 总场数增加 k 场, 把这 k 场比赛插在 k 支球队参赛时的最大间隔场数之间. 由于增加的 k 场比赛中有一场是 $Y-Z$, 那么把 $Y-Z$ 这场比赛安排在靠近 Y 的某一场(中间隔一场), 因此 Y 队每两场比赛中间相隔的场次数的上限增加了 $k-2$ 场. 即

$$\begin{aligned} f(k+1) &= f(k) + k - 2 \\ &= \frac{1}{2}k^2 - \frac{5}{2}k + 4 + k - 2 \\ &= \frac{1}{2}(k+1)^2 - \frac{5}{2}(k+1) + 4 \end{aligned}$$

所以当 $n=k+1$ 时, 模型一也成立.

综上所述, 当 $n \geq 6$ 时模型成立.

(3)模型二

在达到②的上限条件下, 给出 $n=8, n=9$ 的赛程, 并说明它们的编制过程.

对于赛程的安排, 我们给出“部分轮转法”和“完全轮转法”. 在有限制的情况下, 使用“部分轮转法”; 在无条件的情况下, 使用“完

全轮转法”。

①完全轮转法

所谓完全轮转法,即无论参赛队是单数还是双数,一律按双数编排。

当参赛队为单数时,用一个“0”号队把参赛队补充成双数。任意一队遇到“0”号队,即为轮空。编排时,先给各个队编顺序号,一个号码代表一个队,再将这些号码按顺序分为两半,前一半号数由①号起,自上而下写在左边;后一半号数自下而上写在右边;然后再把相对应的队号数用横线连接起来,这就是第一轮的比赛。把①号位固定不动,其余的号数按逆时针运动1次(当然顺时针也行),再用横线把相对的队号数连起来,就得到第二轮。依次类推,可推出其余各轮比赛(如表6-6所示)。

当参赛队为双数时,轮转方法是:①号位置的队固定不动,其他位置每轮按逆时针方向轮转一个位置,这样可排出各轮比赛的顺序。

以8个队参赛为例,其轮次排列见表6-6。

表 6 6

第一轮	第二轮	第三轮	第四轮	第五轮	第六轮	第七轮
①—⑧	①—⑦	①—⑥	①—⑤	①—④	①—③	①—②
②—⑦	⑧—⑥	⑦—⑤	⑥—④	⑤—③	④—②	③—⑧
③—⑥	②—⑤	⑧—④	⑦—③	⑥—②	⑤—⑧	④—⑦
④—⑤	③—④	②—③	⑧—②	⑦—⑧	⑥—⑦	⑤—⑥

当参赛队为单数时,可用“0”代表轮空,补成双数。但“0”号位置固定不动,其他位置每轮按顺时针方向轮转一个位置。表6-7所示为5个队时顺时针轮转法的结果。

表 6-7

第一轮	第二轮	第三轮	第四轮	第五轮
①—②	③—④	⑤—⑥	⑦—⑧	⑨—⑩
②—③	④—⑤	⑥—⑦	⑧—⑨	⑩—⑪
③—④	⑤—⑥	⑦—⑧	⑨—⑩	⑪—⑫

单循环比赛轮数:若 n 是奇数,则比赛的轮数等于 n .

若 n 是偶数,则比赛的轮数等于 $n - 1$.

轮次排出后,还应明确各参赛队的代表号码数,将各队队名按其代号数填到轮次表中,然后编写赛程表.

②部分轮转法

所谓的部分轮转法是指在有条件限制的情况下,部分地使用完全轮转法.例如,在达到②的上限的条件下,编排 $n = 8, n = 9$ 的赛程时,先任意选出某球队在达到上限的情况下优先编排,剩下的队用完全轮转法编排.在编排过程中,如遇有些队已编排,就跳过去,继续按完全轮转法编排.如果此时出现有一个队的两场比赛之间无间隔时,就在同轮中调换比赛顺序;如果在同一轮中调换比赛顺序不能达到要求时,就在邻近的轮次中调换,直到符合条件.

当 $n = 8$ 时符合条件的赛程表见表 6-8.

表 6-8

$n = 8$	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	每两场比赛间隔场次数
①		1	18	20	22	24	26	28	16, 1, 1, 1, 1, 1
②	1		10	17	6	15	3	13	1, 2, 3, 2, 1, 1
③	18	10		7	14	2	12	25	4, 2, 3, 1, 5, 6
④	20	17	7		4	11	23	9	2, 1, 1, 5, 2, 2
⑤	22	6	14	4		27	8	19	1, 1, 5, 4, 2, 4
⑥	24	15	2	11	27		21	5	2, 5, 3, 5, 2, 2
⑦	26	3	12	23	8	21		16	4, 3, 3, 4, 1, 2
⑧	28	13	25	9	19	5	16		3, 3, 2, 2, 5, 2

当 $n = 9$ 时符合条件的赛程表见表 6-9.

