回顾 6　不等式

[必记知识]

1 不等式的性质

(1)$a>b$，$b>c\Rightarrow a>c$.

(2)$a>b$，$c>0\Rightarrow ac>bc$；$a>b$，$c<0\Rightarrow ac<bc$.

(3)$a>b\Rightarrow a+c>b+c$.

(4)$a>b$，$c>d\Rightarrow a+c>b+d$.

(5)$a>b>0$，$c>d>0\Rightarrow ac>bd$.

(6)$a>b>0$，$n\in\mathbf{N}$，$n>1\Rightarrow a^n>b^n$，$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

2 简单分式不等式的解法

(1)$\frac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow f(x)g(x)>0$，$\frac{f(x)}{g(x)}<0\Leftrightarrow f(x)g(x)<0$.

(2)$\frac{f(x)}{g(x)}\geqslant 0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)g(x)\geqslant 0,\\g(x)\neq 0,\end{cases}$ $\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant 0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)g(x)\leqslant 0,\\g(x)\neq 0.\end{cases}$

(3)对于形如$\frac{f(x)}{g(x)}>a(\geqslant a)$的分式不等式要采取：移项 通分 化乘积的方法转化为(1)或(2)的形式求解.

栏目导引

[必会结论]

1 一元二次不等式的恒成立问题

(1) $ax^2+bx+c>0(a\neq 0)$ 恒成立的条件是 $\begin{cases} a>0, \\ \Delta<0. \end{cases}$

(2) $ax^2+bx+c<0(a\neq 0)$ 恒成立的条件是 $\begin{cases} a<0, \\ \Delta<0. \end{cases}$

2 基本不等式的变形

(1)根式形式：$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}(a>0,\ b>0)$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立.

(2)整式形式：$ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2(a,\ b\in\mathbf{R})$，$a^2+b^2\geqslant 2ab(a,\ b\in\mathbf{R})$，$(a+b)^2\geqslant 4ab(a,\ b\in\mathbf{R})$，$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}(a,\ b\in\mathbf{R})$，以上不等式当且仅当 $a=b$ 时，等号成立.

栏目导引

(3)分式形式：$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2(ab>0)$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立.

(4)倒数形式：$a+\frac{1}{a}\geqslant 2(a>0)$，当且仅当 $a=1$ 时，等号成立；

$a+\frac{1}{a}\leqslant -2(a<0)$，当且仅当 $a=-1$ 时，等号成立.