回顾 3　三角函数与解三角形

[必记知识]

1 同角三角函数的基本关系

(1)平方关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

(2)商的关系：$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\left(\alpha\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right)$.

2 三角函数的诱导公式

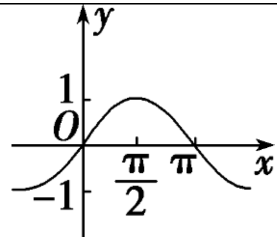
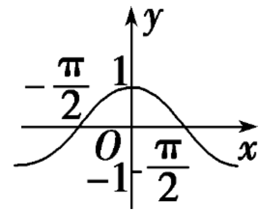
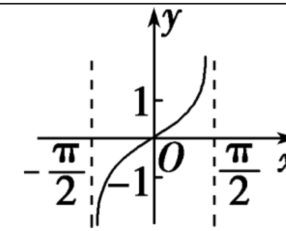
公式	一	二	三	四	五	六
角	$2k\pi+\alpha(k\in Z)$	$\pi+\alpha$	$-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$
正弦	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
余弦	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
正切	$\tan\alpha$	$\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\tan\alpha$		
口诀	函数名不变，符号看象限				函数名改变，符号看象限	

栏目导引

[提醒]　奇变偶不变，符号看象限

“奇、偶”指的是$\frac{\pi}{2}$的倍数是奇数，还是偶数，“变与不变”指的是三角函数名称的变化，“变”是指正弦变余弦(或余弦变正弦).“符号看象限”的含义是:把角 α 看作锐角，看 $n\frac{\pi}{2}\pm\alpha(n\in\mathbf{Z})$ 是第几象限角，从而得到等式右边是正号还是负号.

3 三种三角函数的性质

函数	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$
图象			
单调性	在$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$上单调递增；在$\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$上单调递减	在$[-\pi+2k\pi,2k\pi](k\in\mathbf{Z})$上单调递增；在$[2k\pi,\pi+2k\pi](k\in\mathbf{Z})$上单调递减	在$\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$上单调递增

栏目导引

对称性	对称中心：$(k\pi，0)(k\in Z)$；对称轴：$x=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in Z)$	对称中心：$\left(\frac{\pi}{2}+k\pi，0\right)(k\in Z)$；对称轴：$x=k\pi(k\in Z)$	对称中心：$\left(\frac{k\pi}{2}，0\right)(k\in Z)$

4 三角函数的两种常见变换

(1) $y=\sin x \xrightarrow[\text{平移}|\varphi|\text{个单位}]{\text{向左}(\varphi>0)\text{或向右}(\varphi<0)} y=\sin(x+\varphi)$

$\xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{横坐标变为原来的}\frac{1}{\omega}\text{倍}} y=\sin(\omega x+\varphi)$

$\xrightarrow[\text{横坐标不变}]{\text{纵坐标变为原来的}A\text{倍}} y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0，\omega>0)$.

$$(2)\,y=\sin x \xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{横坐标变为原来的}\frac{1}{\omega}\text{倍}} y=\sin \omega x$$

$$\xrightarrow[\text{平移}\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|\text{个单位}]{\text{向左}(\varphi>0)\text{或向右}(\varphi<0)} y=\sin(\omega x+\varphi)$$

$$\xrightarrow[\text{横坐标不变}]{\text{纵坐标变为原来的}A\text{倍}} y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\ \omega>0).$$

栏目导引

5 三角恒等变换的主要公式

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$；

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$；

$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$；

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$；$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$；$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

6 正弦定理与余弦定理

(1)正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

①$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$.

②$\sin A=\dfrac{a}{2R}$，$\sin B=\dfrac{b}{2R}$，$\sin C=\dfrac{c}{2R}$.

③$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$.

注：R 是三角形外接圆的半径.

栏目导引

(2)余弦定理

①$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

②$b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$，$a^2+c^2-b^2=2ac\cos B$，

$a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$.

[必会结论]

1 三角恒等变换的常用技巧

(1)常值代换：①“1”的代换，如 $1=\sin^2\theta+\cos^2\theta$，

$1=2\sin\frac{\pi}{6}=2\cos\frac{\pi}{3}=\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}$，$1=\tan\frac{\pi}{4}$.②特殊三角函数值的代换.

(2)角的变换：涉及角与角之间的和、差、倍、互补、互余等关系时，常见的拆角、凑角技巧有 $2\alpha=(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)$，

$\alpha=(\alpha+\beta)-\beta=(\alpha-\beta)+\beta$，$\beta=\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}=(\alpha+2\beta)-(\alpha+\beta)$，

$\frac{\pi}{4}+\alpha=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$等.

栏目导引

2 三角形中的常见结论

(1)有关角的结论

$A+B+C=\pi$, $A+C=2B\Rightarrow B=\frac{\pi}{3}$; $A=\pi-(B+C)\Rightarrow\frac{A}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{B+C}{2}$,

$\sin A=\sin(B+C)$，$\cos A=-\cos(B+C)$，$\sin\frac{A}{2}=\cos\frac{B+C}{2}$,

$\cos\frac{A}{2}=\sin\frac{B+C}{2}$.

(2)有关边的结论

在等腰三角形(腰为 a，底边为 c)中，若顶角为$\frac{\pi}{3}$，则 $a:c=1:1$；

若顶角为$\frac{\pi}{2}$，则 $a:c=1:\sqrt{2}$；若顶角为$\frac{2\pi}{3}$，则 $a:c=1:\sqrt{3}$.

(3)有关边角关系的结论

$b^2+c^2-a^2=bc\Rightarrow A=\frac{\pi}{3}$；$b^2+c^2-a^2=\sqrt{3}bc\Rightarrow A=\frac{\pi}{6}$；

$b^2+c^2+bc=a^2\Rightarrow A=\frac{2\pi}{3}$；$b^2+c^2+\sqrt{2}bc=a^2\Rightarrow A=\frac{3\pi}{4}$.

栏目导引