表 6-9

$n = 9$	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	每两场比赛间隔场次数
①		1	24	26	28	30	32	34	36	22, 1, 1, 1, 1, 1, 1
②	1		22	9	25	13	35	17	3	1, 5, 3, 3, 4, 2, 9
③	24	22		29	12	33	16	2	20	9, 3, 3, 1, 1, 4, 3
④	26	9	29		31	15	4	19	6	1, 2, 5, 3, 6, 2, 1
⑤	28	25	12	31		5	18	7	23	1, 4, 5, 4, 1, 2, 2
⑥	30	13	33	15	5		8	21	10	2, 1, 2, 1, 5, 8, 2
⑦	32	35	16	4	18	8		11	27	3, 2, 4, 1, 8, 4, 2
⑧	34	17	2	19	7	21	11		14	4, 3, 2, 2, 1, 1, 12
⑨	36	3	20	6	23	10	27	14		2, 3, 3, 5, 2, 3, 8

(4) 模型三

在赛程安排时,除了每两场比赛间相隔场次数这一指标外,我们从另外的角度来分析赛程表,不难发现各队的比赛先后也影响到赛程表的优劣.试分析,如果某队打完第一场后,隔 $C_n^2 - (n - 2) \times 2$ 场再打其第二场比赛,以后每相隔一场打其下一场,直到完成其所有比赛(即总场数的最后一场).这样,一方面可利用其第一场和第二场之间的时间去观看别队的比赛,对别队的战术、技术水平进行全面剖析,以研究自己队与这些队的对阵阵容;另一方面,有 $(n - 2)$ 场比赛放在比赛的后阶段打,在对别人的积分知晓后,队员们的心理压力可能会有所放松,就会有的放矢地去把握自己的出线机会.所以,比赛的先后次序也是衡量一个赛程优劣的指标.从前面的分析看,当各队的比赛间隔场数越接近平均比赛间隔场数 $\frac{C_n^2}{n-1}$ 时,各队都得到了充分的休息时间,在休息时间上达到公平.另外,他们都有比赛安排在整个赛程的后期,都有较为均等的机会去观察别的队.这样,更有利于达到比赛的目的,公平地选

出优秀的参赛队.

我们用平均值或者方差来考察一个赛程满足衡量其指标的程度,则有:

$$L_j = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{a_i}{C_n^2} \right)^2$$

再对指标分别确定一个上下限.当 L_n 处于求出的上下限之间时,即为合理地达到这一指标;若不处于其间,我们设定一个量,来推算其合理的程度.

①对于偶数来说

$$\text{上限:从第 } \frac{n}{2} \text{ 场开始打} \quad K = \sum_{h=0}^{n-2} \left(\frac{\frac{n}{2} + h \frac{n}{2}}{C_n^2} \right)^2$$

$$\text{下限:从第一场开始打} \quad J = \sum_{h=0}^{n-2} \left(\frac{1 + h \frac{n}{2}}{C_n^2} \right)^2$$

②对于奇数来说

$$\text{上限:从第一场开始打} \quad P = \sum_{h=0}^{n-2} \left(\frac{1 + h \frac{n-1}{2}}{C_n^2} \right)^2$$

$$\text{下限:从第 } \frac{n}{2} \text{ 场开始打} \quad N = \sum_{h=0}^{n-2} \left(\frac{\frac{n-1}{2} + h \frac{n-1}{2}}{C_n^2} \right)^2$$

③当 $H = \frac{\sum_{i=1}^n L_i}{n}$ 在上下限之间的时候,即达到满意的指标;当其不在上下限之间的时候,

$$\text{若低于下限,则其不满意程度为:} \begin{cases} 1 - \frac{J-H}{J} & (n \text{ 为偶数}) \\ 1 - \frac{N-H}{N} & (n \text{ 为奇数}) \end{cases}$$

$$\text{若高于上限, 则其不满意程度为: } \begin{cases} 1 - \frac{H-K}{K} & (n \text{ 为偶数}) \\ 1 - \frac{H-N}{N} & (n \text{ 为奇数}) \end{cases}$$

我们发现问题③中要求的赛程并不是最优的,于是我们用完全轮转法,编排出了 $n=8$ 和 $n=9$ 的最优赛程,见表 6-12、表 6-13.

六、模型的检验

把模型一、模型二、模型三放到实际生活中进行检验,我们现在实际应用中,赛程的安排与模型十分吻合,说明这 3 个模型具有实际意义.

