回顾 5　数　列

[必记知识]

1 等差数列、等比数列

	等差数列	等比数列
通项公式	$a_n=a_1+(n-1)d$	$a_n=a_1q^{n-1}(q\neq 0)$
前 n 项和	$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$ $=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$	(1)$q\neq 1$，$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}$； (2)$q=1$，$S_n=na_1$

栏目导引

2 等差、等比数列的判断方法

(1)等差数列的判断方法

①定义法：$a_{n+1}-a_n=d$(d为常数，$n\in\mathbf{N}^*$)$\Leftrightarrow\{a_n\}$是等差数列.

②通项公式法：$a_n=a_1+(n-1)d$(其中a_1，d为常数，$n\in\mathbf{N}^*$)$\Leftrightarrow\{a_n\}$为等差数列.

③等差中项法：$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$($n\in\mathbf{N}^*$)$\Leftrightarrow\{a_n\}$是等差数列.

④前n项和公式法：$S_n=An^2+Bn$(A，B为常数，$n\in\mathbf{N}^*$)$\Leftrightarrow\{a_n\}$是等差数列.

(2)等比数列的判断方法

①定义法：$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$(q 为常数且 $q\neq 0$，$n\in \mathbf{N}^*$)或$\frac{a_n}{a_{n-1}}=q$(q 为常数且 $q\neq 0$，$n\geq 2$)$\Leftrightarrow\{a_n\}$为等比数列.

②等比中项法：$a_{n+1}^2=a_n\cdot a_{n+2}$($a_n\neq 0$，$n\in \mathbf{N}^*$)$\Leftrightarrow\{a_n\}$为等比数列.

③通项公式法：$a_n=a_1q^{n-1}$(其中 a_1，q 为非零常数，$n\in \mathbf{N}^*$)$\Leftrightarrow\{a_n\}$为等比数列.

[必会结论]

1 等差数列的重要结论

设 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，则

(1)$a_n=a_1+(n-1)d=a_m+(n-m)d$，$p+q=m+n\Rightarrow a_p+a_q=a_m+a_n$.

(2)$a_p=q$，$a_q=p(p\neq q)\Rightarrow a_{p+q}=0$；$S_{m+n}=S_m+S_n+mnd$.

(3)S_k，$S_{2k}-S_k$，$S_{3k}-S_{2k}$，…，构成的数列是等差数列.

(4)$\frac{S_n}{n}=\frac{d}{2}n+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)$是关于 n 的一次函数或常函数，数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$也是等差数列.

(5)$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(a_2+a_{n-1})}{2}=\frac{n(a_3+a_{n-2})}{2}=\cdots$.

(6)若等差数列$\{a_n\}$的项数为偶数 $2m$，公差为 d，所有奇数项之和为 $S_{奇}$，所有偶数项之和为 $S_{偶}$，则所有项之和 $S_{2m}=m(a_m+a_{m+1})$，$S_{偶}-S_{奇}=md$，$\frac{S_{偶}}{S_{奇}}=\frac{a_{m+1}}{a_m}$.

(7)若等差数列$\{a_n\}$的项数为奇数 $2m-1$，所有奇数项之和为 $S_{奇}$，所有偶数项之和为 $S_{偶}$，则所有项之和 $S_{2m-1}=(2m-1)a_m$，$S_{奇}-S_{偶}=a_m$，$\frac{S_{奇}}{S_{偶}}=\frac{m}{m-1}$.

2 等比数列的重要结论

(1)$a_n=a_m\cdot q^{n-m}$，$a_{n+m}=a_nq^m=a_mq^n(m，n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)若 $m+n=p+q$，则 $a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$；反之，不一定成立$(m，n，p，q\in\mathbf{N}^*)$.

(3)$a_1a_2a_3\cdots a_m$，$a_{m+1}a_{m+2}\cdots a_{2m}$，$a_{2m+1}a_{2m+2}\cdots a_{3m}$，…，成等比数列$(m\in\mathbf{N}^*)$.

(4)S_n, $S_{2n}-S_n$, $S_{3n}-S_{2n}$, $\cdots$, $S_{kn}-S_{(k-1)n}$, $\cdots$, 成等比数列($n\geqslant 2$, 且 $n\in \mathbf{N}^*$，$k\geqslant 2$，$k\in \mathbf{N}^*$，$q\neq -1$).

(5)若等比数列的项数为 $2n(n\in \mathbf{N}^*)$，公比为 q，奇数项之和为 $S_{奇}$，偶数项之和为 $S_{偶}$，则$\dfrac{S_{偶}}{S_{奇}}=q$.

(6)$\{a_n\}$，$\{b_n\}$成等比数列，则$\{\lambda a_n\}$，$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$，$\{a_nb_n\}$，$\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$成等比数列($\lambda\neq 0$，$n\in \mathbf{N}^*$).

栏目导引

(7)通项公式 $a_n=a_1q^{n-1}=\frac{a_1}{q}\cdot q^n$，从函数的角度来看，它可以看作是一个常数与一个关于 n 的指数函数的积，其图象是指数函数图象上一群孤立的点.

(8)与等差中项不同，只有同号的两个数才能有等比中项；两个同号的数的等比中项有两个，它们互为相反数.