回顾 2　函数的图象与性质

[必记知识]

1 函数的奇偶性、周期性

(1)奇偶性是函数在其定义域上的整体性质，对于定义域内的任意 x(定义域关于原点对称)，都有 $f(-x)=-f(x)$成立，则 $f(x)$为奇函数(都有 $f(-x)=f(x)=f(|x|)$成立，则 $f(x)$为偶函数).

(2)周期性是函数在其定义域上的整体性质，一般地，对于函数 $f(x)$，如果对于定义域内的任意一个 x 的值：

若 $f(x+T)=f(x)(T\neq 0)$，则 $f(x)$是周期函数，T 是它的一个周期.

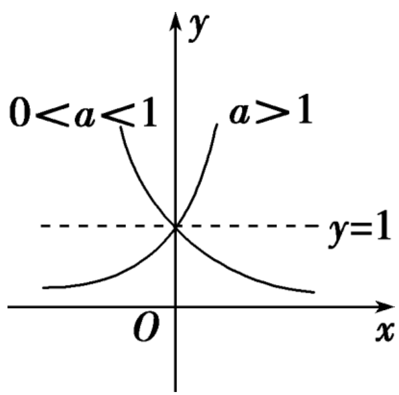
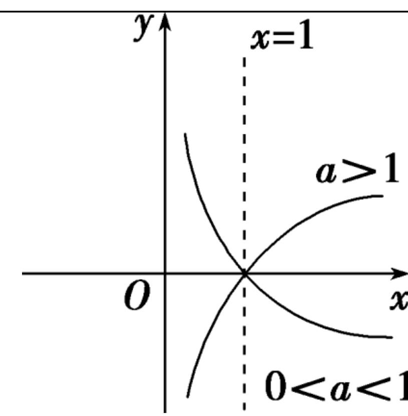
栏目导引

2 指数与对数式的运算公式

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$；$(a^m)^n = a^{mn}$；$(ab)^m = a^m b^m(a，b>0)$.

$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$；$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$；$\log_a M^n = n\log_a M$；$a^{\log_a N} = N$；$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$($a>0$ 且 $a \neq 1$，$b>0$ 且 $b \neq 1$，$M>0$，$N>0$).

3 指数函数与对数函数的对比区分表

解析式	$y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$	$y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$
图象		
定义域	R	(0，＋∞)

解析式	$y=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$	$y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq 1)$
值域	$(0，+\infty)$	R
单调性	$0<a<1$ 时，在 R 上是减函数； $a>1$ 时，在 R 上是增函数	$0<a<1$ 时，在$(0，+\infty)$上是减函数； $a>1$ 时，在$(0，+\infty)$上是增函数

4 方程的根与函数的零点

(1)方程的根与函数零点的关系

由函数零点的定义，可知函数 $y=f(x)$的零点就是方程 $f(x)=0$的实数根，也就是函数 $y=f(x)$的图象与 x 轴的交点的横坐标.所以，方程 $f(x)=0$ 有实数根⇔函数 $y=f(x)$的图象与 x 轴有交点⇔函数 $y=f(x)$有零点.

(2)函数零点的存在性

如果函数 $y=f(x)$在区间$[a,b]$上的图象是连续不断的一条曲线，并且 $f(a)\ f(b)<0$，那么函数 $f(x)$在区间(a,b)内至少有一个零点，即存在 $c\in(a,\ b)$，使得 $f(c)=0$，这个 c 也就是方程 $f(x)=0$ 的实数根.

[必会结论]

1 函数单调性和奇偶性的重要结论

(1)当 $f(x)$，$g(x)$同为增(减)函数时，$f(x)+g(x)$则为增(减)函数.

(2)奇函数在对称的两个区间上有相同的单调性，偶函数在对称的两个区间上有相反的单调性.

(3)$f(x)$为奇函数⇔$f(x)$的图象关于原点对称；$f(x)$为偶函数⇔$f(x)$的图象关于 y 轴对称.