七、模型的评价及结果分析

对于问题②的 3 个方法,它们是层进的关系.方法一是在对所列出的上限用归纳法加以总结得出的,方法二是在方法一的基础上,在某队连续的两场比赛间插入一场比赛.为了使问题简化明了,把两场比赛与一场间隔匹配在一起,即看成 $(n-2)$ 个 2 场连续排列,这样得出最大上限为 $C_n^2 - (n-2) \times 2$. 为了验证所推公式的正确性,在方法三的基础上,假设上限为 $f(n) = an^2 + bn + c$ (n 的二次方是根据方法二的 C_n^2 而来),利用赋值法和待定系数法,算出 a, b, c ,结果与方法一和方法二的结果完全一样.由于 3 个方法是从不同的角度考虑的,从而更好地预示了推测的正确性.最后用数学归纳法进一步证明了模型的正确性.

对于问题③的模型二,主要是运用了“完全轮转法”和“部分轮转法”,使得模型二在满足②的上限的条件下,给出了 $n=8, n=9$ 的合理编制过程,得到了较为完善的赛程.所得赛程尽量满足了间隔均衡,与实际运用的一些经验比较,是符合实际的.

问题①中加入考虑了另一个指标,即同一个队经历的比赛是否过于靠后或靠前,以此来衡量公平性.我们运用求平均值求方差的办法,确定上下限.对于不在此范围内的,根据规定置信度看分布,然后再用完全轮转法对赛程进行调整.经过一番了解,实际中的单循环赛的排序用的也是类似的方法,并且得出和实际排列较为一致的赛程,因此进一步说明了模型的可行性.

八、模型的改进、推广及优缺点分析

该模型主要是考虑到在一定条件下对赛程表的编制.我们运用了“部分轮转法”并经过验证后,取得了良好的效果.鉴于题目所给的条件在实际生活中有一定的局限性,因此,我们在暂时抛开题目条件的情况下,运用完全轮转法给出了最优的赛程,并且这种最优的赛程在实际生活中也能得到广泛应用(世界杯小组赛排法也类似于此).

但是,事物都是两面的,有利也有弊.在参赛队数比较多的情况下(即 n 很大时),这种单循环赛所需的时间难免会太长.因此建议对单循环制进行改进,利用分组单循环制(即把 n 个球队分成 m 个组($m < n$),再运用单循环制).分组单循环时,要选出种子队,种子队的对数要等于分组数或是分组数的倍数.如果每组有两个种子队时,应把第 1 名种子队和最后 1 名种子队放在一组,第 2 名种子队和倒数第 2 名种子队放在一组,依次类推,最后再把各个小组按单循环编排,然后按竞赛中规定的办法进行下一阶段的比赛.

在参赛队数较少,时间又较充裕时,则可选用双循环制(双循环制就是要进行两次单循环赛,所有参赛的队都要相遇两次,最后按各队在全部比赛中的成绩排名).这样参加比赛的队相遇的机会较多,比赛场次较多,有利于相互学习,共同提高,锻炼队伍.所以用“完全轮转法”和“部分轮转法”所编排的单循环有很广泛的实际

应用,有利于推广.

九、参考书目

1. 现代足球[M]. 北京:人民体育出版社,2001
2. 杨启帆,方道元. 数学建模[M]. 杭州:浙江大学出版社,2001
3. 白峰杉,蔡大用译. 数学实验室[M]. 北京:高等教育出版社,1998
4. 数学的实践与认识. 中国数学学会,2001 年

十、应用的数学软件

Mathcad 7.0.

十一、附录

应用 Mathcad 计算满意度.

$$\begin{aligned} n \text{ 为偶数} \quad \text{上限: } K(n) &= \sum_{h=0}^{n-2} \left[\frac{\frac{n}{2} + h \frac{n}{2}}{\frac{n(n-1)}{2}} \right]^2 \\ &\quad \text{下限: } J(n) = \sum_{h=0}^{n-2} \left[\frac{1 + h \frac{n}{2}}{\frac{n(n-1)}{2}} \right]^2 \\ n \text{ 为奇数} \quad \text{上限: } P(n) &= \sum_{h=0}^{n-2} \left[\frac{\frac{n}{2} + h \frac{n-1}{2}}{\frac{n(n-1)}{2}} \right]^2 \\ &\quad \text{下限: } N(n) = \sum_{h=0}^{n-2} \left[\frac{1 + h \frac{n-1}{2}}{\frac{n(n-1)}{2}} \right]^2 \end{aligned}$$

当 $n=8$ $K(8)=2.857$ $J(8)=2.08$

当 $n=9$ $P(9)=2.631$ $N(9)=1.907$

现检验当 $n=8$ 和 $n=9$ 时的情况是否在上述范围之内.

定义函数:
$$f(x) = \left[\frac{x}{\frac{n(n-1)}{2}} \right]^2$$

当 $n=8$ 时结果如表 6-10 所示.

