回顾 4　平面向量

[必记知识]

1 平面向量共线的坐标表示的两种形式

(1)若 $\boldsymbol{a}=(x_1,\ y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,\ y_2)$，则 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1y_2=x_2y_1$，此形式对任意向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$都适用．

(2)若 $\boldsymbol{a}=(x_1,\ y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,\ y_2)$，且 $x_2y_2\neq 0$，则 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$．需要注意的是可以利用$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$来判定 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，但是反过来不一定成立．

2 向量法证明三点共线

(1)对于$\overrightarrow{OA}=\lambda\ \overrightarrow{OB}+\mu\ \overrightarrow{OC}$($\lambda$, μ为实数)，若A，B，C三点共线，则$\lambda+\mu=1$，反之，也成立.

(2)若$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$三点共线，则$(x_2-x_1)(y_3-y_2)=(x_3-x_2)(y_2-y_1)$或$(x_2-x_1)(y_3-y_1)=(x_3-x_1)(y_2-y_1)$或$(x_3-x_1)(y_3-y_2)=(x_3-x_2)(y_3-y_1)$．同样地，当这些条件中有一个成立时，$A$，$B$，$C$三点共线.

3 平面向量的数量积

已知非零向量 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2, y_2)$，$\theta$ 为向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角.

结论	几何表示	坐标表示
模	$\lvert\boldsymbol{a}\rvert=\sqrt{\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{a}}$	$\lvert\boldsymbol{a}\rvert=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$
数量积	$\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}=\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert\cos\theta$	$\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$
夹角	$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert}$	$\cos\theta=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$

栏目导引

结论	几何表示	坐标表示
$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充要条件	$\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}=0$	$x_1x_2+y_1y_2=0$
$\lvert\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\rvert$与$\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert$的关系	$\lvert\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\rvert\leqslant\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert$(当且仅当$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$时等号成立)	$\lvert x_1x_2+y_1y_2\rvert\leqslant\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}$

4 两向量的夹角与数量积

设两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则

当 $\theta=0$ 时，$\cos\theta=1$，$\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$；

当 θ 为锐角时，$\cos\theta>0$，$\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}>0$；

当 θ 为直角时，$\cos\theta=0$，$\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}=0$；

当 θ 为钝角时，$\cos\theta<0$，$\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}<0$；

当 $\theta=180$ 时，$\cos\theta=-1$，$\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.

[必会结论]

1 三点共线的判定

A，B，C 三点共线$\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$共线；

向量$\overrightarrow{PA}$，$\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{PC}$中三终点 A，B，C 共线$\Leftrightarrow$存在实数 α，β 使得$\overrightarrow{PA}=\alpha\overrightarrow{PB}+\beta\overrightarrow{PC}$，且 $\alpha+\beta=1$.

2 三角形“四心”向量形式的充要条件

设 O 为△ABC 所在平面上一点，角 A，B，C 所对的边长分别为 a，b，c，则

(1)O 为△ABC 的外心⇔$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=\dfrac{a}{2\sin A}$.

(2)O 为△ABC 的重心⇔$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$.

(3)O 为△ABC 的垂心⇔$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$.

(4)O 为△ABC 的内心⇔$a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$.

(4) O 为△ABC 的内心⇔$a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$.

证明：∵ $a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

$\therefore a\overrightarrow{OA}+b(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+c(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC})=\vec{0}$

即$(a+b+c)\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

$$\therefore \overrightarrow{AO}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{bc}{a+b+c}\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$$

$\because \dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|},\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$为$AB$，$AC$边上的单位向量，

$\therefore AO$平分角A

同理可证：BO平分角B，CO平分角C

综上，O为ΔABC的内心。

栏目导引