(4)偶函数的和、差、积、商是偶函数，奇函数的和、差是奇函数，积、商是偶函数，奇函数与偶函数的积、商是奇函数.

(5)定义在$(-\infty，+\infty)$上的奇函数的图象必过原点即有 $f(0)=0$. 存在既是奇函数，又是偶函数的函数 $f(x)=0$.

(6)$f(x)+f(-x)=0\Leftrightarrow f(x)$为奇函数；

$f(x)-f(-x)=0\Leftrightarrow f(x)$为偶函数.

2 函数的周期性的重要结论

周期函数 $y=f(x)$满足：

(1)若 $f(x+a)=f(x-a)$，则函数的周期为 $2a$.

(2)若 $f(x+a)=-f(x)$，则函数的周期为 $2a$.

(3)若 $f(x+a)=-\dfrac{1}{f(x)}$，则函数的周期为 $2a$.

(4)若函数 $f(x)$是偶函数，其图象关于直线 $x=a$ 对称，则其周期为 $2a$.

(5)若函数 $f(x)$是奇函数，其图象关于直线 $x=a$ 对称，则其周期为 $4a$.

3 函数图象对称变换的相关结论

(1)$y=f(x)$的图象关于 y 轴对称的图象是函数 $y=f(-x)$的图象.

(2)$y=f(x)$的图象关于 x 轴对称的图象是函数 $y=-f(x)$的图象.

(3)$y=f(x)$的图象关于原点对称的图象是函数 $y=-f(-x)$的图象

(4)$y=f(x)$的图象关于直线 $y=x$ 对称的图象是函数 $y=f^{-1}(x)$的图象.

(5)$y=f(x)$的图象关于直线 $x=m$ 对称的图象是函数 $y=f(2m-x)$的图象.

(6)$y=f(x)$的图象关于直线 $y=n$ 对称的图象是函数 $y=2n-f(x)$的图象.

4 函数图象平移变换的相关结论

(1)把 $y=f(x)$的图象沿 x 轴向左或向右平移$|c|$个单位长度($c>0$ 时向左平移，$c<0$ 时向右平移)得到函数 $y=f(x+c)$的图象(c 为常数)

(2)把 $y=f(x)$的图象沿 y 轴向上或向下平移$|b|$个单位长度($b>0$ 时向上平移，$b<0$ 时向下平移)得到函数 $y=f(x)+b$ 的图象(b 为常数).

5 函数图象伸缩变换的相关结论

(1)把 $y=f(x)$的图象上各点的纵坐标伸长($a>1$)或缩短($0<a<1$)到原来的 a 倍，而横坐标不变，得到函数 $y=af(x)(a>0)$的图象．

(2)把 $y=f(x)$的图象上各点的横坐标伸长($0<b<1$)或缩短($b>1$)到原来的$\frac{1}{b}$倍，而纵坐标不变，得到函数 $y=f(bx)(b>0)$的图象．

6 常见抽象函数的性质与对应的特殊函数模型的对照表

抽象函数的性质	特殊函数模型
①$f(x+y)=f(x)+f(y)(x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R})$； ②$f(x-y)=f(x)-f(y)(x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R})$	正比例函数 $f(x)=kx(k\neq 0)$
①$f(x)f(y)=f(x+y)(x, y\in\mathbf{R})$； ②$\frac{f(x)}{f(y)}=f(x-y)(x, y\in\mathbf{R}, f(y)\neq 0)$	指数函数 $f(x)=a^x(a>0, a\neq 1)$

抽象函数的性质	特殊函数模型
①$f(xy)=f(x)+f(y)(x>0，y>0)$； ②$f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)(x>0，y>0)$	对数函数 $f(x)=\log_a x$ $(a>0，a\neq 1)$
①$f(xy)=f(x)f(y)(x，y\in \mathbf{R})$； ②$f(\frac{x}{y})=\frac{f(x)}{f(y)}(x，y\in \mathbf{R}，y\neq 0)$	幂函数 $f(x)=x^n$