表 6-10

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	每两场比赛间隔场次数
①		1	18	20	22	24	26	28	16,1,1,1,1,1
②	1		10	17	6	15	3	13	1,2,3,2,1,1
③	18	10		7	14	2	12	25	4,2,3,1,5,6
④	20	17	7		4	11	23	9	2,1,1,5,2,2
⑤	22	6	14	4		27	8	19	1,1,5,4,2,4
⑥	24	15	2	11	27		21	5	2,5,3,5,2,2
⑦	26	3	12	23	8	21		16	4,3,3,4,1,2
⑧	28	13	25	9	19	5	16		3,3,2,2,5,2

当 $n=9$ 时,结果如表 6-11 所示.

表 6-11

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	每两场比赛间隔场次数
①		1	24	26	28	30	32	34	36	22,1,1,1,1,1,1
②	1		22	9	25	13	35	17	3	1,5,3,3,4,2,9
③	24	22		29	12	33	16	2	20	9,3,3,1,1,4,3
④	26	9	29		31	15	4	19	6	1,2,5,3,6,2,1
⑤	28	25	12	31		5	18	7	23	1,4,5,4,1,2,2
⑥	30	13	33	15	5		8	21	10	2,1,2,1,5,8,2
⑦	32	35	16	4	18	8		11	27	3,2,4,1,8,4,2
⑧	34	17	2	19	7	21	11		14	4,3,2,2,1,1,12
⑨	36	3	20	6	23	10	27	14		2,3,3,5,2,3,8

定义函数: $\text{value}(a, b, c, d, e, m, g) := f(a) + f(b) + f(c) + f(d) + f(e) + f(m) + f(g)$

队 ① $\text{value}(1, 18, 20, 22, 24, 26, 28) = 2.504$

② $\text{value}(1, 10, 17, 6, 15, 3, 13) = 0.64$

③ $\text{value}(18, 10, 7, 14, 2, 12, 25) = 1.113$

④ $\text{value}(20, 17, 7, 4, 11, 23, 9) = 1.146$

⑤ $\text{value}(22, 6, 14, 4, 27, 8, 19) = 1.455$

⑥ $\text{value}(24, 15, 2, 11, 27, 21, 5) = 1.637$

⑦ $\text{value}(26, 3, 12, 23, 8, 21, 16) = 1.635$

⑧ $\text{value}(28, 13, 25, 9, 19, 5, 16) = 1.775$

$$\frac{2.504 + 0.64 + 1.113 + 1.146 + 1.455 + 1.637 + 1.635 + 1.775}{8}$$

$$= 1.488$$

$n = 8$ 时赛程达到所给指标(比赛先后)的程序为: $1 - \frac{2.08 - 1.488}{2.08} = 0.715$. $n = 8$ 时的最优编排方案如表 6-12 所示.

表 6-12

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	每两场比赛间隔场次数
①		25	21	17	13	9	5	1	3,3,3,3,3,3
②	25		11	22	7	19	2	16	4,4,3,2,2,2
③	21	11		8	18	3	15	26	4,3,2,2,2,4
④	17	22	8		4	14	27	11	3,2,2,2,4,4
⑤	13	7	18	4		28	10	23	2,2,2,4,4,4
⑥	9	19	3	14	28		24	6	2,2,4,4,4,3
⑦	5	2	15	27	10	24		20	2,4,4,4,3,2
⑧	1	16	26	11	23	6	20		4,4,4,3,2,2

定义函数: $\text{value}(a, b, c, d, e, m, g, h) = f(a) + f(b) + f(c) + f(d) + f(e) + f(m) + f(g) + f(h)$

队 ① $\text{value}(1, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36) = 4.948$

② $\text{value}(1, 22, 9, 25, 13, 35, 17, 3) = 2.225$

③ $\text{value}(24, 22, 29, 12, 33, 16, 2, 20) = 2.927$

④ $\text{value}(26, 9, 29, 31, 15, 4, 19, 6) = 2.467$

⑤ $\text{value}(28, 25, 12, 31, 5, 18, 7, 23) = 2.655$

⑥ $\text{value}(30, 13, 33, 15, 5, 8, 21, 10) = 2.325$

⑦ $\text{value}(32, 35, 16, 4, 18, 8, 11, 27) = 2.9$

⑧ $\text{value}(34, 17, 2, 19, 7, 21, 11, 14) = 2.019$

⑨ $\text{value}(36, 3, 20, 6, 23, 10, 27, 14) = 2.542$

$$\frac{4.948 + 2.225 + 2.927 + 2.467 + 2.655 + 2.325 + 2.9 + 2.019 + 2.542}{9}$$

$$= 2.779$$

$n = 9$ 时赛程达到所给指标(比赛先后)的程序为: $1 - \frac{2.779 - 2.631}{2.631} = 0.944$. $n = 9$ 时的最优编排方案如表 6-13 所示.

