Matlab微分方程

求微分方程（组）的解析解命令

- dsolve(‘方程1’ ， ‘方程2’ ，… ‘方程n’ ， ‘初始条件’ ， ‘自变量’)
- 记号: 在表达微分方程时，用字母D表示求微分，D2、D3等表示求高阶微分.任何D后所跟的字母为因变量，自变量可以指定或由系统规则选定为确省.
- 例如，微分方程 $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$
- 应表达为：D2y=0
- 例1 求 $\frac{du}{dt} = 1 + u^2$ 的通解.
- dsolve('Du=1+u^2','t')

Matlab 微分方程的解析解

- 例2 求微分方程的特解.

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 29y = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 15 \end{cases}$$

- y=dsolve('D2y+4*Dy+29*y=0','y(0)=0,Dy(0)=15','x')
- 求微分方程组的通解.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x - 3y + 3z \\ \frac{dy}{dt} &= 4x - 5y + 3z \\ \frac{dz}{dt} &= 4x - 4y + 2z \end{aligned}$$

- 输入命令: [x,y,z]=dsolve('Dx=2*x-3*y+3*z','Dy=4*x-5*y+3*z','Dz=4*x-4*y+2*z',
't');
x=simple(x); y=simple(y); z=simple(z);

常微分方程数值解的定义

- 在生产和科研中所处理的微分方程往往很复杂且大多得不出一般解。而在实际上对初值问题，一般是要求得到解在若干个点上满足规定精确度的近似值，或者得到一个满足精确度要求的便于计算的表达式。
- 因此，研究常微分方程的数值解法是十分必要的
- 对常微分方程：$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 其数值解是指有初始点x0开始的若干离散的x值处，及对x0¡x1¡x2¡...¡xn,求出其精确值y(x1),y(x2),...,y(xn)的相应近似值y1,y2,...,yn.

建立数值解法的一些途径

设xi之间的距离等距为h,可以用一下离散化方法求解方程:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

- 用差商代替导数
- 若步长h较小，则有

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

- 故有公式:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \\ y_0 = y(x_0) \end{cases} \quad i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$$

建立数值解法的一些途径

- 使用数值积分。对方程y' =f(x,y), 两边由xi到xi+1积分，并利用梯形公式，有:
- $$y(x_{i+1})-y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t, y(t))dt \approx \frac{x_{i+1}-x_i}{2}[f(x_i, y(x_i))+f(x_{i+1},$$
- 故有公式:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})] \\ y_0 = y(x_0) \end{cases}$$

- 使用泰勒公式。以此方法为基础，有龙格-库塔法、线性多步法等方法。

Matlab 微分方程的数值解

t，x =solver（’ f’ ,ts,x0,options）

- t自变量值,x函数值
- solver:ode45 ode23 ode113 ode15s ode23s
- 由待解方程写成的m-文件名
- ts=[t0，tf]，t0、tf为自变量的初值和终值
- x0 函数的初值
- options用于设定误差限

注意事项

- 在解n个未知函数的方程组时，x0和x均为n维向量，m-文件中的待解方程组应以x的分量形式写成.
- 使用Matlab软件求数值解时，高阶微分方程必须等价地变换成一阶微分方程组.

数值解例子

- 例4

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} - 1000(1 - x^2)\frac{dx}{dt} - x = 0 \\ x(0) = 2; x'(0) = 0 \end{cases}$$

- 令y1=x，y2=y1’，则微分方程变为一阶微分方程组:
-

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = 1000(1 - y_1^2)y_2 - y_1 \\ y_1(0) = 2, y_2(0) = 0 \end{cases}$$

数值解例子

- 建立m-文件vdp1000.m如下： function dy=vdp1000(t,y) dy=zeros(2,1); dy(1)=y(2); dy(2)=1000*(1-y(1)^2)*y(2)-y(1);
- 取t0=0， tf=3000， 输入命令： [T,Y]=ode15s('vdp1000',[0 3000],[2 0]); plot(T,Y(:,1),'-')