表 6-13

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	每两场比赛间隔场次数
①		24	5	27	10	30	15	33	20	4, 4, 4, 3, 2, 2, 2
②	24		28	9	31	14	34	19	1	7, 4, 4, 4, 3, 2, 2
③	5	28		32	13	35	18	2	23	2, 7, 4, 4, 4, 3, 2
④	27	9	32		36	17	3	22	6	2, 2, 7, 4, 4, 4, 3
⑤	10	31	13	36		4	21	7	26	2, 2, 2, 7, 4, 4, 4
⑥	30	14	35	17	4		8	25	11	3, 2, 2, 2, 7, 4, 4
⑦	15	34	18	3	21	8		12	29	4, 3, 2, 2, 2, 7, 4
⑧	33	19	2	22	7	25	12		16	4, 4, 3, 2, 2, 2, 7
⑨	20	1	23	6	26	11	29	16		4, 4, 4, 3, 2, 2, 2

附录 1 大学生数学建模竞赛简介

一、美国大学生数学建模竞赛

第二次世界大战期间,美国太平洋舰队海军基地经常被德国的潜水艇偷袭.虽然美国太平洋舰队派有巡洋舰巡逻,进行反偷袭,但从来没有发现偷袭的敌舰.指挥官着急得很,却无计可施.最后有人提议请数学家帮忙.在原有巡逻舰的基础上,数学家经过调查、分析和研究,建立了“巡逻模型”,指出具体的巡逻时间及巡逻线路.按“巡逻模型”执行任务的巡逻舰,果然捕捉到德军的偷袭舰艇,并将其击毁,解决了一大隐患.这次事件以后,美国更加深了对数学的认识.

正是由于认识到培养应用型数学人才的重要性,美国为了加强自身的竞争力,更有效地发现和培养科技精英,在美国国家安全委员会的支持下,从 1983 年起,美国一些有识之士开始探讨组织一项应用数学方面的竞赛的可能性.经过论证、争论、争取资助的过程,由美国工业与应用数学学会、美国运筹学会联合美国工商企业界,终于在 1985 年开始有了美国的第一届大学生数学建模竞赛,简称 MCM(1987 年以前的全称是 Mathematical Competition in Modelling,1987 年改为 Mathematical Contest in Modelling).竞赛从 1985 年起每年举行一届.

MCM 是一项旨在鼓励培养应用数学人才的竞赛,在国际上有很大的影响力.这项竞赛的宗旨是鼓励大学生运用所学的知识(包括数学知识及其他各方面的知识)去参与解决实际问题的全过程.这些实际问题并不限于某个特定领域,可以涉及非常广泛的、

并不固定的范围,以此来促进应用人才的培养.

(1)比赛的形式

MCM 是真正的团体赛,每个参赛队由 3 人组成,在规定的 3 天时间内共同完成一份答卷.每个参赛队有一个指导教师,在比赛前负责培训并接受考题,将考题在规定的时间内发给学生,然后由学生自行做题,教师不得参赛.比赛时没有监考人员,完全是靠学生自动自觉.参赛队的 3 名队员可以相互讨论,可以查阅资料,可以使用计算机和计算机软件.一言以蔽之:可以使用任何非生命的资源,但不允许 3 人以外的其他人(包括指导教师)帮助做题.答卷应是一篇完整的论文,包括对所选问题的重新阐述,对问题的条件和假设的阐明和必要补充甚至修改,对为什么要用所述模型的分析,模型的设计,对模型的测试和检验的讨论,模型的优缺点等,还要有一个不超过一页的论文内容的摘要.

(2)比赛的题目

每次的考题只有两道,都是来自实际的问题或有强烈实际背景的问题,没有固定的范围,可能涉及各个非常不同的学科、领域.每个参赛队从这两个考题中任意选做一道题.

(3)比赛的时间及地点

在每年的 2 月下旬或 3 月初的某个星期五至星期日 3 天时间内举行,地点就在参赛学生自己学校内.

(4)比赛结果的评定

专家们在评卷时并不对论文给出分数,也不采用“通过”、“失败”这种评定,而只是将论文分成以下等级:Out-Standing(特等奖)、Meritorious(一等奖)、Honor-able Mention(二等奖)、Successful Participation(成功参赛奖).评卷的标准并不是看答案对不对,而主要是看论文的思想方法好不好,以及论述是否清晰.Out-Standing 的论文作为优秀论文在专业杂志上发表,而所有参赛的队员和

教练都能得到一张奖状. 翻开已发表的 MCM 的优秀论文, 你会发现: 同一个考题的几篇优秀论文甚至连答案都不一样, 却同样都优秀, 优秀论文甚至被专家指出一大堆毛病, 却仍不失为优秀. 在这里, 正确和错误是相对的, 优秀和不优秀也是相对的, 这在纯数学竞赛中是不可思议的. 但既然数学建模竞赛是考察解决实际问题的能力, 那就一切都以解决实际问题的过程为准. 实际问题需要查资料, 需要使用计算机, 需要课题组的人相互交流和讨论, 因此数学建模竞赛也就允许使用这些“非生命的资源”. 同样, 实际问题的解决, 常常没有绝对的正确或错误, 也没有绝对的优秀, 数学建模竞赛也是这样. 但这并不是说数学建模竞赛就没有是非和好坏的标准. 论文中各种不同意见、不同答案可以并存, 只要能够言之成理. 但如果你像解答纯数学题那样去做, 只有数学公式和计算, 而不讲清实际问题怎么变成数学公式, 也不让计算结果再接受实践检验, 即使答案正确, 论文也很难评上好的等级. 这是因为, 它不是数学竞赛, 而是数学建模竞赛. 它看重的是 3 个过程: 实际问题→数学问题→数学解→实际问题的解决. 如果你只重视其中一个过程(一般初参赛的时候容易犯这个错误), 而对第一和第三这两个过程不予重视, 那就违背了数学建模竞赛的宗旨, 当然就不能得到好的结果. 为什么要叫数学建模竞赛? 就是因为它比的是建立数学模型, 而不只是比赛解答数学模型.

(5) 比赛的目的

比赛的目的是培养应用型人才. 事实上, MCM 可以认为是学生从学校走向社会的桥梁. 3 天的竞赛, 就是参与社会实际工作的一个缩影.

美国的 MCM 虽然只是美国的国内赛, 但它欢迎其他国家的大学组队参加, 而且有越来越多的国家的大学参加这一竞赛. 近年来它已发展成为有多个国家和地区参加的国际大学生数学建模竞

赛.如 2000 年有 9 个国家和地区的 231 所高等学校、495 个队参加了美国大学生数学建模竞赛.因此,在某种意义上它已经是国际性的竞赛.我国参加国际大学生数学建模竞赛的高校数和队数逐年增多,成绩不断提高:1993 年我国参赛校数 17 所、参赛队数 40 个,分别占该项比赛的参赛总校数和总队数的 10.4% 和 15.4%;2000 年我国参赛校数已达 46 所、参赛队数达 169 个,分别占参赛总校数和总队数的 20% 和 34%.从 1996 年开始,先后有复旦大学、中国科技大学、华东理工大学、清华大学、国防科技大学和浙江大学获得国际大学生数学建模竞赛特等奖,仅 2000 年就有 20 所学校的 37 个队获得一等奖.

二、中国大学生数学建模竞赛

我国著名科学家钱学森教授在 1989 年曾经有一个关于数学教学改革的谈话,提出“理工科大学的数学课是不是要改造一番,以应付现在的实际”,“今天的实际要求学生学会两条:一是要会用电子计算机,二是能理解电子计算机给出的答案”.当时一些重点高校也曾经组织了一些人力来研究如何实现钱学森同志所提出的这种数学教学改革,进行了一些尝试,但始终难以迈出较大的步子.同年,北京的 3 所大学组队参加美国的 MCM 竞赛,那时看起来,这好像是一项非常具体的活动.尽管是有益的活动,但也看不出与钱学森同志所说的数学教学改革这样的大事有更多密切的关系.可是,仅仅过了几年,我国开展数学建模竞赛的势头发展得迅猛异常.将数学建模竞赛的宗旨和它实际产生的教学效果与钱学森同志所提出的数学教学改革的方向加以对照,就不难看出两者惊人的一致.“应付现在的实际”,这正是数学建模竞赛的宗旨和特点.竞赛的过程毫无疑问会大大提高学生使用计算机的能力.至于“理解电子计算机给出的答案”,那就更是数学建模竞赛十分强调

的对模型的讨论和检验这一步骤的要求了.由此看来,至少可以说,开展数学建模竞赛,是进行数学教学改革的很有希望的探索和一种好的形式.竞赛活动中逐步积累的经验和材料,有可能对课堂教学改革和教材改革提供有益的启发.还可以设法沟通与实际部门的联系,让参赛队变成真正的课题组,从解答模拟的实际问题(即竞赛题)到解决实际部门提出的问题,直接产生经济效益和社会效益.如能实现这一转变,将把数学建模竞赛推向一个新的高度和水平.

经过酝酿、筹备和在一些城市试办,从 1992 年开始由中国工业与应用数学学会举办我国自己的全国大学生数学建模竞赛.当年有 74 所大学的 314 个队参加.国家教委对这项活动十分重视,决定从 1994 年起由国家教委高教司和中国工业与应用数学学会共同举办,每年一次.我国自己的 MCM 虽然举办的时间还不长,但发展非常迅速.在 1995 年的竞赛中,全国就共有 259 所高校、1234 个队、3702 名学生参加.2000 年的参赛学校达 517 所,参赛队数达 3210 个.可以预料,MCM 在我国将得到更加蓬勃、健康的发展.目前这项活动已成为全国高等学校中规模最大的课外科技活动.

数学建模竞赛的特点是:题目由工程技术、管理科学中的实际问题简化加工而成,对数学知识要求并不是十分深奥,一般没有事先设定的标准答案,为参赛者发挥其聪明才智和创造精神留有充分余地.由于竞赛是由 3 名大学生组成一队,在 3 天时间内分工合作,共同完成一篇论文,因而也培养了学生的合作精神.加之竞赛评奖以假设的合理性、建模的创造性、结果的正确性和文字表述的清晰程度为主要标准,因此,这项活动的开展有利于学生知识、能力和素质的全面提高,既丰富、活跃了广大同学的课外科技活动,也为优秀学生脱颖而出创造了很好的条件.

附录2 大学生数学建模竞赛的统筹安排

一、“大学生数学建模竞赛”的时间安排

附表1是数学建模3天竞赛的具体时间安排。

附表1

时 间		备 注
竞赛前一天		做好竞赛前的准备工作:选择少受外界干扰的竞赛地点;保证计算机联网、打印机能正常运行;安装好有关的使用软件(比如数学软件包);注意身体,保持最好的竞技状态;等等
第一天	7:30	上网,打开网站(http://www.csiam.edu.cn/mcm),按时打开试题。因为是网上公布试题,故需提前上网,找到相应的网站,准备下载打印试题
	8:00~10:00	熟悉题目:队员各自认真阅读题目,分析问题,阐明建模的依据,找出第一感觉比较好、比较熟悉、比较有把握的题目,将你的各要点记录下来 选题:从两道试题中选做一道。这时,队员间会有不同意见,甚至发生争吵。谨记:绝不能各做各的,必须当机立断!争取时间;必须要有人作出让步,牺牲自己的选择,统一意见,全身心投入选定的题目
	10:00~12:00	不要急于做题,应先到图书馆或上网收集材料,准备材料,查找资料,翻阅资料,寻找有用的、相似的、有帮助的有关内容,准备好建模的充足辅助粮草
	12:00~14:30	午餐、午休。可能这时你无法入眠,但是躺一会儿,可能有意想不到的收获呢?比如灵感的出现
	14:30~17:30	主模型的构思:队员发表各自的意见,进行讨论、分析,确定建模的方向,采用适当的数学方法进行模型假设,需要什么样的合理假设?统一数学符号,统一思路,勾画出主模型的骨架
	17:30~19:00	按时晚饭,饭后一起散步,有说有笑,谈天说地,放松放松
	19:00~22:00	计算、推导、改错、再计算,得到简单的结果

续附表 1

时 间		备 注
第二天	8:00~12:00	主模型的初稿,即主模型的建立
	12:00~14:30	午餐、午休
	14:30~17:30	模型的分析与求解、计算结果的分析
	17:30~19:00	晚饭
	19:00~22:30	讨论全文的结构、安排进度、完成初稿(问题的重述、问题的分析、模型的假设、符号的定义、模型的建立与求解、模型的分析与评价等)
第三天	8:00~10:00	写摘要(解决什么样的问题? 怎样解决? 结果如何?)
	10:00~12:00	完成论文的初稿(摘要、问题的重述、问题的分析、模型的假设、符号的定义、模型的建立与求解、模型的检验、分析与评价等)
	12:00~14:30	午餐、午休
	14:30~17:30	打印全文(一定要按要求用 A4 纸的格式单面打印), 3 人共同欣赏、评价
	17:30~19:30	晚饭
	19:30~22:00	统稿, 不要忘记各种图、表格、附录等
	22:00~06:00	准备通宵达旦吧! 一遍又一遍的修改打印不会令你们百分百满意

二、“大学生数学建模竞赛”的论文写作

“大学生数学建模竞赛”的论文的写作是直接关系到参赛队伍成绩的一个重要环节. 即使不谈名誉, 一个人如果无法将自己的想法向别人表达清楚, 多么好的想法也是徒劳! 因为无法推广, 无法将其转为生产力. 所以参加竞赛的学生的语言能力和表达能力显得很重要. 在写论文的时候, 要注意语言的逻辑性和准确性、语言

的简洁性和针对性、语言的生动性和形象性。

通常情况下,数学建模优秀论文的写作,应包括以下几方面:

1. 摘要

这是论文最关键的部分,应该将论文创新的、最独特的、最精彩的、最大的优点在此用扼要简明的语言表达出来,要反映出整个论文的主要思想、特点、方法以及主要结果,让阅卷专家易明白、易接受,最好有新意吸引他们的注意力。摘要不宜过长,一般以 300 ~ 400 字较佳,应讲清楚以下几个方面的问题:

①本论文要解决什么问题?

②建立什么样的数学模型?

③针对题目的要求,你是如何解决的?(可列表)

④计算、分析、检验的结果如何?(要有具体数据)

2. 问题的重述

这是对原题目(实际问题)进行分析、研究,找出所有相关的因素(定量的或定性的),分清主次,丢弃一些与问题关系不太大的次要因素,分清哪些是输入变量,哪些是输出变量,如有可能还可以找出各因素间的一些简单关系式。然后,用数学语言将实际问题转化为数学问题表达出来。重述时要解释问题的背景,建模的目的、目标要明确。要记住你的目标与所得的结论要相适应。

3. 问题的分析

这里对原命题的主要方面、复杂方面进行分析,抓住要点,选取主因素计入模型。讲明解决问题的思路,阐明建模的依据,讲清楚所采取的方法、算法及其合理性。

4. 模型的假设

假设的目的在于选出主要因素,忽略非本质的因素,抓住问题的本质,使实际问题简化以便进行数学描述。假设一定要合理,不要为了使问题简单扼要、模型形式上简单明了而脱离实际。另一方面,要考虑假设对所研究对象进行近似,使之满足建模所用数学方

法必需的前提条件,为建模的合理性提供依据.假设必须细致、清楚、合理.一个模型通常采用3~5条假设.

5. 符号定义及说明

将建模过程中用到的符号给出定义或说明,以方便阅读及查阅.尽可能使用数学上对应的常用符号,符号不宜过多、过繁.

6. 模型的建立与求解

这是论文的主体部分,应占最大篇幅.首先要分析问题,不同性质的问题需要采用不同的数学方法加以解决,建立什么样的模型是由问题的本质决定的.同时阐明建模的依据,采用适当的数学方法进行模型设计,如优化模型、微分方程模型、统计分析模型等.用恰当的数学方法对实际问题进行抽象化描述后,可以编写计算机程序或运用各种软件包对模型进行求解,将采用的算法和计算的结果写清楚.

7. 模型结果的分析

模型的结果是否具有实际意义或满足实际要求,有待于细致的分析,可以采用仿真、模拟和统计等进行分析是否与现实相符.

8. 模型的检验

完成模型的设计及求解之后,需要对模型的各种性能作出评价,也就是对模型进行检验.一般有下面几种检验法.

①稳定性和敏感度的分析.稳定性是指数学模型的结果对模型所依赖的数据是否具有较好的稳定性,这是模型广泛适用性的保证;敏感性是指各种参数(即与研究对象有关的因素)对数学模型结果影响的显著程度.

②统计检验和误差分析.统计检验是指对残差(模型的计算结果与实验数据的偏差)的分布作统计分析.若残差服从正态分布 $N(0, r)$,其中方差 r 很小,即表示模型与实际相一致.误差分析是指由于仪器或人为的因素而产生的误差使模型的结果有一定的不准确度,需要对结果的误差范围进行估计.

③新旧模型的对比.数学建模即根据对实际问题的分析,提出新的模型或在原有一般模型的基础上加以改进.将新建的模型与原来的模型进行比较,判断新模型是否具有更大的合理性和优越性.

9. 模型的改进、推广及优缺点分析

因为建立起来的模型是考虑主要因素,忽略次要因素.当把你认为的某些次要因素或者某些偶然因素也考虑进去加以改进模型,可能会更符合实际.模型的推广是针对模型的适用性而言的.一方面模型不应该对题中所给的数据结构有过多的依赖性,应是对问题本质的描述;另一方面是扩大模型的广泛适用性.模型优缺点分析是对所建立模型特性和本质的更深刻的认识.可以从模型的精确性、实用性及对各种实际因素的考虑等方面进行评价.

10. 参考文献

将参考的主要文献摘录下来.

11. 附录

可以放一些正文中要用到的细节,包括程序、雷同的内容、冗长重复的推理、各种图表以及另外一些值得说明的问题等.

参 考 文 献

- 1 姜启源. 数学模型(第二版). 北京:高等教育出版社,1993
- 2 叶其孝等. 大学生数学建模竞赛辅导教材. 长沙:湖南教育出版社,1993
- 3 杨启帆,边馥萍. 数学模型. 杭州:浙江大学出版社,1990
- 4 唐焕文等. 数学模型引论. 大连:大连理工大学出版社,1991
- 5 李云. 应用数学模型. 武汉:华中理工大学出版社,1993
- 6 蔡常丰. 数学模型建模分析. 北京:科学出版社,1995
- 7 陈义华. 数学模型. 北京:重庆大学出版社,1995
- 8 李尚志,王树禾等. 数学建模竞赛教程. 南京:江苏教育出版社,1996
- 9 《运筹学》教材编写组. 运筹学(修订版). 北京:清华大学出版社,1990
- 10 金治明. 最优化理论及其应用. 长沙:国防科技大学出版社,1995
- 11 官建成. 随机服务过程及其在管理中的应用. 北京:北京航空航天大学出版社,1994
- 12 李岳生. 样条与插值. 上海:上海科学技术出版社,1983
- 13 谭永基,俞文紫. 数学模型. 上海:复旦大学出版社,1997
- 14 陈理荣. 数学建模导论. 北京:北京邮电大学出版社,1998
- 15 雷功炎. 数学模型讲义. 北京:北京大学出版社,2000